312.046

Matematikai Lapok

18
1967

Bolyai János
Matematikai
Társulat
Budapest

18. évfolyam, 1967

1-2

2

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenként négyszer.
Budapest, 1967. augusztus. 18. évfolyam 1—2. szám.
Felelős szerkesztő: Turán Pál.
Szerkesztők: Hajós György, Kalmár László, Rapcsák András, Rényi Alfréd.
Szerkesztőség: Budapest V., Szabadság tér 17. Telefon: 311—793.
Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest V., Alkotmány utca 21. III.
Telefon: 111—010.
A kiadvány előfizethető a POSTA KÖZPONTI HIRLAPIRODÁNÁL, Budapest V., József nádor tér 1. és bármely postahivatalban. Csekkszámlaszám egyéni: 61.257, közületi: 61.066.
MNB egyszámlaszám: 8.
Előfizethető és példányonként megvásárolható
az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, Budapest V., Alkotmány u. 21.
telefon: 111-010. Csekkbefizetési számla: 05,915,111-46.
MNB egyszámlaszám: 46
az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLTBAN: Budapest V., Váci u. 22., telefon: 185-612.
Előfizetési díj egy évre 20 Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

ERDŐS PÁL és HAJNAL ANDRÁS: Kromatikus gráfokról 1
RÉNYI ALFRÉD: Valószínűségszámítási módszerek az analízisben I. 5
BOGNÁR MÁTYÁS: A topologikus sokaságelmélet kialakulása és fejlődése 37
R. K. GUY és F. HARARY: Möbius létrákról 59
FREUD GÉZA: Interpolációs polinomokkal való approximációról 61
J. LINKOVSKI: Egy Jacobi-féle azonosság általánosítása 65
KÁRTESZI FERENC: Egy geometriai szélsőértékfeladat 67
CORRÁDI KERESZTÉLY és KÁTAI IMRE: A kvadratikus maradékok elméletéhez 75
VÉRTESI PÉTER: Jackson tételének bizonyítása interpolációs úton 83
GYŐRI KÁLMÁN: Az $x^p+y^p = cz^p$ diophantoszi egyenletről 93
ALPÁR LÁSZLÓ: Abszolút konvergens Fourier-sorok transzformáltjairól 97
Jelentés az 1966. évi Schweitzer Miklós matematikai emlékversenyről 105
Feladatrovat 133
Társulati élet 141
Könyvismertetés 161

KROMATIKUS GRÁFOKRÓL

ERDŐS PÁL ÉS HAJNAL ANDRÁS

Egy G gráfot akkor nevezünk k-kromatikusnak $(\varkappa(G)=k)$, ha szögpontjait be lehet osztani k osztályba úgy, hogy két egy osztályba eső pont sincsen összekötve, s $k-1$ ilyen osztályba a szögpontokat nem lehet beosztani. Ha m végtelen számosság, akkor G-t akkor nevezzük m-kromatikusnak, ha szögpontjait be lehet osztani m olyan osztályba, hogy két egy osztályba eső pont sincs összekötve, de ha $n<m$, akkor n ilyen osztályba a szögpontokat már nem lehet beosztani. Ha G tartalmaz egy k pontból álló teljes gráfot, akkor kromatikus száma nyilván legalább k. Tutte, Zykov és Ungár [10] egymástól függetlenül bebizonyították, hogy minden k-ra van oly k-kromatikus gráf, mely nem tartalmaz háromszöget. Erdős [3] valószínűségszámítási módszerekkel bebizonyította, hogy minden k és l-re van k-kromatikus gráf, melynek minden köre legalább l élű. Lovásznak sikerült ezt nemrég egy direkt konstrukcióval kimutatnia. Erdős és Rado [4] bebizonyították, hogy ha $m\geqq\aleph_0$ tetszés szerinti végtelen számosság, akkor mindig van oly G gráf, melyben a szögpontok számossága m, a gráf nem tartalmaz háromszöget, s m-kromatikus. A szerzők [5] nemrég bebizonyították, hogy e tétel a következőképpen élesíthető: Legyen $m\geqq\aleph_0$ és l tetszőleges adott szám, akkor van m szögpontú gráf, melynek legkisebb páratlan köre legalább $2l+1$ élt tartalmaz, s mely m-kromatikus. Igen érdekes jelenség ezzel szemben a következő [5]: Legyen G tetszés szerinti számosságú gráf, mely nem tartalmaz négyszöget (azaz 4 élű kört), akkor $\varkappa(G)\leqq\aleph_0$. ([3]-ból viszont rögtön következik, hogy minden l-re van oly G, melynek minden köre legalább l élű, s melyre $\varkappa(G)=\aleph_0$.)

Ezen eredmények mutatják, hogy egy gráf kromatikus száma lehet $\aleph_0$, bár a gráf nem tartalmaz kis kört. E cikkben egy más természetű idevágó kérdéssel fogunk foglalkozni. Előbb néhány egyszerű fogalmat kell bevezetnünk. Legyenek $x_1, \ldots, x_m$ a G gráf tetszés szerinti szögpontjai. $G(x_1, \ldots, x_m)$ legyen az $x_1, \ldots, x_m$ szögpontok által feszített részgráf (azaz $G(x_1, \ldots, x_m)$-ben x_i és x_j, akkor és csakis akkor vannak éllel összekötve, ha G-ben is össze vannak kötve). G szögpontjainak egy részhalmazát akkor nevezzük függetlennek, ha az általuk feszített részgráfnak nincsen éle (azaz, ha semmilyen szögpont sincs éllel összekötve). $f(G)$ jelentse a G legnagyobb független halmazának számosságát, feltéve, hogy ez véges, — azaz más szóval: G-nek van $f(G)$ szögpontból álló független részhalmaza, de már $f(G)+1$ szögpontú független részhalmaza nincsen. Egy G gráfról akkor mondjuk, hogy megvan a T_c tulajdonsága, ha minden véges m-re és minden $x_1, \ldots, x_m$ szögpontra $f(G(x_1, \ldots, x_m))\geqq cm$. Első pillanatban úgy gondolhatnánk, hogy ha G-nek megvan a T_c tulajdonsága, akkor $\varkappa(G)$ sem lehet nagy. $c\geqq\frac{1}{2}$-re ez majdnem nyilvánvaló. Ha ugyanis G-nek megvan a $T_{\frac{1}{2}}$ tulajdonsága, akkor G-nek nem lehet páratlan köre, ti. ha $x_1, \ldots, x_{2l+1}$ G-nek egy páratlan köre lenne, akkor nyilván $f(G(x_1, \ldots,$

$\ldots, x_{2l+1}))\leqq l$, s ezért G-nek nincs meg a $T_{\frac{1}{2}}$ tulajdonsága. Ezzel kimutattuk, hogy ha G-nek megvan a $T_{\frac{1}{2}}$ tulajdonsága, akkor páros körüljárású, s így $\varkappa(G)\leqq 2$. Ezek után talán meglepő, hogy fennáll a következő

TÉTEL. *Minden $c<\frac{1}{2}$-hez és minden k számhoz van oly G, mely kielégíti a T_c tulajdonságot, s melyre $\varkappa(G)>k$.*

Gráfunk szögpontjai a k-dimenziós egységgömb pontjai lesznek. Legyen $\varepsilon=\varepsilon(c)$ elegendő kis pozitív szám. Két pontot akkor kötünk össze éllel, ha távolságuk nagyobb, mint $2-\varepsilon$. Ha $\varepsilon<2-\sqrt{3}$, akkor gráfunk nem tartalmaz háromszöget, mert minden, egy legfeljebb egységsugarú körbe írható háromszögnek, legalább az egyik oldala $\leqq\sqrt{3}$. Könnyű belátni viszont, hogy gráfunk kromatikus száma $>k$. G minden független halmazának átmérője ugyanis nyilván $\leqq 2-\varepsilon$. Borsuk [1] egy ismert tétele szerint viszont, ha a k-dimenziós egységgömb felületét k halmaz egyesítési halmazára bontjuk, akkor legalább az egyik halmaz átmérője 2 (azaz legalább az egyik halmaz zárt burka tartalmaz diametrálisan ellentett pontokat). Így egy egyszerű bizonyítást nyertünk a Tutte—Zykov—Ungár tételre.

Most bebizonyítjuk, hogy elegendő kis ε-ra gráfunknak megvan a T_c tulajdonsága. Más szóval ki fogjuk mutatni, hogy ha $x_1, \ldots, x_n$ a k-dimenziós egységgömb felületének tetszőleges pontjai, akkor ezen n pont közül van $m>cn$ olyan $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$, hogy bármely két x_{i_j} távolsága $\leqq 2-\varepsilon$, ti. ezen esetben ez az m pont független. Ezen m pontot egy igen egyszerű átlagolási módszerrel fogjuk megkonstruálni. Elég lesz bebizonyítanunk, hogy van olyan $2-\varepsilon$ átmérőjű gömbsüveg, mely több, mint cn x_i pontot tartalmaz. Jelöljük az egységgömb felületét F_k-val, elegendő kis ε mellett a $2-\varepsilon$ átmérőjű gömbsüveg felülete S_k nyilván kielégíti az

$$S_k>cF_k \tag{1}$$

egyenlőtlenséget. Könnyű lenne úgy F_k-ra, mint S_k-ra explicit formulát találni, de erre nincs szükségünk.

Jelölje S^i az x_i középpontú $2-\varepsilon$ átmérőjű gömbsüveget ($i=1, \ldots, n$). Ha az $S^1, \ldots, S^n$ süvegek a gömbfelület minden egyes pontját legfeljebb cn-szeresen fednék csak le, akkor fenn kellene állnia az $nS_k \leqq cnF_k$ egyenlőtlenségnek. Ez (1)-nek ellentmond. Tehát van a gömbfelületnek olyan z pontja, melyet az $S^1, \ldots, S^n$ süvegek közül cn-nél több tartalmaz. Ha ezek a süvegek $S^{i_1}, \ldots, S^{i_m}$ ($m>cn$), akkor a z középpontú és $2-\varepsilon$ átmérőjű süveg tartalmazza az $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ pontokat. Így bebizonyítottuk, hogy gráfunk bír a T_c tulajdonsággal, s ezzel tételünket igazoltuk.

A bizonyításunknak látszólagos szépséghibája, hogy G gráfunk végtelen, ez a hiba azonban csak látszólagos. Legyen ti. $\varkappa(G)=s$ (könnyű belátni különben, hogy elég kis ε-ra $\varkappa(G)=k+1$). De Bruijn és Erdős [2] egy tétele szerint G tartalmaz oly véges G' részgráfot, melyre $\varkappa(G')=\varkappa(G)=s$, G' véges gráf mármost nyilván kielégíti tételünk követelményeit.

Kifogásolni lehetne továbbá, hogy a de Bruijn—Erdős tétel bizonyítása a kiválasztási axiómát használja, ettől azonban kis fáradsággal meg tudnánk szabadulni. Geometriai eszközökkel be lehet ugyanis bizonyítani, hogy ha elegendő sok pontot veszünk fel a k-dimenziós gömb felületén, s e pontok eléggé sűrűn vannak eloszolva, s tekintjük G-nek az ezen pontok által feszített G_1 részgráfját, akkor $\varkappa(G_1)\geqq k+1$. Ezen állítás bizonyítását nem részletezzük.

Amint már megjegyeztük, tételünk $\frac{1}{2}$-re már nem igaz.

Talán igaz a következő: Ha minden m-re és minden $x_1, \ldots, x_m$ szögpontra $f(G(x_1, \ldots, x_m)) > \frac{m}{2}\left(1-\frac{c_k}{\log m}\right)$, akkor $\varkappa(G) \leqq k$. Érdekesebbnek látszik a következő sejtés. Tegyük fel, hogy minden m-re

$$f(G(x_1, \ldots, x_m)) \geqq \frac{m-k}{2}$$

az $x_1, \ldots, x_m$ pontok minden választása mellett. Igaz-e akkor, hogy $\varkappa(G) \leqq k+2$? A $k+2$ szögpontú teljes gráf példája mutatja, hogy e sejtés, ha igaz, nem javítható. $k=0$ esetén, mint láttuk, a sejtés triviális, de már $k=1$-re se tudjuk bebizonyítani.

Tételünkből azonnal következik, hogy minden $c<\frac{1}{2}$-re van oly $\aleph_0$-kromatikus gráf, mely kielégíti a T_c tulajdonságot. Hogy ezt beláthassuk, legyen G_k-ra $\varkappa(G_k) \geqq k$ és elégítse ki G_k a T_c tulajdonságot, akkor nyilván a $\bigcup_k G_k = G$ gráf kromatikus száma $\aleph_0$ (a G gráf szögpontjai a G_k gráfok szögpontjai s élei a G_k gráfok élei). Kérdezhetjük, hogy létezik-e minden $m > \aleph_0$ számosságra és $c<\frac{1}{2}$-re oly G mely teljesíti a T_c tulajdonságot, s melyre $\varkappa(G)=m$, továbbá még megkívánhatnók, hogy G szögpontjainak számossága is m legyen. E kérdéseket egyelőre nem tudjuk elintézni, csak a következő részeredményt értük el:

Minden m-re létezik oly G gráf, mely kielégíti minden $c<\frac{1}{4}$-re a T_c tulajdonságot, s melyre $\varkappa(G)=m$. G szögpontjainak számossága 2^m.

A bizonyítást itt nem részletezzük, csak megadjuk G konstrukcióját. Legyenek G szögpontjai az (α, β) rendszámpárok, ahol $1 \leqq \alpha < \beta < \Omega_{2^m}$, ahol Ω_{2^m} a 2^m számosságú halmaz kezdőszáma. (α, β) akkor és csakis akkor van összekötve (γ, δ)-val, ha $\beta = \gamma$. Könnyű belátni, hogy e G minden $c<\frac{1}{4}$-re kielégíti a T_c tulajdonságot, a $\varkappa(G)=m$ relációt [6] cikkünkben bizonyítjuk be. Czipszer és Erdős egy kérdése, hogy vajon az m-dimenziós ($m > \aleph_0$) Hilbert-tér egységgömbje felbomlik-e m-nél kevesebb, legfeljebb $2-\varepsilon$ átmérőjű halmaz összegére? Ha a válasz e kérdésre tagadó lenne, akkor e cikk és [7] módszerével könnyen látható, hogy van minden $c<\frac{1}{2}$-re m számosságú m-kromatikus gráf, melynek megvan a T_c tulajdonsága.

Dorothy Maharam Stonetől (szóbeli közlés) való a következő kérdés: A (0, 1) intervallum minden H halmazához, melynek mértéke $m(H) \geqq \alpha$, hozzárendelünk egy pontot, két pont akkor van éllel összekötve, ha a hozzájuk rendelt H_1 és H_2 halmazokra fennáll $m(H_1 \cap H_2) > 0$. Mekkora e gráf kromatikus száma? Nyilván csak $\alpha < \frac{1}{2}$ esetén van probléma. Vázoljuk annak bizonyítását, hogy e kromatikus szám mindig $\aleph_0$. Ismeretes, hogy a mérhető halmazok tere szeparábilis, azaz létezik megszámlálható sok mérhető halmaz H_n, $1 \leqq n < \infty$ úgy, hogy ha H tetszőleges mérhető halmaz, akkor minden ε-hoz van oly H_n, hogy a H és H_n halmazok szimmetrikus differenciájának mértéke $< \varepsilon$. Ebből könnyen következik, hogy fenti gráfunk kromatikus száma $\leqq \aleph_0$. Most vázoljuk annak bizonyítását, hogy gráfunk kromatikus száma $\geqq \aleph_0$. Elég lesz bizonyítanunk, hogy e kromatikus szám $> k$ minden k-ra. Egy Halmos—Neumann János [8] tétel egy speciális esete szerint a (0, 1) intervallum mértéktartó módon egy-egyértelműen leképezhető a k-dimenziós egységgömb felületére. Vizsgáljuk mármost a $2-\varepsilon$ sugarú gömbsüvegeket. Minden ilyen gömbsüvegnek megfeleltetünk egy pontot, a gömbsüveg középpontját, s két ilyen pont akkor legyen összekötve, ha e pontok távolsága $> 2-\varepsilon$, azaz, ha a két gömbsüvegnek nincs közös pontja. Tételünknél beláttuk, hogy e gráf kromatikus száma $> k$, s ezért a Halmos—Neumann tétel miatt a Maharam-féle gráf kromatikus száma is $> k$. Ezzel állításunkat be is bizonyítottuk.

Talán érdekes lesz megemlíteni a következő, M. Knesertől [9] való sejtést, mely tudtunkkal még nincs elintézve: Legyen egy $2n+k$ elemű halmaz minden n-edosztalyú kombinációjához hozzárendelve egy pont, két ilyen pont akkor van összekötve, ha a megfelelő kombinációknak nincs közös elemük. Bebizonyítandó, hogy e gráf kromatikus száma $k+2$. Könnyű belátni, hogy e kromatikus szám $\leqq k+2$.

IRODALOM

[1] K. Borsuk: Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre. *Fundamenta Math.*, **20** (1933) 177—190.
[2] N. G. de Bruijn and P. Erdős: A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations, Indagationes Math. **13** (1961), 371—373.
[3] P. Erdős, Graph theory and probability, Canad. J. Math. **11** (1959), 34—38.
[4] P. Erdős and R. Rado, A construction of graphs without triangles having preassigned order and chromatic number, J. London Math. Soc. **35** (1960), 445—448.
[5] P. Erdős and A. Hajnal, On the chromatic number of graphs and set systems, Acta Math. Acad. Sci. Hung. **17** (1966), 61—99, Theorem 7. 4. p. 76.
[6] P. Erdős and A. Hajnal, On chromatic number of graphs,
[7] P. Erdős, On the construction of certain graphs, J. Combinatorial Theory, **1** (1966), 149—153.
[8] P. Halmos and J. v. Neumann, Operator methods in classical mechanics. Ann. Math. **43** (1942) 332—350.
[9] M. Kneser, Aufgabe 300, Jahresbericht d. Deutschen Math. Ver. **58** (2) (1955).
[10] Lásd például B. Descartes (ez itt Tutte álneve) k-chromatic graphs without triangles, Solution to problem 4526 proposed by P. Ungár), Amer. Math. Monthly **61** (1954), 352—353.

О КРОМАТИЧЕСКИХ ГРАФАХ

П. ЭРДЕШ—А. ХАЙНАЛ

ON CHROMATIC GRAPHS

P. ERDŐS AND A. HAJNAL

A graph G is said to have property T_c if for every k and every k of its vertices $x_1, \ldots, x_k$ the subgraph $G(x_1, \ldots, x_k)$ spanned by the vertices $x_1, \ldots, x_k$ contains a set of independent vertices having ck elements. We show that for every $c<\frac{1}{2}$ there is a graph G having property T_c and chromatic number $\aleph_0$. Clearly a graph having property $T_{\frac{1}{2}}$ has chromatic number at most 2.

The question is left open if for every $m>\aleph_0$ and every $c<\frac{1}{2}$ there is a graph G having m vertices, satisfying property T_c and of chromatic number m.

VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI MÓDSZEREK AZ ANALÍZISBEN. I.

RÉNYI ALFRÉD

0. §. BEVEZETÉS

A valószínűségszámítás a véletlen tömegjelenségek vizsgálata céljából jött létre. Amióta azonban a valószínűségszámítás egzakt matematikai diszciplinává vált, lehetővé vált a valószínűségszámítás módszereinek, eredményeinek a felhasználása olyan problémákra is, amelyeknek a véletlenhez semmi közük nincsen. Elvileg a valószínűségszámítás eredményei, módszerei a matematika bármely ágában felhasználhatók és ez a lehetőség számos esetben meg is valósult és igen sok — részben más úton meg sem közelíthető — fontos probléma megoldásához vezetett. A valószínűségszámítás *számelméleti* alkalmazásai közismertek, e témakörről monográfia (l. [1]) és több összefoglaló dolgozat (l. [2], [3]) jelent meg. A valószínűségszámítás sikerrel alkalmazható az *algebrában* is (l. [4], [5]). A valószínűségszámítás *geometriai* alkalmazásai is közismertek, elsősorban az integrálgeometriában és a diszkrét geometriában (l. pl. [6], [7]). E dolgozatban a valószínűségszámítás módszereinek az *analízis*ben való felhasználási lehetőségeiről kívánunk (kaleidoszkópszerű) képet adni.

E dolgozat semmilyen tekintetben nem törekszik teljességre, csak arra, hogy válogatott példákon keresztül képet adjon a valószínűségszámítási módszerek az analízisben való alkalmazásainak széles spektrumáról. Túlnyomórészt olyan példákat válogattunk össze, amelyek kevés valószínűségszámítási ismerettel is megérthetők. A dolgozat egyes paragrafusai egymástól függetlenül, a dolgozatban közölttől eltérő sorrendben is olvashatók. A példák tárgyalásánál a valószínűségszámítás alapfogalmait ismertnek tételeztük fel; a megértés megkönnyítésére azonban a II. rész függelékében összefoglaljuk a felhasznált valószínűségszámítási ismereteket és tételeket (utóbbiakat természetesen bizonyítás nélkül). A dolgozat megértéséhez szükséges valószínűségszámítási ismeretek egy-két kivétellel nem mennek túl az egyetemi anyagon; szinte az összes felhasznált valószínűségszámítási tételek megtalálhatók pl. a [8] tankönyvben, amelynek feladatai között egyébként több, ezen dolgozatban tárgyalt példa is szerepel, azonban legtöbbször csak rövid utalással a megoldás módjára.

A valószínűségszámítási módszerek az analízisben való alkalmazásairól eddig kevés összefoglaló jellegű munka jelent meg. Sok érdekes példa található M. *Kac* dolgozatában [3], valamint W. *Feller* tankönyvének nemrégen megjelent második kötetében (l. [9]).

E dolgozat elsősorban ismert eredmények összefoglalását adja; egyes példák tárgyalásánál azonban helyenként a szakirodalomban találhatótól eltérő, egyszerűbb bizonyítást adunk, (így pl. a 3. §-ban Hayman tételére, a 6. §-ban Ryll—Nardzewski tételére) továbbá új eredményeket is közlünk. (Számozott tételként csak ez utóbbiak szerepelnek.)

1. §. A WEIERSTRASS-TÉTEL BERNSTEIN-FÉLE BIZONYÍTÁSA

A valószínűségszámítási módszerek az analízisben való felhasználásának „iskolapéldája" Weierstrass tételének S. *Bernstein*től származó valószínűségszámítási bizonyítása, amely e tétel legegyszerűbb ismert bizonyítása.

Legyen $f(x)$ tetszőleges, a $[0, 1]$ zárt intervallumban folytonos valós függvény. Legyen

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.1}$$

$B_n(f, x)$ nyilván n-edfokú polinom, amelyet az $f(x)$-hez tartozó n-edik Bernstein-féle polinomnak nevezünk. Mármost S. *Bernstein* [10] azt mutatta meg, hogy

$$\lim_{n \to +\infty} B_n(f, x) = f(x) \tag{1.2}$$

és a konvergencia $[0, 1]$-ben egyenletes; ebből már következik Weierstrass klasszikus tétele, mely szerint minden a $[0, 1]$ zárt intervallumban folytonos függvény tetszőleges pontossággal egyenletesen approximálható alkalmasan választott polinommal.

Az (1. 2) állítás valószínűségszámítási jelentése a következő: Legyen $\xi_n(x)$ n-edrendű x paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó, vagyis legyen

$$\mathbf{P}(\xi_n(x) = k) = \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{1.3}$$

Ha például a $[0, 1]$ intervallumban egymástól függetlenül egyenletes eloszlással választunk n pontot és $\xi_n(x)$ jelenti ezen pontok közül azoknak a számát, amelyek a $[0, x)$ intervallumba esnek, akkor (1. 3) fennáll. Mármost $B_n(f, x)$ felfogható, mint az $\eta_n = f\left(\frac{\xi_n(x)}{n}\right)$ valószínűségi változó várható értéke, hiszen

$$\mathbf{M}(\eta_n) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathbf{P}(\xi_n(x) = k) = B_n(f, x). \tag{1.4}$$

Ismeretes, hogy az n-edrendű x paraméterű binomiális eloszlás várható értéke nx és szórása $\sqrt{nx(1-x)}$, és így a Csebisev-féle egyenlőtlenséget $\xi_n(x)$-re alkalmazva adódik, hogy minden $\lambda > 0$-ra

$$\mathbf{P}(|\xi_n(x) - nx| \geqq \lambda\sqrt{nx(1-x)}) \leqq \frac{1}{\lambda^2}. \tag{1.5}$$

(Persze (1. 5) állítása csak $\lambda > 1$-re érdekes, $\lambda \leqq 1$-re triviális.)

Legyen

$$\lambda = \delta\sqrt{\frac{n}{x(1-x)}}, \tag{1.6}$$

ahol $\delta > 0$ tetszőleges; azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{\xi_n(x)}{n} - x\right| \geqq \delta\right) \leqq \frac{x(1-x)}{\delta^2 n} \leqq \frac{1}{4n\delta^2} \quad \text{ha} \quad 0 < x < 1. \tag{1.7}$$

Mármost, mivel $f(x)$ a $[0, 1]$ zárt intervallumban folytonos, tehát ott egyenletesen folytonos és korlátos, vagyis minden pozitív $\varepsilon > 0$-hoz megadható a $\delta > 0$

szám úgy, hogy ha $|x'-x| \leqq \delta$ $(0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq x' \leqq 1)$, akkor $|f(x')-f(x)| \leqq \varepsilon$ legyen, továbbá megadható olyan $K>0$, hogy $|f(x)| \leqq K$ ha $0 \leqq x \leqq 1$.

Mármost (1. 8) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = 1$, és így

$$B_n(f, x)-f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right) \tag{1. 9}$$

és így

$$|B_n(f, x)-f(x)| \leqq \varepsilon+2KP\left(\left|\frac{\xi_n(x)}{n}-x\right| \geqq \delta\right) \leqq \varepsilon+\frac{K}{2\delta^2 n} \tag{1. 10}$$

és ez a becslés x-ben egyenletesen teljesül, ha $0<x<1$.

Nyilvánvaló, hogy (1. 10) $x=0$-ra és $x=1$-re is teljesül, hiszen x ezen értékeire (1. 10) bal oldala 0-val egyenlő.

Így tehát, ha $n \geqq n_0(\varepsilon)=\frac{k}{2\delta^2\varepsilon}$, akkor

$$|B_n(f, x)-f(x)| \leqq 2\varepsilon \qquad (0 \leqq x \leqq 1). \tag{1. 11}$$

Ezzel (1. 2)-t és ezzel Weierstrass tételét bebizonyítottuk.

Könnyen belátható ezúton *T. Popoviciu* és *M. Kac* tétele is: ha $f(x)$ a [0, 1] intervallumban a Lip α osztályba tartozik, $(0<\alpha \leqq 1)$, akkor

$$B_n(f, x)-f(x) = O\left(\frac{1}{n^{\alpha/2}}\right)$$

(l. [11] ahol a Bernstein-polinomokra vonatkozó további approximációs tételek is találhatók.)

Természetesen a fenti bizonyítás elmondható valószínűségszámítási interpretáció nélkül is, és több tankönyv (l. pl. [1]) ezt is teszi. Ez esetben persze közvetlenül igazolni kell, hogy $\xi_n(x)$ várható értéke nx és szórása $\sqrt{nx(1-x)}$, vagyis be kell bizonyítani, az (egyébként egyszerűen belátható)

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} kx^k(1-x)^{n-k} = nx \tag{1. 12}$$

és

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k-nx)^2 x^k(1-x)^{n-k} = nx(1-x) \tag{1. 13}$$

azonosságokat és a bizonyítás során a Csebisev-egyenlőtlenséget is be kell bizonyítani, anélkül, hogy megmondanánk, hogy erről van szó. A bizonyítás ezáltal egyszerűségben is veszt, de még nagyobb veszteség, hogy a bizonyítás lényege az ilyen tárgyalásmódnál nem domborodik ki eléggé.

A bizonyítás valószínűségszámítási megfogalmazása világossá teszi továbbá, hogy a binomiális eloszlás helyett számos más eloszlást lehet használni, amelynek tagjai a várható értéknek polinomjai. Mivel a binomiális eloszlás felfogható, mint a visszatevéses mintavételnél fellépő valószínűségeloszlás, a legkézenfekvőbb alternatíva a visszatevés nélküli mintavételnél fellépő hipergeometrikus eloszlással

helyettesíteni a binomiális eloszlást. Ez a meggondolás a

$$B_n(f, N, x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{\binom{Nx}{k}\binom{N(1-x)}{n-k}}{\binom{N}{n}} \tag{1. 14}$$

polinomok vizsgálatához vezet. $B_n(f, N, x)$ az $N \geqq n$ pozitív paraméter minden értéke mellett n-edfokú polinom, azonban ez a polinom valószínűségszámításilag csak akkor interpretálható, ha

$$\frac{n}{N} \leqq x \leqq 1 - \frac{n}{N} \tag{1. 15}$$

ugyanis, bár a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{Nx}{k}\binom{N(1-x)}{n-k}}{\binom{N}{n}} = 1 \tag{1. 16}$$

reláció akkor is fennáll, ha (1. 15) nem teljesül, azonban az (1. 15) feltétel az (1. 16) baloldalán álló összeg tagjai nemnegativitásának biztosításához szükséges, tehát ahhoz, hogy e tagok valóban valószínűségeloszlást alkossanak.

Ha az (1. 15) feltétel teljesül, akkor $B_n(f, N, x)$ felfogható, mint várható érték, mégpedig

$$B_n(f, N, x) = \mathbf{M}\left(f\left(\frac{\xi(n, N, x)}{n}\right)\right), \tag{1. 17}$$

ahol $\xi(n, N, x)$ olyan valószínűségi változó, amelyre

$$\mathbf{P}(\xi(n, N, x) = k) = \frac{\binom{Nx}{k}\binom{N(1-x)}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{1. 18}$$

Érdekes megjegyezni, hogy $B_n(f, n, x)$ nem más, mint az $f(x)$ függvénynek a k/n $(k=0, 1, \ldots, n)$ ekvidisztáns alappontokhoz tartozó Lagrange-féle interpolációs polinomja, hiszen

$$B_n\left(f, n, \frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{1. 19}$$

Mármost könnyen belátható az is, hogy

$$\lim_{N \to \infty} B_n(f, N, x) = B_n(f, x), \tag{1. 20}$$

ahol $B_n(f, x)$ az $f(x)$ n-edik Bernstein-féle polinomja (vö. (1. 1)).

A $B_n(f, N, x)$ polinomok tehát folytonos átmenetet létesítenek a Lagrange és a Bernstein-polinomok között. Az (1. 18) eloszlás várható értéke és szórása jól ismeretes:

$$\mathbf{M}(\xi(n, N, x)) = nx \tag{1. 21}$$

és

$$\mathbf{D}(\xi(n, N, x)) = \sqrt{nx(1-x)\left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)}. \tag{1. 22}$$

Ezen relációk figyelembevételével Bernstein bizonyítását szószerint követve a következő eredményre jutunk:

1. tétel. Ha $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ *és* $N(n)$ *egy tetszőleges olyan számsorozat, amelyre* $\frac{n}{N(n)} \leqq \varepsilon$, *akkor tetszőleges, a* [0, 1]*-ben folytonos* $f(x)$ *valós függvényre*

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f, N(n), x) = f(x) \quad \text{ha} \quad \varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon$$

és a konvergencia az $\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon$ *intervallumban egyenletes.*

Ezen tételnek látszólag szépséghibája, hogy a konvergenciát csak az $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ intervallumban garantálja, azonban ettől a látszólagos megszorítástól megszabadulhatunk, ha a tételt a [0, 1]-ben definiált $f(x)$ függvény helyett a

$$g(x) = \begin{cases} f(0) & \text{ha} \quad 0 \leqq x \leqq \varepsilon \\ f\left(\dfrac{x-\varepsilon}{1-2\varepsilon}\right) & \text{ha} \quad \varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon \\ f(1) & \text{ha} \quad 1-\varepsilon \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

függvényre alkalmazzuk; így azt kapjuk, hogy a [0,1] intervallumban egyenletesen

$$\lim_{n\to+\infty} B_n(g, N(n), \varepsilon+(1-2\varepsilon)x) = f(x).$$

A Bernstein-polinomok valószínűségszámítási interpretációjának előnye az is, hogy közvetlenül általánosítható a többdimenziós esetre. Ez esetben a binomiális eloszlás helyett természetesen a polinomiális eloszlás lép fel, és a következő tételt nyerjük:

Legyen $f(x_1, \ldots, x_r)$ tetszőleges folytonos függvény a $0 \leqq x_j \leqq 1$ $(j=1, 2, \ldots, r)$ r-dimenziós egységkockában; legyen

$$B_{n,r}(f, x_1, \ldots, x_r) = \sum_{k_1=0}^{n} \ldots \sum_{\substack{k_r=0 \\ \sum_{j=1}^{r} k_j = n}}^{n} f\left(\frac{k_1}{n}, \ldots, \frac{k_r}{n}\right) \frac{n!}{k_1! \ldots k_r!} x_1^{k_1} \ldots x_r^{k_r}.$$

Akkor

$$\lim_{n\to\infty} B_{n,r}(f, x_1, \ldots, x_r) = f(x_1, \ldots, x_r)$$

egyenletesen a $0 \leqq x_j \leqq 1$ $(j=1, 2, \ldots r)$ r-dimenziós egységkockában.

A bizonyítás lépésről lépésre követi az egydimenziós esetet, felhasználva, hogy

$$\sum_{k_1=0}^{n} \ldots \sum_{\substack{k_r=0 \\ \sum_{j=1}^{r} k_j = n}}^{n} [k_1 - nx_1)^2 + \ldots + (k_r - nx_r)^2] \frac{n!}{k_1! \ldots k_r!} x_1^{k_1} \ldots x_r^{k_r} = n \sum_{j=1}^{r} x_j(1-x_j).$$

2. §. A WIMAN-TÉTEL VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI BIZONYÍTÁSA

Második példánkként az egész függvények elmélete egy fontos tételének, *Wiman* tételének (l. [12], [13], [14]) P. C. *Rosenbloom* által nemrégiben adott valószínűségszámítási bizonyítását (l. [15]) ismertetjük. Ez ugyanis közvetlenül

csatlakozik a Weierstrass-tétel az 1. §-ban ismertetett Bernstein-féle bizonyításához, amennyiben szintén csak a Csebisev-egyenlőtlenség alkalmazását igényli.

Legyen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{2. 1}$$

egy tetszőleges, egész függvény,

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| \qquad (r>0). \tag{2. 2}$$

$f(z)$ abszolút értékének maximuma a $|z|=r$ körön ($f(z)$ ún. maximum-modulus-függvénye) és

$$\mu(r) = \max_{n} |a_n| r^n \tag{2. 3}$$

a (2. 1) hatványsor tagjai abszolút értékének maximuma, ha $|z|=r$. Wiman 1914-ben bebizonyította, hogy minden pozitív $\varepsilon>0$-hoz megadható olyan B állandó, hogy ha $r \geqq B$, fennáll, az

$$M(r) < \mu(r)(\log \mu(r))^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \tag{2. 4}$$

egyenlőtlenség, kivéve, ha r egy E halmazba tartozik, ahol a kivételes r-értékek ezen E halmazának logaritmikus mértéke véges, vagyis

$$\int_E \frac{dr}{r} < +\infty. \tag{2. 5}$$

Bizonyítása igen bonyolult volt. Bizonyítási módszerét *Valiron* és *Pólya György* tovább fejlesztették és más rokon kérdésekre is alkalmazták, de az továbbra sem vált igazán egyszerűvé. Ezzel szemben a Wiman-tétel az alábbiakban ismertetésre kerülő, *Rosenbloom*tól származó valószínűségszámítási bizonyítása rendkívül egyszerű és frappáns.

Először is megjegyezzük, hogy a Wiman-tétel bizonyításánál az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az $f(z)$ egész függvény hatványsorának együtthatói mind valósak és nemnegatívak:

$$a_n \geqq 0 \qquad (n=0, 1, \ldots). \tag{2. 6}$$

Ha ugyanis (2. 1) egész függvény, akkor $f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| z^n$ is egész függvény, és ha e függvény modulusát $M^*(r)$-rel, hatványsora tagjai abszolút értékének maximumát a $|z|=r$ körön $\mu^*(r)$-rel jelöljük, akkor $M(r) \leqq M(r^*)$ és $\mu(r)=\mu^*(r)$ Ha tehát a Wiman-tétel érvényes $f^*(z)$-re, akkor $f(z)$-re is érvényes. Így tehát feltehetjük, hogy (2. 6) teljesül, amely esetben

$$M(r) = f(r). \tag{2. 7}$$

Legyen $\xi(x)$ egy olyan valószínűségi változó, amelynek értékkészlete a nemnegatív egész számok halmaza, és valószínűségeloszlása

$$P(\xi(x) = n) = \frac{a_n e^{nx}}{f(e^x)} \qquad (-\infty < x < +\infty) \tag{2. 8}$$

Vezessük be a

$$G(x)=f(e^x) \tag{2.9}$$

és

$$g(x)=\log G(x)=\log f(e^x) \tag{2.10}$$

jelölést.

Egyszerű számolással adódik, hogy $\xi(x)$ várható értéke

$$\mathbf{M}(\xi(x))=\frac{\sum_{n=1}^{n} na_n e^{nx}}{f(e^x)}=\frac{G'(x)}{G(x)}=g'(x) \tag{2.11}$$

továbbá, hogy $\xi(x)$ szórásnégyzete

$$\mathbf{D}^2(\xi(x))=\mathbf{M}(\xi^2(x))-\mathbf{M}^2(\xi(x))=\frac{G''(x)}{G(x)}-\left(\frac{G'(x)}{G(x)}\right)^2=g''(x). \tag{2.12}$$

(2.12)-ből látszik, hogy $g''(x)>0$; ez egyébként speciális esetként következik *Hadamard* azon tételéből is, hogy $\log M(r)$ konvex függvénye $\log r$-nek.

Mármost alkalmazzuk $\xi(x)$-re a Csebisev-egyenlőtlenséget. Azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{P}\left(|\xi(x)-g'(x)|\geqq\lambda\sqrt{g''(x)}\right)\leqq\frac{1}{\lambda^2}$$

és így

$$\mathbf{P}\left(|\xi(x)-g'(x)|<\lambda\sqrt{g''(x)}\right)\geqq 1-\frac{1}{\lambda^2}. \tag{2.13}$$

Kiírva részletesen, ez azt jelenti, hogy

$$\sum_{|n-g'(x)|<\lambda\sqrt{g''(x)}} a_n e^{nx}\geqq\left(1-\frac{1}{\lambda^2}\right)f(e^x)$$

és így, mivel $a_n e^{nx}\leqq\mu(e^x)$ és $f(e^x)=M(e^x)$, következik, ha λ-nak pl. a $\lambda=\sqrt{2}$ értéket választjuk, hogy

$$4\sqrt{2}\sqrt{g''(x)}\,\mu(e^x)\geqq M(e^x). \tag{2.14}$$

Mármost szükségünk lesz a következő, szinte triviális segédtételre:

Lemma. Ha $\delta>0$ és $g(x)$ egy tetszőleges, kétszer differenciálható, növekvő és konvex pozitív függvény a $c\leqq x<+\infty$ intervallumban és $g'(c)>0$, akkor azon $x\geqq c$ értékek halmaza, amelyekre

$$g''(x)>(g(x))^{1+\delta}$$

véges Lebesgue-mértékű.

A lemma bizonyítása. Legyen $\alpha=\sqrt{1+\delta}$ és jelölje A azon $x\geqq c$ értékek halmazát, amelyekre $g'(x)>(g(x))^{\alpha}$ továbbá B azon $x\geqq c$ értékek halmazát, amelyekre $g''(x)>(g'(x))^{\alpha}$. Nyilván, ha $x\geqq c$, sem az A, sem a B halmazhoz nem tartozik hozzá, akkor

$$g''(x)\leqq(g'(x))^{\alpha}\leqq(g(x))^{\alpha^2}=(g(x))^{1+\delta}.$$

Elegendő tehát bebizonyítani, hogy az A és B halmazok véges mértékűek. Azonban

$$\int_A dx + \int_B dx \leqq \int_c^{\infty} \frac{g'(x)\,dx}{(g(x))^{\alpha}} + \int_c^{\infty} \frac{g''(x)}{(g'(x))^{\alpha}}\,dx \leqq \int_{g(c)}^{+\infty} \frac{dy}{y^{\alpha}} + \int_{g'(c)}^{+\infty} \frac{dy}{y^{\alpha}},$$

amivel a lemma állítását már be is bizonyítottuk.

A lemmát alkalmazhatjuk a $g(x)=\log f(e^x)$ függvényre, a $c \leqq x < +\infty$ intervallumban, ahol c tetszőleges olyan valós szám, amelyre $f(e^c)>1$. Így adódik, hogy egy véges mértékű D halmazhoz tartozó, kivételes x értékektől eltekintve

$$g''(x) < (g(x))^{1+\delta} = [\log M(e^x)]^{1+\delta}, \tag{2. 15}$$

tehát (2. 14)-ből kapjuk, hogy

$$M(e^x) \leqq 4\sqrt{2}\,\mu(e^x)\left(\log M(e^x)\right)^{\frac{1+\delta}{2}} \quad \text{ha} \quad x \geqq c \quad \text{és} \quad x \notin D, \tag{2. 16}$$

ahol $\int_D dx < +\infty$.

Legyen $r=e^x$. Jelölje E azon e^x pozitív számok halmazát, amelyekre $x \in D$. Mivel $\frac{dr}{dx} = \frac{1}{r}$, állításunk a következőképpen fogalmazható:

$$M(r) \leqq 4\sqrt{2}\,\mu(r)\left(\log M(r)\right)^{\frac{1+\delta}{2}} \quad \text{hacsak} \quad r \geqq e^c \tag{2. 17}$$

és $r \notin E$, ahol $\int_E \frac{dr}{r} < +\infty$.

Mármost minden $x>1$-re $\log x < x$, tehát (2. 17)-ből

$$M(r) < 4\sqrt{2}\,\mu(r)\,M(r)^{\frac{1+\delta}{2}}$$

és így

$$M(r)^{\frac{1-\delta}{2}} < 4\sqrt{2}\,\mu(r). \tag{2. 18}$$

(2. 17)-ből és (2. 18)-ból adódik

$$M(r) < 4\sqrt{2}\,\mu(r)\left(\frac{\log \mu(r) + \log 4\sqrt{2}}{\frac{1-\delta}{2}}\right)^{\frac{2}{1+\delta}} \quad \text{ha} \quad r \geqq e^c \tag{2. 19}$$

és $r \notin E$.

Mivel $\mu(r) \to +\infty$, ha $r \to +\infty$, van olyan $d>0$, hogy ha $r>d$, akkor $\log \mu(r) > \max\left(\log 4\sqrt{2}, \frac{4}{1-\delta}(4\sqrt{2})^{\frac{2}{1+\delta}}\right)$. Így tehát

$$M(r) < \mu(r)\left(\log \mu(r)\right)^{\frac{2}{1+\delta}}, \tag{2. 20}$$

ha $r > \max(e^c, d)$ és $r \notin E$, ahol $\int_E \frac{dr}{r} < +\infty$; ezzel a Wiman-tételt bebizonyítottuk.

E bizonyítással persze ugyanaz a helyzet, mint a Weierstrass-tétel Bernstein-féle bizonyításával: el lehet mondani valószínűségszámítási interpretáció nélkül is, de a bizonyítás gondolatát a valószínűségszámítási interpretáción át lehet csak világosan megérteni.

Érdekes rámutatni, hogy *Rosenbloom* maga megjegyzi, hogy a bizonyítás ötletét *Hincsin*nek a kvantumstatisztikával kapcsolatos valószínűségszámítási vizsgálatai [16] adták neki.

3. §. HAYMAN EREDMÉNYEI EGÉSZ FÜGGVÉNYEK HATVÁNYSORÁRÓL

Az ebben a §-ban tárgyalt probléma közvetlenül kapcsolódik a 2. § témájához. HAYMAN tétele (l. [17]), amelyet be fogunk bizonyítani, azonban már megfogalmazásában is valószínűségszámítási jellegű, ugyanis bizonyos eloszlásoknak a normális eloszlásához való konvergenciájára vonatkozik. Hayman eredetileg azonban tételét nem valószínűségszámítási úton bizonyította. Mi itt egy Hayman tételéhez közelálló (bizonyos tekintetben erősebb, más tekintetben gyengébb feltételeket kikötő) tételre egy az övétől eltérő, valószínűségszámítási bizonyítást adunk.

A következő tételt fogjuk bebizonyítani:

2. tétel. Legyen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{3.1}$$

nemnegatív együtthatós, transzcendens egész függvény, amelynek neme 0, *és amelyre* $f(0)=1$, *vagyis amely előállítható*

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right) \tag{3.2}$$

alakban. Tegyük fel, hogy $f(z)$ *összes* z_n *gyökei a* $\operatorname{Re}(z)\leqq 0$ *félsíkban fekszenek, tehát* $\frac{\pi}{2}\leqq \arg z_n \leqq \frac{3\pi}{2}$. *Legyen*

$$g(x)=\log f(e^x), \tag{3.3}$$

továbbá

$$a(r) = g'(\log r) = \frac{d\log f(r)}{d\log r} \quad \text{és} \quad b(r) = g''(\log r) = \frac{d^2\log f(r)}{d(\log r)^2}, \tag{3.4}$$

akkor

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{f(r)}\sum_{n<a(r)+x\sqrt{b(r)}} a_n r^n = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du, \tag{3.5}$$

ha $-\infty<x<+\infty$, *feltéve, hogy*

$$\lim_{r\to\infty} b(r) = +\infty. \tag{3.6}$$

Bizonyítás. Feltevésünk szerint a z_n gyökök közül a valós gyökök negatívak, míg azok, amelyek nem valósak, konjugált komplex párokba sorolhatók, és így $f(z)$ felírható

$$f(z) = \prod_{k=1}\left(1+\frac{z}{\varrho_k}\right)\prod_{l=1}\left(1+\frac{2z}{R_l}\cos\theta_l+\frac{z^2}{R_l^2}\right) \tag{3.7}$$

alakban, ahol $\varrho_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ $R_l > 0$, $|\theta_l| \leqq \frac{\pi}{2}$ $(l = 1, 2, \ldots)$ és a két szorzat közül legalább az egyik végtelen sok tényezőből áll. Ennélfogva

$$\frac{f(re^{it})}{f(r)} = \prod_{k=1}\left(\frac{\varrho_k + re^{it}}{\varrho_k + r}\right)\prod_{l=1}\left(\frac{R_l^2 + 2rR_l\cos\theta_l e^{it} + r^2e^{2it}}{R_l^2 + 2rR_l\cos\theta_l + r^2}\right). \tag{3. 8}$$

A (3. 8) jobb oldalán álló szorzat minden egyes tényezője egy-egy karakterisztikus függvény, mégpedig $\frac{\varrho_k + re^{it}}{\varrho_k + r}$ egy olyan $\xi_k(r)$ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye, amely a 0 és 1 értékeket veszi fel

$$\mathbf{P}(\xi_k(r) = 0) = \frac{\varrho_k}{\varrho_k + r}, \quad \mathbf{P}(\xi_k(r) = 1) = \frac{r}{\varrho_k + r}$$

valószínűségekkel, míg $\frac{R_l^2 + 2rR_l\cos\theta_l e^{it} + r^2e^{2it}}{R_l^2 + 2rR_l\cos\theta_l + r^2}$ egy olyan $\eta_l(r)$ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye, amely a 0, 1 és 2 értékeket veszi fel

$$\mathbf{P}(\eta_l(r) = 0) = \frac{R_l^2}{S_l}, \quad \mathbf{P}(\eta_l(r) = 1) = \frac{2rR_l\cos\theta_l}{S_l}, \quad \mathbf{P}(\eta_l(r) = 2) = \frac{r^2}{S_l}$$

valószínűségekkel, ahol $S_l = R_l^2 + 2rR_l\cos\theta_l + r^2$. Tehát $f(re^{it})/f(r)$ egyenlő a $\zeta(r) = \sum_l \xi_k(r) + \sum_k \eta_l(r)$ összeg karakterisztikus függvényével, ha a $\xi_k(r)$, $\eta_l(r)$ változók függetlenek. Mármost nyilvánvaló, hogy ez esetben

$$\mathbf{M}(\zeta(r)) = a(r) \quad \text{és} \quad \mathbf{D}^2(\zeta(r)) = b(r), \tag{3. 9}$$

ahol $b(r)$ kifejezhető

$$b(r) = \sum_k \frac{\varrho_k r}{(\varrho_k + r)^2} + \sum_l \frac{2rR_l\cos\theta_l)(R_l^2 + r^2) + 4R_l^2r^2}{(R_l^2 + 2rR_l\cos\theta + r^2)^2} \tag{3. 10}$$

alakban is. Könnyen belátható, hogy a $\zeta(r) = \sum_k \xi_k(r) + \sum_l \eta_l(r)$ összegekre $(r \to +\infty)$ teljesülnek a Ljapunov-tétel feltételei, hacsak $b(r) \to +\infty$. Ugyanis, ha η a 0, 1, 2 értékeket veheti csak fel, akkor $|\eta - \mathbf{M}(\eta)| \leqq 2$ és így

$$\mathbf{M}(|\eta - \mathbf{M}(\eta)|^3) \leqq 2\mathbf{D}^2(\eta),$$

tehát az

$$L(r) = \frac{\left[\sum_k \mathbf{M}(|\xi_k(r) - \mathbf{M}(\xi_k(r))|^3) + \sum_l \mathbf{M}(|\eta_l(r) - \mathbf{M}(\eta_l(r))|^3\right]^{\frac{1}{3}}}{D(\zeta(r))} \tag{3. 11}$$

ún. Ljapunov-féle hányadosra érvényes a

$$L(r) \leqq \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{D(\varrho(r))}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[6]{b(r)}} \tag{3. 12}$$

egyenlőtlenség, és így a (3. 5) tétel állítása a Ljapunov-tételből következik.

Könnyen be lehet látni, hogy a (3. 6) feltétel teljesüléséhez elégséges (bár nem

szükséges) az alábbi, kizárólag $f(z)$ gyökeinek abszolút értékeit tartalmazó feltétel:

$$\lim_{r\to+\infty}\left[\frac{1}{r}\left(\sum_{\varrho_k<r}\varrho_k\right)+\frac{1}{r^2}\left(\sum_{R_l<r}R_l^2\right)\right]=+\infty. \tag{3. 13}$$

Megjegyezzük, hogy HAYMAN azon egész függvények összességét, amelyek a következő tulajdonsággal bírnak: $f(r)>0$, ha $r\geqq R_0\geqq 0$ és

$$f(re^{i\vartheta})\sim f(r)e^{i\vartheta a(r)-\frac{1}{2}\vartheta^2 b(r)},$$

ha $r\to\infty$ és $|\vartheta|\leqq\delta(r)$, továbbá

$$f(re^{i\vartheta})=\frac{o(f(r))}{\sqrt{b(r)}} \quad \text{ha} \quad \delta(r)\leqq|\vartheta|\leqq\pi \quad \text{és} \quad r\to\infty,$$

admisszibilis-nek nevezi, és kimutatja, hogy a 2. tétel állítása minden admisszibilis egész függvényre érvényes.[1] A 0 nemű egész függvények közül azokra mutatja ki, hogy admisszibilisek (l. [17], 9. tétel), amelyek elég nagy pozitív r-re pozitívak és amelyek gyökei véges kivétellel a $\frac{\pi}{2}+\varepsilon<\arg z<\frac{3\pi}{2}-\varepsilon$ szögtérbe esnek egy alkalmas $\varepsilon>0$-val, és amelyekre teljesül a (3. 6) feltétel. A 2. tétel nemnegatív együtthatós hatványsorokra valamivel többet mond, mivel tételünk szerint elegendő feltenni, hogy $f(z)$ gyökei a $\mathrm{Re}\,(z)\leqq 0$ félsíkban fekszenek. (Véges sok kivételt ez esetben is meg lehet engedni.)

A 2. tétel alkalmazható például az

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n^\alpha}\right)$$

$\left(\frac{1}{\alpha}\text{-rendű}\right)$ függvényre, ahol $\alpha>1$, továbbá pl. az $f(z)=\prod\left(1+\frac{z}{e^{\sqrt{n}}}\right)$ 0-rendű függvényre, valamint az

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{n^\alpha}\right)$$

függvényre, ahol $\alpha>2$. A bizonyításból látható egyébként, hogy érvényes a tétel állítása az

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{n^2}\right)=\frac{\sinh(\pi z)}{\pi z}$$

egész függvényre is (bár az nem 0-nemű); utóbbira $a(r)\sim b(r)\sim\pi r$.

HAYMAN eredményei közül megemlítjük még a következőt: ha $f(z)$ admisszibilis, akkor $e^{f(z)}$ is az.

Ebben az irányban itt csak annyit jegyzünk meg, hogy ha $f(z)$ tetszőleges nemnegatív együtthatós hatványsor (csak azt az esetet kell kizárni, ha $f(z)$ állandó), akkor az, hogy a 2. tétel állítása az $e^{f(z)}=F(z)$ függvényre is érvényes, valószínűségszámítási úton a következőképpen látható be: Legyen

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$$

[1]) Hayman többet bizonyít be, mint (3.5)-öt, ugyanis ő a $h(r)$ valószínűségi változókra lokális határeloszlástételt ad.

és $\zeta(r)$ a 2. tétel bizonyításában szereplő valószínűségi változó, amelyre

$$\mathbf{P}(\zeta(r) = n) = \frac{a_n r^n}{f(r)} \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Legyen

$$F(z) = e^{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n,$$

akkor tehát

$$\left\{\frac{A_n r^n}{F(r)}\right\} \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{3. 14}$$

egy valószínűség-eloszlás. Legyenek $\zeta_1(r), \ldots, \zeta_k(r), \ldots$ a $\zeta(r)$ változó eloszlásával megegyező eloszlású független valószínűségi változók, ν a $\zeta_k(r)$ változóktól független, $f(r)$ várható értékű Poisson-eloszlású változó, amelyre tehát

$$\mathbf{P}(\nu = n) = \frac{(f(r))^n e^{-f(r)}}{n!} \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Legyen

$$Z(r) = \sum_{k=1}^{\nu} \zeta_k(r),$$

akkor $Z(r)$ karakterisztikus függvénye

$$M(e^{itZ(r)}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f(r))^n e^{-f(r)}}{n!} \left(\frac{f(re^{it})}{f(r)}\right)^n = \frac{e^{f(re^{it})}}{e^{f(r)}} = \frac{F(re^{it})}{F(r)},$$

vagyis $Z(r)$ eloszlása megegyezik a (3. 14) eloszlással. Ezen az alapon egyszerűen igazolható, hogy $Z(r)$ eloszlása határértékben normális; csak azt kell felhasználni, hogy feltevésünk szerint $\lim_{r\to\infty} f(r) = +\infty$ Bevezetve ugyanis az $A(r) = rf'(r)$ és $B(r) = rf'(r) + r^2 f''(r)$ jelölést, könnyen belátható, hogy

$$\lim_{r\to+\infty} \mathbf{M}\left(e^{it\frac{Z(r)-A(r)}{\sqrt{B(r)}}}\right) = e^{-\frac{t^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

és így, ha $r \to +\infty$, akkor $\dfrac{Z(r)-A(r)}{\sqrt{B(r)}}$ eloszlása konvergál a standard normális eloszláshoz.

Speciálisan, ha $f(z) = z$, $F(z) = e^z$ és így érvényes a következő állítás:

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{n<r+x\sqrt{r}} \frac{r^n e^{-r}}{n!} = \Phi(x) \qquad (-\infty < x < +\infty). \tag{3. 15}$$

A (3. 15) reláció azt a valószínűségszámításból jólismert tényt fejezi ki, hogy a λ várható értékű Poisson eloszlás konvergál a normális eloszláshoz, ha $\lambda \to +\infty$. (3. 15)-ből következik, hogy

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{n<rt} \frac{r^n e^{-r}}{n!} = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad t < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{ha} \quad t = 1 \\ 1 & \text{ha} \quad t > 1. \end{cases} \tag{3. 16}$$

4. §. A LAPLACE-TRANSZFORMÁCIÓ INVERZIÓS KÉPLETEI

Legyen $F(x)$ a $0 \leqq x < +\infty$ intervallumban definiált korlátos ingadozású függvény, $F(0)=0$ és

$$g(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dF(x) \tag{4. 1}$$

az $F(x)$ függvény Laplace—Stieltjes transzformáltja: $g(s)$ nyilván értelmezve van és analitikus a $\mathrm{Re}\,(s)>0$ félsíkban; és ugyanitt

$$(-1)^n g^{(n)}(s) = \int_0^\infty x^n e^{-sx}\, dF(x). \tag{4. 2}$$

Legyenek $\lambda>0$ és $t>0$ tetszőleges pozitív számok, akkor tehát

$$\sum_{n<\lambda t} \frac{(-\lambda)^n g^{(n)}(\lambda)}{n!} = \int_0^\infty \left(\sum_{n<\lambda t} \frac{(\lambda x)^n e^{-\lambda x}}{n!} \right) dF(x). \tag{4. 3}$$

(3. 16)-ból leolvasható, hogy

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sum_{n<\lambda t} \frac{(\lambda x)^n e^{-\lambda x}}{n!} = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x > t \\ \frac{1}{2} & \text{ha} \quad x = t \\ 1 & \text{ha} \quad 0 \leqq x < t. \end{cases} \tag{4. 4}$$

Könnyen belátható hogy a határátmenet és az integráció felcserélhető, és így ha az $x=t$ pontban $F(x)$ folytonos

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \sum_{n<\lambda t} \frac{(-\lambda)^n g^{(n)}(\lambda)}{n!} = \int_0^t dF(x) = F(t). \tag{4. 5}$$

Ilyen módon tehát a Laplace—Stieltjes transzformáció egyik jólismert inverziós formuláját nyertük, a Poisson eloszlásra vonatkozó (3. 16) relációból.

Legyen $F(x)$ abszolút folytonos, $F'(x)=f(x)$ és $f(x)$-ről tegyük fel, hogy a $[0, +\infty)$ intervallumban folytonos és korlátos. Akkor a (4. 1) által definiált $g(s)$ függvény a

$$g(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\, dx \tag{4. 6}$$

alakban írható fel, és így $g(s)$ az $f(x)$ függvény Laplace-transzformáltja. (4. 6)-ból

$$\frac{(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{t}\right)^n g^{(n-1)}\left(\frac{n}{t}\right)}{(n-1)!} = \int_0^\infty \frac{\left(\frac{n}{t}\right)^n x^{n-1} e^{-\frac{nx}{t}}}{(n-1)!} f(x)\, dx. \tag{4. 7}$$

Mármost ismeretes, hogy ha $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ t várható értékű exponenciális eloszlású valószínűségi változók, vagyis $P(\zeta_k<y)=1-e^{-\frac{y}{t}}$ ha $y\geqq 0$ és $k=1, 2, \ldots, n$ és a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ változók függetlenek, akkor $\xi_n=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$ n-edrendű gamma-eloszlású valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye $\frac{x^{n-1}e^{-\frac{x}{t}}}{t^n n!}$ ha $x>0$.

Mármost a nagy számok gyenge törvénye szerint ζ_n/n sztochasztikusan konvergál t-hez; ennélfogva, ha $f(x)$ folytonos és korlátos függvény, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\left(f\left(\frac{\zeta_n}{n}\right)\right) = f(t). \tag{4. 8}$$

Mivel a mondottak szerint

$$\mathbf{M}\left(f\left(\frac{\zeta_n}{n}\right)\right) = \int_0^\infty f(x) \frac{\left(\frac{n}{t}\right)^n x^{n-1} e^{-\frac{nx}{t}}}{(n-1)!}\, dx \tag{4. 9}$$

a (4. 7), (4. 8) és (4. 9) képleteket összevetve azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n}{t}\right)^n (-1)^{n-1} g^{(n-1)}\left(\frac{n}{t}\right)}{(n-1)!} = f(t). \tag{4. 10}$$

(4. 10) a Laplace-transzformáció jólismert ún. *Post—Widder-féle inverziós képlete*, amelyre tehát egy egyszerű valószínűségszámítási bizonyítást adtunk. (E bizonyítás megtalálható már [18]-ban. lásd továbbá [8] és [9].)

5. §. HILLE TÉTELE

E §-ban $f(x)$ az $x \geqq 0$ félegyenesen definiált folytonos és korlátos függvényt jelöl. Jelölje Δ_h a $h>0$ differenciájú differencia-hányados képzés operátorát, vagyis legyen

$$\Delta_h f(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{5. 1}$$

és D a differenciálás operátorát, vagyis legyen

$$Df(x) = f'(x), \tag{5. 2}$$

ha $f(x)$ differenciálható függvény.

Egy operátor n-edik hatványán értjük az operátor n-szeri egymásutáni alkalmazását. Így tehát a differenciaszámításból jólismert képlet szerint

$$\Delta_h^n f(x) = \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+kh), \tag{5. 3}$$

továbbá

$$D^n f(x) = f^{(n)}(x), \tag{5. 4}$$

ha $f(x)$ n-szer differenciálható függvény ($n=1, 2, \ldots$).

Véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok operátor konstans együtthatókkal képzett összegét a szokásos módon értelmezzük: Ha $A_1, \ldots, A_m, \ldots$ operátorok, $c_1, \ldots, c_m, \ldots$ konstansok

$$\left(\sum_k c_k A_k\right) f(x) = \sum_k c_k \cdot A_k f(x) \tag{5. 5}$$

feltéve, hogy a jobb oldalon álló összeg konvergens. Minden A operátorra legyen

$A^0 = E$ az egységoperátor, amelyre $Ef(x) = f(x)$. Ha $g(x)$ analitikus függvény, melynek hatványsora

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \tag{5. 6}$$

és A egy operátor, a $g(A)$ operátort az

$$g(A) \cdot f(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n A^n \right) f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n A^n f(x) \tag{5. 7}$$

képlettel értelmezzük. Az (5. 5) definíció értelmében ha a valós szám,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n D^n f(x)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n f^{(n)}(x)}{n!} = f(x+a) \tag{5. 8}$$

feltéve, hogy $f(x)$ analitikus az x pont egy az $x+a$ pontot tartalmazó környezetében.

(5. 7)-re való tekintettel (5. 8) felírható az

$$e^{aD} f(x) = f(x+a) \tag{5. 9}$$

alakban is. Vegyük észre, hogy az e^{aD} operátor (5. 9) segítségével tetszőleges $f(x)$ függvényre értelmezhető, nemcsak analitikus függvényekre.

Ha $\{A_t\}$ operátorok a t paramétertől függő serege és A egy operátor, és az F függvényosztályhoz tartozó minden $f(x)$ függvényre érvényes (a pontonkénti konvergencia értelmében), hogy

$$\lim_{t \to t_0} A_t f(x) = Af(x), \tag{5. 10}$$

akkor azt mondjuk, hogy az A_t operátorok az A operátorhoz konvergálnak, ha $t \to t_0$. Így például nyilvánvalóan fennáll, hogy

$$\lim_{h \to 0} \Delta_h f(x) = Df(x), \tag{5. 11}$$

ha $f(x)$ differenciálható függvény. Tekintettel az (5. 9) relációra, felvetődik a kérdés, hogy igaz-e, hogy

$$\lim_{h \to 0} e^{a\Delta_h} f(x) = e^{aD} f(x), \tag{5. 12}$$

mégpedig mivel e^{aD} nemcsak differenciálható függvényekre van értelmezve, kérdezhetjük, hogy igaz-e (5. 12) a differenciálás helyett $f(x)$-re vonatkozó enyhébb (pl. folytonossági) feltevés mellett is.

Alábbiakban bebizonyítjuk, hogy (5. 12) teljesül, ha $f(x)$ tetszőleges folytonos és korlátos függvény. (Ez Hille tétele.)

E célból először állítsuk elő explicit alakban $e^{a\Delta_h} f(x)$-et. (5. 3)-ból könnyen adódik, hogy

$$e^{a\Delta_h} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n \Delta_h^n f(x)}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^k e^{-\frac{a}{h}}}{k!} f(x+kh). \tag{5. 13}$$

Így tehát

$$e^{a\Delta_h} f(x) = \mathbf{M}\left(f\left(x + h\xi_{\frac{a}{h}}\right)\right), \tag{5. 14}$$

ahol ξ_λ egy λ várható értékű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Mivel $\mathbf{M}(\xi_\lambda)=\lambda$ és $\mathbf{D}(\xi_\lambda)=\sqrt{\lambda}$, tehát $h\xi_{\frac{a}{h}}$ sztochasztikusan tart a-hoz, és így

$$\lim_{h\to 0} e^{a\Delta_h} f(x) = \lim_{h\to 0} \mathbf{M}\left(f\left(x+h\xi_{\frac{a}{h}}\right)\right) = f(x+a) = e^{aD} f(x).$$

Ezzel bebizonyítottuk Hille azon tételét, hogy ha $f(x)$ tetszőlegesen folytonos és korlátos függvény, és a pozitív szám, akkor

$$\lim_{h\to 0} e^{a\Delta_h} f(x) = e^{aD} f(x).$$

(A bizonyítást illetően lásd [18], [8], [9]).

Megvizsgálva, hogy a fenti bizonyításban tulajdonképpen mit használtunk ki, nem nehéz észrevenni, hogy a bizonyítási módszer a következő általánosabb tétel bizonyításához is elvezet.

3. tétel. Legyen $F(x)$ a $[0, +\infty)$ intervallumban definiált eloszlásfüggvény, amelynek

$$g(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dF(t) \tag{5. 15}$$

Laplace—Stieltjes transzformáltja az $s=0$ pont egy környezetében analitikus. Legyen $f(x)$ tetszőleges folytonos és korlátos függvény a valós tengelyen. Akkor

$$\lim_{h\to 0} g(-\Delta_h) f(x) = g(-D) f(x). \tag{5. 16}$$

Bizonyítás. Definíció szerint

$$g(-D) f(x) = \left(\int_0^\infty e^{Dt}\, dF(t)\right) f(x) = \int_0^\infty f(x+t)\, dF(t). \tag{5. 17}$$

Másrészt

$$g(-\Delta_h) f(x) = \int_0^\infty e^{\Delta_h t}\, dF(t) = \int_0^\infty \left[\sum_{k=0}^\infty f(x+kh) \frac{\left(\frac{t}{h}\right)^k e^{-\frac{t}{h}}}{k!}\right] dF(t) \tag{5. 18}$$

és így, ha ξ_λ egy λ várható értékű Poisson eloszlású valószínűségi változót jelöl, akkor

$$g(-\Delta_h) f(x) = \int_0^\infty \mathbf{M}\left(f\left(x+h\xi_{\frac{t}{h}}\right)\right) dF(t). \tag{5. 19}$$

Mivel $h\xi_{\frac{t}{h}}$ sztochasztikusan tart t-hez, ha $h\to 0$ és $f(x)$ korlátos és folytonos függvény, minden x-re

$$\lim_{h\to 0} \mathbf{M}\left(f\left(x+h\xi_{\frac{t}{h}}\right)\right) = f(x+t). \tag{5. 20}$$

Mivel $\mathbf{M}\left(f\left(x+h\xi_{\frac{t}{h}}\right)\right)$ egyenletesen korlátos t-ben és h-ban, (5. 20)-ból következik (5. 16).

Megjegyzések. A 3. tételből speciális esetként kapjuk Hille tételét, ha az

$F(t)$ eloszlásfüggvény elfajult, $F(t)=0$, ha $0 \leqq t \leqq a$ és $F(t)=1$, ha $t>a$. További érdekes speciális eset a következő: Ha $F(t)=1-e^{-t}$, ha $0 \leqq t < +\infty$, akkor

$$g(s) = \frac{1}{1+s} = \sum_{n=0}^{\infty} (-s)^n$$

és így

$$g(-D)f(x) = \int_0^{\infty} f(x+t)e^{-t}\,dt.$$

Ez esetben

$$g(-\Delta_h)f(x) = \frac{h}{h+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(x+kh)}{(1+h)^k}.$$

Így tehát a 3. tétel szerint ha $f(x)$ folytonos és korlátos függvény

$$\lim_{h \to 0} h \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(x+kh)}{(1+h)^k} = \int_0^{\infty} f(x+t)e^{-t}\,dt.$$

Megjegyzendő, hogy ha $f(x)$ akárhányszor differenciálható és a $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}x$ sor konvergens, $\frac{1}{1-D} f(x)$ egyenlő e sor összegével.

6. §. HATVÁNYSOROK NEMFOLYTATHATÓSÁGA

E §-ban azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy ha $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ komplex értékű független valószínűségi változók, az

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n \tag{6. 1}$$

véletlen hatványsor viselkedéséről, közelebbről konvergenciasugaráról és a konvergencia körén túl való folytathatóságáról mit lehet mondani. Mint látni fogjuk, ezúton igen érdekes, tisztán függvénytani jellegű eredményeket is lehet nyerni.

Az ilyen jellegű vizsgálatokat É. BOREL [19] kezdeményezte még 1896-ban, azzal, hogy kimondta (nem egészen pontosan megfogalmazva) azt a sejtését, hogy egy véletlen együtthatójú hatványsor általában nem folytatható a konvergenciakörén túl, azaz a konvergenciakör a hatványsor által előállított függvénynek természetes határa. Ebben az irányban elsőnek H. STEINHAUS [20] ért el eredményt, aki bebizonyította, hogy ha $\alpha_n = a_n e^{i\theta_n}$, ahol $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ egy pozitív számokból álló számsorozat, amelyre $\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$ véges pozitív szám, és a θ_n $(n=0, 1, \ldots)$ valószínűségi változók függetlenek és egyenletes eloszlásúak $(0, 2\pi)$-ben, akkor (6. 1) 1 valószínűséggel nem folytatható az R sugarú körön túl, vagyis az $f(z)$ függvénynek a $|z|=R$ körvonal a *természetes határa*. PALEY és ZYGMUND [21] bebizonyították ugyanezt az állítást azon feltevés mellett, hogy $\alpha_n = a_n \cdot \xi_n$, ahol $\{a_n\}$ tetszőleges komplex számokból álló számsorzat, amelyre $\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$ pozitív véges szám és ξ_n $(n=1, 2, \ldots)$ a $\pm$ értékeket $\frac{1}{2}$ valószínűséggel felvevő független

valószínűségi változók. Jelölje $R_n(x)$ az n-edik Rademacher függvényt, vagyis legyen

$$R_n(x) = \operatorname{sign}(\sin 2^n \pi x) \qquad (n = 0, 1, \ldots;\ 0 \leqq x \leqq 1) \tag{6.2}$$

és legyen

$$f(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R_n(x) z^n. \tag{6.3}$$

Paley és Zygmund tételét úgy is ki lehet mondani, hogy azon x-ek halmaza, amelyekre $f(x, z)$ folytatható az R sugarú körön túl, zérus mértékű. E tételből következik, hogy *egy tetszőleges véges R konvergenciasugarú hatványsort lehet úgy előjelezni, hogy az eredményként kapott hatványsor ne legyen folytatható az R sugarú körön túl.* FATOU-nak ezt a sejtését először HURWITZ és PÓLYA GYÖRGY bizonyították be l.[40]

Ez utóbbi állítás már tisztán függvénytani jellegű.

Könnyű észrevenni, hogy Borel sejtése teljes általánosságban nem igaz; így például az

$$f(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{R_n(x)}{2^n}\right) z^n \tag{6.4}$$

hatványsor konvergenciasugara minden x-re 1, de a függvény folytatható a $|z| < 2$ körbe. E példa alapján D. BLACKWELL Borel sejtését a következőképpen módosította: Ha $\{\alpha_n\}$ független valószínűségi változók egy sorozata, akkor megadhatók olyan b_n állandók, hogy a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n - b_n) z^n \tag{6.5}$$

hatványsor 1 valószínűséggel nem folytatható a konvergencia körén túl, és a (6. 5) sor konvergencia sugara legalább akkora mint a $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ hatványsoré.

A (6. 4) ellenpéldát ez a módosítás nyilván eliminálja, ugyanis ha $\alpha_n = 1 + \frac{R_n(x)}{2^n}$, és $b_n = 1$ $(n = 0, 1, \ldots,$ akkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n - b_n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(x) \left(\frac{z}{2}\right)^n \tag{6.6}$$

hatványsor konvergenciasugara minden x-re 2 és a PALEY—ZYGMUND-tétel szerint a (6. 6) hatványsor majdnem minden x-re nem folytatható e körön túl.

C. RYLL-NARDZEWSKI 1953-ban bebizonyította [22], hogy Blackwell ezen sejtése valóban igaz.

J. P. KAHANE [23[bebizonyította, hogy abban az esetben, ha az α_n együtthatók eloszlása szimmetrikus a 0 pontra (abban az értelemben, hogy $-\alpha_n$ és α_n egyforma eloszlásúak), akkor Borel sejtése az eredeti alakban igaz, vagyis ez esetben Ryll—Nardzewsky tételében az a_n állandó minden n-re zérusnak választható. Kahane e tétele nyilvánvalóan speciális esetként tartalmazza Steinhaus és Paley—Zygmund tételeit, valamint pl. a következő állítást: θ_n vegye fel $1/N_n$ valószínűséggel a $2\pi \frac{k}{N_n}$ értékeket $(k = 0, 1, \ldots, N_n - 1)$ és a θ_n változók legyenek függetlenek. Legyen

$$\alpha_n = a_n e^{i\theta_n} \tag{6.7}$$

és

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}; \tag{6.8}$$

akkor a (6. 1) hatványsor 1 valószínűséggel nem folytatható az R sugarú körön túl.

Alábbiakban előbb KAHANE tételét bizonyítjuk be, azután megmutatjuk, hogy ebből már következik RYLL-NARDZEWSKI tétele.*

Először bebizonyítjuk, hogy a (6. 1) véletlen hatványsor konvergenciasugara 1 valószínűséggel állandó. A (6. 1) hatványsor konvergenciasugarát ϱ-val jelölve

$$\varrho = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\alpha_n|}\right)^{-1} = R(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots). \tag{6. 9}$$

ϱ általában egy valószínűségi változó. Az $R(x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots)$ végtelen sok változós függvény nyilván változóinak Baire függvénye és azzal a tulajdonsággal bír, hogy véges sok x_k értéket megváltoztatva a függvény értéke nem változik meg.

Így tehát alkalmazható KOLMOGOROV ún. nulla-vagy-egy törvénye, és így azt kapjuk, hogy ϱ értéke 1 valószínűséggel állandó; legyen ez az állandó érték R, akkor tehát (6. 1) konvergenciakörének sugara 1 valószínűséggel R. Feltesszük most, hogy $0 < R < +\infty$, egyébként ugyanis a tétel állítása semmitmondó. Bebizonyítjuk most a következő állítást. Az R sugarú kör egy tetszőleges $Z_1 = Re^{i\theta_1}$ rögzített pontjában a (6. 1) hatványsor által előállított függvény vagy 1 valószínűséggel reguláris, vagy 1 valószínűséggel szinguláris. E célból fejtsük sorba a (6. 1) függvényt a $Z_0 = \frac{z_1}{2}$ pont körül. Bevezetve a $Z = Z_0 + \zeta$ jelölést,

$$f(z) = f(z_0+\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z_0+\zeta)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \zeta^k, \tag{6. 10}$$

ahol

$$\beta_k = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} z_0^{n-k} \alpha_n. \tag{6. 11}$$

Így a (6. 10) sor konvergenciasugarát r_{z_1}-el jelölve

$$r_{z_1} = \left(\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|\beta_k|}\right)^{-1}. \tag{6. 12}$$

Mármost r_{z_1} felfogható, mint az $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ változók függvénye:

$$r_{z_1} = S(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots),$$

ahol

$$S(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) = \left(\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\left|\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} z_0^{n-k} x_n\right|}\right)^{-1}.$$

$S(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ nyilván változóinak Baire-függvénye, amelynek értéke nem változik meg, ha az x_k változók közül véges soknak az értékét megváltoztatjuk, hiszen $\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} z_0^{n-k} x_n$ nem függ a k-nál kisebb j indexű x_j -ktől. Így tehát alkalmazható a nulla-vagy-egy törvény és így r_{z_1} valószínűséggel egyenlő egy R_{z_1} állandóval. Mármost két eset lehetséges: vagy $R_{z_1} = \frac{R}{2}$ vagy $R_{z_1} > \frac{R}{2}$ ($R_{z_1} < \frac{R}{2}$ nyilván nem

* Ujabban *Kahane* is észrevette, hogy tételéből *Ryll-Nardzewski* általánosabb tétele levezethető; sajtó alatt levő könyvében (l. [39]) már így bizonyítja *Ryll-Nardzewski* tételét.

lehetséges, hiszen a $|z-z_0|<\frac{R}{2}$ kör teljes egészében benne van a $|z|<R$ körben). Ha $R_{z_1}=R$, akkor a z_1 pontban $f(z)$ szinguláris, feltéve, hogy $\varrho=R$ és $\varrho_{z_1}=R_{z_1}$, tehát 1 valószínűséggel, hiszen egy hatványsor konvergenciakörének kerületén van legalább egy szinguláris pontja az előállított függvénynek és a $|z-z_0|=\frac{R}{2}$ körnek az összes z_1-től különböző pontjai a $|z|=R$ kör belsejében fekszenek, tehát nem lehetnek szinguláris pontok. Ha viszont $R_{z_1}>\frac{R}{2}$, akkor a z_1 pontban $f(z)$ 1 valószínűséggel reguláris, hiszen ez esetben z_1 1 valószínűséggel belső pontja a (6. 10) hatványsor konvergenciakörének. Mármost kimutatjuk, hogy ha α_n és $-\alpha_n$ egyforma eloszlásúak, az utóbbi lehetőség egyetlen z_1-re sem következhet be. Tegyük fel ugyanis, hogy a $z_1=Re^{i\theta_1}$ pontban a (6. 1) függvény 1 valószínűséggel reguláris volna; ez esetben, mint láttuk, tehát $R_{z_1}>\frac{R}{2}$ és így megadható egy $\theta_1-\frac{\pi}{N}\leqq\theta\leqq\theta_1+\frac{\pi}{N}$ intervallum, ahol N egy elegendő nagy rögzített természetes egész szám, úgy, hogy a (6. 1) függvény a $z=Re^{i\theta}$, $\theta_1-\frac{\pi}{N}\leqq\theta\leqq\theta_1+\frac{\pi}{N}$ íven 1 valószínűséggel mindenütt reguláris.

Vizsgáljuk most a (6. 1) hatványsor helyett az

$$f_k(z)=\sum_{n\not\equiv k \bmod N}\alpha_n z^n-\sum_{n\equiv k \bmod N}\alpha_n z^n \tag{6. 13}$$

hatványsorokat ($k=0, 1, \ldots, N-1$). Mivel $f_k(z)$ hatványsorában z^n együtthatója minden n-re vagy α_n (ha $n\not\equiv k \bmod N$), vagy $-\alpha_n$ (ha $n\equiv k \bmod N$), tehát $f_k(z)$ minden egyes együtthatója ugyanolyan eloszlású, mint $f(z)$ megfelelő együtthatója. Ennélfogva az $f_k(z)$ függvény 1 valószínűséggel ugyanolyan tulajdonságokkal bír, mint az $f(z)$ függvény, tehát az $f_k(z)$ függvény is 1 valószínűséggel reguláris lesz a $z=Re^{i\theta}$, $\theta_1-\frac{\pi}{N}\leqq\theta\leqq\theta_1+\frac{\pi}{N}$ íven; így az

$$g_k(z)=\frac{f(z)-f_k(z)}{z^k}=2\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{Nj+k}Z^{Nj} \tag{6. 14}$$

hatványsor is reguláris lesz az említett íven. Azonban

$$g_k\left(ze^{\frac{2\pi ir}{N}}\right)=g_k(z)\qquad(r=1, 2, \ldots, N-1)$$

és így $g_k(z)$ reguláris lesz a teljes R sugarú körön, tehát konvergenciasugara nagyobb lesz, mint R.

Mivel ez k minden értékére igaz, ($k=0, 1, \ldots, N-1$) tehát a

$$\sum_{k=0}^{N-1}z^k g_k(z)$$

függvény is reguláris lesz egy $R'>R$ sugarú körben. Mivel azonban

$$\sum_{k=0}^{N-1}z^k g_k(z)=2f(z) \tag{6. 15}$$

ebből következik, hogy $f(z)$ is reguláris az $R' > R$ sugarú körben, ami viszont ellentmond R definíciójának. Így tehát ellentmondásra vezet az a feltevés, hogy van olyan z_1, amelyre $R_{z_1} > \frac{R}{2}$; ezzel bebizonyítottuk, hogy a $|z| = R$ kör kerületének minden pontja 1 valószínűséggel szinguláris pontja $f(z)$-nek. Vegyünk most a $|z| = R$ körön egy tetszőleges megszámlálható és mindenütt sűrű pontsorozatot. Akkor 1 valószínűséggel $f(z)$-nek ezen pontok mind egyidejűleg szinguláris pontjai, tehát $f(z)$-nek a $|z| = R$ kör 1 valószínűséggel természetes határa. Ezzel KAHANE tételét bebizonyítottuk.

Most bebizonyítjuk RYLL-NARDZEWSKI tételét. Az α_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ valószínűségi változók legyenek az $\mathcal{F} = [\Omega, \mathcal{A}, P]$ valószínűségi mezőn értelmezve, vagyis legyen $\alpha_n = \alpha_n(\omega)$ ahol $\omega \in \Omega$. Legyen $\mathcal{F}^* = [\Omega^*, \mathcal{A}^*, P^*]$ egy $\mathcal{F}$-fel izomorf másik valószínűségi mező és legyenek $\alpha_n^* = \alpha_n^*(\omega^*)$ az α_n-nek megfelelő valószínűségi változók: akkor tehát α_n^* ugyanolyan eloszlású, mint α_n és az α_n^* változók is függetlenek. Tekintsük most az $\mathcal{F}$ és $\mathcal{F}^*$ valószínűségi mezők direkt szorzatát, és azon a $\delta_n = \alpha_n(\omega) - \alpha_n(\omega^*)$ valószínűségi változókat. A δ_n $(n = 0, 1, \ldots)$ valószínűségi változók nyilván függetlenek és szimmetrikus eloszlásúak lesznek.

Így tehát KAHANE tétele alkalmazható a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n z^n \tag{6. 16}$$

véletlen hatványsorra, tehát ha $r = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\delta_n|}\right)^{-1}$, akkor a (6. 16) által definiált függvény 1 valószínűséggel nem folytatható a $|z| = r$ sugarú körön túl. (Könnyen belátható, hogy $r \geqq R$.) Ez azt jelenti, hogy azon (ω, ω^*) pontok halmazának mértéke, amelyekre a (6. 16) függvénynek a $|z| = r$ kör a természetes határa, a szorzattérben 1-gyel egyenlő. Így tehát (Fubini tétele szerint) majdnem minden rögzített ω^*-ra (Ω^*-ban) a (6. 16) sornak majdnem minden ω-ra a $|z| = r$ kör a természetes határa. Ha tehát ω^* egy az említett tulajdonságú rögzített elem és $a_n = \alpha_n^*(\omega^*)$, akkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n - a_n) z^n \tag{6. 17}$$

sornak a $|z| = r \geqq R$ kör 1 valószínűséggel a természetes határa. Ezzel RYLL-NARDZEWSKI tételét bebizonyítottuk.

Újabban L. ARNOLD [24] hasonló eredményeket bizonyított be véletlen egész függvényekre.

Legyenek α_n $(n = 0, 1, \ldots)$ független valószínűségi változók és legyen (1 valószínűséggel)

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|\alpha_n|} = 0. \tag{6. 18}$$

Akkor a (6. 1) véletlen hatványsor 1 valószínűséggel egész függvényt állít elő. Az $f(z)$ egész függvény ϱ rendje nyilván 1 valószínűséggel állandó lesz, hiszen egy ismert képlet szerint (lásd [27])

$$\varrho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n \log n}{\log \frac{1}{|\alpha_n|}} \tag{6. 19}$$

és így a nulla-vagy-egy törvényből következik, hogy 1 valószínűséggel ϱ állandó. (Persze ez az állandó érték $+\infty$ is lehet!)

Tegyük fel, hogy az $f(z)$ véletlen egész függvény rendje 1 valószínűséggel a *véges* ϱ számmal egyenlő. Ez esetben $f(z)$ *típusa* a

$$\tau = \frac{1}{e\varrho} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\alpha_n|^\varrho} \tag{6.20}$$

képlettel határozható meg, így tehát a nulla-vagy-egy törvény szerint τ is 1 valószínűséggel állandó. Ha az α_n együtthatók valószínűségeloszlásáról konkrét feltevéseket teszünk, a ϱ és τ értékeket explicite kiszámíthatjuk. Így pl. ARNOLD megmutatta, hogy ha

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n!} z^n, \tag{6.21}$$

ahol $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \ldots$ független valószínűségi változók, abszolút értékeik egyforma eloszlásúak, és közös

$$F(x) = \mathbf{P}(\gamma_n < x) \tag{6.22}$$

eloszlásfüggvényük eleget tesz az

$$\int_0^{\infty} (1 - F(x^x))\, dx < +\infty \tag{6.23}$$

feltételnek, akkor $f(z)$ 1 valószínűséggel elsőrendű egész függvény, amelynek típusa 1 valószínűséggel 1-gyel egyenlő, ha $\int_1^{\infty} \log x\, dF(x)$ véges és $+\infty$-nel, ha $\int_1^{\infty} \log x\, dF(x) = +\infty$.

E kérdéskörben számos probléma vár még megoldásra.

7. §. EGYENLETESEN, DE NEM ABSZOLÚT KONVERGENS HATVÁNYSOROK

Legyen a

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \tag{7.1}$$

hatványsor konvergenciaköre az egységkör. Tegyük fel, hogy a (7. 1) sor magán az egységkörön is konvergens, mégpedig egyenletesen. Ez a helyzet természetesen, ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < +\infty, \tag{7.2}$$

vagyis ha a (7. 1) sor az egységkörön abszolút konvergens. H. BOHR vetette fel a kérdést 1910-ben, hogy a (7. 2) feltétel szükséges-e ahhoz, hogy (7. 1) egyenletesen konvergáljon, ha $|z| = 1$, vagyis hogy *létezik-e olyan hatványsor, amely az egységkörön egyenletesen konvergens, de nem abszolút konvergens?*

FEJÉR LIPÓT azt sejtette, hogy a $\sqrt{1 - z e^{\frac{1}{z-1}}}$ függvény hatványsora rendelkezik ezzel a tulajdonsággal; RIESZ MARCELL bebizonyította, hogy ez valóban

így van. Később G. H. HARDY és maga FEJÉR LIPÓT más, egyszerűbb példákat adtak erre (lásd [25]). A. ZYGMUND viszont bebizonyította [26], hogy Hadamard-hézagos hatványsoroknál ez a jelenség nem léphet fel, amennyiben kimutatta, hogy ha $\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqq q > 1$, akkor a

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k} \tag{7.3}$$

hatványsor csak úgy lehet konvergens a $|z| = 1$ egységkör minden pontjában, ha abszolút konvergens, vagyis ha a (7. 2) teljesül.

G. PIRANIAN vetette fel a kérdést, hogy természetes számok mely $\{n_k\}$ sorozataira létezik olyan $\{a_k\}$ számsorozat, amelyre $\sum |a_k| = +\infty$, azonban a (7. 3) sor ennek ellenére egyenletesen konvergens, ha $|z| = 1$. Ez irányban a legmesszebbmenő eredményt ERDŐS PÁL érte el [28], aki valószínűségszámítási módszerrel bebizonyította, hogy ahhoz, hogy létezzék olyan (7. 3) alakú hatványsor, amely az egységkörön egyenletesen konvergens, de amelyre $\sum |a_k| = +\infty$, elegendő feltenni, hogy az n_k számok eleget tesznek az alábbi feltételnek: Megadható egy olyan $j_1 < j_2 < \ldots < \ldots < j_r < \ldots$ számsorozat, hogy

$$\liminf_{r \to \infty} \sqrt[r]{n_{j_r+r} - n_{j_r}} = 1. \tag{7.4}$$

A (7. 4) feltétel teljesül például, ha

$$\liminf_{k \to +\infty} \sqrt[k]{n_k} = 1. \tag{7.5}$$

Ugyanis ez esetben van olyan k_h $(h = 1, 2, \ldots)$ számsorozat, hogy $k_h \to +\infty$ és

$$\lim_{h \to \infty} \sqrt[k_h]{n_{k_h}} = 1. \tag{7.6}$$

Válasszunk egy r számot a $\left[\frac{k_h}{3}, \frac{2k_h}{3}\right]$ intervallumban, azaz legyen $\frac{k_h}{3} \leqq r < \frac{2k_h}{3}$ és legyen $j_r = k_h - r$, akkor

$$\sqrt[r]{n_{j_r+r} + n_{j_r}} \leqq \sqrt[r]{n_{j_r+r}} = \sqrt[r]{n_{k_h}} \leqq \left(\sqrt[k_h]{n_{k_h}}\right)^3,$$

tehát (7. 6) miatt (7. 4) teljesül. A (7. 4) feltétel azonban (7. 5)-nél jóval kevesebbet kíván meg. Teljesül például (7. 4), ha az $\{n_k\}$ számsorozat a következő:

$$3;\ 17, 18;\ 513, 514, 515;\ \ldots;\ 2^{r^2}+1, 2^{r^2}+2, \ldots, 2^{r^2}+r;\ \ldots. \tag{7.7}$$

E sorozatra (7. 5) nem teljesül, mivel

$$\lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{n_k} = 4.$$

A (7. 4) feltétel viszont teljesül, hiszen a sorozat k-adik tagja a következőképpen állítható elő:

$$n_k = 2^{r^2} + k - \binom{r}{2} \quad \text{ha} \quad \binom{r}{2} < k \leqq \binom{r+1}{2}, \qquad r = 1, 2, \ldots,$$

tehát ha $j_r = \binom{r+1}{2} + 1$, akkor

$$n_{j_r+r} = n_{\binom{r+2}{2}} = 2^{(r+1)^2} + r + 1 \quad \text{és} \quad n_{j_r} = 2^{(r+1)^2} + 1,$$

tehát

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt[r]{n_{j_r+r} - n_{j_r}} = \lim_{r\to\infty} \sqrt[r]{r} = 1.$$

ERDŐS tételének bizonyítási módszere sok más rokon problémában is jól alkalmazhatónak bizonyult, ezért alábbiakban részletesen ismertetjük Erdős tételének bizonyítását.* Abból a célból, hogy a bizonyítás alapgondolata minél jobban kidomborodjék, a tételt nem teljes általánosságban, hanem csak a (7. 7) alatti speciális sorozatra ismertetjük. Az általános eset lényegében ugyanúgy tárgyalható.

A bizonyításhoz szükségünk lesz a következő — önmagában is érdekes — valószínűségszámítási segédtételre.**

LEMMA. Legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_n$ független valószínűségi változók, amelyek a ± 1 értékeket $\frac{1}{2}$ valószínűséggel veszik fel. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Akkor

$$\text{(7. 8)} \qquad \mathbf{P}\left(\max_{0\leqq\varphi\leqq 2\pi} \left| \sum_{k=1}^{n} \xi_k e^{ik\varphi} \right| \geqq 4\sqrt{(5+\varepsilon) n \log n} \right) < \frac{1}{n^{1+\varepsilon}},$$

ha $n \geqq n_0$.

A lemma bizonyítása. A Markov-egyenlőtlenség szerint, ha $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tetszőleges valós számok, melyekre $|b_k| \leqq 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ továbbá $\delta > 0$ és $A > 0$ tetszőleges pozitív számok,

$$\text{(7. 9)} \qquad \mathbf{P}\left(\left| \sum_{k=1}^{n} \xi_k b_k \right| \geqq A \right) = 2\mathbf{P}\left(e^{\delta \sum_{k=1}^{n} \xi_k b_k} > e^{\delta A} \right) \leqq 2\mathbf{M}\left(e^{\delta \sum_{k=1}^{n} \xi_k b_k} \right) e^{-\delta A}.$$

Másrészt a ξ_k változók függetlensége miatt

$$\text{(7. 10)} \qquad \mathbf{M}\left(e^{\delta \sum_{k=1}^{n} \xi_k b_k} \right) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{e^{\delta b_k} + e^{-\delta b_k}}{2} \right).$$

Mivel $2k! \geqq 2^k \cdot k!$ $(k = 0, 1, \ldots)$, tehát

$$\text{(7. 11)} \qquad \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k!} \leqq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2/2)^k}{k!} = e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Ennélfogva (7. 10)-ből

$$\text{(7. 12)} \qquad \mathbf{M}\left(e^{\delta \sum_{k=1}^{n} \xi_k b_k} \right) \leqq e^{\frac{\delta^2}{2} \sum_{k=1}^{n} b_k^2}$$

* E bizonyítás gondolatmenete azonos *Erdős* eredeti bizonyításával, azonban részleteiben valamivel egyszerűbb.

** A segédtétel bizonyításának módszere azonos a Csebisev-féle egyenlőtlenség Bernstein-féle élesítésének (1. [8], 319—321. o.) bizonyításával, azonban a minket itt érdeklő speciális esetre a tétel valamivel egyszerűbben bizonyítható, mint az általános esetben, ezért közöljük itt a bizonyítást. Egyébként a segédtételhez hasonló, komplex értékű valószínűségi változókra vonatkozó Bernstein-típusú egyenlőtlenségek szerepelnek a [31], [34] és [38] dolgozatokban is.

és így $A=\frac{\lambda}{2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$, $\delta=\frac{\lambda}{2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}}$ helyettesítéssel, (ahol $\lambda>0$), azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k b_k\right| > \frac{\lambda}{2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\right) \leqq 2e^{-\frac{\lambda^2}{8}}. \tag{7.13}$$

Mármost legyen φ tetszőleges rögzített érték ($0\leqq\varphi\leqq 2\pi$), akkor

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e^{ik\varphi}\right| \leqq 2\max\left(\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\cos k\varphi\right|, \sum_{k=1}^{n}\xi_k\sin k\varphi\right)$$

és így

$$\mathbf{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e^{ik\varphi}\right| > \lambda\sqrt{n}\right) \leqq \tag{7.14}$$

$$\leqq \mathbf{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\cos k\varphi\right| > \frac{\lambda}{2}\sqrt{n}\right)+\mathbf{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\sin k\varphi\right| > \frac{\lambda}{2}\sqrt{n}\right).$$

Mivel $\sum_{k=1}^{n}\cos^2 k\varphi\leqq n$ és $\sum_{k=1}^{n}\sin^2 k\varphi\leqq n$, (7.13)-ból és (7.14)-ből azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e^{ik\varphi}\right| > \lambda\sqrt{n}\right) \leqq 4e^{-\frac{\lambda^2}{8}}. \tag{7.15}$$

Alkalmazzuk most a (7.15) egyenlőtlenséget a $\varphi=\varphi_j=\frac{2\pi j}{N}$ értékekre ($j=0, 1, \ldots, N-1$); azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{P}\left(\max_{0\leqq j\leqq N-1}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e^{ik\varphi_j}\right| > \lambda\sqrt{n}\right) \leqq 4Ne^{-\frac{\lambda^2}{8}}. \tag{7.16}$$

Ha $\varphi_j<\varphi<\varphi_j+1$, akkor

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e^{ik\varphi}-\sum_{k=1}^{n}\xi_k e^{ik\varphi_j}\right| \leqq \frac{2\pi n^2}{N}.$$

Így tehát

$$\max_{0\leqq\varphi\leqq 2\pi}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e^{ik\varphi}\right| \leqq \frac{2\pi n^2}{N}+\max_{0\leqq j\leqq N-1}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e^{ik\varphi_j}\right|$$

és ezért (7.16)-ból

$$\mathbf{P}\left(\max_{0\leqq\varphi\leqq 2\pi}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e^{ik\varphi}\right| > \lambda\sqrt{n}+\frac{2\pi n^2}{N}\right) \leqq 4Ne^{-\frac{\lambda^2}{8}}. \tag{7.17}$$

Legyen

$$\frac{2\pi n^{\frac{3}{2}}}{\lambda} \leqq N < \frac{2\pi n^{\frac{3}{2}}}{\lambda}+1, \tag{7.18}$$

akkor tehát

$$\mathbf{P}\left(\max_{0\leqq\varphi\leqq 2\pi}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e^{ik\varphi}\right| > 2\lambda\sqrt{n}\right) \leqq \left(\frac{8\pi n^{\frac{3}{2}}}{\lambda}+4\right)e^{-\frac{\lambda^2}{8}}. \tag{7.19}$$

λ helyébe a $\lambda = 2\sqrt{(5+2\varepsilon)\log n}$ értéket helyettesítve, kapjuk, hogy

$$\mathbf{P}\left(\max_{0\leqq\varphi\leqq 2\pi}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e^{ik\varphi}\right| > 4\sqrt{(5+2\varepsilon)n\log n}\right) \leqq \frac{1}{n^{1+\varepsilon}},$$

ha $\dfrac{4\pi}{\sqrt{5\log n}} + \dfrac{4}{n^{\frac{3}{2}}} < 1$, vagyis ha $n \geqq n_0$.

Ezzel lemmánkat bebizonyítottuk.

Mármost vizsgáljuk az

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k z^k = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^2}\sum_{k=2^{r^2}+1}^{2^{r^2}+r}\xi_k z^k \tag{7.20}$$

véletlen hatványsort, ahol a ξ_k valószínűségi változók függetlenek és a $\pm$ értékeket $\frac{1}{2}$ valószínűséggel veszik fel. Más szóval legyen

$$\alpha_k = \begin{cases} \dfrac{\xi_k}{r^2}, & \text{ha} \quad 2^{r^2}+1 \leqq k \leqq 2^{r^2}+r;\ r = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ez esetben

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k| = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r} = +\infty,$$

tehát a (7. 20) alatti hatványsor nem abszolút konvergens az egységkörön. Másrészt $f(z)$ nyilván felírható az

$$f(z) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{z^{2^{r^2}}}{r^2}Q_r(z) \tag{7.21}$$

alakban, ahol

$$Q_r(z) = \sum_{j=1}^{r} z^j \xi_{2^{r^2}+j}. \tag{7.22}$$

Ilymódon lemmánk szerint, ha $r \geqq n_0$

$$\mathbf{P}\left(\operatorname*{Max}_{0\leqq\varphi\leqq 2\pi}|Q_r(e^{i\varphi})| > 4\sqrt{(5+2\varepsilon)r\log r}\right) < \frac{1}{r^{1+\varepsilon}}. \tag{7.23}$$

Tehát a Borel—Cantelli lemma szerint 1 valószínűséggel véges sok r kivételével érvényes a

$$\operatorname*{Max}_{0\leqq\varphi\leqq 2\pi}|Q_r(e^{i\varphi})| \leqq 4\sqrt{(5+2\varepsilon)r\log r}$$

egyenlőtlenség és így a

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\operatorname*{Max}_{0\leqq\varphi\leqq 2\pi}|Q_r(e^{i\varphi})|}{r^2}$$

sor 1 valószínűséggel konvergens, hiszen tagjai 1 valószínűséggel valahonnan kezdve kisebbek a

$$4\sqrt{5+2\varepsilon}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\log r}}{r^{\frac{3}{2}}}$$

konvergens numerikus sor megfelelő tagjainál. Másrészt viszont, ha $2^{s^2} \leqq M < 2^{(s+1)^2}$

$$\operatorname*{Max}_{0 \leqq \varphi \leqq 2\pi} \left| \sum_{k=M}^{\infty} \alpha_k e^{ik\varphi} \right| \leqq \frac{1}{s} + \sum_{r=s+1}^{\infty} \frac{\operatorname{Max} |Q_s(e^{i\varphi})|}{s^2}.$$

Tehát a (7. 22) sor 1 valószínűséggel egyenletesen konvergál a $|z| = 1$ körön.

Tehát a (7. 22) hatványsor 1 valószínűséggel bír azzal a tulajdonsággal, hogy az egységkörön egyenletesen konvergens, de nem abszolút konvergens. Így tehát léteznek a kívánt tulajdonságú hatványsorok, ha $\{n_k\}$ a (7. 22) alatti számsorozat. Ezzel Erdős tételét a szóban forgó speciális esetre bebizonyítottuk. Mint fentebb hangsúlyoztuk, az általános esetben a bizonyítás lényegében ugyanígy végezhető el.

8. §. HATVÁNYSOROK SZINGULÁRIS SUGARAIRÓL

E §-ban az egységkörben reguláris és ott nem korlátos analitikus függvények D osztályával foglalkozunk. Ha $f(z)$ ilyen függvény, és φ egy rögzített értékére $(0 \leqq \varphi < 2\pi)$ $f(z)$ semmilyen pozitív ε-ra nem korlátos a $\varphi - \varepsilon \leqq \arg z \leqq \varphi + \varepsilon$, $|z| < 1$ szögtérben, akkor a $z = re^{i\varphi}$ $(0 < r < 1)$ sugarat ($f(z)$-re nézve) *szinguláris sugár*nak, ellenkező esetben *reguláris sugár*nak nevezzük. Nyilvánvaló, hogy minden D-beli $f(z)$ függvénynek van legalább egy szinguláris sugara. D. GAIER és W. MEYER-KÖNIG, akik e fogalmat bevezették [29], megmutatták, hogy ha a D osztályba tartozó $f(z)$ függvény hatványsora Hadamard-hézagos, vagyis

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k}, \tag{8. 1}$$

ahol

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqq q > 1, \tag{8. 2}$$

akkor minden sugár szinguláris $f(z)$-re nézve. Ha egy $\{n_k\}$ sorozatnak megvan az a tulajdonsága, hogy ha a (8. 1) alatti hatványsorú $f(z)$ függvény a D osztályba tartozik, akkor $f(z)$-re nézve minden sugár szinguláris, nevezzük az $\{n_k\}$ sorozatot S-sorozatnak. Így tehát minden a (8. 2) feltételnek eleget tevő $\{n_k\}$ sorozat S-sorozat.

Könnyen belátható, hogy ha (8. 2) helyett csak azt tesszük fel, hogy a (8. 1) sor Fabry-hézagos, vagyis, hogy

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{n_k}{k} = +\infty, \tag{8. 3}$$

akkor még az is lehetséges, hogy $f(z)$-nek csak egyetlen egy szinguláris sugara legyen. Így például, ha

$$f_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{j=1}^{k^2} z^{k^3+j}, \tag{8. 4}$$

akkor $f_1(z)$ nyilván a D osztályba tartozik és a $\varphi = 0$ sugár $f_1(z)$-nek szinguláris sugara (hiszen $\lim_{r \to 1} f(r) = +\infty$). Másrészt azonban, ha $z = re^{i\varphi}$, ahol $0 < \varphi < 2\pi$ és $0 < r < 1$, akkor

$$|f_1(z)| \leqq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right) \frac{2}{|1-z|} \leqq \frac{\pi^2}{3|1-e^{i\varphi}|} \tag{8. 5}$$

és így minden $z=re^{i\varphi}$ sugár $(0<\varphi<2\pi)$ reguláris sugár $f_1(z)$-re nézve. Így tehát nem minden a (8. 3) feltételnek eleget tevő $\{n_k\}$ sorozat S-sorozat.

ERDŐS PÁL bebizonyította [30], hogy (8. 3) helyett még az erősebb

$$\lim_{k\to+\infty}(n_{k+1}-n_k)=+\infty \tag{8.6}$$

feltétel sem biztosítja azt, hogy $\{n_k\}$ S-sorozat legyen. Könnyen belátható, hogy viszonylag lassan növekvő $\{n_k\}$ sorozatok is lehetnek S-sorozatok, mert az, hogy egy $\{n_k\}$ sorozat S-sorozat-e vagy nem, nemcsak az $\{n_k\}$ sorozat növekedésének sebességétől, hanem számelméleti tulajdonságaitól is függ. Ha például az $\{n_k\}$ sorozat azzal a tulajdonsággal bír, hogy megadható olyan végtelenhez tartó d_j $(j=1, 2, \ldots)$ egész számokból álló sorozat, hogy minden j-re az n_k számok véges sok kivétellel oszthatók d_j-vel, akkor $\{n_k\}$ S-sorozat. Egy $\{n_k\}$ sorozat tehát két okból lehet S-sorozat: azért, mert gyorsan növekszik, vagy a sorozat számelméleti tulajdonságai folytán.

A nagyságrend és a számelméleti tulajdonságok hatását úgy lehet szétválasztani, hogy vizsgáljuk azokat az $\{n_k\}$ S-sorozatokat, amelyek azzal a tulajdonsággal bírnak, hogy megadható hozzájuk egy ω_k számsorozat úgy, hogy $\lim_{k\to+\infty}\omega_k=+\infty$ és ha $\{n'_k\}$ egy tetszőleges olyan számsorozat, amelyre $|n'_k-n_k|<\omega_k$, akkor $\{n'_k\}$ is S-sorozat. Nevezzük a rövidség kedvéért e sorozatokat *stabilis S-sorozatok*nak.

Mármost ERDŐS PÁLlal írt dolgozatunkban [31] bebizonyítottuk azt, hogy ha az $\{n_k\}$ sorozat eleget tesz a (7. 4) feltételnek, akkor $\{n_k\}$ nem stabilis S-sorozat.

Ezt a tételt valószínűségszámítási úton bizonyítottuk be. A bizonyítás módszere hasonlít a 7. §-ban bemutatott módszerhez; az eltérés abban áll, hogy véletlen együtthatójú hatványsorok helyett *véletlen kitevőjű hatványsorokat* vizsgáltunk. Más szóval

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k z^{v_k} \tag{8.7}$$

alakú hatványsorokat vizsgáltunk, ahol $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ megadott számok, viszont $v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots$ pozitív egész értékű valószínűségi változók. A részleteket illetően utalunk az idézett [31] dolgozatra.

9. §. HÉZAGOS FOURIER-SOROK

N. WIENER [32] bebizonyította, hogy ha egy

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos n_k x+b_k\sin n_k x \tag{9.1}$$

alakú trigonometrikus sor a $[-\pi, +\pi]$ intervallum egy tetszőlegesen kicsiny $[a, b]$ részintervallumában Abel-szummábilis és szummája az $[a, b]$ intervallumban négyzetesen integrálható, akkor (9. 1) egy a teljes $[-\pi, +\pi]$ intervallumban négyzetesen integrálható $f(x)$ függvény Fourier-sora, vagyis

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2+b_k^2<+\infty \tag{9.2}$$

feltével, hogy az $\{n_k\}$ (természetes egész számokból álló) számsorozat eleget tesz a

$$\lim_{k\to+\infty}(n_{k+1}-n_k)=+\infty \tag{9.3}$$

hézagossági feltételnek.

A. ZYGMUND vetette fel még 1941-ben a következő problémát: (lásd [33], 380. l.). Lehet-e Wiener tételét általánosítani az L^2 tér helyett az L^q térre, ahol $q \neq 2$? ERDŐS PÁLlal együtt, valószínűségszámítási módszerrel, sikerült bebizonyítanunk [34], hogy ZYGMUND kérdésére a válasz negatív, ha $q > 2$. Pontosabban a következő tételt bizonyítottuk be: Létezik olyan $f(x)$ a $[-\pi, +\pi]$ intervallumban négyzetesen integrálható függvény, amelynek Fourier sora (9. 1) alakú, ahol az $\{n_k\}$ számsorozat eleget tesz a (9. 3) feltételnek, és amely függvény a következő tulajdonságokkal bír:

$f(x)$ korlátos a $-\pi \leqq x \leqq -\delta$ és $\delta \leqq x \leqq \pi$ intervallumokban minden $\delta > 0$- ra. $f(x)$ nem tartozik L^q függvényosztályba semmilyen $q > 2$-re.

Tételünk bizonyításának alapgondolata az volt, hogy vizsgáltunk bizonyos

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos v_k x \tag{9.4}$$

alakú Fourier-sorokat, ahol a_k egy megadott számsorozat, amelyre $\sum a_k^2 < +\infty$ (ez garantálta, hogy a (9. 4) sor egy L^2-beli függvény Fourier-sora legyen) és a v_k-k független, pozitív egész értékű valószínűségi változók, és megmutattuk, hogy a (9. 4) *véletlen Fourier-sor* 1 valószínűséggel rendelkezik a fent említett a) és b) tulajdonságokkal. A bizonyítási módszer ez esetben is hasonló volt a 7. §-ban ismertetett módszerhez.

Megjegyzendő, hogy később TURÁN PÁLnak [37] és Y. KATZNELSONnak (szóbeli közlés) valószínűségszámítási módszer nélkül is sikerült bebizonyítani, hogy létezik olyan (9. 1) alakú Fourier-sor, amely eleget tesz a (9. 2) és (9. 3) feltételeknek, és amelynek összege elég nagy q-ra (Turánnál $q > 6$) egy részintervallumban az L^q osztályhoz tartozik, de az egész $[-\pi, +\pi]$ intervallumban nem tartozik az L^q osztályba. Valószínűségszámítási módszer nélkül azonban eddig nem sikerült ezt *tetszőleges* $q > 2$-re megmutatni.

10. §. A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS EGYÉB ANALÍZISBELI ALKALMAZÁSAIRÓL

A valószínűségszámítás módszerei az analízis még számos más ágában és problémakörében is sikerrel alkalmazhatók, így pl. az alábbi kérdéskörökben: Határozott integrálok kiszámítása, θ-függvények elmélete, abszolút monoton függvények elmélete, momentumprobléma, polinomok és egész függvények gyökeinek eloszlása, divergens sorok szummációelmélete, Tauber-tételek, közönséges és parciális differenciálegyenletek elmélete, sajátértékek eloszlása, potenciálelmélet,* ortogonális sorok elmélete.**

E kérdéskörök közül egyeseket e dolgozat II. részében fogunk ismertetni.

IRODALOM

[1] J. KUBILIUS, Probabilistic methods in the theory of numbers, Amer. Math. Soc. Translation Series, Vol. 11. Providence, 1964.

[2] A. RÉNYI, Probabilistic methods in number theory, Proc. Internat. Congr. Math. (Edinburgh, 1958), pp. 529—539. Cambridge Univ. Press, 1960.

* E témakört illetően lásd [35].

** E témakört illetően lásd a [36] dolgozatot.

[3] M. KAC, Probability methods in some problems of analysis and number theory, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949) 641—665.
[4] P. ERDŐS—A. RÉNYI, Probabilistic methods in group theory, Journal d'Analyse Math. **14** (1965) 127—138.
[5] P. ERDŐS—P. TURÁN, On some problems of a statistical group theory, I. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie **4** (1965) 175—186, II—III. Acta Math. Acad. Sci. Hung. (sajtó alatt).
[6] M. G. KENDALL—P. A. P. MORAN, Geometrical probability, Griffin, London, 1963.
[7] P. A. P. MORAN, A note on recent research in geometric probability, Journal Appl. Probability 3 (1966) 453—463.
[8] RÉNYI, A.: Valószínűségszámítás, Tankönyvkiadó, 2. kiad. Bp. 1966.
[9] W. FELLER, Introduction to probability theory and its applications, Vol. II. Wiley, New York, 1966.
[10] S. BERNSTEIN, Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités, Kharkow Szoobcs. Mat. Obscsesztva, **13** (1912) 1—20.
[11] I. P. NATANSZON, Konstruktív függvénytan, Akad. Kiadó, Bp. 1952, 184. o.
[12] A. WIMAN, Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem grössten Gliede der zugehörigem Taylorschen Reihe, Acta Math. **37** (1914) 305—326.
[13] G. VALIRON, Lecons sur la théorie générale des fontions entières Toulouse, 1923.
[14] G. PÓLYA, Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem grössten Gliede der zugehörigen Taylorschen Reihe, Acta Math. **40** (1916) 311—319.
[15] P. C. ROSENBLOOM, Probability and entire functions, Studies in Mathematical Analysis and related topics, Essays in Honor of G. Pólya, Stanford Univ. Press, Stanford, 1962, p. 325—332.
[16] HINCSIN, A. J.: A statisztikus mechanika analitikus módszerei. Akad. Kiadó, Bp.
[17] HAYMAN, W. K.: A generalisation of Stirling's formula, Journal für die reine u. angew. Math. **196** (1956) 67—95.
[18] RÉNYI, A.: Valószínűségszámítás, Tankönyvkiadó, Bp. 1954.
[19] É. BOREL, Sur les séries de Taylor, Comptes Rendus **123** (1896) 1051—1052.
[20] H. STEINHAUS, Über die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Konvergenzkreis einer Potenzreihe ihre natürliche Grenze ist, Math. Zeitschrift, **31** (1930) 408—416.
[21] R. PALEY—A. ZYGMUND, On some series of functions, Proc. Cambridge Phil. Soc. **26** (1930) 337—357 és **28** (1932) 190—205.
[22] C. RYLL-NARDZEWSKI: D. Blackwell's conjecture on power series with random coefficients, Studia Math. **13** (1953) 30—36.
[23] J. P. KAHANE, Series de Fourier aléatoires, Université de Montréal, 1963, 1—174.
[24] L. ARNOLD, Wachstumseigenschaften zufälliger ganzen Funktionen. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, **5** (1966) 336—347.
[25] L. FEJÉR, Über Potenzreihen, deren Summe im abgeschlossenen Konvergenzkreise überall stetig ist. Sitzungsber. Bayer. Akad. Math.-Phys. Kl. 1917, 33—50.
[26] A. ZYGMUND: Quelques théorèmes sur les séries trigonométriques et celles de puissances. Studia Math. 3 (1931) 77—91.
[27] B. JA. LEVIN: Raszpredelenije kornej celüch funkcii. Moszkva, Gosztehizdat, 1956.
[28] P. ERDŐS, On uniform but not absolute convergence of power series with gaps, Annales Soc. Pol. Math. **25** (1952) 162—168.
[29] D. GAIER—W. MEYER-KÖNIG, Singuläre Radien bei Potenzreihen. Jahresber. Deutschen Math. Vereinigung **59** (1956) 36—48.
[30] P. ERDŐS, Über eine Fragestellung von Gaier und Meyer-König. Jahresber. Deutschen Math. Vereinigung **60** (1957) 89—92.
[31] P. ERDŐS—A. RÉNYI, On singular radii of power series, Publications Math. Inst. Hung. Acad. Sci. 3 (1958) 159—168.
[32] N. WIENER, A class of gap theorems, Annali di Pisa 3 (1934) 367—372.
[33] A. ZYGMUND, Trigomonetric series, Cambridge Univ. Press. 1959.
[34] P. ERDŐS—A. RÉNYI, On a problem of A. Zygmund. Studies in Math. Analysis and Related Topics, Essays in honor of G. Pólya, Stanford Univ. Press, 1962, 110—116.
[35] PAUL A. MEYER, Probability and potentials, Blaisdell, Waltham, 1966.
[36] RÉVÉSZ, P.: Ortogonalitás és függetlenség, MTA III. O. K. **15** (1965) 411—425.
[37] P. TURÁN, On a certain problem in the theory of power series with gaps, Studies in Math.

Analysis and Related Topics, Essays in honour of G. Pólya, Stanford Univ. Press, 1962. 404—409.
[38] P. ERDŐS—A. RÉNYI, A probabilistic approach to problems of diophantine approximation Illinois Journal Math. **1** (1957) 303—315.
[39] J. P. KAHANE, Some random series of functions (sajtó alatt.)
[40] A. HURWITZ und G. PÓLYA, Zwei Beweise eines von Herrn Fatou vermuteten Satzes, Acta Math. **40** (1915) 179—181.

МЕТОДЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В АНАЛИЗЕ I.

A. РЕНЪИ

PROBABILISTIC METHODS IN ANALYSIS I.

A. RÉNYI

A TOPOLOGIKUS SOKASÁGELMÉLET KIALAKULÁSA ÉS FEJLŐDÉSE

BOGNÁR MÁTYÁS

A sokaságelmélet a topológián belül centrális helyet foglal el. A sokaságok képezik ugyanis azt az alapot, melyet a matematika és a fizika különböző fejezetei (elsősorban a differenciálgeometria, komplex függvénytan, differenciálegyenletek elmélete, mechanika stb.) a megoldandó problémakörök természetétől függő struktúrával látnak el, hogy ezzel a vizsgált jelenségek körének a helyét meghatározhassák.

Milyen a bennünket körülvevő tér szerkezete? A múlt század geometriájának ez az izgalmas problémája ösztönözte a sokaságfogalom létrejöttét is. BOLYAI és LOBACSEVSZKIJ ugyan még csak két alternatívát lát, de hogy egyáltalán beszélhetünk alternatíváról, az az ő fellépésük érdeme. RIEMANN már más úton járt [75] (1854). Szerinte a tér csupán egyike a háromszoros kiterjedésű rendszereknek. A matematikának tisztáznia kell tehát a többszörös kiterjedésű rendszerek — vagy más szóval, többdimenziós sokaságok — általános tulajdonságait, azt a tényt pedig, hogy az elképzelhető háromdimenziós sokaságok közül melyik a valóságos tér, csakis a tapasztalat döntheti el.

Többdimenziós sokaságot alkotnak a meghatározó adatok folytonos szerkezetű összességei, például a különböző helyek a teret vagy az egyes színek a színsokaságot határozzák meg. Az egyes meghatározó adatokat folytonos szerkezetű összességben pontoknak nevezzük.

Egy pontnak egy másik pontba történő átmenete során súrolt pontok összessége egydimenziós sokaságot alkot. n-dimenziós sokaságot egy helyzetből egy másik helyzetbe átvitt $(n-1)$-dimenziós sokaság által az átvitel során súrolt pontok összessége ad. Ilyen módon épül fel RIEMANN-nál az n-dimenziós sokaság.

Ha egy n-dimenziós sokaságot (nem konstans függvénnyel) rendezett egydimenziósra, pl. a valós számok sokaságára képezünk le, akkor az azonos értéket felvevő pontok összessége az n-dimenziós sokaság egy $(n-1)$-dimenziós részsokaságát alkotja. Az eljárást folytatva megállapíthatjuk, hogy az n-dimenziós sokaságban a pontok helyét n darab számérték megadásával határozhatjuk meg.

RIEMANN egy hátrahagyott töredékben a sokaságok magasabb dimenziós összefüggési számainak meghatározásával is foglalkozik [76]. Ettől a pillanattól kezdve a sokaságfogalom pontosabbá és általánosabbá tételére, valamint a sokaságok és egyéb alakzatok szám vagy más invariánsainak meghatározására vonatkozó vizsgálatok egymással igen szoros kapcsolatban fejlődnek; lehetetlen az egyikben tett előrelépést a másikban elért haladás nélkül megérteni.

A RIEMANN-tól eredő összefüggési számok a felületekre vonatkozó adatok általánosításai. A megfelelő felületelméleti vizsgálatokkal doktori disszertációjában foglalkozott először, ahol konkrét definíciót adott a felületek összefüggési

számára [74] (1851). A következőket állapította meg: Egy felület összefüggő, ha bármely két pontja folytonos vonallal összeköthető, (határolt felület) egyszeresen összefüggő, vagy elemi, ha összefüggő és bármely keresztmetszet (határtól határig húzódó vonal) két részre osztja. Ha egy határolt felület n_1 keresztmetszet egymás utáni alkalmazásával m_1 elemi felületre bomlik és n_2 számú keresztmetszet a felületet m_2 elemi felületre bontja, akkor

$$n_1 - m_1 = n_2 - m_2.$$

Ez a felbontás módjától független $(n-m)$ szám a felület összefüggési rendje.

A felület összefüggési rendjének ezt a meghatározását módosította és általánosította RIEMANN többdimenziós sokaságokra a következő módon [76]:

Legyen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ egy M sokaság n-dimenziós nem határolt részsokaságainak olyan rendszere, hogy közülük akárhogy is szemeljünk ki $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ $(1 \leqq k \leqq m)$ elemeket, ezek együttesen ne határoljanak valamely M-beli $(n+1)$-dimenziós sokaságot. Rendelkezzenek az M-beli n-dimenziós $b_1, \ldots, b_m$ nem határolt sokaságok ugyanezzel a tulajdonsággal. Tegyük fel ezenkívül, hogy akármelyik b_i-hez hozzácsatolhatunk bizonyos a_j-ket úgy, hogy együtt már határoljanak egy M-beli $(n+1)$-dimenziós sokaságot, más szóval határoló rendszert alkossanak. Mármost ha egy M-beli n-dimenziós c nem határolt sokaság bizonyos a_j-kkel együtt határoló rendszert alkot, úgy bizonyos b_i-kkel együtt is határoló rendszert alkot és viszont. Ha bármely M-beli n-dimenziós c nem határolt sokaság bizonyos a_i-kkel együtt határoló rendszert alkot, akkor az M sokaság az n dimenzióban $(m+1)$-szeresen összefüggő.

Ugyanebben a töredékben az n dimenzióban egyszeresen összefüggő sokaságokat a keresztmetszet általánosítása segítségével is definiálja RIEMANN, és több megállapítást tesz az összefüggési számoknak a sokaság metszése során létrejövő kapcsolataira vonatkozólag.

RIEMANN-nal azonos módon értelmezte a sokaságok többdimenziós összefüggési számait BETTI is [19] (1871). Az irodalomban POINCARÉ nyomán ezeket a számokat Betti-féle számoknak hívják.

BETTI már matematikailag pontosabban körvonalazta, mit ért többdimenziós sokaságon. Ezt az a tény tette lehetővé, hogy időközben GRASSMANN és SCHLÄFLI munkássága nyomán megszületett az n-dimenziós euklideszi tér elmélete. SCHLÄFLI könyve [77] (1852) ugyan haláláig kiadatlan maradt, de GRASSMANN-nak a többdimenziós vektorterek elméletét megalapozó műve [43] (1862) a maga idején jelentős hatást váltott ki.

BETTI az n-dimenziós E^n euklideszi térben fekvő $(n-m)$-dimenziós sokaságot m darab

$$F_i(z_1, \ldots, z_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

egyenlettel adja meg. A termékeny intuíciók ellenére a korszak matematikai fogalomalkotásainak gyengéit mutatja, hogy BETTI semmilyen további feltevéssel nem él. Megemlíti, hogy az $(n-1)$-dimenziós sokaság n darab $(n-1)$ változós

$$z_j = z_j(u_1, \ldots, u_{n-1}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

függvénnyel is megadható.

A sokaságok rendszeres tárgyalása POINCARÉ „Analysis situs" című művével indult meg [67] (1895). Ebben kétfajta módon is definiálta a sokaságokat:

a) Legyenek adottak az

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

egyenlőségek, ahol $p<n$, az F_i függvények differenciálhatók és Jacobi-féle mátrixuk rangja p. Legyenek adottak ezenkívül a

$$\varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)>0 \qquad (j=1, 2, \ldots, q)$$

egyenlőtlenségek, ahol a φ_j függvények folytonosak. Az E^n tér azon $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pontjainak összessége, melyek ezeknek az egyenlőségeknek és egyenlőtlenségeknek eleget tesznek $(n-p)$-dimenziós V sokaságot alkotnak.

b) Legyenek az E^n tér $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koordinátái m darab változó folytonos függvényei:

$$x_i=f_i(y_1, \ldots, y_m) \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Az értelmezési tartományt egy

$$\psi(y_1, \ldots, y_m)>0$$

egyenlőtlenséggel korlátozhatjuk. Ilyen módon egy E^n-beli m-dimenziós V sokaságot nyerünk.

Határozzon meg

$$x_i=f_i'(y_1', \ldots, y_m') \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

egy V' sokaságot. Legyen V'' a V és V' közös része. V'' pontjai az y_j és $y_{j'}$ változókkal is meghatározhatók, és így az y_j és $y_{j'}$ változók között függvénykapcsolat létesül. Amennyiben ez a függvénykapcsolat kölcsönösen egyértelmű és mindkét irányban analitikus, akkor azt mondjuk, hogy a sokaságok egymás analitikus folytatásai. Ilyen módon nyerjük az analitikusan csatlakozó sokaságokat.

Folytonos rácson POINCARÉ véges számú sokaságból összetevődő olyan alakzatot ért, melynél bármely két egymást metsző sokaság analitikusan csatlakozik egymáshoz, és bármely sokaságból bármelyikhez eljuthatunk analitikusan csatlakozók véges láncán keresztül. Ma ezeket a folytonos rácsokat *analitikus sokaságoknak* hívjuk.

POINCARÉ-nál a BETTI-féle számok tulajdonképpen már nem az eredetileg BETTI által adott [19] értelemben szerepelnek. A Betti-számok meghatározásához bevezeti az ellentétes sokaság és a homológia fogalmát.

Ha egy

$$F_i(x_1, \ldots, x_n)=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, p)$$

$$\varphi_j(x_1, \ldots, x_n)<0 \qquad (j=1, 2, \ldots, q)$$

egyenlőségekkel, ill. egyenlőtlenségekkel meghatározott $(n-p)$-dimenziós V sokasánál az F_i függvények közül kettőnek az indexét megcseréljük, akkor jutunk a V-vel *ellentétes sokasághoz*. Ha a $\varphi_j>0$ egyenlőtlenségek egyikét $\varphi_j(x_1, \ldots, x_n)=0$ egyenlőségre változtatjuk, és ezt az $F_i=0$ egyenlőségek után írjuk, akkor az így nyert $(n-p-1)$-dimenziós sokaság a V sokaság határának egy darabja lesz. *V teljes határát* az

$$F_1=0, \ldots, F_p=0, \varphi_1=0, \varphi_j>0 \qquad (j>1)$$

$$F_1=0, \ldots, F_p=0, \varphi_2=0, \varphi_j>0 \qquad (j\gtrless 2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F_1=0, \ldots, F_p=0, \varphi_q=0, \varphi_j>0 \qquad (j<q)$$

sokaságok alkotják. V nem határolt, ha egyetlen $(n-p-1)$-dimenziós sokaság sem fekszik a határán; *zárt*, ha nem határolt, korlátos és összefüggő.

Legyenek $v_1, \ldots, v_s$ a V sokaság m-dimenziós részsokaságai. Azt mondjuk,

hogy *egész együtthatós homológia áll fenn közöttük* — $k_1v_1+k_2v_2+\ldots+k_sv_s\sim 0$ — ha van k_1 darab v_1-hez közeli, k_2 darab v_2-höz közeli, stb., k_s darab v_s-hez közeli sokaság, hogy ezek együtt egy V-beli $(m+1)$-dimenziós sokaság teljes határát alkossák. A k_i egészek közül egyesek, vagy mind, lehetnek negatívak is, de ekkor a megfelelő v_i sokaságot annak ellentettjével kell helyettesítenünk. A k_i-k közül egyesek, de nem mind el is tűnhetnek ($k_i=0$), ekkor természetesen a megfelelő v_i-t el kell hagynunk.

A V-ben fekvő $v_1, \ldots, v_s$ m-dimenziós sokaságok *lineárisan függetlenek*, ha nincsen közöttük egész együtthatós homológia.

Ha a V sokaságban (P_m-1) *darab lineárisan független zárt m-dimenziós sokaság még van, de* P_m *darab már nincs, akkor azt mondjuk, hogy a V sokaság m-dimenziós összefüggési, vagy Betti-féle száma* P_m.

POINCARÉ a továbbiakban az n-dimenziós sokaságok egy és kétoldalúságát is értelmezte, és kimutatta, hogy *zárt kétoldalú n-dimenziós sokaságnál a Betti-féle számok között fennáll a*

$$P_m=P_{n-m}$$

összefüggés. (Poincaré dualitási tétele).

Poincaré dualitási tételének igaz voltát HEEGAARD kétségbe vonta [45] (1898). Úgy vélte, hogy ellenpéldát is talált. HEEGAARD azonban nem vette figyelembe, hogy a Betti-féle számoknak POINCARÉ-nál már más a jelentésük, mint ami eredetileg BETTI -nél volt. A bizonyítás egyes részleteinek homályos volta mégis arra ösztönözte POINCARÉ-t, hogy új bizonyítást adjon. 1890-ben megjelent dolgozatában [68] a homológiát a cellákra történő felbontás módszerével tárgyalja. A cellák maguk is sokaságok. A cellákra felbontott eredeti sokaságot poliédernek hívja.

POINCARÉ hatására ezután a század elején a sokaságok csak mint cellákból felépített alakzatok jelennek meg, sőt DEHN és HEEGAARD enciklopédia cikkében [38] (1907) a celláknak már geometriai jelentésük sincs, a sokaság náluk nem más, mint bizonyos kombinatórikai törvényszerűségek alapján egymáshoz csatlakozó absztrakt cellák rendszere. A kombinatorikus metódus LISTING-nek korát megelőző fellépésétől eltekintve (lásd pl. [60] (1867)) ebben az időszakban éli igazi virágzását. Ez a szemlélet lehetővé tette a sokaságok speciális komplexusokként történő felfogását, és ezzel a sokaságokra vonatkozó egyes topológiai tételeknek, így pl. az Euler-tétel POINCARÉ-tól származó általánosításának komplexusokra történő átvitelét is.

A topológiában a „Weierstrass-i szigorúság" igénye BROUWER munkásságával vette kezdetét. Ő a sokaságokat a kombinatorikus és halmazelméleti módszerek összeolvasztásával a szimplexcsillag fogalmára építve definiálta [24] (1911).

Az n-dimenziós (euklideszi) tér szimplexcsillaga véges sok egymásba nem nyúló közös Q csúcsú n-dimenziós szimplexből áll, melyek Q egy környezetét lefedik. Felteszi azt is, hogy a szimplexek közül bármely kettőnek a közös része mindkét szimplexnek valamelyik oldala.

n-dimenziós elemnek az n-dimenziós szimplex folytonos és kölcsönösen egyértelmű képét nevezi. Az n-dimenziós elem oldalai és csúcsai a szimplex oldalainak és csúcsainak a képei.

n-dimenziós elemekből BROUWER összefüggő ponthalmazt képez úgy, hogy két elem vagy diszjunkt legyen, vagy pedig közös részük mindkettőnek oldala. Felteszi, hogy az oda befutó elemek minden csúcsban úgy csatlakoznak egymáshoz, mint a szimplexek az n-dimenziós szimplexcsillagban. Az ilyen tulajdonságú elemekhez tartozó pontok összessége alkot n-dimenziós sokaságot. Zártnak hívja

a sokaságot, ha a rendszer véges sok elemből áll, nyíltnak pedig akkor, ha végtelen sokból.

BROUWER-től származik a sokaságfogalom első általánosítása, nevezetesen a pszeudosokaság fogalma is [25] (1911). Ezt a következőképpen definiálta:

Tekintsük az n-dimenziós elemek olyan rendszerét, melynél

1. minden $(n-1)$-dimenziós oldal pontosan két elem közös oldala,

2. egy elem bármely pontja csak véges sok további elemhez tartozik, azok a pontok pedig, melyek nem fekszenek valamely $(n-1)$-dimenziós oldalon, más elemben nincsenek benne.

Ezeknek a követelményeknek eleget tevő elemek halmazelméleti egyesítését hívja BROUWER *n-dimenziós pszeudosokaságnak*. Az n-dimenziós sokaságok egyúttal n-dimenziós pszeudosokaságok is, de nem minden pszeudosokaság lesz egyúttal sokaság is.

A pszeudosokaságok definíciója tisztán kombinatorikus jellegű, a pszeudosokaságok rendelkeznek a sokaságok legszembetűnőbb kombinatorikus tulajdonságaival.

BROUWER-nél a pszeudosokaság csak segédeszköz a nyílt halmazok invarianciatételének [25] és a Jordan-tétel általánosításának [26] a bizonyításához, ALEKSZANDROV-nál azonban már önálló szerepet kap (lásd [14] 395. oldal (1935)). ALEKSZANDROV ugyanis kimutatta, hogy az $(n+1)$-dimenziós euklideszi térben fekvő n-dimenziós pszeudosokaságok két részre osztják a teret és e két rész közös határát alkotják. Sokaságokra vonatkozólag Jordan tételének ezt az általánosítását már BROUWER igazolta [26] (1911). Az n-dimenziós pszeudosokaságok ilyen módon átmenetet képeznek az n-dimenziós sokaságok és az n-dimenziós reguláris tartományhatárok között. Utóbbiak olyan kompakt halmazok az $(n+1)$-dimenziós euklideszi térben, melyek E^{n+1}-t két részre osztják és e részek közös határát alkotják.

Az n-dimenziós sokaságok definíciójánál KERÉKJÁRTÓ szakadt el először a kombinatorikus szerkezettől (lásd [48] 5. oldal (1923)). Általánosította és egyúttal az időközben HAUSDORFF által kidolgozott [44] (1914) ponthalmazelméleti alapokra fektette a WEYL-féle [88] (1913) kétdimenziós sokaságokat. KERÉKJÁRTÓnál az n-dimenziós sokaság egy olyan összefüggő Hausdorff-féle tér, melynél minden környezet homeomorf egy n-dimenziós nyílt gömbbel. (A környezetek itt természetesen csak a tér meghatározására szolgáló bázisnak az elemei.) Ma is ez az *n-dimenziós euklideszi sokaságoknak* általánosan használt definíciója.

Felmerül itt természetesen az a kérdés, hogy az n-dimenziós euklideszi sokaságok azonosak-e a Brouwer-féle szimplexekből összerakható sokaságokkal, más szóval *triangulálható-e minden n-dimenziós euklideszi sokaság?* Igen fontos kérdésről van szó, hiszen ezen múlik, hogy alkalmazható-e vajon a kombinatorikus apparátus az n-dimenziós euklideszi sokaságokra. Itt csak a második megszámlálhatósági axiómának eleget tevő sokaságokat kell vizsgálatunk körébe bevonnunk, hiszen a trianguláihaló sokaságok nyilván eleget tesznek a második megszámlálhatósági axiómának. A második megszámlálhatósági axióma lényeges követelmény, mivel — mint azt a Prüfer-féle sokaság példája mutatja (lásd [72]) — már a kétdimenziósok között is létezik megszámlálható bázissal nem rendelkező sokaság.

A felvetett probléma máig megoldatlan. NÖBELING ugyan adott egy hibás bizonyítást 1935-ben [65], melynek hiányos voltára SEIFERT mutatott rá [79], ezeket a hiányokat azonban nem sikerült pótolni.

A triangulálhatósági problémával kapcsolatos első pozitív eredmény RADÓ-tól származik, aki 1925-ben a kétdimenziós megszámlálható bázisú euklideszi sokaságok triangulálhatóságát bizonyította be [72]. Háromdimenziós sokaságok triangulál-

hatóságát MOISE igazolta 1952-ben [62], háromdimenziós határolt sokaságokét pedig BING és MOISE 1954-ben [20], [21], [63]. Analitikus sokaságok triangulálhatóságát 1932-ben KOOPMAN és BROWN [50], differenciálható sokaságokét pedig 1935-ben CAIRNS [29] bizonyították be, az említett eredményeknél többet azonban ma sem ismerünk.

A húszas évek végén egyre erősödött az érdeklődés a sokaságok és azok általánosításai iránt. A Betti-féle számok ekkor már nem csupán a sokaságok bizonyos jellemző adatait adják meg, hanem szerepet kapnak az általánosított sokaságoknak a definiálásakor is. Maguk a Betti-féle számok is jelentős fejlődésen mentek át POINCARÉ eredeti meghatározása óta. HEEGAARD kritikája után írott cikkében POINCARÉ már a sokaságok celláris felbontására alapozta a Betti-féle számokat. A következőképpen nyerte az ún. redukált Betti-féle számokat:

Egy q-dimenziós a_i^q és egy $(q-1)$-dimenziós b_j^{q-1} cellához hozzárendel egy $\varepsilon_{i,j}^q$ *incidenciaegyütthatót*, ami $+1$, ha b_j^{q-1} az a_i^q határán van, -1, ha b_j^{q-1} ellentettje van a_i^q határán, vagy ami ugyanaz, ha b_j^{q-1} van a_i^q ellentetjének a határán, egyébként pedig: 0. Minden, a q-dimenziós cellákból képzett egész együtthatós $x^q = \sum_i \lambda_i a_i^q$ *lineáris formához* hozzárendeli az $x^{q-1} = \sum_{i,j} \lambda_i \varepsilon_{i,j}^q b_j^{q-1}$ lineáris formát. Napjainkban használt jelöléssel élve: $\partial_q x^q = x^{q-1}$. Az x^q lineáris forma *zárt*, ha $\partial_q x^q = 0$; x^q *homológ nullával* — $x^q \sim 0$ — ha van olyan $(q+1)$-dimenziós x^{q+1} lineáris forma, melynél $\partial_{q+1} x^{q+1} = x^q$. Megjegyezzük, hogy az ALEXANDER és LEFSCHETZ által bevezetett és ma is használt terminológia szerint a q-dimenziós lineáris formákat *q-dimenziós láncoknak*, a zárt q-dimenziós lineáris formákat pedig *q-dimenziós ciklusoknak* hívjuk.

Az $x_1^q, \ldots, x_s^q$ láncok *lineárisan függetlenek*, ha nem találhatók olyan $k_1, \ldots, k_s$ racionális egész számok (kivéve a $k_1 = k_2 = \ldots = k_s = 0$ esetet), melyeknél

$$k_1 x_1^q + \ldots + k_s x_s^q \sim 0.$$

A cellákra bontott V sokaság q dimenziós redukált Betti-féle száma P_q', ha $P_q' - 1$ darab lineárisa független q-dimenziós ciklus még létezik V-ben, de P_q' darab már nem. Ha a cellák egyszeresen összefüggőek, úgy $P_q' = P_q$.

A század elején a Betti-számoknak több irányú módosítása és általánosítása született meg. DEHN és HEEGAARD enciklopédiacikkükben [38] már komplexusokra vonatkozólag definiálták a Betti-féle számokat, hiszen POINCARÉ definíciójában teljesen lényegtelen, hogy egy sokaság, vagy valamely más alakzat cellákra történő felbontásából indultunk-e el.

A módosítások és általánosítások egyik iránya az egész együtthatóknak más együtthatókkal történő helyettesítése volt. Az első lépést ebben az irányban TIETZE tette meg 1908-ban [81], aki az egész együtthatók mellett a mod 2 maradékosztályokat is szerepeltette. Az így nyert mod 2 elmélet az $\varepsilon_{i,j}^q$ incidenciaegyütthatók előjelének megállapítását is feleslegessé tette. VEBLEN és ALEXANDER 1912-ben kimutatták, hogy a Poincaré-féle dualitási tétel érvényes a mod 2 Betti-számokra is, sőt ezekre nézve nemcsak kétoldalú, hanem egyoldalú sokaságoknál is igaz a dualitási tétel [82].

Megjegyezzük itt, hogy ALEXANDER 1915-ben kimutatta azt, hogy az egész együtthatós és a mod 2 Betti-számok függetlenek a sokaság szimpliciális felbontásának a módjától [1]. Ugyancsak ALEXANDER-től ered a mod m (m tetszőleges egész) Betti-számok bevezetése [4]. A racionális számokat LEFSCHATZ, a racionális számok mod 1 vett maradékosztályait pedig PONTRJAGIN és HOPF használták először koefficiensként (lásd [15]).

A mod m együtthatók bevezetése és az egész együtthatós (Poincaré-féle) elmélet újabb térhódítása szükségessé tette a húszas években az előjeles incidencia-együttható fogalmának a tisztázását. A *komplexusok* VEBLEN-nél ALEXANDER-nél és LEFSCHETZ-nél [84], [4] [53] nyílt szimplexek olyan véges rendszerei, melyek páronként diszjunktak, és melyeknek minden oldala is hozzátartozik a rendszerhez. A szimplexeket csúcsaik egyértelműen meghatározzák. Legalább egydimenziós szimplexnél a csúcsok permutációi úgy bomlanak két osztályra, hogy egyik osztályból a másik osztályba páratlan számú helycserével lehet eljutni. Az egyes osztályokat *irányított szimplexeknek* hívjuk; az osztályok egymás ellentettjei. Az $(A_0, A_1, \ldots, A_p)$ irányított szimplexnél az $(A_1, \ldots, A_p)$ irányított szimplex $(+1)$ incidenciaegyütthatóval $(A_0, A_1, \ldots, A_p)$ ellentettjénél pedig $(A_1, \ldots, A_p)$ a (-1) incidenciaegyütthatóval szerepel.

A láncok képzésénél minden szimplexet először tetszőlegesen irányítunk, és az irányított szimplexekből képezünk lineáris formákat. *Maguk a Betti-féle számok* ALEXANDER-*nél és* LEFSCHETZ-*nél* 1-*gyel kisebbek a* POINCARÉ *által adottaknál. Ezeket az új Betti-féle számokat a továbbiakban* p^i-*vel jelöljük, ahol* i *a dimenziót jelenti.*

A húszas évek végén a Betti-féle számok mellett megjelennek a *Betti-féle* vagy *homológiacsoportok* is. Ezeket először VIETORIS használta [85] (1927). VIETORIS észrevette, hogy a q-dimenziós láncok az összeadásra nézve kommutatív csoportot alkotnak. Ennek a csoportnak alcsoportja a q-dimenziós ciklusok csoportja. Két ciklus ugyanahhoz a *homológiaosztályhoz* tartozik, ha különbségük homológ 0-val. Maguk ezek a homológiaosztályok is csoportstruktúrával rendelkeznek. Ez a csoport a q-dimenziós homológia- vagy Betti-féle csoport.

A Betti-féle csoportok bevezetése lehetővé tette a sokfajta együtthatórendszer helyett tetszőleges Abel-féle csoportok, vagy csoporttal kapcsolatban álló más algebrai struktúrák (topologikus csoport, gyűrű, test, modulus stb.) *együttható-csoportként* történő használatát is. (lásd pl. ALEKSZANDROV [13] (1933)).

A Betti-számok általánosításának másik iránya a komplexusokról más alakzatokra való áttérés.

A görbe szimplexekből, vagyis szimplexek topologikus képeiből felépített görbe komplexus fogalma már VEBLEN-nél és ALEXANDER-nél is a vizsgálatok kiindulópontja [82] (1912). VEBLEN később a görbe szimplexek mellett a szinguláris szimplexeket is szerepelteti [83] (1922). Szinguláris szimplexen egy szimplex folytonos képét érti. LEFSCHETZ a homológiaelmélet felépítésében nem is tesz különbséget szinguláris, görbe, vagy közönséges szimplexek között [53]. Ilyen módon lehetővé vált a Betti-féle számok értelmezése tetszőleges topologikus térben, bár az így definiált Betti-számok sokszor nem éppen a geometriailag célszerű értéket szolgáltatják.

A szinguláris szimplexek *szinguláris homológiaelméletét* teljes részletességgel és szigorúsággal végül is LEFSCHETZ [59] (1935) és ELLENBERG [39] (1944) dolgozták ki (lásd VISKI MÁRIA cikkét [99].

Másfajta általánosítást kezdeményezett BROUWER, amikor az általa bevezetett ciklózis-számok segítségével igazolta azt, hogy *homeomorf kompakt halmazok a síkot egyforma számú részre osztják* [28] (1912). BROUWER tulajdonképpen az egydimenziós Betti-számokat értelmezte kompakt metrikus terekben. Az ő definícióját általánosította VIETORIS tizenöt évvel később metrikus terek tetszőleges dimenziójú Betti-féle csoportjainak a meghatározásakor [85]. VIETORIS egy M metrikus térbeli q-dimenziós szimplexen M-nek $(q+1)$ elemű részhalmazát érti. A szimplexeknek tehát csak csúcsaik vannak. Az M-beli szimplexek egy komplexust

alkotnak. q-dimenziós x^q lánc olyan lineáris alak, mely csak véges sok q-dimenziós irányított szimplexet lát el 0-tól különböző együtthatóval. Az x^q lánc ε lánc, ill. ciklus, ahol ε pozitív szám — ha az x^q-beli 0-tól különböző együtthatójú szimplexek átmérői ε-nál kisebbek. $z_1^q \underset{\varepsilon}{\sim} z_2^q$, ha $z_1^q - z_2^q = \partial_{q+1} x^{q+1}$, ahol z_1^q és z_2^q q-dimenziós ciklusok és x^{q+1} egy $(q+1)$-dimenziós ε-lánc. Fundamentális sorozaton VIETORIS a ciklusok olyan

$$F^q = (z_1^q, z_2^q, \ldots, z_r^q, \ldots)$$

sorozatát érti, ahol z_r^q egy ε_r ciklus,

$$z_r^q \underset{\varepsilon_r}{\sim} z_{r+1}^q \quad \text{és} \quad \lim_{r\to\infty} \varepsilon_r = 0.$$

$F^q \underset{\varepsilon}{\sim} 0$, ha legfeljebb véges sok r kivételével $z_r^q \underset{\varepsilon}{\sim} 0$. $F^q \sim 0$, ha minden ε-ra $F^q \underset{\varepsilon}{\sim} 0$. F^q és F'^q ugyanahhoz a homológiaosztályhoz tartozik — $F^q \sim F'^q$ — ha $F^q - F'^q \sim 0$. A fundamentális sorozatok homológiaosztályai csoportot alkotnak. Ez a csoport lesz az M metrikus tér (q-dimenziós) homológiacsoportja.

VIETORIS később azt is kimutatta, hogy egy komplexus homológiacsoportjai izomorfak a komplexushoz tartozó szimplexek halmazelméleti egyesítéséből nyert poliéder homológia-csoportjaival [87] (1929). Kimutatta azt is, hogy $m > n$ esetén az n-dimenziós kompakt metrikus terek m-dimenziós homológiacsoportjai nullcsoportok.

A homológiacsoportok általánosabb alakzatokra történő átvitelének egy harmadik módszerét ALEKSZANDROV és ČECH dolgozták ki [12], [31]. Tetszőleges topologikus terek homológiacsoportjainak a definíciójához 1932-ben ČECH az ALEKSZANDROV-tól származó idegképzéssel ([9], [11]) jutott el.

Egy R topologikus tér véges $F(U_1, \ldots, U_k)$ fedőrendszerének *idege* egy $N(F)$-fel jelölhető szimpliciális komplexus. Ennek a szimpliciális komplexusnak csúcsai az F fedőrendszer elemei, a szimplexei pedig a csúcsok olyan $(U_{i_0}, \ldots, U_{i_j})$ kombinációi, ahol az $U_{i_0}, \ldots, U_{i_j}$ halmazoknak van közös pontja. Ha az F' fedőrendszer az F fedőrendszer finomítása és F' minden elemének az F rendszer egy őt tartalmazó elemét feleltetjük meg, úgy F' idegéhez tartozó bármely szimplex csúcsai F idegéhez tartozó valamely szimplex csúcsaiba mennek át, más szóval F' idegének F idegébe való $g_{F',F}$ *szimpliciális leképezését* nyerjük. (A szimpliciális leképezés fogalma BROUWER-től ered [23] (1910)). A $g = g_{F',F}$ leképezés $N(F')$ valamely $(U'_{i_0}, \ldots, U'_{i_j})$ irányított szimplexét $N(F)$ egy $(g(U'_{i_0}), \ldots, g(U'_{i_j}))$ irányított szimplexébe vagy 0-ba viszi át, aszerint hogy a $g(U'_{i_0}), \ldots, g(U'_{i_j})$ csúcsok különbözőek-e, vagy sem. Ilyen módon g az $N(F')$-beli láncokat $N(F)$-beliekbe képezi le, méghozzá úgy, hogy a g homomorf leképezés és a határképzés operációja felcserélhető. A g leképezés tehát ciklust ciklusba, homológ ciklusokat homológ ciklusokba visz át. (A szimpliciális leképezés láncokra történő átvitelét elsőnek ALEXANDER dolgozta ki [4] (1926).)

Az F fedőrendszer és annak F' finomítása nem határozza meg egyértelműen $N(F')$-nek $N(F)$-be történő $g_{F',F}$ szimpliciális leképezését, hiszen F'-nek egy U'_i elemét több F-hez tartozó elem is tartalmazhatja. Annyi azonban igaz, hogy rögzített F' és F mellett az ilyen típusú $g_{F',F}$ leképezések $N(F')$ bármely ciklusát $N(F)$ egymással homológ ciklusaiba viszik át.

Tekintsük most egy R topologikus tér véges nyílt F fedőrendszereinek $\{\ldots, F, \ldots\}$ összességét. Legyen $F' < F$, ha F' az F fedőrendszer finomítása. Minden F fedőrendszerhez hozzárendeljük F idegének egy z_F^q q-dimenziós ciklusát. A ciklusok így nyert $Z = \{\ldots, z_F^q, \ldots\}$ kollekciója akkor lesz egy *Čech-féle ciklus*, ha $F' < F$ esetén $g_{F',F}(z_{F'}^q)$ homológ z_F^q-fel $N(F)$-ben. Két $Z = \{\ldots, z_F^q, \ldots\}$ és $Z' = \{\ldots, z_F'^q, \ldots\}$

Čech-féle ciklus homológ egymással, ha minden F-re z_F^q homológ $z_F'^q$-fel $N(F)$-ben.

A Čech-féle ciklusok homológiaosztályainak a csoportja adja meg végül is az R tér *Čech-féle homológiacsoportját.*

Megjegyezzük, hogy ČECH-nél az együtthatócsoport a racionális számok gyűrűje, és így maga a homológiacsoport — mint azt ČECH kiemeli — egy modulus a racionális számok gyűrűjén [31] (1932).

A Betti-számok általánosításának harmadik irányát, a relatív Betti-számok és csoportok elméletét LEFSCHETZ indította el. A következőképpen definiálta a relatív Betti-féle számokat [55] (1928). Legyen K egy szimpliciális komplexus, L pedig K-nak egy részkomplexusa. K-nak L-re vonatkozó q-dimenziós *relatívciklusain* olyan K-beli x^q-láncokat ért, melyeknél $\partial_q x^q$ egy L-beli lánc. Egy x^q-relatív ciklus (L-re vonatkozólag) *relatív homológ* 0-*val*, $x^q \sim 0$ rel L, ha található olyan y^{q+1} K-beli és z^q L-beli lánc, melyre

$$x^q = \partial_{q+1} y^{q+1} + z^q.$$

x^q homológ x'^q-val rel L, ha $x^q - x'^q \sim 0$ rel L. Az L-re vonatkozó q-dimenziós relatívciklusok (L-re vonatkozó) relatív homológiaosztályainak a csoportja lesz a K komplexus L-re vonatkozó *q-dimenziós relatív homológiacsoportja.* Ennek rangja a $p^q(K, L)$ *relatív Betti-féle szám.*

LEFSCHETZ — mint azt már említettük — racionális együtthatókat használt. Ő maga tulajdonképpen csak a relatív Betti-féle számokat értelmezte.

ČECH a tetszőleges topologikus tér ciklusai (abszolút ciklusok) mellett a relatív ciklusokat is definiálta [31]. Legyen R_1 az R tér altere és $F=(U_1, \ldots, U_k)$ az R tér véges fedőrendszere. Ekkor az előbb leírt $N(F)$ idegnek $N(F)_{R_1}$ részkomplexusát alkotják az F fedőrendszernek azok az $(U_{i_0}, \ldots, U_{i_j})$ kombinációi, melyeknél az $U_{i_0}, \ldots, U_{i_j}$ halmazoknak van R_1-beli közös pontjuk. Az R topologikus tér rel R_1 Čech-féle ciklusainak képzése mármost a Lefschetz-féle relatív homológiaelméletet is figyelembe véve az abszolút Čech-féle ciklusok mintájára történik.

Megjegyezzük, hogy a Čech-féle rel R_1 relatívciklusok homológiaosztályai nemcsak rel R_1, hanem R-nek bármely R_1-et tartalmazó R_2 alterére vonatkozólag is képezhetők. Ennek alapján ČECH értelmezte egy R topologikus tér valamely b pontjában a *lokális Betti-számokat* is a következő módon [33] (1934): Legyen U és V a b pont két környezete, ahol $V \subset U$. $p^q(U, V)$-vel jelöljük az R térrel $R \setminus U$ Čech-féle ciklusai rel $R \setminus V$ lineárisan független homológiaosztályainak maximális számát, ami lehet ∞ is. V csökkentése esetén rögzített U mellett $p^q(U, V)$ nem növekszik, és így létezik $p^q(b, U) = \operatorname{int} p^q(U, V)$. A $p^q(b, U)$ szám U csökkentése esetén nem csökken és így $p^q(b, R) = \sup p^q(b, U)$ egy olyan szám, (esetleg ∞), mely csak az R tér b körüli tetszőleges kis környezetének szerkezetétől függ. Megjegyezzük, hogy $p^q(b, R)$-t ω-val jelöljük, ha a $p^q(b, U)$ Betti-számok végesek, de összességük nem korlátos, ∞-nel pedig akkor jelöljük $p^q(b, R)$-t, ha valamely U-ra $p^q(b, U) = \infty$.

A Betti-féle számok és homológiacsoportok topologikus terekre történő átvitelekor mutatkozó sokféleség szükségessé tette az egyes homológiaelméleteknek közös elméletben történő összefoglalását. Ezt a feladatot ELLENBERG és STEENROD oldották meg a homológiaelmélet axiomatizálásával 1945-ben [40].

A homológiaelmélet fejlődését erősen befolyásolták a sokaságfogalom általánosítására irányuló törekvések. A sokaságelmélet azonban sok egyéb mellett mégiscsak egy volt a mozgatórugók közül, és mellette fontos helyet foglalt el többek között a Jordan—Brouwer tétel általánosítására irányuló törekvés is [26]. A Jordan—Brouwer-tételt ugyanis ALEXANDER 1922-ben igen messzemenően általánosította.

Kimutatta, hogy $q \leqq n$-re az n-dimenziós S^n gömbi térben fekvő K görbe komplexus q-dimenziós (mod 2) Betti-száma megegyezik az $S^n \mid K$ nyílt halmaz $(n-q-1)$-dimenziós (mod 2) Betti-számával [2]. (Alexander dualitási tétele.)

Az Alexander-féle dualitási tételt 1927-ben komplexusokról tetszőleges kompakt halmazokra fogalmazták át ALEKSZANDROV [10], LEFSCHETZ [54] és FRANKL [42]. ALEKSZANDROV ennek alapján igazolta az ún. *felbontási tételt*, mely szerint *az E^n-ben fekvő homeomorf kompakt halmazok az E^n euklideszi teret egyforma számú komponensre bontják fel.* $n=2$-re — mint azt már melítettük — a felbontási tételt már BROUWER kimondta és be is bizonyította [28]. Ugyancsak 1927-ben ALEKSZANDER dualitási tételét más-más úton euklideszi terek helyett tetszőleges sokaságokban fogalmazták meg PONTRJAGIN [69] és LEFSCHETZ [54].

A Betti-számok és a homológiacsoportok általánosításainak ismeretében most már szemügyre vehetjük a sokaságfogalom fejlődésének további útját.

VIETORIS 1928-ban a következő gondolatot vetette fel: Ahhoz, hogy egy K komplexusban érvényes legyen a Poincaré-féle dualitási tétel nem feltétlenül szükséges, hogy az egy csúcsba befutó szimplexek egyesítése egy n-dimenziós gömbtesttel legyen homeomorf. Ezt a kombinatorikus struktúrától idegen követelményt más, a komplexussal szorosabb kapcsolatban álló gyengébb elégséges követelménnyel helyettesíthetjük. VIETORIS adott is ilyen követelményt, és ezzel először definiált homológiasokaságokat [86]. Általánosabb követelményeket támasztott VAN KAMPEN [47] (1929), LEFSCHETZ [56] (1930) és PONTRJAGIN [70] (1931). PONTRJAGIN definíciójában akárcsak VIETORIS-ében lényeges szerepet játszik egy K komplexus a^k szimplexének $B(a^k)$ környezetkomplexusa. A $B(a^k)$ környezetkomplexus az a^k-t lapjukként tartalmazó K-beli szimplexek a^k-t nem metsző lapjaiból áll. PONRTJAGIN *n-dimenziós h-sokaságon* olyan n-dimenziós összefüggő kompexust ért, melynél minden $(n-1)$-dimenziós szimplexhez két n-dimenziós szimplex csatlakozik, $(k<n-1)$-re pedig bármely a^k szimplex $B(a^k)$ környezetkomplexusában igazak a következők: $0<r<n-k-1$ esetén $B(a^k)$ bármely r-dimenziós mod 2 ciklusa homológ 0-val $B(a^k)$-ban, de van, méghozzá egyetlen olyan $(n-k-1)$-dimenziós mod 2 ciklus $B(a^k)$-ban, mely $B^k(a)$-ban nem homológ 0-val. PONTRJAGIN bebizonyította, hogy a h-sokaságokban igaz a Poincaré-féle dualitási tétel, sőt Poincaré-térben, vagyis olyan h-sokaságban, melyben minden mod 2 ciklus homológ 0-val, igaz az Alexander-féle dualitási tétel is.

A sokaságfogalom további fejlődése a h-sokaságok és az euklideszi sokaságok közös általánosítását eredményezte. (A triangulálhatósági probléma elintézetlensége miatt ugyanis kérdéses, hogy ez euklideszi sokaságok egyúttal mindig h-sokaságok-e.)

Az első lépést ebben az irányban LEFSCHETZ és FLEXNER tették meg 1930-ban (57). Az általánosított n-dimenziós sokaság náluk olyan kompakt metrikus tér, melynek van normális kombinatorikus n-cellákból álló bázisa. Normális kombinatorikus n-cellán egy komplexus olyan nyílt részkomplexusát értik, melynek a határa ugyanazokkal az egész együtthatós Betti-csoportokkal rendelkezik, mint az $(n-1)$-dimenziós gömbfelület, a nyílt részkomplexus maga pedig a határára egy pontból emelt kúppal homeomorf. FLEXNER később igazolta, hogy POINCARÉ dualitási tétele ezekben az általánosított sokaságokban is érvényes [41] (1931).

A LEFSCHETZ—FLEXNER-féle általánosított sokaságok még megőrizték az euklideszi és a h-sokaságoknál egyaránt fennálló lokális triangulálhatóságot, a későbbi általánosítások azonban már mellőzték a lokális triangulálhatóság eléggé erős és nem egyszer zavaró követelményét.

A harmincas években LEFSCHETZ [58] (1933), ČECH [32] (1933), WILDER [96]

(1934), valamint ALEKSZANDROV és PONTRJAGIN [16] (1936) olyan általánosított sokaságokat értelmeztek, ahol a lokális triangulálhatóság követelménye már burkoltan sem fordul elő. Ezek közül a Čech és a Wilder-féle általánosításoknak volt komolyabb hatása.

ČECH maga három dolgozatában foglalkozott általánosított sokaságokkal [32] (1933), [33] (1934), [34] (1936). Értelmezésüknél a következő úton járt el: Együtthatócsoportként a racionális számok csoportját választotta. Az R *topologikus teret egy* x *pontjában* k*-ad rendben lokálisan összefüggőnek* nevezte, ha x minden U_x környezetéhez található olyan V_x részkörnyezet, hogy $\overline{V}_x$ minden q-dimenziós Čech-féle ciklusa $\overline{U}_x$-ben 0-val homológ legyen. ($\overline{M}$-mel szokás szerint az R tér M részhalmazának zárt burkát jelöljük.)

Legyen most R egy topologikus tér és S az R tér altere. Az R tér egy $V_0^n(S)$, ha

1. R kompakt,
2. R nyílt részhalmazai $F_\sigma - \mathrm{k}$,
3. S az R térben zárt,
4. az $R \setminus S$ halmaz dimenziója n,
5. az $R \setminus S$ halmaz minden pontjában az R tér n-ed rendben lokálisan összefüggő,
6. az $R \setminus S$ minden x pontjában $p^n(x, R) = 1$,
7. az R tér tetszőleges A zárt részhalmazánál $(A \cap \overline{R \setminus A}) \setminus S$ bármely x pontjára $p^n(x, A) = 0$.

Az R tér egy $V_p^n(S)$, ha R egy $V_0^n(S)$ és ezenkívül $(n-p \leqq k \leqq n-1)$-re $R \setminus S$ bármely x pontjában az R tér k-ad rendben lokálisan összefüggő és minden ilyen pontban $p^k(x, R) = 0$.

ČECH kimutatta, hogy ha R egy $V_0^n(S)$ és az A halmaz az R térben zárt, akkor $A \setminus S$ bármely x pontjára teljesül a felbontási tétel egy lokalizált változata.

A Čech-féle $V_p^n(S)$ sokaságok az irodalomban egyedülállók. Más szerzők által leírt általánosított sokaságoknál ugyanis csak a $V_n^n(S)$-sel rokon sokaságok fordulnak elő, ČECH-nél pedig a $V_0^n(S)$ típusú sokaságoknak kitüntetett szerepük van. Ezek a $V_0^n(S)$ sokaságok nem is annyira a topologikus sokaságok, mint inkább a Brouwer-féle pszeudosokaságok egy speciális fajtájának általánosításaiként foghatók fel.

Míg ČECH-nél az általánosított sokaságokkal szemben támasztott követelmények még csak a Poincaré és Alexander típusú dualitási tételek érvényességének megőrzésére szorítkoznak, addig WILDER-nél már gyökeresen új nézőponttal találkozunk. Az ő vizsgálatainak előzményei SCHOENFLIES egy nevezetes tételéhez nyúlnak vissza. SCHOENFLIES 1902-ben [78] igazolta Jordan tételének a következő megfordítását:

Ha egy F *korlátos és perfekt halmaz a síkot úgy osztja két részre, hogy* F *pontjai e két rész mindegyikéből elérhetők, akkor* F *egy zárt Jordan-görbe.*

A Schoenflies tételében szereplő feltételek, mint azt már BROUWER kimutatta [27] (1911), a térben elhelyezkedő sokaságokat nem karakterizálják. BROUWER-nek sikerült ugyanis olyan alakzatot konstruálnia, mely a teret két részre osztja, ő maga mind a két rész határa, pontjai mind a két részből elérhetők, mégsem alkot sokaságot [27]. RIESZ FRIGYES biztatására azután KALUZSAY KÁROLY foglalkozott Schoenflies tételének térre való átvitelével és 1915-ben a következő eredményt nyerte [46]:

Legyen H egy korlátos zárt halmaz a térben, mely a teret pontosan két B_1 és B_2 összefüggő nyílt halmazra bontja fel úgy, hogy ezeknek a nyílt halmazoknak H a közös határa. Tegyük fel, hogy $i = 1, 2$-re bármely B_i-ben fekvő zárt poligon

B_i-ben folytonos deformációval egy pontra összehúzható. Tegyük fel továbbá $i=1$, 2-re, hogy bármely két olyan $P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots$ és $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k, \ldots$ B_i-ben fekvő pontsorozatnál, melyek mindegyike H-nak ugyanahhoz az R pontjához konvergál, P_k és Q_k összeköthetők B_i-ben olyan L_k poligonnal, ahol L_k-nak az átmérője 0-hoz konvergál. Ekkor H egy topologikus gömb.

KALUZSAY a felvetett problémát csak részben oldotta meg, mivel nem minden, a térben fekvő topologikus gömb tesz eleget annak a követelménynek, hogy a komplementumában fekvő zárt poligonok a komplementumban egy pontra összehúzhatók legyenek.

1924-ben ALEXANDER-nek sikerült olyan „szarvakkal ellátott" topologikus gömböt konstruálnia a térben, mely ennek az utóbbi követelménynek nem tesz eleget [3].

Szükséges és elégséges feltételt arra vonatkozólag, hogy egy E^3-ban fekvő K kompaktum topologikus gömb legyen, először WILDER adott 1929-ben [92]. WILDER MOORE nyomán [64] (1918) *egyenletesen lokálisan összefüggőnek* hív egy R metrikus teret, ha bármely $\varepsilon>0$-hoz található olyan $\delta>0$, hogy az R tér bármely két δ-nál közelebb fekvő pontja ε-nál kisebb átmérőjű összefüggő halmazzal összeköthető legyen.

WILDER az E^3-ban fekvő K topologikus gömböket a következő módon karakterizálta [92], [93]:

Legyen K egy kompaktum E^3-ban, mely E^3-t két egyenletesen lokálisan összefüggő tartományra bontja úgy, hogy e tartományok mindegyikének határa K. Tegyük fel, hogy $p^1(E^3 \setminus K)=0$. Ekkor G egy topologikus gömb. (WILDER a p^i Betti-számokon (mod 2) Betti-számokat ért.)

1930-ban WILDER az E^3-ban fekvő gömbnél nyert eredményt E^3-ban fekvő sokaságokra általánosította. A következő tételt igazolta [94], [95]:

Legyen a K kompakt halmaz az E^3 tér két egyenletesen lokálisan összefüggő D_1 és D_2 tartományának a közös határa. Teljesüljön ezen kívül az alábbi feltételek valamelyike:

a) $p^1(E^3 \setminus K)$ véges,

b) $p^1(D_1)$ véges,

c) van olyan pozitív ε szám, hogy a D_1 tartomány minden ε-nál kisebb átmérőjű 1-dimenziós ciklusa D_1-ben 0-val homológ legyen.

Ekkor $E^3 \setminus K$ pontosan két tartományból áll, K maga pedig $\frac{1}{2}p^1(E^3 \setminus K)= p^1(D_1)$ nemszámú kétdimenziós sokaság. (Kétdimenziós sokaság nemszáma a sokaságban fekvő és azt szét nem vágó diszjunkt zárt Jordan-görbék maximális száma.)

Ezek voltak a Wilder-féle általánosított zárt n-dimenziós sokaságok — röviden: $n-gcm$-ek — létrejöttének előzményei.

Az $n-gcm$-ek definícióját itt nem ismertetjük, mivel WILDER ekkor még csak az E^n-ben fekvő $(n-1)-gcm$-ek tulajdonságait vizsgálta, és ezek külső tulajdonságaikkal karakterizálhatóak.

Előrebocsátjuk a következőket:

Az E^n tér egy D tartománya *egyszeresen i-összefüggő*, ha $p^i(D)=0$, *egyenletesen lokálisan i-összefüggő* — röviden *ulic* — ha bármely $\varepsilon>0$-hoz található olyan $\delta>0$, hogy bármely D-beli δ-nál kisebb átmérőjű i-dimenziós z^i ciklus egy D-ben fekvő ε-nál kisebb átmérőjű x^{i+1} lánc $\partial_{i+1}x^{i+1}$ határa legyen.

Az E^n-ben fekvő $(n-1)-gcm$-eket karakterizáló tételek mármost a következőképpen szólnak [96] (1934):

A) Az E^n tér M részhalmaza akkor és csak akkor $(n-1)-gcm$, ha komp-

lementuma két tartományból áll, melyek közül az egyik korlátos, és mindketten $0 \leqq i \leqq (n-2)$-re *ulic*-ek, maga M pedig e két tartomány közös határa.

B) Az E^n tér B korlátos részhalmaza akkor és csak akkor $(n-1)-gcm$, ha egy olyan D tartomány határa, mely egyszeresen $(n-1)$-összefüggő és $0 \leqq i \leqq (n-2)$-re *ulic*.

$n=3$ esetén WILDER a következő eredményeket kapta:

B_1) Legyen D egy olyan korlátos tartomány a térben, mely $j=1$, 2-re egyszeresen j-összefüggő. Akkor és csak akkor lesz D-nek a határa (topologikus) gömb, ha a D tartomány $i=0,1$-re *ulic*.

B_2) A tér valamely egyszeresen 2-összefüggő korlátos tartományának a határa akkor és csak akkor sokaság, ha a tartomány $i=0,1$-re *ulic*.

WILDER igazolta az E^n-ben fekvő $(n-1)$-*gcm*-ekre a Poincaré-féle dualitási tételt, sőt egy újabb dualitási tételt is felállított. Kimondta ugyanis azt, hogy ha az E^n tér egy korlátos D tartománya $0 \leqq i \leqq (n-2)$-re *ulic*, akkor $0 \leqq i \leqq (n-2)$-re

$$p^i(D) = p^{n-i-1}(E^n \backslash \bar{D}).$$

Az általánosított sokaságok fejlődésének további menetére jelentős befolyással volt az a tény, hogy a harmincas évek közepén a homológiaelmélet mellett annak duálisaként ALEXANDER [5] (1935), KOLMOGOROV [49] (1936) és ČECH [35] (1936) megalkották a *kohomológiaelméletet* is. Maga a kohomológia kifejezés WHITNEY-től származik [91] (1938).

A kohomológiaelmélet létrejöttében fontos szerepe volt a Pontrjagin dualitáselméletnek. PONTRJAGIN ugyanis 1931-ben [70] észrevette azt, hogy mihelyt a Betti-féle számokról a homológia-csoportokra térünk át mind a Poincaré-, mind az Alexander-féle dualitási tételeknél a csoportok közötti kapcsolatot nem az izomorfizmus, hanem egy primitív csoportszorzás útján lehet jellemezni. PONTRJAGIN ezt a gondolatot tovább fejlesztette és 1934-ben kimondta az E^n-ben fekvő kompakt halmazok és komplementumaik homológiacsoportjaira vonatkozó dualitási tételét [71].

ALEXANDER és KOLMOGOROV a primitív csoportozás formájában fellépő dualitási kapcsolatot a komplexusok homológiacsoportjai és az általuk konstruált kohomológiacsoportok között fedezték fel. KOLMOGOROV így a kohomológiacsoportok igénybevételével elérte azt, hogy a Poincaré és Alexander-féle dualitási tételek izomorfia tétel formájában kerüljenek kimondásra.

A kohomológiaelmélet alapgondolata az, hogy egy $x^r = \sum_i k_i a_i^r$ r-dimenziós lánchoz nemcsak a $\partial x^r = \sum_{i,j} \varepsilon_{i,j}^r k_i a_j^{r-1}$ $(r-1)$-dimenziós, hanem a $\delta x^r = \sum_{i,j} \varepsilon_{i,j}^{r+1} k_i a_j^{r+1}$ $(r+1)$-dimenziós láncot is hozzá lehet rendelni. ($\varepsilon_{i,j}^r$ itt az incidencia együtthatók). A kohomológiaelmélet a homológiaelmélettel analóg módon épül fel, de eközben nem a ∂, hanem a δ operációra támaszkodik.

A homológiaelméletről a kohomológiaelméletre történő áttérés célszerűnek bizonyult azért is, mert egy tér kohomológiacsoportjait szemben a homológiacsoportokkal, komplexusok közvetítése nélkül is megkaphatjuk. Ezt a tényt már ALEXANDER is észrevette és fel is használta [6], [7], [8]. Az általa bevezetett kohomológiacsoportokat azután SPANIER [80] (1948) és CARTAN [30] (1948) modernizálták, míg végül is a következő fogalmat nyerték:

Legyen X egy Hausdorff-féle topologikus tér, G pedig egy csoport, vagy egy gyűrű. Jelöljük X^{n+1}-gyel az X tér $(n+1)$ példányának topologikus szorzatát Δ-val az X^{n+1} tér diagonálisát és φ-vel a

$$\varphi(x) = (\underset{1}{x}, \underset{2}{x}, \ldots, \underset{n+1}{x}) \qquad (x \in X)$$

formulával definiált $\varphi: X \to \Delta$ topologikus leképezést. n-dimenziós *koláncnak* hívunk minden $f_n: X^{n+1} \to G$ függvényt. A koláncok körében, akárcsak a függvényeknél értelmezhető az összeadás művelete, sőt amennyiben G egy gyűrű, úgy egy G-beli g elem és egy f_n kolánc gf_n szorzata is. Ilyen módon az n-dimenziós koláncok összessége egy $C_n(X, G)$-vel jelölt kommutatív csoportot, illetve G-modulust alkot. (A továbbiakban egyszerűség kedvéért csak csoportokról beszélünk, de csoporton G-modulust is érthetünk.)

Egy f_n kolánc a Δ diagonális pontjait két osztályba sorolja. Az egyikbe azok a pontok tartoznak, melyeknek van olyan X^{n+1}-beli V környezetük, hogy minden $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in V$-re $f_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0$, a másikba pedig a többiek. A második osztályba tartozó pontok Φ halmazának $\varphi^{-1}(\Phi)$ képe alkotja az f_n kolánc $|f_n|$ *tartóját*. A kolánc tartója az X tér zárt részhalmaza. Ha ez a részhalmaz kompakt, akkor a kolánc *kompakt tartójú*, ha pedig üres, akkor *üres tartójú*. Az üres tartójú koláncok a $C_n(X, G)$ csoport egy $C_{n,0}(X, G)$, a kompakt tartójúak pedig $C_n(X, G)$-nek egy $C_{n,c}(X, G)$ alcsoportját alkotják.

Minden $f_n: X^{n+1} \to G$ n-dimenziós kolánchoz a $(\delta_n f_n)(x_0, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i f_n(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1})$ formula segítségével hozzárendelünk egy $\delta_n f_n$ $(n+1)$-dimenziós koláncot. Fennáll a $|\delta_n f_n| \subset |f_n|$ összefüggés is. Ezért a $\delta_n: C_n(X, G) \to C_{n+1}(X, G)$ homomorf leképezés $C_{n,0}(X, G)$-t $C_{n+1,0}(X, G)$-be $C_{n,c}(X, G)$-t pedig $C_{n+1,c}(X, G)$-be viszi át. Fennáll ezenkívül a $\delta_{n+1}\delta_n = 0$ összefüggés is. Jelöljük $\hat{C}_n(X, G)$-vel a $C_n(X, G)/C_{n,0}(X, G)$, $\check{C}_{n,c}(X, G)$-vel a

$$C_{n,c}(X, G)/C_{n,0}(X, G)$$

faktorcsoportot, $\check{\delta}_n$-nel, ill. $\check{\delta}_{n,c}$-vel a δ_n által indukált

$$\check{\delta}_n: \check{C}_n(X, G) \to \check{C}_{n+1}(X, G),$$

ill. $\check{\delta}_{n,c}: \check{C}_{n,c}(X, G) \to C_{n+1,c}(X, G)$ leképezéseket. Ekkor $\check{\delta}_{n+1}\check{\delta}_n = \check{\delta}_{n+1,c}\check{\delta}_{n,c} = 0$ miatt $\operatorname{Im} \check{\delta}_{n-1} \subset \operatorname{Ker} \check{\delta}_n$, ill. $\operatorname{Im} \check{\delta}_{n-1,c} \subset \operatorname{Ker} \check{\delta}_{n,c}$. *A* $\check{H}_n(X, G) = \operatorname{Ker} \check{\delta}_n / \operatorname{Im} \check{\delta}_{n-1}$ *csoportot az* X *tér zárt tartójú, a* $\check{H}_{n,c}(X, G) = \operatorname{Ker} \check{\delta}_{n,c} / \operatorname{Im} \check{\delta}_{n-1,c}$ *csoportot pedig az* X *tér kompakt tartójú* n*-dimenziós kohomológiacsoportjának hívjuk.* („Ker" a homomorfizmus magja „Im" pedig a homomorfizmus képe.)

Megjegyezzük, hogy a közönséges kohomológiaelméletben $\operatorname{Im} \check{\delta}_{(-1)}$-et nullcsoportnak tekintjük.

Időnként szükség van *bővített kohomológiacsoportokra* is. Ezekhez úgy jutunk, hogy bevezetjük a (-1)-dimenziós koláncokat, mint az egyetlen X elemű $\{X\}$ tér G-be való leképezéseit, a

$$(\delta_{(-1)} f_{(-1)})(x) = f_{(-1)}(X) \qquad (x \in X)$$

formulával pedig a $\delta_{(-1)}: C_{(-1)}(X, G) \to \check{C}_0(X, G)$ homomorfizmust értelmezzük. $\operatorname{Im} \delta_{(-1)}$ ekkor a $\check{C}_0(X, G)$ csoport egy G-vel izomorf alcsoportja. A $\operatorname{Ker} \check{\delta}_0 / \operatorname{Im} \delta_{(-1)}$ faktorcsoportot ebben az esetben $H_{0,a}(X, G)$-vel jelöljük. $p \neq 0$ esetén $H_{p,a}(X, G) = H_p(X, G)$.

A kohomológiaelméletben a kohomológiacsoportokon kívül fontos szerepük van az *indukált leképezéseknek* is. Az alábbi két típusra lesz szükségünk:

1. Legyen $h: X \to X'$ egy folytonos leképezés és $f'_n: X'^{n+1} \to G$ egy kolánc. Ekkor a

$$(\bar{h}_n f'_n)(x_0, \ldots, x_n) = f'_n(h(x_0), \ldots, h(x_n))$$

formulával értelmezünk egy $\bar{h}_n f'_n : X^{n+1} \to G$ koláncot. $\bar{h}_n : C_n(X', G) \to C_n(X, G)$ egy olyan hormomorfizmus, melynél teljesül a $\delta_n \bar{h}_n = \bar{h}_{n+1} \delta'_n$ és a $|h_n f'_n| \subset h^{-1} |f'_n|$ összefüggés és így h indukál egy $h_n^* : H_n(X', G) \to H_n(X, G)$ homomorf leképezést.

2. Legyen most X' egy lokálisan kompakt Hausdorff-féle tér és X az X' tér nyílt altere. Jelöljük $j_{X',X}$-szel az X altér X'-be történő injekcióját. Legyen $\check{f}_n \in \check{C}_{n,c}(X,G)$ és legyen $f_n \in \check{f}_n$ olyan az $\check{f}_n$ ekvivalenciaosztályhoz tartozó kolánc, mely az X^{n+1} tér valamely kompakt alterén kívül mindenütt 0 értéket vesz fel. Legyen

$$f'_n(x'_0, \ldots, x'_n) = \begin{cases} f_n(x'_0, \ldots, x'_n), & \text{ha} \quad (x'_0, \ldots, x'_n) \in X^{n+1} \\ 0, & \text{ha} \quad (x'_0, \ldots, x'_n) \notin X^{n+1}. \end{cases}$$

$\overline{f'_n}$ egy kompakt tartójú kolánc, és ennek $\check{f}'_n$ ekvivalenciaosztálya nem függ az f_n kolánc speciális megválasztásától. Legyen $j_{X',X,n} \check{f}_n = \check{f}'_n$. Ilyen módon egy $j_{X',X,n} : \check{C}_{n,c}(X, G) \to \check{C}_{n,c}(X', G)$ homomorf leképezést nyertünk és erre a leképezésre fennáll a $\check{\delta}'_{n,c} j_{X',X,n} = j_{X',X,n+1} \check{\delta}_{n,c}$ összefüggés. A $j_{X'X}$ leképezés tehát egy $j^{**}_{X',X,n} : H_{n,c}(X, G) \to H_{n,c}(X', G)$ homomorfizmust indukál.

A 2. típusú indukált leképezés alapján nyerjük a következő definíciót:

Egy X lokálisan kompakt Hausdorff-féle tér valamely x pontjának p dimenziós $H_p(x, X, G)$ *lokális kohomológiacsoportja* 0-*csoport*, ha x bármely (nyílt) U környezetének van olyan (nyílt) V részkörnyezete, melynél a $j^{**}_{U,V,n}$ leképezés triviális (vagyis $j^{**}_{U,V,n}(H_{n,c}(V, G)) = 0$.)

A kohomológiacsoportok és kohomológiaszámok felhasználásával 1942-ben, ill. 1945-ben BEGLE átfogalmazta az általánosított sokaságok Čech-féle definícióját, sőt míg ČECH-nél a sokaságok mindig kompaktak, BEGLE-nél már csak a lokális kompaktság van kikötve [17], [18]. BEGLE egyúttal bevezette az általánosított sokaságok (*gm*-ek) irányíthatóságának a fogalmát. BEGLE általánosított sokaság definícióját vette át azután maga WILDER is a sokaságok topológiájáról szóló monográfiájának megírásakor [97] (1948).

WILDER könyvének megjelenése után az érdeklődés elsősorban a határolt általánosított sokaságok felé fordult. Az első idevonatkozó eredmények WHITE-től származnak [89], [90] (1950, 1952), az utóbbi években pedig elsősorban KWUN és RAYMOND értek el jelentős új eredményeket. 1964-ben megjelent dolgozatukban [52] általánosított sokaságokon lokálisan irányítható kohomológiasokaságokat értenek. Míg tehát BEGLE az általánosított sokaságokat részben homologikus, részben pedig kohomologikus fogalmakra építi, addig KWUN és RAYMOND kizárólag kohomologikus fogalmakat használ. KWUN és RAYMOND eltekintenek a Čech—Begle—Wilder-féle sokaságok definiálásánál lényeges Brouwer—Lebesgue-féle dimenziófogalom igénybevételétől is, és helyette a COHEN-féle *kohomológiadimenzió* fogalmát használják [36] (1954). Ez a fogalom a következőképpen értelmezhető:

Legyen G egy Abel-féle csoport vagy pedig egy gyűrű, és K egy kompakt Hausdorff-féle tér. Bevezetjük a $K \in D_k(G)$ jelölést abban az esetben, ha K minden zárt C részhalmazánál a

$$j^*_{K,C,n} : H_n(K, G) \to H_n(C, G)$$

leképezés epimorf. ($j^*_{K,C,n}$ a $j_{K,C} : C \to K$ injekció 1. típusú indukált leképezése.)

Legyen

$$Cd(K, G) = -1, \quad \text{ha} \quad K \quad \text{az üres tér}$$

$$Cd(K, G) = \inf_n (K \in D_n(G)),$$

ha $K \neq \emptyset$ és ha van olyan n, melynél $K \in D_n(G)$, egyébként pedig $Cd(K, G) = \infty$.

Legyen X egy lokálisan kompakt Hausdorff-féle tér. Legyen $Cd(X, G)$ az X tér K kompakt alterei $Cd(K, G)$ kohomológia-dimenzióinak felső határa, amennyiben ez a felső határ létezik és véges, egyébként pedig legyen $Cd(X, G) = \infty$. A kohomológiadimenzió az induktív dimenziófogalom számos tulajdonságával rendelkezik.

Ezek után rátérhetünk a *lokálisan irányítható n-dimenziós kohomológiasokaságok* — KWUN és RAYMOND terminológiája szerint: $n-gm$-ek — értelmezésére:

Legyen X egy lokálisan kompakt Hausdorff-féle tér, az együtthatócsoport pedig legyen egy L főideálgyűrű. X egy *irányítható* $n-gm$ (mod L) ha eleget tesz az alábbi követelményeknek:

a) Minden $x \in X$-re és n-től különböző p egészre $H_p(x, X, L) = 0$.

b) Az X tér bármely nem üres összefüggő nyílt U részhalmazára és U-t tartalmazó C komponensére a $j_{C,V}$ injekció által indukált $j^{**}_{C,V}$: $H_{n,c}(U, L) \to H_{n,c}(C, L)$ leképezés izomorfizmus, és az X tér bármely C komponensére $H_{n,c}(C, L)$ izomorf L-lel.

c) Az X tér kohomológiadimenziója (mod L) véges.

Az $n-gm$-ek definíciója mármost a következő:

A lokálisan kompakt Hausdorff-féle X-tér egy $n-gm$ (mod L) ha van irányítható (mod L) $n-gm$-ekből álló nyílt fedőrendszere.

Ezek után definiálhatók a határolt $n-gm$-ek is a következő módon:

Az X lokálisan kompakt Hausdorff-féle tér egy B határral rendelkező $n-gm$ (mod L), ha

a) B az X tér zárt részhalmaza,

b) B az üres halmaz, vagy egy $(n-1)-gm$ (mod L),

c) $X \setminus B$ egy $n-gm$ (mod L),

d) tetszőleges $x \in B$-re és tetszőleges p nem negatív egész számra $H_p(x, X, L) = 0$.

A határolt $n-gm$-ek határa egyértelműen van meghatározva. A B határral rendelkező X határolt $n-gm$ irányítható, ha $X \setminus B$ irányítható.

Egy X kompakt (mod L) $n-gm$-et *szférikus* $n-gm$-nek hívunk (mod L), ha minden p-re $H_p(X, L)$ izomorf $H_p(S^n, L)$-lel, ahol S^n az n-dimenziós gömbfelület.

Egy összefüggő (mod L) $n-gm$-et *euklideszi* $n-gm$-nek hívunk (mod L), ha minden p-re $H_{p,c}(X, L)$ izomorf $H_{p,c}(E^n, L)$-lel, ahol E^n az n-dimenziós euklideszi tér.

Végül az *általánosított cellák* definíciója a következő:

Egy X kompakt irányítható nem üres B határral rendelkező (mod L) $n-gm$ egy általánosított n-cella (mod L), ha minden p-re $H_{p,a}(X, L) = 0$. Ha X egy B határral bíró általánosított n-cella, akkor $X \setminus B$ euklideszi $n-gm$, B pedig szférikus $(n-1)-gm$.

A határolt $n-gm$-ekre vonatkozó eredmények közül megemlítünk két RAYMOND-tól származó *felbontási és egyesítési tételt* [73] (1960):

A) Legyenek az X_1 és X_2 határolt $n-gm$-ek az $X = X_1 \cup X_2$ tér zárt alterei és legyen $i = 1$, 2-re X_i határa B_i. Tegyük fel, hogy $X_1 \cap X_2 = B \subset (B_1 \cap B_2)$, és hogy B egy B' határral bíró határolt $(n-1)-gm$. Ekkor X is egy határolt $n-gm$ és X határa $((B_1 \cup B_2) \setminus B) \cup B'$.

B) Legyen X egy összefüggő, B határú határolt $n-gm$, X' pedig egy olyan összefüggő, B' határú határolt $(n-1)-gm$, mely X-nek zárt altere, melynél $(X' \setminus B') \subset (X \setminus B)$ és melynél $X \setminus X'$ nem összefüggő. Ekkor X pontosan két D_1 és D_2 összefüggő határolt $n-gm$ egyesítése, ahol $i = 1$, 2-re D_i határa $(D_i \cap B) \cup X'$, ezenkívül pedig $D_1 \cap D_2 = X'$ és X' a D_1 és D_2 halmazok közös határa az X térben.

KWUN és RAYMOND vizsgálatai domborították ki azt a tényt, hogy az általánosított sokaságok nemcsak az euklideszi sokaságokéval azonos, hanem a tőlük eltérő tulajdonságaik miatt is érdekesek. Arról van ugyanis szó, hogy az euklideszi sokaságok időnkint meglepő szingularitásai, melyekre „szarvakkal ellátott" gömbjével először ALEXANDER adott példát [3], az általánosított sokaságoknál legtöbbször nem lépnek fel.

Feküdjön például az X' topologikus gömbfelület a háromdimenziós S^3 gömbi térben, és vegyünk $S^3 \setminus X'$ egyik komponensének zárt burkából két példányt. Ragasszuk őket össze X' mentén. LININGER 1965-ben egy viszonylag egyszerű konstrukciót adott olyan X'-re, melynél $S^3 \setminus X'$ egyik komponensének zárt burkát megkettőzve és X' mentén összeragasztva az összeragasztás eredményeként S^3-mal nem homeomorf alakzat keletkezik [98]. Ezzel szemben a gm-ek felbontási és egyesítési tételei biztosítják azt, hogy ha egy X szférikus $n-gm$-et egy benne fekvő X' szférikus $(n-1)-gm$-mel kettévágunk, akkor bármelyik komponens zárt burkának megkettőzésével és e két alakzat X' mentén történő összeragasztásával ismét szférikus $n-gm$-et nyerünk.

Hasonló jelenséggel találkozunk a kockák topologikus szorzatra történő felbontásakor is. Érdekes szingularitásra mutatott rá ugyanis 1960-ban és 1961-ben POÉNARU [66], MAZUR [61] és CURTIS [37] a többdimenziós kockák topologikus felbontásával kapcsolatban. Az alábbi meglepő eredményt nyerték:

Legyen az I^n n-dimenziós kocka az I zárt intervallum és egy M topologikus tér $M \times I$ topologikus szorzata. Bár $n \leqq 4$-re, mint azt BING igazolta [22] (1961), az M faktor nem lehet más, mint egy $(n-1)$-dimenziós kocka, $n \geqq 5$ esetén azonban ez az állítás már egyetlen n-re sem igaz, még akkor sem, ha M-ről feltesszük, hogy egy határolt sokaság.

KWUN és RAYMOND azután 1962-ben bebizonyították azt, hogy egy X általánosított n-cella akkor és csak akkor lesz az A és B terek topologikus szorzata, ha valamely k-ra $(0 \leqq k \leqq n)$ A egy általánosított k-cella, B pedig egy általánosított $(n-k)$-cella [51].

Ezek a körülmények arra mutatnak, hogy az általánosított sokaságok egyszerű és áttekinthető törvényeik folytán viszonylag bonyolult konstrukciójuk ellenére is alkalmasabbak lehetnek a valóság leírására, mint az euklideszi sokaságok.

Ez a referátum nem foglalkozott a topologikus sokaságokkal kapcsolatos minden fontosabb eredménnyel. Így pl. a homotopikus sokaságok elméletét teljesen figyelmen kívül hagytuk. Célunk inkább az volt, hogy a Riemann-féle sokaságoktól a kohomologiasokaságokig vezető fejlődés fő irányvonaláról nyújtsunk vázlatos áttekintést.

IRODALOM

Hazai könyvtárakban nem található cikkeknél a cikk fordítását, vagy a referátum helyét is megadjuk. Összegyűjtött munkákba felvett cikkeknél a cikknek a kiadványban levő helyét is közöljük.

Gyakrabban használt folyóiratok rövidítései:

Am. J. M. = American Journal of Mathematics
A. o. M. = Annals of Mathematics
Bull. A. M. S. = Bulletin of the American Mathematical Society
Bull. S. M. F. = Bulletin de la Société Mathématique de France
C. R. = Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences (Paris)
Fund. Math. = Fundamenta Mathematicae
Math. Ann. = Mathematische Annalen
Monatsh. = Monatshefte für Mathematik und Physik

Nachr. Göttingen = Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen
Proc. A. M. S. = Proceedings of the American Mathematical Society
Proc. Nat. Ac. USA = Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America
Tr. A. M. S. = Transactions of the American Mathematical Society

Egyéb rövidítések:

s. = sorozat; k. = kötet; o. = oldal.

Kerek zárójelbe tesszük a megjelenés évét.

[1] J. W. ALEXANDER: A proof of the invariance of certain constants of analysis situs. Tr. A. M. S. 16. k. 148—154. o. (1915).
[2] J. W. ALEXANDER: A proof and extension of the Jordan—Brouwer theorem. Tr. A. M. S. 23. k. 333—349. o. (1922).
[3] J. W. ALEXANDER: An example of a simply connected surface bounding a region which is not simply connected. Proc. Nat. Ac. USA. 10. k. 8—10. o. (1924).
[4] J. W. ALEXANDER: Combinatorial analysis situs. Tr. A. M. S. 28. k. 301—329. o. (1926).
[5] J. W. ALEXANDER: On the chains of a complex and their duals. Proc. Nat. Ac. USA. 21. k. 509—511. o. (1935).
[6] J. W. ALEXANDER: On the ring of a compact metric space. Proc. Nat. Ac. USA. 21. k. 511—512. o. (1935).
[7] J. W. ALEXANDER: On the connectivity ring of a bicompact space. Proc. Nat. Ac. USA. 22. k. 381—384. o. (1936).
[8] J. W. ALEXANDER: On the connectivity ring of an abstract space. A. o. M. 37. k. 698—708. o. (1936).
[9] P. ALEXANDROFF: Simpliziale Approximationen in der allgemeinen Topologie. Math. Ann. 96. k. 489—511. o. (1927).
[10] P. ALEXANDROFF: Über die Dualität zwischen den Zusammenhangszahlen einer abgeschlossenen Menge und des zu ihr komplementären Raumes. Nachr. Göttingen 1927. 323—329. o.
[11] P. ALEXANDROFF: Une définition des nombres de Betti pour un ensemble fermé quelconque. C. R. 184. k. 317—319. o. (1927).
[12] P. ALEXANDROFF: Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension. A. o. M. 30. k. 101—187. o. (1929).
[13] P. ALEXANDROFF: Über die Urysohnschen Konstanten. Fund. Math. 20. k. 140—150. o. (1933).
[14] P. ALEXANDOFF—H. HOPF: Topologie. Berlin, 1935.
[15] P. ALEXANDROFF: On local properties of closed sets. A. o. M. 36. k. 1—35. o. (1935).
[16] P. ALEXANDROFF—L. PONTRJAGIN: Les variétés à n-dimensions généralisées. C. R. 202. k. 1327—1329. o. (1936).
[17] E. G. BEGLE: Locally connected spaces and generalized manifolds. Am. J. M. 64. k. 553—574. o. (1942).
[18] E. G. BEGLE: Duality theorems for generalized manifolds. Am. J. M. 67. k. 59—70. o. (1945).
[19] E. BETTI: Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni. Annali di Matematica 2. s. 4. k. 140—158. o. (1870—71).
[20] R. H. BING: Locally tame sets ara tame. A. o. M. 59. k. 145—158. o. (1954).
[21] R. H. BING: An alternative proof, that 3-manifolds can be triangulated. A. o. M. 69. k. 37—65. o. (1959).
[22] R. H. BING: A set is a 3-cell if its Cartesian product with an arc is a 4-cell. Proc. A. M. S. 12. k. 13—19. o. (1961).
[23] L. E. J. BROUWER: Beweis der Invarianz der Dimensionszahl. Math. Ann. 70. k. 161—165. o. (1910).
[24] L. E. J. BROUWER: Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 71. k. 97—115. o. (1911).
[25] L. E. J. BROUWER: Beweis der Invarianz des n-dimensionalen Gebiets. Math. Ann. 71. k. 305—313. o. (1911).
[26] L. E. J. BROUWER: Beweis des Jordanschen Satzes für den n-dimensionalen Raum. Math. Ann. 71. k. 314—319. o. (1911).
[27] L. E. J. BROUWER: Über Jordansche Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 71. k. 320—327. o. (1911).
[28] L. E. J. BROUWER: Beweis der Invarianz der geschlossenen Kurve. Math. Ann. 72. k. 422—425. o. (1912).
[29] S. S. CAIRNS: Triangulation of the manifold of class one. Bull. A. M. S. 41. k. 549—552. o. (1935).

[30] H. CARTAN: La cohomologie de Čech-Alexander. Ecole Normale Supérieure. Séminaire Henri Cartan 1. e. année 1948/49.
Topologie albégrique. 6. exposé.
2-e édition multigraphiée, revue et corrigée. Paris, 1955.
[31] E. ČECH: Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque, Fund. Math. 19. k. 149—183. o. (1932).
[32] E. ČECH: Théorie générales des variétés et de leurs théorémes de dualité. A. o. M. 34. k. 621—730. o. (1933).
[33] E. ČECH: Sur les nombres de Betti locaux. A. o. M. 35. k. 678—701. o. (1934).
[34] E. ČECH: On general manifolds. Proc. Nat. Ac. USA. 22. k. 110—111. o. (1936).
[35] E. ČECH: Multiplications on a complex. A. o. M. 37. k. 681—697. o. (1936).
[36] H. COHEN: A cohomological definition of dimension for locally compact Hausdorff spaces. Duke Mathematical Journal 21. k. 209—224. o. (1954).
[37] M. L. CURTIS: Cartesian products with intervalls. Proc. A. M. S. 12. k. 819—820. o. (1961).
[38] M. DEHN—P. HEEGAARD: Analysis Situs. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. III. Geometrie. I. Teil 1. k. 153—220. o. (1907).
[39] S. EILENBERG: Singular homology theory. A. o. M. 45. k. 407—447. o. (1944).
[40] S. EILENBERG—N. E. STEENROD: Axiomatic approach to homology theory. Proc. Nat. Ac. USA. 31. k. 117—120. o. (1945).
[41] W. W. FLEXNER: On topological manifolds. A. o. M. 32. k. 393—406. o. (1931).
[42] F. FRANKL: Topologische Beziehungen in sich kompakter Teilmengen euklidischer Räume zu ihren Komplementen sowie Anwendung auf die Prim-Enden-Theorie. Sitzungsberichte Wien. Akademie der Wissenschaften. Abteilung II. a. 136. k. 689—699. o. (1927).
[43] H. GRASSMANN: Die Ausdehnungslehree. Berlin 1862.
Grassmanns gesammelte mathematische und physikalische Werke I/2. Leipzig 1896.
[44] F. HAUSDORFF: Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig, 1914.
[45] P. HEEGAARD: Forstudier til en topologisk Teori for de algebraiske Fladers Sammenhang. Copenhague det Nordiske Forlag Ernst Bojesen, 1898.
P. HEEGARD: Sur l'Analysis Situs. Bull. S. M. F. 44. k. 161—242. o. (1916).
[46] KALUZSAY KÁROLY: A felületre vonatkozó Jordan tétel megfordítása. Matematikai és Fizikai Lapok. 24. k. 101—141. o. (1915).
[47] E. R. VAN KAMPEN: Die kombinatorische Topologie und die Dualitätssätze. Acad. Proofschrift. Dissertation, Leiden 1929.
Fortschritte der Mathematik. 55/II. k. 964. o. (1929).
[48] B. v. KERÉKJÁRTÓ: Vorlesungen über Topologie I. Flächentopologie. Berlin 1923.
[49] A. KOLMOGOROFF: Über die Dualität im Aufbau der kombinatorischen Topologie. Математический Сборник, 2. s. 1. k. 97—102. o. (1936).
[50] B. O. KOOPMAN—A. B. BROWN: On the covering of analytic loci by complexes. Tr. A. M. S. 34. k. 231—251. o. (1932).
[51] K. W. KWUN—F. RAYMOND: Factors of cubes Am. J. M. 84. k. 433—439. o. (1962).
[52] K. W. KWUN—F. RAYMOND: Manifolds which are joins. Tr. A. M. S. 111. k. 108—120. o. (1964).
[53] S. LEFSCHETZ: Intersections and transformations of complexes and manifolds. Tr. A. M. S. 28. k. 1—49. o. (1926).
[54] S. LEFSCHETZ: The residual set of a complex on a manifold and related questions. Proc. Nat. Ac. USA. 13. k. 614—622. o. és 805—807. o. (1927).
[55] S. LEFSCHETZ: Closed point sets on a manifold. A. o. M. 29. k. 232—254. o. (1928).
[56] S. LEFSCHETZ: Topology. New-York, 1930.
[57] S. LEFSCHETZ—W. W. FLEXNER: On the duality theorems for the Betti numbers of topological manifolds. Proc. Nat. Ac. USA. 16. k. 530—533. o. (1930).
[58] S. LEFSCHETZ: On generalized manifolds. Am. J. M. 55. k. 469—504. o. (1933).
[59] S. LEFSCHETZ: On singular chains and cycles. Bull. A. M. S. 39. k. 124—129. o. (1933).
[60] J. B. LISTING: Ueber einige Anwendungen des Census-Theorems. Nachr. Göttingen 1867. 430—447. o.
[61] B. MAZUR: A note on some contractible 4-manifolds. A. o. M. 73. k. 221—228. o. (1961).
[62] E. E. MOISE: Affine structures in 3-manifolds V. The triangulation theorem and Hauptvermutung. A. o. M. 56. k. 96—114. o. (1952).
[63] E. E. MOISE: Affine structures in 3-manifolds VIII. Invariance of the knot types, local tame imbedding. A. o. M. 59. k. 145—158. o. (1954).

[64] R. L. MOORE: A characterization of Jordan regions by properties having no reference to their boundaries. Proc. Nat. Ac. USA. 4. k. 364—370. o. (1918).
[65] G. NÖBELING: Zur Topologie der Mannigfaltigkeiten. Monatsh. 42. k. 117—152. o. (1935).
[66] V. POÉNARU: Les décompositions de l'hypercube en produit topologique. Bull. S. M. F. 88. k. 113—129. o. (1960).
[67] H. POINCARÉ: Analyisys Situs. Journal de l'École Polytechnique. 1. k. 1—121. o. (1895). Oeuvres de Henri Poincaré. Paris, 1953. 6. k. 193—288. o.
[68] H. POINCARÉ: Complément a l'Analysis Situs. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 13. k. 285—343. o. (1899).
Oeuvres de Henri Poincaré. Paris, 1953. 6. k. 290—337. o.
[69] L. PONTRJAGIN: Zum Alexanderschen Dualitätssatz I, II. Nachr. Göttingen. 1927. 315—322. o. és 446—456. o.
[70] L. PONTRJAGIN: Über den algebraischen Inhalt topologischer Dualitätssetze. Math. Ann. 105. k. 165—205. o. (1931).
[71] L. PONTRJAGIN: The general topological theorem of duality for closed sets. A. o. M. 35. k. 904—914. o. (1934).
[72] T. RADÓ: Über den Begriff der Riemannschen Fläche. Acta Litterarum Scientiarum. Sectio Scientiarum Mathematicarum. Szeged. 2. k. 101—121. o. (1924—26).
[73] F. RAYMOND: Separation and union theorems for generalized manifolds with boundary. The Michigan Mathematical Journal. 7. k. 1—21. o. (1960).
[74] B. RIEMANN: Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen complexen Grösse. Inauguraldissertation. 1851.
B. Riemanns gesammelte mathematische Werke. Leipzig 1892. 3—43. o.
[75] B. RIEMANN: Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Habilitationsschrift 1854.
B. Riemanns gesammelte mathematische Werke. Leipzig, 1892. 272—287. o.
[76] B. RIEMANN: Fragment aus der Analysis Situs. B. RIEMANNS gesammelte mathematische Werke, Leipzig, 1892, 479—482. o.
[77] L. SCHLÄFLI: Theorie der vielfachen Kontinuität. 1850—52.
Gesammelte mathematische Abhandlungen von Ludwig Schläfli I. Basel. 1950. 167—387. o.
[78] A. SCHOENFLIES: Über einen grundlegenden Satz der Analysis Situs. Nachr. Göttingen 1902. 185—192. o.
[79] H. SEIFERT referátuma Nöbeling cikkéről: Zentralblatt für Mathematik und ihre Grnezgebiete. 11. k. 370. o. (1935).
[80] E. H. SPANIER: Cohomology theory for general spaces. A. o. M. 49. k. 407—427. o. (1948).
[81] H. TIETZE: Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten. Monatsh. 19. k. 1—118. o. (1908).
[82] O. VEBLEN—J. W. ALEXANDER: Manifolds of n-dimensions. A. o. M. 14. k. 163—178. o. (1912).
[83] O. VEBLEN: Analysis situs. New York, 1922.
Second edition. New York, 1931.
[84] O. VEBLEN: The intersection numbers. Tr. A. M. S. 25. k. 540—550. o. (1923).
[85] L. VIETORIS: Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen. Math. Ann. 97. k. 454—472. o. (1927).
[86] L. VIETORIS: Über die Symmetrie in den Zusammenhangszahlen kombinatorischer Mannigfaltigkeiten. Monatsh. 35. k. 165—174. o. (1928).
[87] L. VIETORIS: Zum höheren Zusammenhang der kompakten Räume. Math. Ann. 101. k. 219—225. o. (1929).
[88] H. WEYL: Die Idee der Riemannschen Fläche. Leipzig, 1913.
[89] P. A. WHITE: On the union of two generalized manifolds. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Scienze Fiziche e Matematiche. 3. s. 4. k. 231—243. o. (1950).
Mathematical Reviews 13. k. 55. o. (1952).
[90] P. A. WHITE: Some characterizations of generalized manifolds with boundaries. Canadion Journal of Mathematics. 4. k. 329—342. o. (1952).
[91] H. WHITNEY: On products in a complex. A. o. M. 39. k. 397—432. o. (1938).
[92] R. L. WILDER: A converse of the Jordan-Brouwer theorem. Bull. A. M. S. 35. k. 771. o. (1929).
[93] R. L. WILDER: A converse of the Jordan-Brouwer theorem in three dimensions. Tr. A. M. S. 32. k. 632—657. o. (1930).
[94] R. L. WILDER: A converse of the theorem regarding the separation of E_3 by a closed two dimensional manifold of genus p. Bull. A. M. S. 36. k. 219. o. (1930).

[95] R. L. WILDER: On the properties of domains and their boundaries in E_n. Math. Ann. 109. k. 273—306. o. (1934).
[96] R. L. WILDER: Generalized closed manifolds in n-space. A. o. M. 35. k. 876—903. o. (1934).
[97] R. L. WILDER: Topology of manifolds, New York, 1949.
[98] L. L. LININGER: Some results on crumpled cubes. Tr. A. M. S. 118. k. 534—549. o. (1965).
[99] VISKI MÁRIA: Szinguláris homológiák I. Matematikai Lapok. 17. k. 261—294. o. (1966).

РАЗВИТИЕ И ФОРМИРОВАНИЕ ТЕОРИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ МНОГООРАЗИЙ

М. БОГНАР

THE DEVELOPMENT OF THE THEORY OF TOPOLOGICAL MANIFOLDS

M. BOGNÁR

MÖBIUS-LÉTRÁKRÓL

RICHARD K. GUY—FRANK HARARY

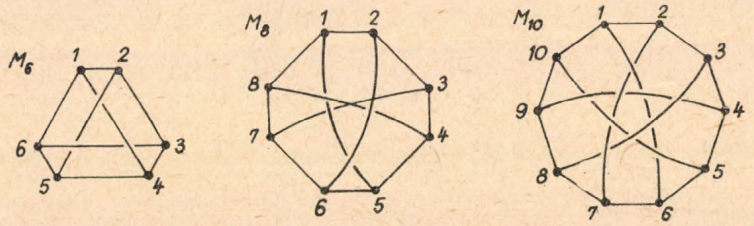
Tekintsük az M_n gráfot ($n=2r\geqq 6$), amely egy n hosszúságú poligonból és a szemben fekvő szögpontpárokat összekötő $n/2$ húrból áll. E gráfnak $2r$ szögpontja van; ha ezeket az $1, 2, \ldots, 2r$ számokkal jelöljük, akkor a gráf (nem irányított) éleit az

$$(1, 2)\ (2, 3), \ldots, (2r-1, 2r),\ (2r, 1),$$

$$(1, r+1),\ (2, r+2), \ldots, (r, 2r)$$

számpárok reprezentálják.

Nevezzük M_n-et az *n-létrának*, amelyet ily módon egyelőre csak páros n-ekre definiáltunk. A három legkisebb n-létrát az 1. ábra szemlélteti. Könnyű belátni,



1. ábra

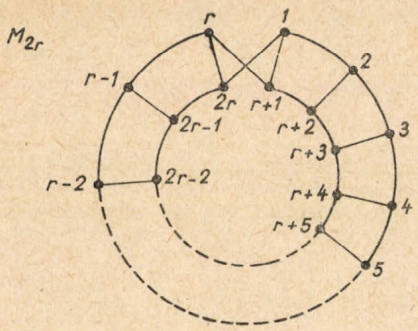
hogy M_6 izomorf $K_{3,3}$-mal, vagyis azzal a teljes páros gráffal, amelynek mindkét pontosztályában 3 pont van; más szóval a (második) Kuratowski gráffal: 1, 3, 5 a három ház és 2, 4, 6 a három kút.

Egy G gráf $C(G)$ *keresztezési száma* a kereszteződő élpárok számának minimuma, G összes a síkban lerajzolt modelljeire vonatkozóan. Vajon mik a $2r$-létrák $C(M_{2r})$ keresztezési számai? Az 1. ábra azt sejteti, hogy a választ $n=2r$-nek valamely szigorúan monoton növekedő függvénye szolgáltathatja. Meglepő, hogy ezzel szemben minden esetben $C(M_{2r})=1$ érvényes. Ennek bizonyítására megmutatjuk, hogy $C(M_{2r})\leqq 1$ és $C(M_{2r})\geqq 1$.

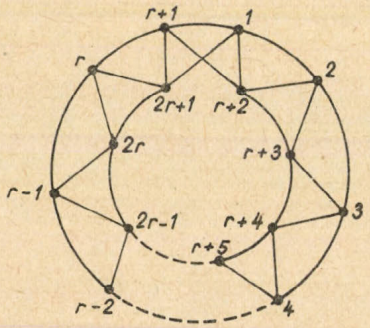
Az első egyenlőtlenség abból következik, hogy minden M_{2r} megrajzolható egyetlen keresztezéssel, amint ezt a 2. ábra világosan mutatja. M_{2r}-nek ez a speciális reprezentációja a Möbius-szalagra emlékeztet, s ez adta az ötletet e cikk címéhez.

A $C(M_{2r})\geqq 1$ egyenlőtlenség azzal egyértelmű, hogy egyetlen $2r$-létra sem síkba rajzolható gráf. Ez pedig Kuratowski [4]-beli jólismert tételéből következik; csak azt kell észrevenni, hogy alkalmasan választott $r-3$ él elhagyása M_{2r}-nek olyan részgráfját eredményezi, amely $K_{3,3}$-mal homeomorf.

Az $n=2r+1$ ($r\geqq 2$) *páratlan* indexekre így definiáljuk az M_n *Möbius-létrát:*



2. ábra.



3. ábra

M_n-et egy n-poligon alkotja, amelynek minden egyes szögpontját egy-egy további él köti össze a két tőle legtávolabbi szögponttal. Világos, hogy M_5, vagyis a legkisebb páratlan n-létra az „első Kuratowski-gráf" néven ismert K_5 teljes gráffal izomorf. A két legkisebb n-létra, M_5 és M_6 tehát éppen a két Kuratowski-gráf, s így az M_n gráfok a Kuratowski-gráfok általánosításának tekinthetők.

Vajon mik a páratlan n-létrák keresztezési számai? Talán a páros n-létrákra vonatkozó eredménynél is meglepőbb, hogy a válasz ismét: 1.

A bizonyítás a páros változatéhoz hasonlóan történhet. A 3. ábráról leolvasható, hogy $C(M_{2r+1}) \leqq 1$. Más úton viszont $C(M_{2r+1}) \geqq 1$ következik.

Valóban: miután a páratlan n-létrák negyedfokú reguláris gráfok, minden szögpont páros fokú. Zeeman [5]-beli megjegyzése szerint tehát egy páratlan n-létra bármely két, a síkban megrajzolt modelljében megegyezik a keresztezések számának párossága. A 3. ábrán ez a párosság 1, s így az sohasem tehető 0-vá.

Egyikünk [2]-ben a *minimálisan nem-síkbeli* elnevezést vezette be az olyan gráfokra, amelyeknek keresztezési száma 1. Eredményeinket tehát így foglalhatjuk egybe:

TÉTEL. *Minden Möbius-létra minimálisan nem-síkbeli gráf.*

Köszönetünket fejezzük ki C. A. ROGERS-nek hasznos ötleteiért.

IRODALOM

[1] R. K. GUY, A combinatorial problem. *Bull. Malayan Math. Soc.* **7** (1960) 68—72.
[2] F. HARARY, On minimally nonplanar graphs, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sec. Math.* **8** (1965) 13—15.
[3] F. HARARY—A. HILL, On the number of crossing in a complete graph. *Proc. Edinburgh Math. Soc.* **13** (1963) 333—338.
[4] K. KURATOWSKI, Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fund. Math.* **15** (1930) 271—283.
[5] E. C. ZEEMAN, Unknotting 2-spheres in 5 dimensions. *Bull. Amer. Math. Soc.* **66** (1960) 198.

О ЛЕСТНИЦАХ МЁБИУСА

Р. К. ГАЙ И Ф. ХАРАРИ

ON THE MÖBIUS LADDERS

RICHARD K. GUY AND FRANK HARARY

The Möbius ladder M_n is defined as the graph consisting for $n=2r\geqq 6$ of a polygon of length n and all $n/2$ chords joining opposite pairs of vertices, and for $n=2r+1$ ($r\geqq 2$) of an n-gon together with two chords at each vertex joining it to the most opposite vertices of the polygon.

Theorem. Every Möbius ladder is minimally nonplanar (this means, its crossing number is one).

INTERPOLÁCIÓS POLINOMOKKAL VALÓ APPROXIMÁCIÓRÓL

FREUD GÉZA

Ismeretes S. N. BERNSTEIN [1] azon eredménye, hogy az $\{x_k^{(n)}\}$ $(-1 \leqq x_k^{(n)} \leqq +1)$ alappontrendszer alkalmas választása mellett szerkeszthető minden $c>0$-ra olyan

$$\{L_n(f; x)\}$$

lineáris eljárás (vagyis a $C[-1, +1]$ teret önmagába leképező lineáris operátor sorozat), melyre igaz, hogy

a) $L_n(f; x)$ minden f-re legfeljebb $n(1+c)$-edfokú polinom,

b)

$$L_n(f; x_k^{(n)}) = f(x_k^{(n)}) \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

c) minden $[-1, +1]$-ben folytonos $f(x)$ függvényre

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f; x) = f(x).$$

Az ilyen típusú alappontrendszerekre ERDŐS PÁL [2] adott meg szükséges és elégséges feltételt. Ezért ezeket Bernstein—Erdős típusú alappontrendszernek nevezzük. Másrészt „jól approximálónak" nevezzük az olyan

$$\{x_k^{(n)}\} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots) \qquad -1 \leqq x_k^{(n)} \leqq +1$$

alappontrendszert, hogy minden $c>0$-ra található olyan $L_n^*(f; x)$ lineáris közelítő eljárás, melyre — L_n helyébe L_n^*-ot helyettesítve — a) és b) teljesül, sőt c) abban a szigorúbb formában is érvényes, hogy minden folytonos $f(x)$-re és elég nagy n-re

$$|f(x) - L_n^*(f; x)| \leqq K E_n(f), \qquad -1 \leqq x \leqq +1, \tag{2}$$

ahol $E_n(f)$ az $f(x)$ n-edfokú polinomokkal való legjobb közelítése a $C[-1, +1]$ tér metrikájában. A $K>0$ állandó függ c-től és az alappontrendszertől, de független $f(x)$ választásától.

TÉTEL: *Egy alappontrendszer akkor és csak akkor jól approximáló, ha Bernstein—Erdős típusú.*

Bizonyítás: Hogy a feltétel szükséges, az evidens, hiszen L_n^* eleget tesz az a), b) és c) feltételeknek. A feltétel elégségességét az alábbi módon bizonyítjuk:

Legyen $s_\nu(\cos\theta)$ az $f(\cos\theta)$ Fourier sorának ν-edik részletösszege, tehát $s_\nu(x)$ legfeljebb ν-edfokú polinom, és n olyan nagy, hogy $[n(1+c)]>n$, továbbá

$$V_n^c(f; x) = \frac{1}{[n(1+c)]-n} \sum_{\nu=n+1}^{[n(1+c)]} s_\nu(x).$$

Akkor V_n^c legfeljebb $n(1+c)$-edfokú polinom és ismert DE LA VALLÉE POUSSIN-től származó tétel szerint

$$|f(x)-V_n^c(f;x)| \leqq K_1(c)E_n(f). \tag{3}$$

Legyen $\{L_n\}$ egy a), b) és c) tulajdonságú lineáris eljárás, ami a feltétel szerint létezik. Azt állítjuk, hogy az

$$L_n^*(f;x) = V_n^c(f;x) + L_n(f-V_n^c;x) \tag{4}$$

lineáris eljárásra a), b) és (2) is teljesül; ennek igazolásával a feltétel elégségessége is bizonyítva lesz. Evidens, hogy a) és b) teljesül L_n^*-ra. A c) tulajdonságból a Banach—Steinhaus tétel értelmében következik, hogy

$$\|L_n(f;x)\| \leqq K_2(c)\|f(x)\|, \tag{5}$$

ahol $\|g(x)\| = \max\limits_{|x|\leqq 1} |g(x)|$. Tehát (4), (3) és (5)-ből

$$\|f(x)-L_n^*(f;x)\| \leqq \|f(x)-V_n^c(f;x)\| + K_2(c)\|f(x)-V_n^c(f;x)\| \leqq$$

$$\leqq [1+K_2(c)]K_1(c)E_n(f),$$

vagyis (2) teljesül, ami bizonyítandó volt.

Befejezésül idézni szeretném ERDŐS PÁL [2] kritériumát:

Jelentse $N_n(\vartheta_1, \vartheta_2)$ $(0 \leqq \vartheta_1 \leqq \vartheta_2 \leqq \pi)$ rögzített n mellett azon $x_k^{(n)}$ alappontok számát, melyekre

$$\cos \vartheta_2 \leqq x_k^{(n)} \leqq \cos \vartheta_1.$$

Az $\{x_k^{(n)}\}$ alappont rendszer akkor és csak akkor Bernstein—Erdős típusú, ha minden olyan $\{\vartheta_1^{(n)}\}$ és $\{\vartheta_2^{(n)}\}$ $(0 \leqq \vartheta_1^{(n)} < \vartheta_2^{(n)} \leqq \pi)$ sorozatra, melyre $n(\vartheta_2^{(n)} - \vartheta_1^{(n)}) \to \infty$, igaz az, hogy

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{N_n(\vartheta_1^{(n)}, \vartheta_2^{(n)})}{n(\vartheta_2^{(n)} - \vartheta_1^{(n)})} \leqq \frac{1}{\pi},$$

továbbá

$$\varliminf_{\substack{i<j \\ n\to\infty}} n|\arccos x_i^{(n)} - \arccos x_j^{(n)}| > 0.$$

IRODALOM

[1] S. N. BERNSTEIN: Sur une formule d'interpolation. Comptes Rendus (Paris) **191** (1930) 635—637.

[2] P. ERDŐS: On some convergence properties of the interpolation polynomials. Annals of Math. **44** (1943) 330—337.

О ПРИБЛИЖЕНИИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

Г. ФРАЙД

Обозначим через $L_n(f, x)$ последовательность линейных преобразований пространства $C[-1, +1]$. Будем называть последовательность точек $\{x_k^{(n)}\}$ $(k=1, 2, \ldots, n;\ n=1, 2, \ldots)$ последовательностью типа Бернштейна—Эрдёша, если существует последовательность $L_n(f, x)$, для которой выполняются три следующих условия:

а) Для всех f $L_n(f, x)$ является многочленом степени не выше $n(1+c)$;

б) Имеет место равенство

$$L_n(f, x_k^{(n)}) = f(x_k^{(n)}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

в) Для всех непрерывных на $[-1, +1]$ функций $f(x)$

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f; x) = f(x).$$

Существование систем Бернштейна—Эрдёша было доказано С. Н. Бернштейном в работе [1]; необходимое и достаточное условие, которому должно удовлетворять $\{x_k^{(n)}\}$, чтобы оно стало последовательностью Бернштейна—Эрдёша, было дано Р. Эрдёшем в [2]. Назовём систему точек $\{x_k^{(n)}\}$ „хорошо приближающей", если существует последовательность линейных преобразований $L_n^*(f, x)$ пространства $C[-1, +1]$ такая, что для неё выполняются условия а) и б), а условие в) выполняется в более сильной форме:

$$|f(x) - L_n^*(f; x)| \leqq KE_n(f) \qquad (-1 \leqq x \leqq 1),$$

где K зависит от c и $\{x_k^{(n)}\}$, но не зависит от f. Здесь $E_n(f)$ обозначает найлучшее приближение функции $f(x)$ многочленами не выше n-той степени.

Теорема: Система точек является хорошо приближающей в том и только в том случае, если она является системой типа Бернштейна и Эрдёша.

В доказательстве рассматриваются преобразования

$$L_n^*(f; x) = V_n^c(f; x) + L_n(f - V_n^c; x),$$

где

$$V_n^c(f; x) = \frac{1}{[n(1+c)] - n} \sum_{\nu=n+1}^{[n(1+c)]} s_\nu(x)$$

и $s_\nu(\cos\theta)$ частичная сумма ряда Фурье функции $f(\cos\theta)$. Используется следующий результат де ла Валле-Пуссена:

$$|f(x) - V_n^c(f; x)| \leqq K(c)E_n(f) \qquad (-1 \leqq x \leqq 1).$$

ON APPROXIMATION WITH INTERPOLATORY POLYNOMIALS

G. FREUD

Let $L_n(f; x)$ be a sequence of linear transformations of $C[-1, +1]$. Let us call the point system

$$\{x_k^{(n)}\} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots)$$

to be of Bernstein—Erdős type, if there exists a sequence $L_n(f; x)$ for which the following three conditions hold:

a) $L_n(f; x)$ is for every f a polynomial of degree $n(1+c)$ at most;

b) We have

$$L_n(f; x_k^{(n)}) = f(x_k^{(n)}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

c) For every $f(x)$ continuous in $[-1, +1]$ we have

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f; x) = f(x).$$

The existence of Bernstein—Erdős type point systems was proved by S. N. Bernstein [1] and the necessary and sufficient condition for $\{x_k^{(n)}\}$ to be of Bernstein—Erdős type was found by P. Erdős [2].

Let us call a pointsystem $\{x_k^{(n)}\}$ "well approximating" if there is a sequence $L_n^*(f; x)$ of linear transformations of $C[-1, +1]$ so that a., and b., are true for L_n^* further c., holds in the more restricted form

$$|f(x) - L_n^*(f; x) \leqq KE_n(f) \qquad -1 \leqq x \leqq 1,$$

where K depends on c and $\{x_k^{(n)}\}$ but not on f. Here $E_n(f)$ is the bestpossible $C[-1, +1]$-approximation of $f(x)$ by polynomials of degree n at most.

Theorem: A pointsystem is well approximating if and only if it is of the Bernstein—Erdős type.
In the proof we consider

$$L_n^*(f;x) = V_n^c(f;x) + L_n(f - V_n^c;x),$$

where

$$V_n^c(f;x) = \frac{1}{[n(1+c)]-n} \sum_{\nu=n+1}^{[n(1+c)]} s_\nu(x),$$

and $s_\nu(\cos\theta)$ is the partial sum of the Fourier series of $f(\cos\theta)$. We use de la Vallée Poussin's result

$$|f(x) - V_n^c(f;x)| \leqq K(c)E_n(f) \qquad -1 \leqq x \leqq +1.$$

EGY JACOBI-FÉLE AZONOSSÁG ÁLTALÁNOSÍTÁSA

JOZEF LINKOVSKI

Legyen n adott természetes szám, amelynek ismert a kanonikus felbontása:

$$n = p^{\alpha} \prod_{i=1}^{t} q_i^{\beta_i}, \tag{1}$$

ahol p és q_i, $(i = 1, 2, \ldots, t)$ különböző törzsszámok, $\alpha \geqq 1$.

Tekintjük az $n = ab$ szám összes lehetséges olyan felbontását, ahol az a számok többszörösei p-nek, a b számok pedig nem többszörösei p-nek (nem zárjuk ki a $p = 1$ esetet sem).

Érvényes a következő:

1. TÉTEL: A $\sum a - \sum b$ különbség egyenlő az n/p szám osztói összegének a $(p-1)$-szeresével, azaz

$$\sum a - \sum b = (p-1)\sigma\left(\frac{n}{p}\right). \tag{2}$$

Bizonyítás. Könnyű belátni, hogy az a és a b számok

$$a = p^{\alpha} d_1, \quad b = d_2$$

alakban írhatók fel, ahol $d_1 \geqq 1$ és $d_2 \geqq 1$ a $\prod_{i=1}^{t} q_i^{\beta_i}$ szám olyan egymást kiegészítő osztói, hogy $d_1 d_2 = \prod_{i=1}^{t} q_i^{\beta_i}$.

Ezeket figyelembe véve, az osztók összegére vonatkozó formula alapján

$$\sum a = p^{\alpha}\sigma\left(\frac{n}{p^{\alpha}}\right) = p^{\alpha} \prod_{i=1}^{t} \frac{q_i^{\beta_i+1} - 1}{q_i - 1}$$

$$\sum b = \sigma\left(\frac{n}{p^{\alpha}}\right) = \prod_{i=1}^{t} \frac{q_i^{\beta_i+1} - 1}{q_i - 1}.$$

Ezekből kapjuk azt, hogy

$$\sum a - \sum b = (p^{\alpha} - 1) \prod_{i=1}^{t} \frac{q_i^{\beta_i+1} - 1}{q_i - 1}. \tag{3}$$

Másrészről

$$\sigma\left(\frac{n}{p}\right) = \sigma\left(p^{\alpha-1} \prod_{i=1}^{t} q_i^{\beta_i}\right) = \frac{p^{\alpha} - 1}{p - 1} \prod_{i=1}^{t} \frac{q_i^{\beta_i+1} - 1}{q_i - 1}. \tag{4}$$

A (3) és (4)-ből következik a (2) alatti azonosság. Ezzel a segédtételt igazoltuk.

Abban a speciális esetben, amikor $p=2$, a

$$\sum a - \sum b = \sigma\left(\frac{n}{2}\right) \tag{5}$$

azonosságot kapjuk, ahol az a páros, a b páratlan olyan számok, amelyekre $n=ab$. Ezt az azonosságot JACOBI [1] 1852-ben bizonyította be, és ugyanakkor igazolta A. DALLOT [2] is.

Továbbá érvényes a

2. TÉTEL. Ha az $n=n_1n_2$ természetes szám és n_1 és n_2 relatív prímek, azaz $(n_1, n_2)=1$, és az $n=ab$ az n szám összes lehetséges olyan felbontásai, amelyben az a számok többszörösei az n_1-nek, a b számok pedig nem többszörösei az n_1-nek (nem zárjuk ki az $n_1=1$ esetet sem), akkor

$$\sum a - \sum b = (n_1-1)\sigma\left(\frac{n}{n_1}\right). \tag{6}$$

Bizonyítás. Az adott esetben

$$\sum a = n_1\sigma\left(\frac{n}{n_1}\right) = n_1\sigma(n_2); \quad \sum b = \sigma\left(\frac{n}{n_1}\right) = \sigma(n_2). \tag{7}$$

Ha ezekkel helyettesítjük a (6) alatti egyenlőség bal oldalát, a jobb oldali kifejezést kapjuk.

IRODALOM

[1] JACOBI, Nouvelles annales de mathématiques, **11**, 1852.
[2] A. DALLOT, Ugyanott, **11**, 1852 (126. old., 186).
[3] Г. Полия и Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа, ГИТТЛ, Москва, 1956, стр. 143, 358.

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОГО ТОЖДЕЙСТВА ЯКОБИ

Ж. ЛИИКОВСКИЙ Ленинград

THE GENERALIZATION OF AN IDENTITY OF JACOBI

J. LINKOVSKI Leningrád

EGY GEOMETRIAI SZÉLSŐÉRTÉKFELADAT

KÁRTESZI FERENC

Mind a tanulás, mind a tanítás szempontjából szuggesztív, eszköz az analógián alapuló probléma felvetés. PÓLYA GYÖRGY kimerítően, sokoldalúan és érdekesen ír erről. A jelen közleményben az ő didaktikai felfogásának szellemében egy analógiából adódó, elemi geometriai probléma megoldását kívánjuk bemutatni.

A háromszöget és a gúlát analóg alakzatoknak tekinthetjük. A szabályos háromszög analóg alakzatát különféle értelemben kereshetjük aszerint, hogy a szabályos háromszöget definiáló tulajdonságok melyikével hozzuk kapcsolatba az analógia szorosabb értelmezését.

Először a szabályos háromszöget így definiáljuk: a legnagyobb csúcspontszámú olyan (síkbeli) poligon, melyben bármely két csúcs ugyanakkora szakaszt határol. A térben analóg alakzatot pedig így: a legnagyobb csúcspontszámú olyan poliéder, melyben bármely két csúcs ugyanakkora szakaszt határol. Ha így tekintjük az analógiát, megfelelő alakzatként a szabályos tetraéder adódik.

Másodszor a szabályos háromszög oldalainak egybevágóságából indulunk ki. Így az analóg alakzat olyan tetraéder, melynek a lapjai egybevágó (egyébként tetszőleges) háromszögek. Ez az ún. *egyenlőoldalú tetraéder;* speciális fajtája a szabályos tetraéder.

Bármely tetraéder egyértelműen meghatározza azt a parallelepipedont, melyben a tetraéder élei az előbbi lapparallelogrammáinak átlói. Ezt a parallelepipedont a tetraéder *keretének* fogjuk nevezni. Az egyenlő oldalú tetraéder kerete derékszögű parallelepipedon, a szabályos tetraéderé kocka.

Harmadszor a szabályos háromszög oldalainak hosszúságát tekintjük. Az analóg alakzat most az a tetraéder, melyet egyenlő területű lapok határolnak. Könnyen igazolható, hogy a lapok területének egyenlő voltából a lapháromszögek egybevágósága következik, vagyis az analóg alakzat most is az egyenlő oldalú tetraéder.

Végül, negyedszer a szabályos háromszöget mint egyenlő szögű háromszöget tekintjük. Így az analóg alakzat olyan tetraéder, melynek térszögei egyenlők. — *Térszögön* és a térszög mértékén a következőt értjük. A tetraéder egy csúcsában a lapok triédert, szögletet alkotnak. A szöglet csúcsa mint középpont köré egységsugarú gömböt írunk. A gömbfelületből a szöglet egy gömbi poligont vág ki. E poligon felszínének mértéke a szögletnek mint térszögnek a mértéke. — E közlemény célja az *egyenlő térszögű tetraéder* vizsgálata, s annak az igazolása, hogy *az egyenlő térszögű tetraéderek közül a legnagyobb térszögű éppen a szabályos tetraéder.*

1. Legyen az $A = A_1A_2A_3A_4$ tetraéder A_jA_k élében találkozó lapok alkotta szög ω_{jk}. Tekintsük az A_1 csúcspontú tetraéderszögletnek megfelelő gömbháromszög szögeit, az ω_{12}, ω_{13} és ω_{14} szögeket. E szögekkel meghatározott gömbhárom-

szög területe (az egységsugarú gömbön): $\omega_{12}+\omega_{13}+\omega_{14}-\pi = \sigma-\pi$. A tetraéder térszögeinek egyenlő voltából

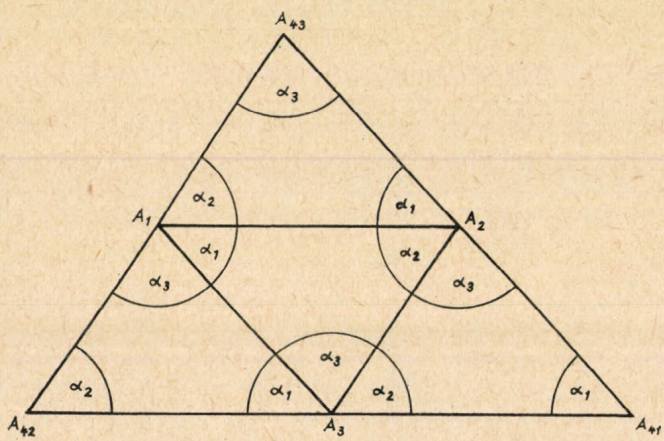
$$\omega_{12}+\omega_{13}+\omega_{14} = \sigma$$
$$\omega_{21}+\omega_{23}+\omega_{24} = \sigma$$
$$\omega_{31}+\omega_{32}+\omega_{34} = \sigma$$
$$\omega_{41}+\omega_{42}+\omega_{43} = \sigma,$$

ahol $\omega_{jk}=\omega_{kj}$. Ebből az egyenletrendszerből könnyen következik, hogy

$$\omega_{12}=\omega_{34},\ \omega_{13}=\omega_{24},\ \omega_{14}=\omega_{23}.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy *az egyenlő térszögű tetraéder szemközti lapszögei egyenlők.* Ebből még az is következik, hogy az ω szögek nagysága legfeljebb háromféle lehet, s az előbbi négy egyenlet bármelyikének bal oldalán e háromféle szög összege áll. Ha pedig két gömbháromszög szögei megegyeznek, akkor a két gömbháromszög egybevágó, következésképpen *az egyenlő térszögű tetraéder szögletei egybevágók.*

Hasítsuk fel az egybevágó szögletekkel rendelkező tetraéder határfelületét az A_4 csúcsból kiágazó élek mentén, és terítsük reá az egész határfelületet az $A_1A_2A_3$ háromszög síkjára, miként az 1. ábra mutatja. Az $A_3A_1A_2\sphericalangle$ és az $A_{43}A_2A_1\sphericalangle$ egyenlő-



1. ábra

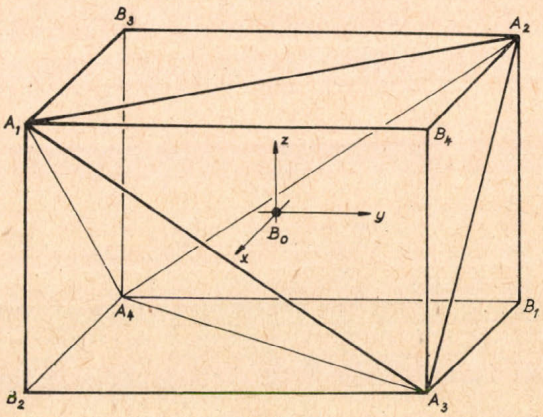
sége abból következik, hogy a tetraéder $\omega_{14}=\omega_{23}$ átellenes lapszögeivel szemben az A_2 és A_1 csúcspontú szögletben az $A_3A_1A_2$ élszög, illetve az $A_4A_2A_1$ élszög van — s ez utóbbi adta a kiterített határfelületnek az $A_{43}A_2A_1$ szögét —, ezek tehát az egybevágóság megfelelő szögei lévén, valóban egyenlők. Ugyanúgy látható be $A_2A_1A_{43}\sphericalangle = A_1A_2A_3\sphericalangle$. Így az $A_1A_2A_3$ az $A_2A_{43}A_1$ háromszöggel egybevágó, mert hiszen van közös oldaluk és megfelelő szögeik megegyeznek. Tehát az egyenlő térszögű tetraédert egybevágó háromszögek határolják, vagyis *az egyenlő térszögű tetraéder egyenlő oldalú is.* Az egyenlőoldalú tetraéder pedig nyilvánvalóan egyenlő térszögű is. Így is mondhatjuk: *egy tetraéderre nézve az egyenlőoldalúság és egyenlőszögűség ekvivalens tulajdonságok.*

Hogyha adva van egy tetszőleges $A_1A_2A_3$ háromszög mint egy egyenlőoldalú tetraéder oldala, akkor az 1. ábra alapján könnyen belátható, hogy ez a tetraéder *egybevágóság erejéig* egyértelműen meghatározott.

Ha pedig olyan szöglet van adva mint egyenlőoldalú tetraéder szöglete, amelynek élszögösszege 180° (mert csak ilyen szöglete lehet), akkor a szöglet *hasonlóság erejéig* egyértelműen meghatározza a tetraédert. — A szöglet élszögei ugyanis az 1. ábra α_1, α_2, α_3 szögeinek szerepét töltik be, és e szögek az $A_1A_2A_3$ háromszöget hasonlóság erejéig meghatározzák.

Hogyha az egyenlőoldalú tetraédert a keretével együtt tekintjük — tudjuk, hogy a keret egy téglahatlap —, könnyen bizonyíthatók a következő állítások (2. ábra):

Az **A** köré írt gömb középpontja, a beírt gömb középpontja és az **A** súlypontja a téglahatlap középpontjával, a B_0 ponttal azonos. A keret átlósíkjai és lapsíkjai **A**-nak belső, illetve külső szögfelező síkjai. A tetraéder négy lapsíkját egyaránt érintő gömbök száma általában 8, s mindegyik ilyen gömb középpontjában 6 szögfelező sík találkozik: vagy 6 belső, ilyen pont van egy; vagy 3 belső és 3 külső, ilyen van négy; vagy 2 belső és 4 külső; ilyen van három. Egyenlő oldalú tetraéder esetében e gömbök száma csak 5 (mert az átellenes élekhez tartozó belső szögfelező síkok és a többi élekhez tartozó külső szögfelező síkok most nem találkoznak egy pontban). A megfelelő gömbközéppontok: B_0; B_1, B_2, B_3, B_4.



2. ábra

Ezeknek az állításoknak az alapján adódik a következő segédtétel: *Minden 180° élszögű triéder külső szögfelező síkjai páronként egymásra merőlegesek.* — Ilyen triéder ugyanis mint egyenlőoldalú tetraéder szöglete meghatározza a tetraédert. Az egyenlőoldalú tetraéder keretének a triéder csúcsában találkozó három lapja derékszögű triédert alkot, melynek lapsíkjai az előbbinek külső szögfelező síkjai.

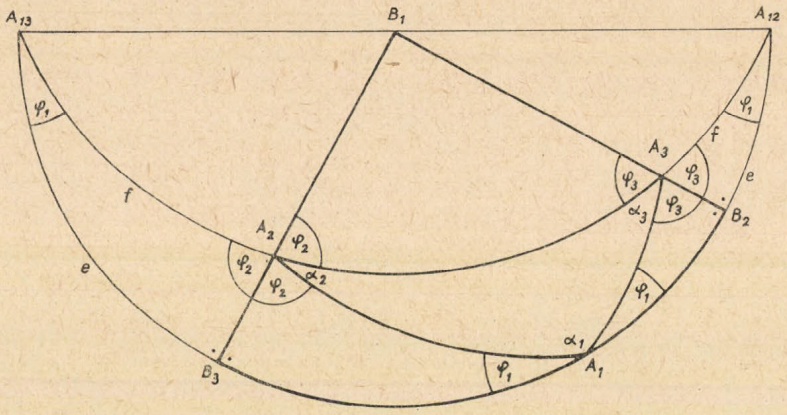
Az egyenlő oldalú tetraéder egy csúcsa — mondjuk A_4 — köré mint középpont köré írt egységsugarú gömb, Γ messe az A_4-ből kiinduló és az A_1, A_3, A_3, B_1, B_2, B_3 ponton átmenő félegyenest rendre az (ugyanúgy jelölt) gömbi pontokban. Nyilvánvaló, hogy a gömbi B_1, B_2, B_3 pontok egy gömboktáns csúcsai, az A_1, A_2, A_3 gömbi pontok pedig egy π kerületű gömbháromszög csúcsai; továbbá az utóbbinak az A_1, A_2, A_3 csúcsához tartozó külső szögfelezője az előbbinek rendre a B_2B_3, B_3B_1, B_1B_2 oldalvonala. (3. ábra.)

Egyelőre tegyük félre a térgeometriai főtémánkat és térjünk át a gömbi geometriában felvetődött eredmény részletesebb vizsgálatára.

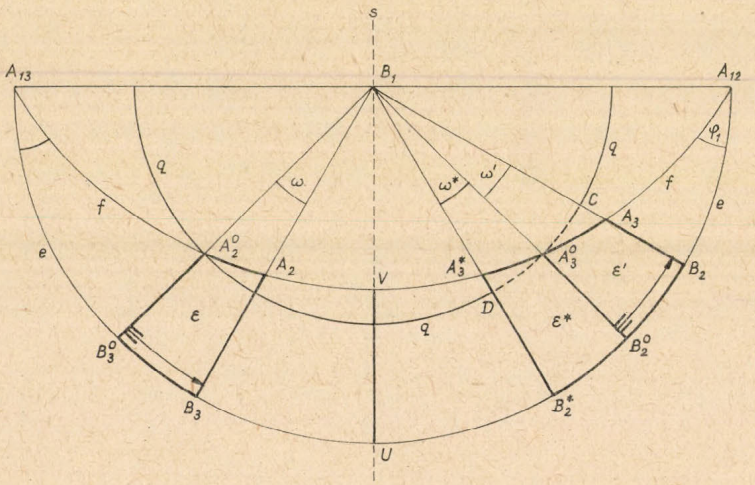
2. Tekintsük a gömboktánsba beírt π kerületű gömbháromszögeket. Már tudjuk, hogy ilyen létezik, ámde csak olyan — látszólag speciális — esetben, midőn az utóbbinak a külső szögfelezői éppen az előbbinek oldalvonalai. — Egy kínálkozó analógia sugalmazza azt a helytelen feltevést, hogy csupán egy a kikötéseknek megfelelő, speciális gömbháromszögről van szó. A síkgeometriában ugyanis egy hegyesszögű háromszögbe beírt háromszögek közül csak a talpponti háromszög felel meg annak a feltételnek, hogy külső szögfelezői az eredeti háromszögnek oldalegyenesei. Emlékezzünk még FAGNANO tételére is: *Egy hegyesszögű háromszögbe írt háromszögek közül a talpponti háromszög kerülete a legkisebb.* Az idézett

összefüggések analóg megfelelőit vizsgáljuk most a gömbi geometriában, mégpedig a hegyesszögű háromszög szerepét olyan gömbháromszög vegye át, melynek mind a szögei, mind az oldalai 90°-osak.

Szemléltető ábráink sztereografikus projekciók (3. és 4. ábra), midőn a B_2, B_3



3. ábra



4. ábra

pontokat összekötő főkör síkja a képsík, és a B_1-gyel átellenes gömbi pontból vetítettük az alakzatot. — A sztereografikus projekcióval kapcsolatos tudnivalók elemi tárgyalása tankönyvben is megtalálható: [1]. — Ilyen ábrán a B_2-től B_3-ig terjedő negyed főkör a gömboktáns egyik oldalával azonos; a gömboktáns másik két oldalának a vetülete pedig a B_2, B_3 pontokat összekötő főkör B_1B_2, illetve B_1B_3 sugarával esik egybe. Gömbi főkör képe az e kör átellenes pontjain átmenő kör (esetleg egyenes). A gömbi szög a képen neki megfelelő szöggel egyenlő. A Γ gömb $B_1B_2B_3$ oktánsát tartalmazó, az e főkörrel határolt felének a képe a képsík e-vel határolt

belső része. A szóban forgó fégömb e egyenlítő köréhez tartozó szélességi köreinek a képen e-vel koncentrikus körök felelnek meg, mégpedig csökkenő nagyságú szélességi köröknek csökkenő sugarú koncentrikus körök.

Most már a 3. ábrán könnyű lesz követni a Γ gömbre vonatkozó mondanivalóinkat.

Legyen $A_1A_2A_3$ a $B_1B_2B_3$ gömboktánsba írt tetszőleges gömbháromszög. Tükrözzük az A_1 pontot — gömbi tükrözéssel — a B_1B_2-re és a B_1B_3-ra; így az A_{12}, illetve az A_{13} pont adódik. Ezek nyilvánvalóan a Γ gömb átellenes pontjai, pontosabban az e főkör átellenes pontjai. Tekintsük most a következő főkör-íveket: $A_{12}A_3$, $A_{13}A_2$. Ezek a tükrözés folytán rendre az A_1A_3 és A_1A_2 oldallal egybevágó ívek; következésképpen az $A_{13}A_2$, A_2A_3, A_3A_{12} ívekből összetett töröttvonal hossza az $A_1A_2A_3$ gömbháromszög kerületével egyenlő. Az A_{12} és a vele átellenes A_{13} pont között a gömbi főkörök felei a legrövidebb utak, ezek π hosszúságúak, s rövidebbek a mondott töröttvonalnál, hacsak az $A_1A_2A_3$-nak a tükrözésével nyert vonal maga is nem egyetlen fél-körív. Ha pedig az e főkör tetszőleges — de a $B_2B_1B_3$ szögtartományon kívül haladó — $A_{12}A_{13}$ átmérőjével határolt tetszőleges — de a B_1B_2 és B_1B_3 oldalt metsző — f fél-körívből indulunk ki, és az $A_{12}A_3$, $A_{13}A_2$ íveket a B_1B_2, illetve a B_1B_3 oldalakra tükrözzük, akkor egy a gömboktánsba írt π kerületű $A_1A_2A_3$ gömbháromszög adódik. A tükrözésekből, a gömbkétszög két szögének egyenlő voltából, valamint a fellépő csúcsszögekből az is kiolvasható, hogy a gömboktáns oldalai az így származtatott $A_1A_2A_3$ gömbháromszögnek külső szögfelezői.

A gömboktánsba írt legkisebb kerületű gömbháromszögek kerülete tehát π. Minden π kerületű beírt gömbháromszög külső szögfelezői a gömboktánsnak oldalai. A gömboktánsba írt minden olyan gömbháromszög, melynek külső szögfelezői a gömboktásnak az oldalai, π kerületű.

Ilyen módon végtelen sok **A** háromszöget rendeltünk a gömboktánshoz, s látni fogjuk, hogy ezeket (a síkgeometriai talpponti háromszög mintájára) a gömboktáns *talpponti háromszögeinek* nevezhetjük. Ezt megvilágítandó, a háromszög magasságpontjának olyan — a megszokottól eltérő — definícióját adjuk, melyhez analóg pont a gömboktánson is értelmezhető: a hegyesszögű háromszög belsejében van pont, melyet bármely csúcsponttal összekötve a szemközti oldalra merőleges egyenest kapunk; ezt a pontot nevezzük a háromszög magasságpontjának.

Analógiaképpen a gömboktáns minden belső pontját *magasságpontnak* kell tekinteni, hiszen egy belső pontot csúccsal összekötve a szemközti oldalra merőleges főkör adódik — gondoljunk itt az északi és déli pólust összekötő bármely hosszúsági körnek az egyenlítővel képezett szögére, ami pedig derékszög —. Kérdés mármost, hogy a gömboktáns tetszőleges belső pontjából, M-ből gömbi merőlegeseket állítva az oldalakra, azoknak a talppontjai olyan gömháromszög csúcsait szolgáltatják-e, melynek külső szögfelezői a gömboktáns oldalai.

A téglahatlapra mint keretre visszatekintve, könnyen adódik a felelet. Helyezzük el a keretet úgy, hogy annak A_4 csúcsa a Γ gömb középpontjában legyen, A_4-ből kiágazó élei pedig a B_1, B_2, B_3 gömbi pontokon menjenek át. Válasszuk a keret A_4-gyel átellenes csúcsaként a gömbi M pontot. Ezzel a keret egy meghatározott téglahatlappá vált. Az általa keretezett A_4 csúcspontú egyenlő oldalú tetraéder A_4 csúcspontú szögletének belső szögfelező síkjai a keret A_4M testátlójában metszik egymást, külső szögfelező síkjai pedig a keret A_4 csúcshoz tartozó szögletének lapsíkjai. A szóban forgó alakzat Γ gömbbel való metszetét tekintve, nyilvánvalóvá válik a felelet: A $B_1B_2B_3$ gömboktáns bármely belső pontjából gömbi merőlegeseket állítva a B_2B_3, B_3B_1, B_1B_2 oldalakra, azok talppontjai rendre A_1, A_2, A_3; *az* $A_1A_2A_3$

gömbháromszög külső szögfelezői éppen a gömboktáns megfelelő oldalai, belső szögfelezői pedig a szóban forgó belső pontból a gömboktáns oldalaira állított gömbi merőlegesek. — Ezért fogjuk a gömboktánsba írt legkisebb kerületű gömbháromszögeket az előbbi talpponti háromszögeinek nevezni.

Mellékesen a gömboktáns pontjai és talpponti szögei közt kölcsönösen egyértelmű kapcsolatot is létesítettünk.

Ilyen módon a legnagyobb térszögű egyenlőoldalú tetraéder meghatározását a gömbi geometria következő feladatára váltottuk. *Határozzuk meg a gömboktánsba beírt legkisebb kerületű gömbháromszögek közül a legnagyobb felszínűt.*

3. A kérdéses legnagyobb felszínű gömbháromszöget az egyenlőszárú gömbháromszögek között kell keresnünk, mert *egy a gömboktánsba írt π kerületű, de nem egyenlő oldalú gömbháromszögnél nagyobb felszínű ugyancsak beírt π kerületű, egyenlő szárú gömbháromszög mindig szerkeszthető.*

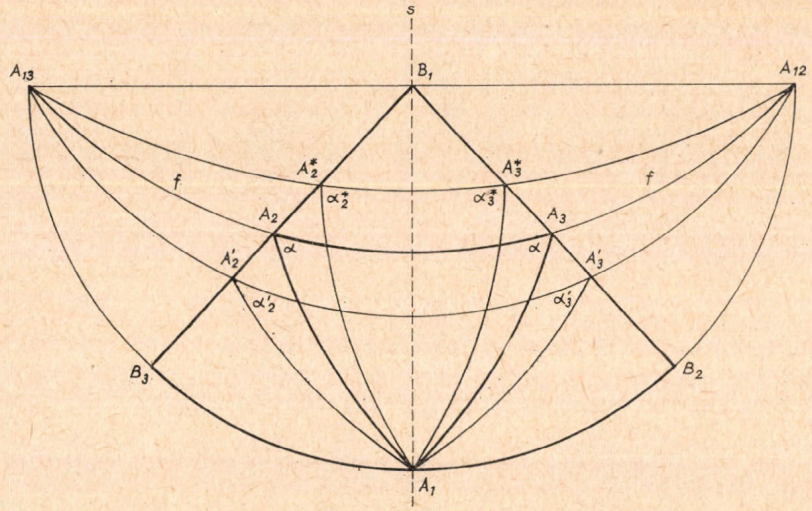
A 3. ábrából kitűnik, hogy az **A** háromszög — ezzel a jelöléssel utalunk arra, hogy a gömboktánsba írt π kerületű gömbháromszögről beszélünk — α_1 szögét rögzítjük, vagyis ha az (f, e) gömbkétszög φ_1 szögét rögzítjük, az egyenlő szárú **A** gömbháromszög akkor lép fel, midőn A_1 a B_2B_3 oldal felező pontja, vagyis midőn A_1 az A_{12} és A_{13} közé eső e félkörnek felező pontja. Az is világos — ha az öt gömbháromszögre bontott (f, e) gömbkétszög két egybevágó bal oldali és két egybevágó jobb oldali darabját tekintjük —, ahogy az $A_1A_2A_3$ felszíne éppen akkor a legnagyobb, midőn a gömboktáns és a gömbkétszög közös része, az $A_2A_3B_2B_3$ gömnégyszög a legnagyobb. Ez pedig akkor következik be, midőn a gömbnégyszög „szimmetrikus gömbi trapéz". E szimmetrikus négyszög felszínének legnagyobb voltát kell tehát bizonyítanunk.

Tekintsük evégből a 4. ábrát. Az s tengelyre szimmetrikusan elhelyezkedő, valamint az abból elforgatással adódó gömboktánshoz tartozik az $A_2^0A_3^0B_2^0B_3^0$, illetve az $A_2A_3B_2B_3$ gömbnégyszög. Azt kell csak belátni, hogy a (vastagon rajzolt) $A_2^0A_2B_3B_3^0$ és $A_3^0A_3B_2B_2^0$ felszínére nézve $\varepsilon > \varepsilon'$ érvényes.

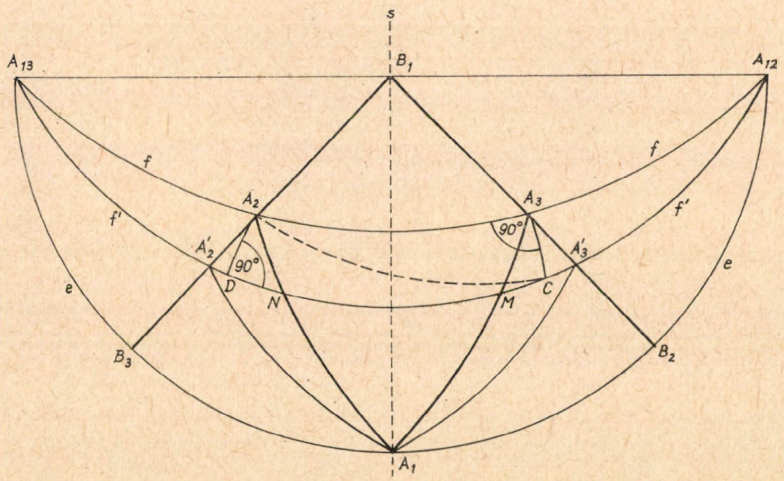
Legyen a B_1B_2-nek $B_1B_2^0$-re vonatkozó tükörképe a $B_1B_2^*$, akkor az $\omega, \omega^*, \omega'$ szögek egyenlők. Az e egyenlítőhöz képest szélességi kör, q átmegy az A_2^0 ponton, ennélfogva az A_3^0 ponton is. A q kör derékszögben metszi a $B_1B_2^0$ hosszúsági körívet. Az f főkör viszont a $B_1A_3^0A^*$ hegyesszögben, ami abból következik, hogy az egyenlőszárú $A_2^0B_1A_3^0$ gömbháromszög felszíne kisebb a gömboktánsénál, s kisebb felszínű gömbháromszögnek a szögösszege is kisebb. Következésképpen q belevág az ε^* tartományba, viszont az ε' tartományon kívül halad. Ebből és az $\omega^* = \omega'$ szögegyenlőségből pedig $\varepsilon^* > \varepsilon'$ következik. A szimmetria folytán $\omega = \omega^*$, tehát $\varepsilon > \varepsilon'$, ami bizonyítandó volt. Így a fentebb kiemelt állítás helyességét is bebizonyítottuk.

Most már elegendő a gömboktáns — mondjuk — B_1 csúcsbeli szögfelezőjére szimmetrikus ..., **A***, **A**, **A**′, ... gömbháromszögek felszínét tekinteni (5. ábra). Ezek között a legnagyobbat keressük. Az $\mathbf{A} = A_1A_2A_3$ gömbháromszög a gömboktáns oldalfelező pontjai által meghatározottat ábrázolja. Ez egyenlőoldalú a gömboktáns forgásszimmetriája folytán, tehát egyenlőszögű is, jelölje a szögmértékét α. Egy az A_1-ben α-nál kisebb szögű **A*** nem lehet a legnagyobb, mert az $\alpha_2^* > \alpha$ — hiszen ez a $B_1A_2^*A_3^*$ és a nála nagyobb felszínű $B_1A_2A_3$ szögösszegének egybevetéséből nyilvánvaló —, és az imént bizonyított segédtétel szerint van az A_1 csúcsban α_2^*-vel egyenlő szögű **A**′, mely nagyobb felszínű, mint **A***. Így tehát csak az **A**-nál nem magasabb **A**′ gömbháromszögek felszínét kell tekintenünk.

Állítjuk, hogy *a felszínek között az* $\mathbf{A} > \mathbf{A}'$ *egyenlőtlenség áll fenn.* Ennek bizonyítását a 6. ábrára hivatkozva mondjuk el.



5. ábra



6. ábra

Először is az $\mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ átalakításánál fellépő felszín-változást tekintjük. Ragasszuk hozzá **A**-hoz az $A_1A_2A_2'$ és $A_1A_3A_3'$ gömbháromszögeket, akkor az $A_2A_3A_3'A_1A_2'$ gömbötszög adódik; ebből eltávolítva az $A_2'A_3'A_3A_2$ gömbnégyszöget, maradéktalanul éppen **A**′-t kapjuk. Így tehát a tejles felszín-változás:

$$A_1A_2A_2' + A_1A_3A_3' - A_2'A_3'A_3A_2.$$

Ez pedig, ha gömbháromszögeink helyett a szimmetria folytán velük egyenlő területű gömbháromszögeket vesszük, a következő alakban is kifejezhető:

$$A_{13}A_2A_2' + A_{12}A_3A_3' - A_2'A_3'A_3A_2 = \delta.$$

Ez a δ változás negatív értékű, ha az

$$\varepsilon = A_{13}A_2D + A_{12}A_3C - A_2A_3CD$$

negatív értékű.

Végül azt igazoljuk, hogy valóban $\varepsilon < 0$.

Az A_{12}-től A_{13}-ig terjedő f félfőkört harmadoló A_3 pontban gömbi merőlegest állítunk f-re. Ez a merőleges egy az M és A_3' közötti C-ben metszi f'-t, hiszen $A_1A_3A_2$ egy hegyesszög, $B_2A_3A_2$ pedig tompaszög. Minthogy az $A_{12}A_2$-nek felezőmerőlegese A_3C, azért a felszínekre és ívekre nézve

$$A_{12}A_3C = A_2A_3C \quad \text{és} \quad A_2A_3 < A_2C.$$

Az A_2 harmadoló pontból gömbi merőlegest bocsátunk f'-re. Ez a merőleges az A_2' és N közötti D-ben metszi f'-t, hiszen az $A_2'A_2N$ gömbháromszögnek mind a három szöge hegyesszög. Minthogy $A_{13}A_2 = A_2A_3 < A_2C$, azért az A_2D magassággal kettévágott $A_{13}CA_2$ gömbháromszög részeinek fejszínére nézve

$$A_{13}A_2D < A_2CD.$$

A mondottakból

$$A_2A_3CD = A_2A_3C + A_2CD > A_{12}A_3C + A_{13}A_2D,$$

ebből pedig éppen a bizonyítandó $\varepsilon < 0$ következik.

Így tehát levezettük a következő tételt: *A gömboktánsba írt legkisebb kerületű gömbháromszögek közül az a legnagyobb felszínű, amelynek csúcsai a gömboktáns oldalait felezik.*

Tételünk következménye az, amit már a bevezetésben mondtunk: *a legnagyobb térszögű egyenlő oldalú tetraéder a szabályos tetraéder.*

*

Jóllehet az egyenlőoldalú tetraéder tulajdonságai szerepelnek az irodalomban — pl. [2] —, a jelen közlemény főeredménye azonban — legalábbis a szerző tudomása szerint — ott még nem fordult elő.

Minthogy a szélsőértékfeladat megoldását határátmenettel dolgozó módszert mellőzve, csupán egybevágósági transzformációkra és más elemi tényekre támaszkodva végeztük, a tárgyalás rövidebb lehetőségéről eleve lemondtunk.

IRODALOM

[1] KÁRTESZI FERENC: *Ábrázoló geometria* (Tankönyvkiadó. 1962).
[2] KLUG LIPÓT: *Az egyenlő oldalú tetraéder* (Mat. és Fiz. Lapok, 1918).

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Ф. КАРТЕСИ

EINE EXTREMALAUFGABE

F. KÁRTESZI

Wir nennen ein Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ ein gleichseitiges Tetraeder, wenn es die folgenden Eigenschaften besitzt: $A_1A_2 = A_3A_4$, $A_2A_3 = A_1A_4$, $A_3A_1 = A_2A_4$. Die Raumwinkeln $A_j(A_kA_lA_m)$ eines gleichseitigen Tetraeders erreichen ihren maximalen Wert falls das Tetraeder regulär ist.

A KVADRATIKUS MARADÉKOK ELMÉLETÉHEZ

CORRÁDI KERESZTÉLY ÉS KÁTAI IMRE

Legyen a továbbiakban p $4k+3$ alakú prím, $f(x, y)$ változóinak egészegyütthatós polinomja. A dolgozatban

$$\sum_{\substack{1\leqq x\leqq\frac{p-1}{2},\ 1\leqq y\leqq\frac{p-1}{2}\\ x\neq y}}\left(\frac{f(x,y)}{p}\right)$$

alakú összegek vizsgálatával foglalkozunk két speciális $f(x, y)$ választás esetén, s az adódó eredmények két alkalmazását adjuk.

1. LEMMA. Legyen $f(x, y)=x^{2k}+y^{2k}$, ahol k természetes szám. Ekkor

$$\sum_{\substack{1\leqq x\leqq\frac{p-1}{2};\ 1\leqq y\leqq\frac{p-1}{2}\\ x\neq y}}\left(\frac{x^{2k}+y^{2k}}{p}\right)=-\left(1+\left(\frac{2}{p}\right)\right)\frac{p-1}{2}.$$

Bizonyítás: p alakjára tett feltevésünk folytán az x rögzítése esetén az

$$x^{2k},\ 2x^{2k},\ x^{2k}\pm y^{2k}\qquad\left(1\leqq y\leqq\frac{p-1}{2};\ y\neq x\right)$$

számok redukált maradékrendszert alkotnak $\bmod p$. Nevezetesen

$$y_1^{2k}-y_2^{2k}=(y_1-y_2)\prod_{v=0}^{k-1}(y_1^{2v}+y_2^{2v})$$

következtében

$$y_1^{2k}\equiv y_2^{2k}\ (\bmod p),\qquad \begin{matrix} p\equiv 3\ (\bmod 4)\\ 1\leqq y_1, y_2\leqq\dfrac{p-1}{2}\end{matrix}$$

maga után vonja $y_1=y_2$ teljesülését. Ennélfogva

$$\sum_{\substack{1\leqq y\leqq\frac{p-1}{2}\\ x\neq y}}\left(\frac{x^{2k}+y^{2k}}{p}\right)=-\left(\frac{x^{2k}}{p}\right)-\left(\frac{2x^{2k}}{p}\right)-\sum_{\substack{1\leqq y\leqq\frac{p-1}{2}\\ y\neq x}}\left(\frac{x^{2k}-y^{2k}}{p}\right),$$

ahonnan

$$(1)\qquad \sum_{\substack{1\leqq x\leqq\frac{p-1}{2}\\ 1\leqq y\leqq\frac{p-1}{2}\\ x\neq y}}\sum\left(\frac{x^{2k}+y^{2k}}{p}\right)=-\left(1+\left(\frac{2}{p}\right)\right)\sum_{1\leqq x\leqq\frac{p-1}{2}}\left(\frac{x^{2k}}{p}\right)-\sum_{\substack{1\leqq x\leqq\frac{p-1}{2}\\ 1\leqq y\leqq\frac{p-1}{2}\\ x\neq y}}\sum\left(\frac{x^{2k}-y^{2k}}{p}\right)$$

adódik. Az (1) alatti egyenlőség tartalmazza a lemma állítását tekintettel arra, hogy a jobb oldal második összegében az (x, y) és (y, x) párokhoz tartozó Legendre-jelek $p\equiv 3 \pmod 4$ folytán ellentett előjelűek.

2. Lemma. Legyen $f(x, y)=x+y$. Ekkor

$$\sum_{\substack{1\leqq x\leqq\frac{p-1}{2}\\ 1\leqq y\leqq\frac{p-1}{2}\\ x\neq y}}\sum\left(\frac{x+y}{p}\right)=-\left(1+\left(\frac{2}{p}\right)\right)\sum_{1\leqq x\leqq\frac{p-1}{2}}\left(\frac{x}{p}\right).$$

A lemma bizonyítása azonos az 1. Lemma bizonyításával.

Az 1. Lemma alkalmazásaként levezetjük az alábbi eredményt.

1. Tétel. Legyen k természetes szám. Legyen $p\equiv 3 \pmod 4$. Ekkor

$$(2)\qquad \prod_{1\leqq x<y\leqq\frac{p-1}{2}}\prod(x^{2k}+y^{2k})\equiv(-1)^{\left[\frac{p+1}{8}\right]} \pmod p.$$

Megjegyzés: A $k=1$ esetben a (2) alatti kongruencia szerepel [1]-ben.

Bizonyítás: Jelöljük (2) bal oldalát A-val. Először azt mutatjuk meg, hogy

$$A^2\equiv 1 \pmod p.$$

Ez így történhet.

$$(3)\qquad A^2=\prod_{\substack{1\leqq x\leqq\frac{p-1}{2}\\ 1\leqq y\leqq\frac{p-1}{2}\\ x\neq y}}\prod(x^{2k}+y^{2k})\equiv\prod_{1\leqq x\leqq\frac{p-1}{2}}\left\{x^{2k}\cdot\prod_{2\leqq z\leqq\frac{p-1}{2}}(1+z^{2k})\right\}\equiv$$

$$\equiv\left(\prod_{1\leqq x\leqq\frac{p-1}{2}}x^2\right)^{2k-1}\cdot\prod_{2\leqq z\leqq\frac{p-1}{2}}(1+z^{2k})^{\frac{p-1}{2}} \pmod p.$$

Itt felhasználtuk, hogy minden $1\leqq x\leqq\frac{p-1}{2}$-beli x értékhez és minden $y\neq x$-hez az $1\leqq y\leqq\frac{p-1}{2}$ intervallumban

$$\varepsilon y\equiv zx \pmod p$$

$$2\leqq z\leqq\frac{p-1}{2}$$

megoldható $\varepsilon = 1$ vagy $\varepsilon = -1$ választással. Ha x rögzített és y végigszalad az $1 \leqq y \leqq \frac{p-1}{2}$ intervallum x-től különböző számain, z a $2 \leqq z \leqq \frac{p-1}{2}$ intervallumot futja végig.

Wilson tételét felhasználva

$$(4)\quad \left(\prod_{1 \leqq x \leqq \frac{p-1}{2}} x^2\right)^{2^{k-1}} \equiv \left((-1)^{\frac{p-1}{2}} \prod_{1 \leqq x \leqq \frac{p-1}{2}} x(p-x)\right)^{2^{k-1}} \equiv (-(p-1)!)^{2^{k-1}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Másrészről Euler tétele miatt

$$(5)\quad \left(\prod_{2 \leqq z \leqq \frac{p-1}{2}} (1+z^{2^k})\right)^{\frac{p-1}{2}} \equiv \alpha \pmod{p},$$

ahol $\alpha = \pm 1$. Felhasználva a (4), (5) relációkat (3)-ból

$$A^2 \equiv \alpha \pmod{p}$$

adódik. Ebből Fermat tétele miatt

$$1 \equiv A^{p-1} \equiv \alpha^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p},$$

ami $p \equiv 3 \pmod 4$ miatt $\alpha = 1$ teljesülését jelenti. Így kiinduló megjegyzésünk igaz. A kiinduló megjegyzés folytán

$$(6)\quad \prod_{1 \leqq x < y \leqq \frac{p-1}{2}} \prod (x^{2^k} + y^{2^k}) \equiv \prod_{1 \leqq x < y \leqq \frac{p-1}{2}} \prod \left(\frac{x^{2^k} + y^{2^k}}{p}\right) \pmod{p}$$

felhasználva az Euler-kritériumot valamint $p \equiv 3 \pmod 4$ teljesülését. Jelölje l a (6) jobb oldalán szereplő -1 értékű Legendre-jelek számát. Ekkor

$$(7)\quad \sum_{1 \leqq x < y \leqq \frac{p-1}{2}} \sum \left(\frac{x^{2^k} + y^{2^k}}{p}\right) = \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p-3}{4} - 2l.$$

Ebből

$$\sum_{1 \leqq x < y \leqq \frac{p-1}{2}} \sum \left(\frac{x^{2^k} + y^{2^k}}{p}\right) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leqq x \leqq \frac{p-1}{2} \\ 1 \leqq y \leqq \frac{p-1}{2} \\ x \neq y}} \sum \left(\frac{x^{2^k} + y^{2^k}}{p}\right)$$

folytán felhasználva az 1. lemma eredményét a tétel állítása egyszerű számolással nyerhető. A tétel alkalmazásával Vandermonde-determinánsok egy osztályára nyerhető kongruencia tétel.

Legyen

$$D(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \ldots a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 \ldots a_2^{n-1} \\ \vdots & \\ 1 & a_n \ldots a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Legyen

$$D_k \overset{\text{def}}{=} D\left(1, 2^{2k}, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^{2k}\right).$$

Érvényes a következő

2. TÉTEL. Legyen k adott természetes szám, $p \equiv 3 \pmod 4$ adott prím. Ekkor

$$D_k \equiv (-1)^{(k-1)\left[\frac{p+1}{8}\right]} D_1 \pmod p.$$

Bizonyítás: Az 1. tétel miatt

$$\frac{D_{k+1}}{D_k} = \prod_{1 \leqq x < y \leqq \frac{p-1}{2}} \frac{y^{2k+1} - x^{2k+1}}{y^{2k} - x^{2k}} = \prod_{1 \leqq x < y \leqq \frac{p-1}{2}} (x^{2k} + y^{2k}) \equiv (-1)^{\left[\frac{p-1}{8}\right]} \pmod p.$$

Innen

$$\frac{D_k}{D_1} = \prod_{v=1}^{k-1} \frac{D_{v+1}}{D_v} \equiv (-1)^{(k-1)\left[\frac{p+1}{8}\right]} \pmod p,$$

ami a tétel állítását igazolja.

A továbbiakban a 2. lemma felhasználásával egy Legendre-jelekre vonatkozó formulát bizonyítunk be.

3. TÉTEL. Legyen $p \equiv 3 \pmod 4$. Ekkor minden egész c esetén

$$\left(\frac{c}{p}\right) \sum_{1 \leqq x \leqq \frac{p-1}{2}} \left(\frac{x}{p}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{p}} \sum_{u=1}^{p-1} \operatorname{tg} \frac{2\pi c u^2}{p}.$$

Megjegyzés: Landau [2] könyvében bebizonyítja a

$$\sum_{1 \leqq x \leqq \frac{p-1}{2}} \left(\frac{x}{p}\right) > 0 \tag{8}$$

egyenlőtlenséget. Megjegyezi, hogy ez csak a binär kvadratikus alakok osztályszám formuláján keresztül ismeretes. Érdekes lenne a (8) egyenlőtlenség kimutatása a 3. tételben álló formula segítségével.

A 3. tétel bizonyításához két lemmára lesz szükségünk.

3. LEMMA. Legyen $f(x, y) = x + y - 1$, $p \equiv 3 \pmod 4$ prím. Ekkor

$$\sum_{\substack{1 \leqq x \leqq \frac{p-1}{2} \\ 1 \leqq y \leqq \frac{p-1}{2} \\ x \neq y}} \sum \left(\frac{x+y-1}{p}\right) = -\left(1 + \left(\frac{2}{p}\right)\right) \sum_{\frac{p+1}{2} \leqq x \leqq p-1} \left(\frac{x}{p}\right).$$

Bizonyítás: Az $u = x + \frac{p-1}{2}$, $v = y + \frac{p-1}{2}$ relációk segítségével kölcsönösen

egyértelmű megfeleltetést létesítve az (x, y) és (u, v) párok között fennáll

$$\sum_{\substack{1\leqq x\leqq\frac{p-1}{2}\\ 1\leqq y\leqq\frac{p-1}{2}\\ x\neq y}}\left(\frac{x+y-1}{p}\right)=\sum_{\substack{\frac{p+1}{2}\leqq u\leqq p-1\\ \frac{p+1}{2}\leqq v\leqq p-1\\ u\neq v}}\left(\frac{u+v}{p}\right).$$

A lemma bizonyítása a továbbiakban lényegtelen módosításoktól eltekintve követi az 1. lemma bizonyításánál alkalmazott gondolatmenetet.

Vezessük be a

$$S_p=\sum_{s=0}^{p-1}e^{2\pi i\frac{s^2}{p}}$$

jelölést.

A továbbiakban felhasználjuk a $S_p=i\sqrt{p}$ és

$$\sum_{s=0}^{p-1}e^{2\pi i\frac{as^2}{p}}=\left(\frac{a}{p}\right)S_p,\quad\text{ha}\quad(a,p)=1 \tag{9}$$

relációk teljesülését. Ezen állítások megtalálhatók [2]-ben.

4. LEMMA.

$$\sum_{\substack{1\leqq x\leqq\frac{p-1}{2}\\ 1\leqq y\leqq\frac{p-1}{2}\\ x\neq y}}\sum_{s=0}^{p-1}e^{2\pi i\frac{x+y}{p}s^2}=-\left(-1+\left(\frac{2}{p}\right)\right)S_p\sum_{1\leqq x\leqq\frac{p-1}{2}}\left(\frac{x}{p}\right),$$

$$\sum_{\substack{1\leqq x\leqq\frac{p-1}{2}\\ 1\leqq y\leqq\frac{p-1}{2}\\ x\neq y}}\sum_{s=0}^{p-1}e^{2\pi i\frac{x+y-1}{p}s^2}=\left(1+\left(\frac{2}{p}\right)\right)S_p\sum_{1\leqq x\leqq\frac{p-1}{2}}\left(\frac{x}{p}\right).$$

Bizonyítás: Az első állítás (9) folytán a 2. lemma következménye, a második pedig hasonlóan adódik felhasználva a 3. lemmát és

$$\sum_{\frac{p+1}{2}\leqq x\leqq p-1}\left(\frac{x}{p}\right)=-\sum_{1\leqq x\leqq\frac{p-1}{2}}\left(\frac{x}{p}\right)$$

teljesülését.

A 3. tétel bizonyítása. A 4. lemma alapján

$$-2\left(1+\left(\frac{2}{p}\right)\right)S_p\sum_{1\leqq x\leqq\frac{p-1}{2}}\left(\frac{x}{p}\right)=\sum_{1\leqq x\leqq\frac{p-1}{2}}\sum_{1\leqq y\leqq\frac{p-1}{2}}\sum_{s=0}^{p-1}e^{2\pi i\frac{x+y}{p}s^2}\left(1-e^{-2\pi i\frac{s^2}{p}}\right). \tag{10}$$

Az összegezés sorrendjének cseréjével a jobb oldal

$$\sum_{s=1}^{p-1}\left(1-e^{-2\pi i\frac{s^2}{p}}\right)\left(\sum_{1\leqq x\leqq\frac{p-1}{2}}e^{2\pi i\frac{x}{p}s^2}\right)^2-\sum_{s=1}^{p-1}\left(1-e^{-2\pi i\frac{s^2}{p}}\right)\sum_{1\leqq x\leqq\frac{p-1}{2}}e^{4\pi i\frac{xs^2}{p}}$$

alakba írható át, s (9) felhasználásával a második összeg

$$S_p \sum_{1\leqq x\leqq\frac{p-1}{2}} \left\{\left(\frac{2x}{p}\right)-\left(\frac{2x-1}{p}\right)\right\} = 2S_p \sum_{1\leqq x\leqq\frac{p-1}{2}} \left(\frac{2x}{p}\right) = 2\left(\frac{2}{p}\right) S_p \sum_{1\leqq x\leqq\frac{p-1}{2}} \left(\frac{x}{p}\right)$$

alakba írható. E megjegyzés alapján (10)-ből

$$\sum_{1\leqq x\leqq\frac{p-1}{2}} \left(\frac{x}{p}\right) = \frac{i}{2\sqrt{p}} \sum_{s=1}^{p-1} \left(1-e^{-2\pi i\frac{s^2}{p}}\right) e^{4\pi i\frac{s^2}{p}} \left(\frac{1-e^{2\pi i\frac{p-1}{2p}s^2}}{1-e^{2\pi i\frac{s^2}{p}}}\right)^2$$

adódik. Ebből egyszerűen kapjuk a

$$\sum_{1\leqq x\leqq\frac{p-1}{2}} \left(\frac{x}{p}\right) = -\frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{s=1}^{p-1} (-1)^s \frac{\left(\sin\frac{p-1}{2p}\pi s^2\right)^2}{\sin\frac{\pi s^2}{p}}$$

formulát, amelyből a 3. tétel állításában szereplő formula $c=1$ esetén könnyen adódik. Az általános esetben hasonló okoskodás vezet célra.

IRODALOM

[1] Az 1962. évi Schweitzer M. emlékverseny Mat. Lapok.
[2] E. LANDAU, Vorlesungen über Zahlentheorie I. 128. és 155. lap.

ЗАМЕТКА К ТЕОРИИ КВАДРАТИЧНЫХ ВЫЧЕТОВ

К. А. КОРРАДИ и И. КАТАИ

В этой работе доказываются следующие утверждения. Пусть k натуральное, p простое число, $p\equiv 3 \pmod 4$. Обозначим через $D(a_1, \ldots, a_n)$-определитель типа Вандермонда, по рожденный элементами $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$D(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \ldots a_1^{n-1} \\ \vdots & \\ 1 & a_n \ldots a_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

и

$$D_k \overset{\text{def}}{=} D\left(1, 2^{2^k}, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^{2^k}\right).$$

Пусть $\left(\frac{a}{p}\right)$-символ Лежандра.

Теорема 1. Имеет место сравнение

$$\prod_{1\leqq x<y\leqq\frac{p-1}{2}} (x^{2^k}+y^{2^k}) \equiv (-1)^{\left[\frac{p+1}{8}\right]} \pmod p.$$

Теорема 2. Имеет место сравнение

$$D_k \equiv (-1)^{(k-1)\left[\frac{p+1}{8}\right]} D_1 \pmod p.$$

Теорема 3. Для каждого целого c имеем

$$\left(\frac{c}{p}\right)\sum_{x=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{x}{p}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{p}}\sum_{u=1}^{p-1}\operatorname{tg}\frac{2\pi cu^2}{p}.$$

A NOTE ON THE THEORY OF QUADRATIC RESIDUES

K. A. CORRÁDI and I. KÁTAI

In this note we proved the following assertions.

Theorem 1. Let k be a natural number, p a given prime, $p\equiv 3 \pmod 4$. Then

$$\prod_{1\leqq x<y\leqq\frac{p-1}{2}}(x^{2k}+y^{2k}) \equiv (-1)^{\left[\frac{p+1}{8}\right]} \pmod p.$$

Let $D(a_1,\ldots, a_n)$ denote the Vandermonde-determinant with generating elements $a_1, \ldots, a_n$ i. e.

$$D(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \ldots a_1^{n-1} \\ \vdots & \\ 1 & a_n \ldots a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

and for the sake of brevity let $D_k \overset{\text{def}}{=\!=} D\left(1, 2^{2^k}, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^{2^k}\right)$.

Theorem 2. Let k be a natural number, p a given prime, $p\equiv 3 \pmod 4$. Then

$$D_k \equiv (-1)^{(k-1)\left[\frac{p+1}{8}\right]} D_1 \pmod p.$$

Theorem 3. Let $p\equiv 3 \pmod 4$, a given prime. Then for every integer c holds the relation

$$\left(\frac{c}{p}\right)\sum_{1\leqq x\leqq\frac{p-1}{2}}\left(\frac{x}{p}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{p}}\sum_{u=1}^{p-1}\operatorname{tg}\frac{2\pi cu^2}{p},$$

where $\left(\frac{x}{p}\right)$ denotes Legendre's symbol.

JACKSON TÉTELÉNEK BIZONYÍTÁSA INTERPOLÁCIÓS ÚTON

VÉRTESI PÉTER

1. 1964-ben Freud Géza [1]-ben az elsőfajú $T_n(x) = \cos n\,(\arccos x)$ Csebisev-polinom gyökeit alappontként felhasználva, olyan interpoláclós polinomsorozatot konstruált, mely $|x| \leqq \frac{1}{2}$ esetén közvetlenül bizonyítja Jackson tételét. Ennek alapján R. B. Saxena hasonló állítást bizonyított be — a másodfajú Csebisev-polinomok gyökeit véve az interpoláció alappontjainak — a $[-1, 1]$ intervallumban ([2]).

1955-ben D. L. Berman szintén konstruált a Jackson-tételt bizonyító polinomsorozatot. (Lásd [3].)

A fentiek alapján most bebizonyítjuk a következőt:

Legyenek

$$x_{kn} = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n) \tag{1.1}$$

az elsőfajú $T_n(x) = \cos n(\arccos x)$ Csebisev-polinom gyökei.

Az x_{kn} alappontokhoz tartozó Lagrange-féle interpolációs alappolinomok

$$l_{kn}(x) = \frac{(-1)^{k+1}\sqrt{1-x_{kn}^2}}{n} \cdot \frac{T_n(x)}{x - x_{kn}}. \tag{1.2}$$

Legyen továbbá

$$v_{kn}(x) = 1 - \frac{x_{kn}}{1-x_{kn}^2}(x - x_{kn}), \tag{1.3}$$

$$\psi_n(u, v) = \frac{2}{n}\sum_{r=1}^{n-1} T_r'(u)T_r(v), \tag{1.4}$$

$$\varphi_{kn}(x) = v_{kn}(x)l_{kn}^4(x) + 2(x - x_{kn})l_{kn}^3(x)\psi_n(x_{kn}, x). \tag{1.5}$$

Legyen $f(x)$ egy tetszőleges folytonos függvény a $[-1, +1]$ intervallumban. Tekintsük a

$$J_n(f, x) = \frac{1+x}{2}f(1) + \frac{1-x}{2}f(-1) + \sum_{k=1}^{n}\left\{f(x_{kn}) - \left[\frac{1+x}{2}f(1) + \frac{1-x}{2}f(-1)\right]\right\}\varphi_{kn}(x) \tag{1.6}$$

polinomsorozatot. $J_n(f, x)$ egy $4n-2$ fokú polinom, melyre $J_n(f, x_{kn}) = f(x_{kn})$. Ezután kimondhatjuk a következőt:

TÉTEL: Legyen $f(x)$ egy, a $-1 \leqq x \leqq 1$ intervallumban értelmezett folytonos függvény. Ekkor az (1. 6) által definiált $J_n(f, x)$ sorozatra

$$|J_n(f, x) - f(x)| \leqq 512\omega\left(f; \frac{1}{4n}\right), \tag{1. 7}$$

ahol $\omega(f; \delta) = \max_{\substack{|h| \leqq \delta \\ |x| \leqq 1}} |f(x+h) - f(x)|$, $f(x)$ folytonossági modulusa.

2. A tétel bizonyítása több lemma segítségével történik. Legyen az egyszerűség kedvéért

$$x_{kn} = x_k, \quad l_{kn}(x) = l_k, \quad \text{s. í. t.}$$

Legyen továbbá $x_0 = 1$, $x_{n+1} = -1$, $x = \cos \vartheta$, $x_k = \cos \vartheta_k$; így

$$\vartheta_0 = 0, \quad \vartheta_k = \frac{2k-1}{2n}\pi \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \quad \vartheta_{n+1} = \pi.$$

Így, midőn

$$|x| \leqq 1, \quad 0 \leqq \vartheta, \quad \vartheta_k \leqq \pi.$$

2. LEMMA. Ha $|x| \leqq 1$, akkor

$$\left|1 - \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\right| \leqq 3, \tag{2. 1}$$

$$\sin \vartheta \left|1 - \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\right| \leqq \frac{3}{n}. \tag{2. 2}$$

Bizonyítás. Fejér [1] egyik eredménye szerint

$$l_k(x) = \Phi_n(x_k, x); \quad \Phi_n(u, v) = \frac{1}{n}\left[1 + 2\sum_{r=1}^{n-1} T_r(u) T_r(v)\right].$$

Egy, az [1]-ben részletezett számolás alapján

$$\Phi_n^2(x, x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x). \tag{2. 3}$$

Másrészt nyilván

$$\Phi_n(x, x) = \frac{1}{n}\left[1 + 2\sum_{r=1}^{n-1} \cos^2 r\vartheta\right] = \frac{1}{n}\left[1 + \sum_{r=1}^{n-1} (1 - \cos 2r\vartheta)\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\left[n - \sum_{r=1}^{n-1} \cos 2r\vartheta\right] = 1 - \frac{1}{n}\frac{\sin (n-1)\vartheta}{\sin \vartheta} \cos n\vartheta.$$

Így (2. 3) alapján

$$1 - \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) = \frac{\sin (n-1)\vartheta \cos n\vartheta}{n \sin \vartheta}\left[2 - \frac{\sin (n-1)\vartheta \cos n\vartheta}{n \sin \vartheta}\right].$$

[1] Lásd L. FEJÉR: Mechanische Quadraturen mit positiven Cotesschen Zahlen; Math. Zeitschr. 37 (1933) 287—309.

Mivel $|\sin(n-1)\vartheta| \leqq (n-1)\sin\vartheta$, $|\cos n\vartheta| \leqq 1$,

$$\left|1-\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\right| \leqq \frac{|\sin(n-1)\vartheta|}{\sin\vartheta}\cdot\frac{3}{n} \leqq 3$$

és

$$\sin\vartheta\left|1-\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\right| \leqq |\sin(n-1)\vartheta|\cdot\frac{3}{n} \leqq \frac{3}{n},$$

mint állítottuk.

3. Ebben a részben bebizonyítjuk, hogy

3. LEMMA

$$\sum_{k=1}^{n}|\varphi_k(x)|\,|x-x_k| < \frac{88}{n}, \qquad -1 \leqq x \leqq 1. \tag{3.1}$$

(3. 1) *bizonyítása* úgy történik, hogy a (3. 1) összeget tagonként becsüljük. Vizsgáljuk először a

$$\sum_{k=1}^{n} l_k^4(x)|x-x_k| \quad \text{-t!}$$

Legyen

$$E_k = l_k^4(x)|x-x_k|.$$

A $\cos\vartheta_k = x_k$, $\cos\vartheta = x$ jelölésekkel (1. 2) alapján

$$E_k = \frac{\sin^4\vartheta_k\cdot\cos^4 n\vartheta}{n^4|\cos\vartheta-\cos\vartheta_k|^3}. \tag{3.2}$$

Mivel

$$\sin\vartheta_k \leqq \sin\vartheta_k+\sin\vartheta = 2\sin\frac{\vartheta+\vartheta_k}{2}\cos\frac{\vartheta-\vartheta_k}{2} \leqq 2\sin\frac{\vartheta+\vartheta_k}{2}, \tag{3.3}$$

$$|\cos\vartheta-\cos\vartheta_k| = 2\sin\frac{\vartheta+\vartheta_k}{2}\sin\frac{|\vartheta-\vartheta_k|}{2}, \tag{3.4}$$

így

$$\frac{\sin\vartheta_k}{|\cos\vartheta-\cos\vartheta_k|} \leqq \frac{1}{\left|\sin\frac{\vartheta-\vartheta_k}{2}\right|}. \tag{3.5}$$

(3. 2)-ből nyerjük

$$E_k \leqq \frac{1}{n^4}\cdot\frac{1}{\left|\sin\frac{\vartheta-\vartheta_k}{2}\right|^3}. \tag{3.6}$$

Először belátjuk, hogy

I. 3 $\qquad E_k \leqq \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(i-k)^3}$, ha $1 \leqq k < i \leqq n$ és $x\in[x_{i+1}, x_i]$.

Valóban, ha $x_{i+1} \leqq x \leqq x_i$, akkor $\vartheta_i \leqq \vartheta \leqq \vartheta_{i+1}$. Ha $1 \leqq k < i \leqq n$, akkor $\vartheta_i-\vartheta_k \leqq \leqq \vartheta-\vartheta_k \leqq \pi$. Így

$$\sin\frac{\vartheta-\vartheta_k}{2} \geqq \sin\frac{\vartheta_i-\vartheta_k}{2} = \sin\frac{2i-1-2k+1}{2n}\cdot\frac{\pi}{2} > \frac{i-k}{n}. \tag{3.7}$$

(3. 6) és (3. 7)-ből adódik I. 3.

II. 3

$$E_k \leqq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(k-i-1)^3}, \quad \text{ha} \quad 0 \leqq i \leqq n-2,\ i+2 \leqq k \leqq n \quad \text{és} \quad x \in [x_{i+1}, x_i].$$

Ugyanis most $\vartheta_k - \vartheta_{i+1} \leqq \vartheta_k - \vartheta \leqq \pi$, vagyis

$$\text{(3. 8)} \qquad \sin \frac{\vartheta_k - \vartheta}{2} \geqq \sin \frac{\vartheta_k - \vartheta_{i+1}}{2} = \sin \frac{2k-1-2i-1}{2n} \cdot \frac{\pi}{2} > \frac{k-i-1}{n}.$$

(3. 6) és (3. 8)-ból adódik II. 3.

III. 3 $$E_i \leqq \frac{8}{n}, \quad \text{ha} \quad 1 \leqq i \leqq n \quad \text{és} \quad x \in [x_{i+1}, x_i].$$

(3. 2)-ből nyerjük, hogy

$$\text{(3. 9)} \qquad E_i \leqq \frac{\sin^3 \vartheta_i}{|\cos \vartheta - \cos \vartheta_i|^3} \cdot \frac{|\cos^3 n\vartheta|}{n^4}.$$

Mivel

$$\text{(3. 10)} \qquad |\cos n\vartheta| = |\cos n\vartheta - \cos n\vartheta_i| = \left| 2 \sin n \frac{\vartheta + \vartheta_i}{2} \cdot \sin n \frac{\vartheta - \vartheta_i}{2} \right| \leqq$$

$$\leqq 2 \left| \sin n \frac{\vartheta - \vartheta_i}{2} \right| \leqq 2n \left| \sin \frac{\vartheta - \vartheta_i}{2} \right|,$$

(3. 5) segítségével kiadódik, hogy

$$\text{(3. 11)} \qquad \frac{|\cos n\vartheta| \sin \vartheta_i}{|\cos \vartheta - \cos \vartheta_i|} \leqq 2n,$$

ahonnan rögtön következik III. 3.

Pontosan ilyen módon adódik, hogy

IV. 3 $$E_{i+1} \leqq \frac{8}{n}, \quad \text{ha} \quad 0 \leqq i \leqq n-1 \quad \text{és} \quad x \in [x_{i+1}, x_i].$$

I. 3, II. 3, III. 3 és IV. 3 alapján

$$\sum_{k=1}^{n} E_k < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{(i-k)^3} + \frac{16}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=i+2}^{n} \frac{1}{(k-i-1)^3} < \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} + \frac{16}{n} < \frac{20}{n},$$

vagyis nyerjük, hogy

A. 3 $$\sum_{k=1}^{n} l_k^4(x) |x - x_k| < \frac{20}{n}, \quad \text{ha} \quad x \in [-1, 1].$$

Vizsgáljuk most a (3. 1) összeg másik tagját, a $\sum_{k=1}^{n} l_k^4(x) \frac{(x-x_k)^2}{1-x_k^2}$-t! Legyen

$E_k^* = l_k^4(x)\,\dfrac{(x-x_k)^2}{1-x_k^2}$. Ekkor (1. 2) alapján

(3. 12) $$E_k^* = \frac{\sin^2 \vartheta_k}{n^4} \cdot \frac{\cos^4 n\vartheta}{|\cos \vartheta - \cos \vartheta_k|^2}.$$

Ebből (3. 6)-hoz hasonlóan nyerjük, hogy

(3. 13) $$E_k^* \leqq \frac{1}{n^4} \cdot \frac{1}{\sin^2 \dfrac{\vartheta - \vartheta_k}{2}}.$$

Egy, az előzőhöz hasonló számítással

$$\sum_{k=1}^{n} E_k^* = \sum_{k=1}^{i-1} E_k^* + E_i^* + E_{i+1}^* + \sum_{k=i+2}^{n} E_k^* < \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{8}{n^2} < \frac{12}{n^2}.$$

Vagyis

B. 3 $$\sum_{k=1}^{n} l_k^4(x)\,\frac{(x-x_k)^2}{1-x_k^2} < \frac{12}{n^2}, \quad \text{ha} \quad x \in [-1, 1].$$

Most belátjuk, hogy

C. 3 $$\sum_{k=1}^{n}{}' |l_k^3(x)\psi_n(x_k, x)|(x-x_k)^2 < \frac{28}{n}, \quad \text{ha} \quad x \in [-1, 1].$$

Valóban, tekintettel (1. 4)-re

(3. 14) $$|\psi_n(x_k, x)| = \left| \frac{2}{n \cdot \sin \vartheta_k} \cdot \sum_{r=1}^{n-1} r \sin r\vartheta_k \cdot \cos r\vartheta \right| =$$

$$= \frac{1}{n \sin \vartheta_k} \left| \sum_{r=1}^{n-1} r \sin r(\vartheta_k - \vartheta) + \sum_{r=1}^{n-1} r \sin r(\vartheta_k + \vartheta) \right| =$$

$$= \frac{1}{n \sin \vartheta_k} \left| \left[\sin (2n-1) \frac{\vartheta_k - \vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta_k - \vartheta}{2} - (2n-1) \cos (2n-1) \frac{\vartheta_k - \vartheta}{2} \sin \frac{\vartheta_k - \vartheta}{2} \right] \cdot \right.$$

$$\cdot \frac{1}{4 \sin^2 \dfrac{\vartheta_k - \vartheta}{2}} + \left[\sin (2n-1) \frac{\vartheta_k + \vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta_k + \vartheta}{2} - \right.$$

$$\left. \left. - (2n-1) \cos (2n-1) \frac{\vartheta_k + \vartheta}{2} \sin \frac{\vartheta_k + \vartheta}{2} \right] \frac{1}{4 \sin^2 \dfrac{\vartheta_k + \vartheta}{2}} \right| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{n \sin \vartheta_k} (4n-2) \left(\frac{1}{4 \sin \dfrac{|\vartheta - \vartheta_k|}{2}} + \frac{1}{4 \sin \dfrac{\vartheta + \vartheta_k}{2}} \right) <$$

$$< \frac{1}{\sin \vartheta_k} \left(\frac{1}{\sin \dfrac{|\vartheta - \vartheta_k|}{2}} + \frac{1}{\sin \dfrac{\vartheta + \vartheta_k}{2}} \right).$$

Legyen $E_k^{**} = |l_k^3(x)\psi_n(x_k, x)|(x-x_k)^2$. Ekkor

$$E_k^{**} = \frac{\sin^3 \vartheta_k |\cos^3 n\vartheta|}{n^3 |\cos\vartheta - \cos\vartheta_k|} \cdot |\psi_n(x_k, x)| \leqq \tag{3.15}$$

$$\leqq \frac{\sin^2 \vartheta_k}{n^3} \cdot \frac{|\cos^3 n\vartheta|}{|\cos\vartheta - \cos\vartheta_k|} \left[\frac{1}{\sin\frac{|\vartheta-\vartheta_k|}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\vartheta+\vartheta_k}{2}} \right] \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{n^3} \frac{\sin\vartheta_k}{|\cos\vartheta - \cos\vartheta_k|} \cdot \frac{1}{\sin\frac{|\vartheta-\vartheta_k|}{2}} + \frac{1}{n^3} \frac{\sin\vartheta_k}{|\cos\vartheta - \cos\vartheta_k|} \cdot \frac{\sin\vartheta_k}{\sin\frac{\vartheta+\vartheta_k}{2}} \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{n^3} \frac{1}{\sin^2\frac{\vartheta-\vartheta_k}{2}} + \frac{2}{n^3} \frac{1}{\sin\frac{|\vartheta-\vartheta_k|}{2}} \leqq \frac{3}{n^3} \frac{1}{\sin^2\frac{\vartheta-\vartheta_k}{2}}.$$

Az utolsó előtti lépésnél felhasználtuk (3. 5)-t és (3. 3)-t. (3. 15) alapján $1 \leqq i \leqq n$ és $x \in [x_{i+1}, x_i]$ esetén

$$E_i^{**} \leqq \frac{1}{n^3} \frac{\sin\vartheta_i |\cos n\vartheta|}{|\cos\vartheta - \cos\vartheta_i|} \cdot \frac{|\cos n\vartheta|}{\sin\frac{|\vartheta-\vartheta_i|}{2}} + \frac{1}{n^3} \frac{\sin\vartheta_i |\cos n\vartheta|}{|\cos\vartheta - \cos\vartheta_i|} \cdot \frac{\sin\vartheta_i}{\sin\frac{\vartheta+\vartheta_i}{2}}.$$

Tekintettel (3. 11), (3. 10) és (3. 3)-ra,

$$E_i^{**} \leqq \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2} < \frac{8}{n}.$$

A többi E_k^{**}-nál a szokásos gondolatmenetet alkalmazva nyerjük:

$$\sum_{k=1}^{n} E_k^{**} < \frac{28}{n},$$

amivel C. 3-at bebizonyítottuk. Végül, tekintettel (1. 5), A. 3, B. 3 és C. 3-ra

$$\sum_{k=1}^{n} |\varphi_k(x)|\,|x-x_k| < \frac{20}{n} + \frac{12}{n^2} + \frac{2\cdot 28}{n} < \frac{88}{n},$$

mint a 3. lemma állította.

4. Ebben a részben belátjuk, hogy

4. LEMMA.

$$\sum_{k=1}^{n} |\varphi_k(x)| < 142, \quad \text{midőn} \quad -1 \leqq x \leqq 1. \tag{4.1}$$

A *bizonyítás* az eddigi módszerrel történik: (4. 1)-t tagonként becsüljük. Legyen

$$S_k = l_k^4(x) = \frac{\sin^4 \vartheta_k \cos^4 n\vartheta}{n^4 |\cos\vartheta - \cos\vartheta_k|^4}. \tag{4.2}$$

(3. 5) alapján (4. 2)-ből nyerjük:

$$S_k \leqq \frac{1}{n^4} \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta - \vartheta_k}{2}}. \tag{4. 3}$$

Mivel

$$\sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{k=1}^{i-1} S_k + S_i + S_{i+1} + \sum_{k=i+2}^{n} S_k,$$

ha a jobb oldali két szummánál (4. 3)-ból, S_i és S_{i+1}-nél (4. 2)-ből indulunk ki (felhasználva 3. 11-t), a szokásos úton:

$$\sum_{k=1}^{n} S_k < 1{,}5 + 16 + 16 + 1{,}5 = 35.$$

Vagyis

$$\sum_{k=1}^{n} l_k^4(x) < 35, \quad \text{ha} \quad x \in [-1, 1]. \tag{A. 4}$$

Most megmutatjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} l_k^4(x) \frac{|x - x_k|}{1 - x_k^2} < 19, \quad \text{ha} \quad x \in [-1, 1]. \tag{B. 4}$$

Legyen ugyanis

$$S_k^* = l_k^4(x) \frac{|x - x_k|}{1 - x_k^2} = \frac{\sin^2 \vartheta_k \cos^4 n\vartheta}{n^4 |\cos \vartheta - \cos \vartheta_k|^3}. \tag{4. 4}$$

Mivel (3. 10) segítségével

$$|\cos n\vartheta| \leqq 2n \sin \frac{\vartheta + \vartheta_k}{2} \tag{4. 5}$$

és

$$|\cos \vartheta - \cos \vartheta_k| = 2 \sin \frac{\vartheta + \vartheta_k}{2} \sin \frac{|\vartheta - \vartheta_k|}{2}, \tag{4. 6}$$

nyerjük, hogy

$$\frac{\cos n\vartheta}{|\cos \vartheta - \cos \vartheta_k|} \leqq \frac{n}{\sin \frac{|\vartheta - \vartheta_k|}{2}}. \tag{4. 7}$$

Vagyis (4. 4)-ben előbb (3. 5)-öt, majd (4. 7)-et alkalmazva

$$S_k^* \leqq \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{\sin^3 \frac{|\vartheta - \vartheta_k|}{2}}. \tag{4. 8}$$

Másrészt (4. 4), (3. 11), (4. 5), (3. 10) és (4. 6) segítségével

$$S_i^* \leqq \frac{\cos^2 n\vartheta}{|\cos \vartheta - \cos \vartheta_i|} \cdot \frac{4}{n^2} \leqq \frac{2n^2 \cdot 4}{n^2} = 8 \qquad (1 \leqq i \leqq n). \tag{4. 9}$$

Így (4. 8) és (4. 9) alapján a szokásos módon

$$\sum_{k=1}^{n} S_k^* < 1{,}5+8+8+1{,}5 = 19,$$

mint B. 4 állította.

Végül belátjuk, hogy

C. 4 $$\sum_{k=1}^{n} |x-x_k|\,|l_k^3(x)\psi_n(x_k, x)| < 44, \quad \text{ha} \quad x\in[-1, 1].$$

Legyen

$$S_k^{**} = |x-x_k|\,|l_k^3(x)\psi_n(x_k, x)|.$$

Ekkor (1. 2) és (3. 14) értelmében

(4. 10) $$S_k^{**} \leqq \frac{1}{n^3}\frac{\sin^2\vartheta_k}{|\cos\vartheta-\cos\vartheta_k|^2}\cdot\left[\frac{1}{\sin\frac{|\vartheta-\vartheta_k|}{2}}+\frac{|\cos n\vartheta|}{\sin\frac{\vartheta+\vartheta_k}{2}}\right].$$

(4. 10)-ből (3. 5) és (4. 5) segítségével

(4. 11) $$S_k^{**} \leqq \frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{\vartheta-\vartheta_k}{2}}\left(\frac{1}{\sin\frac{|\vartheta-\vartheta_k|}{2}}+2n\right).$$

Másrészt

(4. 12) $$S_i^{**} = \frac{\sin^3\vartheta_i|\cos^3 n\vartheta|}{n^3|\cos\vartheta-\cos\vartheta_i|^2}\cdot|\psi_n(x_i, x)| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{n^3}\frac{\sin^2\vartheta_i\cos^2 n\vartheta}{|\cos\vartheta-\cos\vartheta_i|^2}\cdot\frac{|\cos n\vartheta|}{\sin\frac{|\vartheta-\vartheta_i|}{2}}+\frac{1}{n^3}\cdot\frac{\sin^2\vartheta_i\cos^2 n\vartheta}{|\cos\vartheta-\cos\vartheta_i|^2}\cdot\frac{|\cos n\vartheta|}{\sin\frac{\vartheta+\vartheta_i}{2}} \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{n^3}(2n)^2\cdot 2n+\frac{1}{n^3}(2n)^2\cdot 2n = 16.$$

Itt felhasználtuk (3. 11), (3. 10) és (4. 5) becsléseket.

(4. 11) és (4. 12) ajapján nyerjük:

$$\sum_{k=1}^{n} S_k^{**} < 6+16+16+6 = 44,$$

mint állítottuk.

Mostmár A. 4, B. 4 és C. 4 segítségével könnyen igazolhatjuk a 4. lemmát.

5. Ebben a részben a lemmák segítségével bebizonyítjuk tételünket.

Mint ismert, tetszőleges, folytonos $f(x)$ függvényre

$$\omega(f; \lambda\delta) \leqq (\lambda+1)\omega(f; \delta); \quad \lambda \geqq 0.$$

Vagyis

(5. 1) $$\omega(f; |x-x_k|) \leqq \omega\left(f; \frac{1}{4n}\right)+4n|x-x_k|\,\omega\left(f; \frac{1}{4n}\right).$$

Végezzük el az ajábbi átalakításokat:

$$f(x)-J_n(f,x)=f(x)-\sum_{k=1}^{n}f(x)\varphi_k(x)+\sum_{k=1}^{n}f(x)\varphi_k(x)-$$

$$-\left[\frac{1+x}{2}f(1)+\frac{1-x}{2}f(-1)\right]-\sum_{k=1}^{n}\left\{f(x_k)-\left[\frac{1+x}{2}f(1)+\frac{1-x}{2}f(-1)\right]\right\}\varphi_k(x)=$$

$$=f(x)\left[1-\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\right]+\sum_{k=1}^{n}[f(x)-f(x_k)]\varphi_k(x)-$$

$$-\left[\frac{1+x}{2}f(1)+\frac{1-x}{2}f(-1)\right]\left[1-\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(1+x)[f(x)-f(1)]+(1-x)[f(x)-f(-1)]\right\}\left[1-\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}[f(x)-f(x_k)]\varphi_k(x)=\frac{1+x}{2}[f(x)-f(1)]\left[1-\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\right]+$$

$$+\frac{1-x}{2}[f(x)-f(-1)]\left[1-\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\right]+\sum_{k=1}^{n}[f(x)-f(x_k)]\varphi_k(x).$$

Alkalmazzuk most a 2. lemmát!

$$\left|\frac{1+x}{2}[f(x)-f(1)]\left[1-\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\right]\right|\leqq\frac{1+x}{2}\omega(f;|x-1|)\left|1-\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\right|\leqq$$

$$\leqq\frac{1+x}{2}[1+4n|x-1|]\omega\left(f;\frac{1}{4n}\right)\left|1-\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\right|\leqq\left|1-\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\right|\omega\left(f;\frac{1}{4n}\right)+$$

$$+\frac{4n}{2}|1+x|\,|x-1|\,\omega\left(f;\frac{1}{4n}\right)\left|1-\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\right|\leqq\left|1-\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\right|\omega\left(f;\frac{1}{4n}\right)+$$

$$+2n\sqrt{1-x^2}\left|1-\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\right|\omega\left(f;\frac{1}{4n}\right)\leqq(3+2\cdot3)\omega\left(f;\frac{1}{4n}\right)=9\omega\left(f;\frac{1}{4n}\right).$$

Hasonlóan

$$\left|\frac{1-x}{2}[f(x)-f(-1)]\left[1-\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\right]\right|\leqq9\omega\left(f;\frac{1}{4n}\right).$$

A harmadik tagot a 3. és 4. lemmával becsüljük

$$\sum_{k=1}^{n}|f(x)-f(x_k)|\,|\varphi_k(x)|\leqq\sum_{k=1}^{n}(1+4n|x-x_k|)\omega\left(f;\frac{1}{4n}\right)|\varphi_k(x)|\leqq$$

$$\leqq\omega\left(f;\frac{1}{4n}\right)\left[\sum_{k=1}^{n}|\varphi_k(x)|+4n\sum_{k=1}^{n}|\varphi_k(x)|\,|x-x_k|\right]\leqq(142+88\cdot4)\omega\left(f;\frac{1}{4n}\right).$$

Vagyis

$$|f(x)-J_n(f;x)| \leqq (9+9+494)\omega\left(f;\frac{1}{4n}\right) = 512\omega\left(f;\frac{1}{4n}\right),$$

mint állítottuk.

Végezetül pedig ezúton is szeretném megköszönni Freud Géza szíves segítségét és értékes tanácsait.

IRODALOM

[1] Freud G.: Egy Jackson-féle interpolációs eljárásról, Mat. Lapok, **4**, 1964, 330—336.
[2] R. B. Saxena: On a polynomial of interpolation. Studia Math. Hung.
[3] Д. Л. Берман: Исследование схогимости интерполяционных процессов, ДАН, 102, 1955, 867—869

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ДЖЕКСОНА ПУТЁМ ИНТЕРПОЛЯЦИЙ

П. ВЕРТЭШИ

THE PROOF OF JACKSON'S THEOREM BY INTERPOLATION-METHODS

P. VÉRTESI

AZ $x^p+y^p=cz^p$ DIOPHANTOSZI EGYENLETRŐL

GYŐRY KÁLMÁN

Az

$$x^p+y^p=cz^p \tag{1}$$

diophantoszi egyenlet megoldhatóságának a kérdése — tetszőleges $p\geqq 3$ prímszám és $c\geqq 1$ egész szám mellett — nagyon nehéz és még elintézetlen probléma. Ilyen irányban vannak ugyan eredmények, de ezek mind bizonyos megkötéseket tartalmaznak a c-re, ill. az x, y, z megoldásokra vonatkozóan. TURÁN PÁL -tól származik az a gondolat, hogy vizsgáljuk az (1) egyenlet korlátos x, y, z egész megoldásainak a számát, minden egyéb, a megoldásokra vonatkozó kikötés nélkül. Pontosabban jelölje $R_p(N)$ az (1) egyenlet azon x, y, z racionális egész megoldásainak a számát, melyekre

$$1\leqq x, y, z\leqq N \tag{2}$$

és

$$(x, y)=(x, z)=(y, z)=1 \tag{3}$$

teljesül.

$c=1$ esetén (1) a Fermat-féle egyenletet szolgáltatja, a sejtés szerint $R_p(N)=0$. Ebben az irányban TURÁN PÁL nyerte az első nem-triviális eredményt [1], mely szerint

$$R_p(N)<c_1(p)N\log^{1+\frac{p}{p-1}}N. \tag{4}$$

Később DÉNES PÉTER-rel közösen megmutatták [2], hogy $c=1$ mellett

$$R_p(N)<p\left(1+3\cdot 2^{\frac{1}{p}}\right)N^{\frac{2}{p}} \tag{5}$$

és

$$R_p(N)<c_2(p)\frac{N^{\frac{2}{p}}}{\log^{2-\frac{2}{p}}N} \tag{6}$$

is igaz, ahol $c_1(p)$ és $c_2(p)$ csak p-től függő konstansok.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy a (4) becslés tetszőleges $c\geqq 1$ egész szám esetén is javítható, azaz igaz a következő:

TÉTEL. *Ha $R_p(N)$ jelöli az* (1) *egyenlet* (2) *és* (3) *feltételeknek eleget tevő racio-*

nális egész megoldásainak a számát, akkor

$$R_p(N) < c_3(c, p)N, \tag{7}$$

ahol $c_3(c, p)$ *csak* c *és* p*-től függő konstans.*

Bizonyítás. Négy esetet különböztetünk meg, aszerint, hogy (1)-ben a c, ill. z osztható-e p-vel vagy sem.

a) Először tegyük fel, hogy $p \nmid cz$. Jelöljük ekkor a feltételeknek eleget tevő megoldások számát $R'_p(N)$-nel.

Az (1) egyenlet

$$(x+y)\frac{x^p+y^p}{x+y} = cz^p \tag{8}$$

alakba írható. Tegyük fel, hogy q prímszám, $q \neq p$ és

$$q|(x+y), \quad q\left|\frac{x^p+y^p}{x+y}\right.$$

Ebből

$$0 \equiv \frac{x^p+y^p}{x+y} \equiv px^{p-1} \pmod{q},$$

azaz $q|x$ következik. Hasonlóan $q|y$, ellentétben a (3) feltevéssel. Az $(x+y)$ és $x^p+y^p/x+y$ legnagyobb közös osztója p sem lehet, mert ebből $p|cz$ adódna, amit kizártunk. Tehát

$$\left(x+y, \frac{x^p+y^p}{x+y}\right) = 1$$

és ezért a (8) egyenletből az

$$x+y = c'u^p, \tag{9}$$

valamint az

$$\frac{x^p+y^p}{x+y} = c''v^p \tag{10}$$

egyenleteket nyerjük, ahol $(c', c'') = 1$ és $c'c'' = c$. Ezen c', c'' párok száma, és így a lehetséges (9) és (10) egyenletek száma is független az N-től, csupán a c-től függ.

(9)-ből a (2) feltétel miatt

$$x+y = c'u^p \leqq 2N,$$

azaz

$$u \leqq \left(\frac{2}{c'}\right)^{\frac{1}{p}} N^{\frac{1}{p}} \leqq 2^{\frac{1}{p}} N^{\frac{1}{p}} \tag{11}$$

következik. Hasonlóan nyerjük (10)-ből, hogy

$$c''v^p = \frac{x^p+y^p}{x+y} = x^{p-1} - x^{p-2}y + \ldots + y^{p-1} < pN^{p-1},$$

vagyis

$$v < \left(\frac{p}{c''}\right)^{\frac{1}{p}} N^{\frac{p-1}{p}} \leqq p^{\frac{1}{p}} N^{\frac{p-1}{p}}. \tag{12}$$

Tekintsük most rögzített c' c'', u és v értékek mellett a (9) és (10)-ből adódó

$$x^{p-1}-x^{p-2}(c'u^p-x)+\ldots+(c'u^p-x)^{p-1}=c''v^p \tag{13}$$

egyenletet. Ennek legfeljebb $p-1$ egész x megoldása létezik. Mivel (11) és (12) miatt az u és v lehetséges értékeinek a száma kisebb mint $(2p)^{\frac{1}{p}}N$, ezért

$$R'_p(N)<c'_3(c,p)N, \tag{14}$$

ahol $c'_3(c,p)$ csak c és p-től függő konstans.

b) A fennmaradó három esetet egyszerre vizsgálhatjuk, ha feltesszük, hogy $p|cz$.

Ha most $p|c$, de $p^2\nmid c$ és $p\nmid z$ lenne, akkor

$$p|(x+y) \quad \text{és} \quad p\left|\frac{x^p+y^p}{x+y}\right.,$$

azaz $p^2|cz^p$ következne, ami nem lehetséges. Legyen ezért $p^2|c$ vagy $p|z$ és a feltételeknek eleget tevő megoldások száma $R''_p(N)$. Ekkor

$$\left(x+y,\frac{x^p+y^p}{x+y}\right)=p$$

és

$$p^2\nmid\frac{x^p+y^p}{x+y}=\frac{[(x+y)-y]^p+y^p}{x+y}=(x+y)^{p-1}-\binom{p}{1}(x+y)^{p-2}y+\ldots+\binom{p}{1}y^{p-1}$$

miatt (1)-ből az

$$x+y=c'p^tu^p \tag{15}$$

és

$$\frac{x^p+y^p}{x+y}=c''pv^p \tag{16}$$

egyenletek adódnak, ahol c', c'' egymáshoz és p-hez relatív prím pozitív egész számok, azonkívül osztói a c-nek. Továbbá feltehetjük, hogy $0\leqq t<p$. Ez pedig azt jelenti, hogy a lehetséges (15) és (16) egyenletek száma független az N-től.

(15)-ből (11)-hez hasonlóan következik, hogy

$$u\leqq\left(\frac{2}{c'p^t}\right)^{\frac{1}{p}}N^{\frac{1}{p}}\leqq 2^{\frac{1}{p}}N^{\frac{1}{p}}, \tag{17}$$

(16)-ból pedig

$$v<\left(\frac{1}{c''}\right)^{\frac{1}{p}}N^{\frac{p-1}{p}}\leqq N^{\frac{p-1}{p}} \tag{18}$$

adódik. Tehát a lehetséges u és v egészek száma kisebb mint $2^{\frac{1}{p}}N$, ezért a (15) és (16)-ból adódó

$$x^{p-1}-x^{p-2}(c'p^tu^p-x)+\ldots+(c'p^tu^p-x)^{p-1}=c''pv^p \tag{19}$$

egyenletek számáról ugyanezt mondhatjuk. Viszont (19)-nek fix c', c'', t és rögzí-

tett u, v értékek mellett szintén legfeljebb $p-1$ egész x megoldása létezik. Ugyancsak található tehát olyan, csak c és p-től függő $c_3''(c, p)$ konstans, hogy

$$R_p''(N) < c_3''(c, p)N. \tag{20}$$

Ha tehát $p \nmid c$, akkor az a) és b) pontban vizsgált megoldások az (1) egyenlet összes lehetséges, a feltételeket kielégítő megoldását kimerítik. Ha pedig $p|c$, akkor ugyanezt elmondhatjuk a b) pontban vizsgált megoldásokról. Ezért (14) és (20)-ból valóban

$$R_p(N) < c_3(c, p)N$$

következik és ezzel az állításunkat bebizonyítottuk.

IRODALOM

[1] TURÁN P.: A note on Fermat's conjecture, Journ. Indian Math. Soc. **15** (1951), 47—50.
[2] DÉNES P.—TURÁN P.: A second note on Fermat's conjecture, Publ. Math. Debrecen, **4** (1955), 28—32.

О ДИОФАНТИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ $x^p + y^p = cz^p$

К. ДЬЁРИ

ÜBER DIE DIOPHANTISCHE GLEICHUNG $x^p + y^p = cz^p$

K. GYŐRY

Es seien in der Gleichung (1) $p \geqq 3$ eine beliebige Primzahl und $c \geqq 1$ eine ganze rationale Zahl. Ist $R_p(N)$ die Anzahl der ganzen rationalen Lösungen x, y, z der Gleichung (1), die den Bedingungen (2) und (3) genügen, so gilt

$$R_p(N) < c_3(c, p)N,$$

wobei $c_3(c, p)$ eine nur von c und p abhängige Konstante ist.

ABSZOLÚT KONVERGENS FOURIER-SOROK TRANSZFORMÁLTJAIRÓL

ALPÁR LÁSZLÓ

1. Jelölje $\mathscr{A}$ az abszolút konvergens Fourier-sorokkal előállítható függvények halmazát, azaz $F(t) \in \mathscr{A}$, ha

$$F(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu e^{i\nu t} \quad \text{és} \quad \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |A_\nu| = A < \infty. \tag{1. 1}$$

Könnyű belátni, hogy két, $\mathscr{A}$-ba tartozó függvénye összege vagy szorzata is $\mathscr{A}$-hoz tartozik, vagyis $\mathscr{A}$ gyűrű.

$F(t)$ nyilván 2π szerint periodikus függvény, és transzformáltjainak tekintjük a $G(t) = F(f(t))$ alakú, 2π szerint periodikus függvényeket, amikor is tehát

$$F(f(t)) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu e^{i\nu f(t)} = G(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{int}. \tag{1. 2}$$

$F(t)$ ilyen transzformáltjaival többen foglalkoztak. Először is Z. L. LEIBENSON [7] munkáját említjük meg. LEIBENSON az $f(t)$ függvényt megengedettnek nevezi, ha *bármely* $F(t) \in \mathscr{A}$ esetében $G(t) \in \mathscr{A}$, és kimutatja a következő tételt:

Ha az $f(t)$ megengedett függvény deriváltja abszolút folytonos (pl. ha $f(t)$ kétszer differenciálható), akkor csak

$$f(t) = nt + c \tag{1. 3}$$

alakú lehet, ahol $n (-\infty < n < \infty)$ egész szám, c pedig valós állandó.

Más szóval, ha $f(t)$ nem (1. 3) alakú az említett kiegészítő feltételekkel, akkor van olyan $F(t) \in \mathscr{A}$ függvény, amelyre $G(t) \notin \mathscr{A}$, azaz

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |B_n| = \infty.^{1} \tag{1. 4}$$

2. LEIBENSON tétele azonban nem nyújt felvilágosítást $G(t)$ természetéről, az (1. 4) kapcsolaton kívül, azokban az esetekben, amikor $f(t)$ nem (1. 3) alakú a megadott kiegészítő feltételekkel. Az (1. 4) viszont nem zárja ki azt, hogy $G(t)$-nek az (1. 2) alatt megadott Fourier-sora valamiféle „jó" tulajdonsággal bírjon, amely ugyan gyengébb mint az abszolút konvergencia, de $G(t)$ Fourier-sorának viselke-

[1] LEIBENSON eredményének duálisa LÉVY és WIENER következő, ismert tétele: *Ha $f(t)$ Fourier-sora abszolút konvergens és $z = f(t)$ (általában komplex) értékei olyan C görbén fekszenek, amelyen az $F(z)$ (nem feltétlenül egyrétű) függvény analitikus, akkor az $F(f(t))$ függvény Fourier-sora is abszolút konvergens. Speciálisan, ha $f(t) \neq 0$, akkor $1/f(t)$ Fourier-sora abszolút konvergens* ([10], I. p. 245). LÉVY és WIENER tételében a belső függvény $f(t)$, LEIBENSON tételében fordítva a külső függvény $F(t)$ Fourier-sora abszolút konvergens.

dését megfelelően jellemzi. Elképzelhető pl., hogy ha $f(t)$ eleget tesz bizonyos feltételeknek, akkor $G(t)$ Fourier-sora egyenletesen vagy lokálisan konvergens stb.

Az alábbiakban $G(t)$ Fourier-sorának egyenletes konvergenciájára adunk elégséges feltételt. Jelöljük, az állítás egyszerűbb megfogalmazása végett, $\mathcal{U}$-val az egyenletesen konvergens Fourier-sorokkal előállítható függvények halmazát. Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$.

TÉTEL. *Ha az $f(t)$ valós változós, valós értékű függvény analitikus a t tengely mentén, továbbá ha $f(t) \equiv f(t+2\pi) \pmod{2\pi}$, és $F(t) \in \mathcal{A}$, akkor $F(f(t)) = G(t) \in \mathcal{U}$.*

Más szavakkal, *bármely* abszolút konvergens Fourier-sor t változóját $f(t)$-vel helyettesítve, olyan függvényt nyerünk, amelynek Fourier-sora legalább egyenletesen konvergens. (Ezt az állítást, bizonyítás nélkül, már [1] dolgozatunkban kimondottuk.) Természetesen azok az esetek az érdekesek, amikor $G(t) \notin \mathcal{A}$, de $G(t) \in \mathcal{U} - \mathcal{A}$, azaz amikor $G(t)$ Fourier-sora egyenletesen, de nem abszolút konvergens.

Megkönnyíti a tétel értékelését más, alkalmasan választott eredményekkel való összehasonlítása. PÁL GYULA [8] megmutatta, hogy tetszőleges, folytonos, valós $\varkappa(t)$ $(\varkappa(0) = \varkappa(2\pi))$ függvényhez mindig található olyan $\varkappa(t)$-től függő, folytonos, valós, monoton növő $\lambda_\varkappa(t)$ $(\lambda_\varkappa(0) = 0, \lambda_\varkappa(2\pi) = 2\pi)$ függvény, hogy $\varkappa(\lambda_\varkappa(t))$ Fourier-sora mindenhol konvergens a $(0, 2\pi)$ szakaszon és egyenletesen konvergens minden $0 < \delta \leqq t \leqq 2\pi - \delta$ zárt részintervallumon. H. BOHR [5] kiküszöbölte PÁL tételének szépséghibáját, megmutatva, hogy további megfelelő és a fenti tulajdonságokkal rendelkező $\lambda_\varkappa(t)$ esetén $\varkappa(\lambda_\varkappa(t))$ Fourier-sora egyenletesen konvergens a zárt $[0, 2\pi]$ szakaszon is.

Ha $F(t) \in \mathcal{A}$, akkor $F(t)$ folytonos is, és $F(t) \in \mathcal{U}$. PÁL eredménye mégsem elégséges tételünk bizonyítására, mert PÁL tétele először is csak valós értékű függvényekre vonatkozik, másrészt csupán egyetlen jól meghatározott függvényt ad meg (és ez speciálisabb mint $f(t)$), amelyet t helyére téve ismét $\mathcal{U}$-ba tartozó függvényhez jutunk. Tételünk szerint azonban végtelen sok ilyen függvény van. Az általános esetben, amidőn $F(t)$ nem valós értékű, azaz $F(t) = u(t) + iv(t)$ és $u(t) \not\equiv 0$, $v(t) \not\equiv 0$, akkor általában $\lambda_u(t) \neq \lambda_v(t)$, ahol $\lambda_u(t)$, ill. $\lambda_v(t)$ az $u(t)$, ill. $v(t)$-hez tartozó PÁL—BOHR-féle függvény.

Másfelől TURÁN PÁL [9] egyik tételére hivatkozunk, amely éppen azt világítja meg, hogy analitikus transzformáció, mint amilyen t-nek $f(t)$-vel való helyettesítése, megszüntetheti folytonos függvény Fourier-sorának lokális konvergenciáját. TURÁN bebizonyítja, hogy található olyan folytonos, valós, 2π szerint periodikus $\mu(t)$ függvény, amelynek Fourier-sora a $t = 0$ pontban konvergens, mégis van olyan (μ-től függő) $\psi_\mu(t)$ $(\psi_\mu(-\pi) = -\pi, \psi_\mu(0) = 0, \psi_\mu(\pi) = \pi)$ függvény, amely a $t = 0$ valamilyen környezetében analitikus, t valós értékeire valós, $[-\pi, \pi]$-ben monoton növő és $\mu(\psi_\mu(t))$ Fourier-sora a $t = 0$ pontban divergens. A bizonyítandó tétel azt mutatja, hogy az abszolút konvergenciával biztosított egyenletes konvergenciát az alkalmazott analitikus transzformáció nem szünteti meg.

E megjegyzések után térjünk rá az állítás igazolására:

Bizonyítás. Könnyen belátható, hogy az $f(t)$-re kirótt feltételek értelmében

$$f(t) = g(t) + \gamma t,$$

ahol $g(t) = g(t+2\pi)$ analitikus függvény és γ $(-\infty < \gamma < \infty)$ egész szám. Feltevés szerint ui. $[f(t+2\pi) - f(t)]/2\pi$ egyrészt folytonos függvény, másrészt egész szám; ez csak úgy lehet, ha értéke állandó és egész, amit γ-val jelölhetünk. Így $f'(t+2\pi) - f'(t) = 0$, azaz $f'(t)$ 2π szerint periodikus függvény, amiből az állítás következik.

$e^{ivf(t)}$ tehát 2π szerint periodikus, Fourier-sorba fejthető függvény. Legyen

$$e^{ivf(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nv} e^{int} \qquad (v = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{2.1}$$

akkor az (1. 2) folytán

$$B_n = \sum_{v=-\infty}^{\infty} a_{nv} A_v \tag{2.2}$$

és

$$B_{-n}e^{-int} + B_n e^{int} = \sum_{v=-\infty}^{-1} (a_{-nv}e^{-int} + a_{nv}e^{int}) A_v + \tag{2.3}$$

$$+ \sum_{v=0}^{\infty} (a_{-nv}e^{-int} + a_{nv}e^{int}) A_v \overset{\text{def}}{=} \sum_{v=-\infty}^{-1} \alpha_{nv}^{-}(t) A_v + \sum_{v=0}^{\infty} \alpha_{nv}^{+}(t) A_v \overset{\text{def}}{=} \beta_n^{-} + \beta_n^{+}.$$

Az (1. 1) feltevés értelmében $\sum_{v=-\infty}^{-1} |A_v| < \infty$ és $\sum_{v=0}^{\infty} |A_v| < \infty$. Azt kell tehát először is igazolnunk, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^{-}$ és $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^{+}$ sorok konvergensek, vagyis, hogy az $[\alpha_{nv}^{-}(t)]$ és $[\alpha_{nv}^{+}(t)]$ mátrixok abszolút konvergens sorokat konvergens sorokba visznek át. Ilyen mátrixokat vizsgáltunk [2] (pp. 293—296) dolgozatunkban és a következő eredményt nyertük:

A) TÉTEL. *Legyen* $\mathbf{M} = [c_{nv}]$ $(n = 0, 1, 2, \ldots;\ v = 0, 1, 2, \ldots)$ *végtelen mátrix és*

$$s_{mv} = \sum_{n=0}^{m} c_{nv}. \tag{2.4}$$

Az $\mathbf{M}$ *mátrix akkor és csakis akkor transzformál minden abszolút konvergens* $\sum_{n=0}^{\infty} x_v$ *sort konvergens* $\sum_{v=0}^{\infty} y_n$ *sorrá, ahol*

$$y_n = \sum_{v=0}^{\infty} c_{nv} x_v, \tag{2.5}$$

(I) *ha létezik a*

$$\lim_{m \to \infty} s_{mv} = s_v \qquad (v = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.6}$$

határérték; (II) *ha van olyan* $K > 0$ *állandó, amelyre*

$$|s_{mv}| \leqq K \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots;\ v = 0, 1, 2, \ldots); \tag{2.7}$$

(III) *végül, ha* $s_v = 1$ *minden* v*-re, akkor*

$$\sum_{v=0}^{\infty} x_v = \sum_{n=0}^{\infty} y_n,$$

azaz a szummációs eljárás permanens is.[2]

Megmutatjuk, hogy az $[\alpha_{nv}^{-}(t)]$ és $[\alpha_{nv}^{+}(t)]$ mátrixok teljesítik a (2. 6) és (2. 7) feltételeket. E célból idézzük egy másik tételünket ([3], p. 190).

[2] A félreértések elkerülése végett megjegyezzük, hogy a megszokottabb szummációs eljárásokban a szummációs mátrix sorozatot visz át sorozatba, míg itt sornak sorrá való transzformációjáról van szó. A német matematikai irodalom az első eljárást **FF** (Folge-Folge), míg a másodikat **RR** (Reihe-Reihe) típusú transzformációnak nevezi.

B) TÉTEL. *Legyen $f(t)$ a bizonyítandó tételben megadott feltételeket kielégítő függvény, és legyen, a* (2. 1) *jelöléssel,*

$$S_{lm}^{\nu}(t;f) = S_{lm}^{\nu}(t) = \sum_{n=l}^{m} a_{n\nu} e^{int} \qquad (l < m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{2. 8}$$

akkor van olyan $K = K(f)$ állandó, amellyel

$$|S_{lm}^{\nu}(t)| \leqq K \tag{2. 9}$$

egyenletesen ν-, l-, m- és t-ben.

A (2. 4) alatt értelmezett $s_{m\nu}$ mennyiség $[\alpha_{n\nu}^{-}(t)]$ és $[\alpha_{n\nu}^{+}(t)]$ esetében, a (2. 3) folytán, nem más, mint $S_{-mm}^{\nu}(t)$ először $\nu < 0$, majd $\nu \geqq 0$-val. A (2. 9) így azt jelenti, hogy a (2. 7) feltétel teljesül, és a

$$\lim_{m \to \infty} S_{-mm}^{\nu}(t) = e^{i\nu f(t)} \tag{2. 10}$$

összefüggés miatt a (2. 6) kikötés is kielégül. A szummációs eljárás, amint ez az A) tétel harmadik feltételéből és a (2. 10)-ből következik, nem permanens. Ezzel igazoltuk, hogy a $\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{int}$ sor konvergens minden rögzített t-re.

Hátra van még annak a bizonyítása, hogy ez a konvergencia egyenletes. Legyen, tekintettel (2. 3)-ra,

$$\sigma_m(t) = \sum_{n=0}^{m} (B_{-n} e^{-int} + B_n e^{int}) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} S_{-mm}^{\nu}(t) A_\nu . \tag{2. 11}$$

Megmutatjuk, hogy tetszőlegesen kis $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $m_0 = m_0(\varepsilon)$ egész szám, amellyel

$$|\sigma_{m+p}(t) - \sigma_m(t)| = \left| \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} [S_{-(m+p),m+p}^{\nu}(t) - S_{-mm}^{\nu}(t)] A_\nu \right| \leqq \varepsilon, \tag{2. 12}$$

minden $p > 0$ és $m > m_0$ egész szám esetén. (2. 12)-ből ui. következik, hogy

$$\begin{aligned} |\sigma_{m+p}(t) - \sigma_m(t)| \leqq & \sum_{\nu=-\nu_0+1}^{\nu_0-1} |S_{-(m+p),m+p}^{\nu}(t) - S_{-mm}^{\nu}(t)| \, |A_\nu| + \\ & + \sum_{\nu=-\infty}^{-\nu_0} |S_{-(m+p),m+p}^{\nu}(t) - S_{-mm}^{\nu}(t)| \, |A_\nu| + \\ & + \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} |S_{-(m+p),m+p}^{\nu}(t) - S_{-mm}^{\nu}(t)| \, |A_\nu| \overset{\text{def}}{=} \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 , \end{aligned} \tag{2. 13}$$

ahol ν_0 pozitív egész szám. Az (1. 1) szerint $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |A_\nu| = A < \infty$; ν_0 tehát úgy választható, hogy teljesüljenek a

$$\sum_{\nu=-\infty}^{-\nu_0} |A_\nu| \leqq \frac{\varepsilon}{8K}, \quad \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} |A_\nu| \leqq \frac{\varepsilon}{8K} \tag{2. 14}$$

egyenlőtlenségek. Másrészt, a (2. 9) miatt,

$$|S_{-(m+p),m+p}^{\nu}(t) - S_{-mm}^{\nu}(t)| \leqq 2K. \tag{2. 15}$$

A (2. 14) és (2. 15) következtében

$$\Sigma_2+\Sigma_3 \leqq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.16}$$

v_0-t ily módon rögzítve és figyelembe véve (2. 10)-et, látható: van olyan $m_0=m_0(\varepsilon)$, hogy

$$|S^{\nu}_{-(m+p),m+p}(t)-S^{\nu}_{-mm}(t)| \leqq \frac{\varepsilon}{2A} \tag{2.17}$$

legyen, amikor csak $m>m_0$ és $\nu<\nu_0$. Ezért az (1. 1) és (2. 17) folyománya, hogy

$$\Sigma_1 \leqq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.18}$$

A (2. 12) tehát a (2. 16), (2. 18) és (2. 13) következménye.

3. *Megjegyzések.* Néhány, az említett tételekkel kapcsolatos eredményt kívánunk még ismertetni, hogy azután megfogalmazzunk néhány megoldatlan problémát.

a) Y. KATZNELSON példája. — A B) tétellel kapcsolatban az volt a benyomásom, hogy az $f(t)$-re kirótt, analiticitási feltétel túl erős. Azt hittem, hogy a tétel változatlanul érvényben marad, ha csak annyit követelünk meg, hogy $f(t)$ kétszer folytonosan differenciálható legyen. Ezt a sejtésemet közöltem Y. KATZNELSON stanfordi matematikussal (1965 szemptemberében egy Jerevánban tartott kollokviumon), aki néhány nap múlva ellenpéldával cáfolta meg sejtésemet. Előállított olyan $\varphi(t)$ valós változós, valós értékű, 2π szerint periodikus és végtelen sokszor differenciálható függvényt, amellyel az $S^{\nu}_{-mm}(0;\varphi)$ (l. a (2. 8) jelölést) részletösszegek halmaza *nem korlátos* ([3]), pp. 202—204).

b) HALÁSZ GÁBOR eredménye. — Úgy látszott már, hogy sejtésem teljesen hibás, amikor — a kétszeri differenciálhatóság feltételét egy további kikötéssel kiegészítve — HALÁSZ GÁBOR [6] a következő érdekes, lokális tételt találta:

Ha $f_0(t)$ a $[-\pi,\pi]$ szakaszon mérhető és a $t_0\in(-\pi,\pi)$ valamely környezetében kétszer folytonosan differenciálható függvény, amely a t_0 környezetében eleget tesz még az

$$f_0''(t)=c_{\pm}|t-t_0|^p+O(|t-t_0|^{p+\varepsilon}) \qquad (t\to t_0) \tag{3.1}$$

feltételnek, ahol $p>-1$, $\varepsilon>0$, $c_{\pm}\neq 0$ állandó (c_+ és c_- különböző értéket is felvehetnek aszerint, amint $t-t_0>0$ vagy $t-t_0<0$, erre utal a $c_{\pm}$ jelölés), akkor

$$|S^{\nu}_{lm}(t_0;f_0)| \leqq K(t_0;f_0) \tag{3.2}$$

egyenletesen ν-, l- és m-ben.

A $K(t_0;f_0)$ állandó itt f_0-n kívül függ t_0-tól is. Ennek ellenére, (3 .2) és A) tételünk értelmében, ha $F(t)\in\mathscr{A}$, akkor $F(f_0(t))$ Fourier-sora t_0-ban konvergens.

Megjegyzendő, hogy ha a (3. 1)-ben $p\leqq 0$ és $c_+\neq c_-$, akkor $f_0''(t)$ nem tart véges határértékhez, amidőn $t\to t_0$ és ez esetben $f_0''(t_0)$-nak nem kell feltétlenül léteznie, ezzel szemben $f_0'(t_0)$-nak mindig léteznie kell.

A (3. 2) egyenlőtlenség a $t_0=0$ esetben látszólag ellentmond KATZNELSON példájának. $\varphi(t)$ azonban nem elégíti ki a (3. 1) feltételt. Abban az intervallumban ui., ahol (3. 1) érvényes és $f_0''(t)$ folytonos, az $f_0''(t)=0$ egyenlet gyökeinek száma korlá-

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

tos, és az $f_0'(t)$ függvényt ábrázoló görbe e gyökhelyeken véges rendben érinti a t tengellyel párhuzamos érintőit. A $\varphi''(t)=0$ egyenletnek ezzel szemben végtelen sok gyöke van a $t_0=0$ pont bármely környezetében, és a $\varphi(t)$, ill. $\varphi'(t)$ függvényt ábrázoló görbe végtelen sok egyenes szakaszt is tartalmaz, amelyek a t tengellyel párhuzamos érintőt végtelened rendben érintik.

c) A. BEURLING és H. HELSON tétele. — Végül egy olyan eredményt ismertetünk, amely analóg LEIBENSON idézett tételével.

Jelölje $\mathscr{A}^*$ a

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, d\sigma(x)$$

Fourier—Stieltjes-transzformáltakkal értelmezett függvények halmazát, ahol $\sigma(x)$ korlátos változású a valós tengelyen. Két $\mathscr{A}^*$-hoz tartozó függvény összege vagy szorzata is $\mathscr{A}^*$-hoz tartozik, és e gyűrű teljes a

$$\|h\| = \int_{-\infty}^{\infty} |d\sigma(x)| \tag{3.3}$$

normával.

Legyen $\mathscr{B}^* \subset \mathscr{A}^*$ azoknak a $h(t)$ függvényeknek a halmaza, amelyekre

$$\|h^n\|$$

az n-től független korlát alatt marad, miközben n befutja az összes (pozitív és negatív) egész számok sorozatát. Ilyen függvény pl. $h(t)=e^{i(at+b)}$, ahol a és b valós állandók. BEURLING és HELSON tétele már most a következőket mondja ki:

Ha $h(t)\in\mathscr{B}^*$, *akkor csak*

$$h(t) = e^{i(at+b)}$$

alakú lehet, ahol a és b valós állandók.

4. *Megoldatlan problémák.* A bebizonyított és felsorolt tételekkel kapcsolatban több kérdés merült fel, amelyeket eddig még nem sikerült megválaszolni.

A bizonyított tételben szereplő $f(t)$ függvények osztálya meglehetősen speciálisnak tűnik, az analiticitás erős megkötést jelent. Kérdés: Melyik a független változó legáltalánosabb típusú, az (1. 3) alatt megadott lineáristól különböző transzformációja, amely *bármely* abszolút konvergens Fourier-sort egyenletesen konvergens Fourier-sorba visz át? Pontosabban fogalmazva:

1. *Melyik az az abszolút konvergenciát megszüntető, legáltalánosabb (tehát a legkevesebb vagy „leggyengébb" feltételeket kielégítő)* $\mathscr{T}$ *függvényosztály, amelynek az a tulajdonsága, hogy ha* $f(t)\in\mathscr{T}$ *és* $F(t)\in\mathscr{A}$, *akkor* $F(f(t))\in\mathscr{U}-\mathscr{A}$?

A megoldás LEIBENSON tételének lenne párja.

A következő probléma HALÁSZ eredményével kapcsolatos.

2. *Vannak-e olyan kiegészítő feltételek, amelyek* $f_0(t)$ *kétszeri folytonos differenciálhatóságával együtt biztosítják azt, hogy az* $|S_{l_m}^{\nu}(t_0; f_0)| \leqq K(t_0; f_0)$ *egyenlőtlenség helyére az* $|S_{l_m}^{\nu}(t_0; f_0)| \leqq K(f_0)$ *egyenlőtlenség kerüljön?*

A válasz egyrészt eldöntené azt, hogy HALÁSZ lokális eredménye valamilyen módon általánosítható-e, azaz igazolható-e az a sejtés, hogy a részletösszegek t_0-ban is egyenletesen korlátosak; másrészt az igenlő válasz azt jelentené, hogy az

ilyen $f_0(t) \in \mathcal{T}$, bár még továbbra is nyitva maradna az a kérdés, hogy $f_0(t)$ tulajdonságai már teljesen jellemzik-e a $\mathcal{T}$ függvényosztályt.

A LEIBENSON- és BEURLING—HELSON-féle tételek analóg volta vezet ahhoz a kérdéshez, hogy van-e az általunk bizonyított B) tételnek megfelelője a Fourier—Stieltjes-transzformáltakra nézve. Részletesebben:

3. *Legyen*

$$e^{if(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, d\sigma(x), \quad e^{ivf(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, d\sigma_v(x) \qquad (v = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

ahol $\sigma(x)$, *ill.* $\sigma_v(x)$ *korlátos változású a valós tengely mentén és* $\|e^{if}\| < \infty$, $\|e^{ivf}\| < \infty$ *a* (3. 3) *értelemben. Milyen feltételeket kell kielégítenie* $f(t)$*-nek ahhoz, hogy létezzék olyan* $K = K(f)$ *állandó, amelyre*

$$\left| \int_a^b e^{itx}\, d\sigma_v(x) \right| \leqq K$$

v-, a-, b- és t-ben egyenletesen? a és b tetszőleges valós számok.

IRODALOM

[1] ALPÁR L.: Sur la transformation conforme des représentations analytiques. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* **261** (1965) 4590—4593.

[2] ALPÁR L.: Sur certaines transformées des séries de puissances absolument convergentes sur la frontière de leur cercle de convergence. *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* 7 (1962) 287—316.

[3] ALPÁR L.: Sur une classe particulière de séries de Fourier ayant de sommes partielles bornées. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* **1** (1966) 189—204.

[4] BEURLING, A.—HELSON, H.: Fourier-Stieltjes transforms with bounded powers. *Mathematica Scandinavica* **1** (1953) 120—126.

[5] BOHR, H.: Über einen Satz von J. Pál. *Acta Scientiarum Mathematicarum, Szeged* **7** (1935) 129—135.

[6] HALÁSZ, G.: On a theorem of L. Alpár concerning Fourier series of powers of certain functions. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* **2** (1967) 67—72.

[7] Лейбензон, З. Л.: О кольце функций с абсолютно сходящимся рядами Фурье. *Успехи математических наук* **9** (1954) № 3, 157—162.

[8] PÁL, J.: Sur des transformations de fonctions qui font converger leurs séries de Fourier. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* **158** (1914) 101.

[9] TURÁN, P.: Remarks on the preceding paper of J. Clunie entitled „On equivalent power series". *Acta Mathematica Acad. Sci. Hung.* **18** (1967) 171—173.

[10] ZYGMUND, A.: *Trigonometric Series,* I—II. University Press, Cambridge, 1959.

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ ФУРЬЕ

Л. АЛЬПАР

Пусть $\mathcal{A}$ множество функций представляемых через абсолютно сходящихся рядов Фурье. З. Л. Лейбензон [7] доказал, что $F(f(t)) = G(t) \in \mathcal{A}$ тогда и только тогда для всех $F(t) \in \mathcal{A}$, если $f(t) = nt + c$ где n $(-\infty < n < \infty)$ целое число а c действительное, число. Несмотря на это, даже в случае если $G(t) \notin \mathcal{A}$ возможно, что $G(t) \in \mathcal{U}$ где $\mathcal{U}$ множество функций представляемых через равномерно сходящихся рядов Фурье. Доказывается следующее утверждение:

Теорема: Если функция $f(t)$ *действительного переменного* t *имеет действительные значения и аналитична вдоль оси* t *и далее* $f(t) \equiv f(t + 2\pi) \pmod{2\pi}$ *и* $F(t) \in \mathcal{A}$, *тогда* $F(f(t)) = G(t) \in \mathcal{U}$.

SUR LES TRANSFORMÉES DES SÉRIES DE FOURIER ABSOLUMENT CONVERGENTES

L. ALPÁR

Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble de fonctions représentées par de séries de Fourier absolument convergentes Z. L. LEIBENSON [7] a démontré que $F(f(t))=G(t)\in\mathscr{A}$ pour toute $F(t)\in\mathscr{A}$ si, et seulement si $f(t)=nt+c$ où n $(-\infty<n<\infty)$ est un entier et c est une constante réelle. Cependant même si $G(t)\notin\mathscr{A}$ il est possible que $G(t)\in\mathscr{U}$, en désignant par $\mathscr{U}$ l'ensemble de fonctions représentées par de séries de Fourier uniformément convergentes. On démontre notamment la proposition ci-après.

THÉORÈME. — *Si $f(t)$ est une fonction à variable et à valeur réelle, si elle est analytique le long de l'axe des t, si de plus $f(t)\equiv f(t+2\pi)$ (mod 2π) et $F(t)\in\mathscr{A}$, alors $F(f(t))=G(t)\in\mathscr{U}$.*

JELENTÉS AZ 1966. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENYRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat 1966 november 5. és 15. között rendezte meg az 1966. évi Schweitzer Miklós matematikai emlékversenyt. A versenyen részt vehetett minden egyetemi vagy főiskolai hallgató, illetve középiskolai tanuló, továbbá azok, akik egyetemi vagy főiskolai tanulmányaikat 1966-ban fejezték be.

A verseny feladatai a következők voltak:

1. Mutassuk meg, hogy egy h hosszúságú szakasz legfeljebb $2\left[\frac{h}{\sqrt{2}}\right]+2$ számú egymásba nem nyúló egységgömböt tud teljesen átdöfni vagy érinteni! (Valódi érintés!)

2. Jellemezzük n komplanáris egyenes azon helyzeteit, amelyekben az egyenes párok által alkotott szögek összege maximális! (Két egyenes szögén derékszögnél nem nagyobb szögüket értjük.)

3. Jelöljük $f(n)$-nel n síkbeli pont hármasai által meghatározott derékszögű háromszögek maximális számát, ahol a maximum a pontok összes lehetséges helyzeteire veendő. Bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^2}=\infty \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^3}=0.$$

4. Legyen I az egészegyütthatós polinomok gyűrűjének egy olyan ideálja, amelyre teljesülnek a következő feltételek:

a) I elemeinek nincsen 0-nál magasabb fokú közös polinom osztójuk;

b) I tartalmaz legalább egy polinomot, amelynek konstans tagja 1.

Bizonyítsuk be, hogy alkalmas r természetes számra I tartalmazza az $1+x++x^2+\ldots+x^{r-1}$ polinomot!

5. Nevezzük az xy-sík x-tengelyének A pontja fölé emelt T betűnek a felső félsíkban fekvő, az x-tengelyre merőleges AB szakasznak és a B pontot a belsejében tartalmazó, az x-tengellyel párhuzamos CD szakasznak az egyesítését. Mutassuk meg, hogy nem lehet az x-tengely minden pontja fölé egy-egy T betűt emelni úgy, hogy a racionális pontok fölé emeltek egyesítése ne messe az irracionális pontok fölé emeltek egyesítését!

6. A Magyarországra vonatkozó időjárásjelentésben gyakran hallunk ilyen kitételt: „Az éjszakai legalacsonyabb hőmérsékletek $-3°$ és $+5°$ között mindenféle értéket felvettek". Mutassuk meg, hogy ehelyett elég volna ennyit mondani: „Az éjszakai legalacsonyabb hőmérsékletek között $-3°$ és $+5°$ is előfordult". (Feltehetjük, hogy a hőmérséklet a helynek és az időnek együttvéve is folytonos függvénye.)

7. Létezik-e olyan, a valós számokon értelmezett, kétváltozós $f(x, y)$ függvény, amelynek értékkészlete a természetes számok halmaza, s amelyre $f(x, y) = f(y, z)$-ből $x = y = z$ következik?

8. Bizonyítsuk be, hogy egy euklideszi gyűrűben a maradékos osztás akkor és csak akkor egyértelmű, ha a gyűrű egy test feletti polinomgyűrű, és az euklideszi érték a fokszámnak szigorúan monoton függvénye.

9. Ha $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |a_m| < \infty$, akkor mi állítható a következő kifejezésről:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |a_{m-n} + a_{m-n+1} + \ldots + a_{m+n}|.$$

10. Legyen a (0, 1) intervallumba eső x valós szám tizedestört alakja

$$0, a_1(x)a_2(x) \ldots a_m(x) \ldots$$

és jelöljük $n(x)$-szel azt a legkisebb nem-negatív egész számot, amelyre

$$\overline{a_{n(x)+1}a_{n(x)+2}a_{n(x)+3}a_{n(x)+4}} = 1966.$$

Határozzuk meg $\int_0^1 n(x)\,dx$-et!

Az 1. és 2. feladatot Fejes Tóth László és Heppes Aladár, a 3. feladatot Erdős Pál, a 4. feladatot Szekeres György (Sidney), az 5. és 6. feladatot Császár Ákos, a 7. feladatot Hajnal András, a 8. feladatot Fried Ervin, a 9. feladatot Turán Pál, a 10. feladatot Rényi Alfréd bocsátotta a versenybizottság rendelkezésére.

A kitűzött feladatokra 43 versenyző 333 megoldást adott be. A versenyzők, illetve a beérkezett megoldások számát tekintve a verseny sikeresnek mondható. A versenybizottság munkáját nagyon megkönnyítette volna, ha minden versenyző kellő gondot fordított volna a megoldások leírására. Egyes versenyzőknél a megfogalmazás pontatlansága nagymértékben megnehezítette a gondolatok megértését. A bizottság örömmel állapította meg, hogy az elsőéves hallgatók — sőt néhány középiskolás is — igen eredményesen szerepeltek a versenyen. A versenydolgozatok alapos megvitatása után a versenybizottság úgy döntött, hogy három első, két második és négy harmadik díjat ad ki, figyelembevéve, hogy a nagy számú kiemelkedő dolgozat között sokszor csak árnyalatnyi érték-különbség volt.

A versenybizottság a három I. díjat és az ezzel járó 600—600 Ft pénzjutalmat Bollobás Béla végzett hallgatónak, Makai Endre II. éves hallgatónak és Simonovits Miklós V. éves hallgatónak ítélte oda.

Bollobás Béla valamennyi feladata teljes megoldást ad, kivéve a 8. feladatot, ahol megoldásában kisebb hiányosság van. Ezzel szemben négy feladatra több megoldást is ad. Különösen szép az 1., 6. és 7. feladatra adott megoldása. Több feladatot általánosít, igen értékes a 3., 6. és 10. feladatra adott általánosítása. A 3. feladatra élesítést ad.

Makai Endre az egyetlen versenyző, akinek mind a tíz feladatra adott megoldása teljes. Szellemes az 1. és 7. feladatra adott megoldása. A 3. feladatra élesítést, a 7. feladatra általánosítást ad.

Simonovits Miklós valamennyi feladatra teljes megoldást ad, kivéve a 4. feladatot, amelynek a megoldásában kisebb hiányosság van. A 7. feladatra két megoldást is ad. Szép a 6. és 8. feladatra adott megoldása. Több feladatot is általánosít,

különösen értékesek az 5., 6., 7. és 9. feladakra adott álalánosításai. A 3. feladatra élesítést ad.

A versenybizottság a két II. díjat, és az ezzel járó 400—400 Ft pénzjutalmat Lovász László és Pósa Lajos I. éves hallgatóknak ítélte oda.

Lovász László valamennyi feladatra teljes megoldást ad, kivéve a 4. feladatot, ahol megoldásában kisebb hiányosság van. Megoldásai világosak, ötletesek. Szép a 2., 7. és 8. feladatra adott megoldása. A 3. feladat állítását élesíti; a 7. és 8. feladatot általánosítja, előbbire két megoldást is ad.

Pósa Lajos valamennyi feladatra adott be megoldást. A 4. és 8. feladatra adott megoldásaiban kisebb hiányosságok vannak. Igen szellemes a 3. és 7. feladatra adott megoldása; utóbbira két megoldást is ad. A 3. feladatra élesítést, a 7., 9. és 10. feladatra általánosítást ad.

A versenybizottság a négy harmadik díjat, és az ezzel járó 100—100 Ft-os könyvutalványt Gerencsér László III. éves hallgatónak, Laczkovich Miklós I. éves hallgatónak, Pelikán József I. éves hallgatónak és Szigeti Ferenc IV. éves hallgatónak ítélte oda.

Gerencsér László valamennyi feladatra adott be megoldást, a 4. és 8. feladatra adott megoldásaiban apróbb hiányosságok vannak. Szép az 1., 5., 7. és 9. feladatra adott megoldása.

Laczkovich Miklós valamennyi feladatra adott be megoldást, a 8. feladatra adott megoldásában apróbb hiányosság van. Szép az 5. feladatra adott megoldása. A 3. és 5. feladat állítását élesebb formában bizonyítja.

Pelikán József a 3. feladat kivételével valamennyi feladatra adott be megoldást. Kitűnik megoldásainak világos, szabatos megfogalmazásával. Szép a 2., 4., 7. és 8. feladatra adott megoldása. A 8. feladatot általánosítja.

Szigeti Ferenc valamennyi feladatra adott be megoldást, a 8. feladatra adott megoldásában kisebb hiányosság van. Szép a 4. és 7. feladatra adott megoldása; egyes megoldásai bonyolultak.

Dícséretben részesíti a versenybizottság Ajtai Miklós III. éves hallgatót, Fritz József V. éves hallgatót, Gerlits János IV. éves hallgatót és Juhász István végzett hallgatót.

Ajtai Miklós valamennyi feladatra adott be megoldást. A 2. feladatra adott megoldása hiányos, a 8. feladatra adott megoldásában kisebb hiányosság van. Szép a 7. feladatra adott megoldása.

Fritz József valamennyi feladatra adott be megoldást, a 3. feladatban csak az első becslést bizonyítja. A 8. feladatra adott megoldásában kisebb hiányosság van. Szép az 1., 7. és 10. feladatra adott megoldása.

Gerlits János a 3. feladat kivételével valamennyi feladatra adott be megoldást. Az 5. feladatra adott bizonyításában könnyen javítható hibát vét. Megoldásai igen egyszerűek, megfogalmazásuk világos, szabatos. A 7. feladatra általánosítást ad.

Juhász István valamennyi feladatra adott be megoldást. A 3. feladatban a felső becslés bizonyítása hibás, a 8. feladatra adott megoldásában apróbb hiányosság van. Szép a 4., 5. és 9. feladatra adott megoldása. A 7. és 10. feladatra általánosítást ad.

Valamennyi díjazott és dícséretet nyert versenyző a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karán a matematikus szakot végzi, illetve végezte.

A középiskolás részvevők közül kiemelkedik *Babai László* III. osztályos tanuló, Surányi László IV. osztályos tanuló és Szűcs András III. osztályos tanuló hét, hat, illetve öt feladat helyes megoldásával. Valamennyien a budapesti Fazekas Mihály gimnázium tanulói. Babai László az 1., 2., 4., 5., 6., 7. és 8. feladatra, Surányi

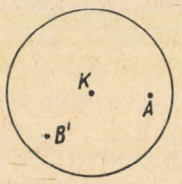
László az 1., 2., 5., 6., 7. és 8. feladatra, Szűcs András az 1., 2., 4., 5. és 7. feladatra adott be helyes megoldást.

Budapest, 1966. december 12.

A versenybizottság: Császár Ákos
Fejes Tóth László
Fried Ervin
Rényi Alfréd
Szász Domokos
Turán Pál

1. FELADAT

Jelöljük e-vel az adott h hosszúságú szakasz egyenesét, és vetítsük a gömbök középpontjait erre az egyenesre. A vetületek, mint középpontok körül helyezzünk el e-n $\sqrt{2}$ hosszúságú nyílt intervallumokat. Azt állítjuk, hogy nincs e-nek olyan pontja, amely egyszerre három intervallumhoz tartozna. Ellenkező esetben ugyanis létezne oly 1 sugarú és $m(<\sqrt{2})$ magasságú henger, amelynek tengelye e, és amely tartalmaz három, egymástól legalább két egységnyi távolságra levő A, B és C pontot (a gömbök középpontjait). Ennek lehetetlenségét fogjuk most bizonyítani.



1. ábra

A következőkben egy pont síkján a pontot tartalmazó, e-re merőleges síkot értjük. Vetítsük a B pontot A síkjára. A síkja a hengerből egy K középpontú kört metsz ki. A vetületeket $'$-vel jelölve

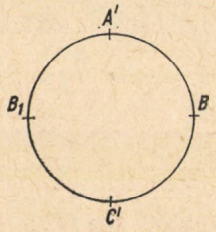
$$m^2 + \overline{B'A}^2 \geqq 2^2,$$

azaz

$$\overline{B'A}^2 \geqq 2^2 - m^2 > 2$$

s így a $B'KA$ háromszög K-nál tompaszögű, hiszen a kör sugara 1. A KA sugár mentén A-t a kör kerületéig mozgatva tehát $\overline{AB'}$ és így $\overline{AB}$ is csak nőhet (hasonlóan $\overline{AC'}$ és így $\overline{AC}$ is). Ugyanez igaz a többi pontra is, így feltehető, hogy az A, B és C pontok a henger palástján vannak. Mivel m-re csupán $m<\sqrt{2}$ volt kikötve, feltehető, hogy egy pont (pl. A) a fedő-, és egy pont (pl. C) az alaplapon fekszik.

Tekintsük a B pont síkját, legyen B tükörképe e-re B_1, A és C vetületei A' és C'. Mivel A, B és C közül tetszőleges kettő síkjának a távolsága $<\sqrt{2}$, viszont távolságuk $\geqq 2$, azért vetületeik távolsága $>\sqrt{2}$. Ebből következik, hogy A' és C' a B és B_1 pontok által meghatározott különböző íveken vannak. Mindkettőt úgy mozgatva az íven B felé, hogy közben megfelelően A-t és C-t is mozgatjuk, elérhetjük, hogy $\overline{AB}=\overline{CB}=2$ legyen. Ekkor azonban $\overline{A'B_1}$ éppen A és B síkjainak távolsága, $\overline{C'B_1}$ éppen C és B síkjainak távolsága, tehát



2. ábra

$$\overline{A'B_1} + \overline{C'B_1} \leqq m < \sqrt{2}$$

következésképpen

$$\overline{A'C'} \leqq \overline{A'B_1} + \overline{C'B_1} < \sqrt{2}$$

így

$$\overline{AC}^2 = m^2 + \overline{A'C'}^2 < 2 + 2,$$

tehát $\overline{AC}<2$, ami ellentmondás, így állításunk igaz.

A h szakaszt e-n mindkét irányban hosszabbítsuk meg egy-egy $\sqrt{2}$ hosszúságú szakasszal. Mivel teljes átdöfésről illetve valódi érintésről van szó, a gömbökhöz rendelt intervallumok valamennyien részei ennek a bővített szakasznak. Mivel a bővített szakasz minden pontja legfeljebb kétszeresen van befedve, azért azt kapjuk, hogy legfeljebb

$$2\left[\frac{h+2\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}\right]=2\left[\frac{h}{\sqrt{2}}\right]+2$$

gömbünk lehet. Ez úgy látható be legegyszerűbben, hogy az intervallumokat bal végpontjaik szerint növekedő sorozatba rendezzük (ez nem feltétlenül egyértelmű), és ekkor a páratlanadik (ugyanígy a párosadik) helyeken álló intervallumok feltétlenül diszjunktak. Így az intervallumok együttes száma legfeljebb

$$\left[\frac{h}{\sqrt{2}}\right]+1+\left[\frac{h}{\sqrt{2}}\right]+1$$

Könnyen belátható, hogy az adott felső becslés pontos is.

GERENCSÉR LÁSZLÓ

Megoldották: AJTAI MIKLÓS, BABAI LÁSZLÓ, BENCZUR ANDRÁS, BOLLOBÁS BÉLA, ELEKES GYÖRGY, FREUD RÓBERT, FRITZ JÓZSEF, GÁCS PÉTER, GERENCSÉR LÁSZLÓ, GERLITS JÁNOS, HOFFMAN GYÖRGY, JUHÁSZ ISTVÁN, KISS ILDIKÓ, LACZKOVICH MIKLÓS, LOVÁSZ LÁSZLÓ, MAKAI ENDRE, MÁTÉ ATTILA, MÁTÉ EÖRS, MOLNÁR EMIL, PELIKÁN JÓZSEF, PÓSA LAJOS, SIMONOVITS MIKLÓS, SONNEVEND GYÖRGY, SURÁNYI LÁSZLÓ, SZIGETI FERENC, SZŰCS ANDRÁS, VESZTERGOMBI GYÖRGY.

2. FELADAT

Feltehetjük, hogy valamennyi egyenes egy ponton megy át. Kiindulva egy tetszőleges egyenesből, számozzuk meg az egyeneseket pozitív körüljárás szerint (egybeesők sorrendje tetszőleges): $e_1, e_2, \ldots, e_n$. $1 \leqq i \leqq [n/2]$-re az e_k egyenes i-edik szomszédja — jelöljük majd e_k^i-val — legyen e_l, ha

$$l \equiv k+i \pmod{n}.$$

Jelöljük az e és f egyenesek pozitív körüljárás szerinti szögét $\langle e, f\rangle$-fel, szögüket (e, f)-fel. Rögzített i-re nyilván

$$(e_1, e_1^i)+\ldots+(e_n, e_n^i) \leqq \langle e_1, e_1^i\rangle+\ldots+\langle e_n, e_n^i\rangle =$$

$$= i\big(\langle e_1, e_2\rangle+\langle e_2, e_3\rangle+\ldots+\langle e_n, e_1\rangle\big) = i\pi$$

és az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$\langle e_k, e_k^i\rangle \leqq \frac{\pi}{2} \tag{1}$$

minden k-ra. Így az egyenespárok szögeinek összege páratlan n-re

$$\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} [(e_1, e_1^i)+\ldots+(e_n, e_n^i)] \leqq \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} i\pi = \frac{n^2-1}{4}\,\frac{\pi}{2} \tag{2}$$

és az egyenlőség akkor és csak akkor állhat fenn, ha (1) minden $k=1, 2, \ldots, n$-re és $i=1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$-re teljesül. Ehhez elég az, hogy

$$\langle e_k, e_k^{(n-1)/2} \rangle \leqq \frac{\pi}{2} \tag{3}$$

teljesüljön $k=1, 2, \ldots, n$-re.

Páros n-re a szögösszeg

$$\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} [(e_1, e_1^i) + \ldots + (e_n, e_n^i)] + \frac{1}{2}[(e_1, e_1^{n/2}) + \ldots + (e_n, e_n^{n/2})] \leqq \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} i\pi + \frac{n}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{n^2}{4}\frac{\pi}{2}$$

és az egyenlőség ismét akkor és csak akkor áll fenn, ha $k=1, 2, \ldots, n$-re

$$\langle e_k, e_k^{n/2} \rangle \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Páros n-re ez a feltétel már kiadja a kívánt jellemzést, mert $1 \leqq k \leqq \frac{n}{2}$-re

$$\langle e_k, e_k^{n/2} \rangle \leqq \frac{\pi}{2} \quad \text{és} \quad \langle e_{k+n/2}, e_{k+n/2}^{n/2} \rangle \leqq \frac{\pi}{2}$$

egyszerre csak akkor teljesülhet $e_k^{n/2} e_{k+n/2}$ és $e_k = e_{k+n/2}^{n/2}$ miatt, ha

$$\langle e_k, e_k^{n/2} \rangle = \frac{\pi}{2},$$

vagyis az $n/2$-edik szomszédok merőlegesek egymásra. Tehát páros n esetén az n egyenes szétesik egymásra merőleges párokra, és $n/2$ számú tetszőleges merőleges-pár együtt maximális szögösszeget ad.

Visszatérve páratlan n esetére a már eleve merőleges egyenespárok elhagyhatók, mert egy merőleges-párt elhagyva a szögösszeg nyilván $(n-1)\frac{\pi}{2}$-lel csökken, és

$$\left[\frac{n^2}{4}\right] - \left[\frac{(n-2)^2}{4}\right] = n-1.$$

Tegyük fel, hogy marad $2m+1$ egyenes. Ezek között nem lehet két egybeeső (e), mert az egyik m-edik szomszádjának (f-nek) a másik lenne az m-edik szomszédja, így e merőleges lenne f-re. Ha e a $2m+1$ egyenes közül bármelyik, akkor (3) teljesüléséhez az szükséges, hogy e és az e-re emelt merőleges által meghatározott negyedsíkok bármelyikébe m egyenes essék. Ennek a feltételnek eleget tevő páratlan számú egyeneshez tetszőleges számú merőlegespárt hozzávéve megkapjuk az összes maximumot adó elhelyezkedést, és a szögösszeg maximuma (2) alapján $\frac{n^2-1}{4}\frac{\pi}{2}$.

Végül, ha nem tesszük fel, hogy az egyenesek egy ponton mennek át, akkor az előbbi jellemzésben megadott elhelyezkedésű egyeneseket tetszőlegesen eltolva önmagukkal párhuzamosan, n komplanáris egyenes összes kívánt tulajdonságú helyzetét megkapjuk.

MAKAI ENDRE

Megoldották: BABAI LÁSZLÓ, BENCZUR ANDRÁS, BOLLOBÁS BÉLA, CSIRIK JÁNOS, FREUD RÓBERT, FRITZ JÓZSEF, GERENCSÉR LÁSZLÓ, GERLITS JÁNOS, JUHÁSZ

3. FELADAT

Alsó becslés.

A feladat állításán túlmenően a következő élesebb becslést bizonyítjuk: létezik olyan $c>0$ állandó, hogy

$$f(n) > cn^2 \log n \qquad (n \geqq 3).$$

Legyen először $n=(3k+1)^2$, ahol k természetes szám. Vegyük az egész koordinátájú pontok rácsának a $(0, 0)$, $(0, 3k)$, $(3k, 3k)$ és $(3k, 0)$ pontok által meghatározott négyzetbe eső rácspontjait. Ezek száma nyilván $(3k+1)^2$. Csak azokat a derékszögű háromszögeket fogjuk összeszámlálni, amelyeknek derékszögű csúcsa (q, r), ahol $k \leqq q \leqq 2k$, $k \leqq r \leqq 2k$, s amelyeknek másik két csúcsa a (q, r) pont, mint középpont köré írt $2k$ oldalhosszúságú négyzetbe esik. Ezek a derékszögű háromszögek nyilván valamennyien megfelelnek.

Meg kell tehát határoznunk, hogy hány olyan derékszögű háromszöget feszítenek ki egy $2k$ oldalhosszúságú, a tengelyekkel párhuzamos oldalú négyzet rácspontjai, amelynek a derékszögű csúcsa a négyzet középpontja. Legyen tehát a négyzet a $(-k, -k)$, $(-k, k)$, (k, k) és $(k, -k)$ csúcsok által meghatározott négyzet.

Egy fenti típusú derékszögű háromszög befogói az $ix=jy$, illetve a $jx=-iy$ egyeneseken helyezkednek el, ahol $(i, j)=1$, $-k \leqq i, j \leqq k$. A derékszögű háromszögek számát nyilván alulról becsüljük, ha ezek közül csak a $0 \leqq i \leqq j$ feltételnek eleget tevő egyeneseket vesszük figyelembe. Ekkor az $ix=jy$, illetve a $jx=-iy$ egyenesekre egyaránt $2\left[\frac{k}{j}\right]$ $(0, 0)$-tól különböző rácspont esik, így az általuk meghatározott derékszögű háromszögek száma

$$4\left[\frac{k}{j}\right]^2 \geqq \frac{k^2}{j^2}.$$

Rögzített j mellet így legalább

$$\varphi(j)\frac{k^2}{j^2}$$

derékszögű háromszög adódik, ez összessen

$$k^2 \sum_{j=1}^{k} \frac{\varphi(j)}{j^2}$$

háromszög. Végül visszatérve az eredeti problémára, az általunk tekintett $(3k+1)^2$ pont legalább

$$(2k+1)^2 k^2 \sum_{j=1}^{k} \frac{\varphi(j)}{j^2}$$

derékszögű háromszöget ad.

Bevezetve a

$$\Phi(x) = \sum_{j \leqq x} \varphi(j)$$

függvényt, parciálisan összegezve nyerjük, hogy

$$f((3k+1)^2) \geqq (2k+1)^2 k^2 \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\Phi(j)(2j+1)}{j^2(j+1)^2},$$

ahonnan az ismert

(1) $$\Phi(x) > c_1 x^2 \qquad (c_1 > 0)$$

egyenlőtlenség felhasználásával nyerjük, hogy

$$f((3k+1)^2) \geqq c_2(2k+1)^2 k^2 \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \geqq c_3 k^4 \log k.$$

Legyen most már n tetszőleges. Ekkor legyen $k = \left[\frac{\sqrt{n}-1}{3}\right] > \frac{\sqrt{n}}{4}$, és így

$$f(n) \geqq f((3k+1)^2) \geqq c_3 k^4 \log k \geqq cn^2 \log n.$$

LOVÁSZ LÁSZLÓ

Megjegyzés. 1. A feladat állítása (1) felhasználása nélkül is bizonyítható, arra az elemi tényre támaszkodva, hogy ha p prím, akkor $\varphi(p) = p-1$. Ekkor azonban csak annyit kapunk, hogy

$$f(n) \geqq c_4 n^2 \log \log n,$$

ahol c_4 alkalmas pozitív konstans.

2. LOVÁSZ azt is megjegyezte, hogy a pontoknak a megoldásban vizsgált rácsszerű elhelyezkedése esetén megadható oly $c_5 (>0)$ konstans, hogy

$$f(n) \leqq c_5 n^2 \log n$$

Felső becslés.

Most is élesebb állítást bizonyítunk: a „descente infinie" módszerével azt fogjuk igazolni, hogy

(2) $$f(n) \leqq n^2 \sqrt{n}$$

Az állítás $n = 1, 2, 3, 4, 5$-re nyilvánvaló $\left(\text{ezekre } n^2\sqrt{n} > \binom{n}{3}\right)$. Ha (2) nem lenne igaz minden n természetes számra, akkor lenne egy legkisebb olyan n, amelyre

$$f(n) > n^2 \sqrt{n}.$$

Tekintsünk n pontot: $P_1, \ldots, P_n$ a síkban úgy, hogy ezek $f(n)$ számú derékszöget határoznak meg. Azt állítjuk, hogy van olyan egyenes, amelyik az n pont közül legalább $2\sqrt{n}$ pontot tartalmaz. Vegyük az összes lehetséges rendezett (P_i, P_j) pontpárat, és rendeljük hozzá (P_i, P_j)-hez azoknak a derékszögű háromszögeknek a számát, amelyeknek $\overline{P_iP_j}$ befogója, és derékszögük a P_i csúcsnál van. Ez a szám megegyezik a $\overline{P_iP_j}$-re P_i-ben emelt merőlegesen található, P_i-től különböző pontok számával. Ha ezeket a számokat összeadjuk minden (P_i, P_j) párra, akkor a derékszögű háromszögek számának kétszeresét kapjuk, tehát legalább $2n^2\sqrt{n}$-et. Mivel $n(n-1)$ $(<n^2)$ összeadandó van, azért valamelyik összeadandó legalább $2\sqrt{n}$, így valamelyik merőleges egyenesen legalább $2\sqrt{n}$ pont van.

Hagyjuk el ezen egyenes pontjait, és vizsgáljuk meg, hogy legfeljebb hány derékszögű háromszög semmisül meg. Az eltűnő háromszögeket két csoportra osztjuk:

A) amelyeknek a derékszögű csúcsuk az elhagyott egyenesen van,

B) amelyeknek a derékszögű csúcsuk nincs az egyenesen, de valamely másik csúcsuk rajta van.

Az A) típusú háromszögek számát felülről becsülhetjük úgy, hogy a másik két csúcsot $\frac{n(n-1)}{2}$-féleképpen választjuk ki, és megfigyeljük, hogy egy csúcspárhoz legfeljebb két pont lehet az egyenesen, amellyel ezek derékszögű háromszöget határoznak meg (Thales-kör!). Tehát az A) típusú derékszögű háromszögek száma legfeljebb $n(n-1)<n^2$.

A B) típusú háromszögeknél is a másik két csúcs $\frac{n(n-1)}{2}$-féleképpen választható ki, és egy (P_i, P_j) csúcspárhoz legfeljebb két pont lehet az egyenesen, amely velük olyan derékszögű háromszöget képez, amelynek derékszöge P_i-ben vagy P_j-ben van. Tehát a B) típusú derékszögű háromszögek száma is legfeljebb $n(n-1)<n^2$.

Így az egyenes pontjait elhagyva legfeljebb $2n^2$ derékszögű háromszög semmisül meg, tehát a megmaradó legfeljebb $n-2\sqrt{n}$ pont legalább $n^2\sqrt{n}-2n^2$ derékszögű háromszöget határoz meg. Az indukciós feltevést alkalmazva

$$n^2\sqrt{n}-2n^2 \leqq (n-2\sqrt{n})^2\sqrt{n-2\sqrt{n}} \leqq (n-2\sqrt{n})^2\sqrt{n},$$

ahonnan

$$2n^2 \leqq 4n\sqrt{n},$$

vagyis

$$n \leqq 4,$$

amire viszont az állítás érvényességét már beláttuk. Q. e. d.

PÓSA LAJOS

Megjegyzés. BOLLOBÁS a feladat állítását a következő általánosabb formában is bizonyítja: jelölje $f(n, k)$ a k dimenziós tér $(k \geqq 2)$ n számú pontja által meghatározott derékszögű háromszögek maximális számát, ahol a maximum a pontok összes helyzeteire veendő. Ekkor

$$cn^2 \log n \leqq f(n, k) \leqq d_k n^{3-\frac{1}{2^{k-1}}},$$

ahol c és d_k pozitív konstansok.

Az alsó becslés $f(n, k) \geqq f(n, 2)$ miatt az előbbi bizonyításból már következik.

A felső becslést $k=3$-ra bizonyítjuk. Jelöljünk R-rel egy n pontból álló pontrendszert a 3-dimenziós térben, és p-vel azon egyenesek számát, amelyek R-nek $3\sqrt{n}$-nél több pontját tartalmazzák. Legyenek ezek az egyenesek $e_1, e_2, \ldots, e_p$.

e_1 R-nek legalább $3\sqrt{n}$ pontján megy át, e_1 és e_2 együtt legalább $3\sqrt{n}+(3\sqrt{n}-1)$ pontján, mert két különböző egyenesnek legfeljebb két közös pontja van, és így tovább. $e_1, e_2, \ldots, e_{p'}$ együtt tehát R-nek legalább $\sum_{i=0}^{p'-1}(3\sqrt{n}-i) \geqq p'3\sqrt{n}-p'^2$ számú pontját tartalmazza, hacsak $p' \leqq p$. Következésképpen $p \leqq \sqrt{n}$.

Bebizonyítjuk, hogy a legfeljebb $\sqrt{n}$ számú „nagy" egyenes elhagyásával az R-beli derékszögű háromszögek száma legfeljebb $4n^{5/2}$-nel csökken.

Legyen ugyanis e egy „nagy" egyenes. Azon derékszögű háromszögek, amelyeknek legalább egy csúcsuk e-n van, két csoportba oszthatók:

1. *amelyeknek két csúcsuk van e-n.* Ezek harmadik csúcsa legfeljebb n-féleképpen választható, és ez a csúcs egy e-n levő ponttal együtt már csak két lehetőséget enged meg, s így az ilyen derékszögű háromszögek száma legfeljebb $2n^2$.

2. *amelyeknek egy csúcsuk van e-n.* Ezek két másik csúcsa legfeljebb $\frac{n(n-1)}{2} < \frac{n^2}{2}$ féleképpen választható, s e két csúccsal már legfeljebb $4e$-n levő pont alkot derékszögű háromszöget, így az ilyen derékszögű háromszögek száma legfeljebb $4\frac{n^2}{2} = 2n^2$.

Mivel legfeljebb $\sqrt{n}$ „nagy" egyenes van, így elhagyásukkal a derékszögű háromszögek száma valóban legfeljebb $\sqrt{n}4n^2 = 4n^{5/2}$ -nel csökken Most már minden egyenesen legfeljebb $3\sqrt{n}$ pont van.

Jelöljük q-val a P ponton áthaladó, és legalább $6n^{3/4}$ pontot tartalmazó síkok számát. A már alkalmazott gondolattal $q' \leqq q$ esetén

$$q6n^{3/4} - q^2 3\sqrt{n} \leqq n,$$

hiszen két síknak legfeljebb $3\sqrt{n}$ közös pontja van. Innen $q \leqq n^{1/4}$.

Legfeljebb $n^{1/4}3\sqrt{n}$ olyan derékszögű háromszög van, amelynek derékszöge P-ben van, egyik befogója e „nagy" síkok egyikén van, a másik befogó pedig merőleges a síkra. A további P csúcsú derékszögű háromszögek száma tehát így becsülhető: $\sum_{i=1}^{l} f_i s_i$, ahol $f_1, f_2, \ldots, f_l$; $s_1, s_2, \ldots, s_l$ a P-n átmenő egyeneseket és síkokat (egyúttal a rajtuk levő, P-től különböző pontok számát) jelöli, és f_i merőleges s_i-re.

De ekkor

$$\sum f_i s_i \leqq 6n^{3/4} \sum f_i \leqq 6n^{7/4}.$$

A R-ben levő derékszögű háromszögek száma tehát legfeljebb

$$4n^{5/2} + 6n^{7/4} n \leqq 10n^{11/4}.$$

Megjegyezzük, hogy $k > 3$ esetén a bizonyítás során már nemcsak egyeneseket, illetve $l (l < k)$ dimenziós altereket kell vizsgálni, hanem köröket és gömbfelületeket is.

Megoldották: Ajtai Miklós, Benczur András, Bollobás Béla, Gács Péter, Gerencsér László, Laczkovich Miklós, Lovász László, Makai Endre, Pelikán József, Pósa Lajos, Simonovits Miklós, Sonnevend György, Szigeti Ferenc.

Csak az alsó becslést bizonyították: Fritz József, Juhász István.

Csak a felső becslést bizonyították: Freud Róbert, Máté Eörs.

4. FELADAT

Jelölje Z az egész, Q a racionális számok halmazát, $Z[x]$, ill. $Q[x]$ az egész, illetve a racionális együtthatós polinomok gyűrűjét. A b) feltevés szerint alkalmas $f \in Z[x]$-re

$$1 + xf \in I.$$

Ha tetszőleges $g_1, \ldots, g_k \in Z[x]$ esetén $(g_1, \ldots, g_k)$-val jelöljük a $g_1, \ldots, g_k$ polinomok által generált ideált $Z[x]$-ben, akkor $r \geqq 0$-ra

$$(1+xf)x^r + x^{r+1}(-f) = x^r$$

miatt

$$x^r \in (1+xf,\ x^{r+1}).$$

Így a lépést ismételve

$$(1+xf,\ x^{r+1}) \supseteq (1+xf,\ x^r) \supseteq \ldots \supseteq (1+xf,\ x) \ni 1,$$

következtetésképpen

$$1,\ x,\ \ldots,\ x^r \in (1+xf,\ x^{r+1}),$$

tehát található oly $g_r, h_r \in Z[x]$, amelyekre

$$1+x+\ldots+x^r = (1+xf)g_r + x^{r+1}h_r. \tag{1}$$

Állítjuk, hogy g_r és h_r úgy is megválasztható, hogy

$$gr\ h_r \leqq gr\ f \tag{2}$$

legyen. Az (1)-ben szereplő g_r polinom ugyanis felírható

$$g_r = x^{r+1}q + p$$

alakban, ahol $p, q \in Z[x]$, s egyúttal $gr\ p \leqq r$. (1)-ből

$$1+x+\ldots+x^r = (1+xf)p + x^{r+1}[(1+xf)q + h_r]$$

és p-t, illetve $(1+xf)q + h_r$-t választva új g_r-nek, illetve h_r-nek $gr\ p \leqq r$ miatt nyilván (2)-nek eleget tevő h_r-t kaptunk.

Ha $s > r, \varrho$ és

$$1+x+\ldots+x^s = (1+xf)g_s + x^{s+1}h_s, \tag{3}$$

ahol $gr\ h_s \leqq gr\ f$, akkor (3)-ból levonva (1) x^{s-r}-szeresét

$$1+x+\ldots+x^{s-r-1} = (1+xf)(g_s - g_r x^{s-r}) + x^{s+1}(h_s - h_r).$$

Ha tehát a h_r polinomok között van két különböző, amelyekre

$$h_s - h_r \in I,$$

akkor

$$1+x+\ldots+x^{s-r-1} \in I$$

is igaz.

Bebizonyítjuk, hogy az ideál tartalmaz konstans polinomot. Legyen $p \in I$ olyan, hogy $p \neq 0$ és $gr\ p$ minimális. ($1+xf \neq 0$ miatt ilyen p létezik.) Ha $q \in I$, akkor legyen

$$q = pu + v,$$

ahol $u, v \in Q[x]$, és $gr\ v < gr\ p$. Alkalmas α egésszel szorozva

$$\alpha q = pu_1 + v_1,$$

ahol $u_1, v_1 \in Z[x]$, és továbbra is $gr\ v_1 < gr\ p$. Innen

$$v_1 = \alpha q - pu_1 \in I,$$

így p választása és $gr\ u_1 < gr\ p$ miatt $v_1 = 0$. Tehát tetszőleges $q \in I$-hez található oly $u \in Q[x]$, hogy $q = pu$. Legyen $p = \varphi p_1$, ahol p_1 primitív polinom és $\varphi \in Z$. Ekkor

$q=p_1(\varphi u)$, ahonnan a Gauss-lemma alapján következik, hogy $\varphi u \in Z[x]$. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $q \in I$-re $p_1 | q$. Ez az a) feltétel miatt csak akkor lehetséges, ha $p_1 = 1$, következésképpen $\varphi \in I$, s így $(\varphi) \subset I$.

Végül megmutatjuk, hogy a $h_1, h_2, \ldots$ polinomok között van két olyan, amelyekre

$$h_s - h_r \in (\varphi) \qquad (s \neq r).$$

Valóban, egy polinom bármely együtthatója mod φ legfeljebb φ számú értéket vehet fel, azonkívül $\operatorname{gr} h_r \leqq \operatorname{gr} f$ $(r = 1, 2, \ldots)$, így van olyan r és s $(\leqq \varphi^{\operatorname{gr} f} + 1)$, amelyekre $h_s - h_r$ minden együtthatója osztható φ-vel. Ezzel az állítást bizonyítottuk.

A megoldók általában a fenti utat követték, a megoldás ebben a formában FRIED ERVIN-től származik.

Megjegyzés. MÁTÉ A. és FRITZ bizonyították a feladat következő általánosítását:

Legyen R prímfaktorizációs gyűrű, amelynek minden valódi faktorgyűrűje véges. Legyen I az $R[x]$ polinomgyűrű olyan ideálja, amelyre teljesülnek az alábbi feltételek:

a) I elemeinek nincs nem-konstans közös osztójuk;

b) I tartalmaz olyan polinomot, amelynek konstans tagja 1. Ekkor minden N természetes számhoz van olyan $r \geqq N$, amelyre $N | r + 1$, és

$$1 + x + \ldots + x^r \in I.$$

Megoldották: AJTAI MIKLÓS, BABAI LÁSZLÓ, BENCZUR ANDRÁS, BOLLOBÁS BÉLA, FRITZ JÓZSEF, GERENCSÉR LÁSZLÓ, GERLITS JÁNOS, JUHÁSZ ISTVÁN, KISS ILDIKÓ, LACZKOVICH MIKLÓS, LOVÁSZ LÁSZLÓ, MAKAI ENDRE, MÁTÉ ATTILA, MÁTÉ EÖRS, PELIKÁN JÓZSEF, PÓSA LAJOS, SIMONOVITS MIKLÓS, SONNEVEND GYÖRGY SZABÓ GYULA, SZIGETI FERENC, SZŰCS ANDRÁS.

5. FELADAT

I. megoldás.

Az A pont fölé írt T-betű szélességének nevezzük a CB és BD hosszak közül a nem nagyobbat. Az irracionális pontokat beosztjuk megszámlálható sok osztályba: $H_1, \ldots, H_k, \ldots$ A H_k osztályba azok az irracionális pontok kerülnek, amelyek fölé írt T-betűk szélessége nagyobb, mint $1/k$. Baire tételéből következik, hogy az irracionális pontok halmaza nem állítható elő megszámlálható sok sehol sem sűrű halmaz egyesítéseként, így mindenesetre valamelyik H_k alkalmas I intervallumban sűrű. Az I intervallum tetszőleges A racionális pontját választva, a föléje írt T-betű szélessége legyen δ. A H_k osztálynak van oly A_1 eleme, amelynek A-tól való távolsága kisebb, mint $\min\left(\delta, \frac{1}{k}\right)$. Az A és A_1 pontok fölé írt T-betűk nyilván metszik egymást, mert mindkettő szélessége nagyobb, mint az A és A_1 pontok távolsága. Q. e. d.

MAKAI ENDRE

II. megoldás.

Vetítsük minden T-betűnek az x tengellyel párhuzamos CD szakaszát az x-tengelyre, s jelöljük a vetületet I_x-szel. I_x az x pontot a belsejében tartalmazó intervallum. Bebizonyítjuk, hogy van olyan α irracionális és r racionális szám, hogy

I_α r-et és I_s α-t a belsejében tartalmazza. Ebből már következik, hogy az α és r fölé írt T-betűk metszik egymást.

Minden $r=\frac{p}{q}$ racionális számhoz (a szereplő racionális számokat mindig irreducibilis alakban írjuk fel) válasszuk ki I_r-nek egy olyan J_r zárt részintervallumát, amely belsejében tartalmazza r-t és hossza legfeljebb $1/q^2$. Tekintsük racionális számoknak olyan sorozatát, amelyben a nevezők szigorúan monoton nőnek, és mindegyik szám benne van az előzőhöz tartozó J_r intervallumokban:

$$r_1=\frac{p_1}{q_1},\ r_2=\frac{p_2}{q_2},\ \ldots,\ r_n=\frac{p_n}{q_n},\ \ldots$$

$$q_1<q_2<\ldots<q_n<\ldots;\quad r_n\in J_{r_1}\cap J_{r_2}\cap\ldots\cap J_{r_{n-1}}.$$

Ilyen sorozat nyilván létezik, sőt Cauchy-sorozat is, így létezik $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=\alpha$. Mivel J_{r_n} tartalmazza r_{n+1}-t, r_{n+2}-t, ..., és zárt, azért $\alpha\in J_{r_n}$, tehát

$$|\alpha-r_n|\leqq\frac{1}{q_n^2}.$$

A számelméletből jólismert tény, hogy ekkor α csak irracionális lehet. I_α belsejében tartalmazza α-t, így elég nagy n-re $r_n\in I_\alpha$, viszont $\alpha\in J_{r_n}\subset I_{r_n}$, tehát elég nagy n-re az α és az r_n fölé emelt T-betűk metszik egymást.

LACZKOVICH MIKLÓS

III. megoldás.

Tegyük fel, hogy a feladat állítása nem igaz, azaz sikerült a számegyenes minden pontja fölé T-betűt írni úgy, hogy a racionális pontok fölé írt T-betűk egyike se metsz irracionális pont fölé írt T-betűt. Feltehető, hogy a T-betűk szimmetrikusak, azaz B felezi a CD szakaszt. (C és D közül legyen mindig C a kisebb abszcisszájú.)

Rekurzíve definiálunk egy monoton növekedő $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ számsorozatot. Legyen α_1 tetszőleges valós szám. Ha már α_n-et is megadtuk, és az racionális, akkor legyen α_{n+1} irracionális, míg ha α_n irracionális, akkor legyen α_{n+1} racionális, és válasszuk meg α_{n+1} ($>\alpha_n$)-et úgy, hogy $\alpha_{n+1}-\alpha_n$ kisebb legyen, mint B_nD_n hosszának negyede. Jelöljük D_n abszcisszáját δ_n-nel. Felhasználva, hogy az α_n és α_{n+1} fölé írt T-betűk nem metszik egymást, a következő egyenlőtlenségsorozatot kapjuk

$$\alpha_{n+1}<\delta_{n+1}<\alpha_n+2(\alpha_{n+1}-\alpha_n)<\alpha_n+2\frac{\delta_n-\alpha_n}{4}=\frac{\alpha_n+\delta_n}{2}<\delta_n.$$

Ebből következik, hogy $\{\alpha_n\}$ korlátos, így $\alpha=\lim\alpha_n$ létezik, továbbá az is, hogy minden n-re $\alpha<\delta_n$. Ekkor azonban elég nagy n-re az α_n fölé írt T-betű metszi az α fölé írt T-betűt, tehát a kiinduló feltevés helytelen.

Megjegyzés. 1. LACZKOVICH a feladat állításán túlmenően azt is bebizonyította, hogy minden intervallumban van kontinuum sok olyan irracionális α, amely fölé emelt T-betű metsz egy-egy, racionális pont fölé emelt T-betűt.

A II. megoldásban alkalmazott gondolatmenetből ugyanis kitűnik, hogy ha $r_1, r_2, \ldots$ olyan racionális számokból álló sorozat, amelyre $J_{r_1}\supset J_{r_2}\supset\ldots$, valamint $q_1<q_2<\ldots$, akkor nyilván $\{r_n\}$ konvergens, és határértéke egy „megfelelő" irracionális szám.

Legyen az (a, b) intervallumban $r=\frac{p}{q}$ olyan racionális szám, amelyre $J_r \subset (a, b)$.

Legyenek $r_0=\frac{p_0}{q_0}$ és $r_1=\frac{p_1}{q_1}$ olyan racionális számok, amelyekre $q_0>q$, $q_1>q$, $J_{r_0} \subset J_r$, $J_{r_1} \subset J_r$ és $J_{r_0} \cap J_{r_1}=\emptyset$. Ilyen r_0 és r_1 létezése nyilvánvaló. Ha már definiáltuk az $r_{i_1 \ldots i_k}$ racionális számokat $(i_1=0, 1; \ldots; i_k=0, 1)$, akkor legyen $r_{i_1, \ldots, i_k, 0}$ és $r_{i_1, \ldots, i_k, 1}$ két olyan racionális szám, amelyekre

$$q_{i_1, \ldots, i_k, 0}>q_{i_1, \ldots, i_k},\ q_{i_1, \ldots, i_k, 1}>q_{i_1, \ldots, i_k}$$

$$J_{r_{i_1, \ldots, i_k, 0}} \subset J_{r_{i_1, \ldots i_k}},\ J_{r_{i_1, \ldots i_k, 1}} \subset J_{r_{i_1, \ldots i, k}}$$

és

$$J_{r_{i_1, \ldots, i_k, 0}} \cap J_{r_{i_1, \ldots i_k, 1}}=\emptyset.$$

Minden $0<x<1$ számhoz hozzárendelünk egy olyan $\alpha \in (a, b)$ irracionális számot, amely fölé emelt T-betű okvetlenül metsz egy racionális pont fölé emelt T-betűt. Ha x végtelen diadikus alakban való felírása

$$x=0, i_1 i_2 \ldots,$$

akkor rendeljük x-hez az

$$r_{i_1}, r_{i_1 i_2}, \cdots, r_{i_1 i_2 \ldots i_k}, \cdots$$

sorozat határértékét. Ez egy „megfelelő" irracionális szám lesz, s ha $x_1 \neq x_2$, akkor a konstrukcióból következően a hozzájuk rendelt x-ek is különböznek.

2. Az x-tengely A pontjában emelt, a felső félsíkban fekvő, az x-tengelyre merőleges AB és az x-tengellyel párhuzamos BC szakaszok egyesítését Γ-nak, illetve $\neg$-nak nevezzük, ha C abszcisszája nagyobb, illetve kisebb, mint B-é.

Lovász és Vesztergombi azt bizonyítják, hogy ha a racionális pontok fölé egy-egy Γ-t, és az irracionális pontok fölé egy-egy $\neg$- emelünk, akkor a Γ-k egyesítése metszi a $\neg$-k egyesítését. Ez az állítás nyilván élesebb a feladat állításánál. Gerencsér és Juhász példát adnak arra, hogy lehetséges minden pont fölé egy-egy Γ-t emelni úgy, hogy az összes Γ-k páronként diszjunktak legyenek. Ha ugyanis a Γ-k B pontjai egy szigorúan monoton fogyó, pozitív értékű függvény görbéjén helyezkednek el, és BC hossza tetszőleges, akkor nyilván bármely két Γ diszjunkt.

3. Könnyen belátható, hogy a következő tétel általánosítja a feladat állítását:

Legyen X második kategóriájú teljes metrikus tér, $X=P \cup Q$, ahol P és Q diszjunkt, sűrű halmazok. Ekkor nem értelmezhető X-en olyan f valós függvény, hogy minden $p \in P$ pontnak van olyan V_p környezete, hogy ha $x \in V_p \cap Q$, akkor $f(x)<f(p)$, és minden $q \in Q$ pontnak van oly V_q környezete, hogy $x \in V_q \cap P$ esetén $f(x)<f(q)$.

Teljes metrikus térre ezt az állítást bizonyítják Máté A., Máté Eö. és Simonovits M., kompakt metrikus térre pedig Benczur.

A tér teljességének feltevése szükséges, erre Gerencsér ad példát.

Megoldották: Ajtai Miklós, Babai László, Benczur András, Bollobás Béla, Fritz József, Gács Péter, Gerencsér László, Hoffman György, Juhász István, Kiss Ildikó, Laczkovich Miklós, Lakó Ferenc, Lovász László, Makai Endre, Makáry Elemér, Máté Attila, Máté Eörs, Pelikán József, Pósa Lajos, Simonovits Miklós, Sonnevend György, Surányi László, Szép András, Szigeti Ferenc, Szűcs András, Vesztergombi György.

6. FELADAT

A feladat szövege többféle modell készítését is lehetővé tette. Legegyszerűbb a bizonyítás, ha az országot kompaktnak tételezzük el, más módon kell bizonyítani, ha ezt nem tesszük fel, de így persze általánosabb tételt kapunk. Kissé módosul az okoskodás, ha időintervallum helyett (nem feltétlenül metrizálható) kompakt teret veszünk. Az itt következő megoldásokban a tér összefüggő, az idő kompakt; az elsőben metrikus terekre, a másodikban általánosabban, tetszőleges topologikus terekre bizonyítunk.

I. megoldás.

Mivel összefüggő tér folytonos képe összefüggő, és a számegyenesen csak az intervallumok összefüggő halmazok, elég belátni, hogy az a függvény, amelyik minden (x, y) ponthoz az éjszaka során ott felvett legalacsonyabb hőmérsékletet rendeli, folytonos.

Legyen E összefüggő metrikus tér, I kompakt metrikus tér, R a valós számegyenes, és $f: E \times I \to R$ folytonos függvény. Minden rögzített $x \in E$ esetén $f(x, t)$ folytonos függvény a kompakt I téren, így létezik $g(x) = \min_{t \in I} f(x, t)$. Belátjuk, hogy $g(x)$ folytonos. Ha ez nem volna így, lenne oly $\varepsilon > 0$ és oly $\{x_k\}$ sorozat $(x_k \in E, k = 1, 2, \ldots)$, hogy $x_k \to x$, de

$$|g(x_k) - g(x)| \geqq \varepsilon.$$

Két esetet különböztetünk meg:

a) $\{x_n\}$-nek van olyan részsorozata, amelyre

$$g(x_{n_k}) \leqq g(x) - \varepsilon.$$

Ha $f(x_{n_k}, t_k) = g(x_{n_k})$, a $\{t_k\}$ sorozatnak van $t \in I$ torlódási pontja, és feltehető, hogy $t_k \to t$. Ekkor

$$f(x_{n_k}, t_k) = g(x_{n_k}) \leqq g(x) - \varepsilon \leqq f(x, t) - \varepsilon$$

így f nem lehet folytonos.

b) $\{x_k\}$-nak van olyan részsorozata, hogy

$$g(x_{n_k}) \geqq g(x) + \varepsilon.$$

Ha $f(x, t) = g(x)$, akkor

$$f(x_{n_k}, t) \geqq g(x_{n_k}) \geqq g(x) + \varepsilon = f(x, t) + \varepsilon$$

így f nem lehet folytonos.

Mivel legalább az egyik esetnek be kell következnie, ellentmondásra jutottunk, tehát az állítást igazoltuk.

GERLITS JÁNOS

II. megoldás.

Most legyen E összefüggő topologikus tér, I kompakt topologikus tér. Az első megoldás egyéb jelöléseit megtartjuk.

Ismét azt bizonyítjuk, hogy $g(x)$ folytonos E-n. $\varepsilon > 0$, $u \in E$, $v \in I$ esetén legyen $U(u, v)$ és $V(u, v)$ olyan nyílt környezete u-nak illetve v-nek, hogy $(x, t) \in U(u, v) \times V(u, v)$ esetén

$$|f(u, v) - f(x, t)| < \varepsilon$$

álljon. Fix u-ra a $V(u, v)$ $(v \in I)$ környezetek lefedik I-t, a kompaktság miatt így véges sok is lefedi:

$$V(u, v_1),\ V(u, v_2),\ \ldots,\ V(u, v_k).$$

Ekkor $U = \bigcap_{i=1}^{k} U(u, v_i)$ környezete u-nak és $x \in U$ esetén $|g(x) - g(u)| < \varepsilon$, hiszen ha $t \in I$, akkor mondjuk $t \in V(u, v_j)$, s ekkor

$$(x, t),\ (u, t) \in U(u, v_j) \times V(u, v_j)$$

miatt

$$|f(x, t) - f(u, t)| < \varepsilon.$$

BOLLOBÁS BÉLA
SIMONOVITS MIKLÓS

Megjegyzés. 1. MÁTÉ A. a teret és időt kompakt topologikus tereknek feltéve a hőmérsékletet is metrikus térbelinek tekinti, s ilyen feltételek mellett bizonyítja, hogy a $g(x)$ függvény folytonos. A tér kompaktsága ennél a modellnél is elejthető.

2. VESZTERGOMBI bebizonyítja, hogy a feladat állítása akkor is igaz, ha az éjszaka definíciója a helytől függ (csillagászati éjszaka), feltéve, hogy az éjszaka kezdő- és végpontja a helynek folytonos függvénye.

3. SIMONOVITS M. példát ad arra, hogy az éjszaka kompaktsága nem hagyható el (ekkor természetesen nem helyi minimumról, hanem helyi infimumról lenne szó!). Legyen ugyanis $E = [-1, +1]$, $I = (-\infty, +\infty)$, $f(x, t) = e^{-t^2 x^2}$. Ekkor

$$g(x) = \inf_{t \in I} f(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad x = 0 \\ 0 & \text{ha} \quad x \neq 0, \end{cases}$$

vagyis $g(x)$ nem folytonos.

4. JUHÁSZ és PÓSA példát adnak arra, hogy $f(x, t)$-ről nem elegendő feltenni csupán a parciális folytonosságot. JUHÁSZ példája a következő:

Legyen $E = I = [-1, +1]$, és

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad x \leqq 0, \text{ vagy } x > 0 \text{ és } t \geqq 0 \\ 1 + \dfrac{t}{x} & \text{ha} \quad x > 0 \text{ és } -x \leqq t < 0 \\ 1 + \dfrac{x}{t} & \text{ha} \quad x > 0 \text{ és } -1 \leqq t < -x. \end{cases}$$

Ebben az esetben

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \leqq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

nem folytonos, így a feladat állítása sem igaz.

Megoldották: AJTAI MIKLÓS, BABAI LÁSZLÓ, BENCZUR ANDRÁS, BELLAY ÁGNES, BOLLOBÁS BÉLA, FREUD RÓBERT, FRITZ JÓZSEF, GÁCS PÉTER, GERENCSÉR LÁSZLÓ, GERLITS JÁNOS, JUHÁSZ ISTVÁN, KISS ILDIKÓ, KLIMÓ JÁNOS, LACZKOVICH MIKLÓS, LAKÓ FERENC, LOVÁSZ LÁSZLÓ, MAKAI ENDRE, MAKÁRY ELEMÉR, MÁTÉ ATTILA, MÁTÉ EÖRS, MOLNÁR EMIL, PELIKÁN JÓZSEF, PÓSA LAJOS, SIMONOVITS ANDRÁS, SIMONOVITS MIKLÓS, SURÁNYI LÁSZLÓ, SZABÓ GYULA, SZÉP ANDRÁS, SZIGETI FERENC, VESZTERGOMBI GYÖRGY.

7. FELADAT

I. megoldás.

Ha minden c valós számhoz meg tudunk adni két, természetes számokból álló A_c és B_c halmazt úgy, hogy

1. $1 \notin A_c$, $1 \notin B_c$ minden c-re
2. $A_c \cap B_c = 0$ minden c-re
3. $A_c \cap B_d \neq 0$ ha $c \neq d$

teljesüljenek, akkor készen vagyunk. Legyen ugyanis $f(c, c) = 1$, és ha $c \neq d$, akkor legyen $f(c, d)$ a nem-üres $A_c \cap B_d$ halmaz tetszőleges eleme. Ha most

$$f(x, y) = f(y, z) = m \neq 1,$$

akkor

$$m \in A_x \cap B_y \quad \text{és} \quad m \in A_y \cap B_z,$$

vagyis

$$m \in A_x \cap B_y \cap A_y \cap B_z \subset A_y \cap B_y = 0,$$

ami ellentmondás. Viszont $m = 1$ csak az $x = y = z$ esetben lehetséges.

A_c és B_c megkonstruálása végett képezzük le a racionális számok R halmazát kölcsönösen egyértelműen az $N = \{2, 3, \ldots\}$ halmazra; legyen $r \in R$ képe $n(r)$. Rendeljünk hozzá minden c valós számhoz egy $\{r_k(c)\}_{k=1}^{\infty}$ c-hez tartó, csupa c-től különböző elemből álló racionális számsorozatot. Legyen

$$A_c = \{n(r_k(c)) : k = 1, 2, \ldots\} \subset N$$

$$B_c = N - A_c.$$

Könnyen belátható, hogy az így definiált A_c és B_c halmazok az 1., 2. és 3. feltételeknek eleget tesznek, s ezzel az adott tulajdonságú függvényt megkonstruáltuk.

PELIKÁN JÓZSEF

II. megoldás.

Rendezzük sorozatba az összes racionális számokat: $r_1, r_2, \ldots$. Definiáljuk az $f(x, y)$ függvényt a következő módon:

ha $x = y$, legyen $f(x, y) = 1$,

ha $x < y$, legyen $f(x, y) = 2i$, ahol i a legkisebb olyan index, amelyre $x < r_i < y$,

ha $x > y$, legyen $f(x, y) = 2i + 1$, ahol i a legkisebb olyan index, amelyre $y > r_i > x$.

Megmutatjuk, hogy $f(x, y)$ eleget tesz a feladat feltételeinek. Nyilván a valós számokon értelmezett, és értékkészlete a természetes számok halmaza.

Tegyük fel, hogy

(1) $$f(x, y) = f(y, z) = m.$$

Ha $m = 1$, akkor csak $x = y = z$ lehetséges. Ha $m > 1$, és $m = 2i$ alakú lenne, akkor teljesülne

$$x < r_i < y$$

és

$$y < r_i < z,$$

ami ellentmondás. Hasonlóan, ha $m>1$ és $m=2i+1$ alakú lenne, akkor teljesülne

$$x>r_i>y$$

és

$$y>r_i>z,$$

ami ismét ellentmondás. Tehát valóban (1)-ből $x=y=z$ következik.

AJTAI MIKLÓS

III. megoldás.

A síkot megszámlálható sok, páronként diszjunkt részhalmazra bontjuk, hogy teljesüljön: ha az (y, y) ponton átmenő, tengellyel párhuzamos egyenesek közül az egyik belemetsz egy részhalmazba, akkor a másik nem, kivéve, ha a részhalmaz az $y=x$ egyenes, ami a felbontás egy eleme lesz. A felbontást elég az $y=x$ egyenes alatti nyílt félsíkra elvégezni, mert tükrözve az $y=x$ egyenesre és hozzávéve az $y=x$ egyenest, az egész sík egy kívánt tulajdonságú felbontását kapjuk.

Legyen

$$A_0 = \{(x, y): x > 0, y < 0\}$$

$$A_k^0 = \{(x, y): x > k, k-1 < y \leqq k\}$$

$$A_{-k}^0 = \{(x, y): -k < x \leqq -k+1, y \leqq -k\}$$

$$A_k^n = \left\{(x, y): \frac{2k-1}{2^n} < x \leqq \frac{2k}{2^n}, \frac{2k-2}{2^n} < y \leqq \frac{2k-1}{2^n}\right\}$$

$$A_{-k}^n = \left\{(x, y): \frac{-2k+1}{2^n} < x \leqq \frac{-2k+2}{2^n}, \frac{-2k}{2^n} < y \leqq \frac{-2k+1}{2^n}\right\},$$

ahol $k, n=1, 2, \ldots$. Nyilvánvaló, hogy ezen halmazok egyesítése az $y=x$ egyenes alatti nyílt félsík.

Mint mondottuk, ezzel az egész sík megszámlálható sok diszjunkt halmazra bontását is megadtuk. Számozzuk meg a természetes számokkal a halmazrendszer tagjait, és az (x, y) ponthoz rendeljük függvényértékként azt a természetes számot, amellyel az (x, y) pontot tartalmazó halmazt megszámoztuk.

Ha x, y, z olyan számhármas, amelyre $f(x, y)=f(y, z)$, akkor az (x, y) és (y, z) pontok ugyanabban a részhalmazban vannak, de akkor (x, y), illetve (y, z) rajta vannak az (y, y) ponton átmenő, az x-, illetve az y-tengellyel párhuzamos egyenesen, és ezek közül minden részhalmaz csak egyet metszhet, kivéve az $\{(x, y): x=y\}$ részhalmazt, de ekkor $x=y=z$.

SZIGETI FERENC

Megjegyzés. 1. Nyilván a függvény létezése kizárólag számossági probléma, s így általánosan az a kérdés vethető fel, hogy ha A $\mathfrak{m}$ számosságú és B $\mathfrak{n}$ számosságú halmaz (mindkettő végtelen), akkor mely esetben létezik olyan A-n értelmezett $f(x, y)$ függvény, amelynek értékei B-ből vannak, és amelyre $f(x, y)=f(y, z)$-ből $x=y=z$ következik. GERLITS, LOVÁSZ, PÓSA és SIMONOVITS M. bebizonyítják, hogy ilyen függvény akkor és csak akkor létezik, ha $\mathfrak{m} \leqq 2^{\mathfrak{n}}$. Az alábbiakban PÓSA bizonyítását ismertetjük.

Legyen $\mathfrak{m} \leqq 2^{\mathfrak{n}}$. Elegendő $2^{\mathfrak{n}}$ számosságú A-ra megadni a konstrukciót. Legyen az $\mathfrak{n}$ számosságú rendszámok közül a legkisebb α. Feltehető, hogy A a 0 és 1 számok

α rendtípusú sorozatainak a halmaza. Értelmezzük az $f(x, y)$ függvényt a következőképpen:

ha $x=y$, legyen $f(x, y)=0$,

ha $x \neq y$, legyen β az a legkisebb rendszám, amelyre x-ben és y-ban a megfelelő helyeken álló elemek nem egyeznek meg, és legyen x-ben a β-adik elem j ($j=0$ vagy 1). Ekkor $f(x, y)=(\beta, j)$. Tehát f értékkészlete a 0 jel és a (β, j) rendezett párok halmaza, ahol $\beta<\alpha$ és $j=0$ vagy 1; tehát n számosságú, így B-re egy-egy-értelműen leképezhető.

$f(x, y)=f(y, z)=(\beta, j)$ azt jelentené, hogy x a β-adik jegy előtt megegyezik y-nal, és y is z-vel, és a β-adik jegy x-ben és y-ban j. De ekkor x és y β-adik jegye is megegyezik, ami ellentmondás. Tehát $f(x, y)=f(y, z)=0$, amiből $x=y=z$ következik. (Az állítás ezen részét még BOLLOBÁS és JUHÁSZ is bizonyította.)

Ha $m>2^n$ és mégis létezne a feltételnek eleget tevő függvény, akkor fix x és változó y mellett tekintsük $f(x, y)$ értékkészletét. Ez B valamely részhalmaza, és mivel a lehetséges x-ek számossága nagyobb, mint B részhalmazai halmazának számossága, azért valamely x_1-re és x_2-re $(x_1 \neq x_2)$ $f(x_1, y)$ és $f(x_2, y)$ értékkészlete megegyezik. Tehát az $f(x_1, x_2)$ érték szerepel $f(x_2, y)$ értékkészletében, azaz valamely y_0-ra $f(x_1, x_2)=f(x_2, y_0)$, ami ellentmondás.

2. BOLLOBÁS és SIMONOVITS M. észreveszik, hogy létezik olyan, a valós számokon értelmezett $F(x_1, \ldots, x_n)$ függvény, amelynek értékei a természetes számok, és amelyre

$$F(a, x_2, \ldots, x_n)=F(y_1, a, y_3, \ldots, y_n)=\ldots=F(u_1, \ldots, u_{n-1}, a)$$

csak akkor áll fenn, ha $a=x_i=y_i=\ldots=u_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Erre példa az

$$F(x_1, \ldots, x_n)=\prod_{i,j=1}^{n} p_{ij}^{f(x_i, y_j)}$$

függvény, ahol a p_{ij}-k $(i, j=1, \ldots, n)$ különböző prímek, és $f(x, y)$ a feladat bármelyik megoldásában definiált függvény.

Megoldották: AJTAI MIKLÓS, BABAI LÁSZLÓ, BENCZUR ANDRÁS, BELLAY ÁGNES, FREUD RÓBERT, FRITZ JÓZSEF GERENCSÉR LÁSZLÓ, GERLITS JÁNOS, JUHÁSZ ISTVÁN, KISS ILDIKÓ, KLIMÓ JÁNOS, KÖRNER JÁNOS, KULTSÁR LEVENTE, LACZKOVICH MIKLÓS, LAKÓ FERENC, LOVÁSZ LÁSZLÓ, MAKAI ENDRE, MAKÁRY ELEMÉR, MÁTÉ ATTILA, MÁTÉ EÖRS, MOLNÁR EMIL, PELIKÁN JÓZSEF, PÓSA LAJOS, SIMONOVITS ANDRÁS, SIMONOVITS MIKLÓS, SONNEVEND GYÖRGY, SURÁNYI LÁSZLÓ, SZÉP ANDRÁS, SZIGETI FERENC, SZŰCS ANDRÁS, VESZTERGOMBI GYÖRGY.

8. FELADAT

Az euklideszi gyűrű definíciója az irodalomban többféle formában is szerepel. Mi a következő definíciót fogadjuk el. Ha R jelöli a gyűrűt, és N a nem-negatív egész számok halmazát, akkor R-et abban az esetben nevezzük euklideszi gyűrűnek, ha definiálva van egy $\varphi: R \to N$ leképzés, amelyre

(i) $\varphi(a)=0 \Leftrightarrow a=0$.

(ii) Ha $a, b \in R$ $(b \neq 0)$, akkor létezik oly $q, r \in R$, hogy

$$a=bq+r \quad \text{és} \quad \varphi(r)<\varphi(b).$$

A maradékos osztás egyértelműsége azt jelenti, hogy

(iii) Ha $a=bq+r=bq_1+r_1$ és $\varphi(r)<\varphi(b)$, $\varphi(r_1)<\varphi(b)$ teljesülnek, akkor $r=r_1$ és $q=q_1$.

Ezeket a tulajdonságokat felhasználva belátjuk, hogy R 0-gyűrű, test vagy test feletti polinomgyűrű. (Ezzel a feladat szövege is kiegészítésre szorul.)

Ha a φ által ténylegesen felvett értékek $0=n_0<n_1<\ldots<n_k\ldots$, akkor vegyük a $\varphi(a)=n_k$ érték helyett a $\varphi'(a)=k$ értéket. φ' ekvivalens φ-vel oly értelemben, hogy $\varphi(a)<\varphi(b)$ akkor és csak akkor, ha $\varphi'(a)<\varphi'(b)$, és nyilván φ'-re is teljesülnek az (i), (ii) és (iii) feltételek. Tehát a továbbiakban feltehetjük, hogy $n_k=k$

A bizonyítást több lépésben végezzük el.

1. *R nullosztómentes.*

Ha $ab=0$, $a\neq 0, b\neq 0$ lenne, akkor $0=a\cdot 0+0=ab+0$ felbontás ellentmondana (iii)-nek.

2. *Ha $c\neq 0$, akkor $\varphi(ac)\geqq\varphi(a)$.*

$\varphi(ac)<\varphi(a)$-ból következne, hogy ac-t kétféleképpen lehetne maradékosan osztani a-val: $ac=ac+0=a\cdot 0+ac$.

Legyen $T_i=\{a: a\in R, \varphi(a)\leqq i\}$ $(i=0, 1, \ldots)$. Nyilván

$$T_0=\{0\},\ T_0\subseteqq T_1\subseteqq\ldots\subseteqq T_i\subseteqq\ldots \quad \text{és} \quad R=\bigcup_{i=0}^{\infty} T_i.$$

3. *Ha $R=T_0$, akkor R a 0-gyűrű.*

Az állítás nyilvánvaló.

A továbbiakban feltesszük, hogy $R\neq T_0$.

4. *R egységelemes, és $1\in T_1$.*

Mivel $R\neq T_0$, azért létezik $a\in T_1$, hogy $a\neq 0$. Ekkor $a=aq+r$-ben $\varphi(r)<\varphi(a)=1$, így $\varphi(r)=0$, vagyis $a=aq$. b-vel szorozva $ab=aqb$, és 1. miatt $b=qb$. Ugyanígy $cb=cqb$, s ezért $c=cq$, tehát q egységelem (a továbbiakban 1). Ha $\varphi(a)<\varphi(1)$, akkor $a=1\cdot a+0=1\cdot 0+a$, így az egyértelműség miatt $a=0$, következésképpen $\varphi(1)=1$.

5. $\varphi(a-b)\leqq\max\left(\varphi(a), \varphi(b)\right)$.

Ha $\max\left(\varphi(a), \varphi(b)\right)<\varphi(a-b)$ lenne, akkor $a=(a-b)1+b=(a-b)0+a$ és $1\neq 0$ miatt a maradékos osztás nem lenne egyértelmű, ami ellentmondás.

5.-nek közvetlen következménye, hogy

6. *T_i additív csoport.*

7. $\varphi(-a)=\varphi(a)$.

$$\varphi(-a)\ =\ \varphi(0-a)\leqq\max\left(\varphi(0), \varphi(a)\right)\ =\ \varphi(a)$$

hasonlóan $\varphi(a)\leqq\varphi(-a)$, így $\varphi(a)=\varphi(-a)$.

8. *Ha $\varphi(b)<\varphi(a)$, akkor $\varphi(a-b)=\varphi(a)$.*

5.-ből $\varphi(a-b)\leqq\varphi(a)$ és $\varphi(a)\ =\ \varphi\big(b-(b-a)\big)\leqq\max\left(\varphi(b), \varphi(b-a)\right)=$ $=\max\left(\varphi(b), \varphi(a-b)\right)$ és így $\varphi(b)<\varphi(a)$ miatt $\varphi(a)\leqq\varphi(a-b)$, tehát $\varphi(a-b)=\varphi(a)$.

9. *R egy a eleme akkor és csak akkor egység, ha $\varphi(a)=1$ (azaz $a\in T_1$ és $a\neq 0$).*

Ha b tetszőleges eleme R-nek, és $\varphi(a)=1$, akkor $b=aq+r$, ahol $\varphi(r)<\varphi(a)=1$, így $r=0$, tehát $b=aq$. Ha speciálisan $b=1$, akkor $1=aa_1$, ahonnan $a_1=a_1aa_1$, végül $1=a_1a$, tehát $a_1=a^{-1}$.

Ha megfordítva $ab=1$, akkor 1. miatt $a\neq 0$, $b\neq 0$, és 2. miatt $\varphi(a)\leqq\varphi(ab)=$ $=\varphi(1)=1$, vagyis $\varphi(a)=1$.

6.-ból és 9.-ből már következik, hogy

10. *T_1 test.*

Ha $R=T_1$, akkor készen vagyunk. Ha $T_1\subset R$, akkor be fogjuk bizonyítani, hogy R a T_1 test feletti polinomgyűrű.

11. *Ha $\varphi(a)=1$, akkor $\varphi(ab)=\varphi(b)$.*

2. miatt ugyanis $\varphi(ab)\geqq\varphi(b)=\varphi(a^{-1}ab)\geqq\varphi(ab)$, tehát $\varphi(ab)=\varphi(b)$.

12. *Ha valamely $b\neq 0$-ra $\varphi(ab)=\varphi(b)$, akkor $\varphi(a)=1$.*

Legyen $b=(ab)q+r$, ahol $\varphi(r)<\varphi(ab)$. Ekkor $r=b(1-aq)$. Ha $\varphi(a)\neq 1$, akkor $1-aq\neq 0$, tehát 2. miatt $\varphi(r)\geqq\varphi(b)$, s így $\varphi(b)\leqq\varphi(r)<\varphi(ab)$, ami ellentmondás.

13. *Ha $\varphi(x)=2$, akkor $\varphi(x^k)=k+1$.*

Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. $k=1$-re az állítás nyilván igaz. Tegyük fel, hogy $\varphi(x^{k-1})=k$. Ekkor 2. és 12. alapján $\varphi(x^k)=\varphi(x^{k-1}x)>\varphi(x^{k-1})$, azaz $\varphi(x^k)\geqq k+1$.

Ha $\varphi(a)=k+1$, és $a=x^{k-1}b+r$, ahol $\varphi(r)<\varphi(x^{k-1})=k$, akkor $\varphi(x^{k-1}b)=$ $=\varphi(a-r)=\varphi(a)=k+1>k=\varphi(x^{k-1})$. Ebből 12. miatt $b\notin T_1$. Ezért ha $b=xc+s$, ahol $\varphi(s)<\varphi(x)=2$, $\varphi(xc)=\varphi(b-s)=\varphi(b)$, mert $\varphi(b)\geqq 2>\varphi(s)$. Így $\varphi(xc)\geqq 2$, tehát $c\neq 0$. Mármost $a=x^kc+x^{k-1}s+r$, ahol $\varphi a)=k+1$, és $\varphi(s)=1$ esetén $\varphi(x^{k-1}s)=\varphi(x^{k-1})=k$, $s=0$ esetén $\varphi(x^{k-1}s)=0$, végül $\varphi(r)<k$. Ezek alapján $\varphi(a)>\max\left(\varphi(x^{k-1}s),\varphi(r)\right)$, tehát 8. alapján $\varphi(x^k)\leqq\varphi(x^kc)=\varphi(a-x^{k-1}s-r)=$ $=\varphi(a)=k+1$.

14. *Ha $\varphi(a)=k+1$, akkor a felírható az $a=\alpha_0+x\alpha_1+\ldots+x^k\alpha_k$ alakban, ahol $\alpha_i\in T_1$ $(i=0, 1, \ldots, k)$ és $\alpha_k\neq 0$.*

$k=0$-ra az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy az állítás igaz $k-1$-re. $k>0$-ra legyen $a=x^kb+r$, ahol $\varphi(r)<\varphi(x^k)=k+1$, tehát $\varphi(x^kb)=\varphi(a-r)=\varphi(a)=k+1=$ $=\varphi(x^k)$, így $\varphi(b)=1$, vagyis $b\neq 0$ és $b\in T_1$. $\varphi(r)\leqq k$ miatt $r=x^{k-1}b+\ldots+xb_{k-1}+b_k$.

15. *Az x elem transzcendens T_1 fölött.*

$x^k\alpha_k+\ldots+x\alpha_1+\alpha_0=0$ $(\alpha_i\in T_1)$-ből $\varphi(x^k\alpha_k)=\varphi(x^{k-1}\alpha_{k-1}+\ldots+x\alpha_1+\alpha_0)\leqq k$ miatt $\alpha_k=0$ következne. A gondolat ismétlésével $\alpha_{k-1}=0$, ..., $\alpha_1=0$, $\alpha_0=0$.

16. *Ha R kommutatív, akkor $R=T_1[x]$, és az euklideszi érték a fokszámnak szigorúan monoton függvénye.*

Az állítás 10., 14. és 15.-ből következik.

Megfordítva, test feletti polinomgyűrűben a maradékos osztás egyértelmű; ez az érték monotonitásának felhasználásával a szokásos osztási algoritmus segítségével látható be.

lényegében Lovász László megoldása

Megjegyzés. 1. A monotonitási feltétel nem üres. Ha ugyanis lenne oly f és g polinom, amelyre $\operatorname{gr} f=\operatorname{gr} g$, de $\varphi(f)>\varphi(g)$, akkor R euklideszi gyűrű maradt, de alkalmas α konstanssal legyen $\operatorname{gr}(\alpha f+g)=\operatorname{gr} f$, és $\alpha f+g=fq+r$, ahol $\operatorname{gr} r<\operatorname{gr} f$. Azonban $\alpha f+g=f\alpha+g$, ahol $\varphi(g)\leqq\varphi(f)$, s így $r\neq g$ miatt a maradékos osztás nem egyértelmű.

2. Lovász részletesen vizsgálja a nem kommutatív esetet is. A polinomok szorzatát a szokásos módon definiálva, azaz a

$$\sum_{i=0}^{n} x^i a_i \quad \text{és} \quad \sum_{i=0}^{m} x^i b_i$$

polinomok szorzatán a

$$\sum_{i=0}^{m+n} x^i c_i$$

polinomot értve, ahol c_i-t a

$$c_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \ldots + a_i b_0$$

egyenlőség definiálja ($a_{-1} = a_{-2} = \ldots = b_{-1} = b_{-2} = \ldots = 0$) a feladat állítása nem lesz igaz. Azonban ha a polinomok szorzatát megfelelően definiáljuk, a tétel igaz marad. Tetszőleges $a \in R$-hez van oly a^σ és a^τ, amelyekre

$$ax = xa^\sigma + a^\tau \quad \text{és} \quad \varphi(a^\tau) < \varphi(x) = 2,$$

tehát $a^\tau \in T_1$. Nyilván

$$(a+b)^\sigma = a^\sigma + b^\sigma \quad \text{és} \quad (a+b)^\tau = a^\tau + b^\tau,$$

továbbá

$$(ab)^\sigma = a^\sigma b^\sigma \quad \text{és} \quad (ab)^\tau = a^\tau b^\sigma + ab^\tau.$$

Így $a \to a^\sigma$ endomorfizmus, és $\sigma: T_1 \to T_1$ meromorfizmus, mert ha $a \in T_1$ ($a \neq 0$), akkor a-nak van inverze, és — lévén $1x = x1$ miatt $1^\sigma = 1$ (tehát $T_1^\sigma \neq 0$) — $1 = (aa^{-1})^\sigma = a^\sigma (a^{-1})^\sigma$, ami csak úgy lehetséges, hogy $\varphi(a^\sigma) = 1$; továbbá T_1 test, így minden homomorfizmusa egy-egyértelmű.

Ha most T_1-nek tetszőleges $a \to a^\sigma$ meromorfizmusát, és tetszőleges $a \to a^\tau$ deriválását választjuk (deriváción T_1-nek önmagába való, az $(a+b)^\tau = a^\tau + b^\tau$ és $(ab)^\tau = a^\tau b^\sigma + ab^\sigma$ feltételeknek eleget tevő leképezését értve), s ilyen a fentiek szerint létezik, akkor a polinomgyűrűben a polinomszorzatot $ax = xa^\sigma + a^\tau$ segítségével definiálva belátható, hogy $T_1[x]_{\sigma,\tau}$ rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal.

A nem-kommutatív esettel még FRITZ foglalkozott.

Megoldották: AJTAI MIKLÓS, BABAI LÁSZLÓ, BENCZUR ANDRÁS, BELLAY ÁGNES, FREUD RÓBERT, FRITZ JÓZSEF, GÁCS PÉTER, GERENCSÉR LÁSZLÓ, GERLITS JÁNOS, JUHÁSZ ISTVÁN, KISS ILDIKÓ, KÖRNER JÁNOS, KULTSÁR LEVENTE, LACZKOVICH MIKLÓS, LAKÓ FERENC, LOVÁSZ LÁSZLÓ, MAKAI ENDRE, MÁTÉ ATTILA, MÁTÉ EÖRS, MOLNÁR EMIL, PELIKÁN JÓZSEF, PÓSA LAJOS, RATKÓ ISTVÁN, SIMONOVITS ANDRÁS, SIMONOVITS MIKLÓS, SONNEVEND GYÖRGY, SURÁNYI LÁSZLÓ, SZABÓ GYULA, SZIGETI FERENC, VESZTERGOMBI GYÖRGY.

9. FELADAT

Mivel $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |a_m| = \sigma < \infty$, azért létezik $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m = S$ is. Legyen

$$C_n = \frac{1}{2n+1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |a_{m-n} + \ldots + a_{m+n}|.$$

Bebizonyítjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} C_n = |S|$.

Valóban, legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor választható oly M természetes szám, amelyre

$$\sum_{|m|>M} |a_m| < \varepsilon.$$

Ekkor $n \geqq M$-re

$$(2n+1)C_n = \sum_{|m|>n+M} |\ldots| + \sum_{n+M \geqq |m| > n-M} |\ldots| + \sum_{|m| \leqq n-M} |\ldots|.$$

Itt

$$\sum_{|m|>n+M} |a_{m-n}+\ldots+a_{m+n}| \leqq \sum_{|m|>n+M} (|a_{m-n}|+\ldots+|a_{m+n}|) \leqq$$

$$\leqq (2n+1) \sum_{|m|>M} |a_m| \leqq (2n+1)\varepsilon$$

és

$$\sum_{n+M\geqq|m|>n-M} |a_{m-n}+\ldots+a_{m+n}| \leqq \sum_{n+M\geqq|m|>n-M} \sigma \leqq 4M\sigma,$$

végül tekintettel arra, hogy $|m| \leqq n-M$ esetén $m-n \leqq -M \leqq M \leqq m+n$, ha $|m| \leqq$ $\leqq n-M$, akkor

$$||a_{m-n}+\ldots+a_{m+n}|-|S|| \leqq \sum_{|m|>M} |a_m| < \varepsilon,$$

tehát

$$\Big|\sum_{|m|\leqq n-M} |a_{m-n}+\ldots+a_{m+n}|-(2n-2M+1)|S|\Big| \leqq \sum_{|m|\leqq n-M} ||a_{m-n}+\ldots+a_{m+n}|-|S|| \leqq$$

$$\leqq (2n-2M+1)\varepsilon.$$

Mostmár

$$|(2n+1)C_n-(2n-2M+1)|S|| \leqq (2n+1)\varepsilon+4M\sigma+(2n-2M+1)\varepsilon,$$

így $(2n+1)$-gyel osztva, és n-nel ∞-hez tartva

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |C_n-|S|| \leqq \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon.$$

Mivel $\varepsilon(>0)$ tetszőleges, azért valóban

$$\lim_{n\to\infty} C_n = |S|.$$

JUHÁSZ ISTVÁN

Megjegyzés. Legyen $(M, \mathfrak{S}, \mu)$ kommutatív mérhető csoport, azaz M additív csoport, $\mathfrak{S}$ M részhalmazainak egy, az összeadásra nézve invariáns σ-algebrája, μ invariáns σ-véges mérték $(\mu(M)>0)$, végül $\mathfrak{S}$-ról tegyük még fel, hogy az

$$S(x, y)=(x, x+y)$$

reláció által $M\times M$-en értelmezett S függvény $M\times M$ mérhető részhalmazait $M\times M$ mérhető részhalmazaiba viszi.

Legyen $A_1, A_2, \ldots$ $(A_i\in\mathfrak{S})$ 0-ra szimmetrikus halmazoknak olyan sorozata, amelyre teljesülnek a következő feltételek:

a) $\bigcup_1^\infty A_i = M$

b) $A_i \subset A_{i+1}$

c) $0<\mu(A_i)<\infty$

d) $\mu(A_i-A_{i-1})=o\,(\mu(A_i))$

e) $A_i+A_j\subset A_{i+j}$.

Állítás: $f(x)\in L_1(M, \mu)$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mu(A_n)} \int_M \left| \int_{A_i} f(x+y)\, d\mu_y \right| d\mu_x = \left| \int_M f\, d\mu \right|.$$

A bizonyítás a fentihez hasonlóan végezhető el. Az általánosítás SIMONOVITS M.-tól származik.

Megoldották: AJTAI MIKLÓS, BOLLOBÁS BÉLA, CSIRIK JÁNOS, FREUD RÓBERT, FRITZ JÓZSEF, GÁCS PÉTER, GERENCSÉR LÁSZLÓ, GERLITS JÁNOS, JUHÁSZ ISTVÁN, KISS ILDIKÓ, KLIMÓ JÁNOS, LACZKOVICH MIKLÓS, LAKÓ FERENC, LOVÁSZ LÁSZLÓ, MAKAI ENDRE, MÁTÉ ATTILA, PELIKÁN JÓZSEF, PÓSA LAJOS, SIMONOVITS MIKLÓS, SZIGETI FERENC, VESZTERGOMBI GYÖRGY.

10. FELADAT

I. megoldás.

Az integrált Lebesgue-értelemben használjuk. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$L_n = \{x: x \in (0, 1),\ n(x) = n\}$$

$$A_n = \{x: x \in (0, 1),\ \overline{a_{n+1}(x)\, a_{n+2}(x) a_{n+3}(x) a_{n+4}(x)} = 1966\}$$

és legyen $\lambda_n = \lambda(L_n)$, $\alpha_n = \lambda(A_n)$, ahol λ a Lebesgue-mérték ($n = 0, 1, 2, \ldots$). L_n és A_n, mint véges sok intervallum egyesítései, mérhető halmazok.

Először belátjuk, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n = 1$, vagyis hogy az integrandus majdnem mindenütt értelmezve van. Ha

$$H = \{x: x \in (0, 1),\ \overline{a_{k+1}(x) a_{k+2}(x) a_{k+3}(x) a_{k+4}(x)} \neq 1966,\ k = 0, 1, 2, \ldots\}$$

és

$$C_n = \{x: x \in (0, 1),\ \overline{a_{4k+1}(x) a_{4k+2}(x) a_{4k+3}(x) a_{4k+4}(x)} \neq 1966,\ k = 0, 1, \ldots, n\},$$

akkor egyrészt $H \subset C_n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), másrészt

$$\lambda(C_n) = \left(\frac{10^4 - 1}{10^4}\right)^{n+1},$$

így $\lim_{n \to \infty} \lambda(C_n) = 0$-ból $\lambda(H) = 0$ következik.

Minden A_n-beli intervallum hossza $10^{-(n+4)}$, az intervallumok száma pedig 10^n, mivel az első n tizedesjegy ennyiféleképpen választható meg. Tehát $\alpha_n = 10^{-4}$. Nyilván $A_n \cap L_n = L_n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), $n - 3 \leqq k \leqq n - 1$ esetén pedig $A_n \cap L_k = 0$, mert két 1966 nem nyúlhat egymásba. Ha $0 \leqq k \leqq n - 4$, akkor

$$\lambda(A_n \cap L_k) = \lambda(A_{n-k-4})\, \lambda(L_k) = 10^{-4} \lambda_k,$$

mert az a kikötés, hogy x L_k-ban legyen, csak x első $(k+4)$ tizedesjegyére ad megszorítást. Így

$$10^{-4} = \lambda(A_n) = \sum_{k=0}^{n} \lambda(A_n \cap L_k) = \sum_{k=0}^{n-k} 10^{-4} \lambda_k + \lambda_n,$$

azaz

$$10^{-4} \lambda_n = 1 - \sum_{k=0}^{n-4} \lambda_k.$$

$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = 1$-et felhasználva innen a következő formulát nyerjük

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k = 10^4 \lambda_{n+4} \tag{1}$$

$n(x)$ integráljára

$$\int_0^1 n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} n\lambda_n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k,$$

tehát (1) szerint

$$\int_0^1 n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} 10^4\lambda_{n+4} = 10^4 \sum_{n=4}^{\infty} \lambda_n = 10^4(1-\lambda_0-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)$$

és mert nyilván $\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=10^{-4}$, azt kapjuk, hogy

$$\int_0^1 n(x)\,dx = 10^4-4 = 9996.$$

GERLITS JÁNOS

II. megoldás.

A feladatot általánosítva oldjuk meg. Legyen $\sigma=\overline{s_1 s_2 \ldots s_k}$ a tízes számrendszerben felírt egész szám, és $x\in(0,1)$-re definiáljuk az $n(x)$ függvényt a következőképpen: legyen $n(x)$ az a legkisebb nem-negatív egész szám, amelyre

$$\overline{a_{n(x)+1}a_{n(x)+2}\ldots a_{n(x)+k}} = \overline{s_1 s_2 \ldots s_k}.$$

Kérdés: mennyi $\int_0^1 n(x)\,dx$?

Ha $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a $(0,1)$ intervallum Lebesgue-mérhető részhalmazain a Lebesgue mérték által definiált valószínűségi mértékkel ellátott valószínűségi mező, akkor $\Omega=(0,1)$-n $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ független valószínűségi változók sorozata, és

$$P(a_k = i) = \frac{1}{10} \qquad (k = 1, 2, \ldots;\ i = 0, 1, \ldots, 9).$$

Ezen a mezőn $n(x)$ valószínűségi változó, és várható értéke éppen $\int_0^1 n(x)\,dx$.

Legyen

$$P_n = P(n(x)=n)$$

és

$$Q_n = P(\overline{a_{n+1}a_{n+2}\ldots a_{n+k}} = \sigma).$$

Legyen l az a legkisebb természetes szám, amelyre igaz az, hogy a σ számot l jeggyel eltolva az ugyanazokon a helyeken álló jegyek megegyeznek. (Tehát $s_i=s_{l+i}$; $i=1, 2, \ldots, k-l$). Nyilván $1\leqq l\leqq k$. Hozzuk k-t ilyen alakra $k=pl+r$, ahol $0\leqq p$, $1\leqq r\leqq l$. Ekkor σ p számú l hosszúságú τ blokkból $(\tau=\overline{s_1 s_2 \ldots s_l})$, és e τ blokk első r eleméből áll.

Érvényes a következő összefüggés:

(1)
$$Q_n = (P_0 Q_{n-k} + P_1 Q_{n-k-1} + \ldots + P_{n-k}Q_0) +$$
$$+ (P_{n-k+r}10^{-(k-r)} + P_{n-k+r+l}10^{-(k-r-l)} + \ldots + P_{n-l}10^{-l} + P_n)$$

$(n=k, k+1, \ldots)$, ugyanis az az esemény, hogy

$$\overline{a_{n+1}a_{n+2}\ldots a_{n+k}} = \sigma$$

bekövetkezhet úgy, hogy a σ blokk először éppen

a) az $(i+1)$-edik indextől kezdődően fordul elő $(0 \leqq i \leqq n-k)$, és azután $n-k-i$ számjegy után ismét előfordul (ennek valószínűsége $P_i Q_{n-k-i}$);

b) az $(n-k+r+il)$-edik $(i=0, 1, \ldots, p)$ indextől kezdődően fordul elő, (tehát mindenesetre

$$\overline{a_{n-k+r+il+1}\, a_{n-k+r+il+2} \ldots a_{n+r+il}} = \sigma)$$

és amellett az $(n+1)$-edik indextől kezdődően is előfordul, amihez az előző feltételen kívül még az kell, hogy az az által meg nem határozott $k-r-il$ számjegy adott értékű legyen, így ezen eset valószínűsége $P_{n-k+r+il}\, 10^{k-r-il}$.

Ha feltesszük, hogy $P_n = Q_n = 0$, ha $n = -1, -2, \ldots$, akkor (1) $0 \leqq n < k$-ra is érvényben marad. Szorozzuk meg (1)-t z^n-nel és összegezzünk n szerint: bevezetve a

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n \quad \text{és} \quad Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n z^n$$

jelöléseket azt kapjuk, hogy

$$Q(z) = z^k P(z) Q(z) + \sum_{i=0}^{p} z^{k-r-il} P(z)\, 10^{-(k-r-il)},$$

ahonnan a nyilvánvaló

$$Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} z^n = \frac{1}{10^k (1-z)}$$

összefüggés felhasználásával

$$P(z) = \frac{1}{z^k + 10^k (1-z) \sum_{i=0}^{p} z^{k-r-il}\, 10^{-(k-r-il)}}.$$

$P(1) = 1$-ből következik, hogy $n(x)$ majdnem mindenütt értelmezve van, másrészt, hogy

$$\int_0^1 n(x)\, dx = P'(1) = \sum_{i=0}^{p} 10^{r+il} - k.$$

Ebből következik az a nem nyilvánvaló tény, hogy az integrál értéke mindig egész szám. Konkrétan

$\sigma = 1966$-ra $k = l = r = 4$, $p = 0$, tehát

$$\int_0^1 n(x)\, dx = 10^4 - 4 = 9996$$

$\sigma = 1961$-re $k = 4$, $l = 3$, $p = r = 1$, tehát

$$\int_0^1 n(x)\, dx = 10 + 10^4 - 4 = 10006$$

$\sigma = 1919$-re $k = 4$, $l = r = 2$, $p = 1$, tehát

$$\int_0^1 n(x)\, dx = 10^2 + 10^4 - 4 = 10096$$

végül $\sigma = 1111$-re $k=4$, $l=r=1$, $p=3$, tehát

$$\int_0^1 n(x)\,dx = 10+10^2+10^3+10^4-4 = 11106$$

lényegében BOLLOBÁS BÉLA megoldása

Megjegyzés. 1. Természetesen az általánosítás nemcsak tízes, hanem tetszőleges alapú számrendszerre is átvihető.

2. Több megoldó is észrevette, hogy a feladat átfogalmazható alkalmasan definiált rekurrens eseménysorozatnál az első visszatérés ideje várható értékének meghatározására, és ebben a felfogásban az integrál az Erdős—Feller—Pollard tétel alapján is kiszámítható.

Megoldották: AJTAI MIKLÓS, BENCZUR ANDRÁS, BOLLOBÁS BÉLA, CSIRIK JÁNOS, FRITZ JÓZSEF, GERENCSÉR LÁSZLÓ, GERLITS, JÁNOS, JUHÁSZ ISTVÁN, LACZKOVICH MIKLÓS, LOVÁSZ LÁSZLÓ, MAKAI ENDRE, MÁTÉ ATTILA, MÁTÉ EÖRS, MOLNÁR EMIL, PELIKÁN JÓZSEF, PÓSA LAJOS, SIMONOVITS MIKLÓS, SZIGETI FERENC, VESZTERGOMBI GYÖRGY.

CONCOURS COMMÉMORATIF MIKLÓS SCHWEITZER DE L'ANNÉE 1966

1. Démontrer que le nombre des sphères unité disjointes qu'un segment de longuer h peut complètement traverser ou toucher est au plus $2\left[\frac{h}{\sqrt{2}}\right]+2$! (Il s'agit de contact réel!)

2. Caractériser les positions de n droites coplanaires dans lesquelles la somme des angles formés par des couples de droites atteint son maximum! (On entend sous l'angle formé par deux droites, l'angle non supérieur à $\pi/2$.)

3. Désignons par $f(n)$ le nombre maximum des triangles rectangles déterminés par n points coplanaires, où le maximum est compté d'après toutes les positions possibles de ces points. Démontrer que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^2}=\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^3}=0.$$

4. Soit I un idéal de l'anneau des polynomes à coefficients entiers réalisant les conditions suivantes:

a) les éléments de I n'ont pas de diviseur polynomial commun de degré supérieur à 0;

b) I contient au moins un polynome dont le terme constant est égal à 1.

Démontrer que pour l'entier r convenable I contient le polynome $1+x+x^2+\ldots+x^{r-1}$!

5. Appelons lettre T surmontée le point A de l'axe des x du plan xy l'unification du segment AB situé dans le demi plan supérieur et normale à l'axe x et du segment CD parallèle à l'axe des x et contenant à son intérieur le point B. Démontrer qu'il est impossible de surmonter chaque point de l'axe des x d'une lettre T sans que l'unification de celles qui surmontent les points d'abscisse rationnelle aient d'intersection avec l'unification de celles surmontant les points d'abscisse irrationnelle!

6. Dans le bulletin météorologique concernant la Hongrie on emploie souvent l'expression: „Les températures de nuit les plus basses ont admis toute valeur entre $-3°$ et $+5°$". Démontrer qu'au lieu de cela il suffirait de dire: „Entre les températures de nuit les plus basses $-3°$ et $+5°$ sont intervenu aussi" (Nous pouvons admettre que la température est une fonction continue du lieu et du temps considérés même simultanément.)

7. Peut-on trouver une fonction $f(x, y)$ à deux variables définie sur les nombres réels, dont la valeur est formée par l'ensemble des entiers naturels, et pour laquelle on peut conclure de $f(x, y)=f(y, z)$ que $x=y=z$?

8. Démontrer que dans l'anneau éuclidien la division avec reste est univoque, si et seulement

si l'anneau est un anneau de polynome sur un corps et si la valeur éuclidienne est une fonction strictement monotone croissante du degré.

9. Si $\sum_{m=-\infty}^{\infty} |a_m| a < \infty$, que peut-on dire sur l'expression

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |a_{m-n} + a_{m-n+1} + \ldots + a_{m+n}|.$$

10. Désignons par

$$0, a_1(x)\, a_2(x) \ldots a_m(x) \ldots$$

la forme écrite en fraction décimale du nombre réel x de l'intervalle (0, 1) et notons par $n(x)$ le minimum des nombres non négatifs pour lesquels

$$\overline{a_{n(x)+1}\, a_{n(x)+2}\, a_{n(x)+3}\, a_{n(x)+4}} = 1966.$$

Déterminer

$$\int_0^1 n(x)\, dx!$$

FELADATROVAT

Szerkeszti: CSÁSZÁR ÁKOS

A feladatrovatnak szánt küldemények (minden feladat megoldása külön lapon) a következő címre küldendők: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, V. Szabadság tér 17. A kitűzésre javasolt feladatok szerzőit kérjük, hogy mellékeljék a feladat megoldását, valamint a feladat keletkezésének hátterét megvilágító esetleges észrevételeiket.

KITŰZÖTT FELADATOK

159. Legyen $B_0 = 1$ és

$$B_n = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} B_k \sigma(n-k) \qquad (n > 0),$$

ahol $\sigma(m)$ az m egész szám pozitív osztóinak összegét jelenti. Igazoljuk, hogy

$$B_n = \begin{cases} (-1)^s, & \text{ha} \quad n = \dfrac{3s^2+s}{2} \qquad (s \text{ egész}), \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Fehér János

160. Határozzuk meg az összes olyan polinomokat, amelyeknek minden együtthatója $+1$ vagy -1 és minden gyöke valós.

Corrádi Keresztély és *Kátai Imre*

161. Mutassuk meg, hogy minden G Abel-csoporthoz található olyan csoport, amelynek kommutátoralcsoportja izomorf G-vel.

Fried Ervin

MEGOLDOTT FELADATOK

147. feladat. Konstruálandó olyan végtelen sokszor differenciálható, egy véges intervallumon kívül eltűnő, nem azonosan nulla függvény, amelynek egy mindenütt sűrű halmazon véges sok kivétellel minden deriváltja eltűnik (az el nem tűnő deriváltak száma függhet a helytől).

(Csiszár Imre)

Megoldás. Legyen

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad |x| < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{ha} \quad |x| \geqq \frac{1}{2}, \end{cases} \tag{1}$$

továbbá $n \geqq 2$ esetén

$$f_n(x) = 2^{n-1} \int_{x-2^{-n}}^{x+2^{-n}} f_{n-1}(u)\, du. \tag{2}$$

Ekkor $n \geqq 2$ esetén f_n folytonos, továbbá

$$f_n'(x) = 2^{n-1}(f_{n-1}(x+2^{-n}) - f_{n-1}(x-2^{-n})) \tag{3}$$

$n \geqq 3$ esetén minden x helyen, de még $n=2$ esetén is, hacsak $x \neq \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}$.

(3)-ból azonnal következik, hogy f_n $(n-2)$-ször folytonosan differenciálható, és $f_n^{(n-2)}(x)$ olyan tagok összegeként írható, amelyek mindegyikében $f_2(x+c)$-nek egy állandóval való szorzata áll, c pedig ilyen alakú:

$$c = \pm 2^{-n} \pm 2^{-n+1} \pm 2^{-n+2} \pm \ldots \pm 2^{-3} = \frac{2k+1}{2^n},$$

ahol k egész szám. Ha tehát x nem páratlan többszöröse 2^{-n}-nek, akkor f_2 differenciálható az $x+c$ alakú helyeken, úgyhogy az x helyen még $f_n^{(n-1)}$ is létezik és folytonos, ti. állandószor $f_1(x+c')$ alakú tagok összege, ahol c' újra páratlan többszöröse 2^{-n}-nek. Így aztán az ilyen x helyeken $f_n^{(n)}(x) = 0$. Végül is tehát

$$f_n^{(k)}(x) = 0, \quad \text{ha} \quad k \geqq n \quad \text{és} \quad x \neq \frac{2p+1}{2^n} \qquad (p \text{ egész}). \tag{4}$$

(1)-ből és (2)-ből teljes indukcióval az is rögtön látszik, hogy $f_n(x) = 0$ a $(-1+2^{-n}, 1-2^{-n})$ intervallumon kívül, és $f_n(x) = 1$ a $(-2^{-n}, 2^{-n})$ intervallumban.

Írjuk most (2)-t az

$$f_n(x) = 2^{n-1} \int_{-2^{-n}}^{2^{-n}} f_{n-1}(x+u)\, du \tag{5}$$

alakban. Ebből a paraméteres integrál deriválási szabályának ismételt alkalmazásával következik, hogy ha $f_{n-1}^{(k)}$ folytonos az $[a-2^{-n}, b+2^{-n}]$ intervallumban, akkor

$$f_n^{(k)}(x) = 2^{n-1} \int_{-2^{-n}}^{2^{-n}} f_{n-1}^{(k)}(x+u)\, du \qquad (a \leqq x \leqq b). \tag{6}$$

Legyen most

$$r = p2^{-m} \qquad (p \text{ és } m \geqq 1 \text{ egész}). \tag{7}$$

Minthogy (4) szerint $f_{m+1}^{(m+1)}(x) = 0$ az $(r-2^{-m-1}, r+2^{-m-1})$ intervallumban, azért (6)-ból $n = m+1$-gyel kezdődő n szerinti indukcióval következik, hogy $n > m$ esetén az $(r-2^{-n}, r+2^{-n})$ intervallumban $f_n^{(m+1)}(x) = 0$. Ennélfogva a (7) alatti r helyen

$$f_n^{(k)}(r) = 0 \qquad (n > m,\ k > m). \tag{8}$$

Legyen most $m \geqq k+2$ és tegyük fel, hogy az $[a-2^{-m}, a+2^{-m}]$ intervallumban

$$A \leqq f_m^{(k)}(x) \leqq B \qquad (a-2^{-m} \leqq x \leqq a+2^{-m}).$$

Ekkor (6) alapján $n=m$-mel kezdődő n szerinti indukcióval adódik

$$A \leqq f_n^{(k)}(x) \leqq B \qquad (a-2^{-n} \leqq x \leqq a+2^{-n};\ n \geqq m).$$

Eszerint $n>m \geqq k+2$ esetén $|f_n^{(k)}(a)-f_m^{(k)}(a)|$ nem lehet nagyobb, mint $f_m^{(k)}$ ingadozása az $[a-2^{-m}, a+2^{-m}]$ intervallumban. Másrészt a (6)-ból adódó

$$|f_n^{(k)}(x)-f_n^{(k)}(y)| \leqq 2^{n-1} \int_{-2^{-n}}^{2^{-n}} |f_{n-1}^{(k)}(x+u)-f_{n-1}^{(k)}(y+u)|\, du$$

egyenlőtlenség mutatja, hogy ha $\omega_n^k(\delta)$-val jelöljük $f_n^{(k)}$ folytonossági modulusát, akkor

$$\omega_n^k(\delta) \leqq \omega_{n-1}^k(\delta) \qquad (n>k+2,\ \delta>0). \tag{9}$$

Így $f_m^{(k)}$ ingadozása az $[a-2^{-m}, a+2^{-m}]$ intervallumban, amely nem nagyobb $\omega_m^k(2^{-m+1})$-nél, $m \geqq k+2$ esetén nem lehet nagyobb $\omega_{k+2}^{(k)}(2^{-m+1})$-nél sem, ami viszont rögzített k mellett $f_{k+2}^{(k)}$ egyenletes folytonossága miatt $m \to \infty$ esetén 0-hoz tart. Ez mutatja, hogy adott k mellett az $f_n^{(k)}$ függvények sorozata az egész számegyenesen egyenletesen konvergál $n \to \infty$ esetén, úgyhogy létezik

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

és minden $k \geqq 0$-ra

$$f^{(k)}(x) = \lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(x).$$

Az elmondottakból látszik, hogy f a kívánt tulajdonságú függvény. Ez csakugyan akárhányszor differenciálható, az f_n-ekkel együtt eltűnik a $(-1, 1)$ intervallumon kívül, $f_n(0)=1$ miatt $f(0)=1$, végül (8)-ból következik, hogy a (7) alakú diadikusan racionális r helyen $f^{(k)}(r)=0$, mihelyt $k>m$.

Csiszár Imre

Megjegyzés. Legyenek

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$$

a $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ intervallumban egyenletes eloszlású független valószínűségi változók. Ekkor az előbbi f függvény éppen a

$$\xi_1+2^{-1}\xi_2+\ldots+2^{-n+1}\xi_n+\ldots$$

valószínűségi változó sűrűségfüggvénye.

Csiszár Imre

148. feladat. Adjunk szükséges és elégséges feltételt arra, hogy a

$$0^s, 1^s, \ldots, (m-1)^s$$

számok teljes maradékrendszert alkossanak modulo m. (m és s természetes számok.)

(Pelikán József)

I. megoldás. Nevezzük s-et jó kitevőnek modulo m, ha a $0^s, 1^s, \ldots, (m-1)^s$ számok teljes maradékrendszert alkotnak modulo m, vagy ami ugyanaz, ha $a \not\equiv b \pmod m$ esetén $a^s \not\equiv b^s \pmod m$, ellenkező esetben pedig rossz kitevőnek. Minthogy $s=1$ nyilván minden m modulusra jó kitevő, a továbbiakban csak az $s \geqq 2$ esettel foglalkozunk.

Ha m nem négyzetmentes, akkor minden $s \geqq 2$ kitevő rossz. Valóban, ha $m = p^2 n$ egész p és n mellett, akkor $s \geqq 2$ esetén

$$\left(\frac{m}{p}\right)^s = p^s n^s = m p^{s-2} n^{s-1}$$

folytán

$$\left(\frac{m}{p}\right)^s \equiv 0^s \pmod{m}.$$

Ezért a következőkben feltesszük, hogy m négyzetmentes.

Megvizsgáljuk, hogy a kitevő jellege hogyan változik a modulusok összeszorzásakor.

A) Ha s rossz kitevő az m_1 és m_2 modulusok egyikére, akkor az $m_1 m_2$ modulusra nézve is.

Ha ugyanis s pl. m_1-re nézve rossz, akkor van olyan a és b, hogy $a \not\equiv b \pmod{m_1}$, de $a^s \equiv b^s \pmod{m_1}$. Ekkor $m_2 a \not\equiv m_2 b \pmod{m_1 m_2}$, azonban $(m_2 a)^s \equiv (m_2 b)^s \pmod{m_1 m_2}$.

B) Ha s jó kitevő az m_1 és m_2 modulusra nézve, akkor jó az $m_1 m_2$ modulusra is, hacsak $(m_1, m_2) = 1$.

Valóban, ha $a^s \equiv b^s \pmod{m_1 m_2}$, akkor $a^s \equiv b^s \pmod{m_i}$ $(i = 1, 2)$ is, amiből $a \equiv b \pmod{m_i}$ $(i = 1, 2)$ és $(m_1, m_2) = 1$ folytán $a \equiv b \pmod{m_1 m_2}$ következik.

Mármost A) és B) értelmében s akkor és csak akkor jó kitevő a négyzetmentes m modulusra nézve, ha jó m-nek minden prímtényezőjére nézve. Ezért most a p prímszám-modulus esetét vizsgáljuk.

Legyen p primszám és s jó kitevő a p modulusra nézve. Ha g primitív gyök a p modulusra, akkor $1 \leqq i < j \leqq p-1$ esetén $g^i \not\equiv g^j \pmod{p}$, úgyhogy $g^{is} \not\equiv g^{js} \pmod{p}$. Minthogy $g^{(p-1)s} \equiv 1 \pmod{p}$, azért tehát $1 \leqq i < p-1$ esetén $g^{is} \not\equiv 1 \pmod{p}$, azaz ekkor is nem lehet osztható $(p-1)$-gyel. Ha q közös prímosztója volna s-nek és $(p-1)$-nek, akkor $i = \frac{p-1}{q}$ mellett $is = (p-1)\frac{s}{q}$ adódnék az előbbivel ellentétben. Ha tehát s jó kitevő p-re nézve, akkor szükségképpen $(s, p-1) = 1$.

Megfordítva, ha s és $p-1$ relatív prímek, akkor az is $(1 \leqq i \leqq p-1)$ számok teljes maradékrendszert alkotnak modulo $p-1$, és így g-vel ismét egy primitív gyököt jelölve a p modulusra, a g^{is} $(1 \leqq i \leqq p-1)$ számok mind inkongruensek modulo p, a g^i számok pedig valamilyen sorrendben az $1, 2, \ldots, p-1$ számokkal kongruensek. Ez nyilván egyértelmű azzal, hogy s jó kitevő modulo p.

Végül is tehát azt kapjuk, hogy $s \geqq 2$ akkor és csak akkor jó kitevő az m modulusra nézve, ha m négyzetmentes és az $m = p_1 p_2 \ldots p_k$ jelöléssel s relatív prím a $p_i - 1$ számok mindegyikéhez; az utóbbi feltétel

$$\varphi(m) = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \ldots (p_k - 1)$$

folytán úgy is megfogalmazható, hogy $(s, \varphi(m)) = 1$.

Elek Györgyné

II. megoldás. A feladatban foglalt kérdésnél általánosabban azt vizsgáljuk, hogy ha R véges gyűrű és R^s jelöli az R-beli elemek s-edik hatványainak halmazát (s természetes szám), milyen feltételek mellett lesz $R^s = R$.

A triviális $s = 1$ esetet ismét figyelmen kívül hagyva, ha $s \geqq 2$ és $R^s = R$, akkor R végessége miatt $a \neq b$ $(a, b \in R)$ esetén $a^s \neq b^s$. Ezért speciálisan $a \neq 0$ esetén $a^s \neq 0$ s így $a^2 \neq 0$. Így R-nek nincs nilpotens ideálja, amiből ismét R végessége miatt követ-

kezik, hogy R féligegyszerű. Ebből a Wedderburn—Artin-féle struktúratétel alapján következik, hogy R olyan R_i gyűrűk direkt összege, amelyek mindegyike egy ferdetest feletti teljes mátrixgyűrű. A ferdetest nulla-, ill. egységelemét 0-val, ill. 1-gyel jelölve, az

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \dots 0 \\ -1 & -1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 \end{pmatrix}$$

mátrix négyzete nyilván a nullamátrix, úgyhogy az R_i gyűrűk csak ferdetestek lehetnek. Wedderburn tétele szerint minden véges ferdetest kommutatív, úgyhogy R_i test. Persze $a = a_1 + \dots + a_k$ esetén $(a_i \in R_i)$ $a^s = a_1^s + \dots + a_k^s$, úgyhogy $R^s = R$ akkor és csak akkor áll, ha $R_i^s = R_i$ minden i-re $(1 \leqq i \leqq k)$. Ha R_i elemeinek száma q_i, akkor R_i 0-tól különböző elemei a szorzásra nézve $(q_i - 1)$-edrendű ciklikus csoportot alkotnak. Ebben nyilván akkor és csak akkor lesz különböző elemek s-edik hatványa különböző, ha s és $q_i - 1$ relatív prímek.

Eszerint az $R^s = R$ egyenlőség $s \geqq 2$ mellett akkor és csak akkor áll, ha R véges testek direkt összege, és e testek elemeinek számát q_i-vel jelölve $(1 \leqq i \leqq k)$, $(s, q_i - 1) = 1$ minden i-re.

Fried Ervin

Megjegyzés. Az I. megoldásban megadott feltétel elegendő voltát prímszám-modulus esetére Crelle 1832-ben bebizonyította (l. Dickson: History of the theory of numbers (New York, 1952), I. kötet, 185. o.)

Pelikán József

A 148. feladat megoldását beküldötte még Császár Ákos, Farkas Henrik, Fehér János, Kelemen József és Ratkó István.

149. feladat. Legyen

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (1 + x^k) \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

s x^n együtthatóját $P_n(x)$-ben jelölje a_n. A b_{ik} számokat a következő utasítás értelmezi:

$$b_{ik} = 1, \quad \text{ha} \quad i = \frac{k(k+1)}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_{ik} = 0, \quad \text{ha} \quad i = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

egyébként

$$b_{ik} = b_{i-k-1,k} + b_{i-k-2,k+1} + \dots + b_{0,i-1}.$$

Mutassuk meg, hogy $b_{n0} = a_n$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$.

(Császár Ákos)

Megoldás. Az a_n együttható nyilván az n szám különböző természetes számok összegére való felbontásainak számával egyenlő, a tagok sorrendjét nem tekintve $(n \geqq 1)$. Ha $n = x_1 + \dots + x_r$ egy ilyen felbontás, és benne a tagok csökkenően vannak

rendezve, akkor az $x_{r+1}=0$ és $y_j=x_j-x_{j+1}$ $(1\leqq j\leqq r)$ jelöléseket bevezetve $y_j\geqq 1$ egész szám és nyilván

$$n=\sum_1^r jy_j. \tag{1}$$

Viszont ha az y_j természetes számok eleget tesznek (1)-nek, akkor az

$$x_j=\sum_j^r y_h \qquad (1\leqq j\leqq r)$$

természetes számok csökkenően vannak számozva és összegük n, s belőlük az előbbi átalakítással az adott y_j számok adódnak. Eszerint a_n az (1)-nek eleget tevő $y_1, \ldots, y_r$ pozitív egész számokból álló sorozatok száma (itt már a számok sorrendjét is tekintetbe véve).

Ha az $y_1, \ldots, y_r$ sorozat kielégíti (1)-et és

$$y_1=\ldots=y_{p-1}=1,\ y_p>1 \qquad (1\leqq p\leqq r),$$

akkor az

$$y_1, \ldots, y_{p-1}, y_p-1, y_{p+1}, \ldots, y_r$$

számokat rendre $z_1, \ldots, z_r$-rel jelölve

$$\sum_1^r jz_j=n-p. \tag{2}$$

Világos, hogy ez az átalakítás (1) ama megoldásait, amelyekben először a p-edik helyen szerepel 1-nél nagyobb szám, kölcsönösen egyértelműen átviszi (2) ama megoldásaiba, amelyekben $r\geqq p$ és az első $p-1$ szám 1-gyel egyenlő.

Jelöljük c_{ik}-val a

$$\sum_1^r jy_j=i \tag{3}$$

egyenlet azon természetes számokban való megoldásainak számát, amelyekben $y_1=\ldots=y_k=1$. Ekkor általában

$$c_{ik}=c_{i-k-1,k}+c_{i-k-2,k+1}+\ldots+c_{0,i-1}. \tag{4}$$

Valóban, ha nincs olyan m természetes szám, amelyre

$$i=\sum_1^m j, \tag{5}$$

akkor (3) minden k számú 1-essel kezdődő megoldásában van valahol később 1-nél nagyobb szám is. Tekintsük azokat a megoldásokat, amelyekben először a p-edik helyen áll 1-nél nagyobb szám ($p=k+1, k+2, \ldots$). Ezeket a fent leírt átalakítás kölcsönösen egyértelműen átviszi

$$i-p=\sum_1^r jy_j \tag{6}$$

ama megoldásaiba, amelyekben $r\geqq p$ és az első $p-1$ tag 1-es. Ezek ki is merítik (6) összes, $p-1$ számú 1-essel kezdődő megoldásait, hiszen ha (6)-nak volna $p-1$

számú 1-essel kezdődő és p-nél kevesebb tagú — tehát pontosan $p-1$ tagú — megoldása, akkor e csupa 1-esekből álló megoldásból

$$i-p=\sum_{1}^{p-1} j,$$

azaz

$$i=\sum_{1}^{p} j$$

adódnék, úgyhogy (5) mégis teljesülne $m=p$ mellett. Eszerint a most vizsgált megoldások száma $c_{i-p,\,p-1}$. Ezt p szóba jövő értékeire alkalmazva adódik (4); itt a jobb oldal utolsó tagjai általában 0-val egyenlők (az utolsó pl. biztosan az), hiszen adott k esetén egy k számú 1-essel kezdődő s így biztosan legalább k tagú sorozatnak megfelelő (3) alakú összeg értéke legalább $\sum_{1}^{k} j=\frac{k(k+1)}{2}$, úgyhogy ennél kisebb i esetén $c_{ik}=0$.

Ha (5) teljesül egy (s akkor pontosan egy) m természetes számra, akkor (3)-nak $m>k$ esetén van k számú 1-essel kezdődő és 1-nél nagyobb számot nem is tartalmazó (ti. m számú 1-esből álló) megoldása. Az ettől különböző megoldásokat ismét úgy csoportosítva, hogy egy csoportba foglaljuk azokat, amelyekben először a p-edik helyen áll 1-nél nagyobb szám, számukra a fenti meggondolással általában ismét $c_{i-p,\,p-1}$ adódik. Kivétel a $p=m$ eset, amikor az átalakítás nem vezet el (6)-nak minden, $p-1$ számú 1-essel kezdődő megoldásához, csupán a legalább p tagúakhoz, úgyhogy a $p=m$ esetben a p-nek megfelelő csoport megoldásainak száma kisebb $c_{i-p,\,p-1}$-nél, mégpedig éppen 1-gyel kevesebb, hiszen (6)-nak egyetlen, $p-1$ számú 1-esből álló megoldása nem állt elő az átalakítással. Végül is azt kapjuk, hogy (4) akkor is áll, ha (5) teljesül és $m>k$.

Végül is (4) csak abban az esetben nem áll fenn, ha (5) $m=k$ mellett teljesül, azaz ha $i=\frac{k(k+1)}{2}$ (láttuk ugyanis az előbb, hogy ha i adott k mellett ennél kisebb, akkor $c_{ik}=0$, és (4) jobb oldalának tagjai annál inkább eltűnnek). Ekkor viszont nyilvánvalóan $c_{ik}=1$, hiszen (3)-nak nem lehet más k számú 1-essel kezdődő megoldása, mint a k számú 1-esből álló.

Az elmondottakból látszik, hogy a c_{ik} számok eleget tesznek ugyanazoknak az összefüggéseknek, mint a feladatban szereplő b_{ik} számok. Ezek az összefüggések viszont egyértelműen meghatározzák a b_{ik}-kat. Valóban, az első utasításból $k=0$ mellett $b_{00}=1$, a másodikból pedig $k>0$ esetén $b_{0k}=0$ adódik. Ha viszont b_{jk} már ismeretes $0\leqq j<i$ és $k=0, 1, 2, \ldots$ esetén, akkor b_{ik} vagy az első, vagy a harmadik utasításból kiszámítható, az utóbbit természetesen úgy értve, hogy ha már $i-k-1$ is negatív, akkor a jobb oldalon álló összeg „üres" és értéke 0.

Ennélfogva $b_{ik}=c_{ik}$ minden nem-negatív egész i és k indexre, speciálisan $b_{n0}=c_{n0}$. Csakhogy c_{n0} nem más, mint (1) összes természetes számokban való megoldásainak száma, és láttuk, hogy ugyanezzel egyenlő a_n is. Így $a_n=b_{n0}$, amint a feladat állította.

Farkas Henrik

PROBLÈMES PROPOSÉS

159. Posons $B_0 = 1$ et

$$B_n = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} B_k \sigma(n-k) \qquad (n>0)$$

où $\sigma(m)$ désigne la somme des diviseurs positifs du nombre entier m. Démontrer que

$$B_n = \begin{cases} (-1)^s, & \text{si } n = \dfrac{3s^2+s}{2} \qquad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

J. Fehér

160. Déterminer tous les polynômes dont tous les coefficients sont égaux à $+1$ ou à -1 et dont toutes les racines sont réelles.

K. Corrádi et *I. Kátai*

161. Démontrer que, pour un groupe abélien G donné, il existe un groupe dont le sous-groupe commutateur est isomorphe à G.

E. Fried

TÁRSULATI ÉLET

JELENTÉS A BEKE MANÓ EMLÉKDÍJ TIZENHATODIK KIOSZTÁSÁRÓL

Az 1966. évi Beke Manó emlékdíj odaítélésére az Elnökség bizottságot küldött ki, amelynek tagjai: Gádor Endréné, Gencwein Ferenc, Marót Rezső, dr. Mester István, dr. Soós Paula, Surányi János, Veress Jenő és Bakos Tibor előadó.

A Bizottság április 25-én és folytatólag május 17-én tartott ülésén foglalkozott a beérkezett javaslatokkal és a kiegészítő információkkal. Munkájában szem előtt tartotta, hogy a Társulat a díjak odaítélésében elsősorban a matematika oktatása és népszerűsítése terén elért kiváló eredményeket kívánja jutalmazni.

A Bizottság a következő határozatot hozta:

3000—3000 Ft jutalomban részesíti dr. Lánczi Ivánnét és Reiman Istvánt, akik mindketten az ELTE Természettudományi Karának oktatói, továbbá 1500—1500 Ft jutalomban Barabás Saroltát, a győri Kazinczy Ferenc Gimnázium nyugalmazott tanárát, Dr. Darkó Bélát, a miskolci Földes Ferenc Gimnázium tanárát, dr. Hanzó Lajosnét, a szarvasi II. sz. általános iskola tanárát és Szivás Jánost, a szombathelyi Nagy Lajos Gimnázium tanárát.

INDOKOLÁS

Dr. Lánczi Ivánné egyetemi adjunktus. Tanulmányainak befejezése óta az Eötvös Loránd Tudományegyetem Algebra és Számelmélet tanszékének oktatója, 1959 óta a Tudományos Ismeretterjesztő Társulat matematikai szakosztályának titkára. Tudományos munkájával — melynek ismertetése itt nem feladatunk — elnyerte a doktori fokozatot.

Oktató munkáját nagy lelkesedéssel, kitűnően végzi. Egyénileg is sokat foglalkozik a hallgatókkal, a nappali, esti és levelező oktatásban egyaránt. Fáradhatatlanul keresi a minél eredményesebb módszereket és formákat, és készségesen segíti a többi oktató munkáját is. Mindezzel hozzájárul a felnövő tanárgárda hivatásszeretetre neveléséhez és eredményes szakmai felkészítéséhez. A számelméleti előadásokhoz jegyzetet készített.

Közvetlen tudománynépszerűsítő munkájából legkiemelkedőbb a József Attila Szabadegyetem matematikai sorozatának a szervezése. Neki köszönhető, hogy ezek a sorozatok tartalomban és formában változatosak, és mindig komoly érdeklődő hallgatóságot vonzanak. Maga is gyakran tart ezeken előadásokat, nagy sikerrel. — Az előadások válogatott anyaga megjelenik, ebben egy számelméleti előadása szerepel.

Ezeken kívül is számos sikeres előadást tartott, többek közt a Társulat diákdélutánján, és vidékén pl. a nagykőrösi gimnázium szakkörében.

A matematika megbecsülésének és az iránta való érdeklődés fokozásának nagy szolgálatot tett a televízió „Ki miben tudós" adásai keretében a matematikai vetélkedők két ízbeni megszervezésével. A megfelelő szervezeti formák kialakításával, a feladatoknak társszerzőkkel együtt végzett alkalmas kiválogatásával és a vetélkedők határozott, de jó hangulatban történő vezetésével döntő része volt abban, hogy ezek az adások mindkét alkalommal messze kimagaslottak a többi tárgyakéi közül és osztatlan sikert arattak. — A két „Ki miben tudós" feladatanyagának kiadása — társszerzőkkel — folyamatban van.

Reiman István egyetemi tanulmányait 1953-ban fejezte be, azóta az Eötvös Loránd Tudományegyetem ábrázoló és projektív geometriai tanszékének dolgozója, 1965-től adakémiai álláson.

Oktatási tevékenysége mellett jelentős munkát végez a tanárképzés területén, továbbképző előadásokat tart tanárok, vezető tanárok részére, részt vett az egyetemi reform kidolgozásában, a szakmódszertani csoport munkájában, kidolgozta a gyakorlatvezetés módszertanát. Tapasztalatszerzés végett több éven át egy-egy középiskolai osztályt is tanított.

Alapos tudása, segítőkészsége és szerénysége sokakat bátorít, hogy tanácsért hozzá fordul janak.

Középiskolai szakköri füzetet írt „Geometriai feladatok megoldása a komplex számsíkon" címmel. Jegyzet-alakban jelent meg az ELTE elemi matematikai gyakorlataihoz szerkesztett feladatgyűjteménye. Társszerzője a „Geometriai feladatok gyűjteménye" c. kiadványnak, a könyv planimetriai része az ő munkája.

Kiemelkedő munkát végez a Társulat keretében Budapesten működő Ifjúsági Matematikai Kör patrónusaként, valamint — ehhez kapcsolódva — a nemzetközi matematikai olimpiákra kiválasztott versenyzők keretének felkészítésében, mint a 2—3 hetes edzőtáborok vezetője. Központi szakkört is vezet. Rendszeresen támogatja a Társulat pécsi tagozatának szakkörét is. Munkájának eredményei a fiatalok olimpiai jó helyezéseiben mutatkoznak. Ez is hozzájárul a magyar matematika oktatás külföldi elismeréséhez. Ezirányú munkájának tudatosítása céljára kidolgozta a kiváló tanulókkal való foglalkozás módszerének elveit.

Munkásságáért a Társulat már egyszer kitüntette a Beke-díj II. fokozatával. A Művelődésügyi Minisztérium 1965-ben kiváló tanári oklevéllel tüntette ki.

BARABÁS SAROLTA a katedrára való első fellépése után egyfolytában 30 éven át működött ugyanabban az iskolában, a győri Kazinczy Ferenc Gimnáziumban, és innét ment nyugdíjba 1965-ben.

Mindkét szaktárgyát nagy hivatásszeretettel tanította, de közülük is különös kedvvel, lelkesedéssel a matematikát. Az iskola matematikai munkaközösségének majdnem két évtizeden át volt a vezetője, ebben szerzett kiváló érdemeket. A fiatal tanárok támogatása, irányítása, az ő tanárrá érlelésük Barabás Sarolta értékes életművének legkimagaslóbb része.

Szép eredményeket ért el az osztályon kívüli munkában is. Szakköri munkájával „minőségi termelésre" mutatott példát. Önzetlenül foglalkozott diákjaival egyénileg is, bármikor, fáradságot, időt nem kímélve.

Érdeklődést keltő, hivatástudatot ébresztő munkája, lelkesítő példája több tanítványát vonzotta a matematikatanári pályára.

Sajnálatos a korai nyugdíjaztatása. Munkájára most is szükség lenne nemcsak iskolájában, hanem a megyei matematikatanítási színvonal emelése érdekében is.

DR. DARKÓ BÉLA, a miskolci Földes Ferenc Gimnázium tanára, idén tölti be tanári szolgálatának 40. évét. Anyaiskolája mindvégig ez az intézet volt, illetőleg elődje, a Református Gimnázium, — működése azonban gyakran túllépett az iskola keretén.

Oktató és nevelő munkája eredményességét mutatja, hogy volt tanítványai — köztük neves tudósok is — szeretettel és hálás megbecsüléssel veszik körül. Ma is vezeti az iskola szakkörét, több éven át vezette az iskolai és a városi matematikai munkaközösséget, a szakmai továbbképzést. A megbeszélések során számos előadást és bemutató tanítást tartott, valamint egyénileg is sok segítséget nyújtott kezdő kollégáinak.

Sikeresen működött az esti és levelező oktatásban, módszereit hozzáidomítva az itt felmerülő problémákhoz. A Nehézipari Műszaki Egyetem megindulásakor segítette a Matematikai Tanszék munkáját.

Sűrűn vett részt tankönyvek, pályázatok, versenyek elbírálásában, és mindig igen lelkiismeretes munkát végzett.

Számos előadást tartott a Társulat borsodi tagozatában, ismeretterjesztő, tudománynépszerűsítő előadásokat a TIT keretében, sok különböző tárgykörből.

1957-ben „kiváló tanár" kitüntetést kapott.

DR. HANZÓ LAJOSNÉ, a szarvasi II. sz. általános iskola tanára. Munkáját a tanulók és a tantárgy iránti szeretet, lelkesedés és szorgalom jellemzi. Óravezetésével tanulóit magas fokú aktivitásra készteti. Úgy juttatja őket az új fogalmak, törvények birtokába, hogy az az érzésük, maguk jöttek rá az összefüggésekre. Így a siker élménye növeli ambíciójukat. Tanulói a továbbtanulásban sikeresen megállják helyüket, talán nincs is példa, hogy tovább tanuló növendéke rontott volna eredményén.

Szenvedélyesen keresi az újat, a jobbat, de mindig a tanulók érdekében. Kellő válogatással kipróbálja és átveszi a hallott kezdeményezéseket, elhagyva a fölöslegeseket. Sikeres kísérleteket folytatott a programozott oktatásban, előbb egy-egy órányi anyaggal, majd egy teljes tanítási egységgel. Felhasználja több, az NDK-ban szerzett tapasztalatát, az ott megismert kollégákkal most is levelezésben áll.

Vezetésével igen szép munka folyik az iskolában és a járásban a szemléltetési lehetőségek minél szélesebb körű felhasználására. Számos eszközt készítettek a fogalmak kialakításának, valamint a begyakorlásnak a könnyítésére. Szervesen beépítik munkájukba az iskolatelevízió adásait, és észrevételeiket, javaslataikat — felkérés alapján — eljuttatják a szervezőkhöz.

A lehetőségek keretei között szakkört is vezet, az érdeklődőkkel a tananyag számos távolabbi vonatkozását dolgozza fel.

Szivás János, a szombathelyi Nagy Lajos Gimnázium tanára, immár több mint két évtizedes oktató-nevelői pályafutása alatt sokrétű, igen eredményes munkát végzett. Több tanítványa ért el számottevő eredményt matematikai versenyeken, több volt diákja máris felsőfokú tanintézetnél működik.

Kiemelkedő munkássága alapján előbb 1949—1952-ig kapott megbízást Vas megye általános és középfokú iskoláiban a matematikatanítás szakfelügyeletére, és 1964 óta ismét szakfelügyelő. Különös gonddal foglalkozik a középfokú iskoláknál működő, általános iskolai képesítéssel rendelkező kartársaival, de minden más hozzá fordulónak is készségesen segít, tanácsot ad. Szeretetreméltó egyéniségének köszönheti, hogy közmegbecsülésnek, általános népszerűségnek örvend.

Több éven át vezette a pedagógiai főiskolások sok újszerű munkát igénylő konzultációit is.

Ő a Társulat szombathelyi tagozatának jelenlegi titkára is, és ügyesen, eredményesen összekapcsolja munkáját a szakfelügyelői tevékenységével, a matematikai klubdélutánokat a továbbképzéssel. Jó szervező munkája mellett maga is több előadást tartott. Példamutató munkát végez a különböző típusú versenyek szervezésében, feladatkitűzésében, elbírálásában.

Rademacher-Toeplitz: Von Zahlen und Figuren című munkáját magyarra fordította. A megyei tanácsi művelődésügyi osztálya pályázatán I. díjat nyert „Az analitikus geometria tanításának néhány problémája" c. munkájával.

Beke-díj Bizottság

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT BUDAPESTI TAGOZATÁNAK ELŐADÁSAI 1966. ÉVBEN

Január 4—5.
Az Ifjúsági Matematikai Kör ankétja.
Hajós György: A poliéderek egy érdekes fajtájáról.
Feladatmegoldások. (Előre kiküldött feladatok megbeszélése).
Pelikán József: A sík pontjai és egyenesei között értelmezett műveletek és a geometria egy lehetséges felépítése.

Január 15.
Molnár Ernő: Egész számokban megoldható egyenletek és egyenletrendszerek. I. rész. Középiskolai matematikai délután.

Január 28.
Hoffman György: Egy elemi síkgeometriai problémáról.
Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása.

Január 28.
Dobó Andor: A megbízhatóságelmélet alapfogalmai és módszerei.
Az Alkalmazott Matematikai Szakosztály előadása.

Február 12.
Molnár Ernő: Egész számokban megoldható egyenletek és egyenletrendszerek. II. rész. Középiskolai matematikai délután.

Február 18.
Vita a vonal definiálásáról. A vitát vezette: Pelikán József.
Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása.

Február 18.
A Schweitzer Miklós matematikai emlékverseny eredményhirdetése és díjkiosztása. A feladatok megoldását Daróczy Zoltán ismertette.

Február 25.
Makkai Mihály: A transzfinit indukció szerepéről formális rendszerekben.

Március 4.
Kővári Károly: Kúpszeletek tanítása vektorokkal.
Előadás középiskolai tanárok számára.

Március 11.
Feladatmegoldások. Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása.

Március 18.
Adler György: A rugalmasságtan Signorini-féle problémája.

Március 25.

W. NÖBAUER (Bécs): Véges csoportok polinompermutációiról.

Március 26.

T. SÓS VERA: Végtelen műveletsorozatokról.
Középiskolai matematikai délután.

Április 5—6.

Az Ifjúsági Matematikai Kör kétnapos összejövetele.
HAJNAL ANDRÁS: Az axiomatikus módszerről.
Feladatmegoldások. Előre kiküldött feladatok alapján.
BERKES ISTVÁN: Egyenletek megoldása az egész számok körében.
PÓSA LAJOS: Egy gráfelméleti problémáról.

Április 20.

R. THEODORESCU (Románia): Teljes kapcsolatú láncok.
A MTA Matematikai Kutató Intézetével közös rendezésben.

Április 29.

Az Alkalmazott Matematikai Szakosztály vitadélutánja.
POGÁNY CSABA: Ahogy a matematikusok alkalmazzák — és ahogy alkalmazni kellene. (Problémák a matematika jelenlegi alkalmazási módjával és a matematika alkalmazásával foglalkozók matematikai szakképzettségével kapcsolatban.) Az előadást vita követte.

Április 29.

JÁNOSSY LAJOS: Az ortogonális és a Lorentz-transzformáció egyes algebrai tulajdonságai és azok fizikai jelentése.

Április 30.

SZÁSZ DOMOKOS: Játékok matematikus szemmel.
Középiskolai matematikai délután.

Május 6.

Az Országos Tanulmányi verseny döntőjének feladatai.
Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása.

Május 13.

HAJNAL ANDRÁS és JUHÁSZ ISTVÁN: Kombinatorikus halmazelméleti módszerek néhány alkalmazása a topologikus terek elméletében.

Május 20.

O. H. KEGEL (NSZK): Simple locally finite groups. (Egyszerű, lokálisan véges csoportok)

Május 21.

POGÁTS FERENC: Az egyszerű polyederek családfája.
Az 1966. évi tanárképző főiskolák matematikai versenyének díjkiosztása.

Május 21.

POGÁTS FERENC: Az egyszerű poliéderek családfája.
Középiskolai matematikai délután.

Június 3.

RUZSA IMRE: Problémák a halmazelmélet és a matematikai logika iskolai tanításában. Az Oktatási Szakosztály előadása. Az előadást követően megválasztották a budapesti küldötteket a Társulat július 1-i közgyűlésére.

Június 4.

Az 1966. évi Arany Dániel verseny eredményhirdetése és díjkiosztása. Az I. osztályos feladatokat FRIED ERVIN és WIEGANDT RICHÁRD, a II. osztályos feladatokat BÖRÖCZKY KÁROLY és LŐRINCZ PÁL ismertették. Ezt követte a Középiskolai Matematikai Lapok pályázatának díjkiosztása.

Június 8.

J. NEYMAN (USA): Összetett hipotézisek lokálisan optimális aszimptotikus próbái. (A MTA III. Osztályával közös rendezés).

Június 10.

J. NEYMAN (USA) A mesterséges esőkeltés problémáinak jelenlegi állásáról. (A MTA III. Osztályával közös rendezés).

Június 10.
M. KATETOV (Csehszlovákia): Kvázi-uniform terek és leképezésterek.

Június 15.
E. LUKÁCS (USA): Szimmetrikus stabilis folyamatok jellemzéséről.
A MTA Matematikai Kutató Intézetével közös rendezésben.

Július 1.
Közgyűlés. (Beszámolót lásd az előző számban).

Július 4—7.
Vándorgyűlés Szombathelyen. Az előadásokat lásd a szombathelyi előadások között.

Szeptember 5—9.
Gráfelméleti kollokvium. Az előadásokat lásd 159. oldalon.

Szeptember 13.
S. FALK (NSZK): A műszaki mechanika numerikus módszerei és azok alkalmazása a mérnöki gyakorlatban. Tanfolyam a Matematika Alkalmazási Szakosztály rendezésében. A tanfolyam keretében összesen 10 előadás hangzott el. Az előadásokról jegyzet készült.

Szeptember 19.
F. HIRZEBRUCH (NSZK): Csomók, egzotikus gömbök és algebrai sokaságok izolált szingularitásai.
A MTA Matematikai Kutató Intézetével közös rendezésben.

Szeptember 23—25.
Fiatal matematikusok összejövetele Bánkúton, a Tudományos- és Matematika Alkalmazási Szakosztály rendezésében.
ELBERT ÁRPÁD: Az $y''+g(y)y=0$ differenciálegyenlet zérushelyeinek eloszlása.
PETRUSKA GYÖRGY: Egy apró probléma.
BÖRÖCZKY KÁROLY: Telített körrendszerek.
SZEMERÉDI ENDRE: Oszthatósági relációk az egész számok sorozatában.
SZÁSZ DOMOKOS: A kozmológia egy sztochasztikus modellje.
BÁRTFAI PÁL: Bolyongások pályáinak eltérése.
VIRÁG ILDIKÓ: A felhalmozási és fogyasztási arány problémája.
PETRUSKA GYÖRGY és SZÁSZ DOMOKOS: Mértékek konvolúcióhatványának konvergenciája.
JUHÁSZ ISTVÁN: Halmazelméleti módszerek a topológiában és viszont.
RUPP MÁRTA és TUSNÁDI GÁBOR: Egy alkalmazott matematikai problémáról.
KATONA GYULA és TUSNÁDI GÁBOR: Információarány jelsorozatok átkódolásánál.
KÁTAI IMRE: Néhány számelméleti problémáról.
VÉRTESI PÉTER: A Jackson interpolációról.
MIHÁLYFFY LÁSZLÓ: Megjegyzés a rangcsökkentéssel történő mátrixinverzió módszeréről.
BOLLOBÁS BÉLA: Extrém gráfok meghatározása súlyozással.

Szeptember 30.
Beszámoló a szófiai VIII. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról.
Az Ifjúsági Matematikai Kör ülése.

Szeptember 30.
HOANG TUY (VDK): Nagyméretű lineáris programozási feladatokról.

Október 7.
HOANG TUY (VDK): A hálózatok elméletéről és alkalmazásáról.

Otóber 8.
HORVAY KATALIN: Néhány geometriai feladat.
Középiskolai matematikai délután.

Október 11.
G. SZEKERES (Ausztrália): Többdimenziós lánctörtek.

Október 17.
B. V. GNEDENKO (Szovjetúnió): A megbízhatóság-elmélet statisztikai módszerei.
A Gépipari Tudományos Egyesülettel és a TIT-tel közös rendezésben.

Október 21.
CZÁCH LÁSZLÓ: Lineáris operátorok mátrix reprezentációja.

Október 21.
KÁDAS SÁNDOR: A Bolyai geometriáról.

Október 29.
A Kürschák József tanulóverseny megrendezése.

November 4.
ANDRÁSFAI BÉLA: Kritikus gráfokról.

November 11.
Feladatmegoldások. Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása.

November 11.
FODOR GÉZA—HAJNAL ANDRÁS: Regresszív függvények és valós értékek.

November 12.
CORRÁDI KERESZTÉLY: A térkép színezésről. Középiskolai matematikai délután.

November 16.
W. TÜRKE (NDK): Kombinatorika tanítása az általános iskolában.
A MTA Matematikai Kutató Intézete Didaktikai Csoportjával közös rendezésben.

November 18.
RÉNYI ALFRÉD: Kvalitatív és kvantitatív függetlenség.

November 25.
M. HUSEK (Csehszlovákia): Néhány topologikus módszer kategória-elméleti általánosításáról.

December 2.
CSIRMAZ LÁSZLÓ: Sokszögek és poliéderek átdarabolása.
Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása.

December 2.
D. W. CROWE (USA): Véges hiperbolikus síkok.

December 6.
P. HILTON (Anglia): Egy additív korrespondenciákra vonatkozó elmélet.

December 9.
A Kürschák József emlékverseny eredményhirdetése. A versenyfeladatokat HAJÓS GYÖRGY ismertette. Az előadás előtt BAKOS TIBOR felelős szerkesztő átadta a Középiskolai Matematikai Lapok 1965/66 tanévi pontversenyének díjait.

December 19.
Az 1966. évi SCHWEITZER MIKLÓS emlékverseny eredményhirdetése.
A versenyfeladatokat SZÁSZ DOMOKOS ismertette.

December 22.
M. STOKA (Románia): Lefedési problémákról.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT DEBRECENI TAGOZATÁNAK ELŐADÁSAI 1966 ÉVBEN

Január 17.
SZÉNÁSSY BARNA: A kibernetika néhány történeti előzménye.
Diákelőadás Hajdúböszörményben.

Február 21.
KALMÁR LÁSZLÓ: Egy, a homonomiák kiküszöbölése lehetőségének vizsgálatára alkalmas algebrai struktúráról.

Február 22.
LERCH JÓZSEF: Matematikai módszerek alkalmazása a kohó- és gépiparban (ELIOT 803 számológép).

Március 29.
A. E. INGHAM: On the high indices theorem in the theory of Borel summability.

Április 19.
KÁNTOR SÁNDOR: Síkgeometriai feladatok megoldási módszerei. Berettyóújfaluban, a TIT-tel közösen.

Április 19.
BÉLTEKY KÁROLY: Vektorok tanítása a középiskolában.
Berettyóújfaluban, a TIT-tel közös rendezésben, tanári továbbképző előadás.

Április 26.
KÁNTOR SÁNDOR: Síkgeometriai szerkesztési feladatok.
A TIT-tel közös előadás, Hajdúböszörményben.

Április 26.
SZÉNÁSSY BARNA: Tapasztalatok az egyetemi matematikai felvétellel kapcsolatban.
A TIT-tel közös előadás Hajdúböszörményben.

Április 26.
SZODORAY ERZSÉBET: Geometriai szerkesztések. TIT-tel közös előadás Hajdúnánáson.

Április 26.
BÉLTEKY KÁROLY: A vektortér fogalmának axiomatikus bevezetése.
TIT-tel közös, tanári továbbképző előadás Hajdúnánáson.

Május 19.
MOLNÁR JÓZSEF: Térigényes rendszerekről.

Május 21.
HAJÓS GYÖRGY: Maximális terület körülkerítése egybevágó konvex idomokkal.

Szeptember 28.
REINER FRITZSCHE: Über gewisse Modulfunktionen 2. Grades, welche rationale Funktionkörper bilden.

Szeptember 28.
LUTZ PROHASKA: Über Untergruppen mit ausgezeichneten Repräsentantensystemen.

Október 20.
WLADIMIR VRANIC: Anwendung der Dualität in der Theorie der Korrelation.

Október 21.
WLADIMIR VRANIC: Statistische Untersuchungen der kroatisch-serbisch Sprache.

Október 27.
CAZACU COSTICA: Testelmélet és matematikai logika.

November 3.
MILAN KOLIBIAR: Fixpunkte in geordneten Mengen.

November 16.
MIROSLAV HUSEK: Topological aspects of the theory of categories.

November 18.
STEINFELD OTTÓ: A komplett 0-egyszerű félcsoportok egy általánosításáról.

November 24.
LAJKÓ KÁROLY—SZABÓ GYULA—KULTSÁR LEVENTE: Az 1966. évi Schweitzer Miklós matematikai verseny feladatainak megoldásairól.

December 17.
T. SÓS VERA: Mátrixok permanenséről.
TURÁN PÁL: Újabb eredmények a statisztikus csoportelméletben.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT SZEGEDI TAGOZATÁNAK ELŐADÁSAI

1964-ben

Március 13.
SOÓS GYULA: A lineáris összefüggés fogalma.

Március 20.
MAKKAY MIHÁLY: E. W. Beth egy tételéről.

Április 7.
N. DINCULEANU (Románia): Vector measures defined by densities.

Április 17.
J. L. B. COOPER (Anglia): The representation of functions as Fourier and Laplace transforms.

Május 4.
G. PAZDERSKI (NDK): Über die maximale Untergruppen von endlichen Gruppen.

Május 15.
SZÉP JENŐ: *n*-személyes koalíciómentes játékok.

Július 7.
H. J. WEINERT (NDK): Über Algebren und monomialen Ringe.

Szeptember 10.
FIDRICH ILONA: Tömegkiszolgálás-elméleti problémák.
(MTESZ-szel közös előadás).

Szeptember 25.
M. A. NEUMARK (Szovjetunió): Kommutative symmetrische Algebren und unitäre Darstellungen lokal kompakter Gruppen im Raume π.

Szeptember 29.
H. KARLGREN (Svédország): Reihenfolgenfragen in der Linguistik.
Magyar Nyelvtudományi Társaság Szegedi Tagozatával közös előadás.

Október 10.
C. FOIAŞ (România): Ergodikus transzformációkról.

November 12.
VARGA TAMÁS: A matematikaoktatás korszerűsítése néhány külföldi országban.

November 23.
GR. C. MOISIL (România): Aléas de continuité dans les circuits de commutation. I.

November 25.
GR. C. MOISIL (România): Aléas de continuité dans les circuits de commutation. II.

1965-ben

Április 15.
RÉNYI ALFRÉD: Az információelmélet alkalmazása a statisztikában.

Április 24.
J. L. NICOLESCU: On a property of the Gateaux differential.

Május 11.
P. HALMOS: Operátorok invariáns altereiről.

Október 9.
MARIA COROI NEDELCU: Sur une méthode d'analyse et synthese des sans contacts où on tient compte du phenomène du hazard.

Október 29.
V. B. KOROTKOV (Novoszibirszk): Integralnüe operatori sz jadrom Karlemana.

November 19.
G. MARINESCU (Bukarest): Espaces.

December 3.
V. A. PLISS (Leningrád): Stabilitási kérdésekről.
PRÉKOPA ANDRÁS: Véletlen determinánsok.

December 15.
A. G. KUROS: A csoportelmélet fejlődése az utolsó 15 évben.

December 18.
ARATÓ MÁTYÁS: Idősorok kiértékelésének megbízhatóságáról.

Szeptember 24.
SÁRA ATTILA: Gyors működésű digitális elektronikus számológép működése.
BERECZKI ILONA: Digitális számológépek programozása.
VARGA TIBOR: Az M-3-M elektronikus számológép bemutatása.
A Magyar Elektrotechnikai Egyesület Szegedi Csoportjával közös rendezésben.

*

A tanévben átlag kéthetenként középiskolai matematikai délutánokat tartott a tagozat, PINTÉR LAJOS adjunktus irányításával. Az Ifjú Matematikusok Körében tömörült középiskolai tanulók KALMÁR LÁSZLÓ akadémikus vezetésével a gyorsműködésű elektronikus számológép elméletének és gyakorlatának elemeivel ismerkedtek meg.

1966-ban

Január 4.
CIPRIAN FOIAŞ: Unicity theorem for the heat equation.

Február 18.
POLLÁK GYÖRGY—MEGYESI LÁSZLÓ: Főideálfélcsoportok.

Február 24.
V. M. GLUSKOV: Az automaták algebrai elmélete és a mikroprogramok formális traszformációja.

Február 25.
MEGYESI LÁSZLÓ: Főideálfélcsoportok.

Március 4.
SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA: Riesz Frigyes, az ember és matematikus.

Március 11.
GÉCSEG FERENC: Automataleképezések csoportjairól.

Március 15.
V. I. DANYILOV DANYILJON: Gazdasági rendszerek optimalizációjának elméleti kérdései.

Március 18.
POLLÁK GYÖRGY: Félcsoportok gráfjai.

Március 24.
A. E. INGHAM (Cambridge): On the high indices theorem in the theory of Borel summability.

Március 25.
POLLÁK GYÖRGY: Félcsoportok gráfjainak átmérője.

Április 1.
CSÁKÁNY BÉLA: Csoportok gráfjainak átmérője.

Április 14.
GÁL JÁNOS: Az elektronikus számológép működése és alkalmazásai.

Április 15.
STEINFELD OTTÓ: A komplett 0-egyszerű félcsoportok egy általánosításáról.

Április 22.
CSÁKÁNY BÉLA: Megoldatlan csoportelméleti problémák.

Április 29.
E. A. BEHRENS (Frankfurt am Main): Nullteilerfreie quasi-einreilige Halbgruppen.

Május 6.
CSÁKÁNY BÉLA: Megoldatlan csoportelméleti problémák.

Május 13.
POLLÁK GYÖRGY—MEGYESI LÁSZLÓ: Páratlan tökéletes számokra vonatkozó vizsgálatok.

Május 13.
N. F. SZESZKIN (Szverdlovszk): Abel-csoportok szorzatára bontható csoportokról.

Május 20.
RÉDEI LÁSZLÓ: Hézagos polinomok véges test felett.

Szeptember 17.
H. J. WEINERT (Potsdam): Strukturerweiterungen durch nichtkommutative Quotientbildung.

Szeptember 30.
H. LUGOWSKI (Potsdam): Rendezett félmodulusokról és félgyűrűkről.

November 25.
RÉDEI LÁSZLÓ: Hézagos polinomok véges test felett. I.

December 2.
RÉDEI LÁSZLÓ: Hézagos polinomok véges test felett. II.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT BORSOD MEGYEI TAGOZATÁNAK ELŐADÁSAI 1966. ÉVBEN

Január 14.
Csősz Rózsa: Oszthatóság.
Az Ifjú Matematiksok Köre előadása.

Február 3.
Salánki József: Az elektronikus számítógépek elve; felhasználási területeik.
A Diákszakosztály előadása.

Február 4.
Csősz Rózsa: Szélsőértékfeladatok elemi megoldásai. A Diákszakosztály előadása.

Február 8.
Hidadi Károly: Körszerkesztések. A Diákszakosztály előadása.

Február 9.
Darkó Béla: Aszöveges egyenletek tanításáról. A Középiskolai Oktatási Szakosztály előadása.

Február 11.
Drahos István: Kapcsolt fogfelületek görbületi viszonyai hengeres és kúpfogaskerekeknél, valamint hengeres csigahajtásoknál.

Február 18.
Eisner Rudolf: Raktározási problémák matematikai vizsgálata.
Műszaki Matematikai Szakosztály rendezése.

Február 24.
Kálmán László: A jártasság és készség fogalmának tisztázása az általános iskolai matematikaoktatás anyagában. Az Általános Iskolai Szakosztály rendezése.

Február 25.
Csősz Róza: Magasabbfokú egyenletrendszerek. Ifjú Matematikusok Köre előadása.

Február 25.
Vincze Endre: Lineáris differenciálegyenletek „karakterisztikus" egyenleteiről.

Március 8.
Erdélyi Zoltán: Versenyfeladatok megoldása. Ifjú Matematikusok Köre előadása.

Március 11.
Obádovics J. Gyula: Egyenletrendszerek gépi numerikus megoldása.

Március 18.
Csősz Róza: Magasabbfokú egyenletrendszerek II. Ifjú Matematikusok Köre előadása.

Március 18.
Frey Tamás: Numerikus módszerek optimalizálásának problémája.

Március 23.
Szóda Lajos: A kibernetika alapjai.

Április 1.
Czibere Tibor: A komplexváltozós függvények áramlástani problémáiról.

Április 6.
Gáspár Gyula: Közép- és felsőfokú matematikai oktatásunk néhány időszerű problémája.

Április 6.
Petrich Géza: Az ábrázoló geometria elemei az I. gimnáziumban.
Középiskolai Oktatási Szakosztály rendezése.

Április 6.
Cornides István: A fizikatanítás aktuális problémái.
Középiskolai Oktatási Szakosztály rendezése.

Április 15.
Majthay Antal: Nemlineáris programozási módszerek.

Április 15.
Csősz Róza: Egyenlőtlenségek. A Diákszakosztály rendezése.

Április 19.
DRAHOS ISTVÁN: A geometriai szerkesztések eszközei. A diákszakosztály rendezése.

Április 21.
HNISZ LÁSZLÓ: A matematikai szakkörök munkája és feladatai az általános iskolában. Általános Iskolai Szakosztály rendezése.

Április 22.
HARASZTI REZSŐ: Konpolaritású másodrendű felületek.

Május 13.
VARGA ISTVÁN: A gépgyártásban felmerülő néhány matematikai problémáról. Műszaki Matematikai Szakosztály rendezése.

Október 2.
Tapasztalatcsere látogatás Ózdon a József Attila Gimnáziumban és az Ózdi Kohászati Művekben.

Október 11.
CSŐSZ RÓZA: Hétköznapok matematikája. Diákszakosztály előadása.

Október 14.
HOSSZÚ MIKLÓS—OBÁDOVICS J. GYULA—VINCZE ENDRE: Tudományos és élménybeszámoló a moszkvai nemzetközi matematikai kongresszusról.

Október 20.
OBÁDOVICS J. GYULA: Számítástechnika alapismeretek I. Középiskolai Oktatási Szakosztály.

Október 25.
KISS BARNA: Komplex számok I. Diákszakosztály előadása.

Október 26.
HOFFMANN ANDOR: Operátorszámítás. Tudományos Szakosztály előadása.

November 8.
CSŐSZ RÓZA: A permutáció. Diákszakosztály rendezése.

November 11.
DRAHOS ISTVÁN: Beszámoló a „fejezetek a gyártásgeometriából" c. tárgy előadásairól.

November 17.
OBÁDOVICS J. GYULA—CSERNYÁK LÁSZLÓNÉ: Számítástechnikai alapismeretek. II.

November 18.
DARÓCZY ZOLTÁN: Topologikus problémák a függvényegyenletek elméletében. Tudományos Szakosztály előadása.

November 22.
KISS BARNA: Komplex számok II.

Neovmber 25.
TANDORI KÁROLY: A Lebesgue-függvények szerepe az ortogonális függvények elméletében.

December 2.
LAJOS SÁNDOR: Félcsoportok és $(m—n)$ ideálok. Tudományos Szakosztály előadása.

December 6.
CSŐSZ RÓZA: Kombinációk. Diákszakosztály előadása.

December 20.
KISS BARNA: Feladatmegoldások. Diákszakosztály előadása.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT PÉCSI TAGOZATÁNAK ELŐADÁSAI 1966. ÉVBEN

Január 21.
PRÉKOPA ANDRÁS: Optimális táplálási problémák megoldása matematikai módszerekkel.

Május 7.
HAJÓS GYÖRGY: A poliéderek egy érdekes fajtája.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

Április 7.
CSER ANDOR: Az I. osztályos tankönyv.
HORVAY KATALIN: Az I. osztályos kézikönyv.
PÁLMAY LORÁND: Az analízis tanítása a középiskolában.
SELÉNYI GÉZA: Egy anyagrész programozása matematikából a középiskolában.

Október 27.
WIEGANDT RICHÁRD: A geometriai szerkeszthetőség elvéről.

December 6.
KALMÁR LÁSZLÓ: A középiskolás függvénytanról.

December 10.
CZAPÁRY ENDRE: Beszámoló az egyetemi felvételi tapasztalatokról.
Középiskolás diákok számára az alább felsorolt kartársak tartottak előadást:
REIMAN ISTVÁN 4 alkalommal
REMÉNYI GUSZTÁV 2 alkalommal
DANYI PÁL 2 alkalommal
HETYEI GÁBOR 2 alkalommal
FEHÉR JÁNOS 2 alkalommal
KAMARÁS LAJOS 2 alkalommal.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT VESZPRÉMI TAGOZATÁNAK ELŐADÁSAI 1966. ÉVBEN

Február 25.
KNOLL JÁNOS: Az I. oszt. kísérleti tankönyv ismertetése.
(Bemutató tanítással egybekötve).

Március 4.
BALÁZS JÁNOS: Előadás az approximációelmélet témaköréből.

Szeptember 21.
KNOLL JÁNOS: A korszerű matematikaóra.

Október 31.
KRAMMER GERGELY: Az algol nyelv gépi reprezentánsa az ICT-gépen.

November 1.
KRAMMER GERGELY: Az előző előadás folytatása és kérdésekre való válaszok megadása.

November 16.
TÓTH ÉVA: Az I. oszt. tankönyv tanításával kapcsolatban felmerült problémák.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT EGRI TAGOZATÁNAK ELŐADÁSAI

1964. évben

Február 29.
SZÉNÁSSY BARNA: A halmazelmélet hazai múltjából.

Április 23.
SURÁNYI JÁNOS: A számfogalom kiépítésével kapcsolatos kérdések az általános- és középiskolában.

Május 25.
STROMMER GYULA: Szerkesztések a hiperbolikus síkon csak körzővel.

Október 31.
KREKÓ BÉLA: A folytonos programozás.

November 20.
REIMAN ISTVÁN: A háromszög-geometria térbeli megfelelője.

November 30.
IPACS ROZÁLIA: A vektorok fizikai alkalmazásai.
Középiskolai matematikai délután a Gárdonyi Géza gimnáziumban.

1965. évben

Kibernetikai előadássorozat

Március 23.
NAGY FERENC: Bevezető.
SZANYI LÁSZLÓ: Új tudomány: a kibernetika.
DOROMBY ENDRE: A kibernetika matematikai alapjai (információelmélet, matematikai logika).

Március 30.
SZANYI LÁSZLÓ: Szabályozás, modellezés, kísérlet.
CSÉBFALVY KÁROLY: A számítógépek szerkezete és működésük.

Április 13.
MUSZKA DÁNIEL: Automatikus rendszerek és az élő szervezet.
SZANYI LÁSZLÓ: Ideghálózatok, idegmodellek.

Április 27.
PETŐFI S. JÁNOS: A nyelv matematikai modellje.
VARGA DÉNES: A gépi fordítás.

Május 11.
PUTNOKY JENŐ: A kibernetika és a pszichológia.
DOROMBY ENDRE: A tananyag algoritmizálása, oktató gépek.

Május 25.
HAVAS MIKLÓS: A kibernetika további alkalmazásai (közgazdaságtan, szociológia, művészetek, stb.).
KALMÁR LÁSZLÓ: Filozófiai kérdések a kibernetikával kapcsolatban.

Október 5.
PONGRÁCZ TIBOR: A lineáris programozás alkalmazása különböző műszaki tudományokban. Az előadás a MTESZ Heves megyei szervezete irányításával rendezett Heves Megyei Műszaki Napok keretében tartott előadássorozat része volt.

November 17.
BARNA BÉLA: Módszertani megjegyzések az egyenletek középiskolai tanításáról.

December 9.
CSŐKE LAJOS: Az új I. osztályos gimnáziumi tankönyv alapján folyó kísérleti oktatás eddigi tapasztalatai.

1966. évben

Február 24.
LÁNG ANDRÁS: Érdekes feladatok megoldása. Középiskolai matematikai délután.

Március 24.
JÁROSI ANDRÁS: A teljes indukció. Középiskolai matematikai délután.

Március 30.
GYIRES BÉLA: Statisztikai becslésekről.

Április 21.
SZOMBATHY MIKLÓS: Oszthatósági feladatok. Középiskolai matematikai délután.

Április 26.
RAPCSÁK ANDRÁS: A nem-euklideszi geometriák és a kanti térelmélet.

Május 19.
CSŐKE LAJOS: Ciklografikus ábrázolás.

Október 20.
KERTÉSZ ANDOR: A matematikai függetlenség fogalma.

Október 28.
RAPCSÁK ANDRÁS: Az axiomatikus kutatás módszerei, ideológiai vonatkozásai.

November 25.
REIMAN ISTVÁN: A geometriai szerkesztések tanítása a középiskolában.

November 25.
REIMAN ISTVÁN: Feladatok megoldása. Középiskolai délután.

December 15.
SZOMBATHY MIKLÓS: Az általános iskolából a középiskolába való átmenet problémái a matematika tanításában.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT GYŐRI TAGOZATÁNAK ELŐADÁSAI 1966 ÉVBEN

Február 17.
MOLNÁR ERNŐ: Kétismeretlenes másodfokú egyenlet egész megoldásainak keresése.

Április 6.
Általános iskolai matematikai verseny. (24 iskola 109 résztvevő).

Április 14.
MOLNÁR ERNŐ: Az általános iskolai tanulmányi verseny kiértékelése. Diákdélután.

Április 20.
Az első osztályos gimnáziumi tankönyv tanításának tapasztalatai. Továbbképzési nap. Bemutató tanítást tartott PATAKY ÉVA és MUNKÁCSI ISTVÁN. Vezette MARÓTH REZSŐ.

Június 2.
KALLÓS KÁROLY: A mechanikus modellek szerepe a középiskolai szemléltetésben. — Küldöttválasztó taggyűlés.

Június 29.
VENDÉGH SÁNDOR: A szakközépiskolák rendszere.
Matiné a Fizikai Társulattal és a Kémikusok Egyesületével közösen.

Október 13.
Klubdélután. A Matematika Tanítása egyes feladatainak megbeszélése, kiértékelése, MOLNÁR ERNŐ vezetésével.

November 3.
KÁRTESZI FERENC: Hogyan, kezdjem, hogyan folytassam és hogyan fejezzem be egy probléma megoldását. Diákdélután.

November 3.
KÓSA ANDRÁS: Az analízis tanításának egyetemi reformja.

November 10.
Klubdélután. Feladatok megbeszélése, kiértékelése MOLNÁR ERNŐ vezetésével.

November 18.

MOLNÁR ERNŐ: Az 1966. évi Kürschák feladatok megoldásának ismertetése. A Jókai Gimnáziumban, Komáromban.

December 6.
JANKOVITS GYÖRGY: Az inverzió és alkalmazásai. Diákdélután.

December 7.
A II. osztályos tankönyv megbeszélése. Továbbképzési nap. Bemutató előadást tartott PATAKY ÉVA, BÉKÉS IMRÉNÉ.
Klubdélután. A Középiskolai Matematikai Lapok feladatainak megbeszélése. Vezette: MOLNÁR ERNŐ.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT SOPRONI TAGOZATÁNAK ELŐADÁSAI

1964-ben

Március 12.
LÉGRÁDI IMRE: Az V. matematikai olimpia.

Május 20.
Vezetőségi ülés.

Június 16.
Klubest. Évi beszámoló.

Szeptember 29.
DÉR ZOLTÁN: Élménybeszámoló a miskolci vándorgyűlésről.

November 6.
GÁSPÁR GYULA: A mátrixszámítás és alkalmazása.

1965-ben

Január 22.
AUTHERIED ÉVA: Beszámoló a Német Demokratikus Köztársaságban tett tanulmányútról.

Február 16.
KISS IGNÁC: A Newton—Raphson gyökközelítő eljárás általánosítása.

Május 14.
Kötetlen klubnap. Vita a tagozati titkár beszámolójáról, a MTESZ kibővített intézőbizottsági ülésén.

Március 11.
Matematikai verseny az általános iskolások részére.

Június 16.
Klubnap.

Szeptember 22.
DÉR ZOLTÁN: Beszámoló a keszthelyi vándorgyűlésről.

1966-ban

Június 3.
Klubnap. Évzáró taggyűlés, titkári beszámolóval.

November 10.
Tapasztalatcsere-látogatás az Erdészeti és Faipari Egyetem Matematikai Tanszékén.

December 12.
Az új középiskolai tankönyvek megbeszélése. Klubnap.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT NYÍREGYHÁZI TAGOZATÁNAK ELŐADÁSAI

1964-ben

Február 16.
SILLE ZOLTÁN: Feladatmegoldások. Bessenyei gimnáziumban Kisvárdán.

Március 10.
STACHÓ LAJOS: Körlemezek rendszerének letűzése.

Április 21.
ERÉNYI VILMOS: Feladatmegoldások. Kossuth gimnázium, Nyíregyháza.

Június 16.
SZABÓ LAJOS: Geometriai feladatok.
LAKATOS ISTVÁN: A matematika oktatásának néhány feltétele. Továbbképző előadások.

Szeptember 14.
SILLE ZOLTÁN: Matematika és az élet.

Október 14.
JÉKEL PÁL: Számológépek.

November 10.
TAR LÁSZLÓ: A számológépek programozása.

1965-ben

Március 25.
DARÓCZY ZOLTÁN: Információelmélet.

Április 20.
SILLE ZOLTÁN: Matematika és társadalom.

Május 18.
SILLE ZOLTÁN: Feladatmegoldások. Általános gimnázium, Tiszalök.

Június 7.
JAN JAKUBIK (Kassa): Zur Theorie der geordneten Halbgruppen.

Szeptember 30.
TÓTH IMRE: (Bukarest): A nemeuklideszi geometria előtörténetéből.

November 30.
SZENDREI JÁNOS: A matematika logikai műveleteinek egy szemléltetése.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT SZOMBATHELYI TAGOZATÁNAK ELŐADÁSAI

1964-ben

November 10.
PRÉKOPA ANDRÁS: A matematika gazdasági alkalmazásai.

1965-ben

Március 25.
CZAPÁRY ENDRE: A vektoralgebra elemei a középiskolában.

Április 6.
SZIVÁS JÁNOS: A vektorok alkalmazása a középiskolai geometriában. I.

Április 29.
SZIVÁS JÁNOS: A vektorok alkalmazása a középiskolai geometriában. II.

Május 20.
GÁDOR ENDRÉNÉ: Beszámoló nyugat-európai tanulmányútról. I.
HÓDI ENDRE: Szélsőértékfeladatok elemi megoldása.

Szeptember 30.
GÁDOR ENDRÉNÉ: Beszámoló nyugat-európai tanulmányútról. II.
HÓDI ENDRE: A középiskolai matematikatanítás eredményessége a felvételi vizsgák tükrében.

November 20.
PÁSZTHORY ANTAL: Nomogramok.

December 21.
VARGA ÁRPÁD—SZIVÁS JÁNOS: A helyi tagozat által rendezett középiskolai tanulóverseny ismertetése.

1966-ban

Február 5.
SZIVÁS JÁNOS: Az analitikus geometria tanításának néhány problémája a középiskolában.

Február 24.
MÁROVITS FERENC: A gömbháromszögtan elemei.

Július 4—7.
Az Oktatási Szakosztály vándorgyűlése a matematika tanítása modernizálásáról.

Július 4.
SURÁNYI JÁNOS: Bevezető.
Az 1966. évi Beke-díj kiosztása.
PÁLFY SÁNDOR: Beszámoló az alsó tagozatos tantervi kísérletekről.
ERDÉLYI MÁRIA: Matematika oktatási kísérletek Romániában.

Július 5.
REMÉNYI GUSZTÁVNÉ: Egy mértantanítási kísérletről az általános iskola felső tagozatában.
GÁDOR ENDRÉNÉ: A matematika modernizálására vonatkozó kísérletek a Szovjetunióban.
Kirándulás Kőszegre.
Közös vacsora a Kőszeg—Szabóhegyi Turistaházban.

Július 6.
CZAPÁRY ENDRE: Beszámoló a gimnáziumban végzett matematikatanítási kísérletekről.
KŐVÁRY KÁROLY: Matematikaoktatási kísérletek Csehszlovákiában.
GÁDOR ENDRÉNÉ: Matematikaoktatási kísérletek Belgiumban.

Július 7.
CSER ANDOR: Matematikaoktatási kísérletek a Német Demokratikus Köztársaságban.
ÁCS PÁL: Matematikaoktatási kísérletek Lengyelországban.
VARGA TAMÁS: Matematikaoktatási kísérletek az Egyesült Államokban.
Zárszó.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT SZÉKESFEHÉRVÁRI TAGOZATÁNAK ELŐADÁSAI

1964-ben

Január 8.
LÁNG HUGÓ: Bizonyítási módszerek a matematikában.

Január 22.
LÁNG HUGÓ: Bizonyítási problémák a matematikában.

Február 5.
TORMA KÁROLY: Térgeometriai bizonyítások.

Február 13.
A Fejér megyei általános iskolások matematikai versenyének házi selejtezője.

Február 19.
TORMA KÁROLY: Térgeometriai bizonyítások.

Március 4.
CZAPÁRY ENDRE: A sík- és térmértan együttes tanításának tapasztalatai.
GÁDOR ENDRÉNÉ: Az új középiskolai tanterv ismertetése.

Március 12.
A Fejér megyei általános iskolások matematikai versenye.

Március 18.
Látogatás a MTA Matematikai Kutató Intézetében. Ezt követően a Nehézipari Minisztérium elektromos számító berendezésének megtekintése.

Március 25.
LÁNG HUGÓ: Szélsőértékfeladatok elemi megoldása. Ifjúsági Matematika Kör.

Április 8.
LÁNG HUGÓ: Szélsőértékfeladatok.

Április 22.
CSEH ISTVÁN: Komplex számok bevezetése I.

Május 6.
CSEH ISTVÁN: Komplex számok bevezetése II.

Május 20.
LÁNG HUGÓ: Lineáris programozás grafikus megoldással.

Október 12.
HORVÁTH MIKLÓS: A szükséges és elégséges feltételről.

Október 26.
TORMA KÁROLY: Síkgeometriai feladatok térgeometriai megoldása.

November 3.
BÉKÉSSY ANDRÁS: Elektronikus digitális számítógépek programozása.

November 9.
LÁNG HUGÓ: A matematika tárgya.

November 23.
LÁNG HUGÓ: Irracionális függvények.

December 3.
LÁNG HUGÓ: Lineáris programozás elemi módszerekkel.

December 7.
LÁNG HUGÓ: Irracionális függvények vizsgálata.

1965-ben

Január 11.
LÁNG HUGÓ: Trigonometriai alkalmazások.

Január 25.
LÁNG HUGÓ: Húrnégyszögek.

Február 8.
TORMA KÁROLY: A talpponti háromszögről.

Február 22.
RÉDLING LÁSZLÓ: Számelméleti feladatok, érdekességek.

Március 6.
SZÉNÁSSY MIHÁLY, CSEH ISTVÁN és LÁNG HUGÓ ismertették a megyei középiskolai verseny feladatainak megoldását és a bíráló bizottság jelentését.
MOLNÁR DEZSŐ: Kombinatorikai feladatok.

Március 13.
SZÉNÁSSY MIHÁLY: Az új matematikai tanterv.
LÁNG HUGÓ: Lineáris egyenlőtlenségek, egyenlőtlenségrendszerek.
PÁLMAY LÓRÁNT: Az új tankönyv algebrai része.

Március 14.
PÁLMAY LÓRÁNT: Az új tankönyv geometriai része.
HORVÁTH MIKLÓS: Vektorokkal megoldható geometriai problémák.
SZÉNÁSY MIHÁLY: Az általános iskolai tanterv. Módszertani kérdések.
Az új matematikai tanterv bevezetésével foglalkozó kétnapos tanfolyamot a Tagozat a Megyei Tanács V. B. Művelődésügyi Osztályával közösen rendezte meg.

Március 22.
MOLNÁR DEZSŐ: Kombinatorikai feladatok megoldása.

Március 24.
Felszabadulási emlékverseny Fejér és Veszprém megye középiskolás fiataljai között, Várpalotán a Thury György Gimnáziumban.

Május 3.
HORVÁTH MIKLÓS: Logikai formulák átalakítása.

Május 17.
HORVÁTH MIKLÓS: Algoritmikus nyelvek.

Szeptember 27.
LÁNG HUGÓ: Bizonyítási problémák.

Október 11.
LÁNG HUGÓ: Logikai problémák, paradoxonok.

Október 25.
HORVÁTH MIKLÓS: Az egyenlőtlenségekről. I.

November 8.
HORVÁTH MIKLÓS: Az egyenlőtlenségekről. II.

November 22.
RÉDLING ELEMÉR: Számelméleti érdekességek.

December 6.
LÁNG HUGÓ: Geometriai transzformációk.

December 16.

Megyei középiskolai matematikai verseny.

December 20.
LÁNG HUGÓ: A háromszög nevezetes vonalai.

GRÁFELMÉLETI KOLLOKVIUM PROGRAMJA. TIHANY, 1966. SZEPTEMBER 5—9.

Szeptember 5.

ERDŐS PÁL: On some new inequalities concerning extremal properties of graphs.
HARARY, F.: Graphs with prescribed connectivities.
STRAUS, E. G.: Extremum problems on graphs.
GUY, R. K.: A problem of Zarankiewicz.
SHEEHAN, J.: On Polya's theorem.

Szeptember 6.

RINGEL, G.: Ein neues Sechsfarbenproblem auf der Kugel.
HOANG TUY: Sur quelques propriétés des réseaux et leurs applications.
FINCK, H. J.: Über die chromatischen Zahlen eines Graphen und seines Komplements.
NASH WILLIAMS, J. A.: Euler lines in infinite directed graphs.
BOSÁK, J., ROSE, A., ZNÁM, S.: On decompositions of a complete graph into factors with a given diameter.
LOVÁSZ, LÁSZLÓ: On covering of graphs.
MENDELSOHN, N.: Bipartite graphs and matrices.
BROWN, W. G.: An algebraic technique for solving certain problems in the theory of graphs.
DÉNES JÓZSEF: Connections between transformation semigroups and graphs.
GUY, R. K., MILNER C.: Some covering of sets.
KLEITMAN, D.: A conjecture of Erdős—Katona on containment pairs among subsets of an n-set.

Szeptember 7.

WAGNER, K.: Über eine Basisproblem für Graphenmengen mit Anwendung auf die Menge der nicht in die projektive Ebene einbettbaren Graphen.
HALIN, R.: Zur Klassifikation der endlichen Graphen nach H. Hadwiger und K. Wagner.
JUNG, H. A.: Über das Richten der Kanten eines Graphen.
Problémafelvetések.

Szeptember 8.

BOLAND, J. CL.: Embedding of graphs into orientable surfaces.
BEINEKE, L. W.: On decomposing complete graphs into the maximum number of nonplanar subgraphs.
BOLLOBÁS BÉLA: Graphs of diameter three.
KOTZIG, A.: Eulersche Linien in endlichen viervalenten Graphen und ihre Transformation.
VOSS, J.: Über einige Eigenschaften von Graphen, die maximal k unabhängige Kreise enthalten
BÁNKFALVI ZSOLTNÉ és BÁNKFALVI ZSOLT: Alternierende Hamiltonkreise in zweifarbige vollständigen Graphen.
IZBICKI, H.: On an application of graph theory to the theory of isotope production.
RINGEL, G.: Das Geschlecht des vollständigen paaren Graphen.
WALTHER, H.: Über das Problem der Existenz von Hamiltonkreisen in planaren, regulären Graphen.
GALLAI TIBOR: Über kontinuierlich gerichtete Wege und Kreise.
KATONA GYULA és KORVIN GÁBOR: Functions defined on a directed graph.
WESSEL, W.: Über eine Klasse paarer Graphen.

Szeptember 9.

ERDŐS PÁL és HAJNAL ANDRÁS: On the chromatic number of infinite graphs.
ZELINKA, B.: On some problems from the symposium in Smolenice.
SIMONOVITS, MIKLÓS: Some generalizations of Turán's graph theorem.
PELIKÁN JÓZSEF: Valency conditions for the existence of certain subgraphs.
HASSE, M.: Die einen gegebenen Graphen links — bzw. rechtszentralisierenden Graphen.
GERENCSÉR LÁSZLÓ: Longest pathes of one colour in two-coloured complete graphs.
KATONA GYULA: On a problem concerning the generalized graphs.

GEOMETRIAI KOLLOKVIUM, TIHANY, 1965. SZEPTEMBER 7—11

Szeptember 7.

E. T. DAVIES: Applications of the theory of parallel distributions.
K. HAVLICEK: Eine Bemerkung zur Geometrie der Transformationen.
G. SOÓS: Über eine Divergenzformel in der Finslerschen Geometrie.
H. REICHARDT: Über äquizentroaffine Geometrie.
L. TAMÁSSY: Über autoparallelen Flächen.

Szeptember 8.

M. N. BLEICHER: Some dense Minkowskian distributions of discs.
A. FLORIAN: Eine Extremaleigenschaft der regulären Polyeder.
J. MOLNÁR: Über Kreislagerungen.
L. FEJES TÓTH: Some packing and covering problems.
E. JUCOVIC: Über eine strukturelle Eigenschaft konvexer Polyeder.
L. DANZER: Euklidische Kongruenzordnung und eine Charakterisierung der n-dimensionalen Vollkugel.
S. BILINSKI: Über die Beziehung zweier Modelle der hyperbolischen Geometrie.
H. LENZ: Zur euklidischen Spielungsgeometrie.
B. PETKANTSCHIN: Über ein Analogon zur zweiachsigen Geometrie im projektiven Raum ungerader Dimension.
F. KÁRTESZI: Über Probleme der Inzidenzgeometrie.

Szeptember 9.

O. VARGA: Die sphärische Abbildung in der Riemannschen Geometrie und ihre Anwendungen.
S. GOŁAB: Über einen Satz der zweidimensionalen Minkowskischen Geometrie.
L. WAGNER: Semieuklidische Flächen im dreidimensionalen und im vierdimensionalen. pseudoeuklidischen Raum.
W. DEGEN: Konjugierte Systeme und Kegelschattengrenzen auf Hyperflächen im P_n.
A. MOÓR: Über eine Verallgemeinerung der Linienelementräume.

Szeptember 10.

J. J. SEIDEL: Equilateral pointsets in elliptic geometry.
K. BÖRÖCZKY: Kreislagerung in der elliptischen Ebene.
A. HEPPES: Regions enclosed by convex domains.
G. HAJÓS: Über eine besondere Art von Polyedern.
J. SCHOPP: Die Abdeckung ebener Bereiche mit konstanten Durchmessern durch 3 Kreisen von kleinerem Durchmesser.
O. H. KELLER: Die Homologiegruppen der Flächen dritter Ordnung.
M. HERRMANN: Zum Spezialisierungsbegriff in der algebraischen Geometrie.
G. TALLINI: Metriche locali dotate di una connessione globale.
T. S. MOTZKIN: Transposed matrices and complementary matrices in geometry.
H. VOGLER: Über Mindingsche Isometrien von Strahlflächen.

Szeptember 11.

C. M. BARROS: Variétés presque multicomplexes.
A. KAWAGUCHI: On the theory of a kind of higher order spaces.
CH. EHRESMANN: Structure différentiel.
J. MERZA: Interprétation géométrique de quelques invariants affines.

KÖNYVISMERTETÉS

D. SCHREITER – D. STEMPELL

A KRITIKUS ÚT MÓDSZERE (CMP- ÉS PERT MÓDSZER)

(Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1966, 127 old.)

Fordította: dr. Szamosvölgyi Attila

Az Új technika sorozatban megjelent új kötet a műszaki élet bonyolult problémái megoldásának egy aránylag fiatal, kb. 10 éves módszerét mutatja be, amely — amint erről az előszóban is olvashatunk — a rakéták tervezésétől és megépítésének ütemezésétől az építőiparig, a hajóépítéstől egy ország gazdasága fejlesztésének kidolgozásáig rengeteg helyen és módon sikeresen használható fel. Mivel e tervezési módszer aránylag sok és modern matematikai segédeszközt vesz igénybe, matematikai szempontból is nagy érdeklődéssel kezdtem olvasni.

A bevezető fejezetek után, amikor már a valószínűségszámítás is belép a felhasznált matematikai eszközök sorába, a megemlített matematikai fogalmakra egyre több furcsa, szokatlan és félreérthető elnevezést és fogalmazást figyeltem meg. Ilyenek például: „Gyakran nem is alkalmazzák a (4.8) és (4.9) összefüggéseket (miután a középérték és a varianciák, különbözőképpen számíthatók), hanem a varianciákat ugyanúgy határozzák meg, mint a középértéket" (61. oldal). Vagy: „Ez a normál formája, melynek középértéke nulla és varianciája egy" (65. oldal). Magyarázatot keresve a furcsának látszó kifejezésekre azonnal áttértem a könyv végén, a függelékben található „A PERT valószínűségszámítási alapjai" című összefoglalás tanulmányozására.

A valószínűségszámítás alapfogalmaival kezdi a fejezetet a szerző, de előre jelzi, hogy axiomatikus tárgyalásba nem óhajt bocsátkozni. Ennek az a következménye, hogy a három alapfogalom, amiből kiindul, a következő:

„— a kísérlet (jelenség), a véletlen kísérlet (jelenség), a sztochasztikus kísérlet;
— az esemény vagy a véletlen esemény;
— a véletlen változó (sztochasztikus változó), a véletlen érték".

Ezután e három (szerintem több, mint három) alapfogalomnak hosszadalmas, nem mindig érthető és főleg nem mindig helyes magyarázata következik. Egyetlen példa: „Attól függően, hogy a véletlen értékek kizárólag egymástól elhatároltak, vagy pedig egy meghatározott tartományban folytonosan változóak, *állandó* és *diszkrét* véletlenértékeket különböztetünk meg." (104. oldal). Azon túl, hogy ez a mondat (az általánosan elfogadott kifejezéseket is belegondolva a megfelelő helyekre) pontosan az ellenkezőjét állítja a tényeknek, itt már nem tudtam szabadulni attól a gyanútól, hogy mind az eredeti szöveggel, mind a fordítással baj lesz. Sajnos ez a gyanúm már a következő oldalak elolvasása után beigazolódott, és fokozatosan megdöbbenéssé fokozódott.

Nézzünk először néhány szemelvényt, amelyek már az eredeti szöveg nem túl precíz voltára utalnak.

1. A valószínűségszámítási rész szerzője (J. Frotscher) annak ellenére, hogy a 105. oldalon kifejezetten megígéri, sehol sem definiálja korrekt módon a valószínűség fogalmát, mert az alábbi szöveg nem tekinthető definíciónak.

„Az egyes események valószínűsége három esetben határozható meg számszerűen:
1. a valószínűség előre (a priori) meghatározott;
2. más események ismert valószínűségéből megállapítható a többi esemény valószínűsége;
3. tapasztalati adatokból — következtetés útján — ki lehet számítani a valószínűséget."

E mondatok ráadásul önmagukban sem szabatosak. Hogyan lehet például *más* (tehát a többiekkel kapcsolatban nem levő) eseményekből a *többi* esemény valószínűségét kiszámítani? Az esemény valószínűségének (a priori) meghatározott volta nem állítható szembe a másik két „feltétellel", hiszen a valószínűség mindig objektív, tőlünk független érték, akár ki tudjuk azt számítani, akár nem! Végül tapasztalati adatok alapján általában csak megbecsülni tudjuk a valószínűséget. A fenti idézet magyarul valószínűleg az alábbiakat akarja jelenteni:

„Az egyes események valószínűségének meghatározására többféle módszer ismeretes:
1. Bizonyos elemi események valószínűségét sokszor elméleti úton ki tudjuk számítani.

2. Összetett események valószínűségét az őket alkotó elemi események valószínűségéből gyakran meg tudjuk határozni.

3. Sokszor egy-egy esemény valószínűségét csak tapasztalati adatokból tudjuk megbecsülni."

2. A 105. oldalon a szerző beszél a gyakoriságról anélkül, hogy előtte, vagy utána pontosan megmondaná, hogy az micsoda.

3. Az egész összefoglalásban nem esik szó a valószínűségszámítás egyik legalapvetőbb fogalmáról: a valószínűségi változóról. Lehet, hogy ez a fordító bűne, és a véletlen-érték kifejezés a valószínűségi változót jelenti, de ez nem derül ki egyértelműen a szövegből.

4. Mivel a gyakoriság és a relatív gyakoriság fogalma nem szerepel az összefoglalóban, a szerző (vagy a fordító?) kénytelen a valószínűség és a szabályozott (!) valószínűség fogalmával dolgozni, amit azután összekever és következetlenül használ (106—108. oldalak). Az adott meghatározásokból csak nehezen derül ki, hogy itt tulajdonképpen a valószínűség skálájának a megalkotásáról van szó; arról, hogy miért választjuk a valószínűségek megadására a 0-tól 1-ig terjedő valós számokat. A skálaválasztást nevezi a könyv — nem szerencsésen — szabályozásnak.

5. „Az eloszlás formája attól függ, hogy mely valószínűségek esnek az X-tengely egyes intervallumaiba (amelyeket végtelenül kicsinek tételezünk fel)" (107. oldal). Néhány sorral előbb a valószínűségeket még az ordináta-tengelyre mértük fel, most pedig az x-tengely intervallumaiba esnek, amelyek ráadásul végtelen kicsik!

A felsorolást sajnos folytatni lehetne.

Most pedig lássunk néhány idézetet a nyilvánvalóan felületes fordítás illusztrálására:

„állandó és diszkrét véletlen-érték" (104. oldal). Értsd: folytonos és diszkrét valószínűségi változó, ugyanis a német „stetig" melléknév itt „folytonos" és nem „állandó", ami óriási különbség.

„a valószínűségek grafikus ábrázolásánál a véletlen értéket az abszcisszára visszük fel..." (105. oldal). Más az abszcissza és más az abszcissza-tengely!

„szabályozott diszkrét véletlen értékek" (107. oldal, 48. ábra aláírása). Az a gyanúm, hogy ez a relatív gyakoriság akar lenni.

„Állandó véletlen értékek" (107. oldal, 49. ábra aláírása). Valószínűleg ez a kifejezés a folytonos sűrűségfüggvényt akarja jelenteni.

Egy valószínűségi változó sűrűségfüggvényének és eloszlásfüggvényének a bevezetése, és e két függvény kapcsolatának ismertetése a következő (108. oldal):

„Az előbbiekben tárgyalt $f(x)$ függvény segítségével — természetesen más jelölések is alkalmazhatók — az állandó véletlen érték maradéktalanul meghatározható. Ezt a függvényt valószínűségsűrűségi függvénynek, vagy egyszerűen *sűrűségi függvénynek* nevezzük. Az állandó véletlen értékek meghatározásaira azonban — a sűrűségfüggvény mellett — az ún. eloszlási függvény is használatos. Ez úgy kapcsolódik a sűrűségi függvényhez, hogy a sűrűségi függvény az eloszlási függvényből vezethető le (ha ez egyáltalán lehetséges). Az eloszlási függvényt általában a sűrűségi függvénynek megfelelő nagybetűkkel jelölik. Így tehát például az $f(x)$ sűrűségi függvényhez az $F(x)$ eloszlási függvény tartozik.

Ennek megfelelően:

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = F'(x) = f(x).$$"

Két kérdésem volna csupán: a sűrűségfüggvényt hogyan kell levezetni? A sűrűségfüggvény meghatározása érdekében azért kell differenciálni az eloszlásfüggvényt, mert azt nagybetűvel jelöltük? A szövegnek tudniillik ez az értelme. Mindjárt más volna a helyzet, ha a fordító tudta volna, hogy a német „ableiten" ige nemcsak azt jelenti, hogy „levezetni", hanem jelentése matematikai szövegben „differenciálni" is lehet, és itt éppen ez lett volna az egyedüli helyes kifejezés.

„az $f(x)$ alatti terület a és b ordináták által határolt területnek felel meg (50. ábra)" (108. oldal). Az x-tengelyen fekvő a és b pontok (lásd 50. ábra) mióta ordináták?

„Egy nulla felé tartó $\mathrm{d}x$ szélességű intervallum közelítőleg:

$$P(x \leqq X \leqq x + \mathrm{d}x) = f(x)\,\mathrm{d}x"$$

(109. oldal) mondat mit jelent?

„Az eloszlási együttható

A valószínűségszámítás alkalmazásánál gyakran kell meghatároznunk két együtthatót: a várt értéket (középértéket) a μ-t, és a szórást (pontosabban a közepes négyzetes eltérést, vagy varianciát), a σ^2-et." A definiáló képletek után pedig: „A közepes négyzetes eltérés gyökét *szabványeltérésnek* is nevezik" (111. oldal). A várható érték (μ) és a szórásnégyzet (σ^2) (ezek a „szabványos" elnevezések) nem együttható (egyébként minek az együtthatója?), hanem a valószínűségi változónak egy-egy jellemző adata, jellemzője. A német „parameter" szó itt nem fordítható az „együttható" szóval. A szórás (σ) és a szórásnégyzet (σ^2) nem ugyanaz!

„A normál eloszlás és a béta-eloszlás... az állandó véletlen értékek elvén alapul, ezért állandó eloszlásoknak is nevezhetők" (111. oldal). Ehhez talán kommentárt sem kell fűzni.

„Szabályozott szabványos normál eloszlás" (112—123. oldalak). Értsd: Standard normális eloszlás.

„A görbe maximuma $x=0$-nál van, az ordinátához képest szimmetrikus..." (112. oldal). Melyik ordinátához? Ugyanis végtelen sok van! Ismét csak azt mondhatom: más az ordináta és más az ordináta-tengely.

„Mivel az integrál zárt formában nem értékelhető..." (112. oldal). Egy fordító munkája értékelhető, de egy határozott integrál csak kiszámítható.

A „valószínűségszámítási formanyomtatvány" (119. oldal) a speciálisan skálázott valószínűségszámítási papirost jelenti.

Mivel a számszerűsítésnél a kiadódó integrálok miatt bizonyos nehézségek mutatkoznak..." (121. oldal). Hogyan lehet egy integrált számszerűsíteni? Nehézségek persze nemcsak az integrálásnál vannak.

A központi határeloszlás tételéről szóló teljes fejezetet idézni lehetne, de elég talán egy mondat: „*Aszimptotikus normál-eloszláson* azt értjük, hogy az Y_n eloszlása normáleloszlásra törekszik, ha n határtalanul nő."

Nem szeretném a már felsorolt fogyatékosságokat még a szép számmal meglevő sajtóhibák felsorolásával is tetézni, de az nem hagyható szó nélkül, hogy több fontos sűrűségfüggvény definíciója (120—122. oldalak) a rossz szedés miatt értelmetlen. Így például az

$$f_1(u)=\begin{cases} u^p(1-u)^q & \text{ha } 0\leqq u\leqq 1 \\ B(p+1,\,q+1) & \text{egyébként} \end{cases}$$

kifejezés teljesen értelmetlen.

A felsorolt idézetek (és ez nem az összes erősen kifogásolható kitétel) azt bizonyítja, hogy a fordító (Dr. Szamosvölgyi Attila okl. gépészmérnök) és a szakmai ellenőr (Dr. Cotel Kornél okl. közgazdász) még azt a fáradságot sem vette magának, hogy például Prékopa András: Valószínűségelmélet című könyve (amely ugyancsak a Műszaki Könyvkiadónál jelent meg) tárgymutatójában az egyes matematikai fogalmak szokásos és elfogadott, vagy a fordító gyakori szóhasználatával élve, szabványos magyar terminológiáját megnézze.

Ismeretes, hogy minden szaktudománynak vannak olyan — például a magyar nyelvben is meghonosodott — kifejezései, amelyeket ma már felesleges (és esetleg nevetséges) minden áron lefordítani. Ezek eredetiben fejezik ki pontosan az illető fogalmat.

Azt hiszem, hogy minden műszaki szakember derülne azon, ha valaki például a „szuper finiselés" műveletét (a nagypontosságú fémmegmunkálás utolsó fázisát) „rendkívüli hajrázás"-nak fordítaná.

A könyvben szereplő matematikai fogalmak túlnyomó többségének azonban már elfogadott magyar elnevezése van, és ezeknek a semmibe vétele nem emeli egy könyv értékét. Nyilvánvalóan furcsán hatna, ha valaki például a centrifugálszivattyút nem örvényszivattyúnak, hanem például futóközéppontú szivattyúnak (centrum=közép, fugio=futok) fordítaná.

Azt már nem is említem meg, hogy több fogalom az összefoglaláson belül is más-más nevet visel, például a sztochasztikus hol sztochasztikus, hol sztochanisztikus, a szórás hol szórás, hol szóródás, hol variancia, és nincs különbség szórás és szórásnégyzet között. Ez azt mutatja, hogy a fogalom megértése körül sincs teljesen rendben minden.

A magyar szöveg nagyon sok helyen nehézkes, bonyolult, pongyola és helyenként értelmetlen; a definíciók hiányosak, a magyarázatokban tárgyi tévedések vannak. E hiányokat főleg a szószerinti fordítás és a szavak többféle jelentésének a nem ismerése okozta. Ennek bizonyítására már az előbb más célból bemutatott idézetek megemlítése is elegendő.

Mindezek miatt a könyvrész nehezen érthető még a matematikus számára is, az érdeklődő mérnök, közgazdász, vagy technikus számára pedig egyenesen elriasztó, hiszen csak azt láthatja, hogy az itt bemutatott és felhasznált matematikai segédeszközök érthetetlenek, zavarosak, ellentmondóak. Aki ebből az összefoglalásból kénytelen megismerni a valószínűségszámítás elemeit, az teljesen torz képet kap a matematika e nagyon fontos ágáról.

Egy könyv új kiadásánál vagy lefordításánál általában arra szoktak törekedni, hogy az eredeti könyv esetleges fogyatékosságait szakemberek közreműködésével kiküszöböljék. Erre mutatott példát éppen a Műszaki Könyvkiadó E. Beckenbach: Modern matematika mérnököknek című mű magyar kiadásánál elsősorban a második kötet esetében. Különösen fontos lett volna egy megbízható és minden szempontból kifogástalan könyv kiadása olyan tárgykörből, amely napjainkban kezd ismertté és felhasználttá válni, és amelynek perspektívái ma még szinte beláthatatlanok.

További súlyt ad a könyvnek az a körülmény, hogy ebben a tárgykörben — tudomásom szerint — ez az *első* magyar nyelvű könyv. Nem szabad figyelmen kívül hagyni még azt sem, hogy

ha az olvasó egy könyv valamely fejezetéről ellenőrizhető módon belátja, hogy felületes, vagy hibás munka, akkor a könyv többi — az olvasó részére esetleg új ismereteket jelentő — kifogástalan részének helyességében és pontosságában is kételkedni kezd. Sőt, ha egy könyvsorozatnak éppen egy ilyen kötetét vette meg csupán az olvasó, nem biztos, hogy ezek után kedvet kap a többi kötet megvételére is, pedig a sorozatban lehetnek kitűnő kötetek is. Mindezekre és a Műszaki Könyvkiadó jó hírnevére gondolva célszerűbb lett volna a fordítást egy matematikus szakemberrel elkészíttetni, vagy legalább is átnézetni.

Scharnitzky Viktor

VARGA TAMÁS

MATEMATIKAI LOGIKA KEZDŐKNEK, 1—2 KÖTET

(Tankönyvkiadó, 1966, 199 illetve 275 oldal)

Varga Tamásnak a második kötet megjelenésével most teljessé vált könyve már az első kötet alapján nagy népszerűségnek örvend, hiszen magyar nyelven negyedik, és pl. német nyelven a második kiadást érte meg. Most — a két kötetet áttekintve — úgy vélem, hogy ez a siker a jövőben még fokozódni fog.

A könyv tárgya a matematikai logika. A matematikai logika a több mint kétezer éves formális logikából nőtt ki, amelynek első rendszerezője Arisztotelész volt. A formális logika olyan ítéletekkel és belőlük levonható következtetésekkel foglalkozik, amelyek pusztán formájuknál fogva is helyesek vagy helytelenek. Ez azt jelenti, hogy eltekintünk a következtetésekben szereplő ítéletek konkrét tartalmától, és csupán azt vesszük figyelembe, hogy igazak-e ezek az ítéletek, vagy hamisak. A múlt század közepe táján a formális logika átvéve a matematika módszereit és technikáját nagyarányú fejlődésnek indult. A logikának ez az új ága, vagy inkább új fejlődési szakasza: a matematikai logika. A matematikai logika nem csupán a matematikának a logikája, hiszen olyan logika nem képzelhető el, amely csak a matematikára alkalmazható, és más tudományágakra, vagy a hétköznapi életben nem. A matematikai logikát nem a tárgya, hanem a módszerei miatt illeti a matematikai jelző.

A matematikai logika jelentősége ma már sokféle tudományágban nyilvánvaló és különösen az elektronikában, a kibernetikában és az automatizálásban szembetűnő, és alkalmazása nélkülözhetetlen. Ezért világszerte egyre többen foglalkoznak matematikai logikával, és egyre több ilyen jellegű könyv jelenik meg. Ezek sorában örömmel üdvözöljük Varga Tamás új könyvét.

Varga Tamás könyvének első kötete a logikai műveletek, második kötete a logikai függvények elméletével foglalkozik.

Az első kötet 7 fejezetre oszlik.

Az első fejezetben (Mi a matematikai logika?) a szerző a következtetésformák és következtetések kapcsolatát, valamint a könyv tárgyát ismerteti. A második fejezet (Néhány logikai művelet) a logikai ítéletekkel végezhető műveletek közül a konjunkciót, a diszjunkciót, a kizáró diszjunkciót, az összeférhetetlenségi relációt, a negációt, és az implikációt mutatja be. A harmadik fejezetben (Algebra és logika) a logikai műveleteknek nem csak olyan tulajdonságait ismerjük meg, amelyeknek az analogonjai az algebrai műveletekre állnak fenn (kommutativitás, asszociaciativitás, disztributivitás), de olyanokat is, amelyeknek nincs megfelelő mása az algebrában (idempotencia, kétféle disztributivitás). A negyedik fejezetben (A logikai műveletek áttekintése) az egyváltozós (számszerint négy) és kétváltozós (számuk 16) logikai műveletekkel ismerkedünk meg részletesen, majd arról esik szó, hogyan és meddig lehet ezek számát (egy-egy vagy néhány kiválasztott művelet többszöri felhasználásával) csökkenteni. Egy apróbetűs részben az n-változós logikai műveletekről is szó esik. (Számuk 2^{2^n}; pl. $n=5$ esetében csaknem 4,3 millió. A fejezetben ügyes módszert láthatunk a logikai műveletek értéktáblázatainak ábrázolására is. A fejezet végén az elemi ítélet, a formula és az elemi ítéletekkel foglalkozó tudományág: az ítéletkalkulus meghatározása található. Az ötödik fejezet (Azonosság és következtetés) a különböző következtetésformák bemutatását tartalmazza. A hatodik fejezetben (Keressük a konklúziót!) arról esik szó, hogyan lehet és kell az adott, illetve ismert feltételekből (premisszákból) a következtetéseket (konklúziót) levonni, ezeket ellenőrizni, és ebben a munkában hogyan segít bennünket a matematikai logika formanyelve. A hetedik fejezet (Híd az elmélettől a gyakorlat felé) a logikai műveletek és áramkörök szoros kapcsolatát mutatja be; ez az a híd, amely a széleskörű alkalmazást lehetővé teszi. A kötet következő része foglalkozik az egyes fejezetekben kitűzött feladatok (számszerint 46) részletes megoldásával. Az utószóban a szerző a matematikai logika szerepét és jelentőségét foglalja össze. A kötet végén irodalomjegyzék, azonosságok jegyzéke, név- és tárgymutató található.

A második kötet 8 fejezetből és 2 függelékből áll.

Az első fejezet (Új utak keresése) az eddig oszthatatlannak tekintett elemi ítéletek további felbontásának szükségességét mutatja be és ezzel a logikai függvények bevezetését készíti elő. A második fejezetben (Egyváltozós logikai függvények. Halmazok) a szerző halmazelméleti alapfogalmak bevezetése után két halmaz összes lehetséges viszonyát ismerteti. E fejezet tisztázza az univerzális ($\forall$) és egzisztenciális ($\exists$) kvantor fogalmát is. A harmadik fejezetben (Következtetés rajz útján) a halmazelméleti relációkat (elem, részhalmaz, metszet, unió, komplementum) rajzok segítségével, majd logikai jelekkel fejezi ki a szerző. A negyedik fejezet (Következtetés formális lépésekben) az első kötetben már megismert ítéletkalkulus eszközeit rendezi, ill. átfogalmazza olyan alakúra, hogy azokat majd változókat tartalmazó formulákra is alkalmazni tudjuk. Ennek során új fogásokat („lenyilazás", premissza bevezetése menet közben) is megismer az olvasó. Az ötödik fejezet (Kvantorokkal kapcsolatos következtetések) az erős és gyenge kvantor következtetésekkel foglalkozik. Ennek során olyan új formális szabályokkal ismerkedünk meg, amelyek a kvantorok bevezetését ($+\forall$ és $+\exists$) és elhagyását ($-\forall$ és $-\exists$) teszik lehetővé, továbbá az ezekre vonatkozó korlátozásokkal és alkalmazásokkal. A hatodik fejezet (Többváltozós logikai függvények. Relációk) a kétváltozós logikai függvények koordinátás és halmazjelöléses ábrázolásáról, a többváltozós függvények tulajdonságairól szól. A hetedik fejezetben (Formalizálás és levezetés a többváltozós függvények körében) a kétváltozós logikai függvényekkel kifejezhető kapcsolatok (levezetések) eddigi grafikus módszerekkel történő vizsgálatát most logikai jelekkel végzi el a szerző, és így alkalmasabb módszerhez jut. Ezt a módszert a kettőnél több változós függvényekre is kiterjeszti. A nyolcadik fejezetben (Számadás) a matematikai logika eredményeiről és néhány elvi kérdésről (pl. az eldöntésproblémáról) olvashatunk.

Az első függelékben (Szillogizmusok mai szemmel) a szerző a klasszikus logika történeti jelentőségét és érdemeit nem kétségbe vonva annak korlátait, túlhaladott voltát bizonyítja.

Különösen éles bírálattal illeti a kategorikus szillogizmusokat feleslegesen bonyolult módon és homályosan tárgyaló logikakönyveket, és a matematikai logika módszereivel egyszerű, világos tárgyalásmódot mutat. Az egyszerű módszer ismeretében egyetérthetünk a szerző véleményével, mely szerint „nem kerül több időbe és nem tartalmaz mélyebb gondolatokat egy ilyen probléma megoldása, mint két kétjegyű szám összeszorzása, amit 9 éves gyerekek tanulnak. A szillogizmusokat mégis a IV. gimnáziumban, sőt főiskolákon, egyetemeken tanították (van ahol még ma is tanítják). Igaz, hogy nem így, ahogyan egyszerű, hanem egy csomó felesleges bonyoldalommal körülvéve".

A második függelék (Furcsa mondatok) olyan értelmes mondatokat mutat be, amelyekhez nem rendelhetünk logikai értékeket.

A megoldások című rész az egyes fejezetekben kitűzött összes feladat megoldását tartalmazza. A kötet végén kvantorokat tartalmazó azonosságok jegyzéke és az első kötet irodalomjegyzékét kiegészítő irodalomjegyzék található, név- és tárgymutató sajnos nem.

Varga Tamás úttörő munkát vállalt, amikor könyvével magyar nyelven (az egyetemi jegyzetet nem számítva) első ízben ad rendszeres összefoglalást a matematikai logika alapvető fogalmairól és módszereiről. Könyvének legnagyobb érdeme véleményem szerint az, hogy ezt olyan közvetlen stílusban, olyan érthető, egyszerű módon és olyan ügyes példák segítségével teszi, ami nemcsak a tárgykör megismertetését, hanem talán egy kicsit megszerettetését is lehetővé teszi. Itt még külön kell szólni az egyes fogalmak, összefüggések, kapcsolatok bevezetését, megértését és begyakorlását szolgáló példák kiválasztásáról. A rengeteg példán végignézve azonnal látszik, hogy a szerző mindig a lehető legegyszerűbb, az egészen hétköznapi eseteket használja fel mondanivalójának illusztrálására, sőt a könyv írása közben gondolt kedves kis tanítványaira, az előbbi idézetben is megemlített 9 éves gyermekekre is. Az ő figyelmüket akarta megragadni azzal, hogy példáiban szerepel Chaplin, Tyereskova, Gagarin, Pityi Palkó; Burkus, a kutya, Kacor, a cica; Sir Kán, a tigris; Ká, az óriáskígyó; Bagira, a fekete párduc; Lóri, a papagáj és mások. Azt hiszem, hogy a könyv anyagának egy részét éppen a jól választott példák és az egyszerű tárgyalásmód miatt már a 9 éves gyerekek is megértik, sőt érdekesnek tartják.

Az persze természetes, hogy az olvasmányos, izgalmas stílus nem megy a pontosság rovására, hiszen minden bizonyítás korrekt, szabatos és a könyv nagyon sok újat mond nemcsak a kezdőnek, hanem a tárgykörben már ismerősnek is. Sok hasznos ötletet és tanácsot fedezhetnek fel benne a gyakorló pedagógusok is egy-egy tárgykör felépítése, előadása és megszövegezése szempontjából.

Nagyon tetszenek a könyv illusztrációi (Réber László rajzai), amelyek szellemes kiegészítői a szövegnek. Szokatlan, de érdekes az ábráknak (talán neo-primitívnek nevezhető) kivitelezése, amely valóban közelebb áll a gyakorlathoz, hiszen gondolkodás közben az olvasó sem műszaki rajzot, hanem szabadkézi vázlatot készít; zavaró azonban ez ott, ahol például koordinátarendszer és benne egyenes is szerepel (88—97 ábra), mert itt a vonalzó használata már előnyös lett volna.

A könyv nemcsak matematikával vagy a logikával foglalkozók érdekes és hasznos olvasmánya lehet, hanem minden pontosan és logikusan gondolkodó emberé. Jól hasznosíthatják munkájukban

a könyvet a matematikát, vagy logikát tanító tanárok, általános iskolai és középiskolai matematikai szakkörök.

Ha egy mondatban kellene véleményt mondanom Varga Tamás könyvéről, azt mondanám: kitűnő könyvvel gyarapodott a nagyközönség számára is érthető és élvezetes módon előadott szakkönyvek sora.

Scharnitzky Viktor

LADISLAUS RÉDEI

„THEORIE DER ENDLICH ERZEUGBAREN KOMMUTATIVEN HALBGRUPPEN"

(B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1963)

Minthogy az absztrakt algebrában a végesen generált struktúrák igen fontos és általában — legalább is látszólag — könnyebben tárgyalható speciális esetet jelentenek, ezért célszerűnek és természetesnek látszik ezeket kivizsgálni. Kommutatív végesen generált struktúrák közül testekre és Abel-csoportokra végeztek és behatóbb strukturális vizsgálatokat, amelyek még korántsem jelentik ezek elméletének minden szempontból való teljes lezártságát, miként ezt a speciális véges Abel-csoportok modern Hajós—Rédei-féle elmélete is mutatja. A nem-kommutatív végesen generált struktúrák vizsgálata várható módon még nehezebb kérdésekre vezetett, és ilyen jelenség állapítható meg már a végesen generált nem-kommutatív csoportok esetében is. Ezek megvilágítására elég utalni pl. Gruskó tételére vagy a végesen generált torzió-csoportok végességére vonatkozó több évtizedig nyitottan állt Burnside-sejtésre, amelyet nem régen negatív irányban oldott meg Novikov és más példakonstrukcióval Golod.

Bár a félcsoportok a matematikában és annak alkalmazásaiban egyre nagyobb szerephez jutnak, és ezek elméletének kifejlődését egy sorozat cikk és újabban E. S. Ljapin: Polugruppü (Moszkva 1960) és A. H. Clifford—G. B. Preston: The Algebraic Theory of Semigroups, I. (1961) monográfiái, ill. tankönyvei jelezték, mégis a félcsoportok elméletének eredményei bizonyos mozaikszerűséget mutatnak, és az elméletben sajnos még nagyon sok a kivizsgálatlan fehér folt. Ilyen fehér folt volt, egészen Rédei László vizsgálatainak időpontjáig a kommutatív végesen generált félcsoportok vizsgálata is, amelyet Rédei László igen sikeresen elvégzett, és amelyet előtte a nemzetközi szakirodalomban mások még csak távoli megközelítésben sem végeztek el. Ilyen módon Rédei László csaknem semmi történeti előzményből építette ki a végesen generált kommutatív-félcsoportoknak igen gazdag, csaknem minden fontosabb kérdésre választ adó elméletét. Megjegyzendő, hogy nem sokkal Rédei László könyvének megjelenése előtt, V. A. Emelicsev megoldotta pozitív értelemben és irányban a kommutatív végesen generált félcsoportoknak az ún. „szóproblémáját", és ezt az eredményt G. S. Zeitin további megoldással egészítette ki. Bár még nem történt meg annak a sejtésnek a bizonyítása, hogy Emelicsev és Zeitin eredményei elegánsak leszármaztathatók a Rédei-féle elméletből, mégis valószínűnek látszik Rédei László szerint az, hogy az említett sejtés igaz lesz. Fontos szerepet tölt be Rédei elméletében L. E. Dickson-nak egy korábbi eredménye, amely könnyen bizonyítható.

Egyébként Rédei László könyve az elmúlt 22 évben megjelent algebrai tárgyú magyarországi kiadású matematikai könyvek közt az egyetlen olyan, amely végig a szerző saját kutatási eredményeit és csak ezeket tartalmazza. Megjegyzendő még, hogy újabban Pollák György lényegében elvégezte a kommutatív végesen generált félcsoportok elméletére vonatkozó Rédei-féle definícióknak és eredményeknek a nem kommutatív végesen generált félcsoportok esetére való bizonyos kiterjesztését.

A Rédei-féle elmélet lényegében egyetlen alaptételen nyugszik, amelynek a megfogalmazásában nagy szerepet játszanak az alábbiakban később definiált ún. magfüggvények. Az elmélet további kifejtésében található egy sor igen fontos, éspedig részben könnyebben, részben nehezebben bizonyítható „végességi tétel", amelyek az elmélet alkalmazhatóságát mutatják és biztosítják. Mint alkalmazást tárgyal Rédei László egy sor olyan speciális esetet, amelyek még igen általánosak. Szerző megfogalmaz az elmélet tárgyalása során — mértéktartó módon — néhány nyitott problémát is. További a szerző által, explicit módon fel nem vetett nyitott problémát maga a figyelmesebb olvasó is meg tud állapítani a szöveg mélyrehatóbb tanulmányozása során.

Rédei László az említett kommutatív, végesen generált félcsoportok elméletét geometriai ruhába öltözteti, amellyel a tárgyalásmódnak nagymérvű áttekinthetőségét és szemléletességet kölcsönöz. A kommutatív végesen generált félcsoportok elmélete ezzel a geometrizálással úgy is tekinthető, mint egy fejezet a többdimenziós euklideszi tér rácspont-geometriájának elméletéből.

Annak érdekében, hogy az említett geometriai köntöst a könyv tárgyalásmódjával kapcsolatban megvilágítsuk a nem szorosabb értelemben vett szakemberek előtt is, és hogy definiáljuk legalább a mindgvégig igen fontos szerepet játszó magfüggvényeket, és hogy az említett alaptételt

megfogalmazzuk, célszerű lesz bizonyos előkészületeknek az elvégzése. Ez az ismertetés felkeltheti a figyelmet a könyv tanulmányozására.

Tudvalevőleg félcsoporton olyan nemüres S halmazt értünk, amelyen korlátlanul értelmezve van egy $\alpha\cdot\beta$, multiplikative írt, binér és asszociatív művelet, amelyre tehát $\alpha\cdot\beta\in S$ és $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$ teljesül $(\alpha, \beta, \gamma\in S)$. Ez kommutatív, ha mindig $\alpha\beta=\beta\alpha$. Minthogy minden S félcsoporthoz adjungálható egy ε kétoldali egységelem, amelyre $\varepsilon\alpha=\alpha\varepsilon=\alpha$ minden $\alpha\in S$ elemre, feltehető, hogy S egységelemes. (Rédei könyve a félcsoportokról mindvégig felteszi — eltekintve az 51. §-tól —, hogy egységelemesek, és az 51. §-ban megmutatja, hogyan terjeszthetők ki az eredmények a nem egységelemes félcsoportok esetére.) Végesen generált csoport rangját úgy szokták definiálni, mint a lehetséges generátorok számának a minimumát, és ennek megfelelően egy végesen generált félcsoport rangja jelentse azon elemeknek a minimális számát, amelyek vagy generátorelemek, vagy ezekből az egységelem hozzávételével állnak elő. Félmodulus jelentsen additive írt, zéruselemes kommutatív félcsoportot. Legyen n természetes szám és F az n-edrangú szabad félmodulus. Ez azt jelenti, hogy -ben létezik olyan $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ elem, hogy F minden eleme egyértelműen előáll

$$\alpha = a_1\varepsilon_1+\ldots+a_n\varepsilon_n \qquad (a_i=0, 1, 2,\ldots)$$

alakban. Az $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ elemeket F szabad generátorainak nevezzük. Tudvalevőleg minden egységelemes r-edrangú $(r\leqq n)$ félcsoport F-nek egy homomorf képe és megfordítva, és minthogy egy struktúra homomorf képei a struktúra kongruenciáival adhatók meg, ezért alapvető feladat F kongruenciáinak a vizsgálata. Két kongruencia ekvivalens, ha a megfelelő faktorstruktúrák a kongruenciák szerint egymással izomorfok. F-nek egy F-kongruenciáját C-vel jelölve C nyilván olyan ekvivalencia az F halmazon, hogy $\alpha\equiv\beta(\mathrm{mod}\ C)$ esetén $\varrho\alpha\equiv\varrho\beta$ és $\alpha\varrho\equiv\beta\varrho$ $(\mathrm{mod}\ C)$ minden $\varrho\in F$ elemre. Egy CF-kongruencia igen fontos akkor (ez a speciális eset németben „ausgeartet" jelzőt kapott), ha F/C-nek az r rangjára $r<n$.

Egy S félcsoport reguláris, ha benne a bal és jobboldali törlési szabály érvényes, azaz $\gamma\alpha=\gamma\beta$ esetén $\alpha=\beta$ és $\alpha\gamma=\beta\gamma$ esetén $\alpha=\beta$ teljesül. Az F szabad félcsoport reguláris. Kommutatív félcsoportoknál a regularitás szükséges és elégséges feltétel ahhoz, hogy a félcsoport beágyazható legyen csoportba, az ún. kvocienscsoportba, amely az összes $\alpha\beta^{-1}$ elemből áll. Jelölje H° egy H kommutatív reguláris félcsoportra nézve a kvocienscsoportot és ennek megfelelően jelölje F° az F differenciamodulusát, amely tehát n-edrangú szabad modulus. Jelölje R az n-dimenziós valós euklidesi teret, ennek elemei (ezeket pontoknak vagy vektoroknak nevezve)

$$\xi=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

rendezett valós szám n-esek. Ezek közt egyenlőséget, összeadást, valós számmal való szorzást szokásos módon értelmezhetünk. F° beágyazható R-be, ha

$$\alpha = a_1\varepsilon_1+\ldots+a_n\varepsilon_n = (a_1, \ldots, a_n) \qquad (a_i\in I)$$

(I a racionális egész számok, N nemnegatív egész számok, $\mathscr{R}$ a racionális számok, $\mathscr{R}$ a valós számok halmaza.) Ilyen módon F° éppen az R természetes rácspontjainak felel meg. Ha $\varepsilon_i=(0, \ldots, \overset{i}{\smile}1, \ldots 0)$, akkor

$$\xi = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1\varepsilon_1+\ldots+\alpha_n\varepsilon_n \qquad (\alpha_i\in\mathscr{R})$$

ahol α_i az ε_i együtthatója, ill. ξ koordinátája. Ennek a beágyazásnak az előnye lesz az, hogy a tárgyalás szemléletesebb, geometriai lesz. R féligrendezett halmaz lesz, ha $\xi\geqq 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\alpha_1\geqq 0, \alpha_2\geqq 0, \ldots$ és $x_n\geqq 0$ fennáll. (Megadható még pl. másik két további féligrendezés is R-ben, de ezeket nem tárgyaljuk.) Belátható, hogy R erre a féligrendezésre nézve hálót, mégpedig disztributív hálót alkot, ugyanis teljesül $\inf(\xi, \sup(\eta, \zeta))=\sup(\inf(\xi, \eta), \inf(\xi, \zeta))$, és ennek duálisa. Továbbá legyen R (és így F° és F) elemeire nézve $\xi^+=\sup(0, \xi)$ és $\xi^-=\sup(0, -\xi)$, amelyekre tehát $\xi=\xi^+-\xi^-$ és $\xi^+\geqq 0, \xi^-\geqq 0$. Továbbá $A, B\subseteq R$ részhalmazokra jelentse $A+B$ az összes $\alpha+\beta$ $(\alpha\in A, \beta\in B)$ összeg halmazát. Az S félcsoportban T részhalmaz ideál, ha $ST\subseteq T$ és $TS\subseteq T$.

Mármost F-magfüggvényen olyan f egyváltozós függvényt értünk, amelyre teljesülnek az I—V axiómák:

I. Az f értelmezési tartománya F°-nak egy M részmodulusa;
II. Minden $\mu\in M$ helyen $f(\mu)$ az F-nek egy ideálja;
III. Fennáll $f(0)=F$;
IV. Minden $\mu\in M$ elemre $f(-\mu)=f(\mu)$;
V. Minden $\mu, \nu\in M$ elempárra érvényes a $\bar{V}_{\mu,\nu}$ feltétel:

$$(\mu^+ + f(\mu))\cap(\nu^+ + f(\nu))\subseteq\sup(\mu, \nu)+f(\mu-\nu)$$

Az M értelmezési tartományt f értelmezési modulusának is nevezzük, amelyet $M(f)$-fel jelölhetünk. A III-as axióma szerint f-nek a kezdőértéke éppen F, míg a IV-es axióma azt fejezi ki, hogy f páros függvény a μ-ben. Nagy szerepe van a továbbiakban az V-ös axiómának, amelynek Rédei László megadja könyvében legalább négyféle, egymással ekvivalens, különböző megfogalmazását, valamint a 12. §-ban megadja pl. az V. axiómának bizonyos redukcióját is. Az egész könyvön a magfüggvények vizsgálata vonul végig. Fő nehézség az, hogy általában nincs 1—1 megfeleltetés a kongruenciák és bizonyos részstruktúrák közt.

Érvényes a következő alaptétel, mint Rédei László elméletének legfontosabb eredménye:

Alaptétel. Létezik egy kölcsönösen egyértelmű

$$C \leftrightarrow f$$

megfeleltetés az összes F-kongruencia halmazáról az összes magfüggvény halmazára úgy, minden megfelelő C, f párra nézve a C-hez hozzárendelt M modulus egybeesik f értelmezési modulusával, azaz $M = M(C) = M(f)$. Továbbá f egyrészt C által meghatározott M értelmezési tartományú függvény, amelynek $f(\mu)$ értékei $\xi \in f(\mu) \leftrightarrow \xi + \mu^+ \equiv \xi + \mu^- (\mathrm{mod}\ C)$ ($\xi \in F, \mu \in M$) által meghatározott részhalmazok F-ből. Másfelől C, mint F-beli binér reláció:

$$\alpha \equiv \beta\ (\mathrm{mod}\ C) \leftrightarrow \inf(\alpha, \beta) \in f(\alpha - \beta),$$

meghatározott f által (ahol $\leftrightarrow$ az oda-vissza való logikai következmény jele).

Megemlítjük, hogy a 228 oldalas, előszóból, bevezetésből, öt fejezetből és egy függelékből, valamint 51 §-ból álló, tárgymutatóval és részletes (§-onkénti) tartalomjegyzékkel ellátott, és külső forma tekintetében is ízléses kiállítású, nyelvileg és stilisztikailag is igen szerencsésen megírt német nyelvű monográfia egyes fejezeteinek ezek a címei:

I. fejezet. Magfüggvények és Alaptétel.
II. fejezet. A magfüggvények elemi tulajdonságai.
III. fejezet. A végesrangú szabad félmodulus ideálelmélete.
IV. fejezet. A magfüggvények további tulajdonságai.
V. fejezet. Ekvivalens magfüggvények.

Függelék. Az egységelem nélkül való félcsoportok esete.

Röviden összefoglalva: megállapíthatjuk, hogy a nemzetközi matematikai szakirodalom Rédei László német nyelvű monográfiájának a megjelenésével (amelyet később angol nyelvre is lefordítottak) egy újszerű témájú, a témakört csaknem teljesen lefedő, igen nagyjelentőségű saját eredményeket és csak saját eredményeket tartalmazó, tartalmilag, szerkezetileg, nyelvileg—stilisztikailag, sőt még szakdidaktikailag is igen értékes, és mindeddig egyedülálló művel gazdagodott, amelyet algebristáknak és egyéb matematikusoknak hasznos ismerettárként figyelmükbe ajánlhatunk.

Szász Ferenc

A kiadásért felelős: Bernát György, az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Merkly László
A kézirat beérkezett: 1967. IV. 5. — Példányszám: 1300 — Terjedelem: 14,70 (A5) ív

67-5589 — Szegedi Nyomda

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

ОГЛАВЛЕНИЕ

П. Эрдёш—А. Хайнал: О кроматических графах 1
А. Реньи: Методы теории вероятностей в анализе I. 5
М. Богнар: Развитие и формирование теории топологических многообразий 37
Р. К. Гай и Ф. Харари: О лестницах Мёбиуса 59
Г. Фрайд: О приближении интерполяционными многочленами 61
Ж. Линковский: Обобщение одного тождества Якоби 65
Ф. Картеси: Геометрическая экстремальная задача 67
К. Корради—И. Катаи: К теории квадратичных вычетов 75
П. Вертеши: Доказательство теоремы Джексона путём интерполяций 83
К. Дьёри: О диофантическом уравнении $x^p+y^p=cz^p$. 93
Л. Альпар: О преобразованных видах абсолютно сходящихся рядов Фурье 97
Доклад о мемориальном математическом конкурсе имени Миклоша Швейцера 1966-ого года 105
Задачи 133
Из жизни общества 141
Рецензии книг 161

CONTENTS

P. Erdős and A. Hajnal: On chromatic graphs 1
A. Rényi: Probabilistic methods in analysis I. 5
M. Bognár: The development of the theory of topological manifolds 37
R. K. Guy and F. Harary: On the Möbius ladders 59
G. Freud: On approximation by interpolatory polynomials 61
J. Linkovski: The generalization of an identity of Jacobi 65
F. Kárteszi: On a geometrical extremum-problem 67
K. A. Corrádi and I. Kátai: A note on the theory of quadratic residues 75
P. Vértesi: The proof of Jackson's theorem by interpolationmethods 83
K. Győry: On the diophantine equation $x^p+y^p=cz^p$ 93
L. Alpár: On the transform of absolute convergent Fourier series 97
Report on the N. Schweitzer competition 1966. 105
Problems 133
Activity of the Society 141
Book-review 161

Ára: 6 Ft
Évi előfizetés: 20,— Ft

INDEX: 25 564

/312.046

Matematikai Lapok

Bolyai János
Matematikai
Társulat
Budapest

18. évfolyam, 1967

3-4

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenként négyszer.
Budapest, 1968. március — 18. évfolyam 3—4. szám.
Felelős szerkesztő: Turán Pál.
Szerkesztők: Hajós György, Kalmár László, Rapcsák András, Rényi Alfréd.
Szerkesztőség: Budapest V., Szabadság tér 17. Telefon: 311—793.
Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest V., Alkotmány utca 21. III.
Telefon: 111—010.
A kiadvány előfizethető a POSTA KÖZPONTI HÍRLAPIRODÁNÁL, Budapest V., József nádor tér 1. és bármely postahivatalban. Csekkszámlaszám egyéni 61.257, közületi: 61.066.
MNB. egyszámlaszám: 8.
Előfizethető és példányonként megvásárolható
az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, Budapest V., Alkotmány u. 21.
Telefon 111—010. Csekkbefizetési számla: 05,915,111-46.
MNB egyszámlaszám: 46.
az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLTBAN: Budapest V., Váci u. 22. Telefon: 185—612.
Előfizetési díj egy évre 20 Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

Az 1966. évi Állami díjjal kitüntetett Sarkadi Károly és Vincze István dolgozatainak jegyzéke 169
Rényi Alfréd: Valószínűségszámítási módszerek az analízisben II. 175
Máté Attila: Négyzetesen integrálható függvények Fourier-sorának konvergenciája 195
Szász Ferenc: Seres Iván élete és matematikai munkássága 243
Viski Mária: Szinguláris homológiák II. 251
Merza József és Varga Ottó: Kárteszi Ferenc 60 esztendős 273
Erdős Pál: Gráfok páros körüljárású részgráfjairól 283
Freud Géza: Lagrange féle interpolációs eljárások konvergenciája végtelen intervallumon ... 289
Fried Ervin: Az egyenletek általános megoldóképletére vonatkozó néhány fogalom tisztázása 293
Kátai Imre: A $d(n)$ függvény lokális viselkedéséről 297
Bánkövi György: Dr. Hazay István „Kiegyenlítő számítások" című könyve az alkalmazott matematika és a mérnökképzés problémáinak tükrében 303
Bende Sándor: A $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{x_i}} = 1$ diofantoszi egyenlet és annak egy gráfelméleti és információelméleti vonatkozása 323
Németh Géza: A Stirling-sor Csebisev sorfejtése 329
Hajós György: Az 1965. évi Schweitzer Miklós matematikai emlékverseny 4. feladatának megoldása 335
Feladatrovat 337
Hírek 345
Társulati élet 349
Könyvismertetés 359

AZ 1966. ÉVI ÁLLAMI-DÍJJAL KITÜNTETETT SARKADI KÁROLY ÉS VINCZE ISTVÁN DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

SARKADI KÁROLY DOLGOZATAI

1. A selejtarány Bayes-féle valószínűségi határaira vonatkozó dualitási elvről. *MTA AMI Közleményei* **2** (1953) 275—286.
2. A selejtarány apriori béta eloszlásáról. *MTA AMI Közleményei* **2** (1953) 287—297.
3. Osztályközök megválasztása minták elemeinek osztálybasorolásánál. *MTA AMI Közleményei* **2** (1953) 299—306.
4. A rendezett minták elméletének alkalmazása a statisztikai minőségellenőrzésben. *MTA AMI Közleményei 2* (1953) 307—334. (Fontányi Á. és Vas Évával).
   Kiegészítés *MTA Mat. Kut. Int. Közleményei* (1956) 399—405.)
6. Mozdonyok várakozási idejéről. *MTA Alk. Mat. Int. Közl.* **3** (1954) 191—194.
7. Generalized hypergeometric distributions. *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **2** (1957) 59—71.
8. *Vizsgálatok a Bayes-tétel problémaköréből.* Kandidátusi disszertáció, Budapest, 1957.
9. On the distribution of the number of exceedances. *Annals of Math. Stat. 28* (1957) 1021—1023.
10. *Statisztikai minőségellenőrzés*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó Budapest, 1958 (Vincze Istvánnal (szerk.) és másokkal).
11. A rule of dualism in mathematical statistics. *Acta Math. Ac. Sci. Hung.* **11** (1960) 83—92.
12. On the median of the distribution of exceedances. *Ann. Math. Stat. 31* (1960) 225—226.
13. On preliminary sampling with special reference to the microbiological control of tomato concentrates. *Biometrics* **16** (1960) 339—347 (Éltető Ödönnel).
14. On testing for normality. *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **5** (1960) 269—275.
15. On Galton's rank order test. *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **6** (1961) 127—131., kiegészítés ugyanott, **7** (1962) 223.
16. On the position of the sample mean among the ordered elements. *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **6** (1961) 239—254 (Schnell L.-né és Vincze I.-nal).
17. Über Entwurf und Auswertung von Dieselölentschwefelungsversuchen mit mathematisch-statistischen Methoden *Acta Chim. Hung.* **31** (1962) 23—30. (Bánkövi Györggyel, Horváth Józseffel és Jakab Károllyal).
18. Megbízhatósági vizsgálatokkal kapcsolatos egyes matematikai kérdések. *Híradástechnika* **14** (1963) 60—64.
19. 5/9-es frakcionális faktoriális kísérlet terve *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **7** (1963) 509—536 (Bánkövi Györggyel).
20. Elements of mathematical statistics. Fejezet a MTA Matematikai Kutató

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

Intézete: „*Probability theory, mathematical statistics and their applications*" c. UNESCO tanfolyam jegyzetében, **8** füz. Budapest 1963. 15 oldal.

21. Megbízhatósági vizsgálatok matematikai módszerei. *Híradástechnika* **15** (1964) 332—339. (Csáki Endrével és Balogh Alberttel).
22. 5/16 replication of a 4^4 factorial experiment. *Colloquium on Applications of Mathematics to Economics.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1965. 15—29. (Bánkövi Györggyel).
23. A matematikai statisztika alkalmazása a kutató munkában. Gillemot László, Mészáros Sándor (szerk.) *Bevezetés az ipari kutatómunkába* c. jegyzetben. Mérnöki Továbbképző Intézet, Budapest, 1967 117—187.
24. On testing for normality. *Proc. 5th Berkeley Symp. on Math. Stat. and Probability* **1.** (1967) 373—387.
25. Zur Analyse der UV Dosiswirkungskurven der *T* 7 Phagen *Strahlentherapie* **134** (1967) 151—157 (Rontó Györgyivel és Tarján Imrével).
26. Estimation after selection. *Studia Sci. Math. Hung.* **2** (1967).
27. An extension of Chebysev 's inequality. Zastosowania Matematyki 9 (1968), sajtó alatt.

VINCZE ISTVÁN DOLGOZATAI

a) Tudományos munkák

1. Konvex görbékről. Első díjjal jutalmazott dolgozat a Szegedi Tudományegyetem pályázatán. 1935 (23 old.) kéziratban.
2. Über die Schwerpunkte der konvexen Kurven bei speziellen Belegungen. Acta litterarum ac. scienciarum, Szeged, 9 (1938) 52—59.
3. Über den Minimalkreisring einer Eilinie. Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged) 11 (1947), 133—138.
4. Konvex görbékről. Doktori értekezés, benyújtva a Budapesti Tudományegyetem Bölcsészeti Karához. 1946 (31 oldal) (kéziratban).
5. On a geometrical extremum problem. Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged) 12 (1950) 136—142.
6. Konvex, zárt síkgörbék súlyvonaláról. Az Első Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei, Budapest, (1950) 679—687.
7. Beweis eines Abbildungssatzes von Béla Sz.-Nagy. Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged) 14 (1951) 96—100 (Szüsz Péterrel közösen).
8. A regressziós együttható meghatározása adott alappontok esetén. A MTA Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei, Budapest, 1 (1952) 215—237.
9. Mérési eredmények pontatlanságának hatása hisztogram felvételénél. A MTA Alk. Mat. Int.-nek Közleményei, 2 (1953) Budapest.
10. A tömeggyártás minőségellenőrzésének matematikai statisztikai módszereiről. A MTA III. Osztályának Közleményei, Budapest, 4 (1954) 429—441.
11. Eloszlások meghatározása középértékeik segítségével. A MTA III. Osztályának Közleményei, Budapest, 4 (1954) 513—523.
12. Bemerkungen zur Differentialgeometrie der Raumkurven. Publicationes Mathematicae, Debrecen 4 (1956) 61—69.
13. A kémiai frakcionáló megosztás matematikai tárgyalása nem teljes diffúzió esetén. A MTA Alk. Mat. Int. Közleményei, 3 (1954) 81—97. (Medgyessy Pál, Rényi Alfréd, Tettamanti Károly társszerzőkkel).

14. Transzcendens egész függvények maximum modulusáról. A MTA III. Osztályának Közleményei, Budapest, 6 (1956) 451—459.
15. Konvex, zárt síkgörbék megközelítéséről. Matematikai Lapok, 9 (1958) 19—35. (Erdős Pállal).
16. Bemerkungen über den Maximum-Modul ganzer transcendenter Funktionen. Acta Scientiarum Mathematicarum, Szeged, 19 (1958) 129—140.
17. Einige zweidimensionale Verteilungs- und Grenzverteilungssätze in der Theorie der geordneten Stichproben. A MTA Matematikai Kutató Intézet Közleményei, Budapest, 2 (1958) 183—209.
18. Eine Bemerkung zur Differentialgeometrie der Flächen. Annales Universitatis Scienciarum Budapestiensis de Rolando Eötvös nominatae. Sect. Math. 1 (1958) 71—72.
19. On some joint distribution and joint limiting distribution in the theory of order statistics. II. A MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményei 4 (1959) 29—47.
20. Az Eneström—Kakeya tételről. Matematikai Lapok, 10 (1959) 127—132.
21. Az információelmélet egy fogalmának értelmezéséről. Matematikai Lapok. 10 (1959) 255—266.
22. An interpretation of the *I*-divergence of information-theory. Transactions of the Second Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions and Random Processes. Prague (1960) 681—684.
23. Kétmintás próbákkal kapcsolatos néhány eloszlásról és határeloszlásról. The Fu-Tan University Journal (Shanghai) 1 (1960) 1—13. (kínai nyelven).
24. Kétváltozós empirikus eloszlásfüggvények eltéréséről. MTA III (Mat. és Fiz.) Oszt. Közleményei, 10 (1960) 361—372.
25. On the comparison of two samples with slightly different sizes. (Reimann Józseffel közösen). MTA Mat. Kut. Int. Közl. 5 (1960) 293—309.
26. On the position of the sample mean among the ordered sample elements. MTA Matematikai Kutató Intézet Közl. 7 (1962) 239—254. (Sarkadi Károly és Schnell Edit társszerzőkkel);
27. On two sample tests based on order statistics. Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Vol. I. pp. 695—705.
28. On some problems connected with the Galton Test. A MTA Mat. Kut. Int. Közl. 6 (1961) 97—109. (Csáki Endrével).
29. On a special type of randomized tests. II. Magyar Matematikai Kongresszus (1960) IV. 33. Előadáskivonatok.
30. A valószínűségszámítási információfogalom néhány kérdéséről. A MTA III. Osztályának Közleményei, 12 (1962) 7—14.

30/*a*. A cikk angol fordításban megjelent: „Some questions concerning the probabilistic concept of information" címen az AMS and IMS Selected Translations V (1965) kötetében.

31. Egy Gauss-féle sztochasztikus folyamatról. MTA III. Osztályának Közleményei 12 (1962) 35—46.
32. A gyártmánydarabok függetlensége és az átvételi tervek. A matematikai statisztika alkalmazása a gépgyártásban c. konferencia (Liblice 1962, 15—17). kiadványa, Prága, 1962. 251—255. (cseh nyelven).
33. On some combinatorial relations concerning the symmetric random walk. Acta Scientiarum Mathematicarum, Szeged 24 (1963) 231—235 (Csáki Endrével)
34. A generating function in the theory of order statistics. Publicationes Mathematicae 10 (1963) 82—87.

35. Über einige Vertelungssätze in der Theorie der geordneten Stichproben. Abh. der Deutschen Akad. d. Wiss. zu Berlin Klasse für Mathematik und Technik. Jahrgang 1964. 123—126.
36. Two joint distribution laws in the theory of order statistics. Mathematica Cluj 5 (1963) 27—37. (Csáki Endrével).
37. On some distributions connected with the arcsine law. MTA Mat. Kut. Int. Közl. 8 (1964) 281—291. (Csáki Endrével).
38. Megjegyzések a népesség számszerű alakulásának vizsgálatához. Demográfia 6 (1964) 217—230.
39. Über das Ehrenfest-sche Modell der Wärmeübertragung. Archiv der Mathematik 15 (1964) 394—400.
40. On some combinatorial relations concerning the symmetric random walk. Revue de Mathématique Pures et Appliquées. Bukarest 8 (1963) 263—266.
41. A Kolmogorov—Szmirnov és más nem-paraméteres próbák erőfüggvényéről. MTA III. Osztályának Közleményei. 15 (1965) 97—105.
42. On some questions connected with two-sample tests of Smirnov-type. Proceedings of the Vth Berkeley Symposium on Probability and Mathematical Statistics 1967 Vo 2. 1. p. 657—666.
43. On the power of the Kolmogorov—Smirnov two sample test and related non-parametric tests. Studies in Mathematical Statistics. Akadémiai Kiadó 1967. 199—208

b) Könyv, könyvrészlet

1. Statisztikai minőségellenőrzés. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1958. 460 oldal. (Szerkesztése, megírás 6 társszerzővel.)
2. Statisztikai hipotézisek vizsgálata. MTA Automatizálási Kutató Intézet Közleményei 11 (1965) 163—186.
3. „Tíz példa a matematika gyakorlati alkalmazására" c. könyvből az „Előszó" és a „Mintavételi problémákról" c. fejezet, továbbá a könyv szerkesztése.
4. Matematikai statisztika ipari alkalmazásokkal. Műszaki Könyvkiadó, cca 22 ív (sajtó alatt).

c) Ismeretterjesztés, tudománytervezés

1. A MTA Alk. Mat. Intézetének feladatairól. Akadémia Osztályközleményei, 1951.
2. A MTA Alk. Mat. Intézetének működéséről MTA III. Oszt. Közl. 1951.
3. Az ipari minőségellenőrzés statisztikai módszerei és az intézet feladatai e módszerek bevezetése terén. MTA Alk. Mat. Int. Közleményei 1 (1952) 239—249.
4. Az ipari minőségellenőrzés statisztikai módszereiről. Természet és Technika, 1953.
5. A valószínűségszámításról és néhány gyakorlati alkalmazásáról. Természet és Társadalom, 1954 (Medgyessy Pállal).
6. A biztosítási matematikus feladatairól. I. és II. Biztosítási Tájékoztató, 1956. évi 5. és 9. szám.
7. Selejtvizsgálat. Természettudományi Közlöny, 1958.
8. A MTA Matematikai Kut. Intézetének munkájáról. Természettudományi Közlöny, 1961.
9. A játékelméletről. I. és II. Természettudományi Közlöny, 1962. évi 10. és 11. szám.
10. A statisztikai előrejelzés néhány demográfiai vonatkozása. Demográfia, 1962. 231—233.

11. Über die Entwickelung der statistischen Qualitätskontrolle in Ungarn. Wissenschaftliche Zeitschrift Techn. Hochschule Otto Guericke Magdeburg (1962).
12. A matematikai statisztika ipari alkalmazásairól. Magyar Tudomány (1964).
13. Über einige Fragen biometrischer Anwendungen der Mathematik. Biometrische Zeitschrift 6 (1964) 159—165.
14. Mire alkalmazzák a matematikát. Fiúk könyve 1967.

VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI MÓDSZEREK AZ ANALÍZISBEN II.

RÉNYI ALFRÉD

0. §. BEVEZETÉS

Ugyanúgy, mint a dolgozat I. részének[1] paragrafusai, e rész paragrafusai is az analízis egy-egy konkrét problémáját tárgyalják a valószínűségszámítás módszerei segítségével és így egymástól függetlenül, tetszőleges sorrendben olvashatók. Egyes §-ok közvetlenül kapcsolódnak a dolgozat I. részének egyes §-aihoz. Így e dolgozat 1. §-a az I. rész 7. §-ához, míg e dolgozat 2. §-a az I. rész 6. §-ához csatlakozik. E dolgozat 3. §-a azonosságok bizonyításával, a 4. § végtelen sokszor differenciálható, nem analitikus függvényekkel, az 5. § a Haar-féle ortogonális függvények, a 6. § a Walsh-féle függvények szerinti sorfejtésekkel, a 7. § pedig a másodfajú Stirling-számok aszimptotikus vizsgálatával foglalkozik; ez a § kapcsolódik az I. rész 3. §-ához.

Újból hangsúlyozni kívánjuk, hogy ezek csak kiragadott példák: a valószínűségszámítás módszerei az analízis számos más fejezetében is sikerrel használhatók fel. Így például a [17] dolgozat a valószínűségszámítási módszerek sorelméleti alkalmazásaival foglalkoznak, míg a [13] a Legendre-polinomok valószínűségszámítási vonatkozásaival. Ugyanúgy, mint a dolgozat I. részében, elsősorban olyan példákat válogattunk ki, amelyek viszonylag kevés valószínűségszámítási ismerettel megérthetők. Kivételt képez e tekintetben az 5. és a 6. §, amelyben a martingál-konvergencia tétel fel van használva; e tétel megértéséhez szükséges fogalmakat a martingálok elméletéből az 5. §-ban ismertetjük.

E dolgozat folytatásaként egy következő dolgozatban az információelmélet analízisbeli alkalmazásait fogjuk ismertetni.

1. §. A WIMAN-TÉTEL ÉLESÍTÉSE EGY EGÉSZ FÜGGVÉNY HATVÁNYSORÁNAK MAJDNEM MINDEN ELŐJELEZÉSÉRE

Egy *Erdős Pál*lal közös, sajtó alatt levő dolgozatunkban [1] a következő tételt bizonyítottuk be:

1. TÉTEL. *Legyen*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1.1}$$

egy tetszőleges transzcendens egész függvény; legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *egy valószínűségi mező, és legyenek* $\xi_n = \xi_n(\omega)$ $(n = 0, 1, \ldots; \omega \in \Omega)$ *e valószínűségi mezőn értelmezett,*

[1] Valószínűségszámítási módszerek az analízisben, I., Matematikai Lapok, 18 (1967) 5—35

független valószínűségi változók, amelyek a ± 1 *értékeket* $1/2$ *valószínűséggel veszik fel. Vizsgáljuk az*

$$f(z, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi_n(\omega) z^n \tag{1.2}$$

véletlen egész függvényt. Legyen

$$M(r, \omega) = \max_{|z|=r} |f(z, \omega)| \qquad (r \geqq 0) \tag{1.3}$$

és

$$\mu(r) = \max_{n} |a_n| r^n \qquad (r \geqq 0). \tag{1.4}$$

Akkor minden $\delta > 0$*-ra és* $\omega \in \Omega$ *majdnem minden választása mellett*[2] *minden* $r \notin E_\delta(\omega)$*-re fennáll az*

$$M(r, \omega) < \mu(r)(\log \mu(r))^{\frac{1}{4}+\delta} \tag{1.5}$$

egyenlőtlenség, ahol $E_\delta(\omega)$ *az* $r > 0$ *félegyenes egy olyan (*δ*-tól és* ω*-tól függő) részhalmaza, amelynek logaritmikus mértéke véges.*[3]

Megjegyzés. Erdős Pál már 1952-ben észrevette (l. [2]), hogy az (1. 5) egyenlőtlenség érvényes az exponenciális függvény hatványsorának majdnem minden előjelzésére, és hogy e függvényre az 1/4 kitevő nem helyettesíthető kisebb számmal. Ez a példa mutatja, hogy az 1. tétel állítása általában nem élesíthető. Persze speciális (pl. erősen hézagos) hatványsorokra még az is előfordulhat, hogy minden előjelzésre $M(r, \omega) < C\mu(r)$ is igaz, ahol C állandó. Azokra az egész függvényekre, amelyek együtthatósorozata bizonyos szabályosságot mutat, általában igaz, hogy az 1/4 kitevő nem helyettesíthető kisebbel.

Az 1. tétel bizonyítása. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a_0 = 1$. Legyen

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| z^n, \tag{1.6}$$

akkor

$$M_1(r) = \max_{|z|=r} |f_1(z)| = f_1(r). \tag{1.7}$$

Az $f_1(z)$ hatványsorra érvényes a Wiman-tétel, vagyis megadható olyan E_δ halmaz, amelyre

$$\int_{E_\delta} \frac{dr}{r} < +\infty \tag{1.8}$$

úgy, hogy ha $r \notin E_\delta$, akkor

$$M_1(r) < \mu(r)(\log \mu(r))^{\frac{1+\delta}{2}}. \tag{1.9}$$

[2] Vagyis, ha $\omega \notin A$, ahol $A \in \mathcal{A}$ egy olyan halmaz, amelyre $P(A) = 0$.

[3] Vagyis amelyre

$$\int_{E_\delta(\omega)} \frac{dr}{r} < +\infty.$$

Az E_δ halmazról feltehető, hogy az megszámlálható sok idegen nyílt intervallum egyesítése, amely intervallumok végpontjai a végesben sehol sem torlódnak. Mármost definiáljuk az R_n számsorozatot a következőképpen: Legyen $R_0=0$; ha már R_k definiálva van, ha $k \leqq n$, az R_{n+1} számot a következőképpen definiáljuk: Jelölje $R_n' > R_n$ azt a számot, amelyre $\log \mu(R_n') = \log \mu(R_n) + 1$. Ha $R_n' \notin E_\delta$, akkor legyen $R_{n+1} = R_n'$; ha viszont $R_n' \in E_\delta$, akkor R_n' beleesik az E_δ halmazt képező egyik intervallumba: ez esetben legyen R_{n+1} ezen intervallum alsó végpontja, és legyen R_{n+2} ezen intervallum felső végpontja. Így tehát az R_n sorozatról ($n=0, 1, \ldots$) a következőket állíthatjuk:

a) $R_n \notin E_\delta$,

b) ha az (R_n, R_{n+1}) nyílt intervallumban van olyan r, amely nem tartozik az E_δ halmazba, akkor

$$\log \mu(R_{n+1}) = \log \mu(R_n) + 1.$$

c) $\log \mu(R_n) \geqq \left[\frac{n}{2}\right]$.

Mármost tegyük fel, hogy ω valamely értékére már bebizonyítottuk, hogy ha $n \geqq n_0(\omega)$, akkor

$$M(R_n, \omega) \leqq \frac{1}{3}\mu(R_n)\left(\log \mu(R_n)\right)^{\frac{1}{4}+\delta}. \tag{1.10}$$

Mivel $M(r, \omega)$ és $\mu(r)$ egyaránt r-nek növekvő függvényei, ha $n \geqq n_0(\omega)$, $R_n < r < R_{n+1}$, továbbá $r \notin E_\delta$, akkor az R_n sorozat b) tulajdonsága miatt érvényes a

$$M(r, \omega) \leqq M(R_{n+1}, \omega) \leqq \frac{1}{3}\mu(R_{n+1})\left(\log \mu(R_{n+1})\right)^{\frac{1}{4}+\delta}$$

és így az

$$M(r, \omega) < \mu(r)\left(\log \mu(r)\right)^{\frac{1}{4}+\delta} \tag{1.11}$$

egyenlőtlenség, hacsak $n \geqq n_0(\omega)$, $r \geqq r_0$ és $r \notin E_\delta$.

Így tehát elegendő bebizonyítani, hogy az (1. 10) egyenlőtlenség 1 valószínűséggel fennáll valamely (ω-tól függő) $n_0(\omega)$-tól kezdve.

Mármost legyen $g(x) = \log f_1(e^x)$, akkor ugyanúgy, mint a *Wiman*-tétel *Rosenbloom*-féle bizonyításánál (l. I. rész 2. §), a Csebisev-egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk, hogy

$$\sum_{|n-g'(\log r)| > A\sqrt{g''(\log r)}} |a_n| r^n < \frac{f_1(r)}{A^2}, \quad \text{ha} \quad A > 1$$

és így, ha $A = \left(\log \mu(r)\right)^{\frac{1}{8}}$ és $r \notin E_\delta$

$$\sum_{|n-g'(\log r)| > (\log \mu(r))^{1/8}\sqrt{g''(\log r)}} |a_n| r^n < \mu(r)\left(\log \mu(r)\right)^{\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}}.$$

Mármost, figyelembevéve (l. I. rész 2. §), hogy ha $r \notin E_\delta$, akkor $g''(\log r) < \left(\log f_1(r)\right)^{1+\delta} < 4\left(\log \mu(r)\right)^{1+\delta}$, és bevezetve az

$$A(r) = g'(\log r) \tag{1.12}$$

és

$$c(r) = 2\left(\log \mu(r)\right)^{\frac{5}{8}+\frac{\delta}{2}} \tag{1.13}$$

jelölést, következik

$$\sum_{|n-A(r)|\leqq c(r)} |a_n| r^n < \mu(r)\big(\log \mu(r)\big)^{\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}}.$$

Ennélfogva

$$(1.14)\quad M(R_n, \omega) < \mu(R_n)\big(\log \mu(R_n)\big)^{\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}} + \operatorname*{Max}_{0\leqq\varphi\leqq 2\pi} \left| \sum_{|k-A(R_n)|<C(R_n)} a_k \xi_k r^k e^{ik\varphi} \right|.$$

Most fel fogjuk használni a 7. §-ban bebizonyított (7.13) egyenlőtlenséget. Ugyanazzal a meggondolással, amellyel (7.13)-ból a 7. § lemmáját bebizonyítottuk, következik, hogy ha $b_1, b_2, \ldots, b_D$ tetszőleges komplex számok,

$$(1.15)\quad P\left(\operatorname*{Max}_{0\leqq\varphi\leqq 2\pi} \left| \sum_{k=1}^{D} b_k \xi_k e^{ik\varphi} \right| > 2\lambda \sqrt{\sum_{k=1}^{D} |b_k|^2} \right) < \left(\frac{8\pi D^{\frac{3}{2}}}{\lambda} + 4 \right) e^{-\frac{\lambda^2}{8}}$$

és így, $\lambda = \sqrt{44 \log D}$ helyettesítéssel

$$(1.16)\quad P\left(\operatorname*{Max}_{0\leqq\varphi\leqq 2\pi} \left| \sum_{k=1}^{D} b_k \xi_k e^{ik\varphi} \right| > 2\sqrt{44 \log D \cdot \sum_{k=1}^{D} |b_k|^2} \right) < \frac{1}{D^4},$$

ha $D \geqq D_0$.

Így tehát

$$P\left(\operatorname*{Max}_{0\leqq\varphi\leqq 2\pi} \left| \sum_{|k-A(r)|<c(r)} a_k \xi_k r^k e^{ik\varphi} \right| > 2\sqrt{44 \log 2c(r) \cdot \sum_{|k-A(r)|<c(r)} |a_k|^2 r^{2k}} \right) < \frac{1}{(2c(r))^4}.$$

Mármost, ha $r \notin E_\delta$

$$\sum_{|k-A(r)|\leqq C(r)} |a_k|^2 r^{2k} \leqq \mu(r) f_1(r) \leqq \mu^2(r)\big(\log \mu(r)\big)^{\frac{1+\delta}{2}},$$

ennélfogva, ha A_n-nel jelöljük a

$$\operatorname*{Max}_{0\leqq\varphi\leqq 2\pi} \left| \sum_{|k-A(R_n)|<C(R_n)} a_k \xi_k R_n^k e^{ik\varphi} \right| > 8\mu(R_n)\big(\log \mu(R_n)\big)^{\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}}$$

eseményt, nyerjük, hogy

$$(1.17)\quad P(A_n) \leqq \frac{1}{(2C(R_n))^4} \leqq \frac{1}{\big(\log \mu(R_n)\big)^{\frac{5}{2}}}.$$

Tekintettel az R_n sorozat c) tulajdonságára, azt kapjuk, hogy

$$(1.18)\quad \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty.$$

Ennélfogva a Borel—Cantelli lemma szerint 1 valószínűséggel az A_n események közül csak véges sok következik be. Így tehát 1 valószínűséggel van olyan $n_0(\omega)$, hogy ha $n \geqq n_0(\omega)$, akkor

$$(1.19)\quad \operatorname*{Max}_{0\leqq\varphi\leqq 2\pi} \left| \sum_{|k-A(R_n)|<C(R_n)} a_k \xi_k(\omega) R_n^k e^{ik\varphi} \right| < 8\mu(R_n)\big(\log \mu(R_n)\big)^{\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}}.$$

Így, tekintettel (1. 13)-ra, (1. 20)-ból következik, hogy (1. 11) igaz, ha $n \geqq n_0(\omega)$; ezzel tételünket bebizonyítottuk.

Megjegyzendő, hogy az 1. tétel állításához hasonló állítást, egész függvények bizonyos osztályára elsőnek *P. Lévy* bizonyított be. (l. [22]).

2. §. A CARTAN-THULLEN TÉTEL VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI BIZONYÍTÁSA

Aki bármilyen keveset foglalkozott a többváltozós komplex függvénytannal, jól tudja, hogy a többváltozós esetben számos olyan probléma merül fel, amelynek az egyváltozós esetben nincs megfelelője. E kérdések közé tartozik a *regularitási tartományok* kérdése. Az egyváltozós esetben e probléma nagyon egyszerűen elintézhető. Akárhogy adunk meg a komplex számsíkon egy T tartományt (azaz egy összefüggő nyílt halmazt), megadható egy olyan $f(z)$ analitikus függvény, amely a T tartományban reguláris, és amelynek a T tartomány a regularitási tartománya, vagyis az $f(z)$ függvény nem folytatható analitikusan a T tartományon kívüli pontba, vagy más szóval nem adható meg olyan, a T tartományt valódi részhalmazként tartalmazó T^* tartomány, úgy hogy $f(z)$ reguláris legyen T^*-ban is.

A többváltozós esetben azonban egész más a helyzet. Az egyszerűség kedvéért szorítkozzunk csak a kétváltozós esetre. Legyen T a (z_1, z_2) komplex számpárok C^2 terének (a komplex számsík önmagával vett topologikus szorzatának) egy tartománya. A T tartományt regularitási tartománynak nevezzük, ha létezik olyan $f(z_1, z_2)$ analitikus függvény, amely a T tartományban reguláris és amely nem folytatható a T tartományon túl. Mármost a kétváltozós esetben — szöges ellentétben az egyváltozós esettel — nem minden tartomány regularitási tartomány. Így merül fel a probléma, hogy bizonyos T tartományokról bebizonyítsuk, hogy azok regularitási tartományok, ill., ha nem azok, megadjuk azt a T tartományt tartalmazó legnagyobb T^* tartományt (a T tartomány regularitási burkát), amelyre igaz, hogy minden T-ben reguláris függvény analitikusan folytatható T^*-ba. Az ezirányú eredmények közül itt csak egy tétellel foglalkozunk: Cartan és Thullen azon nevezetes tételével [3], hogy *minden konvergencia-tartomány regularitási tartomány is.*

Más szóval, ha T egy tartomány a C^2 térben és megadható egy olyan

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n} z_1^m z_2^n \tag{2. 1}$$

kétváltozós hatványsor, amelynek T a (pontos) konvergenciatartománya, tehát a (2. 1) sor abszolút konvergens, ha $(z_1, z_2) \in T$ és nem abszolút konvergens, ha (z_1, z_2) nem tartozik a T tartomány zárt burkához, akkor megadható egy olyan $f(z_1, z_2)$ függvény, amelynek T a regularitási tartománya.

Persze, az általában nem igaz, hogy maga a (2. 1) sor által előállított függvény nem folytatható a T tartományon kívüli pontokban, hiszen pl. a

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_1^n z_2^n \tag{2. 2}$$

hatványsor konvergenciatartománya a $|z_1| \cdot |z_2| < 1$ tartomány, és ott a (2. 2) sor az $\dfrac{1}{1 - z_1 z_2}$ függvényt állítja elő, és e függvény folytatható az említett tartományon túl minden olyan (z_1, z_2) pontba, amelyre $z_1 z_2 \neq 1$. Azonban *J. P. Kahane* bebizonyította[4], hogy a (2. 1) sort lehet úgy előjelezni, hogy annak T legyen a regularitási tartománya, sőt, (2. 1) majdnem minden előjelezése esetében ez lesz a helyzet. Kahane e tétele természetesen tartalmazza és konkretizálja a Cartan—Thullen tételt, illetve a Cartan—Thullen tétel egy új — valószínűségszámítási — bizonyítását szolgáltatja. Alábbiakban Kahane tételének bizonyítását fogjuk ismertetni.

[4] Sajtó alatt levő [4] könyvében; a bizonyítást itt a szerző szíves hozzájárulásával közöljük.

A bizonyításhoz szükség lesz a következő — *Paley*től és *Zygmund*tól [5] származó — segédtételre.

LEMMA. *Legyenek* $C_1, C_2, \ldots, C_N$ *tetszőleges komplex számok,* $\xi_1, \ldots, \xi_N$ *független valószínűségi változók, amelyek a* ± 1 *értékeket* $\frac{1}{2}$ *valószínűséggel veszik fel. Akkor*

$$P\left(\left|\sum_{k=1}^{N} c_k \xi_k\right| \geqq \vartheta \sqrt{\sum_{k=1}^{N} |c_k|^2}\right) \geqq \frac{(1-\vartheta^2)^2}{3}, \tag{2.4}$$

ha $0 < \vartheta < 1$.

A lemma bizonyítása. Egyrészt

$$M\left(\left|\sum_{k=1}^{N} c_k \xi_k\right|^2\right) = \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2$$

másrészt, felhasználva a Schwarz-egyenlőtlenséget,

$$M\left(\left|\sum_{k=1}^{N} c_k \xi_k\right|^2\right) \leqq \vartheta^2 \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2 + P^{\frac{1}{2}}\left(\left|\sum_{k=1}^{N} c_k \xi_k\right| \geqq \vartheta \sqrt{\sum_{k=1}^{N} |c_k|^2}\right) \cdot M^{\frac{1}{2}}\left(\left|\sum_{k=1}^{N} c_k \xi_k\right|^4\right).$$

Így tehát

$$P\left(\left|\sum_{k=1}^{N} c_k \xi_k\right| \geqq \vartheta \sqrt{\sum_{k=1}^{N} |c_k|^2}\right) \geqq \frac{(1-\vartheta^2)^2 \left(\sum_{k=1}^{N} |c_k|^2\right)^2}{M\left(\left|\sum_{k=1}^{N} c_k \xi_k\right|^4\right)}. \tag{2.5}$$

Azonban

$$M\left(\left|\sum_{k=1}^{N} c_k \xi_k\right|^4\right) \leqq 3\left(\sum_{k=1}^{N} |c_k|^2\right)^2. \tag{2.6}$$

A (2. 5) és (2. 6) egyenlőtlenségekből (2. 4) azonnal következik.

Mármost legyen (ζ_1, ζ_2) a T tartomány egy határpontja. Először azt bizonyítjuk be, hogy ha a $\xi_{m,n}$ valószínűségi változók $(m, n = 0, 1, 2, \ldots)$ függetlenek és mindegyik a ± 1 értékeket $\frac{1}{2}$ valószínűséggel veszi fel, akkor az

$$F(z_1, z_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n} \cdot \xi_{m,n} \cdot z_1^m \cdot z_2^n \tag{2.7}$$

véletlen függvénynek a (ζ_1, ζ_2) pont 1 valószínűséggel szinguláris pontja. E célból vizsgáljuk a

$$\Phi(w) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n} \xi_{m,n} \zeta_1^m \zeta_2^n w^{m+n} \tag{2.8}$$

egyváltozós függvényt. $\Phi(w)$ nyilvánvalóan reguláris, ha $|w| < 1$ és (ζ_1, ζ_2), akkor és csak akkor szinguláris pontja $F(z_1, z_2)$-nek, ha a $w = 1$ pont szinguláris pontja $\Phi(w)$-nek. Írjuk $\Phi(w)$-t a

$$\Phi(w) = \sum_{p=0}^{\infty} \gamma_p w^p \tag{2.9}$$

alakba, ahol tehát

$$\gamma_p = \sum_{m+n=p} c_{m,n} \xi_{m,n} \zeta_1^m \zeta_2^n \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.10}$$

Nyilvánvaló, hogy az γ_p együtthatók független és szimmetrikus eloszlású valószínűségi változók, így tehát *Kahane* az I. rész 6. §-ában bebizonyított tétele szerint a $\Phi(w)$ véletlen függvény 1 valószínűséggel nem folytatható a konvergenciakörén túl. Jelölje $\varrho = \varrho(\omega)$ a (2. 9) hatványsor konvergenciasugarát; ϱ egy valószínűségi változó, amelyre nyilvánvalóan $\varrho \geqq 1$. Állításunk bebizonyításához tehát elegendő kimutatni, hogy 1 valószínűséggel $\varrho = 1$. Mármost, mivel feltevés szerint a (2. 8) sor nem abszolút konvergens, ha $|w| > 1$, tehát minden pozitív δ-hoz végtelen sok olyan (m, n) számpár adható meg, hogy

$$|c_{m,n} \zeta_1^m \zeta_2^n| > e^{-(m+n)\delta} \tag{2. 11}$$

(hiszen, ha nem így volna, (2. 8) abszolút konvergens volna, ha $|W| = e^{\delta/2}$). Legyen (m, n) egy számpár, amelyre (2. 11) fennáll és $p = m + n$, akkor tehát

$$\Big(\sum_{m+n=p} |c_{m,n}| \cdot |\zeta_1^m| \cdot |\zeta_2^n| \Big)^{\frac{1}{2}} \geqq e^{-p\delta}.$$

Így tehát a Paley—Zygmund egyenlőtlenség szerint az ilyen p-kre (melyek száma minden $\delta > 0$-ra végtelen),

$$P\left(|\gamma_p| \geqq \vartheta e^{-p\delta}\right) \geqq \frac{(1-\vartheta^2)^2}{3}$$

hacsak $0 < \vartheta < 1$. Mivel a γ_p változók függetlenek, a Borel—Cantelli lemmából következik, hogy 1 valószínűséggel végtelen sok p-re áll fenn a $|\gamma_p| \geqq \vartheta e^{-p\delta}$ egyenlőtlenség, vagyis a (2. 9) sor 1 valószínűséggel nem konvergens, ha $|w| = e^{\delta}$, más szóval 1 valószínűséggel $\varrho \leqq e^{\delta}$. Mivel $\delta > 0$, tetszőleges, következik, hogy 1 valószínűséggel $\varrho = 1$ és így a (ζ_1, ζ_2) pont 1 valószínűséggel szinguláris pontja az $f(z_1, z_2)$ véletlen analitikus függvénynek. Mármost T határán egy mindenütt sűrű, megszámlálható ponthalmazt választva, azt kapjuk, hogy 1 valószínűséggel e pontok mind szinguláris pontjai $F(z_1, z_2)$-nek, vagyis az $F(z_1, z_2)$ véletlen függvény regularitási tartománya 1 valószínűséggel azonos a T tartománnyal. Ezzel *Kahane* tételét bebizonyítottuk, és egyúttal valószínűségszámítási bizonyítást adtunk a *Cartan—Thullen* tételre.

3. §. AZONOSSÁGOK VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI BIZONYÍTÁSA

E §-ban azt mutatjuk meg, hogyan lehet az analízisben szerepet játszó bizonyos azonosságokat valószínűségszámítási úton belátni. Erre számos egyszerű példa adható meg. Így például a Moivre—Laplace tétel bizonyítása megfogalmazható úgy, hogy abból kiadódjék az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi} \tag{3. 1}$$

azonosság. Egy másik példa erre az Euler-féle béta-integrálra vonatkozó

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\, dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{3. 2}$$

azonosság ($\alpha>0$, $\beta>0$). Ez a következőképpen bizonyítható be. Definíció szerint

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx. \tag{3.3}$$

Legyen ξ_α egy olyan valószínűségi változó, amelynek sűrűségfüggvénye $\frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{\Gamma(\alpha)}$, ha $x>0$, és hasonlóképpen ξ_β egy olyan valószínűségi változó,[5] amelynek sűrűségfüggvénye $\frac{x^{\beta-1}e^{-x}}{\Gamma(\beta)}$ ha $x>0$ ($\alpha>0$, $\beta>0$), továbbá legyenek ξ_α és ξ_β függetlenek. A $\xi_\alpha+\xi_\beta=\eta$ változó sűrűségfüggvényét jelölje $g(x)$. Jól ismert, hogy $g(x)$ egyenlő ξ_α és ξ_β sűrűségfüggvényeinek konvolúciójával, tehát

$$g(x)=\int_0^x \frac{y^{\alpha-1}e^{-y}\cdot(x-y)^{\beta-1}e^{-(x-y)}}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}\,dy \tag{3.4}$$

és így

$$g(x)=\frac{x^{\alpha+\beta-1}\cdot e^{-x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt. \tag{3.5}$$

Mivel $g(x)$ sűrűségfüggvény, tehát $\int_0^\infty g(x)\,dx=1$ és így

$$1=\int_0^\infty g(x)\,dx=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt, \tag{3.6}$$

amiből (3. 2) adódik.[6]

Az ilyen jellegű példák közül még csak egyet említünk itt meg: az *Abel*-től származó:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a(a+kb)^{k-1}(1-a-kb)^{n-k}=1 \tag{3.7}$$

azonosság (l. [18]) valószínűségszámítási bizonyítását, amely $b=0$ esetben a binomiális tételre redukálódik, tehát a binomiális tétel általánosításának is tekinthető. Ez az azonosság a következőképpen látható be: legyen $0<a<1$, $0<b\leqq\frac{1-a}{n}$ ($n=1, 2, \ldots$). Válasszunk a (0, 1) intervallumban egymástól függetlenül, egyenletes eloszlással n számot, és legyen ezek közül η_j^* a nagyság szerint j-edik ($j=1, 2, \ldots, n$). Legyen továbbá $\eta_0^*=0$ és $\eta_{n+1}^*=1$. Jelölje $v_n(a, b)$ a legkisebb K egész számot[7], amelyre $\eta_{k+1}^*\geqq a+kb$ és legyen $W_k=P(v_n(a, b)=k)$ ($k=0, 1, \ldots, n$). Felhasználva a rendezett minták elméletének elemeit (l. pl. [6]), egyszerű számolással (n-re vonatkozó indukcióval) belátható, hogy

$$W_k=\binom{n}{k}a(a+kb)^{k-1}(1-a-kb)^{n-k} \tag{3.8}$$

[5] Tehát legyenek ξ_α ill. ξ_β, α ill. β rendű gamma-eloszlású valószínűségi változók.
[6] Egyben azt is bebizonyítottuk, hogy $\xi_\alpha+\xi_\beta$ eloszlása $(\alpha+\beta)$-rendű gamma-eloszlás.
[7] Ilyen szám bizonyosan van, hiszen feltevéseink szerint $1=\eta_{n+1}^*\geqq a+nb$.

A W_k számok $(k=0, 1, \ldots, n)$ egy teljes eseményrendszer valószínűségei, így tehát összegük 1, és ezért (3. 8)-ból (3. 7) azonnal adódik a $0<a<1$, $0<b\leqq\frac{1-a}{n}$ esetre. Mivel (3. 7) bal oldala a-nak és b-nek polinomja, ebből már következik, hogy (3. 7) minden a-ra és b-re fennáll.

A (3. 7) azonosságot szokták (l. pl. [19])

$$(3.\,7^*) \qquad (\beta-n)\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(\alpha+i)^i(\beta-i)^{n-i-1}=(\alpha+\beta)^n$$

alakba is írni. Az azonosság két alakjának ekvivalenciája igen egyszerűen belátható: (3. 7*)-ból $\beta=n+\frac{a}{b}$ és $\alpha=\frac{1-a}{b}-n$ helyettesítéssel adódik (3. 7).

Legyen most $a=b=\frac{x}{n+1}$ $(0<x<1)$; elvégezve (3. 7)-ben az $n\to\infty$ határátmenetet, a Stirling formula felhasználásával adódik a

$$(3.\,9) \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)^{k-1}x^k e^{-(k+1)x}}{k!}=1$$

azonosság. Bevezetve az

$$(3.\,10) \qquad y=xe^{-x}$$

jelölést, (3. 9) az

$$(3.\,11) \qquad x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-2}y^n}{(n-1)!}$$

alakra hozható. Így tehát (3. 11) az $y=xe^{-x}$ függvény inverz függvényének (pontosabban az inverz függvény azon ágának, amely $y=0$-ra az $x=0$ értéket veszi fel) jól ismert hatványsorát adja, amelyre ilymódon valószínűségszámítási bizonyítást nyertünk. Mi a (3. 11) azonosságot a $0<x\leqq 1$ vagyis $0\leqq y\leqq 1/e$ feltétel mellett bizonyítottuk be; ebből azonban már következik, hogy (3. 11) érvényes minden olyan y komplex számra, amelyre $|y|\leqq 1/e$. (Azt, hogy a (3. 11) hatványsor konvergenciasugara pontosan $1/e$, a Stirling-formula segítségével láthatjuk be; ha $|y|=1/e$, vagyis a konvergenciakör kerületén a (3. 11) sor konvergens, mivel n-edik tagja $n^{-\frac{3}{2}}$ nagyságrendben tart 0-hoz.)

A (3.11) sorfejtés egyébként az inverz függvény sorfejtésére vonatkozó ún. Bürmann—Lagrange formula speciális esete (l. [7], [20]).

4. §. VÉGTELEN SOKSZOR DIFFERENCIÁLHATÓ, NEM ANALITIKUS FÜGGVÉNYEK

Jól ismert tény, hogy vannak az $x\geqq 0$ félegyenesen végtelen sokszor differenciálható, de sehol sem analitikus függvények: ilyen függvények effektív megkonstruálása azonban nem triviális feladat. Nemrégiben vette észre *J. Fabius* [8], hogy igen egyszerűen konstruálhatunk ilyen függvényeket a valószínűségszámítás segítségével a következőképpen: Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ független, a (0, 1) intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók és legyen $F(x)$ $(0\leqq x\leqq 1)$ az

$$(4.\,1) \qquad \eta=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_n}{2^n}$$

valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Definiáljuk az $F(x)$ függvényt a $[0, 1]$ intervallumon kívül a következőképpen:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - F(x-1), & \text{ha} \quad 1 \leqq x \leqq 2, \\ -F(x-2^n), & \text{ha} \quad 2^n \leqq x \leqq 2^{n+1}, \qquad n = 1, 2, \ldots . \end{cases} \tag{4. 2}$$

A definícióból látható, hogy $F(2l) = 0$, ha $l = 1, 2, \ldots$.

Mármost a (4. 1) által definiált η valószínűségi változó felírható

$$\eta = \frac{\xi_1}{2} + \frac{\eta_1}{2} \tag{4. 3}$$

alakban, ahol

$$\eta_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_{n+1}}{2^n}, \tag{4. 4}$$

Nyilvánvalóan ξ_1 és η_1 függetlenek, továbbá η_1 ugyanolyan eloszlású, mint η. Így tehát η eloszlása $\xi_1/2$ és $\eta/2$ eloszlásának konvolúciója, vagyis $F(x)$ eleget tesz a

$$F\left(\frac{x}{2}\right) = \begin{cases} \int_0^x F(t)\, dt, & \text{ha} \quad 0 \leqq x \leqq 1, \\ x - 1 + \int_{x-1}^{1} F(t)\, dt, & \text{ha} \quad 1 \leqq x \leqq 2 \end{cases} \tag{4. 5}$$

függvényegyenletnek. Azonban, (4. 2) miatt $\int_0^2 F(u)\, du = 1$ és így, újból felhasználva (4. 2)-t,

$$x - 1 + \int_{x-1}^{1} F(t)\, dt = \int_0^x F(u)\, du, \tag{4. 6}$$

vagyis (4. 5) a következő alakra hozható:

$$F\left(\frac{x}{2}\right) = \int_0^x F(t)\, dt, \quad \text{ha} \quad 0 \leqq x \leqq 2. \tag{4. 7}$$

Tekintettel (4. 2)-re, következik, hogy (4. 7) érvényes minden nemnegatív x-re, vagyis minden $x \geqq 0$-ra

$$F(x) = \int_0^{2x} F(u)\, du. \tag{4. 8}$$

(4. 8)-ból látható, hogy $F(x)$ folytonos és akárhányszor differenciálható, és hogy

$$F^{(n)}(x) = 2^n F^{(n-1)}(2x) \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{4. 9}$$

amiből indukcióval következik, hogy

$$F^{(n)}(x) = 2^{\binom{n+1}{2}} F(2^n x) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4. 10}$$

Mivel $F(2l)=0$, ha $l\geqq 1$ egész, tehát ha x diadikus racionális szám, $x=\frac{a}{2^r}$, akkor

$$F^{(n)}\left(\frac{a}{2^r}\right)=0, \quad \text{ha} \quad n\geqq r+1.$$

Ha tehát volna olyan pont az $x\geqq 0$ félegyenesen, amelynek egy környezetében $F(x)$ analitikus volna, akkor volna ilyen racionális pont is, de akkor $F(x)$-nek polinomnak kellene lennie, ami nyilván lehetetlen (mivel pl. $F(x)$ korlátos, de nem konstans); így tehát $F(x)$ sehol sem analitikus függvény.

A mondottakból következik, hogy az $x=0$ pontban $F(x)$ összes deriváltjai eltűnnek. Ez speciális esete a következő, sokkal általánosabb állításnak:

Legyenek $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ független, nemnegatív valószínűségi változók és legyen η_n eloszlásfüggvénye $F_n(x)$, és tegyük fel, hogy $F_n(x)\leqq C_n x$ ha $x\geqq 0$ $(n=1, 2, \ldots)$, ahol $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ tetszőleges pozitív állandók. Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n$ sor 1 valószínűséggel konvergens (ehhez a Kolmogorov-féle 3-sor tétel szerint elégséges, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty}M(\eta_n)$ és $\sum_{n=1}^{\infty}D^2(\eta_n)$ sorok konvergáljanak); e sor összegét jelölje η és η eloszlásfüggvényét jelölje $F(x)$. Akkor $F(x)$ a 0 pontban akárhányszor deriválható és ott összes deriváltjai eltűnnek.

Bizonyítás. Ha $x>0$ és $\eta<x$, akkor $\eta_k<x$ $(k=1, 2, \ldots)$. Így tehát minden n-re

$$F(x)\leqq \prod_{k=1}^{n+1}F_k(x)\leqq c_1c_2\ldots c_{n+1}x^{n+1}.$$

Ennélfogva

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(x)}{x^n}=0, \quad \text{ha} \quad n=1, 2, \ldots .$$

Nyilvánvaló, hogy Fabius példája esetében teljesülnek a fenti általános tétel feltételei.

5. §. A HAAR-FÉLE ORTOGONÁLIS FÜGGVÉNYRENDSZER SZERINTI SORFEJTÉSEK KONVERGENCIÁJA

A Haar-féle $\{\chi_n(x)\}$ $(n=0, 1, \ldots;\ 0\leqq x<1)$ függvényrendszert a következőképpen definiáljuk. Legyen

$$\chi_0(x)=1, \quad \text{ha} \quad 0\leqq x<1 \tag{5.1}$$

$$\chi_1(x)=\begin{cases}1, & \text{ha} \quad 0\leqq x<\frac{1}{2}\\ -1, & \text{ha} \quad \frac{1}{2}\leqq x<1\end{cases} \tag{5.2}$$

$$\chi_2(x)=\begin{cases}\sqrt{2}, & \text{ha} \quad 0\leqq x<\frac{1}{4}\\ -\sqrt{2}, & \text{ha} \quad \frac{1}{4}\leqq x<\frac{1}{2}\\ 0, & \text{ha} \quad \frac{1}{2}\leqq x<1\end{cases} \tag{5.3}$$

és általában

$$\chi_{2^k}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}}, & \text{ha } 0 \leqq x < \frac{1}{2^{k+1}} \\ -2^{\frac{k}{2}}, & \text{ha } \frac{1}{2^{k+1}} \leqq x < \frac{1}{2^k} \\ 0, & \text{ha } \frac{1}{2^k} \leqq x < 1, \end{cases} \tag{5.4}$$

ha $k = 0, 1, \ldots$, továbbá

$$\chi_{2^k+j}(x) = \begin{cases} \chi_{2^k}\left(x - \frac{j}{2^k}\right), & \text{ha } \frac{j}{2^k} \leqq x < \frac{j+1}{2^k} \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases} \tag{5.5}$$

ha $1 \leqq j \leqq 2^k - 1$, $k = 1, 2, \ldots$.

Könnyen belátható, hogy a $\chi_n(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ függvények a $[0, 1)$ intervallumban ortonormált függvényrendszert alkotnak. Azt sem nehéz belátni, hogy e rendszer teljes. Legyen $f(x)$ egy tetszőleges, a $[0, 1)$ intervallumban megadott mérhető valós függvény, amelyre $\int_0^1 f^2(x)\,dx$ létezik; képezzük $f(x)$ kifejtését a Haar-féle rendszerben, vagyis vizsgáljuk az

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \chi_n(x) \tag{5.6}$$

sort, ahol

$$c_n = \int_0^1 f(t)\chi_n(t)\,dt. \tag{5.7}$$

Haar Alfréd nevezetes tétele szerint az (5. 6) sor a $[0, 1)$ intervallumban majdnem mindenütt konvergens és összege $f(x)$-szel egyenlő. E §-ban e tételre adunk — *K. Krickeberg* ([9]) nyomán — valószínűségszámítási bizonyítást, a martingál-elmélet segítségével.

Valószínűségi változók egy ζ_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ végtelen sorozatát martingálnak nevezzük, ha rendelkezik a következő tulajdonsággal: ζ_{n+1} feltételes várható értéke $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$ és ζ_n adott értéke mellett 1 valószínűséggel ζ_n-nel egyenlő. A „martingál" elnevezés onnan származik, hogy martingálnak nevezik a szerencsejátékoknál az ún. halmozási rendszert, amelynél a játékos a tétjét úgy változtatja, hogy vesztés esetén mindig megduplázza a tétjét. Ha pl. fej-vagy-írás játékról van szó és ζ_n jelöli a játékos pénzét az n-edik játszma után, akkor a ζ_n változók mindig martingált alkotnak a fenti értelemben, akárhogyan is variálja a játékos a tétet, tehát speciálisan a halmozási rendszer esetében is, hiszen az $n+1$-ik játszmában a nyereség (tehát $\zeta_{n+1} - \zeta_n$) várható értéke a $\zeta_0, \ldots, \zeta_n$ változók értékétől és a téttől függetlenül mindig 0.

J. L. Doob a martingálokra vonatkozó egyik nevezetes tétele[8] szerint, ha $\{\zeta_n\}$ egy martingál és $M(|\zeta_n|)$ korlátos, akkor 1 valószínűséggel létezik $\lim_{n\to\infty} \zeta_n$ (l. [10]).

Mármost vizsgáljuk az (5. 6) sor

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \chi_k(x) \tag{5.8}$$

[8] E tétel többet mond ki: elegendő $\{\zeta_n\}$-ről feltenni, hogy szubmartingál.

részletösszegeit; tekintsük az $S_n(x)$ függvényeket valószínűségi változóknak az $[\Omega, \mathcal{A}, P]$ ún. Lebesgue-féle valószínűségi mezőn, ahol Ω a $[0, 1)$ intervallum, $\mathcal{A}$ a $[0, 1)$ intervallum Borel-halmazainak összege és P a Lebesgue-féle mérték. Először megmutatjuk, hogy az $S_n(x)$ valószínűségi változó-sorozat egy martingál. Legyenek $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tetszőleges valós számok és jelölje E azt a halmazt, amelyre $S_k(x) = a_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ és tegyük fel, hogy az E halmaz nem üres. Állításunk bebizonyításához csak azt kell kimutatni, hogy

$$\int_E \chi_{n+1}(x)\, dx = 0. \tag{5. 9}$$

Mármost jelölje B_n a legszűkebb halmazalgebrát, amelyre nézve $\chi_0(x), \ldots, \chi_n(x)$ mérhetőek. Nyilván E a B_n (véges) algebrához tartozik, és így elegendő kimutatni, hogy (5. 9) teljesül, ha E a B_n algebra egy atomja. Mármost, ha $n = 2^k + j$ $(0 \leqq j \leqq 2^k - 1;\ k = 1, 2, \ldots)$, akkor B_n atomjai az $\left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}\right)$ $(l = 0, 1, \ldots, 2j+1)$ intervallumok, továbbá az $\left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}\right)$ $(m = j+1, \ldots, 2^k - 1)$ intervallumok[9] és ezen intervallumok mindegyikén $\chi_{n+1}(x)$ integrálja valóban 0-val egyenlő. Másrészt

$$M(|S_n(x)|) \leqq \left(\int_0^1 S_n^2(x)\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \left(\int_0^1 f^2(x)\, dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5. 10}$$

Így alkalmazható az említett martingál-tétel, és nyerjük, hogy a

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f^*(x) \tag{5. 11}$$

határérték majdnem mindenütt létezik.

Mivel a Haar-féle rendszer teljes,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (f(x) - S_n(x))^2\, dx = 0. \tag{5. 12}$$

Így a Fatou-lemmából és (5. 11)-ből következik, hogy

$$\int_0^1 (f(x) - f^*(x))^2\, dx = 0, \tag{5. 13}$$

vagyis $f^*(x)$ majdnem mindenütt megegyezik $f(x)$-szel, vagyis bebizonyítottuk, hogy az (5. 6) sor majdnem mindenütt konvergál $f(x)$-hez.

Érdemes megjegyezni, hogy az $S_n(x)$ részletösszeg előállítható az

$$S_n(x) = M(f(x)|B_n) \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{5. 14}$$

feltételes várható érték alakjában.

Másrészt az is könnyen belátható, hogy az összes B_n halmazalgebrákat tartalmazó legszűkebb σ-algebra azonos a Borel-halmazok összességével. Így a *Haar*-féle tétel állítása speciális esete az ugyancsak *Doob*-tól származó következő martingál-tételnek is:

[9] Tehát B_n-nek $n+1$ atomja van, és B_{n+1} atomjait úgy nyerjük B_n atomjaiból, hogy egy atomot felezünk, a többit változatlanul hagyjuk.

Legyen B_n $(n=1, 2, \ldots)$ σ-algebrák egy sorozata, $B_n \subset B_{n+1}$ és legyen B_∞ az összes B_n σ-algebrákat tartalmazó legszűkebb σ-algebra. Legyen ζ egy véges várható értékű valószínűségi változó. Akkor a $\zeta_n = M(\zeta|B_n)$ $(n=1, 2, \ldots)$ változók martingált alkotnak, és 1 valószínűséggel

$$\lim_{n\to\infty} M(\zeta|B_n) = M(\zeta|B_\infty).$$

Végül megjegyezzük, hogy (5. 14)-ből következik, hogy ha $I_n(x)$ jelöli B_n atomjai közül azt, amely tartalmazza az x pontot és $|I_n(x)|$ jelöli az $I_n(x)$ intervallum hosszát, akkor

$$S_n(x) = \frac{1}{|I_n(x)|} \int_{I_n(x)} f(t)\, dt. \tag{5. 15}$$

Haar eredeti bizonyítása ([21]) tételére az (5. 15) formulán alapszik: az, hogy majdnem minden x-re $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$ (5. 15)-ből *Lebesgue* azon tétele segítségével következik, mely szerint egy $f(x)$ integrálható függvény határozatlan integrálja majdnem mindenütt differenciálható és deriváltja egy 0-mértékű halmaztól eltekintve megegyezik $f(x)$-szel.

6. §. A WALSH-FÉLE FÜGGVÉNYRENDSZER SZERINTI SORFEJTÉSEK

Összehasonlításul vizsgáljuk meg, hogy a *Haar-féle* rendszerre fentebb alkalmazott gondolatmenet mit ad a *Walsh*-féle ortogonális rendszer szerinti sorfejtések esetében.

Jelölje $R_n(x)$ $(n=0, 1, \ldots)$ az n-edik *Rademacher*-féle függvényt, vagyis legyen

$$R_n(x) = \operatorname{sign}(\sin 2^n \pi x) \qquad (0 \leqq x < 1). \tag{6. 1}$$

A $W_n(x)$ ún. Walsh-féle függvényeket a következőképpen definiáljuk: ha az $n \geqq 1$ szám előállítása a 2-alapú számrendszerben

$$n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_r} \qquad (0 \leqq k_1 < k_2 < \ldots < k_r), \tag{6. 2}$$

akkor legyen

$$W_n(x) = R_{k_1}(x) R_{k_2}(x) \ldots R_{k_r}(x). \tag{6. 3}$$

Mint jól ismert, a $W_n(x)$ függvények teljes ortonormált rendszert alkotnak a $[0, 1)$ intervallumban.

Legyen $f(x)$ egy tetszőleges, a $[0, 1)$ intervallumban négyzetesen integrálható függvény és vizsgáljuk e függvény Walsh-féle sorfejtését, vagyis a

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n W_n(x) \tag{6. 4}$$

sort, ahol

$$b_n = \int_0^1 f(t) W_n(t)\, dt. \tag{6. 5}$$

Legyen

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k W_k(x). \tag{6. 6}$$

Az 5. §-ban alkalmazott gondolatmenet nem alkalmazható a teljes $S_n(x)$ sorozatra, azonban alkalmazható az $S_{2^n-1}(x)$ részsorozatra. Ugyanis, ha $\mathcal{A}_n$ jelöli azt a legszűkebb halmazalgebrát, amelyre nézve a $W_1(x), \ldots, W_{2^n-1}(x)$ függvények mérhetőek, úgy $\mathcal{A}_n$ atomjai a $\left(\frac{j}{2^{n-1}}, \frac{j+1}{2^{n-1}}\right)$ $(j=0, 1, \ldots, 2^{n-1}-1)$ intervallumok és ha I ezen intervallumok közül bármelyik és $2^n \leqq m < 2^{n+1}$, akkor

$$\int_I W_m(x)\,dx = 0 \tag{6.7}$$

tekintettel arra, hogy $W_m(x)$ az I intervallumon egyenlő $aR_n(x)$-szel, ahol $a = +1$ vagy $a = -1$, továbbá

$$\int_I R_n(x)\,dx = 0. \tag{6.8}$$

Így tehát, ha E $\mathcal{A}_n$-hez tartozó halmaz,

$$\int_E \left(S_{2^{n+1}-1}(x) - S_{2^n-1}(x)\right) dx = 0, \tag{6.9}$$

vagyis a $S_{2^n-1}(x)$ egy martingál a Lebesgue-féle valószínűségi mezőn. Az 5. §-ban alkalmazott gondolatmenetet alkalmazva következik, hogy majdnem minden x-re

$$\lim_{n\to\infty} S_{2^n-1}(x) = f(x). \tag{6.10}$$

Így tehát egy a Walsh-sorokra vonatkozó nevezetes ismert tételre nyertünk új, valószínűségszámítási bizonyítást. E tételből speciális esetként következik, hogy a Rademacher-féle függvényekből konvergens négyzetösszegű együtthatókkal képezett

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k R_k(x) \tag{6.11}$$

alakú sor $\left(\sum a_k^2 < +\infty\right)$ majdnem mindenütt konvergens; ez egyébként speciális esete *Kolmogorov* ún. 3-sor-tételének.

Pál László nemrégiben észrevette (l. [11]), hogy igaz a következő tétel is: Ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k}^2 < +\infty, \tag{6.12}$$

akkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k} R_n(x) R_k(x) \tag{6.13}$$

sor majdnem mindenütt konvergens. Ez az állítás is igen egyszerűen belátható az 5. §-ban ismertetett módszerrel, ugyanis az

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k} R_n(x) R_k(x) \tag{6.14}$$

sorozat $(N=1, 2, \ldots)$ nyilván martingál, és $\int_0^1 |S_N(x)|\,dx$ korlátos sorozat, tehát

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = g(x) \tag{6.15}$$

1 valószínűséggel létezik; másrészt viszont a Kolmogorov-féle egyenlőtlenség szerint igaz a következő állítás:

$$P\left(\max_{1\leq l\leq N}\left|\sum_{k=0}^{l} a_{N+1,k}R_k(x)\right| > \lambda\left[\sum_{k=0}^{N} a_{N+1,k}^2\right]^{\frac{1}{2}}\right) \leq \frac{1}{\lambda^2}, \tag{6. 16}$$

tehát, ha

$$S_{N,l}(x) = S_N(x)+\sum_{k=0}^{l} a_{N+1,k}R_{N+1}(x)R_k(x), \tag{6. 17}$$

akkor

$$P\left(\max_{1\leq l\leq N}|S_{N,l}(x)-S_N(x)| > \varepsilon\right) \leq \frac{\sum_{k=0}^{N} a_{N+1,k}^2}{\varepsilon^2}. \tag{6. 18}$$

Így a Borel—Cantelli lemma szerint minden $r>0$ pozitív egész számra 1 valószínűséggel véges sok (N, l) számpár kivételével

$$|S_{N,l}(x)-S_N(x)| \leq \frac{1}{r}. \tag{6. 19}$$

Mivel r tetszőlegesen nagynak választható és megszámlálható sok 0-mértékű halmaz egyesítése is 0-mértékű, (6. 15)-ből és (6. 19)-ből következik, hogy a (6. 13) sor majdnem mindenütt konvergál a $g(x)$ függvényhez.

Pál László azt is bebizonyította, hogy egy olyan Walsh-sor, amelyben csak azok a Walsh-függvények szerepelnek, amelyek legfeljebb k Rademacher-függvény szorzataként állíthatók elő, és amelynek együtthatóinak négyzetösszege konvergens, a Walsh-féle függvényrendszer indexezésének megfelelő elrendezésben majdnem mindenütt konvergens. Ez az általánosabb tétel ugyanúgy bizonyítható be valószínűségszámítási úton, mint ahogy az előbb a tétel $k=2$ esetét bizonyítottuk. Mivel az általános eset tárgyalásához újabb ötletre nincs szükség, azt itt nem részletezzük.

7. §. ASZIMPTOTIKUS FORMULÁK A MÁSODFAJÚ STIRLING-SZÁMOKRA

A $\sigma_{n,k}$ $(k=1, 2, \ldots, n;\ n=1, 2, \ldots)$ másodfajú Stirling-számokat a következő formulával definiáljuk:

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{n,k}x(x-1)\ldots(x-k+1). \tag{7. 1}$$

A $\sigma_{n,k}$ szám kombinatorikai jelentése, mint ismeretes (l. pl. [14]) a következő: $\sigma_{n,k}$ megadja egy n-elemű halmaz összes k nem üres idegen részhalmazra való felbontásainak (particióinak) a számát. E számok jelentős szerepet játszanak a differencia számításban (l. pl. [15]), ezért érdekes aszimptotikus viselkedésük vizsgálata. *L. H. Harper* (l. [16]) nemrégiben a Stirling-számok aszimptotikus viselkedését valószínűségszámítási úton vizsgálta. E §-ban az ő vizsgálatait ismertetjük, megjegyezve, hogy módszere ugyanazon az ötleten alapszik, mint *Hayman* tételének az I. rész 3. §-ában adott valószínűségszámítási bizonyítása. (7. 1) mindkét oldalát x-szel beszorozva és a nyert formulát összevetve x^{n+1}-nek a (7. 1) formula szerinti kifejtésével, figyelembevéve, hogy egy polinomnak az $x(x-1)\ldots(x-k+1)$ alappolinomokkal való kifejezése egyértelmű, adódik a

$$\sigma_{n+1,k} = k\sigma_{n,k}+\sigma_{n,k-1} \tag{7. 2}$$

rekurzív összefüggés. Vizsgáljuk most a

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sigma_{n,k} x^k \tag{7.3}$$

polinomokat. Először bebizonyítjuk, hogy $P_n(x)$ összes gyökei egyszeresek és e gyökök mind valós, nempozitív számok. E célból először vegyük észre, hogy (7. 2)-ből azonnal adódik a $P_n(x)$ polinomokra a

$$P_{n+1}(x) = x\left(P_n'(x) + P_n(x)\right) \tag{7.4}$$

összefüggés. Mivel

$$P_1(x) = x, \quad P_2(x) = x^2 + x,$$

tehát állításunk igaz, ha $n=1$ és ha $n=2$. Azt, hogy az állítás minden n-re igaz, teljes indukcióval fogjuk belátni. Legyen $H_k(x) = e^x P_k(x)$ és tegyük fel, hogy $P_n(x)$-nek n különböző nem-pozitív gyöke van. Legyen $n \geqq 1$, akkor (7. 4) szerint

$$H_{n+1}(x) = xH_n'(x). \tag{7.5}$$

Mivel $\lim_{x \to -\infty} H_n(x) = 0$, tehát Rolle tétele szerint ha $-x_{n,1} < -x_{n,2} < \ldots < -x_{n,n} = 0$ jelölik $H_n(x)$ gyökeit, akkor $H_{n+1}(x)$-nek és így $P_{n+1}(x)$-nek egy-egy gyöke van a $(-\infty, -x_{n1})$, $(-x_{n,1}, -x_{n,2})$, $\ldots$ $(-x_{n,n-1}, 0)$ nyílt intervallumokban; ez már n gyök, de mivel $P_{n+1}(0) = 0$ és $P_{n+1}(x)$ $n+1$-edfokú polinom, ezzel $P_{n+1}(x)$ összes gyökeit megtaláltuk, és azok mind különbözőek és nem pozitívak. Így tehát (mivel (7. 4)-ből látható, hogy $P_n(x)$-ben x^n együtthatója 1) $P_n(x)$ a

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (x + x_{n,k}) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{7.6}$$

alakba írható, ahol $0 = x_{n,n} < x_{n,n-1} < \ldots < x_{n,1}$. (7. 6)-ból az is leolvasható, hogy a $\sigma_{n,k}$ számok mind pozitívak, ha $k \geqq 1$ és $n \geqq 1$.

Legyen most

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \sigma_{n,k}. \tag{7.7}$$

A B_n számokat szokták *Bell-féle számoknak* is nevezni. B_n kombinatorikai jelentése (l. [14]) a következő: B_n megadja egy n elemű halmaz összes különböző particióinak a számát (a részhalmazok számára vonatkozó korlátozás nélkül). Mármost vizsgáljuk a $\left\{\frac{\sigma_{n,k}}{B_n}\right\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ valószínűségeloszlást. Legyen η_n egy valószínűségi változó, amelyre

$$P(\eta_n = k) = \frac{\sigma_{n,k}}{B_n}. \tag{7.8}$$

Ekkor η_n generátorfüggvénye

$$M(x^{\eta_n}) = \frac{P_n(x)}{P_n(1)} = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{x}{1+x_{n,k}} + \frac{x_{n,k}}{1+x_{n,k}} \right). \tag{7.9}$$

Így tehát η_n eloszlása megegyezik az $\eta_{n,1} + \eta_{n,2} + \ldots + \eta_{n,n}$ összeg eloszlásával, ahol $\eta_{n,1}, \ldots, \eta_{n,n}$ független valószínűségi változók és

$$P(\eta_{n,k} = 1) = \frac{1}{1+x_{n,k}}, \quad P(\eta_{n,k} = 0) = \frac{x_{n,k}}{1+x_{n,k}}. \tag{7.10}$$

Mivel η_n n darab független valószínűségi változó összege, várható, hogy η_n határeloszlása normális lesz. Meg fogjuk mutatni, hogy a $\sum_{k=1}^{n} \eta_{n,k}$ összegekre teljesülnek a Ljapunov-tétel feltételei. Mivel az $\eta_{n,k}$ változók csak a 0 és 1 értékeket veszik fel, ehhez (mint az I. rész 3. §-ában megjegyeztük) elegendő kimutatni, hogy η_n szórása végtelenhez tart, ha $n \to \infty$.

Először számítsuk ki η_n várható értékét. A (7. 2) azonosságból

$$M(\eta_n) = \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} k \cdot \sigma_{n,k} = \frac{B_{n+1}}{B_n} - 1. \tag{7. 11}$$

Ugyancsak (7. 2)-ből

$$M(\eta_n^2) = \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} k^2 \sigma_{n,k} = \frac{B_{n+2}}{B_n} - 2\frac{B_{n+1}}{B_n} \tag{7. 12}$$

és így

$$D^2(\eta_n) = M(\eta_n^2) - M^2(\eta_n) = \frac{B_{n+2}}{B_n} - \left(\frac{B_{n+1}}{B_n}\right)^2 - 1. \tag{7. 13}$$

Annak kimutatása, hogy $\lim_{n\to\infty} D^2(\eta_n) = +\infty$, a legegyszerűbben a következő megjegyzés segítségével történhet. Legyen

$$\varepsilon_n = \frac{1}{B_n} \operatorname*{Max}_{1 \leqq k \leqq n} \sigma_{n,k}. \tag{7. 14}$$

Először megmutatjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0. \tag{7. 15}$$

Ebből már állításunk következik, ugyanis a Csebisev egyenlőtlenség szerint

$$P\left(|\eta_n - M(\eta_n)| \geqq \frac{1}{4\varepsilon_n}\right) \leqq 16\varepsilon_n^2 D^2(\eta_n). \tag{7. 16}$$

Mármost

$$P\left(|\eta_n - M(\eta_n)| \geqq \frac{1}{4\varepsilon_n}\right) = 1 - \frac{1}{B_n} \sum_{|k - M(\eta_n)| < \frac{1}{4\varepsilon_n}} \sigma_{n,k} \geqq 1 - \frac{\varepsilon_n}{2\varepsilon_n} = \frac{1}{2}, \tag{7. 17}$$

tehát (7. 16)-ból és (7. 17)-ből

$$D^2(\eta_n) \geqq \frac{1}{32\varepsilon_n^2} \tag{7. 18}$$

és így (7. 15)-ből következik $\lim_{n\to\infty} D^2(\eta_n) = +\infty$.

Így tehát csak (7. 15)-öt kell bebizonyítanunk.

E célból kiindulunk a (7. 2)-ből indukcióval könnyen belátható

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_{n,k}}{n!} x^n = \frac{(e^x - 1)^k}{k!} \tag{7. 19}$$

formulából és a (7. 19) k-ra való összegezésével adódó

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = e^{e^x - 1} \tag{7. 20}$$

formulából (l. [14]). (7. 20)-ból *Hayman* az I. rész 3. §-ában említett tétele segítségével következik, hogy

$$B_n \sim \frac{1}{\sqrt{R_n}} \exp\left(n\left(R_n + \frac{1}{R_n} - 1\right) - 1\right), \tag{7.21}$$

ahol R_n az $xe^x = n$ egyenlet egyetlen pozitív gyöke.

Másrészt (7. 19)-ből, ugyancsak *Hayman* tétele segítségével következik, hogy

$$\max_{1 \leqq k \leqq n} \sigma_{n,k} = O\left(\sqrt{\frac{R_n}{n}} \exp\left(n\left(R_n + \frac{1}{R_n} - 1\right)\right)\right), \tag{7.22}$$

tehát [10]

$$\varepsilon_n = O\left(\frac{R_n}{\sqrt{n}}\right). \tag{7.23}$$

Mivel $R_n = O(\log n)$, (7. 23)-ból következik (7. 15). Így tehát η_n-re valóban alkalmazható a Ljapunov-tétel és így nyerjük azt, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n} \sum_{k \leqq \frac{B_{n+1}}{B_n} - 1 + x\sqrt{\frac{B_{n+2}}{B_n} - \left(\frac{B_{n+1}}{B_n}\right)^2 - 1}} \sigma_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du, \tag{7.24}$$

amit bizonyítani akartunk.

Könnyen ki lehet mutatni, hogy

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} = \frac{n}{R_n} + o\left(\sqrt{\frac{n}{\log n}}\right)$$

és

$$\sqrt{\frac{B_{n+2}}{B_n} - \left(\frac{B_{n+1}}{B_n}\right)^2 - 1} \sim \sqrt{\frac{n}{\log n}},$$

tehát (7. 24) felírható

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n} \sum_{k \leqq \frac{n}{R_n} + x\sqrt{\frac{n}{\log n}}} \sigma_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \tag{7.25}$$

alakban is $(-\infty < x < +\infty)$.

8. §. FÜGGELÉK

E függelékben a dolgozat megértésének megkönnyítésére a dolgozat I. és II. részében felhasznált valószínűségszámítási tételekkel kapcsolatban megadjuk, hogy azok a [12] tankönyvben hol találhatók meg:

Csebisev egyenlőtlenség (felhasználva az I. rész 1. és 2. §-ában és a II. rész 7. §-ában): lásd 309. o.

Ljapunov tétele (felhasználva az I. rész 3. §-ában és a II. rész 7. §-ában): lásd 373. o.

Karakterisztikus függvények folytonossági tétele (felhasználva az I. rész 3. §-ában): lásd 271. o.

[10] Azt is meg lehet mutatni, hogy $\varepsilon_n \sim \frac{\log n}{\sqrt{2\pi n}}$.

Nulla-vagy-egy törvény (felhasználva az I. rész 6. §-ában): 349. o.

Markov-egyenlőtlenség (felhasználva az I. rész 7. §-ában és a II. rész 1. §-ában): 202. o.

Borel—Cantelli lemma (felhasználva az I. rész 7. §-ában és a II. rész 1., 2. és 6. §-ában): 323. o.

Kolmogorov-egyenlőtlenség (felhasználva a II. rész 6. §-ában): 326. o.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] *P. Erdős, A. Rényi,* On random entire functions (sajtó alatt).

[2] *P. Erdős,* On the uniform but not absolute convergence of power series with gaps, Annales de la Soc. Polonaise de Math. 25 (1952) 162—168.

[3] *H. Cartan, P. Thullen,* Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen, Regularitäts- und Konvergenzbereiche, Math. Annalen 106 (1932) 617—647.

[4] *J. P. Kahane,* Some random series of functions, (sajtó alatt).

[5] *R. Paley—A. Zygmund,* On some series of functions, Proc. Cambridge Phil. Soc. 26 (1936) 337—357.

[6] *Hajós Gy.—Rényi, A.,* Elemi bizonyítások a rendezett minták elméletének néhány alapvető összefüggésére, MTA III. O. K. 4 (1954) 467—472.

[7] *G. Pólya, G. Szegő,* Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Springer, 1931, I. köt. 125. o.

[8] *J. Fabius,* A probabilistic example of a nowhere ananytic function, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie, 5 (1966) 173—174.

[9] *K. Krickeberg,* Wahrscheinlichkeitstheorie, Teubner, Stutgart, 1963.

[10] *J. L. Doob,* Stochastic processes, Wiley, New York, 1953.

[11] *Pál László,* kandidátusi disszertáció-tézisei. Bp. 1967.

[12] *Rényi A.,* Valószínűségszámítás, Tankönyvkiadó, Bp. 1966.

[13] *Rényi, A.,* Legendre polynomials and probability theory, Annales Univ. Sci. Eötvös, Sect. Math. 3—4 (1960—61) 247—251.

[14] *Rényi A.,* Új módszerek és eredmények a kombinatorikai analízisben, MTA III. O. K. I. 16 (1966) 78—105, II. 16 (1966) 159—177.

[15] *C. Jordan:* Calculus of finite differences, Budapest, 1939.

[16] *L. H. Harper:* Stirling behaviour is asymptotically normal. Ann. Math. Stat. 38 (1967) 410—414.

[17] *A. Rényi,* Summation methods and probability theory, MTA Mat. Kut. Int. Közl. 4 (1959) 127—132.

[18] *N. H. Abel,* Oeuvres complètes, Christiania, C. Groendahl, 1839. I. köt. 102. o.

[19] *Z. W. Birnbaum—R. Pyke,* On some distributions related to the statistics D_n^+. Ann. Math. Stat. 29 (1958) 179—187.

[20] *A. Rényi,* Some remarks on the theory of trees, MTA Mat. Kut. Int. Közl. 4 (1959) 73—85.

[21] *Haar Alfréd,* Összegyűjtött munkái, Akadémiai Kiadó, Bp. 1959. 367—368. o.

[22] *P. Lévy,* Sur la croissance des fonctions entières, Bulletin de la Société Mathématique de France 58 (1930) 29—59 és 127—149.

МЕТОДЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В АНАЛИЗЕ II

А. РЕНЬИ

PROBABILISTIC METHODS IN ANALYSIS II.

A. RÉNYI

NÉGYZETESEN INTEGRÁLHATÓ FÜGGVÉNYEK FOURIER SORÁNAK KONVERGENCIÁJA

MÁTÉ ATTILA

1. BEVEZETÉS

Nemrég *L. Carleson* bebizonyította a következő tételt (l. [1]):

1. 1. TÉTEL. *Ha az f függvény eleme a (komplex) L^2 térnek, akkor a Fourier sora majdnem mindenütt konvergens.*

A tétel kimondható az alábbi ekvivalens alakban is:
Ha komplex számoknak egy c_n sorozatára teljesül, hogy

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty,$$

akkor a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

sor majdnem mindenütt konvergens.

Nem érdektelen megemlíteni, hogy analóg eredmény érvényes Fourier integrálokra is:

1. 2. TÉTEL. *Ha $f \in L^2(-\infty, \infty)$, akkor a*

$$g_\alpha(x) = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(t) e^{itx}\, dt \tag{1. 3}$$

függvények majdnem mindenütt konvergálnak egy $L^2(-\infty, \infty)$-beli függvényhez, amint $\alpha \to \infty$.

M. Plancherel egy jól ismert tétele szerint (l. [3], 250. o.), ha $f \in L^2(-\infty, \infty)$, akkor az (1. 3) által definiált $g_\alpha(x)$ függvények az L^2 metrikában konvergálnak valamilyen $g(x) \in L^2(-\infty, \infty)$ függvényhez. Így az 1. 2. tétel hasonlóan viszonylik *Plancherel* tételéhez, mint az 1. 1. tétel a *Riesz—Fischer* tételhez.

Itt csak vázoljuk, hogyan következik az 1. 2. tétel az 1. 1. tételből. Jól ismert, hogy az (1. 3) alatti $g_\alpha(x)$ függvények a következő alakban állíthatók elő:

$$g_\alpha(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \frac{\sin \alpha(x-t)}{x-t}\, dt, \tag{1. 4}$$

ahol g jelöli a g_α függvények limeszét az L^2 metrikában (l. [3], 250. o., (2. 19)). Ha most $x \in (-\pi, \pi)$, akkor a *Riemann—Lebesgue* lemma (l. [4], 321. o.) és a *Dirichlet* formula alapján látható, hogy $g_\alpha(x)$ akkor és csak akkor konvergál, ha g-nek a $(-\pi, \pi)$ intervallumon vett Fourier sorfejtése konvergál az x pontban. Mivel $g \in L^2(-\infty, \infty)$, nyilvánvaló, hogy az 1. 2. tétel következik az 1. 1. tételből.

Mivel az 1. 1. tételre az [1]-ben adott bizonyítás nehezen olvasható, tekintetbe véve a tétel fontosságát, a bizonyítást itt teljes részletességgel közöljük. Hogy elkerüljük az olvasó számára meglehetősen kényelmetlen hivatkozásokat, a munka első része a *Hilbert* transzformált bizonyos becsléseinek levezetésével foglalkozik (2—8. §). Az általunk alkalmazott eljárás lényegében megegyezik a *Zygmund* [2] könyvében található eljárással, eltekintve néhány technikai módosítástól. A *Hilbert* transzformált becsléseire vonatkozó fő eredményeket a 8. 4. tétel tartalmazza, amelynek második részét először *L. Carleson* bizonyította (vö. [1], Lemma 4.).

Most pedig az [1] alapján vázoljuk a bizonyítás gondolatmenetét.

Legyen $f \in L^2(-\pi, \pi)$, terjesszük ki f-et periodikusan a $(-\infty, \infty)$ intervallumra és tekintsük a (módosított) *Dirichlet* integrálokat:

$$(1.5) \qquad s_n(x) = \int_{-4\pi}^{4\pi} \frac{e^{-int} f(t)}{x-t}\, dt \qquad (-\pi \leqq x \leqq \pi;\ n = 0, \pm 1, \ldots),$$

ahol a jobb oldali integrálon főérték értendő, azaz

$$\int_{-4\pi}^{4\pi} = \lim_{\delta \to +0} \left(\int_{-4\pi}^{x-\delta} + \int_{x+\delta}^{4\pi} \right).$$

Mint a 12. §-ban meg fogjuk mutatni, $s_n(x)$ felhasználható f Fourier-sora részletösszegeinek becsléséhez.

Adott x esetén $s_n(x)$ becslése céljából meg fogjuk konstruálni a $[-4\pi, 4\pi]$ intervallum egy alkalmas $\Omega = \{\omega_k\}$ particióját (felbontását diszjunkt intervallumok összegére). Jelölje $\omega^*(x)$ azt az $\omega_{k_0} \in \Omega$ intervallumot, amely x-et tartalmazza és írjuk:

$$(1.6) \qquad s_n(x) = \int_{\omega^*(x)} \frac{e^{-int} f(t)}{x-t}\, dt + \sum_{k \neq k_0} \int_{\omega_k} \frac{E_{\omega_k}(e^{-in\alpha} f(\alpha))}{x-t}\, dt +$$

$$+ \sum_{k \neq k_0} \int_{\omega_k} \frac{e^{int} f(t) - E_{\omega_k}(e^{-in\alpha} f(\alpha))}{x-t}\, dt,$$

ahol $E_{\omega_k}(e^{-in\alpha} f(\alpha))$ jelöli $e^{-in\alpha} f(\alpha)$ integrálközepét az ω_k intervallumon.

Ha x „erősen" benne van az $\omega^*(x)$ intervallumban, az első tag adja $s_n(x)$ főrészét. Ennek a tagnak a becslése az $s_n(x)$ becslésére alkalmazott eljárás megismétlésével történhet, habár közben n-et célszerű lesz „kicsit" megváltoztatni, amely az integrálnak csak kis változását vonja maga után.

Azt bizonyítandó, hogy a második tag kicsi, úgy választjuk az Ω particiót, hogy az $E_{\omega_k}(e^{-in\alpha} f(\alpha))$ értékek kicsik legyenek és a becslés egy a *Hilbert* transzformáltra vonatkozó eredményen alapul (8. 4. (ii) tétel). Végül a harmadik tag becsléséhez a 9. 1. tételt fogjuk felhasználni.

Jelölések. Az alábbiakban k, l, m és n egészeket, x, y, s, t, u, v és α valós, végül z, w és ζ komplex mennyiségeket vagy változókat jelöl; K-t indexszel ellátva mindig alkalmas pozitív abszolút konstans jelölésére fogjuk felhasználni. $|X|$ jelöli az X halmaz *Lebesgue* mértékét. Függvényen mindig egy (általában valós) változó mérhető függvényét értjük. Ha mást nem mondunk, a 2. 9. §-ban vizsgált függvények kiterjesztett valós értékű függvények lesznek (azaz értékkészletük a

valós számokból és $\pm\infty$-ből áll); a 10. §-tól kezdve komplex értékű függvényekkel fogunk találkozni. Nem-negatív nem-integrálható függvény integrálján mindig ∞-t fogunk érteni.

2. A HARDY-LITTLEWOOD MAXIMUM TÉTEL

Jelen paragrafusban $f(x)$ egy a $(0, a)$ intervallumon értelmezett függvényt, $m(y)$ pedig az f eloszlásfüggvényét jelöli, azaz $m(y)=|\{x\in(0, a): f(x)>y\}|$. Két függvényt azonos eloszlásúnak nevezünk, ha eloszlásfüggvényeik megegyeznek. Könnyen bizonyítható az alábbi

2. 1. LEMMA. *Minden $f(x)$ függvényhez létezik vele azonos eloszlású $f^*(x)$ nemnövekvő és $f_*(x)$ nem-csökkenő függvény* $(0<x<a)$.

Bizonyítás. Ha $m(y)$ folytonos és szigorúan csökkenő, akkor $f^*(x)$-nek vehetjük $m(y)$ inverzét. Általános esetben pedig

$$f^*(x)=\inf\{y: m(y)<x\}$$

és

$$f_*(x)=f^*(a-x)$$

elégíti ki a lemma követelményeit.

Jelen paragrafus fő eredményének megfogalmazásához szükségünk lesz a következő jelölésre:

$$\vartheta_f(x)=\sup_{0\leqq\xi<x}\frac{1}{x-\xi}\int_\xi^x f(t)\,dt; \tag{2. 2}$$

ha f nem-növekvő, akkor nyilvánvalóan

$$\vartheta_f(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt. \tag{2. 3}$$

Speciálisan ez a formula alkalmazható az előbbi lemmában bevezetett $f^*(x)$ függvényre.

Következő eredményünk a *Hardy—Littlewood* maximum tétel.

2. 4. TÉTEL. *Minden $\chi(t)$ $(t\geqq 0)$ nem-csökkenő és nem-negatív függvény esetén teljesül a következő egyenlőtlenség:*

$$\int_0^a\chi(\vartheta_f(x))\,dx\leqq\int_0^a\chi(\vartheta_{f^*}(x))\,dx=\int_0^a\chi\left(\frac{1}{x}\int_0^x f^*\right)dx. \tag{2. 5}$$

Bizonyítás. Ha egy $g(x)\geqq 0$, a $(0, a)$ intervallumon értelmezett függvény eloszlásfüggvénye $n(y)$, akkor könnyen látható, hogy

$$\int_0^a g(x)\,dx=-\int_0^\infty y\,dn(y)=\int_0^\infty n(y)\,dy. \tag{2. 6}$$

Az első egyenlőség következik a *Lebesgue* integrál eredeti definíciójából, a második pedig a $(0, u)$ intervallumon vett parciális integrálással kapható:

$$\int_0^u y\,dn(y) = u \cdot n(u) - \int_0^u n(y)\,dy.$$

Ha $u \to \infty$, kapjuk:

$$u \cdot n(u) \leqq \int_{\{x:\, g(x) > u\}} g(x)\,dx \to 0,$$

amivel a (2. 6)-ot igazoltuk. Ezért, összevetve a (2. 6) szélső tagjait, könnyen látható, hogy a tétel bizonyításához elegendő a következőt bizonyítanunk:

$$|\{x: \vartheta_f(x) > y\}| \leqq |\{x: \vartheta_{f^*}(x) > y\}|. \tag{2. 7}$$

Ehhez szükségünk lesz két lemmára.

2. 8. LEMMA. *Ha* $E \subseteqq (0, a)$ *mérhető halmaz és* $f \geqq 0$, *akkor* $\int_E f \leqq \int_0^{|E|} f^*$.

Bizonyítás. Legyen az E halmazon $g(x)$ azonos $f(x)$-szel, egyébként pedig legyen $g(x) = 0$. Mivel $g \leqq f$, azért $g^* \leqq f^*$ és így

$$\int_E f = \int_0^a g = \int_0^a g^* = \int_0^{|E|} g^* \leqq \int_0^{|E|} f^*,$$

ami a bizonyítandó volt.

2. 9. LEMMA. *Legyen* $F(x)$ *folytonos a* $(0, a)$ *intervallumban és jelölje* H *azon* $x \in (0, a)$ *pontok halmazát, amelyekhez létezik olyan* ξ, $0 < \xi < x$, *hogy* $F(\xi) < F(x)$. *Ekkor* H *előállítható megszámlálható sok páronként diszjunkt* (a_k, b_k) *nyílt intervallum egyesítéseként úgy, hogy teljesül az* $F(a_k) \leqq F(b_k)$ *egyenlőtlenség.*

A bizonyítást l. [4], 92. o. Visszatérve a (2. 7) bizonyításához, adott y-ra legyen

$$E = E(y) = \{x: \vartheta_f(x) > y\},$$
$$E^* = E^*(y) = \{x: \vartheta_{f^*}(x) > y\},$$
$$E_1^* = E_1^*(y) = \{x: \vartheta_{f^*}(x) \geqq y\}.$$

A 2. 9. lemmát alkalmazva az $F(x) = \int_0^x f - yx$ és a $H = E(y)$ helyettesítéssel, az $F(a_k) \leqq F(b_k)$ egyenlőtlenségekből adódik, hogy

$$\int_{a_k}^{b_k} f \geqq y(b_k - a_k).$$

Összegezve k-ra kapjuk:

$$\int_E f \geqq y|E|,$$

azaz a 2. 8. lemma szerint

$$\int_0^{|E|} f^* \geqq y|E|. \tag{2. 10}$$

Figyelembe véve, hogy a

$$\vartheta_{f^*}(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f^*$$

függvény nem-növekvő, kapjuk, hogy

$$|E_1^*(y)| = \sup\left\{x \leqq a: \frac{1}{x}\int_0^x f^* \geqq y\right\}.$$

Ezért a (2. 10) alapján látható, hogy

$$|E_1^*(y)| \geqq |E(y)|.$$

Ezt az eredményt y helyett $y+\varepsilon$-ra alkalmazva, majd elvégezve az $\varepsilon \to +0$ határátmenetet, kapjuk a (2. 7)-et, mivel $E^*(y) = \lim_{\varepsilon \to +0} E_1^*(y+\varepsilon)$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

$\vartheta_f(x)$ mellett még definiáljuk a következő két függvényt:

$$\vartheta_f'(x) = \sup_{x<\xi\leqq a} \frac{1}{\xi - x}\int_x^\xi f,$$

$$\theta_f(x) = \max(\vartheta_f(x), \vartheta_f'(x)) \sup_{0\leqq\xi\leqq a} \frac{1}{\xi - x}\int_x^\xi f \qquad (\xi \neq x).$$

A (2. 5)-höz hasonlóan teljesül az

$$\int_0^a \chi(\vartheta_f'(x))\,dx \leqq \int_0^a \chi(\vartheta_{f_*}'(x))\,dx \tag{2. 11}$$

egyenlőtlenség, ahol $\chi(t)$ $(t \geqq 0)$ tetszésszerinti nem-csökkenő és nem-negatív függvény. Mivel $f_*(x) = f^*(a-x)$, azért $\vartheta_{f_*}'(x) = \vartheta_{f^*}(a-x)$; így ϑ_{f_*}' és ϑ_{f^*} integrálja a $(0, a)$ intervallumon megegyezik. Ezért a (2. 5) és a (2. 11) összeadásával kapjuk, hogy

$$\int_0^a \chi(\theta_f(x))\,dx \leqq 2\int_0^a \chi\left(\frac{1}{x}\int_0^x f^*\right)dx. \tag{2. 12}$$

Speciális χ-függvényeket választva kapjuk a következőt:

2. 13. KOROLLÁRIUM. *Legyen* $\theta = \theta_f(x)$, $f \geqq 0$. *Ekkor*

(i) $$\int_0^a \theta \leqq 4\int_0^a f\log^+ f + A_1(a),$$

(ii) $$\int_0^a \theta^r \leqq 2\left(\frac{r}{r-1}\right)^r \int_0^a f^r \qquad (r>1),$$

(iii) $$\int_0^a e^\theta \leqq K_1 \int_0^a e^f,$$

ahol $A_1(a)$ *csak* a*-tól függ,* K_1 *pedig abszolút konstans.*

Bizonyítás. Mivel a jobb oldali integrálok nem változnak, ha f-et f^*-gal helyettesítjük, a (2. 12) jobb oldalának becslésénél feltehetjük, hogy $f^* = f$.

Az (i)-t bizonyítandó, legyen $\chi(u) = u$. Ekkor

$$\int_0^a \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt\, dx = \int_0^a f(t) \int_t^a \frac{dx}{x}\, dt = \int_0^a f(t) \log \frac{a}{t}\, dt.$$

Bevezetve az $E_1 = \{t : f(t) < \sqrt{a/t}\}$ és az $E_2 = \{t : f(t) \geqq \sqrt{a/t}\}$ jelöléseket $(0 \leqq t \leqq a)$, kapjuk:

$$\int_0^a f \log \frac{a}{t}\, dt \leqq \int_{E_1} \sqrt{\frac{a}{t}} \log \frac{a}{t}\, dt + 2 \int_{E_2} f \log^+ f\, dt \leqq 2 \int_0^a f \log^+ f\, dt + A_1(a)/2,$$

amivel az (i)-t igazoltuk.

A (ii) igazolásához legyen $\chi(u) = u^r$, $F(x) = \int_0^x f$. Legyen $0 < \varepsilon < a$; parciális integrálással és a *Hölder* egyenlőtlenség alkalmazásával kapjuk:

$$\int_\varepsilon^a x^{-r} F^r\, dx = -\frac{F^r(x) x^{-r+1}}{r-1}\Big|_\varepsilon^a + \frac{r}{r-1} \int_\varepsilon^a f \cdot \left(\frac{F}{x}\right)^{r-1} \leqq$$

$$\leqq \frac{F^r(\varepsilon)\varepsilon^{-r+1}}{r-1} + \frac{r}{r-1} \left(\int_\varepsilon^a f^r\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_\varepsilon^a \left(\frac{F}{x}\right)^r dx\right)^{\frac{r-1}{r}}.$$

Leosztva a jobb oldal utolsó tényezőjével, majd elvégezve az $\varepsilon \to +0$ határátmenetet, adódik, hogy

$$\int_0^a \left(\frac{F(x)}{x}\right)^r dx \leqq \left(\frac{r}{r-1}\right)^r \int_0^a f^r(x)\, dx, \tag{2. 14}$$

mivel $F^r(\varepsilon)/\varepsilon^{r-1} \to 0$; valóban a *Hölder* egyenlőtlenség alkalmazásával kapjuk, hogy

$$F(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon f \leqq \left(\int_0^\varepsilon f^r\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_0^\varepsilon dx\right)^{\frac{r-1}{r}} = o\left(\varepsilon^{\frac{r-1}{r}}\right),$$

feltéve, hogy $\int_0^a f^r$ véges.

Végül, észrevéve, hogy $\left(\frac{r}{r-1}\right)^r$ korlátos marad, ha $r \to \infty$, az (iii) következik az (ii)-ből, ha felhasználjuk a *Beppo Levi* tételt és a minden valós u-ra érvényes $u \leqq u^2 + 1$ egyenlőtlenséget:

$$\int_0^a e^\theta = \int_0^a dx + \int_0^a \theta + \sum_{r=2}^\infty \frac{1}{r!} \int_0^a \theta^r \leqq 2 \int_0^a dx + 2 \sum_{r=2}^\infty \frac{1}{r!} \int_0^a \theta^r \leqq$$

$$\leqq \sum_{r=0}^\infty \frac{K_1}{r!} \int_0^a f^r = K_1 \int_0^a e^f.$$

3. AZ $\int_0^a \sup_{y>0} \left| \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{yh(t)}{(x-t)^2+y^2}\,dt \right| dx$ KIFEJEZÉS BECSLÉSE

Legyen h integrálható az (a, b) intervallumon, és összhangban eddigi jelöléseinkkel, legyen

$$\theta(x) = \theta_{|h|}(x) = \sup_{a \leqq \xi \leqq b} \frac{1}{\xi - x} \int_x^\xi |h| \qquad (\xi \neq x, a \leqq x \leqq b).$$

Szükségünk lesz még két, a következő paragrafusban kiszámítandó határozott integrál értékére (l. (4. 1) és (4. 2). A következőkben feltesszük, hogy $y>0$).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,dt = \pi, \tag{3. 1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2(t-x)^2 y}{((x-t)^2+y^2)^2}\,dt = \pi. \tag{3. 2}$$

A (3. 1) bal oldalát parciálisan integrálva kapjuk:

$$\int_a^b \frac{y}{(x+t)^2+y^2}\,dt = \frac{(b-x)y}{(x-b)^2+y^2} + \frac{(x-a)y}{(x-a)^2+y^2} + \int_a^b \frac{2(t-x)y}{((x-t)^2+y^2)^2} \int_x^t du\,dt.$$

Mivel a jobb oldal utolsó tagja pozitív, a következő egyenlőtlenséget kaptuk:

$$\frac{(b-x)y}{(x-b)^2+y^2} + \frac{(x-a)y}{(x-a)^2+y^2} < \pi. \tag{3. 3}$$

A (3. 2) és (3. 3) felhasználásával könnyen igazolható, hogy

$$\sup_{y>0} \left| \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{yh(t)}{(x-t)^2+y^2}\,dt \right| < 2\theta(x). \tag{3. 4}$$

Valóban, parciális integrálással adódik:

$$I(y) = \int_a^b \frac{yh(t)}{(x-t)^2+y^2}\,dt = \frac{y}{(x-t)^2+y^2} \int_x^t h(u)\,du \Big|_{t=a}^b +$$

$$+ \int_a^b \frac{2(t-x)y}{((x-t)^2+y^2)^2} \int_x^t h(u)\,du\,dt.$$

Innen, felhasználva $\theta(x)$ definícióját, kapjuk

$$|I(y)| \leqq \theta(x) \left[\frac{(t-x)y}{(x-t)^2+y^2} \Big|_{t=a}^b + \int_a^b \frac{2(t-x)^2 y}{((x-t)^2+y^2)^2}\,dt \right] < 2\pi\theta(x).$$

(3. 4) és a 2. 13. korollárium felhasználásával közvetlenül kapható az alábbi

3. 5. TÉTEL. *Legyen* $N(x) = \sup_{y>0} \left| \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{yh(t)}{(x-t)^2+y^2}\, dt \right|$. *Ekkor*

(i) $$\int_a^b N \leqq 8 \int_a^b |h| \log^+ |h| + A_2(a, b),$$

(ii) $$\int_a^b N^2 \leqq 32 \int_a^b h^2,$$

(iii) $$\int_a^b e^{\frac{N}{2}} \leqq K_2 \int_a^b e^{|h|},$$

ahol $A_2(a, b)$ *csak a-tól és b-től függ,* K_2 *pedig abszolút konstans.*

[4. NÉHÁNY HATÁROZOTT INTEGRÁL

A komplex függvénytanból jól ismert, hogy ha $P(z)$ és $Q(z)$ polinomok, $Q(z)$ fokszáma legalább kettővel nagyobb $P(z)$ fokszámánál és $Q(z)$-nek nincsenek valós gyökei, akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)}\, dt = \sum_{z_k} 2\pi i \cdot \operatorname{Res} \frac{P(z_k)}{Q(z_k)},$$

ahol z_k végigfutja $Q(z)$-nek a felső félsíkban levő gyökeit. Ennek a formulának a felhasználásával könnyen igazolhatók az alábbi egyenlőségek, amelyek közül az első kettőt már idéztük az előző paragrafusban.

(4. 1) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-t)^2+y^2}\, dr = \pi \qquad (y > 0),$$

(4. 2) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2(t-x)^2 y}{((x-t)^2+y^2)^2}\, dt = \pi \qquad (y > 0),$$

(4. 3) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{i(t-\alpha)}{(z-t)((t-\alpha)^2+s^2)}\, dt = \frac{2\pi(z-\alpha)}{(z-\alpha)^2+s^2} - \frac{\pi}{z-\alpha-is}$$

(α, s valós, $s>0$, $\operatorname{Im} z>0$, $s \neq \operatorname{Im} z$).

Az utolsó integrál lényeges szerepet játszik a később definiálandó *Hilbert* transzformált becsléseiben. Ezekhez a becslésekhez még szükségünk lesz a következő három egyenlőtlenségre $(0<y\leqq 1/\sqrt{2})$:

(4. 4) $$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{ty^2}{(t^2+y^2)^2}\, dt \leqq 1,$$

(4. 5) $$\int_0^{y^4} \frac{t^3}{(t^2+y^2)^2}\, dt \leqq \frac{1}{2} \log 2,$$

(4. 6) $$\left| \int_{y^4}^{\frac{1}{4}} \frac{\lambda(t)\, dt}{t} - \int_{y^4}^{\frac{1}{4}} \frac{\lambda(t)\, t^3\, dt}{(t^2+y^2)^2} \right| \leqq 3 \sup_{y^4<t<\frac{1}{4}} |\lambda(t)|,$$

ahol $\lambda(t)$ egy tetszés szerinti integrálható függvény az $(y^4, \frac{1}{4})$ intervallumon.

Ezek a formulák egyszerűen igazolhatók a $\tau = t^2$ helyettesítéssel. A (4. 4) nyilvánvaló; ami (4. 5)-öt illeti, a bal oldala a következőképpen becsülhető:

$$\int_0^{y^4} \frac{t^3\,dt}{(t^2+y^2)^2} = \int_0^{y^2} \frac{\tau\,d\tau}{2(\tau+y^2)^2} \leqq \int_0^{y^2} \frac{(\tau+y^2)\,d\tau}{2(\tau+y^2)^2} = \frac{1}{2}\log(\tau+y^2)\Big|_0^{y^2} = \frac{1}{2}\log 2.$$

Végül, bevezetve a $\lambda = \sup_{y^4<t<\frac{1}{4}} |\lambda(t)|$ jelölést, igazoljuk a (4. 6)-ot.

$$\left|\int_{y^4}^{\frac{1}{4}} \frac{\lambda(t)\,dt}{t} - \int_{y^4}^{\frac{1}{4}} \frac{\lambda(t)t^3\,dt}{(t^2+y^2)^2}\right| = \left|\int_{y^2}^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda(\sqrt{\tau})}{2} \cdot \frac{2\tau y^2 + y^4}{\tau(\tau+y^2)^2}\,d\tau\right| \leqq$$

$$\leqq \lambda \int_{y^2}^{\frac{1}{2}} \frac{y^2}{(\tau+y^2)^2}\,d\tau + \frac{\lambda}{2}\int_{y^2}^{\frac{1}{2}} \frac{y^4\,d\tau}{y^2(\tau+y^2)^2} \leqq 3\lambda.$$

5. A HILBERT TRANSZFORMÁLT BECSLÉSEINEK ELŐKÉSZÍTÉSE

Ebben a paragrafusban feltesszük, hogy x a (0, 1) intervallum középső feléhez tartozik, azaz $\frac{1}{4} \leqq x \leqq \frac{3}{4}$. Jelöljön σ_x olyan intervallumokat, amelyek x-et a középső felükben tartalmazzák. Egy $g(t)$, a (0, 1) intervallumon értelmezett integrálható függvény *Hilbert* transzformáltját ezek után a következőképpen definiáljuk:

$$H^*(x) = \sup_{\sigma_x \subseteq (0,1)} \left|\int_{(0,1)-\sigma_x} \frac{g(t)}{x-t}\,dt\right|.$$

Legyen

$$H_1(x) = \sup_{0<\varepsilon<\frac{1}{4}} |H_1(x,\varepsilon)|,$$

ahol, $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ esetén

$$H_1(x,\varepsilon) = \left(\int_{x-\frac{1}{4}}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{x+\frac{1}{4}}\right)\frac{g(t)}{x-t}\,dt.$$

$y > 0$ esetén írjuk:

$$v(x+iy) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{(x-t)g(t)}{(x-t)^2+y^2}\,dt,$$

$$v_1(x+iy) = \frac{1}{\pi}\int_{x-\frac{1}{4}}^{x+\frac{1}{4}} \frac{(x-t)g(t)}{(x-t)^2+y^2}\,dt.$$

A fenti definíciókból közvetlenül látható, hogy $(\theta(x) = \theta_{|g|}(x))$,

$$|H^*(x) - H_1(x)| \leqq K_3\theta(x), \tag{5. 1}$$

$$|v(x+iy) - v_1(x+iy)| \leqq K_3\theta(x), \tag{5. 2}$$

ahol K_3 alkalmas konstans.

5. 3. TÉTEL. *Legyen* $\frac{1}{4} \leqq x \leqq \frac{3}{4}$. *Ekkor valamilyen* K_4 *abszolút konstanssal teljesül, hogy*

$$H^*(x) \leqq \pi \sup_{y>0} |v(x+iy)| + K_4\theta_{|g|}(x).$$

Bizonyítás. Az állítás következik az (5. 1)-ből, az (5. 2)-ből és az alábbi lemmából.

5. 4. LEMMA. *Legyen* $0<y<1/\sqrt{2}$. *Ekkor valamilyen* K_5 *konstanssal*

$$|\pi v_1(x, y) - H_1(x, y^4)| \leqq K_5\theta(x).$$

Bizonyítás. Parciális integrálással kapjuk:

$$-H_1(x, y^4) = \int_{y^4}^{\frac{1}{4}} \frac{g(x+t)-g(x-t)}{t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^t \big(g(x+\alpha)-g(x-\alpha)\big)\,d\alpha\Big|_{t=y^4}^{\frac{1}{4}} + \int_{y^4}^{\frac{1}{4}} \frac{1}{t^2}\int_0^t \big(g(x+\alpha)-g(x-\alpha)\big)\,d\alpha\,dt.$$

Hasonlóan

$$\pi v_1(x+iy) = -\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{t}{t^2+y^2}\big(g(x+t)-g(x-t)\big)\,dt =$$

$$= -\frac{t}{t^2+y^2}\int_0^t \big(g(x+\alpha)-g(x-\alpha)\big)\,d\alpha\Big|_{t=0}^{\frac{1}{4}} - \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{t^2-y^2}{(t^2+y^2)^2}\int_0^t \big(g(x+\alpha)-g(x-\alpha)\big)\,d\alpha\,dt$$

Ezért, bevezetve a

$$\lambda(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \big(g(x+\alpha)-g(x-\alpha)\big)\,d\alpha$$

jelölést, majd észrevéve, hogy

$$\sup_{0<t<\frac{1}{4}} |\lambda(t)| \leqq 2\theta(x),$$

alkalmazhatjuk a (4. 4)-et, a (4. 5)-öt és a (4. 6)-ot; kapjuk:

$$|v_1(x+iy) - H_1(x, y^4)| \leqq 6\theta(x) + 2\theta(x)\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{ty^2}{(t^2+y^2)^2}\,dt +$$

$$+ 6\theta(x) + 2\theta(x)\int_0^{y^4} \frac{t^3\,dt}{(t^2+y^2)^2} \leqq (14+\log 2)\theta(x).$$

Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

6. $v(x+iy)$ LIMESZ-ELŐÁLLÍTÁSA

Az előző paragrafus 5. 3. tétele mutatja, hogy $H^*(x)$ becsléséhez szükségünk van $v(x+iy)$ becsléseire. Ebből a célból levezetjük $v(x+iy)$-nak egy alkalmas limesz-előállítását.

6. 1. LEMMA. *Legyen* $g(x)$ *integrálható a* $(0, 1)$ *intervallumon;* $-\infty<x<\infty$ *és* $y>0$ *esetén legyen*

$$v(x+iy) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{(x-t)g(t)}{(x-t)^2+y^2}\,dt.$$

Ekkor

$$v(x+iy) = \lim_{s\to+0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yv(t+is)}{(x-t)^2+y^2}\, dt.$$

Bizonyítás. Legyen $z=x+iy$ és

$$w(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{ig(r)}{z-t}\, dt.$$

Mivel $v(z)=\operatorname{Im} w(z)$, elegendő bebizonyítanunk, hogy

$$\frac{1}{i} w(z) = \lim_{s\to+0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iv(t+is)}{z-t}\, dt;$$

ez viszont levezethető a (4. 3)-ból.

Valóban, tegyük fel, hogy $0<s<\operatorname{Im} z$. Ekkor a (4. 3) felhasználásával könnyen kapható:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iv(t+is)}{z-t}\, dt = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{z-t} \int_0^1 \frac{(t-\alpha)g(\alpha)\, d\alpha}{(t-\alpha)^2+s^2}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 g(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i(t-\alpha)}{(z-t)((t-\alpha)^2+s^2)}\, dt\, d\alpha =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^1 g(\alpha) \left(\frac{2(z-\alpha)}{(z-\alpha)^2+s^2} - \frac{1}{y-\alpha-is} \right) d\alpha \to$$

$$\to \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{g(\alpha)}{z-\alpha}\, d\alpha = \frac{1}{i} w(z) \qquad (s\to+0),$$

mivel a *Lebesgue* tétel szerint az integrál és a limesz sorrendje felcserélhető. Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

A továbbiakban ennek a lemmának csak az alábbi következményére lesz szükségünk.

6. 2. KOROLLÁRIUM. *Legyen* $g(x)$ *integrálható a* $(0, 1)$ *intervallumon és legyen*

$$v(x+iy) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{(x-t)g(t)}{(x-t)^2+y^2}\, dt \qquad (y>0).$$

Ekkor

$$\sup_{y>0} |v(x+iy)| \leqq \liminf_{s\to+\infty} \sup_{y>0} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yv(t+is)}{(x-t)^2+y^2}\, dt \right|.$$

7. $v(x+iy)$ INTEGRÁLJAINAK BECSLÉSE

Legyen $g(t)$ integrálható a $(0, 1)$ intervallumon, legyen $z=x+iy$, $y>0$, továbbá

$$w(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{ig(t)}{z-t}\,dt,$$

$$u(x+iy)=\operatorname{Re} w(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{yg(t)}{(x-t)^2+y^2}\,dt,$$

$$v(x+iy)=\operatorname{Im} w(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{(x-t)g(t)}{(x-t)^2+y^2}\,dt.$$

Először bebizonyítjuk a következő lemmát, amely lehetővé teszi a *Cauchy* integráltétel felhasználását bizonyos integrálok becsléséhez.

7. 1. LEMMA. *$w(z)$ holomorf a felső félsíkon.*

Bizonyítás. A *Lebesgue* tétel egyszerű alkalmazásával kapható, hogy $\zeta \to z$ esetén

$$\frac{w(\zeta)-w(z)}{\zeta-z}=\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{-ig(t)}{(\zeta-t)(z-t)}\,dt \to \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{-ig(t)}{(z-t)^2}\,dt.$$

A következő lemma alapvető fontosságú a kívánt becslések levezetéséhez.

7. 2. LEMMA. (i) *Tegyük fel, hogy $g \in L^2(0, 1)$. Ekkor egy alkalmas K_6 konstanssal teljesül:*

$$\int_{-1}^2 v^2(x+iy)\,dx \leqq K_6 \int_0^1 g^2(x)\,dx.$$

(ii) *Tegyük fel, hogy $|g(x)| \leqq 1$. Ekkor valamilyen K_7 konstanssal:*

$$\int_{-1}^2 \exp|v(x+iy)|\,dx \leqq K_7.$$

Az (i) *bizonyítása.* Könnyen látható, hogy

$$v^2(x+iy)=u^2(x+iy)-\operatorname{Re} w^2(x+iy);$$

ezért

$$\int_{-1}^2 v^2(x+iy)\,dx \leqq \int_{-1}^2 u^2(x+iy)\,dx+\left|\int_{-1}^2 w^2(x+iy)\,dx\right|.$$

Ha $g(x)$-et a $(0, 1)$ intervallumon kívül 0-nak definiáljuk, a jobb oldal első tagja a 3. 5. (ii) tétel felhasználásával becsülhető:

$$\int_{-1}^2 u^2(x+iy)\,dx \leqq \int_{-1}^2 (\sup_{y>0}|u(x+iy)|)^2\,dx \leqq 32\int_0^1 g^2(x)\,dx.$$

A második tagot becsülendő, észrevesszük, hogy a 7. 1. lemma alapján integrálhatjuk a $w^2(z)$ függvényt a

$$-1+iy,\ -1+i(y+1),\ 2+i(y+1),\ 2+iy$$

pontokat összekötő törött vonalon. Mivel itt

$$|w(z)| \leqq \frac{1}{\pi}\int_0^1 |g(x)|\,dx,$$

azért a *Schwarz* egyenlőtlenség alapján

$$|w(z)|^2 \leqq \frac{1}{\pi^2}\left(\int_0^1 |g(x)|\,dx\right)^2 \leqq \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 g^2(x)\,dx.$$

Felhasználva, hogy a fenti törött vonal hossza 5, kapjuk, hogy

$$\left|\int_{-1+iy}^{2+iy} w^2(z)\,dz\right| \leqq \frac{5}{\pi^2}\int_0^1 g^2(x)\,dx.$$

A kapott becslések összevetésével következik a lemma állítása az (i) esetben.

Az (ii) *bizonyítása.* Integráljuk az $e^{-iw(z)}$ és $e^{iw(z)}$ holomorf függvényeket az (i) bizonyításában megadott útvonalon. Mivel itt $|w(z)| \leqq 1/\pi < 1$, kapjuk:

$$\text{(7. 3)} \qquad \left|\int_{-1}^{2} e^{-iw(x+iy)}\,dx\right| \leqq 5e, \qquad \left|\int_{-1}^{2} e^{iw(x+iy)}\,dx\right| \leqq 5e.$$

Mivel $|g(x)| \leqq 1$, könnyen látható, hogy $|u(x+iy)| \leqq 1$ (l. (4. 1)). Ezért

$$\operatorname{Re} e^{-iw(x+iy)} \geqq e^{v(x+iy)}\cos 1$$

és

$$\operatorname{Re} e^{iw(x+iy)} \geqq e^{-v(x+iy)}\cos 1.$$

Ezért, tekintetbe véve, hogy $\cos 1 > 0$, a (7. 3) alatti integrálok valós részét véve kapjuk, hogy

$$\int_{-1}^{2} e^{v(x+iy)}\,dx \leqq \frac{5}{\cos 1}, \qquad \int_{-1}^{2} e^{-v(x+iy)}\,dx \leqq \frac{5}{\cos 1};$$

következésképpen

$$\int_{-1}^{2} e^{|v|}\,dx \leqq \int_{-1}^{2} (e^{v}+e^{-v})\,dx \leqq 10/\cos 1.$$

A most bizonyított lemma felhasználásával kimutatjuk a következőt:

7. 4. TÉTEL. (i) *Tegyük fel, hogy* $g \in L^2(0, 1)$. *Ekkor*

$$\int_0^1 (\sup_{y>0} |v(x+iy)|)^2\,dx \leqq K_8 \int_0^1 g^2(x)\,dx.$$

(ii) *Tegyük fel, hogy,* $|g(x)| \leqq 1$. *Ekkor*

$$\int_0^1 \exp\left(\frac{1}{2}\sup_{y>0} |v(x+iy)|\right) dx \leqq K_9.$$

A tétel bizonyításához szükségünk lesz néhány jelölésre:

$$v(x+iy, s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yv(t+is)}{(x-t)^2+y^2}\, dt,$$

$$v_1(x+iy, s) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{2} \frac{yv(t+is)}{(x-t)^2+y^2}\, dt,$$

$$v_2(x+iy, s) = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\infty}^{-1} + \int_{2}^{\infty} \right) \frac{yv(t+is)}{(x-t)^2+y^2}\, dt.$$

Még szükségünk lesz a következő egyenlőtlenségre ($y, s>0$):

$$|v_2(x+iy, s)| \leqq \frac{1}{\pi} \int_0^1 |g(t)|\, dt. \tag{7.5}$$

Ezt igazolandó, észrevesszük, hogy ha $x \leqq -1$ vagy $x \geqq 2$, akkor

$$v(x+iy) = \frac{1}{\pi} \left| \int_0^1 \frac{(x-t)g(t)}{(x-t)^2+y^2}\, dt \right| \leqq \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{|g(t)|}{|x-t|}\, dt \leqq \frac{1}{\pi} \int_0^1 |g(t)|\, dt.$$

Ezért

$$|v_2(x+iy, s)| \leqq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 |g(t)|\, dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-\alpha)^2+y^2}\, d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^1 |g(t)|\, dt,$$

(l. (4. 1)), amit igazolni akartunk.

Az (i) *bizonyítása.* A *Schwarz* egyenlőtlenség segítségével a (7. 5)-ből következik, hogy

$$\int_0^1 (\sup_{y<0} |v_2(x+iy, s)|)^2\, dx \leqq \frac{1}{\pi^2} \left(\int_0^1 |g(t)|\, dt \right)^2 \leqq \frac{1}{\pi} \int_0^1 g^2(x)\, dx.$$

Ha a (0, 1) intervallumon kívül $g(x)$-et 0-nak értelmezzük, a 3. 5. (ii) tétel alkalmazásával az $a = -1, b=2$ esetre, továbbá a 7. 2. (i) lemma segítségével kapjuk

$$\int_0^1 (\sup_{y>0} |v_1(x+iy, s)|)^2\, dx \leqq \int_{-1}^{2} (\sup_{y>0} |v_1(x+iy, s)|)^2\, dx \leqq 32K_6 \int_0^1 g^2(x)\, dx.$$

Ezért a *Minkowski* egyenlőtlenség felhasználásával adódik, hogy

$$\int_0^1 (\sup_{y>0} |v(x+iy, s)|)^2\, dx \leqq K_8 \int_0^1 g^2(x)\, dx.$$

Így az állítás következik a 6. 2. korollárium ból és a *Fatou* lemmából, ha itt $s \to +0$.

A (ii) *bizonyítása.* A 7. 2. (ii) lemma, valamint a 3. 5. (iii) tétel alapján kapjuk, hogy alkalmas K_{10} konstanssal

$$\int_{-1}^{2} \exp\left(\frac{1}{2} \sup_{y>0} |v_1(x+iy, s)| \right) dx \leqq K_{10}.$$

Mivel a (7. 5) szerint

$$v_2(x+iy,\, s) \leqq 1/\pi,$$

a következő becslést kapjuk:

$$\int_0^1 \exp\left(\frac{1}{2}\sup_{y>0}|v(x+iy,\, s)|\right) dx \leqq K_{10} e^{\frac{1}{2\pi}}.$$

Ha itt $s \to +0$, a kívánt eredmény következik a 6. 2. korollárium ból és a *Fatou* lemmából.

8. A HILBERT TRANSZFORMÁLT BECSLÉSEI

Mint az 5. §-ban, itt is σ_x olyan intervallumot jelöl, amelyek x-et a középső felükben tartalmazzák. Egy adott σ intervallumon definiált $g(x)$ függvényre legyen

$$H(x) = \sup_{\sigma_x \subseteq \sigma} \left| \int_{\sigma - \sigma_x} \frac{g(t)}{x-t}\, dt \right| \qquad (x \in \sigma).$$

Első eredményünk a következő

8. 1. LEMMA. (i) *Tegyük fel, hogy* $g \in L^2(\sigma)$. *Ekkor*

$$\int_\sigma H^2(x)\, dx \leqq K_{11} \int_\sigma g^2(x)\, dx.$$

(ii) *Tegyük fel, hogy* $|g(x)| \leqq M$. *Ekkor*

$$\int_\sigma e^{\frac{H(x)}{2\pi M}}\, dx \leqq K_{12}|\sigma|.$$

Bizonyítás. Alkalmas új változó bevezetése után feltehetjük, hogy $\sigma = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$; legyen a σ intervallumon kívül $g(x) = 0$, továbbá $0 \leqq x \leqq 1$ esetén

$$\theta(x) = \sup_{0 \leqq \xi \leqq 1} \frac{1}{\xi - x} \int_x^\xi g(t)\, dt \qquad (\xi \neq x),$$

és

$$H^*(x) = \sup_{\sigma_x \subseteq (0,1)} \left| \int_{(0,1)-\sigma_x} \frac{g(t)}{x-t}\, dt \right|.$$

Mivel $H^*(x) \geqq H(x)$, elegendő annyit bizonyítani, hogy a megfelelő becslések $H(x)$ helyett $H^*(x)$-re is teljesülnek. A becslések a

$$H^*(x) \leqq \pi \sup_{y>0} |v(x+iy)| + K_4 \theta_{|g|}(x). \tag{8. 2}$$

egyenlőtlenségen alapulnak, amelyet az 5. §-ban már bebizonyítottunk (l. 5. 3. tétel).

Az (i) esetben a *Minkovski* egyenlőtlenség felhasználásával a (8. 2)-ből, a 7. 4. (i) tételből és a 2. 13. korollárium ból következik, hogy

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} (H^*(x))^2\, dx \leqq \int_0^1 \left(\pi \sup_{y>0} |v(x+iy)| + K_4 \theta(x)\right)^2 dx =$$

$$\leqq K_{11} \int_0^1 g^2(x)\, dx = K_{11} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} g^2(x)\, dx.$$

Az (ii) bizonyításánál elég az $M=1$ esetre szorítkoznunk, azaz feltehetjük, hogy $|g(x)| \leqq 1$. Ekkor $\theta(x) \leqq 1$ $(0 \leqq x \leqq 1)$, így a (8. 2) és a 7. 4. (ii) tétel alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} e^{\frac{H^*(x)}{2\pi}}\, dx \leqq e^{\frac{K_4}{2\pi}} \int_0^1 \exp\left(\frac{1}{2} \sup |v(x+iy)|\right) dx = \frac{K_{12}}{2}.$$

Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

Ha f a σ intervallumon definiált nem negatív függvény, akkor könnyen látható, hogy

$$|\{x: f(x) > \eta\}| \leqq \frac{1}{\eta} \int_\sigma f(x)\, dx \qquad (\eta > 0).$$

Ezért a most bizonyított lemma közvetlen következménye a

8. 3. Lemma. *$\eta > 0$ esetén legyen*

$$H_\eta = \{x \in \sigma: H(x) > \eta\}.$$

(i) *Tegyük fel, hogy $g \in L^2(\sigma)$. Ekkor*

$$|H_\eta| \leqq \frac{K_{11}}{\eta^2} \int_\sigma g^2(x)\, dx.$$

(ii) *Tegyük fel, hogy $|g(x)| \leqq M$. Ekkor*

$$|H_\eta| \leqq K_{12} |\sigma|\, e^{-\frac{\eta}{2\pi M}}.$$

Most kimutatjuk, hogy ez a lemma, habár más konstansokkal, érvényes komplex értékű $g(x)$ függvényekre is.

8. 4. Tétel. *Legyen $g(x)$ a σ intervallumon értelmezett komplex értékű függvény, jelöljön σ_x olyan intervallumokat, amelyek x-et a középső felükben tartalmazzák. Legyen*

$$H(x) = \sup_{\sigma_x \subseteq \sigma} \left| \int_{\sigma - \sigma_x} \frac{g(x)}{x-t}\, dt \right|;$$

továbbá $\eta > 0$ esetén legyen

$$H_\eta = \{x \in \sigma: H(x) > \eta\}.$$

(i) *Tegyük fel, hogy $g \in L^2(\sigma)$. Ekkor*

$$|H_\eta| \leqq \frac{K_{13}}{\eta^2} \int_\sigma |g(x)|^2\, dx.$$

(ii) *Tegyük fel, hogy $|g(x)| \leqq M$. Ekkor*

$$H_\eta \leqq K_{14} |\sigma|\, e^{\frac{-\eta}{4\pi M}}.$$

Bizonyítás. Legyen $g_1(x)$, ill. $g_2(x)$ $g(x)$ valós, ill. képzetes része, és jelölje $H_1(x)$, ill. $H_2(x)$ a megfelelő *Hilbert* transzformáltakat. Ekkor, mint könnyen látható,

$$H(x) \leqq H_1(x) + H_2(x).$$

Ezért, ha $H(x)>\eta$, akkor vagy $H_1(x)>\eta/2$, vagy $H_2(x)>\eta/2$ kell teljesüljön. Ezért a $g_1(x)$ és a $g_2(x)$ függvényekre alkalmazva az előző lemmát, η helyett $\eta/2$-vel, kapjuk a kívánt állítást ($K_{13}=4K_{11}$, $K_{14}=2K_{12}$).

9 EGY ÖSSZEG BECSLÉSE

A *Hilbert* transzformált mellett az alább definiálandó $\Delta(x)$ kifejezés is lényeges szerepet játszik a Fourier sorok részletösszegeinek becslésénél.

9. 1. TÉTEL. *Legyen $\{\sigma_k\}$ a σ intervallum egy partíciója, legyen a σ_k intervallum hossza δ_k, középpontja t_k. Definiáljuk a*

$$\Delta(x)=\sum_k \frac{\delta_k^2}{(x-t_k)^2+\delta_k^2}$$

függvényt és az

$$U_\eta=\{x\in\sigma\colon \Delta(x)>\eta\} \qquad (\eta>0)$$

halmazt. Ekkor valamilyen pozitív K_{15} és K_{16} konstanssal

$$|U_\eta|\leqq K_{15}|\sigma|e^{-K_{16}\eta}.$$

Bizonyítás. Először kimutatjuk, hogy

$$\frac{\delta_k^2}{(x-t_k)^2+\delta_k^2}\leqq 2\int_{\sigma_k}\frac{\delta_k}{(x-t)^2+\delta_k^2}\,dt. \tag{9. 2}$$

Valóban, ha $|t-t_k|\leqq\delta_k/2$, akkor

$$(x-t)^2-(x-t_k)^2=2\int_{t_k}^{t}(\tau-x)\,d\tau\leqq 2\left|\int_{t_k}^{t}\left(|t_k-x|+\frac{d_k}{2}\right)\delta\tau\right|\leqq\delta_k|t_k-x|+\frac{\delta_k^2}{2}\leqq$$

$$\leqq\frac{\delta_k^2}{2}+\frac{1}{2}(t_k-x)^2+\frac{\delta_k^2}{2}=\frac{1}{2}(t_k-x)^2+\delta_k^2,$$

s ebből

$$(x-t)^2+\delta_k^2\leqq 2(x-t_k)^2+2\delta_k^2,$$

ami bizonyítja a (9. 2)-t.

Most rátérünk a tétel bizonyítására. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy $\sigma=(0,1)$; legyen $\mu=|U_\eta|$; továbbá $x\in U_\eta$ esetén legyen

$$h(x)=\frac{e}{\mu}\frac{1}{\log\dfrac{e}{\mu}},$$

egyébként pedig legyen $h(x)=0$. Mivel $\mu\leqq|\sigma|=1$, azért $h(x)\geqq 0$. Így U_η definíciója szerint

$$\frac{e\cdot\eta}{\log\dfrac{e}{\mu}}\leqq\int_0^1\Delta(x)h(x)\,dx\leqq 2\sum_k\int_{\sigma_k}\int_0^1\frac{\delta_k h(x)}{(x-t)^2+\delta_k^2}\,dx\,dt\leqq$$

$$\leqq 2\int_0^1\left(\sup_{y>0}\int_0^1\frac{yh(x)}{(x-t)^2+y^2}\,dx\right)dt\leqq 16\pi\int_0^1 h(t)\log^+h(t)\,dt+K_{17},$$

ahol K_{17} alkalmas abszolút konstans (1. 3. 5. (i) tétel). Megmutatjuk, hogy itt a jobb oldal korlátos. Valóban felhasználva a $\mu \leqq 1$ reláció alapján nyilvánvaló

$$0 \leqq \log \log \frac{e}{\mu} < \log \frac{e}{\mu}$$

egyenlőtlenséget, kapjuk:

$$\int_0^1 h \log^+ h \leqq \left| \frac{e}{\log \frac{e}{\mu}} \log \left(\frac{e}{\mu} \cdot \frac{1}{\log \frac{e}{\mu}} \right) \right| = \left| \frac{\left(e \log \frac{e}{\mu} - e \log \log \frac{e}{\mu} \right)}{\log \frac{e}{\mu}} \right| \leqq e.$$

Összegyűjtve a kapott becsléseket, látjuk, hogy

$$\frac{e \cdot \eta}{\log \frac{e}{\mu}} \leqq K_{18},$$

ahol K_{18} alkalmas pozitív konstans. Így

$$\mu \leqq \exp\left(-e\eta / K_{18} + 1\right).$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

10. A FOURIER TRANSZFORMÁLT

Eddig általában kiterjesztett valós értékű függvényekkel foglalkoztunk; a továbbiakban általában komplex értékű függvényeket fogunk vizsgálni. Egy, az ω intervallumon integrálható f függvényre a Fourier transzformáltat a következőképpen definiáljuk:

$$c_\alpha(\omega) = c_\alpha(\omega, f) = \frac{1}{|\omega|} \int_\omega f(x) \exp\left(-\frac{2\pi\alpha i x}{|\omega|} \right) dx, \tag{10. 1}$$

amely, egész α értékek esetén f Fourier együtthatóit adja. A Fourier együtthatók mellett tekinteni fogjuk még a nem negatív

$$C_n(\omega) = C_n(\omega, f) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \frac{|c_{n+\mu/3}(\omega)|}{1+\mu^2} \tag{10. 2}$$

mennyiségeket is, amelyek hasznossága részben a 10. 11. korollárium ból látható. Néha alkalmazni fogjuk a $p=(n, \omega)$ jelölést is; ekkor $C(p)=C(n, \omega)=C_n(\omega)$.

Végül bevezetjük az

$$n[\omega] = \left[\frac{n|\omega|}{2\pi} \right] \tag{10. 3}$$

jelölést, ahol $[x]$ jelöli x egész részét.

Jelen paragrafus első eredménye a

10. 4. LEMMA. *Legyen $\varphi(x)$ az ω zárt intervallumon értelmezett kétszer folytonosan differenciálható függvény (ω végpontjaiban rendre jobb-, ill. bal oldali differenciálhányadosokat véve). Ekkor $\varphi(x)$ előállítható egy*

$$\varphi(t) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \gamma_\mu \exp\left(-\frac{2\pi\mu i t}{3|\omega|} \right) \qquad (t \in \omega) \tag{10. 5}$$

egyenletesen konvergens sorral, ahol valamilyen K_{19} abszolút konstanssal

$$(1+\mu^2)|\gamma_\mu| \leqq K_{19}\left(\max_{\omega}|\varphi| + |\omega^2| \max_{\omega}|\varphi''|\right). \tag{10.6}$$

Bizonyítás. Alkalmas új változót bevezetve feltehetjük, hogy $\omega = [-\pi/3, \pi/3]$; először megmutatjuk, hogy φ kiterjeszthető egy 2π szerint periodikus, mindenütt kétszer folytonosan differenciálható függvénnyé oly módon, hogy $\max|\varphi| + \max|\varphi''|$ legfeljebb egy konstans szorzóval növekszik. Valóban, legyen $Q_k(x)$ $(k=1, 2)$ olyan legfeljebb ötödfokú polinom, hogy

$$Q_k^{(j)}((-1)^k\pi) = 0, \quad Q_k^{(j)}((-1)^k\pi/3) = \varphi^{(j)}((-1)^k\pi/3),$$

ahol $j=0, 1, 2$. Legyen $f(x)=Q_1(x)$ a $[-\pi, -\pi/3]$, $f(x)=\varphi(x)$ a $[-\pi/3, \pi/3]$, végül $f(x)=Q_2(x)$ a $[\pi/3, \pi]$ intervallumban, majd folytassuk f-et periodikusan. Mivel a $Q_k(x)$ polinomok együtthatói a

$$\varphi^{(j)}((-1)^k\pi/3) \qquad (j=0, 1, 2)$$

mennyiségek lineáris kombinációi*, azért alkalmas K_{20} konstanssal teljesül, hogy

$$\sum_{j=0}^{2} \max_{-\infty<x<\infty} |Q_k^{(j)}(x)| \leqq K_{20} \sum_{j=0}^{2} \max_{\omega} |\varphi^{(j)}(x)|;$$

ezért $f(x)$ definíciója alapján kapható, hogy

$$\sum_{j=0}^{2} \max_{-\infty<x<\infty} |f^{(j)}(x)| \leqq (2K_{20}+1) \sum_{k=0}^{2} \max_{\omega} |\varphi^{(j)}(x)|. \tag{10.7}$$

A *Lagrange* középérték-tétel szerint létezik olyan ξ, $-\pi/3 < \pi < \pi/3$, amelyre

$$\varphi'(\xi) = \frac{3}{2\pi}(\varphi(\pi/3) - \varphi(-\pi/3)).$$

Így, $-\pi/3 \leqq x \leqq \pi/3$ esetén

$$|\varphi'(x)| = \left|\varphi'(\xi) + \int_{\xi}^{x} \varphi''(t)\,dt\right| \leqq \frac{3}{\pi}\max_{\omega}|\varphi| + \frac{2\pi}{3}\max_{\omega}|\varphi''|.$$

Ebből a (10. 7) alapján következik, hogy

$$\sum_{j=0}^{2} \max_{-\infty<x<\infty} |f^{(j)}(x)| \leqq K_{21}\left(\max_{\omega}|\varphi| + \max_{\omega}|\varphi''|\right), \tag{10.8}$$

ahol K_{21} konstans. Tekintsük most $f(x)$ Fourier-sorát:

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \gamma_\mu e^{-\mu i x}, \tag{10.9}$$

ahol

$$\gamma_\mu = c_{-\mu}(-\pi, \pi) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)e^{i\mu x}\,dx. \tag{10.10}$$

*Ugyanis a fenti egyenlőségek a $Q_k(x)$ polinomok együtthatóira olyan lineáris egyenletrendszert adnak; amelynek determinánsa nem zéró abszolut konstans—ilyen egyenletrendszer gyökei pedig előállnak a jobboldali paraméterek lineáris kombinációjaként.

A (10. 6)-ot bizonyítandó kizárjuk a (10. 8) és a (10. 10) alapján triviális $\mu=0$ esetet. A (10. 10) jobb oldalának kétszeres parciális integrálásával adódik, hogy

$$\gamma_\mu = -\frac{1}{2\pi\mu^2}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)e^{\mu ix}\,dx.$$

Valóban, a kiintegrált tagok eltűnnek, mivel $f(x)$ definíciója szerint $f(\pm\pi)=$ $=f'(\pm\pi)=0$. Így a (10. 6) egyenlőtlenség következik a $\mu\neq 0$ esetben is. (Emlékeztetünk az $\omega=[-\pi/3, \pi/3]$ feltevésre, amely szerint $|\omega|^2=\frac{4\pi^2}{9}$). A (10. 6) egyenlőtlenségből következik, hogy a (10. 9) sorozat egyenletesen konvergál valamilyen $g(x)$ határfüggvényhez; a trigonometrikus rendszer teljessége miatt pedig $g(x)=f(x)$. Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

Most pedig levezetjük az előző lemma egy egyszerű következményét.

10. 11. Korollárium. Legyen n egész, f integrálható ω-n. Ekkor valamilyen K_{22} konstanssal:

$$\left|\frac{1}{|\omega|}\int_\omega e^{-inx}f(x)\,dx\right| \leqq K_{22}C_{n[\omega]}(\omega).$$

Bizonyítás. Legyen

$$\beta = n-\frac{2\pi}{|\omega|}n[\omega] = n-\frac{2\pi}{|\omega|}\left[\frac{n|\omega|}{2\pi}\right],$$

és alkalmazzuk az előző lemmát a $\varphi(x)=e^{-i\beta x}$ függvényre. Mivel $0\leqq\beta<\frac{2\pi}{|\omega|}$, kapjuk, hogy

$$\gamma_\mu \leqq \frac{K_{22}}{1+\mu^2};$$

ahol K_{22} konstans. Felhasználva ezt az egyenlőtlenséget, kapjuk:

$$\left|\frac{1}{|\omega|}\int_\omega e^{-inx}f(x)\,dx\right| = \left|\frac{1}{|\omega|}\int_\omega \sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\gamma_\mu f(x)\exp\left(-\frac{2\pi ix}{|\omega|}(n[\omega]+\mu/3)\right)dx\right| =$$

$$= \left|\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\gamma_\mu c_{n[\omega]+\mu/3}\right| \leqq K_{22}C_{n[\omega]}(\omega).$$

Végül későbbi hivatkozások céljából megfogalmazzuk a *Parseval* formulát két alakjában:

(10. 12)
$$\frac{1}{|\omega|}\int_\omega |f|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n(\omega,f)|^2,$$

(10. 13)
$$\frac{1}{|\omega|}\int_\omega f\bar{g} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(\omega,f)\overline{c_n(\omega,g)},$$

ahol $f, g\in L^2(\omega)$. ($\bar{\zeta}$ jelöli ζ komplex konjugáltját).

11. AZ ALAPLEMMA

Jelen paragrafusban kimondunk egy lemmát, amelyből az 1. 1. tétel egyszerűen következik. Itt csak ezt az implikációt mutatjuk ki és a lemma bizonyítása a további paragrafusok feladata lesz.

11. 1. LEMMA. *Minden $\varepsilon>0$ számhoz van két olyan pozitív, csak ε-tól függő mennyiség, $K(\varepsilon)$ és $M(\varepsilon)$, amelyekre*

$$\lim_{\varepsilon\to+0} K(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to+0} M(\varepsilon) = 0; \tag{11.2}$$

továbbá, ha

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{11.3}$$

ahol csak véges sok c_n különbözik 0-tól, és,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \varepsilon^2, \tag{11.4}$$

akkor létezik olyan (f-től függő) $M(\varepsilon)$-nál kisebb mértékű $E\subseteq[-\pi,\pi]$ halmaz, hogy minden $x\notin E$, $-\pi\leqq x\leqq\pi$ esetén a

$$\left|\sum_{n=k}^{l} c_n e^{inx}\right| < K(\varepsilon) \tag{11.5}$$

egyenlőtlenség áll, ahol k és l tetszés szerinti egészek ($k\leqq l$).

Rögtön észrevehető, hogy ezt a lemmát csak „kis" ε-okra kell bebizonyítanunk, hisz ha ε nagyobb, mint valami adott $\varepsilon_0>0$, akkor vehető $E=[-\pi,\pi]$ is. Az is könnyen látható, hogy a $K(\varepsilon)$ és $M(\varepsilon)$ függvényekről feltehető, hogy monoton nemnövekvőek. Ugyanis, ha a lemmát bebizonyítottuk valamilyen $K(\varepsilon)$ és $M(\varepsilon)$ függvényekkel, akkor egyúttal hasonló állítás igaz a

$$\tilde{K}(\varepsilon) = \sup_{0<\delta\leqq\varepsilon} K(\delta), \quad \tilde{M}(\varepsilon) = \sup_{0<\delta\leqq\varepsilon} M(\varepsilon)$$

függvényekre is, amelyek pedig már monoton függvények.

Annak a bizonyítása, hogy a 11. 1. lemmából következik az 1. 1. tétel. Egy tetszés szerinti L^2-beli f függvényre legyen

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = Q,$$

továbbá

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx.$$

Ekkor a *Parseval* formula alapján

$$2\pi\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = Q.$$

Legyen $\{\varepsilon_n\}$, $0<\varepsilon_m<Q$ egy 0-hoz tartó sorozat, amelyre teljesülnek a

$$\sum_{m=1}^{\infty} K(\varepsilon_m) < 1, \quad \sum_{m=1}^{\infty} M(\varepsilon_m) < 1$$

egyenlőtlenségek. Legyen N_m a legkisebb olyan N egész szám, amelyre

$$2\pi \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 \geqq Q - \varepsilon_m^2,$$

és legyen

$$f_m(x) = \left(\sum_{n=-N_{m+1}}^{-N_m-1} + \sum_{n=N_m+1}^{N_{m+1}} \right) c_n e^{inx}.$$

Ha most alkalmazzuk a 11. 1. lemmát az $f_m(x)$ függvényekre, kapjuk az E_m halmazokat, amelyekre

$$\sum_{m=1}^{\infty} |E_m| < \sum_{m=1}^{\infty} M(\varepsilon_m) < 1, \tag{11. 6}$$

továbbá, ha $j \geqq 1$ és

$$x \notin \bigcup_{m=j}^{\infty} E_m,$$

akkor

$$\sup_{k<-N_j,\, l>N_j} \left| \left(\sum_{n=k}^{-N_j-1} + \sum_{n=N_j+1}^{l} \right) c_n e^{inx} \right| < \sum_{m=j}^{\infty} K(\varepsilon_m) \to 0 \qquad (j \to \infty).$$

Ezért a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

sor konvergál minden olyan x-re, $-\pi \leqq x \leqq \pi$, amely nem tartozik a

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{m=j}^{\infty} E_m$$

halmazhoz, amely pedig a (11. 6) értelmében 0 mértékű. Ezzel az 1. 1. tételt bebizonyítottuk.

Mint már említettük, a következőkben a célunk a 11. 1. lemma bizonyítása lesz. Ehhez felveszünk egy elég nagy N természetes számot úgy, hogy a (11. 3)-ban levő, N-nél nagyobb abszolút értékű indexszel rendelkező c_n-ek eltűnjenek; ekkor $f(x)$ előállítható a

$$f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} \tag{11. 7}$$

véges összeggel. A továbbiakban mindig feltesszük, hogy x a $[-\pi, \pi]$ intervallumhoz tartozik. Az E halmazt, amelyet kivételes halmaznak is fogunk hívni, hét később definiálandó halmaz egyesítéseként állítjuk elő:

$$E = S^* \cup T^* \cup U^* \cup V \cup X^* \cup Y^* \cup Z.$$

12. DIRICHLET INTEGRÁLOK

Ha egy ω^* intervallum az x pontot a középső felében tartalmazza, egy tetszés szerinti n egész számra legyen

$$s_n(x, \omega^*) = \int_{\omega^*} \frac{e^{-int} f(t)}{x - t}\, dt, \tag{12. 1}$$

ahol a jobb oldali integrál főértéke veendő, azaz, ha $\omega^* = [a, b]$ akkor

$$\int_a^b = \lim_{\delta \to +0} \left(\int_b^{x-\delta} + \int_{x+\delta}^b \right).$$

Az $f(x)$ függvény (11. 7) alatti előállításából nyilvánvalóan következik, hogy $s_n(x, \omega^*)$ mindig létezik és véges. Speciálisan, ha $\omega^* = \omega^*_{-1} = [-4\pi, 4\pi]$, akkor

$$s_n(x) = s_n(x, \omega^*_{-1}) = \int_{-4\pi}^{4\pi} \frac{e^{-int} f(t)}{x-t}\, dt; \tag{12. 2}$$

$s_n(x)$-et (az n egész számhoz tartozó) *Dirichlet* integrálnak nevezzük. Amint az alábbi lemmában meg fogjuk mutatni, $s_n(x)$ alkalmas f Fourier sora részletösszegeinek becslésére; a (12. 1) alatti integrálokat pedig $s_n(x)$ becsléséhez fogjuk felhasználni.

12. 3. LEMMA. *Tetszés szerinti k és l egész szám esetén érvényes az*

$$\left| \sum_{n=k}^{l-1} c_n e^{inx} \right| \leqq K_{23} \left(|e^{ilx} s_l(x) - e^{ikx} s_k(x)| + \varepsilon \right)$$

egyenlőtlenség (K_{23} abszolút konstans, ε pedig a (11. 4) *által van definiálva).*

Bizonyítás. A *Schwarz* egyenlőtlenség felhasználásával kapjuk, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f| \leqq \sqrt{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi}\varepsilon.$$

Mivel f 2π szerint periodikus, kapjuk, hogy

$$\int_{-4\pi}^{4\pi} |f| \leqq 4\sqrt{2\pi}\varepsilon. \tag{12. 4}$$

Mivel a c_n-ek nyilvánvalóan f Fourier együtthatói, azért

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\, dt.$$

Tekintetbe véve az integrandusz periodicitását, az integrációs intervallumot eltolhatjuk x-szel. Így, felcserélve az integrálás és az összegezés sorrendjét, kapjuk:

$$\sum_{n=k}^{l-1} c_n e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t) \frac{e^{i(x-t)l} - e^{i(x-t)k}}{e^{i(x-t)} - 1}\, dt \qquad (k < l).$$

Mivel az

$$\frac{1}{e^{i(x-t)} - 1} + \frac{i}{x-t}$$

függvény korlátos az $[x-\pi, x+\pi]$ intervallumban, a (12. 2) felhasználásával adódik a kívánt eredmény, figyelembe véve, hogy egy korábbi feltevésünk szerint $-\pi \leqq x \leqq \pi$.

Most pedig megadjuk azon ω^* intervallumok precíz leírását, amelyek előfordulását a (12. 1)-ben megengedjük. Mint az előbb, jelölje ω^*_{-1} a $[-4\pi, 4\pi]$ inter-

vallumot, és osszuk fel ezt $2^{\nu+2}$ egyenlő részre ($\nu=0, 1,\ldots$). Így kapjuk rendre az $\omega_{j\nu}$ intervallumokat ($j=-2^{\nu+1}+1, \ldots, 2^{\nu+1}$). Ezek után legyen

$$\omega^*_{j\nu} = \omega_{j\nu} \cup \omega_{j+1,\nu} \qquad (-2^{\nu+1}+1 \leqq j \leqq 2^{\nu+1}-1).$$

A következőkben ω, ill. ω^* (esetleg vesszővel vagy indexszel ellátva) mindig valamelyik $\omega_{j\nu}$-t, ill. $\omega^*_{j\nu}$-ot fogja jelölni.

Az $\omega^*=\omega^*_{j\nu}$ intervallumokhoz még hozzárendeljük a

$$C^*_n(\omega^*_{j\nu}) = \max_{\omega'} C_n(\omega') \tag{12.5}$$

mennyiségeket, ahol ω' végigfutja $\omega^*_{j\nu}$-nek a négy $\omega_{k,\nu+1}$ alakú részintervallumát, $C_n(\omega)$ pedig a (10. 2) által van definiálva. A későbbiekben gyakran fogjuk használni a $p^*=(n, \omega^*)$ jelölést is; ekkor $C^*_n(\omega^*)=C^*(n, \omega^*)=C^*(p^*)$.

13. A $P_k(t, \omega)$ POLINOMOK

Amint az előző paragrafusban is említettük, $f(x)$ Fourier sora részletösszegeinek becsléséhez szükségünk lesz bizonyos $s_n(x, \omega^*)$ integrálok becsléseire. Azon (n, ω^*) párokat kiválasztandó, amelyeket vizsgálni fogunk, szükségünk lesz az ω intervallumtól és a k nem negatív egész számtól függő $P_k(t, \omega)$ trigonometrikus polinomokra. A rövidség kedvéért a továbbiakban használni fogjuk a következő jelölést:

$$b_k = 2^{-2^k} \qquad (k=0, 1, \ldots). \tag{13.1}$$

Legyen k fix és jelölje $a_{\mu 0}$ f-nek azon $c_n(\omega_{j0})$ Fourier együtthatóit, amelyeknek abszolút értéke $\geqq b_k$ ($j=-1, 0, 1, 2$); jelölje $\lambda_{\mu 0}$ a megfelelő n kitevőt. Legyen

$$P_k(t, \omega_{j0}) = \sum_{\mu} a_{\mu 0} e^{i\lambda_{\mu 0} t}. \tag{13.2}$$

Egy tetszés szerinti $\nu>0$ egész számra legyen $\omega_{j\nu} \subset \omega_{l,\nu-1}$ és definiáljuk a $P_j(t, \omega_{j\nu})$ polinomot rekurzióval:

$$P_k(t, \omega_{j\nu}) = P_k(t, \omega_{i,\nu-1}) + \sum_{\mu} a_{\mu\nu} e^{i\lambda_{\mu\nu} t}, \tag{13.3}$$

ahol $a_{\mu\nu}$ az $f(t)-P_k(t, \omega_{l,\nu-1})$ függvény azon $c_n(\omega_{j\nu})$ Fourier együtthatóit jelöli, amelyek abszolút értéke $\geqq b_k$, $\lambda_{\mu\nu}$ pedig a megfelelő $2^\nu n$ kitevőt jelenti. Az $a_{\mu\nu}$ együtthatókat és a $\lambda_{\mu\nu}$ kitevőket $\omega_{j\nu}$-re nézve *primitívnek* nevezzük. Jelölje $P_k(\omega)$ azon (a, λ) párok halmazát, amelyek primitívek az ω intervallumra nézve. Ha $\omega_{j_0,0} \supset \ldots \supset \omega_{j_{\nu-1},\nu-1} \supset \omega_{j_\nu,\nu} = \omega$, akkor a fenti definíció szerint

$$P_k(t, \omega) = \sum_{n=0}^{\nu} \sum_{(a,\lambda) \in P_k(\omega_{j_n,n}, n)} a e^{i\lambda t} = \sum_{(a_\omega, \lambda_\omega) \in R_k(\omega)} a_\omega e^{i\lambda_\omega t}, \tag{13.4}$$

ahol $R_k(\omega)$ jelöli a $P_k(\omega_{j_n,n})$ ($0 \leqq n \leqq \nu$) halmazok elemeit multiplicitásukkal együtt tartalmazó rendszert; ugyanis ugyanaz a (a, λ) pár esetleg több $P_k(\omega_{j_n,n})$ halmazhoz tartozhat.

A fenti definícióból a *Parseval* formula értelmében következik, hogy ha $\omega_{jv} \subset \omega_{l,v-1}$ $(v>0)$, akkor érvényes a következő egyenlőség:

$$\int_{\omega_{jv}} |f(t)-P_k(t,\omega_{jv})|^2\,dt + \sum_{(a,\lambda)\in P_k(\omega_{jv})} |a|^2|\omega_{jv}| = \tag{13.5}$$

$$= \int_{\omega_{jv}} |f(t)-P_k(t,\omega_{l,v-1})|^2\,dt.$$

Ez az egyenlőség igaz a $v=0$ esetre is, ha a jobb oldali integranduszt $|f(t)|^2$-tel helyettesítjük. Ezért összegezve j-re $(-2^{v+1}<j\leqq 2^{v+1})$, majd v szerint teljes indukciót alkalmazva kapjuk, hogy minden $v\geqq 0$ esetén

$$\sum_j \int_{\omega_{jv}} |f(t)-P_k(t,\omega_{jv})|^2 + \sum_j \sum_{(a,\lambda)\in R_k(\omega_{jv})} |a|^2\cdot|\omega_{jv}| = \tag{13.6}$$

$$= \int_{-4\pi}^{4\pi} |f(x)|^2\,dx = 4\varepsilon^2;$$

itt a második egyenlőség ε definíciója értelmében áll fenn (l. (11. 4)). Legyen

$$A_k(t) = \sum_{\omega: t\in\omega} \sum_{(a,\lambda)\in P_k(\omega)} |a|^2. \tag{13.7}$$

Ekkor a (13. 6) szerint

$$\int_{-4\pi}^{4\pi} A_k(t)\,dt = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_j \sum_{(a,\lambda)\in P_k(\omega_{jv})} |a|^2|\omega_{jv}| = \tag{13.8}$$

$$= \lim_{v\to\infty} \sum_j \sum_{(a,\lambda)\in R_k(\omega_{jv})} |a|^2|\omega_{jv}| \leqq 4\varepsilon^2 \leqq 4,$$

ugyanis, mint a 11. §-ban említettük, feltehetjük, hogy ε kicsi, például, hogy $\varepsilon\leqq 1$. Legyen

$$X_k = \{t: A_k(t) > b_k^{-1}\}; \tag{13.9}$$

ekkor a fenti becslés szerint $|X_k|\leqq 4b_k$. Vegyük hozzá minden $\omega\subseteqq X_k$ intervallumhoz három bal- és három jobb oldali, vele azonos hosszúságú szomszédját, és legyen az így kapott intervallumok egyesítése X_k^*. Ekkor

$$|X_k^*| \leqq 7|X_k| \leqq 28\,b_k. \tag{13.10}$$

13. 11. Lemma. *Ha* $\omega\subseteqq X_k$, *akkor* $P_k(t,\omega)$ *legfeljebb* b_k^{-3} *tagból áll, továbbá*

$$|P_k(t,\omega)| \leqq \sum_{(a_\omega,\lambda_\omega)\in R_k(\omega)} |a_\omega| \leqq b_k^{-2}. \tag{13.12}$$

Bizonyítás. Mivel, definíció szerint, a_ω abszolút értéke $\geqq b_k$ az első állítás következik $A_k(t)$ és X_k definíciójából. A második állítás is következik, ugyanezeket felhasználva:

$$|P_k(t,\omega)| \leqq \sum_{R_k(\omega)} |a_\omega| \leqq \frac{1}{b_k} \sum_{R_k(\omega)} |a_\omega|^2 \leqq b_k^{-2}.$$

A $P_k(t, \omega)$ polinomok definiálása után a célunk megkonstruálni az (n, ω^*) pároknak egy F_k^* halmazát, amelyek elemeit kijelölt pároknak is fogjuk nevezni. Első lépésként tekintsük azon (n, ω), $\omega \subsetneqq X_k$ párok F_k halmazát, amelyekre a $P_k(t, \omega)$ polinom tartalmaz olyan ω-ra nézve primitív $ae^{i\lambda t}$ tagot, hogy $\lambda[\omega] = n$. Itt, mint a (10. 3)-ban már definiáltuk, $\lambda[\omega]$ a $\lambda|\omega|/2\pi$ szám egész részét jelöli. A (13. 8) szerint:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{j} \sum_{(a,\lambda)\in P_k(\omega_{j\nu})} |a|^2 |\omega_{j\nu}| \leqq 4.$$

Mivel minden bal oldalon előforduló a abszolút értéke $\geqq b_k$, a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\sum_{(n,\omega)\in F_k} |\omega| \leqq 4 b_k^{-2}. \tag{14. 1}$$

Most pedig $(\tilde{F}a)$ és $(\tilde{F}b)$ segítségével definiálunk egy F_k-nál bővebb $\tilde{F}_k$ halmazt.

$(\tilde{F}a)$ Ha $p = (n, \omega) \in F_k$, *akkor* $\tilde{F}_k$ *tartalmaz minden olyan* $\tilde{p} = (\tilde{n}, \tilde{\omega})$ *párt, amelyre* $\tilde{\omega} \subsetneqq X_k$, $\tilde{\omega} \subseteqq \omega$ *és*

$$|\tilde{\omega}| \geqq b_k^{10} |\omega|, \quad |\tilde{n} - \lambda_\omega[\tilde{\omega}]| < b_k^{-10}, \tag{14. 2}$$

ahol λ_ω *valamilyen* $P_k(t, \omega)$*-ban előforduló kitevő.*

Könnyen látható, hogy adott p esetén $\tilde{\omega}$ hosszára legfeljebb $K_{24} \log b_k^{-1}$ lehetőség van (K_{24} konstans). Másrészt, mivel $P_k(t, \omega)$ legfeljebb b_k^{-3} tagot tartalmaz (l. a 13. 11. lemmát) a λ_ω kitevők száma tehát legfeljebb b_k^{-3}, azért adott p és $\tilde{\omega}$ esetén a (14. 2) alatti második egyenlőtlenség az $\tilde{n}$-nak legfeljebb $b_k^{-3}(2b_k^{-10} + 1) \leqq 3b_k^{-13}$ választására teljesülhet. Ezért, *adott* $p \in F_k$ esetén, az $(\tilde{F}a)$-t kielégítő párokra összegezve:

$$\sum_{(\tilde{F}a)} |\tilde{\omega}| \leqq 3K_{24} |\omega| b_k^{-13} \log b_k^{-1}. \tag{14. 3}$$

$(\tilde{F}b)$ *Ha* $p = (n, \omega) \in F_k$, *akkor* $\tilde{F}_k$ *tartalmaz minden olyan* $\tilde{p} = (\tilde{n}, \tilde{\omega})$ *párt.* $\tilde{\omega} \subsetneqq X_k$, $\tilde{\omega} \subseteqq \omega$, *amelyekhez létezik két olyan különböző* λ_ω *és* λ'_ω *kitevő* $P_k(t, \omega)$*-ban, hogy*

$$b_k^{10} \leqq |\lambda_\omega - \lambda'_\omega| \, |\tilde{\omega}| \leqq 6\pi b_k^{-10}, \quad |\tilde{n} - \lambda_\omega[\tilde{\omega}]| \leqq b_k^{-10}. \tag{14. 4}$$

$\tilde{F}_k$ definíciójához még annyit kell hozzátennünk, hogy $\tilde{F}_k$ csak azokat a párokat tartalmazza, amelyeket $(\tilde{F}a)$ vagy $(\tilde{F}b)$ megenged.

Az $(\tilde{F}b)$ által fix p esetén szolgáltatott párok számát becsülendő észrevesszük, hogy $P_k(t, \omega)$ legfeljebb b_k^{-3} tagot tartalmaz (l. 13. 11. lemma), így a $(\lambda_\omega, \lambda'_\omega)$ párok száma legfeljebb b_k^{-6}. Fix $(\lambda_\omega, \lambda'_\omega)$ pár esetén a (14. 4) első egyenlőtlensége legfeljebb $K_{25} \log b_k^{-1}$ különböző hosszúságú $\tilde{\omega}$ intervallumra teljesül (K_{25} konstans), a második egyenlőtlenség pedig legfeljebb $2b_k^{-10} + 1 \leqq 3b_k^{-10}$ különböző $\tilde{n}$ esetén áll fenn. Ezért, *adott* $p \in F_k$ esetén,

$$\sum_{(\tilde{F}b)} |\tilde{\omega}| \leqq 3K_{25} |\omega| b_k^{-16} \log b_k^{-1}.$$

Ezt összevetve a (14. 1)- és (14. 3)-mal kapjuk (K_{26} konstans):

$$\sum_{(\tilde{n},\tilde{\omega})\in \tilde{F}_k} |\tilde{\omega}| \leqq K_{26} b_k^{-19}. \tag{14. 5}$$

Itt egyedül annyi a lényeges, hogy a jobb oldalon b_k valamilyen hatványa szerepel, nem pedig a -19-es kitevő. Ugyanis az E kivételes halmaz bizonyos F_k-tól függő részeinek megkonstruálásakor minden $(n, \omega) \in F_k$ párhoz kijelöljük az ω intervallumnak valamilyen részhalmazát, amelynek mértéke $|\omega|$-val osztva „exponenciálisan" 0-hoz tart. Ezért a (14. 5) relációból következni fog, hogy az E kivételes halmaz mértéke 0-hoz tart.

Most pedig levezetjük $(\tilde{F}b)$-nek egy, a továbbiakban nagyon fontos következményét.

14. 6. LEMMA. *Legyen* $p=(n, \omega) \notin \tilde{F}_k$, $\omega \not\subseteq X_k$, *jelöljük* R'*-vel* $R_k(\omega)$ *azon* $(a_\omega, \lambda_\omega)$ *elemeinek redszerét*, amelyekre* $|n-\lambda_\omega[\omega]| < b_k^{-10}$, R'' *pedig legyen* $R_k(\omega)$ *többi elemének rendszere. Legyen* λ *egy tetszés szerinti* R'*-höz tartozó kitevő, azaz amelyhez van olyan* a, *hogy* $(a, \lambda) \in R'$. *(Ha* R' *üres, legyen* λ *tetszés szerinti egész szám, amelyre* $|n-\lambda[\omega]| < b_k^{-10}$.*) Ekkor minden* x *valós szám esetén a* $P_k(t, \omega)$ *polinom előállítható a következő alakban:*

$$P_k(t, \omega) = \varrho e^{i\lambda t} + Q_0(t, x) + Q_1(t), \tag{14. 7}$$

ahol

$$\varrho = \varrho(x) = \sum_{(a_\omega, \lambda_\omega) \in R'} a_\omega e^{i(\lambda_\omega - \lambda)x}. \tag{14. 8}$$

$$Q_0(t, x) = \sum_{(a_\omega, \lambda_\omega) \in R'} a_\omega e^{i\lambda_\omega x}(e^{i\lambda_\omega(t-x)} - e^{i\lambda(t-x)}). \tag{14. 9}$$

$$Q_1(t) = \sum_{(a_\omega, \lambda_\omega) \in R''} a_\omega e^{i\lambda_\omega t}. \tag{14. 10}$$

Itt teljesülnek a következő egyenlőségek

$$|\varrho| \leqq b_k^{-2}, \tag{14. 11}$$

$$|Q_0(t, x)| \leqq \frac{|t-x|}{|\omega|} b_k^8 \tag{14. 12}$$

és

$$\sum_{(a_\omega, \lambda_\omega) \in R''} |a_\omega| \leqq b_k^{-2}. \tag{14. 13}$$

Bizonyítás. Csak a (14. 11)—(14. 13) egyenlőtlenségeket kell bizonyítanunk, ugyanis a (14. 7) reláció azonosságba megy át, ha figyelembe vesszük a benne szereplő mennyiségek definícióit.

A (14. 11) és a (14. 13) egyenlőtlenség közvetlenül következik a 13. 11. lemmából. A (14. 12)-t igazolandó feltehetjük, hogy van legalább két R'-höz tartozó kitevő, ugyanis egyébként $Q_0(t, x) \equiv 0$.

A bizonyítást elvégzendő először kimutatjuk, hogy tetszés szerinti λ_1 és λ_2, R'-höz tartozó kitevőre a

$$|\lambda_1 - \lambda_2|\,|\omega| < b_k^{10} \tag{14. 14}$$

egyenlőtlenség teljesül.

Ennek kimutatásához legyen először ω' a leghosszabb olyan ω-t tartalmazó intervallum, amelyre $P_k(t, \omega') \equiv P_k(t, \omega)$. Ekkor nyilvánvalóan $R_k(\omega') = R_k(\omega)$,

* Rendszeren itt olyan összességet értünk, amely egy elemet többször is tartalmazhat.

továbbá $P_k(t, \omega')$, mivel a feltevés szerint nem azonosan 0, tartalmaz valamilyen $a_{\omega'} \exp i\lambda_{\omega'} t$, ω'-re nézve primitív tagot; azaz F_k definíciója szerint kapjuk, hogy $(n', \omega') \in F_k$, ahol $n' = \lambda_{\omega'}[\omega']$.

Így $(\tilde{F}b)$-t az

$$(n', \omega') \to p = (n, \omega)$$

$$(n, \omega) \to \tilde{p} = (\tilde{n}, \tilde{\omega})$$

$$\lambda_1 \to \lambda_\omega, \lambda_2 \to \lambda'_\omega$$

helyettesítéssel alkalmazva kapjuk, hogy az ottani (14. 4) első egyenlőtlensége nem teljesülhet, azaz

$$b_k^{10} \leqq |\lambda_1 - \lambda_2| \, |\omega| \leqq 6\pi b_k^{-10}$$

nem áll fenn. Ugyanis $\lambda_1 \in R'$ miatt a (14. 4) második egyenlőtlensége R' definíciója értelmében teljesül, és a két egyenlőtlenség együttes fennállása azt jelentené, hogy $(n, \omega) \in \tilde{F}_k$, ellentétben a feltevéssel. Ezért a (14. 14) igazolásához csak annyit kell kimutatnunk, hogy

$$|\lambda_1 - \lambda_2| \cdot |\omega| \leqq 6\pi b_k^{-10}. \tag{14. 15}$$

Ez pedig belátható, mivel R' definíciója értelmében $\lambda_1, \lambda_2 \in R'$-ből következik, hogy

$$|n - \lambda_1[\omega]| < b_k^{-10} \quad \text{és} \quad |n - \lambda_2[\omega]| < b_k^{-10},$$

azaz

$$|\lambda_1[\omega] - \lambda_2[\omega]| = \left| \left[\frac{\lambda_1 |\omega|}{2\pi} \right] - \left[\frac{\lambda_2 |\omega|}{2\pi} \right] \right| \leqq 2b_k^{-10},$$

tehát

$$|\lambda_1 - \lambda_2| \, |\omega| \leqq 2\pi (2b_k^{-10} + 2) \leqq 6\pi b_k^{-10},$$

mivel $b_k = 2^{-2^k} \leqq 1/2$ $(k \geqq 0)$. Ezzel a (14. 15)-öt és így a (14. 14)-et is igazoltuk.

A (14. 14)-et alkalmazva a $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \lambda_\omega$ helyettesítéssel, a (14. 12) a következőképpen kapható:

$$|Q_0(t, x)| \leqq \sum_{(a_\omega, \lambda_\omega) \in R'} |a_\omega| \, |e^{i(\lambda - \lambda_\omega)(t-x)} - 1| \leqq$$

$$\leqq \sum_{R'} |a_\omega| \, |\lambda_\omega - \lambda| \cdot |\omega| \frac{|t-x|}{|\omega|} \leqq \sum_{R'} |a_\omega| \frac{|t-x|}{|\omega|} b_k^{10} \leqq \frac{|t-x|}{|\omega|} b_k^8.$$

(l. (14. 14) és (13. 12)). Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Az alábbi 14. 18. lemmához szükségünk lesz a következőre: legyen Y_k^* az összes olyan intervallum egyesítési halmaza, amelyek középpontja ω egyik végpontja, hossza pedig $2b_k^3|\omega|$, ahol (n, ω) befutja a jelen paragrafus elején definiált F_k halmaz elemeit. A (14. 1) szerint

$$|Y_k^*| \leqq 16 \, b_k. \tag{14. 16}$$

Minden $\tilde{p} = (\tilde{n}, \tilde{\omega}) \in \tilde{F}_k$ párhoz rendeljünk hozzá két (n, ω^*) alakú párt, ahol $n = \tilde{n}$, $|\omega^*| = 4|\tilde{\omega}|$ és $\tilde{\omega} \subset \omega^*$. Az összes így kapott pár halmazát jelölje F_k^*. Ekkor a (14. 5) alapján

$$\sum_{(n, \omega^*) \in F_k^*} |\omega^*| \leqq K_{27} b_k^{-19},$$

ahol K_{27} konstans.

Végül bebizonyítjuk a következőt:

14. 18. LEMMA. *Legyen* $p^* = (n, \omega^*) \notin F_k^*$, $\omega^* \not\subseteq X_k^* \cup Y_k^*$ *és* ω' *fussa be* ω^* *négy* $|\omega^*|/4$ *hosszúságú részintervallumát. Tegyük fel, hogy* ω'*-nek valamely* ω_0' *választására a* $P_k(t, \omega_0')$ *polinom tartalmaz olyan* λ *kitevőt, amelyre* $|n - \lambda[\omega_0']| < b_k^{-10}$. *Akkor a* $P_k(t, \omega')$ *polinomok* ω' *négy választására megegyeznek; továbbá, ha egy* ω_1 *intervallum tartalmazza valamelyik* ω'*-t, és a megfelelő* $P_k(t, \omega')$ *polinom tartalmaz* ω_1*-re nézve primitív tagot, akkor* $\omega^* \subseteq \omega_1$.

A minta $P_k(t, \omega)$ polinomok definíciójából könnyen látható, a lemma második állításának egyszerű következménye az első állítás, amelyet azonban a későbbi hivatkozásokban mégis célszerű volt megemlítenünk.

A lemma bizonyítása. Legyen ω_1 olyan intervallum, amelyre $\omega_0' \subseteq \omega_1$ és $P_k(t, \omega_0')$ tartalmaz ω_1-re nézve primitív tagot. Mivel két ilyen tulajdonságú ω_1 intervallum közül az egyik tartalmazza a másikat*, az $\omega^* \subseteq \omega_1$ reláció bizonyításánál feltehetjük, hogy a vizsgált ω_1 intervallum a fenti tulajdonságokkal rendelkező intervallumok között minimális hosszúságú. Ekkor nyilvánvalóan

$$P_k(t, \omega_1) \equiv P_k(t, \omega_0'). \tag{14. 19}$$

Legyen $a_1 e^{i\lambda_1 t}$ a $P_k(t, \omega_0')$ polinomnak egy ω_1-re nézve primitív tagja. Ekkor F_k definíciója értelmében következik, hogy $p_1 = (\lambda_1[\omega_1], \omega_1) \in F_k$. Ezért kapjuk, hogy $|\omega_1| \geqq b_k^{-10}|\omega'|$, mivel az ellenkező irányú egyenlőtlenségből az $(\tilde{F}a)$ értelmében $(n, \omega_0') \in \tilde{F}_k$, azaz $p^* = (n, \omega^*) \in F_k^*$ következnének, szemben a feltevéssel. Ezért $\omega^* \not\subseteq Y_k^*$ alapján kapjuk, hogy $\omega^* \subset \omega_1$. Ezzel a lemma második állítását az $\omega' = \omega_0'$ esetben bebizonyítottuk. Ebből speciálisan az következik, hogy a $P_k(t, \omega_0')$-ben előforduló összes kitevő előfordul mind a négy $P_k(t, \omega')$ polinomban; ezért mind a négy $P_k(t, \omega')$ polinomban előfordul a λ kitevő is — így a fenti gondolatmenet ω_0' helyett tetszés szerinti ω'-vel is alkalmazható. Ezzel a lemmát mind a négy ω' választásra bebizonyítottuk.

15. AZ $\Omega(p^*; l)$ PARTÍCIÓ ÉS AZ $\omega^*(x)$ INTERVALLUM

$|\omega^*| = 4|\omega'|$ esetén használni fogjuk a következő jelölést:

$$n\langle\omega^*\rangle = n[\omega'] = \left[\frac{n|\omega^*|}{8\pi}\right]. \tag{15. 1}$$

$s_n(x, \omega^*)$ becslése céljából bizonyos $p^* = (n\langle\omega^*\rangle, \omega^*)$ párokhoz meg fogjuk konstruálni az ω^* intervallum egy diszjunkt intervallumokkal történő lefedését (partícióját). Ebből a célból legyen N egy elég nagy természetes szám, például egyezzék meg a (11. 7) relációban előforduló N-nel és egy tetszés szerinti l természetes számokhoz tekintsük a $p^* = (n\langle\omega^*\rangle, \omega^*)$ pároknak egy $\Omega(l)$ halmazát:

$$\Omega(l) = \{p^* : p^* \in F_{l+3}^*, C^*(p^*) < b_{l-1}, |\omega^*| > 2\pi 2^{-N+1}\}, \tag{15. 2}$$

amelyben F_k^*-ot az előző paragrafusban definiáltuk, $C^*(p^*)$ definíciójára nézve pedig l. (12. 5). Egy tetszés szerinti $p^* \in \Omega(l)$-hez az $\Omega(p^*; l)$ partíciót rekurzióval a következőképpen definiáljuk. Először definiáljuk az Ω_0 négyelemű partíciót:

$$\Omega_0 = \{\omega' : \omega' \subset \omega^*, 4|\omega'| = |\omega^*|\}. \tag{A1}$$

* Két nem diszjunkt $\omega_{j\nu}$ és $\omega_{j'\nu'}$ intervallum közül az egyik nyilvánvalóan mindig része a másiknak.

Ha valamilyen $k \geqq 0$-ra az Ω_k partíciót már definiáltuk, legyen ω_{jv} balról az első olyan Ω_k-hoz tartozó $2\pi 2^{-v} \geqq 2\pi 2^{-N+1}$ (azaz $v \leqq N-1$) hosszúságú intervallum, amelyre, ha $\omega_{l'v+1}, \omega_{l'+1,v+1} \subset \omega_{jv}$, akkor a

$$C(n[\omega], \omega) < b_{l-1}$$

feltétel teljesül $\omega = \omega_{l'v+1}$ és $\omega = \omega_{l'+1,v+1}$ esetén. Ha ilyen ω_{jv} létezik, akkor (A2) tartalmazza az Ω_{k+1} partíció ω_{jv} helyett az $\omega_{l'v+1}$ és $\omega_{l'+1,v+1}$ intervallumokat, egyébként pedig legyen azonos Ω_k-val. (Azaz Ω_{k+1} úgy jön létre Ω_k-ból, hogy benne az ω_{jv} intervallumot felosztjuk két egyenlő részre).

Ha ilyen ω_{jv} nem létezik, eljárásunk véget ér és legyen

(A3) $$\Omega(p^*; l) = \Omega_k.$$

Nyilvánvaló, hogy a fenti eljárás véges lépésben befejeződik, mivel Ω_k nem tartalmazhat $2\pi 2^{-N}$-nél rövidebb intervallumokat. Ezért definíciónk korrekt. A fentiekből könnyen látható, hogy

(15. 3) $$C(n[\omega], \omega) < l_{l-1} \quad \text{minden} \quad \omega \in \Omega(p^*; l)\text{-re.}$$

Most tegyük fel, hogy x az ω^* intervallum középső feléhez tartozik. Az $\Omega(p^*; l)$ partíció felhasználásával definiálni fogjuk az $\omega^*(x)$ intervallumot. Ebből a célból tekintsük ω^*-nak azokat a részintervallumait, amelyek előállíthatók $\omega_{j-1,v} \cup \omega_{jv}$ vagy $\omega_{jv} \cup \omega_{j+1,v}$ alakban, ahol $\omega_{jv} \in \Omega(p^*; l)$. Ezek közül az intervallumok közül válasszuk ki azon intervallumokat, amelyek x-et a középső felükben tartalmazzák — végül pedig definiáljuk úgy az (x-től és $\Omega(p^*; l)$-től függő) $\omega^*(x)$ intervallumot, mint az (egyik) maximális hosszúságú ilyen intervallumot. A későbbi hivatkozásokhoz felsoroljuk az $\omega^*(x)$ intervallum néhány egyszerű tulajdonságát:

(B1) *x az $\omega^*(x)$ középső feléhez tartozik.*

(B2) *$\omega^*(x)$ előáll $\Omega(p^*; l)$-hez tartozó intervallumok egyesítéseként.* (Ez következik $|\omega^*(x)|$ maximalitásából.)

(B3) *$\omega^* - \omega^*(x)$ előállítható bizonyos $\Omega(p^*; l)$-beli intervallumok egyesítéseként. Minden ilyen σ intervallumra σ-nak x-től való távolsága $\geqq |\sigma|/2$.*

(B4) *Ha $|\omega^*(x)| > 2\pi 2^{-N+1}$, akkor*

$$C^*(n\langle\omega^*(x)\rangle, \omega^*(x)) \geqq b_{l-1}.$$

16. A KIVÉTELES HALMAZ

Legyen S az összes olyan ω intervallum egyesítése, amelyre

$$\int_{\omega} |f(t)|^2 \, dt > \varepsilon |\omega|.$$

Vegyük hozzá minden $\omega \subseteq S$ intervallumhoz három bal-, és három jobb oldali vele azonos hosszúságú szomszédját, és legyen az így kapott intervallumok egyesítése S^*. Könnyen látható, hogy

(16. 1) $$|S^*| \leqq 28\varepsilon.$$

Legyen $p^* = (n\langle\omega^*\rangle, \omega^*)$ egy tetszés szerinti pár, amelyre $\omega^* \nsubseteq S^*$. Ekkor ha a

11. 1. lemmában definiált ε elég kicsi, van olyan $L = L(\varepsilon)$, csak ε-tól függő mennyiség, hogy

$$C^*(p^*) < b_L, \quad \text{és} \quad \lim_{\varepsilon \to +0} L(\varepsilon) = \infty. \tag{16. 2}$$

Most pedig vázoljuk a (12. 1)-ben definiált $s_{n_0}(x, \omega_0^*)$ becslésénél követett utat, ahol n_0 tetszés szerinti egész, ω_0^* pedig x-et a középső felében tartalmazó intervallum. Amint a későbbi 18. 39. segédtételben látni fogjuk, a (16. 2) alapján található olyan, valamilyen $l > L$-re $\Omega(l)$-hez (l. (15. 2)) tartozó $p^* = (n\langle\omega^*\rangle, \omega^*)$ pár, hogy x az ω^* középső feléhez tartozik és az

$$||s_n(x, \omega_0^*)| - |s_{n_0}(x, \omega_0^*)||$$

kifejezés értéke „kicsi", továbbá a $p^* \in \Omega(l)$ reláció értelmében definiált $\Omega(p^*, l)$ partícióra és a $\omega^*(x)$ intervallumra teljesül

(16. 3) $\omega^*(x) \subset \omega_0^* \subseteq \omega^*$ és az $\omega_0^* - \omega^*(x)$ különbség előáll $\Omega(p^*, l)$-hez tartozó intervallumok egyesítéseként;

végül kiköthető az is, hogy $\dfrac{n|\omega^*|}{8\pi}$ egész. Ennek jelentősége abban áll, hogy ezáltal a $p^* = (n\langle\omega^*,\rangle\, \omega^*)$ pár egyértelműen meghatározza n-et; ugyanis ekkor $n = \dfrac{8\pi}{|\omega^*|} n\langle\omega^*\rangle$.

Az előző bekezdés alapján $s_{n_0}(x, \omega_0^*)$ helyett elegendő $s_n(x, \omega_0^*)$-at becsülnünk. Ebből a célból legyen

$$E_{p^*}(t) = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} f(\alpha) e^{-in\alpha}\, d\alpha, \quad t \in \omega \in \Omega(p^*; l). \tag{16. 4}$$

A 10. 11. korollárium és a 15. 3. szerint

$$|E_{p^*}(t)| \leqq K_{22} b_{l-1}. \tag{16. 5}$$

Most írjuk $s_n(x, \omega_n^*)$-at a következő alakba:

$$s_n(x, \omega_0^*) = s_n(x, \omega^*(x)) + \int_{\omega_0^* - \omega^*(x)} \frac{E_{p^*}(t)}{x - t}\, dt + \tag{16. 6}$$

$$+ \int_{\omega_0^* - \omega^*(x)} \frac{e^{-int} f(t) - E_{p^*}(t)}{x - t}\, dt = s_n(x, \omega^*(x)) + \tilde{H}(x) + \tilde{R}(x).$$

Itt az első tag becsléséhez a most alkalmazott eljárást fogjuk megismételni. A második tagot becsülendő jelöljön σ_x olyan intervallumokat, amelyek x-et a középső felükben tartalmazzák és legyen

$$H_{p^*}(x) = \sup_{\sigma_x \subseteq \omega^*} \left| \int_{\omega^* - \sigma_x} \frac{E_{p^*}(t)}{x - t}\, dt \right|. \tag{16. 7}$$

Ekkor nyilvánvaló, hogy $|\tilde{H}(x)| \leqq 2H_{p^*}(x)$. Ha most

$$T^*(p^*) = \{x \in \omega^*;\, H_{p^*}(x) > 4\pi K_{22} b_{l-1}^{\frac{1}{2}}\}, \tag{16. 8}$$

akkor a (16. 5) és a 8. 4 (ii) tétel alkalmazásával a $T^*(p^*)$ halmaz mértékére kapjuk:

$$|T^*(p^*)| \leqq K_{14}|\omega^*| \exp(-b_{l-1}^{-\frac{1}{2}}). \tag{16. 9}$$

$x \notin T^*(p^*)$ esetén nyilvánvalóan teljesül a

$$|\tilde{H}(x)| \leqq 8\pi K_{22} b_{l-1}^{\frac{1}{2}} \tag{16. 10}$$

egyenlőtlenség.

$\tilde{R}(x)$ becsléséhez legyen $\{\sigma_k\} = \Omega(p^*; l)$ és legyen a σ_k intervallumok középpontja t_k, hossza pedig δ_k. Mivel az $E_{p^*}(t)$-re a (16. 4)-ben adott definíció szerint minden σ_k esetén

$$\int_{\sigma_k} (e^{-int} f(t) - E_{p^*}(t))\, dt = 0,$$

a (16. 3) szerint kapjuk, hogy

$$\tilde{R}(x) = \sum_{\sigma_k \subseteq \omega_0^* - \omega^*(x)} \int_{\sigma_k} (f(t)e^{-int} - E_{p^*}(t)) \left(\frac{1}{x-t} - \frac{1}{x-t_k} \right) dt = \tag{16. 11}$$

$$= \sum_{\sigma_k \subseteq \omega_0^* - \omega^*(x)} \int_{\sigma_k} \frac{(t-t_k)e^{-int} f(t)}{(x-t)(x-t_k)}\, dt - \sum_{\sigma_k \subseteq \omega_0^* - \omega^*(x)} \int_{\sigma_k} \frac{(t-t_k) E_{p^*}(t)}{(x-t)(x-t_k)}\, dt =$$

$$= \tilde{R}_1(x) - \tilde{R}_2(x).$$

Ha $t \in \sigma_k \subseteq \omega^* - \omega^*(x)$, akkor az előző paragrafus végén levő (B3) szerint

$$\left| \frac{t-t_k}{(x-t)(x-t_k)} \right| \leqq K_{27} \frac{\delta_k}{(x-t_k)^2 + \delta_k^2}, \tag{16. 12}$$

egy alkalmas K_{27} konstanssal. Így a (16. 5) szerint

$$|\tilde{R}_2(x)| < K_{28} b_{l-1} \Delta_{p^*}(x), \tag{16. 13}$$

ahol K_{28} konstans, továbbá

$$\Delta_{p^*}(x) = \sum_k \frac{\delta_k^2}{(x-t_k)^2 + \delta_k^2}, \tag{16. 14}$$

$\tilde{R}_1(x)$-et becsülendő írjuk:

$$\tilde{R}_1(x) = \sum_{\sigma_k \subseteq \omega_0^* - \omega^*(x)} \int_{\sigma_k} f(t)\varphi(t) \exp\left(-\frac{2\pi}{\delta_k} n[\sigma_k] it \right) dt, \tag{16. 15}$$

ahol, $t \in \sigma_k$ esetén

$$\varphi(t) = e^{-i\beta t} \frac{t-t_k}{(x-t)(x-t_k)}; \tag{16. 16}$$

itt β a

$$\beta = n - \frac{2\pi}{\delta_k} n[\sigma_k] = n - \frac{2\pi}{\delta_k} \left[\frac{n\delta_k}{2\pi} \right]$$

egyenlőség által van definiálva. Nyilvánvaló, hogy $0 \leqq \beta < \frac{2\pi}{\delta_k}$, ezért, tekintetbe véve, hogy

$$\varphi''(t) = -\beta^2 e^{-i\beta t} \frac{t-t_k}{(x-t)(x-t_k)} - 2i\beta e^{-i\beta t} \frac{1}{(x-t)^2} + 2e^{-i\beta t} \frac{1}{(x-t)^3},$$

az előző paragrafus végén levő (B3) alapján kapjuk, hogy $t \in \sigma_k \subseteq \omega^* - \omega^*(x)$ esetén valamilyen K_{29} konstanssal teljesül a

$$\delta_k^2 |\varphi''(t)| \leqq K_{29} \frac{\delta_k}{(x-t_k)^2 + \delta_k^2}$$

egyenlőtlenség. Ebből és a (16. 12)-ből következik, hogy

$$\max_{t \in \sigma_k} |\varphi(t)| + \delta_k^2 \max_{t \in \sigma_k} |\varphi''(t)| \leqq (K_{27} + K_{29}) \frac{\delta_k}{(x-t_k)^2 + \delta_k^2}.$$

Ezért a 10. 4. lemma szerint a σ_k intervallumban $\varphi(t)$ előállítható egy

$$\varphi(t) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \gamma_\mu \exp\left(-\frac{2\pi\mu i t}{3\delta_k}\right)$$

egyenletesen konvergens sorral, ahol

$$|\gamma_\mu| \leqq \frac{K_{30}}{1+\mu^2} \frac{\delta_k}{(x-t_k)^2 + \delta_k^2}$$

(K_{30} konstans). Ezért, visszatérve a (16. 15) formulához, kapjuk:

$$|\tilde{R}_1(x)| = \left| \sum_{\sigma_k \subseteq \omega_0^* - \omega^*(x)} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \int_{\sigma_k} \gamma_\mu f(t) \exp\left(-\frac{2\pi i t}{\delta_k}\left(n[\sigma_k] + \mu/3\right)\right) dt \right| \leqq$$

$$\leqq \sum_k \frac{K_{30}\delta_k^2}{(x-t_k)^2 + \delta_k^2} C(n[\sigma_k], \sigma_k).$$

Így a (15. 3) és a (16. 14) szerint

$$|\tilde{R}_1(x)| \leqq K_{30} b_{l-1} \Delta_{p^*}(x).$$

Összevetve ezt az $\tilde{R}_2(x)$-re kapott (16. 13) alatti becsléssel adódik

$$|\tilde{R}(x)| \leqq |\tilde{R}_1(x) + \tilde{R}_2(x)| \leqq K_{31} b_{l-1} \Delta_{p^*}(x), \tag{16. 17}$$

ahol $K_{31} = K_{28} + K_{30}$.

Most a 9. 1. tétel segítségével becsülhetjük az

$$U^*(p^*) = \{x \in \omega^*; \Delta_{p^*}(x) > b_{l-1}^{-\frac{1}{2}}/K_{16}\} \tag{16. 18}$$

halmaz mértékét. (Megjegyzendő, hogy itt a K_{16} konstans pozitív.) Kapjuk:

$$|U^*(p^*)| \leqq K_{15} |\omega^*| \exp(-b_{l-1}^{-\frac{1}{2}}). \tag{16. 19}$$

Ha $x \notin U^*(p^*)$, akkor a (16. 17) alapján kapjuk az

$$|\tilde{R}(x)| \leqq K_{32} b_{l-1}^{\frac{1}{2}} \tag{16. 20}$$

becslést, ahol K_{32} konstans.

Amint már említettük, az n-re szabott azon kikötés alapján, hogy $\frac{n|\omega^*|}{8\pi}$ egész, a $p^* = (n\langle\omega^*\rangle, \omega^*)$ pár egyértelműen meghatározza n-et. Így adott $f(t)$ függvény esetén p^* egyértelműen definiálja a $T^*(p^*)$ és az $U^*(p^*)$ halmazt. Jelölje $\Omega(l)$ a (15. 2) által definiált halmazt, L pedig a (16. 2)-ben megadott természetes számot és legyen

$$T^* = \bigcup_{l=L}^{\infty} \bigcup_{p^* \in \Omega(l)} T^*(p^*), \quad U^* = \bigcup_{l=L}^{\infty} \bigcup_{p^* \in \Omega(l)} U^*(p^*). \tag{16. 21}$$

Mivel, mint $\Omega(l)$-nek a (15. 2)-ben adott definíciója alapján látható, $\Omega(l) \subseteq F^*_{l+3}$, a (14. 17), (16. 9) és a (16. 19) alapján kapjuk, hogy

$$|T^* \cup U^*| \leqq K_{33} \sum_{l=L}^{\infty} b_{l+3}^{-19} \exp(-b_{l-1}^{-\frac{1}{2}}). \tag{16. 22}$$

Hasonlóan, a 13., ill. 14. §-ban definiált X_l^* és Y_l^* halmazokra legyen

$$X^* = \bigcup_{l=L}^{\infty} X_l^*, \quad Y^* = \bigcup_{l=L}^{\infty} Y_l^*. \tag{16. 23}$$

A (13. 10) és a (14. 16) alapján látjuk, hogy

$$|X^* \cup Y^*| \leqq 44 \sum_{l=L}^{\infty} b_l. \tag{16. 24}$$

Ha most σ_x olyan intervallumokat jelöl, amelyek x-et a középső felükben tartalmazzák, a V halmazt a következőképpen definiáljuk:

$$V = \left\{ x: \sup_{\sigma_x \subseteq [-4\pi, 4\pi]} \left| \int_{[-4\pi, 4\pi] - \sigma_x} \frac{f(t)}{x - t} dt \right| > \sqrt{\varepsilon} \right\}. \tag{16. 25}$$

A 8. 4. (i) tétel szerint

$$|V| \leqq 4K_{13}\varepsilon. \tag{16. 26}$$

Végül jelölje Z az összes ω-intervallum végpontjainak halmazát. Mivel csak megszámlálható sok ω intervallum van, a Z halmaz megszámlálható, tehát 0 mértékű. Most pedig definiáljuk a kivételes halmazt a következőképpen:

$$E = S^* \cup T^* \cup U^* \cup V \cup X^* \cup Y^* \cup Z. \tag{16. 27}$$

Mivel $\varepsilon \to 0$ esetén $L = L(\varepsilon) \to \infty$ (l. (16. 2)), figyelembe véve, hogy $b_k = 2^{-2^k}$, kapjuk, hogy

$$|E| \leqq M(\varepsilon) \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0) \tag{16. 28}$$

(l. (16. 1), (16. 22), (16. 24) és (16. 26)); azaz a kivételes halmaz mértéke $\varepsilon \to 0$ esetén 0-hoz tart.

17. NÉHÁNY LEMMA

A következő paragrafus célja, hogy a már vázolt úton előkészítsük $s_n(x)$ becsülését — ehhez azonban szükségünk lesz néhány, a jelen paragrafusban tárgyalt lemmára. Elsőként bebizonyítjuk a következőt:

17. 1. LEMMA. *Legyen σ egy tetszés szerinti intervallum, amely x-et a középső elében tartalmazza. Ekkor egy tetszés szerinti $\lambda \neq 0$ valós szám esetén teljesül, hogy*

$$\left| \int_{\sigma} \frac{e^{-i\lambda t}}{x-t}\, dt - \pi i e^{-i\lambda x} \operatorname{sign} \lambda \right| \leqq \frac{8\pi}{|\lambda| \cdot |\sigma|}, \tag{17. 2}$$

ahol a bal oldalon az improprius integrál főértéke veendő.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $x = 0$ és legyen $\sigma = (-a, b)$. Mivel x a σ intervallum középső feléhez tartozik, fennáll a

$$|a|, |b| \geqq |\sigma|/4 \tag{17. 3}$$

egyenlőtlenség. Új változók bevezetésével látható, hogy

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\lambda t}}{t}\, dt = \operatorname{sign} \lambda \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}}{t}\, dt = -\operatorname{sign} \lambda \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-it}}{t}\, dt,$$

azaz véve a két utolsó tag számtani közepét, kapjuk:

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\lambda t}}{t}\, dt = i \operatorname{sign} \lambda \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \pi i \operatorname{sign} \lambda,$$

ahol a második egyenlőség közismert. Ezért a (17. 2) bal oldala a következőképpen írható:

$$\left| \left(\int_{-\infty}^{-a} + \int_{b}^{\infty} \right) \frac{e^{-i\lambda t}}{t}\, dt \right|. \tag{17. 4}$$

Itt például a második integrál a következőképpen becsülhető:

$$\left| \int_{b}^{\infty} \frac{e^{-i\lambda t}}{t}\, dt \right| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \int_{b+2k\pi/|\lambda|}^{b+(2k+2)\pi/|\lambda|} \frac{e^{-i\lambda t}}{t}\, dt \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \int_{b+2k\pi/|\lambda|}^{b+(2k+1)\pi/|\lambda|} e^{-i\lambda t} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+\pi/|\lambda|} \right) dt \right| \leqq \int_{b}^{\infty} \frac{\pi}{|\lambda|} \cdot \frac{dt}{t^2} = \frac{\pi}{b \cdot |\lambda|} \leqq \frac{4\pi}{|\sigma| \cdot |\lambda|}$$

(l. (17. 3)). Mivel a (17. 4)-ben levő első integrálra analóg becslés kapható, a lemma bizonyítása teljes.

17. 5. LEMMA. *Ha az m és n egészek, valamint az ω^* intervallum kielégítik az*

$$|m\langle\omega^*\rangle - n\langle\omega^*\rangle| \leqq 1 \tag{17. 6}$$

egyenlőtlenséget, akkor egy alkalmas K_{34} konstanssal teljesül, hogy

$$|e^{imx} s_m(x, \omega^*) - e^{inx} s_n(x, \omega^*)| \leqq K_{34} C^*(n\langle\omega^*\rangle, \omega^*). \tag{17. 7}$$

Bizonyítás. Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy n „egész az ω^* intervallumra nézve", azaz hogy $\frac{n|\omega^*|}{8\pi}$ egész, mivel az általános eset következik ennek a specializált eredménynek kétszeri alkalmazásával. A továbbiakban kizárjuk a triviális $m = n$ esetet is.

Az n választására tett megszorítás szerint

$$n\langle\omega^*\rangle = \left[\frac{n|\omega^*|}{8\pi}\right] = \frac{n|\omega^*|}{8\pi}. \tag{17.8}$$

Most pedig a (17. 7) bal oldalán az abszolút érték jelek közötti kifejezést írjuk a következő alakba:

$$e^{inx}\sum_{\omega'} I(\omega') = e^{inx}\sum_{\omega'}\int_{\omega'} e^{-int}\frac{e^{i(m-n)(x-t)}-1}{x-t} f(t)\,dt, \tag{17.9}$$

ahol ω' befutja ω^*-nak a négy $|\omega^*|/4$ hosszúságú részintervallumát (azaz $4|\omega'| = |\omega^*|$). Legyen

$$\varphi(t) = \frac{e^{i(m-n)(x-t)}-1}{x-t}. \tag{17.10}$$

Az $m \neq n$ feltevés értelmében $\varphi(t)$-t a következő alakba írhatjuk:

$$\varphi(t) = \frac{i(m-n)}{x-t}\int_0^{x-t} e^{i(m-n)\tau}\,d\tau = i(m-n)\int_0^1 e^{i(m-n)(x-t)s}\,ds. \tag{17.11}$$

Differenciálással kapjuk:

$$\varphi''(t) = -i(m-n)^3\int_0^1 s^2 e^{i(m-n)(x-t)s}\,ds. \tag{17.12}$$

Mivel a (17. 6) és a (17. 8), valamint a $4|\omega'| = |\omega^*|$ reláció szerint

$$|m-n| \leqq \frac{2\pi}{|\omega'|},$$

a (17. 11) és a (17. 12)-ből kapjuk a

$$\max_{-\infty<t<\infty}|\varphi(t)| + |\omega'|^2 \max_{-\infty<t<\infty}|\varphi''(t)| \leqq \frac{2\pi + 8\pi^3}{|\omega'|}$$

egyenlőtlenséget. Így a 10. 4. lemma szerint $\varphi(t)$ előállítható a

$$\varphi(t) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\gamma_\mu \exp\left(-\frac{2\pi\mu i t}{3|\omega'|}\right)$$

sorral, ahol

$$|\gamma_\mu| \leqq \frac{K_{35}}{1+\mu^2}\cdot\frac{1}{|\omega'|}$$

(K_{35} konstans). Ezért, tekintve, hogy a (17. 8) szerint $n[\omega'] = \frac{n|\omega'|}{2\pi}$, a (17. 9) és a (17. 10) alapján kapjuk:

$$|I(\omega')| = \left|\int_{\omega'} e^{-int}\varphi(t)f(t)\,dt\right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\frac{K_{35}}{1+\mu^2}\cdot\frac{1}{|\omega'|}\left|\int_{\omega'} f(t)\exp\left(-\frac{2\pi i t}{|\omega'|}(n[\omega'] + \mu/3)\right)dt\right| = K_{35}C(n[\omega'], \omega').$$

Mivel $n[\omega'] = n\langle\omega^*\rangle$, a most kapott egyenlőtlenségeket ω' négy választására összeadva, a $C_n^*(\omega^*)$ számok (12. 5) definícióját figyelembe véve, kapjuk a lemma állítását.

Jelen paragrafus utolsó eredménye a

17. 13. LEMMA. *Tegyük fel, hogy az ω intervallumon értelmezett g függvény egy adott G valós számra kielégíti a*

$$\int_\omega |g(t)|^2\,dt \leqq G^2|\omega| \tag{17. 14}$$

egyenlőtlenséget és tegyük fel, hogy valamilyen η-val minden k egész szám esetén teljesül:

$$|c_k(\omega; g)| \leqq \eta. \tag{17. 15}$$

Akkor minden n egészre és minden $M \geqq 2$ valós számra teljesül:

$$C_n(\omega; g) \leqq K_{36}(\eta \log M + G/\sqrt{M}), \tag{17. 16}$$

ahol K_{36} abszolút konstans.

Bizonyítás. Nyilvánvalóan elegendő csak az $\omega = (0, 2\pi)$ esetet tekintenünk. Egy tetszés szerinti α valós számra legyen

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ikt}$$

az $e^{i\alpha t}$ függvény Fourier sora a $(0, 2\pi)$ intervallumon. Ekkor

$$|\alpha_k| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} e^{i(\alpha-k)t}\,dt\right| \leqq \min\left(1, \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{|\alpha-k|}\right), \tag{17. 17}$$

továbbá a *Parseval* formula (10. 13) alakja szerint

$$c_\alpha = c_\alpha(\omega; g) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \bar{\alpha}_k = \left(\sum_{|\alpha-k|\leqq M} + \sum_{|\alpha-k|>M}\right) c_k\bar{\alpha}_k,$$

ahol $c_k = c_k(\omega; g)$. Ezért a (17. 15), a (17. 17) és a *Schwarz* egyenlőtlenség felhasználásával kapjuk, hogy

$$|c_\alpha(\omega)| \leqq K_{37}\left(\eta\sum_{k=1}^{M}\frac{1}{k} + \left(\sum_{-\infty}^{\infty}|c_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{M+1}^{\infty}k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\right),$$

ahol K_{37} konstans. Itt a (17. 14)-ből a *Parseval* formula felhasználásával kapjuk:

$$\sum_{-\infty}^{\infty}|c_k|^2 \leqq G^2;$$

így valamilyen K_{38} konstanssal:

$$|c_\alpha(\omega)| \leqq K_{38}(\eta \log M + G/\sqrt{M}).$$

Innen $C_n(\omega)$ definíciója (l. (10. 2)) szerint

$$C_n(\omega) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty}|c_{n+\mu/3}(\omega)|\frac{1}{1+\mu^2} \leqq K_{38}\left(\eta\log M + \frac{G}{\sqrt{M}}\right)\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+\mu^2},$$

ami bizonyítja a kívánt állítást.

A következő célunk a 16. § elején $s_n(x, \omega^*)$ becslésére adott program keresztülvitele. Az (n_0, ω_0^*) párból fogunk kiindulni, amelynek a választását az első két segédtételben korlátozni fogjuk, ugyanis feltesszük, hogy valamilyen l természetes számmal teljesül, hogy $(n_0\langle\omega_0^*\rangle, \omega_0^*) \notin F_{l+3}^*$, ahol az F_k^* halmazt a 14. §-ban definiáltuk. Az általános esettel a harmadik segédtételben fogunk foglalkozni, amelyben összefoglaljuk az előző segédtételek állításait is.

A következőkben feltesszük, hogy x nem eleme a 16. §-ban definiált E kivételes halmaznak és az ω_0^* intervallum középső feléhez tartozik (következésképpen $\omega_0^* \not\subseteq E$ is teljesül); ezenkívül a 11. 1. lemmában definiált ε-ról feltesszük, hogy elegendően kicsi. Ezek a feltevések hozzáteendők a segédtételek feltevéseihez, kivéve az utolsó segédtételt, ahol a későbbi hivatkozások céljából a feltevések teljes listáját közöljük.

18. 1. SEGÉDTÉTEL. *Tegyük fel, hogy*

$$p_0^* = (n_0\langle\omega_0^*\rangle, \omega_0^*) \notin F_{l+3}^*, \tag{18. 2}$$

ahol l-t a következőképpen definiáljuk:

$$b_{l-1} > C^*(p_0^*) \geqq b_l \quad \text{(úgy, hogy } l > L(\varepsilon)\text{; l. (16. 2))}. \tag{18. 3}$$

Akkor létezik olyan (n_1, ω_1^*) *pár,* $\omega_0^* \subseteq \omega_1^*$, *hogy x az* ω_1^* *intervallum középső felé-hez tartozik, továbbá*

$$|n_1\langle\omega_0^*\rangle - n_0\langle\omega_0^*\rangle| \leqq 1/b_l, \tag{18. 4}$$

$$p_1^* = (n_1\langle\omega_1^*\rangle, \omega_1^*) \in F_{l-3}^*; \tag{18. 5}$$

továbbá, bevezetve a $p_{10}^* = (n_1\langle\omega_0^*\rangle, \omega_0^*)$ *jelölést,*

$$||s_{n_1}(x, \omega_0^*)| - |s_n(x, \omega_0^*)|| \leqq K_{39}(C^*(p_{10}^*) + b_l), \tag{18. 6}$$

valahányszor n kielégíti az

$$|n_1\langle\omega_0^*\rangle - n\langle\omega_0^*\rangle| < b_l^{-3/2} \tag{18. 7}$$

egyenlőtlenséget, és így speciálisan az $n = n_0$ *esetben is (*K_{39} *konstans).*

Bizonyítás. Legyen ω' egy tetszés szerinti részintervalluma ω_0^*-nak, amelyre $|\omega_0^*| = 4|\omega'|$. A $P = P_{l+3}(t, \omega')$ polinomoknak a 13. §-ban adott definíciója szerint minden k egész számra

$$|c_k(\omega'; f - P)| < b_{l+3}. \tag{18. 8}$$

Mivel $x \in \omega^*$ és $x \notin E$, azért speciálisan $\omega' \not\subseteq S \cup X_{l+3}$; így S-nek a 16. § elején adott definíciója szerint

$$\int_{\omega'} |f|^2 \leqq \varepsilon |\omega'|,$$

továbbá a 13. 11. lemma alapján

$$|P(t)| \leqq b_{l+3}^{-2},$$

azaz, ha ε elegendően kicsi, kapjuk, hogy

$$\int_{\omega'} |f - P|^2 \leqq 2b_{l+3}^{-4} |\omega'|.$$

Ezért, még figyelembe véve a 18. 8-at, alkalmazhatjuk a 17. 13. lemmát a

$$G = \sqrt{2}b_{l+3}^{-2}, \quad \eta = b_{l+3}, \quad M = b_{l+3}^{-6}$$

helyettesítéssel. Azt kapjuk, hogy minden n egész szám esetén

$$C_n(\omega'; f-P) \leqq K_{36}(b_{l+3}\log b_{l+3}^{-6} + 2b_{l+3}) \leqq b_{l+2}, \tag{18.9}$$

ahol a második egyenlőtlenség minden elegendően nagy l esetén teljesül — $l > L(\varepsilon)$ miatt ez a feltétel kielégül, ha ε elég kicsi (l. (16. 2)). Speciálisan, ha $n = n_0[\omega'] = n_0\langle\omega^*\rangle$ és ω_0' jelöli ω'-nek azt a választását, amelyre $C_n(\omega'; f) = C_n^*(\omega_0^*; f)$ teljesül, akkor a (18. 3) figyelembevételével adódik

$$C_n(\omega_0'; P_0) \geqq C_n(\omega_0'; f) - C_n(\omega_0'; f-P_0) \geqq b_l - b_{l+2}, \tag{18.10}$$

ahol $P_0 = P_{l+3}(t, \omega_0')$.

Most, hogy felső becslést kapjunk $C_n(\omega_0'; P_0)$-ra, ahol ismét $n = n_0[\omega_0']$, $k = l+3$-mal, alkalmazhatjuk a 14. 6. lemmát az (n, ω_0') párra. Itt a lemma feltételei ki vannak elégítve, ugyanis $(n, \omega_0') \notin \tilde{F}_{l+3}$ következik a (18. 2)-ből, továbbá $\omega_0' \not\subseteq X_{l+3}$, mivel $x \in \omega_0^*$, ahol x nem tartozik hozzá az E kivételes halmazhoz, azaz speciálisan $x \notin X_{l+3}^*$. Azt kapjuk, hogy

$$P_0(t) = \varrho e^{i\lambda t} + Q_0(t, x) + Q_1(t), \tag{18.11}$$

ahol

$$Q_1(t) = \sum_{(a', \lambda') \in R''} a' e^{i\lambda' t}, \tag{18.12}$$

és teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

$$\sum_{(a', \lambda') \in R''}{}' |a'| \leqq b_{l+3}^{-2}, \tag{18.13}$$

$$|n_0[\omega_0'] - \lambda'[\omega_0']| \geqq b_{l+3}^{-10} \quad \text{ha} \quad (a', \lambda') \in R'', \tag{18.14}$$

$$|Q_0(t, x)| \leqq \frac{|t-x|}{|\omega_0'|} b_{l+3}^8, \tag{18.15}$$

$$|\varrho| \leqq b_{l+3}^{-2}. \tag{18.16}$$

Így nem nehéz kimutatni, hogy $(n = n_0[\omega_0'])$

$$|C_n(\omega_0'; P_0) - C_n(\omega_0'; \varrho e^{i\lambda t})| \leqq C_n(\omega_0'; Q_0) + C_n(\omega_0'; Q_1) = O(b_{l+3}^8). \tag{18.17}$$

Valóban, figyelembe véve, hogy $x \in \omega_0^*$, $C_n(\omega_0', Q_0)$ a (18. 15) alapján egyszerűen becsülhető. A második tag becsléséhez kiírjuk a $C_n(\omega)$ számok (10. 2)-ben adott definíciós formuláját:

$$C_n(\omega_0'; Q_1) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\mu^2} \frac{1}{|\omega_0'|} \left| \int_{\omega_0'} Q_1(t) \exp\left(-\frac{2\pi i t}{|\omega_0'|}(n+\mu/3)\right) dt \right|.$$

Itt a jobb oldali összeget szétvágjuk három részre:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} = \sum_{-\infty}^{-b_{l+3}^{-10}-1} + \sum_{-b_{l+3}^{-10}}^{b_{l+3}^{-10}} + \sum_{b_{l+3}^{-10}+1}^{\infty}.$$

A szélső tagok becsülhetők a $|Q_1(t)| \leqq b_{l+3}^{-2}$ egyenlőtlenség segítségével, ami a (18. 12)-ből és a (18. 13)-ból következik; a középső összeg becslése pedig könnyen elvégezhető a (18. 12), a (18. 13) és a (18. 14) alapján, ha figyelembe vesszük a triviális

$$\left| \int_{\omega_0} e^{i\alpha t}\, dt \right| \leqq \min\left(|\omega_0'|, 2/|\alpha|\right) \tag{18. 18}$$

egyenlőtlenséget (α tetszés szerinti valós).

Szintén a (18. 18) alapján kapható, hogy

$$C_n(\omega_0'; \varrho e^{i\lambda t}) \leqq \frac{K_{40}|\varrho|}{|\omega_0'|} \min\left(|\omega_0'| \frac{1}{|\lambda - 2\pi n/|\omega_0'||}\right) \leqq \frac{K_{41}|\varrho|}{|\lambda[\omega_0'] - n_0[\omega_0']|} \qquad (n = n_0[\omega_0']),$$

ahol K_{40} és K_{41} konstans. Így a (18. 17) alapján:

$$C_n(\omega_0'; P_0) \leqq \frac{K_{41}|\varrho|}{|\lambda[\omega_0'] - n_0[\omega_0']|} + O(b_{l+3}^8).$$

Ezt a (18. 10)-zel összehasonlítva kapjuk, hogy

$$b_l \leqq \frac{K_{42}|\varrho|}{|\lambda[\omega_0'] - n_0[\omega_0']|}, \tag{18. 19}$$

amennyiben $l \geqq L(\varepsilon)$ elég nagy, azaz, ha ε elég kicsi.

A (18. 16) és a (18. 19) segítségével kapjuk, hogy

$$|\lambda[\omega_0'] - n_0[\omega_0']| \leqq K_{42} b_{l+3}^{-2} b_l^{-1} < b_{l+3}^{-3}. \tag{18. 20}$$

(Ez utóbbi egyenlőtlenség csak nagy l-ekre igaz). Ezért a (18. 14) alapján

$$|\lambda[\omega_0'] - \lambda'[\omega_0']| \geqq \frac{1}{2} b_{l+3}^{-10}, \tag{18. 21}$$

valahányszor létezik olyan a', amelyre $(a', \lambda') \in R''$. Így hasonlóan a (18. 17) levezetéséhez, azonban a (18. 14) helyett a (18. 21)-et alkalmazva, kapjuk:

$$C_{\lambda[\omega_0']}(\omega_0'; P_0) = C_{\lambda[\omega_0']}(\omega_0'; \varrho e^{i\lambda t}) + O(b_{l+3}^8) \geqq K_{43}|\varrho| + O(b_{l+3}^8); \tag{18. 22}$$

itt a második egyenlőtlenség közvetlen számolással igazolható (K_{43} pozitív abszolút konstans, pl. vehető $K_{43} = 3/5$). Legyen mostmár $n_1 = \lambda$ és $p_{10}^* = (n_1 \langle \omega_0^* \rangle, \omega_0^*)$. Alkalmazva a (18. 9)-et az $n = n_1$ és $\omega' = \omega_0'$ esetre, a (18. 22) segítségével következik, hogy nagy l esetén

$$|\varrho| \leqq K_{44}\left(C_{n_1[\omega_0']}(\omega_0'; f) + b_{l+2}\right) \leqq K_{44}\left(C^*(p_{10}; f) + b_{l+2}\right).$$

A (16. 2) alapján látható, hogy itt a jobb oldal 0-hoz tart, amint $\varepsilon \to 0$, azaz, feltéve, hogy ε elég kicsi, kapjuk, hogy

$$|\varrho| \leqq 1/K_{42},$$

amiből a (18. 19) alapján következik a (18. 4).

Most rátérünk az ω_1^* intervallum definiálására. Első lépésként kimutatjuk, hogy a λ kitevő előfordul a $P_0 = P_{l+3}(t, \omega_0')$ polinomban. Valóban, a 14. 6. lemmában levő második alternatíva esetén, azaz, ha R' üres, azt kapnánk, hogy $\varrho = 0$, ami nagy l esetén ellentmond a (18. 10) és a (18. 17) relációknak. (Ezek helyett

a relációk helyett hivatkozhattunk volna a (18. 19)-re is, ekkor azonban a $\lambda[\omega_0']-n_0[\omega_0']=0$ esetet külön meg kellett volna vizsgálnunk.)

Miután megmutattuk, hogy a λ kitevő előfordul P_0-ban, definiálhatjuk az $\omega_1 \supseteq \omega_0'$ intervallumot úgy, mint az (egyik) olyan intervallumot, amelyre nézve az $n_1=\lambda$ kitevő primitív. A (18. 2) és a már bebizonyított (18. 4) alapján alkalmazható a 14. 18. lemma. Azt kapjuk, hogy $\omega_0^* \subseteq \omega_1$; ezért az ω_1^* intervallumot úgy definiálhatjuk, hogy az az ω_1-et tartalmazó $4|\omega_1|$ hosszúságú intervallum, amelynek x a középső felébe esik. Ekkor teljesül a (18. 5) is, ugyanis $(n_1[\omega_1], \omega_1) \in F_{l+3} \subseteq \tilde{F}_{l+3}$ (l. az F_k halmaz definícióját a 14. § elején).

A (18. 6) bizonyításához észrevesszük, hogy a most alkalmazott 14. 18. lemma szerint a $P=P_{l+3}(t, \omega')$ polinomok ω' négy választására ($\omega' \subseteq \omega_0^*$, $4|\omega'|=|\omega_0^*|$) megegyeznek, így az ω_0^* intervallumon egyetlen $P=P_0=P_{l+3}(t, \omega_0')$ polinomunk van. Írjuk

$$s_n(x, \omega_0^*; f)=s_n(\cdot\,; f-P)+s_n(\cdot\,; P). \tag{18. 24}$$

A 17. 5. lemmát legfeljebb $b_l^{-\frac{3}{2}}$-szer alkalmazva, a (18. 9) figyelembe vételével kapjuk:

$$|e^{in_1 x} s_{n_1}(\cdot\,; f-P)-e^{inx} s_n(\cdot\,; f-P)| < K_{34} b_l^{-\frac{3}{2}} b_{l+2} < K_{34} b_l, \tag{18. 25}$$

valahányszor n kielégíti a (18. 7)-et.

$s_n(\cdot\,; P)$ változásának becsléséhez felhasználhatjuk a (18. 11) egyenlőséget, mivel, mint az előbb kimutattuk, $P=P_0$. Tekintetbe véve, hogy x az ω_0^* intervallum középső feléhez tartozik, tetszés szerinti m egész szám esetén kapjuk:

$$|s_m(\cdot\,; \varrho e^{i\lambda t})| = \left| \varrho \int_{\omega_0^*} \frac{e^{i(\lambda-m)t}}{x-t}\, dt \right| \leqq \tag{18. 26}$$

$$\leqq 2|\varrho| \int_0^{|\omega_0^*|/4} \frac{\sin(\lambda-m)t}{t}\, dt + 8|\varrho| \leqq (2\pi+8)|\varrho| \leqq K_{44}(2\pi+8)\big(C^*(p_{10}^*; f)+b_{l+2}\big)$$

(l. (18. 23)); továbbá, a (18. 15) alapján nyilvánvaló, hogy minden egész számra

$$|s_m(\cdot\,; Q_0)| \leqq 4b_{l+3}^8. \tag{18. 27}$$

Végül, ha $m=n_1(=\lambda)$, vagy $m=n$, ahol n kielégíti a (18. 7)-et, a (18. 21)-ből következik, hogy elegendően nagy l esetén

$$|m\langle\omega_0^*\rangle-\lambda'\langle\omega_0^*\rangle| \geqq b_{l+3}^{-10}/4 \tag{18. 28}$$

teljesül minden R''-höz tartozó λ' kitevőre (azaz, amelyhez van olyan a', hogy $(a', \lambda') \in R''$); tehát

$$\frac{1}{(m-\lambda')|\omega_0^*|} = O(b_{l+3}^{10}).$$

Így a (18. 12), (18. 13) és a 17. 1. lemma felhasználásával kapjuk, hogy ($m=n_1$ vagy n)

$$s_m(\cdot\,; Q_1) = \int_{\omega_0^*} \sum_{(a', \lambda') \in R''} a' \frac{e^{i(\lambda'-m)t}}{x-t}\, dt = \sum \pi i a' e^{i(\lambda'-m)x} \operatorname{sign}(m-\lambda') + O(b_{l+3}^8).$$

Mivel a (18. 7) és a (18. 21) szerint

$$\operatorname{sign}(n_1-\lambda')=\operatorname{sign}(n-\lambda')$$

(emlékeztetünk arra, hogy definíció szerint $n_1 = \lambda$), innen azt kapjuk, hogy

$$e^{in_1 x} s_{n_1}(\cdot\,; Q_1) - e^{inx} s_n(\cdot\,; Q_1) = O(b_{l+3}^8). \tag{18. 29}$$

A kapott becslésekből (l. (18. 25), (18. 26), (18. 27) és (18. 29)) következik a (18. 6) egyenlőtlenség. Ezzel a segédtételt bebizonyítottuk.

A most következő segédtétel feltevései megegyeznek az előző segédtételéivel, eltekintve az új $|\omega_0^*| > 2\pi\, 2^{-N+1}$ feltevéstől.

18. 30. SEGÉDTÉTEL. *Tegyük fel, hogy*

$$|\omega_0^*| > 2\pi\, 2^{-N+1} \tag{18. 31}$$

és

$$p_0^* = (n_0\langle\omega_0^*\rangle, \omega_0^*) \notin F_{l+3}^*, \tag{18. 32}$$

ahol az l egész számot a következőképpen definiáljuk:

$$b_{l-1} > C^*(p_0^*) \geqq b_l \quad \text{(azaz } l > L(\varepsilon)\text{; l. (16. 2))}. \tag{18. 33}$$

Akkor létezik olyan m egész szám, $L < m \leqq l$, és olyan $(\bar{n}, \bar{\omega}^*)$ pár, $\omega_0^* \subseteqq \bar{\omega}^*$, hogy x $\bar{\omega}^*$ középső feléhez tartozik, továbbá

$$|\bar{n}\langle\omega_0^*\rangle - n_0\langle\omega_0^*\rangle| \leqq 3b_l^{-1}, \tag{18. 34}$$

$$\bar{p}^*(\bar{n}\langle\bar{\omega}^*\rangle, \bar{\omega}^*) \in F_{m+3}^*, \tag{18. 35}$$

$$C^*(\bar{p}^*) < b_{m-1}. \tag{18. 36}$$

Mivel a (18. 31) *alapján az $\omega_0^* \subseteqq \bar{\omega}^*$ reláció szerint $|\bar{\omega}^*| > 2\pi\, 2^{-N+1}$, a* (18. 35) *és a* (18. 36) *miatt $\bar{p}^* \in \Omega(m)$* (l. (15. 2)); *azaz definiálva van az $\Omega(\bar{p}^*; m)$ partíció és a hozzá tartozó $\omega^*(x) = \bar{\omega}^*(x)$ intervallum. Ezekre teljesül, hogy*

(18. 37) *$\bar{\omega}^*(x) \subset \omega_0^*$ és $\omega_0^* - \bar{\omega}^*(x)$ előáll $\Omega(\bar{p}^*; m)$-hez tartozó intervallumok egyesítéseként.*

Továbbá, ha p_{10}^* jelöli az előző segédtétel által megadott $(n_1\langle\omega_0^*\rangle, \omega_0^*)$ párt, akkor

$$C^*(p_{10}^*) < b_{m-1}. \tag{18. 38}$$

Bizonyítás. Jelölje $\sum$ azon (n, ω^*, k) hármasok halmazát, ahol n és k egészek, ω^* pedig egy intervallum, amelyekre

($\Sigma 1$) $\omega^* \supseteqq \omega_0^*$ és x ω^* középső feléhez tartozik;

($\Sigma 2$) $L < k \leqq l$ és $C^*(p_{10}^*) < b_{k-1}$;

($\Sigma 3$) $|n_1\langle\omega_0^*\rangle - n\langle\omega\rangle_0^*| \leqq \sum_{j=k}^{l} b_j^{-1}$;

($\Sigma 4$) $(n\langle\omega^*\rangle, \omega^*) \in F_{k+3}^*$.

Először megmutatjuk, hogy $\sum$ nem üres. Ha $C^*(p_{10}^*) < b_{l-1}$, akkor $(n_1, \omega_1^*, l) \in \sum$. Ha $C^*(p_{10}^*) \geqq b_{l-1}$, akkor definiáljuk k-t a $b_{k-1} > C^*(p_{10}^*) \geqq b_k$ egyenlőtlenség által; ebben az esetben $L < k \leqq l$, azaz a ($\Sigma 2$) teljesül. Ha $p_{10}^* \in F_{k+3}^*$, akkor $(n_1, \omega_0^*, k) \in \sum$. Végül, ha $p_{10}^* \notin F_{k+3}^*$, akkor a 18. 1. segédtételt a p_0^* pár helyett a p_{10}^* párra alkalmazva kapjuk az új (n_2, ω_2^*) párt. Ekkor a (18. 4) analogonja szerint

$$|n_2\langle\omega_0^*\rangle - n_1\langle\omega_0^*\rangle| \leqq b_k^{-1},$$

úgyhogy a ($\Sigma 3$) teljesül. Végül pedig a ($\Sigma 4$) következik a (18. 5) analogonjából. Ezért $(n_2, \omega_2^*, k) \in \sum$.

Most pedig definiáljuk az $(\bar{n}, \bar{\omega}^*, m)$ hármast $\sum$ egyik olyan (n, ω^*, k) elemeként, amelyre k minimális. Ekkor a (18. 34) következik a (18. 4) és a ($\Sigma 3$) alapján, mivel

$$\sum_{j=1}^{l} b_j^{-1} = \sum_{j=1}^{l} 2^{2j} \leqq 2 \cdot 2^{2l} = 2b_l^{-1}.$$

A (18. 35) következik a ($\Sigma 4$)-ből, a (18. 38) pedig a ($\Sigma 2$)-ből. Bebizonyítandó még a (18. 36) és a (18. 37).

A (18. 36) bizonyításához tegyük fel az ellenkezőjét, azaz tegyük fel, hogy $C^*(\bar{p}^*) \geqq b_{m-1}$, és definiáljuk k-t a $b_{k-1} > C^*(\bar{p}^*) \geqq b_k$ egyenlőtlenség által; ekkor $k < m$. m minimalitása miatt $(\bar{n}, \bar{\omega}^*, k) \notin \sum$; ezért a ($\Sigma 4$) nem állhat fenn, azaz $\bar{p}^* \notin F_{k+3}^*$. Alkalmazva a 18. 1. segédtételt a p_0^* pár helyett $\bar{p}^*$-ra, kapjuk az $(\bar{n}_1, \bar{\omega}_1^*)$ párt. Mivel

$$|\bar{n}_1\langle\omega_0^*\rangle - n_1\langle\omega_0^*\rangle| \leqq |\bar{n}_1\langle\omega_0^*\rangle - \bar{n}\langle\omega_0^*\rangle| +$$

$$+ |\bar{n}\langle\omega_0^*\rangle - n_1\langle\omega_0^*\rangle| \leqq |\bar{n}_1\langle\bar{\omega}^*\rangle - \bar{n}\langle\bar{\omega}^*\rangle| + \sum_{j=m}^{l} b_j^{-1} \leqq \sum_{j=k}^{l} b_j^{-1}$$

(l. (18. 4)), azt kapjuk, hogy $(\bar{n}_1, \bar{\omega}_1^*, k) \in \sum$, ami ismét ellentmond m minimalitásának.

Most pedig bizonyítjuk a (18. 37)-et. Az $\bar{\omega}^*(x) \subset \omega_0^*$ tartalmazás bizonyításához elegendő annyit bizonyítanunk, hogy $\omega_0^* \nsubseteq \bar{\omega}^*(x)$. Valóban, mivel x nem tartozik a 16. § végén definiált $Z \subseteq E$ halmazhoz, két tetszés szerinti, az x pontot a középső felében tartalmazó ω^* és $\tilde{\omega}^*$ intervallumra vagy $\omega^* \subseteq \tilde{\omega}^*$, vagy pedig $\tilde{\omega}^* \subset \omega^*$. Mármost, ha $|\bar{\omega}^*(x)| = 2\pi\, 2^{-N+1}$, akkor $\omega_0^* \subseteq \bar{\omega}^*(x)$ nyilvánvalóan hamis, minthogy feltevésünk szerint $|\omega_0^*| > 2\pi\, 2^{-N+1}$. Ha $|\bar{\omega}^*(x)| > 2\pi\, 2^{-N+1}$, akkor a 15. § (B4) szerint $C^*(\bar{n}\langle\bar{\omega}^*(x)\rangle, \bar{\omega}^*(x)) \geqq b_{m-1}$, így az $\bar{\omega}^*(x) \supseteq \omega_0^*$ feltevés az előző bekezdésben a (18. 36) bizonyításánál használt úton ellentmondásra vezet. Ezzel az $\bar{\omega}^*(x) \subset \omega_0^*$ relációt kimutattuk. Ezek után egyszerű annak az igazolása, hogy $\omega_0^* - \bar{\omega}^*(x)$ előállítható $\Omega(\bar{p}^*; m)$-beli intervallumok egyesítéseként. Valóban, a 15. § (B2) szerint elegendő annyit kimutatnunk, hogy nincs olyan $\tilde{\omega} \in \Omega(\bar{p}^*; m)$ intervallum, amely belsejében tartalmazza ω_0^* valamelyik végpontját. Tegyük fel ennek az ellenkezőjét. Ekkor könnyen látható, hogy ha ω_0^* egy $\omega_{j\nu}^*$ alakú intervallum, akkor $\tilde{\omega}$-nak valamilyen $\omega_{k\mu}$ alakú intervallumnak kell lennie, ahol $\mu \leqq \nu - 1$. Ha most $\omega_{k\mu}$ tartalmazza pl. $\omega_0^* = \omega_{j\nu}^*$ bal végpontját, akkor $\bar{\omega}^*(x)$-nek a 15. §-ban adott definíciója szerint $\bar{\omega}^*(x) \supseteq \omega_{k\mu} \cup \omega_{k+1,\mu} \supseteq \omega_{j\nu}^* = \omega_0^*$, ami ellentmond a fent bizonyított $\bar{\omega}^*(x) \subset \omega_0^*$ relációnak. Ezzel a segédtétel bizonyítását befejeztük.

Most pedig megadjuk a fenti két segédtétel szintézisét. Amint már említettük, itt a feltevések teljes listáját felsoroljuk.

18. 39. SEGÉDTÉTEL. *Legyen adva az* (n, ω^*) *pár, legyen* $p^* = (n\langle\omega^*\rangle, \omega^*)$ *és definiáljuk* $l > L = L(\varepsilon)$*-t a*

$$b_{l-1} > C^*(p^*) \geqq b_l \tag{18. 40}$$

egyenlőtlenség által. Tegyük fel, hogy x *az* ω^* *középső feléhez tartozik,* $x \notin E$, $-\pi \leqq x \leqq \pi$ *és* $|\omega^*| > 2\pi\, 2^{-N+1}$; *legyen továbbá* ε *elegendően kicsi.*

Ekkor létezik olyan m *egész szám,* $L < m \leqq l$, *és olyan* $(\bar{n}, \bar{\omega}^*)$ *pár,* $\omega^* \subseteq \bar{\omega}^*$, *hogy* x *az* $\bar{\omega}^*$ *intervallum középső feléhez tartozik, és* $\bar{n}$ *egész az* $\bar{\omega}^*$ *intervallumra nézve, azaz*

$$\bar{n}|\bar{\omega}^*|/8\pi \tag{18. 41}$$

egész. Továbbá

$$\bar{p}^* = (\bar{n}\langle\bar{\omega}^*\rangle, \bar{\omega}^*) \in F^*_{m+3}, \tag{18. 42}$$

$$C^*(\bar{p}^*) < b_{m-1}. \tag{18. 43}$$

Így az $\Omega(\bar{p}^*; m)$ *partíció és a hozzátartozó* $\bar{\omega}^*(x)$ *intervallum definiálva van. Erre*

(18. 44) $\bar{\omega}^*(x) \subset \omega^*$ *teljesül, továbbá az* $\omega^* - \bar{\omega}^*(x)$ *különbség előállítható* $\Omega(\bar{p}^*; m)$*-hez tartozó intervallumok egyesítéseként.*

Ezenkívül fennáll az

$$||s_{\bar{n}}(x, \omega^*)| - |s_n(x, \omega^*)|| \leqq K_{45} b_{m-1} \tag{18. 45}$$

egyenlőtlenség (K_{45} *abszolút konstans).*

Bizonyítás. A $p^* \notin F^*_{l+3}$ esetben az állítás az előző két segédtétel közvetlen következménye. Valóban, az előző segédtételekkel szemben új (18. 41) feltétel teljesítése nem okoz nehézséget, hisz az előbbi segédtétel igaz marad, ha benne $\bar{n}$-et olyan n' egésszel helyettesítjük, amelyre $\bar{n}'\langle\bar{\omega}^*\rangle = \bar{n}\langle\omega^*\rangle$. A (18. 45) egyenlőtlenség pedig következik a (18. 6)-ból és a (18. 38)-ból, mivel a (18. 4) és a (18. 34) szerint n helyében $\bar{n}$ kielégíti a (18. 7)-et.

A megmaradó $p^* \in F^*_{l+3}$ eset triviális. Valóban, itt vehető $\bar{p}^* = p^*$ és $m = l$; így a (18. 41) és az $\bar{n}\langle\omega^*\rangle = n\langle\omega^*\rangle$ megszorítás $\bar{n}$-et egyértelműen definiálja. A 17. 5. lemmából következik a (18. 45) is. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

19. AZ ALAPLEMMA BIZONYÍTÁSA

Legyen $n = n_{-1}$ egy tetszés szerinti egész. Az

$$s_n(x) = \int_{-4\pi}^{4\pi} \frac{e^{-int} f(t)}{x - t}\, dt \qquad (-\pi \leqq x \leqq \pi,\ x \notin E) \tag{19. 1}$$

integrál becsléséhez kiindulunk az (n_{-1}, ω^*_{-1}) párból, ahol $\omega^*_{-1} = [-4\pi, 4\pi]$. Ha az (n_j, ω^*_j) párt valamilyen $j \geqq -1$-re definiáltuk, és $|\omega^*_j| = 2\pi\, 2^{-N+1}$, akkor eljárásunk véget ér. Az $|\omega^*_j| > 2\pi\, 2^{-N+1}$ esetben definiálja l_j-t a

$$b_{l_j - 1} > C^*(n_j\langle\omega^*_j\rangle, \omega^*_j) \geqq b_{l_j}$$

egyenlőtlenség. Az (n_j, ω^*_j, l_j) hármasra alkalmazva a 18. 39. segédtételt, kapjuk $\bar{n}_j$-t, $\bar{\omega}^*_j$-ot és m_j-t. Legyen mostmár $n_{j+1} = \bar{n}_j$, $\omega^*_{j+1} = \bar{\omega}^*_j(x)$. Ekkor a (18. 44) szerint $\omega^*_{j+1} \subset \omega^*_j$, ezért $|\omega^*_{j+1}| \leqq |\omega^*_j|/2$. Így látható, hogy eljárásunk véges sok lépés után valamilyen $j = j_0$-ra befejeződik, amelyre

$$|\omega^*_{j_0}| = 2\pi\, 2^{-N+1}. \tag{19. 2}$$

Továbbá a 18. 39. segédtételben levő $L < m \leqq l$ egyenlőtlenség szerint $L < m_j \leqq l_j$ $(j < j_0)$. Másrészt a 15. § (B4)-ből következik, hogy $l_{j+1} < m_j$. Így azt látjuk, hogy

$$m_{-1} > m_0 > \ldots > m_{j_0 - 1} > L. \tag{19. 3}$$

Ezért a (18. 45)-ből kapjuk:

$$\sum_{j=1}^{j_0-1} ||s_{\bar{n}_j}(x, \omega^*_j)| - |s_{n_j}(x, \omega^*_j)|| \leqq K_{45} \sum_{j=-1}^{j_0-1} b_{m_j - 1} \leqq K_{45} \sum_{k=L}^{\infty} b_k. \tag{19. 4}$$

Mármost a 16. §-ban kapott becslések szerint, ha $x \notin E$, akkor (l. (16. 6), (16. 10) és (16. 20)):

$$\sum_{j=-1}^{j_0-1} \left| |s_{\bar{n}_j}(x, \omega_j^*)| - |s_{\bar{n}_j}(x, \overline{\omega}_j^*(x))| \right| \leqq \sum_{j=-1}^{j_0-1} O(b_{m_j-1}^{\frac{1}{2}}) \leqq \sum_{k=L}^{\infty} O(b_k^{\frac{1}{2}}). \tag{19. 5}$$

Ilymódon kapjuk az

$$\left| |s_n(x)| - |s_{n_{j_0}}(x, \omega_{j_0}^*)| \right| \leqq \sum_{k=L}^{\infty} O(b_k^{\frac{1}{2}}) \tag{19. 6}$$

becslést (emlékeztetünk arra, hogy $s_n(x) = s_{n-1}(x, \omega_{-1}^*)$). Itt a (16. 2) és a b_j-ket definiáló $b_j = 2^{-2^j}$ formula alapján látható, hogy a jobb oldal 0-hoz tart, ha $\varepsilon \to 0$.

Észrevehetjük, hogy sem a (19. 6) becslés, sem a kivételes halmaz mértékére adott becslés nem függ a (11. 7)-ben adott N-től (jóllehet, az egész általunk alkalmazott eljárás függ tőle). Így N tetszés szerinti nagynak választható és az alaplemma (11. 1. lemma) bizonyítása teljes lesz, ha kimutatjuk a következőt:

19. 7. Lemma. *Legyen n tetszés szerinti egész szám, továbbá tegyük fel, hogy $x \notin E$, $-\pi \leqq x \leqq \pi$ és tartozzék x az ω^* intervallum középső felébe, ahol $|\omega^*| = 2\pi\, 2^{-N+1}$. Akkor*

$$|s_n(x, \omega^*)| = \left| \int_{\omega^*} \frac{e^{-int} f(t)}{x - t}\, dt \right| < R(N, \varepsilon),$$

ahol az $R(N, \varepsilon)$ mennyiség csak N-től és ε-tól függ, továbbá

$$\lim_{\substack{N \to \infty \\ \varepsilon \to +0}} R(N, \varepsilon) = 0.$$

Bizonyítás. Írjuk fel mégegyszer a (11. 7) relációt.

$$f(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikt}. \tag{19. 8}$$

tt nyilvánvalóan (pl. a *Parseval* formula szerint)

$$|c_k|^2 \leqq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = \frac{\varepsilon^2}{2\pi}, \tag{19. 9}$$

ahol az utóbbi egyenlőség ε definíciója miatt áll fenn (l. (11. 4)). Ezért

$$|f'(t)| = \left| \sum_{k=-N}^{N} ikc_k e^{ikt} \right| \leqq 2 \frac{N^2}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon < N^2 \varepsilon. \tag{19. 10}$$

Mivel $x \in \omega^*$ és $x \notin E$, kapjuk, hogy $\omega^* \not\subseteq E$, és így $\omega^* \not\subseteq S^*$. Ezért S^*-nak a 16. § elején adott definíciója szerint adódik, hogy

$$\int_{\omega^*} |f|^2 \leqq \varepsilon |\omega^*|,$$

azaz a *Schwarz* egyenlőtlenség szerint

$$\int_{\omega^*} |f| \leqq \sqrt{\varepsilon}\, |\omega^*|. \tag{19. 11}$$

Jelölje most $[\alpha, \beta]$ az ω^* intervallumot. Ha N elég nagy és $t \in \omega^*$, akkor a (19. 10) szerint

$$|f(t)-f(\alpha)| = \left| \int_{\alpha}^{t} f' \right| \leqq |\omega^*| N^2 \varepsilon = 2\pi 2^{-N+1} \cdot N^2 \varepsilon < \varepsilon/2 \leqq \sqrt{\varepsilon}/2,$$

ahol feltettük, hogy $\varepsilon \leqq 1$. Ezért a (19. 11) alapján

$$|f(\alpha)| \leqq \frac{3}{2}\sqrt{\varepsilon},$$

azaz, ismét felhasználva az előző egyenlőtlenséget, kapjuk, hogy

(19. 12) $$|f(t)| \leqq 2\sqrt{\varepsilon} \qquad (t \in \omega^*).$$

Legyen σ ω^* a legnagyobb olyan részintervallum, amelynek középpontja x. Ekkor, mivel x ω^* középső feléhez tartozik, a (19. 12) alapján kapjuk, hogy

$$\left| \int_{\omega^*-\sigma} \frac{e^{-int} f(t)}{x-t}\, dt \right| \leqq 16\sqrt{\varepsilon}.$$

Mivel $x \notin V \subseteq E$, V definíciója szerint (l. (16. 25)):

$$\left| \int_{\sigma} \frac{f(t)}{x-t}\, dt \right| \leqq 2\sqrt{\varepsilon}.$$

Ezért a lemma bizonyításához elegendő az

$$\int_{\sigma} \frac{e^{in(x-t)}-1}{x-t} f(t)\, dt$$

integrált becsülnünk, ami helyett a (19. 12) alapján elegendő csak az

(19. 13) $$I = \int_{\sigma} \frac{e^{in(x-t)}-1}{e^{i(x-t)}-1} f(t)\, dt$$

kifejezést tekintenünk. Itt az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy n pozitív és $x=0$. Ez utóbbi feltevés szerint σ felírható $(-a, a)$ alakban. Itt a kielégíti a következő egyenlőtlenséget:

(19. 14) $$a = \frac{|\sigma|}{2} \leqq \frac{|\omega^*|}{2} = 2\pi\, 2^{-N}.$$

Az előző bekezdés feltevései szerint a (19. 13) alatti kifejezés a következő alakba írható:

(19. 15) $$I = \int_{-a}^{a} D_n(t) f(t)\, dt,$$

ahol

(19. 16) $$D_n(t) = \frac{e^{-int}-1}{e^{-it}-1} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-ikt}.$$

A fenti I kifejezést becsülendő parciálisan integrálunk, majd felhasználjuk a (19. 10)-et és a (19. 12)-t:

$$|I| = \left| \int_{-a}^{a} D_n(t) f(t)\, dt \right| = \tag{19. 17}$$

$$= \left| f(a) \int_{-a}^{a} D_n(t)\, dt - \int_{-a}^{a} f'(t) \int_{-a}^{t} D_n(u)\, du\, dt \right| \leqq$$

$$\leqq 2\sqrt{\varepsilon} \left| \int_{-a}^{a} D_n(t)\, dt \right| + N^2 \varepsilon \int_{-a}^{a} \left| \int_{-a}^{t} D_n(u)\, du \right| dt.$$

Megmutatjuk, hogy

$$\left| \int_{-a}^{a} D_n(t)\, dt \right| = \left| 2a + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin ka}{k} \right| \leqq K_{46}, \tag{19. 18}$$

ahol K_{46} alkalmas abszolút konstans. Valóban, jól ismert, hogy a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin ka}{k}$$

sor minden részletösszege a-tól független közös korlát alatt marad (l. [4], 332. o.); másrészt, a (19. 14) alapján

$$a \leqq 2\pi\, 2^{-N} \leqq \pi \qquad (N \geqq 1). \tag{19. 19}$$

Az

$$\int_{-a}^{t} D_n(u)\, du$$

integrál becsléséhez először tekintsük a $-a \leqq t < 0$ esetet. A (19. 19) szélső tagjait összehasonlítva ebből a t-re vonatkozó feltevés alapján kapjuk az

$$|e^{-it} - 1| \geqq -\frac{2t}{\pi}$$

egyenlőtlenséget. Így, az egyszerűség kedvéért feltéve, hogy $N \geqq 3$, amiből a (19. 19) alapján

$$a \leqq \frac{\pi}{4} < 1,$$

adódik, hogy

$$\left| \int_{-a}^{t} D_n(u)\, du \right| \leqq \int_{-a}^{t} -\frac{\pi}{2u}\, du \leqq -\frac{\pi}{2} \log |t|.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy a $0 < t \leqq a$ esetben fennáll az

$$\left| \int_{t}^{a} D_n(u)\, du \right| \leqq -\frac{\pi}{2} \log |t|$$

egyenlőtlenség. Így a (19. 18) alapján ebben az esetben

$$\left| \int_{-a}^{t} D_n(u)\, du \right| \leqq \left| \int_{-a}^{a} D_n(u)\, du \right| + \left| \int_{t}^{a} D_n(u)\, du \right| \leqq K_{46} - \frac{\pi}{2} \log |t|.$$

Láthatjuk, hogy ez gyengébb egyenlőtlenség, mint amit a $-a \leqq t < 0$ esetben kaptunk; ezért a most kapott egyenlőtlenség minden t-re érvényes, amelyre $-a \leqq t \leqq a$. Ezt és a (19. 18)-at behelyettesítve a (19. 17)-be, kapjuk:

$$|I| = \left| \int_{-a}^{a} D_n(t) f(t)\, dt \right| \leqq 2K_{46}\sqrt{\varepsilon} + 2K_{46} N^2 a\varepsilon - \pi N^2 \varepsilon a \log a.$$

Mivel itt $a \leqq 2\pi\, 2^{-N}$ (l. pl. (19. 19)), a jobb oldal 0-hoz tart, ha $N \to \infty$ és $\varepsilon \to +0$, amivel a lemmát bebizonyítottuk.

Ezzel, amint már említettük, az alaplemmát (11. 1. lemma), és így az 1. 1. tételt is bebizonyítottuk.

IRODALOM

[1] *L. Carleson:* On convergence and growth of partial sums of Fourier series, Acta Math., Uppsala, 116 (1966) 135—157.
[2] *A. Zygmund:* Trigonometric series, I. kötet, Cambridge, 1959.
[3] Ugyanott, II. kötet.
[4] *Szőkefalvi-Nagy Béla:* Valós függvények és függvénysorok, Budapest, 1961.
[5] *A. Máté:* Convergence of L^2 Fourier series (detailed exposition of *Carleson*' s proof), mimeographed, University of Szeged, 1967.

СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ С КВАДРАТОМ ФУНКЦИЙ

A. MATƏ

A. E. CONVERGENCE OF L^2 FOURIER SERIES

by
A. MÁTÉ

Summary

The following theorem was recently established by L. Carleson [1]

Theorem 1. *If the function f belongs to the (complex space* $L^2(-\pi, \pi)$*, then its Fourier series converges almost everywhere.*

This theorem can be equivalently stated in the following form:

If $\{c_n\}$ *is a two—way infinite sequence of complex numbers such that*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty,$$

then the series

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

converges almost everywhere.

From this may be easily derived its analogue for Fourier integrals:

Theorem 2. *If* $f \in L^2(-\infty, \infty)$*, then the functions*

$$g_\alpha(x) = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(t) e^{itx}\, dt$$

converge almost everywhere as $\alpha \to \infty$.

The proof of Theorem 1 as given in the cited paper of L. CARLESON is rather condensed and sketchy. Owing to the importance of this theorem, we present the proof in a more detailed form. For conveniences of the reader, we give also a full presentation of certain estimates of the HILBERT transform.

SERES IVÁN ÉLETE ÉS MATEMATIKAI MUNKÁSSÁGA

SZÁSZ FERENC

Fájdalmas veszteség érte a magyar matematikai tudományt Seres Ivánnak, a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézete tudományos munkatársának, a matematikai tudományok kandidátusának, a polinomok irreducibilitási kérdései elmélyült és nemzetközileg is elismert kutatójának az elhunytával. Igen súlyos betegség okozta halálát, életének megmentésére eredménytelennek bizonyult minden igyekezet, a legjobb orvosok erőfeszítése, a férjét oly nagy mértékben szerető feleségnek áldozatvállaló gondoskodása és gyöngéd ápolása, kollégáinak, rokonainak szüntelen aggódása. Vele sírba szállt a polinomok irreducibilitási kérdései vizsgálatának egyetlen hazai képviselője, a szebbnél-szebb ötletekkel rendelkező és szebbnél-szebb terveket szövő nemzetközileg elismert kutató. Elvesztését különösen sajnálja mindenki, aki megismerte csodálatos szerénységét, emberiességét, másokon való önzetlen segítőkészségét, jellemének tisztaságát.

Rá való emlékeztetőül felelevenítjük megpróbáltatásokban és eredményekben egyaránt gazdag életének főbb mozzanatait, és részletesebben ismertetjük tudományos munkáit.

Seres Iván (Spitz Iván) Budapesten 1907. december 15-én született. Édesapja, Spitz József, a MÁV Északi Főműhelyében dolgozott géplakatosként, édesanyja, Lengyel Róza a család háztartását vezette. Seres Iván egészen a felszabadulásig Spitz Iván nevet használta. Elemi iskolai és középiskolai tanulmányait Budapesten végezte. Érettségi vizsgája után a budapesti Pázmány Péter Tudományegyetem matematika—fizika tanári szakra került, ahol 1930-ban szerzett középiskolai tanári oklevelet. Az akkori korszak sok értelmiségijéhez hasonlóan Seres Iván is sokáig nem jutott iskolai végzettségének és képességeinek megfelelő munkahelyhez, és középiskolai tanári állást is igen későn, csak a felszabadulás után sikerült kapnia. Az 1932—34-es években Seres Iván abban az értelemben dolgozott segédszerkesztői állásban a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapoknál, hogy alkalmilag megkapta a laphoz beérkezett feladatmegoldásokat szakmai ellenőrzésre, és e munkájának „honoráriuma"-képpen magántanítványokat adtak neki, akiket pénzért taníthatott. E „segédszerkesztői" korszakára vonatkozó munkái egy részét az említett lapokban kitűzött és megoldott feladatok is jelzik, amelyek vázolására még visszatérünk. A következő években Seres Iván különféle biztosítási vállalatoknál dolgozott kalkulátor-matematikusként, mégpedig 1934—35-ben az Adria Biztosítónál, 1935—36-ban a Generális Biztosítónál, 1936—40-ben a Phönix Biztosítónál. Az 1940 és 1944 közt levő nehéz években a megélhetéséhez szükséges pénzt alkalmi biztosítási-matematikai munkákkal és diákok alkalmi korrepetálásával igyekezett megkeresni. Az akkori fasiszta államvezetés törvényeinek következtében 1944-ben munkaszolgálatot teljesített Jászberényben, majd 1944 augusztustól egészen

a felszabadulásig bujdosott különféle helyeken. Seres Iván csak a felszabadulás után került középiskolai tanári állásba, éspedig 1945 és 1949 közt a budapesti Szentdomokos utcai Izraelita Fiúgimnáziumban tanított. Közben 1946-ban Bukarestben járt rövidebb ideig, első felesége társaságában. Seres Iván 1947-ben az esti Állami Műszaki Főiskolán is oktatott. Majd 1949 és 1951 közt könyvtárosként dolgozott az Országos Széchényi Könyvtárban. Az 1951—52-es években az Erőtervnél végzett kalkulátor-matematikusi munkát. Továbbá 1952-ben előadó volt az Eötvös Loránd Tudományegyetem esti tagozatán. 1952-ben került a MTA Alkalmazott Matematikai Intézetéhez, a későbbi Matematikai Kutató Intézethez tudományos munkatársi beosztásba. Itt és ebben a beosztásban dolgozott 1966 február 25-én bekövetkezett haláláig. 1955-ben megszerezte a kandidátusi fokozatot matematikából, és megvolt az egyetemi doktori címe is. 1959-ben Prágában járt állami kiküldetésben tanulmányúton, 1965-ben pedig saját pénzen Párizsban járt második felesége társaságában, és ennek során külföldön nagysikerű előadásokat tartott. Igen jól olvasta a négy világnyelven a szakszövegeket, és német nyelvből igen jó beszédkészséggel rendelkezett. A Közalkalmazottak Szakszervezetében az intézeti alapszervezet számvizsgáló bizottságának elnökeként éveken át végzett dicséretre méltó munkát.

Kiemelendő Seres Ivánnak a szerepe a matematika oktatásában és népszerűsítésében. Volt középiskolai és egyetemi tanítványai, akik közül több alkotó matematikus is kikerült, pl. Dénes József, megjegyezték visszaemlékezésükben, hogy Seres Iván a mindenkori kötelező matematikai tananyagon túlmenőleg törekedett a matematikai gondolkodásmódnak, a matematika szellemének a megtanítására. Olykor már kisdiákok figyelmét felhívta alkalmi, de sokatérő baráti beszélgetések során az algebra különböző jellegű és súlyú ágainak fontosságára (pl. determinánsok, Galois-elmélet stb.). Népszerűsítő jellegű Seres Ivánnak az az akkor hézagpótlónak számító „Ipari számtan és mértan" c. munkája is, amely az alábbi listán 14. sorszámot kapott.

Seres Iván munkásságának ismertetésére egy kezdeti lépés már megtörtént, mert a Matematikai Lapok XVII. évfolyam (1966) 1—2. számában az 1—5. oldalakon megjelent Seres Ivánnak egy posthumus cikke, amelyhez a szerkesztőség Seres Iványról fényképet, utószót és egy cikklistát is csatolt. Az alábbi szakmai ismertetés Seres Iván cikkéről szintén ennek a listának a sorszámaira hivatkozik, és e sorok írója ezt a listát kiegészíti Seres Iván alábbi munkáival:

13. Bizonyos polinomok irreducibilitása, Mat. Lapok 17:12 (1966) 1—5.

14. Ipari számtan és mértan. Népszava, 1948 (40 + 30 oldal).

15. I. G. Petrovszkij: Előadások a közönséges differenciálegyenletek elméletéről c. könyv ismertetése, MTA III. Oszt. Közl. 3 (1953) 603—606.

16. Beszámoló T. Sós Vera kandidátusi értekezésének nyilvános vitájáról, MTA III. Oszt. Közl. 8 (1958) 146—148.

17. L. Holzer: Zahlentheorie c. könyv ismertetése, Acta Sci. Math. Szeged 23 (1962) 178.

Seres Iván előbb említett, már megjelentetett cikklistáját helyreigazítólag megemlítendő, hogy a 2. sorszámú dolgozata, amely H. L. Dorwart és O. Ore „Criteria for the irreducibility of polynomials" Ann. of Math. 34 (1933) 81—94 dolgozathoz fűz megjegyzéseket, valószínűleg kézirat maradt, vagy pedig levélbeli közlés, mert a Seres-féle megjegyzések H. L. Dorwart és O. Ore neve alatt, de Serest (Spitz néven) többször említve angolul jelentek meg az Ann. of Math. 35:1(1934) kötet 195. oldalon egyoldalas megjegyzésként. Megemlítendő helyreigazításképpen még a listáról az is,

hogy a 3. dolgozat az 1952. évi kötetben, a 11. dolgozat pedig a XVI. évf. 1965. évi számában jelent meg, és az 1—7. oldalakon található.

Bár Seres Iván pályája elején több kombinatorikai matematikai kérdéssel, Bessel-függvényekkel és elliptikus integrálokkal, továbbá biztosítási matematikával is foglalkozott aktív kutatóként, és bár élete utolsó éveiben a topológia, funkcionálanalízis és Banach-algebrák terén is végzett kiterjedt tanulmányokat, életműve mégis főképpen a polinomok irreducibilitási kérdéseinek vizsgálatára irányul. Az irreducibilis polinomoknak az az egyik, és legfőbb jelentőségük, hogy segítségükkel egy alaptestből kiindulva további algebrai testekhez juthatunk (mégpedig a testhez a polinom egyik gyökét adjungálva). A Seres Iván által vizsgált irreducibilis polinomoknak megvan az a tulajdonsága, mivel az alaptest (racionális számok vagy Gauss-féle racionális számok halmaza) nullkarakterisztikájú, hogy a polinomnak nincs többszörös zérushelye (gyöke) a polinom szétesési testében. Egy polinom pontosan akkor reducibilis a racionális számtest felett, ha reducibilis a racionális egészek gyűrűje felett.

Seres Iván algebrai dolgozatai mind olyan polinom irreducibilitási nehéz kérdésekkel foglalkoznak, amelyek szoros kapcsolatban állnak I. Schur egy irreducibilitási nehéz kérdésével (vagy ehhez hasonló problémák), amelynek teljes megoldását többek sikertelen próbálkozása után Seres Iván adta meg, általánosításokkal együtt.

Hogy Seres Iván idevágó munkáit megfelelőbben értékelhessük, röviden vázolom e témakör kifejlődését.

I. Schur kérdezte, Problem 226. Archiv der Math. und Physik (3) 13 (1908) S. 367, hogy

$$f_1(x) = (x-a_1)\cdot(x-a_2)\ldots(x-a_n)-1$$

és

$$f_2(x) = (x-a_1)\cdot(x-a_2)\ldots(x-a_n)+1,$$

ahol az a_i számok racionális egészek, reducibilis-e a racionális számtest felett.

1909-ben Westlund, On the irreducibility of certain polynomials, Amer. Math. Monthly 19 (1909) pp. 66—67 részleges megoldást adott e kérdésekre és azt találta, hogy $f_1(x)$ mindig irreducibilis, és $f_2(x)$ csak akkor lehet reducibilis, ha $f_2(x)$ teljes négyzet, és ekkor n természetesen páros szám.

1909-ben W. Flügel, Solution to problem 226, Archiv der Math. u. Physik (3) 15 (1909) p. 271, meghatározta az összes olyan esetet, amikor $f_2(x)$ reducibilis, ezek:

$$(x-c)(x-c+2)+1 = (x-c+1)^2$$

és

$$(x-c)(x-c+1)(x-c+2)(x-c+3)+1 = \big((x-c)(x-c+3)+1\big)^2.$$

Továbbá Pólya György, Verschiedene Bemerkungen zur Zahlentheorie, Jahresber. Deutschen Math. Ver. 28 (1919), S 31—40, általánosabb feltételt ad meg az irreducibilitásra: Ha az n-edfokú $P(x)$ polinom az x-nek n-számú egész értékére $P(x) \neq 0$, és ezeken a helyeken $P(x)$ abszolút értéke kisebb, mint

$$\frac{\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]\right)!}{2^n-\left[\frac{n}{2}\right]},$$

akkor $P(x)$ irreducibilis a racionális számtest felett.

A. Brauer, R. Brauer, H. Hopf, Über die Irreduzibilität einiger spezieller Klassen von Polynomen, Jahresber. Deutschen Math. Ver. 35 (1926) S. 99—112 azt vizsgálták, hogy $G(P(x))$ irreducibilis-e, ha $P(x)=(x-a_1)\ldots(x-a_n)$ és $G(x)$ olyan irreducibilis polinom, amelyik legfeljebb negyedfokú.

H. Ille, Einige Bemerkungen zu einem von G. Pólya herrührenden Irreduzibilitätskriterium, Jahresber. der Deutschen Math. Ver. 35 (1926) S. 204—208 megmutatta, hogy ha $a>0$ és $n\geqq 16$, akkor

$$a\cdot(x-a_1)^2\cdot(x-a_2)^2\ldots(x-a_{\left[\frac{n}{2}\right]})^2+1$$

irreducibilis, ahol a_i racionális egész számok.

Udo Wegner, Über die Irreduzibilität einer Klasse von ganzen rationalen Funktionen, Jahresber. Deutsch. Math. Ver. 40 (1931) S. 239—241 azt igazolta, hogy ha $P(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$, $n>5$, $d>0$ és $d\not\equiv 3 \pmod 4$, akkor $(P(x))^4+d$ irreducibilis.

Továbbá H. L. Dorwart, O. Ore, Criteria for the irreducibility of polynomials, Annals of Math. 34 (1933) 81—94 dolgozatukban azt vizsgálják, hogy mikor lesz irreducibilis egy racionális egész együtthatós polinom, amely adott egész szám helyeken $+1$, illetve -1 értéket veszi fel. Megemlíthető például a 4. tételük, amely szerint, ha $n\geqq 5$, $P(x)=(x-a_1)\ldots(x-a_n)$ és $F(x)=b_0x^2+b_1x+1$, akkor $F(P(x))$ irreducibilis polinom a racionális számtest felett. Mármost ezzel kapcsolatban, és azért, hogy Seres Iván (Spitz Iván) 2. sorszámú kéziratának (vagy levelének) tartalmát hitelesebben megvilágítsuk, célszerű lesz szóról szóra idézni H. L. Dorwart és O. Ore, Criteria for the irreducibility of polynomials, Annals of Math. 35:1 (1934) 195. oldalon levő féloldalas angol nyelvű megjegyzését:

„This note contains a few remarks to our paper with the same title appeared in these Annals, 34 (1933) pp. 81—94.

Dr. Spitz in Budapest informs us, that he has checked the list of exceptions to theorem 4., p. 86, and has found, that for $n=3$ the case

$$F(x) = -x^2-x+1,\ P(x)=(x+1)x(x-2),$$
$$F(P(x)) = ((x+1)(x-2)+1)\cdot((x+1)(x-2)(-x^2+1)+1)$$

must be added, while for $n=2$ the list should read

$$F(x) = -a^2x^2+4x+1, \qquad P(x)=x(x-1),$$
$$F(P(x)) = (aP(x)-2x+1)(-aP(x)-2x+1),$$
$$F(x) = -a^2x^2+x+1, \qquad P(x) = x(x-2),$$
$$F(P(x)) = (aP(x)-x+1)(-aP(x)-x+1).$$

Dr. Spitz has also given a complete list of exceptions for the corresponding theorem in the quadratic imaginary field.

In the comments to theorem 16, p. 93, line 4 from below should read: for every odd n. — Dr. A. Brauer in Berlin has informed us, that he has been able to show that theorem holds for all $n>6$."

3. dolgozatában Seres Iván egy Schur-problémához hasonló, részben általánosabb, részben speciálisabb kérdést vizsgál és old meg. I. Schur ugyanis azt kérdezte (1909, Archiv der Math. u. Physik, S. 259), hogy ha $F(y)=y^{2^n}+1$, $y=f(x)=$ $=\prod_{i=1}^{L}(x-a_i)$, n és L természetes számok és $a_1, a_2, \ldots, a_L$ egymástól különböző

racionális egész számok, akkor $G(x)=F(f(x))$ irreducibilis-e. Mármost Seres Iván nem kívánja meg, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_L$ számok egymástól különbözőek legyenek, viszont megköveteli, hogy $L=2^m$ $(m \geqq 0)$ alakú, és hogy vagy minden a_i páros szám, vagy minden a_i páratlan szám legyen. Seres a Schönemann—Eisenstein-féle tétel segítségével igazolja, hogy $G(x)=F(f(x))$ irreducibilis. Megjegyzi, hogy ha L nem 2-hatvány, pl. $L=3$ és $a_1=a_2=a_3=a$, akkor $G(x)=(x-a)^6+1=((x-a)^2+1)\cdot((x-a)^4-(x-a)^2+1)$ reducibilis. Bizonyítás nélkül kimondja az alábbi általánosabb tételt is: Ha $F(x)=(f(x))^{2^n}+1$ és $f(x)=\prod_{i=1}^{L}\varphi_i(x)$ ahol mindegyik φ_i-re teljesül:

1. k-adfokú,
2. legmagasabb fokú tagjának együtthatója páratlan,
3. abszolút (más szóval konstans) tagja páratlan,
4. többi tagjának együtthatója páros,
5. $L=2^m$ alakú $(m \geqq 1)$,

akkor $F(x)$ irreducibilis polinom a racionális számtest felett.

4. dolgozatában Seres Iván azt igazolja, hogy $F(x)=(x(x+a))^{2^n}+1$ irreducibilis. Minthogy itt $a=0$ is megengedhető, ennyiben Seres feladata általánosabb a Schur-félénél, minthogy viszont $x(x+a)$ speciálisan másodfokú, ennyiben pedig Seres feladata speciálisabb a Schur-félénél. Az irreducibilitás bizonyításában Seres Iván két esetet tárgyal aszerint, hogy a páratlan vagy páros szám.

5. dolgozata lényegében Seres Iván kandidátusi értekezésének rövidített, német nyelvű változata. I. Schur 1909-ben vetette fel azt a kérdést, Aufgabe 275, Archiv der Math. u. Physik 15 (1909) S. 259, hogy $f(x)=(x-a_1)^2\cdot(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^2+1$ irreducibilis-e. Pólya György és Szegő Gábor könyvében, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, II., Berlin, 1925, S. 137, 347—350, szerepel ennek a feladatnak a megoldása. A. Brauer, R. Brauer és H. Hopf a már említett dolgozatukban azt mutatják meg, hogy

$$f_4(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-a_k)^4+1$$

és

$$f_8(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-a_k)^8+1,$$

ahol az a_k egész számok egymástól különbözők, irreducibilis polinomok. Mármost Seres Iván az 5. dolgozatában négy olyan tételt bizonyít be, amelyek közül az első általánosítja A. Brauer, R. Brauer és H. Hopf eredményét. Érvényesek ugyanis Seres alábbi tételei:

1. Tétel. Ha $a_1, a_2, \ldots, a_M$ egymástól különböző racionális egész számok, $n \geqq 1$ és $M \geqq 1$, akkor

$$F(x)=\prod_{k=1}^{M}(x-a_k)^{2^n}+1$$

irreducibilis a racionális számtest felett.

Érvényes $M \geqq 5$ esetére az általánosabb eredmény is:

2. Tétel. Ha $a_1, a_2, \ldots, a_M$ egymástól különböző racionális egész számok, $f_m(x)$ az m-edik $(m>2)$ primitív körosztási polinom és $P(x)=\prod_{k=1}^{M}(x-a_k)$, akkor $f_m(P(x))$ irreducibilis $M \geqq 5$ értékeire. (Bizonyos $M<5$ értékekre is hasonló igaz.)

Érvényes $M \geqq 6$ esetére a még általánosabb Seres-féle eredmény:

3. Tétel. Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_M$ egymástól különböző racionális egész számok, $Q(x)$ racionális egész együtthatós polinom, amelynek főegyütthatója 1 és $Q(x)$ foka kisebb, mint M, továbbá $f_m(x)$ az m-edik primitív körosztási polinom $(m > 2)$ és $R(x) = Q(x) \cdot \prod_{k=1}^{M} (x - a_k)$. Ekkor $f_m(R(x))$ irreducibilis a racionális számtest fölött.

4. Tétel. Ha $\psi(x) = Q(x) \cdot \prod_{k=1}^{M} (x - a_k) - \xi$ és $\xi = e^{\frac{2\pi i}{m}}$, és ha $Q(x)$-re $a_1, a_2, \ldots, a_M$-re M-re és m-re teljesülnek a 3. tétel feltételei, akkor $\psi(x)$ irreducibilis a Γ racionális számtesthez adjungált $\Gamma(\xi) = \Gamma\left(e^{\frac{2\pi i}{m}}\right)$ algebrai számtest felett.

6. dolgozata Seresnek tartalmilag megegyezik az 5. dolgozattal, a kidolgozás valamivel részletesebb és magyar nyelvű.

7. dolgozatában két tételt bizonyít be: 1. Jelentsen az $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ racionális egész számokat, $F_m(z)$ az m-edik körosztási polinomot, $m > 2$ és $P(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - a_k)$. A $G(x) = F_m(P(x))$ polinom akkor és csak akkor reducibilis a racionális számtest felett, ha $n = 3$, $a_1 < a_2 < a_3$ három egymásután következő egész szám és $F_m(z) = z^4 - z^2 + 1$ a 12. körosztási polinom. 2. Helyettesítsük a K_m m-edik körosztási test felett lineáris tényezőkre bomló $F_m(z)$ m-edik körosztási polinom minden $z - e^{\frac{2k\pi i}{m}}$ tényezőjében, ahol $(k, m) = 1$, z helyébe az $P(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - a_k)$ polinomot, ahol az a_k számok racionális egészek. Ezek a polinomok irreducibilisek, kivéve, ha $F_m(z)$ a 12. körosztási polinom egyik gyöktényezője és $a_1 < a_2 < a_3$ három egymásután következő egész szám.

8. dolgozatában Seres Iván bebizonyítja: Vegyük a 2^{n+1}-edik körosztási polinomot, legyen ez $F_{2^{n+1}}(z)$ és z helyébe helyettesítsük a $P(x) = \prod_{k=1}^{m} (x^2 + a_k^2)$ szorzatot, ahol $0 < |a_1| < |a_2| < \ldots < |a_m|$. Ekkor $G(x) = F_{2^{n+1}}(P(x))$ irreducibilis a Γ racionális számtest felett. Seres Iván megemlíti Környei Imrének egy általános megjegyzését, amely szerint $f(x^2)$ irreducibilis polinom, ha $f(x)$ is irreducibilis, amelynek főegyütthatója 1 és $f(0)$ nem négyzete egyetlen racionális egész számnak sem.

9. dolgozatában igen sok eredményt igazol, ezek közül csak négy tételt ismertetünk. I. Legyenek $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$ racionális egész számok, $m > 5$; $F_n(z)$ az n-edik körosztási polinom és $Q(x)$ racionális egész együtthatós m_1-edfokú polinom, ahol $m_1 \leqq m$. Ekkor

$$S_{n,m}(x) = F_n\left(Q(x) \cdot \prod_{k=1}^{m} (x - a_k)\right),$$

vagy irreducibilis a Γ racionális számtest felett, vagy pedig két egymással egyenlő fokú irreducibilis polinom szorzatára bomlik. II. Legyenek $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$ racionális egész számok, $m \geqq 6$, $Q(x)$ racionális egész együtthatós polinom, amelynek foka kisebb, mint m. Ekkor $Q(x) \cdot \prod_{k=1}^{m} (x - a_k) - e^{\frac{2\pi i}{m}}$ irreducibilis minden olyan K_r r-edik körosztási test felett, amelyre $K_r \supseteq K_n$. III. Ha a jelölések azok, mint a II.

tételnél, akkor $S_{n,m}(x)=F_n\left(Q(x)\cdot\prod_{k=1}^{m}(x-a_k)\right)$ irreducibilis a K_{r^*} test felett, ahol $F_n(z)$ az n-edik körosztási polinom és K_{r^*} az r^*-ik körosztási test, ahol $(r^*, n)=1$ IV. Ha $a_1<a_2<a_3$ racionális egész számok, $F_n(z)$ az n-edik körosztási polinom és $P(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$, akkor $F_n(P(x))$ Γ feletti reducibilitása esetén $n=12$ és $a_3-a_2=a_2-a_1=1$.

10. dolgozatában az alábbi tételt bizonyítja be: Legyenek $a_1<a_2<a_3<\ldots<a_n$ racionális egész számok, $n\geqq 6$, legyen $f(z)$ racionális együtthatós, 1 főegyütthatós polinom, amelynek egyik gyöke γ, ahol γ a Γ_m m-edik körosztási testnek tetszőleges nem valós egysége, és $Q(x)$ olyan racionális egész együtthatós és 1 főegyütthatós polinom, amelyiknek fokszáma kisebb, mint n. Ekkor $F(x)=f\left(Q(x)\cdot\prod_{k=1}^{n}(x-a_k)\right)$ irreducibilis a Γ racionális számtest felett.

11. dolgozatában két tétel szerepel, az első ezt mondja ki: Ha $a_1<a_2<\ldots<a_n$ racionális egész számok, $Q(x)$ racionális egész együtthatós, 1 főegyütthatós polinom, amelynek foka kisebb mint n, és ha $n\geqq 5$, akkor $G(x)=Q(x)\prod_{k=1}^{n}(x-a_k)\pm 1$ irreducibilis Γ felett. A másik tétellel kapcsolatban konkréten felsorol 14 (de nem az összes) olyan $G(x)$ polinomot, amelyek reducibilisek Γ felett, de $n\leqq 4$ és $Q(x)$ foka $<n$.

A 13. dolgozatában Seres Iván két tételt bizonyít be: I. Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ Gauss-féle egész számok, $n\geqq 13$, és $a_i\neq a_k$, ha $i\neq k$. Ekkor $F(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-a_k)+i^r$ irreducibilis a K_4 körosztási test felett ($r=1, 2, 3$ vagy 4). II. Hasonló feltételekkel és jelölésekkel $F_1(x)=Q(x)\cdot\prod_{k=1}^{n}(x-a_k)+i^r$ is irreducibilis K_4 felett, ha $Q(x)$ legfeljebb 13-adfokú, 1 főegyütthatós, Gauss-féle egész együtthatós polinom.

12. dolgozatában Seres Iván biztosítási-matematikai kérdéseket tárgyal. A részletekre nem térünk ki, de megjegyezzük, hogy Berger osztrák matematikus biztosítás-matematikai könyve idézi Seresnek ezt a dolgozatát.

1. dolgozatában, amely a Középiskolai Matematikai és Physikai Lapok 9:8 (1933) 246—249 helyén jelent meg, az alábbi kombinatorikus összefüggést bizonyítja be:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\cdot\binom{2n-2k}{n-k}=4^n.$$

Ezt az összefüggést Jordan Károly közgazdaságtudományi egyetemi matematikaprofesszor említette a Középiskolai Matematikai és Physikai Lapok 7. évfolyam 103. oldalán, mint az 598. feladathoz fűzött megjegyzés részletét. Miként Turán Pál professzor szóban megjegyezte, ez a kombinatorikus egyenlőség a generátorfüggvények elméletével röviden igazolható. Seres Iván (Spitz Iván) igen szellemes bizonyítást ad erre az egyenlőségre, n szerint végzett teljes indukcióval bizonyít, és közben csak $\binom{n}{k}$ eredeti kombinatorikus jelentését használja ki.

Végül, mint érdekességet említem meg Seres Ivánnak az alábbi kombinatorikus feladatát, amelyet a Középiskolai Math. és Phys. Lapok 10 (1934) 279. oldalon vetett fel, és amelyre Fenyvesi Ervin, illetve Arany Dániel adtak egy-egy rekurziós megoldást ugyanazon lapok 11 (1935) kötet 9:10 füzet 257—260 oldalán:

„Hányféleképpen járhatunk fel a $2n$ lépcsőfokkal rendelkező létre tetejére, ha legfeljebb 2 lépcsőfokot lépünk? Hányféleképpen, ha legfeljebb 3 lépcsőfokot lépünk?"

ЖИЗНЬ И НАУЧНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ ИВАНА ШЕРЕШ

Ф. САС

LIFE AND MATHEMATICAL WORK OF I. SERES

F. SZÁSZ

SZINGULÁRIS HOMOLÓGIÁK II.

VISKI MÁRIA

11. GÖMBFELÜLET HOMOLÓGIACSOPORTJAI, GÖMB RELATÍV HOMOLÓGIACSOPORTJAI AZ ŐT HATÁROLÓ GÖMBFELÜLETRE VONATKOZTATVA

Jelöljük E^n-nel azt az n-dimenziós egységgömböt, amely az R^n n-dimenziós euklideszi térben helyezkedik el és középpontja megegyezik a tér koordinátarendszerének kezdőpontjával. Azaz E^n azon $p=(z_1, z_2, \ldots, z_n)\in R^n$ pontok összessége, amelyekre a $z_1^2+z_2^2+\ldots+z_n^2\leqq 1$ összefüggés teljesül. S^{n-1} pedig legyen E^n topológiai határa, azaz az $(n-1)$-dimenziós gömbfelület. Így S^{n-1} azon $p\in R^n$ pontok halmaza, amelyekre a $z_1^2+z_2^2+\ldots+z_n^2=+1$ egyenlőség teljesül. Megjegyezzük, hogy értelmezésünk szerint E^1 az $E^1=[-1, 1]$ zárt intervallum, S^0 pedig ennek az intervallumnak két végpontja. E^n-t és S^{n-1}-et is az R^n által indukált topológiával látjuk el. Mivel a fenti értelmezés csak akkor helyes, ha $n\geqq 1$, kiterjeszthetjük $n=0$ esetére is az értelmezést. E^0 legyen az egyetlen pontból álló tér, S^{-1} pedig E^0 topológiai határa, azaz az üres halmaz. Meg fogjuk határozni a $H_r(E^n)$ és a $H_r(E^n, S^{n-1})$ homológiacsoportokat $(n=0, 1, \ldots)$. A meghatározás ugyanazokkal a módszerekkel fog történni, mint amelyeket az előző pontban alkalmaztunk. Mivel $r<0$ esetén minden szinguláris homológiacsoport nullcsoport, a továbbiakban mindig fel fogjuk tételezni, hogy $r\geqq 0$.

(22) TÉTEL: a) *$n>0$ esetén, ha $r\neq 0, n$ $H_r(S^n)$ nullcsoport, ha pedig $r=0, n$, akkor végtelen ciklikus csoport; $n=0$ esetén, ha $r\neq 0$ $H_r(S^0)$ nullcsoport, $H_0(S^0)$ pedig 2-rangú szabad Abel-csoport.*

b) *$n\geqq 0$ esetén, ha $r\neq n$ $H_r(E^n, S^{n-1})$ nullcsoport, $H_n(E^n, S^{n-1})$ pedig végtelen ciklikus csoport.*

Bizonyítás: Először a b) állítást fogjuk belátni. A tétel $n=0$-ra ekvivalens a (11) tétellel, $n=1$ esetén is helyes az állítás, hiszen $H_r(E^1, S^0)$ meghatározása az előző pont 1. példája volt. Feltehetjük tehát, hogy $n>1$. Ha $n>1$ és $r=0$ $H_0(E^n, S^{n-1})$ nullcsoport a (14) lemma szerint. Legyen tehát $n>1$, $r>0$. A további okoskodások az (E^n, S^{n-1}) pár homológ sorának felhasználásával történnek. A homológ sorban $H_r(E^n)$ minden egész r-re ismert, hiszen E^n homotóp ekvivalens a ponttal (6. pont 1. példa). Ha $r=1$ a homológ sor megfelelő szakasza:

$$\ldots \leftarrow H_0(E^n, S^{n-1}) \xleftarrow{j_*} H_0(E^n) \xleftarrow{i_*} H_0(S^{n-1}) \xleftarrow{\partial} H_1(E^n, S^{n-1}) \leftarrow H_1(E^n) \leftarrow \ldots .$$

Mivel E^n ívszerűen összefüggő és $n-1>0$ miatt S^{n-1} is ívszerűen összefüggő, így a (13) lemma szerint $H_0(E^n)$ is és $H_0(S^{n-1})$ is végtelen ciklikus csoport. Mivel $H_1(E^n)$ nullcsoport, és a (14) lemmából azt kapjuk, hogy $H_0(E^n, S^{n-1})$ is nullcsoport, alkalmazhatjuk a rangok összeadására vonatkozó (18) lemmát. Nyertük, hogy $\varrho(H_1(E^n), S^{n-1})=0$, ami a (20) lemmát is tekintetbe véve azt jelenti, hogy $H_1(E^n, S^{n-1})$ nullcsoport, ha $n>1$.

Feltehetjük tehát, hogy $n, r > 1$ és akkor $H_r(E^n)$ és $H_{r-1}(E^n)$ is nullcsoport. Ha a homológ sor megfelelő szakaszát tekintjük:

$$\ldots \leftarrow H_{r-1}(E^n) \leftarrow H_{r-1}(S^{n-1}) \overset{\partial}{\leftarrow} H_r(E^n, S^{n-1}) \leftarrow H_r(E^n) \leftarrow \ldots$$

és alkalmazzuk a (21) lemmát egy izomorfizmust nyertünk.

$$\partial : H_r(E^n, S^{n-1}) \approx H_{r-1}(S^{n-1}), \quad \text{ha} \quad r, n > 1 \quad \text{(I)}.$$

A homológ sorból ezen az izomorfizmuson kívül mást nem tudunk leolvasni, így szükségünk lesz más segédeszközökre is.

Tekintsük S^{n-1} következő részhalmazait:

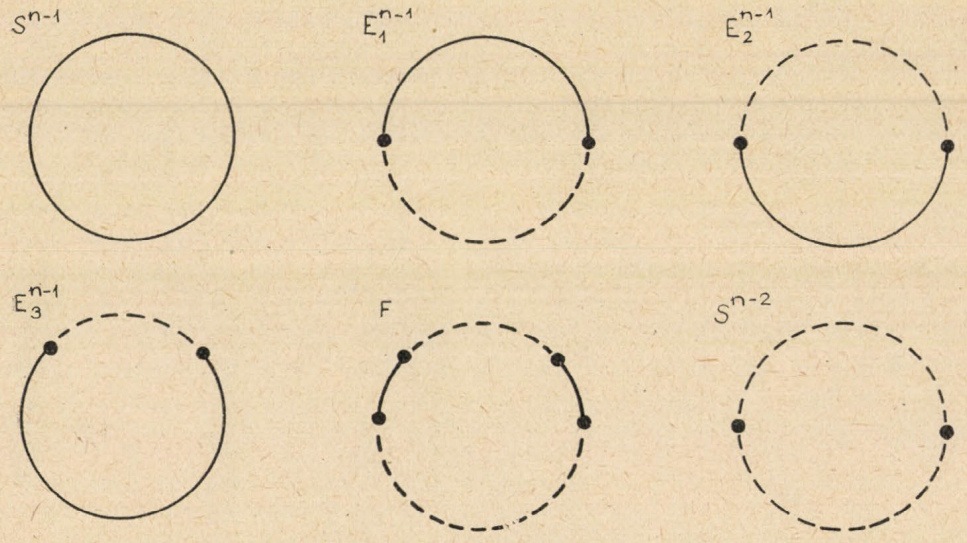
$$E_1^{n-1} = \{p : p = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in S^{n-1}, z_n \geqq 0\},$$

$$E_2^{n-1} = \{p : p = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in S^{n-1}, z_n \leqq 0\},$$

$$E_3^{n-1} = \{p : p = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in S^{n-1}, z_n \leqq \varepsilon, 0 < \varepsilon < 1\},$$

$$F = E_1^{n-1} \cap E_3^{n-1}.$$

Mivel Int E_2^{n-1} nyílt halmaz és lezárása része Int E_3^{n-1}-nek, alkalmazhatjuk a kivágási tételt (15. ábra $n=2$ esetére).



15. ábra

Alkalmazása után a következő izomorfizmust nyertük:

$$H_q(S^{n-1}, E_3^{n-1}) \approx H_q(E_1^{n-1}, F) \quad \text{minden egész } q\text{-ra} \quad \text{(II)}.$$

Definiálunk most egy f leképezést, amely a $p = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in R^n$ pontnak a $p' = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, 0)$ pontot felelteti meg. Ez a leképezés R^n-t egyik $(n-1)$-dimenziós alterére vetíti. Ennek a leképezésnek az (E_1^{n-1}, F) párra való megszorí-

tása egy $\tilde{f}$: $(E_1^{n-1}, F) \to (E^{n-1}, f(F))$ homeomorfizmus, és így teljesül a következő izomorfia:

$$H_q(E_1^{n-1}, F) \approx H_q(E^{n-1}, f(F)) \quad \text{minden egész } q\text{-ra} \quad \text{(III)}.$$

Igaz azonban a

$$H_q(E^{n-1}, f(F)) \approx H_q(E^{n-1}, S^{n-2}) \quad \text{minden egész } q\text{-ra} \quad \text{(IV)}$$

izomorfia is. Ezt az összefüggést megkapjuk, ha az $(E^{n-1}, f(F))$ és az $(E^{n-1}, S^{n-2}$ párra alkalmazzuk a (10′) tételt ugyanolyan módon, mint a 6. pont 3. példájában.

Összefoglalva a II, III, IV izomorfiákat egy új izomorfiát nyertünk:

$$H_q(E^{n-1}, S^{n-2}) \approx H_q(S^{n-1}, E_3^{n-1}) \quad \text{minden egész } q\text{-ra} \quad \text{(V)}.$$

Tehát $H_q(E^{n-1}, S^{n-2})$ meghatározásához elég $H_q(S^{n-1}, E_3^{n-1})$-et meghatározni. Tekintsük az (S^{n-1}, E_3^{n-1}) pár homológ sorát:

$$\ldots \leftarrow H_{q-1}(E_3^{n-1}) \xleftarrow{\partial} H_q(S^{n-1}, E_3^{n-1}) \xleftarrow{j_*} H_q(S^{n-1}) \leftarrow H_q(E_3^{n-1}) \leftarrow \ldots .$$

Ha $q>1$, akkor, mivel E_3^{n-1} homeomorf E^{n-1}-gyel, $H_{q-1}(E_3^{n-1})$ és $H_q(E_3^{n-1})$ null csoport, így j_* izomorfizmus. Ha $q=1$ szintén izomorfizmus a j_*, ugyanis a

$$\ldots \leftarrow H_0(S^{n-1}) \xleftarrow{i_*} H_0(E_3^{n-1}) \xleftarrow{\partial} H_1(S^{n-1}, E_3^{n-1}) \xleftarrow{j_*} H_1(S^{n-1}) \leftarrow H_1(E_3^{n-1}) \leftarrow \ldots$$

homológ sorban $H_1(E_3^{n-1})$ nullcsoport és így j_* monomorfizmus. Epimorfizmus is j_* hiszen i_* a (15) lemma szerint izomorfizmus, így $0=\operatorname{Ker} i_*=\operatorname{Im}\partial$, és ezért $H_1(S^n, E_3^{n-1})=\operatorname{Ker}\partial=\operatorname{Im} j_*$. Igaz tehát a

$$j_*: H_q(S^{n-1}) \approx H_q(S^{n-1}, E_3^{n-1}) \quad \text{ha} \quad q>0,\ n>1 \quad \text{(VI)}$$

izomorfizmus. Ezt $q=r-1$ esetére alkalmazhatjuk, hiszen $r-1>0$, VI-ot összekapcsolva az V. izomorfizmussal kapjuk:

$$H_{r-1}(S^{n-1}) \approx H_{r-1}(E^{n-1}, S^{n-2}), \quad \text{ha} \quad n, r>1 \quad \text{(VII)}.$$

Az I. izomorfiával összehasonlítva ez egy

$$H_r(E^n, S^{n-1}) \approx H_{r-1}(E^{n-1}, S^{n-2}), \quad \text{ha} \quad n-1, r-1>0$$

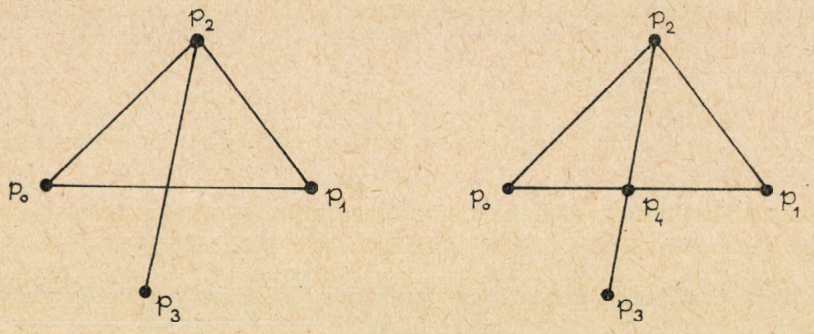
redukciós izomorfizmust eredményez. Ennek segítségével könnyen beláthatjuk a tétel b) részét. Ha $r=n$, akkor $H_r(E^n, S^{n-1}) \approx H_1(E^1, S^0)$, amiről már tudjuk, hogy végtelen ciklikus csoport. Ha $r<n$, akkor $H_r(E^n, S^{n-1}) \approx H_1(E^{n-r+1}, S^{n-r})$ és itt a jobb oldali csoport nullcsoport, hisz $n-r+1>1$. Végül $r>n$ esetén $H_r(E^n, S^{n-1}) \approx H_{r-n+1}(E^1, S^0)$ adódik, és az utóbbi csoport itt is nullcsoport, mert $r-n+1 \neq 1$.

A tétel a) része: Legyen $n>0$, $r=0$, akkor alkalmazhatjuk a (13) lemmát, hiszen S^n ívszerűen összefüggő. Ha pedig n, $r>0$, használhatjuk a következő összefüggést: $H_r(S^n) \approx H_{r+1}(E^{n+1}, S^n)$, ha $n+1, r+1>1$, amit az I izomorfizmusból kaptunk. Végül $H_r(S^0)$ meghatározása segítséget nyújt a (16) lemma. Ezzel a (22) tételt teljesen bebizonyítottuk.

Szimpliciális komplexusnak nevezzük az R^m m-dimenziós euklideszi tér euklideszi szimplexeinek egy véges $\mathcal{K}$ halmazát, amelyre teljesülnek a következő feltételek:

1. *Ha $T^r \in \mathcal{K}$, akkor minden lapja (így minden csúcsa is) eleme K-nak.*

2. *Ha $T_1^{r_1}, T_2^{r_2} \in \mathcal{K}$, akkor $T_1^{r_1}$ és $T_2^{r_2}$ vagy diszjunkt, vagy a metszetük lapja mind a kettőnek (azaz $\mathcal{K}$ szimplexei szabályosan csatlakoznak).*



16. ábra

A fogalom szemléltetésére tekintsük a 16. ábrát (az ábra síkban fekvő). A 16a ábra szimplexei halmaza legyen $|p_0, p_1, p_2|$, $|p_3, p_2|$, valamint ezek lapjai; ez a halmaz nem alkot szimpliciális komplexust. Ellenben a 16b ábra szimplexhalmaza, amelynek szimplexei: $|p_0, p_4, p_2|$, $|p_4 p_1 p_2|$, $|p_2 p_4|$, $|p_3 p_4|$ és ezeknek a lapjai, már szimpliciális komplexust alkot.

Az $\mathcal{L}$ szimpliciális komplexusról azt mondjuk, hogy *részkomplexusa* $\mathcal{K}$-nak, ha $\mathcal{L}$ részhalmaza $\mathcal{K}$-nak.

Minden $\mathcal{L}$ szimpliciális komplexus meghatároz egy K topologikus teret: a tér pontjai a $\mathcal{K}$-t alkotó szimplexek pontjainak egyesítése, topológiája pedig az R^m által indukált topológia. K-t a $\mathcal{K}$ *testének* fogjuk nevezni. Azt a topologikus teret, amely valamely szimpliciális komplexus testeként állítható elő *poliéder*nek hívjuk. Ha pedig egy K poliéderről beszélünk, mindig egy adott $\mathcal{K}$ szimpliciális komplexus testének gondoljuk. Így nem okoz félreértést, ha a K poliéder helyett sok esetben a K szimpliciális komplexus nevet használjuk.

Szimpliciális pár az olyan (K, L) topologikus pár, ahol K egy $\mathcal{K}$ szimpliciális komplexus teste, L pedig olyan $\mathcal{L}$ szimpliciális komplexus teste, amely részkomplexusa $\mathcal{K}$-nak.

Poliéder dimenziója: a poliédert előállító $\mathcal{K}$ szimpliciális komplexus szimplexei dimenziójának legnagyobbika. Poliéder dimenziójának jelölésére a $\dim K$ jelet használjuk.

Szükségünk lesz arra, hogy két speciális poliéder számára külön jelöléseket vezessünk be. $\dot{T}^n$ legyen az a poliéder, amelyet a T^n euklideszi szimplex valódi lapjai (azaz T^n-től különböző lapjai) alkotta szimpliciális komplexus határoz meg. K_n pedig az az n-dimenziós poliéder, amely a K poliéderből úgy keletkezett, hogy $\mathcal{K}$-ból csupán azokat a szimplexeket választottuk ki, amelyeknek a dimenziója nem haladta túl n-et. (Az, hogy $\dot{T}^n$ és K_n poliéder, triviális) K_n neve K n-dimenziós váza, $\dot{T}^n$ T^n határa.*

* Így T^n a T^n poliéder $(n-1)$-dimenziós váza.

Ennek a pontnak a célja poliéderek homológiacsoportjának a vizsgálata lesz. Először a (K_n, K_{n-1}) szimpliciális pár homológia-csoportjait fogjuk meghatározni.

(23) TÉTEL: *Legyen K egy szimpliciális komplexus, amelynek n-dimenziós váza K_n, $(n-1)$-dimenziós váza K_{n-1}, T_i^n legyen K-nak tetszőleges n-dimenziós szimplexe $\dot{T}_i^n$ legyen T_i^n határa, végül π^n jelölje K n-dimenziós szimplexei számát. Ha $n<0$ vagy $n>\dim K$, akkor $H_r(K_n, K_{n-1})$ minden r esetén nullcsoport; ugyancsak nullcsoport, ha $0 \leqq n \leqq \dim K$, de $r \neq n$. Ha $r=n$ és $0 \leqq n \leqq \dim K$, akkor $H_n(K_n, K_{n-1})$ izomorf a $\sum_{i=1}^{\pi^n} H_n(T_i^n, \dot{T}_i^n)$ direkt összeggel. Ezt az izomorfizmust megkapjuk az $l_l: (T_i^n, \dot{T}_i^n) \to (K_n, K_{n-1})$ injekció segítségével. Azaz be fogjuk látni, hogy minden $\bar{\alpha} \in H_n(K_n, K_{n-1})$ egyértelműen felírható a $\sum_{i=1}^{\pi^n} l_{i*}\bar{\alpha}_i$ alakban, ahol $\bar{\alpha}_i \in H_n(T_i^n, \dot{T}_i^n)$ és $i=1, 2, \ldots, \pi^n$.*

Bizonyítás: 1. Ha $n<0$ a (K_n, K_{n-1}) pár a $(0, 0)$ párrá, ha $n>\dim K$, akkor a (K, K) párrá válik. Így a megfelelő csoportok nullcsoport volta következik abból az általánosabb tényből, hogy bármely (X, X) párra minden r esetén $H_r(X, X)=0$. Tekintsük ugyanis az (X, X) pár homológ sorát:

$$\ldots \leftarrow H_{r-1}(X) \xleftarrow{i'_*} H_{r-1}(X) \xleftarrow{\partial} H_r(X, X) \xleftarrow{j_*} H_r(X) \xleftarrow{i_*} H_r(X) \leftarrow \ldots .$$

Jelen esetben $i: X \to X$ injekció azonosság és így i_* és i'_* izomorfizmus. Így tehát i_* epimorfizmus, i'_* monomorfizmus. Azaz:

$$\operatorname{Ker} j_* = \operatorname{Im} i_* = H_r(X), \quad \text{ez azt jelenti:} \quad \operatorname{Im} j_* = 0.$$

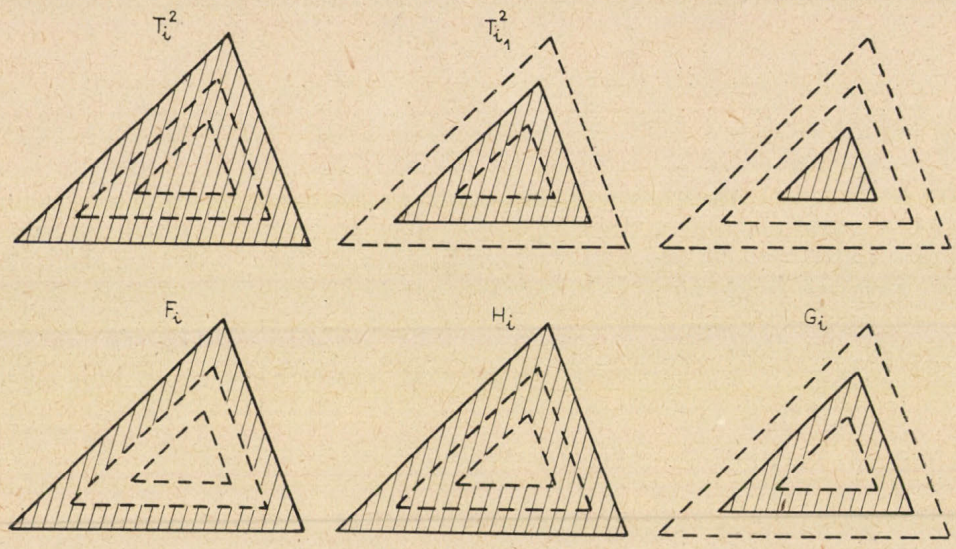
$$\operatorname{Im} \partial = \operatorname{Ker} i'_* = 0, \quad \text{ez azt jelenti:} \quad \operatorname{Ker} \partial = H_r(X, X).$$

Végül, ha felhasználjuk az $\operatorname{Im} j_* = \operatorname{Ker} \partial$ összefüggést is $H_r(X, X)$ valóban nullcsoport lesz.

2. Feltételezhetjük tehát, hogy $0 \leqq n \leqq \dim K$. Legyen T_i^n a K komplexus tetszőleges szimplexe, T_{i1}^n jelölje azt a szimplexet, amely a T_i^n-ből $\frac{2}{3}$ arányú kicsinyítéssel, T_{i2}^n pedig az a szimplex, amely T_i^n-ből $\frac{1}{3}$ arányú kicsinyítéssel keletkezett és a kicsinyítés centruma mind a két esetben T_i^n súlypontja (17. ábra $n=2$-re).

Legyen továbbá $F_i = T_i^n - T_{i1}^n$, $G_i = T_{i1}^n - T_{i2}^n$, $H_i = T_i^n - T_{i2}^n$, $F = K_{n-1} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\pi^n} F_i\right)$, $G = \bigcup_{i=1}^{\pi^m} G_i$, $H = K_{n-1} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\pi^n} H_i\right)$. Be fogjuk látni, hogy a (K_n, K_{n-1}) és (K_n, H) párok homológiacsoportjai izomorfak és ezt az izomorfizmust a $j: (K_n, K_{n-1}) \to (K_n, H)$ injekció indukálja. Az az $f: (K_n, H) \to (K_n, H)$, amelyet úgy definiálunk, hogy $p \in K_{n-1}$ esetén $f(p)$ az identitás, $p \in T_{i2}^n$ esetén T_i^n súlypontjából történő 3 arányú nagyítás, $p \in H_i$ esetén T_i^n súlypontjából $\dot{T}_i^n$-re történő vetítés, $i=1, 2, \ldots, \pi^n$; és az a $\mathcal{H}: (K_n, H) \times I \to (K_n, H)$ homotópia, amelyet a $\mathcal{H}(p, t) = tp + (1-t)f(p)$ képlet definiál ($p \in K_n$), ez az f és $\mathcal{H}$ eleget tesz a (10′) tétel feltételeinek és így j izomorfizmust indukál. Mivel F, H nyílt halmazai K_n-nek (komplementere a zárt $\bigcup_{i=1}^{\pi^n} T_{i1}^n$, $\bigcup_{i=1}^{\pi^n} T_{i2}^n$-nek) és $\bar{F} \subset H$, a kivágási tétel értelmében a $k: (K_{n-1}, G) \to (K_r, H)$ injekció is izomorfizmust indukál. Innen azonnal adódik az, hogy $n \neq r$ esetén $H_r(K_n, K_{n-1})$ nullcsoport. Hiszen $(jk)_*: H_r(K_n - F, G) \to H_r(K_n, K_{n-1})$ és $K_n - F$, valamint G felbomlik az $\bigcup_{i=1}^{\pi^n} T_{i1}$, illetve $\bigcup_{i=1}^{\pi^n} G_i$ diszjunkt

halmazok egyesítésére, és ez a felbontás eleget tesz a 16. lemma követelményeinek. Azt kaptuk tehát, hogy $H_r(K_n, K_{n-1}) \approx \sum_{i=1}^{\pi^n} H_r(T_{i_1}^n, G_i)$, de ismét a (10′) tétel segítségével igaz a $H_r(T_{i_1}^n, G_i) \approx H_r(T_{i_1}^n, \dot{T}_{i_1}^n)$ is, azaz $H_r(K_n, K_{n-1}) \approx \sum_{i=1}^{\pi^n} H_r(T_{i_1}^n, \dot{T}_{i_1}^n)$. Így tehát az előző 11. pont segítségével minden r-re ismerjük $H_r(K_n, K_{n-1})$-et: $r \neq n$-re nullcsoport, $r = n$ esetén pedig π^n rangú szabad Abel-csoport.



17. ábra

3. Hátra van még annak kimutatása, hogy a $H_n(K_n, K_{n-1}) \approx \sum_{i=1}^{\pi^n} H_n(T^n, \dot{T}_i^n)$ izomorfizmus az $l_i: (T_i^n, \dot{T}_i^n) \to (K_n, K_{n-1})$ injekciók segítségével is előállítható. A bizonyítások során l_{i*} mellett még szükségünk lesz néhány izomorfizmusra, amelyek a következő injekciókkal vannak indukálva:

$$k: (K_n - F, G) \to (K_n, H), \qquad k_i: (T_{i_1}^n, G_i) \to (T_i^n, H_i),$$

$$j: (K_n, K_{n-1}) \to (K_n, H), \qquad j_i: (T_i^n, \dot{T}_i^n) \to (T_i^n, H_i).$$

Ezek közül k_* és j_* izomorfizmusát már a bizonyítás 2. részében beláttuk, k_{i*} mint könnyen látható kivágás. j_{i*} izomorfizmus volta pedig a (10′) tétel segítségével adódik; a tételt kielégítő f_i-t és $\mathscr{H}_i$-t kapunk, ha 2. részben szereplő f-et és $\mathscr{H}$-t csak a $(T_i^n, \dot{T}_i^n)$ páron tekintjük. Megjegyezzük még, hogy fel fogjuk használni a következő elemi tényt: Ha $E = \bigcup_{s=1}^{m} E_s$, $F = \bigcup_{s=1}^{m} F_s$ és minden E_s páronként diszjunkt E-ben zárt halmaz, továbbá $F_s \subset E_s$; $s = 1, 2, \ldots, m$, akkor

$$Z_r(E, F) = \sum_{s=1}^{m} Z_r(E_s, F_s), \quad B_r(E, F) = \sum_{s=1}^{m} B_r(E_s, F_s)$$

minden r-re. Belátáshoz csak arra van szükség, hogy bármely $\sigma: \Delta_r \to E$ szinguláris szimplexnek csak egy E_s-ben lehetnek képpontjai (különben ellentétbe jutnánk Δ_r összefüggő voltával), és így minden $\omega \in C_r(E, F)$ egyértelműen felírható $\sum_{s=1}^{m} \omega_s$ alakban, ahol $\omega_s \in C_r(E_s, F_s)$. Ezek után hozzáláthatunk tételünk hiányzó részének bizonyításához.

a) Először belátjuk, hogy minden $\bar{\alpha} \in H_n(K_n, K_{n-1})$ felírható a $\sum_{i=1}^{\pi^n} l_{i*}\bar{\alpha}$ alakban, ahol $\bar{\alpha}_i \in H_n(T_i^n, \dot{T}_i^n)$. Mivel az l_{i*} homomorfizmust $(i = 1, 2, \ldots, \pi^n)$ az l_i injekció indukálta elég azt igazolni, hogy minden $\bar{\alpha}$ homológiaosztály tartalmaz egy $\sum_{i=1}^{\pi^n} \alpha_i$, $\alpha_i \in \bar{\alpha}_i$ alakú láncot. $\alpha \in \bar{\alpha}$ tehát K_n-beli ciklus mod K_{n-1}, de $K_{n-1} \subset H$ miatt felfoghatjuk K_n-beli ciklusnak is mod H. k_* epimorfizmus és így létezik $\alpha' \in Z_n(K_n - F, G)$, amelyre $\alpha \sim \alpha' \pmod{H}$, azaz

$$\alpha = \alpha' + \beta + d\gamma, \quad \beta \in C_n(G), \quad \gamma \in C_{n+1}(K_n) \quad \text{I.}$$

Mivel $K_n - F$ és G felbomlik a páronként diszjunkt $T_{i_1}^n$, illetve G_i halmazok egyesítésére $(i = 1, 2, \ldots, \pi^n)$, előzetes megjegyzésünk értelmében $\alpha' = \sum_{i=1}^{\pi^n} \alpha_i'$, ahol α_i' $T_{i_1}^n$-beli ciklus mod G_i, ezt a k_i injekció értelmében felfoghatjuk T_i^n-beli ciklusnak mod H_i, de ez j_{i*} epimorfizmus volta miatt azt jelenti, hogy $\alpha_i' = \alpha_i + \beta_i' + d\gamma_i'$, ahol $\beta_i' \in C_n(H_i)$, $\gamma_i' \in C_{n+1}(T_i^n)$. A most kapott egyenlőséget összegezve 1-től π^n-ig, és az I egyenlőségbe helyettesítve a következő egyenlőséget nyerjük:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\pi^n} \alpha_i + \left(\beta + \sum_{i=1}^{\pi^n} \beta_i'\right) + \left(d\gamma + \sum_{i=1}^{\pi^n} d\gamma_i'\right), \quad \text{de} \quad \sum_{i=1}^{\pi^n} d\gamma_i' = d \sum_{i=1}^{\pi^n} \gamma_i'$$

és

$$\left(\beta + \sum_{i=1}^{\pi^n} \beta_i'\right) \in C_n(H), \quad \left(\sum_{i=1}^{\pi^n} \gamma_i' + \gamma\right) \in C_{n+1}(K_n).$$

Ez pedig azt jelenti, hogy $\alpha \sim \sum \alpha_i \pmod{H}$, ha pedig tekintetbe vesszük, hogy $\alpha - \sum \alpha_i$ K_n-beli ciklus mod K_{n-1} j_* injekcióval van indukálva, és j_* monomorfizmus, akkor azt nyerjük, hogy $\alpha - \sum \alpha_i \sim 0 \pmod{K_{n-1}}$.

b) Be fogjuk látni, hogy az a)-ban leírt előállítás egyértelmű. Ehhez azt kell igazolni, hogy $\alpha \in B_n(K_n, K_{n-1})$ esetén az a) részben α-hoz megkonstruált $\alpha = \sum_{i=1}^{\pi^n} \alpha_i$ olyan, hogy $\alpha_i \in B_n(T_i^n, \dot{T}_i^n)$ teljesül. Nézzük végig az a) részbeli konstrukció lépéseit, megtartva az ott szereplő jelöléseket is! $\alpha' \in B_n(K_n - F, G)$ igaz, hiszen k_* monomorfizmus is. Ez az a) rész előtti megjegyzés értelmében azt is jelenti, hogy $\alpha_i' \in B_n(T_{i_1}^n, G_i)$. Sőt $T_{i_1}^n \subset T^n$, $G_i \subset H_i$ miatt $\alpha_i' \in B_n(T_i^n, H_i)$ is teljesül. Végül α_i j_{i*} epimorfizmusa segítségével adódott az a) részben, azaz α_i-t éppen úgy választottuk, hogy $j_{i*}\bar{\alpha}_i = \bar{\alpha}_i'$ legyen ($\bar{\alpha}_i$ és $\bar{\alpha}_i'$ a megfelelő homológiaosztályok); j_{i*} azonban monomorfizmus is és így $\alpha_i \in B_n(T_i^n, \dot{T}_i^n)$ valóban igaz.

Ezzel a (23) *tételt bebizonyítottuk.* (Megjegyezzük, hogy 2. és 3. rész okoskodásai $n = 1$ esetén is érvényesek voltak.)

A következő lemma a (23) tétel következménye.

(24) LEMMA: *Ha K m-dimenziós poliéder, akkor $r > m$ esetén $H_r(K)$ nullcsoport.*

A lemma bizonyítása: Legyen $1 \leqq q \leqq m$ és tekintsük a (K_q, K_{q-1}) szimpliciális pár homológ sorát (K_α $\alpha = q$, $q-1$ az α-dimenziós váz):

$$\ldots \leftarrow H_r(K_q, K_{q-1}) \rightarrow H_r(K_q) \overset{i_*^{q-1}}{\leftarrow} H_r(K_{q-1}) \leftarrow \ldots .$$

Mivel $r > q$ teljesül $H_r(K_q, K_{q-1})$ a (23) tétel miatt nullcsoport, és a homológ sor egzaktságát is felhasználva azt kaptuk, hogy $1 \leqq q \leqq m$ esetén i_*^{q-1} epimorfizmus. $H_r(K_0)$ azonban nullcsoport, hisz K_0, azaz a nulldimenziós váz véges sok pontból áll és $r > 0$, így i_*^{q-1} epimorfizmus volta miatt minden $H_r(K_q)$ is nullcsoport, ha $1 \leqq q \leqq m < r$ fennáll. Speciálisan $H_r(K_m)$ is, de K_m megegyezik K-val és így a lemmánkat bebizonyítottuk.

A következő tétel meg fogja adni $H_n(K_n, K_{n-1})$ generátorelemeinek „könnyen" meghatározható reprezentánsait.

(25) TÉTEL: *Ha K egy szimpliciális komplexus, amelynek n-dimenziós váza K_n, $(n-1)$-dimenziós váza K_{n-1}, továbbá $T_i^n = |p_0^i p_1^i \ldots p_n^i|$ K tetszőleges szimplexe ($i = 1, 2, \ldots, \pi^n$, π^n K n-dimenziós szimplexei száma), akkor*

a) *Minden $(p_{s_0}^i p_{s_1}^i \ldots p_{s_n}^i)$ lineáris szimplex,[1] ahol $s_0, s_1, \ldots, s_n$ a $0, 1, \ldots, n$ indexek tetszőleges permutációja és $i = 1, 2, \ldots, \pi^n$; a $H_n(K_n, K_{n-1})$ csoport valamely generátorelemének reprezentánsa.*

b) 1. *Ha $i \neq k$; $i, k = 1, 2, \ldots, \pi^n$, akkor $(p_{s_0}^i p_{s_1}^i \ldots p_{s_n}^i)$ és $(p_{t_0}^k p_{t_1}^k \ldots p_{t_n}^k)$ lineáris szimplexek különböző homológiaosztályokhoz tartoznak (itt $t_0, t_1, \ldots, t_n$ szintén a $0, 1, \ldots, n$ indexek valamely permutációja).* 2. *Ha $s_0, s_1, \ldots, s_n$ a $0, 1, \ldots, n$ indexek páros permutációja, akkor $(p_0 p_1 \ldots p_n)$ és $(p_{s_0} p_{s_1} \ldots p_{s_n})$ ugyanazon homológiaosztályhoz tartoznak, ha pedig a permutáció páratlan $(p_0 p_1 \ldots p_n)$ és $-(p_{s_0} p_{s_1} \ldots p_{s_n})$ tartoznak közös homológiaosztályba.*

Az a) *rész bizonyítása.* Elég lesz arra az esetre szorítkozni a (23) tétel miatt, amikor a szimpliciális komplexus egy $T^n = |p_0 p_1 \ldots p_n|$ n-dimenziós euklideszi szimplex és bebizonyítani, hogy bármely $(p_0 p_1 \ldots p_n)$ lineáris szimplex $H_n(T^n, \dot{T}^n)$ valamely generátorelemének reprezentánsa. Teljes indukcióval fogjuk bizonyítani. $n = 1$-re csak két lineáris szimplex létezik: $(p_0 p_1)$ és $(p_1 p_0)$, ha alkalmazzuk a σ_0: $\Delta_0 \rightarrow p_0$ és σ_1: $\Delta_0 \rightarrow p_1$ jelöléseket $d(p_0 p_1) = \sigma_1 - \sigma_0$ és $d(p_1 p_0) = \sigma_0 - \sigma_1$ teljesülése miatt a 10. pont 5a példája szerint $(p_0 p_1)$ és $(p_1 p_0)$ valóban $H_1(T^1, \dot{T}^1)$ generátorelemének reprezentánsát adja. (Triviális kiegészítés az 5a példához: ha $\sigma_0 - \sigma_1$ generátorelemе a Ker i_* végtelen ciklikus csoportnak, akkor $\sigma_1 - \sigma_0$ is az).

Mivel fennáll ∂: $H_n(T^n, \dot{T}^n) \approx H_{n-1}(\dot{T}^n)$ ha $n > 1$ (lásd a 11. pont I izomorfizmust), $(p_0 p_1 \ldots p_n)$ $H_n(T, \dot{T}^n)$ generátorelemét reprezentálja, ha $d(p_0 p_1 \ldots p_n)$ $H_{n-1}(\dot{T}^n)$ generátorelemét reprezentálja. Létesítsünk egy f: $\dot{T}^n \rightarrow S^{n-1}$ homeomorfizmust (S^{n-1} az $(n-1)$-dimenziós gömbfelület), amely olyan tulajdonságú (15. ábra), hogy a $T_0^{n-1} = |p_1 p_2 \ldots p_n|$ szimplexet E_1^{n-1}-re képezi le $\dot{T}_0^{n-1}$ képe pedig S^{n-2} (ilyen homeomorfizmus triviális módon megadható). Mivel $d(p_0 p_1 \ldots p_n) = (p_1 p_2 \ldots p_n) + \alpha$, és alkalmazva az $fd(p_0 p_1 \ldots p_n) = \gamma$, $f(p_1 p_2 \ldots p_n) = \gamma_1$ és $f\alpha = \gamma$ jelöléseket, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ ciklus S^{n-1}-en, hisz ciklus képe, így $\gamma \in Z_n(S^{n-1}, E_3^{n-1})$ is teljesül. Indukciós feltevésünk miatt $(p_1 p_2 \ldots p_n)$ $H_{n-1}(T_0^{n-1}, \dot{T}_0^{n-1})$ generátorelemét reprezentálja, de mivel f_* izomorfizmus γ_1 generátorelemet reprezentál $H_{n-1}(E_1^{n-1}, S^{n-2})$-ben is, a sokszor használt (és ezért most nem részletezett) (10′) tétel segítségével adódik,

[1] Lineáris szimplex definíciója megtalálható I. rész 2. pontjában.

hogy γ_1 generátorelemet reprezentál $H_{n-1}(E_1^{n-1}, F)$-ben is. Sőt, mivel a 11. pont II. izomorfizmusát kivágás indukálta γ_1 generátorelem reprezentáns $H_{n-1}(S^{n-1}, E_3^{n-1})$-ben is. Triviálisan teljesül azonban a $\gamma_1+\gamma_2 \sim \gamma_1$ összefüggés S^{n-1}-en mod E_3^{n-1}, ami azt jelenti, hogy $\gamma_1+\gamma_2$ is $H_{n-1}(S^{n-1}, E_3^{n-1})$ generátorelemét reprezentálja. Tekintsük most a 11. pont VI. izomorfizmusát, ezt a j: $S^{n-1} \to (S^{n-1}, E_3^{n-1})$ injekció indukálta, így a γ-t tartalmazó homológiaosztály $H_{n-1}(S^{n-1}, E_3^{n-1})$-ben a $H_{n-1}(S^{n-1})$-beli γ-t tartalmazó homológiaosztály képe, és mivel izomorfizmusnál generátorelem csak generátorelem képe lehet, a γ-t tartalmazó homológiaosztály $H_{n-1}(S^{n-1})$-nek is generátoreleme. Ha f_* izomorfizmus voltát is felhasználjuk, kaptuk hogy $d(p_0p_1\dots p_n)$ $H_{n-1}(\dot{T}^n)$ valamely generátorelemének reprezentánsa. Ezzel a (25) tétel a) részét be is láttuk.

A (25) tétel b) részének első állítása a (23) tétel triviális következménye. A második rész belátásához pedig szükségünk lesz a (24) lemmára.

Itt is elég a $(T^n, \dot{T}^n)$ szimpliciális párra szorítkoznunk. A teljes indukciós bizonyítás első lépése most is triviális a 10. pont 5a) példája szerint, hisz $d(p_0p_1)$ és $d(p_1p_0)$ egymás additív inverzei és így (p_0p_1) és $-(p_1p_0)$ is ugyanazon homológiaosztályhoz tartoznak. $T^n = |p_0, p_1, \dots, p_n|$ esetén elég csak arra az esetre szorítkoznunk, amikor a 0, 1, ..., n indexek közül két szomszédosat cserélünk fel, méghozzá a könnyebb leírhatóság miatt az első kettőt fogjuk felcserélni. Ahhoz, hogy $(p_0p_1p_2\dots p_n)$ és $-(p_1p_0p_2\dots p_n)$ ugyanazon homológiaosztályhoz tartoznak az a) rész bizonyításánál is felhasznált ∂: $H_n(T^n, \dot{T}^n) \to H_{n-1}(\dot{T}^n)$ izomorfizmus miatt elég azt igazolnunk, hogy $d(p_0p_1p_2\dots p_n)+d(p_1p_0p_2\dots p_n) \in B_{n-1}(\dot{T}^n)$ teljesül. Az összevonások elvégzése után a következőt kapjuk:

$$d(p_0p_1p_2\dots p_n)+d(p_1p_0p_2\dots p_n) = \sum_{l=2}^{n}(-1)^l\big((p_0p_1p_2\dots\hat{p}_l\dots p_n)+(p_1p_0p_2\dots\hat{p}_l\dots p_n)\big).$$

Vezessük be a következő jelöléseket: T_l^{n-1} legyen T^n-nek az a lapja, amely T^n-ből az l-edik csúcs elhagyásával keletkezett $\dot{T}_{n-2}^n$ pedig legyen $\dot{T}^n$ $(n-2)$-dimenziós váza. Indukciós feltevésünk értelmében

$$(p_0p_1p_2\dots\hat{p}_l\dots p_n)+(p_1p_0p_2\dots\hat{p}_l\dots p_n) \in B_{n-1}(T_l^{n-1}, \dot{T}_l^{n-1}),$$

azaz

$$(p_0p_1p_2\dots\hat{p}_l\dots p_n)+(p_1p_0p_2\dots\hat{p}_l\dots p_n) = \beta_l + d\gamma_l,$$

ahol $\beta_l \in C_{n-1}(\dot{T}_l^{n-1})$ és $\gamma_l \in C_n(T_l^{n-1})$. Az l szerinti összegezést elvégezve;

$$d(p_0p_1p_2\dots p_n)+d(p_1p_0p_2\dots p_n) = \sum_l \beta_l + d\sum_l \gamma_l.$$

$\sum_l \beta_l$ ciklusa $\dot{T}_{n-2}^n$-nek, méghozzá $(n-1)$ dimenziós ciklusa és így alkalmazhatjuk a segédlemmát, amelynek értelmében $\sum_l \beta_l \sim 0$ a $\dot{T}_{n-2}^n$-ben, akkor $\sum \beta_l \sim 0$ a bővebb $\dot{T}^n$ komplexuson is. Azaz $\sum_l \beta_l = d\gamma'$, $\gamma' \in C_n(\dot{T}^n)$. Így γ' és $\sum_l \gamma_l$ T^n-beli láncok. Kaptuk tehát a

$$d(p_0p_1p_2\dots p_n)+d(p_1p_0p_2\dots p_n) = d\Big(\gamma' + \sum_l \gamma_l\Big), \quad \Big(\gamma' + \sum_l \gamma_l\Big) \in C_n(\dot{T}^n)$$

összefüggést, azaz azt, hogy

$$d(p_0p_1p_2\ldots p_n)+d(p_1p_0p_2\ldots p_n)\in B_{n-1}(\dot{T}^n).$$

Ezzel a (25) tételt teljesen be is bizonyítottuk.

A következő tétel a (29) tétellel összekapcsolva ennek a pontnak a főtétele lesz:

(26) TÉTEL: *Ha K egy poliéder, K_n, K_{n-1}, K_{n-2} a poliéder megfelelő dimenziós vázai, minden egész r-re meg tudunk határozni egy $\Delta_n: H_n(K_n, K_{n-1})\to H_{n-1}(K_{n-1}, K_{n-2})$ homomorfizmust (amelyet, mint ∂-t határhomomorfizmusnak fogunk nevezni). Δ_n definíciója a következő: $\Delta_n=j_*^{n-1}\partial_n$, ahol $\partial_n: H_n(K_n, K_{n-1})\to H_{n-1}(K_{n-1})$ a „régi" határhomomorfizmus* (csupán most a dimenzióindexet is kiírtuk), *j_*^{n-1} pedig a $j^{n-1}: K_{n-1}\to(K_{n-1}, K_{n-2})$ injekció által indukált homomorfizmus. Állítjuk:* $H_n(K)\approx\dfrac{\operatorname{Ker}\Delta_n}{\operatorname{Im}\Delta_{n+1}}$. (Megjegyezzük, hogy a dimenzióindexet Δ-nél sem fogjuk általában kiírni.)

A (26) tétel bizonyítása. A bizonyításnál fel fogjuk használni két segédlemmát:

I. SEGÉDLEMMA. A $j^n: K_n\to(K_n, K_{n-1})$ injekció által indukált $j_*^n: H_n(K_n)\to H_n(K_n, K_{n-1})$ homomorfizmus minden egész n-re monomorfizmus.

Belátásához fel kell írnunk a (K_n, K_{n-1}) szimpliciális pár homológ sorát:

$$(1)\qquad \ldots\leftarrow H_{n-1}(K_{n-1})\xleftarrow{\partial_r} H_n(K_n, K_{n-1})\xleftarrow{j_*^n} H_n(K_n)\leftarrow H_n(K_{n-1})\leftarrow\ldots.$$

Itt a (24) lemma alkalmazásával $H_n(K_{n-1})$ nullcsoportnak adódik, ami már maga után vonja j_*^n monomorfizmusát.

II. SEGÉDLEMMA. Ha i_*, illetve i_*^n az $i: K_n\to K$, illetve $i^n: K_n\to K_{n+1}$ injekciók által indukált homomorfizmusok, akkor i_* epimorfizmus és $\operatorname{Ker} i_*=\operatorname{Ker} i_*^n$ teljesül minden egész n-re.

A II. segédlemma állítása, ha $n\leqq m$ és $m=\dim K$ teljesül triviális, hiszen i és i^n is identitás. Legyen tehát $0\leqq n\leqq q\leqq m-1$ és vegyük észre, hogy $i=i_{m-1}\ldots i_{n+1}i_n$, ahol $n\leqq q\leqq m-1$ esetén $i^q: K_q\to K_{q+1}$ injekció. Így i_* epimorfizmusát belátjuk, ha minden i_*^q-ról kimutatjuk, hogy epimorfizmus. Ehhez fel kell írnunk a (K_q, K_{q+1}) szimpliciális pár homológ sorát:

$$(2)\qquad \ldots\leftarrow H_n(K_{q+1}, K_q)\leftarrow H_n(K_{q+1})\xleftarrow{i_*^q} H_n(K_q)\xleftarrow{\partial_{n+1}} H_{n+1}(K_{q+1}, K_q)\leftarrow\ldots.$$

i_*^q epimorfizmusát a $H_n(K_{q+1}, K_q)$ csoport nullcsoport volta biztosítja. Ez a (23) tétel következménye, hiszen $n\neq q+1$ fennáll. Ismét a (23) tételből adódik $q>n$ esetén $H_{n+1}(K_{q+1}, K_q)$ nullcsoport volta is, ami azt jelenti, hogy $n<q\leqq m-1$ esetén a (21) lemma miatt i_*^q izomorfizmus, tehát $\operatorname{Ker} i_*=\operatorname{Ker} i_*^n$ is teljesül.

Lássuk be most a $H_n(K)\approx\dfrac{\operatorname{Ker}\Delta_n}{\operatorname{Im}\Delta_{n+1}}$ összefüggést, ahol tehát $\Delta_n=j_*^{n-1}\partial_n$ és $\Delta_{n+1}=j_*^n\partial_{n+1}$: Ha először alkalmazzuk a II. segédlemmát, majd az I. segédlemmát:

$$H_n(K)\approx\frac{H_n(K_n)}{\operatorname{Ker} i_*}=\frac{j_*^n(H_n(K_n))}{j_*^n(\operatorname{Ker} i_*)}.$$

Az I. segédlemma, majd az (1) homológ sor egzaktságának felhasználása után $\operatorname{Ker} \Delta_n = \operatorname{Ker} j_*^{n-1} \partial_n = \operatorname{Ker} \partial_n = \operatorname{Im} j_*^n = j_*^n(H_n(K_n))$ adódik. Ha pedig a (2) homológ sor egzaktságát használjuk fel $q=n$ esetére, majd a II. segédlemmát, akkor azt nyerjük, hogy

$$\operatorname{Im} \Delta_{n+1} = j_*^n(\operatorname{Im} \partial_{n+1}) = j_*^n(\operatorname{Ker} i_*^n) = j_*^n(\operatorname{Ker} i_*).$$

Ezzel be is láttuk a (26) tételt.

A (25) és (26) tétel segítségével meg fogjuk adni egy szimpliciális komplexus n-dimenziós homológia-csoportjainak olyan jellemzését, amelyhez lényegében csupán a komplexus n-dimenziós szimplexeinek a csúcssorrendje szükséges: Ezt a jellemzést a (27) tétel fogja megadni, de először néhány definíciót előrebocsátunk.

Ha $T^n = |p_0, p_1, \ldots, p_n|$ egy n-dimenziós euklideszi szimplex, akkor az összes $p_{s_0}, p_{s_1}, \ldots, p_{s_n}$ csúcssorrendek (tehát $s_0, s_1, \ldots, s_n$ a $0, 1, \ldots, n$ indexek permutációja) két diszjunkt osztályba sorolhatók a következő módon: egy osztályba tartozzon két csúcssorrend pontosan akkor, ha egyik a másikból páros inverziójú permutációval állítható elő. (Azaz mind a két csúcssorrend a $p_0, p_1, \ldots, p_n$ sorrendnek páros, vagy mind a kettő páratlan permutációja). Ezeket az osztályokat nevezzük *irányított szimplexnek*, így tehát egy euklideszi szimplexhez két irányított szimplex tartozik.[2] A $p_{s_0}, p_{s_1}, \ldots, p_{s_n}$ sorrendet tartalmazó osztályt $[p_{s_0} p_{s_1} \ldots p_{s_n}]$ a másik osztályt $-[p_{s_0} p_{s_1} \ldots p_{s_n}]$ szimbólummal jelöljük. $n=0$ esetre is hozzárendelünk $|p_0|$-hoz egy $[p_0]$ és egy $-[p_0]$ irányított szimplexet.

(27) TÉTEL. *Ha K egy m-dimenziós szimpliciális komplexus, n-dimenziós szimplexei száma π^n (ahol $0 \leqq n \leqq m$), akkor n-dimenziós irányított láncnak nevezzük azt az l függvényt, amely K minden n-dimenziós irányított szimplexén felvesz valamely egész számot úgy, hogy $T_j^n = |p_0^j, p_1^j, \ldots, p_n^j| \in K$ esetén $(1 \leqq j \leqq \pi^n)$ teljesüljön az $l([p_0^j \ldots p_n^j]) = -l(-[p_0^j \ldots p_n^j])$ összefüggés. Ha az összeadást ezek között a függvények között a megszokott módon értelmezzük egy π^n rangú szabad Abel-csoportot nyertünk, amit $\mathcal{C}_n(K)$-val fogunk jelölni.*[3]

Azt állítjuk, hogyha ahhoz a függvényhez, amely a $[p_0^j p_1^j \ldots p_n^j]$ irányított szimplexen $+1$-et a $-[p_0^j p_1^j \ldots p_n^j]$ irányított szimplexen -1-et vesz fel és K összes többi irányított szimplexen 0-t, ehhez hozzárendeljük a $H_n(K_n, K_{n-1})$-beli $(p_0 p_1, \ldots p_n)$ lineáris szimplex által generált homológia-osztályt, akkor ez a leképezés kiterjeszthető $\mathcal{C}_n(K)$ és $H_n(K_n, K_{n-1})$ izomorfizmusává (függvények szorzását egész számmal a szokott módon értelmezzük).

A hosszú tétel bizonyítása a (25) tétel segítségével triviális, hiszen a tételben szereplő leképezés két azonos rangú szabad Abel-csoport báziselemeinek kölcsönösen egyértelmű leképezése.

A következő lemma $\mathcal{C}_n(K)$ elemeinek lineáris formaként való felírását teszi lehetővé.

(28) LEMMA. *Ha azt az irányított láncát egy K szimpliciális komplexusnak, amely a $[p_{s_0} p_{s_1} \ldots p_{s_n}]$ irányított szimplexen $+1$-et vesz fel a $-[p_{s_0} p_{s_1} \ldots p_{s_n}]$ irányított szimplexen -1-et és máshol 0-t azonosítjuk azzal az osztállyal, amelyen $+1$-et vesz fel (azonos jelölést is alkalmazunk rá), akkor minden $l \in \mathcal{C}_n(K)$ felírható $l = \sum_{j=1}^{\pi^n} k_j [p_{s_0}^j p_{s_1}^j \ldots p_{s_n}^j]$ alakban, ahol $T_j^n = |p_0, p_1, \ldots, p_n|$; $s_0, s_1, \ldots, s_n$ permutációja*

[2] A $T^n = |p_0, p_1, \ldots, p_n|$ felírás különböző módon lehetséges, de ettől a „kezdő sorrendtől" nem függ az osztálybasorolás, tehát egy euklideszi szimplexhez pontosan két irányított szimplex tartozik.

[3] Ha $n<0$ vagy $n>m$ legyen $\mathcal{C}_n(k)$ nullcsoport.

a 0, 1, ..., *n indexeknek*, k_j *egész szám és* $[p^j_{s_0}p^j_{s_1}\ldots p^j_{s_n}]$ *egy tetszőlegesen rögzített* T^n_j*-hez tartozó irányított szimplex* (π^n az *n*-dimenziós szimplexek száma. Egész számmal való szorzást, mint függvény szorzását egész számmal a szokott módon, gondoljuk).

Bizonyítás. Az irányított lánc definíciójának felhasználásával triviális.

(29) TÉTEL. *Legyen K szimpliciális komplexus és* $\mathcal{C}_n(K)$ *minden egész n-re jelölje az irányított láncok csoportját. Terjesszük ki* $\mathcal{C}_{n-1}(K)$*-ról* $\mathcal{C}_n(K)$*-ba való homomorfizmussá a* $\Delta^o[p^j_0p^j_1\ldots p^j_n] = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i[p^j_0p^j_1\ldots\hat{p}^j_i\ldots p^j_n]$, (ahol $j=1, 2, \ldots, \pi^n$ az *n*-dimenziós szimplexek száma) $\mathcal{C}_n(K)$ *generátorelemein megadott* $\mathcal{C}_{n-1}(K)$*-ba való leképezést* (mivel szabad Abel-csoportról van szó ez a szokott módon megtehető), *akkor kaptunk egy* $\Delta^o: \mathcal{C}_n(K) \to \mathcal{C}_{n-1}(K)$ *homomorfizmust. Azt állítjuk, hogy lehet képezni a* $\mathcal{H}_n(K) = \frac{\mathcal{Z}_n(K)}{\mathcal{B}_n(K)}$ *csoportot, ahol* $\mathcal{Z}_n(K) = \operatorname{Ker}\Delta^o$; $\mathcal{B}_n(K) = \operatorname{Im}\Delta^o$; *és állítjuk, hogy fennáll a* $\mathcal{H}_n(K) \approx H_n(K)$ *izomorfizmus* (később Δ^o-t Δ-val fogjuk jelölni).

A bizonyításhoz csupán azt kell csak észrevenni, hogy a (26) tételben definiált Δ-ra fennáll az, hogy minden $(p^j_0p^j_1\ldots p^j_n)$ lineáris szimplexet tartalmazó $H_n(K_n, K_{n-1})$-beli homológiaosztályhoz Δ a $\sum_{i=1}^{n}(-1)^i(p^j_0p^j_1\ldots\hat{p}^j_i\ldots p^j_n)$ lineáris láncot tartalmazó $H_{n-1}(K_{n-1}, K_{n-2})$-beli homológiaosztályt rendeli hozzá. Ez azonban triviálisan teljesül, hiszen $\Delta = j_*^{n-1}\partial$ (lásd a (26) tételben szereplő jelöléseket), és a $d(p^j_0p^j_1\ldots p^j_n) = \sum(-1)^i(p^j_0p^j_1\ldots\hat{p}^j_i\ldots p^j_n)$ által reprezentált $H_{n-1}(K_{n-1})$-beli homológiaosztályt a ∂ rendeli hozzá a $(p^j_0p^j_1\ldots p^j_n)$-t tartalmazó homológiaosztályhoz, j_*^{n-1}-ot pedig injekció indukálja és így $j_*^{n-1}\partial$ a $(p^j_0p^j_1\ldots p^j_n)$ által reprezentált $H_n(K_n, K_{n-1})$-beli homológiaosztályokhoz valóban a $\sum_{i=1}^{n}(-1)^i(p^j_0p^j_1\ldots\hat{p}^j_i\ldots p^j_n)$ lineáris láncot tartalmazó $H_{n-1}(K_{n-1}, K_{n-2})$-beli homológiaosztályt rendeli hozzá. Ha még a (27) tételben definiált homomorfizmust is számításba vettük, be is láttuk a (29) tételt.

Megjegyzés. Az orientált (azaz irányított) láncokhoz tartozó homológiaelmélet korábban alakult ki, mint a szinguláris homológiák elmélete. Mi valójában azt láttuk be, hogy *szimpliciális komplexusokra ez a két homológiacsoport izomorf.* Régen elintézett dolog, hogy a homológiaelmélet szimpliciális komplexusokra (sőt terek szélesebb osztályaira is) egyértelmű. Mi nem azért láttuk be a (29) tételt, hogy az egyértelműségből ízelítőt adjunk, hanem be akartunk mutatni egy sok esetben kényelmesebb módszert homológiacsoportok meghatározására, mint az eddigiek. Megjegyzésünk illusztrálására mutatunk egy példát.

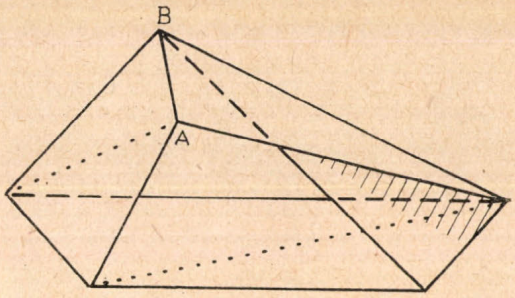
PÉLDA. *Határozzuk meg a Möbius-szalag homológiacsoportjait:*

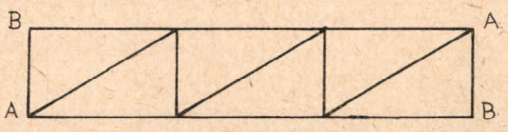
A Möbius-szalagot kvóciens térnek fogjuk fel (lásd 10. pont 5c példa utáni részt), amely a téglalapból úgy keletkezett, hogy a téglalap függőleges oldalainak azokat a pontjait, amelyek a téglalap középpontjára vonatkoztatva egymás tükörképei közös felbontási halmazba sorozzuk, a többi pont mind önmaga alkosson egy felbontási halmazt.

Először felveszünk a Möbius-szalagnak egy háromszögelését, azaz meghatározunk egy $\mathcal{K}$ szimpliciális komplexust, amelynek teste homomorf a Möbius-

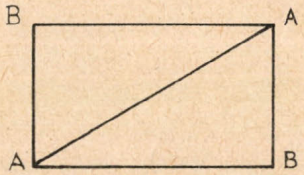
szalaggal. Egy ilyen háromszögelést mutat a 18a ábra[4]. Ezt a háromszögelést a 18b ábrabeli rajzzal szemléltetjük. A 19a és 19b ábra nem szemléltethet háromszögeléseket, hiszen ellentétbe jutunk a szimpliciális komplexusokra kirótt 2. követelménnyel.

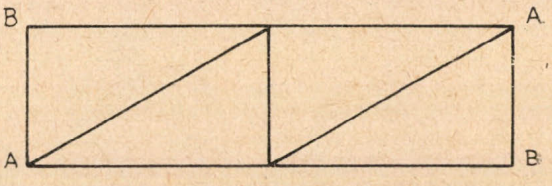
Jelöljük most ki minden dimenzióban a háromszögelés irányított szimplexeit (20. ábra). A 2-dimenziós szimplexek csúcssorrendjét definiálja az óramutató járásával ellenkező irány. Az 1-dimenziós irányított szimplexeket nyilakkal szimbolizáljuk, mégpedig úgy, hogy a nyíl kezdőpontja a 0-adik, végpontja az első csúcs, jelölésükre a t_i és s_i, $i=1, 2, \ldots, 6$ jelöléseket használjuk. $n=0$-ra ismerjük a homológiacsoportot, hiszen a tér összefüggő és így a homológiacsoport végtelen ciklikus csoport. $n>2$ esetén minden homológiacsoport a (24) lemma szerint nullcsoport. A 2-dimenziós ciklusok csoportja és így a homológiacsoport is nullcsoport, hiszen minden $z \in Z_2(K)$ esetén $\Delta z(t_i)=0$ teljesül, $i=1, 2, \ldots, 6$ (azaz a Δz függvénynek a t_i irányított szimplexen felvett értéke 0) ez Δ definíciója miatt, mivel minden 2-dimenziós szimplex „tartalmaz" egy ilyen t_i-t és minden t_i csak egyetlen 2-dimenziós szimplexhez tartozik csak úgy lehetséges, ha $z=0$.





18. ábra



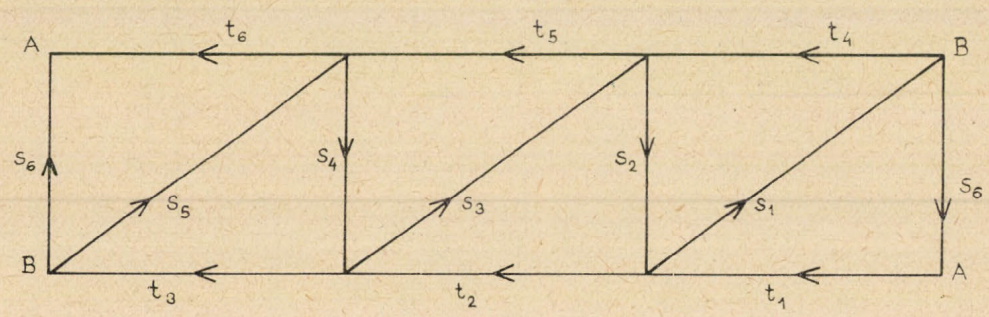


19. ábra

Be fogjuk látni, hogy $H_1(K)$ végtelen ciklikus csoport. Először is megjegyezzük, hogy minden $a\left(\sum_{i=1}^{3} t_i + s_6\right)$ alakú lánc (a egész) ciklus, hisz minden 0-dimenziós szimplexen $a-a=0$ miatt $\Delta\left(a\sum_{i=1}^{3} t_i + s_6\right)$ nullát vesz fel. Ha pedig egy $l=\sum_{i=1}^{3} a_i t_i + s_6$ alakú lánc ciklus, akkor minden nulldimenziós szimplexen 0-t kell felvenni, így $a_1=a_2$, $a_2=a_3$, $a_3=b$, azaz $l=a\left(\sum_{i=1}^{3} t_i + s_6\right)$. Tehát ha beláttuk azt, hogy minden $z \in Z_1(K)$ homológ valamely $\sum_{i=1}^{3} a_i t_i + b s_6$ (I) alakú ciklussal, beláttuk $H_1(K)$ végtelen

[4] A 18a ábrát meg lehet konstruálni úgy, hogy egy síkban fekvő egyenlő szárú trapézt tekintsünk, az AB szakasz által meghatározott egyenes legyen kitérő a trapéz jobboldali szárához. Az ábrán látható összekötéseket elvégezve valóban Möbius szalagot kaptunk.

ciklikus csoport voltát is, hiszen $a(\sum_{i=1}^{3} t_i + s_6) \nsim 0$, ha $a \neq 0$. Legyen $z \in Z_1(K)$, $z = \sum_{j=1}^{6} b_j t_j + \sum_{k=1}^{6} c_k s_k$ ebből a ciklusból, ha levonjuk a $c_1 s_1 + c_1 t_4 + c_1 s_2$ 0-val homológ ciklust ismét ciklust kaptunk és nem léptünk ki a z-ttartalmazó $H_1(K)$-beli homológiaosztályból, de ez a ciklus már s_1-en 0-t vesz fel, kaptunk egy $z_1 = \sum_{j=1}^{6} b'_j t_j + \sum_{k=2}^{6} c'_k s_k$ ciklust, ebből a $c'_2 s_2 + c'_2 t_2 + c'_2 s_3$ ciklust vonjuk ki. Ha s_3, s_4, s_5-re ugyanezt megismételtük, kaptunk egy $z_5 = \sum_{j=1}^{6} a_j t_j + c s_6$ ciklust, amely z-vel ugyanazon homológiaosztályba esik. A ciklus tulajdonságot felhasználva azt kapjuk, hogy $a_1 = a_2 = a_3 = a'$; $a_4 = a_5 = a_6 = b'$. Azaz $z_5 = a' \sum_{i=1}^{3} t_i + b' \sum_{l=4}^{6} t_l + c s_6$. Ha ehhez hozzáadjuk a $b'(2s_6 + \sum_{i=1}^{3} t_i - \sum_{l=4}^{6} t_l)$ ciklust, ami 0-val homológ, egy (I) alakú ciklust kaptunk és be is bizonyítottuk állításunkat.



20. ábra

Példánkból az is látható volt, hogy mennyire megkönnyíti a homológiacsoportok meghatározását a szimplexek irányításának szerencsés kijelölése.

A szimpliciális komplexusokról szóló rész utolsó tételeként bemutatunk egy geometriai alkalmazást.

(30) TÉTEL. *Ha K m-dimenziós poliéder, amelynek π^n jelöli az n-dimenziós szimplexek számát, ϱ^n az n-dimenziós homológiacsoportnak a rangját, akkor igaz az Euler—Poincarè formulának nevezett* $\sum_{n=0}^{m} (-1)^n \pi^n = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \varrho^n$ *összefüggés.*

(Megjegyezzük, hogy mivel homeomorf poliéderekre a homológiacsoportok rangja, azaz a Belti-féle számok megegyeznek, ezzel az általánosított Euler tételt is beláttuk.)

Bizonyítás. Jelöljük ezen tétel bizonyítása során $\mathscr{C}_n(K)$-t, $\mathscr{Z}_n(K)$-t, $\mathscr{B}_n(K)$-t és $\mathscr{H}_n(K)$-t egyszerűen $\mathscr{C}_n$, $\mathscr{Z}_n$, $\mathscr{B}_n$ és $\mathscr{H}_n$ jelekkel. Először vegyük észre, hogy $\frac{\mathscr{C}_n}{\mathscr{Z}_n} \approx \mathscr{B}_{n-1}$ (ez triviális). Használuk fel azt a tényt, hogy egy csoport rangja megegyezik a faktorcsoport rangja és annak az alcsoportnak rangja összegével, amelyre vonatkozólag a faktorcsoportot képeztük. Akkor a már belátott izomorfizmus-

ból eredő $\varrho\left(\frac{\mathscr{C}_n}{\mathscr{Z}_n}\right)=\varrho(\mathscr{B}_{n-1})$ összefüggést is felhasználva a következőket nyerjük:

$$\varrho(\mathscr{C}_n)=\varrho(\mathscr{Z}_n)+\varrho(\mathscr{B}_{n-1}),$$
$$\varrho(\mathscr{Z}_n)=\varrho(\mathscr{B}_n)+\varrho(\mathscr{H}_n).$$

Helyettesítsük be az első kifejezésbe a másodikat, akkor $\varrho(\mathscr{H}_n)=\varrho^n$ és $\varrho(\mathscr{C}_n)=\pi^n$ miatt $\pi^n=\varrho(\mathscr{B}_{n-1})+\varrho(\mathscr{B}_n)+\varrho_n$ adódott. Mind a két oldalt $(-1)^n$-nel beszorozva összegezés után a következőt nyertük:

$$\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\pi^n=\varrho(\mathscr{B}_{-1})+\varrho(\mathscr{B}_m)+\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\varrho^n.$$

Azonban mivel $\mathscr{C}_1$ és $\mathscr{C}_{m+1}$ nullcsoport $\mathscr{B}_{-1}$ és $\mathscr{B}_m$ is az, így rangjuk is nulla, ezzel beláttuk az Euler—Poincarè formulát.

13. A HOMOTÓP LEKÉPEZÉSEK TÉTELÉNEK BIZONYÍTÁSA

A könnyebb áttekinthetőség miatt megismételjük a bizonyítandó tételt:

(8) TÉTEL *(azaz a homotóp leképezések tétele). Ha két* $f, g: (E, F)\to(E', F')$ *folytonos leképezés homotóp, azaz létezik olyan* $H: (E\times I, F\times I)\to(E', F')$ *folytonos leképezés (homotópia), hogy teljesül az* $H(p, 0)=f(p)$ *és* $H(p, 1)=g(p)$ *összefüggés bármely* $p\in E$ *pontra, akkor* $f_*, g_*: H_r(E, F)\to H_r(E', F')$ *indukált homomorfizmusok minden* r *esetén megegyeznek.* (Bizonyításra nyilván csak az $r\geqq 0$ eset szorul.)

A 8. tétel bizonyítása. Bizonyítás során a $\Delta_r\times I$-t, a „kanonikus szimplex fölé emelt hasábot" mindig az $(r+1)$-dimenziós euklideszi térbe fogjuk beágyazni. $\Delta_r\times I$ olyan derékszögű hasáb legyen, amelynek alapja Δ_r, fedőlapja a Δ_r által meghatározott síktól egységnyi távolságra levő síkban helyezkedik el és kongruens Δ_r-rel (a fedőlapot tartalmazó síkot válasszuk például úgy, hogy a koordinátatengelyekkel való metszetei pozitívak legyenek). Így az alap csúcsait a kanonikus szimplex csúcsainak fogjuk fel: $e_0, e_1, \ldots, e_r$, a fedőlap csúcsait pedig $(\overset{r}{\smile}e_0, 1)$, $(\overset{r}{\smile}e_1, 1), \ldots, (\overset{r}{\smile}e_r, 1)$ szimbólumokkal jelöljük (nyilván úgy gondoljuk, hogy e_i és $(\overset{r}{\smile}e_i, 1)$ a hasáb ugyanazon élének végpontjai). Különböző dimenziós hasábok nem lesznek egymás részhalmazai, ezért tüntettük fel a fedőlap csúcsainál a dimenziót is.

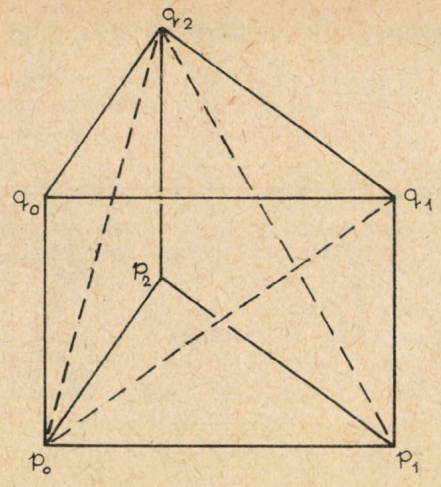
Definiálni fogunk minden $r\geqq 0$ tetszőleges egész esetén egy $P: C_r(E)\to C_{r+1}(E)$ homomorfizmust (E tetszőleges topologikus tér).

P definíciója a következő:

a) Ha $e_0, e_1, \ldots, e_r$ a Δ_r kanonikus szimplex csúcsai, akkor az $(e_0, e_1 \ldots e_r)$ lineáris szimplexre

$$P(e_0e_1\ldots e_r)=\sum_{i=0}^{r}(-1)^i(e_0e_1\ldots e_i(\overset{r}{\smile}e_i, 1)\ldots(\overset{r}{\smile}e_r, 1)).$$

b) Ha $\sigma: \Delta_r\to E$ tetszőleges szinguláris szimplexe az E topologikus térnek, akkor a $\sigma^{(P)}(x, t)=(\sigma(x), t)$ (ha $x\in\Delta_r$) egy folytonos leképezést definiál $\Delta_r\times I$-ből $E\times I$-be, a $\sigma^{(P)}$ által meghatározott homomorfizmus $\sigma_1^{(P)}: C_{r+1}(\Delta_r\times I)\to C_{r+1}(E\times I)$, és így van értelme a $P\sigma=\sigma_1^{(P)}P\sigma$ definíciónak.



21. ábra

c) Ha pedig $\alpha = \sum_{s=1}^{m} k_s \sigma_s$, $\alpha \in C_r(E)$ tetszőleges szinguláris lánc esetén legyen $P\alpha = \sum_{s=1}^{m} k_s P\sigma_s$. (Azaz a generátorelemeken megadott homomorfizmust a szokott módon kiterjesztjük.)[5]

A definíció a) részét a 21. ábra szemlélteti $n=2$ esetén és a $q_i = (\overset{2}{\smile}{e_i}, 1)$, $i=0,1,2$ jelölést alkalmaztuk.

Megjegyzés. Nézzük meg a definíció tartalmát arra az esetre, amikor $\sigma = (e_0 e_1 \dots \hat{e}_j \dots e_r)$, azaz olyan speciális $(e_0 e_1 \dots \hat{e}_i \dots e_r)$: $\Delta_{r-1} \to \Delta_r$ lineáris szimplex, illetve olyan lineáris leképezés, amelyet az $f(e_k) = e_k$, ha $k < j$ és $f(e_k) = e_{k+1}$, ha $k \geqq j$ csúcsok közötti leképezés határoz meg. Ezt és a definíció b) részét felhasználva azt kajuk, hogy

$$P(e_0 e_1 \dots \hat{e}_j \dots e_r) = (e_0 e_1 \dots \hat{e}_j \dots e_r)^{(P)} \sum_{i=1}^{r-1} (-1)^i (e_0 e_1 \dots e_i (\overset{r-1}{\smile}{e_i}, 1) \dots (\overset{r-1}{\smile}{e_r}, 1)) =$$

$$= \sum_{i<j} (-1)^i (e_0 e_1 \dots e_i (\overset{r}{\smile}{e_i}, 1) \dots \widehat{(\overset{r}{\smile}{e_j}, 1)} \dots (\overset{r}{\smile}{e_r}, 1)) +$$

$$+ \sum_{i>j} (-1)^{i-1} (e_0 e_1 \dots \hat{e}_j \dots e_i (\overset{r}{\smile}{e_i}, 1) \dots (\overset{r}{\smile}{e_r}, 1)).$$

A tétel bizonyításának hátralevő része 5 lépésből fog állni.

1. lépés. Be fogjuk látni, hogyha $e_0, e_1, \dots, e_r$ a Δ_r kanonikus szimplex csúcsai és ha a $q_i = (\overset{r}{\smile}{e_i}, 1)$; $i=0, \dots, r$ helyettesítést alkalmazzuk, akkor

$$dP(e_0 e_1 \dots e_r) = (q_0 q_1 \dots q_r) - (e_0 e_1 \dots e_r) - Pd(e_0 e_1 \dots e_r), \quad \textit{I. formula.}$$

Eredményünk egyszerű számolással adódik:

$$dP(e_0 e_1 \dots e_r) = d \sum_{i=0}^{r} (-1)^i (e_0 e_1 \dots e_i q_i \dots q_r) =$$

$$= \left\{ \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \left(\sum_{i>j} (-1)^j (e_0 e_1 \dots \hat{e}_j \dots e_i q_i \dots q_r) + \sum_{i<j} (-1)^{j+1} (e_0 e_1 \dots e_i q_i \dots \hat{q}_j \dots q_r) \right) \right\} +$$

$$+ \left[\sum_{i=0}^{r} (-1)^i \left((-1)^i (e_0 e_1 \dots \hat{e}_i q_i \dots q_r) + (-1)^{i+1} (e_0 e_1 \dots e_i \hat{q}_i \dots q_r) \right) \right].$$

[5] A P operátor, sőt a következő fejezetben definiált B és R operátor definíciója is sok hasonlóságot mutat a d definíciójával. (Lásd I. rész 2. pont). d definícióját finomíthatjuk azzal, hogy a definíció *b)* részét nem tetszőleges lineáris szimplexre definiáljuk, hanem csak a kanonikus szimplex azonos leképezésére mondjuk ki. A lineáris szimplexekre való analóg formula triviális következmény. Egyébként d definíciójának *c)* részéből, mire kinyomtatásra került, kimaradt az a kiegészítés, hogy $x_0, x_1, \dots, x_r$-et ebben a *c)* részben a kanonikus szimplex csúcsaiként rögzíteni kell.

Itt a szögletes zárójel összegezés után a $(q_0q_1\ldots q_r)-(e_0e_1\ldots e_r)$ különbséget eredményezi. Az 1. lépés előtti megjegyzés alkalmazásával pedig a következő adódik:

$$Pd(e_0e_1\ldots e_r) = P\sum_{j=0}^{r}(-1)^j(e_0e_1\ldots\hat{e}_j\ldots e_r) =$$

$$= \sum(-1)^j\Big(\sum_{i<j}(-1)^i(e_0e_1\ldots e_iq_i\ldots\hat{q}_j\ldots q_r)+\sum_{i>j}(-1)^{i-1}(e_0\ldots\hat{e}_j\ldots e_iq_i\ldots q_r)\Big).$$

Ezt, ha összehasonlítjuk a kapcsos zárójelben levő kifejezéssel, valóban megkaptuk az első lépés állítását, csupán a -1 kitevőit kell még összehasonlítanunk.

2. lépés. Ha $f\colon E\to E'$ folytonos leképezés, ez indukál egy $f^{(P)}\colon E\times I\to E'\times I$ folytonos leképezést az $f^{(P)}(x,t)=(f(x),t)$ definícióval. Állítjuk, hogy $\alpha\in C_r(E)$ esetén $Pf_1\alpha=f_1^{(P)}P\alpha$.

Elég szinguláris szimplexekre igazolni (mivel mind a két homomorfizmus lineáris kiterjesztéssel adódott), tehát azt igazoljuk, hogy bármely $\sigma\colon \Delta_r\to E$ szinguláris szimplexre $Pf_1\sigma=f_1^{(P)}P\sigma$. Először a bal oldalt alakítjuk át: $Pf_1\alpha=P(f\sigma)=(f\sigma)_1^{(P)}P(e_0e_1\ldots e_r)$; ezt annak alapján írhattuk fel, hogy először alkalmaztuk a folytonos leképezéshez tartozó láncok közti homomorfizmus definícióját, majd a P definícióját az $f\sigma$ szinguláris szimplexre. A jobb oldal átalakításához csupán P definícióját kell alkalmazni: $f_1^{(P)}(P\sigma)=f_1^{(P)}\sigma_1^{(P)}P(e_0e_1\ldots e_r)$. Az $(f\sigma)_1^{(P)}=f_1^{(P)}\sigma_1^{(P)}$ összefüggés pedig triviálisan teljesül, hiszen $x\in\Delta_r$ esetén $(f\sigma)^{(P)}(x,t)=(f\sigma(x),t)$ és $f^{(P)}\sigma^{(P)}(x,t)=(f\sigma(x),t)$.

Így beláttuk a 2. lépést.

3. lépés. Ha $\bar{f},\bar{g}\colon (E,F)\to(E\times I,F\times I)$ olyan folytonos leképezések, amelyre $\bar{f}(p)=(p,0)$, $\bar{g}(p)=(p,1)$; $p\in E$ feltétel teljesül, akkor igaz a

$$dP\alpha=\bar{g}_1(\alpha)-\bar{f}_1(\alpha)-Pd\alpha \qquad \textit{II. formula.}$$

Ez az összefüggés, amelyet (mivel minden leképezés lineáris kiterjesztéssel adódott) elég csak szinguláris szimplexekre igazolni, közvetlen folyománya az I. formulának. Alkalmazzuk ugyanis mind a két oldalra a $\sigma_1^{(P)}$ homomorfizmust:

$$\sigma_1^{(P)}\,dP(e_0e_1\ldots e_r) = \sigma_1^{(P)}(q_0q_1\ldots q_r)-\sigma_1^{(P)}(e_0e_1\ldots e_r)-\sigma_1^{(P)}Pd(e_0e_1\ldots e_r),$$

mivel

$$\sigma_1^{(P)}(e_0e_1\ldots e_r)=f_1\sigma \quad\text{és}\quad \sigma_1^{(P)}(q_0q_1\ldots q_r)=\bar{g}_1\sigma$$

teljesül $\bar{f}$ és $\bar{g}$ definíciója miatt, de $\sigma_1^{(P)}dP=d\sigma_1^{(P)}=dP\sigma$ is igaz az (1) lemma miatt, ha P definícióját is felhasználjuk; ha pedig először a 2. lépés állítását a $\sigma\colon\Delta_r\to E$ speciális esetre, majd a (2) lemmát alkalmazzuk: $\sigma_1^{(P)}Pd(e_0e_1\ldots e_r)=P\sigma_1 d(e_0e_1\ldots e_r)=Pd\sigma$ is teljesül.

4. lépés. Ha $\bar{f},\bar{g}\colon (E,F)\to(E\times I,F\times I)$ olyan folytonos leképezések, amelyek eleget tesznek a 3. lépésnél kirótt követelményeknek, akkor $\bar{f}_*,\bar{g}_*\colon H_r(E,F)\to H_r(E\times I,F\times I)$ homomorfizmusok megegyeznek.

Tekintsük ugyanis a II. formulát: $dP\alpha=\bar{g}_1\alpha-\bar{f}_1\alpha-Pd\alpha$. Ha α ciklus mod F, azaz $d\alpha\in F$, akkor $Pd\alpha\in C_r(F\times I)$, ami azt jelenti, hogy $g_1\alpha-f_1\alpha\in B_r(E,F)$.

5. lépés. Legyenek most $f,g\colon(E,F)\to(E',F')$ homotópok és $\bar{g},\bar{f}\colon(E,F)\to(E\times I,F\times I)$ a 3. lépés feltételeinek eleget tevő leképezések. Ekkor teljesül a $H\bar{g}=g$ és $H\bar{f}=f$ összefüggés is (H a homotópia), így $g_*=H_*\bar{g}_*$, $f_*=H_*\bar{f}_*$. A 4. lépés szerint $\bar{f}_*=\bar{g}_*$, ami megadja f_* és g_* egyezését is és ezzel a (8) tételt bebizonyítottuk.

14. A KIVÁGÁSI TÉTEL BIZONYÍTÁSA

Be kell bizonyítanunk utolsó adósságunkat, azaz a következőt:

(12) TÉTEL. *Ha U olyan részhalmaza az E topologikus térnek, hogy $\overline{U} \subset \operatorname{Int} F$, F tetszőleges altere E-nek, akkor az $i\colon (E-U, F-U) \to (E, F)$ injekció a homológiacsoportok izomorfizmusát indukálja* ($\overline{U}$ itt U E-beli lezárását jelenti).

A tétel bizonyításához elég sok előkészítés szükséges. Ezek közül első a *kúpkonstrukció*, ezt csupán lineáris láncokra definiáljuk. Ha $\alpha = \sum_{i=1}^{m} k_i (x_{i_0} x_{i_1} \ldots x_{i_r})$ egy olyan lineáris lánc, hogy $x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ és p bármely $i = 1, 2, \ldots, m$ esetén lineárisan függetlenek és az R^n euklideszi tér (ahol $n \geqq r$) ugyanazon konvex részhalmazának pontjai, akkor az α fölé emelt p csúcsú kúp a következő lineáris lánc: $p\alpha = \sum_{i=1}^{m} k_i (p x_{i_0} \ldots x_{i_r})$.

Fontos összefüggés a következő

$$\left.\begin{array}{l} r > 0 \text{ esetén } dp\alpha = \alpha - p\, d\alpha \\ r = 0 \text{ esetén } dp\alpha = \alpha - \left(\sum_{i=1}^{m} k_i\right)(p) \end{array}\right\} \quad (*) \text{ összefüggés.}$$

A bizonyítást elég elvégezni egyetlen tagból álló 1 együtthatójú láncra, de erre triviális.

A kúpkonstrukció segítségével definiálni tudjuk a *baricentrikus felbontás B-vel jelölt operátorát.* A definíciót teljes indukcióval adjuk meg és ez valójában egy $B\colon C_r(E) \to C_r(E)$ homomorfizmust fog eredményezni.

B operátor definíciója a következő:

a) Ha $\alpha \in C_0(E)$, legyen $B\alpha = \alpha$.

b) Ha $e_0, e_1, \ldots, e_r$ a kanonikus szimplex csúcsai, b_r a szimplex baricentruma, azaz az a pont, amelynek minden baricentrikus koordinátája $\frac{1}{r+1}$ akkor

$$B(e_0 e_1 \ldots e_r) = b_r(Bd(e_0 e_1 \ldots e_r)).$$

c) Ha σ tetszőleges E-beli szinguláris szimplex, legyen $B\sigma = \sigma_1(B(e_0 e_1 \ldots e_r))$, ahol $\sigma_1\colon C_r(\Delta_r) \to C_r(E)$ a σ folytonos leképezés által meghatározott homomorfizmus.

d) Tetszőleges $\alpha \in C_r(E)$ esetén, ha $\alpha = \sum_{i=1}^{m} k_i \sigma_i$, legyen $B\alpha = \sum_{i=1}^{m} k_i B\sigma_i$.

A B operátor tulajdonságai:

1. tulajdonság. Ha $f\colon E \to E'$ folytonos leképezés, akkor $Bf_1\alpha = f_1 B\alpha$ bármely $\alpha \in C_r(E)$ és bármely egész r esetén teljesül.

Bizonyítás: A B operáció definícióját a $\sigma \in C_r(E)$ szinguláris szimplexre alkalmazva $f_1 B\sigma = f_1\sigma_1 B(e_0 e_1 \ldots e_r)$ adódik. Ha pedig az $f\sigma$ szinguláris szimplexre alkalmazzuk B definícióját: $Bf_1\sigma = B(f\sigma)_1 = (f\sigma)_1 B(e_0 e_1 \ldots e_r)$. Ha alkalmazzuk végül a 2. pont (2) lemmáját, valóban beláttuk az 1. tulajdonságot.

2. tulajdonság. $Bd\alpha = dB\alpha$ bármely $\alpha \in C_r(E)$ és bármely r egész esetén.

Bizonyítása teljes indukcióval történik: $r=0$ esetén triviális, hiszen d 0-nak volt definiálva. Tegyük fel, hogy igaz a kívánt tulajdonság minden $(r-1)$-dimenziós szinguláris szimplexre és alkalmazzuk a kúpkonstrukcióra vonatkozó $(*)$ összefüggést:

$$d\,B(e_0e_1\ldots e_r)=d\,b_r\big(Bd(e_0e_1\ldots e_r)=Bd(e_0e_1\ldots e_r)-b_r\,d\big(Bd(e_0e_1\ldots e_r)\big).$$

Itt a különbség második tagja 0 lesz, mert indukciós feltevésünk értelmében $d\big(Bd(e_0e_1\ldots e_r)\big)=Bdd(e_0e_1\ldots e_r)=0$. Tetszőleges σ r-dimenziós szinguláris szimplexre pedig a most kapott eredmény és az 1. tulajdonság kombinációjaként adódik állításunk. (Mint általában, itt is elég mindent lineáris, illetve szinguláris szimplexre feltenni és bizonyítani.)

3. tulajdonság. Jelölje $\tilde{\omega}$ egy $\omega=\sum_{i=1}^{m} k_i\sigma_i\in C_r(E)$, $\omega\in\overline{\omega}$ esetén a σ_i; $i=1, 2, \ldots, m$ szinguláris szimplexek képpontjainak halmazát, ekkor fennáll a $\widetilde{B\alpha}\subset\tilde{\alpha}$, $\alpha\in C_r(E)$ összefüggés. Speciálisan: $\widetilde{Bd\alpha}\in\tilde{d\alpha}$, $\alpha\in C_r(E)$. (Triviális következménye B definíciójának.)

4. tulajdonság. Legyen $(x_0x_1\ldots x_r)$ egy tetszőleges lineáris szimplex és jelölje $\operatorname{diam}(x_0x_1\ldots x_r)$ az $x_0, x_1, \ldots, x_r$ által meghatározott véges halmaz átmérőjét.[6] Állítjuk, a $B(x_0x_1\ldots x_r)$ lineáris láncban szereplő lineáris szimplexek által meghatározott euklideszi szimplexek átmérője $\leqq\frac{r}{r+1}\operatorname{diam}(x_0x_1\ldots x_r)$.

Bizonyítás. A lineáris szimplex definícióját felhasználva (a definíció a 2. pontban szerepel) azt nyerjük, hogy $B(x_0x_1\ldots x_r)=c_rBd(x_0x_1\ldots x_r)$, ahol c_r-rel jelöltük az $|x_0x_1\ldots x_r|$ baricentrumát. A 3. tulajdonság miatt fennáll a $\widetilde{Bd(x_0x_1\ldots x_r)}\subset\widetilde{d(x_0x_1\ldots x_r)}$ összefüggés is. Így elég igazolnunk azt, hogy $x\in|x_0x_1\ldots x_r|$ esetén az x pontnak c_r-től mért $|c_r-x|$-szel jelölt távolságra fennáll a kívánt összefüggés. Ez egy elemi számolással adódik. Legyen tehát $x=\lambda_0x_0+\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_nx_n$, ahol $\sum_{i=0}^{r}\lambda_i=1$ és $c_r=\frac{1}{r+1}x_0+\frac{1}{r+1}x_1+\ldots+\frac{1}{r+1}x_r$, akkor

$$|c_r-x|=\left|c_r-\sum_{i=0}^{r}\lambda_ix_i\right|\leqq\sum_{i=0}^{r}\lambda_i|c_r-x_i|\leqq\sum\lambda_i\max|c_r-x_i|=$$

$$=|c_r-x_j|\leqq\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{r+1}|x_i-x_j|\leqq\frac{r}{r+1}\max|x_i-x_j|,$$

hiszen $|x_j-x_j|=0$. Ezzel be is láttuk a 4. tulajdonságot.[7]

Szükségünk lesz még a *többszörös baricentrikus felbontás* operátorára is. B^q a q-adik baricentrikus felbontás legyen: $B^q\alpha=BB^{q-1}\alpha$ bármely $\alpha\in C_r(E)$ esetén, $B^0\alpha=\alpha$ és $B^1\alpha=B\alpha$.

Be fogjuk majd látni, hogy $\alpha\in Z_r(E, F)$ esetén α és $B^q\alpha$ $H_r(E, F)$ ugyanazon homológia osztályához tartoznak. Ehhez egy R operátort fogunk definiálni, amely egy $R: C_r(E)\to C_{r+1}(E)$ homomorfizmus lesz.

[6] Elemi számolással adódik, hogy $\operatorname{diam}(x_0, x_1, \ldots, x_r)$ egyenlő az $|x_0, x_1, \ldots, x_r|$ euklideszi szimplex átmérőjével. Erre azonban nem lesz szükségünk.

[7] Az euklideszi teret itt tehát nem koordinátatérként fogjuk fel, hanem vektortérként.

AZ R OPERÁTOR DEFINÍCIÓJA:

1. Ha α dimenziója 0, akkor legyen $R\alpha = 0$.[8]

2. Ha $e_0, e_1, \ldots, e_r$ a Δ_r kanonikus szimplex csúcsai, b_r Δ_r baricentruma, akkor az $(e_0e_1\ldots e_r)$ lineáris szimplexre legyen $R(e_0e_1\ldots e_r) = b_r((e_0e_1\ldots e_r) - B(e_0e_1\ldots e_r) - Rd(e_0e_1\ldots e_r))$.

3. Ha $\sigma\colon \Delta_r \to E$ tetszőleges szinguláris szimplex, legyen $H\sigma = \sigma_1 R(e_0e_1\ldots e_r)$, ahol $\sigma_1\colon C_{r+1}(\Delta_r) \to C_{r+1}(E)$ a σ által meghatározott homomorfizmus.

4. $\alpha = \sum_{i=1}^{m} k_i\sigma_i \in C_r(E)$ tetszőleges láncra pedig $R\alpha = \sum_{i=1}^{m} k_i R\sigma_i$.

AZ R OPERÁTOR TULAJDONSÁGAI:

a) *tulajdonság.* Ha $f\colon E \to E'$ folytonos leképezés, akkor $f_1 R = R f_1$.

Bizonyítás. A B operátor 1. tulajdonságának bizonyítását kell megismételni B helyett R-et írva.

b) *tulajdonság.* Ha $\alpha \in C_r(E)$, akkor fennáll a $d R\alpha = \alpha - B\alpha - Rd\alpha$ összefüggés.

Bizonyítás. A teljes indukciós bizonyítás első lépése $r = 0$ esetén triviális. Feltéve $(r-1)$-dimenziós szinguláris szimplexekre (így fennáll minden $(r-1)$-dimenziós szinguláris láncra is) először a $\sigma = (e_0e_1\ldots e_r)$ esetre igazoljuk. Tekintsük az R operátor definíciójának 2. részét és alkalmazzuk a kúpkonstrukcióra vonatkozó $(*)$ összefüggést, akkor a következőt nyerjük:

$$d R(e_0e_1\ldots e_r) = (e_0e_1\ldots e_r) - B(e_0e_1\ldots e_r) - Rd(e_0e_1\ldots e_r) - \\ - [b_r d((e_0e_1\ldots e_r) - B(e_0e_1\ldots e_r) - Rd(e_0e_1\ldots e_r))].$$

Ha beláttuk a szögletes zárójel 0 voltát, készen vagyunk. De ha felhasználjuk d linearitását és a B operátor 2. tulajdonságát,

$$d((e_0e_1\ldots e_r) - B(e_0e_1\ldots e_r) - Rd(e_0e_1\ldots e_r)) = \\ = d(e_0e_1\ldots e_r) - Bd(e_0e_1\ldots e_r) - dRd(e_0e_1\ldots e_r),$$

ez pedig az indukciós feltevés értelmében, a bizonyítandó formulában az $\alpha = d(e_0e_1\ldots e_r)$ helyettesítést alkalmazva, nem más, mint $Rdd(e_0e_1\ldots e_r) = 0$.

Tetszőleges σ szinguláris szimplexre pedig a most kapott eredményből a definíció 3. részét és az a) tulajdonságot felhasználva adódik állításunk.

c) *tulajdonság.* $\widehat{R\alpha} \subset \tilde{\alpha}$ ha $\alpha \in C_r(E)$, (jelölések a B operátor 3. tulajdonságánál). Ez a tulajdonság triviális következménye a definíciónak, ha a B operátor analóg tulajdonságát is felhasználjuk.

Már csak egyetlen lemma hiányzik annak a segédtételnek a bizonyításához, amelyből következik a kivágási tétel. Ezt a lemmát, mivel közismert, bizonyítás nélkül fogjuk idézni (könnyű a bizonyítás).

LEBESGUE-LEMMA: Ha E kompakt metrikus tér, $\mathcal{O}$ ennek egy nyílt halmazokból álló fedőrendszere, akkor létezik olyan $\varepsilon > 0$ valós szám, hogy E-nek minden ε-nál kisebb átmérőjű halmaza részhalmaza $\mathcal{O}$ valamely elemének is.[9]

[8] Nem mindig vagyunk következetesek, néha csak $r \geqq 0$ esetén vizsgáljuk a homorfizmusokat vagy csoportokat, máskor meg $r < 0$ esetén is. Ez azonban nem okozhat félreértést, hiszen $r < 0$ esetén minden szinguláris homológiacsoport 0-csoport és így a homorfizmusokat is egyértelműen csak 0-homomorfizmusokként definálhatjuk.

[9] A Lebesgue-lemma bizonyítását meg lehet találni pl. a 3. felhasznált irodalom 65. oldalán.

SEGÉDTÉTEL. Legyen (E, F) tetszőleges topologikus pár, $\mathfrak{A}$ legyen E-nek egy nyílt halmazokból álló fedőrendszere. Első állításunk az, hogy $\alpha \in Z_r(E, F)$ esetén minden $q \geqq 0$-ra $B^q\alpha \in Z_r(E, F)$ és α, valamint $B^q\alpha$ ugyanazon $H_r(E, F)$-beli homológiaosztályhoz tartoznak. Második állításunk az, hogy elég nagy q-ra az is teljesül, hogy a $B^q\alpha = \sum_{k=1}^{m} k_i\sigma_i$-ben minden $\sigma_i(\Delta_r)$ a részhalmaza $\mathfrak{A}$ valamely elemének.

A segédtétel bizonyítása: Az, hogy $\alpha \in Z_r(E, F)$ esetén $B^q\alpha \in Z_r(E, F)$ is teljesül, következik a B operátor 2. és 3. tulajdonságából. Az $\alpha - B^q\alpha \in B_r(E, F)$ állítás helyessége pedig az R operátor b) és c) tulajdonságából következik.

A második állítást elég egy $\sigma: \Delta_r \to E$ szinguláris szimplexre igazolni. Tekntsük $\mathfrak{A}$ inverz fedőrendszerét Δ_r-ben ($\mathfrak{A}$ elemeinek inverz képeiből álló fedőrendszert). ε legyen Lebesgue-lemmát kielégítő ε. (Ilyen van, hisz Δ_r kompakt metrikus tér). A B operátor 4. tulajdonságából következik, hogy $B^q(e_0e_1\ldots e_r)$ lineáris szimplexei átmérője $\leqq \left(\frac{r}{r+1}\right)^q \operatorname{diam}(e_0e_1\ldots e_r)$, azaz elég nagy q-ra minden lineáris szimplex átmérője $< \varepsilon$. Ha még tekintetbe vesszük a B operátor 1. tulajdonságát, ezzel már be is bizonyítottuk a második állítás helyességét is.

Ezek után az előkészítések után valóban bizonyítsuk be a kivágási tételt.

A kivágási tétel bizonyítása: Tekintsük az E térnek azt a nyílt fedőrendszerét, amely az $\operatorname{Int} F$ és $E - \overline{U}$ halmazokból áll. A segédtétel szerint ekkor bármely $\omega \in C_r(E)$ esetén létezik olyan $q \geqq 0$ szám, hogy a $B^q\omega$ láncban szereplő szinguláris szimplexek vagy $\operatorname{Int} F$-beli vagy $(E - \overline{U})$-beli szimplexek legyenek és így $B^q\omega = \omega_{E\setminus U} + \omega_{F,U}$, ahol $\omega_{E\setminus U}$ jelölje $B^q\omega$-nak azt a részét, amely $(E - \overline{U})$-beli szimplexekből áll, a maradók szimplexei $\operatorname{Int} F$-be kell, hogy essenek. Egyúttal azonban $\omega_{E\setminus U}$ definíciója miatt ezek az utóbb említett szimplexek olyanok, hogy közös képpontjuk van $\overline{U}$-sal is, az $\overline{U}$-sal közös képpontú szimplexek pedig mind $\operatorname{Int} F$-beliek $\overline{U} \subset \operatorname{Int} F$ miatt. Belátjuk, hogy az $i: (E - U, F - U) \to (E, F)$ injekcióhoz tartozó $i_*: H_r(E - U, F - U) \to H_r(E, F)$ epimorfizmus. Be kell látnunk tehát, ha $\alpha \in Z_r(E, F)$, $\alpha \in \bar{\alpha} \in H_r(E, F)$, akkor létezik $\alpha' \in \bar{\alpha}$, ahol $\alpha' \in Z_r(E - U, F - U)$. Segédtételünk szerint létezik q, hogy $B^q\alpha \in Z_r(E, F)$ és $B^q\sigma \sim \alpha \pmod F$, de a $B^q\alpha = \alpha_{E\setminus U} + \alpha_{F,U}$ felírást, ha tekintjük, $\alpha \sim \alpha_{E\setminus U} \pmod F$ igaz, hiszen F-beli láncot hagyva el nem léptünk ki a homológiaosztályból, $\alpha_{E\setminus U}$ $(E - \overline{U})$-ben lánc, és mivel $dB^q\alpha \in C_{r-1}(F)$ teljesül, $d\alpha_{E\setminus U} \in C_{r-1}(F - \overline{U})$ is igaz. Tehát $\alpha' = \alpha_{E\setminus U}$. Lássuk most be i_* monomorfizmus voltát. Legyen $\varepsilon \in Z_r(E - U, F - U)$ és tételezzük fel, hogy $\varepsilon \in B_r(E, F)$. Feltétel szerint $\varepsilon = d\beta + \gamma$, ahol $\beta \in C_{r+1}(E)$, $\gamma \in C_r(F)$. Válasszunk olyan q-t, hogy $B^q\beta$ és $B^q\gamma$ esetén is teljesüljenek a segédtétel feltételei. Akkor $B^q\varepsilon = B^qd\beta + B^q\gamma$, illetve $B^q\varepsilon = (d\beta_{E\setminus U} + \gamma_{E\setminus U}) + (d\beta_{F,U} + \gamma_{F,U})$, a 2. zárójelben levő kifejezés csak 0-lánc lehet, hiszen a kifejezés jobb és bal oldalán álló láncok nem tartalmaznak U-val közös képpontú szinguláris szimplexeket; és mivel ε és $B^q\varepsilon$ ugyanazon $H_r(E - U, F - U)$-beli maradékosztályokhoz kell, hogy tartozzanak, a kivágási tételt teljesen bebizonyítottuk.

15. NÉHÁNY SZÓ A KOHOMOLÓGIÁKRÓL

Jobb lenne hozzátenni a címhez, hogy „kezdeteiről". Ezt csak azért nem tesszük, mert az egész cikk címe után oda lehetne írni, hogy „kezdetei". (Mindent bizonyítás nélkül fogunk közölni.)

Legyen A tetszőleges Abel-csoport, $C^r(E)$-vel jelöljük és az E-feletti r-dimenziós

koláncok csoportjának nevezzük a $C_r(E)$-ből A-ba való homomorfizmusok csoportját. (Ahol tehát a csoportművelet két $\varphi_1, \varphi_2 : C_r(E) \to A$ homomorfizmusa, a $(\varphi_1 + \varphi_2)\alpha = \varphi_1\alpha + \varphi_2\alpha$ összefüggéssel van definiálva minden $\alpha \in C_r(E)$ esetén.) A határoperátort, egy $\delta^r : C^r(E) \to C^{r+1}(E)$ homomorfizmust a $\delta^r(\varphi) = \varphi\partial_{r-1}$ összefüggés értelmezi. Belátható, hogy értelmezhető ebben az esetben is egy faktorcsoport $H^r(E) = \frac{\operatorname{Ker} \delta^r}{\operatorname{Im} \delta^{r-1}}$, ezt nevezzük r-dimenziós kohomológia csoportnak. Ha pedig $f : E \to E'$ folytonos leképezés, akkor $f_1 : C_r(E) \to C_r(E')$ segítségével értelmezhető egy $f^1 : C^r(E') \to C^r(E)$ homomorfizmus az $f^1(\varphi) = \varphi f_1$ definícióval $(\varphi \in C^r(E'))$ és ez meghatároz egy $f^* : H^r(E') \to H^r(E)$ homomorfizmust. Ebben az esetben is definiálható a relatív kohomológiák csoportja és felépíthető egy, a homológiaelmélettel analóg axiómarendszer. De ez már a modern algebrai topológia (kb. az utóbbi 15—20 év). Remélem, ez a cikk segítséget nyújthat annak is, aki komolyabban akar foglalkozni az algebrai topológiával, segít megteremteni a szemléletes alapokat.

A felhasznált irodalmak közül szeretném kiemelni a 3. irodalmat. Az Eilenberg—Steenrod könyv a modern algebrai topológia egyszeregye. Annak számára pedig, aki szeretne ízelítőt kapni az algebrai topológia problémaköreiből, Bognár Mátyás cikkét ajánlom, amely Matematikai Lapok előző számában jelent meg és topologikus sokaságok kialakulásáról és fejlődéséről szól elsősorban, de betekintést nyújt az algebrai topológia egészére is.

ALGEBRAI TOPOLÓGIÁBÓL FELHASZNÁLT IRODALOM

[1] П. С. Александров: Комбинаторная топология, Москва, 1947.
[2] *L. Bers:* Topology, New York, 1956—57 (egyetemi jegyzet).
[3] *S. Eilenberg* and *N. Steenrod:* Foundations of algebraic topology, Princeton, 1952.
[4] *L. Sz. Pontrjagin:* Kombinatorikus topológia, Budapest, 1955.
[5] *A. H. Wallace:* An introduction to algebraic topology, London, 1947.

СИНГУЛЯРНЫЕ ГОМОЛОГИИ II.

М. ВИШКИ

SINGULAR HOMOLOGIES II.

M. VISKI

KÁRTESZI FERENC 60 ESZTENDŐS

MERZA JÓZSEF ÉS VARGA OTTÓ

Kárteszi Ferenc 1907. február 13-án született Cegléden. Szülei kilenc hold földön gazdálkodtak. Három év múlva, 1910-ben, édesapja a MÁV szolgálatába lépett, hogy a család anyagi gondjait enyhítse. Néhány éves — a szolgálatból adódó — vándorló élet után a család Budapesten telepedett le. A gondok azonban nem maradtak el ezután sem, mert a világháború felemésztette minden vagyonukat, a földet is. A 12 éves Ferenc már korán megtanulta azt, hogy a megélhetésért keményen kell küzdeni: az iskolai időben magántanítványai voltak, nyáron mezőgazdasági munkával keresett pénzzel járult hozzá a család jövedelméhez. A létharc azonban nem törte meg. Az egészséges, kisportolt testű diák szellemi kvalitásait is korán megcsillogtatta. A 15 éves gimnazista már az érettségizők matematikai tananyagát is ismerte, az utolsó két évben pedig egyetemi szintű könyvek voltak az olvasmányai: Beke, Klug, König, Kürschák, a külföldiek közül pedig Kowalewski munkái.

A tehetséges diák gondolatait másokkal is meg akarta ismertetni. Így történt, hogy saját kezdeményezésére iskolája matematikát kedvelő diákjai tudományos szakkört alakítottak, ahol egymást váltották az előadások, feladatmegoldások, könyvismertetések. Hivatalos támogatást és ezzel nyilvános elismerést az iskola egyik akkori tanára, Neukomm Gyula nyújtott az akkor már féléve eredményesen dolgozó szakkör számára. A kis társaság működése nem volt rövid életű. Több mint két évtizedes munkájának sikerét mi sem bizonyítja jobban, minthogy tagjaiból később nem is egy egyetemi tanár, vagy szakember vált. E szakköri munka során készítette Kárteszi Ferenc első önálló dolgozatait, amelyekről már Neukomm elismerőleg nyilatkozott s amelyeket Faragó Andor egymás után közölt az 1925-től kezdve újra megindult Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapokban. Ő vonta be a fiatal Kárteszit csekély díjazás mellett a lap szerkesztésébe, aki ezt nagy ambícióval végezte egészen a lap 1939-es megszűnéséig.

A középiskola elvégzése után a tudományegyetemen folytatta tanulmányait. Célja a matematika-ábrázoló geometria szakos tanári oklevél megszerzése volt. Egyévi munka után azonban édesapja és bátyja tragikus halála miatt rázúduló nehézségek majdnem meghiúsították további előhaladását. Sorsán a Műegyetem két professzora, Romsauer Lajos és Kürschák József segített, akik ösztöndíjas demonstrátori állást biztosítottak számára. A további évek ennek ellenére sem voltak könnyűek, de végül sikerült 1930-ban kitűnő szakmai vizsgák után diplomát szereznie. Három év múlva projektív geometriai tárgyú disszertációjával summa cum laude doktorált.

Mint friss diplomás, a Műegyetem ábrázoló geometriai tanszékén lett jutalomdíjas tanársegéd, azonban egyre erősödő didaktikai érdeklődésének engedve lemondott erről az állásáról s a győri állami reáliskola tanára lett. Nem kétséges,

hogy az 1931—1940-es évek tanári munkája jelentette Kárteszi Ferenc részére azt a nagy élményt, amely további oktató-nevelői pályafutását meghatározta.

Geometriai tárgyú vizsgálatainak előrehaladásával szükségét érezte, hogy személyes kapcsolatot teremtsen az általa választott témakör külföldi művelőivel is. Ezért kezdett el levelezni a bolognai egyetem professzorával, B. Segre akadémikussal. Leveleiben különböző problémák megoldásait ismertette. Segre válasza frappáns volt: az eredményeket két dolgozatban, az olasz matematikai társulat lapjában tétette közzé. Az ő, valamint Fejér Lipót támogatása tette lehetővé, hogy Kárteszi Ferenc ösztöndíjasként az 1936/37. tanévet Bolognában tölthesse. Ott került kapcsolatba P. Levi-vel, akivel közös dolgozatot is írt. Ezután katonáskodás miatt három évig szünetelt kutatómunkája, de az olasz matematikai társulat második kongresszusán már ismét két előadással szerepel. Didaktikai vonalon is tevékeny: Alexits Györggyel, Hajós Györggyel és Veress Pállal együtt szerkeszti a Matematikai és Didaktikai Lapokat. 1942-től kezdve azonban nem tudja kikerülni a második világháború viharát. Tudományos tervei, újabb római ösztöndija, Kerékjártó professzornál tervezett magántanári habilitációja meghiúsul. A következő három év a háború tüzében, katonai szolgálat, egyéves hadifogság, betegség jegyében telik el.

Kárteszi Ferenc a felszabadulás után azonban új erővel talpra állt. Bár 1947-ben még csak a Tanárképző Intézet tanára, 1948-ban már projektív és ábrázoló geometria tárgykörből egyetemi magántanár. Megszervezte a matematika-ábrázoló geometria szakos tanárképzést, az esti tagozatot és számos geometriai tárgyat adott elő. A Bolyai Társulat alapításánál is ott volt, a Társulat hosszú ideig az ő lakásán tartotta üléseit. Részt vett az egyetemi és középiskolai reformmunkálatokban, számos tantervet, rendeletet dolgozott ki.

1950-ben rendkívüli egyetemi tanárrá, majd 1951-ben tanszékvezető egyetemi tanárrá nevezték ki s egyidejűleg dékán is lett. Dékánsága több mint hároméves idejére esik a Projektív és Ábrázoló Geometria Tanszék létrehozása, a Természettudományi Kar kiválása, az első reformok, hogy csak a lényegesebbeket említsük. 1952-ben a matematikai tudományok kandidátusa címet ítélték meg neki. 1955-ben „Az oktatásügy kiváló dolgozója" lett, 1956-ban „Beke Manó emlékdíj"-jal, továbbá „Munka Érdemrend"-del tüntették ki. 1957-ben, mint a BEAC tanárelnöke újjászervezte az egyesületet és nemzetközi méretű jubileumi emlékversenyt valósított meg. 1958-ban az Eötvös Loránd Tudományegyetem Tanárképző Tanácsának elnökévé, rektorhelyettessé nevezték ki. Ötéves munkája idején csatolták az egyetemhez a három gyakorló iskolát és reá nagy feladat hárult a tanárképzés gyakorlati kialakítása, az iskolák tanári testületének megszervezése terén.

Kárteszi Ferenc eme vázlatos életrajza is világosan megmutatja, hogy tevékenységében a tudományos kutató szoros egységben áll a tudományszervezővel, a didaktikussal és a nevelővel. Munkásságának áttekintését tudományos eredményeinek ismertetésével fogjuk kezdeni. Kutatásai a geometria területére esnek és annak legkülönbözőbb ágaihoz tartoznak. Dolgozataiban gyakran kapcsolódnak össze egyes témakörök mind tárgyi, mind módszertani tekintetben. Ezért az az osztályozás, amit az olvasónak nyújtunk, eleve feltételez bizonyos önkényességet s egyes dolgozatai több témához is odasorolhatók. Azt mondhatjuk, hogy a főbb tárgykörök a következők: klasszikus projektív geometria, gráfelmélet és kombinatorikus geometria, véges rendű (projektív) geometria, algebrai geometria, elemi és ábrázoló geometria, a geometria alapjai. Azért, hogy Kárteszi Ferenc problémavilágát és matematikusi alkotó módszerét minél világosabban be tudjuk mutatni, úgy döntöttünk, hogy az eredmények monoton felsorolása helyett néhány — mintegy összegező jellegű — dolgozatának ismertetésével igyekszünk őt az olvasóhoz közelhozni.

Kezdjük a klasszikus projektív geometriával, amely nemcsak kiindulást jelentett a fiatal matematikus számára, de ami mindig is kedvenc témája volt s amelynek szintetikus módszereit Kárteszi mindig nagy hozzáértéssel tudta alkalmazni. Lássuk ezt a projektív geometria egy fontos fejezetéhez tartozó [36] dolgozatán át.

Ismeretes, hogy nem elfajult, két valós egyenessereggel rendelkező másodrendű felületeknél két olyan projektív leképezés létezik, amely a felületet önmagába transzformálja. Ezek, az ún. első-, illetve másodfajú eltolások, a felület első-, illetve második egyenesseregét sajátmagába viszik át. Nyilvánvaló, hogy e transzformációknál a pont és képpont olyan viszonyban áll, hogy az egyik a másiknak az érintősíkjában is fekszik. Kárteszi dolgozata a következő, ezzel a kérdéssel rokon problémát tárgyalja: keressük meg mindazokat a projektív leképezéseket, amelyek egy el nem fajuló F felületet úgy visznek át egy tőle különböző F' felületbe, hogy valamely pont képpontja a pontbeli érintősíkban fekszik, míg maga a pont a képpontjában vett érintősíkhoz tartozik. Minthogy bármely pontot és képpontját összekötő egyenes eszerint mindkét felületet érinti, azért az ilyen leképezést bitangenciálisnak nevezzük. Kárteszi az F és F' felületpárra három modellt ad az euklideszi térben. Az első modellnél az F és F' két olyan egyenlő oldalú hiperbolikus paraboloid, amelyek egymást a koordinátarendszer kezdőpontjában levő pontjukban érintik. Ha feltesszük, hogy ebben a pontban a közös érintősík éppen az (x, y)-sík és az x, valamint az y tengely mindkét felületnek alkotója, akkor a felületpár a

$$F: \qquad z = cxy,$$

$$F': \qquad z = \frac{c}{4} xy$$

egyenletekkel írható le (c: tetszőleges paraméter). A bitangenciális leképezésnél az F felület tetszőleges $P(x_0, y_0, z_0)$ pontjának megfelelőjét az F' felületen az

$$x_0 \to x_0' = 2x_0$$

$$y_0 \to y_0' = -2y_0$$

$$z_0 \to z_0' = -z_0$$

előírás szerint találhatjuk meg. Geometriailag ez annyit jelent, hogy ha a P pont (x, y)-síkbeli vetületét kétszeresére nyújtjuk és a pont magasságát megtartjuk, az így nyert pontot P^*-gal jelöljük, akkor a P' pont a P^*-ból az x tengelyen való tükrözéssel áll elő.

A második modell felületei nem tartalmaznak valós egyenessereget, amit euklideszi geometriai szóhasználattal úgy mondhatunk, hogy a felületek csupa elliptikus pontból állanak. E két felületet egy derékszögű koordinátarendszerben a

$$F: \qquad z = \varkappa^2(x^2 + y^2)$$

$$F': \qquad z = -\varkappa^2(x^2 + y^2)$$

egyenletekkel írhatjuk le. Amint látjuk, elliptikus paraboloidokról van szó. A leképezést megvalósító hozzárendelést a következőképpen nyerjük. Az F felület P pontját az (x, y)-síkon tükrözzük, majd az így nyert Q pontot a z tengely körül, matematikailag negatív irányban, 90°-kal elforgatjuk. A $P \to P'$ leképezés ismét bitangenciális lesz.

A harmadik modellnél a felületpár a már előbb szerepelt

$$F: \qquad z = \varkappa^2(x^2+y^2)$$

felületből, valamint a

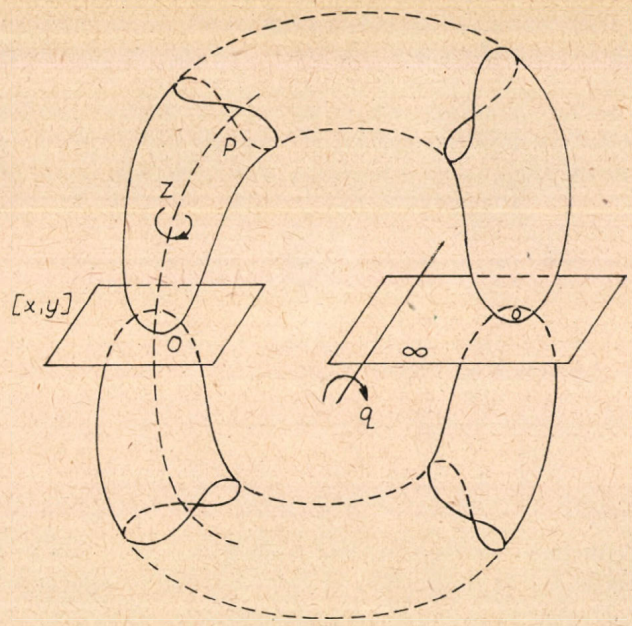
$$F': \qquad z = -\frac{\varkappa^2}{\lambda^2}(x^2+y^2)$$

egyenletű felületből áll. A $P \to P'$ leképezésnél a második modellhez képest csak annyi eltérés van, hogy most még az ott nyert P' pont z tengelytől való távolságának λ-szorosát kell vennünk. Ez a leképezés szintén bitangenciális.

A modellek ismertetése után nagyon egyszerű bizonyítást ad az F felület összes lehetséges bitangenciális leképezéseire vonatkozólag. Jelölje φ az F felület által indukált polaritást és ϱ egy tetszőleges nullapolaritást. Ebben az esetben a $\varrho \circ \varphi$ leképezés reguláris projektivitás lesz és ez az F felületet bitangenciálisan leképezi az F' felületre. Megfordítva, minden bitangenciális leképezés ilyen formában állítható elő. Mivel két megadott, egymásra bitangenciálisan leképezhető F és F' felület egymással egyenjogú, azért az előbbi $\varrho \circ \varphi$ leképezés egyenlő azzal a $\varphi' \circ \varrho$ leképezéssel, ahol φ' az F' felületre vonatkozó polaritást jelenti. A megfelelő pontpárokat összekötő egyenesek a ϱ nullapolaritás által indukált lineáris komplexus egyeneseinek részsokaságát képezik. Kárteszi elliptikus felületek esetén az F és F' felületek kölcsönös helyzetének kérdését teljesen tisztázta. Abból a tételből, hogy elliptikus felületek esetén létezik két kitérő p és q egyenes, amelyek mind az F-re, mind pedig az F'-re vonatkozólag konjugáltak, és ezeken mind az F, mind az F' ugyanazt az involúciót indukálja (az egyik elliptikust, a másik hiperbolikust) az következik, hogy a harmadik modell projektív térben tekintve, a legáltalánosabb esetet adja két elliptikus, egymásra bitangenciálisan leképezhető felületre. Az előbb említett két egyenes a modellben a z tengely, valamint az (x, y) síkállás által meghatározott végtelen távoli egyenes. A z tengelyen az előbb említett involúció hiperbolikus, a z tengely nulla és végtelen távoli pontja az involúció valós kettős elempárja, míg a másik egyenesen az involúció valóban elliptikus. A két egyenesen való „forgás" adja a leképezést. Az általános projektív térben tehát két, egymást kívülről érintő felületről van szó, amelynek szemléltető képe csak sematikusan adható meg. Az 1. ábrán a felületeket szaggatott vonallal rajzoltuk, hogy ezzel is kifejezésre juttassuk, hogy a tér minden síkmetszetéhez tartozik felületi pont. Kárteszi befejezésül megmutatta, hogy az F és F' érintői által meghatározott két másodrendű és másodosztályú sugárkomplexus áthatásából hogyan lehet származtatni a P és P' pontokat összekötő másodrendű és másodosztályú sugárkongruenciát.

A következő kutatási terület áttekintéséhez soroljuk fel a gráfelmélet legfontosabb alapfogalmait.

Véges gráfnak nevezzük pontoknak és őket összekötő szakaszoknak véges rendszerét. A pontokat a gráf csúcsainak, a szakaszokat pedig a gráf éleinek nevezzük. Megkívánjuk, hogy a gráf két csúcsa legfeljebb egy éllel legyen összeköthető. Megállapodás szerint a gráf csúcsainak számát a gráf rendjének nevezzük. Ha a gráf minden csúcsából pontosan k él indul ki, akkor a gráf k-adfokú reguláris gráf. Összefüggő gráfról beszélünk, ha a gráf bármely két pontja összeköthető a gráf éleiből összeállított úttal. Valamely utat λ hosszúságú körútnak nevezünk, ha a végső él csatlakozik az első élhez (vagyis az út zárt) és az út λ élből tevődik össze. Képezzük most az összes lehetséges körutakat a gráfban. A körutak hosszának minimumát (a legrövidebb körút(ak) éleinek számát) a gráf osztályának nevezzük



1. ábra

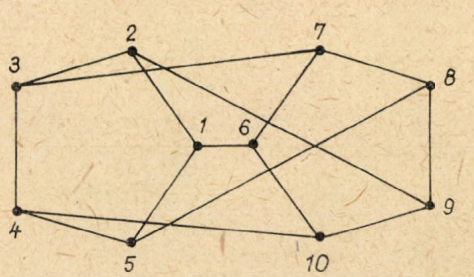
és l-lel jelöljük. Ha valamely n-edrendű gráfban van n hosszúságú körút, akkor azt Hamilton-féle gráfnak mondjuk.

A gráfok tanulmányozása során jutott Kárteszi Ferenc arra a gondolatra, amelyet az 1959. őszén tartott gráfelméleti kollokviumon fogalmazott meg. Ha k és l háromnál nem kisebb, tetszőlegesen előírt természetes szám, határozzuk meg azt a legkisebb n számot, amellyel olyan n-edrendű gráf szerkeszthető, amely k-adfokú és l-edosztályú. Hányféle különböző realizáció lehetséges ugyanazon n mellett? Az adott k és l-hez tartozó minimális n számot Kárteszi

$$F(k, l) = n$$

módon jelölte. Olyan gráfot, amely a probléma megoldását jelenti $\Gamma(n; k, l)$ szimbólummal jelölt. Könnyen bizonyítható, hogy a 2. ábrán látható, ún. Petersen féle gráf, a $k=3$, $l=5$ kitűzésnek egyetlen megoldását adja $n=10$ mellett. Ez a Petersen féle gráfnak önmagában is érdekes jellemzése. A problémára $k=3$, $l=6$ mellett V. T. Tutte, $k=3$, $l=7$ mellett H. Sachs adott megoldást, maga a szerző is több speciális esetet vizsgált ki. Általánosabb megoldást ezen a téren Kárteszi következő tétele jelentett. Ha $k=1+p^{\alpha}$ és $l=6$, akkor $n=2(1+p^{\alpha}+p^{2\alpha})$. A megoldás mindig megvalósítható egy Hamilton-féle gráffal, azonban más szerkezetű gráfok is létezhetnek. Ez vezette Kárteszit arra, hogy bevezesse a

$$g(k, l) = m$$



2. ábra

függvényt, amely a k és l megadása után kapott minimális n mellett szerkeszthető heteromorf gráfok számát jelenti. A már említett esetekben $g(3,5)=g(3,6)=g(3,7)=1$.

Az előbb említett tétel bizonyításánál Kárteszi a p^r elemű Galois test feletti véges projektív geometria incidencia mátrixához egy ún. incidencia gráfot szerkesztett és megmutatta, hogy ez az incidencia gráf teljesíti a feladat követelményeit. J. Singernek arra vonatkozó tételét felhasználva, miszerint egy incidencia mátrix sorainak és oszlopainak permutálásával mindig ciklikus mátrixszá rendezhető át, geometriai megfontolással kimutatja, hogy a probléma mindig megoldható egy $2(1+p^{\alpha}+p^{2\alpha})$ szögpontú szabályos sokszög felhasználásával készített Hamilton gráf segítségével.

A minimális n meghatározásának kérdésével többek között Erdős Pál is foglalkozott és a $g(k, l)\neq 0$ feltevés mellett az

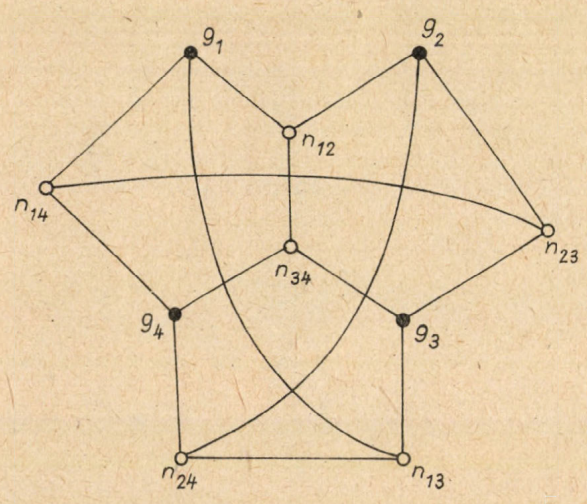
$$1+k\sum_{r=0}^{\left[\frac{l-3}{2}\right]}(k-1)^r \leqq n < 4\sum_{r=1}^{l-2}(k-1)^r$$

becslést adta rá.

Kárteszi gráfelméleti vizsgálataihoz érdekesen kapcsolódott egy geometriai probléma. Érdemes ezt az önmagában is érdekes eredményt megismerni.

Nevezzük keresztnek a tér két olyan egyenesét, amely egymást merőlegesen metszi. Tekintsünk a térben négy, egymáshoz képest kitérő g_1, g_2, g_3, g_4 egyenest. Jelöljük a g_k és g_l egyenesek normál tranzverzálisát n_{kl}-lel. Tételezzük fel, hogy az n_{12} és n_{34}, valamint az n_{13} és n_{42} tranzverzálisok keresztet alkotnak. Kárteszi Ferenc bebizonyította, hogy ebben az esetben az n_{14} és n_{23} egyenesek is merőlegesen metszik egymást.

A bizonyítást a hiperbolikus térre végezte el, eredménye azonban az euklideszi térre is igaz. A bizonyításnál a Poincaré-féle gömbmodellt használta, amelyet sztereografikus projekcióval leképezett a komplex számok síkjára. Mivel a hiperbolikus tér egy egyenese a Poincaré modellben a gömböt merőlegesen metsző körívvel ábrázolható, azért ezt az egyenest lényegében két ideális pontja meghatározza. Ezeknek képe a sztereografikus projekciónál a komplex sík két pontja lesz. Az a tény,hogy a tér két egyenese keresztet alkot úgy fejezhető ki, hogy az egyenesek ideális pontjait ábrázoló négy pont a komplex számsíkon harmonikus pontnégyest alkot. Ezt úgy is át lehet fogalmazni, hogy a Descartes-fél esík két pontjának konjugáltsága szerepelen egy alkalmas parabolára vonatkozólag. A tétel bizonyítá samármost Hessének arra az eredményére alapozható, amely szerint ha egy teljes négyoldal két pár átlós pontja konjugált egy kúpszeletre, akkor a harmadik pár is az.



3. ábra

Ha ezt az eredményt egy sémával akarjuk kifejezni, akkor érdekes dologra bukkanunk. Ábrázoljuk a négy kitérő egyenest négy ponttal, az őket összekötő normál tranzverzálisokat további hat ponttal. Valamely tranzverzálist ábrázoló pontot kössük össze azon egyeneseket ábrázoló pontokkal, amelyeknek ő a tranzverzálisa. Ezenkívül kössük össze az egymással keresztet alkotó normál tranzverzálisoknak megfelelő pontokat. A kapott sémáról könnyű felismerni, hogy Petersen-féle gráf. A térgeometriai tétel tehát ilyen meglepő gráfelméleti interpretációt nyert.

Kárteszi Ferenc [11] dolgozata tipikus példa arra, hogyan lehet problémákat megoldani úgy, hogy az alakzatokat az eredetihez képest különböző geometriájú térben az eredetitől eltérő módon interpretáljuk. A sík kúpszeleteinek összességét például leképezhetjük egy ötdimenziós ponttérre. A háromdimenziós tér vonalgeometriája is leképezhető az ötdimenziós térre és egy lineáris komplexus e tér egy pontjával egyértelműen határozható meg. Ezáltal a tér lineáris komplexusai és a sík kúpszeletei kölcsönös és egyértelmű kapcsolatba hozhatók. Egy térbeli harmadrendű C^3 görbe húregyeneseinek és egy tetszőleges lineáris komplexusnak áthatása olyan egyenessereget szolgáltat, amelynek a síkra való vetülete egy kúpszeletet burkol be. A C^3-nak egy pontjából való vetülete síkbeli kúpszelet és fordítva, minden C^2 kúpszelet „fölé" lehet olyan C^3-at szerkeszteni, amelynek ő a vetülete. Ebből következik, hogy adott másodrendű C^2 görbébe beírt sokszög jól meghatározott másodrendű görbéket érint és így válik lehetővé ezen görbék között fennálló kapcsolatok kivizsgálása. Mint egyszerű eredmény adódik a Poncelet-féle záródási tétel, amely azt állítja, hogy egy B^2, C^2 kúpszeletpár esetén vagy nulla, vagy végtelen azoknak a háromszögeknek a száma, amelyek az egyik kúpszeletbe és ugyanakkor a másik kúpszelet köré vannak írva. Ugyanis a C^2-be beírt háromszög a C^3 egy húrháromszögének a vetülete és mivel a vetületben a B^2-őt burkolják, azért a három egyenes egy lineáris komplexus eleme. Ismeretes viszont, hogy általános komplexus esetén egy síkban háromszöget képező komplexus-egyenesek nincsenek. Ez a nullának megfelelő eset. Ha viszont a komplexus speciális, akkor azt egy egyenes indukálja. Az egyenesen átfektetett síksor minden egyede kimetszi a C^3-ból a háromszöget képező három pontot. Ilyenkor végtelen sok háromszög van.

Azt, hogy a közönséges tér ábrázoló geometriai módszerei magasabb dimenziós terek esetén is igen hasznosak lehetnek, mutatja a [39] dolgozat. Ha a végtelen sakktábla mezőit a sík egész koordinátájú pontjaival helyettesítjük, az egy pontból kiinduló lóugrásokat pedig a kezdőpontból a célpontba vezető vektorokkal reprezentáljuk, akkor az a, b, c, d, vagy az ellenkezőleg irányított $-a, -b, -c, -d$ vektorokat kapjuk. A tábla egyik pontjából a másikba a $\xi^1 a + \xi^2 b + \xi^3 c + \xi^4 d$ vektor segítségével juthatunk, ahol $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ egész számokat jelent. Egy lóugrássorozat hosszán a $\lambda = |\xi^1| + |\xi^2| + |\xi^3| + |\xi^4|$ számot értve, a (μ, ν) párokkal jellemzett sík (μ és ν egész szám) a λ segítségével metrikus síkká válik, amennyiben két pont távolságán egy minimális λ-hoz tartozó lóugrássorozatot értünk. A $(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$ számnégyes a négydimenziós tér egy pontjának koordinátáiként tekinthető. A négydimenziós tér minden $(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$ pontjához hozzárendelhető a kétdimenziós térnek olyan $P'(\mu, \nu)$ pontja, amelynek előállítása

$$p' = \xi^1 a + \xi^2 b + \xi^3 c + \xi^4 d. \tag{1}$$

Ez a leképezés természetesen nem kölcsönösen egyértelmű. A leképezésbe mélyebb bepillantást nyerünk, ha figyelembe vesszük, hogy ez a kétdimenziós tér a négydimenziós ortogonális vetülete.

A négydimenziós térnek a kétdimenziós térre való lineáris leképezését azáltal kaphatjuk meg egyértelmű módon, ha a tér bázisvektorainak a kétdimenziós térben levő képvektorait előírjuk. Ha az ortonormált $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ vektorok képei a sík a, b, c, d vektorai lesznek, akkor a $\xi = \xi^i \mathbf{e}_i$ vektor p' képe a linearitás folytán

$$p' = L(\xi) = L(\xi\, \mathbf{e}_i) = \xi^i L(\mathbf{e}_i)$$

$$L(\mathbf{e}_1) = a,\ L(\mathbf{e}_2) = b,\ L(\mathbf{e}_3) = c,\ L(\mathbf{e}_4) = d$$

lesz, amint azt az előbb állítottuk. Mivel az a, b, c, d vektorok koordinátái olyan számok, hogy

$$a^1a^2 + b^1b^2 + c^1c^2 + d^1d^2 = 0,$$

azért ebből az következik, hogy a négyméretű tér

$$\mathbf{i}(a^1, b^1, c^1, d^1)$$

és

$$\mathbf{j}(a^2, b^2, c^2, d^2)$$

vektorai egymásra merőlegesek. De merőlegesek lesznek ezeknek a vektoroknak u és v képei is, emiatt az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ vektort az u és v vektorral azonosíthatjuk. A négydimenziós tér minden $(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$ pontját az $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ és az ezekre merőleges $\mathbf{k}$ és $\mathbf{r}$ vektorokkal állíthatjuk elő. Mivel a $\beta\mathbf{k} + \gamma\mathbf{r}$ vektorok képei a zérusvektort adják, azért ebből az következik, hogy a síknak egy pontja az összes rá merőleges $\beta\mathbf{k} + \gamma\mathbf{r}$ vektoroknak a képe, vagyis egy kétméretű lineáris tér vetülete. A sík minden egyes pontjához tartozó merőleges síkok egymással párhuzamosak, mert ugyanazon vektorpár lineáris kombinációjaként adódnak. A síknak egy P' pontjához a négyméretű térben tartozó pontot csak akkor kapjuk egyértelműen, ha a P'-n kívül e síkban még az (1) leképezéssel jellemzett törtvonalat is megadjuk. Ez az eljárás teljesen megfelel a háromméretű tér pontjainak a síkon történő axonometrikus ábrázolásánál követett módszernek. Ezzel az eljárással Kárteszi, egyebek között, adott középpontú és sugarú kör pontjainak halmazát határozza meg. Ilyen halmaz mindig a koordinátarendszer 0 kezdőpontját tartalmazó, az $a, b, c, d, -a, -b, -c, -d$ vektorokra eső szabályos sokszög belsejéből és ennek oldalára illeszkedő pontokból áll. A Kárteszi-féle geometriai módszerrel az egész együtthatójú

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i = b_k \qquad k = 1, \ldots, m \quad (m < n)$$

lineáris egyenletrendszer olyan egész számú megoldásainak struktúrája is jellemezhető, amelynél

$$|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$$

minimális.

Így folytathatnánk Kárteszi Ferenc vizsgálatainak ismertetését, kitérve az egyes kérdésekkel kapcsolatban felvethető számos nyílt, vagy megoldott problémára. De éppen ez az a csatlakozópont, ahol szinte észrevétlenül jutunk el Kárteszi tudományos munkásságának egy másik vonásához. Ez abban áll és ez életrajzából is kitűnik, hogy már fiatalkora óta a szakkör, a szeminárium volt éltető közege. Sok kérdés vetődött fel ott, nyert általa, vagy mások által megoldást, általánosítást. Kárteszi szemináriumait ma is látogatják tehetséges fiatal hallgatók, kutatók s a kapcsolat mindkét fél részéről számos értékes gyümölcsöt hozott. De Kárteszi érdeklődése mindig tovább ment a kutatók, barátok zárt körén. Már Faragó Andor mellett, és azóta is, mint a Matematikai és Didaktikai Lapok, a Középiskolai Mate-

matikai Lapok szerkesztője hivatásának érezte, hogy gondolatait, ötleteit az ország közvéleménye elé tárja. Fáradhatatlan volt az oktatási, szervezeti reformok kidolgozása és megvitatása terén. A matematika minél eredményesebb oktatása már győri tanárkodása óta szívügye. Ezért tartott számos előadást a serdülőkorban levők matematikai képzéséről, a fejlődésben elmaradt gyermekek képzéséről, a játék és a modellek szerepéről a matematika oktatásában. Ezért törekedett mindig a tanárképzés módszereinek javítására. Könyvei, amelyeket a szakkörök fiatalsága, vagy a geometria iránt érdeklődők számára írt, Kárteszi eziránytú benső elkötelezettségét tanúsítják. Bolyai János Appendix-ének kiadásához írt kommentárjai, ábrázoló geometriai egyetemi tankönyvének eredeti felfogása mind méltatást érdemelne. Sajnos, még azt sem mondhatjuk, hogy a csatolt irodalomjegyzék teljes lenne, mivel igen nehéz összegyűjteni sokfelé írt cikkeit. Az olvasó azonban így is jó áttekintést fog kapni tudományos tevékenységéről. Most pedig, amikor Kárteszi Ferenc hatvanadik születésnapjának köszöntésére írt cikkünket befejezzük, kötelességünknek érezzük, hogy a magyar matematikusok nevében további eredményes tudományos életpályát kívánjunk neki.

KÁRTESZI FERENC MUNKÁINAK JEGYZÉKE

[1] A tetraëderről. Köz. Mat. Fiz. Lapok *2* (1925—26), 101—103, 130—132, 161—162.
[2] Az egyenlőszárú hiperboláról. Köz. Mat. Fiz. Lapok *3* (1926—27), 229—231.
[3] A 354. feladat általánosítása. Köz. Mat. Fiz. Lapok *4* (1927—28), 283—285.
[4] Megjegyzések a 650. feladathoz. Köz. Mat. Fiz. Lapok *7* (1930—31), 165—167.
[5] Kúpszeleten fekvő hat pont által meghatározott tíz kúpszeletről és a velük kapcsolatos konfigurációkról. Doktori disszertáció. Győr, 1932, 12 p.
[6] Az ellipszis. Köz. Mat. Fiz. Lapok *11* (1934—35), 241—247.
[7] Intorno a certi cicli di n punti su di un ellisse. Boll. Un. Mat. Ital. *14* (1935), 83—86.
[8] Nuova dimostrazione di una congruenza aritmetica. Boll. Un. Mat. Ital. *14* (1935), 173—174.
[9] Probabilita dello spezzamento di un segmento in parti che possano essere i lati di un n-gono. (P. Levi-vel közösen) Period. Mat. (4) *17* (1937), 238—242.
[10] A parabola néhány metrikus tulajdonságáról. Köz. Mat. Fiz. Lapok *15* (1938—39), 197—202.
[11] Egy geometriai leképezés alkalmazásai. Mat. Fiz. Lapok *46* (1939), 146—151.
[12] Sopra un sistema di coniche ∞^1 e di indice 4. Boll. Un. Mat. Ital. (2) *2* (1940), 314—320.
[13] A parabolával hiperoszkuláló egyenlőoldalú hiperbolák rendszere. Mat. Fiz. Lapok *48* (1941), 193—202.
[14] Über das System der gleichseitigen Hyperbeln, die eine Parabel hyperosculieren. Mh. Math. Phys. *50* (1941), 27—34.
[15] Su un sistema speciale delle coniche osculatrici a due coniche date. Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. (1942), 271—276.
[16] Sulla parabola di Neil. Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. (1942), 994—998.
[17] Síkgeometriai tételek bizonyítása térgeometriai meggondolások közvetítésével (Sztereografikus projekció). Köz. Mat. Lapok *2* (1949—50), 109—117.
[18] A körsorokról. Köz. Mat. Lapok *2* (1950), 14—22, 69—76.
[19] Axiálisan szimmetrikus Moebius-féle tetraéderpár. Mat. Lapok *2* (1951), 89—98.
[20] Bolyai János. Köz. Mat. Lapok *5* (1952), 65—75.
[21] Bolyai János. Felsőoktatási Szemle *1* (1952), 400—404.
[22] A négyszög oldalait érintő gömbök. Az I. Magyar Mat. Kongr. Közl. (1952), 613—618.
[23] Néhány planimetriai összefüggés sztereometriai úton való levezetése. Mat. Lapok *3* (1952), 47—58.
[24] Az államvizsgáról. (Vitacikk). Felsőoktatási Szemle *2* (1953), 312—317.
[25] Két szerkesztési feladat megoldása a hiperbolikus síkon. Mat. Lapok *4* (1953), 87—91.
[26] Lobacsevszkij élete és munkássága. MTA Mat. Fiz. Oszt. Közl. *3* (1953), 189—197.
[27] Hozzászólás Némedi Lajos anyanyelvünk ápolásáról szóló cikkéhez. Felsőoktatási Szemle *3* (1954), 509—513.
[28] Egy különös geometria. Köz. Mat. Lapok *9* (1954), 71—78.
[29] La vie et les oeuvres de N. I. Lobatchevsky. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. *5* (1954), supplementum, 127—136.
[30] A Menelaos- és a Ceva-féle tétel. Köz. Mat. Lapok *11* (1955), 67—75.
[31] Extremalaufgaben über endliche Punktsysteme. Publ. Math. Debrecen *4* (1955), 16—27.

[32] Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij (1792—1856). MTA Mat. Fiz. Oszt. Közl. *6* (1956), 157—161.
[33] Neukomm Gyula. Köz. Mat. Lapok *15* (1957), 129—130.
[34] Eine Bemerkung über das Dreiecksnetz der hyperbolischen Ebene. Publ. Math. Debrecen *5* (1957), 142—146.
[35] A műszaki rajz és a geometria kapcsolata. Matematika Tanítása *5* (1958), 14—20, 47—52.
[36] Másodrendű felületek egymásra való projektív leképezéséről. Mat. Lapok *9* (1958), 260—272.
[37] Négyzetekkel burkolt konvex alakzatok. Köz. Mat. Lapok *18* (1959), 1—6, 33—37.
[38] Über ein elementargeometrisches Problem. Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. *2* (1959), 49—60.
[39] Rösselsprungserien am unendlichen Schachbrette. Publ. Math. Debrecen *6* (1959), 276—287.
[40] Due piccoli contributi alla geometria elementare. Boll. Un. Mat. Ital. (3) *15* (1960), 54—58.
[41] Piani finiti ciclici come risoluzioni di un certo problema di minimo. Boll. Un. Mat. Ital. (3) *15* (1960), 522—528.
[42] Egy kombinatorikus minimum problémáról. Mat. Lapok *11* (1960), 323—329.
[43] Az egyszerű ferde rácskockák összességének előállítása. II. Magyar Mat. Kongr. Előadáskivonatok (1960), 1. köt. Ib, 3—4.
[44] Egy reguláris gráfokra vonatkozó minimumprobléma. II. Magyar Mat. Kongr. Előadáskivonatok (1960), 1. köt. II, 28—29.
[45] Logikai botlások elemzésének alkalmazása a matematika tanításában. II. Magyar Mat. Kongr. Előadáskivonatok (1960), 2. köt. VII, 5.
[46] Bolyai János halálának századik évfordulójára (1802—1860). Magyar Tudomány (*67*) 5 (1960), 63—69.
[47] A siracusai Archimedes-ünnepségről. Magyar Tudomány *6* (1961), 569—571.
[48] Tanárképzésünk tananyagának és módszereinek korszerűsítéséről. Felsőoktatási Szemle *10* (1961), 121—132.
[49] Alcuni contributi a problemi provenienti da varie questioni pratiche. Citta di Siracusa. Celebr. Archimed. Sec. XX. *3* Simpos. Mecc. Mat. appl. (1962), 145—149.
[50] Beitrag zu einer hundertjährigen Aufgabengruppe der algebraischen Geometrie. Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. *5* (1962), 33—41.
[51] Szász Pál 60 esztendős. Mat. Lapok *13* (1962), 9—21.
[52] Sylvester egy tételéről és Erdős egy sejtéséről. Köz. Mat. Lapok *26* (1963), 3—9.
[53] Alcuni problemi della geometria d'incidenza. Confer. Sem. Mat. Univ. Bari No. 88 (1963), 14 p.
[54] Néhány témakör fejlődéstörténete az algebrai görbék elméletében. Mat. Lapok *14* (1963), 38—73.
[55] Incidenciageometria. Mat. Lapok *14* (1963), 246—263.
[56] A matematikai tehetség felismerésének, a tehetség kibontakoztatásának hazai hagyományai és új feladatai. Magyar Tudomány *9* (1964), 420—428.
[57] Kombinatorika a geometriában, geometria a kombinatorikában. Köz. Mat. Lapok *29* (1964), 7—11, 49—53.
[58] Intorno a punti allineati di certi reticolari circolari. Rend. Sem. Mat. Messina *9* (1964—65), 1—12.
[59] L'introduzione alla geometria del piano grafico finito. Boll. Un. Mat. Ital. (3) *20* (1965), 251—257.
[60] Sulle reti grafice thomseniane. Ann. Mat. Pura Appl. (4) *71* (1966), 189—198.
[61] A függvénygrafikonok alkalmazása függvénykapcsolatok tanulmányozására. Matematika Tanítása *13* (1966), 40—51.
[62] Funktionskomposition, vertauschbare Funktionen und Iterationsgruppen vom geometrischen Standpunkt aus. (Aczél Jánossal közösen). Math. Phys. Semesterberichte N. F. *14* (1967), 79—88.
[63] Egy geometriai szélsőértékfeladat. Mat. Lapok (sajtó alatt).

Könyvek

[1] A tér megismerése. (Új nevelés könyvtára 10.) Budapest, 1948. 184 p. (Erdősi Józseffel közösen).
[2] Az olló geometriája. (Tanulj jobban! Matematika 1.) Orsz. Neveléstud. Int. Budapest, 1949. 68 p.
[3] A kocka. (Tanulj jobban! Matematika 2.) Orsz. Neveléstud. Int. Budapest, 1949. 42 p.
[4] Szabályos testek. (Középiskolai szakköri füzetek. Matematika 4.) Tankönyvkiadó, Budapest, 1951. 48 p.
[5] Bolyai János: Appendix. Kárteszi Ferenc bevezetésével, megjegyzéseivel és kiegészítéseivel. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952. 234 p.
[6] Ábrázoló geometria. Egyetemi tankönyv. Tankönyvkiadó, Budapest, 1957. 204 p.
[7] Szemléletes geometria. Gondolat, Budapest, 1966. 232 p.

ФЕРЕНЦА КАРТЕСИ 60 ЛЕТ
Й. МЕРЗА И О. ВАРГА

F. KÁRTESZI IS 60 YEARS OLD
J. MERZA and O. VARGA

GRÁFOK PÁROS KÖRÜLJÁRÁSÚ RÉSZGRÁFJAIRÓL

ERDŐS PÁL

$G(n; m)$ jelentsen n szögpontú m élű gráfot. Egy gráfot akkor nevezünk páros körüljárásúnak, ha minden körének páros számú éle van. Ismeretes (és triviális) hogy egy páros körüljárású gráf kromatikus száma kettő — azaz gráfunk szögpontjait meg lehet színezni két színnel (pl. piros és zöld színnel) úgy, hogy két ugyanazon színű pont soha nincsen összekötve.

Régebben bebizonyítottam a következő lemmát [1]:

Minden $\mathcal{G}(n; m)$ tartalmaz egy páros körüljárású részgráfot, melynek legalább $m/2$ éle van.

Az n szögpontú teljes gráf $G\left(n; \binom{n}{2}\right)$ példája mutatja, hogy e lemmában $m/2$ nem helyettesíthető cm-mel, ha $c > \frac{1}{2}$. Azt sejtettem azonban, hogy ha $G(n; m)$ nem tartalmaz háromszöget, akkor van oly $c > \frac{1}{2}$ konstans, hogy $G(n; m)$ gráfunk igenis tartalmaz cm élű páros körüljárású gráfot. Be fogjuk bizonyítani azonban, hogy e sejtés nem igaz. Sőt, fennáll a következő:

TÉTEL. *Minden $\varepsilon > 0$-hoz és k-hoz van oly $G(n; m)$, mely nem tartalmaz semmilyen $l \leqq k$-ra l élű kört, s mely nem tartalmaz $\frac{m}{2}(1+\varepsilon)$ élű páros kötüljárású részgráfot.*

A tételünket kielégítő $G(n; m)$ létezését nem tudom közvetlen konstrukcióval kimutatni, hanem kénytelen vagyok valószínűségszámítási módszereket használni. A bizonyítás nagyon hasonlít [2] és [3]-ban használt módszerekhez. Érdekes lenne tételünket közvetlen konstrukcióval bizonyítani. [2]-ben például valószínűségszámítási módszerekkel igazolom, hogy minden k és l-hez van oly k-kromatikus gráf, melynek minden köre legalább l élű. Legújabban Lovásznak sikerült e tételre egy igen szellemes konstruktív bizonyítást találni. Lovász bizonyítása az Acta Math. Acad. Sci Hung.-ban fog megjelenni. Bizonyos szempontból azonban a valószínűség számítási módszer többet ad. [2]-ben ugyanis kimutatom, hogy minden ε-hoz és l-hez létezik oly n szögpontú gráf $(n > n_0(\varepsilon, l))$, melynek minden köre legalább l élű s a független pontok maximális száma $< \varepsilon n$ (azaz gráfunk nem tartalmaz εn olyan pontot, hogy bármely kettő nincsen éllel összekötve). Érdekes lenne ezt a tételt is közvetlen konstrukcióval igazolni.

Egy további példa e módszerre a következő: Jelölje $f(n)$ azt a legkisebb számot, melyre minden $f(n)$ szögpontú gráf tartalmaz vagy n szögpontú teljes részgráfot, vagy n szögpontú független részgráfot. [4]-ben valószínűségszámítási módszerekkel bebizonyítottam, hogy $f(n) > 2^{n/2}$. Tudtommal konstruktív módon $f(n)$-re nem sikerült nem triviális alsó becslést találni $(f(n) > (n-1)^2$ teljesen triviális, lásd még [5]).

Mielőtt tételünket bebizonyítanám, megjegyzem, hogy az [1]-ben bizonyított

lemma kissé azért mégis élesíthető (mint azt már [1]-ben is észrevettem): Ha $G(n; m)$ nem tartalmaz 0-adfokú szögpontokat, akkor tartalmaz $\left[\frac{m+1}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]$ élű páros körüljárású gráfot. Ezen állítás n-ről $n+4$-re való teljes indukcióval nagyobb nehézség nélkül bebizonyítható (hasonlóan, mint [1]-ben), a bizonyítás részleteit az olvasóra bízzuk.

Rátérünk mármost tételünk bizonyítására. Tekintsük az összes n szögpontú és m élű gráfokat; feltesszük, hogy a szögpontok számozottak — azaz egymástól megkülönböztethetők. Ezen gráfok száma nyilván $\binom{\binom{n}{2}}{m}$. $P(G(n; m))$ jelentse a $G(n; m)$ gráf legnagyobb páros élszámú körüljárású részgráfjának élszámát.

Szükségünk lesz most két lemmára:

1. LEMMA. *Legyen* $n \to \infty, m/n \to \infty$. *Minden fix* $\delta > 0$*-ra* $o\left(\binom{\binom{n}{2}}{m}\right)$ *gráf kivételével*

$$P(G(n; m)) < \frac{m}{2}(1+\delta).$$

Az 1. lemma bizonyítása [3]-ban használt módszerekkel könnyen következik. Legyen $T=\left[\frac{m}{2}(1+\delta)\right]$ és U_l jelölje azon $G(n; m)$ gráfok számát, melyekre

$$P(G(n; m))=l.$$

Lemmánk nyilván következik, ha sikerül bebizonyítanunk, hogy

$$\sum_{l=T}^{m} U_l = o\left(\binom{\binom{n}{2}}{m}\right), \tag{1}$$

ugyanis nyilvánvaló, hogy azon $G(n; m)$ gráfok száma, melyekre $P(G(n; m)) \geqq T$, éppen $\sum_{l=T}^{m} U_l$.

Könnyű belátni, hogy

$$U_l \leqq \sum_{s=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{s}\binom{s(n-s)}{l}\binom{\binom{n}{2}-s(n-s)}{m-l}. \tag{2}$$

Hogy (2)-t bebizonyítsuk, jelölje $G'(n; l)$ $G(n; m)$ egy l élű páros körüljárású részgráfját. Tegyük fel továbbá, hogy $G'(n; l)$-nek s piros és $n-s$ zöld szögpontja van (tehát $G'(n; l)$ minden éle egy piros és egy zöld szögpontot köt össze). Az általánosság rovása nélkül feltehetjük, hogy $0 < s \leqq \frac{n}{2}$. Az s piros szögpont nyilván $\binom{n}{s}$-féleképpen választható. A piros szögpontokból nyilván $s(n-s)$ él megy a zöld szögpontokba. $G'(n; l)$ l éle tehát legfeljebb

$$\sum_{s=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{s}\binom{s(n-s)}{l} \tag{3}$$

féleképpen választható ki. $G(n; m)$ többi $m-l$ éle nem köthet össze egy kék és zöld pontot $G'(n; l)$ maximalitási tulajdonsága miatt, s ezért ezen élek

$$\binom{\binom{n}{2}-s(n-s)}{m-l} \tag{4}$$

féleképpen választhatók. (3) és (4)-ből azonnal következik (2).

Egyszerű meggondolás mutatja mármost, hogy $l \geqq \frac{m}{2}(1+\varepsilon)$ miatt

$$\binom{s(n-s)}{l}\binom{\binom{n}{2}-s(n-s)}{m-l}$$

az $1 \leqq s \leqq \left[\frac{n}{2}\right]$ intervallumban, s növekvő függvénye (az egyszerű bizonyítást az olvasóra bízzuk). A bizonyításnál csak azt kell figyelembe venni, hogy $s(n-s)$ is növekvő függvény az $1 \leqq s \leqq \left[\frac{n}{2}\right]$ intervallumban. Legyen

$$u = \left[\frac{n}{2}\right]\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]\right), \quad v = \binom{n}{2}-u. \tag{5}$$

Így tehát (2)-ből nyerjük, hogy

$$U_l < \sum_{s=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{s}\binom{u}{l}\binom{v}{m-l} < 2^n \binom{u}{l}\binom{v}{m-l}. \tag{6}$$

Könnyű belátni továbbá, hogy a $T \leqq l \leqq m$ intervallumban $\binom{u}{l}\binom{v}{m-l}$ l-nek csökkenő függvénye, s így (6)-ból nyerjük, hogy

$$\sum_{l=T}^{m} U_l < 2^n m \binom{u}{T}\binom{v}{m-T} < 2^n n^2 \binom{u}{T}\binom{v}{m-T}. \tag{7}$$

Legyen mármost $\left[\frac{m}{2}\right] < r < \left[\frac{m}{2}(1+\delta)\right]$. Minthogy (5) miatt $u = (1+o(1))v$, egyszerű számolás adja, hogy

$$\frac{\binom{u}{r}\binom{v}{m-r}}{\binom{u}{r-1}\binom{v}{m-r+1}} = \frac{u-r+1}{r}\,\frac{m-r+1}{v-m+r} \leqq 1+o(1) \tag{8}$$

és ha $\frac{m}{2}\left(1+\frac{\delta}{2}\right) < r < \frac{m}{2}(1+\delta)$, akkor

$$\frac{\binom{u}{r}\binom{v}{m-r}}{\binom{u}{r-1}\binom{v}{m-r+1}} < 1-\eta, \tag{9}$$

ahol $\eta = \eta(\delta)$ csak δ-tól függ. (7), (8) és (9)-ből azonnal nyerjük, hogy

$$\binom{u}{T}\binom{v}{m-T} < \binom{u}{\left[\frac{m}{2}\right]}\binom{v}{m-\left[\frac{m}{2}\right]} \cdot \left(1-\frac{\eta}{2}\right)^{-\frac{\delta m}{2}}. \tag{10}$$

Nyilvánvaló továbbá, hogy

$$\binom{u}{\left[\frac{m}{2}\right]}\binom{v}{m-\left[\frac{m}{2}\right]} < \binom{u+v}{m} = \binom{\binom{n}{2}}{m}. \tag{11}$$

Végül, minthogy $n \to \infty$ és $\frac{m}{n} \to \infty$, elegendő nagy n-re

$$\left(1-\frac{\eta}{2}\right)^{\frac{\delta m}{2}} < \frac{1}{4^n}. \tag{12}$$

(7), (10), (11) és (12)-ből nyilvánvaló, hogy

$$\sum_{l=T}^{m} U_l < 2^n n^2 \frac{\binom{\binom{n}{2}}{m}}{4^n} = o\left(\binom{\binom{n}{2}}{m}\right)$$

s ezzel (1) miatt lemmánkat igazoltuk.

2. Lemma. *Legyen* $n \to \infty$, $m = o\left(n^{1+\frac{1}{k}}\right)$, $o\left(\binom{\binom{n}{2}}{m}\right)$ *gráf kivételével minden* $G(n; m)$ *n-nél kevesebb oly kört tartalmaz, melynek legfeljebb* l *éle van.*

A 2. lemma [2]-ben be van bizonyítva, de a teljesség kedvéért a bizonyítást közöljük. Nyilvánvaló, hogy azon $G(n; m)$-ek száma, melyek egy fix l élű kört tartalmaznak,

$$\binom{\binom{n}{2}-l}{m-l}, \tag{13}$$

(ugyanis az l élű kör élei előfordulnak gráfunkban, s a többi $m-l$ élt szabadon választhatjuk). Az n szögpontú teljes gráf l élű köreinek száma viszont kisebb, mint

$$n|n-1|\ldots|n-l+1| < n^l. \tag{14}$$

Jelölje mármost $f_k(G(n; m))$ a $G(n; m)$-ben előforduló legfeljebb k élű körök számát. (13) és (14)-ből nyilván nyerjük, hogy $\sum'$-ben az összegezés az összes n szögpontú m élű gráfokra van kiterjesztve — ezek száma $\binom{\binom{n}{2}}{m}$,

(15) $$\sum{}' f_k(G(n;m)) < \sum_{l=3}^{k} \binom{\binom{n}{2}-l}{m-l} n^l <$$

$$< (1+o(1)) \binom{\binom{n}{2}}{m} \sum_{l=3}^{k}{}' n^l \left(\frac{m}{\binom{n}{2}} \right)^l = o\left(n \cdot \binom{\binom{n}{2}}{m} \right),$$

(15)-ben használtuk, hogy $m = o\left(n^{1+\frac{1}{k}}\right)$. (15)-ből lemmánk rögtön leolvasható.

Két lemmánkból könnyen nyerjük tételünket. Legyen $n \to \infty$ $m/n \to \infty$, $m = o\left(n^{1+\frac{1}{k}}\right)$, (pl. $m = [n \log n]$). $G_1(n; m)$ legyen oly gráf, mely n-nél kevesebb oly kört tartalmaz, melynek legfeljebb k éle van s melyre $P(G_1(n; m)) < \frac{m}{2}\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Lemmáinkból következik, hogy ily gráf van, sőt $o\left(\binom{\binom{n}{2}}{m}\right)$ gráf kivételével minden $G(n; m)$ ilyen. $G_1(n; m)$ minden legfeljebb k élű köréből hagyjunk el egy élt, ilymódon nyerünk egy $G_1(n, m_1)$ gráfot, melyre

$$m_1 \geqq m-n, \quad P(G_1(n; m_1)) < \frac{m}{2}\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right) < \frac{m_1}{2}(1+\varepsilon)$$

és mely nem tartalmaz semmilyen $l \leqq k$-ra l élű kört, ezzel tételünk igazolva van.

Módszerünkkel még a következő két élesebb tétel nyerhető:

Minden $\varepsilon > 0$-hoz van oly $\eta = \eta(\varepsilon)$ és egy $G(n; m)$, mely nem tartalmaz $[\eta \log n]$-nél kevesebb élű kört és melyre $P(G(n; m)) < \frac{m}{2}(1+\varepsilon)$. A $\log n$-es nagyságrend nem javítható, de az ε-hoz tartozó η megengedhető legnagyobb értékét nem tudom meghatározni.

Minden k-hoz van oly $\varepsilon_k > 0$ és egy $G(n; m)$ mely nem tartalmaz semmilyen $l \leqq k$-ra l élű kört és melyre

$$P(G(n; m)) < \frac{m}{2} + m^{1-\varepsilon_k}.$$

ε_k legnagyobb megengedhető értékét nem lesz könnyű meghatározni. A bevezetésben említett tétel szerint viszont minden $G(n; m)$ gráfra

$$P(G(n; m)) \geqq \left[\frac{m+1}{2}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] > \frac{m}{2} + cm^{\frac{1}{2}}.$$

Lehet, hogy ha feltesszük, hogy $G(n; m)$ nem tartalmaz háromszöget, akkor a kitevőben lévő $\frac{1}{2}$ egy nagyobb állandóval helyettesíthető, de ezt a kérdést nem sikerült elintéznem.

IRODALOM

[1] *P. Erdős:* On some extremal problems in graph theory, Israel Journ. of Math. 3 (1965) 113—116.
[2] *P. Erdős:* Graph Theory and probability, I. Canadian Journ. of Math. 11 (1959) 34—38.
[3] *P. Erdős* and *A. Rényi:* On the evolution of random graphs, Publ. Math. Inst. Hung. Acad. 5 (1960), 17—61.
[4] *P. Erdős:* Some remarks on the theory of graphs, Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947) 292—294.
[5] *Erdős Pál:* Ramsey és Van der Waerden tételével kapcsolatos kombinatorikai kérdésekről, Mat. Lapok 14 (1963) 29—37.

ЧЁТНЫЕ ПОДГРАФЫ ГРАФОВ

П. ЭРДЁШ

ON EVEN SUBGRAPHS OF GRAPHS

P. ERDŐS

Let $\mathcal{G}(n; m)$ be a graph of n vertices and m edges. Every such graph contains an even (i. e. two chromatic) subgraph having $\left[\frac{m+1}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]$ edges. The complete graph shows that in general this result is best possible.

One could have thought that this result can be improved if our graph contains no triangle. I show that this is not so. In fact I show that for every ε and k there is a $G(n; m)$ which does not contain a circuit having fewer than $k+1$ edges and which does not contain an even subgraph of more than $\frac{m}{2}(1+\varepsilon)$ edges.

LAGRANGE-FÉLE INTERPOLÁCIÓS ELJÁRÁSOK KONVERGENCIÁJA VÉGTELEN INTERVALLUMON

FREUD GÉZA

Az alábbiakban a $c_1, c_2, \ldots$ számokkal pozitív konstansokat jelölünk.

Legyen $w_1(x)$, ill. $w_2(x)$ az egész valós tengelyen, ill. a pozitív valós tengelyen értelmezett pozitív integrálható függvény, melyre az alábbi feltételek teljesülnek:

$$w_1(x) \geqq c_1 e^{-c_2 x^2}, \quad \text{ill.} \quad w_2(x) \geqq c_3 x^{-\frac{1}{2}} e^{-c_4 x} \tag{1}$$

és

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{c_5 x^2} w_1(x)\, dx < \infty, \quad \text{ill.} \quad \int_0^{\infty} e^{c_5 x} w_2(x)\, dx < \infty. \tag{2}$$

Legyen továbbá $f_1(x)$ olyan az egész valós tengelyen egyenletesen folytonos korlátos függvény, hogy $f_1(x) = f(x)$ $x \in (-\infty, +\infty)$-re egyenletesen eleget tesz a

$$\lim_{\delta \to +0} \delta^{-\frac{1}{2}} [f(x+\delta) - f(x)] = 0 \tag{3}$$

feltételnek, illetőleg $f_2(x)$ legyen olyan a pozitív valós tengelyen folytonos és korlátos függvény, hogy az $f_2(x^2) = f(x)$ függvény $x \geqq 0$-ra egyenletesen kielégíti (3)-at.

Legyen $\{p_n(w_i; x)\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ a $w_i(x)$ $(i = 1, 2)$ súlyfüggvényhez tartozó normált orgonális polinomok sorozata. Az ortogonalitási intervallum $i = 1$-re $(-\infty, +\infty)$ és $i = 2$-re $[0, \infty)$.

A $p_n(w_i; x)$ polinom pontosan n-edfokú és gyökei $x_{kn}^{(i)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ a megfelelő ortogonalitási intervallumba esnek. Az ezen alappontokhoz tartozó Lagrange-féle interpolációs alappolinomok legyenek

$$l_{kn}(w_i; x) = \frac{p_n(w_i; x)}{p_n'(w_i; x_{kn}^{(i)})(x - x_{kn}^{(i)})}.$$

Tehát az $f_i(x)$-et az $x_{kn}^{(i)}$ alappontokban interpoláló Lagrange-parabola

$$L_n(w_i; f_i; x) = \sum_{k=1}^{n} l_{kn}(w_i; x) f_i(x_{kn}^{(i)}). \tag{4}$$

Jelen dolgozat tárgya az alábbi két tétel bizonyítása:

I. TÉTEL. A $w_1(x)$-re és $f_1(x)$-re vonatkozó felsorolt feltételek teljesülése esetén $-\infty < x < +\infty$-re egyenletesen

$$\lim_{n \to \infty} e^{-\frac{1}{2} c_2 x^2} [f_1(x) - L_n(w_1; f_1; x)] = 0.$$

II. TÉTEL. A $w_2(x)$-re és $f_2(x)$-re vonatkozó felsorolt feltételek teljesülése esetén $0 \leqq x < \infty$-re egyenletesen

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{2}c_4 x}[f_2(x) - L_n(w_2; f_2; x)] = 0.$$

A két tétel bizonyítását párhuzamosan végezzük el.

A tételek bizonyítása során az alábbi ismert eredményekre hivatkozunk:

A) Ha (3) $x \in (-\infty, +\infty)$-re egyenletesen teljesül, akkor minden $c_5 > 0$-hoz található olyan n-nél alacsonyabb fokú $\varrho_n(x)$ polinomokból álló sorozat ($n = 1, 2, \ldots$), melyre $x \in (-\infty, +\infty)$-re egyenletesen

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}c_5 x^2}[f(x) - \varrho_n(x)] = 0 \tag{5}$$

(Lásd *Dzrbasján* [2]).

B) Legyenek $\lambda_{kn}(w_i)$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots)$ a $w_i(x)$ súlyra vonatkozó Gauss—Jacobi-féle mechanikus kvadratúra eljárás Christoffel-féle számai. Akkor

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{l_{kn}^2(w_i; x)}{\lambda_{kn}(w_i)} = \sum_{\nu=0}^{n-1} p_\nu^2(w_i; x). \tag{6}$$

(Lásd pl. *Freud* [3], I. (4. 7) képlet).

C) A (2) feltétel első, ill. második felének következményeképpen — egy *Balázs* és *Turán* [1]-tól származó gondolat segítségével — adódik, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn}(w_1) e^{c_5 x_{kn}^{(1)2}} < \int_{-\infty}^{+\infty} e^{c_5 x^2} w_1(x)\, dx, \tag{7a}$$

illetve

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn}(w_2) e^{c_5 x_{kn}^{(2)}} < \int_{0}^{\infty} e^{c_5 x} w_2(x)\, dx. \tag{7b}$$

(Lásd *Freud* [3], III. (1. 5) segédtétel).

D) Az (1) első feléből következik, hogy

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} p_\nu^2(w_1; x) < c_6 n^{\frac{1}{2}} e^{c_2 x^2}. \tag{8a}$$

(Lásd *Freud—Knapovski* [4]).

Elemi számolással igazolható, hogy a $w_1^*(x) = |x| w_2(x^2)$ súlyfüggvényre ortogonális polinomok, valamint a $w_2(x)$-re ortogonális polinomok közt a

$$p_{2\nu}(w_1^*; \sqrt{x}) \equiv p_\nu(w_2; x)$$

összefüggés áll fenn.

Erre és (8a)-ra való tekintettel (1) második feléből következik, hogy

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} p_\nu^2(w_2; x) < c_7 n^{\frac{1}{2}} e^{c_4 x}. \tag{8b}$$

Mindezen előkészületek után tételeinket néhány sorban bizonyíthatjuk; tekintsük először az I. tételt. Az A) pont felhasználásával

$$f_1(x) - L_n(w_1; f_1; x) = f_1(x) - \varrho_n(x) + L_n(w_1; f_1 - \varrho_n; x). \tag{9}$$

Az (5) összefüggés következtében van olyan $\{\varepsilon_n\}$ nullsorozat, hogy

$$e^{-\frac{1}{2}c_5x^2}|f_1(x)-\varrho_n(x)| < \varepsilon_n n^{-\frac{1}{4}} \tag{10}$$

és így

$$|L_n(w_1; f_1-\varrho_n; x)| \leqq \sum_{k=1}^{n} |l_{kn}(w_1; x)|\,|f_1(x_{kn}^{(1)})-\varrho_n(x_{kn}^{(1)})| \leqq$$

$$\leqq \varepsilon_n n^{-\frac{1}{4}} \sum_{k=1}^{n} |l_{kn}(x)| e^{\frac{1}{2}c_5 x_{kn}^{(1)2}} \leqq \varepsilon_n n^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{l_{kn}^2(w_1; x)}{\lambda_{kn}(w_1)}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn}(w_1) e^{c_5 x_{kn}^{(1)2}}},$$

tehát B) és (8a), ill. (7a) felhasználásával

$$|L_n(w_1; f-\varrho_n; x)| \leqq \varepsilon_n c_6^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}c_2x^2} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{c_5x^2} w_1(x)\,dx \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{11}$$

Még csak azt kell észrevennünk, hogy (1) és (2) csak úgy egyeztethető össze, ha $c_5 < c_2$; így az első tétel állítása (9), (10) és (11)-ből következik.

A II. tétel bizonyítása céljából jegyezzük meg, hogy az $f_2(x^2)=f(x)$ függvény (3)-at x-re vonatkozóan az egész valós számegyenesen egyenletesen is teljesíti. Mivel $f(x)$ páros, $r_n(x)=\frac{1}{2}[\varrho_{2n}(\sqrt{x})+\varrho_{2n}(-\sqrt{x})]$ olyan n-nél alacsonyabb fokú polinom, melyre (5) alapján $x \geqq 0$-ra egyenletesen

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}c_5x}[f_2(x)-r_n(x)] = 0. \tag{5b}$$

A bizonyítás további menete pontosan ugyanaz, mint az I. tételnél.

Végezetül megjegyezzük, hogy $w_1(x)=e^{-x^2}$ választással az I. tétel az Hermite-polinomok gyökeire, mint alappontokra vett interpolációra, ill. $w_2(x)=x^\gamma e^{-x}$ $(-1<\gamma \leqq -\frac{1}{2})$ választással az $L_n^{(\gamma)}(x)$ Laguerre-polinomok gyökeire, mint alappontokra vett interpolációra alkalmazható.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] *J. Balázs—P. Turán:* Notes on interpolation, VIII. Acta Math. Ac. Sci. Hung. 12 (1961) 469—474.
[2] M. M. Джрбашян: Некоторые вопросы взвешеннополиномиальных пбиближений в комплексной области. Математический Сборник **36** (78) (1955) 353—440.
[3] *G. Freud:* Orthogonale Polynome. Birkhäuser Verlag, Basel, 1968.
[4] *G. Freud—S. Knapovski:* On linear processes of approximation, III. Studia Math. 25 (1965) 373—383.

О СХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ТИПА ЛАГРАНЖА НА БЕСКОНЕЧНЫХ ОТРЕЗКАХ

Г. ФРЕЙД

Теорема I. Пусть функция $w_1(x)$ удовлетвопяет левостопонным уравнениям (1) и (2) и пусть $f(x)$ удовлетворяет (3) равномерно на всей вещественной оси. Тогда для интерполяционных многочленов Лагранжа (4), построенных над нулями ортогональных многочленов $p_n(w_1; x)$ принадлежащих весу $w_1(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{2}c_2x^2}[f(x)-L_n(w_1; f; x)] = 0$$

равномерно на всей вещественной оси.

Теорема II Пусть функция $w_2(x)$ удовлетвопяет правостопонным уравнениям (1) и (2) и пусть функция $f(x)=f_2(x^2)$ удовлетвопяет (3). Тогда для интерполяционных многочленов Лагранжа (4), построенных над нулями многочленов $p_n(w_2; x)$ принадлежащих весовой функции $w_2(x)$ $(0 \leqq x < \infty)$

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{2}c_4 x}[f_2(x)-L_n(w_2; f_2; x)=0$$

равномерно для $x \geqq 0$.

Теорема I применяется в случае интерполяции с нулями многочленов Эрмита $H_n(x)$ в качестве узлов, а теорема II применяется для интерполяции, когда узлами выбраны нули многочленов Лагерра $L_n^{(\gamma)}(x)$ $(-1 < \gamma \leqq -\frac{1}{2})$.

ON THE CONVERGENCE OF LAGRANGE AN INTERPOLATION PROCESSES ON INFINITE INTERVALS

G. FREUD

Theorem I. Let $w_1(x)$ satisfy the left part of (1) and (2) and let $f(x)$ satisfy (3) uniformly on the whole real axis, then for the Lagrangean interpolation polynomials (4) built over the zeros of the orthogonal polynomial $p_n(w_1, x)$ belonging to the weight function $w_1(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{2}c_2 x^2}[f(x)-L_n(w_1; f; x)] = 0$$

holds uniformly on the whole real axis.

Theorem II. Let $w_2(x)$ satisfy the second part of (1) and (2) and let $f(x)=f_2(x^2)$ satisfy (3), then building the Lagrangean interpolation polynomials (4) over the zeros of $p_n(w_2; x)$ belonging to the weight function $w_2(x)$ $(0 \leqq x < \infty)$ the relation

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{2}c_4 x}[f_2(x)-L_n(w_2; f_2; x)] = 0$$

holds uniformly for $x \geqq 0$.

Theorem I. applies for the interpolation with the zeros of Hermite-polynomials $H_n(x)$ as nodes and Theorem II. applies for the interpolation with the zeros of Laguerre polynomials $L_n^{(\gamma)}(x)$ $(-1 < \gamma \geqq -\frac{1}{2})$ as nodes.

AZ EGYENLETEK ÁLTALÁNOS MEGOLDÓKÉPLETÉRE VONATKOZÓ NÉHÁNY FOGALOM TISZTÁZÁSA

FRIED ERVIN

Az algebrai egyenletek megoldásánál az elsőrendű cél általános megoldóképlet megadása volt. Jól ismert, hogy komplex együtthatós legfeljebb negyedfokú egyenletek esetén létezik megoldóképlet, míg ennél magasabb fokú egyenletekre ilyen megoldóképlet nem létezik. A megoldóképlet biztosítja, hogy adott fokszám mellett minden konkrét egyenletet meg lehessen oldani. A megoldóképlet létezését biztosítja az adott fokszámú általános egyenlet megoldhatósága. Az alábbiakban célunk lesz kimutatni, hogy a két utóbbi állítás nem megfordítható. Be fogjuk bizonyítani, hogy létezik olyan eset, amikor megoldóképlet nincs, de minden konkrét — adott fokú — egyenlet megoldható, és olyan eset is van, amikor megoldóképlet létezik, de az általános egyenlet nem oldható meg. Arra a tényre, hogy a megoldóképlet létezése és az általános egyenlet megoldhatósága nem jelenti szükségképpen ugyanazt *Tusnády Gábor* hívta fel a figyelmet.

Mindenekelőtt nézzük a megfelelő fogalmak pontos definícióját. Tekintsünk egy $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ K testbeli együtthatós polinomot. Jelölje K_0 az $f(x)$ együtthatói által generált testet. *Az $f(x)=0$ egyenletet a K felett megoldható*nak nevezzük, ha létezik testeknek oly

$$(*) \qquad K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_{r-1} \subset K_r = L$$

sorozata, amelyre:

(i) $K_{i+1}=K_i(\alpha_i)$, ahol α_i egy K_i-beli együtthatós, K_i felett irreducibilis $x^{p_i}-a_i$ alakú polinom gyöke (p_i prímszám; $i=0, 1, \ldots, r-1$).

(ii) L a K_0-nak normális bővítése.

(iii) $f(x)$ felbontható L-beli együtthatós lineáris faktorok szorzatára.

(Láthatjuk, hogy a megoldhatóság valójában nem a K testtől, hanem az együtthatók által generált K_0 testtől függ.)

A K test felett *általános n-edfokú polinom*nak nevezik az

$$F_n(x)=x^n+y_{n-1}x^{n-1}+\ldots+y_1x+y_0$$

polinomot, ahol $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ a K test felett határozatlanok.

*Az általános n-edfokú egyenletet a K test felett megoldható*nak nevezik, ha az $F_n(x)=0$ egyenlet megoldható a $K_0=K(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ felett.

Mármost világos, hogy ha K felett az általános n-edfokú egyenlet megoldható, akkor minden K-beli együtthatós n-edfokú egyenlet megoldható a K felett; és a megoldást úgy kapjuk, hogy az $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ határozatlanok helyébe a konkrét $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ K-beli elemeket írjuk. Ez egyben azt is mutatja, hogy az általános n-edfokú egyenlet megoldása egy megoldóképletet szolgáltat. A megoldóképlet

létezéséhez azonban annyi is elég, amit utóbb mondottunk, vagyis, hogy minden konkrét helyettesítés esetén megoldást kapjunk. Nincs tehát szükség arra, hogy az, amibe helyettesítünk megoldása legyen az általános n-edfokú egyenletnek.

Azt mondjuk, hogy a K test felett *az n-edfokú egyenletekre létezik megoldóképlet*, ha a K test feletti általános n-edfokú egyenlethez létezik olyan $(*)$ alakú testlánc, amelyre fennáll (i) és (ii), továbbá:

(iv) Az L-ben léteznek oly $t_i = t_i(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ elemek $(i = 1, 2, \ldots, n)$, hogy tetszőleges $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ $(\in K)$ esetén a $b_i = t_i(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ elemekre — amelyek K valamely algebrai bővítésében vannak — teljesül az

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = (x - b_1)(x - b_2)\ldots(x - b_n)$$

felbontás.

Ezeknek alapján azt, hogy a K-beli együtthatós n-edfokú egyenletek megoldhatók, a következőképpen értelmezhetjük:

(A) *A K test felett az általános n-edfokú egyenlet megoldható.*

(B) *A K test felett az n-edfokú egyenletekre létezik megoldóképlet.*

(C) *A K test felett minden n-edfokú egyenlet megoldható.*

Kimutatjuk, hogy a fenti három feltétel közül (A) a „legerősebb" és (C) a „leggyengébb". Pontosabban:

1. TÉTEL. *Ha valamely K testre teljesül* (A), *akkor teljesül* (B), *s ha teljesül* (B), *akkor teljesül* (C).

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a K testre teljesül (A). Ekkor az általános n-edfokú egyenlet gyökeit választva t_i-knek, ezek nyilván eleget tesznek a megoldóképlet létezésénél kirótt feltételeknek. Amennyiben pedig valamely K test esetén (B) igaz, akkor a megfelelő behelyettesítéssel bármely konkrét n-edfokú egyenletnek meghatározhatók a megoldásai.

Az alábbiakban be fogjuk látni, hogy az (A), (B) és (C) feltételek „elég közel állnak egymáshoz". Érvényes az alábbi két tétel:

2. TÉTEL. *0-karakterisztikájú testekre* (C)*-ből következik* (A).

3. TÉTEL. *Végtelen testekre* (B)*-ből következik* (A).

A 2. tétel bizonyítása: Ismeretes, hogy 0-karakterisztika esetén van olyan ötödfokú egyenlet (pl.: $x^5 - 4x + 2 = 0$), amely nem megoldható. Így $n \geqq 5$ esetén a (C) feltétel nem teljesülhet egyetlen 0-karakterisztikájú testre sem. Vagyis, ha valamely 0-karakterisztikájú testre fennáll (C), akkor $n \leqq 4$. Ebben az esetben pedig az (A) feltétel is teljesül.

A 3. tétel bizonyítása: Tegyük fel, hogy valamely végtelen testre igaz (B). Először is kimutatjuk, hogy a definícióban szereplő $t_i = t_i(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ elemek mind különbözők. Mivel a test végtelen, ezért találhatók benne egymástól különböző $b_1, b_2, \ldots, b_n$ elemek. Tekintsük az $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = (x - b_1) \cdot (x - b_2)\ldots(x - b_n)$ polinomot. Feltétel szerint ekkor a $t_i(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ elemek éppen a b_i-k egy permutációját adják, s mivel ezek mind különbözők, ezért a t_i-k is mind különbözők. Legyen $z_i = F_n(t_i)$ és $N(z_i)$ a z_i elem K_0 feletti összes konjugáltjának a szorzata. Mivel $N(z_i) \in K_0$, ezért felírható a

$$N(z_i) = \frac{u_i(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})}{v_i(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})}$$

alakban, ahol u_i és v_i K-beli együtthatós polinomok. Tekintsük most a K test tetsző-

leges $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ elemeit, és legyen $b_i = t_i(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$. A (B) feltétel teljesülése alapján a b_i elemek éppen az $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ polinom összes gyökei. Mármost a $z_i = z_i(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ elemére $z_i(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = f(b_i) = 0$. Ebből $N(z_i) = N_i(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$-re $N_i(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = 0$ adódik. Ekkor viszont

$$\frac{u_i(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})}{v_i(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})} = 0$$

is fennáll, és így $u_i(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = 0$. Márpedig, ha egy $u_i(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ polinom egy végtelen testből vett tetszőleges helyettesítés esetén 0 lesz, akkor ez a polinom maga is a 0 polinom. Ekkor az $N(z_i)$ törtalakban való felírásában a számláló 0, és így $N(z_i)$ is 0-val egyenlő. Azonban $N(z_i)$ a z_i elem összes (K_0 feletti) konjugáltjának a szorzata volt, ezért ezeknek a konjugáltaknak valamelyike szintén 0-val egyenlő. Ez pedig csak úgy lehet, hogy $z_i = 0$, mert 0-tól különböző elem bármely konjugáltja is 0-tól különböző. Így $F_n(t_i) = z_i = 0$, tehát $t_1, t_2, \ldots, t_n$ az általános n-edfokú egyenlet gyökei, s mivel különbözőek, ezért az összes gyökei. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy az (A) feltétel teljesül.

A továbbiakban csak az $n = 5$ esettel foglalkozunk. Az $n > 5$ esetben hasonló eredményeket lehet kimutatni. Példát fogunk adni olyan testre, amelyben (B) teljesül, de (A) nem; és olyan testet is meg fogunk adni, amelyben (C) teljesül, de (B) nem. Ezáltal bizonyítást nyer az is, hogy a három feltétel közül valóban (A) a legerősebb és (C) a leggyengébb. A bizonyításnál felhasználjuk a Galois-elmélet és a véges testek elméletének egyes részeit.

Mivel az általános ötödfokú egyenlet nem oldható meg, ezért (A) soha nem lehet igaz. Ebből és a 3. tételből következik, hogy végtelen testekre (B) sem teljesülhet. A 2. tétel alapján viszont az következik, hogy 0-karakterisztikájú testekre a (C) sem állhat fenn. Tehát olyan test, amelyre (B) igaz, csak véges lehet. Olyan test pedig, amelyikre (C) igaz, nem lehet 0-karakterisztikájú. Először olyan testet fogunk konstruálni, amelyben (C) igaz, de (B) nem. Mint láttuk, ez a test nem lehet 0-karakterisztikájú. Ha azonban meg tudunk adni egy végtelen testet, amelyben (C) teljesül, akkor készen vagyunk, mert végtelen testre (B) nem teljesülhet. Tehát *olyan végtelen, 0-tól különböző karakterisztikájú testet kell megadni, amelyben* (C) *igaz*. Ezután olyan testet adunk meg, amelyben (B) igaz, de (A) nem. Ilyen tulajdonságú test csak véges lehet, ezért *olyan véges testet kell megadni, amelyben* (B) *teljesül*.

Jelölje K_{61} a 61 elemű prímtestet és K_{61}^* a K_{61} algebrai lezártját.

4. TÉTEL. K_{61}^* *esetén* (C) *teljesül, (de* (B) *nem)*.

5. TÉTEL. K_{61} *esetén* (B) *teljesül, (de* (A) *nem)*.

A 4. tétel bizonyítása: Mivel K_{61}^* végtelen test, ezért (B) nem teljesül. Legyen most $f(x)$ egy K_{61}^*-beli együtthatós ötödfokú polinom. Ekkor az $f(x)$ együtthatói által generált K_0 test véges, és $f(x)$ L felbontási teste K_0 felett ciklikus. Továbbá $[L: K_0]$ osztója 5!-nak, és így 61-hez relatív prím. Erre a bővítésre nézve tehát igazak a Galois-elmélet megfelelő eredményei. A bővítéshez tartozó Galois-csoport ciklikus, tehát feloldható. Így létezik olyan (*) alakú testlánc, ahol az egymásutáni bővítések ciklikus prímfokúak. Tekintettel arra, hogy K_{61} eleve tartalmazza az összes 60-ik — s így az 5-ik, 4-ik és 3-ik — egységgyököt, ezért a fenti láncban minden bővítés történhet az (i) alatti módon. A (ii) és (iii) feltételek pedig eleve teljesülnek.

Az 5. tétel bizonyítása: Mivel (A) $n = 5$-re soha nem teljesül, ezért K_{61} esetében sem.

Véges test esetén minden irreducibilis n-edfokú polinom gyökei egy n-edfokú bővítésben vannak. Mivel minden ötödfokú polinom felbontható legfeljebb ötödfokú irreducibilis polinomok szorzatára, ezért minden ötödfokú polinom gyökei egy legfeljebb 60-adfokú bővítés elemei; amely — izomorfiától eltekintve — egyértelműen meghatározott. Mivel 2 primitív gyök (mod 61), ezért $x^{60}-2$ irreducibilis K_{61} felett. Ha ϑ jelöli $x^{60}-2$ valamely rögzített gyökét, akkor bármely K_{61}-beli együtthatós (legfeljebb) ötödfokú polinom gyökei elemei $K_{61}(\vartheta)$-nak. Azaz bármely $x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ K_{61}-beli együtthatós polinom gyökei $b_0+b_1\vartheta+b_2\vartheta^2+\ldots+b_{59}\vartheta^{59}$ alakban írhatók fel ($b_i \in K_{61}$). A $K_{61}(\vartheta)$ elemeit rakjuk valamilyen módon sorba. Például két elem közül az előzze meg a másikat, amelyikben az első különböző együttható kisebb. Ezáltal minden szóbajövő polinom gyökei között is indukáltunk egy sorrendet. Így a gyökök felírásában szereplő b_i együtthatók az a_i-knek egyértelműen meghatározott $b_i=b_i(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ függvényei. Véges test esetén azonban minden függvény előállítható polinomalakban (a 2 is tekinthető az a_i-k polinomjának). Így léteznek olyan $p_{ij}(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4)$ polinomok ($i=0, 1, 2, \ldots, 59$; $j=1, 2, 3, 4, 5$), amelyekre a $t_j(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4)=\sum_{i=1}^{59} p_{ij}\cdot\vartheta^i$ rendelkezik a kívánt tulajdonsággal; azaz a $c_j=t_j(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ elemekre fennáll az

$$x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0 = (x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)(x-b_4)(x-b_5)$$

összefüggés. Ezzel állításunkat igazoltuk.

IRODALOM

Rédei László: Algebra (1954) Akadémiai kiadó, Budapest.

СХОДИМОСТЬ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ МЕТОДОВ ЛАГРАНЖА НА БЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

Г. ФРЕЙД

CLARIFICATION OF SOME NOTIONS CONCERNING GENERAL FORMULAS FOR SOLUTION OF EQUATIONS

E. FRIED

Author considers the different possible definitions of the solvability of all algebraic equations with given degree over a field K.

(A) The general equation $F_n(x)=x^n+y_{n-1}x^{n-1}+\ldots+y_1x+y_0$ is solvable over $K(y_0, \ldots, y_{n-1})$.

(B) There exists a chain $K(y_0, \ldots, y_{n-1}) = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_{r-1} \subset K_r = L$ such that L is a normal extension of K_0 and $K_{i+1} = K_i(\alpha_i)$ where α_i is a root of the polinomial $x^{p_i}-a_i$, which is an irreducible polinomial over K_i with the prime degree p_i, There are further elements $t_i = t_i(y_0, \ldots, y_{n-1})$ in L such that for every set $a_0, \ldots, a_{n-1}$ of elements in K the elements $b_i = t_i(a_0, \ldots, a_{n-1})$ fulfil:

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0 = (x-b_1)\ldots(x-b_n).$$

(C) Each equation over K with degree n is solvable.

We prove the:

Theorem 1: For any field K (B) follows from (A) and from (B) follows (C).

Theorems 2, 3: If K has the charakteristic 0 then from (C) follows (A) and if K has infinite many elements then from (B) follows (A).

For $n=5$:

Theorems 4, 5: For K_{61}^* property (C) holds but (B) does not; for K_{61} property (B) holds but (A) does not.

Here K_{61} denotes the field of cosets (mod 61) and K_{61}^* its algebraic closure.

A $d(n)$ FÜGGVÉNY LOKÁLIS VISELKEDÉSÉRŐL

KÁTAI IMRE

1. Jelölje $d(n)$ az n természetes szám osztóinak számát.
Ismeretes, hogy

$$\sum_{n\leqq x} d(n) = x\log x + cx + O(x^{\frac{1}{2}}) \qquad (x\to\infty). \tag{1.1}$$

Másrészt Hardy és Rámanujan tétele szerint tetszőleges rögzített pozitív δ esetén $o(x)$ szám kivételével minden $n\leqq x$-re érvényes a

$$2^{\log\log x-(\log\log x)^{\frac{1}{2}+\delta}} \leqq d(n) \leqq 2^{\log\log x+(\log\log x)^{\frac{1}{2}+\delta}}$$

egyenlőtlenség, ami azt mutatja, hogy az (1. 1) összeg valódi nagyságrendjét a kevés-számú, de nagy $d(n)$ értékek adják.

Következő tételünk azt mutatja, hogy ezek a nagy értékek csak nagyon ritkán kerülhetnek egymás mellé.

1. TÉTEL.

$$\sum_{n\leqq x} \max\big(d(n), d(n+1)\big) = 2x\log x + O\big(x\cdot(\log x)^{1-\gamma}\big), \tag{1.2}$$

ahol $\gamma>0$ explicite meghatározható állandó.

Igaz a következő általánosabb

1′. TÉTEL. Legyen k tetszőleges természetes szám, $a_1<a_2<\ldots<a_k$ tetszőleges rögzített egész számok. Ekkor

$$\sum_{n\leqq x} \max\big(d(n+a_1), \ldots, d(n+a_k)\big) = kx\log x + O\big(x(\log x)^{1-\gamma}\big), \tag{1.3}$$

ahol $0<\gamma<1$ explicite megadható állandó.

Az utóbbi évek egyik igen jelentős eredménye a következő Ju. V. Linniktől és teljes általánosságban B. M. Bregyihintől származó tétel [1], [2], amit 4. lemmaként idézünk.

4. LEMMA. Legyen $l\neq 0$ rögzített egész szám. p fusson végig a prímszámokon. Ekkor

$$\sum_{p\leqq x} d(p+l) = C(l)x + O\big(x\cdot(\log x)^{-\varepsilon_1}\big),$$

ahol ε_1 és $C(l)$ alkalmas pozitív állandók.

Érvényes a következő

2. TÉTEL. Legyen k tetszőleges természetes szám, $a_1, \ldots, a_k$ egymástól és zérustól különböző tetszőleges rögzített egészek.

Érvényes a

$$(1.4)\quad \sum_{p \leqq x} \max\left(d(p+a_1), \ldots, d(p+a_k)\right) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{p \leqq x} d(p+a_i) + O\left(x \cdot (\log x)^{-\gamma_1}\right) =$$

$$= C(a_1, \ldots, a_k)\, x + O\left(x \cdot (\log x)^{-\gamma_1}\right).$$

reláció, ahol

$$C(a_1, \ldots, a_k) = C(a_1) + \ldots + C(a_k),$$

továbbá γ_1 alkalmas pozitív állandó.

A továbbiakban bevezetjük a $\log_2 x = \log\log x$ jelölést. A Vinogradov által bevezetett „$\ll$" szimbólumot a szokásos értelemben használjuk.

2. A rövidebb írásmód kedvéért az (1. 3) relációt csak az 1. tételben álló speciális esetben, továbbá a 2. tételt csak a $k=2$, $a_1 = -1$, $a_2 = 1$ esetben bizonyítjuk. Az általános eset tárgyalása teljesen hasonló.

Az 1. tétel bizonyítása. Jelölje $\Omega(n)$, illetve $\omega(n)$ az n összes illetve különböző prímosztói számát. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített állandó.

Világos, hogy

$$(2.1)\quad \sum_{n \leqq x} \max\left(d(n), d(n+1)\right) = \sum_{n \leqq x} \left(d(n) + d(n+1)\right) - T(x),$$

ahol

$$(2.2)\quad T(x) = \sum_{n \leqq x} \min\left(d(n), d(n+1)\right).$$

Az (1. 1) reláció miatt elég kimutatnunk a

$$(2.3)\quad T(x) \ll x(\log x)^{1-\gamma}$$

egyenlőtlenséget.

Legyen

$$(2.4)\quad \Sigma_1 = \sum_{\substack{\Omega(n) \leqq (2-\varepsilon)\log_2 x \\ n \leqq x+1}} d(n)$$

$$(2.5)\quad \Sigma_2 = \sum_{\substack{\Omega(n) > (2-\varepsilon)\log_2 x \\ \Omega(n+1) > (2-\varepsilon)\log_2 x \\ n \leqq x}} \min\left(d(n), d(n+1)\right).$$

Triviális, hogy

$$(2.6)\quad T(x) \ll \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

1. LEMMA. $0 < \varepsilon < 1$ esetén

$$(2.7)\quad \Sigma_1 \ll x(\log x)^{1-\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}.$$

Bizonyítás. Mivel az $\Omega(m) \leqq (2-\varepsilon)\log_2 x$ relációt kielégítő m szám u osztóinak legalább a felére $\Omega(u) \leqq \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\log_2 x$, így

$$(2.8)\quad \Sigma_1 \ll x \sum_{\substack{\Omega(u) \leqq \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\log_2 x \\ u \leqq x}} \frac{1}{u}.$$

Felhasználva a

$$\sum_{p^\alpha < x} \frac{1}{p^\alpha} < \log_2 x + c$$

ismert egyenlőtlenséget, innen a

$$\sum_{\substack{\Omega(n)=j \\ m \leqq x}} \frac{1}{m} \leqq \frac{1}{j!} \left\{ \sum_{p^\alpha \leqq x} \frac{1}{p^\alpha} \right\}^j \leqq \frac{1}{j!} (\log_2 x + c)^j,$$

s végül a

$$\sum_1 \ll x \sum_{j \leqq \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) \log_2 x} \frac{(\log_2 x + c)^j}{j!} \ll x (\log x)^{1-\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Az utolsó egyenlőtlenséget illetően l. G. H. Hardy [3], IX. fejezet, 200. lap, (9. 1. 4.).

Ezzel (2. 7) bizonyítást nyert.

2. Lemma. Legyen a tetszőleges rögzített természetes szám. Ekkor

$$\sum_{n \leqq x} d(n)\, d(n+a) \ll x \log^2 x. \tag{2. 9}$$

A (2. 9) reláció régóta ismert. Ismeretesek aszimptotikus formulák is jó maradéktaggal. (L. pl. [4].)

Legyen

$$\Delta(n) = \Omega(n) - \omega(n),$$

továbbá K fusson végig azokon a természetes számokon, amelyek minden prímosztójukat legalább a második hatványon tartalmazzák. A $\sum_2$ összeg könnyen becsülhető a 2. lemma segítségével.

Legyen

$$\sum_3 = \sum \min \left(d(n), d(n+1)\right)$$

a jobb oldalon álló összegezést azon n egészekre kiterjesztve, amelyekre teljesülnek a

$$n \leqq x, \quad \min \left(\Omega(n), \Omega(n+1)\right) > (2-\varepsilon) \log_2 x,$$
$$\min \left(\Delta(n), \Delta(n+1)\right) < \delta \log_2 x$$

egyenlőtlenségek rögzített pozitív δ-val.

Legyen

$$\sum_4 = \sum_{\substack{n \leqq x \\ \Delta(n) > \delta \log_2 x}} d(n).$$

Így

$$\sum_2 \leqq \sum_3 + \sum_4.$$

A 2. lemma és a $d(n) \leqq 2^{\omega(n)}$ egyenlőtlenség miatt

$$\sum_3 \ll 2^{-(2-\varepsilon-\delta)\log_2 x} \sum_{n \leqq x} d(n)\, d(n+1) \ll x (\log x)^{2-(2-\varepsilon-\delta)\log 2}.$$

Továbbá n-et $n = Km$ alakba írva, ahol m négyzetmentes, adódik a

$$\sum_4 \leqq \sum_{\substack{K \leqq x \\ \Delta(K) > \delta \log_2 x}} d(K) \sum_{m \leqq \frac{x}{K}} d(m) \ll x \log x \sum_{\substack{K < x \\ \Delta(K) > \delta \log_2 x}} \frac{d(K)}{K}$$

egyenlőtlenség.

Könnyen látható, hogy

$$\sum_{K \leqq Y} \frac{d(K)}{K} \ll \frac{(\log Y)^c}{Y^{\frac{1}{2}}}.$$

Mivel a legkisebb olyan K, amelyre $\Delta(K) > \delta \log_2 x$ nagyobb, mint $Y_0 = 2^{\delta \log_2 x}$, így

$$\sum_1 \ll x \log x \frac{(\log Y_0)^a}{Y_0^{\frac{1}{2}}} \ll x (\log x)^{1 - \frac{\delta \log 2}{2}} (\log_2 x)^c.$$

Kapott egyenlőtlenségeinket összevetve

$$T(x) \ll x (\log x)^{1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} + x (\log x)^{2 - (2 - \varepsilon - \delta)\log 2} + x (\log x)^{1 - \frac{\delta}{2} \log 2} (\log_2 x)^c.$$

Mivel $\log 2 > 0{,}5$, így ε és δ alkalmas választása mellett innen

$$T(x) \ll x (\log x)^{1-\gamma}$$

következik alkalmas pozitív γ állandóval.

A 2. tétel bizonyítása. Tételünk bizonyítása a most következő 3. lemma és a 4. lemma felhasználásával hasonló gondolatmenettel folytatható, mint az 1. tétel bizonyítása, így ezt elhagyjuk.

3. LEMMA.

(2. 10) $$S(x) = \sum_{p \leqq x} d(p-1)\, d(p+1) \ll x \log x \cdot (\log_2 x)^2.$$

Bizonyítás. Jelölje — mont szokásos — $\pi(x, k, l)$ az x-nél nem nagyobb, mod k l maradékot adó prímek számát.

A Selberg-szita egyik jól ismert következménye a $k < x$ esetre egyenletesen érvényes

(2. 11) $$\pi(x, k, l) \ll \frac{x}{\varphi(k) \log \frac{ex}{k}}$$

egyenlőtlenség. (K. Prachar [5], II. fejezet, 4. 1. tétel, 44. lap.)

Továbbá

$$S(x) \ll \sum_{p \leqq x} \Big\{ \sum_{\substack{u \\ \frac{u}{p} - 1 \\ u < x^{\frac{1}{2}}}} 1 \Big\} \Big\{ \sum_{\substack{v \\ \frac{v}{p} - 1 \\ v < x^{\frac{1}{2}}}} 1 \Big\} \ll \sum_{\substack{u < x^{\frac{1}{2}} \\ v < x^{\frac{1}{2}} \\ (u, v) = 1, 2}} \pi(x, uv, l),$$

ahol l az $l \equiv -1 \pmod u$, $l \equiv 1 \pmod v$ kongruenciarendszer megoldásain fut végig mod uv. Mivel $(u, v) = 1$ vagy 2, így (2. 11) miatt

(2. 12) $$S(x) \ll \sum_{n < x} \frac{x\, d(n)}{\varphi(n) \log \frac{xe}{n}} \ll x \sum_{2^j \leqq x} \frac{1}{j} \sum_{\frac{x}{2^{j+1}} \leqq n \leqq \frac{x}{2^j}} \frac{d(n)}{\varphi(n)}.$$

Mivel $\varphi(n) > \dfrac{n}{\log_2 n}$, így

$$\sum_{y < n \leqq 2y} \frac{d(n)}{\varphi(n)} \ll \frac{\log_2 y}{y} \sum_{y \leqq n \leqq 2y} d(n) \ll \log y \cdot \log_2 y$$

és innen (2. 12) felhasználásával a

$$S(x) \ll x \log x \cdot \log_2 x \sum_{2^j \leqq x} \frac{1}{j} \ll x \log x \cdot (\log_2 x)^2$$

egyenlőtlenséget, azaz a bizonyítandó állítást kapjuk.

3. Érdekes lenne a

$$\sum_{n \leqq x} \min\big(d(n), d(n+1)\big)$$

összeg aszimptotikájának, vagy legalább valódi nagyságrendjének meghatározása. Ez elég nehéznek látszik.

Az 1. és 2. tétel közvetlen következménye az alábbi

3. TÉTEL.

$$\sum_{n \leqq x} |d(n+1) - d(n)| = 2x \log x + O\big(x \cdot (\log x)^{1-\gamma}\big),$$

$$\sum_{p \leqq x} |d(p-1) - d(p+1)| = C(-1, 1)x + O\big(x \cdot (\log x)^{-\gamma_1}\big).$$

IRODALOM

[1] *Ju. V. Linnik*, Diszperziós módszer additiv bináris problémákra, Izd. Lenyingradszkovo Uny., 1961 (oroszul).

[2] *B. M. Bregyihin*, Indefinit típusú bináris additív problémák, Izv. An. SZSZSZR, *27*, 2 (1963), 439—462.

[3] *G. H. Hardy*, Divergent series, Oxford, 1949.

[4] *A. E. Ingham*, Some asymptotic formulae in the theory of numbers, Proc. J. London Math. Soc., *2* (1927), 202—208.

[5] *K. Prachar*, Primzahlverteilung, Springer V., 1957.

О ЛОКАЛЬНОМ ПОВЕДЕНИИ ФУНКЦИИ $d(n)$

И. КАТАИ

Пусть $d(n)$—число делителей натурального числа n. В работе доказывались следующие формулы:

$$\sum_{n \leqq x} \max\big(d(n), d(n+1)\big) = 2x \log x + O\big(x (\log x)^{1-\gamma}\big),$$

$$\sum_{p \leqq x} \max\big(d(p-1), d(p+1)\big) = C(-1, 1)x + O\big(x (\log x)^{-\gamma_1}\big)$$

где γ и γ_1 обозначают подходящие положительные постоянные, и

$$C(-1, 1) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \sum_{p \leqq x} \{d(p-1) + d(p+1)\}.$$

Существование предел гарантируется результатами в работах [1] [2].

ON THE LOCAL BEHAVIOUR OF $d(n)$

I. KÁTAI

Let $d(n)$ denote the number of divisors of n. In this paper we proved, that

$$\sum_{n\leqq x} \max\left(d(n), d(n+1)\right) = 2x\log x + O\left(x(\log x)^{1-\gamma}\right),$$

$$\sum_{p\leqq x} \max\left(d(p-1), d(p+1)\right) = C(-1,1)x + O\left(x(\log x)^{-\gamma_1}\right),$$

where γ and γ_1 are suitable positive constants, p runs over the primes, and

$$C(-1,1) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{p\leqq x} \{d(p-1)+d(p+1)\}.$$

The existence of $C(-1,1)$ was proved in [1], [2].

DR. HAZAY ISTVÁN „KIEGYENLÍTŐ SZÁMÍTÁSOK" C. KÖNYVE AZ ALKALMAZOTT MATEMATIKA ÉS A MÉRNÖKKÉPZÉS PROBLÉMÁINAK TÜKRÉBEN

BÁNKÖVI GYÖRGY

Ju. V. Linnyik világhírű leningrádi matematikus a legkisebb négyzetek módszeréről szóló könyvének bevezetőjében — néhány régebbi mű bírálataként — a következőket írja: „Ezek (a könyvek) részletesen foglalkoznak a módszer számítástechnikai oldalával és számos alkalmazást és példát mutatnak be. A dolog matematikai statisztikai oldalát azonban lényegében a múlt század klasszikus szellemében tárgyalják, figyelmen kívül hagyva a matematikai statisztikának — amelybe a legkisebb négyzetek módszere a paraméterek becslése elméletének részeként természetes módon beilleszthető — eszméit és vívmányait."[1]

Dr. Hazay István [1] művét eredetileg abból a célból kaptuk meg, hogy ismertetést írjunk róla. A ragyogó kiállítású, csaknem 600 oldalas könyv a művelődésügyi miniszter utasítására, egyetemi hallgatók számára készült, de a hatalmas anyagot felölelő műnek már felületes átnézése is azt sugallja, hogy a könyv a mérnökök mindennapos segítőtársának szerepét is betöltheti. A könyv, valamint a könyvről kiváló geodéták tollából megjelent írások ([3], [4], [5]) alapján túlzás nélkül állíthatjuk, hogy dr. Hazai műve *mérföldkövet* jelent a geodéziai kiegyenlítő számítás magyar nyelvű irodalmában.

A mérföldkő jellegű művek és a róluk megjelent szakmai bírálatok alkalmasak arra, hogy rajtuk keresztül egy tudományág vagy szakterület helyzetét, problémáit, fejlődési irányait (egyetemi tankönyv esetén az oktatás és nevelés helyzetét és problémáit is) le lehessen mérni. Az ilyen művek elemzése lényegesen túllépheti a könyvismertetések szokásos keretét és mivel e művek esetleges fel nem tárt fogyatékosságai egy egész szakember-nemzedék képzésére, gondolkodásmódjára és tevékenységére kihatnak, a bírálók felelőssége igen nagy.

Őszintén sajnáljuk, de ránk — anélkül, hogy akár a szerző teljesítményét, akár a magyar geodézia általános színvonalát lebecsülnénk — dr. Hazay könyvének elemzésével kapcsolatban bizonyos mértékig az ünneprontó hálátlan szerepe hárult. Ennek okai (amellett, hogy feladatunkat komolyan vesszük) a következők:

Először is, a könyv — erényei mellett — több, a továbbiakban részletesen elemzett szempontból (ilyen például: a felhasznált matematikai apparátus; a matematikai és fogalmazásbeli pontosság; a hallgatók matematikai képzése) és különböző mértékben (az alapkoncepciótól kezdve apró részletek kivitelezéséig) *problematikus*. Különösen szembetűnő és számos káros következménnyel jár a *matematikai apparátus korszerűtlensége*, amely Linnyik professzor cikkünk elején mintegy mottóként közölt szavait idézi fel.

Másodszor, a könyv mérnök bírálói írásaikban lényegesen kisebb súlyt helyeznek a matematikai vonatkozásokra, mint azt a könyv jellege megkívánta volna

[1] „В них подробно изложена вычислительная сторона метода и указано много применений и примеров. Однако математико-статистическая сторона дела в них трактуется, в основном, в классическом духе прошлого века, без учета современных идей и достижений математической статистики, в которую метод наименьших квадратов естественно включен как часть теории оценивания параметров." ([2], 7.).

és állásfoglalásuk sok helyen vitatható. Magunk részéről természetesen elsősorban a *matematikai* vonatkozások vizsgálatára szorítkozunk, de e mellett igyekszünk az előző mondatban foglalt állításunkat alátámasztani. Megjegyezzük, hogy a könyv mérnök bírálóinak általunk ismert három írása közül kettő ([3], [4]) egyetlen elmarasztaló megjegyzést sem közöl.[2] Úgy véljük, hogy egyes bírálóknak a geodéziai kiegyenlítő számítások jelenlegi színvonalával való nagyfokú elégedettsége (amely a fejlődés gátja lehet) a könyv konkrét, tárgyilagos és igényes elemzése alapján nem látszik teljes mértékben indokoltnak.

Harmadszor, a Tankönyvkiadó elkövette azt a mulasztást, hogy dr. Hazay könyvét annak *megjelenése előtt* nem nézette át matematikussal. Véleményünk szerint a könyv anyaga tipikus esete a matematika olyan alkalmazásának, ahol a *matematika az alkalmazó tudománnyal elméletileg egyenrangú szerepet játszik.*[3] Alkalmazott matematikai könyv akkor igazán jó, ha mind az alkalmazó tudomány, mind a matematika szakemberei annak tartják. A polihisztorok kora lejárt, de műszaki körökben még találkozunk olyan szemlélettel, amely szerint a mérnök egyéni képességeire vagy képzettségére rossz fényt vet, ha kérdéseivel matematikushoz fordul. Más okok is vannak, amelyek a mérnökök és matematikusok kölcsönös közeledését gátolják és amelyekre itt nem kívánunk kitérni. Egy könyvkiadó vállalat felelős munkatársainak azonban mindenképpen szem előtt kell tartaniuk, hogy a matematika mint önálló tudomány (nem pedig csak mint a műszaki tudományok segédeszköze) is létezik, és ezért olyan esetben, amikor egy kiadandó könyv anyagában a matematika minőségileg és mennyiségileg is dominál (vagy legalábbis jelentős mértékű), *matematikai szakvélemény mellőzése enyhén szólva kockázatos.* A könyv konkrét elemzése során egy ilyen kockázatvállalás „eredményét" mutatjuk be és reméljük, hogy sikerül az illetékeseket meggyőznünk a hasonló jellegű kockázatvállalások veszélyességéről.

Nem tudhatjuk, hogy miképpen reagált volna a szerző egy matematikai szakvéleményre, ha azt a könyv megjelenése *előtt*, időben kapja kézhez, de egy mű színvonalát aligha rontja, ha a szerző a kifogások és ellenérvek ismeretében és átgondolása után bizonyos nézeteit továbbra is fenntartja, míg egyes nézetein esetleg módosít. Kinyomtatott szöveg esetén a bíráló és a megbírált helyzete sokkal kényesebb, mert a nyilvánosság, presztizs-okok stb. olyan légkört teremthetnek, amelyben számos probléma megoldása nehezebbé válik.

Jelen írásunkkal — a könyvkiadás stratégiájának fent említett befolyásolása mellett — két fő célt kívánunk elérni.

1. Felhívni a vezető geodéták figyelmét arra, hogy vannak dolgok, amelyeket másképp is lehet és talán érdemes is másképp szemlélni.

2. Figyelmeztetni bizonyos fokú elmaradottság veszélyére; korszerű matematikai képzésben részesült mérnök-nemzedéket nem lehet egyik napról a másikra elővarázsolni, idejében kellene néhány alapvető lépést megtenni.

Meggyőződésünk, hogy a korszerű matematikai szemlélet és módszerek elter-

[2] A bírálatok szerzői között szerepel a könyv egyik lektora is, aki az általa lektorált könyvről az általa szerkesztett folyóiratban fenntartás nélkül magasztaló ismertetést ír. Egy könyv lektora (aki jogilag a szerzővel egyaránt felelős a mű szövegéért) hivatalból elfogultnak tekinthető, ezért etikailag kifogásolhatónak tartjuk, hogy egy lektor a könyvre vonatkozóan bármilyen értékítéletet tartalmazó *ismertetés* írására vállakozik és hogy egy folyóirat ilyen jellegű írást leközöl.

[3] A kiegyenlítő számítás véletlen hibákkal terhelt mérési (kísérleti) eredmények alapján szerkesztett olyan statisztikai becslésekkel foglalkozik, amelyeknél a mérési pontok (kísérleti beállítások) közötti előre megadott összefüggéseket is figyelembe kell venni (az egyik legismertebb és legfontosabb példa a regressziószámítás). A könyv a geodéziai mérési eredmények kiegyenlítésének különböző válfajait tárgyalja, az elméleti alapoktól kezdve a számolás gyakorlati kivitelezéséig.

jedése a geodéziai kiegyenlítő számításokban történelmileg szükségszerű. Bár a növekvő feladatokkal párhuzamosan fejlődnek a mérési módszerek és eszközök is, a mérési eredményekben foglalt információ korszerű tudományos módszerekkel való feldolgozásának mellőzése olyan fényűző pazarlás, amelyet a leggazdagabb és technikailag legfejlettebb országok is egyre nehezebben engedhetnek meg maguknak.[4] Csak idő kérdése, hogy melyik országban mikor és milyen ütemben térnek át a szakirodalom stílusának és az egyetemi oktatás módjának korszerűsítésére. Lehet, hogy Magyarország e tekintetben a *jelen pillanatban* nem elmaradott, de ami ma még elég (sőt, egyesek szerint nagyszerű), az 20—30 év múlva már a tudományág nemzetközi viszonylatában elavultnak számíthat. *Késő lenne* a fejlettebb matematikai módszerek elsajátítását például akkor megkezdeni, amikor a nemzetközi szakirodalom egy részének megértése a hagyományos felkészültség alapján már csaknem lehetetlenné válik.

Az alábbiakban dr. Hazay könyvét több szempontból részletesen elemezzük, de nem tartalmi ismertetést kívánunk írni. Hangsúlyozzuk, hogy a könyv elemzését elsősorban *eszköznek* tekintjük, amellyel a fentebb említett „stratégiai" célok elérésére törekszünk. Ez a törekvésünk indokolja, hogy főként a könyv helytelen vagy legalábbis vitatható részeivel foglalkozunk, noha így a jelen sorok olvasója írásunk alapján talán túlzottan negatív képet kap magáról a könyvről. E mellett *látjuk és értékeljük a mű erényeit is*, amelyekkel azonban viszonylag kevesebbet kívánunk foglalkozni, mert az erények elemzését mások már „elírták" előlünk, míg ugyanez egyáltalán nem mondható el a könyv fogyatékosságairól. E mellett — mint már említettük — a könyvet a *matematikus szemszögéből* nézzük, és természetes, hogy egyes dolgokat egészen más megvilágításban látunk és más súllyal vesszük figyelembe, mint a könyv mérnök bírálói.

*

Elemzésünket a *könyv matematikai apparátusának* vizsgálatával kezdjük.

A könyvben úgyszólván semmi nyoma sem látszik annak a tevékenységnek amelyet a matematikusok az utóbbi harminc-negyven évben végeztek; ez azonban nem véletlen, hanem egy bizonyos enyhén szólva furcsa szemléletből fakad, amely például az alábbiakban mutatkozik meg.

A 326—327. oldalon, ahol a szerző a középhibából (előjeles tapasztalati szórás), levonható következtetésekről ír, ezt olvashatjuk: „Az olyan törekvés, amely a középhibának túlzott jelentőséget kíván adni, semmivel sem indokolható. Az *utóbbi időben* a matematikai statisztika keres a középhibánál jobb megbízhatósági mérőszámokat. Ezekkel röviden a 92. fejezetben foglalkozunk."[5] A 92. fejezetben viszont nem találunk semmi olyat, amit a matematikusok ötven-hatvan éve nem ismernének. Ezek szerint az „utóbbi időben" kifejezés csak arra — a szerző által idézett — 1962-es műszaki kandidátusi disszertációra vonatkozhat, amely „felfedezte" hogy normális eloszlásból származó kis minta esetén a várható értékre vonatkozó konfidencia-intervallumot a Student-féle eloszlás alapján helyes megállapítani.*

[4] Említést érdemel a *dán geodézia* magas színvonala, amelyre a „Gier" elektronikus számológép ismertetésében szereplő alábbi mondatból következtethetünk: „A gép elvi felépítése — amely számos új gondolatot tartalmaz — a dán Geodéziai Intézet igazgatójától, *E. Andersentől* és munkatársaitól: *T. Kraruptól* és *B. Svejgaadtól* származik; innen a neve is, amely az Intézet dán elnevezésének (Geodaetisk Instituts Elektroniske Regnemaskine) kezdőbetűit tartalmazó rövidítés". ([19], 93.).

[5] Az idézetekben a kiemelések saját kiemeléseink.

* *A. N. Kolmogorov*, századunk egyik legkiemelkedőbb matematikusa, egy 1946-os — a legkisebb négyzetek módszerének modern tárgyalása szempontjából alapvető — dolgozatában ([6]) többek között pontosan ezzel a kérdéssel (amely már akkor sem volt új) foglalkozik. Nehéz elképzelni színvonalas alkalmazott matematikát, amely nem támaszkodik a tárgykörbe vágó alapvető matematikai dolgozatokra.

Így nehezen gondolhatunk mást, mint hogy a geodéták „matematikának" csak a matematika azon részét tekintik, amely a geodéziai irodalomban használatos. Ezen sejtésünket alátámasztja az a tény is, hogy Tárczy-Hornoch Antal akadémikus [4] írásában a *matematikai statisztika fejletlenségéről* (!?) tesz említést.

Ezek után nem csodálkozhatunk azon, hogy a szerző mindig ingoványos talajra lép, valahányszor a valószínűségszámítás vagy a matematikai statisztika szóba kerül.

A bajok azzal kezdődnek, hogy a szerző a valószínűségszámítási alapfogalmakat (pl. valószínűségi változó), amelyekkel lépten-nyomon dolgozik, *nem definiálja.* Ez nyilvánvalóan az olvasó megkímélésének jó szándékából fakad, de olyan homályt támaszt, amelynek fátylán keresztül a precíznek szánt magyarázatok és bizonyítások csak érzékeltetések maradnak, ami az *értelmes* olvasót inkább zavarja, mint segíti. A valódi érték, a mért érték és a valódi érték különböző statisztikai becsléseinek (ki nem egyenlített, illetve kiegyenlített mérési eredmények) egymáshoz való viszonyára a könyv több helyén és sajátos nyelvezetén találunk ugyan utalásokat, de ezek nem pótolják az alapvető összefüggések egyszeri világos leírását. Így például a szerző minden előzetes és utólagos magyarázat nélkül a következő szavakkal „mély vízbe dobja" az olvasót (159. oldal): „Legyen három ismeretlennek a valódi értéke X, Y és Z, a legvalószínűbb értéke pedig x, y és z". Ha meggondoljuk, hogy az egyetemi hallgatók tudatában a *matematikai ismeretlen* az algebrai egyenletek és esetleg a differenciálegyenletek fogalmához kapcsolódik, akkor itt az ismeretlen fogalmának olyan minőségileg új értelmezésével állunk szemben, amely feltétlenül magyarázatra szorul.

A 18. oldalon szerepel a *valódi hiba* definíciója. „A valódi hiba valamely mennyiség valódi értékének és a mért vagy mérési eredményből levezetett értékének különbsége". Ez *önmagában* rendben is lenne, ha a szerző lépten-nyomon nem „feledkeznék meg" arról, hogy a valódi hiba fiktív valószínűségi változó (erre még visszatérünk), amelyet elméleti számítások céljára felhasználhatunk, de *konkrét értékét sohasem ismerjük* (csak becsülhetjük, mert a valódi értéket is csak becsülni tudjuk). Az értelmes olvasó már a 19. oldalnál zavarba jön, ahol ez olvasható: „A *középhiba* a valódi hibák négyzetének középértékéből vont négyzetgyök", majd egy *numerikus példa* (és a könyv többi részében még több száz) következik a középhiba kiszámítására. A szerző tehát teljesen elkódösíti a *statisztikai becslés* fogalmát.

A valószínű hiba „definícióját" kommentár nélkül idézzük[6] (19. oldal): „Egyes munkálatokban... az ún. *valószínű hibát* is használják. Ennek alapgondolata az, hogy a meghatározott mennyiség valódi hibája — a valószínűség szerint — a nagyság sorrendjébe szedett hibasorozat közepén foglal helyet. Értékét a középhibából az átlagos viszony alapján szokták számítani:

$$\varrho = 0{,}674\,4898\,\mu.$$"

Végül a definiálás kérdésével kapcsolatban hadd idézzük (minden vitaszándék nélkül) dr. Regőczy ([3]) véleményét, amely szerint a könyv „határozottan definiál... és a nem éppen egyszerű anyagot könnyen érthető módon magyarázza."

A matematikai alapfogalmak elkódösítése azonban nem valamiféle hanyagság, hanem egy — számunkra kissé megdöbbentő — *szemlélet* velejárója. A 324. oldalon a következőket olvashatjuk: „...a legkisebb négyzetek módszerének alapja, vagyis Gauss hibatörvénye olyan feltételezéseket tartalmaz, amelyek a gyakorlatban sohasem teljesednek be; ilyen pl. a végtelen felé tartó nagy méréssszám. A módszer ennélfogva bizonyos mértékig önkényesnek tekinthető..." Megjegyezzük, hogy a *mate-*

[6] Vö. [7], („valószínű hiba"), [8], („Probable error"), [9], (Warscheinliches Fehler").

matikai statisztika fő feladata éppen a véletlen jelenségekre vonatkozóan végzett *véges számú* megfigyelés (mérés) alapján levonható következtetések vizsgálata. Az idézett megállapítás körülbelül olyan, mintha valaki ingatagnak tartaná a differenciálszámítást azon az alapon, hogy a valóságban végtelen kicsi mennyiségek nem léteznek. Az 583. oldalon az egy szabadságfokú Student-féle eloszlás (két mérés) alapján, 95%-os és 99%-os megbízhatósági szint mellett számított konfidencia-intervallumokról a szerző azt írja, hogy a „kiadódó megbízhatósági közök nem látszanak reálisnak" (mert nagyon nagyok) és így „a megbízhatóságot ... a Student-féle eloszlás ... kis mérésszám mellett nagyon lebecsüli" (?!). Minthogy a matematikai statisztika az adott feltételek mellett a mérési eredményekből levonható *objektív* következtetésekkel foglalkozik, a következtetések pesszimista voltára vonatkozó fejtegetések nem a tudományok körébe tartoznak. Tankönyv írójától inkább azt várnánk, hogy a kis ($n=2$) mérésszám alapján levonható következtetések tekintetében fokozott óvatosságra inti a mérnök olvasót.[7]

A könyv ingatag alapokon nyugvó és ódon matematikai apparátusa nem tudja feladatát ellátni. A levezetések ijesztően hosszadalmasak és külsőségesek (nem emelik ki a gondolatmenetek gerincét), ami nemcsak az érthetőség, hanem az áttekinthetőség és megjegyezhetőség rovására is megy. A szerző — a matematikai statisztika *„hőskorában"*, a század elejéig használatos módon — a valószínűségeloszlásoknak csak *tapasztalati momentumaival* számol és ennek hátrányai teljesen nyilvánvalóak (lásd a következő példát). Nem véletlen, hogy a matematikusok olyan utakat kerestek (és találtak is!), amelyek a véletlen tömegjelenségek precíz, világos és hatásos matematikai kezelését teszik lehetővé.

A közös okra visszavezethető kisebb-nagyobb fogyatékosságok felsorolása *helyett* egyetlen levezetés részletes elemzését végezzük el. Ki kell emelnünk, hogy ez a bizonyítás nem a könyv egészére, hanem csak a valószínűségszámítási meggondolásokat tartalmazó részekre jellemző; a könyv levezetéseinek jó része ugyanis a középiskolai anyagon túlmenő matematikai ismereteket nem használ fel.

A szerző által használt *matematikai apparátus csődje* a hibaterjedési részben „az általános függvény középhibaképletének" levezetésében (23—24. oldal) mutatkozik meg talán leglényegesebben. Megjegyzendő, hogy erre a képletre a könyvben igen sok későbbi helyen történik hivatkozás.

A probléma — matematikai nyelven szólva — független valószínűségi változók adott függvénye szórásnégyzetének meghatározása. A közelítő képlet levezetésének első lépése a függvény sorbafejtése. Az *első* pontatlanság — amelynek következményére még visszatérünk — az, hogy a szerző a magasabbrendű tagok elhanyagolhatóságát természetesnek veszi (a hibák kicsiségével indokolja, amint az a klaszszikus analízisben szokásos), azaz a „valódi hibákat" közönséges számoknak tekinti, pedig valójában a hibák (nem feltétlenül korlátos) valószínűségi változók és az elhanyagolhatóság kérdésében a hibák valószínűségeloszlásának momentumai (valamint a függvény parciális deriváltjai) játszanak szerepet. A *második* pontatlanság annak a kis ügyetlenségnek a következménye, hogy a függvény sorbafejtése nem a „valódi értékek", hanem az egyes mérési értékek helyén történik és „ezért a parciális differenciálhányadosok értékei is ezekhez a helyekhez tartoznak"; erről a tényről a szerző „megfeledkezik", amikor a 24. oldal (4) képletéből képezi az (5) képletet, ahol a különböző helyekhez tartozó parciális deriváltak értékét azonosnak veszi. A *harmadik* pontatlanság abban a meglehetősen homályos ok-

[7] Véleményünk szerint a kétszeri mérés elsősorban a durva hibák elkövetése ellen szolgál védelmül.

fejtésben van, amellyel az olvasót meg kellene győzni arról, hogy az (5) képletben szereplő n „négyzetes" tag mellett (n^2-n) „vegyes tag" elhanyagolhatóan kicsi. Korszerű matematikai apparátus alkalmazása esetén itt elég lenne arra hivatkozni, hogy két független, nulla várható értékű valószínűségi változó szorzatának várható értéke nullával egyenlő (ami a függetlenség definíciójának majdnem triviális következménye). A szerző azonban csak tapasztalati momentumokkal számol, és így egy trivialitás bizonyítására kénytelen lenne olyan „nagyágyút" bevetni, mint a nagy számok törvénye (ugyanezzel a jelenséggel találkozunk másik két levezetésnél az 52. és 160. oldalon); e helyett burkoltan utal a nagy számok törvényére, a fejtegetés amúgy sem nagyon meggyőző erejét a következő megjegyzéssel is gyengítve: *„így feltehető az a valószínűség*, hogy a szorzatösszegek csak kis mennyiségek", amelynek — sajnos ezt kell mondanunk — *semmi értelme sincs.*

A *negyedik* pontatlanság annak elhallgatása, hogy az $n \to \infty$ határátmenet mellett levezetett összefüggés közelítő képletként csak nagy n értékekre használható fel. A szerzőnek azonban két alapos oka is van ezen pontatlanság elkövetésére. Először is ellentmondásba kerülne azzal a gyakorlattal, hogy a képletet a könyv számos más helyén egészen kicsi n értékekre (néha $n=3$ mellett!) alkalmazza. Másodszor, a képlet valójában n kis értékei mellett is használható (kellő óvatossággal), noha a felhasznált matematikai apparátus fogyatékossága miatt a *levezetésből ez nem következik.*

Végül erősen kifogásolható, hogy szerző a közelítő egyenlőség jele helyett közönséges egyenlőségjelet használ.

A tárgyilagosság kedvéért ki kell emelnünk, hogy ez a levezetés más mérnöki könyvekben (pl. [10]) lényegében hasonló alakban szerepel.

Térjünk át az említett első pontalanság egy fontos gyakorlati következményének vizsgálatára. A közelítő képlet *felhasználhatósági körére* vonatkozólag a könyv semmilyen megszorítást sem közöl, ezért legalább a levezetésből kellene látszania, hogy képlet alkalmazása mikor vezethet teljesen rossz eredményre — de ez nem látszik.

Tekintsük a következő egyszerű példát. Legyen ξ nulla várható értékű és σ szórású, normális eloszlású valószínűségi változó és legyen $f(x)=(x+c)^2$, ahol c tetszőleges valós szám. Számítsuk ki az

$$\eta=f(\xi)$$

valószínűségi változó szórásnégyzetét. A pontos képlet:

$$D^2(\eta)=2\sigma^4+4c^2\sigma^2,$$

míg a közelítő képletet alkalmazva a

$$D^2(\eta)\approx 4c^2\sigma^2$$

összefüggést kapjuk. A $c^2 \ll \sigma^2$ esetben nyilván éppen az elhagyott tag dominál, tehát igen kis σ^2 mellett is kaphatunk teljesen rossz közelítést. Egy olyan figyelmeztetés, hogy az „általános függvény középhibaképletének" alkalmazásával vigyázni kell, ha a mérési pontok közelében a függvény egy vagy több első parciális deriváltja kicsi a magasabbrendű parciális deriváltakhoz képest, a mérnök számára alighanem többet ér, mint az egész levezetés.

A mérnök szerzők, ha művüket matematikus részről bírálat éri, sohasem mulasztják el annak hangsúlyozását, hogy művüket nem matematikusok, hanem mérnökök számára írták. Ez az érv azért nem túl hatásos, mert nem ismerünk olyan

matematikust, aki azt állítaná, hogy a mérnökök matematikai ismereteit és szemléletét pontosan úgy kell fejleszteni, mint a matematikusokét. A kétféle képzésnek különböznie kell a tananyag felépítésében, mennyiségében, mélységében és részletességében, de ez mit sem változtat azon a tényen, hogy *matematika csak egyféle van.* Nem kívánjuk itt felsorolni mindazokat a matematikai követelményeket, amelyek figyelmen kívül hagyásának hatása az „a könyv mérnököknek szól" jelige varázsköntösébe burkolva sem válik láthatatlanná, csupán néhány szempontot említünk.

Az *alapfogalmak* tisztázása egy műszaki matematikai könyvben elsőrendű követelmény. Ezenfelül szükséges, hogy az olvasó bármely *állításról* ki tudja deríteni annak jellegét (következmény-e vagy feltevés, vagy ismernie kellene-e az olvasónak valamilyen más előtanulmányából); különösen zavaró, ha a szerző az olvasó számára feltehetően ismeretlen vagy nehezen belátható dolgokat ismert, illetve triviális tényekként kezel. Fontos a tételek precíz kimondása és a feltételek (képletek érvényességi köre) tisztázása. Az állításoknak *matematikailag helyeseknek* kell lenniük (ez elleni tipikus vétség az állítások érvényességi köre tisztázásának elmulasztása). Fontos a következtetések helyes logikája is. Világosan ki kell derülnie, hogy egy gondolatmenetet a szerző bizonyításnak, meggondolásnak, érzékeltetésnek szán-e.

A könyv szerzője — elvileg igen helyesen — arra törekszik, hogy a tananyag ne csak számítási receptek összessége legyen, hanem az olvasó a számítási módszerek elméleti hátterével is megismerkedjék. A könyv egyes részei azonban — többek között az említett matematikai szempontokból — erősen kifogásolhatók. Ezek nyomán az egyetemi hallgatókban az anyag tanulmányozása során olyan *helytelen matematikai szemlélet* alakulhat ki, amely egész mérnöki pályafutásukra rányomja bélyegét. Kérdéses tehát, hogy a matematikai szempontokból kifogásolható magyarázatok, levezetések — jelenlegi formájukban — nem okoznak-e több kárt, mint hasznot?

Tárgyilagosság kedvéért megjegyezzük, hogy a szerző által használt matematikai felépítésből és apparátusból sokkal többet „kihozni" aligha lehet. Néhány helyen kisebb módosításokat végezve, a könyv színvonalát lehetne valamennyire emelni, de a bajok gyökeres orvoslása — véleményünk szerint — csakis a korszerű matematikai tárgyalásmód bevezetésétől várható.

*

A szerző könyvében sokat foglalkozik a *mérési eredmények súlyozásának* kérdésével; még a kiegyenlítő számítás módozatainak tárgyalása előtt külön pontot szentel a súly fogalmának. Dr. Regőczy szerint ([3]): „Jelentős érdeme a könyvnek, hogy teljesen tisztázza a súlyok dimenziójának kérdését, mert ennek a problémának a homálya az oktatásban sok nehézséget, a gyakorlatban pedig sok zavart okozott" (?!). A „tisztázás" úgy kezdődik, hogy a szerző kategorikusan leszögezi (20. oldal): „A súly fordítva arányos a középhiba négyzetével", majd később megjegyzi: „Az a körülmény, hogy ...a súly dimenziós, lehetővé teszi, hogy egy vagy több ismeretlennek kiegyenlítéssel való meghatározásába különböző fajta méréseket (pl. szög- és hosszméréseket) is bevonhassunk". Véleményünk szerint a szerző itt összekeveri az okot az okozattal; azonos dimenziójú mérések esetén ugyanis a súly dimenziója semmilyen szerepet sem játszik a hibák súlyozott négyzetösszegének minimalizálásánál, éppen *a különböző dimenziójú hibák összehasonlíthatósága* miatt kell a súlyokat dimenziós mennyiségeknek tekinteni és nyilvánvaló, hogy ez esetben a súlyok dimenziója a hibák dimenziója négyzetének reciproka. Talán azt sem ártott volna megemlíteni, hogy a súly és a szórás (ill. középhiba) kapcsolatára vonat-

kozó állítás nem axióma, hanem *következménye* annak a bizonyos mértékig önkényes elvnek, amely szerint a súlyok számértékileg úgy választandók, hogy a független véletlen hibák súlyozott átlagának szórásnégyzete minimális legyen.[8]

A súlyok számértékének helyes megválasztása gyakorlati feladatoknál nem könnyű és — amint arra a szerző több helyen utal is — bizonyos önkényességen alapszik. A szerző általában arra hivatkozik, hogy a súlyokat a gyakorlatban így vagy úgy „szokták felvenni" (bár a 137. pontban foglalkozik a súlyok közelítő megválasztásának kérdésével). „A hosszmérési eredmények középhibájának megállapításánál" (28. oldal) kiindul egy egységnyi hosszúságú, adott szórású hibával mérhető szakaszból, a hosszabb szakaszokat ilyen egységnyi szakaszokra bontja és a szórásnégyzetek additivitási tételét alkalmazza; sem itt, sem máshol nem foglalkozik azonban azzal a kérdéssel, hogy az egységnyi hosszúságú szakasz hibája hogyan függ az egység megválasztásától. Ezen kérdés vizsgálatának mellőzését indokolatlannak érezzük, a mért mennyiségek nagyságának és súlyának összefüggése ugyanis nemcsak a kiegyenlített számértékekre hat, hanem *a mérnök mérési stratégiáját is alapvetően befolyásolhatja.* Nézzük a *hosszmérés* példáját, ahol (28. és 67. oldal): „a súlyokat a távolságok fordított arányában szokták felvenni" (azaz feltételezik, hogy a hiba *szórásnégyzete* a megmért szakasz hosszával arányos). Ezen feltételezés *következménye*, hogy egy szakaszt akár egyben, akár tetszőleges részletekben mérnek meg, a teljes hosszra kapott eredmény szórásnégyzete ugyanaz, tehát a mérnök — hacsak módja van rá — minél nagyobb mérési egységeket választ. Ha viszont például a hiba *szórása* arányos a megmért szakasz hosszával, akkor a hiba csökkentése érdekében minél finomabb felosztásra kell törekedni.

*

A könyvnek talán legértékesebb része a hatalmas és szépen kidolgozott *példaanyag*. Az egyes számítási módszerek összehasonlíthatósága szempontjából szerencsés gondolat volt ugyanazokat a példákat többféleképpen is megoldani. A példákkal kapcsolatban csak néhány apróságra hívjuk fel a figyelmet.

Hiányoljuk azoknak a módszereknek és fogásoknak ismertetését, amelyeknek segítségével *jó előzetes értékeket* lehet találni (rossz kiindulás esetén a számolási munka jelentősen meghosszabbodhat). Elvi irányítás híján az olvasó nyilván a példákból próbálja kitalálni a jó előzetes értékek megtalálásának titkát és ekkor eléggé megzavarhatja a következő eset: a szerző a 136. oldalon a keresett c állandó kiszámításához a $c_0 = 200$ mm előzetes értéket veszi fel és végül a $c = 84{,}3847$ mm végeredményt kapja, de nem tartja szükségesnek, hogy megindokolja, honnan vette ezt az előzetes értéket és miért nem a jobb közelítést nyújtó $c_0 = 80$ mm, $c_0 = 100$ mm vagy akár $c_0 = 0$ értéket választotta.

A $\Sigma p_i v_i^2$ kifejezés kétféleképpen számítható ki (közvetlenül, illetve a pótnormálegyenletekből), és ez ellenőrzési lehetőséget biztosít. A kidolgozott példákban az egyezés jó (sőt csodálatos), de szóba sem kerül az a kérdés, hogy mennyire kell a kétféle eredménynek megegyeznie. E mellett a szerző a példákban (pl. a 108. oldalon és sok más helyen) általában a közvetett módon kiszámított kifejezést használja a középhiba meghatározására, noha elvileg a másik kifejezés a pontosabb (e kérdésnek természetesen csak akkor van gyakorlati jelentősége, ha a kétféle számítás eredménye erősen különbözik).

Egy kis furcsaságot találunk a 146. és 147. oldalon közölt elméleti résszel és a 149. oldalon kezdődő példacsoport megoldási módjával kapcsolatban. A szerző

[8] A könyv 91. fejezete hasonló jellegű feltételes szélsőérték-számítással foglalkozik, de itt sem történik utalás az általunk idézett mondattal való kapcsolatra.

ugyanis bizonyos q_i mennyiségekre vonatkozóan egyrészt felír egy egyenletrendszert, másrészt ugyanezen mennyiségeket felírja bizonyos Q_k mennyiségek lineáris kombinációjaként. A példákban viszont először kiszámítja a Q_k mennyiségeket, de a q_i mennyiségeket nem ezekből közvetlenül határozza meg, hanem több munkával, az egyenletrendszer megoldása útján.

*

A matematika legtöbb alkalmazási területének szakemberei elsápadhatnak az irigységtől, ha arra gondolnak, hogy a geodéták milyen segítséget kaptak a matematikusoktól (elegendő Gauss, Markov, Kolmogorov és Linnyik nevét említenünk) a kiegyenlítő számítás terén.

A modernebb matematikai eredmények sorsára már utaltunk, most nézzük meg, hogy *Gauss munkássága* hogyan tükröződik a könyvben.

Gauss — gyakorlati problémáktól ösztönözve — terjedelmes tanulmányokat ([11], [12]) szentelt a kiegyenlítő számítás kérdéskörének, e területen számos tétel, módszer és jelölés tőle származik. Gauss eredményeinek értékelésénél és tálalásánál azonban kétségtelenül figyelembe kell venni a matematika 150 év előtti fejlettségi állapotát, amely nem tette lehetővé Gauss számára, hogy korát jóval megelőző gondolatait (pl. a 100 évvel később kidolgozott maximum-likelihood-módszerrel kapcsolatos állításait) mai nyelven fejezze ki.[9] A könyv második fejezetének elején több olyan bekezdés szerepel, amely Gauss eredeti szövegezésének szószerinti fordítása, de az ezen részeket összekapcsoló szövegrészek idegenek Gauss szellemétől.

Nem kívánunk egész oldalakat idézni a könyvből azon véleményünk alátámasztására, hogy a szerző határozatlan fogalmazásmódja nemcsak a szöveg megértését nehezíti, hanem helyenként kifejezetten félrevezető. A 21. pont címe: „Gauss hibatörvénye". Nem derül ki azonban, hogy tulajdonképpen mit nevez a szerző hibatörvénynek. A 45. oldalon található három feltételből a normális eloszlás még nem következik, és a szerzőnek a haranggörbére és a véletlen hibákkal terhelt mérési eredményekre vonatkozó fejtegetései hamis elképzeléseket kelthetnek az olvasóban, különösen azért, mert a *22. pontban szereplő tétel precíz kimondása hiányzik* (nem hiányzik viszont a hosszadalmas és viszonylag nehéz levezetés. Egyébként is a 2. fejezet eléggé kirí a könyvből — gondolunk itt például a sűrűségfüggvény fogalmának bevezetésére, amelyre a szerző a későbbi fejezetekben egyáltalán nem épít).

E tétel durva megfogalmazásban azt mondja ki,* hogy független mintavétel esetén egy eloszlás helyzetparaméterére vonatkozó maximum-likelihood becslés eredménye (a „legvalószínűbb érték") akkor és csak akkor egyezik meg a mintaelemek számtani középértékével, ha az eloszlás a normális eloszlás. A 47. oldalon az alábbi megállapítást találjuk: „A legkisebb négyzetek módszere alapegyenletének levezetése ... még abból a feltevésből indul ki, hogy egy mennyiség meghatározására végzett egyenlő megbízhatóságú mérések alapján képzett legvalószínűbb érték a mérési eredmények számtani közepe. ... Ez a feltevés ugyan önkényes, de mégis elfogadhatónak látszik, mert nem tudnánk egyenlő megbízhatóságú mérések esetében más eredményt elképzelni, amelyet olyan megbízhatónak, vagy megbízhatóbbnak fogadhatnánk el, mint a számtani középértéket"; ez a fenti tétel tükré-

[9] R. Deutsch amerikai szerző [13] becsléselméleti könyvében teljes fejezetet szán Gauss azon tevékenysége elemzésének, amelyet a legkisebb négyzetek módszerével kapcsolatban végzett.

* A tétel pontos megfogalmazását és modern bizonyítását illetően l. [14], 383—385. oldal.

ben kissé úgy látszik, mintha a szerző nem tudna normális eloszláson kívül más eloszlást elképzelni... .[10]

Vitatható a szerzőnek azon felfogása, hogy a legkisebb négyzetek módszerének alapelvét le lehet vezetni. Gauss jelenkori kommentátorai erősen hangsúlyozzák, hogy Gauss tudatában volt módszere önkényességének és a legkisebb négyzetek elvét inkább *axiómának*, mint szigorú matematikai tételnek tekintette.[11]

A modern matematikai könyvek (pl. Linnyik, [2]) egész egyszerűen *kiindulnak* a legkisebb négyzetek elvéből és az így kapott statisztikai becslések tulajdonságait vizsgálják. Az, amit a szerző az alapelv levezetésének tekint, tulajdonképpen nem más, mint több plauzibilis elv *összhangjának* megmutatása bizonyos feltételek (pl. normális hibaeloszlás) fennállása esetén. Kissé túlzottnak érezzük a módszer önkényessége miatti aggályoskodást, (50. és 324. oldal), mert helyes hozzáállás esetén a problémák erősen leegyszerűsödnek.

A „levezetés" szó ilyen értelmű használata kétségtelenül nemcsak egyéni terminológiát, hanem alapvető felfogásbeli furcsaságot tükröz. Ez világosan kiderül a 8. fejezet bevezetéséből (515. oldal), ahol a szerző a kiegyenlítés mechanikai alapokon történő felépítéséről ír: „Megítélésem szerint a kiegyenlítés egyenleteinek mechanikai elvek alapján végzett levezetése szemléletesebb és általában egyszerűbb, mint a valószínűségszámításon alapuló levezetések, annál is inkább, mert már annak megállapítása is, hogy a [*pvv*]-minimum feltételt kell kielégíteni, hosszadalmas és eléggé bonyolult, elvont levezetés eredménye, itt viszont a mechanika csupán néhány elemi alapfogalmának felhasználása szükséges" (!?).

Úgy tűnik, a szerző szükségesnek tartja (és teljes joggal), hogy a 8. fejezet anyagának csaknem hatvanoldalas terjedelemben való közlését megindokolja. Ez az indokolás (amelynek része a fentebb idézett mondat), erősen szubjektív azonban és kissé túllő a célon. A naiv, de figyelmes olvasó nem értheti egészen, hogy miért nem szentel a szerző még nagyobb terjedelmet az „igazi" módszernek és miért foglalkozik annyit az ingatagnak és bonyolultnak feltüntetett valószínűségszámítási módszerekkel.

A mechanikai elvekből kiinduló kiegyenlítés „véletlenül" (vagy talán inkább a többé-kevésbé rejtett analógia miatt) bizonyos esetekben ugyanazokhoz a kiegyenlített értékekhez vezet, mint a valószínűségszámítási tárgyalásmód, ez azonban nem jelenti azt, hogy az utóbbit helyettesítheti; a módszer hívei már annál a kérdésnél bajba kerülnek (és vagy szemérmes hallgatásba merülnek, vagy alighanem kénytelenek visszakanyarodni a valószínűségszámításhoz), amikor a kiegyenlített értékek hibáját meg kell becsülniük. A kiegyenlítő számítás „valószínűségszámításmentes" felépítése kétségtelenül „divatos" a műszaki matematikában, ennek okát azonban véleményünk szerint elsősorban a mérnökök egy részének a valószínűségszámítástól való idegenkedésében, nem pedig a tudomány objektív követelményeiben kereshetjük. Kissé óvatosabb és tárgyilagosabb fogalmazással és a fejezet

[10] Vö. az alábbi idézettel: „Természetesen a normális eloszlás itt bemutatott érdekes tulajdonsága nem magyarázza meg, hogy a valóságban a mérési hibák általában miért normális eloszlásúak. Ez tapasztalati tény, ami nem is minden esetben igaz, és amikor igaz, nem azért igaz, mert a normális eloszlás érdekes tulajdonságokkal rendelkezik (ez a kérdésnek teljesen hamis, idealista felfogása volna)..." (Rényi, [14], 385.)

[11] „Gauss was aware of the arbitrariness of his development of the normal density function for the residuals. Although the principle of least squares was motivated by a mathematical argument, Gauss preferred to adopt the principle as an axiom rather than as a rigorous mathematical theorem". (Deutsch, [13], 53).

„Einen einwandfreien Nachweis der Berechtigung seines Verfahrens hat Gauss selbst nicht erbringen können; er nannte die nach seinem Verfahren ausgeglichen lediglich „plausible" Werte". (Happach, [15], 13.).

lényegesen rövidebb formában való közlésével a szerző elkerülhette volna, hogy akaratlanul is lovat adjon a szélsőséges „divatos" irányzat hívei alá.

Az elvi alapok ködösítéséhez járul hozzá az alábbi mondat is (515. oldal): „Az a körülmény, hogy a valószínűségszámításon és a mechanikai elveken felépített eljárás más-más ésszerű alapból kiindulva egyező eredményekhez vezet, mind a két elmélet helyességét igazolja." Szerintünk a fenti körülmény legfeljebb a két elmélet bizonyos *összhangját* jelenti (a helyességet csak a gyakorlat igazolhatja).[12]

A legkisebb négyzetek módszerének elvi alapjaival már Gauss kortársai is foglalkoztak.[13] Nem mernénk állítani, hogy a vizsgált könyv e tekintetben előrelépést jelent az akkori állapotokhoz képest. A könyv matematikai apparátusa viszont bizonyos tekintetben *határozott visszalépést* jelent Gauss munkásságához képest. Ezen véleményünk alátámasztására legyen szabad csupán annyit mondanunk, hogy Gauss a valószínűségeloszlások *elméleti momentumait* definiálja (integrál alakban, és példaképpen több eloszlás második és negyedik momentumát kiszámítja ([12], 8—11. old.) és seholsem vesződik a tapasztalati momentumokkal.

A geodézia matematikai apparátusának jelenlegi állapotáért semmiesetre sem a szerző a felelős (akinek számlájára legfeljebb néhány kevésbé szerencsés fogalmazást írhatunk). Ezen állapot meghatározott történelmi folyamat eredménye, amelynek során a Gausstól kapott örökség megkopott és helyét oda nem illő elemek foglalták el. Félelmetesen emlékeztet e folyamat a Grimm testvérek egyik ismert meséjére („Hans im Glück"), amelynek hőse a történet elején egy aranytömb boldog tulajdonosa, de sorozatos — általa előnyösnek vélt, valójában hátrányos — cserék után csak két malomköve marad. E kövek jelentik számára a kincset, tehát egy darabig cipeli azokat, míg meg nem unja; végül eldobja terhét és ekkor a világ legboldogabb emberének érzi magát. Nem viccelődni akarunk, amikor azt állítjuk, hogy a geodéziai kiegyenlítő számítás jelenleg a „malomkő-korszakban" van; ha ugyanis semmilyen matematikai apparátusa sem létezne, hanem ezt most kellene kialakítani, akkor a mérnökök nyilván nem a jelenleg használatos felépítést választanák. Az az illúzió, hogy „kincset" (valójában malomkövet) cipelnek, azaz kidolgozott matematikai apparátussal rendelkeznek, akadályozza a mérnököket a korszerű matematikai eszközökhöz való eljutásban. A megoldást csakis a malomkő eldobása, a hamis illúziók felszámolása jelentheti.[14]

A szépséghiba jellegű pontatlanságok közé tartozik (dr. Homoródi ([5]) is szóvá teszi), hogy a könyv meg sem említi *Legendre* nevét, akitől a „legkisebb négyzetek módszere" elnevezés és e tárgykörben az első publikáció származik. E mulasztás annál is inkább meglepő, mert Grossmann könyve, amely a szerző egyik forrásmunkája, ezzel a mondattal kezdődik: „A legkisebb négyzetek módszerét a 19. század elején fedezte fel A. M. Legendre és C. F. Gauss, egymástól függetlenül és körülbelül egyidőben."[15] Rényi könyvének történeti áttekintésében ([14], 678.) a

[12] Vö. az alábbi idézettel: „A szórás fogalmának definíciójával kapcsolatban hangsúlyoztuk, hogy a szórás definíciójában van bizonyos látszólagos önkényesség, amelyet elméleti meggondolásokkal nem lehet igazolni (legfeljebb elködösíteni) és hogy a szórás fogalmának adekvát voltát végső fokon csak a gyakorlat igazolhatja. Ugyanez a probléma merül fel a hibakiegyenlítésnél, a legkisebb négyzetek módszerének nevezett Gauss óta általánosan elfogadott eljárással kapcsolatban; ezt a módszert széles körben alkalmazzák a geodéziában, a csillagászatban, stb." (Rényi, [14], 374.)

[13] Lásd a göttingeni tudóstársaság által 1821-ben kiadott közleményt ([12], 95).

[14] Természetesen helyesebb lett volna az aranytömbbel, a Gausstól kapott örökséggel helyesebben gazdálkodni; hogy ez nem így történt, azért a mostani mérnök-generáció csak részben felelős, de ez a rész nem kicsi, mert a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika éppen az utóbbi évtizedekben fejlődött rengeteget.

[15] „Die Methode der kleinsten Quadrate ist zu Beginn des 19. Jahrhunders von A. M. Legendre und Carl Friedrich Gauss unabhängig voreinander ungefähr gleichzeitig gefunden worden." ([10], 1.)

következőket olvashatjuk: „A legkisebb négyzetek elméletének továbbfejlesztése terén egymástól függetlenül C. F. Gauss és A. Legendre értek el jelentős eredményeket. Eredményeik a csillagászatban, a geodéziában és számos más tudományban azóta is a kutatás nélkülözhetetlen segédeszközei."

Ha már itt tartunk, hadd említsünk meg néhány, tudománytörténeti szempontból érdekes és valószínűleg kevéssé ismert tényt. Gauss 1809-ben már hivatkozik Legendre három évvel azelőtt megjelent munkájára. Gauss, saját állítása szerint, módszerét már 1795 óta használja, és tudóstársa idevágó eredményeinek ismertetésétől a rövidség kedvéért eltekint...[16] (Gauss munkája több mint 300 oldalas és Legendre műve mégiscsak az első publikáció a témakörben; *clarissime Legendre* sem járt jobban Gaussnál, mint később *Bolyai János*...). Laplace, a nagy kortárs megemlíti, hogy a legkisebb négyzetek módszerét elsőként Legendre publikálta; egyébként azonban honfitársával szemben Gaussnak nyújtja a pálmát (szerinte Gauss a módszer alapgondolatát már régebben ismerte, terjesztette és igyekezett a módszert a valószínűségszámítással kapcsolatba hozni).[17] A prioritás kérdésének kiélezése helyett alighanem helyesebb — az előző bekezdésben közöltek szellemében — mindkét kiváló tudós érdemeinek elismerése.

Említésre is alig méltó, hogy Gauss nevének kezdőbetűit (nyilván a latin írásmód hatására) a németek is C. F.-nek, nem pedig K. F.-nek írják, és születési éve (számos forrásmunkánk egyöntetű tanúsága szerint) 1777, nem pedig 1775, amint az a könyv 4. oldalán szerepel.

*

Mielőtt valaki hozzáfog egy tankönyv megírásához, bizonyos körülményeket tisztáznia kell (milyen értelmi szintet és előképzettséget lehet az olvasóról feltételezni, mire fogja az olvasó a tanultakat felhasználni stb. ...). A szerzőnek előre meg kell állapítania a kiindulási állapotot és az elérendő célt, a megírás során pedig meg kell találnia a legcélravezetőbb eszközöket. Aligha szorul bizonyításra, hogy a szakmai hozzáértés egy jó tankönyv megírásának csak szükséges, de nem elégséges feltétele.

A könyv matematikai apparátusára vonatkozó bírálatunk *részben a szerző alapkoncepciójának bírálataként* fogható fel. Ezenkívül kifogásolunk a könyv megírási módjában néhány olyan feltűnő jelenséget, amely szerintünk szintén a szerző alapkoncepciójának hiányosságából ered.

Első problémánk (amelyet nem tudtunk megoldani), hogy milyen értelmi szintű olvasót képzelt el a szerző a könyv megírásakor? A könyv anyaga nehézség szempontjából meglehetősen egyenetlen, a középiskolai szinten mért trivialitásoktól a helyenként mérnöki diploma szintjét is meghaladó nehézségekig terjed. Azt várhatnánk, hogy a szerző az igazán nehéz kérdéseket részletesen megvilágítja, míg az egyszerűbb dolgok magyarázatát mellőzi. Ennek általában pont az ellenkezője történik. A nehézségek megkerülésére, illetve homályba burkolására már több példát mutattunk, most nézzünk néhány kirívó példát az agyonmagyarázásra.

[16] „Ceterum principium nostrum, quo iam inde ab anno 1795 usi sumus, nuper etiam clar. Legendre in opere *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes Paris 1806*, prolatum est, ubi plures aliae proprietates huius principii expositae sunt, quas hic brevitatis causa supprimimus." ([11], 253—254.)

[17] „M. Legendre... Ce savant géomètre est le premier qui ait publier cette méthode; mais on doit à M. Gauss la justice d'observer qu'il avait eu, plusieurs années avant cette publication, la même idée dont il faisait un usage habituel, et qu'il avait communiquée à plusieurs astronomes. M. Gauss, dans sa *Théorie du mouvement elliptique*, a cherché à rattacher cette méthode à la Théorie des Probabilités..." ([16], 335.).

Az a megállapítás, hogy a „mérési javításokból" képzett Σv_i^2 négyzetösszeg dimenzió nélküli mennyiség, mert úgy kell felfogni, mint a $\Sigma p_i v_i^2$ dimenzió nélküli mennyiséget, ahol valamennyi p_i súly egységnyi, az 53. oldalon kétszer, az 54., 61. és 62. oldalon egyszer-egyszer, tehát a tíz oldalon belül összesen ötször (!!) szerepel. A szerző a könyv további helyein általában nem mulasztja el az „általános" p_i súlyokkal felírt képleteket egységnyi súlyok mellett újból felírni.

Semmitmondó a 87. oldal első mondata és meglepően alacsony értelmi szintet tételez fel az olvasóról a 341. oldal 2. táblázatának közlése. A szerző a 88. oldal (19) képletét egyszer, a 85. oldal (6) képletét kétszer a képlet felírása után *szavakkal elmondja.* Véleményünk szerint a középiskolai oktatás során a tanulókban (legalábbis többségükben) ki kell fejlődnie annak a készségnek, hogy egy ismert (előzetesen megmagyarázott) szimbólumoknak jól ismert műveleti jelekkel történő összekapcsolása útján kapott képlet pontosan annyit fejezzen ki számukra, mint amennyit a képlet szöveges felírása. Ha egy tanuló netán idáig sem jutott el, lehetőleg *ne jelentkezzék műegyetemre;* ha jelentkezik, lehetőleg *ne vegyék fel;* ha mégis felvették, ne konzerválják hibáit, hanem *késztessék elmaradásának felszámolására;* ha pedig egyetemi tanulmányai során még a középiskolás szintet sem képes elérni, *ne adjanak diplomát a kezébe.* Egyetemi tankönyv szerzőjének semmi esetre sem kell, sőt nem is szabad tekintettel lennie az ilyen diákokra! Különben is a *képletírás* kialakítása a matematika fejlődésében körülbelül akkora lépés, mint az emberiség történetében a tűz birtokbavétele és értetlenül állunk az e vívmány hatástalanítására irányuló kísérletekkel szemben.

Nem kívánunk annak részletezésébe bocsátkozni, hogy az *igénytelenség* az oktató-nevelő munkában milyen hátrányos következményekre vezet. E mellett a szerző azon kiindulópontja, hogy a könyv olvasói alapjában véve — nagyon enyhén szólva — nehéz felfogásúak, míg időnként (és éppen akkor, amikor kell) roppant értelmesek, teljesen irreálisnak látszik.[18]

Második problémánkat a könyv néhány bírálójának az egyetemi hallgatók matematikai előismereteire vonatkozó megállapításai okozzák. A bírálatok ugyanis egyöntetűen a szerző érdemei közé sorolják, hogy a könyv matematikai apparátusa jól igazodik a hallgatók felkészültségéhez és előismereteihez. Innen már csak egyetlen logikai lépés vezet ahhoz a következtetéshez, amely szerint a műegyetemi szaktárgyak matematikai apparátusának minden esetben alkalmazkodnia kell az illetékes matematikai tanszék által előadott tananyaghoz (még akkor is, ha ez utóbbi nem eléggé korszerű). Ez a szemlélet veszedelmes következményekkel járhat, mert azt a felfogást táplálja, hogy a mérnökökre a szaktárgyak matematikai korszerűsítésében semmilyen kezdeményező szerep sem hárul.

Ezzel szemben véleményünk szerint a konkrét esetben az alábbi lépések lennének szükségesek:

1. A legkiválóbb geodéták (vagy legalább néhány közülük) felismerik és elismerik, hogy a geodéziai kiegyenlítő számítás matematikai apparátusa korszerűtlen,

[18] A szerző valódi kiindulópontját természetesen nem ismerhetjük, megállapításaink csak arra a fiktív kiindulópontra vonatkoznak, amelyhez a könyv szövegéből visszafelé következtetve jutunk el. Feltételezhető, hogy a szerzőt néhány keserű oktatási tapasztalat indította az egyetemi tankönyvekben teljesen szokatlan mértékű részletezéshez; ha azonban a szerzőnek akár csak tíz százalékig igaza van abban, hogy a kisiskolás magyarázatokat az egyetemi hallgatók színvonala szükségessé teszi, akkor ez olyan súlyos vád a középiskolai vagy műegyetemi matematikai oktatás vagy az egyetemi felvételi rendszer (vagy mindhárom) ellen, amelyre a mérnökképzés megjavítása érdekében érdemes felfigyelni. Megjegyezzük még, hogy az ország szakember szükségletének egy része főiskolákon, technikumokban, speciális céltanfolyamokon is kiképezhető, ami elvileg indokolja és gyakorlatilag lehetővé teszi az egyetemi oktatás minőségi mércéjének magasra emelését.

mert szinte teljesen figyelmen kívül hagyja azokat a vívmányokat, amelyek az utóbbi 30—40 év matematikai szakirodalmában meglelhetők; továbbá, szükségesnek tartják ezen állapot megváltoztatását!

2. Néhány vállalkozó szellemű mérnök komoly szinten elsajátítja a tárgykör korszerű matematikai tárgyalásához szükséges előismereteket (itt első lépésként az ELTE matematika szakán tanított valószínűségszámítási és matematikai statisztikai anyag, valamint a különböző műegyetemi szakok hallgatói számára írt jegyzetek idevágó részeinek, második lépésként matematikai szakkönyveknek (pl. Linnyik, [2]) tanulmányozását javasoljuk). E mellett célszerűnek látszik a kiegyenlítő számítás numerikus problémáinak tanulmányozása és a használt módszerek újraértékelése — különös tekintettel az elektronikus számológépek felhasználására.

3. A fenti előismeretek birtokában a geodéziai kiegyenlítő számítást korszerű matematikai alapokra helyezik (a megoldatlan, vagy annak vélt problémákat is megfogalmazzák és megoldásukra kísérletet tesznek).

4. Az egyetemi tananyag korszerű matematikai alapon való oktatásának módszertanát kidolgozzák és az anyag oktatására felkészülnek.

Nyilvánvaló, hogy a 2., 3. és 4. pontokban foglaltak sok éves programot jelentenek. A fiatal mérnökök számára az ösztönző erőt például a 3. pontban foglaltak terén végzett színvonalas munkának tudományos fokozattal való elismerése jelenthetné. A fejlődés *elvi* előfeltételét azonban az 1. pontban foglaltak képezik; az, aki dr. Hazay könyvében semmi kifogásolni valót sem talál — ha következetes akar maradni —, feltétlenül elítélne minden, a matematikai apparátus korszerűsítésére irányuló törekvést.

A földmérőmérnök hallgatók matematikai képzésében feltétlenül helye van a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika elemeinek. A geodéziai kiegyenlítő számítás tantárgy korszerűsítéséhez azonban — a matematika tantárgy tárgykörétől és színvonalától függetlenül — az általunk felsorolt 1—4. pontokban foglaltakon „túl kell esni". Ennek következtében az elmaradottságért a műegyetemi matematikaoktatást csupán akkor lehetne jogosan felelőssé tenni (de még akkor is csak részben), ha a geodéták már a 4. pont *után* tartanának, a matematikai statisztika oktatása pedig meg sem kezdődött volna.[19]

Ezzel szemben *nézzük a tényeket.* Legjobb tudomásunk szerint (és értesüléseinket meglehetősen hiteles forrásból szereztük) dr. Hazay könyvének megjelenésével körülbelül egyidőben a földmérőmérnök hallgatók matematikai képzésének tantervébe (legalábbis papíron) *bevették a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika elemeit;* sőt ezt éppen a könyv szerzője (!) szorgalmazta (egyetemi tanári és rektori minőségben). A jeles tudós ezzel igazolta, hogy hatvanadik életévén túl is szívén viseli a tudomány és az oktatás korszerűsítésének ügyét.[20] Tárczy-Hornoch Antal akadémikus történeti áttekintéséből ([4]) az derül ki, hogy a geodéziai kiegyenlítő számítás tárgyköréből eddig viszonylag kevés könyv jelent meg Magyarországon. Egy szűkebb tárgykörben nem is lehetne minden pár évben újabb tankönyvet megjelentetni. Becslésünk szerint egy olyan nagyszabású könyv, mint a dr. Hazayé, legalább 10—15 évre íródik, így az erkölcsi kopás ellen bizonyos „előretartással"

[19] A műegyetemi matematikaoktatás hatékonyabbá tételének egyik feltétele, hogy a szaktárgyak oktatói a matematikai tananyagot illetően jól körvonalazott igényekkel tudjanak fellépni.

[20] Ezzel a magatartással szemben némileg paradoxonként hat maga a könyv, ahol a szerző megelégedett a hagyományos tárgyalásmóddal. Figyelembe véve azonban a korszerűsítéssel járó jelentős munkatöbbletet, valamint a neves pályatársak kissé konzervatív szemléletét, emberileg teljesen érthető, hogy a szerző nem vállalkozott az úttörő hálátlan szerepére.

(amely a matematikai tanterv realizálására némi időt számítva, jelen esetben egy-két év) lehet és kell védekezni.

Ha a szerző határozottan és bátran támaszkodott volna olyan matematikai előismeretekre, amelyekkel a hallgatók a könyv megjelenésének idején nem rendelkeztek, akkor az anyag tárgyalását egy matematikai alapozó fejezettel (a jelenlegi függelék kissé bővített változatával) kellett volna kezdeni, az egyetemi előadásban pedig átmenetileg mintegy két évig a szaktárgy előadóira hárult volna a szükséges matematikai előismeretek közlése. Ezzel a kis kényelmetlenséggel szemben a *jelenlegi megoldás mérlege* a következő: Két éven keresztül a matematika és a kiegyenlítő számítás tantárgy oktatása összehangoltan folyik, utána pedig egy korszerűbb formában megírt tankönyv megjelenéséig, mondjuk 1980-ig,[21] 12 évfolyam hallgatóinak intézményes formában veszik el a kedvét a matematikától, minthogy a diákok — némi joggal — felesleges tehernek érzik majd a nehezen megszerzett és alkalmas helyen mégsem felhasznált ismereteket.[22] A probléma fenti dinamikus vizsgálata alapján erősen vitathatónak tartjuk a bírálók azon megállapításait, amelyek szerint a szerző jól alkalmazkodott a hallgatók felkészültségéhez.

Az utóbbi fejtegetések már kapcsolódnak *harmadik problémánkhoz:* mennyiben tesz eleget a könyv rendeltetésének? Úgy tűnik, hogy a könyv bírálói az értékelésnek ezt a szempontját (amely szerintünk a legfontosabb) teljesen figyelmen kívül hagyták. (A bírálók viszonyítási alapul a tárgykör magyar és nemzetközi műszaki irodalmának szintjét tekintik; ez kétségtelenül fontos, de korántsem az egyetlen szempont.) Fentebbi fejtegetéseinket figyelembe véve nagyjából úgy tekinthetjük, hogy a könyv *elvileg* a 20. század *harmadik* harmadának mérnöke számára íródott. Ezzel szemben úgy tűnik, hogy a könyv számos tekintetben legfeljebb a 20. század *második* harmadának mérnökét elégítheti ki. A matematikai apparátus korszerűtlenségéről már beszéltünk, nézzünk egy kirívó példát a technikai korszerűtlenségre.[23]

A normálegyenletek megoldásánál a szerző kétféle „gépesítettségi" állapotból indul ki. Az egyik feltételezés szerint a számolás kézi számológépen történik, a másik esetben (332. old.) „a számításhoz számológép nem áll rendelkezésünkre és így a számítást *logaritmussal* kell elvégezni". A szerző négy oldalon keresztül részletesen leírja, hogyan kell lineáris algebrai egyenletrendszert logaritmustábla felhasználásával (ti. a szorzásokat így elvégezve) megoldani... .

Lineáris algebrai egyenletrendszerek megoldása *laboránsi* szintű munka. A mérnökök numerikus számolási munkájának csökkentésére akkor is indokolt lenne törekedni (segéderők beállításával), ha *elektronikus számológépek* nem léteznének. De léteznek, sőt Magyarországon már van annyi belőlük, hogy a geodéziai mérési eredmények kiértékelését a hazai géppark kapacitásának kis része is biztosítani tudná. Függetlenül attól, hogy mi a jelenlegi helyzet, a gépek már a közeljövőben is feltehetően egyre nagyobb szerepet játszanak a geodéziai számolási munkák elvégzésében és a „kézi" munka jelentősége (legalábbis a munkaigényes típus-feladatok-

[21] Nagyon optimisták vagyunk, amikor így kalkulálunk, hiszen a könyvről megjelent bírálatok alapján arra sem látunk biztosítékot, hogy a tárgykör korszerűsítése a 20. században megtörténik.

[22] A matematikai tanterv korszerűsítését ezen veszély ellenére is feltétlenül pozitív lépésnek tartjuk, mert az ennek nyomán kialakult felemás helyzet a szaktárgy korszerűsítését elősegítheti. Csak nehogy valaki úgy akarja a gordiuszi csomót kibogozni, hogy a keletkezett feszültséget a matematikai tananyag csökkentésével oldja meg!

[23] Ahhoz a kérdéshez, hogy a könyv szerzője a példák megválasztásánál mennyire vette figyelembe a legmodernebb mérési feladatokat, technikai eszközöket és módszereket, nem tudunk hozzászólni. dr. Homoródi [5] írásának egy megállapításából azonban arra következtetünk, hogy a szerző ezen a téren is megelégedett a hagyományos tárgyalásmóddal.

nál) csökken. Ennek a ténynek az egyetemi képzésben az oktatás terén legalább olyan formában kellene tükröződnie, hogy a hallgatók a gépi feldolgozás speciális szempontjaival *is* megismerkednek, ami pedig a nevelést illeti, egy olyan mérnöknemzedék létrehozása lenne kívánatos, amelyet áthat a technikai lehetőségek maximális hasznosításának vágya.[24]

*

A szerző *stílusa* több szempontból kifogásolható. A túlzottan egyéni szóhasználat és kifejezésmód, bőbeszédűség, pongyolaság és körülményesség a fogalmazásban, mind olyan tényező, amely jó esetben „csak" a nyelvhelyesség szempontjából kifogásolható, de sokszor a szöveg megértését is nehezíti, (sőt néhány helyen lehetetlenné teszi). Ezen véleményünket az alábbiakban néhány példával támasztjuk alá.[25]

Először a 18. oldalon (és utána még sok helyen) találkozunk az *„a valószínűség szerint"* kifejezéssel, amelyet a szerző általában az „a valószínűségszámítás szerint" értelemben használ. Nem egészen könnyű az alábbi mondatot (41. oldal) megérteni: „Ugyanis az előbbiekben felsorolt valószínűség szerint ezt az értéket tekinthetjük maximális hibának, hiszen a valószínűség szerint ezt a hibanagyságot minden 400 mérési eredményből megközelítően csupán egy haladja meg." (Itt a „felsorolt valószínűség szerint" kifejezés a normális eloszlás táblázatára kíván utalni.) A valószínűség szó helytelen használatára példa a már említett *„így feltehető az a valószínűség, hogy..."* kifejezés is (a 24. oldal). Azt, hogy a súlyok választása mindig kissé önkényes, a szerző (dőlt betűkkel) így fogalmazza meg (76. oldal): *„Abszolút értékű súlyt azonban sohasem lehet megállapítani, és így a gyakorlatban meg kell elégednünk a valószínűsített súlyokkal"*. A μ_0^2 számnál „a pozitív előjelet a *másodfokú hatványkitevő* biztosítja" (20. oldal); „...valamely feladat több csoportba is *sorozható*" (56. oldal); „tekintsük az *általánosítás végett* a mérési eredményeket különböző súlyúaknak" (97. oldal). A mátrixszámítás „kifejezésmódja világosan *vezeti* a bonyolultabb számítási folyamatokat" (509. oldal). A szerző az ábráról leolvasható egyenleteket *„szemléletből"* felírja (97. oldal és sok más helyen), a súlyokat „nagy számokban" veszi fel (136. oldal), míg a 300. oldalon *„egyszer* kevesebbszer redukált" egyenletrendszerről beszél.

Nem kívánunk terminológiai és jelölési vitákba bocsátkozni, de a szerző egyénieskedésével nem mindenütt értünk egyet. Nem értjük például, hogy miért kell az eléggé meggyökeresedett *iteráció* kifejezést „közeledés"-re (?) magyarítani (38. oldal). Igen sokszor (talán valamennyi példában) szerepel egy mennyiség, amelynek elnevezése; „a még ki nem egyenlített mérési eredmények kiegyenlítés utáni középhibája" (?!); egy gyakran használt szakkifejezéssel szemben támasztható elemi követelmény, hogy rövid legyen. A 193. oldalon a dimenziók kiszámításánál a dimenzió nélküliségre bevezetett *„nélk"* jelölést modernkedésnek érezzük; vajon mi szól a jó öreg nulladik hatvány ellen? Kissé zavaróak a $\delta\delta$ (126. oldal) és az a_a (189. oldal) jelölések, amelyekben az azonos betűk teljesen különböző dolgokat jelentenek; nem túl szerencsés gondolat a parciális deriváltaknak és a fölösmérések számának ugyanazon f betűvel való jelölése sem.

Helyenként hiányoljuk a fogalmazás műszaki matematikai könyvhöz illő tömörségét; így például arról a tényről, hogy a *normálegyenletek mátrixa szimmet-*

[24] E mellett a technikai lehetőségek figyelembevétele a leendő mérnökök (tíz-húsz év múlva végzendő) munkájában, a kiképzendő szakemberek számának meghatározására is kihat.

[25] Csak viszonylag rövid, szövegösszefüggésükből kiragadható példákat idézünk; a bonyolultabb, hosszabb szöveg idézését igénylő esetek felsorolásától eltekintünk.

rikus, a következőképpen értesül az olvasó (92. oldal): „Megfigyelve a normálegyenleteket, bizonyos szimmetriát vehetünk észre bennük. Azt látjuk ugyanis, hogy bármely vezetőtagot balról megelőző tagok együtthatói megegyeznek a megelőző normálegyenletekben az illető vezetőtag fölött levő tagok együtthatóival". A bőbeszédűség azonban nemcsak a fogalmazásbeli terjengősségben, hanem a képleteknek szavakkal való leírásában, egyes levezetések túlzott részletezésében, triviális tények és képletek sokszori megismétlésében is megnyilvánul. *Az a benyomásunk, hogy a könyv anyaga nem indokolja a közel 600 oldalas terjedelmet és a szöveg alkalmas módon elvégzett rövidítése csak megkönnyítené az anyag megértését és áttekintését.*

Néhány példa a pongyola, zavaros fogalmazásra:

A 21. és 22. oldal (1), (2) és (3) képlete alapján

$$\mu_1 = \varepsilon_1, \quad \mu_2 = \varepsilon_2, \quad \mu_1 : \mu_2 = \frac{1}{\sqrt{p_1}} : \frac{1}{\sqrt{p_2}}.$$

Ezután a szerző leszögezi: „(1) és (2) alapján *feltehető*, hogy

$$\varepsilon_1 : \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{p_1}} : \frac{1}{\sqrt{p_2}}".$$

Az 1. fejezet befejező mondata (41. oldal): „Jó munkában azért *átlagosan* a hibahatárnak *legfeljebb* a felét használjuk ki." A legkisebb négyzetek módszeréről ezt olvashatjuk (dőlt betűkkel, 50. oldal): „annak tudatában, hogy a legkisebb négyzetek módszere nem nyugszik feltétlenül vitathatatlan alapokon, a gyakorlat mint egy hasznos elvet, illetve eljárást általánosan alkalmazza" (nem hiányoznak az ellentétes kötőszavak?). A 169. oldalon: „...annyi javítási egyenletünk lesz, *amennyi* a mérési eredmény", helyesen: amennyi a mérési eredmények *száma*. A 211. oldalon: „...mind az együtthatók, mint a tisztatag — a *zérust is beleértve* — *bármely valós szám* lehetnek" (!?).

Az idézett példákkal szerettük volna érzékeltetni, hogy miért nem értünk egyet dr. Regőczy ([3]) alábbi értékelésével: „A könyv megértését lényegesen segíti magyaros stílusa és gördülékeny mondatfűzése." A *nagyobb bajt* mégsem az apró matematikai, nyelvi és fogalmazásbeli pontatlanságok jelentik, hanem *ezek együtt*, párosulva a szerző alapkoncepciójának hiányosságaival (amelyekre az előzőek során már több helyen utaltunk), és felerősítve azokat. Ember legyen a talpán az az olvasó, aki a könyv számos nehezen érthető részénél pontosan meg tudja állapítani, hogy mennyi írható az anyag nehézsége, a matematikai pontatlanság, a hibás logikájú vagy körülményes gondolatmenet illetve a fogalmazásbeli hiányosságok számlájára. Mit gondoljunk például az alábbi mondatról (581. old.): „A változók hányadosának eloszlását adja a Cauchy-féle eloszlás"? *Teljesen egyetértünk* dr. Regőczy egy régebbi megállapításával, amelyet a műszaki nyelvvel kapcsolatban tett ([17]): „Pedig a fogalmazást épp úgy meg lehet tanulni, mint a matematikát Meg is kell, mert a fogalmazásbeli és a matematikai hiba között aligha van lényeges távolság a vétkek lajstromán."

Véleményünk szerint a rossz fogalmazásnak nem kis szerepe van abban, hogy a könyv megértése lényegesen több munkát jelent, mint amennyit az anyag nehézsége indokolttá tesz. A szerző — nem szándékosan — lépten-nyomon *feladványfejtésre* készteti az olvasót. A rutinos és a könyv anyagában többé-kevésbé jártas olvasó általában még akkor is kitalálja, hogy mit akar a szerző egy-egy mondattal vagy bekezdéssel kifejezni, ha az a leírt szövegből nem következik egyértelműen;

de vajon kitalálja-e egy kezdő, aki éppen ebből a könyvből kívánja az anyagot elsajátítani?

Végül leszögezzük, hogy véleményünk szerint a fogalmazásbeli hiányosságok azok, amelyekért a szerző egyénileg legkevésbé felelős. A lektorok és főképpen a felelős szerkesztő kötelessége a nyelvi hibák vagy értelmetlen részek kijavításáról gondoskodni.

*

A tudomány rohamos fejlődése egyre komolyabb problémák elé állítja a szakembereket és az egyetemi oktatókat. Elég belelapozni a „Modern matematika mérnököknek" c. könyvbe ([18]), hogy megállapíthassuk: a matematika műszaki alkalmazásai ma már számos területen igen komoly elméleti matematikai felkészültséget igényelnek és egyes alkalmazási problémákat éppen az utóbbi évtizedekben kifejlesztett matematikai apparátus segítségével lehet kielégítő módon megoldani. Nyilvánvaló, hogy az egyetemi oktatás feladata lényegében az *alapozás*, a munkája színvonalasabb ellátásához szükséges ismereteket mindenkinek egyéni tanulással vagy csoportos továbbképzés keretén belül kell elsajátítania. Az alapozás gyöngeségeit később csak jelentős munkatöbblettel lehet kijavítani. Véleményünk szerint a mérnökhallgatók matematikai képzése (beleértve a szaktárgyak keretében folyó képzést is) sikerességének egyik ismérve, hogy a végzett hallgatók számára a *mérnököknek írt matematikai művek* megértése nem jelent különös nehézséget. Lehet, hogy tévedünk, de megítélésünk szerint Linnyik [2] könyve, amely a kiegyenlítő számítás területén továbbképzési anyagul szolgálhatna, alighanem túlságosan kemény dió a hagyományos képzésben részesült mérnökök számára (noha a könyv szerzője tárgyalásmód és jelölések tekintetében igyekszik közeledni a műszaki irodalomhoz).

Hallottunk olyan véleményt, hogy a mérnökök korszerűbb matematikai képzése a rendelkezésre állónál több időt és magasabb felkészültségi szintet igényelne. Az új, az ismeretlen kétségtelenül mindig nehezebbnek tűnik, mint a régi, a megszokott. Ha azonban két képzési módot igazságosan akarunk összehasonlítani, nem szabad az új terhére írnunk az átmenet nehézségeit. A matematikai képzésben mindig bizonyos *befektetés* történik, amely később (egyéneknél évek, tudományágak viszonylatában esetleg évtizedek múlva) *kamatozik*. A matematikai képzés korszerűsítése tulajdonképpen azt jelenti, hogy a befektetés optimális nagyságának megközelítésére törekszünk. A kiegyenlítő számítás hagyományos tárgyalásmódjának jellemzője, hogy igyekszik a „befektetést" minimálisra csökkenteni. Nem hinnénk, hogy bárki is *pontosan* meg tudná mondani, hol az „arany középút", de érzésünk szerint a hagyományos tárgyalásmód nagyon messze van az optimális stratégiától.

Említsünk még meg egy kérdést, a többé-kevésbé matematikai jellegű könyvek kiadásának kérdését. Magyarországon magyar nyelvű, kifejezetten matematikusoknak szóló könyv aránylag kevés jelenik meg (az ilyen jellegű művek nagy része is egyetemi tankönyv). A kiadott alkalmazott matematikai vagy legalábbis jelentős mennyiségű matematikát tartalmazó könyvek többsége mérnökök, közgazdászok stb. számára készült. A kiadóvállalatok az indokolt esetekben vagy igénybe veszik matematikusok segítségét fordítási, ellenőrzési, lektorálási feladatoknál, vagy nem, ez bizonyos fokig véletlenszerű. Nem mindig számít a matematikusok véleménye a lefordítandó könyvek kiválasztásánál sem. Ezek a tények nem használnak a magyar alkalmazott matematika színvonalának és nem fokozzák a matematikusokban a *matematika megbecsültségének* érzését.

Sajnálkozással fogadnánk, ha valaki jelen írásunkat valamiféle mérnökellenes

támadásnak minősítené, mert nem annak szántuk. Ha ma valaki alkalmazott matematikai könyvet ír, fel kell készülnie arra, hogy a könyvhöz hivatásos matematikusok is hozzászólnak. Az ilyen hozzászólások akkor is előrevihetik a nézetek tisztázását, a tudomány fejlődését és közelebb hozhatják egymáshoz a különböző területeken dolgozó szakembereket, ha esetleg egy-egy bíráló megjegyzés véletlenül túlságosan élesre sikerül. A magyar alkalmazott matematika színvonala nem lehet közömbös a matematikusoknak sem, mégis elsősorban az illetékes alkalmazási területen működő szakembereket érinti és ezért a fejlődés elsősorban az ő érdekük.

IRODALOM

[1] *Dr. Hazay István:* Kiegyenlítő számítások, Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.
[2] Линник, Ю. В.: „Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений, Физматгиз, Москва, 1966.
[3] *Dr. Regőczy E.:* Dr. Hazay István: Kiegyenlítő számítások. *Geodézia és Kartográfia* (1966) **18** 3. sz. 232—233. Könyvismertetés.
[4] *Tárczy-Hornoch A.:* Dr. Hazay István „Kiegyenlítő számítások" c. könyve a magyar kiegyenlítési irodalom tükrében, *Geodézia és Kartográfia* (1967) **19** 2. sz. 155.
[5] *Dr. Homoródi L.:* Dr. Hazay István: Kiegyenlítő számítások, *Felsőoktatási Szemle* (1967) **16** 180—181.
[6] Колмогоров, А. Н.: К основанию метода наименьших квадратов, Успехи Мат. Наук, (1946) **1** 57—70.
[7] *Biometriai értelmező szótár*, Mezőgazdasági Kiadó, Budapest, 1966.
[8] *Kendall, M. G.—Buckland, W. R.:* A dictionary of statistical terms, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1957.
[9] *Naas, J.—Schmid, H. L.:* Mathematisches Wörterbuch, Teubner, Leipzig, 1961.
[10] *Grossmann, W.:* Grundzüge der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate nebst Anwendungen in der Geodäsie, Springer-Verlag, Berlin, 1953.
[11] *Gauss, C. F.:* Theoria motus corporum coelestium (1809), *Werke*, **7**, Göttingen, 1873.
[12] *Gauss, C. F.:* Theoria combinationis observatorum erroribus minimis obnoxiae, (1821), *Werke* **4**, Göttingen, 1873.
[13] *Deutsch, R.:* Estimation theory, Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. Y. 1965.
[14] *Rényi A.:* Valószínűségszámítás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.
[15] *Happach, V.:* Ausgleichsrechnung. Teubner, Leipzig, 1950.
[16] *Laplace, P. S.:* Théorie générale des probabilités, *Oeuvres complètes*, 7/2, Gauthier—Villars, Paris, 1886.
[17] *Dr. Regőczy E.:* Műszaki nyelvi tanácskozás, *Geodézia és Kartográfia*, (1963) **15** 5. 375—377.
[18] *Beckenbach, E. F.* (szerk.): Modern matematika mérnököknek, 1—2. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1960. ill. 1965.
[19] *Tóth G.:* A „Gier" elektronikus számológép ismertetése. *Gépek és Programok* (KSH Ügyvitelgépesítési Főosztály Információfeldolgozási Laboratórium közleményei) 8. kötet, Budapest, 1964. 92—103.

КНИГА Д-Р. ИШТВАНА ХАЗАИ „ВЫРАВНИВАТЕЛЬНЫЕ РАСЧЁТЫ" В СВЕТЕ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ПРОБЛЕМЫ ОБРАЗОВАНИЯ ИНЖЕНЕРОВ

Д. БАНКЁВИ

"ADJUSTMENT METHODS", A BOOK BY DR. I. HAZAY, FROM THE POINT OF VIEW OF PROBLEMS OF APPLIED MATHEMATICS AND THE TRAINING OF ENGINEERS

G. BÁNKÖVI

A $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{x_i}} = 1$ DIOFANTOSZI EGYENLET ÉS ANNAK EGY GRÁFELMÉLETI ÉS INFORMÁCIÓELMÉLETI VONATKOZÁSA

BENDE SÁNDOR

Legyen adott az $n \geqq 2$ pozitív egész szám és jelöljük $\tau(n)$-nel azoknak a pozitív egész számokból álló $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n$ sorozatoknak a számát, amelyek kielégítik a

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{x_i}} = 1 \tag{1}$$

egyenletet. $\tau(n)$ tehát az (1) egyenlet pozitív egész számokkal való lényegesen különböző megoldásainak számát jelenti. Dolgozatunkban $\tau(n)$ rekurzív meghatározásával foglalkozunk és ennek során rámutatunk a probléma gráfelméleti, majd információelméleti vonatkozására.

I.

Jelöljük Γ_n-nel az olyan $n \geqq 2$ végpontú fát, amelynek egyetlen másodfokú G_0 szögpontján, valamint a $G_1, G_2, \ldots, G_n$ végpontjain kívül, valamennyi egyéb szögpontja harmadfokú. A $G_0 - G_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ utak hosszúságait x_i-vel jelölve, feltesszük, hogy Γ_n végpontjai úgy vannak megszámozva, hogy $x_i \leqq x_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, \ldots, n-1)$. Nevezzük az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sorozatot a Γ_n típusának. Például az ábrán látható Γ_6 és Γ_6' azonos típusúak, míg Γ_6'' ezektől különböző típusú. Megmutatjuk, hogy a Γ_n fák összes különböző típusainak a száma $\tau(n)$. A bizonyítás egyszerűsége érdekében egy operációt definiálunk a következőképpen: Ha adott a természetes számoknak egy $\{x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n\} = \{x_n\}$ sorozata, akkor az $O(x_i)$ operáció jelentse azt, hogy az $\{x_n\}$ sorozatból az x_i $(1 \leqq i \leqq n)$ számot elhagyjuk és azt két darab $(x_i + 1)$-gyel pótoljuk és ezeket a rendezésnek megfelelő helyre beírjuk.

1°. Ha $\{x_n\}$ megoldása (1)-nek, akkor $O(x_i)$-t alkalmazva $\{x_n\}$-re, az így kapott $\{x_{n+1}\}$ sorozat megoldása a $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2^{x_i}} = 1$ egyenletnek. Megfordítva, ha adott egy $\{x_{n+1}\}$ sorozat, amely megoldása a $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2^{x_i}} = 1$ egyenletnek, akkor van olyan $\{x_n\}$ sorozat, amely megoldása (1)-nek és ezen $\{x_n\}$-nek van olyan x eleme, hogy $O(x_i)$-t alkalmazva $\{x_n\}$-re éppen az adott $\{x_{n+1}\}$ sorozat áll elő.

Az állítás első része azonnal következik az $\frac{1}{2^{x_i}} = \frac{1}{2^{x_i+1}} + \frac{1}{2^{x_i+1}}$ azonosságból. Az állítás második része is az előbbi azonosságból következik, ha figyelembe vesszük azt a tényt, hogy az (1) egyenlet bármely $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n$ megoldásában $x_{n-1} = x_n$ — (erről az (1) egyenletnek 2^{x_n}-el való beszorzása révén könnyű meggyőződni) — továbbá azt, hogy $n > 2$ esetén $x_n \geqq 2$.

1°′. Ha $\{x_n\}$ típusa Γ_n-nek, akkor $O(x_i)$-t alkalmazva $\{x_n\}$-re, az így kapott $\{x_{n+1}\}$ típusa egy Γ_{n+1} fának. Megfordítva, ha adott az $\{x_{n+1}\}$, $(n>1)$ sorozat, amely típusa egy Γ_{n+1} fának, akkor van olyan $\{x_n\}$, amely típusa egy Γ_n fának és ezen $\{x_n\}$ sorozatnak van olyan x_i eleme, hogy $O(x_i)$-t alkalmazva $\{x_n\}$-re, éppen az adott $\{x_{n+1}\}$ sorozat áll elő.

Állításunk első részének bizonyításához tekintsünk egy Γ_n fát, amelynek típusa $\{x_n\}$, és ezen Γ_n G_i végpontjából indítsunk ki két élt. Ezáltal egy olyan Γ_{n+1} fához jutunk, amelynek $\{x_{n+1}\}$ típusa a Γ_n fa $\{x_n\}$ típusára alkalmazott $O(x_i)$ révén állt elő. Állításunk második részének belátásához vegyük figyelembe, hogy Γ_{n+1}-nek mindig van két olyan maximális hosszúságú G_0-ban kezdődő és végpontban végződő útja, pl. G_0-G_n és G_0-G_{n+1}, amely utaknak a G_n és G_{n+1} végpontoktól eltekintve, minden szögpontja közös; ezen utak $x_n=x_{n+1}$ hossza $n+1>2$ esetén $\geqq 2$. Szüntessük meg a megadott Γ_{n+1} G_n és G_{n+1} végpontjait a hozzájuk csatlakozó élekkel együtt, ezáltal egy Γ_n fát kapunk, amelynek $\{x_i\}$ típusa olyan, hogy belőle megfelelő $O(x_i)$ alkalmazásával a megadott Γ_{n+1} $\{x_{n+1}\}$ típusa áll elő. Induljunk ki ezután az 1, 1 sorozatból és alkalmazzuk erre $O(1)$-et, az így kapott sorozatra ismét alkalmazzuk O-t s.í.t. O-t a kapott sorozatok minden elemére alkalmazzuk, de ha egy eredményt többféleképpen nyerhetünk, akkor csak egyszer írjuk le. Ezzel az alábbi sorozatokat kapjuk:

11
122
2222 1233
22233 13333 12344
223333 222344 133344 124444 123455
...

A fenti séma első sorában álló sorozat az $n=2$ esetben az (1) egyenlet egyetlen megoldása és egyben a Γ_2 fa egyetlen lehetséges típusa. Ezért 1° és 1°′-ből következik, hogy a séma $(n-1)$-ik sorában álló sorozatok az (1) egyenlet összes lényegesen különböző megoldásai, illetve a Γ_n fák összes különböző típusai, és így ezek száma valóban $\tau(n)$.

Alapul véve a $\tau(n)$ gráfelméleti jelentését, a következőkben rátérünk $\tau(n)$ rekurzív meghatározására. Az alábbi 2° és 3° állítás triviális:

2°. Minden $n\geqq 2$ természetes számra: $\tau(n)>0$.

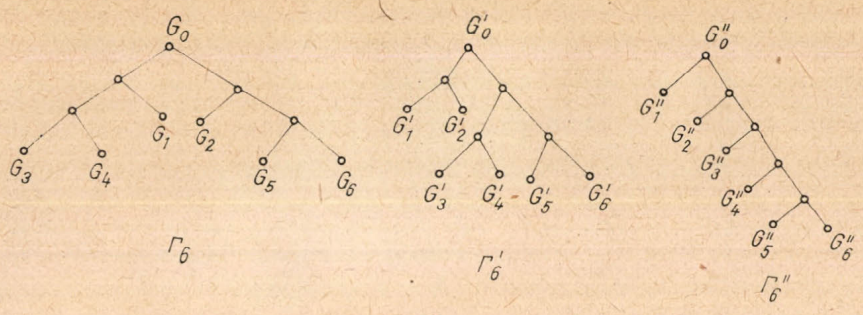
3°. A továbbiakban Γ_n útjain csakis a G_0-G_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ utakat érintve, Γ_n maximális hosszúságú útjainak a száma páros.

4°. Ha Γ_n maximális hosszúságú útjainak száma $2k$, akkor $n\geqq 4$ és $k\geqq 2$ esetében van olyan Γ_n', amelyben a maximális hosszúságú utak száma $2(k-1)$.

Ennek belátásához az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy a Γ_n-beli G_0-G_{n-1} és G_0-G_n utaknak a G_{n-1} és a G_n végpontoknak a kivételével, minden egyéb szögpontjuk közös. Szüntessük meg Γ_n-ben a G_{n-1} és G_n végpontokat a hozzájuk csatlakozó élekkel együtt, majd indítsunk ki G_0-ból egy harmadik élt, és ennek G_0-tól különböző, G_0'-vel jelölt végpontjából ismét indítsunk ki egy élt. Könnyen belátható, hogy ezáltal olyan Γ_n' fához jutottunk, amelyben a G_0'-ból kiinduló maximális hosszúságú utak száma $2(k-1)$ lesz.

Legyen $n\geqq 2$, $k\geqq 1$ és jelöljük $\tau_{2k}(n)$-nel az összes olyan páronként különböző típusú Γ_n fák számát, amelyekben a maximális hosszúságú utak száma $2k$. Jelölje továbbá M_n azon k értékek maximumát, amelyekre $\tau_{2k}(n)>0$; ekkor 2°, 3° és 4° következtében

5°. $$\tau(n)=\sum_{k=1}^{M_n}\tau_{2k}(n).$$



1. ábra

Feltéve, hogy $n \geqq 3$ és $1 \leqq k \leqq M_n$, megmutatjuk, hogy kölcsönös és egyértelmű megfeleltetés létesíthető a pontosan $2k$ számú maximális hosszúságú utat tartalmazó és páronként különböző típusú n végpontú Γ_n fák halmaza, valamint a legalább $2\left[\frac{k+1}{2}\right]$ számú maximális hosszúságú utat tartalmazó és páronként különböző típusú $(n-k)$ végpontú Γ_{n-k} fák halmaza között. Ugyanis egy $2k$ számú maximális utat tartalmazó Γ_n fának G_{n-2k+1}, G_{n-2k+2}, ..., G_n végpontjait a hozzájuk csatlakozó élekkel együtt megszüntetve olyan Γ_{n-k} fához jutunk, amelyben a maximális hosszúságú utak száma legalább $2\left[\frac{k+1}{2}\right]$. Megfordítva: bármely legalább $2\left[\frac{k+1}{2}\right]$ számú maximális hosszúságú utat tartalmazó Γ_{n-k} fából, maximális hosszúságú útjai közül k darabnak a végpontjából 2—2 élt kiindítva, egy pontosan $2k$ számú maximális hosszúságú úttal rendelkező Γ_n fát kapunk. Könnyű belátni, hogy ezen konstrukció által történő megfeleltetés esetén, különböző típusú Γ_n-eknek különböző típusú Γ_{n-k}-k, és azonos típusú Γ_n-eknek azonos típusú Γ_{n-k}-k feleltethetők meg kölcsönös és egyértelmű módon. Mivel a legalább $2\left[\frac{k+1}{2}\right]$ számú maximális hosszúságú úttal rendelkező páronként különböző típusú $n-k$ végpontú Γ_{n-k} fák $\sum_{\left[\frac{k+1}{2}\right] \leqq j \leqq M_{n-k}} \tau_{2j}(n-k)$ száma 5° következtében egyenlő $\tau(n-k) - \sum_{1 \leqq j \leqq \left[\frac{k-1}{2}\right]} \tau_{2j}(n-k)$-val, ezért előbbi meggondolásaink eredményeként $\tau_{2k}(n)$-re

$$6^\circ. \qquad \tau_{2k}(n) = \sum_{j=\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{M_{n-k}} \tau_{2j}(n-k) = \tau(n-k) - \sum_{j=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \tau_{2j}(n-k)$$

adódik. 6°. formula jobb oldala zérussá válik, ha $\left[\frac{k-1}{2}\right] = M_{n-k}$, amiből $M_n = \max\left\{k; \left[\frac{k-1}{2}\right] < M_{n-k}\right\}$ következik és így 5°. és 6°. alkalmazásával kapjuk, hogy $n \geqq 3$ esetén

$$7^\circ. \qquad \tau(n) = \tau(n-1) + \tau(n-2) +$$

$$+ \sum_{3 \leqq k \leqq \max\left\{k; \left[\frac{k-1}{2}\right] < M_{n-k}\right\}} \left\{ \tau(n-k) - \sum_{j=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \tau_{2j}(n-k) \right\}.$$

II.

$\tau(n)$ kiszámításának egy másik lehetősége — amelyre Rényi Alfréd hívta fel a figyelmet —, a következő: Tekintsük a

$$2^{y_1}+2^{y_2}+\ldots+2^{y_n}=2^s \qquad (n\geqq 2) \tag{2}$$

egyenlet nem negatív $y_1, y_2, \ldots, y_n$; $s\geqq 1$ számokkal való összes lényegesen különböző megoldásait, azon kikötés mellett, hogy $\min y_i=0$. Ekkor ezen megoldások száma $\tau(n)$. Ugyanis legyen pl. az $y_1\geqq y_2\geqq\ldots\geqq y_n=0$ és s (ahol nyilván $s>y_1$) a (2) egy megoldása, akkor (2)-ből

$$\frac{1}{2^{s-y_1}}+\frac{1}{2^{s-y_2}}+\ldots+\frac{1}{2^s}=1 \tag{2'}$$

miatt az (1) egyenlet egy megoldása áll elő. Fordítva, ha $x_1\leqq x_2\leqq\ldots\leqq x_n$ az (1)-nek egy megoldása, akkor (1)-ből

$$2^{x_n-x_1}+2^{x_n-x_2}+\ldots+1=2^{x_n}$$

miatt a (2) egyenletnek egy a $\min y_i=0$ kikötésnek eleget tevő megoldása áll elő. Ezért, ha $A(n, r)$ jelöli az r pozitív egész szám pontosan n darab, nem negatív egész kitevőjű 2 hatványokból álló, lényegesen különböző additív felbontásainak a számát, akkor

$$8^\circ. \qquad \tau(n)=\sum_{s\geqq 1} A(n-1, 2^s-1).$$

Az $A(n, r)$ számok rekurzív kiszámítására alkalmas formulát $A(n, r)$ generátorfüggvényéből nyerhetünk. Legyen $F(z, x)$ azon hatványsor, amelyben $A(n, r)=$ $=\text{coeff } z^n x^r$. Ekkor

$$F(z, x)=\prod_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{1-zx^{2^\nu}}=1+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A(n, r)z^n x^r$$

alapján könnyű belátni, hogy $F(z, x)$ kielégíti az

$$F(z, x)(1-zx)=F(z, x^2)$$

függvény-egyenletet. Ezen függvény-egyenlet két oldalát sorba fejtve, az együtthatók összehasonlításából az

$$A(n, 2k)=A(n-1, 2k-1)+A(n, k)$$

$$9^\circ. \qquad A(n, 2k+1)=A(n-1, 2k)$$

rekurzív formulák adódnak.

Megmutatjuk, hogy

$$10^\circ. \qquad \tau(n)=A(n, 2^{n-1}).$$

Ennek belátásához, az (1) egyenlet megoldásait feltüntető, I.-ben szereplő séma alapján, vegyük észre, hogy fix n mellett (2')-ben s maximális értéke $n-1$, és így $A(n-1, 2^s-1)=0$, ha $s>n-1$. Felhasználva a 9°. alatti első formulát $2k$

helyébe rendre 2^{n-1}, 2^{n-2}, ...-et téve

$$A(n, 2^{n-1}) = A(n-1, 2^{n-1}-1)+A(n, 2^{n-2})$$
$$A(n, 2^{n-2}) = A(n-1, 2^{n-2}-1)+A(n, 2^{n-3})$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

adódik. Ezen egyenleteket összeadva 8°. miatt következik 10°.

1. Megjegyzés: Az algebrai információelméletben változó szóhosszúságú prefix kódon a 0 és 1 elemekből képezhető véges hosszúságú S sorozatoknak az olyan $\mathcal{S}_n=\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$, $(n\geqq 2)$ rendezett n-esét értik, amelyben egyetlen S_i sorozat sem kezdőszelete egyetlen S_j sorozatnak sem $(i\neq j)$. Az $S_i\in\mathcal{S}_n$ sorozat hosszúságát l_i-vel jelölve, $\mathcal{S}_n$ létezésének szükséges és elégséges feltétele a

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^{l_i}}\leqq 1$$

egyenlőtlenség teljesülése. Ha ez utóbbiban az egyenlőség érvényes, akkor $\mathcal{S}_n$-t kimerített kódnak nevezik.

Az $\mathcal{S}_n$ kimerített kód ekvivalens az $\mathcal{S}'_n$ kimerített kóddal, ha az $\mathcal{S}_n$-beli elemek hosszúságainak sorozata — sorrendtől eltekintve — megegyezik az $\mathcal{S}'_n$-beli elemek hosszúságainak sorozatával. Ezek alapján világos, hogy $\tau(n)$ az n-elemű kimerített bináris kódok ekvivalencia-osztályainak számát is jelenti.

2. Megjegyzés: A dolgozatban szereplő valamennyi meggondolásunk könnyen általánosítható a $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q^{x_i}}=1$ egyenlet esetére is, ahol q 2-nél nagyobb tetszőleges egész szám. Ehhez csupán azt kell figyelembe venni, hogy a $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q^{x_i}}=1$ egyenlet pozitív egész x_i-kel való megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele az, hogy n eleme legyen az $n_r=r(q-1)+1$ $(r=1, 2, \ldots)$ számtani sorozatnak. Ekkor $\tau(n_r)$ jelenti a $\sum_{i=1}^{n_r}\frac{1}{q^{x_i}}=1$ egyenlet pozitív egész számokkal való lényegesen különböző megoldásainak a számát, jelenti az olyan n_r végpontú fák különböző típusainak számát, amelyeknek egyetlen kitüntetett szögpontja pontosan q-adfokú és valamennyi egyéb belső szögpontja pontosan $(q+1)$-edfokú, továbbá a q-náris n_r-elemű kimerített kódok ekvivalencia-osztályainak számát.

3. Megjegyzés: Főleg az információelméleti alkalmazások érdekében hasznos lenne $\tau(n)$-re aszimptotikus formulát találni.

Végezetül köszönetet mondok Rényi Alfréd professzornak, akinek megjegyzéseit a dolgozatban felhasználtam.

ДИОФАНТОВОЕ УРАВНЕНИЕ $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^{x_i}}=1$ И ЕГО ОТНОШЕНИЕ К ТЕОРИИ ГРАФОВ И К ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИЙ

Ш. БЕНДЕ

THE DIOPHANTINE EQUATION $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^{x_i}}=1$ AND ITS CONNECTION WITH GRAPH THEORY AND INFORMATION THEORY

S. BENDE

A STIRLING-SOR CSEBISEV SORFEJTÉSE

NÉMETH GÉZA

ÖSSZEFOGLALÁS

A dolgozatban az $\ln \Gamma(x)$ függvény aszimptotikus kifejtésének a maradéktagját — amelyet a nevezetes Stirling sorral szokás megadni — konvergens Csebisev sorral állítjuk elő. A sorfejtés együtthatóit tízenöt jegy pontosságig táblázatosan adjuk meg.

1. Ismeretes, hogy a $\Gamma(x)$ függvény értékeinek kiszámítását nagy x értékek esetén általában az

$$\ln \Gamma(x) = (x-\tfrac{1}{2}) \ln x - x + \ln \sqrt{2\pi} + S(x)$$

előállítás segítségével végzik, ahol $S(x)$ az alábbi aszimptotikus sorral van megadva:

$$(1) \qquad S(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{x^{2k-1}} = \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5} \pm \ldots, \quad x \to \infty.$$

Ez az ún. Stirling sor. E sor c_k együtthatói (a ζ függvény értékeivel kifejezve) a következők [1]:

$$(2) \qquad c_k = \frac{(-1)^{k-1} 2(2\pi)^{-2k}(2k)!\, \zeta(2k)}{(2k-1)2k} = O\left\{\frac{(2k-2)!}{(2\pi)^{2k}}\right\}, \qquad k \to \infty.$$

Az (1) Stirling sorral — amely talán az első klasszikus aszimptotikus sorfejtés — mind elméleti, mind numerikus szempontból igen sokan foglalkoztak [2], [3], [4], [5] stb. Bár ez a sor a (2) becslés szerint minden x-re divergens, mégis a sor első néhány tagjával bizonyos pontosság elérhető az $\ln \Gamma(x)$ függvény értékeinek kiszámításánál [4], [5].

Dolgozatunkban az $S(x)$ függvény

$$(3) \qquad S(x) = \frac{1}{12x}\left\{S_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k S_k T_{2k}\left(\frac{1}{x}\right)\right\}, \qquad x \geqq 1$$

alakú Csebisev sorfejtését határozzuk meg (ahol $T_k(u)$ $k = 0, 1, 2, \ldots$, a k-adfokú Csebisev polinomot jelöli). Be fogjuk bizonyítani, hogy

$$(4) \qquad S_k = 3 \cdot 2^{\frac{3}{2}} \pi^{-\frac{3}{4}} k^{-\frac{1}{4}} e^{-4\sqrt{\pi k}} \{1 + O(k^{-\frac{1}{2}})\}, \qquad k \to \infty,$$

és így az $S(x)$ (3) sora konvergens (ellentétben az (1) Stirling sorral), és használata nagypontosságú szám ításoknál gazdaságos.

2. Az $S(x)$ függvény (3) alakú sorbafejtését az $\ln \Gamma(x)$ függvény integrál-előállítása segítségével végezzük el. Mivel [6] alapján

$$\ln \Gamma(x) = \left(x-\frac{1}{2}\right)\ln x - x + \ln \sqrt{2\pi} + \frac{x}{\pi}\int_0^\infty \ln \frac{1}{1-e^{-2\pi t}} \frac{dt}{x^2+t^2}, \tag{5}$$

tehát

$$S(x) = \frac{1}{\pi x}\int_0^\infty \frac{1}{1+\frac{t^2}{x^2}} \ln \frac{1}{1-e^{-2\pi t}}\, dt. \tag{6}$$

Ha az integrálban elvégezzük az

$$\frac{1}{1+\frac{t^2}{x^2}} = 1-\frac{t^2}{x^2}+\frac{t^4}{x^4} \mp \ldots, \tag{7}$$

formális helyettesítést, tagonkénti t szerinti integrálás után megkapjuk az (1) Stirling sort. Mi most (7) helyett az

$$\frac{1}{1+\frac{t^2}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\left\{1+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k}}{(1+\sqrt{1+t^2})^{2k}} T_{2k}\left(\frac{1}{x}\right)\right\}, \qquad x \geqq 1 \tag{8}$$

sorfejtést fogjuk az integrálba behelyettesíteni. A (8) sorra a következőképp jutunk. Legyen $x^{-1}=\cos\theta$. Mivel $T_{2k}(\cos\theta)=\cos 2k\,\theta$, (8) ekvivalens az alábbi sorfejtéssel:

$$\frac{1}{1+t^2\cos^2\theta} = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}{}' (-1)^k a_k \cos 2k\theta, \qquad 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}. \tag{8'}$$

Elemi számolással belátható, hogy

$$\frac{1}{1+t^2\cos^2\theta} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\left[1-\frac{qe^{2i\theta}}{1+qx^{2i\theta}} - \frac{qe^{-2i\theta}}{1+qe^{-2i\theta}}\right], \quad q = \frac{t^2}{(1+\sqrt{1+t^2})^2}.$$

Mivel $|qe^{\pm 2i\theta}|<1$, a zárójelben álló mindkét tört geometriai sorba fejthető, melyek összevonásából kapjuk a (8')-t, a (8)-cal ekvivalens sort. A (8) sorfejtés előnyösebb a (7) sornál, mert minden t-re geometriai típusú konvergenciával rendelkezik,

$$\frac{t}{1+\sqrt{1+t^2}} < 1$$

lévén, míg a (7) sor csak $x>t$-re konvergens. A behelyettesítés után, felcserélve az összegezés és integrálás sorrendjét, megkapjuk S_k explicit kifejezését:

$$S_k = \frac{12}{\pi}\int_0^\infty \frac{t^{2k}}{\sqrt{1+t^2}(1+\sqrt{1+t^2})^{2k}} \ln \frac{1}{1-e^{-2\pi t}} dt. \tag{9}$$

A (3) sorfejtés konvergenciáját bebizonyítandó, meg kell vizsgálnunk S_k viselkedését

$k \to \infty$ esetére. E célból S_k-t átalakítjuk. Az integrál kifejezésében levő logaritmikus tagot sorbafejtve, kapjuk a következőt:

$$(10) \qquad S_k = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} Q_l^{(k)}; \quad Q_l^{(k)} = \frac{12l}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \frac{t^{2k}}{(1+\sqrt{1+t^2})^{2k}} e^{-2\pi l t}\, dt.$$

Mivel $Q_l^{(k)} < 1$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$, $l = 1, 2, \ldots$) a (10) sor (k-ban) egyenletesen konvergens. Vizsgáljuk meg most $Q_l^{(k)}$ viselkedését $k \to \infty$ esetére. Könnyen látható, a (10) integrálból, hogy a Laplace módszer alkalmazása célszerű. Ugyanis az integrálandó függvény $k \to \infty$ esetén az alábbi t_0 pont környezetében maximummal rendelkezik:

$$t_0 = \left\{-\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{k^2}{l^2\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{k}{l\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \{1 + O(k^{-1})\}, \qquad k \to \infty.$$

Elvégezve e pont körül az integrálást, kapjuk:

$$(11) \qquad Q_l^{(k)} \sim \sqrt{\frac{2\pi}{-\varphi''(t_0)}} \cdot \frac{e^{\varphi(t_0)}}{t_0}, \quad \varphi(t) = -2\pi t + 2k \ln \frac{t}{1+\sqrt{1+t^2}}.$$

Mivel $k \to \infty$ esetére

$$\varphi(t_0) = -4(\pi l k)^{\frac{1}{2}} + O(k^{-\frac{1}{2}}), \qquad k \to \infty,$$

és

$$\varphi''(t_0) = -4(\pi l)^{\frac{3}{2}} k^{-\frac{1}{2}} + O(k^{-1}), \qquad k \to \infty,$$

így (a (11) maradéktagját is megbecsülve)

$$(12) \qquad Q_l^{(k)} = 3 \cdot 2^{\frac{3}{2}} \pi^{-\frac{3}{4}} \cdot l^{\frac{3}{4}} k^{-\frac{1}{4}} e^{-4(\pi l k)^{\frac{1}{2}}} \{1 + O(k^{-\frac{1}{2}})\}, \qquad k \to \infty.$$

A (12) aszimptotika azt mutatja, hogy mivel

$$Q_l^{(k)} / Q_1^{(k)} = l^{\frac{3}{4}} O(k^{-\frac{1}{2}}), \qquad l = 2, 3, \ldots,$$

$$S_k = Q_1^{(k)} \left\{1 + \sum_{l=2}^{\infty} l^{-\frac{5}{4}} O(k^{-\frac{1}{2}})\right\} = Q_1^{(k)} \{1 + O(k^{-\frac{1}{2}})\};$$

a (4) becslés valóban fennáll.

Az S_k számokat rekurzíve számítottuk ki és a cikk végén táblázatban adjuk meg (a táblázatban szereplő számok utolsó jegye 1 egységgel hibás lehet). Látható az együtthatók gyors csökkenéséből, hogy lényegesen gazdaságosabb nagypontosságú számításoknál a (3) sor részletösszegének a használata, mint az (1) soré.

3. Végezetül egy megjegyzést a (3) sorfejtés részletösszegének hibájáról. Konkrét számításnál ugyanis mindig a (3) sor valamely részletösszegét vesszük.

Jelölje a $12xS(x)$ n tagú részletösszegét $R_n\left(\frac{1}{x^2}\right)$ és legyen

$$(13) \qquad H_n = \max_{x \geqq 1} \left| 12xS(x) - R_n\left(\frac{1}{x^2}\right) \right|.$$

Ez a H_n hiba explicit megadható:

$$(14) \qquad H_n = \frac{12}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{t^{2n+2}}{\sqrt{1+t^2}(1+\sqrt{1+t^2})^{2n+1}} \ln \frac{1}{1-e^{-2\pi t}}\, dt.$$

A (14) integrálra alkalmazva a Laplace módszert, könnyen adódik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln H_n}{n^{\frac{1}{2}}} = -4\pi^{\frac{1}{2}}. \tag{15}$$

Jelölje most $P_n\left(\frac{1}{x^2}\right)$ azt a polinomot, amely Csebisev értelemben $x \geqq 1$-re a legjobban közelíti $12xS(x)$-t. Ennek hibáját jelöljük E_n-nel:

$$E_n = \max_{x\geqq 1} \left| 12xS(x) - P_n\left(\frac{1}{x^2}\right) \right|. \tag{16}$$

Az E_n eltérés H_n segítségével megbecsülhető. Ugyanis Lebesgue [7] tétele szerint

$$E_n \leqq H_n \leqq K \ln n \cdot E_n, \quad K>0, \; n \geqq n_0.$$

Megfordítva ezt az egyenlőtlenséget, kapjuk

$$H_n \geqq E_n \geqq H_n (K \ln n)^{-1} \qquad n \geqq n_0.$$

Logaritmusra térve és $n^{\frac{1}{2}}$-el osztva

$$\frac{\ln H_n}{n^{\frac{1}{2}}} \leqq \frac{\ln E_n}{n^{\frac{1}{2}}} \leqq \frac{\ln H_n}{n^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \ln \frac{1}{K \ln n}.$$

Elvégezve az $n \to \infty$ határátmenetet (15) figyelembe vételével azt nyerjük, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln E_n}{n^{\frac{1}{2}}} = -4\pi^{\frac{1}{2}}. \tag{17}$$

A (15) és (17) relációk egybevetése mutatja, hogy a (3) sor részletösszegének a hibája aszimptotikusan közel esik a legjobb közelítés hibájához.

TÁBLÁZAT

k	$\varepsilon_k S_k$ $\varepsilon_0=1$ $\varepsilon_k=2$ $k>0$	k	$\varepsilon_k S_k$ $\varepsilon_0=1$ $\varepsilon_k=2$ $k>0$
0	0,985751554005098	14	0,000000000017553
1	0,013575119940355	15	6710
2	609757784871	16	2651
3	54794747404	17	1079
4	7225671298	18	451
5	1222785636	19	193
6	247206061	20	85
7	57176475	21	40
8	14706251	22	17
9	4124183	23	8
10	1243043	24	4
11	398333	25	2
12	134579	26	1
13	47620		

IRODALOM

[1] *Ryshik, I. M.—Gradstein, I. S.:* Summen, Produkt-, und Integral Tafeln. Berlin (1957) 303.
[2] *Szász Pál:* Bevezetés az analízisbe I—II. Akadémiai Kiadó Budapest. (1951).
[3] Копсон, Е. Т.: Асимптотические разложения. Мир. Москва. (1966).
[4] *Werner H.—Collinge R.:* Chebyschev approximations to the Gamma Functions. M.T.A.C. *14.* (1960).
[5] *Lanczos C.:* Trigonometric interpolation of empirical and analytical functions. J. Math. Phys. *17.* (1938) 123—199.
[6] Евграфов, М. А.: Асимптотические оценки и целые функции. Физматгиз. Москва, 1962.
[7] *Natanszon I. P.:* Konstruktív függvénytan. Akadémiai Kiadó Budapest, 1952.

ЧЕБИШЕВОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЯДА СТИРЛИНГА

Г. НЭМЕТ

CHEBYSHEV EXPANSION OF THE STIRLING SERIES

G. NÉMETH

AZ 1965. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENY 4. FELADATÁNAK MEGOLDÁSA

HAJÓS GYÖRGY

Az 1965. évi Schweitzer Miklós matematikai emlékverseny beszámolójában a 4. feladatra egy megoldásvázlat alapján készült, pontosan ki nem dolgozott megoldás jelent meg (XVII. évf., 353—354. o.). Ezért e feladat megoldását kiegészítve újból közöljük.

4. feladat. A síkot n ($n \geqq 3$) általános helyzetű egyenes (azaz nincsenek közöttük párhuzamosak és nincs három egy ponton áthaladó) tartományokra vágja fel. Határozzuk meg ezek közt a szögtartományok lehetséges számának minimumát és maximumát.

Megoldás. Bebizonyítjuk, hogy a keresett minimum 3, a maximum páratlan n esetén n, páros n esetén pedig $n-1$.

Az egyenesek metszéspontjainak konvex burka $n \geqq 3$ miatt konvex sokszög, melynek legalább 3 csúcsa van. Minden csúcsban két egyenes metszi egymást, s ezeknek a burkon kívül haladó félegyenesei a felbontásban szereplő szögtartományt határolnak. A keresett minimum eszerint legalább 3.

Ha a síkot egy félkörív belső pontjaiban vont $n \geqq 3$ érintővel vágjuk fel, a keletkező szögtartományok száma 3. A vizsgált minimum eszerint n minden szóba jövő értékére valóban 3.

Mindegyik egyenest a többi egyenes szakaszokra és 2 félegyenesre bontja fel. Összesen $2n$ félegyenes szerepel, s ezek csak legfeljebb n szögtartományt határolhatnak, hiszen ugyanaz a félegyenes nem lehet több szögtartomány szára, mert három egyenesnek nincs közös pontja. A vizsgált maximum ezért nem lehet n-nél nagyobb.

Ha a síkot egy páratlan oldalú szabályos n-szög legtávolabbi csúcsait összekötő n egyenessel vágjuk fel, a feldarabolásban n szögtartomány található. Eszerint páratlan n esetében a vizsgált maximum valóban n.

Ha a most említett példában (háromnál több oldalú szabályos sokszögből indulva ki) egy egyenest elhagyunk, a szögtartományok száma 2-vel csökken. Eszerint páros n esetében a keresett maximum értéke legalább $n-1$, s már csak azt kell belátnunk, hogy ez a maximum nem lehet n, vagyis azt, hogy ha n egyenes esetében a szögtartományok száma n, akkor n szükségképpen páratlan.

Ha egyeneseinkből a már említett 2—2 félegyenest elhagyjuk, belőlük n szakasz keletkezik. Ezek minden végpontja a most vizsgált esetben két ilyen szakasz közös végpontja, hiszen a $2n$ félegyenes mindegyike az n szögtartomány valamelyikének szára. Nem csatlakozó szakaszok metszik egymást, hiszen egyeneseik metszéspontja sem meghosszabbításukon nem helyezkedhetik el, sem végpontjuk nem lehet, mert minden végponton egy-egy csatlakozó szakasz egyenese halad át.

Az n szakasz ezek szerint zárt töröttvonalat vagy töröttvonalakat alkot. Egy ilyen zárt töröttvonal páratlan sok szakaszból áll, mert egy d szakaszhoz két egymást metsző szakasz csatlakozik, ezek végpontja d egyenesének ugyanazon az oldalán van, a zárt töröttvonal többi csúcsa a metszés miatt d egyenesének váltakozva más-más oldalán helyezkedik el, s ezért a már említett három szakaszon kívül a töröttvonalnak páros sok oldala van. Csak egyetlen ilyen z páratlan oldalú zárt töröttvonal lehetséges, mert egy további töröttvonal valamelyik oldalegyenesének z valamennyi oldalát metszenie kellene, ámde ez csak akkor volna lehetséges, ha z oldalainak száma páros volna, hiszen a metszés miatt z csúcsainak váltakozva a metsző egyenes más-más oldalán kell elhelyezkedniök. Így tehát a páratlan oldalú z töröttvonal n szakaszból áll, és n valóban szükségképpen páratlan.

FELADATROVAT

Szerkeszti: CSÁSZÁR ÁKOS

A feladatrovatnak szánt küldemények (minden feladat megoldása külön lapon) a következő címre küldendők: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, V. Szabadság tér 17. A kitűzésre javasolt feladatok szerzőit kérjük, hogy mellékeljék a feladat megoldását, valamint a feladat keletkezésének hátterét megvilágító esetleges észrevételeiket.

A XVII. évfolyam 3—4. számában a 156. feladat hiányos szöveggel jelent meg. A helyes szöveg a következő:

156. Legyen adott $f(n)$ számelméleti függvény esetén

$$h(n) = \sum_{m=1}^{n-1} f(m)f(n-m).$$

Bizonyítandó, hogy létezik olyan $f(n)$ teljesen multiplikatív számelméleti függvény, amely csak ± 1 értéket vesz fel,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leqq x} f(n) = 0,$$

de $h(n)/n$ nem tart 0-hoz $n \to \infty$ esetén.

Corrádi Keresztély és *Kátai Imre*

KITŰZÖTT FELADATOK

162. Legyen K a racionális számtest feletti algebrai számtest, $b_1, \ldots, b_r$ alkossanak bázist a K test egészeinek számára. Rögzített n mellett az

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \qquad (a_k \in K)$$

polinomok együtthatói racionális egész c_{kj} együtthatókkal

$$a_k = \sum_{j=1}^{r} c_{kj} b_j \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

alakúak. Mutassuk meg, hogy ha az f polinomokat a $|c_{kj}| \leqq u$ feltételnek vetjük alá és $m(u)$-val jelöljük az így keletkező polinomok közül a K felett reducibilisek számát, akkor $u \to \infty$ esetén $m(u)/u^{rn} \to 0$.

Turán Pál

163. Legyen p páratlan prímszám és

$$a_0(p) = p, \quad a_{n+1}(p) = 2a_n(p) + 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Mutassuk meg, hogy $a_{p-1}(p)$ mindig összetett szám, és határozzuk meg azokat a p-ket, amelyekre $a_0(p), a_1(p), \ldots, a_{p-2}(p)$ mind prímszámok.

Győry Kálmán

164. Legyen $p_n(z)$ $(n=1, 2, \ldots)$ polinom, és $|z|<1$ esetén álljon fenn $p_n(z) \to f(z)$, ahol $f(z)$ az egységkörben reguláris függvény. Tegyük fel, hogy $n \geqq k$ esetén a $p_n(z)$ polinomot z növekvő hatványai szerint rendezve, első k tagja megegyezik az egységkörben konvergens

$$g(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots$$

hatványsor k-adik részletösszegével. Igaz-e, hogy ekkor az egységkörben $f(z)=g(z)$?

Császár Ákos

MEGOLDOTT FELADATOK

150. feladat. Adott $a \geqq 0$-hoz keressük meg a legkisebb olyan b számot, továbbá adott $b>0$-hoz keressük meg a legnagyobb olyan a számot, hogy minden $x \in (0, 1]$ számhoz létezzék a $kx \in (a, b]$ feltételnek eleget tevő $k>0$ egész szám.

(Surányi János)

Megoldás. Az a kikötés, hogy minden $x \in (0, 1]$ számhoz létezzék a $kx \in (a, b]$ feltételnek eleget tevő k természetes szám, másképpen úgy fogalmazható, hogy az $\left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}\right]$ intervallumok $(k=1, 2, \ldots)$ együttvéve befedjék a $(0, 1]$ intervallumot. Az e feltételnek eleget tevő $(a, b]$ intervallumokat nevezzük röviden jónak.

Tekintsük először a feladat második részét. $b<1$ esetén nyilván nincs olyan a, hogy az $(a, b]$ intervallum jó legyen. $b \geqq 1$ esetén az intervallum jóságához a olyan megválasztására van szükség, hogy $\frac{b}{k+1}<1$, azaz $k \geqq [b]$ esetén ne maradjon hézag az $\left(\frac{a}{k+1}, \frac{b}{k+1}\right]$ és $\left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}\right]$ intervallumok között, vagyis hogy $k \geqq [b]$ esetén

$$\frac{a}{k} \leqq \frac{b}{k+1} \tag{1}$$

legyen. Ezt

$$a \leqq \frac{k}{k+1} b = \left(1-\frac{1}{k+1}\right) b$$

alakban írva látható, hogy ha valamely k-ra teljesül, akkor a nála nagyobbakra is, így azt kell megkívánni, hogy $k=[b]$-re teljesüljön. Eszerint $b \geqq 1$ estén a legnagyobb olyan értéke, melyre az $(a, b]$ intervallum jó, s ezzel a válasz a feladat második kérdésére

$$a=\frac{[b]}{[b]+1} b.$$

Az első kérdésre térve ahhoz, hogy $(a, b]$ jó legyen, adott a mellett úgy kell b-t megválasztani, hogy (1) teljesüljön, mihelyt $\frac{a}{k}<1$, azaz $k \geqq [a]+1$, s ezenkívül a $k=[a]+1$ esetben még $\frac{b}{k} \geqq 1$, azaz $b \geqq k$ is fennálljon. (1)-et most

$$b \geqq \frac{k+1}{k} a = \left(1+\frac{1}{k}\right) a$$

alakban írva ismét látható, hogy ha ez valamely k-ra áll, akkor a nagyobbakra is. Így végül b szóbajövő legkisebb értéke

$$b = \max\left([a]+1, \frac{[a]+2}{[a]+1}a\right).$$

Fehér János

A 150. feladat megoldását beküldötte még *Császár Ákos* és *Petruska György*, a második részét pedig *Varecza Árpád* és *László*.

151. feladat. Legyen $f(z)$ transzcendens egész függvény, $p>0$ és

$$M_p(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p \, dt \qquad (r>0).$$

Mutassuk meg, hogy $r \to +\infty$ esetén $r^{-q}M_p(r) \to +\infty$ minden $q>0$ mellett.

(Petruska György)

Megoldás. Tekintsük először a $p=2$ esetet. Ekkor a Parseval-formula szerint

$$M_2(r) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n},$$

ha

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Olyan $m>q$ természetes számot választva, melyre $a_m \neq 0$, eszerint $r \to \infty$ esetén

$$r^{-q}M_2(r) \geqq r^{-q}|a_m|^2 r^{2m} \to \infty.$$

Az általános esetre térve tegyük fel először, hogy $f(z)$ sehol sem tűnik el. Ekkor a monodrómia-tétel értelmében

$$g(z) = \exp\left(\frac{p}{2}\log f(z)\right) = f(z)^{\frac{p}{2}}$$

is egész függvény, s nyilván

$$M_p(r; f) = M_2(r; g).$$

Így az előbbiek szerint ismét $r^{-q}M_p(r) \to \infty$, ha $r \to \infty$.

Ha $f(z)$-nek véges számú zérushelye van, akkor

$$f(z) = p(z)h(z),$$

ahol $p(z)$ legalább elsőfokú polinom, $h(z)$ pedig sehol el nem tűnő transzcendens egész függvény. Minthogy elég nagy r-re a $|z|=r$ körvonalon $|p(z)| \geqq 1$, azért ilyen r-ekre

$$M_p(r; f) \geqq M_p(r; h),$$

s az állítás ismét igaz.

Tegyük fel végül, hogy $f(z)$-nek végtelen sok zérushelye van, legyen ezeknek sorozata (mindegyiket a multiplicitásának megfelelő sokszor szerepeltetve) $z_1, z_2, z_3, \ldots$ s legyen $|z_k| = r_k$. Feltehetjük, hogy $f(0) \neq 0$, mert $f(z) = z^n f_0(z)$ esetén

$$M_p(r; f) = r^{np} M_p(r; f_0).$$

Így az általánosság rovása nélkül kiköthetjük, hogy $|f(0)| = 1$.

E feltevésekkel az $\exp x$ függvény konvex volta miatt a Jensen-egyenlőtlenség értelmében

$$M_p(r) \geqq \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |f(re^{it})|^p\, dt\right) = \exp\left(\frac{p}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |f(re^{it})|\, dt\right).$$

A Jensen-féle formula (l. pl. S. Saks—A. Zygmund: Analytic functions (Warszawa—Wrocław, 1952), 181. o.) felhasználásával azonban itt az exp függvény argumentuma

$$p \sum_{r_k<r} \log \frac{r}{r_k}$$

alakban írható, hacsak a $z=r$ körvonal nem halad át $f(z)$ egyik zérushelyén sem.

Válasszunk most olyan R számot, hogy a $|z|<R$ körben fekvő zérushelyek N számára $Np>q$ legyen. Ekkor ismét feltéve, hogy a $|z|=r$ körvonalon nincs zérushely, $r>R$ esetén

$$r^{-q} M_p(r) \geqq r^{-q} \prod_{r_k<r} \left(\frac{r}{r_k}\right)^p \geqq r^{-q} \prod_{r_k<R} \left(\frac{r}{r_k}\right)^p = r^{Np-q} \prod_{r_k<R} r_k^{-p}.$$

Minthogy R rögzítése után az utolsó tényező is rögzített, látható, hogy ilyen r-eken át tartva ∞-hez $r^{-q}M_p(r) \to \infty$. Mivel $M_p(r)$ nyilván folytonos függvénye r-nek, ezzel az állítást igazoltuk.

Petruska György

152. feladat. Van-e olyan $u \geqq 0$ esetén értelmezett nem monoton növekvő $f(u)$ függvény, hogy

$$\varrho(x, y) = f(|x-y|)$$

a számegyenes szokásos topológiáját szolgáltató távolságot ad meg?

(Császár Ákos)

I. megoldás. Ilyen függvény

$$f(u) = \frac{u}{2} + |\sin u|.$$

Annak igazolására, hogy az e függvénnyel képezett $\varrho(x, y)$ valóban távolság, csupán a háromszög-egyenlőtlenséget kell belátnunk. Mármost

$$f(|x-z|) \leqq f(|x-y|) + f(|y-z|)$$

igazolására az $x-y=a$, $y-z=b$ jelölésekkel

$$f(|a+b|) \leqq f(|a|) + f(|b|)$$

fennállását kell kimutatni. Azonban egyrészt

$$\frac{|a+b|}{2} \leqq \frac{|a|}{2} + \frac{|b|}{2},$$

másrészt

$$|\sin|a+b|\,| = |\sin(a+b)| = |\sin a \cos b + \sin b \cos a| \leqq$$

$$\leqq |\sin a| + |\sin b| = |\sin |a|\,| + |\sin |b|\,|,$$

ahonnan az állítás adódik.

$f(u)$-nak az $u=0$ helyen jobbról való folytonossága maga után vonja, hogy $x_n \to x$ esetén

$$\varrho(x_n, x) = f(|x_n - x|) \to 0.$$

Viszont

$$\varrho(x_n, x) \geqq \tfrac{1}{2} |x_n - x|$$

következtében $\varrho(x_n, x) \to 0$ esetén $x_n \to x$. Így a $\varrho(x, y)$ távolság csakugyan a számegyenes szokásos topológiáját indukálja.

Végül a $\left(\left(k - \frac{1}{3}\right)\pi, k\pi\right)$ intervallumokban $f'(u) < 0$, úgyhogy $f(u)$ nem monoton növekvő.

Petruska György

II. megoldás. Az

$$x_1 = \cos x, \quad x_2 = \sin x, \quad x_3 = \frac{x}{\pi}$$

képletek az x-tengelynek és egy térbeli csavarvonalnak h homeomorfizmusát definiálják. A térbeli távolságot d-vel jelölve, legyen $u \geqq 0$ esetén

$$f(u) = d(h(0), h(u)).$$

Minthogy a csavarvonal önmagában elmozgatható, nyilván

$$\varrho(x, y) = f(|x - y|) = d(h(0), h(|x - y|)) = d(h(x), h(y)),$$

úgyhogy $\varrho(x, y)$ valóban a számegyenes szokásos topológiáját indukáló távolság. Viszont $f(u)$ nem monoton növekvő, mert pl. $f(\pi) = \sqrt{5}$ és $f(2\pi) = 2$.

Szenthe János

A 152. feladat megoldását beküldötte még *Varecza Árpád* és *László*.

153. feladat. Legyen $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ reguláris a $|z| \leqq 1$ körlemezen s tegyük fel, hogy valamely $p \geqq 1$ mellett $\sum_{k=p}^{2p} |c_k|^2 \geqq 1$. Mutassuk meg, hogy ekkor az egységkörnek a $w = f(z)$ leképezésnél származó képe tartalmaz egy $\frac{1}{32e^2}$ sugarú körlemezt.

(Turán Pál)

Megoldás. Bloch ismert tétele szerint van olyan $c > 0$ konstans, hogy ha $F(z)$ reguláris a zárt egységkörben és $|F'(0)| \geqq 1$, akkor az egységkörlemeznek $F(z)$ által adott képe tartalmaz egy c sugarú körlemezt. E. Landau (Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie (2. kiadás, 1930), 99. o.) egyszerű bizonyítást adott arra, hogy $c = \frac{1}{16}$ megfelel.

Ha az $|F'(0)| \geqq 1$ feltételt az $|F'(a)| \geqq b$ feltétellel helyettesítjük ($|a| = r < 1$, $b > 0$), akkor az előbbi tételt a

$$G(z) = F\left(\frac{z + a}{1 + \bar{a}z}\right) \frac{1}{b(1 - r^2)}$$

függvényre alkalmazhatjuk, ugyanis könnyű számolással $G'(0) = F'(a) \frac{1}{b}$, s így e feltétel mellett az egységkör $F(z)$ által adott képe egy $cb(1 - r^2)$ sugarú körlemezt fog tartalmazni.

Jelölje most $M(r)$ az $|f'(z)|$ függvény maximumát a $|z|=r$ körvonalon $(0<r<1)$, s keressünk $M(r)$-re alsó becslést egyelőre ama feltétel mellett, hogy alkalmas $p \geqq 1$ és $q>p$ számokra

$$\sum_{k=p}^{q} |c_k|^2 \geqq 1.$$

A Parseval-formula szerint

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(re^{it})|^2\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |c_k|^2 r^{2(k-1)} \geqq$$

$$\geqq \sum_{k=p}^{q} k^2 |c_k|^2 r^{2(q-1)} \geqq p^2 r^{2(q-1)} \sum_{k=p}^{q} |c_k|^2 \geqq p^2 r^{2(q-1)}.$$

Ennek következtében $M(r)^2 \geqq p^2 r^{2(q-1)}$, azaz $M(r) \geqq p r^{q-1}$. Így bevezető megjegyzésünk szerint ekkor $f(z)$ értékkészlete tartalmaz $cpr^{q-1}(1-r^2)$ sugarú körlemezt.

Egyszerű számolással adódik, hogy a

$$g(r) = r^{q-1}(1-r^2)$$

függvény a (0, 1) intervallumban legnagyobb értékét az

$$r = \sqrt{\frac{q-1}{q+1}}$$

helyen veszi fel. Ezt az értéket téve r helyébe, kitűnik, hogy $f(z)$ értékkészlete tartalmaz olyan körlemezt, amelynek sugara

$$cp\left(\frac{q-1}{q+1}\right)^{\frac{q-1}{2}}\left(1-\frac{q-1}{q+1}\right) = cp\left(1+\frac{2}{q-1}\right)^{-\frac{q-1}{2}}\frac{2}{q+1}.$$

Minthogy az $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ függvény monoton növekvően tart e-hez, azért e sugár nagyobb, mint

$$\frac{c}{e}\,\frac{2p}{q+1}. \tag{1}$$

Speciálisan a $q=2p$ esetben $\frac{2p}{2p+1} \geqq \frac{2}{3}$ $(p=1, 2, \ldots)$, úgyhogy igazoltuk $f(z)$ értékkészletében $\frac{2c}{3e}$ sugarú körlemez létezését. Ez a $c=\frac{1}{16}$ értékkel $\frac{1}{24e}$-nek felel meg, ami a feladat állításánál jóval többet mond.

Petruska György

Megjegyzések. 1. (1)-et a $q=mp$ $(m=3, 4, \ldots)$ esetre alkalmazva nyerjük, hogy ilyenkor $f(z)$ értékkészlete $\frac{2c}{(m+1)e}$ sugarú körlemezt tartalmaz.

Szerk.

2. Az előző megjegyzésben talált körsugár q-val lényegében véve fordítva arányosan csökken. Ennél azonban jobb eredményt is nyerhetünk ezen a módon.

Először is (1)-et a $q=2p-1$ $(p\geqq 2)$ esetre alkalmazva $\frac{c}{e}$ sugarú körlemezt kapunk. Másodszor gondoljuk meg, hogy ha

$$\sum_{k=p}^{2p-1} |c_k|^2 \geqq u^2 \qquad (u>0),$$

akkor az előbbi eredményt $\frac{1}{u} f(z)$-re alkalmazhatjuk, s így $f(z)$ értékkészletében $\frac{c}{e}\, u$ sugarú körlemezt találunk. Ha most feltesszük, hogy

$$\sum_{k=p}^{2^{s^2}p-1} |c_k|^2 \geqq 1,$$

akkor van olyan j $(j=0, 1, \ldots, s^2-1)$, hogy

$$\sum_{k=2^j p}^{2^{j+1}p-1} |c_k|^2 \geqq s^{-2},$$

s így az előbbiek szerint $f(z)$ értékkészlete tartalmaz $\frac{c}{es}$ sugarú körlemezt. Ilyenkor tehát a sugár q-nak a logaritmusával fordítva arányosan csökken.

Petruska György

3. W. Seidel és L. J. Walsh annyit mutatott meg, (Trans. of the Amer. Math. Soc. 1946) hogy a $c_p=1$ feltétel mellett van $f(z)$ értékkészletében egy csupán p-től függő sugarú körlemez. Ennél a feladat állítása lényegesen többet mond, hiszen ebben a sugár p-től nem függ.

Turán Pál

4. Nyitott kérdés, hogy vajon a

$$\sum_{k=p}^{p^2} |c_k|^2 \geqq 1$$

feltételből következik-e egy p-től nem függő sugarú körlemez létezése az egységkör $f(z)$-nél származó képében. Ungár Péter megmutatta, hogy ilyen körlemez létezéséhez a $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2$ sor divergenciája önmagában nem elégséges.

Turán Pál

PROBLÉMES PROPOSÉS

162. Soit K un corps algébrique sur le corps des nombres rationnels, soit $b_1, \ldots, b_r$ une base pour les entiers de K, et considérons pour un n fixé les polynomes

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \qquad (a_k \in K)$$

tels que

$$a_k = \sum_{j=1}^{r} c_{kj}\, b_j \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

et les coefficients c_{kj} cont des entiers rationnels satisfaisant à la condition $|c_{kj}| \leqq u$. En désignant par $m(u)$ le nombre des polynomes en question réductibles sur K, démontrer que $m(u)/u^{rn} \to 0$ pour $u \to \infty$.

P. Turán

163. Soit p un nombre premier impair et posons

$$a_0(p) = p, \qquad a_{n+1}(p) = 2a_n(p)+1 \qquad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Démontrer que $a_{p-1}(p)$ n'est jamais premier, et déterminer les p pour lesquels $a_0(p)$, $a_1(p)$, ..., ..., $a_{p-2}(p)$ sont tous des nombres premiers.

K. Győry

164. Soit $p_n(z)$ $(n = 1, 2, \dots)$ un polynome tel que $p_n(z) \to f(z)$ pour $|z|<1$, où $f(z)$ est une fonction holomorphe dans le cercle unité. Supposons, que, pour $n \geqq k$, les k premiers termes du polynome $p_n(z)$ coïncident avec les k premiers termes de la série

$$g(z) = a_0+a_1z+a_2z^2+\dots.$$

Peut-on affirmer que $f(z) = g(z)$ pour $|z|<1$?

Á. Császár

HÍREK

ANGLIA

Rényi Alfréd és Révész Pál a Bolyai János Matematikai Társulat, Sarkadi Károly a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében résztvettek az „European Meeting of Statisticians" konferencián, amelyet 1966. szeptember 5—10. között tartottak meg Londonban. Magyar részről Rényi Alfréd és Sarkadi Károly tartott előadást „Statistics based on information theory", illetve „An estimation problem in reliability theory" címen.

Kornai János a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében 1966 októbertől decemberig meghívásra vendégprofesszorként előadást tartott szeminárium keretében a Sussex-i egyetemen a magyar tervezés módszereiről különös tekintettel a matematikai módszerek és elektronikus számológépek alkalmazására a tervezésben.

Szabó Árpád a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében a „University College London" meghívására 1966 novemberében illetve decemberében 3 előadást tartott az Intézet által rendezett „Special University Lectures in the History of Science" előadássorozat keretében.

Rényi Alfréd a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében látogatást tett a Cambridge-i egyetem statisztikai laboratóriumában, ahol 1967 április végén „On a problem of probabilistic geometry" címmel tartott előadást.

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Kalmár László 1967 májusában előadások tartása céljából Angliában tartózkodott. Kinntartózkodása alatt Londonban szemináriumot tartott a Gödel-tétel absztrakt alakjairól, a Church-féle tézis ellen felhozható plauzibilitási érvekről, Gödel-tételének alkalmazásáról Church-tételének bizonyítására.

Szőkefalvi-Nagy Béla a Royal Society-vel fennálló egyezmény keretében a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében látogatást tett 1967 május végén és június elején különböző Nagy-Britannia-i tudományos intézményekben, ahol a következő előadásokat tartotta:

Cambridge: „Invariant subspaces for a certain type of operators"
London: „Criterion of similarity to a unitary operator"
„Invariant subspaces for a certain type of operator"
Swansea: „On some particular, operator-valued, positive definite functions"
Edinburgh: „Invariant subspaces for a certain type of operator"
Oxford: „Characteristic functions and functional models of operators".

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Szemerédi Endre 2 hónapos angliai tanulmányúton vett részt a Nottingham-i egyetemen, illetve látogatást tett különböző angliai tudományos intézményekben. A Nottingham-i egyetemen „On sets of integers containing no four elements in arithmetic progression" címen tartott előadást.

AUSZTRIA

Surányi János a Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében 1966. szeptember 26—30. között résztvett a Nemzetközi Matematikai Unió Bécsben megtartott konferenciáján.

BULGÁRIA

Hajós György a Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében 1967 január elején résztvett a bolgár matematikusok Szófiában megtartott II. Nemzetközi Konferenciáján.

CSEHSZLOVÁKIA

Császár Ákos és Juhász István a Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében 1966. augusztus 30—szeptember 6. között résztvettek a Prágában tartott általános topológiai konferencián.

Lee Anna a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében 1967 áprilisában és májusában csehszlovákiai tanulmányúton vett részt. Kinttartózkodása alatt előadást tartott az egyszerű struktúrájú mátrix párokról.

A Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében 1967. május 31—június 3. között Csáki Endre és Csiszár Imre résztvettek a Liblice-ben megtartott „Convergence Problems in Probability Theory" témájú konferencián.

Csiszár Imre „On topological properties of f-divergences" és Csáki Endre „A law of iterated logarithm for semi-martingales and its applications" címen adott elő.

GÖRÖGORSZÁG

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Szabó Árpád 1967 májusában és júniusában Görögországban tartózkodott, ahol két előadást tartott az euklideszi bizonyítás problémájáról illetve a rendszeres görög matematika felépítésének történeti kérdéseiről.

KANADA

Kovács István a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében a National Research Council ösztöndíjával 1 éves kanadai tanulmányúton vett részt. Kinntartózkodása alatt a következő előadásokat tartotta:

Hamilton: „An application of the ergodic theorem of Alaoglu and Birkhoff to the theory of von Neumann algebras"

Toronto: „Invariant traces on von Neumann algebras"

Dayton (USA): „Commutatíve Banach algebras"

Ezenkívül szemináriumot tartott 4 előadás keretében „Hyperstoneian spaces" címmel.

LENGYELORSZÁG

Kalmár László a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében 1966. szeptember 28—október 12. közötti lengyelországi tartózkodása alatt résztvett a szocialista országok tudományos akadémiáinak „A számítástechnika tudományos problémái terén folytatott többoldalú együttműködést koordináló bizottság" varsói ülésén, továbbá a Nemzetközi Információfeldolgozási Szövetség munkabizottságának Varsóban rendezett ülésén, továbbá meglátogatott több matematikával foglalkozó lengyel tudományos intézményt. Kinntartózkodása alatt a következő előadásokat tartotta:

Varsó: „Two more abstract forms of Gödel's theorem"

„On an algebraic structure for investigation of the possibility of reducing homonomy".

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Szász Ferenc lengyelországi kiküldetésen vett részt 1967 áprilisában és májusában, ahol Varsóban és Wroclaw-ban gyűrűelmélettel foglalkozó előadásokat tartott.

NÉMET DEMOKRATIKUS KÖZTÁRSASÁG

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Varga Gyula 1966. szeptember 26—27-ig tanulmányúton vett részt az NDK-ban.

Szász Domokos a Bolyai János Matematikai Társulat, Wiegandt Richard a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében 1967 februárjában résztvettek az NDK Matematikai Társulatának 1967. évi Berlinben megtartott közgyűlésén, amelyen Wiegandt Richard „Über linear kompakte Radikalringe" címmel tartott előadást.

Fejes Tóth László a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében a „Lipcsei Szász Tudományos Akadémián", amely levelező tagjává választotta, megtartotta székfoglaló előadását. 1967. júniusi kinntartózkodása alatt a következő előadásokat tartotta:

Lipcse: „Einige Probleme de anschaulichen Geometrie"

Drezda: „Über die Permeabilität einer Scheibenschicht"

Halle, Jena: „Über eine Variante des Problems der dreizehn Kugeln".

Radnai Józsefné és Szilárd Károly a Bolyai János Matematikai Társulat, Turán Pál a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében résztvettek a Weimar-ban megtartott alábbi kongresszuson: „IV. Internationaler Kongress über Anwendungen der Mathematik in den Ingenieurwissenschaften." Turán Pál a következő címmel tartott előadást: „Über die angenäherten Lösung algebraischer Gleichungen und Berechnung von Eigenwerten von Matrizen".

OLASZORSZÁG

Hajós György a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében résztvett az „International Computation Centre" gráfelmélettel és alkalmazásaival foglalkozó 1966. július 4—12. között Rómában megtartott konferenciáján. A konferencián a Menger-tétel bizonyításáról tartott előadást.

ROMÁNIA

Moór Artur a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében 1966. november 22—december 10. között konzultációkat folytatott román matematikusokkal, valamint az alábbi előadásokat tartotta:

Bukarest: „A vonalelemterek általánosításáról"

Temesvár: „Általánosított vonalemelterek, speciális vektoreltolás, differenciál- és függvényegyenletek kapcsolata"

Jași: „Speciális vektoreltolásokról".

SVÉDORSZÁG

Rédei László előadások tartása céljából 1966. október 17—november 2-ig Svédországban tartózkodott.

SZOVJETUNIÓ

Nagyszámú magyar matematikusokból álló delegáció vett részt a Nemzetközi Matematikai Unió 1966. augusztus 16—26. között Moszkvában megtartott kongresszusán. A Nemzetközi Matematikai Unió közgyűlésén Magyarországot Tandori Károly és Turán Pál képviselte. Hajós Györgyöt a Nemzetközi Matematikai Unió Végrehajtóbizottságának tagjává választották.

Böröczky Károly a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében diszkrét geometriai témában 1967 elejétől 6 hónapos tanulmányúton volt a Szovjetunióban.

Kalmár László 1967 február végén illetve március elején résztvett a Szuhanovóban megtartott az agy magasabb tevékenységei gépi utánzásával foglalkozó szimpóziumon.

Tusnádi Gábor a Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében 1967 februárjában résztvett a kibernetika és statisztika problémáival foglalkozó moszkvai tudományos tanácskozáson.

Szász Ferenc a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében résztvett az 1967 májusában Rigában megtartott 8. Össz-szövetségi algebrai kollokviumon. A kollokviumon gyűrűelméleti témában tartott előadást.

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Gécseg Ferenc 1967. április 21—június 10-ig szovjetunióbeli tanulmányúton vett részt.

A Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében Kis Ottó 1967. június 26—július 1. között résztvett a Novoszibirszkben megtartott számítási rendszerekkel foglalkozó tudományos tanácskozáson.

USA

Rényi Alfréd a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében 1967. áprilisában az Egyesült Államokban tartózkodott, ahol a következő előadásokat tartotta:

Chapel Hill: „Probabilistic methods in combinatorial mathematics"

Washington: „On the applications of Choquet's theorem in probability theory".

TÁRSULATI ÉLET

JELENTÉS A BEKE MANÓ DÍJ TIZENHETEDIK KIOSZTÁSÁRÓL

Az 1967. évi Beke Manó emlékdíj odaítélésére az Elnökség bizottságot küldött ki, melynek tagjai Barabás Sarolta, Darkó Béla, Hanzó Lajosné Reiman István és Lánczi Ivánné előadó voltak.

A bizottság a következő határozatot hozta.

1500—1500 Ft jutalomban részesíti Anda Károly volt szakfelügyelőt,
Cser Andort az Országos Pedagógiai Intézet tanszékvezetőjét,
Pálfy Sándort, az Országos Pedagógiai Intézet docensét,
Pintér Lajost a József Attila Tudományegyetem adjunktusát,
Radics Erzsébet miskolci gimnáziumi tanárt és
Vitkai Aranka nyugalmazott gimnáziumi tanárt.

INDOKOLÁS

Anda Károly a mezőberényi 2. sz. általános iskolánál működött, mint tanár, és mint vezető szakfelügyelő irányította Békés megye C-szakosainak munkáját. Néhány éve, amióta megnyílt a mezőberényi gimnázium, ott is tanított, sőt a felnőtt oktatásban is kivette a részét.

A matematika és fizika tanításáért és népszerűsítéséért mindig egyaránt sokat fáradozott, most azonban csupán a matematika terén kifejtett tevékenységére szorítkozunk.

A matematika oktatását nagy szeretettel és hozzáértéssel látta el. Az OPI által kezdeményezett kísérleti tanításokhoz gazdag oktatói és nevelői tapasztalatai alapján értékes szaktárgyi és módszertani anyagot bocsátott közre.

Vezető szakfelügyelői munkáját — éppen úgy, mint tanári működését — páratlan pontosság és körültekintés jellemezte. Járási és megyei matematika versenyek szervezésében, továbbá a képesítés nélküli nevelők részére indított nyári előkészítő tanfolyamok szervezésében is kivette a részét.

Több módszertani és pedagógiai témájú cikke jelent meg a megyei szaklapokban, illetve az „Matemata tanításá"-ban.

Az ő ötlete alapján fogtak hozzá a Békés megyei tanárok egy példatár anyagának összegyűjtéséhez, és ez a feladatgyűjtemény az ő szerkesztésében jelent meg, „500 matematikai feladat" címmel. Új tankönyvek és kézikönyvek bírálójaként is működött.

Pedagógiai és emberi magatartása alapján az egész megye szerette és becsülte, betegsége és halála mély döbbenettel töltötte el Békés megye pedagógusait.

Munkás életét megillette „Az oktatás kiváló dolgozója" cím. „Kiváló tanár"-i címre 1957. februárjában terjesztették fel. A cím elnyerését sajnos már nem érte meg.

Cser Andor 13 évig tanított a csurgói gimnáziumban. Tanítványainak jó szereplése a Középiskolai Matematikai Lapokban és a versenyeken hívta fel rá a minisztérium figyelmét. Így került a Közoktatásügyi Minisztérium Nevelési Főosztályára, mint a középiskolai tankönyvek szerkesztője. Két évig dolgozott ezen a munkahelyen, majd további két évig a Felsőoktatási Főosztályon, a tudományegyetemi matematika és fizika szakképzés minisztériumi munkakörében. Amikor a Pedagógiai Tudományos Intézet megalakult, oda hívták meg, és ott dolgozott az Intézet megszűntéig.

Cser Andor jelenleg az Országos Pedagógiai Intézet matematika tanszékének vezetője. Itt a matematikatanítás módszertana mellett a tanárok továbbképzésével is foglalkozik. Átvette „A Matematika tanítása" c. módszertani lap szerkesztését is, és már az első hónapokban jelentősen emelte a lap színvonalát.

Legfontosabb munkája az általános iskolai tanterv elkészítése volt. Foglalkozott a hazai matematikatanítás történetével, a társadalom matematikai igényének felmérésével, a tanulói aktivitás helyzetképének felderítésével. Számos önálló kutatást és kísérletet végzett, amelyekről több mint 20

cikkben és tanulmányban számolt be. Egyik kísérlete alapján dolgozta ki a társszerzőkkel írt Matematikai Zsebkönyv egyik fejezetét. A matematikai osztályok tankönyvének egyik társszerzője. Egy társszerzővel írt dolgozata a szovjet Matematika v Skole-ban is megjelent.

Sokoldalú tevékenységéhez tartozik a középiskolai reform-tanterv bevezetésének előkészítése, a felnőttoktatás új matematikai tankönyveinek megírása (társszerzővel), továbbképzési előadások tartása. A tanuló-ifjúságtól sem szakadt el teljesen, mert a Bolyai Társulat és TIT közös szervezésében „Kis Matematikusok Köré-t vezeti.

Cser Andor munkássága egyik alappillére a magyar matematikatanítás módszertana elméleti megalapozásának.

Pálfi Sándor 1952-ben került a Fővárosi Pedagógiai Szeminárium, majd 1953-ban a Központi Pedagógus Továbbképző Intézet matematika tanszékére. A KPTI megszűnése óta az Országos Pedagógiai Intézetben dolgozik. Ezt megelőzően általános iskolában tanárként, majd igazgatóként működött.

Az általános iskolai matematika tanárok továbbképzésének irányításával nagyon sok segítséget adott a vidéki általános iskolák felső tagozatában működő kartársaknak, köztük nem utolsó sorban a szakfelügyelőknek. Az OPI-ban munkája gerincét az új tanterv bevezetésével kapcsolatos ált. iskolai tankönyvek, útmutatók és kézikönyvek gondozása, részben írása (5—6. oszt. kézikönyv) képezi. Sokat dolgozott a felnőttek ált. iskolai matematika tantervének elkészítésével, kikísérletezésével és a tankönyvek részbeni megírásával. Tevékeny részt vesz a matematika korszerűsítésére irányuló alsó tagozatos tantervi kísérletekben is.

Egyik megalapítója a Bolyai Társulat és TIT által szervezett „Kis Matematikusok Köré-"nek. Maga is vezet ilyen szakkört. A Bolyai Társulat által kezdeményezett általános iskolai úttörő matematikai verseny központi bizottságának vezetője. Nagy része van abban, hogy az idén első ízben megrendezett verseny nagyon jól sikerült.

Pálfi Sándort megbízható és színvonalas munkája, segítőkészsége, megnyerő egyénisége méltán tette népszerűvé az ország általános iskolai matematika tanárai között.

Pintér Lajos 1951-ben szerzett matematika—fizika szakos tanári oklevelet. 1952-ig egyetemi tanársegéd, 1956 nyaráig aspiráns, 1959-ig, a makói József Attila gimnázium tanára, 1960-ig ismét tanársegéd volt, attól kezdve pedig adjunktus.

Pintér Lajos középiskolai tanárként szép eredményeket ért el tanulói feladatmegoldó készségének fejlesztésében. Makóról Szegedre kerülése után tovább is évekig irányította a makói gimnázium matematika szakkörét, majd a megyei matematikai szakkör vezetője lett, s immár negyedik éve annak foglalkozásait vezeti. A JATE megbízásából hosszú ideig igen eredményesen látta el az egyetem gyakorló iskoláinak matematika szakfelügyeletét. Hat év óta az egyetemen működő matematikai tudományos diák-kör vezetője; mind tudományos irányító, mind pedig szervező munkáját színvonalasan végzi.

Rendszeresen részt vesz a megyei és országos feladatmegoldó versenyek dolgozatainak értékelésében, elemi matematika foglalkozásai igen érdekesek és hasznosak; ezeken fő célja a hallgatók önálló gondolkodásra való aktivizálása, valamint a középiskolai oktatás megszerettetése, a tanári hivatástudat fokozása.

Középiskolai tanárok számára alkalmankint szakmai továbbképző jellegű előadásokat tart.

A Bolyai Társulat helyi tagozatának egyik leglelkesebb aktivistája, akire társulati ügyben bármikor lehet számítani.

Pintér Lajost az oktatómunka szeretete, az oktatásügy kérdései iránt széleskörű érdeklődése, azzal kapcsolatos gazdag ismereteinek oktatótársaival és hallgatóival való szíves és állandó megosztása jellemzi.

Radits Erzsébet 1945 óta tanít, 15 éve a miskolci Kilián György gimnáziumban. Jól képzett szaktanár. Szaktárgyaival állandóan foglalkozva képezi magát szakmailag, ideológiailag egyaránt. Iskolai munkájában példamutató. Szaktárgyait nagy lelkesedéssel oktatja. Fel tudja kelteni tanítványaiban is a matematika iránti lelkes érdeklődést. Matematika—fizika tagozatú osztályt is tanít. Állandóan szakkörvezető. Az iskolából kikerült kiváló, matematikát szerető tanítványok nagy száma gondol rá nagy hálával. Évek óta az iskolai tanári munkaközösség vezetője. Fiatal kartársait állandóan segíti nagy tapasztalatain alapuló tanácsaival. Iskolájának matematikai szertára kiépítésében tevékeny része volt, ennek az anyagát kiállításon is bemutatta.

A Bolyai Társulatnak 1950. óta aktív tagja. A borsodi tagozatban, Miskolcon, a tanári továbbképzést szolgáló számos előadást tartott. Előadásaival gazdagította a társulat munkáját, elősegítette a miskolci tanárok szakmai továbbképzését is.

Vitkai Aranka 1926-ban szerzett matematika—fizika szakos tanári oklevelet. Polgári iskolában, általános iskolában, tanítóképzőben és gimnáziumban tanított.

1965-ben ment nyugdíjba, mert sérülés következtében az iskolai írásbeli munkák elvégzése nagy nehézséget jelentett számára. De továbbra is az iskola segítője maradt.

Önerőből, mint szegény parasztok gyermeke, magánúton végezte a gimnáziumot. Segítségére csak falusi nevelői voltak. A nehéz úton annyira megszerette a matematikát, hogy ezt a pályát választotta hivatásul.

A felszabadulás után az új tankönyvek, a Középiskolai Matematikai Lapok, majd a Matematika Tanítás megjelenése elmélyültebb oktatásra és további önművelésre serkentette. Szakkört indított. Tanítványai seregestől küldték be megoldásaikat. A tanyai iskolákban népszerűsítette a matematikát. Általános iskolai tanítványai, majd tanítóképzős növendékei igen szépen szerepeltek. Többnek képe jelent meg a Középiskolai Matematikai Lapokban és dícséretet nyertek a matematikai versenyeken. Közülük több matematika tanár lett.

1953 óta dolgozik a Matematika Tanítás c. lapban. Feladatait a folyóirat közölte is, többször kapott könyvjutalmat.

Mint nyugdíjas továbbra is dolgozik a tanítás módszerének fejlesztésében. Tagja Szegeden annak a bizottságnak, amely az új tankönyv bevezetése előtt 1 évvel kipróbálja az új elgondolást, az új elképzeléseket.

JELENTÉS AZ 1966. ÉVI GRÜNWALD GÉZA EMLÉKDÍJ ODAÍTÉLÉSÉRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége az alábbi bizottságot küldte ki az 1966. évi Grünwald díj odaítélésére: Varga Ottó elnök, Császár Ákos, Frey Tamás, Hajós György, Kertész Andor, Prékopa András, Rényi Alfréd, Turán Pál. A kiküldött bizottság 1966. december 12-i ülésén megvitatta az Elnökség tagjaitól beérkezett javaslatokat. A javasoltak tudományos munkásságának alapos megvitatása után az alábbi határozatot hozta.

Ez évben I. díjat nem ad ki. A Grünwald díj II. fokozatával tünteti ki és 1300—1300 Ft összegű díjban részesíti az alábbiakat:

Bollobás Béla gyakornokot, a MTA Matematikai Kutató Intézetének munkatársát,

Gacsályi Sándort, a Kossuth Lajos Tudományegyetem adjunktusát,

Gécseg Ferencet, a József Attila Tudományegyetem aspiránsát,

Katona Gyulát, a MTA Matematikai Kutató Intézete munkatársát

Szabados Józsefet, az Eötvös Loránd Tudományegyetem tanársegédét (TTK, Geometriai Tanszék)

Wiegandt Richárdot, a MTA Matematikai Kutató Intézete munkatársát.

INDOKOLÁS

Bollobás Bélának 9 dolgozata jelent meg és további 5 van megjelenés alatt. Ezek tárgya geometria és gráfelmélet. Sok érdekes geometriai eredménye közül talán csak kettőt emelünk ki. Egy, a Studia Math. Hung.-ban megjelenendő cikkében egy régebben fennálló sejtés cáfolataként megmutatta, hogy tetszőleges nagy N számhoz megadható oly konvex test és annak oly legalább N pontból álló rögzítő pontrendszere (mely tehát minden eltolást megakadályoz) amelyből bármelyik pontját elvéve az új pontrendszer már nem rögzíthető. Egy, az Annalesban megjelent dolgozatában elegáns szükséges és elégséges feltételét adja (több alakban) arra, hogy egy poliéder egy pontra nézve csillagszerű legyen. Gráfelméleti tárgyú megjelent dolgozatai közül különösen szép és fontos eredményt tartalmaz az „On generalized graphs" c. dolgozata. Míg közönséges élgráfokra elég sok extremumfeladat van többé kevésbé teljesen megoldva a 40-es évek eleje óta, addig a megfelelő extremumfeladatok magasabbrendű $U_{n,k}$-gráfokra, amelyeknél az alapelemek nem élek, hanem a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ szögpontokból kivehető bizonyos k-asok, teljesen kezelhetetlennek látszottak. Bollobás e dolgozatban az első teljesen megoldható extremumfeladatot megtalálta és megoldotta. Élgráfoknál Erdős, Hajnal és Moon vették észre, hogy adott $n > m \geqq 3$-nál aránylag kis élszámú n-szögpontú élgráf adható meg, amelynek nincs m-szögpontú teljes részgráfja, de bárhogyan véve hozzá egy újabb élt, már legalább egy van. Megtalálták a legkevesebb élszámú összes ilyen „m-telített" n-szögpontú élgráfokat is. Bollobásnak a megfelelő feladat teljes megoldása sikerült k-gráfokra; megmutatta, hogy a „minimális m-telített" k-gráfok azok, ($m \geqq k+1$) amelyek a $P_1, P_2, \ldots, P_n$-ből alkotható azon k-asokból állanak, melyek legalább egy P_ν-t tartalmaznak a $P_1, P_2, \ldots, P_{m-k}$ szögpontok közül. A tétel bizonyítása, mint egyéb munkái is, sok erőt mutat.

BOLLOBÁS BÉLA DOLGOZATAI

[1] A sík lefedése egybevágó konvex sokszögekkel I. Köz. Mat. Lap. 22 (1961), 33—40.

[2] Előbbi II. 22 (1961), 145—152.

[3] Gráfelméleti szélső értékekre vonatkozó problémákról — Erdős Pállal közösen. Mat. Lapok 13 (1962), 143—152.

[4] Filling the plane with congruent convex hexagons without overlapping, Annales 6 (1963), 117—123.

[5] Két független kört nem tartalmazó gráfokról. Mat. Lapok 14 (1963), 311—321.
[6] On generalized graphs, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 16 (1965), 447—452.
[7] A generalization of a theorem of Habicht and van der Waerden, Annales 9 (1966), 61—65.
[8] Star domains, Annales 9 (1966), 67—70.
[9] Graphs without two vertices connected by four independent paths, Studia Sci. Math. Hung. 1 (1966), 137—140.
[10] A conjecture of Erdős, Hajnal and Moon, Amer. Math. Monthly 74 (1967), 178—179.
[11] Polygons inscribed into a convex curve, Canad. J. Math. XIX. (1967), 523—529.
[12] Fixing systems for convex bodies, Studia. Sci. Math. Hung. 2 (1967), 351—354.
[13] Determination of extremal graphs by using weights, Ilmenau. (sajtó alatt).
[14] Graphs of given diameters, Acta Math. Acad. Sci. Hung. (sajtó alatt).

Gacsályi Sándornak 8 tudományos dolgozata jelent meg nyomtatásban és kettő van sajtó alatt. Egy részükben különféle algebrai témákat dolgoz fel, nagyobb részük az általános topológia körébe vág, közelebbről a színtopogén terek elméletének fogalomalkotásait és eredményeit alkalmazza különféle problémák megoldására. Ezek közül külön kiemelendőek a 9 és 10 számú dolgozatok, amelyekben a limitációk általános fogalmát és ennek különféle fontos speciális típusait jellemzi szintopogén eszközökkel, részben igen finom meggondolásokat igénylő módon.

GACSÁLYI SÁNDOR DOLGOZATAI

[1] On algebraically closed abelian groups. Publicationes Mathematicae, Debrecen 2 (1951—52), 292—296.
[2] On pure subgroups and direct summands of abelian groups. Publ. Math. Debr. 4 (1955), 89—92.
[3] Egyenletrendszerek Abel-féle csoportok fölött. Acta Univ. Debreceniensis 5 (1958), 163—177.
[4] On limit operations in a certain topology for endomorphism rings of abelian groups. Publ. Math. Debr. 7 (1960), 353—358.
[5] Eine Bemerkung über biperfekte topogene Ordnungen. Publ. Math. Debr. 11 (1964), 69—71.
[6] On proximity functions and symmetrical topogenous structures. Publ. Math. Debr. 11 (1964), 165—174.
[7] On Hacque's E-mappings and on semi topogenous orders. Publ. Math. Debr. 12 (1965), 265—270.
[8] Skew proximity functions. Publ. Math. Debr. 12 (1965), 271—280.
[9] On limitings and topogenous orders. Publ. Math. Debr. 13 (1966), sajtó alatt.
[10] A characterization of G. Choquet's pseudo-topologies. Publ. Math. Debr. 14 (1967),

Gécseg Ferenc jelentős tudományos tevékenységet fejtett ki. Tudományos munkáinak jegyzéke mutatja, hogy elsősorban az automaták elméleten igen jelentős eredményeket ért el.

[1] szükséges és elégséges feltételt tartalmaz arra vonatkozóan, hogy egy adott Ω-csoport egy adott Ω-csoportnak egy másik adott Ω-csoporttal való Schreier-féle bővítéseként álljon elő. (Itt Ω-csoport multioperátor-csoportot jelent.)

[2] alaperedménye: félmodulusok (modulusok) primitív osztálya részosztályainak halmaza és egy megfelelő R egységelemes félgyűrű (gyűrű) összes kongruens felosztásainak halmaza között egy egyértelmű megfeleltetés létesíthető úgy, hogy minden egyes ilyen kongruencia szerinti faktorfélgyűrű (-gyűrű) feletti unitér jobbmodulusok primitív osztálya ekvivalens a hozzárendelt primitív részosztállyal. A dolgozat a továbbiakban modulusok és bimodulusok bizonyos primitív osztályaihoz könnyen kezelhető és velük ekvivalens primitív osztályokat ad meg.

[3]-ban és [4]-ben kritériumot ad arra, hogy egy rendezett automatát mikor lehet előállítani nála egyszerűbb rendezett automaták R-szorzataként (hurokmentes kompozíciójaként).

A [6], [8]—[10], [11]—[14] dolgozatokban az automaták R-szorzatainak részletes vizsgálata található, különös tekintettel az R-szorzat olyan speciális eseteire, mint a szuperpozíció, kvázi-szuperpozíció és kvázi-direkt szorzat. Ezek a dolgozatok főként teljességi kérdésekkel foglalkoznak, vagyis azt vizsgáljuk, hogy megadható-e véges automatáknak olyan véges M rendszere, hogy tetszőleges véges automata által megvalósított leképezés M-beli automaták alkalmas R-szorzatával (ill. szuperpozíciójával, stb.) is megvalósítható legyen. Hasonló teljességi kérdések nyernek megoldást automata-leképezések közelítő előállításával kapcsolatban. Igen szép eredmény a következő, amelyet Gécseg Ferenccel egyidejűleg Zarovnij szovjet matematikus is bebizonyított: rögzített bemenő és kimenő ábécé esetén az információ-veszteség nélküli véges automaták halmazából nem választható ki véges sok automata úgy, hogy ezek sorbakapcsolásával bármely ezen halmazhoz tartozó automata

által indukált leképezés megvalósítható legyen [8]. Hasonló tétel nyer bizonyítást az R-szorzatra vonatkozóan is a [6] dolgozatban.

[14]-ben az összes véges automata-leképezések osztályához hozzá van rendelve egy megszámlálhatóan végtelen két binér műveletes algebrai struktúra úgy, hogy az automaták teljes rendszereinek keresésénél elegendő ezen algebrai struktúra generátorrendszereinek keresésére szorítkozni.

[15] ugyancsak egy teljességi kérdéssel foglalkozik: itt igazolást nyer, hogy a rögzített bemenő és kimenő halmazzal bíró Kalmár-féle automaták által indukált leképezések félcsoportjának nincs véges generátorrendszere.

[7] az automaták matematikai elméletéről, [11] pedig az automaták matematikai elméletének részét képező algebrai elméletről nyújt rövid áttekintést.

Az új kutatási eredményeket tartalmazó dolgozatok mindegyike korszerű, érdekes problémával foglalkozik és figyelemreméltó eredményeket tartalmaz. Az univerzális algebrákkal foglalkozó munkák közül is kiemelendők [2] eredményei. A teljességi kérdéseket vizsgáló dolgozatok mindegyike komoly apparátussal elért számottevő hozzájárulás az automaták algebrai elméletéhez, a hurokmentes kompozícióra vonatkozó tételek pedig kétségtelenül a legmélyebbek az eddig megjelent irodalomban. Kiemelendő még [14], amely egy, az automata-elméletben új szempont felvetésével önálló elmélet kiépítését kezdi meg.

GÉCSEG FERENC DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

[1] Шрейерово расширение мультиоператорных групп, Acta Sci. Math. 23 (1962), 58—63.
[2] О некоторых классах полумодулей и модулей, Acta Sci. Math. 24 (1963), 165—172.
[3] О произведениях упорядоченных автоматов, I Acta Sci. Math. 24 (1963), 244—250
[4] О произведениях упорядоченных автоматов, II Acta Sci. Math. 25 (1964), 124—128.
[5] Автоматы с изоморфными полугруппами, Acta Sci. Math. 26 (1965), 43—47. (Peák Istvánnal közösen)
[6] О композиции автоматов без петель, Acta Sci. Math. 26 (1965), 269—272.
[7] Az automaták matematikai elméletéről, MTESZ Évkönyve (1964), 43—63. (Peák Istvánnal közösen)
[8] О группе взаимно однозначных преобразований, определённых конечными автоматами, *Кибернетика*, 1:1(1965), 37—39.
[9] О группе автоматных подстановок, *Кибернетика*, 1:5 (1965), 14—17. (Csákány Bélával közösen)
[10] On R-product of automata, I. Studia Sci. Math. Hung. 1 (1966) 437—441.
[11] Az automaták algebrai elmélete, Matematikai Lapok 17 (1966), 77—135. (Peák Istvánnal közösen)
[12] On R-products of automata, II. Studia Sci. Math. Hung. 1 (1966), 443—447.
[13] On R-products of automata, III. Studia Sci. Math. Hung. (Megjelenés alatt)
[14] О семействах автоматных отображений, Acta Sci. Math. (sajtó alatt)
[15] О многотактных автоматах, Acta Sci. Math. (sajtó alatt)

Katona Gyulának eddig 5 önálló tudományos dolgozata jelent meg és további 4 van sajtó alatt. A kombinatorikus analízisben, valamint az információelméletben ért el igen figyelemreméltó önálló eredményeket. [1] dolgozatában egy Erdős Pál, Chao Ko és Rado Richard által kimondott sejtést bizonyít be, igen ötletesen. Ehhez közeláll témában az [5] dolgozata, amelyben Sperner klaszszikus tételét élesíti és ennek segítségével bebizonyítja Erdős egy sejtését. E sejtést tőle függetlenül, alig valamivel később D. Kleitman is bebizonyította. [3] dolgozatában egy Rényi által, szemináriumon felvetett problémát oldott meg. Sajtó alatt levő dolgozatai közül kiemelendő [6] Tusnády Gáborral közös dolgozata, amely az információelmélet egyik legalapvetőbb tételét (az információ megmaradása tételét) az irodalomban eddig ismertnél sokkal általánosabb és élesebb formában bizonyítja be. E tételt heurisztikusan régóta használják az információelméletben, de az csak igen speciális esetre volt ténylegesen bebizonyítva.

KATONA GYULA TUDOMÁNYOS DOLGOZATAI

[1] Intersection theorems for systems of finite sets, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 15 (1964), 329—337.
[2] Újabb bizonyítás a Turán-féle gráftételre és megjegyzések bizonyos általánosításaira (Nemetz Tiborral és Simonovits Miklóssal), Matematikai Lapok 15 (1964), 228—237.
[3] On separating systems of a finite set, Journal of Combinatorial Theory 1 (1966), 174—194.
[4] Hibakereséselmélet. Automatizálási Kutató Intézet Közleményei. 1965.

[5] On a conjecture of Erdős and a stronger form of Sperner's theorem, Studia Sci. Math. Hung. 1 (1966), 59—63.
[6] The principle of conservation of entropy in a noiseless channel (Tusnády Gáborral), sajtó alatt a Studia Sci. Math. Hung.-ban.
[7] On a problem of graph theory (Szemerédi Endrével). Sajtó alatt Studia Sci. Math. Hung.-ban.
[8] On the labelling of digraphs (Korvin Gáborral). Sajtó alatt a tihanyi gráfelméleti kollokvium kiadványában.
[9] Theorem on finite sets. Sajtó alatt a tihanyi gráfelméleti kollokvium kiadványában.

Szabados József 9 dolgozatot írt, melyek közül 3 jelent meg eddig (az első Kis Ottó társszerzővel); a többiek (kettő közülük Freud Gézával) már lektorálva vannak és az Acta Math. Hung.-ban ill. az egyetem Annaleseiben fognak megjelenni. Ezen dolgozatai a konstruktív függvénytan két kérdéscsoportjával foglalkoznak. Az első irány az interpolációelméletnek Lozinski és Erdős—Turán által kezdeményezett „durva" ill. „finom" konvergenciaelméletével foglalkozik, a Lipschitz-osztályokra vonatkozó előző eredményeket általános folytonossági modulusok egy jóval általánosabb osztályára terjeszti ki. E vizsgálatokat terjeszti ki [4] dolgozatában a mechanikus kvadratúra esetére; eredményei egy részére időközben N. Vlaszov szovjet matematikus is rájutott. Dolgozatainak másik csoportja a racionális függvényekkel való approximálhatóság különböző kérdéseire vonatkozik, mely elmélet az utóbbi években kapott váratlan lendületet. E téren elvileg új eredményei vonatkoznak az ún. fordított tételekre, melyek az approximálhatóság rendjéből a függvény strukturális tulajdonságaira következtethetnek. Goncar egy példája alapján általános nézet volt, hogy a racionális függvényekkel való approximációra — a polinomiális approximációval ellentétben — ilyen elmélet nincs. Szabados [8] alatti dolgozatában megmutatta, hogy az approximáló racionális függvények pólusainak a $[-1, +1]$ szakasztól való minimális távolságát a fokszámtól való függésben alulról limitálva ilyen elmélet mégis adható.

SZABADOS JÓZSEF DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

1] Замечания о сходимости Лагранжева интерполирования,
Acta Math. Hung. 16 (1966), 389—430.
[2] О сходимости Лагранжева интерполирования в некоторых множествах функций, 17 (1966), 31—44.
[3] On a problem of P. Erdős, Acta Math. Hung. 17 (1966), 155—157.
[4] On the convergence of the interpolatory quadrature procedures in certain classes of functions, Acta Math. Hung., 18 (1967) sajtó alatt.
[5] Generalization of two theorems of G. Freud concerning the rational approximation, Studia Math. (sajtó alatt).
[6] On rational approximation, Studia Math. (sajtó alatt) (Freud Gézával közösen).
[7] Rational approximation, Acta Math. Hung. 17 (1967) (sajtó alatt) (Freud Gézával közösen).
[8] Structure properties of continuous functions connected with the order of rational approximation, Annales (1967).
[9] Egy középiskolában előforduló numerikus matematikai problémáról, Mat. Tanítása, (1964)

Wiegandt Richardnak eddig 12 dolgozata jelent meg és további 2 dolgozata van megjelenés alatt. Kutatási területe az algebra, ezen belül újabban a topológikus algebra. Eredményei közül különösen a topologikus gyűrűkre és modulusokra vonatkozó eredmények emelendők ki.

[1] dolgozatában azokkal a félcsoportokkal foglalkozik, amelyek valamennyi Schreier bővítésükben direkt faktorok; ezáltal a komplett csoportok félcsoportelméleti általánosításaihoz jut.

[2]-ben hasonló tulajdonságú félmodulusokat tekint, amelyek szerkezetét teljesen leírja.

[3] dolgozatában részben rendezett halmazokon értelmezett függvényeken definiálja az összegzési függvény és a Möbius-függvény fogalmát és ebben az általános esetben bebizonyítja a Möbius-féle megfordítási tételt. Speciális esetként előáll az Abel-csoportokra vonatkozó Delsarte-féle megfordítási képlet, valamint véges halmaz részhalmazain értelmezett függvényekre egy megfordítási képlet.

[4] és [5] dolgozataiban több jellemzését adja a Rédei által vizsgált elsőrendben nemreguláris gyűrűknek. A [6] dolgozat félgyűrűkkel foglalkozik. Bourne, Zassenhaus és Steinfeld vizsgálataihoz kapcsolódva azon félgyűrű jellemzését adja, amelyek minimális balideálok direkt összegei. Figyelemre méltóak az erős direkt összegre vonatkozó eredményei is.

Legjelentősebbek a topologikus gyűrűkre és modulusokra vonatkozó vizsgálatai. A [8] és [10] dolgozatokban Leptin eredményeihez kapcsolódva a féligegyszerű lineárisan kompakt gyűrűk több

jellemzését adja. A [9] dolgozatában — felhasználva Szele Tibor nilpotens gyűrűkre vonatkozó eredményeit — inverz-limesz képzés segítségével vizsgálja a transzfinit nilpotens topologikus gyűrűket, különös tekintettel a lineárisan kompakt radikálgyűrűkre.

A [11] dolgozatban kimutatja, hogy lokálisan lineárisan kompakt féligegyszerű gyűrűknek van minimális balideáljuk. Egyik főeredménye annak kimutatása, hogy lokálisan lineárisan kompakt gyűrű — bizonyos feltételek mellett — egy test feletti vektortér teljes endomorfizmusgyűrűje.

WIEGANDT RICHARD DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

[1] On complete semi-groups, Acta Sci. Math. 19 (1958), 93—97.
[2] On complete semi-modulus, Acta Sci. Math. 19 (1958) 219—223.
[3] On the general theory of Möbius inversion formula and Möbius product, Acta Sci. Math. 20 (1959), 164—180.
[4] Bemerkung über die einstufig nichtregulären Ringe, Acta Sci. Math., 21 (1960), 350—352.
[5] Bemerkung zu einer Arbeit von Herrn Steinfeld, Acta Sci. Math. 23 (1962), 74—75.
[6] Über die Struktursätze der Halbringe, Annales Univ. Sci. Budapest 5 (1962), 51—68.
[7] Gondolatok a matematika-tanítás korszerűsítéséről. Az orosházi Táncsics Mihály Gimn. Évkönyve, XXV. év (1962—63), 50—54.
[8] Über halbeinfache linear kompakte Ringe, Studia Sci. Math. Hung. 1 (1966) 31—38.
[9] Über transfinit nilpotente Ringe, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 17 (1966), 101—114.
[10] Über linear kompakte reguläre Ringe, Bull. Acad. Polon. Scil, 13 (1965), 445—446.
[11] Über lokal linear kompakte Ringe, Acta Sci. Math. (megjelenés alatt).
[12] Vizsgálatok a lineárisan kompakt gyűrűk elméletében. I. MTA III. Oszt. Közl. 16 (1966) 239—267.
[13] Vizsgálatok a lineárisan kompakt gyűrűk elméletében. II. MTA III. Oszt. Közl. 16 (1966), 333—363.
[14] Über die Verallgemeinerungen und Analoga der Wedderburn-Artinschen und Noetherschen Struktursätze, Math. Nachrichten (megjelenés alatt; Steinfeld Ottóval közösen).

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT BUDAPESTI TAGOZATÁNAK ELŐADÁSAI 1967. JANUÁR 1-TŐL JÚNIUS 30-IG.

Január 3.

KÁRTESZI FERENC: A véges geometriáról.
Feladatmegoldások:
Az Ifjúsági Matematikai Kör ülése.

Január 4.

HOFFMANN GYÖRGY: A halmazok mértékéről.

Január 13.

KÁTAI IMRE: Számelméleti függvényekről.

Január 14.

SIMONOVITS MIKLÓS: Geometriai szélsőérték feladatok megoldása elmozgatásokkal.
Középiskolai matematikai délután.

Január 20.

Az 1966. évi Grünwald Géza emlékdíj kiosztása.
SZABADOS JÓZSEF: Racionális approximációról.

Január 27.

BÁRÁSZ PÉTER: Szerkesztések az eszközök korlátozott használatával.
Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása

Január 27.

FORGÓ FERENC: Kvadratikus programozási problémákról.

Február 10.

CSISZÁR IMRE: Eloszlások eltérésének információ típusú mérték-számai.

Február 17.

BÁRÁSZ PÉTER: Szerkesztések és eszközök korlátozott használatával. II. rész.

Február 18.

BOLLOBÁS BÉLA: Érdekességek az elemi matematikában.
Középiskolai matematikai délután.

Február 24.

CSÁSZÁR ÁKOS: Függvényoperációk integrál előállításáról.

Március 8.

GÁDOR ENDRÉNÉ és RÉNYI ALFRÉD: Beszámoló a Lausanne-ban tartott nemzetközi matematikai oktatási konferenciáról.

Március 10.

ELEKES GYÖRGY: A generátor függvényről. IMK előadás.

Március 10.

KATONA GYULA: Egy kombinatorikus szélsőérték probléma.

Március 17.

LŐCS GYULA: Korszerű számoló központok rendszer-programozási problémáiról.

Március 18.

SURÁNYI JÁNOS: Húr és érintő négyszögekkel kapcsolatos problémákról.

Március 29.

Feladatmegoldások (előre kiküldött feladatok megbeszélése).
HAJÓS GYÖRGY: Poliéderekkel kapcsolatos feladatok.
Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása.

Március 30.

LOVÁSZ LÁSZLÓ és SZŰCS ANDRÁS előadása az Ifjúsági Matematikai Kör keretében.

Április 21.

A. C. ZAANEN (Leiden): A survey of the theory of Riesz spaces.
H. JAGER (Amsterdam): A conjecture of Erdős and Turán in the theory of power sums.
A MTA Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályával közös rendezésben.

Április 22.

KÖNYVES TÓTH KÁLMÁN: Pontos út a geometriához.
Középiskolai matematikai délután.

Április 27.

N. G. de BRUIJN (Eindhoven): The Wigner-distribution and generalizes Fourier analysis.
C. L. SCHEFFER (Utrecht): Projective limits of probability spaces.
A MTA Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályával közös rendezésben.

Április 28.

Az Országos Tanulmányi Verseny döntőjének feladatai.
Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása.

Április 28.

KOVÁCS LÁSZLÓ BÉLA: Egész értékű programozás és alkalmazása.

Május 12.

HALÁSZ GÁBOR: Multiplikatív számelméleti függvények értékeloszlásáról.

Május 19.

F. HARARY (USA): On symmetry in graphs.

Május 22.

G. B. SAXENA (India): Hermite-Birkhoff interpolációról.

Május 21—23.

Ifjúsági Matematikai Összejövetel Dobogókőn, az alábbi programmal:
Csiszár Imre: Megjegyzések a zajnélküli kódolásról.
Halász Gábor: Módszer hézagos sorok vizsgálatára.
Juhász István: Egy halmazelméleti probléma topologikus terekben.
Kátai Imre: Számelméleti függvényekről.
Knuth Előd: Kiszolgálási rendszerekkel kapcsolatos problémákról.
Petruska György: A Haar mértékről.
Rupp Márta: Egy termelésprogramozási problémáról.
Schipp Ferenc: Walsh—Fourier sorok konvergenciája.
Simon László: Körben definiált disztribúciókra vonatkozó peremérték feladatok.
Szász Domokos: Rendezett minta problémák stacionárius sorozatokra.
Szemerédi Endre: Becslés lineárisan független csoportelemek maximális számára.
Vértesi Péter: Jackson és Tyman tételeiről.
Virág Ildikó: Egy sztochasztikus közgazdasági modell.

Május 26.

Végzős matematikusok klubestje a Tudományos és Alkalmazási Szakosztály rendezésében.
Rényi Alfréd: Ars Mathematica.
Prékopa András: A modellalkotásról.

Május 27.

Urbán János: Néhány síkgeometriai tétel általánosítása a térre.

Június 2.

Németh József: Algebrai és statisztikai módszerek a kódelméletben.

Június 3.

Az Arany Dániel matematikai tanulóverseny eredményhirdetése.
A kezdők (I. osztályosok) feladatait ismertette: Surányi János.
A haladók (II. osztályosok) feladatait ismertette: Lőrincz Pál.

Június 9.

M. Marden (USA): The Zeros of the Derivative of Entire Functions.

Június 16.

R. Sulanke (NDK): Einige Probleme der euklidischen Geometrie des Geradenraumes

Június 23.

R. Engelking (Lengyelország): Dyadic spaces.

Június 29.

I. M. Gelfand: A funkcionálanalízis néhány időszerű problémája.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT ÉS A
KOSSUTH LAJOS TUDOMÁNYEGYETEM MATEMATIKAI INTÉZETE
1966 OKTÓBERÉBEN DEBRECENBEN
„MATEMATIKAI STATISZTIKAI KOLLOKVIUMOT"
RENDEZETT, AZ ALÁBBI PROGRAMMAL:

Október 13.

Megnyitó.
Sarkadi Károly: Becslés választás után.
Tusnády Gábor: Megjegyzések a mintavételi tervek statisztikai kérdéseihez.
Gyires Béla: Rendstatisztikai módszer függetlenség vizsgálatára.
Szünet
Adler Péter: Kísérlet a caries hajlam statisztikai matematikai meghatározására
Juhász Nagy Pál: Növénytársulások elemzése információelméleti módszerekkel.
Király Péter: Nukleáris fotoemulziók kiértékelésének néhány statisztikai problémája.
Csik József: Csapágyak automatizált szerelésének matematikai statisztikai irányítása és szabályozása.

Október 14.

B. V. GNEDENKO: Hidegtartalék a megbízhatóság növelésére.
ARATÓ MÁTYÁS: Linnik néhány tételének kiterjesztéséről (sztochasztikus folyamatok statisztikus feladataira).
AHMED EL KHOLY: Optimum allocation for sampling in the case of stationary Gaussian Markov process.
FISCHER JÁNOS: Felvételi populációk jellemzőiről.
MOGYORÓDI JÓZSEF: Keverés, stabilitás, határeloszlás tételek.
Szünet
TOMKÓ JÓZSEF: Sok alkatrészből összetett rendszer üzemeltetésének néhány kérdéséről.
MEDGYESSY PÁL: Valószínűségeloszlások általánosítása és ezzel kapcsolatos faktorizációs problémák.
ROCHLITZ SZILVESZTER: Kétdimenziós stacionárius Markov folyamat paraméterének becslése gépi úton.
RATKAI JÁNOS: Egy sorbanállási feladat megoldása.

Október 15.

RÉNYI ALFRÉD: A Poisson folyamatról
ERDŐS PÁL: A permutációk rendjének eloszlása a szimmetrikus csoportban.
KOMLÓS JÁNOS: Véletlen mátrixok determinánsáról.
Szünet
PRÉKOPA ANDRÁS: Matematikai programozással kapcsolatos statisztikai és valószínűségszámítási problémák.
SZÁSZ DOMOKOS: Térbeli elágazási (branching) folyamatok.
DARÓCZY ZOLTÁN: A pozitív rendű információról.

MTA Könyvtára
Példány 2175 19 68.

KÖNYVISMERTETÉS

A. G. KUROS: FELSŐBB ALGEBRA C. KÖNYVÉNEK ISMERTETÉSE

(Tankönyvkiadó, Budapest, 1967; 475 oldal)

Kuros moszkvai professzor Felsőbb algebrai tanfolyam c. könyvének 6-ik, orosz nyelvű, 1959. évi kiadása a könyv első kiadásának lényegesen átdolgozott és bővített változtata. A budapesti Tankönyvkiadó Vállalat megjelentette most a magyarországi egyetemek segédkönyveként ennek a 6-ik kiadásnak a magyar nyelvű változatát az említett rövidebb címmel, és a korábbi kiadásokból szerepel 42. §-ként a Hurwitz-tétel, I. függelékként pedig Frobenius tétele. A fordítást Pollák György, a kontrollszerkesztést Csákány Béla végezte el. Pollák György a fordítási munkán túlmenőleg magyarázó, kiegészítő lábjegyzetekkel is ellátta a könyv magyar változatát. Továbbá „Néhány szó a kombinatorikáról" címmel függeléket is írt Pollák György a könyvhöz. Ugyanis a magyarországi középiskolákban most általában nem oktatnak kombinatorikát, pedig a kombinatorika elemeinek ismerete szükséges Kuros ennek a könyvének a megértéséhez, amelyet Kuros a szovjet egyetemi oktatás szükségleteihez szabott, és amely természetszerűleg támaszkodik mindarra az előzetes ismeretanyagra, amelyet a szovjet egyetemi hallgató korábban megtanult.

A felsőbb algebra minden képzett matematikus szakmai műveltségének nélkülözhetetlen alkotórésze. Ennek ellenére egy felsőbb algebrai bevezetés tartalma és előadási módja nincs egyértelműen meghatározva, éspedig különböző országokban a felsőbb algebrai oktatásnak különböző hagyományai alakultak ki. A magyar matematika, amely A. G. Kuros szavaival „Erős és sajátos algebrai iskolával rendelkezik", a maga megfelelő oktatási hagyományait szintén kikristályosította. A magyarországi egyetemi tananyaghoz eléggé illeszkedő szakismereteket tartalmaz Szele Tibor: Bevezetés az algebrába" c. tankönyve és Fuchs László modern algebrai stenciljegyzete. Kuros professzor könyve tankönyv a Szovjetunió egyetemeinek és tanárképző főiskoláinak matematika szakán. A könyv a magyarországi tudományegyetemek matematika szakon előadott elsőéves tananyagán túlmenő ismereteket tartalmaz. Így, Kuros kiváló pedagógiai és tankönyvírói készségénél fogva, a könyv hasznos segédeszköz lehet egyetemi hallgatóinknak. Emellett pedig számot tarthat éppen az előremutató fejezetei miatt, mindazok érdeklődésére is, akik az algebrával elmélyültebben kívánnak foglalkozni.

A könyv 6. kiadásától való eltéréseket a következőképpen lehet indokolni. A korábbi kiadásokból átvett Hurwitz-tétel, amely az egyenlet összes gyöke valós részének negatív előjelűségére ad meg determinánsokkal szükséges és elégséges feltételt, a fizikai alkalmazásokban játszik szerepet, Frobenius tétele pedig rámutat a valós test felett vett végesrangú algebrák közt a valós és komplex számtestnek és a kvaterniók ferdetestének a kitüntetett szerepére. Az eredeti irodalomjegyzéktől való eltérést pedig az indokolja, hogy a Magyarországon nehezebben hozzáférhető, 1935 óta megjelent orosz nyelvű tankönyvek és monográfiák helyett célszerűbb megemlíteni a könyv magyar változatában a jelenleg hozzáférhető magyar algebrai irodalmon kívül az algebra legfontosabb területeire vonatkozó egyes alapvető külföldi szakkönyveket.

A könyvben a csillaggal megjelölt szakaszok a könyv logikai vonalához szorosan nem tartozó speciálisabb vagy mélyebbre hatoló ismereteket tárgyalnak. Ilyenek pl. a determinánselmélet axiomatikus felépítése, a racionális függvénytest ismertetése, Hurwitz tétele és az algebrai számok fogalma. A könyv a betűtípus nagyságának a változtatásával is igyekszik különbséget tenni az elsődlegesen vagy a csak másodlagosan fontos anyagrészek közt. Későbbi tanulmányokra mutat előre a csoportokról, gyűrűkről, algebrákról szóló rész is.

A könyv szerkezetileg tizennégy fejezetből és két függelékből áll, ezeket megelőzi a szerző és szerkesztő előszava, valamint egy történeti áttekintést is nyújtó bevezetés, a könyv anyagát pedig zárja az irodalomjegyzék és egy részletes tárgymutató.

Az I. fejezet lineáris egyenletrendszerekkel és determinánsokkal foglalkozik, ennek során ismerteti az ismeretlenek szukcesszív kiküszöbölésének a módszerét, a másod- és harmadrendű determinánsokat. Az n-edrendű determináns értelmezése végett tárgyalja a rendezéseket és permutáció-

kat. Szó van még aldeterminánsokról és adjungáltjaikról, a determináns kiszámításáról és Cramer szabályáról.

A II. fejezet a lineáris egyenletrendszerek általánosabb elméletének ismertetése során bevezeti a véges dimenziós vektortérnek és vektorok lineáris függőségének valamint a mátrix rangjának fogalmát. Behatóbban tárgyalja az inhomogén és homogén lineáris egyenletrendszereket.

A III. fejezet a mátrixszámítás alapjait rakja le, ismerteti a mátrixok szorzását, invertálását, összeadását, számmal való szorzását és axiomatikusan felépíti a determinánselméletet.

A IV. fejezetben a komplex számok értelmezése, a velük való alapműveletek, komplex számból való gyökvonás található meg.

Az V. fejezet a polinomokkal való műveleteket, polinomok legnagyobb közös osztóit, polinomok gyökeit, az algebra alaptételének bizonyítását és következményeit valamint a racionális törtfüggvényeket tárgyalja.

A VI. fejezetből megtanulhatók kvadratikus alakoknak kanonikus alakra való hozatala, a tehetetlenségi törvény és a pozitív definit alakok tulajdonságai.

A VII. fejezet a lineáris terek izomorfizmusaival, bázisaival, lineáris transzformációival, lineáris alterekkel, karakterisztikus gyökökkel és sajátértékekkel foglalkozik.

A VIII. fejezetből megismerhetők az euklideszi tér, az ortonormált bázis, továbbá ortogonális mátrixok, szimmetrikus transzformációk és a kvadratikus alakok főtengely-transzformációja.

A IX. fejezetben kerül tárgyalásra a polinomok gyökeinek kiszámítása, közelebbről a másod-, harmad- és negyedfokú algebrai egyenletek gyökjeles megoldó képlete, becslések a gyökök korlátaira, Sturm tétele, Hurwitz tétele, a valós gyökök számára vonatkozó tételek és a gyökök közelítő kiszámítása.

A X. fejezetben szó van gyűrűkről, testekről, számtestekről, test feletti polinom-algebráról, polinomok irreducibilis faktorizációjáról, a gyökök egzisztenciatételéről és a racionális törtfüggvények testéről.

A XI. fejezet foglalkozik az n-ismeretlenes polinomok gyűrűjével, a szimmetrikus polinomokkal, a rezultánssal és diszkriminánssal, és e fejezetben második bizonyítás is található az algebra alaptételére.

XII. fejezet tárgyalja polinomoknak a racionális számtest felett való reducibilitását, egész együtthatós polinomok racionális gyökét és az algebrai számokat.

A XIII. fejezetből az olvasó a mátrixok normálalakjairól, a mátrixok ekvivalenciájáról, unimoduláris λ-mátrixokról, mátrixok hasonlóságáról, a Jordan-féle normálalakról és a mátrixok minimális polinomjáról szerezhet ismereteket.

Végül a XIV. fejezet ismerteti a csoport, részcsoport, normálosztó, faktorcsoport, homomorfizmus, direkt szorzat fogalmát és a véges Abel-féle csoportok alaptételét.

Szász Ferenc

A kiadásért felelős: Bernát György, az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Merkly László
A kézirat beérkezett: 1967. X. 1. – Példányszám: 1300 – Terjedelem: 16,8 (A5) ív

67-5745 – Szegedi Nyomda

ОГЛАВЛЕНИЕ

Список трудов лауреатов награждённых Государственной Премией 1966-ого года, Кароя Шаркади и Иштвана Винце 169
Альфред Реньи: Методы теории вероятностей в анализе II 175
Аттила Матэ: Сходимость рядов Фурье интегрируемых с квадратом функций 195
Ференц Саас: Жизнь и научная деятельность Ивана Шереш 243
Мария Вишки: Сингулярные гомологии II 251
Йожеф Мерза и Отто Варга: Ференца Картеси 60 лет 273
Пал Эрдёш: Чётные подграфы графов 283
Геза Фрейд: Сходимость интерполяционных методов Лагранжа на бесконечном интервале 289
Эрвин Фрид: Выяснение некоторых понятий относящихся к общей формуле решения уравнений 293
Имре Каатаи: О локальном поведении функции $d(n)$ 297
Дьёрдь Баанкёви: Книга д-р. Иштвана Хазаи „Выравнивательные расчёты" в свете прикладной математики и проблемы образования инженеров 303
Шандор Бенде: Диофантовое уравнение $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{x_i}} = 1$ и его отношение к теории графов и к теории информаций 323
Геза Нэмет: Чебишевое разложение ряда Стирлинга 329
Дьёрдь Хайош: Решение 4-ой задачи мемориального конкурса имени Миклоша Швейцера 1965-ого года 335
Задачи 337
Сообщения 345
Из жизни общества 349
Рецензии книг 359

CONTENTS

A list of papers by K. Sarkadi and I. Vincze awarded with the State Prize, 1966. 169
A. Rényi: Probabilistic methods in analysis II. 175
A. Máté: Convergence of the Fourier series of square summable functions 195
F. Szász: Life and mathematical work of I. Seres 243
M. Viski: Singular homologies II. 251
J. Merza and O. Varga: F. Kárteszi is 60 years old 273
P. Erdős: On even subgraphs of graphs 283
G. Freud: The convergence of Lagrangean interpolating methods on an infinite interval 289
E. Fried: Clarification of some notions concerning general formulas for solution of equations 293
I. Kátai: On the local behaviour of the function $d(n)$ 297
G. Bánkövi: „Adjustment methods", a book by Dr. I. Hazay, from the point of view of problems of applied mathematics and the training of engineers 303
S. Bende: The diophantine equation $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{x_i}} = 1$ and its connection with graph theory and information theory 323
G. Németh: The Tchebishev expansion of the Stirling series 329
G. Hajós: The solution of Problem 4 of the M. Schweitzer Matematical Competition, 1965. 335
Problems 337
News 345
Activity of the Society 349
Book-review 359

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

Ára: 12,— Ft
Évi előfizetés: 20,— Ft

INDEX: 25 564