312.046
XIII.
1962
1-4

MATEMATIKAI LAPOK

XIII. ÉVFOLYAM

1-2.

SZÁM

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT
BUDAPEST, 1962

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenkint négysze
Budapest, 1962. június, XIII. évfolyam 1—2 szám.
Felelős szerkesztő: Turán Pál.
Szerkesztők: Aczél János, Hajós György, Kalmár László, Rényi Alfréd.
Szerkesztőség: Budapest V., Szabadság tér 17. Telefon: 311—793.
Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány utca 21. III. Telefon: 111—010.
A kiadásért felel: az Akadémiai Kiadó igazgatója.
Terjeszti a Posta Központi Hírlap Iroda Vállalat, Budapest, V., József nádor tér 1. Telefon: 180—850. Csekkszámlaszám: 61 257.
Előfizetés, személyes ügyfélszolgálat: József nádor tér 1. Üzlethelyiség Telefon: 183—022.
Előfizetés egy évre 20,— Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

BÁLINT ELEMÉR: Lukács Ferenc 1
KÁRTESZI FERENC: Szász Pál 60 esztendős 9
SZ. SZOBOLJEV: A matematika poézise 22
ERDŐS PÁL: Számelméleti megjegyzések III. 28
HEPPES ALADÁR és MOLNÁR JÓZSEF: Újabb eredmények a diszkrét geometriában II. 39
CSÁSZÁR ÁKOS: A komplex függvénytan elemeinek topológiai segédeszközeiről 73
ANDRÁSFAI BÉLA: Gráfok útjairól, köreiről és hurokjairól 95
DANCS ISTVÁN: Komplex számok hatványösszegeiről 108
HAJTMAN BÉLA: Egy üzemanyag-takarékossági probléma 115
H. CARTAN: Nicolas Bourbaki és a mai matematika 130
BOLLOBÁS BÉLA és ERDŐS PÁL: Gráfelméleti szélső értékekre vonatkozó problémákról 143
Az 1961. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny 153
Az 1961. évi Kossuth-díjjal kitüntetett Tandori Károly munkáinak jegyzéke . 172
Feladatrovat 174
Jelentés az 1961. évi Grünwald-Géza emlékdíj odaítéléséről 184
Jelentés a Beke Manó-emlékdíj tizenegyedik kiosztásáról 190
Társulati élet 193
Könyvismertetés 212

Lukács Ferenc

BÁLINT ELEMÉR

I. Életrajza

LUKÁCS FERENC 1891. június 27-én született és még nem volt 28 éves, amikor jelentékeny tudományos munkásság után 1918. november 30-án befejezte életét. Matematikai tehetsége már 15 éves korában kezdett kibontakozni. Idősebb barátainak tanácsára első matematikai olvasmánya CESÀRO „Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung" című, 1904-ben megjelent könyve volt. Minthogy szegény fiú volt és saját eltartásáról már gimnazista korában nagyrészt magának kellett gondoskodnia, idejének jelentékeny részét osztálytársak és kisebb fiúk tanítása vette igénybe. Ez az életmód az önálló gondolkodású ifjút korán tette érett emberré. Alig hagyta el a középiskola padjait, amikor megismerte LIOUVILLE tételét az algebrai számoknak racionális számokkal való megközelítéséről és erre a tételre támaszkodva — 19 éves korában — 1910-ben konstruált egy mindenütt sűrű halmazban nemfolytonos és mégis mindenütt sűrű halmazban differenciálható függvényt. (II. 1.)* LUKÁCS e függvényét I. J. SCHOENBERG 1959-ben újra felfedezte és közölte a The American Mathematical Monthly 66. kötetében (The integrability of certain functions and related summability methodes című közleményében, pp. 361 – 375). SCHOENBERG megtudva SZEGŐ GÁBORtol, hogy ezt a függvényt Lukács már 1910-ben megszerkesztette és 1911-ben közzétette, az Am. Math. Monthly egy későbbi számában (p. 563) megjegyzi ezt és idézi LUKÁCS 48 évvel korábban megjelent dolgozatát.

LUKÁCS már gimnazista korában megismerkedett RIESZ FRIGYESSEL, aki akkor még mint középiskolai tanár Lőcséről Budapestre került és rövid ideig a III. kerületi gimnáziumban tanított, mielőtt Fejér Lipót helyén a kolozsvári egyetem tanára lett. RIESZ FRIGYES gyakran találkozott a budai Vigadó kávéházban LUKÁCS FERENCcel és már akkor

* Az utalás a LUKÁCS FERENC tudományos munkássága című II. részre vonatkozik: (II. 1.) jelenti az ebben a részben 1. pont alatt referált közleményt.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

észrevette LUKÁCS matematikai tehetségét. Ez az ismeretség akkor nem tudott mélyebb hatást gyakorolni LUKÁCSra, mert rövid idő után Riesz Kolozsvára távozásával megszakadt.

Lukács — mint egyetemi hallgató — FEJÉR LIPÓTnak, 1911 óta a budapesti egyetem tanárának szemináriumában ismerkedett meg a nála néhány évvel idősebb PÓLYA GYÖRGGyel és FEKETE MIHÁLYlyal. A közöttük létrejött barátságból számos tudományos eredmény fakadt. FEJÉR szemináriumában ismerkedtek meg Lukács és évtársai: EGERVÁRY Jenő és BRÓDY IMRE is.

Lukács tudományos munkássága FEJÉR hatása alatt bontakozott ki. 1913-ban jelent meg egy Comptes Rendus cikke (II. 3.), melyben FEJÉR egy problémájának GRONWALL által adott megoldását lényegesen egyszerűbben bizonyította be. Ez a bizonyítás LUKÁCS 1914. évi doktori értekezésében magyarul és a disszertációnak SZEGŐtől származó fordításában — LUKÁCS hagyatékából vett kiegészítéssel — németül is megjelent (II. 4. és II. 9.). A doktori értekezés a Laplace-sor szummálhatóságával foglalkozik, tehát szintén FEJÉR dolgozataiból indul ki.

LUKÁCS 1913-ban a nyarat Göttingenben töltötte. Sok magyar matematikus talákozott ezen a nyáron Göttingenben. Ketten: HAAR ALFRÉD és KÁLMÁN TÓDOR a göttingeni egyetem docensei voltak, a többi nyári vendég. Két orvostanhallgató is volt a magyarok között: BARON GYULA és BAUER ERVIN, mindketten LUKÁCS barátai. Az előbbi ma orvostanár az Amerikai Egyesült Államokban, utóbbi 1919 után emigrált, néhány évi hányodás után Leningrádban telepedett le, ott mint biológus elismerést szerzett és a 40-es évek elején meghalt.

Göttingeni tartózkodása alatt LUKÁCS megismerkedett EDMUND LANDAU göttingeni egyetemi tanárral és ez az ismeretség is hatással volt LUKÁCS tudományos munkásságára. 1915-ben jelent meg az Archiv der Mathematik und Physik című folyóiratban LUKÁCS egy közleménye (II. 5.), melyben LANDAU egy sortételét általánosította.

1914-ben — egyetemi éveinek befejeztével — doktori vizsgája után LUKÁCS a műegyetemen KÜRSCHÁK JÓZSEF tanársegéde lett és ugyanebben az évben meg is nősült. Felesége, TÉRI TEKLA eredetileg nem volt matematikus, de férje mellett felébredt érdeklődése a matematika iránt. Tehetségét bizonyítja, hogy nemsokára egy érdekes geometriai tételre jött rá és azt be is bizonyította. Ez a tétel, mely a PÓLYA—SZEGŐ: Aufgaben und Lehrsätze I. kötetében (a 105. és 277. oldalakon) megtalálható, így hangzik: Azok a pontok, melyekből egy zárt, kettős pont nélküli görbe csillagszerűen látszik, konvex halmazt alkotnak. (Egy görbe valamely pontból csillagszerűen látszik, ha abból a pontból kiinduló minden félegyenesnek a görbével egyetlen közös pontja van.)

Az első világháború kitörésekor LUKÁCSOT is besorozták katonának, de szívbaja miatt rövid idő múlva leszerelték. Az első világháború

első évében tette le LUKÁCS doktori vizsgáját, de a gyakorló tanári évet nem vállalta és nem szerzett tanári oklevelet. 1916-ban küldte be LUKÁCS a Crelle Journalnak egyik nagyon jelentős dolgozatát, mely azonban már csak halála után jelent meg (II. 6.) a következő címmel: Über die Bestimmung des Sprunges einer Funktion aus ihrer Fourierreihe.

Halála évében jelent meg LUKÁCS egy másik fontos közleménye is: Verschärfung des ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung für rationale Polynome (II. 7.). Lukács ebben a közleményében utal egy tételére is, mely egy véges intervallumban jelet nem váltó polinomnak egy paraméteres előállításáról szól.

1923-ban, 5 évvel LUKÁCS halála után jelent meg FEKETE MIHÁLY cikke a Mathematische Zeitschrift 17. kötetében (pp. 228—249), melyben a transzfinit átmérő fogalmát vezette be. A közlemény címe: Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten. A bevezetésben FEKETE egy módszerre utal, melyet „barátjával, LUKÁCS FERENCcel együtt dolgozott ki". Ezt a módszert, melynek alapgondolatában LUKÁCS FERENCnek jelentékeny szerepe volt, FEKETE rezultáns-módszernek nevezi szembeállítva azt a közlemény első részében alkalmazott és I. SCHUR által használt diszkrimináns-módszerrel. A „rezultáns-módszer" LUKÁCSnak és FEKETÉnek közös tételére támaszkodik, melyet egyszerű alakjában így lehet kimondani: Csak véges számú polinom lehetséges, melynek legmagasabb fokú tagjában az együttható egy rögzített egész szám, valamennyi együtthatója egész szám és valamennyi zérushelye egy véges intervallumba esik, melynek hossza kisebb, mint 4.

LUKÁCS tudományos munkássága mellett nem vesztette el fogékonyságát a századforduló után kibontakozó irodalmi és társadalmi küzdelmek iránt. Korának költői közül elsősorban ADY ENDRE versei álltak közel hozzá. De nemcsak a magyar irodalom érdekelte. Állandó olvasója volt például a „Fackel"-nek, a bécsi KARL KRAUS folyóiratának, melyet jóformán magának KRAUSnak írásai töltöttek ki. Érdekelték a társadalmi problémák, melyek a századforduló után a magyar fiatalság legértékesebb elemeit magukkal ragadták. Amikor kitört a Károlyi-forradalom, lelkesedéssel csatlakozott annak eszméihez. Nem sokáig lelkesedhetett az új eszmék diadaláért. A háború végével és az azután pusztító járvány, az ún. spanyol influenza, szedte áldozatait és ezek között voltak LUKÁCS FERENC maga, felesége és közeli barátainak köréből BAUER ERVIN felesége, a jelesi rónő, KAFFKA MARGIT és annak kisfia is. A „gyulák" minden igyekezete — KARINTHY FRIGYES nevezi így „Utazás a koponyám körül" című könyvében a baráti körükhöz tartozó, jelenleg Amerikában élő orvosokat: BARON GYULÁT és HOLLÓ GYULÁT — hiábavaló volt. LUKÁCS FERENC hibás szíve nem tudta leküzdeni a rossz-

indulatú betegséget és mikor halálát egy ügyetlen ápolónő elárulta feleségének, TÉRI TEKLA, aki különben valószínűleg meggyógyulhatott volna, nem akart többé meggyógyulni. Férjével együtt közös sírba temették. Maradt utánuk egy árva gyermek, emlékük barátaik szívében és azok az eredmények, melyekkel a tudományt gazdagították.

II. LUKÁCS FERENC tudományos munkássága

1. Eine unstetige und differenzierbare Funktion (Mathematische Annalen, Band 70, pp. 561–562; 1911.)

LUKÁCS ebben a közleményében olyan függvényt szerkeszt, mely a valós változó minden értékére értelmezve van, mindenütt sűrű halmazban nemfolytonos, mégis mindenütt sűrű halmazban differenciálható.

A konstrukció LIOUVILLE következő tételére támaszkodik: Ha α n-edfokú algebrai szám, akkor megadható az M pozitív konstans úgy, hogy tetszőleges p/q racionális számra fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\left|\frac{p}{q}-\alpha\right|>\frac{1}{M|q|^n}.$$

Lukács következőképpen definiálja az $f(x)$ függvényt:

irracionális x-re $\quad f(x)=0,$

a racionális $x=p/q$ pontban $\quad f(p/q)=1/q^q,$

(q a nevező legkisebb pozitív értéke).

Azonnal látható, hogy a függvény periodikus (periodusa 1),
racionális x-re nemfolytonos,
irracionális x-re folytonos,
integrálható,
minden algebrai irracionális helyen,

tehát mindenütt sűrű halmazban, differenciálható és differenciálhányadosa $=0$.

2. Eine Eigenschaft des Konvergenzkreises der Potenzreihen. (Archiv der Mathematik und Physik, III Reihe, Band 23, pp. 34–35; 1914.) LUKÁCS indirekt módszerrel bizonyítja be következő tételét: Egy hatványsor valamennyi szelete valamennyi zérushelyének legalább egy sűrűsödési helye van a hatványsor konvergenciakörén.

Ez a tétel, mint LUKÁCS maga is rámutat, a hatványsor minden értékhelyére ugyanúgy áll, nemcsak a zérusokra.

LUKÁCSnak ezt a tételét LANDAU is idézi könyvében: „Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie (II. Auflage, 1929). Ez a tétel — eltekintve HURWITZ egy 1889-ből származó tételétől* első eredmény volt egy problémakörben, melyben a szintén korán elhunyt ROBERT JENTZSCH közleménye volt a következő lépés.** Jentzsch kimutatja, hogy a (véges) konvergenciakör minden pontja sűrűsödési helye annak a ponthalmaznak, melynek elemei a hatványsor szeleteinek zérushelyei. OSTROWSKI, SZEGŐ GÁBOR, majd 1950-ben Erdős Pál és Turán Pál más problémakörrel kapcsolva továbbfejlesztik a Lukács—Jentzsch problémakört is.

3. FEJÉR 1908-ban bebizonyította, hogy az L-integrálható $f(\vartheta, \varphi)$ függvény Laplace-sorának másodrendű számtani közepei a függvény valamely folytonossági pontjában a függvény értékéhez konvergálnak. FEJÉR felvetette a kérdést, hogy divergálhatnak-e az elsőrendű közepek. GRONWALL bebizonyította, hogy már az elsőrendű közepek is konvergálnak a függvény folytonossági pontjaiban.

GRONWALL tételét LUKÁCS egyszerűbben bizonyította be. A bizonyítás francia nyelven 1913-ban a *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences* 156. kötetében jelent meg. A bizonyítás magyarul is megjelent Lukács doktori értekezésében.

4. A Laplace-sorról. Doktori értekezés, 1914. Miután az értekezés I. fejezetében a Legendre-polinomok ismert tulajdonságait egyszerű bizonyításokkal összefoglalja, az értekezés II. fejezetében LUKÁCS egy egyszerű példán mutatja meg, hogy egy az egész egységgömbön folytonos függvény Laplace-sora a függvény egy folytonossági pontjában divergens lehet. A III. fejezetben közli GRONWALL tételének egyszerű és rövid bizonyítását, mely már egy évvel korábban megjelent a Comptes Rendus-ben. A IV. fejezetben a speciális

$$\sum (2n+1) P_n(\cos \gamma)$$

sor k-adrendű számtani közepeit vizsgálja meg. (γ a fix (ϑ_0, φ_0) pont távolsága az egységgömbön a változó (ϑ, φ) ponttól.) $P_n(x)$ az n-edfokú Legendre-polinomot jelenti. Ennek a vizsgálatnak az eredményére támaszkodik az értekezés fő eredményét tartalmazó V. fejezet, melyben LUKÁCS bebizonyítja, hogy az $f(\vartheta, \varphi)$ L-integrálható függvény Laplace-sora a (ϑ_0, φ_0) pontban minden 1/2-nél magasabb rendben összegezhető és összege megadja a függvény értékét a (ϑ_0, φ_0) pontban, ha a

* Mathematische Annalen, Band 33.

** Untersuchungen zur Theorie der Folgen analytischer Funktionen (Acta Mathematica, 1916.).

függvény ott folytonos és a (ϑ_0, φ_0) pont antipodusában bizonyos korlátozásoknak van alávetve (ha pl. ott korlátos).

A bizonyításból az is kiderül, hogy az $\frac{1}{2}$-nél magasabb rendű közepek konvergenciája egyenletes az egységgömb minden olyan tartományában, melyben a fentemlített két feltétel egyenletesen teljesül. Végezetül LUKÁCS minden $\frac{1}{2}$-nél kisebb k-ra egyszerű függvénypéldát konstruál, mely az egész egységgömbön folytonos, de Laplace-sorának k-adrendű közepei egy folytonossági pontban divergálnak.

5. Bemerkungen zu einem Konvergenzsatze des Herrn Landau (Archiv der Mathematik und Physik, Band 23. pp. 367–368; 1915.)

LUKÁCS ebben a rövid közleményben LANDAU következő tételét általánosítja: Ha Σa_n valós tagokból álló sor Cesàro szerint r-edrendben szummálható és na_n alulról korlátos, akkor a Σa_n sor konvergens.

Lukács kimutatja, hogy ha a komplex tagokból álló sor Cesàro szerint r-edrendben szummálható, és ha na_n egy π-nél kisebb nyílású szögtartományban van, akkor a sor konvergens.

6. Über die Bestimmung des Sprunges einer Funktion aus ihrer Fourierreihe. (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 150, pp. 107–112; 1919.)

Ezt a közleményt LUKÁCS 1916-ban küldte be a lapnak, de csak halála után jelent meg. LUKÁCS e cikkben a következő fontos tételt bizonyítja be: Ha az a pontban az L-integrálható $f(x)$ függvény ugrása $D(a)$, azaz

$$\lim_{t \to +0} (f(a+t) - f(a-t)) = D(a),$$

akkor

$$\frac{\overline{s_n}(a)}{\log n} \to -\frac{D(a)}{\pi},$$

ahol $\overline{s_n}(a)$ jelenti az $f(x)$-hez tartozó Fourier-sor konjugáltjának részletösszegét az $x = a$ helyen.

Ebből a tételből következik, hogy ha a függvénynek az a pontban ugrása van, akkor a konjugált sor az a pontban nem konvergálhat. E tétel alapján az $f(x)$ Fourier-sorának konjugáltjából következtethetünk az $f(x)$ függvény ugrásainak nagyságára. (Idézve ZYGMUND: Trigonometric series és SZ. NAGY BÉLA: Valós függvények és függvénysorok c. könyvében.)

7. Verschärfung des ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung für rationale Polynome, (Mathematische Zeitschrift, Band 2, pp. 295–305; 1918.)

A közlemény fő tételei a következők: Ha $f(x)$ valós polinom,

melynek az $a \leqq x \leqq b$ intervallumban M a maximuma és m a minimuma, akkor

$$m+\frac{M-m}{n(n+1)} \leqq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqq M-\frac{M-m}{n(n+1)},$$

ha a fokszám $2n+1$ (páratlan); és

$$m+\frac{M-m}{(n+1)^2} \leqq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqq M-\frac{M-m}{(n+1)^2},$$

ha a fokszám $2n$ (páros).

Az egyenlőség jele csak speciális polinomokra érvényes, melyeket LUKÁCS a Legendre-polinomok, illetve azok deriváltjainak segítségével határoz meg.

A közlemény bevezetésében Lukács idézi a nemnegatív polinomok egy parameteres előállításáról szóló tételét, mellyel közleménye tételeit először bizonyította be. Mégis ebben a cikkben a bizonyítás nem erre a parameteres előállításra támaszkodik, hanem Fejér egy módszerének analogonját használja.

A tétel és bizonyítása megtalálható PÓLYA—SZEGŐ: Aufgaben und Lehrsätze II. kötetének 96. oldalán is (108. és 109. feladat), a megoldás a 297. oldalon.

8. Lukács maga már nem közölhette a fenti közleményben említett módszerét, mely arra támaszkodott, hogy a nemnegatív polinomokat bizonyos parameteres alakban állította elő. Ez az előállítás megtalálható PÓLYA—SZEGŐ: Aufgaben und Lehrsatze II. kötetében (82. oldalon a 44., 45., 47. feladatok és azok megoldása a 275. és 276. oldalakon). Idézi továbbá SZEGŐ GÁBOR Orthogonal Polynomials c. könyvében (American Mathematical Society Colloquium Publications, XXIII. kötet, a 4. és 5. oldalakon; 1959).

Lukács az n-edfokú valós polinomot a következő alakban állítja elő:

I. Ha $p(x) \geqq 0$ a $-1 \leqq x \leqq 1$ intervallumban, akkor

$$p(x)=\begin{cases}\{A(x)\}^2+(1-x^2)\{B(x)\}^2, & \text{ha a fokszám páros;}\\ (1+x)\{C(x)\}^2+(1-x)\{D(x)\}^2, & \text{ha a fokszám páratlan.}\end{cases}$$

II. Ha $p(x) \geqq 0$ x minden értékére, akkor

$$p(x)=\{A(x)\}^2+\{B(x)\}^2.$$

III. Ha $p(x) \geqq 0$ az $x \geqq 0$ (jobbról) végtelen intervallumban, akkor

$$p(x)=\{A(x)\}^2+\{B(x)\}^2+x[\{C(x)\}^2+\{D(x)\}^2].$$

Mindegyik előállításban $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ és $D(x)$ valós együtthatójú polinomokat jelentenek és az egyes tagok fokszáma nem nagyobb, mint $p(x)$ fokszáma.

9. SZEGŐ GÁBOR 1922-ben a Mathematische Zeitschrift-ben német fordításban kiadta LUKÁCS doktori értekezését, LUKÁCS hagyatékából vett kiegészítésekkel (pp. 250 – 262).

ФЕРЕНЦ ЛУКАЧ

Э. Балинт

Life and work of F. LUKÁCS

E. BÁLINT

Szász Pál 60 esztendős

KÁRTESZI FERENC

SZÁSZ PÁL, a matematikai tudományok doktora, a Budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem professzora 1961. július 11-én lett 60 éves. Egyetemünk Matematikai Intézete félszáz oktatójának tanítómestere volt, egyetemi tanulmányaik idején. Elmondhatjuk, hogy ma már volt tanítványainak légiónyi serege szeretettel és tisztelettel fordul a 60 esztendős professzor felé, akitől az analízis alapvető ismereteit tanulta. Jó erőben dolgozik még ma is, élénk érdeklődéssel figyeli szűkebb témaköreinek legújabb fejlődését, s többet ír ma, mint fiatal éveiben. Éppen ezért korai volna matematikai munkásságát teljességre törekvő keretben ismertetni. Csupán egy-két szóval ismertetjük egyetemi pályafutását, és néhány jellemző vonással felvázoljuk tudományos munkásságát.

* * *

Iskolai és egyetemi tanulmányait Budapesten végezte, 1924-ben kapta meg tanári oklevelét a matematika-fizika szakcsoportból. Doktori szigorlatot 1927-ben tett a matematikából.

1924-től fogva — különféle oktatói fokozatok és kategóriák hosszú skáláját végigjárva — lényegében véve a Budapesti Tudományegyetem oktatójaként működik. — Az 1928/29. tanévet mint ösztöndíjas Berlinben töltötte a HUMBOLDT Egyetemen. — Egyetemünk 1933-ban magántanárrá képesítette a „Közelítő processzusok" c. tárgykörből. 1943-ban egyetemi rendkívüli tanári címmel tüntették ki.

A Tudományos Minősítő Bizottság 1952-ben a matematikai tudományok kandidátusává, majd doktori disszertációjának sikeres megvédése után, 1957-ben a matematikai tudományok doktorává nyilvánította. Oktatói és tudományos munkássága elismeréseképpen 1956-ban a Népköztársaság Elnöki Tanácsa a „Szocialista Munkáért" Érdemérem adományozásával tüntette ki. 1958-ban egyetemi tanári kinevezést nyert.

* * *

E külső események és tények ismertetése után bensőbb képet igyekszünk felvázolni dolgos oktatói és tudományos működése folyamáról.

Pályafutásának legszerencsésebb körülménye az volt, hogy kezdettől fogva, 35 esztendőn át, FEJÉR LIPÓT mellett dolgozhatott. FEJÉR nemcsak a matematika tekintetében volt mély hatással tanítványaira és a környezetében élő matematikusokra, hanem minden emberi vonatkozásban döntő befolyást gyakorolt. Kedves közvetlensége, bölcsessége, ragyogó humora, sziporkázó szellemessége mindenkit lenyűgözött. Beszélgetések során a matematikai ötletek, gondolatok gazdag bősége buggyant ki belőle, s mindig meríthetett azokból az, akinek kellő érzéke és tehetsége volt ahhoz, hogy merítsen.

SZÁSZ PÁL elsősorban a geometria axiomatikája felé fordul fokozott érdeklődéssel, és abban bontakozik ki önálló munkásságának, elért eredményeinek túlnyomó része. Mégis, nyilván FEJÉR LIPÓT hatása alatt, valamint azért is, mert oktatói munkaköre az analízishez kötötte, az analízis körébe vágó dolgozatokat is produkált, Éppen az analízis témakörébe tartozó tudományos munkássága az, ami nehezen választható el oktatói munkásságától.

Több mint két évtizeden át ő vezette be a matematika—fizika szakos tanárjelölteket az analízis alapvető ismereteibe. Az „Analízis" c. tárgy első és második tanévi előadásait — részben FEJÉR LIPÓT neve alatt — ő tartotta. Tehetségesebb hallgatóival a matematikai analízis különféle fejezeteit felölelő speciális előadások és szemináriumi munka keretében foglalkozott. Hosszú analízis-oktatói tapasztalatainak, alaposan felkészülő és aprólékos részletekig kicsiszoló előadói tevékenységének gyümölcse „A differenciál- és integrálszámítás" c. tankönyve. (1935.) Lényegesen átdolgozott és kibővített második kiadása 1951-ben jelent meg.

Ez a könyv sokkal több annál, mint amit szerény címe ígér. A valós és komplex változós függvények elméletének nem csupán az elemeivel ismerteti meg az olvasót. Felöleli mindazt az anyagot, amelyet ezekből a tárgykörökből az első három tanév folyamán elő szoktak adni. Ezen felül elvezet a klasszikus irányú analízis legújabb eredményeihez is. Betekintést nyújt különösen FEJÉR LIPÓT-nak és tanítványinak finom vizsgálataiba. Ezek közül több problémakör éppen SZÁSZ PÁL könyvében nyerte első feldolgozását. Ezért fejezte ki FEJÉR LIPÓT a könyv második kiadásához írt előszavában azt a véleményét, hogy ez a mű „*bármely országban meleg fogadtatásra találna.*"

SZÁSZ PÁL 1961-ig megjelent munkáinak jegyzéke 60 dolgozatot számlál.

Nem célunk e dolgozatok eredményeit teljességre törekvően ismertetni, a bennük szereplő tételeket egyenként megfogalmazni. Csupán SZÁSZ munkásságának témaköreit és jellegét kívánjuk felvázolni. Ezt az is indokolja, hogy SZÁSZ szívesen foglalkozik ismert tételek általánosításával, élesítésével, valamint egyes bizonyítások egyszerűsítésével, fino-

mításával, márpedig az ilyen jellegű munka lényegét és nehézségeit szinte lehetetlen egy-egy tömör kivonatban érzékeltetni. Másik kedvelt témaköre, bizonyos axiómák szerepének pontos kiderítése, és a hiperbolikus geometria axiomatikus felépítése, ugyancsak olyan jellegű dolgozatokban bontakozott ki, amelyeket kivonatszerűen aligha lehet ismertetni.

SZÁSZ PÁL dolgozatait kissé durván kategorizálva, beszélhetünk az *analízis* körébe tartozó dolgozatairól és a *geometria alapjai* néven ismert tárgykörbe vágó dolgozatairól.

Két okból is durva ez a kategorizálás. Van olyan dolgozata, melyben az analízis körébe vágó fogalmak és a tiszta geometriai fogalmak szétválasztása, vagy együttműködtetése alkotja a dolgozat mondanivalójának lényegét (ilyen például a listánkon a [4] sorszámon szereplő dolgozata). Van olyan dolgozata, melyet FEJÉR LIPÓT emlékének szentel, s FEJÉR műveiről szól, illetve az ő klasszikus vizsgálataihoz nyújt adalékot. (Ilyenek például az [55], valamint a [32] és [57] sorszámú dolgozatai.) Az egyik dolgozata pedig — mely a halmazelmélet CANTOR-féle ekvivalenciatételének KÖNIG-féle bizonyításával foglalkozik [51], a mondott bizonyítást egyszerűbbé és szemléletesebbé finomítva a KÖNIG DÉNES-féle változatánál is —, mindkét kategórián kívül esik.

Szám szerint 14 dolgozatát sorolhatjuk az első kategóriába. Ezek közül az [1], [2], [3], [5], [10], [24], [48], [53], [54], [57] dolgozatok a FEJÉR LIPÓT által is kiterjedten művelt *interpolációelméletből* merítik tárgyukat. Különféle idevágó eredmények általánosítását, élesítéseit és egyes bizonyítások egyszerűsítését vagy finomítását tartalmazzák. Az [55] dolgozatában megkísérli FEJÉR eredményeit — 12 tárgykör szerint csoportosítva — egy átfogó képben az olvasó elé tárni. A [32] dolgozata FEJÉR LIPÓT-nak a *trigonometrikus sorok* elméletével kapcsolatos vizsgálataihoz nyújt adalékot. Átmenetet alkotnak az analízis tárgyú és geometriai dolgozatok között a [4], [26] és [56]. Ezekben az elemi geometria módszereit az analízis körébe vágó különféle tételek és feladatok bizonyítására, illetve megoldására alkalmazza. Már ezeket a dolgozatokat is jellemzi az, hogy a felhasznált axiómákat gondosan elemzi, továbbá az egyszerűbb tételek és elemi módszerek alkalmazásával a bizonyításokat lényegesen egyszerűsíti. — Ebben nemcsak SZÁSZ egyéni ízlése és hajlama érvényesül, hanem FEJÉR hatása is tükröződik. Ismeretes, hogy FEJÉR szeretett geometriai képekben gondolkodni, és meghökkentően elemi eszközökkel a legmélyebb tételeket tökéletesen elintézni. — Geometriai tárgyú dolgozatait viszont az analízist művelő matematikus ízlése is jellemzi minden olyan váltópontban, ahol a geometriai kérdést követve, átvezet az út az analízis területére.

Geometriai tárgyú dolgozatai az összes dolgozatainak számban, terjedelemben és jelentőségben domináló részét alkotják. Ebbe a kate-

góriába 45 dolgozata tartozik; javarészt a BOLYAI—LOBACSEVSZKIJ-féle hiperbolikus geometria axiomatikus megalapozásával és hézagtalan, kifogástalanul szigorú felépítésével kapcsolatos kérdésekkel foglalkoznak. SZÁSZ PÁL kétségtelenül a hiperbolikus geometria megalapozásának legtájékozottabb és legtöbbet publikáló, külföldi szakemberek által is elismert művelője hazánkban. Ezt mutatja az is, hogy 1957-ben meghívták a Berkeley-ben tartott, az axiomatikus módszerrel foglalkozó symposionra. Főérdeme abban jelölhető meg, hogy BOLYAI JÁNOS művét, valamint az annak nyomán elért későbbi eredményeket úgy hozta közelebb a mai matematikusokhoz, hogy a mai igényeknek megfelelő formában átdolgozta. (Megszigorította, kiegészítette, átrendezte.) Főeredménye: *a hiperbolikus sík koordináta-geometriájának, a folytonosságot, a térgeometriát és a projektív geometriát elkerülő felépítése, ami által a hiperbolikus geometriának egy jól átgondolt, egyszerű és elemi megalapozását adta.*

Most geometriai dolgozatait részletezettebben csoportosítjuk.

Elszigeteltebbek a többiektől a [6], [7], [27], [38], [41], [60] dolgozatok.

Ezek közül a [6] annak a feladatnak a megoldását adja, hogy melyek azok a körbe beírt, a kör középpontját belsejükben vagy kerületükön tartalmazó konvex n-szögek, amelyekre nézve az oldalak négyzeteinek az összege a legkisebb. A [7] dolgozatban, az axiómák szerepére való tekintettel, KÜRSCHÁK egy segédtételével foglalkozik. A [38] dolgozatában új bizonyítást ad BOLYAI FARKAS nevezetes poligonátdarabolási tételére. Bizonyítása független a terület fogalmától, az egyenesszakaszok mérésétől és a szakaszkalkulustól. A [41] dolgozatában a hegyesszögű háromszög talpponti háromszögére vonatkozó FAGNANO tételt, valamint a hegyesszögű háromszög magasságpontjának és a talpponti háromszöge belső szögfelezői találkozási pontjának azonosságát a párhuzamossági axiómától függetlenül bizonyítja be. A [60] dolgozatban J. MOLLERUP egy a síkgeometriát a szögegyenlőség és szögegyenlőtlenség fogalmától függetlenül megalapozó dolgozatával kerül közvetett kapcsolatba. MOLLERUP régi axiomarendszerét (1904-ben adta) FORDER (1947-ben) módosította; nevezetesen a háromszögek egybevágóságáról szóló eredeti axiómát gyöngébbel helyettesítette. Ez azonban a síkgeometria felépítését erősen megnehezítette. SZÁSZ két FORDER-féle segédtételre támaszkodva, 12 jól megválasztott tételt vezet le, amelyekből az eredeti axióma bizonyított tételként következik. Ezzel a FORDER-féle tárgyalás nehézségét lényegesen csökkentette. A [27] dolgozatában a moduláris függvények felső félsíkon való ábrázolásánál fellépő körháromszöghálózat szerkezeti tulajdonságait — a szokásosnál egyszerűbben — az elemi geometria módszereinek ügyes kezelésével tárgyalja.

Már az eddig felsorolt dolgozatoknak is közös jellegzetessége az, hogy az axiomatikus tárgyalás szigorúságát és a mégis szemléletesnek ható előadásmódot szerencsésen tudja egybehangolni; a felhasználásra kerülő axiómákat gondosan elemzi, a szükségesnél erősebb, vagy a nem okvetlenül szükséges axiómák felhasználását következetesen elkerüli. Terjedelmében, jelentőségében is kiemelkedő első olyan geometria dolgozata, amelyik már a *geometria alapjai* körébe vág, a [8]. Ettől kezdve vizsgálatainak főterülete egyre inkább itt alakul ki.

Szász [8] dolgozata egy régi, Bolyai János művével kezdődő, azóta sokak által és különféle szempontból megvizsgált és megoldott problémával (új szempontból tekintve) foglalkozik. Arról a régebbi kérdésről van szó, hogy miként lehet kimutatni, hogy bizonyos síkbeli axiomák elfogadása mellett vagy az euklideszi, vagy a hiperbolikus síkgeometria érvényes; vagyis a síkgeometriáknak síkbeli axiómák alapján való *szétválasztása* c. téma az, amihez Szász dolgozata csatlakozik. Ő az euklideszi, a hiperbolikus és az elliptikus *térgeometriák szétválasztásának* problémáját oldja meg. Evégből olyan axiómarendszert vezet be, mely 8 axiómában az illesztkedésről, 5 axiómában az elválasztásról, 7 axiómában az egybevágóságról, 1 axiómában — mely három közül választandó ki — egyetlen egyenes és hozzá nem illeszkedő egyetlen ponton átmenő egyenesek viszonyáról, 1 axiómában pedig a folytonosságról szól. A három különböző — mondjuk — „párhuzamossági" axióma teljesülését az előző axiómák megengedik, de a három bármelyike a másik kettőt kizárja. Aszerint, hogy e szétválasztó hatású axiómák melyikét fogadjuk el, hozzávéve még az utolsó — lényegében Dedekind-féle —, folytonossági axiómát is, rendre az elliptikus, az euklideszi, a hiperbolikus geometria adódik.

Ettől a dolgozattól fogva Szász Pál kutatásai egyre több szempontból kiindulva és kiszélesedve a geometria alapjai problémaköreibe nyomulnak. Ha az imént ismertetett nyitányszerű dolgozatát is hozzátesszük, szám szerint 39 dolgozatáról van szó. Ezeket további alkategóriákra bontani, csoportosítani azért is nehéz, mert az átfedéseket nem lehetne kiküszöbölni. Egy-egy téma több dolgozatban is, újra meg újra szerepel, persze más-más szempontból vizsgálva; s ha esztendők múltán egy más témakörben régebben vizsgált témakörében hasznosítható felismerésekre jut a szerző, szívesen visszatér régebbi témájához. Egy-egy témakör ilyen többszöri megforgatása során a részvizsgálatok egy átfogóbb, szintetizáló jellegű dolgozattá érnek. Ilyen, több régebbi vizsgálatát is hasznosító, átfogó jellegű dolgozata például a tudományos doktori fokozat elnyeréséért benyújtott és 1957-ben sikeresen megvédett disszertációja is [42]. Minthogy Szász Pál lankadatlan érdeklődéssel folytatja még különféle szempontú vizsgálatait, korai volna azokról átfogó képet adó, teljességre törekvő méltatást

írni. Beérjük azzal, hogy néhány témaköre megjelölésével, illetve néhány témakörben végzett vizsgálatainak felvázolásával jellemezzük.

A [11], [12], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [25], [30], [33], [34], [35], [40], [58], [59] dolgozatok főtémája *a hiperbolikus trigonometria* különféle előállításai (a klasszikus eszközök felhasználásával, a különféle modellek alkalmazása kapcsán, a HILBERT-féle végkalkulus felhasználásával, a hiperbolikus sík koordinátageometriája útján, stb.). Ilyen jellegű témákkal való foglalkozásra az igen terjedelmes irodalom gondos tanulmányozása késztette. Az irodalomban ugyanis sok hézagos, nem eléggé egyszerű, részleteiben nem kellőképpen kidolgozott, alapvetésében és módszereiben nem a szükséges mértékben tiszta, tárgyalásmódjában a lehetőségekhez képest nem eléggé elemi jellegű dolgozat szerepel. SZÁSZ PÁL ezeket a fogyatékosságokat igyekezett megszüntetni, s az eddigieknél jobbat adni. Kiemelkedő, hogy a trigonometria folytonosságtól független levezetését, továbbá egy kifogástalanul megalapozott kordináta-geometriából való levezetését is adta.

A [23], [28], [29], [36] dolgozatok a hiperbolikus geometria különféle *modelljeivel* kapcsolatos kérdésekkel foglalkoznak (pl. a modell szerepeltetése az euklideszi geometria és a hiperbolikus geometria viszonyának tisztázása céljából, az ellentmondástalanság igazolása végett, egyes tételek levezetéséhez szükséges, illetve mellőzhető axiómák megállapítása érdekében).

A [22], [31] és [52] dolgozatok a hiperbolikus sík görbeíveinek a *rektifikációjával* foglalkoznak; az első kettő speciálisan az önmagukban eltolható vonalak rektifikációjával.

Dolgozatainak súlyponti csoportját a [37], [39], [42], [43], [44], [45], [46], [47] [49], [50] dolgozatai alkotják. Ezek központi témája *a hiperbolikus sík analitikus geometriájának a* HILBERT-*féle végkalkulus alapján való elemi felépítése.* A főtéma kidolgozása utáni, a mondott felépítés eredményeit kiaknázó dolgozatai *egyes axiómáknak* a hiperbolikus geometria felépítésében játszott szerepével foglalkoznak (és e dolgozatok egyikében Szász a hiperbolikus triginometriát az analitikus geometriából vezeti le). Ezeknek a dolgozatoknak a leglényegét kiemeljük — némi problématörténeti beágyazásban —, kissé részletesebben felvázoljuk.

* * *

E század első évtizedében, HILBERT előző kutatásainak hatására, megélénkült a matematikusok munkája abban a problémakörben, hogy az euklideszi és antieuklideszi geometriák felépítéséhez mely axiómákra van okvetlenül szükség, melyik axiómák helyettesíthetők gyöngébbekkel, és hogyan lehet a kialakított axiómarendszerekre a különféle geometriákat szépen felépíteni. Talán nem túlzás azt állítani, hogy HILBERT-nek a „Neue Begründung der Bolyai—Lobatschefskyschen Geometrie"

(Math. Ann., 57, 1903) c. és HJELMSLEVnek a „Neue Begründung der Ebenen Geometrie" (Math. Ann. 64, 1910) c. szellemes és mély alapötletű dolgozata az a két mű, mely a mondott problémakör továbbfejlődésére legtartósabban kihatott.

HILBERT az illeszkedési, rendezési és egybevágósági axiómák mellé egy a hiperbolikus geometriának megfelelő párhuzamossági axiómát vesz fel. Megmutatja, hogy a mondott, csupán a síkra vonatkozó axiómák alapján, *a folytonossági axiómák felhasználása nélkül* is lehetséges a hiperbolikus geometria megalapozása.

HJELMSLEV pedig azt mutatta meg, hogy a síkgeometria a folytonossági axiómák nélkül, sőt az egyenesek egymást metszésének, vagy nem metszésének valamilyen feltételezése nélkül is felépíthető.

HILBERT dolgozatának az alapötlete az egyenesekhez rendelt *végekkel való számolás* volt, aminek a segítségével az egyeneshez újabb végeket rendelt, mint koordinátákat, és (ezekkel a koordinátákkal) az egy ponton átmenő egyeneseket *lineáris egyenlet* fejezi ki. E fundamentális tétel után, a hiperbolikus geometria e tételre támaszkodó felépítését *két mondatban* vázolja fel.

HJELMSLEV dolgozatának az alapötlete az, hogy a tengelyes tükrözések szorzataként az egybevágóságok előállíthatók és a sugárseregek fogalma is definiálható. Ennek a dolgozatnak a hatására kivirágzó gazdag irodalom legérettebb mai szintézisét F. BACHMANN „Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff" c. könyve adja. A könyv nyomán már újabb kutatások folynak.

HILBERT dolgozatának hatása pedig SZÁSZ disszertációjában és a legutoljára felsorolt 10 dolgozatában csúcsosodott ki. Néhány esztendővel ezelőtt, egy beszélgetés során SZÁSZ PÁL a szóban forgó HILBERT-féle dolgozat két utolsó mondatát idézte: „Miután megállapítottuk, hogy a pont egyenlete vonalkoordinátákban lineáris, könnyen következik az egyenespárra vonatkozó speciális PASCAL-tétel és a perspektív helyzetű háromszögekről szóló DESARGUES-tétel, valamint a projektív geometria többi tétele. Ezek után a BOLYAI—LOBACSEVSZKIJ-féle geometria ismert képletei is nehézség nélkül levezethetők és így ez a geometria csupán az I.—IV. axiómák alapján is felépíthető." Nyomban hozzáfűzte, hogy vajon kell-e a projektív geometrián átvezető kerülő utat kiépíteni a szóban forgó cél érdekében? S még azt is megjegyezte, hogy a projektív geometria itt nem kellőképpen elemi jellegével nem éppen válik díszére a felépítésnek. Azóta publikált dolgozataiból kiderült, hogy SZÁSZ PÁLnak igaza volt!

SZÁSZ PÁL evégből a következő axiómarendszert használja a hiperbolikus geometria megalapozásánál. A HILBERT-féle illeszkedési (síkbeli), rendezési és egybevágósági axiómákat, vagyis az I, II és III axió-

macsoportokat. A HILBERT-féle IV, hiperbolikus párhuzamossági axióma helyett pedig a következő két axiómát vezeti be:

IV. 1. Legyen a sík két különböző pontja P és Q, továbbá QY valamely félegyenes a PQ egyenes egyik oldalán. Akkor mindig van a PQ egyenesnek ugyanazon az oldalán olyan PX félegyenes, mely QY-t nem metszi, de a $QPX\sphericalangle$ minden közbülső PZ félegyenese metszi ezt a QY félegyenest.

IV. 2. Van a síknak olyan e_0 egyenese és ahhoz nem illeszkedő P_0 pontja, hogy a P_0 ponthoz nem csak egy olyan egyenes illeszthető, mely az e_0 egyenest nem metszi.

A hiperbolikus geometria értelmében párhuzamos egyenessereg közvetítésével bevezeti a *végtelen távoli pontokat* — a HILBERT szerinti „végeket" —, így minden egyenesnek két vége van. Felvesz egy O csúcspontú derékszöget, a derékszög szárainak mint félegyeneseknek a végét ω-nak és ε-nak nevezve, ezeket a végeket kitünteti. A *végkalkulust* az ezektől különböző végekre értelmezi. A végek *pozitív* és *negatív* osztályát, valamint a végek összeadását HILBERT szerint definiálja. A szorzat definiciójának egyszerűbb kifejezése céljából bevezeti a következő távolságfüggvényt:

Az ω felé irányított $O\omega$ egyenes OA darabját az A végpont O-hoz és ω-hoz viszonyított helyzete szerint előjelezzük. Az előjelzett $OA = t$ egyenesdarab A végpontjában $O\omega$-ra állított merőleges egyenes pozitív végét, a μ véget a

$$\mu = E(t)$$

által jelöljük. Bármely μ pozitív vég egy és csak egy előjeles t egyenesdarabhoz tartozik.

Így a μ_1 és μ_2 végek $\mu_1\mu_2$ (sorrendű) szorzatán az $E(t_1 + t_2)$ véget értjük, vagyis

$$E(t_1) \cdot E(t_2) = E(t_1 + t_2)$$

Ezen az úton haladva a szorzás fogalma a negatív végekre is kiterjeszthető és az ω-től különböző minden végre érvényes műveleti szabályok adódnak, melyekben az $O\omega$ egyenes másik vége a zérus, az ε pedig a pozitív egység szerepére emlékeztet. Az így kialakított végkalkulusban — a négy alapműveletet tekintve — ugyanazok a műveleti szabályok érvényesek, mint a rendes számokkal való számolásban. Sőt az is kiadódik, hogy minden pozitív végnek van pozitív négyzetgyöke, mert az egyenesdarabnak az I – III axiómákból következőleg van felezőpontja, és $E(t) = E\left(\frac{t}{2}\right) \cdot E\left(\frac{t}{2}\right)$ a szorzat definíciója alapján. S végül értelmezhetővé válik a végekre nézve a $\varrho < \sigma$ (vagy $\varrho > \sigma$) reláció is.

Rövidség kedvéért Szász még három más távolságfüggvényt is bevezet:

$$C(t)=\frac{E(t)+E(-t)}{2},\quad S(t)=\frac{E(t)-E(-t)}{2},\quad T(t)=\frac{E(t)-E(-t)}{E(t)+E(-t)}.$$

A HILBERT-féle végkalkulus e célszerű átdolgozása alapozza meg a hiperbolikus sík közönséges pontjait és egyeneseit jellemző „WEIERSTRASS-féle homogén koordinátáinak" a bevezetését.

Ezek bevezetésének alapjául Szász következő tétele szolgál:

A hiperbolikus sík pontjai és az ω-tól különböző végekből álló ama (ξ, η, ζ) véghármasai közt, amelyekre nézve a

$$\xi^2-\eta^2-\zeta^2=1,\ \zeta>0$$

kirovások teljesülnek, egy-egyértelmű vonatkozás létesíthető. E vonatkozás úgy létesíthető, hogy a (t, σ) vegyeskoordinátapárral adott ponthoz a

$$\begin{cases}\xi=S(t)+\frac{1}{2}\sigma^2E(-t)\\ \eta=\sigma E(t)\\ \zeta=C(t)+\frac{1}{2}\sigma^2E(t)\end{cases}$$

véghármast rendeljük hozzá.

A (ξ, η, ζ) és (ξ', η', ζ') véghármasok definiálta két pontra nézve mindig

$$\xi\xi'-\eta\eta'-\zeta\zeta'>0.$$

Célszerű az egyenes vonalkoordinátáit az egyik vége felé irányított egyenes jellemzésére bevezetni.

A „WEIERSTRASS-féle homogén vonalkoordináták" ugyancsak egy (α, β, γ) véghármast jelentenek, amelyek az ω-tól különböző λ_1 és λ_2 végek meghatározta, a λ_1 vég felé irányított egyenest a következő módon jellemzik:

$$\alpha=\frac{\lambda_1\lambda_2-1}{\lambda_1-\lambda_2},\quad \beta=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2},\quad \gamma=\frac{\lambda_1\lambda_2+1}{\lambda_1-\lambda_2},$$

ahol mindig

$$\alpha^2+\beta^2-\gamma^2=1.$$

A koordinátázásnak a $(t, \sigma)=(0, 0)$ pontra és az ω végű egyenesekre való kiterjeszthetését megmutatva, bebizonyítja, hogy a pont és egyenes illeszkedését az

$$\alpha\xi+\beta\eta-\gamma\zeta=0$$

egyenlet fejezi ki.

Ez után az elkerülhetetlenül hosszú „vázlat" után a további eredmények közlését már rövidebbre vehetjük.

Az eddigieket a síkbeli mozgás és átfordítás koordinátákkal való megfogalmazása, majd a pont- és vonalkoordináták transzformációs formuláinak levezetése követi. Azután a pontnak ponttól egyenestől való távolságát kifejező formulák levezetése, majd a két egyenes kölcsönös helyzetét kifejező formulákat állapítja meg. Mindezek lehetővé teszik a trigonometria fő tételeinek egyszerű levezetését, a hiperbolikus sík mozgásainak és átforgatásának a végkalkulus segítségével való kifejezését és tanulmányozását, a köraxiómának tételként való levezetését (a derékszögű háromszög oldalai közt fennálló egyenletből).

A WEIERSTRASS-féle homogén koordinátákat kiterjeszti végtelen távoli és az ideális pontra is. (Az ideális pontot a közös merőleges szelővel rendelkező egyenessereggel definiálja; vagyis a hiperbolikus síkon valóságos, végtelen távoli és ideális pontokról beszélhetünk.) A hiperbolikus síkgeometriának a POINCARÉ-féle félsíkkal való azonossága a folytonosságtól független — ezt KERÉKJÁRTÓ B. bizonyította be 1940-ben, de az ő bizonyítása még egy 40 oldal terjedelmű dolgozatot igényelt —, ezt a tételt SZÁSZ PÁL roppant egyszerűen és röviden bizonyítja be. Nála lényeges szerepet kap egy mesterséges euklideszi síkgeometria (az euklideszi síkot a végtelen távoli elemekkel bővítve gondoljuk), ennek pontjait a hiperbolikus sík valóságos, végtelen távoli és ideális pontjai jelentik.

* * *

Ismertetésünket azzal a jókívánsággal zárjuk, hogy SZÁSZ PÁL jó egészségben, lankadatlan hévvel folytassa matematikai kutatómunkásságát.

Szász Pál tudományos munkáinak jegyzéke

I. Dolgozatok

1. Über einen Mittelwertsatz. Mathematische Zeitschrift 25 (1926).
2. A differenciálszámítás középértéktételével kapcsolatos kérdésekről. Matematikai és Fizikai Lapok 33 (1927).
3. A differenciálszámítás egy általános középértéktételéről. Uo. 35 (1928).
4. Konvex és monoton függvényekről. Uo. 36 (1929).
5. A simuló paraboláról. Uo. 38 (1931).
6. Egy minimum-feladat a körbe beírt sokszögekre vonatkozólag. Uo. 42 (1935).
7. Megjegyzések Kürschák József egy munkájához. Uo. 47 (1937).
8. Az elliptikus, az euklidesi és a hiperbolikus geometria szétválasztása. Uo. 48 (1941).
9. A hiperbolikus trigonometriáról. Uo. 48 (1941).
10. Az aequidistans interpolációról. Uo. 49 (1942).
11. Neue Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie in der Ebene. Szegedi Acta 12 (1950).
12. Verwendung einer klassischen Konfiguration Johann Bolyai's bei der Herleitung de hyperbolischen Trigonometrie in der Ebene. Uo. 14 (1952).

13. N. I. Lobacsevszkij „Geometriai vizsgálatok a párhuzamosok elméletének köréből" c. könyvéről. A MTA III. Osztályának Közleményei 2 (1952).
14. Neue Bestimmung des Parallelwinkels in der hyperbolischen Ebene mit den klassischen Hilfsmitteln. Szegedi Acta 14 (1952).
15. Neue Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie durch Verwendung der Grenzkugel. Acta Math. Hung. 3 (1952).
16. A hiperbolikus trigonometria különböző elemi előállításai. A MTA III. Osztályának Közleményei 3 (1953).
17. Beweis der Hauptformel der hyperbolischen Trigonometrie unabhängig von der Stetigkeit. Szegedi Acta 15 (1953).
18. A hiperbolikus trigonometria közvetlen előállítása a tér felhasználásával. A MTA III. Osztályának Közleményei 3 (1953).
19. A hiperbolikus trigonometria új előállítása a paraszféra felhasználásával. Uo. 3 (1953).
20. A hiperbolikus trigonometria új síkbeli előállítása a klasszikus segédeszközökkel. Uo. 3 (1953).
21. Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie in der Poincaréschen Halbebene. Szegedi Acta 15 (1954).
22. Über die Rektifikation des Kreises, des Grenzkreises und der Abstandslinie. Acta Math. Hung. 4 (1953).
23. Über die Hilbertsche Begründung der hyperbolischen Geometrie. Uo. 4 (1953).
24. Megjegyzés Fejér Lipót egy munkájához. Az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karának 1952—53. tanévi évkönyve, 1954.
25. Über die Trigonometrie des Poincaréschen Kreismodells der hyperbolischen ebenen Geometrie. Acta Math. Hung. 5 (1954.)
26. Az elemi körmérésről. Matematikai Lapok 5 (1954).
27. A moduláris csoport geometriai interpretációjáról. A MTA III. Osztályának Közleményei 5 (1955).
28. Elementargeometrischer Beweis der Widerspruschsfreiheit der hyperbolischen Raumgeometrie mit Hilfe des Poincaréschen Halbraumes. Acta Math. Hung. 5 (1954).
29. Elementargeometrische Herstellung des Klein-Hilbertschen Kugelmodells des hyperbolischen Raumes. Szegedi Acta 16 (1955).
30. Diverses présentations élémentaires de la trigonométrie hyperbolique. Acta Math. Hung. 5 (1954). Supplementum.
31. A ciklusívek rektifikációjáról. A MTA III. Osztályának Közleményei 5 (1955)
32. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ sinus-sor maradéktagjáról. Matematikai Lapok 6 (1955).
33. A hiperbolikus trigonometria leolvasása a Poincaré-féle körmodellről. A MTA III. Osztályának Közleményei 6 (1956).
34. A hiperbolikus trigonometria előállítása a Poincaré-féle félsík útján. Uo.
35. Hyperbolische Trigonometrie an dem Poincaréschen Kreismodell abgelesen. Acta Math. Hung. 7 (1956).
36. A Poincaré-féle félsík és a hiperbolikus síkgeometria kapcsolatáról. A MTA III. Osztályának Közleményei 6 (1956).
37. A hiperbolikus sík analitikus geometriájának independens elemi felépítése a Hilbert-féle „végkalkulus" alapján. (Előzetes közlemény). Uo.
38. Bolyai Farkas sokszögátdarabolási tételéről. Matematikai Lapok 7 (1956).
39. Begründung der analytischen Geometrie der hyperbolischen Ebene mit den klassischen Hilfsmitteln, unabhängig von der Trigonometrie dieser Ebene. Acta Math. Hung. *8*, 139—157, 1957.
40. Die hyperbolische Trigonometrie als Folge der analytischen Geometrie der hyperbolischen Ebene. Acta Math. Hung. *8* 159—161, 1957.

41. Ein elementargeometrischer Beweis von H. A. Schwarz vereinfacht und unabhängig vom Parallelenaxiom geführt, Acta Math. Hung. *8*, 217—222, 1957.
42. A hiperbolikus sík analitikus geometriájának independens elemi felépítése, a Hilbert-féle végkalkulus alapján. Doktori értekezés, megvédve 1957. máj. 10.
43. Direct introduction of Weierstrass' homogeneous coordinates in the hyperbolic plane on the basis of the end-calculus of Hilbert. (Előadás, a szerző távollétében felolvasva a Berkeleyban Calif. tartott „The axiomatic method in mathematics" symposiumon, 1957. dec. 30.)
44. A remark on Hilbert's foundation of the hyperbolic plane geometry, Acta Math. Acad. Sci. Hung. *9* 29—31, (1958).
45. Neuer Beweis für die Darstellung der Bewegungen und Umwendungen der hyperbolischen Ebene mit Hilfe der Hilbertschen Endenrechnung. Annales Univ. Sci. Budapest. Sectio Math. *1*, 67—70 (1958).
46. New proof of the circle axiom for two circles in the hyperbolic plane by means of the end-calculus of Hilbert. Annales Univ. Sci. Budapest. Sectio Math. *1*, 97—100 (1958).
47. Direct introduction of Weierstrass homogeneous coordinates in the hyperbolic plane, on the basis of the endcalculus of Hilbert. The Axiomatic Method etc., Summaries of Papers, University of California. Dept. of Math. Berkeley, 56—63. (1958).
48. On a mean-value Theorem of Schwarz-Stieltjes. Acta Sci. Math. Szeged 19 46—50. (1958).
49. Unmittelbare Einführung Weierstrassscher homogenen Koordinaten in der hyperbolischen Ebene auf Grund der Hilbertschen Endenrechung. Acta Math. Acad. Sci. Hung. *9* 1—28, (1958).
50. Direct introduction of Weierstrass homogeneous coordinates in the hyperbolic plane, on the basis of the endcalculus of Hilbert. The Axiomatic Method etc., Amsterdam, 97—113, 1959.
51. A halmazelmélet ekvivalencia-tételéről. Matematikai Lapok *10* 49—52. 1959.
52. Über die Rektifikation von Kurvenbogen im Poincaréschen Kreismodell der hyperbolischen Geometrie der Ebene. Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Math. *2* 115—122, 1959.
53. Remarque sur un ouvrage de M. Léopold Fejér. Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Math., *2* 151—155, 1959.
54. On quasi-Hermite-Fejér interpolation. Acta Math. Acad. Sci. Hung. *10* 413—439, 1959.
55. Fejér Lipót (1880—1959). — MTA III. Oszt. Közleményei *10* 103—147, 1960.
56. Einfache Herstellung einer Klasse von nirgends differenzierbaren stetigen Funktionen auf Grund eines elementaren Satzes der analytischen Geometrie. — Publ. Math. *7*, 1—9, 1960.
57. On a theorem of L. Fejér concerning trigonometric interpolation. — Acta Sci. Math. Szeged *21*, 164—165, 1960.
58. Ein bequemer Weg zur Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie mit Hilfe der Grenzkugel. — II. Magyar Mat. Kongr. Előadáskiv. *1* (II), 65—66, 1960.
59. Einfache Herstellung der hyperbolischen Trigonometrie in der Ebene auf Grund der Hilbertschen Endenrechung. — Vortragsauszüge des. Österr. Mathematikerkongr. in Innsbruck, 44—45, 1960.
60. On Axioms of Congruence Due to H. G. Forder. — Monatshefte für Mathematik, **65**., 270—276, 1961.

II. Könyvismertetések

61. Karl Reinhardt, Methodische Einführung in die höhere Mathematik. Könyvismertetés, Szegedi Acta 9 (1939).

62. Ernst Lindelöf, Einführung in die höhere Analysis. Könyvismertetés, Uo. 9 (1940).
63. Gustave Verriest, Introduction a la géométrie non euclidienne par la méthode élémentaire, Könyvismertetés, Uo. 14 (1952).
64. R. Baldus — F. Löbell, Nichteuklidische Geometrie. Könyvismertetés, Szegedi Acta 17 (1956).

III. Könyvek

65. A differenciál- és integrálszámítás elemei. Az előszót írta Fejér Lipót. Budapest, 1935. Franklin-Társulat.
66. A differenciál- és integrálszámítás alapfogalmai. Budapest, 1948/49. Diószegi Sokszorosító.
67. A differenciál- és integrálszámítás elemei. Teljesen átdolgozott és lényegesen bővített második kiadás. Az előszót írta Fejér Lipót. Budapest, 1951, Közoktatásügyi Kiadó Vállalat.

ПАЛУ САСУ — 60 ЛЕТ

Ф. Картеси

THE WORK OF P. SZÁSZ

F. KÁRTESZI

A matematika poézise

Problémák, távlatok

Sz. Szoboljev

Képzeljük el egy pillanatra, hogy előttünk nem az újság mai száma fekszik, hanem az, amelyik körülbelül húsz év múlva fog megjelenni. Meg sem kíséreljük, hogy tartalmára teljes pontossággal előre következtessünk, hogy előre megmondjuk, népünk milyen új teljesítményeiről fognak az egyes tudósítók beszámolni és milyen problémákat vetnek majd fel ebben a már nem is távoli jövőben az újságírók. Egyet azonban teljes bizonyossággal állíthatunk már ma: az 1981-ben megjelenő újságokban, akár az „Izvesztyijáról", akár a „Szeljszkaja zsiznyről", a „Komszomoljszkaja Pravdáról" vagy a „Literaturnaja Gazetáról" legyen is szó, a matematikával valamilyen kapcsolatban levő anyag sokkal több helyet fog elfoglalni, mint napjainkban. De nem azért, mert valamennyi szerkesztő hirtelen különös vonzalmat fog érezni az emberi ismeretek ezen ága iránt. Egyszerűen arról van szó, hogy ezt az élet fogja így követelni.

Manapság a különböző tudományágak „matematizálódásáról" szoktunk beszélni, arról, hogy a matematika egyre inkább olyan sajátos cementté válik, amelyik a tudományt egységes egésszé köti össze. Hiszen a tudomány nem önmagáért létezik és nem is önmagáért fejlődik. Az elméleti kutató elgondolása és elgondolásának a mindennapi gyakorlatban való bizonyos felhasználása közötti távolság rohamosan csökken. A tudomány matematizálódása — az élet matematizálódása.

A Szovjetunió Kommunista Pártjának programjában olvasható, hogy a kibernetikát, az elektronikus digitális számoló- és vezérlőberendezéseket az ipari termelési folyamatokban, az építőiparban, a tudományos kutatásban, a tervezési és szerkesztési számításokban, a kalkuláció és az irányítás területén széles körben fogják alkalmazni. Már most gondoskodni kell arról, hogy ez, a nép javát szolgáló behatolás, minél gyorsabban menjen végbe.

A Szovjetunió Tudományos Akadémiája Szibériai Tagozata Matematikai Intézetének és Számítástechnikai Központjának munkatársai

legfontosabb feladatuknak a gyorsműködésű elektronikus számológépek egyre újabb tudományos és gyakorlati alkalmazási lehetőségeinek kidolgozását — majd propagálását — tartják.

Intézetünkben nemrég kisebb kiállítást rendeztünk; néhány táblán bemutattuk a Számítástechnikai Központ munkáját. Nem egészen egy év alatt egyetlen géppel körülbelül száz különböző típusú feladatot oldottunk meg. Hogy az olvasó az elvégzett munka terjedelméről helyes képet nyerhessen, elég megemlíteni — mint ez már széles körben ismeretes — az ősi maya írás megfejtését. Ennek az ősi, történelmi rejtélynek a megoldásához „régi" kutatómódszerekkel egy emberélet munkája lett volna szükséges. Itt nem kell különösebben hangsulyoznunk az elektronikus számítástechnika szerepének fontosságát különböző egzakt tudományokban. Szeretnék itt most azzal foglalkozni, milyen segítséget nyújt — és nyújthat a jövőben — a kibernatika a természettudományok, a társadalomtudományok és a humán tudományok fejlődésében.

Közismert, mennyire jelentős a kémia mai állása mellett az úgynevezett röntgenspektroszkópiával végzett analízis. A közelmúltban egy-egy molekuláris szerkezet feltárásához egy egész év is kellett. Ebben a vonatkozásban először Moszkvában, majd Novoszibirszkben megkísérelték az elektronikus számítástechnika alkalmazását. A gép, amely rövid idő alatt „végigpróbálja" az atomok összes lehetséges kombinációit, fel sem sem mérhető módon megrövidíti a kutatási munkát. Intézetünkben V. I. BURGYINA, a fizikai és matematikai tudományok kandidátusának, vezetésével dolgozó kutatócsoport vegyészekkel együtt úgynevezett kétdimenziós molekuláris szerkezetek analízisére alkalmas programot dolgozott ki; analóg rendszert dolgoztak ki a bonyolultabb — háromdimenziós — szerkezetek vizsgálatára is.

Intézetünk egyik szobájának ajtaján rövid hirdetmény olvasható: „Itt tartjuk minden csütörtökön az alkalmazott kibernetikai szemináriumot. A legközelebbi ülés témája — a szívbetegségek diagnosztikája elektronikus számológép segítségével." A matematikai módszerek térhódítása az orvostudományban, a biológiában — a modern tudomány egyik legérdekesebb jelensége.

A páciens panaszkodik a szívére, de az orvosok nem tudják megmondani, hogy mi a baja. Ilyenkor segítséget nyújthat a gép; elektromos „agya" az általa beszélt „nyelven" tárolja az adatokat. A szívműködést ábrázoló görbéket a gép matematikailag elemzi, megállapítja a szemmel nem látható törvényszerűségeket és rendellenességeket, amelyek alapján bizonyossággal eldönthetjük: a megvizsgált személy beteg vagy egészséges. Más hasonló példák is — amikor a gép „élesebb szeműnek" bizonyult a tapasztalt orvosnál — fordultak elő a munkatársainkból álló és a Tudományos Akadémia Szibériai Tagozata Kísér-

leti Biológiai és Orvostudományi Intézetének kutatóival együttműködő csoport gyakorlatában. Egyelőre még csak az első lépéseknél tartanak, de számíthatunk arra, hogy a kutatási módszerek tökéletesítése idővel lehetővé fogja tenni, hogy minden esetben megfelelő pontosságú diagnózist állíthassunk fel...

Nagyok a kibernetika alkalmazásának távlatai a humán kutatások területén is. A humán tudományok — köztük a történelem, az archeológia, a nyelvtudomány — már most is igen kiterjedten alkalmazhatják a számítástechnika apparátusát. Nyilvánvaló, hogy a közeljövőben számos egyszerűbb műszaki fordítást elektronikus gépre bízhatunk majd és meggyőződésem, hogy azok a nyersfordítás feladatát jól fogják megoldani.

A tapasztalat megmutatta, milyen nagy távlatokat nyújt az elektronikus számológépek alkalmazása a nyelvtudományban. Most, amikor Számítástechnikai Központunk Alkalmazott Kibernetikai Osztályának munkatársai sajtó alá rendezik a megfejtett maya szövegek harmadik, azaz utolsó kötetét, máris új kutatásokra gondolnak. Még sok megfejtésre váró ősi írott emlék akad. Aki olvasta T. HEYERDAHL népszerű műveit, az tudja, mi az a „rongo-rongo". Ezek a titokzatos táblák egy eltűnt kultúra emlékei, melyeket norvég tudósok fedeztek fel a távoli Húsvét-szigeteken. Ki a megmondhatója, milyen értékes adatokat tartalmaznak az emberiség múltjáról azok az ősi tangut államból származó, eddig el nem olvasott kéziratok, melyeket annakidején még Kozlov, a nagy orosz utazó talált Kína területén; vagy a kréta-mykenei kultúra idejéből származó lineáris a-írás (melyet a már megfejtett b-írástól való megkülönböztetésül neveznek így)?

Remény van rá, hogy ha egy szép napon földünk rádióállomásai a világegyetem mélyéből valamilyen értelmes lény által küldött jelzéseket fognak felfogni, úgy azok megfejtésében az ősi írásos emlékek kibetűzésében alkalmazott módszerekhez hasonlók fognak segítséget nyújtani.

Az elektronikus gépek segítséget nyújthatnak a nyelvtudományi kutatások területén, a nyelvek közötti összefüggések és „rokonsági kapcsolatok" felderítésében is, továbbá az irodalomtudományi jellegű kutatómunkában. Ismert A. N. KOLMOGOROV munkássága, aki matematikai módszer segítségével költői műveket elemezett. Feltétlenül jelentős lesz az elektronikus számológépek alkalmazása az irodalmi szövegek és zenei töredékek szerzőségének megállapításában. Minden írónál és zeneszerzőnél egyéni, kedvelt fordulatok, stilisztikai sajátosságok tapasztalhatók. Ezek többé-kevésbé felmérhetők és kódolhatók. Ha az elektronikus számológép memória-egységébe a megfelelő adatokat elhelyezzük, választ kaphatunk arra, hogy az adott szerzőnek tulajdonított mű valóban tőle származik-e.

A „Voproszi isztorii" c. folyóirat 8. számában munkatársunk, V. A. Usztyinov tollából cikket közölt „Az elektronikus matematikai gépek alkalmazásáról a történelemtudományban" címmel. (V. A. Usztyinov a maya szövegek megfejtésével foglalkozó kollektíva egyik vezető tagja. Képzettségére nézve történész, aki második „szakmát" sajátított el — a matematikát. Amikor disszertációja megvédésére készült, az Intézetben még vita is támadt: a matematikai vagy a történettudományok kandidátusa címet nyerje-e el Valentyin Alekszejevics.) A cikkben Usztyinov a történelmi kutatással kapcsolatban egész sor olyan területet nevez meg, ahol az elektronikus matematikai gépek eredményesen alkalmazhatók. Ezek közé tartozik a paleográfia, az archeológia és részben a múlt olyan emlékeinek osztályozása, amelyek alapján megállapítható az egyes kultúrák kölcsönhatása, a numizmatika stb.

A matematikának a humán tudományok „birodalmába" való benyomulásával kapcsolatban természetesen felmerül az elektronikus gépek alkotóképességének kérdése is. Már idéznek verseket, dallamok hangzanak el, amelyeknek elektronikus gép a szerzőjük. Egyelőre azonban még korai lenne ezen kísérletek valamennyire is komoly jelentőségéről beszélni, még kevésbé a gépeknek költőkkel és zeneszerzőkkel való bármilyen versengéséről. Helyénvalónak látszik itt A. N. Kolmogorov szavait idézni: „... a tanuló automaták vagy a komponáló illetve verset író automaták megtervezésénél néha az ember magasabb idegtevékenysége és részben alkotó tevékenysége valódi jellegének rendkívül leegyszerűsített elképzeléséből indulnak ki." A lirikusoknak így nincs mitől tartaniok. Egyes kisegítő jellegű megbízásokat az elektronikus gépek azonban valószínűleg már a közeljövőben képesek lesznek teljesíteni — így pl. zenei műveket hangszerelni, opera- és szimfonikus zeneszámokat zongorára átírni...

Nagy hasznot hajt az elektronikus számítástechnika alkalmazása a társadalmi-gazdasági kutatásban, konkrét gazdasági kérdések, úgynevezett tömegcikk szétosztási problémák megoldásában. A modern matematika olyan területeinek felhasználásával, mint amilyen az operációkutatás, a játékelmélet, egész gazdasági, kulturális ágazatok legjobb irányításának módszerei dolgozhatók ki, nem is említve az egyes üzemek optimális termelési terveinek kidolgozását. A korszerű termelés bonyolult rendszerében néha valóban nehéz felkutatni és kihasználni az összes tartalékokat. Intézetünk (lineáris programozási módszerrel) kidolgozta a novoszibirszki területi népgazdasági tanács műszergyárának optimális tervét, amely a megadott felszerelés egy évre szóló teljes foglalkoztatottságát irányozta elő. A termelés megnövekedett, előzetes számítások szerint ez mintegy 10-%ot tesz ki. Nem nehéz elképzelni, milyen sokat jelentene a tervezés ilyen módszerének alkalmazása országos méretekben.

Munkánkból még sok hasonló példát hozhatunk fel, el kell ismernünk azonban azt is, hogy kapcsolatunk az ipar- és méginkább a mezőgazdaság — dolgozóival még távolról sem megfelelő. Ezt szemünkre vetik és igazuk van. A közös ügy sikeréhez azonban a résztvevők munkájának koordinációja szükséges, ez pedig még nincs mindig meg.

Tudósaink kezdeményezésére a novoszibirszki területi népgazdasági tanácsban nemrég szemináriumot tartottunk mérnökök és technikusok számára az elektronikus számológépeknek a termelésben való alkalmazásáról. Az idén körülbelül hatvan felsőfokú képzettséggel rendelkező szakember végez a Matematikai Intézetben esti tanfolyamot a matematika és programozás kérdéseiről.

Mindez azonban csupán csepp a tengerben. Már most gondolnunk kell a jövőre, de nemcsak a holnapra, hanem a holnaputánra is. A népoktatás új rendszere bebizonyította az életrevalóságát. A jövő mérnökei és technikusai tudatosabban választják meg foglalkozásukat, miután a munka „izét" a népgazdaság valamelyik ágában már megízlelték. Nem szabad szemet hunynunk azonban az előtt a tény előtt sem, hogy ugyanakkor számunkra matematikusok számára, bizonyos nehézségek mutatkoznak. A matematika iránt hajlamot érző ifjú elvégzi az iskolát, utána két-három évig dolgozik vagy a hadseregben szolgál, majd elhatározza, hogy tanulmányait folytatja. Elfelejtett ismereteit természetesen felfrissíti, elegendő mértékben ahhoz, hogy végeredményben ne legyen rossz mérnök belőle, de felmerül a kérdés, vajon elegendő-e ez ahhoz, hogy matematikus legyen? Nem árt elgondolkozni azon, hogy a matematikusnál a legtermékenyebb életkor korábban kezdődik, mint a legtöbb egyéb szakterület tudósainál — azaz huszonkét, huszonhárom, huszonnégy éves korban . . . Hol itt a megoldás? Érdekes távlatokkal kecsegtet a matematikusokat-számolótechnikusokat képző középiskolák szervezése. Nálunk Novoszibirszkben létesült egy ilyen iskola. A felsőbb matematika alapjait ebben az iskolában Intézetünk munkatársai oktatják. Ahhoz azonban, hogy ezt a problémát megoldjuk, egész Novoszibirszkre nemcsak egy, egyész Moszkvára pedig nem csupán két ilyen iskolának kellene jutnia . . .

Miután már elkezdtem az utánpótlás képzésének kérdéseiről írni, ezt a problémát még egy oldalról kell megvilágítanom, mely valószínűleg nemcsak a matematikusokat foglalkoztatja. Ha már felmerül a kérdés, hogy az 1981. évi újságban a matematikával összefüggő kérdések mekkora helyet foglalnak majd el, akkor azt kell mondanom, hogy véleményem szerint a futballmérkőzésekről szóló öles beszámolókat összébb fogják szorítani. Nehezemre esik a labdarúgás és általában a sport ellen szólnom, minthogy magam is szeretek sielni és úszni. De vajon, nem keverednek-e nálunk össze a fogalmak? Minden ifjúsági újság feladatának véli, hogy a napi híreken kívül a labdarúgásnak gyakran egész

oldalt szenteljen. A szúrkolók érzelemkitöréseiről elragadtatással számolnak be.

Az egyik népi demokráciában szovjet barátsági hónapot tartottak. Arról, hogy a barátsági hónap megünneplésében szovjet tudóscsoport is részt vett, újságjaink, minden részletezés nélkül, mindössze egy sort írtak, holott tudósaink külföldi barátainknak számos előadást tartottak, melyek nagy érdeklődést keltettek. Labdarúgócsapatunk szereplésének ezzel szemben tekintélyes terjedelmet szenteltek: részletesen beszámoltak arról, hány gólt lőttek és ezek a gólok a mérkőzés hányadik percében estek . . .

Félre a tréfával; fiatalságunk egy része így, enyhén szólva, nem egészen pontos képet kap arról, hogy mi az, ami fontos és mi az, ami nem.

A Szovjetunió Tudományos Akadémiájának teljes ülése, mely a XXII. pártkongresszus eredményeivel foglalkozott, „a tudomány és a kommunizmus" jelszót írta zászlajára. A kommunizmus építésében a tudományoknak, köztük a matematikának, hatalmas aktív szerep jut. Nem szabad törődnünk egyes külföldi fantaszták sötét jóslataival, akik az embert elnyomó gépek eljövendő uralmáról beszélnek. A kibernetika velünk egy sorban fog haladni, barátként, és lehetővé fogja tenni, hogy egyre több „durva" munkát végeztessünk gépekkel, és ezzel az emberiség szellemi energiájának kolosszális készleteit a magasabb alkotó munka számára szabadítsuk fel. A kommunista társadalomban a matematikusi hivatás az egyik legelterjedtebb foglalkozás lesz. Erre már most fel kell készülnünk.

Fordította: *KRÁMER EDIT*

ПОЭЗИЯ МАТЕМАТИКИ

С. Соболев

THE POETRY OF MATHEMATICS

S. Sobolev

Számelméleti megjegyzések, III.
Néhány additív számelméleti problémáról

ERDŐS PÁL

E cikkben néhány újszerű additív számelméleti problémával fogunk foglalkozni, melyek talán nem érdektelenek, továbbá szokatlan, s nem teljesen megoldott kérdésekre vezetnek.

E cikkben $1 \leqq a_1 < a_2 < \dots$ egész számok sorozatát fogja jelenteni, $A(x) = \sum_{a_i \leqq x} 1$ az a-k számát jelenti x-ig. Az $a_1 < a_2 < \dots$ sorozatot A-val fogjuk jelölni. Az A sorozat sűrűsége akkor 0, ha $\lim_{x=\infty} A(x)/x = 0$, ha $\limsup A(x)/x = \alpha$, akkor α az A felső sűrűsége.

Könnyű belátni, hogy ha $A(x) \geqq \frac{x+1}{2}$, akkor az

$$a_i + a_j = a_r, \quad i < j < r$$

egyenlet megoldható, s a páratlan számok (vagy az $\left[\frac{x}{2}\right]$ és x közötti számok) példája mutatja, hogy ez az egyenlőtlenség általában nem javítható. Mármost bebizonyítjuk a következő tételt:

I. TÉTEL. *Ha A olyan, hogy egyik a sem bontható fel csupa különböző a összegére, akkor A sűrűsége* 0.

Feltételünk nyilván azt jelenti, hogy

$$a_k = a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_r}, \quad i_1 < i_2 < \dots < i_r \tag{1}$$

egyenletnek semmilyen k és r-re sincsen megoldása. Ebből viszont nyilván következik, hogy ha az

$$a_1 + \dots + a_r + a_k, \quad r < k < \infty \ (r \text{ fix})$$

sorozatot A_r-el jelöljük, akkor az A_r, $0 \leqq r < \infty$ (A_0-al az A sorozatot jelöljük) sorozatok páronként idegenek. Nyilván tehát fennáll, hogy

minden k-ra és x-re

$$x \geqq \sum_{i=0}^{k} A_i(x) \geqq (k+1) A_k(x). \tag{2}$$

Továbbá

$$A_k(x) = A\left(x - \sum_{i=1}^{k} a_i\right) - k \geqq A(x) - \sum_{i=1}^{k} a_i - k. \tag{3}$$

(2) és (3)-ból

$$A(x) \leqq \frac{x}{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i + k. \tag{4}$$

Minthogy (4) minden k-ra fennáll, azonnal nyerjük, hogy $\lim_{x=\infty} A(x)/x = 0$, s ezzel tételünk be van bizonyítva.

Ugyanúgy belátható, hogy A sűrűsége akkor is 0, ha az (1) egyenletnek csak véges sok megoldása van. Ha feltesszük, hogy $A(x) > cx$ minden $x > x_0$-ra, valószínűnek látszik, hogy az (1) egyenlet x-nél kisebb megoldásainak száma x-szel együtt nagyon gyorsan (talán exponenciálisan tart a végtelenhez.

Bizonyításunkból nyilván következik, hogy ha az (1) csak $2 \leqq j \leqq r$ esetén nem megoldható, akkor A felső sűrűsége $\leqq \frac{1}{r} . a_k = 1 + kr$, $0 \leqq k < \infty$ példája mutatja, hogy ez az állítás nem élesíthető.[1]

Most bebizonyítjuk, hogy az I. tétel bizonyos értelemben nem javítható. Ki fogjuk ugyanis mutatni, hogy ha $f(x) \to \infty$ tetszőlegesen lassan, akkor van olyan A sorozat, melyre az (1) nem oldható meg és végtelen sok x-re

$$A(x) > \frac{x}{f(x)}.$$

Legyen $n_1 < n_2 < \ldots$ elegendő gyorsan növekedő sorozat (a növekedés rendjének meghatározása később fog megtörténni, csak legyen $n_{k+1} > n_k^2$). Legyen továbbá $a_1 = 1$ és tegyük fel, hogy az n_k-nál nem nagyobb a_k-kat már meghatároztuk. Az (n_k, n_{k+1}) intervallumba eső a-k legyenek n_k^2 azon többszörösei, melyek a $(2/3\, n_{k+1}, n_{k+1})$ intervallumba esnek. Nyilván

$$A(n_{k+1}) > \frac{n_{k+1}}{3n_k^2} > \frac{n_{k+1}}{f(n_{k+1})}$$

[1] Lásd az Amer. Math. Monthly 4268. számú feladatát.

ha az n_k sorozat eléggé gyorsan tart a végtelenhez. $\sum_{a_i \leqq n_k} a_r < n_k^2 < n_{k+1}$ miatt könnyű belátni, hogy az (1) egyenletnek nincsen megoldása, ezzel állításunk igazolva van.

Más szempontból viszont az I. tétel élesíthető. Fennáll ugyanis a

II. Tétel. *Legyen A oly sorozat, melyre az* (1) *egyenletnek nincsen megoldása. Akkor* $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i}$ *konvergens, sőt mindig*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} < 103.$$

Az I. tétel a II. tételből nyilván következik, ti. mint ismeretes, ha $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} < \infty$, $a_1 < a_2 < \ldots$, akkor $n/a_n \to 0$, azaz $A(x)/x \to 0$. Könnyű belátni továbbá, hogy ha $f(n) \to \infty$ tetszőlegesen lassan, akkor van oly A sorozat, melyre $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)/a_n = \infty$ és (1)-nek nincsen megoldása (lásd az I. tétel nem javíthatóságát mutató példát).

A II. tétel bizonyításához az $1 \leqq j < \infty$ számokat két osztályba soroljuk. Az első osztályban vannak azon j-k, melyekre $A(2^{j+1}) - A(2^j) \leqq \frac{2^j}{j^2}$ Nyilván

$$\sum{}' \frac{1}{a_i} < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < 2, \tag{5}$$

ahol Σ'-ben az összegezés azon a-kra van kiterjesztve, melyekre $2^j < a_i \leqq 2^{j+1}$ és j végigfut az első osztály számain.

Legyenek $j_1 < j_2 < \ldots$ a második osztályba eső j-k, melyekre tehát

$$A(2^{j_r+1}) - A(2^{j_r}) > \frac{2^{j_r}}{j_r^2} \tag{6}$$

Egyszerűség kedvéért legyen $j_{[\frac{r}{2}]} = t$. (6) miatt, minthogy $j_k \geqq k$

$$A(2^{t+1}) - A(2^t) > \frac{2^{j_{[\frac{r}{2}]}}}{j^2_{[\frac{r}{2}]}} \geqq \frac{2^{[\frac{r}{2}]}}{r^2} > r^2 \tag{7}$$

ha $r > 100$.

Legyenek $a_1 < a_2 < \ldots < a_{r^2}$ az első r^2 drb a_i. (7) miatt $a_{r^2} < 2^{t+1}$.

Alkalmazzuk mármost (4)-et, s legyen $x=2^{j_r+1}$, $k=r^2$. Így kapjuk, hogy

$$A(2^{j_r+1}) \leqq \frac{2^{j_r+1}}{r^2+1} + \sum_{i=1}^{r^2} a_i + r^2 < \frac{2^{j_r+1}}{r^2} + (r^2+1)2^{t+1}. \tag{8}$$

$j_r - j_{[\frac{r}{2}]}$ azonban nyilván nem kisebb, mint $\left[\frac{r}{2}\right]$, tehát ha $r>100$, akkor $(r^2+1)2^{t+1} < \frac{2^{j_r+1}}{r^2}$ $\left(\text{u. i. t.} = j_{[\frac{r}{2}]} \leqq j_r - \left[\frac{r}{2}\right]\right)$. Tehát (8)-ból, ha $r>100$

$$A(2^{j_r+1}) < \frac{2^{j_r+2}}{r^2}. \tag{9}$$

(9)-ből nyilván, ha $r>100$

$$\sum_r \frac{1}{a_i} < \frac{4}{r^2} \tag{10}$$

ahol $\sum_r$-ben $2^{j_r} < a_i \leqq 2^{j_r+1}$. (10)-ből nyilván

$$\sum_{r=101}^{\infty} \sum_r \frac{1}{a_i} < \sum_{r=101}^{\infty} \frac{4}{r^2} < 1. \tag{11}$$

Végül nyilván

$$\sum_{2^t < a_i \leqq 2^{t+1}} \frac{1}{a_i} < 1. \tag{12}$$

(5), (11) és (12)-ből végül nyerjük, hogy

$$\sum \frac{1}{a_i} < 103.$$

103-at könnyű lenne lényegesen javítani, de a pontos konstanst nem tudom meghatározni.

III. Tétel. *Ha az A sorozat olyan, hogy* (1)*-nek nincsen megoldása akkor*

$$\liminf_{X=\infty} A(x)/x^{(\sqrt{5}-1)/2} < \infty. \tag{13}$$

Tételünk mutatja, hogy ha az I. tétel minden x-re nem is javítható, de végtelen sok x-re sokkal élesebb egyenlőtlenség is fennáll.

Ha (13) — nem lenne igaz, akkor nyilván

$$a_k = o(k^{(1+\sqrt{5})/2}) \quad \text{azaz} \quad \sum_{i=1}^{k} a_i = o(k^{(3+\sqrt{5})/2}).$$

Tehát, ha $k = 10[x^{(3-\sqrt{5})/2}]$, akkor

$$\sum_{i=1}^{k} a_i < \frac{x}{2} \tag{14}$$

minden elegendő nagy x-re. Továbbá, ha (13) nem igaz, akkor nyilván van tetszőlegesen nagy x, melyre

$$A(x) - A\left(\frac{x}{2}\right) > x^{(\sqrt{5}-1)/2}. \tag{15}$$

Legyen mármost x oly eléggé nagy szám, mely (14)-et és (15)-öt kielégíti. Nyilván (2), (14) és (15) miatt

$$x \leqq \sum_{i=0}^{k} A_i(x) = \sum_{i=0}^{k}\left[A\left(x - \sum_{j=1}^{i} a_j\right) - i\right] \leqq k\left[A\left(x - \sum_{i=1}^{k} a_i\right) - k\right] \leqq$$

$$\leqq k\left[A(x) - A\left(\frac{x}{2}\right)\right] - k^2 > 10\,[x^{(3-\sqrt{5})/2}]\,x^{(\sqrt{5}-1)/2} - 100\,x^{3-\sqrt{5}} > x,$$

ami lehetetlen, s ezzel tételünk be van bizonyítva.

Most konstruálok oly A sorozatot, melyre $A(x) > cx^{2/7}$ minden x-re és az (1) egyenletnek nincsen megoldása.

Sorozatunkat rekurzióval konstruáljuk, legyen $a_1 = 1$ és tegyük fel, hogy $a_1, a_2, \ldots a_{k_i}$-ig már megkonstruáltuk az A sorozatot úgy, hogy az (1) egyenletnek ne legyen megoldása. Legyen $B_{i+1} = 2\sum_{r=1}^{k_i} a_r$ és

$$a_{k_i+l} = 1 + lB_{i+1}, \quad 1 \leqq l \leqq \left[\frac{B_{i+1}^2}{10}\right], \quad \text{azaz} \quad a_{k_i+l} \leqq \frac{B_{i+1}^3}{10} + 1. \tag{16}$$

Könnyű belátni, hogy az (1) egyenletnek most sincsen megoldása. Legyen ugyanis (Σ_2-ben $j_s \leqq k_i$)

$$a_{k_i+l} = \sum_{s=1}^{t_1} a_{k_i+r_s} + \sum_{s=1}^{t_2} a_{j_s} = \Sigma_1 + \Sigma_2. \tag{17}$$

Először kimutatjuk, hogy $t_1 \leqq \left[\frac{B_{i+1}}{2}\right]$. Ha ugyanis ez nem lenne igaz, akkor (16) miatt

$$\Sigma_1 \geqq \sum_{l=1}^{t_1}(1 + lB_{i+1}) > \binom{t_1}{2} B_{i+1} > \frac{B_{i+1}^3}{4} > a_{k_i+l},$$

ami (17)-nek ellentmond. $t_1 \leqq \left[\frac{B_{i+1}}{2}\right]$ és (16) miatt $\Sigma_1 \equiv t_1 (\mathrm{mod}\ B_{i+1})$, azaz Σ_1 legkisebb pozitív maradéka mod (B_{i+1}) nem nagyobb, mint $[\frac{1}{2} B_{i+1}]$. (16) miatt $a_{k_i+l} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ B_{i+1},)$ (17) miatt tehát $\Sigma_2 > [\frac{1}{2} B_{i+1}]$. Ez azonban $\Sigma_2 \leqq \sum_{j=1}^{k_1} a_j = \frac{1}{2} B_{i+1}$ miatt lehetetlen. Ezzel ellentmondásra jutottunk, s bebizonyítottuk, hogy (1)-nek nincs megoldása. Legyen mármost

$$a_{k_i+\left[\frac{B_{i+1}^2}{10}\right]} = a_{k_{i+1}},\ B_{i+1} = 2\sum_{r=1}^{k_{i+1}} a_r,\ a_{k_{i+1}+l} = 1 + lB_{i+1},\ 1 \leqq l \leqq \left[\frac{B_{i+1}^2}{10}\right] \tag{18}$$

és konstrukciónkat tetszőlegesen folytathatjuk, s az így nyert sorozatban (1)-nek nincsen megoldása.

Hátra van még $A(x)$-re alsó becslést találni, ezt csak vázolni fogjuk. (16)-ból és (18)-ból $B_{i+2} < B_{i+1}^5$. Tehát (16) és (18)-ból

$$A(B_{i+2}) > \frac{B_{i+1}^2}{10} > (\tfrac{1}{10} B_{i+2})^{2/5}.$$

Továbbá, ha $1 \leqq T \leqq [\frac{1}{10} B_{i+1}]$, akkor ((16) és (18)-ból)

$$A(TB_{i+2}) \geqq [\tfrac{1}{10} B_{i+1}^2] + T > \left(\frac{B_{i+2}}{10}\right)^{2/5} + T \tag{19}$$

(19)-ből egyszerű meggondolással beláthatjuk, hogy ha T-t B_{i+1}^2 nagyságrendűnek választjuk, akkor lesz $A(x)$ nagyságrendje x-hez képest a legkisebb. (16) és (18)-ból $B_{i+2} = (1 + o(1)) \frac{B_{i+1}^5}{200}$ ezért egyszerű számítással nyerjük (19)-ből, hogy minden x-re $A(x) > cx^{2/7}$ s ezzel állításunk igazolva van.

Nem lenne érdektelen eldönteni, vajon a III. tételben szereplő $(\sqrt{5}-1)/2$, s a példánkban szereplő 2/7 javítható-e? Pontosabban meghatározandó azon α értékek felső határa β, melyekre van oly A sorozat, hogy (1)-nek nincs megoldása és minden x-re $A(x) > cx^{\alpha}$. Tudjuk, hogy $2/7 \leqq \beta \leqq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Felvethetjük továbbá a következő problémát: Legyen $b_1 < b_2 < \ldots$ egész számok végtelen sorozata, tegyük fel, hogy minden k-ra melyre $b_1 + b_2 + \ldots + b_k \leqq x$, fennáll $kB(x) < c_1 x$ $(B(x) = \sum_{b_i \leqq x} 1)$. Létezik-e akkor egy oly A sorozat, melyre $a_r < c_2 b_r$ minden r-re és melyre (1)-nek nincs megoldása? Ha kérdésünkre a válasz igenlő, úgy ez azt jelentené, hogy (2) lényegileg az egyetlen feltétel, melyet egy A sorozat-

nak ki kell elégíteni, ha (1)-nek nincs megoldása. Különben az igenlő válaszból következne, hogy $\beta=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, úgy gondolnám azonban, hogy a válasz nem lesz igenlő.

Módosítsuk most az előbb definiált A sorozatot a következő módon: $\left(B_{i+1}=\sum_{r=1}^{k_i} a_r \text{ most is igaz}\right)$

$$(16') \qquad a_{k_i+l}=1+lB_{i+1}+B_{i+1}^2,\ 1\leqq l<B_{i+1}^{1/2},\ a_{k_{i+1}}=a_{k_i+\left[B_{i+1}^{1/2}\right]}.$$

Könnyű belátni, hogy $A(x)>cx^{\alpha}$ (α értékét könnyű lenne meghatározni) s az

$$(1') \qquad \sum_{i=1}^{s_1} a_{r_i}=\sum_{i=1}^{s_2} a_{l_j},\ r_1<r_2<\ldots<r_{s_1};\ l_1<l_2<\ldots l_{s_2};\ s_1\neq s_2$$

egyenletnek s_1 és s_2 semmilyen választása mellett sincsen megoldása. Ezen állítás bizonyítását csak vázolni fogjuk. Tegyük fel, hogy (1')-nek mégis lenne megoldása, s tekintsük azt a megoldást, melyre s_1+s_2 értéke minimális. Tegyük fel, hogy ezen egyenletben az előforduló a-k indexei mind nem nagyobbak, mint k_{i+1}, de k_i-nál nagyobb indexű a-k még előfordulnak (1') ezen megoldásában. Legyen u ily a (1') bal oldalán Σ_1 összeggel, s v ily a (1') jobb oldalán Σ_2 összeggel, azaz ha $\sum_{i=1}^{s_1} a_{r_i}=\sum_{i=2}^{s_2} a_{l_j}=L$, akkor $L=\Sigma_1+\xi_1=\Sigma_2+\xi_2$, ahol

$$(20) \qquad \max(\xi_1,\xi_2)\leqq\sum_{r=1}^{k_i} a_r=\frac{B_{i+1}}{2}.$$

Ha $u\neq v$, akkor (16')-ből egyszerű számítással adódik $|\Sigma_1-\Sigma_2|\geqq B_{i+1}$, ami (20) miatt lehetetlen. Ha $u=v$, akkor $\Sigma_1=\Sigma_2\equiv u \pmod{B_{i+1}}$ miatt nyerjük, hogy ha $\Sigma_1\neq\Sigma_2$, akkor $|\Sigma_1-\Sigma_2|\geqq B_{i+1}$, ami megint ellentmond (20)-nak. Ha végül $\Sigma_1=\Sigma_2$, akkor ha (1')-ből elhagyjuk mindkét oldalon az $u=v$ k_i-nél nagyobb indexű a-kat, (1') egy új megoldásához jutunk, mely s_1+s_2 minimum tulajdonságának ellentmond.

Ezzel szemben viszont fennáll a

IV. Tétel. *Legyen A oly sorozat, hogy az (1') egyenletnek nincs megoldása, akkor minden x-re*

$$A(x)<Cx^{5/6},$$

ha C elegendő nagy abszolút konstans.

A IV. tétel mutatja, hogy az (1') egyenletek jóval élesebb becslést adnak, mint az (1) egyenletek.

A IV. tétel bizonyításához szükségünk lesz a Linnik-féle nagy szita Rényitől való élesítésére.

Lemma. Legyen $a_1 < a_2 < \ldots < a_Z \leqq N$ egész számok sorozata, $0 < f(p) < 1$, $Q(p) < 1$.

$$\min_{p < \frac{1}{2}N^{1/3}} f(p)/p = \tau, \quad \max_{p < \frac{1}{2}N^{1/3}} Q(p) = Q,$$

$Z(p, h)\left(p < \frac{1}{2}N^{1/3}\right)$ jelentse azon $a-k$ számát, melyekre

$$a_i \equiv h \pmod{p}.$$

Fennáll

$$\left| Z(p,h) - \frac{Z}{p} \right| < \frac{Z}{pQ(p)}$$

minden p és h-ra, ha $9NQ^2/z\tau$ p prímszámtól eltekintünk és ha a többi p prímszámnál esetleg $f(p)$ h értéktől eltekintünk.

Ez a Linnik-féle nagy szita Rényi-féle élesítése.[2]) Alkalmazzuk e lemmát $f(p) = p/3$, $Q(p) = 2$, $Z = CN^{5/6}$ esetén. Ez esetben $\tau = \frac{1}{3}$, $Q = 2$ és lemmánkból nyerjük, hogy van legalább egy olyan $\frac{1}{2}N^{1/3} > p > \frac{1}{4}N^{1/3}$ primszám, melyre

$$Z(p,h) > \frac{Z}{2p} \tag{21}$$

legalább $\frac{2}{3}p$ maradékosztályra. Jelöljük $h_1, h_2, \ldots h_r$, $r > \frac{2}{3}p$ azon maradékosztályokat, melyekre (21) fennáll. Egyszerű meggondolás mutatja, hogy a $h_1 + h_2 \equiv 0 \pmod{p}$ kongruenciának legalább $\left[\frac{p}{6}\right]$ megoldása van, s ezért (21) miatt az

$$a_i + a_j \equiv 0 \pmod{p}, \quad 1 \leqq i, j \leqq Z$$

kongruenciának legalább

$$\left(\frac{Z}{2p}\right)^2 \frac{p}{6} = \frac{Z^2}{24p} > \frac{C^2}{12} N^{4/3} \tag{22}$$

megoldása van. Az $a_i + a_j$ összegek mind kisebbek, mint $2N$, ezért legfeljebb

$$\frac{2N}{p} < 8N^{2/3} \tag{23}$$

[2] A. Rényi, On the large sieve of U. V. Linnik, Compositio Math. 8 (1950) 68–75.

$a_i + a_j = m \equiv 0 \pmod{p}$ alakú szám létezhet. (22) és (23) miatt van két olyan különböző $m_1 \equiv 0 \pmod{p}$ és $m_2 \equiv 0 \pmod{p}$ szám, melyekre az

$$a_i + a_j = m_1 = pn_1, \quad a_r + a_s = m_2 = pn_2 \tag{24}$$

egyenletek mindkettőjének legalább $\frac{C^2}{100} N^{2/3}$ megoldása van. Ha C elegendő nagy, akkor

$$\frac{C^2}{100} N^{2/3} > 8N^{2/3} > \max(n_1, n_2)$$

miatt a (24) egyenletek megoldásaiból az $n_1 p n_2 = n_2 p n_1$ számot elő tudjuk állítani, mint a (24) egyenletek megoldásaiból alkotott n_1, illetve n_2 tagú összegeket. Azaz az (1′) egyenleteknek van megoldásuk, s ezzel tételünket igazoltuk.

Valószínűnek látszik, hogy az $^5/_6$ kitevő javítható, s hogy a nagy szitára a bizonyításban nem lesz szükség, de eddig ezeknek bizonyításai nem sikerültek.

Teljesen más problémára jutunk, ha (1′)-ben nem tesszük fel, hogy $r_1 \neq r_2$, azaz ha azt kérdezzük: maximálisan hány szám adható meg x-ig $a_1 < a_2 < \ldots < a_k \leqq x$, úgy, hogy a $\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i a_i$, $\varepsilon_i = 0$ vagy 1, értékek mind különbözők. Ha k maximális értékét $C(x)$-el jelöljük, Moser és én[3]) bebizonyítottuk, hogy minden ε-hoz van olyan x_0, hogy $x > x_0$-ra

$$C(x) < \frac{\log x}{\log 2} + (1+\varepsilon)\frac{\log\log x}{\log 2}.$$

Régi problémám: igaz-e, hogy $C(2^k) = k+1$? Nemrég Guy és Conway[4]) találtak olyan k-t, melyre $C(2^k) > k+1$. Lehetséges, hogy minden x-re

$$C(x) = \frac{\log x}{\log 2} + O(1).$$

Természetes további kérdések a fenti problémák multiplikatív analogonjai: Vizsgálandók azon A sorozatok, melyekre az

$$\prod_{j=1}^{s_1} a_{i_j} = \prod_{j=1}^{s_2} a_{l_j}, i_1 < \ldots < i_{s_1}; \; l_1 < \ldots l_{s_2}, \; s_1 \neq s_2 \tag{25}$$

[3] P. Erdős, Problems and results in additive number theory, Colloque sur la théorie des nombres Bruxelles 1955, 127–137 (lásd 136–137 oldalakat).

[4] Conway és Guy eredménye, melyet egymástól függetlenül találtak. még nincsen publikálva.

egyenleteknek semmilyen $s_1 \neq s_2$ esetén sincsen megoldása. Könnyű azonban belátni, hogy ha az A sorozat elemei a $2(2k+1)$ alakú számok, oly $\frac{1}{4}$ sűrűségű sorozatot nyerünk, melyre (25)-nek nincsen megoldása. Könnyű belátni azonban, hogy ha (25) nem oldható meg, akkor az A sorozat sűrűsége egynél kisebb (sőt ez már abból is következik, hogy az $a_1 \cdot a_k = a_l$ egyenletnek nincs megoldása). Nem tudom azonban eldönteni, van-e minden $\varepsilon > 0$-hoz olyan A sorozat, melynek sűrűsége nagyobb, mint $1-\varepsilon$ és melynél a (25) egyenletnek nincsen megoldása?

ЗАМЕЧАНИЯ ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ. III

П. Эрдёш

Пусть $a_1 < a_2 < \ldots$, $A(X) = \sum_{a_i \leq x} 1$ бесконечная последовательность, для которой равенство

(1) $$a_k = a_{i_1} + \ldots + a_{i_r},\ i_1 < \ldots < i_r < k_2$$

не имеет решения. Автор доказывает, что

$$\frac{A(X)}{X} \to 0 \quad \text{и, что} \quad \sum \frac{1}{a_i} < 103.$$

Далее, он показывает, что соотношение $A(X) = o(X)$ не может быть улучшено, однако всегда существует такая последовательность $X_i \to \infty$, для которой

(2) $$A(X_i) < CX_i^{(\sqrt{5}-1)/2}$$

С другой стороны, существует такая последовательность A, для которой (1) неразрешимо, всё же $A(X) > cX^{2/7}$ для любого X. Возможно, что соотношение (2) может быть улучшено, однако показатель, наверняка, не может быть меньше чем $2/7$.

Рассмотрим теперь те последовательности A, для которых уравнение

(1′) $$a_{r_1} + a_{r_2} + \ldots + a_{r_{s_1}} = a_{l_1} + a_{l_2} + \ldots + a_{l_{s_2}},\quad \begin{matrix} r_1 < \ldots < r_{s_1}; \\ l_1 < \ldots < l_{s_2}; \\ s_1 \neq s_2 \end{matrix}$$

не разрешимо для любого выбора $s_1 \neq s_2$. Тогда существует такая последовательность для которой $A(X) > cX^{\alpha}$ для любого X если только α достаточно малое число. С другой стороны автор показывает, используя усиление Реньи большого решета Линника, что если A такое, что (1′) не имеет решения, тогда $A(X) < CX^{5/6}$ для любого X, если только C достаточно большая абсолютная константа. Может быть, что показатель $5/6$ можно улучшить, однако автору сделать этого не удалось.

REMARKS ON NUMBER THEORY III.

P. ERDŐS

Let $a_1<a_2<\ldots$, $A(x)=\sum_{a_i\leqq x} 1$ be an infinite sequence for which

$$a_k=a_{i_1}+\ldots+a_{i_r},\ i_1<\ldots<i_r<k \tag{1}$$

is not solvable. I prove that $A(x)/x\to 0$ and that

$$\sum\frac{1}{a_i}<103.$$

Further I show that $A(x)=o(x)$ is best possible, but there always exists a sequence $x_i\to\infty$ for which

$$A(x_i)<Cx_i^{(\sqrt{5}-1)/2}. \tag{2}$$

On the other hand, there exists a sequence A for which (1) has no solutions, but $A(x)>cx^{2/7}$ for every x. Perhaps (2) can be improved, but the exponent can certainly not be made smaller than 2/7.

Consider now the sequences A for which the equation

$$a_{r_1}+\ldots+a_{r_{s_1}}=a_{l_1}+\ldots+a_{l_{s_2}},\ r_1<\ldots<r_{s_1};\ l_1<\ldots l_{s_2};\ s_1\neq s_2 \tag{1'}$$

is not solvable for every choice of $s_1\neq s_2$. There exists such a sequence with $A(x)>>cx^{\alpha}$ for every x if α is sufficiently small. On the other hand, I show by using Rényi's strengthening of the large sieve of Linnik that if A is such that (1') has no solutions, then $A(x)<cx^{5/6}$ for every x if c is a sufficiently large absolute constant. Perhaps the exponent 5/6 can be improved, but I have not succeeded in doing this.

Újabb eredmények a diszkrét geometriában II.

HEPPES ALADÁR és MOLNÁR JÓZSEF

Cikksorozatunk[1] első részében kizárólag síkbeli megoldott és megoldatlan feladatok szerepeltek. Ebben a cikkünkben figyelmünket az állandó görbületű felületekre fordítjuk, pontosabban a gömbfelületre, az euklideszi síkra és a hiperbolikus síkra.[2] Említésre méltó ebben a részben a körkonvexitás fogalma, valamint a mozaikoknak egy új osztálya, a majdnem-szabályos mozaikok, melyek bizonyos elhelyezési problémákban fontos szerepet játszanak. A körkonvexitáshoz kapcsolódó elhelyezési problémák új kutatási területet képviselnek.

Extremális pontrendszerek a gömbfelületen

Számos virágfajta (pl. fumaria capreolata) pollenszemei gömbalakúak. A pollenszem felületén levő apró nyílások a plazma kijutását szolgálják. TAMMES [1] holland biológus a nyílások sajátos elhelyezkedését azzal a feltevéssel igyekezett megmagyarázni, hogy ezek úgy helyezkednek el, hogy valamennyi lehetőleg távol kerüljön egymástól. Az ezzel kapcsolatban felmerülő geometriai probléma a következőképpen fogalmazható meg: *Hogyan kell egy gömbön n pontot elhelyezni, hogy a köztük fellépő minimális távolság maximális legyen?*

Az erre a kérdésre vonatkozó eredmények közül elsőnek a FEJES TÓTHtól [2] származó következő egyenlőtlenséget említjük meg:

Az egységgömb n pontja között fellépő minimális távolság

$$\leqq \left(4 - \operatorname{cosec}^2 \frac{n}{n-2}\frac{\pi}{6}\right)^{1/2}.$$

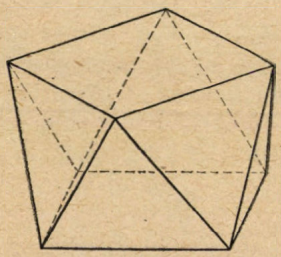
Egyenlőség csak abban az esetben lép fel, ha $n = 3, 4, 6, 12$, azaz,

[1] Cikksorozatunk célja, hogy Fejes Tóth könyvének [1] megjelenése óta eltelt időszaknak a könyv témakörébe vágó néhány eredményét ismertessük. (A szögletes zárójel a dolgozat végén levő irodalomjegyzék sorszámát adja.)

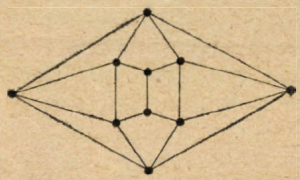
[2] Cikksorozatunk utolsó részében (III. rész) térbeli eredményekkel fogunk foglalkozni.

ha a pontok egy főkörbe írt szabályos háromszög, egy szabályos tetraéder, oktaéder, vagy ikozaéder csúcspontjai. Az egyenlőtlenség n-nek nagy értékeire pedig pontos aszimptotikus becslést ad.

Érdekesnek tartjuk megemlíteni a felvetett kérdéshez tartozó további eredményeket is. Az $n=5$ eset megoldását már maga TAMMES ismerte. Az $n=7, 8$ és 9 esetet SCHÜTTE és VAN DER WAERDEN [1] oldotta meg 1951-ben. Első pillanatra talán meglepő, hogy $n=8$-ra a megoldást nem a gömbbe írt kocka csúcspontjai szolgáltatják, hanem a 4-oldalú archimedeszi antiprizma (1. ábra). DANZER kimutatta,[3] hogy



1. ábra



2. ábra

az $n=11$-re vonatkozó megoldáshoz úgy jutunk, hogy az ikozaéder 12 csúcspontja közül az egyiket elhagyjuk. Ezekszerint az $n \leqq 12$ esetek közül megoldásra már csak az $n=10$ vár. Az erre vonatkozó sejtés SCHÜTTE-től ered (2. ábra).[4] Nemrég ROBINSON [1] igazolta VAN DER WAERDEN $n=24$-re vonatkozó sejtését,[5] amely szerint az extremális pontrendszert a gömbbe írt (3, 3, 3, 3, 4) szimbólumú félig szabályos poliéder csúcspontjai szolgáltatják. Megemlítjük még, hogy bizonyos n ($n=10, 13, 14, 15, 16$ (SCHÜTTE)[6], 11, 20, 32, 42, 122 VAN DER WAERDEN [1]),[7] 17, 18, 25, 33 (JUCOVIČ [1]), 19, 21, 22, 30, 31 (BÖRÖCZKY K.—GYÖRFFY JUDIT—KÓLYA D.—STROHMÁJER J.[8])) értékekre ismerünk jó elhelyezéseket, amelyek bizonyos esetben sejthetőleg a legjobbak.

A TAMMES-féle problémát a következőképpen is megfogalmazhatjuk:

Melyik az a maximális $r=r(n)$ érték, amelyre az egységgömbön el tudjunk helyezni n r sugarú kört?

Ezzel a problémával rokon a következő lefedési probléma:

3 Egy, még publikálatlan eredmény.

4 Az ábra a pontok elhelyezését síkban illusztrálja sematikusan. Az összekötött pontpárok egyenlő (minimális) távolságra vannak egymástól.

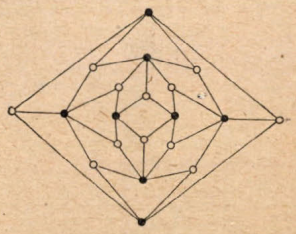
5, 6, 7 ld. Schütte—van der Waerden [1].

8 Még nem publikált eredmény.

Melyik az a minimális $r=r(n)$ érték, amelyre az egységgömböt le tudjuk fedni n r sugarú körrel?

E két probléma megoldásában az $n=3, 4, 6, 12$ értékre a körök középpontjai azonos elrendezést mutatnak (ld. FEJES TÓTH [1]).

A lefedési probléma irreguláris megoldásai közül csupán az $n=5$- és $n=7$-re ismerjük a megoldást. SCHÜTTE [1] egy dolgozatában kimutatta, hogy ezekben az esetekben (éppen úgy mint $n=6$ esetben) a körközéppontok a következőképpen helyezkednek el: Két pont antipodális, a többi e két pont polárisán helyezkedik el egyenletesen elosztva. SCHÜTTE megad egy extremálisnak ígérkező, meglehetősen szabálytalan elhelyezést $n=8$-ra (3. ábra). Az $n>8 (n\neq 12)$ esetben még csak sejtéseket sem ismerünk.



3. ábra

FEJES TÓTH egy dolgozatában[9] a következő problémát vizsgálta:

Hogyan kell a gömbön n pontot elhelyezni úgy, hogy a pontoknak egymástól mért gömbi távolságösszege maximális legyen?

FEJES TÓTH megadta az $n\leqq 6$ esetre a megoldást, tetszőleges n értékekre pedig becsléseket, valamint sejtéseket adott.

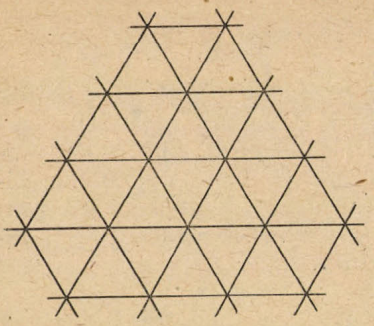
SPERLING bebizonyította FEJES TÓTH következő sejtését:[10] Páros n esetén a legjobb elhelyezést a gömb középpontjára szimmetrikus pontrendszerek és csak ezek szolgáltatják. Páratlan n értékekre a fenti kérdés még nyitott. A sejtett optimális elrendezés a következő: A pontrendszereknek egy (esetleg üres) része centrálszimmetrikus, a megmaradt része pedig úgy helyezkedik el egy főkörön, hogy bármely pont által meghatározott két nyílt félkör ugyanannyi pontot tartalmaz.

Mozaikok

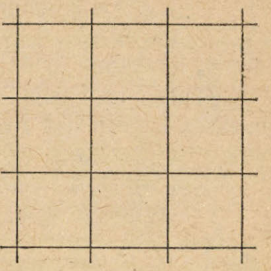
Mozaikon az állandó görbületű felületet teljesen betöltő, egymásba nem nyúló sokszögeknek olyan halmazát értjük, amelyben minden sokszög oldalához egyetlen további sokszög oldala csatlakozik. Ha egy csúcspontba futó élek középpontjait az élek ciklikus sorrendjének megfelelően összekötjük, akkor egy sokszöget nyerünk, melyet a csúcsponthoz tartozó csúcsalakzatnak nevezünk.

Dolgozatunkban szerepelni fognak a szabályos mozaikok, az archimedeszi félig szabályos mozaikok és bizonyos „szabálytalan" mozaikok.

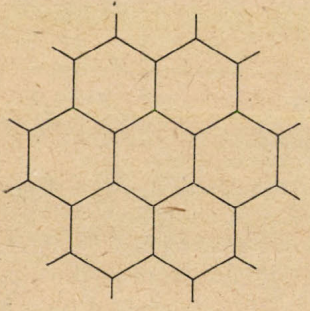
[9] Ld. Fejes Tóth]3].
[10] ld. Fejes Tóth [11], Sperling [1].



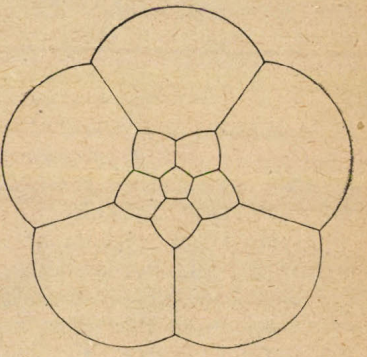
4. ábra



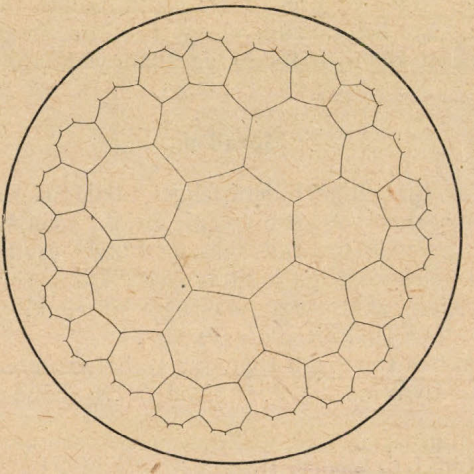
5. ábra



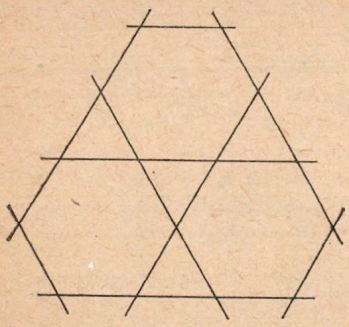
6. ábra



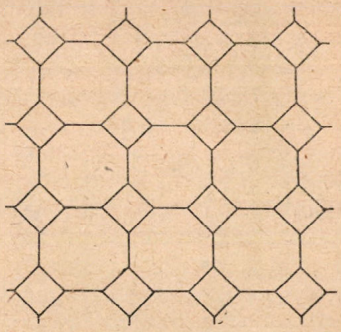
7. ábra



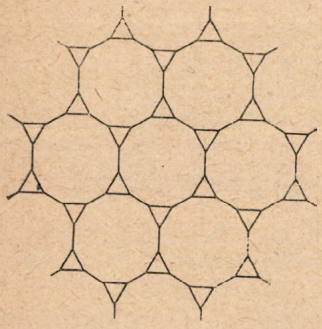
8. ábra



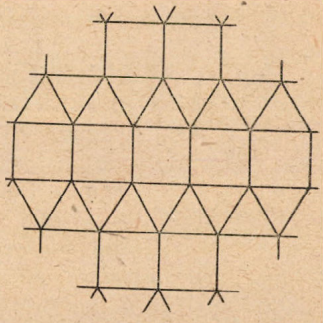
9. ábra



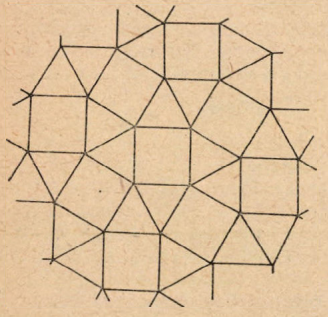
10. ábra



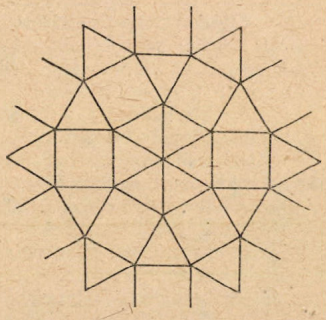
11. ábra



12. ábra



13. ábra

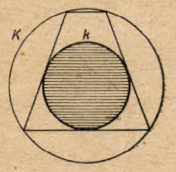


15. ábra

amelyeket majdnem-szabályos mozaikoknak nevezünk. Ezeket a mozaikokat a következőkben röviden ismertetjük.

Egy mozaik *szabályos*, ha mind lapjai mind csúcsalakzatai szabályosak. Könnyen kimutatható, hogy egy szabályos mozaik lapjai és csúcsalakzatai kongruensek. Ha a lapok p-szögek és a csúcsalakzatok q-szögek, akkor a mozaikot a $\{p, q\}$ SCHLÄFLI-féle szimbolummal jelöljük. A 4., 5., ill. 6. ábra az euklideszi sík $\{3, 6\}$, $\{4, 4\{$, ill. $\{6, 3\}$ szimbólumú szabályos mozaikjait ábrázolja. A gömbfelület, ill. hiperbolikus sík szabályos mozaikjai közül csupán az $\{5, 3\}$-at és a $\{7, 3\}$-at mutatjuk be (7., 8., ábra).

Egy mozaikot *archimedeszi félig szabályos*nak mondunk, ha szabályos sokszögekből tevődik össze, csúcsalakzatai egybevágóak azonban nem szabályosak. Az archimedeszi mozaikok jelölésére az $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ szimbolumot használjuk, ahol $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jelenti az egy csúcspontban találkozó sokszögek oldalszámát a sokszögek ciklikus sorrendjében. Így pl. a 9., 10., 11., 12., és 13. ábra az euklideszi síkon a $(3, 6, 3, 6)$, $(4, 8, 8)$, $(3, 12, 12)$, $(3, 3, 3, 4, 4)$ és $(3, 3, 4, 3, 4)$ mozaikot ábrázolja.[11]



14. ábra

Tekintsünk két koncentrikus r és R $(r < R)$ sugarú k és K kört. *Majdnem-szabályos* $H(r, R)$ sokszögön olyan sokszöget értünk, amely a K körbe van írva és oldalai legfeljebb egy kivételével a k kört érintik (14. ábra.[12]).

*Majdnem-szabályos*nak nevezünk egy mozaikot, ha *majdnem-szabályos* H-sokszögekből tevődik össze.[13] Ilyen mozaikot illusztrál a 15., 16., 17., 18., 19., 20. ábra az euklideszi síkon és a 21. ábra a hiperbolikus síkon. A 15. ábra érdekessége, hogy a félig szabályos mozaikot feltüntető 13. ábránál „szabályosabb"-nak tűnik. A 16—19. ábra ugyanazon egybevágó H-háromszögekből áll.[14]

[11] Minden félig szabályos archimedeszi mozaikhoz hozzá lehet rendelni a duálisát, amelynek csúcsalakzatai szabályosak, lapjai pedig egybevágóak de nem szabályosak. Az archimedeszi félig szabályos mozaikok valamint duálisaik képezik a félig szabályos mozaikokat.

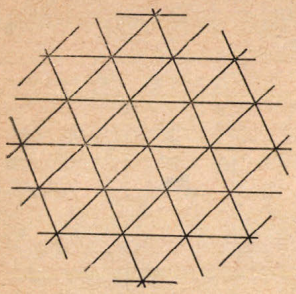
[12] ld. Molnár [2].

[13] ld. Molnár [4].

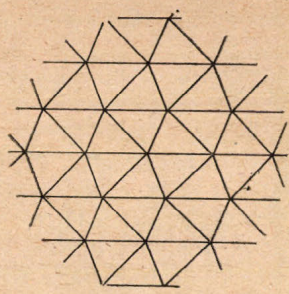
Mivel minden szabályos sokszög egyben H-sokszög is, ezért a majdnem-szabályos mozaikok magukba ölelik a szabályos-, az archimedeszi félig szabályos-, valamint a szabályos sokszögekből álló nem szabályos mozaikokat is (15. ábra).

Minden egyenlőszárú síkbeli háromszög nyilván H-sokszög is. A 22. ábra érdekessége, hogy csak látszólag majdnem-szabályos mozaik. Ui. az ábra nagy „háromszöge" lényegében hatszög.

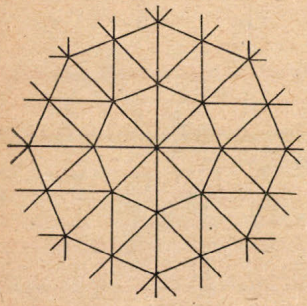
[14] Egybevágó H-ötszögekből az euklideszi síkon nem lehet mozaikot készíteni. Ui. a H-ötszög valamennyi szöge tompaszög és egybevágó tompaszögű ötszögekből az euklideszi síkon nem lehet mozaikot készíteni (ld. pl. Bollobás [1]).



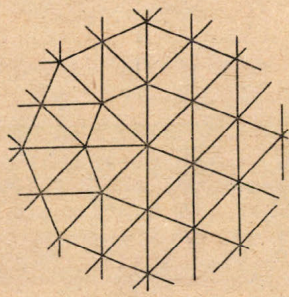
16. ábra



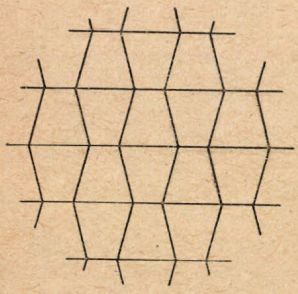
17. ábra



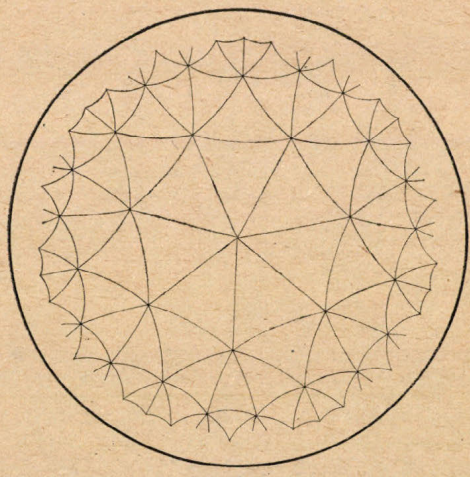
18. ábra



19. ábra



20. ábra

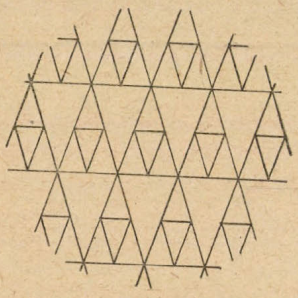


21. ábra

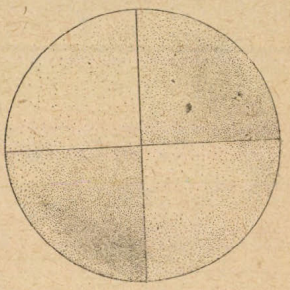
A majdnem-szabályos mozaikok teljes felsorolása még nyitott kérdés.[15]

Megemlítünk a mozaikokra vonatkozó néhány szélsőérték problémát.

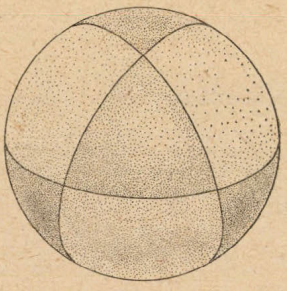
Tekintsünk a gömbön $n>2$ főkört! A főkörök a gömbön egy mozaikot határoznak meg. *Felmerülhet a kérdés, hogy a körök milyen helyzetére lesz a mozaik legnagyobb éle minimális?* Mivel egy főkört a többi legfeljebb $2(n-1)$ részre bontja, ennélfogva bármely főkörön van olyan él, melynek hossza $\geqq 2\pi/2(n-1)$. Igy tehát a legnagyobb él hossza $l \geqq \pi/(n-1)$. FEJES TÓTH [4] észrevette, hogy egyenlőség csak a $(3, k, 3, k)$ $(k=3, n=3;\ k=4, n=4;\ k=5, n=6)$ szimbólumú mozaikok esetén lép fel (23., 24., 25. ábra).



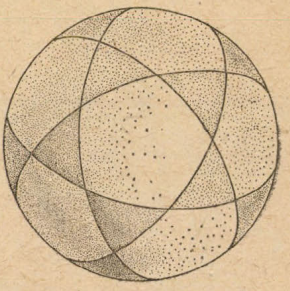
22. ábra



23. ábra



24. ábra



25. ábra

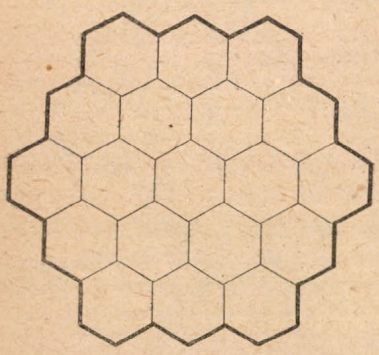
Nyitott kérdések: 1) *Milyen értéket vesz fel* $\lim_{n\to\infty} nl$, *és nagy n esetén hogyan jellemezhető az extremális mozaik aszimptotikus viselkedése?*

[15] Itt említjük meg, hogy МАКАРОВ egy nemrég megjelent dolgozatában a hiperbolikus sík félig szabályos mozaikjainak osztályozásával foglalkozott.

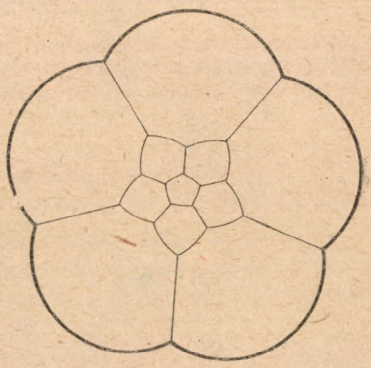
2) *Gömb helyett tekintsük az eulidkeszi síkot és a főkörök számát helyettesítsük az egyenesek sűrűségével.*[16] *Vajon az extremális mozaikot a* (3, 6, 3, 6) *félig szabályos mozaik szolgáltatja?*

Az előbbi FEJES TÓTH-féle eredménnyel rokon HEPPES következő eredménye [1]: *Egy gömbre írt 4 főkör által meghatározott 14 tartomány közül a legkisebb területű tartomány területe akkor a legnagyobb, ha a főkörök egy kuboktaéder hálózatát alkotják* (24. ábra).

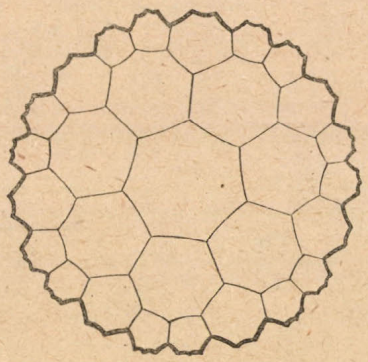
A következő FEJES TÓTH-féle tételnek egy speciális esete (euklideszi) már az előző cikkünkben is szerepelt.



26. ábra



27. ábra



28. ábra

Legyen M az állandó görbületű felületnek olyan szabályos mozaikja, melynek csúcsalakzata háromszög, továbbá legyen $E \subseteq M$ *a mozaik n lapjának (nem feltétlenül összefüggő) egyesítése. Az E tartományt n egyenlő területű konvex részre felosztó élrendszerek közt legrövidebb össz él-*

[16] ld. Fejes Tóth [4].

hosszal az a felosztás rendelkezik, mely az eredeti n lap éleit szolgáltatja (26., 27., 28. ábra). Igen nehéznek látszik annak a sejtésnek a bizonyítása, hogy ez a tétel a konvexitás kikötése nélkül is érvényes.

Itt említjük meg a következő — MOLNÁR-tól származó [4] — két eredményt, mely állandó görbületű felületen levő Dirichlet cellák kerületére ad becslést.[17]

Ha egy állandó görbületű felületen levő — legalább három pontból álló — pontrendszer pontjai egymástól legalább 2r távolságra vannak, akkor a pontrendszer bármely pontjához tartozó Dirichlet cella kerülete legalább annyi mint a majdnem-szabályos H(r, h) sokszög kerülete, ahol h jelenti három r sugarú egymást érintő kör hatványpontjának távolságát valamelyik r sugarú kör középpontjától.

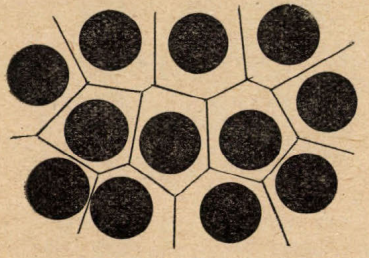
Ha egy állandó görbületű felületen levő — legalább három pontból álló — pontrendszer pontjai egymástól legalább 2r távolságra vannak és bármely három ponton átmenő kör sugara legalább t, akkor bármely ponthoz tartozó Dirichlet cella kerülete legalább H(r, t) kerületével egyenlő.

E két tételben szereplő becslés sok esetben pontos. Igy pl. az utolsó tételben szélsőértéket szolgáltatnak az összes olyan pontrendszerek, melyeknek Dirichlet cellái szabályos (pl. 4., 5., 6., 7. és 8. ábra), vagy bizonyos majdnem-szabályos mozaikot (pl. 16., 17., 18., 19. és 21. ábra) alkotnak.

Körrendszerek sűrűsége

Dolgozatunkban állandó görbületű felületen a gömbfelületet, az euklideszi síkot, ill. a hiperbolikus síkot értjük.

Egy megszámlálható sok körből álló $\{K_i\}$ körrendszernek egy állandó görbületű felület T tartományára vonatkozó sűrűségén a $\frac{\Sigma Ki \cap T}{T}$ hányadost értjük. Hasonlóan értelmezzük egy körrendszernek a gömbfelületre vonatkozó sűrűségét is. Különösen körelhelyezésekkel és körfedésekkel fogunk foglalkozni, vagyis olyan körrendszerekkel, amelyeknél a T „tartomány[18] minden pontja legfeljebb egy körnek belső pontja (30. ábra), ill.



29. ábra

[17] Egy pontrendszer egy pontjához tartozó Dirichlet cellát azon pontok összessége képezi, melyek az adott ponthoz közelebb vannak mint a pontrendszer többi pontjához. (29. ábra.)

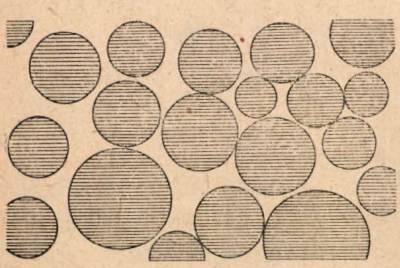
[18] A „tartomány" lehet az egész sík is.

legalább egy körhöz tartozik (31. ábra). Az első esetben *kitöltési*, a másodikban *lefedési sűrűségről* beszélünk.

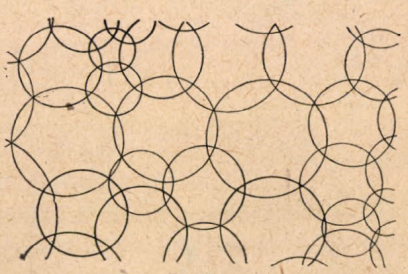
Értelmezhető egy megszámlálható sok körből álló $\{K_i\}$ körrendszernek az egész euklideszi síkra vonatkozó δ kitöltési, ill. Δ lefedési sűrűsége is, mégpedig a következőképpen:

$$\delta = \overline{\lim} \frac{\Sigma K_i \cap K(R)}{K(R)} \quad \text{és} \quad \Delta = \lim_{R \to \infty} \frac{\Sigma K_i \cap K(R)}{K(R)},$$

ahol $K(R)$ egy R sugarú kör, amelynek középpontja a sík egy rögzített



30. ábra



31. ábra

0 pontja. Hasonlóan értelmezhető általánosabb tartományok valamilyen rendszerének sűrűsége is.[19] Bizonyítható, hogy δ, ill. Δ független az 0 megválasztásától.[20] Ez egyszerűen következik abból, hogy a

$$\frac{K(R+c)-K(R)}{K(R)} = \frac{2Rc+c^2}{R^2}$$

hányados konstans c érték mellett nullához tart, ha $R \to \infty$.

Egy $\varkappa$ görbületű hiperbolikus síkon

$$\lim_{R \to \infty} \frac{K(R+c)-K(R)}{K(R)} = e^{\sqrt{\varkappa}c} - 1 \neq 0.$$

Ezért egy körrendszernek az egész hiperbolikus síkra vonatkozó sűrűségét definiálni nehezebbnek látszik.[21] Ennek a kérdésnek a tisztázását szép feladatnak tartjuk.

Annak ellenére, hogy a hiperbolikus síkon a körsűrűség egységes definíciója még problémát jelent, mégis kimondhatók bizonyos eredmények.[22] Ui. a nehézség megkerülhető pl. azáltal, hogy a hiperbolikus

[19] ld. Fejes Tóth [1], 55-57.
[20] Ezt természetesnek is érezzük.
[21] ld. Fejes Tóth [6].
[22] ld. Fejes Tóth [6], [7], [8], [9], ill. Molnár [2], [3], [4].

síkot olyan cellákra bontjuk, hogy minden egyes cellában a kitöltési, ill. lefedési sűrűség $\leqq d<1$, ill. $\geqq D>1$. Ekkor δ és Δ bármely „értelmes" definíciója mellett $\delta \leqq d$, ill. $\Delta \geqq D$.

Körelhelyezések konvex „tartományokban"

Ismeretes THUE [1], ill. KERSHNER [1] eredménye, mely szerint az euklideszi síkon — egymásba nem nyúló egybevágó körök sűrűsége $\leqq \frac{\pi}{\sqrt{12}} = 0{,}9069\ldots$, ill. a síkot lefedő egybevágó körök sűrűsége $\geqq \frac{2\pi}{\sqrt{27}} = 1{,}209\ldots$. FEJES TÓTH 1953-ban analóg korlátokat adott — állandó görbületű felületeken levő — egybevágó körök kitöltési, ill. lefedési sűrűségre vonatkozóan.

Az euklideszi-, ill. hiperbolikus síkot nulla, ill. negatív állandó görbületű felületnek nevezve, FEJES TÓTH-nak a körkitöltésre vonatkozó eredménye [6] a következőképpen fogalmazható meg:

Ha egy $\varkappa$ görbületű felületen legalább három egymásba nem nyúló r sugarú kör van, akkor ezeknek a felületre vonatkozó δ sűrűsége

$$\delta \leqq d^*(a) = \frac{3\operatorname{cosec}\frac{\pi}{a} - 6}{a-6}, \quad d^*(6) = \lim_{a\to 6} d^*(a) = \frac{\pi}{\sqrt{12}},$$

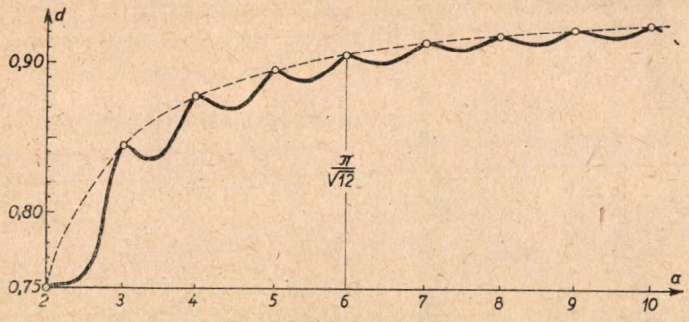
ahol $\operatorname{cosec}\frac{\pi}{a} = 2\cos\sqrt{\varkappa}r$.[23]

Ez a tétel pontos korlátot ad egybevágó körök kitöltési sűrűségére, ha a egész szám. A $d^*(a)$ korlát a-nak monoton növekvő függvénye (32. ábra),[24] amelyre áll, hogy $\lim_{a\to\infty} d^*(a) = \frac{3}{\pi}$. FEJES TÓTH egy dolgozatában kimutatta, hogy a paraciklusok kitöltési sűrűsége

[23] $d^*(a)$ szemléletes jelentése: Három egymást érintő r sugarú kör sűrűsége a három kör centrumai által meghatározott egyenlőoldalú háromszögben (34. ábra). $\frac{2\pi}{a}$ jelenti ezen egyenlőoldalú háromszög egyik szögét, s így a interpretálható mint azon egybevágó egymásba nem nyúló körök száma, melyek egy ezekkel egybevágó körhöz illeszthetők. Az euklideszi síkon $a=6$, gömbfelületen $a<6$, hiperbolikus síkon $a>6$.

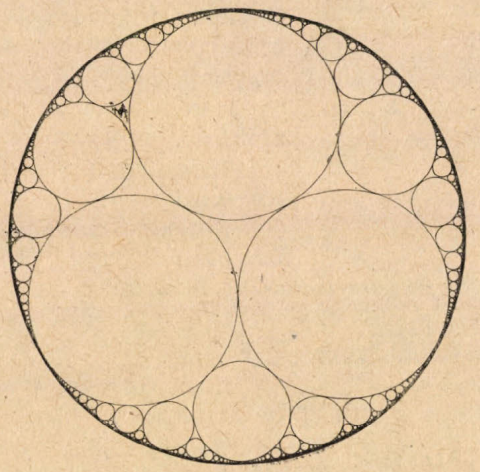
[24] ld. Krammer [1]. A $d^*(a)$ korlát grafikonunkban a vékonyan megrajzolt szaggatott görbevonal.

$\leqq \frac{3}{\pi}$.[25] A 33. ábrán paraciklusoknak a $\frac{3}{\pi}$ értéket szolgáltató legsűrűbb kitöltését látjuk.



32. ábra

Ezekből az eredményekből következik egyrészt, hogy a gömb nem tölthető ki legalább három egybevágó körrel olyan sűrűn mint az euklideszi sík, másrészt, hogy a hiperbolikus síkon elhelyezett (véges,



33. ábra

vagy végtelen sugarú) egybevágó körök kitöltési sűrűsége mindig $\leqq \frac{3}{\pi}$.

Egybevágó körök kitöltési sűrűségére — a nem egész értékeire — élesebb felső korlátot ad a következő tétel (MOLNÁR [2]):

[25] Fejes Tóth [7].

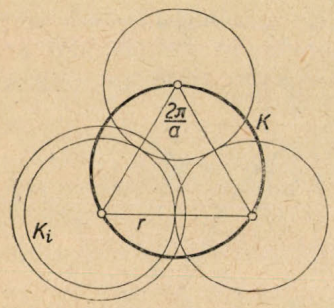
Ha egy $\varkappa$ görbületű felületen legalább három egymásba nem nyúló r sugarú kör van, akkor ezeknek a köröknek a felületre vonatkozó δ sűrűsége

$$\delta \leqq d(a) = \frac{3 \operatorname{cosec} \frac{\pi}{a} - 6}{[a] - 3 - \frac{6}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \left\{ \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\pi}{a} \operatorname{cotg} \left(1 - \frac{[a]}{a} \right) \pi \right\}},$$

$$d(6) = \lim_{a \to 6} d(a) = \frac{\pi}{\sqrt{12}}$$

ahol $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{a} = 2 \cos \sqrt{\varkappa}\, r$.[26]

Induljunk ki a 37. ábrán feltüntetett legsűrűbb körelhelyezésből. r-t és ezzel együtt az a-t egy kissé növelve a köröket már nem tudjuk szabályosan elhelyezni, s így várható, hogy a maximális kitöltési sűrűség csökken. Igen meglepő, hogy ezt a jelenséget az előbbi becslés olyan pontosan írja le, hogy minden háromnál nagyobb egész n értékre van n és $n+1$ közé eső olyan a érték, hogy $d(a) < d(n)$ (32. ábra).



34. ábra

Fordítsuk most figyelmünket a körlefedési problémákra.

Fejes Tóth-tól [8] származik a következő tétel:

Ha egy $\varkappa$ görbületű felületet legalább három r sugarú kör lefed, akkor ezen köröknek a felületre vonatkozó Δ sűrűsége

$$\Delta \geqq D^*(A) = \frac{\sqrt{12} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{A} - 6}{A - 6}, \quad D^*(6) = \lim_{A \to 6} D^*(A) = \frac{2\pi}{\sqrt{27}},$$

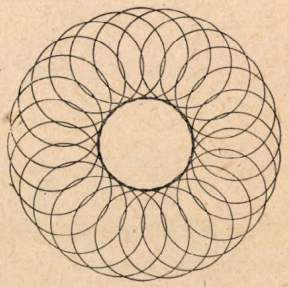
ahol $\operatorname{cotg} \frac{\pi}{A} = \sqrt{3} \cos \sqrt{\varkappa}\, r$.

26 A tétel szemléletes megfogalmazása: *Az állandó görbületi felületen tekintsünk három egybevágó egymást érintő kört. Legyen k ezek közül az egyik és rajzoljunk a három kör középpontján át egy k-val koncentrikus K kört. Szerkesszük meg a K körbe írt sokszöget, amelynek oldalai legfeljebb egy kivételével a k kört érintik vagyis e két körhöz tartozó majdnem-szabályos sokszöget. Akkor a k körrel kongruens köröknek a felületen történő semmilyen elhelyezésének sűrűsége nem lépheti túl k sűrűségét e sokszögben* (**34.** *ábra*).

A $D^*(A)$ korlát az A-nak monoton csökkenő függvénye.[27]

Ebből következik egyrészt, hogy a gömb nem fedhető le legalább három kongruens körrel olyan ritkán mint az euklideszi sík, másrészt, hogy a hiperbolikus síkon elhelyezett (véges, vagy végtelen sugarú) egybevágó körök lefedési sűrűsége mindig $\geqq \frac{\pi}{3}$.[28]

Mint már láttuk körkitöltés esetén — MOLNÁR-nak sikerült a nem egész értékeire — $d^*(a)$ helyett élesebb, nem monoton $d(a)$ korlátot adni. Ezt úgy érte el, hogy az állandó görbületű felületet Dirichlet cellákra bontotta és a sűrűséget ezekben a cellákban vizsgálta. Körlefedések esetén a Dirichlet cellákra való felbontás nem vezet eredményhez, hiszen a Dirichlet cellában a lefedési sűrűség 1-hez tetszőleges közeli értéket vehet fel (35. ábra). Körlefedések esetén tehát egy — a kitöltéshez analóg — nem monoton $D(A)$ korlát $(D(A) \geqq D^*(A))$ megadása nyitott kérdés.



35. ábra

Érdekes problémákhoz és változatos extremális alakzatokhoz jutunk, ha úgy igyekszünk a síkon minél több kört elhelyezni, hogy a körrendszer bizonyos értelemben elég tágas legyen. Egy körrendszernek valamely körére vonatkozó *tágasságán* a kör középpontjától mért azon távolságot értjük, amelynél közelebb nem kerülhet e kör és a körrendszer bármely más két körének hatványpontja.

MOLNÁR [3] további korlátokat adott a körkitöltési sűrűségre többek között abban az esetben, ha 1) a sugarak adott intervallumba esnek és adottak a körrendszerek körökre vonatkozó tágasságai, 2) adottak a sugarak, a különböző körök arányszámai, valamint a körrendszernek a körökre vonatkozó tágasságai.

Ezen tételek különösen gömbfelületen, ill. hiperbolikus síkon érdemelnek figyelmet, ahol eddig — inkongruens körök sűrűségére vonatkozólag — semmilyen eredmény sem volt ismeretes. Megemlíthetjük, hogy pl. euklideszi síkon a kapott új korlát abban az esetben, ha a sugarak adottak, valamint a különböző sugarú körök arányszámai ismertek, akkor bizonyos esetekben a FEJES TÓTH—MOLNÁR—FLORIAN-féle korlátnál is jobb korláthoz vezet.[29]

[27] ld. Krammer [1].

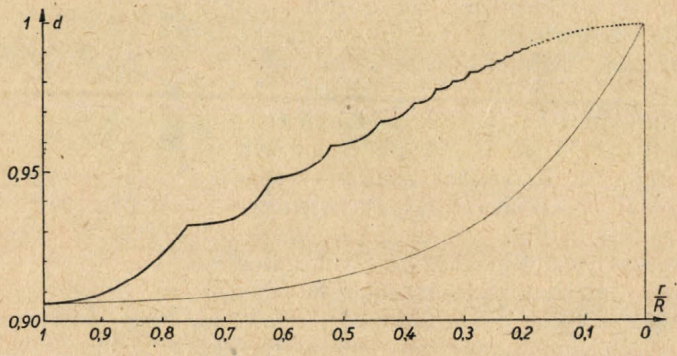
[28] ld. Fejes Tóth [9].

[29] ld. előző cikkünket. Általában az új korlát (36. ábrán vastag vonal) nem jobb a Fejes — Molnár — Florián-féle korlátnál (36. ábrán vékony vonal).

Az 1) és 2) esetnek megfelelő tételekben a szélsőértékeket képviselő körrendszerek változatos szabályos, félig szabályos és majdnemszabályos alakzatokhoz vezetnek (az 1) esetben pl. 37., 38., 39., 40., 41., 42., 43., 44., 45., 46. és 47. ábra, a 2) esetben a 48., 49., 50., 51., 52., és 53. ábra).

Megemlítjük még, hogy a 2) esetnek egy speciális alesetéhez fűződik a következő eredmény:

Képzeljük el, hogy rendelkezésünkre áll az euklideszi síkon köröknek egy kimeríthetetlen készlete, melynek sugarai az $(\varepsilon, 1)$ intervallumba esnek. Ilyen körök segítségével kell az euklideszi síkot leg-

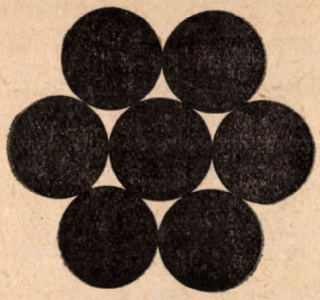


36. ábra

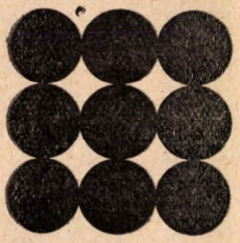
sűrűbben kitölteni úgy, hogy egy hatványpont se kerüljön a hozzátartozó körközépponthoz $\sqrt{2}$-nél kisebb távolságra, azaz a körrendszernek bármely körére vonatkozó tágassága, vagyis a *körrendszer tágassága* $\sqrt{2}$. A „legsűrűbb" körrendszer csupán egységkörökből áll, amelyek középpontjai négyzetes rácsot alkotnak (38. ábra). Tehát hiába áll rendelkezésünkre egy egész intervallum, a legsűrűbb elrendezésben egyetlen sugárérték jut szerephez.

Molnár vizsgálatait [4] kiterjesztette olyan kitöltési problémákra is, amelyeknél a kör szerepét végesszámú kör egyesítése, röviden *körívsokszög* veszi át (54. ábra). A szélsőértéket képviselő elrendezések igen változatosak. Ezekből egy párat bemutatunk. Igy pl. a 55. és 56. ábra bizonyos egybevágó egymásba nem nyúló körívháromszögek („lóhere") legsűrűbb elrendezését illusztrálja az euklideszi síkon.[30] Az 59., 60., 61. és 62. ábrán olyan egybevágó körívsokszög legsűrűbb elrendezését látjuk, mely a kongruens körök legsűrűbb elhelyezéséből úgy származik, hogy egy

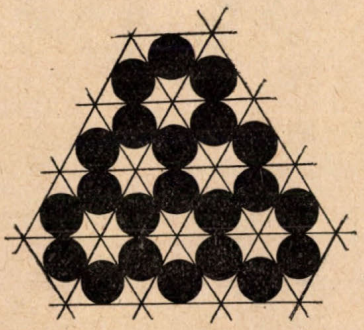
[30] Az 58. ábra a „lóheréhez" (57. ábra) tartozó minimális területű „Dirichlet-cellát" ábrázolja.



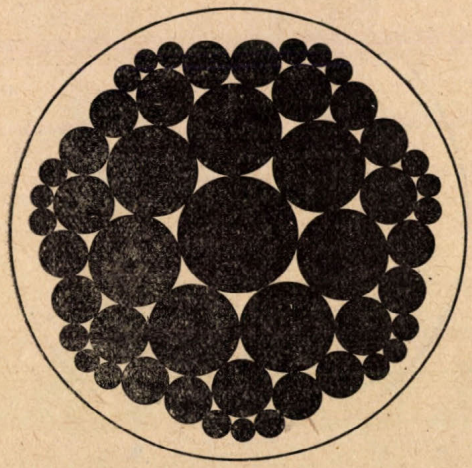
37. ábra



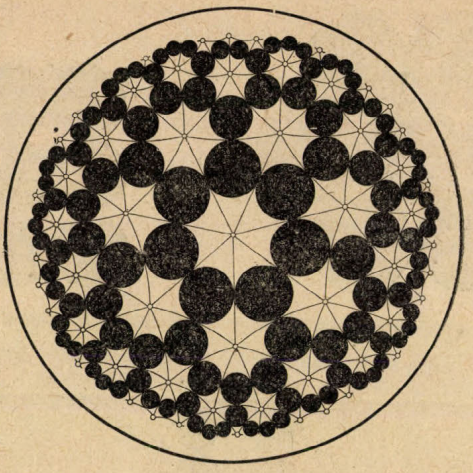
38. ábra



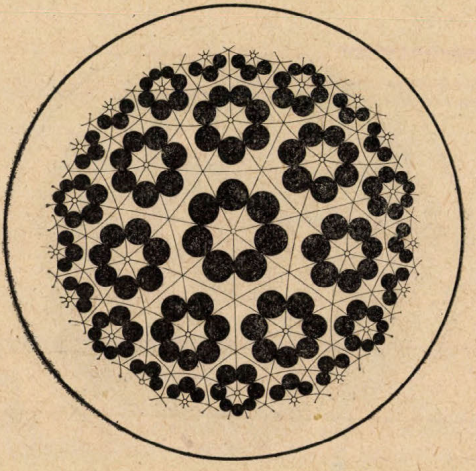
39. ábra



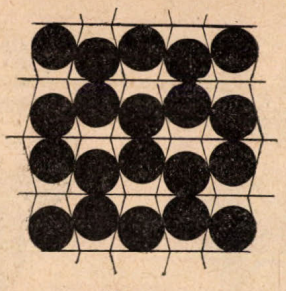
40. ábra



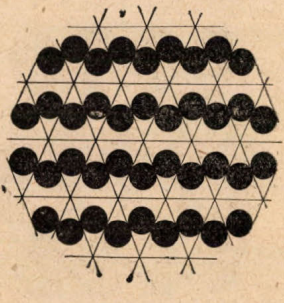
41. ábra



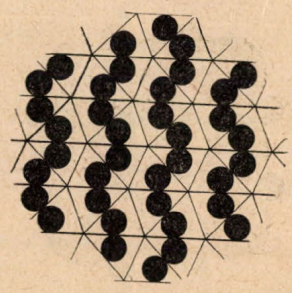
42. ábra



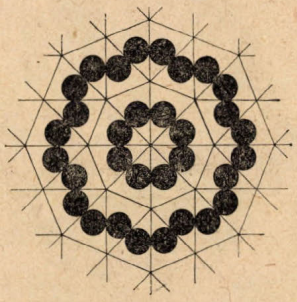
43. ábra



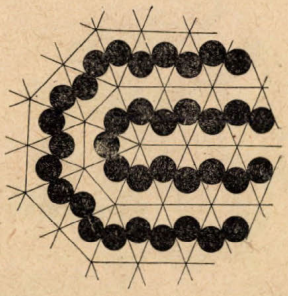
44. ábra



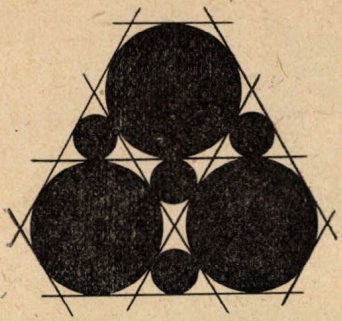
45. ábra



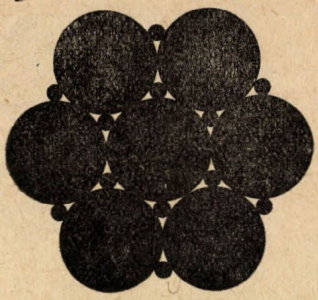
46. ábra



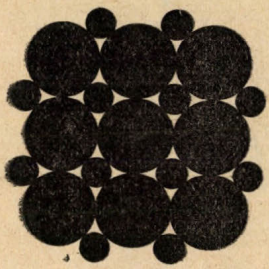
47. ábra



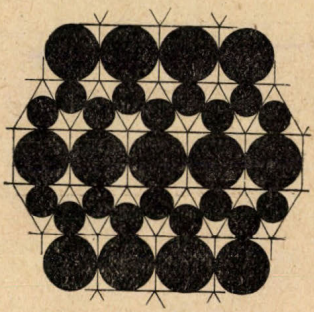
48. ábra



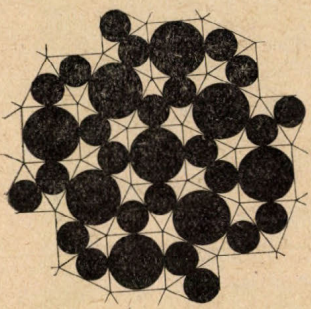
49. ábra



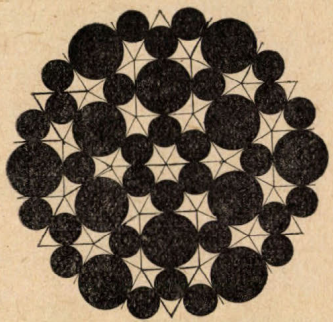
50. ábra



51. ábra

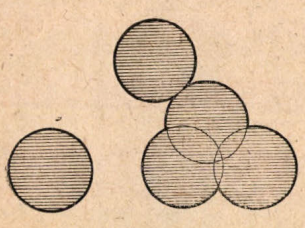


52. ábra

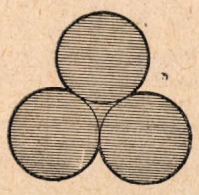


53. ábra

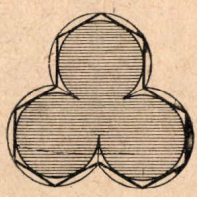
körhalmazhoz hozzávesszük bármely érintő körhármasa által alkotott körívháromszöget. Könnyen belátható, hogy az említett ábráinkon szereplő vonalkázott körívsokszögekkel a síkot végtelen sokféleképpen lehet legsűrűbben kirakni.[31]



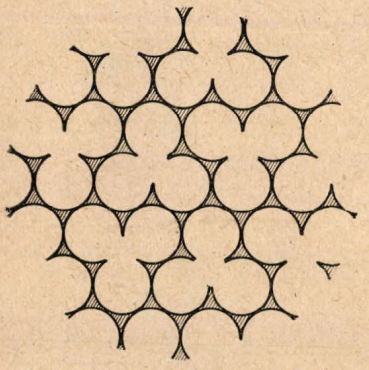
54. ábra



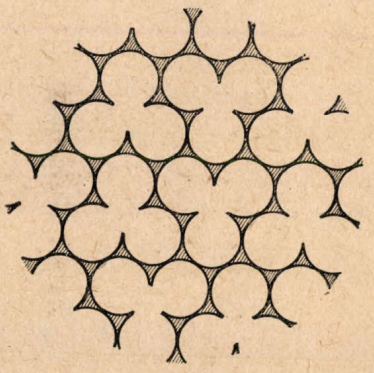
57. ábra



58. ábra



55. ábra



56. ábra

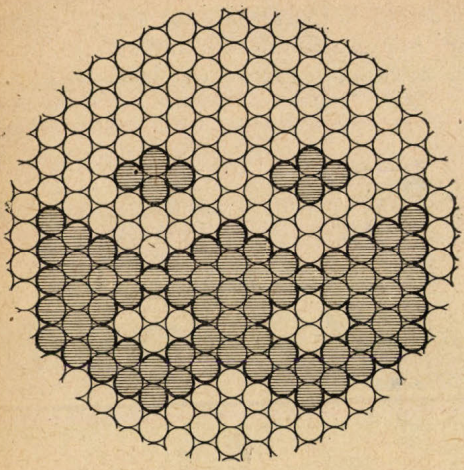
Megjegyezzük még, hogy a körívsokszögek szerepét bizonyos feltételeket kielégítő sokszögek vehetik át (69., 70., 71. ábra).[32]

SEGRE és MAHLER-től [1] származik a következő tétel:

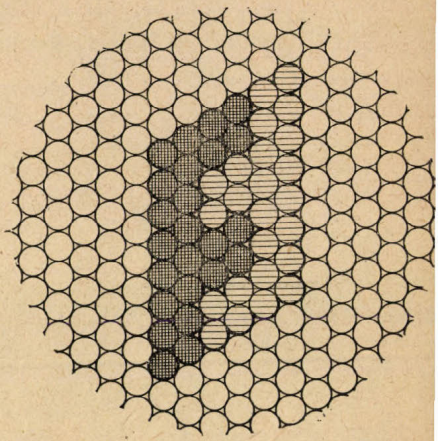
Ha egy euklideszi sokszögben, melynek szögei $\frac{2\pi}{3}$*-nál nem nagyobbak,*

31 Más típusú extremális alakzathoz jutunk gömbfelületen pl. ha megfelelő nagyságú egybevágó szabályos körívnégyszögekkel (63. ábra), ill. szabályos körívötszöggel (64. ábra) úgy töltjük ki a gömbfelületet, hogy a körívsokszögek kerületét szolgáltató körök középpontjai a (3, 3, 3, 3, 4) (65. ábra), ill. (3, 3, 3, 3, 5) (66. ábra) szimbólumú félig szabályos mozaik csúcspontjait alkossák. További szélsőérték alakzatokat ábrázol a gömbfelületen sztereografikus vetületben a 67. és 68. ábra.

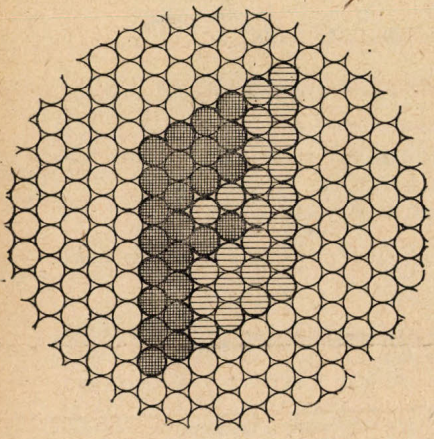
32 A 69. és 70. ábrán egyenlőoldalú háromszögrendszer váltja fel a 55. és 56. ábrán szereplő „lóhere" rendszert.



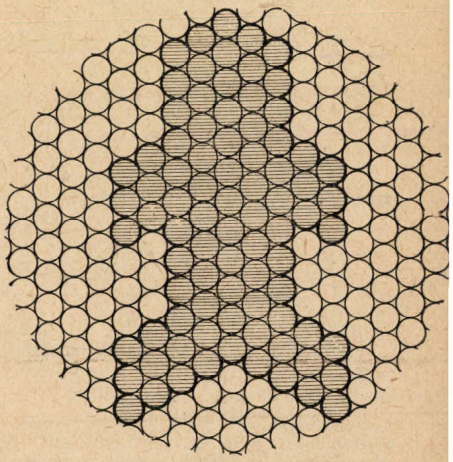
59. ábra



60. ábra

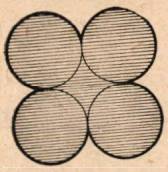


61. ábra

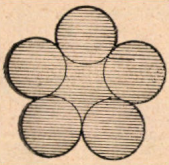


62. ábra

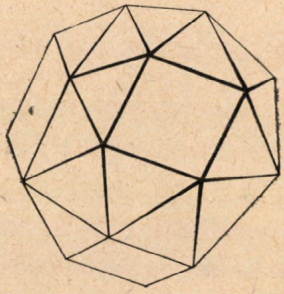
egymásba nem nyúló egybevágó körök vannak elhelyezve, akkor a köröknek a sokszögre vonatkozó sűrűsége legfeljebb $\frac{\pi}{\sqrt{12}} = 0{,}9069\ldots$.



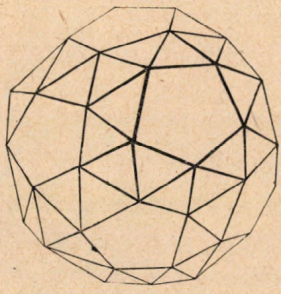
63. ábra



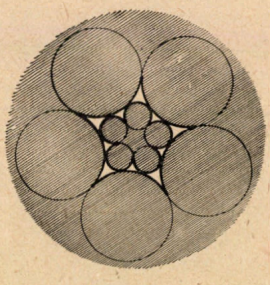
64. ábra



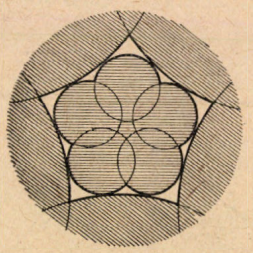
65. ábra



66. ábra

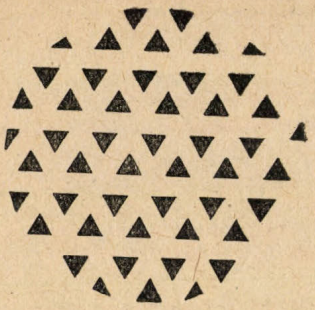


67. ábra

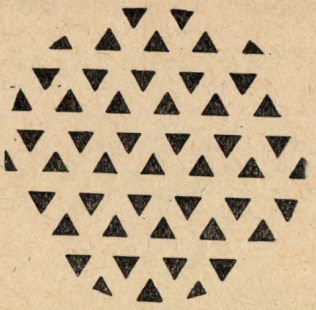


68. ábra

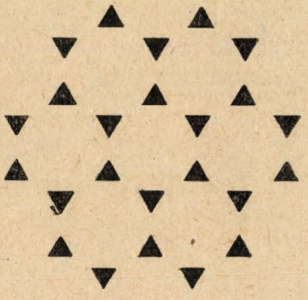
Ezt a tételt MOLNÁR [3] az állandó görbületű felületeken több irányban általánosította. A tartomány, amelyben az egymásba nem nyúló körök vannak elhelyezve, az állandó görbületű felület olyan sokszöge, melynek minden szöge $\leqq \frac{2\pi}{3}$. A körrendszer sűrűségére adott



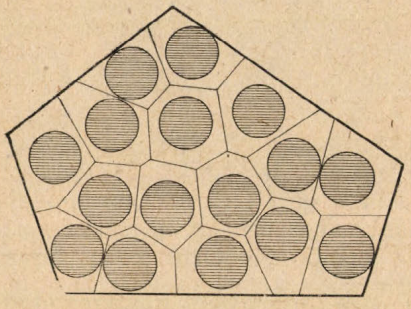
69. ábra



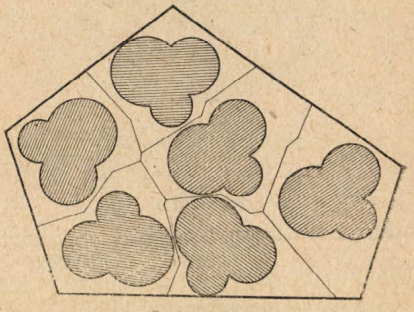
70. ábra



71. ábra



72. ábra

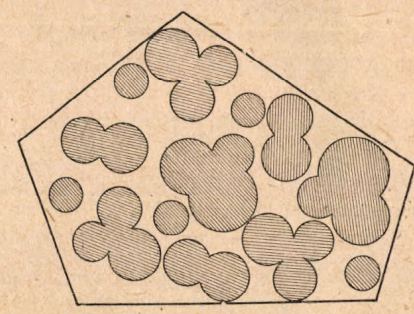


73. ábra

felső korlát a következő esetekre vonatkozik: 1) a körök egybevágóak, 2) a körök sugarai egyenként ismertek, 3) a sugarak egy adott intervallumba esnek, 4) n fajta adott sugarú kör van.[33]

E tételek körollariumai közül a következőt említjük meg:

Ha egy állandó görbületű felületnek egy sokszögében, melynek minden szöge $\leqq \frac{2\pi}{3}$, *egymásba nem nyúló egybevágó körök vannak elhelyezve, akkor a körrendszernek a sokszögre vonatkozó sűrűsége* $\leqq \frac{3}{\pi}$.



74. ábra

Igy pl. bármely aszimptotikus sokszögben elhelyezett egybevágó körök rendszerének sűrűsége $\leqq \frac{3}{\pi}$.

Körkonvex ponthalmazokról

Különböző problémákban valamely komplikált strukturájú ponthalmaz helyett gyakran tekintjük annak vagy a zárt, vagy a konvex burkát. E két művelet bizonyos értelemben extremálisnak tekinthető, hiszen az első, melynél csupán végtelen közeli pontokkal bővül a halmaz, az eredeti halmaz szerkezetét „alig" változtatja meg, míg a második — a konvex burokképzés — radikális változást képes előidézni.[34]

A gyakorlatban célszerűnek mutatkozik olyan művelet alkalmazása, mely az említett két művelet között átmenetet képez és olyan ponthalmazhoz vezet, mely szerkezetileg a zárt burok és konvex burok között foglal helyet. Ilyen halmazosztályt vezetett be HADWIGER [1] 1946-ban, ill. PERKAL [1] 1956-ban, az α-rendű-, ill. ε-konvex fogalom révén.[35]

[33] Hiperbolikus síkon az így nyert tételek az első tételek, melyek körelhelyezési sűrűségre vonatkoznak korlátos tartományok esetén.

További általánosításokhoz jutunk, ha körök helyett körívsokszögeket tekintünk (72., 73., 74. ábra).

[34] Általában az eredeti ponthalmaz szerkezete megváltozik, ha „távoli" pontokkal is bővítjük. Gondolunk pl. nem összefüggő ponthalmaz konvex burkára.

[35] Egy zárt ponthalmazt Hadwiger-féle értelemben α-rendű konvexnek mondunk, ha minden $\lambda < \alpha$ sugarú körlappal való metszete egyszeresen összefüggő. Egy zárt ponthalmaz Perkal-féle értelemben ε-konvex, ha ε-sugarú nyílt körlapok összeségének komplementerje.

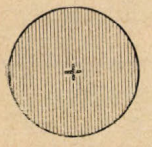
HADWIGER és PERKAL eredményeihez kapcsolódva MOLNÁR [1] 1960-ban — az állandó görbületü felületeken — bevezette a körkonvexitás fogalmát.[36]

Egy zárt ponthalmaz *ϱ-sugarú körkonvex*, ha minden határpontjában van ϱ-sugarú támaszköre.

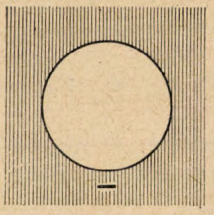
MOLNÁR a körkonvexitási fogalmat általánosabban is kimondja, amennyiben körök mellett para- és hiperciklusokat is tekintetbe vesz.[37]

[36] A körkonvexitási fogalom tartalmazza a Perkal-féle ε-konvexitás, a Hadwiger-féle α-rendű konvexitás és a Mayer-féle [1] r-hiperkonvexitás fogalmát és kapcsolatban van az A. D. Alexandrov-féle [1] PRV-halmazok, valamint a Resetnyák-féle [1] 0_δ halmazok fogalmával.

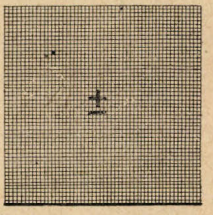
[37] Pontosabban, Molnár a körkonvexitási fogalmat a következőképpen vezeti be: Az állandó görbületű felületen egy sugársor bármely orthogonális trajektoriája (gömbön: kör, euklideszi síkon: kör, egyenes, hiperbolikus síkon: kör, paraciklus, hiperciklus egyenes) a felületet két tartományra bontja. Egy ilyen (határpontjaival le-



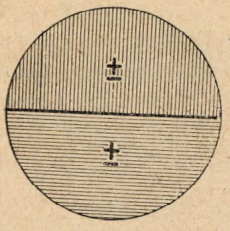
75. ábra



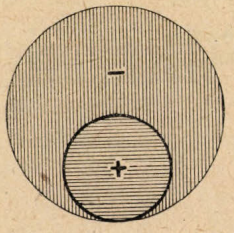
76. ábra



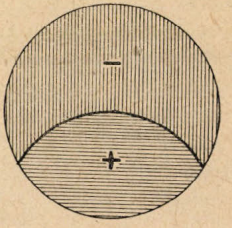
77. ábra



78. ábra



79. ábra

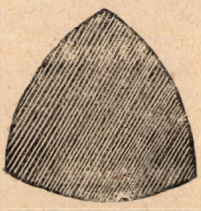


80. ábra

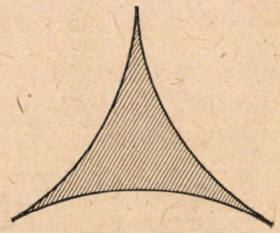
zárt) tartományt *ciklus tartomány*nak — röviden *ciklus*nak — nevezünk. Ha a ciklust határoló vonal ϱ-sugarú kör, akkor a ciklust ϱ sugarú, ill. — ϱ-sugarú ciklusnak nevezzük, aszerint, amint a ciklus konvex (75. ábra), vagy konkáv (76. ábra). Célszerűnek mutatkozik a többi ciklushoz is „sugárértéket" hozzárendelni, mégpedig a következőképpen: Legyen az euklideszi félsíkra $\varrho = \pm\infty$ (77. ábra), a hiperbolikus félsíkra $\varrho = \pm 2\infty$ (78. ábra), a paraciklus által határolt (zárt) tartományra $\varrho = \pm\infty$ (79. ábra), a hiperciklus által határolt (zárt) tartományra $\varrho = \pm 2\infty \mp a$ (80. ábra), ahol a jelenti

A körkonvex tartományok igen változatosak (81., 82., 83., 84., 85. és 86b ábra).[38] Értelmezhető egy tartomány (86a ábra) ϱ-sugarú *körkonvex burka* (86b ábra). A 85. ábra egy tartománynak bizonyos ϱ sugárértékekhez tartozó körkonvex burkát ábrázolja.

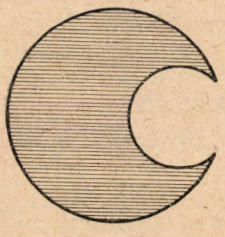
A körkonvexitás hasznos fogalomnak bizonyult és az elhelyezési problémák vizsgálatában új kutatási területet nyújt. Erről a területről származó eddigi eredményekről számolunk be a következő fejezetben.



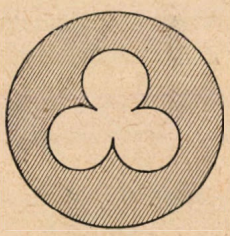
81. ábra



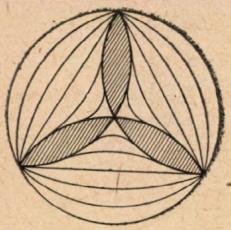
82. ábra



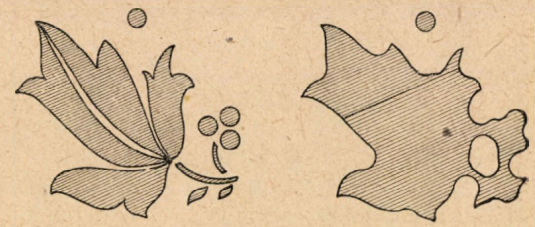
83. ábra



84. ábra



85. ábra



86. ábra

a hiperciklusnak alapegyenesétől való távolságát. A ϱ sugarú ciklust röviden ϱ-ciklusnak nevezzük.

Definició: Egy zárt ponthalmazt ϱ *sugarú körkonvex*nek nevezünk, ha bármely határpontjához illeszkedik ϱ sugarú támaszciklus, azaz olyan ϱ-ciklus, mely illeszkedik a határponthoz és nem tartalmaz belsejében ponthalmazbeli pontot.

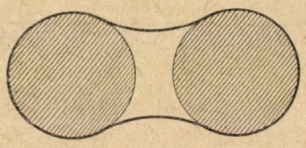
[38] A 83., ill. 84. ábra olyan tartományokat ábrázol, mely bizonyos $\varepsilon = \alpha$, ill. $\varrho = \varepsilon$ értékekre Perkal-féle ε-konvex (de nem Hadwiger-féle α-rendű konvex), ill. ϱ sugarú körkonvex (de nem Perkal-féle ε-konvex).

Elhelyezések körkonvex tartományokban

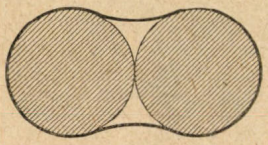
FEJES TÓTH-tól [10] ered a következő tétel:

Ha az euklideszi sík egy konvex tartományában legalább két egymásba nem nyúló egységnyi sugarú kör van elhelyezve, akkor ezeknek a köröknek a tartományra vonatkozó sűrűsége $< \frac{\pi}{\sqrt{12}}$.

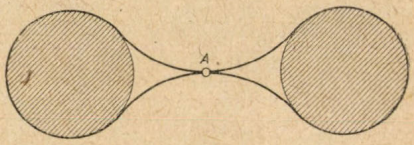
Azt a tartományt, mely két egymásba nem nyuló egységnyi sugarú kör ϱ-sugarú körkonvex burka, *ϱ-piskótának* nevezzük (87. ábra). Tekintsük ennek azt a két szélső esetét, midőn az egységkörök (88. ábra), ill. a ϱ sugarú körök érintkeznek (89. ábra).[39] E kétesetben a két egység-



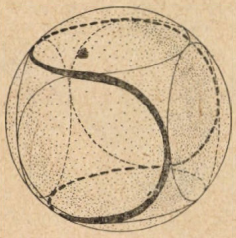
87. ábra



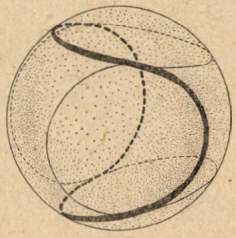
88. ábra



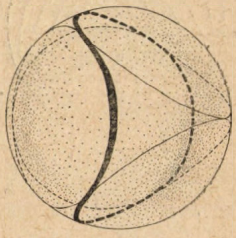
89. ábra



90a ábra



90b ábra



90c ábra

[39] Megemlítjük, hogy az euklideszi, ill. hiperbólikus sík nem tölthető ki egybevágó ϱ-piskótákkal a gömbfelület viszont igen (90 a., b, c ábra).

körnek a piskótára vonatkozó sűrűségét d_{1-1}^{ϱ}-, ill. $d_1^{\varrho-\varrho}$-val jelöljük.[40]

A fenti tételnek általánosítása a következő tétel (MOLNÁR [1]):

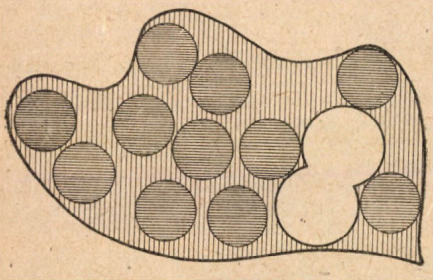
Ha az euklideszi sík egy összefüggő ϱ-sugarú körkonvex tartományában legalább két egymásba nem nyúló egységnyi sugarú kör van elhelyezve, akkor ezeknek a köröknek a tartományára vonatkozó sűrűsége

$$\delta \leqq \frac{\pi}{\sqrt{12}}, \quad ha \quad \varrho \geqq \varrho_0$$

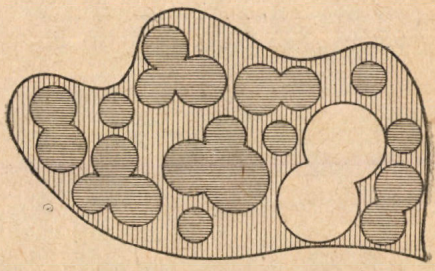
$$\delta \leqq d_{1-1}^{\varrho}, \quad ha \quad 1 \leqq \varrho > \varrho_0$$

$$\delta \leqq d_1^{\varrho-\varrho}, \quad ha \quad \varrho < 1,$$

ahol $\varrho_0 = 4{,}76\ldots$ *a* $d_{1-1}^{\varrho} = \frac{\pi}{\sqrt{12}}$ *egyenlet pozitív gyöke.*



91. ábra



92. ábra

MOLNÁR további tételekben [4] korlátot adott körkitöltési sűrűségre, ha 1) euklideszi síkon egy körkonvex tartományában n fajta kör van, ill. ha valamely állandó görbületű felület egy körkonvex tartományában 2) egyenlő sugarú körök vannak, ill. 3) n fajta kör van.[41]

Köröknek körkonvex tartományokban történő elhelyezéséhez kapcsolódva, HEPPES ért el további eredményeket:[42]

[40] $$d_{1-1}^{\varrho} = \frac{\pi}{\sqrt{\varrho^2+2\varrho} + \frac{\pi}{2} + 2(1-\varrho^2)\arcsin\frac{1}{1+\varrho}},$$

$$d_1^{\varrho-\varrho} = \frac{\pi}{\varrho\sqrt{1+2\varrho} + \frac{\pi}{2} + 2(1-\varrho^2)\arccos\frac{\varrho}{1+\varrho}}.$$

[41] Ezek a tételek tovább általánosíthatók, ha körök helyett (91. ábra) körívsokszögeket szerepeltetünk (92. ábra).

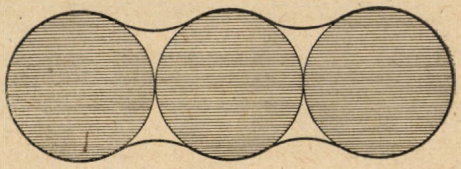
[42] Eredményeiről 1961. szept. 15-én a balatonvilágosi Geometriai kollokviumon számolt be.

K-*típusú*nak, ill. B-*típusú*nak nevezünk egy tartományt akkor, ha határán kívülről, ill. belülről végiggördíthető egy egységkör akadálytalanul, azaz úgy, hogy állandóan legyen a tartomány határával közös pontja és ne messe azt át.[43] Ilyen tartományokra igaz a következő tétel:

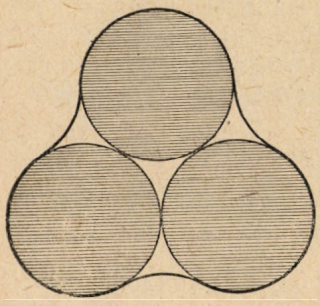
Ha egy K-típusú tartományban n egymásba nem nyúló B-típusú lapot helyezzünk el, akkor a tartomány le nem fedett részének területe legalább $(n-1)t$, *ahol* $\frac{t}{2}$ *három páronként érintkező egységkör által közrefogott ívháromszög területe.*

E tétel közvetlen következménye, hogy a sík T területű B-típusú tartományokkal való kitöltésénél a sűrűség legfeljebb $\frac{T}{T+t}$.

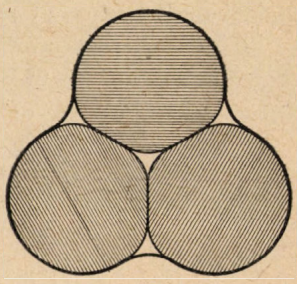
Az elhelyezett lapoknak nem kell egybevágóknak lenni. A becslés számos esetben pontos, amint ezt néhány kiragadott példával (93., 94., 95., 96., 97., 98*a*, *b*, 99. ábra) illusztráljuk is.



93. ábra

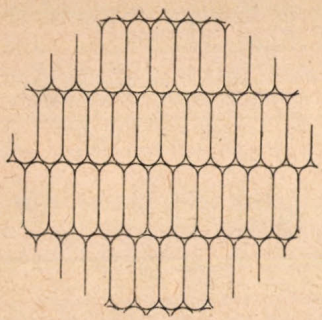


94. ábra

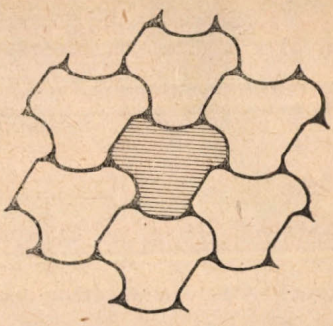


95. ábra

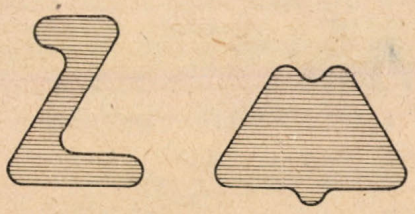
[43] v. ö. Hadwiger [1].



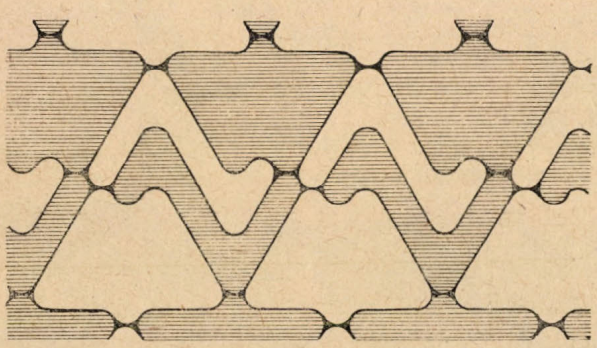
96. ábra



97. ábra



98a ábra

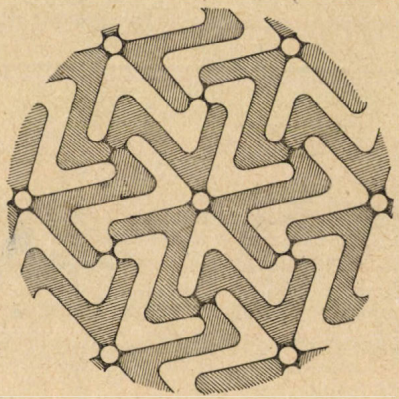


98b ábra

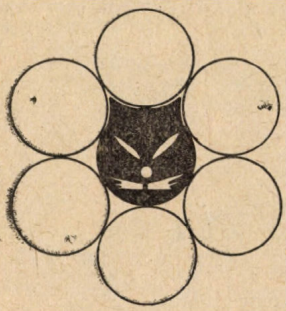
Könnyen adódik a fenti tételből a következő általánosabb tartományokra is alkalmazható sűrűségbecslés:

Ha T_B a T tartománynak egy B-típusú része, akkor a síknak T-vel kongruens tartományokkal való kitöltésekor fellépő sűrűség nem lehet $\frac{T}{T_B + t}$*-nél több.*[42]

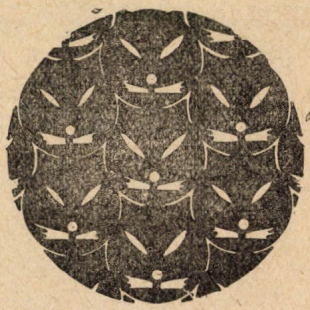
Befejezésül megemlítjük, hogy dolgozatunkban főleg kitöltésre vonatkozó eredmények szerepeltek. A fedési problémákkal kapcsolatban csupán annyit jegyzünk meg, hogy kezelése jóval nehezebbnek igérkezik, s ezen a területen még sok a tennivaló.



99. ábra



100a ábra



100b ábra

[42] Ez a korlát semmitmondó, ha értéke $\geqq 1$, de sok meglehetősen általános T esetében is pontos (100a, b ábra).

IRODALOMJEGYZÉK

Александров, А. Д., О поверностях, представимых разностю выпуклых функций, Известия Акад. Наук Каз. СССР 60/3, 1949, 3—20.

Bollobás, B., A sík lefedése egybevágó konvex sokszögekkel I. Középisk. Mat. Lapok 22 (1961), 49—55.

Dirichlet, G. L., Über die Reduction der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen, J. für die reine und angew. Math. 40 (1850), 209—227.

Fejes Tóth, L., [1] Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum, Berlin Göttingen—Heidelberg 1953, [2] Über die Abschätzung des kürzesten Abstandes zweier Punkte eines auf einer Kugelfläche liegenden Punktsystems, Jber. dtsch. Math.-Ver. 53 (1943) 66—68, [3] Über eine Punktverteilung auf der Kugel, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 10 (1959), 13—19, [4] An Extremal Distribution of Great Circles on a Sphere, Publ. Math. 6 (1959), 79—82, [5]. On shortest nets with meshes of equal area, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 11 (1960) 363—370, [6] Kreisausfüllungen der hyperbolischen Ebene, Acta Math Acad. Sci. Hung. 4 (1953), 103—110, [7] Über die dichteste Horozyklenlagerung, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 5 (1954), 41—44, [8] Kreisüberdeckungen der hyperbolischen Ebene, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 4 (1953), 111—114, [9] Über die dünnste Horozyklenüberdeckung, Acta Math Acad. Sci. Hung. 7 (1956), 95—98, [10] On the densest packing of circles in a convex domain, Norske Vid. Selsk. Forhdl. Trodheim, 21 (1948), 32—34. [11] Neuere Ergebnisse in der diskreten Geometrie, Elemente der Math. 15 (1960), 25—36.

Fejes Tóth, L.—Molnár, J., Unterdeckung und Überdeckung der Ebene durch Kreise, Math. Nachrichten, 18 (1958), 236 243.

Florian, A. Ausfüllung der Ebene durch Kreise, Rend. Circ. Mat. Palermo, 9 (1960) 300—312.

Hadwiger, H., Die erweiterten Steinerschen Formeln für ebene und sphärische Bereichen, Comment. Math. Helvetici, 18 (1946), 59—72.

Heppes A., A kuboktaéder gömbi hálózatának egy szélsőérték-tulajdonsága, Az MTA Mat. Kutató Int. Közleményei, 3 (1958), 97—99.

Heppes, A.—Molnár, J., Újabb eredmények a diszkrét geometriában I, Mat. Lapok, 11 (1960), 330—355.

Jucovič, E., Umiestenie 17, 25 a 33 bodov na guli, Mat. Fiz. Casopis 9. 1959), 173—176.

Kershner, R., The number os circles covering a set, Amer. J. Math. 61, (1939) 665—671.

Krammer, G., Megjegyzés gömbnek körökkel való kitöltéséhez és lefedéséhez, Mat. Lapok 11 (1960), 120 123.

Макаров, Б. С., Полуправильные многоугольники и многосторонники на плоскомтях Евклида и Лобаческого, Уч. зац. Кишиневск. Ун-т, 54 (1960), 101—116.

Mayer, A. E., Eine Überkonvexität, Math. Zeitschrift, 39 (1935), 511—532

Molnár J., [1] Über ϱ-konvexe Gebiete, II. Magyar Mat. Kongr. Budapest I(II) 1960, 51—53, [2] Collocazioni di cerchi sulla superficie di curvatura costante, Atti delle celebrazioni archimedee del secolo XX, Siracusa (nyomás alatt), [3] Alcune generalizzazioni del teorema di Segre-Mahler, Accad. Naz. dei Lincei 30/5, (1951), 701—705, [4] Körelhelyezések állandó görbületi felületeken, Budapest 1961 (disszertáció).

Perkal, J., Sur les ensembles ε-convexes, Colloquium Math. 6 (1956), 1—10.

Решетняк, Ю. Г., Об одном обобщении выпуклых поверхностей, Мат. Сборник, 40 (82) 3, 1959, 381—398.
Robinson, R. M., Arrangement of 24 points on a sphere, Math. Ann. **144** (1961), 17—48.
Schütte, K., Überdeckung der Kugel mit höchstens acht Kreisen, Math. Ann. **129** (1955), 181—186.
Sperling, G., Lösung einer elementargeometrischen Frage von Fejes Tóth, Arch. Math. **11** (1960), 69—71.
Schütte, K.—van der Waerden, B. L., Auf welcher Kugel haben 5, 6, 7, 8 oder 9 Punkte mit Mindestabstand 1 Platz? Math. Ann. **123** (1951), 96—124.
Tammes, P. M. L., On the origin of number and arrangement of the places of exit on the surface of pollengrains, Rec. Trav. bot. néerl. **27** (1930), 1—84.
Thue, A., Om nogle geometrisk taltheoretiske Theoremes, Forhdl. Skand. Naturfors. **14** (1892), 352—353.
aan der Waerden, B. L., Punkte auf der Kugel. Drei Zusätze. Math. Ann. **124** (1952), 213—222.

НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В ДИСКРЕТНОЙ ГЕОМЕТРИИ. II

А. Хеппеш, Й. Мольнар

В статье приведены наиболее значительные новые результаты и проблемы, относящиеся к кругу вопросов, затронутых в книге Л. Фейеш-Тота и касающиеся поверхности постоянной кривизны. Она состоит из следующих глав: Экстремальные системы точек, Мозаики, Плотность системы кругов, Размещения кругов относительно выпуклой области, О круговo-выпуклых множествах, Размещения в кругово-выпуклой области. (Круговo-выпукчым называется множество точек в плоскости, если для него существуют опорные окружности с постоянным радиусом, играющие ту же роль как и опорные прямые для выпуклых множеств.)

NEUERE ERGEBNISSE IN DER DISKRETEN GEOMETRIE II.

A. Heppes und J. Molnár

In dieser Arbeit werden einige wichtigere neue Resultate und Fragen aus dem Problemkreis des Buches von L. Fejes Tóth dargelegt, die sich auf Flächen konstanter Krümmung beziehen.

Die Arbeit ist in folgende Abschnitte aufgeteilt: Extremale Punktsysteme, Mosaiken, Die dichte einer Kreislagerung Kreislagerungen in konvexen Gebieten, Über Kreiskonvexe Punktmengen, Lagerungen in kreiskonvexen Gebieten.

A komplex függvénytan elemeinek topológiai segédeszközeiről

CSÁSZÁR ÁKOS

Hajós Györgynek 50. születésnapjára

1. A komplex függvénytan elemeit tárgyaló tankönyvekben vagy egyetemi előadásokban rendszerint jelentős didaktikai nehézséget okoz az a körülmény, hogy az elmélet alapjait szolgáltató integráltételek lényegesen támaszkodnak a sík, illetőleg a gömbfelület topológiájának olyan fogalmaira és tételeire, amelyek az olvasók vagy hallgatók előtt addigi tanulmányaikból általában nem ismeretesek. Egy-egy szabatosan megfogalmazott tételnek bizonyítás nélkül való felhasználása más tárgykörökben is gyakran elkerülhetetlen és így indokolt esetben megengedhető ugyan, itt azonban nem erről van szó, hanem egyfelől szabatosan nem definiált fogalmaknak alapvető szerepeltetéséről, másfelől topológiai tényeknek a szemléletre támaszkodó ismételt alkalmazásáról.

Így például már az egyszeresen összefüggő tartomány szokásos definíciója (olyan tartomány, amely tartalmazza minden benne fekvő egyszerű zárt poligon belsejét) felhasználja a (szabatosan rendszerint nem bizonyított) poligonokra vonatkozó Jordan-tételt, s a Cauchy-féle integráltételnek egyszeresen összefüggő tartományra való bizonyítása közben ezenfelül arra is hivatkozni szokás (de bizonyítása — nem is egyszerű — rendszerint elmarad), hogy a síkban bármely egyszerű zárt poligonhoz megadhatók olyan, a poligon külsejét nem metsző háromszögek, amelyeknek kerületét megfelelő irányítással körüljárva a poligont egyszer körüljárjuk, a poligonhoz nem tartozó oldalakat pedig kétszer, ellenkező irányban futjuk be.

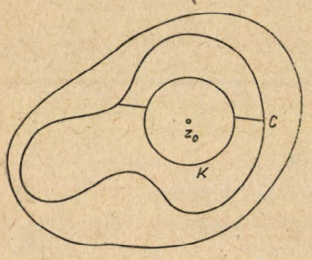
Másik példaként tekintsük a Cauchy-féle integrálformulának következő szokásos megfogalmazását:

Ha $f(z)$ reguláris az egyszerű, zárt, rektifikálható C görbén s ennek belsejében, z_0 pedig a görbe belsejében fekszik, akkor

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz,$$

ha C-t pozitív irányban járjuk körül.

Az itt felhasznált egyik fogalom, a C görbe *belseje*, szabatosan definiálható, ha elfogadjuk (bizonyítására rendszerint nem kerül sor) a Jordan-féle tételt legalábbis rektifikálható görbékre, a *pozitív körüljárás* fogalma azonban többnyire azzal a semmitmondó kitétellel kerül elintézésre, hogy ez az a körüljárás, amelynél C belseje balkéz felé esik. Ha a C görbe rektifikálhatóságára s így érintőjének majdnem mindenütt való létezésére hivatkozva szabatos értelmet adunk a „balfelé esik" kifejezésnek, megint csak el kell fogadni azt a tényt, hogy van ilyen körüljárás. Ami a tétel bizonyítását illeti, rendszerint az egyszeresen összefüggő tartományokra vonatkozó Cauchy-féle integráltételre vezetik vissza, mégpedig oly módon, hogy C-t és belsejét egy egyszeresen összefüggő tartományba foglalják, amelyben $f(z)$ reguláris (nem könnyű ennek lehetőségét bizonyítani), majd egy z_0 középpontú kicsiny K körvonalat két szakasz segítségével összekötnek C-vel s az ábráról leolvassák (szabatosan bizonyítani megint nem egyszerű), hogy a K és C egy-egy ívéből és az összekötő szakaszokból összetett zárt görbék belefoglalhatók egy-egy egyszeresen összefüggő résztartományba, amelyben $f(z)$ reguláris.



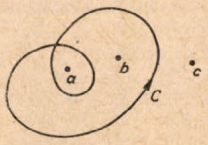
1. ábra

2. A most vázolthoz hasonló, vagy nehézkes topológiai meggondolások közbeiktatásával terhelt, vagy minduntalan a szemléletre (illetőleg az éppen megrajzolt ábra speciális viszonyaira) hivatkozó okoskodások jellemzik a komplex függvénytan elemeit tárgyaló művek túlnyomó többségét.[1] A csekély számú kivételt képező művek (nem említve azokat, amelyek a geometriai módszereket teljesen mellőző Weierstrass-féle felépítést követik s így nélkülözni kénytelenek a szabatos kritikával ellenőrzött szemlélet jelentékeny heurisztikus erejét) arra a felismerésre támaszkodnak, hogy a komplex függvénytan integráltételeiben a döntő szerep annak a kérdésnek jut, hogy az integrációs utat szolgáltató zárt görbe az integrandusz szinguláris helyeit *megkerüli-e*, illetőleg *hányszor kerüli meg*. A Cauchy-féle integrálformulának fenti megfogalmazásában például a C görbe egyszerű zárt voltának mindössze annyi a szerepe, hogy az ilyen görbe csupán a belsejében fekvő pontokat kerüli meg, s a C görbét azért kell pozitívan körüljárni, hogy ezáltal a görbe a z_0 pontot $(+1)$-szer kerülje meg. Az elmélet ilyen felépítésénél eszerint a főszerep azon szám szabatos definíciójának és tulajdonságai szabatos igazolásá-

[1] Csaknem minden részlet szabatos kidolgozásával nyújtja ezt a felépítést a következő munka: W. J. THRON, Introduction to the theory of functions of a complex variable (New York—London, 1953).

nak jut, amely megmondja, hogy egy adott zárt görbe egy adott (rajta nem fekvő) pontot hányszor kerül meg. Ezt a számot nevezik a kérdéses pont adott görbére vonatkozó *index*ének.

Az index fogalma a szemlélet számára éppen olyan kézenfekvő, mint az egyszerű zárt görbe belsejének fogalma (így mindenki azonnal megérti, hogy a 2. ábrán látható C görbe az a pontot kétszer, a b pontot egyszer, a c pontot 0-szor kerüli meg, vagyis nem kerüli meg). Lényeges különbség viszont, hogy míg a Jordan-féle tétel megfelelő topológiai előkészítés nélkül csak igen körülményesen bizonyítható, addig az index definíciója és felhasználásra kerülő tulajdonságainak igazolása meglehetősen egyszerű segédeszközökkel elvégezhető, sőt további előnyt jelent, hogy e segédeszközök jórészt éppen abból az apparátusból kerülnek ki, amely a komplex függvénytan felépítéséhez egyébként is nélkülözhetetlen. Így például mindjárt az index szabatos értelmezésére kínálkozik többféle komplex eszközökre támaszkodó módszer is: a z_0 pontnak a zárt C görbére vonatkozó indexe nem más, mint az $i \arg z$ függvény, vagy a $\log z$ függvény C menti megváltozásának $\frac{1}{2\pi i}$-szerese (amihez persze szükséges egy többértékű függvény adott görbe menti megváltozásának szabatos értelmezése)[2], vagy kihasználva azt a körülményt, hogy többnyire csupán integrációs utakra vonatkozó indexek játszanak szerepet s így lehet a rektifikálható zárt görbékre vonatkozó index értelmezésére szorítkozni, nem egyéb, mint



2. ábra

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{z-z_0}.^{3} \tag{2.1}$$

Az index értelmezésére szolgáló most említett módszereket didaktikai szempontból jogosan lehet kifogásolni önkényességük miatt, hiszen első pillantásra semmi közük sincsen a „megkerülések számának" szemléletes fogalmához, s csak utólag derül ki, hogy valóban rendelkeznek az e fogalomhoz fűződő és szemléletünk által megkövetelt tulajdonságokkal. Éppen ezért nem érdektelen az index-fogalom bevezetésének alább[4] bemutatott ama módja, amely a „megkerülési szám" fogalmának

[2] V. ö. S. Saks—A. Zygmund, Analytic functions (Warszawa—Wrocław 1952), 186. o., vagy G. Sansone—J. Gerretsen, Lectures on the theory of function of a complex variable, I. (Groningen, 1960).

[3] V. ö. L. V. Ahlfors, Complex analysis (New York—Toronto—London, 1953), 93. 0.

[4] L. 4. pont.

néhány a szemlélet által megkövetelt tulajdonságából indul ki, megmutatja, hogy e tulajdonságok a kérdéses számot egyértelműen meghatározzák, s azután tér csak rá arra, hogy a (2. 1) képlettel megadott szám tényleg rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal. Ennek tárgyalása közben a [3] alatt idézett műhöz képest néhány lényeges egyszerűsítést is sikerül elérnünk. Mindennek előkészítésére a 3. pontban a felhasznált görbefogalom szabatos értelmezését s néhány ehhez kapcsolódó fogalmat foglalunk össze.

3. Nevezzük (komplex síkbeli, irányított, folytonos) *görbé*nek az $I=[0, 1]$ zárt intervallumon értelmezett komplex értékű folytonos φ függvényt. A φ görbe *képe* a $C_\varphi=\{\varphi(t): 0\leqq t\leqq 1\}$ komplex síkbeli ponthalmaz (amely korlátos és zárt), *kezdőpont*ja a $\varphi(0)$, *végpont*ja a $\varphi(1)$ pont. Azt mondjuk, hogy φ *összeköti* a $\varphi(0)$ és $\varphi(1)$ pontokat, vagy hogy $\varphi(0)$-ból $\varphi(1)$-be *vezet*.

Ha φ görbe és ω az I intervallumon értelmezett szigorúan monoton növekvő, folytonos függvény, melyre $\omega(0)=0$ és $\omega(1)=1$, akkor a

$$\psi(t)=\varphi(\omega(t)) \qquad (t\in I) \tag{3. 1}$$

képlet is egy ψ görbét határoz meg, melyre $C_\psi=C_\varphi$, $\psi(0)=\varphi(0)$, $\psi(1)=\varphi(1)$. A φ és ψ görbéket *ekvivalens*nek mondjuk, ha található hozzájuk a (3. 1) képletet kielégítő, I-ben szigorúan monoton növekvő, folytonos ω függvény, melyre $\omega(0)=0$, $\omega(1)=1$. Ilyenkor a $\varphi\sim\psi$ szimbólumot használjuk. Könnyű belátni, hogy a $\sim$ reláció reflexiv, szimmetrikus és tranzitiv.[5]

Ha φ görbe, akkor

$$\varphi^*(t)=\varphi(1-t) \qquad (t\in I) \tag{3. 2}$$

is görbét ad meg, melyre $C_{\varphi^*}=C_\varphi$, $\varphi^*(0)=\varphi(1)$, $\varphi^*(1)=\varphi(0)$. φ^*-ról azt mondjuk, hogy φ-ből *az irányítás ellenkezőre változtatásával* keletkezik. Nyilván $(\varphi^*)^*=\varphi$ és $\varphi\sim\psi$ esetén $\varphi^*\sim\psi^*$.

Ha φ görbe és $0\leqq a<b\leqq 1$, akkor

$$\psi(t)=\varphi\big(a+t(b-a)\big) \qquad (t\in I) \tag{3. 3}$$

is görbe, melyre $C_\psi\subset C_\varphi$, $\psi(0)=\varphi(a)$, $\psi(1)=\varphi(b)$. Ilyenkor azt mondjuk, hogy ψ *részíve* φ-nek.

Ha φ és ψ két görbe, melyekre $\varphi(1)=\psi(0)$, akkor a

$$\chi(t)=\begin{cases}\varphi(2t), & \text{ha} \quad 0\leqq t\leqq \frac{1}{2},\\ \varphi\big(2(t-\frac{1}{2})\big), & \text{ha} \quad \frac{1}{2}\leqq t\leqq 1\end{cases} \tag{3. 4}$$

[5] Logikusabb volna az e relációra nézve képezett ekvivalencia-osztályokat nevezni görbéknek, vagyis nem tenni különbséget a csak a paraméterezés módjában különböző görbék között, ez az absztaktabb fogalom azonban a kezdőnek könnyen okoz nehézséget.

képlet is egy χ görbét ad meg, melyre $C_\chi = C_\varphi \cup C_\psi$, $\chi(0) = \varphi(0)$, $\chi(1) = \psi(1)$. Ilyenkor azt mondjuk, hogy φ és ψ *összefűzhető*, s hogy a χ görbe φ és ψ *összefűzése*, képletben $\chi = \varphi \vee \psi$. Ha $\varphi \sim \varphi_1$, $\psi \sim \psi_1$, akkor $\varphi \vee \psi \sim \varphi_1 \vee \psi_1$. Világos továbbá, hogy

$$(\varphi \vee \psi)^* = \psi^* \vee \varphi^*.$$

Az is könnyen belátható, hogy érvényes a

$$(\varphi \vee \psi) \vee \chi \sim \varphi \vee (\psi \vee \chi) \tag{3.5}$$

asszociatív törvény.[6]

A φ görbe *egyszerű*, ha $0 \leqq t_1 < t_2 \leqq 1$ esetén $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$. A φ görbe *zárt*, ha $\varphi(0) = \varphi(1)$. Végül φ *egyszerű zárt görbe*, ha $\varphi(0) = \varphi(1)$, de $0 \leqq t_1 < t_2 < 1$ esetén $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$.[7]

A φ görbe *rektifikálható*, ha van olyan (véges) K korlát, hogy $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ esetén

$$\sum_{k=1}^{n} |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})| \leqq K.$$

Az ilyen K korlátok legkisebbike φ *hosszúsága*. Ha φ rektifikálható, akkor φ^* és $\varphi \sim \psi$ esetén ψ is ilyen, továbbá φ minden részíve is, és φ^*, valamint ψ hosszúsága egyenlő φ-vel. Ha φ és ψ rektifikálható és összefűzhető, akkor $\varphi \vee \psi$ is rektifikálható és hosszúsága egyenlő φ és ψ hosszúságának összegével.

Rektifikálható görbék például a *szakaszok*. Ha a, b két komplex szám, akkor ab szakaszon értjük a

$$\sigma(t) = a + t(b - a) \qquad (t \in I)$$

képlettel értelmezett görbét. Az a_0a_1 szakaszhoz az a_1a_2 szakaszt, majd az így keletkező görbéhez az a_2a_3 szakaszt, s így folytatva végül az $a_{n-1}a_n$ szakaszt hozzáfűzve az előzők összefűzéséhez, az $a_0a_1 \ldots a_n$ *poligon* keletkezik. Az $a_{k-1}a_k$ szakaszok a poligon *oldal*ai, az a_k pontok a poligon *csúcs*ai. Ugyancsak $a_0 \ldots a_n$ poligonnak mondunk minden olyan görbét is, amely ekvivalens az imént értelmezett $a_0 \ldots a_n$ poligonnal. Ha φ görbe és $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$, akkor a $\varphi(t_0)\varphi(t_1) \ldots \ldots \varphi(t_n)$ poligont φ-*be írt* poligonnak mondjuk.

A következőkben görbén egyelőre mindig rektifikálható görbét értünk (anélkül, hogy ezt külön hangsúlyoznók minden alkalommal). A beszédmód egyszerűsítése kedvéért olyankor, amikor nem vezet félreértésre, nem teszünk különbséget egy φ görbe és ennek C_φ képe között; azt mondjuk például, hogy egy z pont rajta fekszik φ-n, vagy hogy φ áthalad z-n, ha $z \in C_\varphi$.

[6] A görbe értelmezésének [5] alatt említett módosítása esetén itt $\sim$ jel helyett $=$ volna írható.

[7] Ekkor tehát φ zárt görbe, de nem egyszerű görbe.

4. Legyen φ zárt görbe és $a \notin C_\varphi$. Az a pont φ-re vonatkozó *indexe* az a szám, amely megmutatja, hányszor kerüli meg a φ görbe az a pontot. Ezt a számot $n(\varphi, a)$-val jelölve, az index szemléletes jelentéséből leolvashatók az alábbi tulajdonságok:

(4. 1) *$\varphi \sim \psi$, $a \notin C_\varphi = C_\psi$ esetén* $n(\varphi, a) = n(\psi, a)$ (vagyis a megkerülések száma nem függ a parametrizálás módjától).

(4. 2) *Ha* $\varphi_1 = \varphi \vee \psi$, $\varphi_2 = \psi \vee \varphi$ *két zárt görbe és* $a \notin C_{\varphi_1} = C_{\varphi_2}$, *akkor* $n(\varphi_1, a) = n(\varphi_2, a)$ (vagyis a megkerülések száma nem függ a zárt görbe kezdőpontjának megválasztásától).

(4. 3) *Ha φ és ψ két összefűzhető zárt görbe,* $a \notin C_\varphi \cup C_\psi$, *akkor* $n(\varphi \vee \psi, a) = n(\varphi, a) + n(\psi, a)$ (vagyis φ és ψ összefűzése annyiszor kerüli meg a-t, mint φ és ψ együttvéve).

(4. 4) $a \notin C_\varphi$ *esetén* $n(\varphi \vee \varphi^*, a) = 0$ (vagyis egy görbén oda-vissza járva egy pontot sem kerülünk meg).

(4. 5) *Ha* $\varphi(t) = a + re^{2\pi it}$ $(t \in I, r > 0)$, *akkor* $n(\varphi, a) = 1$ (vagyis az „óramutató járásával ellenkező irányban" körüljárt körvonal egyszer kerüli meg a középpontját).

(4. 6) *Ha φ zárt görbe és egy poligon C_φ metszése nélkül összeköti a-t és b-t, akkor* $n(\varphi, a) = n(\varphi, b)$ (vagyis a megkerülések száma nem változik meg, ha a-t a görbe átlépése nélkül mozgatjuk).

(4. 7) *Ha* $a \to \infty$, *akkor* $n(\varphi, a) \to 0$ (vagyis a ∞ pontot egyetlen zárt görbe sem kerüli meg).

Ahhoz, hogy az index fogalmának szabatos definíciójához jussunk, meg kell még mutatnunk, hogy valóban hozzá lehet rendelni minden φ zárt görbéhez és minden rajta nem fekvő a ponthoz egy $n(\varphi, a)$ számot úgy, hogy a (4. 1)—(4. 7) állítások teljesüljenek, éspedig csak egyféleképpen. Kezdjük az utóbbinak a bizonyításával, tegyük tehát fel, hogy értelmezve van a (4. 1)—(4. 7)-nek eleget tevő $n(\varphi, a)$ kifejezés.

(4. 8) *Ha* $\varphi(t) = a + re^{2\pi it}$ $(t \in I, r > 0)$ *és* $|b - a| < r$, *akkor* $n(\varphi, b) = 1$.

Ez rögtön adódik (4. 5) és (4. 6) alapján.

(4. 9) *Ha az a pont a zárt φ görbe metszése nélkül alkalmas poligonokkal tetszőlegesen távoli pontokkal összeköthető, akkor* $n(\varphi, a) = 0$.

Valóban, legyen $\{b_n\}$ oly sorozat, hogy $b_n \to \infty$ és a és b_n φ metszése nélkül poligonnal összeköthető. Ekkor (4. 6) szerint $n(\varphi, a) = n(\varphi, b_n)$ és (4. 7) szerint $n(\varphi, b_n) \to 0$.*

* Hajnal Andrástól származik az az észrevétel, hogy (4.9) felhasználásával a (4.4) tulajdonság levezethető a (4.1)—(4.3) és (4.5)—(4.7) feltételekből (s így el is hagyható). Valóban, ha az a pontnak C_φ legközelebbi pontjától való távolsága ε és a $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ felosztás úgy van megválasztva, hogy a $[t_{k-1}, t_k]$ intervallumoknak megfelelő φ_k részívek átmérője $< \frac{\varepsilon}{2}$, akkor $\varphi_k \vee \varphi_k^*$ be-

(4. 10) *Legyen* φ *egy ab szakasz,* ψ *egy b-ből a-ba vezető görbe,* $C_\varphi \cap C_\psi = \{a, b\}$, $\chi = \psi \vee \varphi$, $c \in C_\varphi$, $a \neq c \neq b$, σ *egy a'b' szakasz,* $a' \neq c \neq b'$, $C_\sigma \cap C_\varphi = \{c\}$. *Ekkor* $n(\chi, z)$ σ *mentén* c *átlépésekor* $(+1)$*-gyel vagy* (-1)*-gyel változik meg aszerint, hogy a* φ *irányát* σ *irányába átvivő* π*-nél kisebb forgás pozitív vagy negatív.*

Bizonyítás. Legyen $d = \frac{a+b}{2}$, $a = d + re^{i\alpha}$,

$$\lambda(t) = d + re^{i(\alpha + \pi t)},$$

$$\mu(t) = d + re^{i(\alpha + \pi + \pi t)}$$

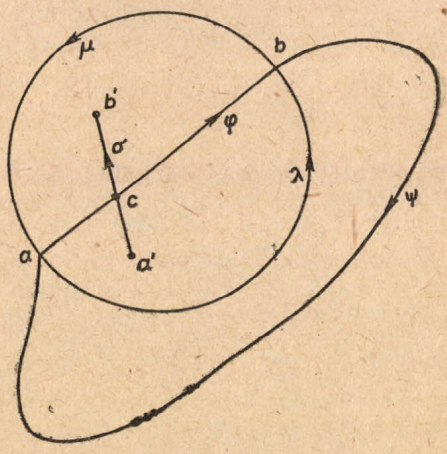
$(t \in I)$, $\gamma = \mu \vee \varphi$, $\delta = \varphi^* \vee \lambda$. Ekkor $z \notin C_\gamma \cup C_\sigma$ esetén (4. 3), (4. 1) és (4. 2) alapján

(4. 11)
$$n(\gamma, z) + n(\delta, z) = n(\gamma \vee \delta, z) =$$
$$= n((\varphi \vee \varphi^*) \vee (\lambda \vee \mu), z) =$$
$$= n(\varphi \vee \varphi^*, z) + n(\lambda \vee \mu, z).$$

Csakhogy (4. 4) miatt

$$n(\varphi \vee \varphi^*, z) = 0,$$

továbbá (4. 1), (4. 2) és (4. 8) szerint $n(\lambda \vee \mu, z) = 1$, mihelyt z eleget tesz a $|z - d| < r$ feltételnek. A továbbiakban ilyen z-kre szorítkozva tegyük például fel, hogy a φ irányát σ irányába átvivő π-nél kisebb forgás pozitív (3. ábra). Ekkor (4. 9) felhasználásával a σ mentén c-t megelőző z pontokra $n(\gamma, z) = 0$, a c-t követőkre pedig $n(\delta, z) = 0$, így az előbbi z-kre (4. 11) szerint $n(\delta, z) = 1$. Igy $n(\delta, z)$ értéke σ mentén c átlépésekor 1-ről 0-ra változik.



3. ábra

---

lefoglalható egy t_k körüli $\frac{\varepsilon}{2}$ sugarú körlemezbe, úgyhogy (4.9) miatt $n(\varphi_k \vee \varphi_k^*, a) = 0$, másrészt (4.1) — (4.3) ismételt alkalmazásával könnyen adódik, hogy $n(\varphi \vee \varphi^*, a) = \sum_1^n n(\varphi_k \vee \varphi_k^*, a)$.

Ismét (4. 3), (4. 1) és (4. 2) felhasználásával

$$n(\chi, z)+n(\delta, z)=n(\chi \vee \delta, z)= \\ =n\big((\varphi \vee \varphi^*) \vee (\lambda \vee \psi), z\big)=n(\varphi \vee \varphi^*, z)+n(\lambda \vee \psi, z),$$

ha $z \neq c$, de σ-n c-hez elég közel van, s itt a jobb oldal első tagja 0, a második pedig nem változik c átlépésekor (4. 6) értelmében. Így $n(\chi, z)$ megváltozása (-1)-szerese $n(\delta, z)$ megváltozásának, azaz $+1$. Hasonló az okoskodás, ha a φ irányát σ irányába vivő π-nél kisebb forgás negatív.

(4. 12) *Ha φ zárt poligon és $a \notin C_\varphi$, akkor $n(\varphi, a)$ egyértelműen meg van határozva és valós, egész szám.*

Valóban, egy a-ból kiinduló, φ egyik csúcsát sem tartalmazó és egyik oldalával sem párhuzamos félegyenesen elég messze menve $n(\varphi, z)$ értéke véges számú ± 1 nagyságú ugrás után (melyeket φ és a félegyenes helyzete (4. 10) értelmében egyértelműen meghatároz) s két-két ugrás között (4. 6) szerint nem változva (4. 9) miatt 0-ra változik.

(4. 13) *Ha φ zárt görbe és $a \notin C_\varphi$, akkor minden φ-be írt elég finom ψ poligonra $n(\psi, a)=n(\varphi, a)$.*

Valóban, legyen $\varepsilon>0$ a-nak C_φ legközelebbi pontjától való távolsága s készítsük el I-nek oly finom $0=t_0<t_1<\ldots<t_n=1$ felosztását, hogy φ megfelelő részíveinek átmérője kisebb legyen $\frac{\varepsilon}{2}$-nél. Ha ψ jelenti a $\varphi(t_0)\varphi(t_1)\ldots\varphi(t_n)$ poligont, akkor $n(\psi, a)=n(\varphi, a)$, mert (4. 4) és (4. 3) szerint

4. ábra

$$n(\varphi, a)-n(\psi, a)=n(\varphi, a)+n(\psi^*, a),$$

s itt a jobb oldal értéke (4. 1), (4. 2) és (4. 3) ismételt alkalmazásával

$$\sum_{k=1}^{n} n(\varphi_k, a),$$

ahol φ_k a φ görbe $[t_{k-1}, t_k]$-hoz tartozó részívének és a $\varphi(t_k)\varphi(t_{k-1})$ szakasznak összefűzését jelenti. Viszont (4. 9)-ből könnyen következik, hogy $n(\varphi_k, a)=0$ $(1 \leqq k \leqq n)$, ami az állítást adja.

(4. 12) és (4. 13) most már könnyen szolgáltatja a következő eredményt:

(4. 14) *Ha $n(\varphi, a)$ minden zárt φ görbéhez és minden $a \notin C_\varphi$ ponthoz hozzárendel egy számot és teljesíti a* (4. 1)—(4. 7) *feltételeket, akkor ezáltal egyértelműen meg van határozva (és értéke valós, egész szám).*

Most már csak azt kell belátni, hogy csakugyan van a (4. 1)—(4. 7) kikötéseknek eleget tevő $n(\varphi, a)$ kifejezés. Tekintettel arra, hogy a (4. 1)—(4. 4) tulajdonságok a vonalintegrál jól ismert tulajdonságait fejezik ki, s hogy $\varphi(t) = a + re^{2\pi it}$ $(t \in I, r > 0)$ esetén közismerten

$$\int_\varphi \frac{dz}{z-a} = 2\pi i,$$

kézenfekvő az

(4. 15) $$n(\varphi, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{dz}{z-a}$$

kifejezéssel kísérletezni. Ez tehát még (4. 5)-nek is eleget tesz. (4. 7) is teljesül, mert ha a-nak C_φ legközelebbi pontjától való távolsága r és φ hosszúsága s, akkor ismert becsléssel $|n(\varphi, a)| \leqq \frac{1}{2\pi} \frac{s}{r} \to 0$, ha $a \to \infty$. Végül (4. 6) így látható be: a (4. 15) integrál értéke tudvalevőleg a-nak differenciálható függvénye minden φ-n rajta nem fekvő a pontban, éspedig

$$\frac{d}{da} n(\varphi, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{dz}{(z-a)^2}.$$

Másrészt rögzített a mellett

$$\frac{1}{(z-a)^2} = -\frac{d}{dz} \frac{1}{z-a},$$

úgyhogy a zárt φ görbén vett integrál értéke 0:

$$\frac{d}{da} n(\varphi, a) = 0 \qquad (a \notin C_\varphi).$$

Innen rögtön adódik (4. 6) állítása.

Megjegyzendő, hogy a (4. 15) képlettel az index tetszőleges (nemcsak zárt) görbére értelmezhető, csak persze ekkor értéke nem lesz már valós és egész szám, s ezzel szemléletes „megkerülési szám" jelentése is elvész. Ezért beszéltünk mindig csak zárt görbére vonatkozó indexről, jóllehet tetszőleges görbék felhasználása az előző fejtegetéseket némileg egyszerűsítette volna.

5. Az index (4. 15) alatti előállítását és az előző pontban ismertetett tulajdonságait felhasználva, s kiindulva a Cauchy-féle integráltételnek

a Goursat—Pringsheim-féle eljárással minden topológiai nehézség nélkül bizonyítható következő alakjából:

Ha $f(z)$ reguláris egy konvex, nyílt halmazon, akkor bármely e halmazban fekvő φ zárt görbére $\int_{\varphi} f(z)dz=0$,

könnyen igazolható a Cauchy-féle integráltétel következő általános alakja.

Legyen $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ zárt görbe, $a\notin \bigcup_{k=1}^{n} C_{\varphi_k}$. Azt mondjuk, hogy a $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ görbék az a helyet *együttvéve* N-szer *kerülik meg*, ha

$$N=\sum_{k=1}^{n} n(\varphi_k, a),$$

speciálisan $N=0$ esetén e görbék a-t *együttvéve nem kerülik meg. Ha mármost $f(z)$ reguláris a C_{φ_k} halmazokon, valamint mindazon pontokban, amelyeket a φ_k görbék együttvéve megkerülnek, akkor*

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{\varphi_k} f(z)dz=0.^{8}$$

Ebből aztán könnyen nyerhető a Cauchy-féle integrálformula következő alakja:

Ha $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ zárt görbe, $f(z)$ reguláris a C_{φ_k} halmazokon, továbbá mindazon pontokban, amelyeket a φ_k görbék együttvéve megkerülnek, végül a z_0 pontban, melyet együttvéve N-szer kerülnek meg a φ_k görbék, akkor

$$Nf(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\int_{\varphi_k}\frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

Természetesen ahhoz, hogy ezekből a tételekből további következtetéseket lehessen levonni, például hogy a Laurent-féle sorfejtés létezésének vagy a reziduum-tételnek bizonyítására fel lehessen őket használni, szükség van arra, hogy egy adott pontnak adott zárt görbére vonatkozó indexét könnyen meg lehessen állapítani. Meglepő, hogy az integráltételeket az index fogalmára alapozó [2] és [3] alatt idézett művek közül AHLFORSéban erre a célra csak egy igen speciális konfiguráció esetére vonatkozó lemma található,[9] SAKS és ZYGMUND műve pedig annak megjegyzésére szorítkozik, hogy konkrétan adott esetben alkalmas segédvonalak meghúzásával és lényegében (4. 9) ismételt alkalmazásával lehet $n(\varphi, a)$ értékét meghatározni.[10]

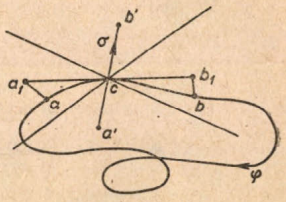
[8] L. AHLFORS [3] alatt idézett művében, 114—116. o. Sőt itt voltaképpen a valós vonalintegrálokra vonatkozó megfelelő tétel van bizonyítva.

[9] I. h. 94. o.

[10] I. h. 188—189. o.

Így érdeklődésre tarthat számot a következő egyszerű megjegyzés, amely (4. 10)-et általánosítja s arra könnyen visszavezethető:

(5. 1) *Legyen c a φ zárt görbének egyszeres pontja* (vagyis legyen $c \in C_\varphi$ és pontosan egy $t \in I$ értékre teljesüljön $c = \varphi(t)$) *s tegyük fel, hogy c-ben φ-nek van érintője. Legyen σ egy $a'b'$ szakasz, $c \in C_\sigma$, $a' \neq c \neq b'$. Ekkor $n(\varphi, z)$ σ mentén c átlépésekor $(+1)$-gyel vagy (-1)-gyel változik meg aszerint, hogy a φ görbe c-beli* (φ irányításának megfelelően irányított) *érintőjét σ-ba átvivő π-nél kisebb forgásszög pozitív vagy negatív.*



5. ábra

Bizonyítás. Fektessünk át a c ponton két egyenest úgy, hogy a φ görbe c-beli érintője az általuk meghatározott két szögtartománypár egyikében, σ pedig másikában haladjon. Legyen a és b C_φ-nek két olyan pontja, hogy φ-nek a-tól c-ig terjedő részíve az említett szögtartományok egyikében, c-től b-ig terjedő részíve pedig az ezzel átellenesben feküdjék. Legyen a_1 és b_1 a c-beli érintőnek két pontja az a-t, ill. b-t tartalmazó szögtartományban. Legyen φ_1, ill. φ_2 φ-nek a-ból b-be vezető, ill. b-ből a-ba vezető részíve, ψ_1, ψ_2 és ψ_3 pedig jelölje rendre az aa_1, a_1b_1 és b_1b szakaszokat. Ekkor C_σ-nak bármely φ-n nem fekvő z pontjára (4. 1), (4. 2) és (4. 3) alapján a $\chi = (\psi_1 \vee \psi_2) \vee \psi_3$ jelöléssel

$$n(\varphi, z) + n(\chi \vee \varphi_1^*, z) = n(\varphi_1 \vee \varphi_2, z) + n(\chi \vee \varphi_1^*, z) =$$

$$= n(\varphi_2 \vee \chi, z) + n(\varphi_1^* \vee \varphi_1, z).$$

Itt azonban (4. 9) segítségével rögtön látható, hogy a tekintetbe jövő z-kre

$$n(\chi \vee \varphi_1^*, z) = 0,$$

továbbá (4. 4) miatt

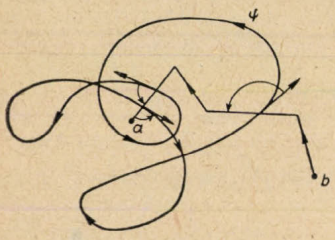
$$n(\varphi_1^* \vee \varphi_1, z) = 0,$$

úgyhogy $n(\varphi, z)$ megváltozása c átlépésekor ugyanannyi, mint $n(\varphi_2 \vee \chi, z)$-é. Azonban (4. 1), (4. 2) és (4. 3) szerint a $(\psi_3 \vee \varphi_2) \vee \psi_1 = \omega$ jelöléssel $n(\varphi_2 \vee \chi, z) = n(\omega \vee \psi_2, z)$, aminek megváltozása (4. 10) alapján éppen az állított értékű.

Mármost egy adott $a \notin C_\varphi$ pontnak adott zárt φ görbére vonatkozó indexét úgy határozhatjuk meg, hogy kiindulva egy elég távoli b pontból, melyre (4. 9) alapján $n(\varphi, b) = 0$, oly b-ből a-ba vezető poligont készítünk, amelynek csúcsai nem feküsznek C_φ-n, s melynek csak véges sok pontja közös C_φ-vel, ügyelve arra, hogy a közös pontok φ-nek egy-

szeres pontjai legyenek s e pontokban φ-nek legyen érintője, amelyet a poligon a kérdéses pontban átmetsz. Világos, hogy az alkalmazásokban szereplő konkrétan megadott φ görbék esetén ilyen poligon mindig készíthető. Mármost $n(\varphi, z)$ a poligon mentén haladva annak C_φ-vel való metszéspontjai között állandó, a metszéspontokban pedig megváltozása (5. 1) alapján meghatározható. Igy végül $n(\varphi, a)$ értékére jutunk. (Pl. a 6. ábrán a megváltozások rendre $+1$, $+1$, -1, úgyhogy $n(\varphi, a)=1$.)

6. Az előbbi eredmények azt mutatják, hogy a komplex függvénytan integráltételeinek bizonyításához és alkalmazásához szükséges topológiai segédeszközként az egyszeresen összefüggő tartomány és az egyszerű zárt görbe fogalma helyett szerepeltethető a zárt görbére vonatkozó index fogalma, amelynek értelmezése és felhasznált tulajdonságai sokkal elemibben tárgyalhatók, mint például a Jordan-féle tétel. A következőkben megmutatjuk, hogy az index fogalmára támaszkodva előállítható az integráltételeknek korábban szokásos fogalmazása is, s ehhez a Jordan-féle tétel helyett csupán egy kevesebbet mondó (és könnyebben bizonyítható) állítást kell felhasználnunk.



6. ábra

Fejtegetéseinkben felhasználjuk a poligonokra vonatkozó Jordan-tételt, amelynek a teljesség kedvéért ideiktatjuk egy igen egyszerű bizonyítását. Ez a következő elemi megjegyzésen alapszik:

(6. 1) *Legyen σ egy szakasz és $\varepsilon>0$. Ha az a és b pontokhoz találhatók olyan $a', b' \in C_\sigma$ pontok, melyekre*

$$|a-a'|<\varepsilon, \quad |b-b'|<\varepsilon,$$

akkor az ab szakasz minden c pontjához is található oly $c' \in C_\sigma$ pont, melyre

$$|c-c'|<\varepsilon.$$

Valóban, ha $c=a+t(b-a)$ $(0<t<1)$, legyen $c'=a'+t(b'-a')$. Világos, hogy $c' \in C_\sigma$ és

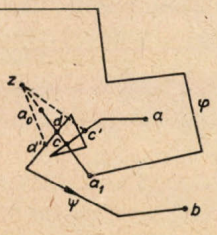
$$|c-c'|=|a-a'+t(b-a)-t(b'-a')|=|(1-t)(a-a')+t(b-b')| \leqq$$

$$\leqq(1-t)|a-a'|+t|b-b'|<(1-t)\varepsilon+t\varepsilon=\varepsilon.$$

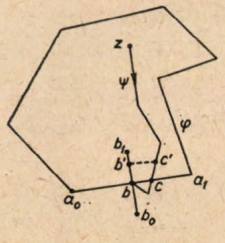
(6. 2) *Ha φ egyszerű poligon és $a, b \notin C_\varphi$, akkor van a-ból b-be vezető és C_φ-t nem metsző poligon.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy φ egyetlen cd szakaszból áll. Ha ezt az ab szakasz metszi, s a és b a cd szakaszt tartalmazó egyenesen fekszik, akkor legyen z tetszőleges ezen az egyenesen nem fekvő pont. Ha viszont a és b nincs a cd-t tartalmazó egyenesen, legyen z ennek az egyenesnek egy cd-n kívüli pontja. Mindkét esetben megfelel a célnak az azb poligon.

Legyen most φ az $a_0a_1\ldots a_n$ poligon s tegyük fel, hogy az állítás bizonyítva van $n-1$ szakasz összefűzésével keletkező egyszerű poligonra. Akkor van a-ból b-be vezető és $a_1\ldots a_n$-t nem metsző ψ poligon. Ha ez nem metszi a_0a_1-et, máris megfelel a célnak. Ha metszi, legyen első a_0a_1-gyel közös pontja c, az utolsó pedig d (esetleg $c=d$). Nyilván $c\neq a_1\neq d$, úgyhogy megadható oly $\varepsilon>0$, hogy a_0a_1-nek egy a_0-t, c-t és d-t tartalmazó alkalmas σ részszakaszán bármely pontnak $a_1\ldots a_n$ bármely pontjától való távolsága $>\varepsilon$. Legyen z az a_0a_1 szakasz a_0 felőli meghosszabbításán a_0-tól ε-nál kisebb távolságra fekvő pont, c' és d' pedig a ψ poligon a-tól c-ig terjedő, ill. d-től b-ig terjedő részén



7. ábra



8. ábra

c-től, ill. d-től ε-nál kisebb távolságra fekvő pont, $c'\neq c$, $d'\neq d$. (6. 1) szerint a $c'zd'$ poligon minden pontja σ valamely pontjától ε-nál kisebb távolságra van, így e poligon $a_1\ldots a_n$-t nem metszi. Eszerint a ψ a-tól c'-ig terjedő részének, $c'zd'$-nek és ψ d'-től b-ig terjedő részének összefűzésével keletkező poligon megfelel a célnak.

Így az állítás a φ-t alkotó szakaszok száma szerinti teljes indukcióval adódik.

(6. 3) *Legyen φ egy $a_0a_1\ldots a_n$ egyszerű zárt poligon ($a_n=a_0$), b az a_0a_1 szakasznak egy pontja, $a_0\neq b\neq a_1$, b_0 és b_1 pedig a b-ben a_0a_1-re állított merőlegesnek két olyan pontja, hogy a b_0b_1 szakasznak C_φ-vel b-n kívül más közös pontja ne legyen. Ekkor bármely $z\notin C_\varphi$ ponthoz található C_φ-t nem metsző és z-ből vagy b_0-ba, vagy b_1-be vezető poligon. A jelölés választható úgy, hogy $n(\varphi, b_0)=0$ és $n(\varphi, b_1)=\pm 1$ legyen.*

Bizonyítás. Legyen ψ z-ből b-be vezető, az $a_1 \ldots a_n$ egyszerű poligont nem metsző poligon. Ilyen (6. 2) szerint létezik. Legyen c ψ-nek a_0a_1-gyel való első közös pontja. Nyilván $a_0 \neq c \neq a_1$, úgyhogy van oly $\varepsilon > 0$, hogy a bc szakasz bármely pontjának $a_1 \ldots a_n$ bármely pontjától való távolsága $> \varepsilon$. Legyen c' a ψ poligon z-től c-ig terjedő részén c-től ε-nál kisebb távolságra fekvő pont, $c' \neq c$, b_i a b_0 és b_1 pontok közül az, amely az a_0a_1 szakaszon átfektetett egyenesnek ugyanazon az oldalán fekszik, mint c', végül b' a bb_i szakasznak b-től ε-nál kisebb távolságra fekvő pontja, $b' \neq b$. Ekkor (6. 1)-ből következik, hogy a $c'b'$ szakasz nem metszi $a_1 \ldots a_n$-t, tehát C_φ-t sem, s így ψ-nek z-től c'-ig terjedő része, valamint $c'b'$ és $b'b_i$ összefűzésével a kívánt poligont nyerjük. (4. 6) alapján eszerint $n(\varphi, z)$ a $z \notin C_\varphi$ pontban csak az $n(\varphi, b_i)$ értékeket veheti fel $(i = 1, 2)$, s így (4. 9) szerint e számok egyike 0. A jelölést úgy választva, hogy $n(\varphi, b_0) = 0$ legyen, (4. 10) mutatja, hogy $n(\varphi, b_1) = \pm 1$.

Szükségünk lesz még a következő segédtételre:

(6. 4) *Legyen φ egyszerű zárt görbe. Ekkor bármely $\delta > 0$ számhoz megadhatók oly $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ osztópontok, hogy $t_k - t_{k-1} < \delta$ $(1 \leqq k \leqq n)$ és hogy a beírt $\varphi(t_0)\varphi(t_1)\ldots\varphi(t_n)$ poligon egyszerű zárt poligon legyen.*[11]

Mármost könnyen nyerhető a következő állítás:

(6. 5) *Ha φ egyszerű zárt görbe, akkor a $z \notin C_\varphi$ pontokban $n(\varphi, z)$ két értéket vesz fel, ezek egyike 0, másika $+1$ vagy -1. Az első esetben φ-t pozitív, a másodikban negatív körüljárásúnak mondjuk. Ha $n(\varphi, z) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy z φ-nek külsejében van, ha pedig $n(\varphi, z) \neq 0$, akkor azt, hogy z φ-nek belsejében van.*

Bizonyítás. Ha $z \notin C_\varphi$, akkor (4. 13) szerint minden φ-be írt elég finom ψ poligonra $n(\varphi, z) = n(\psi, z)$, és (6. 4) szerint ψ választható úgy is, hogy egyszerű zárt poligon legyen. (6. 3) alapján így $n(\varphi, z) = 0$ vagy ± 1. Ha $n(\varphi, z_1) = +1$, $n(\varphi, z_2) = -1$ volna, akkor elég finom beírt egyszerű zárt ψ poligonra $n(\psi, z_1) = +1$, $n(\psi, z_2) = -1$ adódnék, ellentétben (6. 3)-mal. Így $n(\varphi, z)$ legfeljebb két értéket vehet fel, és tényleg fel is vesz két különböző értéket, mert a rektifikálhatóságból következik legalább egy olyan pontnak a létezése, amelyben φ-nek van érintője, s akkor (5. 1) biztosítja oly pontok létezését, melyekben $n(\varphi, z)$ (egymástól egy egységnyivel) különböző értékeket vesz fel.

Világos, hogy a Cauchy-féle integrálformulának az 5. pontban megfogalmazott alakjából (6. 5) segítségével következik az 1. pontban

[11] A bizonyítást illetően l. HAJÓS GYÖRGY, A 99. feladat megoldása, Mat. Lapok **11** (1960), 363–364.

említett alakja. Végül az integráltételeknek egyszeresen összefüggő tartományokra vonatkozó alakjai könnyen nyerhetők a következő tétel segítségével:

(6. 6) *Legyen G nyílt halmaz az E komplex síkban. Ekkor a következő állítások egyenértékűek egymással:*

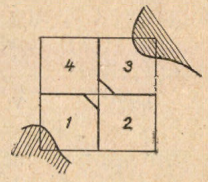
a) *Egyetlen G-ben fekvő zárt görbe sem kerüli meg $(E-G)$-nek egyetlen pontját sem;*

b) *minden G-ben fekvő egyszerű zárt görbe belseje is G-ben van;*

c) *minden G-ben fekvő egyszerű zárt poligon belseje is G-ben van;*

d) *$E-G$ nem állítható elő két közös pont nélküli zárt halmaz egyesítéseként úgy, hogy ezek egyike korlátos (és nem üres) legyen.*

Bizonyítás. Az a)$\rightarrow$b)$\rightarrow$c) implikációk evidensek. c)$\rightarrow$d) igazolására tegyük fel, hogy $E-G=K\cup F$, ahol K és F zárt, $K\neq 0$ korlátos, $K\cap F=0$. Ekkor megadható oly $\varepsilon>0$, hogy $z_1\in K$, $z_2\in F$ esetén $|z_2-z_1|\geqq\varepsilon$. Tekintsünk a síkban egy ε-nál kisebb átmérőjű négyzetekből álló rácsot s a (zárt) négyzetlapok közül a K-t metszőknek a K-t nem metszőkkel közös oldalszakaszait. Nevezzük ezeket határéleknek. E határélek nem metszik sem K-t, sem F-et, tehát teljesen G-ben vannak. Bármely határélnek bármelyik végpontja még pontosan egy határélnek végpontja, kivéve, ha két K-t metsző négyzet két K-t nem metszővel csúcsosan érintkezik (pl. a 9. ábrán az 1 és 3 jelű négyzet metszi K-t, a 2 és 4 jelű nem metszi). Ilyenkor a közös csúcshoz elég közeli (s így G-ben fekvő) szakaszokkal összekötve a kérdéses két négyzetnek a közös csúcsot tartalmazó oldalszakaszait, elérhető, hogy az így módosított határélek most is egyértelműen csatlakozzanak egymáshoz. Kiindulva most már a határélek közül egy olyanból, amely a valós tengellyel párhuzamos s pontjainak közös képzetes része az ilyen határélek között maximális, haladjunk tovább az egyik irányban az egymáshoz csatlakozó határélek mentén. Világos, hogy így egy G-ben fekvő egyszerű zárt poligonhoz jutunk, amelynek egyik oldala a kiindulásul választott határél, s hogy ez az egyszerű zárt poligon megkerüli (4. 10) és (4. 9) folytán K-nak azokat a pontjait, amelyek a vizsgált határélt tartalmazó K-t metsző négyzethez tartoznak. Ez ellentétben áll c)-vel.



9. ábra

Végül ha feltesszük, hogy φ zárt görbe, $C_\varphi\subset G$, s egy $a\in E-G$ pontra $n(\varphi,a)\neq 0$, akkor $E-G$ azon z pontjai, melyekre $n(\varphi,z)=n(\varphi,a)$, nyilván $(E-G)$-nek zárt részhalmazát alkotják, s ugyanígy azok is, amelyekben $n(\varphi,z)\neq n(\varphi,a)$ (gondoljuk meg, hogy (4. 6) szerint a C_φ-hez nem tartozó pontok alkalmas környezetében $n(\varphi,z)$ állandó).

Az előbbi halmazt K-val, az utóbbit F-fel jelölve, $K \neq 0$, $K \cap F = 0$ és $E - G = K \cup F$, továbbá K (4. 9) miatt korlátos is, ellentétben d)-vel. Ezt kellett még belátnunk.

A (6. 6) tétel egymással egyenértékű állításai teljesülnek például, ha G egy egyszerű zárt görbe belsejét jelenti, vagy általánosabban, azon pontok halmazát, amelyeket egy adott φ zárt görbe megkerül (ez a halmaz nyílt, mert $n(\varphi, z)$ állandó a C_φ-hez nem tartozó pontok alkalmas környezetében). Ez könnyen következik a két egymást nem metsző zárt görbe helyzetét tisztázó következő tételből:

(6. 7) *Legyen φ és ψ zárt görbe, $C_\varphi \cap C_\psi = 0$. Ekkor $n(\varphi, z)$ értéke C_ψ-n, $n(\psi, z)$-é pedig C_φ-n állandó, s e két állandó közül legalább egynek az értéke 0. Ha C_φ-n $n(\psi, z) = 0$, akkor $n(\varphi, z)$ értéke minden ψ által megkerült pontban ugyanakkora, mint C_ψ-n.*

Bizonyítás. Ha $a, b \in C_\psi$, akkor ψ-nek a-ból b-be (vagy b-ből a-ba) vezető részívébe elég finom s így C_φ-t nem metsző poligont írva (4. 6) alapján $n(\varphi, a) = n(\varphi, b)$ adódik. Hasonlóan $a, b \in C_\varphi$ esetén $n(\psi, a) = n(\psi, b)$.

Legyen most a a síknak oly távoli pontja, melyre

$$n(\varphi, a) = n(\psi, a) = 0,$$

továbbá $b \in C_\psi$ s tegyük fel, hogy $n(\varphi, b) \neq 0$. Legyen c az ab szakasznak első olyan pontja, melyben nem teljesül az $n(\varphi, z) = n(\psi, z) = 0$ egyenlőség. Minthogy $n(\varphi, z)$ a C_φ-n nem fekvő pontok környezetében állandó, azért $c \notin C_\varphi$, $n(\varphi, c) \neq 0$ lehetetlen, s ugyanilyen okból nem állhat $c \notin C_\psi$, $n(\psi, c) \neq 0$ sem. Továbbá $c \in C_\psi$ esetén $c \notin C_\varphi$ és $n(\varphi, c) = n(\varphi, b) \neq 0$, úgyhogy c csak C_φ-hez tartozhat. Ekkor azonban $n(\psi, c) = n(\psi, a) = 0$, hiszen az ac szakasz nem metszi C_ψ-t.

Tegyük fel végül, hogy C_φ-n $n(\psi, z) = 0$, s legyen $a \notin C_\psi$, $n(\psi, a) \neq 0$, $b \in C_\varphi$. Ekkor $n(\psi, b) = 0$, s c-vel jelölve az ab szakasznak első olyan pontját, melyben $n(\psi, z) = n(\psi, a)$ nem teljesül, az előzőhöz hasonló meggondolással $c \in C_\psi$ s az ac szakasz nem metszi C_φ-t, úgyhogy $n(\varphi, a) = n(\varphi, c)$.

7. Befejezésül megmutatjuk, hogyan használhatók fel az előzőkben tárgyalt fogalmak és eredmények az analitikus folytatás elméletében, nevezetesen az ún. *monodrómia-tétel* bizonyításában.

E célból a következőket kell ismertnek feltételeznünk az analitikus folytatás fogalmával kapcsolatban. Legyen $f(z)$ egy G nyílt halmazon korlátlanul folytatható analitikus függvény, vagyis legyen minden $z \in G$ ponthoz hozzárendelve egy $H(z)$ halmaz (az $f(z)$ függvény z-hez tartozó *függvényelem*einek halmaza), s tegyük fel, hogy ha φ egy a-ból b-be vezető G-beli görbe (most és a továbbiakban elejtjük a rektifikál-

hatóság megszorítását s a görbe fogalmát ismét a 2. pont elején megadott értelemben használjuk) és $h_a \in H(a)$, akkor egyértelműen meg van határozva egy $F(\varphi, h_a) \in H(b)$ elem (a h_a-ból φ mentén való *analitikus folytatás*sal nyert függvényelem), s hogy a következő állítások teljesülnek erre az F operációra:

(7. 1) *Ha* φ *és* ψ *két görbe,* $\varphi \sim \psi$, $C_\varphi \subset G$, $a = \varphi(0) = \psi(0)$, *akkor* $F(\varphi, h_a) = F(\psi, h_a)$ *minden* $h_a \in H(a)$ *elemre.*

(7. 2) *Ha* φ *egy görbe,* $C_\varphi \subset G$, $a = \varphi(0)$, $b = \varphi(1)$, $h_a \in H(a)$ *és* $h_b = F(\varphi, h_a)$, *akkor* $h_a = F(\varphi^*, h_b)$.

(7. 3) *Ha* φ *és* ψ *két görbe,* $a = \varphi(0)$, $b = \varphi(1) = \psi(0)$, $h_a \in H(a)$ *és* $h_b = F(\varphi, h_a)$, *akkor*

$$F(\psi, h_b) = F(\varphi \vee \psi, h_a).$$

(7. 4) *Ha* φ *zárt görbe,* $\varphi(0) = a$, $h_a \in H(a)$ *és* C_φ *belefoglalható egy G-ben fekvő körlemezbe, akkor*

$$F(\varphi, h_a) = h_a.$$

Mármost a monodrómia-tétel (lényegében véve) azt mondja ki, hogy ha G eleget tesz a (6. 6) tétel feltételeinek (azaz ha tartalmazza minden benne fekvő egyszerű zárt poligon belsejét), akkor (7. 4)-ből el lehet hagyni azt a kikötést, hogy C_φ befoglalható legyen G-ben fekvő körlemezbe. A kényelmesebb beszédmód kedvéért nevezzünk egy φ görbét *megengedett*nek, ha φ zárt görbe, $C_\varphi \subset G$, és $\varphi(0) = a$, $h_a \in H(a)$ esetén $F(\varphi, h_a) = h_a$. Ezzel a terminológiával élve azt kell (7. 1) – (7. 4) alapján bebizonyítanunk, hogy *ha G tartalmazza minden benne fekvő egyszerű zárt poligon belsejét, akkor minden G-ben fekvő zárt görbe megengedett.*

A bizonyítás előkészítésére a következő megjegyzéseket bocsátjuk előre (ahol G egyelőre tetszőleges nyílt halmaz):

(7. 5) *Ha* φ *megengedett görbe és* $\varphi \sim \psi$, *akkor* ψ *is megengedett.*

(7. 6) *Ha* φ *megengedett görbe, akkor* φ^* *is megengedett.*

(7. 7) *Ha* φ *és* ψ *két görbe és* $\varphi \vee \psi$ *megengedett, akkor* $\psi \vee \varphi$ *is megengedett.*

(7. 8) *Ha* φ *és* ψ *két megengedett összefűzhető görbe, akkor* $\varphi \vee \psi$ *is megengedett.*

(7. 9) *Ha* φ *és* ψ *két görbe, továbbá* φ *és* $\varphi \vee \psi$ *megengedett, akkor* ψ *is megengedett.*

A (7. 5) állítás azonnal adódik (7. 1)-ből, (7. 6) pedig (7. 2)-ből. (7. 7) belátására legyen $\varphi(0) = \psi(1) = a$, $\varphi(1) = \psi(0) = b$, $h_b \in H(b)$, $h_a = F(\varphi^*, h_b)$. Ekkor (7. 2) szerint $h_b = F(\varphi, h_a)$, továbbá (7. 3) alapján

$\varphi \vee \psi$ megengedett volta miatt

$$F(\psi, h_b) = F(\varphi \vee \psi, h_a) = h_a,$$

s akkor ismét (7. 3) felhasználásával

$$F(\psi \vee \varphi, h_b) = F(\varphi, h_a) = h_b.$$

(7. 8) rögtön adódik (7. 3)-ból. Végül (7. 9) feltételei mellett ψ is nyilván zárt görbe; legyen $\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = a$, $h_a \in H(a)$. (7. 3) miatt, tekintettel φ és $\varphi \vee \psi$ megengedett voltára,

$$F(\psi, h_a) = F(\varphi \vee \psi, h_a) = h_a,$$

amint állítottuk.

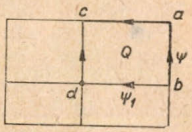
Nevezzük most *rács*nak az olyan alakzatot, amely véges számú valós tengellyel és véges számú képzetes tengellyel párhuzamos egyenesből áll, *csúcs*nak a rácsot alkotó egyenesek egymással alkotott G-ben fekvő metszéspontjait, *él*nek a két szomszédos csúcsot összekötő és G-ben fekvő szakaszokat, *rácspoligon*nak a véges számú él összefűzésével keletkező poligonokat, *rácsnégyszög*nek azokat a zárt téglalapokat, amelyeket két szomszédos valós tengellyel párhuzamos és két szomszédos képzetes tengellyel párhuzamos rácsbeli egyenes határol (ezek tehát nem szükségképpen fekszenek G-ben). Ha φ zárt rácspoligon, Q pedig rácsnégyszög, akkor (4. 6) miatt $n(\varphi, z)$ állandó Q belsejében és határának φ-hez nem tartozó pontjaiban; ha ez az állandó nem 0, azt mondjuk, hogy φ megkerüli Q-t. Ha Q egy G-ben fekvő rácsnégyszög, akkor a határát alkotó éleket megfelelő irányítással összefűzve zárt rácspoligon keletkezik, amelyet Q *peremé*nek nevezünk.

(7. 10) *Ha φ egyszerű zárt rácspoligon és minden φ által megkerült rácsnégyszög G-ben fekszik és peréme megengedett, akkor φ maga is megengedett.*

Bizonyítás. Teljes indukciót alkalmazunk a φ által megkerült rácsnégyszögek száma szerint. Ha φ az egyetlen Q rácsnégyszöget kerüli meg, akkor (4. 6) és (4. 9) felhasználásával könnyen adódik, hogy a Q határán fekvő négy él mindegyike C_φ-nek része, ami nyilván csak úgy lehetséges, hogy φ azonos Q peremével. Így ekkor az állítás igaz.

Legyen most φ egyszerű zárt rácspoligon, amely n rácsnégyszöget kerül meg, ezek G-ben vannak és peremük megengedett, s tegyük fel, hogy az n-nél kevesebb rácsnégyszöget megkerülő egyszerű zárt rácspoligonokra az állítás igaz. Legyen a a C_φ-n fekvő legnagyobb képzetes részű csúcsok közül a legnagyobb valós részű, b az a alatti, c az a-tól balra eső szomszédos csúcs. Világos, hogy az ab és ac szakaszok C_φ-nek részei, éspedig, mondjuk, a ba ill. ac irányítással. Az a, b, c csúcsokat tartalmazó Q rácsnégyszög negyedik csúcsát d-vel jelölve,

(4. 9) és (4. 10) alapján könnyen adódik, hogy φ megkerüli Q-t (úgyhogy $n \geqq 1$ és $Q \subset G$). Ha a db és dc élek is C_φ-n feküsznek, akkor nyilván $n=1$ és az állítás φ-re teljesül. Ellenkező esetben jelöljük ψ-vel a bac poligont, χ-vel ama c-ből b-be vezető egyszerű rácspoligont, amely φ-nek részíve, s gondoljuk meg, hogy (7. 5) és (7. 7) szerint φ megengedett voltához elegendő $\psi \vee \chi$ megengedett voltát igazolni. Ha mármost ψ_1 jelöli a bdc poligont, továbbá $\varphi_1 = \chi \vee \psi_1$, akkor elegendő belátni, hogy φ_1 megengedett, hiszen ebből és $\psi_1^* \vee \psi$-nek a feltevés szerinti megengedett voltából (7. 8) alapján $\varphi_1 \vee (\psi_1^* \vee \psi)$ megengedett volta adódik, s ebből (7. 5) és (7. 7) miatt a $(\psi_1 \vee \psi_1^*) \vee (\psi \vee \chi)$ poligoné, innen viszont (7. 9) értelmében $(\psi \vee \chi)$-é, hiszen (7. 2)-ből rögtön következik, hogy $\psi_1 \vee \psi_1^*$ megengedett.



10. ábra

A most végzett átalakítások (4. 1) – (4. 4) felhasználásával azt is mutatják, hogy ha z valamely rácsnégyszög belsejében fekszik, akkor

$$n(\varphi, z) = n(\varphi_1, z) + n(\psi_1^* \vee \psi, z),$$

úgyhogy φ_1 ugyanazokat a rácsnégyszögeket kerüli meg, mint φ, kivéve Q-t, amelyet φ_1 már nem kerül meg. Ha tehát φ_1 egyszerű zárt poligon, akkor az indukciófeltevés folytán megengedett.

Ha φ_1 nem egyszerű zárt poligon, akkor $d \in C_\chi$. Jelentse χ_1 és χ_2 χ-nek c-ből d-be vezető, ill. d-ből b-be vezető részívét, φ_2 a dc szakasz és χ_1 összefűzésével, φ_3 a χ_2 és a bd szakasz összefűzésével keletkező rácspoligont. (7. 5), (7. 7) és (7. 8) alapján φ_1 megengedett volta következik φ_2 és φ_3 megengedett voltából.

Világos, hogy φ_2 vagy a dcd poligonnal azonos, vagy egyszerű zárt rácspoligon, s hasonlóan φ_3 vagy dbd-vel azonos, vagy egyszerű zárt rácspoligon, s hogy egy rácsnégyszög belsejében fekvő z pontra

$$n(\varphi_1, z) = n(\varphi_2, z) + n(\varphi_3, z),$$

amiből rögtön következik, hogy a φ_2 vagy φ_3 által megkerült rácsnégyszögeket φ_1 is megkerüli, hiszen ha φ_2 is, φ_3 is egyszerű zárt poligon, akkor (4. 9) és (4. 10) folytán mindkettő ugyanolyan (pozitív) körüljárású. Így φ_2 és φ_3 vagy (7. 2), vagy az indukciófeltevés szerint megengedett, amivel a bizonyítást befejeztük.

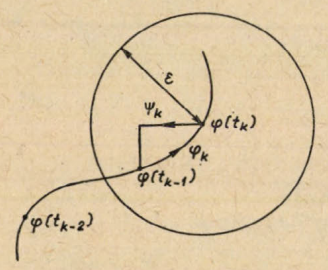
(7. 11) *Ha φ egy G-ben fekvő, a koordinátatengelyekkel párhuzamos oldalú zárt Q négyszög pereme, akkor φ megengedett görbe.*

Tekintsük ugyanis a Q oldalain, valamint oldalainak felezőpontjain átfektetett, a koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenesek alkotta rácsot. Ha az állítással ellentétben φ nem volna megengedett,

akkor (7. 10) szerint az általa megkerült négy rácsnégyszögnek legalább egyike ugyancsak nem volna megengedett peremű. Az eljárást folytatva kellő számú lépés után olyan nem megengedett peremű rácsnégyszöghöz jutnánk, amely egy G-ben fekvő körlemezbe foglalható, ami (7. 4) szerint lehetetlen.

(7. 12) *Ha G tartalmazza a benne fekvő egyszerű zárt poligonok belsejét és φ zárt rácspoligon, akkor φ megengedett.*

Bizonyítás. Legyen φ az $a_{i-1}a_i$ élek összefűzésével keletkező $a_0a_1 \ldots a_n$ rácspoligon, $a_n = a_0$. Teljes indukciót alkalmazunk n szerint. n legkisebb értéke nyilván 2, s akkor φ (7. 2) folytán megengedett. Tegyük fel, hogy $n > 2$ s hogy az n-nél kisebb számú él összefűzésével keletkező zárt rácspoligonok megengedettek.



11. ábra

Ha van oly i és j, hogy $i < j$, $a_i = a_j$ és $i^2 + (n-j)^2 \neq 0$, akkor az $a_i \ldots a_j$ részpoligon az indukciófeltevés folytán megengedett, s ugyancsak megengedett az $a_j \ldots a_n a_1 \ldots a_i$ rácspoligon is. Ebből (7. 5), (7. 7) és (7. 8) alapján adódik, hogy φ megengedett. Ha viszont az említett tulajdonságú i és j indexek nincsenek, akkor φ egyszerű zárt rácspoligon, s így (7. 10) és (7. 11) szolgáltatja az állítást.

(7. 13) *Ha G tartalmazza a benne fekvő egyszerű zárt poligonok belsejét és φ zárt görbe, $C_\varphi \subset G$, akkor φ megengedett.*

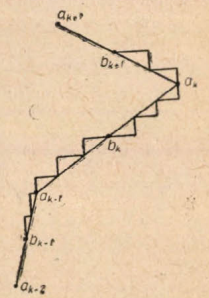
Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ oly kicsiny, hogy a C_φ bármely pontja körül ε sugárral rajzolt zárt körlemez teljesen G-ben van. Válasszuk meg a $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ osztópontokat úgy, hogy a φ görbe $\varphi(t_{k-1})$-ből $\varphi(t_k)$-ba vezető részívét φ_k-val jelölve, C_{φ_k} átmérője ε-nál kisebb legyen ($1 \leqq k \leqq n$). Ekkor a $\varphi(t_k)$ körül ε sugárral készített körlemez tartalmazza C_{φ_k}-t is, és azt a ψ_k poligont is, amely $\varphi(t_k)$-ból $\varphi(t_{k-1})$-be vezet és egy a valós tengellyel párhuzamos s egy a képzetes tengellyel párhuzamos szakasznak összefűzésével áll elő (esetleg csak egy ilyen szakaszból áll.) Így (7. 4) folytán $\varphi_k \vee \psi_k$ megengedett. Ebből (7. 5), (7. 6) és (7. 7) ismételt alkalmazásával könnyen következik, hogy $\psi \vee \varphi$ is megengedett, ahol ψ a $\psi_n, \psi_{n-1}, \ldots, \psi_1$ összefűzésével keletkező poligont jelenti. Mármost a ψ-t alkotó szakaszokon átfektetett egyenesek egy rácsot alkotnak, és ψ nyilván ekvivalens egy ehhez a rácshoz tartozó (zárt) rácspoligonnal. Így (7. 12) szerint ψ megengedett, s akkor (7. 9) értelmében φ is megengedett.

(7. 13) szolgáltatja a monodrómia-tétel állítását.[12]

Megmutatjuk még, hogy az előbbi gondolatmenet csekély kiegészítésével a következő állítás is bizonyítható, amely tetszőleges nyílt G esetére érvényes:

(7. 14) *Ha φ rektifikálható egyszerű zárt görbe, $C_\varphi \subset G$, és φ nem kerül meg egyetlen G-hez nem tartozó pontot sem, akkor φ megengedett.*[13]

Bizonyítás. Legyen ismét $\varepsilon > 0$ olyan, hogy a C_φ pontjai körül ε sugárral rajzolt körlemez G-ben feküdjék. Készítsük el I-nek oly $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ felosztását, hogy a φ görbe $\varphi(t_{k-1})$-ből $\varphi(t_k)$-ba vezető φ_k részívének átmérője $\frac{\varepsilon}{2}$-nél kisebb legyen, és hogy $\varphi(t_0)\varphi(t_1)\ldots$ $\ldots\varphi(t_n)$ egyszerű zárt poligon legyen (ez (6. 4) alapján megtehető). Legyen $a_k = \varphi(t_k)$ és jelölje b_k az $a_{k-1}a_k$ szakasz felezőpontját. Legyen továbbá $\eta > 0$ oly kicsiny, hogy $\eta < \varepsilon$, hogy továbbá az $a_{k-1}a_k$ szakasz bármely pontja az $a_{l-1}a_l$ szakasz bármely pontjától η-nál nagyobb távolságra legyen, hacsak e két szakasz nem szomszédos (ahol a_0a_1 és $a_{n-1}a_n$ is szomszédosnak számít), végül hogy $a_{k-1}b_k$ összes pontjai a_ka_{k+1} pontjaitól és b_ka_k pontjai $a_{k-2}a_{k-1}$ pontjaitól is η-nál nagyobb távolságra legyenek ($1 \leqq k \leqq n$, $a_{n+1} = a_1$, $a_{-1} = a_{n-1}$). Osszuk most az $a_{k-1}b_k$ szakaszt is, a b_ka_k szakaszt is $\frac{\eta}{2}$-nél rövidebb részekre s emeljünk mindegyik rész mint átfogó fölé a koordinátatengelyekkel párhuzamos befogójú derékszögű háromszöget, éspedig $a_{k-1}b_k$ részei fölé az $a_{k-1}a_k$ szakaszt tartalmazó egyenesnek azon az oldalán, mely nem tartalmazza $a_{k-2}a_{k-1}$-et, b_ka_k részei fölé pedig az említett egyenes azon oldalán, mely nem tartalmazza a_ka_{k+1}-et. Az így nyert háromszögek befogóinak összefűzésével keletkező a_k-ból a_{k-1}-be vezető poligon legyen ψ_k (ha $a_{k-1}a_k$ valamelyik koordinátatengellyel párhuzamos, akkor ψ_k egyszerűen az a_ka_{k-1} szakaszt jelenti). Könnyű meggyőződni arról, hogy a ψ_n, ψ_{n-1}, ..., ψ_1 poligonok összefűzése egy ψ egyszerű zárt poligon, s



12. ábra

[12] Az itt alkalmazott gondolatmenet lényegében véve az általános Cauchy-tételre [8] alatt idézett bizonyítás megfelelő módosításával áll elő.

[13] A retifikálhatóság kikötése itt nem lényeges, s csak azért tettük, mert az index értelmezésében is rektifikálható görbékre szorítkoztunk. Az általános eset tárgyalását arra az észrevételre lehet alapozni, hogy tetszőleges (nem feltétlenül rektifikálható) zárt φ görbe és rajta nem fekvő a pont esetén $n(\psi, a)$ értéke ugyanakkora minden φ-be írt elég finom ψ poligonra, ami (4.13) mintájára látható be; ezt az értéket jelölve $n(\varphi, a)$-val, az index fogalmát tetszőleges zárt görbére kiterjeszthetjük s ezt szerepeltethetjük (7.14)-ben.

hogy $C_{\varphi_k} \cup C_{\psi_k}$ benne van az a_k körül ε sugárral rajzolt körlemezben. Ekkor (7. 4) folytán $\varphi_k \vee \psi_k$ megengedett, s innen éppen úgy, mint (7. 13) bizonyításában, adódik, hogy $\psi \vee \varphi$ is megengedett. Másrészt $z \notin C_\varphi \cup C_\psi$ esetén (4. 1), (4. 2) és (4. 3) szerint

$$n(\varphi \vee \psi, z) = \sum_{k=1}^{n} n(\varphi_k \vee \psi_k, z),$$

s viszont (4. 9) miatt $n(\varphi_k \vee \psi_k, z) = 0$, mihelyt $|z - a_k| \geqq \varepsilon$, úgyhogy $C_\psi \subset G$ figyelembe vételével $z \notin G$ esetén $n(\varphi \vee \psi, z) = 0$. Minthogy ezekre a z-kre (4. 3) folytán

$$n(\varphi \vee \psi, z) = n(\varphi, z) + n(\psi, z)$$

és a feltevés szerint $n(\varphi, z) = 0$, azért ezeket ψ sem kerüli meg. A ψ oldalain átfektetett egyenesek rácsát felhasználva (7. 13) bizonyításához hasonlóan adódik, hogy ψ ekvivalens egy ehhez a rácshoz tartozó rácspoligonnal, s akkor (7. 5), (7. 10) és (7. 11) értelmében megengedett. Ebből és $\psi \vee \varphi$ megengedett voltából (7. 9) alapján következik, hogy φ is megengedett.

Az analitikus folytatás elméletének mélyebb kérdései természetesen nem nélkülözhetik a homotópia fogalmát és így a komolyabb topológiai segédeszközöket sem, egyszerűbb esetekben azonban az előbb elemi úton bizonyított állítások is célhoz vezetnek.

О ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СРЕДСТВАХ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

А. Часар

Статья содержит полные и элементарные доказательства топологических фактов, необходимых для обоснования теории аналитических функций (теорема и формулы Коши, теорема о монодромии и т. д.). В этих доказательствах используются только элементы теории точечных множеств и обходятся те топологические понятия и результаты, которые студентам второго или третьего курса факультетов естественных наук не общеизвестны (теорема Жордана, гомология, гомотопия и т. д.)

SUR LES AUXILIAIRES TOPOLOGIQUES DES ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES

Á. Császár (Budapest)

L'article présente des démonstrations complètes et élémentaires des faits de la topologie du plan qui sont indispensables pour fonder la théorie des fonctions analytiques (théorème et formules de Cauchy, théorème de monodromie, etc.). Les démonstrations n'utilisent que les éléments de la théorie des ensembles de points et évitent les notions et les résultats de la topologie qui ne sont pas familiers aux étudiants de la deuxième ou troisième année des facultés des sciences (théorème de Jordan, homologie, homotopie, etc.).

Gráfok útjairól, köreiről és hurokjairól

ANDRÁSFAI BÉLA

I.

Az itt előforduló gráfelméleti problémák kombinatorikus jellegűek. Legyenek adva pontok, amelyekből bizonyos párokat összekötünk egymással, a többit nem. Az így létrejött alakzatot nevezzük *gráf*nak. Az adott pontok a *gráf pontjai*, és az összekötő vonalak a *gráf élei*. Az ebben a dolgozatban előforduló gráfok mindig véges sok pontot tartalmaznak, és bármely pontpárt legfeljebb egy él köt össze. A P és Q pontokat összekötő élről azt is mondjuk, hogy P-hez és Q-hoz illeszkedik. Egy G gráf pontjainak számát $\pi(G)$-vel, éleinek számát $\nu(G)$-vel és a P ponthoz illeszkedő élek számát $\varrho(P)$-vel jelöljük. $\varrho(P)$-t P *fokának* is mondjuk.

A G' gráfot akkor mondjuk a G gráf *részgráf*jának, ha pontjai és élei G-nek is pontjai, ill. élei.

Út (mégpedig P_1P_n-*út*) az olyan gráf, amelynek pontjai $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ($n \geqq 2$, $P_i \neq P_j$ $i \neq j$ esetén) és élei $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n$ (A P_1 és P_n pontok az *út végpontjai*, a többi pont az *út belső pontja*.)

Kör az olyan gráf, amelynek pontjai $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ($n \geqq 3$, $P_i \neq P_j$ $i \neq j$ esetén) és élei $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n, P_nP_1$. Az n élű kört n-*szög*nek is mondjuk.

Hurok az olyan gráf, amelynek pontjai $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ($n \geqq 2$, $P_i \neq P_j$ $i \neq j$ esetén) és élei $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n$ és esetleg még P_nP_k (ahol k az $1, 2, \ldots, n-2$ indexek valamelyike).

Út, *kör* vagy *hurok hosszán* éleinek számát értjük.

Egy gráfot *összefüggő*nek nevezünk, ha bármely P és Q pontjához tartalmaz PQ-utat. Összefüggőnek mondjuk az egy pontból álló gráfot is. *Kétszeresen összefüggő* egy gráf, ha egynél több éle van, és bármely két éléhez létezik a gráfban a két élt tartalmazó kör. Ebből könnyen következik, hogy a gráf nemcsak összefüggő, hanem még egy tetszőleges pontjának elhagyása után is összefüggő marad.

Egy *gráf komponensei* a maximális összefüggő részgráfjai, azaz a

G gráf egy komponense G-nek olyan összefüggő részgráfja, amelyet G más összefüggő részgráfja valódi részgráfként nem tartalmaz.

Könnyen belátható ([3], 9—10 old.), hogy ha egy G gráfban van olyan K_1 kör, amely tartalmazza G-nek e_1 és e_2 élét és olyan K_2 kör, amely tartalmazza G-nek e_2 és e_3 élét, akkor van G-ben olyan kör, amely az e_1 és e_3 éleket tartalmazza. Ennek alapján ([3], XIV. 1.) bármely gráf éleinek a halmaza olyan osztályokra esik szét, amelyek vagy egy élből állnak, vagy ha több élből állnak, akkor az egy osztályba tartozó bármely két él a gráf egy körén van. Különböző osztályokhoz tartozó két él nem fekszik a gráf egy körén. A legalább egy élt tartalmazó, összefüggő *gráf* egy *tagjának* nevezzük az egy osztályhoz tartozó élekből és azok végpontjaiból álló részgráfot. A több élt tartalmazó tagok kétszeresen összefüggő gráfok. Egyszerűen belátható, hogy két tagnak legfeljebb egy közös pontja lehet.

*Teljes n-gráf*nak az olyan gráfot mondjuk, amelynek n pontja van és bármely két különböző pontját él köti össze.

II.

TURÁN vetette fel azt a kérdést, hogy egy n pontú gráfban hány él biztosítja egy teljes k-gráf létezését, és erre pontos választ adott [4]. Ugyancsak TURÁNtól származik az a kérdés, hány él biztosít egy gráfban legalább l hosszúságú utat, kört vagy hurkot. Ezen problémák egy részére ERDŐS és GALLAI adtak választ [2]. ZARANKIEWICZ azt vizsgálta, hogy mekkora minimális fokszám biztosít egy gráfban egy bizonyos nagyságú teljes gráfot, és DIRAC foglalkozott azzal a problémakörrel, hogy mekkora minimális fokszám biztosít egy gráfban elegendő hosszúságú utat vagy kört [1].

Ebben a dolgozatban szintén azzal a problémakörrel foglalkozunk, hogy egy gráfban milyen minimális fokszám, ill. az élek számának mekkora nagysága biztosít elegendő hosszúságú utat, kört vagy hurkot. Az élek számával kapcsolatos problémát így is át lehet fogalmazni: legfeljebb mennyi éle lehet egy adott pontszámú, l-nél hosszabb utat, kört, ill. hurkot nem tartalmazó gráfnak? A legtöbb élt tartalmazó ilyen gráfokat a probléma *extrém gráf*jainak nevezzük. A főbb eredményeink olyan feltételeket tartalmaznak, amelyek elegendő hosszúságú hurkok létezését biztosítják. Ezek az eredmények szintén csak részlegesek. Közlésükkel a figyelmet felhívni is szeretnénk e feladatkör megoldatlan problémáira.

A tárgyalás folyamán több, e dolgozatban nem bizonyított tételre hivatkozunk. Ezek bizonyításai vagy olyan egyszerűek, hogy az olvasó utmutatás nélkül önmaga is könnyen megcsinálhatja, vagy pedig a cikkben közölt bizonyítások gondolatait felhasználva (— erre mindig utalni fogunk —) rekonstruálhatja.

A

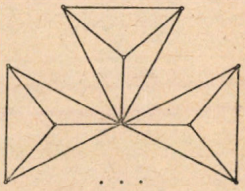
Először most azzal a problémakörrel szeretnénk foglalkozni, hogy mekkora minimális fokszám biztosítja egy gráfban az említett részgráfok létezését.

Egyszerűen belátható DIRAC következő tétele ([1], 2. tétel):

1. TÉTEL. *Ha egy gráf minden pontjára* $\varrho(P) \geqq k > 1$, *akkor létezik a gráfban egy legalább* $k+1$ *hosszú kör.*

Azt, hogy a tétel a lehető legjobb, olyan gráf mutatja, amelynek tagjai teljes $(k+1)$-gráfok. Ilyen gráf nem tartalmaz $k+1$-nél hosszabb kört. Az 1. ábrán látható gráf ilyen $k=3$-ra.

A következő két tétel szintén DIRACtól származik ([1], 3. és 4. tétel.)



1. ábra

2. TÉTEL. *Ha egy G gráf minden pontjára* $\varrho(P) \geqq k > 1$ *és* $\pi(G) \leqq 2k$, *akkor létezik a G gráfban olyan kör, amely G összes pontját tartalmazza.* (Egy ilyen kört G egy Hamilton vonalának neveznek.)

3. TÉTEL. *Ha egy kétszeresen összefüggő* G *gráf minden pontjára* $\varrho(P) \geqq k > 1$ *és* $\pi(G) \geqq 2k$, *akkor létezik a G gráfban egy legalább* $2k$ *hosszú kör.*

A 2. tétel bizonyítását a 4. tételnek e dolgozatban közölt bizonyítása alapján az olvasó könnyen elvégezheti. (A 2. tétel bizonyítása megtalálható a Középiskolai Matematikai Lapok 1958. évi XVI. 2. számának 44—45. oldalán is.) A 3. tétel bizonyítását a 4. tétel bizonyítása után közöljük.

Azt, hogy a 3. tétel a lehető legjobb, olyan gráf mutatja, amelynek pontjai $P_1, P_2, \ldots, P_k, Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-k}$ $(2 \leqq k \leqq n-k)$ és élei az összes $P_i Q_j$ élek $(i=1, 2, \ldots, k;\ j=1, 2, \ldots, n-k)$.

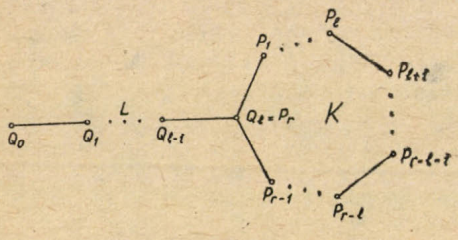
Egyik új eredményünk az alábbi 4. tétel, amelynek bizonyításában DIRACnak a 3. tételre adott bizonyítási eljárását használjuk.

4. TÉTEL. *Ha egy összefüggő* G *gráf minden pontjára* $\varrho(P) \geqq k > 1$ *és* $\pi(G) \geqq 2k+1$, *akkor létezik a G gráfban egy* $2k+1$ *hosszú hurok.*[1]

[1] Könnyen belátható, hogy egy $l+1$ hosszúságú hurok létezéséből mindig következik egy l hosszúságú út létezése, és ha a minimális fokszám $\geqq 2$, akkor egy l hosszúságú út létezéséből következik egy $l+1$ hosszúságú hurok létezése. Ennek alapján a 4. tételt levezethetnénk egy Dirac, Erdős és Gallaitól származó, utakra vonatkozó tételből ([2], (1.14)). A közölt bizonyítást azért választottuk, mert az a tétel állításánál olyan élesebb megállapítást igazol, amelyet a 3. tétel bizonyításánál felhasználunk.

Bizonyítás: Legyen $K=(P_1, P_2, \ldots, P_r, P_1)$ G-nek egy maximális hosszú köre. Az 1. tétel szerint $r \geqq k+1$. Ha $r>2k$, akkor a tétel triviális. Ha $r=2k$, akkor G összefüggősége és pontjainak száma biztosítja a K kört tartalmazó, kívánt hosszú hurok létezését. Ha $r<2k$, akkor valamivel többet bizonyítunk, ugyanis belátjuk, hogy $r+l$ $(l \geqq k)$ hosszúságú hurok létezik G-ben.

Minthogy G összefüggő és $\pi(G) \geqq 2k+1$, tartalmaz G olyan utat, amelynek egyik végpontja K-hoz tartozik és más pontja nincs K-n. Legyen az ilyen utak közül az egyik maximális hosszú $L=(Q_0, Q_1, \ldots\ldots, Q_l=P_r)$ $(l \geqq 1)$, és tegyük fel az indirekt okoskodáshoz, hogy $l<k$.



2. ábra

A Q_0-hoz illeszkedő, legalább k él mindegyike Q_0-t csak K és L pontjaival kötheti össze, mert különben L nem volna maximális. Q_0-hoz legfeljebb l különböző Q_0Q_i él illeszkedhet, tehát legalább $k-l$ számú Q_0P_j $(j \neq r)$ él van. De j nem veheti fel az $1, 2, \ldots, l, r-1, r-2, \ldots$ $\ldots, r-l$ értékeket, mert ellenkező esetben K-nak P_j-t P_r-rel összekötő egyik íve l-nél nem hosszabb; és K-nak másik íve, L és Q_0P_j együtt r-nél hosszabb kört alkot, ami K maximális tulajdonságának ellentmond. Azt kaptuk tehát, hogy Q_0-t legalább $k-l$ él köti össze K azon P_i pontjaival, amelyekre $l+1 \leqq i$ és $i \leqq r-l-1$. Ilyen P_i pontnak kell léteznie, mert $k-l \geqq 1$. i legfeljebb $r-l-1-l=r-2l-1$ értéket vehet fel. Q_0-t nem kötheti össze él K két szomszédos pontjával, mert különben K-t a Q_0-on át vezető kerülővel $r+1$ hosszúságú körré bővíthetnők, pedig r-nél hosszabb kör nincs G-ben. Ennélfogva i-nek legalább $2(k-l)-1$ értéket kell felvennie. Előbbivel egybevetve kell, hogy

$$2(k-l)-1 \leqq r-2l-1$$

legyen, amiből $2k \leqq r$ következik, ez pedig ellentmondás. Ezzel a 4. tételt bebizonyítottuk.

Azt, hogy a tétel a lehető legjobb, $k=3$-ra az 1. ábra gráfja mutatja.

Most a 3. tételt bizonyítjuk. A bizonyítás hasonló DIRAC bizonyításához, de annál, valamint az ERDŐS és GALLAI által adott bizonyításnál [2] egyszerűbb. A bizonyításhoz célszerű bevezetni a következő fogalmat: *Körnek* egy *húrján* olyan utat értünk, amelynek a végpontjai a körhöz tartoznak, de belső pontjai és élei nem.

A 3. *tétel bizonyítása*: Az 1. tétel szerint G tartalmaz kört. Az indirekt okoskodáshoz tegyük fel, hogy G egy maximálisan hosszú $K=$

$=(P_1, P_2, \ldots, P_r, P_1)$ körére $r \leqq 2k-1$. K-nak nem lehet $k-1$-nél hosszabb húrja, mert különben ezzel K-t r-nél hosszabb körré bővíthetnők, hiszen K-nak bármely két pontja közti egyik ívének hossza $< k$. Ugyanúgy, ahogyan a 4. tétel bizonyításában, belátható, hogy K-hoz kapcsolódik egy legalább k hosszú út. Legyen a K-hoz kapcsolódó maximális hosszú utak egyike $L=(Q_0, Q_1, \ldots, Q_l=P_r)$ $(l \geqq k)$. Ebben a bizonyításban bármilyen indexszel vagy jellel ellátott P betűvel, ill. Q betűvel a K kör, ill. az L út egy pontját jelöljük és egy N út két pontja közül a nagyobb indexűt *N-en magasabban fekvő*nek mondjuk. $\varrho(Q_0) \geqq k$. A Q_0-hoz illeszkedő élek Q_0-tól különböző végpontjai egyike sem lehet P_i $(i \neq r)$ pont, mert különben K-nak volna $k-1$-nél hosszabb húrja; és ezért, minthogy L maximális, a Q_0-hoz illeszkedő valamennyi él másik végpontja L-hez illeszkedik. Legyenek ezek a pontok $Q_{i_1}, Q_{i_2}, \ldots, Q_{i_n}$ $(n \geqq k;\ 1=i_1<i_2<\ldots<i_n \leqq l)$.

3. ábra

Meg fogjuk mutatni, hogy létezik K-nak olyan M húrja, amely a $Q_{i_1}, Q_{i_2}, \ldots, Q_{i_n}$ pontok mindegyikét tartalmazza. Minthogy $n \geqq k$ és a Q_{i_j} $(1 \leqq j \leqq n)$ pontok közül legfeljebb egy lehet M végpontja, M hossza $\geqq k$; ez pedig ellentmondás.

G kétszeresen összefüggő, ezért létezik a P_1P_2 és Q_0Q_1 éleket tartalmazó K' kör. A Q_0 és Q_1 pontok a K' kört két ívre bontják, az egyik a Q_0Q_1 él, a másik egy $W=Q_0Q_1$-út. A Q_0-ból indulva el a W uton, az első K-n levő pont legyen P_u, és a Q_1-ből indulva el a W uton, az első K-n levő pont legyen P_v. A W út Q_0P_u-szakaszát jelölje $L_1 = (Q_0=R_1', R_2', \ldots, P_u)$ és a Q_1P_v-szakaszát L_2'. Miután a W út tartalmazza a K kör P_1P_2 élét, ezért L_1-nek és L_2'-nek nincs közös pontja. Legyen az L_2' és a Q_0Q_1 él egyesítéséből adódó út $L_2=(Q_0=R_1'', R_2'', \ldots, P_v)$. Ha az L_1 és L_2 valamelyikének, pl. L_1-nek az L-hez tartozó, L_1-en legmagasabban fekvő Q_s pontja nem pontja az L út $L^*=Q_{i_n}Q_l$ szakaszának, akkor legyen Q' a Q_s fölött L-en legalacsonyabban fekvő Q_{i_j} $(1 \leqq j \leqq n)$ pont. Így a fent említett M út a következőkből áll: L_1-nek P_uQ_s-szakasza, L-nek Q_sQ_0-szakasza, a Q_0Q' él és L-nek $Q'Q_l$-szakasza.

Tartozzanak tehát az L_1-en is és az L_2-n is a legmagasabban fekvő, L-hez tartozó pontok L^*-hoz. Ekkor $i_n < l$. Legyen Q_{t_1} L_1-en, Q_{t_2} L_2-n, két olyan legmagasabban fekvő pont, amely nem tartozik L^*-hoz. Tekintsük L_1-nek, ill. L_2-nek $Q_{t_1}P_u$ — ill. $Q_{t_2}P_v$ — szakaszát. E két szakasznak L-en a Q_{t_1}, ill. Q_{t_2} pontokon kívül csak L^*-on van pontja. Ezen pontok közül legyen L-en a legalacsonyabban fekvő pont Q_y $(y \geqq i_n)$. Nem megy az általánosság rovására, ha feltesszük, hogy Q_y L_2-nek $Q_{t_2}P_v$-szakaszához tartozik. Legyen ekkor Q'' a Q_{t_1} fölött L-en

a legalacsonyabban fekvő Q_{i_j} $(1 \leqq j \leqq n)$ pont. Ekkor M a következőkből áll: L_1-nek $P_u Q_{t_1}$-szakasza, L-nek $Q_{t_1} Q_0$-szakasza, a $Q_0 Q''$ él, L-nek $Q'' Q_y$-szakasza és L_2-nek $Q_y P_v$-szakasza. Ezzel a 3. tételt bebizonyítottuk.

B

Most azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy legfeljebb mennyi éle lehet egy adott pontszámú, l-nél hosszabb utat, kört, ill. hurkot nem tartalmazó gráfnak, és melyek a probléma extrém gráfjai.

Jelöljük sorra az olyan gráfok osztályait, amelyeknek n pontjuk van és rendre nem tartalmaznak l-nél hosszabb utat, kört, hurkot, így: $F(n, l)$, $G(n, l)$, $H(n, l)$. Ezen osztályok extrém gráfjai azok, amelyek a legtöbb élt tartalmazzák. Élszámukat így jelöljük: $f(n, l)$, $g(n, l)$, $h(n, l)$. Célunk ezen $f(n, l)$, $g(n, l)$ és $h(n, l)$ értékek vizsgálata. Előrebocsátjuk, hogy ezideig csak bizonyos számelméleti tulajdonsággal rendelkező n-ekre ismeretesek az $f(n, l)$, $g(n, l)$, ill. $h(n, l)$ függvények pontos értékei és az $F(n, l)$, $G(n, l)$, ill. $H(n, l)$ osztályok összes extrém gráfjai.

ERDŐS és GALLAI utakkal és körökkel foglalkoztak, mi a hurok problémát tárgyaljuk. ERDŐS és GALLAI útra és körre vonatkozó két tétele ([2], (2. 6) és (2. 7) tétel) így hangzik:

5. TÉTEL. *$f(n, l) \leqq \frac{1}{2} nl$ $(l \geqq 1)$, és egyenlőség akkor és csakis akkor áll, ha $n = q(l+1)$, és ekkor az $F(n, l)$ osztály egyetlen extrém gráfja q számú teljes $(l+1)$-gráf komponensből áll.*

6. TÉTEL. *$g(n, l) \leqq \frac{1}{2}(n-1)l$ $(l \geqq 2)$, és egyenlőség akkor és csakis akkor áll, ha $n = q(l-1)+1$, és ekkor a $G(n, l)$ osztály extrém gráfjai a q számú teljes l-gráf tagból álló összefüggő gráfok.*

E két tétel bizonyítását nem közöljük, de a gondolatát felhasználjuk a 7. tétel bizonyításában, amely alapján az 5. és 6. tételeket az olvasó bizonyíthatja.

7. TÉTEL. *$h(n, l) \leqq \frac{1}{2} n(l-1)$ $(l \geqq 3)$, és az egyenlőség akkor és csakis akkor áll, ha $n = ql$, és ekkor a $H(n, l)$ osztály egyetlen extrém gráfja q számú teljes l-gráf komponensből áll.*

Bizonyítás. n-re vonatkozó teljes indukciót alkalmazunk. $n = 1$-re az állítás triviális.

Ha $1 < n \leqq l$, akkor egyetlen n pontú gráfnak sem lehet l-nél hosszabb hurokja. $v(G) \leqq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \leqq \frac{n(l-1)}{2}$, és az egyenlőség csak akkor áll, ha G teljes l-gráf. Tehát igaz a tétel, ha $n \leqq l$.

Legyen $n' > l$, és tegyük fel, hogy a tétel minden n'-nél kisebb n-re igaz. Megmutatjuk, hogy ekkor n'-re is igaz.

Legyen $G \in H(n', l)$.

(α) Ha G nem összefüggő, akkor legyenek komponensei $G_1, G_2, \ldots, G_p$ ($p \geqq 2$), és legyen $\pi(G_i) = n_i$. Ekkor $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n'$, $n_i < n'$ és $G_i \in H(n_i, l)$ ($i = 1, 2, \ldots, p$). Így a feltevés szerint $v(G) = v(G_1) + \ldots + v(G_p) \leqq n_1 \frac{l-1}{2} + n_2 \frac{l-1}{2} + \ldots + n_p \frac{l-1}{2} = n' \frac{l-1}{2}$, és az egyenlőség csak akkor áll, ha $v(G_i) = n_i \frac{l-1}{2}$ ($i = 1, 2, \ldots, p$), azaz, ha $G_1, G_2, \ldots, G_p$ mind teljes l-gráfok. Tehát tételünk igaz n'-re is.

(β) Ha G összefüggő, akkor megmutatjuk, hogy G-nek van olyan P' csúcsa, hogy $\varrho(P') \leqq \frac{l-1}{2}$. Mert ha ilyen nem volna, akkor akár $l = 2k-1$, akár $l = 2k$ ($k \geqq 2$), G minden pontjára $\varrho(P) \geqq k$ volna. Ha $l = 2k-1$, akkor $n' > l$ miatt $\pi(G) \geqq 2k$, és így, ha $\pi(G) \geqq 2k+1$, akkor a 4. tétel szerint G tartalmaz egy $2k+1$ hosszú hurkot, ha pedig $\pi(G) = 2k$, akkor a 2. tétel szerint G tartalmaz egy $2k$ hosszú — tehát l-nél hosszabb — kört, amely egyúttal $2k$ hosszú hurok is. Ha $l = 2k$, akkor $\pi(G) \geqq 2k+1$, és így a 4. tétel szerint G tartalmaz egy $2k+1$ hosszú — tehát l-nél hosszabb — hurkot. Minden esetben ellentmondásra jutottunk.

Ezek után tegyük fel, hogy $\varrho(P') \leqq \frac{l-1}{2}$, és legyen G' az a gráf, amelyet G-ből a P' elvételével kapunk (P' *elvételén* a P' pont és a P'-höz illeszkedő élek elvételét értjük). Ekkor $G' \in H(n'-1, l)$. G' nem tartalmazhat teljes l-gráfot, mert különben G tartalmazna egy $l+1$ hosszú hurkot. Így indukciós feltevésünk szerint $v(G') < (n'-1)\frac{l-1}{2}$, és ezért $v(G) = \varrho(P') + v(G') < \frac{l-1}{2} + (n'-1)\frac{l-1}{2} = n'\frac{l-1}{2}$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Amint már említettük, nem minden n-re sikerült $h(n, l)$ pontos értékét és az összes extrém gráfokat megadó tételt bizonyítani. Teljes általánosságban csupán sejtjük a helyes tételt. Ennek egyes speciális eseteit bizonyítani is tudjuk, és néhány további eredményünk megkönnyítheti a teljes megoldást.

Célszerű előrebocsátani a következő speciális gráfok definícióit:

Csillag az olyan gráf, amelynek pontjai $P_0, P_1, \ldots, P_n$ és élei P_0P_1, $P_0P_2, \ldots, P_0P_n$. (Csillag az egy pontból álló gráf is.)

Kettőscsillag egy gráf, ha csillag, vagy olyan gráf, amelynek pontjai

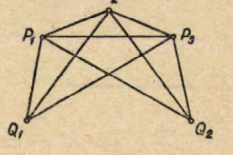
$P_0, P_1, \ldots, P_m, Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ ($m \geqq 1$; $n \geqq 1$; és $P_i \neq Q_j$ minden i- és j-re) és élei $P_0Q_0, P_0P_1, P_0P_2, \ldots, P_0P_m, Q_0Q_1, Q_0Q_2, \ldots, Q_0Q_n$. *Valódi* egy *kettőscsillag*, ha nem csillag.

G_n^{2k} *(Erdős-féle gráf)* ($1 \leqq k < n$) az olyan gráf, amelynek pontjai $P_1, P_2, \ldots, P_k, Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-k}$ és élei az összes P_iP_j és P_iQ_j élek. (A 4. ábrán G_5^6 látható.) Könnyű ellenőrizni, hogy G_n^{2k} maximális körének hossza $\leqq 2k$, $G_n^{2k} \in H(n, 2k+1)$ és $v(G_n^{2k}) = \binom{k}{2} + k(n-k)$.

Nyilvánvalóan $n \leqq l$-re $h(n, l)$ a teljes n-gráf élszáma.

Az $l = 1, 2, 3$ eseteket külön vizsgáljuk, ezek ugyanis a többitől eltérő eredményt mutatnak. $l = 1$-re triviális a következő:

$h(n, 1) = \left[\frac{n}{2}\right]$, *és a* $H(n, 1)$ *osztály egyetlen extrém gráfja az* $\left[\frac{n}{2}\right]$ *izolált élből — és ha n páratlan, még egy különálló pontból — álló gráf.*



4. ábra

$l = 2$-re könnyen belátható a következő, TURÁNtól származó megállapítás:

$h(n, 2) = n - 1$, *és a* $H(n, 2)$ *osztály egyetlen extrém gráfja az n pontú csillag.*

8. AZ $l = 3$ ESET. *Legyen* $n = q \cdot 3 + m$ ($0 \leqq m < 3$). *Ha* $m = 0$, *akkor* $h(n, 3) = n$ *és a* $H(n, 3)$ *osztály egyetlen extrém gráfja q számú háromszög komponensből áll. Ha* $m = 1$ *vagy* 2, *akkor* $h(n, 3) = n - 1$, *és a* $H(n, 3)$ *osztály extrém gráfjai azok és csakis azok, amelyeknek van egy és csakis egy kettőscsillag komponense, a többi komponensei — amennyiben léteznek — mind háromszögek.*

Megjegyzés: A $h(n, 3)$ értékének, valamint az $m = 0$ esethez és az $n = 4,5$ és 7 értékekhez tartozó extrém gráfok megadása TURÁNtól származik.[2]

Bizonyítás; Minthogy a 7. tétel az $m = 0$ esetet tartalmazza, tegyük fel, hogy $m = 1$ vagy 2. Emellett legyen G a $H(n, 3)$ osztály egy extrém gráfja. G-ben kör csak háromszög lehet, és G bármely háromszöge G-nek egy komponense. G'-t úgy kapjuk G-ből, hogy elhagyjuk G összes háromszögét. Legyen $\pi(G') = n'$. Ekkor G' a $H(n', 3)$ osztály egy extrémgráfja. Könnyen belátható ([3], IV. Satz 10), hogy egy körnélküli, n' pontot tartalmazó G'' gráfra $v(G'') \leqq n' - 1$ és egyenlőség csak akkor áll, ha G'' összefüggő. Jelöljünk G_1-gyel egy n' pontból álló csillagot. Ekkor $v(G_1) = n' - 1$ és $G_1 \in H(n', 3)$. Így, ha még G' extrém tulajdonságát is figyelembe vesszük, adódik, hogy $v(G') = n' - 1$ és G' összefüggő. Ha

[2] Szóbeli közlés alapján.

G' nem tartalmaz 2-nél hosszabb utat, akkor csak csillag lehet, ha tartalmaz, akkor legyen egy ilyen az 5. ábra gráfja. E gráf pontjain kívüli pontból él vagy csak P-be vagy csak Q-ba mehet, és így kettőscsillag alakul ki. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

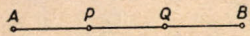
$l \geqq 4$-re általában a következőt *sejtjük:*

9. *Legyen* $n = ql + m$ $(0 \leqq m < l)$, *és jelöljük a*

$$q\binom{l}{2} + \binom{m}{2} = \frac{n(l-1) - m(l-m)}{2}$$

kifejezést $\alpha(n, l)$*-lel. Ha* $G \in H(n, l)$, *akkor*

$$v(G) \leqq \alpha(n, l),$$



5. ábra

és egyenlőség a következő két esetben és csakis akkor áll:

(a) *ha* G q *számú teljes* l*-gráf és egy teljes* m*-gráf komponensből áll,*

(b) *ha* $n > l$, $l = 2k + 1$ $(k \geqq 2)$, $m = \frac{l \pm 1}{2}$ *és* G z *számú* $(0 \leqq z \leqq q - 1)$ *teljes* l*-gráf komponensből és egy* $G_{n'}^{l-1}$ $(n' = n - zl = (q - z)l + m)$ *Erdős-gráf komponensből áll.*

A sejtéshez megjegyezzük a következőket:

(α) Érdekes, hogy az extrém gráfok között Erdős-gráf csupán páratlan l-re lép fel és akkor is csak a „középen fekvő" két maradékra.

(β) Extrém gráf az $n \leqq l$ esetben mindig összefüggő, máskor csupán (b) esetén $z = 0$ mellett.

(γ) Triviális, hogy a sejtés teljesül $n \leqq l$-re.

(δ) Minthogy az (a) és (b) gráfjaira $v(G) = \alpha(n, l)$, a 9. állítás nélkül is nyilvánvaló, hogy a $H(n, l)$ osztály minden G extrém gráfjára $v(G) \geqq \alpha(n, l)$.

(ε) A 7. tétel azt mutatja, hogy igaz a sejtés $m = 0$-ra és $v(G) \leqq \frac{n(l-1)}{2}$ mindig áll.

10. Most bizonyítjuk, hogy *ha* $m = 1$ *vagy* $m = l - 1$, *akkor igaz a* 9. *állítás.* Ekkor $\alpha(n, l) = \frac{(n-1)(l-1)}{2}$, és megjegyezzük, hogy a (b) eset nem fordulhat elő, ugyanis $l \geqq 5$-re $2 \leqq \frac{l \pm 1}{2} \leqq l - 2$.

Bizonyítás. n-re vonatkozó teljes indukciót alkalmazunk. Ha $n \leqq l$, akkor $n = m$ és $n = 1$-re, ill. $n = l - 1$-re a tétel triviális. Legyen $m = 1$, ill.

$l-1$ mellett $n>l$, $G\in H(n, l)$, és tegyük fel, hogy minden n-nél kisebb pontszámra igaz az állítás. Megmutatjuk, hogy ekkor n-re is.

Ha G-ben létezik egy l hosszú, K_l kör, akkor G-nek K_l-et tartalmazó G^* komponense K_l pontjain kívül más pontot nem tartalmazhat. Legyen G' az a gráf, amelyet G-ből G^* elhagyásával kapunk. Ekkor $\pi(G')=$ $=n'=n-l$, és így n'-nek l-lel való osztása esetén is 1, ill. $l-1$ a maradék. Minthogy $G'\in H(n', l)$, indukciós feltevésünk értelmében $v(G')\leqq$ $\leqq\frac{(n'-1)(l-1)}{2}$, és egyenlőség az (a) esetben és csakis akkor áll. Ennélfogva $v(G)\leqq\frac{(n'-1)(l-1)}{2}+\binom{l}{2}=\frac{(n-1)(l-1)}{2}$ és az egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha G'-re (a) teljesül, és G^* teljes l-gráf, amikor is (a) teljesül G-re.

Ha G-ben nem létezik l hosszúságú kör, akkor nincs szükség teljes indukcióra, ugyanis ekkor a 6. tétel szerint $v(G)\leqq\frac{(n-1)(l-1)}{2}$, sőt itt az egyenlőség sem állhat, mert $n>l\geqq 4$-re az egyenlőség a 6. tétel szerint csakis akkor állhat, ha G összefüggő és minden tagja teljes $(l-1)$-gráf; ekkor viszont G-ben volna l-nél hosszabb hurok. Ezzel a 10. állítást igazoltuk.

11. Megjegyezzük, hogy ugyanígy lehet bizonyítani útra vonatkozó, hasonló tételt $n=q(l+1)+m$ mellett $m=1$, ill. l-re.

Az $l=4$, 5 és 6 esetekre a 9. állítás bizonyítható. Példaként $l=5$-re bizonyítjuk is. A bizonyításban felhasználjuk a következőt:

12. Segédtétel. *Ha G a $H(n, l)$ osztály extrém gráfja és $n>$ $>\left(\frac{l-2}{2}\right)^2+1$ $(l\geqq 4)$, akkor G-ben létezik egy legalább $l-1$ hosszú kör.*

Bizonyítás: Az indirekt okoskodáshoz tegyük fel, hogy G nem tartalmaz $l-2$-nél hosszabb kört. A 6. tétel szerint ekkor $v(G)\leqq$ $\leqq\frac{(n-1)(l-2)}{2}$, és minthogy G extrém gráf, $v(G)\geqq\alpha(n, l)$. A két egyenlőtlenségből $\frac{n(l-1)-m(l-m)}{2}\leqq\frac{(n-1)(l-2)}{2}$, ez pedig $n>\left(\frac{l-2}{2}\right)^2+1$ mellett m egyetlen értékére sem állhat.

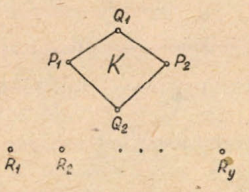
13. Az $l=5$ eset. A 7. tétel és a 10. pont figyelembe vételével elegendő az összes olyan $H(n, 5)$ osztálybeli extrém gráfokat megadni, amelyekre n az $m=2$ ill. 3 maradékokat adja. Mindkét esetben $\alpha(n, 5)=$ $=2n-3$.

Bizonyítás. Legyen G a $H(n, 5)$ osztály egy extrém gráfja. Ekkor G-nek minden n^* pontot tartalmazó G^* komponense a $H(n^*, 5)$ osztály

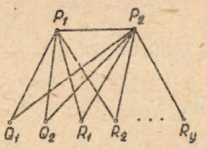
extrém gráfja, ennélfogva $n^* \leqq 5$ esetén G^* teljes n^*-gráf. G' legyen az a gráf, amely G-ből úgy keletkezik, hogy elhagyjuk G összes, pontosan 5 pontot tartalmazó komponensét. Az n' pontot tartalmazó G' gráf a $H(n', 5)$ osztálynak extrém gráfja, és így nem tartalmazhat 5-nél hosszabb kört. De G' nem tartalmazhat 4-nél hosszabb kört sem, mert ha igen, legyen egy ilyen K'. Ekkor G'-nek a K' kört tartalmazó komponensében K' pontjain kívül más pont nem lehet — mert különben ez a komponens tartalmazna 5-nél hosszabb hurkot —, ilyen komponens pedig nem lehetséges G'-ben.

A 12. segédtétel szerint G' tartalmaz egy 4 hosszú kört, vagy $n' \leqq 3$. Ha $n' \leqq 3$, akkor G' teljes m-gráf ($m = 2$, ill. 3), ez pedig azt jelenti, hogy G a 9. (a) gráfja $l = 5$-re és $m = 2$, ill. 3-ra. A továbbiakban tehát feltehetjük, hogy $n' > 3$, sőt ekkor $m = 2$, ill. 3 miatt $n' \geqq 7$.

Most azt kell belátnunk, hogy G' azonos a $G^4_{n'}$ Erdős-gráffal. Vizsgáljuk e célból G' egy tetszőleges G_x komponensét. Ha $\pi(G_x) = n_x \leqq 4$, akkor G_x teljes n_x-gráf és $\nu(G_x) \leqq 2n_x - 2$ mindig teljesül. Ha pedig $n_x > 4$, akkor egyúttal $n_x \geqq 6$ is áll, és a 12. segédtétel szerint G_x tartalmaz egy 4 hosszú, K kört. Legyenek G_x-nek a K kör pontjain kívüli pontjai $R_1, R_2, \ldots, R_y$ ($y \geqq 2$) (6. ábra). Minthogy G_x összefüggő és $G_x \in H(n_x, 5)$, G_x nem tartalmazhat egyetlen R_iR_j élt sem. Tehát minden R_i-hez ($i = 1, 2, \ldots, y$) tartozó él másik végpontja K-nak pontja. Egyetlen R_i pontot sem kötheti össze él K két szomszédos pontjával, mert különben G_x tartalmazna 4-nél hosszabb kört; tehát $\varrho(R_i) \leqq 2$ ($i = 1, 2, \ldots, y$). Ha valamely i-re $\varrho(R_i) = 2$, akkor a P_1P_2 és Q_1Q_2 élek mindegyike



6. ábra



7. ábra

nem létezhet, mert különben G_x ismét tartalmazna 4-nél hosszabb kört. Ha tehát a P_1P_2 és a Q_1Q_2 élek léteznek, akkor minden i-re $\varrho(R_i) = 1$ és $\nu(G_x) = n_x + 2$. Ez viszont ellentmond G_x extrém tulajdonságának, hiszen ha a P_1P_2 és a Q_1Q_2 élek közül az egyik (legyen ez a Q_1Q_2 él) nem létezik, akkor az R_iP_j ($i = 1, 2, \ldots, y$; $j = 1, 2$) élek mind lehetségesek, és így $\nu(G_x) = 2n_x - 3$ ($> n_x + 2$ $n_x \geqq 6$ esetén). Ha a P_1P_2 és a Q_1Q_2 élek egyike sem léteznék, akkor a $\varrho(R_i) \leqq 2$ miatt $\nu(G_x \leqq 2n_x - 4$ volna, ellentétben G_x extrém tulajdonságával. Tehát azt kaptuk, hogy G_x azonos a $G^4_{n_x}$ Erdős-gráffal. (7. ábra.)

Még annak igazolása van hátra, hogy G' összefüggő. Az indirekt okoskodáshoz tegyük fel, hogy G_1 és G_2 G'-nek két különböző komponense. Pontszámaik legyenek n_1, ill. n_2, és együtt képezzék a G'' gráfot $(2 \leqq \pi(G'') = n'' = n_1 + n_2)$. Az előzőek alapján $\nu(G_1) \leqq 2n_1 - 2$ és $\nu(G_2) \leqq$ $\leqq 2n_2 - 2$, és így $\nu(G'') \leqq 2n'' - 4$. Ez viszont ellentmond annak, hogy G'' a $H(n'', 5)$ osztály extrém gráfja, ugyanis (δ) (101. oldal) szerint $\nu(G'') \geqq$ $\geqq \alpha(n'', 5) = 2n'' - 3$.

Tehát azt kaptuk, hogy ha $n' \geqq 7$, akkor G' a 9. (b) egy gráfja $l = 5$-re és $m = 2$, ill. 3-ra. Ezzel $l = 5$-re a 9. állítást igazoltuk.

Be lehet látni, hogy az általános esetre vonatkozó sejtés igazolásához elegendő a 9. állítást csupán azokra a $H(n, l)$ osztálybeli, összefüggő gráfokra bizonyítani, amelyekre $m \leqq \frac{l-1}{2}$ és minden pontjukra $\varrho(P) \geqq m$.

Ennek felhasználása lényegesen megkönnyíti az $l = 4$, 5 és 6 esetek vizsgálatát, és ezen speciális esetek megoldásainak ismeretében a 9. állítás bizonyítható olyan m-ekre, amelyekre $m \leqq 2$ és $m \geqq \frac{l-2}{2}$. Ez viszont az összes maradékokat jelenti $l \leqq 8$-ra. Tehát a 9. állítás $l \leqq 8$-ra bizonyított. Úgy látszik, hogy újabb ötletek felhasználása nélkül ez a korlát is átléphető, de ezideig abból sem látszik a teljes megoldás lehetősége.

Végül az utak és a hurkok kapcsolatára vonatkozóan azt *sejtjük*, hogy

14. *ha* $l \geqq 3$, *akkor minden n-re a* $H(n, l+1)$ *osztály extrém gráfjai azok és csakis azok, amelyek az* $F(n, l)$ *osztálynak extrém gráfjai.*

Az nyilvánvaló, hogy 14. nem áll $l \leqq 2$-re, hiszen — amint láttuk — a $H(n, 3)$ osztálynak az $F(n, 2)$ osztályba nem tartozó valódi kettőscsillag extrém gráfja, és a $H(n, 2)$ osztálynak a csillag extrém gráfja ($n \geqq 2$-re) nem tartozik az $F(n, 1)$ osztályba.

A 14. állítással viszont összhangban áll az 5. és 7. tétel kapcsolata, ill. a 10. és 11. pont kapcsolata.

IRODALOM

[1] G. A. Dirac: Some theorems on abstract graphs, Proc. London Math. Soc., (3), 2 (1952), 69—81.

[2] P. Erdős—T. Gallai: On maximal paths and circuits of graphs, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 10 (1959), 337—356.

[3] D. König: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen (Leipzig, 1936).

[4] Turán P.: Egy gráfelméleti szélsőértékfeladatról, Mat. és Fiz. Lapok, 48 (1941), 436—452.

О ПУТЯХ, КРУГАХ И ПЕТЛЯХ В ГРАФАХ

Б. Андрашфаи

Предмет статьи — круг проблем предложенный Тураном и Дираком (см. [1] и [2]), относящийся к вопросу какым большим должно быть число рёбер, соответственно по крайней мере какой большой должно быть степень каждой точки в графе G, содержащий n вершин (и в которой две точки связаны не более чем одним ребром), для того, чтобы в графе существовали путь, круг или петля содержащие больше чем заданное число рёбер. (Петлей является совокупность круга и одного пути имеющего точно одну обшую с этим кругом точку, далее мы считаем петлей один круг или путь в самом себе.) В связи с этим автор дает доказательство одной теоремы Дирака ([1], теорема 4), которое является более коротким, чем доказательства известные до сих пор, далее он высказывает одну обшую гипотезу, которая определяет максимальное значение числа $h(n, l)$ ребер содержащегося в графе с n вершинами не имеющего петель из больше чем l ребер. Он также задает все „экстремальные графы", то есть, все графы с вершинами, содержащие $h(n, l)$ рёбер и в которых нет петель содержащих больше, чем l ребер. Справедливость этой гипотезы он показывает для следующих частных случаев а) n произвольно и $l=2$ или 3; б) $l>3$, $n=ql+m$ $(0\leqq m<l)$ и $m=0, 1, \ldots, l-1$. Справедливость гипотезы доказана также при любом значении n для случаев $4\leqq l\leqq 8$. В качестве примера приведено доказательство для случая $l=5$.

ÜBER WEGE, KREISE UND SCHLINGEN VON GRAPHEN

B. Andrásfai

Vorliegende Arbeit befasst sicht mit jenem von Turán und Dirac aufgeworfenem Problemenkreis (siehe [1] und [2]), wie gross die Anzahl der Kanten eines n Punkte enthaltenden Graphen, bzw. mindestens wie gross der Grad jedes seiner Punkte sein muss, damit im Graphen ein Weg, ein Kreis oder eine Schlinge mit mehr Kanten als eine vorgeschriebene Zahl vorhanden sei. (Eine Schlinge ist die Vereinigung eines Kreises und eines Weges, die genau einen Punkt gemeinsam haben; ferner betrachten wir einen Kreis oder einen Weg an und für sich auch als eine Schlinge.) Dabei geben wir auch einen kürzeren Beweis als die bisherigen für einen Satz von Dirac ([1], Satz 4); ferner sprechen wir eine allgemeine Vermutung aus, welche denjenigen maximalen Wert $h(n, l)$ angibt, wieviele Kanten ein Graph mit n Punkten enthalten kann, falls darin keine Schlinge vorkommt, die aus mehr Kanten als l besteht, und zugleich auch sämtliche „extreme Graphen" angibt, d. h. sämtliche Graphen mit n Punkten, welche $h(n, l)$ Kanten enthalten, und keine Schlinge, die aus mehr Kanten als l besteht. Die Richtigkeit dieser Vermutung beweisen wir für die folgenden Spezialfälle: *a)* beliebiges n und $l=2$ oder $l=3$; *b)* $l>3$, $n=ql+m$ $(0\leqq m<l)$ und $m=0,1, \ldots, l-1$. Auch für beliebiges n und $4\leqq l\leqq 8$ haben wir die Richtigkeit der Vermutung nachgewiesen; als Beispiel wird hier der Beweis für den Fall $l=5$ mitgeteilt.

Komplex számok hatványösszegeiről

DANCS ISTVÁN

1. A diophantikus approximációk elméletének bizonyos irányú általánosításánál [1] döntő szerepet játszik komplex számok hatványösszegeinek a vizsgálata. Többek között a következő extrémumfeladat vetődik fel:

Legyenek $z_1, z_2, \ldots, z_n$ komplex számok ($n \geqq 2$), amelyekre $|z_1| \geqq |z_2| \geqq \ldots \geqq |z_n|$. Továbbá a következő két feltevés valamelyikét fogjuk használni

((1, 1) $\qquad |z_1| = 1$

(1, 2) $\qquad |z_n| = 1$

Legyen még $s_\nu = z_1^\nu + z_2^\nu + \ldots + z_n^\nu$ (ν pozitív egész), és $g(n) \geqq n$.

A kérdés az, hogy milyen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ rendszere lesz a $\max\limits_{1 \leqq \nu \leqq g(n)} |s_\nu|$ értéke minimális, és mi a minimum értéke, feltéve, hogy vagy az (1, 1), vagy az (1, 2) feltevés teljesül. — Természetesen minden $g(n)$ választás mellett más-más extrémum-feladattal állunk szemben. Legkézenfekvőbb először a $g(n) = n$ eset vizsgálata. Ebben az esetben az (1, 2) feltétel mellett a válasz viszonylag egyszerűen megadható [1]. E szerint (1, 2) esetén

$$\min_{z_1, z_2, \ldots z_n} \max_{1 \leqq \nu \leqq n} |s_\nu| = 1 \tag{13}$$

és extremális rendszer pedig lényegileg véve (egységnyi abszolút értékű szorzótól eltekintve) csak egyetlen van.

Az (1, 1) feltétel mellett a válasz lényegesen nehezebb. A szélső értékre ezideig is csak becslések léteznek, s a pontos érték és az extremális rendszer csak $n = 2$ esetén ismeretes (Schweitzer Miklós emlékverseny 1956. 2. feladat). Az eredményeket röviden felsorolva: először TURÁN PÁL [1] a

$$\max_{1 \leqq \nu \leqq n} |s_\nu| \geqq \frac{\log 2}{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}$$ becslést igazolta.

Később DE BRUIJN, illetőleg az ő módszerét némiképp módosítva S. UCHIYAMA [6] bebizonyította, hogy bizonyos n-től kezdve, tetszőleges kis pozitív ε-ra

$$\max_{1 \leqq \nu \leqq n} |s_\nu| \geqq (1-\varepsilon) \frac{\log \log n}{\log n}.$$

TURÁN PÁL sejtése az volt, hogy — az (1, 2) feltétel melletti eredményhez hasonlóan — megadható egy olyan c, n-től független érték, hogy (1, 1) mellett

$$\max_{1 \leqq \nu \leqq n} |s_\nu| \geqq c \tag{1.4}$$

minden n-re.

Ezt a sejtést ATKINSON igazolta [7], amennyiben c-re a $c \geqq \frac{1}{6}$ becslést nyerte. A bizonyítás kiindulási alapja nála is DE BRUIJN gondolata volt, de lényeges új gondolatokat tartalmaz.

Az (1, 1) feltétel mellett — mint láttuk — sokkal nehezebb a kérdésre válaszolni, mint (1, 2) esetén. Remélhető viszont, hogy a $z_1, z_2, \ldots, z_n$-re adott újabb megkötés esetén, vagy a $g(n)$-t n-től függően nagyobbnak választva könnyebb eredményhez jutni. Ez valóban így is van. Ha $z_1, z_2, \ldots, z_n$-re azt a további megkötést tesszük, hogy z-vel együtt a komplex konjugáltja is szerepeljen, akkor — mint azt SCHWEITZER MIKLÓS bebizonyította [1] —

$$\min_{z_1, z_2, \ldots z_n} \max_{1 \leqq \nu \leqq n} |s_\nu| \geqq 1.$$

A másik irányban pedig J. W. S. CASSELS megmutatta [4], hogy $g(n) = 2n-1$ esetén a pontos extremális érték meghatározható, amennyiben

$$\min_{z_1, z_2, \ldots z_n} \max_{1 \leqq \nu \leqq 2n-1} |s_\nu| = 1 \tag{1.5}$$

és ez nem is javítható, mert megadható egy olyan $z_1^*, z_2^*, \ldots, z_n^*$ rendszer, amelyre

$$|z_1^\nu + \ldots + z_n^\nu| < 1 \quad (\nu = 1, 2, \ldots 2n-2) \tag{1.6}$$

CASSELS az extremális rendszert, illetve rendszereket nem határozta meg. Az nyilvánvaló, hogy a $z_1 = 1; z_2 = z_3 = \ldots = z_n = 0$ rendszer extremális. Nevezzük ezt a továbbiakban triviális rendszernek. Az (1, 3) esetben kapott eredmény alapján valószínűnek látszott, hogy ez az egyetlen extremális rendszer. Ezért meglepő az, hogy nemcsak hogy más extremális rendszer is létezik, hanem kontinuumnyi sok lényegileg különböző van, ami ilyen jellegű feladatoknál még nem fordult elő. Ilyen rendszereket fogunk megadni 2.-ben.

CASSELS [4]-ben megemlíti, hogy $(2n-1)$ helyett $(4n-3)$-at véve már csak a triviális extremális rendszer lézetik. Ezt javítjuk 3.-ban, ahol CASSELS gondolatmenetének módosításával megmutatjuk, hogy $\min_{z_1,z_2,\ldots,z_n} \max_{1\leqq\nu\leqq 3n-3} |s_\nu|$ extremális rendszere már csak a triviális, és ez a legjobb állítás, mert $(3n-3)$ helyett $(3n-4)$-et véve már a triviálison kívül kontinuumnyi sok lényegileg különböző extremális rendszer van. Ezeket a rendszereket 4.-ben fogjuk meghatározni.

Megjegyezzük, hogy mind (1, 4), mind pedig (1, 5) alkalmazható algebrai egyenletek közelítő megoldásánál, amennyiben (1, 4) vagy (1, 5) segítségével a legnagyobb abszolút értékű gyök abszolút értékére nyerhetünk tetszőkeges, előre meghatározott relatív hibájú becslést [2, 3].

2. Legyen α n-től függően elég kis pozitív szám, és $d|n-1$. Ha z_1-et 1-nek választjuk, $z_2, \ldots, z_n$ pedig a következő $(n-1)$ db szám

$$\alpha^{\frac{1}{d}} \cdot e^{\frac{2\pi i\nu}{2n-2+d}} \cdot e^{\frac{2\pi i\mu}{d}} \qquad \left(\nu=1,2,\ldots,\frac{n-1}{d};\ \mu=1,2,\ldots,d\right) \tag{2.1}$$

akkor ezen z-k extremális rendszereket adnak (1, 5)-re.

Ha ugyanis $d\nmid j$, akkor nyilván $s_j=1$. Ha pedig $j=d, 2d, \ldots, \frac{2n-2}{2}\cdot d$ akkor

$$\operatorname{Re} s_j = 1+\operatorname{Re}\left(\alpha^{\frac{j}{d}} \cdot d \sum_{\nu=1}^{\frac{n-1}{d}} \left(e^{\frac{2\pi ij}{2n-2+d}}\right)^\nu\right) = 1-\frac{d}{2}\alpha^{\frac{j}{d}}.$$

Továbbá nyilván $|Im\, s_j| \leqq (n-1)\, d\alpha^{\frac{j}{d}}$

Az utóbbi kettőt összevetve

$$|s_j|^2 \leqq 1 - d\alpha^{\frac{j}{d}} + 2n^2\alpha^{\frac{2j}{d}}.$$

Ebből pedig látszik, hogy ha α eléggé kicsi, akkor $|s_j|<1$.

3. Az említett állítás a következőképp is fogalmazható:

Az (1, 1) feltétel mellett

$$\max_{1\leqq\nu\leqq 3n-3} |s_\nu| \leqq 1 \tag{3.1}$$

csak a triviális extremális rendszerre áll fenn.

Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy $z_1=1$. Továbbá vezessük be a következő jelöléseket

$$\sigma_\nu = z_2^\nu + \ldots + z_n^\nu \quad (\nu \text{ pozitív egész})$$

és

$$r_\nu = \sigma_\nu + \bar{\sigma}_\nu \tag{3, 2}$$

Valamint

$$f(z)=\prod_{j=2}^{n}(z-z_j)=\sum_{\mu=0}^{n-1}a_\mu z^{n-1-\mu}$$

és

$$f(z)\cdot\bar{f}(z)=\sum_{\mu=0}^{2n-2}b_\mu z^{2n-2-\mu}. \tag{3.3}$$

Írjuk fel az első $(3n-3)$ Newton—Girard formulát a (3, 2) és (3, 3) jelöléseknek megfelelően a σ_ν, illetőleg az r_ν hatványösszegekre:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= -a_1\\
\sigma_2+a_1\sigma_1 &= -2a_2\\
&\vdots\\
\sigma_{n-1}+a_1\sigma_{n-2}+\ldots+a_{n-2}\sigma_1 &= -(n-1)a_{n-1}\\
\sigma_n+a_1\sigma_{n-1}+\ldots+a_{n-1}\sigma_1 &= 0\\
&\vdots\\
\sigma_{3n-3}+a_1\sigma_{3n-4}+\ldots+a_{n-1}\sigma_{2n-2} &= 0
\end{aligned} \tag{3.4}$$

és

$$\begin{aligned}
r_1 &= -b_1\\
r_2+b_1r_1 &= -2b_2\\
&\vdots\\
r_{n-1}+b_1r_{n-2}+\ldots+b_{n-2}r_1 &= -(n-1)b_{n-1}\\
&\vdots\\
r_{2n-2}+b_1r_{2n-3}+\ldots+b_{2n-3}r_1 &= -(2n-2)b_{2n-2}\\
r_{2n-1}+b_1r_{2n-2}+\ldots+b_{2n-2}r_1 &= 0\\
&\vdots\\
r_{3n-3}+b_1r_{3n-4}+\ldots+b_{2n-2}r_{n-1} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Megállapíthatjuk, hogy a (3, 1)-et kielégítő rendszerekre

$$\text{Re}\ \sigma_\nu \leqq 0 \quad \text{azaz} \quad r_\nu \leqq 0 \tag{3.6}$$

$(\nu=1, 2, \ldots, 3n-3)$

Másrészt ha $2\ Re\ \sigma_{\nu_0}=r_{\nu_0}=0$ egy bizonyos ν_0-ra $(1\leqq\nu_0\leqq 3n-3)$, akkor egyben

$$\sigma_{\nu_0}=0 \tag{3, 7}$$

Először a (3, 6) észrevétel segítségével teljes indukcióval be fogjuk látni, hogy $r_1 = r_2 = \ldots = r_{n-1} = 0$ és ebből pedig a (3, 7) észrevétel alapján (3, 4)-ből valamennyi a_j nulla volta következik.

A teljes indukció végrehajtása előtt megjegyezzük, hogy (3, 6)-ból és (3, 5)-ből $b_j \geqq 0$ $(j = 0, 1, \ldots, 2n-2)$ következik. Ugyanis (3, 5)-ből $r_1 \leqq 0$ miatt $b_1 \geqq 0$; továbbá az előzőből és $r_2 \leqq 0$-ból $b_2 \geqq 0$ és i. t. Ebből nyilvánvaló, hogy a (3, 5) egyenlőségek bal oldalán álló valamennyi tag azonos előjelű, vagy 0, tehát az utolsó $(n-1)$ számú egyenlőségben szükségképp minden tag nulla.

Az eddigi megjegyzések alapján a teljes indukció menete:

1° $r_1 = -b_1 = 0$, mert ellenkező esetben a (3, 5)-ben a bal oldalon álló tagok azonos előjele miatt egyetlen b sem lenne 0, tehát $r_1 b_{2n-2} \neq 0$, de az ellentmond (3, 5) $(2n-1)$-edik egyenlőségének.

2° Ha már eljutottunk addig, hogy

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_k = 0$$

$r_1 = r_2 = \ldots = r_k = 0$ $(k \leqq n-1)$, akkor $r_{k+1} = -(k+1)\, b_{k+1} = 0$ következik, mert ellenkező esetben az 1°-ben mondottakhoz hasonlóan $b_\mu \neq 0$, ha $k+1 | \mu$ és $\mu \leqq 2n-2$. Legyen μ_0 a legnagyobb ilyen index, akkor $b_{\mu_0} \cdot r_{k+1} \neq 0$. Ez pedig ellentmond (3, 5) utolsó $(n-1)$ egyenlősége valamelyikének, mert $2n-2 < \mu_0 + k + 1 \leqq 3n-3$.

4. Végül megmutatjuk, hogy

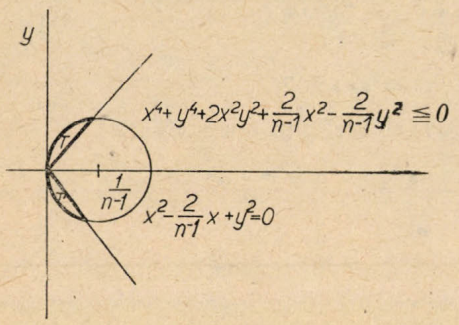
$$\min_{z_1, z_2, \ldots, z_n} \max_{1 \leqq \nu \leqq 3n-4} |s_\nu|$$

lényegileg különböző extremális rendszerei pontosan meghatározhatók.

Az előző pontban alkalmazott okoskodással belátható, hogy a szóban forgó rendszerekre

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_{n-2} = 0, \quad \sigma_n = \sigma_{n+1} = \ldots = \sigma_{2n-3} = 0$$

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-2} = 0$$



1. ábra

és

$$\sigma_{2n-1} = \sigma_{2n} = \ldots = \sigma_{3n-4} = 0$$

továbbá

$$\sigma_{n-1} = -(n-1)\, a_{n-1}$$

$$\sigma_{2n-2} + a_{n-1}\sigma_{n-1} = 0$$

Az utóbbiból

$$\sigma_{n-1} = -(n-1) a_{n-1}$$

$$\sigma_{2n-2} = (n-1) \cdot a_{n-1}^2$$

Mivel

$$\max_{1 \leqq \nu \leqq 3n-4} |s_\nu| \leqq 1, \quad \text{tehát}$$

(4. 1) $$|1+\sigma_{n-1}|^2 = |1-(n-1)a_{n-1}|^2 \leqq 1$$

és

(4. 2) $$|1+\sigma_{2n-2}|^2 = |1+(n-1)a_{n-1}^2|^2 \leqq 1$$

$a_{n-1} = x+iy$ jelöléssel rendezve (4, 1) és (4, 2)-t, a következő egyenlőtlenség-rendszert nyerjük:

(4. 3) $$x^2 - \frac{2}{n-1}x + y^2 \leqq 0$$

(4. 4) $$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + \frac{2}{n-1}x^2 - \frac{2}{n-1}y^2 \leqq 0$$

Könnyen belátható, hogy ezen egyenlőtlenségeknek két T és T' tartomány x, y pontjai tesznek eleget. (Ábra). Vagyis végeredményben egységnyi abszolút értékű szorzótól eltekintve az extremális rendszerek azok, amelyekre $z_1 = 1$, z_2, ..., z_n pedig gyöke a következő egyenletnek:

$$f(z) = z^{n-1} + a$$

ahol $a = x + iy$ és $(x, y) \in T$ vagy T'.

IRODALOM

[1] TURÁN PÁL: Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen. Budapest, Akad. Kiadó, 1953.

[2] TURÁN PÁL: Remark on the preceding paper of J. W. S. Cassels. Acta Math. Hung. 1956. p. 291—294.

[3] TURÁN PÁL: On the eigenvalues of matrices. Annali di Math. Pura ed Applicata, 1961. p. 397—401.

[4] J. W. S. CASSELS: On the sums of powers of complex numbers. Acta Math. Hung. 1956. p. 283—289.

[6] S. UCHIYAMA: Sur les sommes de puissances des nombres complexes. Acta Math. Hung. 1958. p. 275—278.

О СТЕПЕННЫХ СУММАХ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

С. Данч

И. В. С. Кассельс доказал [4] следующую теорему:
Если $z_1, z_2, \ldots, z_n (n \geqq 2)$ комплексные числа такие, что $1 = |z_1| \geqq |z_2| \geqq \ldots \geqq z_n$, тогда

$$\min_{z_1,\ldots,z_n} \max_{1 \leqq \nu \leqq 2n-1} |z_1^\nu + z_2^\nu + \ldots + z_n^\nu| = 1. \tag{1}$$

Систему $(z_1^*, z_2^*, \ldots, z_n^*)$ состоящую из комплексных чисел назовём экстремальной, если вышеуказанный экстремум ею достигается. Очевидно, что для (1) система $(z_1, 0, 0, \ldots, 0)$ будет экстремальной. В настоящей статье автор показывает, что для (1) кроме приведенной существует еще бесконечно много экстремальных систем, а с другой стороны для равенства

$$\min_{z_1,\ldots,z_n} \max_{1 \leqq \nu \leqq 3n-3} |z_1^\nu + \ldots + z_n^\nu| = 1$$

единственной экстремальной системой является $(z_1, 0, \ldots, 0)$.

ON POWER-SUMS OF COMPLEX NUMBERS

I. Dancs

J. W. S. Cassels proved [4] the following theorem.
If $n \geqq 2$ and the complex numbers $z_1, \ldots, z_n$ are such that then

$$\min_{z_j} \max_{1 \leqq \nu \leqq 2n-1} |z_1^\nu + \ldots + z_n^\nu| = 1. \tag{1}$$

He left open the question for which systems this min max is attained (beside the trivial $(1, 0, \ldots, 0)$). We show in this paper that (1) attained for infinitely many systems, even the some holds for

$$\min_{z_j} \max_{1 \leqq \nu \leqq 3n-4} |z_1^\nu + \ldots + z_n^\nu| = 1$$

whereas

$$\min_{z_j} \max_{1 \leqq \nu \leqq 3n-3} |z_1^\nu + \ldots + z_n^\nu| = 1$$

is attained *only* for the trivial system. Cassels himself proved the last assertion only for

$$\min_{z_j} \max_{1 \leqq \nu \leqq 4n-3} |z_1^\nu + \ldots + z_n^\nu| = 1$$

Egy üzemanyagtakarékossági probléma

HAJTMAN BÉLA

I. A probléma, amellyel ebben a dolgozatban foglalkozunk, gyakorlati megfogalmazású. Ennek ellenére nem keressük alkalmazhatóságának lehetőségét és — a gyakorlati köntösben — pusztán az elméleti kérdést tárgyaljuk. A megoldandó feladat a következő:

Egy autónak el kell jutnia előre megadott távolságban levő célba. Az út azonban olyan, hogy közben sehol nem vehet fel üzemanyagot; ha tehát a távolság nagyobb, mint amennyit teljes üzemanyagkészletének felhasználásával meg bír tenni, valamilyen módon gondoskodnia kell az üzemanyagutánpótlásról. Ennek egyik kézenfekvő módja az, hogy nem egymagában indul útnak, hanem hozzá hasonló autók kíséretében. Az őt kísérő karaván többi tagja azonban nem használja ki teljes üzemanyagkapacitását és ezért, mielőtt visszafordulnának, a feladat végrehajtásával megbízott autónak át tudják adni feleslegüket. A kísérő autóknak, természetesen, mind vissza kell térniök a kiindulási pontra.

A kérdés most már a következő: el tudja-e érni a feladat végrehajtásával megbízott autó a kijelölt célt, bármily távol legyen is az; ha igen, hány autóból álló karaván kell útnak indítani és milyen módszer szerint kell azoknak az üzemanyagot átadniok és visszafordulniok, hogy a karaván összfogyasztása a minimális legyen; végül, hogy ez a minimum jól meghatározott, elérhető érték-e, vagy a különböző fogyasztások alsó határa.

A dolgozatban meg fogjuk határozni a követendő eljárást, melynek segítségével az adott célt minimális üzemanyagfogyasztással érhetjük el; ezzel egyszersmind igenlő választ adtunk az első és harmadik kérdésre is. Maga a megoldás nem új: FINE[1], aki a probléma megol-

[1] N. J. FINE: The jeep-problem, Amer. Math. Monthly **54**, (1947) 24—31. Fine kissé más megfogalmazásban tárgyalja a problémát, mint ez a dolgozat. Nála a feladat végrehajtásával megbízott autó előzőleg lerak az út mentén (a „sivatagban") üzemanyagtartályokat, melyeket később felhasznál. Könnyű belátni, hogy a két megfogalmazás ekvivalens: a kísérő autók a feladatot végrehajtó autó előbbi (tartályelhelyező) útjait helyettesítik. Az átfogalmazás lényegében csak a különböző — üzemanyag-utánpótló helyek közti — útszakaszokból álló sorozat átrendezését jelenti.

dását először publikálta, megemlít néhány matematikust, akik részleges vagy teljes megoldást adtak. (Egyben azt is hozzáteszi, hogy sem ő, sem azok nem tudják, ki vetette fel először a problémát.) FINE dolgozata a megoldás előállításán kívül egy aszimptotikus formulát ad a megoldásra nagy távolságok esetén. A probléma általánosításával nem foglalkozik; ellenkezőleg, néhány korlátozó kikötésről tesz említést, de az ezekre vonatkozó eredményeket csak bizonyítás nélkül közli.

FINE bizonyítása rövid logikai megfontolás után hosszabb számolást igényel; az itt közölt bizonyítás tisztán logikai úton, úgyszólván számolás nélkül szolgáltatja az eredményt. Mielőtt a megoldást ilyen módon előállítanánk, tegyük pontosabbá a probléma megfogalmazását, — az autókaravánnak mintegy matematikai modelljét nyújtva.

A karaván autói teljesen egyformák. Az autók fogyasztása egyenletes és csak a megtett út függvénye; semmilyen más tényező, így sebesség, terhelés, emelkedő stb. nem befolyásolja. Nevezzük az autók fogyasztását és az egy autó által felvehető maximális üzemanyagmennyiséget egységnyinek. Ezzel nem érintettük az általánosságot, csupán a távolság egységét határoztuk meg úgy, hogy egységnyi az a távolság, melyet egy autó teljes üzemanyagkapacitásának felhasználásával meg tud tenni. A távolságot (ilyen egységekben mérve) jelöljük x-szel.

Nyilvánvaló, hogy vannak x távolságok, melyekre a feladat megoldható (pl. ha $x \leqq 1$). Másrészt kézenfekvő az is, hogy a megadott feltételek mellett autókaravánt indítva, azzal — valamilyen szisztéma szerint — valameddig el tudunk jutni. A szisztémáról még nem tudunk semmit. Előfordulhat, hogy egyes autók üzemanyagfeleslege csak más kísérő autók hazasegítéséhez kell és nem mozdítja elő közvetlenül a karaván előrehaladását. Állapodjunk meg abban, hogy ezeket is (ha lesznek ilyenek) a karavánnal együtt indítjuk és ahol az üzemanyagátadásnak történnie kell, ott várakoztatjuk. (Ezzel egyértelműen meghatározottá tettük a karaván autóinak számát. Nem fordulhat elő ugyanis, hogy egyes hazatért autók újból megtöltve tartályaikat más hazatérők segítésére ismét elinduljanak.) Egyébként sem tudjuk, vajon a karavántól lemaradó autóknak azonnal vissza kell-e térniük, vagy találkozniuk kell más lemaradó autókkal. Éppen ezért nem fogunk visszaforduló, csak *leváló autók*ról beszélni. Azok a helyek, ahol ez a leválás történik, lesznek a *leválási pontok* (vagy *leválási helyek*). A leváló autókat más néven mint *kísérő autók*at emlegetjük, kihangsúlyozva ezzel a feladatot végrehajtó *vezérautó* kitüntetett szerepét. A karaván által megtett úton azt értjük, hogy a vezérautó ekkora utat tett meg,— míg a kísérő autók mind visszatértek a kiindulási pontra.

Keressük most meg a megoldást.

A. Tegyük fel, hogy valamely x távolságra vonatkozóan a feladatot — valamilyen szisztéma szerint — n autó segítségével megoldottuk.

(A fogyasztási minimumra még nem vagyunk tekintettel.) Könnyű belátni, hogy ha a megoldást úgy módosítjuk, hogy bármely útszakaszon több autó megy (a többi szakasz változatlanul hagyásával), mint eredetileg, ez a fogyasztás növelését eredményezi. A fogyasztás mértéke ugyanis (egységválasztásunk miatt) az út mértékével egyenlő, az összfogyasztás tehát k autó esetén minden Δx útszakaszon $k \cdot \Delta x$.[2]

B. A következőkben állapítsuk meg, hogy adott ($n \geqq 1$) számúa autóból álló karaván segítségével maximálisan milyen x távolságra (jelöljük ezt x_n-nel) oldható meg a feladat és hogyan. Ez több lépésben fog történni.

a) A karaván minden autójának tele tartállyal kell indulnia. Tegyük fel ugyanis az állítás ellenkezőjét. Legyen az egyes autók tartályában $y_1, y_2, \ldots, y_n$ üzemanyagmennyiség, $y_i \leqq 1$, és legyen legalább egy olyan y, ahol nem teljesül az egyenlőség. A $\sum_{i=1}^{n} (1 - y_i) = Y$ üzemanyagmennyiség így határozottan pozitív lesz. De akkor találhatunk egy Δx távolságot, melynek megtételéhez oda n autó, vissza $n-1$ autó számára elegendő az Y üzemanyagmennyiség; nevezetesen $\Delta x = Y(2n-1)^{-1}$. Teletöltve a tartályokat Δx távolságra eljuthatunk, majd, az előbb feltételezett maximális utat megtéve, innen az egész karaván nal visszatérhetünk, — tehát a „maximumot" $\Delta x > 0$ távolsággal növeltük. Így ellentmondásra jutottunk és ezzel állításunkat igazoltuk.

b) A karaván valamennyi autójának (eltekintve természetesen a vezérautótól) *üresen kell visszaérkeznie a kiindulópontra.* Ellenkező esetben ugyanis a maradék üzemanyagmennyiség (legyen ez megint Y) a határozottan pozitív $\Delta x = cY$ távolsággal növelhette volna a maximálisnak feltételezett x távolságot, ahol a konstans értéke lehet pl. $c = (2n-1)^{-1}$.[3]

c) A leválási pontokról valamennyi továbbinduló autónak tele tartállyal kell elindulnia. Ennek bizonyítása kissé bonyolultabb, mint az előzőké és a következő állításra támaszkodik: *minden leváló autó a lehetőség szerint minél előbb váljon le.* Ha ugyanis (egy rögzített megoldásból kiindulva) Δx-szel előbb válik le, ezzel $2\Delta x$ üzemanyagot megtakarít. Ezt az üzemanyagot a karaván útteljesítményének növelésére lehet fordítani, feltéve, ha át bírja adni a továbbhaladóknak. Ha ugyanis nála marad,

[2] Ezzel korántsem bizonyítottuk azt, hogy ha adott x távolságra vonatkozóan a feladat n autóval megoldható, minden olyan n_1 autóval történő megoldás, amelyre $n_1 > n$, több üzemanyagfogyasztást jelent. Előfordulhat ugyanis, hogy éppen a több autó indítása tesz lehetségessé egy olyan szisztémát, melyben a későbbi útszakaszokon lényegesen kevesebb autó megy, mint előbb, és ezzel megtakarítást értünk el. Megoldásunk, természetesen, ezt a lehetőséget ki fogja zárni.

[3] A későbbiek alapján könnyű volna megmutatni, hogy a konstans értéke ennél nagyobb is lehet; erre azonban egyáltalán nem lesz szükségünk.

ez, mint felesleg, a kiindulópontra visszakerül, ellentmondásban a *b)* ponttal. Átadni azonban csak akkor tudja, ha a továbbhaladó autók tartályába ez a $2\Delta x$ üzemanyagtöbblet belefér. A leválás minél korábbi voltának ez szab határt. Ebből már következik az eredeti állítás teljesülése is, hiszen a leválási hely ott lesz, ahol a leváló autó (vagy autók) üzemanyagfeleslege éppen megtölti a továbbinduló autók tartályait. Ilyen pont mindig van, hiszen az üzemanyag-fogyás az útnak folytonos függvénye.

d) A leválási helyekre valamennyi továbbhaladó kísérő autónak üresen kell visszaérnie. A bizonyításnál arra támaszkodunk, hogy a leválási hely (beszéljünk most egy rögzített ilyenről, de valamennyire igaz) az a pont, amely előtt több autóból áll a karaván, mint utána. Ha mármost a visszatérő autók erre a pontra üzemanyagot hoznak vissza, ezzel növelhették volna a karaván útteljesítményét *b)* szerint (éppúgy, mintha ez volna a kiindulópont). Előfordulhat azonban, hogy ez az üzemanyag az innen való visszatéréshez kell. Ez ugyanannyi, mintha a karaván útteljesítményének a leválási pont előtti, nem pedig utána következő szakaszát növelné. (Hiszen mindegy, hogy oda- vagy visszaútban használjuk-e fel; ez az üzemanyag-maradék segít hozzá, hogy ez a leválási pont itt legyen és ne hamarabb.) Ez pedig rosszabb felhasználás, hiszen a leválási pont előtti részen több autóból áll a karaván, tehát az üzemanyag több részre oszlik, ezért kevesebb útnövekedést eredményez. A visszatéréshez szükséges üzemanyag tehát a leváló autókban kell, hogy legyen. De nem lehet, hogy a továbbhaladó karaván hagyja ott, hiszen akkor nem tele tartállyal mennének tovább a leválási helyről, — ellentétben a *c)* ponttal.

e) A kísérő autóknak egyenként kell leválniok. Tegyük fel, ellentétben az állítással, hogy a maximális utat biztosító szisztémában valahol két autó válik le egyszerre. Jelöljük meg ezt a kettőt az α és β indexekkel. Tekintve a fogyasztás folytonos voltát, egyik, mondjuk az α indexű már előbb is átadhatta volna feleslegét. Ezt az x_α pontban tehette volna meg, míg az előbbi, a feltétel szerint maximumot biztosító metódusban ez is csak az x_β leválási pontban szakadt volna el a karavántól ($x_\alpha < x_\beta$). A két autóban levő üzemanyagmennyiség együttesen elegendő a karavánnak az előző leválási pontig való visszatéréséhez, hiszen x_β-ból is elegendő lett volna, a feltétel szerint. Most az x_β-ba üresen visszatérő autók a β indexű autó üzemanyagkészletének felhasználásával haladnak visszafelé. Azt a pontot, ameddig ez a visszatérő karaván el bír jutni, jelöljük x_α^*-gal. Amennyiben $x_\alpha^* \leqq x_\alpha$, készen is vagyunk. Az ellenkező esetben az α indexű autó x_α^*-nál váljon csak le. Így az α indexű autó $2\Delta x$ üzemanyagmennyiséget megtakarított, ahol $\Delta x = x_\beta - \max(x_\alpha, x_\alpha^*)$. Ez a pozitív üzemanyagmennyiség azonban az útnövelésére fordítható, ellentétben a maximum elérésére tett feltevésünkkel.

Az *a)* – *e)* feltételek tehát szükségesek ahhoz, hogy valamely szisztéma maximális utat biztosítson, — ha ilyen maximum egyáltalán létezik. A következőkben meg fogjuk konstruálni az ezeknek a feltételeknek eleget tevő szisztémát, majd megmutatjuk, hogy az így kapott metódussal valóban nagyobb utat tehetünk meg, mint bármelyik másikkal, — maximum tehát létezik és feltételeink elegendők is annak biztosításához. Előbb azonban kimondunk még egy feltételt, mely megkonstruálandó maximumunk unicitásának biztosításához lesz szükséges.

f) Az üzemanyagáttöltés mindig a leválási helyeken, egyszerre történik. Ha ugyanis egyes autóknak előbb adnák át, azok—ellentétben a *c)* ponttal — nem tele indulnának tovább a leválási helyről. Ha utánatöltenének ezeknek is, ez lényegtelen bonyolítása volna az egyszerre végrehajtható áttöltésnek. Ilyen utána-töltésre csak akkor lenne szükség, ha egyes autók már előbb teljesen kiürülnének. Ez azonban lehetetlen, hiszen egyforma autók egyformán tele indultak (nemcsak a kiindulási pontról: minden egyes leválási helyről is), tehát egyik sem ürülhet ki előbb a másiknál. Ugyanilyen megfontolásokkal belátható, hogy visszatéréskor is lehetséges az üzemanyagátadást úgy végrehajtani, hogy az csak a leválási helyeken történjék.

C. Az elmondottakból szinte azonnal következik, hogy a maximális szisztéma konstrukciójánál alkalmazható indukció. A karaván $(k+1)$-edik autóval való bővítése ugyanis nem zavarhatja meg a k autóból álló karaván metódusát, hiszen a $(k+1)$-edik leválása (először csak ez válik le az *e)* pont szerint) esetén a k továbbhaladó autónak tele kell lennie *(c))* és ide (egy kivétellel) üresen kell visszaérniök *(d))*. Tehát ugyanúgy, *(a), b))*, mintha k autóból álló karaván indulna — innen.

Ezek szerint x_{k+1} annyival lesz nagyobb x_k-nál, amennyire a $(k+1)$-edik autó el tudja vinni az egész k autóból álló karavánt és onnan (a vezérautó kivételével) vissza tudja hozni. Ez menet $(k+1)$-szeres, jövet k-szoros fogyasztásnak felel meg. Összesen $2k+1$ egyenlő részre kell tehát osztani a $(k+1)$-edik autó üzemanyagát és addig mehet ez az autó a karaván nal együtt, amíg egy ilyen részt el nem fogyaszt. Képletben:

$$x_{k+1} - x_k = \frac{1}{2k+1}. \tag{1}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$ behelyettesítésével kapjuk, hogy az n autóból álló karaván által maximálisan megtehető út

$$x_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} \qquad (n = 1,2, \ldots), \tag{2}$$

és az is rögtön kiadódik, hogy a leválási helyek (a céltól számítva) $1,\ 1+\frac{1}{3},\ 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5},\ \ldots$ távolságban vannak. (2)-ből n minden határon túl való növelésével divergens sort kapunk, tehát az így megkonstruált szisztémával tetszőlegesen nagy távolságok is elérhetők.

D. Vegyünk most egy tetszőleges szisztémát az n autóból álló karaván közlekedtetésére és hasonlítsuk ezt össze a C. pontban megkonstruálttal. Illesszük őket egymásra úgy, hogy a két „cél" (az a pont, ameddig a vezérautó eljutott; jelöljük x_0-val) egybeessen. Jelöljük a céltól mért x_i távolság másik végpontját ugyancsak x_i'-vel (ez nem fog félreértést okozni), és a kiválasztott tetszőleges szisztéma leválási helyeit x_i'-vel, tehát x_i' az a pont, ahonnan már csak i autó halad tovább, de odáig még több jött. ($i=1,2,\ldots,n$; x_n, ill. x_n' a kiindulópontokat jelentik.) Jelentse Δx_i illetőleg $\Delta x_i'$, az x_i és x_{i-1}, illetőleg x_i' és x_{i-1}' közé eső szakaszokat. Itt nem kell teljesülnie az *e)* feltételnek, előfordulhat tehát, hogy több x_i egybeesik, azaz $\Delta x_i'=0$ is lehetséges. (Δx_i mindig pozitív, értékét (1) szolgáltatja.)

Haladjunk a céltól visszafelé. Tegyük fel, hogy $\Delta x_i=\Delta x_i'$, ha $1\leqq i<k$, de Δx_k már határozottan különbözik $\Delta x_k'$-től. Addig, amíg az egyenlőség teljesül, a két szisztéma lényegében azonos. A leválási helyek ugyanis megegyeznek és x_1-ből kiindulva könnyen megmutatható, hogy az autóknak tele tartállyal kell elindulniok rendre az összes leválási helyről, különben nem tudnák elérni a következő leválási helyet, illetve a kísérő autók nem tudnának visszatérni,— és ide visszatérve összes üzemanyagukat el is használták. Az áttöltés módozataiban (az áttöltési helyek sűrítésében) lehetnek csak különbségek. Mivel azonban ez sem a megtett utat, sem a fogyasztás mennyiségét nem befolyásolja, nem tekintjük különbözőknek azokat a szisztémákat, melyek csak ebben térnek el.

Feltételünk szerint az x_k pont már nem esik egybe az x_k' ponttal. Az nem lehet, hogy $\Delta x_k<\Delta x_k'$ legyen. Ezen a szakaszon ugyanis k autó közlekedik menet és $k-1$ autó visszajövet. Az összfogyasztás tehát itt ((1) felhasználásával)

$$(2k-1)\Delta x_k'>(2k-1)\Delta x_k=1.$$

Az $x_{k-1}=x_{k-1}'$ ponttól viszont, mint említettük, $k-1$ autónak tele tartállyal kell elindulnia, x_k'-nél tehát a k autónak több, mint k egységnyi üzemanyaggal kellene rendelkeznie, — ami lehetetlen.

Illesszük most ismét össze a két szisztémát úgy, hogy x_k és x_k' essenek egybe. Ezzel a C. pontban konstruált szisztémánkat a cél irányában eltoltuk. Tovább haladva a kiindulópont felé, és az egész eljárást annyiszor megismételve, ahány $\Delta x_i\neq\Delta x_i'$ szakaszt találunk, végül a két kiindulópontot, x_n-et és x_n'-t illesztjük egybe. Közben azonban

a C. pontban konstruált megoldást legalább egyszer eltoltuk a cél irányába (különben valamennyi $\Delta x_i = \Delta x_i'$ lenne, ami a két szisztéma egyezését jelentené); az általunk konstruált szisztémával tehát adott számú autóból álló karaván nagyobb utat bír megtenni, mint bármely más, ettől különböző szisztémával.

Az *a)—e)* pontban adott feltételeink tehát elégségesek ahhoz, hogy egy szisztéma maximális utat biztosítson. Láttuk azonban, hogy a leválási pontok egyezése esetén két szisztéma még különbözhet abban, hogy az üzemanyagáttöltés milyen lépésekben történik. A már kimondott *f)* feltétel viszont éppen ezt szabályozza és lehetővé teszi, hogy így — a legegyszerűbb áttöltési módban megállapodva — a B. pont alatt felvetett kérdésre egyértelmű választ adjunk.

E. Foglalkozzunk ezek után az üzemanyag-minimum kérdésével. Világos, hogy a B. pont segítségével a C. pontban előállított megoldás az x_i távolságokra nézve valóban az üzemanyagminimumot szolgáltatja. Bármelyik útszakaszon véve ugyanis több autót, A. szerint ez az üzemanyagfogyasztás növekedését vonná maga után. Ezzel sehol nem tudnánk csökkenteni az autók számát, mert minden lehetséges k autószámra vonatkozóan ($k \leqq i$) a karaván teljesítőképességét maximálisan kihasználtuk. Az x_i távolság megtételéhez i-nél kevesebb autó, mint a maximum B.—D. pontokban történt konstrukciójából látszik, nem elég. Üzemanyagot úgy takaríthatnánk még meg, hogy az egyes autók tartályait induláskor nem töltjük tele: ekkor azonban, mint láttuk, nem tudjuk a feladatot az x_i távolságra megoldani.

Vegyünk most tetszőleges x^* távolságot. Ez nyilván beleesik az x_i szigorúan monoton növekedő sorozattal, mint osztópontokkal meghatározott intervallumok valamelyikébe. (Tekintsük ezeket az intervallumokat felülről zártnak, ha tehát $x^* = x_i$, akkor azt mondjuk, hogy x^* az (x_{i-1}, x_i) intervallumba esik.) A feladat megoldásához, ha x^* az $(x_n, x_n + 1)$ intervallumba esik, éppen $n+1$ autó szükséges; n autóval ugyanis csak a nála rövidebb x_n távolságra oldható meg a feladat, $n+1$ autóval viszont megoldható még a nála nagyobb (vagy ugyanakkora) x_{n+1} távolságra is. Ennyi autó tehát kell, többet indítani viszont (A. szerint) több fogyasztással járna.

Az $(n+1)$-edik autó csak akkora távolságot kell, hogy megtegyen, hoyg a maradék éppen x_n legyen; ha kevesebbet menne, n autó nem lenne elegendő a hátralevő út megtételéhez, ha többet, akkor az út elején több autó menne a feltétlenül szükségesnél —és ez megint A.-nak mondana ellent.

Az $(n+1)$-edik autó tehát a (céltól mért) x_n leválási pontig és onnan vissza, a kiinduló pontig kell, hogy fedezze a karaván üzemanyagszükségletét. Az ehhez feltétlenül szükséges y_{n+1} üzemanyagmennyiséget kell a tartályában elhelyeznünk és, ezzel növelve az n autó által vitt

n egységnyi üzemanyagot, kapjuk a feladat x^* útra vonatkozó megoldásához szükséges minimális üzemanyagmennyiséget. Képletben:

$$y_{n+1} = (x^* - x_n)[(n+1)+n] = (2n+1)(x^* - x_n) \leqq 1, \tag{3}$$

ugyanis

$$x^* - x_n \leqq x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2n+1}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy — ha az üzemanyagfogyasztásnak egyáltalán létezik minimuma — az tetszőleges x^* távolságra nem lehet más, mint a (3) képlet segítségével nyert $n+y_{n+1}$ üzemanyagmennyiség. Be kell még látnunk, hogy valóban létezik miminum és ezzel a bizonyítást be is fejeztük.

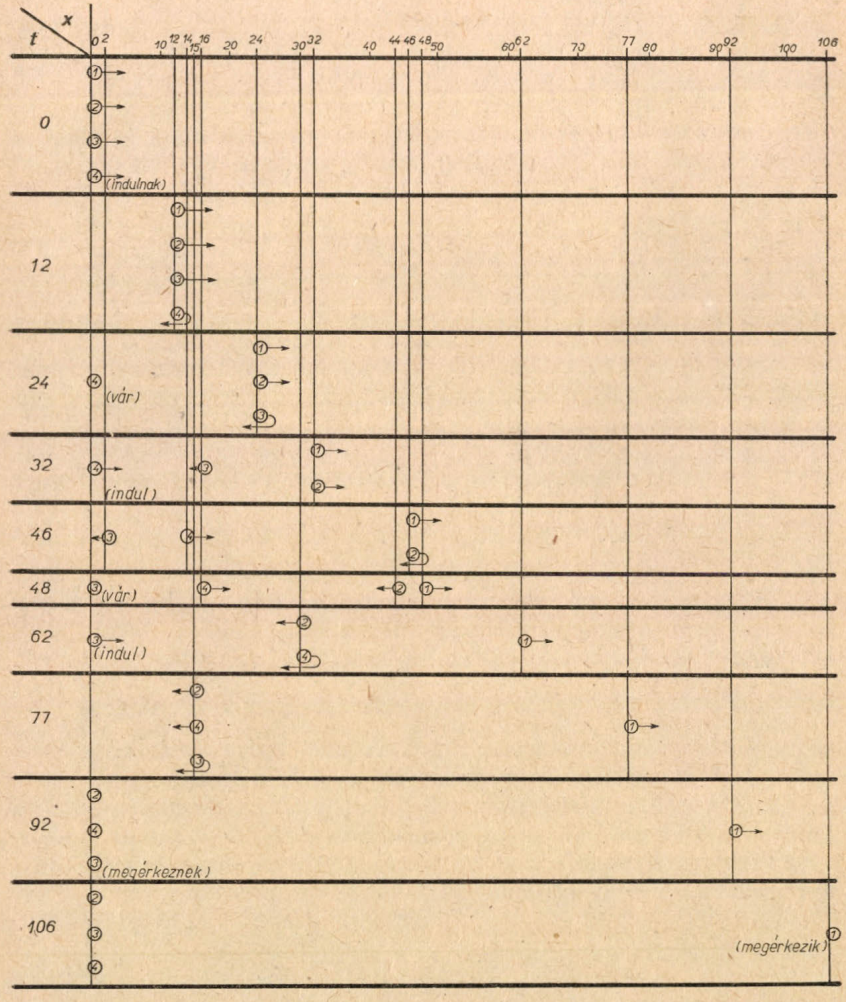
F. Legyenek valamely, az (x_n, x_{n+1}) intervallumba eső x^* távolság esetén egy tetszőleges szisztéma leválási pontjai az $x_1', x_2', \ldots, x_m'$ pontok (a céltól számítva, ugyanúgy, mint előbb) és tekintsük az x^* hosszúságú út egy olyan beosztását, melynek osztópontjai az x_i és x_j' pontok összessége $(i \leqq n, j \leqq m)$. Jelöljük ezeket x_k''-vel $(k = 1, 2, \ldots, l$, ahol $l \leqq m+n)$. Tekintsük most az út egy $\Delta x_k''$ szakaszát. Az eddig elmondottakból azonnal következik, hogy ha a tetszőlegesen választott szisztémában a karaván ezen a szakaszon éppen p autóból áll, az általunk konstruált szisztéma szerint viszont q autóból álló karaván halad ugyanitt, teljesül a $p \geqq q$ egyenlőtlenség. (Így speciális esetként $m \geqq n$ is kiadódik.) Mivel ez minden szakaszra teljesül, A. alapján akármelyik szisztéma szerint haladva legalább akkora lesz a fogyasztás, mint az, amit az E. pontban nyertünk. Egyenlőség csak abban az esetben lehetséges, ha x_i és x_j' páronként megegyeznek, — ekkor viszont a két szisztéma lényegében megegyező. Az általunk konstruált szisztéma tehát valóban a minimumot szolgáltatja; nyugodtan nevezhetjük tehát *a probléma megoldásának*.

A feladatot tehát megoldottuk és válaszoltunk a feltett kérdésekre. Tetszőleges x távolságra meg tudjuk mondani, hogy a karavánnak hány autóból kell állnia[4] és mennyi üzemanyagot kell felvennie, hogy a kitűzött célt elérje. A követendő, fogyasztási minimumot szolgáltató eljárás ekkor (mégegyszer összefoglalva) a következő: elindul a karaván, a (2) segítségével meghatározott (a célponttól mérve x_i távolságokban elhelyezkedő) pontokon mindig leválik egy autó, mely előzőleg feltölti a többiek tartályát, de nem fordul vissza, hanem megvárja a később

[4] Nagy távolságoknál ez a szám rettenetesen nagy lesz. A Fine által levezetett aszíptotikus formula ffgyelembevételével az autók száma és a (mértékszámban ezzel egyenlő) szükséges üzemanyag * növekedésével konstans faktortól eltekintve úgy növekszik, mint e^{2x}.

visszatérőket; együtt térnek vissza és azoknak az üzemanyagszükségletét is ő fedezi visszafelé.

II. A problémának sokféle általánosítása kínálkozik. Néhányat ezek közül BÁNKÖVI GYÖRGYgyel együtt kidolgoztunk. A matematikailag legérdekesebbeket készülő közös dolgozatunkban publikálni is fogjuk.[5]



[5] A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményeiben, angol nyelven.

Néhány egyszerűen tárgyalható, valamint két, ezideig megoldatlan általánosításra azonban itt is kitérek.

1. A vezérautónak a cél felől is elé tud jönni egy segítő karaván. Könnyű belátni, hogy ennek a kisegítő karavánnak ugyanolyan szisztéma szerint kell eljárnia, mint a kísérőnek, azzal a különbséggel, hogy ez menet áll eggyel kevesebb autóból, mint visszatérőben. Tekintve azonban, hogy két-két leválási pont közt mindig egy autó fedezi az egész karaván üzemanyagfogyasztását, közömbös, hogy egy tele autót segítenek tovább a kísérési szakaszon vagy egy üreset visznek magukkal. Nyilvánvaló, hogy az összfogyasztás kevesebb lesz, mintha csak kísérni lehetne a vezérautót, hiszen ha csak egyetlen autót indítunk is szembe, ez a szükséges kísérési távolságot (2) szerint $\frac{1}{3}$-dal csökkenti, ez pedig már $n=5$ esetén is azt jelenti, hogy a kísérő karavánban két autóval kevesebb elegendő. (Nagyobb autószám esetén még nagyobb a megtakarítás.) Könnyű megmutatni, hogy a fogyasztás minimumát akkor érjük el, ha a kísérési távolságok nagyjából egyforma hosszúak. Pontosabban: ha x a megadott távolság, $\frac{x-1}{2}$ szakaszon kísérve a vezérautót (és ugyanekkora szakaszon segítve a második karavánnal) minimumot nyerünk. (Legyen a kísérő karaván autóinak — E. szerint meghatározható — száma n; ekkor a másik karaván is nyilván n autóból fog állni.) Ha azonban a karavánok összes autói nincsenek tele, ezt a minimumot nemcsak egy pontban nyerjük, hanem egész szakaszon. Más szóval, ha az $\frac{x+1}{2}$ távolság nem egyenlő x_{n+1}-gyel (ez jelenti azt, hogy a kísérő karaván autói nincsenek tele), hanem x_n és x_{n+1} közé esik, mindössze annyi a megkötöttségünk, hogy mindkét kísérő karaván legfeljebb n autóból állhat és legalább $n-1$ tele autót kell tartalmaznia. Ezen belül (az összfogyasztás változása nélkül) szabadon választhatjuk meg, hogy nagyobb távolságon kísérünk-e $\frac{x-1}{2}$-nél (és ugyanannyival kevesebbet megyünk elé), vagy fordítva. A bizonyítás csak egyszerű számolást igényel, ezért nem részletezzük.

2. A kísérő autóknak nem kell visszatérniök a kiindulási pontra; a kiürült tartályú autókat az út mentén hagyjuk.[6] Az eredeti gondolatmenet lényeges egyszerűsítésekkel vihető át erre az esetre, és igen könnyen belátható, hogy (2) ebben az esetben így módosul:

$$x_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

[6] Amennyiben a problémának űrhajózási alkalmazását lehet találni, ez az eset lesz érdekes: a hordozórakétát, felhasználás után, nyilván „elhagyjuk az űrben".

A tetszőleges távolságra vonatkozó üzemanyagminimumot (azaz a (3) képlet módosított alakját) fel sem érdemes külön írni.

3. A feladatban nem egy, hanem több autó megadott célba való eljutását követeljük. Be fogjuk bizonyítani, hogy egy kísérő karaván indítása jobb technika, mintha egymástól függetlenül, külön kísérő karavánokkal segítenénk a célba az autókat.

A bizonyításnak csak egy részét, az eredeti bizonyítás C. pontját végezzük el erre az esetre. A többi lényegében változtatás nélkül vihető át. Legyen a feladatban megszabott vezérautók száma k és keressük, milyen messze tud eljutni egy kn autóból álló karaván. Az i-edik kísérő autót csatolva a karaván hoz, ez menet $i+k$, visszatéréskor i autó fogyasztását kell, hogy fedezze; — a megtehető távolságot tehát

$$x_{i+k}-x_{i+k-1}=\frac{1}{2i+k}$$

távolsággal növeli. ($k=1$ esetén ez tartalmazza az (1) képletet, mint speciális esetet.) Alkalmazzuk ezt az összefüggést az $i=1, 2,\ldots, (n-1)k$ esetekre; figyelembevéve, hogy az út végén minden vezérautó teljes üzemanyagkapacitásának megfelelő távolságot bír futni, adódik

$$x_{nk}=1+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+4}+\ldots+\frac{1}{k+2k(n-1)}\,.$$

Ez valóban nagyobb, mint a k független, n autóból álló karaván által megtehető út. Összevetve ugyanis (2)-vel ($k>1$):

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+2\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{k+k\cdot 2}>k\frac{1}{k(1+2)}=\frac{1}{3}\,,$$

$$\frac{1}{k+(k+1)2}+\frac{1}{k+(k+2)2}+\ldots+\frac{1}{k+2k\cdot 2}>k\frac{1}{k(1+4)}=\frac{1}{5}\,,$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{k+[(n-2)k+1]2}+\frac{1}{k+[(n-2)k+2]2}+\ldots$$

$$+\frac{1}{k+[(n-1)k]2}>k\frac{1}{k[1+2(n-1)]}=\frac{1}{2n-1}\,,$$

ami állításunkat bizonyítja.

4. A karaván alkotó autók tartálya különböző méretű. Ha csak a vezérautó tartálya más, az csak az utolsó útszakasz hosszát befolyásolja, hiszen minden előző szakaszon más autó fedezi az egész karaván fo-

gyasztását. (Legfeljebb, ha túl kicsi az a tartály, egy-egy szakaszon belül több részletben kaphatja meg az üzemanyagot.) Előfordulhat azonban, hogy nincs előre kikötve, melyik autónak kell beérnie (tehát az eltérő tartályúnak-e, vagy másiknak), sőt, az is lehet, hogy az autók közt többféle tartályméretű is előfordul; esetleg valamennyinek a tartálya különböző. Könnyű belátni, hogy ha egy tartály mérete q (az általunk egységnyinek nevezett tartályhoz viszonyítva), akkor az az útszakasz, amelynek ez fedezi a szükségletét, q-szorosára nyúlik, illetve zsugorodik. Nyilvánvaló, hogy ez a változás annál kisebb, minél kisebb szakaszt befolyásol. Ha tehát azt keressük, hogyan érhetünk el maximális útteljesítményt, olyan sorrendet kell az autók közt megállapítanunk, hogy a legkisebb tartályú autó váljék le először, aztán nagyság szerint a többi, legvégén a legnagyobb. (Illetve, ha azt is szabadon választhatjuk, a legnagyobb tartályú autó legyen a vezérautó).

5. *Az autók fogyasztása különböző.*[7] Ennek az esetnek direkt tárgyalásánál érdekesebb annak figyelembevétele, hogy ez lényegében az előző, 4. pont alatti általánosítás duálja: egyforma fogyasztású, különböző tartályú autók egyforma tartályú, különböző fogyasztásúaknak felelnek meg, mégpedig, természetesen, kisebb tartály nagyobb fogyasztásnak és viszont. Mindkét esetben ugyanis a tele autó nem egységnyi, hanem több vagy kevesebb utat bír megtenni. A leválási sorrend itt ugyanúgy állapítható meg, mint az előbb. (Világos, a nagy fogyasztású autók minél kevesebbet menjenek.) Az (1), (2), (3) képletek itt nem lesznek érvényesek. A páratlan harmonikus sor megbomlik, a nevezőket egyenként kell kiszámítani.

6. *Az autók tartályai is, fogyasztásai is különbözőek.* Amennyiben ilyen karaván autóinak leválási sorrendjét akarjuk meghatározni, váratlan nehézségekkel találjuk magunkat szemben. Nézzük először a kérdést két autó esetén.

Válasszuk az egyik autó tartályát és fogyasztását egységnyinek, a másik tartálya legyen η, fogyasztása pedig ξ. Írjuk fel a megtehető távolságot először úgy, hogy az „egység-autó" legyen a vezérautó, majd úgy, hogy a másik:

$$\frac{\eta}{2\xi+1}+1 \gtreqless \frac{1}{\xi+2}+\frac{\eta}{\xi}.$$

Aszerint, hogy melyik egyenlőtlenség teljesül, érdemes egyik vagy másik autót fordítani vissza; egyenlőség esetén közömbös a sorrend. Kife-

7 Ezen azt értjük, hogy az egyes autók útszakaszonkénti fogyasztása egymástól eltérő, de egyenletes és (ugyanúgy, ahogy eddig), semmilyen tényezőtől nem függ. Ebben a dolgozatban a változó fogyasztás kérdésével egyáltalán nem foglalkozunk; annak tárgyalását teljesen a már említett készülő dolgozatra hagyjuk.

jezve (egyenlőség esetén) η-t, mint ξ függvényét, nyerjük:

$$\eta = \frac{\xi(2\xi+1)}{\xi+2}.$$

Ha a (ξ, η) pont ezen görbe fölött van, az egység-autót, ha alatta, a másikat kell visszafordítanunk.

A nyert eredmény ugyan elég egyszerű, de ha több autóra is megpróbáljuk elkészíteni, súlyos számítási nehézségekkel találjuk magunkat szemben. Elvi nehézség látszólag nem lép fel, de explicite kiszámítani például azokat a „felületeket", melyek a négydimenziós tér első térnegyedének hat részre osztásával kijelölik, mikor melyik sorrend a legjobb három autó indítása esetén, — ez annyira bonyolultnak tűnik, hogy szinte érdemesebbnek látszik a konkrét esetekben az egyes lehetőségek végigpróbálgatása.

Ez a probléma ilyenformán (az $n=2$ esettől eltekintve) a legkevésbé sem tekinthető elintézettnek. Mindenesetre a megoldást, úgy látszik, a fent vázolt úttól eltérő módon kell keresni.

7. Az eredeti feladatot nem autóknak, hanem helikoptereknek kell végrehajtaniok. Ez a látszólag teljesen hasonló probléma annyiban különbözik az eddig tárgyaltaktól, hogy a helikopter (feltételezésünk szerint) képes a levegőben üzemanyagot átadni és átvenni, de várakozni (mint azt a megoldás szerint az autóknak kellett) nem tud. Mindjárt előrebocsátom, hogy — tudomásom szerint — ez a probléma is nyílt még ez idő szerint; néhány kisebb távolságtól eltekintve nem tudjuk megadni a szükséges üzemanyag minimumát és a „jó" metódust.

Tegyük fel, hogy a helikopterek fogyasztása és sebessége egyenletes, és a karaván valamennyi gépe egyforma. Legyen a fogyasztás és a tartály mérete megint egységnyi. Az áttöltésekre fordított időt (pontosabban: a gépeknek ez alatt, a levegőben állva történő fogyasztását) hanyagoljuk el.

Indítsuk el az egész karaván egyszerre és (hasonlóan a probléma autókkal történő megoldásához) a kiinduló pontra visszatért gépeknek többé ne kelljen felszállniok. Meg fogjuk mutatni, hogy ilyen módszerrel még az $x=2$ távolságra sem oldhatjuk meg a feladatot, akárhány gép áll is rendelkezésünkre.

Induljon el ugyanis egy n gépből álló karaván. Az először leváló gép, visszafordulási helyéig (nem részletezzük, de könnyen belátható, hogy itt is teljesülnek az *a*) — *f*) pontok, — *d*) kivételével) n gép fogyasztását fedezi, visszafelé csak a sajátjáét, tehát $\frac{1}{n+1}$ utat tesz meg a karaván együtt. A többi innen tele indul tovább; a következő vissza-

fordulónak $1-\frac{1}{n+1}$ üzemanyagmennyiségből kell gazdálkodnia, mert egyedül kell megtennie az egész utat a kiindulási pontig. Az $n-1$ gépből álló karaván fogyasztását fedezi tehát előre-menet, a sajátjáét vissza, a rendelkezésére álló $\frac{n}{n+1}$ üzemanyagmennyiséget tehát n részre kell osztania, — így ez a gép is $\frac{1}{n+1}$ útszakasszal juttatta előbbre a karaván-t. Ugyanígy belátható, hogy valamennyi visszaforduló gép $\frac{1}{n+1}$ szakasszal járul hozzá a megtett úthoz, a vezérgép pedig egységnyi utat tesz meg. Az n gépből álló karaván ilyen módszerrel megtehető maximális útja tehát

$$x_n = 1 + \frac{n-1}{n+1};$$

ez pedig, mint látható, sohasem éri el a kettőt, n akármilyen választásával. (Nem is beszélve az üzemanyag minimalizálásáról.)

A követendő módszer tehát az lesz, hogy a visszaérkezett gépek ismét üzemanyagot vesznek fel és segítik a visszatérésben a később visszafordulókat. $n \leqq 4$ esetén sikerült diszkutálni a különböző eseteket, de ha a gépek száma nagy, a lehetőségek olyan változatos sokaságát kell figyelembe venni (hány gép térjen vissza önállóan és hányat segítsünk, hány segítsen, karavánszerűen segítsenek-e vagy egyenként, stb.), hogy valamilyen rendező elv találása nélkül ez reménytelennek látszik. Az elmondottak illusztrálására ismertetjük azt a „menetrendet", amely szerint egy négy gépből álló karaván a maximális utat képes megtenni. Egységnyinek azt az időt nevezem, amennyi alatt egy gép egységnyi utat tesz meg. Az ábrán feltüntetett idő- és távolság-mértékszámok az egység 60-adrészeire vonatkoznak. A kis karikák az egyes gépeket jelentik, a hozzájuk csatlakozó nyilak pedig az adott pillanatban, ill. helyen a repülési irányokat, illetve a fordulást (mely mindig egyben üzemanyag-áttöltést is jelent.).

Végül néhány tájékoztató számadat. A közölt „menetrend" mutatja, hogy négy gép hat egységnyi fogyasztással tudja megtenni azt az utat, amelyről azt állítottuk, hogy maximális. Ez az út $1+\frac{23}{30}$ távolság-egység. A továbbiakban csak az utak egységen felüli részének számlálóját írjuk ki 60-as nevezőre vonatkozóan (akárcsak az ábrán), két tizedes pontossággal.

Ha a négy repülő az autókhoz hasonló metódussal, tehát négy egységnyi üzemanyag felhasználásával repült volna, csak 36 mértékszámú

utat bírt volna megtenni. Négy autó ellenben 40,57-et. Igaz, hogy négy repülő így, hat egységnyit fogyasztva 46 mértékszámú utat tett meg, de ha hat autót indítunk, az 52,69-et tett volna meg, míg hat repülő, az eredeti metódussal (hat egységnyi fogyasztással) csak 42,86-ot. Mint látjuk, az eltérések már a gépek ilyen kis száma esetén is meglehetősen nagyok.

ПРОБЛЕМА СБЕРЕЖЕНИЯ ГОРЮЧЕГО

Б. Хайтман

В первой части статьи автор даёт иной путь решения одной проблемы, разрешенной файном (Fine). Задача состоит в следующем. С некоторой базы отправляется автоколонна состоящая из одинаковых машин; одна из машин должна достигнуть цели, находящейся на заданном расстоянии, а остальным нужно вернуться на исходную базу. Из скольких машин должна быть составлена колонна, сколько горючего должна взять с собой каждая машина (количество это, конечно, ограничено), каковы те места на которых машины должны ждать или с которых они должны повернуться назад, чтобы расход горючего был бы по возможности минимальным? На эти вопросы автор ищет и даёт ответы в первой части статьи. Во второй части он рассматривает некоторые обобщения этой задачи; статья содержит также решения обобщений с 1-ого по 5-ое, но решения обобщенных задач 6-ой и 7-ой остаются открытыми.

ON THE JEEP-PROBLEM

B. Hajtman

In the first part of the paper we give a solution in a new way for some problem solved by Fine. The problem is the following. From a base a caravan starts consisting of cars of the same kind one of which has to come to an end in distance given before. The others must return to the base. There are in question: the necessary number of the cars in the caravan, the amount of gasoline which is to be carried by each of them (this amount is naturally limited), the suitable points where the cars must stay or return to solve the task consuming gasoline in the least amount possible. We can answer these questions correctly.

In the second part we give several generalizations of the problem; generalizations 1.—5. are solved in the paper, however, 6. and 7. ones are open problems.

Nicolas Bourbaki és a mai matematika

HENRI CARTAN (Paris)[1]

NICOLAS BOURBAKI egy terjedelmes, francianyelvű matematikai tankönyv szerzője. Noha a mű első kötete már 1939-ben megjelent, a teljes mű koránt sincs befejezve; mindeddig 21 kötet jelent meg több mint 3000 oldal terjedelemben.[2] BOURBAKI több matematikai folyóiratban is közölt dolgozatokat, többek között az „Archiv der Mathematik" című folyóiratban is. Ezenkívül egy szeminárium (az úgynevezett *Bourbaki-szeminárium*) vezetője Párisban: évenként háromszor az HENRI POINCARÉ nevéről elnevezett intézetben Franciaország és a környező külföld neves professzorai és kutatói egy matematikával foglalkozó konferenciára gyűlnek össze. Ebben a szemináriumban eddig mintegy 150, a legkülönbözőbb matematikai témával foglalkozó előadás hangzott el. Az előadások szövege sokszorosított formában matematikus körökben az egész világon elterjedt.

Az utóbbi időben BOURBAKI neve egyre szélesebb közönség előtt vált ismeretessé. Igen sok ember tette fel magának a kérdést: *Kicsoda tulajdonképpen Bourbaki*? Művei alapján az a benyomásunk támad, hogy nem lehet olyan matematikus, mint a többi. Helyes értesüléseket szerezni felőle nem könnyű, mert nagyon kevés ember találkozott vele személyesen. Ha Önök ilyen értesülések után a napi sajtóban vagy az egyes folyóiratok BOURBAKIval foglalkozó cikkeiben kutatnának, bizonyára nagyon meglepődnének a sok egymásnak ellentmondó állításon; ha pedig személyesen kérdeznének meg tekintélyes matematikusokat, olyan sok titokzatos történetet hallanának, hogy még jobban megzavarodnának, és végül komolyan tennék fel a kérdést: „*Létezik-e egyáltalában Nicolas Bourbaki*?" Hogy ezt a talányt megoldjuk, egy szavahihető egyénhez fordulunk, tudniillik Dr. GOTTFRIED KÖTHE professzor úrhoz, a mainzi Gutenberg-egyetem volt rektorához. KÖTHE úr a „Kutatók és

[1] H. Cartan ezt a beszédet 1958 január 8-án mondta el a Nordrhein Westfalen tartomány Kutatói Munkaközösségének 76. ülésén Düsseldorfban.

[2] 1961-ben a megjelent kötetek száma 26-ra emelkedett. Több kötetnek már második kiadása is megjelent. (A fordító.)

természettudósok a mai Európában" című sorozatban tanulmányozza BOURBAKI művét, és azt írja: „Szerzőnk személyi adatai kissé bonyolultak és titokzatosak", de semmi többet.

Szerencsére egy görög barátom lehetőséget nyújtott nekem ahhoz, hogy a BOURBAKI nemzetség eredetét felfedjem. Ezért tudom ma Önöknek a következő érdekes történetet elmondani.

A monda szerint a XVII. században a krétai hazafiak a betolakodó törökök ellen két testvér, EMNAUEL és NICOLAUS SKORDYLIS parancsnoksága alatt harcoltak. A két testvér olyan bátran és hősiesen harcolt, hogy a törökök „VOURBACHI" előnévvel ruházták fel őket. VOURBACHI annyit jelent, mint élharcos. EMANUEL és NICOLAUS büszkén fogadta el ezt a megtisztelő melléknevet, amelyet később utódaik örököltek. Ez alatt a VOURBACHI név a görög nyelvben BOURBAKI-vá változott (β került a v és χ a ch helyébe). Emanuel egyik dédunokája, névszerint SAUTER BOURBAKI több mint száz évvel később a Földközi-tenger ismert tengerjárója volt. Abban az időben BONAPARTE tábornok Egyiptomban harcolt. SAUTER BOURBAKIT Jerôme Bonaparte, Napóleon bátyja azzal az üzenettel küldte Egyiptomba, hogy Napóleon a lehető leggyorsabban térjen vissza Franciaországba, mert az idő államcsíny végrehajtására alkalmas. Amint az ismeretes, Napóleonnak sikerült a hatalmat magához ragadnia, de az már talán kevésbé ismeretes, hogy Napóleon SAUTER BOURBAKI iránti hálából gondoskodott annak három fia neveltetéséről. E három fiú egyike, aki francia tiszt lett, apja volt a francia hadsereg annak az ismert tábornokának, CHARLES BOURBAKInak, aki az 1870/71-es német—francia háború alatt hadseregét átvezette a svájci határon, hogy az ne kerüljön német hadifogságba. A tábornok BOURBAKInak volt egy húga, aki NICOLAS BOURBAKI egyik unokájához ment feleségül. A BOURBAKI család e két ágának összefonódásból származik — amint ezt mondják — a matematikus NICOLAS BOURBAKI, aki ma a Poldaviai Királyi Akadémia tagja.

Görög barátom e pontos közlése ellenére csaknem valamennyi ma élő matematikus meg van győződve arról, hogy NICOLAS BOURBAKI nem létezik; inkább azt hiszik, hogy a BOURBAKI név egy csoport francia matematikus fedőnevéül szolgál. Ilyen véleményt képviselt nyilvánosan néhány évvel ezelőtt BOAS úr, a „Mathematical Reviews" című amerikai folyóirat felelős szerkesztője az Encyclopaedia Britannica egyik cikkében. Később az Encyclopaedia Britannica szerkesztői kínos zavarba kerültek, amikor NICOLAS BOURBAKI aláírásával harcias levelet kaptak, amelyben BOURBAKI kijelentette, hogy létezésének jogát senkitől sem tűri el kétségbevonni. Hogy BOAS tettét megbosszulja, BOURBAKI mindenfelé azt terjesztette, hogy a matematikus BOAS nem létezik, hanem a B. O. A. S. betűk csak a Mathematical Reviews szerkesztői egy csoportjának fedőnevéül szolgálnak.

De most már itt az ideje annak, hogy elhagyjuk a képzelet területét. Mondjunk le azon probléma megoldásáról, vajon NICOLAS BOURBAKI élő személy-e vagy sem, fordítsuk figyelmünket inkább művei felé, amelyek biztosan léteznek. Mivel e művek megalkotásában személyesen résztvettem, egy kicsit kényes beszélnem róluk, de remélem, hogy ezt megbocsátják nekem, és véleményem nem lesz túlságosan elfogult.

Az 1934/35 tanév téli szemeszterében egy kb. 10 fiatal francia matematikusból, akik csaknem valamennyien a párisi École Normale Supérieure hallgatói voltak, álló csoport elhatározta, hogy közösen analízis-tankönyvet ír. Ez a tankönyv főleg a francia egyetemeken tanuló hallgatók számára készült volna. GOURSAT klasszikus francia tankönyve már nem felelt meg az új matematika követelményeinek; ezért az ifjak olyan művet akartak alkotni, amely ugyanezt a feladatot töltötte volna be, mint GOURSAT műve annak idején, és ezenfelül kielégítette volna a huszadik század matematikájának követelményeit is. Havonta egyszer gyűltek össze egész Franciaországból ezek az ifjak, hogy a tervet megvitassák. Csakhamar világossá vált előttük, hogy nem szorítkozhatnak csupán a klasszikus analízis tankönyvének megírására. Például az algebra, amely különösen Németországból kiinduló hatások alatt (itt elsősorban a nagy matematikusra, Emmy Nötherre és tanítványaira gondolok) átformálódott, megkezdte az egész matematika arculatának lényeges megváltoztatását. Így fiatal matematikusaink fokról-fokra döbbentek rá arra, hogy tervezett vállalkozásukat milyen átfogóan kell megalapozniok.

Egy kissé más álláspont volt a következő: az utóbbi évtizedek folyamán a matematika különböző ágai annyira megnőttek, hogy a specializálódás csaknem valamennyi matematikus számára szükségessé vált. Csak olyan kiválóságok, mint DAVID HILBERT vagy HENRI POINCARÉ tudták a matematikát mint egészet uralni, az átlagos matematikus számára túlságosan nehézzé vált tudományágának áttekintése és a matematika különböző területei közötti belső kapcsolatok megragadása.

Elérkezettnek látszott az idő arra, hogy e végzetes helyzet kiküszöbölésére a matematika minden lényeges területe egységes tárgyalásban kerüljön feldolgozásra, ez a tárgyalás ne támaszkodjék előismeretekre, és tegye lehetővé a különböző területek közös alapjainak megértését. Fiatal francia matematikusaink elhatározták, hogy e feladat megoldását magukra vállalják. Csak az ifjúság képes ilyen merész elhatározásra. De ez az ifjúság nem volt olyan meggondolatlan, hogy ne látta volna a nehézségeket is. Különösen nagyon világosan látta azt, hogy egy ilyen vállalkozás meghaladja egy ember erőfeszítéseit. Közös munkára volt szükség. De milyen módszert válasszon ez a közös vállalkozás? Általában egy közös munka megfogalmazása a következő szabály szerint történik: Minden munkatárs a képességeinek legmegfelelőbb területet veszi át,

és kötelezi magát, hogy a műnek ezt a részét megírja. De ez a szabály ebben az esetben pontosan az ellenkezőjét segítette volna elő, mint ami kívánatos lett volna; tudniillik itt arról lett volna szó elsősorban, hogy először a matematika minden ágából ki kell válogatni az alapfogalmakat, és csak később lehet a speciális tudományágakkal foglalkozni. Igy szükségessé vált, hogy mindenki mindenek előtt elfelejtse saját szakterületét, és arra kényszerült, hogy mindent elölről tanuljon meg. Szükségesnek látszott, hogy az összes kérdést közösen beszéljük meg, és ennek megfelelően a végleges megfogalmazás csak egy ilyen diszkusszió-sorozat eredményeként jöhetne létre. Szükségesnek látszott, hogy minden egyes résztvevő javaslatokat tegyen, ezeket összehasonlítjuk és megbeszéljük. Így végül lehetetlen lesz felismerni, ki melyik részét alkotta az egésznek, a mű valóban közös mű lesz.

De most egy gyakorlati kérdés merült fel: egy könyvet általában a szerző nevével kell megjelentetni. Nyomtassunk minden kötet első oldalára egy hosszú sor szerzőt? Ez kényelmetlen lett volna. Ezért elhatároztuk, hogy a kiadvány számára álnevet választunk. Miért választottuk éppen NICOLAS BOURBAKI nevét? Senki sem tud közülünk erre a kérdésre teljes és pontos választ adni; a név kiválasztása éppen e „közös személyiségnek" első megnyilvánulása.

BOURBAKI kezdettől fogva az úgynevezett axiomatikus módszer meggyőződéses híve volt. Ezért alkalomadtán megbírálták. De célja elérése érdekében erre feltétlenül szüksége volt. Önök tudják mit jelent az axiomatikus módszer. Ez lényegében igen régi módszer, már Euklides szolgáltatott rá példát. De az axiomatikus módszer modern formában csak a XIX. század vége felé vált ismeretessé, amikor DAVID HILBERT közzétette „A geometria alapjai" című kiváló könyvét. Később az axiomatikus módszert a német iskola alkalmazta eredményesen a modern algebrára, és a módszer ma már átjárja az egész matematikát.

Mi is tulajdonképpen az axiomatikus módszer? Hogy erre magyarázatot nyerjünk, forduljunk egy igen elemi példához. Ha egy fiatal tanuló olyan egyszerű feladatokkal foglalkozik, amelyekben mértékegységként a kilogramm, a méter, a liter stb. fordulnak elő, a végkövetkeztetések sok esetben hasonlók. Ennek oka egyszerű: olyan algebrai képleteket írhatunk fel, amelyek a mértékegységektől (*kg*, *m*, *l*, stb.) függetlenül érvényesek; más szavakkal: különböző problémák az algebra egyetlen problémájának speciális eseteiként jelennek meg, és ennek az egyetlen egy problémának a megoldása választ ad az összes speciális esetre is.

Ez a rendkívül elemi példa igen jellemző az axiomatikus módszer alkalmazására. Mi történik tudniillik a magasabb matematikában? Az a matematikus, aki egy bizonyítás végrehajtását kísérli meg, mindenek előtt azokra a jól meghatározott matematikai objektumokra gondol,

amelyekkel éppen abban a pillanatban foglalkozik. Ha már most úgy látja, hogy talált egy bizonyítást és az összes végkövetkeztetését még egyszer gondosan átnézi, azt veszi észre, hogy a bizonyításában a tanulmányozott objektumoknak csak kevés jellegzetes tulajdonsága játszott jelentős szerepet. Így tehát ugyanazt a bizonyítást olyan más objektumokra is át lehet vinni, amelyek csak azokkal a tulajdonságokkal rendelkeznek, amelyeket a bizonyítás során felhasználtunk. Ebben rejlik az axiomatikus módszer oly egyszerű alapötlete: ahelyett, hogy megmagyaráznánk mely objektumokat akarjuk megvizsgálni, felsoroljuk azok tulajdonságait. Ezek a tulajdonságok, mint axiomák, az eljárás élére kerülnek. Ezek után már nem kell megmagyaráznunk, hogy *mik* ezek az objektumok, amiket megvizsgálunk, hanem bizonyításunkat úgy hajtjuk végre, hogy az összes, az axiómáknak elegettevő objektumokra érvényes lesz. Most már igen figyelemreméltó az a tény, hogy ez igen egyszerű ötlet rendszeres alkalmazása az egész matematika klasszikus felépítését alapjaiban rendítette meg.

Természetesen egy axiómarendszer megválasztása nem történhet teljesen önkényesen: különböző axiómarendszerekre felépített elméletek különböző módon érdekesek. A matematikában pedig nincs olyan szabály, amely eldöntené, mi érdekes és mi nem. Csak a már felépített elméletek mély ismerete, a problémák finom elemzése, vagy egy váratlan intuició teszi lehetővé a kutató számára, hogy célszerű axiómarendszert válasszon. Egy ilyen rendszer akkor lesz célszerű, ha különböző alkalmakkor is használható. Így tehát felmerül a kérdés, milyen fogalmakat tekintsünk fontosaknak, alapfogalmaknak? A matematika története arra tanít, hogy e fogalmak köre a kutatók munkája nyomán jelentősen növekedhet. Például a topológikus tér fogalma egy fél évszázadig csiszolódott, míg elnyerte ma használatos definícióját. Ez a mindnyájunk előtt ismeretes fogalom RIEMANN, CANTOR, FRÉCHET, RIESZ FRIGYES és HAUSDORFF munkája nyomán jött létre.

BOURBAKI többször is élt azzal az alkalommal, hogy új fogalmakkal gazdagítsa a matematikát. Ilyenek például az általános topológiában a filter és az uniform struktúra fogalma; vagy a legújabb időkből származó, a topológikus vektorterek osztályozásánál szereplő „tonneliert"-terek[3], a kvázi-teljes terek, a Montel-féle terek és mások.

Az axiomatikus rendszernek ma még vannak ellenzői. Bizonyos, hogy ha egy fiatal gyereknek az aritmetika számítási szabályait akarjuk megtanítani, úgy szükséges, hogy konkrét példákkal keltsük fel figyelmét, és arra késztessük, hogy ezeken gondolkodjék. Így természetesen a magasabb matematika tanulmányozásánál is szükséges, hogy előbb

[3] Általánosan elfogadott magyar megfelelője még nincs, talán az „alagúttérek" kifejezéssel lehetne lefordítani. (A ford.)

konkrét eseteken keresztül barátkozzunk meg a dolgokkal, és csak utána térjünk át az általános és absztrakt vizsgálatra. Ha azonban arról van szó, hogy a matematika átfogó tárgyalását adjuk, és megvilágítsuk különböző területei között fennálló kapcsolatait, minden esetben az axiomatikus tárgyalási módot kell alkalmaznunk már csak azon egyszerű oknál fogva is, hogy ugyanazt a bizonyítást ne kelljen tízszer megismételnünk.

Az axiomatikus módszer következetes végigvitele szükségképpen arra kényszerítette BOURBAKIt, hogy teljesen új kapcsolatokat teremtsen a matematika különböző területei között. Lehetetlen volt megtartani a szokásos klasszikus felosztást; analízis, differenciálszámítás, geometria, algebra, számelmélet, stb. Ezek helyébe lépett a struktúra fogalma, amely lehetővé tette az izomorfizmus definiálását és ezen keresztül a matematika alapvető fogalmainak osztályozását. A struktúra fogalmát általánosan megmagyarázni nagyon fáradságos munka, ezért inkább példákkal világítjuk meg: először is léteznek *algebrai struktúrák*, ezeket hozzárendelési utasításokkal értelmezzük (például a számok összeadása egy ilyen utasítás, amelynek segítségével két számhoz egy harmadikat rendelünk; ugyanez vonatkozik vektorok összeadására, számok szorzására, vagy a geometriában két forgatás kompozíciójára, stb.). Azt is azonnal észre lehet venni, hogy ezek az utasítások két- vagy többváltozós függvények. Speciális algebrai struktúrák a *rendezési struktúrák;* például a valós számok halmaza rendezett, mert két különböző adott valós szám közül az egyik mindig nagyobb mint a másik. Az egész számok halmazára egy másik rendezési struktúrát nyerhetünk akkor, ha az a egész számot akkor nevezzük „nagyobbnak" a b egész számnál, ha b osztható a-val (de ez a struktúra nem olyan, hogy két adott egész szám közül az egyik mindig nagyobb mint a másik!). Ezenkívül ismerünk *topológikus struktúrákat:* egy halmazon azzal definiálunk egy topológiát, hogy alkalmas módon bevezetjük a határérték vagy a környezet fogalmát, amely eleget tesz bizonyos, axiómáknak is nevezhető feltételeknek. Ha például az E halmazon értelmezzük a *távolság* fogalmát [azaz azt a függvényt, amely minden (A, B) pontpárhoz egy nemnegatív valós számot, a $d(A, B) = d(B, A)$ számot rendeli úgy, hogy tetszőleges három E halmazbeli pontra fennálljon a $d(A, C) \leqq d(A, B) + d(B, C)$], akkor ez a távolság egy topológiát határoz meg az E halmazban. Az E halmaz F részhalmazát az E halmazbeli A pont „környezetének" nevezzük akkor, ha létezik olyan pozitív ε, hogy az összes $d(A, M) < \varepsilon$ tulajdonságú E halmazbeli M pont az F részhalmazhoz tartozik. Az E halmazbeli $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n, \ldots$ pontsorozat akkor tart A-hoz, ha minden $\varepsilon > 0$-ra az elegendő nagy indexű M_n pontokra fennáll a $d(A, M_n) < \varepsilon$ egyenlőtlenség.

Ilyen „egyszerű" struktúrákból kiindulva a matematika olyan terü-

leteire jutunk, ahol több ilyen egyszerű struktúra összekapcsolva fordul elő. úgy látszik, hogy ezek a legfontosabb területek. Hogy ezeket alaposan át tudjuk tekinteni, természetesen igen hasznos, hogy az alapvető struktúrákat jól ismerjük. Elemi példát arra a helyzetre, amikor több struktúra párhuzamosan fordul elő egy halmazban, a valós számok szolgáltatnak. A valós számok halmazában ugyanis háromféle struktúra fordul elő: egy algebrai struktúra, amelyet számítási operációkkal (összeadás és szorzás) definiálunk; egy rendezési struktúra, mert a valós számok között egyenlőtlenségek állanak fenn, és végül egy topológikus struktúra, mert a határérték fogalmát is bevezethetjük. Ez a három struktúra egymással össze van kapcsolódva, így a topológiát mintegy a rendezés következményeképpen lehet definiálni; továbbá összefüggések állnak fenn a rendezési és a számítási operációk között (két egyenlőtlenséget szabad tagonként összeadni, stb.). Más példák több struktúra összefonódásából keletkezett esetekre: a topológikus csoportok, a differenciálható sokaságok, az analitikus terek, a nem folytonos transzformáció-csoportok stb.

Miben áll tehát a matematikának struktúra-elméleti alapon való felosztása? A következő világos: ha például a topológikus terek elméletének alapvető tételeit megtaláltuk, úgy ezeket a tételeket az összes speciális topológikus terekre alkalmazhatjuk. Így például BAIRE-nek a teljes metrikus terekre vonatkozó tisztán topológikus jellegű tétele a felsőbb analízis sok speciális kérdésére, különösen az analitikus függvények elméletére is alkalmazható.

Térjünk vissza 1935-be. Akkor határozta el BOURBAKI, hogy megírja az egész matematika teljesen axiomatikus felépítését, és először — amint ezt ő nevezte — „az analízis alapvető struktúráit" tanulmányozta. Hogy a matematikának ilyen felépítése „ex nihilo" lehetséges, arról több — ha nem is az összes — matematikus meg volt győződve; de ez a meggyőződés nem alapulhatott tapasztalaton, mert ilyen kísérletet még soha senki nem hajtott végre. BOURBAKI sajátossága talán éppen abban áll, hogy ezt a kísérletet végrehajtotta. Ő maga erről 1948-ban az amerikai „Association for Symbolic Logic" előtt tartott előadásán így nyilatkozott: „Nem elégedtem meg azzal a megállapítással, hogy egy ilyen vállalkozás lehetséges, hanem inkább megkezdtem annak bizonyítását, éppen úgy, mint DIOGENES, aki a mozgás létezését azzal bizonyította, hogy lépett egyet; az én bizonyításom az idők folyamán egyre teljesebb lesz párhuzamosan könyveim megjelenésével."

E nagy tankönyv címéül BOURBAKI „A matematika elemei" címet választotta. Első pillantásra ez a cím igen szerénynek látszik, de valójában igen becsvágyó, mert Euklides Elemeire emlékeztet.

Most megkísérlünk választ kapni arra, hogy BOURBAKI húsz év múltán mennyivel jutott közelebb kitűzött céljához. A mű teljes terve

továbbra is ismeretlen marad, mert a már megjelent 21[4] kötet teljes egészében az első részhez, „Az analízis alapvető struktúrái" című részhez tartozik. Ez az első rész több ún. „könyvre" oszlik:

I. könyv: Halmazelmélet
II. könyv: Algebra
III. könyv: Általános topológia
IV. könyv: Egyváltozós valós függvények
V. könyv: Topológikus vektorterek
VI. könyv: Integrálszámítás

A további könyvek felosztása még bizonytalan. Minden egyes ún. könyv több fejezetet és számos gyakorló feladatot tartalmaz. A gyakorló feladatok egy részét számos matematikus eredeti műveiből merítettük, de a szerzőket (legalábbis a gyakorlatoknál) sohasem idéztük; éppen a közelmúltban olvastam, hogy nagy megtiszteltetést jelent egy matematikus számára az, ha BOURBAKI ilymódon megrabolja.

A rendszer logikus következményeképpen a valós számokat nem állíthattuk a tankönyv élére, azok csak a harmadik könyv negyedik fejezeteként jelennek meg, tudniillik a valós számok elméletében már egyidejűleg háromféle struktúrára van szükség. BOURBAKI pedig az általános kérdésektől halad a speciális kérdések felé. Ezen oknál fogva a valós számok értelmezése a racionális számok alapján nála egy általános konstrukció speciális eseteként jelenik meg, tudniillik egy topológikus csoport teljes bővítéseként. (III. könyv, III. fejezet); és ez a teljes bővítés egy uniform tér teljes bővítésére vonatkozó elméletre vezetődik vissza (III. könyv, II. fejezet).

Az első rész összes könyve szigorúan logikus sorrendben követi egymást. Egy fogalmat vagy eredményt csak akkor szabad felhasználni, ha az egy előző könyvben vagy fejezetben már előfordult. Így tehát könnyen belátható, hogy ilyen szigorúságnak nagy ára van: ez tudniillik maga után vonja az előadásmód bizonyos nehézkességét, és ez a nehézkes mechanizmus kicsit riasztólag hat az olvasóra. A stílus nem veszi közvetlenül igénybe az olvasó képzeletét. A matematikai szöveg tételek, állítások, lemmák stb. sorozatából áll; a szigorúan szabatos stílus éles ellentétben áll a múlt század végén uralkodó hagyományos francia stílus pontatlanságával és homályosságával. De másrészt ez a szigorú stílus bizonyos előnyöket is jelent: a főeredmények világos és precíz megszövegezését. Már nem szükséges egy hosszabb szövegrész elolvasása ahhoz, hogy egy bizonytalanul megfogalmazott állítás szabatos jelentését megállapítsuk. Ma már világosan látható, hogy ez a szabatos stílus egyre jobban és jobban hatol be a matematikai irodalomba.

[4] 1961 végén 26 kötet.

Gyakorlati okok lehetetlenné tették, hogy a megjelent részek logikai és időrendi sorrendjét összeegyeztessük. Így például az I. könyv I. fejezete, amely a formális matematika teljes felépítését tartalmazza, a sorozatnak csak tizenhetedik köteteként jelent meg, mert a szerzőnek fel kellett mérni a következő kötetek szükségleteit. Hogy az ebből fakadó nehézségek legalább egy részét elkerülje, BOURBAKI már 1939-ben kiadta az I. könyv eredménytárát („Fascicule de résultats"), amely tartalmazza a halmazelmélet mindazon jelölését és szabályát, amelyekre a következő kötetekben szükség volt. Ahogyan az újabb kötetek egymásután megjelennek, úgy illeszkednek bele az egész mű megfelelő logikai helyére.

A „Notes historiques"[5] és a „Fascicules de résultats"[6] című részeket külön kell megemlíteni. Az egyes fejezetek végén gyakran található történeti áttekintés; ez néha igen rövid, néha igen részletes. Minden esetben az éppen tárgyalt kérdések összességére vonatkozik. A mű tulajdonképpeni szövegében történeti utalások soha sincsenek. BOURBAKI ugyanis a logikus felépítéstől való legkisebb eltérést sem tűri meg. De BOURBAKI szövege és a matematika hagyományos tárgyalásmódjának kapcsolatai a történeti függelékben kerülnek megmagyarázásra, és ezek a magyarázatok gyakran messze visszanyúlnak a múltba. A „Notes historiques" stílusa gyakran igen jelentősen eltér BOURBAKI szigorú, kanonikus stílusától; talán a jövő történészei egyszer azon törik majd a fejüket, hogyan is jöhetett létre ez a nagy stílus különbség?

Felmerült azonban egy további nehézség is: a terminológia kérdése. Önök tudják, hogy új elméletek, új fogalmak új terminológiára, új jelölésekre vezetnek. Ha semmiféle nyelvet nem beszélünk, nem tudunk semmiféle fogalmat sem megmagyarázni: és ezenfelül beszéd nélkül nincs gondolat sem. A matematikában igen gazdag nyelv és igen sok jelölés áll rendelkezésünkre. E század elején a matematika legkülönbözőbb területeinek rohamos fejlődése és az egyes szerzők egymástól független munkája nyomán a terminológiában borzalmas zürzavar keletkezett. Ugyanannak a fogalomnak több neve volt, és különböző fogalmak viselték ugyanazt az elnevezést. BOURBAKI szükségesnek tartotta, hogy a terminológiát is megváltoztassa és leegyszerűsítse, hogy a matematikát mint egységes egészet tárgyalhassa. E törekvésében egy BERGMANN nevű, a XVIII. században élt upsalai svéd vegyész vezette, akit Lavoisier a következőképpen idéz: „Ne faites grâce à aucune dénomination impropre; ceux qui savent déjà entendront toujours; ceux qui ne savent pas encore entendront plus tôt".[7] Így BOURBAKI élesen megkülönböztetett olyan fogalmakat, amelyeket addig keresztül-kasul hasz-

[5] Történeti megjegyzések.

[6] Eredménytár.

[7] „Ne kegyelmezzetek semmilyen helytelen elnevezésnek; akik tudják, ezután is megértik, akik még nem tudják, korábban meg fogják érteni."

náltak; pl. „boule" és „sphére" (gömb és gömbfelület). A „befedés" és „elhelyezés"[8] fogalmára a franciában csak a „recouvrement" szót ismerték, BOURBAKI a „recouvrement" illetve a „revêtement" szót használja. Harmadik példaként hadd utaljak a „kompaktság" fogalmára, amelyet FRÉCHET valamint ALEXANDROFF—HOPF könyve más értelemben használ, mint BOURBAKI. Ami Alexandroff-nál „bikompakt" az BOURBAKInál kompakt. Ezt az elnevezést hosszú ideig mérlegelték, ma már azonban az egész matematikai irodalomban — a Szovjetuniót kivéve — elterjedt.

Bizonyára most már arra is kíváncsiak, hogyan dolgozik gyakorlatilag BOURBAKI? A 8—10 résztvevőt számláló ún. BOURBAKI-kongresszus tagjai háromszor egy évben egy kicsi, csendes, a városoktól távolfekvő helyen jönnek össze. Két ilyen kongresszus egy-egy hétig, a harmadik, amely a nyári szünidőben zajlik le, 14 napig tart. Átlagosan 7—8 órát dolgoznak naponta, a többi időt a sétáknak és az étkezéseknek szentelik. Ezeken a kongresszusokon további kötetek tervét beszélik meg, és konkrét javaslatokat tesznek, ezek azonban még csak igen ideiglenes jelleggel bírnak. Minden tárgyból egy arra kijelölt tag írásbeli beszámolót készít (pl. összefoglalás a kvadratikus formákról, a Lie-féle csoportokról stb.). Ezt a beszámolót később sokszorosítják és minden tagnak kiosztják. A következő kongresszuson ezt a beszámolót megtárgyalják; a szöveget valaki hangosan felolvassa és mindenki kérdezhet, javaslatokat tehet, stb. Igen gyakran előfordul, hogy az összes résztvevő egyszerre beszél. A diszkusszió után közös munkával új, részletes szöveg készül; az egyes fejezeteket egy-egy, de most már másik tag készíti el. Ezután ezeket a fejezeteket ismét sokszorosítják és egy további kongresszuson felolvassák és megtárgyalják, majd ismét más tagokat bíznak meg egy-egy fejezet megszövegezésével és így tovább. Előfordulhat, hogy több javaslat és változat után az egész fejezetet elejtik; ebben az esetben semmi sem kerül belőle nyilvánosságra, ez csak BOURBAKI könyvtárában van meg. Lehetséges, hogy néhány évvel később megszületik e fejezet egy egész új megfogalmazása. Minden egyes tag számára bármikor nyitva áll az a lehetőség, hogy teljesen új javaslatot tegyen. Ez a munkamódszer azzal jár, hogy a tankönyv mindenegyes fejezetét ötször, hatszor vagy esetleg nyolcszor írják, vitatják és változtatják meg. Nagyon könnyen el tudják képzelni, hogy ez rengeteg időt emészt fel.

A kongresszus vitái mindig igen élénkek és hevesek. A határozatokat sohasem a többség elve alapján hozzák, szavazatok összeszámlálása egyáltalában nem is létezik! Minden határozat egyhangú döntés eredménye, és ez nem jön létre mindig könnyen. Ezenfelül minden határozat egy későbbi időpontban törölhető vagy megváltoztatható. Minden

[8] Az eredeti német szöveg „Überlagerung" szavára általánosan elfogadott magyar kifejezések még nincs. (A ford.)

további nélkül könnyen érthető, hogy az ellentétes vélemények igen hevesen csapnak össze, annál hevesebben, minél kiválóbb egyéniségek vesznek részt ebben a munkában. Példaként elegendő talán ANDRÉ WEIL, CLAUDE CHEVALLEY és JEAN DIEUDONNÉ nevét megemlítenem. Ennek ellenére a tapasztalat arra tanít, hogy lehetséges eredményeket elérni. Lehet, hogy ezek nem a legjobbak, de mégis eredmények, és ebben olyasféle csoda rejlik, amit közülünk senki sem tud megmagyarázni.

Ilyen jellegű munka természetesen különleges légkört kíván: közösségi szellemet és barátságot, teljes nyiltszívűséget és vidám kedélyt; önzését mindenkinek háttérbe kell szorítania. Ez mindnyájunk számára kemény iskola.

Térjünk most vissza a fejezetek szövegére. Miután *n*-szer megírták és megvitatták, a szöveg nyomdába kerül. Ez a szöveg személyes ötletek eredménye, de a végleges szövegben teljesen lehetetlen az egyes tagoknak még csak a nyomát is felfedezni. A szöveget valóban NICOLAS BOURBAKI írta, a stílus BOURBAKI kanonikus stílusa, és senki sem fedezi fel benne *X* vagy *Y* tollát.

Mi haszna van ennek a roppant erőfeszítésnek? Bizonyos, hogy minden tagnak alkalma nyílik, hogy tudását kiszélesítse és kiegészítse. Kétségen kívül mindegyikükről nyilvánvaló, hogy a matematika legkülönbözőbb területeiről vett problémák iránt érdeklődik, és mégis mindenki igen sokat tanulhat a másiktól. De reméljük, hogy ezen túl is van még valami, mert BOURBAKI nem akar csak egy öncélú vállalkozás lenni. BOURBAKI sokkal inkább más matematikusok segítségére akar sietni, és a matematika további előrehaladását megkönnyíteni. Itt van az alkalom, hogy feltegyük a következő kérdést: Milyen befolyása van BOURBAKI művének ma, és milyen lesz a jövőben? Az biztos, hogy a BOURBAKI-kötetek nem olyan könyvek, amelyeket egy fiatal diák kezébe adhatunk. De az a tapasztaltabb diák, aki a legfontosabb klasszikus fogalmakat már ismeri és tovább óhajtja magát képezni, BOURBAKI tanulmányozásával erős és tartós alapképzettséget szerezhet magának. BOURBAKI módszere, amellyel az általánosból a speciális felé halad, egy kezdő számára, aki még nem ismer elegendően sok problémát, ez az út kicsit veszélyes, mert azt hihetné, hogy az általános maga egy cél. De BOURBAKI véleménye nem ez; BOURBAKI számára egy általános megállapítás csak akkor bír létjogosultsággal, ha az több speciális problémára alkalmazható, és valóban időt és fáradságot takarít meg. Ilyesféle takarékosság pedig ma már szükséges. Amikor BOURBAKI tagjai kötelességüknek érezték, hogy mindent újból átdolgozzanak, azt abban a reményben tették, hogy ezzel a jövő matematikusai kezébe olyan eszközt adnak, amely munkájukat megkönnyíti és előrehaladásukat elősegíti. Ami ezt az utolsó szempontot illeti, azt hiszem, a célt már elértük: ugyanis milyen gyakran veszem észre, hogy

azokat a fogalmakat, amelyeket annyi fáradsággal dolgoztunk ki, ma a fiatalok (akik ezeket a fogalmakat BOURBAKI könyveiből tanulták meg) milyen könnyedén és művészi módon használják!

Az idők során és a fiatalabb nemzedékek révén az új eszmék (amelyekről BOURBAKI tudja, hogy nem egyedüli képviselőjük) egyre nagyobb és nagyobb körökbe hatolnak be. A matematika alapjai megértésének ez az új útja-módja arra hivatott, hogy a közeli vagy távolabbi jövőben befolyásolja az egyetemi, sőt a középiskolai oktatást is. Bizonyos, hogy a matematika igazságai örökérvényűek, de veszélyes volna az oktatást, még az elemi oktatást is, megmerevedni hagyni. Bizonyos fogalmak, amelyeket ma általánosan alapvetőknek ismerünk el, megérdemlik, hogy már a fiatal emberekkel is megismertessük. Ez természetesen csak úgy történhet, hogy állandóan konkrét példákra hivatkozunk. Manapság a matematika elemi oktatása, mindenek előtt a geometriáé, elképesztő módon még a görög gondolatvilág befolyása alatt áll. Amilyen mértékben ez a gondolatvilág ma már túlhaladott, olyan mértékben kellene az új eszméket az oktatásban is bevezetni. Természetesen balgaság volna mindent egyszerre felforgatni. Éppen Németországban és Franciaországban vannak az oktatásnak olyan hagyományai, amelyeket részben tisztelni kell. De bizonyos fejlődés sürgősen szükségessé vált, és ma az a benyomásom, hogy ez a fejlődés mindkét országban már a küszöb előtt áll. Ehhez a fejlődéshez talán BOURBAKI is hozzájárult indirekt és igen szerény módon.

Több mint húsz éve dolgozik BOURBAKI. El tudnák képzelni, hogy ez alatt nagyon megöregedett, és tagjainak dinamikája elvesztette erejét. De ez nem igaz! BOURBAKI örökké él, és örökké fiatal marad: mint az emberiség, Ő is állandóan újjászületik. Az alapítók (az úgynevezett „membres fondateurs"), akiknek egyike Önök előtt áll, fokozatosan félreálltak, fiatalok álltak a helyükre. Ezek az új tagok önként találtak el BOURBAKI-hoz, egy szép napon a legénységhez csatlakoztak, és egyesek ma már a csoport legkitűnőbb vezetői.

Mindezek ellenére nem maradhat titok az, hogy BOURBAKI ma újabb nehézségekkel küzd: húsz év alatt a matematika igen jelentősen megváltozott (amiért talán részben BOURBAKIt is terheli a felelősség). Így talán ma már egyes fogalmak, amelyek BOURBAKI könyvének alapjait képezték, egy kissé túlhaladottak. Majd ha BOURBAKI könyvének első, „Az analízis alapvető strukturái" című részét befejezi, talán kötelességének érzi majd, hogy mindent elölről kezdjen el. De BOURBAKI nem akar csak a matematika alapjaira szorítkozni. Mik ma a tervei? Ezt nem szabad elárulnom. Egy biztos: ha a célok megváltoznak, meg kell változtatni a módszereket is. A végleges eredmény a jövő titka marad. Erről talán újabb 20 év múlva beszélhetünk.

Fordította: SCHARNITZKY VIKTOR.

НИКОЛА БУРБАКН И МАТЕМАТИК

А. Картан

N. BOURBAKI AND THE MATHENATICS OF TODAY

H. Cartan

Gráfelméleti szélső értékekre vonatkozó problémákról

BOLLOBÁS BÉLA és ERDŐS PÁL

E cikkben $G_k^{(n)}$ n szögpontú (a továbbiakban szögpont helyett röviden pontot mondunk) s k élű gráfot fog jelenteni, ahol hurkokat kizárunk, s két pont legfeljebb egy éllel lehet összekötve (azaz egy és két élből álló köröket kizárunk). $\pi(G)$ jelenti G pontjainak számát és $\nu(G)$ G éleinek számát. $G-x$ jelenti azt a gráfot, amelyet nyerünk, ha G-ből elhagyjuk az x pontot és a belőle kiinduló összes éleket. Hasonló értelemben használjuk a $G-\{x_1, \ldots, x_j\}$ jelölést is. xy-úton egy olyan utat értünk, melynek az x és az y pont a két végpontja.

TURÁN[1] még 1940-ben felvetette a következő kérdést: Mekkora az a minimális $k=k_l(n)$ szám, hogy minden $G_k^{(n)}$ gráf tartalmazzon l pontból álló teljes részgráfot, azaz oly l pontot, hogy bármelyik kettő össze legyen kötve egy éllel. TURÁN e kérdésre preciz választ adott, s továbbá felvetette a következő kérdést: Mekkora $k=k(n)$ minimális értéke, hogy $G_k^{(n)}$ biztosan tartalmazzon egy előírt típusú részgráfot? E kérdésekről az utóbbi időben több cikk jelent meg[2], s e dolgozat is egy ebbe a témakörbe való kérdéssel fog foglalkozni.

ERDŐS és GALLAI a következő kérdést vizsgálták: Mekkora $k_r=k_r(n)$ minimális értéke, hogy $G_{k_r}^{(n)}$ tartalmazzon két x_1, x_2 pontot, melyek r oly úttal vannak összekötve, melyeknek az x_1 és x_2 pontokon kívül nincsen közös pontjuk? Könnyű belátni, hogy $k_2=n$, ugyanis minden $G_n^{(n)}$, mint ismeretes (és triviális), tartalmaz kört, egy kör bármely két pontja két oly úttal összeköthető, melynek végpontjaikon kívül nincs más közös pontjuk. Másrészt viszont, ha n pont közül egyet a többivel összekötünk, nyilván oly $G^{(n)}$-et nyerünk, melyben bármely két pont csak egy úttal köthető össze.

Legyen mármost $f(2n)=3n-1$, $f(2n+1)=3n+1$. Könnyű belátni, hogy $k_3(n)=f(n)$. Ugyanis BÁRTFAI[3] nagyon egyszerűen bebizonyította, hogy minden $G_{f(n)}^{(n)}$ tartalmaz páros számú élből álló kört és egyszerű meggondolás mutatja, hogy bizonyítása azt is adja, hogy minden $G_{f(n)}^{(n)}$ tartalmaz két pontot, mely három páronként független úttal van össze-

kötve (azaz oly utakkal, melyeknek végpontjaikon kívül nincsen közös pontjuk). Tekintsünk másrészt n háromszöget $[x_0, x_{2i-1}, x_{2i}]$, $1 \leqq i \leqq n$, így nyerünk egy $G_{3n}^{(2n+1)}$-et (azaz egy $G_{f(2n+1)-1}^{(2n+1)}$-et), mely nem tartalmaz két pontot összekötő három független utat. Ha az $[x_0, x_{2n-1}, x_{2n}]$ háromszögből csak az (x_0, x_{2n-1}) élt hagyjuk meg, nyerünk egy $G_{3n-2}^{(2n)}$-et (azaz egy $G_{f(2n)-1}^{(2n)}$-et), mely nem tartalmaz két pontot összekötő három független utat, ezzel $k_3(n) = f(n)$ bizonyítását befejeztük. $k_r(n)$ értékét $r > 3$-ra nem sikerült meghatároznunk, talán $k_4(3n+1) = 6n+1$. n egyetlen közös ponttal bíró tetraéder példája mindenesetre adja, hogy $k_4(3n+1) > 6n$.

A G gráfról akkor mondjuk, hogy teljes topologikus r-szöget tartalmaz, ha G-nek van r olyan pontja: $y_1, y_2, \ldots, y_r$, hogy bármely kettő összeköthető oly utakkal, melyeknek végpontjaikon kívül nincs más közös pontjuk. Ezek szerint egy teljes topologikus háromszög egyszerűen egy kör, tehát minden $G_n^{(n)}$ tartalmaz teljes topologikus háromszöget, s van oly $G_{n-1}^{(n)}$, mely nem tartalmaz teljes topologikus háromszöget. DIRAC[4] bebizonyította, hogy minden $G_{2n-2}^{(n)}$ tartalmaz teljes topologikus négyszöget, de van oly $G_{2n-3}^{(n)}$, mely nem tartalmaz teljes topologikus négyszöget. Analóg tétel teljes topologikus ötszögre nem ismeretes. Mindenesetre van oly $G_{3n-6}^{(n)}$, mely nem tartalmaz teljes topologikus ötszöget. Hogy ezt beláthassuk, tekintsünk egy n szögpontú maximális élszámú síkba rajzolható gráfot, ez csupa háromszögből áll, s ezért Euler poliédertételéből könnyen adódik, hogy e gráfnak $3n-6$ éle van, s mint síkba rajzolható gráf, mint ismeretes, nem tartalmazhat teljes topologikus ötszöget. Lehetséges azonban, hogy minden $G_{3n-5}^{(n)}$ tartalmaz teljes topologikus ötszöget.

Egy teljes topologikus négyszöget a következő módon lesz célszerű elképzelnünk: Egy K kör és egy x_0 pont, mely nincs a körön, s melyből három páronként idegen út vezet a K kör x_1, x_2, x_3 pontjaihoz. Az x_0, x_1, x_2, x_3 pontok egy topologikus teljes négyszöget határoznak meg. TURÁN, mint már a bevezetés elején elmondottuk, bebizonyította, hogy minden $G_l^{(n)}$,

$$l = \frac{1}{3}(n^2 - r^2) + \binom{r}{2} + 1 \qquad \binom{n = 3t + r}{0 \leqq r < 3},$$

tartalmaz teljes négyszöget — azaz oly speciális teljes topologikus négyszöget, melyben a pontokat összekötő utak élek. Kérdezhetjük, mármost, mekkora az a legkisebb $h_3(n)$ szám, hogy minden $G_{h_3(n)}^{(n)}$ tartalmaz egy oly K kört és egy x_0 pontot, mely nincs a körön, s melyből legalább három oly él indul ki, mely K szögpontjaihoz vezet (ez az

alakzat megint egy speciális teljes topologikus négyszög). $h_3(n)$ értékét egyelőre nem tudjuk meghatározni, nincsen kizárva, hogy $h_3(n)=2n-2$ (azaz ha DIRAC tétele szerint van teljes topologikus négyszög, mindjárt a mi speciális teljes topologikus négyszögünk is előfordulna gráfunkban).

Jelentse általában $h_r(n)$ azt a legkisebb számot, hogy minden $G^{(n)}_{h_r(n)}$ tartalmaz egy K kört, s egy x_0 pontot, mely legalább r éllel van összekötve a K kör $x_1, \ldots, x_r$ pontjaival. $r \geqq 3$ esetén egyelőre nem tudjuk $h_r(n)$-et meghatározni, s így csak $h_2(n)$-nel foglalkozunk. Triviális mindenesetre, hogy $h_2(n) \geqq f(n)$, tudniillik az x_1, x_2 pontokat nyilván három független úttal lehet összekötni (két út a K kör éleiből áll, s a harmadik út az (x_1, x_0) és (x_0, x_2) élekből). PÓSA sejtette[5], hogy $h_2(n)=f(n)$, s a továbbiakban PÓSA e sejtésére két bizonyítást fogunk adni.

Megjegyezzük még, hogy PÓSA [6] a következő érdekes tételt bizonyította be: Minden $G^{(n)}_{2n-3}$ tartalmaz egy olyan kört, melynek két (nem szomszédos) pontja egy éllel van összekötve (azaz gráfunk tartalmaz egy poligont egy átlójával). Viszont létezik oly $G^{(n)}_{2n-4}$, mely nem tartalmaz ily kört.

Bizonyítás nélkül említjük még a következő tételt: Legyen $n \geqq 6$, akkor minden

$$G^{(n)}_l, \quad l=\left[\frac{n^2}{4}\right]+1$$

tartalmaz oly teljes topologikus négyszöget, melynek öt összekötő útja él s a hatodik két élből áll. Könnyű belátni, hogy ez nem igaz mindegyik $G^{(n)}_{l-1}$-re és így e tétel nem javítható.

TÉTEL.

$$h_2(n)=f(n).$$

Nyilvánvaló, $h_2(n)$ és $f(n)$ definíciójából, hogy $h_2(n) \geqq f(n)$, s így csak azt kell bebizonyítanunk, hogy minden $G^{(n)}_{f(n)}$ tartalmaz egy K kört, s egy x_0 pontot, mely nincs a K körön, s melyből legalább két él vezet a K körhöz.

Erre a tételre fogunk két bizonyítást adni.

Az első bizonyítás (épp úgy, mint a második) teljes indukciót használ. Ha a G gráf tartalmaz egy kört s egy pontot, mely nincs a körön, s mely legalább két éllel van a kör pontjaival összekötve, röviden azt fogjuk mondani, hogy a G gráf tartalmaz *alakzatot*.

Indukciós feltevésünk mármost a következő:

Legyen $4 \leqq m < n$. Minden $G^{(m)}_{f(m)}$ tartalmaz alakzatot. Ha m páratlan, akkor minden $G^{(m)}_{f(m)-1}$ vagy tartalmaz alakzatot, vagy minden él előfordul egy háromszögben.

Könnyű belátni, hogy $n=4$-re indukciós feltevésünk teljesül (ti. $f(4)=5$). Ezért, hogy tételünket bebizonyítsuk, csak annyit kell kimutatn nk, hogy indukciós feltevésünkből következik, hogy minden $G^{(n)}_{f(n)}$ tartalmaz alakzatot, s ha n páratlan, akkor minden $G^{(n)}_{f(n)-1}$ tartalmaz alakzatot vagy minden él előfordul legalább egy háromszögben.

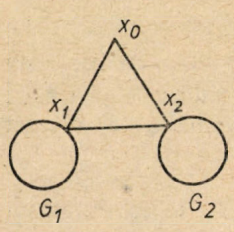
Elsősorban feltehetjük, hogy a $G^{(n)}_{f(n)}$, és páratlan n esetén a $G^{(n)}_{f(n)-1}$ gráf nem tartalmaz elsőfokú pontot; ha ugyanis ily pont létezne, ennek elhagyása után nyilván egy $G_l^{(n-1)}$, $l \geqq f(n-1)$ maradna, mely indukciós feltevésünk szerint tartalmaz alakzatot, s így az eredeti gráf is tartalmaz alakzatot.

Viszont feltehetjük, hogy a $G^{(n)}_{f(n)}$, és páratlan n esetén a $G^{(n)}_{f(n)-1}$ gráf is tartalmaz másodfokú szögpontot. Ha ugyanis $G^{(n)}$ gráfunk minden szögpontja legalább harmadfokú volna, akkor $G^{(n)}$ gráfunknak legalább $\frac{3n}{2}$ éle volna, ami $\frac{3n}{2} > f(n)$ miatt lehetetlen.

Tegyük fel először, hogy $n=2u+1$. Először bebizonyítjuk indukciós feltevésünkből, hogy minden $G^{(2u+1)}_{3u+1}$ tartalmaz alakzatot. Legyen ugyanis x_0 gráfunknak másodfokú szögpontja. Hagyjuk el x_0-t, s a belőle kifutó két élt, ekkor egy $G^{(2u)}_{3u-1}$-et nyerünk, mely indukciós feltevésünk miatt tartalmaz alakzatot ($f(2u)=3u-1$).

Nehezebb lesz indukciós feltevésünk második állításának bebizonyítása, amely szerint minden $G^{(2u+1)}_{3u}$ vagy tartalmaz alakzatot vagy minden éle előfordul háromszögben.

Elsősorban is feltehetjük, hogy $G^{(2u+1)}_{3u}$ nem tartalmaz alakzatot (különben nincs mit bebizonyítanunk). Legyen x_0 gráfunk másodfokú pontja, s tegyük fel, hogy x_0 az x_1 és x_2 pontokkal van élekkel összekötve. Tegyük fel először, hogy az (x_1, x_2) él előfordul gráfunkban. Ekkor azonban x_1-ből nem vezet x_2-be oly, az (x_1, x_2) éltől különböző út, mely nem megy át az x_0 ponton (különben gráfunkban lenne alakzat). Tehát gráfunk így ábrázolható:



1. ábra

G_1-ben vannak $G^{(2u+1)}_{3u} - x_0$ azon pontjai, melyek nem köthetők össze x_2-vel oly úttal, mely nem megy át x_1-en.

Tegyük fel először, hogy $\pi(G_1)=2t$, $\pi(G_2)=2u-2t$. Ez azonban lehetetlen, mert indukciós feltevésünk szerint (különben G_1 vagy G_2 tartalmazna alakzatot)

$$v(G_1) \leqq 3t-2, \qquad v(G_2) \leqq 3u-3t-2,$$

tehát

$$v(G_{3u}^{(2n+1)}) = 3 + v(G_1) + v(G_2) \leqq 3 + 3t - 2 + 3u - 3t - 2 = 3u - 1,$$

ami lehetetlen.

Feltehetjük tehát, hogy

$$\pi(G_1) = 2t + 1, \quad \pi(G_2) = 2u - 2t - 1, \quad 0 < t < u.$$

Indukciós feltevésünk miatt (különben van alakzat)

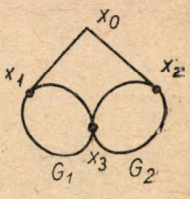
$$v(G_1) \leqq 3t, \quad v(G_2) \leqq 3u - 3t - 3. \tag{1}$$

(1)-ben azonban mindkét helyen egyenlőség áll (különben megint $v(G_{3u}^{(2u+1)}) < 3u$), ekkor azonban indukciós feltevésünk szerint G_1 és G_2 minden éle valamelyik háromszögben előfordul. De ekkor az I. ábra miatt $G_{3u}^{(2u+1)}$ minden éle előfordul valamelyik háromszögben, s ezzel esetünkben állításunk be van bizonyítva.

Feltehetjük tehát, hogy gráfunkban az (x_1, x_2) él nem fordul elő. Először igazoljuk, hogy a $G' = G_{3u}^{(2u+1)} - x_0$ gráf összefüggő. Ha ugyanis nem lenne az és G_1' G'-nek tetszőleges komponense, G_2' pedig G'-nek a G_1-hez nem tartozó pontjaiból és éleiből álló gráf, akkor indukciós feltevésünk szerint

$$v(G_{3u}^{(2u+1)}) = 3u \leqq 2 + v(G_1') + v(G_2') \leqq 3u - 1.$$

Ez pedig lehetetlen. Feltehetjük, hogy a G' gráfban nincs oly kör, mely az x_1 és x_2 pontokat tartalmazza (különben $G_{3u}^{(2u+1)}$-ben volna alakzat). Ekkor azonban egy ismert tétel szerint a G' gráfnak van artikulációja, azaz olyan x_3 pontja, hogy minden, az x_1-ből x_2-be vezető út átmegy x_3-on. (azaz x_3 G'-nek elválasztó pontja, artikulációja).



2. ábra

Létezik G'-ben két olyan összefüggő G_1 és G_2 részgráf, melyeknek egyetlen közös pontjuk x_3, G_i $(i = 1, 2)$ tartalmazza az x_i pontot és $G_1 - x_3$ pontjait nem köti össze G'-beli él $G_2 - x_3$ pontjaival. Nyilván

$$\pi(G_1) + \pi(G_2) = 2u + 1. \tag{2}$$

(2) miatt feltehetjük, hogy

$$\pi(G_1) = 2t, \quad \pi(G_2) = 2u - 2t + 1. \tag{3}$$

Indukciós feltevésünk miatt (különben $G_{3u}^{(2u+1)}$-ban volna alakzat)

$$v(G_1) \leqq 3t - 2, \quad v(G_2) \leqq 3u - 3t. \tag{4}$$

Feltehetjük, hogy (4)-ben mindkét helyen az egyenlőség jele áll (külön-

ben $v(G_{3u}^{(2u+1)}) < 3u$). Ez azonban nyilván csak úgy lehetséges, hogy G_2 minden éle G_2-nek valamelyik háromszögében előfordul.

Tekintsük mármost az x_0, x_1, x_3, x_2 pontokat tartalmazó K kört. A G_2-ből K tartalmazza az e_1 élt. e_1 előfordul egy G_2-beli háromszögben. Ennek élei legyenek e_1, e_2, e_3. Ha ezen élekből K csak az e_1-et tartalmazza, akkor K, e_2, e_3 alakzatot alkotnak, ha e_1-et és e_2-t tartalmazza, akkor K, e_3 alkotnak alakzatot, s ez már az összes lehetséges eset, mert K az e_1, e_2, e_3 éleket egyszerre nyilván nem tartalmazhatja. Tehát feltevésünkkel ellentmondásra jutottunk, s ezzel az $n = 2u+1$ esetre bizonyításunkat befejeztük.

Tegyük fel mármost, hogy $n = 2u$. Indukciós feltevésünk segítségével be fogjuk bizonyítani, hogy minden $G_{3u-1}^{(2u)}$ tartalmaz alakzatot. x_0, x_1, x_2 jelentése ugyanaz, mint az $n = 2u+1$ esetben. Megint két esetet különböztetünk meg. Tegyük fel először, hogy az (x_1, x_2) él előfordul gráfunkban. Mint az $n = 2u+1$ esetben, úgy itt is (az 1.-es ábra esetében vagyunk) feltehetjük az általánosság rovása nélkül, hogy $\pi(G_1) = 2t$, $\pi(G_2) = 2u - 2t - 1$, ezért indukciós feltevésünkből nyerjük, hogy

$$v(G_{3u-1}^{(2u)}) = 3 + v(G_1) + v(G_2) = 3u - 1 \leqq 3 + 3t - 2 + 3u - 3t - 3 = 3u - 2,$$

ami ellentmondás.

Tehát feltehetjük, hogy (x_1, x_2) nem fordul elő gráfunkban. Ugyanúgy, mint az $n = 2u+1$ esetben, nyerjük, hogy a $G_{3u-1}^{(2u)} - x_0$ gráfnak van egy x_3 artikulációs pontja (lásd 2. ábra). Megint két esetet kell megkülönböztetnünk. Az első esetben

$$\pi(G_1) = 2t, \quad \pi(G_2) = 2u - 2t. \tag{5}$$

(5) azonban azonnal ellentmondásra vezet, mert indukciós feltevésünk miatt

$$v(G) = 3u - 1 = 2 + v(G_1) + v(G_2) \leqq 2 + 3t - 2 + 3u - 3t - 2 = 3u - 2,$$

ami lehetetlen.

Tegyük fel tehát végül, hogy

$$\pi(G_1) = 2t + 1, \quad \pi(G_2) = 2u - 2t - 1. \tag{6}$$

$$v(G) = 3u - 1 = 2 + v(G_1) + v(G_2)$$

miatt ez csak akkor nem vezet ellentmondásra (vagy alakzat létezésére), ha

$$v(G_1) = 3t, \quad v(G_2) = 3u - 3t - 3.$$

Ez esetben azonban G_1 és G_2 minden éle előfordul egy háromszögben és alakzat létezését az $[x_0, x_1, x_3, x_2]$ kör létezéséből ugyanúgy nyerjük, mint $\pi(G) = 2u+1$ esetben. Ezzel tételünk igazolva van.

Megjegyezzük, hogy módszerünkkel könnyen nyerhető, hogy ha $G_{3u}^{(2u+1)}$ nem tartalmaz alakzatot, akkor csupa háromszögből áll, melyek artikulációkkal kapcsolódnak egymáshoz.

A tételünkre adott második bizonyítás a következő:

Mint az első bizonyításban, nevezzük most is „alakzatnak" az olyan részgráfot, amely egy körből és egy körön kívüli pontból a kör két különböző pontjához futó élből (röviden körből és fülből) áll.

Be fogjuk bizonyítani, hogy ha $G_k^{(n)}$-ban nincs alakzat, akkor $k \leqq f(n) - 1 = \left[\frac{3(n-1)}{2}\right]$.

Az állítás $n = 1$, 2-re fennáll.

Tegyük fel, hogy igaz $(n-1)$-ig. Indirekt módon bizonyítjuk, hogy ekkor n-re is fennáll.

Ha ui. ez nem igaz, akkor van olyan G gráf, melyre $\pi(G) = n$, $\nu(G) = \left[\frac{3(n-1)}{2}\right] + 1$ és melyben nincs alakzat.

(7) G összefüggő és nem lehet elválasztó pontja. Ugyanis, ha volna G-ben két olyan G_1 és G_2 részgráf, melyeknek legfeljebb egy közös pontjuk van és amelyek együtt G minden élét tartalmazzák, akkor a $\pi(G_1) = k_1$, $\pi(G_2) = k_2$ jelöléssel az indukciós feltevés miatt G-nek legfeljebb

$$\left[\frac{3(k_1-1)}{2}\right] + \left[\frac{3(k_2-1)}{2}\right] \leqq \left[\frac{3(k_1+k_2-2)}{2}\right] \leqq \left[\frac{3(n-1)}{2}\right]$$

éle lehetne.

G-ben van másodfokú pont, hiszen az előbbiek szerint elsőfokú nem lehet benne, s nem lehet mindegyik legalább harmadfokú sem, mert G éleinek száma $\left[\frac{3(n-1)}{2}\right] + 1 = \left[\frac{3n-1}{2}\right] < \left[\frac{3n+1}{2}\right]$.

G-ben nem lehet két másodfokú pont éllel összekötve. Ugyanis, ha x_1 és x_2 ilyen pontok lennének, akkor $G' = G - \{x_1, x_2\}$-re $\pi(G') = n-2$ és $\nu(G') = \nu(G) - 3 = \left[\frac{3(n-3)}{2}\right] + 1$ lenne, tehát indukciós feltevésünk szerint G', s így G is tartalmazna alakzatot.

Válasszuk ki G egyik másodfokú pontját: jelöljük x-szel, a rá illeszkedő két él másik végpontját pedig y_1 és y_2-vel. A $G - x = G'$ gráfban nem lehet két egymást nem metsző (azaz közös belső pontot nem tartalmazó) y_1y_2-út, különben G-ben lenne alakzat. G' tehát nem tartalmazhatja az (y_1, y_2) élt, mert akkor y_1 és y_2 is elválasztó pontja volna G-nek. Ezért Menger tétele szerint van G'-ben az y_1 és y_2 pontokat elválasztó x_0 pont (artikuláció). Csak egy ilyen pont létezhet. Meg-

mutatjuk ugyanis, hogy létezik G'-ben két egymást nem metsző x_0y_i-út ($i=1, 2$). E célból tegyük fel, hogy pl. $i=1$-re nem létezne két ilyen út. Ekkor két eset lehetséges:

a) Van G'-ben az y_1 és x_0 pontokat elválasztó pont. Ez azért vezet ellentmondásra, mert akkor a G' gráfot az (y_1, y_2) éllel bővítve olyan $n-1$ pontú gráfot kapnánk, melyben nem lenne alakzat. (Hiszen, ha lenne, ebben az (y_1, y_2) él csak a fül egyik éle lehetne, különben G-ben is volna alakzat. A fül másik élét, és az alakzat körének a fül végpontjai által meghatározott ívét tekintve G' két olyan y_1y_2-útját kapnók, melyeknek csak egy közös belső pontjuk volna.) Ez azonban az indukciós feltevés szerint lehetetlen, mert ezen új gráf éleinek száma $\left[\frac{3(n-1)}{2}\right]$.

b) Létezik G'-ben az (x_0, y_1) él és ezen kívül nincs más x_0y_1-út G'-ben. Ekkor y_1 G-nek csak másodfokú pontja lehet (különben y_1 G-nek elválasztó pontja volna). Ez azért lehetetlen, mert x_0 és y_1 éllel összekötött másodfokú pontok lennének.

Az elmondottak szerint

(8) G bármelyik x másodfokú pontjához egyértelműen hozzátartozik $G-x$-nek egy olyan x_0 pontja, amely az x-hez illeszkedő élek x-től különböző y_1 és y_2 végpontjait $G-x$-ben elválasztja, és létezik $G-x$-ben két egymást nem metsző x_0y_i-út ($i=1, 2$). Az x_0 pontot x *konjugáltjának* nevezzük.

G most meghatározott tulajdonságai alapján bizonyítjuk, hogy

$$v(G) \geqq \left[\frac{3n+1}{2}\right],$$

s ez ellentmondás, hiszen

$$v(G) = \left[\frac{3n-1}{2}\right].$$

Elegendő kimutatnunk, hogy ha x_0 az $x_1, x_2, \ldots, x_k$ másodfokú pontok konjugáltja és ezen pontokon kívül nincs más olyan másodfokú pont G-ben, amelynek x_0 konjugáltja volna, akkor az $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k$ pontok fokának átlaga legalább 3, azaz a pontok fokának összege legalább $3(k+1)$.

A $G_0=G-x_0$ gráf összefüggő, hiszen G-nek nincs elválasztó pontja. Jelöljük az x_i-hez ($i=1, 2, \ldots, k$) illeszkedő két él alkotta utat α_i-vel, és nevezzük az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ utakat α-utaknak.

Legyen $G'=G_0-\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, vagyis hagyjuk el G_0-ból az α-utakat, s jelöljük G' komponenseit $G_1, G_2, \ldots, G_l$-lel. G' szerkezetéről a következőket állapíthatjuk meg:

a) Egy α_j út két végpontja nem lehet ugyanazon G_i komponensben, mert ha igen, akkor e két pontot x_0 nem választaná el $G-x_j$-ben.

b) Nem létezhet a G_i komponenseknek olyan $G_{r_1}\ G_{r_2}, \ldots, G_{r_s}=G_{r_1}$ sorozata sem, melyben a G_{r_j} és $G_{r_{j+1}}$ $(j=1, 2, \ldots, s-1)$ komponenseket G-ben egy-egy α-út köti össze. Ha ui. lenne ilyen sorozat, a komponensek összefüggő volta miatt lenne G_0-ban olyan kör, melyben α-utak is szerepelnek, s ez x_0 definíciója miatt ugyancsak lehetetlen.

c) Minden G_i $(i=1, 2, \ldots, l)$ komponensben legalább egy α-út végződik, hiszen G_0 már összefüggő.

Ezen három tulajdonságból az adódik, hogy ha a G_i komponenseket pontokká, az α-utakat pedig élekké zsugorítjuk össze, akkor G_0-ból egy *fa* keletkezik. Ebből következik, hogy $l=k+1$.

Ha G' valamely G_i komponensében csak egy α-útnak, pl. α_1-nek van végpontja, akkor G-ben az x_0 pontot legalább két él köti össze G_i-beli pontokkal. Ha ui. α_1-nek G_i-ben levő végpontját y-nal jelöljük, (8) szerint legalább két, x_1-en át nem menő, egymást nem metsző x_0y-út van, s mivel ezen utak pontjai x_0 kivételével G_i-ben vannak, x_0-ból valóban legalább két él fut G_i-hez.

Ha G' valamely G_i komponensében pontosan két α-útnak, pl. α_1 és α_2-nek van végpontja, akkor G-ben x_0-t legalább egy él köti össze G_i-beli ponttal. Hiszen ha nem lenne ilyen él, $G-x_1$-ben α_1 két végpontját összekötő utak x_0-on kívül még x_2-n is átmennének, s ez (8) szerint nem állhat fenn.

Ezen két utóbbi állítás felhasználásával x_0 fokszámára alsó becslést adunk:

Ha v_i-vel jelöljük G' olyan komponenseinek számát, amelyekbe i számú α-útnak esik végpontja, akkor x_0 fokszáma legalább $2v_1+v_2$. Másrészt

$$l=k+1=v_1+v_2+\ldots+v_m$$

és

$$2k=v_1+2v_2+\ldots+mv_m,$$

Ezekből

$$k+3=2v_1+v_2-v_4-2v_5-\ldots-(m-3)v_m,$$

s így

$$2v_1+v_2\geqq k+3.$$

Az x_0 pont fokszáma ennélfogva legalább $k+3$, s így az $x_0, x_1, \ldots, x_k$ pontok fokának összege legalább $3k+3$.

Ezzel bizonyításunkat befejeztük.

IRODALOM

[1] TURÁN PÁL, Egy gráfelméleti szélsőértékfeladatról, Mat. és Fiz. Lapok, **48** (1941), 436–452.
[2] P. ERDŐS and T. GALLAI, On maximal paths and circuits of graphs, Math. Acad. Sci. Hung. Acta **10** (1959) 337–356.
[3] BÁRTFAI, P.: Schweitzer verseny megoldás (Erdős gráffeladatára) Mat. Lapok **11** (1960) 175–176 o.
[4] G. DIRAC, In abstrakten Graphen vorhandene vollständige 4-Graphen und ihre Unterteilungen Mathematische Nachrichten, **22**, (1960) 61–85. lásd még Erdős-Pósa cikk, ibid. 2.
[5] Szóbeli közlés.
[6] Math. Lapok, 127. feladat. XII- (1961) p. 254.
[7] K. CORRÁDI and A. HAJNAL, On maximal number of independent circuits of graphs, Math. Acad. Sci Hung. Acta (sajtó alatt).
[8] P. ERDŐS and L. PÓSA, On the maximal number of disjoint circuits of a graph. Math. (Sajtó alatt).
[9] G. DIRAC and P. ERDŐS, On the maximal number of independent circuits in a graph, Math. Acad. Sci. Hung. Acta (sajtó alatt).

О ЗАДАЧАХ, ОТНОСЯЩИХСЯ К ЭКСТРЕМАЛЬНЫМ ЗНАЧЕНИЯМ В ТЕОРИИ ГРАФОВ

Б. Боллобаш, П. Эрдёш

Пусть $G_k^{(n)}$ означает граф, состоящий из n вершин и k рёбер такой, что в нём отсутствуют петли и двойные рёбра.

В статье рассматриваются определения минимальных значений $k=g(n)$ таких, что все графы $G_{g(n)}^{(n)}$ содержат определённые подграфы с предписанными свойствами. В ней приведены два доказательства следующей теоремы, предполагаемой Лайошем Пошa:

Пусть $f(2m)=3m-1$ и $f(2m+1)=3m+1$ $(m=1,2,\ldots)$. Каждый $G_{f(n)}^{n}$ $(n\geqq 4)$ содержит такой подграф, который состоит из одного круга K, из одной вершины x не лежащей на K и из двух рёбер, связывающих вершину x с двумя вершинами круга K.

ÜBER GRAPHENTHEORETISCHE EXTREMALPROBLEME

B. BOLLOBÁS UND P. ERDŐS

Es bezeichne $G_k^{(n)}$ einen solchen Graphen, der aus n Knotenpunkten und k Kanten besteht, und der keine Schlingen und mehrfache Kanten enthält. Die Arbeit beschäftigt sich mit der Bestimmung solcher minimalen $g(n)$ Werte, für die der Graph $G_{g(n)}^{(n)}$ stets Teilgraphen mit gewissen vorgeschriebenen Eigenschaften enthält. Die Arbeit enthält zwei Beweise für den folgenden, von L. PÓSA vermuteten Satz:

Es sei $f(2m)=3m-1$, $f(2m+1)=3m+1 (m=1,2,\ldots)$. Der Graph $G_{f(n)}^{(n)}(n\geqq 4)$ enthält stets einen solchen Teilgraphen, der aus einem Kreis K, aus einem nicht auf K liegenden Knotenpunkt x und aus zwei solchen Kanten besteht, die x mit zwei Knotenpunkten von K verbinden.

Az 1961. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny

A Bolyai János Matematikai Társulat ezévi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyét 1961. november 18. és november 27. között rendezte meg. A versenyen részt vehetett minden egyetemi és főiskolai hallgató, továbbá azok, akik egyetemi vagy főiskolai tanulmányaikat 1961-ben fejezték be. A feladatokat az egyetemek és főiskolák matematikai tanszékei valamint a Társulat helyi tagozatai hirdették ki.

A verseny feladatai az alábbiak voltak:

1. Legyen $\alpha(\neq 1)$ végesrendű csoportelem, továbbá $e(\geqq 2)$ természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy ha az

$$A=\langle 1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{e-1}\rangle$$

komplexus nem csoport, akkor bármely $(2\leqq)k(\leqq e-1)$ természetes számra

$$\langle 1, \alpha^k, \alpha^{2k}, \ldots, \alpha^{(e-1)k}\rangle$$

különbözik A-tól.

2. Bizonyítsuk be, hogy egy R gyűrű akkor és csak akkor egységelemes, ha bármely G R-modulus G triviális részmodulusának és RG-nek direkt összegeként áll elő. (G triviális részmodulusa G összes olyan g elemének halmaza, amelyre minden $r\in R$ esetén $rg=0$. RG az összes rg $(r\in R, g\in G)$ elemek által generált részmodulust jelenti. Egy G R-moduluson olyan „lineáris teret" értünk, amelynek „skaláristartománya" az R, nem szükségképpen egységelemes gyűrű; ha $1\in R$, akkor $1\cdot g=g$ nem szükségképpen teljesül minden $g\in G$ elemre.)

3. Legyen

$$f(x)=x^n+\alpha_1 x^{n-1}+\ldots+\alpha_n \qquad (n\geqq 1)$$

a K test felett irreducibilis polinom. Ekkor bizonyítsuk be, hogy a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-3} & \cdot & \cdot & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{pmatrix}$$

matrixszal felcserélhető, 0-tól különböző matrixok mind invertálhatók.

4. Legyen $f(x)$ a (0, 1) intervallumon értelmezett valós, vagy komplexértékű integrálható függvény, $|f(x)| \leqq 1$. A

$$c_k = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i k x} dx$$

elemekből alkossuk meg az n-edrendű

$$T = (t_{pq})_{p,q=0}^{n-1}, \quad T^* = (t_{pq}^*)_{p,q=0}^{n-1}$$

matrixokat, ahol $t_{pq} = c_{q-p}$, $t_{pq}^* = \overline{c_{p-q}}$ (komplex konjugált), majd ezeknek és matrix-hatványaiknak a segítségével az

$$S = \begin{pmatrix} E & T & T^2 & \dots & T^{m-1} \\ T^* & E & T & \dots & T^{m-2} \\ T^{*2} & T^* & E & \dots & T^{m-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T^{*m-1} & T^{*m-2} & T^{*m-3} & \dots & E \end{pmatrix}$$

m-edrendű hipermatrixot, azaz $(mn)^2$ számból álló matrixot (E az n-edrendű egységmatrix). Mutassuk meg, hogy bármely természetes számok legyenek is n és m, az S matrixnak csupa nem-negatív valós sajátértéke van.

5. Meghatározandók 0-tól különböző valós (skalár) változók mindazon G másodrendű reguláris-matrix értékű függvényei és kétdimenziós vektorok mindazon f kétdimenziós vektor értékű függvényei, amelyekre minden kétdimenziós y vektor és minden másodrendű reguláris X matrix mellett érvényes

$$f(Xy) = G(\det X) X f(y)$$

(det X az X matrix determinánsa).

6. Tegyük fel, hogy az $\{a_n\}$ korlátos végtelen pontsorozatból akárhogyan választunk ki konvergens $\{a_{n_k}\}$ részsorozatot, az $\{a_{n_k+1}\}$ sorozat is konvergál ugyanahhoz a határértékhez. Bizonyítandó, hogy $\{a_n\}$ vagy konvergens, vagy végtelen sok torlódáspontja van és ezek halmaza önmagában sűrű. Adjunk példát a második esetre.

7. Meghatározandók a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

parciális differenciálegyenlet összes

$$u(x, y) = f(x)g(y)$$

alakban felírható megoldásai.

8. Legyen $f(x)$ a $[0, \frac{1}{2}]$ szakaszon értelmezett, alulról konvex differenciálható (a végpontokban természetesen egy oldalról differenciálható) függvény, amelyre $f(0) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = 1$, $f'(0) > 1$ teljesül. Terjesszük ki $f(x)$-et a $[0, 1]$ szakaszra a következőképpen: $f(x) = f(1 - x)$, ha $x \in (\frac{1}{2}, 1]$. Mutassuk meg, hogy azok az x pontok, amelyekből az $x_{n+1} = f(x_n)$ $(x_0 = x, n = 0, 1, 2, \ldots)$ iterációval képzett sorozatban vannak egybeeső pontok, mindenütt sűrű halmazt alkotnak a $[0, 1]$ szakaszban.

9. Egy szabályos pénzdarabbal végzünk dobásokat; a pénz feldobását mindaddig folytatjuk, amíg a dobások eredményeinek sorozatában mind a fej, mind pedig az írás-dobások száma el nem éri a k számot $(k = 1, 2, \ldots)$. Jelölje v_k az ehhez szükséges dobások számát. Meghatározandó a v_k valószínűségi változó eloszlása, és a $\frac{v_k - 2k}{\sqrt{2k}}$ valószínűségi változó határeloszlása, ha $k \to \infty$.

10. Végezzük el a síkban a párhuzamossági axiómától függetlenül vonalzóval és alapmértékkel (etalon) a következő szerkesztést: Merőleges félegyenes állítása az egyenes adott pontjában, az egyenes megadott oldalán úgy, hogy a szerkesztés az előírt félsíkban marad.

* * *

Az 1. feladatot Rédei László, a 2. feladatot Kertész Andor, a 3. feladatot Erdős Jenő és Gyires Béla, a 4. feladatot Szőkefalvi-Nagy Béla, az 5. feladatot Aczél János és Hosszú Miklós, a 6. feladatot Barna Béla, a 7. feladatot Aczél János, a 8. feladatot Barna Béla, a 9. feladatot Rényi Alfréd, a 10. feladatot Szász Pál bocsátotta a Versenybizottság rendelkezésére. Az általuk adott eredeti megoldások egyes részeit egyszerűsítés végett több helyen felhasználjuk az alább ismertetendő megoldásokban.

* * *

A kitűzött feladatokra 30 versenyző nyújtott be megoldást. A beérkezett 164 megoldás igen változatosan oszlik meg a tíz feladat között. Ez azt mutatja, hogy a feladatok közül egyesek lehetővé tették a résztvevők számának növekedését az előző évhez viszonyítva, mások pedig módot adtak a többi közül kiemelkedő teljesítményekre. Számos ötletes megoldás érkezett be, azonban több versenyző feladatmegoldásai között előfordulnak hibásak, vagy olyanok, amelyekben csupán kezdeti lépéseket tudott tenni. Megjegyezzük, hogy a dolgozatok egy részének fogalmazása nem kellően szabatos. A verseny, az említett hiányosságoktól eltekintve, igen sikeres volt.

Az I. díjat a Versenybizottság MAKKAI MIHÁLYnak, a budapesti Eötvös Lóránd Tudományegyetem V. éves matematika szakos hallgatójának ítélte oda. MAKKAI mind a tíz feladatot megoldotta. Megoldásai ötletesek, és arról tanúskodnak, hogy szerzőjük igyekszik megtalálni a problémák mélyebb összefüggéseit. Kiemelendő a 3., 6., 7. feladat ötletes és szép megoldása, és figyelmet érdemlő általánosításuk.

A Versenybizottság három II. díjat adott. Ezeknek nyertesei BÖRÖCZKY KÁROLY, a budapesti Eötvös Lóránd Tudományegyetem V. éves matematika szakos hallgatója, MÁLYUSZ KÁROLY, a budapesti Eötvös Lóránd Tudományegyetem V. éves matematika szakos hallgatója, TUSNÁDY GÁBOR, a budapesti Eötvös Lóránd Tudományegyetem III. éves matematika szakos hallgatója.

BÖRÖCZKY az 1., 2., 3., 5., 6., 7., 8., 9., 10. feladatra küldött be megoldást. Szép megoldást adott az 5. és 6. feladatra, és ezeket általánosította.

MÁLYUSZ mind a tíz feladatra küldött be megoldást. Elegáns a 3., 4., 6., 9. feladat megoldása, a 6.-at általánosította. Az 5. feladat megoldása hiányos.

TUSNÁDY az 1., 2., 3., 5., 6., 7., 8., 9., 10. feladatra küldött be megoldást. Szép megoldásokat adott az 5. és 7. feladatra, az 5.-é általánosabb esetben is érvényes.

A III. díjat a Versenybizottság HALÁSZ GÁBORnak, a budapesti Eötvös Lóránd Tudományegyetem III. éves matematika szakos hallgatójának ítélte oda. HALÁSZ mind a tíz feladatra küldött be megoldást. Szép megoldásokat adott az 5. és 7. feladatra, az 5.-é általánosabb esetben is érvényes, a 7.-et általánosította. A 2., 4., 9. feladatra küldött megoldás nem fogadható el.

A Versenybizottság:

ACZÉL JÁNOS
BARNA BÉLA
ERDŐS JENŐ
GYARMATHI LÁSZLÓ
GYIRES BÉLA
KERTÉSZ ANDOR
RAPCSÁK ANDRÁS

1. feladat

Tegyük fel, hogy az $A=\langle 1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{e-1}\rangle$ és a $B=\langle 1, \alpha^k, \alpha^{2k}, \ldots, \alpha^{(e-1)k}\rangle$ komplexus megegyezik egymással. Ekkor $\alpha^{k-1} \in A$ miatt van olyan $(0 \leqq) i (\leqq e-1)$ egész szám, hogy $\alpha^{k-1}=\alpha^{ik}$; világos, hogy $i>0$,

mert ellenkező esetben $\alpha^{k-1}=1$ állna fenn és így A csoport volna. Az α csoportelem rendjét n-nel jelölve, $\alpha^{(i-1)k}\in A$ miatt van olyan $(0\leqq)l$ $(\leqq e-1)$ egész szám, hogy $\alpha^l=\alpha^{(i-1)k}=\alpha^{ik}\cdot\alpha^{-k}=\alpha^{k-1}\cdot\alpha^{-k}=\alpha^{-1}=\alpha^{n-1}$, vagyis $\alpha^{n-1-l}=1$. Ez pedig lehetetlen, mert az $n-1-l$ természetes szám kisebb az α rendjénél. Tehát $A\neq B$.

Bollobás Béla, Megyesi László, Móricz Ferenc.

Az 1. feladatot megoldották még: Böröczky Károly, Elbert Árpád, Fischer Pál, Galambos János, Halász Gábor, Kalmár Ágota, Katona Gyula, Losonczi László, Makkai Mihály, Mályusz Károly, Mezei Ferenc, Mihályffy László, Sárközi András, Szabados József, Szaniszló József, Szodoray Erzsébet, Szóda Lajos, Tusnády Gábor.

2. feladat

Legyen először R egységelemes gyűrű és G tetszőleges R-modulus. Ekkor G triviális G_0 részmodulusának és RG-nek direkt összege. Ugyanis egyrészt rg $(r\in R, g\in G)$ csak úgy lehet eleme G_0-nek, ha $rg=(1\cdot r)g=$ $=1\cdot(rg)=0$; másrészt bármely $g(\in G)$ elem előállítható egy G_0-beli és egy $\cdot RG$-beli elem összegeként, a $g=(g-1\cdot g)+1\cdot g$ felbontás alapján.

Megfordítva, legyen most R olyan gyűrű, hogy minden G R-modulus triviális részmodulusának és RG-nek direkt összege. Értelmezzük az összes (r, n) $(r\in R, n$ racionális egész szám) párok G halmazán az összeadást komponensenkénti összeadással, az R-beli elemekkel való szorzást pedig az $s(r, n)=(sr+ns, 0)$ $(s\in R)$ előírással. Ezáltal G-t R-modulussá tettük. Világos, hogy RG-t éppen az $(r, 0)$ $(r\in R)$ párok alkotják. A $G=G_0+RG$ (G_0 a G triviális részmodulusa) direkt felbontás alapján a $(0, 1)$ $(\in G)$ pár előállítható $(0, 1)=(-e, 1)+(e, 0)$ alakban $((-e, 1)\in G_0$, $(e, 0)\in RG)$, ahonnan tetszőleges $r(\in R)$ elemmel való szorzással $(r-re, 0)=(0, 0)$ következik. tehát $r-re=0$, vagyis e jobboldali egységeleme R-nek. Az e baloldali egységelem is R-ben. Ugyanis bármely $(r-er, 0)$ $(r\in R)$ pár eleme RG-nek, és $s(r-er, 0)=(sr-ser, 0)=(0, 0)$ miatt eleme G_0-nak is, tehát $r-er=0$.

Böröczky Károly, Makkai Mihály, Mályusz Károly, Simon László, Tusnády Gábor.

3. feladat

Legyen R a K test feletti $K[x]$ polinomgyűrű. Az R gyűrű R-modulusnak tekinthető és az f polinom által generált $(f)(\subseteqq R)$ ideál ennek részmodulusa; legyen G az $R/(f)$ faktormodulus.

A G R-modulus minden 0-tól különböző endomorfizmusa (vagyis G önmagába való olyan operátorhomomorf leképezése, amely G-t nem 0-ba viszi át) invertálható. Ugyanis f irreducibilitása miatt (f) maximális ideál R-ben, így G-nek nincs valódi részmodulusa, tehát a G bármelyik 0-tól különböző endomorfizmusa G-t önmagára képezi le és magja 0.

Világos, hogy a G R-modulus endomorfizmusai megegyeznek a G K-vektortér önmagába való olyan lineáris leképezéseivel, amelyek felcserélhetők az $x \in R$ polinommal való szorzás révén adódó $g \to xg$ (g végigfut a G elemein) leképezéssel.

Könnyű belátni, hogy ennek a $g \to xg$ lineáris leképezésnek a G K-vektortér $\overline{1}, \overline{x}, \ldots, \overline{x^{n-1}}$ (a $h \in R$ polinomot tartalmazó $R/(f)$-beli maradékosztályt $\overline{h}$-sal jelöljük) bázisára vonatkozó matrixa éppen a feladatban előforduló matrix. Ebből, előbbi két megállapításunk szerint a feladat állítása következik.

Makkai Mihály

A 3. feladatot megoldották még: BÖRÖCZKY KÁROLY, HALÁSZ GÁBOR, MÁLYUSZ KÁROLY, MEGYESI LÁSZLÓ, SZÁSZ DOMOKOS, TUSNÁDY GÁBOR.

Megjegyzés: MAKKAI MIHÁLY a $K[x]$ polinomgyűrű feletti modulusok endomorfizmusait általánosabb esetben is vizsgálja, és megállapítja, hogy a feladatban foglalt állítás pontosan azokra a matrixokra érvényes, amelyeknek a karakterisztikus polinomja K felett irreducibilis.

4. feladat

T a komplex szám-n-esek V_n terének egy lineáris operátorát határozza meg. Megmutatjuk, hogy ez az operátor kontrakciója V_n-nek (vagyis bármely $\xi (\in V_n)$ esetén $\| T\xi \| \leqq \| \xi \|$). A $\xi (\in V_n)$ vektor komponensei legyenek $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}$; ekkor, a Bessel-féle egyenlőtlenség és $|f(x)| \leqq 1$ felhasználásával,

$$\|T\xi\|^2 = \sum_{p=0}^{n-1} \left| \sum_{r=0}^{n-1} t_{pr} \xi_r \right|^2 = \sum_{p=0}^{n-1} \left| \sum_{r=0}^{n-1} c_{r-p} \xi_r \right|^2 =$$

$$= \sum_{p=0}^{n-1} \left| \int_0^1 f(x) \sum_{r=0}^{n-1} e^{-2\pi i r x} \xi_r \cdot e^{2\pi i p x} dx \right|^2 \leqq$$

$$\leqq \int_0^1 \left| f(x) \sum_{r=0}^{n-1} e^{-2\pi i r x} \xi_r \right|^2 dx \leqq \int_0^1 \left| \sum_{r=0}^{n-1} e^{-2\pi i r x} \xi_r \right|^2 dx = \|\xi\|^2.$$

Közvetlen igazolható, hogy a feladatban szereplő S hipermatrix előállítható $S=Q^*DQ$ alakban, ahol

$$Q=\begin{pmatrix} E & T & T^2 & \cdot & \cdot & T^{m-1} \\ 0 & E & T & \cdot & \cdot & T^{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & E \end{pmatrix}, \quad Q^*=\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ T^* & E & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T^{*m-1} & T^{*m-2} & T^{*m-3} & \cdot & \cdot & E \end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & E-T^*T & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & E-T^*T \end{pmatrix}.$$

A T előbb bebizonyított tulajdonsága miatt D-nek minden blokkja pozitív szemidefinit matrix, ezért D is pozitív szemidefinit matrix, és ebből következik, hogy S is pozitív szemidefinit matrix, mert bármely $\hat{\xi}(\in V_{mn})$ vektor esetén $(S\hat{\xi}, \hat{\xi})=(Q^*DQ\hat{\xi}, \hat{\xi})=(D(Q\hat{\xi}), Q\hat{\xi})\geqq 0$. Tehát az S matrixnak csupa nem-negatív valós sajátértéke van.

Szőkefalvi-Nagy Béla

A 4. feladatot megoldották: MAKKAI MIHÁLY, MÁLYUSZ KÁROLY.

5. feladat

1. Megoldás. Bebizonyítjuk, hogy a szóbanforgó függvényegyenlet megoldásai csakis a következő függvénypárok lehetnek (és ezek nyilván megoldások):

$f(x)\equiv 0$ és $G(\xi)$ tetszőleges függvény;

$f(x)=\lambda x$ és $G(\xi)\equiv E$, ahol λ tetszőlegesen rögzített szám és E az egységmatrix.

Legyen $f(x)$ és $G(\xi)$ megoldása az

$$f(Xy)=G(\det X)Xf(y) \tag{1}$$

függvényegyenletnek; az $f(x)\equiv 0$ triviális esetet kizárjuk a vizsgálatból.

Megmutatjuk, hogy $G(1)=E$. Evégett alkalmazzuk (1)-et kétszer egymásután:

$$f(Xy)=f(EXy)=G(\det E)EG(\det X)Xf(y)=G(1)G(\det X)Xf(y).$$

Ezt összehasonlítva (1)-gyel,

$$G(\det X)Xf(y)=G(1)G(\det X)Xf(y) \tag{2}$$

következik. Legyen az $f(y_0)$ vektornak pl. az első komponense, $f_1(y_0)$ nullától különböző. (2)-ben elvégezve az $y=y_0$ és $X=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$ $(x\neq 0)$ helyettesítést:

$$G(1)\begin{pmatrix} xf_1(y_0) \\ \frac{1}{x}f_2(y_0) \end{pmatrix}=[G(1)]^2\begin{pmatrix} xf_1(y_0) \\ \frac{1}{x}f_2(y_0) \end{pmatrix}.$$

Igy a

$$G(1)=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad [G(1)]^2=\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$$

matrix elemeire minden $x\neq 0$ számnál

$$g_{11}xf_1(y_0)+g_{12}\frac{1}{x}f_2(y_0)=q_{11}xf_1(y_0)+q_{12}\frac{1}{x}f_2(y_0)$$

és

$$g_{21}xf_1(y_0)+g_{22}\frac{1}{x}f_2(y_0)=q_{21}xf_1(y_0)+q_{22}\frac{1}{x}f_2(y_0)$$

teljesül, tehát $f_1(y_0)\neq 0$ miatt $g_{11}=q_{11}$ és $g_{21}=q_{21}$. Hasonlóan, (2)-be $y=y_0$-t és $X=\begin{pmatrix} 0 & y \\ -\frac{1}{y} & 0 \end{pmatrix}$-t helyettesítve, a $g_{12}=q_{12}$ és $g_{22}=q_{22}$ egyenlőséget nyerjük. Tehát $G(1)=[G(1)]^2$, ahonnan a $G(1)$ matrix regularitása miatt $G(1)=E$ következik.

Megmutatjuk, hogy $f(0)=0$. Ennek igazolásához elegendő (1)-be $y=0$-t és $X=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$-et $(x\neq 0)$ helyettesíteni; így az $f(0)=\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ vektorra

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}=G(1)\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x\mu_1 \\ \frac{1}{x}\mu_2 \end{pmatrix}$$

áll fenn minden $x\neq 0$ számnál, tehát $\mu_1=\mu_2=0$.

Megmutatjuk, hogy $f(x)=\lambda x$ és $G(\xi)\equiv E$. Legyen az $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ vektornak pl. az első komponense nullától különböző. Helyettesítsük

(1)-be az $y=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ vektort és sorban az

$$X=\begin{pmatrix}x_1 & 0\\ x_2 & 1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1 & 0\\ x_2 & \dfrac{1}{x_1}\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1 & 1\\ x_2 & \dfrac{1+x_2}{x_1}\end{pmatrix}$$

matrixokat. Ekkor az $f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}$ vektorral és a

$$G(x_1)=\begin{pmatrix}g_{11}(x_1) & g_{12}(x_1)\\ g_{21}(x_1) & g_{22}(x_1)\end{pmatrix}$$

matrixszal az alábbi összefüggések érvényesek:

$$f(x)=f\left(\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\right)=G(x_1)\begin{pmatrix}x_1\lambda_1\\ x_2\lambda_1+\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_{11}(x_1) & g_{12}(x_1)\\ g_{21}(x_1) & g_{22}(x_1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\lambda_1\\ x_2\lambda_1+\lambda_2\end{pmatrix},$$

$$f(x)=\begin{pmatrix}x_1\lambda_1\\ x_2\lambda_1+\dfrac{\lambda_2}{x_1}\end{pmatrix},\quad f(x)=\begin{pmatrix}x_1\lambda_1+\lambda_2\\ x_2\lambda_1+\dfrac{1+x_2}{x_1}\lambda_2\end{pmatrix}.$$

A két utóbbi egyenlőség összevetéséből $\lambda_2=0$ és $f(x)=\begin{pmatrix}\lambda_1 x_1\\ \lambda_1 x_2\end{pmatrix}=\lambda_1 x$

már következik, ha $x\neq 0$. Ennek felhasználásával az első egyenlőségből nyerjük, hogy

$$g_{11}(x_1)x_1\lambda_1+g_{12}(x_1)x_2\lambda_1=x_1\lambda_1$$

és

$$g_{21}(x_1)x_1\lambda_1+g_{22}(x_1)x_2\lambda_1=x_2\lambda_1.$$

Mivel a két utóbbi összefüggés minden x_2 esetén fennáll és $\lambda_1\neq 0$ (mert $f(x)$ nem azonosan 0),

$$g_{11}(x_1)=1,\quad g_{12}(x_1)=0,\quad g_{21}(x_1)=0,\quad g_{22}(x_1)=1,$$

vagyis $G(x_1)=E$ bármely $x_1\neq 0$ számnál. Tekintve, hogy $f(0)=0$, a keresett megoldás valóban $f(x)=\lambda x$ és $G(\xi)=E$.

Aczél János—Hosszú Miklós

2. Megoldás. A feladat értelemszerűen általánosítható kétdimenziós térről n-dimenziós térre (tehát a kétdimenziós vektorok szerepét n-dimenziós vektorok, a másodrendű matrixokét pedig n-edrendű matrixok veszik át). Bebizonyítjuk, hogy többdimenziós esetben a szóbanforgó függvényegyenlet megoldásai ugyanolyan alakban adhatók meg, mint előbb a kétdimenziós esetben.

Legyen $f(x)$ és $G(\xi)$ megoldása (1)-nek; az $f(x) \equiv 0$ triviális esetet kizárjuk a vizsgálatból.

Megmutatjuk, hogy bármely $y \neq 0$ vektorhoz van olyan λ_y szám, amellyel $f(y) = \lambda_y y$ teljesül. Tegyük fel, hogy valamely $y_0 \neq 0$ esetén $f(y_0) = \lambda y_0$ egyetlen λ számnál sem áll fenn. Világos, hogy bármely λ számhoz van olyan X matrix, amellyel $Xy_0 = y_0$ és $Xf(y_0) = f(y_0) + \lambda y_0$ teljesül és $\det X = 1$. Ezt az y_0-t és X-et behelyettesítve függvényegyenletünkbe,

$$f(y_0) = f(Xy_0) = G(1)Xf(y_0) = G(1)[f(y_0) + \lambda y_0] = G(1)f(y_0) + \lambda G(1)y_0$$

adódik. Ez azonban nem állhat fenn minden λ-nál, mert $G(1)$ reguláritása és $y_0 \neq 0$ miatt $G(1)y_0 \neq 0$.

Megmutatjuk, hogy ha $y \neq 0$, akkor $f(y) \neq 0$. Evégett tekintsünk egy olyan $y_0 \neq 0$ vektort, amelynél $f(y_0) \neq 0$ ($f(0) = 0$ hasonlóan egyszerűen igazolható, mint a kétdimenziós esetben). Világos, hogy bármely $y \neq 0$ vektorhoz van olyan X reguláris matrix, amellyel $Xy_0 = y$ teljesül. Így (1)-et felhasználva,

$$f(y) = f(Xy_0) = G(\det X)Xf(y_0) \neq 0$$

következik.

Megmutatjuk, hogy ha az X matrixra $\det X = 1$ áll fenn, akkor minden y vektornál $f(Xy) = Xf(y)$. Az (1) szerint $\det X = 1$ esetén minden y vektornál $f(Xy) = G(1)Xf(y)$. Így az $X = E$ helyettesítéssel az előző két részállítás alapján $\lambda_y y = G(1)\lambda_y y$ és $\lambda_y \neq 0$, ezért $y = G(1)y$, minden y vektornál. Tehát $G(1) = E$, ahonnan

$$f(Xy) = G(1)Xf(y) = Xf(y)$$

következik.

Megmutatjuk, hogy az $f(y) = \lambda_y y$ ($y \neq 0$) összefüggésben szereplő λ_y független az y-tól. Legyen $f(y_0) = \lambda y_0$ ($y_0 \neq 0$). Világos, hogy bármely $y \neq 0$ vektorhoz van olyan X matrix, amellyel $Xy_0 = y$ teljesül, sőt az is feltehető, hogy $\det X = 1$. Így az előző részállítás alapján

$$f(y) = f(Xy_0) = Xf(y_0) = X\lambda y_0 = \lambda Xy_0 = \lambda y,$$

vagyis $\lambda_y = \lambda$.

Végül megmutatjuk, hogy $G(\xi) \equiv E$. Az (1) szerint, $f(y) = \lambda y$ ($\lambda \neq 0$) felhasználásával, minden X reguláris matrixnál és y vektornál

$$\lambda Xy = f(Xy) = G(\det X)Xf(y) = G(\det X)X\lambda y$$

érvényes. Innen, $\lambda \neq 0$ és X regularitása miatt, $G(\det X) = E$ következik. **Tehát** $G(\xi) \equiv E$.

Tusnády Gábor

Az 5. feladatot megoldották még: BÖRÖCZKY KÁROLY, GALAMBOS JÁNOS, HALÁSZ GÁBOR, KATONA GYULA, LOSONCZI LÁSZLÓ, MAKKAI MIHÁLY, SÁRKÖZI ANDRÁS, SIMON LÁSZLÓ, SZABADOS JÓZSEF.

Megjegyzés: BÖRÖCZKY KÁROLY, HALÁSZ GÁBOR, MAKKAI MIHÁLY, SIMON LÁSZLÓ megoldása érvényes többdimenziós esetben is.

6. feladat

1. Megoldás. Legyen $\{a_n\}$ az egyenes pontjainak olyan sorozata, amely rendelkezik a feladatban említett tulajdonságokkal, és tegyük fel, hogy az $\{a_n\}$ torlódási pontjai H halmazának van α izolált pontja. Azt kell megmutatni, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n$ létezik. Evégett tekintsük az α-nak egy olyan U környezetét, amely nem tartalmaz α-tól különböző H-beli pontot; legyen $\{a_{n_k}\}$ $(n_1 < n_2 < \ldots)$ az $\{a_n\}$ sorozat U-beli tagjaiból álló sorozat (egy sorozat két tagját akkor is különbözőnek tekintjük, ha csak indexeik különböznek). Világos, hogy $\lim_{k\to\infty} a_{n_k}$ létezik és α-val egyenlő, így a feladatban szereplő feltétel szerint $\lim_{k\to\infty} a_{n_k+1} = \alpha$. Ezért az $\{a_{n_k+1}\}$ sorozatnak legfeljebb véges számú tagja nem tartozik U-hoz. Ennélfogva az $\{a_{n_k+1}\}$ sorozat tagjai, legfeljebb véges számú kivétellel, előfordulnak az $\{a_{n_k}\}$ sorozatban. Ebből következik, hogy az $\{a_{n_k}\}$ sorozat legfeljebb véges számú tagot nem tartalmaz az $\{a_n\}$ sorozatból, tehát $\lim_{k\to\infty} a_{n_k}$-val együtt $\lim_{n\to\infty} a_n$ is létezik.

Most példaként megadunk egy olyan sorozatot, amely eleget tesz a feladat követelményeinek, és mégsem konvergens. Helyezzük egymás után az

$$s_n = \left\{ \frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}, \frac{n-1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{0}{n} \right\}$$

véges sorozatokat $(n = 1, 2, \ldots)$. Az így nyert $\{a_n\}$ végtelen sorozatból akárhogyan választunk ki konvergens $\{a_{n_k}\}$ részsorozatot, az $\{a_{n_k+1}\}$ sorozat is konvergál ugyanahhoz a határértékhez, mert $a_m \in s_n$ esetén $|a_{m+1} - a_m| \leqq \frac{1}{n}$. Ugyanakkor az $\{a_n\}$ sorozat nem konvergens.

Halász Gábor, Kalmár Ágota, Kátai Imre

2. Megoldás. Legyen R kompakt metrikus tér. Bebizonyítjuk, hogy ha R-beli pontok valamely $\{a_n\}$ sorozata rendelkezik a feladatban említett tulajdonsággal, akkor az $\{a_n\}$ sorozat torlódási pontjai összefüggő (és nyilván zárt, nem üres) H halmazt alkotnak.

Evégett tegyük fel, hogy H nem összefüggő halmaz, vagyis hogy H előállítható két, közös pont nélküli nem-üres H_1 és H_2 zárt halmaz egyesítési halmazaként. Az R metrikus térnek van olyan U nyilt részhalmaza, amelynek $\bar{U}$ lezártja nem tartalmaz H_2-beli elemet és H_1 részhalmaza U-nak. Megmutatjuk, hogy az adott $\{a_n\}$ sorozatnak végtelen sok a_n tagja olyan, hogy $a_n \in R \setminus \bar{U}$ és $a_{n+1} \in \bar{U}$. Tegyük fel, hogy csak véges számú ilyen tulajdonságú tagja van sorozatunknak. Ekkor vagy $R \setminus \bar{U}$ vagy $\bar{U}$ tartalmazza a sorozat tagjait, legfeljebb véges számú kivétellel (mert különben végtelen sok indexnél lépne ki sorozatunk az $R \setminus \bar{U}$ halmazból). Ámde ez nem állhat fenn, mert ekkor vagy H_1 vagy H_2 üres halmaz volna; ugyanis egy H_1 (ill. H_2)-beli ponthoz konvergáló sorozatnak végtelen sok tagját tartalmazza az U (ill. $R \setminus \bar{U}$) nyílt halmaz. Legyen tehát $\{a_{p_k}\}$ $(p_1 < p_2 < \ldots)$ olyan végtelen részsorozata az $\{a_n\}$-nek, hogy minden k-nál $a_{p_k} \in R \setminus \bar{U}$ és $a_{p_k+1} \in \bar{U}$ teljesüljön. Mivel R kompakt metrikus tér, az $\{a_{p_k}\}$-nak van $\{a_{n_k}\}$ $(n_1 < n_2 < \ldots)$ konvergens részsorozata. Ha mármost $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} \in H_2$, akkor a feladatban szereplő feltétel szerint $\lim_{k\to\infty} a_{n_k+1} \in H_2$, ami lehetetlen, mert az $\{a_{n_k}\}$ sorozat konstrukciója alapján minden a_{n_k+1} tag eleme a H_2-beli pontot nem tartalmazó $\bar{U}$ zárt halmaznak. Ha pedig $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} \in H_1$, akkor az U nyilt halmaz tartalmaz $\{a_{n_k}\}$-beli elemeket, ami $a_{n_k} \in R \setminus \bar{U}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ miatt lehetetlen. Tehát H csak összefüggő halmaz lehet.

Makkai Mihály

A 6. feladatot megoldották még: Bleyer András, Bollobás Béla, Böröczky Károly, Elbert Árpád, Katona Gyula, Mályusz Károly, Megyesi László, Móricz Ferenc, Sárközi András, Szász Domokos, Szóda Lajos, Szűcs József, Tusnády Gábor.

Megjegyzés: Makkai Mihály azt is megmutatta, hogy egy kompakt metrikus tér bármely nem-üres összefüggő zárt részhalmaza előáll valamely, a feladatban említett tulajdonságú pontsorozat összes torlódási pontjainak halmazaként. A torlódási pontok halmazának összefüggő voltát Böröczky Károly, Katona Gyula, Mályusz Károly, Tusnády Gábor is megállapítja. Böröczky Károly, Mályusz Károly, Szücs József, Tusnády Gábor metrikus terekben végzik el a megoldást.

7. feladat

Bebizonyítjuk, hogy a szóbanforgó differenciálegyenlet $u(x, y) = f(x)g(y)$ alakban felírható megoldásai csakis az

$$u(x, y) = (c_1 + c_2 x)e^{ax}e^{ay}$$

és

$$u(x, y) = (c_1 + c_2 y) e^{ay} e^{ay}$$

(a, c_1, c_2 tetszőleges állandók) függvények lehetnek (és ezek nyilván megoldások).

Legyen $u(x, y) = f(x)g(y)$ tetszőleges megoldása differenciálegyenletünknek; ezt a helyettesítést elvégezve, az

(1) $$f''(x)g(y) + f(x)g''(y) - 2f'(x)g'(y) = 0$$

összefüggést nyerjük. Legyen valamely y_0 helyen $g(y_0) \neq 0$ (az $u(x, y \equiv 0$ triviális esetet kizárjuk a vizsgálatból); az (1) egyenletet $g(y_0)$-val osztva egy

$$f''(x) - 2af'(x) + bf(x) = 0$$

alakú egyenlethez jutunk. Innen $f''(x)$-et kifejezve és (1)-be helyettesítve, az

(2) $$f(x) \cdot [g''(y) - b \cdot g(y)] = 2f'(x)[g'(y) - a \cdot g(y)]$$

összefüggést kapjuk. Most ezzel az egyenlettel kapcsolatban két esetet különböztetünk meg. Legyen először $g'(y) - ag(y) \equiv 0$. Ekkor $g(y) = ce^{ay}$. Ezt behelyettesítve (1)-be:

$$f''(x) - 2af'(x) + a^2 f(x) = 0,$$

ahonnan $f(x) = (\bar{c}_1 + \bar{c}_2 x) e^{ax}$. Tehát ekkor $u(x, y) = (c_1 + c_2 x) e^{ax} e^{ay}$. A második esetben tegyük fel, hogy $g'(y) - ag(y)$ nem azonosan 0. Ekkor valamely y_1 helyen $g'(y_1) - ag(y_1) \neq 0$; ezzel osztva (2)-t: $f'(x) = \alpha f(x)$, ahonnan $f(x) = ke^{\alpha x}$. Ezt behelyettesítve (1)-be:

$$g''(y) - 2\alpha g'(y) + \alpha^2 g(y) = 0,$$

így $g(y) = (\bar{k}_1 + \bar{k}_2 y) e^{\alpha y}$. Tehát ekkor $u(x, y) = (k_1 + k_2 y) e^{\alpha y} e^{\alpha x}$.

Losonczi László

A 7. feladatot megoldották még: BOLLOBÁS BÉLA, BÖRÖCZKY KÁROLY, ELBERT ÁRPÁD, HALÁSZ GÁBOR, MAKKAI MIHÁLY, MÁLYUSZ KÁROLY, MEZEI FERENC, SÁRKÖZI ANDRÁS, TUSNÁDY GÁBOR.

Megjegyzés: HALÁSZ GÁBOR és MAKKAI MIHÁLY általánosítási lehetőségre is rámutatott.

8. feladat

Ha az x pontból az $x_{n+1} = f(x_n)$ ($x_0 = x$, $n = 0, 1, 2, \ldots$) iterációval képzett sorozatban vannak egybeeső pontok, akkor x-et szinguláris pontnak mondjuk. (Szinguláris pont például az $x = \frac{1}{2}$ pont.) Azt kell tehát bebizonyítani, hogy a szinguláris pontok mindenütt sűrű halmazt alkotnak a [0, 1] szakaszban. Tegyük fel ennek az ellen-

kezőjét, vagyis azt, hogy valamely (a, b) $(0 \leqq a < b \leqq 1)$ szakaszban nincs szinguláris pont. Ekkor $\frac{1}{2} \notin (a, b)$, vagyis $f(x)$ monoton az (a, b) szakaszban, így az (a, b)-beli x pontokhoz tartozó $f(x)$ függvényértékek egy olyan (a_1, b_1) $(0 \leqq a_1 < b_1 \leqq 1)$ szakaszt alkotnak, amelynek $f(a)$ és $f(b)$ a végpontjai (valamilyen sorrendben). Ezért a Lagrange-féle középértéktétel szerint, felhasználva az $f(x)$ függvény $[0, \frac{1}{2}]$ ill. $[\frac{1}{2}, 1]$ feletti konvexitását is, $b_1 - a_1 \geqq q(b-a)$ következik, ahol $q = f'(0)$. Az is világos, hogy az (a_1, b_1) szakaszban nincs szinguláris pont (mert egy (a_1, b_1)-beli szinguláris pont (a, b)-beli inverz képe is nyilván szinguláris pont volna), így az az eljárás, amellyel az (a, b) szakaszból az (a_1, b_1) szakaszhoz jutottunk, megismételhető az (a_1, b_1) szakaszból kiindulva, s bármeddig folytatható. Az n-edik lépésben nyilván olyan (a_n, b_n) $(0 \leqq a_n < b_n \leqq 1)$ szakaszt nyerünk, amelyre $b_n - a_n \geqq q^n(b-a)$ áll fenn. Ez pedig nem teljesülhet minden n-nél, mert $q > 1$.

Kátai Imre, Simon László, Szász Domokos

A 8. feladatot megoldották még: BÁNKFALVI ZSOLT, BLEYER ANDRÁS, BOLLOBÁS BÉLA, BÖRÖCZKY KÁROLY, ELBERT ÁRPÁD, FISCHER PÁL, GALAMBOS JÁNOS, HALÁSZ GÁBOR, KALMÁR ÁGOTA, KATONA GYULA, MAKKAI MIHÁLY, MÁLYUSZ KÁROLY, MEGYESI LÁSZLÓ, SZÓDA LAJOS, TUSNÁDY GÁBOR.

Megjegyzés: GALAMBOS JÁNOS és TUSNÁDY GÁBOR valamivel erősebb állítást bizonyítanak. BÖRÖCZKY KÁROLY, MAKKAI MIHÁLY, MÁLYUSZ KÁROLY, TUSNÁDY GÁBOR rámutat a feladat feltételeinek egyszerűbbekkel való helyettesíthetőségére.

9. feladat

Először meghatározzuk a v_k valószínűségi változó eloszlását, vagyis a $P(v_k = n)$ valószínűséget bármely n természetes számnál. A feladat szerint $v_k = n$ azt jelenti, hogy n dobás közül vagy legalább k írás-dobás van és a fej k-adszor éppen az n-edik dobásnál jelentkezik, vagy pedig legalább k fej-dobás van és az írás k-adszor éppen az n-edik dobásnál jelentkezik. Ha $n < 2k$, akkor természetesen $P(v_k = n) = 0$, így elegendő az $n \geqq 2k$ esettel foglalkozni. Mivel annak a valószínűsége, hogy n dobás között legalább k írás van és éppen az n-edik dobásra érjük el a k-adik fejet, $\frac{1}{2^n} \cdot \binom{n-1}{k-1}$-vel egyenlő, és mivel ugyanannyi a valószínűsége a fej és írás szerepének felcserélésével előálló eseménynek is, ezért $n \geqq 2k$ esetén

$$P(v_k = n) = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \binom{n-1}{k-1}.$$

Mielőtt rátérnénk a feladatban szereplő határeloszlás kiszámítására, a továbbiak szempontjából célszerű alakban fejezzük ki a $P(\nu_k < x)$ valószínűséget, $x > 2k$ esetén. Evégett újabb valószínűségi változókat vezetünk be. Jelöljük μ_k-val az ahhoz szükséges dobások számát, hogy éppen k fejet kapjunk; μ_k' értelmezése hasonló, csupán a fej és írás szerepét cseréljük fel. Nyilvánvaló, hogy

$$P(\nu_k < x) = P(2k \leqq \mu_k < x) + P(2k \leqq \mu_k' < x) =$$
$$= 2P(2k \leqq \mu_k < x) = 2[P(\mu_k < x) - P(\mu_k < 2k)].$$

A fej- és írásdobások szimmetrikus szerepe alapján világos, hogy $P(\mu_k < 2k) = \frac{1}{2}$, mert bizonyos, hogy egy dobássorozatban már $2k$-nál kevesebb dobás között előfordul legalább k fej, vagy legalább k írás. Ezért $x > 2k$ esetén

$$P(\nu_k < x) = 2P(\mu_k < x) - 1.$$

A $\dfrac{\nu_k - 2k}{\sqrt{2k}}$ valószínűségi változó határeloszlásának meghatározását a központi határeloszlás tételre vezetjük vissza. Jelöljük ξ_i-vel egy dobássorozatban az $i-1$-edik fej elérése után ahhoz szükséges dobások számát, hogy ismét fej jelentkezzék. Nyilvánvaló, hogy $\mu_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k$, és $\xi_1, \ldots, \xi_k$ teljesen független, $\frac{1}{2}$ paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változók. Így a központi határeloszlás tétel szerint, felhasználva azt, hogy az $\frac{1}{2}$ paramétexű geometriai eloszlás várható értéke és szórásnégyzete is 2-vel egyenlő, a következő összefüggést nyerjük $x > 0$ (vagyis $\sqrt{2k} \cdot x + 2k > 2k$) esetén:

$$P\left(\frac{\nu_k - 2k}{\sqrt{2k}} < x\right) = P(\nu_k < \sqrt{2k} \cdot x + 2k) = 2P(\mu_k < \sqrt{2k} \cdot x + 2k) - 1 =$$
$$= 2P\left(\frac{\mu_k - 2k}{\sqrt{2k}} < x\right) - 1 \to 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt - 1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-x}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Végül, ha $x \leqq 0$, akkor természetesen $P\left(\dfrac{\nu_k - 2k}{\sqrt{2k}} < x\right) = 0$.

Makkai Mihály

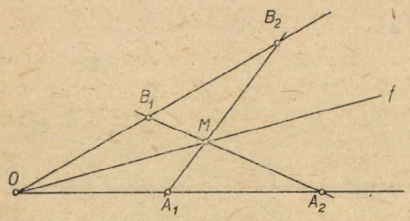
10. feladat

Először másik két szerkesztési feladatot oldunk meg, a párhuzamossági axiómától függetlenül, vonalzóval és alapmértékkel.

1. Egyenes szögnél kisebb szög szögfelezője megszerkesztendő úgy, hogy a szerkesztés a szög szárai közt maradjon.

Az adott szög szárain (ezekről feltehető, hogy nem esnek egybe)

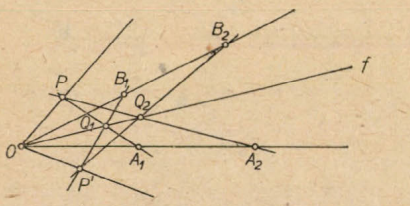
az O csúcsból kiindulva rakjuk fel kétszer egymás után az alapmértéket. Igy az OA_1, A_1A_2 és OB_1, B_1B_2 szakaszokhoz jutunk. Az A_1B_2 és A_2B_1 egyeneseknek van M közös pontjuk. Valóban, A_1 és B_2 nem eshet az A_2B_1 egyenesnek ugyanarra az oldalára, mert O és B_2 az A_2B_1 egyenes két különböző oldalán, O és A_1 pedig az A_2B_1 egyenes ugyanazon oldalán helyezkedik el. Világos, hogy M illeszkedik a $B_1OA_1\sphericalangle$ szögfelezőjére. Ugyanis az A_1B_2 és A_2B_1 egyeneseket tükrözve a $B_1OA_1\sphericalangle$ szögfelezőjére, ezek egymással helyet cserélnek, így metszéspontjuk a tükrözésnél fixpont, tehát M illeszkedik a $B_1OA_1\sphericalangle$ szögfelezőjére. Az M nem eshet egybe O-val, mert $B_1OA_1\sphericalangle$ nem egyenesszög. Tehát az OM egyenes a keresett f szögfelező, és az is világos, hogy a szerkesztés az adott szög szárai között maradt.



1. ábra

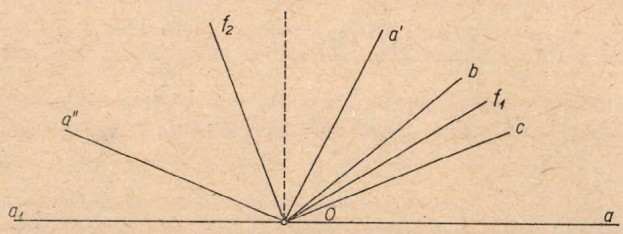
2. Egyenes szögnél kisebb, O-tól különböző szög csúcsából kiinduló félegyenesnek a szögfelezőre vonatkozó tükörképe megszerkesztendő úgy, hogy ha a szóbanforgó félegyenesek mind egy félsíkban vannak, akkor a szerkesztés is ebben a félsíkban maradjon.

Az adott szög szárain az O csúcsból kiindulva rakjuk fel kétszer egymás után az alapmértéket. Igy az OA_1, A_1A_2 és OB_1, B_1B_2 szakaszokhoz jutunk. Legyen f a $B_1OA_1\sphericalangle$ szögfelezője és P az O-ból kiinduló tükrözendő félegyenesnek valamely pontja (feltehető, hogy P és A_1 az f-nek két különböző oldalán helyezkedik el; továbbá kizárható az az eset, amikor P illeszkedik az OA_1 vagy OB_1 egyenesre). Világos, hogy a PA_1 egyenesnek van Q_1 közös pontja f-el. A P pontot és a PA_1 egyenest f-re tükrözve a P' pontot és a $P'B_1$ egyenest nyerjük, miközben a Q_1 fixpont, tehát PA_1-nek és $P'B_1$-nek van f-re illeszkedő közös pontjuk (ti. Q_1). Hasonlóan következik, hogy PA_2-nek és $P'B_2$-nek van f-re illeszkedő Q_2 közös pontjuk. A Q_1 és Q_2 nem eshet egybe, mert P nem illeszkedik sem az OA_1 sem az OB_1 egyenesre. Tehát a B_1Q_1 és B_2Q_2 egyenesek metszéspontját összekötve O-val, nyerjük az OP félegyenes keresett tükörképét, és az is világos, hogy ha az OA_1, OB_1, OP, OP' félegyenesek mind egy félsíkban vannak, akkor a szerkesztés is ebben a félsíkban marad.



2. ábra

3. Végül rátérünk a feladatban kitűzött szerkesztés elvégzésére. Az egyenes adott O pontja azt a és a_1 félegyenesekre osztja. Az egyenes megadott oldalán vegyünk fel egy O-ból kiinduló b félegyenest; feltehető, hogy az $(a, b)\sphericalangle$ hegyesszög. Tekintsünk egy, az a és b között futó c félegyenest. Legyen f_1 a $(b, c)\sphericalangle$ szögfelezője, a' az a-nak f_1-re vonatkozó tükörképe, f_2 a $(b, a_1)\sphericalangle$ szögfelezője, és a'' az a'-nek f_2-re



3. ábra

vonatkozó tükörképe. Világos, hogy $(a, c)\sphericalangle = (b, a')\sphericalangle$ és $(b, a')\sphericalangle = (a'', a_1)\sphericalangle$, így $(a, c)\sphericalangle = (a'', a_1)\sphericalangle$. Tehát a $(c, a'')\sphericalangle$ szögfelezője a keresett merőleges félegyenes. Az előbbiek alapján a szerkesztés minden lépése elvégezhető a kívánt módon, a megadott félsíkban.

Szász Domokos

A 10. feladatot megoldották még: BLEYER ANDRÁS, BOLLOBÁS BÉLA, BÖRÖCZKY KÁROLY, HALÁSZ GÁBOR, KÁTAI IMRE, KORVIN GÁBOR, MAKKAI MIHÁLY, MÁLYUSZ KÁROLY, MEZEI FERENC, SÁRKÖZI ANDRÁS, SIMON LÁSZLÓ, SZÓDA LAJOS, TUSNÁDY GÁBOR.

CONCOURS COMMÉMORATIF MIKLÓS SCHWEITZER POUR L' ANNÉE 1961

1. Soit $a(\neq 1)$ un élément d'ordre fini d'un groupe, et $e(\geqq 2)$ un entier. Démontrer que si le complexe

$$A = \langle 1, a, a^2, \ldots, a^{e-1} \rangle$$

n'est pas un groupe, alors

$$\langle 1, a^k, a^{2k}, \ldots, a^{(e-1)k} \rangle$$

est différent de A, quel que soit l'entier $(2 \leqq) k (\leqq e-1)$.

2. Démontrer qu'un anneau R possède un élément unité si et seulement si chaque R-module G est la somme directe du sous-module trivial de G et de RG. (Le sous-module trivial de G est l'ensemble de tous ses éléments g pour lesquels $rg = 0$ si $r \in R$. RG est le sous-module engendré par tous les éléments $rg (r \in R, g \in G)$. On entend par un R-module G un „espace linéaire" dont le „domaine scalaire" R est un anneau ne possédant pas nécessairement un élément unité; si $1 \in R$, alors $1.g = g$ n'est pas nécessairement réalisé pour tout élément $g \in G$.)

3. Soit

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n \qquad (n\geqq 1)$$

un polynome irréductible sur le corps K. Démontrer que les matrices non nulles et commutables avec la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \cdot & \cdot & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$$

peuvent toutes s'inverser.

4. Soit $f(x)$ une fonction définie dans l'intervalle (0,1) à valeur réelle ou complexe, intégrable, $|f(x)|\leqq 1$. Formons à partir des éléments

$$c_k=\int_0^1 f(x)e^{-2\pi ikx}dx$$

les matrices d'ordre n:

$$T=(t_{pq})_{p,q=0}^{n-1},\quad T^*=(t^*_{pq})_{p,q=0}^{n-1}$$

où $t_{pq}=c_{q-p}$, $t^*_{pq}=\overline{c_{p-q}}$ (complexe conjugé), et ensuite à l'aide des puissances de ces matrices l'hypermatrice d'ordre m

$$S=\begin{pmatrix} E & T & T^2 & \cdot & \cdot & T^{m-1} \\ T^* & E & T & \cdot & \cdot & T^{m-2} \\ T^{*2} & T^* & E & \cdot & \cdot & T^{m-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T^{*m-1} & T^{*m-2} & T^{*m-3} & \cdot & \cdot & E \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire la matrice contenant $(mn)^2$ nombres (E est la matrice unité d'ordre n). Démontrer que la matrice S n'admet que des valeurs propres réelles non-négatives quels que soient les entiers m et n.

5. Déterminer toutes les fonctions G à variable réelle (scalaire) non nulle, à valeur matricielle régulière de second ordre et toutes les fonctions f des vecteurs à deux dimensions à valeur vectorielle à deux dimensions, pour lesquelles

$$f(Xy)=G(\det X)Xf(y)$$

avec chaque vecteur y à deux dimensions et avec chaque matrice régulière X de second ordre (det X signifie le déterminant de la matrice X).

6. Soit $\{a_n\}$ une suite de points bornée. Supposons que la suite partielle convergente $\{a_{n_k}\}$ étant choisie d'une manière quelconque, la suite $\{a_{n_k+1}\}$ converge vers la méme limite. Démontrer que la suite $\{a_n\}$ est ou bien convergente, ou bien elle possède une infinité de points d'accumulation formant un ensemble dense en lui méme. Donner un exemple pour le second cas.

7. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle partielle

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$

qui peuvent s'écrire sous la forme

$$u(x, y) = f(x)g(y).$$

8. Soit $f(x)$ une fonction définie dans l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ convexe par en bas, dérivable (aux extrémités dérivable d'un seul côté) et satisfaisant aux conditions: $f(0) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = 1, f'(o) > 1$. Prolonger $f(x)$ dans l'intervalle $[0, 1]$ de la façon suivante: $f(x) = f(1 - x)$ pour $x \in (\frac{1}{2}, 1]$. Démontrer que l'ensemble des points X formé par les points x pour les quelles la suite $x_{n+1} = f(x_n)$ $(x_0 = x, n = 0, 1, 2, \ldots)$ obtenue par itération contient de points coincidents est partout dense dans l'intervalle $[0,1]$.

9. Jetons plusieurs fois une pièce d'argent régulière (normale) et continuons jusqu'à ce que dans la suite des résultats le nombre des piles ainsi que celui des faces atteigne le nombre k $(k = 1, 2, \ldots)$. Désignons par ν_k les nombres des jets nécessaires. Déterminer la distribution de la variable aléatoire ν_k, et la distribution à la limite de la variable aléatoire $\frac{\nu_k - 2k}{\sqrt{2k}}$ lorsque $k \to \infty$.

10. Indépendemment de l'axiome des parallèles effectuons dans le plan à l'aide d'une règle et d'un étalon de base la construction suivante: à partir d'un point donné d'une droite élever une demi-droite perpendiculaire à cette droite telle que la construction se situe dans le même demi-plan que la perpendiculaire.

Az 1961. évi Kossuth-díjjal kitüntetett Tandori Károly dolgozatainak jegyzéke

1. Über die Cesàrosche Summierbarkeit der orthogonalen Reihen, *Acta Sci. Math., Szeged,* 14 (1951—52), 85—95.
2. Über die Cesàrosche Summierbarkeit der orthogonalen Polynomreihen, *Acta Acad. Sci. Math. Hungaricae,* 3 (1952), 73—82.
3. Bemerkung zur Divergenz der Fourierreihen stetiger Funktionen, *Publicationes Math.,* 2 (1951—52), 191—193.
4. Ortogonális polinomsorok Cesaro-szummációjáról, *Kandidatusi disszertáció tézisei,* Budapest, 1954., 10 o.
5. Über die Konvergenz singulärer Integrale, *Acta Sci. Math., Szeged,* 15 (1953—54), 223—230.
6. Über die Divergenz der Fourierreihen, *Acta Sci. Math., Szeged,* 15 (1953—54), 236—239.
7. Über die Cesàrosche Summierbarkeit der orthogonalen Polynomreihen II., *Acta Acad. Sci. Math., Hungaricae,* 4 (1954), 237—253.
8. Szinguláris integrálok konvergenciájáról, *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei,* 5 (1955), 61—68.
9. Über die starke Summation von Fourierreihen, *Acta Sci. Math., Szeged,* 16 (1955), 65—73.
10. Über orthogonale Reihen, *Acta Sci. Math., Szeged,* 16 (1955), 74—76.
11. Über einen speziellen Banachschen Raum, *Publicationes Math.,* 3 (1953—54), 263—268.
12. Fourier-sorok erős szummációjáról, *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai ás Fizikai Osztályának Közleményei,* 5 (1955), 457—465.
13. Ortogonális sorokról, *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei,* 5 (1955), 477—479.
14. Quelques évaluations sur les fonctions orthogonales, *Comptes Rendus de l'Acad. Sci., Paris,* 244 (1957), 836—838.
15. Sur les moyennes de Cesàro des séries orthogonales, *Comptes Rendus de l'Acad. Sci. Paris,* 244 (1957), 993—995.
16. Sur les constantes de Lebesgue des systèmes de fonctions orthogonales et normées, *Comptes Rendus l'Acad. Sci., Paris,* 244 (1957), 1128—1130.
17. Ortogonális sorokról, *Doktori értekezés tézisei,* 1957. 7 o.
18. Über die orthogonalen Funktionen. I., *Acta Sci. Math.,Szeged,* 18 (1957), 57—130.
19. Ortogonális sorok szummációjáról, *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei,* 7 (1957), 397—402.
20. Über die orthogonalen Funktionen II. (Summation) *Acta Sci. Math., Szeged.* 18 (1957), 149—168.
21. Über die orthogonalen Funktionen III. (Lebesguesche Funktionen.), *Acta Sci. Math., Szeged,* 18 (1957), 169—178.
22. Über die orthogonalen Funktionen IV. (Starke Summation), *Acta Sci. Math., Szeged,* 19 (1958), 18—25.

23. Über die orthogonalen Funktionen V. (Genaue Weylsche Multiplikatorfolgen), *Acta Sci. Math., Szeged,* 20 (1959), 1—13.
24. Über die orthogonalen Funktionen VI. (Eine genaue Bedingung der starken Summation), *Acta Sci. Math.. Szeged,* 20 (1959), 14—18.
25. Über die orthogonalen Funktionen VII. (Approximationssätze), *Acta Sci. Math., Szeged,* 20 (1959) 19—24.
26. Bemerkung zur Divergenz von trigonometrischen Reihen, *Acta Sci Math., Szeged,* 20 (1959), 25—32.
27. Über die orthogonalen Funktionen VIII. (Eine notwendige Bedingung für die Konvergenz), *Acta Sci. Math., Szeged,* 20 (1959), 245—251.
28. Bemerkung zu einem Satz von Gy. Alexits, *Acta Sci. Math., Szeged,* 21 (1960), 12—14.
29. Ein Summationssatz für Orthogonalreihen mit monotoner Koeffizientenfolge, *Acta Sci. Math., Szeged,* 21 (1960), 15—18.
30. Über die orthogonalen Funktionen IX. (Absolute-Summation), *Acta Sci. Math., Szeged,* 21 (1960), 292—299.
31. Über ein Problem von G. Alexits, *Acta Acad. Sci. Math. Hungaricae,* 11 (1960), 429—433.
32. Bemerkung zu einem Satz von A. N. Kolmogoroff, *Acta Sci. Math., Szeged,* 22 (1961), 133—135.
33. Sur la convergence inconditionnelle des séries orthogonales, *Comptes Rendus de l'Acad. Sci Paris,* 253 (1961), 928—929.
34. Über die Divergenz der Orthogonalreihen, *Publicationes Math.,* 8 (1961), 291—307.
35. Über das Konvergenzverhalten einer Klasse von Orthogonalreihen, *Annales Univ. Budapestiensis,* 3—4 (1960/61), 15—18. (Alexits Györggyel közös dolg.)
36. Über Approximationen mit allgemeinen Orthogonalreihen, *Annales Univ. Budapestiensis,* 3—4 (1960/61), 351—356.
37. Über die orthogonalen Funktionen X. (Unbedingte Konvergenz), *Acta Sci. Math. Szeged.* (Megjelenés alatt.)

Feladatrovat

Szerkeszti: HAJÓS GYÖRGY

A feladatrovatnak szánt küldeményeket (az egyes feladatok megoldását külön lapon) a következő címre kérjük: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, V. Szabadság tér 17.

Kitűzött feladatok

128. Mutassuk meg, hogy van olyan teljes metrikus tér, amelyben zárt gömbök monoton csökkenő sorozatának metszete lehet üres is.

Császár Ákos és Pál László

129. Bebizonyítandó, hogy ha a valósváltozós, L-integrálható $f(t)$ függvényre, továbbá a pozitív M, b állandókra

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt\right| \leqq \frac{M}{1+4\pi^2x^2}e^{-bx^2},$$

akkor minden pozitív egész k-ra

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)^k e^{-ixt}dt\right| \leqq \frac{M^k}{1+4\pi^2x^2}e^{-\frac{b}{k}x^2}.$$

Turán Pál

130. Bizonyítsuk be, hogy az $(n-1)$-edfokú

$$f(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_{n-1}z^{n-1}$$

polinomnak az $e^{2\pi ki/n}$ helyeken ($k=0, 1, \ldots, n-1$) felvett értékei akkor

és csak akkor egyenlő abszolút értékűek, ha az

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \end{pmatrix}$$

mátrix ortogonális abban az értelemben, hogy bármely sorának vagy oszlopának egy másik sor, ill. oszlop konjugáltjával való skaláris szorzata 0.

Corradi Keresztély

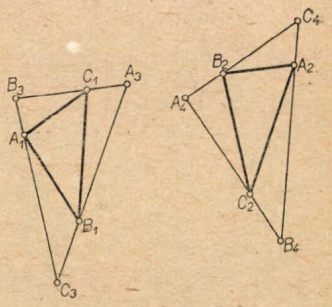
Megoldott feladatok

111. feladat. A síkbeli Δ_1, Δ_2 háromszögek csúcsain át a másik háromszög megfelelő oldalára merőlegest fektetünk. Δ_1-ből kiindulva ilyen módon a Δ_3, Δ_2-ből kiindulva pedig a Δ_4 háromszög oldalegyeneseihez jutunk. Bizonyítsuk be, hogy e háromszögek területere $\Delta_1 : \Delta_2 = \Delta_3 : \Delta_4$.

(Kárteszi Ferenc)

I. Megoldás. Forgassuk el 90°-kal a Δ_2 háromszöget és vele együtt a Δ_4 háromszöget is. Minthogy Δ_3 oldalegyenesei párhuzamosak az elforgatott Δ_2 oldalaival, hasonlóképpen az elforgatott Δ_4 oldalegyenesei párhuzamosak Δ_1 oldalaival, elegendő bebizonyítanunk, hogy a feladat állítása helyes, ha benne merőleges helyett párhuzamos fektetéséről van szó. Az alábbiakban az így módosított állítást bizonyítjuk.

A T_1, T_2 területű $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ háromszögek csúcsain át a másik háromszög megfelelő oldalával párhuzamost fektetve az (esetleg ponttá fajuló) $A_3B_3C_3$, $A_4B_4C_4$ háromszögekhez jutunk (1. ábra). Ezek az eredeti háromszögekből ϱ_2, ill. ϱ_1 arányú párhuzamos hasonlóság (homotécia) alkalmazásával származnak, oldalvektoraikra tehát pl. $A_3B_3 = \varrho_2 A_2B_2$ és $A_4B_4 = \varrho_1 A_1B_1$ (az X-ből Y-ba vezető vektort az alábbiakban is XY jelöli).



1. ábra

Tekintsük a

$$\mathbf{v} = A_1B_1 \times B_2C_2 + A_2B_2 \times B_1C_1$$

vektort. Ismételten felhasználva, hogy párhuzamos vektorok vektoriális

szorzata eltűnik, a következő átalakítást végezhetjük el:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= A_1B_1 \times (B_2A_4 + A_4C_2) + (A_2C_4 + C_4B_2) \times B_1C_1 = \\ &= A_1B_1 \times B_2A_4 + C_4B_2 \times B_1C_1 = \\ &= A_1B_1 \times B_2A_4 + (C_1A_1 + A_1B_1) \times C_4B_2 = \\ &= A_1B_1 \times (B_2A_4 + C_4B_2) = A_1B_1 \times C_4A_4 = \\ &= \varrho_1(A_1B_1 \times C_1A_1).\end{aligned}$$

Eredményünk az eredeti háromszögek szerepét felcserélve a

$$\mathbf{v} = \varrho_2(A_2B_2 \times C_2A_2)$$

eredményt is adja.

Eredményeink alapján

$$\tfrac{1}{2}|\mathbf{v}| = |\varrho_1|T_1 = |\varrho_2|T_2,$$

hiszen pl. $|A_1B_1 \times C_1A_1| = 2T_1$. Ebből már következik a bizonyítandó állítás helyessége is, mert ez jelölésünkkel

$$T_1 : T_2 = \varrho_2^2 T_2 : \varrho_1^2 T_1$$

alakban írható.

Hajós György

II. megoldás. A Δ_1, Δ_2 háromszögek csúcsain át párhuzamost fektetünk a másik háromszög megfelelő oldalával. Így a Δ_3, Δ_4 háromszögekhez jutunk. Az előző megoldás első bekezdésére hivatkozva a feladat állítását ezekre a háromszögekre bizonyítjuk be.

Feltehetjük, hogy Δ_3 és Δ_4 közül pl. Δ_3 nem fajul el ponttá. Van tehát olyan párhuzamos hasonlóság, amely a Δ_2 háromszöget Δ_3-ba, Δ_4-et pedig valamely Δ háromszögbe viszi át. Minthogy a hasonlóság a területarányokat nem változtatja meg, feladatunk a $\Delta_1 : \Delta_3 = \Delta_3 : \Delta$ aránypár bizonyítása.

Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy a párhuzamosan hasonló Δ_1, Δ háromszögeknek van-e hasonlósági centrumuk, vagy pedig eltolással származnak egymásból.

Ha $\Delta_1 = A_1B_1C_1\triangle$ és $\Delta = ABC\triangle$ hasonlósági centruma O (2. ábra) és hasonlóságuk aránya λ, akkor $\Delta = \lambda^2\Delta_1$ és

$$OA = \lambda OA_1, \quad OB = \lambda OB_1, \quad OC = \lambda OC_1.$$

Ebből következik, hogy (irányított háromszögek előjeles területéről szólva

$$\begin{aligned}\lambda OA_1B_1 &= OAB_1 = OA_1B_1 + A_1B_1A = OA_1B_1 + A_1B_1C_3 = \\ &= OA_1C_3 + OC_3B_1.\end{aligned}$$

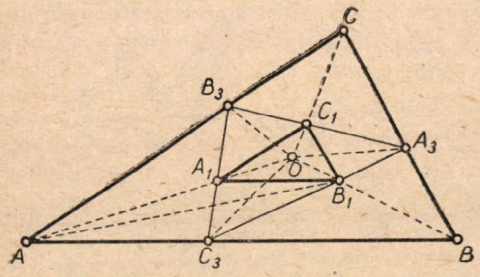
Hasonló indokolással

$$\lambda OB_1C_1 = OB_1A_3 + OA_3C_1,$$
$$\lambda OC_1A_1 = OC_1B_3 + OB_3A_1.$$

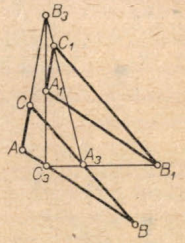
Ezekből összeadással

$$\lambda A_1B_1C_1 = A_3B_3C_3,$$

azaz $\Delta_3 = \lambda\Delta_1$ adódik, ami a vizsgált esetben a feladat állítását bizonyítja.



2. ábra



3. ábra

Ha Δ_1 és Δ eltolással származnak egymásból (3. ábra), akkor $\Delta = \Delta_1$, s ezért (irányított parallelogrammák előjeles területével dolgozva)

$$\Delta_1 - \Delta = A_1B_1BA + B_1C_1CB + C_1A_1AC = 0.$$

Minthogy pl. $A_1B_1BA/2 = A_1B_1B = A_1B_1C_3$, egyenletünkből 2-vel osztva

$$0 = A_1B_1C_3 + B_1C_1A_3 + C_1A_1B_3 = \Delta_1 - \Delta_3$$

következik. Ezek szerint $\Delta_3 = \Delta_1$, tehát a $\Delta_1 : \Delta_3 = \Delta_3 : \Delta$ aránypár most is helyes.

Gallai Tibor

A 111. feladat megoldását beküldték még BOLLOBÁS BÉLA és MOLNÁR FERENC.

113. feladat. Bizonyítsuk be, hogy a kommutatív elrendezhető R gyűrű a eleme akkor és csak akkor pozitív R minden elrendezésében, ha

$$(x_1^2 + \cdots + x_m^2)a = y_1^2 + \cdots + y_n^2,$$

ahol $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ az R gyűrű alkalmasan megválasztott elemei.

(Grätzer György és Schmidt E. Tamás)

Megjegyzés. A feladat szövege akkor kifogástalan, ha benne „alkalmasan megválasztott" elemek helyett „alkalmasan megválasztott, 0-tól különböző" elemekről van szó. Ezt az alábbi megoldás is figyelembe veszi.

(Szerk.)

Megoldás. Ha az a elem alkalmas megválasztáskor kielégíti a feladat egyenletét, akkor R minden elrendezésében $a>0$, hiszen $\Sigma x_i^2>0$ és $\Sigma y_i^2>0$ minden elrendezésben teljesül.

Ha a semmilyen választáskor sem elégíti ki a feladat egyenletét, akkor az $R(\sqrt{-a})$ gyűrűt tekintjük, s bebizonyítjuk, hogy ez formálisan valós (lásd pl. *Rédei:* Algebra I., 493. o.). Minthogy kommutatív gyűrűről van szó, $R(\sqrt{-a})$ pozitív magját azok a $\Sigma(u_i+v_i\sqrt{-a})^2$ elemek alkotják, amelyekben nem minden u_i és v_i értéke 0. Gyűrűnk pozitív magja valóban nem tartalmazza a 0 elemet, mert ha

$$\sum(u_i+v_i\sqrt{-a})^2=\sum(u_i^2-av_i^2)+2\sqrt{-a}\sum u_iv_i=0,$$

akkor $\Sigma u_i^2=a\Sigma v_i^2$, tehát az a-ra vonatkozó feltevés szerint valamennyi $u_i=0$ és $v_i=0$.

Minthogy $R(\sqrt{-a})$ formálisan valós, R. E. JOHNSON tétele szerint (lásd uo.) elrendezhető. Egy ilyen $>$ elrendezésben $-a=(\sqrt{-a})^2>0$. Ily módon R-nek olyan elrendezéséhez jutottunk, amelyben $a<0$. Ha tehát a minden elrendezésben pozitív, akkor feltevésünk nem teljesülhet, azaz van olyan megválasztás, amely mellett a kielégíti a feladat egyenletét.

Grätzer György és *Schmidt E. Tamás*

115. feladat. A zárt [0, 1] intervallumban értelmezett folytonos $f(x)$ függvényre $f(0)=0$, $f(1)=1$, továbbá minden $0<x<1$ értékhez találhatók olyan $0\leqq x-h<x+h\leqq 1$ értékek, amelyekre

$$f(x)=\tfrac{1}{2}[f(x-h)+f(x+h)].$$

Bizonyítsuk be, hogy $f(x)=x$.

(Rényi Alfréd)

I. megoldás. Tekintsük a $g(x)=f(x)-x$ függvényt. Ez is folytonos a [0, 1] intervallumban, $g(0)=g(1)=0$, és a feladat feltételei mellett

$$g(x)=\tfrac{1}{2}[g(x-h)+g(x+h)].$$

Minthogy $g(x)$ folytonos, felveszi a maximumát, és van egy legkisebb x_0 hely, ahol ez bekövetkezik. Ha ez a maximum nem 0, akkor $0<x_0<1$. Ezért a megfelelő h értékre

$$g(x_0)=\tfrac{1}{2}[g(x_0-h)+g(x_0+h)].$$

Ez azonban lehetetlen, mert x_0 megválasztása miatt $g(x_0-h)<g(x_0)$ és $g(x_0+h)\leqq g(x_0)$. Eszerint $g(x)$ maximuma csak 0 lehet.

Ugyanígy adódik, hogy $g(x)$ minimuma is 0, hogy tehát $g(x)=0$, azaz $f(x)=x$.

Hetyei Gábor

II. megoldás. A feladat következő általánosítását bizonyítjuk be: *Legyen H egy korlátos zárt halmaz az n-dimenziós euklideszi térben, továbbá $G\subset H$ egy véges ponthalmaz. Ha $H-G$ minden pontja két H-beli pont összekötő szakaszának belső pontja, akkor G konvex burka tartalmazza a H halmazt.*

Elég azt bizonyítanunk, hogy ha egy hipersík tartalmazza a $P\in G$ pontot, és egy a hipersík által határolt féltér tartalmazza a G ponthalmazt, akkor ez a féltér tartalmazza a H halmazt is (hiszen G konvex burka ilyen félterek metszete).

Tegyük fel, hogy van H-nak a féltérhez nem tartozó pontja. Tekintsük közülük azokat, amelyek a hipersíktól legtávolabb vannak, s legyen Q ezek közül egy olyan, amely P-től maximális távolságra van. H korlátos és zárt volta biztosítja, hogy ilyen Q pontról szó lehet. Minthogy Q nem tartozhatik G-hez (hiszen nincs az ezt tartalmazó féltérben), Q két H-beli pont összekötő szakaszának belső pontja. Mivel e szakasz egyik végpontja sincs a hipersíktól Q távolságánál nagyobb távolságra, a szakasz a hipersíkkal párhuzamos. Minthogy pedig a két végpont egyike P-től PQ-nál nagyobb távolságra van, ez a végpont ellentmond Q megválasztásának. Ez az ellentmondás állításunk helyességét bizonyítja.

A feladat a bebizonyított állításunk egy speciális esetét mondja ki: H az $(x, f(x))$ pontok halmaza a kétdimenziós síkban (ez a halmaz $f(x)$ folytonossága miatt zárt), G a (0, 0), (1, 1) pontokból áll, továbbá $H-G$ minden pontja két H-beli pont összekötő szakaszának a felezőpontja. A bebizonyítottak szerint valóban $f(x)=x$, mert G konvex burka egy szakasz, és $f(x)$ a [0, 1] intervallum minden pontjában értelmezve van.

Bártfai Pál

A 115. feladat megoldását beküldték még: Aczél János, T. H. Barth, Császár Ákos, Daróczy Zoltán, Deák Ervin, Dux Erik, Hajós György, Horváth Sándor, Kovári Tamás, Králik Dezső, Krámli András, Révész Pál, Surányi János, Szűcs József, Szűsz Péter.

I. megjegyzés. A feladat állítása nem helyes, ha nem követeljük meg $f(x)$ folytonosságát, sőt akkor sem, ha csak félig folytonosságát

követeljük meg. Ezt az

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } 0\leqq x<\frac{1}{2},\\ x, & \text{ha } \frac{1}{2}\leqq x\leqq 1\end{cases}$$

függvény bizonyítja.

Deák Ervin

II. megjegyzés. A beküldött megoldások a feladat többirányú általánosítását tartalmazzák. Javarészüket felölelik, sőt tovább általánosítják, a következő észrevételek:

Az I. megoldás $g(x)$-re vonatkozó okoskodása azt is bizonyítja, hogy a [0, 1] közben értelmezett $g(x)$ függvény csak $g(x)=0$ lehet, ha $g(0)=g(1)=1$, ha továbbá minden $0<x<1$ értékhez találhatók olyan $0\leqq x_1<x<x_2\leqq 1$ értékek, amelyekre $g(x_1)$ és $g(x_2)$ közrefogják $g(x)$-et, s vele egyenlők csak akkor lehetnek, ha egymással is egyenlők.

A II. megoldás változatlanul helyes, ha benne G nem véges, hanem zárt ponthalmazt jelent. Alig van módosításra szükség akkor is, ha benne nem két H-beli pont összekötő szakaszának belső pontjáról, hanem olyan szimplexnek a csúcsaitól különböző pontjáról van szó, amelynek a csúcsai H-hoz tartoznak.

Szerk.

116. feladat. Meghatározandók mindazok a valós számokból álló $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sorozatok, amelyekre teljesül a következő állítás: Ha az

$$1+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n=0$$

egyenletnek x_1 és x_2 két egymástól nem feltétlenül különböző valós gyöke, akkor van a

$$\lambda_0+\lambda_1a_1x+\lambda_2a_2x^2+\ldots+\lambda_na_nx^n=0$$

egyenletnek az $x_1\leqq x\leqq x_2$ feltételt kielégítő gyöke.

(Turán Pál)

Megjegyzés. A feladat szövegéből értelemszerűen következik, hogy benne $n\geqq 2$ és $x_1\leqq x_2$. Hallgatólagosan fel van tételezve az is, hogy valósegyütthatós polinomokról van csak szó.

Szerk.

Megoldás. A követelményt a

$$\lambda_k=\alpha+\beta k \qquad (k=0, 1,\ldots, n) \tag{1}$$

sorozatok elégítik ki, ahol α és β az $\alpha\beta\geqq 0$ megszorítást kielégítő állandók. A triviális $\alpha=\beta=0$ esetet figyelmen kívül hagyjuk.

a) Ha a $\{\lambda_k\}$ sorozat kielégíti a követelményt, és a

$$p(x)=1+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$$

polinomnak $x=1$ többszörös gyöke, azaz

$$p(1)=1+a_1+a_2+\ldots+a_n=0,$$

$$p'(1)=a_1+2a_2+\ldots+na_n=0,$$

akkor a feladat követelményének teljesülése miatt $x=1$ gyöke a

$$q(x)=\lambda_0+\lambda_1a_1x+\lambda_2a_2x^2+\ldots+\lambda_na_nx^n$$

polinomnak is, azaz

$$q(1)=\lambda_0+\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\ldots+\lambda_na_n=0.$$

A lineáris algebra elemi tétele szerint ebből következik, hogy megfelelő α, β együtthatókkal

$$q(1)=\alpha p(1)+\beta p'(1)$$

azonosan, azaz $a_1, a_2,\ldots, a_n$ minden értékére teljesül. Eszerint $\{\lambda_k\}$ csak (1) alakú sorozat lehet, s ekkor

$$q(x)=\alpha p(x)+\beta xp'(x).$$

b) A feladat követelménye nem teljesül az (1) alakú sorozatra, ha $\alpha\beta<0$. Ezt $p(x)=1-x^2$ példája mutatja, mert ekkor

$$q(x)=\alpha-(\alpha+2\beta)x^2,$$

s ennek a polinomnak $\alpha\beta<0$ esetén nincs gyöke a $[-1, 1]$ intervallumban.

c) Ha az (1) alakú sorozatra $\alpha\beta\geqq 0$, akkor kielégíti a feladat követelményét. Ez nyilvánvaló akkor, ha $x_1=x_2$, mert ebben az esetben $p(x_1)=p'(x_1)=0$, tehát $q(x_1)=0$ is teljesül.

Legyen tehát $x_1<x_2$ a $p(x)$ polinom két egyszeres gyöke. Feltehetjük azt is, hogy ezek szomszédos gyökhelyek, hogy tehát $p'(x_1)$ és $p'(x_2)$ ellentétes előjelű. Ha tehát x_1 és x_2 egyező előjelű, akkor

$$q(x_1)=\beta x_1p'(x_1), \qquad q(x_2)=\beta x_2p'(x_2)$$

ellenkező előjelűek, s ezért $q(x)$-nek van gyöke az (x_1, x_2) intervallumban.

Már csak az $x_1<0<x_2$ esettel kell foglalkoznunk. Ekkor $p(0)=1$ miatt $p'(x_1)>0$, tehát $x_1p'(x_1)<0$. Ezért a

$$q(x_1)=\beta x_1p'(x_1), \qquad q(0)=\alpha$$

értékek ellentétes előjelűek, és $q(x)$-nek van gyöke az $(x_1, 0)$ intervallumban, tehát (x_1, x_2)-ben is.

Kővári Tamás

A 116. feladat megoldását beküldték még: BÁRTFAI PÁL, CSÁSZÁR ÁKOS, SURÁNYI JÁNOS.

I. megjegyzés. A feladatbeli polinom az $n=2$ esetben csak valós együtthatós lehet. Ha a feladat komplex együtthatós polinomokra is vonatkozik, akkor a megoldásban megadott sorozatok közül $n \geqq 3$ esetén csak a triviális $\lambda_k = \alpha$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ sorozat felel meg. Ezt a

$$p(x) = (1+ix)r(x)$$

polinom bizonyítja, ahol $r(x)$ valós együtthatójú, s van legalább két pozitív zérushelye, de minden valós zérushelye egyszeres. Ha a feladat követelménye teljesül, akkor a

$$q(x) = \alpha r(x) + \beta x r'(x) + ix\left(\alpha r(x) + \beta x r'(x) + \beta r(x)\right)$$

polinomnak el kell tűnnie egy pozitív x helyen. Ezen a helyen tehát

$$\alpha r(x) + \beta x r'(x) = 0, \tag{2}$$

$$x\left(\alpha r(x) + \beta x r'(x) + \beta r(x)\right) = 0. \tag{3}$$

(2) figyelembevételével (3)-ból $\beta x r(x) = 0$. Ha tehát $\beta \neq 0$, akkor $r(x) = 0$ és ezért (2) értelmében $r'(x) = 0$, ami lehetetlen. Eszerint valóban csak $\beta = 0$ lehetséges.

Császár Ákos

II. megjegyzés. Laguerre nevezetes elmélete, mely igen általános, csupa valós gyökkel biró, függvényosztályokat ad meg (a Riemann-sejtés megoldása céljából) végeredményben Rolle tételének szellemes alkalmazásain alapszik (l. pl. Polya—Szegő „Lehrsätze und Aufgaben aus der Analysis"). A feladat azt fejezi ki, hogy egyik kézenfekvő általánosítási lehetőség nem vezet valódi általánosításhoz.

Turán Pál

PROBLÉMES PROPOSÉS

128. Démontrer qu'il existe d'espaces métriques complets dans lesquels la partie commune d'une suite de sphères monotone décroissante peut être même vide.

Á. Császár, L. Pál

129. Soit $f(t)$ une fonction à variable réelle et intégrable L, M et b deux constantes positives. Démonter que si

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt\right| \leqq \frac{M}{1+4\pi^2x^2}e^{-bx^2},$$

alors on a pour tout entier positif k

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)^k e^{-ixt}dt\right| \leqq \frac{M^k}{1+4\pi^2x^2}e^{-\frac{b}{k}x^2}.$$

P. Turán

130. Soit

$$f(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_{n-1}z^{n-1}$$

un polynôme de degré $n-1$. Démontrer que les valeurs prises par $f(z)$ aux points $z=e^{2\pi ik/n}(k=0, 1, 2, \ldots, n-1)$ sont égales en valeurs absolues si et seulement si la matrice

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n-1} & a_0 & \ldots & a_{n-2} \end{pmatrix}$$

est orthogonale dans le sens que le produit scalaire de chacune de ses lignes resp. colonnes avec le conjugué d'une autre ligne resp. colonne est égal à zéro.

K. Corradi

Jelentés az 1961. évi Grünwald Géza-emlékdíj odaítéléséről

A Bolyai János Matematikai Társulat az 1961. évi Grünwald Géza-emlékdíj odaítélésre vonatkozó javaslattétel céljából öttagú bizottságot küldött ki, melynek tagjai: Császár Ákos, Hajós György, Kertész Andor, Rényi Alfréd és Varga Ottó. A kiküldött bizottság 1961. október 23-án és 1961. november 1-én tartott ülésein megvitatta az Elnökség tagjaitól érkezett javaslatokat és ennek alapján egyhangúan a következő határozatot hozta:

A Bizottság gondosan tanulmányozta a beérkezett nagyszámú javaslatot. Örömmel állapítja meg, hogy ebben az évben is több fiatal matematikus vehető számításba az emlékdíj odaítélésénél. Alaposan mérlegelve a javaslatba hozott matematikusok munkásságát, a Bizottság úgy döntött, hogy az első Grünwald Géza-emlékdíjat ebben az évben nem adja ki, viszont második Grünwald Géza-emlékdíjjal és 1000—1000 forinttal jutalmaz 5 matematikust. A Bizottság reméli, hogy döntése a jutalmazottaknak eddigi tudományos munkásságuk elismerése mellett ösztönzésül is szolgál további eredmények elérésére.

A Bizottság második Grünwald Géza-emlékdíjjal jutalmazza ÁDÁM ANDRÁST, a MTA Matematikai Kutató Intézetének tudományos munkatársát algebrai és gráfelméleti tárgyú dolgozataiért,

LEINDLER LÁSZLÓ aspiránst, ortogonális sorokról írt dolgozataiért,

MAKAI IMRÉT, a kiskunfélegyházi Petőfi Gimnázium tanárát differenciálgeometriai tárgyú dolgozataiért,

MOGYORÓDI JÓZSEFet, a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem Matematikai Intézetének tanársegédét valószínűségszámítási tárgyú dolgozataiért, valamint

VINCZE ENDRÉT, a miskolci Nehézipari Műszaki Egyetem matematikai tanszékének adjunktusát függvényegyenletekről írt dolgozataiért.

A díjazottak munkásságát az alábbiakban ismertetjük:

ÁDÁM ANDRÁSnak tíz cikke jelent meg és további két dolgozata van sajtó alatt.

Négy dolgozatában, az [1], [3], [6], [8] számúakban, az algebra és a halmazelmélet határterületéhez tartozó kérdéseket vizsgál. Ezekben a

halmazsorozatokkal kapcsolatos problémákat és általános algebrai kérdéseket tárgyal.

Többi hat megjelent és két sajtó alatt levő dolgozata a jelfogó-érintkezőrendszerek elméletéből meríti tárgyát. Kétpolusú elektromos hálózatokkal foglalkozik, ami matematikai szempontból a két kitüntetett szögponttal rendelkező gráfok és ezek részgráfjainak vizsgálatát jelenti. Ilyen irányú gráfelméleti vonatkozású, részben topológiai jellegű eredményeit a [10] dolgozatában foglalja egybe. Az alkalmazások szempontjából vizsgálatai azért jelentősek, mert a megadott működési feltételeknek eleget tevő, jelfogók érintkezőiből összetett áramkörök megkonstruálása terén ér el eredményeket. Ez a munkássága KUZNYECOV és TRACHTANBROT szovjet matematikusok munkásságához csatlakozik, és eredményeiket tovább is fejleszti.

Ádám András dolgozatainak jegyzéke

[1] On permutations of set products, Publ. Math. Debrecen, **5** (1957), 147–149.
[2] Kétpólusú elektromos hálózatokról, I, MTA Mat. Kut. Int. Közl., **2** (1957), 211–218.
[3] A theorem on algebraic operators in the most general sense. Acta Sci. Math. Szeged, **18** (1957), 205–206.
[4] Kétpólusú elektromos hálózatokról, II. MTA Mat. Kut. Int. Közl., **3** (1958), 67–79.
[5] Kétpólusú elektromos hálózatokról, III. MTA Mat. Kut. Int. Közl., **3** (1958), 207–218.
[6] On the definitions of direct product in universal algebra. Publ. Math. Debrecen, **6** (1959), 303–310.
[7] Kétpólusú elektromos hálózatokról, IV. MTA Mat. Kut. Int. Közl., **4** (1959), 183–190.
[8] On subsets of set products. Annales Univ. Budapest. (Sectio Math.), **2** (1959), 147–149.
[9] Zur Theorie der Wahrheitsfunktionen. Acta Sci. Math. Szeged, **21** (1960), 47–52.
[10 On graphs in which two vertices are distinguished. Acta Math. Hung., **12** (1961), 377–397.

LEINDLER LÁSZLÓ megjelent és sajtó alatt álló dolgozataiban foglalt eredményei az általános ortogonális sorok konvergencia- és szummációkérdéseivel kapcsolatosak és a Mensov-féle módszerek Tandori Károly által továbbfejlesztett és kifinomított alakjának szolgáltatják érdekes és fontos alkalmazásait. [1] dolgozatának főeredménye lényegében azt mondja ki, hogy egy (a, b) intervallumon ortonormált függvényrendszer tagjainak abszolút értékei „mértékben" approximálhatók egy ortonormált polinomrendszer megfelelő tagjainak abszolút értékeivel, ami számos ismert tételnek általánosítását teszi lehetővé. Ennek az eredménynek a finomságára mutat rá a [2] dolgozat, megmutatva, hogy hasonló tétel már nem igaz abszolút értékek helyett magukra a függvényekre. A [3] dolgozatban a majdnem mindenütt való (C, α) szummál-

hatóságának egy elégséges és monoton együtthatósorozat esetén szükséges feltételét adja meg. Tandori az $\alpha = 1$ esetet tárgyalta; Leindler megmutatja, hogy a Tandori-féle feltétel az $\alpha > 1/2$ esetben is szükséges és elégséges, az $\alpha = 1/2$ és $-1 < \alpha < 1/2$ esetekre pedig más, hasonló alakú feltételt ad. A [4] és [5] dolgozatok is Tandori bizonyos eredményeinek általánosításával foglalkoznak.

Leindler László dolgozatainak jegyzéke

[1] Über die orthogonalen Polynomsysteme, Acta Sci. Math. **21** (1960), 19–46.
[2] Zur Frage der Approximation durch orthonormierte Polynomsysteme, Acta Sci. Math. **22** (1961), 129–132.
[3] Über die absolute Summierbarkeit der Orthogonalreihen, Acta, Sci. Math. sajtó alatt.
[4] Über die starke Summierbarkeit der Orthogonalreihen, Acta Sci. Math. sajtó alatt.
[5] Bemerkungen zu Sätzen von K. Tandori, Publ. Math. Debrecen. sajtó alatt.

MAKAI IMRE [1] dolgozatának tárgya olyan tenzorok, illetve skalárinvariánsok meghatározása, amelyek folytonos módon tenzor-, illetve vektormezőktől függenek. [2] dolgozatában meghatározza az összes olyan elsőrendű komitánst, amelyek két adjungált n-él megadásától függenek. Meghatározza továbbá az említett két n-él segítségével értelmezhető lineáris összefüggéseket is. [3] dolgozatában a Lie-féle derivált Golabtól származó általánosításával foglakozik. Skalárok, vektorok, és sűrűségek általánosított Lie-deriváltjaira egyszerű levezetési módot ad meg.

Makai Imre mindhárom dolgozatának tárgya — a differenciálinvariánsok elmélete, a tér összefüggési paraméterei, a Lie-derivált fogalma — a differenciálgeometriai terek elméletében alapvető szerepet játszó problémakörhöz tartozik. A dolgozatok értékét növeli az, hogy olyan módszereket alkalmaz, amelyek az eddigi vizsgálatokhoz képest kevesebb függvénytani feltételt követelnek.

Makai Imre dolgozatainak jegyzéke

[1] Über die Invarianten die aus gewissen Tensoren gebildet sind, Publ. Math. Debrecen, **7** (1960), 359–363.
[2] Über geometrische Objekte, die aus adjungierten n-Beinen gebildet sind, megjelenik az Acta Math. Acad. Sci. Hung. 12. kötetében.
[3] Über die Liesche Ableitung der homogenen linearen geometrischen Objekte, megjelenik a Rozprawy Math. folyóiratban.

MOGYORÓDI JÓZSEF figyelemreméltó tudományos eredményeket ért el egyrészt az atomreaktorokban lejátszódó neutronlassulási folyamat valószínűségszámítási tárgyalása, másrészt a valószínűségszámítás határ-

eloszlástételeinek véletlen tagszámú valószínűségi változókból álló összegek határeloszlására való kiterjesztése terén. Az első témakörrel foglalkozik [1], [2], és [3] megjelent dolgozata, utóbbival viszont [4] és [5] sajtó alatt levő dolgozata. A neutronlassulás folyamatát illetőleg Mogyoródi József elsősorban a neutron lelassulásáig történő ütközések számának, továbbá a neutronok által ez időpontig megtett úthossznak az eloszlását vizsgálja. Eredményei mind matematikai szempontból, mind pedig gyakorlati vonatkozásban értékesek. A valószínűségi változók véletlen számú tagból álló összegeivel kapcsolatban Mogyoródi József azzal az esettel foglalkozik, amikor a tagok száma nem független maguktól a tagoktól. Csatlakozva Anscombe egy tételéhez, egy szükséges és elegendő feltételt ad meg, ilyen összegekre vonatkozó határeloszlástétel érvényességére. Az 5. dolgozatban Rényi Alfréd egy tételét általánosítja. Az említett két dolgozatban foglalt elméleti eredményei gyakorlati alkalmazásra találhatnak a szekvenciális analízis, valamint a Monte-Carlo módszerek területén.

Mogyoródi József dolgozatainak jegyzéke

[1] Az atommagreaktorokban végbemenő neutronlassítás-folyamattal kapcsolatos valószínűségszámítási problémákról, MTA Mat. Kut. Int. Közl. **1** (1956) 337–348. (Németh Gézával közösen),

[2] Problems of Neutron Movements in Atomic Reactors According to the Theory of Probability. Megjelent az 1958. évi genfi atomenergia kongresszus közleményeiben „P/1711 Hungary" jelzés alatt.

[3] Neutronok atommagreaktorokban való mozgásának valószínűségszámítási problémái, MTA Mat. Kut. Int. Közl. 3 (1958) 237–250.

[4] Limiting distributions for sums of a random number of independent random variables, MTA Mat. Kut. Int. Közl. **6** (1961) sajtó alatt.

[5] Central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables. Acta Math. Acad. Sci. Hung. sajtó alatt.

VINCZE ENDRE eddigi munkássága — a sorelméleti, geometriai, ill. műszaki matematikai tárgyú [1], [15], [11], és [17] sz. dolgozatoktól eltekintve — függvényegyenlet irányú és négy fő kutatási irányhoz sorolható:

1. A poliadikus csoportok visszavezetése közönségesekre és a folytonos valós leoszthatú multinér műveletek meghatározása igen általános feltételek mellett történik meg a [2] és [4] sz. dolgozatokban.

2. A gazdaságossági függvényt bizonyos általános feltételek mellett függvényegyenletrendszerekkel jellemzi és azok megoldása útján meghatározza a [3], [6], és [13] dolgozatokban.

3. Bizonyos eloszlásfüggvények (hibatörvények) általános jellemzését adja az [5] ,[9] és [16] dolgozatokban. E téren legjelentősebb Rényi következő problémájának megoldása: meghatározandó a hibatörvény,

ha adott, hogy a legvalószínűbb érték a mérési eredmények milyen függvénye.

4. Legnagyobb jelentőségűeknek látszanak a Cauchy-féle és rokon, valamint a trigonometrikus függvényegyenletek és általánosításaik megoldása komplexben, teljes általánosságban, elemi módszerekkel a [7], [8], [10], [12], [14] és [18] dolgozatokban. Itt különösen kiemelendő egyrészt, hogy e több mint 100 éve vizsgált témakör sok kérdésében az első teljes megoldásokat adja, mert kiváló szerzőknek (pl. Vietoris) a teljesség igényével fellépő megoldásairól is észrevette, hogy nem teljesek és kiegészítette, (kijavította), majd általánosította őket. Másrészt mind a hazai, mind a külföldi szakemberek körében nagy érdeklődést keltett új módszere, mely többek között alkalmas a Stephanos, Levi-Civita és Staeckel által differenciálhatóság, Fenyő által integrálhatóság feltevésével részben vizsgált

$$f(x+y)=f_1(x)g_1(y+f_2(x)g_2(y)+\ldots+f_n(x)g_n(y)$$

alakú függvényegyenletek teljes elemi megoldására a lineáris függetlenség egy újszerű finit mértékének alkalmazásával.

Vincze Endre dolgozatainak jegyzéke

[1] A monoton sorozat fogalmának egyik általánosítása, *Nehézipari Műszaki Egyetem Közl. Miskolc*, **1** (1957), 317—326.

[2] Über die Charakterisierung der assoziativen Funktionen von mehreren Veränderlichen, *Publ. Math. Debrecen*, **6** (1959), 241—253.

[3] Über das Problem der Berechnung der Wirtschaftlichkeit, *Acta Techn. Acad. Sci. Hung.* **28** (1960), 33—41.

[4] Verallgemeinerung eines Satzes über assoziative Funktionen von mehreren Veränderlichen, *Publ. Math. Debrecen*, **8** (1961) 68—74.

[5] Über die Charakterisierung des GAUSSschen Fehlergesetzes, *Mat. MTA Kut. Int. Közl.* (sajtó alatt).

[6] A gazdaságosság számításának problémájáról, *Nehézipari Műszaki Egyetem Közl. Miskolc*, **5** (1960), 391—397.

[7] Über die Verallgemeinerung der komplexen logarithmischen Funktion und der EULERschen Relation, *II. M. Mat. Kongr. Kiadványai* **2** (1960), III b, 45—48.

[8] Über die Verallgemeinerung der trigonometrischen und verwandten Funktionalgleichungen, *Ann. Univ. Sci. Eötvös Budapest Sectio Math.* **3—4** (1960—61), 389—404.

[9] Über den wahrscheinlichsten Wert, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (sajtó alatt — Hosszú Miklóssal közös).

[10] A komplex változós trigonometriai függvényegyenletek megoldása, néhány alkalmazása és általánosítása, *Miskolc* 1961. 1—137. A NME kiadványa.

[11] Über die geometrische Herleitung einer Resolvente der biquadratischen Gleichung, *Zeitschrift angew. Math.* und *Mech.* (sajtó alatt).

[12] Über die CAUCHYschen Funktionalgleichungen mit komplexen Veränderlichen, *Acta Univ. Debrecen* (sajtó alatt).

[13] Über die Verallgemeinerungen eines Funktionalgleichungssystems der Wirtschaftlichkeit, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* 6 (1961), 313–321 — Hosszú Miklós-sal közös).

[14] A D'ALEMBERT—POISSON függvényegyenlet egyik általánosítása, *Mat. Lapok* XII, 1–2, 18–31

[15] Ein neuerer Beweis der Divergenz der Reihe $\sum 1/p$, *Nehézipari Műszaki Egyetem Idegennyelvű Közl. Miskolc* (sajtó alatt).

[16] Műszaki fogalom—matematikai tükröződés, *Nehéziapri Műszaki Egyetem Közl. Miskolc* (sajtó alatt — Hosszú Miklóssal közös).

[17] Maróbefogószerkezetek vizsgálata, *Nehézipari Műszaki Egyetem Közl. Miskolc* (sajtó alatt — Kuszmann Károllyal közös).

[18] Über die Lösung der Funktionalgleichung $f[y+xg(y)]=L[h(x), k(y)]$, *Ann. Polon. Math.* (sajtó alatt).

Jelentés a Beke Manó-emlékdíj tizenegyedik kiosztásáról

A Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége bizottságot küldött ki a Beke Manó-emlékdíj kiosztására. Ennek elnöke Hódi Endre, tagjai: Gádor Endréné, Késedi Ferenc, Raisz István, Surányi János, Szénásy Mihály és Bereznai Gyula előadó voltak. A bizottság az emlékdíj szabályzatának megfelelően megállapította, hogy a díjak odaítélésével elsősorban a matematika tanárok továbbképzésében végzett kiváló munkát és a matematikát népszerűsítő, színvonalas előadások tartását kívánja jutalmazni. Fontos szempontnak tekinti a bizottság a kiváló tanári munkát, a jó szakköri munkát, valamint a Bolyai Társulatban végzett szervező munkát.

A fenti szempontok figyelembevételével a bizottság 1961. május 15-i ülésén a következő határozatot hozta, amelyet az Elnökség jóváhagyott:

2000,—Ft jutalommal tünteti ki a bizottság ACZÉL János egyetemi tanárt; 1000—1000 Ft-tal jutalmazza EGYED Antalt, a gyöngyösi Vak Bottyán gimnázium tanárát, REMÉNYI Gusztávnét, a budapesti Ságvári Endre gyakorló ált. iskola és gimnázium tanárát, SZABÓ Jenőt, a miskolci Zrínyi Ilona leánygimnázium tanárát és VARGA Sándort, a ráckevei általános gimnázium tanárát.

Indokolás

Dr. ACZÉL János, a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem tanára, a Bolyai János Matematikai Társulat elnökségi tagja, a debreceni tagozat alelnöke. Lényeges szerepe volt a miskolci és a nyíregyházi tagozat megalakításában is.

Mint egyetemi tanár igen jó kapcsolatokat tart fenn a középiskolai tanárokkal, résztvesz továbbképzésükben, a továbbképzési napokon évről évre tart részükre előadást (pl. kúpszeletekről, egyenlőtlenségekről és szélsőértékfeladatok megoldásáról, az analízis fogalmainak és módszereinek tükröződéséről az iskolai anyagban, stb.). Az 1959. július 1-én a Társulat oktatási osztályának ankétján tartott előadása (Egyenlőtlenségek és alkalmazásuk szélsőértékfeladatok elemi megoldására) rövidesen nyomtatásban is megjelenik. Ugyanezt az előadást kiadták Jugoszláviában és Svájcban is. — A függvényegyenletekről írt tankönyvének is az elemi felépítés az egyik erőssége, de egy a „matematikai ifjúságnak" szánt népszerű könyvecskéje is megjelenik e tárgyról az NDK-ban (magyar fordítását a Matematikai Lapokban közölte.).

Előadásai közvetlenek, világosak, jól érthetőek. A választott problémák közel állnak a középiskolai tanárok érdeklődéséhez, előbbre viszik az iskolai munkát, ugyanakkor tágítják a tanárok látókörét és elmélyítik ismereteiket. Igyekszik ezeket mindig elemi, de nemrég felfedezett eredmények ismertetésével egybekötni. Aczél János mindig készséggel tesz eleget a középiskolával kapcsolatos bármely probléma megvitatására vagy előadás tartására vonatkozó kérésnek és ezt mindig baráti önzetlenséggel a matematika iránti szeretetből teszi.

Surányi Jánossal közösen írt cikksorozata jelent meg néhány évvel ezelőtt a Középiskolai Matematikai Lapokban az egyenlőtlenségekről, ahol feladatsorozat

segítségével vezették végig az olvasót a fontosabb egyenlőtlenségeken, azokat a Jensen-egyenlőtlenség körül egységes elv szerint építve fel. E sorozat egyes részei előzőleg francia és spanyol nyelven is megjelentek. — A magyar matematikai versenyeket előadásban ismertette Romániában és cikkben az Amer. Math. Monthly-ban.

Új kezdeményezése a probléma-felvető és részeredményeket is megvitató megbeszélés a társulati előadások után, amelyek nyomán az ifjú matematikus generációból sokan foglalkoznak az ő témájával, valamint a debreceni „fiatalok klubja", ahol fiatal matematikusok új eredményeiket a Bolyai Társulat keretében alapos megvitatás alá bocsátják, ami a fiatalokkal való foglalkozás eredményes új formája.

Egyed Antal, a gyöngyösi Vak Bottyán gimnázium tanára.

Igen jó matematika tanár egyéniség: határozott, következetes, szigorú, de minden merevség nélkül. Szakmailag jól képzett, állandóan figyelemmel kíséri a szaktárgyával kapcsolatos módszertani kérdéseket, szakkönyveket olvas, részt vett a múlt évben megrendezett matematikai kongresszuson is.

Óráit előre átgondoltság, a logikus gondolkodásra nevelés sokoldalúsága jellemzi. Tárgyát érdekesen, színesen, de kellő tudományos szinten tanítja. Az osztály minden tanulóját bekapcsolja a közös munkába. A munkára nevelést igen következetesen és jó eredménnyel végzi. Tanítványait nyíltságra, őszinteségre neveli. Növendékei megbecsülik, szeretik.

Az érdeklődő tanulókat jól foglalkoztatja a matematikai szakkörben. A Középiskolai Matematikai Lapoknak sok jó feladatmegoldója került ki tanítványai közül, s csak a megyén belül is két volt tanítványa tanít már középiskolában.

Az iskolában minden évben házi versenyt rendeznek matematikából, ezeknek a versenyeknek is ő a fő irányítója.

Sok órában tanít a felnőtteknél is a dolgozó és levelező osztályokban. Ezeket az órákat is határozott követelmények, de a hallgatókhoz való nagy alkalmazkodás és velük szemben tanúsított türelem jellemzik.

Ő a szakmai munkaközösség vezetője. Jól fogja össze a nagy iskola nevelőit. Az év elején kidolgozott munkaterv szerint havonta foglalkoznak módszertani, szakmai kérdésekkel. Ebben az évben pl. megbeszélték a felnőtt-oktatás módszertani kérdéseit.

Sok iskolai munkája mellett a társadalmi munkában is igen aktívan vesz részt, mint tanácstag és a városi Hazafias Népfront elnöke.

Reményi Gusztávné, az E. L. T. E. Ságvári Endre gyakorló gimnáziumának és általános iskolájának vezető tanára.

Munkaintenzitása szinte felülmúlhatatlan. Oktató tevékenységét igen kitűnő szakmai és pedagógiai képzettség, a tanítási órák gondos megszervezése, a logikus gondolkodásra nevelés és nagyfokú lelkiismeretesség jellemzi. Munkájában a matematika oktatás színvonalának emelésére törekszik. Állandóan tanulmányozza a módszertani könyveket; a matematika tanítás terén új utakat keres; minden egyes óra anyagának átadási módja újszerűen megoldandó problémát jelent számára. Bemutató tanításai az óra megtervezésének, levezetésének, a tanulókkal való foglalkozásának olyan mintaképei, amelyekből a leggyakorlottabb tanár is értékes ötleteket meríthet.

Óráinak nagy erőssége a szemléltetés, valamint a világos, áttekinthető ábrák használata. Még mint a nyíregyházi Zrínyi Ilona leánygimnázium tanára, részt vett az egri Pedagógiai Főiskola Szabolcs-Szatmár megyei levelező hallgatóinak rendszeres előkészítésében. Egyik tanítványa Arany Dániel tanulmányi versenyt nyert, egy másik pedig ugyanezen a versenyen helyezést ért el. A Bolyai János Matematikai Társulat nyíregyházi tagozatának rendezvényeit értékes előadásával gazdagította, A Nyíregyháza város középiskolás diákjai körében rendszeresített ún. központi szakkörön, valamint az egyetemi előkészítő tanfolyamokon egyaránt eredményesen tevékenykedett. A Matematika Tanítása c. módszertani lap feladatainak rendszeres megoldója; ugyanez a lap a mozgási feladatok grafikus megoldásának kérdéseivel

foglalkozó cikkét folytatásokban közölte. Nyíregyházán az általános és középiskola közötti átmenet zökkenőmentesebbé tételének lehetőségeit tanulmányozta, s tapasztalatairól beszámolt a nyilvánosság előtt. Tanítványai a szakköri foglalkozásokon, a házi és iskolák közötti versenyeken, valamint a KML. pontversenyén ma is értékes eredményeket érnek el.

Mint gyakorló iskolai vezető tanár, kiváló munkát végez a leendő tanárnemzedék szakmai és didaktikai képzésében. Lelkesedése, hivatásszeretete, személyes példaadása nagy hatással van a hozzá beosztott tanárjelöltekre. Oktató-nevelő munkáján kívül a matematikai ismeretterjesztés más területein is tevékenykedik.

Szabó Jenő, a miskolci Zrínyi Ilona leánygimnázium tanára.

Egyetemi tanulmányait a kolozsvári Tudományegyetem matematikai-természettudományi karán 1911—15. években végezte kiváló eredménnyel úgy, hogy az utolsó években évi 800 koronás ösztöndíjat is kapott. Már egyetemi hallgató korában három matematikai tárgyú, féléves előadási jegyzetet adott ki saját kidolgozásában.

Tanári szolgálatát 1916. szeptember 1-én kezdte meg a miskolci ref. főgimnáziumban, majd két év múlva átkerült a miskolci leánygimnáziumhoz, ahol azóta is megszakítás nélkül tanít. 1943-ban megjelent Algebra c. összefoglaló jellegű matematika könyve. 1947. április 30-án a VKM. soronkívül előléptette és 1956. szeptemberében „Az oktatásügy kiváló dolgozója" címet kapta.

Önmagát állandóan művelve, oly jól vezette tanítványait, hogy azok később is a legnagyobb hálával és elismeréssel emlékeznek vissza világos, nyugodt magyarázataira, a következetes számonkérésre és igazságos, a tanítványok valódi érdekét szolgáló osztályozására.

Mind a matematika tanárok szakmai munkaközösségében, mind a tanulók matematika szakköri munkájainak irányításában egészen kiváló eredményeket ért el.

1952. óta a Bolyai János Matematikai Társulat miskolci tagozatának alelnöke, és tevékeny részt vesz a Társulat ügyeinek intézésében. Évről-évre tart nagyon értékes előadásokat a Társulat ülésein. Rendszeresen közreműködik a középiskolai tanulmányi verseny és az Arany Dániel matematikai verseny dolgozatait felülvizsgáló bizottság munkájában.

Szabó Jenő 45. esztendőn keresztül végzett, kiemelkedően jó matematika tanári munkájának elismeréseként nyeri el a Beke Manó emlékdíjat.

Varga Sándor, a ráckevei általános gimnázium tanára.

1920-ban szerzett tanítói oklevelet, majd elvégezte az állami polgári iskolai tanárképzőt. 1955-ben a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem hallgatója lett és középiskolai tanári oklevelet szerzett matematikából.

Iskolai oktató-nevelő munkáját idősebb kora ellenére is példamutató pontossággal és lelkiismereteséggel látja el. A matematikán kívül ábrázoló geometriát, ipari rajzot és fizikát is tanít. Rendszeresen vezet szakkört is.

Pedagógiai munkája igen eredményes. Igényességével a tanulókat maximális teljesítményre serkenti. A logikus gondolkodásra neveléssel tanítványai minden megterhelés nélkül sajátítják el a matematikát.

Didaktikai erőssége a szemléltetés, a jó feladatmegoldó készség kialakítása és a tanulók aktivizálása a matematika órákon. Szép falitáblát készít a matematika különböző fejezeteinek szemléltetésére. Megtanítja tanítványait arra, hogy a feladatok többféle megoldását keressék. Óráira lelkiismeretesen felkészül; órái tervszerűek, változatosak, a tanulók számára érdekesek, élményszerűek. Kerüli a sablonos módszerbeli és nevelési eljárásokat.

Állandóan képezi magát. Mint az iskolai szakmai munkaközösség vezetője, neveli fiatalabb kartársait is. A továbbképzési összejöveteleken mindig igen aktívan vesz részt. A Matematika Tanítása c. folyóirat feladatrovatának megindulása óta egyik legjobb megoldója.

Négy évtizedes odaadó munkájáért ez év tavaszán Kiváló tanár-i kitüntetésben részesült.

Társulati élet

DIFFERENCIÁL, INTEGRÁL ÉS FÜGGVÉNYEGYENLETEK KOLLOKVIUM

Balatonvilágos, 1961. szeptember 7–10

A Bolyai János Matematikai Társulat a Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának támogatásával rendezte meg a „Differenciál, integrál és függvényegyenletek" kollokviumát. A kollokviumon 23 magyar és 11 külföldi matematikus vett részt 7 országból (Románia, Német Demokratikus Köztársaság, Olaszország, Egyesült Államok, Lengyelország, Ausztria, Jugoszlávia). Az alábbiakban ismertetjük a kollokviumon elhangzott, illetve bemutatott előadásokat. Az előadásokon kívül érdekes részben megoldott vagy megoldatlan problémákat is felvetettek a résztvevők.

ACZÉL JÁNOS:

Megjegyzések a függvényegyenletekről

Többek között a következő kérdések kerültek tárgyalásra:

Mátrixok invariánsai, testek és gyűrűk affincsoportjának homomorfizmusai, az $f_1(x)g_1(y)+f_2(x)g_2(y)+\ldots+f_n(x)g_n(y)=0$, függvényegyenlet teljes megoldása, következtetés bizonyos függvényegyenletek megoldásainak differenciálhatóságára integrálhatóságukból. Különböző alkalmazásokat is említett az előadó.

ADLER GYÖRGY:

Elliptikus- és parabolikus típusú egyenletek és biharmonikus egyenlet megoldásai gradiensének becslése

1. §. *Elliptikus- és parabolikus típusú egyenletek.*

Egyszerűség kedvéért a

$$\Delta u \equiv \frac{\partial u^2}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=f(x_1,\ldots,x_n) \tag{1}$$

és a

$$\Delta u - a\frac{\partial u}{\partial t}=f(x_1,\ldots,x_n,t) \tag{2}$$

egyenletek vizsgálatára szorítkozunk. Az (1) egyenlet a (2) egyenlet speciális esete, így részletesen csak a (2) egyenlettel foglalkozunk.

Legyen Ω az $(x_1,\ldots,x_n)$ tér (egyszerűség kedvéért korlátosnak feltételezett) tartománya, Σ pedig Ω határa, melyről feltételezzük, hogy eléggé sima.

Legyen $u(x_1, \dots, x_n, t)$ a (2) egyenlet megoldása az $\Omega \times (0 < t \leqq T)$ hengerben a következő kezdeti- és peremfelvételek mellett:

$$u(x_1, \dots, x_n, 0) = \varphi(x_1, \dots, x_n) \quad (x_1, \dots, x_n) \in \Omega + \Sigma$$

$$u(x_1, \dots, x_n, t) = \psi(x_1, \dots, x_n, t) \quad (x_1, \dots, x_n, t) \in \Sigma \times (0 \leqq t \leqq T),$$

ahol a φ és a ψ függvényekről feltételezzük, hogy eléggé regulárisak.

Legyen a $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ a Σ felületen alkalmasan választott felületi koordinátarendszer. A $\Sigma x(0 \leqq t \leqq T)$ henger-felületen definiált $F(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, t)$ függvényre bevezetjük az alábbi jelöléseket:

$$M_0(F) = \max_{\Sigma \times (0 \leqq t \leqq T)} |F|,$$

$$M_1(F) = \max_{i;\Sigma \times (0 \leqq t \leqq T)} \left| \frac{\partial F}{\partial \xi_i} \right|$$

$$M_2(F) = \max_{i,j;\Sigma \times (0 \leqq t \leqq T)} \left| \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right|,$$

$$M_t(F) = \max_{\Sigma \times (0 \leqq t \leqq T)} \left| \frac{\partial F}{\partial t} \right|.$$

Legyen továbbá

$$\mu_0(f) = \max_{(\Omega+\Sigma) \times (0 \leqq t \leqq T)} |f|,$$

$$\mu_1(f) = \max_{i;(\Omega+\Sigma) \times (0 \leqq t \leqq T)} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|,$$

$$m_0(\varphi) = \max_{\Omega+\Sigma} |\varphi|,$$

$$m_1(\varphi) = \max_{i;\Omega+\Sigma} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|.$$

Ekkor $|\operatorname{grad} u|$-ra a következő becslés adható meg:

$$\max_{(\Omega+\Sigma) \times (0 \leqq t \leqq T)} |\operatorname{grad} u| \leqq A_0 m_0(\varphi) + A_1 m_1(\varphi) + \tag{3}$$

$$+ B_0 M_0(\psi) + B_1 M_1(\psi) + B_2 M_2(\psi) + (C_1 \sqrt{T} + C_2 T) M_t(\psi) + D_0 \mu_0(f) + D_1 \mu_1(f),$$

ahol A_0, A_1, B_0, B_1, B_2, C_1, C_2, D_0 és D_1 csak a Σ felület alakjától függő, a tartomány geometriai adataival a szerző által explicite kifejezett állandók. Az (1) egyenlet esetén

$$A_0 = A_1 = C_1 = C_2 = 0$$

veendő.

Kiegészítések

a) Ha a ψ peremfüggvény a ξ_i koordináták szerint kétszer nem differenciálható, de első deriváltjai K-együtthatós $(K > 0)$ α-kitevős $(0 < \alpha \leqq 1)$ Lipschitz-feltételnek tesznek eleget, akkor(3)-ban $M_2(\psi)$ a $\frac{K}{\alpha}$ hányadossal helyettesíthető.

b) Ha a ψ peremfüggvénynek a ξ_i koordináták szerinti második deriváltjai nem korlátosak, de négyzetükkel együtt abszolút integrálhatóak a Σ felületen, akkor $M_2(\psi)$ a $\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right)^2$ függvények alkalmas integrálközepével helyettesíthető.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

c) $\psi \equiv 0$ esetén $g(t) = \max_{\Omega+\Sigma} |f|$ és $h(t) = \max_{i;\Omega+\Sigma} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|$ függvényében aszimptotikus becslés adható $k(t) = \max_{\Omega+\Sigma} |\text{grad } u|$-ra.

2. §. *Biharmonikus egyenlet*

A

$$\Delta\Delta u = 0 \tag{4}$$

biharmonikus egyenlet esetében eredményeink csak a kétdimenziós esetre vonatkoznak. Tehát ebben az esetben Ω az (x, y) sík tartománya, melynek Σ határgörbéjéről feltételezzük, hogy eléggé sima. Legyen s a Σ görbe ívhossz-paramétere, ν pedig belső normálisa.

A (4) egyenlet u megoldása tegyen eleget a következő peremfeltételeknek:

$$\left.\begin{aligned} u(x, y) &= \sigma(x, y) \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial \nu} &= \tau(x, y) \end{aligned}\right\} (x, y) \in \Sigma,$$

ahol a ϱ és a τ függvényekről feltételezzük, hogy eléggé regulárisak. Ekkor $|\text{grad } u|$-ra a következő becslés adható meg:

$$\max_{\Omega+\Sigma} |\text{grad } u| \leqq E_1 \max_{\Sigma} \left|\frac{\partial \sigma}{\partial s}\right| + E_2 \max_{\Sigma} |\tau|,$$

ahol E_1 és E_2 csak a Σ görbe alakjától függő, annak geometriai adataival a szerző által explicite kifejezett állandók.

L. Berg (Halle):

A differencia egyenletekre vonatkozó operátor módszerről

A Mikusinszki-féle operátor számításhoz hasonló elméletet lehet felállítani olyan függvényekre is, melyek független változói csak diszkrét értékeket vehetnek fel (l. pl. I. Fenyő: Eine neue Methode zur Lösung von Differenzengleichungen nebst Anwendungen. Periodica Polytechnica 3, 1959. 135. o.); ez a Mikusinszki-féle operatorszámítás egy egyszerű modelljének tekinthető. Ebben a modellben nagyon könnyen bizonyíthatók olyan tételek, amelyek az általános operátorszámításban csak nehezen bizonyíthatók, vagy pedig olyan tételek, amelyek az általános operátorszámításban még nyitott kérdésként szerepeltek. Vannak olyan tételek, amelyek az általános operátorszámításba csak utólagosan, a differenciaegyenletekre vonatkozó elméletben való felismerés után vihetők át és találtak olyanokat is, melyeknek analogonja az általános operátorszámításban nem is létezik. E jelenségekre vonatkozólag bővebb adatok megtalálhatók a Studia Matematicában közeljövőben megjelenő cikkben és egy közeljövőben sajtó alá kerülő könyvben („Einführung in die Operatorenrechnung" VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin).

BIHARI IMRE:

Az $u''+u+\varrho(x)f(u,u')=0$ egyenlet megoldásainak aszimptotikus viselkedése

Ismeretes, hogy az $u''+u=o$ egyenlet megoldásai 2π szerint periodikusak és az $u''+u+\varrho(x)u=o$ *lineáris* egyenlet megoldásainak aszimptotikus viselkedésére is számos eredménnyel rendelkezünk, melyek periodikus függvényt adnak meg aszimptotikus értelemben. Felmerül a kérdés, hogy milyen feltételek biztosítják a fenti *nemlineáris* egyenlet megoldásainak hasonló viselkedését. Erre ad választ a következő tétel.

Legyen $x>o$ esetén $\varrho(x)$ folytonos és tartson 0-hoz 1-nél nagyobb rendben, ha $x\to+\infty$. Legyen pl. $\varrho(x)=O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ ha $x\to+\infty$. Legyen $f(u,v)\in$Lip (1) az u és v minden korlátos tartományában és minden u, v, λ értékre tegyen eleget a $sg\, f(u,v)=sg\, u$ és $f(\lambda u,\lambda v)=\lambda f(u,v)$ feltételeknek. Akkor a fenti nemlineáris egyenlet minden $u(*)$ megoldásához tartozik egy $a_\infty(\neq 0)$ és egy δ_∞ konstans úgy, hogy $u=u(x)=a_\infty\sin(x+\delta_\infty)+0\left(\frac{1}{x}\right)$ $(x\to\infty)$ legyen.

Következmény: az egyenlet minden megoldása végtelen sokszor oszcillál, az (u) maximumainak a sorozata konvergens (a_∞-hez konvegrál), a szomszédos zérushelyek távolsága a π-hez tart.

DARÓCZY ZOLTÁN:

Transzfinit segédeszközök a függvényegyenletek elméletében

Ismeretes, hogy G. Hamel [4] 1905-ben transzfinit segédeszközök segítségével meghatározta az

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

Cauchy-féle függvényegyenlet nem-folytonos megoldásait. Itt olyan függvényegyenlet problémákkal kívánunk foglalkozni, amelyek megoldásánál fontos szerepet játszanak a Hamel-bázis segítségével megadható additív függvények.

1. Aczél J. [1] bebizonyította, hogy az

$$f(ax+by)=pf(x)+qf(y) \qquad abpq\neq 0 \tag{1}$$

függvényegyenletnek mérhető megoldásai csak $a=p$ és $b=q$ esetben léteznek. Kérdés az, hogy ha az ismeretlen függvényről semmit sem tételezünk fel, akkor milyen feltétel esetén létezik konstanstól különböző megoldása (1)-nek. $b=q=1$ esetén [2]-ben található a megoldás. Eredményünk a következő: (1)-nek akkor és csak akkor létezik konstanstól különböző megoldása, ha létezik $R(a,b)$ és $R(p,q)$ között olyan φ izomorfizmus, amelyre $\varphi(a)=p$, $\varphi(b)=q$ teljesül. ($R(t,s)$ jelöli a racionális számok testének a t és s elemekkel való bővítését.)

2. S. Gołąb és A. Schinzel [3] bebizonyították, hogy létezik az

$$f[x+yf(x)]=f(x)f(y) \tag{2}$$

függvényegyenletnek nem triviális-mikroperiodikus megoldása. Ugyanezen eredményt a Hamel-bázis segítségével kapjuk. Ez egyben példa arra is, hogy a Cauchy-féle egyenletnek létezik periodikus megoldása. [2].

3. Az

(3) $$f[f(x)y]=f(x)f(y)$$

függvényegyenletről megmutatjuk, hogy létezik nem mérhető megoldása. Ez a megoldása (3)-nak egyben additív is.

IRODALOM

[1] I. Aczél: Über eine Klasse von Funktionalgleichungen. Comment. Math. Helv. **21** (1948), 247—252.
[2] Z. Daróczy: Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von nichtkonstanten Lösungen linearer Funktionalgleichungen. Acta Sci. Math. Szeged **22** (1961), 31—41.
[3] S. Gołąb—A. Schinzel: Sur l'équation fonctionnelle $f[x+yf(x)]=f(x)\cdot f(y)$. Publ. Math. Debrecen **6** (1959), 113—125.
[4] G. Hamel: Eine Basis alle Zahlen und die unstetigen Lösungen der Fuktionalgleichung $f(x+g)=f(a)+f(y)$. Math. Ann. **60** (1905). 459—462.

W. Dück:

A sajátérték paraméterben kvadratikus tagot tartalmazó közönséges differenciálegyenletekkel kapcsolatos sajátérték problémákról

Olyan közönséges differenciálegyenletekre vonatkozó saját érték problémákat amelyekben a lineáris taghoz egy olyan tag is járul, amely a sajátérték paraméter kvadratikusan tartalmazza, Kamke ismert módszerével tárgyalhatók. Az előadás ilyenszerű feladatok tárgyalásának alapgondolataival foglalkozik. Néhány ilyen problémák saját értékeire és saját függvényeire vonatkozó egyszerű tétel bizonyítása után a szerző a saját értékek eloszlásának kérdésével foglalkozik. A saját értékek létezésének bizonyítását egy variációs problémára vezeti vissza. A lineáris problémák saját értékeivel való összevetés alapján a szerző olyan következtetéseket von le, amelyek a gyakorlati matematikában is fontos eredménynek tekinthetők.

Fényes Tamás—Kosik Pál:

Hővezető rudakból álló rendszerekről

Freud G. és Adler Gy. [1], [2], [3] dolgozataikban hővezetési és diffúziós feladatok megoldásával foglalkoznak összetett peremfeltételek esetén. Freud Géza [1] cikkében el nem hanyagolható hőkapacitású hőtartályhoz csatlakozó egy irányban végtelenítve véges rúd esetét tárgyalja homogén feltételek esetén. Adler György [2] dolgozatában hőtartályhoz csatlakozó két egyirányban végtelen hővezető rúd, illetve két hőtartályt összekötő rúd feladatát oldja meg homogén feltételek mellett. Freud Géza [3]-ban az [1]-ben tárgyalt feladatot általánosítja inhomogén feltételek esetére azzal a kikötéssel, hogy a rúd kezdeti hőmérsékletének deriváltja a nulla pontban nulla. Kosik Pál, Sallay Melánia és Zimányi Józsefné [4] cikkükben ezen korlátozó feltevést elejtik.

Fényes Tamás és Kosik Pál megoldják az el nem hanyagolható hőkapacitású hőtartályhoz csatlakozó tetszőleges (véges) számú véges, illetve végtelen hosszú hővezető rudakból álló rendszer hővezetési feladatát. A vizsgált rendszer egyszerre tartalmazhat véges hosszúságú és végtelen hosszú rudakat. A problémát szerzők egy másodfajú Faltung-típusú integrálegyenlet megoldására vezetik vissza, melyet a Mikusinszki-féle operátorszámítás segítségével tárgyalnak, ily módon a megoldást

előállító végtelen sor az operátorszámítás egy ismert tétele alapján egyenletesen konvergens és ezáltal nincs szükség konvergenciavizsgálatokra. Szerzők végül bebizonyítják a megoldásrendszer unicitását.

IRODALOM

[1] FREUD G.: Hővezetési és diffúziós feladatok összetett peremfeltételekkel I. MTA Alk. Mat. Int. Közleményei 3 (1955) 369–394.
[2] ADLER GY.: Hővezetési és diffúziós feladatok összetett peremfeltételekkel II. MTA MAT. Kut. Int. Közleményei 1 (1956) 167–183.
[3] FREUD G.: Problèmes de la propagation de la chaleur avec les conditions aux limites composées. Comptes Rendus du Congres International des Mathématiques de l'Ingénieur, Mons et Bruxelles 9–14 Juin 1958. 199–206.
[4] P. KOSIK, M. SALLAY, M. ZIMÁNYI: Problèmes de la propagation de la chaleur avec les conditions aux limites composées. MTA Mat. Kut. Int. Közleményei 4 (1959) 377–383.

G. FICHERA (Olaszország):

A peremérték feladatok egy új osztálya és ezzel kapcsolatos numerikus közelítések

Tekintsünk egy általános lineáris parciális másodrendű $L(u)=f$ differenciálegyenletet az r dimenziós Descartes-féle x^r térben. Feltesszük, hogy az L differenciáloperátor az x^r tér adott korlátos A tartományának a lezárásában elliptikus-parabolikus típusú és az A tartomány Σ határára vonatkozó alkalmas simasági feltételek mellett egy az $L(u)=f$ egyenletre vonatkozó korrekt kitűzésű peremérték feladatot vizsgálunk. Ez magában foglalja a másodrendű teljesen elliptikus egyenletre vonatkozó és az r-dimenziós hővezetési egyenletre vonatkozó klasszikus peremértékfeladatokat. A megoldásra a priori becsléseket adunk, továbbá unicitási és exisztencia problémákat vizsgálunk. Speciális esetenként tekintünk egy kétdimenziós homogén egyenletet és bebizonyítjuk, hogy bármely peremértékek mellett létezik egy C^∞-be tartozó megoldás, amely eltűnik egy, az A belsejében fekvő tartományban, amely független a peremértékektől. Bemutatunk numerikus approximációkat, amelyek ezt a körülményt illusztrálják és H. N. Lieberstein-től származnak, és hibakorlátokat adunk a közelítő megoldásra.

M. FRÉCHET (Párizs):

Egy Fredholm-mag iterált magjainak sorozatáról

Különböző kérdésekben, különösen a Markov-láncok elméletében fontos egy $K(M,P)$ Fredholm-mag n-edik iteráltja, $K_n(P,M)$, viselkedésének vizsgálata n növekedésével, ahol M, P egy korlátosnak feltételezett V tartomány két változó pontja. Ezt a problémát két módszerrel oldotta meg az előadó. Hely hiányában itt csak az elsőt foglalja össze, mely az ortogonális magok Goursat-tól származó elméletén alapszik. Goursat szerint $K_n(M,P)$ az $A_n(M,P)+E_n(M,P)$ alakban írható, ahol A_n és E_n iterált magjai $A(M,P)$ és $E(M,P)$-nek. Érvényes $K(M,P)=A(M,P)+E(M,P)$, ahol $A(M,P)$ az egységnyi modulusú „fundamentális állandókra vonatkozó főmagok" összege.

Be lehet bizonyítani, hogy ha valamennyi $K_n(M, P)$ korlátos V-n, egy bizonyos indextől kezdve, $E(M, P)$ egyenletesen tart V-n zérushoz. Ezzel a K_n-ek vizsgálata vissza van vezetve az A_n-ek egyszerűbb vizsgálatára. Goursat pontos kifejezést adott az $A_n(M, P)$-kre, mint n függvényeire.

A mi céljainkhoz elég volt bebizonyítani egy más módszerrel, hogy

$$A_n(M, P) = \sum_{j=1}^{q} (\lambda_j)^{1-n} \sum_{k,m} R_{k,m}(n) X_k(M) Y_n(P)$$

ahol $R_{k,m}(n)$ polinom n-ben, és ahol k, m csak véges sok értéket vehetnek fel. A_n-nek ez a kifejezése lehetővé teszi viselkedésének vizsgálatát, amikor n változik.

Példákat lehet megadni, ahol $K_n(M, P)$-nek *nincs határértéke* közönséges értelemben, ha n végtelenhez tart.

Sikerült ellenben az előadónak bebizonyítania, hogy $K_n(M, P)$ mindig konvergál *középértékben* (vagyis, hogy $(K_1 + K_2 + \ldots + K_n)/n$-nek van határértéke) és hogy ez a határérték egyenlő a K magnak azon fundamentális konstansra vonatkozó főmagjával, amely 1-gyel egyenlő, vagy pedig ez a határérték 0, ha K_n nem rendelkezik evvel a fundamentális állandóval.

GÁSPÁR GYULA:

A determinánsfüggvény egy új karakterizációja

Többféle eljárás ismeretes, amelyek a determinánst mint függvényt bizonyos tulajdonságok segítségével jellemzik. Itt egy ilyen eljárást mutatunk be.

Legyen K végtelen integritástartomány. $A, B, \ldots$ jelölik a K feletti n-edfokú K_n teljes mátrixgyűrű elmeit.

X és Y sorkombinációin értjük mindazon 2^n számú mátrixot a K_n-ben, amelyekben az i-ik sor az X vagy az Y i-ik sora ($i = 1, 2, \ldots, n$). Hasonló X és Y oszlopkombinációinak az értelmezése.

Ha a φ a K_n nem-állandó leképezése a K-ba, amelyik a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

(1) $$\varphi(X+Y) = \Sigma\varphi(Z),$$

(2) $$\varphi(XY) = \varphi(X)\varphi(Y),$$

(3) $$\varphi(tX) = t^n\varphi(X), \quad (t \in k),$$

ahol az (1)-ben az X és Y összes Z sor- vagy oszlopkombinációra vonatkozólag összegezni kell, akkor φ az X determinánsa.

Alkalmas módon választott példákkal meg lehet mutatni, hogy az (1), (2), (3) tulajdonságok egymástól függetlenek ebben az esetben.

GESZTELYI ERNŐ:

Az autodisztributivitás függvényegyenletéről

Ismeretes, hogy ha az $F(x,y)$ függvény folytonos, mindkét változójában szigoruan monoton növő, szimmetrikus, azaz $F(x,y) = F(y,x)$ és balról autodisztributív, azaz

$$F[x,F(y,z)] = F[F(x,y),F(x,z)],$$

akkor van olyan szigorúan monoton növő folytonos $f(x)$ függvény, hogy

$$F(x,y)=f^{-1}\left[\frac{f(x)+f(y)}{2}\right].$$

Legyen

$$F_1(x,y)=F(x,y)$$
$$F_{n+1},(x,y)=F[x,F_n(x,y)] \qquad n=1,\ 2,\ \ldots$$

Akkor érvényes a következő tétel:

Ha $F(x,y)$ folytonos, mindkét változójában szigorúan monoton növekvő, és ha van olyan n természetes szám, melyre

(1) $$F_n(x,y)=F_n(y,x)$$

teljesül, akkor van olyan szigorúan monoton növő folytonos $f(x)$ függvény, hogy

(2) $$F(x,y)=f^{-1}\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)f(x)+\frac{1}{\sqrt[n]{2}}f(y)\right].$$

Ha az [1] tulajdonság helyett azt tételezzük fel, hogy van olyan n természetes szám, melyre $F_n(x,y)$ jobbról autodisztributív, vagyis

(3) $$F_n[F_n(x,y),z]=F_n[F_n(x,z),F_n(y,z)],$$

akkor van olyan $f(x)$ szigorúan monoton növő folytonos függvény és olyan $0<q<1$ szám, hogy

(4) $$F(x,y)=f^{-1}[(1-q)f(x)+qf(y)]$$

M. Ghermanescu (Bukarest):

Függvényegyenletek automorf együtthatókkal

Ha $F_1(M)$ és $F_2(M)$ két függvényoperátor, melyek az n-dimenziós euklidészi tér D tartományában vannak definiálva és iteráltjaik $F_k^i(M)=F_k(F_k^{i-1}(M))(k=1,2)$, melyekre érvényes $F_1(F_2)=F_2(F_1)$, akkor igazak a következő állítások:

I. Ha $A_k(F_2)=A_k(M)$, akkor az

(1) $$A_0(M)f(F_1^n)+A_1(M)f(F_1^{n-1})+\ldots+A_k(M)f(F_1)=0$$

függvényegyenlet minden megoldása eleget tesz a

(2) $$B_0(M)f(F_2^n)+B_1(M)f(F_2^{n-1})+\ldots+B_n(M)f(F_2)=0,$$

egyenletnek, ahol $B_k(F_1)=B_k(M)$.

II. Az (1) és (2) függvényegyenletek minden megoldása ugyanazon feltételek mellett eleget tesz a

(3) $$\mathrm{Det}\, f^{n,k-m}=0$$

függvényegyenletnek is, ahol $f^{ij}=f(F_1^i(F_2^j))=f(F_2^j(F_1^i))$.

S. Gołąb (Krakkó):

Ekvivalencia-reláció és geometriai objektumok

Tekintsük egy egyenesen a $\overrightarrow{P_1P_2}$ és a $\overrightarrow{P_3P_4}$ vektorpárokat, és azokat az R ekvivalencia-relációkat, amelyek a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

1) $\overrightarrow{P_1P_2}\, R\, \overrightarrow{P_1P_2}$

2) $\overrightarrow{P_1P_2}\, R\, \overrightarrow{P_3P_4} \Rightarrow \overrightarrow{P_3P_4}\, R\, \overrightarrow{P_1P_2}$

3) $\overrightarrow{P_1P_2}\, R\, \overrightarrow{P_3P_4}\ \&\ \overrightarrow{P_3P_4}\, R\, \overrightarrow{P_5P_6} \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2}\, R\, \overrightarrow{P_5P_6}$

x_i-vel jelölve a P_i pont koordinátáját és feltéve, hogy $x_4 = f(x_1, x_2, x_3)$, olyan függvényegyenletrendszert kapunk, amely ekvivalens azzal a rendszerrel, amelyet kielégít az a függvény, amely megadja a transzformációs törvényt egy nem-differenciális geometriai objektum számára egy egydimenziós térben, melynek egyetlen komponense van.

A. Haimovici (Iaşi):

A Cauchy—Kowalewsky-probléma egy általánosításáról

Tekintsük az

$$f\left(x, y, z, \ldots, u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \ldots\right) = 0,$$

$$g\left(x, y, z, \ldots, u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \ldots\right) = 0,$$

rendszert, ahol az f és g argumentumaik analitikus függvényei.

Vizsgáljuk ezen rendszer egy olyan megoldásának egzisztenciáját, mely eleget tesz még a következő feltételeknek is:

$$u(x, y, z, \ldots)|_{S_1} = \varphi_1,\ v(x, y, z, \ldots)|_{S_2} = \varphi_2,$$

ahol S_1 és S_2 két analitikus hiperfelület, melyek bizonyos megszorításoknak tesznek eleget és φ_1 és φ_2 két, ezen hiperfelületeken definiált függvény. Ilymódon a karakterisztika fogalmának egy általánosítását kapjuk.

H. Hornich (Bécs):

Egzisztencia-tétel több mint két független változót tartalmazó lineáris, parciális differenciálegyenletek esetén

Bemutatunk egy olyan elsőrendű lineáris parciális differenciálegyenletekre vonatkozó egzisztencia-tételt, melynél az együtthatókról csak folytonosságot tételezünk fel; a bizonyításhoz több mint két független változó esetén transzfinit indukció szükséges.

Hosszú Miklós (Miskolc):

Néhány lineáris függvényegyenletről

R. Bellman vetette fel az

$$f(x_1)+f(x_2)=f(x_3),\quad x_i=(x_{i0}, x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}),\quad x_{ik}=x_i^{(k)}(t)|_{t=0}.$$

(1)
$$x_3(t)=x_1(t)x_2(t)$$

lineáris függvényegyenlet megoldásának problémáját, ahol $x_i(t)$ valós függvény. Aczél Jánossal és E. G. Straus-szal közösen írt dolgozatunkban a legáltalánosabb megoldást

$$f(x_1)=\sum_{k=0}^{n} a_k[y^{(k)}(0)],\quad y(t)=\log|x_1(t)|,$$

(2)

alakban adtuk meg, ahol a_k tetszőleges additív függvény és a_0 függhet még sgn $x_1(0)$-tól is. Aczél Jánossal kidolgoztunk egy megoldási módszert, mely hasonló általánosabb esetekre is alkalmazható, midőn pl. $x_i(t)$ egy valós t paramétertől függő mátrix, vagy pl. ha $x_1(t)$, $x_2(t)$ n-dimenziós vektor-vektor függvény, továbbá (1)-től eltérően $x_3(t)=x_1[x_2(t)]$ összetett függvény. Az első esetben (2)-höz hasonló megoldási formula érvényes:

$$f(x_1)=a_0(\log|\det x_{10}|)+\sum_{k=1}^{n} a_k[\operatorname{tr} z^{(k-1)}(0)],\quad z(t)=x_1'(t)x_1(t)^{-1}.$$

M. Krzyzanski (Krakkó):

Nem korlátos együtthatójú-parabolikus típusú parciális differenciálegyenletekkel kapcsolatos problémák

Tekintsük a

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(t,x)u_{x_ix_j}+\sum_{k=2}^{m} b_k(t,x)u'_{x_k}+c(t,x)u-u'_t=0,$$

(1)

egyenletet, melynek $a_{ij}(t,x)$ együtthatói korlátosak

$0<t<T, X(x_1,\ldots,x_m)\in\varepsilon^m$ esetén és ahol a $\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(t,x)\lambda_i\lambda_j$

kvadratikus alak pozitív definit. Tegyük fel, hogy a b_k és c együtthatók a

$$|b_k(t,x)|\leqq A_1|x|+B_1$$
$$c(t,x)\leqq A_2|x|^2+B_2 \qquad 0<t<T,\ X(x_1,\ldots,x_m)\in\varepsilon^m,$$

egyenlőtlenségeknek tesznek eleget, ahol A_i és $B_i (i=1,2)$ pozitív állandók. E_2 osztálynak fogjuk nevezni az $|F(t,x)\leqq M\exp k|x|^2$ egyenlőtlenségnek eleget tevő $F(t,x)$ függvények osztályát, ahol M és K pozitív állandók, melyek általánosságban az F függvénytől függenek. Legyen $u(t,x)$ az (1) egyenletnek egy E_2 osztálybeli folytonos megoldása $0\leqq t\leqq T$, $x\in\varepsilon^m$ esetén és C^2 osztálybeli ezen tartomány belsejében. Ha $u(0,x)\geqq 0$, teljesül, akkor $u(t,x)\geqq 0$ $0\leqq t\leqq T$, $x\in\varepsilon^m$1) esetén. Az alább következő eredmények A. Szybiak és az előadó közös eredményei.

Az (1) egyenlet olyan E_2-osztálybeli $u(t, x)$ megoldása, amely $t=0$ esetén korlátos, $0<t\leqq T$ esetén általában nem korlátos: $\exp k|x|^2$ rendben nőhet. De ha $c(t, x)\leqq 0$ és $(u(0, x))\leqq M$, akkor $|u(t, x)|\leqq M\, 0\leqq t\leqq T$ esetén. Ha $c(t, x)\leqq -A|x|^2+$ $+B(A>0)$ és $(u(0, x))\leqq M$, akkor $|u(t, x)|\leqq \ldots$, ahol $\lambda>0$ γ és ν állandók.

M. Kuczma (Krakkó):

Cauchy függvényegyenlete többdimenziós terekben

A következő kérdés kerül tárgyalásra: Ha adva van egy $f(x)$ additív függvényoperáció egy n-dimenziós normált vektortérben, mely értékeit egy Hilbert-térben veszi fel és teljesíti az S n-dimenziós gömbben az $a\cdot f(x)\leqq A$ feltételt bizonyos a-kra (a. b skaláris szorzat), következik-e ebből, hogy folytonos.

A válasz nemleges, de be lehet bizonyítani, hogy $f(x)$ két additív függvényoperáció összegeként írható fel: $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, ahol $f_1(x)$ folytonos és $a\cdot f_2(x)=0$. Az a feltétel, hogy S gömb, természetesen lényegesen enyhíthető.)

S. Kurepa (Zágráb):

Egy koszinusz függvényegyenlet Banach-algebrákban és Banach-algebrák-beli elemek gyökei

Az előadás a következő két problémával foglalkozott:

A) probléma. Meghatározandók mindazon, az összes valós számok R halmazán értelmezett mérhető függvények, melyek értékei egy valós, vagy komplex B Banach-algebrában fekszenek és minden t és s-re érvényes (1)

$$f(t+s)+f(t-s)=2f(t)f(s), \qquad f(0)=e.$$

B) probléma. Meghatározandók mindazon, egy X Banach-térben értelmezett F függvények, melyek értékei B-ben fekszenek, és sugáron minden x, y-ra mérhetők és eleget tesznek a

$$F(x+y)+F(x-y)=2F(x)\,F(y), \qquad F(0)=e \tag{2}$$

függvényegyenletnek. e a B-beli egységelem.

Az (1) függvényegyenletet az előadó a Glasnik Mat. Fiz. Astr. 13 (1958), 169–189-beli cikkében tanulmányozta és megoldotta azon feltevés mellett, hogy B elemei végesrendű négyzetes mátrixok. A Canadian J. Math. 12 (1960), 45–50-ben megjelent cikkében B valamely Hilbert-téren értelmezett összes korlátos operátorok algebrája volt. f gyenge folytonosságát feltételezve bebizonyította, hogy

$$f(t)=\int \cos t\lambda \, de(\lambda)=\cos at,$$

ahol a egy t-től független normális operátor. Ezt G. Maltese (Amer. Math. Soc. Notices 7 (1960, 384) arra az esetre általánosította, amikor R tetszőleges lokálisan kompakt Abel-csoport. Továbbá az előadó Studia Math. **19** (1960), 149–158-beli cikkében B valamely Y Banach-téren definiált folytonos és lineáris operátorok Banach-algebrája volt. Feltéve, hogy Y reflexív és szeparábilis, bebizonyította, hogy f-nek egy intervallumon való gyenge mérhetőségéből következik annak R-en való gyenge (valójában erős) folytonossága. Ugyanezen dolgozatában a (2) függvényegyenletet is vizsgálta. Feltéve, hogy B a komplex számok halmaza és hogy F folytonos, bebizo-

nyította, hogy létezik egy X-et B-re leképező additív és folytonos A függvényoperáció, úgyhogy $F(x) = \cos A(x)$ minden X-beli x-re.

Ebben az előadásban az általános eset került tárgyalásra, vagyis az előadó megoldotta az A) és B) problémákat. Az első esetben létezik egy B-beli, t-től független a elem úgy, hogy

$$f(t) = \sum_0^\infty a^n t^{2n}/(2n)! \tag{3}$$

minden R-beli t-re. Ha 1) B valamely Hilbert téren definiált korlátos lineáris operátorok egy Banach-algebrája, 2) a (3)-beli a elemnek B-ben van reguláris négyzetgyöke és 3) f egyenletesen korlátos R-en, akkor

$$f(t) = \sum_0^\infty (-1)^n (td)^{2n}/(2n)!,$$

ahol d egy önadjungált operátorhoz hasonló.

A B) problémára vonatkozóan bebizonyította, hogy

$$F(x) = \sum_0^\infty A(x)^n/(2n)!$$

minden X-beli x-re, ahol az X-et B-re leképező A akkor és csak akkor folytonos, ha t-nek 0-hoz tartozásával $F(tx)$ x-re vonatkozóan valamely gömbben egyenletesen e-hez tart. Ha valamely x-re $\|e - A(x)\| < 1$, akkor $A(x) = L(x)^2$, ahol az X-et B-re leképező additív L függvény folytonos, ha A is folytonos.

(3)-ból látható, hogy általában f nem koszinusz, mivel a még reguláris is lehet, anélkül, hogy négyzetgyöke volna B-ben (P. R. Halmos—G. Lumer, Proc. Amer. Math. Soc. **5** (1954), 589—595). Bebizonyította ellenben az előadó, hogy bármely B Banach-algebrát izometrikusan és izomorf módon be lehet ágyazni egy másik B' Banach-algebrába úgy, hogy B bármely elemének mint B' elemének tetszőleges gyöke létezik B'-ben. Továbbá B beágyazható egy B'' normált algebrába, melynek bármely eleme B''-beli tetszőleges gyökkel rendelkezik. Ezek a beágyazások a spektrumot megtartják.

MAKAI IMRE:

Függvényegyenletek alkalmazása a geometriai objektumok Lie-deriváció-elméletében

Aczél J. és S. Gołąb [1] munkájukban valamely, az x_n tér G tartományában értelmezett $\Omega = \{\Omega_\alpha\}(\alpha = 1, \ldots, N)$ homogén lineáris differenciálgeometriai objektum egy kontravariáns $v^k (k = 1, \ldots, n)$ vektortérre vonatkozó $\Theta = \{\Theta_\beta\}(\beta = 1, \ldots, N)$ Lie-deriváltjairól a következőket tételezik fel:

1° Θ és Ω azonos típusú objektumok,

2° Θ mind az Ω objektum, mind a v^k vektortér elsőrendű differenciálkomitánsa.

Ha az X_n tér $x \to \bar{x}$ megengedett koordinátatranszformációi esetén Ω komponenseinek transzformációját az

$$\bar{\Omega}_\alpha = F_\alpha^\beta(\bar{A}_j^i)\Omega_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, N) \tag{1}$$

összefüggések adják $\left(\bar{A}^i_j \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\right.$ és a továbbiakban $\partial_j f \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial x_j}$, illetve itt később egy $f(P)(P \in G)$ függvénynek az $\bar{x}$ koordinátarendszerben vett értékét $\bar{f}(P)$-vel jelöljük$\left.\right)$, akkor a 2° feltétel szerint fennálló

$$\Theta_\gamma = f_\gamma(\Omega_\alpha;\ \partial_j \Omega_\alpha;\ v^k;\ \partial_i v^k) \qquad (\gamma = 1, \ldots, N) \tag{2}$$

függőséget a (2)-nek (1)-be való helyettesítésével nyert

$$f_\gamma(\bar{\Omega}_\alpha;\ \overline{\partial_j \Omega_\alpha};\ \bar{v}^k;\ \overline{\partial_i v^k}) = F^\delta_\gamma(\bar{A}^i_j) f_\delta(\Omega_\alpha;\ \partial_j \Omega_\alpha;\ v^k;\ \partial_i v^k) \tag{3}$$

függvényegyenletrendszerből határozhatjuk meg.

Bizonyítható (l. [2]), hogy (3) megoldásaként (2) például *skalár*mező esetén (f_γ folytonosságának feltételezésével) csak

$$\Theta = g(\Omega, L_v \Omega) \quad (L_v \Omega \overset{\text{def}}{=} v^a \partial_a \Omega) \tag{4}$$

alakú lehet ($g(x, y)$ az $y = 0$ helyen folytonos, tetszőleges függvény),

Ω *kovariáns vektor*tér esetén (f_γ folytonosságának feltételezésével) általában

$$\Theta_\gamma = C_1 u_\gamma + C_2 v^a \partial_{[a} u_{\gamma]} + C_3 a_\gamma u_\gamma \quad (\gamma = 1, \ldots, n;\ L_v u_\gamma \overset{\text{def}}{=} v^a \partial_a u_\gamma + u_a \partial_\gamma v^a) \tag{5}$$

alakú (C_1, C_2, C_3, a $v^a u_a$, $v^a v^b \partial_{[a} u_{b]}$ és $v^b (v^a {}_{(a} u_{b)} + u_{ab} v^a)$ skalárok tetszőleges függvényei),

Ω *kontravariáns vektor*tér esetén általában

$$w^\gamma (\overset{\text{def}}{=} \Theta_\gamma) = c_1 u^\gamma + c_2 v^\gamma + c_3 L_v u^\gamma \quad (\gamma = 1, \ldots, n;\ L_v u^\gamma \overset{\text{def}}{=} v^a \partial_a u^\gamma - u^a \partial_a v^\gamma) \tag{6}$$

alakú, ahol c_1, c_2, c_3 az u^γ, v^γ, $\partial_\nu u^\gamma$ vektorok lineáris függőségét kifejező skalárok tetszőleges függvényei.

(4), (5), (6) speciális esetében visszaadja a Lie-derîváltak klasszikus alakját (v. ö. [3], itt $L_v \Omega_\gamma$-val jelölve), így azok általánosításának tekinthetők.

IRODALOM

[1] J. Aczél und S. Gołąb, Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte. *Warszawa* 1960.

[2] I. Makai Über die Lieschen Ableitungen der homogenen linearen geometrischen Objekte (megjelenés előtt).

[3] A. Nijenhuis, Theory of the geometric object, *Univ. Amsterdam*, 1952.

Máté László:

Absztrakt Cauchy probléma és operátor félcsoportok

Az absztrakt Cauchy probléma a következő: Adott egy B Banach tér és A a B-ben értelmezett zárt operátor. Legyenek $y(t)\,(t \geqq 0)$ függvény értékei a B tér elemei. *A probléma*: Keresendő az

$$y'(t) = Ay(t) \tag{1}$$

egyenletnek olyan $y(t)$ megoldása, amely $y(0) = y_0 \in B$ „kezdeti feltételt" elégíti ki.

Ha B az n-dimenziós euklidési térben, folytonos és korlátos függvények Banach

tere és A megfelelő differenciáloperátor, akkor a parciális differenciál egyenletek elméletének konkrét Cauchy problémáját kapjuk. Ebben áll a probléma jelentősége.

Legyen F az n-dimenziós térben értelmezett folytonos (de nem szükségképpen korlátos) függvények osztálya a szokásos topológiával. Ekkor *fontos kérdés a következő*: Ha az (1) egyenletnek egyértelmű megoldása van B-ben (azaz $y(t)\in B$ minden $t\geqq 0$-ra) minden — az A differenciál operátor értelmezési tartományába eső — $y_0\in B$ kezdeti feltétel mellett, akkor milyen feltételek mellett van biztosítva $y_0\in F$ (és $y_0\notin B$) (tehát a végtelenben nem korlátos) kezdeti feltétel mellett (1) megoldásának exisztenciája és unicitása.

Az előadásban szerző megmutatja, hogy hogyan lehet és milyen mértékben lehet, az operátor félcsoportok elméletét ennek a problémának a megoldására alkalmazni. A fontosabb eredmények a következők:

I. Legyen $\{\Gamma(t), t\geqq 0\}$ „erősen folytonos" operátor félcsoport a B Banach térben, A az infinitezimális generátor és $R_\lambda=(\lambda-A)^{-1}$ (amely $\lambda>\lambda_0$ mellett mindig létezik). Legyen továbbá F olyan Fréchet tér, amelyre $B\subset F$ (halmazelméleti értelemben) és B elemei az F-nek mindenütt sűrű részhalmazát alkotják.

Ekkor annak szükséges és elégséges feltétele, hogy $\Gamma(t)$ erősen folytonosan kiterjeszthető legyen F-re az, hogy létezzen minden $||...||_k$ félnormára olyan nemcsökkenő $\nu_k(t)$ hogy minden pozitív ε-ra

$$||\lambda^n R_\lambda^n x||_k\leqq \nu_k(N)+\varepsilon,$$

hacsak $\lambda N>n$ és $\lambda>\lambda_0(x,\varepsilon)$ és $x\in B$.

II. Ha $\Gamma(t)y\,y\notin B$ nemcsak folytonos, hanem differenciálható is (jobbról) $t=0$-ban, és $\Gamma(t)$ generátora az A operátor, akkor

$$y'(t)=Ay(t)\qquad y(o)=y$$

absztrakt Cauchy probléma megoldása $\Gamma(t)y$ és ez az egyetlen megoldás.

Az előadásban felsorolt eredmények illusztrálására számos példa szerepel a parabolikus és hiperbolikus differenciál egyenletek köréből.

H. Michel (Halle):

Vizsgálatok valós függvények folytonos monoton iterációcsoportjairól differenciálhatósági feltételek nélkül

A szerző az f fügvény $f^{[s]}$ folyamatos monoton iteráltjaitól megkívánja, hogy (pozitiv egész s-re a szokott egész rendű iterálttal egyezzen meg és) eleget tegyen az $f^{[s]}f^{[t]}=f^{[s+t]}$ függvényegyenletnek.

Többek között bebizonyítja, hogy véges sok racionális iterált megoldása nem határozza meg az $f^{[s]}{}_{[x]}$ paraméteres függvényrendszert, de irracionálisé igen és mindkét esetben szükséges és elégséges feltételeket ad meg arra, hogy egy adott függvény egy másik adott függvénynek s-edik iteráltja-e.

D. S. Mitrinovic (Belgrád):

Néhány függvényegyenletről

Az előadó a ciklikus függvényegyenletek (ld. pl. J. Aczél—M. Ghermanescu —M. Hosszú, MTA Mat. Kut. Int. Közleményei **5** (1960) 215—221) néhány nem triviális speciális esetének megoldását ismerteti.

MOÓR ARTUR:

Projektív invariáns tenzorok képzése

Definíció. Projektív invariánsnak nevezzük azon $P^A(\xi^\nu)(A=1,\ldots,r)$ *geometriai objektummezőt, amely a* $\Gamma^\beta_{\alpha\gamma}$ *szimmetrikus affin eltolási paraméterekből és ennek* ξ^κ *szerinti első- másod- és magasabb rendű parciális differenciáljaiból van képezve és invariáns egy*

$$\hat{\Gamma}^\beta_{\alpha\gamma}=\Gamma^\beta_{\alpha\gamma}+\delta^\beta_\alpha\psi_\gamma+\delta^\beta_\gamma\psi_\alpha \tag{1}$$

alakú paramétertranszformációval szemben.

A projektív összefüggő terek elméletében lényeges szerepet játszanak az ún. projektív eltolási paraméterek. Ezek egyúttal a legegyszerűbb projektív invariánsok az (1) transzformációval szemben. Fennáll ugyanis a következő tétel:

1. Tétel. A $\Gamma^\beta_{\alpha\nu}$ *affin eltolási paraméterekből csak a*

$$\Pi^\beta_{\alpha\gamma}\overset{\text{def}}{=}\Gamma^\beta_{\alpha\gamma}-\frac{1}{n+1}(\delta^\beta_\alpha\Gamma^\tau_{\tau\gamma}+\delta^\beta_\gamma\Gamma^\tau_{\tau\gamma}) \tag{2}$$

klasszikus projektív eltolási paraméterek képezhetők.

Könnyen igazolható, hogy a $\Gamma_\alpha=\Gamma^\tau_{\tau\alpha}$ mennyiségekből nem képezhető projektív invariáns.

A következőkben a $R^\beta_{\alpha\gamma\delta}$ *görbületi tenzorból* képezhető projektív invariánsokkal foglalkozunk. Fennáll a következő

2. Tétel. A $R^\beta_{\alpha\gamma\delta}$ *tenzorból képezett* $\Phi^\beta_{\alpha\gamma\delta}$ *típusú projektív invariáns tenzor csak a Weyl-féle görbületi tenzortól függ.*

Ugyanezt az eredményt kapjuk akkor is, ha a $\Phi^\beta_{\alpha\gamma\delta}$ típusú projektív invariáns tenzort a (2)-vel adott projektív eltolási paraméterekből képezzük.

P. H. MÜLLER (Drezda):

A $(\lambda^2 I-\lambda A-B)x=0$ típusú egyenletre vonatkozó sajátérték problémákról

A címben szereplő egyenlet-típusra vonatkozó sajátérték becsléseket ad a szerző, melyeket, ha

$$\lambda^2\varphi(s)-\lambda\int_a^b A(s,t)\varphi(t)\,dt-\int_a^b B(s,t)\varphi(t)\,dt=0$$

típusú integrálegyenletekre alkalmazunk, akkor a lineáris integrálegyenletekre vonatkozó ismert tételek általánosításainak foghatunk fel. Példaképpen megemlítünk egy tételt, mely a közismert „Schur-féle egyenlőtlenség" általánosítása:

Legyen $A(s,t)$ egy négyzetével együtt integrálható és $B(s,t)$ egy Hermite-féle, pozitív (semi-) definit és folytonos mag. Akkor érvényes az alábbi egyenlőtlenség:

$$\sum|\lambda_i|^2\leqq\int_a^b\int_a^b|A(s,t)|^2\,ds\,dt+2\int_a^b B(s,t)\,ds.$$

A baloldali összegben minden sajátértéket annyiszor kell számításba venni, amennyi az algebrai multiplicitása. Az egyenlőségjel pl. érvényes akkor, ha $A(s,t)$ egy Hermite-féle mag.

F. RADÓ (Kolozsvár):

Térbeli hálózatok általánosítása

Az előadó a térbeli hálózatokat ugyanolyan értelemben általánosítja, mint az a síkbeli 3-hálózatoknál szokásos (ld. pl. G. Pickert, Projektive Ebenen, Berlin—Göttingen—Heilderberg 1955, R. H. Bruck, A Survey of Binary Systems, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1958, J. Aczél—G. Pickert—F. Radó, Mathematica Cluj 2 (25), (1960), 5—24): a térbeli hálózatokhoz ternér kvázicsoportokat rendel. Ezeknél a regularitás különböző fajtáit definiálja és ezekre szükséges és elégséges feltételeket állapít meg, melyeknek már „geometriai" jelentésük van, többek között J. Aczél—V. D. Belousov—M. Hosszú (Acta Math. Acad. Sci. Hung. 11 (1960), 127—136) tételét felhasználva. Remélhető, hogy ezekből a vizsgálatokból a Blaschke—Dubordieu-féle sejtés (ld. pl. W. Blaschke—G. Bol, Geometrie der Gewebe, Berlin 1938) elemi bizonyítása nyerhető majd.

RÓZSA PÁL:

A Poisson-egyenlet közelítő megoldásáról

Ismeretes, hogy a ha Poisson-egyenletet rács-módszerrel közelítjük a következő differenciaegyenlet írható fel:

$$20w_{ij} - 4(w_{i+1,j} + w_{i,j+1} + w_{i-1,j} + w_{i,j-1}) -$$
$$-(w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1} + w_{i+1,j-1}) = -h^2 g_{ij}.$$

Az egyenlet hibája h^6 nagyságrendű, ahol h a rácstávolság. (Lásd pl. L. V. Kantorovics—V. I. Krilov: A felsőbb analízis közelítő módszerei, 229. o.) Téglalap alakú tartományra (homogén peremfeltételek esetén) G. N. Lance a differenciálegyenletet algebrai egyenletrendszerként írja fel, amelynek együttható-mátrixát a következőképpen particionálja (lásd G. N. Lance: Numerical methods for high speed computers, London, Iliffe, 1960)

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B} & 0 & \dots & 0 \\ -\mathbf{B} & \mathbf{A} & -\mathbf{B} & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & \dots & & -\mathbf{B} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{matrix} (1 \\ (2 \\ \\ (n-1 \end{matrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \\ 1 & 0 & 1 & \dots & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \\ & & & \ddots & \\ . & . & . & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (1 \\ (2 \\ \\ \\ (m-1 \end{matrix}$$

jelöléssel $\mathbf{A} = 20\mathbf{E} - 4\mathbf{C}$ és $\mathbf{B} = 4\mathbf{E} + \mathbf{C}$ ($\mathbf{E}$ az egységmátrix). Az $\mathbf{M}$ hipermátrix invertálására két módszert javasolunk.

1. Jelölje az $\mathbf{M}$ hipermátrix m-edrendű blokkjaiból, mint elemekből alkotott n-rendű hiperdeterminánst $\mathbf{U}_n(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Érvényes az alábbi rekurziós formula:

$$\mathbf{U}_{k+1}(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \mathbf{A}\mathbf{U}_k(\mathbf{A}, \mathbf{B}) - \mathbf{B}^2\mathbf{U}_{k-1}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \qquad (\mathbf{U}_0 = \mathbf{E}).$$

Egerváry tétele értelmében (Acta Sci. Math. **15** (1954) 211—222 o.):

$$\mathbf{M}^{-1} \operatorname{adj} \mathbf{M} \cdot \{\mathbf{U}_n^{-1}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \cdot x\mathbf{E}\},$$

ahol adj $\mathbf{M}$ egyes blokkjai:

$$(\operatorname{adj} \mathbf{M})_{ij} = \begin{cases} \mathbf{B}^{j-i}\mathbf{U}_{i-1}(\mathbf{A}, \mathbf{B})\,\mathbf{U}_{n-j-1}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) & i \leqq j \\ \mathbf{B}^{i-j}\mathbf{U}_{j-1}(\mathbf{A}, \mathbf{B})\,\mathbf{U}_{n-i-1}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) & i \geqq j. \end{cases}$$

E módszer lényege az, hogy az $(m-1)(n-1)$-edrendű $\mathbf{M}$ mátrix inverzének előállításához csupán $s=\min(m-1, n-1)$-edrendű mátrixokkal való műveletek válnak szükségessé (vö. E. Egerváry, Acta Math. Ac. Sci. Hung. **11** (1960) 341–361).

2). Arra való tekintettel, hogy az invertálandó mátrix egyszerű kontinuáns blokkokból álló kontinuáns hipermátrix, az inverz egyes blokkjai (hiperbolikus függvények segítségével) zárt alakban előállítható. Mivel az így adódó blokkok kanonikus előállítása ismert, a blokkok egyes elemei $s=\min(m-1, n-1)$ tagú összeg alakjában explicite felírhatók. Legyen $r_{pq}^{(ij)}$ az $\mathbf{M}^{-1}$ inverz hipermátrix ij indexű blokkjának p, q indexű eleme, ekkor ($i \lessgtr j$ esetén)

$$r_{p,q}^{(i,j)} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\sin \frac{pk\pi}{m} \sin \frac{qk\pi}{m}}{2+\cos \frac{k\pi}{m}} \cdot \frac{\operatorname{sh} i\vartheta_k \operatorname{sh} (n-j)\vartheta_k}{\operatorname{sh} \vartheta_k \operatorname{sh} n\vartheta_k},$$

ahol

$$\operatorname{ch} \vartheta_k = \frac{5-2\cos \frac{k\pi}{m}}{2+\cos \frac{k\pi}{m}}; \qquad \begin{matrix} i, j = 1, 2, \ldots, n-1 \\ p, q = 1, 2, \ldots, m-1. \end{matrix}$$

(Vö. Rózsa P., MTA Mat. Kut. Int. Közl. **1** (1956) 593–621.)

N. Teodorescu (România):

A globális areorális (területi) differenciálhányados és a Szoboljev-értelemben vett általánosított Vecua féle differenciálhányadosról

Legyen adva egy monogén függvény (α), $f(z)$ mely a komplex számsík egy nyílt O halmazán definiálva van. Tegyük fel, hogy e függvény areorális differenciálhányadosa $\varphi(z)=\frac{DF}{D\omega}$ egy mérhető $E \subset O$ halmazon létezzék és hogy $\varphi(z) \in L(E)$. Definiáljuk a globális areorális differenciálhányadosát f-nek az E halmazon mint a Φ halmazát azon függvényeknek, melyek a φ függvénnyel ekvivalensek a Lebesgue-féle elmélet szerint.

Minden areorális primitív függvény valamely Δ tartományon rendelkezik globális areorális deriválttal. Abban az esetben, ha a primitív függvények korlátosak, melyek az alábbi formulákkal jellemezhetők $f(\zeta)=h(\zeta)+T\varphi$ vagy $T\varphi = -\frac{1}{M} \int_{\Delta} \frac{\varphi(v)}{v-\zeta} d\omega$ ahol $h(\zeta)$ holomorf a Δ tartományban, a T lineáris operátor T^{-1} inverzének globális areorális deriváltja: $\frac{D}{D\omega}$.

A $T\frac{D}{Dw}$ lineáris operátor egy projekció.

Az előadó megállapítja, hogy korlátos areorálisan primitív függvények globális areorális differenciálhányadosa, megegyezik a Vecua féle általánosított $\frac{\partial}{\partial z}$ deriválttal,

amely egy Szoboljev értelemben vett általánosított deriválť. A Vecua féle bizonyítások feltételeznek implicit módon bizonyos megkötéseket, melyek a Δ tartomány peremére vonatkoznak, mely kikötések elhagyhatók, illetve lényegesen enyhíthetők azáltal, hogy az areorális deriváltak definícióját kisebb mértékben módosítjuk.

VINCZE ENDRE (Miskolc)

Egy általánosabb módszer a trigonometriai függvényegyenletek általánosításának megoldására

Egy általánosabb módszert mutatunk be az

$$F(u+v)=\sum_{i=1}^{n} G_i(u)H_i(v)$$

lípusú függvényegyenletek megoldására, mely az

$$\begin{vmatrix} F_1(z_1) & F_2(z_1) & \dots & F_n(z_1) \\ F_1(z_2) & F_2(z_2) & \dots & F_n(z_2) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ F_1(z_n) & F_2(z_n) & \dots & F_n(z_n) \end{vmatrix} = D(F_1, F_2, \dots F_n)$$

típusú függvénydeterminánsok felhasználásán alapul. Az $F_1, F_2, \dots, F_n$ ismeretten (vagy részben adott) komplex függvények.

Tétel. Legyen Q' a komplex számoknak egy, az összeadásra nézve félcsoporto alkotó halmaza. A Q' félcsoporton érvényes

$$F(u+v) = G(u)H(v)+K(u)L(v)$$

függvényegyenlet legáltalánosabb komplex megoldásai a következő függvények:

(a_1) $F(u)\equiv G(u)\equiv L(u)\equiv O$, $H(u)$ és $K(u)$ *tetszőleges komplex függvények;*

(a_2) $F(u)\equiv H(u)\equiv L(u)\equiv O$, $G(u)$ és $K(u)$ *tetszőleges komplex függvények;*

(a_3) $F(u)\equiv O$, $H(u)=k_1L(u)$, $K(u)=-k_1G(u)$, $G(u)$ *és* $L(u)$ *tetszőleges komplex függvények;*

(a_4) $F(u)=k_2k_3^2f_2(u)$, $H(u)=k_1k_3f_2(u)$, $L(u)=k_3f_2(u)$, $G(u)$ *és* $K(u)$ *tetszőleges komplex függvények a* $k_1G(u)+K(u)=k_2k_3f_2(u)$ *megszorítással;*

(a_5)
$$\begin{aligned} F(u) &= f_2(u)[k_1chf(u)+k_2shf(u)], \\ G(u) &= f_2(u)[k_3chf(u)+k_4shf(u)], \\ H(u) &= f_2(u)[k_5chf(u)+k_6shf(u)], \\ K(u) &= f_2(u)[k_7chf(u)+k_8shf(u)], \\ L(u) &= f_2(u)[k_9chf(u)+k_{10}shf(u)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= k_3k_5+k_7k_9 = k_4k_6+k_8k_{10}. \\ k_2 &= k_4k_5+k_7k_9 = k_3k_6+k_7k_{10}; \end{aligned}$$

$$(a_6)\quad \begin{aligned} F(u) &= f_2(u)[k_1 f(u)+k_2],\\ G(u) &= f_2(u)[k_3 f(u)+k_4],\\ H(u) &= f_2(u)[k_5 f(u)+k_6],\\ K(u) &= f_2(u)[k_7 f(u)+k_8],\\ L(u) &= f_2(u)[k_9 f(u)+k_{10}], \end{aligned} \qquad \begin{cases} k_3k_5+k_7k_9 = 0,\\ k_3k_6+k_7k_{10} = k_1,\\ k_4k_5+k_8k_9 = k_1,\\ k_4k_6+k_8k_{10} = k_2; \end{cases}$$

ahol az $f(u)$ *és* $f_2(u)$ *az*

$$f(u+v) = f(u)+f(u),$$
$$f_2(u+v) = f_2(u)f_2(v)$$

CAUCHY-*egyenleteket kielégítő tetszőleges komplex függvények, a* $k_j (j = 1, 2, \ldots, 10)$ *konstansok pedig tetszőleges komplex számok a feltüntetett megszorításokkal. Megoldások továbbá mindazok a* G, H, K, L *és* F *függvények, melyek az előbbi megoldások bármelyikéből úgy állnak elő, hogy a*

$$G \leftrightarrow H \quad \text{és} \quad K \leftrightarrow L,$$

vagy

$$G \leftrightarrow K \quad \text{és} \quad H \leftrightarrow L,$$

vagy

$$G \leftrightarrow L \quad \text{és} \quad K \leftrightarrow H$$

függvénycseréket végrehajtjuk. Más megoldások nincsenek.

***

Az előző számunkban közöltük a Geometriai kollokvium előadáskivonatait. Az előadáscímek közül az alábbi előadás kimaradt: SÁNDOR ISTVÁN: A szférikus görbék egy analogonja a centroaffin geometriában. (Előadáskivonat nem állott rendelkezésünkre.)

Könyvismertetés

SZÁSZ GÁBOR:

BEVEZETÉS A HÁLÓELMÉLETBE

(Akadémiai Kiadó, Budapest, 1959.; 225 oldal)

A hálóelmélet az absztrakt algebrának egyik különös és fontos ága, amelynek a jelentősége, miként ezt a matematikán belül az algebrai, matematikai logikai, halmazelméleti, mértékelméleti, topológiai, geometriai és ergodelméleti alkalmazások, valamint a fizikán belül a különféle elméleti fizikai előfordulások és alkalmazások mutatják, messze túlnő az algebrán. A hálók jelentősége algebrai szempontból pedig többek között abban áll, hogy bármely algebrai struktúra összes részstruktúrája, valamint összes kongruenciarelációja egyaránt egy-egy hálót alkot. Olyan jellegű vizsgálatoknál, amelyekben az algebrai struktúra elemei helyett csak a struktúra részstruktúrái játszanak szerepet, nagy fontossághoz jutnak a hálók. Ilyenkor célszerű a vizsgálatot a részstruktúrák hálója helyett egy absztrakt, bizonyos tulajdonságoknak eleget tevő hálóban elvégezni. Ez a helyzet pl. csoportoknál a direkt szorzat mélyebb elméletében (finomítási stb. kérdések) vagy a gyűrűknél az ideál-, ill. radikálelméletben. Az algebrán belül a hálóelmélet egyébként híd a klasszikusabb struktúrák (csoportok, testek, gyűrűk) elméletétől az általános algebrai struktúrák (univerzális algebrák) elmélete és más modern ágak felé. Bár a hálók bizonyos speciális fajtájának, a Boole-algebrának a fogalma és vizsgálata már több, mint száz éves múltra tekint vissza, a hálóelmélet mégis csak a legutóbbi évtizedekben került az érdeklődés középpontjába, és indult meg különösen gyors mértékű fejlődése. Eme történeti okok mellett van egy körülmény, nevezetesen a hálóaxiómáknak a nagy általánossága és sajátos természete, amely megmagyarázza azt, hogy miért ismeretes a csoport- és gyűrűelmélethez képest viszonylag kevés igazán mély tétel a hálóelméletben. Örvendetes azonban, hogy a folytonos geometriák elmélete, egyes beágyazási problémák, valamint egyéb hálóelméleti vizsgálatok már szolgáltattak példát mélyebb hálóelméleti tételekre. Az algebrán belüli sajátos helyzetére és az algebrán kívüli szerteágazó alkalmazási lehetőségek egyik okára pedig rávilágít a hálófogalom kettős természete is, ti. a hálónak egyidejűleg algebrai struktúraként és részben rendezett halmazként való felfogása.

A magyar matematikai életben a felszabadulás előtt a hálóelmélet — eltekintve a budapesti születésű és külföldre került Neumann János nagy jelentőségű hálóelméleti munkásságától — fehér foltnak számított, miként néhány más matematikai tudományág is. A felszabadulás után Fuchs László bizonyos dolgozatai és egyetemi előadásai, valamint Szász Gábor dolgozatai jelezték az aktív hálóelméleti érdeklődés hazai megindulását, amelyekhez később a Grätzer—Schmidt kutatópár intenzív munkássága csatlakozott. Legújabban másoknak a hálóelmélettel kapcsolatos, főleg a klasszikusabb struktúrákról szóló eredmények hálóelméleti általánosításai-célzó egyéb vizsgálatai is eredményekre vezettek hazánkban. A további hazai hálót elméleti kutatások előkészítése, valamint hazánkban a hálóelméletnek más tudomány-

ágakban való hasznosítása végett hézagpótlónak számított Szász Gábor bevezető hálóelméleti könyvének a megjelenése, és ez a könyv egyszersmind történetileg a legelső magyar hálóelméleti könyv.

Szász Gábor könyvének az anyagát — a teljességre való törekvés igénye nélkül — az alábbiakban kísérlem megvilágítani. I. Részben rendezett halmazok; láncfeltételek, Jordan—Dedekind lánckövetelmény, dimenziófüggvény. II. A hálókról általában; algebrai hálóaxiómák, dualitás, félháló, a hálók kettős felfogása, a hálóaxiómák függetlensége. III. Teljes hálók; feltételesen teljes hálók, az algebrai struktúrák részstruktúráinak a hálója, lezárási művelet, Galois-kapcsolat, topológiai alkalmazások. IV. Disztributív és moduláris hálók; végtelen-disztributív és teljesen-disztributív hálók, jellemzések a részhálókkal, követési feltételek, irreducibilis elemek. V. A moduláris hálók osztályának egyes speciális alosztályai; lokálisan véges hosszúságú hálók, a hálók értékelése, metrikus hálók, komplementumos moduláris hálók, alkalmazás projektív terekre. VI. Boole-algebrák; standard eredmények, teljes Boole-algebrák, kapcsolat a Boole-gyűrűkkel, a relációk algebrája, logikai alkalmazások, értékelt Boole-algebrák. VII. Félig-moduláris hálók; Birkhoff-hálók, ekvivalencia-relációk, absztrakt lineáris függőség, komplementumos félig-moduláris hálók. VIII. Háló ideáljai; ideálható, reprezentációk halmazgyűrűkkel, beágyazások. IX. Kongruenciarelációk; kongruenciák, felcserélhető ekvivalencia-relációk, algebrai struktúrák és hálók direkt- és szubdirekt összetételei, Schreier-féle finomítás, kapcsolat a hálók ideáljai és kongruenciarelációi közt, neutrális elemek, centrum.

A fentiekből is látható, hogy Szász Gábor könyve nagy anyagot ölel fel, illetve legalább is világít meg utalások, gyakorló feladatok és példák közlésével. Az elméletnek a világméretekben gyors fejlődése miatt, valamint a széleskörű alkalmazások és legújabb eredmények figyelembevétele miatt, másfelől a pedagógiai szempontok miatt és a könyvnek az előre megszabott kicsiny terjedelme miatt a szerzőnek a könyvírásnál kétségkívül nehéz feladattal kellett megbírkóznia. A most megjelent könyve végleges szövegét figyelembe véve a szerző sikeresen oldotta meg az említett problémát: az ütköző szempontok összeegyeztetését, miközben — miként a szerző a könyve előszavában is megjegyzi — a lektori és szerkesztői munkán messze túlmenő segítséget kapott az ott felsorolt matematikusoktól (Fuchs L., Grätzer Gy., Schmidt E. T., Szendrei J.). A könyv anyaga egyébként globálisan csaknem lefedi H. Hermes-nek a szintén bevezető hálóelméleti könyvét, eltekintve az utóbbi könyv III. és V. fejezete bizonyos §-aitól, de Szász Gábor könyve aránylag mégis nagyobb anyagot világít meg, és modernebb, mint Hermes könyve. M. L. Dubreil—Jacotin, L. Lesieur, R. Croisot közösen írt francia hálóelméleti könyvének viszont csak az első harmada az általános hálóelmélet, amely Szász Gábor és H. Hermes könyvéhez képest kicsi elméleti anyagot ad, a francia könyv többi része tudvalevőleg algebrai és geometriai alkalmazást nyújt. G. Birkhoff alapvető hálóelméleti könyve pedig, mint monográfia, a kutatóknak készült, és kibővített, korszerűsített (harmadik) kiadása megjelenése előtt van.

Szász Gábor könyve a jellegét tekintve tehát bevezető könyv; a tankönyv és monográfia között az előbbihez áll lényegesen közelebb. Ennek megfelelően célja az, hogy részben a hálóelmélet jelenlegi állásáról és mindenképpen a bevált fontosabb fogalmakról és módszerekről áttekinthető képet nyújtson a könyv olvasójának. A könyv a megszabott terjedelem határain igyekszik az elmélet problémáira, legújabb eredményeire, más matematikai területekkel való kapcsolatra, az alkalmazásokra is fényt vetíteni. Bár — a könyv jellegével összhangban — nincsenek a könyvben exponált nyitott problémák, mégis sok utalás található apróbetűs kiegészítés, megjegyzés, lábjegyzet, a fejezetvégi gyakorló feladatok formájában az elmélet újabb eredményeire vonatkozólag, amely azoknak az érdekét szolgálja, akik a hálóelméletben jobban elmerülni szándékoznak. Itt jegyzem meg, hogy nem ártott volna, ha a szerző a gyakorló feladatok némelyikének a forrását is feltüntette volna. A közölt tárgymutató és irodalomjegyzék elég bőséges. Az irodalmi utalások általában ponto-

sak, csak ott maradt el az eredmények szerzőivel kapcsolatban a részletesebb megjegyzés, ahol az újrabizonyítási hozzájárulás vagy részleges, vagy — a szerző szerint — nem a lényeget érintő. Mindenesetre jövőbeni kiadásnál ezt a kérdést újra mérlegelni kell, és feltétlenül pontosabb irodalmi utalások kívánatosak egy-egy eredmény bizonyításainak rövidítéseivel kapcsolatban. Célszerű felvetni a könyv bizonyos tételei bizonyításainak esetleges tartalmi vagy megfogalmazási lerövidíthetőségét is, amellyel a szerzőnek egy esetleges jövőbeni kiadásnál szintén érdemes megpróbálkoznia (pl. 53., 60. és 83. tételek). A könyv tárgyalásmódja végig világos, általában elegáns, továbbá egyszerű és elemi is, úgyhogy a könyvet az egészen kezdők is megértik nagyobb nehézség nélkül. Segítségképpen a nehezebb gyakorló feladatok megoldása is megtalálható a könyv végén. A szerzőnek a világos megértetésre való törekvése nagyon helyes. Kissé hosszú megszövegezésűnek vélem azonban mindjárt elől a 4. és 11. §-t. A szövegezési rövidítéssel, valamint a II. fejezetben a 10. és 13. §-nak az egymáshoz közelebb hozásával (dualitáskérdések) egy esetleges későbbi kiadásnál terjedelemnyerés volna elérhető, amelynek helyére az I. fejezetben beiktatandó volna a Zorn-lemmának közvetlenül a kiválasztási axiómából való egyik modern levezetése. Ezzel a könyv még inkább didaktikussá és perspektívát nyújtóvá válna. Ha az első fejezetben a reláció tárgyalásánál a végig elegendő $r=2$ eset helyett az általánosabb eset is definiálva lett, célszerű lett volna rámutatni arra is, hogy a reláció nemcsak függvényként, hanem szorzathalmaz részhalmazaként is felfogható, amely egyébként triviális, de megszokott ekvivalens definíció.

Mindent egybevetve megállapítható, hogy a szerző könyvének a megjelenésével a hazai matematikai szakirodalom érdekes és értékes bevezető jellegű, egyszersmind perspektívát nyújtó könyvhöz jutott, amelyen látszik, hogy nagy munka van mögötte.

Szász Ferenc

SZÁMOLJUNK EGYÜTT! (V.—VI. OSZTÁLY)
SZÁMOLJUNK EGYÜTT! (VII.—VIII. OSZTÁLY)

Jó szolgálatot tett a Tankönyvkiadó ennek a két könyvnek a kiadásával. Hasonló címmel már évek óta forgalomban van Váli Dezsőné kitűnő könyve az alsó tagozat számtani anyagához. Ennek a munkának a sikere buzdította a kiadót a most ismertetendő két kötet megjelentetésére. Szülőknek szólnak ezek a könyvek, akik szeretnének gyermekeiknek segíteni a számtan és a mértan tanulásában, de már elfelejtették a felső tagozat anyagának egyes részeit, vagy soha nem is tanulták, vagy másképp tanulták, mint ahogy mostanában tanítják. A névtelenségbe burkolózó szerzők (összes információnk róluk az, hogy „ÍRTA MUNKAKÖZÖSSÉG") jól fogták meg a dolgot: gyakorlati segédkönyvet írtak. Rövid néhány oldalnyi általános megjegyzések után pontról pontra végigmennek az anyagon. Kiemelik a tananyaggal és megtanulásával kapcsolatos legfontosabb tudnivalókat, mint például „A százalék ugyanazt jelenti, mint a századrész" (VII.—VIII. oszt., 22. old.), „Az egyenlő nevezőjű törtek összeadását, kivonását először úgy gyakoroltassuk, hogy a nevezőt betűvel írjuk le" (V.—VI. oszt., 51. old.; nem ártott volna itt a nagyobb világosság kedvéért magyarázatul egy ilyen konkrét példa: 2 heted + 3 heted = 5 heted). Felsorolják a tapasztalat szerint leginkább előforduló hibákat; pl. „*a)* A részletszorzatokat nem megfelelően írja a gyerek egymás alá, *b)* nem ügyel az 1-gyel és 0-val való szorzásra ..." (VI.—VII. oszt., 31. old.). Végül — ez teszi ki a könyv legnagyobb részét — közlik a tankönyvek igen sok feladatának megoldási menetét, vagy legalább az eredményt, és hasznos tanácsokat adnak az egyes feladatok megoldásával kapcsolatban is; pl. „Vigyázat! Negatív szám négyzete plusz!" (VII.—VIII. oszt., 260. old.; mellesleg jobb lett volna itt a „pozitív" szót használni.)

Kár, hogy ebbe a két hasznos segédkönyvbe becsúszott néhány egyáltalán nem lényegtelen pontatlanság. Így például ezek a könyvek sem öntenek tiszta vizet a popohárba a lassan már hirhedtté váló „romboid-ügyben". Így nevezem rövidség kedvéért a speciális háromszög- és négyszög-fajták új definícióival kapcsolatos sok huzavonát és értetlenséget. A megszokott fogalmaktól való eltérés mindig zökkenővel jár. Azoknak sem lehetett könnyű dolguk, akik annakidején keresztülvitték, hogy az iskolákban a bálnát ne a halak, a denevért ne a madarak közé soroljják. (Az ellenérvek ugyanazok lehettek: „Ha nekünk jó volt úgy, mért nem jó a mai gyerekeknek is", „Úgy sokkal könnyebb megtanítani", „Ilyen zavaros, értelmetlen dolgokat én ugyan nem fogok tanítani"). Nem mondom, hogy a most referált két könyv a régi, következetlen definíciók alapján állna. Sok esetben éppen az újabb, következetes felfogást hangsúlyozza, például: „A rombusz olyan deltoid, amelynek minden oldala egyenlő . . . " (VII.—VIII. oszt., 124. old.). Másutt határozatlanabb a fogalmazás, pl. „Két-két egyenlő szomszédos oldala van" (ti. a deltoidnak; VII.—VIII. oszt., 120. old.; jobb lett volna így: „Van két-két szomszédos egyenlő oldala", vagy „Két szomszédos oldala egyenlő", a másik kettő szintén). Ismét másutt a régi definíciókat mondja ki, pl. „a téglalap szögei egyenlők, de oldalai nem egyenlők "(VII.—VIII. oszt., 126. old.). Ahol felhívja a figyelmet, hogy valami megváltozott a definíciókban, ott csak újabb zavart okoz. Az a többször is szereplő megállapítás ugyanis, hogy „A régebben romboidnak nevezett négyszöget most paralelogrammának nevezzük" (VII.—VIII. oszt. 106. old.; lásd még VI. oszt., 119. old.), teljes félreértésen alapszik. Paralelogrammának régen is azt a négyszöget neveztük, most is azt nevezzük, amelynek két-két oldala párhuzamos, függetlenül attól, hogy akár az oldalai, akár a szögei egyenlők-e vagy nem. Csakhogy az iskoláinkban régebben uralkodó, következetlen felfogás a paralelogrammát valahogyan „gyűjtőfogalomnak" tekintette (rendszerint többesszámban mondták: „a paralelogrammák"), szemben az „egyedi" típusokkal, mint például a trapéz (!). Ennek a felfogásnak a nyomait mutatja például ez az idézet: „1. A trapéznak és a paralelogrammáknak. 2. A derékszögű háromszögnek. 3. A paralelogrammák és a deltoid." (V.—VI. oszt., 236. old.). A szülők tehát ebben a kérdésben nem kapják meg azt a segítséget, amire szükségük volna, sőt joggal támad az itt olvasottak alapján olyan érzésük, hogy — ki tudja, kiknek a hibájából — oda lett a geometria régi szép következetessége.

Nemcsak a mértani anyagról alakulhat ki bennük ilyen vélemény. A számtanban a szorzó és a szorzandó helye körül vannak zavarok. „3·8 az miért 24? — Mert $8+8+8=24$", olvassuk egy helyen (V.—VI. oszt., 30. old.). Vagyis balról írjuk a szorzót. Pár sorral alább ezt olvassuk: „Kétjegyű szám szóbeli szorzásakor elevenítsük fel az alsó tagozatban tanult eljárást. Pl. $28\cdot3=(20+8)\cdot3=20\cdot3+8\cdot3=84$." Itt már jobbról van a szorzó. A 32. és 33. oldalon megint balról, a 68. oldalon jobbról, és így tovább. A számítás eredménye szempontjából persze közömbös a sorrend, „csak" a tiszta fogalmak kialakítását nehezíti meg ez a bizonytalankodás, hiszen fogalmilag éppen nem mindegy az, hogy összeget szorzunk egy számmal, vagy egy számot összeggel, még kevésbé az, hogy tört számot szorzunk egész számmal, vagy egész számot tört számmal stb. Különösen az V. osztályos részben van ezen a téren nagy zavar.*

* A szerzők joggal mondhatják erre: „Ugyanilyen zavar van ezen a téren az V. osztályos tankönyvben is, amelyen pedig e könyvismertetés írójának a neve is rajta van". Ez eddig igaz is. E könyvismertetés írója azonban szeretné megragadni az alkalmat annak tisztázására, hogy ezekhez a következetlenségekhez a könyvön feltüntetett egyik szerzőnek sincs semmi köze, ezek — számos más, többnyire éppen nem szerencsés változtatással együtt — részben tudtukon kívül, részben akaratuk ellenére kerültek be a tankönyvbe.

Visszatérve az ismertetett könyvekre, megemlíthetnénk még néhány kevéssé szerencsés fogalmazást, elírást vagy hibát, pl. „A felcserélés és csoportosítás is azonosság" (VII.—VIII. oszt., 206. old.), „Jegyeztessük meg, hogy a kiemelés osztás!!" VII.—VIII. oszt., 213. old.), „Mert osztható 2-vel, mivel páratlan szám" (V.—VI' oszt., 145. old.). Felróhatnánk, hogy túlságosan előtérben van bennük a technika. a „hogyan", és a megérdemeltnél kisebb súlyt kap az összefüggések megértése, a „miért". De ne legyünk túlságosan nagyigényűek, és ne kérjük számon egész matematikatanításunk hibáit éppen ettől a két, alapjában helyes, sok szülőnek nagy segítséget jelentő könyvtől.

Varga Tamás

A kiadásért felelős: Bernát György, az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Vidosa László
A kézirat beérkezett: 1962. III. 17. — Példányszám: 1250. — Terjedelem: 13,5 (A/5) ív — 135 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat 62-1141

CONTENTS

E. BÁLINT: Life and work of F. Lukács 1
F. KÁRTESZI: The work of P. Szász 9
S. SOBOLEV: The poetry of mathematics 22
P. ERDŐS: Remarks on number theory III. 28
A. HEPPES and J. MOLNÁR: New results in the discrete geometry II. 39
Á. CSÁSZÁR: The topological fundaments of the elements of the complex function theory 73
B. ANDRÁSFAI: The paths, circuits and loops of graphs 95
I. DANCS: On power-sums of complex numbers 108
B. HAJTMAN: On the jeep-problem 115
H. CARTAN: N. Bourbaki and the mathematics of today 130
B. BOLLOBÁS and P. ERDŐS: On some extremal-problems concerning graphs . 143
The M. Schweitzer Mathematical Competition 153
The list of scientific works of K. Tandori 172
Problems 174
Report on the Géza Grünwald-prize 184
Report on the Manó Beke-prize 190
Society life 193
Book reviews 212

СОДЕРЖАНИЕ

Э. Балинт: Ференц Лукач 1
Ф. Картеси: Палу Сасу — 60 лет 9
С. Соболев: Поэзия математики 22
П. Эрдёш: Замечания по теории чисел. III 28
А. Хеппеш и Й. Мольнар: Новые результаты в дискретной геометрии. II 39
А. Часар: О вспомогательных топологических средствах элементов теории функций комплексного переменного 73
Б. Андрашфаи: О путях, кругах и петлях в графах 95
С. Данч: О степенных суммах комплексных чисел 108
Б. Хайтман: Проблема сбережения горючего 115
А. Картан: Никола Бурбаки и математика 130
Б. Боллобаш и П. Эрдёш: О задачах относящихся к экстремальным значениям в теории графов 143
Сообщение о конкурсе памяти Миклоша Швейтцера 1961-го года 153
Научные труды К. Тандори (лауреат премии им. кощута в 1961 г.) ... 172
Задачи 174
Сообщение о предоставлении премии 1961 года памяти Гезы Грюнвальда 184
Сообщение об одиннадцатом присвоении приза имени М. Беке 190
Из жизни общества 193
Обзор книг 212

Ára 12 Ft.
Előfizetés évi 20 Ft.

A Bolyai János Matematikai Társulatba belépni szándékozók forduljanak a Társulat elnökségéhez (Budapest, V., Szabadság tér 17 Telefon: 311—793). Közlésre szánt dolgozatok (lehetőleg gépírással s a lap egyik oldalát használva) a lap szerkesztőségéhez ugyanoda küldendők.

Kérjük cikkíróinkat, hogy amennyiben különlenyomatra tartanak igényt, cikkük kefelevonatának visszaküldésekor eziránvú kívá[illegible]gukat a kért különlenyomatok számának megjelölésével fel[illegible]ül jelentsék be.

Különböző külföldi természettudományos, műszaki, orvosi stb. szakfolyóiratok 1953—1954. évi vegyes számai a Posta Központi Hírlap Iroda V., József Attila u. 3. sz. alatti lapüzletében példányonként megvásárolhatók.

Felhívjuk olvasóink figyelmét, hogy lapunk régebbi számai kaphatók a Posta Központi Hírlap Iroda V., József Attila-u. 3 szám alatti Újságboltjában.

312.046

MATEMATIKAI LAPOK

XIII. ÉVFOLYAM

3-4.

SZÁM

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT
BUDAPEST, 1962

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenkint négyszer
Budapest, 1962. december, XIII. évfolyam 3—4 szám.
Felelős szerkesztő: Turán Pál.
Szerkesztők: Aczél János, Hajós György, Kalmár László, Rényi Alfréd.
Szerkesztőség: Budapest V., Szabadság tér 17. Telefon: 311—793.
Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány utca 21. III. Telefon: 111—010.
A kiadásért felel: az Akadémiai Kiadó igazgatója.
Terjeszti a Posta Központi Hírlap Iroda Vállalat, Budapest, V., József nádor tér 1. Telefon: 180—850. Csekkszámlaszám: 61 257.
Előfizetés, személyes ügyfélszolgálat: József nádor tér 1. Üzlethelyiség Telefon: 183—022.
Előfizetés egy évre 20,— Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

RÉDEI LÁSZLÓ: Hajós György 50. születésnapjára 217
ERDŐS PÁL: Számelméleti megjegyzések IV. 228
SZÁSZ FERENC: A topológikus algebrákról és gyűrűkről I. 256
TURÁN PÁL: Egy, a komplex számok hatványösszegeire vonatkozó szélsőérték-feladat és annak egy alkalmazása 279
FARKAS MIKLÓS: Másodrendű közönséges differenciálegyenletek egy osztályának differenciálgeometriai vizsgálata 289
KUN KUTI MÁRTON: A K_n-determináns és alkalmazásai 298
Feladatrovat 311
Hírek 321
Jelentés a Beke Manó-emlékdíj tizenkettedik kiosztásáról 325
Társulati élet 328
Könyvismertetés 353

Hajós György 50. születésnapjára

RÉDEI LÁSZLÓ

Az elmúlt év nyarán a Matematikai Lapok szerkesztője felkért, hogy a Matematikai Lapokban cikket írjak HAJÓS GYÖRGY munkásságáról, abból az alkalomból, hogy 1962. február 21-én tölti be 50. életévét. E megtisztelő felhívásnak nagy örömmel igyekszem eleget tenni. Részletesebben csak legkiemelkedőbb alkotásáról fogok szólni, amely ugyanis a véges abelcsoportok elméletével kapcsolatos, egyéb munkásságát csak röviden érintem.

Az algebrának modern elmélete a véges csoportok vizsgálatával vette kezdetét. Mégpedig GALOIS az algebrai egyenletek elméletét kapcsolatba hozta a véges csoportokkal, egyben látnoki szemmel felismerte ezek egyetemes jelentőségét, s megkezdte öncélú vizsgálatukat. A véges csoportok elmélete főleg BURNSIDE, FROBENIUS, I. SCHUR és SYLOW kutatásai által a századforduló idején igen magas fokot ért el. Ezután néhány évtizedig úgy látszott, hogy további jelentékeny fejlődés nem várható. Mégis azután PH. HALL nevezetes eredményeket ért el a feloldható csoportok vizsgálatával, s R. BRAUER új mozzanatokat hozott a véges csoportok reprezentációelméletébe, végül pedig az utolsó két évtized a további kitűnő kutatók egész sorával meghozta a véges csoportok elméletének új felvirágzását. Ennek betetőzéseként született meg napjainkban THOMPSON és FEIT ragyogó, még publikálatlan vizsgálata, amelyben bebizonyítják Burnside sokat ostromolt sejtését, hogy a páratlan rendű csoportok feloldhatók. Elmondhatjuk, hogy ez az eredmény századunk tudományának egyik legjelentősebb ténye, amelynek következményeként ugyanis most már reményteljes közelségbe került a véges csoportok strukturaproblémájának megoldása.

A véges csoportokon belül az Abel-féléknek erősen kitüntetett szerep jut. Ezeknek strukturaproblémáját teljesen felderítette már FROBENIUS és STICKELBERGER 1879-ből származó alaptétele. Ezzel, s a DIRICHLET által már korábban kifejtett karakterelmélettel és dualitástétellel a véges abelcsoportok elmélete, mint mondani szokás, teljes befejezettséget nyert, amellyel több mint 60 évig büszkélkedhetett. Ez a

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

befejezettség azonban csak látszat volt, amelynek hamisságát HAJÓS GYÖRGY alkotása derítette ki.

HAJÓS GYÖRGY Budapesten született, egyetemi tanulmányait a pesti egyetem bölcsészeti karán végezte. A kiváló matematikus hallgatók korán, már egyetemi tanulmányaik befejezésének ideje körül szokták megszerezni doktori oklevelüket. HAJÓS GYÖRGY is hallgató korában elkészült egy nagyáltalánosságú s éppen nem könnyű determinánselméleti vizsgálatával, amelyet szándékozott doktori disszertációnak benyújtani, azonban FEJÉR LIPÓT, aki egyik cenzora lett volna, úgy nyilatkozott, hogy tőle nagyobb teljesítményt vár. Érdekes ez a minden doktoranduszával szemben alkalmazott szigorú mérték annak a FEJÉR LIPÓTnak részéről, aki a tanárvizsgákon közismert enyheséggel kezelte hallgatóit. FEJÉR LIPÓTnak nyilván az volt a célja, hogy HAJÓS GYÖRGYöt általa felismert tehetségének megfelelő, nagy alkotásra buzdítsa. Mint látni fogjuk, HAJÓS FEJÉRnek hozzáfűzött reményeit újabb disszertációjával nemhogy beváltotta, hanem minden várakozáson túl felülmúlta.

Minkowskinak a lineáris egyenlőtlenségrendszerről szóló sokat alkalmazott, nagyfontosságú tétele kimondja, hogy ha a

$$\xi_i = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

valós együtthatójú lineáris alakok determinánsa 1, akkor az

$$|\xi_1| \leqq 1, \ldots, |\xi_n| \leqq 1$$

(diophantosi) egyenlőtlenségrendszernek van nemtriviális, azaz nem csupa zérus $x_1, \ldots, x_n$ egész számokból álló megoldása. A tétel akkor is igaz, ha a szereplő $\leqq$ jeleket egy kivételével $<$ jellel helyettesítjük. Csupa $<$ jel általában nem vehető, mint azt a

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1, \\ \xi_2 &= a_{21}x_1 + x_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_n &= a_{n1}x + \ldots + a_{nn-1}x_{n-1} + x_n \end{aligned}$$

egyszerű példa mutatja. Persze hasonló igaz akkor is, ha itt az x-ek helyébe 1 determinánsú egész együtthatós homogén lineáris helyettesítéssel új változókat hozunk be. MINKOWSKI híres sejtése szerint fordítva, minden más esetben a tétel csupa $<$ jellel is igaz, e sejtését azonban csak $n = 3$ esetre sikerült bizonyítania, holott a kérdés nagyon is szívügye volt, róla két ízben írt (Geometrie der Zahlen, 1896, 105 o. és Diophantische Approximationen, 1907, 28 o.), s végül is sejtésének bizonyítását problémaként tűzte ki.

MINKOWSKI után sokan megpróbálkoztak a sejtés bizonyításával, így FURTWÄNGLER, MORDELL, PERRON és SIEGEL, hogy csak a leghíre-

sebbeket említsem. Közülük legtöbb eredményt Perron ért el, aki négy terjedelmes dolgozatban $n \leqq 9$ esetre kimutatta a sejtést. Mindezek a nagy erőfeszítéssel nyert, aránylag csekély sikerű kísérletek a sejtésnek rendkívüli nehézségére mutattak.

Hajós, mint majdnem mindegyik elődje, a sejtésnek már Minkowski által is ismert geometriai alakjából indult ki, amely röviden úgy szól, hogy az n-dimenziós euklidesi térben minden egyszeresen térfedő kockarács oszlopozott (azaz tartalmaz egész lapokkal illeszkedő kockapárt). Ezután azonban elődjeitől merőben eltérő úton haladt, s első jelentős sikere abban állt, hogy a sejtésnek egy véges jellegű, tisztán algebrai, meglepő és alakilag igen egyszerű ekvivalens átfogalmazását nyerte. Ennek ismertetése céljából, s részben a későbbiek kedvéért, bevezetünk néhány egyszerű fogalmat.

Mindvégig legyen megadva egy G véges abelcsoport. $O(H)$ jelölje H véges halmaz számosságát, amelyet H rendjének nevezünk, ha H valamely algebrai struktúra, például csoport. $o(\alpha)$ jelölje α végesrendű csoportelem rendjét. Ha $A_1, \ldots, A_k$ a G-nek komplexusai (azaz nemüres részhalmazai), akkor szokás szerint

$$A_1 \ldots A_k$$

szorzat jelölje az $\alpha_1 \ldots \alpha_k$ elemek komplexusát, ahol $\alpha_i \in A_i$ $(i = 1, \ldots, k)$. Ha $A_1 \ldots A_k$ minden eleme csak egyszer áll elő $\alpha_1 \ldots \alpha_k$ alakban $(\alpha_i \in A_i)$, akkor az $A_1 \ldots A_k$ szorzatot direkt szorzatnak nevezzük s

$$A_1 \times \ldots \times A_k$$

módon is jelöljük. Nyilván

$$O(A_1 \times \ldots \times A_k) = O(A_1) \ldots O(A_k),$$

s bármely $A_1 \ldots A_k$ komplexusszorzat akkor és csak akkor direkt, ha

$$O(A_1 \ldots A_k) = O(A_1) \ldots O(A_k).$$

Közbevetőleg jegyezzük meg, hogy a véges abelcsoportok klaszszikus elmélete a

$$G = H_1 \times \ldots \times H_k \qquad (H_1, \ldots, H_k \text{ csoportok})$$

felbontásokat vizsgálja, s az elméletnek (FROBENIUS—STICKELBERGER-féle) alaptétele azt mondja ki, hogy létezik G-nek olyan direkt felbontása, amelyben minden tényező még hozzá ciklikus csoport. Továbbá azt is jegyezzük meg, hogy az alaptétel által G-nek összes olyan direkt felbontásai is ismeretessé válnak, amelyekben a tényezők (tetszőleges) csoportok.

Szimplexnek nevezünk egy komplexust, ha elemei $1, \alpha, \ldots, \alpha^{e-1}$ ($e \geqq 2$), ahol szükségképpen $o(\alpha) \geqq e$. Jelöljük ezt a szimplexet $(\alpha)_e$-vel. Akkor

$$O((\alpha)_e) = e.$$

Jegyezzük meg, hogy $(\alpha)_e$ akkor és csak akkor (ciklikus) csoport, ha $o(\alpha) = e$.

Ezekután a MINKOWSKI-féle sejtés HAJÓSTÓL származó ekvivalens átfogalmazása következőképpen szól: G-nek minden

$$G = S_1 \times \ldots \times S_k \qquad (S_1, \ldots, S_k \text{ szimplexek})$$

szimplexfelbontásában legalább egy tényező csoport.

Aki ezt az átfogalmazást először hallja, azt hinné, hogy az átfogalmazott sejtés helyessége könnyen megvizsgálható, azonban nagyot csalódik. HAJÓS az átfogalmazást 1938-ban a Matematikai és Fizikai Lapokban megjelent nevezetes doktori disszertációjában közölte, ahol hasonló átfogalmazás útján (amire később visszatérek) bebizonyította, hogy MINKOWSKI sejtésének geometriai alakja az úgynevezett többszörösen térfedő kockarácsok esetére nem érvényes. Abban az időben az eredeti MINKOWSKI-féle sejtésnek általa nyert átfogalmazását még nem tudta bebizonyítani.

Mintha ma volna, olyan élénken emlékezem most is arra az élményre, amelyet számomra HAJÓS doktori disszertációjának olvasása jelentett. Bevallom, hogy akkor egyszersmind megütköztem azon, hogy Hajós nem számolt le végképpen a MINKOWSKI-sejtéssel, ha már egyszer — mint gondoltam — a biztosan célravezető utat megtalálta. Nem tudtam ugyanis elképzelni, hogy a véges abelcsoportokról szóló fenti elegáns állítás bizonyítása komoly akadályokba ütközhet, pedig a nehézségek igen nagyok voltak, s HAJÓSnak doktori disszertációja után még három évig tartó fáradságot okoztak.

A tételnek egyik érdekessége, hogy igen sok további átfogalmazást enged meg, s így bizonyításához sok út kínálkozik, amely azonban csak ígéri, de nem hozza meg a sikert. A nehézségeknek legjobb ecsetelésül hadd mondjam el magának HAJÓSnak erről szóló későbbi keletű anekdótáját: „Abban az időben — úgymond — ha bementem egy házba, ahol a harmadik emeleten volt dolgom, akkor a lépcső alján így szóltam magamhoz: amíg felérsz, csinálsz egy ansatzot." Hadd mondjam el azt is, hogy végre is nem lépcsőházban, nem is íróasztal mellett, hanem az utcán, séta közben jött rá a helyes bizonyítási ötletre. Így született meg 1941-ben HAJÓS híres tétele, amely szerint MINKOWSKI sejtésének fenti csoportelméleti átfogalmazása, s így maga a sejtés is igaz, amivel HAJÓS magának és a magyar tudománynak nagy érdemeket szerzett.

A bizonyítás igen nehéz és rendkívül érdekes. Lényeges benne mindenekelőtt az a mozzanat, hogy struktúrabővítést vesz segítségül, mégpedig a bizonyítás az adott csoport gyűrűjében történik. A bizonyítás tengelyét alkotja egy igen mélyen járó zérusosztó vizsgálat a mondott gyűrűben. Végül pedig legmeglepőbb, hogy a bizonyítás legcsekélyebb mértékben sem támaszkodik az alaptételre, s ennek felhasználása által rövidítés nem érhető el benne. Ez más szóval azt jelenti, hogy Hajós tétele megrendítette a véges abelcsoportok alaptételének addigi egyeduralmát és ezzel megindította eme csoportok klasszikus elméletének modern elméletté való kibővítését. E modern elméletnek teljes elnevezése: a véges abelcsoportok FROBENIUS—STICKELBERGER—DIRICHLET—HAJÓS-féle elmélete.

Persze nem történt meg máról-holnapra annak felismerése, hogy HAJÓS tételével új elmélet vette kezdetét. Nem mintha a tétel nagy értéke nem volna azonnal nyilvánvaló, hiszen általa állt elő a MINKOWSKI sejtés bizonyítása. Mégis a tétel iránti nemzetközi érdeklődés csak lassan bontakozhatott ki, mert HAJÓSnak arról szóló (idegennyelvű) dolgozata a világháború dúlásának közepette, 1942. elején jelent meg. A háború befejezése után már egyre több hír érkezett HAJÓS alkotásának élénk külföldi visszhangjáról. Ezután is azonban időbe tellett annak felismerése, hogy HAJÓS tételének legnagyobb jelentősége talán nem is a MINKOWSKI-sejtéssel fennforgó kapcsolatában, hanem még inkább magára a véges abelcsoportoknak elméletére kifejtett hatásában nyilvánul meg.

Gyakran mondjuk, hogy egy-egy elmélet jelentős eredménnyel „gazdagodott". Legtöbbször úgy van ezzel, hogy az illető elmélet ezt a gazdagodást nagyobb megrázkódtatás nélkül elviseli, de előfordul, hogy miatta kénytelen helyét átadni egy új elméletnek. A következőkben rámutatok arra, hogy Hajós tétele valóban kényszerítő erővel eredményezte a véges abelcsoportok hagyományos klasszikus elméletének átalakulását új elméletté.

Célom érdekében néhány észrevételt teszek HAJÓS tételéről. Ismeretes, hogy a hajdani Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat HAJÓS GYÖRGYnek nagy teljesítményéért odaítélte a Társulat 1942. évi egyik KŐNIG GYULA jutalmát. (Ez az alkalom a Társulat történetében a KŐNIG GYULA jutalom tekintetében kivételes volt. Ezt a jutalmat ugyanis a Társulat az alapító levél szerint két évenként szokta egy-egy kutatónak odaítélni, de abban az évben kettős jutalmazás történt, az egyik jutalmat HAJÓS GYÖRGY, a másikat SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA kapta.) KŐNIG DÉNES, a Társulat akkori titkára, a jutalmazással kapcsolatban engem kért fel HAJÓS munkásságának ismertetésére. (Lásd Mat. és Fiz. Lapok, 49 (1942), 1—16.) E munka közben igyekeztem a tételre olyan bizonyítást találni, amely az alaptételen nyugszik, hi-

szen akkor még hittem az alaptétel mindenhatóságában. Hasonló próbálkozásokat később is végeztem, s a sok sikertelenség egyre inkább valószínűsítette előttem Hajós tételének az alaptételtől való függetlenségét. Próbálkozásaim végre 13 év múltán azzal a fordított sikerrel jártak, hogy második bizonyítást nyertem a tételre, amely a HAJÓS-félétől lényegesen eltérő, azzal körülbelül egyenlő nehézségű és szintén az alaptételtől távol fut le. Ezért e második bizonyítás is nagy mértékben növeli a két tétel függetlenségének valószínűségét. Újabban sikerült ezt a valószínűséget az alábbi által még tovább fokozni.

Ismét hangsúlyozom Hajós tételének azt a megkapó sajátságát, hogy egész sereg ekvivalens átfogalmazása lehetséges, amelyek valamennyien a tételnek egy-egy új, érdekes arcát mutatják be. Két ekvivalens átfogalmazásról már szó volt, a diophantosi egyenlőtlenségrendszereket illető MINKOWSKI-féle sejtésről és ennek geometriai alakjáról. Egy további, érdekes átfogalmazás bizonyos újfajta zétafüggvények pólushelyeiről szól, amely zétafüggvényeket éppen Hajós tétele kapcsán fedeztem fel. Hálás feladat volna a tétel összes átfogalmazásainak összegyűjtése, amelyekkel a kutatók eddig találkoztak, de itt közülük még csak azt óhajtom megemlíteni, amelyikre imént céloztam, s amely egyszerűen a dualitás elvének alkalmazásával, azaz végelemzésben az alaptétel felhasználásával áll elő (tekintetbe véve még a tételnek Hajóstól származó egyszerű redukcióját arra az esetre, amikor a szóbanforgó szimplexek prímszimplexek, azaz elemeik száma prímszám). Mégpedig ezen az úton HAJÓS tétele a következő igen érdekes „lefedési" tételbe megy át: Ha

$$O(G)=p_1 \ldots p_k \qquad (p_1, \ldots, p_k \text{ prímszámok})$$

és $H_1, \ldots, H_k, H_1', \ldots, H_k'$ olyan részcsoportjai G-nek, hogy

$$H_1' \quad p_i \text{ indexű részcsoportja } H_i\text{-nak} \quad (i=1, \ldots, k),$$

ha továbbá a $H_i \setminus H_i'$ különbséghalmazok lefedik G-t, kivéve ennek egységelemét, azaz ha

$$\bigcup_{i=1}^{u} (H_i \setminus H_i') = G \setminus 1,$$

akkor $H_1, \ldots, H_k$ között G is előfordul. Szép ebben a lefedési tételben, hogy fogalmazása igen egyszerű, s benne többé nem G elemeiről, csupán részcsoportjairól van szó, s így HAJÓS tételének egyik, teljesen újszerű alakját szolgáltatja. Az ember azt gondolná, hogy könnyen bizonyítható tételre bukkant, mégis a tételnek közvetlen bizonyítása még abban a viszonylag igen egyszerű esetben sem sikerült, amikor G csupa p^2 invariánsokkal bíró p-csoport. Ezen nem is lehet csodálkozni, hiszen a

véges abelcsoportok részcsoportjait illető összetettebb jellegű állítások bizonyításához éppen a dualitás felhasználása szokott célravezető lenni, azonban jelen esetben erről az útról le kell mondani, hiszen a dualitás ismételt felhasználásával megint csak HAJÓS tételének eredeti alakjához jutnánk vissza, azaz circulus vitiosus állna elő. Ezek miatt HAJÓS tételének lefedési tétel alakja is erős érv amellett, hogy a tétel független az alaptételtől. Ettől a tárgytól annak a sejtésnek kimondásával búcsúzom, hogy HAJÓS tételének lefedési tétel alakja G helyében a nemkommutatív véges csoportokra is igaz.

Rámutatok továbbá HAJÓS tételének alaptétel jellegére, ami abban áll, hogy belőle, mint más helyen már korábban is megjegyeztem, egyszerű korollárium ként nyerhetők az összes

$$G = S_1 \times \ldots \times S_k \qquad (S_1, \ldots, S_k \text{ szimplexek})$$

szimplexfelbontások. Mégpedig, ha veszünk olyan

$$G = G_0 \supset \ldots \supset G_k = 1$$

leszálló részcsoportláncot, amelyhez csupa ciklikus G_{i-1}/G_i faktorcsoport tartozik, s veszünk mindegyik $G_{i-1} \setminus G_i$ különbséghalmazból olyan α_i elemet, amellyel az $\alpha_i G_i$ osztály generálja a G_{i-1}/G_i csoportot, akkor érvényes

$$G = (\alpha_1)_{e_1} \times \ldots \times (\alpha_k)_{e_k},$$

ahol $e_i = O(G_{i-1}/G_i)$, s fordítva G-nek minden szimplexfelbontása előáll ezen az úton.

Már az eddigiekben több oldalról megvilágításba került HAJÓS tételének érdekessége, utolsónak tartogattam azt a további, következményeiben fontos, meglepő észrevételt, hogy HAJÓS tétele és az alaptétel egymásnak bizonyos értelemben logikai duálisa. Tekintsünk rögzített G-t, fussa be $\mathfrak{S}$ az összes

$$G = S_1 \times \ldots \times S_k$$

szimplexfelbontásokat, jelölje S a $\mathfrak{S}$-ben szereplő bármelyik tényezőt, végül jelölje $\bar{S}$ azt az állítást, hogy S csoport. Akkor az alaptétel az $\exists$, $\forall$ logikai kvantorok által így fejezhető ki:

$$(\exists \mathfrak{S})(\forall S)\bar{S}$$

(azaz: létezik olyan $\mathfrak{S}$, amelyben minden S csoport). Dualizáljuk ezt a formulát, vagyis cseréljük fel a kvantorokat:

$$(\forall \mathfrak{S})(\exists S)\bar{S}$$

(azaz: minden $\mathfrak{S}$-ben létezik olyan S, amely csoport). Ezzel éppen HAJÓS tétele állt elő, s ebben áll a két tételnek bejelentett (logikai)

dualitása. Ebből azt a következtetést kell levonni, hogy HAJÓS tétele szorosan kapcsolódik a véges abelcsoportok klasszikus elméletéhez, mégpedig egyenesen ennek alaptételéhez, hiszen ennek logikai duálisa.

Az elmondottak szerint HAJÓS tétele több tekintetben egyenrangú az alaptétellel, mert ennek közeli rokona, t. i. logikai duálisa, nincs az alaptételnek alárendelve, mert ennek segítségével nem bizonyítható, uralkodik az összes szimplexfelbontások felett, mert mindezeket szolgáltatja, igen jelentős kapcsolatai vannak (diophantosi egyenlőtlenségek, többdimenziós geometria, a véges abelcsoportok zétafüggvényei és lefedési kérdései stb.), végül igen magas polcon áll, mert csak igen nehéz, rejtett utakon bizonyítható. Ezekután semmi kétség nem fér ahhoz, hogy HAJÓS tételét is minden tekintetben megilleti az alaptétel elnevezés: az egyik a FROBENIUS—STICKELBERGER-féle, a másik a HAJÓS-féle alaptétel, vagy ha úgy tetszik, a véges abelcsoportok elméletének első, ill. második alaptétele.

Ezekután napnál világosabb, hogy HAJÓS alaptétele a véges abelcsoportok azelőtti klasszikus elméletének lényeges kibővítését jelenti. Kérdés mármost, hogy miben kell megjelölni az új elmélet alapfeladatát. Mint már említettük, a klasszikus elmélet alapfeladata a

(1) $$G = H_1 \times \ldots \times H_k \qquad (H_1, \ldots, H_k \text{ csoportok})$$

felbontások vizsgálata. A mondottak szerint az új elméletben további alapfeladatként fellép a

(2) $$G = S_1 \times \ldots \times S_k \qquad (S_1, \ldots, S_k \text{ szimplexek})$$

felbontások vizsgálata. Lehetséges-e azonban megállni az (1) és (2) felbontásoknál? Nem lehet, mert (1) és (2) csupán egy-egy (heterogén) speciális esete a

(3) $$G = A_1 \times \ldots \times A_k \qquad (A_1, \ldots, A_k \text{ komplexusok})$$

felbontásoknak, amelyek az (1)-nek és (2)-nek természetes, legszűkebb közös általánosítását képezik, s ezért a véges abelcsoportok modern elméletének alapfeladatát szükségképpen az összes (3) alakú direkt felbontások vizsgálatában kell látni.

HAJÓS valóban meg is kezdte ezeknek a (3) alakú felbontásoknak vizsgálatát 1950-ben megjelent érdekes két dolgozatában, s így az új elmélet megindítása kétszeresen neki köszönhető.

Ez az elmélet ma még nagyon távol áll a befejezettségtől, de HAJÓSon kívül már eddig is több kutató résztvett kiépítésében (DE BRUIJN, SANDS, SZELE és alulírott). Ennek a kialakulóban levő elméletnek nagy vonzóereje problémájának nehézségén kívül a matematika több különböző ágával fennforgó összefüggések (az elméletnek az eddig említetteken kívül több érdekes kapcsolata van például az algebrai szám-

elmélettel is). Bizonyos, hogy a jövőben egyre több kutató fog a vizsgálatokba belekapcsolódni és az elmélet jelentősége egyre nagyobb arányokban fog kibontakozni.

HAJÓS vizsgálatai valójában a véges abelcsoportok elméletének további kibővítését is célozzák, amiről röviden még szólnom kell. A G csoportot a szokott módon beágyazzuk a G gyűrűjébe, amelyet $[G]$-vel jelölünk. G-nek K komplexusa esetén jelölje $\overline{K}$ azt a $[G]$-beli elemet, amely K elemeinek összege. Akkor HAJÓS alaptétele $[G]$-ben kifejezve a

$$\overline{G} = \overline{S}_1 \ldots \overline{S}_k \qquad (S_1, \ldots, S_k \text{ szimplexek})$$

alakú faktorizációkról szól. Maga HAJÓS máris ebben az átfogalmazásban végezte alaptételének bizonyítását. Bizonyításában a $[G]$ gyűrű használata nem is mellőzhető, s ezért HAJÓS vizsgálatai azt a tanulságot is nyújtják, hogy a G csoportot illető egyes kérdések esetleg a $[G]$ gyűrűben vizsgálandók. (Így HAJÓS alaptételének tőlem származó bizonyítása is támaszkodik erre az elvre.) Itt említem meg továbbá, amiről fent már szóltam, hogy HAJÓS doktori disszertációjában az r-szeresen térfedő kockarácsok vizsgálatát az általánosabb

$$r\overline{G} = \overline{S}_1 \ldots \overline{S}_k$$

faktorizációkra vezette vissza. Mint segédtétel fellépnek HAJÓS vizsgálataiban egyéb olyan faktorizációs kérdések, amelyek a $[G]$ gyűrű elemeit illetik. Az erirányú végcél tehát, amelyet HAJÓS vizsgálatai a véges abelcsoportokat illetően kijelölnek, a $[G]$ gyűrű $[G]^*$ multiplikatív struktúrájának teljes kivizsgálásából állna, ami azonban, mondani sem kell, rendkívül súlyos feladat.

A véges csoportok elméletében a jövő kutatói elé valóban csodás perspektívák tárulnak, egyrészt ugyanis az egyszerű csoportok kérdésében THOMPSON és FEIT által elért eredmény következtében, másrészt az abelcsoportok elméletében HAJÓS által végzett vizsgálatok nyomán. Jóllehet a véges csoportok elméletében az egyszerű csoportok és az abelcsoportok két erősen divergens kutatási irányt jelölnek ki, mégis teljesen indokolt e két problémakör egymás mellé állítása, mert bennük az újabb időknek a véges csoportokat illető két legnagyobb jelentőségű eredménye született meg.

Nem volna teljes HAJÓS alaptétele jelentőségének méltatása, ha említés nélkül hagynám a végtelen abelcsoportok elméletére gyakorolt hatását, mégpedig FÁRY ISTVÁN és FUCHS LÁSZLÓ végeztek egy-egy érdekes idevágó vizsgálatot.

Ezt a rövid ismertetést HAJÓS GYÖRGY tisztelt és kedves barátomnak születésnapi gratulációul szánom, s ez alkalomból az olvasó előtt rá akartam mutatni ama alkotásának nagyszerűségére, amely őt hazánk nagy tudósai közé iktatja.

Többi alkotásának részletes méltatásába nem bocsátkozom, hanem errenézve megelégszem irodalmi munkássága jegyzékének csatolásával, amelyből az olvasó látja, hogy HAJÓS GYÖRGY a tiszta és alkalmazott matematika sok ágában végezte eddigi kutatásait, s hogy kutatásai mellett kiterjedt oktató jellegű irodalmi tevékenységet is kifejtett, főleg a matematikai versenytételek körül, Bevezetés a geometriába c. könyve pedig mind didaktikailag, mind sok új kutatási eredményt nyújtó tartalmában kitűnő alkotás. Jegyzékbe foglalt irodalmi munkásságán kívül megemlítendő HAJÓSnak a Matematikai Lapok Feladatrovatában való számos szereplése, mint a feladatok kitűzője vagy azok megoldója, amely rovatnak egyben szerkesztője is. Megemlítendő még, hogy HAJÓS GYÖRGY többirányú, értékes közéleti tevékenységet folytat, így közel tíz éve a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának titkára, s az Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae folyóiratnak megindulása óta főszerkesztője.

HAJÓS GYÖRGYnek 50. születésnapja alkalmából a magyar matematikusok nevében is a legjobbakat kívánom, így többek között, hogy sok öröme legyen a véges abelcsoportok általa megindított modern elméletének teljes kiépülésében, ami most már csak kellő számú jó munkatárs és idő kérdése.

Rédei László

Hajós György dolgozatainak és munkáinak jegyzéke

Ein neuer Beweis eines Satzes von Minkowski, *Acta Sci. Math. Szeged*, **6** (1934), 224–225.

Egy determináns-tétel, *Mat. Term. Ért.*, 50 (1934), 231–238.

Zum Mengerschen Graphensatz, *Acta Sci. Math. Szeged*, 7 (1934), 44–47.

Többméretű terek befedése kockaráccsal, *Mat. Fiz. Lapok*, 45 (1938), 171–190.

Többméretű terek egyszeres befedése kockaráccsal, *Mat. Fiz. Lapok*, **48** (1941), 37–64.

Über Einfache und mehrfache Bedeckung des n-dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter, *Math. Zeitschr.*, **47** (1941), 427–467.

A rácsparallelogrammákról, *Mat. Fiz. Lapok*, **48** (1941), 398–400.

A hibabecslés alapjai, *Mat. Fiz. Lapok*, 49 (1942), 84–122.

Néhány szó a geometriai szerkesztésekről, *Mat. Term. Did. Lapok*, **1** (1943), 41–48.

A számítások pontosságáról, *Mat. Term. Did. Lapok*, **1** (1943), 62–69.

A munka- és időelemzés matematikai segédeszközei, Munkatud. és Rac. Int. kiadása (1948).

Translation et figures between lattice points, *Acta Sci. Math. Szeged*, **12** (1950) A, 246–253.

Sur la factorisation des groupes abéliens, *Casopis*, **74** (1950), 157–162.

Sur le probleme de factorisation des groupes cycliques, *Acta Math. Hung.*, **1** (1950), 189–196.

A ciklikus csoportok faktorizációjának problémájához, *MTA III. Oszt. Közl.*, **3** (1953), 1–6.

A nomográfia alkalmazhatóságának határairól, *MTA III. Oszt. Közl.*, 1 (1951), 268—273.
Über die Feuerbachschen Kugeln mehrdimensionaler orthozentrischer Simplexe, *Acta Math. Hung.*, 2 (1951), 191—195.
A hazai alkalmazott matematikai kutatások helyzetéről, *MTA III. Oszt. Közl.*, 3 (1953), 403—412.
Elementary proofs of some basic facts concerning order statistics, *Acta Math. Hung.* 5 (1954), 1—6. (Rényi Alfréddel közösen.)
Elemi bizonyítások a rendezett minták elméletének néhány alapvető összefüggésére, MTA III. Oszt. Közl., 4 (1954) 467—472. (Rényi Alfréd-del közösen).
Újabb eredmények a geometria területén, *MTA. III. Oszt. Közl.*, 2 (1952), 118—123.
A matematikai kutatásokról, Magyar Tudomány tíz éve, MTA kiadása (1955) (Alexits György-gyel és Rényi Alfréd-del közösen).
Matematikai Versenytételek I. és II. rész, Tankönyvkiadó (1956—57) (Neukomm Gyulával és Surányi Jánossal közösen).
Bevezetés a geometriába, Tankönyvkiadó (1960).
Über eine Konstruktionen nicht n-färbbarer Graphen, *Wiss. Zschr. Univ. Halle*, 10 (1961).
Az 1952, 1953, 1954, 1955, 1957, 1960. évi Kürschák József matematikai tanulóverseny feladatainak megoldása, *Középisk. Mat. Lapok*, 6 (1953), 1—12., 8 (1954), 65—73., 10 (1955), 100—105., 12 (1956), 33—48., 16 (1958), 38—46., 22 (1961), 98—106.

НАУЧНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ ДЬЕРДЬА ХАЙОША

Ласло Редеи

THE WORK OF G. HAJÓS

L. Rédei

Számelméleti megjegyzések IV.

Extremális problémák a számelméletben, I.

ERDŐS PÁL

E cikkben tárgyalandó problémák természetét legjobb lesz egy példával illusztrálni. Még 1933-ban találtam a következő tételt. Ha $a_1 < \ldots < a_{n+1} \leqq 2n$, $n+1$ egész szám $2n$-ig, akkor mindig van közülük kettő, úgy, hogy egyik többszöröse a másiknak, viszont $n+1$, $n+2$, ..., $2n$ mutatja, hogy megadhatunk n számot $2n$-ig, úgy, hogy egyik se osztható a másikkal. Az én eredeti bizonyításom kissé komplikált volt, de VÁZSONYI ENDRE, WACHSBERGER MÁRTA, LÁZÁR DEZSŐ és TURÁN PÁL egyszerű bizonyításokat találtak. E cikkben tárgyalt problémák mind ilyen természetű számelméleti szélsőérték feladatok lesznek — némelyikük könnyű, majdnem középiskolás nívójú — mások igen nehéz megoldatlan kérdések. A bizonyításokat csak akkor (és akkor se mindig) fogom közölni, ha még sehol se jelentek meg, de lehetőség szerint utalni fogok a kérdések irodalmára, melyeket közvetlenül a problémák diszkussziója után fogok megadni. Teljességre természetesen a problémák felsorolásában s az irodalmi utalásokban nem tarthatok igényt, s főleg oly problémákat fogunk csak diszkutálni, melyekkel én magam is foglalkoztam. E cikk első részében olyan szélsőértékfeladatokra fogunk szorítkozni, amelyekben a számok véges intervallumban vannak, e megkötések nélkül a problémák természete teljesen megváltozik.

$c, c_1, c_2, \ldots$ pozitív abszolút konstansokat fognak jelölni, $a_1, a_2, \ldots, \ldots, b_1 \ldots$ mindig pozitív egész számokat, rövidség kedvéért e cikkben „szám" mindig pozitív egész számot fog jelölni. $\exp z = e^z$ jelölést fogjuk használni.

Az egyszerűbb problémák egy része megjelent az American Mathematical Monthly problémarovatában és Erdős—Surányi „Bevezetés a számelméletbe" című könyvében.

Az előbb említett egyszerű kérdéssel kapcsolatos a következő, sokkal nehezebb kérdés: Legyen $a_1 < \ldots < a_k \leqq n$ olyan, hogy egyik se osztható a másikkal. Mekkora $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i}$ maximuma (k értéke nem fix)?

E feladat teljes megoldása, az extrém sorozat és a maximum meghatározása itt reménytelennek látszik. Behrend bebizonyította, hogy

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} < c_1 \log n/(\log\log n)^{1/2}.$$

Behrend azt is kimutatta, hogy az (1) által adott nagyságrend nem javítható. Én bebizonyítottam, hogy

$$(2) \qquad \max \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} = (1+o(1))\frac{\log n}{(2\pi\cdot\log\log n)^{1/2}}.$$

Amer. Math. Monthly 44 (1937), 120. Lásd még TURÁN PÁL, Az egész számok bizonyos számsorozatairól, Középisk. Mat. Lapok 1954, III. 2. p. 33—41. F. BEHREND, On sequences of numbers not divisible one by another, London Math. Soc. Journal 10 (1935) 42—45. P. ERDŐS, On the integers having exactly k-prime factors, Annals of Math. 49 (1948), 53—66, lásd 61. és 62. oldalt.

Az e cikkben tárgyalandó kérdések egy része meg van említve „Some unsolved problems", Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci. 6 (1961) 221—254 című cikkemben.

1. Ha $a_1 < \ldots < a_n \leqq 2n$ olyan, hogy egyik se osztható a másikkal, akkor $\min a_1 = 2^k$, ahol $3^k < 2n < 3^{k+1}$. Amer. Math. Monthly 46 (1939), 240. Emma Lehmer megoldása.

2. Legyen $a_1 < \ldots < a_n \leqq 2n$, akkor

$$\min_{i \neq j} [a_i, a_j] \leqq 6\left[\frac{n}{2}\right] + 1 \quad \text{ha} \quad n \neq 4.$$

Amer. Math. Monthly 65 (1958), 47. C. R. Phelphs megoldása.

Kérdezhető továbbá, hogy legfeljebb hány szám adható meg n-ig úgy, hogy bármely kettő legkisebb közös többszöröse nagyobb legyen, mint cn. c bizonyos speciális értékeire ezt megoldottam, de általános megoldásom egyelőre nincsen.

3. Legyen $a_1 < \ldots < a_n \leqq 2n$. Fennáll

$$(1) \qquad \max (a_i, a_j) > \frac{38n}{147} - c.$$

$\frac{38}{147}$ nem javítható.

Amer. Math. Monthly 44 (1937), 394. E feladatra nem érkezett megoldás.

Jelölje általában $f(d, n)$ azon számok maximális számát n-ig, hogy bármely kettő legnagyobb közös osztója $\leqq d$. Legyen $a_1 < \ldots < a_l$,

$l=f(d, n)$ egy ilyen sorozat, amelyről még feltesszük, hogy egyik a_i se helyettesíthető egy nála kisebb a_i' számmal (azaz, hogy $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i', a_{i+1}, \ldots, a_l$ már nem elégíti ki feltételeinket). Nyilvánvaló, hogy ily tulajdonságú $a_1 < \ldots < a_l$ sorozat létezik. Továbbá nyilvánvaló, hogy ha a_i előfordul sorozatunkban, akkor a_i minden osztója is előfordul, (ha ugyanis $t|a_i$ nem fordulna elő, akkor $a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_l$ is kielégítené feltételeinket). E feltétel azonban extrém sorozatunkat már meg is határozza. Sorozatunk tartalmazza az $(1, 2d)$ intervallum összes számait és $k>2$-re a $((k-1)d, kd)$ intervallum összes olyan számait, amelyeknek legkisebb prímfaktora $\geqq k$. Ezzel $f(d, n)$-et meghatároztuk. (1)-et ennek alapján könnyen bebizonyíthatjuk. Megjegyezzük még, hogy az a_i sorozat a (d^2, n) intervallumokban csak prímszámokat tartalmazhat.

4. Legyen $a_1 < \ldots < a_k \leqq n$ olyan, hogy egyik a sem foglaltatik a többi sorozatában. Fennáll $k \leqq \pi(n)$, ahol $\pi(n)$ az n-nél nem nagyobb prímszámok számát jelenti.

5. Jelölje $f(a_1, \ldots, a_k; n)$ azon $m \leqq n$ számok számát, melyek vagy valamelyik a többszörösei, vagy valamelyiknek osztói. Akkor, ha mindegyik a n-nél nem nagyobb

$$f(a_1, \ldots, a_k; n) \leqq f(2, \ldots, p_k; n)$$

azaz függvényünk akkor maximum, ha $a_i=p_i$, ahol p_i az i-edik prímszám.

Amer. Math. Monthly 60 (1953) 717. SZEKERES GYÖRGY megoldása.

6. Ha $a_1 < \ldots < a_k \leqq n$ olyan, hogy $a_i + a_j \neq a_r$, akkor $\max k = \frac{n+1}{2}$.

Ezek mind feladataim voltak az American Mathematical Monthlyban. 4. és 6. egészen könnyűek, 5. a legnehezebb.

6-tal kapcsolatban megemlítem a következő tételt, melyet nemrég bizonyítottam be, s mely e folyóiratban fog megjelenni: Legyen $a_1 < \ldots$ olyan sorozat, hogy egy a se összege csupa különböző más a-nak. Akkor $\sum_i \frac{1}{a_i} < 103$, 103 biztos erősen javítható, a pontos határ megállapítása azonban nem lesz könnyű.

7. Legyen $a_1 < \ldots < a_k \leqq n$ olyan, hogy bármely $i \neq j$ számpárra $[a_i, a_j] > n$. Sejtettem, hogy

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} \leqq \frac{31}{30} \tag{1}$$

egyenlőség csak, ha $n=5$ és $a_1=2$, $a_2=3$, $a_3=5$.

E sejtést SCHINZEL és SZEKERES bebizonyították, a bizonyítás nem egyszerű. $\frac{3}{2}$-el $\frac{31}{30}$ helyett (1) könnyen bizonyítható.

Schinzel és Szekeres bebizonyítják azt is, hogy minden $\varepsilon>0$-hoz és $n>n_0$-hoz van oly $a_1<\ldots<a_k\leqq n$, melyre $[a_i, a_j]>n$ minden $i\neq j$-re és

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i}>1-\varepsilon. \tag{2}$$

Sejtem azonban, hogy ha $n>n_0(\varepsilon)$, akkor $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i}<1+\varepsilon$. Talán $n>n_0$-ra

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i}<1.$$

Schinzel és Szekeres bebizonyítják, hogy minden $\varepsilon>0$-hoz van oly n_0, hogy ha $n>n_0$, akkor van oly

$$a_1<\ldots<a_k\leqq n, [a_i, a_j]>n \quad \text{ha} \quad i\neq j \tag{3}$$

úgy, hogy azon számok száma n-ig, amelyek egyetlen a-val sem oszthatók, kisebb, mint εn. Ez, mint könnyű belátni, valamivel élesebb, mint (2).

Ezzel kapcsolatban felvethető a következő kérdés: Legalább hány olyan szám van n-ig, mely a (3)-at kielégítő sorozat egyetlen tagjával sem oszthatók? E számok számára nem tudok alsó becslést. Ha még feltesszük, hogy $k>cn$, akkor kérdezhetjük, hogy legalább hány oly $d\leqq n$ szám van, mely legalább egy a-nak valódi osztója. Az alsó becslés természetesen c-től fog függni. Itt talán az $[a_i, a_j]>n$ a gyengébb $a_i\nmid a_j$ feltétellel helyettesíthető.

A. SCHINZEL and G. SZEKERES, Sur un probleme de M. Paul Erdős, Acta Szeged 20 (1959), 221—229.

(1)-et 2-vel $\frac{31}{30}$ helyett kitűztem az Amer. Math. Monthlyban 58 (1951), 345. R. S. LEHMAN $\frac{3}{2}$-vel (sőt még valamivel élesebben) bizonyította. $\frac{31}{30}$ bizonyítása azonban úgy látszik, lényegesen nehezebb.

8. Jelölje $r_k(n)$ azon számok maximális számát n-ig, melyek nem tartalmaznak k tagú számtani sort. Ismeretes, hogy

$$n^{1-c_1/(\log n)^{1/2}}<r_3(n)<c_2\, n/\log\log n. \tag{1}$$

$r_k(n)=o(n)$ $k>3$-ra nincsen bebizonyítva!

(1)-ben az alsó határ BEHRENDTŐL való, a felső határ ROTH-tól. Nagyon érdekes lenne a határokat (1)-ben szűkíteni, valamint $r_k(n)$-et főleg felülről — megbecsülni.

F. A. BEHREND, On sets of integers which contain no three terms in arithmetical progression. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 32 (1946) 331—332.

K. F. ROTH, On certain sets of integers, London Math. Soc. Journal 28 (1953) 104—109.

Lásd még TURÁN PÁL a bevezetésben idézett cikkét.

9. Legyen $\varphi(k) = \pm 1$. Mekkora

$$\max_{d,m} \left| \sum_{\substack{j=1 \\ m,\, d \leqq n}}^{m} \varphi(d,j) \right| = F(n)$$

minimuma, ha $\varphi(k)$ végigfutja az összes ± 1 értékeket felvevő függvényeket. Könnyen belátható, hogy $F(n) < c_1 \log n$, s valószínűleg $F(n) > c_2 \log n$, de még az sincsen bebizonyítva, hogy $F(n)$ n-el együtt végtelenhez tart.

A 8. és 9. problémák összefüggnek VAN DER WAERDEN tételével, amely szerint minden k-hoz van oly $f(k)$, hogy ha $f(k)$-ig a számokat beosztjuk két részre, akkor legalább az egyik rész tartalmaz k-tagú számtani sort. VAN DEN WAERDEN — ugyanúgy, mint minden későbbi bizonyítás — nagyon rossz felső becslést nyer $f(k)$-ra. RADÓval bebizonyítottuk, hogy $f(k) > ((k-1)2^k)^{1/2}$ és nemrégen W. SCHMIDT bebizonyította, hogy $f(k) > 2^{k - c_3 k^{1/2} \log k}$. Nagyon kívánatos lenne $f(k)$-ra jobb alsó és főleg felső becslést találni.

RAMSAY ismert tételéhez hasonlóan (lásd pl. P. ERDŐS and G. SZEKERES, A combinatorical problem in geometry, Compositio Math. 2 (1935) 463—470) a következő kérdést vethetjük fel: Jelentse $f(k, l)$ azt a legkisebb egész számot, hogy ha $f(k, l)$-ig az egész számokat két részre osztjuk úgy, hogy az első rész nem tartalmaz k-tagú számtani sort, akkor a második rész tartalmaz l-tagú számtani sort. Érdekes lenne $f(k, l)$-re nem túl rossz alsó és felső becslést találni. (Triviális felső becslés $f(k, l) < f(l)$, ha $k \leqq l$). Különösen érdekes lenne $f(3, l)$-re becsléseket találni.

További kérdés (melyet VAN DER WAERDEN is tárgyal) a következő: Megbecslendő az a legnagyobb $g_3(n)$ szám, hogy a számokat $g_3(n)$-ig n részre lehet osztani úgy, hogy egyikük se tartalmazzon három tagú számtani sort, Van der Waerden azonban csak nagyon rossz felső becslést kap $g_3(n)$-re, de jobb tudtommal nem ismeretes.

Még a következő elemi kérdést szeretném megemlíteni, melyre talán könnyű lesz válaszolni. Legyen A egész számok egy tetszőleges sorozata, $f_3(A)$ jelölje az A-ban foglalt háromtagú számtani sorok

számát. Legyen $A^{(n)}$ és $B^{(n)}$ az $(1, n)$ intervallum számainak két diszjunkt osztályra való bontása. Mekkora $f_3(A^{(n)})+f_3(B^{(n)})$ minimuma? Ugyanez kérdezhető $f_k(A^{(n)})+f_k(B^{(n)})$ összegre is (ahol $f_k(A)$ az A-ban foglalt k tagú számtani sorok számát jelenti.)

VARNAVIDES bebizonyította (ROTH tételének segítségével), hogy ha az $A^{(n)}$ sorozat tagjainak száma $> c_4 n$, akkor $f_3(A^{(n)}) > c_5 n^2$, de $f_3(A^{(n)})$ minimumának meghatározása nem lesz könnyű.

$f_3(A)$ az $x+y=2z$ megoldásainak számát jelenti, ahol x, y, z A elemei. Ugyane kérdések vizsgálhatók más egyenletre például az $x+y=z$ esetén.

SCHURtól való a következő tétel: Ha a számokat az $(1, en!)$ intervallumban n részre osztjuk, akkor legalább az egyik részben az $x+y=z$ egyenlet megoldható. $en!$ valószínűleg lényegesen javítható és ha $A(n)$ jelenti azt a legkisebb egész számot, melyre a tétel igaz marad, akkor valószínűleg igaz, hogy $\lim_{n=\infty} A(n)^{1/n} = C < \infty$. Triviális, hogy $A(n) > 2^n$ $(n \geqq 2)$ és e becslés könnyen javítható.

Ebbe a kérdéskörbe való TURÁN publikálatlan eredménye: Ha az $n \leqq m \leqq 5n+3$ számokat beosztjuk két részre, akkor legalább az egyik részben

$$x+y=z, \quad x<y<z$$

megoldható. $5n+3$ nem javítható.

Kettőnél több osztályra nem ismeretes analóg tétel.

B. L. VAN DER WAERDEN, Beweis einer Baudet'schen Vermutung, Nieuw Archiv Viskunde (2) 15 (1928), 212—216. Lásd még R. RADÓ, Studien zur Kombinatorik, Math. Zeitschrift 36 (1933), 424—480, és KHINTCHINE „A számelmélet három gyöngye" című könyvét, mely orosz eredeti mellett német és angol fordításban is megjelent.

P. ERDŐS and R. RADÓ, Combinatorial theorems on classifications of subsets of a given set, Proc. London Math. Soc. (3) 2 (1952) 438—439. W. SCHMIDT bizonyítása még nem lett publikálva, lásd Amer. Math. Soc. Notices, június, 1961, 261 oldal.

I. SCHUR, Jahresbericht der Deutschen Math. Ver. 25 (1916) 114.

P. VARNAVIDES, On certain sets of positive density, London Math. Soc. Journal 34(1959), 358—360.

10. (lásd 4. és a bevezetést). Legyen $a_1 < \ldots < a_l \leqq n$ egész számok oly sorozata, hogy egy a sem foglaltatik k vagy kevesebb a szorzatában. Mekkora l maximuma? Jelöljük l maximális értékét $f(k, n)$-el. Bebizonyítottam, hogy

$$(1) \qquad \pi(n) + c_1 \frac{n^{2/3}}{(\log n)^2} < f(2, n) < \pi(n) + c_2 \frac{n^{2/3}}{(\log n)^2}$$

és úgy látom, hogy módszeremmel $k>2$-re adódik, hogy

$$\pi(n)+c_1^{(k)}\frac{n^{2/2k+1}}{(\log n)^2}<f(k,n)<\pi(n)+c_2^{(k)}\frac{n^{2/2k+1}}{(\log n)^2}, \tag{2}$$

(2)-vel azonban itt nem foglalkozunk. A bevezetésben tárgyalt kérdés adja, hogy $f(1,n)=\left[\frac{n+1}{2}\right]$, azonban $f(k,n)$ pontos meghatározása már $k=2$-re is reménytelen feladatnak látszik. Talán nem lesz reménytelen bebizonyítani, hogy létezik olyan c konstans, melyre

$$f(k,n)=\pi(n)+c\frac{n^{2/2k+1}}{(\log n)^2}+o\left(\frac{n^{2/2k+1}}{(\log n)^2}\right), \tag{3}$$

de (3) bebizonyítása nekem már $k=2$-re se sikerült.

P. Erdős, On sequences of integers no one of which divides the product of two others and on some related problems. Mitteilungen des Forschungsinstitutes für Math. und Mech. Tomsk 2 (1938), 74—82.

11. A 10. alatt idézett cikkben a következő tételt is bebizonyítom: Legyen $a_1<\ldots<a_y\leqq n$ olyan sorozat, hogy az a_ia_j szorzatok mind különbözők, akkor

$$y<\pi(n)+c_1n^{3/4} \tag{1}$$

és egy alkalmasan konstruált sorozatra

$$y>\pi(n)+c_2n^{3/4}/(\log n)^{3/2}. \tag{2}$$

Sikerült bebizonyítanom, hogy (2) adja a helyes nagyságrendet, ugyanis fennáll

$$y<\pi(n)+c_3\frac{n^{3/4}}{(\log n)^{3/2}}. \tag{3}$$

(3) bizonyításával, mely komplikált, itt nem foglalkozunk.

Általánosabban legyen $a_1<\ldots<a_{y_k}\leqq n$ egész számok oly sorozata, hogy az $a_{i_1}\ldots a_{i_r}$, $1\leqq r\leqq k$ sorozatok mind különbözők. Mekkora y_k maximuma? $k>2$-re e kérdést nem vizsgáltam. (Itt tulajdonképpen két különböző kérdést kapunk, aszerint, hogy megkívánjuk, hogy az a-k mind különbözőek legyenek vagy nem, valószínű azonban, hogy ez y_k nagyságrendjét nem nagyon fogja befolyásolni.)

Legyen $a_1<\ldots<a_z\leqq n$ olyan sorozat, hogy a

$$\prod_{i=1}^{z}a_i^{\varepsilon_i}, \qquad \varepsilon_i=0 \text{ vagy } 1 \tag{4}$$

szorzatok mind különbözőek. Mekkora Z maximuma? Bebizonyítottam, hogy

$$Z < \pi(n) + 2n^{2/3}. \tag{5}$$

Nem lehetetlen, hogy Z maximuma meghatározható. Legyenek ugyanis az a-k a p^{2^t} alakú számok, ahol p végigfut a prímszámokon és $t \leqq T$, ahol $p^{2^T} \leqq n < p^{2^{T+1}}$. Könnyű belátni, hogy erre a szorzatra a (4) alatti számok mind különbözők, s talán erre a sorozatra éretik el Z maximuma. Ha ez igaz, úgy (5) helyett $Z < \pi(n) + cn^{1/2}/\log n$ is igaz.

(Megjegyzés a korrekturánál). Pósa és én megjegyeztük, hogy Guy és Conway példája miatt (lásd 26-ik probléma) a fenti példa nem adhatja Z maximumát; $Z < \pi(n) + cn^{1/2}/\log n$ valószínűleg igaz lesz.

Ha (4) helyett azt tesszük fel, hogy az összes $\prod_{i=1}^{Z} a_i^{\alpha_i}$, $0 \leqq \alpha_i < \infty$ szorzatok mind különbözőek, akkor könnyű belátni, hogy $\max Z \leqq \pi(n)$.

Most még vázolom (5) bizonyítását. A következő lemmára lesz szükségünk: Minden $m \leqq n$ számra fennáll $m = x^{(m)} \cdot y^{(m)}$ ahol $x^{(m)}$ vagy prímszám vagy $x^{(m)} \leqq n^{2/3}$ és $y^{(m)} \leqq n^{2/3}$. A lemma egyszerű és bizonyítását az olvasóra bízzuk (a lemma bizonyítása a 10. alatt idézett cikkben található.)

Az a_i, $1 \leqq i \leqq Z$ számokat állítsuk elő $x^{(a_i)} \cdot y^{(a_i)}$ alakban. Az $x^{(a_i)}$ és $y^{(a_i)}$ számokat képzeljük pontokkal helyettesítve és az a_i számnak feleltessük meg az $x^{(a_i)}$ és $y^{(a_i)}$ pontokat összekötő élt. Ilymódon egy páros körüljárású gráfot nyerünk (azaz egy olyan gráfot, melyben minden zárt vonalnak páros sok éle van). E gráf szögpontjainak száma legfeljebb $\pi(n) + 2n^{2/3}$. (Ugyanis az $x^{(m)}$ számok száma $< \pi(n) + n^{2/3}$ és az $y^{(m)}$ számok száma $\leqq n^{2/3}$). Egy jólismert (és majdnem triviális) tétel szerint, ha egy gráf éleinek száma nem kisebb, mint a szögpontok száma, akkor a gráfnak van zárt vonala. Ha tehát $Z \geqq \pi(n) + 2n^{2/3}$, volna, akkor páros körüljárású gráfunknak volna egy mondjuk $2l$ élű zárt vonala. Legyenek a zárt vonalban előforduló élek $a_{i_1}, \ldots, a_{i_{2l}}$. Ekkor azonban nyilván fennáll

$$\prod_{r=1}^{l} a_{i_{2r}} = \prod_{r=0}^{l-1} a_{i_{2r+1}}.$$

Ezzel (5) igazolva van. A 10. alatt idézett cikkben egy élesebb lemmát is bizonyítok, melyből (5) helyett $Z < \pi(n) + cn^{2/3}/(\log n)^2$ nyerhető.

Teljesen más természetű problémára jutunk, ha (4) helyett azt tesszük fel, hogy

$$\prod_{r=1}^{l_1} a_{i_r} = \prod_{r=1}^{l_2} a_{j_r} \tag{6}$$

csak akkor lehetséges, ha $l_1 = l_2$. (6) nyilván teljesül, ha az a-k a pontosan 2-vel osztható számokon futnak végig. Lehetséges, hogy itt max $Z > n(1-\varepsilon)$ minden $\varepsilon > 0$-ra, ha $n > n_0(\varepsilon)$.

12. Legyen $a_1 < \ldots < a_x \leqq n$; $b_1 < \ldots < b_y \leqq n$, tegyük fel, hogy az $a_i b_j$ szorzatok mind különbözők. Mekkora az xy szorzat maximális értéke? Lehetséges, hogy $xy < c_1 n^2/\log n$. Ha e becslés helyes, úgy már a helyes nagyságrendet adja, mint ezt a következő példa mutatja: Legyenek az a-k az $\frac{n}{2}$-nél kisebb prímszámok és a b-k az $\frac{n}{2}$ és n közötti számok. Én azonban csak azt tudom bebizonyítani, hogy $xy < c_2 n^2/(\log n)^{c_3}$

13. Legyen $a_1 < \ldots < a_{x_l} \leqq n$ olyan sorozat, hogy minden m-re az $m = a_i a_j$ egyenletnek l-nél kevesebb megoldása van. Mekkora x_l maximális értéke? 11. alatt e kérdést $l = 2$-re tárgyaltuk, $l > 2$ esetén a kérdés sokkal nehezebb. Jelentse $\pi_k(n)$ azon számok számát n-ig, amelyeknek $(k+1)$-nél kevesebb különböző prímfaktoruk van. Ha

$$x > (1+\varepsilon)\pi_k(n) \tag{1}$$

és $n > n_0(\varepsilon)$ elegendő nagy, akkor van oly m, melyre az $m = a_i a_j$ egyenletnek legalább 2^k megoldása van. (1) bizonyítása igen komplikált és itt nem foglalkozunk vele. (1)-ből könnyen levezethető, hogy ha $a_1 < a_2 < \ldots$ végtelen sorozat olyan, hogy minden elegendő nagy szám $a_i a_j$ alakba írható, akkor minden k-hoz van oly n_k, hogy az $n_k = a_i a_j$ egyenletnek k-nál több megoldása van. E kérdés additív analogonja régi sejtésünk Turánnal: Legyen $b_1 < \ldots$ oly sorozat, hogy minden elegendő nagy szám $b_i + b_j$ alakba írható. Van-e akkor minden k-hoz oly n_k, hogy az $n_k = b_i + b_j$ egyenletnek k-nál több megoldása van? E kérdés igen nehéznek látszik.

Még a következő tételt szeretném bizonyítás nélkül kimondani: Legyen $x > n \log\log n/\log n - c_1 n/(\log n)^2$ akkor, ha c_1 elegendő kicsi, van oly m szám, melyre az $m = a_i a_j$ egyenletnek legalább három megoldása van. E tétel nem marad igaz, ha c_1 helyett elég nagy c_2 abszolút konstanst veszünk. A bizonyítás nem egészen egyszerű, s itt nem foglalkozunk vele.

14. Legfeljebb hány szám adható meg n-ig, hogy ne legyen közülük k, melyeknek páronként ugyanaz a legnagyobb közös osztójuk? $k = 3$ esetén se tudok erről a kérdésről érdemleges eredményt.

E számok maximális számát jelöljük $A_k(n)$-el. Schinzel a napokban közölte velem, hogy bebizonyította:

$$A_3(n) < cn \log\log\log n/\log n.$$

L. Moser ugyancsak a napokban közölte velem a következő kérdést: Maximálisan hány szám adható meg n-ig, hogy bármely k-nak különböző legyen a legnagyobb közös osztója. Jelöljük e maximumot $B_k(n)$-el.

Moser kimutatta, hogy $B_k(n) > \exp(c_k \log n/\log\log n)$. Könnyű belátni továbbá, hogy $B_k(n) < \exp\left((1+\varepsilon)\log 2, \log n/\log\log n\right)$ s talán

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log B_k(n) \log\log n}{\log n \cdot \log 2} = 1.$$

Triviális, hogy $A_k(n) \geqq B_k(n)$, s így Schinzel és Moser eredményeiből nyerjük, hogy

$$\exp\left(c_3 \log n/\log\log n\right) < A_3(n) < \frac{cn \log\log\log n}{\log n}.$$

Sejtelmem sincs, hogy mi $A_3(n)$ valódi nagyságrendje.

A cikk megírása után bebizonyítottam, hogy minden $\varepsilon > 0$-ra és k-ra, ha

$$A_k(n) < \frac{n}{\exp\left((\log n)^{1/2-\varepsilon}\right)}. \tag{2}$$

(2) bizonyítását vázoljuk. Legyen $1 \leqq a_1 < \ldots < a_l$, $l = A_k(n)$ oly maximális sorozat, melynek nincsen k eleme, melyeknek páronként ugyanaz a legnagyobb közös osztójuk. Minden a_i egyértelműen $u_i v_i$ alakba írható, ahol u_i minden prímfaktora nem nagyobb, mint $\exp((\log n)^{1/2})$ és v_i minden prímfaktora nagyobb, mint $\exp((\log n)^{1/2})$. Jelölje p_l a legkisebb $\exp((\log n)^{1/2})$-nél nagyobb prímszámot. Fix u_i mellett legfeljebb

$$\left[\frac{n(k-1)}{p_l u_i}\right] + 1 \tag{3}$$

v_i lehetséges, ha ti. egy p_l hosszúságú intervallumban k v_i lenne, akkor ezek páronként relatív prímszámok lennének, s a megfelelő a-knak páronként u_i lenne a legnagyobb közös osztója, ami lehetetlen. Ha viszont $p_l u_i > n$, akkor az $u_i = a_i$ $v_i = 1$ esetleg lehetséges, s ez az oka (3)-ban a $+1$ összeadandónak. (3) miatt

$$\begin{aligned} A_k(n) = l &\leqq \sum_i \left(\left[\frac{(k-1)n}{p_l u_i}\right] + 1\right) \leqq \\ &\leqq \frac{(k-1)n}{\exp\left((\log n)^{1/2}\right)} \sum_i \frac{1}{u_i} + \psi\left(n, \exp\left((\log n)^{1/2}\right)\right), \end{aligned} \tag{4}$$

ahol $\psi(x, y)$ jelenti, hogy hány olyan szám van x-ig, melyeknek minden prímfaktora $\leqq y$. De Bruijn 20 alatt idézett cikke miatt

$$\psi\left(n, \exp\left((\log n)^{1/2}\right)\right) < \frac{1}{2} \frac{n}{\exp\left((\log n)^{1/2-\varepsilon}\right)}, \tag{5}$$

továbbá

$$(6)\qquad \sum_i \frac{1}{u_i} \leqq \prod_{p < \exp((\log n)^{1/2})} \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) < \log n.$$

(2), (4), (5) és (6)-ból azonnal következik. Lehetséges, hogy (2) már nincsen messze $A_k(n)$ valódi nagyságrendjétől.

15. Maximálisan hány szám adható meg n-ig, úgy, hogy bármely kettő legkisebb közös többszöröse $\leqq n$ legyen?

Sejtem, hogy az extremális sorozat tagjai a következő számok:

$$1 \leqq i \leqq \left(\frac{n}{2}\right)^{1/2} \quad \text{és} \quad \left(\frac{n}{2}\right)^{1/2} < 2j \leqq (2n)^{1/2}.$$

Könnyű bebizonyítani, hogy $3n^{1/2}$-nél kevesebb ily szám adható meg n-ig, sejtésem azonban $\frac{3}{2^{3/2}} n^{1/2}$-et adna.

16. Mekkora lehet $k = k(n)$, ha van oly $m \leqq n$, hogy az $m, m+1, \ldots, m+k$ számok mindegyike legalább egy k-nál nagyobb prímszámmal oszthatók? Nem nehéz bebizonyítani, hogy $k(n) > \exp((\log n)^{1/2-\varepsilon})$ minden $\varepsilon > 0$-ra, ha $n > n_0(\varepsilon)$. Érdekes, hogy $k(n)$-re nincs elfogadható felső becslésem. Valószínűnek látszik, hogy $k(n) = o(n^{\varepsilon})$ minden $\varepsilon > 0$-ra.

17. SYLVESTER és SCHURtól való a következő tétel: Legyen $n \geqq k$, akkor az $n+1, \ldots, n+k$ számok legalább egyike osztható egy k-nál nagyobb prímszámmal. Jelölje $f(k)$ azt a legkisebb egész számot, hogy $f(k)$ k-nál nagyobb egymásután következő szám szorzata mindig osztható legalább egy k-nál nagyobb prímszámmal. Bebizonyítottam, hogy $f(k) < c_1 k/\log k$. RANKIN egy tételéből következik, hogy

$$f(k) > c_2 \log k \operatorname{loglog} k \operatorname{logloglog} k/(\operatorname{logloglog} k)^2.$$

Lehetséges, hogy $f(k)$ valódi nagyságrendje $(\log k)^2$, ennek eldöntése azonban nagyon nehéz lesz. L. MOSER a napokban közölte velem, hogy bebizonyította, hogy ha $n > k$, akkor $\prod_{i=0}^{k-1} (n+i)$ mindig tartalmaz $\frac{3k}{2}$-nél nem kisebb prímfaktort. 3. 4 és 8. 9 mutatja, hogy ez nem javítható (k nagy értékeire természetesen javítható ez).

Nyilvánvaló, hogy $f(2) = 2$ és könnyű belátni, hogy $f(3) = f(4) = 3$. Nemrég UTZ bebizonyította, hogy $f(5) = \ldots = f(10) = 4$. Az $f(k)$-ra vonatkozó kérdések összefüggnek az egymásután következő prímszámok közötti különbségre vonatkozó kérdésekkel és azon kérdéssel, hogy hány olyan egymásután következő szám van, melyeknek mindegyike osztható egy k-nál nem nagyobb prímszámmal.

P. ERDŐS, On a theorem of SYLVESTER and SCHUR, Journal London Math. Soc. 9 (1934) 282—288.

P. ERDŐS, On a theorem of SYLVESTER and SCHUR, Nieuw Arch. Wisk. 3 (1955) 124—128.

R. A. RANKIN, The difference between consecutive prime numbers, Journal London Math. Soc. 13 (1938) 242—247.

W. R. UTZ, A conjecture of ERDŐS concerning consecutive integers, Amer. Math. Monthly 68 (1961) 896—897.

L. MOSER bizonyítása még nincsen publikálva.

18. Az $n<a_1<\ldots<a_l\leqq n+k$ számsorozatot akkor nevezzük teljesnek, ha $(a_i, a_j)=1$, $1\leqq i<j\leqq l$ és minden m-hez $n<m\leqq n+k$ van oly a_r, melyre $(m, a_r)>1$. Jelölje $f(n, k)$, illetve $F(n, k)$ l minimális illetve maximális értékét. Könnyű belátni, hogy

$$\min_n f(n, k)=2 \quad \text{minden} \quad k\text{-ra}.$$

Ugyanis, ha $n=k!-1$, akkor $k!$ és $k!+1$ teljes rendszert alkotnak és $f(n, k)$ nyilván nagyobb, mint 1. $\max_n f(n, k)$, $\min_n F(n, k)$ és $\max_n F(n, k)$ meghatározása illetve megbecslése lényegesen nehezebb feladat, melynek teljes megoldásától messze vagyok.

Összefügg e kérdésekkel, hogy k egymásután következő szám között legfeljebb hány olyan lehet, melyeknek minden prímfaktora k-nál nagyobb. Sokkal nehezebb kérdés, hogy k egymásután következő szám között hány prímszám lehet. Sejthető, hogy legfeljebb $\pi(k)$ azaz $\pi(n+k)\leqq\pi(n)+\pi(k)$, de ez csak k kis értékeire van bebizonyítva. Hardy és Littlewood után jelöljük

$$\varrho(y)=\limsup_{x\to\infty}\left(\pi(x+y)-\pi(x)\right).$$

Sejthető, hogy $\limsup_{y\to\infty}\varrho(y)=\infty$, de még az se ismeretes, hogy $y>y_0$-ra $p(y)\geqq 2$ (azaz hogy $\liminf_{k\to\infty}(p_{k+1}-p_k)<\infty$). HARDY és LITTLEWOOD sejtették, hogy ha $y>y_0$, akkor

$$\varrho(y)>\frac{y}{\log y}.$$

Másrészt BRUN módszerével bebizonyították, hogy $\varrho(y)<cy/\log y$. Jelölje $h_n(k)$ az $n<x\leqq n+k$ intervallumban levő azon számok számát, melyek egyetlen k-nál kisebb prímszámmal sem oszthatók. HARDY és LITTLEWOOD sejtették, hogy

$$\varrho(k)=\max_n h_n(k).$$

Valószínűnek látszik, hogy $\lim_{y\to\infty}\left(\pi(y)-\varrho(y)\right)=\infty$.

G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD, Some problems of partitio numerorum III: On the expression of a number as a sum of primes, Acta Math. 44 (1923) 1—70, lásd 52—70. oldalt.

Hasonló prímszámokra vonatkozó sejtések találhatók a következő cikkben: A. SCHINZEL et W. SIERPINSKI, Sur certaines hypotheses concernant les nombres premiers, Acta Arithmetica 4 (1958) 185—207.

Most néhány kongruenciarendszerekre vonatkozó problémát fogunk diszkutálni.

19. Egy $a_i(\mathrm{mod}\, n_i)$, $1 < n_1 < \ldots < n_k$ kongruenciarendszert akkor nevezünk lefedőnek, ha mindegyik szám ezen kongruenciák valamelyikét kielégíti. Könnyű bebizonyítani, hogy k minimális értéke 5 és hogy 0(mod 2), 0(mod 3) 1(mod 4), 5(mod 6), 7(mod 12) lefedő kongruenciarendszert alkot.

Felvethető mármost a következő kérdés: Legyen n_1 tetszőleges egész szám, létezik-e oly lefedő kongruenciarendszer, melynek legkisebb modulusa n_1 és mekkora $k = f(n_1)$ maximális értéke. Davenport és én konstruáltunk lefedő kongruenciát, melyre $n_1 = 3$ ez nem nehéz, de $f(3)$ értéke már nem ismeretes. $n_1 = 4$ és $n_1 = 6$ esetre DEAN SWIFT konstruált lefedő kongruenciákat, ez már lényegesen nehezebb, és $n_1 = 8$ esetre SELFRIDGE. Az általános kérdés nincsen megoldva, és nem is látszik könnyűnek. Kérdezhető még, mekkora $g(n_1) = n_k$ minimális értéke. Könnyű belátni, hogy $g(2) = 12$, valószínűleg $g(3) = 120$. (Ez nem igaz, a stockholmi nemzetközi matematikai kongresszuson egy kolléga említette, hogy $g(3)$ értékét meghatározta, de se $g(3)$ értékére se a kolléga nevére nem emlékszem.)

Nem ismeretes, vajon van-e oly lefedő kongruenciarendszer, melynek minden modulusa páratlan. Itt nyilván még sok kérdés vethető fel, de ezeknek megfogalmazását az olvasóra bízzuk.

20. Sejtettem, hogy minden lefedő kongruenciarendszerre $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} > 1$. E sejtést MIRSKY és NEWMANN bebizonyították s S. STEIN egy általánosabb tételt bizonyított be.

Nevezzük az $a_i(\mathrm{mod}\, n_i)$, $1 < n_1 < \ldots < n_k$ kongruenciarendszert idegennek, ha nincs oly szám, mely közülük egynél több kongruenciát tud kielégíteni. S. STEIN sejtette, hogy ha az $a_i(\mathrm{mod}\, n_i)$, $1 \leqq i \leqq k$ rendszer idegen, akkor mindig van oly $0 < u \leqq 2^k$ szám, mely ezen kongruenciák egyikét sem elégíti ki, $2^{i-1}(\mathrm{mod}\, 2^i)$, $1 \leqq i \leqq k$ példája mutatja, hogy 2^k biztosan nem javítható. Most a következő sejtést fogalmazom meg (mely az imént említett MIRSKY—NEWMANN tétel miatt élesebb, mint STEINÉ). Legyen

(1) $$a_i(\mathrm{mod}\, n_i), \quad 1 \leqq i \leqq k$$

oly kongruenciarendszer, hogy van oly szám, mely ezen kongruenciák egyikét se elégíti ki. Akkor már van oly ily tulajdonságú u szám, melyre $0<u\leqq 2^k$. E sejtés helyett azonban csak a következőt tudom bebizonyítani: Minden k-hoz létezik egy legkisebb $A(k)$, melyre teljesül a következő: Ha (1) oly kongruenciarendszer, melyhez van oly szám, mely ezeknek egyikét se elégíti ki, akkor már van oly ily tulajdonságú szám, melyre $0<u\leqq A(k)$. $A(k)$-ra azonban nem tudok explicit becslést.

Most térjünk vissza STEIN sejtésére. Először is vázoljuk a következő tétel bizonyítását:

Legyen

$$a_i(\mathrm{mod}\, n_i),\quad 1\leqq i\leqq k \tag{2}$$

idegen rendszer. Akkor

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}\leqq 1-\frac{1}{2^k}. \tag{3}$$

A bizonyítás MIRSKY—NEWMANN módszerét s teljes indukciót használ. $k=1$-re a tétel nyilván igaz. Tegyük fel, hogy $(k-1)$-re (3) fennáll, be fogjuk bizonyítani, hogy k-ra is igaz. Ha $n_k\geqq 2^k$, úgy állításunk indukciós feltételünkből azonnal következik.

Minthogy a (2) rendszer idegen, könnyen belátható, hogy

$$\frac{1}{1-x}-\sum_{i=1}^{k}\frac{x^{a_i}}{1-x^{n_i}}=\sum_j x^{b_j}, \tag{4}$$

ahol $b_1<b_2<\ldots$ végigfut azon számokon, melyek a (2) kongruenciarendszer egyetlen kongruenciáját se elégítik ki, továbbá a b_j sorozat sűrűsége $1-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}$. A (4) alatti azonosság nyilván $|x|<1$-re érvényes. Legyen mármost $x=\left(1-\frac{1}{N}\right)e^{2\pi i/n_k}$, ahol $N\to\infty$. A baloldal mindegyik tagja, kivéve $\frac{x^{a_k}}{1-x^{n_k}}$, korlátos marad, $\frac{x^{a_k}}{1-x^{a n_k}}$ abszolút értéke viszont, mint azt könnyű belátni, $(1+o(1))\frac{N}{n_k}$ alakú, ezért a (4) alatti kifejezés baloldalának abszolút értéke $(1+o(1))\frac{N}{n_k}$. A jobboldal abszolút értéke viszont nyilván legfeljebb

$$\sum_j\left(1-\frac{1}{N}\right)^{b_j}=(1+o(1))N\left(1-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}\right) \tag{5}$$

(5) könnyen igazolható az elemi analízis eszközeivel ((a b_j sorozat sűrűsége $1-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}$).

Ezért tehát

$$N\left(1-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}\right)\geqq\frac{N}{n_k} \quad \text{azaz} \quad \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_k}\leqq 1,$$

ami $n_k<2^k$ miatt azt jelenti, hogy $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}<1-\frac{1}{2^k}$, s ezzel (3) igazolva van.

Bizonyításunk azt is adja, hogy (3)-ban csak $n_i=2^i$, $1\leqq i\leqq k$ esetén lehet egyenlőség. $2^{i-1}\pmod{2^i}$, $1\leqq i\leqq k$ mutatja, hogy egyenlőség tényleg lehetséges.

(3)-ból könnyen nyerjük, hogy van oly $u\leqq k\,2^k$ szám, mely a (2) kongruenciák egyikét se elégíti ki. Hogy ezt beláthassuk, megjegyezzük, hogy azon $1\leqq u\leqq k\,2^k$ számok száma, melyek a (2) kongruenciák egyikét se elégítik ki, nagyobb, mint

$$k2^k-\sum_{i=1}^{k}\left(\left[\frac{k2^k}{n_i}\right]+1\right)\geqq 0 \tag{6}$$

(3) miatt. Ezért tehát legalább egy $k\,2^k$-nál nem nagyobb szám van, mely a (2) alatti kongruenciák egyikét se elégíti ki.

STEIN sejtése $k\,2^k$ helyett 2^k-t állít. Úgy hiszem, hogy ennek bizonyítása az itt használt módszer javításával lehetséges lesz.

S. K. STEIN, Unions of arithmetic sequences, Math. Annalen, 134 (1957=58), 289=294.

ERDŐS PÁL, Egy kongruenciarendszerekről szóló problémáról, Mat. Lapok 3 (1952) 122—128.

21. S. STEINnal a következő kérdést vetettük fel: Legyen $a_i\pmod{n_i}$, $n_1<\ldots<n_k\leqq x$ idegen kongruenciarendszer, mekkora k maximális értéke? Jelöljük k maximális értékét $f(x)$-el. Sejtjük, hogy

$$\lim_{x\to\infty} f(x)/x=0, \tag{1}$$

de eddig (1) bebizonyítása nem sikerült, nem tartom lehetetlennek azonban, hogy (1) könnyen lesz bizonyítható.

STEINnal bebizonyítottuk, hogy minden $\varepsilon>0$-ra, ha $x>x_0(\varepsilon)$

$$f(x)>\frac{x}{\exp\left((\log x)^{1/2+\varepsilon}\right)}. \tag{2}$$

(2) bizonyítását vázolom (a részletes bizonyítás HALBERSTAM s ROTH számsorozatokról szóló könyvében fog megjelenni). Legyen p_r a leg-

kisebb, $\exp(\log x)^{1/2}$-nél nagyobb prímszám, és $n_1 < n_2 < \ldots$ az x-nél kisebb, p_r-től különböző négyzetmentes számok, melyeknek legnagyobb prímfaktora p_r. Legyen

$$n_j = p_{i_1} \ldots p_{i_l} p_r, \quad i_1 < \ldots < i_l < i_r,$$

ahol $i_1, \ldots, i_l$ végigfut az összes r-nél kisebb számokon, melyekre $n_j < x$ Legyen továbbá

(3) $\quad a_j \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p_{i_1}),\ a_j \equiv p_{i_{s-1}} (\mathrm{mod}\, p_{i_s}),\ 1 < s < l,\ a_i \equiv p_{i_l} (\mathrm{mod}\, p_r),$

A (3) alatti kongruenciák a_j maradékosztályát mod n_j nyilván egyértelműen meghatározzák. Továbbá könnyű belátni, hogy az $a_j (\mathrm{mod}\, n_j)$ kongruenciarendszer idegen. Az n_j-k száma x-ig nyilván egyenlő azon $\frac{x}{p_r}$-nél kisebb négyzetmentes számok számával, melyeknek minden prímfaktora kisebb mint p_r. DE BRUIJN egy tételéből könnyen nyerhető, hogy ezeknek száma minden $\varepsilon > 0$-ra, ha $x > x_0(\varepsilon)$ nagyobb, mint $x(\exp p((\log x)^{1/2+\varepsilon}))^{-1}$, s ezzel (2) igazolva van. Nincsen kizárva, hogy (2) már a helyes nagyságrendet adja $f(x)$-re, azaz talán minden $\varepsilon > 0$-ra

$$f(x) = o\left(\frac{x}{\exp\left((\log x)^{1/2-\varepsilon}\right)}\right).$$

STEIN még a következő kérdést vetette fel: Legyen $a_i (\mathrm{mod}\, n_i)$, $1 \leqq n_i \leqq x$ oly kongruenciarendszer, hogy minden szám x-ig ezen kongruenciák valamelyikét kielégíti. Mekkora $\sum_i \frac{1}{n_i}$ minimális értéke? E probléma kétféleképpen értelmezhető, megkívánhatjuk, hogy a n_i-k mind különbözőek legyenek, vagy e feltételtől eltekintünk. Jelöljük a második esetben $\sum_i \frac{1}{n_i}$ minimális értékét $D(x)$-el, HUTCHINSON bebizonyította, hogy minden x-re $D(x) > 2\sqrt{2} - 2$ és $\lim_{x \to \infty} D_x = 2\sqrt{2} - 2$. Az $a_i (\mathrm{mod}\, n_i)$ számtani sorok pedig ily alakúak: $i (\mathrm{mod}\, (x-p))$, $1 \leqq i \leqq p$ és $x (\mathrm{mod}\, (p+i))$, $1 \leqq i \leqq x-p$, ahol $p = \left[\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) x\right]$ vagy $p = \left[\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) x\right] + 1$, Ha feltesszük, hogy a n_i-k mind különbözők, akkor a kérdés nincsen elintézve. (Írásbeli közlés alapján.)

Ezzel kapcsolatban a következő elemi kérdést vetettem fel: Tekintsük az

(4) $\qquad a_i (\mathrm{mod}\, n+i), \quad 1 \leqq i \leqq n$

kongruenciákat. Legfeljebb hány oly $2n$-nél nem nagyobb szám lehetséges, mely e kongruenciák valamelyikét kielégíti. Először azt hittem, hogy $\left[\frac{3n}{2}\right]$, de SCHÖNHEIM ezt megcáfolta. HANANIval később bebizonyítottuk, hogy a (4) alatti kongruenciákat $2n$-ig legfeljebb $n+\left[\frac{2n-1}{3}\right]$ szám elégítheti ki, s hogy e határ el is érhető. Ezen állítások bizonyítását vázolni fogjuk.

Először kimutatjuk, hogy e határ nem javítható. Nyilván a (4) alatti kongruenciák mindegyike úgy választható, hogy legalább egy oly $2n$-nél nem nagyobb szám létezzen, mely őt kielégíti, de egyetlen más (4) alatti kongruenciának se tesz eleget, viszont legfeljebb két ily szám lehetséges, s célunk, hogy a (4) alatti kongruenciákat úgy válasszuk meg, hogy lehetőleg sok olyan legyen közülük, melynek két ily szám tesz eleget. Ez, mint könnyű belátni, azt jelenti, hogy k maximális értékét kell meghatározni, melyre vannak az $(1, n)$ intervallumban oly $a_1, \ldots, a_k$; $b_1, \ldots, b_k$ számok, melyekre az a_i+b_i számok mind különbözőek és $a_i+b_i \leqq n$ (ui. az $a_i (\mathrm{mod}\,(n+b_i))$ kongruencia ekkor olyan, hogy két oly $2n$-nél nem nagyobb szám van, mely neki eleget tesz s egyetlen más kongruenciának sem tesz eleget). Azonban feltételeink azt jelentik, hogy

$$\sum_{i=1}^{k}(a_i+b_i) \leqq n+n-1+\ldots+n-k+1 = kn-\binom{k}{2},$$

másrészt

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \geqq \binom{k+1}{2}, \quad \sum_{i=1}^{k} b_i \geqq \binom{k+1}{2}.$$

Tehát

$$kn \geqq k(k+1)+\frac{k(k-1)}{2},$$

amiből egyszerű számítással adódik, hogy $k \leqq \left[\frac{2n-1}{3}\right]$. Könnyű belátni viszont, hogy $k \leqq \left[\frac{2n-1}{3}\right]$ lehetséges, legyen ui. mindig $a_i = i$, $1 \leqq i \leqq \left[\frac{2n-1}{3}\right]$. Ha $n = 3m-1$, akkor $b_i = 2m-2i$, ha $1 \leqq i \leqq m-1$ és $b_i = 2m-1-2j$ ha $i = m+j$, $0 \leqq j \leqq m-1$, ha $n = 3m$, akkor az a-k és b-k definíciója ugyanaz. Ha végül $n = 3m+1$ akkor $b_i = 2m-2i+1$ ha $1 \leqq i \leqq m$ és $b_i = 2m-2j+2$ ha $i = m+j$, $1 \leqq j \leqq m$. Könnyű belátni, hogy $a_i+b_i \leqq n$ és az a_i+b_i összegek mind különbözők s ezzel tételünk be van bizonyítva.

N. G. DE BRUIJN. On the number of positive integers $\leqq x$ and free of prime factors $\geqq y$. Nederl. Acad. Wetensch. Proc. Ser. A. (Indigationes Math.) 54 (1951) 54—60.

21. Jelölje $h(n, k)$ azon számok maximális számát n-ig, melyek közül nem lehet kiválasztani $k+1$ számot úgy, hogy ezek páronként relatív prímszámok legyenek. Könnyű belátni, hogy

$$h(n, 1) = \left[\frac{n}{2}\right]. \tag{1}$$

Jelentse $A(n, k)$ azon számok számát n-ig, melyek a $2, 3, \ldots, p_k$ prímszámok valamelyikének többszörösei. Könnyű belátni, hogy $h(n, k) \leqq A(n, k)$ és sejtem, hogy

$$h(n, k) = A(n, k) \tag{2}$$

de (2) csak $k \leqq 2$-re van bebizonyítva.

Előttem ismeretlen, valószínűleg Newmantól való a következő meglepő sejtés: Legyen $a_1 < \ldots < a_{n+1} \leqq 2n$, $n+1$ szám, akkor mindig van közöttük kettő, melyre

$$(a_i, a_j) = 1, \quad a_i \leqq n. \tag{3}$$

A nehézség az $a_i \leqq n$ feltételben van. Tudtommal e sejtés még nincsen elintézve. E kérdéssel kapcsolatos D. NEWMAN szép sejtése (melyből (3) következne): Minden n-hez és m-hez van az $1, 2, \ldots, n$ számoknak egy oly $i_1^{(m)}, \ldots, i_n^{(m)}$ permutációja, melyre

$$(r, m + i_r^{(m)}) = 1, \quad 1 \leqq r \leqq n. \tag{4}$$

E sejtésből (3) azonnal következne, $m = n$ esetre kellene alkalmazni.

Ha e sejtés nem igaz, vagy ha bizonyítása hosszabb ideig nem fog sikerülni, a következő kérdést lehetne vizsgálni: Legyen $1 \leqq a_1 < \ldots$ $\ldots < a_r \leqq n$, létezik-e oly $n < b_1 < \ldots < b_r \leqq 2n$ melyekre $(a_i, b_i) = 1$, $1 \leqq i \leqq r$? E kérdés már csak azért sem érdektelen, mert, mint könnyű belátni, a (3) alatti sejtés már $r = \left[\frac{n}{2}\right]$ esetén is következne, sőt, még azt is fel lehetne tenni, hogy $(a_i, a_j) > 1$, $1 \leqq i \leqq j \leqq r$.

$h'(n, 1)$ jelentse azon $a_1 < \ldots < a_k \leqq n$ számok maximális számát, melyekre

$$(a_i, a_j) > 1, \quad 1 \leqq i \leqq j \leqq k \quad \text{de} \quad (a_1, \ldots, a_k) = 1. \tag{5}$$

Sejtettem, hogy $h'(n, 1)$ egyenlő azon számok számával n-ig, melyek a 6, 10, 15 számok valamelyikének többszörösei.

WATSON azonban ezt megcáfolta. Ellenpéldája a következő (írásbeli közlés): Legyen $u_k = 3 \ldots p_k$ az első k páratlan prímszám szorzata.

Legyen továbbá

$$u_r \leqq n < u_{r+1}.$$

Watson sorozata $a_1 < \ldots < a_{l_n} \leqq n$ a következő számokból áll:

(6) $$2x \quad \text{ahol} \quad (x, u_r) = 1, \; 1 \leqq x \leqq \frac{n}{2}$$

és

(7) $$yu_r, \; 1 \leqq y \leqq \frac{n}{u_r}.$$

Könnyű belátni, hogy az a-k (5)-öt kielégítik (sőt van három a, melyeknek legnagyobb közös osztója 1) és hogy ha $n > n_0(\varepsilon)$, akkor $l_n > \frac{n}{2}(1-\varepsilon)$. Vázolni fogjuk az ennél élesebb (C az Euler-féle constanst jelöli)

(8) $$l_n = \frac{n}{2} - \frac{e^{-C}n}{2\log\log n} + o\left(\frac{n}{\log\log n}\right)$$

bizonyítását. A bizonyításhoz felhasználjuk TCHEBICHEFF következő jól ismert tételeit

(9) $$\pi(x) < c_1 x/\log x$$

(10) $$c_2^x < \prod_{p \leqq x} p$$

és Mertens tételét, mely szerint (C az EULER féle konstans)

(11) $$\prod_{p<x}\left(1-\frac{1}{p}\right) = (1+o(1))\frac{e^{-c}}{\log x}.$$

Jelöljük a (6)-ot kielégítő számok számát U-val. Eratosthenes szitájából nyerjük, hogy (p_i végigfut a p_r-nél nem nagyobb páratlan prímszámokon)

(12) $$U = \left[\frac{n}{2}\right] - \left(\left[\frac{n}{2}\right] = \sum_{p_i}\left[\frac{n}{2p_i}\right] + \sum_{i_1 \neq i_2}\left[\frac{n}{2p_{i_1}p_{i_2}}\right] - \ldots + (-1)^r\left[\frac{n}{2p_1\ldots p_r}\right]\right) = \frac{n}{2} - \frac{n}{2}\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_i}\right) + \vartheta 2^r, \; |\vartheta| < 1.$$

(10)-ből $p_r < c_3 \log n$, tehát (9)-ből $r - o(\log n)$. (11) és (12) miatt végül nyerjük, hogy

(13) $$U = \frac{n}{2} - \frac{e^{-C}n}{2\log\log n} + o\left(\frac{n}{\log\log n}\right)$$

(7)-nek legfeljebb p_{r+1} szám tesz eleget, $p_{r+1} < 2p_r$ miatt $p_{r+1} < c_4 \log n$ és ezzel (8) be van bizonyítva.

Bebizonyítjuk mármost, hogy ha $n > n_0$, akkor

$$h'(n, 1) = l_n, \tag{14}$$

azaz nagy n-re WATSON sorozata adja extrém feladatunk megoldását. A bizonyítást részletezzük, mert nem látszik érdektelennek, hogy extrém feladatunk megoldása explicit módon megadható.

Legyen tehát $b_1 < \ldots < b_s \leqq n$, $s = h'(n, 1)$ egy oly sorozat, mely (5)-öt kielégíti, s melynek $h'(n, 1)$ eleme van (azaz melynek maximális számú eleme van).

Legyenek $d_1 < \ldots < d_{s_1}$ a b_i sorozat páros elemei és $e_1 < \ldots < e_{s_2}$ a b_i sorozat páratlan elemei. (5) miatt $s_2 \geqq 1$ (mert különben $(b_1, \ldots, b_s) > 1$).

Lemma 1. $s_1 + 2s_2 \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right]$. (5) miatt $e_i \pm 1 \neq d_j$ és $e_{i+1} > e_i + 2$. Ezért minden e_i-nek megfeleltethetünk két páros számot $(e_i + 1)$-et és $(e_i - 1)$-et, különböző e-khez különbözők a megfelelő páros számok. Továbbá e páros számok különböznek a d-ktől és nem nagyobbak, mint $n+1$ azaz $s_1 + 2s_2 \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right]$, ami Lemma 1. állítása.

Lemma 1. és (8) miatt feltehetjük, hogy

$$s_2 < 10\, n/\log\log n. \tag{15}$$

Ha ugyanis (15) nem volna igaz, akkor Lemma 1-ből

$$s = s_1 + s_2 \leqq \frac{n+1}{2} - 10\, n/\log\log n < l_n$$

(8) miatt, ami lehetetlen, minthogy a b_i sorozat extrém tulajdonsága miatt $s_1 + s_2 = s \geqq l_n$.

Tegyük fel először, hogy $e_i \equiv o \pmod{u_r}$, $1 \leqq r \leqq s_2$ (azaz sorozatunk páratlan számai mind többszörösei u_r-nek). Ez esetben nyilván $s_1 \leqq U$ (ui. $(d_i, u_r) > 1$, azaz a d-k kielégítik (6)-ot). Tehát nyilván $s_1 + s_2 \leqq l_n$ és egyenlőség csak akkor, ha a $b_1 < \ldots < b_s$ a Watson-féle sorozat.

Feltehetjük tehát, hogy van oly j, melyre

$$e_j \not\equiv o \pmod{u_r}.$$

Nyilván $(d_i, e_j) > 1$, $1 \leqq i \leqq s_1$. Jelölje mármost $A(e_j, n)$ azon páros számok számát n-ig, melyek nem relatív prímek e_j-hez. Nyilván

$$s_1 \leqq A(e_j, n). \tag{16}$$

Lemma 2. Legyen $c_5 > 0$ elegendő kis abszolút konstans. Fennáll

$$A(e_j, n) < A(u_r, n) - \frac{c_5 n}{(\log n)^2 \log\log n}, \quad (A(u_r, n) = U).$$

Legyenek $q_1 < \ldots < q_k$ e_j prímfaktorai. Nyilván $k \leqq r$ (ui. $u_{r+1} > n$). Eratosthenes szitájából nyerjük ugyanúgy, mint (12)-ben, hogy

$$A(e_j, n) = \left[\frac{n}{2}\right] - \left(\left[\frac{n}{2}\right] - \sum\left[\frac{n}{2q_i}\right] + \sum\left[\frac{n}{2q_{i_1}q_{i_2}}\right] - \ldots + (-1)^k\left[\frac{n}{2q_1 \ldots q_k}\right]\right) = \frac{n}{2} - \frac{n}{2}\prod_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{q_i}\right) + \vartheta 2^k, \quad |\vartheta| < 1. \tag{17}$$

(az összegezésekben $1 \leqq i \leqq k$ és $i_1 \neq i_2$ stb.). Továbbá minthogy $u_r \nmid e_j$

$$\prod_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{q_i}\right) \geqq \prod_{i=1}^{r-1}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\left(1 - \frac{1}{p_{r+1}}\right) = \prod_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\frac{(p_{r+1}-1)p_r}{p_{r+1}(p_r - 1)} > \prod_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\frac{p_{r+1}^2}{p_{r+1}^2 - 1} > \prod_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\left(1 + \frac{c_6}{(\log n)^2}\right) \tag{18}$$

az utolsó egyenlőtlenség $p_{r+1} < 2p_r < 2c_3 \log n$ következménye. (17) és (18) miatt

$$A(e_j, n) < \frac{n}{2} - \frac{n}{2}\prod_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\left(1 + \frac{c_7}{(\log n)^2}\right) \tag{19}$$

$k \leqq r = o(\log n)$ miatt $\vartheta 2^k$ (17)-ben elhanyagolható. Mertens tételéből (azaz (11)-ből) (12) és (19) miatt Lemma 2. következik.

Minthogy $l_n > U = A(u_r, n)$, Lemma 2-ből következik, hogy ha tételünk nem lenne igaz, akkor legalább

$$\frac{c_5 n}{(\log n)^2 \log\log n} \tag{20}$$

páratlan számnak kell sorozatunkban előfordulni.

Lemma 3. Azon számok száma n-ig, melyeknek legalább $10 \log\log n$ különböző prímfaktoruk van $o\left(\frac{n}{(\log n)^3}\right)$. $v(n)$ jelentse n különböző prímfaktorainak számát. Fennáll

$$2n \log n > \sum_{k=1}^{n} d(k) > \sum_{k=1}^{n} 2^{v(k)} > E(n) 2^{10 \log\log n} > E(n)(\log n)^5, \tag{20}$$

ahol $E(n)$ jelenti azon m számok számát n-ig, melyekre $v(m) \geqq 10 \log\log n$. (21)-ből Lemmánk azonnal következik.

Lemma 3-ból és (20)-ból következik, hogy ha tételünk nem igaz, akkor sorozatunkban van egy páratlan szám e_j', melyre $v(e_j') < 10 \log\log n$. Nyilván $(e_j', d_l) > 1$, minden $1 \leqq j \leqq s_1$-re, ezért (17) miatt p végigfut e_j' prímosztóin

$$s_1 \leqq A(e_j', n) \leqq \frac{n}{2} - \frac{n}{2} \prod\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \exp(\log\log n).$$

Minthogy azonban $v(e_j') < 10 \log\log n$, Mertens tételéből ((11)-ből)), nyerjük, hogy

$$\prod\left(1 - \frac{1}{p}\right) > \frac{c_8}{\log\log\log n},$$

és ezért végül

$$s_1 < \frac{n}{2} - c_9 \frac{n}{\log\log\log n}. \tag{22}$$

(22) miatt, ha tételünk nem lenne igaz, akkor $n > n_0$ esetén fennállna, hogy

$$s_2 > \frac{c_9 n}{2 \log\log\log n}. \tag{23}$$

(23) azonban (15)-nek ellentmond s ezzel tételünk igazolva van.

Könnyen belátható, hogy bizonyításunk azt is adja, hogy elegendő nagy n-re a WATSON-féle sorozat az egyetlen extrém sorozat.

Kérdezhetők még, hogy hány szám adható meg n-ig úgy, hogy bármely három legnagyobb közös osztója > 1, de van négy közülük, melyeknek legnagyobb közös osztója 1. Könnyű belátni, hogy ezeknek maximális száma $(1 + o(1))\ \frac{n}{6}$, de e kérdéssel nem foglalkozunk.

23. Legyen $0 \leqq x_1 < \ldots < x_m \leqq 1$. $N(n; a, b)$ jelentse az (a, b) intervallumba eső x-ek számát. Van der Corput az $x_1, \ldots, x_n$ sorozat diszkrepanciáját $D(x_1, \ldots, x_n)$-et következőképpen definiálja:

$$D(x_1, \ldots, x_n) = \max_{0 \leqq a < b \leqq 1} |(b-a) - N(n; a, b)|.$$

VAN DER CORPUTtól való a következő szép sejtés

$$\lim_{n \to \infty} \min_{0 \leqq x_1 < \ldots < x_n \leqq 1} \left(\max_{1 \leqq i \leqq n} (D(x_1, \ldots, x_i)) \right) = \infty. \tag{1}$$

VAN AARDENNE—EHRENFEST (1)-et bebizonyította. ROTH ezt lényegesen élesítette. Tétele szerint

$$c_1(\log n)^{1/2} < \min_{0 \leqq x_1 < \ldots < x_n \leqq 1} \left(\max_{1 \leqq i \leqq n} (D(x_1, \ldots, x_i)) < c_2 \log n. \right.$$

ROTH valószínűnek tartja, hogy a felső korlát c_2 értékétől eltekintve pontos.

Talán érdekes a következő kérdés, melyet tudtommal még nem vizsgáltak: Legyen $z_1, \ldots, z_n$ n pont az egységgömbön. S legyen az egységgömb egy tetszőleges gömbsüvege, $F(S)$ S felszíne és $N(n, S)$ a gömbsüvegre eső z-k számát jelenti. Legyen

$$D(z_1, \ldots, z_n) = \max_S |N(n, S) - \frac{nF(S)}{4\pi}|.$$

Igaz-e, hogy van egy $f(n)$, melyre $\lim_{n \to \infty} f(n) = \infty$ és

$$D(z_1, \ldots, z_n) > f(n)$$

$z_1, \ldots, z_n$ minden választása mellett teljesül?

VAN AARDENNE—EHRENFEST, On the impossibility of a just distribution, Indag. Math. 11 (1949) 264—269.

K. F. ROTH, On irregularities of distribution, Matematika 1 (1954) 73—79.

24. SZEKERESsel vizsgáltuk a következő kérdést: Legyen $1 \leqq a_1 \leqq \ldots \leqq a_n$ tetszőleges számsorozat.

$$M(a_1, \ldots, a_n) = \max_{|z|=1} \left| \prod_{i=1}^{n} (1 - z^{a_i}) \right|, \quad f(n) = \min_{a_1, \ldots, a_n} M(a_1, \ldots, a_n).$$

Bebizonyítottuk, hogy $f(n)^{1/n} \to 1$ és hogy minden n-re $f(n) \geqq \sqrt{2n}$. Nemrég ATKINSON kimutatta, hogy $f(n) < \exp(cn^{1/2} \log n)$. $f(n) \geqq \sqrt{2n}$ valószínűleg nagyon messze van $f(n)$ valódi értékétől, de talán ATKINSON felső becslése már közel van a pontos határhoz.

P. ERDŐS and G. SZEKERES, On the product $\prod_{k=1}^{n} (1 - z^{a_k})$, Acad. Serbe des Sci. 13 (1959) 29—34.

F. V. ATKINSON, On a problem of Erdős and Szekeres, Canadian Journ. Math. Bull. 4 (1961) 7—13.

25. Legyen $n_1 < n_2 < \ldots < n_k \leqq x$ és $\varphi(n_1) < \varphi(n_2) < \ldots < \varphi(n_k)$, ahol $\varphi(n)$ az Euler-féle φ függvényt jelenti. Mekkora k maximális értéke? Valószínűnek látszik, hogy e maximális érték $\pi(x)$, de ennek bebizonyítása igen nehéz lesz, mert könnyű belátni, hogy ez ekvivalens a következő

igen mély sejtéssel: Minden p prímszámra a (p^2-p, p^2) intervallumban van prímszám.

Hasonló kérdés vethető fel más számelméleti függvényekre is, így például $d(n)$-re és $\sigma(n)$-re ($d(n)$ n osztóinak számát, $\sigma(n)$ n osztóinak összegét jelenti). $d(n)$ esetén nincsen plauzibilis sejtésem, $\sigma(n)$ esetén x nagy értékeire, mint azt könnyű belátni, k maximális értéke $\pi(x)$-nél nagyobb, de igen valószínűnek látszik, hogy e maximum nem lehet sokkal nagyobb, mint $\pi(x)$, de e kérdést nem tisztáztam.

Most még néhány additív számelméleti kérdést akarok diszkutálni.

26. Legfeljebb hány oly $a_1 < \ldots < a_k \leqq x$ adható meg, hogy az

$$\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i a_i, \quad \varepsilon_i = 0 \text{ vagy } 1$$

összegek mind különbözők legyenek. Jelölje $F(x)$ k maximális értékét. 2 hatványai mutatják, hogy $F(x) \geqq 1 + \left[\frac{\log x}{\log 2}\right]$. Másrészt L. Moserrel bebizonyítottuk, hogy minden $\varepsilon > 0$-ra ha $x > x_0(\varepsilon)$

$$F(x) < \frac{\log x}{\log 2} + (1+\varepsilon)\frac{\log\log x}{2\log 2}.$$

Talán $F(x) = \frac{\log x}{\log 2} + O(1)$, de e kérdés eldöntése nem lesz könnyű.

Ha $x = 2^l$, kérdeztem, lehet-e $F(2^l) \geqq l+2$. Ezt nemrég Guy és Conway egymástól függetlenül igenlően megválaszolták. Nem ismeretes azonban, hogy lehet-e $F(2^l) \geqq l+3$.

P. Erdős, Problems and results in additive number theory, Colloque sur la théorie des nombres, Bruxelles (1955), 136—137.

Guy és Conway példái még nincsenek publikálva.

27. Legfeljebb hány oly $a_1 < \ldots < a_k \leqq x$ adható meg, hogy az $a_i + a_j$ összegek mind különbözők legyenek. E probléma Sidontól való. Jelöljük k maximális értékét $f_2(x)$-el. Turánnal bebizonyítottuk, hogy

$$f_2(x) < x^{1/2} + x^{1/4}. \tag{1}$$

Singer kimutatta, hogy végtelen sok x-re $f_2(x) > x^{1/2}$ és hogy minden $\varepsilon > 0$-ra, ha $x > x_0(\varepsilon)$ $f_2(x) > (1-\varepsilon)x^{1/2}$. Lehetséges, hogy $f_2(x) = x^{1/2} + O(1)$, de ez nehéznek látszik.

Jelölje általában $f_r(x)$ azon számok maximális számát x-ig, hogy a belőlük alkotott r tagú összegek mind különbözők legyenek. $f_r(x)$ vizsgálatának kérdése is Sidontól való. Bose nemrég kérdezte, hogy igaz-e az (1)-nek megfelelő

$$f_r(x) < (1+o(1))x^{1/r}$$

egyenlőtlenség, de e kérdést már $r = 3$-ra se tudjuk eldönteni.

ERDŐS—TURÁN, On the problem of SIDON in additive number theory and on some related problems. Journal London Math. Soc. 16 (1941) 212—215.

J. SINGER, A theorem in finite projective geometry and some applications to number theory, Trans. Amer. Math. Soc. 43 (1938) 377—385.

E probléma jellege teljesen megváltozik, ha végtelen sorozatokat megengedünk. További érdekes kérdéseket tárgyal. A. STÖHR összefoglaló cikke: Gelöste und ungelöste Fragen über Basen der natürlichen Zahlenreihe I. és II. Journal für die reine und angewandte Math. 194 (1955) 40—65 és 111—140.

28. Legyen $r_1, \ldots, r_k$ oly maradékrendszer mod n, hogy az

$$\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i r_i, \quad \varepsilon_i = 0 \text{ vagy } 1$$

összegek csak akkor többszörösei n-nek, ha minden $\varepsilon_i = 0$. Jelölje $h(n)$ k maximális értékét. Valószínűleg igaz, hogy $h(n) < cn^{1/2}$, de csak a $h(n) < c_2 n^{1-c_3}$ egyenlőtlenséget tudom bebizonyítani, s ennek részletezésével itt nem foglalkozom.

29. Legyen $1 \leqq a_1 < \ldots < a_n \leqq 2n$ n szám és legyenek $b_1 < \ldots < b_n$ a többi $2n$-nél nem nagyobb számok. M_k jelölje az $a_i = b_j - k$ megoldásainak számát

$$M^{(n)} = \min \max_{-2n \leqq k \leqq 2n} M_k$$

ahol a minimumot az összes $1 \leqq a_1 < \ldots < a_n \leqq 2n$ sorozatra kell venni. Nagyon egyszerűen bebizonyítottam, hogy $M^{(n)} \geqq \frac{n}{4}$ SCHERK ezt $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) n$-re élesítette és SWIERCZKOWSKI $\frac{4 - 6^{1/2}}{3} n$-re. Végül L. MOSER nagyon szellemes és egyszerű módon bebizonyította, hogy $M^{(n)} > \frac{\sqrt{2}}{4}(n-1)$ és hosszabb számításokkal ezt még $(4 - 15^{1/2})^{1/2}(n-1)$-re élesítette.

Sejtettem, hogy $M^{(n)} = \frac{n}{2}$, de ezt valószínűségszámítási módszerekkel megcáfoltam, ugyanakkor SELFRIDGE, MOTZKIN és ROLSTON elektronikus számológép segítségével kimutatták, hogy $M^{(15)} = 6$ amiből könnyen adódik, hogy végtelen sok n-re $M^{(n)} \leqq 0{,}4\, n$. MOSER ezen egyenlőtlenséget még kissé élesítette, de $M^{(n)}$ pontos értéke, vagy akár $\lim_{n \to \infty} M^{(n)}/n$ nem ismeretes.

L. MOSER, On the minimal overlap problem of ERDŐS, Acta Arithmetica 5 (1959) 117—119.

P. ERDŐS, Über einige Probleme der additiven Zahlentheorie, Journal für die reine und angew. Math. 206 (1961) 61—66.

30. CZIPSZER eltolási problémája. Legyen $1 \leqq a_1 < \ldots < a_n$. Jelölje N_k az $a_i + k = a_j$ megoldásainak számát, és legyen

$$N^{(n)} = \max \min_{-n \leqq k \leqq n} N_k,$$

ahol a maximumot az összes $1 \leqq a_1 < \ldots < a_n$ sorozatra kell venni. CZIPSZER bebizonyította, hogy

$$\left[\frac{n}{3}\right] \leqq N^{(n)} \leqq \frac{n-1}{2}.$$

A felső határ azonnal adódik a

$$\sum_{\substack{k=-n \\ k \neq 0}}^{n} N_k = n(n-1)$$

egyenlőségből. Az alsó határt a következő példa adja: $a_i = i$ ha $i \leqq \frac{2n}{3}$, $a_i = 2n - i$, ha $\frac{2n}{3} < i \leqq n$. A felső határ $(1-c)\frac{n}{2}$-re javítható, ha megjegyezzük, hogy k értékeire melyek n-hez és $-n$-hez közel vannak. N_k kicsiny (ti. nem nagyobb, mint $n-k$). Lehetséges, hogy az alsó határ pontos.

31. Legyen $1 < a_1 < \ldots < a_k \leqq n$ oly sorozat, hogy 1 nem állítható elő, mint csupa különböző a reciprok értékeinek összege. Mekkora k maximális értéke? Lehet-e $k = n - o(n)$? Mekkora $\sum_{i=1}^{k} 1/a_i$ maximális értéke? Mint a prímszámok példája mutatja, $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i}$ $\log\log n$ nagyságrendű lehet, de könnyen lehetséges, hogy

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} = o(\log n).$$

33. Több érdekes additív számelméleti extrém problémát vizsgál ROHRBACH, itt most csak egyet említek. Jelentse $h(n)$ k legkisebb értékét, melyre van oly $0 \leqq a_1 < \ldots < a_k$ sorozat, hogy minden n-nél nem nagyobb szám $a_i + a_j$ alakban előállítható. Könnyű belátni, hogy $h(n) \leqq 2n^{1/2} + 0(1)$ és ROHRBACH sejti, hogy $h(n) = 2n^{1/2} + 0(1)$. Triviális, hogy $h(n) > (2n)^{1/2}$ s ezt ROHRBACH $h(n) > (1+c)(2n)^{1/2}$-re javította. A legélesebb eredmény

jelenleg MOSERtől való. Hasonló kérdés vethető fel $a_i - a_j$ előállítására is.

H. ROHRBACH, Ein Beitrag zur additiven Zahlentheorie, Math. Zeitschrift, 92 (1936) 1—30.

L. MOSER, On the representation of 1, 2, ..., n by sums, Acta Arithmetica 6 (1960) 11—13.

34. Mekkora k minimális értéke, melyre van oly $a_1 < \ldots < a_k \leqq n$ sorozat, hogy minden $2 < m \leqq n$ szám $p + a_i$ alakba írható, ahol p prímszám?

LORENZ bebizonyította, hogy $k < c_1 (\log n)^3$ s ezt én $k < c_2 (\log n)^2$-re élesítettem. A prímszámtételből következik, hogy k nem lehet $(1 + o(1)) \log n$-nél kisebb, s ennél jobb alsó becslés nem ismeretes. Könnyen lehet, hogy $k < c_3 \log n$.

A problémát a prímszámok helyett természetesen más sorozatokra is fel lehet vetni, például könnyű bebizonyítani, hogy van oly $a_1 < \ldots < a_k \leqq n$ sorozat, melyre $k < c_4 n^{1/2}$ és minden $2 \leqq m \leqq n$ szám $a_i + r^2$ alakba írható. L. Moser egy publikálatlan eredménye szerint viszont $k > 1{,}03\, n^{1/2}$.

P. ERDŐS, Some results on additive number theory, Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954), 847—853, lásd még P. ERDŐS, Problems and results in additive number theory, Colloque sur la théorie des nombres, Bruxelles (1955) 127—137.

ЗАМЕЧАНИЯ ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ. IV.

П. Эрдёш

Автор рассматривает разные экспериментальные задачи в теории чисел. В этой обзорной статье он дает несколько примеров этих задач, некоторые из них довольно простые, другие более трудны и еще не решены.

Максимальное число целых чисел $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_k \leqq n$, таких что ни одно из них не является делителем остальных, есть $n - \left[\frac{n}{2}\right]$. Это доказать просто, однако автор не сумеет определить максимальное значение величины $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i}$. Другая очень трудная задача — это определить (или оценить) максимальное число $r_k(n)$ целых чисел $1 \leqq a_1 < \ldots < a_k \leqq n$ совокупность которых не содержит арифетическую прогрессию от k элементов.

Каким является максимальное значение от k в последовательности $1 \leqq a_1 < a_2 < \ldots < a_k \leqq n$, где все произведения $\prod_{i=1}^{k} a_i^{\varepsilon_i}$ ($\varepsilon_i = 0$, или 1) разны? Вероятно, что $k = \pi(n) + o\left(\frac{n^{\frac{1}{2}}}{\log n}\right)$, однако автору удалось только показать, что $k < \pi(n) + cn^{2/3}$.

Пусть обозначает $A_k(n)$ максимальное число целых чисел не превосходящих n таких что среди них не существует чисел имеющих попарно тот же самый наибольший общий делитель. Требуется определить (оценить) $A_k(n)$. Наилучшие результаты:

$$A_k(n) < \frac{n}{\exp\,](\log n)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}.$$

Гипотеза Штейна: Пусть $m \equiv a_i \pmod{n_i}$; $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$, $1 \leqq i \leqq k$, причем нет такого числа, которое удовлетворяло бы двум из этих сравнений. Тогда существует целое число m, $0 < m \leqq 2^k$, для которого $m \not\equiv a_i \pmod{n_i}$ для всех i $(1 \leqq i \leqq k)$. Автор сумеет доказать это для условия $m \leqq k2^k$. Может быть, что гипотеза Штейна остается в силе если мы только предполагаем, что сущесвует целое число N, такое, что $N \equiv a_i \pmod{n_i}$, $1 \leqq i \leqq k$.

REMARKS ON NUMBER THEORY, IV.

P. Erdős

The author investigates several extremal problems in number theory. In this summary I just give a few examples of the problems considered, some are quite simple, others are difficult and unsolved problems.

The maximal number of integers $a_1 < \ldots < a_k \leqq n$ so that no one divides the other is $n - \left[\frac{n}{2}\right]$. This is quite simple, but I can not determine the maximal value of $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i}$.

Another very difficult problem is to determine (or estimate) the maximal value $r_k(n)$ of integers $1 \leqq a_1 < \ldots < a_l \leqq n$ which do not contain an arithmetical progression of k terms.

What is the maximal value of k in a sequence $1 \leqq a_1 < \ldots < a_k \leqq n$ where all products $\prod_{i=1}^{k} a_i^{\varepsilon_i}$, $\varepsilon_i = 0$ or 1 are different. It is probable that $k = \pi(n) + 0\left(\frac{n^{1/2}}{\log n}\right)$, but I can prove only $k < \pi(n) + cn^{2/3}$.

Denote by $A_k(n)$ the maximum number of integers not exceeding n so that there are no k of them which have pairwise the same greatest common factor. The best known results are

$$\exp\,(c \log n/\log\log n) < A_k(n) < \frac{n}{\exp\,[(\log n)^{1/2-\varepsilon}]}.$$

Conjecture of Stein: Let $a_i \pmod{n_i}$ $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$, $1 \leqq i \leqq k$ be such that no number satisfies two of the above congruences. Then there is a number $m \leqq 2^k$ for wich $m \not\equiv a_i \pmod{n_i}$ for all $1 \leqq i \leqq k$. I can prove this for $m \leqq k2^k$. Perhaps Steins conjecture remains true if we only assume that there exists an integer N for which $N \not\equiv a_i \pmod{n_i}$, $1 \leqq i \leqq k$.

A topológikus algebrákról és gyűrűkről I.

SZÁSZ FERENC

1. §. Bevezetés

A dolgozat címében szereplő szakterületet az alábbiakban szeretném ismertetni úgy, hogy igyekszem azt a benne kevésbé járatosabb olvasókhoz is közelebb hozni. Az ismertetés során általában mellőzöm a teljes, részletes, szigorú bizonyításokat, mert egyrészt a cikk korlátozott terjedelme, másrészt a szakterület gazdag anyaga miatt erre nem volna technikai lehetőség. A cikk megírásánál főleg azt tartottam szem előtt, hogy felhívjam a figyelmet ennek a világviszonylatban már elég fejlett, hazai viszonylatban azonban aránylag még elég elmaradott szakterületnek fontosságára és érdekességére. A topológikus gyűrűk és speciálisan a normált gyűrűk, Banach-algebrák tanulmányozásától nemcsak az idevágó hazai elméleti kutatások fejlesztése, hanem a nagyszámú (főleg matematikán belüli) alkalmazás is várható. Ez utóbbi szempont miatt is kívánatos a topológikus gyűrűk és Banach-algebrák közelebbi megismerése és e területen a hazai intenzívabb kutatások beindulása.

A topológikus algebrának és a topológikus gyűrűnek a fogalma úgy merül fel, mint egyfelől a topológikus tér fogalmának másfelől pedig a megfelelő algebrai fogalmaknak: az algebra és gyűrű fogalmának a természetes egybekapcsolása, miközben megköveteljük, hogy az előforduló algebrai műveletek az adott topológiában folytonosak.

Az olvasó számára nem keletkezik félreértés abból, hogy az „algebra" szó többjelentésű. Az algebra jelenti általában magát az algebrát, mint a matematikai tudományok egyik ágát, másfelől speciálisan jelenti az olyan gyűrűket, amelyekben a gyűrűműveleten kívül még értelmezve van elemeknek skaláris (valós vagy komplex) számokkal való szorzása is, a mely szorzat szintén a gyűrűk eleme. Némely szerző szokta algebrának nevezni az általános algebrai struktúrát is. A továbbiakban algebrán a skaláris operátor-tartománnyal és operátor-szorzással ellátott gyűrűket értjük, és a dolgozat címe így is értendő.

Ebből látszik, hogy a dolgozat címében szereplő fogalmak a topológia, funkcionálanalízis és gyűrűelmélet határterületéhez tartoznak. Ez a tény lehetővé teszi általánosabb eredmények, elegáns módszerek és nagyszámú alkalmazás elérését. Mindezek vonatkoznak általában a topológikus gyűrűkre, az alkalmazások pedig főleg a Banach-algebrákra.

A topológikus gyűrűk elméletének a fő célja struktúratételeknek és reprezentációs tételeknek a megállapítása. Sajnálatos tény azonban az, hogy az elmélet nagyszámú eredménye közt éppen az ilyen jellegű tételekből van kevés. Nagyon sok eredmény arra vonatkozik, hogy egyfelől a topológiai megszorítások, másfelől a gyűrűelméleti megszorítások és feltételek hogyan tükröződnek a topológikus gyűrűkön általában, vagy pedig speciális topológikus gyűrűknek bizonyos osztályain.

Gyakori eset az is, hogy az elmélet egy és ugyanazon részéhez a különféle matematikusok különféle irányokból, pl. főleg algebrai, vagy főleg topológikus nézőpontból közelednek, pl. a BANACH-algebrákhoz RICKART [206], illetve NAJMARK [169], de minthogy ezekhez a gyűrűelmélet, topológia, funkcionálanalízis, mértékelmélet felhasználása végülis mind egyaránt szükséges, és az eredményekben is sok a közös, ezért a nézőpontok nem élesen különbözők.

Az elmélet eredményei közt vannak egészen általános eredmények. A speciálisabb eredményeket pedig célszerű tovább megkülönböztetni. Így tárgyalni fogunk eredményeket egyrészt a topológikus ferdetestekről, az értékeléselméletről és rokon kérdésekről, másrészt a bikompakt és lokálisan bikompakt gyűrűkről, harmadrészt vegyes jellegű, nem feltétlen metrikus, speciális topológikus gyűrűkről, negyedrészt pedig a BANACH-algebrákról. Örvendetes, hogy az alkalmazásokban is oly fontos BANACH-algebrákra vonatkozólag már viszonylag több struktúratétel és reprezentációs tétel ismeretes, mint általában a topológikus gyűrűkre nézve.

A topológikus gyűrűk általánosságban, explicit módon, elsőnek D. VAN DANTZIG [42], [43] téziseiben, ill. dolgozatában lettek definiálva és vizsgálva, amely természetesen nem jelenti azt, hogy korábban nem vizsgálták a matematikusok a topológikus gyűrűknek egészen speciális eseteit. Ilyen speciális esetként említendők a HENSEL-féle p-adikus számok, amelyek fogalmát KÜRSCHÁK JÓZSEF általánosította. KÜRSCHÁK [143] dolgozata ugyanis megadja az abszolút értéknek és a p-adikus számoknak a közös általánosítását, éspedig a testek értékelésének a fogalmát. Később a testek értékelés-elmélete körül és ennek különféle alkalmazásai: algebrai számelmélet, algebrai függvények tana, algebrai geometria körül igen figyelemreméltó terjedelmű szakirodalom alakult ki. Ez jellemzi tehát a topológikus gyűrűk előfutárának, a nagyon speciális p-adikus számtestnek és általánosításainak, az értékelt testeknek az előtörténetét. Vizsgálták később az értékeléselmélet különféle általánosításait és azok alkalmazásait is. Az általánosabb, már említett D. VAN DANTZIG-féle tézisek és eredmények pedig a topológikus gyűrűk vizsgálatának egy másik irányát kezdeményezték, nevezetesen a bikompakt és lokálisan bikompakt testeknek, gyűrűknek a tanulmányozását. A gyűrű terének bikompaktsága vagy lokális bikompaktsága helyett általánosabb topológiai feltételekkel is végeztek vizsgálatokat. Különösen bevált e vonatkozásban a korlátosság fogalma, amely SAFAREVICS [208] dolgozatában található meg először. Nagy szerephez jutnak az ún. lineárisan topológizált bikompakt gyűrűk is, amelyeknél a gyűrű zéru-

sának teljes környezetrendszere speciális részstruktúrákból áll (ZELINSKY [249], [250], [251], LEPTIN [146], BALLIER [21]). A topológikus gyűrűk elméletében további, éspedig nagyon természetes irányzat az, hogy a diszkrét gyűrűk elméletéből ismert eredményeket igyekeznek átvinni a topológikus gyűrűk esetére. Az ilyen jellegű, továbbá a topológikus, de nem feltétlenül metrikával topológizált gyűrűkről szóló egyéb eredményeket „vegyes eredményeknek" nevezzük, és ezeket e dolgozatban külön részben fogjuk ismertetni. (Lásd pl. KAPLANSKY [111], ARENS—KAPLANSKY [12], IKUSHIMA [88], KOWALSKY [137], MAHARADZE [153], [154], SZELE [223], GACSÁLYI [63] vagy GILLMAN [74]). — Fontossága miatt kiemelendő a topológikus gyűrűk elméletének egy jól kiépített, szép alkalmazásokban gazdag és lényegében a funkcionálanalízishez tartozó ága, a normált gyűrűknek, a BANACH-algebráknak az elmélete, amelynek fejlődése általában a topológikus gyűrűkéhez képest bizonyos önállóságot mutat. A kiépítettségre pedig jellemző, hogy a topológikus gyűrűkről szóló cikkek közül eddig kb. hat-hétszer több cikk jelent meg a BANACH-algebrákról, mint a metrika nélküli gyűrűkről. Az elmúlt negyedévszázadban GELFAND, NAJMARK, RAJKOV, SILOV valamint munkatársaik és tanítványaik munkássága révén a normált gyűrűkkel kapcsolatos szovjet iskola igen jelentős eredményeket ért el, amelyekhez több más állam matematikusai is igyekeztek csatlakozni. GELFAND és munkatársainak iskolája előtt speciális normált gyűrűket, éspedig a HILBERT-tér bizonyos operátorainak a gyűrűjét vizsgálta MURRAY—VON NEUMANN [164] és VON NEUMANN [173]. Ezek a dolgozatok igen értékes eredményeket tartalmaznak, és külön jelentőségük az, hogy beindították később a normált gyűrűk általánosabb tanulmányozását és vizsgálatát. GELFAND előtti normált gyűrűs, előfutár cikkekként említhető meg még bizonyos tekintetben STONE [220], NAGUMO [168] és HEBRONI [81] cikke.

Ez az ismertetés a fentebb említett kutatási irányzatoknak megfelelően több részre fog bomlani: 1. topológikus ferdetestek és értékelméletek; 2. lokálisan bikompakt és hasonló jellegű gyűrűk; 3. vegyes kérdések (topológiák bevezetése, diszkrét eredmények topológiai megfelelője, radikálok, WEDDERBURN—MALCEV-féle felbontások, STONE-terek, duális gyűrűk stb.); 4. normált algebrák és BANACH-algebrák. Miként a legtöbb felosztásnál szokásos, ez a felosztás sem abszolút egyrétűen fedi le az eredményeket, mert általában e részek szorosan összefüggnek és a 3. rész körülhatárolása nem elég határozott. Ebben az ismertetésben a BANACH-algebrákkal kevésbé részletesen foglalkozunk, mert róluk egy későbbi füzetben terv szerint külön, részletesebb ismertetés fog megjelenni, és ezért e helyen csak a klasszikus, régebbi eredmények szerepelnek a BANACH-algebrákról, ugyanis ennek az első ismertetésnek a terjedelme korlátozott.

A csatolt irodalomjegyzék szintén ebben a szellemben készült, hiszen sokszáz cikk jelent meg a BANACH-algebrákról, és előzetes becslés szerint is a Banach-algebrák eddigi teljes cikklistája legalább negyven nyomtatott oldal volna. A topológikus de nem feltétlen metrikus gyűrűkről azonban igyekeztem minél több cikket tartalmazó (de korántsem teljes) listát összeállítani. A mellékelt listában szerepel néhány olyan munka is, amelyek nem tartoznak a topológikus gyűrűkhöz, de elősegítik azok tanulmányozását, ill. velük kapcsolatban állnak. A mellékelt lista, amely a kezdők vagy aspiránsok és más érdeklődők számára talán nem bizonyul közömbösnek és hiábavalónak, természetesen sok olyan cikket is tartalmaz, amelyek e referátumban nem kerülnek konkrét idézésre, ill. részletes tárgyalásra. Ezenkívül viszonylag kevesebb cikk szerepel az értékeléselmélet régebbi irodalmából, és megjegyzendő, hogy az 1961. és 1962. éveket illetően a lista globálisan nem teljes. Érdemes a figyelmet felhívni a régebbi irodalommal kapcsolatban KOETHE [134] és LORCH [148] referátumára és az ezekben felsorolt munkákra, valamint az ide kevésbé tartozó témákkal kapcsolatban DUNFORD [48], TAYLOR [226] és HYERS [87] referátumaira is. Külön kiemelendő KAPLANSKY [112] frappáns referátuma az 1948 előtti topológikus gyűrűk irodalmáról. A BANACH-algebrákkal kapcsolatban pedig NAJMARK [169], GILLMAN—JERISON [75], HILLE—PHILIPS [86], RICKART [206] könyveire, valamint KAPLANSKY [122], [125] és MACKEY [151] jegyzeteire hivatkozhatunk.

2. §. Előkészítő megjegyzések

A modern algebrai szükséges fogalmakat (csoport, gyűrű, ideál, jobbideál, egységelem, zérusosztó stb.) ismerteknek tételezzük fel (lásd az egyetemi anyagon és VAN DER WAERDEN ismert algebra könyvén kívül általában RÉDEI [194], gyűrűelméletét illetőleg pedig Jacobson [96] könyvét, valamint NAJMARK [169] könyvének II. fejezetét). A topológikus terek elméletéről e lapok hasábjain jelent meg CSÁSZÁR ÁKOS „A topológikus tér fogalmáról" (I., 8 (1957) 37—60; II., 8 (1957) 211—231; III., 9 (1958) 37—63) c. három részes ismertetése, amelynek átolvasása igen tanulságos előkészület a topológikus gyűrűkhöz is. A topológikus terekre vonatkozó könyvek közül KELLEY [131] és KOWALSKY [139] könyvei bevezetést nyújtanak a halmazelméleti topológia elemeibe, és az utóbbi (végig filteres tárgyalásmód mellett) a hetedik fejezetében a topológikus algebrai struktúrákról is említést tesz alkalmazásképpen. Sem KOWALSKY könyve, sem VAN DER WAERDEN „Algebra" c. könyve 1959-es kiadásának II. kötete nem kívánja meg a topológikus algebrai struktúráktól, hogy terük T_1-tér legyen.

T_0-terű topológikus csoportoknál bármely normálosztó szerinti faktorcsoport újra T_0-terű topológikus csoport, viszont T_1-terű topológikus csoportok esetében pontosan a zárt normálosztók szerinti faktorcsoportok lesznek T_1-terű topológikus csoportok a kvociens-tér topológiájában. Bármely T_1-terű csoport szükségképpen T_2-terű is. Lásd pl. PONTRJAGIN [186] könyve harmadik fejezetét.

A topológikus csoportokhoz szükséges alapvetés céljára PONTRJAGIN [186] említett könyve mellett még BOURBAKI [37] és WEIL [238] könyve olvasható haszonnal. Ebben a referátumban szereplő gyűrűk

mind T_1-terűek, tehát T_2-terűek azaz HAUSDORFF-terűek is lesznek. Tehát lényegében van Dantzig definícióját követjük: Topológikus gyűrűn egy olyan gyűrűt értünk, amely egyszersmind HAUSDORFF-tér, és amelyben $a-b$ és ab együttesen folytonosak a-ban és b-ben. (VAN DANTZIG a definícióban megszámlálhatósági megszorítást is tett, ezt a feltételt azonban már régóta nem kívánják meg a definícióban.) Topológikus algebra olyan topológikus gyűrű, amely egy topológikus ferdetest, mint a skalárisok operátortartománya felett egyszersmind topológikus vektortér (BOURBAKI [38]), és a skalárissal való operációk is folytonosak. Normált algebrán olyan normált (valós vagy komplex) lineáris teret értünk, amely egyszersmind olyan algebra is, amelyben

$$(*) \qquad \|ab\| \leqq \|a\| \cdot \|b\|$$

teljesül. BANACH-algebrán komplett normált algebrát értenek, ahol a komplettség, mint szokásos, azt jelenti, hogy minden CAUCHY-féle alapsorozatnak van az algebrában határértéke.

GELFAND [64], általánosabb feltételek mellett pedig ARENS [10] vizsgálta, hogy $(*)$ helyett mikor elegendő a normált algebrában $a \,.\, b$ folytonossága, hogy ugyanazt a fogalmat kapjuk vissza.

A gyűrűk PERLIS—JACOBSON radikáljának az egyik definíciójához (lásd Jacobson [96]) célszerű bevezetni az $a \circ b = a + b + ab$ újabb műveletet. Ha $a \circ b = 0$ akkor b az a-nak jobbkváziinverze, és kváziinverze, ha egyidejűleg $a \circ b = b \circ a = 0$ teljesül. A jobbkváziinverzzel (kváziinverzzel) rendelkező elemeket jobbkvázireguláris-nak (kvázireguláris-nak) nevezzük. Egy jobbideál jobbkvázireguláris, ha minden eleme jobbkvázireguláris. Egy ilyen jobbideál minden elemének van (kétoldali) kváziinverze is. Az A gyűrű J radikálja az összes kvázireguláris jobbideál összege, amely egybeesik az összes kvázireguláris balideál összegével. Világos, hogy a $\circ$ művelet mellett a kvázireguláris elemek csoportot alkotnak, amelynek O az egységeleme. Ha A topológikus gyűrű és a kváziinverz képzése folytonos művelet, akkor ez a csoport topológikus csoport. ARENS [10; 626 oldal] módszerével, amely egyébként az elemi analízis módszere, könnyen belátható, hogy BANACH-algebrában a kváziinverz képzése folytonos művelet. A lokálisan bikompakt, zérusosztómentes topológikus gyűrűkben a kváziinverz folytonos és a kvázireguláris elemek halmaza nyílt halmaz KAPLANSKY [113, I. rész 8. tétele] szerint. Megmutatható példával [113], hogy a zérusosztómentesség szükséges, viszont [10] szerint bármely komplett metrikus topológikus algebrában is folytonos a kváziinverz. Az egységelem pótlására vezette be SEGAL [213] a reguláris (más elnevezéssel moduláris) jobbideál fogalmát. Egy R jobbideál moduláris az A gyűrűben, ha van olyan $e \in A$ elem, hogy minden $x \in A$

esetén $x - ex \in R$. BANACH algebrában minden reguláris maximális jobbideál zárt. Általánosabban ez igaz az ún. Q_r-gyűrűkben is (KAPLANSKY [108]), amelyekben a jobbkvázireguláris elemek halmaza nyílt. Hasonlóan egy topológikus gyűrű Q-gyűrű, ha a balkvázireguláris elemek halmaza nyílt.

Megmutatható, hogy a J JACOBSON-radikál a moduláris maximális jobbideálok metszete, és hogy J olyan kétoldali ideál, hogy J minden kvázireguláris jobb- és balideált tartalmaz és az A/J faktorgyűrűben O a radikál. Továbbá Q_r-gyűrűkben a radikál zárt. Ha a jobbkvázireguláris elemek halmaza zárt, akkor [108] szerint a radikál ugyancsak zárt. Bikompakt topológikus gyűrűkben a jobbkvázireguláris elemek halmaza zárt, ezért az előzőek szerint a radikál is zárt. Elsőnek KAPLANSKY és H. RUBIN közösen szerkesztett olyan normált gyűrűt [108], amelyben a radikál nem zárt. Ennél egyszerűbb KAPLANSKY egyik későbbi példája arra, hogy a radikál nem zárt.

Legyen ugyanis A a p-adikus egészek P gyűrűje felett az összes olyan végtelen mátrix gyűrűje, hogy bármelyik mátrix bármelyik sorában csak véges sok elem különbözik nullától. Legyen A-ban O-nak U_n egy általános környezete: az összes olyan mátrix halmaza, amelyeknél az első n sor végig csupa 0. A teljes környezetrendszerre vonatkozó kikötések nyilván teljesülnek. A radikál tartalmazza az összes olyan mátrixot, amelyeknek egyszerre csak véges sok oszlopában és véges sok sorában vannak zérustól különböző elemek, és ezek az elemek p-vel mind oszthatók. Ha e_{ij} jelöli a mátrixegységeket, akkor nyilván $p(e_{12}+e_{23}+e_{34}+e_{45}+\ldots)$ a radikál lezártjában fekszik, de nincs a radikálban, mert ez a mátrix nem kvázireguláris, a radikálnak pedig minden eleme kvázireguláris (ideált generál).

Egy gyűrű radikálgyűrű, ha egybeesik a radikáljával. Ilyen pl. a páratlan nevezőjű és páros számlálójú törtek gyűrűje, amelyben a páros egész számok részgyűrűje féligegyszerű. JONES—LUMER [102] közös dolgozata adott meg egy kritériumot: Egy A radikálgyűrű bármely részgyűrűje akkor és csak akkor radikálgyűrű, ha minden $a \in A$ elemhez létezik olyan egészegyütthatós $p(x)$ polinom, hogy $p(a)=o$, $p(o)=o$ és $p(-1)=-1$. Egy ilyen Banach-algebrában, amely radikálgyűrű, minden topológikusan zárt részalgebra szintén radikálgyűrű.

Diszkrét gyűrűk esetében hasznos fogalom a BROWN—MCCOY-féle radikál is (Radicals and subdirect sums, Amer. Journ. Math. 69 (1947) 46—58), amely a gyűrű összes reguláris (moduláris) maximális kétoldali ideáljának a metszetével esik egybe.

Vizsgálták többen, hogy ez a radikál topológikus gyűrűkben milyen feltételek mellett zárt. Erre a problémára a vegyes eredmények tárgyalásánál még visszatérünk. Az (asszociatív) gyűrűk esetében sokfajta radikál ismeretes, ezek megfelelőit eddig sajnos csak speciális radikálok és speciális topológikus gyűrűk esetében vizsgálták.

A topológikus gyűrűk tanulmányozásánál hasznos és fontos fogalom a jobbkorlátosság, balkorlátosság és korlátosság fogalma, amelyet

Safarevics [208] vezetett be. Az A topológikus gyűrű S részhalmaza jobbkorlátos, ha létezik o bármely U környezetéhez o-nak olyan V környezete, hogy $SV \subseteq U$ (Ez a feltétel filter-apparátussal [37], [139] még egyszerűbben kifejezhető.) A balkorlátosság duális módon definiálható. Egy halmaz akkor korlátos, ha egyszerre bal- és jobbkorlátos. Ennek a fogalomnak nagy szerepe van a bikompakt gyűrűkről szóló bizonyos eredmények általánosításánál, valamint az értékeléselmélet topológikus módszerekkel való tárgyalásánál az ún. „V-típusú" ferdetestekkel kapcsolatban (lásd Kaplansky [109]).

Minden bikompakt részhalmaz korlátos, és sok algebrai problémánál a korlátosság pótolja a bikompaktságot. Ha egy topológikus gyűrűben a kváziinverz folytonos, akkor az bármely korlátos halmazon egyenletesen folytonos, továbbá bármely polinom bármely korlátos halmazon szintén egyenletesen folytonos.

Ezek azok az általános fogalmak, amelyek többször előfordulnak. ezért őket célszerű volt előkészületképpen külön megbeszélni. Egyéb speciális fogalmakat később ott fogunk értelmezni és tárgyalni, ahol erre alkalmilag szükség lesz. Azt azonban kiemeljük, hogy lineáris terek (vektorterek) operátortartománya mindig a komplex vagy a valós test lesz a továbbiakban.

3. §. Topológikus ferdetestek, értékeléselmélet és rokon kérdések

Ferdetesteken a nem feltétlen kommutatív testeket értjük (de megengedjük a kommutatívokat is). Ebben a paragrafusban említést teszünk a normált ferdetestekkel, továbbá az értékeléselmélettel és a lokálisan bikompakt ferdetestekkel kapcsolatos eredményekről és az ezekre vonatkozó más, általánosabb eredményekről.

MAZUR [158] közzétette — bizonyítás nélkül — azt a meglepő eredményt, hogy a komplex számtest felett maga a komplex számtest az egyetlen olyan BANACH-algebra, amely ferdetest.

Ez az eredmény önmagában is fontos és érdekes, és jelentőségét még jobban aláhúzza az a tény, hogy a felhasználásával bizonyította be később a szovjet normáltgyűrűelméleti iskola azt a fontos reprezentációs tételt, hogy bizonyos A kommutatív, egységelemes, radikálmentes Banach-algebrák izomorfok egy B bikompakt halmazon folytonos komplex függvényeknek egy algebrájával. (Itt B lényegében az A algebra összes maximális ideáljának a halmaza.) Ez az utóbbi tény pedig magában hordozza annak a ténynek egy elegáns bizonyítását (N. WIENER, Tauberian theorems, Ann. Math. 33 (1932) 1—100; és The Fourier integral and certain of its applications, Cambridge Univ. Press, 1933), hogy ha egy $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ abszolút konvergens trigonometrikus sor sehol nem tűnik el, akkor a sor összegének a reciproka is kifejthető abszolút konvergens trigonometrikus sorba. Ez és hasonló alkalmazások a BANACH-algebrák-

kal kapcsolatban e referátum későbbi paragrafusában, valamint terv szerint egy későbbi referátumban még említésre kerülnek.

Mármost visszatérve MAZUR tételére, megjegyzendő, hogy GELFAND [64] is bebizonyítja 1941-ben MAZUR eredményét. GELFAND bizonyítása a számértékű vektorfüggvényekre kiterjesztett komplex függvénytani LIOUVILLE-tétel alkalmazásán alapul, és miként ezt LORCH [148] megjegyzi, hasonló eredményhez jutott korábban TAYLOR [226] is. Az eredmény Gelfand—Mazur-tétel néven terjedt el. Erre a tételre később elemi bizonyításokat is adtak. A rezolvens halmaz és a spektrum vizsgálatával a TAYLOR—GELFAND-féle bizonyítás az ARENS-féle [10] általánosított formában a következőképpen foglalható össze. Egy A komplex, lineáris, egységelemes algebrában az $x \in A$ elem spektruma az összes olyan λ skalár halmaza, amelyekre az $x-\lambda e$ különbségnek nincs reciproka (e az A egységeleme). A spektrum komplementer halmaza a komplex számsíkon a rezolvens halmaz. Mármost az ARENS-féle feltételek azok, hogy A a komplex test felett olyan egységelemes topológikus lineáris algebra, amelyben az inverz képzése folytonos művelet, és amelyhez létezik a komplex funkcionáloknak egy totális rendszere: azaz minden $o \neq x \in A$ elemhez van olyan f funkcionál, hogy $f(x) \neq o$. Ez utóbbi feltétel teljesül pl. akkor, ha A^+ konvex lineáris tér. Megállapítható, hogy A minden elemének van nem üres spektruma. Ellenkező esetben ugyanis létezik olyan $x \in A$, hogy képezhető $(x-\lambda e)^{-1}$, és tetszőleges f komplex funkcionállal képezhető a $g(\lambda) = f\left((x-\lambda e)^{-1}\right)$ komplex függvény. Igazolható, hogy $g(\lambda)$ egész függvény, amely analitikus, és $\lim_{\lambda \to \infty} g(\lambda) = o$. Ezért az általánosított Liouville-féle tétel alapján $g(\lambda)$ azonosan o. Minthogy f tetszőleges, és a funkcionálok rendszere A felett totális, ezért $(x-\lambda e)^{-1} = o$ ahonnan $e = o$ tehát ellentmondás adódik. Ezért bármely x elem spektruma nem üres. Legyen most A ferdetest, ekkor x spektruma csak úgy nem üres, ha $x = \lambda e$, amely éppen a Gelfand—Mazur-féle tétel.

A valós test feletti olyan Banach-algebrák, amelyek egyszersmind ferdetestek, a fenti módszer egyik variánsa szerint a valós, komplex vagy kvaterno-ferdetest egyikével izomorfok. — Egy x elemet topológikus zérusosztónak nevezünk a normált algebrában, ha van olyan y_n nem-zéró-sorozat, hogy $xy_n \to o$ vagy $y_n x \to o$. Mármost érvényes SILOV [216], ARENS [10] és RICKART [205] eredményeinek a következő élesítése (KAPLANSKY [114], [115]): topológikus zerusosztó nélküli normált algebra a valós test felett vagy a valós, vagy a komplex test, vagy pedig a kvaterniók ferdeteste. Ennél az eredménynél sem az egységelem létezése, sem a komplettség nem szerepel a feltételek közt. Továbbá, ha A egy NEUMANN-reguláris BANACH-algebra (azaz minden $a \in A$ elemhez létezik a BANACH-algebrában olyan $x \in A$, hogy $a = axa$), akkor A

véges dimenziójú algebra [114]. Ezzel kapcsolatban megjegyzendő, hogy ARENS—KAPLANSKY [12] szerint egy lokálisan bikompakt csoportnak a csoportalgebrája pontosan akkor lesz NEUMANN-reguláris, ha a csoport véges.

Továbbá I. SEGAL a doktori értekezésében (Yale University 1940) gyengén regulárisnak nevezte az A gyűrűt, ha minden $x \neq 0$ elemhez van olyan $y \neq o$ elem, hogy $yxy = y$. (A gyenge regularitás ekvivalens azzal, hogy minden nem zérus főbalideál tartalmaz nem zérus idempotenset. Ezért a NEUMANN-regularitásból folyik a gyenge regularitás. Viszont létezik olyan végtelen dimenziójú (tehát nem NEUMANN-reguláris) BANACH-algebra, amely gyengén reguláris. (Egyébként egy X bikompakt HAUSDORFF-téren folytonos összes valós függvény $C(X)$ BANACH-algebrája pontosan akkor lesz gyengén reguláris, ha X-ben minden nyílt halmaz tartalmaz egy nyílt és zárt halmazt.)

Minthogy a topológikus lineáris terek összefüggőek, kérdezhető, hogy milyen összefüggő topológikus testek léteznek. Más vonatkozásban ugyanez a kérdés merült fel BAER—HASSE [20] dolgozatában is 1932-ben. DIEUDONNÉ [46] 1946-ban konstruált a komplex számtestben egy olyan összefüggő valódi résztestet, amelyik nem a valós számtest. Kapuano [126] pedig topológikus 1-dimenziójú olyan résztestet konstruált a komplex számtestben, amely természetesen szintén nem a valós számtest.

MAZUR egy tétele szerint egy, az R valós testet tartalmazó olyan K normált test, amelynek az N normája az R testen vett abszolút érték folytatása, szükségképpen vagy maga R vagy a C komplex számtest. (Lásd még Aurora [17] cikkét). Mármost SILVIO AURORA [18] elejti azt a feltételt, hogy $R \subseteq K$ és gyengíti a normáról tett MAZUR-féle feltételt is, amelyet Aurora csak a prímtest egy részhalmazára szab ki megszorításnak. Eredménye az, hogy K eme általánosabb esetben C egy résztestével lesz algebrailag izomorf. AURORA [17] általánosítja OSTROWSKI egy tételét is azzal, hogy megmutatja a következőt: Ha K topológikusan összefüggő normált test, és $N(x^2) = (N(x))^2$ minden $x \in K$ esetén, akkor K izomorf a Q (valós test feletti) kvaternio-ferdetest egy résztestével. AURORA [19] megmutatja, hogy az előbbi multiplikatív tulajdonságot elegendő ugyanazon állításhoz megkövetelni K-nak egy olyan B részhalmazán, amely egyrészt sehol sem sűrű K-ban, másrészt $x_1, x_2, \ldots, x_i$ esetén $N(x_1 x_2 \ldots x_i) = N(x_1) N(x_2) \ldots N(x_i)$ harmadrészt pedig $x \in B$ és $y \in K$ esetén $N(\ldots xy \ldots) = N(\ldots yx \ldots)$ teljesül.

A GELFAND—MAZUR-tételhez hasonló eredmények kimondása és bizonyítása szerepel még ZELAZKO [246] cikkében. VILHJALMUR ÖGMUNDSON [183] a FROBENIUS-tételnek nemasszociatív, normált, valós test feletti, végesfokú algebrákra való általánosítására ad új, eléggé elemi bizonyítást.

KÜRSCHÁK [143] egy K test értékelését úgy definiálta, mint egy nem-negatív, valós értékű $|a|$ függvényt, $a \in K$, ahol $|a| = o$ pontosan csak $a = o$ esetén teljesül, és érvényes $|ab| = |a| \cdot |b|$ valamint $|a + b| \leqq |a| + |b|$. Ez a fogalom úgy jött létre, mint a p-adikus számoknak és a komplex számok abszolút értékeinek a közös általánosítása. OSTROWSKI [179] megmutatta, hogy az előző két eset valamelyikével bizonyos értelem-

ben ekvivalens egy általános értékelés is. Egy értékelt K test ugyanis az archimedesi esetben izomorf a komplex számok egy résztestével, ahol az értékelés lényegében a közönséges abszolút érték, míg a nem-archimedesi esetben a p-adikus értékeléssel eleget tesz egy még élesebb $|a+b| \leqq \max(|a|, |b|)$ „háromszög-egyenlőtlenségnek" is. Bár az algebrai számelméletben célszerű az összes értékelést tekinteni, mégis OSTROWSKI struktúra-tételében főleg a nem-archimedesi eset érdekes. KRULL [140] észrevette ugyanis, hogy az előbbi élesített háromszög-egyenlőtlenséggel pótolt értékelés-axiómák közt az értékek Γ tartományában nincs szerepe az összeadásnak, ezért Γ szerepében vehető egy tetszőleges, rendezett ABEL-csoport. Az így általánosított értékelés révén is értelmezhető K-ban test-topológia. Először vizsgálták azt az esetet, amikor Γ a racionális egész számok additív csoportja (lásd TEICHMÜLLER [228] és MACLANE [152]), majd általánosabb Γ esetére KAPLANSKY [107] ért el bonyolult eredményeket. Cohen [40] hasonló vizsgálatot végzett el a lokális gyűrűk esetében.

Ezek a gyűrűk tudvalevőleg olyan egységelemes és ideálokra nézve maximumfeltételű gyűrűk, amelyekben csak egyetlen maximális valódi ideál van. Ennek a kitüntetett ideálnak a hatványait célszerű a 0 teljes környezetrendszeréül venni, ha e rendszerre teljesülnek a környezet-axiómák. Régebben további axiómákat is hozzávettek a lokális gyűrű definíciójához. Az értékeléselmélet, a lokális gyűrűk és általánosításaik körül nagy szakirodalom alakult ki.

Az értékeléselméletben gyakran vannak olyan bizonyítások, amelyek nem használják ki teljesen, hogy a testben értékelés is adva van, hanem csak bizonyos enyhébb topológiai feltételeket elég kihasználni. Ilyen feltétel KAPLANSKY [109] dogozatában a topológikus testnek a következő tulajdonsága: Ha S korlátos K-ban és van 0-nak olyan U környezete, hogy $U \cap S$ üres (azaz $0 \notin S$), akkor S^{-1} is korlátos K-ban. Az olyan ferdetesteket, amelyekben ez a feltétel teljesül, KAPLANSKY [109] nyomán „V-típusúaknak" fogjuk nevezni.

BOURBAKI [37] könyvében az 57. oldal 13. példánál a ferdetesteknek ez az osztálya egyébként már 1942-ben röviden tárgyalva lett. Egy V-típusú komplett topológikus K ferdetest felett bármely véges dimenziójú topológikus vektortér szükségképpen K véges sok példányának a szorzatterével van topológizálva. Továbbá V-típusú algebrailag zárt topológikus testnek a komplett lezárása ugyancsak V-típusú topológikus test. Érdemes megvizsgálni a kérdést, hogy egy V-típusú topológikus testnek egy tetszőleges végesfokú algebrai bővítése topológizálható-e úgy, hogy a bővítés szintén V-típusú legyen, ugyanis a kvadratikus bővítések esetére [109] szerint erre igenlő a válasz. Továbbá [109] szerint a valósan értékelt testek V-típusúak, és van bennük a nullának olyan környezete, amely csupa topológikusan nilpotens elemből áll. ZELINSKY [247] a nem-archimedesi módon értékelt testeket hasonlóan jellemezte. Bármely rendezett test a rendezési topológiában V-típusú. Viszont nem triviális kérdés, hogy a racionális számtest minden V-típusú topológizálása feltétlenül értékeléssel van-e megadva? HABICHT [80] a valósan zárt testek felett vizsgálta a polinómokat, és KAPLANSKY [110] ezt általánosította a V-típusú testek feletti polinomokra.

CARRUTH [39] értékeléselméleti módszerekkel vizsgálta, hogy egy K test mikor lesz analitikusan izomorf egy hatványsorokból álló testtel, miközben KAPLANSKY bizonyos korábbi eredményeit (amikor KAPLANSKY a testek karakterisztikájára megszorítást tett) általánosította karakterisztika-feltételek nélkül. JAFFARD [97] tárgyalja hálószerűen rendezett csoportban a „filet" fogalmát, amely a testek értékelésének egy általánosításánál jelentős.

Legyen ugyanis G hálószerűen rendezett csoport, és G^+ a pozitív elemek halmaza a nullával együtt. Legyen $a \equiv b$ akkor és csak akkor, ha bármely $X \in G^+$ elemre az $a \cap x = 0$ és $b \cap x = 0$ feltételek egymással ekvivalensek. Ekkor G^+ felbomlik a $\equiv$ reláció alapján ekvivalenciaosztályokra, amelyeket „filet"-eknek nevezünk. Legyen $a \in \bar{a}$ és ekkor $\bar{a} \geqq \bar{b}$ azt jelenti, hogy $a \cap x = 0$ esetén $b \cap x = 0$ is teljesül az összes $x \in G^+$ elemre. JAFFARD [98] a féligrendezett ABEL-csoportokhoz a KRULL-féle módszerrel a féligértékelt testeket rendeli hozzá. Egy K féligértékelt test pontosan akkor lesz topológikus test, ha G hálószerűen rendezett, és van hozzá maximális „filet".

ZELINSKY [250] olyan komplett topológikus testeket ad meg, amelyek nem értékelésből származnak. DÜRBAUM [49] bevezeti a „Fastordnung" fogalmát. Ez egy K test olyan O részhalmaza, amely zárt a szorzásra, továbbá $0 \in O$, $1 \in O$, $-1 \in O$ és van olyan $z \in O$ hogy $z(O+O) \subseteq O$. Ha φ a K test értékelése, amely nem feltétlen archimedesi, akkor a $\varphi(x) \leqq 1$ feltételt kielégítő $x \in K$ elemek K-ban maximális Fastordnung-ot alkotnak. Továbbá minden maximális „Fastordnung" egy alkalmas értékelésnél éppen az egészek halmaza. Bármely „Fastordnung" bármely ferdetestben invariáns a belső automorfizmusokkal szemben. KOWALSKY és DÜRBAUM [51] újra igazolják e módszerrel FLEISCHER [58], [59] eredményeit, hogy egy K topológikus ferdetest pontosan akkor értékelhető, ha 1. K egy V-típusú ferdetest; 2. K multiplikatív kommutatorcsoportja korlátos a topológiában. A bizonyítás felhasználja, hogy K lokálisan bikompakt, továbbá K környezetbázisa az összes $x \cdot U$ halmaz rendszere, ahol $x \neq 0$, $x \in K$ és U Fastordnung K-ban. Minden $x \in K$ elemhez van olyan $y \in K$ hogy $xU \subseteq Uy$ és minden y-hoz van olyan z hogy $Uy \subseteq zU$. Itt a V-típus további feltételeket szab ki még U-ra. Egy topológikusan nilpotens elemek nélküli topológikus K ferdetest pontosan akkor értékelhető egy (nem feltétlen kommutatív) rendezett csoporttal, ha K tartalmazza a 0-nak egy invariáns korlátos környezetét.

KOWALSKY [138] Stone-félének nevezi az olyan K topológikus ferdetestet, amelyre a $C^*(X, K)$ gyűrűbeli bármely M maximális ideállal $K \cong C^*(X, K)/M$ érvényes, ahol $C^*(X, K)$ az összes olyan függvények gyűrűje, amelyek az X topológikus teret a K test egy korlátos részhalmazára képezik le. Mármost GOLDHABER—WOLK [79] eredményét általánosítva KOWALSKY megmutatta, hogy egy V-típusú ferdetest pontosan akkor STONE-féle, ha lokálisan bikompakt.

KRULL [142] rendszeresen összefoglalja a testek különféle topologizálási eljárásait. WARNER [234] igen általános eredményei a lokálisan bikompakt testek értékelésgyűrűjére is adnak alkalmazást.

FUCHS LÁSZLÓ [62] megadta az értékeléselmélet egy általánosítását, miközben a $v(a)$ értékelés-függvény axiómái közt a háromszög-egyenlőtlenséget azzal az axiómával helyettesítette, hogy ha $v(a) \geqq v(c)$ és $v(b) \geqq v(c)$ akkor legyen $v(a-b) \geqq v(c)$. Ez olyan értékeléseket szolgáltat, amelynél az érték-csoport féligrendezett. Integrálisan zárt gyűrűnek az értékcsoportja lineárisan rendezett csoportoknak egy szubdirekt összege. REES [198] egy A NOETHER-féle integritástartományon az f nemnegatív valós függvényt homogén filtrációnak nevezi, ha $f(x-y) \geqq \min(f(x), f(y))$, továbbá $f(x \cdot y) \geqq f(x)+f(y)$ és $f(x^n)=n \cdot f(x)$. Létezik bármely f homogén filtrációhoz A-nak a K hányadostestén diszkrét értékeléseknek olyan v_n sorozata, hogy minden $0 \neq a \in A$ elem esetén (1) $v_n(a)$ nemnegatív egészszámú többszöröse az $(m(n))^{-1}$ számnak, ahol $m(n)$ az n-től függő egész szám és $f(a)=\liminf v_n(a)$. Ha f racionális értékkészletű, akkor $f(a)=\lim_{n \to \infty} v_n(a)$. Többek közt Cohn és Mahler [41] a pseudo-értékeléseket is vizsgálták. Ezek olyan $w(a)$ nemnegatív valós függvények egy A gyűrűn, hogy $w(0)=0$, továbbá $w(a=b) \leqq w(a)+w(b)$ és $w(ab) \leqq w(a) \cdot w(b)$. Ha $w(a-b) \leqq \leqq \max(w(a), w(b))$, akkor a pseudo-értékelés nem-archimedesi.

Bizonyos pseudokonvergenciát tárgyal TAI [224] az értékelt testek perfektségére vonatkozó szükséges és elégséges feltételében, míg VERHOEFF [230] pedig polinomok segítségével mutat meg egy kapcsolatot egy nem-archimedesi értékelt testben a pseudokonvergencia és az értékben való konvergencia közt. WRIGHT [240] a nemasszociatív esetben tárgyalja az értékeléseket.

A valós számok, komplex számok és a p-adikus számok előbbi példáival kapcsolatban természetes dolog azt kérdezni, hogy milyen lokálisan bikompakt testek léteznek. Egymástól függetlenül van DANTZIG [42] és PONTRJAGIN [185] végeztek ilyen vizsgálatokat. PONTRJAGIN megmutatta, hogy a lokálisan bikompakt és összefüggő ferdetestek csak a valós, vagy komplex testtel vagy pedig a kvaterniók ferdetestével lehetnek izomorfok. DANTZIG azonban csak a kommutatív esetet tárgyalta. PONTRJAGIN pedig először (pl. [186] könyve első kiadásában is) felhasználta a második megszámlálhatósági axiómát, de később [185]-ben a nélkül bizonyította be a tételt.

Minthogy az egyszerű gyűrűk vagy összefüggőek, vagy pedig teljesen nemösszefüggőek, célszerű tárgyalni a teljesen nemösszefüggő lokálisan bikompakt ferdetesteket is. A kommutatív, teljesen nemösszefüggő és lokálisan bikompakt testek esetében PONTRJAGIN azt találta, hogy ezek izomorfok vagy a p-adikus számoknak egy végesfokú bővítésével (ezek a π-adikus testek, amelyeknek olyan további véges bővítéseit vizsgálta SAFAREVICS [209], amelyeknek a π-adikus alaptest feletti GALOIS-csoportja véges p-csoport), vagy pedig izomorfok egy véges test feletti formális hatványsoroknak a testével (ezek a z-adikus

testek). JACOBSON [93] kiegészítette ezt az eredményt a nemkommutatív eset vizsgálatával, és megmutatta, hogy ekkor végesrangú ciklikus algebrát kapunk a π-adikus vagy a z-adikus test felett.

PONTRJAGIN [183] dolgozatából kiderül, hogy lokálisan bikompakt ferdetestekben érvényes az első megszámlálhatósági axióma, és JACOBSON [93] ezt az axiómát mégis megköveteli. OTOBE [182] újra kimutatja, hogy az első megszámlálhatósági axióma megkövetelése felesleges. Később a második megszámlálhatósági axióma is fáradtság nélkül volt nyerhető a bizonyításból.

SAFAREVICS [208] jellemzést adott azokról a testekről, amelyeknek van olyan értékelése, amely az eredeti topológiát adja vissza. A problémában szereplő feltételek a lokálisan bikompakt testek esetében könnyebben megfogalmazhatók, és így a PONTRJAGIN-féle struktúratétel szerint a kérdés az értékelés-elmélet egyik kérdésére redukálódik. Az értékeléselmélet módszereivel aztán meg lehet oldani a SAFAREVICS-féle problémakört. A nemkommutatív esetben ehhez újabb nehézségek csatlakoznak (KAPLANSKY [109]). Megjegyzendő, hogy az összefüggő és teljesen nemösszefüggő eset egészen azonos mederben is tárgyalható. Ez utóbbi érdem BRACONNIER [33] bizonyításából fakad, aki megjegyzi, hogy $x \to ax (a \neq 0)$ egy lokálisan bikompakt topológikus ferdetest additív csoportjának homeomorf automorfizmusa. Ez a leképezés a HAAR-mérték egyértelműsége miatt minden mértéket egy $v(a)$ pozitív valós számmal szoroz, és igazolni lehet, hogy $v(a)$ tényleg értékelés, és az értékeléselmélet alkalmazható.

KRULL [141] vetette fel még 1936-ban azt a kérdést, hogy tekinthető-e értékelésgyűrűnek (valamely alkalmas értékelésben) bármely olyan egységelemes integritástartomány, amely a hányadostestében teljesen integrálisan zárt és amely primér gyűrű. NAGATA [166] foglalkozott 1952-ben e kérdés megoldásával, miközben úgy vélte, hogy sikerült neki olyan mondott tulajdonságú integritástartományt konstruálnia, amely nem értékelésgyűrű a hányadostest egyetlen értékelésében sem, és hogy ezzel sikerült negatív irányban KRULL problémáját megoldania. RIBENBOIM [200] észrevette 1956-ban, hogy Nagata ellenpéldája nem jó, ezért konstruált Ribenboim egy helyes ellenpéldát KRULL problémájának a megoldására. Ugyancsak RIBENBOIM vizsgálta egy másik [199] korábbi dolgozatában annak szükséges és elégséges feltételét, hogy a mondott tulajdonságú integritástartományok értékelésgyűrűk legyenek.

A lokális bikompaktság a ferdetestek terére vonatkozólag gyengíthető a lokális korlátosság feltételezésével. Legyen K lokálisan korlátos ferdetest, amely minimális abban az értelemben, hogy rajta nem létezik gyengébb lokálisan korlátos testtopológia. Legyen továbbá a multiplikatív, kommutátor csoport korlátos. Akkor — miként ezt Fleischer [59] is megmutatta, — a topológia értékeléssel adható meg. Bármely lokálisan korlátos topológia egy minimálissá gyengíthető. — A szorzás asszociativitásának a gyengítésével, elhagyásával vagy más feltételekkel való pótlásával érdekes nemasszociatív testek lépnek fel,

amelyek közül némelyik a geometria alapjaival függ össze. (Lásd pl. KOLMOGOROV [136], KOETHE [134].)

RUTH MOUFANG munkásságának a szempontjából különösen az alternatív ferdetestek érdekesek. Az összefüggő eset hasonló az asszociatív ferdetestekéhez, a teljesen nem összefüggő eset bonyolult és még nincs kivizsgálva teljesen, bár ez kapcsolatban állónak látszik a π-adikus és z-adikus számok feletti CAYLEY—DICKSON algebrákkal. Itt BRACONNIER [33] módszere szintén alkalmazhatónak látszik. E módszerrel kapcsolatban jelent meg a lokálisan kompakt asszociatív ferdetestekről WEISS—ZIERLER [239] cikke is.

IRODALOM

[1] S. ABHYANKAR, On the valuations centered in a local domain, Amer. Jour. Math. 78 (1956) 321—348.

[2] J. ACZÉL, Zur Arbeit „Über eine nichtarchimedische Addition und die Frage ihrer Verwendung in der Physik", Wiss. Z. Humboldt Univ. Berlin, Math. Nat. Reihe 7 (1957—58) 439—443.

[3] A. A. ALBERT, Absolute valued real algebras, Ann. Math. 48 (1947) 495—501.

[4] AMBROSE, Structure theorems for a special class of Banach algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 57 (1945) 364—386.

[5] W. AMBROSE, The L_2-system of a unimodular group, Trans. Amer. Math. Soc. 65 (1949) 27—48.

[6] V. A. ANDRUNAKIEVICS, A radikál általánosított Q-gyűrűkben, Izv. Akad. Nauk, SZSZSZR. Szer. Mat. 18 (1954) 419—426.

[7] H. ANZAI, On compact topological rings, Proc. Imp. Akad. Tokyo 19 (1943) 613—615.

[8] R. ARENS, On a theorem of Gelfand and Neumark, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 32 (1946) 237—239.

[9] R. ARENS, The space L^{ω} and convex topological rings, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946) 931—935.

[10] R. ARENS, Linear topological division algebras, Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947) 623—630.

[11] R. ARENS, Representation of *-algebras, Duke Math. Jour. 14 (1947) 269—282.

[12] R. ARENS—I. KAPLANSKY, Topological representation of algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 63 (1948) 457—481.

[13] K. ASANO, Über kommutative Ringe, in denen jedes Ideal als Produkt von Primidealen darstellbar ist, Jour. Math. Soc. Japan 3 (1951) 82—90.

[14] K. E. AUBERT, Über Bewertungen mit halbgeordneten Wertgruppe, Ann. Math. 127 (1954) 8—14.

[15] K. E. AUBERT, Convex ideals in ordered group algebras and the uniqueness of the Haar measure, Math. Scand. 6 (1958) 181—188.

[16] J. AUGIER, Filtration d'un anneau local déduité d'une valuation, C. R. Acad. Sci. Paris 248 (1959) 3514—3516.

[17] S. AURORA, On power multiplicative norms, Amer. Jour. Math. 80 (1958) 879—894.

[18] S. AURORA, The embedding of certain metric fields, Michigan Math. Jour. 7 (1960) 123—128.

[19] S. AURORA, A note on certain connected metric division rings, Michigan Math. Jour. 7 (1960) 129—132.

[20] R. BAER—H. HASSE, Zusammenhang und Dimension topologischer Körperräume, Jour. Reine Angew. Math. 167 (1932) 40—45.
[21] F. BALLIER, Über lineartopologische Algebren, Jour. Reine Angew. Math. 195 (1956) 42—75.
[22] J. BAROT, Remark on inverse elements in topological rings, Casopis Pestov. Mat. 80 (1955) 241—243.
[23] I. BARSOTTI, Valutazioni nelle algebre divisorie sanza base finita, Univ. Roma Ist. Naz. Alta Mat. Rend. Mat. e Appl. (5) 8 (1949) 168—185.
[24] E. BATHO, Noncommutative semi-local and local rings, Duke Math. Jour. 24 (1957) 163—172.
[25] E. A. BEHRENS, Ein topologischer Beitrag zur Strukturtheorie nichtassoziativer Ringe, Math. Ann. 129 (1955) 297—303.
[26] E. A. BEHRENS, Zur topologischen Darstellung nichtassoziativer Ringe, Archiv Math. 7 (1956) 41—48.
[27] J. M. BEREZANSZKIJ—S. G. KREIJN, Folytonos algebrák, Doklady Akad. Nauk SZSZSZR (N. Sz.) 72 (1950) 5—8 (oroszul).
[28] J. M. BEREZANSZKIJ—S. G. KREIJN, A folytonos algebrák néhány osztálya, Doklady Akad. Nauk. SZSZSZR (N. Sz.) 72 (1950) 237—240 (oroszul).
[29] J. M. BEREZANSZKIJ, Bikompakt csoportok csoportgyűrűjének a centrumáról, Doklady Akad. Nauk SZSZSZR (N. Sz.) 72 (1950) 825—828 (oroszul).
[30] J. M. BEREZANSZKIJ—S. G. KREIJN, Bikompakt-bázisú hyperkomplex rendszerek, Ukrain. Mat. Zsurnal 3 (1951) 184—204 (oroszul).
[31] A. BIALYNICKI—BIRULA, On the topological structure of infinite Galois groups, Fund. Math. 44 (1957) 72—74.
[32] J. BRACONNIER—J. DIEUDONNÉ, Sur les groupes abeliens localement compacts, C. R. Acad. Sci. Paris 218 (1944) 577—579.
[33] J. BRACONNIER, Groupes d'automorphismes d'un groupe localement compact, C. R. Acad. Sci. Paris 220 (1945) 382—384.
[34] J. BRACONNIER, Sur les modules localement compacts, C. R. Acad. Sci. Paris 222 (1946) 527—529.
[35] J. BRACONNIER, Sur les espaces vectoriels localement compacts, C. R. Acad. Sci. Paris 222 (1946) 778—778.
[36] J. BRACONNIER, Sur les groupes topologiques localement compacts, Jour. Math. Pures Appl. (9) 27 (1948) 1—85.
[37] N. BOURBAKI, Élements de Math., Topologie Générale, Actualités Sci. Industr. Paris (1942).
[38] N. BOURBAKI, Élements de Math., Espaces Vectoriels Topologiques, Actualités Sci. Industr., Paris (1953).
[39] PH. W. CARRUTH, Generalized power series fields, Trans. Amer. Math. Soc. 63 (1948) 548—559.
[40] I. S. COHEN, On the structure and ideal theory of complete local rings, Trans. Amer. Math. Soc. 59 (1946) 54—106.
[41] P. COHN—K. MAHLER, On the composition of pseudo-valuations, Nieuw Arch. Wiskunde (3) 1 (1953) 161—198.
[42] D. VAN DANTZIG, Studien über topologische Algebra, Dissertation, Amsterdam, H. J. Paris (1931).
[43] D. VAN DANTZIG, Zut topologischen Algebra, Math. Ann. 107 (1933) 587—626.
[44] D. VAN DANTZIG, Zur topologischen Algebra, II., Comp. Math. 2 (1935) 201—223.
[45] D. VAN DANTZIG, Neuere Ergebnisse der topologischen Algebra, Mat. Szbor. N. Sz. 1 (1936) 665—674.
[46] J. DIEUDONNÉ, Sur les corps topologiques connexes, C. R. Acad. Sci. Paris 221 (1945) 396—398.

[47] V. A. DITKIN, Az ideálok szerkezetéről bizonyos normált gyűrűkben, Ucsenye Zapiszki Moszkov, Gosz. Univ. Mat. 30 (1939) 83—130.
[48] N. DUNFORD, Spectral theory, Bull. Amer. Math. Soc. 49 (1943) 637—651.
[49] H. J. DÜRBAUM, Über Ganzheitsbereiche bewerteter Körper, Math. Z. 57 (1952) 86—93.
[50] H. J. DÜRBAUM, Zur Theorie der nichtkommutativen Bewertungen, Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953) 418—422.
[51] H. J. DÜRBAUM—H. J. KOWALSKY, Arithmetische Kennzeichnung von Körpertopologien, Jour. Reine Angew. Math. 191 (1953) 135—152.
[52] G. EHRLICH, The structure of continuous rings, Thesis Univ. Tennessee (1953).
[53] M. EIDELHEIT, Concerning rings of continuous functions, Ann. Math. 41 (1940) 391—393.
[54] S. ENOMOTO, Sur la structure des fonctions d'ensemble dans les groupes topologiques localement compacts, Proc. Japan Acad. Sci. 31 (1955) 284—287.
[55] P. ERDŐS—L. GILLMAN—M. HENRIKSEN, An isomorphism theorem for real closed fields, Ann. Math. (2) 61 (1955) 542—554.
[56] J. M. G. FELL, The structure of algebras of operator fields, Acta Math. Skand. 106 (1961) 233—280.
[57] J. FLACHSMEYER, Banach-Algebra stetiger beschränkter Funktionen, Archiv. Math. 12 (1961) 366—369.
[58] I. FLEISCHER, Sur les corps topologiques et les valutations, C. R. Acad. Sci. Paris 236 (1953) 1320—1322.
[59] I. FLEISCHER, Sur les corps localement bornés, C. R. Acad. Sci. Paris 237 (1953) 546—548.
[60] I. FLEISCHER, Über Dualität lineartopologischen Moduln, Math. Z. 72 (1959—1960) 439—445.
[61] M. FREUNDLICH, On normed rings, Dissertation, Illinois (1947).
[62] L. FUCHS, The generalization of the valuation theory, Duke Math. Jour. 18 (1951) 19—26.
[63] S. A. GACSÁLYI, On limit operations is a certain topology for endomorphism rings of abelian groups, Publ. Math. Debrecen, 7 (1960) 353—358.
[64] I. M. GELFAND, Normált gyűrűk, Mat. Szbor. N. Sz. 9 (1941) 3—24 (oroszul).
[65] I. M. GELFAND, Ideálok és primér ideálok normált gyűrűkben, Mat. Szbor. N. Sz. 9 (1941) 41—48 (oroszul).
[66] I. M. GELFAND, Topológikus Abel-csoportok karaktereinek elméletéhez, Mat. Szbor. N. Sz. 9 (1941) 49—51 (oroszul).
[67] I. M. GELFAND, Abszolút konvergens trigonometrikus sorok és integrálok, Mat. Szbor. N. Sz. 9 (1941) 51—66 (oroszul).
[68] I. M. GELFAND—M. A. NAJMARK, Normált gyűrűk beágyazása a Hilbert-tér operátorainak gyűrűjébe, Mat. Szbor. N. Sz. 12 (1943) 197—213 (oroszul).
[69] I. M. GELFAND—D. A. RAJKOV, Kommutatív topológikus csoportok karaktereinek elméletéről, Doklady Akad. Nauk. SZSZSZR (1940) 195—198 (oroszul).
[70] I. M. GELFAND—D. A. RAJKOV, Lokálisan bikompakt csoportok irreducibilis unitér előállításai, Mat. Szbor. N. Sz. 13 (1943) 301—316 (oroszul).
[71] I. M. GELFAND—D. A. RAJKOV—G. E. SILOV, Kommutatív normált gyűrűk, Uszpehi Mat. Nauk, 1 (1946) 48—146 (oroszul).
[72] J. GIL DE LAMADRID—I. P. JANS, Note on connnctedness in topological rings Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957) 441—442.
[73] L. GILLMAN—M. HENRIKSEN. Rings of continuous functions in whichs every finitely generated ideal is principal, Trans. Amer. Math. Soc. 82 (1956) 366—391.

[74] L. GILLMAN, Rings with Hausdorff structure space, Fund. Math. 45 (1957) 1–16.
[75] L. GILLMAN–M. JERISON, Rings of Continuous Functions, Van Nostrand, Princeton, (1960).
[76] A. GODDES, On the embeddings theorems for complete local rings, Proc. London Math. Soc. (3) 6 (1956) 343–354.
[77] R. GODEMENT, Théoremes tauberiens et théorie spectrale, Ann. École Norm. 74 (1947) 119–138.
[78] R. GODEMENT, Les fonctions de type positif et la théorie des groupes, Trans. Amer. Math. Soc. 63 (1948) 1–84.
[79] J. K. GOLDHABER–E. S. WOLK, Maximal ideals in rings of bounded continuous functions, Duke Math. Jour. 21 (1954) 265–269.
[80] W. HABICHT, Ein Existenzsatz über reelle definite Polynome, Comment. Math. Helv. 18 (1946) 331–348.
[81] P. HEBRONI, Über lineare Differentialgleichungen in Ringen, Comp. Math. 5 (1938) 403–429.
[82] H. HELSON–F. QUIGLEY, Maximal algebras of continuous functions, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957) 111–114.
[83] H. HELSON–F. QUIGLEY, Existence of maximal ideals in algebras of continuous functions, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957) 115–119.
[84] I. N. HERSTEIN, Group rings as* -algebras, Publ. Math. Debrecen 1 (1950) 201–204.
[85] E. HEWITT–H. S. ZUCKERMANN, Structure theory for a class of convolution algebras, Pacific Jour. Math. 7 (1957) 913–941.
[86] E. HILLE–R. S. PHILLIPS, Functional Analysis and Semi-groups, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 31, Providence (1957).
[87] D. HYERS, Linear topological spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 51 (1945) 1–21.
[88] IKUSHIMA, G-radical of topological rings, Jour. Osaka Inst. Sci. Techn., Part I., 2 (1950) 81–84.
[89] K. ISEKI, Sur le G-radical d'un anneau topologique, C. R. Acad. Sci. Paris 234 (1952) 1938–1939.
[90] K. ISEKI, On the Brown-McCoy radical in topological rings, Anais Acad. Brasil, Ci. 25 (1953) 213–219.
[91] K. ISEKI, On O-dimensional compact rings, Math. Japonicae 3 (1953) 37–40.
[92] K. ISEKI, Sur les anneaux normés de Hilbert, I., C. R. Acad. Sci. Paris 236 (1953) 1123–1125; II. Ugyanott 237 (1953) 545–546.
[93] N. JACOBSON, Totally disconnected locally compact rings, Amer. Jour. Math. 58 (1936) 433–449.
[94] N. JACOBSON, A note on topological fields, Amer. Jour. Math. 59 (1937) 889–894.
[95] N. JACOBSON–O. TAUSSKY, Locally compact rings, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 21 (1935) 106–108.
[96] N. JACOBSON, Structure of Rings, Providence (1956).
[97] P. JAFFARD, Théorie des filets dans les groupes réticulés, C. R. Acad. Sci. Paris 230 (1950) 1024–1025.
[98] P. JAFFARD, Corps demi-values, C. R. Acad. Sci. Paris 231 (1950) 1401–1403.
[99] P. JAFFARD, La notion de la valuation, Enseignement Math. 40 (1951–52) 5–26.
[100] J. P. JANS, Compact rings with open radical, Duke Math. Jour. 24 (1957) 573–577.
[101] S. A. JENNING, The group ring of a class of infinite nilpotent groups, Canad. Jour. Math. 7 (1955) 169–187.
[102] A. JONES–G. LUMER, Egy megjegyzés a radikálgyűrűkről, Bol. Fac. Ingen. Agriments, Montevideo, Publ. Didact. Inst. Mat. Estadist. 3 (1956) 11–15 (spanyolul).

[103] R. V. KADISON, A representation theory for commutative topological algebras, Memoirs Amer. Math. Soc. 7, New York (1951).
[104] S. KAKUTANI, Rings of analytic functions, Michigan, Univ. Press, Ann. Arbor (1955).
[105] S. KAKUTANI—G. W. MACKEY, Two characterizations of real Hilbert space, Ann. Math. 45 (1944) 50—58.
[106] L. KALMÁR, Über die Cantorsche Theorie der reellen Zahlen, Publ. Math. Debrecen 1 (1950) 150—159.
[107] I. KAPLANSKY, Maximal fields with valutions, Duke Math. Jour. 9 (1942) 303—321; II., ugyanott 12 (1945) 243—248.
[108] I. KAPLANSKY, Topological rings, Amer. Jour. Math. 69 (1947) 153—183.
[109] I. KAPLANSKY, Topological methods in valuation theory, Duke Math. Jour. 14 (1947) 527—541.
[110] I. KAPLANSKY, Polynomials in topological fields, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948) 909—916.
[111] I. KAPLANSKY, Dual rings, Ann. Math. 49 (1948) 689—701.
[112] I. KAPLANSKY, Topological rings, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948) 809—826.
[113] I. KAPLANSKY, Locally compact rings, Amer. Jour. Math. 70 (1948) 447—459; II., ugyanott 73 (1951) 20—24.
[114] I. KAPLANSKY, Regular Banach algebras, Jour. Indian Math. Soc. 12 (1948) 57—62.
[115] I. KAPLANSKY, Normed algebras, Duke Math. Journal 16 (1949) 399—418.
[116] I. KAPLANSKY, Primary ideals in group algebras, Proc. Mat. Acad. Sci. USA 35 (1949) 133—136.
[117] I. KAPLANSKY, Quelques résultats sur les anneaux, C. R. Acad. Sci. Paris, 231 (1950) 485—486.
[118] I. KAPLANSKY, Topological representation of algebras, II., Trans. Amer. Math. Soc. 68 (1950) 62—75.
[119] I. KAPLANSKY, Projections in Banach algebras, Ann. Math. 53 (1951) 235—249.
[120] I. KAPLANSKY, The structure of certain operator algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 70 (1951) 219—255.
[121] I. KAPLANSKY, Group algebras in the large, Tohoku Math. Jour. 3 (1951) 249—256.
[122] I. KAPLANSKY, Topological Algebra, Univ. Chicago, Notes (1952).
[123] I. KAPLANSKY, Modules over operator algebras, Amer. Jour. Math. 75 (1953) 839—858.
[124] I. KAPLANSKY, Dual modules over a valutiaon ring, Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953) 213—219.
[125] I. KAPLANSKY, Rings of Operators, Univ. Chicago, Notes (1955).
[126] I. KAPUANO, Sur les corps de nombres a une dimension distincts du corps réel, Rec. Fac. Sci. Univ. Istambul, (A) 11 (1946) 30—39.
[127] S. KASAHARA, Sur les topologies compatibles avec la structure d'une algebre, Proc. Japan Acad. Sci. 34 (1958) 422—426.
[128] S. KASAHARA, Representation of some topological algebras, I., Proc. Japan Acad. Sci. 34 (1958) 355—360.
[129] YU. KAWADA, Über die Erweiterung der maximalen Ideale in normierten Ringen, Proc. Imp. Acad. Tokyo 19 (1943) 267—268.
[130] YU. KAWADA, On the group ring of a topological group, Math. Japanicae, 1 (1948) 1—5.
[131] J. L. KELLEY, General Topology, D. van Nostrand Co., New York, Toronto. London (1955).
[132] K. KODEIRA—S. KAKUTANI, Normed ring of a locally compact abelian group, Proc. Imp. Acad. Tokyo 19 (1943) 360—365.

[133] G. KOETHE, Abstrakte Theorie nochtkommutativer Ringe mit einer Anwendung auf die Darstellungstheorie kontinuierlichen Gruppen, Math. Ann. 103 (1930) 545–572.
[134] G. KOETHE, Unendliche Abelsche Gruppen und Grundlagen der Geometrie, J. ber. Deutschen Math. Verein 49 (1939) 97–113.
[135] C. W. KOHL, The space of prime ideals of a ring, Fund. Math. 45 (1957) 17–27.
[136] A. N. KOLMOGOROFF, Zur Begründung der projektiven Geometrie, Ann. Math. 33 (1932) 175–176.
[137] H. J. KOWALSKY, Beiträge zur topologischen Algebra, Math. Nachr. 11 (1954) 143–185.
[138] H. J. KOWALSKY, Stonesche Körper und ein Überdeckungssatz, Math. Nachr. Nachr. 14 (1955) 57–64.
[139] H. J. KOWALSKY, Topologische Räume, Basel-Stittgart (1961) (Főleg a 7. fejezet).
[140] W. KRULL, Allgemeine Bewertungstheorie, Jour. Reine Angew. Math. 167 (1932) 160–196.
[141] W. KRULL, Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche II., v-Ideale und vollständig ganz abgeschlossene Integritätsbereiche, Math. Z. 41 (1936) 665–679.
[142] W. KRULL, Charakterentopologie, Isomorphismentopologie und Bewertungstopologie, Memoirs Math. Inst. „Jorge Juan" no 16 (1955) 1–74
[143] J. KÜRSCHÁK, Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie, Jour. Reine Angew. Math. 142 (1913) 211–253.
[144] E. LAMPRECHT, Bewertungssysteme und Zetafunktionen algebraischer Funktionenkörper, I., Math. Ann. 13 (1956) 313–335, II., Archiv. Math. 7 (1956) 225–234.
[145] M. LAZARD, Bemerkungen zur Theorie der bewerten Körper und Ringe, Math. Nachr. 12 (1954) 67–73.
[146] H. LEPTIN, Linear kompakte Moduln und Ringe, Math. Z. 62 (1955) 241–267; II. ugyanott 66 (1957) 289–327.
[147] F. LOONSTRA, Interprétation topologique d'un théoreme de M. Mahler concernant les pseudo-évaluations, Indagationes Math. 9 (1947) 373–378.
[148] E. LORCH, The structure of normed abelian rings, Bull. Amer. Math. Soc. 50 (1944) 447–463.
[149] P. LORENZEN, Über die Komplettierung in der Bewertungstheorie, Math. Z. 59 (1953) 84–87.
[150] G. W. MACKEY, A remark on locally compact abelian groups, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946) 940–944.
[151] G. W. MACKEY, Commutative Banach Algebras, Rio de Janeiro (1959).
[152] S. MAC LANE, Subfields and automorphism groups of p-adic fields, Ann. Math. 40 (1939) 423–442.
[153] L. MAHARADZE, Topológikus nilpotens minimum-feltételű gyűrűk, Uszpehi Mat. Nauk 12 (76) (1957) 181–186 (oroszul).
[154] L. MAHARADZE, Topológikus gyűrűk lokálisan nilpotens ideáljai, Mat. Szbor. N. Sz. 41 (1957) 395–414 (oroszul).
[155] A. I. MALCEV, A racionális számtest feletti normált Lie-algebrákról, Doklady Akad. Nauk Sz. Sz. Sz. R. 62 (1948) 745 (oroszul).
[156] I. MAURER, Sur la topologisation des anneux, Acad. R. P. Romine, Fil. Cluj Stud. Cerc. Mat. 8 (1957) 177–180.
[157] F. MAUTNER, The completeness of the irreducible unitary representations of a locally compact group, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 34 (1948) 52–54.
[158] S. MAZUR, Sur les anneaux linéaires, C. R. Acad. Sci. Paris (1938) 1025–1027.
[159] E. A. MICHAEL, Locally multiplicatively-convex topological algebras, Memoirs Amer. Math. Soc. No 11 (1952) 1–79.

[160] D. MILMAN, Topológikus gyűrűk normálhatóságáról, Doklady Akad. Nauk Sz. Sz. Sz. R. 47 (1945) 162–164 (oroszul).
[161] D. MONTGOMERY, Continuity in topological groups, Bull. Amer. Math. Soc. 42 (1936) 879–882.
[162] M. MORIYA, Charakterisierung der nicht-archimedischen Bewertungen durch Grössenordnungen, Math. Jour. Okayama Univ. 3 (1953) 29–38.
[163] B. N. MOYLS, The structure of valuations of the rational function field $K(x)$, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951) 102–112.
[164] F. J. MURRAY–J. VON NEUMANN, On rings of operators, Ann. Math. 37 (1935) 116–229; II. Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937) 208–242; IV., Ann. Math. 44 (1943) 716–808.
[165] L. NACHBIN, On the operator calculus with differentiable functions, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 44 (1958) 698–700.
[166] M. NAGATA, On Krull's conjecture concerning valuation rings, Nagoya Math. Jour. 4 (1952) 29–33.
[167] M. NAGATA–T. NAKAYAMA–T. TUZUKU, On an existence lemma in valuation theory, Nagoya Math. Jour. 6 (1953) 59–61.
[168] M. NAGUMO, Einige analytische Untersuchungen in linearen metrischen Ringen, Japan Jour. Math. 13 (1936) 61–80.
[169] M. A. NAJMARK, Normált Gyűrűk, Moszkva (1956) (oroszul).
[170] M. NAKAMURA–H. UMEGAKI, On a proposition of von Neumann, Kodai Meth. Samin. Rep. 8 (1956) 142–144.
[171] M. NARITA, On the structure of complete local rings, Proc. Internat. Sympos. Algebraic Number Theory, Tokyo and Nikko (1955) 251–253.
[172] B. H. NEUMANN, On ordered groups, Amer. Jour. Math. 71 (1949) 1–18.
[173] J. VON NEUMANN, Rings of operators, III., Ann. Math. 41 (1940) 94–161.
[174] O. M. NIKODYM–S. NIKODYM, Sur l'extension des corps algebraiques abstraites par un procédé généralisé de Cantor, Alti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) 17 (1954) 334–339.
[175] O. M. NIKODYM, Sur l'extension des corps algebriques par le procédé généralisé de Cantor, basé sur les suites générales de Moore–Smith, qui contiennent une chaine confinale, C. R. Acad. Sci. Paris 241 (1955) 1249–1250.
[176] D. G. NORTHCOTT, On the notion of a first neighbourhood ring with an application to the $AF+B\Phi$ theorem, Proc. Cambridge Philos. Soc. 53 (1957) 43–56.
[177] K. NUMAKURA, A note on Wedderburn decempositions of compact rings, Proc. Japan Acad. Sci. 35 (1959) 313–315.
[178] K. NUMAKURA, Theory of compact rings, Math. Jour. Okayama Univ. 5 (1955) 79–93; II. ugyanott 5 (1960) 103–113.
[179] A. OSZTROVSZKI, Über einige Lösungen der Funktionalgleichung $\Phi(x)\Phi(y)=$ $=\Phi(xy)$ Acta Math. Scand. 41 (1918) 271–284.
[180] Y. OTOBE, On quasi-evaluations on compact rings, Proc. Imp. Acad. Tokyo 20 (1944) 278–282.
[181] Y. OTOBE, Note on compact simple rings, Proc. Imp. Acad. Tokyo 20 (1944) 283.
[182] Y. OTOBE, On locally compact fields, Japan Jour. Math. 19 (1945) 189–202.
[183] V. ÖGMUNDSSON, Multiplication in n dimension, Nord. Mat. Tidskr. 7 (1959) 111–116.
[184] F. PETER–H. WEYL, Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe, Math. Ann. 97 (1927) 737–755.
[185] L. SZ. PONTRJAGIN, Über stetige algebraische Körper, Ann. Math. 33 (1932) 163–174.
[186] L. SZ. PONTRJAGIN, Folytonos csoportok, Moszkva (1954) (oroszul).
[187] A. PRÉKOPA, Extension of multiplicative set functions with values in a Banach algebra, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 7 (1956) 201–213.

[188] L. PUKÁNSZKY, On the theory of quasi unitary algebras, Acta Sci. Math. Szeged 16 (1955) 103—121.
[189] C. R. PUTNAM, Remarks on certain operators of quantum fields theory, Jour. London Math. Soc. 29 (1954) 350—354.
[190] C. R. PUTNAM, Commutators perturbations and unitary spectra, Acta Math. Skand. 106 (1961) 215—232.
[191] F. QUIGLEY, Approximation by algebras of functions, Math. Ann. 135 (1958) 81—92.
[192] D. A. RAJKOV, Harmonikus analízis kommutatív csoportokon a Haar-mérték segítségével és a karaterek elmélete, Trudy Inst. Mat. Sztyeklov, Moszkva 14 (1945) 86 (oroszul).
[193] D. A. RAJKOV, Az involúciós normált gyűrűk elméletéhez, Dokladü Akad. Nauk Sz Sz Sz R. 54 (1946) 387—390.
[194] L. RÉDEI, Algebra, Leipzig (1959).
[195] D. REES, Valuations associated with a local ring, I., Proc. London Math. Soc. (3) 5 (1955) 107—128.
[196] D. REES, A note on valuations associated with a local domain, Proc. Cambridge Philos. Soc. 51 (1955) 252—253.
[197] D. REES, Valuations associated with ideals, Proc. London Math. Soc. (3) 6 (1956) 161—174.
[198] D. REES, Filtrations as limits of valuations, Jour. London Math. Soc. 32 (1957) 97—102.
[199] P. RIBENBOIM, Sur une conjecture de Krull en théorie des valuations, Nagoya Math. Jour. 4 (1952) 29—39.
[200] P. RIBENBOIM, Sur une note de Nagata relative a un problem de Krull, Math. Z. 64 (1956) 159—168.
[201] P. RIBENBOIM, Sur la théorie des ideaux dans certain anneaux de type infini, Anais Acad. Brasil, Cienc. 28 (1956) 21—39.
[202] P. RIBENBOIM, Le théoreme d'approximation pour les valuations de Krull, Math. Z. 68 (1957) 1—18.
[203] P. RIBENBOIM, Sur les groupes totalement ordonnés et l'arithmétique des anneaux de valuation, Summa Brasil Math. 4 (1958) 1—64.
[204] C. E. RICKART, Banach algebras with an adjoint operation, Ann. Math. 47 (1946) 528—550.
[205] C. E. RICKART, The singular élements of a Banach algebra, Duke Math. Jour. 14 (1947) 1063—1067.
[206] C. E. RICKART, General Theory of Banach Algebras, D. van Nostrand Co., Princeton (1960).
[207] W. RUDIN, Subalgebras of spaces of continuous functions, Proc. Amer. Math Soc. 7 (1956) 825—830.
[208] I. R. SAFAREVICS, Topológikus testek normálhatóságáról, Doklady Akad. Nauk Sz Sz Sz R. 40 (1943) 133—135. (oroszul)
[209] I. R. SAFAREVICS, Vizsgálatok a véges bővítések elméletében, Uszpehi Mat. Nauk N. Sz. (2) 18 (1947) 223—226. (oroszul)
[210] H. SATO, On splitting of valuations in extension of local domains, Jour. Sci. Math. Hiroshima Univ. (*A*) 21 (1957) 69—75.
[211] O. F. G. SCHILLING, Noncommutative valuations, Bull. Amer. Math. Soc. 5 (1945) 297—304.
[212] O. F. G. SCHILLING, The Theory of Valuations, Math. Surveys, No. 4, Amer. Math. Soc. New York (1950).
[213] I. SEGAL, The group algebra of a locally compact group, Trans. Amer. Math. Soc. 61 (1947) 69—105.
[214] I. SEGAL, Irreducible representations of operator algebras, Bull-Amer. Math. Soc. 53 (1947) 73—88.

[215] I. SEGAL, Postulates for general quantum mechanics, Ann. Math. 48 (1947) 930—948.
[216] G. E. SILOV, A maximális ideálok kiterjesztéséről, Doklady Akad. Nauk Sz. Sz Sz R 29 (1940) 83—84 (oroszul).
[217] G. E. SILOV, Reguláris normált gyűrűkről, Trudy Inst. Mat. Sztyeklov, Moszkva (1947) (oroszul).
[218] J. E. SNOLJ, Az R_α gyűrűk ideáljainak a szerkezete, Mat. Szbor. N. Sz. 27 (69) (1950) 143—146. (oroszul)
[219] O. STEINFELD, Bemerkung zu einer Arbeit von L. Kalmár, Publ. Math. Debrecen 2 (1951) 48—49.
[220] M. H. STONE, Applications of the theory of Boolean rings to general topology, Trans. Amer. Myth. Soc. 41 (1937) 375—481.
[221] M. H. STONE, A general theory of spectra, I., Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 26 (1940) 280—283.
[222] T. SZELE, Nilpotent Artinian rings, Publ. Math. Debrecen, 4 (1955) 71—78.
[223] T. SZELE, On a topology in endomorphism ring of abelian groups, Publ. Math. Debrecen 5 (1957) 1—4.
[224] Z. TAI, Pseudokonvergenz und die Perfektheit bewerteter Körper, Acta Math. Sinica, 5 (1955) 489—495.
[225] D. TAMARY, Sur l'immersion d'un semi-groupe topologique dans un group topologique, Colloquium Internat. XXIV. Algebre et Théorie des Nombres, Centre Nat. Recherche Sci. Paris, (1950) 217—221.
[226] A. E. TAYLOR, The resolvent of a closed transformation, Bull. Amer. Math. Soc. 44 (1938) 70—74.
[227] A. E. TAYLOR, Analysis in complex Banach spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 49 (1943) 652—669.
[228] O. TEICHMÜLLER, Diskret bewertete perfekte Körper mit unvollkommenem Restklassenkörper, Jour. Reine Angew. Math. 176 (1937) 141—152.
[229] O. A. VARSAVSKY, Une topologie „tauberienne", C. R. Acad. Sci. Paris 250 (1960) 1951—1952.
[230] J. VERHOEFF, On pseudo-convergent seqüences, Nederl. Akad. Wetensch., Proc. Ser. A, 56 (1953) 401—404.
[231] I. VIDAV, Le spectre du produit a^*a de deux element a et a^* vérifiant la relation $aa^* - a^*a = e$, Glasnik Mat. Fiz. Astr. Drustvo, Mat. Fiz. Hrvatske, Ser. II, 12 (1957) 3—7.
[232] L. A. WAELBROECK, Analytic functions on locally convex algebras, Semin. Analyt. Funt., Vol. 2, Princeton, N. J. Inst. Advanced Study (1958) 286—297.
[233] S. WARNER, Weakly topologized algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957) 314—316.
[234] S. WARNER, Characters of Cartesian products of algebras, Canad. Jour. Math. 11 (1959) 70—79.
[235] S. WARNER, Compact rings and Stone-Cech-compactifications, Arch. Math. 11 (1960) 327—332.
[236] S. WARNER, Compact noetherian rings, Math. Ann. 141 (1960) 161—170.
[237] S. WARNER, Compact rings, Math. Ann. 145 (1962) 52—63.
[238] A. WEIL, L'Intergations dans les Groupes Topologiques et ses Applications, Actualités Sci. Industr. no. 869, Paris, (1938).
[239] E. WEISS—N. ZIERLER, Locally compact division rings, Pac. Jour. Math. 8 (1958) 369—371.
[240] B. F. WRIGHT, Absolute valued algebras, Proc. Nat. Acad. Sci. USA (1953) 330—332.
[241] T. YEN, Notes on linearly compact algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957 698—701.

[242] B. Yood, Banach algebras of bounded functions, Duke Math. Jour. 16 (1949) 151—163.
[243] K. Yosida, On the group embedded in the metrical complete ring, Japan Jour. Math. 13 (1936) 7—26.
[244] K. Yosida, Normed rings ans spectral theorems, I., Proc. Imp. Acad. Tokyo 19 (1943) 356—359; II, ugyanott 19 (1943) 466—470; III ugyanott 20 (1944) 71—73; IV, ugyanott 20 (1944) 183—185; V, ugyanott 20 (1944) 269—273; VI, ugyanott 20 (1944) 580—583.
[245] H. Zassenhaus, Über eine Verallgemeinerung des Henselschen Lemmas, Arch. Math. 5 (1954) 317—325.
[246] W. Zelazko, On a certain class of topological division algebras, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III., 7 (1959) 201—203.
[247] D. Zelinsky, Topological characterization of fields with valuations, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948) 1145—1150.
[248] D. Zelinsky, Nonassociative valuations, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948) 175—183.
[249] D. Zelinsky, Rings with ideal nuclei, Duke Math. Jour. 18 (1951) 431—442.
[250] D. Zelinsky, Complete fields from local rings, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 37 (1951) 379—381.
[251] D. Zelinsky, Linearly compact modules and rings, Amer. Jour. Math. 75 (1953) 79—90.

О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ АЛГЕБРАХ И КОЛЬЦАХ, I.

Ф. Сас

ON TOPOLOGICAL ALGEBRAS AND RINGS, I.

F. Szász

Egy, a komplex számok hatványösszegeire vonatkozó szélsőérték-feladat és annak egy alkalmazása

Gallai Tibornak, 50. születésnapjára

TURÁN PÁL

1. Legyenek $b_1, b_2, \ldots, b_n, z_1, z_2, \ldots, z_n$ komplex számok, ν egész szám, mely egy előírt I intervallumban változhatik. Mint e sorok írója észrevette, a

$$\max_{\nu \in I} \left| \sum_{j=1}^{n} b_j z_j^{\nu} \right|$$

-ra vonatkozó, szisztematikusan felvetett minimumfeladatok megoldása a matematika látszólag rendkívül távoleső fejezeteit tudja összekapcsolni.* Egyik első ilyen feladat a

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1, \qquad I: 1 \leqq x \leqq n$$

esetre vonatkozik és azt kérdezi, hogy

$$z_1 = \max_{j=1,\ldots,n} |z_j| = 1 \tag{1.1}$$

normirozás mellett mikor lesz

$$\max_{\nu=1,2,\ldots,n} |z_1^{\nu} + z_2^{\nu} + \ldots + z_n^{\nu}|$$

minimális és mi e minimum értéke? Még távol állunk e feladat teljes megoldásától, bár lényeges haladást jelentett ATKINSON** azon eredménye, mely szerint (1.1) mellett

$$M_n \overset{\text{def}}{=} \min_{z_j} \max_{\nu=1,\ldots,n} |z_1^{\nu} + \ldots + z_n^{\nu}| > \frac{1}{6}. \tag{1.2}$$

---

* Ennek egy első megfogalmazását „Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen" c. könyvemben adtam meg; egy lényegesen továbbfejlesztett alakja az Interscience Tracts sorozatban megjelenendő angolnyelvű kiadás.

** F. V. ATKINSON, "On sums of powers of complex numbers", Acta Math. Hung. T. XII. Fasc. 1–2. (1961) p. 185–1888.

Orientációképp jegyezzük meg, hogy, mint azt a

$$z_1 = 1, \quad z_2 = z_3 = \ldots = z_n = 0 \tag{1.3}$$

értékrendszer mutatja, $M_n \leqq 1$, továbbá, hogy, mint CASSELS* megmutatta, ugyancsak az (1. 1) normirozás mellett

$$M_n^{*\text{def}} \min_{z_j} \max_{\nu=1,2,\ldots,2n-1} |z_1^\nu + \ldots + z_n^\nu| = 1 \tag{1.4}$$

és itt, mint DANCS** megjegyezte, az egyenlőség „igen sok" $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$-értékrendszerre érhető el.***

Az előbb említett feladatokban a z_j-változókra csak egy normirozó megkötést tettünk. Utóbbi időkben kiderült, hogy oly feladatok is jelentőséggel bírnak az alkalmazásokban, melyeknél a normirozáson felül a változókra megkötéseket rovunk ki.**** Persze, ilyen megkötések számtalan módon választhatók; ezek kiválasztásánál szelektáló elv csak az kell, hogy legyen, hogy *a*) őket egy szándékolt alkalmazás suggallja és *b*) lehetőleg elegánsan tárgyalható legyen. (1. 2) és (1. 4) szerint az ott definiált minimax-ok 1 fölé nem kerülhetnek. Viszont ezek alkalmazása algebrai egyenletek közelítő megoldására felveti azon kérdést, milyen mellékfeltételek mellett lehet e minimaxokat mégis 1 fölé hozni; persze, e mellékfeltétel olyan kell, hogy legyen, hogy adott esetben teljesülése verifikálható legyen. E dolgozatban megmutatjuk, hogy, ha a $(z_1^\nu + z_2^\nu + \ldots + z_n^\nu)$ hatványösszegeket röviden s_ν-vel jelöljük, akkor $n = 2k$ esetén az

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_k = 0 \tag{1.5}$$

és $n = 2k+1$ esetén az

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_k = 0 \tag{1.6}$$

mellékfeltétel mindkét követelményt kielégíti. Az alkalmazás tehát algebrai egyenletek gyökeinek eloszlására fog vonatkozni, tehát egy oly

---

* J. W. S. CASSELS, "On the sums of powers of complex numbers", Acta Math. Hung. T. VII. Fasc. 3–4. (1956) p. 283–289.

** Megjelenés alatt a Mat. Lapokban.

*** Az (1. 2) alatti tételre ill. az $M_n \leqq 1$ egyenlőtlenségre vonatkozólag megjegyzem, hogy nem ismeretes olyan *numerikus* $0 < \vartheta < 1$, hogy minden pozitív egész n-hez létezik oly $(z_{1n}, z_{2n}, \ldots, z_{nn})$-értékrendszer, hogy (1. 1) mellett

$$\max_{\nu=1,\ldots,n} |z_1^\nu + \ldots + z_n^\nu| \leqq \vartheta.$$

**** L. pl. S. KNAPOWSKI-val írott "Comparative prime-number theory" című nyolc dolgozatból álló sorozatunkat, mely az Acta Math. Hung.-ban fog megjelenni.

témakörre, melyben GALLAI TIBOR fiatalabb éveiben sok szép, publikált és publikálatlan eredményt ért el (pl. disszertációjában*).

2. Fennáll tehát a következő két tétel (melyek persze összefoglalhatók volnának az $[x]$-függvény felhasználásával, de melyet itt elkerülendőnek tartok.)

I. TÉTEL. *$n=2k$ esetén az* (1. 1) *normálás és az* (1. 5) *mellékfeltétel mellett*

$$\min_{z_j} \max_{\nu=k+1,\ldots,2k} |s_\nu| = \left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}\right)^{-1};$$

az egyenlőség jele csakis akkor érhető el, ha $z_1, z_2, \ldots, z_{2k}$ a

$$\left(\sum_{\nu=k+1}^{2k}\frac{1}{\nu}\right)z^{2k}-\sum_{\nu=k+1}^{2k}\frac{z^{2k-\nu}}{\nu}=0 \tag{2. 1}$$

egyenlet gyökei.

II. TÉTEL. *Ha $n=2k+1$, az* (1. 1) *normálás és az* (1. 6) *mellékfeltétel mellett*

$$\min_{z_j} \max_{\nu=k+1,\ldots,2k+1} |s_\nu| = \left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k+1}\right)^{-1};$$

az egyenlőség jele csakis akkor érhető el, ha $z_1, z_2, \ldots, z_{2k+1}$ a

$$\left(\sum_{\nu=k+1}^{2k+1}\frac{1}{\nu}\right)z^{2k+1}-\sum_{\nu=k+1}^{2k+1}\frac{z^{2k+1-\nu}}{\nu}=0 \tag{2. 2}$$

egyenlet gyökei.

Mivel a két tétel bizonyítása teljesen parallel halad, elég a 2. tételt igazolni. Tekintsük az

$$F(z)\overset{\text{def}}{=}z^{2k+1}+a_1z^{2k}+\ldots+a_{2k+1}=0 \tag{2. 3}$$

egyenletet, melynek $z_1(=1), z_2, \ldots, z_{2k+1}$ gyökei. Ekkor a NEWTON—GIRARD formulák értelmében

$$\begin{aligned} s_1+a_1&=0\\ s_2+a_1s_1+a_2&=0\\ &\cdots\\ s_{2k+1}+a_1s_{2k}+\ldots+a_{2k}s_1+(2k+1)a_{2k+1}&=0. \end{aligned} \tag{2. 4}$$

* „Valós zéróhelyekkel bíró polinomokról," Matem. és Fizikai Lapok, 46 (1939) p. 31—57.

Az (1. 6) mellékfeltétel következtében ebből szuccesszive következik, hogy

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0. \tag{2. 5}$$

Tekintsük (2. 4)-nek v-ik egyenletét, ahol $k+1 \leqq v \leqq 2k+1$. Vegyük észre, hogy ezen egyenletben az első és utolsó tagtól eltekintve minden tag 0, vagy (2. 5), vagy (1. 6) miatt. Tehát ezen v-kre

$$a_v = -\frac{s_v}{v}$$

és így az $F(z)=0$ egyenlet a

$$z^{2k+1} - \frac{s_{k+1}}{k+1} z^k - \frac{s_{k+2}}{k+2} z^{k-1} - \ldots - \frac{s_{2k}}{2k} z - \frac{s_{2k+1}}{2k+1} = 0 \tag{2. 6}$$

alakot ölti. A $z_1 = 1$ normális miatt ebből

$$\sum_{v=k+1}^{2k+1} \frac{s_v}{v} = 1, \tag{2. 7}$$

amiből

$$\left\{ \sum_{v=k+1}^{2k+1} \frac{1}{v} \right\} \max_{v=k+1,\ldots,2k+1} |s_v| \geqq \left| \sum_{v=k+1}^{2k+1} \frac{s_v}{v} \right| = 1 \tag{2. 8}$$

tényleg. Az egyenlőség jele (2. 7)-ben nyilván csak akkor állhat fenn, ha

$$s_{k+1} = s_{k+2} = \ldots = s_{2k+1} = \left(\sum_{v=k+1}^{2k+1} \frac{1}{v} \right)^{-1} e^{i\alpha}$$

és (2. 7) miatt $\alpha = 0$. Vagyis az extremális rendszer csak a (2. 2) egyenlet megoldásrendszere lehet; csak azt kell még belátni, hogy e megoldásrendszer (1. 1)-et kielégíti. Hogy $z_1 = 1$, az (2. 2)-ből nyilvánvaló. Hogy belássuk, hogy a (2. 2) egyenlet többi gyökei is a zárt egységkörbe esnek, osszunk le (2. 2)-ben a $(z-1)$ gyöktényezővel; így a többi gyök kielégíti az

$$\left(\frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{2k+1} \right)(z^{2k} + z^{2k-1} + \ldots + z^k) +$$

$$+ \left(\frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k+1} \right) z^{k-1} + \left(\frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{2k+1} \right) z^{k-2} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{2k+1} = 0$$

egyenletet. Ennek gyökei azonban Kakeya tétele miatt tényleg a zárt egységkörbe esnek.

Érdekes feladat lenne $n=3k$ esetén megoldani a megfelelő extremumfeladatot, ha a mellékfeltétel

$$s_1=s_2=\ldots=s_k=0. \tag{2.9}$$

3. Most térjünk rá az I. és II. tételek alkalmazására. Legyen a megoldandó egyenlet

$$z^{2k}+a_{k+1}z^{k-1}+a_{k+2}z^{k-2}+\ldots+a_{2k}=0 \tag{3.1}$$

alakú. Ekkor a gyökök első k hatványösszegét a NEWTON—GIRARD formulák alapján meghatározva (1. 5) nyilván teljesül. Ha e hatványösszegek $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2k}$, akkor alkalmazva az idézett könyv német kiadásának 108—109. oldalain található gondolatmenetet adódik a következő

III. TÉTEL. *Ha a* (3. 1) *egyenlet* $z_1, z_2, \ldots, z_{2k}$ *gyökeire*

$$|z_1|\geqq|z_2|\geqq\ldots\geqq|z_{2k}|,$$

akkor

$$\frac{1}{2k}\leqq\frac{|z_1|}{\max\limits_{\nu=k+1,\ldots,2k}|\sigma_\nu|^{\frac{1}{\nu}}}\leqq\sum_{\nu=k+1}^{2k}\frac{1}{\nu}. \tag{3.2}$$

Továbbá

IV. TÉTEL. *Ha a*

$$z^{2k+1}+a_{k+1}z^k+a_{k+2}z^{k-1}+\ldots+a_{2k}z+a_{2k+1}=0 \tag{3.3}$$

egyenlet $z_1, z_2, \ldots, z_{2k+1}$ *gyökeire*

$$|z_1|\geqq|z_2|\geqq\ldots\geqq|z_{2k+1}|$$

akkor

$$\frac{1}{2k+1}\leqq\frac{|z_1|}{\max\limits_{\nu=k+1,\ldots,2k+1}|\sigma_\nu|^{\frac{1}{\nu}}}\leqq\left(\sum_{\nu=k+1}^{2k+1}\frac{1}{\nu}\right). \tag{3.4}$$

Az általános esetben könyvem idézett gondolatmenetéből az ott felhasznált hatványösszegtételemet ATKINSON erősebb egyenlőtlenségével helyettesítve az adódik, hogy ha a

$$f(z)\overset{\text{def}}{=}z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n=0 \tag{3.5}$$

egyenlet gyökeinek ν-edik hatványösszege σ_ν és gyökei $z_1, \ldots, z_n$, ahol

$$|z_1| \geqq |z_2| \geqq \ldots \geqq |z_n|,$$

akkor

$$\frac{1}{n} \leqq \frac{|z_1|}{\max\limits_{\nu=1,2,\ldots,n} |\sigma_\nu|^{\frac{1}{\nu}}} \leqq 6, \tag{3. 6}$$

míg ATKINSON tétele helyett CASSELS (1. 4) tételét alkalmazva

$$\frac{1}{n} \leqq \frac{|z_1|}{\max\limits_{\nu=1,2,\ldots,2n-1} |\sigma_\nu|^{\frac{1}{\nu}}} \leqq 1. \tag{3. 7}$$

(3. 2) és (3. 4)-ben a felső korlát nem javítható, (3. 6)-ban az alsó, (3. 7)-ben egyik sem. Érdekes feladat volna (3. 2) és (3. 4)-ben az alsó korlát javítása.

Persze, a reciprok egyenletre térve $|z_n|$-re állanak fenn analóg egyenlőtlenségek.

4. A (3. 6) és (3. 7) egyenlőtlenségek a numerikus alkalmazásban nem direkt, hanem $f(z)$ μ-ik GRAEFFE-transzformáltjára alkalmazandók; ha $\sigma_{\nu\mu}$ a μ-ik GRAEFFE-transzformált gyökeinek ν-ik hatványösszege (mely $f(z)$ együtthatóiból az első három alapművelettel nyerhető), akkor (3. 6), ill. (3. 7)

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2^\mu}} \leqq \frac{|z_1|}{\left\{\max\limits_{\nu=1,\ldots,n} |\sigma_{\nu\mu}|^{\frac{1}{\nu}}\right\}^{\frac{1}{2^\mu}}} \leqq 6^{\frac{1}{2^\mu}} \tag{4. 1}$$

ill.

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2^\mu}} \leqq \frac{|z_1|}{\left\{\max\limits_{\nu=1,\ldots,2n-1} |\sigma_{\nu\mu}|^{\frac{1}{\nu}}\right\}^{\frac{1}{2^\mu}}} \leqq 1 \tag{4. 2}$$

egyenlőtlenségekbe mennek át. Így a körgyűrű az $|z| = 1$ körvonalhoz tetszőleges közelre zsugorítható, ha μ-t (*csupán n*-től és a kívánt precízségtől függően!) elég nagynak választjuk. A gyakorlatban nehézséget okoz azonban — speciális új gépektől eltekintve — az, hogy a GRAEFFE-transzformáltak együtthatói μ-vel gyorsan nőnek. Emiatt teoretikus cél a körgyűrűt, esetleg speciálisabb egyenlettípusok esetére szűkíteni. A III. és IV. tételek ezirányú eredmények.

5. Az ötöd-, ill. hatodfokú egyenleteknél a (3. 3), ill. (3. 1) típus a

$$z^5 + a_3 z^2 + a_4 z + a_5 = 0, \tag{5. 1}$$

ill.

$$z^6 + a_4 z^2 + a_5 z + a_6 = 0 \tag{5. 2}$$

alakokat jelentik. Mint jólismert, az általános ötöd-, ill. hatodfokú egyenletek legfeljebb harmadfokú egyenletek megoldása után ilyen alakra hozhatók (persze GRAEFFE-transzformáció bevetése esetén az (5. 1), ill. (5. 2) alakra hozás a GRAEFFE-transzformáció elvégzése *után* alkalmazandó). Hogy csak másodfokú egyenlet megoldása kelljen, ahhoz csak a

$$z^6 + a_3 z^3 + a_4 z^2 + a_5 z + a_6 = 0 \tag{5. 3}$$

normálalak elegendő. Ez pedig azon általános feladathoz vezet az előbbiek alapján, hogy, ha $n = 2k$, akkor mi

$$\max_{\nu = 1, 2, \ldots, 2k} |s_\nu| \tag{5. 4}$$

minimuma, ha az (1. 1) normálás mellett

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_{k-1} = 0? \tag{5. 5}$$

Előbbi gondolatmenet ismétlése arra vezet, hogy az (1. 1) normálás teljesülése mellett $s_k, s_{k+1}, \ldots, s_{2k}$ között az egyetlen megszorítás az

$$\frac{s_{k+1}}{k+1} + \frac{s_{k+2}}{k+2} + \ldots + \frac{s_{2k}}{2k} = 1 - \frac{s_k}{k} + \frac{s_k^2}{2k^2} \tag{5. 6}$$

reláció. Rögzítve ebben egyelőre s_k-t nyerjük, hogy

$$\max_{\nu = k+1, \ldots, 2k} |s_\nu| \geqq \left(\sum_{\nu = k+1}^{2k} \frac{1}{\nu} \right)^{-1} \left| 1 - \frac{s_k}{k} + \frac{s_k^2}{2k^2} \right|.$$

Ha rövidség kedvéért

$$\left(\sum_{\nu = k+1}^{2k} \frac{1}{\nu} \right)^{-1} = A, \tag{5. 7}$$

akkor tehát

$$\min_{z_j} \max_{\nu = k, k+1, \ldots, 2k} |s_\nu| \geqq \min_{\omega} \max \left(k\,|\omega|, \left| 1 - \omega + \frac{\omega^2}{2} \right| \right). \tag{5. 8}$$

A minimax értéke kissé hosszadalmas diszkusszióval persze könnyen meghatározható volna; nehezebbnek látszik annak eldöntése, hogy az extremális értékeknek megfelelő polinom gyökei $|z| \leqq 1$-be esnek. Mivel

azonban a minimax A-nál csak igen kevéssel kisebb, itteni céljainknak megfelel a következő becslés. Ha $|\omega| \geqq \frac{A}{k}$, akkor a max nyilván

$$\geqq A.$$

Ha $|\omega| \leqq \frac{A}{k}$, akkor a belső max

$$\geqq A\left(1-\frac{A}{k}-\frac{A^2}{2k^2}\right),$$

tehát

$$\min_{z_j} \max_{\nu=k,k+1,\ldots,2k} |s_\nu| \geqq A\left(1-\frac{A}{k}-\frac{A^2}{2k^2}\right). \tag{5.9}$$

Ebből, mint előbb, adódik az

V. TÉTEL. *Ha a*

$$z^{2k}+a_k z^k+a_{k+1}z^{k-1}+\ldots+a_{2k-1}z+a_{2k}=0$$

egyenlet gyökeinek ν-ik hatványösszege σ_ν, akkor a z_1 maximális abszolút értékű gyökre az

$$\frac{1}{2k} \leqq \frac{|z_\nu|}{\max\limits_{\nu=k,k+1,\ldots,2k} |\sigma_\nu|^{\frac{1}{\nu}}} \leqq \left(\sum_{\nu=k+2}^{2k} \frac{1}{\nu}\right) \frac{1}{1-\frac{A}{k}-\frac{A^2}{2k^2}}$$

(ahol A az (5. 7) alatti érték) egyenlőtlenség áll.

Itt az egyenlőség jele egyik helyen sem érhető el.

Az általános esetben z^{n-1} együtthatója egyszerű transzformációval 0-á tehető. Ez a tény a (3. 6)—(3. 7) alattinál kisebb relatív-hibájú körgyűrűk megtalálásának lehetőségét veti fel a következő két szélsőérték-feladat megoldása után.

I. Mi

$$\min_{z_j} \max_{\nu=2,3,\ldots,n} |z_1^\nu+\ldots+z_n^\nu|$$

ha az (1. 1) normálási feltétel mellett az $s_1=0$ mellékfeltételt is kiköt-jük?

II. Mi

$$\min_{z_j} \max_{\nu=2,3,\ldots,2n-1} |z_1^\nu+\ldots+z_n^\nu|$$

ha az (1. 1) normálási feltétel mellett az $s_1=0$ mellékfeltételt is kiköt-jük?

Fenti eredmények az algebrai egyenlet legnagyobb, ill. legkisebb abszolút értékű gyöke *abszolút értékének* közelítő meghatározására vonat-

koztak. Ezen tételek azonban módot adnak arra is, hogy magukat a gyököket is közelítőleg meghatározzuk, éspedig *előírt relatívhiba mellett csak ettől és n-től függő számú lépésben.* Erre más helyütt fogok visszatérni.

ОБ ОДНОЙ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ КАСАЮЩЕЙСЯ СТЕПЕННЫЕ СУММЫ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ, С ПРИЛОЖЕНИЕМ

П. Туран

В более ранных заметках автор осуществил применимость своих методов (построенных на цепи связанных между собой минимум — максимум задач) между другим, к приближенному решению алгебраических уравнений. Следуя этим идеям автор решил следующую задачу. Если $z_1,\ldots,z_n$ комплексные числа с нормализацией $\max_j |z_j| = 1$, тогда, если обозначить через s_ν сумму $z_1^\nu + z_2^\nu + \ldots + z_n^\nu$, требуется найти величину

$$M_n = \min_{z_j} \max_{\nu=1,\ldots,n} |s_\nu|$$

с дальнейшим добавочным условием

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_{\left[\frac{n}{2}\right]} = 0.$$

В этой статье показано, что, например, в случае $n = 2k+1$ мы имеем:

$$M_{2k+1} \leqq \left(\sum_{\nu=k+1}^{2k+1} \frac{1}{\nu} \right)^{-1}$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, если числа z_j являются корнями уравнения

$$\left(\sum_{\nu=k+1}^{2k+1} \frac{1}{\nu} \right) z^{2k+1} - \sum_{\nu=k+1}^{2k+1} \frac{z^{2k+1-\nu}}{\nu} = 0.$$

Упоминается применение к распределению корней алгебраических уравнений частного вида.

ON AN EXTREMAL-PROBLEM CONCERNING POWER-SUMS OF COMPLEX NUMBERS WITH AN APPLICATION

P. Turán

In previous notes the author realised the applicability of his methods (relying on a coherent chain of minimax problems) among others to the approximative solution of algebraic equations. Along this line of ideas the following prob-

lem is solved. If $z_1, \ldots, z_n$ are complex numbers with the normalisation $\max_j |z_j| = 1$ then with the notation $s_\nu = z^\nu + \ldots + z_n^\nu$ what is

$$M_n = \min_{z_j} \max_{\nu=1,\ldots,n} |s_\nu|$$

under the further side-condition

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_{\left[\frac{n}{2}\right]} = 0?$$

It is shown in this paper that e. g. in the case $n = 2k+1$ we have

$$M_{2k+1} = \left(\sum_{\nu=k+1}^{2k+1} \frac{1}{\nu} \right)^{-1};$$

equality if and only if the z_j's are zeros of the equation

$$\left(\sum_{\nu=k+1}^{2k+1} \frac{1}{\nu} \right) z^{2k+1} - \sum_{\nu=k+1}^{2k+1} \frac{z^{2k+1-\nu}}{\nu} = 0.$$

An application to the distribution of roots of algebraic equations of special form is indicated.

Másodrendű közönséges differenciálegyenletek egy osztályának differenciálgeometriai vizsgálata

FARKAS MIKLÓS

Jelen dolgozatban azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy milyen esetekben tekinthetők bizonyos másodrendű differenciálegyenletek integrálgörbéi valamely Riemann-tér geodetikus vonalainak. A felvetett kérdés megoldását jól kezelhető, a gyakorlatban, konkrét differenciálegyenlet vizsgálatánál könnyen alkalmazható kritériumok alakjában nyerjük és e kritériumok alkalmazását néhány elemi példán be is mutatjuk. Érdekes eredményt kapunk arra nézve is, hogy a feltételek teljesülése esetén milyen Riemann-térrel van dolgunk. A szóban forgó differenciálegyenlet-típus jelentőségét az húzza alá, hogy általános másodrendű differenciálegyenletek megoldásai az esetek jelentős részében jól approximálhatók a tárgyalt differenciálegyenlet-típus megoldásaival. A kapott eredmények tehát, mint erre később rámutatunk, felhasználhatók általános másodrendű differenciálegyenlet approximatív megoldásainak kvalitatív vizsgálatára.

Régóta és többen foglalkoztak azzal a kérdéssel, hogy milyen feltételek mellett transzformálható egy általános

$$y'' = f(x, y, y')$$

másodrendű differenciálegyenlet az $y''=0$ alakra: 1. [11] és [1]. BERWALD posthumus dolgozatában bebizonyítja: ennek szükséges és elégséges feltétele az, hogy a differenciálegyenlet

$$y''=Ay'^3+3By'^2+3Cy'+D$$

alakú legyen, ahol az A, B, C, D együtthatók x és y függvényei, és A, B, C, D kielégítsenek egy két egyenletből álló *másodrendű* parciális differenciálegyenletrendszert; l. [1] 10. §. Berwald idézett dolgozatából kitűnik, hogy az általunk felvetett általánosabb problémának sem lehet megoldása az előbbinél általánosabb típusú egyenlet esetében. Mi ebben a dolgozatban az $A=0$ speciális esetnek megfelelő egyenlet vizsgálatára szorítkozunk.

L. P. EISENHART, O. VEBLEN és T. Y. THOMAS vizsgálták többek között azt a kérdést, hogy valamely n-dimenziós affin-összefüggő tér geodetikus vonalai milyen feltételek mellett tekinthetők egy Riemann-tér geodetikus vonalainak, vagyis affin-összefüggő terek metrizálhatóságának problémáját; l. [6], [12], [10]. A metrizálhatóságra több szükséges és elégséges feltételt találtak, az együtthatókra vonatkozó explicit kritériumokat azonban nem adtak, aminthogy ilyenek felírása tetszőleges n dimenziószám esetén lehetetlennek is látszik.

Tudomásom szerint a jelen dolgozatban felvetett kérdést eddig nem vizsgálták. Ez meglepő, különösen ha figyelembe vesszük, hogy a variációszámítás inverzproblémáját, mellyel a szóban forgó kérdés közeli rokonságban van, két dimenzióban már DARBOUX (l. [4] 604—609. §), három dimenzióban pedig J. DOUGLAS (l. [5]) megoldotta. Itt ragadom meg az alkalmat, hogy kifejezzem köszönetemet VARGA OTTÓnak értékes útbaigazításaiért, azért a segítségért, amelyet az első kézirat hiányosságainak kiküszöbölésében nyújtott.

Tekintsük a

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x,y)+q(x,y)\frac{dy}{dx}+r(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0 \tag{1}$$

differenciálegyenletet, melyet az *elsőrendű deriváltban kvadratikus másodrendű differenciálegyenletnek* nevezünk. Tételezzük fel, hogy az (1) egyenletben szereplő p, q és r függvények folytonos elsőrendű parciális deriváltakkal rendelkeznek. Vezessük be a

$$t=x,\ x^1=x,\ x^2=y \tag{2}$$

jelöléseket. Az (1) egyenletet a következő, vele ekvivalens rendszer alakjában írhatjuk

$$\begin{gathered}\frac{d^2x^1}{dt^2}=0\\ \frac{d^2x^2}{dt^2}+p(x^1,x^2)\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2+q(x^1,x^2)\frac{dx^1}{dt}\frac{dx^2}{dt}+r(x^1,x^2)\left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2=0.\end{gathered} \tag{3}$$

Nyilvánvaló, hogy a (3) differenciálegyenletrendszer azon kétdimenziós affin-összefüggő tér kanonikus paraméterezésben adott geodetikus vonalait meghatározó differenciálegyenletrendszernek tekinthető, melynek átviteli mennyiségei az x^1, x^2 koordinátarendszerben

$$\begin{gathered}\Gamma^1_{11}=\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=\Gamma^1_{22}=0\\ \Gamma^2_{11}=p(x^1,x^2),\ \Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\tfrac{1}{2}q(x^1,x^2),\ \Gamma^2_{22}=r(x^1,x^2).\end{gathered} \tag{4}$$

Ennek belátására csak össze kell vetnünk a (3) rendszert az affin-összefüggő terek kanonikus paraméterezésben adott geodetikus vonalait meghatározó

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\cdot\frac{dx^k}{dt}=0 \tag{5}$$

differenciálegyenletrendszerrel. Ismeretes továbbá, hogy a (4) átviteli mennyiségekkel meghatározott affin-összefüggő tér az egyetlen olyan tér, melynek geodetikus vonalai kanonikus paraméterezésben (3) t-től függő megoldásai; l. [9] 406. o.

1. TÉTEL. *A* (3) *differenciálegyenletrendszer megoldásai akkor és csak akkor lesznek egy Riemann-tér (pszeudoriemann-tér) kanonikus paraméterezésben adott geodetikus vonalai, ha az* (1) *egyenlet együtthatói kielégítik a*

$$\frac{\partial q}{\partial y}=2\frac{\partial r}{\partial x} \tag{6}$$

$$4\left(rp+\frac{\partial p}{\partial y}\right)=q^2+2\frac{\partial q}{\partial x} \tag{7}$$

parciális differenciálegyenletrendszert.

Bizonyítás. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a Γ^i_{jk} átviteli mennyiségek valamely Riemann-tér metrikája által generált affin-összefüggést határozzanak meg, a

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^p}=g_{kj}\Gamma^k_{pi}+g_{ik}\Gamma^k_{pj} \tag{8}$$

parciális differenciálegyenletrendszer olyan g_{ik} megoldásának létezése, mely kielégíti a

$$g_{ik}=g_{ki} \qquad \det g_{ik}\neq 0 \tag{9}$$

feltételeket; l. [10] 215. o. Ha a (8) rendszer megoldásait szolgáltató g_{ik} tenzor pozitív definít kvadratikus alakot határoz meg, a a tér tulajdonképpeni Riemann-tér, ha nem, akkor pszeudoriemann-tér.

A (8) rendszer esetünkben a (4) összefüggések alapján a

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}=2g_{12}p, \quad \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}=g_{12}q \tag{10}$$

$$\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}=\frac{1}{2}g_{12}q+g_{22}p, \quad \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}=g_{12}r+\frac{1}{2}g_{22}q \tag{11}$$

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}=g_{22}q, \quad \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}=2g_{22}r \tag{12}$$

alakot ölti, ahol a (9) feltételek közül az elsőt már figyelembe vettük. A (12) egyenletrendszer, mely (10)-től és (11)-től függetlenül oldható meg a

$$\frac{\partial \ln g_{22}}{\partial x^1} = q, \quad \frac{\partial \ln g_{22}}{\partial x^2} = 2r$$

alakban is írható. A megoldhatóság szükséges és elégséges feltétele a

$$\frac{\partial q}{\partial x^2} = 2\frac{\partial r}{\partial x^1},$$

ill. a (2) jelölések figyelembe vételével a (6) egyenlet fennállása. Ha feltételezzük, hogy (6) teljesül és (12)-t már megoldottuk, felírhatjuk annak a feltételét, hogy a (11) rendszer megoldható JACOBI-féle rendszer legyen (l. [8] 48. o.) Eredményül a (6) és (7) egyenleteket kapjuk. Végül feltételezve, hogy g_{12}-t már meghatároztuk, a (10) rendszer megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele

$$\frac{\partial}{\partial x^2}(2g_{12}p) = \frac{\partial}{\partial x^1}(g_{12}q),$$

vagyis a deriválást elvégezve

$$2p\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} + 2g_{12}\frac{\partial p}{\partial x^2} = q\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} + g_{12}\frac{\partial q}{\partial x^1}.$$

Ha felhasználjuk a (11) egyenleteket, a

$$g_{12}\left(2rp + 2\frac{\partial p}{\partial x^2}\right) = g_{12}\left(\frac{1}{2}q^2 + \frac{\partial q}{\partial x^1}\right)$$

összefüggést kapjuk, amiből (7) következik.

Az integrálhatóság (6) és (7) feltételeinek teljesülése biztosítja tetszőleges kezdeti feltételeket kielégítő g_{ik} megoldásrendszer létezését. Világos, hogy a g_{ik}-k kezdeti értékei oly módon adhatók meg, hogy (9) második feltétele teljesüljön. E feltétel teljesülése egy pontban a g_{ik} megoldások folytonossága következtében maga után vonja e feltétel fennállását a pont bizonyos környezetében. Ezzel állításunkat bizonyítottuk.

Vizsgáljuk most azt a kérdést, hogy amennyiben a (6) és (7) feltételek fennállnak, vagyis (3) egy Riemann-tér geodetikus vonalainak differenciálegyenletrendszere, ahol t kanonikus paraméter, milyen következtetést tudunk levonni a szóban forgó térre nézve. A következő meglepő eredményre jutunk:

2. TÉTEL. *Amennyiben a* (3) *egyenletrendszerre teljesülnek a* (6) *és* (7) *feltételek, tehát, ha* (3) *integrálgörbéi egy Riemann-tér (pszeudoriemann-tér) geodetikus vonalai és ebben a térben t kanonikus paraméter, a szóban forgó tér csak lokálisan euklidesi (pszeudoeuklidesi) lehet.*

Bizonyítás. Tegyük fel ugyanis, hogy teljesülnek a (6) és (7) feltételek és írjuk fel a tér görbületi tenzorát

$$R^q_{lki}=\frac{\partial\Gamma^q_{li}}{\partial x^k}+\Gamma^q_{kp}\Gamma^p_{li}-\frac{\partial\Gamma^q_{ki}}{\partial x^l}-\Gamma^q_{lp}\Gamma^p_{ki} \qquad (l,k,i,q=1,2).$$

Figyelembe véve a (4) összefüggéseket könnyen látható, hogy a görbületi tenzor komponensei közül kizárólag az

$$R^2_{12i}=-R^2_{21i} \qquad (i=1,2)$$

komponensek lehetnek zérustól különbözők:

$$R^2_{121}=\frac{\partial p}{\partial x^2}+pr-\frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial x^1}-\frac{1}{4}q^2$$

$$R^2_{122}=\frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial x^2}-\frac{\partial r}{\partial x^1}.$$

A (6) és (7) feltételek teljesülése miatt az utóbbi komponensek is azonosan zérussal egyenlők, amivel állításunkat igazoltuk.

A 2. Tétel megfordítása általában igaz. Ha egy affin-összefüggő tér görbületi tenzorának komponensei azonosan zérussal egyenlők, a (8) rendszer teljesen integrálható, vagyis a tér Riemann-tér; l. 7. 81. o.

Végeredményben tehát az együtthatóknak csak *elsőrendű* parciális deriváltjait tartalmazó (6) és (7) egyenletek fennállása szükséges és elégséges ahhoz, hogy (3) megoldásai egy lokálisan euklidesi tér kanonikus paraméterezésben adott egyenesei legyenek, vagyis (1) megfelelő koordinátatranszformációval a

$$\frac{d^2\eta}{d\zeta^2}=0$$

alakra legyen hozható.

A (3) rendszer megoldásai nemcsak a (4) összefüggésekkel definiált affin-összefüggő tér, hanem minden vele *projektív ekvivalens* affin-összefüggő tér geodetikus vonalainak tekinthetők. A (4) affin-összefüggő térrel projektív ekvivalens terek $\hat{\Gamma}^i_{jk}$ átviteli mennyiségei a (4) átviteli mennyiségekkel a következőképpen függnek össze

$$\hat{\Gamma}^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}+\delta^i_j\varphi_k+\delta^i_k\varphi_j,$$

ahol δ^i_j a Kronecker-szimbólum és φ_k tetszőleges vektor.

Eredményeinkből következik, hogy a (6) és (7) feltételek teljesülése esetén a (4)-vel projektív ekvivalens és metrizálható terek állandó görbületűek. Ugyanis egy Riemann-tér akkor és csak akkor *projektív euklidesi*, ha állandó görbületű (l. [7] 97. o.) Projektív euklidesi terek metrizálhatóságának feltételeire nézve l. [7] 98. o.

Kapott eredményeink az

$$y'' = f(x, y, y') \tag{13}$$

általános másodrendű differenciálegyenlet approximatív megoldásainak vizsgálatát is lehetővé teszik, ha feltételezzük, hogy f az y' változóban analitikus és y' szerinti első és második deriváltjával együtt x és y szerint folytonosan differenciálható. E feltételek teljesülése esetén ugyanis az f függvény y' szerint haladó konvergens Taylor-sorba fejthető, melynek másodfokúnál magasabbfokú tagjait elhagyva a (13) egyenletnek (1) típusú approximációját nyerjük.

Valószínűnek látszik, hogy a gyakorlati szempontból fontos háromdimenziós esetben, vagyis a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F(x, y, z, y', z')$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = G(x, y, z, y', z')$$

egyenletrendszer esetében, ahol F és G az y' és z' változójuk másodfokú polinomjai, is sikerül (6) és (7)-hez hasonló explicit kritériumokat találni, továbbá az, hogy ez az eset már nem „elfajuló" olyan értelemben, hogy a 2. Tételnek megfelelő tétel nem áll fenn.

Eredményeink alkalmazását két elemi példán mutatjuk be.

1. *Példa.* Tekintsük az

$$y'' + p + qy' + ry'^2 = 0 \tag{14}$$

differenciálegyenletet, ahol p, q, r zérustól különböző állandók és $'$ az x független változó szerinti deriválást jelöli. Vizsgáljuk azt a kérdést, hogy milyen feltételek mellett lesznek e differenciálegyenlet megoldásai valamely euklidesi sík egyenesei.

Az előbbiek alapján a p, q, r állandóknak ki kell elégíteniük a (6) és (7) feltételeket. (6) azonosan fennáll tetszőleges p, q és r állandók esetén, (7) pedig a következő alakot veszi fel

$$4rp = q^2. \tag{15}$$

(14) megoldásai tehát akkor és csak akkor tekinthetők valamely euklidesi sík egyeneseinek, ahol x kanonikus paraméter, ha az együtthatók között fennáll a (15) feltétel, vagyis

$$p=\frac{q^2}{4r}$$

és (14) a következő alakban írható

$$y''=-\frac{1}{4r}(q+2ry')^2 \tag{16}$$

A (10), (11), (12) egyenletekből álló parciális differenciálegyenletrendszer, ahol most q, r állandók és $p=\frac{q^2}{4r}$ elemi úton integrálható. Az egyszerű de kissé hosszadalmas számítást mellőzzük és csak az eredményt közöljük:

$$g_{11}=c_1^2\frac{q^2}{4r^2}e^{qx+2ry}+c_2^2\frac{q}{r}e^{\frac{q}{2}x+ry}+c_3$$

$$g_{12}=g_{21}=c_1^2\frac{q}{2r}e^{qx+2ry}+c_2^2e^{\frac{q}{2}x+ry}$$

$$g_{22}=c_1^2e^{qx+2ry},$$

ahol c_1, c_2, c_3 tetszőleges állandók. A g_{ik} metrikus tenzor determinánsa

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}=e^{qx+2ry}(c_1^2c_3-c_2^2)>0$$

minden (x, y) pontban, ha pl. az állandókat a következőképpen választjuk

$$c_1=1,\quad c_3=1,\quad c_2=0.$$

Ebben az esetben a sík tulajdonképpeni euklidesi sík, melynek ívelemnégyzete az (x, y) görbevonalú koordinátarendszerben

$$ds^2=\left(\frac{q^2}{4r^2}e^{qx+2ry}+1\right)dx^2+\frac{q}{r}e^{qx+2ry}dx\,dy+e^{qx+2ry}dy^2.$$

A (16) differenciálegyenlet megoldásai e sík egyeneseit szolgáltatják. A (16) differenciálegyenlet könnyen megoldható, a megoldások ismeretében megadható olyan (ξ, η) koordinátarendszer, melyben a metrikus tenzor komponensei állandók és a (16) egyenlet a

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2}=0$$

alakot veszi fel.

2. *Példa.* Tekintsük az

$$y''+a(x)y'+b(x)y=f(x) \tag{17}$$

általános másodrendű lineáris differenciálegyenletet és tegyük fel, hogy az $a(x)$, $b(x)$ és $f(x)$ függvények folytonosan differenciálhatók. A (17) egyenletet (1)-el összehasonlítva látjuk, hogy jelen esetben

$$p(x, y) = b(x)y - f(x), \quad q(x, y) = a(x)$$

és

$$r(x, y) = 0.$$

A (6) feltétel azonosan teljesül, (7) pedig a következő alakot veszi fel

$$4b(x) = a^2(x) + 2a'(x). \tag{18}$$

A (17) egyenlet megoldásai tehát akkor és csak akkor egyenesei egy euklidesi síknak, ahol x kanonikus paraméter, ha együtthatói kielégítik a (18) differenciálegyenletet. Mivel a (18) feltétel az $f(x)$ függvényt nem tartalmazza, ha a (17) egyenlethez tartozó homogén lineáris egyenlet a kívánt tulajdonságú, (17) is az.

IRODALOM

[1] BERWALD, L. Über Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung deren Integralkurven mit dem System der geraden Linien topologisch aequivalent sind; Annals of Math. 48 (1947) 193–215. o.

[2] BOLZA, O. Vorlesungen über Variationsrechnung; Leipzig, 1949.

[3] CARTAN, E. Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective; Paris, 1937.

[4] DARBOUX, G. Leçons sur la théorie générale des surfaces; Paris, 1894.

[5] DOUGLAS, J. Solution of the inverse problem of the calculus of variations; Trans. Am. Math. Soc. 50 (1941) 71–128. o.

[6] EISENHART, L. P. Veblen, O. The Riemann-geometry and its generalization; Proc. Nat. Ac. Sc. 8. (1922) 19–23. o.

[7] EISENHART, L. P. Non-Riemannian geometry; New York, 1927.

[8] KAMKE, E. Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, 2., Leipzig, 1950.

[9] Рашевский, П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ; Москва, 1953.

[10] THOMAS, T. Y. The differential invariants of generalized spaces; Cambridge, 1934.

[11] TRESSE, M. A. Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle ordinaire du second ordre $y''=\omega(x, y, y)$; Leipzig, 1896. (Preisschriften der Jablonowskischen Gesellschaft 32.)

[12] VEBLEN, O., Thomas, T. Y. The geometry of paths; Trans. Am. Math. Soc. 25 (1923) 551–608. o.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

М. Фаркаш

Автор исследует вопрос, при каких условиях представляют решения дифференциального уравнения

$$y'' + p(x, y) + q(x, y)y' + r(x, y)y'^2 = 0 \tag{A}$$

геодезические линии риманова пространства двух измерений, и доказывает, что необходимое и достаточное условие существования римнова пространства, геодезическими линиями которого в канонической параметризации являются интегральные кривые уравнения (A), может быть представлено вследующей форме:

$$\frac{\partial q}{\partial y} = 2\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$4\left(rp + \frac{\partial p}{\partial y}\right) = q^2 + 2\frac{\partial q}{\partial x}. \tag{B}$$

В дальнейшем доказано, что если коэффициенты уравнения (A) удовлетворяют условиям (B), тогда пространство есть локально евклидово (псевдоевклидово).

В качестве приложения результатов даются некоторые простые примеры.

DIFFERENTIAL GEOMETRIC INVESTIGATION OF A CERTAIN CLASS OF SECOND ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

M. Farkas

In the present paper author investigates the question under which conditions are the solutions of differential equation

$$y'' + p(x, y) + q(x, y)y' + r(x, y)y'^2 = 0 \tag{A}$$

the geodesics of a two dimensional Riemann-space and proves the theorem, that there exists a Riemann-(pseudo-Riemann) space the geodesics of which in canonical parameter are the solutions of (A) if and only if the conditions

$$\frac{\partial q}{\partial y} = 2\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$4\left(rp + \frac{\partial p}{\partial y}\right) = q^2 + 2\frac{\partial q}{\partial x} \tag{B}$$

hold. However if the conditions (B) hold, the space in question is locally euclidean (pseudo-euclidean). There are presented some simple examples as applications of the abovementioned results.

A K_n determináns és alkalmazásai

KUN KUTI MÁRTON

Az alábbiakban egy érdekes és széleskörűen alkalmazható determináns típussal, a

$$K_n = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & -1 & 0 & 0 \dots 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & -1 & 0 \dots 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & -1 \dots 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{n-1,1} & \alpha_{n-1,2} & \alpha_{n-1,3} & \dots \quad -1 \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots \quad \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

determinánssal foglalkozunk, amely — a -1-ekből álló diagonálistól eltekintve — egyúttal kvázideterminánsa* is. (Nevét is e szó kezdőbetűjéről vettük.) A továbbiakban e determináns elemein *csak* az $\binom{n+1}{2}$ számú α_{ik} elemet értjük.

I. A K_n determináns tulajdonságai

A K_n determinánsnak a determinánsok általános tulajdonságain kívül sok érdekes és használható tulajdonsága van, amelyek a Vandermonde-féle és más speciális determinánsoknál szélesebbkörű felhasználásra teszik alkalmassá.

---

* *Megjegyzés;* „Az a_{ik} $(i, k = 1, 2 \dots n)$ elemek kvázideterminánsa alatt az $a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$ alakú szorzatok összegét értjük, ahol $i_1, i_2 \dots i_n$ az $1, 2, \dots n$ elemek egy permutációja és az összeg a lehetséges permutációk mindegyikére kiterjesztendő. A kvázideterminánsa tehát a közönséges determinánstól abban különbözik, hogy az egyes szorzatok, tekintet nélkül az indexek permutációinak jellegére, a saját előjelükkel adandók össze." (Lásd: irodalom [1])

1. *Tulajdonság: A K_n determináns kifejtésében a tagok saját előjelükkel szerepelnek.*

Ugyanis állításunk K_1-re igaz és ha feltesszük, hogy K_{n-1}-re igaz, akkor K_n-nek az utolsó oszlop szerinti

$$K_n = K'_{n-1} + \alpha_{nn} K_{n-1} \quad \ldots \quad (A)$$

kifejtése alapján K'_{n-1}-re is (ez ugyanolyan alakú, mint K_{n-1} és csak az utolsó sorban különbözik tőle) és így K_n-re is igaz.

2. *Tulajdonság: K_n kifejtésében az 1, 2, ..., n tényezős szorzatok száma sorjában* $\binom{n-1}{0}, \binom{n-1}{1} \ldots \binom{n-1}{n-1}$. Ugyanis K_n kifejtése 1, 2, ... n tényezős szorzatokból áll. Ha állításunk K_{n-1}-re igaz, akkor (A) szerint az 1, 2 ... n tényezős szorzatok száma sorjában

K'_{n-1}-ben $\quad \binom{n-2}{0}, \binom{n-2}{1}, \binom{n-2}{2} \ldots \binom{n-2}{n-2}$.

$\alpha_{nn} K_{n-1}$-ben $\quad 0, \binom{n-2}{0}, \binom{n-2}{1} \ldots \binom{n-2}{n-3}, \binom{n-2}{n-2}$.

Tehát K_n-ben $\quad \binom{n-1}{0}, \binom{n-1}{1}, \binom{n-1}{2} \ldots \binom{n-1}{n-2}, \binom{n-1}{n-1}$.

De állításunk K_1-re igaz, tehát K_n-re is igaz.
Ebből következik, hogy a kifejtés tagjainak száma: 2^{n-1}.

3. *Tulajdonság:*

$$K_n = \alpha_{nn} K_{n-1} + \alpha_{n,n-1} K_{n-2} + \ldots + \alpha_{n2} K_1 + \alpha_{n1}.$$

Ugyanis e kifejezés K_n-nek az utolsó sor szerinti kifejtése.

4. *Tulajdonság: Ha a K_n determinánsban az egyes oszlopok elemei egyenlők, akkor*

$$K_n = \alpha_{11}(\alpha_{22}+1)(\alpha_{33}+1)\ldots(\alpha_{nn}+1).$$

Az egyes sorok elemeinek egyenlősége esetén

$$K_n = (\alpha_{11}+1)(\alpha_{22}+1)\ldots(\alpha_{n-1,n-1}+1)\alpha_{nn}.$$

Ez a szorzatalakra hozáskor rögtön látható.

5. *Tulajdonság: Ha K_n-ben az α_{ik} elemek helyébe 1-et írunk, akkor a kifejtés tagjainak számát kapjuk.*

Ez a 4. és 2. tulajdonság alapján triviális. (Lásd: irodalom [2]).

6. *Tulajdonság: K_n-ben az α_{ik} elemhez tartozó algebrai aldeterminánsa két determináns szorzatából áll. Azaz*

$$A_{ik}=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k-1,1} & \alpha_{k-1,2} & \dots & \alpha_{k-1,k-1} & \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{i+1,i+1} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{i+2,i+1} & \alpha_{i+2,i+2} & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n,i+1} & \alpha_{n,i+2} & \dots & \alpha_{nn} & \end{vmatrix}.$$

Ha az α_{ik} elemhez tartozó algebrai aldeterminánst részletesebben felírjuk

$$A_{ik}=(-1)^{i+k}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{k-1,1} & \alpha_{k-1,2} & \dots & \alpha_{k-1,k-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{k,1} & \alpha_{k,2} & \dots & \alpha_{k,k-1} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & \dots & 0 \\ \alpha_{i-1,1} & \alpha_{i-1,2} & \dots & \alpha_{i-1,k-1} & \alpha_{i-1,k+1} & \dots & -1 & 0 \\ \alpha_{i+1,1} & \alpha_{i+1,2} & \dots & \alpha_{i+1,k-1} & \alpha_{i+1,k+1} & \dots & \alpha_{i+1,i} & \alpha_{i+1,i+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha_{i+2,i} & \alpha_{i+2,i+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{n,k-1} & \alpha_{n,k+1} & \dots & \alpha_{ni} & \alpha_{n,i+1} \end{vmatrix}$$

akkor állításunk helyességét közvetlenül beláthatjuk. Ugyanis a fődiagonálisban levő -1 elemek száma: $i-k$.

7. *Tulajdonság: K_n kifejtése akkor és csak akkor homogén kifejezés, ha elérhető, hogy K_n-ben minden α_{ik} elem $m(i-k+1)$ fokszámú homogén kifejezés legyen.*

Ugyanis, ha K_n-et az utolsó oszlop szerint kifejtjük

$$K_n=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n-2,1} & \alpha_{n-2,2} & \dots & -1 & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{n,n-1} & \end{vmatrix} + \alpha_{nn}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n-2,1} & \alpha_{n-2,2} & \dots & -1 & \\ \alpha_{n-1,1} & \alpha_{n-1,2} & \dots & \alpha_{n-1,n-1} & \end{vmatrix}$$

és feltesszük, hogy állításunk a második determinánsra (K_{n-1}-re) igaz és ennél α_{nn}-el az utolsó sorra beszorzunk — ami által a homogénitás megmarad —, akkor mindkét determináns megfelelő elemei azonos fokszámúak lesznek. Tehát az első determináns is és így K_n is homogén. De állításunk K_1-re igaz, tehát igaz K_n-re is.

Definíció: K_n sarokmatrixainak nevezzük azokat az

$$S_i = \begin{Vmatrix} \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{ii} \\ \alpha_{i+1,1} & \alpha_{i+1,2} & \dots & \alpha_{i+1,i} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{ni} \end{Vmatrix}$$

matrixokat, amelyeket K_n-ből úgy kapunk, hogy kihagyjuk az első $i-1$ sort és az utolsó $n-i$ oszlopot.

Az S_1 sarokmatrix azonos az első oszloppal, az S_n pedig az utolsó sorral. K_n-ben n sarokmatrix van.

8. *Tulajdonság: Ha K_n-ből képezzük bármely sarokmatrix elemeinek algebrai aldeterminánsaikkal való kompozícióját, akkor a K_n determináns értékét kapjuk.*

Az S_1 és S_n sarokmatrixokra állításunk triviális.

S_i sarokmatrix esetén képezzük K_n-nek az utolsó $n-i+1$ sora szerinti Laplace-féle kifejtését.

$$K_n = \begin{vmatrix} \alpha_{ii} & -1 & \dots & 0 \\ \alpha_{i+1,i} & \alpha_{i+1,i+1} & \dots & 0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \alpha_{ni} & \alpha_{n,i+1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} K_{i-1} + \begin{vmatrix} \alpha_{i,i-1} & -1 & \dots & 0 \\ \alpha_{i+1,i-1} & \alpha_{i+1,i+1} & \dots & 0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \alpha_{n,i-1} & \alpha_{n,i+1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} K_{i-2}$$

$$+ \dots + \begin{vmatrix} \alpha_{i2} & -1 & \dots & 0 \\ \alpha_{i+1,2} & \alpha_{i+1,i+1} & \dots & 0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \alpha_{n2} & \alpha_{n,i+1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} K_1 + \begin{vmatrix} \alpha_{i1} & -1 & \dots & 0 \\ \alpha_{i+1,1} & \alpha_{i+1,i+1} & \dots & 0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n,i+1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

A többi tag zérus. Látható, hogy az i számú $n-i+1$-ed rendű determináns mindegyikében az S_i sarokmatrix i oszlopából egy és csak egy oszlop fordul elő. Tehát, ha e determinánsok mindegyikét ezen oszlopok szerint kifejtjük, akkor a 6. tulajdonság alapján felismerhető, hogy e kifejtésben S_i minden eleme a saját K_n-beli algebrai aldeterminánsával

van megszorozva. Tehát e kifejtés nem más, mint K_n-nek az S_i sarokmatrix szerinti kifejtése.

A 8. tulajdonság alapján triviálisak a K_n determináns alábbi tulajdonságai:

9. *Tulajdonság: Egy sarokmatrix elemei K_n kifejtésében nem szorzódnak egymással.*

10. *Tulajdonság: K_n kifejtésének minden tagjában az S_i sarokmatrix egy és csak egy eleme fordul elő.*

11. *Tulajdonság: Ha egy sarokmatrix minden eleme zérus, akkor a K_n determináns értéke is zérus.*

12. *Tulajdonság: Ha egy sarokmatrix minden elemét egy λ számmal megszorozzuk, akkor az egész K_n determináns is megszorzódott λ-val.*

13. *Tulajdonság: Ha egy sarokmatrix elemei előjelet váltanak, akkor K_n is előjelet vált.*

14. *Tulajdonság: Ha egy sarokmatrixnak vannak m tagú összegből álló elemei, akkor K_n m számú K_n alakú determináns összegeként állítható elő.*

II. A K_n determináns alkalmazásai

Az alábbiakban bemutatjuk a K_n determináns alkalmazhatóságát.

A felsorolt tulajdonságok alapján K_n determinánssal igen egyszerű és áttekinthető alakban írhatók fel a leggyakoribb kifejezések is, mint pl. a^n, $(a \pm b)^n$, $n!$, $1/n!$, $\binom{n}{k}$ stb. Továbbá $\cos mx$ (Lásd: irodalom [3]). Továbbá végtelen K_n determinánssal az e és π és más nevezetes számok.

Főleg a binomiális együtthatókkal és faktoriális számokkal képezett K_n determinánsokkal fejezhető ki igen sok egyszerű kifejezés. Pl. a Bernoulli és Euler-féle számok. (Lásd: irodalom: [3], [4], [5], [6], [7]).

Az n-ed fokú racionális egész függvény (Lásd: irodalom [8], [9]) és a 4. tulajdonság alapján annak gyöktényezős alakja is kifejezhető K_n determinánssal.

K_n determináns a kontinuáns is, amellyel a lánctörtek n-ik közelítő törtjét szokás kifejezni. Ha a kontinuánsban a_i és b_i elemek helyébe 1-et írunk, akkor a kifejtés tagjainak számát megadó, a Fibonacci-féle számokat definiáló K_n determinánst kapjuk. (Lásd: irodalom [10]).

Mielőtt rátérnénk az analízis területén történő alkalmazásokra, előre bocsátunk két olyan tételt, amelyeket a továbbiakban felhasználunk.

1. TÉTEL: *Ha $\alpha(z)$ tetszés szerinti, egy tartományban $n+1$-szer differenciálható függvény, akkor*

$$\frac{d}{dz}\begin{vmatrix} \alpha & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha' & \alpha & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha'' & 2\alpha' & \alpha & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha^{(n-1)} & \binom{n-1}{1}\alpha^{(n-2)} & \binom{n-1}{2}\alpha^{(n-3)} & \dots & & -1 \\ \alpha^{(n)} & \binom{n}{1}\alpha^{(n-1)} & \binom{n}{2}\alpha^{(n-2)} & \dots & & \alpha \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha' & \alpha & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha'' & 2\alpha' & \alpha & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha^{(n-1)} & \binom{n-1}{1}\alpha^{(n-2)} & \binom{n-1}{2}\alpha^{(n-3)} & \dots & & -1 \\ \alpha^{(n+1)} & \binom{n+1}{1}\alpha^{(n)} & \binom{n+1}{2}\alpha^{(n-1)} & \dots & & \binom{n+1}{n}\alpha' \end{vmatrix}.$$

Bizonyítás: Jelöljük a baloldali determinánst K_n-el, a tőle csak az utolsó sorban (mely sor K_{n+1} utolsó sora) különböző jobboldali determinánst Q_n-el és fejtsük ki K_n-et az utolsó sora szerint.

$$K_n = \alpha K_{n-1} + \binom{n}{n-1}\alpha' K_{n-2} + \dots + \binom{n}{1}\alpha^{(n-1)}K_0 + \alpha^{(n)}.$$

Differenciálva és $0 = \alpha K_n - \alpha K_n =$

$$= \alpha\left[K_{n-1} + \binom{n}{n-1}\alpha' K_{n-2} - \dots + \binom{n}{1}\alpha^{(n-1)}K_0 + \alpha^{(n)}\right] - \alpha K_n$$

kifejezést hozzáadva

$$K_n' = \alpha' K_{n-1} + \binom{n}{n-1}\alpha'' K_{n-2} + \dots + \binom{n}{1}\alpha^{(n)}K_0 + \alpha^{(n+1)} + \alpha\alpha^{(n)} - \alpha K_n$$

$$+\alpha(K_{n-1}' + \alpha K_{n-1}) + \binom{n}{n-1}\alpha'(K_{n-2}' + \alpha K_{n-2}) + \dots + \binom{n}{1}\alpha^{(n-1)}(K_0' + \alpha K_0).$$

Tegyük fel, hogy állításunk $n-1$-ig igaz. Akkor

$$K_\nu' + aK_\nu = Q_\nu + \alpha K_\nu = K_{\nu+1} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots (n-1).$$

Ugyanis $Q + \alpha K$ az utolsó oszlop szerinti kifejtése K_{v+1}-nek. Tehát

$$K_n' = \alpha' K_{n-1} + \binom{n}{n-1}\alpha'' K_{n-2} + \ldots + \binom{n}{1}\alpha^{(n)} K_0 + \alpha^{(n+1)} - \alpha K_n$$

$$+ \alpha K_n + \binom{n}{n-1}\alpha' K_{n-1} + \binom{n}{n-2}\alpha'' K_{n-2} + \ldots + \binom{n}{1}\alpha^{(n-1)} K_1 + \alpha\alpha^{(n)}$$

$$= \binom{n+1}{n}\alpha' K_{n-1} + \binom{n+1}{n-1}\alpha'' K_{n-2} + \ldots + \binom{n+1}{1}\alpha^{(n)} K_0 + \alpha^{(n+1)} = Q_n.$$

Ugyanis az utolsó összeg azonos Q_n-nek az utolsó sora szerinti kifejtésével. Azonban állításunk $n = 1$-re igaz. Tehát minden n-re igaz.

2. Tétel: *Legyen $f(z)$ valós, vagy komplexváltozós, egy bizonyos tartományban nem zérus és n-szer differenciálható függvény. Akkor*

$$f^{(n)}(z) = f(z) \begin{vmatrix} \log' f(z) & -1 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ \log'' f(z) & \log' f(z) & -1 & 0 \ldots & 0 \\ \log''' f(z) & 2\log'' f(z) & \log' f(z) & -1 \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \log^{(n-1)} f(z) & \binom{n-2}{1}\log^{(n-2)} f(z) & \binom{n-2}{2}\log^{(n-3)} f(z) & \ldots & -1 \\ \log^{(n)} f(z) & \binom{n-1}{1}\log^{(n-1)} f(z) & \binom{n-1}{2}\log^{(n-2)} f(z) & \ldots & \log' f(z) \end{vmatrix}.$$

Bizonyítás. Állításunk $n = 1$-re igaz. Ugyanis

$$f'(z) = f(z)\log' f(z).$$

Jelöljük a fenti determinánst K_n-el és tegyük fel, hogy állításunk $n-1$-ig igaz. Azaz

$$f^{(n-1)}(z) = f(z) K_{n-1}.$$

Differenciálva, az (1) tétel szerint

$$f^{(n)}(z) = f(z)[K_{n-1}' + K_{n-1}\log' f(z)] = f(z)[Q_{n-1} + K_{n-1}\log' f(z)].$$

Ez K_n-nek az utolsó oszlop szerinti kifejtése: tehát

$$f^{(n)}(z) = f(z) K_n.$$

Q. e. d.

E tétel segítségével kimutathatjuk, hogy bármely függvény Maclaurin-sora K_n determinánssal kifejezhető. Ugyanis

$$f(z)=\sum_{v=0}^{\infty}\frac{f^{(v)}(0)}{v!}z^v=f(0)\sum_{v=0}^{\infty}\frac{z^v}{v!}\begin{vmatrix} u_{11} & -1 & 0 & 0\ldots 0\\ u_{21} & u_{22} & -1 & 0\ldots 0\\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & -1\ldots 0\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\ u_{v-1,1} & u_{v-1,2} & u_{v-1,3} & \ldots -1\\ u_{v1} & u_{v2} & u_{v3} & \ldots u_{vv}\end{vmatrix},$$

ahol $u_{ik}=\binom{i-1}{k-1}\log^{(i-k+1)}f(0).\ \binom{i=1,2,\ldots v}{k=1,2,\ldots i}$

A 7. tulajdonság alapján

$$=f(0)\sum_{v=0}^{\infty}\frac{1}{v!}\begin{vmatrix} u_{11}z & -1 & 0 & 0\ldots 0\\ u_{21}z^2 & u_{22}z & -1 & 0\ldots 0\\ u_{31}z^3 & u_{32}z & u_{33}z & -1\ldots 0\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\ u_{v-1,1}z^{v-1} & u_{v-1,2}z^{v-2} & u_{v-1,3}z^{v-3} & \ldots -1\\ u_{v1}z^v & u_{v2}z^{v-1} & u_{v3}z^{v-2} & \ldots u_{vv}z\end{vmatrix}$$

Minthogy a 3. tulajdonság alapján e determináns-tagú sor részletösszege egyetlen oly K_n

$$S_v(z)=f(0)\begin{vmatrix} u_{11}z & -1 & 0 & 0 & \ldots 0\\ u_{21}z^2 & u_2z & -1 & 0 & \ldots 0\\ u_{31}z^3 & u_{32}z^2 & u_{33}z & -1 & \ldots 0\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\ u_{v1}z^v & u_{v2}z^{v-1} & u_{v3}z^{v-2} & \ldots & u_{vv}z\ -1\\ 0 & 1 & \frac{1}{2!} & \ldots & \frac{1}{(v-1)!}\ \frac{1}{v!}\end{vmatrix}$$

determinánsba foglalható össze, melynek ez a részletösszeg az utolsó sor szerinti kifejtése, tehát $f(z)$ Maclaurin-sora oly

$$f(z)=\begin{vmatrix} z\log' f(0) & -1 & 0 & 0\ldots\\ z^2\log'' f(0) & z\log' f(0) & -1 & 0\ldots\\ z^3\log''' f(0) & 2z^2\log'' f(0) & z\log' f(0) & -1\ldots\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\end{vmatrix}$$

végtelen determinánssal egyenlő, melynek értéke az $f(0), f(0)/2!, f(0)/3!\ldots$ vel szorzott sarokaldeterminánsok összege.

Ugyanígy, ha $f(0)$ helyébe $f(a)$-t és z helyébe $z-a$-t teszünk, akkor $f(z)$ Taylor-sorát kapjuk K_n determinánssal kifejezve.

Két hatványsor hányadosa is kifejezhető K_n determinánssal. Ismeretes (Lásd: irodalom [2]), hogy ha

$$a(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\dots$$
$$b(z)=1+b_1'z+b_2'z^2+\dots,$$

akkor

$$\frac{a(z)}{b(z)}=c_0+c_1z+c_2z^2+\dots\text{-ben}\quad c_\nu=\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ a_1 & b_1 & -1 & 0 & \dots & 0\\ a_2 & b_2 & b_1 & -1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_\nu & b_\nu & b_{\nu-1} & \dots & & b_1 \end{vmatrix},$$

ahol $b_i=-b_i'$. A 7. és 3. tulajdonság alapján

$$\frac{a(z)}{b(z)}=\lim_{n\to\infty}\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ a_1z & b_1z & -1 & 0 & \dots & 0\\ a_2z^2 & b_2z^2 & b_1z & -1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_nz^n & b_nz^n & b_{n-1}z^{n-1} & \dots & b_1z & -1\\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}\quad\dots(B).$$

Ha $a(z)$ és $b(z)$ n és m-ed fokú racionális egész függvények és $n>m$, akkor ha a fenti végtelen K determináns sarokaldeterminánsai $n-m$ indextől kezdve mind eltűnnek, $a(z)$ osztható $b(z)$-el, különben nem.

Ha $a(z)=1$, akkor (B) alapján rögtön K_n determináns alakba írhatjuk $b(z)$ reciprokát is.

K_n determinánssal kifejezhetők a végtelen (vagy véges) szorzatok és sorok is. Ugyanis a 4. tulajdonság alapján triviális az, hogy bármely $\Pi(1+u_n)$ végtelen szorzat végtelen K_n determináns alakba írható.

Ennek alapján könnyen belátható az is, hogy minden olyan Σu_n végtelen sor is, amelynek egyik részletösszege sem zérus, olyan végtelen K_n determináns alakba írható, amelyben az egyes oszlopok elemei egyenlők és az elemek értékei sorjában

$$\alpha_{11}=u_1,\quad \alpha_{22}=\frac{u_2}{u_1},\quad \alpha_{33}=\frac{u_3}{u_1+u_2},\quad \alpha_{44}=\frac{u_4}{u_1+u_2+u_3}\dots$$

Az áttekinthetőség szempontjából jó szolgálatot tesz a K_n determináns a lineáris differenciálegyenletek elméletében is.

K_n determinánssal áttekinthetően fejezhető ki a

$$H(y)=y^{(n)}+P_1(z)y^{(n-1)}+P_2(z)y^{(n-2)}+\ldots+P_n(z)y=0$$

homogén lineáris differenciálegyenlet $n-1$-ed rendű tag nélkülivé transzformált

$$u^{(n)}+Q_2(z)u^{(n-2)}+\ldots+Q_n(z)u=0$$

alakjának együtthatói is. Vagyis

$$Q_\nu(z)=\begin{vmatrix} -\frac{P_1}{n} & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -\frac{P_1'}{n} & -\frac{P_1}{n} & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -\frac{P_1''}{n} & -2\frac{P_1'}{n} & -\frac{P_1}{n} & -1 & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ -\frac{P_1^{(\nu-1)}}{n} & -\binom{\nu-1}{1}\frac{P_1^{(\nu-2)}}{n} & -\binom{\nu-1}{2}\frac{P_1^{(\nu-2)}}{n} & \ldots & & -1 \\ P_\nu & \binom{n-\nu+1}{1}P_{\nu-1} & \binom{n-\nu+2}{2}P_{\nu-2} & \ldots & & \binom{n}{\nu} \end{vmatrix}.$$

Ugyanis, ha bevezetjük az $y=u\exp\left(-\frac{1}{n}\int P_1\,dz\right)$ helyettesítést, akkor a 2. tétel alapján a Leibnitz-szabály szerint

$$y^{(n)}=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}u^{(n-\nu)}\begin{vmatrix} -\frac{P_1}{n} & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -\frac{P_1'}{n} & -\frac{P_1}{n} & -1 & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ -\frac{P_1^{(\nu-1)}}{n} & -\binom{\nu-1}{1}\frac{P_1^{(\nu-2)}}{n} & \ldots & & -\frac{P_1}{n} \end{vmatrix} e^{-\frac{1}{n}\int P_1 dz},$$

$$y^{(n-1)}=\sum_{\nu=1}^{n}\binom{n-1}{\nu-1}u^{(n-\nu)}\begin{vmatrix} -\frac{P_1}{n} & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -\frac{P_1'}{n} & -\frac{P_1}{n} & -1 & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ -\frac{P_1^{(\nu-2)}}{n} & -\binom{\nu-2}{1}\frac{P_1^{(\nu-3)}}{n} & \ldots & & -\frac{P_1}{n} \end{vmatrix} e^{-\frac{1}{n}\int P_1 dz},$$

$$y^{(n-\nu+1)}=\left[u^{(n-\nu+1)}+\binom{n-\nu+1}{1}\frac{-P_1}{n}u^{(n-\nu)}+\dots\right]e^{-\frac{1}{n}\int P_1 dz},$$

$$y^{(n-\nu)}=[u^{(n-\nu)}+\dots]e^{-\frac{1}{n}\int P_1 dz},$$

$$y'=\left[u'+\frac{-P_1}{n}u\right]e^{-\frac{1}{n}\int P_1 dz},$$

$$y=ue^{-\frac{1}{n}\int P_1 dz}.$$

Ha most ezeket sorjában $1, P_1, P_2, \dots P_n$-el megszorozva összeadjuk, akkor $-u^{(n-\nu)}$ szerint rendezve és $\exp\left(-\frac{1}{n}\int P_1\,dz\right)$-vel végigosztva — $H(y)$-ra a

$$\sum_{\nu=0}^{n}\left[\binom{n}{\nu}K_{\nu-1}+\binom{n-1}{\nu-1}P_1K_{\nu-2}+\dots+\binom{n-\nu+1}{1}P_{\nu-1}K_0+P_\nu\right]u^{(n-\nu)}=0.$$

kifejezést kapjuk, ahol $u^{(n-\nu 1)}$ együtthatója — minthogy $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}$,... kifejezéseiben látható $K_{n-1}, K_{n-2}, \dots$ determinánsok a fenti Q_n determináns sarokaldeterminánsai — nem más, mint a Q_n determináns utolsó sor szerinti kifejtése.

A K_n determináns célszerűen alkalmazható a homogén lineáris differenciálegyenletek általános megoldásának előállításánál is.

Ha a $H(y)$ homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldását a $z=0$ reguláris helyen kifejtett

$$y(z)=\sum_{\nu=-n}^{\infty}a_{n+\nu}z^{n+\nu}$$

hatványsor alakban keressük, akkor az $a_{n+\nu}$ együtthatókat K_n determinánssal a megoldás konvergencia — és más — problémájának vizsgálatára alkalmas

$$a_{n+\nu}=\frac{1}{(n+\nu)!}\begin{vmatrix}\alpha_{00} & -1 & 0 & 0 \dots 0\\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & -1 & 0 \dots 0\\ \alpha_{20} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & -1 \dots 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{\nu-1,0} & \alpha_{\nu-1,1} & \alpha_{\nu-1,2} & \dots -1\\ \alpha_{\nu,0} & \alpha_{\nu,1} & \alpha_{\nu,2} & \dots \alpha_{\nu\nu}\end{vmatrix}$$

áttekinthető alakban kapjuk, (Lásd: I. [12]) ahol

$$\alpha_{v0} = -\sum_{i=0}^{n-1}\left[P_{n-i}^{(v)} + \binom{v}{1}P_{n-i+1}^{(v-1)} + \ldots + \binom{v}{i}P_n^{(v-i)}\right]_0 y_0^{(i)}$$

$$\alpha_{vk} = -\left[\binom{v}{k}P_1^{(v-k)} + \binom{v}{k+1}P_2^{(v-k-1)} + \ldots + \binom{v}{k+n}P_n^{(v-k-n)}\right]_0.$$

Ha a 7. tulajdonság alapján z^{v+1}-el beszorzunk az α_{ik} elemekre, akkor az $y(z)$ sor részletösszege a 3. tulajdonság szerint egyetlen oly K_n

$$S_{n+v}(z) = \begin{vmatrix} \alpha_{00}z & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{10}z^2 & \alpha_{11}z & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{20}z^3 & \alpha_{21}z^2 & \alpha_{22}z & -1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{v0}z^{v+1} & \alpha_{v1}z^v & \alpha_{v2}z^{v-1} & \ldots & & -1 \\ S_{n-1}(z) & \frac{z^{n-1}}{n!} & \frac{z^{n-1}}{(n+1)!} & \ldots & & \frac{z^{n-1}}{(n+v)!} \end{vmatrix}$$

determinánsba foglalható össze, amelynek ez a részletösszeg az utolsó sor szerinti kifejtése. Tehát a $H(y)$ homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása egy oly végtelen K determinánssal állítható elő, amelynek értéke az $s_{n-1}(z)$, $z^{n-1}/n!$, $z^{n-1}/(n+1)!$ ...-vel szorzott sarokaldeterminánsok összege.

IDÉZETT IRODALOM

[1] Szmodics H.: A teljes n-oldal poláregyenesének szerkesztése. Matematikai és Term. tud. Értesítő. XVIII. kötet. 1926. (139—140) old.

[2] Studnicka: Über eine neue Determinanteneigenschaft. Böhmische Ges. Berichte 1880. N. 7. (50—64. old.)

[3] E. Pascal: Die Determinanten. 1900. Leipzig. (a. 155. old. b. 132—138. old.)

[4] Studnicka: Notiz über einige Determinanten, in welchen Binomialkoeffizienten als Elemente auftreten. Böhmische Ges. Berichte. 1879. N. 28. (292—295. old.)

[5] Studnicka: Über eine neue Formel der Kombinatorik. Böhmische Ges. Berichte. 1879. N. 29. (295—298 old.)

[6] Glaisher: Expressions for Laplaces coefficients, Bernoullian and Eulerian numbers as determinants. Messenger of Matematics. London and Cambridge. vol. 6. 1877 (49—63. old.) vol. 7. 1878. (160—165.) vol. 8. 1879. (158—167.)

[7] E. Pascal: Repetitorium der Höheren Mathematik. I. Analysis. 1910. Zweite Aufl. Erste Hälfte. Kap. II. 71. old.

[8] Günther: Über aufsteigende Kettenbrüche. Zeitschrift für Matematik. 21. évf. 1876. 187. old.

[9] C. A. Laisant: Sur un determinant remarquable. Buletin de la Société Math. de France. 1889. (104—107. old.)
[10] M. Beke: Determinánsok. 1915. 47—50. old.
[11] M. Dietrich: Ueber den Zusammenhang gewisser Determinanten mit Bruckfunctionen. Crelle's Journal. 69. kötet. 1868. (190—196. old.)
[12] Kun Kuti: Egész megoldású homogén lineáris differenciálegyenletekről. Matematikai és Fizikai Lapok. 1939. 46. old.

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ K_n И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

М. Кун Кути

В этой статье речь идет об одном широко применимом типе определителей, а именно об определителях вида

$$K_n = \begin{vmatrix} a_{11} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & & \dots & -1 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

и об их применений. Автор доказывает 14, отличающиеся от общих свойств определителей, такие свойства определителя K_n, которые ее сделают подходящей для применения в более широком круге вопросов чем это имеет место для определителей Вандермонда и для других специальных видов определителей. Он показывает, что определитель K_n очень удобна для выражения сумм и произведений; следовательно также применима для легко обозримого выражения самых часто встречающихся формул. Далее, он показывает, как применить определитель K_n выражению бесконечных произведений, рядов, к разложению функций в ряд, к выражению частного двух степенных рядов и, наконец, к преобразованию линейного дифференциального уравнения порядка n и к непосредственной записе его общего решения.

DIE DETERMINANTE K_n UND IHRE ANWENDUNGEN

M. Kun Kuti

Dieser Artikel behandelt die spezielle Determinante

$$K_n = \begin{vmatrix} a_{11} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & & -1 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

und einige Anwendungen. Aus diesen heben wir eine Darstellung der Lösung der allgemeinen linearen Differentialgleichung n-ten Grades an einer regulären Stelle hervor.

Feladatrovat

Szerkeszti: HAJÓS GYÖRGY

A feladatrovatnak szánt küldeményeket (az egyes feladatok megoldását külön lapon) a következő címre kérjük: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, V. Szabadság tér 17.

Kitűzött feladatok

131. Legyenek $f_1, f_2, \ldots, f_n$ valamilyen intervallumban adott, $(n-1)$-szer differenciálható függvények. Bizonyítsuk be, hogy $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ Wronski-féle determinánsukra

$$W[W(f_1,f_2), W(f_1,f_3), \ldots, W(f_1,f_n)] = f_1^{n-2} W(f_1, f_2, \ldots, f_n).$$

Fenyő István

132. Az $f(x)^n + g(x)^n = h(x)^n$ polinomegyenlet valamely megoldását triviálisnak mondjuk, ha van olyan $\varphi(x)$ polinom, amelyre $f(x) = a\varphi(x)$, $g(x) = b\varphi(x)$, $h(x) = c\varphi(x)$ és $a^n + b^n = c^n$. Igazoljuk, hogy ha $n \geqq 3$, akkor polinomegyenletünknek csak triviális megoldása van. Határozzuk meg az $n = 2$ esetben a polinomegyenlet valamennyi megoldását.

Fried Ervin

133. Legyen $f(n)$ a természetes számok halmazán értelmezett komplex értékű, teljesen multiplikatív számelméleti függvény, amelyre $|f(n)| = 1$, továbbá a prímszámokat p-vel jelölve

$$\sum_{f(p) \neq -1} \frac{1}{p} < \infty.$$

Bebizonyítandó, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n} = 0.$$

Corradi Keresztély

Megoldott feladatok

118. feladat. Egy konvex n-szöget véges sok háromszögre bontunk fel. Bebizonyítandó, hogy legalább $2n-3$ olyan szakasz van, amely kétszer szerepel a háromszögek és az n-szög oldalai között.

(Gallai Tibor)

I. megoldás. A P konvex n-szöget a páronként egymásba nem nyúló $H_1, \ldots, H_l$ háromszöglapokra osztjuk fel ($l \geqq 2$). A háromszöglapok csúcsai közül nevezzük jó csúcsoknak azokat, amelyek csúcsai a $P, H_1, \ldots, H_l$ idomok közül mindazoknak, amelyeknek határán helyezkednek el, a többieket pedig rosszaknak. A jó csúcsok száma legyen c_1, a P belsejében levő rossz csúcsoké c_2, a P határán levőké c_3. Legyen végül e a csúcsokat összekötő azon szakaszok száma, amelyek legalább egy H_i-nek oldalai.

A P külsejéből és a háromszöglapokból álló alakzatra Euler tétele szerint

$$l+1+c_1+c_2+c_3 = e+2. \tag{1}$$

Az e számú szakasz közül azok nem szerepelnek kétszer $P, H_1, \ldots, H_l$ oldalai között, amelyekre ezeknek az idomoknak egyik oldalát a rajta elhelyezkedő rossz csúcsok felosztják, éspedig ha egy ilyen oldalt k rossz csúcs oszt fel, akkor $k+1 \geqq 2k$ „rossz él" keletkezik. A rossz élek száma tehát $\leqq 2(c_2+c_3)$, a „jó éleké" pedig

$$e_j \geqq e-2(c_2+c_3). \tag{2}$$

Ha egy rossz csúcsot, amely egyik H_i háromszöglap valamely oldalának belső pontja, összekötünk H_i átellenes csúcsával, akkor P-nek újabb felosztásához jutunk. A felosztás e módosításakor l és e helyébe eggyel nagyobb szám, c_2 helyébe pedig eggyel kisebb szám lép. Ezt az eljárást c_2-ször megismételve oly alakzathoz jutunk, amelyben $e+c_2$ szakasz mindegyike kétszer szerepel, $l+c_2$ háromszöglap és egy $(n+c_3)$-szög oldalai között (az utóbbi P-ből keletkezik, ha oldalait a rajtuk levő rossz csúcsokkal felosztjuk). Így tehát

$$3(l+c_2)+(n+c_3) = 2(e+c_2). \tag{3}$$

Ha (1)-ből és (3)-ból l-et kiküszöböljük, az

$$e-2(c_2+c_3) = 2n-3+3(c_1-n)$$

eredményhez jutunk. P konvexitása miatt P csúcsai nyilván mind jó csúcsok, s ezért $c_1 \geqq n$. Erre, valamint (2)-re való tekintettel utolsó egyenletünkből

$$e_j \geqq 2n-3,$$

tehát a feladat állítása következik.

Az okoskodásból következik, hogy egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha P belsejében csupa rossz csúcs van, ha továbbá P és a H_i háromszögek bármely oldalán legfeljebb egy rossz csúcs található.

Császár Ákos

II. megoldás. Az első megoldás elnevezéseit és jelöléseit használjuk. Jelölje továbbá c_r a rossz csúcsok számát (azaz: $c_r = c_2 + c_3$), f pedig a $P, H_1, \ldots, H_e$ idomok oldalai közül az olyanoknak a számát, amelyek nem szerepelnek a jó élek között.

Az ilyen oldalak mindegyike tartalmaz (vagy a belsejében, vagy a végpontjai között) rossz csúcsot, továbbá minden rossz csúcs három ilyen oldalon van rajta, ti. kettőnek végpontja, egynek pedig belső pontja. Ezek szerint $f \leqq 3c_r$, és a $P, H_1, \ldots, H_e$ idomok oldalszámának összegére

$$n + 3l = 2e_j + f \leqq 2e_j + 3c_r. \tag{4}$$

A háromszögek valamennyi szögének összege $l\pi$. E szögek egyesítésekor (P konvexitása miatt) minden rossz csúcsnál egy-egy egyenesszög, P minden csúcsánál pedig P ott elhelyezkedő szöge keletkezik. Így tehát

$$l\pi \geqq c_r\pi + (n-2)\pi,$$

azaz

$$l - c_r \geqq n-2.$$

(4) felhasználásával tehát

$$2e_j \geqq n + 3(l - c_r) \geqq 4n - 6,$$

ami a feladat állítását bizonyítja.

Czipszer János

A 118. feladat megoldását beküldte még *Hajós György*.

Megjegyzés. A feladat szerzője, *Gallai Tibor* a feladat kitűzése után bizonyítással együtt beküldte a feladat állításának a következő általánosítását: *Ha egy n-szöget háromszögekre bontunk fel, és az n-szög szögei közül a legalább* 180°*-osak száma m, akkor legalább* $2n-3-3m$

olyan szakasz van, amely kétszer szerepel a háromszögek és az n-szög oldalai között.

Ez közvetlenül kiolvasható a közölt első megoldásból, hiszen az n-szög 180°-nál kisebb csúcsai mind jó csúcsok, s ezért $c_1 \geqq n-m$, ebből pedig a teljes megoldást változatlanul hagyva az utolsó lépésben

$$e_j \geqq 2n-3-3m$$

következik. Ha ugyanezt a második megoldás módszerével akarjuk bebizonyítani, erősebb módosításra van szükség.

Szerk.

119. feladat. Egy n-dimenziós derékszögű parallelotopot olyan egybevágó derékszögű parallelotopokra akarunk felbontani, amelyekben az egy csúcsból induló élek hosszmértékei adott $a_1, a_2, \ldots, a_n$ egész számok. Milyen feltételt kell ezeknek a számoknak kielégíteniök ahhoz, hogy a felbontás csak akkor legyen lehetséges, ha párhuzamos parallelotopokkal is megvalósítható (amikor a felbontásban szereplő parellelotopok párhuzamos élei mind egyenlők).*

(*N. G. De Bruijn*, Amsterdam)

Megoldás. Bebizonyítjuk, hogy a feladat feltételét csak azok az egész számok elégítik ki, amelyeknek mindegyike osztója a nála nagyobbak mindegyikének, tehát azok, amelyek nagyság szerinti elrendezésében mindegyik osztója a rákövetkezőnek. A bizonyítást több lépésben végezzük el.

a) Először azt állítjuk, hogy egy $b_1, \ldots, b_n$ élű B parallelotop csak akkor bontható fel $1, \ldots, 1, a$ élű A parallelotopokra, ha a osztója a $b_1, \ldots, b_n$ egész számok valamelyikének. Erre két bizonyítást adunk.

1. A B parallelotopot egységkockákra vágjuk fel, és minden kockát n koordinátával jellemzünk, amelyek megadják, hogy a parallelotop valamelyik sarkában összefutó lapok síkjaitól számítva rendre hányadik rétegben helyezkedik el a kocka. A K kockákat aszerint osztályozzuk, hogy koordinátáik $s(K)$ összege melyik maradékosztályhoz tartozik mod a. Akárhogyan helyezkedik is el valamely A-val egybevágó, B felbontásban szereplő oszlop, az ezt alkotó kockák közül mindig egy-egy tartozik a maradékosztályok mindegyikéhez. Ebből következik, hogy ha B felbontható A-val egybevágó oszlopokra, akkor B kockái közül mindegyik maradékosztályhoz ugyanannyi tartozik. Ezt a számot b-vel jelöljük.

---

* Vö. a 109. feladattal. Megoldásait lásd XII. évf. 110—112., 254—255. o.

Tekintsük az

$$F(x)=\prod_{i=1}^{n}(1+x+x^2+\ldots x^{b_i-1})=\sum_{K\subset B}x^{s(K)}$$

polinomot. Ha x helyébe valamely α primitív a-adik egységgyököt helyettesítünk, akkor a fenti megállapítás szerint

$$F(\alpha)=b(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{a-1})=0.$$

Ebből következik, hogy $F(\alpha)$ szorzatalakjában valamelyik tényezőnek el kell tűnnie, hogy tehát valamely i értékre

$$1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{b_i-1}=0,$$

ami α primitív gyök volta miatt azt jelenti, hogy b_i többszöröse a-nak.

2. Valamivel általánosabban most azt bizonyítjuk be, hogy ha a kockáinkból összerakott, A-val egybevágó oszlopokhoz egy-egy egész számot rendelünk, és minden kocka esetében az ezt tartalmazó oszlopokhoz rendelt egész számok összege 1, akkor is igaz, hogy a osztója valamelyik b_i-nek. Eredeti állításunk az a speciális eset volt, amikor hozzárendelt számként csak 1 (és 0) szerepelt. Mondhatjuk, hogy most is B egyszeres lefedéséről van szó, de a lefedésben az egyes oszlopok különféle, pozitív vagy negatív multiplicitással vesznek részt.

A bizonyítást a dimenziószámra vonatkozó teljes indukcióval végezzük. Nyilvánvaló, hogy az állítás 1-dimenzióban helyes. Feltesszük, hogy akkor is helyes, ha a dimenziószám $n-1$.

Feltesszük, hogy b_1 nem többszöröse a-nak. Legyen a b_1 hosszúságú él B-nek L lapjára merőleges. Kockáinkat egységvastagságú, L-lel párhuzamos rétegekbe soroljuk, és e rétegeket L-től kezdve sorszámozzuk. Tekintsük egyrészt azokat a rétegeket, amelyek sorszáma $\equiv 0 \pmod a$, másrészt azokat, amelyek sorszáma $\equiv 1 \pmod a$. A b_1-re vonatkozó feltevés miatt a második rétegcsoportban eggyel több réteg szerepel.

Ebből következik, hogy ha L-re azonos vetületet adó kockák esetében az első és a második rétegcsoportbeliekhez tartozó multiplicitásokat külön-külön összeadjuk, és a második összegből az elsőt levonjuk, akkor minden esetben (L minden $(n-1)$-dimenziós kockájára) 1 lesz az eredmény. Változatlanul igaz marad ez akkor is, ha az (a hosszúságú élükkel) L-re merőleges oszlopok multiplicitását figyelmen kívül hagyjuk, hiszen minden ilyen oszlop egy-egy első és második rétegcsoportbeli kockát tartalmaz. A maradó multiplicitások L-lel párhuzamosan elhelyezkedő oszlopoktól származnak. Ha tehát ezeket az egyes rétegcsoportokon belül elhelyezkedő oszlopokat merőlegesen L-re

vetítjük, a vetület multiplicitásául második rétegcsoportbeli oszlop esetében az eredeti multiplicitást választjuk, első rétegcsoportbeli oszlop esetében pedig azt (-1)-gyel megszorozzuk, és azonos vetületű oszlopok vetületéhez ezeknek a részben megváltoztatott multiplicitásoknak az összegét rendeljük, akkor L-nek olyan lefedéséhez jutunk, amilyenről a bizonyítandó állítás szól (azaz L minden kockájára az ezt tartalmazó oszlopvetületek multiplicitásának az összege 1). Eszerint az indukciós feltevés alkalmazható a $b_2, \ldots, b_n$ élű, $(n-1)$-dimenziós L parallelotopra, s ezért a valóban osztója a $b_2, \ldots, b_n$ számok valamelyikének.

b) Bebizonyítjuk, hogy ha A élhosszaira

$$a_1 | a_2 | \ldots | a_n,$$

és B felbontható A-val egybevágó parallelotopokra, akkor B minden élhossza A más-más élhosszának többszöröse, azaz a felbontás párhuzamos parallelotopokkal is megvalósítható.

Ezt ismét a dimenziószámra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Az állítás 1-dimenzióban nyilvánvalóan helyes. Feltesszük, hogy helyes az $(n-1)$-dimenziós esetben is.

Minthogy A felbontható $1, \ldots, 1, a_n$ élű oszlopokra, B is felbontható ilyenekre. Ezért *a)* szerint B egyik élhossza, pl. b_n többszöröse a_n-nek.

B felbontásakor B-nek $b_1, \ldots, b_{n-1}$ élű lapját A különféle lapjai borítják be. Mindezek a lapok felbonthatók $a_1, \ldots, a_{n-1}$ élű lapokra, hiszen ahol a_n is szerepel a lap élei között, és pl. a_i $(1 \leqq i < n)$ hiányzik, ott $a_i | a_n$ miatt az a_n hosszúságú él felosztásával kívánt nagyságú lapokhoz juthatunk. Ezek szerint B említett lapjára alkalmazható az indukciós feltevés, s eszerint $b_1, \ldots, b_{n-1}$ valóban más-más szám többszörösei az $a_1, \ldots, a_{n-1}$ számok közül.

c) Már csak azt kell bebizonyítanunk, hogy ha A élhosszai nem elégítik ki feltételünket, ha tehát pl. $a_1 < a_2$ és $a_1 \nmid a_2$, akkor van olyan B parallelotop, amely felbontható A-val egybevágó parallelotopokra, de B élhosszai mégsem többszörösei más-más számnak A élhosszai közül. Azt állítjuk, hogy az $a_1 + a_2, a_1 a_2, a_3, \ldots, a_n$ élű B parallelotop ilyen.

B valóban felbontható A-val egybevágó parallelotopokra, hiszen a B élei által kifeszített, $a_1 + a_2, a_1 a_2$ oldalú téglalap kettévágható egy $a_1, a_1 a_2$ és egy $a_2, a_1 a_2$ oldalúra, ezek mindegyike felbontható a_1, a_2 oldalú téglalapokra, és ez a felbontás B-nek A-val egybevágó parallelotopokra való felbontásához vezet.

Igazolnunk kell végül, hogy az $a_1 + a_2, a_1 a_2, a_3, \ldots, a_n$ számok nem többszörösei más-más számnak az $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ számok kö-

zül. Azt vizsgáljuk, hogy a_1+a_2 hány elem többszöröse ebben a két sorozatban. Ha az első sorozatban a_1+a_2 mellett még k ilyen elem szerepel ($k \geqq 0$), akkor a második számsorozatban csak ez a k elem ilyen, hiszen feltevésünk következtében a_1+a_2 nem többszöröse az a_1, a_2, a_1a_2 számok egyikének sem. Eszerint az első sorozat mondott $k+1$ eleme nem lehet a második sorozat más-más elemének többszöröse, hiszen a_1+a_2 osztója csak ugyanilyen tulajdonságú számnak lehet a többszöröse, és $k+1$ szám nem rendelhető hozzá kölcsönösen egyértelmű módon k számhoz.

Katona Gyula és Szász Domokos

A 119. feladat megoldását beküldte még *Hajós György*.

120. feladat. Egy n-edrendű kvadratikus ortogonális mátrix minden eleme 1 vagy -1. Mutassuk meg, hogy az 1-esek és (-1)-esek számának különbsége nem lehet $n\sqrt{n}$-nél nagyobb.

(Corradi Keresztély)

Megoldás. Jelölje S a mátrix valamennyi elemének az összegét. $|S|$ tehát éppen a vizsgált különbséggel egyenlő.

Legyenek $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ a mátrix n-dimenziós sorvektorai. Az $\mathbf{e}=(1,\ldots,1)$ vektort is bevezetve

$$S = (\mathbf{a}_1+\ldots+\mathbf{a}_n)\cdot\mathbf{e},$$

és ismert egyenlőtlenség alapján

$$S^2=[\mathbf{a}_1+\ldots+\mathbf{a}_n)\cdot\mathbf{e}]^2 \leqq (\mathbf{a}_1+\ldots+\mathbf{a}_n)^2\mathbf{e}^2.$$

A mátrix ortogonalitása miatt $i \neq j$ esetén $\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j=0$, s így

$$(\mathbf{a}_1+\ldots+\mathbf{a}_n)^2=\mathbf{a}_1^2+\ldots+\mathbf{a}_n^2=n^2.$$

Egyenlőtlenségünkből tehát $\mathbf{e}^2=n$ miatt

$$S^2 \leqq n^2\cdot n,$$

azaz $|S| \leqq n\sqrt{n}$ következik.

Hetyei Gábor

A 120. feladat megoldását beküldték még *Császár Ákos, Czipszer János, Hajós György, Kővári Tamás.*

121. feladat. Legyen c pozitív valós szám, továbbá $a_1 < a_2 < \ldots$ természetes számok. Bizonyítsuk be, hogy a

$$b_n = \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{c^{a_n}} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

elemekből alkotott $b_1, b_2, \ldots$ sorozat nem tarthat pozitív határértékhez.

(Erdős Pál)

Megoldás. Ha $c \leqq 1$, akkor nyilván $b_n \to \infty$. Legyen tehát $c > 1$. Tegyük fel, hogy a feladat állításával ellentétben $b_n \to A \neq 0$. Ebből ellentmondásra következtetünk.

Legyen $d_n = a_n - a_{n-1}$. A feltételezett konvergencia következtében

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{a_n}{c^{a_n - a_{n-1}}} = \frac{a_n}{c^{d_n}} \to 1.$$

Ebből $a_n \to \infty$ miatt következik, hogy $d_n \to \infty$, s hogy ezért

$$\frac{d_n}{c^{d_n}} \to 0.$$

Ezek szerint

$$c^{d_{n-1} - d_n} = \frac{c^{d_{n-1}}}{c^{d_n}} \cdot \frac{a_n - d_n}{a_{n-1}} = \frac{c^{d_{n-1}}}{a_{n-1}} \left[\frac{a_n}{c^{d_n}} - \frac{d_n}{c^{d_n}} \right] \to 1$$

tehát $d_{n-1} - d_n \to 0$. Ez azonban, egész számokról lévén szó, ellentmond a fenti $d_n \to \infty$ eredménynek.

Megjegyezzük, hogy az $a_1, a_2, \ldots$ sorozat monotonitását nem használtuk fel, csak azt, hogy ezekre a természetes számokra $a_n \to \infty$.

Fáy Árpád

A 121. feladat megoldását beküldték még *Császár Ákos, Horváth Sándor, Máté Attila.*

122. feladat. Vizsgáljuk meg, hogy az

$$x^4 = 2^k y^p + z^2$$

egyenlet mely természetes k, p számokra oldható meg természetes számokkal.*

(Bártfai Pál és Szlanka Imre)

---

* Lásd a 106. feladatot és megoldásait, XII. évf. 105—106. o. Itt említjük, hogy a II. megoldásban használt első helyettesítés $d^2 = c^{p+1}$ s a baloldali kitevő sajtóhiba folytán lemaradt.

Megoldás. A vizsgálatot a $k=0$ esetre is kiterjesztjük. Bebizonyítjuk, hogy az egyenlet nem oldható meg, ha $p \equiv 0 \pmod 4$ és $k \not\equiv 1 \pmod 4$, minden más esetben viszont megoldható.

a) Először a megoldhatónak mondott esetekkel foglalkozunk. Abból indulunk ki, hogy ha x, y, z valamely k és p mellett kielégíti egyenletünket, akkor az egyenlet k és $p+4$ mellett, valamint $k+4$ és p mellett is megoldható, mert

$$(xy)^4 = 2^k y^{p+4} + (zy^2)^2,$$
$$(2x)^4 = 2^{k+4} y^p + (4z)^2.$$

Elég ezért a $k<4$, $p \leqq 4$ esetekkel foglalkoznunk.

Ha p páratlan, akkor egyenletünk a 106. feladat II. megoldása szerint minden k értékre megoldható. Így tehát csak a $p=2$, $k=0, 1, 2, 3$ esetek, valamint a $p=4$, $k=1$ eset megoldhatóságát kell belátnunk. Ez az

$$5^4 = 24^2 + 7^2 = 4 \cdot 12^2 + 7^2,$$
$$3^4 = 2 \cdot 4^2 + 7^2 = 8 \cdot 2^2 + 7^2 = 2 \cdot 2^4 + 7^2$$

egyenlőségekből látszik.

b) Rátérünk a megoldhatatlannak mondott esetekre. Ha egyenletünk $p=4q$ és valamely k mellett megoldható, akkor

$$x^4 = 2^k (y^q)^4 + z^2,$$

vagyis az egyenlet k és $p=4$ mellett is megoldható. Ezért a megoldhatatlanság bizonyításakor a $p=4$ esetre szorítkozhatunk.

Ha egyenletünk $k \geqq 4$ és $p=4$ mellett megoldható, akkor

$$x^4 = 2^{k-4} (2y)^4 + z^2$$

miatt megoldható a $k-4$ és $p=4$ értékekre is. Eszerint már csak a $p=4$, $k=0$, 2, 3 eseteket kell tekintenünk. Elég tehát arra az ismert tényre hivatkoznunk, hogy az

$$x^4 = y^4 + z^2, \quad x^4 = 4y^4 + z^2, \quad x^4 = 8y^4 + z^2$$

egyenletek egyike sem oldható meg természetes számokkal (lásd DICKSON, *History of the theory of numbers* II, 615—618, 628—629. o.). Említést érdemel, hogy az első egyenlet megoldhatatlanságát FERMAT bizonyította be, s hogy az első kettőé EULERnél is szerepel.

Császár Ákos

PROBLEMES PROPOSÉS

131. Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des fonctions données et $(n-1)$ fois dérivables dans un intervalle. En désignant par $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ le Wronskyen de ces fonctions, démontrer que

$$W[W(f_1, f_2), W(f_1, f_3), \ldots, W(f_1, f_n)] = f_1^{n-2} W(f_1, f_2, \ldots, f_n).$$

I. Fenyő

132. On dit qu'une solution de l'équation polynômiale $f(x)^n + g(x)^n = h(x)^n$ est triviale s'il existe un polynôme $\varphi(x)$ tel que $f(x) = a\varphi(x)$, $g(x) = b\varphi(x)$, $h(x) = c\varphi(x)$ et $a^n + b^n = c^n$. Vérifier que si $n \geqq 3$, alors notre équation polynômiale n'a que des solutions triviales. Pour $n = 2$ déterminer toutes les solution de l'équation polynômiale.

E. Fried

133. Soit $f(n)$ une fonction définie sur l'ensemble des entiers positifs, à valeur complexe, totalement multiplicative vérifiant les relations: $|f(n)| = 1$, et en désignant par p des nombres premiers,

$$\sum_{f(p) \neq -1} \frac{1}{p} < \infty.$$

Prouver que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n} = 0.$$

K. Corradi

Hírek

Külföldi utazások

Anglia

Aczél István és Szelezsán János a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében 1961. X. 3—12-ig részt vettek Londonban egy, az elektronikus adatfeldolgozással foglalkozó szimpóziumon és ezzel egyidejűleg rendezett elektronikus számológép kiállításon.

Ausztria

Az Osztrák Matematikai Társulat a Bolyai János Matematikai Társulattal közösen 1961. XI. 15—18-ig valószínűségszámítási és matematikai statisztikai kollokviumot rendezett Eisenstadtban. A magyar matematikusokat Aczél János, Bánkövi György, Bártfai Pál, Bod Péter, Csáki Endre, Csáki Pál, Csiszár Imre, Fischer János, Gyires Béla, Medgyessy Pál, Mogyoródi József, Palásti Ilona, Prékopa András, Rényi Alfréd, Révész Pál, Sarkadi Károly, Tankó József, Vincze István és Ziermann Margit képviselték. A magyar résztvevők részéről az alábbi előadások hangzottak el:

Aczél János: A feltételes valószínűség megalapozása.
Bánkövi György: Egydimenziós térkitöltési problémákról.
Bártfai Pál: Síkgörbéken értelmezett valószínűségeloszlások entrópiája.
Csáki Endre—Vincze István: Bolyongási problémákról.
Csáki Pál: Megjegyzések az általánosított maximál-korrelációról.
Csiszár Imre: Egy információelméleti konvergencia-fogalom a valószínűségeloszlások terében.
Fischer János: Egyes valószínűségszámítási távolságfogalmak topológikus és metrikus tulajdonságairól.
Gyires Béla: A centrális határeloszlástétel egy általánosításáról.
Medgyessy Pál: A sűrűségfüggvények alakjának jellemzéséről.
Mogyoródi József: Független valószínűségi változók véletlen tagszámú összegeinek határeloszlásai.
Palásti Ilona: Azon fák számának eloszlásáról, amelyek egy kromatikus véletlen gráf izolált részgráfjai.
Prékopa András: Sztochasztikus mátrixokról.
Rényi Alfréd: Véletlen információ akkumulációja.
Révész Pál: Birkhoff 111. problémájának valószínűségszámítási megoldása és ennek alkalmazása az ergodelméletben.
Sarkadi Károly: Élettartam kísérletekkel kapcsolatos becslési problémákról.
Tankó József: A hosszinvariancia fogalma a stacionárius folyamatok elméletében.
Vincze István: Véletlen tagszámú összegek határeloszlás tételeiről.

Csehszlovákia

Szilágyi Zoltán akadémiai egyezmény keretében 1961. X. 9—XI. 19-ig Csehszlovákiában volt tanulmányúton.

A csehszlovák Műszaki és Természettudományi Egyesületek Szövetsége 1961. XII. 13—15-ig gyógyszerészek és gyógyszervegyészek részére statisztikai tanfolyamot tartott, amelyen meghívás alapján Fischer János vett részt és „Beavatkozások időbeli hatásának statisztika analízise szélsőérték segítségével" címen előadást tartott.

A Nemzetközi Matematikai Unió és a Csehszlovák Tudományos Akadémia 1961. IX. 1—8-ig Prágában „Általános topológia és annak alkalmazásai a modern analízisben és algebrában" témakörből szimpóziumot rendezett. A magyar matematikusokat a szimpóziumon Bognár Mátyás, Császár Ákos, Császár Ákosné és Erdős Pál képviselték. A magyar résztvevők részéről az alábbi előadások hangzottak el:

Bognár Mátyás: „Bemerkungen zum Kongressvortrage Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre von F. Riesz",

Császár Ákos: "Complétion et compactification d'espaces syntopogenes",

Erdős Pál: "On the topological product of discrete l-compact spaces".

Dánia

Szüsz Péter 1961. IV. 9—VII. 14-ig a koppenhágai egyetem meghívására Dániában tartózkodott. Koppenhágában 4 előadást tartott a diofantoszi approximáció metrikus elméletéről, majd egy előadást Aarhusban.

Franciaország

A Francia Számítástechnikai Társaság 1961. X. 17—20-ig Párizsban rendezte meg II. kongresszusát, amelyen a magyar matematikusokat Békéssy András, Dömölki Bálint és Kis Ottó képviselték.

Kanada

Grätzer György 1961. III. 4—IX 15-ig a Canadian Research Council meghívására. a Kingstoni Queen's University-n volt tanulmányúton, közben — VIII. 15—IX. 9-ig részt vett Montrealban a kanadai Matematikai Kongresszuson.

Kína

Juvancz Ireneusz akadémiai egyezmény keretében 1961. októbertől 3 hónapos tanulmányúton volt Kínában. Pekingben és Sanghajban előadássorozatokat tartott biometriai módszerekről.

Lengyelország

Szüsz Péter akadémiai egyezmény keretében 1961. IX. 28—X. 28-ig Lengyelországban volt tanulmányúton.

A Lengyel Tudományos Akadémia 1961. X. 2—6-ig Krakkóban differenciálgeometria konferenciát rendezett, amelyen meghívottként Aczél János, Moór Arthur, Soós Gyula és Varga Ottó vettek részt és tartottak előadást.

Moór Arthur — a differenciálgeometria konferenciát követően — akadémiai egyezmény keretében 1961. X. 6—31-ig tanulmányúton vett részt Lengyelországban. Krakkóban „A nem lineáris invariáns differenciálról" és „A rekurrens kovariáns differenciálról", Varsóban „A Finsler geometria megalapozásáról" címmel szemináriumi előadásokat tartott.

Sarkadi Károly akadémiai egyezmény keretében 1961. X. 23—XI. 11-ig Lengyelországban volt tanulmányúton. Varsóban „Méréses mintavételi terv kiválasztása az előző minták eredménye alapján" címen előadást tartott.

Ádám András a Lengyel Tudományos Akadémia meghívása alapján 1962. IV. 25—V. 9-ig Varsóban tartózkodott. A Lengyel Tudományos Akadémia Matematikai Intézetében „Logikai műveletek ismétlésnélküli monoton szuperpozícióiról" és „Áttekintés a jelfogó — érintkező — rendszerekkel kapcsolatos bizonyos matematikai vizsgálatokról" címmel előadást tartott.

NDK

A berlini Német Tudományos Akadémia 1961. X. 19—20-ig tartotta Magdeburgban a statisztikai minőségellenőrzés problémáival foglalkozó VI. konferenciáját. A magyar matematikusokat Dukáti Ferenc, Sarkadi Károly, Vas Györgyné, és Vincze Endre képviselték. A konferencián Dukáti Ferenc és Vincze Endre előadást tartottak.

Daróczi Zoltán a Halle-i Egyetem meghívására 1962. III. 15—23-ig tanulmányúton vett részt és „Charakterisierung der Entropien positiver Ordnung und der Shannanschen Entropie" címmel előadást tartott.

Dénes József akadémiai egyezmény keretében 1962. III. 19—IV. 2-ig Berlinben és Rostockban volt tanulmányúton.

A berlini Német Tudományos Akadémia 1962. III. 20—23-ig a kibernetika matematikai és műszaki vonatkozásaival foglalkozó konferenciát rendezett Berlinben, amelyen meghívás alapján Kalmár László és Muszka Dániel vettek részt. Muszka Dániel „A gépjármű közlekedés automatizálásának néhány elvi kérdése" címmel előadást tartott.

Német Szövetségi Köztársaság

Freud Géza a Giessen-i Egyetem meghívására 1961. V. 1—VIII. 22-ig „Ortogonális polinomok" címmel előadásokat, „Approximációoelmélet" címmel szemináriumokat tartott.

Szüsz Péter — Dániából jövet — 1961. VII. 14—31-ig Giessenben tartózkodott és az Egyetemen előadást tartott.

Varga Ottó 1961. IX. 25—29-ig részt vett az Oberwolfachban rendezett geometriai konferencián és „Állandó görbületű és nem euklideszi terek összefüggése" címmel előadást tartott.

Kertész Andor 1961. X. 22—28-ig részt vett az Oberwolfachban rendezett gyűrűelméleti konferencián és „Artin-féle gyűrűk" címmel előadást tartott.

Surányi János a bonni és a münsteri egyetem Matematikai Intézetének meghívására 1961. XII. 3—10-ig a Német Szövetségi Köztársaságban tartózkodott és „A matematikai logika eldöntésproblémájának redukciójáról" címmel előadást tartott.

Révész György 1961. X. 27—1962. I. 26-ig UNESCO ösztöndíjjal a bonni Egyetem Alkalmazott Matematikai Intézetében és a darmstadti Technikai Főiskola Gyakorlati Matematikai Intézetében volt tanulmányúton.

Románia

Hosszú Miklós akadémiai egyezmény keretében 1961. X. 30—XI. 24-ig Romániában volt tanulmányúton.

Kalmár László 1962. V. 8—15-ig Romániában tartózkodott a magyar és román matematikusok közötti szorosabb tudományos együttműködés megbeszélése céljából. Bukarestben felkérésre a következő előadásokat tartotta:

1. Olyan elektronikus számológépekről, amely programozás nélkül, matematikai és logikai formulák alapján működik.
2. Automatikus számológépek egy algebrai elméletéről.
3. Gödel és Church tételeinek filozófiai jelentőségéről.
4. Matematikai és nyelvi struktúrák.

Szovjetunió

Gergely József 1961. XII. 30—1962. I. 13-ig a Szovjetunióban volt tanulmányúton.

Bognár János 1962. IV. 24—V. 16-ig akadémiai egyezmény keretében a Szovjetunióban volt tanulmányúton. Odesszában és Kievben indefinit metrikájú térben önadjungált operátorok négyzetgyökéről szemináriumi előadást tartott.

USA

Bognár Mátyás és Révész Pál 1961. X. 23—27-ig meghívás alapján részt vettek New-Orleansban az ergodelméleti szimpóziumon.

Révész Pál: „Egy véletlen ergod-tétel és ennek alkalmazása a Markov láncok elméletében" címmel előadást tartott.

Doktori és kandidátusi értekezések vitája

1. Molnár József „Körelhelyezések állandó görbületű felületeken" c. doktori értekezését 1961. XII. 21-én védte meg. Opponensek voltak: Erdős Pál akadémikus, Hajós György akadémikus és Fejes Tóth László a MTA lev. tagja.

2. Gyires Béla „Függvénymátrixokkal generált Toeplitz-féle mátrixokról" c. doktori értekezését 1962. I. 18-án védte meg. Opponensek voltak: Rényi Alfréd akadémikus, Szőkefalvi-Nagy Béla akadémikus és Turán Pál akadémikus.

3. Adler György „A $\Delta u - au'_t = f$ egyenlet megoldásai gradiensének becslése" c. kandidátusi értekezését 1962. II. 9-én védte meg. Opponensek voltak: Freud Géza a matematikai tud. doktora és Makai Endre a matematikai tud. doktora.

4. Bognár János „Vizsgálatok az indefinit metrikájú terek elméletéből", c. kandidátusi értekezését 1962. II. 21-én védte meg. Opponensek voltak: Császár Ákos a matematikai tudományok doktora és Czách László a matematikai tudományok kandidátusa.

5. Soós Gyula „A Finsler-féle fibrált terek elméletéhez" c. doktori értekezését 1962. V. 24-én védte meg. Opponensek voltak: Varga Ottó a MTA lev. tagja, Rapcsák András a matematikai tudományok doktora és Moór Arthur a matematikai tudományok kandidátusa.

Jelentés a Beke Manó emlékdíj tizenkettedik kiosztásáról

A Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége által kiküldött bizottság elnöke: Aczél János, tagjai Gádor Endréné, Hódi Endre, Varga Sándor és Reményi Gusztávné előadó voltak. A bizottság az emlékdíj szabályzatának megfelelően megállapította, hogy a díjak odaítélésével elsősorban a matematikát népszerűsítő könyvek és cikkek írását és ilyen tárgyú előadások tartását kívánja jutalmazni. Az elbírálásban fontos szempontnak tekinti a bizottság a kiváló tanári és szakköri munkát, a tanári továbbképzést és a jó módszerek kialakítását elősegítő írói és előadói működést, továbbá a Bolyai Társulat keretében végzett szervező munkát.

A bizottság e szempontoknak megfelelően az 1962 március 19-én, illetve június 22-én tartott ülésén az alábbi határozatot fogadta el, amelyet az Intézőbizottság jóváhagyott:

A bizottság 2000 Ft jutalommal tüntette ki dr. Erdős Pált, a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagját; 1000—1000 F-ttal jutalmazta Horvay Katalint az Eötvös Loránd Tudományegyetem ábrázoló geometriai tanszékének adjunktusát; Krix Mártont, a bajai Tóth Kálmán leánygimnázium tanárát; Lengyel Ferenc budapesti általános iskolai szakfelügyelőt és Trebiczky Saroltát, a keszthelyi Vajda János gimnázium tanárát.

Indokolás

ERDŐS PÁL a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagja. Annak ellenére, hogy csak az év kisebb részét tölti Magyarországon, mindig szívesen eleget tesz a Bolyai János Matematikai Társulat nemcsak tudományos, de matematika-népszerűsítő előadások tartására vonatkozó felkéréseinek is. Élénken érdeklődik a Társulat „Ifjúsági Matematika Kör"-ének munkája iránt. Ennek keretében is, valamint Budapesten kívül vidéken is a tanárok továbbképzésében és a matematikai délutánok rendezvénysorozatában több előadást tartott. Ezek mindig igen nagy érdeklődést keltettek és nagy matematikai és pedagógiai hatásúak voltak.

Előadásai élénkek, közvetlenek, magukkal ragadják a hallgatókat. Ennek forrása Erdős Pál egyéniségében rejlik: ilyen élénk, közvetlen, magávalragadó az ő — matematikusok közt is egyedülállóan népszerű — személyisége is. Előadásai rendkívül gazdagok elemien megfogalmazható kérdéskörökben elért, gyakran tőle származó, vagy általa kezdeményezett irányban felfedezett újabb eredményekben és további nyitott problémákban. Az egyedülálló problémagazdagság jellemző igen termékeny tudományos munkásságára is: mintegy 400 cikket írt, érdekes módon több mint 80 társszerzővel, köztük olyannal is, aki még általános iskolai tanuló. Ebből is látszik, — ami különben is köztudomású — hogy rendkívül sok matematikussal van közvetlen személyes kapcsolata szerte a világon. Egyénileg is igen inten-

zíven foglalkozik tehetséges fiatalokkal, akik közt általános iskolai, középiskolai tanuló és egyetemi hallgató egyaránt megtalálható.

A legutóbbi években végzett matematika-népszerűsítő publikációi közül kiemeljük a Középiskolai Matematikai Lapokban 1962-ben (XXIV. kötet 15. szám) megjelent cikkét: „Néhány elemi geometriai problémáról", valamint Surányi Jánossal közösen írt könyvét: „Válogatott fejezetek a számelméletből", mely az utóbbi évek egyik legszebb eredménye a matematika népszerűsítése terén. Ezek és általában népnépszerűsítő tevékenysége nem egyedi jelenség Erdős Pál gazdag matematikai munkásságában, hanem annak szerves része.

Horvay Katalin az Eötvös Loránd Tudományegyetem ábrázoló geometriai tanszékének adjunktusa. Magas óraszámú egyetemi elfoglaltsága mellett 1957 óta rendszeresen tanít középiskolában is, hogy személyes tapasztalatai alapján nyújtson segítséget a középiskolai matematika és ábrázoló geometria oktatás színvonalának emeléséhez. A tanárok továbbképzése érdekében gyakran tartott előadást a Bolyai János Matematikai Társulat vidéki tagozataiban. Világos, gondosan felépített előadásai nagy segítséget nyújtottak a matematika tanároknak az iskolai anyag tanításához. Előadott diákoknak középiskolai matematikai délutánokon, tanároknak pedig a Fővárosi Pedagógiai Szeminárium és a Központi Pedagógus Továbbképző Intézet tanfolyamain. A Tudományos Ismeretterjesztő Társulat József Attila szabadegyetemén, és a Magyar Szovjet Barátsági Hónapok alkalmával rendezett előadás-sorozatokon is részt vett a matematika népszerűsítésében. A Központi Pedagógus Továbbképző Intézetben tartott több előadása nyomtatásban is megjelent, és sajtó alatt van három matematika népszerűsítő cikke. Az előkészületben levő régóta nélkülözött geometriai példatár térgeometriai részét írja. Több tankönyv és szakköri füzet bírálója volt. Több éven át tagja volt a tanulmányi versenyek központi bizottságainak, saját tanítványainak részvétele óta mint kerületi bizottsági tag vesz részt a versenydolgozatok felülbírálásában. Az iskolai matematika tanítás jobb, korszerűbb módszereinek kidolgozásával tudományos szinten foglalkozik. Kísérleteket végez a vektorok középiskolai tanításával kapcsolatban. Munkaidejét nem kímélve, minden hozzá fordulónak, diáknak és tanárnak egyaránt szívesen nyújt segítséget, útmutatást. Tanítványaival megkedvelteti a matematikát, és igen következetes, magas színvonalú tanári munkájának eredményeképpen azok megbízható, alapos tudásra tesznek szert.

Krix Márton a bajai Tóth Kálmán leánygimnázium tanára. Szakmai felkészültsége kiváló. „A Matematika Tanítása" feladatainak sikeres megoldója. Tanítási módszere igen eredményes. Jó eredményét óráinak tervszerű kihasználásával, a tanulók maximális aktivizálásával, változatos, jól átgondolt módszerével, az óratípusok megfelelő variálásával éri el. Tanítványai a tárgyat szeretik, a tananyagot jól megértik, matematikai készségüket sikeresen fejleszti. Mind a szaktárgyakkal, mind az 5 + 1-es oktatással kapcsolatos nevelési, koncentrálási lehetőségek meglátására és azok gyakorlati megvalósítására vonatkozó gondolatai és tapasztalatainak átadása nagy segítséget nyújtanak nevelőtársainak. A matematikai szakkör vezetését gondos előkészülettel, példamutató aktivizáló tevékenységgel látja el. A szakköri tagoknak a feladatmegoldás területén jó képzést nyújt. A Középiskolai Matematikai Lapok feladatainak megoldatásával jól készíti elő tanítványait az egyetemre és a középiskolai tanulmányi versenyekre. Gyakran kerül tanítványa a döntőbe. A felnőttoktatás területén az Agrártudományi Egyetem megbízásából a levelező hallgatók matematikai előkészítését végzi, ugyancsak jó eredménnyel. Fiatalabb kartársait nemcsak tanácsaival, hanem a kölcsönös óralátogatásokat követő óraelemzéssel is segíti.

Lengyel Ferenc a budapesti általános iskolai szakfelügyelő gárda egyik legképzettebb tagja. Két fontos — jelentős részében munkások lakta — kerületben (IX, XX) irányítja szívügyeként az általános iskolai matematika tanítást. Alapos pedagógiai és szakmai tudásáért, tárgyilagosságáért, józan tanácsaiért és mindig kollegiális útmutatásaiért kerületeiben közmegbecsülésnek örvend. A XX. kerületben

különösen élénk és eredményes munkaközösségi munkát szervezett. A geometriai terepmérések tényleges végrehajtásának lelkes szószólója; a budapesti pedagógusok továbbképzésében évről-évre erről a témáról és metodikai vonatkozásairól előadást tartott. Maga is ügyes és ötletes terepmérő eszközöket készített.

A matematika tanítás eredményességének, helyzetének és színvonalának megállapítására sokoldalúan alkalmazza az általa felügyelt kerületben a felmérés módszerét. 1953/54-ben és 1954—55-ben a munkás tanulók oktatási és tanulási problémáinak felderítésére végzett felmérést. Erről készített tanulmánya adta elsősorban alapját az ez évben kapott „Az oktatásügy kiváló dolgozója" kitüntetésnek. Az 1957/58. tanévben a IX. és XX. kerület összes iskolájára kiterjedő felmérése elsősorban az általános iskolában elérhető ismeretek és készségek felderítését célozza. Felméréseit mélyreható elemzés követi. A Matematika Tanítása 1960/61 évfolyamában tanulmánya jelent meg a szakfelügyelői eredményvizsgálat módszereiről. Az 1960/61. tanév második felében a Művelődésügyi Minisztérium külső munkatársaként közvetlenül is részt vett az általános iskola új tantervével kapcsolatos megyei ankétok megszervezésében és irányításában. Tagja az új tanterv kidolgozásával foglalkozó tantárgyi bizottságnak és a felsőoktatási reformbiozttságnak is.

A matematika tanítás korszerűsítésének lelkes híve. Jelentős részt vállalt az új általános iskolai tankönyvek megírásából. Az V. osztályos tankönyv kéziratának egyik változatát Jász Alajosnéval együtt jó eredménnyel készítette el. Megbízást kapott a VI. és VII. osztályos tankönyvek megírására is.

Trebiczky Sarolta a keszthelyi Vajda János általános gimnázium tanára. Hosszú pedagógiai gyakorlattal rendelkező tanár. Működése során sok értékes és hasznos tapasztalatot szerzett. Tanári pályáját a zalaegerszegi állami polgári iskolában kezdte. Innét került a 40-es évek elején Keszthelyre. Az iskolák államosítása után az általános leányiskola igazgatója lett. Később megbízták az általános iskolák matematika-fizika szakos nevelőinek szakfelügyeletével. Rátermettsége, alapos tárgyi tudása, példaszerű iskolai munkája növelték tekintélyét ezen a munkaterületen is. Tanítványaival szemben következetes, igazságos és megértő nevelőnek bizonyult. A nevelők tárgyilagos, előremutató bírálatai miatt szerették. Az általános iskolákban szerzett tapasztalatait jól értékesítette gimnáziumi tanári működése során. 1960. óta tanít jelenlegi munkahelyén. Szakmai munkájának jellemzői: a szemléletes magyarázat, kapcsolatok keresése a gyakorlati élettel, pontosságra nevelés. Az új pedagógiai eljárásokat is eredménnyel alkalmazza. A számonkérés új módja után kutat, az órán való gyakorlásra sok időt fordít, a kiváló tanulókkal szakkörben foglalkozik.

A Bolyai János Matematikai Társulat munkájában az 50-es évek eleje óta vesz részt. A Társulat veszprémi tagozatának létrehozásában, majd annak minden munkájában tevékenyen működött közre. Mindkét hazai matematikai kongresszuson jelen volt. Jelenleg példamutató tanítási munkája mellett a Keszthely—Sümeg—Tapolca középiskolai matematika tanárai részére szervezett munkaközösségben is eredményes munkát végez. Elindította a közeli iskolák közötti tapasztalatcsere mozgalmat. Több előadást tartott általános és középiskolai tanárok számára.

Társulati élet

A Bolyai János Matematikai Társulat Budapesti Tagozatának előadásai 1961. január 1-től, 1961. december 31-ig.

Január 14.

SCHMIDT E. TAMÁS: Síklapokkal határolt testek egymásba-darabolhatóságáról. Középiskolai matematikai délután.

Január 20.

1. GAGYI PÁLFFY ANDRÁS: A függvények konvexségének egyszerűbb algebrai feltételei.
2. Filmösszeállítás az I. és II. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról. (A felvételeket BOLLOBÁS BÉLA és MEZEI FERENC készítették) Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása.

Február 11.

SCHARNITZKY VIKTOR: Egyenletek közelítő megoldása. Középiskolai matematikai délután.

Február 24.

BOLLOBÁS BÉLA: Feladatok a konvex tartományok köréből. Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása.

Február 24.

Az NDK-ból kapott oktatófilmek bemutatása.
a) „Potenzfunktionen I; $y = ax^2$" oktatófilm és állóképsorozat,
b) „Trigonometrische Punktbestimmung" oktatófilm és állóképsorozat,
c) a „Nichteuklidische Geometrie" c. filmsorozatnak a pszeudoszféra geometriáját tárgyaló része.

Február 24.

SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENY eredményhírdetése és díjak kiosztása. A versenyfeladatok megoldásait CORRÁDI KERESZTÉLY ismertette.

Március 17.

SZILÁRD KÁROLY: Kvázikonform leképezésekről. Legyen $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ a $z = x + iy$ komplex változó komplex értékű függvénye, ahol $u(x, y)$ és $v(x, y)$

valós függvényei az x és y valós változóknak és a következő elliptikus kvázilineáris elsőfokú parciális differenciálegyenlet-rendszernek tesznek eleget:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = c\frac{\partial u}{\partial x} + d\frac{\partial u}{\partial y}.$$

a, b, c és d az x, y, u és v folytonosan differenciálható függvényei és

$$ad - \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 > 0.$$

Ez a differenciálegyenlet-rendszer általánosítása a Cauchy—Riemann-féle egyenletrendszernek és az $f(x) = u + iv$ függvények az analitikus függvények általánosításainak tekinthetők. Az a, b, c és d koefficiensekre nézve elég gyenge megszorítások mellett az $f(z) = u + iv$ függvénycsaládra sok olyan tételt lehet kimondani és bebizonyítani, amelyeknek az analogonjai az analitikus függvények családjára ismeretesek. (Pl. a kis és a nagy Picard-féle tétel, Koebe torzítási tétele, stb.) A megfelelő egyrétű leképezések elmélete — általánosítása a konform leképezések elméletének.

Az utóbbi 30 évben további általánosítások lettek ismeretesek, főképp Grötzsch, Lavrentyev, Bers, Schabat, Pfluger, Ahlfors, Beurling, Mori és az ő követőik révén. Az elmélet kezdeményezőjének Beltramit tekinthetjük, akinek első ezirányú munkája 1867-ben jelent meg. A század elején szintén jelentek meg ily irányú munkák S. Bernstein-től és D. Pompeiu-tól. Ezek azonban csak kb. 30 év múltán találtak visszhangra.

Március 18.

RÁBAI IMRE: Algebrai és geometriai tételek igazolása.
Középiskolai matematikai délután.

Március 24.

NÁRAY SZABÓ GÁBOR: A Thales-tétel térbeli általánosításáról.
Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása.

Március 24.

SZÜSZ PÉTER: Kuzmin egy tételének általánosítása.

Előadó a következő tételt bizonyította be: $m_0(k_1, k_2, x)$. Legyen r adott természetes szám, $(k_1, k_2 = 0, 1, \ldots, r-1)$ kétszer folytonosan diffferenciálható függvények, amelyek a következő feltételeknek tesznek eleget

$$m_0(k_1, k_2, 0) = 0,$$

$$\sum_{k_1, k_2} m_0(k_1, k_2, 1) = 1,$$

$$m_0(k_1, k_2, x) \equiv 0, \quad \text{ha} \quad (k_1, k_2, r) > 1.$$

Legyenek az $\{m_n(k_1, k_2, x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ függvénysorozat tagjai definiálva az

$$m_{n+1}(k_1, k_2, x) = \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ m_n\left(s(l), k_1, \frac{1}{l}\right) - m_n\left(s(l), k_1, \frac{1}{l+x}\right) \right\}$$

rekurziós formulával, ahol $s(l)$ 0 és $r-1$ között fekvő egész szám, amely az

$$s(l) \equiv k_2 - lk_1 \pmod{r}$$

kongruencia által van meghatározva. Akkor fennáll a

$$m'_n(k_1, k_2, x) - (c(r)^{-1} \log 2))^{-1} \frac{1}{1+x} = O(q^n),$$

ahol q egy 1-nél kisebb, csak r-től függő állandó, továbbá

$$c(r) = r^2 \prod_{p|r} (1-p^{-2}).$$

Mint e tétel alkalmazása adódik többek között a következő tétel: Legyen α irracionális szám, $B_1, B_2, \ldots$ a lánctört kifejtésének közelítő nevezői. Akkor majdnem minden α-ra fennáll, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{\nu \leqq n \\ B_\nu \equiv k \pmod{r}}} 1 = \frac{r\varphi(k, r)}{c(r)(k, r)}.$$

Az előadáson ismertetett eredmények azóta megjelentek az Acta Arithmetica-ban. VII. (1962) 149—160. old.

Április 12.

B. H. NEUMANN (Anglia): Sylowsche Sätze in unendlichen Gruppen.

Április 14.

FREUD GÉZA: Interpolációs eljárások négyzetes konvergenciájáról.

Erdős és Turán, majd Balázs és Turán vizsgálatait folytatva, az előadó olyan interpolációs eljárások súlyozott középben való konvergenciáját bizonyítja, amelynek alappontjai a súlyhoz tartozó ortogonális polinomok gyökei. A súlyfüggvényről (eloszlásfüggvényről) csak annyit tesz fel, hogy azt a momentumai egyértelműen meghatározzák, ami akkor is teljesülhet, ha az eloszlás szupportja nem korlátos.

Április 15.

LAJOS SÁNDOR: A Fibonacci-féle számokról.

Középiskolai matematikai délután.

Április 21.

G. ZAPPA (Firenze): Sur les compléments normaux des sousgroupes de Hall dans les groupes finis.

(Hall-féle alcsoport normális komplementeréről véges csoportban.)

Legyen G egy véges csoport és H egy valódi alcsoportja. Ha H rendje és indexe G-ben relatív prímek, akkor H-t G-ben Hall-féle alcsoportnak nevezzük. G-nek N normálosztója normális komplementerje H-nak, ha $G = HN$ ahol $H \cap N = 1$. Frobeniustól kezdve többen foglalkoztak azzal a problémával, milyen feltételek mellett van H-nak normális komplementerje (Frobenius, Baer, Thompson, Kochendörffer).

Előadó ezzel a kérdéssel kapcsolatban igazolja a következő tételt:

Legyen G egy véges csoport és H G-nek egy Hall-féle feloldható alcsoportja. Legyen R H-nak (bal- vagy jobb-) olyan reprezentáns-rendszere, hogy $x^{-1}Rx = R$ minden $x \in H$-ra (feltéve, hogy ilyen létezik). Tekintsük G azon alcsoportjait, amelyek rendjében csak olyan prímszámok lépnek fel, mint amelyek H rendjében találhatók.

Ha bármelyik ilyen alcsoport megtalálható H-ban vagy H valamelyik konjugáltjában, akkor H-nak van normális komplementerje.

A tétel utolsó feltétele nem hagyható el, mert erre az ikozaedorcsoport mutat ellenpéldát.

Április 28.

ALEXITS GYÖRGY útibeszámolója.
Klubest.

Május 12.

Az Országos Matematikai Verseny feladatainak megbeszélése.
Az Ifjúsági Matematikai Kör összejövetele.

Május 13.

CSÉBFALVI KÁROLY: Érdekes gyakorlati szélsőérték feladatok.
Középiskolai matematikai délután.

Május 16.

M. D. DONSKER (Egyesült Államok): Boundary value problems, functional space integrals, and Volterra variational equations.
A MTA Matematikai Kutató Intézetével közös rendezésben.

Május 19.

ACZÉL JÁNOS: Egy geometriai-algebrai probléma elemi analitikus megoldása.
Az előadás részletes szövege a Bolletino dell' Unione Matematica Italiana (3) 15 (1960) 479—484-ben jelent meg.

Május 22.

G. VRĂNCEANU (Román Népköztársaság): Groupes d'holonomie des espaces à connexion affine.

Május 26.

A. D. WALLACE (Egyesült Államok): Periodicity and Related Properties of Semigroupes.

Június 10.

Az ARANY DÁNIEL verseny eredményhirdetése és díjkiosztása. A versenyfeladatokat LŐRINCZ PÁL ismertette.

Augusztus 14—19.

Z. P. DIENES és VARGA TAMÁS előadássorozata matematikaoktatási kísérletekről.

Augusztus 30.

Z. P. DIENES (Anglia): A képzelet felhasználása a matematika tanításában.

Szeptember 16.

VINCZE ISTVÁN: A valószínűségszámításról és néhány alkalmazásáról. I.
Középiskolai matematikai délután.

Szeptember 29.

Beszámoló a III. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról.
A versenyek lefolyását HÓDI ENDRE, a Diákolimpia Előkészítő Bizottságának titkára, a feladatokat a versenyzők ismertették. Az Ifjúsági Matematikai Kör ülése.

Október 7.

VINCZE ISTVÁN: A valószínűségszámításról és néhány alkalmazásáról. II. Középiskolai matematikai délután.

Október 20.

ADLER GYÖRGY: Harmonikus függvények becslése vegyes típusú peremfeltételek esetén.

Az előadó — általánosítva O. A. Olejnyik egy előző eredményét (lásd [3]), és bizonyos értelemben kiegészítve C. Pucci általában meg nem konstruálható segédfüggvényekre támaszkodó becslését —, a következő tételt bizonyította be: (a tétel szabatosan megfogalmazott feltételeit lásd az előadó [1] dolgozatában):

Tegyük fel, hogy az n dimenziós tér Ω tartományának Σ felszíne elég reguláris, és $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3$, ahol Σ_1, Σ_2 és Σ_3 ugyancsak elég regulárisak. Az $u(P)$ függvény legyen harmonikus Ω-ban és folytonosan differenciálható $(\Omega+\Sigma)$-ban, továbbá tegyen eleget a következő peremfeltételeknek:

$$u(P)=0, \quad \text{ha} \quad P\in\Sigma_1$$

$$a(P)\frac{\partial u(P)}{\partial \nu}-b(P)u(P)=0, \ (ab>0), \quad \text{ha} \quad P\in\Sigma_2$$

és

$$\frac{\partial u(P)}{\partial \nu}=\gamma(P), \quad \text{ha} \quad P\in\Sigma_3,$$

ahol ν a Σ belső normálisa. Akkor

$$\max_{\Omega-\Sigma}|u|\leqq A\left(n, r, L, |\Sigma_1|, |\Sigma_2|, |\Sigma_3|, \sup_{\Sigma_2}\frac{a}{b}, \sup_{\Sigma_2}\frac{b}{a}\right)\sup_{\Sigma_3}|\gamma|,$$

ahol r és L a tartomány alakjától függő állandók (durván szólva r Σ maximális görbületét, L pedig Ω „elnyúltságát" méri), $|\Sigma_i|$ pedig a Σ_i felületdarab felszíne.

Az előadó az A függvényt explicite meghatározta; A alakja függ attól, hogy Σ_1 üres halmaz-e, vagy sem.

IRODALOM

[1] ADLER GY.: Maggiorazione delle funzioni armoniche con condizioni al contorno di tipo misto. *Atti della Accad. delle Sci. di Torino 95* (1960—61).

[2] OLEJNYIK, O. A.: Ob usztajcsivosztyi zadacsi Nyejmana (Neuman-a). *Uszpehi Mat. Nauk 11* (1956) 223—225.

[3] PUCCI C.: Maggiorazione della soluzione problema al contorno di tipo misto, relativo a equazione a derivate parziali, lineare, del secondo ordine. *Rendicionti dell' Accad. Naz. dei Lincei*, serie VIII. vol. XIII., fasc. 6 (1952) 360—366.

Október 20.

SZIDAROVSZKY FERENC: Magasabbrendű számtani sorok. Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása.

Október 27.

FREUD GÉZA: Hamburger—Stieltjes-féle momentum függvények. (Lásd. Debrecen december 19. előadás.)

November 3.

L. MICHLER (Magdeburg): Über die Bedeutung des Gruppoids in der Galoisschen Theorie.

November 10.

Feladatmegoldások.
Kitűzött feladatok megbeszélése, az Ifjúsági Matematikai Kör ülése.

November 11.

Kürschák József verseny.

November 15.

BAKOS TIBOR: Egyenletek közelítő megoldása.
Előadás a Fővárosi Pedagógiai szemináriummal közös rendezésben, tanárok számára.

November 17.

GRAETZER GYÖRGY: Fél év Kanadában.
Klubest.

November 22.

PÁLMAY LÓRÁNT: Közelítő számítások. I.
Előadás a Fővárosi Pedagógiai Szemináriummal közös rendezésben, általános iskolai tanárok számára.

November 24. CSÁSZÁR ÁKOS: Megemlékezés S. Stoilow-ról.
Az Eötvös Loránd Tudományegyetem Matematikai Intézetével közös rendezésben

November 25.

HORVAY KATALIN: Kúpszeletekkel kapcsolatos feladatok,
Középiskolai matematikai délután.

December 1.

SONNEVEND GYÖRGY: Szerkesztések csak körző használatával.
Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása.

December 1.

ADLER GYÖRGY: A burkoló görbe fogalmának általánosításáról.

Az előadó a burkológörbe fogalmát — bizonyos irányban — a következőképpen általánosította (a definíció tetszésszerinti dimenziószámra minden további nélkül kiterjeszthető):

Legyen $f(x, w)$ $x \in \mathfrak{A}$ és $w \in \mathfrak{B}$ értékekre deffiniált függvény, ahol $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ két tetszésszerinti számhalmaz. Az $y = f(x, w)$ görbesereg $\mathfrak{A}^* \subset \mathfrak{A}$ halmazon vett burkolójának azon (x, y) $(x \in \mathfrak{A}^*)$ pontok összességét nevezzük, amelyekhez létezik olyan elegendő kicsiny $\varepsilon(x, y) > 0$ szám, hogy

$$y = \inf_{y-\varepsilon < f(x,\, w) < y+\varepsilon} f(x, w);$$

vagy

$$y = \sup_{y-\varepsilon < f(x,\, w) < y+\varepsilon} f(x, w).$$

A definíció egyik előnye, hogy vonatkozik olyan esetekre is, midőn a burkolót a görbesereg egyedeinek a csúcsai írják le, és ilyen esetben is analitikus tárgyalást tesz lehetővé, amint azt az előadó példákon megmutatta. A definíció egy másik előnye, hogy a burkológörbe

$$\frac{\partial f(x, w)}{\partial w} = 0$$

feltételi egyenletét olyan esetekben is triviális módon szolgáltatja, midőn a klasszikus levezetés nem is érvényes.

December 8.

MÁTÉ LÁSZLÓ: Mikusinszki-féle logaritmusok problémájáról.
Az 1961. évi Grünwald Géza díj kiosztása.

December 9.

MOLNÁR ERNŐ: Bizonyítás húrnégyszögek módszerével.
Középiskolai matematikai délután.

December 15.

Az 1961. évi Kürschák József verseny eredményhirdetése és díjkiosztása.
A versenyfeladatokat HAJÓS GYÖRGY ismertette.

December 22.

A Schweitzer Miklós matematikai emlékverseny eredményhirdetése és díjkiosztása.
A versenyfeladatok megoldását ERDŐS JENŐ ismertette.

Az Ifjúsági Matematikai Kör kétnapos összejövetele:

December 29.

GÁLFI LÁSZLÓ: Matematika a sakktáblán.
Feladatmegoldások.
(A kitűzött feladatok megbeszélése REIMAN ISTVÁN vezetésével.)

December 30.

T. SÓS VERA: Kombinatorikus geometriai problémák.
KUNSZT ZOLTÁN: Az inverzió és alkalmazásai.

Ünnepi szakköri ülések

Március 13.

Eötvös József gimnáziumban.
HÁMORI MIKLÓS: Szovjet eredmények a matematikában.

Március 14.

Teleki Blanka leánygimnáziumban.
LÉVÁRDI LÁSZLÓ: Anyagi pontrendszer súlypontja fogalmának felhasználása geometriai és algebrai feladatok megoldásánál.

Március 16.

Szabó József Geológiai Technikum.
Ünnepi szakköri ülés: Az aritmetikai és algebrai feladatok viszonya a gyakorlathoz.

Március 21.

Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium.
II. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiász Előkészítő Bizottságának feladataiból.

Március 21.

Bolyai Fonó- Szövő- és Hurkolóipari Technikumban.
HORVAY KATALIN: Anyagi pontrendszer súlypontja fogalmának felhasználása geometriai és algebrai feladatok megoldásánál.

Március 22.

Móra Ferenc leánygimnáziumban.
HARDY ZSIGMOND: II. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiász Előkészítő Bizottságának feladataiból.

Március 22.

I. László gimnáziumban.
Ünnepi szakköri ülés: Feladatmegoldások.

Március 24.

József Attila Gépipari Technikumban.
Ünnepi szakköri ülés: Feladatmegoldások.

Március 27.

Rákóczi Ferenc gimnázium.
TOLNAI JENŐ: A II. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiász Előkészítő Bizottságának feladataiból.

Március 28.

Petőfi Sándor gimnáziumban.
REMÉNYI GUSZTÁV: A II. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiász Előkészítő Bizottságának feladataiból.

Március 30.

Ságvári Endre gyak. leánygimnázium.
HÓDI ENDRE: A II. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiász Előkészítő Bizottságának feladataiból.

Április 12.

Piarista Gimnáziumban.
Ünnepi szakköri ülés: A II. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiász Előkészítő Bizottságának feladataiból.

Április 14.

Steinmetz Miklós gimnáziumban.
Ünnepi szakköri ülés: II. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiász Előkészítő Bizottságának feladataiból.

Április 19.

Kossuth Lajos gimnázium.
Ünnepi szakköri ülés.

Április 24.

Általános Gimnázium Nagykáta.
REMÉNYI GUSZTÁV: A II. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiász Előkészítő Bizottságának feladataiból.

Október 24.

Székesfehérváron.
REMÉNYI GUSZTÁV: A közelítő számítások tanításáról.

A Bolyai János Matematikai Társulat Szegedi Tagozatának előadásai 1961. január 1-től 1961. december 31-ig.

Február 11.

FREUD GÉZA: Hézagos Fourier sorokról.
Az előadás a Math. Zeitschrift c. lapban sajtó alatt levő „Über trigonometrische Approximation und Fouriersche Reihen" c. dolgozat 4. fejezetének anyagából állt.

Március 4.

ACZÉL JÁNOS: A hálózatok (Gewebe) algebrai elméletéről.
Az előadás az alábbi dolgozat tartalmát ismertette: J. Aczél—G. Pickert—F. Radó: Nomogramme, Gewebe und Quasigruppen, Mathematica (Cluj) 2 (25) (1960) 5—24.

Március 22.

ERDŐS PÁL: Additív számelméleti problémák.
Legyen $a_1, a_2, \ldots a_{2n-1}$ egész szám. Akkor mindig található közülük n, melyeknek összege n többszöröse. E tételt Ziv és Ginsburg Haifa-i matematikusokkal együtt bizonyította be az előadó. E tételnek csoportelméleti kapcsolatai is vannak.

Április 17.

B. H. NEUMANN (Anglia): Das Halbgruppenkranzprodukt.

Április 25.

G. ZAPPA (Firenze): Le probleme de Hughes dans les groupes.

Május 20.

CSÁSZÁR ÁKOS: Az approximatív határértékről.
Az előadó ismertette a Haupt—Pauc-féle approximatív topológiát, az approximatív határértéknek és limes halmaznak ezen alapuló definicióját, továbbá Matyszák, Kulbacka és Naugebauer tételeit, s rámutatott arra, hogy a valós függvénytan klasszikusnak mondható területein milyen haszonnal jár általános topológiai módszerek alkalmazása.

Május 13.

SCHMIDT E. TAMÁS: Kompaktul generált hálók.
A komplett L háló x elemét kompaktnak nevezzük, ha $x \leqq V(x_\lambda;\ \lambda \in \Lambda)$-ból $x \leqq V(x_\lambda;\ \lambda \in \Lambda')$ adódik a Λ-nak valamely véges Λ' részhalmazára. Az L háló kompaktul generált, ha komplett és minden eleme kompakt elemek egyesítése. Az előadás

főtétele: Egy L háló akkor és csakis akkor izomorf valamely algebrai struktúra összes kongruenciarelációinak hálójával, ha kompaktul generált. Az előadó ezután ezen tétel élesítésével foglalkozott és korollárium ként nyerte B. Jonsson néhány tételét. Az előadás eredményei Grätzer Györggyel közös eredmények.

Szeptember 14.

KERTÉSZ ANDOR: Nemkommutatív csoportok szerváns csoportjairól.

G. VRANCEANU (Román Népköztársaság): Réduction a la forme canonique, de deux formes quadratiques, dont aucune n'est définie positive.

Szeptember 21.

ERDŐS PÁL: Néhány gráfelméleti problémáról.

Szeptember 23. JOHANNES BÖHM: Zu Coxeter's Integrations-Methode in Räumen konstanter Krümmung.

November 16.

STEINFELD OTTO: Prímtényezős felbontások részben rendezett félcsoportokban.

Az előadó két szükséges és elégséges feltételt ismertetett arra vonatkozóan, hogy egy kommutatív részben rendezett (multiplikatív) félcsoportban mindegyik elem egyértelmű módon felírható legyen prímelemek szorzataként. Az eredmények alkalmazhatóak pl. egy kommutatív gyűrű ideáljainak részben rendezett (multiplikatív) félcsoportjára.

November 16.

BÓDI BÉLA (Szovjetunió): Félcsoport és gyűrű kereszt szorzatairól.

A Bolyai János Matematikai Társulat Debreceni Tagozatának előadásai 1961. január 1-től 1961. december 31-ig.

Január 15.

BARNA BÉLA: Valós függvények iterációjáról.

Egy példa bemutatása, majd megoldatlan problémák ismertetése.

Február 14.

POLLÁK GYÖRGY: Euklideszi- és főosztályhalmazok.

Február 22.

FAZEKAS KATALIN: A háromszög nevezetes vonalai és pontjai. Előadás a Fazekas gimnáziumban.

Március 3.

MOÓR ARTHUR: Folytonos transzformációs csoportok objektumai.

Csoportobjektumnak nevezünk egy olyan függvényrendszert, amely az objektumok transzformációs törvényeinek tesz eleget egy bizonyos transzformációs csoportra nézve. Egyes transzformációs csoportok jellemezhetők alkalmas objektumokkal. Végül szükséges és elegendő, feltételt állapított meg az előadó azon transzformációs csoportokra, amelyekre nézve a ko- és kontravariáns vektorok megegyeznek.

Március 16.

MERZA JÓZSEF: Felületi görbék kísérő triéderei és alkalmazásuk. Fiatalok klubja.

Felületi görbékhez kétféle módon csatolhatunk affin kísérő triédert, ha a görbét egyszer, mint térgörbét, másszor mint a felületen haladó görbét tekintjük. Az első

típusú tríéder már régóta ismeretes, míg a második esetben eddig kielégítő megoldás nem született. Az előadásban második típusú tríéder megoldása történt, majd annak segítségével a felületi görbéhez, mint térgörbéhez tartozó invariánsok kifejezését adta felületi mennyiségek segítségével. Az erre vonatkozó számítások elvégzése révén több — eddig formálisan értelmezett affin geometriai invariáns nyert szemléletes geometriai interpretációt. Az előadásban mind a hiperbolikus, mind a parabolikus affin geometriai vizsgálatok megtalálhatók.

Március 21.

RÓZSA PÁL: Rekurzív eljárás lineáris differenciálegyenletek megoldására.

Egy kvadratikus mátrixot akkor nevezünk Hermite-féle normál alakúnak, ha
1° felső háromszögmátrix, azaz a főátló alatt minden eleme 0,
2° a főátlóban minden eleme 1, vagy 0,
3° ha a főátló egy eleme 1, akkor ebben az oszlopban az összes többi elem 0,
4° ha a főátló egy eleme 0, akkor ebben a sorban minden elem 0.

Megadható egy egyszerű algoritmus, amellyel egy tetszőleges mátrix véges számú lépésben Hermite-féle normál alakra hozható. Az Hermite-féle normál alak jelentősége abban áll, hogy automatikusan szétválasztja egy egyenletrendszer ismeretleneit szabad és kötött ismeretlenekre.

Egy $\mathbf{Ax}+\mathbf{Bx}=\mathbf{f}(t)$ alakú állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletrendszer megoldására, szinguláris **A** mátrix esetén, egyszerű redukciós eljárás adódik. Ugyanis, ha az egyenletrendszer együtthatóiból alkotott mátrixokat egyetlen $[\mathbf{AB}\mathbf{f}(t)]$ alakú mátrixnak tekintjük és ezt Hermite-féle normál alakra hozzuk, akkor ezzel az egyenlet szétesik egy algebrai és egy differenciálegyenletrendszerre. Az algebrai egyenletrendszer explicit alakban adódó megoldását felhasználva, a differenciálegyenletrendszer-ismeretleneinek a száma redukálható. Véges számú lépéssel így olyan differenciálegyenlet-rendszert nyerünk, amelynek az együtthatómátrixa már nem szinguláris, tehát az ismert módon megoldható.

Március 22.

GESZTELYI ERNŐ: Középiskolai versenyfeladatok megoldása. Matematikai délután a Fazekas gimnáziumban.

Április 11.

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA: Invariáns Banach közepek csoportokon.

A G-topológikus csoporton értelmezett korlátos, folytonos $h(x)$ függvények halmazát jelöljük $C(G)$-vel. Ha $Y \in G$, jelöljük $h_y(x)$-szel a $h(y^{-1}x)$ függvényt. A $C(G)$-n értelmezett $L[h]$ számértékű operációt „balról invariáns Banach-középnek" nevezzük, ha 1. L lineáris, 2. L pozitív (azaz pozitív függvényhez pozitív számokat rendel), 3. $L[c]=c$, ahol c konstans, 4. $L[h_y]=L[h]$ minden $h \in C(G)$ és $y \in G$ esetén. Az előadás ismertette egy — Dixmiertől származó — szükséges és elégséges feltételeit ilyen operáció létezésének s bemutatta a balról invariáns Banach-közép fogalmának felhasználását a csoportelőállításelméletben.

Március 23.

BARNA BÉLA: A matematika tanításával kapcsolatos kérdések.
Tanári továbbképző előadás.

Április 14.

B. H. NEUMANN: Gruppeneinbettungssätze.

Április 19.

KÁNTOR SÁNDOR: Feladat megoldás vagy technikája.
Matematikai délután a Fazekas gimnáziumban.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

Április 21.

GESZTELYI ERNŐ: Disztribuciókról.

Az előadásban a Mikusinski-féle operátorfogalom ismertetéséről és a disztribució fogalmának J. Korevaar által adott értelmezéséről volt szó. Az előadó egy bizonyítását adta Fenyő István azon eredményének, amely szerint minden a (O, ∞) intervallumon értelmezett disztribució azonosítható egy Mikusinski-féle operátorral.

Április 24.

FAZEKAS KATALIN: Anyagi pontrendszer súlypontjának felhasználása.

Matematikai délután a Kossuth Gyakorló Gimnáziumban.

Április 24.

MUCSA JÁNOS: Az algebrai feladatok viszonya a gyakorlathoz.

Május 2.

ERCSI KATALIN: Anyagi pontrendszer súlypontjának felhasználása geometriai feladatok megoldására.

Matematikai délután Berettyóújfalun.

Május 6.

TURÁN PÁL: A prímszámok eloszlása különböző maradékosztályokban.

S. Knapowskival közös eredmények, amelyek kibővítve az Acta Math. Hung.-ban jelennek meg "Comparative prime-number theory I—VIII." címmel.

TURÁN PÁL: A. Zygmund egy problémájáról.

Oly explicit $f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} (a_\nu \cos l_\nu x + b_\nu \sin l_\nu x)$ függvény konstrukciója, melyre $l_{\nu+1} - l_\nu > l_\nu^{\frac{1}{10}} (\nu = 1, 2, \ldots)$ és melyre $q > 6$-ra $f \notin L_q(0, 2\pi)$, de $0 < a < b < 2\pi$-re $f \in L_q(a, b)$.

Május 22.

KÁRTESZI FERENC: A grafikus terek.

Június 5.

SZÉP JENŐ: Véges csoportok kvázi normálosztóiról.

A kvázinormálosztó fogalmát O. Ore vezette be. Véges csoportok esetében egy kvázinormálosztó létezéséből az illető csoport szerkezetére messzemenő következtetés vonható. Így pl. ha Q nem triviális kváziinormálosztó a G végescsoportban és N maximális Q-ban levő normálosztója G-nek, akkor 1. Q/N nilpotens, 2. $|Q/N|$ minden d prímtényezőjéhez tartozik G-nek egy p indexű normálosztója.

Június 15.

BARNA BÉLA: Valós függvények iterációjáról.

Egy példa bemutatása, majd megoldatlan problémák ismertetése. Fiatalok klubja.

Vándorgyűlés.

Június 29.

Megnyitó.

GYIRES BÉLA: A közelítő számításokról.

Június 30.

VIKÁR ISTVÁN: Közelítő számítások az általános iskolában.

BAKOS TIBOR: Közelítő számítások a középiskolában.

A BEKE MANÓ emlékdíj kiosztása.
ACZÉL JÁNOS: Az analízis fogalmai és módszerei a középiskolai matematikaanyag tükrében.

Július 1.
BARNA BÉLA: A π-számról.
TÖRÖK SÁNDOR: Nomogrammok és egyéb számítási segédeszközök a középiskolában. *Zárszó.*

Augusztus 22.
Z. P. DIENES: (Anglia): A matematikai képzelet tudatos kialakítása.

Szeptember 16.
S. KUREPA (Zágráb): Az általánosított kör területe.
A TIT-tel közös előadás.

Szeptember 16.
S. KUREPA (Zágráb): Functional equations in linear spaces.

Szeptember 18.
G. VRANCEANU (Román Népköztársaság): Lokálisan euklideszi terek affin összefüggéséről.

Október 25.
SZENÁSSY BARNA: König Gyula halálának 50. évfordulója elé.
1963. április 8-án lesz König Gyula halálának 50. évfordulója. Az előadó König Gyula jelentősebb matematikai eredményeit ismertette, majd számos olyan problémára hívta fel a figyelmet, amelyek tudománytörténeti szempontból vele kapcsolatban még feldolgozásra várnak.

Október 25.
ERDÉLYI MÁRIA: A transzcendens számokról.
Tanári továbbképző előadás.

Október 26.
DARÓCZY ZOLTÁN: A középértékekről.
Matematikai délután.

Október 31.
SZABÓ ÁRPÁD: Az euklideszi axiómarendszer kialakulása.

November
ERDŐS JENŐ: Válogatott számelméleti problémák.
Tanári továbbképző előadás.

November
KÁNTOR SÁNDOR: Az idei Kürschák verseny feladatai.
Matematikai délután.

December 4.
MAKAI IMRE: Újabb eredmények geometriai objektumokról.

December 13.
SZÉNÁSSY BARNA: Három klasszikus szerkesztési problémáról.
Tanári továbbképző előadás.

December 19.
FREUD GÉZA: A Hamburger—Stieltjes-féle momentumprobléma egyértelműsége.

Legyen $\alpha(x)$ egy az egész valós tengelyen értelmezett nem fogyó függvény, ξ az $\alpha(x)$ egy folytonossági helye. Egy Riesz Marcelltől és Nevanlinnától származó tételt részben kiegészítve, előadó bebizonyította, hogy $\alpha(x)$-et akkor és csak akkor határozza meg ugráshelyektől eltekintve egyértelműen a $\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n d\alpha(x), n = 0, 1, 2, \ldots$ momentumok sorozata, ha $\sum_{k=0}^{\infty} p_k^2(\xi) = \infty$, ahol $\{p_k(x)\}$ az $\alpha(x)$ eloszlásfüggvényhez tartozó normált ortogonális polinomok sorozata. Bizonyítása lényegesen eltér Riesz és Nevanlinna bizonyításától.

A Matematikai Lapok XI. évfolyam 4. számában közöltük a debreceni tagozat 1960. év folyamán megtartott előadásait. A felsorolásból az alábbi előadások kimaradtak, ezeket itt pótlólag ismertetjük:

Szeptember 18.

BALOGH TIBOR: Matrix értékű sztochasztikus folyamatok. I.

Az előadó kandidátusi disszertációjának eredményeit ismertette. Olyan sztochasztikus folyamatokat vizsgált, amelyeknél a valószínűségi változók véges rendű matrixok. Az ilyen folyamatok kovariáns függvénymatrixát előállította. A továbbiakban Szegő Gábor egy tételsorozatának matrixokra történő általánosítása alkalmazásaként egy speciális paramétermodellben elért eredményeit ismertette. Fiatalok Klubja előadás.

Október 16.

KÁNTOR SÁNDOR: Mindenütt folytonos, sehol sem differenciálható függvények konstrukciója.

Olyan konstrukciót adunk meg, amellyel az összes mindenütt folytonos, sehol sem differenciálható függvény előállítható, azaz a paraméterek alkalmas megválasztásával a konstrukció éppen az adott függvényt szolgáltatja.

A konstrukció alapgondolatát Geöcze Zoárd függvénye szolgáltatta.

Egy pontban négyféle Dini-féle szám maximumának és minimumának különbségét $D(x)$-szel jelölve, a $D(x)$ függvényről megállapítható, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz van olyan folytonos és nem differenciálható függvény, amelynél $D(x) < \varepsilon$ mindenütt sűrűn elhelyezkedő x-ekre.

Az olyan folytonos és nemdifferenciálható függvény konstrukciója, amelynél $D(x) > k > 0$, lényegesen egyszerűbb.

November 7.

KERTÉSZ ANDOR: Csoportok szerváns részcsoportjairól.

Ismeretes, hogy az Abel-féle csoportok elméletében milyen fontos szerepet tölt be a szerváns részcsoportok fogalma. Az előadó általánosította ezt a fogalmat a nemkommutatív csoportok esetére a következőképpen: A G csoport valamely H részcsoportját (G-ben) szerváns részcsoportnak nevezte, ha bármely olyan véges sok ismeretlent tartalmazó H feletti egyenletrendszer, amely G-ben megoldható, H-ban is megoldható. Kimutatta, hogy az Abel-féle csoportok elméletének szerváns részcsoportokra vonatkozó számos tétele átvihető az általános csoportelméletbe. Többek között érvényes Kulikov tételének következő általánosítása: Ha H a G szerváns normálosztója és H centruma korlátos elemrendű, akkor H G-nek direkt faktora.

November 24.

GESZTELYI ERNŐ: A differenciálszámítás egy megalapozása a középiskolában.

Tanári továbbképző előadás.

November 29.
BALOGH TIBOR: Matrix-értékű sztochasztikus folyamatok. II.

December 18.
ACZÉL JÁNOS: Az analízis elemei a középiskolában.
Tanári továbbképző előadás a Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziumban.

December 16.
ACZÉL JÁNOS: Kéttagú geometriai transzformációcsoportok auto-endo és homomorfizmusainak elemi meghatározása.
Az előadó elvégezte az

$$f(xu, yu+v) = f(x, y)f(u, v)$$
$$g(xu, yu+v) = g(x, y)f(u, v)+g(u, v)$$

függvényegyenletrendszer elemi megoldását, anélkül, hogy az f, g függvénypárról bármilyen regularitási feltételt kötött volna ki (folytonosságot sem). Ezt és hasonló egyenletrendszereinknek hasonló elemi módszerekkel adott teljes megoldását alkalmazta a címben szereplő probléma teljes megoldására. Rámutatott általánosítási lehetőségekre és a lineáris geometriai objektumok elméletével való analógiára.

A Bolyai János Matematikai Társulat Borsodi Tagozatának előadásai 1961. január 1-től december 31-ig

Február 10.
KISS BARNA: A kombinatorika elemei.
Diákelőadás a Gépipari Technikumban, Miskolc.

Február 14.
DÖMÖTÖR FERENCNÉ: Az analízis elvi alapjai.
A Diákszakosztály előadása a Herman Ottó Gimnáziumban, Miskolc.

Február 15.
HOSSZÚ MIKLÓS: Dinamikus programozás.
Az előadó R. Bellman munkái alapján ismertette a dinamikus programozás néhány alapfeladatát és a velük kapcsolatos függvényegyenletek felírását és az egyenletek megoldásának általános módszerét vázolta.

Március 8.
KOZÁK IMRE: Vékonyfalú csövek képlékeny alakváltozása.
A Műszaki Szakosztály rendezésében.

Március 10.
SALÁNKI JÓZSEF: Elektronikus számológépek.
A Diákszakosztály előadása a József Attila Gimnáziumban, Ózd.

Március 14.
KISS BARNA: Elsőfokú egyenletek, egyenletrendszerek.
A Klubszakosztály rendezése a Kossuth Leánygimnáziumban, Miskolc.

Március 17.
TÖRŐ BÉLA: A differenciál és integrálszámítás elemei.
A Diákszakosztály rendezése az Általános Gimnáziumban, Szerencs.

Március 17.
HUSZTHY LÁSZLÓ: Lineáris és parabolikus interpolációk.
A Diákszakosztály előadása a Bányaipari Technikumban, Miskolc

Március 21.
KISS BARNA: Szemelvények az egyetemi felvételi vizsga matematikai anyagából.
A Klubszakosztály rendezése a Zalka Máté Gépipari Technikumban.

Március 23.
SZABÓ ÁRPÁD: A matematika története.
A Középiskolai Oktatási Szakosztály rendezése a Földes Ferenc Gimnáziumban, Miskolc.

Március 23.
SZABÓ JENŐ: Gondolatok egy érettségi írásbeli feladat megoldása közben.
A Középiskolai Oktatási Szakosztály előadása a Földes Ferenc Gimnáziumban, Miskolc.

Március 24.
SZABÓ ÁRPÁD: A $\sqrt{2}$-ről.
A Diákszakosztály előadása a Gépipari Technikumban, Miskolc.

Március 24.
SALÁNKI JÓZSEF: Nomográfia elemei, egyszerűbb nomogrammok készítése, bemutatása és használata.
A Klubszakosztály rendezése a Rákóczi Gimnáziumban, Sárospatak.

Március 28.
HOSSZÚ MIKLÓS: Az aritmetikai és algebrai feladatok viszonya a gyakorlathoz.
A Klubszakosztály előadása a Közgazdasági Technikum Ipari Tagozatában, Miskolc.

Március 29.
FÓNYAD ZOLTÁN: Algebrai és aritmetikai feladatok viszonya a gyakorlathoz.
A Diákszakosztály előadása a Kohó- és Öntőipari Technikumban, Miskolc.

Március 30.
VINCZE ENDRE: Az aritmetikai és algebrai feladatok viszonya a gyakorlathoz.
A Klubszakosztály rendezése a Bányaipari Technikumban, Miskolc.

Március 31.
ACZÉL JÁNOS: Egy geometriai-algebrai probléma elemi analitikus megoldása.
Az előadó a kétparaméteres folytonos csoportok tetszőleges (nem feltétlen folytonos) endomorfizmusait határozta meg elemi módszerrel.

Április 12.
TÖRŐ BÉLA: Az aritmetikai és algebrai feladatok a gyakorlatban.
Klubszakosztály rendezése a Közgazdasági Technikumban, Ózdon.

Április 13.
GYULAY JÁNOS: A matematika történetének általános iskolai vonatkozásai.
Az Általános iskolai Szakosztály rendezése a Hermann Ottó Leánygimnáziumban, Miskolc.

Április 14.
SZARKA ZOLTÁN: A kiegyenlítőszámítás elemei.
A Diákszakosztály előadása a Bányaipari Technikumban, Miskolc.

Április 14.
OBÁDOVICS J. GYULA: Feladatok a műszaki egyetemi felvételi vizsga matematikai anyagából.
A Klubszakosztály előadása a Zrinyi Ilona Leánygimnáziumban, Miskolc.

Április 14.
BURÁNY JÁNOS: Egyetemi felvételi feladatok.
A Klubszakosztály előadása a Kilián György Gimnáziumban, Miskolc.

Április 14.
BERKES RUDOLFNÉ: Az aritmetikai és algebrai feladatok viszonya a gyakorlatban.
A Klubszakosztály rendezése a Közgazdasági Technikum Kereskedelmi Tagozatában, Miskolc.

Április 14.
BATÁR ZOLTÁN: Feladatok az egyetemi felvételi vizsga matematikai anyagából.
A Klubszakosztály előadása a Földes Ferenc Gimnáziumban, Miskolc.

Április 14.
VINCZE ENDRE: Az aritmetikai és algebrai feladatok viszonya a gyakorlatban.
A Klubszakosztály előadása a Közgazdasági Technikumban, Sátoraljaújhelyen.

Április 14.
KISS BARNA: Szemelvények az egyetemi felvételi anyag példáiból.
A Klubszakosztály rendezése a Kossuth Gimnáziumban, Sátoraljaújhely.

Április 14.
KISS BARNA: Gömbháromszögtani alapismeretek és gyakorlati alkalmazásuk.
A Klubszakosztály előadása a Rákóczi Gimnáziumban, Sárospatak.

Április 14.
HOSSZÚ MIKLÓS: Elektronikus számológépek elemeinek ismertetése.
A Klubszakosztály rendezése a Bocskai Gimnáziumban, Szerencs.

Április 14.
NIKODÉMUSZ ANTAL: 1. Az 1960. évi bukaresti matematikai olimpia válogatott feladataiból. 2. Aritmetikai és algebrai feladatok viszonya a gyakorlatban.
A Klubszakosztály rendezése az I. László Gimnáziumban, Mezőkövesd.

Április 19.
GÁSPÁR GYULA: A függvény határértéke és a differenciálhányados.
A Középiskolai Oktatási Szakosztály rendezése a Földes Ferenc Gimnáziumban, Miskolc.

Április 19.
BATÁR ZOLTÁN: Műveletek komplex számokkal.
A Klubszakosztály rendezése a Mezőgazdasági Technikumban, Putnokon.

Április 26.
BÉDA GYULA: Az anyag dinamikus viselkedésére vonatkozó vizsgálatok.
A Műszaki Szakosztály rendezése.

Május 10.
OBÁDOVICS J. GYULA: Számológépek.
A Tudományos Szakosztály rendezése.

Május 11.
VINCZE ENDRE: Nomogramok készítése és használata.
A Diákszakosztály előadása a Kilián György Gimnáziumban, Miskolc.

Május 17.
TEVAN GYÖRGY: Az indukciós hevítés számításának matematikai kérdése.
A Műszaki Szakosztály előadása.

Május 19.
BURÁNY JÁNOS: Kombinatorika és valószínűségszámítás elemei.
A Diákszakosztály előadása a Felsőfokú Tanítóképző Intézetben, Sárospatak.

Május 19.
VINCZE ENDRE: Aritmetikai és algebrai feladatok viszonya a gyakorlathoz.
A Klubszakosztály előadása a Mezőgazdasági Technikumban, Sátoraljaújhely.

Május 24.
BATÁR ZOLTÁN titkári beszámolója a Műszaki és Természettudományi Egyesületek Szövetsége klubjában.

TÖRŐ BÉLA: Beszámoló az NDK-ban 1960 augusztus 1—30. eltöltött termelési gyakorlatról.

SALÁNKI JÓZSEF: Beszámoló csehszlovákiai tanulmányutamról.

NIKODÉMUSZ ANTAL: Beszámoló lengyelországi tanulmányutamról.

Szeptember 3.
STANISLAV GOLAB: Lie deriváltak és geometriai objektumok komitánsai. I.
Az előadó a Lie-deriváltak fogalmának történeti kialakulásával foglalkozott, továbbá ennek alkalmazásaival a geometriában. Rámutatott általánosabb terekben is az általánosítás lehetőségeire.
Szeptember 4.
MAKAI IMRE: Lie deriváltak és geometriai objektumok komitánsai. II.
St. Golab előadásához kapcsolódva egyes speciális esetekben, pl. vektorok, tenzorok esetén vizsgálta a derivált értelmezhetőségét, és általános képleteket adott arra nézve, hogy e deriváltak mitől függenek.

November 2.
GÁSPÁR GYULA és RAISZ IVÁN: Néhány nevezetes gyakorlati vonatkozású differenciálegyenlet.
A Középiskolai Oktatási Szakosztály rendezése a Földes Ferenc Gimnáziumban, Miskolc.

November 10.
HUSZTHY LÁSZLÓ: Függvények előállítása méréssel meghatározott pontok alapján.
A Műszaki Szakosztály előadása.

November 15.
KISS BARNA: Egyenletek ekvivalenciája.
A Diákszakosztály előadása a József Attila Gimnáziumban, Ózd.

November 28.
BATÁR ZOLTÁN: Matematikai érdekességek.
A Diákszakosztály előadása a Közgazdasági Technikum Ipari és Mezőgazdasági Tagozatában, Miskolc.

November 30.
OBÁDOVICS J. GYULA: Elektronikus számológépek.
A Középiskolai Oktatási Szakosztály előadása a Rákóczi Gimnáziumban, Sárospatak.

December 6.
SALÁNKI JÓZSEF: A kibernetika alapelvei.
A Középiskolai Szakosztály rendezése a Földes Ferenc Gimnáziumban, Miskolc.

December 12.
SZARKA ZOLTÁN: A végtelen fogalma.
A Diákszakosztály előadása a Mikovinyi Sándor Bányaipari Technikumban, Miskolc.

December 13.
GYULAY JÁNOS: A matematika tanításának története.
Az Általános Iskolai Szakosztály rendezése a Herman Ottó Leánygimnáziumban, Miskolc.

December 13.
KISS BARNA: Elsőfokú egyenletrendszerek megoldása determinánssal.
A Diákszakosztály előadása a Gépipari Technikumban, Miskolc.

December 13.
BATÁR ZOLTÁN: Matematikai érdekességek.
A Diákszakosztály előadása a Herman Ottó Leánygimnáziumban, Miskolc.

December 14.
HUSZTHY LÁSZLÓ: Egyenlőtlenségek.
A Diákszakosztály előadása a Zrinyi Ilona Leánygimnáziumban, Miskolc.

December 15.
NIKODÉMUSZ ANTAL: Geometriai gradiens számítása nem homogén közegben.
A Műszaki Szakosztály előadása.

December 22.
SZÁSZ FERENC: A főjobbideálokra nézve minimumfeltételű gyűrűk.

Az előadás első részében ismertetésre kerültek a gyűrűelméleti fogalmak és az ezek között levő alapvető összefüggések. (Gyűrű, ideál, jobbideál, balideál, műveletek ideálokkal, nilideál, nilpotens ideál, zérusosztó, nilpotens és idempotens elemek, radikáltípusok).

Az előadás második részében az Artin-féle (azaz az összes jobbideálra nézve minimum-feltételű) gyűrűk fogalma és fontos tulajdonságai szerepeltek (niljobbideálok, klasszikus radikál, féligegyszerű Artin-féle gyűrűk, Noether, Wedderburn—Artin, Goldman—Fuchs—Szele tételei, az Artin-féle gyűrűk additív csoportja).

Az előadás harmadik részében ismertetve lettek a főjobbideálokra nézve minimum-feltételű gyűrűk, amelyek elméletének az egyik anyaga a MTA III. Oszt. Közleményei 11 (1961), kötet 135—177 oldalak közt nyomtatásban megjelent. Megemlítendők eme gyűrűosztályban többek között az egyszerű gyűrűk több ekvivalens jellemzése, a Wedderburn—Artin-féle tételek általánosítása, a Harada—Kovács-féle kritérium élesítése, továbbá a radikáloknak, operátortartományként való hatásnak, az additív csoportnak és egyéb kérdéseknek a vizsgálata, valamint megvilágítandó példák szerkesztése és problémák felvetése.

A Bolyai János Matematikai Társulat Pécsi Tagozatának előadásai 1961. január 1-től december 31-ig

Március 8.
SZABÓ ÁRPÁD: Négyzetgyökvonás az ókorban.

Március 8.
SZABÓ ÁRPÁD: A matematika rendszerének kialakulása.

Május 17.
GÁDOR ENDRÉNÉ: A függvénytan tanításának időszerű kérdései.

Május 31.
SZÁSZ FERENC: A középiskolai algebrai tananyag a modern algebra tükrében.

október 4.
Matematikai délután I—II. gimn. tanulók részére. Havonta kétszer folyamatosan. Tartja: DANIS PÁL.

Október 4.
Matematikai délután III—IV. gimn. tanulók részére. Havonta kétszer folyamatosan. Tartja: SZÉKELY FRIGYES.

Október 16.
ACHÁTZ IMRÉNÉ: Kamatos kamatszámítás tanítása.

November 31.
Fejér Lipót emlékverseny.

December 13.
BÓKA ISTVÁN: Térgeometriai tételek bizonyításai. Szerkesztési feladatok megoldásai.

A Bolyai János Matematikai Társulat Veszprémi Tagozatának előadásai 1961. január 1-től 1961. december 31-ig

Március 22.
Továbbképzési nap a keszthelyi Vajda János Gimnáziumban.

GÁDOR ENDRÉNÉ: Feladatmegoldások.
MOLNÁR FERENC: Körzővel elvégezhető szerkesztések az inverzió felhasználásával.
PÁLMAY LÓRÁNT: Feladatmegoldások,

Július
A IV. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia írásbeli versenyei a Veszprémi Vegyipari Egyetem helyiségeiben.

Október 31.
PÁLMAY LÓRÁNT: Vektorok tanítása szakköri foglalkozás keretében.
Előadás tanárok részére a tapolcai gimnáziumban.

December 18.
REIMAN ISTVÁN: Elemi térmértani feladatok (szerkesztési és bizonyítási feladatok)
Előadás tanárok számára Sümegen, a Kisfaludy Sándor Gimnáziumban.

December 6.
Klubest.

A Bolyai János Matematikai Társulat Egri Tagozatának előadásai 1961. január 1-től 1961. december 31-ig

Március 29.
SCHOPP JÁNOS: Parabolaszerkesztések.
Előadás tanárok számára.

Április 17.
ERDŐSI JÓZSEF: Bevezetés a négydimenziós tér geometriájába.
Előadás tanárok és főiskolai hallgatók részére.

Április 21.
JAKAB ALBERT: 1. Aritmetikai és algebrai feladatok viszonya a gyakorlathoz.
2. Anyagi pontrendszer súlypontjainak felhasználása geometriai feladatok megoldására.
Középiskolai délután a Szilágyi Erzsébet Leánygimnáziumban.

Április 29.
KAPÁS ISTVÁN és BODÓ ZOLTÁN tanulók feladatmegoldásokat ismertettek.
Középiskolai délután a Dobó István Gimnáziumban.

Május 11.
FUCHS LÁSZLÓ: Az egész számoktól a hiperkomplex számokig.
Előadás tanárok és főiskolai hallgatók számára.

Május 25.
PERGE IMRE: A függvényfogalom előkészítése az általános iskolában.
Előadás tanároknak a füzesabonyi általános iskolában.

Június 1.
STROMMER GYULA: Szerkesztések a hiperbolikus síkon párhuzamos élű vonalkával.

Október 20.
Továbbképzési nap a Központi Pedagógustovábbképző Intézettel közös rendezésben a Heves megyei középiskolai tanárok számára:
HAJÓS GYÖRGY: A térmértan középiskolai tanításával kapcsolatos problémák.
PÁLMAY LÓRÁNT: A közelítő számítások a gimnáziumi anyagban.
KISS PÉTER: Matematika szakköri foglalkozás.
REMÉNYI GUSZTÁVNÉ: Középiskolai matematikai szakkörök tematikája.

Október 28.
VARGA TAMÁS: Matematikai logika.

December 8.
REIMAN ISTVÁN: A hiperbolikus geometria projektív modelljei.
Előadás tanárok és főiskolai hallgatók számára.

A Bolyai János Matematikai Társulat Győri Tagozatának előadásai 1961. január 1-től 1961. december 31-ig

Február 1.
MARÓTH REZSŐ: A matematika tanításának megyei tapasztalatai és a további tennivalók. Továbbképzési nap.

Március 1.
GALLAI TIBOR: Téglalapoknak különböző négyzetekkel való fedése és a Kirchhoff-féle egyenletek.
Az Eötvös Loránd Fizikai Társulattal közös rendezés.

Március 22.
MOLNÁR ERNŐ: Az aritmetikai és algebrai feladatok viszonya a gyakorlathoz.
Előadás tanároknak a Révai Miklós Gimnáziumban.

Március 27.
BARABÁS SAROLTA: Anyagi pontrendszer súlypontjának felhasználása geometriai feladatok megoldására.
Előadás diákoknak a Kazinczy Ferenc Gimnáziumban.

Március 28.
NÉMETH BÉLÁNÉ: Anyagi pontrendszer súlypontjának felhasználása geometriai feladatok megoldására.
Szakköri előadás diákoknak a Mosonmagyaróvári Kossuth Lajos Áll. Ált. Gimnáziumban.

Április 26.
PÁLMAY LÓRÁNT: Egyetemi felvételi vizsgák tapasztalatai.
Előadás tanárok számára.

Szeptember 29.
MOLNÁR JÓZSEF: Közelítő számítások a középiskolában.
Előadás tanárok részére Mosonmagyaróváron.

November 28.
MOLNÁR ERNŐ: Bizonyítás a húrnégyszögek módszerével.
Előadás diákoknak a Révai Gimnáziumban.

November 23.
KÁRTESZI FERENC: A matematika oktatásának korszerűsítése.
Előadás tanároknak.

November 29.
KÁRTESZI FERENC: Az 1961. évi Kürschák verseny feladatai.
Előadás tanároknak és diákoknak.

A Bolyai János Matematikai Társulat Soproni Tagozatának előadásai 1961. január 1-től 1961. december 31-ig

Január 5.
KARDOS LÁSZLÓ: A valószínűségszámítás szerepe a technikában.
A Gépipari Tudományos Egyesülettel közös rendezésben.

Január 13.
SZABÓ ÁRPÁD: A rendszeres görög matematika kialakulása.

Február 7.
MARÓTH REZSŐ: A matematikatanítás időszerű problémái.

Február 16.
HÓDI ENDRE: A középiskolai matematika néhány gyakorlati alkalmazása

Április 21.
RÓZSA PÁL: Néhány érdekes kapcsolat differencia és differenciálegyenletek között.

Szeptember 28.
MOLNÁR JÓZSEF: Közelítő számítások a középiskolában.

Október 27.
VINCZE ISTVÁN: Beszámoló a Berkeley-i valószínűségszámítási szimpóziumról.

December 7.
MOLNÁR FERENC: Körzővel elvégezhető szerkesztések.

A Bolyai János Matematikai Társulat Szolnoki Tagozatának előadásai 1961. január 1-től 1961. december 31-ig

Március 24.
VINCZE SÁNDOR: Kibernetika és matematikai logika kapcsolata.

Április 10.
Továbbképzési nap a Központi Pedagógus Továbbképző Intézettel közös rendezésben.
HORVAY KATALIN: Elemi geometriai feladatok bizonyítása vektorokkal.
MOLNÁR JÓZSEF: Közelítő számítások a középiskolákban.

A Bolyai János Matematikai Társulat Nyíregyházi Tagozatának előadásai 1961. január 1-től 1961. december 31-ig

Január 30.
LAKATOS ISTVÁN: Gondolkodásra nevelés az általános iskolai matematikatanításban.
Előadás a Felsőfokú Tanítóképzőben, Nyíregyházán.

Február 20.
BEREZNAI GYULA: Feladatmegoldások.
Előadás a Kölcsey Ferenc Leánygimnáziumban, Nyíregyházán.

Március 23.
KOVÁCS MAGDOLNA: Anyagi pontrendszer súlypontjainak felhasználása geometriai feladatok megoldásában.
Diákelőadás az Általános Leánygimnáziumban, Kisvárdán.

Március 28.
ÖKRÖS ISTVÁN: Aritmetikai és algebrai feladatok viszonya a gyakorlathoz.
Diákelőadás a Budai Nagy Antal Ált. Gimnáziumban, Nagykállóban.

Március 29.
GALSI ISMÉRIA: Anyagi pontrendszer súlypontjának felhasználása geometriai feladatok megoldására.
Diákelőadás Nyíregyházán, a Kölcsey Ferenc Leánygimnáziumban.

Március 30.
SZABÓ ÁRPÁD: A deduktív matematika kialakulása.
SZABÓ ÁRPÁD: A rendszeres matematika kialakulása.
A TIT-tel közös előadás.

Március 31.
KOLLMANN KATALIN: Anyagi pontrendszer súlypontjának felhasználása geometria feladatok megoldására.
Diákelőadás a tiszalöki gimnáziumban.

Április 27.
BEREZNAI GYULA: A III. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak ismertetése.

Május 5.
VINCZE ENDRE: Nomogrammok szerkesztése.
A TIT-tel közös előadás a Bessenyei Klubban.

Október 17.
BEREZNAI GYULA: Térmértani szerkesztések.

November 22.
LIPA ANDRÁS: Az általános iskolai tanterv matematikai vonatkozásai.

December 13.
ROMÁN ILONA: Óratípusok a matematika tanításában.

A Bolyai János Matematikai Társulat Szombathelyi Tagozatának előadásai 1961. január 1-től 1961. december 31-ig

Március 11.
A II. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladataiból.
CZAPÁRY ENDRE: A II. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladataiból.
Diákelőadás a Nagy Lajos Gimnáziumban.

Március 17.
KÖNYVES TÓTH KÁLMÁN: Gondolatok a tantervi geometriai anyag felépítéséhez. Bolyai Farkas műveiből.

Március 27.
HEIGL ISTVÁN: Az 1961 évi középiskolai tanulmányi verseny feladatai matematikából.
Diákelőadás a Kölcsey Ferenc Áll. Ált. Gimnáziumban, Körmenden.

Március 28.
BOKOR GÉZA: A II. Matematikai Diákolimpián kitűzésre nem került feladatok.
Diákelőadás a Nagy Lajos Gimnáziumban.

Március 28.
BOGNÁR STEFÁNIA: A II. Nemzetközi Diákolimpia feladataiból.
Előadás a Balogh Ádám Gimnáziumban, Vasváron.

Március 28.
KÖNYVES TÓTH KÁLMÁN: A II. Nemzetközi Diákolimpia Előkészítő Bizottságának feladataiból.
Diákelőadás Kőszegen a Jurisich Miklós Gimnáziumban.

Március 31.
MIKOS JÓZSEF: A II. Nemzetközi Diákolimpia Előkészítő Bizottságának feladataiból.

Március 31.
VARGA ÁRPÁD: Feladatok megoldása.
Diákelőadás a szombathelyi Nagy Lajos Gimnáziumban.

Május 11.
GÁDOR ENDRÉNÉ: A függvénytan tanításának problémái,
HÓDI ENDRE: Az Arany Dániel verseny feladataiból.

Augusztus 24.
BOKOR GÉZA: Feladatok a matematika tanításban az 1961–62-es tanévben.

November 17.
HEIGL ISTVÁN: A számok tudománya.
Diákelőadás a Kölcsey Ferenc Gimnáziumban, Körmenden.

November 22.
JÓNÁS MÁRTON: Komplex számok.
Előadás a Nagy Lajos Gimnáziumban, Szombathelyen.

December 1.
HEIGL ISTVÁN: Számrendszerek.
Diákelőadás a Vasvári Áll. Ált. Gimnáziumban.

December 13.
KÖNYVES TÓTH KÁLMÁN: Néhány számelméleti probléma. Előadás Sárváron a Tinódi Gimnáziumban.

A Bolyai János Matematikai Társulat Kecskeméti Tagozatának előadásai 1961. január 1-től 1961. december 31-ig

Március 11.
SZABÓ ÁRPÁD: Az Euklides előtti görög matematika.

November 17.
REIMAN ISTVÁN: A térmértani elemek tanításának problémáiról.

Könyvismertetés

KREKÓ BÉLA:

LINEÁRIS PROGRAMOZÁS

(Közgazdasági és Jogi Kiadó, Budapest, 1962, 411 old.)

1957-ben jelent meg az első magyar nyelvű könyv a lineáris programozásról (Krekó—Bacskay: Bevezetés a lineáris programozásba*) és ez akkori hivatását betöltve, már évekkel ezelőtt teljesen elfogyott.

A korszerű matematikai módszerek felhasználása a gazdasági problémák megoldására az utóbbi években hazánkban is egyre jelentősebb szerephez jutott, és ennek megfelelően egyre nagyobb igény mutatkozik e módszerek megismerése iránt. E matematikai módszerek egyik fontos csoportját alkotják a lineáris és nem lineáris programozási módszerek. Krekó Béla könyve a ma már hazánkban is elég széles körben elterjedt *lineáris programozás* feldolgozását nyújtja főleg közgazdászok számára.

A könyv tartalmát tekintve nagyobb anyagot ölel fel, mint a régi, mert a szerző ebben a könyvben ismerteti az azóta elért eredmények egy részét is, és egy teljes fejezetet szentel a legkülönbözőbb területekről vett feladatoknak.

A könyv *első része* több, alkalmasan választott példán keresztül bemutatja a lineáris programozás módszereit matematikai bizonyítások nélkül. Az ismertetett eljárások (egyszerű, kétdimenziós problémák grafikus megoldása; a szállítási probléma pontos és közelítő megoldása; a szimplex módszer; a dualitás felhasználása a lineáris programozási feladatok megoldásának egyszerűsítésére; a parametrikus programozás; a konvex programozás) helyességét — ahol ez lehetséges volt — a szerző heurisztikusan gazdasági indoklással támasztotta alá. A szerző nyilvánvaló célja az volt, hogy az az olvasó is, aki nem óhajt a mélyebb matematikai összefüggésekkel megismerkedni, megtanulhassa a lineáris programozás technikáját.

A könyv *második része* a lineáris programozással kapcsolatos matematikai ismereteket tartalmazza. Egy-egy fejezet foglalkozik a halmazelmélet, a lineáris tér, a mátrixok, továbbá a lineáris egyenletrendszerek megoldása alapvető ismereteivel, tételeivel és a lineáris programozás szempontjából fontos egyéb tulajdonságaival. A második rész olvasása csak középiskolai előképzettséget igényel, mert a szerző minden, a középiskolai anyagot meghaladó ismeret teljes és részletes tárgyalását adja ebben a részben. Ezeknek a matematikai ismereteknek a birtokában a figyelmes olvasó most már könnyen megérti a következő fejezetekben tárgyalt szimplex módszer, szállítási probléma és parametrikus programozás elméletét is. Külön fejezet foglalkozik a játékelmélet és a lineáris programozás kapcsolatával valamint a lineáris programozás geometriai hátterével.

A *harmadik rész* gyakorlati alkalmazásokat tartalmaz. A feladatok egy részét a magyar népgazdaság által felvetett konkrét problémák alkotják, másik részét a külföldi irodalomban található alkalmazási problémák közül válogatta össze a szerző.

---

*A könyvet a *Matematikai Lapok* **11** (1960) kötete a 222—223 oldalán ismertette.

A *függelék*ben a szerző Kőnig Dénes egy gráfelméleti tételét, ennek a tételnek Egerváry Jenő nevéhez fűződő általánosítását és e tételnek a hozzárendelési probléma megoldására való felhasználását (amely a szakirodalomban „magyar módszer" néven ismeretes) ismerteti.

A szerző a feldolgozott anyagot nem matematikusok számára is közérthető módon, helyenként igen részletesen mutatja be. Az anyagnak különböző szinten való kétszeri bemutatása (I. rész és II. rész) szükségképpen átfedéseket eredményezett. A könyv stílusa könnyen érthető, világos.

Az elég bonyolult matematikai szöveg és a táblázatok szedését a nyomda jól oldotta meg. Hasznos ötletnek mutatkozik a többnyelvű tartalomjegyzék közlése is.

Reméljük, hogy a közgazdász szakemberek számára az egyre nagyobb számban jelentkező problémák megoldásában nagy segítséget nyújt Krekó Béla új, igen hasznos könyve.

Scharnitzky Viktor

MTA Könyvtára
Periodika 1152/1963 sz.

A kiadásért felelős: Bernát György, az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Vidosa László
A kézirat beérkezett: 1962. VIII. 14. — Példányszám: 1250. — Terjedelem: 8,75 (A/5) ív — 1 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat 62-3137

СОДЕРЖАНИЕ

Ласло Редей: Научная деятельность Дьерьа Хайоша 217
Пал Эрдёш: Замечания по теории чисел IV. 228
Ф. Сас: О топологических алгебрах и кольцах I. 256
П. Туран: Об одной экспериментальной задаче касающейся степенные суммы комплексных чисел с приложением 279
М. Фаркаш: Дифференциально-геометрическое исследование одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка 289
М. Кун Кути: Определитель K_n и ее применения 298
Задачи 311
Новости 321
Сообщение о двенадцатом присвоении приза имени М. Беке 325
Из жизни общества 328
Обзор книг 353

CONTENTS

L. Rédei: The work of G. Hajós 217
P. Erdős: Remarks on number theory IV. 228
F. Szász: On topological algebras and rings I. 256
P. Turán: On an extremal-problem concerning power-sums of complex numbers with an application 279
M. Farkas: The differential-geometrical investigation of a class of ordinary differential-equations of second order 289
M. Kun Kuti: On certain determinants 298
Problems 311
Society news 321
Report on the Beke-prize 325
Society life 328
Books review 353

Ára 12 Ft.
Előfizetés évi 20 Ft.

INDEX: 25.564

A Bolyai János Matematikai Társulatba belépni szándékozók forduljanak a Társulat elnökségéhez (Budapest, V., Szabadság tér 17. Telefon: 311—793). Közlésre szánt dolgozatok (lehetőleg géppírással s a lap egyik oldalát használva) a lap szerkesztőségéhez ugyanoda küldendők.

Kérjük cikkíróinkat, hogy amennyiben különlenyomatra tartanak igényt, cikkük kefelevonatának visszaküldésekor ezirányú kívánságukat a kért különlenyomatok számának megjelölésével feltétlenül jelentsék be.

Különböző külföldi természettudományos, műszaki, orvosi stb. szakfolyóiratok 1953—1954. évi vegyes számai a Posta Központi Hírlap Iroda V., József Attila u. 3. sz. alatti lapüzletében példányonként megvásárolhatók.

Felhívjuk olvasóink figyelmét, hogy lapunk régebbi számai kaphatók a Posta Központi Hírlap Iroda V., József Attila-u. 3 szám alatti Újságboltjában.