MATEMATIKAI LAPOK

III. ÉVFOLYAM

1.
SZÁM

TANKÖNYVKIADÓ VÁLLALAT

★

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT
BUDAPEST, 1952

MAT. LAPOK III. ÉVF. I. SZÁM. I—106 OLD. BUDAPEST, 1952. JULIUS

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenként négyszer.

Budapest, 1952. július. III. évfolyam, 1. szám.

Előfizetési díj évi 20 Ft. A Bolyai János Matematikai Társulat tagjai újabb rendelkezés értelmében a III. évfolyamot sem kapják tagdíjuk fejében, hanem a rendes 20 Ft előfizetési díjért a kiadóhivatalon keresztül. Ezzel szemben a tagdíj összege le lesz szállítva. A tagdíj pontos összegét — annak megállapítása után — közölni fogja a Társulat vezetősége a tagokkal.

Felelős szerkesztő: Turán Pál.

Szerkesztők: Hajós György, Kalmár László, Rényi Alfréd, Szele Tibor.

Szerkesztőség: Budapest, V., Reáltanoda-utca 13—15. Telefon 187—330.

Kiadja: a Tankönyvkiadó Vállalat — Budapest, V., Szalay-u. 10—14.

Kiadásért felelős a Tankönyvkiadó Vállalat vezérigazgatója.

Terjeszti a Posta Közhír Iroda Ü. V. Előfizetés, személyes ügyfélszolgálat: Budapest, V., József nádor-tér 1. (Üzlethelyiség.) Telefon: 183—022, 180—850. Postatakarékpénztári csekkszámla: 61.256.

Előfizetési díj: egy évre 20 Ft, félévre 10 Ft.

TARTALOM

Beszámoló a MTESZ III. közgyűléséről.

Ez év június 21—22-én tartotta a MTESZ III. közgyűlését. A közgyűlés az egyesületek és a szövetség belső élete mellett elsősorban a műszaki és természettudományos értelmiség munkájával és feladataival foglalkozott abban a harcban, amely hazánk szocialista ipari országgá való átalakításáért folyik. Különös súllyal tárgyalta a közgyűlés a MTESz szerepét a műszaki és természettudományos értelmiségnek a Párt irányításával a szocializmus építésére való mozgósításban.

A közgyűlést Osztrovszki György: „A műszaki értelmiség, tudományos egyesületeink munkája és feladatai ötéves tervünkben" c. nagyjelentőségű előadása vezette be. Az előadás az ötéves terv első felében elért fejlődésünk ismertetése után rátért a MTESz munkájára és feladataira. Legfontosabb kérdésekként a hazai alapanyagbázis kiszélesítését és energiahordozóink racionális felhasználását jelölte meg. Döntő feladatként említette gépgyártásunk fejlődésével kapcsolatban a nehéz és sok munkát igénylő fizikai munka gépesítésének és villamosításának, a műszerezésnek és automatizálásnak kérdéseit. Rámutatott többek között a minőségjavítás és az üzemszervezés néhány problémájára.

Foglalkozott az előadás a természettudományok terén folyó ideológiai harc fontosságával, a kritikai szellem fejlesztésével és a szovjet tapasztalatok széleskörű felhasználásával Komoly hiányosságként értékelte az előadó azt, hogy az elméleti egyesületek (köztük a Bólyai János Matematikai Társulat) és a többi tagegyesület között a kapcsolat még igen laza. Az elmélet bizonyosfokú lebecsüléseként értékelte, hogy Társulatunk felhívására eddig mindössze négy ipari egyesület vetett fel elméleti vonalon megoldandó feladatot.

Előadása további részében az előadó kifejtette az előttünk álló feladatokat. Rámutatott azon problémákra, melyeket az ötéves terv hátralévő részének sikeres befejezése állít elénk. Különös érdeklődést váltott ki a II. ötéves terv előkészítése néhány kérdésének felvetése. Az előadás tárgyalta a II. ötéves terv előrelátható jellemző vonásait: új nyersanyagok komplex értékesítését, a gépesítés, villamosítás és automatizálás nagyfokú kiterjesztését, tekintve, hogy munkaerőszükségletünket a II. ötéves tervben csak ilyen módon biztosíthatjuk a gyártási önköltség leszorítását az iparilag fejlett országok színvonalára.

Az előadást hosszú vita követte. A vitában felszólalt számos műszaki vezető. Igen érdekes volt a Rákosi Mátyás Művek műszaki igazgatójának felszólalása, aki a szovjet tapasztalatok alapján egyes területeken megkétszerezett termelési és komoly méretű anyagtakarékossági eredményekről számolt be. Gazda Géza hozzászólásában foglalkozott egyes mérnökök munkásújítókat elnyomó törekvéseivel, amelyek abból adódnak, hogy munkaterületeikhez tartozó találmányokra és javaslatokra ezen mérnököknek, véleményük szerint, maguknak kellett volna reájönniök. Megemlítette az általa elnidított mozgalom legfőbb akadályát, az üzemi sovinizmust, amelynek következtében egyes gyárak hulladékanyagait más gyárak vagy kisipari szövetkezetek, melyek fel tudnák azt használni, nem kapják meg.

Nagyjelentőségű volt Biró Ferenc felszólalása, aki rámutatott néhány országos jelentőségű műszaki probléma feldolgozásának fontosságára, melyben az egyesületeknek, köztük az elméleti egyesületeknek is szoros együttműködésére van szükség.

Megemlítette, hogy a legkíválóbb műszaki értelmiségieket még nem népszerűsítjük annyira, amennyire ezt eredményes munkájuk után megérdemelnék. Kiemelte a fiatalok nagyobbmértékű bevonásának fontosságát a szövetség és a tagegyesületek munkájába.

Társulatunktól Kalmár László a szegedi tagozat elnöke és Rényi Alfréd a Társulat főtitkára szóltak hozzá a vitához. Mindketten rámutattak az elméleti és műszaki egyesületek közti kapcsolat megszilárdításának fontosságára.

Több hozzászóló foglalkozott azzal a nagyarányú önzetlen segítséggel, melyet a Szovjetuniótól kapunk. Kifejtették, hogy a Szovjetunió műszaki tapasztalatainak átadása és a nálunk járó és most is nálunk dolgozó szovjet műszaki értelmiségiek segítsége nélkül nem foghattunk volna hozzá hatalmas alkotásaink felépítéséhez. Szembeállították ezzel és példákkal mutatták meg, hogy a kapitalista üzemek eltitkolják találmányaikat, szabadalmaikat és gyártási eljárásaikat.

A közgyűlés egyhangúan köszönetét fejezte ki a nálunk járt, itt dolgozó szovjet műszaki értelmiségieknek.

A közgyűlési vita eredményes volta mellett komoly hibaként kell megemlítenünk, hogy egyes felszólalók hosszasan fejtegették szűkebb szakterületük, egyesületük, üzemük, speciális problémáit, minek következtében az egész szövetség munkáját érintő kérdések megtárgyalására a Szövetség munkájának megvitatására, a hibák feltárására nem maradt elég idő. Hiányosság volt, különösen a közgyűlés első napján, a kritikai szellem gyengesége is.

A főtitkári beszámoló és az azt követő vita után a szövetség új elnökségébe Társulatunkból Császár Ákost, választmányába Fenyő István, Kalmár László és Rényi Alfréd tagtársainkat választották be.

A közgyűlés Társulatunkat eredményes munkájáért zászlóval, Hódi Endre és Rényi Alfréd tagtársainkat oklevéllel és emlékéremmel jutalmazta.

Meg kell említenünk, hogy a közgyűlés segítette az egyes egyesületek küldöttei közti közvetlen kapcsolat kialakítását és elmélyítését. Személyes beszélegetések útján is több olyan ipari problémával ismerkedtünk meg, melyek megoldásához matematikai módszerek alkalmazása szükséges.

A közgyűlés nagy jelentősége, hogy feltárta a műszaki és természettudományos értelmiség szerepét és feladatait hazánk szocialista építőmunkájában és megmutatta alkotómunkánknak az egyes egyesületek egymásrautaltságából következő együttműködésében, az állami szervekkel és üzemekkel való szoros kapcsolatában, a gazdag szovjet tapasztalatok átvételében és az idealista világnézet és a kozmopolitizmus elleni ideológiai harc fokozásában rejlő hatalmas fejlődési lehetőségeit.

A MTESz III. közgyűlése által kitűzött feladatok végrehajtása — mint azt a közgyűlés határozata kiemeli — minden magyar mérnök, technikus és tudományos dolgozó becsületbeli ügye, mert ezzel a szocializmus építésének gyorsítását, hazánk erejének növelését, a Szovjetunió vezette béketábor erősítését segitjük elő.

A Bolyai János Matematikai Társulat ankétje az analizis tanitásáról a természettudományi karokon.

Írta: ALEXITS GYÖRGY

A Közoktatásügyi Minisztérium felkérésére jan. 26-án és 27-én Társulatunk szükebb körű ankétot tartott az analízistanítás anyaga és módszere tárgyában. Az ankét célja nem annyira határozatok hozatala volt, mint a legeredményesebb oktatási módszer kialakítása elvi kérdések megvitatása alapján. Mivel egyetemi oktatási feladataink a felszabadulás előttiek sokszorosára növekedtek, és célkitűzéseink is teljesen megváltoztak, még egyáltalában nem tisztázódtak az analízis tanításának szempontjai. Célszerűnek látszik tehát, ha a vitában kialakult, vagy még ki sem alakult nézetek szemléjével megkezdjük a Matematikai Lapok hasábjain is a vita folytatását. Kérjük olvasóinkat, szóljanak hozzá ehhez a fontos kérdéshez, keressék fel véleményükkel a szerkesztőséget és ezzel segítsék az egyetemi matematikaoktatás területén is építeni a szocializmust. Alábbiakban az ankét második napján elhangzott elvi jelentőségű vitát ismertetjük.

Kiindulópontként át kell tekintenünk a rendelkezésre álló s a természettudományi karok számára számbajövő analízis-könyveinket. Ez igen fontos, mert helyesen jegyezte meg a vita során SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA, hogy igen sokat veszít eredményességéből az olyan tanítás, amely önmagában esetleg helyes módszert követ ugyan, de annyira eltér a forgalomban levő könyvektől hogy a vizsgára készülő hallgató képtelen a tankönyvet használni, mert ha azt előadási jegyzetével összeegyeztetni próbálja, egyiket vagy másikat teljesen fel kell forgatnia, hogy a megfelelő részek összhangba kerüljenek. Az tehát, hogy milyen könyvek állnak rendelkezésünkre, bizonyos értelemben meghatározza a jelenleg legeredményesebb oktatási módszert, legalább is atekintetben, hogy tanításunk menetének lehetővé kell tennie az átlaghallgatók számára is a könyveknek az előadással párhuzamos használatát.

A magyar nyelvű analízis-könyvek közül GREBENCSA—NOVOSZELOV, SZÁSZ PÁL és BERMANT ismert művei jöhetnek számításba. Utóbbi azonban elsősorban a magas színvonalú műszaki oktatás számára készült és ez ki is világlik a könyv tartalmából. Bermant kitűnő könyvét tehát a természettudományi karokat illetően figyelmen kívül hagyhatjuk.

SZÁSZ PÁL, A differenciál- és integrálszámítás elemei című munkájának erősen bővített második kiadása tulajdonképpen szintén nem tankönyv, már csak terjedelménél és anyagánál fogva sem. (A két kötet összesen 1301 oldal és tartalmazza a komplex függvénytan elemeit is.) Mivel azonban ez a mű mindenesetre „Cours d'Analyse" jellegű, feltétlenül egyetemi segédkönyvnek kell tekintenünk, épp ezért az ankét résztvevői nem tekinthettek el tőle. A vita során majdnem teljes egyhangúsággal az a nézet alakult ki, hogy SZÁSZ könyve igen preciz, fogalomalkotásai és bizonyításai kifogástalanok, az ábrák és a kiválasztott példák is szépek : önmagában a könyv minden oldala jó, — ennek ellenére egészében a könyv mégsem sikerült teljesen. Fő hibája, hogy az egyes részek nem egy egységes elv szervesen összefüggő részeinek a kifejtései, mert egyes részletek nem szükségszerűen merülnek fel, hanem gyakran egymástól elválasztva, öncélúan szerepelnek. Példaképp említhetnénk a CSEBISEV polinomok bevezetését (II. kötet, 30. l.) : „A $\cos\varphi = x$ helyettesítés mellett

$$\cos n\varphi = T_n(x), \quad \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi} = U_n(x) \tag{1}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots),$$

ahol $T_n(x)$ és $U_n(x)$ racionális egész függvények". Kevéssel alább így folytatódik a könyv : „Az (1) alatti $T_0(x)$, $T_1(x)$, ... $T_n(x)$, ... illetve $U_0(x)$, $U_1(x)$, ..., $U_n(x)$, ... racionális egész függvényeket CSEBISEV-polinomoknak nevezzük". — Ebből bizony nehezen érti meg az, aki még sohasem találkozott a CSEBISEV-polinomokkal, miért éppen ezeket a polinomokat emeljük ki a racionális egész függvények népes családjából. Ez persze később kiderül, ha az olvasó valóban megtalálja azt a helyet, amelynek alapján sikerül belátnia, hogy ezekre a polinomokra érdemes több figyelmet fordítania, mint egy vaktában kiragadott ortogonális polinom-rendszerre. A könyvnek ez az önálló részekre való széthullása az első-, másodéves hallgató számára nehézzé teszi a matematikai tartalom megértését. Ehhez a nehézséghez hozzájárul a könyvnek szinte a skolasztika határán járó merev — bár gondos magyarázatokat tartalmazó — megírási módja. De a szerző keresni is látszik a skolasztikus jelleget. Egyébként nem is lehetne megmagyarázni az olyan archaizáló nyelven írt szófűzések tömegét, mint például: „adatván akármilyen kis pozitív ε..." vagy „ebből látjuk, miszerint..." vagy pedig az olyan 50 év előtti latinos helyesírást mint constans, incommensurabilis, stb. Joggal állapították tehát meg az ankét résztvevői, hogy Szász Pál könyve, noha az érettebb matematikus számára értékeket tár fel, még részekre bontva sem szolgálhat az egyetemi analízis-oktatás alapjául és elhibázott az olyan előadás, amely Szász könyvére próbálja építeni az analízis egyetemi oktatását.

Marad tehát a Grebencsa—Novoszelov: Matematikai analízis című könyv, amelynek I. kötete magyar fordításban már megjelent. Abban mindenki egyetértett, hogy ez a mű precíz, megfontolt, alapos pedagógiai tudással és érzékkel megírt munka, amely még a szemléletes fogalmak jól érthető bevezetésénél is keresi a korszerű tudományos szemlélettel való kapcsolatokat. Belőle kiindulva tehát nagyon is lehetséges az első két évben szerzett matematikai ismereteket továbbfejleszteni akár a reális, akár a komplex függvénytan mai irányai felé. Tekintettel arra, hogy ez a könyv egyszersmind egyetemi hivatalos tankönyvünk is, a mondottak alapján szinte kézenfekvő volna minden további vita nélkül elfogadni alapnak, és az előadást módszertanilag is Grebencsa—Novoszelov munkájának megfelelően felépíteni.

Bármennyire indokoltnak látszik ez a megállapítás, az ankét résztvevői nem helyezkedtek egyértelműen erre az álláspontra. A vélemények kétfelé oszlottak. Az egyiket elsősorban Kalmár László képviselte.

Kalmár hangsúlyozta, hogy a helyesen felépített előadásnak mindig valamilyen általános érdekességű, konkrét problémából kell kiindulnia és ennek megoldása során, mintegy szükséges segédeszközként, fokozatosan kell bevezetnie a matematikai fogalmakat. Ha nagyszámú, megfelelő példát is tárgyalnak az előadáson, akkor ezek a fogalmak világosabbá válnak, az ellenpéldák és az anyagban való előhaladás nyomán pedig a hallgatóban felébred az exaktság iránti igény. Teljes exaktságra csak akkor törekszik Kalmár, ha az arravaló igényt már sikerült felébresztenie a hallgatóban. Ennek az elvnek az érvényesülése kedvéért széttagolja az anyagot: több lépésben és a régebben tanult fogalmazás bővítésével tárgyalja az egyes részleteket úgy, hogy néhány nehezebb fogalom végleges megfogalmazása esetleg csupán a későbbi tárgyalás során történik meg.

Surányi János hangsúlyozta, hogy tekintettel kell lenni a hallgatók előképzettségének hiányaira, és hogy ezen hiányok kiküszöbölésében minél nagyobb segítséget nyújtsunk, nagyobb súlyt kell fektetni az összefoglalásokra. Elmondotta, hogy KALMÁR didaktikai módszereit jó eredménnyel alkalmazta.

A másik álásponton lévők (ACZÉL, ALEXITS, CSÁSZÁR, HAJÓS, RÉNYI és SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA) egyetértettek ugyan KALMÁR pedagógiai elveivel (fokozatosság, exaktságra való igény felkeltése, stb.), de *csak* az elveivel, nem pedig ezek metodikai megvalósításával. Bár álláspontjuk részletkérdésekben különbözött, megegyeztek abban, hogy szerintük KALMÁR az elavult módszerekkel szemben, mintegy ezek reakciójaképp túlzásba viszi elvileg helyes tanítási módszerét. KALMÁR túlzásai a különböző vélemények szerint a következők:

1. A fokozatosság kedvéért teljesen szétbontja az anyagot, aminek következtében olyan alapvető fogalmak, mint például a határérték fogalmának végleges kialakítása, csak a második évben fejeződik be. Ennek következtében az előadás csupán egészében ad világos képet az analízisről. Ha tehát egy diák valamelyik ponton átmenetileg elveszti a fonalat, nem képes többé bekapcsolódni az előadásba.

2. Bármilyen fontos is a fogalmak minél mélyebb megértése, ez nem egyedüli célja az analízis tanításának; súlyt kell helyezni bizonyos fokú differenciálási és integrálási, általában számolástechnikai készség kialakítására is. Ezt az elvet KALMÁR módszere nem tartja eléggé szem előtt.

3. Az előadás szerkezetileg annyire eltér a GREBENCSA-NOVOSZELOV könyvtől, de más könyvektől is, hogy az átlagos hallgatók számára alig teszi lehetővé a könyv alapján való készülést vagy pótlást.

4. KALMÁR rendszere nem mindenben segíti elő, hogy a hallgatók a matematikai gondolkodásmódról világos és helyes képet alkossanak maguknak, mert nem nyújt elég alkalmat a hallgatóknak, hogy egy kitűzött cél elérése érdekében megfeszítsék szellemi képességeiket.

Az ankét azt határozta végül, hogy ajánlatos volna, ha KALMÁR előadásait GREBENCSA-NOVOSZELOV könyve szellemében átalakítaná, különös figyelemmel az itt elhangzottakra. Remélhető, hogy ezen az úton sikerül neki az analízis oktatására olyan módszert kidolgoznia, amely matematika-oktatásunk jelenlegi fejlődési fokán a legeredményesebben alkalmazható, és ezért az analízis minden oktatója számára egységesen ajánlható.

Foglalkozni kell azzal a tervvel is, hogy Kalmár László egy analízis tankönyvet írjon, amelyben elgondolásait kiforrott alakban megvalósítja.

Ugyanakkor azonban, amikor az ankét résztvevői többsége Kalmár analízis-oktatási módszerével szemben a fenti kifogásokat emelte, egyszersmind azt is leszögezte, hogy Kalmár módszerével nem lehet Szász Pál könyvét szembeállítani, mert ez utóbbi módszertanilag elmaradottabb álláspontot képvisel; ebben a szellemben tanítani tehát Kalmár módszeréhez képest retrográd lépést jelentene, épp ezért az értekezlet ezzel a lehetőséggel nem is foglalkozik.

*

Igyekeztem a lefolyt vita lényeges tartalmát nagy vonásokban hűen vázolni. Ezek után pedig induljon meg a kérdés nagy fontosságához méltó nyilvános vita a Matematikai Lapok hasábjain. Első hozzászólásként a magam álláspontját szeretném ismertetni.

Szerintem a kérdést csak társadalmi vonatkozásaiban lehet tárgyalni. Nem feledkezhetünk meg arról, hogy minden tárgy hozzájárul a hallgató világnézetének a kialakításához, nemcsak eredményeket tanít tehát, hanem jellemet is alakít, nevel is. Ha valakinek az analízis tanulmányozása alapján bizonyos gondolkodásmódja fejlődik ki, akkor ezt a mindennapi életben, nem-matematikai kérdések megítélésében is alkalmazza, vagyis a tanulmányok az illető emberi magatartását is befolyásolják. Ezt különösen az egyetemi tanároknak kell figyelembe venniök, mert hallgatóik nagy többsége tanárként fog működni, évtizedekig serdülőket fog nevelni. Döntő fontosságú tehát, hogy a leendő tanárok milyen gondolkodású embert vallanak ideáljuknak. Ennek az ideálnak a kialakításához pedig mi is hozzájárulunk egyetemi oktatásunkkal. Az analízis oktatásának problémája tehát nemcsak a matematika „belügye", hanem az oktatás hatásai következtében társadalmi kérdés is. Vizsgáljuk meg tehát, mit remélhetünk e tekintetben az analízis oktatási mód szerének helyes megválasztásától.

1. El kell érnünk azt, hogy a hallgató a tudományon belül is megtanuljon dialektikusan gondolkozni, vagyis az egyes pro lémákat ne egymástól elszakított, legfeljebb lazán összekapcsolódó ismeretek halmazának tekintse, „hanem összefüggő, egységes egésznek, melyben az egyes tárgyak, jelenségek szervesen kapcsolódnak, egymástól függenek és egymást feltételezik." (Sztálin: A dialekt kus és történelmi materializmusról.) Az ilyen matematikai szemlélet kialakulásának *előfeltétele*, hogy *a hallgató teljesen elsajátítsa a differenciálás és integrálás, a sorokkal való bánás, stb. technikáját*, és akkor ne a technikai nehézségekre, hanem azok könnyed legyőzése után *a lényeges összefüggésekre fordíthassa figyelmét.*

2. El kell érnünk azt, hogy a munkásosztály, a dolgozó parasztság és a haladó értelmiség gyermekei közül kikerülő hallgatók erős akarattal igyekezzenek a szocializmust építeni. Az ilyen akarat kialakulását az analízis oktatója azzal segíti elő, hogy felkelti hallgatóiban az erőfeszítés szükségességének az érzését. Előadásait tehát úgy vezeti, hogy azok követése megkívánjon egy bizonyos fokú *koncentrálódást, gondolkodásbeli feszes magatartást, a hallgatók képzettségének és érettségének megfelelő erőfeszítést.* Csak az a tanár tud majd szocialista öntudatú diákokat nevelni, aki hallgató korában maga is megszokta, hogy a legcsekélyebb reális cél elérése is bizonyos keménységet, bizonyos fokú koncentrált erőfeszítést kíván. Nem *minden* társadalom számára az tehát a legjobb egyetemi tanítás, amelynél az oktató nyaktörő mutatványokkal elkendőzi a kérdés lényegében rejlő nehézségeket. A munkásosztályvezette, szocializmust építő társadalom számára az a legjobb módszer, amely *éppen annyira könnyíti meg a hallgató munkáját, amennyire ez valóban szükséges az átlagos hallgató számára.* Minden ezen túlmenő könnyítés, orvosságos kanállal való adagolás elpuhít, lazítja a hallgató önfegyelmét.

3. El kell érnünk azt, hogy a hallgató kritikai gondolkodású, materialista világnézetű emberré váljék. Az ilyen szemlélet kialakulását az analízis tanítása azzal támogatja, hogy problémák felvetése, és jókor alkalmazott ellenpéldák révén a lehetőséghez képest elég korán felkelti az exaktságra való igényt. Előnyben kell tehát részesíteni az olyan bizonyításokat, amelyek az általános elvek szerepét kidomborítják és közvetlenül a kitűzött célhoz vezetnek. Nem a szellemesen ügyes fogások segítségével elért rövidebb bizonyítások a legkönnyebben megérthetők, hanem azok, amelyek a *probléma lényegében rejlő általános elvet világítják meg,* mégha ezáltal a bizonyítás hosszabbá is válik. A képletek körüli káprázatos ügyeskedés keresése formalista szemléletre, a polgári társadalom élvezethajhászó l'art pour l'art gondolkodásmódjára nevel, az általános és exakt elvek alkalmazásához való ragaszkodás pedig közelebb hoz a szocialista társadalom tudományos, széles távlatú, dialektikus materialista világnézetéhez.

Mindebből levonom azt a következtetést, hogy mai tárasdalmi fejlődésünk során az analízist leghelyesebb olyan módszerrel tanítani, amely fő vonalában és lényegében GREBENCSA-NOVOSZELOV Matematikai analízisét követi. Tekintve azonban, hogy diákjaink ma még nem rendelkeznek olyan előképzettséggel, mint a szovjet diákok, *az előadó helyes pedagógiai készségének kell meghatároznia azt az anyagot, amelyben ettől eltér.* Ezenfelül természetesen minden előadó egyéniségéből is fakadnak olyan variánsok, amelyek előadásának egyéni színét és zamatját megadják. Mindez azonban nem jeletheti azt, hogy *lényegesen* mást és döntően *másképp* adjunk elő, mint ami a GREBENCSA-NOVOSZELOV könyvben van. Nem helyes ezt az anyagot teljesen felforgatni, és nem helyes a könyv exaktsági követelményeit lényegesen leszállítani.

Kétségtelen, hogy középiskolai matematika-oktatásunk még mindíg meglévő hiányai, még inkább a szakérettségi tanfolyamok rövid képzési ideje, az átirányítások többször hibás végrehajtása, vagy az esti egyetemet látogató hallgatók nappali elfoglaltsága és kicsi óraszáma rendkívül megnehezíti az analízis előadóinak a feladatát. *De nem az a feladatunk, hogy a nehézségeket elpanaszolva megmagyarázzuk, miért engedünk a követelményekből, hanem az, hogy a meglévő nehézségek ellenére is érjük el a kitűzött célt: a munkás- és dolgozóparaszt-hallgatók megfelelő ismeretekkel rendelkező matematikussá való nevelését.* Ennek a célnak az elérésére pedig módszerünk csakis az lehet, hogy előadásaink során fokozatosan bizonyos erőfeszítésre neveljük őket. Természetes, hogy ott, ahol a nehézségek különösen nagyok, ideiglenesen megkönnyíthetjük az első lépéseket, de nem olyan mértékben, hogy a valóban helyes és exakt igazság csak hónapok, vagy félévek múlva derüljön ki. Legcélszerűbb az analízis anyagát mérlegelve, kiemelni a döntő részeket és ezek minden oldalról való megvilágításával megtanítani a hallgatókat a legfontosabb kérdésekben való biztos tájékozódásra. Különösen eleinte lényeges, hogy sok gyakorlatot tartsunk és mielőbb elérjük a képletek biztos technikai kezelését.

Végül még azt, hogy ne tévesszen meg bennünket az értelmiségi családok gyermekeinek gyakran nagyobb verbális készsége! Ez könnyen azt a látszatot kelti, mintha a problémák lényegét is jobban értenék. De ez csak látszat! Ha nem vagyunk türelmetlenek, biztosan elérjük, hogy a munkás- és dolgozóparaszt családok gyermekei ugyanolyan előadókészség birtokában szerezzék meg oklevelüket, mint a gyermekkortól kezdve könnyedebb fogalmazáshoz szokott értelmiségi származásúak.

Az analízis oktatásának metodikája tekintetében tehát az az álláspontom, hogy *exakt és határozott gondolkodásra nevelve, lényegében a Grebencsa-Novoszelov könyv menetét elfogadva tanítsuk az analízist a természettudományi karokon.*

L. V. Kantorovics módszere absztrakt terekben értelmezett nemlineáris egyenletek megoldására

Írta: Fenyő István

Mindenki előtt ismert, hogy míg az elsőfokú egyenletek megoldása igen egyszerű feladat, addig a magasabbfokú egyenletek megoldása nehéz probléma. Sőt ötödfokú és ennél magasabbfokú egyenletek megoldása általában csak közelítő értékek végtelen sorozata határértékeként írható fel. Hasonló a helyzet a transzcendens egyenleteknél, ezek megoldása is általában csak közelítő értékek végtelen sorozata segítségével válik lehetségessé. Ugyanilyen a helyzet az egyenletrendszerek terén: míg a lineáris egyenletrendszerek megoldása elvileg semilyen nehézségbe nem ütközik, addig a magasabbfokú, vagy transzcendens egyenletrendszerek megoldása általában igen kemény feladat.

Sok szempontból hasonló jelenséget lehet tapasztalni a függvényegyenletek területén is. Míg pl. bizonyos fajtájú közönséges, vagy parciális lineáris differenciálegyenleteket meg tudunk oldani, addig a nemlineáris differenciálegyenletek megoldására általános módszerekkel nem rendelkezünk, sőt ezek megoldása elég gyakran „reménytelenül" nehéznek látszik. Ugyanez a helyzet az integrálegyenletekkel is (ezek olyan egyenletek, melyekben az ismeretlen függvény integráljel alatt is szerepel): míg a lineáris integrálegyenletek elmélete meglehetősen részletekbe menően kidolgozott elmélet, addig a nemlineáris integrálegyenletek megoldására szolgáló módszerek csupán az egyenletek meglehetősen szűk körére vonatkoznak. Azonban éppen ez az analógia adott a matematikusoknak nagyon lényeges és meglepően új gondolatokat nemlineáris függvényegyenletek megoldására.

A közönséges nemlineáris egyenletek megoldására több módszert ismerünk, melyek lehetővé teszik sorozatos megközelítéssel a gyökök meghatározását. E módszerek között egyik leghasználhatóbb a Newton-féle módszer. E módszer lényege a következő: ha a megoldandó egyenlet $P(x) = 0$ alakú és $P(x)$ differenciálható függvény, akkor $P(x)$-et *helyettesítjük* érintőjének egyenletével, tehát egy elsőfokú egyenlettel, vagyis olyannal, melyet könnyű megoldani. Ezt az elsőfokú egyenletet megoldjuk és kapunk megoldásként egy x_1 értéket. Ez természetesen általában nem lesz a kitűzött egyenlet megoldása. De most $P(x)$-et ismét helyettesítjük az x_1 pontban húzott érintőjének egyenletével, tehát egy másik elsőfokú egyenlettel, melyet megoldunk, és így egy x_2 értéket kapunk. Folytatva az eljárást az x_2 ponthoz tartozó érintővel pótolva $P(x)$-et és az érintő egyenletét 0-vá téve, kapunk egy x_3 számot s. i. t. Ilyenképpen az $x_1, x_2, \ldots$ számok egy végtelen sorozatát kapjuk, mely, ha $P(x)$ bizonyos tulajdonságokkal rendelkezik, konvergens és a $P(x) = 0$ egyenlet gyökéhez konvergál (magára az eredeti módszerre nézve l. Rényi Alfréd cikkét [8]*).

Miután a Newton-féle gyökközelítő módszer a gyakorlatban nagyon jól bevált és az egyenletek igen tág csoportjára jól alkalmazható, felmerül a gondolat: nem lehetne-e ezt a módszert valahogyan átvinni egyenletrendszerekre és függvényegyenletekre? Nem lehetne-e a függvényegyenleteknél is — éppen úgy, mint a közönséges egyenleteknél — az eredeti függvényegyenletet *pótolni* egy *lineáris egyenlettel* és így sorozatosan az eredeti egyenlet olyan közelítő megoldásait nyerni, melyek minden határon túl jobban és jobban megközelítik az eredeti egyenlet megoldásait? Ez a kérdésfeltevés annál inkább jogosult, mert hiszen láttuk, hogy a lineáris egyenletrendszerek és lineáris függvényegyenletek sokszor könnyen megoldhatók.

Csakhogy a gondolat kivitelezésénél rögtön az elején nehézség merül fel. Éspedig: a Newton-eljárásnál az érintő egyenletével helyettesítettük az $y = P(x)$ függvényt. Az érintő egyenletének felírásához pedig ismerni kell $P(x)$-nek x szerinti differenciálhányadosát! Ezen az úton való haladáshoz az első lépés tehát valamilyen függvénytől függő kifejezés, ú. n. operátor differenciálhányadosának definiálása. Ez csak az első lépés, de hogy ezt a közönséges egyenleteknél követett lépések követhessék, olyan differenciálhányados fogalmat kell megalkotni, mely a közönséges differenciálhányados legfőbb tulajdonságaival rendelkezik.

Az első lépést — a differenciálhányados fogalmának általánosítását — M. Fréchet tette meg [11]; ezt a fogalmat a további lépésekre alkalmassá L. V. Kantorovics leningrádi professzor ([1], [2], [3]) tette.

A differenciálhányados fogalmának megállapítása után alakilag ugyanolyan lineáris függvényegyenlet írható fel, mint az érintő egyenlete. Ez az esetek nagy többségében megoldható,

* A számok a cikk végén található irodalomjegyzékben feltüntetett dolgozatokra vonatkoznak.

miáltal a függvényegyenlet egy közelítő megoldását nyerjük. Most az eljárás ugyanúgy folytatható, mint a közönséges egyenleteknél. Ennek az eljárásnak használhatósági körét, az eljárás konvergenciájának körülményeit L. V. KANTOROVICS és tanítványai tisztázták ([1], [2], [3], [4], [5], [6], [7]).

Ezzel a munkásságukkal a matematikának, fizikának és a technikának felmérhetetlen szolgálatot tettek, mert a nemlineáris egyenletrendszerek és nemlineáris függvényegyenletek nemcsak a „tiszta" matematika szempontjából fontosak, hanem megoldásuk nélkülözhetetetlen a modern atomfizika, a rugalmasságtan, rezgéstan, a hidrodinamika stb. szempontjából is.

L. V. KANTOROVICS módszere rendkívül általános és az egyenletek igen széles skálájára vonatkozik. Hogy gondolatainak teljes horderejét és széleskörű alkalmazhatóságát megérthessük, ismernünk kell az ú. n. általános BANACH-féle tér fogalmát és az operátorok fogalmát ebben a térben. Itt arról van szó, hogy n darab egymásután felírt számot (egy szám n-est), vagy egy zárt intervallumban folytonos függvényt, vagy egy intervallumban négyzetével együtt integrálható függvényt s. i. t. egy „tér" „pontjának" fogunk tekinteni és definiáljuk két ilyen „pont" közti távolságot.

Pontosabban a következőről van szó: valamilyen elemek halmazát (pontok, komplex számok, folytonos függvények stb.) általában térnek fogjuk nevezni. Ez a tér *lineáris,* ha elemei között az összeadás műveletét definiáljuk és két elem összege megint a halmaznak, a térnek eleme, továbbá a tér bármely elemét egy számmal megszorozva, újból a tér egy elemét nyerjük. Pl. ha a tér elemei a (0, 1) zárt intervallumon értelmezett folytonos függvények, akkor ez lineáris tér, mert két függvény összege. $f(x) + g(x)$ is folytonos függvény és $cf(x)$ is az, ahol c állandó: Valóban ez a közönséges térnek is tulajdonsága: két ponthoz az origóból húzott vektor összege ismét egy vektor, melynek végpontja ennek a térnek egy pontját definiálja és egy vektort, egy (valós) számmal megszorozva újból egy vektort kapunk. Feltesszük, hogy a tér elemeire értelmezett „összeadás" rendelkezik a közönséges összeadásra vonatkozó alapvető tulajdonságokkal, azaz kommutatív és asszociatív és a konstanssal való szorzásranézve disztributív. azaz, ha f és g a tér két eleme, c és d két szám, akkor $c(f + g) = cf + cg$ és $(c + d)f = cf + df$, továbbá, hogy $c(df) = (cd)f$, végül, hogy a tér tartalmaz egy nulla-elemet, amelyet 0-nak jelölünk és amelyre $f + 0 = f$, és $0 \cdot f = 0$ továbbá $1 \cdot f = f$!

A tér *normált,* ha minden eleméhez egy $\|f\|$-el jelölt valós, nemnegatív szám tartozik (az elem normája) úgy, hogy a következő tulajdonságok teljesüljenek:

a) $\|f\| = 0$, akkor és csak akkor, ha $f = 0$,

b) bármely c valós vagy komplex számra

$\|cf\| = |c| \cdot \|f\|$,

c) $\|f + g\| \leqq \|f\| + \|g\|$.

Az f és g elemek távolságán az $\|f - g\|$ számot értjük. A *c)* tulajdonság az úgynevezett „háromszög egyenlőtlenség", amely azt fejezi ki, hogy a 0, f és g csúcsokkal bíró „háromszög" egyik oldala legfeljebb akkora, mint a két másik két oldal összege. A mi közönséges terünk vektorai is rendelkeznek ezekkel a tulajdonságokkal, ha norma gyanánt a vektor abszolút értékét tekintjük.

Végül egy teret *teljesnek* nevezünk, ha a CAUCHY-féle konvergencia kritérium megfelelője teljesül:

Valahányszor az $f_1, f_2, \ldots, f_n \ldots$ elemek végtelen sorozatára

$$\lim_{i,k\to\infty} \|f_i - f_k\| = 0,$$

akkor van a térnek olyan f eleme, hogy

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\| = 0.$$

A közönséges tér vektorai nyilvánvalóan rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal is.

A lineáris, normált és teljes tereket, melyek tehát a mi reális terünk három jellegzetes sajátságával bírnak, BANACH-*féle térnek* hívjuk.

Minden olyan művelet, mely ezen absztrakt tér egy pontjához egy másik absztrakt tér egy elemét rendeli hozzá, a tér egy operátora. Vagyis az operátor egy ilyen absztrakt térben értelmezett függvény. Tulajdonképpen arról van szó, hogy a közönséges differenciálszámítás bizonyos tényeit az ilyen általánosított, absztrakt terekre is kiépítsük.

Magukkal az absztrakt, BANACH-féle terekkel nem foglalkozunk részletesen, mert ezekre vonatkozó alapdefiníciók és alapfogalmak megtalálhatók a lap nemrégen megjelent egyik cikkében, melyet SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA írt, úgy, hogy e tekintetben e cikkben foglaltakra kell utalnunk az olvasót [9].

Mielőtt tulajdonképpeni tárgyunkra térnénk, még fel kell hívni az olvasó figyelmét az eljárás általános módszerére. A valóságos világból elvonatkoztatott fogalmak közül egy csoportba foglaljuk mindazokat, melyeknek valamely szempontból közös tulajdonságuk van. Így például a „tér" fogalma alá vonjuk mindazokat a dolgokat (pontokat, komplex számokat, n dimenziós vektorokat, függvényeket stb.), melyek a közönséges értelemben vett tér tulajdonságaival rendelkeznek valamilyen szempontból. Például abból a szempontból, hogy „pontjai" között a távolság fogalmát úgy lehet megállapítani, hogy a háromszögegyenlőtlenség érvényes legyen. Meglátjuk, hogy ezekben a terekben értelmezett függvények differenciálszámítása formai szempontból ugyanaz, mint a közönséges differenciálszámítás. Ez az egyetlen helyes — dialektikus — általánosítás, az a módszer, melyről MARX azt mondja „az értelmes általánosítás útja". Ezt az utat követték a mi esetünkben is a szovjet matematikusok és a következő sorokban látni fogjuk, hogy mennyire sokoldalú és gazdag eredményre vezetett eljárásuk.

1. A Banach-terek lineáris és bilineáris operátorai.

Ha van olyan előírás, mely az X BANACH-tér minden x eleméhez egy másik Y tér valamely y elemét rendeli hozzá, akkor azt az előírást az X térben értelmezett *operátornak* nevezzük. Jele:

$$y = P(x) \qquad (x \in X;\ y \in Y) \ .$$

Mikor félreértéstől nem kell tartani, néha a zárójelet el is hagyják és az operátort egyszerűen így jelölik:

$$y = P \cdot x \ .$$

Lineárisnak nevezzük az X tér U operátorát, ha

1° bármely két x_1 és x_2 elemre

$$U(c_1 x_1 + c_2 x_2) = c_1\, U(x_1) + c_2\, U(x_2) \ ,$$

ahol c_1 és c_2 két tetszőleges valós szám,

2° létezik olyan x-től független $c > 0$ szám, hogy

$$\| U(x) \| \leqq c \| x \|$$

Azt a legkisebb c számot, melyre a 2° alatti feltétel az X tér minden x elemére teljesül, az U operátor normájának nevezzük. Jele: $\| U \|$. Tehát

$$\| U(x) \| \leqq \| U \| \cdot \| x \| \ .$$

Az U lineáris operátor inverzén az Y tér U^{-1}-gyel jelölt lineáris operátorát értjük, melyre

$$U\,[U^{-1}(y)] = y \ ,$$

ahol y az Y tér bármely eleme. Természetesen inverz operátor nem mindig létezik.

Alább fel fogjuk használni BANACH következő jólismert tételét [10], melyet azonban nem bizonyítunk be:

Legyen U az X tér valamely lineáris operátora, mely az X teret önmagára, vagy annak egy részére képezi le; jelölje E a tér azonosságoperátorát, tehát azt a műveletet, mely *bármely* x elemhez önmagát rendeli. Akkor *az*

$$E - U$$

lineáris operátornak van inverze, ha $\| U \| < 1$ *és*

$$\| (E - U)^{-1} \| \leqq \frac{1}{1 - \| U \|} .$$

Ha V az X térnek olyan lineáris operátora, mely az x elemtő lineáris módon függ, akkor V-t *bilineáris operátornak* nevezzük Tehát V az x elemet a lineáris operátorok terének egy elemébe visz át, vagy másképpen, a V operátor értelmezési tartománya az X tér, képtartománya pedig az X-ben értelmezett lineáris operátorok tere. $V(x)$ ezek szerint lineáris operátor, melyet valamely $x' \in X$ elemre alkalmazhatunk. Tehát a V operátor az X tér egy (x, x') elempárját az Y egy elemébe viszi át. Az előbbiek szerint

$$\| V(x) \cdot x' \| \leqq \| V(x) \| \cdot \| x' \| < D \| x \| \cdot \| x' \| , \tag{1}$$

ahol $D > 0$. Azt a legkisebb $D > 0$ számot, melyre (1) teljesül, a V bilineáris operátor normájának nevezzük.

2. Operátorok differenciálhányadosa

Hogy NEWTON módszerét BANACH terekbe átvihessük, értelmeznünk kell a terek operátorainak differenciálhányadosát. A BANACH-terekben a differenciálhányados fogalmát először M. FRÉCHET alkotta meg [11]. Míg a nyugati tudósok kezében 25 éven át a FRÉCHET-féle definíció semmi jelentős eredményt nem hozott, addig a szovjet kutatók, elsősorban L. V. KANTOROVICS és munkatársai, FRÉCHET gondolatából elindulva a tiszta és alkalmazott matematika jelentős eredményeit hozták felszínre. A következőkben a differenciálhányadosnak nem az eredeti, FRÉCHET-féle, hanem annak L. V. KANTOROVICStól származó, kissé módosított alakját adjuk.

Legyen $P(x)$ az X tér egy — nem szükségképpen lineáris — operátora. Azt mondjuk, hogy $P(x)$ az x helyen differenciálható, lha létezik olyan $P'(x)$-el jelölt *lineáris* operátor, hogy bármi is legyen a $\Delta x \in X$ elem, a

$$\| P(x + \Delta x) - P(x) - P'(x) \cdot \Delta x \| \leqq \| \Delta x \| \, \varepsilon \, (\| \Delta x \|)$$

egyenlőtlenség érvényes, ahol $\varepsilon(\|\Delta x\|) \to 0$, ha $\|\Delta x\| \to 0$. Ezt a $P'(x)$ lineáris operátort a P differenciálhányadosának nevezzük.

Ha $P(x)$ lineáris, akkor a

$$P(x + \Delta x) - P(x) = P(\Delta x)$$

különbség független x-től, azért a P' lineáris operátor sem függhet x-től *Lineáris operátor differenciálhányadosa tehát az értelmezési tér minden elemére ugyanaz.** Hasonló módon látható be az a nyilvánvaló tény, hogy az X tér elemeitől független operátor (vagyis a konstáns) differenciálhányadosa 0.

Megeshet, hogy $P'(x)$ az x-nek újból differenciálható operátora. $P'(x)$ differenciálhányadosát *második differenciálhányadosnak* nevezzük. $P'(x)$ lineáris operátor, melynek differenciálhányadosa a definíció szerint ismét olyan lineáris operátor, melyet a $\xi \in X$ elemre alkalmazva az X tér egy lineáris operátorát kapjuk. Ezért tehát $P''(x)$ az X tér egy bilineáris operátora.

A fenti definíció alapján könnyen igazolhatók a közönséges differenciálszámítás jólismert szabályai. Ezek közül kiemeljük a következőt: ha U az Y tér egy lineáris operátora és P tetszőleges differenciálható operátor, akkor

$$[U P(x)]' = U[P'(x)].$$

A differenciálszámítás középértéktételének analogonja is kimondható: *ha P differenciálható operátor, akkor az x és Δx elemekhez mindig lehet találni olyan $0 < \Theta < 1$ számot, hogy*

$$\|P(x + \Delta x) - P(x)\| = \|P'(\bar{x})\| \cdot \|\Delta x\|,$$

ahol

$$\bar{x} = x + \Theta \Delta x .$$

Ha pedig $P''(x)$ *is létezik, akkor érvényes a*

$$\|P(x + \Delta x) - P(x) - P'(x)\Delta x\| = \frac{1}{2}\|P''(\bar{x})\|\,\|\Delta x\|^2$$

egyenlet, ahol $\bar{x} = x + \Theta\Delta x$ és $0 < \Theta < 1$.

Ezt a két tételt nem bizonyítjuk be. Az első tétel valamivel enyhébb alakját M. KERNER [13] állította fel. A kimondott két állítás LJUSZTERNIK egy tételének felhasználásával könnyen bizonyítható [14].

* Ez annak a jólismert ténynek az általánosítása, hogy a lineáris függvény differenciálhányadosa állandó.

Példákat az operátorok differenciálhányadosára az alkalmazások keretében mutatunk be.

3. A Newton-féle szukcesszív approximációs eljárás Banach terekben

Legyen $P(x)$ az X BANACH-féle tér egy kétszer differenciálható operátora, amely az X teret az Y tér egy részére képezi le. A probléma abban áll: megkeresendő az X tér azon x eleme, melyre a

(1) $$P(x) = 0$$

egyenlet teljesül.

E probléma megoldásának KANTOROVICS-féle módszere a következőben áll: meghatározzuk először az (1) egyenlet egy x_0 „közelítő megoldását" és ettől kiindulva egymásután számítjuk ki az $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ közelítéseket, éspedig az x_1 közelítés kiszámítása a

(2) $$P(x_0) + P'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) = 0 ,$$

x_1-re nézve lineáris egyenletből történik. Ha $P'(x_0)$ lineáris operátornak van inverze $P'(x_0)^{-1}$, akkor a (2) egyenletből

(3) $$x_1 = x_0 - P'(x_0)^{-1} \cdot P(x_0)$$

adódik. x_1 ilymódon meghatározott értékének segítségével képezzük x_2-re vonatkozó következő lineáris egyenletet

$$P(x_1) + P'(x_1)(x_2 - x_1) = 0$$

Feltéve, hogy $P'(x_1)$ inverze is létezik, kapjuk, hogy

$$x_2 = x_1 - P'(x_1)^{-1} P(x_1) ,$$

s. i. t.

Ezáltal az egymásutáni közelítések egy $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ végtelen sorozatát kapjuk. Ha a P operátor bizonyos követelményeknek eleget tesz és ha az x_0 „első közelítést" alkalmasan választjuk meg, akkor az előbb leírt módszerrel az $x_1, x_2, \ldots, x, \ldots$ további közelítések kiszámíthatók és ezek végtelen sorozata konvergens, határértéke pedig az (1) egyenlet egyik megoldása.

L. V. KANTOROVICS erre vonatkozó alapvető tétele ([1], [3]) a következőképpen hangzik:

I. tétel.

Ha a $P(x)$ kétszer differenciálható operátorhoz lehet találni olyan $x_0 \in X$ elemet, hogy teljesüljenek a következő feltételek

1° $$\Gamma_0 = P'(x_0)^{-1}$$

inverz operátor létezzék és

(4) $$\|\Gamma_0\| \leqq B_0$$

2°(5) $$\|\Gamma_0 P(x_0)\| \leqq \eta_0$$

3° *a* (8) *alatt megadott környezetben* $P''(x)$ *létezik és ott*

(6) $$\|P''(x)\| \leqq K$$

4°(7) $$h_0 = B_0 \eta_0 K \leqq \frac{1}{2},$$

akkor az $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ *sorozat konvergens és határértéke az* (1) *egyenlet megoldása. Az* x *megoldásnak az* x_0 *kezdeti elemtől való „távolságát" megadja az*

(8) $$\|x - x_0\| \leqq N(h_0)\,\eta_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h_0}}{h_0}\,\eta_0$$

egyenlőtlenség. A konvergencia sebességére az

(6) $$\|x_n - x\| \leqq \frac{1}{2^{n-1}}\,(2h_0)^{2^{n-1}}\,\eta_0$$

egyenlőtlenség ad felvilágosítást.

Ha a (6) *feltétel a*

(10) $$\|x - x_0\| < L(h_0)\,\eta_0 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2h_0}}{h_0}\,\eta_0$$

tartományban is érvényes, akkor a leírt eljárással nyert megoldás x*-nek ebben a környezetében az egyetlen.*

A kimondott tételben a (7), (8) és (10) alatt szereplő állandók nem javíthatók. Ez példával bizonyítható. Legyen X a valós számok tere, egy elem (szám) normája a szám abszolút értéke. Tekintsük ezt a másodfokú egyenletet

$$P(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + h = 0 \qquad (h > 0)$$

Ha $x_0 = 0$, akkor

$$P'(x_0) = P'(0) = -1, \text{ tehát } \|\Gamma_0\| = \frac{1}{|P'(x_0)|} = 1 = B_0$$

$$P(x_0) = P(0) = h; \qquad \|\Gamma_0 P(x_0)\| = h = \eta_0$$

így

$$h_0 = h\,\cdot$$

A szóbanforgó egyenlet gyökei:

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-2h}\,.$$

Ezek csakis akkor valósak, ha $h \leqq \frac{1}{2}$ és

$$|x - x_0| = |x_2| = \frac{1-\sqrt{1-2h}}{h}\cdot h\,.$$

Másrészt az

$$|x - x_0| = |x| < \frac{1+\sqrt{1-2h}}{h}\,h$$

tartományban az egyenletnek pontosan egy gyöke van.

A tétel teljes bizonyítását nem végezzük el, ez túl messzire vezetne. E tekintetben L. V. Kantorovics egyik dolgozatára utalunk [4] Itt csupán a tétel legfőbb állításának egy, az eredetinél valamivel egyszerűbb bizonyítását adjuk.

Először is a tétel kikötései biztosítják az $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ sorozat tagjainak exisztenciáját. Ehhez csak azt kell belátni, hogy a $P'(x_1)$, $P'(x_2), \ldots$ lineáris operátorok inverzei léteznek és véges normájuk van.

Hogy x_1 létezik, az nyilvánvaló, de akkor

$$P'(x_1) = P'(x_0) - [P'(x_0) - P'(x_1)]$$

kifejezésben kiemelhető $P'(x_0)$ (ezt megtehetjük, mert $P'(x_0)$ inverzének létezését feltettük), azt kapjuk, hogy

$$P'(x_1) = P'(x_0)[E - \Gamma_0[P'(x_0) - P'(x_1)]]\,. \tag{11}$$

A jobboldalon a szögletes zárójelben lévő lineáris operátor inverze Banach idézett tétele alapján biztosan létezik, mert

$$\|\Gamma_0[P'(x_0) - P'(x_1)]\| < 1\,.$$

Ugyanis alkalmazva az operátorokra vonatkozó középértéktételt azt kapjuk, hogy

$$\|P'(x_0) - P'(x_1)\| = \|P''(\bar{x})\|\;\|x_1 - x_0\| \leqq K\,\|x_0 - x_1\|$$

$$\bar{x} = x_1 + \Theta(x_1 - x_0) \qquad 0 < \Theta < 1\,.$$

Így

$$\|\Gamma_0[P'(x_0) - P'(x_1)]\| \leqq \|\Gamma_0\|\cdot\|P'(x_0) - P'(x_1)\| \leqq$$
$$\leqq B_0 K \|x_0 - x_1\|\,.$$

Továbbá x_1 definíciója alapján

$$x_1 - x_0 = -\Gamma_0 P(x_0)$$

ezért

$$\| x_1 - x_0 \| = \| \Gamma_0 P(x_0) \| \leqq \eta_0 .$$

Tehát

$$\| \Gamma_0 [P'(x_0) - P'(x_1)] \| \leqq B_0 K \eta_0 \leqq \frac{1}{2} < 1 .$$

Így tehát $P'(x_1)$-nek van inverze és ez:

$$\Gamma_1 = P'(x_1)^{-1} = [E - \Gamma_0 [P'(x_0) - P'(x_1)]]^{-1} \Gamma_0 . \, * \tag{12}$$

Sőt, az idézett BANACH-féle tétel alapján

$$\| P'(x_1)^{-1} \| = \| \Gamma_1 \| \leqq B_0 \frac{1}{1 - \| \Gamma_0 [P'(x_0) - P'(x_1)] \|} \leqq \tag{13}$$

$$\leqq \frac{B_0}{1 - B_0 \eta_0 K} = \frac{B_0}{1 - h_0} = B_1$$

Ezzel tehát kimutattuk azt, hogy $\Gamma_1 = P'(x_1)^{-1}$ létezik, ami x_2 létét biztosítja. Ugyanígy lehet bizonyítani azt, hogy $P'(x_2)^{-1}$, $P'(x_3)^{-1}$, . . . lineáris operátorok is léteznek és ezek normái (13) mintájára a

$$\| \Gamma_n \| = \| P'(x_n)^{-1} \| \leqq \frac{B_{n-1}}{1 - h_{n-1}} = B_n \tag{14}$$

gyenlőtlenséggel becsülhetők meg.

Az eljárás konvergenciájának bizonyítására azt mutatjuk ki hogy a tétel 1°, 2°, 3° és 4° feltételei érvényesek maradnak akkor is ha az x_0 elemről az x_1 elemre térünk át.

A 2° kikötés analogonja fennállásának igazolására meg kell vizsgálnunk a $\Gamma_1 P(x_n)$ kifejezést. E célból vegyük figyelembe Γ_1 (12) alatt megállapított kifejezését:

$$\| \Gamma_1 P(x_1) \| = \| E - \Gamma_0 [P'(x_0) - P'(x_1)]^{-1} \cdot \Gamma_0 P(x_1) \| \leqq \tag{15}$$

$$\leqq \frac{1}{1 - h_0} \| \Gamma_0 P(x_1) \| \cdot$$

* Itt alkalmaztuk azt a nyilvánvaló és közismert szabályt, hogy

$$(A\,B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

ahol A és B lineáris operátorokat jelentenek.

$\| \Gamma_0 P(x_1) \|$ alkalmas megbecslése céljából tekintsük a következő operátort:

$$F(x) = x - \Gamma_0 P(x)$$

$$F(x_1) = x_1 - \Gamma_0 P(x_1),$$

és ebből

$$-\Gamma_0 P(x_1) = F(x_1) - x_1.$$

x_1 definíciója szerint

$$x_1 = x_0 - \Gamma_0 P(x_0) = F(x_0),$$

így tehát

(16) $$-\Gamma_0 P(x_1) = F(x_1) - F(x_0).$$

Közelfekvő az a gondolat, hogy $\| \Gamma_0 P(x_1) \|$ megbecslésére a középértéktétel analogonját használjuk. Ehhez meg kell jegyezni, hogy az F operátor differenciálható és az

$$F'(x) = E - \Gamma_0 P'(x); \qquad F''(x) = -\Gamma_0 P''(x)$$

$$F'(x_0) = E - \Gamma_0 P'(x_0) = E - P'(x_0)^{-1} P'(x_0) = E - E = 0$$

egyenletek érvényesek. Ezek figyelembevételével (16) ilyen alakba írható

$$-\Gamma_0 P(x_1) = F(x_1) - F(x_0) - F'(x_0)(x - x_0).$$

Alkalmazzuk a középértéktétel már idézett analogonját, így a következő becsléshez jutunk

$$\| \Gamma_0 P(x_1) \| = \frac{1}{2} \| F''(\bar{x}) \| \, \| x_1 - x_0 \|^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \| \Gamma_0 P''(x) \| \cdot \| x_1 - x_0 \|^2 \leqq \frac{1}{2} B_0 K \eta_0^2 = \frac{1}{2} h_0 \eta_0.$$

Visszatérve tehát (15)-re, azt kapjuk, hogy

(17) $$\| \Gamma_1 P(x_1) \| \leqq \frac{1}{2} \frac{1}{1 - h_0} \cdot h_0 \eta_0 = \eta_1.$$

Ugyanilyen módon bizonyítható be a

(18) $$\| \Gamma_2 P(x_2) \| \leqq \frac{1}{2} \frac{1}{1 - h_1} h_1 \eta_1 = \eta_2,$$

$$\| \Gamma_3 P(x_3) \| \leqq \frac{1}{2} \frac{1}{1 - h_2} h_2 \eta_2 = \eta_3, \ldots,$$

$$\| \Gamma_n P(x) \| \leqq \frac{1}{2} \frac{1}{1 - h_{n-1}} h_{n-1} \eta_{n-1} = \eta_n, \ldots$$

egyenlőtlenségsorozat, ahol

$$(19) \qquad h_1 = B_1 K \eta_1, \quad h_2 = B_2 K \eta_2, \ldots, \quad h_n = B_n K \eta_n$$

A 4° kikötés megfelelője is érvényes, ha az x_0 elem helyett rendre az $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ elemeket tekintjük. Mert

$$h_1 = B_1 K \eta_1 = \frac{B_0}{1-h_0} K \cdot \frac{1}{2} \frac{h_0}{1-h_0} \eta_0 =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{h_0^2}{(1-h_0)^2} \leqq 2 h_0^2 \leqq \frac{1}{2},$$

és teljesen hasonlóan

$$(20) \qquad h_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{h_{n-1}^2}{(1-h_{n-1})^2} \leqq \frac{1}{2}. \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Az $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ közelítősorozat konvergenciájának bebizonyításához megjegyezzük, hogy a definíció szerint

$$x_{n+1} - x_n = -\Gamma_n P(x_n)$$

tehát

$$(21) \qquad \| x_n - x_{n+1} \| = \| \Gamma_n P(x_n) \| \leqq \eta_n.$$

Végeredményben azt kell igazolni, hogy

$$\| x_{n+k} - x_n \| \to 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

ha $n \to \infty$. Ehhez felhasználjuk a (21) alatti egyenlőtlenséget:

$$\| x_{n+k} - x_n \| \leqq \| x_{n+k} - x_{n+k-1} \| + \| x_{n+k-1} - x_{n+k-2} \| + \ldots +$$

$$(22) \qquad + \| x_{n+1} - x_n \| \leqq \eta_{n+k-1} + \eta_{n+k-2} + \ldots + \eta_n$$

Itt a jobboldal 0-hoz tart, mert a (18) és (20) alatti egyenletek felhasználásával nyerjük az

$$\eta_{n+1} N(h_{n+1}) = \eta_{n+1} \frac{1 - \sqrt{1 - 2 h_{n+1}}}{h_{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{h_n \eta_n}{1-h_n} \frac{1 - \sqrt{1 - \dfrac{h_n^2}{(1-h_n)^2}}}{\dfrac{1}{2} \dfrac{h^2}{(1-h_n)^2}} = \eta_n \cdot \frac{1 - h_n - \sqrt{1 - 2h_n}}{h_n} =$$

$$= \eta_n N(h_n) - \eta_n$$

azonosságot, ebből pedig

$$\eta_n = \eta_n N(h_n) - \eta_{n+1} N(h_{n+1})$$

következik. (22) jobboldala tehát így írható:

$$\eta_{n+k-1}+\eta_{n+k-2}+\ldots+\eta_n=\eta_{n+k-1}N(h_{n+k-1})-\eta_{h+k}N(h_{n+k})+$$
$$+\eta_{n+k-2}N(h_{n+k-2})-\eta_{n+k-1}N(h_{n+k-1})+\ldots+$$
$$+\ldots+\eta_n N(h_n)-\eta_{n+1}N(h_{n+1})=\eta_n N(h_n)=$$

$$(23)\qquad =\eta_n\cdot\frac{1-\sqrt{1-2h_n}}{h_n}\leqq 2\eta_n\,.$$

Másrészt viszont

$$h_2=\frac{1}{2}\,\frac{h_1^2}{(1-h_1)^2}\leqq 2h_1^2\leqq 8h_0^4=\frac{1}{2}(2h_0)^4=\frac{1}{2}(2h_0)^{2^2}$$

$$h_3\leqq 2h_2^2\leqq 2^7h_0^8=\frac{1}{2}(2h_0)^{2^3}$$

$$h_n\leqq\frac{1}{2}(2h_0)^{2^n}$$

és így

$$\eta_n=\frac{1}{2}\,\frac{h_{n-1}}{1-h_{n-1}}\eta_{n-1}\leqq h_{n-1}\eta_{n-1}\leqq h_{n-2}h_{n-1}\eta_{n-2}\leqq\ldots\leqq$$

$$\leqq h_{n-1}h_{n-2}\ldots h_0\eta_0\leqq\frac{1}{2^n}(2h_0)^{2^{n-1}}(2h_0)^{2^{n-3}}\ldots(2h_0)\eta_0\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{2^n}(2h_0)^{2^{n-1}}\eta_0\,.$$

(22) és (23) felhasználásával az

$$(24)\qquad \|x_{n+k}-x_n\|\leqq\frac{1}{2^{n-1}}(2h_0)^{2^{n-1}}\eta_0$$

egyenlőtlenséghez jutunk. A jobboldal viszont tart a 0-hoz, ha $n\to 0$, mert $2h_0\leqq 1$.

Ezzel tehát a

$$\lim_{n\to 0}x_n=x$$

elem létezése be van bizonyítva. Hátra van még annak a bebizonyítása, hogy ez a limes az (1) egyenletnek valóban megoldása. Az eljárás alapján az x_n és x_{n+1} elemek eleget tesznek ennek az egyenletnek:

$$P(x_n)=-P'(x_n)(x_{n+1}-x_n)\,.$$

Ebből következik a

$$\|P(x_n)\| \leqq \|P'(x_n)\| \, \|x_{n+1} - x_n\|$$

egyenlőtlenség. (21) és (24) alapján a jobboldali kifejezés második tényezője tart a zérushoz. Az első tényező korlátossága pedig a következőképpen látható be:

$$\|P'(x_n)\| = \|P'(x_0) + P'(x_n) - P'(x_0)\| \leqq \|P'(x_0)\| +$$
$$+ \|P'(x_n) - P'(x_0)\| = \|P'(x_0)\| + \|P''(\bar{x})\| \cdot \|x_n - x_0\| \leqq$$
$$\|P'(x_0)\| + K \|x_n - x_0\| \,.$$

Ez utóbbi n minden értékére korlátos. Tehát

$$\lim_{n \to \infty} \|P(x_n)\| = 0 \,,$$

amiből P folytonossága miatt $P(x) = 0$ következik.

Az I. tétel egyéb állításait nem bizonyítjuk be, ezek szukcesszív approximációra vonatkozó hasonló közismert tételek szokásos bizonyításmenetének gondolatain alapszanak.

Hangsúlyozzuk, hogy L. V. Kantorovics leírt módszere nem csupán exisztenciatételt szolgáltat, hanem konkrét esetben bonyolult egyenletek közelítő megoldására használható. A sorozatos közelítés használatával elkövetett hiba az I. tétel szerint megbecsülhető. Éppen a gyakorlati felhasználhatóság szempontjából három megjegyzést teszünk:

Az *első* arra vonatkozik, hogy az (5) alatti feltétel sok esetben a gyakorlatilag jobban kezelhető

$$(5') \qquad \|P(x_0)\| \leqq \tilde{\eta}_0$$

feltétellel pótolható. Mert

$$\|\Gamma_0 P(x_0)\| \leqq \|\Gamma_0\| \cdot \|P(x_0)\| \leqq B \eta_0' = \eta_0 \,,$$

tehát η_0 helyébe $\eta_0' \, B_0$-at kell helyettesíteni. Ekkor a (7) alatti feltevés ilyen módon írható:

$$(7') \qquad h_0 = B_0 K \eta_0 = B_0^2 K \eta_0' \leqq \frac{1}{2}$$

A *második* megjegyzés azt a gyakorlatilag néha kényelmetlen tényt küszöböli ki, hogy a kimondott tételben a (6) egyenlőtlenségnek olyan (a (8) alatt megadott) tartományban kell teljesülnie, melynek határa függ a (6) alatt szereplő K korláttól.

Miután $0 < h_0 \leqq \frac{1}{2}$, ezért

$$N(h_0)\,\eta_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h_0}}{h_0}\,\eta_0 \leqq 2\eta_0$$

Így tehát az I. tétel 3° kikötése pótolható a következő, a 3° alatti kikötésnél ugyan többet követelő, de a gyakorlatban sokszor mégis jobban kezelhető kikötéssel:

3'° $\quad \| P''(x) \| \leqq K$ az $\| x - x_0 \| \leqq 2\eta_0$ környezetben.

A *harmadik* megjegyzés a KANTOROVICS-féle eljárás egy gyakorlatilag, az eredetinél még jobban kezelhető módosítására vonatkozik. Ennek a módosított eljárásnak az analogonja, mint a NEWTON-féle gyökközelítő eljárásnak egy változata valós, közönséges egyenletekre már régebben ismeretes volt.

Az eredeti KANTOROVICS-féle módszer azt kívánja, hogy minden n értékre x_{n+1}-re meg kell alkotni ezt a lineáris egyenletet:

$$P(x_n) + P'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0$$

Habár az I. tétel biztosítja $P'(x_n)^{-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ operátorok létezését, de ezek képzése gyakorlati számításoknál sok vesződséggel jár. Ezért az eredeti eljárás helyett célszerű a következő egyenletsorozatot tekinteni:

$$P(x_n) + P'(x_0)(x_{n+1} - x_n) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{25}$$

Ennél ugyanis x_{n+1} kiszámítása az x_n ismeretében mindig ugyanannak a Γ_0 operátornak a segítségével történhet.

A (25) egyenlettel definiált eljárásnál az egyes közelítéseket jelöljük $x_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ betűkkel. A szóbanforgó módosított eljárás konvergenciájára vonatkozik a

II. tétel.

Ha az I. tétel feltevései teljesülnek azzal a módosítással, hogy

$$h_0 < \frac{1}{2}$$

akkor a (25) *egyenlettel definiált* $x_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *elemsorozat konvergens és,*

$$\lim_{n \to \infty} \xi_n = x^*,$$

ahol x^* az (1) *egyenletnek az a megoldása, melyet az eredeti eljárás szolgáltat. A konvergencia sebességét jellemzi következő becslés:*

$$\| \xi_n - x^* \| \leqq \left(1 - \sqrt{1 - 2h_0}\right)^n \| x_0 - x^* \| .$$

E tétel egyik bizonyításának gondolatmenete a következő: megvizsgáljuk, hogyan viselkednek az

$$F(x) = x - \Gamma_0 P(x)$$

operátor által transzformált elemek, t. i. ezek lesznek a szóbanforgó algoritmus egyes elemei. Erre vonatkozik az alábbi segédtétel, melyen az egész bizonyítás alapszik: x egy tetszőleges elem, melyre az

$$\| x - x_0 \| \leqq N(h_0)\, \eta_0 \tag{26}$$

egyenlőtlenség teljesül, akkor

$$\| F(x) - x^* \| \leqq \left(1 - \sqrt{1 - 2h_0}\right) \| x - x^* \| \tag{27}$$

is érvényes.

Mivel ugyanis $P(x^*) = 0$, ezért $F(x^*) = x^*$, ennek folytán a középértéktétel megfelelőjét alkalmazva, az

$$\| F(x) - x^* \| = \| F(x) - F(x^*) \| \leqq \| F'(\bar{x}) \| \, \| x - x^* \|$$

$$\bar{x} = x + \Theta (x^* - x); \qquad 0 < \Theta < 1 ,$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Láttuk, hogy $F'(x_0) = 0$, ezért ugyancsak a középértéktételt alkalmazva, azt kapjuk, hogy

$$\| F'(\bar{x}) \| = \| F'(\bar{x}) - F'(x_0) \| \leqq \| F''(\bar{\bar{x}}) \| \, \| \bar{x} - x_0 \| =$$

$$= \| \Gamma_0 P''(\bar{\bar{x}}) \| \, \| \bar{x} - x_0 \| \leqq B_0 K \max. (\| x - x_0 \|, \| x^* - x_0 \|)$$

$$\leqq B_0 K \eta_0 N(h_0) = 1 - \sqrt{1 - 2h_0} .$$

Ez valóban így van, mert egyrészt $\bar{x}$ az x és x^* „között" van, tehát x_0-nak x-től, vagy x^*-tól való „távolsága" nagyobb mint x_0-nak $\bar{x}$-től való távolsága, másrészt $\| x - x_0 \|$-ra vonatkozik (26) és ugyanezen korlát alatt marad $\| x^* - x_0 \|$ is. Így tehát (27) igaz. Ennek segítségével a II. tétel bizonyítása igen könnyű.

Nyilvánvalóan igaz $\xi_1 = x_1$. Alkalmazzuk (27) egyenlőtlenséget egymás után $x = x_0$, $x = x_1$, $x = \xi_2, \ldots$ elemekre.

$$\| x_1 - x^* \| \leqq \left(1 - \sqrt{1 - 2h_0}\right) \| x_0 - x^* \|$$

$$\| \xi_2 - x^* \| \leqq \left(1 - \sqrt{1 - 2h_0}\right) \| x_1 - x^* \| \leqq$$

$$\leqq \left(1 - \sqrt{1 - 2h_0}\right)^2 \| x_0 - x^* \|$$

$$\|\xi_3 - x^*\| \leqq (1 - \sqrt{1 - 2h_0})\,\|\xi_2 - x^*\| \leqq$$
$$\leqq (1 - \sqrt{1 - 2h_0})^3\,\|x_0 - x^*\|$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$\|\xi_n - x^*\| \leqq (1 - \sqrt{1 - 2h_0})^n\,\|x_0 - x^*\|$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

Látjuk, hogy a jobboldal akkor és csak akkor konvergál a zérushoz az n minden határon túl való növelésével, hogyha

$$h_0 < \frac{1}{2}\,.$$

4. Alkalmazások

a) Közönséges egyenletek megoldása

Az X tér legyen a valós vagy komplex számok tere és az x szám normáján értjük annak abszolút értékét $P(x)$ legyen valamilyen kétszer differenciálható függvény. Akkor az I. tétel alkalmazásával kimondhatjuk, ha létezik olyan x_0 szám, hogy

$$h_0 = \frac{|P(x_0)|}{|P'(x_0)|^2}\,K \leqq \frac{1}{2}\,.$$

ahol $K = \max|P''(x)|$ az $|x - x_0| \leqq \dfrac{1 - \sqrt{2 - 2h_0}}{h_0}\left|\dfrac{P(x_0)}{P'(x_0)}\right|$

tartományban, akkor a $P(x)$-re alkalmazott Newton-féle eljárás konvergens és a

$$P(x) = 0$$

egyenlet egyik gyökéhez konvergál.

Ha figyelembe vesszük az I. tételhez fűzött második megjegyzést, úgy a következő állítást kapjuk: *Ha valamely x_0 számnak az*

$$(1) \qquad |x - x_0| \leqq 2\left|\frac{P(x)}{P'(x_0)}\right|$$

környezetében

$$(2) \qquad \left|\frac{P(x_0)}{P'(x_0)^2}\,P''(x)\right| \leqq \frac{1}{2}$$

teljesül, akkor az x_0 kezdőértékkel alkalmazott Newton*-féle algoritmus a $P(x) = 0$ egyenletnek az* (1) *alatti környezetében lévő gyökéhez konvergál.*

Lássunk egy példát: megoldandó az

$$x \cdot \ln x = -0{,}145$$

egyenlet. Itt

$$P(x) = x \cdot \ln x + 0{,}145$$

$$P'(x) = \ln x + 1$$

$$P''(x) = \frac{1}{x} \cdot$$

A kezdőérték legyen $x_0 = 0{,}2$. Akkor

$$|x - x_0| \leqq 2 \left| \frac{P(x_0)}{P'(x_0)} \right| = 2 \cdot 0{,}196 = 0{,}0392 \, ,$$

vagyis az a környezet, melyben (2)-nek teljesülnie kell

$$0{,}1608 \leqq x \leqq 0{,}2392 \, .$$

Ebben a tartományban valóban

$$\left| \frac{P(x_0)}{P'(x_0)^2} \cdot P''(x_0) \right| = \frac{0{,}074}{x} \leqq 0{,}4603 < \frac{1}{2} \, .$$

Ebből következik, hogy a szóbanforgó egyenletre alkalmazott NEWTON-féle eljárás konvergens.

b) Többismeretlenes egyenletrendszerek

Alkalmazzuk KANTOROVICS módszerét a következő alakú n ismeretlenes egyenletrendszer megoldására:

(1) $$f_i(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots x^{(n)}) = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$x^{(k)}$ jelentsék az ismeretleneket, f_i adott, második parciális differenciálhányadosokkal együtt folytonos függvények.

Az X tér legyen az $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots x^{(n)})$ n számból álló rendszerek tere, melyben az x elem normáját az

$$\| x \| = \max (| x^{(1)} |, \dots, | x^{(n)} |) ,$$

gyenlet definiálja. E tér P operátora legyen ez az operátor:

$$y^{(i)} = f_i(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}) \, ,$$

mely tehát az $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ elemet az $y = (y^{(1)}, \dots, y^{(n)})$ elembe viszi át. Ha $\| y \|$-t ugyanúgy definiáljuk, mint $\| x \|$-t, akkor a P operátor az X teret sajátmagára, vagy annak egy részére képezi le.

Ennek az operátornak a differenciálhányadosát valamely x_0 helyen a következő módon határozzuk meg:

$$f_i(x_0^{(1)}+\Delta x^{(1)},\ldots,x_0^{(n)}+\Delta x^{(n)})-f_i(x_0^{(1)},\ldots,x_0^{(n)})=$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x^{(1)}}\right)_0\Delta x^{(1)}+\ldots+\left(\frac{\partial f}{\partial x^{(n)}}\right)_0\Delta x^{(n)}+\nu(\Delta x^{(1)},\Delta x^{(2)},\ldots\Delta x^{(n)}),$$

ahol $\dfrac{\nu}{|\Delta x^{(k)}|}\to 0$, ha $||\Delta x||\to 0$ $(k=1,2,\ldots,n)$.

Ha egy mátrixnak egy, itt szóbanlévő számrendszerrel való szorzatát ugyanúgy definiáljuk, mint ahogy általában mátrixnak vektorral való szorzatát szokás definiálni, akkor az előbbiből látható, hogy a $P'(x_0)$ lineáris operátor a következő mátrix

$$\left\|\begin{matrix}\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x^{(1)}}\right)_0 & \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x^{(2)}}\right)_0 & \ldots & \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x^{(n)}}\right)_0\\ \hline \left(\dfrac{\partial f_n}{\partial x^{(1)}}\right)_0 & \left(\dfrac{\partial f_n}{\partial x^{(2)}}\right)_0 & \ldots & \left(\dfrac{\partial f_n}{\partial x^{(n)}}\right)_0\end{matrix}\right\|.$$

Ennek a mátrixnak $\Delta x=(\Delta x^{(1)},\ldots,\Delta x^{(n)})$ elemmel való szorzata ugyanis olyan $\Delta y=(\Delta y^{(1)},\ldots,\Delta y^{(n)})$ elemet ad, melynek $f_i(x+\Delta x)-f_i(x)$ -től való eltérése $\nu(\Delta x)$, ahol $\nu(\Delta x)=||\Delta x||\,\varepsilon(\Delta x)$ alakban írható; $\varepsilon(\Delta x)\to 0$, ha $||\Delta x||\to 0$.

Tegyük fel, hogy a $P'(x_0)$ mátrix determinánsa zérustól különböző, ennek értékét D-vel, n — 1-edrendű aldeterminánsait a szokásos D_{ik}-val jelöljük. Akkor, mint ez a determinánsok elméletéből ismert,

$$P'(x_0)^{-1}=\Gamma_0=\frac{1}{D^n}\left\|\begin{matrix}D_{11}\,D_n\ldots D_{1n}\\ \hline D_{n1}D_{n2}\ldots D_{nn}\end{matrix}\right\|.$$

Ennek normájára a

$$||\Gamma_0||\leqq\max_{1\leqq i\leqq n}\sum_{k=1}^{n}\frac{|D_{ik}|}{|D|}\leqq|B_0$$

becslés érvényes. A $P(x_0)$ normáját pedig a

$$||P(x_0)||=\max_{1\leqq i\leqq n}|f_i(x_0^{(1)},\ldots x_0^{(n)})|\leqq\eta_0$$

reláció szolgáltatja.

KANTOROVICS módszerének a P operátorra való alkalmazásához szükséges a P második differenciálhányadosának ismerete. Ez az előbbiek szerint az a bilineáris operátor, melynek az x és y elemre való alkalmazásával

$$z : z_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x^{(j)} \, \partial x^{(k)}} x^{(j)} x^{(k)} \qquad (i = 1, 2, \ldots x)$$

elemet nyerjük.

Feltéve, hogy x bizonyos tartományban

$$\left| \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^{(j)} \, \partial x^{(k)}} \right| \leqq L,$$

akkor

$$\| P''(x) \| \leqq \max_{1 \leqq i \leqq n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^{(j)} \, \partial x^{(k)}} \right| \leqq n^2 L = K.$$

Ha most alkalmazzuk I. tételt, úgy nemlineáris egyenletrendszerek megoldására a következő állítást kapjuk:

Ha az

$$f_i(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}) = 0$$

egyenletrendszerhez lehet találni olyan $x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \ldots, x_0^{(n)}$ *elemet, hogy a következő feltételek teljesüljenek:*

1°. $$| f_i(x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(n)}) | \leqq \eta_0'$$

2°. $$D = \left| \left(\frac{\partial f_i}{\partial x^{(k)}} \right)_0 \right|_1^n \neq 0$$

és

$$\max \frac{1}{|D|} \sum_{k=1}^{n} | D_{ik} | \leqq B_0 \cdot$$

3°. $$A \; \| x - x_0 \| \leqq 2 \, B_0 \, \eta_0'$$

artományban

$$\left| \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^{(j)} \, \partial x^{(k)}} \right| \leqq L$$

4°. $$B^2 \eta_0' L n^2 \leqq \frac{1}{2},$$

akkor az

(2) $$f_i[x_k^{(1)}, \ldots x_k^{(n)}] + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x^{(j)}} \right)_{x_k^{(j)}} (x_\kappa^{(j)} - x_{k-1}^{(j)}) = 0 \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

lineáris egyenletrendszerből egymás után meghatározott

$$(x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(n)})$$

elemsorozat a szóbanforgó egyenletrendszer egy megoldásrendszeréhez konvergál.

Az egyenletrendszerekre vonatkozó egészen más tételt kapunk, ha X és Y tér gyaránt az n dimenziós euklidesi teret (R_n-et) választjuk. Ebben tudvalévően az $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ vektor normáját így definiáljuk:

$$\| x \| = \sqrt{x^{(1)2} + x^{(2)2} + \ldots + x^{(n)2}}\,.$$

Az I. tételből közvetlenül következik a következő:

Ha az (1) *alatti egyenletrendszerhez lehet találni olyan*

$$x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(n)}$$

értékrendszert, hogy a következő feltételek teljesüljenek:

1°. $$D = \left| \left(\frac{\partial f_i}{\partial x^k} \right)_0 \right|_1^n \neq 0$$

és

$$\frac{1}{|D|} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} D_{ik}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqq B_0$$

2°. $$\left(\sum_{i=1}^{n} | x_1^{(i)} - x_0^{(i)} |^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqq \eta_0$$

Az I. tétel által definiált tartományban

3°. $$\left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^{(j)} \partial x^{(k)}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leqq K$$

4°. $$h_0 = B_0 \eta_0 K \leqq \frac{1}{2},$$

akkor a (2) *alatti egyenletrendszerből egymásután meghatározott*

$$(x_k^{(1)}, \ldots x_k^{(n)})$$

n dimenziós vektorsorozat az (1) *egyenletrendszer egyik megoldásához konvergál.*

Hogy mennyire értékes az egyenletrendszerekre vonatkozó ilyen két különböző tétel felállítása, az abból látszik, hogy konkrét alkalmazásoknál előfordulhat, hogy míg az egyik tétel nem vezet eredményre, addig a másik nagyon is jól használható. Ezt az állításunkat egy, OSZTROVSZKIJ-tól származó példán mutatjuk meg [15].

Megoldandó az

$$f_1(x, y) = 2x^3 - y^2 - 1 = 0$$
$$f_2(x, y) = xy^3 - y - 4 = 0$$

kétismeretlenes egyenletrendszer. Első közelítésnek vegyük az

$$x = 1{,}2 \qquad y = 1{,}7$$

értékrendszert.

$$f_1(1{,}2\,;\ 1{,}7) = -0{,}434\,;\ f_2(1{,}2\,;\ 1{,}7) = 0{,}1956\,.$$

Alkalmazzuk erre a kezdőértékpárra az egyenletrendszerekre vonatkozó első tételt. A D determináns értéke

$$D = 97{,}95$$

és

$$\max_{i=1,2} \max \left| \left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)_0 \right|, \left| \left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)_0 \right| = 9{,}404\,.$$

Másodrendű determináns aldeterminánsai a determináns elemei, tehát

$$|D_{ik}| \leqq 9{,}404\,.$$

De, akkor

$$\max_{1 \leqq i \leqq 2} \frac{1}{|D|} \sum_{k=1}^{2} |D_{ik}| \leqq \frac{2 \cdot 9{,}404}{97{,}95}\,.$$

Számítsuk ki η_0'-t

$$\max \{ |f_1(1{,}2\,;\ 1{,}7)|, |f_2(1{,}2\,;\ 1{,}7)| \} = \max(0{,}434\,;\ 0{,}1956) = 0{,}434$$

$$|f_1|_0 \leqq 0{,}434\,, \quad |f_2|_0 \leqq 0{,}434\,,$$

tehát

$$\eta_0' = 0{,}434\,.$$

A második deriváltak a $0 \leqq x \leqq 1,3; 0 \leqq y \leqq 1,8$ négyszögben kisebbek, mint 15,6, tehát $L = 15{,}6$. Így tehát

$$h_0 = \frac{16 \cdot 9{,}404^2 \cdot 0{,}434 \cdot 15{,}6}{97{,}95^2} \approx 0{,}998 > \frac{1}{2}\,.$$

Ez azt jelenti, hogy (1,2; 1,7) kezdőértékekkel az első tétel nem alkalmazható.

Megmutatjuk, hogy ugyanezen kezdőértékek mellett a második tétel viszont alkalmazható. Ekkor ugyanis

$$\Gamma_0 = \left\| \begin{matrix} 8,64 & -3,4 \\ 4,913 & 9,404 \end{matrix} \right\|^{-1}.$$

Ennek a mátrixnak a normája, mint az a mátrixok elméletéből ismeretes, az abszolút értékben legnagyobb sajátérték négyzetgyöke. Ezt a következő másodfokú egyenletből kell kiszámítani:

$$\Lambda^2 - \frac{8,64^2 + 3,4^2 + 4,913^2 + 39,404^2}{D^2}\Lambda + \frac{1}{D^2} = 0 .$$

Ebből

$$\Lambda_{\max} = 0,0121 ,$$

tehát

$$B = \|\Gamma_0\| = \sqrt{0,0121} \approx 0,11$$

$$\eta_0 = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} .$$

Az

$$f_1(1,2\,;\ 1,7) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)_0 \Delta y = 0$$

$$f_2(1,2\,;\ 1,7) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x^{(1)}}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)_0 \Delta y = 0$$

egyenletrendszer numerikus adatokkal így hangzik:

$$8,64\,\Delta x - 3,4\,\Delta y - 0,434 = 0$$

$$4,913\,\Delta x + 9,404\,\Delta y + 0,1956 = 0 .$$

Ennek megoldása

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0 = 0,0349\,;\ \Delta y_1 = y_1 - y_0 = -0,0390 ,$$

tehát

$$\eta_0 = \sqrt{0,0349^2 + 0,039^2} \approx 0,0524$$

ugyanúgy, mint az előbb

$$K \leqq (15,6 + 2^2 + 2 \cdot 9,72^2 + 14,04^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{631,72} \approx 25,14 .$$

Így

$$h_0 = 0,11 \cdot 25,14 \cdot 0,0524 = 0,15 < \frac{1}{2} ,$$

vagyis a második tétel alkalmazható.

c) Nemlineáris integrálegyenletek

Alkalmazzuk KANTOROVICS módszerét az

$$(1) \qquad x(s) = \int_0^1 K[s, t, x(t)]\, dt$$

alakú integrálegyenletekre. X és Y terek gyanánt tekintsük a $[0,1]$-ben definiált folytonos függvények terét, C függvényteret (definícióját l. [9] alatti cikkben), ennek operátora a

$$(2) \qquad P(x) = x(s) - \int_0^1 K[s, t, x(t)]\, dt,$$

általában nemlineáris függvényoperátor. Az (1) egyenlet a

$$P(x) = 0$$

alakba is írható. Alkossuk meg P differenciálhányadosát:

$$P(x + \Delta x) - P(x) = x(s) + \Delta x(s) - \int_0^1 K[s, t, x(t) + \Delta x(t)]\, dt -$$

$$- x(s) + \int_0^1 K(s, t, x(t))\, dt = \Delta x(s) - \int_0^1 \frac{\partial K[s, t, x(t)]}{\partial x} \cdot \Delta x(t)\, dt -$$

$$- \int_0^1 \Delta x(t) \cdot \varepsilon(s, t\, \Delta x(t))\, dt,$$

ahol $\varepsilon(\|\Delta x\|) \to 0$, ha $\|\Delta x\| \to 0$. Ebből következik, hogy $P'(x)$ lineáris operátor az E azonosságoperátor és a $\frac{\partial K[s, t, x(t)]}{\partial x}$ magu integráloperátor különbsége. Az eddigiekhez hasonló gondolatmenettel lehet belátni, hogy $P''(x)$ az a bilineáris integrál-operátor, melyet a Δx és Δy függvényekre aklalmazva a következő függvényt nyerjük:

$$P''(x)\, \Delta x\, \Delta y = \int_0^1 \frac{\partial^2 K[s, t, x(t)]}{\partial x^2}\, \Delta x(t) \cdot \Delta y(t)\, dt$$

KANTOROVICS módszere abban áll, hogy egy alkalmas $x_0(t)$ függvényből kiindulva egymásután meghatározzuk az $x_1(t)$, $x_2(t)$, . . . :

függvényeket, éspedig ha x_n már ismert, akkor x_{n+1} kiszámítására ez a lineáris integrálegyenlet szolgál:

$$x_n(s) - \int_0^1 K[s, t, x_n(t)]\, dt + (x_{n+1} - x_n) -$$

$$- \int_0^1 \frac{\partial K[s, t, x_n(t)]}{\partial x} [x_{n+1}(t) - x_n(t)]\, dt = 0.$$

Ez tehát azt jelenti, hogy minden lépésnél egy lineáris, másodrendű FREDHOLM-típusú integrálegyenletet kell megoldani.

Az első lépésben megoldandó integrálegyenlet magja a

$$\frac{\partial K(s, t, x_0(t))}{\partial x} = G(s, t)$$

kétváltozós függvény. Tegyük fel, hogy x_0 olyan függvény, hogy $G(s, t)$-nek 1 nem sajátértéke, akkor G-nek van FREDHOLM-féle resolvense, melyet $R(s, t)$-vel jelöljünk. A G mag szerepel abban az integrálegyenletben is, mely $P'(x_0)$-t fejezi ki:

$$P'(x_0)\, x = y = x(s) - \int_0^1 G(s, t)\, x(t)\, dt.$$

Az előbbi feltevés mellett ebből x kiszámítható, éspedig

$$x(s) = y(s) + \int_0^1 R(s, t)\, y(t)\, dt.$$

Ennek a kifejezésnek a segítségével könnyen megbecsülhető $P'(x_0)^{-1} = \Gamma_0$ normája, ugyanis a

$$\max_{0 \leqq s \leqq 1} |x(s)| = \|x\| \leqq \max_{0 \leqq s \leqq 1} |y(s)| + \max_{0 \leqq s \leqq 1} \left| \int_0^1 |R(s, t)|\, |y(t)|\, dt \leqq\right.$$

$$\leqq \|y\| + \max_{0 \leqq t \leqq 1} |y(t)| \cdot \max_{0 \leqq s \leqq 1} \int_0^1 |R(s, t)|\, dt =$$

$$= (1 + \max_{0 \leqq s \leqq 1} \int_0^1 |R(s, t)|\, dt)\, \|y\|$$

egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\|\Gamma_0\| \leqq 1 + \max_{0 \leqq s \leqq} \int_0^1 |R(s,t)|\, dt.$$

Ha

$$\int_0^1 |R(s,t)|\, dt \leqq A \qquad (0 \leqq s \leqq 1),$$

akkor érvényes a

$$\|\Gamma_0\| \leqq 1 + A = B_0$$

egyenlőtlenség.

A (1) típusú integrálegyenletek megoldására az I. tétel a következő állítást szolgáltatja (annak az első hozzáfűzött megjegyzés szerinti változata):

Ha az (1) *alatti integrálegyenlethez található olyan* $x_0(s)$ [0,1]-*ben folytonos függvény, hogy a következő négy feltétel teljesüljön:*

1°. $$A \frac{\partial K[s, t\, x_0(t)]}{\partial x} = G(s,t)$$

mag $R(s,t)$ *resolvense létezik és*

$$\int_0^1 |R(s,t)|\, dt \leqq A \qquad (0 \leqq s \leqq 1)$$

2°. $$\left| x_0(s) - \int_0^1 K(s, t, x_0(t)\, dt \right| \leqq \eta_0'$$

3°. *Az alábbi* (3) *alatti tartományban*

$$\left| \frac{\partial^2 K(s,t,u)}{\partial x^2} \right| \leqq K \qquad 0 \leqq s, t \leqq 1$$

4°. $$h_0 = (A+1)\, \eta_0'\, K \leqq \frac{1}{2},$$

akkor az (1) *alatti integrálegyenletre alkalmazott* KANTOROVICS-*féle eljárás konvergens és az* (1) *egyenlet megoldását szolgáltatja, mely az*

(3) $$\|x - x_0\| \leqq N(h_0)\,(A+1)\,\eta_0'$$

tartományba esik.

Az algebrai egyenletrendszerekkel teljesen analóg módon lehet bebizonyítani egy másik, ugyancsak az (1) egyenletre vonatkozó tételt, ha X és Y terek gyanánt nem a C, hanem a négyzetükkel együtt integrálható függvények terét, az L^2 függvényteret tekintjük (definícióját l. [9] alatti cikkben). Az alábbi tétel részletes bizonyításával nem foglalkozunk, ez az eddigiek alapján könnyen elvégezhető, alkalmazva az I. tételt. Itt csupán a lineáris integráloperátorokra kell néhány megjegyzést tennünk, melyek nélkülözhetetlenek a szóbanforgó tétel helyes megértéséhez.

Legyen $G(s, t)$ szimmetrikus mag, melynek sajátértékei (egyszeresen számolva) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots$ A λ_i sajátértékhez tartozó normált sajátfüggvény legyen $\varphi_i(t)$. Feltételezzük, hogy a $\{\varphi_i(t)\}$ ortonormált rendszer teljes (ha nem volna az, egészítsük ki teljes rendszerré és a kiegészítő függvényekhez a $\lambda = \infty$ sajátértéket rendeljük hozzá). Tekintsük a következő lineáris operátort

$$y = U(x) = x(s) - \int_0^1 G(s, t)\, x(t)\, dt. \qquad (4)$$

Akkor mint ismeretes,

$$G(s, t) \sim \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)\, \varphi_i(t)}{\lambda_i}$$

és

$$x(s) \sim \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i\, \varphi_i(s)\,; \quad y(s) \sim \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i\, \varphi_i(s),$$

ahol

$$\xi_i = \int_0^1 x(s)\, \varphi_i(s)\, ds\,; \; \eta_i = \int_0^1 y(s)\, \varphi_i(s)\, ds.$$

A (4) egyenletet szorozzuk meg $\varphi_i(s)$-sel és integráljunk s szerint (0 és 1 határok között):

$$\eta_i = \xi_i - \int_0^1 \int_0^1 \varphi_i(s)\, G(s, t)\, x(t)\, dt = \xi_i - \int_0^1 \left[\int_0^1 \varphi_i(s)\, K(s, t)\, ds \right] x(t)\, dt =$$

$$= \xi_i - \frac{1}{\lambda_i} \int_0^1 \varphi_i(t)\, x(t)\, dt = \xi_i \left(1 - \frac{1}{\lambda_i} \right).$$

Így tehát az (4) alatti operátor normájának négyzete a következő:

$$\| U \|^2 = \| y \|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\lambda_i} \right)^2 \xi_i^2 \leq L^2 \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 = L^2 \| \xi_i \|,$$

ahol

$$L = \limsup_{i \to \infty} \left| 1 - \frac{1}{\lambda_i} \right|.$$

Tehát

$$\| U \| \leqq L .$$

Ha $| G(s,t) | \leqq A$ $(0 \leqq s, t \leqq 1)$, akkor nyilván $| \lambda_i | \geqq \frac{1}{A}$ és így

$$\| U \| \leqq 1 + A .$$

A már többször idézett BANACH-féle tételből [10] következik, hogy ha $\| U \| < 1$, akkor (4)-nek van inverze. Ez biztosan bekövetkezik, ha $L < 1$. Könnyű az inverz operátor normájának egyik felső korlátját megállapítani.

Az $y = U(x)$-ből ugyanis szimbólikusan $x = U^{-1}(y)$ következik és ezért

$$\| U(y)^{-1} \| = \| x \|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\lambda_i}\right)^2} \eta_i^2 \leqq L_1^2 \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i^2 = L_1^2 \| y \| ,$$

ennélfogva

$$\| U^{-1} \| \leqq L_1 = \limsup_{i \to \infty} \frac{1}{\left| 1 - \frac{1}{\lambda_i} \right|} .$$

Ha történetesen $G(s,t)$ nem szimmetrikus, akkor szorozzuk meg (4)-et $G(s,u)\, x(u)$-val és integráljunk s és u szerint. Ezáltal a következő egyenletet kapjuk:

$$\int_0^1 \int_0^1 G(s,u)\, x(u)\, du\, ds = \int_0^1 \int_0^1 G(s,u)\, x(s)\, x(u)\, ds\, du -$$

$$- \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 G(s,u)\, G(s,t)\, x(u)\, x(t)\, ds\, dt\, du .$$

Vegyük figyelembe, hogy (4) egyenlet szerint

$$\int_0^1 G(s,u)\, x(u)\, du = x(s) - y(s)$$

így

$$\int_0^1 x(s)\, y(s)\, ds - \int_0^1 y(s)^2\, ds = \int_0^1 \int_0^1 G(s,u)\, x(s)\, x(u)\, ds\, du -$$

$$- \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 G(s,u)\, G(s,t)\, x(u)\, x(t)\, du\, dt\, ds .$$

Ismét használjuk fel a (4) egyenletből, hogy

$$y(s) = x(s) - \int_0^1 G(s, u)\, x(u)\, du\,.$$

Ezáltal az

$$(5) \qquad \int_0^1 x(s)^2\, ds - \int_0^1\int_0^1 G(s, u)\, x(u)\, x(s)\, du\, ds - \int_0^1 y(s)^2\, ds =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 G(s, u)\, x(s)\, x(u)\, ds\, du - \int_0^1\int_0^1\int_0^1 G(s, u)\, G(s, t)\, x(u)\, x(t)\, ds\, dt\, du$$

egyenlethez jutunk. Ezt a következőképpen is írhatjuk:

$$\int_0^1 y(s)^2 = \int_0^1 x(s)^2 - \int_0^1\int_0^1 \Big[G(u, t) + G(t, u) -$$

$$- \int_0^1 G(s, t)\, G(s, u)\, ds\Big]\, x(u)\, x(t)\, dt\, du$$

Ha a

$$\gamma(u, t) = G(u, t) + G(t, u) - \int_0^1 G(s, t)\, G(s, u)\, ds$$

szimmetrikus mag az előbbi módon teljessé kiegészített ortonormált sajátfüggvényrendszere $\{ \varphi_i(s) \}$, a hozzátartozó (kiegészített) sajátértékrendszer Λ_i, akkor (5) alapján

$$\| y \|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \Xi^2 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Xi^2}{\Lambda_i^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\Lambda_i}\right) \Xi^2 \leq N^2 \sum_{i=1}^{\infty} \Xi^2 = N^2 \| x \|^2.$$

Érvényes, tehát

$$\| U \| \leqq N = \limsup_{i \to \infty} \sqrt{\left| 1 - \frac{1}{\Lambda_i} \right|}$$

Ha $N < 1$, akkor U^{-1} létezik és az előbbi okoskodáshoz teljesen hasonló módon

$$\| U^{-1} \| \leqq \limsup_{i \to \infty} \frac{1}{\sqrt{\left| 1 - \frac{1}{\Lambda_i} \right|}}.$$

Ezek után térjünk vissza az (1) alatti nemlineáris integrálegyenlet megoldásáról szóló, már jelzett tétel kimondásához, mely így hangzik:

Ha az (1) *egyenlethez lehet találni olyan* $x_0 \in L^2$ *függvényt, hogy az alábbi feltételek teljesüljenek:*

1° *A* $K[s, t, x_0(t)]$ *magnak* 1 *nem sajátértéke,*

2° $$\int_0^1 \left[x_0(s) - \int_0^1 K(s, t, x_0(t)\, dt\right]^2 ds \leqq \eta^2$$

3° $$\frac{|\lambda_n|}{|1-\lambda_n|} \leqq B \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

ahol λ_n *jelenti a*

$$\frac{\partial K[s, t, x_0(t)]}{\partial x} = G(s, t)$$

mag n-edik sajátértékét, ha pedig *G szimmetrikus; ha pedig G nem szimmetrikus, akkor teljesüljön a*

$$\frac{|\Lambda_n|}{|1-\Lambda_n|} \leqq B^2$$

feltétel, ahol $\Lambda_n (n = 1, 2, \ldots)$ *jelenti a*

$$\gamma(s, t) = G(s, t) + G(t, s) - \int_0^L G(u, s)\, G(u, t)\, du$$

szimmetrikus mag sajátértékeit,

4° $$\left|\frac{\partial^2 K(s, t, u)}{\partial u^2}\right| \leqq K \qquad (0 \leqq s, t \leqq 1)$$

minden véges u mellett

5° $$B^2 K \eta \leqq \frac{1}{2}$$

akkor a KANTOROVICS*-féle processzus konvergens és ez* (1) *egyik megoldását adja.*

d) Sajátértékfeladatok

A tekintetbe vett sajátértékfeladatok a következőkben állanak: Legyen A a HILBERT-tér egyik teljesen folytonos, izolált sajátértékekkel bíró lineáris operátora [9], akkor meghatározandó e tér azon x eleme, melyre a

(1) $$\lambda x - Ax = 0$$

egyenlet teljesül. Hogy feladatunk egyértelmű legyen, normáljuk x-et úgy, hogy

$$(x, x) = 1 \tag{2}$$

legyen.* Tehát feladatunk így fogalmazható meg: meghatározandó az az x elem, és λ szám, hogy az (1) és (2) feltételek teljesüljenek. Sokan ezt a feladatot lineárisnak tekintik, holott ez nem az, hiszen egyszerre kell a λ sajátértéket és az x sajátfüggvényt meghatározni.

X és Y tér gyanánt tekintsük az $\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}$ párok terét. Ez lineáris tér. Egy számmal való szorzás és összeadás műveletét a következőképpen definiáljuk

$$c \cdot \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\,x \\ c\,\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Normált a tér, a norma definícióját a

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(x, x) + \lambda^2}$$

egyenlet szolgáltatja. Könnyű belátni, hogy ez a tér teljes.

Ha e tér $P\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}$ operátorának azt az operátort tekintjük, mely az $\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}$ elemet az $\begin{pmatrix} Ax - \lambda x \\ \frac{1}{2}[(x, x) - 1] \end{pmatrix}$ elembe viszi át,** akkor eredeti feladatunk megfogalmazható úgy,

hogy meg kell határozni azt az $\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}$ elemet, melyre a

$$P\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = 0 \tag{3}$$

egyenlet teljesül.

* (x, y) jelenti két elem skaláris szorzatát.

** A (2) feltételt célszerűbb $\frac{1}{2}[(x, x) - 1] = 0$ alakba írni, így élesebb feltételeket kapunk.

A következőkben az eredetinél valamivel egyszerűbb, de kevésbbé éles eredményre vezető számítást közlünk.

Erre az egyenletre is alkalmazható L. V. Kantorovics módszere, ha a P differenciálhányadosát sikerült megállapitani. E célból képezzük a következő kifejezést:

$$P\begin{pmatrix} x+\Delta x \\ \lambda+\Delta\lambda \end{pmatrix} - P\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} Ax + A\,\Delta x - \lambda x - \lambda\,\Delta x - \Delta\lambda x - \Delta\lambda\,\Delta x \\ \frac{1}{2}\,[(x,x) + 2(x,\Delta x) + (\Delta x,\Delta x) - 1] \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Ax - \lambda x \\ \frac{1}{2}\,[(x,x) - 1] \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (A-\lambda E)\,\Delta x - \Delta\lambda x \\ (x,\Delta x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\Delta\lambda \cdot \Delta x \\ \frac{1}{2}[\Delta x, \Delta x] \end{pmatrix}.$$

Ebből látható, hogy $P'\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}$ lineáris operátor, melyet $\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta\lambda \end{pmatrix}$ elemre alkalmazva, a

$$P'\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A-\lambda E)\,\Delta x - \Delta\lambda x \\ (x,\Delta x) \end{pmatrix}$$

kifejezést kapjuk. Hogy ez $\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta x \end{pmatrix}$-re nézve valóban lineáris operátor, ezt nagyon könnyű igazolni.

Teljesen hasonló eljárással számítható ki, hogy

$$P''\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta y \\ \Delta\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta\mu \cdot \Delta x - \Delta y \cdot \Delta\lambda \\ (\Delta x, \Delta y) \end{pmatrix}.$$

Kiindulunk a szóbanforgó probléma egy alkalmas közelítő (x_0, λ_0) megoldásából és a Δx és $\Delta\lambda$ korrekciókat a következő lineáris egyenletből számítjuk ki:

$$P\begin{pmatrix} x_0 \\ \lambda_0 \end{pmatrix} + P'\begin{pmatrix} x_0 \\ \lambda_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

amiből

$$P'\begin{pmatrix} x_0 \\ \lambda_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta\lambda \end{pmatrix} = -P\begin{pmatrix} x_0 \\ \lambda_0 \end{pmatrix}$$

következik. Ezt az egyenletet másképpen írva, az

$$\begin{pmatrix} (A-\lambda_0 E)\,\Delta x - \lambda_0\,\Delta\lambda \\ (x_0, \Delta x) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} (A-\lambda_0 E)\,x_0 \\ \frac{1}{2}\,[(x_0, x_0) - 1] \end{pmatrix}$$

egyenlethez jutunk, ami azt jelenti, hogy a Δx függvény és a $\Delta\lambda$ szám az alábbi egyenletrendszerből számítható ki:

$$\left.\begin{aligned}(A-\lambda_0 E)\,\Delta x - x_0\,\Delta\lambda &= -(A-\lambda_0 E)\,x_0\\ 2(x_0, \Delta x) &= -[(x_0, x_0)-1]\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Ebből Δx és $\Delta\lambda$ meghatározása után kapjuk az

$$x_1 = x_0 + \Delta x \qquad \lambda_1 = \lambda_0 + \Delta\lambda$$

elempárt. Ezzel megismételjük az eljárást és így jutunk az x_2., λ_2 rendszerre, s. i. t.

A konvergencia kérdésének eldöntésére alkalmas KANTOROVICS tétele. A P' inverz operátort úgy kapjuk, hogy a (4) alatti egyenletrendszert Δx-re és $\Delta\lambda$-ra megoldjuk. E megoldás normájából lehet $\|\Gamma_0\|$-t kiszámítani.

$\left\|P''\begin{pmatrix}x_1\\ \lambda_1\end{pmatrix}\right\|$ megbecsülése a következőképpen történhet: Az előbbiek szerint a BUNJAKOVSZKIJ—SCHWARTZ-féle egyenlőtlenség alkalmazásával egészen könnyű számítással a

$$\left\|P''\begin{pmatrix}x\\ \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta y\\ \Delta\mu\end{pmatrix}\right\|^2 = \left\|\begin{pmatrix}-\Delta\mu\,\Delta x - \Delta y\,\Delta\lambda\\ \Delta x, \Delta y\end{pmatrix}\right\|^2 =$$

$$= (\Delta x, \Delta y)^2 + (\Delta x\,\Delta\mu + \Delta y\,\Delta\lambda, \Delta\mu\,\Delta x + \Delta y\,\Delta\lambda) \leqq$$

$$\leqq (\Delta x, \Delta x)(\Delta y, \Delta y) + (\Delta\mu)^2(\Delta x\,\Delta x) + (\Delta\lambda)^2(\Delta y\,\Delta y) +$$

$$+ 2\,|\Delta\lambda|\cdot|\Delta\mu|\,\sqrt{(\Delta x, \Delta x)(\Delta y, \Delta y)} \leqq 2\left\|\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta x\end{pmatrix}\right\|^2 \left\|\begin{pmatrix}\Delta y\\ \Delta\mu\end{pmatrix}\right\|^2$$

eredményt nyerjük.

Így tehát

$$\left\|P''\begin{pmatrix}x\\ \lambda\end{pmatrix}\right\| \leqq \sqrt{2}\,.$$

A II. tétel alapján állíthatjuk tehát, hogy ha

$$\|\Gamma_0\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta\lambda\end{pmatrix}\right\| < \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

akkor az előbbi algoritmus konvergens és a probléma egy sajátfüggvényét és sajátértékét szolgáltatja.

Befejezésül megemlítjük, hogy KANTOROVICS módszere jól alkalmazható differenciálegyenletekre és differenciálegyenletrendszerekre, integrodifferenciálegyenletekre, nemlineáris differenciálegyenletekre is. Ezekkel most nem foglalkozunk, ez túl messzire vezetne.

A kimondott tételektől eltérő alakú és tartalmú tételek is felállíthatók, melyek azonban ugyancsak a differenciálhányadosnak absztrakt terekben való értelmezésén alapszanak. Ezek is jól felhasználhatók gyakorlati számítások céljaira (l. pl. Miszkovszkij dolgozatát [5]).

L. V. Kantorovics módszere nagymértékben általánosítható [4], amennyiben a Newton-féle iterációs eljárás az eddig említett terektől eltérő szerkezetű terekbe is átvihető

A tér normálása félig rendezett terek elemeinek segítségével lehetővé teszi, hogy az előbbiekben kimondott alaptételt rövidebben és tömörebben lehessen megfogalmazni és ez az új megfogalmazás a tételnek nagymértékű élesítéséhez is vezetett.

Felhasznált irodalom:

[1] L. V. Kantorovics: Dokladi Akademii Nauk SzSzSzR. 59. 1948.
[2] L. V. Kantorovics: Uszpedi Mat. Nauk. 89. 1948.
[3] L. V. Kantorovics: Trudi Mat. Inst. imeni V. A. Sztyeklova XXVIII. 104.
[4] L. V. Kantorovics: Dokladi Akademii Nauk SzSzSzR. 76. 1951.
[5] Miszovszkih: Trudi Mat. Inst. im. V. A. Sztyeklova XXVIII. 145.
[6] Akilov: Dokladi Akademii Nauk SzSzSzR. 68. 1949.
[7] Zagadszkij: Dokladi Akademii Nauk SzSzSzR. 59. 1948.
[8] Rényi Alfréd: Matematikai Lapok I. 1950.
[9] Sz. Nagy Béla: Matematikai Lapok II. 1951.
[10] St. Banach: Théorie des opérations linéaires.
[11] M. Fréchet: Ann. Éc. Norm. Sup. 1925.
[12] M. K. Gavurin: Dokladi Akademii Nauk SzSzSzR. 22. 1939.
[13] M. Kerner: Studia Math. 3.
[14] L. A. Ljuszternik: Uszpehi Mat. Nauk. 1.
[15] Osztrovszki: Comment. Math. Helv. 9. 1937.

МЕТОД Л. В. КАНТОРОВИЧА РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОБСТРАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Иштван Фэнё.

Статья знакомит с методом Л. В. Канторовича решения уравнений определённых в пространствах Банаха. Сущность метода заключается в том; что переносит известный итерационный метод Ньютона в пространства Банаха. Метод иллюстрируется на примерах часто встречающихся в прикладной математике.

Работа содержит изложение метода Л. В. Канторовича для решений уравнений в пространствах Банаха. Сущьность метода состоит в применении общеизвестного метода Ньютона в пространстве Банаха.

MÉTHODE DE L. V. KANTOROVICH POUR LA SOLUTION DES ÉQUATIONS NONLINEAIRES CONSIDÉRÉES DANS DES ESPACES ABSTRAITS

L'article s'occupe de la methode de L. V. KANTOROVICH pour la solution des equations dans les espaces de Banach. Cette methode généralise la méthode d'iteration de NEWTON. On illustre cette méthode par plusieurs exemples des matematiques appliquées.

E. FENYŐ

Néhány planimetriai összefüggés sztereometriai úton való levezetése

Írta: KÁRTESZI FERENC

A jelen dolgozat jól ismert geometriai összefüggéseket tárgyal. Az a célja, hogy bemutasson egy, a tanításban bevált módszert. Az ábrázoló geometria I. éves (egyetemi) tananyagából az illeszkedési, összekötési és metszési tételek alapos kidolgozása az egyik súlyponti kérdés. Sokak szerint nehéz ezt a fejezetet vonzóvá tenni. Pedig éppen ez a tananyagrész alkalmas arra, hogy megmutassuk a hallgatóságnak, hogy csekély előismeretre építve is mennyire érdekes összefüggéseket tudunk egyszerűen levezetni.

Bizonyos planimetriai összefüggések tárgyalása egyszerűbb és bevezetése koraibb tanítási periódusban válik lehetségessé, ha sztereometriai meggondolások alkalmazását is megengedjük.* A planimetria önálló megalapozása, a tisztán planimetriai eszközökkel való felépítése csak későbbi tanítási periódusban válik érdekessé. (Az ilyen felépítésben esetleg bonyolultabb tételt axiómának kell elfogadtatni és egyszerű tételek bizonyítása hosszabb előkészítést követel, s így a tanítás során később kerül sorra. Ez a kezdő számára természetellenesnek látszik, az érdeklődését csökkenti.) Talán kevesen tudják, hogy LOBACSEVSZKIJ, a nagy geométer, a nevelés és a tanítás kérdéseiben is úttörő szellem volt. Így például a kezdők számára tartott bevezető, elemi geometriai előadásaiban a planimetriát és sztereometriát nem választotta szét, sőt tudatosan, de igen természetes módon és józan viszonyban együtt tartotta. Módszerét kortársai helytelennek és tudománytalannak nyilvánították. — Ma már másként látjuk ezt a módszertani kérdést. A *tanítás első periódusában*

* *Bolyai János* az „*Appendix*“-ben remek példát mutat arra, miképen lehet planimetriai tételt viszonylag rövid úton, sztereometriai meggondolások révén levezetni. Ilyen például az „*Appendix*“-ben az $\bigcirc a : \bigcirc b = \sin \alpha : \sin \beta$ levezetése (abszolút sinus-tétel).

LOBACSEVSZKIJ módszere a helyes, a tanuló érdeklődését is jobban megragadja.

Az ábrázoló geometria tanítása során is minduntalan felismerésre kínálkoznak olyan planimetriai összefüggések, amelyek tisztán planimetriai úton nehezebben közelíthetők meg. Érdemes ezeket észrevétetni, tudatosítani, sőt még ha külön idő rááldozását jelenti is, módjával, érdemes néhány ilyen összefüggés részletesebb tárgyalását beiktatni. Ott célszerű az ilyen tanítási epizód, ahol a tulajdonképpeni tananyag önmagában kevésbbé érdekes.

Ábrázoló geometriai előadásaim egyik ilyen epizódja az illeszkedési, összekötési és metszési feladatok tárgyalása során szokott szerepelni, midőn már az ideális térelemek bevezetése után a párhuzamossági feladatokat a metszési és összekötési feladatokkal hozzuk egy kalap alá. Tehát a projektív geometriai szemlélet kialakítása során. Erről szól a jelen dolgozat.

1. § A kocka projektív alkata

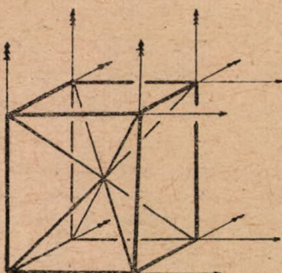
A szabályos hexaéder (kocka) a négyzetnek megfelelő térbeli metrikus alakzat. Ha a négyzet metrikus tulajdonságaitól eltekintünk, a közönséges és ideális térelemek között pedig nem teszünk különbséget, akkor a négyzetet projektív értelemben tekintjük. Projektív értelemben a tetszőleges, de kollineáris hármast nem tartalmazó négy pont, ill. egy négyzet négy csúcspontja aequivalens pontalakzatok. A megfelelő térbeli kérdés nem ilyen egyszerű. A térben nyolc tetszőleges pont, ill. egy kocka nyolc csúcspontja, nem aequivalens pontalakzatok. Hiszen a kocka csúcspontjainak kölcsönös helyzetét metrikus kiroválsokon felül bizonyos illeszkedési kirovások is megkötik. (A lapjai négyszögek, szögletei triéderek stb.) Kíséreljük meg a kocka nyolc csúcspontjának projektív értelemben megfelelő pontnyolcast jellemezni.

A kockát hat négyzetlap határolja, szögletei triéderek. Ezt akár a kocka definíciójának tekinthetjük. Vegyük azt a poliédert, amelyet hat négyszög határol, s szögletei triéderek. Olyan-e az így definiált poliéder csúcspontjainak az illeszkedési rendje, mint a kocka csúcspontjaié?

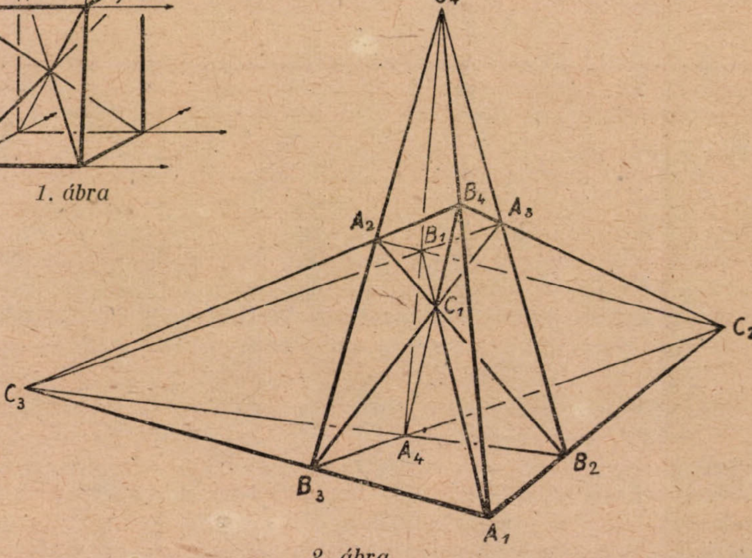
Ellenpéldán mutatjuk meg, hogy általában nem olyan. Az A_1, A_2, A_3, A_4 pontok legyenek egy szabályos tetraéder csúcspontjai. A tetraéder A_kA_l élének A_k, ill. A_l-hez közelebbi harmadoló pontját jelöljük A_{kl}-, ill. A_{lk}-val. Az $A_{13}A_{14}A_{23}A_{24}$, ill. $A_{31}A_{32}A_{41}A_{42}$ téglalap síkja egy-egy ékalakú részt vág le a tetraéderből. A maradék olyan poliéder, amelyet két téglalap és négy trapéz határol, s szögletei triéderek. Ez a poliéder emlékeztet a kockára, azonban más illeszkedési rendet valósít meg. Ugyanis a kocka szemközti csúcsait összekötő átlós egyenesek egy pontban találkoznak, viszont a szóbanforgó maradék poliéder átlósegyenesei egy torznégyszög oldalegyeneseit alkotják.

Ha a poliédernek 6 lapja, 8 csúcsa, 12 éle van és lapjai négyszögek, szögletei pedig triéderek, továbbá az átlósegyenesei egy pontban metszik egymást, akkor a csúcspontjai olyan illeszkedési rendet valósítanak meg, mint a kocka csúcspontjai. (Ilyen poliéder például a parallel-epipedon.)

A 2. ábra olyan poliédert szemléltet, amelynek felépítése a következő illeszkedési kirovások szerint történt. (Az A_1, A_2, A_3, A_4 csúcspontokkal szemben rendre a B_1, B_2, B_3, B_4 csúcspontok vannak.) *A poliéder 6 lapú, 8 csúcspotja van, lapjai négyszögek, szögletei triéderek, a szemközti csúcsait összekötő egyenesek (átlósegyenesek) egy pontban, a C_1-ben találkoznak.*



1. ábra



2. ábra

A poliéder felépítésére tett kirovásoknak az a következménye, hogy a szemközti lapjai centrálisan perspektívek egy-egy — a C_1-től különböző — C_k pontra nézve is. A perspektívitásban megfelelő csúcspontokat a poliéder ama négy éle köti össze, amelyek nem élei a szóbanforgó, szemközti négyszögeknek. A C_1, C_2, C_3, C_4 centrumok nem esnek egy síkba és nincs közöttük három, egy egyenessel összeköthető pont.

Az 1. ábrán a parallelepipedon esetében, a C_1 pont szerepét a középpont, a C_2, C_3, C_4 szerepét a nyilakkal jelölt irányok (ideális pontok) töltik be. Elegendő az egyik szemközti négyszögpárra megmutatni, hogy valóban perspektívek. Például a C_4 centrumra nézve az $A_1B_2A_4B_3$ és $B_4A_3B_1A_2$. A poliéder egyik lapsíkján vannak az A_1B_4, B_2A_3 egyenesek, tehát van közös pontjuk. Az A_4B_1 egyenes pedig nincs a szóbanforgó lapsíkon, tehát egy közös pontja van ezzel a síkkal. Az A_1B_4, A_4B_1 egyenesek két átlós egyenes által kifeszített síkban vannak, tehát van közös pontjuk. A B_2A_3 és A_4B_1 egyeneseknek szintén van közös pontjuk, mert a poliéder lapsíkjában vannak. Mindezekből az következik, hogy az A_4B_1 egyenesnek az A_1B_4, B_2A_3 egyenesek közös pontjában kell metszenie a két utóbbi egyenes kifeszítette lapsíkot. Ugyanúgy látható be, hogy ezen a metszésponton a B_3A_2 egyenesnek is át kell mennie.

A következőkben a kockával megegyező projektív alkatú poliédert *hexaéder*nek nevezzük, vagyis hexaéderen a szóbanforgó kirovásoknak eleget tevő, hatlapú poliédert értjük. Ez a poliéder a teljes négyszög térbeli megfelelőjének tekinthető. A poliéder csúcspontjainak a C_1, C_2, C_3, C_4 *átlóspontok* lineáris következményei. A hexaédernek még egy érdekes tulajdonságát érdemes megemlíteni. Amint az ábrán is látható, csúcspontjai és átlóspontjai három olyan pontnégyesbe foglalhatók, amelyek érdekes kölcsönös helyzetben vannak. Nevezzük el e pontnégyesek által kifeszített tetraédereket **A, B, C** tetraédernek. (Jobban szemlélteti ennek a három tetraédernek a helyzetviszonyát a 3. ábra, bár a parallelepipedon esetében a C_2, C_3, C_4 pontok ideális elemek.)

Ezeknek a tetraédereknek bármely ketteje négyféleképen perspektív: a perspektivitások centrumai pedig a harmadik tetraédernek csúcspontjai. Ezt még úgy is fogalmazhatjuk, hogy a három tetraéder bármelyikének bármelyik csúcspontjából a másik két tetraéder egymásba vetithető. Tehát az **A, B, C** tetraéder triász tizenkét perspektivitást indukál.

Jelölje például a

$$C_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

azt a perspektívitást, amelyik szerint, A_1, B_1; A_2, B_2; A_3, B_3; A_4 B_4 az egymáshoz rendelt pontpárok és a perspektivitás centruma a C_1. E jelölés szerint most táblázatba foglaljuk a szóbanforgó 12 perspektivitást:

$$A_1 \equiv \begin{pmatrix} B_1B_2B_3B_4 \\ C_1C_2C_3C_4 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} C_1C_2C_3C_4 \\ A_1A_2A_3A_4 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} A_1A_2A_3A_4 \\ B_1B_2B_3B_4 \end{pmatrix},$$

$$A_2 \equiv \begin{pmatrix} B_1B_2B_3B_4 \\ C_2C_1C_4C_3 \end{pmatrix}, \quad B_2 \equiv \begin{pmatrix} C_1C_2C_3C_4 \\ A_2A_1A_4A_3 \end{pmatrix}, \quad C_2 \equiv \begin{pmatrix} A_1A_2A_3A_4 \\ B_2B_1B_4B_3 \end{pmatrix},$$

$$A_3 \equiv \begin{pmatrix} B_1B_2B_3B_4 \\ C_3C_4C_1C_2 \end{pmatrix}, \quad B_3 \equiv \begin{pmatrix} C_1C_2C_3C_4 \\ A_3A_4A_1A_2 \end{pmatrix}, \quad C_3 \equiv \begin{pmatrix} A_1A_2A_3A_4 \\ B_3B_4B_1B_2 \end{pmatrix},$$

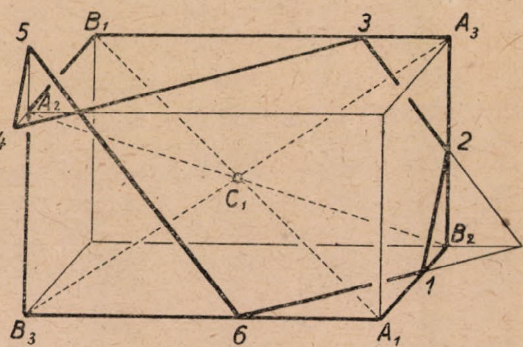
$$A_4 \equiv \begin{pmatrix} B_1B_2B_3B_4 \\ C_4C_3C_2C_1 \end{pmatrix}, \quad B_4 \equiv \begin{pmatrix} C_1C_2C_3C_4 \\ A_4A_3A_2A_1 \end{pmatrix}, \quad C_4 \equiv \begin{pmatrix} A_1A_2A_3A_4 \\ B_4B_3B_2B_1 \end{pmatrix}.$$

Bár a hexaéder csúcspontjai és átlóspontjai alkotta konfiguráció önmagában is érdekes pontalakzat, nem elemezzük tovább.

2. § A Dandelin-hatszög

Egy a hexaéder által származtatott torzhatszög tanulmányozását vesszük sorra. Egyelőre, a könnyebb elképzelés céljából, nem az általános hexaéderből indulunk ki.

Tekintsünk egy derékszögű parallelepidont s töröljük két szemközti csúcspontja a belőlük kiinduló 6 éllel együtt. A megmaradó élek egy különös torzhatszöget alkotnak az ábrán vastag vonallal ki is emeltünk egy ilyen torzhatszöget. A poliéderből való származtatás folytán tüstént belátható, hogy a hatszög a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

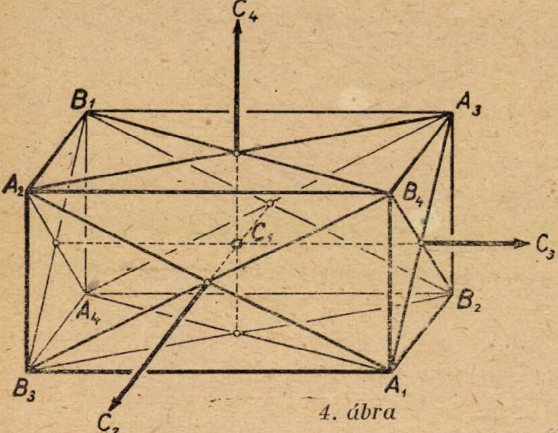


3. ábra

1. *A szemközti csúcspontjait összekötő egyenesek* a hatszög főátlói *egy pontban találkoznak*. Az ábrán az A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 egyenesekről van szó, találkozási pontjuk a C_1 középpont.

2. *A szemközti lapjai párhuzamosak.* Az ábrán az $A_1B_2A_3$ és $B_1A_2B_3$, $B_2A_3B_1$ és $A_2B_3A_1$, $A_3B_1A_2$ és $B_3A_1B_2$ síkpárok-

ról van szó és ezek a hexaédernek is a szemközti lapsíkjaiból alkotott párok.

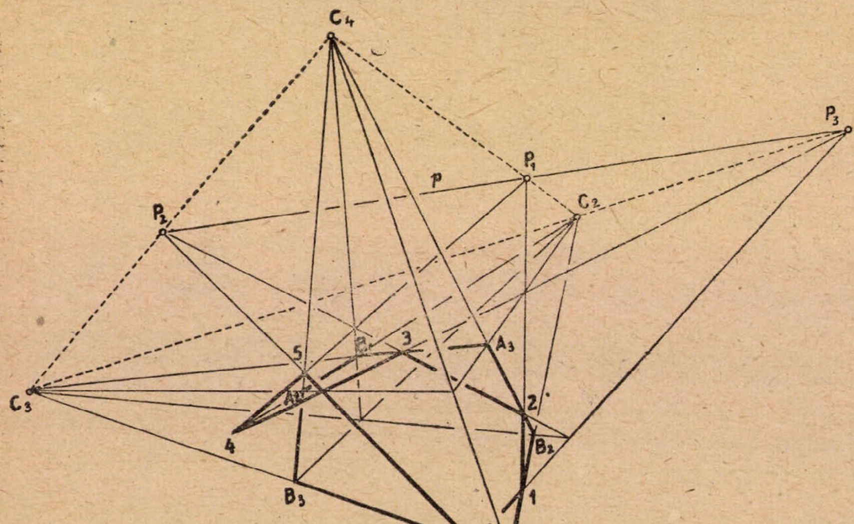


4. ábra

3. *A szemközti élek párhuzamosak.* Az ábrán az A_1B_2 és B_1A_2, B_2A_3 és A_2B_3, A_3B_1, és B_3A_1 egyenespárokról van szó.

Állapítsuk meg, hogy az általános torzhatszögre nézve miképpen módosulnak az *1.*, *2.*, *3.* tulajdonságok.

Az 5. ábrából tüstént kiolvasható, hogy a vastag vonallal kiemelt $A_1B_2A_3B_1A_2B_3$



5. ábra

torzhatszög főátlói az $A_1B_2A_4B_3B_1A_2\ B_4A_3$ csúcspontok meghatározta általános hexaéderben átlósegyenesek, tehát a hexaéder által indukált C_1 pontban találkoznak. Tehát az *1.* tulajdonság nemcsak parallelepipedonra nézve jellemző.

I. A hexaéderből származtatott torzhatszög főátlói egy pontban találkoznak.

A *2.* és a *3.* tulajdonság élek és lapok párhuzamos állásával függ össze, tehát a téridom és az ideális sík viszonyából folyó tulajdonságokról van szó. Az 5. ábrával szemléltetett hexaéder esetében az ideális sík szerepét a $C_2C_3C_4$ háromszög síkja veszi át. Nevezzük röviden γ_1 síknak. A *2.* és *3.* tulajdonságoknak megfeleltetett *II.* és *III.* tulajdonságokat az általános hexaéder, ill. a belőle származtatott torzhatszög és a γ_1 sík viszonyának segítségével kell kifejeznünk.

II. A hexaéderből származtatott torzhatszög szemközti lapjai egy síkon találkoznak. Másszóval a szemközti síkok alkotta lapsíkpárok rendre a C_3C_4, C_4C_2, C_2C_3 egyenesekben találkoznak

III. A szemközti élei pedig páronként egy sík pontjaiban metszik egymást. Másszóval a torzhatszög szemközti oldalai páronként rendre a C_2, C_3, C_4 pontokban találkoznak.

A szóbanforgó torzhatszöget DANDELIN-hatszögnek nevezzük. DANDELIN vette észre először, hogy ez a térbeli idom milyen lényeges szerepet tölt be a sztereometria bizonyos kérdéseinek egyszerű tárgyalása szempontjából. A DANDELIN-hatszöget úgy definiálhatjuk, hogy a *hexaéder két szemközti csúcspontját kihagyó élek alkotják.*

Az *I.*, *II.*, *III.* tulajdonságok bármelyike alkalmas arra, hogy a DANDELIN-hatszöget a hexaédertől függetlenül definiáljuk. Ugyanis, *ha egy torzhatszög, a felsorolt három tulajdonság bármelyikével rendelkezik, rendelkezik a mások kettővel is.*

Ez könnyen bebizonyítható, nem részletezzük. Elegendő azt bizonyítani, hogy ha bármelyik tulajdonságot feltételezzük, akkor a hatszög egy meghatározott pontpárt indukál, amelyet a hatszög szögpontjaihoz csatolva, egy hexaéder nyolc csúcspontját nyerjük. (A torzhatszög egyik körüljárása mentén A, B, C, D, E, F-fel jelölve a szögpontokat, az ABC, CDE, EFA síkhármas közös pontja az egyik, a BCD, DEF, FAB síkhármas közös pontja a másik kiegészítő csúcspont.)

Ebben az értelemben az *I.*, *II.*, *III.* tulajdonságot a DANDELIN-hatszög *meghatározó* tulajdonságának nevezzük.

3. § A DANDELIN-hatszög vetülete és síkmetszete

Akár közönséges, akár ideális pontból vetítünk pontot és egyenest síkra, a pont képe pont, az egyenes képe egyenes (ha az egyenes illeszkedik a vetítőpontra, akkor ponttá zsugorodik a képe). Ha egy pont és egy egyenes egymáshoz illeszkedő, akkor a képük is egymáshoz illeszkedő. Tehát a vetítés, általában mondhatjuk, mind az egyenesvonalúságot, mind az illeszkedést átörökíti a képre.

Ebből tüstént következik, hogy a DANDELIN-hatszög vetülete olyan hatszög, melynek szemközti szögpontjait összekötő egyenesek (főátlók) egy pontban metszik egymást. Meg kell említenünk, hogy e síkbeli hatszög szemközti szögpontjain mit értünk, hiszen a torzhatszög vetülete igen változatos formákra vezethet.

A DANDELIN-hatszög csúcsait az oldalak mentén haladva úgy járjuk végig, hogy mindegyik csúcspontján egyszer megyünk át, s visszatérünk a kiinduló pontba. Ugyanezt a végigjárást, a vetületnek egy végigjárása ábrázolja. Ennek a mentén sorszámozva a csúcspontokat, az 1. és 4., a 2. és 5., a 3. és 6. szögpontok a szemközti szögpontok.

Az olyan síkbeli hatszöget, melynek főátlói egy pontban találkoznak BRIANCHON-*hatszögnek* nevezzük.

Tehát a DANDELIN-*hatszögnek* BRIANCHON-*hatszög a vetülete* (*képe*).

Fölmerül a kérdés, milyen hatszög csúcspontjaiban metszi egy sík a DANDELIN-hatszög oldalegyeneseit?

A parallelepipedon esetében könnyen adjuk a választ. (3. ábra.) Az ábrán a vastagon rajzolt *1 2 3 4 5 6* hatszög szemlélteti a parallelepipedon síkmetszetét. Minthogy két párhuzamos síknak két párhuzamos egyenes a síkmetszete, a szóbanforgó hatszögmetszet olyan, hogy a szemközti oldalai párhuzamosak.

Az általános hexaéder esetében a síkmetszet ideális elemeinek szerepét (5. ábra) a $C_2C_3C_4$ háromszög síkjának az elemei veszik át.

Nézzük csak például a metszet szemközti oldalegyenesei közül az *12, 45* párt. A π metszősík az $A_1B_2A_3$, $B_1A_2B_3$ szemközti lapsíkokat ebben az egyenespárban metszi. Azért ennek az egyenespárnak a közös pontja a szóbanforgó két lapsíknak is közös pontja és így ez a P_1 közös pont a lapsíkpár C_2C_4 metszésvonalának is pontja. Ugyanúgy látható be, hogy a *23, 56*, ill. *34, 61* egyenespár P_2, ill. P_3 közös pontja a C_4C_3, ill. C_3C_2 egyenesen van. Viszont a P pontok a π és $C_2C_3C_4$ sík közös pontjai, tehát e két sík metszésvonalán, a p egyenesen vannak.

Eszerint a síkmetszet olyan hatszög, melynek a szemközti oldalai egy egyenesen metszik egymást.

Az olyan hatszöget, amelynek szemközti oldalai páronként egy kollineáris pontháromas pontjaiban találkoznak, PASCAL-*hatszögnek* nevezzük.

Tehát a DANDELIN-*hatszög síkmetszete* PASCAL-*hatszög.*

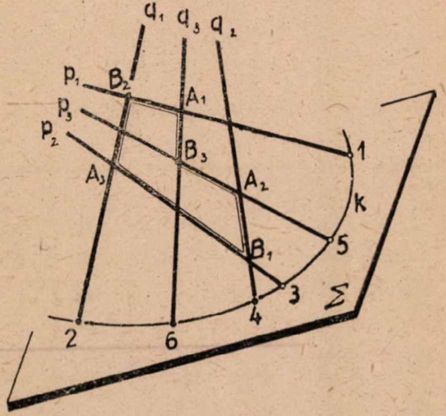
4. § A torzhatos vetülete és síkmetszete

Ha p_1, p_2, p_3 páronként kitérő egyenesek, akkor bármelyiküknek bármelyik pontjából egy egyenes húzható, mely a másik kettőt metszi. A három p egyenest egyaránt metsző q egyenesek bármely ketteje egymáshoz viszonyítva kitérő. Mert, ha például a q_1 és q_2 nem volnának kitérők, akkor a $p_1p_2q_1q_2$ négyoldal a q_1q_2 síkban volna, tehát p_1 és p_2 nem lehetnének kitérők.

Ha a páronként kitérő p_1, p_2, p_3 egyenesek mindegyikét a páronként kitérő q_1, q_2, q_3 egyenesek mindegyike metszi, akkor az általuk képzett alakzatot torzhatosnak nevezzük.

Nevezzük a $q_iq_k = M_{ik}$ pontot *rácspontnak*. A torzhatosnak 9 rácspontja van:

$$M_{11},\ M_{12},\ M_{13}\ ;$$
$$M_{21},\ M_{22},\ M_{23}\ ;$$
$$M_{31},\ M_{32},\ M_{33}.$$



6. ábra

Tekintsük az M_{1i}, M_{2k}, M_{3l} rácspontokat. Ha ezeket a 9 rácspontból töröljük, akkor a maradék 6 pont egy DANDELIN-hatszög csúcspontjait képezi, melynek a p és q egyenesek az oldalegyenesei, egyik körüljárása mentén az egymás-után következő csúcspontok az

$$M_{1k},\ M_{1l},\ M_{2l},\ M_{2i},\ M_{3i},\ M_{3k},\ \text{majd ismét az } M_{1k} \text{ rácspont.}$$

Az ábrán az M_{12} M_{23} M_{21} rácspontok kihagyása után fennmaradó DANDELIN-hatszöget duplavonallal körülrajzoltuk és csúcspontjait sorra

$$A_1,\ B_2,\ A_3,\ B_1,\ A_2,\ B_3\text{-}$$

mal betűztük. Könnyen belátható, hogy ez valóban DANDELIN-hatszög. Például abból, hogy főátlói, az

$$A_1B_1,\ A_2B_2,\ A_3B_3$$

egy pontban metszik egymást. Komplanárisak nem lehetnek (mert akkor a 9 rácspont egy síkban volna). Viszont páronként metszik egymást, mert

A_1B_1 és A_2B_2 egyenesek a p_1 és q_2,
A_2B_2 és A_3B_3 egyenesek a p_2 és q_3,
A_3B_3 és A_1B_1 egyenesek a p_3 és q_1

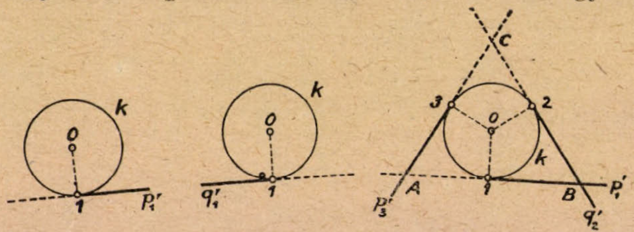
(metsző egyenesek) által kifeszített síkban vannak.

Összefoglalva: *a torzhatos hat egyenese* DANDELIN-*hatszög hat oldalegyenesének tekinthető.*

Ennek következtében a torzhatos vetülete BRIANCHON-hatoldal, a síkmetszete pedig PASCAL-hatszög.*

5. § A húrhatszög és az érintőhatoldal

A k kör *1* pontján két olyan egyenes megy át, mely a rajz síkját 45°-os szögben metszi és a rajz síkjára eső merőleges vetülete éppen az *1* ponthoz tartozó érintő. A két egyenes közül



7. ábra

* A múlt században kedvelt kérdés volt a *Pascal*-hatszöghöz tartozó 60 *Pascal*-tengely létesítette konfiguráció vizsgálata. A torzhatos 18 átlós egyenesének konfigurációja, egyszerű sztereometriai meggondolások alapján, a térbeli illeszkedési axiómáknál több előismeretet föl nem használva, könnyen tisztázható. (A torzhatos átlósegyenesén $M_{ik}M_{lm} \equiv d_{ik:lm}$ egyenest értjük, ha $i \neq l$, $k \neq m$). A torzhatos közvetítésével a 60 tengely indukálta konfiguráció vizsgálatát (elemi) sztereometriai meggondolások segítségével lehet végrehajtani.

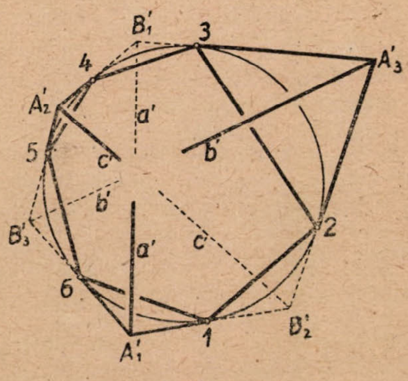
Ha Σ síknak egy *Pascal*-hatszöge az *1 2 3 4 5 6*, akkor veszünk egy hiperboloidot, melynek Σ-val való síkmetszete átmegy e hat szögponton. Tekintsük e hat ponton átmenő alkotókat. (6 alkotó az egyik, 6 alkotó a másik sereg eleme.) Ezek az *1, 2, 3, 4, 5, 6* pontokat leszámítva, 30 rácspontot tűznek ki a hiperboloidon. E 30 rácspontot *Dandelin*-féle rácsponthatosokra bonthatjuk. Ezen az úton a 60 tengely konfigurációjának (sík geometriai) kérdését, a 30 rácspont szerkezetének (térgeometriai) kérdésére lehet átjátszani.

a jobbra emelkedőt jelöljük p_1-gyel, a balra emelkedőt q_1-gyel. Aszerint, hogy e kettő közül melyiket ábrázolja az *1* ponthoz tartozó érintő, a takart félegyenest szaggatott vonallal rajzoljuk meg.

Képzeljük el, hogy a q_1 egyenest úgy fordítjuk el (az O-ban rajz síkjára állított merőleges egyenes körül), hogy az *1* pont *2*-be kerüljön. Akkor a q_1 egyenes átmegy q_2-be, melynek q'_2 a vetülete. Ha a p_1 egyenest forgatjuk el úgy, hogy *1* a *3*-ba kerüljön, akkor p_1 átmegy p_3-ba, melynek p'_3 a vetülete.

No most a vetületből is könnyen elképzelhető, hogy milyen a p_1, q_2, p_3 egyenesek kölcsönös helyzete.

Minthogy $1B = 2B$ és p_1, q_1 egyaránt a B felé emelkednek, mégpedig 45°-os szögben, nyilvánvaló, hogy p_1, q_2 (a rajz B pontja fölött) metszik egymást. Ugyanúgy q_2, p_3 is metszik egymást (a rajz C pontja alatt). Viszont a p'_1 és p'_3 vetületek A-ban csak keresztezik egymást, de a térbeli p_1, p_3 egyenespár kitérő. Hiszen a rajz A pontjához viszonyítva, az egyik alatta, a másik fölötte vonul.



8. ábra

Válasszunk a körön, tetszőlegesen, hat pontot. Ezek az *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*. Ezekben az érintőket tekintsük váltakozva q és p jellegű egyenesek vetületének. A

$$q'_1,\ q'_3,\ q'_5 \text{ és } p'_2,\ p'_4,\ p'_6$$

egyenesek az $A'_1\ B'_2\ A'_3\ B'_1\ A'_2\ B'_3$ érintőhatoldal oldal egyenesei és *1 2 3 4 5 6* egy húrhatszög szögpontjai.

Az előző ábrához fűzött magyarázat alapján tüstént belátható, hogy q_1, q_3, q_5 ; p_2, p_4, p_6 egy torzhatost alkot. E torzhatos 9 rácspontja közül egy Dandelin-hatszög válik ki, melynek csúcsait a vetület

$$A'_1,\ B'_2,\ A'_3,\ B'_1,\ A'_2,\ B'_3$$

pontjai képviselik.

A Dandelin-hatszög vetületére és síkmetszetére vonatkozó tétel szerint kimondhatjuk, hogy *a kör húrhatszöge* Pascal-*hatszög és érintőhatoldala* Brianchon-*hatoldal.*

ВЫВОД НЕКОТОРЫХ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЙ С ПОМОЩЮ СТЕРЕОМЕТРИИ

Настоящая работа занимается одним вопросом методики преподавания. Речь идёт о том, что доказательство некоторых теорем планииметрии при помощи стереометрических рассуждений проще, чем чисто планиметрическое доказательство их.

Так, например, шестиугольник, в котором прямые, связывающие противоположные вершины, встречаются в одной точке, даёт и дело доказательства теорем Паскаля и Брианшена. В то же время он даёт возможность элементарного изучения гиперболического гиперболоида.

Янош Бояи сознательно применял стереометрические рассуждения, чтобы коротким путём просто вывести геометрию гиперболической плоскости, а Н. И. Лобачевский, удачно совместив планиметрию и стереометрию, выработал метод, хорошо применяемый при обучении начинающихся. Его современники не поняли преимуществ этого метода. Таким образом настоящая работа является одним приложением методических принципов Бояи и Лобачевского.

Ф. Картэси

SOME PLANIMETRIC RELATIONS OBTAINED THROUGH STEREOEMTRIC WAY.

This paper discusses a didactic-methodic problem. It shows that certain planimetric relations are easier obtainable through the stereometric way than by purely planimetric methods. For example, a polyhedron bounded by six quadrangles and having the property that the straight lines connecting the opposite vertices meet in one point, rises the idea of an elementary proof of the famous theorems of Pascal and Brianchon. Also, it suggests an elementary method for discussing the hyperboloid.

J. Bolyai consciously made use of stereometric ideas in deriving the hyperbolic plane geometry in a short and simple manner. Luckily connecting the planimetry and stereometry, N. J. Lobatchevsky elaborated a didactic-methodic process which proved to be very fruitful in teaching beginners. His contemporaries did not understand the advantages of this method.

To sum up, the present paper is concerned with an application of the methodic principles of Bolyai and Lobatchevsky.

F. Kárteszi

A háromszöghöz írt körök sugaraira vonatkozó egyenlőtlenségekről

Írta: VICTOR THÉBAULT (Tennie, Franciaország)

E lapok feladatrovatának FEJES TÓTH LÁSZLÓ által kitűzött 8. feladata a háromszöghöz írt körök sugarainak első és negyedik hatványközepére vonatkozó állítások bizonyítását kívánta. E feladatra közölt, HAJÓS GYÖRGYtől származó megoldás (I. évf. 313—316 l.) a feladat eredeti állításán túlmenően a hozzáírt körök sugarainak n-edik hatványközepeire vonatkozó határokat adott meg. Ez a megoldás analitikus eszközöket használ. Az $n = 2$ esetre vonatkozó eredménye

$$(1) \qquad \frac{3}{2} r \leqq \sqrt{\frac{\varrho_a^2 + \varrho_b^2 + \varrho_c^2}{3}} < \frac{4}{\sqrt{3}} r,$$

ahol r a háromszög köré írt kör sugarát, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c pedig a hozzáírt körök sugarát jelenti.

Célunk, hogy az (1) egyenlőtlenséget régebben is ismert eredményekből levezessük. Első felére két levezetést is adunk. Csak elemi geometriai számolással bizonyított állításokra támaszkodunk s így az alábbiak (1)-nek elemi bizonyítását adják.

1. Egy háromszög köré írt és beírt körének r és ϱ sugarára s a háromszög s félkerületére vonatkozóan

$$(2) \qquad s^4 - 2(2r^2 + 10r\varrho - \varrho^2)s^2 + \varrho(4r + \varrho)^3 \leqq 0$$

és egyenlőség csak egyenlőszárú háromszögekre áll. Ezt az egyenlőtlenséget R. SONDAT mondotta ki (*Nouvelles Annales de Mathématiques* (1890), 1593. feladat; megoldotta E. LEMOINE, u. o. (1891), 44* l.; kiegészítette N., u. o. (1908), 558 l.). Másrészt jól ismert, hogy

$$(3) \qquad r \geqq 2\varrho$$

s itt egyenlőség csak szabályos háromszögre áll. (2) és (3) együttes teljesülése egyben elégséges feltétele is annak, hogy adott r, ϱ, s

értékekhez található legyen háromszög. A (2) egyenlőtlenség s^2-re vonatkozólag két határt szab, melyeknek egyike

(4) $$s^2 \leqq 2r^2 + 10r\varrho - \varrho^2 + 2(r - 2\varrho)\sqrt{r^2 - 2r\varrho}.$$

Ha felhasználjuk az ismert s könnyen igazolható

$$\varrho_a\varrho_b + \varrho_a\varrho_c + \varrho_b\varrho_c = s^2,$$
$$\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c = 4r + \varrho$$

összefüggéseket, a bizonyítandó (1) egyenlőtlenség első felét a következő alakban írhatjuk:

$$27r^2 \leqq 4(\varrho_a^2 + \varrho_b^2 + \varrho_c^2) = 4\,[(\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c)^2 - 2s^2] =$$
$$= 4[(4r + \varrho)^2 - 2s^2],$$

azaz

(5) $$8s^2 \leqq 37r^2 + 32r\varrho + 4\varrho^2.$$

Állításunk helyessége abból következik, hogy (5) jobboldala (4) jobboldalának nyolcszorosánál nagyobb, azaz

$$37r^2 + 32r\varrho + 4\varrho^2 \geqq 16r^2 + 80r\varrho - 8\varrho^2 + 16(r - 2\varrho)\sqrt{r^2 - 2r\varrho}.$$

Ez az egyenlőtlenség ugyanis a következő alakban írható:

$$(r - 2\varrho)\,[2r + 3(r - 2\varrho) + 16(r - \sqrt{r^2 - 2r\varrho})] \geqq 0$$

s itt az első tényező és a második tényezőnek egyetlen tagja sem lehet negatív. Minthogy a második tényező első tagja mindig pozitív s az első tényező csak szabályos háromszögre tűnik el, azért (1)-ben is csak szabályos háromszög esetén áll egyenlőség.

2. Kiindulunk az ismert

$$a^2 + b^2 + c^2 + \varrho^2 + \varrho_a^2 + \varrho_b^2 + \varrho_c^2 = 16r^2,$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + \overline{OM}^2 = 9r^2$$

összefüggésekből, ahol a, b, c a háromszög oldalait, $\overline{OM}$ pedig a körülírt kör középpontjának s a magasságpontnak távolságát jelenti. Ezekből az egyenletekből

$$\varrho_a^2 + \varrho_b^2 + \varrho_c^2 = 7r^2 - \varrho^2 + \overline{OM}^2.$$

(1) első felének állítása tehát

$$\frac{27}{4}r^2 \geqq 7r^2 - \varrho^2 + \overline{OM}^2,$$

azaz

$$(r^2 - 4\varrho^2) + 4\,\overline{OM}^2 \geqq 0.$$

Ez igaz, mert a baloldal egyik tagja sem lehet negatív. Egyenlőség csak szabályos háromszögre áll, mert ez mindkét tagra vonatkozóan az eltűnés feltétele.

3. Az előző pontban idézett első egyenletnek következménye

$$\varrho_a^2 + \varrho_b^2 + \varrho_c^2 < 16r^2$$

s éppen ez (1) második felének állítása.

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ РАДИУСАМЫ ОКРУЖНОСТЕЙ КАСАЮЩИХ СТОРОН ТРЕУГОЛЬНИКА

Отдел задач настоящего журнала поместил решение одной задачи, принадлежащее Г. Хайошу и содержащее помимо решения задачи и доказательство неравенства (1). Здесь r обозначает радиус вписанной окружности, а $\varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$ радиусы окружностей, внешне касающихся с треугольником. Доказательство применяло аналитические методы. Настоящая статья выводит это неравенство из известных соотношений, доказанных элементарными геометрическими вычислениями.

В. Тэбо

SUR QUELQUES INÉGALITÉS RELATIVES AUX RAYONS DES CERCLES EXINSCRITS À UN TRIANGLE

Parmi les résolutions des questions proposées dans ce journal est parue la solution de M. G. Hajós dans laquelle il a demontré — surpassant l'énoncé de la question no. 8. — l'inégalité (1), où r désigne le rayon du cercle circonscrit, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c les rayons des cercles exinscrits à un triangle. Sa démonstration se sert des renforts analytiques. Le travail présent montre que (1) découle aussi de quelques inégalités connues qui sont établies par les considérations appartenantes à la géométrie élémentaire.

V. Thébault

Aspiránsképzés a matematika terén

Felemelt ötéves tervünk nemcsak hatalmas feladatokat állít a tudományos kutatás elé, hanem minden erkölcsi és anyagi támogatást megad ahhoz, hogy tudósaink és kutatóink gondtalanul, minden idejüket a kutatásnak szentelve, teljesíteni tudják nagyszabású tudományos terveiket.

A tudományos munka területén éppúgy, mint a szocializmust építő gazdaságunk minden ágában, a legfőbb érték az ember. Tudományos terveink végrehajtásának, kultúrforradalmunk sikeres továbbvitelének záloga a jólképzett, néphez hű kutató- és oktatógárda. Tudományos káderutánpótlásunk tervszerű előkészítésére hozta létre 1950-ben Népköztársaságunk — Pártunk kezdeményezésére, a Szovjetunió példája nyomán — az aspirantura intézményét.

Az aspiráns leendő tudós és pedagógus. A felszabadulás előtt sok küzdelem, nélkülözés és magárahagyatott tapogatódzás, sok meddő kísérlet jellemezte annak a fiatalnak a tudományos erőfeszítéseit, aki a dolgozó nép soraiból kiemelkedve, a tudománynak kívánta szentelni életét. Ezzel szemben az aspiránsok ösztöndíjban s egyéb kedvezményekben részesülnek, amelyek lehetővé teszik számukra, hogy három éven keresztül anyagi gondoktól mentesen, vezető kutatóink és kiváló tudósaink egyikének tervszerű irányításával és segítségével olyan magas tudományos képzettségre tegyenek szert, amellyel azután segítőtársai, továbbfolytatói lehetnek vezetőik tudományos és pedagógiai munkásságának, tudományos tervünk megvalósításának.

A matematikus aspiránsok — a többi tudományágak aspiránsaihoz hasonlóan — tudományáguk választott területén, az illető matematikai diszciplina egyik kiváló tudósa mellett dolgoznak. Munkájuk súlypontját az egyéni terv alapján történő szakmai továbbtanulás s önálló kutatómunka képezi. Emellett gondosan tanulmányozzák a marxizmus-leninizmus kérdéseit, továbbá a Szovjetunió élenjáró matematikusainak eredményeit, hogy azokat kutatómunkájukban alkalmazzák. Mindegyik matematikus aspiráns egyetemi oktatómunkát is végez, ami leendő főiskolai munkásságra készíti elő. Tanulmányairól időközben vizsgákon, tudományos kutatásairól pedig tudományos értekezésben, az ú. n. kandidátusi disszertációban számol be. Kandidátusi disszertációjának megvitatására a legkiválóbb szakemberekből álló bizottság ül össze, s nyilvános vitában kell előttük megvédenie azt. Ezzel elnyeri a kandidátusi tudományos fokozatot. A kandidátusi fokozatot elnyert aspiráns népi demokráciánk tudós társadalmának megbecsült tagja lesz, aki előtt széles perspektívában tárulnak fel az önálló tudományos kutatás s az egyetemi oktatás legkülönbözőbb, megoldásra váró feladatai.

A matematikus aspiránsok választott témái szorosan kapcsolódnak a matematikai és alkalmazott matematikai kutatás aktuális problémáihoz. Így Blum Ottó topológiai kérdésekkel, Fodor Géza mértékelmélettel, Frei Tamás numerikus és grafikus módszerekkel és a matematikai gépekkel foglalkozik, Kertész Andor csoportelméleti és algebrai tanulmányokat folytat, Medgyessy Pál valószínűségszámítással, Pál László György funkcionálanalízissel, Pásztor István valós függvénytannal, Prékopa András a sztochasztikus folyamatokkal, Rényi Kató komplex függvénytannal, Rózsa Pál differenciálegyenletek elméletével és matematikai gépekkel, Steinfeld Ottó algebrával, Tandori Károly Fouriersorokkal és approximációelmélettel, Ziermann Margit matematikai statisztikával foglalkozik.

Világosan látnunk kell azt, hogy dolgozó népünk részéről igen nagy áldozatot jelent annak bizonyítása, hogy az aspiránsok anyagi gondoktól mentesen egyedül csak tudományos fejlődésükön és továbbképzésükön dolgozhatnak három évig. Éppen ezért az aspiránsoknak igyekezniök kell ezt az előlegezett bizalmat kiérdemelni.

Értesítés a Beke Manó emlékdíj alapításáról

A Bolyai János Matematikai Társulat az elmúlt évben BEKE MANÓ-ról elnevezett emlékdíjat alapított. Alábbiakban közöljük az emlékdíj szabályzatát és a díj első alkalommal való kiosztásáról szóló beszámolót.

A Beke Manó Emlékdíj Szabályzata

1. Népköztársaságunk rohamosan növekedő kulturális színvonala a matematika oktatásával és népszerűsítésével szemben egyre fokozottabb igényeket támaszt. Ezért a matematika-oktatási és népszerűsítő munka serkentése és támogatása céljából a Bolyai János Matematikai Társulat emlékdíjat alapít, melyet BEKE MANÓRÓL a kíváló tudósról és a magyar matematika-oktatás egyik mesteréről és úttörőjéről nevez el, aki tankönyveivel és munkásságával is jelentősen hozzájárult a matematikai tudomány fejlesztéséhez és a matematikai ismeretek hazánkban való elterjesztéséhez.

2. Az emlékdíj egy összegben, esetleg megosztva is kiadható.

3. A BEKE MANÓ emlékdíj a szocializmus építését elősegítő, eredményes matematika-oktatási, vagy népszerűsítő munkákra adandó ki; matematika-oktatási és népszerűsítő munkásságon ilyen tárgyú könyvek írása, előadások tartása és egyéb hasonló célú közérdekű tevékenység értendő. A díj kiadása minden év decemberében történik 1951 decemberétől kezdődően. Mindenkor lehetőség van a díjak megosztására vagy esetleg ki nem adására.

4. A díj kiosztására való javaslatot öttagú bizottság hozza, melynek elnökségét és négy tagját évről-évre a Társulat Elnöksége küldi ki. A bizottság szótöbbséggel dönt. A bizottság saját kebeléből választja meg elnökét és előadóját, aki a díj odaítéléséhez a bizottság számára javaslatot tesz és részletes indokolást készít.

5. A bizottság nem jutalmazhatja saját tagját.

6. A bizottság javaslatát az Elnökség hagyja jóvá, az Elnökség által jóváhagyott döntés a Matematikai Lapokban jelenik meg. a jutalmazottak munkásságának részletes ismertetésével együtt.

A BOLYAI JÁNOS
MATEMATIKAI TÁRSULAT
ELNÖKSÉGE

A Beke Manó-díj első kiosztása

A Beke Manó-díj kiosztására kiküldött bizottság javaslata alapján a Társulat Elnöksége 1951. dec. 12-i ülésén a következő határozatot hozta:

A Beke Manó-díj célja, hogy az oktatás és a matematika népszerűsítése terén elért kiváló eredményeket minden évben egyszer megjutalmazza. Első ízben ez év december 21-én, *Sztálin* elvtárs születésnapján kívánja a Bolyai János Matematikai Társulat ezt a díjat kiosztani.

A jutalom odaítélésénél a következő szempontokat tartja szem előtt a Társulat:

A matematika tudománya alapvető eszköz a természettudományos műveltség megszerzéséhez. Szükség van arra, hogy a matematikát megismerjék, megszeressék és megtanulják a dolgozók széles tömegei. A szocializmus építése, a szocialista iparosítás nem nélkülözheti a matematika tudományának alapos, lelkiismeretes oktatását és népszerűsítését.

Népi demokráciánkban a matematika oktatóinak és népszerűsítőinek tisztában kell lenniök azzal, hogy a matematika nem öncélú játék, nem „elmesport" és nem is csupán „formális képzést" elősegítő tantárgy, mint ahogy a Horthy-korszak tanterveiben és tantervi utasításaiban szerepelt. A mi matematikai oktatásunk döntő szempontja a matematika és az élet, a matematika és a valóság szoros kapcsolatának megismertetése. A konkrét gyakorlati alkalmazásokra akarjuk a matematikát tanulók figyelmét irányítani. Ez természetesen nem azt jelenti, hogy a matematika tudományát a szűk prakticizmus alapján értékeljük, hiszen nyilvánvaló, hogy a gyakorlati alkalmazás, vagy akár az alkalmazás lehetősége sem mutatkozik meg mindig közvetlenül. Ebből az is következik, hogy a matematika és az élet kapcsolatának hangsúlyozása semmiképpen sem jelenti azt, hogy elhanyagolhatónak tartjuk a matematika tanításnak azt a feladatát, hogy fegyelmezett gondolkodásra, összefüggések felismerésére és helyes következtetésre tanítson meg.

Az elmondottak alapján olyanokat kíván a Társulat a BEKE MANÓ-díjjal kitüntetni, akik a fenti szempontok szerint tanítják és népszerűsítik a matematikát.

A matematika oktatóinak és népszerűsítőinek is hozzá kell járulniok az új értelmiség kialakításához. A szocializmus építésének hatalmas feladatai az értelmiség — elsősorban a műszaki értelmiség — mennyiségi és minőségi képzése terén rendkívüli súllyal jelentkeznek. Kettős feladat áll a matematika oktatói előtt. A fiatal munkás- és dolgozó paraszt származású középiskolai és egyetemi hallgatók oktatása és a rendes iskoláskoron már túl levő munkás- és dolgozó paraszt ifjaknak az értelmiségi foglalkozásra előkészítő (szakérettségi) tanítása. Olyan oktatókat tüntetünk ki tehát, akik ezeken a területeken kiváló eredményt értek el, munkájukat lelkesen, az ügy iránti odaadással végzik és ezzel komoly szolgálatot tesznek szocializmust építő népi demokráciánknak.

Ezeknek alapján a Bolyai János Matematikai Társulat 1951. évben a Beke Manó-díjjal a következőket tünteti ki: GALLAI TIBOR műegyetemi tanárt, 3000 forintos díjjal.

GALLAI TIBOR középiskolában kezdte tanári működését. Mint középiskolai tanár fáradhatatlanul dolgozott, hogy tanítványai a matematikában és fizikában ne csak felületen mozgó tudást sajátítsanak el, hanem mélyebben behatoljanak a tárgyba. Különös képessége, hogy a tehetséget csírájában észreveszi és mindent elkövet, hogy kibontakoztassa. Emellett nemcsak tehetséges tanítványaival, hanem a közepesekkel és gyengékkel is úgy foglalkozott, hogy azok a matematikában a szokásos középiskolai színvonalnál jóval magasabb fokot értek el. Egyik szerzője volt az új, első és második osztályos középiskolai matematika tankönyvnek. A könyv — minden meglevő hibája ellenére — kétségtelenül pozitívan értékelendő, főleg, mert új utat, új módszert mutat a matematika oktatásában. Hatása rendkívül nagy, mert az új módszert követik már országszerte a matematika-tanárok. GALLAI TIBOR gazdag tapasztalatait és kiváló pedagógiai módszerét felhasználta a könyv megírásánál. Jelenleg a Műszaki Egyetem egyik matematikai tanszékének vezetője. Nagyszámú, főleg munkás- és dolgozó paraszt származású tanítványainak kiváló oktatója, rendkívüli pedagógiai érzékkel és fáradhatatlan szorgalommal igen jó eredményt ér el hallgatóinál.

Megjegyzendő, hogy GALLAI TIBOR kiváló kutató matematikus is, bár a BEKE MANÓ-díj odaítélésénél nem ezt a szempontot tekintettük irányadónak.

1000—1000 forinttal jutalmazza a Társulat a következőket:

Gémesi József. Vidéki matematika-tanár volt; kiváló oktatási módszerét tanártársainak is átadta, sőt most, hogy Budapestre, a Kísérleti Fizikai Intézetbe került, szabad idejében tovább folytatja vidéki tanártársaival való foglalkozást. Tevékeny részt vesz a Bolyai János Matematikai Társulat életében, hasznos és lelkes munkát végez a Népszerűsítő Bizottságban. Népszerű matematikai könyv megírásán dolgozik, amely a matematikának a gyakorlati élettel való kapcsolatával foglalkozik.

Makranczy Béla. Debrecenben, a 15. számú Kohó- és Gépipari Technikumban, ezenkívül a 27. számú Kohó- és Gépipari Technikum esti tagozatán és a debreceni szakérettségis tanfolyamon tanít. Kitűnő szaktudással rendelkezik és igen jó pedagógiai módszerrel dolgozik. Kiváló előadói képessége van. Igen jól fegyelmez, tanítványai szeretik, bár komoly követelményeket támaszt velük szemben.

Neukomm Gyula. Középiskolai tanár. Kitűnő pedagógiai módszerét bizonyítja, hogy kiváló matematikusok egész sorát nevelte ki és tanítványai gyakran szerepelnek a különböző matematikai versenyek nyertesei között. A matematikai körök megalakításában és munkájában, valamint a Középiskolai Lapok szerkesztésében tevékeny részt vesz.

Soós Paula. Szegeden szakérettségis tanfolyam függetlenített matematika tanára. Kiváló szakmai tudású és kiváló pedagógiai készségű tanár. Minden munkát szívesen, pontosan és kitűnően végez. Tanítványai szeretik, osztályában rend és fegyelem van. A felszabadulás után egyike volt azoknak, akik megindították a Középiskolai Matematikai Lapokat és az akkori anyagi és szervezési nehézségek ellenére is igen eredményes munkát végzett.

Értesítés a Grünwald Géza emlékdíj alapításáról

A Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége úgy határozott, hogy a fiatalabb magyar matematikusok önálló tudományos munkára való ösztönzésére, valamint a magyar nyelvű matematikai irodalom fejlesztése érdekében emlékdíjat alapít. A Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége az emlékdíjat Grünwald Gézáról, a kiváló magyar matematikusról nevezi el, aki a Lagrange- és Hermite-interpoláció, valamint a Fourier-féle kettős sorok elméletében maradandó értékű eredményeket ért el, és akit kommunista meggyőződése miatt a fasiszták büntetőtáborba hurcoltak és meggyilkoltak. A Grünwald Géza-emlékdíj szabályzata a következő:

1. A Grünwald Géza-emlékdíj elsőízben 1952-ben, és azt követően évente kerül kiadásra.

2. Az emlékdíjban bárki részesíthető, egyetemi tanárok, a tudományok doktorai azok kivételével, akik a tudományok doktora fokozat elnyerésére pályázatot adtak be. (A 184/1951. X. 16/MT. sz. rendelet 9. §-a értelmében benyújtott felülvizsgálati kérelmek nem esnek a 2. pontban foglalt megszorítás alá.)

3. Emlékdíjban olyan magyar nyelvű dolgozat részesíthető, amely a díj kiadásának évében jelent meg, vagy került sajtó alá, valamint olyan is, amelyet szerzője az emlékdíj tekintetében való elbírálás végett a Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége által évente megszabott határidőig kéziratban benyújtott. Emlékdíjban részesíthető olyan dolgozat is, amellyel szerzője a kandidátusi fokozat elnyerésére pályázott, vagy amellyel a kandidátusi fokozatot az illető évben elnyerte. Nem akadálya az emlékdíjban való részesítésnek, ha a magyar nyelven benyújtott dolgozat az illető évben egészben vagy részben már idegen nyelven megjelent.

4. A Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége fenntartja magának a jogot, hogy egyes években a jutalmazandó dolgozatok tárgykörét megszabja. Ezt az elhatározást azonban a Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége a 3. pontban említett beadási határidő előtt legalább 6 hónappal közzétenni köteles.

5. A dolgozat elbírálását egy legalább öttagú bizottság végzi, melyet a Társulat Elnöksége küld ki, s melynek tagjai csak egyetemi tanárok és a tudományok doktorai lehetnek. A bizottság saját kebeléből elnököt választ. A határozathozatal egyszerű szótöbbséggel történik. Szavazategyenlőség esetén az elnök szavazata dönt. Ugyancsak a bizottság választja előadóját is, aki a bizottság határozatáról az Elnökség számára részletesen indokolt jelentést készít.

6. A Grünwald Géza emlékdíjra szánt évi 5000 forintos összeget a bizottság egészben vagy részben is felhasználhatja, azzal egy, vagy több dolgozatot is jutalmazhat, azonban egy szerző 3000 forintnál magasabb jutalmat nem kaphat.

7. Az emlékdíj kiosztásának az illető évre vonatkozó feltételei és a díj odaítéléséről szóló jelentés a Társulat folyóiratában, a Matematikai Lapokban leközlendők.

Ezúton hívjuk fel mindazokat, akik ebben az évben a Grünwald Géza emlékdíjra pályázni kívánnak, hogy elbírálás végett a még meg nem jelent dolgozatuk gépelt kéziratát 1952. december 31-ig juttassák el a Bolyai János Matematikai Társulat Elnökségének (Budapest. V., Reáltanoda-u. 13—15). Ezévben a dolgozat tárgykörét a Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége nem köti meg.

A Bolyai János Matematikai Társulat ezzel az emlékdíjjal is elősegíteni kívánja hazánkban a matematikai kutatás további fejlődését.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI
TÁRSULAT ELNÖKSÉGE

TÁRSULATI ÉLET

A Bolyai János Matematikai Társulat budapesti előadó ülései

1951. szeptember 20. FENYŐ ISTVÁN: Matematika és dialektikus materializmus. — Pedagógus-továbbképző előadás.

1951. szeptember 22. RÉNYI ALFRÉD: Az Alkalmazott Matematikai Intézet által újabban megoldott néhány problémáról. Az előadó a következő három problémáról beszélt, amelyeket az Alkalmazott Matematikai Intézet valószínűségszámítási és matematikai statisztikai osztálya nemrégiben az előadó vezetésével megoldott:

1. Automata gépek csavarokat gyártanak; időnként a gép egyik alkatrésze eltörik, és attól kezdve a gép selejtes csavarokat készít. A gyártás ellenőrzése úgy történik, hogy egy ellenőr állandó időközökben végigjárja a gépeket. Kiszámítandó, hogy milyen időközökben kell az ellenőrnek az egyes gépeket megnéznie, hogy a selejtszázalék egy megadott határt ne haladjon meg? (A problémával az intézet a gödöllői Árammérőgyár felkérésére foglalkozott.)

2. A szövőgépek fordulatszámát növelve, növekszik a működő gépek időegységenkénti termelése, azonban ugyanakkor növekszik a fonalszakadások száma és így a gépállások ideje is. Meghatározandó az optimális fordulatszám, azaz amelynél a tényleges termelés maximális. (A problémával az intézet a Könnyűipari Minisztérium megbízásából foglalkozott, a szükséges üzemi adatfelvételeket az intézet a Kistextben végezte el.)

3. Véletlen törésnek kitett gépalkatrészekre vonatkozólag kiszámítandó egy adott időtartam alatt szükséges törések ill. alkatrész-cserék száma, és ennek alapján olyan tartalékolási és utánrendelési ütemterv készítendő, amely biztosítja, hogy alkatrészhiány miatt a termelés ne álljon le, ugyanakkor azonban ne tartalékoljon az üzem feleslegesen sok alkatrészt és ezzel ne vonja el azokat más üzemek elől.

Előadó röviden vázolta a három probléma megoldását, amelyek valószínűségszámítási tárgyalása egymással szoros kapcsolatban áll, mégpedig mindhárom probléma az exponenciális eloszlás alkalmazásával oldható meg. Az első és harmadik problémánál az alkatrészek „élettartama", a második problémánál egy szövőgép szakadásmentes működési ideje tekinthető jó közelítéssel exponenciális elosztású valószínűségi változónak. Ezzel kapcsolatban az előadó rámutatott arra, hogy ha egymás után következő események közötti idők függetlenek és exponenciális eloszlásúak, akkor egy rögzített időszakaszon történő események száma POISSON eloszlást követ.

1951. szeptember 29. Számelméleti ankét.

Az ankét tárgya a tudományegyetemi tanterv algebrai és számelméleti előadásokra vonatkozó részének átdolgozása, illetve kiegészítése volt. A beérkezett két tematikatervezet megtárgyalása után az ankét javaslatot fogadott el, mind a négy évfolyam szóbanforgó előadásainak anyagára vonatkozólag, melyet azután a Közoktatásügyi Minisztérium is magáévá tett.

1951. október 5. Szovjet klubest. MEDGYESSY PÁL: Szovjet matematikusok a matematika elvi kérdéseiről.

Az előadó ismerteti A. N. KOLMOGOROV „Matematika" című cikkét a Nagy Szovjet Enciklopédiából, valamint A. D. ALEXANDROV, F. F. NAGIBIN és N. P. SAROVATOV cikkeit, amelyek részben a matematika egyes elvi kérdéseivel, részben a matematika középiskolai tanításával kapcsolatos kérdésekkel foglalkoznak a dialektikus materializmus megvilágításában.

1951. október 13. SZÉP JENŐ: Véges egyszerű csoportok egy új jellemzése.

Az előadó megmutatja, hogy egy véges egyszerű csoport akkor és csakis akkor egyszerű, ha nincsen olyan valódi alcsoportja, mely a csoport minden alcsoportjával felcserélhető.

Utólag kiderült, hogy ez az eredmény O. ORE egy korábbi dolgozatában már megvan.

1951. október 18. VINCZE ISTVÁN: A matematika alkalmazásai. Pedagógus-továbbképző előadás.

1951. október 20. 1951. évi SCHWEITZER MIKLÓS matematikai emlékverseny eredményhirdetése. A verseny eredményét TURÁN PÁL ismertette.

1951. november 2. Szovjet klubest. PRÉKOPA ANDRÁS ismerteti B. V. GNYEGYENKO és A. N. KOLMOGOROV „Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai“ c. munkáját.

1951. november 3. SZELE TIBOR: Egész differenciahányodosú számelméleti függvények.

Szűkebb, illetve tágabb értelemben vett számelméleti függvényen olyan függvényt értve, amelynek értelmezési tartománya a nemnegatív egész számok, illetve az összes egész számok halmaza, értékkészlete pedig tetszőleges egész számokból áll: az előadó meghatározza az összes olyan szűkebb és tágabb értelemben vett számelméleti függvényt, amelynek bármelyik differenciahányadosa egész szám. Ezek a függvények úgy is jellemezhetők, hogy az egész számok gyűrűjének bármely maradékosztály-gyűrűjében is egyértékű függvényt indukálnak.

1951. november 2—3—4. Konferencia Pécsett a Közoktatásügyi Minisztériummal és az Eötvös Loránd Fizikai Társulattal közös rendezésben.

HOFFMANN TIBOR: A fémek szerkezete.

HÓDI ENDRE: Az analitikus geometria tanítása.

VARGA DEZSŐ: Geometriai szerkesztések.

1951. november 4—5—6. Konferencia Balatonfüreden. A Közoktatásügyi Minisztériummal és az Eötvös Loránd Fizikai Társulattal közös rendezésben.

HOFFMANN TIBOR: A fémek szerkezete.

BIZÁM GYÖRGY: Az 1951. évi Arany Dániel középiskolai matematika tanulóverseny néhány érdekesebb feladatának ismertetése.

MOLNÁR JÓZSEF: Geometriai szerkesztések.

GÉMESI JÓZSEF: Az analitikus geometria tanítása.

BOR PÁL: Az új III. oszt. gimn. fizika tankönyv problémái.

JEGES KÁROLY: Néhány újszerű házilag elkészíthető középiskolai fizikai demonstrációs eszköz. (Bemutatással.)

1951. november 10. VARGA OTTÓ: Szovjet eredmények a differenciálgeometriában. (Teljes terjedelemben közölve lapunk 2. évf. 3—4. számában.)

1951. november 17. KÜRSCHÁK JÓZSEF matematikai tanulóverseny eredményhirdetése és díjkiosztása.

HAJÓS GYÖRGY: Megjegyzések a versenyfeladatokhoz.

1951. november 22. LŐRINCZ PÁL: Formalizmus a tanítás során. — Pedagógus-továbbképző előadás.

1951. december 7. Szovjet klubest. VARGA TAMÁS ismerteti BRAGYISZ: A középiskolai matematikatanítás módszertana című könyvét.

1951. december 10. Ünnepi ülés JORDAN KÁROLYnak, a Társulat díszelnökének nyolcvanadik születésnapja alkalmából. Jordan Károly matematikai munkásságát RÉNYI ALFRÉD ismertette.

1951. december 21. A BEKE MANÓ emlékdíj kiosztása. A jelentést az emlékdíj odaítéléséről és kiosztásáról lapunk e számában közöljük.

1952. január 24. HÓDI ENDRE: A feladatmegoldások szerepe a formalizmus elleni küzdelemben. — Pedagógus-továbbképző előadás.

1952. január 26—27. Analízis ankét.

1952. január 4—5—6. Konferencia Győrött a Közoktatásügyi Minisztériummal és az Eötvös Loránd Fizikai Társulattal közös rendezésben.
RÉNYI ALFRÉD: A formalizmus elleni harc a matematika tanításában.
HAJÓS GYÖRGY: Az 1951. évi KÜRSCHÁK JÓZSEF matematikai tanulóverseny feladatai.
CSEKŐ ÁRPÁD: Bemutató kísérletek.
HÓDI ENDRE: Középértékek, egyenlőtlenségek, szélsőértékfeladatok elemi megoldásai.
BOROS JÁNOS: Mértékrendszerek és fizikai törvények.
HOFFMANN TIBOR: A fémek szerkezetéről.

A Bolyai János Matematikai Társulat szegedi előadó ülései

1951. október 27. ACZÉL JÁNOS: A vektorok skaláris és vektoriális szorzásáról.
Függvényegyenletek segítségével bizonyítja az előadó, hogy bizonyos egyszerű feltevések mellett a vektorokat csak a szokásos módon lehet szorozni, s hasonlót bizonyít be komplex számokra vonatkozólag is.

1951. november 10. FODOR GÉZA: Binär relációkról.
Legyen M a $[0, 1]$ zárt intervallum. Definiáljunk egy $y = \varphi(x)$ függvényt, ahol $x, y \in M$, amely kontinuum sok értéket is felvehet minden x-re. Tegyük fel, hogy $x = \varphi(x)$ egyenlet sohasem teljesül. Ha sem $x = \varphi(x)$, sem $y = \varphi(x)$

egyenlet nem teljesül, akkor az x és y elemeket függetleneknek nevezzük. Jelölje $\}\varphi(x)\{$ adott x-re a $\varphi(x)$ értékek halmazát. Tegyük fel továbbá, hogy $x \in \}\varphi(x)\{$. Kérdés, hogy van-e az M-nek egy pozitív mértékű E részhalmaza, amelynek elemei páronként függetlenek. Az előadó bizonyítja, hogy

1. ha $g(x) = d(x)\}\varphi(x)\{$ és ha van olyan $f(x) > 0$ mérhető függvény úgy, hogy $f(x) \leq g(x)$ minden x-re, akkor van pozitív mértékű mérhető halmaz.
2. ellenpélda megkonstruálásával, hogy nincs mindig pozitív mértékű független halmaz.
3. pozitív külső mértékű független halmaz mindig létezik.

1951. november 15. KERESZTÚRY JENŐ: A nyomdaipar mértékrendszere és betűtípusai.

1951. december 1. Klubest. TANDORI KÁROLY: N. I. AHIJÉZER „Előadások az approximáció elméletéről" c. könyvének ismertetése.

Bevezetőben az előadó az approximációelmélet kifejlődését és feladatát ismertette, ezután AHIJEZER könyvének főbb eredményeit vázolta, különösen azokat, amelyek akár tárgyi, akár módszertani szempontból újak.

1951. december 2. RÉNYI ALFRÉD: Mérhető függvények approximációja. Az előadó ismertette egy új valós függvénytani tétel bizonyítását, amely tételt PUKÁNSZKY LAJOSsal közösen talált. Rámutatott arra, hogy a bizonyítás alapgondolata alkalmazható a WEIERSTRASS-féle approximáció-tétel STONE-féle általánosításának igen egyszerű módon való bebizonyítására is.

1951. december 6. KERESZTURY JENŐ: Kéziratok, szedés, korrektura.

1952. január 12. CSÁSZÁR ÁKOS: Egyváltozós függvények approximativ növekedése.

Osztályozzuk az x-tengely pontjait aszerint, hogy az $f(x)$ függvény $E_x[f(x) > f(x_0)]$, $E_x[f(x) \geqq f(x_0)]$ stb. nívóhalmazainak az x_0 pontban jobb-, illetve baloldali külső felső sűrűségük pozitív, vagy zérussal egyenlő. Az így előálló különféle lehetséges típusok közül némelyik kivételesnek tekinthető, éspedig részben azért, mert rajta az $f(x)$ függvény értékkészlete legfeljebb megszámlálható. Mérhető függvényekre szorítkozva lényegesen élesebb állítások mondhatók ki.

A Bolyai János Matematikai Társulat veszprémi előadó ülései

1951. szeptember 21. Császár Ákos: A mérték nélküli geometria. Gráfok elmélete. Felületi topológia.

1951. november 8. Fejes Tóth László: Matematikai pillanatfelvételek.

Ismeretterjesztő előadás a matematika különböző területéről származó eredményeiről (sík- és térbeli geometriai szélsőérték problémák, Archimedesi félszabályos testek, Gauss-féle görbe, politópok stb.) Vetített képekben.

A Bolyai János Matematikai Társulat miskolci előadó ülései

1951. október 5—6-án tartott évnyitó előadások.

Koncz Károly: A matematikával kapcsolatos ideológiai kérdések.

Firtkó János: A Bolyai Társulat eddigi munkája, és munkaterve az 1951—52-es évre.

Borbély Samu: Mozgási problémák a matematikában és a technikai valóságban.

Kiss János: Néhány gyakorlati szélső-érték feladat elemi megoldása.

Szelecz Ferenc: Minimális felületű trapéz-csatorna meghatározása.

Parai Ágoston: Alkalmazott matematika a középiskolai anyagban, gyakorlati példák kapcsán.

Kárteszi Ferenc: A matematika tanításával kapcsolatos ideológiai kérdések.

Bede Lajos: A Közoktatásügyi Minisztérium és a Bolyai Társulat matematikai oktatási konferenciája, és a tanárok feladatai a jobb matematikatanítás érdekében.

Petrich Géza: Síkmértani feladatok térmértani megoldása.

Móricz István: A szöveges feladatok jelentősége és típusai.

Darkó Béla: A végtelen sorok tanításáról.

Raisz Iván: A Heron-féle háromszög számok szerepe a matematika tanításában.

Szabó Jenő: Egyenlet-megoldások.

GÁSPÁR GYULA: A középiskolai matematika anyag csoportelméleti vonatkozásai.

VINCZE ISTVÁN: A matematika műszaki és egyéb alkalmazásával kapcsolatos ideológiai kérdések.

ACZÉL JÁNOS: Elmélet és gyakorlat egysége a szovjet matematikában.

PETRICH GÉZA: Műhelyvázlat-készítés.

TÖRŐ BÉLA: Kombinált szárazföldi és vízi szállítás.

GÁTI JÓZSEF: Elektrotechnikai kördiagrammokról.

TÓTH FERENC: Szíjáttételek.

1951. november 9. RÉNYI ALFRÉD: Az Alkalmazott Matematikai Intézet által megoldott három, a valószínűségszámítással kapcsolatos ipari problémáról.

DUX ERIK: Az $\frac{1}{p}$ sor divergenciájának újabb bizonyításáról.

1951. november 24. FIRTKÓ JÁNOS: Hogyan hidalják át a számtan és az algebra közti szakadékot a Szovjetunió tízosztályos iskola osztályai során. (Pedagógus-továbbképző előadás.)*

1951. november 16. Szovjet klubest. ACZÉL JÁNOS: PERELMAN: „Zanimatelnaja geometrija i algebra" című könyvének ismertetése.

1952. január 25. és 1951. december 7. Klubest. (A megjelent tagság kötetlenebb formájú beszélgetése.)

Technikus előadások.

1951. november 12. FIRTKÓ JÁNOS: Grafikonok, függvények és ábrázolások.

1951. november 26. TEVAN GYÖRGY: Logarléc kezeléséről.

1952. január 11. ZIMONYI JÁNOS: Evolvens geometria I. (Az evoluta származtatása, milyen szerepe van a fogaskerekek fog-profiljának készítésénél.)

1952. január 28. HOSSZÚ MIKLÓS: Képletek olvasása, az algebra elemei.

* Ez az előadás megismétlődött december 10-én Ózdon, december 11-én Sárospatakon, és 17-én Mezőkövesden.

A Bolyai János Matematikai Társulat debreceni előadó ülései

1951. október 3. RÉNYI ALFRÉD: A valószínűségszámítás néhány gyakorlati alkalmazása.

Az előadó az 5 éves terv során felvetődött három különböző természetű, matematikai szempontból azonban lényegében egyforma valószínűségszámítási problémát ismertetett, melyeket a Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézete oldott meg.

1951. október 31. VARGA OTTÓ: A derivált matrixok geometriai értelmezése p-vektorok segítségével.

Az előadó egy matrix deriváltmatrixát azoknak a p-vektoroknak rendezett sémájaként állítja elő, amelyek az eredeti matrixhoz tartozó vektorokból származtathatók. Ezen előállítás alapján a derivált matrixokra vonatkozó tételek p-vektorok segítségével geometriailag szemléletes bizonyítást nyernek.

1951. november 8. ALEXITS GYÖRGY: Újabb eredmények a FOURIER-sorok konvergenciájának és divergenciájának néhány kérdésében.

Az előadó összefoglaló képet nyújt a FOURIER-sorok konvergencia és divergencia problémáival kapcsolatos legújabb vizsgálatokról, többek között WEYL, KOLMOGOROV SZELIVERSZTOV, PLESSZNER, HINCSIN, MENSOV, RADEMACHER, SALEM, ZYGMUND, valamint saját eredményeiről.

1951. november 23. SZÉNÁSSY BARNA: A középiskolai anyagba beilleszthető néhány matematikai versenyfeladat. (Pedagógiai Szakosztály előadása.)

1951. november 28. SZELE TIBOR: Testek automorfizmusai.

Az előadó ismertette az algebrai testek automorfizmusaira vonatkozó kutatások jelenlegi állását. Rámutatott a probléma geometriai jelentőségére. Végül meghatározta a valós számtest, a komplex számtest és a kvaternió-test összes automorfizmusát.

1951. november 8. EGERVÁRY JENŐ: Testek lehűlése változó hőmérsékletű közegben.

(Ezt az előadást egy következő számunkban egész terjedelmében közölni fogjuk.)

A Bolyai János Matematikai Társulat pécsi előadó ülései

1951. október 25. DOMBI BÉLA: Az ABEL-RUFFINI tétel.

1951. október 31. Szovjet klubest. SELÉNYI GÉZA H. STEINHAUS: „Matematikai kaleidoszkóp" c. könyvét ismerteti.
Az előadó a Pedagógiai Főiskola első éves hallgatóinak tanulmányaival kapcsolatos példákat ragadott ki. Rámutatott a sakknál szereplő kombinatórikus összefüggésekre és geometriai transzformációkra. A racionális és irracionális számokkal foglalkozott, az egész számok rácsával és az aranymetszéssel kapcsolatban. Néhány példát tárgyalt még a tükrözési transzformációkkal, a számelmélettel és a topológiával kapcsolatban. Megemlékezett az orosz és szovjet matematikusoknak e területeken végzett munkásságáról.

1951. december 15. TAKÁCS LAJOS: Valószínűségszámítás és néhány gyakorlati alkalmazása.
Az előadás a legelemibb valószínűségszámítási tételeket ismertette és kizárólag ezekre építve megoldott két, az iparban fontos szerepet játszó problémát. Mindkettő több gép egyidejű működésével kapcsolatos. Az egyik több hegesztőgép egyidejű használatánál a tápláló áramforrás helyes méretezését, a másik egy texilüzemben egy munkás felügyeletére bízott több szövőgép optimális számának meghatározását szolgáltatta.

1951. december 16. SZÉKELY GÁBOR: Többgépes rendszerrel kapcsolatos valószínűségszámítási problémák.
Az előadó ismertette az Alkalmazott Matematikai Intézetnek a Kistextben lefolytatott vizsgálatainak eredményét, mely vizsgálatok többgépes rendszer optimális fordulatszámának meghatározására vonatkoztak.

MATEMATIKAI ÉS SZEMÉLYI HÍREK

Szovjetunió

Iván Matvejevics Vinogradov akadémikus, a világhírű szovjet matematikus 1951 szeptember 14-én töltötte be hatvanadik életévét. Ebből az alkalomból a Moszkvai Matematikai Társulat melegen ünnepelte és dísztagjává választotta.

*

A Moszkvai Matematikai Társulat 1951 szeptember 18-i ülése foglalkozott a Világ Béketanácsának a békeegyezmény megkötésére vonatkozó felhívásával. Ezzel kapcsolatban A. G. Kuros a csoportelméleti eredményeiről ismert világhírű szovjet matematikus a következőket mondotta:

„A szovjet nép nem akar háborút. A szovjet emberek a békés építés hatalmas feladataival foglalkoznak, a kommunista társadalom építésének feladataival, amelyeket a nagy Sztálin jelölt ki. Mi matematikusok nem akarunk és nem is akarhatunk háborút, először is azért, mert szovjet emberek vagyunk, akik arra törekszenek, hogy minél erőteljesebben vegyék ki részüket a kommunizmus alapjainak hatalmas építő munkájából, másodszor mint tudósok, akik jól tudják, hogy a háború soha sem kedvez a tudomány fejlődésének, harmadszor mint olyan emberek, akik gyermekeik jövőjére gondolnak.“ A. G. Kuros rámutatott arra, hogy minél intenzívebben dolgoznak a szovjet matematikusok a szovjet tudomány békés fejlesztésén, annál jobban erősítik a béke hatalmas táborát, amelynek élén a Szovjetunió áll.

*

Az Uszpehi Matematicseszkih Nauk c. folyóirat megemlékezik arról, hogy Nina Karlovna Bari, a kiváló szovjet matematikus 25 éve fejt ki eredményes tudományos munkásságot a moszkvai egyetemen, 1935 óta mint ennek az egyetemnek professzora. N. K. Bari tudományos munkáját mint aspiráns kezdte meg, először N. N. Luzin tanítványaként dolgozott, később főként D. E. Mensovval működött együtt. N. K. Bari egyike azoknak a szovjet nőknek, akik nagyszerű eredményeket értek el a tudomány terén.

*

A moszkvai egyetem matematika-történeti szemináriuma eddig négy kötet matematikatörténeti tanulmányt adott ki. A tanulmányok egy csoportja Euklides „Elemei"-vel foglalkozik; V. N. Molodsi és L. E. Majsztrov tanulmányaikban rámutatnak, hogy teljesen téves az az elterjedt felfogás, hogy Euklides platonista volt, és kimutatják, hogy ismeretelméleti kérdésekben Euklides Aristoteles tanításai alapján állott. A tanulmányok egy másik csoportja Lobacsevszkij kevésbbé ismert munkáival foglalkozik. A tanulmányokból kitűnik, hogy Lobacsevszkij a geometria terén elért zseniális felfedezésein kívül a matematika más ágaiban is értékes eredményeket ért el, így például a trigonometrikus sorok konvergenciájára, algebrai egyenletek közelítő megoldására vonatkozólag. B. V. Gnyegyenko tanulmánya ismerteti Lobacsevszkij igen érdekes valószínűségszámítási eredményeit. Lobacsevszkijt mint ismeretes, rendkívüli mértékben foglalkoztatta az a kérdés, hogy a háromszögek szögösszegére vonatkozó rendkívül pontos (csillagászati) megfigyelésekkel lehet csak eldönteni, hogy a valóságban az euklidesi vagy pedig nemeuklidesi geometria érvényes-e? A szögmérések hibájának kérdése vezette őt bizonyos valószínűségszámítási problémák megoldására (pl. egy intervallumban egyenletes eloszlású független valószínűségi változók összege eloszlásának meghatározására). K. A. Rübnyikov (aki tagja volt az I. Magyar Matematikai Kongresszuson résztvevő szovjet delegációnak) egy igen alapos tanulmányban foglalkozik a variációszámítás kialakulásával, és ezzel kapcsolatban L. Euler munkásságának úttörő szerepével. A szóbanforgó matematikatörténeti kötetek ismertetése során az Uszpehi Matematicseszkih Nauk c. folyóiratban V. F. Rogacsenko hangsúlyozza, hogy a Párt és a Kormány ismételten rámutattak a tudomány történetének hatalmas nevelő erejére, és ezzel kapcsolatban aláhúzza a matematika-történeti kutatások továbbfejlesztésének jelentőségét, továbbá megemlíti azt, hogy a népi demokratikus országok matematika-történetének feldolgozása terén is még igen sok teendő van.

A szovjet matematikusok közül 1952-ben a következők kaptak Sztálin díjat:

Szergej Nyikitovics Mergeljan, az Örmény Sz. Sz. K. Tudományos Akadémiája Matematikai és Mechanikai Szektorának munkatársa, „A konstruktív függvénytan egyes kérdései“ című dolgozatáért.

Szergej Mihajlovics Nyikolszkij (aki tagja volt az I. Magyar Matematikai Kongresszuson résztvevő szovjet delegációnak), a Szovjetunió Tudományos Akadémiájának V. A. Sztyeklovról elnevezett intézetének munkatársa, a „Véges kitevőjű egész függvényekre vonatkozó egyenlőtlenségek és alkalmazásaik a többváltozós, differenciálható függvényeknek elméletében“ c. dolgozatáért. Dolgozatai a Sztyeklov intézet kiadványai között jelentenek meg, 1951-ben.

Csehszlovákia

A Csehszlovák Központi Matematikai Intézet (Ustredni Ustav Matematicky) 1950. évi július 1-én létesült. Az Intézet jelenleg a következő csoportokra tagozódik:

1. Elméleti matematika csoportja, vezetője Cech Eduard professzor, aki egyúttal az Intézet igazgatója.

2. Technikai matematika csoportja, két részlegre tagolódik, melynek vezetői Knichal Vladimir és Vycichlo Frantisek professzorok.

3. Matematikai statisztika csoportja, vezetője Novak Josef professzor.

4. Matematikai gépek csoportja, vezetője Svoboda Antonin docens.

5. Elemi matematika csoportja, vezetője Zelinka Rudolf tanár.

A csehszlovák Iskolaügyi Minisztérium a Központi Matematikai Intézet elemi matematikai csoportjának közreműködésével új tankönyveket adott ki az elemi- és középfokú iskolák, valamint gimnáziumok részére. A gimnázium mind a négy osztályának tankönyvét Cech Eduard, a kiváló topológus, a Központi Matematikai Intézet igazgatója írta.

Sikerrel alkalmazzák Csehszlovákiában a matematikai statisztikai módszereket az ipari minőségellenőrzésben, mind gyártás közben, mind a készáru átvételénél.

Az utolsó két év során jelent meg cseh nyelven Vojtech Jarnik professzor „Differenciálszámítás” c. művének első kötete, ugyancsak az „Integrálszámítás” c. könyve első kötete.

A csehszlovák gimnáziumok negyedik osztályának tananyagában jelentős hely jut a valószínűségszámítási és matematikai statisztikai alapismereteknek.

Hazai hirek

Kossuth-díjasaink: Az 1952. évben népköztársaságunk Kossuth-díjjal tüntette ki TURÁN PÁL egyetemi tanárt, az analízis egy nagyjelentőségű új módszerének kidolgozásáért, VARGA OTTÓ egyetemi tanárt a differenciálgeometria terén végzett munkájáért, különös tekintettel a FINSLER-terekre vonatkozó kutatásaira, SZELE TIBOR egyetemi docenst az ABEL-féle csoportok elméletére vonatkozó strukturális vizsgálataiért, különös tekintettel a testelmélettel való analógiák felfedezésére.

Kossuth-díjasaink munkásságának részletesebb ismertetésére következő számunkban kerül sor.

*

A Magyar Tudományos Akadémia 1951. *évi nagygyűlése* alkalmából a matematikai állandó bizottság december 13-án és 14-én nyilvános előadó ülést tartott. SZŐKEFALVI NAGY BÉLA, a M. Tud. Ak. lev. tagja, az analízis terén hazánkban elért főbb eredményekről számolt be; SZELE TIBOR docens az absztrakt algebrában elért eredményeket ismertette; KALMÁR LÁSZLÓ, a M. Tud. Ak. lev. tagja, előadásában a matematika alapjaival kapcsolatos újabb eredményekkel foglalkozott; HAJÓS GYÖRGY, a M. Tud. Ak. lev. tagja, a geometria terén elért újabb eredményeket ismertette; TURÁN PÁL, a M. Tud. Ak. lev. tagja, saját módszerének újabb alkalmazásairól számolt be; RÉNYI ALFRÉD, a M. Tud. Ak. lev. tagja a valószínűségszámítás hazai eredményeit ismertette. C. KURATOWSKI, a nagygyűlés alkalmából hazánkban tartózkodó lengyel delegáció vezetője, a Lengyel Állami Matematikai Intézet munkáját ismertette. Az előadóülések teljes anyaga a M. Tud. Ak. Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményeiben jelent meg.

*

A *Középiskolai Matematikai Lapok* szerkesztésében igen hathatós támogatást kapott a Bolyai Társulat a Közoktatásügyi Minisztériumtól. A jövőben a Lapokat a Minisztérium és a Társulat közösen adja ki. A Minisztérium a szerkesztőbizottság egyik tagját, NEUKOMM GYULA kartársat egyéb munkától felmentve, a Lapok szerkesztésével bízta meg felelős szerkesztői minőségben, akit a Társulat részéről a szerkesztőbizottság és SURÁNYI JÁNOS, mint főszerkesztő továbbra is támogat munkájában. A Lapok a jövőben havonként fognak megjelenni. Az új évfolyamban osztályonként díjazott pontverseny indul a megfejtők között; ezenkívül több más újítás fogja a Lapokat hozzáférhetőbbé tenni és megkedveltetni a tanulóifjúsággal.

A felszabadulás óta megjelent matematikai tárgyú könyvek jegyzéke

Akadémiai könyvkiadó:

A. J. HINCSIN: A statisztikai mechanika analitikus módszerei. 96 o. 1951.

PÉTER R.: Rekursive Funktionen. 206 o. 1951.

B. V. GNYEGYENKO és A. N. KOLMOGOROV: Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai. 256 o. 1951.

L. I. GUTENMAHER: Elektromos modellek. 320 o. 1851.

N. I. AHIJEZER: Előadások az approximáció elméletéről. 284 o. 1951.

I. G. PETROVSZKIJ: Előadások a közönséges differenciálegyenletek elméletéről. 151 o. 1951.

N. I. LOBACSEVSZKIJ: Geometriai vizsgálatok a párhuzamos egyenesekről. 188 o. 1952.

Szikra könyvkiadó:

ALEXITS GY.—FENYŐ I.: Matematika és dialektikus materializmus. 124 o. 1948.

G. N. BERMAN: A számolás és a számok. 38 o. 1950.

Tankönyvkiadó:

Egyetemi tankönyvek:

I. M. VINOGRADOV: A számelmélet alapjai. 140 o. 1951.

N. M. GJUNTER—R. O. KUZMIN: Felső matematikai példatár. I—II. 238 + 235 o. 1951.

A. F. BERMANT: Matematikai analízis. I—II. 472 + 368 o. 1951.

M. K. GREBENCSA—SZ. I. NOVOSZELOV: Matematikai analízis. I. 483 o. 1951.

ZIGÁNY F.: Ábrázoló geometria. I—II. 392 o. 1951.

ALEXITS GY.—FENYŐ I.: Matematika vegyészeknek. 355 o. 1951.

Középiskolai tankönyvek:

GALLAI T.—PÉTER R.: Matematika, (középiskola I. oszt.) I. kiadás. 418 o. 1949. — II. kiadás 346 o. 1951.

Gallai T.—Péter R.—Tolnai J.: Matematika, (középiskola II. oszt.) 341 o. 1950.

Gallai T.—Péter R.—Surányi J.—Tolnai J.: Matematika, (középiskola II. oszt.) II. kiadás 246 o. 1951.

Gallai T.—Hódi E.—Péter R.—Szabó P.—Tolnai J.: Matematika, (középiskola III. oszt.) 320 o. 1951.

Csada I.—Kratofill D.—Tolnai J.—Varga T.: Matematika (tanítóképző IV. oszt.) 237 o. 1951.

Szakköri füzetek:

Kárteszi F.: Az olló geometriája. 68 o. 1949.

Kárteszi F.: A kocka. 42 o. 1949.

Surányi J.: Hasonlóság és szerkesztés. 55 o. 1949.

Kárteszi F.: Szabályos testek. 47 o. 1951.

Fülöp B.: Számítsd ki! 66 o. 1951.

Szakpéldatárak:

Dallos L.—Szalai B.—Urai V.: Számtani szakpéldatár gépészeknek. 30 o. 1950.

Hantos I.—Takács T.—Vissi G.: Számtani szakpéldatár vegyészeknek. 21 o. 1950.

Tolnai J.: Számtani szakpéldatár. 46 o. 1950.

Közoktatásügyi könyvkiadó:

V. M. Bragyisz: A középiskolai matematikatanítás módszertana. (Szoc. nevelés könyvtára 34. kötet) 592 o. 1951.

Csicsigin: A számtantanítás módszertana. (Szoc. nevelés könyvtára 35. kötet.) 386 o. 1951.

N. N. Nyikityin: Szöveges feladatok az általános iskolában. (Szoc. nevelés könyvtára 2. kötet.) 127 o. 1950.

A középiskolai matematikatanítás kérdései. (Előadássorozat.) 97 o. 1950.

A. Sz. Posolko: A számtantanítás módszertana. 422 o. 1951.

Szász P.: Differenciál- és integrálszámítás elemei. I—II. 1309 o. 1952.

Je. Sz. Berezanszkaja: Számtani feladatok. 320 o. 1952.

Egyetemi nyomda:

Péter R.: A számok világa. (Új nevelés könyvtára 9. sz.) 144 o. 1948.

Kárteszi F.—Erdősi J.: A tér megismerése. (Új nevelés könyvtára 10. sz.) 184 o. 1948.

Munkatudományi és Racionalizálási Intézet:

Hajós Gy.: A munka- és időelemzés matematikai segédeszközei. 103. o. 1948.

Hungária könyvkiadó:

G. N. Berman: A számok tudománya. 159 o. 1950.

Művelt Nép könyvkiadó:

H. Steinhaus: Matematikai kaleidoszkóp. 150 o. 1951.

J. I. Perelman: Szórakoztató algebra. 231 o. 1952.

Mérnöki Továbbképző Intézet:

Egerváry J.: A mechanika differenciálegyenleteiről, különös tekintettel a gépszerkezettan és szilárdságtan feladataira. 61 o. 1948.

Jordan K.: Elliptikus függvények és alkalmazásaik. 32 o. 1950.

Szentmártony T.: A matematikai statisztika a műszaki gyakorlatban. 114 o. 1950.

Szentmártony T.: Vektor- és tenzorszámítás.

Oplatka Gy.: Válogatott fejezetek a matematikából. 55 o., 1951.

Népszava kiadó:

Sattler T.-né: Számtan és mértankönyv időelemzők részére. 240 o. 1950.

Seres I.: Ipari számtan és mértan. 29 o. 1948.

Seres I.: Vasipari példatár. 9 o. 1949.

Sors L.: Számoló ábrák készítésének gyakorlati módszerei. 52 o.

FELADATROVAT

A feladatrovatnak szánt küldeményeket a következő címre kérjük: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, V. Reáltanoda-u. 13—15. Az egyes feladatok megoldását külön lapon kérjük. Nem zárkózunk el olyan feladat közlése elől sem, amelynek megoldását beküldője nem ismeri.

Sajtóhibák az előző számunkban kitűzött feladatok szövegében: A 44. feladatban a Σ jel alatt helyesen $i = 2$ áll, viszont a 46. feladatban a Σ jel alatt helyesen $i = 1$ áll. Az utóbbi feladat egyenletében a második binomiális együtthatóban $n + i$ alatt l áll (ez némely lappéldányban lemaradt).

Kitűzött feladatok

47. Legyen $f(x)$ a $(0, 1)$ intervallumban fogyó, pozitív függvény, melyre $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = +\infty$. Jelentsen E olyan mérhető halmazt, melynek sűrűsége a 0 pontban 0, és jelölje E_h az E halmaznak $(h, 1)$ intervallumba eső részét. Kimutatandó, hogy

$$\liminf_{h \to 0} \int\limits_{E_h} f(x)\,dx \Big/ \int\limits_h^1 f(x)\,dx = 0.$$

(Blum Ottó)

48. Mi annak feltétele, hogy egy valós együtthatós algebrai egyenletnek legyen három egy egyenesbe eső gyöke.

*(Obláth Richárd)**

49. Bizonyítandó, hogy ha $a_1, a_2, \ldots$ pozitív tagú sorozat és $a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \ldots$ konvergens, akkor található olyan

* A szerző a feladat megoldását nem ismeri.

$n_1, n_2, \ldots$ indexsorozat, amelyre $n_{k+1}/n_k \to 1$ és $a_{n_1} + a_{n_2} + \ldots$ konvergens. *(Erdős Pál)*

50. Adva van $n+2$ pont az egységsugarú n-dimenziós gömb felületén s ezek között nincs kettő, melyeknek távolsága $\sqrt{2}$-nél kisebb. Bizonyítandó, hogy akkor legalább $2n$-féleképen választható ki közülük kettő, melyeknek távolsága $\sqrt{2}$.

(Hajós György)

51. Mutassuk ki, hogy minden n természetes számra

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{n+k+1} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

(Turán Pál)

52. Legyen p tetszésszerinti törzsszám. Jelölje $C(p^n)$ a p^n-edik egységgyökök multiplikatív csoportját és jelölje $C(p^\infty)$ valamennyi p-edik, p^2-edik, p^3-edik, ... egységgyök multiplikatív csoportját. Bizonyítandó, hogy minden Abel-féle csoport homomorf módon leképezhető a $C(p^k)$ csoportok ($k = 1, 2, 3, \ldots, \infty$) valamelyikére. *(Szele Tibor)*

53. Legyen H az n dimenziós tér egy tetszésszerinti E halmazán értelmezett és ott alulról félig folytonos függvényből álló halmaz. Bebizonyítandó, hogy ki lehet választani H-ból véges vagy megszámlálható sok függvényt úgy, hogy e függvények felső burkolója H valamennyi függvénynek felső burkolója legyen. Függvények felső burkolója azt a függvényt jelenti, melynek értéke minden helyen az e helyhez tartozó függvényértékek felső határa. (A $+\infty$ és $-\infty$ is lehet függvényérték.)

(Gehér István)

Megoldott feladatok

27. feladat. Legyen $f(x)$ a $(0, 1)$ intervallumban fogyó, pozitív függvény, melyre $\int_0^1 f(x)\,dx = +\infty$ és $f\left(\frac{x}{2}\right) < C\, f(x)$. Jelentsen E olyan mérhető halmazt, melynek a 0 pontban a sűrűsége 0, és jelölje E_h az E halmaznak $(h, 1)$ intervallumba eső részét. Kimutatandó, hogy $h \to 0$ esetén $\int_{E_h} f(x)\,dx$ és $\int_h^1 f(x)\,dx$ integrálok hányadosa 0-hoz tart. *(Császár Ákos)*

I. megoldás. Tekintsük az

$$i_k = \left(\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

intervallumokat s legyen

$$F_k = \int_{i_k} f(x)\, dx.$$

Az $f(x)$-re vonatkozó kirovások miatt

$$(1) \qquad F_1 + F_2 + \ldots + F_k + \ldots$$

pozitív tagú divergens sor és

$$(2) \qquad F_{k+1} = \int_{i_{k+1}} f(x)\, dx < C \int_{i_{k+1}} f(2x)\, dx = \frac{C}{2} \int_{i_k} f(y)\, dy = \frac{C}{2} F_k.$$

Jelölje E és i_k közös részét E_k s legyen

$$I_k = \int_{E_k} f(x)\, dx.$$

Az E-re és $f(x)$-re vonatkozó kirovások miatt

$$(3) \qquad \eta_k = \frac{I_k}{F_k} < \frac{|E_k|\, f\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)}{|i_k|\, f\left(\frac{1}{2^k}\right)} < C \frac{|E_k|}{|i_k|} < 2C \frac{\left|E\left(0, \frac{1}{2_k}\right)\right|}{\frac{1}{2_k}} \to 0,$$

ahol $E\left(0, \frac{1}{2^k}\right)$ az E halmaz s a $\left(0, \frac{1}{2^k}\right)$ intervallum közös részét jelöli.

A feladat által vizsgálatra kitűzött hányados, ha h az i_k intervallumhoz tartozik, nyilván kisebb mint

$$(4) \qquad \frac{I_1 + \ldots + I_{k+1}}{F_1 + \ldots + F_k} = \frac{\eta_1 F_1 + \ldots + \eta_k F_k}{F_1 + \ldots + F_k} + \frac{I_{k+1}}{F_1 + \ldots + F_k}.$$

A jobboldal első tagja CAUCHY ismert tétele szerint 0-hoz tart, mert az (1) sor divergens és (3) miatt $\eta_k \to 0$. (Ellenkező esetben ugyanis volna olyan $\varepsilon > 0$ szám, melyre végtelen sok k mellett

$$\frac{\eta_1 F_1 + \ldots + \eta_k F_k}{F_1 + \ldots + F_k} > \varepsilon,$$

azaz

$$(\varepsilon - \eta_1) F_1 + \ldots + (\varepsilon - \eta_k) F_k < 0.$$

Ez azonban lehetetlen, mert elég nagy k-ra $\eta_k \to 0$ miatt

$$(\varepsilon - \eta_k) F_k > \frac{\varepsilon}{2} F_k$$

s így (1) divergenciája folytán az

$$(\varepsilon - \eta_1) F_1 + \ldots + (\varepsilon_k - \eta_k) F_k + \ldots$$

sor $+\infty$-hez tart.)

(4) jobboldalának második tagja is 0-hoz tart, mert erre (2) miatt

$$\frac{I_{k+1}}{F_1 + \ldots + F_k} < \frac{I_{k+1}}{F_k} < \frac{C}{2} \frac{I_{k+1}}{F_{k+1}} = \frac{C}{2} \eta_{k+1} \to 0.$$

Tehát a vizsgált hányados is 0-hoz tart.

Králik Dezső

II. megoldás. Ha $e(x)$ az E halmaz karakterisztikus függvénye, azaz értéke 1 vagy 0 aszerint, amint x az E-be tartozik, vagy nem, akkor az E-re vonatkozó feltevések így fogalmazhatók meg: $e(x)$ LEBESGUE-integrálható és

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h e(x)\, dx = 0. \tag{5}$$

Azt kell bizonyítani, hogy ha $f(x)$ a $(0, 1)$-en értelmezett olyan pozitív, fogyó függvény, amelyre

$$\lim_{h \to 0} \int_h^1 f(x)\, dx = +\infty \tag{6}$$

és

$$f\left(\frac{x}{2}\right) < C\, f(x), \tag{7}$$

akkor

$$Q_h = \int_h^1 e(x)\, f(x)\, dx \Big/ \int_h^1 f(x)\, dx \to 0, \text{ ha } h \to 0.$$

Mi ezt nemcsak az E halmaz karakterisztikus függvényére, hanem minden olyan nemnegatív, integrálható $e(x)$ függvényre be fogjuk bizonyítani, amelyik az (5) feltételt kielégíti.

Adjunk meg tetszés szerint egy $\varepsilon > 0$ számot. Az $E(x) = \int_0^x e(\xi)\, d\xi$ jelölést használva, (5) szerint található olyan $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ szám, hogy $E(x) < \varepsilon x$, mihelyt $0 < x < \eta$. Legyen h egy $\eta/2$-nél kisebb pozitív szám. Jelölje $f_\eta(x)$ azt a függvényt, melynek értéke $f(x)$, ill. 0 aszerint, amint $x < \eta$, ill. $x \geqq \eta$. Kétszeri parciális integrálással

$$\int_h^\eta e(x)\, f(x)\, dx = -\int_h^\eta [E(x) - E(h)]\, d f_\eta(x) \leqq -\int_h^\eta E(x)\, df_\eta(x) \leqq$$

$$\leqq -\varepsilon \int_h^\eta x\, df_\eta(x) = \varepsilon\, h\, f(h) + \varepsilon \int_h^\eta f(x)\, dx.$$

Minthogy pedig (7) felhasználásával

$$h\, f(h) < C\, h\, f(2h) \leqq C \int_h^{2h} f(x)\, dx \leqq C \int_h^1 f(x)\, dx,$$

azt kapjuk, hogy

$$\int_h^1 e(x)\, f(x)\, dx < \varepsilon\,(C + 1) \int_h^1 f(x)\, dx + \int_\eta^1 e(x)\, f(x)\, dx$$

és így

$$Q_h < \varepsilon(C + 1) + \frac{\int_\eta^1 e(x)\, f(x)\, dx}{\int_h^1 f(x)\, dx}.$$

Ha rögzített ε és η mellett h zérushoz tart, a fenti tört (6) miatt 0-hoz tart. Elég kis h értékekre tehát

$$0 \leqq Q_h < \varepsilon\,(C + 2).$$

Ez azt jelenti, hogy $Q_h \to 0$, mert ε tetszőleges volt.

Szőkefalvi-Nagy Béla

A 27. feladat megoldását beküldötte még BLUM OTTÓ és SARKADI KÁROLY.

Megjegyzés. A 27. feladat állítása következménye D. FAGYEJEV egy tételének, mely függvényeknek szinguláris integrállal való előállítására vonatkozik, lásd: *Matyematyicseszkij Szbornyik* (2) 1 (1936), 351–368 l.

Szőkefalvi-Nagy Béla

28. feladat. Az $n = 1, 2, 3, \ldots$ számokra értelmezett $f(n)$ függvény monoton növekvő és relatív prím a, b számpárra

$$f(a\,b) = f(a) + f(b).$$

Bizonyítandó, hogy $f(n) = c \log n$. *(Erdős Pál)*

I. megoldás. Nyilván $f(1) = 0$. Feltehetjük, hogy $n > 1$ mellett $f(n) > 0$, mert negatív a monotonitás miatt nem lehet s ha egy n-re $f(n) = 0$ volna, akkor ebből a monotonitást is kihasználva következnék, hogy ez minden n-re is fennáll s így a feladat állítása $c = 0$ értékkel teljesül. Ha $f(n)$ szigorú monotonitását feltételezzük, akkor még erre a megjegyzésre sincs szükség.

Tegyük fel, hogy az 1-nél nagyobb a és b egészszámra $f(a)/\log a < f(b)/\log b$. Ennek lehetetlenségéből a feladat állítása következik. Jelentse c azt a számot, melyre

$$d(a) \equiv f(a) - c \log a = 0.$$

Feltevésünk szerint tehát $d(b) > 0$. Minthogy $f(a)$ pozitív, $c > 0$.

a) Kimutatjuk, hogy $d(n)$ felülről korlátos. Ha $(a, m) = 1$ és $m < n < a\,m$, akkor

$$(1)\qquad d(n) = f(n) - c \log n < f(a\,m) - c \log m = d(m) + f(a).$$

Legyen $a_k = a^k + 1$. Kimutatjuk a $d(a_k)$ sorozat korlátosságát, amiből (1) szerint $d(n)$ korlátossága is következik, minthogy $a_{i+1} < a\,a_i$. Ugyanezen egyenlőtlenség és $(a, a_i) = 1$ felhasználásával

$$d(a_{i+1}) - d(a_i) = f(a_{i+1}) - f(a_i) + c \log \frac{a_i}{a_{i+1}} \leqq$$

$$\leqq f(a) + c \log \frac{a_i}{a_{i+1}} = c \log \frac{a\,a_1}{a_{i+1}}.$$

A kapott egyenlőtlenségeket $i = 1, 2, \ldots, k-1$ értékekre összegezve

$$d(a_k) - d(a_1) \leqq c \log \prod_{i=1}^{k-1} \frac{a\, a_1}{a_{i+1}} = c \log \frac{a^{k-1} a_1}{a_k} =$$

$$= c \log \frac{a^k}{a^k+1} \left(1 + \frac{1}{a}\right) < c \log \left(1 + \frac{1}{a}\right)$$

s így $d(a_k)$ valóban korlátos.

b) Kimutatjuk, hogy $d(n)$ felülről nem korlátos. Ez az ellentmondás feltevésünk lehetetlenségét bizonyítja. Legyen $b_k = b^k - 1$. Minthogy $b_{i+1} > b\, b_i$ és $(b, b_i) = 1$,

$$d(b_{i+1}) - d(b_i) = f(b_{i+1}) - f(b_i) + c \log \frac{b_i}{b_{i+1}} \geqq$$

$$\geqq f(b) + c \log \frac{b_i}{b_{i+1}} = d(b) + c \log \frac{b\, b_i}{b_{i+1}}$$

A kapott egyenlőtlenségeket $i = 1, 2, \ldots, k-1$ értékekre összegezve

$$d(b_k) - d(b_1) \geqq (k-1)\, d(b) + c \log \prod_{i=1}^{k-1} \frac{b\, b_i}{b_{i+1}} =$$

$$= (k-1)\, d(b) + c \log \frac{b^{k-1} b_1}{b_k} = (k-1)\, d(b) +$$

$$+ c \log \frac{b^k}{b^k - 1} \left(1 - \frac{1}{b}\right) > (k-1)\, d(b) + c \log \left(1 - \frac{1}{b}\right).$$

Így $d(b) > 0$ következtében a $d(b_k)$ sorozat felülről valóban nem korlátos. *Sós Vera*

II. megoldás. Az alábbiakban latin kisbetűk pozitív egészszámokat, latin nagy betűk racionális számokat, görög kisbetűk pozitív valós számokat jelentenek. Nevezzük az $A = \frac{p}{q}$, $B = \frac{r}{s}$ $[(p, q) = 1, (r, s) = 1]$ számokat relatív prímeknek, ha a p, q, r, s számok páronként relatív prímek.

Lemma. Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$ adott számok. Azon pozitív racionális számoknak, amelyek az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ számok mindegyikéhez relatív prímek, a halmaza mindenütt sűrű.

Ennek bizonyítása végett nyilván elég megmutatni, hogy ha $0 < \alpha < \beta$ és az (α, β) intervallumban nincs egészszám, akkor van (α, β)-ban az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ számok mindegyikéhez relatív prím szám. Legyen $A_i = \frac{p_i}{q_i}$, $(p_i\, q_i) = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ és legyen q olyan nagy prímszám, amelyre $(\beta - \alpha)\, q > > p_1 \ldots p_n\, q_1 \ldots q_n$. Ekkor $\beta - \alpha < 1$ miatt egyszersmind $q > > p_1 \ldots p_n\, q_1 \ldots q_n$, tehát q relatív prím a p_i, q_i számok mindegyikéhez, továbbá az $(\alpha\, q, \beta\, q)$ intervallumban van a $p_1 \ldots p_n\, q_1 \ldots q_n$ számhoz, tehát a p_i, q_i számok mindegyikéhez relatív prím p szám. Akkor $\frac{p}{q}$ az (α, β) intervallumba esik és p és q relatív prímek, különben $\frac{p}{q}$ egészszám volna. Q. e. d.

A tétel bizonyítása végett terjesszük ki az $f(x)$ függvény értelmezését pozitív racionális X számokra úgy, hogy ha $X = \frac{p}{q}$, $(p, q) = 1$, akkor $f(X) = f(p) - f(q)$ legyen. Ha X egészszám, ez az eredeti függvényértéket adja, mert nyilván $f(1) = 0$.

Az $f(X)$ függvény is monoton növekvő. Ha u. i. $A < B$ és az A, B számok relatív prímek, s ha ezekre $A = \frac{p}{q}$, $B = \frac{r}{s}$, $(p, q) = 1$, $(r, s) = 1$, akkor $p\,s < q\,r$, tehát $f(p\,s) \leqq f(q\,r)$, vagyis

$$f(p) + f(s) \leqq f(q) + f(r), \quad f(p) - f(q) \leqq f(r) - f(s),$$

azaz $f(A) \leqq f(B)$. Ha pedig A és B nem relatív prímek és $A < B$, akkor a lemma értelmében van oly C szám, mely relatív prím A-hoz és B-hez s melyre $A < C < B$. Akkor az előbbiek szerint $f(A) \leqq f(C) \leqq f(B)$.

Ha A és B relatív prímek, akkor nyilván $f(A\,B) = f(A) + + f(B)$.

A monotonitás miatt minden α-ra létezik az $f(\alpha - 0)$ és $f(\alpha + 0)$ határérték és $f(\alpha - 0) \leqq f(\alpha + 0)$. Megszámlálható sok α kivételével itt az egyenlőségi jel érvényes, mindenesetre van olyan α, melyre $f(\alpha - 0) = f(\alpha + 0)$. A lemma értelmében van olyan $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ számsorozat, hogy A_n alulról, $A_n\, B_n$ felülről konvergál α-hoz s A_n és B_n relatív prímek. Ekkor $f(A_n) \to f(\alpha - 0)$ $f(A_n) + f(B_n) \to f(\alpha + 0)$, tehát $f(B_n) \to 0$, s minthogy B_n felülről 1-hez tart, azért $f(1 + 0) = 0$. Ha most β tetszőleges pozitív szám, van a lemma szerint oly $\{C_n\}$, $\{D_n\}$ sorozat, hogy C_n alulról, $C_n\, D_n$ felülről konvergál β-hoz, s C_n és D_n relatív prímek. Minthogy D_n ekkor felülről 1-hez tart, azért $f(C_n) \to f(\beta - 0)$, $f(C_n\, D_n) = f(C_n) + f(D_n) \to f(\beta + 0)$ és $f(D_n) \to 0$ folytán $f(\beta - 0) = f(\beta + 0)$. Vagyis $f(X)$ kiterjeszthető egy minden pozitív ξ-re értelmezett folytonos $f(\xi)$ függvénnyé.

Minthogy tetszőleges ξ és η-hoz a lemma értelmében találhatók oly $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ sorozatok, hogy $A_n \to \xi$, $B_n \to \eta$, s A_n és B_n relatív prímek, azért $f(\xi) + f(\eta) = f(\xi\,\eta)$. E függvényegyenletről pedig ismeretes, hogy egyetlen folytonos megoldása $f(\xi) = c \log \xi$.

Császár Ákos

A 28. feladat megoldását beküldötték még: BLUM OTTÓ, HAJÓS GYÖRGY, KŐVÁRI TAMÁS, SARKADI KÁROLY, TAKÁCS LAJOS.

35. **feladat.*** Adva van $n + 2$ pont az egységsugarú n-dimenziós gömb felületén. Bizonyítandó, hogy van közöttük kettő, melynek távolsága $\sqrt{2}$-nél nem nagyobb.

(H. Davenport és Hajós György)

I. megoldás. Az állítás kétdimenzióban triviális, n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Jobb áttekintés kedvéért az indukciós okoskodást először 2-ről 3-ra végezzük el. Tehát a háromdimenziós gömb felületén adott 5 pontból indulunk ki.

Legyen S e pontok egyike (északi sark). Az S középpontú félgömb (északi félteke) határa (az egyenlítő) egy kétdimenziós „gömb". Ha a többi 4 pont valamelyike a mondott félgömbön vagy határán van (egyenlítőn vagy felette), akkor S-től mért távolsága $\sqrt{2}$-nél nem nagyobb. Legyen tehát mindegyikük e félgömbön kívül (déli féltekén). Feltehetjük, hogy az S-sel diametriálisan átallenes D pont (déli sark) a 4 pont között nem szerepel, mert akkor D-nek s a 4 pont közül bármely másiknak távolsága $\sqrt{2}$-nél kisebb.

A mondott 4 pont mindegyikét egy-egy főkörív (délkör íve) köti össze S-sel, s ez a félgömb határkörét (egyenlítőt) egy-egy pontban metszi. Így e kétdimenziós gömb felületén elhelyezkedő 4 pontot kapunk. Ezek között (az indukciós feltevés értelmében) van kettő, A_1 és B_1, amelyeknek távolsága legfeljebb $\sqrt{2}$. Állítjuk, hogy a 4 pont közül az a kettő, A és B, amelyekből A_1 és B_1 keletkezett, sincs egymástól $\sqrt{2}$-nél nagyobb távolságra.

Tekintsük ugyanis a $D\ A_1\ B_1$ gömbháromszöget. Minthogy ennek oldalai negyedfőkörnél nem hosszabbak (két félmeridián és negyedegyenlítőnél nem hosszabb egyenlítőív), a gömbháromszög csúcsai körül elhelyezett félgömbök mindegyike lefedi a teljes gömbháromszöget s így az A pontot is. Tehát A-nak a gömbháromszög csúcsaitól mért távolságainak egyike sem nagyobb

*V. ö. 20. feladat és megoldásai (II. évf. 76—77. l.)

$\sqrt{2}$-nél; vagyis az A középpontú félgömb is lefedi a teljes gömbháromszöget s így a B pontot is. Tehát az A és B pont távolsága $\sqrt{2}$-nél valóban nem nagyobb.

Ezzel az indukciós okoskodást befejeztük. Bár 3 dimenzióra szövegeztük okoskodásunkat, ez változtatás nélkül helytálló marad n dimenzióra is. Az egyetlen felhasznált s szemléleten alapuló tény ugyanis az volt, hogy egy félgömb a teljes gömbháromszöget tartalmazza, ha annak mindhárom csúcsát tartalmazza. E tény abból következik, hogy ha egy félgömb egy félkörnél rövidebb főkörívnek mindkét végpontját tartalmazza, akkor tartalmazza a teljes főkörívet is, s ez a dimenziószámtól függetlenül igaz. Ugyanis bármely két főkör felezi egymást s így a két végponton áthaladó főkörből a félgömb egy teljes, a két pontot is tartalmazó, félkörívet tartalmaz.

Aczél János

II. megoldás. A 20. feladat II. megoldásának mintájára a feladat állítása így fogalmazható: Az n-dimenziós térben adott $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n+2}$ vektorok között van kettő, melynek skaláris szorzata nem negatív. Ez az állítás $n = 1$ esetben nyilván igaz, feltételezhetjük tehát, hogy helyes $(n-1)$-re is.

Feltehetjük, hogy $\mathbf{a}_i \mathbf{a}_{n+2} < 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$, mert különben nincs mit bizonyítani. Legyen $\mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i + \mathbf{c}_i$, ahol $\mathbf{b}_i \perp \mathbf{a}_{n+2}$ és $\mathbf{c}_i \| \mathbf{a}_{n+2}$. Minthogy $\mathbf{c}_i \mathbf{a}_{n+2} = \mathbf{a}_i \mathbf{a}_{n+2} < 0$, tehát $\mathbf{c}_i = -\beta_i \mathbf{a}_{n+2}$, ahol $\beta_i > 0$. Következőleg $\mathbf{c}_i \mathbf{c}_j = \beta_i \beta_j \mathbf{a}_{n+2}^2 > 0$.

A $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n+1}$ vektorok az $\mathbf{a}_{n+2}$-re merőleges $(n-1)$-dimenziós tér vektorai s így az indukciós feltevés miatt közülük kettőre $\mathbf{b}_i \mathbf{b}_j \geqq 0$. Ekkor azonban

$$\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j = \mathbf{b}_i \mathbf{b}_j + \mathbf{c}_i \mathbf{c}_j > 0,$$

ami állításunkat bizonyítja.

Szele Tibor

A 35. feladat megoldását beküldötték még: Blum Ottó, Császár Ákos, Kővári Tamás, Vincze István.

PÉLDAROVAT

(Középiskolai anyagot kiegészítő példák)

Szerkeszti: VARGA TAMÁS

Beköszöntő.

A Bolyai János Matematikai Társulat igyekszik minél több oldalról segítséget nyújtani az általános és középiskolai tanár tagtársak munkájához. Ilyen segítségnek szánjuk lapunknak ezt a most induló rovatát is.

Rovatunkban nem akarjuk túllépni a középiskolai tananyag kereteit: olyan feladatokat fogunk kitűzni, amelyek a tananyaghoz tartoznak, vagy azzal szoros összefüggésben vannak, de nehezebb, kevésbbé ismert, vagy a középiskolában elhanyagolt kérdésekhez kapcsolódnak. Ilyen ismertetőjelek alapján szokás kiválasztani a matematikai szakkörök anyagát is — valóban, rovatunk egyik célja az, hogy anyagot, szempontokat, ötleteket adjon a kartársak szakköri munkájához. Azt akarjuk, hogy azok a pedagógusok, akik résztvesznek a feladatok megoldásában, ne érezzék ezt külön tehernek, hanem inkább segítségnek munkájukhoz.

Kapcsolatban akarunk maradni a pedagógusok szakmai továbbképzésének anyagával is. Nem egy feladat megoldását meg fogja könnyíteni a Kartársak számára, ha tájékozottak az egyéni tanulás anyagában, többek között a BRAGYISZ matematikai módszertana által felvetett kérdésekben. Megfordítva is: a feladatok megoldása lehetővé fogja tenni, hogy a Kartársak az ott felvetett problémákban aktív munkájuk révén alaposabban elmélyüljenek.

A pedagógusok most, a munkásosztály példáját követve, harcba szálltak munkájuk minőségének állandó javításáért. Nem közömbös, hogy feladatmegoldó készségük milyen színvonalon van, és mit tesznek ennek a színvonalnak az emeléséért.

. . .

A megoldásokat kérjük a Társulat címére (Bp. V, Reáltanoda-utca 13—15.) beküldeni. A borítékra írjuk rá feltűnően: PÉLDA-

ROVAT. Minden megoldást külön lapra írjunk. Tömör, világos, egyszerű megoldásokat várunk. Lapunkban közölni fogjuk minden feladatnak egy vagy több megoldását és az összes helyes megoldók nevét. Várunk közlésre szánt feladatokat is, lehetőleg megoldással együtt.

1. Mint ismeretes, a régi egyiptomiak $3+4+5$ egyenlő részre osztott kötéllel tűztek ki derékszögeket. Bizonyítsuk be ennek az eljárásnak a helyességét. (PYTHAGORAS tételéből ez nem következik!)

2. STEINHAUS: „Matematikai kaleidoszkóp" c. könyvének első lapján bemutatja, hogyan lehet egy négyzetet egyenlőoldalú háromszöggé átdarabolni. Közelítsük meg ennek az átdarabolásnak az alapgondolatát a következőképpen:

1° Daraboljunk át egy parallelogrammát olyan parallelogrammává, amelynek

a) egy oldala ugyanakkora, mint az eredeti parallelogrammáé, egy szöge pedig adott;

b) egy oldala adott;

c) egy oldala és egy szöge adott.

2° Daraboljunk át egy egyenlőoldalú háromszöget parallelogrammává, majd ezt a fenti módon négyzetté.

3° Egyszerűsítsük a megoldást úgy, hogy az idomokat minél kevesebb darabra kelljen szétvágni.

3. *a)* Ábrázoljuk a következő függvényeket:

$$y=\sqrt{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{x}{2}-2\right)^2}; \qquad y=\sqrt{(x-3)^2}-\sqrt{(x-1)^2};$$

$$y=1{,}5\sqrt{(x+1)^2}-0{,}5\sqrt{(x-1)^2}; \qquad y=x+\sqrt{x^2}$$

b) Milyen feltétel mellett tudunk egy töröttvonalat egyetlen algebrai kifejezéssel (függvénnyel) jellemezni?

c) Írjuk fel az adott feltételnek eleget tevő töröttvonalak egyenletét!

(Hogy az egyértelműséget biztosítsuk, a négyzetgyök értékét mindig pozitívnak vesszük.)

4. Adva van a síkban négy pont. Szerkesszük meg az összes olyan köröket, amelyek mind a négy ponttól egyenlő távolságban haladnak! (Hogyan függ a megoldások száma a pontok helyzetétől?)

Beküldési határidő: a lap megjelenésétől számított 1 hónap.

KÖNYVISMERTETÉSEK

Szász Pál: A differenciál- és integrálszámítás elemei, (teljesen átdolgozott és lényegesen bővített második kiadás. Budapest, 1951, Közoktatásügyi Kiadóvállalat, XVI + 703, VIII + 606 oldal.)

A legutóbbi évekig terjedelmére nézve igen szerény magyar matematikai irodalomnak egyetlen téren vannak számottevő hagyományai, s ez az analízis területe. Nem tekintve az egyetemi előadások anyagához többé-kevésbbé szorosan kapcsolódó tankönyveket, nem hiányoztak irodalmunkban az olyan művek sem, amelyek a tankönyveknél terjedelemben és elmélyültségben egyaránt többet nyújtanak, és ekként az analízissel való első ismerkedésen már átesett hallgatót az analízis egyes speciális fejezeteivel foglalkozó monográfiák és publikációk tanulmányozásáig elvezetik. Az ilyen műre leghelyesebben a francia „Cours d'Analyse" elnevezés alkalmazható, minthogy ez a műfaj legtisztábban éppen a francia irodalomban alakult ki, ahol több mint fél évszázad óta szinte néhány évenként jelennek meg ilyen jellegű munkák, illetőleg látnak napvilágot régebbi ilyen munkáknak újabb kiadásai. Hasonló szerepet töltöttek be irodalmunkban König Gyula, Beke Manó, és Szász Pál könyvei, melyek nagy mértékben hozzájárultak ahhoz, hogy a magyar matematikusok jelentős része az analízis különböző fejezeteit választotta kutatási területül.

Minden magyar matematikus, de a matematikával foglalkozók szélesebb rétegei is őszinte örömmel fogadják, hogy ezen haladó hagyományaink folytatásaként Szász Pál könyve új, bővített és gyökeresen átdolgozott kiadásban hosszas várakozás után végre megjelent. Nem is helyes tulajdonképpen újra való megjelenésről beszélni, mert az első kiadás anygát a szerző olyan jelentős mértékben kibővítette és a tartalomra nézve változatlan fejezeteket is olyan mélyrehatóan átdolgozta, hogy bátran beszélhetünk egészen új műről, mely az előzőnek felhasználásával, de a szerző gazdag előadói tapasztalatainak értékesítése mellett attól mégis függetlenül íródott.

Tartalmi tekintetben az első kötethez képest a leglényegesebbnek az a változás tekinthető, hogy a könyv a többszörös integrálokat és a komplex változós függvénytan elemeit tárgyaló egy-egy fejezettel bővült. Mindkét gyarapodás jelentős mértékben növeli a munka értékét s így azokat nagy örömmel kell fogadnunk. Az anyag elrendezésében fokozottan érvényesült a logikai szempontok szerint összetartozó témák együttes tárgyalásának elve. Így több olyan tárgy, amely az első kiadásban több részletben került bemutatásra, most egységes előadásban szerepel. Nem tárgyalja pl. a jelen kiadás külön a folytonos függvények integrálját, hanem rögtön a Riemann-integrált ismerteti. Nem tárgyalja külön — a valós számfogalom bevezetése előtt — a racionális tagú számsorozat határértékének fogalmát, hanem előbb a valós számok tulajdonságait tárgyalja, s azután tér rá a határérték elméletére.

Változatlanul megmaradt a könyvnek az a jellegzetes vonása, hogy az egyes tételek illusztrálására és alkalmazására szolgáló példákat ugyanolyan gondosan részletezi, mint az általános elmélet eredményeit, s így a tárgyalt anyagot és annak alkalmazásait nem választja külön, hanem egy egységbe fogja össze. Bár ez a tárgyalásmód kétségtelenül megóvja az olvasót attól a hibától, hogy a gazdag példaanyagban való elmélyülést elmulassza, másrészt viszont az eredmények közötti tájékozódást bizonyos mértékben megnehezíti. Bizonyára segített volna ezen a nehézségen az egyes paragrafusoknak címekkel való ellátása, illetőleg ezeknek a címeknek az illető paragrafus élére való állítása (minthogy ezek a címek csupán a tartalomjegyzékben vannak feltüntetve).

Az első fejezet mindjárt a valós számok bevezetésével kezdődik. Az első kiadástól eltérően, ahol a Cantor-féle módszert követte, a szerző most a pozitív valós számokat mint végtelen tizedestörteket értelmezi s ezen definíció alapján mutatja meg ismert tulajdonságaikat. Igen szerencsésnek kell tartanunk ezt a kevésbbé elvont és gyorsan célhoz vezető eljárást, melyet a szerző először egyetemi előadásaiban dolgozott ki. Ugyancsak sok előnnyel jár az a körülmény, hogy a számhalmaz felső határára vonatkozó tételt rögtön a valós számok bevezetése után találjuk, úgy hogy ez a hasznos fogalom kezdettől fogva rendelkezésre áll. További jelentős egyszerűsítés az egyenesdarabok mérésének a végtelen tizedestörtekre alapított elmélete, szemben az első kiadásban alkalmazott lánctörtekkel. A számtani, geometriai és harmonikus középérték közötti egyenlőtlenség és a körmérés elméletének tárgyalása után a monoton sorozatok határértékének fogalmát vezeti be a szerző s azt bőséges példákkal illusztrálja. Ezután kerül sor a függvényfogalom bevezetésére s az egyváltozós függvény határértékének fogalmára. Erre épül a folytonos függvény fogalma, s ezután a zárt intervallumban folytonos függvények alaptulajdonságai. Most következik a számsorozat határértékének fogalma, mint a függvény határértékének speciális esete, majd a többváltozós értékrendszerekkel kapcsolatos fogalmak és a többváltozós függvény határértékére és folytonosságára vonatkozó tudnivalók kerülnek sorra. Talán helyesebb lett volna itt a tartomány szó helyett a ponthalmaz elnevezést használni, tekintve, hogy csaknem egyöntetű megállapodás ma már tartományon nyílt és összefüggő ponthalmazt érteni.

A második fejezet a differenciálhányados fogalmának bevezetése és geometriai jelentésének megbeszélése után alkalmazásként a polinomokra vonatkozó Taylor-formulát és annak alkalmazásait tárgyalja. Majd a függvények menetének vizsgálatára vonatkozó ismert szabályok következnek, mégpedig a szokásostól eltérően a középértéktétel felhasználása nélküli tárgyalásban. Csak ezután kerül sor a középértéktételekre és a Taylor-formula maradéktagjára. Ehhez csatlakozik a parciális derivált fogalmának bevezetése és a többváltozós függvény lokális szélsőértékének létezésére vonatkozó szükséges feltétel ismertetése és alkalmazásai. Most következik a Riemann-féle integrál-fogalom bevezetése és alaptulajdonságainak tárgyalása, majd a korlátos variációjú függvények tulajdonsagainak ismertetése s az integrálszámítás két középértéktétele. Ezután tér rá a szerző a határozatlan integrál fogalmára s a határozott integrállal való kapcsolatára. Az integrálszámításnak a területek számítására való alkalmazásával kapcsolatban részletes tárgyalásra kerül a Jordan-féle területfogalom, a sokszögek területmérését ismertnek tételezve fel, s a külső és belső területet a szokásos módon vezetve be.

A harmadik fejezetben kerül sor az elemi függvények bevezetésére és tulajdonságaik ismertetésére. Először a természetes logaritmust vezeti be a szerző a

$$\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

képlet segítségével, s az e^x függvényt ennek inverzeként értelmezi, majd a hatványozás műveletét az

$$a^b = e^{b \log a} \quad (a > 0)$$

képlet alapján általánosítja tetszés szerinti kitevőre. Ezután az arc tg x függvény főértékét vezeti be, geometriai okoskodással igazolva a

$$\mathrm{tg}\left(\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}\right) = x$$

képletet s ismertnek téve fel a tangens-függvény geometriai jelentését. Ezután azonban az

$$(\mathrm{arc\ tg}\, x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

képletből kiindulva a geometria eredményeinek felhasználása nélkül értelmezi a szerző az arc tg x függvény többi értékeit, ezen többértékű függvény inverzeként a tg x függvényt, majd a félszög tangensére vonatkozó képletek alapján a sin x és cos x függvényeket. Ez a tárgyalás ugyan valamivel nehézkesebb, mint a trigonometrikus függvényeknek hatványsoraikkal való értelmezése, de sokkal közvetlenebbül hozható kapcsolatba ezen függvények geometriai jelentésével. Már e helyen tárgyalásra kerül a Riemann-féle lemma és a Fourier-féle sorok elméletében oly nagy szerepet játszó néhány trigonometrikus összegképlet. E fejezethez csatlakozik azután a L'Hospital-féle szabály, a Cauchy-féle függvényegyenletek, s az eddigieknek igen sok, nagyrészt geometriai alkalmazása.

A negyedik fejezet túlnyomó részét az integrálszámítás technikájának ismertetése alkotja, itt kerül továbbá tárgyalásra a rektifikálható sík- és térgörbék elmélete, valamint a forgási felületek felszínének számítása. Függelékként — a részlettörtekre való bontás elméletéhez csatlakozva — a komplex számok bevezetése után az algebra alaptételének igen kevés segédeszközt használó Argand—Cauchy-féle bizonyítását találjuk.

Az ötödik fejezet a végtelen sorok elméletével foglalkozik. Bevezetésül szolgálnak a Cauchy-féle s az azok általánosítását képező Toeplitz-féle határértéktételek. Ezután következik a konvergens és divergens sor fogalmának bevezetése s a konvergens sorok alaptulajdonságai. Majd az elemi függvények hatványsorainak ismertetése kerül sorra, mégpedig a Taylor-féle együtthatóképlet felhasználása nélkül. Ezután tárgyalja a szerző az abszolút konvergens sorok tulajdonságait, valamint a pozitív tagú sorokra vonatkozó konvergenciakritériumokat. A (Cesàro-féle értelemben vett) szummábilis sorok és a Hardy—Landau-féle Tauber-típusú tétel tárgyalása után a konvergens sorok szorzására vonatkozó tételek ismertetése következik. Némi egyszerűsödést okoz e részben az első kiadáshoz képest a Toeplitz-féle határértéktétel felhasználása. Ezután a hatványsorok tulajdonságainak tárgyalására tér a szerző, kiegészítve az első kiadás megfelelő pontját a Cauchy—Hadamard-féle tételnek s az Abel- és Frobenius-féle folytonossági tételeknek ismertetésével. Ide csatlakozik a Taylor-sor fogalmának bevezetése és a binomiális sor tárgyalása. Majd az egyenletes konvergencia fogalmával és az egyenletesen konvergens sorok tulajdonságaival ismerkedünk meg, s az Euler-féle összegképletnek és alkalmazásainak ismertetése zárja be a gazdag anyagot nyújtó fejezetet.

A hatodik fejezet a LAGRANGE-féle interpolációról, a SIMPSON-féle közelítő kvadraturáról, az HERMITE-féle interpolációról, a CSEBISEV-féle polinomokról, az ortogonális polinom-sorozatokról, a JACOBI-féle polinomokról, a trigonometrikus polinomokról, végül BERNSTEIN és MARKOV tételeiről szóló pontokat foglalja magában. Ezen részek lényegében az első kiadás megfelelő részeinek változatlan átvételei.

Míg az eddigi fejezetek inkább az anyag elrendezésében és módszertani tekintetben tartalmaztak lényeges változásokat, addig a most következő fejezetek anyagának tekintélyes része új. Így mindjárt a hetedik fejezetben a FOURIER-sorokról szóló, lényegében változatlan pont után bemutatásra kerül ARZELÀ tétele az egyenletesen korlátos függvénysorozatok integrálásáról, majd ennek felhasználásával bebizonyítja a szerző RIEMANN, CANTOR és DU BOIS-REYMOND tételeit az általános trigonometrikus sorokról. A következő, interpoláció-sorozatokról szóló pont anyaga is teljesen új; ebben FABERnek a LAGRANGE-féle interpolációra vonatkozó tételén és GRÜNWALD Gézának a lépcsőparabolákra vonatkozó tételén kívül egyes speciális alappont-sorozatok vizsgálata szerepel. Ugyancsak új FEJÉRnek a LAGRANGE-féle paraboláknak LIPSCHITZ-feltételnek eleget tevő függvény esetén való konvergenciájára vonatkozó tételének ismertetése, valamint FEJÉR, ERDŐS és TURÁN különféle kvadratura-tételeinek bemutatása. A felsorolt részek azért is különösen érdekesek, mert számos eredmény van bennük ismertetve, mely eddig még egyáltalán nem nyert feldolgozást. A fejezetet a gamma-függvény elméletének az első kiadáshoz képest lényegesen kibővített tárgyalása zárja le.

A nyolcadik fejezet első része a másodrendű lineáris differenciálegyenletek elméletét fejti ki, beleértve a megoldások létezésének PICARD-féle bizonyítását is. A fejezet második része az improprius integrálok tulajdonságait ismerteti.

A kilencedik fejezet a kettős integrálok elméletével és különféle alkalmazásaival kezdődik, majd a hármas integrálok alkalmazásait mutatja be. Már itt szerepel a polárkoordinátákra való áttérés szabálya, míg az általános integráltranszformáció elmélete csak később, a többváltozós differenciálható függvények tulajdonságainak ismertetése után kerül sorra. A STOLZ-féle differenciálhatóság fogalmának bevezetése után a vegyes parciálisok egyenlőségére vonatkozó YOUNG-féle tétel és a többváltozós TAYLOR-formula tárgyalására tér a szerző, majd a vonalintegrálok tulajdonságait és a kvadratura-problémával való kapcsolatukat ismerteti. A zárt görbe menti integrál eltünésére vonatkozó alaptételt a CAUCHY-féle integráltételre vonatkozó GOURSAT-féle bizonyítás mintájára bizonyítja be. Az implicit függvényekről szóló pontban kiemelendő az implicit függvényrendszerre vonatkozó tételnek CARATHÉODORYtól származó indukciómentes bizonyítása. Ezután alkalmazásként a feltételes szélsőértékek felkeresésére szolgáló LAGRANGE-féle eljárás ismertetése következik, majd a többszörös integrálok transzformációjának elmélete s a felszínszámítás legegyszerűbb esetének bemutatása, rámutatva a SCHWARZ-féle ellenpélda kapcsán az itt felmerülő óriási nehézségekre.

A tizedik fejezet tartalmazza a komplex változós függvénytan elemeit. A folytonosság és differenciálhatóság fogalmának bevezetése és az elemi függvények értelmezésének komplex változóra való kiterjesztése után a komplex változós függvény integráljának értelmezése következik. Az integrál létezésének s aztán a CAUCHY-féle alaptételnek bizonyításánál a valós vonalintegrálokra vonatkozó, előzőleg már tárgyalt eredményeket használva fel, az alaptétel következményeiként a

Cauchy-féle integrálformulákat és Morera tételét ismerteti a szerző. Ezután a komplex tagú sorok tulajdonságait tárgyalja, a hatványsorok alapvető sajátságain kívül az Abel—Stolz és Frobenius-féle folytonossági tételeket is bemutatja. Ezután a Taylor- és a Laurent-féle sorba való fejtésre vonatkozó tételek, majd a szinguláris helyek osztályozása s a Liouville- és Casorati—Weierstrass-féle tételek következnek. A Parseval-formula és a Cauchy-féle becslési formula bemutatása után a maximum elvét, majd a Schwarz-féle lemmát ismerteti a szerző, majd a Jensen-féle egyenlőtlenség Carathéodorytól és Fejértől származó bizonyítását mutatja be. A reziduum-tétel és kiterjedt alkalmazásai következnek ezután, majd a reguláris függvény inverzét előállító Lagrange-féle megfordító sor s alkalmazásként a Legendre-féle polinomok generátor-sorával kapcsolatos kérdések tárgyalását nyújtja a szerző. Végül a végtelen szorzatok alaptulajdonságainak ismertetése és az elemi függvények nevezetes végtelen szorzatainak bemutatása zárja a gazdag fejezetet.

Bármilyen hosszúra nyúlt is a könyv anyagának ez, a csupán a változtatásoknak kidomborítására szorítkozó ismertetése, mégsem volt lehetséges rámutatni benne akár valamennyi újonnan felvett eredményre, akár valamennyi olyan módszertani újításra, amely a jelen kiadásnak értékét a hozzáértő szemében fokozza. Meg kell mindamellett említenünk néhány olyan szempontot is, amelynek tekintetében a változást nem tartjuk szerencsésnek, illetőleg hiányoljuk az első kiadásban követett módszernek megjavítását.

Így helyesnek tartottuk volna az első kiadás sok tekintetben nehézkes stílusát, még a szöveg tömörségének feláldozása árán is, könnyebben olvashatóvá tenni. Helytelennek tartjuk azt is, hogy több esetben a szerző az egyes tételeknek általánosan elterjedt egyszerű bizonyítását kevesebb segédeszközt megkívánó, de hosszadalmasabb meggondolásokkal helyettesíti. Kiemeljük ebben a tekintetben az egyváltozós folytonos függvények alaptulajdonságainak Bolzano—Weierstrass-tétel nélküli bizonyítását, az exponenciális és logaritmus-függvény végtelenhez tartásának rendjére vonatkozó állításoknak a harmonikus soron keresztül való igazolását, a függvények monotonitási viszonyaira vonatkozó szabályoknak a Lagrange-féle középértéktétel felhasználása nélküli tárgyalását, az elemi függvények Taylor-sorainak előállítását stb. Különösen indokolatlannak találjuk az ilyen eljárást akkor, amikor a szokásos módszernél felhasznált segédeszközt a könyv amúgyis tárgyalja. Igen sok esetben hiányoljuk azután az egyes tételek jelentőségének kidomborítására, összefüggéseik aláhúzására, alkalmazási lehetőségeikre rámutató összekötő szövegeket. Logikai szempontból az ilyen ú. n. Landau-stílus persze kifogástalan, de ne feledjük el, hogy Landau könyveiben az egyes fejezetek élén az illető fejezet tartalmát bizonyítások nélkül ismertető, a tárgykör történetét és fejlődésének irányát kidomborító összefoglalások állanak! Ilyen összefoglalások nélkül az egyes fejezetek főeredményei fölötti áttekintés, különösen a részletesen kidolgozott számos példa következtében, rendkívül nehézzé válik.

Igyekeztünk ismertetésünkben Szász Pál e hatalmas munkájának jelentőségét matematikai irodalmunkban, hibáinak feltüntetése mellett is, megfelelően ecsetelni. Befejezésül legyen talán szabad Fejér Lipótnak az előszóban írt sorait idéznünk: „Mélyen meg vagyok győződve arról, hogy Szász Pál művének ez az újabb kiadása is bármely országban meleg fogadtatásra találna."

Császár Ákos

Falesz Mihály és társai

(Széljegyzetek Berezanszkaja „Számtani feladatok és gyakorlatok gyűjteménye" c. könyvének magyar fordításához.)

Matematikatanításunk fejlődésében egy-egy szovjet könyv magyar nyelvű megjelenése fontos állomást szokott jelenteni. Gondoljunk csak NYIKITYIN „Szöveges feladatok megoldása az általános iskolában" című, egyszerű nyelven megírott, de egyszerűségében is mélyreható, nagy távlatokat nyitó könyvére. Vagy gondoljunk BRAGYIS művére, A középiskolai matematikatanítás módszertanára, amely hónapok alatt matematikatanárok ezreinek vált állandóan forgatott kézikönyvévé.

Nem ismerjük azokat a szempontokat, amelyek BEREZANSZKAJA most megjelent könyvének kiadásakor felmerültek. Ha a módszertani felépítést nézzük, erre vonatkozólag sokkal többet mond a pedagógusoknak CSICSIGIN példákkal is gazdagon illusztrált könyve, „A számtantanítás módszertana", vagy akár BRAGYIS könyvének idevágó fejezetei. Egy ilyen könyv kiválasztásában tehát elsősorban a szöveges feladat-anyag játszhatott szerepet. Olyan feladatokra van szüksége a pedagógusoknak, amelyek jól tükrözik a világot, didaktikailag jól beillenek a tananyagba, változatosak nemcsak tárgyi, hanem logikai vonatkozásban is, a lehetőség szerint gyakorlati jellegűek, de nem álgyakorlatiak, a gyakorlat lényegtelen részletkérdéseitől nincsenek agyonkomplikálva és mégsem hamisítják meg a valóságot. Berezanszkaja sok tekintetben jól bevált könyvének ezek éppen nem a legerősebb oldalai. Bragyisz például ezt írja róla: „. . . sok benne az álgyakorlati feladat, azaz olyan feladat, amely beszél ugyan a gyakorlati élet kérdéseiről, de azokat egyáltalában nem úgy tünteti fel, mint ahogy a valóságban felvetődnek. Olyan valóban gyakorlati feladat, amely az életben csakugyan előfordul, kevés van benne, és ezek is többnyire egykaptafára oldhatók meg". (135. lap.)

Ezért talán még sürgetőbb szükség lett volna olyan könyvek kiadására, mint pl. V. A. IGNATYEV. N. I. IGNATYEV és JA. A. SOR tárgyi és logikai vonatkozásban egyaránt értékes Feladatgyüjteménye, vagy V. A. IGNATYEV, SZ. A. PONOMARJOV és JE. N. OBUHOVSZKAJA könyve, a számunkra egészen új műfajt jelentő Szóbeli feladatok és gyakorlatok gyüjteménye.

Berezanszkaja könyve mégis jó segítség lett volna pedagógusaink számára, ha . . . ha nem éktelenítenék el a magyar kiadást súlyos fordítási hibák.

Nézzük a könyvet elölről. Helyiértéktáblázattal kezdődik, majd errevonatkozó egyszerű példák következnek, ilyenek mint: „Hány százas van egy millióban?" stb. Ember legyen a talpán, aki az ilyenek fordításában hibát követ el. A könyv fordítójának azonban (nem tudjuk, ki az, a neve nem szerepel a könyvön)[1] ez mégis sikerült. „Milyen helyi értékű szám előzi meg a következő számokat: 23, 138, . . ." olvassuk mindjárt a 8. feladatban. A kérdésre nehéz volna válaszolni: 22 kétjegyű, 137 háromjegyű szám, minden jegyüknek más a helyi értéke. Berezanszkaja egyszerűbb problémára gondolt: a számok első jegyét megelőző helyi értéket tudakolta. (Az első számnál: százasok, a másodiknál: ezresek.)

A 12. feladat végén száznyolcvanezer trillió kilencvenezret kell leírni a tanulóknak számjegyekkel. Sajnos, a helyiértéktáblázat ehhez nem nyujt neki segítséget, mert az csak billiókig terjed. Szórakozott volt a könyv szerzője? Nem, inkább a fordító volt szórakozott: a könyv első lapján helyesen fordította az orosz триллион szót billiónak, két lappal később viszont már helytelenül fordította ugyanazt a szót trilliónak. Szórakozottsága megbosszulja magát a következő oldalon, ahol megtudjuk, hogy „a hozzánk legközelebb eső csillag 41 trillió km-re van". Erre akármilyen népszerű csillagászati munka rácáfol: a Tejútrendszer sokmillió csillaga, mind lényegesen közelebb van hozzánk.

Lapozzunk egyet. A 26. feladatban szomorú tényekről értesülünk: „1937-ben a Szovjetunió kolhozaiban 12 000 000 szarvasmarha, 5 300 000 disznó, továbbá 18 700 000 juh és kecske volt. Három évvel később ezekből 5 600 000 szarvasmarha, 2 500 000 disznó, 7 000 000 juh és kecske maradt." Járvány tizedelte meg így a nagy honvédő háborút megelőző években a Szovjetunió kolhozainak állatállományát? Vagy talán ellenséges szabotázscselekmények? Nem, egyik sem. Csupán a fordító nem volt tisztában a всего за 3 года до этого kifejezés értelmével, amely szerint három évvel *előbb* (azaz 1934-ben) *még csak* 5 600 000 szarvasmarha, stb. volt a kolhozokban. Két lappal arrébb ezt olvassuk: „1932-ben a Szovjetunióban 2 694 millió méter gyapjúszövetet szőttek, 1937-ben 754 millió méterrel többet. Tervbevették, hogy 1950-ben 1238 millió méterrel többet fognak szőni, mint 1937-ben..." Jelentéktelennek látszó fordítói tévedés pamutszövet (хлопчатобумажная ткань) helyett gyapjúszövetet írni. De ha a könyvet használó pedagógus, vagy tanuló elolvassa a Szovjetunió gyapjúszövet- (azaz шерстяная ткань) termelésére vonatkozó újabb adatokat, furcsa képe lesz a szovjet textilipar tervteljesítéséről.

Két feladattal alább megint egy meglepő adat üti meg a szemünket: „1940-ben vasúti, vízi és országúti forgalomban km-enként 482 800 millió tonna terhet szállítottak..." Kilométerenként közel fél billió, folyóméterenként majdnem félmilliárd tonna? Hiszen ekkora nyomást egy úttest felülete el sem bír! Sőt nemcsak az úttest felülete, a Föld szilárd kérge is beszakadt volna ekkora terhelés mellett! Szerencsére a szörnyű katasztrófa elmaradt, mert az összes forgalom nem 482 800 millió *tonna/km* volt, ahogyan a szöveget a fordító értelmezte, hanem 482 800 millió *tonnakilométer* (azaz a tonnák számának és a megtett km-ek számának szorzata teszi ki az összes szállított árukra együttvéve ezt a hatalmas számot).

A 9. oldalon szavakban megfogalmazott számpéldák kezdődnek. A magyar szöveg itt általában független az orosztól, de azért rendszerint a magyarnak is van több-kevesebb értelme. Pl.:

76/b az orosz eredetiben: Melyik az a szám, amely 19 911-gyel kisebb, mint 30 303 és 8 393 különbsége?

76/b a magyar változatban: Melyik nagyobb és mennyivel a következő számok közül: 19 911, 30 303, 8 393?

De előfordul, hogy a magyar változatnak egyáltalán nincs is értelme. Például:

86/a az eredeti szövegben: Az egyik összeadandó 70-nel növekedett. Mit kell tennünk a másik összeadandóval, hogy az összeg 90-nel növekedjék? 38-cal növekedjék? 29-cel csökkenjen? változatlan maradjon?

86/a a magyar változatban: Az egyik összeadandó 70. Mikor növekszik az összeg 90-re? Mikor csökken 38-ra? Mikor csökken 29-re? Mikor marad változatlan?

Előfordul az is, hogy magyar változatnak a negatív számok körében volna értelme, csak a pozitív számok körében nincs. Például:

113. Két szám különbsége 3 789, a kisebbítendő 2 906. Mekkora a kivonandó?

114. Két szám különbsége 12 037, a kisebbítendő 7 963. Mekkora a a kivonandó?

Sajnos, a tanulók ebben az osztályban (V. általános) még csak a pozitív számokat ismerik.

Pár lappal odébb megint egy érdekes számadat: „135. A mérlegen 6 340 q burgonya volt. Ebből elküldtek az egyik üzletnek 2 965 q-t, a másiknak pedig 568 q-val kevesebbet, mint az elsőnek. Hány q burgonya maradt a mérlegen?" Képzejük csak el azt a mérleget, amelyen elfér egy hosszú, megrakott tehervonat burgonyarakománya. Az eredetiben persze mérlegről szó sincs, hanem на складе, azaz raktáron van ennyi burgonya. A fordító egyszerűen beírta az első eszébejutó szót, ami szerinte beillett a szövegbe.

A következő oldalon egy feladatban ezt olvassuk: „A papanyidák 1937. május 21-én szálltak partra az Északi Sarkon". Kik ezek a papanyidák? Valami exotikus néptörzs? Vagy talán a nagy szovjet sarkkutató, Papanyin tudományos expedícióját illette a fordító ezzel a furcsa névvel?

Egy lappal odébb megint találunk egy csodabogarat. „Falesz Mihály görög matematikus időszámításunk előtt 585. május 28-ra jósolta a napfogyatkozást." Az eredetiben Фалес Милетский, azaz miletosi Thales áll. A fordító hajdani való Horváth Istvánhoz méltó buzgalommal magyarította meg a derék görög bölcs nevét.

A következő két lapon számpéldák sorakoznak. Ezeket a fordító helyesen fordította. Utána, sajnos, megint jön egy szöveges feladat: „Egy traktor átlag 1 800 ha földet művel meg". Ilyen traktorokat gyártani nem volna kifizetődő dolog. Az orosz szöveg hozzátette: „... egy idényben"; a magyar változatból ez *kifelejtődött.*

Folytassuk a példákat? Talán csak még egyet:

„211. Hat ezüstkanalat vásároltak, amelyeknek súlya 40 gr, és 12 ezüstkanalat, amelyeknek a súlya 23 gr volt darabonként. Mennyit kerestek az eladók, ha egy gr ezüstért 1 rubel 5 kopeket kaptak, és ők az egészért 550 rubelt fizettek."

Magánszektor? Eladói jutalék? Szó sincs róla. Egyszerű fordítói mellé-fogás. Az orosz szövegben szereplő сдача szó nem „eladót" jelent, hanem „visszajáró pénzt". Ennek megfelelően az eredeti szövegnek egészen más az értelme, mint a fordításnak: a kérdés az, mennyi pénz jár vissza 550 rubelből, ha 1 gramm ezüst ára 1 rubel 5 kopek.

A 320 oldalas könyv 24. oldalán járunk és felesleges is, hogy tovább menjünk. Az olvasó hamarabb kimerülne, mint az idézetek.

Mi a véleménye minderről az illetékes szerveknek?

Varga Tamás

FELHÍVÁS

A Gazdasági és Műszaki Akadémia pályázatot hirdet Általános Műszaki I. tanszékén (matematika-fizika) **tanszékvezető főiskolai tanár és főiskolai docensi állásra** és **gazdasági számtan tanszékén főiskolai docensi állásra.**

Bővebb felvilágosítás kapható a Gazdasági és Műszaki Akadémia központi tanulmányi osztályán vagy a Közoktatásügyi Közlöny június 15-i számában.

Gazdasági és Műszaki Akadémia
Budapest
V., Szabadság-tér 17. Telefon: 113—295

Nyomott példány 550

A kiadásért felelős a Tankönyvkiadó Vállalat vezérigazgatója

6851. — Egyetemi Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Janka Gyula igazgató.

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENT

Ára: 7.— Ft.
Előfizetés $\frac{1}{2}$ évre 10.— Ft.

A Bolyai János Matematikai Társulatba belépni szándékozók forduljanak a Társulat elnökségéhez (Budapest V., Reáltanoda-utca 13—15. Tel. 187—330.). Közlésre szánt dolgozatok (lehetőleg gépírással s a lap egyik oldalát használva) a Lap szerkesztőségéhez ugyanoda küldendők (Budapest V., Reáltanoda-utca 13—15.).

Kérjük cikkíróinkat, hogy amennyiben különlenyomatra tartanak igényt, cikkük kefelevonatának visszaküldésekor ezirányú kívánságukat a kért különlenyomatok számának megjelölésével feltétlenül jelentsék be.

Kedves Olvasónk!

A Matematikai Lapok c. folyóirat megjelenésének időpontja technikai okok következtében — nem egy esetben — változott. Ez a folyóirat küldésében zökkenőt okozott, mert vállalatunknak nem áll módjában minden alkalommal értesítést küldenie előfizetőinek a megjelenésről. A folyóirat zavartalan megküldése érdekében kérjük tehát, hogy az előfizetési díjat ($\frac{1}{2}$ évre 10.— Ft) rendszeresen és előre a Posta Közp. Hírlapiroda 61.256. sz. csekkszámlájára befizetni szíveskedjék.

Megjegyezzük azt is, hogy az elmúlt évtől eltérően — a folyó évben csak egyfajta előfizetési ár van. A példányszámonkénti vásárlási ár pedig magasabb, mint az előfizetési ár.

Tankönyvkiadó Vállalat

Nyomott példány 550

A kiadásért felelős a Tankönyvkiadó Vállalat vezérigazgatója

6851 — Egyetemi Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Janka Gyula igazgató — 9-3

MATEMATIKAI LAPOK

III. ÉVFOLYAM

2.

SZÁM

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT
BUDAPEST, 1952

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenként négyszer.
Budapest, 1952. november. III. évfolyam 2. szám.
Felelős szerkesztő: Turán Pál.
Szerkesztők: Hajós György, Kalmár László, Rényi Alfréd, Szele Tibor.
Szerkesztőség: Budapest V, Reáltanoda-utca 13—15. Telefon: 187—330.
Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó Budapest V. Alkotmány-utca 21. III. Telefon: 424—595, 424—589, 420—330.
Felelős kiadó: Mestyán János.
Terjeszti a Posta Központi Hirlapiroda Vállalat Budapest, V., József Nádor-tér 1. Telefon: 180-850.
Előfizetés, személyes ügyfélszolgálat József Nádor-tér 1. Üzlethelyiség. Telefon: 183—022.
Előfizetés egy évre 20.— Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

Bolyai János

Írta: Alexits György

Bolyai János 150 évvel ezelőtt, 1802 dec. 15-én született Kolozsvárt. Már zsenge gyermekkorában feltűnt rendkívüli matematikai képessége. Apja, Bolyai Farkas tanítványa volt a marosvásárhelyi kollégiumban, 1818-tól kezdve pedig a bécsi hadmérnöki akadémia tanulója. Amikor 1823-ban, — alig 21 éves korában — alhadnagyként Temesvárra került, elküldte apjának azt a matematika történetében híres levelet, amelyben megírta, hogy „semmiből egy új, más világot teremtettem”. Mint azóta tudjuk, ekkor fedezte fel a nem-euklideszi geometria egyik alapvető tételét: ez az 1831-ben megjelent Appendix 29. §-ának a lényege. Az Appendixet abban az időben Gausson kívül senki sem értette meg. A tudományos tisztánlátás még nem emelkedett olyan fokra, hogy a nem-euklideszi geometria felfedezésének egész világszemléletünkre kiható voltát a tudományos közvélemény kellően értékelni képes lett volna. Gauss, mint ismeretes, egy levelet írt Bolyai Farkasnak, amelyben elismerte ugyan az Appendix értékét, ugyanakkor azonban párhuzamot vont az Appendix és saját kiadatlan és részben befejezetlen kutatásai között. Ez a szokatlan prioritási igény méltán bántotta Bolyai Jánost, aki épp abban az időben, 1832-ben a katonai pályán is válságba jutott; 1833-ban nyugdíjba küldték, mint másodosztályú mérnökkari kapitányt évi 280 forint illetménnyel. A betegeskedő Bolyai János tehát 31 éves korától fogva haláláig arra volt kárhoztatva, hogy ilyen, csupán a legszerényebb szükségletek kielégítését megengedő jövedelemből tengesse életét. Hosszú ideig, 12 évig, Domáldon lakott, egy kicsiny, primitív falucskában, ahol még a 120 év előtti kisvárosi kultúra sem hatolt be, de még itt sem sorvadt el teljesen matematikai alkotásvágya. Egy lipcsei pályázatra elküldte Responsio néven ismert munkáját, amelyben a komplex számok elméletét dolgozta fel olyan — mondhatnánk modern — szellemben, amely abban az időben (1837) messze túlhaladta kora tudományos felfogását. Kortársai természetesen a Responsiot sem értették meg. 1846-tól Marosvásárhelyt lakott, ahol azonban senkivel sem tudott kapcsolatot találni, mert haladó eszméit visszautasították az ottani félig feudális, félig kispolgári gondolkodású értelmiségiek. 1850 és 1855 között még dolgozott a metematikai térelméletét megalapozó „Raumlehre” című művén, de akkor már betegeskedése nagyon elgyengítette s így csak egy töredék maradt utána. Ennek ellenére a töredékes munka is igen jelentős, perspektívát megnyitó gondolatokat tartalmaz: itt kezdi meg egy új, s csupán az ő halála után kifejlődött tudományág, a felületek topológiájának a megalapozását. Mindenkitől elhagyottan halt meg 1860 január 18-án. Bolyai János szomorú élete nem csupán egy lángész egyéni drámája, hanem a társadalom belső harcaiból fakadó tragédia. A polgári történetírás mindezt nem ismerte és nem is ismerhette fel, mert akkor egyszersmind le kellett lepleznie a tőkés gazdálkodáson alapuló társadalom ellentmondásait is.

Sorsának szerencsétlen alakulása tulajdonképpen már akkor megkezdődött, amikor apja kénytelen volt őt a bécsi hadmérnöki akadémiára küldeni. Bolyai Farkasnak ugyanis nem volt elég pénze fia taníttatására, ezért nagybirtokos arisztokratától kellett támogatást szereznie. A reakciós arisztokrácia pedig a bécsi katonaiskolába menni szándékozó tehetséges ifjakat szívesen támogatta, mert azt remélte, hogy ott császárhű katonatiszteket nevelnek belőlük s ezzel gyengítik a „rebellis” kis- és középnemesek sorait. De Bolyai Jánosnak nem kellett a császári tisztek rettenetes korlátoltságú élete. Matematikusnak született, tehát matematikával akart foglalkozni — és 17 éves korától kezdve minden szabad idejében azzal is foglalkozott. Ez volt Bolyai János és az akkori osztálytársadalom közötti első összeütközés. Ennek pedig szükségszerűen létre kellett jönnie abban a társadalomban, amely egy rendkívüli lángész megélhetését legfeljebb azzal volt képes biztosítani, hogy helyet adott neki az uralkodó osztály elnyomó szervezetében, a katonatisztek között, de cserébe természetesen az uralkodó osztály feltétel nélküli kiszolgálását és zseniális gondolatai háttérbe szorítását követelte tőle.

Bolyai János korszakalkotó felfedezése, az abszolút geometria, Bolyai életében nem talált megértésre. Ennek oka, hogy az ő korában Magyarországon nem volt az exakt matematikai kutatásnak megfelelő társadalmi talaja. A matematikai kutatás értékeléséhez és fejlesztéséhez ugyanis a termelési módnak olyan fokon kell állnia, hogy a társadalomnak legalább *egy* befolyásos rétege érdekelt legyen a matematika haladásában. Ilyen társadalmi réteg pedig csak fejlett, vagy legalább erőteljesen fejlődő gyáripar mellett jöhet létre. A 19. század első felében viszont Magyarországon szinte semmilyen gyáripar sem volt, ennek következtében a matematikai kutatás csak néhány szakember mellékes szórakozása lehetett. Bolyai nagyszerű alkotása tehát — ugyanúgy mint Lobacsevszkijé — szükségszerűen belefulladt az értetlen közöny posványába.

Bolyai János rövidesen rájött, hogy a közte és a környezete közötti súrlódások okai a társadalom szerkezetének a mélyéből fakadnak. Állandóan radikális társadalmi reformokon törte a fejét, számos feljegyzést készített egy megírandó Üdvtanhoz, amely szerinte megmutatta volna az egészséges fejlődés útját. A megmaradt szórványos feljegyzésekből látható, hogy Bolyai e téren is merészen haladó eszméket táplált. Üdvtana jegyzeteiből az utópista szocializmus egyik változatának körvonalai bontakoznak ki. Többek közt azt fejtegeti, hogy a termelést közösen, munkamegosztásos alapon kell végezni, a termékek elosztásának pedig az emberi egyenlőség elve szerint kell történnie. Az egyén rendelje magát alá a közösség szükségleteinek, mert „semmiféle egyéni üdv nem létesíthető vagy nem állhat fenn a közüdv nélkül". Bolyai haladó gondolkodó, utópista forradalmár volt. Társadalmi reformeszméinek haladó volta abban áll, hogy az uralkodó osztállyal szembefordult és a dolgozók jólétét kereste. Ugyanakkor természetesen — a többi ismert utópistához hasonlóan — fantasztikus elképzelések útvesztőjébe keveredett, ami nem csoda: hiszen a fejlődő kapitalizmus ellentmondásai még nem voltak elég élesek ahhoz, hogy a társadalom mozgását szabályozó anyagi erőket világosan felismerhette volna. Épp ezért az utópisták — és köztük Bolyai János is — „a szocializmus megvalósítását a világ hatalmasaitól várták... — írja Sztálin. Ők törvényekkel, nyilatkozatokkal, magának a népnek (a munkásoknak) a segítsége nélkül akarták megteremteni a boldogságot.

A szabadságharc riadója Bolyai Jánost is magával ragadta. Betegeskedése miatt nem tudott ugyan a harctérre menni — pedig azt szerette volna —, de 1848 október 30-án résztvett egy bizalmas katonai tanácskozáson, ahol — Deák Farkas erdélyi történetíró naplója szerint — „... egy tiszta szabatos tervvel állott elő, mely ... egész Erdély megtisztítását magában foglalá". Bolyai haditervének elfogadását — Deák szerint — a honvédségbe beférkőzött reakciósok akadályozták meg. „Bolyai pedig visszatért a magányéletbe, melyet csak e pillanatban hagyott volt el..."

Bolyai János matematikai alkotásának a nagyságát felesleges matematikusok előtt fejtegetni. Annyit azonban meg kell említenünk, hogy az ő — és Lobacsevszkij — kutatásai döntötték meg a matematikai és fizikai tér fogalmának azonosságáról táplált évezredes előítéletet. A Bolyai — Lobacsevszkij — féle geometria derítette fel, hogy a matematikai tér általánosabb a fizikai térfogalomnál: magában foglalja ugyan a fizikait, de annál többet is tartalmaz. Bolyai János ezzel a felfogásával utat nyitott az absztrakt tér eszméje számára, amelyet teljes általánosságban elsőként Fréchet és Riesz Frigyes fejtett ki, majd Hausdorff, Hilbert és számos más kutató fejlesztett tovább. Bolyai lángeszű felfedezésével tehát végső fokon összefüggnek a matematika és a fizika modern elméletének legfényesebb fejezetei.

Bolyai és Lobacsevszkij felfedezései bebizonyították, hogy a fizikai tér matematikailag többféleképpen is leírható, véglegesen összezúzta Kant idealista térelméletét. A Bolyai — Lobacsevszkij — féle geometria tehát erős fegyvert szolgáltatott a materialista világnézet számára. De Bolyai geometriai eszméi egyébként is lényegükben materialista tartalmúak, mert a világ objektív létéből indulva ki, szembefordulnak az anyagi tények önkényes magyarázatával. Bolyai a tőlünk független anyagi valóság legjobb megismerési módját keresi.

Bolyai János forradalmár alkotó volt. Mint kutató matematikus és mint a társadalom problémái iránt érdeklődő ember, egyaránt elutasította a haladást gátló dogmákat, merészen kereste az újat és ha egy gondolat helyességét felismerte, törhetetlenül ragaszkodott hozzá, akármennyi előítéleten kellett is keresztülgázolnia. Ezt a forradalmi merészséget nem tudta neki megbocsátani az uralkodó osztályhoz dörgölődző meghunyászkodók hada. Ezért rontotta meg ennek az óriásnak az életét egy csomó kicsinyes törpe. De Bolyai bízott benne, hogy az emberiségre „leg-alább a' 2000-ik év betelése előtt... eljövend (az üdv) órája". Ez a szilárd meggyőződése és lángeszű felfedezése emeli őt számunkra a nagyok között is a legnagyobbak közé. Mi, akik megértük azt a kort, amelyről Bolyai álmodott, tudjuk, hogy az ő küzdelmei is hozzájárultak fejlődésünkhöz. S a felszabadult magyar matematikusok Bolyai János születésének százötvenedik évfordulóján mély tisztelettel és forró szeretettel hajtják meg a legnagyobb magyar matematikus előtt a hódolat zászlaját.

Jordan Károly matematikai munkásságáról*

Írta: RÉNYI ALFRÉD

Nem könnyű feladatra vállalkoztam, amikor elvállaltam, hogy a mai ünnepi alkalommal, amikor összegyültünk, hogy megünnepeljük Társulatunk köztiszteletben álló díszelnökének, JORDAN KÁROLY-nak 80-ik születésnapját, beszámoljak tudományos munkásságáról. JORDAN KÁROLY munkáinak jegyzéke 69 munkát tartalmaz, ezek között több terjedelmes könyvet. Tudományos munkássága kiterjed a matematikán kívül a meteorológia, a geofizika és a kémia területére. Alábbiakban szinte kizárólag matematikai munkáiról fogok beszélni, azok közül is elsősorban a valószínűségszámítás körébe vágó munkáiról. JORDAN KÁROLY fő érdeklődési köre egész életében a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika volt, egyéb irányú kutatásai mind ehhez kapcsolódnak, — így a differenciaszámítás és az interpoláció terén végzett kutatásai a valószínűségszámítási vizsgálataihoz kapcsolódnak, sőt még a fiatal korában Fiedlerrel együtt írott, konvex és egyéb π-típusúnak nevezett görbékre vonatkozó munkái [4], [5], [6], [7], [8]** is a geometriai valószínűségek vizsgálatából vették eredetüket. Mielőtt munkáinak és főbb eredményeinek ismertetésére rátérnénk, néhány szót kívánok szólni tanulmányairól és élettörténetéről. JORDAN KÁROLY Budapesten született 1871. december 16-án. Középiskoláit Budapesten, egyetemi tanulmányait Párisban az École Monge-on, Zürichben a Polytechnikumon, ahol vegyész oklevelet nyert, továbbá Manchesterben és Genfben végezte. A genfi egyetemen 1895-től 1898-ig mint tanársegéd és magántanár működött, majd visszatérve Budapestre az egyetemen földrengéstani, csillagászati és matematikai tanulmányokat végzett. Doktori oklevelét Genfben nyerte el, kémiai tárgyú disszertációjával [1]. 1906-tól 1913-ig a Budapesti Földrengés Számoló Intézet vezetője volt. Ebből az időből származik a földrengési hullámok terjedésére vonatkozó értekezése [3]. Az első világháború alatt mint meteorológus működött.

* A Bolyai János Matematikai Társulat által JORDAN KÁROLY 80. születésnapja alkalmából 1951. december 16.-án rendezett ülésen tartott előadás.

** A számok a cikk után közölt jegyzékre vonatkoznak.

A valószínűségszámítás alkalmazása a meteorológiában egyik kedvelt témája: ezzel foglalkoznak [2], [28], [51], [64] és [66] dolgozatai. 1920-tól kezdve tartott előadásokat a budapesti Közgazdasági Egyetemen, ahol 1923-ban magántanári képesítést, 1933-ban rendkívüli tanári és 1940-ben nyilvános rendes tanári címet nyert. Előadásait ma is folytatja a Műszaki Egyetemen. Munkássága elismeréséül a Magyar Tudományos Akadémia 1947-ben levelező tagjává választotta.* A felszabadulás előtt csak kevés elismerésben volt része. 1928-ban matematikai munkásságáért az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat KŐNIG GYULA jutalommal tüntette ki. Ez alkalommal SZŰCS ADOLF ismertette munkásságát; ismertetéséből,** amely a *Math. és Phys. Lapok*ban jelent meg, idézem a következő mondatokat:

„a valószínűségszámítás és a vele kapcsolatos problémák foglalták le elsősorban JORDAN KÁROLY figyelmét. Érdeklődése kétirányú: egyrészt az alapfogalmak felállítása és a főtételek általános levezetése foglalkoztatták, másrészt régi és új valószínűségi problémák számításra jól használható alakban való megoldása. Emellett teljesen úrrá lett az alkalmazások igen széles területén, a matematikai statisztikában, amely új problémáinak felvetését sugalmazta és egyúttal alkalmat adott neki a talált megoldások gyakorlati értékének bebizonyítására."

Magam részéről JORDAN valószínűségszámítási munkáiból a következő három jellemző vonást emelem ki: 1. munkái a valószínűségszámítás klasszikusai eredeti munkáinak beható tanulmányozáson alapuló, mélyreható ismeretéről tanúskodnak és munkásságában határozott enciklopédikus törekvések tapasztalhatók: JORDAN mindig arra törekszik, hogy munkáiban összegezze, egyszerűsítse és ezek alapján kiegészítse és továbbfejlessze a valószínűségszámítás nagy klasszikusainak, így MOIVRE, MONTMORT, BAYES, a BERNOULLIak, POISSON és LAPLACE munkáit. *Elmondhatjuk, hogy a valószínűségszámítás klasszikus elmélete* JORDAN *munkáiban tetőpontját érte el.* 2. JORDAN enciklopédikus törekvései mellett igen éles kritikával és az alapvető kérdések világos és logikus felvetésével foglalkozik elődeinek munkáival. Ennek következtében, míg konkrét problémafelvetésben és vizsgálatainak tárgykörében JORDAN munkássága a valószínűségszámítás klasszikus elmélete körében marad, kritikai megjegyzéseivel a valószínűségszámítás újabb fejlődését is elősegítette. Amint már egyszer alkalmam volt erre rámutatni, bizonyos értelemben a szovjet valószínűségi iskola, közelebbről KOLMOGOROV

* Ezen előadás elhangzása óta 1951. április 4.-én, felszabadulásunk ünnepén a Magyar Népköztársaság Elnöki Tanácsa JORDAN KÁROLYt a Magyar Népköztársasági Érdemrend V. fokozatával tüntette ki.

** SZŰCS A.: Jelentés az 1928. évi KŐNIG GYULA jutalomról. *Math. és Phys. Lapok* 1929. 61—69. o.

elméletének egyik alapgondolatának csíráját megtaláljuk JORDAN egyes cikkeiben. Hasonlóképpen érdekesek és értékesek JORDAN kritikai megjegyzései újabb statisztikai irányokról, mint például a PEARSON-féle χ^2-módszerről. A statisztikában ma a haladó és reakciós irányzatok közötti harc szempontjából feltétlenül pozitíven értékelendők JORDANnak a BAYES-féle módszerre vonatkozó megjegyzései. Ezekről alábbiakban részletesen be fogok számolni.

3. JORDAN valószínűségszámítási munkáinak harmadik jellemző vonását abban látom, hogy egyrészt állandóan szem előtt tartotta a gyakorlati alkalmazásokat, széles természettudományos érdeklődésére és képzettségére támaszkodva, ugyanakkor pedig behatóan foglalkozott azzal is, hogy az elméleti eredményeket a numerikus számolásra minél alkalmasabb formába öntve a gyakorlati alkalmazásokat elősegítse. Ez a törekvése csatlakozik ahhoz a jellemvonásához, hogy JORDAN vérbeli tanár: 32 éves tanári működése mellett összes munkáiban érezhető az a törekvés, hogy a tárgyalt kérdéseket minél világosabban, közérthetőbben adja elő és ezzel a megértést és alkalmazást biztosítsa. Ezzel egyben arra is rá kívánok mutatni, hogy az enciklopédikus törekvés nála nem öncél, hanem azért igyekszik összefoglalni és egyszerűsíteni az előtte elért eredményeket, hogy azok megértését és sikeres felhasználását minél hathatósabban elősegítse.

Rátérek ezután JORDAN néhány konkrét eredményének ismertetésére, anélkül természetesen, hogy teljességre törekedném. A valószínűségszámítás klasszikus problémakörének jellemző kifejezésmódja az „urnaprobléma". (SZÜCS A. megállapítása szerint az urnaproblémák ugyanazt a szerepet játsszák a valószínűségszámításban, mint a geometriában az ábrák. Ehelyett azt mondanám, hogy az urnaproblémák a matematikai modellek iskolapéldái.) Ezt a problémakört általánosítja JORDAN [29] dolgozata, amelyben többek között a következő kérdést veti fel: a PÓLYA—EGGENBERGER-féle problémánál,* azaz amikor minden kihúzott golyóval együtt h ugyanolyan színű golyót teszünk vissza az urnába, mi a valószínűsége annak, hogy piros golyót először a $k+1$-ik húzásra húzzunk ki? Bevezetve a generátorfüggvényt, amely ez esetben hipergeometrikus függvény segítségével fejezhető ki, kiszámítja a momentumokat és azok összefüggéseit. Erre a problémára egy BRÓDI IMRE által felvetett fizikai probléma vezette JORDANt. Ebből kiindulva általánosítja a problémát arra az esetre, amikor az urna kettőnél több

* Ezt a problémát helytelenül tulajdonítják PÓLYA GYÖRGYnek és F. EGGENBERGERnek, ugyanis a problémát A. A. MARKOV jóval előbb — már 1917-ben felvetette és megoldotta. 1. A. A. Марков, О некоторых предельных формулах исчислении вероятностей, Избранные Труды, 1951, Академия Наук СССР, 575—585 o. A problémát tehát helyesen MARKOV-féle problémának kellene nevezni.

színű golyót tartalmaz. A generátorfüggvények ez esetben ú. n. LAURICELLA-féle többváltozós hipergeometrikus függvények.

Számos dolgozata vonatkozik közelítő képletek nyerésére ismert valószínűségszámítási képletekre. Ilyen például a POISSON-féle probléma: egy kísérletet n-szer egymásután hajtunk végre, az i-ik kísérletnél az A esemény valószínűsége p_i, mi a valószínűsége, hogy az A esemény az n kísérlet közül k kísérletnél következik be? Ha p_i nem függ i-től, a jólismert BERNOULLI-féle binomiális eloszlást nyerjük. A szóbanforgó kifejezést JORDAN a $G_k(t, x) = = e^t t^{-x} \frac{d^k}{dt^k}(e^{-t} t^x)$ polinomok szerinti sorba fejti ki és már néhány taggal jó közelítést ér el [24]. A $G_k(t, x)$ polinomok az $x = 1, 2, \ldots$ diszkrét értékkészleten ortogonálisak a $\psi = \frac{e^{-t} t^x}{x!}$ súlyfüggvényre vonatkozólag. Az $1, 2, \ldots, N$ helyekből álló halmazon ortogonális polinomokkal foglalkozik több más munkájában és ezeket felhasználja a legkisebb négyzetek elve alapján polinomokkal való legjobb közelítés olyan meghatározására, ahol ha a pontosság nem kielégítő és emelni kívánjuk a fokszámot, úgy csak egy új tagot kell hozzávennünk a kifejtéshez. Ezek a polinomok már CSEBISEV előtt ismeretesek voltak és az ő általános elméletéből speciális esetként adódnak.

Hasonlóképpen foglalkozik a polinomiális eloszlás közelítésének kérdéseivel is. A konkrét valószínűségi problémák közül, amelyekkel JORDAN foglalkozott, megemlítem még SIMMONS egy tételére vonatkozó dolgozatát [60], a POINCARÉ-féle képlet általánosítását [48], a MONMORT—MOIVRE tételre vonatkozó cikkét [14]. Áttérek ezután a valószínűségszámítás elvi kérdéseire vonatkozó dolgozataira; [18], [31], és [36] sz. dolgozatai foglalkoznak ezzel a témával. JORDAN leglényegesebb megállapítása, hogy a valószínűségszámítás klasszikus elmélete, amely az egyenlő valószínűségű esetek leszámlálásán alapszik, lényegében halmazelméleti tartalmú: különböző halmazok elemszámára vonatkozó tételekből áll, amelyek a valószínűségszámítási interpretációtól függetlenül érvénnyel bírnak. Ez a megállapítása azért jelentős, mert ő volt az első, aki a valószínűségszámítás pusztán matematikai elméletét különválasztotta az eredmények interpretációjával kapcsolatos bonyolult ismeretelméleti kérdésektől. Bár kétségtelen, hogy ezen kérdések megoldását nem kerülhetjük el és igen helytelen is volna elkerülni próbálni, annak hangsúlyozása, hogy a valószínűségszámításban is módszertanilag különválasztható a matematikai apparátus és az interpretáció kérdése, azért szükséges, mert ez felveti az interpretáció szükségességét és a matematikai apparátus alkalmazhatósága megvizsgálásának nélkülözhetetlenségét. Lényegében KOLMOGOROV is ezt teszi, azzal az igen lényeges eltéréssel, hogy nem szorítkozik a klasszikus elméletre, hanem azt messzemenően általánosítja. JORDAN álláspontja materialista álláspont, bár ez nála nem teljesen tudatos. Inkább ösztönösen, de azért mégis teljes határozottsággal elutasítja a valószínűség és gyakoriság összekeverésére irányuló machista, pozitívista kísérleteket, így elsősorban MISES elméletét. [36] munkájában rámutat MISES elméletének néhány alapvető fogyatékosságára: arra, hogy MISES felteszi, hogy a gyakoriság ingadozásai nem szűnnek meg a kísérletek számának növelésével és hogy MISES csak végtelen sok kísérlet esetében adja a valószínűség definícióját, míg valójában mindig csak végessok kísérlet áll rendelkezésünkre. JORDAN álláspontja nem teljesen következetes: ő tulajdonképpen a szubjektív valószínűségfogalom híve, ugyanis az objektív valószínűségfogalmat azonosítja MISES elméletével, ezért bírálja. Az említett három cikk közül az elsőben [18] háromféle valószínűségfogalmat különböztet meg: a matematikai valószínűségfogalmat, az empirikus valószinűséget (= gyakoriság) és a filozófiai valószínűséget (= szubjektív valószínűség, várakozás mértéke). Ezt a felfogást természetesen nem fogadhatjuk el; kétségtelen, hogy itt JORDAN bizonyos mértékig az akkoriban (és nyugaton még ma is) divatos pozitívista áramlatok befolyása alá került, bár sokkal kevésbbé, mint általában kortársai. Lényegében a szubjektív valószinűségfogalom mellett foglalt állást [49] dolgozatában is, ahol azt írja, hogy „a statisztikus ugyanabban a helyzetben van, mint a természettudós, aki csak azt állapíthatja meg, hogy megfigyelései összhangban vannak az elméletével, de soha azt, hogy elmélete helyes“ és idézi PLANCK mondását,* aki szerint az igazi természetről valami bizonyosat kimondani tudni közismerten lehetetlen.

Abban az időben, amikor JORDAN említett dolgozatai készültek, és abban a légkörben, amelyben ő — és mindenki más — élt — nehéz volt ezekben a kérdésekben helyesen tájékozódni; nemcsak ő, más nagy tudósok is olykor a pozitívista irányzatok befolyása alá kerültek. De kétségtelenül nagy érdeme JORDANnak, hogy sok elvi kérdésben határozottan helyes álláspontot foglalt el. Vonatkozik ez például a BAYES-féle tétellel kapcsolatos vitákra. Az úgynevezett „okok valószínűségének“ tételét igen sokat támadták, élükön R. A. FISHERrel. JORDAN ezen a ponton nem került a divatos áramlatok hatása alá. Említett munkájában, miután a valószínűségszámítás matematikai elméletének halmazelméleti felépítését

* M. PLANCK, Neubahnen der Physikalischen Erkenntniss, Leipzig, 1916, 24. o. „Da müsste man von der wirklichen Natur etwas mit Sicherheit aussagen können was doch anerkanntermassen gründlich ausgeschlossen ist.“

ismertette, a következőket állapítja meg: „Láttuk, hogy a vázolt eljárással valamennyi valószínűségtétel, az annyira vitatott okok valószínűségének tételét és a következtetési tételt is beleértve, kifogástalanul levezethető, úgy, hogy azokhoz kétség nem férhet. Ha azonban a tételeket gyakorlati problémákra alkalmazzuk, akkor az eredmény helyessége attól függ, hogy a rendelkezésre álló adatok megfelelnek-e a kiindulási feltételeknek". Ez a megállapítás messze felette áll elvi szempontból az ugyanebben az időben divatos angol-amerikai statisztikai iskola álláspontjának és teljesen megegyezik Sz. N. BERNSTEIN idevágó megállapításaival, melyeket legutóbb H. STEINHAUS fejtett ki igen meggyőzően, a BAYES-módszer védelmében alcímű dolgozatában.* Nyilvánvaló, hogy a BAYES-módszerre vonatkozó állásfoglalásával JORDAN élesen szembekerült a FISHER-féle iskolával. Álláspontjának konzekvenciáit messzemenően le is vonta [49] dolgozatában. Ebben a dolgozatban a χ^2 próbával kapcsolatban megjegyzi, hogy „bár ezt a próbát igen széles körben alkalmazzák, nincs olyan jól megalapozva, mint általában hiszik." Rámutat arra, hogy a módszer kifogástalan megalapozása csak a BAYES-féle tétel segítségével történhet és ez igen visszás megvilágításba helyezi FISHER iskoláját, amely a χ^2 módszert elfogadja és a BAYES-módszert, amelyen alapszik, élesen elutasítja.

Ugyanakkor JORDAN rámutat, hogy a FISHER-féle maximális valószínűség (maximal likelihood) elve szintén ekvivalens a BAYES-féle módszerrel. Itt említem meg, hogy JORDANnak az a gondolata, hogy egy hipotézis valószínűségéről képet kapunk, ha megnézzük, hogy ezen hipotézis mellett a bekövetkezett esemény valószínűsége hogyan viszonylik a lehetséges egyéb események közül a maximális valószínűségűnek a valószínűségéhez, az a gondolat, hogy a kis valószínűségű események szükségképpen bekövetkeznek, mert vannak esetek, ahol a lehetőségek számának nagy volta miatt minden lehetőség igen kicsiny valószínűséggel bír, azonban olyan események, amelyek valószínűsége nemcsak önmagában véve kicsiny, hanem kicsiny a lehetséges egyéb események valószínűségeihez képest, ritkán következnek be. Ennek alapján vezette be a „meglepőség mértékét", amelyről a tavalyi akadémiai nagyhéten tartott előadásában tett említést [67].

Áttérek JORDANnak a valószínűségszámításban alkalmazott matematikai apparátusra vonatkozó munkáira és eredményeire. Első helyen a differenciaszámítást említem meg, amelyet igen nagy anyagot felölelő monográfiájában rendszerezett és saját eredményeivel is gazdagított. Megemlítem, hogy ezt a könyvét [53] a szerző tudta és engedélye nélkül Amerikában újból kiadták néhány

* H. STEINHAUS, Quality Control by Sampling. (A plea for BAYES's rules) Colloquium Mathematicum II (1951) 98—108. o.

éve [61]. Az előszóban CARVER, az Annals of Math. Statistics alapítója a következőket írja: „JORDAN professzor differenciaszámításról írott könyve hosszú éveken keresztül — elsősorban statisztikusok részére — ennek a tárgykörnek klasszikus kézikönyve marad." A könyv tartalmából kiemelem a STIRLING-féle számok részletesen kidolgozott elméletét (amely egyébként cikk formájában is megjelent a Tohoku Journal-ban), továbbá JORDAN önálló eredményei közül kiemelem a BOOLE-féle polinomok bevezetését, és egy új interpolációs formulát, amely táblázatok szerkesztésénél bír különös jelentőséggel. JORDAN ennek segítségével kimutatta, hogy a közhasználatban lévő táblázatok feleslegesen részletesek végül pedig az EULER—MACLAURIN formula új bizonyítását, és általánosítását; az ő bizonyítása a legtermészetesebb út, amely egyben többet is ad.

Nem tértem ki JORDAN munkásságának olyan részeire, amelyek erősen vitathatók, így például a trendszámításra vonatkozó dolgozataira [37], [38], amelyek matematikai része ugyan vitán felül áll, azonban a közgazdasági alkalmazásai igen problematikusak. Nem beszéltem eddig Matematikai statisztika című magyarnyelvű könyvéről [19], amely az első ilyentárgyú magyarnyelvű munka* és mint ilyen, nagy jelentőséggel bírt, amely bővített kiadásban 1927-ben franciául is megjelent [25] D'OCAGNE előszavával. Ebből az előszóból egy mondatot kívánok csak kiemelni: „Szembetűnik — mondja a közelítő módszerekre vonatkozólag — hogy ha szerzőt ezekben a fejtegetéseiben követjük, hogy ő gyakorlatban kipróbálta azokat a módszereket, amelyekről beszél ..., ez különleges értéket ad munkájának". „Ugyanakkor azonban a tapasztalt gyakorlati ember egyben szakképzett teoretikus is."

JORDAN KÁROLY ma is aktív tudományos munkásságot fejt ki: a felszabadulás óta nyolc dolgozata [60], [62], [63], [64], [66], [67], [68], [69] és egy könyve [65] jelent meg. Tudományos munkája mellett résztvesz a Magyar Tudományos Akadémia munkájában is, többek között, mint a Meteorológiai Állandó Bizottság elnöke.

Az elmondottakból is kitűnik JORDAN munkásságának jelentőssége. Külön ki kell hangsúlyoznom, hogy évtizedeken keresztül a valószínűségszámítás és matematikai statisztika szinte egyedüli szakavatott képviselője volt hazánkban, akinek igen nagy érdemei vannak ennek a tudományágnak nemcsak fejlesztése, hanem terjesztése terén is. Magam a valószínűségszámítással a Szovjetunióban ismerkedtem meg és hazatérve, amikor az Alkalmazott Matematikai Intézet valószínűségszámítási és matematikai statisztikai

* Megjegyzem itt, hogy az első Magyarországon kiadott, magyar szerzőtől származó és a valószínűségszámítással foglalkozó munka a debreceni HATVANI ISTVÁN „Introductio ad Principa Philosophiae solidioris" című Debrecenben, KÁLLAI GERGELY nyomdájában 1757-ben megjelent munkája, amelynek „De probabilitate" című III. fejezete (259—296. o.) foglalkozik a valószínűségszámítással.

osztályának kialakítására törekedtem és munkatársakat kerestem, ilyeneket eleinte szinte kizárólag csak JORDAN tanítványai körében találhattam. JORDAN KÁROLY matematikai munkássága sokkal nagyobb megbecsülést érdemel, mint amiben a felszabadulás előtt része volt. Amikor ma összegyűltünk, hogy megünnepeljük JORDAN KÁROLY 80-ik születésnapját és ebből az alkalomból munkásságának jelentőségével foglalkozunk, nemcsak kedves kötelességet teljesítünk, hanem a múlt mulasztásait is igyekszünk pótolni.

Ismertetésemet, amely nem lehetett kimerítő, inkább csak vázlat JORDAN munkásságáról, azzal zárom, hogy a Bolyai János Matematikai Társulat nevében szívből gratulálok JORDAN KÁROLY-nak 80-ik születésnapján és kívánom, hogy még sok éven át folytassa jelentős tudományos munkáját a magyar tudomány javára, annak a magyar tudománynak a javára, amelynek ő már sok megbecsülést szerzett az egész világon, annak a magyar tudománynak a javára, amelynek ma minden képviselője, idősebbek és fiatalok egyaránt, vállvetve hazánk boldog jövőjének, a szocializmusnak az építésén dolgozik.

Jordan Károly tudományos munkáinak jegyzéke

1. Dédoublement de l'acide butanoloique 2. et recherches sur les dérivés actifs de cet acide. 76 o.
   Etude numérique sur la formule transformée de MM. Thorpe et Rücker. (Genève, 1895) 15 o.
2. A valószínűségi számítás alkalmazása meteorológiai viszonyainkra. *(Atmosphaera* 1904. II) 8 o.
3. La propagation des ondes sismiques. (*Revue générale des Sciences pures et appliquées.* Paris 1907) 21 o.
4. Contribution à la géométrie des courbes convexes et de certaines courbes qui en dérivent. (Fiedlerrel együtt) *(Comptes Rendus* 154. 1912) 4 o.
5. Contribution à l'étude des courbes convexes fermées et de certaines courbes qui s'y rattachent (Fiedlerrel együtt) (Paris, 1912. Librairie scientifique A. Hermann & Fils). 72 o.
6. Courbes Orbiformes (Fiedlerrel együtt). *Archiv der Mathematik und Physik* III. 1912.*)* 10. o.
7. On a particular case of closed convex curves. (Fiedlerrel együtt) *(Tohoku Math. Journal.* VI. 1. 1914.) 79 o.
8. Zárt konvex görbékkel kapcsolatos görbékről. (Fiedlerrel együtt. *(Matematikai és Fizikai Lapok.* 1915. 7—8. füzet) 22. o.
9. A köd. *(Természettudományi Közlöny,* CXXXI—CXXXII. 1918. Bp.) 11 o.
10. Sur une série de polynomes dont chaque somme partielle représente la meilleure approximation d'un degré donné suivant la méthode des moindres carrés. *(Proceedings of the London Math. Soc.* 2. 20. 1921.) 29 o.
11. Észlelések eredményeinek törvénybefoglalása polynomok segélyével. *(Matematikai és Fizikai Lapok* XXIX. kötet. 1922.) 15 o.
12. Eine Vereinfachte Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate. Meteorologen-Tagung auf dem Hohen Sonnblick, *(Meteorologische Zeitschrift* 1922.) 1 o.
13. On the Inversion of Bernoulli's Theorem. *(Philosophical Magazine,* 14. 1923) 4 o.

14. On the Montmort-Moivre Problem. *Acta Scientiarum Mathematicarum* I. kötet 3. füzet 1923. Szeged) 4 o.
15. On a New Demonstration of Maclaurin's or Euler's Summation Formula. *(Tohoku Math. Jaurnal.* XXI. 3, 4. 1922). 4 o.
16. Sur la théorie des erreurs d'observation. *(Rendiconti,* 1923. 47. Palermo) 13 o.
17. On Daniel Bernoulli's „Moral Expectation" and on a new conception of expectation *American Math. Monthly* 31. 1924) 8 o.
18. On probability (*Physico-Mathematical Society of Japan,* III. 7. 1925) 14 o.
19. Matematikai Statisztika. (Budapest, Athenaeum Irodalmi és Nyomdai R. T. *Természet és Technika* 4.) 316 o.
20., 21., 22. Calcul des probabilités. Formules nouvelles pour comparer deux probabilités a posteriori. *(Comptes Rendus,* Paris, 1926. 182.) 7 o.
23. Sur la probabilités des épreuves répétées le théorème de Bernoulli et son inversion. *(Bulletin de la Société Math.* LIV. 1926. 1—2) 37 o.
24. On Poisson's and Lexis's Problem of Probability of Repeated Trials *(Philosophical Magazine,* III. 1927) 5 o.
25. Statistique Mathématique *(L'École Polytechnique* 1927, Paris) 344 o.
26. Sur un cas généralisé de la probabilité des épreuves répétées. *(Comptes Rendus,* Paris 1927, 184) 3 o.
27. Les Mathématiques Appliquées à la statistique. (Tirage à Part de l'article paru dans les 3—4, 1926. de la Revue de la Société Hongroise de Statistique) 9 o.
28. A korrelációs módszerek alkalmazása a meteorológiában. (1927, *„Időjárás")* 8 o.
29. Sur un cas généralisé de la probabilité des épreuves répétées. *Acta Scientiarum Mathematicarum* III. köt. IV. füz. 1927, Szeged) 18 o.
30. Kőrösy relatívintenzitási koefficiensei. *(Magyar Statisztikai Szemle* 1927. 11. sz.) 6 o.
31. A valószínűségszámítás alapfogalmai. *(Matematikai és Fizikai Lapok* 34. kötet, 1928,) 28 o.
32. Les coefficients d'intensité relative de Kőrösy. Revue de la Société Hongroise de Statistique, 1927, 3—4 sz. Budapest) 16 o.
33. Sur une formule d'interpolation dérivée de la formule d'Everett. *(Metron,* 1928, Roma) 6 o.
34. Sur des polynomes analogues aux polynomes de Bernoulli et sur des formules de sommation analogues à celle de Maclaurin—Euler. *Acta Scientiarum Mathematicarum* Szeged 1929. IV. kötet. 3. füzet) 22 o.
35. A matematikai reménységről. *(Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok,* VI. évfolyam 1922. Bp.) 9 o.
36. Véletlen valószínűség és természeti törvény. (Athenaeum, 1929. 5—6. füzet) 31 o.
37. A trendvonal kiszámítása a legkisebb négyzetek elmélete alapján. (Országos Gazdaságstatisztikai és Konjunktúrakutató Bizottság Közleményei. *Tanulmányok* 1. sz. Bpest, 1930.) 48 o.
38. Sur la détermination de la tendance séculaire des grandeurs statistiques par la méthode des moindres carrés. Journal de la Société Hongroise de Statistique, 1929. 4. sz.) 35 o.
39. Megjegyzés a „Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok" 598. számú valószínűségszámítási feladatához *(Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok* VII. 1930.) 6 o.

40. Sur une formule d'interpolation *(Atti del Congresso Internazionale dei Matematici,* Bologna 1928) 23 o.
41. Approximation and graduation according to the principle of least squares by orthogonal polinomials. *(Annals of Math. Stat.* 1932, U. S. A.) 101 o.
42. On Stirling's numbers. *(Tohoku Math. Journal,* 37. köt. 1933 Japan) 25 o.
43. Interpolation without printed differences, in the case of two or three independent variables. *(Hodsgon,* London) 9 o.
44. Problema delle prove ripetute a piu variabili indipendenti. *(Giornale dell'Institutio Italiano degli Attuari* 1933. IV. 3.) 20 o.
45. Inversione della formula di Bernoulli relativa al problema delle prove ripetute a piu variabili. *(Giornale dell'Institutio Italiano degli Attuari* 1933. IV. 4.) 11 o.
46. Sur l'emploi des moyennes géométriques et arithmétiques. *(Journal de la Société Hongroise de Statistique.* 1934. 1—2.) 11 o.
47. Teoria della perequazione e dell'approssimazione. *(Giornale dell'Institutio Italiano degli Attuari* 1934. Roma, V. 1.) 29 o.
48. Le théorème de probabilité de Poincaré, généralisé au cas de plusieurs variables indépendantes. *(Acta Scientiarum Mathematicarum.* Szeged, VII. 2. 1934) 9 o.
49. On Approximation and on test criteria bi the x^2 test and by Bayes' Theorem. *(Journal de la Société Hongroise de Statistique,* 1937. Budapest, 1—2.) 28 o.
50. Sur l'approximation d'une fonction a plusieurs variables. *(Acta Scientiarum Mathematicarum.* Szeged. 1937. VIII. 4.) 21 o.
51. A korrelációszámítás alkalmazása a meteorológiában. *(Időjárás,* 1937. 5—6. szám. Budapest) 23 o.
52. Critique de la corrélation au point de vue des probabilités. *(Conférence Internationale de Sciences Mathématiques organisées à l'Université de Genève.* 1938) 19 o.
53. Calculus of finite differences. (Budapest, 1939) 655. o.
54. A differenciaszámítás szerepe a statisztikában *(Magyar Statisztikai Szemle,* 1939, XVII. évf. 11. sz.) 4 o.
55. Az ismétléses variációkról. *(Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok,* 1939, XV. évf. 1939. Budapest) 8 o.
56. Problèmes de la probabilité des Épreuves répétées dans le cas général. *(Bulletin de la Société mathématique de France,* 193. sz. Paris. 1926), 20 o.
57. Le rôle du calcul des différences finies en statistique. *(Journal de la Société Hongroise de Statistique,* 1939. 4. sz. Bpest) 8 o.
58. A korreláció számítása I. *(Magyar Statisztikai Szemle,* 1941. I. sz.) 47 o.
59. Remarques sur la loi des erreurs. *(Acta Scientiarum Mathematicarum,* Szeged, 1941. X. 2.) 23 o.
60. Complément au théorème de Simmons sur les probabilités. *(Acta Scientiarum Mathematicarum.* Szeged, 1946. XI. 1—2.) 10 o.
61. Calculus of Finite Differences (második kiadás, *Chelsea Publishing Company,* New York 1947) 652 o.
62. A légnyomás és hőmérséklet közötti kapcsolat január és július hóban. *(„Időjárás"* 1948. 52. kötet, (Róna Zsigmonddal) 10 o.
63. Note on Approximation and Graduation by orthogonal Moments. *(Hungarica Acta Mathematica,* I. 4. 1949. Budapest) 6 o.
64. Periódikus menetet mutató észlelések megközelítése trigonometrikus függvénnyel. *(„Időjárás"* 1949. 53. kötet.) 6 o.
65. Elliptikus függvények és alkalmazásuk. *(A Mérnöki Továbbképző Intézet kiadványai, Matematika* 5. sz. 1950. Bp.) 31 o.

66. Megjegyzés az éghajlat fogalmának meghatározásához. („*Időjárás*“ 1950. évi 54. köt.) 3 o.
67. Következtetések statisztikai észlelésekből. (*Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Természettudományi Közleményei,* 1951. I. köt.) 10 o.
68. A számolás eredete és a számrendszerek. (*Középiskolai Matematikai Lapok,* III. 1951.) 11 o.
69. Megújuló sokaságok és az ipari utánpótlás valószinűségszámítási tárgyalása. (*Matematikai Lapok* II. 1951.) 25 o.

Egy kongruenciarendszerekről szóló problémáról

Írta: ERDŐS PÁL

Az

(1) $$x \equiv a_i (\mathrm{mod}\, n_i), \quad 1 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k$$

kongruenciarendszert nevezzük lefedő rendszernek, ha minden egész szám az (1) kongruenciák közül legalább az egyiket kielégíti. Mielőtt az ezekre vonatkozó kérdések diszkutálásába belekezdenék, talán megmutatom, hogyan jutottam ezekre a kérdésekre.

A dolgozatban p, q, p_i, q_i prímszámokat fognak jelenteni, $\pi(x)$ pedig a prímszámok számát x-ig; $c_1, c_2, \ldots$ pozitív abszolút konstansok.

ROMANOV még 1934-ben kimutatta, hogy a $2^l + p (p > 0, l$ pozitív egész) alakú számoknak pozitív sűrűségük van. Más szóval: létezik olyan c_1, hogy x-ig a $2^l + p$ alakban írható számok száma nagyobb, mint $c_1 x$. ROMANOV bizonyítása, bár elemi, mélyebb segédeszközöket igényel és itt csak azt kívánom megjegyezni, hogy ROMANOV tétele főleg azért érdekes, mert aránylag kevés $2^l + p$ alakú szám van. Pontosabban; ha $f(n)$ jelenti az $n = 2^l + p$ egyenlet megoldásainak számát, akkor

$$\sum_{n=1}^{x} f(n) < c_2 x.$$

Mármost ROMANOV, egy még 1934-ben hozzám intézett levelében, azt kérdezte: igaz-e, hogy minden elegendően nagy páratlan szám $2^l + p$ alakban írható? Kimutattam, hogy ez nem igaz, sőt: *létezik olyan, csupa páratlan számból álló, számtani sor, melynek egyetlen pozitív tagja sem állítható elő $2^l + p$ alakban.*

A bizonyításhoz felhasználjuk BANG érdekes tételét: Legyen $1 < n \neq 6$ tetszőleges egész szám. Akkor van olyan p, hogy

(2) $$p \mid 2^n - 1 \text{ és } p \nmid 2^m - 1, \text{ ha } 1 \leq m < n.$$

A továbbiakban az ilyen tulajdonsággal rendelkező p prímszámot (több ilyen is lehet) n-hez tartozó prímszámnak fogjuk hívni.

Legyen mármost adva egy (1) lefedő rendszer, melyben $n_i \neq 6$, $1 \leqq i \leqq k$ és legyen p_i az n_i-hez tartozó prímszámok valamelyike. Ekkor ezen p_i-k (2) értelmében mind különbözők. Tekintsük a következő kongruenciarendszert:

$$(3) \qquad \begin{aligned} t &\equiv 2^{a_i} \pmod{p_i}, \quad 1 \leqq i \leqq k; \\ t &\equiv 2^{n_k+2} + 2^{n_k+1} + 1 \pmod{2^{n_k+3}}. \end{aligned}$$

Mivel előbbiek szerint a p_i-k mind különböző páratlan prímek, a (3) rendszer megoldható. Ezen kongruenciarendszert kielégítő t számok nyilván mind páratlanok és egy $2^{n_k+3}\Pi p_i$ differenciájú számtani sort alkotnak. Azt állítom, hogy

$$(4) \qquad t \neq 2^l + p; \; l \text{ egész szám}, \; l \geqq 0.$$

Mivel az (1) kongruenciarendszer lefedő, tehát legalább egy i-re

$$l \equiv a_i \pmod{n_i}.$$

Viszont p_i definíciója szerint $2^{n_i} \equiv 1 \pmod{p_i}$, tehát

$$2^l \equiv 2^{a_i} \equiv t \pmod{p_i}.$$

Vagyis $t - 2^l$ mindig osztható a $p_1, p_2, \ldots, p_k$ prímszámok valamelyikével. Mivel $\max p_i < 2^{n_k}$ $(1 \leqq i \leqq k)$, tehát (4) bizonyításához elég lesz kimutatnunk, hogy

$$|t - 2^l| > 2^{n_k}.$$

Ennek bizonyítására van szükség a (3) alatti utolsó feltételre, mely szerint

$$(5) \qquad t - 2^l \equiv 2^{n_k+2} + 2^{n_k+1} - 2^l + 1 \pmod{2^{n_k+3}}.$$

Ha $l \geqq n_k + 3$, akkor $2^l \equiv 0 \pmod{2^{n_k+3}}$, tehát

$$|t - 2^l| \geqq 2^{n_k+1} - 1 > 2^{n_k}.$$

Ha pedig $0 \leqq l \leqq n_k + 2$, akkor (3) második kongruenciájából $t \geqq 2^{n_k+2} + 2^{n_k+1} + 1$ azaz $t - 2^l \geqq 2^{n_k+1} + 1 > 2^{n_k}$.

Bizonyításunk befejezéséhez már csak azt kell belátnunk, hogy van olyan lefedő rendszer, melyre $n_i \neq 6$. Ilyen rendszer például:

0 (mod 2), 0 (mod 3), 1 (mod 4), 7 (mod 8), 11 (mod 12), 19 (mod 24).

A lefedő kongruenciarendszerekre vonatkozó legérdekesebb probléma a következő:

Legyen A tetszőleges szám; létezik-e olyan lefedő rendszer, melynél $A < n_1 < n_2 < \ldots < n_k$.

Amennyiben a válasz e kérdésre igenlő, akkor azonnal belátható, hogy ha r tetszőleges egész szám, úgy mindig van végtelen sok t egész szám, mely nem $2^l + a_r$ (l egész szám, $l \geqq 0$) alakú, ahol a_r különböző prímfaktorainak száma $\leqq r$. Ugyanis akkor megadható $r+1$ darab kongruenciarendszer

$$\begin{aligned} x &\equiv a_i^{(1)} \quad (\mathrm{mod}\ n_i^{(1)}), && 1 \leqq i \leqq k_1; \\ x &\equiv a_i^{(2)} \quad (\mathrm{mod}\ n_i^{(2)}), && 1 \leqq i \leqq k_2; \\ &\vdots \\ x &\equiv a_i^{(r+1)} \quad (\mathrm{mod}\ n_i^{(r+1)}) && 1 \leqq i \leqq k_{r+1}, \end{aligned}$$

melyekre

$$6 < n_1^{(1)} < \ldots < n_{k_1}^{(1)} < n_1^{(2)} < \ldots < n_{k_2}^{(2)} < \ldots < n_1^{(r+1)} < \ldots < n_{k_{r+1}}^{(r+1)}.$$

Elégítse ki t a következő kongruenciákat:

$$t \equiv 2^{a_i^{(c)}} \quad (\mathrm{mod}\, p_i^{(s)}), \quad 1 \leqq i \leqq k_s, \quad 1 \leqq s \leqq r+1,$$

ahol $p_i^{(s)}$ jelenti az $n_i^{(s)}$-hez tartozó prímszámok valamelyikét. Pontosan úgy, mint az $r=1$ esetben belátható, hogy minden egyes s-re $(1 \leqq s \leqq r+1)$ van olyan $p_i^{(s)}$, hogy

$$t - 2^l \equiv 0 \ \mathrm{mod}\ p_i^{(s)}.$$

Tehát $(t-2^l)$-nek legalább $r+1$ darab prímfaktora van.

Azonban azon sejtés bizonyítása, hogy a feltett kérdésre a válasz igenlő — nem látszik könnyűnek. DAVENPORT és én konstruáltunk olyan lefedő rendszert, melyre $n_1 = 3$. Egy ilyen rendszer a következő:

0 (mod 3)	11 (mod 15)
0 (mod 4)	7 (mod 20)
0 (mod 5)	10 (mod 24)
1 (mod 6)	2 (mod 30)
6 (mod 8)	34 (mod 40)
3 (mod 10)	59 (mod 60)
5 (mod 12)	98 (mod 120)

Néhány perc alatt meggyőződhetünk arról, hogy e rendszer valóban lefedő. Valószínűleg ez a legegyszerűbb lefedő rendszer, melyre $n_1 > 2$ (azaz ha $n_1 > 2$, akkor a modulusok száma $\geqq 14$ és a legnagyobb modulus $\geqq 120$).

DEAN SWIFT konstruált egy lefedő rendszert, melyben $n_1 = 4$, $k = 38$, $n_k = 1440$.

Ha az

$$x \equiv a_i \ (\mathrm{mod}\ n_i); \quad 1 \leqq i \leqq k \tag{6}$$

rendszer lefedő, akkor

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} \geqq 1.$$

Ugyanis legyen $f(N)$ azon N-nél nagyobb számok száma, melyek kielégítik az $x \equiv a_i \pmod{n_i}$ kongruenciát. Akkor

$$f(N) \leqq \frac{N}{n_i} + 1.$$

Mivel (6) lefedő rendszer, tehát

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{N}{n_i} + k \geqq N, \tag{7}$$

vagyis

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} \geqq 1 - \frac{k}{N}$$

és, mivel N-et tetszőlegesen nagyra választhatjuk, tehát

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} \geqq 1.$$

Ha (6) lefedő rendszer és

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} = 1,$$

akkor minden egész szám pontosan egy (6) alatti kongruenciát elégít ki.

Tegyük fel ugyanis, hogy vannak olyan egész számok, amelyek legalább két (6) alatti kongruenciát kielégítenek, pl. az

$$\begin{aligned} x &\equiv a_{i_1} \pmod{n_{i_1}}; \\ x &\equiv a_{i_2} \pmod{n_{i_2}}; \end{aligned} \qquad 1 \leqq i_1, i_2 \leqq k; \quad i_1 \neq i_2$$

kongruenciákat és legyen $f_1(N)$ azon N-nél nem nagyobb számok száma, melyek ezeknek eleget tesznek. Akkor

$$f_1(N) \geqq \frac{N}{n_{i_1} n_{i_2}} - 1$$

és, (7)-el egybevetve,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{N}{n_i} + k - \left(\frac{N}{n_{i_1} n_{i_2}} - 1 \right) \geqq N,$$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} \geqq 1 + \frac{1}{n_{i_1} n_{i_2}} - \frac{1+k}{N} > 1.$$

Azt sejtettem, hogy ha a (6) alatti rendszer lefedő, akkor

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} > 1, \tag{8}$$

vagyis a rendszer nem egyszeresen fedi le az egész számokat. Ezt azonban nem tudtam bebizonyítani. (8)-ra MIRSKY és NEWMANN a következő szellemes bizonyítást találta (ugyanezt a bizonyítást találta később DAVENPORT és RADÓ is):

Tegyük fel, hogy (6) lefedő rendszer és $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} = 1$. Akkor, mint már láttuk, minden egész szám pontosan egy (6) alatti kongruenciát elégít ki. Akkor

$$\sum_{t=0,1,2,3,\ldots} z^t = \sum_{t\equiv a_1 \pmod{n_1}} z^t + \sum_{t\equiv a_2 \pmod{n_2}} + \ldots + \sum_{t\equiv a_k \pmod{n_k}} z^t. \tag{9}$$

Ha $|z| < 1$, akkor

$$\sum_{t\equiv a_i \pmod{n_i}} z^t = z^{a_i} + z^{a_i+n_i} + z^{a_i+2n_i} + \ldots = \frac{z^{a_i}}{1-z^{n_i}}$$

és (9)-ből

$$\frac{z^{a_1}}{1-z^{n_1}} + \frac{z^{a_2}}{1-z_2^{n_2}} + \ldots + \frac{z^{a_k}}{1-z^{n_k}} = \frac{1}{1-z} \tag{10}$$

volna. Ez azonban nem lehetséges, mert ha z-vel a sugár mentén közeledünk $e^{\frac{2\pi i}{n_k}}$-hoz, akkor (10) jobboldala korlátos marad, míg a baloldal végtelenhez tart. (T. i. $\frac{z^{a_k}}{1-z^{n_k}} \to \infty$, a baloldal többi tagja pedig korlátos marad.) Ez az egyszerű és szellemes bizonyítás talán alkalmas annak megmutatására, milyen jól használható az analízis módszere a számelméletben.

Eddig egyikünknek sem sikerült (8)-ra teljesen elemi bizonyítást adni.

Meg kell jegyeznem azt, hogy ha lefedő rendszerünk végtelen sok kongruenciát tartalmazhat, akkor (8) nem marad igaz. Ellenpélda: az

$$x \equiv 2^{k-1} - 1 \pmod{2^k}; \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

rendszer lefedő és minden egész szám csak egyet elégít ki ezen kongruenciák közül. Ugyanis ha az a számot a kettes számrendszerben felírva az első 0 az $(n-1)$-edik helyen áll, akkor

$$a = \sum_{t=0}^{n-2} 2^t + 2^{\tau_1} + 2^{\tau_2} + \ldots + 2^{\tau_s}; \qquad \tau \geqq n,\ 1 \leqq i \leqq s;$$

$$a = 2^{n-1} - 1 + 2^n A,$$

$$a \equiv 2^{n-1} - 1 \pmod{2^n};$$

tehát a rendszer lefedő. Ha valamely a szám két (11) alatti kongruenciát elégítene ki, akkor

$$a = 2^k A_1 + 2^{k-1} - 1 = 2^l A_2 + 2^{l-1} - 1$$

volna és, $k < l$ mellett,

$$2A_1 + 1 = 2^{l-k}(2A_2 + 1)$$

lenne, ami lehetetlen.

Ugyanakkor (8) nem javítható, mert pl. az

$$\begin{aligned} x &\equiv 2^{t-1} - 1 \pmod{2^t} \qquad 1 \leqq t \leqq l; \\ x &\equiv 2^l - 1 \pmod{3.2^{l-2}} \\ x &\equiv 2^{l+1} - 1 \pmod{3.2^{l-1}} \\ x &\equiv 3.2^l - 1 \pmod{3.2^l} \end{aligned}$$

kongruenciarendszer lefedő és

$$\sum_{i=1}^{l-3} \frac{1}{n_i} = \frac{3.2^l - 3 + 4 + 2 + 1}{3.2^l} = 1 + \frac{1}{3.2^{l-2}},$$

ami 1-hez tetszőleges közel lehet.

DAVENPORT megjegyzése szerint ha $n_1 > 2$, akkor (8) talán javítható, de ez a kérdés nem látszik könnyűnek.

Diszkutáljunk még egy ide tartozó problémát! Egy lefedő rendszert nevezzünk primitívnek, ha egyetlen kongruencia sem felesleges, azaz ha elhagyjuk az $x \equiv a_i \pmod{n_i}$ kongruenciák bármelyikét, a megmaradó rendszer nem lefedő. Be fogjuk bizonyítani, hogy rögzített k mellett csak véges sok olyan primitív lefedő rendszer létezik, melynek k darab modulusa van.

Legyen

$$x \equiv a_i \pmod{n_i}, \qquad 1 \leqq i \leqq k$$

valamely primitív lefedő rendszer. Ha kimutatjuk, hogy

$$n_i < (k - i + 1)\,[n_1, n_2, \ldots, n_{i-1}] \tag{12}$$

($[n_1, n_2, \ldots, n_{i-1}]$ az $n_1, \ldots, n_{i-1}$ számok legkisebb közös többszörösét jelenti), akkor már következik, — mivel nyilvánvalóan $n_1 < k$ —, hogy n_k egy felső korlát alatt marad, vagyis állításunk igaz. Bizonyítsuk be (12)-t.

Mivel kongruenciarendszerünk primitív, tehát van olyan t szám, hogy

$$t \not\equiv a_j \pmod{n_j}, \qquad 1 \leqq j \leqq i - 1.$$

Ez azt jelenti, hogy ha

$$u \equiv t \pmod{[n_1, n_2, \ldots, n_{i-1}]},$$

akkor

$$u \not\equiv a_j \pmod{n_j}, \qquad 1 \leqq j \leqq i - 1.$$

Ha tehát $f(N)$-nel jelöljük azon, N-nél nem nagyobb számok számát, melyek nem tesznek eleget az

$$x \equiv a_j \pmod{n_j}, \qquad 1 \leqq j \leqq i-1$$

kongruenciák egyikének sem, akkor

$$f(N) \geqq \frac{N}{[n_1, \ldots, n_{i-1}]} - 1.$$

Ezért (lásd (7) bizonyítását)

$$\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i+1}} + \ldots + \frac{1}{n_k} \geqq \frac{1}{[n_1, n_2, \ldots, n_{i-1}]},$$

illetőleg

$$\frac{k-i+1}{n_i} > \frac{1}{[n_1, n_2, \ldots, n_{i-1}]}.$$

A k darab kongruenciából álló primitív lefedő rendszerre n^k pontos maximumát nem tudom meghatározni.

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ О СИСТЕМАХ СРАВНЕНИЙ

П. ЭРДЁШ

Система сравнений (1) называется покрывающей системой, если для всякого целого числа выполняется по крайней мере одно из сравнений системы (1). Автор доказывает следующую теорему: Существует арифметическая прогрессия из нечетных целых чисел, ни один член которого не может быть представлен в виде 2^l+p где l-натуральное число и p-простое число. Далее автор излагает ряд вопросов относящиеся к покрывающим системам и предлагает некоторые неразрешенные проблемы.

ON A PROBLEM CONCERNING CONGRUENCE SYSTEMS

P. ERDŐS

We call the congruence system (1) overlapping, if each integer satisfies at least one of the congruences (1). By making use of such systems, the author proves the following theorem: *There exists an arithmetic progression consisting of odd integers none of which can be represented in the form 2^l+p (p natural prime, l natural integer).* Furthermore, a number of questions relating to overlapping systems is discussed and several unsolved problems are proposed.

Gépalkatrészek és felszerelési tárgyak törzskészletének valószínűségszámítási meghatározása

Irta: Rényi Alfréd és Szentmártony Tibor

Gépalkatrészek vagy felszerelési tárgyak, melyek egyidőben rendszerint több példányban vannak igénybevéve, az igénybevétel következtében előbb vagy utóbb, véletlenszerűen *eltörnek* vagy *elkopnak*. Ezek a tartalékkészletből *kicserélésre* kerülnek s így ez a készlet előbb vagy utóbb *pótlásra* szorul. A pótlás ideje alatt természetesen újabb cserékre is sor kerülhet.

A termelés folyamatossága s a tervszerű gazdálkodás szempontjából nézve így a következő kérdés merül fel: mekkora a szóbanforgó alkatrészfajtára nézve az a legkisebb vagy *törzskészlet*, amelyre ha a tartalékkészlet leapad, készletpótló rendelés válik szükségessé? Mégpedig úgy, hogy a pótlás ideje alatt a termelés folyamatossága megszabott *kockázat* mellett biztosítottnak tekinthető. A törzskészlet előbbi értelmezéséből már következik, hogy — ha más természetű gazdasági szempontok nem teszik szükségessé nagyobb készlet tartását — *a mindenkori rendelés darabszáma a törzskészlet darabszámával megegyezik.*

A felvetett kérdés fontossága mellett határozottan meglepő, hogy a törzskészlet nagyságára az eddigi *gyakorlat* és a valószínűségszámításnak *megújítási elmélet** néven ismert fejezete egyaránt többé-kevésbbé nyers átlagszámítással csak olyan becslést ad, amely a kockázat kiszámítására nem ad lehetőséget. Ezzel szemben az itt közölt újabb meggondolások az ingadozásokat okozó körülményeket egyrészt *külön-külön,* másrészt a maguk *teljességében* is beható valószínűségszámítási mérlegelés tárgyává teszik. Így a törzskészletre — szabatosan körülírt s a gyakorlatban ellenőrizhető feltételek mellett — *megbízhatósági határokat* szolgáltatnak. Elméleti szempontból érdekes, gyakorlati szempontból pedig — úgy véljük

* Lásd Jordan Károly cikkét a Matematikai Lapok 1951. évi 4. számában, továbbá W. Feller cikkét (Annals of Math. Statistics 12 (1941) 243—267). On the integral equation of renewal theory, valamint L. Doob cikkét (Renewal theory from the point of view of the theory of probability (Transactions Amer. Math. Soc. 63 (1948) 422—438).

— jelentős, hogy a következőkben, igen természetesnek látszó feltételek mellett, bebizonyított egyszerű *új határok a gyakorlatban alkalmazottnál lényegesen kisebbek.*

Ilyen módon dolgozatunk eredményei lehetőséget nyújtanak a törzskészlet olyan meghatározására, amely gyakorlatilag teljes mértékben biztosítja a termelés folyamatosságát, ugyanakkor azonban elkerüli a felesleges tartalékolást és ilyenmódon nagyösszegű megtakarítást tesz lehetővé az eddig használt eljárásokhoz képest. Anélkül, hogy itt az eredmények gyakorlati felhasználásánál felmerülő egyéb szempontokra kitérnénk, megjegyezzük, hogy a tárgyalt probléma (a folyamatos termelést biztosító *minimális* törzskészlet meghatározása) ebben a formájában a szocialista iparban a tervgazdálkodás során merül csak fel. Hiszen ha egy üzem valamely alkatrészből feleslegesen nagy törzskészletet tart, azaz feleslegesen sokat tartalékol, ezzel a feleslegesen tartalékolt alkatrészeket más üzemek elől vonja el; a kapitalista kézben lévő üzem vezetőjét ez nyilván nem igen érdekli, ezzel szemben a szocialista tervgazdálkodásban az ilyen jelenség megengedhetetlen.

A teljesség kedvéért megemlítjük, hogy az itteni meggondolások *a pótlási idő ingadozását* is figyelembe veszik. A tapasztalat szerint ugyanis a pótlási idő még akkor is ingadozó, ha az alkatrész előállításában már kiegyensúlyozottságra lehet számítani, vagy ha a pótlás az alkatrészt előállító üzem készárú-raktárából történik.

Az eddigi gyakorlat és elmélet vázolása előtt szögezzük le a a főbb mennyiségek jelöléseit. Jelentse egy bizonyos alkatrészfajtára vonatkozólag

a az egyidejűleg igénybevett alkatrészek számát,

k a törzskészletnek s így a mindenkori rendelésnek darabszámát, jelentse továbbá

t az időt egy tetszőlegesen választott időponttól számítva

$T = 1/\tau$ az alkatrészfajta várható élettartamát,

p a pótlási idő várható értékét,

s pedig a pótlási idő szórását.

Utóbbi négy mennyiséget ugyanabban az időegységben számítjuk, amely időegység választása egyébként tetszőleges.

1. *Az eddigi gyakorlati szabály* szerint a k törzskészletet biztonsági okokból ama darabszám *kétszeresének* kell venni, melyre mint csereszámra a törzskészlet p pótlási ideje alatt átlagban számítani lehet.

Mivel *egyetlen* igénybevett alkatrész esetén az időegységben átlag $1/T$, egyidejűleg működő a alkatrész esetén pedig átlag a/T cserére kerül sor, e szabály szerint

$$k = 2\frac{ap}{T}. \tag{1}$$

Ennek az egyszerű szabálynak a bírálata is egyszerű. Még ha a különböző igénybevételből és anyagminőségből, valamint a pótlási idő ingadozásából adódó szórástól el is tekintünk és a törzskészlet *átlagos* értékére a nyers átlagokkal nyert ap/T értéket el is fogadjuk, ennek biztonsági okokból való kétszerezésére a legcsekélyebb matematikai indokolás sem található. Különben is a biztonság fogalma viszonylagos és csak a *kockázat* megadásával válik tartalmassá.

2. A *megújítási elmélet* módot ad az átlagos csereszám szabatos kiszámítására, de ennél többet nem nyújt. Jelentse $m(t)$ a t időpontban működő alkatrészek számát, $h(\theta)$ az alkatrészfajta legalább θ ideig való használhatóságának valószínűségét és $\bar{c}(t)$ a t időpontig mutatkozó összes csereszámnak, mint valószínűségi változónak *várható* értékét. Akkor

$$m(t)=m(0)\,h(t)+\int_0^t h(t-\theta)\,d\bar{c}(\theta),$$

ahol a jobboldal első tagja a $t=0$ kezdő időpontban, a második tag pedig a t időpontig csere útján beiktatott alkatrészekből a t időpontig még működőknek várható számát szolgáltatja. Esetünkben $m(t)=m(0)=a$ állandó, úgyhogy adott, de differenciálhatónak feltételezett h-nál parciális integrálással az ismeretlen $\bar{c}(t)$ függvényre

$$a=a\,h(t)+\bar{c}(t)+\int_0^t c(\theta)\,h'(t-\theta)\,d\theta$$

adódik; mert nyilván $h(0)=1$, mig $\bar{c}(0)=0$. Ez a konvolúciós elsőfokú Volterra-féle integrálegyenlet Laplace-transzformációval tudvalevően megoldható. Tegyük fel például, hogy — a tapasztalat szerint sokszor bevált módon — az alkatrészfajta élettartamának eloszlásfüggvénye exponenciálisan fogyó, tehát $h(t)=e^{-\tau t}$ pozitív τ mellett. Ekkor az alkatrész t idő alatti *elhasználódásának* valószínűsége $H(t)=1-e^{-\tau t}$ és így az alkatrész *várható élettartama:*

$$T=\int_0^\infty t\,dH(t)=\int_0^\infty tH'(t)dt=\int_0^\infty \tau te^{-\tau t}dt=\frac{1}{\tau}\,.$$

Ily $h(t)$ mellett most már integrálegyenletünket Laplace-transzformációval a következőképpen oldhatjuk meg: bevezetve a

$$\bar{C}(z)=\int_0^\infty \bar{c}(t)e^{-zt}dt$$

jelölést nyerjük, hogy

$$\frac{a}{z} = \frac{a}{z+\tau} + \bar{C}(z) + \bar{C}(z)\left(\frac{z}{z+\tau} - 1\right),$$

tehát hogy

$$\bar{C}(z) = \frac{a\tau}{z^2} = \frac{a}{Tz^2}.$$

Ebből a $\bar{c}(t)$ függvény már meghatározható, mégpedig

$$\bar{c}(t) = \frac{at}{T}.$$

Ugyanis

$$\int_0^\infty te^{-zt}dt = \frac{1}{z^2}, \quad \text{úgyhogy} \quad \int_0^\infty \bar{c}(t)e^{-zt}dt = \bar{C}(z).$$

Az így nyert $\bar{c}(t)$ integrálegyenletünket valóban kielégíti.

A megújítási elmélet szerint tehát a számú egyidejűleg igénybevett, *élettartamában exponenciális eloszlásfüggvényű* és T várható élettartamú alkatrésznél az állandó p pótlási idő alatt a csereszám várható értéke

$$\bar{c}(p) = \frac{ap}{T}, \tag{2}$$

amint azt a feltételek tüzetesebb körülírása nélkül a gyakorlat átlagszámítása is megadta. A csereszám, mint valószínűségi változó szórására azonban itt sem derül fény.

3. A *tüzetesebb valószínűségszámítási vizsgálat* céljából tegyük fel egyelőre, hogy $a=1$, vagyis, hogy egyidejűleg csak egy alkatrész van igénybevételnek kitéve. Ez az alkatrész egy idő múlva *eltörhet*, ha azonban nem is törik el, bizonyos K kopási idő után kopás miatt kicserélendő. A törési valószínűségre nézve indokolt az a feltevés, hogy ha az alkatrész a t időpontig még nem tört el, ezen feltétel mellett annak valószínűsége, hogy a $(t, t+\Delta t)$ időközben eltörik, (Δt-ben magasabbrendű tagoktól eltekintve) Δt-vel arányos, tehát $\tau_1 \Delta t$. Ha tehát $F(t)$ jelenti a törésig eltelő időtartamnak mint valószínűségi változónak az eloszlásfüggvényét, azaz* $F(t) = V\{\textit{törési idő} < t\}$, akkor

$$F(t+\Delta t) = F(t) + [1 - F(t)]\,\tau_1 \Delta t + o(\Delta t).$$

Így a $\Delta t \to 0$ határátmenettel kapjuk, hogy $F'(t) = \tau_1[1 - F(t)]$, vagyis

* A következőkben $V\{\ldots\}$ a zárójelben álló esemény valószínűségét jelöli.

az $F(0)=0$ kezdő feltételt figyelembevéve következik, hogy

$$F(t)=1-e^{-\tau_1 t},$$

tehát a törésig eltelő idő exponenciális eloszlású. A 2. pontban mondottaknak megfelelően paramétere: $\tau_1=1/T_1$, a T_1 *várható törési idő* reciprok értéke. Az exponenciális eloszlás szórása — mint ismeretes — számszerűleg megegyezik a várható értékkel, azaz a törési idő szórása szintén T_1-gyel egyenlő.

Ha most még a K kopási idő után feltétlenül bekövetkező cserét is figyelembe vesszük, akkor az alkatrész t időn belüli cseréjének, elhasználódásának valószínűségét illetően a

$$H(t)=\begin{cases} F(t) \\ 1 \end{cases}, \text{ ha } t\begin{cases} \leqq K \\ > K \end{cases}$$

eloszlásfüggvényre jutunk. Így az alkatrészfajta *élettartamának várható értéke*

$$T=\int_0^\infty t\,dH(t)=\int_0^K tH'(t)\,dt+Ke^{-\tau K}=T_1(1-e^{-\mu}),$$

ahol $\mu=K/T_1$ és *szórása,* mint az egyszerűen kiszámítható,

$$\sigma=T_1\sqrt{1-2\mu e^{-\mu}-e^{-2\mu}}.$$

Mivel ezek szerint az élettartamnak

$$\frac{\sigma}{T}=\frac{\sqrt{1-2\mu e^{-\mu}-e^{-2\mu}}}{1-e^{-\mu}}$$

relatív szórása nagy, ha $\mu>1$, azaz ha a kopási idő a várható törési időnél nagyobb, az a nyers számítás, amely szerint az időegységben $1/T$ s így a t idő alatt átlag t/T cserére számíthatunk, megbízhatatlan. A pontos számítás, mely a csereszám eloszlásának szövevényes volta miatt bizonyos fogásokat igényel, a t idő alatti csereszám $\bar{c}(t)$ várható értékére valóban egy bonyolult nem-folytonos függvényt szolgáltat, melynek ugráshelyei K egészszámú többszörösei. Ez ugyan nagy μ és t értékek mellett a nyers átlagérték körül jár, különben azonban gyakorlatilag csak előre elkészített grafikonok segítségével kezelhető. Mindenesetre a szórás s ezzel kapcsolatban különböző kockázatú megbízhatósági határok megállapítása újabb bonyodalmakat okoz, bár a normális eloszlással való megközelíthetőség révén végeredményben a számítások gyakorlatilag közelítőleg elvégezhetők.

A mindennapi gyakorlat érdekeit szemmeltartva azonban kívánatosnak mutatkozott egy olyan elméletet kidolgozni, amely — még elfogadható feltételek mellett — a törzskészlet megállapítására egyszerűbb számítással adódó megbízhatósági határokat ad.

4. Az *egyszerűsített új elmélet* első megállapítása az, hogy *ha a törési és kopási idő egyaránt* T_1 *és* T_2 *várható értékű exponenciális eloszlást mutat*

$$(3) \qquad F(t) = 1 - e^{-t/T_1} \text{ és } G(t) = 1 - e^{-t/T_2}$$

eloszlásfüggvénnyel, *akkor az alkatrész elhasználódása, élettartama ugyancsak exponenciális eloszlású*

$$(4) \qquad T = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$$

várható értékkel. Ha ugyanis $H(t)$ annak a valószínűsége, hogy a törés és kopás két egymást kizáró oka miatt az elhasználódás bekövetkezik, tehát az alkatrész vagy eltörik, vagy ha nem törik el, akkor elkopik, úgy

$$(5) \qquad \begin{aligned} H(t) &= F(t) + [1 - F(t)]G(t) = \\ &= 1 - e^{-t/T_1} + e^{-t/T_1}(1 - e^{-t/T_2}) = 1 - e^{-t\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right)}, \end{aligned}$$

azaz

$$(6) \qquad H(t) = 1 - e^{-t/T},$$

ahol T (4) által van definiálva.

E feltevés jogosultságának ellenőrzése és T megállapítása gyakorlatilag igen egyszerűen elvégezhető, erre azonban itt nem térünk ki. Teljesülése esetén, vagyis a cserélt alkatrészek egymásra következő $\tau = 1/T$ paraméteres exponenciális eloszlású igénybevétele mellett, egy a rádióaktív bomlások és a sörétzaj vizsgálatánál jólismert meggondolással nyomban megállapítható, hogy *a t idő alatti cserék $c(t)$ száma t/T várható értékű Poisson-eloszlással bir, vagyis*

$$(7) \qquad V\{c(t) = n\} = \pi_n(t; T) = \frac{1}{n!}\left(\frac{t}{T}\right)^n e^{-\frac{t}{T}}.$$

Ugyanis jelentse $\pi_n(t; T)$ annak a valószínűségét, hogy egy $(a, a+t)$ időintervallum alatt n számú cserére van szükség. Akkor Δt-ben magasabbrendű tagoktól eltekintve

$$(8) \qquad \pi_{n+1}(t + \Delta t; T) = \pi_n(t; T)\frac{\Delta t}{T} + \pi_{n+1}(t; T)\left(1 - \frac{\Delta t}{T}\right),$$

azaz átrendezve

$$(9) \qquad \frac{\pi_{n+1}(t + \Delta t; T) - \pi_{n+1}(t; T)}{\Delta t} = \frac{\pi_n(t; T) - \pi_{n+1}(t; T)}{T}$$

és így, elvégezve a $\Delta t \to 0$ határátmenetet, következik, hogy

$$(10) \qquad \frac{\partial \pi_{n+1}(t;\,T)}{\partial t} = \frac{\pi_n(t;\,T) - \pi_{n+1}(t;\,T)}{T}.$$

Mivel feltevésünk szerint $\pi_0(t;\,T) = e^{-t/T}$, ezt a differenciálegyenletet sukcesszive megoldva következik, hogy

$$(11) \qquad \pi_n(t;\,T) = \frac{1}{n!}\left(\frac{t}{T}\right)^n e^{-\frac{t}{T}}.$$

Ismeretes, hogy a Poisson-eloszlás szórásnégyzete számszerűleg megegyezik a várható értékével, azaz jelen esetben a t idő alatti cserék számának szórása $\sqrt{t/T}$.

Ha még meggondoljuk, hogy a $t = p$ pótlási idő a gyakorlatban az alkatrésznek T várható élettartamához képest nagy és a Poisson-eloszlás nagy p/T paraméternél a p/T középértékű és $\sqrt{p/T}$ szórású *normális eloszlást* közelíti aszimptotikusan meg, akkor az alkatrészfajta törzskészletére a

$$(12) \qquad k = \frac{p}{T} + \nu \sqrt{\frac{p}{T}}$$

(felső) megbízhatósági határ adódik. Mégpedig $\nu = 2$, illetve $\nu = 3$ esetén 2,28%, illetve 0,14% kockázattal.

Ha pedig ily alkatrészből egyidejűleg a darab kerül igénybevételre, akkor ez az érték igen egyszerűen módosul. Nevezetesen, ha a különböző igénybevétel miatt az egyébként egyforma alkatrészek élettartamai különbözőek: $T_1, \ldots, T_a$ és az igénybevételek egymástól *függetlenek,* akkor p idő alatti csereszámuk várható értékének és szórásnégyzetének

$$\frac{p}{T_1} + \cdots + \frac{p}{T_a} = p\left(\frac{1}{T_1} + \cdots + \frac{1}{T_a}\right) = \frac{p}{T_*}$$

összegeződése folytán (12) csak annyiban módosul, hogy T helyébe T_* kerül. Így speciálisan a $T_1 = \cdots = T_a = T$ esetben

$$(13) \qquad k = \frac{ap}{T} + \nu \sqrt{\frac{ap}{T}}$$

adódik. *Az alkatrészfajta törzskészletére így nyert érték* azonban már $\nu\sqrt{\frac{ap}{T}} < \frac{ap}{T}$, vagyis $\nu^2 < \frac{ap}{T}$ esetén, tehát a gyakorlatban mindig, *jelentékenyen kisebb az eddig alkalmazott* (1) *értéknél.*

5. Az egyszerűsített elmélet most már a *pótlási idő ingadozásánál* mutatkozó viszonyokba is betekintést enged. Legyen ugyanis

— egyelőre újból $a=1$ alkatrész igénybevételénél — a t pótlási idő p várható értékű, s szórásnégyzetű, $P(t)$ eloszlásfüggvényű valószínűségi változó. Vagyis

$$p=\int_0^\infty t\,dP(t) \quad \text{és} \quad s^2=\int_0^\infty (t-p)^2 dP(t)=\int_0^\infty t^2 dP(t)-p^2.$$

Akkor a csereszámnak a pótlási időre vonatkozó valószínűségeloszlása

$$\text{(11')} \qquad \pi_n(T)=\int_0^\infty \pi_n(t;\,T)\,dP(t),$$

vagyis $\pi_n(t;\,T)$-nek a pótlási időre vonatkozó várható értéke. Mivel az n- és a t-szerinti középérték-képzés nyilván felcserélhető, végeredményben a csereszám várható értéke:

$$M(c)=\int_0^\infty \frac{t}{T}\,dP(t)=\frac{p}{T}.$$

Hasonló indokolással

$$M(c^2)=\int_0^\infty \left[\frac{t}{T}+\left(\frac{t}{T}\right)^2\right]dP(t)=\frac{p}{T}+\frac{s^2+p^2}{T^2};$$

mert c^2-nek n-szerinti várható értéke, mint c kezdőpontra vonatkozó n-szerinti másodrendű nyomatéka, a c csereszám n-szerinti t/T várható értékének és $\sqrt{t/T}$ szórásának négyzetösszege a másodrendű nyomatékokra vonatkozó jólismert tétel szerint.

Ugyanezen tétel szerint most már a csereszám teljes szórásnégyzete:

$$M[c-M(c)]^2=M(c^2)-M^2(c)=\frac{p}{T}+\frac{s^2+p^2}{T^2}-\frac{p^2}{T^2}=\frac{p}{T}+\frac{s^2}{T^2}.$$

A változó pótlási idő alatti csereszám $\frac{p}{T}$ középértékétől $\sqrt{\frac{p}{T}+\frac{s^2}{T^2}}$ szórása ν-szeresével való eltérésének valószínűségéről tüzetesebb képet természetesen csak a pótlási idő eloszlásának közelebbi ismereténél adhatunk. Azaz a

$$\text{(14)} \qquad k=\frac{p}{T}+\nu\sqrt{\frac{p}{T}+\frac{s^2}{T^2}}$$

törzskészlet által nyújtott biztonság meghatározásához további feltevések szükségesek (lásd a 6. pontot).

Ha a darab egyidejűleg igénybevett, $T_1, \ldots, T_a$ várható élettartamú alkatrészt vizsgálunk a középértékek és szórásnégyzetek összegezése folytán

$$(15) \qquad k = \frac{p}{T_*} + \nu \sqrt{\frac{p}{T_*} + \frac{s^2}{T_{**}^2}}$$

adódik az

$$\frac{1}{T_*} = \frac{1}{T_1} + \cdots + \frac{1}{T_a} \text{ és } \frac{1}{T_{**}^2} = \frac{1}{T_1^2} + \cdots + \frac{1}{T_a^2}$$

értékkel. Speciálisan $T_1 = \cdots = T_a$ esetén

$$(16) \qquad k = \frac{ap}{T} + \nu \sqrt{a\left(\frac{p}{T} + \frac{s^2}{T^2}\right)}.$$

A kockázat kimutatásához itt is ismerni kell a pótlási idő eloszlását.

6. *A* pótlási idő eloszlásaként *gamma-eloszlásként* ismert

$$\gamma_m(t; \alpha) = \frac{d\Gamma(t; \alpha, m)}{dt} = \frac{\alpha^m}{\Gamma(m)} t^{m-1} e^{-\alpha t}$$

sűrűségű eloszlást véve, melynél m, α és t pozitív, a pótlási idő középértéke illetve szórásnégyzete

$$p = \frac{m}{\alpha} \quad \text{illetve} \quad s^2 = \frac{m}{\alpha^2} = \frac{p}{\alpha}.$$

Fordítva, ha a pótlási idő ily középértékű és szórásnégyzetű gammaeloszlást mutat, akkor csak

$$\alpha = \frac{p}{s^2}, \quad m = \frac{p^2}{s^2}$$

paraméterű lehet. Mivel a gamma-eloszlások különböző α és m mellett igen különböző alakúak, nem jelent különösebb önkényt annak feltevése, hogy a pótlási idő ilyen eloszlással bir. Az ilyen eloszlású pótlási időre vonatkozóan azonban a csereszám eloszlása az $n = 0, 1, \ldots$ értékkészleten (11′) szerint

$$\Pi_n(T; \alpha, m) = \int_0^\infty \frac{1}{n!}\left(\frac{t}{T}\right)^n e^{-\frac{t}{T}} \frac{\alpha^m}{\Gamma(m)} t^{m-1} e^{-\alpha t}\, dt =$$

$$= \binom{m+n-1}{n} q^n (1-q)^m,$$

tehát a *Pascal-féle* vagy *negatív binomiális* eloszlás a $q = \dfrac{1}{1+\alpha T} =$

$\frac{1}{1+\frac{pT}{s^2}}$ értékkel. Erről pedig tudjuk, hogy olyan nagy m és kis q értékeknél, melyekre mq már nem kicsiny, a *normális* eloszlást közelíti meg. Esetünkben ez nyilván akkor következik be, ha pT/s^2 nagy. Ekkor ugyanis

$$mq = \frac{p^2}{s^2+pT} = \frac{p}{T}\frac{1}{1+\frac{s^2}{pT}} \approx \frac{p}{T}$$

s ez az érték, a csereszám várható értéke — egy működő alkatrésznél — a gyakorlatilag jelentős esetekben természetesen nagy. Ilyenkor tehát a (14)—(16) alatt megadott határok, melyek az állandó pótlási időre nyert (12), (13) alattiakkal közel megegyeznek, már $\nu = 2$ illetve 3 esetén 2,28 illetve 0,14%-os kockázatúnak tekinthetők.

A *gamma*-eloszlás feltevése itt csak annyiban bir jelentőséggel, hogy ilyen eloszlás mellett a csereszám eloszlása könnyen kiszámítható explicit alakban. A végeredményre azonban ez a feltevés kevés befolyással bír és így az, ami ebben a feltevésben önkényes, a végeredményt igen kevéssé befolyásolja.

Összefoglalás: Ha egy alkatrészfajtából egyidejűleg a számú alkatrész van igénybevételnek kitéve, az egyes igénybevett alkatrészek várható élettartamai $T_1, \ldots, T_a$, továbbá a pótlás átlagos időtartama p, szórása s, úgy a törzskészlet meghatározására a

$$k = \frac{p}{T_*} + \nu\sqrt{\frac{p}{T_*} + \frac{s^2}{T_{**}^2}} \tag{17}$$

képlet szolgál, ahol

$$T_* = \frac{1}{\frac{1}{T_1} + \cdots + \frac{1}{T_a}}, \quad T_{**} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{T_1^2} + \cdots + \frac{1}{T_a^2}}}$$

és ν értéke aszerint választandó meg, hogy mekkora kockázat engedhető meg; $\nu = 3$ általában gyakorlatilag kielégítő, mert 0,14%-os kockázatnak felel meg. Illusztrációként egy számpéldát közlünk: ha az igénybevett alkatrészek száma $a = 100$, ezek átlagos élettartamai egyenlők: $T = 30$ nap, vagyis $T_* = 0{,}3$ nap, $T_{**} = 3$ nap, továbbá az átlagos pótlási idő $p = 20$ nap, szórása $s = 6$ nap, úgy $\nu = 3$ (azaz 0,14% kockázat) mellett $k = 92$. Azaz 92-ben állapítva meg a törzskészletet, 39 év alatt kb. egyszer fog csak előfordulni, hogy a készlet a rendelt új alkatrészek beérkezte előtt kifogy. A bevezetésben említett, a gyakorlatban eddig használatos számítási eljárás szerint 133 alkatrészt kellene tartalékolni.

Látjuk tehát, hogy a megtakarítás igen jelentékeny. A közölt számítási eljárást természetesen a gyakorlatban fellépő, de a dolgozatban figyelembe nem vett egyéb tényezők közrejátszásánál megfelelően módositani kell. Az ilyen módosítások szükségét feltétlenül meg kell vizsgálni. Az is természetes, hogy a számításban szereplő T, p, s mennyiségeket gondos statisztikai adatfelvétellel kell megállapitani. Ezeket a szempontokat figyelembevéve kívánatos, hogy az az üzem, amely ezt a módszert alkalmazni kívánja, a Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetéhez forduljon, ahol e kérdésekben részletes felvilágosítást nyerhet.

Budapest, 1952. VII. 10.

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕОБХОДИМОГО КОЛИЧЕСТВА ЗАПАСНЫХ ЧАСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ

А. Реньи и Т. Сэнтмартони

В работе решается при помощи теории вероятности следующая задача: деталь машины подвержена износу и ломке, так что продолжительность её годности является случайной величиной с показательным законом распределения и средним значением Т. Предположим, что одновременно используются a деталей. Время замены (время от заказа до получения новой детали) тоже рассматривается как случайная величина со средним значением p и с дисперсией s. Тогда количество запасных частей, данное формулой (16) при $\nu = 2$ и $\nu = 3$ соответственно, достаточно для того, чтобы обеспечить непрерывность производства с риском $2{,}28\%$ и $0{,}14\%$ соответственно. При этом предполагается, что время замены имеет распределение типа Г.

WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORETISCHE BESTIMMUNG VON RESERVEN IN MASCHINENTEILEN UND AUSRÜSTUNGSGEGENSTÄNDEN.

A. Rényi und T. Szentmártony

Gegenüber der durch die Faustregel (1) sowie der durch die Erneuerungstheorie gelieferten Wert (2) wird gezeigt, daß bei a gleichartigen, gegenüber Bruch und Abnützung mit dem Mittelwert (4) exponential verteilte Lebensdauer zeigenden Maschinenteilen eine Reserve (13) die Kontinuität des Betriebes sichert. Und zwar bei konstanter Ersetzungszeit p und $\nu = 2$ bzw. 3. mit einem 2,28 bzw. 0,14%-igen Risiko. Bei um den Mittelwert p mit der Streuung s schankender Ersetzungszeit gilt (16) statt (13). Und zwar z. B. bei einer Γ-Verteilung der zeigenden Ersetzungszeit mit demselben Risiko.

Pozitív polinomok

Írta: Szőkefalvi-Nagy Béla

1. Az analízisben gyakran szükséges, hogy a vizsgált függvényeket olyan alakban állítsuk elő, amelyből a függvények bizonyos tulajdonságai közvetlenül kitűnnek. A leggyakrabban arra van szükség, hogy a függvény alakjából az előjele leolvasható legyen.

Első példaként hozzuk fel azokat a $P(x)$ polinomokat, amelyeknek *minden* valós x helyen nem-negatív valós szám az értékük:

$$P(x) \geqq 0. \tag{1}$$

Ez a tulajdonsága nyilvánvalóan megvan minden olyan polinomnak, amely valamely valós együtthatós polinom négyzetével, vagy ilyen négyzetek összegével egyenlő, azaz amelynek az alakja

$$P(x) = [Q_1(x)]^2 + [Q_2(x)]^2 + \cdots + [Q_m(x)]^2, \tag{2}$$

ahol a Q-k valós együtthatós polinomok.

Mutassuk meg, hogy ezzel ki is merítettük a szóbanforgó polinomosztályt, azaz, hogy minden olyan polinom, amely eleget tesz az egész x-tengelyen az (1) feltételnek, előállítható a (2) alakban. A bizonyítás egyszerűen adódik abból, hogy az (1) feltételnek eleget tevő $P(x)$ polinomnak a valós zéróhelyei feltétlenül *páros* multiplicitásúak, és hogy minden $a+bi$ $(b \neq 0)$ komplex zéróhellyel együtt ennek konjugáltja, $a-bi$ is zéróhely, mégpedig azonos multiplicitással. Ennek következtében ugyanis a $P(x)$ gyöktényezős felbontása ilyen alakra hozható:

$$P(x) = A \prod_k (x-c_k)^2 \prod_j (x-a_j-b_j i)(x-a_j+b_j i) =$$
$$= A \prod_k (x-c_k)^2 \prod_j [(x-a_j)^2+b_j^2],$$

ahol az A, c_k, a_j, b_j mennyiségek valósak és $A \geqq 0$, azaz $A = B^2$. A második szorzat szögletes zárójeleit felbontva, adódik a (2) alakú előállítás.

Érdekes megjegyezni, hogy a (2) jobboldalán szereplő négyzetek száma mindig lecsökkenthető *kettőre*, vagy esetleg *egyre*.*

* Lásd: G. Pólya—G. Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis.* II. (Berlin, 1925) 82, 275.

Amikor ugyanis az előbbi szorzatelőállításban a szögletes zárójelek közt álló kéttagú négyzetösszegeket összeszorozzuk, újra egy kéttagú négyzetösszegre juthatunk; ehhez csak a következő algebrai azonosságot kell ismételten alkalmaznunk:

$$(p^2+q^2)(r^2+s^2)=(pr+qs)^2+(ps-qr)^2.$$

2. Hasonló tétel érvényes trigonometrikus polinomokra is (FEJÉR LIPÓT és RIESZ FRIGYES tétele)*. Eszerint, ha minden valós x-re

$$(3)\qquad T(x)=a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\cdots+ \\ +a_n\cos nx+b_n\sin nx\geqq 0,$$

akkor $T(x)$ előállítható a következő alakban:

$$(4)\qquad T(x)=[S(x)]^2+[\tilde{S}(x)]^2,$$

ahol $S(x)$ és $\tilde{S}(x)$ valós együtthatós trigonometrikus polinomok:

$$S(x)=\alpha_0+\alpha_1\cos x+\beta_1\sin x+\cdots+\alpha_m\cos mx+\beta_m\sin mx,$$
$$\tilde{S}(x)=\quad-\beta_1\cos x+\alpha_1\sin x-\cdots-\beta_m\cos mx+\alpha_m\sin mx.$$

E tétel RIESZ által adott bizonyításának alapgondolata, hogy az EULER-féle összefüggések alapján a komplex exponenciális alakra térünk át:

$$T(x)=\sum_{k=-n}^{n}A_k e^{ikx}=e^{-inx}\sum_{h=0}^{2n}A_{h-n}e^{ihx},$$

azután pedig a

$$\sum_{h=0}^{2n}A_{h-n}z^h$$

közönséges polinom gyöktényezős felbontását vizsgáljuk. A bizonyítást nem részletezzük.

3. Térjünk vissza a közönséges polinomokra, és most olyan polinomokat vizsgáljunk, amelyek az x-tengely valamely véges szakaszán pozitívok:

$$(5)\qquad P(x)>0 \quad \text{ha} \quad a\leqq x\leqq b.$$

Egy ilyen $P(x)$ polinomnak valós zéróhelyei csak az $[a, b]$ szakaszon kívül lehetnek, komplex zéróhelyei pedig azonos multiplicitású, egymáshoz konjugált párokban lépnek fel; ennélfogva a $P(x)$ gyöktényezős felbontása ilyen alakra hozható:

$$(6)\qquad P(x)=A\prod(x-\alpha_p)\prod(\beta_q-x)\prod[(x-\gamma_r)^2+\delta_r^2],$$

* Lásd: L. FEJÉR, Über trigonometrische Polynome, *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* **146** (1915), 53—82.

ahol

$$A>0, \alpha_p<a, \beta_q>b, \gamma_r \text{ és } \delta_r \text{ valósak, } \delta_r \neq 0.$$

Fordítva, nyilvánvaló, hogy minden polinom, amely ilyen módon előállítható, eleget tesz az (5) feltételnek.

4. Egy másik, igen érdekes és használható előállítást adott az (5) feltételnek eleget tevő polinomokra F. HAUSDORFF, a momentumproblémáról írt nevezetes dolgozatában *. Bebizonyította ugyanis a következő tételt:

Ha a $P(x)$ polinom az $[a, b]$ szakaszon pozitív, akkor előállítható a

$$P(x)=\sum_{m=0}^{s} u_m^{(s)}(x-a)^m(b-x)^{s-m}$$

alakban, csupa pozitív $u_m^{(s)}$ együtthatóval; az s itt bármely elég nagy egész számot jelenthet.

A bizonyításban egyszerűbb írásmód kedvéért szorítkozzunk a $[0, 1]$ szakasz esetére; a tetszőleges $[a, b]$ szakasz esete erre az $x=a+(b-a)\xi$ helyettesítéssel visszavezethető.

A tétel bizonyítása végett először is azt lássuk be, hogy ha az s egész szám legalább akkora, mint a

$$(7) \qquad P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

polinom fokszáma, akkor $P(x)$ előállítható a

$$(H^{(s)}) \qquad P(x)=\sum_{m=0}^{s} u_m^{(s)}x^m(1-x)^{s-m}$$

alakban, ahol az $u_m^{(s)}$ együtthatókról egyelőre természetesen semmi többet nem állíthatunk.

Ehhez elég megmutatnunk, hogy minden x^k hatványfüggvény előállítható ebben az alakban, hacsak $k \leqq s$. Ez azonban nyilvánvaló, hiszen

$$x^k=x^k[x+(1-x)]^{s-k}=x^k\sum_{j=0}^{s-k}\binom{s-k}{j}x^j(1-x)^{s-k-j}=$$

$$=\sum_{m=k}^{s}\binom{s-k}{m-k}x^m(1-x)^{s-m}.$$

* Lásd: F. HAUSDORFF, Summationsmethoden und Momentfolgen. I, *Mathematische Zeitschrift,* **9** (1921), 74—109. Az ú. n. STIELTJES-féle momentumprobléma, amellyel HAUSDORFF dolgozata is foglalkozik, a következő: Keresendő az $a \leqq x \leqq b$ szakaszon értelmezett olyan monoton nem-fogyó $m(x)$ függvény, amelyre az

$$\int_a^b x^k dm(x)=\mu^k \qquad (k=0, 1, 2, \ldots)$$

egyenletek mindegyike teljesül; a μ_k mennyiségek adottak.

Ebből adódik a $(H^{(s)})$ előállítás az

$$u_m^{(s)}=\sum_{k=m}^{s}\binom{s-k}{m-k}a_k$$

együtthatókkal; ezek a (7) alatti kanonikus előállítás a_k együtthatóinak nem-negatív egész együtthatós lineáris kombinációi.

A $(H^{(s)})$ előállítás *egyértelműen* van meghatározva, azaz a most megszerkesztetten kívül több ilyen előállítása ugyanannak a $P(x)$ polinomnak (ugyanazon s mellett) nincsen. Ehhez elég azt belátni, hogy ha

$$\sum_{m=0}^{s} v_m^{(s)}x^m(1-x)^{s-m}\equiv 0,$$

akkor

$$v_m^{(s)}=0 \qquad (m=0,1,\ldots,s).$$

Tegyük fel ennek az ellenkezőjét, és legyen $v_r^{(s)}$ a 0-tól különböző együtthatók közül az első. Ekkor x^r-rel végigoszthatunk és azt kapjuk, hogy

$$\sum_{m=0}^{s} v_m^{(s)}x^{m-r}(1-x)^{s-m}\equiv 0.$$

Az $x=0$ helyen a baloldal minden tagja 0-vá válik az elsőt kivéve, és így adódik, hogy

$$v_r^{(s)}=0,$$

ami feltevésünknek ellentmond. Tehát mindegyik $v_m^{(s)}$ együttható 0, és ezzel a $(H^{(s)})$ előállítás unicitását bebizonyítottuk.

Vizsgáljuk meg, milyen kapcsolat van ugyanannak a polinomnak a $(H^{(s)})$ és $(H^{(s+1)})$ előállításaiban fellépő együtthatói között. Az utóbbi előállítás az előbbiből úgy hozható létre, hogy ezt $[x+(1-x)]$-szel átszorozzuk: ennélfogva

$$u_m^{(s+1)}=u_{m-1}^{(s)}+u_m^{(s)} \qquad (m=1,2,\ldots,s)$$

és

$$u_0^{(s+1)}=u_0^{(s)}, \quad u_{s+1}^{(s+1)}=u_s^{(s)}.$$

Ezekből az összefüggésekből nyilvánvaló, hogy ha a $(H^{(s)})$ előállítás együtthatói mind pozitívok, akkor a $(H^{(s+1)})$ előállításé is mind pozitívok, és ennélfogva a $(H^{(s+2)})$ előállításé is, és így tovább, azaz ekkor minden $(H^{(s+k)})$ előállítás együtthatói pozitívok $(k= =1,2,\ldots)$.

Ha a $P(x)$ polinom elsőfokú és a $[0,1]$ szakaszon pozitív, akkor már a $(H^{(1)})$ előállítás együtthatói is pozitívok. Valóban, ekkor

$$P(x)=u_0^{(1)}x+u_1^{(1)}(1-x),$$

ahol

$$u_0^{(1)} = P(1) > 0, \qquad u_1^{(1)} = P(0) > 0.$$

Tekintsünk most egy olyan másodfokú polinomot, amely az egész x-tengelyen pozitív, azaz legyen

$$P(x) = a + 2bx + cx^2 \qquad (a > 0, c > 0,\ ac - b^2 > 0).$$

Ha $s \geqq 2$, akkor ennek a polinomnak a $(H^{(s)})$ előállítása a következő:

$$P(x) = a[x + (1-x)]^s + 2bx[x + (1-x)]^{s-1} + cx^2[x + (1-x)]^{s-2} =$$

$$= \sum_{m=0}^{s} \frac{(s-2)!}{m!\,(s-m)!}[s(s-1)a + 2m(s-1)b +$$

$$+ m(m-1)c]x^m(1-x)^{s-m}.$$

Azt kell belátnunk, hogy ha s elég nagy, akkor az $m = 0, 1, \ldots, s$ értékek mindegyikére

$$s(s-1)a + 2m(s-1)b + m(m-1)c > 0.$$

Ennél több is elérhető, t. i., hogy ez az egyenlőtlenség az m-nek *minden valós értékére* teljesüljön. A szóbanforgó kifejezés ugyanis az m-nek másodfokú polinomja, melynek az m hatványai szerint rendezett alakja:

$$s(s-1)a + (2sb - 2b - c)m + cm^2 = A + 2Bm + Cm^2,$$

és ez a polinom elég nagy s-re pozitív definit, mert ekkor

$$A = s(s-1)a > 0, \quad C = c > 0$$

és

$$AC - B^2 = s(s-1)ac - \left(sb - b - \frac{c}{2}\right)^2 =$$

$$= s^2(ac - b^2) + s(2b^2 + bc - ac) - \left(b + \frac{c}{2}\right)^2 > 0.$$

Ezek után tekintsünk egy tetszésszerinti olyan $P(x)$ polinomot, amely a $[0, 1]$ szakaszon pozitív. Ez felbontható a (6) alakban első- és másodfokú tényezők szorzatára, melyek közül az elsőfokúak a $[0, 1]$ szakaszon, a másodfokúak pedig az egész x-tengelyen pozitívok. Az előzőek szerint e tényezők mindegyikének van pozitív együtthatós $(H^{(s)})$ előállítása, tényezőnként esetleg más és más s-sel. Ezeket összeszorozva, eljutunk a $P(x)$ egy olyan $(H^{(s)})$ előállításához, amelynek szintén minden együtthatója pozitív.

5. HAUSDORFF tételét többváltozós polinomok esetére is ki lehet terjeszteni. Szorítkozzunk egyelőre kétváltozós $P(x, y)$ polinomokra, és tegyük fel, hogy

$$P(x,y)>0, \quad \text{ha} \quad 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1.$$

Legyen $P(x,y)$-nak az x-re vonatkozólag a fokszáma n, azaz legyen

$$P(x,y)=a_0(y)+a_1(y)x+\cdots+a_n(y)x^n,$$

ahol az $a_k(y)$ együtthatók az y változó polinomjai. Ha $s\geqq n$, akkor $P(x,y)$-nak az x-re vonatkozólag van $(H^{(s)})$ előállítása:

$$P(x,y)=\sum_{m=0}^{s} u_m^{(s)}(y)\, x^m(1-x)^{s-m};$$

az $u_m^{(s)}$ együtthatók az $a_k(y)$ együtthatók (egész együtthatós) lineáris kombinációi lévén, maguk is az y polinomjai.

Hausdorff tételéből következik, hogy ha y_0 az y-nak a $[0,1]$-be eső tetszőleges értéke, akkor található y_0-hoz egy olyan s_0 természetes szám, $s_0\geqq n$, hogy az

$$u_0^{(s_0)}(y),\ u_1^{(s_0)}(y),\ldots,u_{s_0}^{(s_0)}(y)$$

függvények az y_0 helyen mind pozitívok. E függvények polinomok, tehát folytonosak lévén, pozitív az értékük az y_0 egy bizonyos környezetében is. De akkor az y_0-nak ebben a környezetében pozitívok a s_0-nál nagyobb s-ekhez tartozó $(H^{(s)})$ előállítások együtthatói, azaz az

$$u_m^{(s)}(y) \qquad (s\geqq s_0;\ m=0,1,\ldots,s)$$

polinomok is.

Az y-nak a $[0,1]$ szakaszba eső összes lehetséges y_0 értékeihez ilyen módon hozzárendelt környezetek együttvéve lefedik ezt a szakaszt. Borel tétele szerint kiválasztható véges sok y_0 érték úgy, hogy az ezekhez a fenti módon tartozó környezetek szintén lefedik az egész $[0,1]$ szakaszt. Jelöljük az ezekhez az y_0 értékekhez tartozó s_0 számok legnagyobbikát s_1-gyel. Ekkor tehát az egész $[0,1]$ szakaszon

$$u_m^{(s_1)}(y)>0 \qquad (m=0,1,\ldots,s_1). \tag{8}$$

Alkalmazzuk Hausdorff tételét most az y-nak ezekre a polinomjaira. Minthogy véges sokan vannak, találhatunk egy olyan s_2 természetes számot, hogy e polinomok mindegyikének a $(H^{(s_2)})$ előállításában szereplő együtthatók pozitív számok. Így eljutunk az eredeti kétváltozós polinomnak egy olyan

$$P(x,y)=\sum_{m_1=0}^{s_1}\sum_{m_2=0}^{s_2} u_{m_1,m_2}^{(s_1,s_2)} x^{m_1}(1-x)^{s_1-m_1} y^{m_2}(1-y)^{s_2-m_2}$$

előállításához, amelyben az összes együtthatók pozitív számok.

Ugyanennek a gondolatmenetnek a megismétlésével eljuthatunk a kétváltozós esetről a háromváltozósra, és így tovább. Érvényes tehát HAUSDORFF tételének a következő általánosítása:

Ha az r-változós $P(x_0, \ldots, x_r)$ polinom a

$$0 \leqq x_1 \leqq 1, \ldots, 0 \leqq x_r \leqq 1 \tag{9}$$

egyenlőtlenséggel jellemzett r-dimenziós „kockában" mindenütt pozitív értékű, akkor előállítható a következő alakban:

$$P(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{m_1=0}^{s_1} \cdots \sum_{m_r=0}^{s_r} u_{m_1, \ldots, m_r}^{(s_1, \ldots, s_r)} x_1^{m_1}(1-x_1)^{s_1-m_1} \cdots x_r^{m_r}(1-x_r)^{s_r-m_r},$$

*ahol az összes együtthatók pozitív számok.**

A (9) kocka esetéről nyilvánvaló módon áttérhetünk tetszésszerinti

$$a_1 \leqq x_1 \leqq b_1, \ldots, a_r \leqq x_r \leqq b_r$$

r-dimenziós „téglatest" esetére.

6. HAUSDORFF tételének az imént adott általánosításához a BOREL-féle lefedési tétel felhasználásával jutottunk el. Kívánatos lenne egy olyan, elemibb bizonyítást találni rá, amely nem hivatkozik a BOREL-féle tételre. Az eredeti, egy változóra vonatkozó tételre is kívánatos volna egy olyan bizonyítást kidolgozni, amely nem hivatkozik a polinom gyöktényezős felbontására, hiszen akármelyik ($H^{(s)}$) előállítás $u_m^{(s)}$ együtthatói a polinom a_k együtthatóinak egész együtthatós lineáris kombinációi lévén, kiszámításukhoz nem szükséges a gyökök ismerete.

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Бела С.-Надь

Каждый многочлен, для которого $P(x) \geqq 0$ при любом вещественном x, равен сумме квадратов многочленов с вещественными коэффициентами. Каждый тригонометрический многочлен, для которого $T(x) \geqq 0$, также является суммой квадратов двух тригонометрических многочленов с вещественными коэффициентами; эти многочлены тригонометрически сопряжённы (теорема Фэера и Риса). Каждый многочлен для которого $P(x) > 0$

* Ennek a tételnek éppen olyan haszna lehet pl. a többváltozós momentumprobléma megoldásában, mint az eredeti HAUSDORFF-féle tételnek az egyváltozós momentumproblémáéban. A többváltozós momentumprobléma tárgyalásában eddig egy komplikáltabb alakú előállításra támaszkodtak, lásd: T. H. HILDEBRANDT—I. J. SCHOENBERG, On linear functional operators and the moment problem for a finite interval in one or several dimensions, *Annals of Mathematics*, (2) **34** (1933), 318—328.

на отрезке $0 \leqq x \leqq 1$, может быть представлен при достаточно большом s в виде $P(x) = \sum\limits_{m=0}^{s} u_m^{(s)} x^m (1-x)^{s-m}$ при помощи положительных коэффициентов (теорема Хаусдорфа). Эта теорема может быть обобщена на случай любого числа переменных. Любой многочлен $P(x_1, x_2, \dots, x_r)$, который положителен на „кубе“ $0 \leqq x_i \leqq 1$ $(i = 1, 2, \dots r)$ может быть представлен в следующем виде:

$$\sum_{m_1=0}^{s_1} \dots \sum_{m_1=0}^{s_r} u_{m_1 \dots m_2} x_1^{m_1} (1-x_1)^{s_i - m_1} \dots x_r^{m_r} (1-x_r)^{s_1 - m_2}$$

где коэффициенты—положительны. По ходу доказательства применяется теорема Бореля, желательно найти более элементарное доказательство.

Polynomes positifs

B. Sz.-Nagy

Tout polynome $P(x)$ tel que $P(x) \geqq 0$ sur tout l'axe réel, est égal à la somme des carrés de deux polynomes à coefficients réels. De même, tout polynome trigonométrique $T(x)$ tel que $T(x) \geqq 0$ sur tout l'axe réel, est la somme des carrés de deux polynomes trigonométriques à coefficients réels, conjugués l'un à l'autre au sens trigonométrique (théorème de Fejér—Riesz). Tout polynome $P(x)$ tel que $P(x) > 0$ pour $0 \leqq x \leqq 1$, peut être représenté, pour des entiers s assez élevés, sous la forme

$$P(x) = \sum_{m=0}^{s} u_m x^m (1-x)^{s-m}$$

où tous les coefficients sont positifs (théorème de Hausdorff). On rappelle la démonstration de ce théorème, puis on le généralise à un nombre quelconque de variables:

Tout polynome $P(x_1, \dots, x_r)$ qui est positif dans le „cube“ $0 \leqq x_i \leqq 1$ $(i = 1, \dots r)$, peut être représenté, pour des s_i assez élevés, sous la forme

$$P(x_1, \dots, x_r) = \sum_{m_1=0}^{s_1} \dots \sum_{m_r=0}^{s_r} u_{m_1, \dots, m_r} x_1^{m_1} (1-x_1)^{s_1 - m_1} \dots x_r^{m_r} (1-x_r)^{s_r - m_r}$$

avec des coefficients tous positifs.

Ce théorème peut être utile p. ex. dans le problème des moments à plusieurs variables.

Dans la démonstration on fait usage du théorème de recouvrement de Borel; une démonstration élémentaire serait préférable.

Egy polinom irreducibilitásáról

Írta: SERES IVÁN

I. SCHUR vetette fel a következő problémát:

Legyen adva az $F(y)=y^{2^n}+1$ polinom és y helyébe írjuk az $y=f(x)=\prod_{i=1}^{L}(x-a_i)$ szorzatot, ahol $a_1, a_2, \dots a_L$ egymástól különböző racionális egész számok, n és L közönséges egész szám. Irreducibilis marad-e az $F(f(x))=G(x)$ polinom, mint az x polinomja? (Irreducibilitáson azt értjük, hogy nem található két, $H(x)$ és $I(x)$ racionális-egész-együtthatós, nem konstans polinom, úgyhogy a

$$G(x)=H(x)\cdot I(x)$$

összefüggés fennálljon.)

I. SCHUR feladatához hasonlót bizonyítunk: legyen adva az $F(y)=y^{2^n}+1$ polinomba helyettesítendő $y=\prod_{i=1}^{L}(x-a_i)$ szorzat. E szorzat tényezőinek száma $L=2^m$, $(m \geqq 0)$ és minden a_i páros legyen, vagy minden a_i páratlan racionális egész szám. A bizonyítandó tétel azt mondja, hogy $G(x)$ irreducibilis. Nem kivánjuk, hogy minden a_i egymástól különbözzék. Ez SCHUR általános fogalmazásában szükséges.

Például az $a_1=a_2=a_3$ (itt $L=3 \neq 2^m$), $2^n=2$ esetben

$$G(x)=(x-a_1)^6+1=[(x-a_1)^2+1][(x-a_1)^4-(x-a_1)^2+1].$$

$G(x)$ tehát reducibilis. Hasonló a helyzet $L \neq 2^m$ más értékeire.

Tételünket a SCHÖNEMANN-EISENSTEIN tétel segítségével bizonyítjuk.

Ez a tétel azt mondja, hogy a $h(x)=c_m x^m+c_{m-1}x^{m-1}+ \dots +c_1 x+c_0$ racionális egész-együtthatós algebrai polinom irreducibilis, ha

1. a legmagasabb fokú tag együtthatója valamely p prímszámmal nem osztható,
2. a többi együttható ezen p-vel osztható,
3. az abszolút tag p^2-tel nem osztható.

Nézzük előbb azt az esetet, amikor $L=1$. Ez esetben

$$G(x)=(x-a)^{2^n}+1.$$

Nevezzük az $x-a$-t z-nek. Nézzük, hogy az $(x-a)^{2^n}+1=z^{2^n}+$ $+1=k(z)$ irreducibilis-e, mint z polinomja.

A $k(z)$ polinom helyett nézzük a $k(z)=[(z-1)+1]^{2^n}+1=$ $=(u+1)^{2^n}+1=R_n(u)$ függvényt, mint a $z-1=u$ polinomját.

A SCHÖNEMANN-EISENSTEIN tétel alapján bebizonyítjuk, hogy $R_n(u)$ irreducibilis. Ugyanis

$R_n(u)=(u+1)^{2^n}+1=u^{2^n}+2nS_n(u)+2$, ahol $S_n(u)$ egész együtthatós 2^n-2 fokú polinom. Ugyanis $\binom{2^n}{k}$ páros, ha $k=1$, $2, \ldots 2^n-1$.

$R_n(u)$ kielégíti a SCHÖNEMANN-EISENSTEIN tétel követelményeit. (A legmagasabb fokú tag együtthatója 1, az abszolút tag $2\not\equiv 0$ (mod 4) és $2nS_n(u)$ a többi tag összege. Ez utóbbi minden együtthatója pedig osztható 2-vel.)

Nézzük ezek után a $G(x)=[\prod_{i=1}^{L}(x-a_i)]^{2^n}+1$ polinomot, ha minden a_i páratlan szám, $L=2^m$; n és m közönséges egész szám.

$$G(x)=[\prod_{i=1}^{L}(x-a_i)]^{2^n}+1\equiv(x+1)^{2^{m+n}}+1 \pmod 2.$$

(Megjegyezzük, hogy a kongruenciát csak az együtthatók 2-vel való oszthatósága szempontjából használjuk, mert a Schönemann-Eisenstein tétel is csak az együtthatókra állít fel követelményeket.)

Ez azt jelenti, hogy $G(x)=(x+1)^{2^{m+n}}+1+2T(x)$, ahol $T(x)=t_rx^r+t_{r-1}x^{r-1}+\ldots+t_0$. Állítjuk, hogy $T(x)$ racionális-egész-együtthatós algebrai polinom, amelynek abszolút tagja $t_0\equiv 0 \pmod 2$.

Ugyanis

$$G(0)=\left(\prod_{i=1}^{L}a_i\right)^{2^n}+1=1^{2^{m+n}}+1+2T(0)$$

és így

$$\left[\prod_{i=1}^{L}a_i\right]^{2n}-1=2t_0.$$

A szögletes zárójelben páratlan-számnak pl. $2k+1$-nek a 2^n-edik hatványa áll. Így írható $2t_0$, $=[(2k+1)^{2^{n-1}}-1][(2k+1)^{2^{n-1}}+1]\equiv 0$ (mod 4).

Tehát $2t_0=4\tau$, ahol τ racionális egész szám.

$G(x)$-re összegezve az elmondottakat: $(x+1)^{2^{m+n}}+1$ együtthatói mind kielégítik a Schönemann-Eisenstein tétel feltételeit. Ezt nem rontja a $2T(x)$ sem, amelynek abszolút tagja 4τ. (Végeredményben $G(x)$ abszolút tagja $4\tau+2$ és ez $\not\equiv 0 \pmod 4$). Tehát $G(x)$ *irreducibilis.*

Nézzük azt az esetet, mikor minden a_i páros és $L=2^m$

$$G(x)=\prod_{i=1}^{L}(x-a_i)^{2^n}+1=\prod_{i=1}^{L}[(x-1)-(a_i-1)]^{2^n}+1$$

az $x-1=u$ helyettesítésével

$$G(x)=G^*(u)=\prod_{i=1}^{L}[u-(a_i-1)]^{2^n}+1.$$

Itt mindegyik a_i-1 páratlan és, így $G^*(u)$ az előbbiek szerint irreducibilis, tehát irreducibilis maga $G(x)$ is.

Általánosítás:

Legyen $f(x)=\prod_{i=1}^{L}\varphi_i(x)$ oly polinomok szorzata, amelyek mindegyike

1. k-ad fokú,
2. a legmagasabb fokú tag együtthatója páratlan szám,
3. az abszolút tag páratlan szám,
4. a többi együttható páros szám,
5. a tényezők száma: $L=2^m$ (m racionális egészszám).

Akkor $F(x)=[f(x)]^{2^n}+1$ irreducibilis.

A bizonyítás az elmondottakból nyilvánvaló.

Budapest, 1952. március 24.

О НЕПРИВОДИМОСТИ ОДНОГО МНОГОЧЛЕНА

И. Шереш.

Пусть a_i последовательность чётных или нечётных чисел. Их число —2^m. Тогда многочлен $F(x)=\prod_{i=1}(x-a_i)^{2m}r1$, неприводим в поле рациональных чисел. Этот вопрос является частным случаем задачи И. Шура.

ÜBER DIE IRREDUZIBILITÄT EINES POLYNOMS.

I. Seress.

Es wird mittels dem Schönemann-Eisenstein'schen Satze der folgende Spezialfall eines I. Schur'schen Problems erledigt. Es bedeute $f(x)=\sum_{i=1}^{L}(x-a_i)$ und $L=2^{mi}$, wo die Zahlen a_i entweder alle gerade, oder alle ungerade sind. Dann ist das Polynom $[f(x)^{2n}+1$ im Körper der rationalen Zahlen irredu ibel·

Hogyan tanítsuk a számtant az általános iskola alsó osztályaiban?

Írta: LIGETI BÉLA

(Az oktatás és nevelés kérdései I. Közoktatásügyi Kiadóvállalat Bp. 1951) c. könyv ismertetése

Sok panasz hangzott el az utóbbi években a matematikatanítás eredménytelenségével kapcsolatban az általános iskola alsó osztályaitól a középiskolákon keresztül az egyetemekig. A kétségtelenül mutatkozó hiányosságok okát — a háború okozta kiesésen kívül — legfőképpen a matematikatanítás eddigi módszereinek elégtelenségében kell keresnünk. A háború és a felszabadulást követő első esztendők megrövidített tanévei alatt elsődleges kérdésként a tantervi anyag legdöntőbb részeinek átadása került előtérbe, a módszer kérdése egészen háttérbe szorult. Pedagógusaink kisigényűek lettek mind a megtanítandó anyag, mind a tanítás módszere tekintetében. Nagyjában ilyen maradt a helyzet akkor is, mikor az ország gazdasági fejlődése rohamléptekben kezdett előrehaladni, s így kultúrális életünk, ezen belül oktatásunk erős elmaradást mutatott gazdasági fejlődésünk mellett. Csak fokozta a nehézségeket a tankönyvek szinte évről-évre történő cseréje s az a körülmény, hogy a lassanként a matematika tanítása területére is beáramló új szellemmel pedagógusaink sok esetben nem tudtak mit kezdeni. Míg az újjal szemben bizalmatlanok voltak, addig haladó pedagógiai hagyományainkat is elhanyagolták.

A fejlődésnek azonban be kellett következnie. A pedagógia munkásainak feladataira az M. D. P. II. Kongresszusa irányította rá legélesebben a reflektorfényt. A tanítás színvonalának megjavítása most már országos kérdéssé lett. S miközben tankönyveink legalább is a viszonylagos stabilitás állapotába jutottak, helyesen ragadta meg a K. M. a pedagógia területén a döntő láncszemet, a módszer és a módszeres segítség kérdését. A könyv, melyet röviden ismertetni kívánok, gyakorlati úton ad feleletet a számtant tanító pedagógusnak arra a gyakran felvetődő kérdésére, hogy hogyan tanítsa a számtan egyes egységeit.

Az I. kötet az általános iskola alsó négy osztálya számtani anyagának súlyponti részeit dolgozza fel módszeresen. Igen helyesen tartózkodik az általános elméleti fejtegetésektől. Ezekre az elméleti kérdésekre feleletet találnak pedagógusaink a már eddig is kedveltté vált NYIKITYIN és a nyár folyamán magyar kiadásban is megjelent PCSOLKÓ-tól származó matematikatanítással foglalkozó szovjet művekben.

A mű osztályonkint tárgyalja az anyagot. Végigvonul benne a logikus gondolkodásra való nevelés és a számolástechnika fejlesztésének helyes egysége. Igen nagy gondot fordít a számkép helyes kialakítására, mely az eredményes továbbhaladás döntő faktora. Helyesen alkalmazkodik a tanuló szellemi fejlődéséhez, ezért kezdetben különösen nagy súlyt helyez a sokoldalú, minden érzékszervet foglalkoztató szemléltetésre. Csak néhány a felhozott szemléltetési lehetőségek közül: a tanulók ujjai, számológép, a tanterem bútorai, pálcikák, pálcikakötegek, korongok, dominólapok, tekejáték, vadgesztenye, kartonból kivágott gyümölcsök, rajz, számóra, tapsolás, néma számolás stb., stb. A szemléltetést azonban mindig az absztrakció követi már az első osztálytól kezdve. A külső szemléltetés szerepe is mind hátrább szorul a tanulók értelmének fejlődésével.

Különös hangsúlyt kap azon részek feldolgozása, melyek a szovjet matematikatanítás tapasztalatai alapján kerültek hazai tanításunk anyagába. Így a zárójelek használata, mely mai tanításunkban már az első osztálytól szerepel. Ezzel a kérdéssel szemben is nagy volt a nevelők tanácstalansága, melyet többek között éppen ez a módszertani könyv hivatott eloszlatni.

Másik ilyen kérdés az ú. n. típusfeladatok tanítása. Ezek helyes módszeres felépítése a IV. osztály anyagában hat csoportban kerül sorra. Helyesen mutatja be az egyes módszeres lépéseket, az ábrázolás alkalmazását és a többféle megoldás lehetőségét.

Nagy gondot fordít az összetett, vagyis többműveletes feladatok tárgyalására, mint olyan területre, melyet régi formalista tanításunk meglehetősen elhanyagolt. Különösen jó és hasznos lesz pedagógusaink számára a „Szöveges feladatok megoldása" c. fejezet (134—137. old.). Ha ezt a kartársak megszívlelik, nagy lépést tehetünk előre a logikus gondolkodásra való nevelés terén.

Ugyanezt a célt szolgálja az önálló feladatkészítésre nevelés módszere. Itt is megmutatja a könyv azt a helyes utat, melyen a pedagógusnak tanítványát vezetnie kell, hogy helyesen felismerje a mennyiségek között lévő összefüggéseket, a felismert összefüggések alapján maga tudjon helyes kérdést feltenni, adatok alapján feladatot szerkeszteni, vagy a feladat szerkesztéséhez szükséges adatokat megállapítani. Mindezekkel elősegítjük a tanulók feladatmegoldó képességét, mert aki feladatot önállóan tud szerkeszteni, az hasonló feladatokat önállóan meg is tud oldani.

A sok tanulságos gondolatból megemlíthetjük még a „bontást", mely, hogy úgy mondjam, számelméleti alapot ad a tanulóknak, mikor a számok különböző módon történő felbontásával a számok felépítését tudatosítja. Súlyt helyez az ú. n. fordított szövegezésű feladatok tárgyalására is, melyeknél a szöveg látszólag más műveletre mutat, mint az a részletesebb vizsgálatnál kitünik. Néhány óratervet is közöl, melyben egy óra helyes metodikai felépítését mutatja be.

Ki kell még emelnem azokat a — habár nem túl gyakran előforduló — segítő megjegyzéseket, melyekkel a könyv az osztatlan iskolák nevelői felé fordul.

Segítséget jelent ez a módszeres mű, mely sok, jó eredményeket elérő, gyakorlati pedagógus, lelkiismeretes, közös munkájának eredménye. Segítség a városokban, méginkább a falvakban, de leginkább az osztatlan iskolákban működő nevelők számára. A gyakorlati munkában, országos viszonylatban széles érdeklődésre tarthat számot. Remélhető, hogy ez a szovjet tapasztalatokra épült, hazai viszonyokra készült első matematikatanítási módszertan segíti pedagógusainkat abban, hogy a matematikai konferencián vállaltakat teljes egészében megvalósíthassák.

FELADATROVAT

Szerkeszti: HAJÓS GYÖRGY

A feladatrovatnak szánt küldeményeket a következő címre kérjük: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, V., Reáltanoda-utca 13—15. Az egyes feladatok megoldását külön lapon kérjük. Nem zárkózunk el olyan feladatok közlése elől sem, amelynek megoldását beküldője nem ismeri.

Helyesbítésként közöljük, hogy a 46. feladatban a Σ jel alatt helyesen $i=0$ áll (az előző szám sajtóhibajavítása is hibás volt).

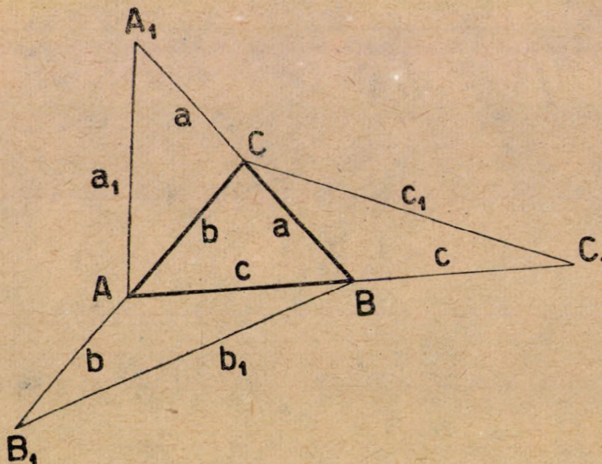
Előző számunk megjelenése előtt a 28. és 35. feladat megoldását beküldötte még GEHÉR LÁSZLÓ.

Megoldott feladatok

29. feladat. Az $ABC\triangle$ oldalai (szokott elrendezésben) a, b, c, kerülete k, területe t. Jelölje A_1, B_1, C_1 a B, C, A pontoknak rendre C, A, B pontokra vonatkozó tükörképét. Legyen $a_1 = AA_1$, $b_1 = BB_1$, $c_1 = CC_1$. Bizonyítandó, hogy

$$a_1bc + ab_1c + abc_1 \geqq 4kt.$$

(Obláth Richárd)



Megoldás. Az $AC_1C\triangle$ területe $2t$, mert területét felezi a CB súlyvonal. Következőleg $bc_1 \geqq 4t$ (mert egy háromszög két oldalának szorzata a terület kétszeresénél kisebb nem lehet) és így $abc_1 \geqq 4at$. Hasonlóan $a_1bc \geqq 4bt$ és $ab_1c \geqq 4ct$. Ezeknek az egyenlőtlenségeknek összeadásával a bizonyítandó állítást kapjuk.

Egyenlőség a végeredményben csak akkor állhat, ha mindhárom tekintetbe vett háromszög derékszögű. Ez pedig THALES tétele szerint azt jelenti, hogy az eredeti háromszög oldalai páronként egyenlők. Egyenlőség tehát csak szabályos háromszögre áll.

Fried Ervin

A 29. feladat megoldását beküldötték még: ACZÉL JÁNOS, BLUM OTTÓ, FRIED VILMOS, GEHÉR LÁSZLÓ, HAJÓS GYÖRGY, LAJTHA GYÖRGY, SURÁNYI JÁNOS, TEKSE KÁLMÁN.

30. feladat. H a tér nem egy egyenesbe eső véges sok pontjának halmaza. Bizonyítsuk be, hogy nincs a térben egynél több H-hoz nem tartozó olyan pont, amelyből a H halmaz pontjai felé irányuló egységvektorok összege nulla.

(Szőkefalvi-Nagy Gyula)

Megoldás. A feladat állításán túlmenően azt bizonyítjuk, hogy nincs két H-hoz nem tartozó pont, amelyekre vonatkozóan a szóbanforgó egységvektorok összege egyenlő.

Legyen O_1 és O_2 két H-hoz nem tartozó pont s legyen P egy pontja H-nak. Jelölje $\mathbf{d}$ az O_1-ből O_2-be vezető vektort, $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ az O_1-ből, ill. O_2-ből P felé irányuló egységvektort, p_1 és p_2 pedig az O_1P, ill. O_2P távolság hosszát. E jelölésekkel

$$\mathbf{d} = p_1\mathbf{e}_1 - p_2\mathbf{e}_2$$

és így

$$\mathbf{d}(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2) = (p_1+p_2)(1-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = \frac{p_1+p_2}{2}(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2)^2 \geqq 0.$$

Itt egyenlőség csak akkor állhat, ha $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$ s ekkor P az O_1O_2 egyenesen van. Minthogy ez H valamennyi pontjára nem következhetik be, H pontjaira összegezve

$$\mathbf{d}(\Sigma\mathbf{e}_1 - \Sigma\mathbf{e}_2) > 0,$$

tehát valóban $\Sigma\mathbf{e}_1 \neq \Sigma\mathbf{e}_2$.

Kővári Tamás

A 30. feladat megoldását beküldötték még: CSÁSZÁR ÁKOS, DUX ERIK, FRIED ERVIN, HAJÓS GYÖRGY, SARKADI KÁROLY, SÓS VERA.

Megjegyzés. Ha a H halmaz $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pontjaihoz pozitív $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ számokat rendelünk s egységvektorok helyett az e pontok felé irányuló, rendre $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ hosszúságú vektorokat tekintünk, akkor is változatlanul helyes a feladat állítása s annak a fenti megoldásban kimondott általánosítása. Ennek bizonyításához elegendő az egyes pontokra kapott egyenlőtlenségeket összegezés előtt rendre a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ számokkal beszorozni.

Dux Erik

32. feladat. Egy háromszög nem egyenlőoldalú s oldalainak aránya racionális. Bizonyítandó, hogy a sík egyrétűen beborítható ezzel egybevágó háromszögekkel olyan módon, hogy a háromszög végtelen sokféle állásban szerepel.

(Kárteszi Ferenc és Hajós György)

Megoldás. Kiindulunk abból az ismert tényből, hogy a π-vel kommenzurábilis hegyesszögek közül csak 60° cosinusa racionális.* Legyen ugyanis α olyan hegyesszög, mely π-vel kommenzurábilis s melynek cosinusa racionális. Ekkor $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$ algebrai egészszám, mert komplex egységgyök. Minthogy z kielégíti a $z^2 - 2z\cos\alpha + 1 = 0$ egyenletet, ennek az egyenletnek valamennyi együtthatója racionális egészszám, ugyanis: a vezéregyüttható 1, valamennyi együttható racionális, az egyenlet irreducibilis és egyik gyöke algebrai egészszám. Tehát $2\cos\alpha$ egészszám, ami hegyesszögek közül csak 60°-ra teljesül.

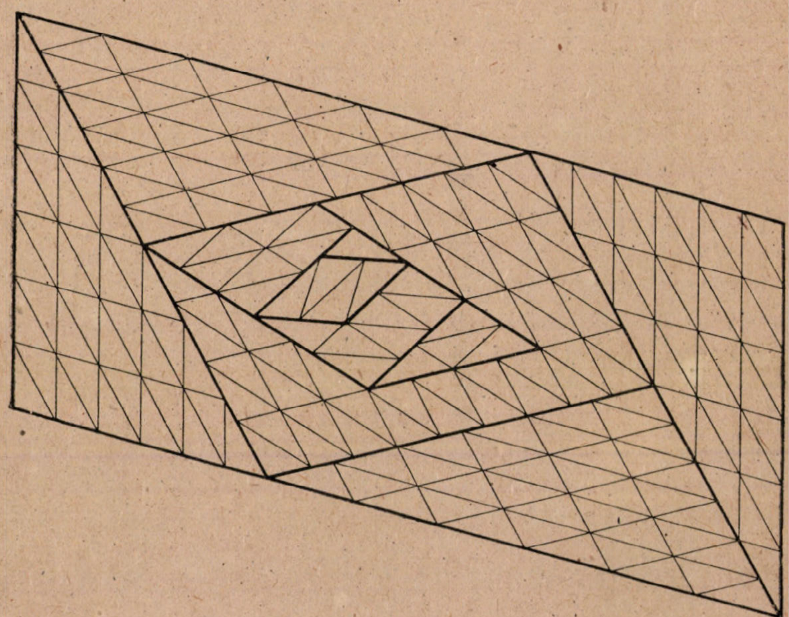
Mivel a feladatban szereplő háromszög oldalainak aránya racionális, szögeinek cosinusa is racionális. Minthogy a háromszög nem egyenlőoldalú, legkisebb szöge 60°-nál kisebb s így ez az α szög π-vel inkommenzurábilis. Ha tehát úgy borítjuk be a síkot háromszögekkel, hogy ezek között egy háromszög s abból $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots$ szögekkel való elforgatással keletkező háromszögek mind szerepelnek, akkor a síknak ilyen beborítása végtelen sokféle állású háromszöget tartalmaz. Bizonyítjuk, hogy a sík így beborítható.

Az adott háromszög oldalai és szögei szokott elrendezésben $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ (a legkisebb szög α). Jelölje T_0 e háromszög valamely helyzetét. E háromszöget β szögének felezőjére tükrözve T_1 háromszöghöz, ezt újból γ szögének felezőjére tükrözve a T_2 háromszöghöz jutunk, majd ismételten váltakozva a β és γ szögek felezőire vonatkozó tükrözéssel a $T_3, T_4, T_5, T_6, \ldots$ háromszögeket kapjuk. Minthogy T_1 háromszög β és γ szögének felezői $\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$ szöget zárnak be, T_2 a T_0-ból $\beta+\gamma = \pi - \alpha$ szögű elforgatással keletkezik; ugyanígy keletkezik T_2-ből T_4, T_4-ből T_6, stb. Azt mondjuk, hogy egy az adott háromszöggel egybevágó háromszög T_i-hely-

* V. ö. Sándor Gyula: A 12. feladat második megoldása, *Mat. Fiz. Lapok* **50** (1943), 183 l. *(Szerk.)*

zetű, ha oldalai rendre T_i oldalaival párhuzamosak. A megállapítottakból következik, a T_{2k+2}-helyzetű háromszögek a T_{2k}-helyzetűekből (az előbb szerepeltetettel ellenkező irányban való) α szögű elforgatással keletkeznek. A feladat állítását bizonyítjuk tehát, ha kimutatjuk, hogy a sík beborítható T_i-helyzetű ($i=0, 1, 2, \ldots$) háromszögekkel és mind e helyzetek szerepelnek a beborításban.

A T_{2k} és T_{2k+1} háromszögek β szögeinek szárai egybeesnek. Ezért mindazok a P_{2k} parallelogrammák, melyeknek oldalai e szárakkal párhuzamosak és hosszuk az a és c oldalnak is egészszámú többszöröse, egyrétűen beboríthatók T_{2k}-helyzetű és T_{2k+1}-helyzetű háromszögekkel is.



A T_{2k+1} és T_{2k+2} háromszögek γ szögeinek szárai egybeesnek. Ezért mindazok a P_{2k+1} parallelogrammák, melyeknek oldalai e szárakkal párhuzamosak és hosszuk az a és b oldalnak is egészszámú többszöröse, egyrétűen beboríthatók T_{2k+1}-helyzetű és T_{2k+2}-helyzetű háromszögekkel is.

Válasszunk egy P_0 parallelogrammát. Válasszunk egy olyan P_1 parallelogrammát, mely P_0-t belsejében tartalmazza, mégpedig úgy, hogy P_1-nek T_1-helyzetű háromszögekkel való beborításakor P_0 kerülete egy beborító háromszöget se messen. P_1 így nyilván megválasztható, hiszen P_1 oldalait tetszőlegesen nagyra választhatjuk és P_0-nak, valamint bármely P_1-nek T_1-helyzetű háromszögekkel való beborításánál egymásból eltolással keletkező háromszögrácsok háromszögei szerepelnek. Válasszuk meg hasonlóan a $P_2, P_3, \ldots$ parallelogrammákat úgy, hogy P_{k+1} belsejében tartalmazza P_k-t és P_{k+1}-nek T_{k+1}-helyzetű háromszögekkel való beborítása esetén P_k kerülete a beborító háromszögeknek egyikét se messe. A $P_0, P_1, P_2, \ldots$ parallelogrammák megválasztásából következik, hogy P_{k+1}-nek P_k parallelogrammán kívül eső része, a $P_{k+1} - P_k$ tartomány is beborítható T_{k+1}-helyzetű háromszögekkel.

Borítsuk be P_0-t T_0-helyzetű háromszögekkel, a $P_1 - P_0$ tartományt T_1-helyzetű háromszögekkel és általában $P_{k+1} - P_k$ tartományt T_{k+1}-helyzetű háromszögekkel. Minthogy a $P_0, P_1, P_2, \ldots$ parallelogrammasorozat minden irányban korlátlanul kiterjed, így a teljes síkot beborítottuk és kívánt tulajdonságú beborítást találtunk.

A mellékelt ábra $2:3:4$ oldalarányú háromszög esetében szemlélteti szerkesztésünket. Az ábrán még a P_5 parallelogramma is szerepel. Az ábra szerkesztésénél az egyes parallelogrammákat a lehető legkisebbre választottuk.

Sarkadi Károly

33. feladat.* Bizonyítandó, hogy az egészszámoknak egy A halmazához csak akkor található két egészszámból álló B halmaz úgy, hogy minden egész szám egy és csak egyféleképpen legyen A és B egy-egy elemének összegeként felírható, ha mindazok az egész számok, amelyek nem állíthatók elő A két elemének különbségeként, ugyanannak az egész számnak páratlan többszörösei.

(Rényi Alfréd)

Megoldás. Tegyük fel, hogy A és B a feladatban megkövetelt tulajdonsággal rendelkezik. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy B elemei 0 és b. Legyenek A elemei $a_1, a_2, \ldots$ Jelölje D azoknak az egészszámoknak halmazát, amelyek nem állíthatók elő A két elemének különbségeként. Legyen D legkisebb abszolút értékű elemeinek egyike d_0. Állítjuk, hogy D-t d_0-nak páratlan többszörösei alkotják.

Ha d egy eleme D-nek, akkor bármely c egészszámmal képzett $\ldots, c-2d, c-d, c, c+d, c+2d, \ldots$ sorozatnak minden második eleme tartozik A-hoz. Ha ugyanis két szomszédos elem mindegyike A-hoz tartoznék, ill. egyikük sem tartoznék A-hoz, akkor e két elem a_i és a_j, ill. a_i+b és a_j+b alakban volna írható és így d különbségük a feltevéssel ellentétben mindkét esetben A két elemének különbsége volna.

* A feladat eredetileg hibás szöveggel jelent meg (II. évf. 68. l.), későbbi számunk a helyes szöveget közölte (II. évf. 289. l.).

Ebből már következik, hogy d_0-nak minden páratlan többszöröse D-nek eleme. Bizonyítanunk kell még, hogy D minden eleme d_0-nak páratlan többszöröse.

Tegyük fel, hogy d eleme D-nek, viszont nem páratlan többszöröse d_0-nak. Található tehát s egészszám úgy, hogy $|d-2sd_0| < |d_0|$. Ez d_0 definíciója miatt ellentmond annak a ténynek, hogy $d-2sd_0$ is eleme D-nek. Ha ugyanis e szám $a_i - a_j$ alakban volna írható, azaz $d = (a_i + 2sd_0) - a_j$ lenne, akkor d maga is A két elemének különbsége volna, hiszen a fentiek szerint $a_i + 2sd_0$ is A-hoz tartozik. A kapott ellentmondás bizonyítja a feladat állításának helyességét.

A feladat eredeti kitűzésében szereplő szöveg hibás, mert ha pl. A a páros természetes számokból áll, éppen 1-nek páratlan többszörösei nem állíthatók elő A két elemének különbségeként, s mégsem található kivánt tulajdonságú kételemű B halmaz.

Blum Ottó

A 33. feladat megoldását beküldötték még: GEHÉR LÁSZLÓ, HAJÓS GYÖRGY, SARKADI KÁROLY, SÓS VERA, SZŰSZ PÉTER.

34. feladat. Az $a_1, a_2, \ldots$ pozitív elemű sorozat nem tartalmaz végtelen monoton csökkenő részsorozatot. Bizonyítandó, hogy bármely A értékhez csak véges sokféle $x_1, x_2, \ldots$ nem-negatív egészszámokból álló sorozat található úgy, hogy

(1) $$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots = A.$$

Erdős Pál

Megjegyzés. A feladat szövege nyilván úgy értendő, hogy az a_n sorozat még tágabb értelemben monoton csökkenő végtelen részsorozatot, azaz olyat sem tartalmaz, melyben a rákövetkező elemek rendre *nagyobbak vagy egyenlők.* Szűkebb értelemben monoton csökkenő sorozatokat, azaz olyanokat szerepeltetve, melyekben a rákövetkező elemek rendre *nagyobbak,* a feladat állítása nyilván nem is igaz. Az alábbi megoldásokban „monoton" mindenütt tágabb értelemben monotont jelent.

I. megoldás. Tegyük fel, hogy adott A mellett végtelen sok x_n sorozat elégíti ki (1)-et.

Az a_n sorozatnak van a pozitív alsó korlátja, mert ellenkező esetben volna 0-hoz tartó (szűkebb értelemben) monoton csökkenő végtelen részsorozata. (1) alapján tehát $x_1 + x_2 + \ldots \leqq \frac{A}{a}$. Ez azt jelenti, hogy az x_n sorozatban $\frac{A}{a}$-nál több elem nem lehet 0-tól különböző s ezek értéke legfeljebb $\frac{A}{a}$ lehet. E feltételeket kielégítő számhalmaz csak véges sokféle van. Minthogy pedig (1)-et végtelen sok x_n sorozat kielégíti, ezek között végtelen sok olyan van, amelyeknek 0-tól különböző elemei ugyanazon $y_1, y_2, \ldots, y_s$ számok. Ez azt jelenti, hogy a

$$b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_s y_s = A \tag{2}$$

egyenlet rögzített y-értékek mellett *végtelen sokféle kiválasztással* elégíthető ki az a_n sorozatból választott $b_1, b_2, \ldots, b_s$ értékekkel. Tekintsük e megoldásoknak egy végtelen sorozatát.

A $(b_1, \ldots, b_s)$ értékrendszereknek e sorozatában szereplő b_1 értékeknek sorozatából (melyben akár végtelen sokszor ismétlődő elemek is szerepelhetnek) kiválasztható monoton növekvő végtelen részsorozat. E sorozat ugyanis szűkebb értelemben monoton csökkenő végtelen részsorozatot nem tartalmazhat, mert akkor az a_n sorozat is tartalmazna ilyet. Viszont bármely sorozat tartalmaz vagy monoton növekvő, vagy szűkebb értelemben monoton csökkenő végtelen részsorozatot, hiszen: ha valamely $c_1, c_2, \ldots$ sorozat nem tartalmaz szűkebb értelemben monoton csökkenő részsorozatot, akkor bármely $c_i, c_{i+1}, \ldots$ szeletében van legkisebb k_i elem s az így adódó k_i elemek sorozata monoton nő.

Tekintsük most már a (2)-t kielégítő $(b_1, b_2, \ldots, b_s)$ értékrendszerek sorozatának olyan végtelen részsorozatát, melyben szereplő b_1 értékek monoton növekvő sorozatot alkotnak. Ebből a részsorozatból újból kiválaszthatunk olyan végtelen részsorozatot, melyben a b_2 értékek sorozata is monoton nő. Ezt az eljárást folytatva a (2)-t kielégítő $(b_1, b_2, \ldots, b_s)$ értékrendszereknek olyan *végtelen* sorozatához jutunk, amelyben a $b_1, b_2, \ldots, b_s$ együtthatók mindegyike monoton növekvő sorozatot alkot.

Minthogy azonban valamennyi értékrendszer kielégíti (2)-t s az abban szereplő y-értékek rögzitett, nem-negatív számok, az egyik rendszer elemei csak úgy lehetnek a másik rendszer elemeinél rendre nagyobbak vagy egyenlők, ha mindannyian egyenlők; hiszen különben (2) baloldalába helyettesítve az egyik értékrendszer nagyobb helyettesítési értéket adna mint a másik, pedig (2) szerint mindkét esetben A a helyettesítési érték. A sorozatos kiválasztással kapott értékrendszersorozat tehát azonos értékrendszerekből áll. E rögzített $(b_1, b_2, \ldots, b_s)$ értékrendszer elemeinek mindegyike véges sokszor szerepel az a_n sorozatban, mert az a_n sorozat még tágabb értelemben monoton csökkenő részsorozatot nem tartalmaz. Így ez a $(b_1, b_2 \ldots, b_s)$ értékrendszer is csak *véges sokféle kiválasztással* nyerhető az a_n sorozatból. Ellentmondásra jutottunk s ezzel a feladat állítását bizonyítottuk.

Rényi Alfréd

II. megoldás. Tekintsünk két számhalmazt, melyek egyenlő elemeket is tartalmazhatnak s melyeknek egyikéből sem választható ki monoton csökkenő végtelen részsorozat. E számhalmazokat S és T, elemeiket pedig s_i és t_i jelöli. Jelölje továbbá $S+T$ az s_i, t_i, s_i+t_i számokból álló számhalmazt. Ez a halmaz is tartalmazhat egyenlő elemeket, ha t. i. ugyanahhoz az értékhez többféle úton is eljutunk. Állítjuk, hogy *$S+T$ sem tartalmaz monoton csökkenő végtelen részsorozatot.*

Egy monoton csökkenő részsorozat ugyanis a feltevés szerint csak véges sok s_i és t_i elemet tartalmazhat s így ezek elhagyásával — ha állításunkkal ellentétben léteznék monoton csökkenő részsorozat — végtelen

$$(3) \qquad s_1+t_1 \geqq s_2+t_2 \geqq \ldots$$

sorozathoz jutnánk. Itt s_i és s_j, valamint t_i és t_j nem feltétlenül különböző elemei S-nek és T-nek, de s_i és s_j, valamint t_i és t_j egyszerre (ugyanazon i, j indexeket szerepeltetve) nem jelölhetnek azonos elemeket. S-nek minden egyes eleme csak véges sokszor léphet fel (3)-ban, hiszen egyébként a mellette álló t_i értékek már szükségképpen T-nek különböző elemei volnának s mégis monoton csökkenő sorozatot alkotnának. Feltehetjük tehát, hogy a (3) sorozat S-nek és T-nek megannyi különböző elemét szerepelteti, mert egyébként a (3) sorozatban S-nek ugyanazon elemét szerepeltető, véges sok s_i+t_i közül csak egyet-egyet tartva meg, majd ugyanezt T-re is végrehajtva, kívánt tulajdonságú sorozathoz jutnánk.

Az $s_1, s_2, \ldots$ sorozat (mint azt az I. megoldásban is láttuk) tartalmaz monoton növekvő vagy szűkebb értelemben monoton csökkenő végtelen részsorozatot. E részsorozat elemei mellett (3)-ban T elemeinek monoton csökkenő végtelen részsorozata kell, hogy álljon. Ámde T ilyen részsorozatot nem tartalmaz s így állításunk ellenkezőjének feltételezése lehetetlen.

Minthogy az $S+T$ halmazművelet asszociatív, indukcióval definiálható az $S_1+S_2+\ldots+S_k$ halmaz is. Az $S+T$ halmazra bizonyított tétel ismételt alkalmazásával adódik, hogy az $S_1+S_2+\ldots+S_k$ halmaz sem tartalmaz monoton csökkenő végtelen részsorozatot, ha az S_i halmazok egyike sem tartalmaz ilyet. Jelölje kS az $S_1+S_2+\ldots+S_k$ halmazt, ha az S_i halmazok mindegyike S-sel azonos. Ha tehát S nem tartalmaz monoton csökkenő végtelen részsorozatot, kS sem tartalmaz.

A bizonyítottakból a feladat állítása most már könnyen adódik.

A feladatban szereplő a_n sorozatnak van a pozitív alsó korlátja, mert különben tartalmazna monoton csökkenő nullsorozatot. Ezért az (1)-et kielégítő x_n értékekre $x_1+x_2+\ldots<k$, ha k olyan

egészszám, melyre $ka > A$. Jelölje S az a_n sorozat elemeinek halmazát. Az $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots$ számok tehát mindannyian kS elemei. E halmaz azonban a fentiek szerint nem tartalmaz monoton csökkenő részsorozatot s így végtelen sok egyenlő elemet sem. Ezért (1)-nek csak véges sok megoldása lehet.

Blum Ottó

III. megoldás. Ha az $a_n, b_n, \ldots, l_n$, sorozatok egyike sem tartalmaz monoton csökkenő végtelen részsorozatot, akkor az $a_n + b_n + \ldots$ $\ldots + l_n$ sorozat nem lehet monoton csökkenő. Ugyanis e sorozat tartalmaz olyan végtelen részsorozatot, melyben az első tagok monoton növekvő sorozatot alkotnak (lásd I. megoldás), és mivel az a_n sorozat még tágabb értelemben monoton csökkenő végtelen részsorozatot sem tartalmaz, tartalmaz olyan végtelen részsorozatot is, melyben az első tagok szigorúan monoton nőnek. Ebből újból kiválasztható olyan végtelen részsorozat, melyben a második tagok is szigorúan monoton nőnek, és e kiválasztást folytatva az $a_n + b_n + \ldots + l_n$ sorozatnak olyan végtelen részsorozatához jutunk, melyben a tagok mindegyike s így maga a sorozat is szigorúan monoton növekszik. Monoton csökkenő sorozat azonban nem tartalmazhat szigorúan monoton növekvő részsorozatot, ezért az eredeti sorozat sem lehet monoton csökkenő.

Az a_n sorozat elemeinek van pozitív alsó korlátjuk s így az (1)-et kielégítő értékekre $x_1 + x_2 + \ldots$ csak véges sokféle értéket vehet fel (lásd az előző megoldásokat). Elegendő tehát rögzített k mellett bizonyítani, hogy (1)-nek nincsen végtelen sok az

(4) $$x_1 + x_2 + \ldots = k$$

feltételt kielégítő megoldása.

Ezt k-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. A $k = 1$ esetben az állítás igaz, mert az a_n sorozatban nincs végtelen sok egyenlő elem. Feltesszük, hogy az állítás a $k - 1$ értékre is igaz.

Az $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots$ értéket a (4) feltevés mellett $a_1' + a_2' + \ldots + a_k'$ alakban írjuk, ahol a_i éppen x_i-szer szerepel összeadandóként. Ha (1)-nek végtelen sok (4)-et kielégítő megoldása van, így az

$$a_1' + a_2' + \ldots + a_k' = A$$

egyenlet megoldásainak egy végtelen sorozatához jutunk. Ebben a sorozatban a_i' nem jelentheti végtelen sokszor az a_n sorozatnak ugyanazt az elemét, mert akkor az indukciós feltevéssel ellentétben $A - a_i'$ végtelen sokféleképpen volna $(k - 1)$-tagú összegként felírható.

Tehát az a_i' sorozatok mindegyike az a_n sorozat elemeiből áll s azok mindegyike csak véges sokszor ismétlődhetik. Ezért az a_i' sorozat sem tartalmazhat monoton csökkenő végtelen részsorozatot s a fentebb bizonyítottak szerint az $a'_1+a'_2+\ldots+a'_k$ sorozat sem. Nem tartalmazhat tehát végtelen sok A-val egyenlő elemet sem. Ez az ellentmondás állításunkat bizonyítja.

Sarkadi Károly

A 34. feladat megoldását beküldötte még GEHÉR LÁSZLÓ, HAJÓS GYÖRGY, SÓS VERA, SURÁNYI JÁNOS.

Megjegyzés. A közölt megoldások mindegyikéből a feladat állításán túlmenően kiolvasható, hogy a feladat feltevései mellett különböző $x_1, x_2, \ldots$ sorozatokkal képzett $a_1x_1+a_2x_2+\ldots$ értékek monoton csökkenő sorozatot sem alkothatnak. (*Szerk.*)

PÉLDAROVAT

Szerkeszti: VARGA TAMÁS

A megoldásokat kérjük a Társulat címére (Budapest, V., Reáltanoda-utca 13—15.) beküldeni. A borítékra írjuk rá feltűnően: PÉLDAROVAT. Minden megoldást külön lapra írjunk. Tömör, világos, egyszerű megoldásokat várunk. Lapunkban közölni fogjuk minden feladatnak egy vagy több megoldását és az összes helyes megoldók nevét.

6. Ábrázoljuk a következő függvényeket:

$$a)\ f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2}};\qquad b)\ g(x)=\frac{x\sqrt{x^4-1}}{x^2-1}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2(x^2+1)}}.$$

7. Írjuk fel egyetlen algebrai kifejezéssel azt a függvényt, amely a-tól b-ig nincs értelmezve, másutt az értéke c.

8. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\sqrt{2x^2+5x-2}-\sqrt{2x^2+5x-9}=1.$$

9. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\frac{a}{x}.$$

10. Adva van két háromszög, írjuk egyiket a másikba. (Pontosabban: keressünk az ABC_Δ a, b ill. c oldalán rendre egy-egy olyan D', E' ill. F' pontot, hogy a $D'E'F'_\Delta$ egybevágó legyen az adott DEF_Δ-gel.

11. Adva van két háromszög. Írjunk az egyikbe a másikhoz hasonló háromszöget, úgy hogy a „belső" háromszög egyik csúcsa a „külső" háromszög kerületének előre megadott pontjára essék.

12. Adva van két négyszög. Írjunk egyikbe a másikhoz hasonlót.

13. Milyen háromoldalú $a)$ csonkagulák köré, $b)$ csonkagulákba lehet gömböt írni. (Egy gömbről akkor mondjuk, hogy egy poliéder köré írtuk, ha a poliéder minden csúcsa a gömbön van, és akkor mondjuk, hogy egy poliéderbe írtuk, ha a poliéder minden lapja érinti a gömböt.)

14. El lehet-e helyezni *a*) egy gömbben, *b*) egy gömb körül hat egybevágó gömböt úgy, hogy ezek mindegyike érintse az eredeti gömböt és a többi öt gömb közül négyet? Ha lehet, hogyan? Ha nem, miért nem?

Beküldési határidő: a lap megjelenésétől számított 1 hónap.

TÁRSULATI ÉLET

A Bolyai János Matematikai Társulat budapesti előadóülései

1952. január 24. HÓDI ENDRE: „A feladatmegoldások szerepe a formalizmus elleni küzdelemben." — Pedagógus-továbbképző előadás.

1952. január 26—27. Ankét az analízis oktatásáról a természettudományi karokon.

1952. február 8. Klubest az MTESz Szovjet Műszaki Folyóírat- és Könyvolvasójában. TANDORI KÁROLY AHIJÉZER: „Előadások az approximáció elméletéből" című munkáját ismertette.

1952. február 16. Az 1951. évi SCHWEITZER MIKLÓS matematikai emlékverseny eredményhirdetése és díjkiosztása. A versenyfeladatokat SZELE TIBOR ismertette.

1952. február 21. SURÁNYI JÁNOS: „Az algebra tanításának kezdeteiről." Pedagógus-továbbképző előadás.

1952. március 1. DÉNES PÉTER: „Az $x^n+y^n=2z^n$ határozatlan egyenletről." A fenti egyenletről eddig ismert volt, hogy $n=3, 4, 5$ kitevőknél és ezek többszöröseinél nincs nem triviális egész megoldása. Az előadó módszereket ismertetett, melyekkel a kérdés bizonyos feltételeket kielégítő törzskitevőkre eldönthető és kimutatja, hogy pl. 300-ig 40 törzsszám teljesíti e feltéleleket.

1952. április 10. MAKAI ENDRE: „Bizonyos differenciálegyenleteket kielégítő függvényeknek egy monotonitási tulajdonságáról." R. G. COOKE egy dolgozatában kimutatta, hogy —1-nél nagyobb indexű Bessel-függvények 2 szomszédos nem-negatív gyökhelye között vett integráljának abszolút értéke monoton csökken, ha a gyökök $+\infty$ felé tartanak. Az előadó ezt az állítását Cooke módszerétől eltérő úton részben újra bebizonyította, továbbá a BESSEL-függvények görbéinek alakjára vonatkozó különböző állításokat igazolt.

1952. április 23. VARGA TAMÁS: „Egyenletek diszkussziója a középiskolákban." — „Egyenlőtlenségek." — Pedagógus-továbbképző előadás.

1952. április 24. és 25-én. KURT SCHRÖDER (Berlin): Neuere Entwicklungen der Mechanik der Kontinua. Előadás két részben.

1952. május 5. TANDORI KÁROLY és FREUD GÉZA: „Ortogonális polinomok szerinti sorfejtések CESARO-féle szummálhatóságáról." Az előadó bebizonyította, hogy ha egy ortogonális és normált polinom rendszer egy (a, b) intervallumon egyenletesen korlátos, akkor minden a súlyfüggvényre vonatkozólag négyzetesen integrálható függvény kifejtése e polinomok szerint (a, b)-n majdnem mindenütt $(C, 1)$-szummálható. Ha a függvény még ezen az intervallumon folytonos is, akkor a kifejtése egyenletesen szummálható, feltéve, hogy a súlyfüggvény ezen az intervallumon korlátos. FREUD GÉZA az előbbihez csatlakozó előadásában bebizonyította, hogy egy ortogonális polinomkifejtés már akkor is abszolút $(C, 1)$-szummálható a ξ helyen, ha *egyedül a ξ helyen a* $\{P_n(x)\}$ normált ortogonális polinomok sorozata eleget tesz az előbbinél általánosabb

$$\sum_{k=0}^{n} \{P_k(\xi)\}^2 = O(n)$$

feltételeknek és

$$\int_{x}^{x+h} [f(t)-f(x)]^2 \, w(t) \, dt = O(|h|).$$

Ebből SZEGŐ egy lemmájának felhasználásával következik, hogy ha az (α, β) részintervallumban $w(x) \geqq m > 0$, akkor minden a $w(x)$ súlyfüggvényre vonatkozólag L^2—integrálható függvény ortogonális polinomsora (α, β)-ban majdnem mindenütt erősen $(c, 1)$-szummálható.

1952. május 16. KERTÉSZ ANDOR társulati klubesten KULIKOV legújabb csoportelméleti eredményeiről számolt be.

1952. május 17. ALEXITS GYÖRGY: „Periodikus függvények FEJÉR-közepekkel való approximációjának nagyságrendjéről." Előadó bebizonyította, hogy valamilyen LIPSCHITZ-feltételnek elegettevő, periódikus függvényekre vonatkozó BERNSTEIN, AHIJEZER, valamint előadónak a konjugált sor FEJÉR-közepeivel való approximációjára vonatkozó tételei összefoglalhatók egyetlen approximációs tételbe, amely az említett eredményeken túlmenő eseteket is tartalmaz. Módszerével tárgyalható továbbá bizonyos esetekben a FOURIER-sor részletösszegeivel való approximáció és egyes pontokban való approximáció problémája is.

1952. május 30. Ankét a matematikai szövegek szedésével kapcsolatos problémákról, a Papir és Nyomdaipari Műszaki Egyesülettel közös rendezésben.

1952. június 23. MIKOLÁS MIKLÓS: „Analitikus függvények zérushelyeinek eloszlásáról.“ — Az előadó bizonyos irányban általánosítja ROUCHÉ klasszikus tételét, megadva egy egyszerű alakú kritériumot, melynek teljesülése esetén valamely tartományban analitikus két függvény zérushelyeinek száma itt megegyező. Alkalmazásként könnyen kezelhető feltételek adódnak, melyek biztosítják, hogy egy akárhányadfokú algebrai egyenletnek egy előírt szögtartományba megadott számú gyöke essék.

1952. június 24. A műegyetemi matematikai verseny eredményhirdetése és díjkiosztása. A verseny feladatait CSÁSZÁR ÁKOS és ZIGÁNY FERENC ismertették.

A Bolyai János Matematikai Társulat szegedi előadó ülései

1952. február 23. RÉDEI LÁSZLÓ: „Az elemi osztók tételének általánosítása.“ Legyen A valamely mátrix egy R egységelemes kommutatív gyűrű fölött. Jelölje ϑ_k az A-nak k-adrendű aldeterminánsai által generált R-beli ideált ($k = 0, 1, \ldots; \vartheta_0 = 1$).
Akkor

$$k' \vartheta_{k-1} \vartheta_{k+1} \subseteq \vartheta_k^2 \; (k = 1, 2, \ldots),$$

ahol k' az $1, \ldots, k$ legkisebb közös többese. A k' konstans „pontos“, azaz a tétel „éles“. Ha különösen R euklidesi gyűrű, tehát $\vartheta_k = d_k (\in R)$ főideál, akkor k' helyébe 1 is írható, (azaz fennáll $d_k^2 / d_{k-1} d_{k+1}$), ez ugyanis az elemi osztók tételének ismert velejárója.

1952. április 8. SZENDREI JÁNOS: „Modern algebrai fogalmak.“ — Pedagógus-továbbképző előadás.

1952. április 19. BERECZKI ILONA: „MARKOV az elemi függvény fogalmának kiterjesztésével kapcsolatos problémájának megoldása.“ Az előadó megmutatja, hogyha az elemi függvények fogalmát úgy módosítják, hogy az elemi függvények deffiníciójában az $x+y, x-y, x, y, x/y$ függvények helyett olyan aritmetikai függvényosztály alkalmazását engedjük meg, amelyhez van olyan p és k, hogy a függvényosztály bármely α elemére:

$$\alpha(x, y, \ldots) < \max(3, x, y, \ldots) \overset{p}{\nabla} k,$$

valamint a szumma és produktumképzés alapjául szolgáló $x+y$ és xy függvények helyett pedig olyan két változós aritmetikai függvényosztály engedjük meg, amelynél van olyan q, hogy a függvényosztály bármely β elemére:

$$\beta(x, y) < \max(3\,x) \overset{q}{\nabla} \max(3, y)$$

akkor sem merítheti ki az így kapott függvényosztály a rekurzív függvények osztályát. MARKOV-féle probléma megoldása az előbbi általános tétel speciális esetként adódik.

1952. május 3. TANDORI KÁROLY: Ortogonális polinomsorok FEJÉR-féle szummációjáról.

Konferencia a Közoktatásügyi Minisztériummal közös rendezésben, a következő előadásokkal:

1952. május 3. SOÓS PAULA klubesten a pythagorasi számhármasokat ismertette.

1952. május 4. HÓDI ENDRE: Szempontok a térmértan tanításához,

LŐRINCZ PÁL: Formalizmus a szemléltetésben és a feladatokban.

VARGA TAMÁS: Algebrai kifejezések és egyenletek függvényszerű tárgyalása.

1952. május 19. KERTÉSZ ANDOR: „ABEL-féle csoportok direkt felbontása." Egy tetszőleges számosságú ABEL-féle p-csoport akkor és csak akkor bomlik fel ciklikus csoportok direkt összegére, ha tartalmaz olyan maximális független elemrendszert, amelyben egyetlen elem sem cserélhető ki nagyobb számosságú elemmel. Ebből a tételből következnek KULIKOV, BAER és PRÜFER ismert felbontási tételei.

Bolyai János Matematikai Társulat debreceni előadóülései:

1952. február 13. SZELE TIBOR: Jelentés az 1951. évi „SCHWEITZER MIKLÓS országos matematikai versenyről."

1952. április 26. DÉNES PÉTER: „KUMMER egy sejtésének bizonyítása." Előadó bizonyítja KUMMER következő sejtését: Ha $\varphi = \varphi(\xi)$ és $\varphi_1 = \varphi_1(\xi)$ a p páratlan prímszámhoz tartozó körosztási test p-hez relatív prím egész számai, ahol ξ primitív p-edik egységgyök, továbbá

$$\varphi \equiv \varphi_1 (\mathrm{mod}\, p^{n+1})$$

és a k racionális egész szám nem osztható $(p-1)$-el, akkor

$$\left. \frac{d^{kp^n} \log \varphi_1(e^{\vartheta})}{dv^{kp^n}} \right|_{v=0} \equiv \frac{d^{kp^n} \log \varphi(e^{\vartheta})}{dv^{kp^n}} \; (\mathrm{mod}\, p^{n+1}).$$

1952. június 21. HAJÓS GYÖRGY: „A GAUSS—BONNET-féle tétel általánosítása." Az előadó új bizonyítást ad a GAUSS—BONNET-féle tételre. A tétel egy forgó terekre és forgó vektorokra vonatkozó általánosabb állítás közvetlen következményeként adódik. Az általánosított tétel több új eredményt nyujtó alkalmazását is bemutatja az előadó.

A Bolyai János Matematikai Társulat miskolci előadóülései:

1951. február 1. PETRICH GÉZA: Klubesten tartott előadást: „Szovjet ábrázoló geometria tankönyvekről és a szovjet ábrázoló geometria oktatásról."

1952. május 9. TURÁN PÁL: „Trigonometrikus egyenlőtlenségek." Előadó ismertette a trigonometrikus egyenlőtlenségekre vonatkozó alapvető BERNSTEIN-féle tételt, ennek általánosítását majdnem periódikus polinomokra és ennek megfordítását jelentő BOHR-féle tételt, mely szerint ha $h(x) = \sum_{\nu=1}^{n} (c_\nu \cos \lambda_\nu x + d_\nu \sin \lambda_\nu x)$-re $(0 < \lambda \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$, és $\sup\limits_{x \text{ valós}} |h(x)| = M$, akkor

$$\sup_{x \text{ valós}} |h'(x)| > \frac{2}{\pi} \lambda M.$$

Előadó elemi bizonyítást ad azon, részint kevesebbet, részint többetmondó tételre, hogy ha pl. ξ egy olyan valós hely, melyen $|h(\xi)| \geqq \frac{10}{11} M$, akkor

$$\max_{|\xi - x| \leqq \frac{10}{\lambda}} |h'(x)| > \frac{1}{100} \lambda M.$$

1952. május 20. GÁSPÁR GYULA: „Vektorszámítás affin terekben.“ Klubest.

A Bolyai János Matematikai Társulat pécsi előadóülései:

1952. február 15. RÉNYI ALFRÉD: „A formalizmus elleni harc a matematika tanításában.“

1952. május 8. VINCZE ISTVÁN: „A valószínűségszámítás néhány gyakorlati alkalmazásáról.“

1952. május 24. KALMÁR LÁSZLÓ: „A végtelen szabatos fogalma.“

1952. július 25. ACHÁTZ IMRÉNÉ ismertette LARICSEV: „Algebrai feladatok gyüjteménye“ c. munkáját.

A Bolyai János Matematikai Társulat veszprémi előadóülései:

1952. május 10. ACZÉL JÁNOS: J. A. PERELMAN szovjet matematikus matematika-népszerűsítő munkái.

1952. május 15. SZELE TIBOR: Egyenletek algebrai megoldhatósága. Az előadó a GALOIS-féle bizonyítás formája útján bizonyítja azt a tételt, hogy az általános n-edfokú egyenlet $n > 4$ esetén gyökjelekkel nem oldható meg.

A Bolyai János Matematikai Társulat egri előadóülései:

KONFERENCIA a Közoktatásügyi Minisztérium, a Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Lóránd Fizikai Társulat közös rendezésében.

1952. február 29. A pedagógusok kétéves továbbtanulása második ciklusának zárókonferenciája a középiskolai matematikai és fizikai szakon.
Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat helyi tagozatának ünnepélyes megalakulása.
Előadást tart: SZAMOSI GÉZA: „Az atommagfizika újabb eredményei.“

1952. március 1. TURÁN PÁL: „A függvényfogalom bevezetéséről.“
HÓDI ENDRE: „Az irracionális számokról.“
HOFFMANN TIBOR: „Az összefüggő anyag szerkezete.“

1952. március 2. GALLAI TIBOR: „Síkbeli problémák térbeli megoldásáról.“
VERMES MIKLÓS: „Bemutató kísérletek.“

1952. június 10. PRÉKOPA ANDRÁS: „Az integrálfogalom fejlődése.“

A Bolyai János Matematikai Társulat győri előadóülései:

Konferencia a Közoktatásügyi Minisztérium, a Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat együttes rendezésében.

1952. január 4. A pedagógusok kétéves továbbtanulása második ciklusának zárókonferenciája a középiskolai matematika és fizika szakon.

A Bolyai János Matematikai Társulat helyi tagozatának ünnepélyes megalakulása.

1952. január 5. Rényi Alfréd: „A formalizmus elleni harc a matematika tanításában."

Hajós György: „Az 1951. évi Kürschák József matematikai tanulóverseny feladatai.

Csekő Árpád: „Bemutató kísérletek."

1952. január 6. Hódi Endre: „Középértékek, egyenlőtlenségek, szélsőértékfeladatok elemi megoldása."

Boros János: „Mértékrendszerek és fizikai törvények."

Hoffmann Tibor: „A fémek szerkezetéről."

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

A Bolyai János Matematikai Társulatba belépni szándékozók forduljanak a Társulat elnökségéhez (Budapest V, Reáltanoda-utca 13—15. Telefon: 187—330). Közlésre szánt dolgozatok (lehetőleg gépírással s a lap egyik oldalát használva) a Lap szerkesztőségéhez ugyanoda küldendők (Budapest V, Reáltanoda-utca 13—15).

Kérjük cikkíróinkat, hogy amennyiben különlenyomatra tartanak igényt, cikkük kefelevonatának visszaküldésekor ezirányú kívánságukat a kért különlenyomatok számának megjelölésével feltétlenül jelentsék be.

Ára 7·— Ft.
Előfizetés évi 20·— Ft.

Nyomott példányszám: 800.

Akadémiai Kiadó: (Budapest V, Alkotmány-u. 21). Felelős: Mestyán János

Csongrádmegyei Nyomdaipari Vállalat, Szeged 523668 Felelős vezető: Vincze György

MATEMATIKAI LAPOK

III. ÉVFOLYAM

3-4.

SZÁM

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT
BUDAPEST, 1952

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenként négyszer.

Budapest, 1952. december. III. évfolyam 3—4. szám.

Felelős szerkesztő: Turán Pál.

Szerkesztők: Hajós György, Kalmár László, Rényi Alfréd, Szele Tibor.

Szerkesztőség: Budapest V, Reáltanoda-utca 13—15. Telefon: 187—330.

Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó Budapest V. Alkotmány-utca 21. III. Telefon: 424—595, 424—589, 420—330.

Felelős kiadó: Mestyán János.

Terjeszti a Posta Központi Hírlap Iroda Vállalat Budapest, V., József nádor-tér 1. Telefon: 180-850.

Előfizetés, személyes ügyfélszolgálat József nádor-tér 1. Üzlethelyiség. Telefon: 183—022.

Előfizetés egy évre 20.— Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

Bolyai János, a tudomány nagy forradalmára

A magyar tudományos élet az elmult napokban ünnepelte meg BOLYAI JÁNOS, a lángeszű magyar matematikus születésének 150. évfordulóját. Ez az évforduló nemcsak a magyar tudomány, hanem egész dolgozó népünk ünnepe. Valóban, BOLYAI JÁNOS neve joggal hazafias büszkeséggel töltheti el minden magyar ember szívét. Büszkék lehetünk arra, hogy a magyar nép, amelyet BOLYAI korában külső és belső elnyomói kulturális elmaradottságban igyekeztek tartani, ilyen nagy tudóst adott a világnak, aki forradalmi felfedezésével új fejezetet nyitott meg a tudomány történetében. BOLYAI JÁNOS egyike azoknak, akik a legtöbb dicsőséget és megbecsülést szerezték a magyar névnek. BOLYAI főműve, az *„Appendix"*, amelyben új geometriáját, az úgynevezett nem-euklidesi geometriát, kidolgozta, 121 éve jelent meg; azóta azon az úton, amelyen BOLYAI ebben a művében elindult, a matematika hatalmas lépéssel jutott tovább. A matematikának ez a fejlődése tette lehetővé, hogy elmélyítsük ismereteinket a térről, amelyben élünk, és ezáltal elmélyítsük ismereteinket az egész világegyetemről. A tudományos világ BOLYAI JÁNOSban ennek a fejlődésnek egyik megindítóját tiszteli.

A maga korában BOLYAI művét csak kevesen értették meg, éppen gondolatainak forradalmi újszerűsége következtében. GAUSS, ennek a kornak legnagyobb tekintélyű matematikusa, akit a „matematikusok fejedelmének" is neveztek, egy barátjához — GERLINGhez — 1832-ben írott levelében ezt írta az *Appendix*ről: „E napokban Magyarországról egy, a nem-euklideszi geometriát tárgyaló kis művet kaptam . . . ezt a fiatal matematikust, Bolyait, elsőrangú lángésznek tartom." GAUSS ezt a véleményét azonban nem hozta nyilvánosságra. BOLYAI JÁNOSnak az őt megillető elismerést a tudományos világ csak halála után adta meg. Művét számos európai nyelvre lefordították; franciául először 1867-ben, olaszul 1868-ban, németül 1872-ben, angolul 1895-ben jelent meg. A Szovjetunióban tavaly adták ki az *Appendix*et orosz nyelven. Ennek a kiadásnak előszavában B. F. KAGAN moszkvai professzor az egész tudományos világ kialakult véleményét fejezte ki, amikor megállapította, hogy: „A magyar nép büszkeségét, BOLYAI JÁNOST, joggal számíthatjuk a világ tudományának klasszikusai közé."

BOLYAI JÁNOSsal egyidejűleg és tőle teljesen függetlenül NIKOLAJ IVANOVICS LOBACSEVSZKIJ orosz matematikus ugyanarra a felfedezésre jutott. A két zseniális matematikus élete és felfogása egyébként is sok párhuzamot mutat. Első pillanatra rendkívül meglepően hat, hogy egy problémát, melynek megoldásával a legkiválóbb matematikusok, így még az ókorban a görög PROKLOS, a középkorban a perzsa OMAR KHAYAM, az arab NASZIREDDIN, az újkorban Európában SACCHERI, WALLIS, LAMBERT, LEGENDRE és sokan mások sikertelenül próbálkoztak, egyidejűleg és egymástól függetlenül két matematikus is megoldjon. Ilyen eset a matematika története során azonban több alkalommal is előfordult. Ilyen esetre utalt BOLYAI FARKAS, János apja, amikor egy, fiához intézett levelében azt írta: „Némely dolgoknak úgyszólván megvan a maguk epochája (korszaka) amidőn azután több helyt egyszerre találtatnak." Ezek a jelenségek érthetővé válnak, ha figyelembevesszük, hogy a legnagyobb tudományos felfedezéseknek az előfeltételeit évszázados fejlődés teremti meg, s amikor egy nagy tudományos felfedezés megszületésének társadalmi és tudományos előfeltételei megvannak, úgy könnyen előfordulhat, hogy azt ugyanakkor több tudósnak sikerül megoldani. Ahhoz tehát, hogy megértsük annak mélyebb okait, miért fordulnak elő gyakran ilyen esetek, a tudomány történetét a történelmi materializmus alapján a társadalom történetének részeként kell vizsgálnunk, az egyes tudományos felfedezéseket pedig az illető tudomány dialektikus fejlődési folyamatának láncszemeiként kell tekintenünk. Kétségtelen, hogy BOLYAI és LOBACSEVSZKIJ korában már megérett az idő a nem-euklidesi geometria megszületésére. Ezt bizonyítja, hogy több más matematikus, így többek között GAUSS is már közel jutott a nem-euklideszi geometria felfedezéséhez. A döntő lépést azonban csak BOLYAI és LOBACSEVSZKIJ tették meg.

BOLYAI csak 1848-ban hallott először LOBACSEVSZKIJről és művéről. LOBACSEVSZKIJ viszont élete végéig nem tudott BOLYAIról. Mindkét tudós teljesen elszigetelten, kortársaitól meg nem értve dolgozott. Mindkettőjük számára nagyjelentőségű lett volna, ha tudományos együttműködés alakulhatott volna ki közöttük. Ami abban a korban nem volt lehetséges, az ma megvalósult: a szovjet és magyar tudomány együttműködése egyre szorosabbá válik és ennek az együttműködésnek a magyar matematikusok rendkívül sokat köszönhetnek. Annak a hatalmas támogatásnak, melyet a magyar matematikusok a Szovjetuniótól állandóan kapnak, egy újabb megnyilvánulása, hogy a Szovjetunió két világhírű tudósát küldte el hozzánk a most lefolyt BOLYAI-ünnepségekre.

BOLYAI JÁNOS több volt, mint nagy tudós: a tudomány forradalmára volt. „A tudomány" — mondotta Sztálin elvtárs —

„fejlődése során nem kevés olyan bátor embert ismer, aki semilyen akadállyal nem törődve, mindennel dacolva össze tudta törni a régit és tudott újat alkotni.“ BOLYAI JÁNOS ezeknek a bátor embereknek a sorában is a legnagyobbak egyike volt. Valóban forradalmárnak kellett lennie ahhoz, hogy kétezer év hagyományait félretéve, teljesen új úton keresse a párhuzamosság problémájának megoldását. Nem riasztotta el elődeinek sikertelensége sem. Amikor 1820-ban első próbálkozásait apjának megírta, az óva intette attól, hogy ezzel a kérdéssel foglalkozzék (amellyel fiatalabb korában maga Farkas is sikertelenül próbálkozott). „A parallellákat (párhuzamosakat) azon az úton ne próbáld“ — írta BOLYAI FARKAS — „tudom én azt az útat mind végig, megmértem azt a feneketlen éjszakát én is és az életemnek minden világossága, minden öröme kialudt benne.“ Jánost ezek a szavak nemhogy elriasztották volna, hanem éppen megerősítették elhatározását, hogy megpróbálkozzék azzal, ami eddig senkinek sem sikerült. „Ahelyett, hogy elriasztattam volna, érdeklődésem csak megélénkült“ — ezt a feljegyzést találjuk ezzel kapcsolatban BOLYAI JÁNOS emlékirataiban. A tér tudományának megoldatlan problémájában azonban elsősorban nem annak nehézsége, hanem annak a tudomány fejlődése szempontjából való jelentősége volt az, ami János szenvedélyes érdeklődését felkeltette. „A tudományban“ — írja egy feljegyzésében — „úgy, mint magában a közönséges életben, mindig arról van szó, hogy szükséges és közhasznú, de még homályos dolgokat kellően tisztázzunk.“ Azon a meggyőződésen volt, hogy nem az a tudós feladata, hogy „a tudományt lethargikusan, csak az örökölt állapotban hagyja“, „bizony nem ebben áll az élet, a munkálkodás és az érdem“ — mondotta. Azon a véleményen volt, hogy a tudós hivatása abban áll, hogy minden erejével szenvedélyesen törekedjék az igazság megismerésére, hogy ezzel az emberiség haladását vigye előbbre. Amikor nagyszerű felfedezését megtette, úgy érezte, hogy ezzel „az emberi sors lendítésének“ egy döntő lépése történt meg.

BOLYAI JÁNOSnak a matematikára vonatkozó nézetei forradalmiak voltak a maga korában. A matematika tárgyáról és feladatáról alapjában materialista nézeteket vallott. Mutatja ezt az a megállapítása, hogy „csakis olyan dolgok és így csakis olyan mennyiségek lehetnek a (józan) kutatás tárgyai, amelyek valóban megvannak (pl. ha anyagiak, a testi vagy külső világ részei, vagy legalább elgondolhatók és lehetségesek).“ BOLYAI JÁNOSnak ez a mondása ma is fegyverül szolgálhat a matematika terén az idealista nézetek elleni harcban. Az idealista felfogás szerint ugyanis a matematika önkényesen alkotja fogalmait és önkényesen választja meg ezekre vonatkozó alapfeltevéseit. Ennek az idealista felfogásnak a téves volta legnyilvánvalóbban ott mutatkozik meg, hogy ez a felfogás nem képes megmagyarázni azt, miért alkalmazhatók a matematika módszerei olyan fényes sikerrel a természettudományokban és a technikában, az emberiségnek a természet és a társadalom megismerésére és átalakítására irányuló gyakorlati tevékenységében. Ezt csak a matematika tárgyának materialista felfogása magyarázhatja meg, melyet ENGELS a következőképpen fogalmazott meg: „A tiszta matematika tárgyát a reális világ térbeli formái és mennyiségi viszonylatai, vagyis nagyonis reális anyag alkotja. Hogy ez az anyag igen elvont alakban jelenik meg, az csak felületesen fedheti el a külső világból való eredetét. De hogy ezeket a formákat és viszonylatokat a maguk tisztaságában tanulmányozhassuk, teljesen el kell őket vonatkoztatnunk tartalmuktól, mint olyantól, amely a tárgy szempontjából lényegtelen." Az idealizmus felfogása szerint a geometria tárgyát a tér velünk született fogalmának vizsgálata képezi. Ezt a felfogást BOLYAI korában KANT képviselte a leghatározottabban. KANT szerint a tér (és hasonlóképpen az idő) a valóságban nem léteznek, csak a mi elképzelésünkben, mint gondolkodásunk formái. Ezzel kapcsolatban Lenin a következőket írta: „A materializmus elismeri az objektív valóság, azaz a mozgásban lévő anyag tudtunktól független létezését és ezért elkerülhetetlenül el kell ismernie az idő és tér objektív valóságát is, eltérően mindenekelőtt a kantizmustól, mely ebben a kérdésben az idealizmus oldalán áll, az időt és teret nem objektív valóságnak, hanem az emberi szemlélet formáinak tekinti." (Materializmus és Empiriokriticizmus, 172. o.) KANT felfogásának téves voltát éppen BOLYAI és LOBACSEVSZKIJ felfedezése cáfolta meg legvilágosabban. Azzal, hogy megmutatták, hogy több különböző geometriai rendszer építhető fel, nyilvánvalóvá vált, hogy szemléletünk több különböző elképzelést képes alkotni a térről és csak a tapasztalat döntheti el, hogy ezek mennyiben alkalmasak a valóságos tér tulajdonságának leírására. A geometria törvényei tehát nem velünk született szemléletünket tükrözik, hanem ugyanúgy mint minden más tudományos törvény, az anyagi világ törvényszerűségeit. Ilyen módon tehát BOLYAI és LOBACSEVSZKIJ felfedezése a materializmus nagy győzelme volt. Érdekes megjegyezni, hogy GAUSS is határozottan állást foglalt KANTnak a térre vonatkozó helytelen idealista felfogásával szemben. Egy munkájában kijelentette, egy matematikai megjegyzésével kapcsolatban, hogy „az világosan bizonyítja azt, hogy a térnek a mi szemléleti módunktól független, reális jelentősége kell, hogy legyen." GAUSS tehát ugyanúgy meg volt győződve KANT felfogásának helytelenségéről, mint BOLYAI és LOBACSEVSZKIJ. Azzal is tisztában volt, hogy KANT felfogására BOLYAI felfedezése döntő csapást mért. Az *Appendix* elolvasása után BOLYAI FARKAShoz írt levelében megállapítja, hogy az a tény, hogy két egyenrangú geometria létezik és pusztán logikai úton nem lehet eldönteni, hogy a valóságban melyik érvényes, csak tapasztalati úton, „a legvilágosabb bizonyítéka annak, hogy KANTnak nem volt igaza, midőn azt állította, hogy a tér csak formája a mi szemléletünknek.“ GAUSS tehát világosan felismerte a nem-euklideszi geometria világnézeti jelentőségét, forradalmi materialista tartalmát és ez lehetett a döntő oka annak, hogy a reakció uralmának éveiben a nem-euklideszi geometriára vonatkozó saját gondolatait nem tette közzé és nem állt ki nyilvánosan BOLYAI és LOBACSEVSZKIJ felfedezése mellett. GAUSS óvatos álláspontjával összehasonlítva még fokozottabban meg kell becsülnünk BOLYAI JÁNOS és LOBACSEVSZKIJ bátor, harcos állásfoglalását. A tér létezésének kérdésében tehát BOLYAI határozottan materialista álláspontot foglalt el. BOLYAI JÁNOS harcos materialista állásfoglalását tükrözi a következő kijelentés is, amelyben kifejti, hogy miért határozta el magát arra, hogy a geometriában a hagyományokkal szakítva új útra lép. „... Minthogy azt tartottam, hogy a természetet nem szabad ábrándok szülte agyrémek szerint formálni, hanem akarnunk kell észszerűen és természetes módon az igazságot, vagy magát a természetet látni.“ Ugyanakkor azonban bizonyos mértékben kora metafizikus gondolkodásának hatása alatt állott. Ez nyilvánult meg abban, hogy úgy tette fel a kérdést, hogy a valóságban az euklideszi geometria, vagy az általa felfedezett nem-euklideszi geometria érvényes-e. Ma már tudjuk, hogy a kérdés feltevése ebben a formában nem helyes. Azóta mind a geometria, mind a fizika jelentősen továbbfejlődött és az újabb tudományos eredmények azt mutatják, hogy a valóságos tér szerkezete függ az anyagnak a térben való elhelyezkedésétől. A tér szerkezetének leírására szükség van olyan geometriai rendszerekre is, amelyeket még BOLYAI nem ismert. A geometriának az a fejlődése azonban, amelyet BOLYAI és LOBACSEVSZKIJ megindított, olyan további geometriák felfedezéséhez vezetett, amelyek alkalmasak a tér bonyolult szerkezetének leírására. Ezeknek az újabb geometriáknak elméleti fizikai és csillagászati vizsgálatoknál nagy jelentőségük van. Ez természetesen nem változtat azon a tényen, hogy a mindennapi életben fellépő geometriai problémák megoldására a klasszikus euklideszi geometria, amelyet a középiskolákban tanítanak, teljes mértékben alkalmas. Ugyanis az ettől való eltérések csak csillagászati méretek esetében válhatnak számottevőkké.

Az elmondottak világosan mutatják, hogy BOLYAI JÁNOS nemcsak a matematikában volt forradalmár, hanem ezen túlmenőleg a haladó emberi gondolkodás forradalmára volt, aki felfedezésével döntő csapást mért az idealista filozófiának a térre vonatkozó helytelen nézeteire. Az elmondottak azt is mutatják, hogy a matematika alapvető problémái már BOLYAI korában is elválaszthatatlanul összefonódtak bizonyos ideológiai kérdésekkel, hogy a matematika ugyanúgy, mint más tudományok, a haladó és reakciós világnézet, a materializmus és idealizmus egyik harctere. Ezt bizonyítja egyébként a matematika egész története is. Ma ez az ideológiai harc a matematika terén még fokozódott. Ennek következtében a matematikus saját tudományának alapvető kérdéseiben is csak úgy tájékozódhat helyesen, ha minél alaposabban igyekszik a tudományos világnézet, a dialektikus materializmus elsajátítására. A magyar matematikusok, amikor a dialektikus materializmus alapján igyekeznek szaktudományuk döntő elvi kérdéseiben állást foglalni, ezzel BOLYAI JÁNOS hagyatékát fejlesztik tovább. Ugyancsak BOLYAI JÁNOS nyomán járnak a magyar matematikusok akkor is, amikor arra törekszenek, hogy szakítva a matematika öncélúságának tév-eszméjével a matematika gyakorlati alkalmazásain keresztül elősegítsék a szocializmus építését. Hiszen BOLYAI JÁNOS abban látta a tudomány feladatát, hogy „szükséges és közhasznú kérdésekkel foglalkozzék. A magyar matematikusok BOLYAI JÁNOS nyomán haladnak akkor is, amikor a matematika még megoldatlan nagy problémáival foglalkoznak. A magyar matematikusok az utóbbi évtizedekben jelentős eredményeket értek el, amelyek közül első helyen kell említenünk RIESZ FRIGYESnek éppen a térfogalom újabb fejlődése szempontjából jelentős vizsgálatait, valamint FEJÉR LIPÓT jelentős kutatásait. További munkánkhoz is erőt meríthetünk nagy példaképünknek, BOLYAI JÁNOSnak, a tudományos igazságért harcoló, évezredes előítéletekkel bátran szembeszálló lángeszű matematikusnak, a tudomány nagy forradalmárának emlékéből.

Rényi Alfréd

Szovjet eredmények az algebrai számtestek elméletében

(A Bolyai János Matematikai Társulatban 1950. március 18-án tartott előadás)

Irta: Földes István

Mielőtt ismertetésem tulajdonképpeni tárgyára rátérnék, a zavartalan olvashatóság biztosítása céljából emlékezetbe szeretném idézni a szövegben szereplő algebrai és számelméleti fogalmak definicióit és a reájuk vonatkozó fontosabb tényeket.

Bizonyos elemeknek egy (véges vagy végtelen) halmazát *csoportnak* nevezzük, ha

1. értelmezve van egy művelet, amely az elemeknek bármely, meghatározott sorrendben vett a, b párjához egyértelműen hozzárendeli a halmaz valamely elemét, melyet a és b szorzatának nevezünk és ab-vel jelölünk;
2. a csoportművelet asszociatív: $a(bc) = (ab)c$;
3. létezik pontosan egy olyan e elem (egységelem), hogy bármely a elemre vonatkozólag $ae = ea = a$;
4. bármely a elemnek megfelel egy és csak egy olyan a^{-1} elem (a inverz eleme), melyre vonatkozólag $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

A csoportműveletnek nem kell kommutatívnak lennie; azokat a csoportokat, amelyekben a művelet kommutatív, vagyis bármely a, b elempárra vonatkozólag $ab = ba$, Abel-*féle* vagy kommutatív csoportnak nevezzük.

Ha a csoport elemeinek száma véges, a csoportot *végesnek*, ha pedig az elemek száma végtelen, a csoportot *végtelennek* nevezzük. Egy véges csoport elemeinek száma a csoport *rendje*. Valamely a csoportelem rendje alatt azt a legkisebb l kitevőt értjük, melyre $a^l = e$.

Egy G csoportról azt mondjuk, hogy a H csoportnak *homomorf képe*, vagy röviden azt, hogy *homomorf H-hoz*, ha H minden elemének olyan módon felel meg G-nek pontosan egy eleme, hogy G minden eleme megfelel H legalább egy elemének, továbbá ha a H csoport a és b elemének a G csoport a', illetve b' eleme felel meg, akkor ab-nek $a'b'$ felel meg. Ha a homomorfizmus értelmében H két különböző elemének mindig G két különböző eleme felel meg, akkor a homomorfizmusvonatkozás mindkét irányban fennáll és akkor *izomorfizmusról* beszélünk. *Automorfizmus* alatt egy csoportnak önmagára való izomorf leképezését értjük.

Valamely G csoport olyan nem üres g részhalmazát, melynek elemei a csoportművelet értelmében maguk is csoportot alkotnak, a G csoport *alcsoportjának* nevezzük. G rendje a g rendjének többszöröse; a g alcsoport *indexe* alatt G és g rendjeinek hányadosát értjük; ezt (G/g)-vel jelölhetjük. Az e egységelem önmaga egy E alcsoportot képez.

Azt mondjuk, hogy G valamely a és b eleme *konjugált* egymással, ha G-ben létezik egy oly σ elem, hogy $a = \sigma b \sigma^{-1}$. Az így értelmezett konjugáltság nyilván szimmetrikus, reflexiv és tranzitív, tehát osztályképző reláció.

Ha σ a G csoport valamelyik eleme, a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ pedig egy g alcsoport elemei, akkor a $\sigma a_i \sigma^{-1}$ elemek megint csoportot fognak alkotni, melyet $\sigma g \sigma^{-1}$-vel jelölünk; g-t és ezen $\sigma g \sigma^{-1}$ alcsoportokat egymás *konjugált*jainak fogjuk nevezni. *Normálosztó*, vagy *invariáns alcsoport* alatt olyan alcsoportot értünk, mely konjugáltjaival azonos.

Jelentse g a G-nek egy normálosztóját. A G csoport α és β elemeiről azt mondjuk, hogy g-re vonatkozólag *kongruensek*, ha g-ben van olyan x elem, hogy $\alpha x = \beta$; az így értelmezett kongruenciareláció osztályképző; az általa definiált osztályokat g *mellékosztályainak* nevezzük. Ha egy A mellékosztály összes elemeit megszorozzuk egy B mellékosztály összes elemeivel, akkor a nyert szorzatok megint egy C mellékosztályt alkotnak, melyet A és B szorzatának nevezünk. Az így értelmezett műveletre nézve a mellékosztályok csoportot alkotnak, mely homomorf G-vel; ez G-nek a g normálosztójához tartozó *faktorcsoportja*, melyet G/g-vel jelölünk. A G csoport valamely részhalmazát akkor nevezzük a g normálosztóhoz tartozó mellékosztályok *reprezentánsrendszerének*, ha mindegyik mellékosztályból pontosan egy elemet tartalmaz.

Ha egy G csoport alcsoportjaiból lehet egy olyan $G \supset G_1 \supset \ldots \supset G_l = E$ sorozatot összeállítani, hogy mindegyik alcsoport törzsszámindexű normálosztója a megelőzőnek, akkor G-t *feloldható* csoportnak hívjuk.

Egy G csoport a g és g' csoportoknak *direkt szorzata*, ha G elemei és az $(a \in g, b \in g')$ elempárok között olyan kölcsönösen egyértelmű megfelelés áll fenn, hogy ha $A \in G$ az (a, b), $B \in G$ pedig az (a', b') párnak felel meg, akkor AB megfelel (aa', bb')-nek. G rendje ekkor g és g' rendjeinek szorzata. Minden véges Abel-féle csoport ciklikus (vagyis egyetlen elem hatványaiból álló) csoportok direkt szorzata; e ciklikus csoportok generáló elemeinek rendszerét az ABEL-féle csoport *bázisának* nevezzük.

Ha a G csoport homomorf egy K test elemeiből álló mátrixok valamely csoportjával, akkor ezen mátrixokról, illetve az általuk meghatározott lineáris transzformációkról azt mondjuk, hogy a G csoportnak egy n-edrendű *előállítását* szolgáltatják. A G csoport valamely előállításának értelmében a csoport minden egyes elemének egy mátrix felel meg, melynek nyomát (a főátló elemeinek összegét) *karakternek* nevezzük; egy ilyen $\chi(\sigma)$ karakter a G csoport σ elemeinek olyan függvénye, mely egymással konjugált csoportelemekre egy és ugyanazon értéket veszi fel.

Ha $2l$ számú $\overset{+1}{x_\lambda}$ és $\overset{-1}{x_\lambda}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$ szimbólumokból formálisan képzett $x_{\lambda_1}^{s_1} x_{\lambda_2}^{s_2} \ldots x_{\lambda_k}^{s_k}$ sorozatokat tekintünk, ahol $s_i = +1$ vagy -1, λ_i pedig az $1, 2, \ldots, l$ számok közül valamelyik tetszőlegeset jelentheti $(i = 1, 2, \ldots, k)$; ha továbbá megállapodunk abban, hogy két ilyen sorozatot akkor és csak akkor tekintünk egymással azonosaknak, ha $\overset{+1}{x_\lambda}\overset{-1}{x_\lambda}$ vagy $\overset{-1}{x_\lambda}\overset{+1}{x_\lambda}$ betoldása vagy törlése által az egyik sorozat átmegy a másikba, úgy e sorozatok az „egymásutánírás“ műveletére nézve csoportot alkotnak, melyet *szabad csoport*nak hívunk: az x_λ szimbólumok a szabad csoport *generátorai*.

Gyűrű alatt elemeknek olyan halmazát értjük, melyekre vonatkozólag két művelet van értelmezve; az egyik műveletre nézve, melyet összeadásnak nevezünk, a halmaz elemei kommutatív csoportot, a gyűrű u. n. additív csoportját alkotják, míg a másik műveletre, az u. n. szorzásra nézve csak az asszociativitás és az összeadási művelettel való mindkét oldali disztributivitás van kikötve. Egy gyűrű azon elemeinek összességét, melyek mindegyik elemmel a szorzásra nézve is kommutálnak, a gyűrű *centrumának* hívjuk. A gyűrűt *kommutatív*nak hívjuk, ha a szorzás kommutatív. Minden gyűrűben van pontosan egy 0 zéruselem (az additív csoport egységeleme), melyre $a + 0 = a$, hol a a gyűrű bármelyik elemét jelentheti.

Ferde testnek egy olyan gyűrűt nevezünk, melynek 0-tól különböző elemei a szorzásműveletre vonatkozólag is csoportot, a ferde test u. n. multiplikatív csoportját alkotják; ha a multiplikatív csoport kommutatív, akkor *testről* beszélünk. Minden ferde testben van pontosan egy 1 egységelem (a multiplikatív csoport egységeleme), melyre $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, hol a a test bármely elemét jelentheti.

Egy olyan R gyűrűt, melynek elemeire nézve értelmezve van valamely K test* elemei által való szorzás olyan módon, hogy ha

* Test helyett bármilyen, egységelemet tartalmazó gyűrűt is tekinthetünk.

$a \in R$, $b \in R$, $\alpha \in K$, $\beta \in K$, akkor

1. $\alpha a \in R$,
2. $\alpha a = a\alpha$,
3. $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$,
4. $(\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a$,
5. $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$, $\alpha(ab) = (\alpha a)b$, $a(\alpha b) = (a\alpha)b$,
6. $1 \cdot a = a$,

algebrának, vagy *hiperkomplex rendszernek* nevezünk a K test fölött.

Ha R minden a eleme egyértelműen állítható elő egy $u_1, u_2, \ldots, u_n \in R$ *bázis* elemei által az

$$a = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$$

alakban, hol $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$, úgy R egy *n-edrangú véges* algebra K fölött. A báziselemekre vonatkozólag felírt szorzási szabályok által a szorzás nyilván teljesen meg van határozva az algebra bármely elemeire nézve.

Jelöljük e_{ij}-vel azt az n-edrendű mátrixot, melyben az i-edik sor és a j-edik oszlop kereszteződésében álló elem 1, a többi elem pedig 0. Nyilván

$$e_{ij}e_{jk} = e_{ik}, \quad e_{ij}e_{lk} = 0 \quad (j \neq l).$$

Tekintsük egy K test fölött azt az algebrát, melynek bázisa az n számú $e_{ij}(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ elemekből áll. Ezt az algebrát *teljes mátrixgyűrűnek* nevezzük a K test fölött, mivel egy n-edfokú $\|\alpha_{ik}\|$ mátrix így írható: $\|\alpha_{ik}\| = \sum_{i,k} \alpha_{ik} e_{ik}$ $(\alpha_{ik} \in K)$.

Jelentsék $s_1, \ldots, s_n$ egy véges G csoport elemeit és vegyük ezeket báziselemeknek, vagyis képezzük az

$$\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \ldots + \alpha_n s_n$$

alakú kifejezéseket, hol α_i egy K test bármely száma lehet $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Az s_i báziselemekre nézve a szorzási szabályok a G csoport struktúrája által vannak adva. Így egy n-edrangú algebrát nyerünk, melyet a G csoport K-ra vonatkozó *csoportgyűrűjének*, vagy FROBENIUS-algebrájának hívunk és $G \cdot K$-val jelöljük.

Minden algebrához konstruálhatunk vele mindkét gyűrűműveletre nézve homomorf mátrixgyűrűt, vagyis valamely K test fölötti teljes mátrixgyűrűnek egy részalgebráját; ez utóbbit az adott algebra egy *előállításának* nevezzük. Egy előállítás, az u. n. *reguláris előállítás* közvetlenül nyerhető a báziselemek szorzástáblázatából, vagyis az $u_j u_k = \sum u_l \gamma_{jk}^l$ formulák rendszeréből, hol $\gamma_{jk}^l \in K$. Az algebra valamely $a = \sum \alpha_j u_j$ elemének a reguláris előállításban megfelelő mátrix az $au_1, au_2, \ldots, au_n$ elemek báziselőállításaiban fellépő együtthatókból van képezve: ez a mátrix a következő lesz: $\sum \gamma_{jk}^{l} \alpha_j$ (itt l a sor-, k pedig az oszlopindex). A csoportok előállításelmélete a csoportgyűrű segítségével visszavezethető az algebrák előállításelméletére.

Egy A algebra valamely a elemét *nilpotensnek* nevezzük, ha létezik egy olyan α kitevő, hogy $a^{\alpha} = 0$. Egy a elem *lényegesen nilpotens*, ha minden $x \in A$-ra ax és xa nilpotensek. A lényegesen nilpotens elemeinek összessége egy (kétoldalú) ideált képez, melyet A *radikáljának* nevezünk. (*Jobb-*, illetve *balideál* alatt olyan B részalgebrát értünk, melyre $BA \subseteq B$, illetve $AB \subseteq B$; kétoldali ideál esetében mindkét feltétel egyidejűleg teljesül). Ha A radikálja $= (0)$, (vagyis az az ideál, mely egyedül a 0 elemből áll), akkor A-t *félegyszerű*nek nevezzük. *Egyszerű*nek akkor mondunk egy algebrát, ha nem tartalmaz önmagától és (0)-tól különböző kétoldali ideálokat. Ki lehet mutatni, hogy minden egyszerű algebra félegyszerű, ha eltekintünk egy triviális kivételtől, nevezetesen az elsőrangú nullalgebra esetétől (melynek bázisa egyetlen u elemből áll és $u . u = 0$); továbbá minden félegyszerű algebra egyértelműen bontható fel egyszerű algebrák direkt összegére (egy A algebra akkor *direkt összege* egy B és egy C algebrának, ha minden eleme egyértelműen állítható elő B és C egy-egy elemének összegeként), minden egyszerű algebra pedig teljes mátrixgyűrű egy ferde test fölött (WEDDERBURN).

Algebrai szám alatt egy racionális egész együtthatós algebrai egyenlet egyik (valós vagy komplex) gyökét értjük. Könnyen kimutatható, hogy az algebrai számok összessége, akárcsak a racionális számok összessége, testet alkot.

Ha képezzük bizonyos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ algebrai számoknak olyan racionális kifejezéseit, melyeknek együtthatói racionális számok, az így nyert számok összessége testet fog alkotni, melyet $R(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$-el jelölünk és azt mondjuk, hogy ez az *algebrai számtest* az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ számoknak az R racionális számtesthez való *adjunkciója* által származtatható. Algebrai számoknak egy algebrai számtesthez való adjunkciója, vagyis ezen számok olyan racionális kifejezéseinek képzése, melyekben az együtthatók a kérdéses algebrai számtestből vannak véve, megint algebrai számtestet szolgáltat.

Jelöljünk most k-val, ill. K-val két számtestet. Ha $k \subset K$, akkor azt mondjuk, hogy *k részteste* K-nak, K pedig *bővítése* k-nak. Ha K minden száma eleget tesz egy olyan algebrai egyenletnek, melyek együtthatói k-hoz tartoznak, akkor K-t *k algebrai bővítésének* nevezzük. Ebben az esetben K minden eleme egy k-ban irreducibilis egyenletnek is eleget tesz, vagyis egy olyan egyenletnek, melynek együtthatói k-hoz tartoznak és amelynek többtagúja nem bontható fel két másik olyan polinom szorzatára, melynek együtthatói szintén

k-hoz tartoznak; ez az irreducibilis polinom a kérdéses szám által egy állandó tényezőtől eltekintve egyértelműen van meghatározva. Ha K valamennyi számának esetében ezen k-ban irreducibilis polinomok foka korlátos, akkor K-t a k *véges* algebrai bővítésének nevezzük; ellenkező esetben a bővítés *végtelen*. Véges bővítés esetében az említett polinomok fokszámainak maximumát a K test k-ra vonatkozó *relatív fokának* nevezzük és így jelöljük: (K/k). Egy számtestnek a racionális számok testére vonatkozó relatív foka a test *abszolút foka*.

Ha K-nak k-ra vonatkozó relatív foka n, akkor K-ban létezik olyan α szám, hogy $K=k(\alpha)$, vagyis K-ban van olyan szám, hogy K ennek a számnak k-hoz való adjunkciója által származtatható. Egy ilyen α szám egy n-edfokú, k-ban irreducibilis egyenletnek tesz eleget.

Ha $K_1 \subset K_2$ és $K_2 \subset K_3$, akkor $(K_3/K_1)=(K_3/K_2)(K_2/K_1)$.

Tekintsünk egy $K=k(\alpha)$ testet, ahol α egy olyan n-edfokú egyenletnek tesz eleget, melynek együtthatói a k algebrai számtesthez tartoznak. Jelöljük ezen egyenlet gyökeit $\alpha=\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$-nel. A $k(\alpha^{(1)}), k(\alpha^{(2)}), \ldots, k(\alpha^{(n)})$ testeket K-nak k-ra vonatkozó *relatív konjugáltjainak* nevezzük. Ha ezek egybeesnek egymással, akkor K-t k-ra vonatkozólag *relatív* GALOIS-*féle* testnek hívjuk.

Ha $\beta \in K$, úgy β racionális kifejezése α-nak a k-ból vett együtthatókkal: $\beta=R(\alpha)$. Akkor az $R(\alpha^{(i)})$ számokat a β szám k-ra vonatkozó *relatív konjugáltjainak* nevezzük. Ha $\beta \in k$, akkor (és csak akkor) β megegyezik összes konjugáltjaival. A β szám összes relatív konjugáltjainak szorzatát β (k-ra vonatkozó) *relatív normájá*nak hívjuk és $N_{K/k}(\beta)$-val jelöljük.

A racionális számok testére vonatkozólag relatív konjugált számokat vagy testeket *abszolút konjugáltaknak*, a reá vonatkozó relatív normát pedig *abszolút normá*nak nevezzük.

Legyen a K test a k-ra vonatkozólag relatív GALOIS-féle. A K testnek k-ra vonatkozó *relatív automorfizmusai* alatt olyan T leképezéseket értünk, melyek K minden egyes α számát K-nak egy másik számába olyan módon viszik át, hogy

$$T\alpha = T\beta\text{-ból következik } \alpha=\beta,$$

$$T\alpha=\alpha, \text{ ha } \alpha \in k,$$

$$T(\alpha+\beta)=T\alpha+T\beta, \quad T(\alpha\beta)=T\alpha.\,T\beta.$$

Ki lehet mutatni, hogy ha $\beta=R(\alpha)$, akkor $T\beta=R(\alpha^{(i)})$ és mivel egy ilyen leképezés mindenesetre automorfizmus, ebből következik, hogy (az identikus leképezéssel együtt) (K/k) relatív automorfizmus létezik; ezek egy $\mathfrak{G}$ csoportot képeznek, melyet a K test k-ra vonatkozó *relatív* GALOIS-*csoport*jának nevezünk. Ha G kommutatív, akkor K-ról azt mondjuk, hogy k-ra vonatkozólag *relatív* ABEL-*féle*.

A GALOIS-*elmélet alaptétele* azt állítja, hogy a K test k-ra vonatkozó $\mathfrak{G}$ relatív GALOIS-csoportja minden $\mathfrak{g}$ alcsoportjának megfelel egy k $(k \subset k' \subset K)$ test abban az értelemben, hogy k' a K test azon számaiból áll, melyek invariánsak a $\mathfrak{g}$ alcsoport leképezéseivel szemben; megfordítva, minden $k'(k \subset k' \subset K)$ testnek megfelel a $\mathfrak{G}$ csoportnak egy $\mathfrak{g}$ alcsoportja abban az értelemben, hogy $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{G}$ azon leképezéseiből áll, melyekkel szemben k' számai invariánsak. Ez a $\mathfrak{g}$ alcsoport K-nak k'-re vonatkozó relatív GALOIS-csoportja. Ahhoz, hogy k' relatív GALOIS-féle bővítése legyen k-nak, szükséges és elégséges, hogy $\mathfrak{g}$ konjugáltjaival egybeessék, v. i. hogy $\mathfrak{g}$ normálosztó legyen; akkor k'-nek k-ra vonatkozó relatív GALOIS-csoportja izomorf a $\mathfrak{G}/\mathfrak{g}$ faktorcsoporttal.

A *direkt* GALOIS-*probléma* abban áll, hogy egy k test valamely adott K GALOIS-féle bővítésének algebrai és aritmetikai sajátságait megállapítsuk, ami kimerítően eszközölhető a relatív GALOIS-csoport segítségével; a *megfordított* GALOIS-*problémában* annak megállapítására törekszünk, hogy léteznek-e és ha igen, akkor melyek egy adott k test azon GALOIS-féle bővítései, melyeknek k-ra vonatkozó relatív GALOIS-csoportja izomorf egy adott csoporttal.

Egy α számot *algebrai egész* (vagy röviden egész) számnak nevezünk, ha eleget tesz egy olyan, a racionális számok testében irreducibilis $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ egyenletnek, melyben az együtthatók racionális egész számok. Ki lehet mutatni, hogy egy test egész számainak összessége gyűrűt alkot.

Legyen a K test abszolút foka n; ennek egész számai az összeadásra mint csoportműveletre vonatkozólag ABEL-féle csoportot alkotnak, melynek n elemből álló *bázisa* van, ami azt jelenti, hogy létezik a K testben n számú olyan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ egész szám, hogy a K test minden egész száma az $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$ alakban állítható elő, ahol az x_i együtthatók racionális egész számok.

Egységnek nevezzük egy testnek valamely olyan egész számát, melynek reciprok értéke is egész.

Egy k algebrai számtest valamely *ideálja* alatt a test számainak egy olyan $\mathfrak{a}$ összességét értjük, melyre vonatkozólag

1. ha $\alpha \in \mathfrak{a}$, akkor $\lambda\alpha \in \mathfrak{a}$, ahol λ a test bármely egész számát jelentheti;

2. ha $\alpha \in \mathfrak{a}$ és $\beta \in \mathfrak{a}$, akkor $\alpha + \beta \in \mathfrak{a}$;

3. létezik egy olyan $\mu \neq 0$ egész szám, hogy minden $\alpha \in \mathfrak{a}$-ra $\mu\alpha$ egész.

Egy ideált *egész ideál*nak nevezünk, ha minden száma egész szám.

Ha adva van egy k test számainak egy olyan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ halmaza, hogy létezik egy $\mu \neq 0$ szám, mellyel e halmaz bármely számát megszorozva mindig egész számot kapunk, akkor a $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots$ számok, ahol a λ_i-k a test tetszőleges egész számai lehetnek, egy ideált képeznek, melyről azt mondjuk, hogy az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ számok által van generálva. Ezt az ideált a következőképpen jelöljük: $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$. Nyilván minden ideál bizonyos számú eleme által generálható. Egy ideált *főideál*nak nevezünk, ha egyetlen elem által generálható.

Egy $\mathfrak{a}$ és egy $\mathfrak{b}$ ideál *szorzata* az az ideál, mely az összes $\alpha\beta$ számok halmaza által van generálva, hol $\alpha \in \mathfrak{a}$ és $\beta \in \mathfrak{b}$. *Prímideál*nak olyan egész ideált nevezünk, mely nem állítható elő két másik (1)-től különböző egész ideál szorzataként. Minden ideál egyértelműen állítható elő az $\mathfrak{p}_1^{x_1}\mathfrak{p}_2^{x_2}\cdots\mathfrak{p}_r^{x_r}$ alakban (DEDEKIND), ahol $\mathfrak{p}_i$-k primideálokat, az x_i-k pedig pozitív vagy negatív racionális egész számokat jelentenek. Egy $\mathfrak{a}$ ideál akkor és csak akkor osztója egy másik $\mathfrak{b}$ ideálnak (v. i. létezik oly egész $\mathfrak{c}$ ideál, hogy $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{c}$), ha $\mathfrak{a}$ magábanfoglalja $\mathfrak{b}$-t. A mondottak alapján a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös elmélete egész ideálokra vonatkozólag éppen úgy tárgyalható, mint racionális egész számokra. Egy szám és egy ideál oszthatóságára vonatkozó állításokban a szám helyett az általa generált főideált kell érteni.

Egy test összes (egész és tört) ideáljai a szorzásra vonatkozólag kommutatív csoportot alkotnak, melyen belül a főideálok normálosztót képeznek. Ez utóbbinak mellékosztályait *ideálosztály*oknak nevezzük; az ideálosztályok képezik az összes ideálok csoportjának a főideálok invariáns alcsoportjához tartozó faktorcsoportját; ez utóbbi csoport mindig véges.

Ha K a k-nak valamely véges algebrai bővítése, akkor k egy $\mathfrak{a}$ ideáljának számai K-ban egy $\mathfrak{A}$ ideált generálnak; ki lehet mutatni, hogy akkor k-nak minden olyan száma, mely $\mathfrak{A}$-hoz tartozik, egyúttal $\mathfrak{a}$-hoz is tartozik; továbbá ha K-ban a $\mathfrak{b} \in k$ számai $\mathfrak{B}$-t generálják, akkor $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ számai $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$-t generálják. Ezért HILBERT és HECKE nyomán $\mathfrak{a}$-t és $\mathfrak{A}$-t egymással azonosaknak lehet tekinteni, jóllehet különböző testekhez tartoznak; meg kell azonban jegyezni, hogy K-ban vannak olyan ideálok, melyek k egyik ideáljával sem azonosíthatók. Ha $\mathfrak{A} \in K$, akkor $\mathfrak{A}$ azon számai, melyek k-hez tartoznak, k-ban egy $\mathfrak{a}$ ideált képeznek, melyből K-nak az imént mondottak értelmében leszármaztatható ideálja különbözhetik $\mathfrak{A}$-tól, de $\mathfrak{A}$ mindenesetre osztója lesz ennek az ideálnak, mely $\mathfrak{a}$-val azonosítható. Ha $\mathfrak{A}$ minden számát ugyanazon k-ra vonatkozó relatív konjugáltjával helyettesítjük, akkor $\mathfrak{A}$ egyik relatív konjugáltját nyerjük. $\mathfrak{A}$ összes relatív konjugáltjai osztói $\mathfrak{a}$-nak. Ezek szorzata a k testnek egy ideálja lesz, melyet $\mathfrak{A}$, mint a K test ideálja k-ra vonatkozó *relatív normá*jának nevezünk és $N_{K/k}(\mathfrak{A})$-val jelölünk. A racionális testre vonatkozó relatív norma az *abszolút norma*.

Ha $\mathfrak{A}$ primideál, akkor $\mathfrak{a}$ is primideál és $N_{Kk}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{a}^f$; az f kitevő $\mathfrak{A}$-nak k-ra vonatkozó *relatív foka.*

Legyen $\mathfrak{p}$ a k testnek egy primideálja; ha ezt K-ban tekintjük, ott nem lesz szükségképpen primideál, hanem általában felbomlik primideálok szorzatára:

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{P}_g^{e_g}.$$

Tegyük fel, hogy ha a k-a vonatkozólag n-edfokú és N abszolút fokú K test egész számainak egy bázisa az

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$$

számokból áll és ezeknek k-ra vonatkozó relatív konjugáltjait jelöljük $\alpha_i^{(1)}, \alpha_i^{(2)}, \ldots, \alpha_i^{(n)}$-el ($i = 1, 2, \ldots, N$), hol $\alpha_i^{(1)} = \alpha_i$; jelentse továbbá $\mathfrak{d}_j$ ($j = 2, 3, \ldots, n$) a $(\alpha_1^{(j)} - \alpha_1, \alpha_2^{(j)} - \alpha_2, \ldots, \alpha_N^{(j)} - \alpha_N)$ ideált; akkor K-nak k-ra vonatkozó *relatív differense* alatt a $\mathfrak{D} = \prod_{j=2}^{n} \mathfrak{d}_j$ szorzatot, *relatív diszkriminánsa* alatt pedig a relatív differens $\mathfrak{d} = N_{Kk}(\mathfrak{D})$ relatív normáját értjük. $\mathfrak{D}$ a K, $\mathfrak{d}$ pedig a k testnek egy ideálja.

A továbbiakhoz szükségünk lesz az ideálosztály fogalmának következő, H. WEBER-től származó általánosítására. Egy közönséges értelemben vett, „abszolút" ideálosztály az összes főideálok H_0 alcsoportjának valamely mellékosztálya a test összes (egész és tört) ideáljainak A végtelen ABEL-féle csoportjában. A *sugárideálosztály* vagy röviden sugárosztály fogalmához innen azáltal jutunk el, hogy definiálva egy $H_0^{(\mathfrak{m})}$ sugarat, mint az összes olyan (α) főideálok csoportját, melyekre $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$* és α totálpozitív (vagyis α összes valós konjugáltjai pozitívek), ahol $\mathfrak{m}$ a testnek egy egész ideálját jelenti, nem a H_0 alcsoportnak, hanem egy $H_0^{(\mathfrak{m})}$ sugárnak képezzük a mellékosztályait, vagy pedig még általánosabban egy sugárnak több, egymással együttesen csoportot alkotó mellékosztályaihoz tartozó összes ideálok $H^{(\mathfrak{m})}$ csoportjának képezzük a mellékosztályait a test összes, $\mathfrak{m}$-hez relatív primideáljainak $A^{(\mathfrak{m})}$ csoportjában. Ezeket a mellékosztályokat nevezzük sugárosztályoknak.

Ha most $H^{(\mathfrak{m})}$ egy ilyen értelemben a k testben (mod $\mathfrak{m}$) definiált ideálcsoportot jelent, úgy WEBER nyomán a k testnek egy K algebrai bővítését akkor nevezzük a k test $H^{(\mathfrak{m})}$ ideálcsoportjához tartozó *osztálytestének,* ha K a k-ra vonatkozólag relatív GALOIS-féle és a k test valamennyi olyan (abszolúte) elsőfokú $\mathfrak{p}$ primideáljai közül, melyekre $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}$, azok és csak azok esnek szét K-ban első-

* Ez azt jelenti, hogy $\alpha - 1 = \frac{\gamma}{\delta}$, hol γ, δ egész számok, γ osztható $\mathfrak{m}$-el és δ relatív prim $\mathfrak{m}$-hez.

fokú primideálokra, melyek a $H^{(\mathfrak{m})}$ ideálcsoporthoz tartoznak. TAKAGI bebizonyította (1920), hogy egy k test minden $H^{(\mathfrak{m})}$ ideálcsoportjához tartozik egy egyértelműen meghatározott K osztálytest (egzisztenciatétel). Ez k-ra vonatkozólag szükségképpen relatív ABEL-féle és a reá vonatkozó relatív GALOIS-csoportja izomorf a $H^{(\mathfrak{m})}$-hez tartozó sugárosztályok csoportjával, amiből következik, hogy K-nak a k-ra vonatkozó relatív foka egyenlő $H^{(\mathfrak{m})}$-nek $A^{(\mathfrak{m})}$-re vonatkozó indexével (mely mindig véges szám). Ezenfelül TAKAGI azt is bebizonyította, hogy megfordítva, bármely k-ra vonatkozólag relatív Abel-féle K test osztályteste k-nak egy K által egyértelműen meghatározott $H^{(\mathfrak{m})}$ ideálcsoportra nézve (megfordítási tétel). Láthatjuk ebből, hogy miben áll az osztálytestelmélet jelentősége. TAKAGI tételei lehetővé teszik egy adott algebrai számtest összes ABEL-féle bővítéseinek teljes áttekintését egyedül ideálosztályainak ismerete alapján. Ebben az értelemben írja CHEVALLEY az osztálytestelmélettel foglalkozó utolsó dolgozatának (1939) bevezetésében: „L'objet de la théorie du corps de classes est de montrer comment les extensions abéliennes d'un corps de nombres algébriques k peuvent être déterminées par des éléments tirés de la connaissance de k lui-même; ou, si l'on veut présenter les choses en termes dialectiques, comment un corps possède en soi les éléments de son propre dépassement (et ce, sans aucune contradiction interne!").*

A másik alapvető jelentőségű probléma, melyre az osztálytestelmélet választ ad, a következő. Olyan általános felbontási szabályt találni, mely lehetővé teszi, hogy a priori jellemezzük egy k test összes olyan primideáljait, melyek egy meghatározott módon bomlanak fel k-nak egy adott K ABEL-féle bővítésében. Erre a kérdésre vonatkozik TAKAGI következő tétele: ha egy $\mathfrak{m}$-hez relatív prim $\mathfrak{p}$ primideál számára f a legalacsonyabb olyan hatványkitevő, melyre $\mathfrak{p}^f$ a $H^{(\mathfrak{m})}$-hoz tartozik, akkor $\mathfrak{p}$ a k-nak a $H^{(\mathfrak{m})}$-hoz tartozó osztálytestében olyan $\mathfrak{P}$ primideálokra bomlik fel, melyeknek k-ra vonatkozó közös relatív foka f. A $\mathfrak{p}/\mathfrak{m}$ primideálokra vonatkozólag is létezik egy hasonló felbontási tétel.

A TAKAGI-féle tételek állításainak helyességét (a megfordítási tétel kivételével) a közönséges értelemben vett ideálosztályok esetére már HILBERT sejtette és FURTWÄNGLER bebizonyította (1907).

TAKAGI azon tétele, melynek értelmében K-nak a k-ra vonatkozó relatív GALOIS-csoportja és a k test $H^{(\mathfrak{m})}$ szerinti ideálosztályainak csoportja (vagyis a $G = A^{(\mathfrak{m})}/H^{(\mathfrak{m})}$ faktorcsoport, ahol $A^{(\mathfrak{m})}$ a k test összes $\mathfrak{m}$-hez relatív prím ideáljainak csoportja, $H^{(\mathfrak{m})}$ pedig k-ban az az ideálcsoport, melyhez K mint osztálytest tartozik) izomorf egymással,

* C. CHEVALLEY, La théorie du corps de classes, Annals of Mathematics, Vol 41. No 2, p. 394. 1940.

lényeges kiegészítést nyer az ú. n. ARTIN-féle reciprocitási tétel által; ez a tétel ugyanis megadja, hogy a két csoportban melyek azok az elemek, melyek az izomorfizmus értelmében megfelelnek egymásnak. Hogy ezt a tételt megfogalmazhassuk, definiálnunk kell az ú. n. ARTIN-féle szimbólumot.

Tekintsük a k alaptestnek egy olyan $\mathfrak{p}$ primideálját, mellyel K-nak a k-ra vonatkozó $\mathfrak{d}$ relatív diszkriminánsa nem osztható és legyen $\mathfrak{P}$ a (k-ra vonatkozólag relatív GALOIS-féle) K test azon primideáljainak egyike, melyekre $\mathfrak{p}$ a K-ban felbomlik. A relatív GALOIS-féle testek HILBERT-féle elmélete szerint K-nak k-ra vonatkozó $\mathfrak{G}$ relatív GALOIS-csoportjában létezik egy $\mathfrak{P}$ által egyértelműen meghatározott $\sigma_{\mathfrak{P}}$ leképezés, melyre vonatkozólag minden egész $A \in K$-ra

$$A^{N(\mathfrak{p})} \equiv \sigma_{\mathfrak{P}} A \pmod{\mathfrak{P}},$$

ahol N az abszolút (vagyis a racionális számtestre vonatkozó) normát jelenti. Ha T a $\mathfrak{G}$ csoportnak egy tetszőleges eleme, akkor innen következik, hogy minden egész $A \in K$-ra

$$(TA)^{N(\mathfrak{p})} = T(A^{N(T\mathfrak{p})}) \equiv T\sigma_{\mathfrak{p}} T^{-1}\, TA \pmod{T\mathfrak{P}},$$

mivel azonban A-val együtt nyilván TA is végig futja K összes egész számait, világos, hogy

$$\sigma_{T\mathfrak{P}} = T\sigma_{\mathfrak{P}} T^{-1}.$$

Ha T átfutja $\mathfrak{G}$ összes leképezéseit, akkor $T\mathfrak{P}$ átfutja $\mathfrak{p}$ összes törzsosztóit K-ban, $\sigma_{T\mathfrak{P}}$ pedig $\mathfrak{G}$ azon elemeinek osztályát, melyek $\sigma_{\mathfrak{P}}$-vel konjugáltak; ezt az osztályt $\langle \sigma_{\mathfrak{P}} \rangle$-vel jelöljük. Minden $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{d}$-hez ilyen módon $\mathfrak{G}$-nek egy (egymással konjugált elemekből álló) osztálya van hozzárendelve. $\left[\frac{K/k}{\mathfrak{P}}\right] = \sigma_{\mathfrak{P}}$ a FROBENIUS-féle szimbólum, $\left(\frac{K/k}{\mathfrak{p}}\right) = \left\langle \left[\frac{K/k}{\mathfrak{P}}\right] \right\rangle = \langle \sigma_{\mathfrak{P}} \rangle$ pedig az ARTIN-féle szimbólum; egy $\mathfrak{p}$ primideálról akkor mondjuk, hogy a $\mathfrak{G}$ csoport leképezéseinek $\mathfrak{C}$ osztályához tartozik, ha $\left(\frac{K/k}{\mathfrak{p}}\right) = \mathfrak{C}$.

Az ARTIN-féle általános reciprocitási tétel (1926) már most a következőt állítja: Ha K a k-nak relatív ABEL-féle bővítése a $\mathfrak{G}$ relatív GALOIS-csoporttal, akkor a TAKAGI-féle megfordítási tétel értelmében az osztálytestvonatkozás által K-hoz a k alaptestben egyértelműen hozzárendelt sugárosztálycsoport és K-nak k-ra vonatkozó relatív GALOIS-csoportja közti izomorf megfelelést úgy kapjuk meg, hogy egy olyan C sugárosztályhoz, mely egy $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{d}$ primideált tartalmaz, a $\left(\frac{K/k}{\mathfrak{p}}\right)$ ARTIN-szimbólumot rendeljük hozzá. (Itt $\mathfrak{d}$ a K testnek

k-ra vonatkozó relatív diszkriminánsát jelenti; ismeretes, hogy minden sugárosztályban végtelenül sok primideál van, tehát olyan is van, melyre $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{d}$).

Valamely C sugárosztályhoz tartozó $\mathfrak{p}$ primideálok halmazát az ARTIN-féle reciprocitási tétel értelmében úgy is lehet jellemezni, mint azon $\mathfrak{p}$ primideálok halmazát, melyekre a $\left(\frac{K/k}{\mathfrak{p}}\right)$ ARTIN-szimbólum K-nak a k-ra vonatkozó relatív GALOIS-csoportjának egy és ugyanazon fix σ leképezését jelenti (egy relatív ABEL-féle test esetében $\mathfrak{G}$ kommutatív, tehát osztályai mindannyian egy-egy elemből állnak), hol K a k test azon $H^{(\mathfrak{m})}$ ideálcsoportjához tartozó osztálytestét jelenti, melynek egyik mellékosztálya a C sugárosztály. Megfordítva is bármely a k-ra vonatkozólag relatív ABEL-féle K bővítés osztályteste k-nak valamely $H^{(\mathfrak{m})}$ ideálcsoporthoz tartozóan és az ARTIN-féle reciprocitási tétel szerint k azon $\mathfrak{p}$ primideáljainak összessége, melyekre $\left(\frac{K/k}{\mathfrak{p}}\right)$ egyenlő egy fix σ-val, egybeesik azon $\mathfrak{p}$-k összességével, melyek $H^{(\mathfrak{m})}$ egy és ugyanazon fix mellékosztályához tartoznak.

A TAKAGI-féle exisztenciatételből közvetlenül levezethető a számtani haladványra vonatkozó DIRICHLET-féle tétel azon általánosítása, hogy egy k algebrai számtest bármely WEBER-féle sugárosztályához végtelenül sok primideál tartozik. Ezt az állítást az előbbiek értelmében úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a k testben végtelenül sok olyan primideál van, melyekre $\left(\frac{K/k}{\mathfrak{p}}\right) = \sigma$, hol K a k testnek egy relatív ABEL-féle kibővítése, h ezen bővítés k-ra vonatkozó relatív foka, σ pedig K k-ra vonatkozó relatív GALOIS-csoportjának egy fix leképezése.

Mindezt azért bocsájtottam előre, hogy N. G. CSEBOTARJOV következő nagyjelentőségű felfedezését a kellő megvilágításban láthassuk és jelentősége kidomborodjék. CSEBOTARJOV 1926-ban bebizonyította, hogy egy k algebrai számtestnek végtelenül sok olyan primideálja van, mely k valamely tetszőleges K GALOIS-féle bővítése k-re vonatkozó $\mathfrak{G}$ relatív GALOIS-csoportja leképezéseinek valamely adott $\mathfrak{C}$ osztályához tartozik. ARTIN a róla elnevezett általános reciprocitási tétel bizonyításánál nemcsak CSEBOTARJOV ezen eredményét használta fel, hanem bizonyos körosztási testek* adjunkciójának

* A racionális számok R testéhez $e^{\frac{2\pi i}{p}}$ adjunkciója által nyert számtesteket körosztási testeknek hívjuk (p törzsszám). Egy $R\left(e^{\frac{2\pi i}{p}}\right)$ test reguláris, ha ideálosztályainak száma nem osztható p-vel.

CSEBOTARJOV bizonyításában alkalmazott módszerét is. Mind a reciprocitási tétel, mind a CSEBOTARJOV-féle tétel bizonyítása viszonylag könnyen elvégezhető, ha a relatív GALOIS-csoport leképezéseinek osztályai helyett ilyen osztályoknak bizonyos aggregátumait tekintjük, melyeket FROBENIUS „Abteilung"-oknak nevezett; az ezekre vonatkozó, a CSEBOTARJOV tételével analóg állítást már FROBENIUS bebizonyította (1895), azonban nem tudott tovább jutni. ARTIN a reciprocitási tétel bizonyításában eredetileg szintén ott akadt meg, hogy nem sikerült ezeket az aggregátumokat az egyes leképezésosztályokká feloldania; CSEBOTARJOV bizonyítása aztán úgyszólván kezébe adta a módszerrel együtt a kész eredményt is. CSEBOTARJOV tételének bizonyítását DEDEKIND is sikertelenül kísérelte meg, ami szintén dokumentálja a probléma nehézségét.

CSEBOTARJOV tételének az előbbinél sokkal élesebb fogalmazást lehet adni egy „sűrűségi" tétel alakjában. Miként az elemi számelmélet DIRICHLET-tételét, úgy előbb említett általánosítását is a következőképpen lehet megfogalmazni, mint sűrűségi tételt: Ha $H^{(\mathfrak{m})}$ a k test ideáljainak egy a fentebb vázolt módon származtatható csoportja (tehát egy sugár, vagy egy sugár bizonyos mellékosztályainak komplexuma), h pedig ezen csoport indexe a k összes, az $\mathfrak{m}$-hez relatív prím ideáljainak csoportjára vonatkozólag, akkor egy $H^{(\mathfrak{m})}$ szerinti C sugárosztályhoz (vagyis $H^{(\mathfrak{m})}$ valamelyik mellékosztályához) tartozó $\mathfrak{p}$ primideálok halmazának sűrűsége $\frac{1}{h}$, ami per definitionem annyit tesz, hogy

$$\lim_{s\to 1} \frac{\sum\limits_{\mathfrak{p}\in C} \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}}{\log \frac{1}{s-1}} = \lim_{s\to 1} \frac{\sum\limits_{\mathfrak{p}\in C} \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}}{\sum\limits_{\mathfrak{p}\in k} \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}} = \frac{1}{h}$$

(a sűrűségnek ilyen értelmezését DIRICHLET-féle sűrűségnek nevezzük; általában egy k test $\mathfrak{p}$ primideáljainak valamely P halmazáról akkor mondjuk, hogy rendelkezik egy $d(P)$ DIRICHLET-sűrűséggel, ha a

$$d(P) = \lim_{s\to 1} \frac{\sum\limits_{\mathfrak{p}\in P} \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}}{\log \frac{1}{s-1}}$$

határérték létezik, mikor s a valós számokon át felülről közeledik 1-hez). A fentebb mondottak értelmében utóbbi állításunkat még úgy is kifejezhetjük, hogy egy k test azon $\mathfrak{p}$ primideáljainak sűrűsége, melyekre $\left(\frac{K/k}{\mathfrak{p}}\right) = \sigma$, egyenlő $\frac{1}{h}$-val, ahol K, h és σ a fentebbi jelentéssel bírnak.

Felmerül ezek után a kérdés, vajjon egy tetszőleges, k-ra vonatkozólag relatív GALOIS-féle K test esetén is van-e a k azon $\mathfrak{p}$ primideáljainak sűrűsége, melyekre $\left(\frac{K/k}{\mathfrak{p}}\right)$ egyenlő a K-nak a k-ra vonatkozó relatív GALOIS-csoportja egy adott $\langle\sigma\rangle = \mathfrak{C}$ leképezés-osztályával, és ha létezik ez a sűrűség, mivel egyenlő? A CSEBOTARJOV-féle sűrűségi tétel szerint ez a sűrűség mindegyik $\mathfrak{C}$ osztályra nézve létezik és egyenlő $\frac{c}{g}$-vel, hol c a $\mathfrak{C}$ osztály, g pedig a $\mathfrak{G}$ csoport elemeinek számát jelenti.

Mint már említettem, FROBENIUS ezt a tételt abban a gyengébb alakjában tudta csak bebizonyítani, hogy az osztályok helyett „Abteilung"-okat tekintett (ezeket úgy nyerjük, hogy ha nem csupán egy σ elem összes konjugáltjait, hanem σ-val együtt σ azon hatványait is vesszük, melyeknek σ-val egyenlő rendjük van és ezek osztályait egyesítjük).

Az ARTIN-féle általános reciprocitási tétel elnevezését az indokolja, hogy egy olyan alakra lehet hozni, mely speciális esetként magában foglalja a racionális egész számok négyzetes maradékaira vonatkozó GAUSS-féle, valamint a reguláris körosztási testekre vonatkozó EISENSTEIN-féle és KUMMER-féle explicit reciprocitási tételt, valamint ezek általánosításait. Nevezetesen az általános reciprocitási tétel HILBERT—HASSE-féle alakjában a következőkép írható, mely az említett klasszikus reciprocitási formulákhoz hasonló alakú:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = \prod_{\mathfrak{p}/n}\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right).$$

Itt α és β egy az n-edik egységgyököket tartalmazó k testnek két tetszőleges olyan számát jelentik, melyek egymáshoz és n-hez relatív prímek; a baloldalon álló szimbólumok az u. n. n-edik hatványmaradékszimbólumok; ezek a négyzetes maradékok klaszszikus elméletéből ismert LEGENDRE-féle, vagy helyesebben a JACOBI-féle szimbólumok általánosításai és így definiálhatók: ha $\mathfrak{p}$ a k testnek egy primideálja, akkor legyen

$$\left(\frac{k(\sqrt[n]{\alpha})/k}{\mathfrak{p}}\right)\sqrt[n]{\alpha} = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)\sqrt[n]{\alpha},$$

v. i. $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)$ az az n-edik egységgyök, mellyel az $\sqrt[n]{\alpha}$ szám a $\left(\frac{k(\sqrt[n]{\alpha})/k}{\mathfrak{p}}\right)$ leképezés alkalmával megszorzódik. Ha pedig $\mathfrak{b} = \prod_{r=1}^{s}\mathfrak{p}_r$, akkor legyen $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}}\right)=\prod_{r=1}^{s}\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}_r}\right);\ \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\left(\frac{\alpha}{(\beta)}\right)$. Az így definiált szimbólum elnevezését az teszi indokolttá, hogy akkor és csak akkor $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)=1$, ha létezik oly $b\in k$ szám, hogy

$$\alpha\equiv b^{n}\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}).$$

A reciprocitási tétel előbbi alakjában a jobboldalon álló ú. n. megfordító faktor tényezői az ú. n. HILBERT-féle normamaradékszimbólumok*. Ez utóbbiakra vonatkozik az algebrai számelmélet terén tett újabb

* A normamaradékszimbolum definíciójához előre kell bocsátanom a következőket:

Két (mod $\mathfrak{m}_1$), illetve (mod $\mathfrak{m}_2$) a fenti értelemben definiált $H^{(\mathfrak{m}_1)}$, illetve $H^{(\mathfrak{m}_2)}$ ideálcsoportot egymással egyenlőknek fogunk tekinteni, ha az $\mathfrak{m}_1$-hez és $\mathfrak{m}_2$-höz relatív prim ideálok közül ugyanazokat tartalmazzák; ezt indokolttá teszi az a körülmény, hogy ha $H^{(\mathfrak{m}_1)}$ és $H^{(\mathfrak{m}_2)}$ ebben az értelemben egyenlők egymással, akkor a $H^{(\mathfrak{m}_1)}$ szerinti ideálosztályok csoportja izomorf a $H^{(\mathfrak{m}_2)}$ szerinti ideálosztályok csoportjával. Ezen megállapodásunk következtében valamely (mod $\mathfrak{m}_1$) definiált $H^{(\mathfrak{m}_1)}$ ideálcsoporttal egyenlő ideálcsoportokat mindig definiálhatunk különböző $\mathfrak{m}$ modulusokkal (pl $\mathfrak{m}_1$ bármely többszörösével megtehetjük ezt). Mindezen modulusok többszörösei egyiknek közülük, melyet a $H^{(\mathfrak{m}_1)}$ ideálcsoport *vezérének* (Führer, conducteur) nevezünk. Ha egy k testnek valamely K ABEL-féle bővítése osztályteste k-nak egy $\mathfrak{f}$ vezérhez tartozó $H^{(\mathfrak{f})}$ ideálosztályra vonatkozólag, akkor a K bővítés által a k alaptestnek ilyen módon egyértelműen meghatározott $\mathfrak{f}$ ideálját K *vezérének* nevezzük.

A normamaradékszimbolum ezek után a következőképpen definiálható: ha $\mathfrak{p}$ a k testnek egy primideálját, β pedig egy tetszőleges számát jelenti, akkor jelentse $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}$ a $\mathfrak{p}$ ideál legmagasabb kitevőjű olyan hatványát, mellyel $\mathfrak{f}$ osztható és definiáljuk a β_0 számot a

$$\frac{\beta_0}{\beta}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}),\quad \beta_0\equiv 1\left(\mathrm{mod}\ \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}}\right)$$

feltételek által (egy α szám akkor kongruens 1-el (mod $\mathfrak{m}$), ha $\alpha-1$ osztható $\mathfrak{m}$-el, vagyis olyan két γ és δ egész szám hányadosaként irható: $\alpha-1=\frac{\gamma}{\delta}$, hogy γ osztható $\mathfrak{m}$-el és δ relatív prim $\mathfrak{m}$-hez; ez a HASSE által bevezetett multiplikatív kongruencia fogalma, mely azzal az előnnyel rendelkezik, hogy két érvényes kongruenciából megfelelő oldalaik osztása által megint érvényes kongruencia adódik). Ha $\mathfrak{p}$ nem osztója $\mathfrak{f}$-nek, az első feltétel azzal helyettesítendő, hogy $\frac{\beta_0}{\beta}$ legyen relatív prim $\mathfrak{p}$-hez. Legyen most $(\beta_0)=\mathfrak{p}^b\mathfrak{b}$, hol $\mathfrak{b}$ relatív prim $\mathfrak{p}$-hez. Akkor $\mathfrak{b}$ nyilván relatív prim $\mathfrak{f}$-hez, amiből TAKAGI egyik tétele alapján (mely szerint a K-nak k-ra vonatkozó $\mathfrak{d}$ relatív diszkriminánsa és az $\mathfrak{f}$ vezér ugyanazon primideálokkal oszthatók) következik, hogy $\mathfrak{b}$ relatív prim $\mathfrak{d}$-hoz is, úgy hogy a $\left(\frac{K/k}{\mathfrak{b}}\right)$ ARTIN-szimbolum értelmezve van. A $\left(\frac{\beta, K}{\mathfrak{p}}\right)$

felfedezések egyik legjelentősebbje: I. R. SAFAREVICS egy 1949-ben megjelent dolgozatában az $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right)$ szimbólumnak egy explicit kifejezését adta meg az α és β számok által; HASSE és ARTIN korábbi kísérletei ilyen formula levezetésére csak részleges eredménnyel jártak és ennek következtében csak igen körülményes módon sikerült egyes konkrét esetekre vonatkozólag a klasszikus reciprocitási tételek általánosításaihoz eljutni azáltal, hogy az α és β számok minden (mod n) különböző megengedett értékeire esetről-esetre meg lehet határozni a $\prod_{\mathfrak{p}/n}\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right)$ megfordító faktor értékét a normamaradék-szimbólum definíciója és ismert tulajdonságai alapján. SAFAREVICS felfedezése teljes és végleges megoldását adja az *explicit* általános reciprocitási törvények problémájának és egyúttal lehetőséget nyújt az osztálytestelméletnek egy eddiginél természetesebb és átlátszóbb felépítése felé (l. SAFAREVICS referátumát az I. Magyar Matematikai Kongresszus anyagában).

Az osztálytestelmélet fejlődésének ARTIN reciprocitási tétele új impulzust adott. HASSE és HERBRAND kezdeményezéseit követve és egyes eredményeit felhasználva, CHEVALLEY teljesen átépítette az elméletet (1933); nála a TAKAGI-féle exisztenciatétel bizonyítását megelőzi a megfordítási tétel bizonyítása, melynél ARTIN reciprocitási tétele mintegy mellékeredményeként adódik; ezzel az átrendezéssel

HASSE-féle normamaradékszimbolum definíciója: $\left(\frac{\beta, K/k}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\beta, K}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{K/k}{\mathfrak{b}}\right)$; az elnevezés arra utal, hogy akkor és csak akkor $\left(\frac{\beta, K}{\mathfrak{p}}\right) = 1$, ha létezik oly $B \in K$ szám, hogy $\beta \equiv N_{K/k}(B) \pmod{\mathfrak{f}_\mathfrak{p}}$ (ha ez fennáll, akkor β a $\mathfrak{p}$ primideál tetszőleges hatványára, mint modulusra nézve is normamaradék). A hatványmaradékszimbolum definiciójával analóg módon már most a $\left(\frac{\beta, \alpha/k}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)$ HILBERT-féle normamaradékszimbolumot így definiálhatjuk: $\left(\frac{\beta, k(\sqrt[n]{\alpha})}{\mathfrak{p}}\right)\sqrt[n]{\alpha} = \left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)\sqrt[n]{\alpha}$; ez a szimbolum tehát azt az n-edik egységgyököt jelenti, mellyel a $\left(\frac{\beta, k(\sqrt[n]{\alpha})}{\mathfrak{p}}\right)$ leképezés alkalmával $\sqrt[n]{\alpha}$ megszorzódik. (Itt α, β a k test tetszőleges számai, $\mathfrak{p}$ pedig egy tetszőleges primideálja). Erre a szimbolumra nézve is érvényes az az állítás, hogy akkor és csak akkor $\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right) = 1$, ha létezik oly $B \in k(\sqrt[n]{\alpha})$ szám, hogy $\beta \equiv N_{k(\sqrt[n]{\alpha})/k}(B) \pmod{f_\mathfrak{p}}$.

sikerült TAKAGI elképesztően hosszadalmas és bonyolult eredeti bizonyításait lényegesen lerövidíteni. CHEVALLEY emellett arra törekedett, hogy a bizonyításból lehetőséghez képest kiküszöbölje a transzcendens elemeket, nevezetesen az általánosított ζ- és L-függvények elméletét (ezen transzcendens módszereknek a számtani haladvány törzsszámaira vonatkozó klasszikus DIRICHLET-féle tétel bizonyítása a paradigmája.) Másrészt CHEVALLEY felhasználta a lokális testek (vagyis a p-adikus számtestek* algebrai bővítései) általa direkt úton (az algebrai számtestek elméletétől függetlenül) felépített osz-

*) Egy K testről azt mondjuk, hogy egy *értékeléssel* van ellátva, ha K-nak összes a elemeire értelmezve van egy valós $\varphi(a)$ függvény, mely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

$$1.\ \varphi(a) > 0, \text{ ha } a \neq 0, \qquad \varphi(0) = 0,$$
$$2.\ \varphi(ab) = \varphi(a)\,\varphi(b)$$
$$3.\ \varphi(a+b) \leq \varphi(a) + \varphi(b).$$

Innen triviálisan következik még, hogy $\varphi(\pm 1) = 1$ és $|\varphi(a) - \varphi(b)| \leq \leq \varphi(a-b)$. Az így értelmezett értékelés, mely KÜRSCHÁKtól származik, az abszolút érték fogalmának általánosítása.

Tekintsük a racionális számok R testét. Válasszunk egy p törzsszámot; minden 0-tól különböző a racionális szám pontosan „egyféleképpen írható az $a = \frac{s}{t} p^n$ alakba, hol s és t nem oszthatók p-vel. Akkor a $\varphi(a) = p^{-n}$, $\varphi(0) = 0$ függvény R-nek egy értékelését definiálja, melyet *p-adikus értékelés*nek hívunk. Algebrai számtesteknek valamely $\mathfrak{p}$ primideáljuk segítségével az előbbivel teljesen analóg módon nyerhető értékelései a *$\mathfrak{p}$-adikus értékelések*.

Egy értékelt K testnek lehet konstruálni egy olyan értékelt bővítését, melyben minden olyan $\{a_\nu\}$ sorozatnak van határértéke (a kérdéses értékelés értelmében), mely eleget tesz a CAUCHY-féle konvergenciakritériumnak:

$$\varphi(a_p - a_q) < \varepsilon, \text{ ha } p > n(\varepsilon),\ q > n(\varepsilon),\ \varepsilon > 0 \text{ tetszőleges.}$$

Az ezen tulajdonsággal rendelkező, ú. n. fundamentális sorozatok (kommutatív) gyűrűt képeznek, melyben az

$$\varphi(a_p) < \varepsilon, \text{ ha } p > n(\varepsilon)$$

feltételnek megfelelő, ú. n. nullsorozatok egy ideált alkotnak. Egy gyűrűnek valamely ideálja szerinti maradékosztályai (egy ilyen maradékosztályhoz az összes olyan számok tartoznak, melyek egymással az ideálra nézve kongruensek, v. i. különbségeik az ideálhoz tartoznak) megint gyűrűt képeznek, éppúgy, mint ahogy egy csoportnak valamely normálosztója szerinti mellékosztályai (maradékosztályai) megint csoportot adnak. Már most könnyen ki lehet mutatni, hogy a fundamentális sorozatok gyűrűjének a nullsorozatok ideálja szerinti maradékosztályainak K_φ gyűrűje test. Mivel egyazon maradékosztályokhoz csupa olyan fundamentális sorozat tartozik, melyek egymástól csak nullsorozatokkal különböznek, a K_φ testet a következő értékeléssel láthatjuk el: ha α ennek egy olyan eleme, melyhez tartozó egyik tetszőleges fundamentális sorozat $\{a_\nu\}$, akkor, mivel a fentemlített $|\varphi(a_p) - \varphi(a_q)| \leq \varphi(a_p - a_q)$ egyenlőtlenség folytán $\varphi(a_p)$ is fundamentális sorozat, azért tehát egy valós ω számot definiál; akkor legyen $\varphi(\alpha) = \omega$. A K_φ test felfogható, mint K bővítése, ha K valamely a elemét identifikáljuk K_φ azon elemével, mely az $a, a, a, \ldots$ sorozatot tartalmazza; nyilvánvaló, hogy K_φ most definiált értékelése K eredetileg adott φ értékelésének folytatása. Kimutatható továbbá, hogy K_φ már nem bővíthető újabb funtálytestelméletét. Ennek az elméletnek tárgya a $\mathfrak{p}$-adikus számtestek relatív ABEL-féle bővítéseinek vizsgálata. Itt ugyan hiányzik a közvetlen megfelelés az alaptest bővítései és ideálosztályai között (egy K test per definitionem akkor osztályteste a k lokális testnek, ha képezve a k zérustól különböző számainak A multiplikatív csoportjában azon számok által alkotott H alcsoportot, melyek valamely K-hoz tartozó számnak k-ra vonatkozó relatív normái, az (A/H) index egyenlő a (K/k) relatív fokkal; ki lehet mutatni, hogy az ily módon definiált osztálytestek összessége megint egybeesik a relatív ABEL-féle bővítések összességével); mindamellett a lokális osztálytestelmélet mégis az algebrai számtestek osztálytestelméletével analóg törvényszerűségeken épül, csakhogy ezek a törvényszerűségek a lokális elméletben sokkal egyszerűbben fogalmazhatók meg, mint a „véges" osztálytestelméletben, ami nagyrészt azzal függ össze, hogy egy lokális testben csak egy primideál van. Abból a célból továbbá, hogy az algebrai számtestek végtelen ABEL-féle bővítéseit is vizsgálhassa, CHEVALLEY bevezette az úgynevezett idèle fogalmát (1936). Ha k egy véges fokú algebrai számtest, akkor k mindegyik $\mathfrak{p}$ primideáljához tartozik k-nak egy $k_{\mathfrak{p}}$ $\mathfrak{p}$-adikus perfekt bővítése. $k_{\mathfrak{p}}$ zérustól különböző számainak multiplikatív csoportját $\overset{*}{k}_{\mathfrak{p}}$-vel jelölve, legyen G az összes $\overset{*}{k}_{\mathfrak{p}}$-k direkt szorzata. G bármely $\mathfrak{a}$ eleme tehát $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ koordinátáival van meghatározva, hol $a_{\mathfrak{p}} \in \overset{*}{k}_{\mathfrak{p}}$. G azon elemei, melyekben majdnem minden $\mathfrak{p}$-re vonatkozólag $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ egy $\mathfrak{p}$-adikus egység, a k idèle-jei. A. M. MERKULOV disszertációja (1947) már most jelentékenyen egyszerűbb alapokra fekteti az idèle elméletét és az osztálytestelmélet felépítésénél nem használja fel a lokális testek általános elméletét; ezen kívül az ú. n. différentielle fogalmának bevezetését is elkerülhetővé teszi, mely az idèle-ek végtelen ABEL-féle csoportjának egy karaktere és igen körülményes tárgyalást igényel.

Az algebrai számtestek elméletében a legnagyobb horderejű probléma jelenleg bizonyára az osztálytestelméletnek az általános

damentális sorozatok hozzácsatolásával, mert K_φ elemeiből képzett bármely ilyen sorozatnak van K_φ-ben határértéke. Ezt úgy fejezzük ki, hogy K_φ *perfekt bővítése* K-nak a φ értékelésre vonatkozólag. Így ha K-nak a racionális R testet vesszük az abszolút értékkel, mint értékeléssel: $\varphi(a) = |a|$, a valós számok testét kapjuk, mint perfekt bővítést; R-nek egy p-adikus értékelésével pedig a HENSEL-féle *p-adikus számok R_p testét* kapjuk. Ennek elemei a p-adikus számok. Ha $w(a) = -\log \varphi(a)$, akkor *egész*nek egy olyan a p-adikus számot mondunk, melyre $w(a) \geq 0$; azon a számok összessége, melyekre $w(a) > 0$, az R_p test egyetlen *primideálját* képezi. Azok az a számok pedig. melyekre $w(a) = 0$, az R_p test *egységei*. A p-adikus számtestek algebrai bővítései a *lokális* testek. HENSEL kimutatta, hogy egy $\mathfrak{p}$-adikus számtest, vagyis egy k algebrai számtestnek valamely $\mathfrak{p}$ primideáljával képezett $\mathfrak{p}$-adikus értékelésére vonatkozó $k_{\mathfrak{p}}$ perfekt bővítése k-nak R_p-hez való adjunkciója által származtatható, hol $\mathfrak{p}/p$; eszerint $k_{\mathfrak{p}}$ lokális test.

relatív GALOIS-féle bővítésekre való kiterjesztésében áll, ami ez utóbbiakba ugyanazt a mély betekintést nyújtaná, amit az osztálytestelmélet eddigi alakjában a relatív ABEL-féle bővítésekre nézve nyújtott. Ebben az irányban a legnagyobb nehézség abban nyilvánul, hogy nehéz az ideálosztály fogalmát úgy általánosítani, hogy ezen osztályok csoportja ne legyen kommutatív. Mindamellett az általános GALOIS-féle bővítések aritmetikai törvényszerűségeire, nevezetesen az ideáloknak az ezen kibővítésekben érvényes felbomlási tételeire vonatkozólag, miként azt ARTIN megmutatta, messzemenő értesüléseket lehet szerezni az általános reciprocitási tétel alapján, az általa bevezetett általánosított L-függvények elméletének felhasználásával; HASSE erre vonatkozóan a következőket írja: „Es ist ausserordentlich erstaunlich, daß das ARTIN-sche Reziprozitätsgesetz, das doch seiner Herleitung und Bedeutung nach ganz in der Theorie der Abelschen Zahlkörper wurzelt und als das Fundamentaltheorem dieser Theorie angesprochen werden kann, seine Reichweite auch darüber hinaus, auf die Theorie der beliebigen Galoisschen Zahlkörper erstreckt"; * ebben az irányban még messzebb jutott el R. BRAUER, az úgynevezett indukált karakterekre vonatkozó híres tételének alkalmazásaival. Egy másik út, melyen az általános relatív GALOIS-féle testeket meg lehet közelíteni, a lokális osztálytestelméleten át vezet. CHEVALLEY imént említett eredményei arra mutatnak, hogy az algebrai számtestek osztálytestelmélete, vagyis az algebrai számtestek relatív ABEL-féle bővítéseinek elmélete (Klassenkörpertheorie „im Grossen") felépíthető a lokális osztálytestelmélet (Klassenkörpertheorie „im Kleinen") alapján; SAFAREVICS fent említett munkája is ennek a programmnak további kiépítését teszi lehetővé azáltal, hogy a lokális osztálytestelméletben fundamentális szerepet játszó $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right)$ szimbolumnak egy tisztán $\mathfrak{p}$-adikus meghatározását sikerült megadnia. Várható tehát, hogy az algebrai számtestek osztálytestelméletének a nem ABEL-féle bővítésekre való kiterjesztése is visszavezethető lesz a lokális osztálytestelmélet ugyanilyen irányú általánosítására. Ezért jelentősek SAFAREVICS azon eredményei (1947), melyek a lokális osztálytestelmélet ilyen általánosításának tekinthetők.

SAFAREVICS bebizonyította, hogy egy p-edik egységgyököket nem tartalmazó és a racionális számtest R_p p-adikus perfekt bővítésére vonatkozólag n_0-edfokú lokális test összes olyan GALOIS-féle bővítései, melyeknek foka p valamilyen hatványa (az ilyen bővítéseket röviden p-bővítéseknek nevezzük) kölcsönösen egyértelmű vonatkozásban állnak az n_0+1 generátoros Σ szabad csoport azon nor-

* H. HASSE, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, II. rész, 123. old. (1930).

málosztóival, melyeknek indexe p valamely hatványa, ahol az egymáshozrendelés olyan, hogy ha egy p-bővítés megfelel egy N normálosztónak, akkor relatív GALOIS-csoportja izomorf az Σ/N faktorcsoporttal. Ebből közvetlenül következik, hogy egy p-csoport akkor és csak akkor lehet a k test valamely p-bővítésének relatív GALOIS-csoportja, ha legfeljebb n_0+1 generátorral előállítható. SAFAREVICS azon különböző p-bővítések számát is megadja, melyeknek adott p^n-rendű relatív GALOIS-csoportjuk van: ha d az adott p^n-edrendű G csoport minimális számú generátorainak száma és α ezen csoport automorfizmusainak száma, akkor, (ha $d \leq n_0+1$), ezen bővítések száma

$$\frac{1}{\alpha} p^{(n_0+1)(n-d)} (p^{n_0+1}-1)(p^{n_0+1}-p)\cdots(p^{n_0+1}-p^{d-1}).$$

Végül SAFAREVICS még egy beágyazási tételt is ad: ha adva van két p-csoport: G és $\bar{G}$, valamint a G-nek egy homomorf leképezése $\bar{G}$-re, továbbá G generátorainak a száma (és következőleg $\bar{G}$ generátorainak a száma is) $\leq n_0+1$, akkor k minden olyan $\bar{K}$ bővítéséhez, melynek relatív GALOIS-csoportja $\bar{G}$, lehet találni k-nak egy oly K bővítését a G relatív GALOIS-csoporttal, hogy $K \supset \bar{K}$ és a $G \sim \bar{G}$ természetes homomorfizmus egybeesik a G és $\bar{G}$ közti előre megadott homomorfizmussal.

Az algebrai számtestek egységeinek elméletében alapvető eredményeket ért el GYELONYE, aki ezen eredményeit a diofantikus analízisre is alkalmazta. Ezek az eredmények össze vannak foglalva B. N. GYELONYE és D. K. FAGGYEJEV közös monográfiájában, melynek címe: „A harmadrendű irracionalitások elmélete". Az itt közölt módszerek, miként azt GYELONYE tanítványainak vizsgálatai egyre jobban mutatják, messzemenően alkalmazhatók magasabb fokú testekre is. Ezeknek a módszereknek alapjául a következő geometriai elgondolás szolgál. Minden n-edfokú α algebrai számhoz hozzá lehet rendelni az n-dimenziós térnek egy pontját olyan értelemben, hogy ezen pont ν-edik koordinátája α ν-edik konjugáltját jelenti, ha ez valós; α-nak két egymással konjugált komplex konjugáltja helyett pedig ezek közös valós, illetve a pozitívnek vett képzetes részét kell venni, monoton fogyó sorrendben osztva őket szét a megszámozott dimenziók között. Egyazon test egész α-inak megfelelő pontok egy rácsot alkotnak, mert minden egész algebrai szám összege és különbsége is egész. Két pont szorzata alatt azt a pontot értve, melynek koordinátái a tényezők megfelelő koordinátáinak szorzatai, a szorzás sem vezet ki a rendszerből. Ezen geometriai konstrukció segítségével GYELONYE és FAGGYEJEV, valamint tanítványaik sikerrel tanulmányozták az algebrai számtestek egységeit és ideáljait. Később

GYELONYE a rácsoknak ezt az elméletét egy olyan geometriai elméletté fejlesztette ki, mely magában foglalja a GALOIS-elmélet általánosítását algebrai testek direkt összegeire.

Az említett monográfiában megtalálhatók a kubikus testekre vonatkozó elemi eredmények levezetései az imént vázolt rácselmélet alapján (TSCHIRNHAUSEN-transzformáció, az egész számok bázisának megkeresése, primszámok felbomlása primideálokra, osztályszám meghatározása), továbbá a harmad- és negyedfokú testek klasszifikációja és tabularizációja, valamint a biner kubikus formák elmélete (szintén a geometriai tárgyalásmóddal). A kubikus testek egységeinek meghatározására szolgáló VORONOJ-féle algoritmus szintén levezethető a rácsok elmélete alapján, úgyszintén a THUE—SIEGEL-tétel (mely szerint az $f(x, y) = m$ diofantikus egyenletnek csak véges sok megoldása van, hol $f(x, y)$ egy irreducibilis harmadfokú forma), ahol a megoldások számára felső korlát is nyerhető annak V. A. TARTAKOVSZKIJ által adott kiélesített alakjában. GYELONYE ezen felül egy algoritmust is ad meg az $f(x, y) = m$ egyenlet megoldása számára arra az esetre, ha $f(x, y)$ irreducibilis kubikus forma negatív diszkriminánssal; pozitív diszkrimináns esetén az $f(x, y) = m$ megoldásainak száma SIEGEL szerint $\leqq 18$, ha a diszkrimináns elég nagy m-hez képest; GYELONYE módszere $|f(x, y)| < m$ megoldásainak számára ugyanezen feltétel mellett $\leqq 15$-öt ad.

GYELONYE és FAGGYEJEV levezettek egy igen fontos aszimptotikus formulát is. Az n-dimenziós térben fel kell rajzolni az összes n-edfokú és σ szignatúrájú* algebrai egész számoknak megfelelő pontokat. Ezek egy diszkrét sokaságot alkotnak, közülük az r sugarú és 0 középpontú hiperszférába esőknek száma

$$= \nu_{n,\sigma} r^{\frac{n(n+1)}{2}} + O(r^{\frac{n(n+1)}{2}-1}), \text{ hol } \nu_{n,\sigma} = \text{const.}$$

GYELONYE és FAGGYEJEV vizsgálták az előbbivel analóg aszimptotikus formulákat abban az esetben is, ha csak azon pontokat rajzoljuk fel a térbe, melyeknek megfelelő számok definiáló (karakterisztikus) egyenleteinek GALOIS-csoportja egy előre megadott csoport. Harmadfokú számok esetén négy ilyen csoport, negyedfokúak esetén pedig tíz csoport lehetséges (l. erre vonatkozólag GYELONYE referátumát az I. Magyar Matematikai Kongresszus anyagában).

GYELONYE és FAGGYEJEV a megfordított GALOIS-problémával kapcsolatban még a következőket is bebizonyította. Legyen adva egy, a racionális számok testére vonatkozólag GALOIS-féle k test $\mathfrak{F}$ GALOIS-csoporttal és egy $\mathfrak{G}$ csoport egy $\mathfrak{N}$ normálosztóval, melyre

* Valamely algebrai szám szignatúrája alatt valós konjugáltjai előjeleinek rendszerét értjük. Ha a szignatúra csupa $+$ jelből áll, akkor a kérdéses számot totálpozitívnak hívjuk (l. fentebb).

$\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{N}} \cong \mathfrak{F}$, vagyis $\mathfrak{G}$ az $\mathfrak{F}$-nek az $\mathfrak{N}$ bővítő csoporthoz tartozó SCHREIER-féle bővítése. A beágyazás feladata abban áll, hogy k-t úgy kell bővíteni K-vá, hogy ennek GALOIS-csoportja izomorf legyen $\mathfrak{G}$-vel, vagyis hogy k a K-nak az $\mathfrak{N}$-hez tartozó részteste legyen. GYELONYE és FAGGYEJEV bebizonyították, hogy ez a feladat megoldható bármely k esetén, hacsak $\mathfrak{N}$ kommutatív és $\mathfrak{G}$ szemidirekt bővítése az $\mathfrak{F}$ csoportnak $\mathfrak{N}$ által, vagyis a $\mathfrak{G}$ csoport $\mathfrak{N}$ szerinti mellékosztályainak egy reprezentánsrendszere úgy választható meg, hogy $\mathfrak{G}$-nek egy az $\mathfrak{F}$-el izomorf $\mathfrak{F}'$ alcsoportját képezze, úgyhogy $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}'\mathfrak{N}$; itt $(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{F}') = e$, de $\mathfrak{F}'$ és $\mathfrak{N}$ elemek szerint nem felcserélhetők. (Egy $\mathfrak{F}$ csoport $\mathfrak{N}$ által való összes bővítései (Erweiterung) SCHREIER szerint azáltal határozhatók meg, hogy $\mathfrak{F}$ minden egyes σ eleméhez hozzárendeljük az $\mathfrak{N}$ csoport valamely S_σ automorfizmusát, $\mathfrak{F}$ minden σ, τ elempárjához pedig $\mathfrak{N}$-nek egy $C_{\sigma,\tau}$ elemét olyan módon, hogy teljesüljenek az

$$(AB)^{S_\sigma} = A^{S_\sigma} B^{S_\sigma}, \quad (A^{S_\sigma})^{S_\tau} = (A^{S_{\sigma\tau}})^{C_{\sigma,\tau}}, \quad A^{S_1} = A^{C_{1,1}},$$

$$C_{\sigma,\tau} C_{\sigma\tau,\varrho} = C_{\tau,\varrho}^{S_\sigma} C_{\sigma,\tau\varrho}$$

relációk; itt A és B az $\mathfrak{N}$ csoport tetszőleges elemeit jelentik, A^{S_σ} pedig $\mathfrak{N}$ azon elemét, melyre az S_σ automorfizmus az A-t leképezi; $A^{C_{\sigma,\tau}}$ jelentése a következő: $A^{C_{\sigma,\tau}} = C_{\sigma,\tau} A C_{\sigma,\tau}^{-1}$; a $C_{\sigma,\tau}$ elemek rendszerét az $\mathfrak{N}$ csoport $\mathfrak{F}$-hez tartozó faktorrendszerének hivjuk. A $\mathfrak{G}$ bővítés elemeinek az AS_σ szimbolumokat vehetjük $(A \in \mathfrak{N})$, egy AS_σ és egy BS_τ szimbolumot akkor és csak akkor tekintve azonosaknak, ha $A = B$ és $\sigma = \tau$; $\mathfrak{G}$-ben a csoportművelet definíciója a következő:

$$AS_\sigma \cdot BS_\tau = AB^{S_\sigma} C_{\sigma,\tau} S_{\sigma\tau}.$$

Egy (S_σ) automorfizmusrendszerrel ellátott $(C_{\sigma,\tau})$ faktorrendszer és egy (T_σ) automorfizmusrendszerrel ellátott $(D_{\sigma,\tau})$ faktorrendszer akkor és csak akkor szolgáltat egymással izomorf bővítéseket, ha minden $\sigma \in \mathfrak{F}$ elemhez van oly $A_\sigma \in \mathfrak{N}$ elem, hogy minden $A \in \mathfrak{N}$-re $A^{T\sigma} = A_\sigma A^{S_\sigma} A_\sigma^{-1}$ (v. i. az automorfizmusok rendszerei ekvivalensek) és $D_{\sigma,\tau} = A_\sigma A_\tau^{S_\sigma} C_{\sigma,\tau} A_{\sigma\tau}^{-1}$ (v. i. a faktorrendszerek ekvivalensek). Ha mind az automorfizmusok, mind a faktorok rendszere ekvivalens az egység (azonos) automorfizmussal, ill. egységelemmel, akkor a kibővítést *direkt*nek nevezzük. Ekkor $\mathfrak{G}$ az $\mathfrak{F}$ és $\mathfrak{N}$ csoportok direkt szorzata lesz. *Szemidirekt*nek akkor nevezzük a bővítést, ha az automorfizmusok rendszere nem ekvivalens, de a faktorrendszer ekvivalens az egységgel, ami annyit tesz, hogy az $A_\sigma A_\tau^{S_\sigma} C_{\sigma,\tau} A_{\sigma\tau}^{-1} = 1$ rendszer megoldható. Itt is lehet az $\mathfrak{N}$ szerinti reprezentánsrendszer elemeit úgy megválasztani, hogy azok alcsoportot alkossanak). Ezek a tételek a feloldható csoportoknak sokkal tágabb osztályaira vonatkozólag teszik lehetővé a megfordított GALOIS-probléma megoldását, mint SCHOLZ és REICHARDT régebbi eredményei.

Az elmondottakból következik, hogy egy k GALOIS-féle testnek mindig van (végtelen sok) K szemidirekt kibővítése egy tetszőleges ABEL-féle bővítő $\mathfrak{N}$ normálosztónak és egy tetszőleges automorfizmus-rendszernek megfelelőleg. Ha a bővítés nem szemidirekt, akkor nem minden $\mathfrak{F}$ csoporttal bíró k test bővíthető így ki, vagyis ágyazható be egy az $\mathfrak{F}$-nek egy (tetszőlegesen) adott $\mathfrak{N}$ segítségével nyert $\mathfrak{G}$-vel, mint GALOIS-csoporttal bíró testbe. Nem szemidirekt bővítések létezésére (tetszőleges k és $\mathfrak{G}$ esetére) csupán három *szükséges* feltételt adott FAGGYEJEV, melyek azonban egyenként elégséges feltételek is, ha a fordított GALOIS-probléma megoldhatóságát a priori feltételezzük. Ezek közül az elsőnek megfogalmazásához szükség van a $\mathfrak{G}\times k$ „keresztezett szorzat" (verschränktes Produkt, crossed product, скрещенное произведение) fogalmának bevezetésére. Ez egy gyűrű, melynek elemei a $\sum_{\sigma\in\mathfrak{G}} u_\sigma x_\sigma$ formális összegek, hol $x_\sigma \in k$, az u_σ-k pedig szimbólumok, melyek egymással, valamint a k elemeivel a következő szabály szerint szorzódnak:

$$u_{\sigma_1} u_{\sigma_2} = u_{\sigma_1 \sigma_2}, \quad x u_\sigma = u_\sigma x^\sigma,$$

hol x^σ a k azon eleme, mely x-ből a σ automorfizmus alkalmazásával keletkezett. Könnyű kimutatni, hogy ez a keresztezett szorzat egy félegyszerű algebra a racionális számok R teste fölött és benne foglaltatik, mint részalgebra az $\mathfrak{N}\cdot k$ csoportgyűrű, mivel k GALOIS-csoportja $\mathfrak{F} \cong \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{N}}$ lévén, k azon elemek összessége kell legyen a K bővítés elemei közül, melyek az $\mathfrak{N}$ összes leképezéseivel szemben invariánsak: $x\in k$-ra és $\gamma\in\mathfrak{N}$-re $x^\gamma = x$, tehát $\gamma\in\mathfrak{N}$-re u_γ kommutál minden $x\in k$-val. FAGGYEJEV feltételei a következők:

1. A k testnek egy $\mathfrak{G}$ GALOIS-csoportú testbe való beágyazhatóságához szükséges, hogy a $\mathfrak{G}\times k$ keresztezett szorzat előállítható legyen az R testből vett elemekkel bíró g-edrendű mátrixokkal (ahol g a $\mathfrak{G}$ rendje), úgy, hogy ebben az előállításban azok a mátrixok, melyek az $\mathfrak{N}\cdot k$ csoportgyűrű elemeinek felelnek meg, az $\mathfrak{N}\cdot k$-nek egy, a reguláris előállítással ekvivalens* előállítását adják.

* Két előállítást akkor mondunk egymással ekvivalensnek, ha létezik egy olyan T mátrix, hogy ha a gyűrű valamely tetszőleges σ elemének, az egyik előállításban megfelelő mátrixot A_σ-val, a másik előállításban neki megfelelő mátrixot pedig B_σ-val jelöljük, akkor mindig $A_\sigma = TB_\sigma T^{-1}$.

2. A beágyazhatósághoz szükséges, hogy $\mathfrak{R}\cdot k$-ban létezzék g számú olyan l_σ elem, $(\sigma \in \mathfrak{G})$, hogy

$$l_{\sigma_1}^{\sigma_2} l_{\sigma_2} = l_{\sigma_1 \sigma_2} \text{ és } \gamma \in \mathfrak{R}\text{-re } l_\gamma = \gamma^{-1}.$$

3. Ha $\mathfrak{R}$ kommutatív, akkor a $\mathfrak{G} \times k$ algebrának teljes mátrixgyűrűnek kell lennie saját centruma felett.

Egyetlen előadás keretében természetesen nem törekedhettem arra, hogy a tárgyalt témakörhöz tartozó összes szovjet eredményeket ismertessem; ehelyett meg kellett elégednem szemelvények bemutatásával. Úgy vélem azonban, hogy ezek egymagukban is meggyőzően dokumentálják azt, hogy a szovjet matematikusok az algebrai számelméletben éppen olyan nagyjelentőségű eredményeket értek el, mint a matematika többi ágaiban.

СОВЕТСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В ТЕОРИИ ПОЛЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

И. Фельдеш

В статье изложены теорема плотности Н. Г. Чеботарева и ее связь с общим законом взаимности Артина, работы И. Р. Шафаревича и А. М. Меркулова по современному развитию теории полей классов, а также геометрический метод Б. Н. Делоне и. Д. К. Фаддеева и его применения к разным проблемам теории алгебраических чисел, особенно к решению обратной задачи Галуа.

SOWJETISCHE ERGEBNISSE IN DER THEORIE DER ALGEBRAISCHEN ZAHLKÖRPER

I. Földes

Der Artikel behandelt den Tschebotarjowschen Dichtigkeitssatz und seinen Zusammenhang mit dem allgemeinen Artinschen Reziprozitätsgesetz, die Arbeiten von I. R. Schafarewitsch und A. M. Merkulow bezüglich der modernen Entwicklung der Klassenkörpertheorie, ausserdem die von B. N. Delaunay und D. K. Faddjejew entwickelte geometrische Methode und ihre Anwendungen für verschiedene Probleme der Theorie der algebraischen Zahlen, insbesondere für die Lösung des umgekehrten Galoisschen Problems.

Mit köszönhet a magyar matematikatanítás a Szovjetuniónak?*

A szovjet pedagógia eredményei ma már oktatásunk számos területén éreztetik hatásukat. Különösen szembetűnően mutatkozik meg ez a matematika tanítása terén. A rendkivül gazdag és fejlett szovjet matematikai didaktika eredményeinek még csak egy kis töredéke vált nálunk szélesebb körben ismertté, de ez is elég volt ahhoz, hogy pedagógusaink felismerjék, mi az, ami bennük újszerű, és amire a mi iskoláinknak is sürgős szükségük van. A szovjet matematikai didaktika — bár állandóan fejlődik és változik — alapelveiben már elég határozottan kialakult rendszert, még pedig az *óvodák számtani foglalkozásaitól az egyetemi matematikaoktatásig egységes* rendszert alkot. Az alábbiakban konkrét példákon fogjuk bemutatni, hogyan hatott a szovjet didaktika matematikatanításunkra, és melyek azok az alapelvek, amelyeket nekünk is magunkévá kell tennünk, ha nem akarunk elmaradni a szovjet matematikatanítás eredményeitől.

I.

Aki mostanában óvodáinkba ellátogat, azt tapasztalja, hogy a gyerekek érdekes, újszerű játékokat játszanak. Például az óvónő felmutat egy kártyát, amin nyolc pont van — a gyerekek kiraknak az asztalra ugyanannyi pálcikát. Azután felmutat egy másik kártyát, mondjuk öt ponttal — a gyerekek elvesznek az előttük lévő pálcákból annyit, hogy öt maradjon az asztalon. Megfigyelik, mennyit vettek el, mennyi maradt. És az egész játék nagyon tetszik nekik, nagyokat kacagnak hozzá. Ha megkérdezzük az óvónőt, miféle játékok ezek, mirevalók, honnan lehetne bővebben tájékozódni felőlük — BLEHER könyvére fog hivatkozni. (Szervezett foglalkozás az óvodában; eredeti orosz címe: „Didakticseszkije igri“, „Didaktikai játékok“). Ez a könyv csak 1950-ben jelent meg, de

* Ez az előadás az 1952. évi Magyar-Szovjet Barátsági Hónap alkalmával hangzott el Budapest, Szeged, Pécs, Győr, Eger és Miskolc városokban. Az előadás szövegét készítő munkaközösség tagjai: CSER ANDOR, FÜLÖPP BÉLA, LŐRINCZ PÁL, VARGA TAMÁS. Az előadás nem terjeszkedik ki az egyetemi és főiskolai matematikaoktatás kérdéseire.

alig két év leforgása alatt óvodáinkban és óvónőképzőinkben egyaránt a legszélesebb körben népszerűvé vált. Szerzője a szovjet óvodák tapasztalatait foglalta össze és egészítette ki, elsősorban a játékos számtan- és mértantanítás terén. A Szovjetunióban az iskolázás a hétéves korral kezdődik; az iskolaköteles kor előtti 3—7 éves gyerekek nevelését fejlett óvodahálózat biztosítja. Az óvodákban olyan ismereteket és készséget szereznek meg a gyerekek játékos formában, amelyek később az iskolai tanulást nagyon megkönnyítik számukra. A könyv anyagának jórésze a mi kissé más viszonyaink között is alkalmazható és ha az eddiginél szélesebb körben elterjed, egy-két év múlva nagyon megkönnyíti a még mindig „nehéz“ tárgynak tartott számtan tanítását az általános iskola első osztályában.

II.

Milyen segítséget kaptunk a Szovjetuniótól az általános iskolai számtantanítás terén? Amilyen szerepet BLEHER könyve tölt be az óvodákban, ugyanolyan úttörő szerep jutott NYIKITYIN „Szöveges feladatok megoldása“ c. könyvének általános iskoláinkban. Ez a könyv már magyarnyelvű megjelenése előtt hatott számtantanításunkra: hatását mutatják az általános iskolák I—VII. osztályainak új számtankönyvei. NYIKITYIN könyvéből és az ugyancsak NYIKITYIN irányítása alatt készült I—IV. osztályos számtani példatárakból tanultuk meg helyesen értékelni a *műveletek* és a *szöveges feladatok* szerepét a számtantanításban. Azelőtt a szöveges feladatok hatalmas értelemfejlesztő jelentőségét távolról sem ismertük fel eléggé. Kialakult egy olyan közfelfogás — sokan nyiltan is hangot adtak neki — hogy az elemi (az általános iskola alsó tagozata) tanítsa meg jól a négy alapműveletet, elsősorban az egyszeregyet, és akkor a számtantanítás terén lényegében már be is töltötte hivatását. A szöveges, ú. n. tárgyi feladatoknak inkább csak az a szerep jutott, hogy a számokkal való absztrakt műveleteket konkrét formába öltöztessék. A szovjet didaktika, elsősorban NYIKITYIN említett könyvei tették előttünk világossá, hogy a szöveges feladatokban ezen túlmenőleg óriási lehetőségek rejlenek. Lényeges szerepük ott kezdődik, amikor már nem magátólértetődő, hogy milyen műveletek segítségével adhatunk választ a feltett kérdésre, hanem éppen ennek az eldöntése kíván fejtörést, logikus gondolkozást. NYIKITYIN könyvének és a szovjet számtani példatáraknak az első tanulsága az volt a számunkra, hogy ezeknek a logikus gondolkozást kívánó feladatoknak a megoldása nem valami változatlan adottság kérdése, nem egyes ötletesebb emberek kiváltsága, hanem fejleszthető képesség. Nemcsak az egyszeregyre lehet valakit megtanítani, hanem arra is, hogy rendszeresen, logikusan gondolkozzék. A második tanulság pedig az volt, hogy a logikus gondolkozás képessége nincs semmiféle megváltoztathatatlan korhatárhoz kötve — például, mint egyesek állították, a serdülőkorhoz — hanem okkal-móddal már az általános iskola első osztályában el lehet kezdeni a fejlesztését.

Illusztráljuk a mondottakat egy példával. Hol, milyen életkorban kell tanítani az ilyen feladatok megoldását, mint:

„Három egyforma edénybe 18 liter tej fér.
Mennyi tej fér két ilyen edénybe?"

Nálunk az ilyenek azelőtt — lényegében, kevés kivételtől eltekintve — 12 éves korban kerültek elő, nagy csinnadrattával, sokszor elég sok formalitás kiséretében, mint „hármas-szabállyal", vagy mint „többségről többségre való következtetéssel" megoldható feladatok. A szovjet tankönyvekben *ez* a feladat az első osztályban (7 éves korban) szerepel, és *ilyen* feladatok attól kezdve rendszeres következetességgel ismétlődnek végig minden egyes számkörrel és számfajtával kapcsolatban. Természetesen nemcsak ilyen típusú feladatokat találunk a szovjet alsó osztályos számtankönyvekben, és nem is csak egy-két „besulykolt" típust, hanem az összetett feladatok szinte kimeríthetetlen gazdagságát. (Kevés típus besulykolása — ez azoknak az ideálja, akik a látszatra szép, pattogó órát szeretik!) Az egyenletes színvonal biztosítása és a túlzások kiküszöbölése végett a szovjet tanterv — és ennek nyomán már a mi tantervünk is — megadja a normát, olyan formában, hogy például az első osztályban két művelettel megoldható feladatokat lehet adni, a második osztályban három, a harmadikban négy művelettel megoldható feladatokig lehet és kell is eljutni. Normát ad azonkívül a tanterv arra is, hogy milyen fokig kell eljutni a feladatok megoldásában. Például a második osztály végén már a tanító segítsége nélkül összefüggően el kell mondani a feladat megoldásának menetét, a harmadik osztály végén pedig már el kell tudni készíteni előre a feladat megoldásának tervét! Látjuk ebből, milyen nagy szerepet juttat a szovjet didaktika a *tudatosságnak*. Két-három-négy feladattípus esetén még többé-kevésbbé el lehet érni azok gépies megoldását a feladat megértetése nélkül is (mint nálunk tették azelőtt a hármasszabály, az arányos osztás, a százalékszámítás feladattípusaival), de a sokféle feladat már arra kényszeríti a megoldót, hogy világosan képzelje maga elé a feladat mondanivalóját, teljes tudatossággal hatoljon a probléma mélyére.

III.

A szovjet könyvekből megtanultuk helyesen értékelni a szöveges feladatok és műveletek szerepét a számtantanításban. Nem jelenti-e ez a szöveges feladatok előtérbeállítását, a műveletek háttérbe szorítását? Egyáltalán nem! Hiába tudja valaki eldönteni, hogy egy feladatot milyen módon, milyen műveletek egymásutáni alkalmazásával kell megoldani, ha nem tudja elvégezni magukat a műveleteket. A szovjet didaktika a maguk igazi helyére állította a szöveges feladatokat — elsőrendű céljukul annak eldöntését tűzte ki, hogy milyen műveleteket milyen sorrendben kell elvégezni — nem szorította azonban háttérbe a műveleteket sem, sőt *ezeket is a maguk igazi helyére állította.*

A szöveges feladatokhoz hasonlóan a műveletekben is a *tudatosságot* juttatja a szovjet didaktika döntő szerephez. Ennek felismerése és a mi viszonyainkra való alkalmazása már eddig is lényeges változásokat idézett elő számtantanításunkban, bár kétségtelen, hogy az útnak még csak a kezdetén vagyunk.

A kérdés közelebbi megvilágítása céljából lássunk egy példasorozatot az 1947-es kiadású falusi elsőosztályos könyvből, és utána egyet a szovjet didaktika elvein felépült ma használatos elsőosztályos könyvből:

I.	$9+2=11$	$9+3=12$	$9+4=13$
	$19+2=21$	$19+3=22$	$19+4=23$
	$29+2=$	$29+3=$	$29+4=$
	$39+2=$	$39+3=$	$39+4=$
	$49+2=$	$49+3=$	$49+4=$
	$59+2=$	$59+3=$	$59+4=$
	$69+2=$	$69+3=$	$69+4=$
	$79+2=$	$79+3=$	$79+4=$
	$89+2=$	$89+3=$	$89+4=$

és így tovább, végig az egész 221. lapon, egészen $89+7=96$-ig.

Nyilvánvaló a törekvés a minél gyorsabb automatizálásra, arra, hogy a „$29+3$" kép- vagy hangérzet közvetlenül kiváltsa a „32" reakciót. Ezt persze könnyebb elérni — legalábbis bizonyos határok között —, mint azt, hogy számkép, számélmény alapján alaposan végiggondolva, a műveletet tudatosítva, maguk jussanak el az eredményig. Az automatizáló tanítás látszatra szebb, gördülékenyebb órát is eredményez. Csak éppen nem gondolkozó embereket, hanem két lábon járó gépeket, sőt, gépalkatrészeket hoz létre. Márpedig a szocializmusnak nem gépemberekre, hanem a gépeket *irányító, javító* és *konstruáló* magasabb intellektusú emberekre van szüksége.

Méltánytalanok lennénk, ha nem állapítanánk meg: nálunk is már jóideje sok haladó törekvés mutatkozott ebben az irányban; például a számok és műveletek elképzeltetése, számkorongok, számképek, kombinációs falitáblák, stb. már a tudatosítás irányába tett lépések voltak. De a szovjet didaktika segítsége nélkül sohasem tudtuk volna legyürni az ezzel párhuzamosan működő reakciós erőket.

II. Lássunk most a fenti példákkal szembeállítva néhány példát az új elsős könyvből. (240. lap):

1.	18+ 1—18	5+ 9—5	6+3—6+7
	12+ 7—12	5+14—3	5+7—5+7
	6+12— 6	7+ 8—7	9+9—9+1

2. 7 üveg befőttet megettünk, még van 8 üveggel. Hány üveg befőttünk volt?

3.	·+2=11	7+·=14	·—5=12	12—·=3
	·+6=12	4+·=13	·—4=11	16—·=8
	·+8=12	9+·=18	·—6=14	15—·=6
	·+5=13	8+·=15	·—7=10	14—·=5

Már ennyi is elég ahhoz, hogy rámutassunk az újrendszerű számtantanítás néhány alapelvére.

1. Feltűnik mindenekelőtt a változatosság, a formagazdagság. Emlékezzünk vissza a szöveges feladatokról mondottakra: ott is a feladattípusok sokfélesége biztosítja azt, hogy ne lehessen egy-két mechanikus szabályt betanulni, hanem a feladat lényeges mondanivalóját kelljen tudatosan megragadni. Ugyanezt érjük el a számpéldák ezernyi változatával is, így a több műveletből összetett példákkal (első példacsoport), a műveletek különféle megfordításaival (3. példacsoport; ezek tulajdonképpen egyszerű egyenletek, a pontok helyébe ugyanolyan erővel x-et is írhatnánk); ugyanezt szolgálnák a zárójeles feladatok is — ezek azonban most sajnos a könyv összeadási-kivonási részéből kimaradtak és csak az elsős könyv szorzási-osztási részében bukkannak váratlanul elő.

2. A mechanikus ismétlődés szellemi tunyaságra, unalmas mechanizálásra vezet. A *tervszerű ismétlésre* azonban, éppen a tudatosítás elérése végett, szükség van. Az 1. példacsoport egy-két példájának megoldása után már derengeni kezd a gyerekek előtt, majd egyre jobban tudatosodik bennük a szabályszerűség: az eredmény mindig a középső szám. Ha pedig a tanulóknak a számokról és műveletekről világos, konkrét elképzelésük van — és ezt az előző hónapok munkájával már biztosítani lehet — akkor ez nem valami csodálatos, véletlen törvényszerűség lesz a számukra, hanem megértik az okát is. („Ami először volt, azt a végén elvettem, csak az maradt, amit közben hozzáadtam" — talán nem tudják ilyen formában megfogalmazni, de így él bennük az elképzelés.) Ezek után a harmadik oszlop eltérő szabálya is érthető lesz a számukra (pl. 6+3—6+7 ugyanannyi, mint 3+7, vagyis 10).

3. A szöveges feladat nem véletlenül előzi meg a 3. példacsoportot, hanem tervszerűen készíti azt elő. (Közelebbről a 3. példacsoport harmadik oszlopában lévő példákat.) Ezt is a szovjet didaktikától tanultuk: a szöveges feladatoknak és a számpéldáknak szerves egységet kell alkotniok, egyiknek segítenie kell a másikat.

Mindezek az elvek nem csak az első osztályos, nem is csupán az alsótagozati, vagy akár az általános iskolai számtantanításra vonatkoznak, hanem áthatják az egész szovjet matematikatanítást. A szovjet matematikatanítás legfőbb erőssége éppen az, — s ezen a ponton vagyunk tőle ma még a legtávolabb — hogy teljesen egységes felépítésű, harmonikus rendszert alkot az I. osztálytól (sőt, mint láttuk, még előbbről) a X.-ig és tovább, a 7 éves, sőt annál fiatalabb kortól a 17 éves korig és azon is túl. Az összetett zárójeles példákban már ott rejlenek a későbbi algebrai kifejezések, a műveletek megfordításaiban (kipontozott vagy x-es példákban) a későbbi algebrai egyenletek, a szöveges feladatokban a későbbi szöveges egyenletek. Úgy építeni fel a matematikatanítást, hogy az első osztályos számtanban csírájában már ott legyenek az algebra alapgondolatai és egyenletesen, törés nélkül vezessen innen az út az algebrához és tovább, méghozzá olyan út, amelyet mindenki végigjárhat, nemcsak egyes kiváltságosak — ezt a szovjet didaktikától tanultuk. Ezt a célt ma már világosan látjuk, bár megvalósításától még elég távol állunk.

IV.

Mielőtt továbbmennénk, tisztázzuk — esetleges félreértések elkerülése végett — a tudatosítás és a mechanizálás viszonyát. Ez a kettő természetesen nem áll egymással feloldhatatlan ellentétben! Jól tudjuk a szovjet didaktikából — nemcsak a matematika módszertanából, hanem az általános didaktikából is — hogy ezek a megismerés különböző állomásai. A *tudatos* ismeretet már szabad, sőt, kell is mechanikus készséggé alakítani, hiszen ez nyitja meg az útat az előtt, hogy egyre újabb és újabb ismeretek tudatosodhassanak (különben még az érettségin is az ujjukon számolnák ki a diákok a 8×7-et). Viszont *csak a tudatos ismeretet szabad* mechanikus készséggé tenni, még pedig azt is úgy, hogy visszafelé mindig nyitva maradjon az út, mindig tudatosítani tudjuk, mit csinálunk. Az út a készséghez a tudatosságon keresztül vezessen! Ezen a téren követtük el mi a szovjet didaktikával való megismerkedés előtt a legtöbb hibát. (Gyakran persze arra is szükség van, hogy nem eléggé tudatos készségeket utólag tudatosabbá tegyünk; például a műveletek egyes lépéseit, amelyeket a műveletek megtanításakor nem tudtunk kellőképpen tisztázni, utólag kell világossá tenni; utólag kell tudatosítanunk a tízes számrendszer felépítését is, amely nélkül sok műveleti lépés értelmetlen szabály marad.)

Lássuk most egy példán, hogyan nyúl a szovjet didaktika a műveletek tanításának kérdéséhez az általános iskolák (hétosztályos iskolák) felső osztályaiban. Látszólag egyszerű tanterv-technikai kérdés, valójában elvi jelentőségű probléma: az *egész-számok, közönséges törtek* és *tizedestörtek* tanításának sorrendje. Nem akarom az egész kérdést ismertetni, mindnyájan olvashatjuk CSICSIGIN módszertanában (81—84. lap). Csak a legfontosabbat emelem ki: az egész-számokkal és tizedestörtekkel való műveletek együttes (párhuzamos) tanítása puszta formai hasonlóságot emel ki és szabályok mechanikus tanítására csábít, a tizedestörteknek az egész-számoktól elválasztott, a közönséges törtekre alapozott tanítása pedig a lényeg megértését, a műveletek lépéseinek igazi tudatosítását teszi lehetővé. Egész-számok, közönséges törtek, tizedestörtek — ez a sorrend következetesen ismétlődik a szovjet iskolában, éppen a mondott okok miatt. A III. osztályban már minden műveletet tudnak a tanulók, szóban és írásban, milliós számkörben; megtanulják még a legegyszerűbb közönséges törtek összeadását és kivonását is (a tizedeket is közönséges tört jelöléssel!). A IV. osztály legfontosabb feladata az egész-számokkal való műveleteknek, az alapműveletek összefüggéseinek tudatosítása; azután következik a közönséges törtek ismétlése, majd ezekre alapozva — de véletlenül sem az egész-számokkal párhuzamosan! — a tizedestörtek összeadása, kivonása, egész-számmal való szorzása, osztása. Az V. osztályban pedig újból magasabb fokon elölről kezdődnek az egész-számokkal való műveletek (három héten át), utána a számelméletre alapozva a közönséges törtek teljes elmélete, majd ezután mint speciális eset, a tizedestörtekkel való műveletek.

Amikor ezt a rendszert elvi alapon a magunkévá tettük, akkor nyomban felmerült egy gyakorlati, tantervi nehézség: a mi V. osztályosaink még nem eléggé érettek a számelméleti ismeretek elsajátítására — egy évvel fiatalabbak, mint a szovjet V. osztályosok — de az egész-számokkal való műveletek ismétlése lépéseinek tudatosítása, bármilyen fontos is, nem adja ki az egész év anyagát. Ezért átmeneti megoldásként, ANCIFEROV kitünő modern Aritmetikáját véve alapul, az egész-számok és közönséges törtek elemei után vettük sorra a tizedestörtekkel való valamennyi műveletet, a következő osztályra hagyva a számelmélet és a közönséges törtek általános tárgyalását. Hogy mi lesz a végleges megoldás — az még nyitott kérdés. Egy azonban biztos, az egész-számoknak és „tizedesszámoknak“ formális analógián alapuló összeházasítása a tudatosítás útját akadályozó, fejlődésellenes tendencia és előbb-utóbb teljesen a multé lesz.

V.

Röviden ismertetünk még egy olyan, az általános iskolák felső osztályaiba tartozó kérdést, amely szintén a szovjet didaktika fényénél tisztázódott előttünk. Ez a *százalékszámítás* tanításának kérdése. Nem kell sokat bizonyítgatni, hogy a százalék = századrész, tehát 100 nevezőjű tört, vagyis *tizedestört*, (pl. $7\% = 7/100 = 0{,}07$); hogy egy számnak a 7%-át venni azt jelenti: a szám 7-századrészét venni, ez pedig a törttel való szorzás definíciója szerint azt jelenti: a szám 0,07-szorosát venni. Csodálatos, hogy ezek az egyszerű fogalmak mennyire összekeveredtek, még értelmes, képzett emberek fejében is! Azaz, hogy nem is csodálatos — egyszerű következménye annak a fogalmi zűrzavarnak, amit az egész-számokkal és tizedestörtekkel való, formálisan analóg, de elvileg különböző műveleteknek az összekeverése okozott. Csak így érthető meg az, hogy miután a VI. osztályban megtanítottuk (ha ugyan csakugyan jól megtanítottuk) a törttel való szorzás alapgondolatát — azt, hogy itt két műveletet, egy szorzást és egy osztást szorzás néven egyesítünk — a következő osztályban arra kényszerítettük őket, hogy sülyedjenek vissza egy alacsonyabb fokra és egy szám valahány századrészét ne szorzással számítsák ki, hanem kétlépéses következtetéssel, amit aztán esetleg (horribile dictu!) még képletbe is sűrítettünk. A szovjet didaktika — többek közt CSICSIGIN és BRAGYISZ módszertana — útmutatása nyomán tisztázódott előttünk, hogy a százalékszámítás három alapfeladata közül

a) a százalék (vagy másszóval százalékérték) kiszámítása 100 nevezőjű tizedestörttel (a százaléklábbal) való szorzást jelent,

b) az összeg kiszámítása 100 nevezőjű tizedestörttel (a százaléklábbal) való osztást jelent,

c) végül a százalékláb kiszámítása egyszerűen az ú. n. összeggel való osztást jelenti, (az eredmény, ha tetszik, átszámítható %-os formába, ami 100-zal való szorzást jelent).

Persze könnyebb a dolog, ha példaképpen nem a kamatra hivatkozunk, hanem a normateljesítésre, (az „összeg" ilyenkor a norma): akinek a normája 35 munkadarab, a teljesítménye pedig 42, annak a teljesítmény-százaléka

$$\frac{42}{35} = \frac{6}{5} = 1{,}2 = 120\%.$$

VI.

Mit köszönhet a magyar *középiskolai* matematikatanítás a Szovjetuniónak?

A szovjet középiskolák matematikatanításáról hosszú időn keresztül nagyon keveset tudtunk. Tisztában voltunk azzal, hogy a

Szovjetunióban lényegesen magasabb a matematikatanítás színvonala, mint nálunk (sok szovjet ösztöndíjasunk tanúskodhatik erről). Tudtuk, milyen anyagot végeznek el a tízosztályos iskolákban és milyen feladatokat oldanak meg, hiszen ismertük a szovjet tankönyveket. Nem tudtuk azonban, hogy miért éppen ezt az anyagot, miért éppen ilyen feladatokat — nem ismertük az egésznek a problematikáját. BRAGYISZ módszertani könyve („A középiskolai matematikatanítás módszertana") adott erről először egységes áttekintő képet. Érdekes megemlíteni, hogy ez a könyv — amely a Szovjetunióban is az első, a középiskola matematikai anyagának minden ágára kiterjeszkedő módszertani kézikönyv — olyan lelkes fogadtatásra talált orosznyelvű megjelenése alkalmából, hogy pár hét alatt valósággal széjtkapkodták. Magyarországra könyvkereskedői úton egyetlen példány sem jutott már belőle. Úgy jutott el mégis egy példány, hogy az éppen előkészítés alatt álló első középiskolai matematika tanári konferencián tartandó előadáshoz szükség volt valami könyvre, amely a szovjet középiskolai matematikaoktatást ismerteti; ezért a Moszkvában tartózkodó magyar kultúrális küldöttség egyik tagját telefonon megkérték, hogy szerezzen be egy ilyen tárgyú könyvet. BRAGYISZ műve Moszkvában történetesen még éppen kapható volt — így érkezett el Magyarországra az a példány, amelynek alapján azután a fordítás elkészült. Ma már ez a könyv sokezer példányban forog közkézen, sokezer pedagógusnak nemcsak előírt szakmai egyéni tanulási anyaga, hanem egyben állandó olvasmánya, állandóan forgatott kézikönyve. Joggal állapította meg Társulatunk főtitkára, RÉNYI ALFRÉD egy előadásában, hogy amióta ez a könyv a matematika-tanárok kezébe került, azóta mintha kicserélődtek volna. Új távlatok nyíltak meg előttük, új szempontból szólnak hozzá a a problémákhoz, matematikai és didaktikai kérdések egész sora tisztázódott előttük.

BRAGYISZ könyve tehát megmutatta számunkra a matematikatanítás módszerének és e módszer fejlesztésének óriási perspektíváját, de természetesen sok módszertani kérdésben nem mondja ki az utolsó szót.

A könyv végén található bírálat figyelmeztet arra, hogy ez a mű egyáltalán nem mentes a hibáktól (tegyük hozzá: a bíráló cikk sem mentes a hibáktól). Kétségtelen azonban, hogy ez az első összefoglaló kép, amelyet az iránytmutató szovjet matematikatanításról kaptunk, a mi matematikatanításunk előbbrevitelének máris számottevő tényezőjévé vált. Ezt a képet még számos részletében ki kell egészíteni. Meg kell alaposan ismernünk a jelenleg használatos szovjet tankönyveket (KISZELJOV Aritmetikája, Algebrája és Geometriája, RIBKIN Trigonometriája, továbbá a megfelelő feladatgyüjtemények). Meg kell ismernünk majd az egyelőre csak próbakiadásban megjelent új tankönyveket (ANDRONOV és BRAGYISZ Aritmetikája, ALEKSZANDROV és KOLMOGOROV Algebrája, FAGGYEJEV és SZOMINSZKIJ Algebrája, GLAGOLEV Geometriája, BERMANT és LJUSZTYERNIK Trigonometriája stb.). Fel kell használnunk iskolai munkánkban mindenekelőtt azokat a szovjet tankönyveket, amelyek már magyar fordításban is rendelkezésünkre állnak, elsősorban LARICSEV kitűnő Algebrai Feladatgyüjteményét.

Meg kell ismernünk azokat a módszertani műveket is, amelyek a BRAGYISZ felvetette problémákat egy-egy speciális területen belül részletesebben is kifejtik. Ilyen például BARSZUKOVnak, a Matyematyika V Skole c. folyóirat szerkesztőjének magyarra már hosszabb ideje lefordított, sajnálatos módon még meg nem jelent műve „Az elsőfokú egyenletekről". Vagy ilyen ARNOLD kimerítő részletességű könyve „A hatvány, gyök és logaritmus tanításáról" (sajnos ma még ez is csak oroszul olvasható). Ezek a könyvek, továbbá a folyóiratok (elsősorban a Matyematyika V Skole és az Izvesztyija Akagyemii Pedagogicseszkih Nauk) módszertani cikkei nemcsak kiegészítik, hanem részleteiben helyenkint módosítják is majd azt a perspektívát, amelyet BRAGYISZ könyvéből kaptunk. Mégis ez a könyv jelenti számunkra a matematika tanítása terén a legnagyobb határkövet, ez nyitotta rá a szemünket számos elhanyagolt, elfelejtett, vagy mindeddig fel sem merült problémára.

Lássunk most — inkább csak szemelvényképpen — néhány ilyen problémát.

VII.

Az általános iskolában és a középiskolában egyaránt nagyon elhanyagoltuk a *közelítő számítások* kérdését. Áruló jele ez annak, hogy matematikatanításunk elszakadt a valóságtól. Mérőeszközeink tökéletlensége folytán minden mért adat közelítő pontosságú, de közelítő pontosságú a legtöbb számlálás útján kapott adat is. A gyakorlatban még a többé-kevésbbé pontos adatokat is tovább kerekítjük, egyrészt mert nincs szükségünk egy-két tizedesjegynél (vagy értékes jegynél) nagyobb pontosságra, másrészt mert a sok jegy sok számolási munkát kíván, és ez nagyobb hibaforrást jelent, mint ha saját jószántunkból, előre megfontolt szándékkal kerekítünk. A mindennapi élet, a technika, a statisztika, a természettudományok nem élnek meg közelítő számítások nélkül, — mégis hány munkaóra pazarolódik el feleslegesen, pusztán azért, mert a kerekítést csak ösztönös, spontán módon végezzük, és nem tudatosítunk néhány már 12—13 évesek számára is jól érthető szabályt. Félreértések elkerülése végett: nem a közismert korlátolt pontosságú szorzás és osztás mechanikus megtanításáról van szó, hanem annak tudatosításáról, hogy meghatározott pontosságú adatokkal számolva a művelet eredményében hány jegy lesz megbízható. Nem ismertetjük a kérdést részletesen — megtaláljuk BRAGYISZ módszertanának 197—206. lapján — csak egy, a mindennapi életből vett példát említünk.

Egy gimnáziumi negyedik osztályban történt dolgozatírás órán. A Föld tömegét kellett kiszámítani a tanulóknak a következő adatok alapján:

Föld sugara $R = 6371$ km,

$\pi = 3{,}14$

Föld sűrűsége $= 5{,}5$ g/cm^3.

A tanulók egyrésze — félve, hogy a logaritmussal való számolást elhibázza — közvetlenül végezte el a műveleteket, minden műveletnél minden jegyet megtartott és eredményül egy 17 jegyű számot kapott. Mondanom sem kell, hogy legtöbb esetben nemcsak a jegyek voltak hibásak, hanem a nagyságrend is, mert legalább egyszer eltévesztették a tizedesvessző helyét; amellett eltöltöttek a feladat megoldásával majdnem egy órát és a többi feladathoz hozzá sem kezdtek.

Pedig a számítást 5—10 perc alatt elvégezhették volna, ha tudnak néhány olyan egyszerű szabályt, mint pl. hogy a szorzatban annyi értékes jegy megbízható, amennyi a legkevésbbé pontos (legkevesebb értékes jegyet tartalmazó) tényezőben van, és a közbeeső számításokban elég ezen felül egy-egy tartalékjegyet megtartani. Természetesen az ilyen esetekben nem a diákok hibásak, hanem a tanár, még akkor is, ha unos-untalan emlegeti: „Csak a szükséges pontossággal számoljunk!" Nem elég ezt emlegetni és nem elég egyes példákban ad hoc útmutatásokat adni: általános összefüggéseket kell tudatosítanunk, és tisztáznunk kell, hogy a megbízhatatlan jegyek megtartása nemcsak felesleges, hanem egyenesen káros.

Egy-két év múlva, a szovjet didaktika útmutatása nyomán talán már nem csak az 5. és 6. elhibázott jegyet fogjuk piros tintával alápöttyögtetni, hanem elsősorban a *feleslegesen* pontos, nem megbízható jegyeket. Ha egyúttal rászoktatjuk tanítványainkat az eredményeknek fejszámolás útján való becslésére, akkor nemcsak a számolás termelékenysége, de még a pontossága és megbízhatósága is emelkedni fog.*

VIII.

Egy másik, már az algebra körébe tartozó kérdés, amelyről beszélnünk kell, az *algebrai kifejezések azonos átalakításai.* A szovjet didaktika — így többek között BRAGYISZ módszertana és

* Bővebb tájékoztatást ad a közelítő számításokról BRAGYISZ oroszynelvű könyve: „Szredsztva i szposzobi elementarnih vicsiszlenyij".

a Matematika v. Skole idevágó cikkei — irányították a figyelmünket arra, hogy a formalizmus veszélyét csak akkor kerülhetjük el, ha ragaszkodunk ahhoz, hogy az algebrai kifejezéseket függvényeknek kell tekintenünk. Hogy ezt tudatossá tegyük a tanulókban, ábrázolnunk kell számos egyváltozós függvényt — esetleg többváltozósokat is úgy, hogy többi változóiknak konstans értékeket adunk. Így világos lesz az azonos átalakítás igazi értelme: nem „művelet", nem is érthetetlen játékszabályok alkalmazása, hanem olyan átalakítás, amely a függvénynek csak a leírt alakját változtatja meg, magát a függvényt, vagyis a függvénynek az egyes helyeken felvett értékeit nem (legfeljebb módosítja az értelmezési tartományát). Egy azonosság két oldalán tehát azonos függvények állanak — olyan függvények, amelyeknek a képe (görbéje, felülete, stb.) egybeesik. Amíg az algebrai kifejezéseket betűk konglomerátumának tekintettük és formális játékszabályok útján alakítgattuk át, addig egyre-másra követünk el olyan hibákat — nemcsak tanítványaink, de mi magunk is — hogy egy ilyen függvényt, mint

$$\sqrt{(1-x)^2}+\sqrt{(x-2)^2},$$

így alakítottuk át:

$$=1-x+x-2=-1,$$

holott ez a függvény $-\infty$-től $+\infty$-ig mindenütt pozitív, csak $+1$ és $+2$ között konstans, másutt lineáris. Mindez magától értetődő lesz a számunkra és tanítványaink számára is, ha megszokjuk, hogy az algebrai kifejezéseket ne formálisan kezeljük, hanem függvényeknek tekintsük, a lehetőség szerint ábrázoljuk, elképzeljük.

Természetesen azt a valós számok körében szokásos megállapodást is tisztáznunk kell, hogy a négyzetgyök értékét, ha elébe más előjelet nem írunk, pozitívnak tekintjük. Ezzel a megállapodással állandóan élünk — például akkor is, amikor a másodfokú egyenlet gyökképletében

$$\pm\sqrt{b^2-4ac}$$

írunk (ha a $\sqrt{}$ jelébe beleértenénk mindkét előjelet, akkor elég volna elé $+$ jelet írni). Hogy ez mégis mennyire nem tudatos tanítványainkban,* arról könnyen meggyőződhetünk a következő módon: írjuk fel valamelyik felső osztályban a táblára

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a, \text{ ha } a\geqq 0 \\ -a, \text{ ha } a\leqq 0, \end{cases}$$

azután kérjünk meg egy átlagos diákot, mondja meg, helyes-e ez,

* Annak ellenére, hogy a II. gimnáziumi tankönyv ezt külön kiemeli!

ha igen, miért, ha nem, miért nem. (Ehhez természetesen nemcsak a négyzetgyök pozitívitására vonatkozó megállapodással kell tisztában lennie, hanem az abszolút érték definíciójával is: pozitív szám abszolút értéke maga az illető szám, negatív szám abszolút értéke a szám ellenkező előjellel véve.)

IX.

Megtanultuk a szovjet didaktikától, hogy a függvény fogalmára alapozva, függvényszerű tárgyalásban kell tanítanunk nemcsak az azonos átalakításokat, hanem az *egyenletek* és *egyenletrendszerek* megoldását is. Küzdenünk kell az ellen, hogy a diákok az egyenletrendezést, akárcsak az azonos átalakításokat, formális szabályok alkalmazásának tekintsék. Az egyenlet gyökei: azok a helyek, ahol az egyenlet két oldalán álló függvények egyenlő értékeket vesznek fel (a görbéknek közös pontjuk van). Az egyenletrendezés: olyan újabb egyenletek előállítása, amelyeknek a gyökei megegyeznek az eredeti egyenlet gyökeivel („egyenértékű egyenletek") és amelyek közül az utolsóról közvetlenül leolvashatjuk a gyököket. Ha ilyen átalakítás nem lehetséges (pl. közben négyzetreemelést kell végrehajtanunk, akkor annyit követelünk meg az egyenletektől, hogy ha nem is mind egyenértékűek, legalább mindegyik *következménye* legyen a megelőzőnek, azaz tartalmazza annak mindegyik gyökét — de azonkívül esetleg más ú. n. „hamis gyököket" is. Az utóbbiakat behelyettesítés útján könnyen kiselejtezhetjük. Mindezeket a kérdéseket egészen világossá tehetjük, ha az egyenleteket — külön a jobb- és baloldalukon álló függvényeket — ábrázoljuk. Például az, hogy az

$$1+\frac{5}{(x-2)(x+3)}-\frac{1}{x-2}=0$$

egyenletnek a megoldás végeredményeként adódó $x_1=+2$ és $x_2=-2$ közül csak az utóbbi gyöke, az előbbi nem, egycsapásra világos, szemléletes értelmet nyer, ha az egyenlet baloldalát (esetleg némi azonos átalakítás után) ábrázoljuk. Olyan hiperbolát kapunk, amely az x-tengelyt egyetlen pontban, az $x=-2$ pontban metszi. Persze, nem kell később is minden egyenletnél elvégezni az ábrázolást; ez nagyon meglassítaná a munkát. Egy-két szemléltetés elég ahhoz, hogy ezek a fogalmak világossá, tudatossá váljanak a tanulókban. Ha ezt megtesszük — akkor kézzelfogható értelmet nyer többek között a 0-val való osztás tilalma. Ha viszont elmulasztjuk — akkor mindig lesz benne valami misztikus, érthetetlen.

Az egyenletek függvényszerű tárgyalásának, ahogyan azt a szovjet didaktikától megtanultuk, van egy másik oldala, egy másik értelme is: betűs egyenletek és egyenletrendszerek megoldásakor tudatosítanunk kell, hogy mind az eredeti egyenlet két oldala, mind az átalakítás közben kapott egyenletek két oldala, mind pedig az eredményül kapott kifejezés *a bennük szereplő betűk függvényei.* Meg kell tehát vizsgálnunk a kapott megoldást abból a szempontból, hogy ezeknek a függvényeknek különböző értékei mellett, vagy értelmetlenné válása esetén milyen esetek lépnek fel; a betűk bizonyos értékeinél a megoldás értelmét veszti, vagy éppen végtelen sok megoldás lép fel, amelyek között esetleg bizonyos összefüggés van, ha egyenletrendszer gyökeiről van szó, stb. Ezt nevezzük az egyenletek, ill. egyenletrendszerek *diszkusszió*jának. Efelé egyelőre csak az első lépéseket tehetjük meg. De ezeket sürgősen meg is kell tennünk.

X.

Ugyancsak távolabbi problémát vet fel, de már ma is elgondolkoztató az az út, amelyet Bragyisz a komplex-számok bevezetésére ajánl. A szokásos út — amely szerint a negatív szám addig értelmetlennek tekintett négyzetgyökét egyszerre számnak kezdjük nevezni és számolunk vele — könnyen járhat valami misztikus mellékzöngével („szám, amely nincs és mégis van"). Holott a komplexszámok ugyanúgy a valóságot tükrözik, mint a valós szám! Érdemes tehát mindjárt a komplex számok bevezetésekor ezt emelni ki, és az új számokat, mint a sík pontjainak, vagy ami ugyanaz, az origóból a sík pontjaihoz húzott vektoroknak a halmazát értelmezni. Ezekre a számokra ugyanúgy definiálni tudjuk a műveleteket, mint az egy egyenesbe eső különféle irányú és nagyságú vektorokra, azaz a pozitív és negatív valósszámokra. A műveletek tulajdonságai is változatlanok. Viszont az új számkörben már negatív számokból is tudunk négyzetgyököt vonni. — Érdekes megemlíteni, hogy a komplex-számok ilyen bevezetésének gondolatát a közelmultban Bragyisztól függetlenül felvetette Szele Tibor is.*

XI.

Rátérünk annak ismertetésére, hogy mit köszönhet a magyar geometria-oktatás a Szovjetuniónak. Ezt a kérdést jól megvilágíthatjuk azzal, ha összehasonlítjuk a tavaly érettségizett hallgatók geometriai tudását egy mai középiskolai tanuló ismereteivel. Előbbiek annyira le vannak maradva, hogy olyan feladatokat sem képesek megoldani, amelyeket I. vagy II. osztályos tanuló játszva megold. Nem beszélve a leggyengébbekről, akiknek probléma egy

* A komplex számok bevezetése vektoralgebrai alapon. *Matematikai Lapok* I. évfolyam, 5. szám. (1950).

háromszöget szerkeszteni adott 3 oldalából, az átlagra is az jellemző, hogy érettségi után csak egy csekély töredékük tud mondjuk két ponton átmenő és adott egyenest érintő kört szerkeszteni. Bár ezek a hallgatók már a felszabadulás után kezdték gimnáziumi tanulmányaikat, mégis azt lehet mondani, hogy a geometriát egyáltalában nem tanulták. A felszabadulás előtt annyira nem volt geometria-oktatás, hogy még utána is éveknek kellett eltelni, míg komolyan megindulhatott. Ez csak akkor történt meg, amikor a szovjet példa nyomán a geometria a tantervben megfelelő helyet és óraszámot kapott, szovjet tapasztalatokra támaszkodva elkészültek az új tankönyvek és magyar nyelven is megjelentek a szovjet szakkönyvek, didaktikai cikkek, módszertani kézikönyvek, melyek a tanárok továbbképzéséhez adtak segítséget.

A megindult fejlődés eredményei lemérhetők a Középiskolai Matematikai Lapok feladatmegoldásain is. Egyre több megoldás érkezik a geometriai feladatokra, eleinte csak az alsóbb osztályokból, később a felsőbbekből is.

Összehasonlítva mai geometria-oktatásunkat a multbelivel, megállapíthatjuk, hogy egész mai geometria-oktatásunk a szovjet tapasztalatok felhasználásának köszönheti kialakulását és fejlődését.

A szovjet eredmények felhasználása egyrészt fontos elvi kérdéseket tisztázott, másrészt a gyakorlati munkához konkrét segítséget nyújtott. A legfontosabb elvi kérdés az: miért kell geometriát tanítani. A materialista világnézet szerint tudásunk a természet megfigyeléséből, megértéséből fakad. A természetet a matematika segítségével érthetjük meg és tudjuk céljaink szerint átalakítani, ehhez pedig a geometriai ismeretek nélkülözhetetlenek. Gondoljunk akár egy gép megszerkesztésére, akár egy épület és a benne lezajló munkafolyamatok megtervezésére, egy bánya feltárására, stb. — mindezekhez szükség van konkrét geometriai tények, tételek ismeretére, csakúgy, mint a geometria tanítása során kialakuló térszemléletre. A szerkesztési feladatok megoldása ezenkívül önálló logikus gondolkozásra is nevel, amely nem pótolható semmiféle sémával, vagy formalizmussal. Arra szoktatja ez a tanulókat, hogy keressék, felfedezzék az összefüggéseket, egyszóval dialektikusan gondolkozzanak.

A tanítás céljainak tisztázásán túlmenően különösen sokat köszönhetünk a szovjet tudománynak azért, mert az eredményes tanítás módszerére vonatkozó gazdag tapasztalati anyagát rendelkezésünkre bocsátotta. Nem térhetünk itt ki minden oktatási kérdésre, ill. annak minden részletére, hiszen ez kötetekre terjedne, megelégszünk azzal, hogy néhány kérdést kiemeljünk.

A szovjet didaktika megállapítja, hogy a geometria tanítását egy *előkészítő* (propedeutikus) *fokozattal* kell kezdeni, amely alatt szemléletesen, a történeti fejlődés útját követve kell tanulóinkat megismertetnünk a legfontosabb geometriai fogalmakkal és tényekkel. Az ezt követő *rendszeres fok* a középiskolában a geometria euklidesi fejlődési szakaszát követi, azonban továbbra sem nélkülözheti a szemléltetés segítségét. A szovjet iskola a modellekkel szemléltetésről fokozatosan tér rá a puszta szerkesztésekre, majd magának a szerkesztésnek is csak gondolatban elvégzésére. A fejlődés útja nálunk is ez kell, hogy legyen, egyelőre azonban tanulóink előismereteinek hiánya miatt a szemléltetést és szerkesztést még a magasabb osztályokban is végeznünk kell. Érdekes kérdés, hogy a térmértan tanítását miképpen kapcsoljuk össze a síkmértannal. Ezek merev szétválasztása, különösen kezdő fokon semmiesetre sem helyes, hiszen a valóságos világ alakzatai mind téralakzatok, a síkmértaniak ezekből elvonatkoztatással jönnek létre. A fuzionizmus mértékére nézve a szovjet tankönyvek nincsenek teljesen egységes álásponton, ennek a kérdésnek a megvizsgálása most van kialakulóban. Nagyon érdekesek N. F. CSETVERUHINnak a térmértani vetületi rajzok és az azokból kiolvasható síkmértani összefüggések felhasználására vonatkozó példái (ellipszis tárgyalása a körök affin kapcsolata alapján); ez a terület még kevéssé van kidolgozva, pedig a középiskolai geometriai tanítás értékes anyagává fejlődhet. A mi geometriai oktatásunknak van még egy ezt megelőző feladata, az, hogy kartársaink megismerkedjenek a helyes térmértani rajzok készítésének alapelveivel. Ezidőszerint még tankönyveink is tele vannak hibás ábrákkal, melyek nemhogy elősegítenék a térszemlélet kialakulását, hanem azt egyenesen hátráltatják. A szovjet tankönyvek tanúsága szerint ezek a hibák a szovjet oktatásban is előfordulnak, mi sajnos még nem tartunk a hibák kiküszöbölésénél.

Az eddigiekben csak kiragadtunk néhány gondolatot, hogy legalább valamennyire érzékeltessük azt a hatalmas segítséget, amit a szovjet tapasztalatok felhasználása nyújt. A részletekről nem beszélhetünk, de nem mehetünk el szó nélkül azok mellett az érdekesnél érdekesebb gyakorlati feladatok mellett, melyeknek a szovjet szakirodalom kimeríthetetlen kincsestára. Kívánatos volna, hogy ezek a feladatgyüjtemények is megjelenjenek magyar fordításban és így necsak a Középiskolai Matematikai Lapok révén ismerkedhessenek meg kartársaink és diákjaink egy-egy érdekesebb versenyfeladattal, hanem mindennapi oktatási munkánkban is minél több, a szocializmus építésének szellemét sugárzó feladatot használhassunk fel.

XII.

Külön beszélünk még arról a jelentős segítségről, amit a *gyakorlattal való kapcsolat* elmélyítésére vonatkozó szovjet tapasztalatok átvétele jelentett a számunkra. Szovjet példa nyomán geometriatanításunkban egyre nagyobb szerepet juttatunk a szabadban való méréseknek. Ezek a foglalkozások általános iskolai és gimnáziumi fokon egyaránt közvetlen élménnyé teszik a tanulók számára azt, hogy a geometria és a matematika többi ága nem elvont „tételek rendszere", de nem is csupán magasrendű szórakozást biztosító feladatok gyüjteménye, hanem a gyakorlatban felhasználható, a valóság megváltoztatásának eszköze. Ezen az élményen túl a tanulók gyakorlatot is szereznek a legegyszerűbb mezőgazdasági, geodéziai, mérnöki, hadászati érdekességű mérésekben. Ezen a téren is még csak az első lépéseknél tartunk, nagy szükség van pedagógusaink bátor kezdeményezésére.

A Szovjetunió útmutatása nyomán matematika-könyveink feladatanyagában is igyekszünk mind jobban a gyakorlat felé fordulni. Hosszú, több éves, talán évtizedes gyüjtőmunkára lesz itt szükség, hiszen a követelmények elég szigorúak. A felvetett gyakorlati problémáknak nem szabad olyan technikai részleteket tartalmazni, amelyek elhomályosítják az illusztrálandó elméleti kérdést és természetesen nem tartalmazhatnak a tanulók tudásán túlmenő elméleti kérdéseket sem. Azonkívül, hogy a tankönyvekben felhasználhatók legyenek — lehetőség szerint arányosan kell eloszlaniok a középiskolai matematika egyes fejezetei közt (ez a legsúlyosabb követelmény). A gyakorlati feladatok gyüjtése a Bolyai Társulat és a Közoktatásügyi Minisztérium irányítása mellett már megkezdődött. Pedagógusaink eddig több, mint 200 olyan feladatot gyüjtöttek össze, az ipar, a közlekedés és a mezőgazdaság köréből, amely az általános és középiskolai oktatásban felhasználható lesz.

Egy másik jelentős kezdeményezésről is beszámolhatunk itt, amely egyik textilipari technikumunk matematikai tanára, DALLOS LÁSZLÓ részéről indult ki. Ő tanítványait vonja be a textilipar körébe eső gyakorlati feladatok készítésébe. Példaképpen lássuk LÁZÁR KÁROLY III. c. osztályú tanuló egyik feladatát:

„Egy lánchurkoló gép áruhengerének sugara 5 cm. Milyen hosszú áru tekeredik rá 30 fordulat alatt, ha az áru vastagsága 1 mm?" A feladat a 100π, 102π, $104\pi, \ldots, 158\pi$ számtani sor összegezésére vezet; eredménye:

$$S_n = \frac{(100\pi + 158\pi)\,30}{2} = 3870\pi \sim 12150 \text{ mm} = 12{,}15 \text{ m}.$$

Ebben az irányban is a Szovjetunió, a szovjet didaktika, szovjet pedagógusok tapasztalatai mutattak először útat. NYIKITYIN a Szöveges feladatok megoldásában beszámol arról, hogyan vonják be a szovjet pedagógusok tanítványaikat a feladatkészítésbe. Részletesen foglalkoznak ezzel a kérdéssel a szovjet folyóiratok is (lásd pl. a Nacsalnaja Skola 1951. évi 8. számában KUZMENKO cikkét: A számtani alkotómunka tapasztalataiból). Mint látjuk, a szovjet példa ezen a téren is visszhangra talált pedagógusaink körében.

Végigmentünk a matematika általános és középiskolai anyagán, és bemutattunk néhány példát matematikatanításunknak azokról a területeiről, amelyeken különösen nagy változások útját nyitotta meg a szovjet tapasztalatok érvényesítése. Természetesen matematikatanításunk nemcsak részleteiben változik meg, és fejlődik tovább új útakon: megváltoznak azok az elvi alapok is, amelyeken az egész didaktika felépül. Ezt mi sem mutatja jobban, mint az, hogy a matematikát tanító pedagógusok — általános és középiskolaiak egyaránt — már harmadik esztendeje évről-évre konferenciákon gyülnek egybe, hogy itt közös megbeszéléseken tisztázzák matematikatanításunk elvi kérdéseit és az ezekből levonható gyakorlati következtetéseket.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy a Szovjetunió segítsége ma már matematikatanításunk minden területére kihat. Ennek a segítségnek a következtében a mult káros öröksége, a formalizmus, a gyakorlattól való elzárkózás és a burzsoá osztály-iskola többi velejárója egyre inkább kiszorul a matematika-órákról. A számtanórák ma már nem a taposómalom egyhangúságával telnek el; de nem is valami félelmes, ijesztő, érthetetlen ismereteket tanulnak ott dolgozó népünk gyermekei, hanem a gyakorlat céljait szolgáló, a logikus gondolkozást fejlesztő, érdekesebbnél érdekesebb problémákat felvető tudományt. Nem akarjuk elhallgatni, hogy még sok adósságunk van — az általános iskolai alsó és felső tagozatok és a középiskolák matematika-tanítása még korántsem alkot harmonikus egységet, nem segíti egymást úgy, ahogy kellene; sok tanár tanítja még a matematikát az élettől elvonatkoztatva. Pedagógusaink többsége azonban felismerte és mind nagyobb mértékben igénybe is veszi a Szovjetuniótól kapott segítséget, sőt, saját kezdeményezéseivel is hozzájárul ahhoz, hogy a matematika a szocialista ember kialakulásának és a szocializmus építésének eszközévé váljék.

O. J. Smidt kozmogóniai elméletéről

(Első közlemény)

Irta: Földes István

Bevezetés

Smidt akadémikus kozmogóniai elméletéről már számos ismertető cikk jelent meg magyar nyelven, amit ezen elméletnek a természettudományok körét messze túlhaladó, világnézeti jelentősége a legnagyobb mértékben indokolttá és szükségessé tett. E cikkek azonban legnagyobbrészt teljesen népszerűsítő és leíró jellegűek. A Fizikai Szemle legközelebbi számaiban megjelenő ismertetés ugyan teljes áttekintést igyekszik adni az elmélet alapeszméiről és belőlük levezethető eredményeiről, azonban helyszűke miatt a szerzőknek el kellett tekinteniök azoknak a levezetéseknek a bemutatásától, melyekből a Smidt-elmélet értelmében a bolygók kialakulásához vezető folyamatoknak, ú. m. részecskék rajának a Nap által történt kaptációjának (magávalragadásának) és a kaptált rajban kondenzációs gócok fokozatos kialakulásának lehetősége következik. Ennek következtében az említett cikkből az olvasó nem nyerhet kielégítő tájékoztatást a Smidt-elmélettel összefüggő matematikai problémák természetéről, ami annál sajnálatosabb, mivel ezt az elméletet éppen az jellemzi, hogy a régebbieknél sokkal nagyobb terjedelemben használja fel a matematika módszereit; tárgyalásmódjának ez a felfokozottan matematikai jellege adja meg többek között a Smidt-féle kozmogóniának a megbízhatóság és hitelesség azon fokát, melyet a Naprendszer keletkezésére és fejlődésére vonatkozó összes eddigi vizsgálódások nélkülöztek: a posztulált folyamatok bekövetkezésének a lehetősége, valamint a Naprendszer összes lényeges megfigyelhető jellemvonásait kifejező tényeknek az elméletből levezethető eredményekkel való pontos kvantitatív egyezése itt ki van mutatva. Hogy Smidt elméletének értékét és a Naprendszer kozmogóniájának körébe tartozó többi hipotézisekkel szemben megnyilvánuló fölényét felbecsülhessük, feltétlenül szükséges tehát, hogy teljes egészében ismerjük az elméletben felhasznált matematikai apparátust; ez egyúttal annak is előfeltétele, hogy az elmélet még tisztázandó kérdéseinek megoldásában közreműködhessünk.

A jelen cikk tárgya a tisztán gravitációs kaptációs folyamatok elméletének ismertetése; két további közleményben a fizikai tényezők (pl. fénynyomás, mechanikai energiának átalakulása hővé) által befolyásolt kaptációt, továbbá a kaptált raj további fejlődési folyamatát szándékozom ismertetni, melyben a nem mechanikai faktorok lényeges szerepet játszanak. Ilyenformán ezek a cikkek és a Fizikai Szemlében megjelenő ismertetés egymást kölcsönösen kiegészítve együttesen a bolygók keletkezésére vonatkozó Smidt-elméletnek a lehetőséghez képest teljes tárgyalását fogják adni.

I

Tekintsük n számú, $m_0, m_1, \ldots, m_{n-1}$ tömegű $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ tömegpont mozgását, melyek a Newton-féle törvény szerint vonzzák egymást. Ha a mozgás úgy folyik le, hogy a t idő minden értéke mellett (tehát a multban és a jövőben egyaránt) a $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ pontok mindannyian egy olyan gömb belsejében maradnak, melynek sugara egy elegendően nagy rögzített R mennyiség, középpontja pedig egybeesik a tömegpontok rendszerének tömegközéppontjával, akkor a rendszer mozgását *stabilisnek* fogjuk nevezni (ez az ú. n. Lagrange-féle értelemben vett stabilitás).

Jelöljük a P_i és P_j tömegpontok távolságát r_{ij}-vel. HILMI terminológiáját követve, a rendszer mozgását $t \to +\infty$ (illetve $t \to -\infty$) esetén *teljesen instabilisnek* fogjuk mondani, ha i és j minden értékére

$$r_{ij}(t) \to \infty, \text{ ha } t \to +\infty \text{ (illetve } t \to -\infty) \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, n-1).$$

A mozgás *instabilis,* ha legalább egy olyan i, j értékpár létezik, melyre

$$r_{ij}(t) \to \infty, \text{ ha } t \to +\infty \text{ (illetve } t \to -\infty),$$

Félstabilisnek $t \to +\infty$ (illetve $t \to -\infty$) esetén pedig akkor fogjuk nevezni a mozgást, ha létezik oly $R > 0$ szám, hogy az idő minden $t \geq 0$ (illetve $t \leq 0$) értéke mellett az r_{ij} távolságok közül legalább az egyik eleget tesz az $r_{ij}(t) < R$ feltételnek; az az r_{ij} távolság, mely ezen feltételt kielégíti, különböző időpontban más és más P_i és P_j pontok által lehet realizálva. A félstabilis mozgások között különösen fontos számunkra az az eset, mikor a $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ pontok rendszerén belül létezik egy stabilis részrendszer.

A vizsgálatunk tárgyát képező kérdést már most a következőképpen vethetjük fel:

Lehetséges-e a $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ tömegpontokból álló rendszernek olyan mozgása, mely teljesen instabilis, ha $t \to -\infty$ és félstabilis, ha $t \to +\infty$; különleges figyelmet érdemel az az eset, mikor a mozgás félstabilis jellege abban jut kifejezésre, hogy az n tömegpontból álló rendszeren belül létezik egy stabilis részrendszer.

Tekintettel arra, hogy egy tisztán dinamikai rendszer esetében (v. i. ha a Lagrange-féle függvényben nem lépnek fel a sebességekre vonatkozólag elsőfokú tagok) bármely megoldásban t helyébe $-t$ helyettesítése által megint megoldást kapunk, nyilvánvaló, hogy a most felvetett kérdést a következőképpen is megfogalmazhatjuk:

Lehetséges-e rendszerünknek egy olyan mozgása, mely $t \to -\infty$ esetén félstabilis (sőt esetleg stabilis részrendszert tartalmaz), $t \to +\infty$ esetén pedig teljesen instabilis.

Mindkét megfogalmazás esetében arról van szó, vajjon a mozgásnak a t tengely egyik irányában teljesen instabilis jellege megengedi-e azt, hogy a másik irányban félstabilis legyen, vagy éppenséggel stabilis részrendszerek léphessenek fel? Három tömegpont esetére vonatkoztatva az utóbbi kérdés a kaptációnak, vagyis eredetileg egymástól függetlenül mozgó tömegpontokból egy stabilis összetartozó pár képződésének, illetve a kaptációs folyamat megfordításának, v. i. egy eredetileg összetartozó pár szétválásának problémáját adja.

Mindenekelőtt kimutatjuk, hogy ha egy n számú tömegpontból álló rendszer h energiaállandója negatív, akkor egy $t \to -\infty$ esetén teljesen instabilis mozgás nem kapcsolódhatik egy $t \to +\infty$ esetén félstabilis mozgással; ebben az esetben tehát a bennünket érdeklő kaptációs jelenségek nem következhetnek be. Azt a tényt, hogy három tömegpontból álló rendszerben nem következik be kaptáció, ha $h<0$, először J. CHAZY bizonyította be 1929-ben; később (1932) egy másik dolgozatot is publikált, melyben megkísérelte a kaptáció lehetetlenségét a $h \geq 0$ esetre is kimutatni; ez a bizonyítás nem szigorú, mégis jelentékenyen hozzájárult azon nézet elterjedéséhez, hogy kaptáció nem csak két, hanem három test esetében sem lehetséges. Ennek következtében a kaptációs folyamatok hosszú időn át teljesen kiszorultak a kozmogóniai következtetésekből.

1. t é t e l: *Jelentse $r(t)$ a tömegpontok kölcsönös távolságai közül azt, amelyik a t időpontban a legkisebb:*

$$r(t) = \min\{r_{ij}(t)\};$$

ha $h<0$, akkor létezik egy olyan $C>0$ állandó, hogy t minden értékére

$$r(t) \leq C.$$

B i z o n y í t á s. A rendszer erőfüggvénye* $U = \Sigma^* \dfrac{m_i m_j}{r_{ij}}$, tehát a kinetikus energiát T-vel jelölve

* Az egész cikkben mindenütt $\Sigma = \sum\limits_{i=0}^{n-1}$ és $\Sigma^* = \sum\limits_{0 \leq i < j \leq n-1}$

$$T-U=T-\Sigma^*\frac{m_i m_j}{r_{ij}}=h;$$

mivel $T\geqq 0$, azért tehát

$$\Sigma^*\frac{m_i m_j}{r_{ij}}+h\geq 0,$$

úgy, hogy ha $h<0$, akkor

$$\Sigma^*\frac{m_i m_j}{r_{ij}}\geq |h|,$$

$$\frac{1}{r(t)}\Sigma^* m_i m_j\geq |h|,$$

tehát

$$r(t)\leq\frac{\Sigma^* m_i m_j}{|h|}.$$

Ezáltal tételünk bizonyítva van és így nyilvánvaló, hogy kaptációs folyamatok nem következhetnek be, ha $h<0$, hiszen ez utóbbiaknál a rendszer mozgásának $t\to-\infty$ esetén teljesen instabilisnek kellene lennie, ami a most bizonyított tétel értelmében nem lehetséges, ha $h<0$. Ki lehet azonban mutatni (CHAZY), hogy *egyes* r_{ij} távolságok korlátlan növekedése bekövetkezhetik, ha $h<0$.

Tekintsük most a $h>0$ esetet. Bebizonyítjuk a következő, JACOBI-tól származó tételt:

2. tétel. *Ha $h>0$, akkor létezik legalább egy olyan i, j értékpár, hogy*

$$r_{ij}\to\infty,\ \textit{ha}\ t\to+\infty\ (\textit{vagy}\ t\to-\infty).$$

A bizonyítás az ú. n. Lagrange-Jacobi-féle egyenlőségen alapul, mely a következőképpen vezethető le:

Vonatkoztassuk a rendszer mozgását egy oly x, y, z koordinátarendszerre, melynek tengelyeinek iránya változatlan marad, origója pedig állandóan egybeesik a rendszer tömegközéppontjával; tekintsük a rendszernek tömegközéppontjára vonatkozó J tehetetlenségi nyomatékát:

$$J=\Sigma m_i r_i^2,$$

ahol

$$r_i^2=x_i^2+y_i^2+z_i^2.$$

Differenciáljuk ezt az egyenlőséget kétszer t szerint:

$$\frac{d^2J}{dt^2}=2\Sigma m_i(x_i x_i''+y_i y_i''+z_i z_i''+x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2).$$

Figyelembe véve a mozgás

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i} \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

egyenleteit és az energia megmaradását kifejező

$$\frac{1}{2} \Sigma m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) = U + h$$

integrált, ezt az egyenlőséget a következő alakba írhatjuk:

$$\frac{d^2 J}{dt^2} = 2\Sigma \left(x_i \frac{\partial U}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial U}{\partial y_i} + z_i \frac{\partial U}{\partial z_i} \right) + 4(U + h).$$

Azonban az U erőfüggvény -1 dimenziójú homogén függvénye az x_i, y_i, z_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ változóknak, tehát EULER egy ismert tétele szerint

$$\Sigma \left(x_i \frac{\partial U}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial U}{\partial y_i} + z_i \frac{\partial U}{\partial z_i} \right) = -U.$$

Ennek felhasználásával nyerjük a

$$\frac{d^2 J}{dt^2} = 2(U + 2h)$$

egyenlőséget, melyet három tömegpontra LAGRANGE, az általános esetben pedig JACOBI vezetett le; ez az egyenlőség igen fontos szerepet játszik az égi mechanikában és a statisztikus mechanikában (viriáltétel).

Integráljuk most ennek az egyenlőségnek mindkét oldalát kétszer egymás után 0-tól $t > 0$-ig:

$$J'(t) = J'(0) + 2 \int_0^t (U + 2h) dt,$$

$$J(t) = J(0) + J'(0)t + 2 \int_0^t \int_0^t (U + 2h) dt dt.$$

Mivel $U > 0$, azért

$$J(t) > J(0) + J'(0)t + 4 \int_0^t \int_0^t h dt dt,$$

vagyis

$$J(t) > J(0) + J'(0)t + 2ht^2,$$

tehát ha $h > 0$, akkor

$$J(t) \to \infty, \text{ ha } t \to +\infty \text{ (vagy } t \to -\infty),$$

ami nem volna lehetséges, ha valamennyi $r_{ij}(t)$ távolság korlátos volna, mivel akkor az összes tömegpontoknak a tömegközépponttól való $r_i(t)$ távolságai is és ennek következtében $J(t)$ is korlátos volna. A most bizonyított tétel állítása a $h=0$ esetre is könnyen kiterjeszthető.

JACÓBI tétele arra mutat rá, hogy a $h>0$ esetben a mozgás mindenesetre instabilis, és pedig mind a negatív, mind a pozitív t-tengely irányában. Ez az állítás nem zárja ki sem a teljes instabilitást, sem stabilis részrendszerek létezését. G. F. HILMI következő két tétele pedig éppen arról tájékoztat, hogy bizonyos feltételek mellett mind az egyik, mind a másik mozgástípus valóban bekövetkezhetik $t \to +\infty$ (vagy $t \to -\infty$) esetén, ha $h>0$.

3. tétel. *Ha a $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ tömegpontokra vonatkozólag a $t=0$ időpontban teljesülnek az*

$$(1) \qquad s(0)>0,$$

$$(2) \qquad s^2(0)>\frac{8M^*}{r(0)}$$

feltételek, ahol

$$s(t)=\min\left\{\frac{dr_{ij}}{dt}\right\},$$

$$M^*=\frac{M'}{M''},$$

$$M'=\Sigma m_i m_j, \quad M''=\min\left\{\frac{m_i m_j}{m_i+m_j}\right\},$$

akkor

$$r(t)\to\infty, \text{ ha } t\to+\infty,$$

tehát a tömegpontok közti összes távolságok korlátlanul növekednek, ami az 1. tétel szerint csak akkor következhetik be, ha $h \geq 0$.

A bizonyításhoz szükségünk lesz a következő, HILMItől származó egyenlőtlenségre:

$$(3) \qquad r(t) \geq r(0)+s(0)t-\int_0^t\int_0^t \frac{M^*}{r^2}\,dt\,dt, \text{ ha } t\geq 0.$$

Ennek levezetése céljából vezessük be az ú. n. Jacobi-féle koordinátákat. Ezeket a következőképpen definiáljuk. Jelentsék ξ_1, η_1, ζ_1 a P_1 pont koordinátáit egy olyan derékszögű koordinátarendszerben, melynek orientációja nem változik és origója állandóan egybeesik P_0-al; ξ_2, η_2, ζ_2 jelentsék a P_2 pont koordinátáit egy olyan derékszögű koordinátarendszerben, melynek origója egybeesik P_0 és P_1 tömegközéppontjával, stb.; végül $\xi_{n-1}, \eta_{n-1}, \zeta_{n-1}$ jelentse P_{n-1} koordinátáit egy olyan rendszerben, melynek origója egybeesik P_0, $P_1, \ldots, P_{n-3}$ és P_{n-2} tömegközéppontjával; az összes említett koordinátarendszerek megfelelő tengelyei legyenek egymással párhuzamosak. Könnyen igazolható,* hogy a mozgás differenciálegyenletei ezekben a koordinátákban a következőképpen írhatók:

$$(4)\quad \mu_i \frac{d^2\xi_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad \mu_i \frac{d^2\eta_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad \mu_i \frac{d^2\zeta_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

hol

$$\mu_1 = \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1},$$

$$\mu_2 = \frac{(m_0 + m_1) m_2}{m_0 + m_1 + m_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mu_{n-1} = \frac{(m_0 + m_1 + \ldots + m_{n-2}) m_{n-1}}{m_0 + m_1 + \ldots + m_{n-1}},$$

az energiaintegrál pedig a következő alakot ölti:

$$(5)\qquad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i (\xi_i'^2 + \eta_i'^2 + \zeta_i'^2) = U + h.$$

Tekintsük most a P_1 pont relativ mozgását P_0-hoz képest. Az

$$r_{01}^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2$$

identitást kétszer differenciálva

$$r_{01} r_{01}'' + r_{01}'^2 = \xi_1 \xi_1'' + \eta_1 \eta_1'' + \zeta_1 \zeta_1'' + \xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2.$$

Mivel $r_{01}'^2$ a P_1 pontnak P_0-ra vonatkoztatott sebessége radiális komponensének a négyzete, $\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2$ pedig a teljes relatív sebesség négyzete, nyilván

$$r_{01}'^2 \leq \xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2,$$

tehát

$$r_{01} r_{01}'' \geqq \xi_1 \xi_1'' + \eta_1 \eta_1'' + \zeta_1 \zeta_1''.$$

A (4) mozgásegyenletek felhasználásával ez az egyenlőtlenség így írható:

$$r_{01} r_{01}'' \geq \frac{1}{\mu_1} \left(\xi_1 \frac{\partial U}{\partial \xi_1} + \eta_1 \frac{\partial U}{\partial \eta_1} + \zeta_1 \frac{\partial U}{\partial \zeta_1} \right).$$

* L. pl. Wintner, The Analytical Foundations of Celestial Mechanics, § 384—386.

Jelöljük l-el a P_0 pontot a P_1 ponttal összekötő egyenes irányát; akkor az előbbi egyenlőtlenség a következő alakot veszi fel:

$$r''_{01} \geq \frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\xi_1}{r_{01}}\frac{\partial U}{\partial \xi_1} + \frac{\eta_1}{r_{01}}\frac{\partial U}{\partial \eta_1} + \frac{\zeta_1}{r_{01}}\frac{\partial U}{\partial \zeta_1}\right) = \frac{1}{\mu_1}\frac{\partial U}{\partial l}.$$

Ha a $\xi_2, \eta_2, \zeta_2, \ldots, \xi_{n-1}, \eta_{n-1}, \zeta_{n-1}$ Jacobi-koordináták értékeit állandóaknak véve (a $\frac{\partial}{\partial l}$ művelet jelentésének megfelelően) csak a P_1 pont helyzetét P_0-hoz képest meghatározó ξ_1, η_1, ζ_1 koordináták értékeit változtatjuk meg, akkor a közvetlen geometriai szemlélet alapján belátható, hogy a Jacobi-koordináták ilyen megváltoztatásának az r_{ij} távolságoknak olyan megváltozásai felelnek meg, melyek abszolut értékre nem lehetnek nagyobbak, mint a P_0P_1 távolság megváltozása. Ezért

$$\left|\frac{\partial r_{ij}}{\partial l}\right| \leq 1,$$

tehát

$$\frac{\partial U}{\partial l} = -\sum{}^{*}\frac{m_i m_j}{r_{ij}^2}\frac{\partial r_{ij}}{\partial l} \geq -\sum{}^{*}\frac{m_i m_j}{r_{ij}^2}.$$

Figyelembe véve, hogy

$$\mu_1 = \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1} \geq \min\left\{\frac{m_i m_j}{m_i + m_j}\right\} = M'',$$

$$\sum{}^{*}\frac{m_i m_j}{\mu_1} \leq \frac{M'}{M''} = M^*,$$

továbbá, hogy minden t időpontban

$$r(t) = \min\{r_{ij}(t)\} \leq r_{ij}(t) \quad (i, j = 0, 1, \ldots, n-1),$$

azt találjuk, hogy

$$r''_{01} \geq -\frac{M^*}{r^2}.$$

Két ízben integrálva ezt 0-tól egy pozitiv t-ig

$$r_{01}(t) \geq r_{01}(0) + r'_{01}(0)t - \int_0^t\int_0^t \frac{M^*}{r^2}\,dt\,dt,$$

ahonnan a fortiori

$$r_{01}(t) \geq r(0) + s(0)t - \int_0^t\int_0^t \frac{M^*}{r^2}\,dt\,dt.$$

Mivel azonban a P_0 és P_1 pontoknak a rendszer bármely két tömegpontját vehetjük, eredményünket így is írhatjuk:

$$r_{ij}(t) \geq r(0) + s(0)t - \int_0^t \int_0^t \frac{M^*}{r^2}\, dt dt \quad (i, j = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Azonkívül $r(t)$ minden időpontban megegyezik legalább egy $r_{ij}(t)$-vel, tehát

$$r(t) \geq r(0) + s(0)t - \int_0^t \int_0^t \frac{M^*}{r^2}\, dt dt,$$

miáltal a Hilmi-féle egyenlőtlenség be van bizonyítva.

Ezek után térjünk át a 3. tétel bizonyítására. A (2) feltételből következik, hogy

$$\frac{s(0)}{2} - \frac{4M^*}{r(0)s(0)} > 0,$$

de akkor (1) alapján minden $t > 0$-re

$$\frac{r(0)}{2} + \frac{s(0)}{2}t - \frac{4M^*}{r(0)s(0)}t + \frac{4M^*}{s^2(0)} \log\left(1 + \frac{s(0)}{r(0)}t\right) > 0. \tag{6}$$

Továbbá nyilván

$$\int_0^t \frac{M^* dt}{\left(\frac{r(0)}{2} + \frac{s(0)}{2}t\right)^2} = -\frac{4M^*}{s(0)(r(0) + s(0)t)} + \frac{4M^*}{r(0)s(0)},$$

$$\int_0^t \int_0^t \frac{M^* dt dt}{\left(\frac{r(0)}{2} + \frac{s(0)}{2}t\right)^2} = -\frac{4M^*}{s^2(0)} \log\left(1 + \frac{s(0)}{r(0)}t\right) + \frac{4M^*}{r(0)s(0)}t.$$

Ezért (6) a következőképpen írható:

$$\frac{r(0)}{2} + \frac{s(0)}{2}t - \int_0^t \int_0^t \frac{M^* dt dt}{\left(\frac{r(0)}{2} + \frac{s(0)}{2}t\right)^2} > 0. \tag{7}$$

Mivel $r(0) > 0$, azért elegendően kicsiny pozitív t értékekre

$$r(t) > \frac{r(0)}{2} + \frac{s(0)}{2}t. \tag{8}$$

Tekintsük azon $t^* \geq 0$ számok Q halmazát, melyek azzal a tulajdonsággal rendelkeznek, hogy (8) minden t^*-nál nem nagyobb, nem negatív t-re vonatkozólag teljesül. Ha Q korlátos, akkor τ jelentse Q felső határát, ellenkező esetben pedig legyen $\tau = \infty$.

Kimutatjuk, hogy τ nem lehet véges; tegyük ugyanis fel, hogy τ véges értékkel bír, akkor

(9) $$r(t) > \frac{r(0)}{2} + \frac{s(0)}{2} t, \text{ ha } 0 \leq t < \tau,$$

és

(10) $$r(\tau) = \frac{r(0)}{2} + \frac{s(0)}{2} \tau.$$

Másrészt (7) alapján

(11) $$\frac{r(0)}{2} + \frac{s(0)}{2} \tau - \int_0^\tau \int_0^\tau \frac{M^* dt dt}{\left(\frac{r(0)}{2} + \frac{s(0)}{2} t\right)^2} > 0,$$

de akkor (9), (10) és (11)-ből

(12) $$\frac{r(0)}{2} + \frac{s(0)}{2} \tau - \int_0^\tau \int_0^\tau \frac{M^*}{r^2(t)} dt dt.$$

Ha most a (3) egyenlőtlenséget a $t = \tau$ időpontra vonatkoztatjuk, akkor innen és a (12) egyenlőtlenségből

$$r(\tau) > \frac{r(0)}{2} + \frac{s(0)}{2} \tau$$

következik, ami ellentmond (10)-nek. Eszerint $\tau = \infty$, vagyis (8) minden $t > 0$-ra teljesül, de akkor

$$r(t) \to \infty, \text{ ha } t \to +\infty,$$

tehát a tétel be van bizonyítva.

Ha a dinamikai folyamatok reverzibilitására hivatkozva ennek a tételnek az állítását a $t \to -\infty$ esetre vonatkozólag átfogalmazzuk, azt találjuk, hogy ha $h > 0$, akkor lehetségesek olyan mozgások, melyek $t \to -\infty$ esetén teljesen instabilisek. Az 1. tételből azonban az következik, hogy $t \to -\infty$-re teljesen instabilis mozgások csak akkor léphetnek fel, ha $h \geq 0$, a 2. tétel pedig azt mondja, hogy ha $h > 0$, akkor a mozgás az idő változásának mindkét irányában instabilis (bizonyítás nélkül említettük, hogy ugyanez az állítás akkor is helyes, ha $h = 0$). A multban teljesen instabilis mozgások eszerint semmiesetre sem mehetnek át a jövőben stabilis mozgásokba. Ha tehát egy $t \to -\infty$-re teljesen instabilis mozgás egyáltalán vezethet asszociációs folyamatokra, ha $t \to +\infty$, úgy az esetleg keletkező stabilis rendszerek az n tömegpontból álló rendszer tagjainak legfeljebb csak egy részét foglalhatják magukba. Felmerül azonban a kérdés, vajjon egy mozgás teljesen instabilis multja a belőle folyó $h \geq 0$ feltételnél fogva nem zárja-e ki akár csak stabilis részrendszerek kialakulását is? Erre a kérdésre $n=3$ tömegpontból álló rendszerek esetében HILMI következő tétele adja meg a választ:

4. tétel. *Ha $h>0$ és létezik egy oly $R>0$ szám, hogy*

$$\varrho(0)>2R, \tag{13}$$

$$\varrho'(0)>0, \tag{14}$$

$$\frac{1}{2}\varrho(0)<r_{12}(0), \tag{15}$$

$$\frac{1}{2}\varrho(0)<r_{02}(0), \tag{16}$$

$$\varrho'^2(0)-\frac{8M}{\varrho(0)}>\frac{2}{\mu_2}h+\frac{2m_0m_1}{\mu_2 R}, \tag{17}$$

ahol $M=m_0+m_1+m_2$, $\varrho(t)$ pedig a P_2 pontnak a P_0 és P_1 pontok tömegközéppontjától mért távolságát jelenti, akkor

$$\varrho(t)\to\infty, \text{ ha } t\to+\infty,$$

míg minden $t\geq 0$-re

$$r_{01}\leq R$$

marad.

Tekintsük azon $t^*\geq 0$ számok Q halmazát, melyek azzal a tulajdonsággal rendelkeznek, hogy a

$$\varrho(t)>2R \tag{18}$$

$$\varrho'(t)>0 \tag{19}$$

$$\frac{1}{2}\varrho(t)<r_{12}(t) \tag{20}$$

$$\frac{1}{2}\varrho(t)<r_{02}(t) \tag{21}$$

feltételek minden t^*-nál nem nagyobb, nem negatív t értékre teljesülnek. A $\varrho(t)$, $\varrho'(t)$, $r_{12}(t)$ és $r_{02}(t)$ függvények folytonosságából és a (13)—(16) feltételekből következik, hogy a Q halmaz egy intervallum, melynek hossza >0.

Vizsgáljuk először rendszerünk mozgását a $t\in Q$ halmazon. A

$$\varrho^2=\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2$$

azonosságot kétszer differenciálva

$$\varrho\varrho''+\varrho'^2=\xi_2\xi_2''+\eta_2\eta_2''+\zeta_2\zeta_2''+\xi_2'^2+\eta_2'^2+\zeta_2'^2;$$

mivel ϱ'^2 a P_2 pontnak a P_0 és P_1 pontok tömegközéppontjára vonatkoztatott relatív sebessége radiális komponensének a négyzete, míg $\xi_2'^2+\eta_2'^2+\zeta_2'^2$ a teljes relatív sebesség négyzete, nyilván

$$\varrho'^2 \leq \xi_2'^2+\eta_2'^2+\zeta_2'^2,$$

tehát

$$\varrho\varrho'' \geq \xi_2\xi_2''+\eta_2\eta_2''+\zeta_2\zeta_2''.$$

Az (4) mozgásegyenletek felhasználásával

$$\varrho\varrho'' \geq \frac{1}{\mu_2}\left(\xi_2\frac{\partial U}{\partial \xi_2}+\eta_2\frac{\partial U}{\partial \eta_2}+\zeta_2\frac{\partial U}{\partial \zeta_2}\right).$$

Ha a P_0 és P_1 pontok tömegközéppontját a P_2 ponttal összekötő egyenes irányát l-el jelöljük, akkor

$$\varrho'' \geq \frac{1}{\mu_2}\left(\frac{\xi_2}{\varrho}\frac{\partial U}{\partial \xi_2}+\frac{\eta_2}{\varrho}\frac{\partial U}{\partial \eta_2}+\frac{\zeta_2}{\varrho}\frac{\partial U}{\partial \zeta_2}\right)=\frac{1}{\mu_2}\frac{\partial U}{\partial l}.$$

Mivel egyszerű geometriai meggondolásokból következik, hogy

$$\left|\frac{\partial r_{12}}{\partial l}\right| \leq 1, \quad \left|\frac{\partial r_{02}}{\partial l}\right| \leq 1,$$

azért

$$\frac{\partial U}{\partial l}=-\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\frac{\partial r_{12}}{\partial l}-\frac{m_0 m_2}{r_{02}^2}\frac{\partial r_{02}}{\partial l} \geq -\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}-\frac{m_0 m_2}{r_{02}^2}$$

és ennek alapján

$$\varrho'' \geq -\frac{1}{\mu_2}\left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}+\frac{m_0 m_2}{r_{02}^2}\right),$$

majd (20) és (21) figyelembevételével, mivel $\mu_2=\dfrac{(m_0+m_1)m_2}{M}$,

$$\varrho'' \geq -\frac{4M}{\varrho^2}.$$

Ezt az egyenlőtlenséget 2ϱ-val megszorozva és 0-tól egy $t \in Q$ időpontig integrálva

(22) $$\varrho'^2-\frac{8M}{\varrho} \geq \varrho'^2(0)-\frac{8M}{\varrho(0)},$$

továbbá a fortiori

(23) $$\varrho' \geq \sqrt{\varrho'^2(0)-\frac{8M}{\varrho(0)}};$$

megint 0-tól egy $t \in Q$-ig integrálva

(24) $$\varrho \geq \varrho(0)+\sqrt{\varrho'^2(0)-\frac{8M}{\varrho(0)}}\cdot t.$$

Hivatkozzunk most a (4) energiaintegrálra:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i(\xi_i'^2+\eta_i'^2+\zeta_i'^2)=U+h;$$

ezt a

$$\xi_1'^2+\eta_1'^2+\zeta_1'^2\geq 0$$

és

$$\xi_2'^2+\eta_2'^2+\zeta_2'^2\geq\varrho'^2$$

evidens összefüggések felhasználásával a következőképpen alakíthatjuk át:

$$\frac{2m_0m_1}{r_{01}}\geq\mu_2\varrho'^2-2h-\frac{2m_1m_2}{r_{12}}-\frac{2m_0m_2}{r_{02}},$$

vagy

$$(25)\qquad \frac{2m_0m_1}{r_{01}}-\frac{2m_0m_1}{R}\geq\mu_2\varrho'^2-2h-\frac{2m_1m_2}{r_{12}}-\frac{2m_0m_2}{r_{02}}-\frac{2m_0m_1}{R}.$$

Másrészt a (17) és (22) egyenlőtlenségek alapján

$$\varrho'^2-\frac{2}{\mu_2}h-\frac{2m_0m_1}{\mu_2R}-\frac{8M}{\varrho}>0$$

és a fortiori

$$\varrho'^2-\frac{2}{\mu_2}h-\frac{2m_0m_1}{\mu_2R}-\frac{4M}{\varrho}>0.$$

Figyelembe véve, hogy $\mu_2M=m_0m_2+m_1m_2$, az utóbbi egyenlőtlenségből a következőt kapjuk:

$$\mu_2\varrho'^2-2h-\frac{2m_0m_1}{R}-\frac{2m_0m_2}{\frac{1}{2}\varrho}-\frac{2m_1m_2}{\frac{1}{2}\varrho}.$$

Ebből és (20)—(21)-ből

$$\mu_2\varrho'^2-2h-\frac{2m_0m_1}{r_{02}}-\frac{2m_1m_2}{r_{12}}-\frac{2m_0m_1}{R}.$$

Ezt (25)-el egybevetve kapjuk, hogy

$$\frac{2m_0m_1}{r_{01}}-\frac{2m_0m_1}{R}>0,$$

ahonnan

$$(26)\qquad r_{01}<R$$

következik.

Jelentse megint τ a Q halmaz felső határát, ha Q korlátos és legyen $\tau=\infty$ az ellenkező esetben. Mindaz, amit eddig levezettünk, csak $t<\tau$-ra vonatkozólag érvényes, de ha kimutatjuk, hogy $\tau=\infty$, akkor eddigi eredményeinkből következni fog, hogy a (24) egyenlőtlenség minden $t\geq 0$ értékre nézve fennáll.

Tegyük fel, hogy τ véges értékkel bír. Akkor $t=\tau$-ra a

$$\varrho(\tau)=2R, \tag{27}$$

$$\varrho'(\tau)=0, \tag{28}$$

$$\frac{1}{2}\varrho(\tau)=r_{12}(\tau), \tag{29}$$

$$\frac{1}{2}\varrho(\tau)=r_{02}(\tau) \tag{30}$$

egyenlőtlenségek közül legalább az egyiknek teljesülnie kell. A (13), (17) és (24) egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$\varrho(\tau)\geq\varrho(0)+\sqrt{\varrho'^2(0)-\frac{8M}{\varrho(0)}}\cdot t>\varrho(0)>2R,$$

tehát (27) nem következhetik be. Továbbá $\varrho'(t)$ folytonosságából, valamint a (17) és (23) egyenlőtlenségekből

$$\varrho'(\tau)\geq\sqrt{\varrho'^2(0)-\frac{8M}{\varrho(0)}}>0,$$

tehát (28) sem lehetséges. Végül az $r_{01}(t)$ függvény folytonosságából és a (26) egyenlőtlenségből következik, hogy

$$r_{01}(\tau)\leq R<\frac{1}{2}\varrho(0).$$

Másrészt a geometriai szemlélet mutatja, hogy

$$\varrho(\tau)\leq r_{12}(\tau)+r_{01}(\tau), \qquad \varrho(\tau)\leq r_{02}(\tau)+r_{01}(\tau).$$

A két utóbbi egyenlőtlenségből

$$\frac{1}{2}\varrho(\tau)<r_{12}(\tau), \qquad \frac{1}{2}\varrho(\tau)<r_{02}(\tau),$$

tehát (29) és (30) sem következhetik be, úgy hogy $\tau=\infty$, de akkor (24) minden $t\geq 0$-ra érvényes és ezért

$$\varrho(t)\to\infty, \text{ ha } t\to+\infty.$$

Ezáltal a tétel be van bizonyítva. Általánosítása $n>3$ tömegpont esetére eddig még nem sikerült.

HILMI most bizonyított két tétele önmagában természetesen még nem adja meg a választ arra a kérdésre, vajjon egy olyan mozgás, mely a multban teljesen instabilis volt, a jövőben stabilis részrendszerek képződésére vezethet-e. Mivel nyilvánvalóan lehetséges a kezdeti adatokat úgy megválasztani, hogy külön a 3. tétel, illetve külön a 4. tétel feltételei teljesüljenek, e tételekből mindenesetre következik, hogy ha $h>0$, akkor egyrészt lehetséges olyan mozgás, mely a $t \to -\infty$ irányban teljesen instabilis, másrészt lehetséges olyan mozgás is, melynél $t \to +\infty$ esetén stabilis részrendszerek lépnek fel; azonban annak kimutatására, hogy ez a kétféle viselkedésmód egyazon mozgásban kapcsolódhatik egymással, mint annak két ága, a numerikus integráció módszereihez kell folyamodnunk, miként azt SMIDT is tette. Három egymással megegyező tömegű tömegpont mozgásának differenciálegyenletrendszere egy keresett partikuláris megoldásának kezdeti feltételeit sikerült úgy megválasztania, hogy a numerikus eljárással egy bizonyos (véges) időintervallumon meghatározott megoldás két tömegpont asszociációs folyamatának volt tekinthető. Ezen megoldásszakasz kezdetére a (negatív időirányra vonatkoztatott) 3. tétel, végére pedig a (pozitív időirányra vonatkoztatott) 4. tétel premisszái teljesülnek, úgy hogy ezen tételek alapján HILMI 1948-ban ki tudta mutatni, hogy a SMIDT által egy évvel korábban konstruált példa akkor is kaptációs folyamatot reprezentál, ha a mozgást az egész (végtelen) időtengely mentén tekintjük, vagyis a kaptáció fogalmát a fenti definiciónak megfelelő értelemben vesszük. Ezáltal a kaptáció lehetőségének ténye szigorúan be van bizonyítva.

Most hátra van még, hogy a puszta lehetőségen túlmenően a kaptációs folyamatok bekövetkezésének pozitív valószínűségét is kimutassuk. Ez a kérdés rendkívül fontos, mert ezen múlik a kaptációs folyamatok kozmogóniai jelentősége.

Tekintsük három tömegpont mozgásának fázisterét. Ha az m_1 és m_2 tömegpontok relatív mozgását tekintjük az m_0-ra vonatkozólag, a fázistér egy 12 dimenziós euklideszi tér lesz, melynek koordinátáiként a ξ_1, η_1, ζ_1, ξ_2, η_2, ζ_2 Jacobi-féle koordinátákat és a hozzájuk konjugált impulzuskoordinátákat vehetjük. Jelöljük E-vel a fázistér azon pontjainak halmazát, melyeknek koordinátái eleget tesznek a (negatív időirányra vonatkozó) 3. tétel, $\mathcal{E}$-vel pedig azon pontjainak halmazát, melyeknek koordinátái eleget tesznek a (pozitív időirányra vonatkozó) 4. tétel premisszáinak. A SMIDT által konstruált megoldásszakaszt a fázistérben egy olyan görbeív reprezentálja, melynek kezdőpontja E-hez, végpontja pedig $\mathcal{E}$-hez tartozik. A 3. és 4. tételek premisszáinak analitikus alakjából, valamint abból, hogy az r_{ij}, r'_{ij}, valamint az s, ϱ és ϱ' mennyiségek, mint a fázistér koordinátáinak függvényei (a koordináták kezdőpontjától eltekintve) folytonosak, következik, hogy mind az E, mind az $\mathcal{E}$ halmaz nyilt. Ezért a differenciálegyenletrendszerek megoldásainak a kezdeti értékektől való folytonos függésére vonatkozó általános tételekből következik, hogy a Smidt-féle példa kezdőpontjának egy bizonyos olyan G környezete is az E halmazhoz tartozik, melynek összes pontjaiból az $\mathcal{E}$ halmazba átvezető, tehát kaptációs folyamatot realizáló fázisgörbék indulnak ki. Mivel a G halmaz nyilt, azért mértéke >0, miáltal állításunk be van bizonyítva.

О КОСМОГОНИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ О. Ю. ШМИДТА

И. Фельдеш

Излагаются работы Г. Ф. Хильми об устойчивых и полуустойчивых движениях в задаче n тел, в связи с вопросом возможности захвата.

ÜBER DIE KOSMOGONISCHE THEORIE VON O. J. SCHMIDT

I. Földes

Es werden die Arbeiten von G. F. Hilmi über stabile und halbstabile Bewegungen im n-Körperproblem im Zusammenhange mit der Frage der Möglichkeit des Einfanges besprochen.

1952. évi Kossuth-díjasaink munkássága

A Matematikai Lapok minden évben közlik az azévi Kossuth-díjasok dolgozatainak jegyzékét. Ezt az alábbiakban adjuk.

Turán Pál dolgozatainak jegyzéke

1. Über das zweite Hauptproblem der „Factorisation Numerorum" (Szekeres Györggyel), *Acta Litt. ac Scient.* Szeged **6** (1933), p. 143—154.
2. On a problem in the elementary theory of numbers (Erdős Pállal), *Amer. Math. Monthly* **41** (1934), 608—611.
3. Az egész számok prímosztóiról, *Matematikai és Fizikai Lapok* (1934) p. 103—130.
4. On a theorem of Hardy and Ramanujan. *Journ. of the London Math. Soc.* **9** (1934) p. 274—276.
5. Über die arithmetischen Mittel der Fourierreihe. *Journ. of the London Math. Soc.* **10** (1935) p. 277—280.
6. Über einige Verallgemeinerungen eines Satzes von Hardy und Ramanujan. *Journ. of the London Math. Soc.* **11** (1936) p. 125—133.
7. Ein zahlentheoretischer Satz. (Erdős Pállal), *Mitt. Forsch. Inst. für Math. und Mech. Tomsk* (1935), p. 101—103.
8. Über die Vereinfachung eines Landauschen Satzes. (Erdős Pállal) *Mitt. der Forsch. Inst. für Math. und Mech. Tomsk.* (1935) 144—147.
9. On some sequences of integers, (Erdős Pállal) *Journ. of the London Math. Soc.* **11** (1936) p. 261—264.
10. On Interpolation I. (Erdős Pállal), *Ann. of Math.* **38** (1937), p. 142—155.
11. Über die Primzahlen der arithmetischen Progression I. *Acta Litt. ac Scient.* Szeged **8** (1937) p. 226—235.
12. Über den Blochschen Satz. (Grünwald Gézával), *Acta Litt. ac Scient. Szeged* **8** (1937), p. 236—240.
13. Egy szélsőértékfeladat a determináns-elméletben (Szekeres Györggyel), *Math. és Term.-Tud. Értesítő* (1937), p. 796—806.
14. Über Interpolation. (Grünwald Gézával), *Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa* (1938) p. 137—146.
15. Über die monotone Konvergenz der Cesaro-Mittel ber Fourier- und Potenzreihen. *Proc. of the Cambr. Phil. Soc.* **34** (1938), p. 134—143.
16. On Interpolation II. (Erdős Pállal), *Ann of Math.* **39** (1938) p. 702—724.
17. Über die Partialsummen der Fourierreihe. *Journ. of the London Math. Soc.* (1938) p. 278—282.
18. Über die Ableitung von Polynomen. *Compositio Math.* (1939) p. 88—95.
19. Über die Primzahlen der arithmetischen Progression II. *Acta Litt. ac. Scient.* Szeged **9** (1939) p. 187—192.
20. On uniformly dense distribution of certain sequences of points. (Erdős Pállal), *Ann. of Math. Vol.* **41** (1940) p. 162—173.
21. Determinánsokra vonatkozó szélsőértékfeladatok. *Math. és Term.-Tud. Értesítő.* (1940) p. 95—105.

22. On Interpolation III. (Erdős Pállal), *Ann. of Math. Vol.* 41 (1940) p. 510—553.
23. Über die Verteilung der Primzahlen I. *Acta Litt. ac Scient.* Szeged. (1941) p. 81—104.
24. Egy gráfelméleti szélsőértékfeladatról. *Math. és Fiz. Lapok* (1941) p 436—452.
25. On a problem of Sidon in additive number-theory and on some related problems. (Erdős Pállal). *Journ. of London Math. Soc.* 16 (1941) p. 212—215.
26. Über die Wurzeln der Dirichletschen *L*-Functionen. *Acta Litt. ac Scient.* Szeged. T. X. (1943) p. 188—201
27. On rational polynomials, *Acta Univ.* Szeged, (1946) p. 106—113.
28. On a theorem of Littlewood. *Journ. of the London Math. Soc.* (1946) p. 268—275.
29. Sur la theorie des fonctions quasi-analitiques, *Comptes Rendus* Paris, (1947), p. 1750—1752.
30. On the gap-theorem of Fabry. *Hungarica Acta Math.* (1947) Bd. I. 21—29.
31. On Riemann's hypothesis. *Acad. de Sciences de l'URSS Bull.* (1947) p. 197—262.
32. On power-series whose coefficients form a multiply monotonic sequence. *Lőw Immanuel emlékkönyv.* (1947) p. 300—305.
33. On some approximative Dirichlet polynomials in the theory of the zeta-function of Riemann. *Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. Mat.-Fys.* Meddelelser. Bd. XXIV. no. 17. (1948) p, 1 - 36.
34. On certain exponential sums. *Indagationes Math.* Vol. X. fasc. 2. (1948) p. 343—352.
35. On the strong summability of the Fourier-series. *Journ. of Indian Math. Soc.* Vol. XII. (1948), p. 8—12.
36. On some new questions on the distribution of prime-numbers. (Erdős Pállal) *Bull. of Amer. Math. Soc.* Vol. 54 (1948) p. 371—378.
37. On some examples in the theory of power-series. *Bull. of Amer. Math. Soc.* Vol. 54 (1948) p. 932—936.
38. On a problem in the theory of uniform distribution. (Erdős Pállal) *Indagationes Math.* Vol. X. fasc. 5. (1948) p. 370—378 és 406—413.
39. On Descartes-Harriot's rule. *Bull. of Amer. Math. Soc.* (1949) Vol. 55 p. 797—800.
40. On the distribution of real-roots of almost-periodical polynomials. *Publ. Math.* Debr. T. I. Fasc. I. (1949) p. 38—41.
41. Megemlékezés. *Matematikai Lapok* (1949) I. 1. füzet p. 3—16.
42. Remark on a theorem of Fejér. *Publ. Math. Debr.* T. I. Fasc. 2. (1949) p. 95—97.
43. Fejér Lipót matematikai munkássága. *Matematikai Lapok* (1949) I. 3. füzet. p. 160—170.
44. On a new method in the Analysis with applications. *Časopis pro pest mat. a fys.* roc. 74 (1949) p. 123—131.
45. On the distribution of roots of polynomials. (Erdős Pállal) *Ann. of Math.* Vol. 51 (1950) p. 105—119.
46. On the theory of mechanical quadrature. *Acta Szeged* (1950) T. XII. pars A. p. 30—37.
47. A számelmélet újabb eredményei a Szovjetunióban. *Math. Lapok* (1950) I. 4. füzet, p. 243—266.
48. On the remainder-term of the prime-number formula I. *Acta Math. Acad. Scient. Hungaricae. T. I.* Fasc. I. (1950) p. 48—63.
49. On the zeros of the polynomials of Legendre. *Casopis pro pest mat. a fys.* roc. 75 (1950) p. 113—122.
50. On the remainder-term of the prime-number formula. II. *Acta Math. Hung. T. I.* Fasc. 3—4. (1950) p. 155—166.

51. On approximative solution of algebraic equations. *Publ. Math. Debr.* T. II Fasc. 1. (1951) p. 26—42.
52. A note on Fermat's conjecture *Journ. of the Indian Math. Soc.* Vol. XV. Part A (March-June) 1951 p. 47—50.
53. On a certain point of the kinetical gas theory. (Egerváry Jenővel) *Studia Math.* (1951) p. 170—180.
54. On Carlson's theorem in the theory of zeta-function of Riemann. *Acta Math. Hung.* T. II. Fasc. 1—2. (1951) p. 39—73.
55. Magasabbfokú algebrai egyenletek közelítő megoldásáról. Magy. Tud. Akad. *Mat. és Fiz. Oszt. Közleményei* I. 1. füzet (1951) p. 279—287.
56. A kinetikus gázelmélet bizonyos kérdéseiről. (Egerváry Jenővel). Magy. Tud. Akad. *Mat. és Fiz. Oszt. Közl.* I. 3—4. füz. (1951) p. 303—314.
57. Két bizonyítás Jánossy Lajos egy tételére. (Rényi Alfréddal) A Magy. Tud. Akad. *Math. és Fiz. Oszt. Közl.* I. köt. 2 4. füz. (1951) p. 369—370.
58. A függvényfogalom bevezetéséről. Litografált K. M. kiadás. (1951)
59. Az egész számok bizonyos sorozatairól. Litografált K. M. kiadás. (1952)
60. On an application of the typical means in the theory of zeta-function of Riemann. *Comm. du Sém. Math. de l'Univ. de Lund.* Tome suppl. ded. a M. Riesz (1952) p. 239—252.
61. On a trigonometrical sum. Megjelenés alatt a H. Steinhaus jubileumi kötetben a *Studia Math.* c. folyóiratban.
62. On a property of lacunary power-series. Megjelenés alatt az *Acta Univ.* Szeged-ben.
63. Az analizis egy módszerének újabb alkalmazásairól, A *Magy. Tud. Akad. Mat. és Fiz. Oszt. Közl.* II. kötet (1952) p. 145—153.
64. Az analizis egy új módszeréről és annak alkalmazásairól. (Über eine neue Methode der Analysis und ihre Anwendungen.) Könyv, megjelenik magyarul és németül a Magy Tud. Akadémia kiadásában.
65. Sur l'algèbre fonctionnelle. Sajtó alatt az I. Magyar Magyar Math. Kongresszus kiadványában.
66. On the theory of graphs. Sajtó alatt a *Colloq. Math.* c. lengyel folyóiratban.
67. On a new analytical method and its applications. Sajtó alatt az *Ann. de la Societè Polonaise* c. folyóiratban.
68. A second note on Fermat's conjecture. (Dénes Péterrel). Sajtó alatt az *Acta Math. Hung.*-ban.
69. On D. Bernoulli—Lobatshewski—Graeffe's method, (Rényi Alfréddel). Sajtó alatt az *Acta Math. Hung.*-ban.
70. On a problem of K. Zarankiewicz. (Turán Verával és Kővári Tamással). Sajtó alatt a *Colloq. Math.*-ban.

Szele Tibor dolgozatai

1. Kombinatórikai vizsgálatok az irányított teljes gráffal kapcsolatban. *Matematikai és Fizikai Lapok,* **50** (1943), 223—256.
2. Über die endlichen Ordnungszahlen zu denen nur eine Gruppe gehört. *Commentarii Math. Helvetici* **20** (1947), 265—267.
3. Ein Beweis des Ruffini-Abelschen Satzes. *Commentarii Math. Helvetici.* **20** (1947), 268 269.
4. Algebraisch-zahlentheoretische Betrachtungen über Ringe. I. (Rédei Lászlóval közösen.) *Acta Math.* Uppsala, **79** (1947), 291—320.
5. Ein Satz über die Struktur der endlichen Ringe. *Acti Sci. Math.* Szeged, **11** (1948), 246—250.
6. Eine kennzeichnende Eigenschaft der Schiefkörper. *Commentarii Math. Helvetici,* **22** (1949), 115—116.

7. Über die direkten Teiler der endlichen Abelschen Gruppen. *Commentarii Math. Helvetici,* **22** (1949), 117—124.
8. Une généralisation de la congruence de Fermat. *Matematisk Tidsskrift,* B, 1948, 57—59.
9. Die Abelschen Gruppen ohne eigentliche Endomorphismen. *Acta Sci. Math.* Szeged, **13** (1949), 54—56.
10. Neuer vereinfachter Beweis des gruppentheorischen Satzes von Hajós. *Publicationes Math.* Debrecen, **1** (1949), 52—62.
11. Sur la décomposition des groupes abéliens. *Comptes rendus,* Paris, **229** (1949), 1052—1053.
12. Zur Theorie der Zeroringe. *Math. Annalen,* **121** (1949), 242—246.
13. Algebraisch-zahlentheorische Betrachtungen über Ringe. II. (Rédei Lászlóval közösen.) *Acta Math.* Uppsala, **82** (1950), 209—241.
14. Über die Abelschen Gruppen mit nullteilerfreiem Endomorphismenring. *Publicationes Math* Debrecen, **1** (1949), 89—91.
15. Über die Klassifikation der quadratischen Formen. *Publicationes Math.* Debrecen **1** (1950), 189—192.
16. Die Ringe ersten Ranges. (Rédei Lászlóval közösen.) *Acta Sci. Math.* Szeged, **12**/A, (1950), 18—29.
17. Die Ringe ohne Linksideale. *Buletin Stiintific,* Bucuresti, **1**, (1950), 783—789.
18. Die unendliche Quaternionengruppe. *Buletin Stiintific.* Bucuresti **1**, (1950), 790—801.
19. On Zorn's lemma. *Publicationes Math.* Debrecen, **1**, (1950), 254—256.
20. Über drei wichtige Gruppen. (Szélpál Istvánnal közösen.) *Acta Sci. Math.* Szeged, **13**, (1950), 192—194.
21. Elemi geometriai problémák megoldása vektorokkal. (A középiskolai matematikatanítás kérdései. A szoc. nevelés kiskönyvtára. 4. sz. 75—93.)
22. Ein Analogon der Körpertheorie für Abelsche Gruppen. *Journal f. d. reine u. angew. Math.* **188**, (1950), 167—192.
23. Sur les groupes ayant un sous-groupe parfait. *Bull. Sci. Math.* Paris **74**, (1950), 207—209.
24. Periodische zyklische Differenzenmatrizen. *Acta Math.* Uppsala, **84**, (1951), 181—187.
25. A komplex számok bevezetése vektoralgebrai alapon. *Matematikai Lapok,* **1**, (1951), 349—362.
26. Gruppentheorische Beziehungen bei gewissen Ringkonstruktionen. *Math. Zeitschrift,* **54**, (1951), 168—180.
27. On direct sums of cyclic groups. *Publicationes Math.* Debrecen, **2**, (1951), 76—78.
28. Ein Zerfällungssatz für radikalfreie Ringe. — Megjelenés alatt az I. Magyar Matematikai Kongresszus anyagában.
29. On a theorem of Pontrjagin. *Acta Math. Hung.* **2**, (1951), 121—123.
30. On abelian groups with commutative endomorphism. ring. (Szendrei Jánossal közösen) — Megjelenés alatt az *Acta Math Hung.* 2. kötetében.
31. On abelian groups every endomorphic image of which is a direct summand. (Kertész Andorral közösen.) *Acta Sci. Math.* Szeged, **14**, (1952), 157—166
32. On orderable skew fields. — Megjelenés alatt a *Proc. Amer. Math. Soc.* 3. kötetében.
33. On direct decomposition of abelian groups. — Megjelenés alatt a *J. London Math. Soc.* 27. kötetében.
34. Beszámoló a hazánkban folyó absztrakt algebrai kutatásokról. Megjelenés alatt az *Akadémiai Osztályközleményekben*
35. Introduction of complex numbers as vectors of the plane. (Fuchs Lászlóval közösen.) Megjelenés alatt az *Amer. Math. Monthly* 59. kötetében.

36. Az egységgyökök multiplikatív csoportjáról. — Megjelenés alatt az *Akadémiai Osztályközleményekben.*
37. On direct sums of cyclic groups with one amalgamated subgroup. — Megjelenés alatt a *Publ. Math.* Debrecen 2. kötetében.
38. Újabb szovjet eredmények az absztrakt algebra területén. (Fuchs Lászlóval közösen.) — Megjelenés alatt a *Matematikai Lapokban.*

Varga Ottó dolgozatai

1. Beiträge zur Theorie der Finslerschen Räume und der affinzusammenhängende Räume von Linienelementen. *Lotcs,* Prag, **84** (1936), 1—4.
2. Integralgeometrie 3. Croftons Formeln für den Raum. *Math. Z.* **40** (1935), 384—405.
3. Integralgeometrie 8. Über Masse von Paaren linearer Mannigfaltigkeiten im projektiven Raum P_n. *Rev. Mat. Hispano-Americana,* 1935, 241—279.
4. Integralgeometrie 9. Über Mittelwerte an Eikörpern. *Mathematica* **12**, 65—80. W. Blaschke-val közösen írt dolgozat.
5. Integralgeometrie 19. Mittelwerte an dem Durchschnitt bewegter Flächen. *Math. Z.* **41** (1936), 768—784.
6. Integralgeometrie 24. Über die Schiebungen im Raum. *Math. Z.* (1937), 710—736. L. Berwalddal közösen írt dolgozat.
7. Über die Integralvarianten, die zu einer Kurve in der Hermiteschen Geometrie gehören. *Acta Sci. Math.* Szeged, **9** (1939), 88—102.
8. Zur Herleitung des invarianten Differentials in Finslerschen Räumen. *Monatshefte f. Math. u. Phys.* **50** (1941), 165—175.
9. Zur Differentialgeometrie der Hyperflächen in Finslerschen Räumen. *Deutsche Math.* **6** (1941), 192—212.
10. Az invariáns differenciál megállapítása a Finsler-féle terekben. *Mat. és Fiz. Lapok,* (1941), 423—435.
11. Zur Begründung der Minkowskischen Geometrie. *Acta Sci. Math.* Szeged **10** (1943), 149—163.
12. A Finsler-féle geometria felépítése a Minkowski-féle simuló mértékmeghatározással *Mat. és Term. Ért.* **61** (1942), 14—21.
13. Az állandó görbületi Riemann-féle terek egyik jellemzési módjáról. *Mat. és Fiz. Lapok,* **50** (1943), 34—39.
14. Linienelementenräume, deren Zusammenhang durch eine beliebige Transformationsgruppe bestimmt ist. *Acta Sci. Math.* Szeged, **11** (1946), 55—62.
15. Über eine Klasse von Finslerschen Räumen, die die nichteuklidischen verallgemeinern. *Comm. Math. Helv.* **19** (1946), 367—380.
16. Über die Lösung differentialgeometrischen Fragen in der nichteuklidischen Geometrie unter gleichzeitiger Verwendung homogener und inhomogener Koordinaten. *Hung. Acta Math.* **1** (1948).
17. Vektorfelder, deren kovariante Ableitung längs einer vorgegebenen Kurve verschwindet *Hung. Acta Math.* **1** (1948).
18. Über affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Linienelementen insbesondere deren Äquivalenz. *Publ. Math.* Debrecen, **1** (1949), 7—17.
19. Bemerkung zur Arbeit des Herrn A. Dinghas „Zur Metrik nichteuklidischer Räume". *Math. Nachrichten.* **2** (1949), 386—388.
20. Affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Linienelementen, die ein Inhaltsmass besitzen. *Proc. Acad.* Amsterdam, **52** (1950), 316—22.
21. Über den Zusammenhang der Krümmungsaffinoren in zwei eindeutig aufeinander abgebildeten Finslerschen Raumen. *Acta Sci. Math.* Szeged, **12** (1950), 132—135.
22. Über das Krümmungsmass in Finslerschen Räumen. *Publ. Math.* Debrecen, **1** (1950), 116—122.

23. Az integrálgeometria alkalmazásai a geometriai optikában. Elhangzott az Akadémia nagyheti előadássorozatában. A MTA *Mat. és Term. tud. Osztály Közl.* I. (1951), 192—201.
24. Normálkoordinaten in allgemeinen Räumen und ihre Verwendung zur Bestimmung sämtlicher Differentialinvarianten. Megjelenik az első Magyar Matematikai Kongresszus anyagában.
25. Anwendung von *P*-Vektoren auf derivierte Matrizen. (Közösen Gyires Bélával.) *Publ. Math.* Debrecen, 2, fasc 2, (1952), 137—145.
26. Szovjet eredmények a differenciálgeometriában. (*Matematikai Lapok*, II. évf. 3—4. sz. 190—218 o.
27. Eine geometrische Charakterisierung der Finslerschen Räume skalarer und konstanter Krümmung (Akadémiai székfoglaló, megjelenik az *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae*-ban).

Az 1951. évi Schweitzer Miklós matematikai verseny

Írta: Szele Tibor
a versenybizottság előadója

A Bolyai János Matematikai Társulat 1949-ben és 1950-ben már kétízben rendezte meg a Schweitzer Miklós emlékversenyt. Az 1950-es verseny tapasztalatai alapján az 1951-es versenyt is úgy rendezte meg a Társulat, hogy a versenyzők egy heti gondolkodási időt kapjanak a feladatok megoldására. A kitűzött feladatok 1951 december 1-én 13 órakor nyertek kifüggesztést az alábbi matematikai intézetek hirdetőtábláin:

1. Budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem Matematikai Intézete.
2. Budapesti Műszaki Egyetem I. sz. Matematikai Tanszék.
3. Budapesti Műszaki Egyetem II. sz. Matematikai Tanszék.
4. Budapesti Műszaki Egyetem III. sz. Matematikai Tanszék.
5. Budapesti Műszaki Egyetem IV. sz. Matematikai Tanszék.
6. Budapesti Műszaki Egyetem Villamosmérnöki Matematikai Tanszék.
7. A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézete.
8. A Közgazdasági Egyetem Matematikai Tanszéke.
9. Állami Műszaki Főiskola, Budapest.
10. Állami Pedagógiai Főiskola, Budapest.
11. Állami Pedagógiai Főiskola, Szeged.
12. Állami Pedagógiai Főiskola, Pécs.
13. Állami Pedagógiai Főiskola, Eger.
14. A Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete.
15. A Debreceni Tudományegyetem Matematikai Intézete.
16. A Miskolci Nehézipari Műszaki Egyetem Matematikai Tanszéke.
17. A Veszprémi Nehézvegyipari Műszaki Egyetem Matematikai Tanszéke.

A megoldások benyújtásának, illetve postára adásának végső határideje december 8. volt. A versenyen résztvehetett minden egyetemi vagy főiskolai hallgató, továbbá mindazok, akik az egyetemet vagy főiskolát 1951-ben fejezték be.

A verseny tételei a következők voltak:

1. Bizonyítsuk be, hogy ha a harmonikus sornak olyan tagjait választjuk ki, amelyek konvergens sort alkotnak, akkor a kiválasztott tagok az eredeti sorban zérus sűrűséggel helyezkednek el.

2. Valós számokból álló $S=(s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots)$ sorozatok bizonyos H halmazára legyen értelmezve egy $f(S)$ valós értékű függvény, amelyet a sorozat *kvázilimeszének* nevezünk. Feltesszük, hogy az S sorozattal együtt $S'=(s_2, s_3, \ldots, s_{n+1}, \ldots)$ is a H halmazhoz tartozik, továbbá, hogy ha az $S=(s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots)$ és $T=(t_1, t_2, t_n, \ldots)$ sorozatok H-hoz tartoznak, akkor $S+T=(s_1+t_1, s_2+t_2, \ldots, s_n+t_n, \ldots)$ és $ST=(s_1t_1, s_2t_2, \ldots, s_nt_n, \ldots)$ is mindig H-hoz tartozik. Ezenfelül az $f(S)$ függvényre teljesülnek még a következők:

a) Ha $S=(c, c, \ldots, c, \ldots)$, akkor $f(S)=c$.

b) Nemnegatív tagokból álló H-beli S sorozatra $f(S)\geqq 0$.

c) $f(S+T)=f(S)+f(T)$.

d) $f(ST)=f(S)f(T)$.

e) $f(S')=f(S)$.

Bebizonyítandó, hogy e feltételek teljesülése esetén a H halmazhoz tartozó bármelyik S sorozat kvázilimesze csak S egyik torlódási helye lehet.

3. Tekintsük az $x=x_0$ pontból kiinduló és az $x_{n+1}=f(x_n)$ képlettel értelmezett iterációs sorozatot, ahol $f(x)=4x-4x^2$. Megállapítandó, hogy a $[0, 1]$ zárt intervallum mely x_0 pontjaiból kiinduló iterációs sorozatok konvergensek és mi a határértékük.

4. Bebizonyítandó, hogy az

$$1-\frac{1}{x(x+1)}-\frac{x-1}{2!x^2(2x+1)}-\frac{(x-1)(2x-1)}{3!x^3(3x+1)}-\frac{(x-1)(2x-1)(3x-1)}{4!\,x^4(4x+1)}-\ldots$$

végtelen sor minden pozitív x értékre konvergens. Összegét $F(x)$-el jelöljük. Meghatározandó

$$\lim_{x\to+0} F(x) \text{ és } \lim_{x\to+\infty} F(x).$$

5. Egy tóban a halak 18%-a harcsa, 2%-a kecsege és 80%-a egyéb halfajtákhoz tartozik. Kihalászunk 10 halat, s ezek közül a harcsák számát x-el, a kecsegék számát y-nal jelöljük. Megállapítandó az $\dfrac{x}{1+y}$ hányados várható értéke.

6. A teniszben minden labdamenet azzal végződik, hogy a két szembenálló fél egyike egy pontot szerez. *Játékot* az nyer, aki előbb szerez legalább négy pontot úgy, hogy ellenfelének ugyanakkor még legalább kettővel kevesebb pontja van. A *játszmát* pedig az a fél nyeri meg, aki előbb nyer legalább hat játékot úgy, hogy ellenfelének addig legalább kettővel kevesebb játékot sikerült csupán nyernie. Az összes pontoknak legalább hány százalékát nyeri meg egy játszma során a győztes fél?

7. Legyen $f(x)$ olyan polinom, amelyre $f(0)=0$, továbbá

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

mindig egész szám, valahányszor a és b különböző egész számok. Van-e az ilyen tulajdonságú polinomok között olyan, amelynek nem mindegyik együtthatója egész szám?

8. Jelentsen n háromnál nagyobb egész számot. Bebizonyítandó, hogy az összes, pozitív egész tényezőjű $x_1 x_2 \ldots x_k$ szorzatok legkisebb közös többszöröse kisebb $n!$-nál, ha $x_1+x_2+\cdots+x_k \leqq n$.

9. Válasszunk ki bizonyos kongruenciákat a végtelen sok

$$x \equiv 2m^2 \mod (2m-1), \qquad m=1,2,3,\ldots$$

kongruencia közül. Mikor van és mikor nincs a kiválasztott kongruenciáknak közös megoldása?

10. Legyen $f(x)$ egész együtthatójú polinom, p pedig törzsszám. Jelöljük $z_1,\ldots,z_{p-1}$-el a $(p-1)$-edik egységgyököket. Bizonyítsuk be, hogy

$$f(z_1)f(z_2)\ldots f(z_{p-1}) \equiv f(1)f(2)\ldots f(p-1) \mod p.$$

11. Bizonyítsuk be a következőt: Természetes számok bármely n, r párjához található olyan $f(x)$ egész együtthatójú n-edfokú polinom, hogy minden olyan legfeljebb n-edfokú $g(x)$ polinom irreducibilis (a racionális számtestben), amelyre az $f(x)-g(x)$ polinom együtthatóinak abszolút értékei r-nél nem nagyobb egész számok.

12. Nevezzük számelméleti függvénynek az olyan függvényt, amelynek értelmezési tartománya az összes egész számok halmaza, és értékkészlete is e halmazba esik. Vannak-e olyan $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots$ számelméleti függvények, amelyekre igaz, hogy bármely $F(x)$ számelméleti függvény pontosan egyféleképpen előállítható

$$F(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(x)$$

alakban, ahol $a_0, a_1, a_2, \ldots$ egész számok?

13. Egy $2n$-edrendű determinánsnak csak azok az elemei különböznek zérustól, amelyek sor- és oszlopindexének különbsége n-nel osztható. Hány tagból áll a determináns teljes kifejtése?

14. Egy véges kommutativ csoport összes elemének szorzata mikor egyenlő a csoport egységelemével és mikor nem?

15. Forgassuk a $z = x$, $y = 0$ egyenest egyenletesen a z-tengely körül úgy, hogy közben az egyenes és a z-tengely metszéspontja egyenletes mozgást végezzen.

a) Meghatározandó az a forgásfelület, amelyre a keletkező torzcsavarfelület lefejthető (azaz izometrikusan leképezhető).

b) Megállapítandó, hogy a torzcsavarfelület tengelye és alkotói a lefejtésnél a forgásfelület milyen vonalaiba mennek át?

16. Egy felületet geodetikus vonalak két seregének mindegyike egyrétűen fed be. A két sereg vonalai egymást állandó szög alatt metszik. Bebizonyítandó, hogy ekkor a felület lefejthető a síkra.

17. Bizonyítsuk be, hogy a projektiv síkot egy zárt poligon akkor és csak akkor osztja két részre, ha van oly egyenes, amelyet a poligonnak páros számú határoló szakasza metsz. (A poligon határoló szakaszai között a véges szakaszokon kívül lehetnek olyanok is, amelyek a végtelenen keresztül záródnak.)

A versenyen 26 versenyző vett részt és összesen 160 megoldást nyújtott be. A verseny eredménye rendkívül sikeresnek mondható. Noha a bizottság jónak látta a versenyzési kedv fokozása érdekében néhány könnyebb feladat kitűzését is, a feladatoknak több mint fele kétségtelenül számottevő erőpróba volt a versenyzők számára. Ennek ellenére számos változatos és ötletes megoldás érkezett be a nehezebb feladatokra is, úgyhogy a bizottságnak komoly gondot okozott a legjobb versenyzők rangsorolása még a díjazottak, illetve dícséretben részesítettek számának felemelése mellett is. A bizottság megállapítja, hogy a verseny ilyen nagymértékű sikere örvendetes jele annak, hogy azok a széleskörű és nagyszabású törekvések, amelyek hazánkban az utóbbi évek során a matematikai oktatás színvonalának emelése és eredményességének fokozása érdekében — jelentékeny részben éppen a Bolyai János Matematikai Társulat kezdeményezése nyomán — érvényesültek, már eddig is gyümölcsözőknek bizonyultak.

A versenybizottság a díjazottakra, illetve dícséretben részesítettekre vonatkozólag a következőképpen döntött. Az első díjat *Kővári Tamásnak*, az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kara IV. éves hallgatójának ítélte oda. Kővári dolgozata a 9. és 17. feladat kivételével valamennyi feladat teljes, kifogástalan és kitűnően megfogalmazott megoldását tartalmazza, s a 9. és 17. feladatra adott megoldása is majdnem teljes. Kiemeli a bizottság, hogy Kővári számos feladat megoldásában messze túlment a kitűzött célon, élesítéseit, illetve általánosításait adván a problémának. Ügyes ellenpéldákat is konstruált. — A második díjat *Gehér Lászlónak,* az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kara III. éves hallgatójának ítélte a bizottság. Gehér dolgozatában a 4., 15., 17. feladat kivételével az összes feladatra helyes megoldást ad, s részben a 4. feladatot is megoldja. Gehér megoldásait is igen figyelemreméltó matematikai érzék, ötletesség és ügyesség jellemzi. — A bizottság két harmadik díjat is adott ki, éspedig *Károlyházy Frigyes* és *Sós Vera* részére, akik ugyanazon egyetem IV. éves hallgatói. Károlyházi Frigyes dolgozata az 1., 2., 3., 5., 7., 8., 10., 12., 13., 15., 16., 17. feladatra, míg Sós Veráé az 1., 2., 3., 5., 6., 7., 8., 10., 11., 12., 13., 14., 15., 16. feladatra tartalmaz igen szép, teljes megoldásokat. Ezenfelül Sós Vera a 17. feladatot is majdnem teljesen megoldotta.

A bizottság több feladat különösen ügyes, ötletes, illetve általánosított megoldásáért dícséretben részesítette az alábbi versenyzőket: *Kis Ottó* és *Lipták Tamás,* a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karának hallgatói, *Kertész Andor* aspiráns és *Soós Gyula* egyetemi gyakornok, a debreceni Tudományegyetem Természettudományi Karának volt, illetve jelenleg IV. éves hallgatói, *Hosszú Miklós* miskolci műszaki egyetemi tanársegéd, *Korányi Ádám* és *Pintér Lajos,* a szegedi Tudományegyetem Természettudományi Karának II. éves, illetve volt hallgatói.

Megemlíti a bizottság, hogy *Kis Ottó* dolgozata majdnem egyenlő értékű a harmadik díjjal jutalmazott dolgozatokkal, úgyhogy megfelelő lehetőség esetén a bizottság őt is harmadik díjban részesíthette volna. Végül kiemelendőnek tartja a bizottság *László Zoltán* I. éves debreceni matematika-fizika szakos hallgató dolgozatát, akinek teljesítménye igen figyelemreméltó ahhoz képest, hogy László a versenyen való részvétele idején még csupán alig néhány hónapja folytatott egyetemi tanulmányokat.

A versenybizottság:
Barna Béla
Gyarmati László
Gyires Béla
Rapcsák András
Szele Tibor
Szénási Barna
Varga Ottó

A feladatok megoldásai a következők:

1. feladat

I. megoldás. Legyen a kiválasztott konvergens részsorozat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$, ahol $a_n < a_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Ekkor tetszőlegesen előírt pozitív ε-hoz megválasztható a $N = N(\varepsilon)$ természetes szám úgy, hogy

$$(1) \qquad \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

legyen. Megmutatjuk, hogy ekkor

$$(2) \qquad k \geqq 2N$$

esetén mindig

$$(3) \qquad \frac{k}{a_k} < \varepsilon$$

teljesül, ami éppen az igazolandó eredmény. Ámde (2) alapján $k - N \geqq \frac{k}{2}$, úgyhogy (1) szerint

$$\frac{k}{2a_k} \leqq \frac{k-N}{a_k} < \frac{1}{a_{N+1}} + \cdots + \frac{1}{a_k} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Gehér László
Károlyházi Frigyes
Korányi Ádám
Lipták Tamás

II. megoldás. Bontsuk fel a harmonikus sort a jól ismert módon $2, 2, 2^2, 2^3, \ldots$ tagú szakaszokra:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots +$$
$$+ \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) + \cdots,$$

és tegyük fel, hogy a kiválasztott részsor nem zérus-sűrűségű. Ekkor van olyan ε_0 pozitív szám, hogy végtelen sok szakaszon lesz az onnan kiválasztott tagok relatív sűrűsége $\geqq \varepsilon_0$. E végtelen sok szakasz bármelyikéből kiválasztott tagok összege nem kisebb, mint

$$2^{n-1} \varepsilon_0 \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{\varepsilon_0}{2},$$

úgyhogy a kiválasztott sor divergens.

Hosszú Miklós

III. megoldás. (Ezt a megoldást *Rényi Alfréd* professzor bocsátotta a bizottság rendelkezésére.) A kiválasztott részsor

$$(4)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e_k}{k}$$

alakban írható, ahol e_k értéke 0 vagy 1. Jelöljük s_n-nel a részsor

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{e_k}{k}$$

n-edik részletösszegét, σ_n-nel pedig az első n részletösszeg számtani közepét:

$$\sigma_n=\frac{1}{n}(s_1+\cdots+s_k).$$

Ekkor

$$(n+1)s_n-n\sigma_n=(n+1)\left(\frac{e_1}{1}+\frac{e_2}{2}+\cdots+\frac{e_n}{n}\right)-$$

$$-\left(\frac{ne_1}{1}+\frac{(n-1)e_2}{2}+\cdots+\frac{e_n}{n}\right)=e_1+e_2+\cdots+e_n,$$

úgyhogy $\frac{1}{n}(e_1+\cdots+e_n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)s_n-\sigma_n$. Minthogy a (4) alatti sor föltevésünk szerint konvergens, $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n-\sigma_n)=0$, azaz

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e_1+\cdots+e_n}{n}=\lim_{n\to\infty}(s_n-\sigma_n)+\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{n}=0.$$

Ez pedig éppen az igazolandó állítás.

Megjegyzés. Kővári Tamás és *Sós Vera* a feladat megoldásán túlmenve azt is megmutatták, hogy a tétel nem igaz a harmonikus sornál (bizonyos értelemben) gyengébben divergáló sorra. Nevezetesen: ha $\Sigma\frac{1}{b_n}$ monoton fogyó, pozitív tagokból álló olyan divergens sor, amelyre $\frac{b_n}{n}\to\infty$, akkor a sornak van nem zérus-sűrűségű konvergens részsora. Kővári Tamás egyszerű és ügyes példája szerint a

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$$

sornak van olyan konvergens részsora, amelyre

$$\frac{U(N)}{N}\geqq\frac{1}{2}$$

végtelen sok N értéknél teljesül, $U(N)$-nel az alapul vett sor első N tagja közül kiválasztott tagok számát jelölve. A kiválasztott tagok indexeinek sorozata legyen:

$$3+1, 3+2, 3+3;\ 3^{2^2}+1, 3^{2^2}+2, \ldots, 2\cdot 3^{2^2}; \ldots;$$
$$\ldots; 3^{n^2}+1, 3^{n^2}+2, \ldots, 2\cdot 3^{n^2}; \ldots$$

Ekkor nyilván

$$\frac{U(2\cdot 3^{n^2})}{2\cdot 3^{n^2}} > \frac{3^{n^2}}{2\cdot 3^{n^2}} = \frac{1}{2},$$

viszont a kiválasztott tagok összege

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{3^{n^2}} \frac{1}{(3^{n^2}+k)\log(3^{n^2}+k)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2}}{3^{n^2}\log 3^{n^2}} = \frac{1}{\log 3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty.$$

Az 1. feladatot megoldotta még: *Fried Ervin, Horóczi Ferenc, Kertész Andor, Kis Ottó, Pintér Lajos.*

2. feladat

A feladat megoldói valamennyien észrevették, hogy a feladat állítása a kitűzött formában, egy további feltétel kikötése nélkül, nem igaz. *Kővári Tamás* ellenpéldája: Tekintsük az összes olyan pozitív fokú $f(x)$ polinomok halmazát, amelyek valamennyi együtthatója nemnegatív egész szám, s álljon a H halmaz az összes

$$S\colon f(1), f(2), f(3), \ldots$$

sorozatokból. Definiáljuk továbbá a kvázilimeszt úgy, hogy ez bármely H-beli sorozatra 0 legyen. Ekkor valamennyi kitűzött feltétel teljesül. (Pl. egy S sorozattal együtt S' is benne van H-ban, mert $f(x)$-el együtt $f(x+1)$ is a tekintett polinomok közé tartozik. Az *a)* feltétel viszont azért teljesül, mert nincsen olyan sorozat H-ban, amelyre *a)* vonatkoznék.) A tétel állítása azonban nyilván nem igaz.

Helyessé válik a tétel, ha feltesszük még, hogy a $(-1, -1, -1, \ldots)$ sorozat benne van H-ban. Ezt *Fried Ervin, Kővári Tamás* és *Sós Vera* vette észre. A feladat többi megoldói azt az erősebb kikötést tették, hogy H tartalmazza a $(c, c, c, \ldots)$ sorozatot, bármely c valós számra.

Megoldás. Tegyük fel, hogy van olyan $S=(s_1, s_2, s_3, \ldots)$ H-beli sorozat, amelynek $f(S)=\sigma$ kvázilimesze nem torlódási helye S-nek. Ekkor az S sorozat elejéről véges számú tagot elhagyva, a megrövidített sorozat bármely s_n tagjára

(1) $$|s_n-\sigma| > \varepsilon,$$

ahol ε alkalmas pozitív szám. Jelöljük a (szintén H-hoz tartozó) megrövidített sorozatot ugyancsak $S=(s_1, s_2, s_3, \ldots)$-el. Ekkor (1) bármely n természetes számra teljesül. Legyen most u olyan természetes szám, hogy

$$u\varepsilon > 2. \tag{2}$$

Ekkor (1) alapján $|us_n - u\sigma| > 2$, azaz $[u\sigma] = v$-re*

$$|us_n - v| > 1,$$

$$(us_n - v)^2 - 1 > 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3}$$

Abból a feltevésünkből, hogy a $-E = (-1, -1, -1, \ldots)$ sorozat benne van H-ban, következik, hogy $(-E)\cdot(-E) = (1, 1, 1, \ldots) = E$ is, továbbá e két sorozattal együtt az $(a, a, a, \ldots)$ sorozat is eleme H-nak bármely a egész szám esetén. Ennélfogva az $uS + (-v, -v, -v, \ldots)$ sorozat is benne van H-ban, valamint ennek önmagával való szorzata is. Az utóbbi sorozat kvázilimesze feltevéseink szerint $(u\sigma - v)^2 < 1$, lévén $v = [u\sigma]$. Ennélfogva a (3) szerint csupa pozitív tagokból álló H-beli $((us_n - v)^2 - 1)$ sorozat kvázilimesze

$$(u\sigma - v)^2 - 1 < 0,$$

ellentétben a *b)* követelménnyel. Ez az ellentmondás bizonyítja a tétel helyességét.

Kővári Tamás

A 2. feladatot megoldotta még: *Fried Ervin, Gehér László, Hajnal András, Hosszú Miklós, Károlyházy Frigyes, Kis Ottó, Lipták Tamás, Pintér Lajos, Sós Vera.*

3. feladat

Megoldás. Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy $0 \leqq x \leqq 1$ esetén $0 \leqq f(x) \leqq 1$, úgyhogy a $[0, 1]$ intervallum valamely pontjából kiinduló iteráció nem vezet ki ebből az intervallumból.

Ha már most az (x_n) iterációs sorozat konvergál a ξ számhoz, akkor $\lim x_n = \lim x_{n+1} = \xi$ miatt

$$\xi = 4\xi - 4\xi^2,$$

úgyhogy $\xi = 0$, vagy $\xi = \frac{3}{4}$. Ennélfogva egy iterációs sorozat csak 0-hoz, vagy $\frac{3}{4}$-hez konvergálhat.

Triviálisan konvergensek az olyan sorozatok, amelyeknek valamelyik tagja 0, vagy $\frac{3}{4}$. Ahhoz, hogy az x_0 pontból kiinduló ite-

* $[x]$-el az x-nél nem nagyobb egész számok legnagyobbikát jelöljük.

rációs sorozat ilyen legyen, szükséges és elegendő, hogy x_0 a $z_0=0$ vagy $z_0=\frac{3}{4}$ pontból kiinduló és a

$$z_{n+1}=\frac{1\pm\sqrt{1-z_n}}{2}$$

rekurzív képlettel értelmezett inverz-iterációs sorozat egyik tagja legyen. — Megmutatjuk, hogy az említett, triviálisan konvergáló sorozatok már ki is merítik az összes konvergens iterációs sorozatok halmazát. Pontosabban: ha az (x_n) iterációs sorozat egyik tagja sem 0, akkor x_n nem konvergálhat 0-hoz, és hasonló megállapítás érvényes 0 helyett $\frac{3}{4}$-re is.

Tegyük fel, hogy az (x_n) iterációs sorozat egyik tagja sem 0, és legyen

(1) $$0<x_n<\frac{3}{4}.$$

Ekkor

$$0<x_n^2<\frac{3}{4}x_n,$$

$$0<4x_n^2<3x_n,$$

úgyhogy

(2) $$x_n<4x_n-4x_n^2=x_{n+1}.$$

Amennyiben az (x_n) sorozat 0-hoz konvergálna, akkor a sorozatnak majdnem minden tagja teljesítené (1)-et, s így (2)-t is; utóbbi azonban azt jelentené, hogy a pozitív tagokból álló (x_n) sorozat egy helytől kezdve szigorúan monoton növekvő, ami lehetetlen a sorozat 0-hoz konvergálása miatt.

Tekintsünk most olyan (x_n) iterációs sorozatot, amelynek tagjai között nem fordul elő $\frac{3}{4}$. Ekkor áttérünk az

(3) $$y_n=x_n-\frac{3}{4}$$

sorozatra, amelyet az

$$y_{n+1}+\frac{3}{4}=4\left(y_n+\frac{3}{4}\right)-4\left(y_n+\frac{3}{4}\right)^2,$$

azaz

(4) $$y_{n+1}=-4y_n^2-2y_n$$

rekurzív képlet értelmez. Megmutatjuk, hogy

(5) $$|y_{n+1}| > |y_n|, \quad \text{ha} \quad 0 < |y_n| < \frac{1}{4}.$$

Legyen előbb

$$0 < y_n < \frac{1}{4}.$$

Ekkor (4) szerint $|y_{n+1}| = |2y_n|.|2y_n + 1| > |2y_n| > |y_n|$, úgyhogy (5) helyes ebben az esetben. — Legyen most

$$-\frac{1}{4} < y_n < 0.$$

Ekkor $4y_n$-el átszorozva azt kapjuk, hogy

$$-y_n > 4y_n^2 > 0,$$

$$y_n > 4y_n^2 + 2y_n = -y_{n+1},$$

azaz $y_{n+1} > -y_n$. Ennélfogva, minthogy most $y_n < 0$, (5) ebben az esetben is igaz.

Tegyük fel mármost, hogy az (x_n) iterációs sorozat $\frac{3}{4}$-hez konvergál, jóllehet egyik tagja sem $\frac{3}{4}$. Ez azt jelentené, hogy a megfelelő (3) alatti y_n sorozat majdnem minden tagja teljesíti az (5) alatti második egyenlőtlenséget, és $y_n \to 0$. Ez viszont az (5) alatti első egyenlőtlenség miatt nyilván lehetetlen. Ezzel a fenti állítás bizonyítását befejeztük.

Bognár János.

A 3. feladatot megoldotta még: *Gehér László, Hajnal András, Hosszú Miklós, Kawasz Gyula, Károlyházy Frigyes, Kis Ottó, Kővári Tamás, Sós Vera, Szász Ferenc.*

Megjegyzés. Fischer János, a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karának II. éves hallgatója, versenyen kívül beküldött megoldása az iterációs sorozat tagjainak alábbi independens előállításán alapul: ha $x_0 = \sin^2\alpha_0$, akkor $x_n = \sin^2 2^n \alpha_0$.

4. feladat

Megoldás. Legyen

$$\frac{1}{x} = \xi.$$

Ekkor

(1) $$F(x) = F\left(\frac{1}{\xi}\right) = G(\xi) = \sum (-1)^n \binom{\xi}{n} \frac{\xi}{\xi + n}.$$

Tekintsük előbb az $x \geqq 1$ esetet. Ekkor $0 < \xi \leqq 1$, s így

$$\left|\binom{\xi}{n}\right| = \xi \cdot \left|\frac{\xi-1}{1}\right| \cdot \left|\frac{\xi-2}{2}\right| \cdots \left|\frac{\xi-n+1}{n-1}\right| \cdot \frac{1}{n} < \frac{1}{n}.$$

Ennélfogva

$$\left|\binom{\xi}{n} \cdot \frac{\xi}{\xi+n}\right| < \frac{1}{n^2}.$$

Ez azt jelenti, hogy az (1) sor a $0 \leqq \xi \leqq 1$ intervallumon egyenletesen konvergens, úgyhogy

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{\xi \to +0} G(\xi) = G(0) = 1.$$

Legyen a továbbiakban $0 < x < 1$, azaz $1 < \xi < \infty$. Tekintsük ekkor $0 \leqq y \leqq 1$ mellett az

$$y^{\xi-1}(1-y)^{\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\xi}{n} y^{n+\xi-1} \tag{2}$$

sort. Megmutatjuk, hogy ez bármely, 1-nél nagyobb rögzített ξ érték esetén y-ra nézve egyenletesen konvergens.

$$\left|\binom{\xi}{n}\right| = \frac{\xi}{n} \cdot \frac{\xi-1}{n-1} \cdots \frac{\xi-[\xi]}{n-[\xi]} \cdot \frac{[\xi]-\xi+1}{1} \cdot \frac{[\xi]-\xi+2}{2} \cdots$$
$$\cdots \frac{|\xi-n+1|}{n-[\xi]-1}$$

miatt ugyanis (lévén a jobboldal utolsó $n-[\xi]-1$ számú tényezője 1-nél nem nagyobb pozitív szám)

$$\left|\binom{\xi}{n}\right| < \frac{C(\xi)}{n(n-1)},$$

ahol $C(\xi)$ értéke nem függ n-től és feltesszük, hogy $n \geqq \xi+2$. Mivel ilyen módon megmutattuk, hogy a (2) sor egyenletesen konvergens, tagonként integrálhatunk:

$$\int_0^1 y^{\xi-1}(1-y)^{\xi} dy = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\xi}{n} \int_0^1 y^{n+\xi-1} dy = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\xi}{n} \cdot \frac{1}{n+\xi}.$$

Ebből következik, hogy az (1) sor $0 < x < 1$ esetén konvergens, és

$$F(x) = G(\xi) = \xi \int_0^1 y^{\xi-1}(1-y)^{\xi} dy.$$

Legyen most N olyan egész szám, hogy $N \leqq \xi - 1 < N + 1$. Ekkor

$$\int_0^1 y^{\xi-1}(1-y)^{\xi} dy \leqq \int_0^1 y^N (1-y)^N dy \leqq \int_0^1 \left(\frac{y+1-y}{2}\right)^{2N} dy = \frac{1}{4^N},$$

úgyhogy

$$|G(\xi)| \leqq \frac{N+2}{4^N},$$

azaz

$$\lim_{x \to +0} F(x) = \lim_{x \to +\infty} G(\xi) = 0.$$

Kővári Tamás.

A 4. feladatot megoldotta még *Kis Ottó*, továbbá a gammafüggvény alkalmazásával *Lipták Tamás*.

5. feladat

Megoldás. Annak valószínűsége, hogy 10 kihúzott hal közül x harcsa, y kecsege, z egyéb fajta legyen,

$$\frac{10!}{x!\,y!\,z!} p^x q^y r^z,$$

ahol $p = \frac{18}{100}$, $q = \frac{2}{100}$, $r = \frac{80}{100}$. A kérdéses várható érték tehát

$$\sum_{x+y+z=10} \frac{10!}{x!\,y!\,z!} p^x q^y r^z \cdot \frac{x}{1+y} =$$

$$= \frac{p}{q} \sum_{\substack{x+y+z=10 \\ x \neq 0}} \frac{10!}{(x-1)!\,(y+1)!\,z!} p^{x-1} q^{y+1} r^z.$$

Ha itt $(x-1, y+1, z)$ fölvenné valamennyi olyan számhármas értékét, amelynek tagjai 10 összeget adó nemnegatív egész számok, akkor az összegzés eredménye a polinomiális tétel szerint

$$\frac{p}{q}(p+q+r)^{10} = \frac{p}{q}$$

lenne. Ki vannak azonban zárva azok a számhármasok, amelyekben $y+1=0$. Az ezeknek megfelelő tagok összege:

$$\frac{p}{q} \sum_{k=0}^{10} \frac{10!}{k!\,(10-k)!} p^k r^{10-k} = \frac{p}{q}(p+r)^{10}.$$

Ennélfogva a keresett várható érték:

$$\frac{p}{q}-\frac{p}{q}(p+r)^{10}=\frac{p}{q}(1-(p+r)^{10})=9(1-0{\cdot}98^{10})=1.62\cdot$$

Károlyházi Frigyes.

Megjegyzés. Balogh Tibor megoldása általánosabb, mert föltételezi, hogy a halastóban végesszámú hal van. Ha a halak száma $100n$, akkor a kérdéses várható értékre a

$$\frac{18n}{2n+1}\left(1-\frac{\binom{98n-1}{10}}{\binom{100n}{10}}\right)$$

eredményt kapja. Ennek határértéke $n\to\infty$ esetén ugyanaz, mint a fenti megoldás eredménye, amelyben hallgatólag feltételezzük, hogy a halastóban végtelen sok hal van.

Az 5. feladatot megoldotta még: *Gehér László, Kis Ottó, Kővári Tamás, Lipták Tamás, Sós Vera.*

6. feladat

Megoldás. Tegyük fel, hogy A nyeri a játszmát B ellen $m:n$ játékarányban és

A szerez az általa nyert játékokban $a_1+\cdots+a_m=a$,
A szerez az általa vesztett játékokban $a'_1+\cdots+a'_n=a'$,
B szerez az általa nyert játékokban $b_1+\cdots+b_n=b$,
B szerez az általa vesztett játékokban $b'_1+\cdots+b'_m=b'$
pontot. Az összes lehetséges

$$H=\frac{a+a'}{a+a'+b+b'}=\frac{1}{1+\frac{b+b'}{a+a'}}$$

hányadosok $\inf H$ alsóhatárát keressük. Ennek meghatározása nyilván ekvivalens feladat a

$$K=\frac{b+b'}{a+a'}$$

hányadosok $\sup K$ felső határának kiszámításával. Olyan játszma esetében, amelyet A $m:(m-2)$ játékarányban nyer, éspedig úgy, hogy az általa nyert m játék mindegyikét $4:2$ pontarányban nyeri, míg a vesztett $m-2$ játszmát mind $0:4$ pontarányban veszti, a K hányados értéke

$$K=\frac{4(m-2)+2m}{4m}=\frac{3m-4}{2m}.$$

Ennélfogva K értéke tetszőlegesen megközelítheti alulról $\frac{3}{2}$-et, úgyhogy

(1) $$\sup K \geqq \frac{3}{2}.$$

Megmutatjuk másfelől, hogy

(2) $$\sup K \leqq \frac{3}{2}.$$

Ebből a célból nyilván elegendő, ha a $K > 1$ esetekre szorítkozunk, s ekkor felhasználjuk azt a tényt, hogy 1-nél nagyobb értékű tört számlálójából és nevezőjéből ugyanazt a (nevezőnél kisebb) számot kivonva, a tört értéke mindig nő.

Mivel $b'_i \leqq a_i - 2 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$,

$$1 < K = \frac{(b_1 + \cdots + b_n) + (b'_n + \cdots + b'_m)}{(a_1 + \cdots + a_m) + (a'_1 + \cdots + a'_n)} \leqq$$

$$\leqq \frac{(b_1 + \cdots + b_n) + (a_1 + \cdots + a_m) - 2m}{(a_1 + \cdots + a_m) + (a'_1 + \cdots + a'_n)} \leqq$$

$$\leqq \frac{(b_1 - a'_1) + \cdots + (b_n - a'_n) + a - 2m}{a}.$$

Itt az utolsó előtti tört számlálójából és nevezőjéből levontuk a'-t. Mivel továbbá $b_i - a'_i \leqq 4 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$, azt nyerjük, hogy

$$K \leqq \frac{4n + a - 2m}{a}.$$

Itt $a = a_1 + \cdots + a_m \geqq 4m$, úgyhogy a jobboldalon álló tört számlálójából és nevezőjéből a nemnegatív $a - 4m$ számot kivonva

$$K \leqq \frac{4n + 2m}{4m}$$

adódik. Innen pedig $n \leqq m - 2$ figyelembevételével:

$$K \leqq \frac{4(m-2) + 2m}{4m} = \frac{6m - 8}{4} < \frac{3}{2}.$$

Ezzel (2) helyességét is megmutattuk. (1) és (2) szerint

$$\sup K = \frac{3}{2},$$

s így

$$\inf H = \frac{1}{1 + \sup K} = \frac{1}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{2}{5}.$$

Ennélfogva egy tenniszjátszma során a győztes fél legalább 40%-át megnyeri az összes pontoknak. 40%-nál okvetlenül többet kell nyernie, de nyerhet tetszőlegesen kevéssel többet 40%-nál.

Gehér László
Kertész Andor
Lipták Tamás

A 6. feladatot megoldotta még: *Balogh Tibor, Bognár János, Hajnal András, Horóczi Ferenc, Hosszú Miklós, Kis Ottó, Kővári Tamás, László Zoltán, Mádi Erzsébet, Pintér Lajos, Sós Vera.*

7. feladat

Megoldás. Van olyan polinom, amely rendelkezik a feladatban előírt tulajdonságokkal. Ilyen például

$$f(x)=\frac{1}{2}(x^4-x^2),$$

mert

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(a+b)(a^2+b^2-1)}{2}$$

nyilván egész szám, ha a és b tetszőleges, egymástól különböző egész számok.

Könnyű megmutatni, hogy az előírt tulajdonságokkal bíró polinomnak legalább negyedfokúnak kell lennie.

Gehér László
Kővári Tamás
Sós Vera

A 7. feladatot megoldotta még: *Fried Ervin, Károlyházy Frigyes, Kis Ottó, Sárvári Pál.*

8. feladat

Megoldás. *Legendre* ismert formulája szerint

$$(1)\qquad n!=\prod p^{\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\cdots}$$

ahol p az összes törzsszámokon fut végig. (Nyilván elegendő az n-nél nem nagyobb törzsszámokra szorítkoznunk.) Megmutatjuk másfelől, hogy a feladatban szereplő szorzatok legkisebb közös többszöröse

$$(2)\qquad \prod p^{\left[\frac{n}{p}\right]}.$$

Ebből már világos a tétel helyessége, mert $n > 3$ esetén $\left[\frac{n}{2^2}\right] \geqq 1$, s így ekkor (2) valódi osztója (1)-nek.

Annak igazolása céljából, hogy a feladatban szereplő szorzatok legkisebb közös többszöröse (2)-vel van adva, tekintsünk egy ilyen $x_1 \dots x_k$ szorzatot, s legyen $p^{\alpha_i} | x_i, p^{\alpha_i+1} \nmid x_i$. Nyilván

$$p^{\alpha_1} + \dots + p^{\alpha_k} \leqq n,$$

s mivel $p^{\alpha} \geqq \alpha p$ (az egyenlőségjel csak $\alpha = 1$ vagy $p = \alpha = 2$ esetén érvényes),

$$p(\alpha_1 + \dots + \alpha_k) \leqq n, \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_k \leqq \left[\frac{n}{p}\right].$$

Ezzel megmutattuk, hogy a tekintett $x_1 \dots x_k$ szorzatok bármelyikében a p törzsszám kitevője legfeljebb $\left[\frac{n}{p}\right]$. — Hogy viszont van olyan szorzat, amelyre e kitevő pontosan $\left[\frac{n}{p}\right]$, azt

$$k = \left[\frac{n}{p}\right], \quad x_1 = \dots = x_k = p$$

választás mutatja. Igazoltuk ilyen módon, hogy az összes tekintetbejövő $x_1 \dots x_k$ szorzatok legkisebb közös többszöröse a (2) alatti szám.

Korányi Ádám

A 8. feladatot megoldotta még: *Bognár János, Fried Ervin, Gehér László, Hajnal András, Hendzik István, Hosszú Miklós, Kawasz Gyula, Károlyházi Frigyes, Kis Ottó, Kővári Tamás, László Zoltán, Lipták Tamás, Pintér Lajos, Sós Vera, Vasvári Béla.*

9. feladat

Megoldás. Mivel

$$2m^2 \equiv m \quad \mod (2m-1)$$

a feladatban szereplő kongruencia

$$x \equiv m \quad \mod (2m-1)$$

alakban írható. Ez pedig $2x \equiv 2m \equiv 1 \mod (2m-1)$ miatt, s mivel a $2m-1$ modulus páratlan szám, ekvivalens a

$$(1) \qquad 2x \equiv 1 \quad \mod (2m-1)$$

kongruenciával.

Mármost megmutatjuk, hogy a feladatban szereplő kongruencia-rendszernek akkor és csak akkor van közös megoldása, ha a kiválasztott kongruenciák száma véges.

a) Legyen a kiválasztott kongruenciák száma véges és rendszerünk álljon a

$$\begin{aligned} 2x &\equiv 1 \quad \mod (2m_1-1) \\ &\vdots \\ 2x &\equiv 1 \quad \mod (2m_k-1) \end{aligned}$$

kongruenciákból. E kongruenciarendszernek nyilván megoldása $x=\frac{M+1}{2}$, ahol

$$M=(2m_1-1)\cdots(2m_k-1).$$

b) Legyen most a kiválasztott kongruenciák száma végtelen. Ekkor nincsen közös megoldása a végtelen sok (1) alakú kiválasztott kongruenciának, hiszen egy $x=x_0$ közös megoldás létezése azt jelentené, hogy a $2x_0-1 \neq 0$ szám végtelen sok különböző természetes számmal osztható.

Gehér László
Kertész Andor
Lipták Tamás

A megoldásnak csak az *a*) részét adták meg: *Károlyházy Frigyes, Kis Ottó, Korányi Ádám, Kővári Tamás, Sós Vera.*

10. feladat

Megoldás. Mivel a p törzsszám-modulus szerinti maradékosztályok testet alkotnak, a feladat állításának helyessége következik az alábbi általánosabb tételből:

$GF(p^n)$ legyen $p^n=r$ elemű véges test. E test 0-tól különböző elemei legyenek $\varepsilon=\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}$, ahol ε a test egységeleme. Ekkor bármely egész együtthatójú $f(x)$ polinom esetében $\varepsilon f(x)$ már $GF(p^n)$-beli együtthatókkal bíró polinom, és érvényes az

$$\text{(1)} \qquad \varepsilon f(z_1)\ldots f(z_{r-1})=\varepsilon f(\alpha_1)\ldots\varepsilon f(\alpha_{r-1})$$

összefüggés, ahol $z_1, \ldots, z_{r-1}$ az $(r-1)$-edik egységgyököket jelöli.

Ennek az általánosabb tételnek bizonyítása céljából tekintsük az $y_1, \ldots, y_{r-1}$ határozatlan elemeket. Ekkor $f(y_1)\ldots f(y_{r-1})$ szimmetrikus polinomja az $y_1, \ldots, y_{r-1}$ határozatlan elemeknek, úgyhogy a szimmetrikus polinomok elméletének alaptétele szerint fennáll egy

$$\text{(2)} \qquad f(y_1)\ldots f(y_{r-1})=S(s_1, \ldots, s_{r-1})=\cdots+us_{r-1}^t+v$$

alakú azonosság, ahol S az y-ok $s_1, \ldots, s_{r-1}$ elemi szimmetrikus kifejezéseinek polinomja, és $t \geqq 0, u, v$ egész számok. Helyettesítsünk (2)-ben y_i helyébe z_i-t, $(i=1,2,\ldots,r-1)$. Mivel ekkor

$$s_1=\cdots=s_{r-2}=0,\ s_{r-1}=(-1)^r,$$

azt nyerjük, hogy

(3) $$f(z_1)\ldots f(z_{r-1})=u(-1)^{rt}+v.$$

Másfelől, minthogy $\alpha_1,\ldots,\alpha_{r-1}$ az $x^{r-1}-\varepsilon=0$ egyenlet gyökei a $GF(p^n)$ testben, (2)-ből $y_i=\alpha_i$ helyettesítéssel

(4) $$\varepsilon f(\alpha_1)\ldots\varepsilon f(\alpha_{r-1})=u(-\varepsilon)^{rt}+v\varepsilon$$

adódik. (3) és (4) alapján (1) helyessége nyilvánvaló.

Kertész Andor

Megjegyzés. Kővári Tamás észrevette, hogy a feladat általánosítható olymódon, hogy az $f(z_1)\ldots f(z_{p-1})$ kifejezés helyett $z_1,\ldots,z_{p-1}$ tetszőleges szimmetrikus egész kifejezését vesszük, amelynek együtthatói egész számok, vagy olyan törtszámok, melyek nevezői nem oszthatók p-vel. Természetesen a feladatnak ez az általánosítása a fenti módon véges testekre is átvihető.

A 10. feladatot megoldotta még: *Gehér László, Károlyházy Frigyes, Kis Ottó, Kővári Tamás, Sós Vera.*

A *Kőnig—Rados*-féle determinánstétel alkalmazásával: *Korányi Ádám.*

II. megoldás. (Ezt a megoldást *Turán Pál* professzor bocsátotta a bizottság rendelkezésére.) A feladatban szereplő kongruencia baloldalán az

$$f(x) \quad \text{és} \quad g(x)=x^{p-1}-1$$

polinomok, jobboldalán pedig az

$$f(x) \quad \text{és} \quad g^*(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-p+1)$$

polinomok rezultánsa áll. Mivel pedig jól ismert tény, hogy a $g(x)$ és $g^*(x)$ polinomok megfelelő együtthatói kongruensek egymással mod p, a két rezultáns is olyan determinánssal adható meg, amelyek megfelelő elemei kongruensek egymással mod p. Ennélfogva ugyanez áll a rezultánsok értékére, tehát a feladat állítása igaz.

11. feladat

Megoldás. Azt kell megmutatnunk, hogy van olyan

(1) $$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

egész együtthatójú polinom, amelyre az összesen $(2r+1)^{n+1}$ számú

(2) $$(a_0+e_0)x^n+(a_1+e_1)x^{n-1}+\cdots+(a_n+e_n)$$

polinomok mindegyike irreducibilis, ha az

$$\varepsilon = (e_0, e_1, \ldots, e_n) \tag{3}$$

„vektor" komponensei minden olyan egész értéket felvesznek, amelyekre

$$|e_k| \leqq r \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Az így előálló $(2r+1)^{n+1}$ számú ε vektor mindegyikéhez rendeljünk hozzá egy-egy p_ε törzsszámot, s $\varepsilon \neq \varepsilon'$ esetén legyen $p_\varepsilon \neq p_{\varepsilon'}$. *Eisenstein* kritériuma alapján csak azt kell belátnunk, hogy vannak olyan $a_0, a_1, \ldots, a_n$ egész számok, amelyekre az összesen $(2r+1)^{n+1}$ számú és egyenként $n+1$ kongruenciából álló

$$\begin{aligned} a_0 + e_0 &\equiv 1 && (\operatorname{mod} p_\varepsilon) \\ a_1 + e_1 &\equiv 0 && (\operatorname{mod} p_\varepsilon) \\ &\vdots && \\ a_{n-1} + e_{n-1} &\equiv 0 && (\operatorname{mod} p_\varepsilon) \\ a_n + e_n &\equiv p_\varepsilon && (\operatorname{mod} p_\varepsilon^2) \end{aligned}$$

kongruenciarendszer teljesül. Ez azonban nyilvánvaló, mert a felírt kongruenciarendszerek i-edik kongruenciái bármely rögzített i esetén olyan $(2r+1)^{n+1}$ számú kongruenciából álló rendszert alkotnak, amely a kinai maradéktétel szerint megoldható az a_i ismeretlenre.

Kővári Tamás
Sós Vera

A 11. feladatot megoldotta még a *Perron*-féle irreducibilitási kritérium alkalmazásával *Gehér László.*

12. feladat

Megoldás. Van olyan függvényrendszer, amely teljesíti a feladat követelményeit. Az egyik legegyszerűbb ilyen rendszer a következő:

$$f_{2k-1}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = k \\ 0, & \text{ha } x \neq k \end{cases} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots);$$

$$f_{2k}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = -k \\ 0, & \text{ha } x \neq -k \end{cases} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

A 12. feladatot megoldotta: *Gehér László, Hajnal András, Hosszú Miklós, Károlyházy Frigyes, Kis Ottó, Korányi Ádám, Kővári Tamás, Lipták Tamás, Pintér Lajos, Sós Vera.*

13. feladat

Megoldás. Bebizonyítjuk, hogy a feladatban leírt tulajdonságokkal bíró determináns teljes kifejtése 2^n számú tagból áll. Speciális esete ez az állítás a következőnek: ha egy $2n$-edrendű determináns bármely sorában és oszlopában pontosan két 0-tól különböző elem áll, olyan elrendezésben, hogy a determináns nemzérus elemei négyenként egy-egy olyan téglalap csúcsait alkotják, amelyek oldalai párhuzamosak a determináns soraival, illetve oszlopaival, akkor a determináns teljes kifejtése 2^n számú tagból áll. Ez utóbbi állítás igazolása céljából tekintsük egy ilyen determináns teljes kifejtésének tetszőleges tagját. Ez úgy keletkezik, hogy a determináns n számú olyan sorának mindegyikéből, amely sorok 0-tól különböző elemei együttvéve az összes oszlopokat lefoglalják, tetszőlegesen kiválasztunk egy-egy nem-zérus elemet, s ezek szorzatát megszorozzuk a determináns további soraiból már csak egyféleképpen választható elemekkel. Mivel az így adódó lehetőségek száma 2^n, állításunk igazolást nyert.

Kertész Andor

A 13. feladatot megoldotta még: *Balogh Tibor, Bognár János, Csuri József, Gehér László, Hajnal András, Horóczi Ferenc, Hosszú Miklós, Karvasz Gyula, Károlyházy Frigyes, Kis Ottó, Korányi Ádám, Kővári Tamás, László Zoltán, Lipták Tamás, Mády Erzsébet, Merza József, Sárvári Pál, Sós Vera, Vasvári Béla.*

Megjegyzés. Hajós György professzor hívta fel figyelmünket arra, hogy az előbbi feladat állításának a következő lényeges általánosítása származik *Kőnig Dénestől,* „Gráfok és alkalmazásuk a determinánsok és halmazok elméletére“ című dolgozatában (Math. Term. Ért. **34**, (1916), 104—119 old.): Ha egy determináns bármely sorában és oszlopában pontosan két 0-tól különböző elem áll, akkor a determináns teljes kifejtésében a tagok száma 2-nek anynyiadik hatványa, ahány ciklusba foglalhatók a determináns nemzérus elemei olyan módon, hogy egy ciklus bármely két szomszédos eleme vagy azonos sorban, vagy azonos oszlopban áll. — Bizonyítás: Nyilvánvaló, hogy az említett ciklusok egyértelműen meg vannak határozva. Bármely ciklushoz egy jól meghatározott aldetermináns tartozik, amely t. i. a ciklusban szereplő elemek egyikét sem tartalmazó sorok és oszlopok törlése útján keletkezik a teljes determinánsból. *Laplace* tétele szerint a teljes determináns megegyezik a ciklusoknak ilyen módon megfeleltetett aldeterminánsok megfelelő előjellel vett szorzatával. Egy-egy aldetermináns pedig nyilván pontosan két kifejtési tagot ad. Ebből következik *Kőnig Dénes* tételének helyessége.

14. feladat

Megoldás. Bebizonyítjuk, hogy egy véges kommutatív csoport összes elemének szorzata akkor és csak akkor nem egyenlő a csoport egységelemével, ha a csoport pontosan egy 2 rendű elemet tartalmaz. (Ez a feltétel nyilván úgy is fogalmazható, hogy a csoport páros invariánsainak száma egy.) Továbbá, ha a csoport pontosan egy 2 rendű elemet tartalmaz, akkor a csoport összes elemeinek szorzata megegyezik ezzel a 2 rendű elemmel. Mindez következik az alábbi két állításból:

a) Egy véges kommutatív csoport összes elemeinek szorzata egyenlő a csoport 2 rendű elemeinek szorzatával.*)

b) Ha egy véges kommutatív csoport egynél több 2 rendű elemet tartalmaz, akkor a csoport összes 2 rendű elemeinek szorzata egyenlő a csoport egységelemével.

Az *a)* állítás helyessége közvetlenül világos abból, hogy egy csoportelem akkor és csak akkor különbözik az inverzétől, ha az elem rendje 2-nél nagyobb. Eszerint ugyanis nyilvánvaló, hogy véges kommutatív csoportban a 2-nél nagyobb rendű elemek szorzata az egységelem.

A *b)* állítás igazolása céljából tekintsünk olyan véges kommutatív csoportot, amely egynél több 2 rendű elemet tartalmaz, s legyen $c_1, \ldots, c_r$ *lehető legkevesebb számú* olyan 2 rendű elem, hogy a csoport bármely 2 rendű eleme felírható a $c_1, \ldots, c_r$ elemek közül vett elemek szorzataként. Állítjuk, hogy ekkor az összes $c_1^{k_1} \ldots c_r^{k_r}$ $(0 \leqq k_i \leqq 1$, $i = 1, 2, \ldots, r)$ elemek mind különbözők. Ez valóban így van, mert két, nem azonos $k_1, \ldots, k_r$ kitevőrendszerhez tartozó $c_1^{k_1} \ldots c_r^{k_r}$ szorzat egyenlőségéből az következnék, hogy valamelyik c_i kifejezhető volna tőle különböző c-k szorzataként, ami a $c_1, \ldots, c_r$ elemek minimális számosságára vonatkozó kikötésünk értelmében lehetetlen. Ennélfogva a csoportnak pontosan 2^r számú 2 rendű eleme van, s ezek szorzata egyenlő a csoport egységelemével, mert mindegyik c_i nyilván 2^{r-1} számú $c_1^{k_1} \ldots c_r^{k_r}$ szorzatban szerepel 1 kitevővel, és föltevésünk szerint $r > 1$.

Kertész Andor

A 14. feladatot megoldotta még: *Gehér László, Hajnal András, Hosszú Miklós, Kiss Ottó, Korányi Ádám, Kővári Tamás, Lipták Tamás, Pintér Lajos, Sós Vera.*

*) Ha nincsen a csoportnak 2 rendű eleme, akkor e szorzaton a csoport egységelemét kell értenünk.

15. feladat

Megoldás. (Ezt a megoldást Varga Ottó professzor bocsátotta a bizottság rendelkezésére.) Az izometrikus leképezés egzisztenciája a következő általánosabb tételből következik:

Ha egy felület olyan egyparaméteres folytonos izometrikus leképezési csoporttal rendelkezik, amely a felületet önmagára képezi le, akkor a felület lefejthető egy forgási felületre.

Legyenek u^1 és u^2 a felület Gauss-féle paraméterei. Az egyparaméteres folytonos csoport mindig megválasztható úgy, hogy a paraméterekben transzlációs csoport legyen. Tehát:

$$u^{*1} = u^1$$
$$u^{*2} = u^2 + k.$$

A $k = c$ vonalak ekkor a folytonos leképezés pályagörbéi. A leképezés izometrikus voltából következik, hogy az első alapforma koefficiensei u^2-től függetlenek. E vonalak orthogonális trajektóriái geodetikus vonalak, és az $u^1 = c$ vonalakkal együtt geodetikus parallelkoordinátarendszert alkotnak. Ez abból következik, hogy egy rögzített $u^1 = c$ vonallal geodetikusan párhuzamos vonalakat az izometrikus folytonos transzlációs csoport egymásba viszi át, tehát a többi $u^1 = c$ vonalakkal esnek össze.

Ezt a vonalsereget új koordinátákként vezetjük be:

$$\bar{u}^1 = u^1,$$
$$\bar{u}^2 = \bar{g}(u^1, u^2).$$

Ha a

$$\varphi(u^1, u^2) = c$$

egyenlet az orthogonális trajektóriákat adja, akkor

$$(1) \qquad \begin{cases} \bar{u}^1 = u^1, \\ \bar{u}^2 = \bar{u}^2(u^1, u^2) = \varphi(u^1, u^2) \end{cases}$$

parallelkoordináták lesznek. A φ függvény az orthogonális meghatározó

$$g_{2\beta} du^\beta = 0$$

differenciálegyenlet integrálja. Itt g_{21} és g_{22} az első alapforma együtthatói:

Ez viszont nem más, mint

$$(2) \qquad \bar{\varphi}(u^1, u^2) = u^1 + \int \frac{g_{21}}{g_{22}} du^1.$$

Az (1) és (2) transzformációk

$$\frac{\partial(\bar{u}^1, \bar{u}_2)}{\partial(u^1, u^2)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{g_{21}}{g_{22}} & 1 \end{vmatrix}$$

függvénymatrixának az inverzét

$$\frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(\bar{u}^1, \bar{u}^2)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{g_{21}}{g_{22}} & 1 \end{vmatrix}$$

adja. Innen következik, hogy

$$(3)\qquad \begin{cases} \bar{g}_{11} = g_{11}(\bar{u}^1) - \dfrac{g_{12}^2(\bar{u}^1)}{g_{22}(\bar{u}^1)} = \dfrac{g_{11}(\bar{u}^1)g_{22}(\bar{u}^1) - g_{12}^2(\bar{u}^1)}{g_{22}(\bar{u}^1)}, \\ \bar{g}_{22} = g_{22}(\bar{u}^1), \\ \bar{g}_{12} = \bar{g}_{21} = 0. \end{cases}$$

Az első alapforma tehát

$$(4)\qquad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \bar{g}_{11}(\bar{u}^1)\left(\frac{d\bar{u}^1}{dt}\right)^2 + g_{22}(\bar{u}^1)\left(\frac{d\bar{u}^2}{dt}\right)^2.$$

E képletből ismét kitűnik az, hogy $\bar{u}^1$ és $\bar{u}^2$ geodetikus parallelkoordináták, továbbá az is, hogy (4) valamilyen forgásfelület alapformája. Valóban, ha

$$x_1 = g(\bar{u}^1),$$
$$x_3 = h(\bar{u}^1)$$

az $[x_1, x_3]$ síkban fekvő meridiángörbe egyenletét adja, akkor az

$$(5)\qquad \begin{cases} x_1 = g(\bar{u}^1)\cos \bar{u}^2 \\ x_2 = g(\bar{u}^1)\sin \bar{u}^2 \\ x_3 = h(\bar{u}^1) \end{cases}$$

forgásfelület első alapformája

$$(6)\qquad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = (g'^2 + h'^2)\left(\frac{d\bar{u}^1}{dt}\right)^2 + g^2\left(\frac{d\bar{u}^2}{dt}\right)^2,$$

lesz, ahol

$$g'^2 = \frac{dg}{d\bar{u}^1} \quad \text{és} \quad h'^2 = \frac{dh}{d\bar{u}^1}.$$

Ha tehát a g-t és h-t úgy választjuk meg, hogy

$$g'^2 + h'^2 = \bar{g}_{11} \quad \text{és}$$
$$g^2 = \bar{g}_{22}$$

legyen, akkor a két felület (4) és (6) alapformája azonos, tehát a két felület izometrikusan van egymásra vonatkoztatva.

(3)-ból g-re és h-ra a

$$g=\sqrt{g_{22}}$$

$$(6') \qquad h=\int\sqrt{\frac{4(g_{11}\cdot g_{22}-g_{12}^2)-g_{22}'^2}{4g_{22}}}\,d\bar{u}^1$$

kifejezéseket kapjuk.

A feladatban szereplő felület előállítása:

$$(7) \qquad \begin{aligned} x_1&=u^1\cos u^2,\\ x_2&=u^1\sin u^2,\\ x_3&=u^1+cu^2. \end{aligned}$$

Az $u'=$ állandó görbék a felület önmagára való folytonos izometrikus leképezésénél tényleg pályagörbék. Ennél a felületnél

$$(8) \qquad g_{11}=2,\ g_{12}=c,\ g_{22}=(u^1)^2+c^2,$$

úgyhogy (6′)-ből a

$$(9) \qquad h=\bar{u}^1 \quad \text{és} \quad g=\sqrt{(\bar{u}^1)^2+c^2},$$

helyettesítéssel az

$$x_1^2-x_3^2=c^2$$

egyenlőoldalú hiperbola egyenletét kapjuk, tehát a felület egyköpenyű forgási hiperboloid. Ha (2)-be a (8)-nak megfelelő értékeket helyettesítjük be, akkor az

$$(10) \qquad \bar{u}^2=u^2+\int\frac{c}{(u^1)^2+c^2}\cdot du^1=u^2+\operatorname{arctg}\frac{u^1}{c}$$

kifejezést kapjuk. Ennek alapján az egymáshoz rendelt felületi pontokat az ugyanazon paraméterekhez tartozó (5) és

$$(7') \qquad \begin{aligned} x_1&=\bar{u}^1\cos\left(\bar{u}^2-\operatorname{arctg}\frac{\bar{u}^1}{c}\right),\\ x_2&=\bar{u}^2\sin\left(\bar{u}^2-\operatorname{arctg}\frac{\bar{u}^1}{c}\right),\\ x_3&=\bar{u}^1+c\left(\bar{u}^2-\operatorname{arctg}\frac{\bar{u}^1}{c}\right) \end{aligned}$$

képletek adják.

A (7) csavarfelületen az alkotókat az $u^2=$ állandó egyenletekkel jellemzett egyenesek képezik. Ezeknek (9) miatt az

$$x_1=\sqrt{(\bar{u}^1)^2+c^2}\cos\left(\varkappa+\operatorname{arctg}\frac{\bar{u}^1}{c}\right)=c\cdot\cos\varkappa-\bar{u}^1\sin\varkappa,$$

$$x_2=\sqrt{(\bar{u}^1)^2+c^2}\sin\left(\varkappa+\operatorname{arctg}\frac{\bar{u}^1}{c}\right)=c\cdot\sin\varkappa-\bar{u}^1\cos\varkappa,$$

$$x_3\qquad\qquad=\bar{u}^1$$

egyenlettel rendelkező alkotók felelnek meg. A csavarfelület tengelyét az $\bar{u}^1=0$ paraméterérték adja. Ennek viszont (5) és (9) alapján a hiperboloid

$$x_1=c\cos u^2,$$

$$x_2=c\sin u^2,$$

$$x_3=0$$

egyenletű torokköre felel meg.

A forgási hiperboloid nem az egyetlen olyan felület, amelyre a csavarfelület lefejthető. Ez abból következik, hogy egy forgásfelülethez ∞^1 vele izometrikus forgásfelület tartozik. Legyen

$$\text{(5')}\qquad \begin{aligned} x_1&=g^*(u^{*1})\cos u^{*2},\\ x_2&=g^*(u^{*1})\sin u^{*2},\\ x_3&=0\end{aligned}$$

valamilyen más forgási felület. Ha e két felület egymásra izometrikusan leképezhető, akkor a *Gauss*-féle görbület invarianciája miatt a leképezésben parallelköröknek parallelkörök, meridiángörbéknek meridiángörbék felelnek meg. Innen az következik, hogy

$$u^{*1}=u^{*1}(u^1),$$

$$u^{*2}=u^{*2}(u^2).$$

Ha az (5') felület első alapformájának a koefficienseit röviden a

$$\text{(11)}\qquad \begin{aligned} g_{11}(\bar{u}^1)&=\sqrt{h'(\bar{u}^1)^2+g'(\bar{u}^1)^2},\\ g_{22}(\bar{u}^1)&=g^2(\bar{u}^1)\end{aligned}$$

kifejezésekkel, s ugyanezeket az (5') felületen

$$\text{(12)}\qquad \begin{aligned} g^*_{11}(u^{*1})&=\sqrt{h'(u^{*1})^2+g'(u^{*1})^2},\\ g^*_{22}(u^{*1})&=g^{*2}(u^{*1})\end{aligned}$$

kifejezésekkel jelöljük, akkor a feltételezett izometria miatt

$$\text{(13a)}\qquad g^*_{11}\left(\frac{du^{*1}}{du^1}\right)^2=g_{11}$$

és

$$\text{(13b)}\qquad g^*_{22}\left(\frac{du^{*2}}{du^2}\right)^2=g_{22}.$$

(13a)-ból meghatározhatjuk az $u^{*1} = u^*(u^1)$ függvényt. Mivel u^{*2} csak u^2-nak függvénye, és $g^*_{22}(u^{*1}(u^1))$ és $g_{22}(\bar{u}^1)$ csak az u^1-nek függvényei, azért a $\dfrac{du^{*2}}{du^2}$ differenciálhányados szükségképpen állandóval egyenlő. Ha ez $\dfrac{1}{r}$, akkor

$$g^*_{22} = r^2 g_{22}(\bar{u}^1),$$

és így (13b) alapján

$$g^*(u^*(\bar{u}^1)) = r \cdot g(\bar{u}^1),$$

$$(14) \qquad u^{*2} = \frac{1}{r}\bar{u}^2 + s.$$

A (11) képlet alapján

$$g^{*1}(u^{*1}(\bar{u}^1))^2 + h^{*\prime}(u^{*1}(\bar{u}^1))^2 = g'(\bar{u}^1)^2 + h'(\bar{u}^1)^2,$$

s innen (14) szerint

$$h(\bar{u}^1) = h^*(u^*(\bar{u}^1)) = \int \sqrt{g'^2(\bar{u}^1)\cdot(1-r^2) + h'^2(\bar{u}^1)}\, d\bar{u}^1.$$

Az az (5′) forgási felület, amely az (5) forgási felületre izometrikusan leképezhető, szükségképpen

$$(5'') \qquad \begin{aligned} x_1^* &= r g(\bar{u}^1)\cos\left(\frac{1}{r}\bar{u}^2 + s\right), \\ x_2^* &= r g(\bar{u}^1)\sin\left(\frac{1}{r}\bar{u}^2 + s\right), \\ x_3^* &= \int \sqrt{g'^2\cdot(1-r^2) + h'^2(\bar{u}^1)}\,d\bar{u}^1 \end{aligned}$$

alakú. De a ∞^1 (5″) alakú forgási felület az (5) alatti felületre izometrikusan tényleg leképezhető, amint ezt elemi számítással könnyen igazolhatjuk.

Ha g és h helyébe a (9) alatti kifejezéseket helyettesítjük, akkor a meridiángörbe egyenletét az

$$x_1 = r\sqrt{\bar{u}^{1^2} + c^2}$$

$$x_3 = \int \sqrt{\frac{\bar{u}^{1^2}(2-r^2) + c^2}{\bar{u}^{1^2} + c^2}}\, d\bar{u}^1$$

képlet adja.

A 15. feladatot megoldotta: *Károlyházy Frigyes, Kővári Tamás, Sós Vera, Soós Gyula.*

16. feladat

I. megoldás. Tekintsünk a felületen egy olyan geodetikus vonalakból álló négyszöget, amely egy T nagyságú felületdarabot határol. A feltevések miatt e zárt görbe minden csúcspontjában a külső szög $\pi/2$ nagyságú, következésképpen a *Gauss—Bonnet*-féle tételt alkalmazva

$$\oint_Q \gamma ds = \iint \varkappa do.$$

De a γ geodetikus görbület geodetikusok mentén zérus, s így

$$-\iint \varkappa do = 0.$$

Húzzuk össze a T tartományt egy pontra, akkor azt kapjuk, hogy

$$\varkappa = 0.$$

Ezért a felület síkra képezhető le.

Gehér László
Kővári Tamás
Sós Vera

II. megoldás. A két sereget u^1-, ill. u^2-paramétervonalakként vezetjük be. Ekkor a geodetikus vonal

$$\frac{d^2u^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{du^\alpha}{ds}\frac{du^\beta}{ds} = 0$$

differenciálegyenletéből az $u^1 =$ állandó, illetve $u^2 =$ állandó geodetikus vonalakra

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} \Gamma^1_{22} &\equiv g^{1\alpha}\Gamma_{2\alpha 2} = 0,\\ \Gamma^2_{11} &\equiv g^{2\alpha}\Gamma_{1\alpha 1} = 0 \end{aligned}$$

adódik. A feltevésekből következik továbbá, hogy

$$\text{(2)} \qquad \frac{g_{12}^2}{g_{11}g_{22}} = \cos^2\omega.$$

Az (1) egyenletrendszer részletesen

$$\text{(1')} \qquad \left\{ \begin{aligned} 2g_{22}\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} - g_{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} - g_{12}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} &= 0,\\ -g_{12}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} + 2\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} - g_{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} &= 0 \end{aligned} \right.$$

alakba írható. (2)-t u^α szerint differenciálva a

$$\text{(3)} \qquad 2\frac{\partial g_{12}}{\partial u^\alpha}g_{11}g_{22} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^\alpha}g_{12}g_{22} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^\alpha}g_{11}g_{22} = 0$$

kifejezést kapjuk. Ha (3)-ból $\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1}$ és $\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2}$ értékét (1)-be behelyettesítjük, a

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\cdot\frac{g_{11}g_{22}}{g_{22}} - g_{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} = 0,$$

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}\cdot\frac{g_{12}g_{22}}{g_{11}} - g_{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} = 0$$

egyenleteket nyerjük, melyekből

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} = 0,$$

és

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} = 0.$$

Az első alapforma ezekután

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g_{11}(u^1)\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 + 2\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}\cos\omega\,\frac{du^1}{dt}\cdot\frac{du^2}{dt} + g_{22}(u^2)\left(\frac{du^2}{dt}\right)^2 \tag{4}$$

alakban állítható elő. Az

$$x_1 = \int\sqrt{g_{11}(u^1)}\,du^1,$$

$$x_2 = \int\sqrt{g_{22}(u^2)}\,du^2$$

helyettesítéssel (4) a

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \cos\omega\,\frac{dx_1}{dt}\cdot\frac{dx_2}{dt} + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2$$

alakba megy át, mely nem más, mint *Descartes*-féle ferdeszögű koordinátarendszerben az euklideszi sík ívelemképlete.

Kővári Tamás
Soós Gyula

17. feladat

Megoldás. (Ezt a megoldást *Hajós György* professzor bocsátotta a bizottság rendelkezésére.) Vetítsük a projektív síkot egy rajta kívüleső pontból e pont köré írt gömb felületére. Így a sík bármely pontjának a gömb két, diametrálisan átellenes pontja felel meg. Ha a pont a síkban végigfut egy zárt poligonon, akkor a pontpárok a gömbön ugyancsak zárt görbét írnak le. Mégpedig vagy egyetlen zárt görbe keletkezik a gömbön a pontpár mozgásakor, vagy pedig két, diametrálisan átellenes elhelyezkedésű görbét ír le a pontpár. A gömbön így előálló — egy vagy két darabból álló — zárt görbe éppen akkor nem választja el egymástól a gömb egyetlen diametrálisan átellenes pontpárját sem, — azaz bármelyik, nem a görbén elhelyezkedő pontpár akkor és csak akkor vihető át folytonos mozgással egy másik megadott s ugyancsak nem a görbén fekvő pontpárba anélkül, hogy a pontpármozgás közben a görbére lépne, — *ha a görbe egyetlen zárt vonalból áll.* Ez tehát annak szükséges és elegendő feltétele, hogy a poligon ne ossza két részre a projektív síkot.

Tekintsük előbb azt az esetet, amikor a görbe a gömbön két darabból áll. A projektív sík valamely egyenesének a gömbön egy főkör felel meg. E főkörnek a görbével közös pontjai a gömbön diametrálisan átellenes pontpárokat alkotnak. Könnyen beláthatjuk, hogy most a közös pontpárok száma páros. Elegendő ugyanis a főkörnek a két görbe egyikével való közös pontjait tekintenünk s mivel ez a görbe zárt görbe, ugyanannyiszor megy a főkör „fölé“, ahányszor „alája“ süllyed. Így a metszéspontok száma ebben az esetben valóban páros (természetesen föltételezve, hogy a főkörnek nincsen közös ívdarabja a gömbi poligonnal). Ha tehát a síkbeli poligon két részre osztja a projektív síkot, akkor mindig páros számú metszéspontja van bármely olyan egyenessel, amelynek nincsen közös szakasza a poligonnal.

Most vegyük azt az esetet, amikor a görbe a gömbön egy darabból áll. Szemeljük ki a görbe két, diametrálisan átellenes olyan A, B pontpárját, amely nem fekszik az egyenesnek megfelelő főkörön. Ekkor A a főkörrel határolt egyik félgömbön, B pedig a másik félgömbön fekszik. A főkör és a gömbi görbe metszéspontpárjainak megszámolásánál elegendő a görbe egyik $\overset{\frown}{AB}$ ívére szorítkoznunk, hiszen a másik ív éppen az átellenes pontokban metszi a főkört. A kiszemelt egyik ív viszont nyilván páratlan számú pontban metszi a főkört, mert hiszen az egyik félgömb valamely pontjából indul el, s útját a másik félgömbön végzi. Ennélfogva a projektív síkot két részre nem osztó poligont a sík bármely olyan egyenese páratlan számú pontban metsz, amelynek nincsen közös szakasza a poligonnal.

A 17. feladatot megoldotta: *Károlyházy Frigyes* és *Soós Gyula.* — Majdnem teljes megoldást adott rá: *Kővári Tamás* és *Sós Vera.*

Matematikai folyóirataink

Írta: Szénássy Barna

A múlt század első felében a magyar matematikát nemzetközi súllyal Bolyai Farkas és Bolyai János képviselték. Úgy gondolnánk ezek alapján, hogy e korban matematikai életünk súlypontja Erdélyben, közelebbről a Bolyaiak városában, Marosvásárhelyt volt. Korántsem ez a helyzet. Bolyai Farkas mint tanár, igen csekély eredményeket ért el,[1] nem teremtett maga körül lüktető matematikai életet, Bolyai János „új, más világát" pedig Bolyai Farkason kívül nálunk akkor senki sem értette meg. Mindketten elmúltak anélkül, hogy matematikai életünkre a legszerényebb közvetlen hatást is gyakorolták volna.

Amennyiben a múlt század első felében önálló magyar matematikai életről egyáltalában beszélhetünk, annak központjai az egyetem, illetve a főiskolák révén Pest, Debrecen, illetve Sárospatak voltak. Az 1830-ban alapított Magyar Tudományos Akadémia — vagy amint az első időkben nevezték, Magyar Tudós Társaság — tagjai is főként e három intézmény tanárai közül kerültek ki az első évtizedekben, és a szervezettebb magyar matematikai életnek kétségtelenül az Akadémia volt a megindítója. Csaknem egy félévszázados, kevés sikerrel, annál több csalódással, anyagi nehézségekkel szegélyezett út megtételére volt szüksége az Akadémiának, amíg matematikai életünk valamelyest behozhatta évszázados elmaradottságát, és míg elérkezett az idő tartalmasabb matematikai tárgyú folyóiratok kiadására.

Pedig jószándékú kísérletekben még a múlt század első felében, sőt az abszolutizmus kora alatt sem volt hiány néhány haladóbb szellemű tudósunk révén. Sajnos, a külső és belső, a Habsburg és a feudális elnyomás következtében a matematika iránt nem volt érdeklődés, s így szélesebb rétegekhez ezek a kísérletek nem jutottak el, az ország matematikai műveltségét tehát vajmi kevéssé

[1] Brassai Sámuel ezzel kapcsolatban így ír: „Nagy eszű és tudományos férfiú soha kevesebb sikert, mint Bolyai oktatásával nem aratott". L. Brassai: Emlékbeszéd Bolyai Farkas felett. Az Erdélyi Múzeumegylet kiadványainak III. kötete. Kolozsvár, 1886. 233. o.

emelték. Az Akadémia első, polihisztor matematikusai (GYŐRY SÁNDOR, NYÍRI ISTVÁN, BITNICZ LAJOS, VÁLLAS ANTAL, KEREKES FERENC és mások) munkásságában egyetlen maradandó érték, hogy felismerték a magyar matematikai élet végzetes elmaradottságát, az egységes magyar matematikai szaknyelv megteremtésének szükségességét, a matematikának a műszaki tudományokban elfoglalt fontos szerepét, és ilyen természetű gondolataikat több értekezésben részletezték. Amit ezeken felül írtak, nem tekinthetjük önálló tudományos munkának, csupán néhány, abban a korban igen népszerű matematikai probléma (a kör négyszögesítése, magasabbfokú egyenletek megoldása, a komplex számok) magyar nyelven először történő közlésének. Mindezen értekezések közzétételére a Tudós Társaság előbb kétévenként, később — főként az abszolutizmus alatt — egyre ritkábban megjelenő *Évkönyve* adott teret.

Amíg az Évkönyvek *tudományos* értékű dolgozatokat közöltek, a tudományos jelzőt természetesen azon idők mértéke szerint mérve, addig a Tudós Társaság eredeti céljának megfelelően rögtön az első időkben iparkodott a tudományokat *népszerűsíteni* is. Az első magyar nyelvű folyóirat, mely ilyen könnyen érthető, népszerűsítő cikkeket közölt, a „*Tudománytár*", melyet az Akadémia 1834-ben indított meg. Ennek anyagát elsősorban fordított cikkek adták, ezek között elvétve matematikai tárgyút is találunk. A maga korában kétségtelenül nívósnak nevezhető folyóirat csak csekélyszámú olvasóhoz jutott el, és a közönség részvétlensége miatt óriási ráfizetések után kénytelen volt az Akadémia 1844-ben beszüntetni a lap kiadását.

Tudományos jellegű folyóiratot 1840-től kezdve adott ki az Akadémia „*Értesítő*" címmel. Ez évenként tíz füzetben jelent meg és főként az Akadémia működésével kapcsolatos eseményeket, az üléseken elhangzott emlékbeszédeket, előadásokat közölte, vegyest minden szakosztály köréből. Később, 1860-ban három részre osztották a folyóiratot és külön füzetekben jelentek meg a matematikai és természettudományi osztályt érintő közlemények.

Akadémiai, sőt országos viszonylatban is ezekben az években matematikai életünk mélypontját érte el. Az Akadémia ülésein ugyanis évtizedeken keresztül két tudósunk, GYŐRI SÁNDOR és VÁLLAS ANTAL képviselte lényegében a matematikát és az osztályüléseknek az ő hozzászólásaik és előadásaik adtak olykor némi matematikai jelleget. 1850-ben azonban az abszolutista kormány VÁLLAS ANTALt magyar műegyetemet követelő egyik röpiratáért és más hasonló természetű írásaiért megfosztotta egyetemi katedrájától. Ez a haladó gondolkodású tudósunk ekkor emigrációba vonult és Amerikában fejezte be életét. Elvesztése súlyosan érintette a magyar matematikát. Sok igazságot mondanak azok a szavak, hogy ezen évek matematikai termése „csak néhány elavult gyönge tankönyv még inkább elgyöngült átdolgozása, melyeknek nyelvezete se nem nemzetközi, se nem magyar".[2]

1860-ban még egy módosítást léptetett életbe az Akadémia a természettudományok hathatósabb felkarolása érdekében. CSENGERY ANTAL javaslatára ugyanis külön matematikai és természettudományi bizottság alakult. A bizottságnak az volt a feladata, hogy felkutassa e tudományok magyar vonatkozásait és irányítsa a felmerült problémák feldolgozását, nehogy továbbra is „idegen tudósok járjanak hazánkba fölfedezési utazásokra, mint egészen műveletlen, barbár népek országába".[3] Bár a bizottság tagjai között voltak olyanok, kik matematikai kérdésekkel is foglalkoztak (PETZVAL OTTÓ, KRUSPÉR ISTVÁN és SZTOCZEK JÓZSEF) az általuk 1861-ben megindított folyóiratban, a „*Mathematikai és Természettudományi Közlemények*"-ben egyetlen matematikai tárgyú értekezést sem találunk. E ténynek két oka is van. Az egyik, hogy a „matematikai" jelző ellenére kizárólag természettudományi kérdések tartoztak a bizottság hatáskörébe, másrészt az ezen idők szegényes matematikai eredményeinek közlésére bőven elégségesnek bizonyult az „Értesítő".

A magyar matematikának ez a meddő korszaka azonban nem tartott sokáig, mert a termelőerők alakulása egyre több matematikai ismeretet követelt. Csakhamar feltüntek VÉSZ JÁNOS ÁRMIN, id. SZILY KÁLMÁN, VÁLYI GYULA, SCHOLTZ ÁGOSTON, továbbá a Bolyaiak után a múlt század kétségtelenül legnagyobb magyar matematikusai, HUNYADY JENŐ és KÖNIG GYULA. Az Akadémia ülései is egyre tartalmasabbak lettek, és a bemutatott értekezéseket 1867-től kezdve külön füzetekben adták ki. 3—4 év anyaga azután kötetekbe fűzve „*Értekezések a Mathematikai Tudományok köréből*" címmel került az olvasók kezébe. Főként HUNYADY, VÉSZ, KÖNIG és SZILY nevével találkozunk sokszor e kiadványban.

A fenti neveknek már a puszta felsorolása is biztosíték arra, hogy az „Értekezések" több értékes tanulmányt tartalmaznak — többek között HUNYADYnak a determinánsokra vonatkozó néhány nagyjelentőségű eredményét — azonban matematikai életünk fejlődésére hátrányos megszorítást jelentett az, hogy az „Értekezések"-ben csak akadémiai tag közölhette vizsgálatainak eredményeit. Másrészt a mélyebb matematikai előismereteket igénylő tanulmányok abban az időben valóban csak néhány olvasó figyelmét köthették le. Éppen a matematikai tudományok népszerűsítésének, szélesebb körökkel való megismertetésének a vágya indította a műegyetem kiváló professzorait, hogy saját kebelükben és csak a saját erejükre támaszkodva indítsanak meg egy könnyebben érthető matematikai

[2] KÖNIG GYULA: HUNYADY JENŐ emlékezete. Akadémiai Értesítő. II. k. 1891., 4. o.

[3] Matematikai és Természettudományi Közlemények, 1. k. Pest, 1861. VII. o.

jellegű folyóiratot. A kezdeményezést természetszerűleg vállalta a műegyetem tanári kara, mert HUNYADY, SZILY és KÖNIG révén ez az intézmény számított akkor hazánkban az Akadémia mellett matematikai téren legtöbbet. A *„Műegyetemi Lapok“* c., havonként megjelenő folyóirat első füzete 1876-ban hagyta el a sajtót, és rövidebb, könnyen érthető matematikai, természettudományi, valamint technikai tárgyú értekezéseket közölt. A tanulmányokon kívül könyvbírálatok, különféle időszerű beszámolók és matematikai feladatok szerepeltek a folyóirat hasábjain. Az olvasók különösen a feladatokat fogadták nagy érdeklődéssel, a megoldók pedig elsősorban a középiskolai tanárok és az egyetemek hallgatói közül kerültek ki.

Matematikai életünk akkori helyzete miatt azonban még ez a kezdeményezés is korainak bizonyult. A Műegyetemi Lapoknak is az lett a sorsa, mint az Akadémia kiadásában régebben megjelent Tudománytáré: anyagi nehézségek miatt három évfolyam (harminc füzet) után kénytelen volt a szerkesztőbizottság a kiadványt beszüntetni. A magyar matematika akkori helyzetére vonatkozólag aligha találhatunk beszédesebb sorokat, amelyekkel a szerkesztőbizottság elbúcsúzott a kisszámú, de lelkes olvasótábortól: „Mondanivaló. E füzettel a Műegyetemi Lapok befejezi pályafutását. Mathematikai folyóirat, úgy látszik, nálunk még nem élhet meg anyagi segély nélkül. Persze, ha a mathematikának nálunk csak félannyi olvasója lenne, mint a mennyi *tanítója* van, másképép állana a dolog.“ [4]

E balsikerű kísérlet után ismét az Akadémia tette meg az első kezdeményező lépést. Annál is inkább megtehette ezt, mert különféle alapítványok és némi kormánytámogatás útján anyagi helyzete a múlthoz képest sokat javult, másrészt a kiegyezés után a jeles matematikusok egész sora vonult be az Akadémia III. osztályába. Ilyen adottságokra támaszkodva az Akadémia Mathematikai és Természettudományi Osztálya 1882-ben megindította a *„Mathematikai és Természettudományi Értesítő“* c. folyóiratot. Ennek kiadását papírtakarékosságra hivatkozva 1941-ben szüntette be a kormányzat, ugyanakkor, amikor selejtes napilapok és folyóiratok százainak megjelenését még engedélyezték.

A lap előszava abban jelöli meg a célt, hogy benne „önálló mathematikai és természettudományi vizsgálódások eredményeit sorolják fel“. [5] A nyolctagú szerkesztőbizottságban minden érdekelt tudomány (matematika, elméleti és kísérleti fizika, kémia, zoológia, botanika, mineralógia és geológia) képviseltette magát. A matematikai szempontok érvényesítését a megindítástól egészen 1912-ig munkálkodó bizottsági tag, KÖNIG GYULA személye biztosította, aki

[4] Műegyetemi Lapok, III. k. 1878. 316. o.
[5] Mathematikai és Természettudományi Értesítő, I. k. 1882-83. 1. o.

ezen idő alatt egyidejűleg az Értesítő szerkesztését is végezte. Mind szaktudása, mind hatalmas munkabírása alapján mindenképpen hivatott volt erre a munkára.

Hosszú idők folyamán az Értesítő hasábjain — azt mondhatjuk — minden jelentősebb magyar matematikai eredmény napvilágot látott. Egyaránt helyet kaptak a folyóiratban a múlt század jeles magyar matematikusai, a már többször említett HUNYADY JENŐ és KÖNIG GYULA, valamint a differenciálegyenletek egyik legkiválóbb magyar művelője, VÁLYI GYULA mellett a századforduló és napjaink ismertebb szaktudósai csaknem kivétel nélkül. Nehéz volna csak hozzávetőlegesen is leírni azokat a lényegesebb matematikai eredményeket, melyek legelőbb az Értesítő hasábjain jelentek meg. A két Bolyai elismertetése terén is pótolta a múlt mulasztásait az Értesítő, mert itt jelentek meg SZILY KÁLMÁN és a német PAUL STÄCKEL Bolyaiakról szóló tanulmányai.

Az Értesítő hasábjain tudósaink magyar nyelven szóltak az olvasóhoz, a közölt dolgozatoknak még rövid idegennyelvű kivonatát is hiába keressük a lapban. A nálunk elért tudományos eredményekről a külföld csupán egy világnyelven megjelenő folyóiratból értesülhetett volna, mely egyidejűleg a folyóiratok cserekapcsolatának kiépítését is lehetővé tehette. E célok elérése érdekében EÖTVÖS LORÁND, SZABÓ JÓZSEF, SZILY KÁLMÁN, THAN KÁROLY és KÖNIG GYULA akadémiai tagok 1883-ban előterjesztették az Akadémia egyik ülésén azon javaslatukat, hogy indítsanak meg egy németnyelvű tudományos folyóiratot. A felterjesztés pontosan előírja a folyóirat célját is: „E folyóirat közölni fogja mindazon értekezések és közlemények fordítását, melyek a III. osztály Értesítőjében megjelennek, valamint azon hasonló irányú cikkeket, melyek a többi tudományos társulatok kiadásában, vagy egyéb irányú szaklapokban napvilágot láttak; egyúttal feladata leend ismertetni mindazt, a mi a mathematika és természettudományok terén hazánkban történik; jelentést tenni a folyamatban levő tudományos vizsgálatokról, irodalmi jelenségekről sat. . . ., egyúttal a folyóiratból annyi példányt bocsátanak az Akadémia rendelkezésére, a mennyi az Akadémiával csereviszonyban álló külföldi tudományos intézetek és a III. osztály kültagjai számára szükséges".[6] Ilyen előzmények után — jóval később ugyan — 1894-ben indította meg az Akadémia első idegennyelvű matematikai folyóiratunkat *„Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn"* címmel.

A múlt század vége felé indult meg hazánkban a matematikusok szervezettebb élete is. A pesti matematikusok 1885-ben EÖTVÖS LORÁND, HUNYADY JENŐ, KÖNIG GYULA, SCHOLTZ ÁGOSTON

[6] Akadémiai Értesítő, 17. k. 1883. 31—32. o.

és SZILY KÁLMÁN kezdeményezésére magánjellegű társaságba tömörültek, és a „Mathematikai Társaság“ gyakran tartott összejöveteleket. Ezen összejövetelek programmját főként ismeretterjesztő előadások tették. „Nem voltak e társaságnak sem elnökei, sem alapszabályai és összejöveteleiket egy közönséges vacsorázó asztaltársaságtól csak az ünnepélyes fekete tábla jelenléte különböztette meg“.[7] Az egyre népszerűbb és színvonalasabb összejövetelek néhány év mulva arra lelkesítették a társaság tagjait, hogy a közös munkába a fizikusokat is kapcsolják be, és az összejövetelek anyagát egy rendszeresen kiadandó folyóiratban tegyék közzé. Az óhajtást csakhamar tett is követte, és a folyóirat megindítására a létesítendő társulat nem is várt a formális megalakulásig. A „*Mathematikai és Physikai Lapok*“ első füzete BARTONIEK GÉZA és RADOS GUSZTÁV szerkesztésében 1891 júniusában már meg is jelent.

A folyóirat első füzete alkalmat adott arra, hogy a létesítendő társulat célját, programmját minél szélesebb körök tudomására hozhassák, és ezáltal minél több társulati tagot toborozhassanak. Miután az egyesületi alapszabályokat 1891 augusztus 21-én jóváhagyták, jó előkészítés után ugyanezen év november 5-én sor került a „*Mathematikai és Physikai Társulat*“ megalakítására. Hogy ekkor az idő már valóban megérett egy, a matematikusokat és fizikusokat összefogó egyesület létesítésére, misem bizonyítja jobban, mint az, hogy a Társulatnak rögtön a megalakuláskor 298 tagja volt, de rövid két év alatt ez a szám közel 400-ra emelkedett. A Mathematikai és Physikai Lapok első füzeteinek 560 kinyomott példányából pedig 405-re jelentkezett előfizető!

A folyóirat célját maga EÖTVÖS jelölte meg az első füzet beköszöntőjében: „Czélunk nem a tudomány népszerűsítése s nem is önálló tudományos dolgozatok közlése: mások sikerrel vállalkoztak már e feladatok teljesítésére. Mi tudományosan ismertető czikkek alakjában fogjuk megadni a szakembernek azt a táplálékot, melyre szüksége van, ha haladni akar...“ Majd így folytatja: „A füzetek első lapjait önálló czikkek foglalják el. Ezekben a tudomány haladását ismertető — hosszabb, vagy rövidebb — dolgozatokat kívánunk közölni, valamint olyan közleményeket, melyek a mathematikának és physikának, mint iskolai tantárgyaknak egyes részleteit a tanítást előmozdító új alakban fejtik ki.“ A bevezető még leszögezi, hogy a lapnak középutat kell elfoglalnia az Akadémia tisztán tudományos és a Természettudományi Társulat tisztán népszerűsítő kiadványai között. Legfőbb célja tehát a középiskolai matematika-fizika szakos tanárok tudásának és látókörének fokozása.

[7] KÖNIG DÉNES: Az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat első ötven éve. Mat. és Fiz. Lapok, 48. k. 1941. 8. o.

Meghatódva nézegetjük a Mathematikai és Physikai Lapok sok nehéz, vészterhes időt átélt, megsárgult füzeteit. Az anyagi nehézségek, a gazdasági válságok sokszor gúzsba kötötték, a szerkesztőség csak az Akadémiától kapott némi támogatást, államsegélyt az első világháború végéig nem sikerült elérnie. Az alapításkor tervbevett évi nyolc füzet is olykor két év alatt megjelent egyetlen lapra csökkent. Az első világháború távoli csatamezőin küzdő matematikusok dolgozatainak nyomdai korrekcióját sokszor végezték el a semmiféle áldozattól vissza nem riadó itthoni kartársak, de az is többször megtörtént, hogy az értekezés már csak posthumus munkaként jelenhetett meg, mert a szerző időközben a fronton elesett. Átvészelte a lap a két világháború közötti idők gazdasági kríziseit is, mígnem a második világháború számos kultúrellenes kormányintézkedése visszavonhatatlanul megálljt parancsolt a szerkesztőknek és a betűszedőknek egyaránt.

A folyóirat cikkírói között világhírű matematikusok mellett olyanokat is találunk, akik esetleg csak egyetlen szellemi terméküket öntették betűbe a lap hasábjain. Ott találjuk FELIX KLEIN híres „erlangeni programm"-ját, BOLYAI JÁNOS Appendix-ét magyar fordításban, vagy GAUSSnak a felületekre vonatkozó híres vizsgálatait;[8] itt jelent meg 1902-ben FEJÉR LIPÓT híres doktori értekezése, mely új utakat tört a Fourier-sorok elméletében, és amelyhez csatlakozó gazdag irodalom ma már csaknem áttekinthetetlen; és RIESZ FRIGYESnek az integrálfogalomra és más természetű problémákra vonatkozó nagyjelentőségű vizsgálatai közül hány jelent meg legelébb a szerény külsejű magyar lapban! A közölt tanulmányok egy részét azóta természetesen már messze túlszárnyalták az újabb kutatások, megjelenésük idejében azonban újak, időszerűek voltak.

Hosszú és felesleges volna minden jelentősebb eseményt megemlítenünk, mely a Mathematikai és Physikai Lapok életében bekövetkezett,[9] egy azonban bizonyos: elismerést érdemelnek azok, akik fáradságot nem ismerve és megbirkózva minden nehézséggel, a lap útján emelték az ország matematikai kultúrájának színvonalát. HUNYADY JENŐ, az egyik alapító már nem érhette meg fáradozásainak gyümölcsét, 1889 december 26-án meghalt anélkül, hogy láthatta volna az általa oly sokat tervezgetett folyóirat egyetlen számát is. A magyar matematikai kutatások ezen nagy alakjának, a determinánsok egyik legkiválóbb szakértőjének emberi portréját emelkedett stílusban rajzolta meg a kartárs és jóbarát: KÖNIG GYULA

[8] Mindhárom tanulmány teljes fordítása megtalálható a Math. és Phys. Lapok 1897-ben megjelent 6. kötetében. Az akkori szerkesztő, RADOS GUSZTÁV nagyvonalú munkájának bizonyítéka az a tény, hogy pl. KLEIN „erlangeni programm"-jának a magyar fordítás megjelenéséig csupán egy olasz és egy francia fordítása volt.

[9] L. erre vonatkozólag a 7. jegyzetben említett tanulmányt.

abban a beszédben, melyet az Akadémia egyik ülésén tartott.[10] Kétségtelen, hogy matematikai életünk múlt századvégi nagy fellendülése jórészt az ő érdeme.

Változtak idők folyamán a lap szerkesztői is, de azokat a mély nyomokat, melyeket KÖNIG GYULA munkássága nyomott matematikai életünkre, ezek a személyi változások sem tudták eltüntetni; matematikusaink jórésze még ma is közvetlenül, vagy közvetve tanítványának vallja magát.[11] Mindkettőjük neve elválaszthatatlanul összeforrott az egyetemes magyar tudományos fejlődéssel.

A lap szerkesztésének matematikai részét a megindulástól 1914-ig RADOS GUSZTÁV végezte, aki mind a megindítás körül, mind a szerkesztői munkával, valamint gazdag tudományos eredményeivel kimagasló érdemeket szerzett. 1914-ben — tehát a legnehezebb időkben — vette át a szerkesztést FEJÉR LIPÓT és minden akadályon keresztül vezetve már aránylag konszolidált körülmények között adta át e munkát 1932-ben utódjának, a tragikus sorsú KÖNIG DÉNESnek. Különösen FEJÉR LIPÓT munkája elé gördült sok nehézség, az első világháború semmiként sem kedvezett a szép elképzelések valóraváltásának. A távoli frontok a legkiválóbb munkatársakat szólították el, közülük a lap fizikai részének szerkesztőjét, ZEMPLÉN GYŐZŐT 37 éves korában az olasz harcmezőn, Asiagonál sírba is tették 1916 júniusában; nemsokára — 1916 novemberében — követte őt GEŐCZE ZOÁRD, a felszínmérés kiváló mestere, a lap egyik legszorgalmasabb munkatársa. A sok megpróbáltatás mellett még anyagi nehézségekkel is súlyosbított években valóban hallatlan szívósságra és ügyszeretetre volt szükség, hogy a lap egyáltalában életben maradhasson, sőt 1918-ban még örömünnepet is ülhessen — EÖTVÖS LORÁND 70. születésnapját. Ez alkalommal egy külön 184 oldalas Eötvös-füzetet is kiadtak, melyben több tanulmány ismerteti legnagyobb fizikusunk életét és tudományos munkásságát. A szép kiadvány már csak a halálos ágyon kerülhetett EÖTVÖS kezébe — 1919 április 8-án el is húnyt a nagy fizikus, aki a magyar matematikai élet megszervezése, fellendítése és támogatása körül is elévülhetetlen érdemeket szerzett.

A fasizmus második világháború alatti sokmillió áldozatai között a Lapoknak számos lelkes munkását is ott találjuk;[12] szép reményekre jogosító fiatalokat és gazdag eredményeket elért, kiforrott tudósokat egyaránt. Legtöbbjüket fegyvertelenül küldték a keleti

[10] L. a 2. jegyzetet.

[11] V. ö. KALMÁR LÁSZLÓ: Jelentés az 1936. évi KÖNIG GYULA-jutalomról. Math. és Phys. Lapok, 1938. 45. k. 1. o.

[12] L. részletesebben TURÁN PÁL: Megemlékezés. Matematikai Lapok I. k. 1950. 3—15. o.

front aknamezőire, vagy a különféle haláltáborok gázkamráiba. 1943-ban a Matematikai és Fizikai Lapok szerkesztősége is megkapta a további megjelenést betiltó rendelkezést, a nyilas terror alatt pedig a szerkesztő KÖNIG DÉNES önként választotta a halált a megaláztatás és elhurcolás helyett.

KÖNIG GYULÁnak fentebb említett érdemei mellett a középiskolai matematikai-oktatás is sokat köszönhet, mert a múlt század hetvenes éveiben készült gimnáziumi tanterv és a hozzáadott részletes utasítás algebrai része az ő műve volt. Később ugyan szükségessé vált ennek a tantervnek az átdolgozása, abban az időben azonban kétségtelenül egyik legsikerültebb európai terv volt. A jó tanterv mellett középiskoláink képzett matematika szakos tanárokkal is rendelkeztek, hiszen tanáraink legnagyobb része HUNYADY, KÖNIG és a Kolozsvárt működő VÁLYI GYULA és SCHLESINGER LAJOS előadásait hallgatta. A képzett tanárok és a jó tanterv eredményeként a múlt század végének középiskolai matematika oktatása a kor körülményeihez képest magas színvonalon állott, és az a lelkesedés, mely a kor tudósait eltöltötte, nem hagyta közömbösen a középiskolai tanárságot sem. E lelkesedésnek volt az eredménye, hogy a győri állami főreáliskola fiatal tanára, ARANY DÁNIEL — kinek nevét jelenleg a középiskolai tanulóifjúság egyik országos matematikai tanulóversenye viseli — 1894-ben megindította a *„Középiskolai Mathematikai Lapok“*-at.[13] Ez a sok vihart kiállott, nehéz pályát befutó lap aztán lényeges módon hozzájárult a fiatal matematikai tehetségek kikutatásához, adottságaik kifejlesztéséhez. A középiskolai anyaghoz csatlakozó cikkeivel és tetszetős feladataival minden időben lekötötte a matematika iránt érdeklődő tanulóifjúságot.

Századunk húszas éveiben a matematikai dolgozatok publikálására már kevésnek bizonyult az Akadémia és az Eötvös Társulat kiadványa, megérett az idő egy olyan folyóirat életrehívására is, mely elsősorban külföld felé, tehát világnyelveken továbbítja a magyar eredményeket. E folyóirat megindítására a kolozsvári matematikusok átköltözése révén legerősebbé vált vidéki matematikai centrum, Szeged vállalkozott. A folyóiratnak *„Acta Litterarum ac Scientiarum Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae“* címmel megjelent első kötete az 1922—23. években kiadott értekezéseket gyüjtötte össze, hogy aztán évről-évre mintegy harmadfélszáz oldal terjedelemben ismertesse matematikusaink vizsgálatait. A szerkesztés munkáját előbb a két világhírű szegedi matematikus, HAAR ALFRÉD és RIESZ FRIGYES, majd az előbbinek 1933 március 16-án bekövet-

[13] A folyóirat részletesebb történetére vonatkozólag l. OBLÁTH RICHÁRD: A középiskolai matematikai lapok és a matematikai versenyek multjáról. Középiskolai Mathematikai Lapok, Új sorozat, II. k. 1949—50. 3—7. o.

kezett korai halála után RIESZ FRIGYES és KERÉKJÁRTÓ BÉLA végezték. A folyóirat 1938—40. években megjelent füzeteit magábafoglaló 9. kötete a megváltozott *„Acta Scientiarum Mathematicarum“* címet viselte, és ma világszerte ezzel a címmel ismerik a matematikusok a „Szegedi Actát.“

A lap aránylag rövid pályája alatt is komoly elismerést vívott ki. Az igen változatos tárgykörökből kikerült cikkek szerzői tekintélyes számban szegediek, azonban alig van olyan tudományosan dolgozó magyar matematikus, kinek ne jelent volna meg tanulmánya e folyóiratban. A két világháború közötti fasiszta időkben külföldre vándorolt és ma is külföldön működő matematikusok — FEKETE MIHÁLY, NEUMANN JÁNOS, RADÓ TIBOR, RIESZ MARCELL, SZÁSZ OTTÓ, SZEGŐ GÁBOR, ERDŐS PÁL, PÓLYA GYÖRGY, SZEKERES GYÖRGY és a többiek mellett igen gyakran találkozunk a legfiatalabb magyar matematikusok nevével is. A lap nagy tekintélyét minden szónál ékesebben bizonyítja azoknak a világhírű külföldi matematikusoknak korántsem teljes felsorolása, akik idők folyamán tanulmányt küldtek az Actának: CSEBOTÁRJOV, BERNSTEJN, CARATHÉODORY, JULIA, SCHAUDER, DIEUDONNÉ, JARNIK, MENSOV, PERRON, HADWIGER, HASSE, MORDELL, BERWALD, CARTAN, SKOLEM, FRÉCHET, SIERPIŇSKI, SAKS és a többiek nevét mindenki hallotta, aki csak valamelyest is ismeri a modern matematikai eredményeket.

* * *

Az 1943—44-es évekig a fent vázolt fokot érték el matematikai folyóirataink, a háború utolsó éveiben azonban leállították mindegyik kiadását — néhány éven keresztül egyáltalában nem került ki hazai nyomdából matematikai értekezés.

A felszabadulás aztán új korszakot nyitott. A száz sebből vérző ország tudományos élete előbb csak tapogatózva indult meg, de megindult. Matematikai folyóirataink is újra kezdték életüket a megváltozott társadalmi rendnek megfelelő új színnel és tartalommal.

Új szerkesztők — KALMÁR LÁSZLÓ, SZ.-NAGY BÉLA, SZ.-NAGY GYULA, RÉDEI LÁSZLÓ és RIESZ FRIGYES — irányítása mellett legelőbb 1946-ban a Szegedi Acta kezdte meg munkáját, rögtön legelső kötetében mintegy mementóként közölve a háború áldozataiul esett CSILLAG PÁL, LÁZÁR DEZSŐ és SCHWEITZER MIKLÓS egy-egy posthumus értekezését is. E kötetnek méltó folytatása az 1950-ben kiadott kétkötetes *„Fejér—Riesz Emlékkönyv“*, mely igen gazdag anyagával bizonyítja, hogy a háború megtépázhatta ugyan a magyar matematika fáját, de elpusztítania nem sikerült!

Ugyancsak 1946-ban indult meg a Tudományos Akadémia védnöksége alatt EGERVÁRY JENŐ akadémikus szerkesztésében a *„Hungarica Acta Mathematica“* c. folyóirat, mely mintegy összekötő kapocs volt az Akadémia háborúelőtti és az újjászervezett

Magyar Tudományos Akadémia most megjelenő folyóirata között. A lap füzetei mindössze egy kötetet tesznek ki, mely az 1946—49. között megjelent értekezéseket tartalmazza. Az ebben a kötetben szereplő 17 tanulmány tekintélyes része fiatalabb magyar matematikusok alkotása és méltóan igazolja, hogy matematikánk utánpótlásban nem szegény.

1947-ben megindult a „*Középiskolai Mathematikai Lapok*" új sorozatának I. évfolyama is és — főként SURÁNYI JÁNOS főszerkesztő agilitása révén — egyre szélesebb olvasóközönséghez jut el mind bel-, mind külföldön. 1949-ben pedig a Bolyai János Matematikai Társulat indította meg TURÁN PÁL felelős szerkesztése és HAJÓS GYÖRGY, KALMÁR LÁSZLÓ, RÉNYI ALFRÉD és SZELE TIBOR szerkesztése mellett a Mathematikai és Physikai Lapok folytatásának tekinthető „*Matematikai Lapok*"-at, azonban az előbbivel összehasonlítva némileg más céllal és főként más szellemben. Ez a lap már „nem elégedhet meg pusztán azzal, hogy a Matematikai és Fizikai Lapok jelentős multjának folytatójává válik, hanem azon túl is kell mennie, mert a rohamléptekkel fejlődő magyar dolgozó társadalom a matematikusokkal szemben is nagyobb igénnyel lép fel, mint a halódó kapitalizmus igájába fogott, felszabadulás előtti értelmiségi réteg" [14] — mondja ALEXITS GYÖRGY, majd kifejti, mily fontos, hogy az objektív világ matematikai szemlélete az olvasók vérévé váljék. A múlttól eltérőleg a folyóiratnak szélesebb olvasórétegehez kell szólnia és át kell hidalnia azt a mély szakadékot, mely a múltban a matematikát tudományosan művelők és a matematikát oktatók között egyre mélyült. „Apróbb cikkek, megoldandó problémák egymás után következő sorozatával megvilágíthatja azokat az összefüggéseket is, amelyeken keresztül a matematikai „aprómunka" beleilleszkedik a nagy problémák megszabta gondolatok keretébe." [15]

Átlápozva a lap eddig megjelent füzeteit, megállapítható, hogy a szerkesztők tervszerűen haladnak a kitűzött célok elérése felé. A programm menetközben bővült azzal, hogy egész cikksorozat ismerteti a különféle szovjet matematikai iskolák jelentős eredményeit.

1950-től kezdve a Magyar Tudományos Akadémia hivatalos idegen nyelvű matematikai lapja az „*Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*", melynek bevezetője hangsúlyozza, hogy közel akar lenni a dolgozókhoz, a szocializmust akarja építeni. A megjelenő cikkek a matematika minden ágát felölelik, de a folyóirat gondoskodik arról is, hogy kidomborodjék az elmélet és a gyakorlat egysége. A HAJÓS GYÖRGY szerkesztésében megjelenő, kül-

[14] ALEXITS GYÖRGY: Célkitűzéseink. Matematikai Lapok, I. k. 1950. 1. o.
[15] U. o. 2. o.

sejében is mutatós, tartalmában pedig értékes folyóirat valóban méltó arra, hogy Akadémiánk munkáját külföldön igazolja. Az alig kétéves folyóirat nemzetközi sikerét mutatja, hogy már most is kiváló külföldi szerzők is közlik benne legújabb kutatásaikat.

A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztályának *„Közleményei“*, mint a III. osztálynak magyar nyelvű folyóirata 1951-től kezdve jelenik meg. Az első kötet az Akadémia 125 éves fennállása alkalmával tartott Ünnepi Hét, a második kötet pedig az 1951. évi nagygyűlés anyagát tartalmazza. A rendkívül gazdag anyagot felölelő vaskos kötetek — melyek szerkesztési munkáját RÉNYI ALFRÉD végezte — számos olyan matematikai és fizikai tanulmányt közölnek, melyek megvilágítják e tudományok újabb útjait, továbbá összefüggő képét adják a magyar matematikai kutatások legújabb eredményeinek.

Budapest és Szeged után 1950-ben a harmadik matematikai központ, Debrecen is megindított egy évenként két füzetben megjelenő idegen nyelvű matematikai folyóiratot RÉNYI ALFRÉD, SZELE TIBOR és VARGA OTTÓ szerkesztésében. A magyar matematikai lapok ezen Benjaminja, a *„Publicationes Mathematicae“* máris nagy népszerűségnek örvend és alaposan kiépített cserekapcsolatai útján is nagy erőt képvisel az egész Tiszántúl matematikai életének emelésében.

* * *

Aki a Magyarországon megjelent matematikai értekezések hiánytalan képét meg akarja rajzolni, hézagos munkát végez, ha csak az eddig felsorolt folyóiratokat nézi át. Idők folyamán ugyanis a különféle irányú szaklapok is közöltek önálló matematikai értekezéseket, sőt bőven találunk ilyirányú tanulmányokat a középiskolák évvégi értesítőiben és az egyes tudományos társulatok évkönyveiben is. A teljes bibliográfia bizonyára segítséget nyújtana különféle kutatásokban és eredménnyel is járna,[16] hisz a mondottak igazolásául csak azt említjük meg, hogy pl. GEÖCZE ZOÁRDnak a felszínmérés kérdéséről szóló és alapvető jelentőségű eredményeket tartalmazó első dolgozatai a század elején az ungvári alreáliskola értesítőiben jelentek meg.

Most megjelenő matematikai folyóirataink jövője és további fejlődése gazdag eredményeket ígér, mert a múlthoz képest összehasonlíthatatlanul jobbak a tudományos munka és a publikálás

[16] Az 1901—1925. közötti években magyar szerzőktől bármily nyelven megjelent értekezéseket GÁSPÁR ILONA: A magyar matematikai irodalom bibliográfiája (Budapest, 1930) c. könyve felsorolja. E szerint ezalatt a 25 év alatt 1897 magyar matematikusoktól származó tanulmány és könyv jelent meg. Időszerű lenne az 1926—1950. évek adatait tartalmazó bibliográfia összeállítása.

lehetőségei. A közelmúltban életbeléptetett tudományos fokozatok már nemcsak üres címet, hanem jelentős anyagi támogatást is jelentenek; a különféle jutalmazások, tudományos ösztöndíjak, az aspirantúra intézménye pedig főként a fiatalabb kutatókra hatnak serkentőleg és biztosítják az utánpótlást a matematikusok táborában is. Ugyanakkor a jól felszerelt intézetek, könyv- és folyóirattárak útján nagymértékben megjavultak a tudományos kutatás külső feltételei is. Ha ehhez még hozzávesszük, hogy a szovjet matematika nagyszerű eredményei új színt adtak matematikai életünknek, az egyre inkább kiépülő személyi kapcsolatok pedig még ezenfelül is nagy segítséget jelentenek, akkor biztosak lehetünk abban, hogy a magyar matematika nemcsak megőrizni, hanem jelentős mértékben öregbíteni is fogja azt a tekintélyt, melyet hosszú és szívós munka árán a világ előtt magának kiharcolt.

FELADATROVAT

Szerkeszti: HAJÓS GYÖRGY

A feladatrovatnak szánt küldeményeket a következő címre kérjük: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, V., Reáltanoda-utca 13—15. Az egyes feladatok megoldását külön lapon kérjük. Nem zárkózunk el olyan feladat közlése elől sem, amelynek megoldását beküldője nem ismeri.

Előző számunk megjelenése előtt a 29. feladat megoldását beküldötte még CORRADI KERESZTÉLY és a 33. feladat megoldását CSÁSZÁR ÁKOS.

Kitűzött feladatok

54. Milyen z_1 komplex számokból kiindulva ad adott komplex a mellett a

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n^2 + a)$$

iteráció konvergens sorozatot?

Riesz Frigyes

55. Igaz-e, hogy $k = 1, 2, 3, \ldots$ mellett

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-2^x} - e^{-2^{x+1}}\right) \cdot \begin{Bmatrix} \cos 2k\pi x \\ \sin 2k\pi x \end{Bmatrix} dx = 0 \quad ?$$

Barna Béla

56. Bizonyítsuk be, hogy ha a p prímszám osztója egy $x^2 + ay^2$ és egy $u^2 - av^2$ alakú számnak, akkor $4n + 1$ alakú. (Valamennyi betű egészszámot jelöl, $(x, y) = (u, v) = 1$.)

Obláth Richárd

57. Bizonyítandó, hogy ha egy (önáthatolás-nélküli) poliéder minden lapszöge konvex, azaz 180°-nál kisebb, akkor a poliéder is konvex, azaz bármely két pontjának összekötő távolságát tartalmazza.

Hajós György

Megoldott feladatok

31. feladat. Ha az $F(z)=b_0+b_1z+\ldots+b_nz^n$ polinom minden nullhelye a $z=x+iy$ síknak $x\leqq 0$ félsíkjában van, akkor valamennyi Jensen-közepe, vagyis az

$$R_k(F)=b_0+\sum_{\nu=1}^{k}b_\nu\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)\ldots\left(1-\frac{\nu-1}{k}\right)z^\nu$$

$$(b_{n+1}=b_{n+2}=\ldots=0)$$

polinomok ugyanevvel a tulajdonsággal rendelkeznek.

(Turán Pál)

Megoldás. Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy $b_n=1$. Így tehát

$$F(z)=\prod_{\nu=1}^{n}(z+\beta_\nu),$$

ahol valamennyi β_ν valós része nem-negatív.

Átalakítjuk a vizsgált polinomokat.

$$R_k(F)=b_0+\sum_{\nu=1}^{k}b_\nu k(k-1)\ldots(k-\nu+1)\left(\frac{z}{k}\right)^\nu=$$

$$=\left(\frac{z}{k}\right)^k\left[b_0\left(\frac{k}{z}\right)^k+\sum_{\nu=1}^{k}b_\nu k(k-1)\ldots(k-\nu+1)\left(\frac{k}{z}\right)^{k-\nu}\right].$$

Ha tehát a $w=\frac{k}{z}$ és $P(w)=w^k$ jelöléseket vezetjük be, akkor

$$R_k(F)=\frac{1}{w^k}[b_0P(w)+b_1P'(w)+\ldots+b_kP^{(k)}(w)].$$

Minthogy pedig $P(w)$-nek k-nál magasabbrendű deriváltjai eltűnnek, másrészt $\nu>n$ mellett $b_\nu=0$,

$$R_k(F)=\frac{1}{w^k}[b_0P(w)+b_1P'(w)+\ldots+b_nP^{(n)}(w)].$$

A **D** differenciáloperátorral való szimbolikus számolás használata mellett tehát

$$R_k(F)=\frac{1}{w^k}F(\mathbf{D})P(w)=\frac{1}{w^k}\prod_{\nu=1}^{n}(\mathbf{D}+\beta_\nu)\cdot P(w).$$

Mivel pedig z és w valós részének előjele megegyezik, azt kell bizonyítanunk, hogy

$$(\mathbf{D}+\beta_1)(\mathbf{D}+\beta_2)\ldots(\mathbf{D}+\beta_n)P(w)\neq 0,$$

ha w valós része pozitív.

Elegendő a következő segédtételt bizonyítanunk: *Ha egy* $f(w)$ *polinomnak megvan az a tulajdonsága, hogy* $f(w) \neq 0$, *hacsak* w *valós része pozitív, ha továbbá* β *valós része nem-negatív, akkor a*

$$(\mathrm{D}+\beta)f(w)=f'(w)+\beta f(w)$$

függvény is rendelkezik az említett tulajdonsággal. Ugyanis $P(w)$ nyilván rendelkezik a szereplő tulajdonsággal, s így a segédtétel szerint a $\mathrm{D}+\beta_\nu$ operátorok egymásutáni alkalmazása e tulajdonságot meghagyja.

Segédtételünket indirekt úton bizonyítjuk. Legyen

$$f(w)=A\prod_{\nu=1}^{m}(w+\alpha_\nu),$$

legyen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ és β valós része nem-negatív, továbbá

$$f'(w_0)+\beta f(w_0)=0,$$

és w_0 valós része pozitív. E feltevésekből ellentmondásra következtetünk. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ és w_0 valós részére vonatkozó feltevéseinkből $f(w_0) \neq 0$ következik. Így tehát

$$-\beta=\frac{f'(w_0)}{f(w_0)}=\sum_{\nu=1}^{m}\frac{1}{w_0+\alpha_\nu}.$$

Ez azonban lehetetlen, mert feltevésünk szerint a baloldal valós része nem lehet pozitív, viszont a jobboldal valamennyi tagjának pozitív a valós része, hiszen $w_0+\alpha_\nu$ valós része pozitív.

Ezzel a feladat állítását bizonyítottuk. Megjegyezzük, hogy ez az állítás akkor is helyes, ha abban a negatív félsík helyett a pozitív félsík szerepel. Ez a feladat állításából könnyen levezethető, s bizonyításunk egyszerű átírásával közvetlenül is igazolható.

Rényi Kató

36. feladat. Bizonyítsuk be, hogy bármely rendezett megszámlálható halmazhoz található a nagyság szerint rendezett racionális számoknak hasonlóan rendezett részhalmaza.

(Szele Tibor)

Megoldás. Legyenek az adott rendezett megszámlálható halmaz elemei

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

Rendeljünk a_1-hez tetszőleges r_1 racionális számot. Ha az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemekhez már rendeltünk hasonlóan rendezett $r_1, r_2, \ldots, r_n$ racionális számokat, akkor a_{n+1}-hez tetszésszerinti olyan r_{n+1} racionális számot rendelünk, amelyik az $r_1, r_2, \ldots, r_n$ számokhoz ugyanolyan rendezési viszonyban van, amilyenben a_{n+1} van az $a_1, a_2, \ldots, a_n$

elemekhez. Ilyen r_{n+1} biztosan található, mert sem legkisebb, sem legnagyobb racionalis szám nincs, s mert bármely két racionális szám között van további racionális szám.

Ilyen módon az adott halmaz valamennyi eleméhez egy-egy racionális számot rendelhetünk. A hozzárendelt

$$r_1, r_2, r_3, \dots$$

racionális számok halmazának nagyságszerinti rendezése a hozzárendelés előírása miatt az adott halmazéhoz hasonló.

Gehér László

A 36. feladat megoldását beküldötték még: CSÁSZÁR ÁKOS, HAJÓS GYÖRGY, KONCZ KÁROLY, KŐVÁRI TAMÁS, KRÁLIK DEZSŐ, RÉNYI KATÓ, SARKADI KÁROLY, VINCZE ISTVÁN.

Megjegyzés. A 36. feladat tétele általánosabban kimondva, bizonyítással együtt szerepel HAUSDORFF: *Grundzüge der Mengenlehre* (Teubner, 1914) c. munkában a 99. lapon.

Blum Ottó

38. feladat. Egy x_0 helyen a valós $f(x)$ függvénynek tágabb értelemben vett maximuma, ill. minimuma van, ha van x_0-nak olyan környezete, melyben $f(x) \leqq f(x_0)$, ill. $f(x) \geqq f(x_0)$. Bizonyítandó, hogy a tágabb értelemben vett szélsőértékek az y-tengelyre vetítve megszámlálható halmazt adnak.

(Gehér István)

I. megoldás. Jelentse E_n azon a helyek halmazát, melyekre

$$|x-a| \leqq \frac{1}{n} \quad \text{esetén } f(x) \leqq f(a).$$

Az E_n halmaz $\left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right]$ intervallumba eső pontjaihoz (p egész) nem tartozhatik különböző függvényérték, mert E_n definíciója szerint e függvényértékek egyike sem lehet a másiknál nagyobb. Ezért E_n e részének képe az y-tengelyen legfeljebb egyetlen pont lehet. Így a teljes E_n halmaz képe is megszámlálható. Azonban $E_1 + E_2 + \dots$ éppen a tágabb értelemben vett maximumok helyeinek halmaza, ezért e halmaz képe is megszámlálható.

Ugyanígy okoskodhatunk a tágabb értelemben vett minimumokra. Az adódó két halmaz egyesítése is megszámlálható halmazt ad.

Császár Ákos

II. megoldás. Ha y szerepel a tágabb értelemben vett maximumok között, ennek definíciója szerint hozzárendelhetünk egy olyan, racionális számokkal határolt (a, b) intervallumot, melyre igaz, hogy $f(x)$ e közben felveszi az y értéket, de nagyobb értéket nem vesz fel.

Különböző y értékekhez különböző intervallumokat rendelünk így, mert ugyanabban az intervallumban nem lehet a függvénynek több abszolút maximuma.

Minthogy a racionális határú intervallumok halmaza megszámlálható, igaz ez e halmaz részhalmazára, s a tágabb értelemben vett maximum-értékeknek ezzel egy-egyértelmű vonatkozásba hozott halmazára is.

Ugyanez áll a minimum-értékek halmazára, s a kettő egyesített halmazára is.

Králik Dezső

III. megoldás. Monoton függvényre a feladat állítása nyilván igaz, hiszen ennek akkor van csak tágabb értelemben vett szélsőértéke, ha egy szakaszon állandó, s közös pont nélküli szakaszok halmaza megszámlálható.

Jelölje $M(a, b)$ az $f(x)$ függvény által az (a, b) közben felvett értékeknek felső határát. Az $M(a, x)$ függvény $(a \leqq x)$ nyilván monoton nő. Tehát megszámlálható sok tágabb értelemben vett szélsőértéke van.

Ha $f(x)$-nek az x_0 helyen tágabb értelemben vett maximuma van, és $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ közben $f(x_0)$-nál nagyobb értéket nem vesz fel, akkor az $(x_0-\varepsilon, x_0)$ közben választott racionális r számra igaz, hogy $M(r, x)$ az $(x_0, x_0+\varepsilon)$ közben állandó. Tehát $f(x_0)$ tágabb értelemben vett maximuma az $M(r, x)$ függvénynek.

Minthogy megszámlálható sok racionális r szám van, s mindegyik $M(r, x)$ függvénynek megszámlálható sok tágabb értelemben vett maximuma, azért mindezek halmaza s így $f(x)$ tágabb értelemben vett maximumainak halmaza is megszámlálható.

Ez igaz a minimumokra is, mert ezek $-f(x)$ maximumai. Ezért a szélsőértékeknek egyesítéssel adódó halmaza is megszámlálható.

Sarkadi Károly

A 38. feladat megoldását beküldötték még: Blum Ottó, Gehér László, Hajós György, Kővári Tamás.

Megjegyzés. A 38. feladat állítását általánosabb formában bizonyítással együtt adja Hausdorff: *Grundzüge der Mengenlehre* (Teubner, 1914), 363. l.

Blum Ottó

PÉLDAROVAT

Szerkeszti: VARGA TAMÁS

A megoldásokat kérjük a Társulat címére (Budapest, V., Reáltanoda-utca 13—15.) beküldeni. A borítékra írjuk rá feltünően: PÉLDAROVAT. Minden megoldást külön lapra írjunk. Tömör, világos, egyszerű megoldásokat várunk. Lapunkban közölni fogjuk minden példának egy vagy több megoldását és az összes helyes megoldók nevét. Közlésre szánt példákat is szívesen fogadunk.

Kitűzött példák

15. Bontsuk tényezőkre:

$$x^5+x+1.$$

16. Bontsuk tényezőkre:

$$x^{10}+x^5+1.$$

(A tényezőkre bontást úgy értjük, hogy a kifejezéseket x racionális együtthatójú, legalább elsőfokú polinomjainak szorzataként kell előállítani.)

17. Oldjuk meg:

$$9\left(x+\frac{4}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)(1-x)=4x\left(x+\frac{1}{3}\right).$$

18. Legyenek egy háromszög oldalai $a<b<c$, szögei ennek megfelelően $\alpha<\beta<\gamma$. A háromszög magassági pontja *a*) melyik oldalhoz, *b*) melyik csúcshoz van legközelebb?

19. Szerkesszünk derékszögű háromszöget átfogója és a derékszöghöz tartozó szögfelezője alapján.

20. Szerkesszünk egy olyan egyenlőszárú háromszöget, amelynek alapegyenese egy előre megadott szög egyik szára, csúcsa a szög másik szárára esik, szárai pedig két, a szög szárai között megadott ponton mennek át.

21. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder két magasságvonala metszi egymást, akkor a másik kettő is metszi egymást. Határozzuk meg ennek alapján annak feltételét, hogy a tetraéder magasságvonalai mind egy pontban messék egymást.

22. Egy egyenes egy derékszögű lapszög mindkét lapjával 30°-os szöget zár be. Hány fokos szöget zár be a lapszög élével?

23. Egy torznégyszög érint egy gömböt. Bizonyítsuk be, hogy az érintési pontok egy síkban vannak.

Beküldési határidő: a lap megjelenésétől számított 2 hónap.

TÁRSULATI ÉLET

Beszámoló a Társulat által a Magyar-Szovjet Barátsági Hónap keretében rendezett előadásokról

A Bolyai János Matematikai Társulat ez évben is megrendezte a Magyar-Szovjet Barátsági Hónappal kapcsolatos előadásait, melyek célja a szovjet matematikai eredmények, illetve a matematika tanításának a Szovjetunióban használt módszere széleskörű ismertetése és népszerűsítése. Az előadásokat elég széles rétegek bevonásával tartottuk meg, voltak a legújabb szovjet matematikai eredményeket ismertető klubesték, egyetemi tanszemélyzet és hallgatóság, középiskolai tanárok és középiskolás diákok számára tartott előadások. Mindezeket megtartottuk az összes tagozatok városaiban, tehát Budapesten, Szegeden, Debrecenben, Pécsett, Veszprémben, Győrött, Egerben és egy, két más városban is. Itt mindjárt meg kell jegyeznünk, hogy a barátsági hónap kapcsán olyan helyeken is voltak előadások, ahol még eddig a Társulat nem működött, pl. Hatvanban és Keszthelyen, amit a társulati élet fejlődése szempontjából is kiemelkedő eredménynek tekintünk. A Veszprémi Tagozat pl. 5 előadást tartott különböző vidéki városokban, részben a Természettudományi Társulattal közös rendezésben. A tagozat előadásait összesen 1000 érdeklődő látogatta. Annak érdekében, hogy az előadóknak megfelelő anyag álljon rendelkezésére, sokszorosított sillabuszokat készítettünk és pedig négyfélét, a különböző előadások természetéhez mérten. Ezek a következők: „Mit köszönhet a magyar matematikai élet a Szovjetuniónak?", szerkesztette FUCHS LÁSZLÓ, az elnökségi tagok közreműködésével, „Mit köszönhet a magyar matematikatanítás a Szovjetuniónak?" szerkesztette VARGA TAMÁS, többek közreműködésével, „Matematikai módszerek felhasználása a Szovjetunió nagy természetátalakító munkálataiban", szerkesztették FENYŐ ISTVÁN, SZÉKELY GÁBOR és többen mások, végül „Feladatmegoldások", összeállította szintén többek segítségével VARGA TAMÁS, NATANSZON egy könyve alapján. Az első egyetemek számára, a második pedagógusok, az utolsó kettő pedig középiskolások számára készült. A természetátalakítással kapcsolatos, matematikai módszerekről szóló előadást egy-két üzemben is szerettük volna megtartani, azonban ez szervezési nehézségek miatt ez évben még nem sikerült.

Az egész ország területén 62 előadást tartottunk, mintegy 4000 hallgató részvételével. Az előadások általában nagy érdeklődést keltettek, amit a látogatottság, valamint a hozzászólások és az előadókhoz intézett kérdések bizonyítanak. Itt külön ki kell emelnünk a Győri Tagozat egyik előadását, melyet a győri Dugonics-utcai munkásszállóban tartottak meg. „A matematika szerepe a Szovjetunió természetátalakító munkálataiban“ c. előadáshoz a 26 főnyi hallgatóság köréből 7-en szóltak hozzá. A hallgatók valamennyien fizikai dolgozók voltak és a hozzászólások ennek megfelelően gyakorlati jellegűek. A középiskolák közül külön ki kell emelnünk a budapesti Épületgépészeti Technikumot, ahol külön erre a célra szépen feldíszített teremben ünnepélyes keretek között folyt le az előadás a jelenlévők, mintegy 70—80 fő nagy érdeklődése közepette. Nem egy vidéki tagozatban a helybeli tagtársak igen áldozatkész munkát folytattak több előadás megtartásának elvállalásával. Több helyen az M. Sz. T. kiküldöttei is megjelentek.

Nyugodtan mondhatjuk, hogy Társulatunknak a Barátsági Hónappal kapcsolatos munkája jelentős fejlődést hozott mind a szovjet eredmények ismertetése, mind pedig a társulati élet szempontjából. Megállapíthattuk, hogy tudományos és pedagógiai téren egyaránt bőven van mit tanulnunk a szovjet matematikusoktól és továbbra is törekednünk kell arra, hogy minél jobban megismerjük nagyszerű eredményeiket. Meg kell jegyeznünk, hogy a szovjet matematika ismertetése a Társulatban állandóan és rendszeresen folyik Budapesten és a vidéki tagozatokban havonta egy-egy klubeste keretében.

A Bolyai János Matematikai Társulat a Magyar-Szovjet Barátsági Hónap folyamán megtartott előadásai

Budapesten

I. Tudományos Szakosztály központi előadóülései

1952 március 14. Klubeste az MTESz Szovjet Műszaki Folyóirat- és Könyvolvasójában. RÉNYI ALFRÉD szovjet eredményeket ismertet a láncreakciók elméletéről. Az előadó ismertette B. A. Szevasztyanovnak az Uszpehi Matyematyicseszkih Nauk 1951. évfolyamának 6. számában megjelent összefoglaló cikkét a láncreakciók valószínűségszámítási elméletéről.

1952 március 22. FEJES TÓTH LÁSZLÓ: „Konvex testek elmélete terén elért szovjet eredményekről.“ Uriszon, Luszternyik, Snyirelman, Delone, Zsitomirszki, A. D. Alekszandrov, Libermann, Olovjanisnyikov, Cohn-Vossen és más szovjet matematikusoknak a konvex testek elméletébe vágó eredményeinek ismertetése, különös tekintettel a Brunn-Minkowski-féle egyenlőtlenség gondolatkörében, valamint a geodetikus vonalak és felületek hajlításának elméletében elért eredményekre.

1952 március 29. Fuchs László — Szele Tibor: „Az absztrakt algebra terén elért szovjet eredményekről."

Szele Tibor méltatta a szovjet algebrai iskola legújabb eredményeinek rendkívül nagy jelentőségét a modern algebra mai fejlődésében és kidomborította O. Ju. Smidt és A. G. Kuros szerepét a szovjet algebrai kutatások irányításában. Néhány különösen nagyfontosságú szovjet eredményt említett meg a modern algebra különböző ágaiból (Pontrjagin, Csebotarjov, Malcev, Csernikov, Szuskevics, Golfand, Fjodorov), majd részletesen ismertette azokat az eredményeket, amelyeket A. G. Kuros, L. Ja. Kulikov és Sz. V. Fomin az Ábel-féle csoportok szerkezetére vonatkozó kutatásokban legújabban elértek.

Fuchs László a csoportfogalom általánosítása terén elért jelentős szovjet eredmények közül főként A. K. Szuskevich és A. I. Malcev idevágó tételeit ismertette. Gyűrűelméleti vonatkozásban A. I. Uzkov, I. M. Gelfand és V. A. Andrunakijevics, a lattice-elméletből pedig A. G. Kuros és V. I. Glivenko eredményei a legjelentősebbek.

II. Egyetemi és főiskolai előadások

1952 március 3. Vincze István: „Szovjet matematikusok szerepe a valószínűségszámítás megalapozása terén." Előadás a Közgazdasági Egyetemen.

1952 március 18. Tolnai Jenő: „Feladatmegoldások." Előadás a Pedagógiai Főiskolán.

1952 március 24. Császár Ákos: „Mit köszönhet a magyar matematikai élet a Szovjetuniónak?" Előadás az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karán.

1952 március 26. Aczél János: „Elmélet és gyakorlat egysége a szovjet matematikában." Előadás a Műszaki Egyetemen.

III. Előadás pedagógusok számára

1952 március 12. Borbély Györgyné: „Mit köszönhet a magyar matematikai oktatás a Szovjetuniónak?" Előadás középiskolai tanárok számára a Pedagógustovábbképző Intézetben.

1952 március 13. LIGETI BÉLA: „Mit köszönhet a magyar matematikaoktatás a Szovjetuniónak?" Előadás általános iskolai tanárok számára a Pedagógustovábbképző Intézetben.

IV. Középiskolai előadások

1952 március 11. GÉMESI JÓZSEF: „Szovjet matematikusok". Előadás a Corvin Mátyás gimnáziumban.

1952 március 22. BÍRÓ IMRE: „Feladatmegoldások." Előadás az I. sz. Épületgépészeti Technikumban.

1952 március 18. GÁDOR ENDRÉNÉ: „Szélsőérték feladatok elemi megoldása." Előadás a Veres Pálné gimnáziumban.

1952 március 26. ERDŐSI JÓZSEF: „A szovjet matematikaoktatás hatása a magyar matematikaoktatásra." Előadás a József Attila gimnáziumban.

1952 március 27. NEUKOMM GYULA: „Feladatmegoldások." Előadás a Rákóczi Ferenc gimnáziumban.

1952 március 29. GALLAI TIBORNÉ: „Feladatmegoldások." Előadás a Fürst Sándor gimnáziumban.

Bolyai János Matematikai Társulat szegedi tagozatának előadásai

1952 február 16. SOÓS PAULA: „A szovjet matematikai oktatás módszertani kérdései." (Pedagógus előadás)

1952 február 26. és március 8. BAKOS TIBOR: „Matematikai olimpiászon a Szovjetunióban." I.—II. (Középiskolai előadás)

1952 március 1. SOÓS PAULA: „Mit köszönhet a magyar matematikaoktatás a Szovjetuniónak?" (Pedagógus előadás)

1952 március 22. KALMÁR LÁSZLÓ: „Markov újabb vizsgálatai az asszociatív rendszerekről." (Klubest) A. A. Markov: Nyevozmozsnoszty nyekotorih algoritmov v teorii asszociativnih szisztyem című dolgozatának (Dokladi Akagyemii Nauk SzSzSzR, 77 (1951), 19—20) ismertetése. Előkészítésül ismertette az előadó A. A. Markov három előző dolgozatának eredményét is hasonló tárgyról, valamint említette az algoritmus fogalmának Markov-féle szabatos definícióját.

Bolyai János matematikai társulat debreceni tagozatának előadásai

1952 február 22. BARNA BÉLA: „Matematikai olimpiászok a Szovjetunióban és a versenyszellem felhasználása az oktatói munkában." (Pedagógus előadás)

1952 február 23. SZELE TIBOR: „Újabb szovjet eredmények a modern algebra területén." L. márc. 29.-i Szele—Fuchs előadás.

1952 március 8. RÉNYI ALFRÉD: „Szovjet eredmények a matematikai statisztika területén." Előadó röviden ismertette a matematikai statisztika feladatát, módszereit, továbbá a valószínűségszámítással való kapcsolatát. Rámutatott néhány ezzel kapcsolatos elvi kérdésre. Ezután röviden ismertette Bernstein, Szluczkij, Romanovszkij, Gnyegyenko, Kolmogorov, Szmirnov és mások matematikai statisztikai eredményeit, különösen kidomborítva a szovjet nem-paraméteres módszert a nyugati paraméteres statisztikai módszerekkel szemben.

1952 március 4. SZÉNÁSSY BARNA: „Mit köszönhet a magyar matematikai élet a Szovjetuniónak?" Előadás a Fazekas Mihály gimnáziumban középiskolai diákok számára.

1952 március 7. GYARMATHI LÁSZLÓ: „Szovjet geometriai eredmények." Előadás a hajdúszoboszlói általános gimnáziumban középiskolai diákok számára.

1952 március 21. VARGA OTTÓ: „Újabb szovjet geometriai eredmények." (Klubest.) Előadó az ú. n. klasszikus moszkvai geometriai iskola eredményei közül különösen Efimov, Finikov, Bjusgensz és Luzinnak a felületek lokális deformációkra, ill. a Peterson-féle transzformációkra vonatkozó eredményeit ismertette. A modern differenciálgeometriai iskola eredményei közül többek között Kagan, Rasevszkij és Sapirotól származó subprojektív terekre vonatkozó vizsgálatokat ismertette, továbbá beszámolt G. F. Laptyev, V. Vagner és másoknak a holonomia csoportra vonatkozó eredményeiről. Beszámolt továbbá az affin összefüggő terek beágyazási problémájának G. F. Laptyevtől származó megoldásáról. Továbbiak során V. Vagnernek az anholonómia rendszerre vonatkozó vizsgálatait mutatta be. Azonkívül V. Vagnernek a Finsler-terekre vonatkozó vizsgálatairól adott áttekintést. Ismertette a harmadik geometriai iskola eredményeit, amely iskola a nagybani geometria vizsgálataival foglalkozik.

Itt elsősorban A. D. Alexandrov konvex felületek belső geometriájára vonatkozó könyvére tért ki. Ismertette továbbá Pogorolovnak azokat a vizsgálatait, amelyek a Poincaré-féle sejtésnek nagymérvű általánosítását tartalmazzák. Végül beszámolt Olovjányicsnyikovnak azon kutatásairól, amelyek a konvex polyéderek meghatározására vonatkozó klasszikus Cauchy-féle tétel köré csoportosulnak.

1952 március 25. RAPCSÁK ANDRÁS: „Matematikai módszerek felhasználása a Szovjetunió természetátalakító munkálataiban." Előadás a Csokonai Mihály gimnáziumban középiskolai diákok számára.

Bolyai János Matematikai Társulat miskolci tagozatának előadásai

1952 március 4. SZARKA ZOLTÁN: „Matematikai módszerek felhasználása a Szovjetunió természetátalakító munkálataiban." Előadás a Vámos Ilonka leányközépiskolában, diákok részére.

1952 március 6. GÁTI JÓZSEF: „Matematikai módszerek felhasználása a Szovjetunió természetátalakító munkálataiban." Előadás a villamosipari technikumban középiskolai diákok számára.

1952 március 11. TÖRŐ BÉLA: „Matematikai módszerek felhasználása a Szovjetunió természetátalakító munkálataiban." Előadás a diósgyőri Kilián gimnáziumban, középiskolások számára.

1952 március 14. MÓRICZ ISTVÁN: B. G. Kuznyecov: „Lobacsevszkij élete" c. könyvének ismertetése. (Klubest)

1952 március 17. DÖMÖTÖR FERENC: „Mit köszönhet a magyar matematikaoktatás a Szovjetuniónak?" Előadás a sárospataki református gimnáziumban pedagógusok és diákok számára.

1952 március 22. ERDÉLYI LÁSZLÓ: „Mit köszönhet a magyar matematikaoktatás a Szovjetuniónak?" (Pedagógus előadás)

1952 március 22. RAISZ IVÁN: „A „Matyematyika v skolje" c. szovjet középiskolai folyóirat és a szovjet matematikai olimpiászok ismertetése." (Középiskolai délután)

Bolyai János Matematikai Társulat pécsi tagozatának előadásai

1952 március 7. NAGY FERENC: „Mit köszönhet a magyar matematikaoktatás a Szovjetuniónak?" Előadás a Nagy Lajos gimnáziumban pedagógusok számára.

1952 március 17. SELÉNYI GÉZA: „Feladatmegoldások." Középiskolai előadás a Nagy Lajos gimnáziumban.

1952 március 20. NAGY FERENC: „A. N. Kolmogorov szovjet akadémikusnak a Nagy Szovjet Enciklopédiában megjelent, „Matematika" c. tanulmányának ismertetése." (Klubest)

1952 március 25. SELÉNYI GÉZA: „Matematikai módszerek felhasználása a Szovjetunió természetátalakító munkálataiban." Középiskolai előadás a Janus Pannonius gimnáziumban.

1952 március 27. NAGY FERENC: „Mit köszönhet a magyar matematikai élet a Szovjetuniónak?"

1952 március 28. KOVÁCS MARGIT: „Feladatmegoldások." Középiskolai előadás a Leöwey Klára gimnáziumban.

1952 március 29. DOMBI BÉLA: „Mit köszönhet a Pedagógiai Főiskola a Szovjetuniónak a matematika terén?" Előadás főiskolai hallgatók számára.

Bolyai János Matematikai Társulat veszprémi tagozatának előadásai

1952 március 13. FEJES TÓTH LÁSZLÓ: „Szovjet eredmények a konvex testek elméletében." l. márc. 29.-i bp.-i előadás.

1952 március 14. SÜTTŐ KÁLMÁN: „Hogyan használják fel a matematikát a Szovjetunió természetátalakító terveiben?" Középiskolai előadás a pápai ált. leánygimnáziumban.

1952 március 17. FÁY LÁSZLÓ: „Matematikai módszerek felhasználása a Szovjetunió természetátalakító munkálataiban." Középiskolai előadás a veszprémi vegyipari technikumban.

1952 március 18. MARKÓ JÓZSEF: „Matematikai módszerek felhasználása a Szovjetunió természetátalakító terveiben." Középiskolai délután a pápai mezőgazdasági állattenyésztési technikumban.

1952 március 18. BEREND IVÁN: Lobacsevszkij geometriája. Középiskolai délután a veszprémi általános gimnáziumban.

1952 március 21. SZEPESI TIBOR: „Matematikai módszerek felhasználása a Szovjetunió természetátalakító terveinél." Középiskolai délután a keszthelyi gimnáziumban.

1952 március 22. ERHARDT LAJOS: „Matematikai módszerek felhasználása a Szovjetunió természetátalakító terveiben.“ Középiskolai előadás Sümegen.

1952 március 25. DÉKÁNY MIHÁLYNÉ: „Matematikai módszerek felhasználása a Szovjetunió természetátalakító munkálataiban.“ Középiskolai délután a veszprémi vegyipari technikumban.

1952 március 29. ERHARDT LAJOS: „Matematikai módszerek alkalmazása a Szovjetunió természetátalakító munkálataiban.“ Középiskolai előadás a sümegi gimnáziumban.

1952 április 2. GÁL TINKA: „Matematikai módszerek alkalmazása a Szovjetunió természetátalakító munkálatainál.“ Középiskolai előadás a veszprémi tanítóképzőben.

Bolyai János Matematikai Társulat győri tagozatának előadásai

1952 március 12. FALUDI FERENCNÉ: „Matematikai módszerek felhasználása a Szovjetunió természetátalakító munkálataiban.“ (Klubest)

1952 március 15. SZELIÁNSZKY FERENC: „Feladatmegoldások.“ Középiskolai délután.

1952 március 21. SZELIÁNSZKY FERENC: „Matematikai módszerek felhasználása a Szovjetunió természetátalakító munkálatainál.“ Középiskolai délután a győri Révai gimnáziumban.

1952 március 26. KÁRTESZI FERENC: „Lobacsevszkij munkásságának méltatása.“ (Tudományos előadóülés)

1952 március 28. SÁMSON LÁSZLÓ: „Matematikai módszerek felhasználása a Szovjetunió természetátalakító munkálataiban.“ Előadás a győri Dugonics-utcai munkásszállóban.

Bolyai János Matematikai Társulat egri tagozatának előadásai

1952 március 9. PALLÓS EMIL: „Mit köszönhet a főiskolai matematikai oktatás a Szovjetuniónak?“ Előadás a Pedagógiai Főiskolán.

1952 március 16. HARTLY DOMOKOS: „Matematikai módszerek felhasználása a Szovjetunió természetátalakító munkálataiban.“ Középiskolai előadás a hatvani vegyipari technikumban.

1952 március 20. BÉKÉSI PÁL: „Egyszerű maximum-minimum feladatok.“ Előadás a Szakérettségis Tanfolyamon.

1952 március 30. JÁROSI ANDRÁS: „Feladatmegoldások.“ Középiskolai előadás az egri Dobó István ált. gimnáziumban.

1952 április 2. DARVAS ANDORNÉ: „Matematikai módszerek felhasználása a Szovjetunió természetátalakító munkálataiban.“ Középiskolai délután az egri tanítóképző intézetben.

Bolyai János Matematikai Társulat soproni tagozatának előadóülése

1952 május 3. A Bolyai János Matematikai Társulat Soproni Tagozatának ünnepélyes megalakulása. Előadást tartott CSÁSZÁR ÁKOS: A topológia néhány kérdéséről. Gráf-elmélet. Felületek topológiája. Hurkolt térgörbék.

MATEMATIKAI ÉS SZEMÉLYI HÍREK

Dr. WALEK KÁROLY a soproni egyetem tanára, Társulatunk soproni tagozatának köztiszteletben álló elnöke, 1952 szeptember 3-án szívszélhűdés következtében elhúnyt. Alábbiakban közöljük néhány életrajzi adatát:

Dr. WALEK KÁROLY Pécsett született 1878. szeptember 13-án. Atyja gépkezelő volt a pécsi szénbányáknál. A pécsi főreáliskola elvégzése után (itt együtt tanult Fejér Lipóttal) a selmeczbányai Bányászati és Erdészeti Akadémiára került a bányamérnöki osztályra. A végbizonyítvány megszerzése után Nagybányára került bánya-gyakornoknak 1900-ban. 1901 novemberében Selmeczbányára helyezik át az Akadémia matematikai tanszékére és megbízzák a tanársegédi teendők ellátásával. 1903-ban leteszi a bányamérnöki államvizsgát és tanársegéddé nevezik ki. 1905-ben a müncheni tudományegyetem bölcsészeti fakultására küldik továbbképzés céljából és 1908-ban summa cum laude doktorrá avatják Münchenben. 1910-ben főiskolai rendkívüli tanárrá, a következő évben főiskolai rendes tanárrá nevezik ki. 1918-ban a selmeczbányai főiskolával Sopronba kerül és itt működik élete végéig. Amikor a Bányamérnöki és Erdőmérnöki Főiskolát beleolvasztják a Műegyetembe, (1934) egyetemi nyilvános rendes tanárrá nevezik ki. Az 1935—1936. évben az itteni osztály dékánja volt (Selmeczbányán a Bányászati és Erdészeti Főiskolán háromízben volt a bányamérnöki osztály dékánja), 1945—1948-ig a Diákjóléti Hivatal igazgatói teendőit látta el.

Walek Károly személyében a soproni egyetem, Társulatunk és az egész magyar matematikai élet odaadó pedagógust és magas képzettségű szakembert vesztett el, aki igen eredményesen 42 éven keresztül fejtett ki színvonalas tanári tevékenységet. Munkásságát a matematika alkalmazásaiban való alapos jártasság és hivatásának szeretete jellemezte.

Alábbiakban közöljük Walek Károly tudományos munkáinak jegyzékét.

Dr. Walek Károly tudományos munkáinak jegyzéke.

Binäre kubische Transformation und Complexe. Doktori értekezés a müncheni tudományegyetem bölcsészeti karán. Megjelent Selmeczbányán, Joergesnél 1908-ban.

Anwendung der Vektorrechnung auf die Snellius'sche Vierecksaufgabe. Östrerreichische Zeitschrift für Vermessungskunde XXIX. (1931).

A Pothenot-féle feladat megoldása vektorokkal. Bányászati és Kohászati Lapok, LXV. (1932). 406—439. o.

Vektoranalytische Behandlung der Markscheideraufgaben. A Bányamérnöki és Erdőmérnöki Főiskola bányászati és kohászati osztályának közleményei. V. kötet (1933).

Einige besondere Punktbestimmungsaufgaben in Vektorieller Behandlung. Österreichische Zeitschrift für Vermessungskunde. XXXIII. (1935).

Zur Aufgabe über die Bestimmung der kürzesten geradlinigen Verbindung dreier Windschiefer Raumgeraden. A bányászati és kohászati osztály közleményei, IX. kötet (1937).

Kürzeste Verbindung dreier Grubenstrecken innerhalb eines begrenzten Grubenraumes. A bányászati és kohászati osztály közleményei, X. kötet (1938).

Dr. Mihalovits János emlékezete. Bányászati és Kohászati Lapok, 1938. évfolyamában.

Lobacsevszkij és a nem-euklideszi geometria. Bányászati és Kohászati Lapok 1951. évfolyamában.

Bevezetés a fizikai-kémiai folyamatok matematikájába. A Mérnöki Továbbképző Intézet kiadványa, 1952.

* * *

Felhívjuk Tagtársaink figyelmét arra, hogy megjelent ALEXITS GYÖRGY könyve *„Bolyai János"* címmel, a Művelt Nép kiadásában, ára 8·50 Ft. A nagy érdeklődéssel várt könyv ismertetésére később visszatérünk.

Megjelent Sz. A. JANOVSZKAJA: *„Lobacsevszkij haladó eszméi"* c. munkája. Akadémiai Kiadó kiadványa 15.— Ft.

Ugyancsak az Akadémiai Kiadó kiadásában jelentek meg I. P. NATANSON: *Konstruktív függvénytan* és P. Sz. ALEXANDROV: *Bevezetés a halmazok és függvények általános elméletébe* c. munkája, előbbinek 80.— Ft, utóbbinak 45.— Ft az ára.

Megjelent Bolyai János *Appendix*ének új kiadása, KÁRTESZI FERENC bevezetésével, megjegyzéseivel és kiegészítéseivel, az Akadémiai Kiadó kiadásában. Ára 30 Ft.

* * *

A Bolyai János Matematikai Társulat tagjai közül 1952 november 7.-e, a Nagy Októberi Szocialista Forradalom 35-ik évfordulója alkalmából kitüntetésben részesültek a következők:

SURÁNYI JÁNOS, docens, Eötvös Loránd Tudományegyetem TTK, Magyar Népköztársasági Érdemérem, aranyfokozat.

VINCZE ISTVÁN, a Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének igazgatóhelyettese, Magyar Népköztársasági Érdemérem, aranyfokozat.

GALLAI TIBORNÉ műegy. adjunktus, Magyar Népköztársasági Érdemérem, ezüstfokozat.

RAPCSÁK ANDRÁS, docens, debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem, Magyar Népköztársasági Érdemérem, ezüstfokozat.

* * *

VARGA TAMÁS és ÉLTETŐ LAJOS VII. osztályos mértankönyvtervezetükkel I. díjat nyertek a Közoktatásügyi Minisztérium tankönyvpályázatán.

1952 őszén a következők lettek matematikus aspiránsok:

KŐVÁRI TAMÁS Eötvös Loránd Tudományegyetem Matematikai Intézet, SÓS VERA Eötvös Loránd Tudományegyetem Matematikai Intézet, KRÁLIK DEZSŐ Műszaki Egyetem, III. Matematikai Tanszék, MOÓR ARTUR Debreceni Tudományegyetem Mat. Int., SOÓS GYULA Debreceni Tudományegyetem Mat. Int., PINTÉR LAJOS Szeged, Bolyai Matematikai Intézet, PUKÁNSZKY LAJOS Szeged, Bolyai Matematikai Intézet. *Levelező aspiránsok:* HÓDI ENDRE Eötvös Loránd Tudományegyetem Matematikai Int., TÖRÖK ANTAL Magyar Tudományos Akadémia Alk. Mat. Int.

* * *

A Magyar Tudományos Akadémia által a Bolyai János Matematikai Társulat közreműködésével rendezett ünnepi ülésszak előadásairól és egyéb eseményeiről legközelebbi számunkban adunk részletes ismertetést.

Perelman: Szórakoztató Geometria és Szórakoztató Algebra c. könyveiről

Írta: ACZÉL JÁNOS

A matematika népszerűsítésének bő irodalma van az egész világon, nálunk is több matematikai népszerűsítő könyv jelent meg.

Általában az általunk eddig ismert matematika-népszerűsítő könyvek többféle célt tűztek maguk elé. Egy részük bevezetőül kívánt szolgálni a matematika bizonyos fejezeteibe, ilyenek voltak Colerus, Sztrókay, Niklitschek stb., elrettentő példa képpen említhető könyvei, míg a fogyatékosságaik ellenére is jól sikerült, tanulságos ilyen természetű munkák közt említhetők pl. Beke Manó könyvecskéje a differenciál és integrálszámításról, Kárteszi szakköri füzetei és Péter Rózsa: Játék a végtelennel című könyve. Más népszerűsítő művek a matematika különböző könnyebben megközelíthető részeiből összeválogatott mozaikok. Itt még több fércművet sorolhatnánk fel, egy példa Csizik Gyula: Számok és mennyiségek című „műve"; jól sikerült érdekes könyvecske Kőnig Dénes: Matematikai mulatságok, vagy magasabb színvonalon Rademacher—Toeplitz* és Dörrie több előismeretet megkövetelő művei. — Mindezek messze elkerülik annak érdemleges tárgyalását, hogy a matematika a természet megismerésének is tudománya, hogy a matematikának fontos alkalmazásai vannak. Az alkalmazásokkal megint más népszerűsítő művek foglalkoznak, ezeknek általában nem a legsikerültebb válfajai a különböző szakmák részére nálunk is kiadott matematikai segédkönyvek, míg egyik legjobb ilyen irányú munkának tekinthetjük Hajós Györgynek A munka- és időelemzés matematikai segédeszközei című könyvét. A mozaikszerű összeválogatást az ú. n tiszta matematikán kívül részben az alkalmazások köréből is végzi Steinhaus gyönyörű Matematikai kaleidoszkóp című műve, viszont annak problémái az átlagos olvasó számára nehezek.

Általában az jellemzi a matematikai népszerűsítő irodalom nagy tömegét, és ebből a legkiválóbb művek is csak részben emelkednek ki, hogy egyrészt *vagy* dilettantizmus *vagy* arisztokratizmus az alapfelfogásuk, másrészt *vagy* összefüggően és nem mindig egyenletes érdekességgel tárgyalnak egy vagy több anyagrészt *vagy* pedig csak elszigetelten, gyakran felületesen érintenek sok apró kérdést, többnyire *vagy* teljesen elbeszélő jellegek, *vagy* csak feladatokat tartalmaznak, esetleg megoldás megjelölése nélkül, végül a matematikának *vagy* csak elméleti *vagy* csak gyakorlati kérdéseivel foglalkoznak.

A másutt metafizikusan kezelt ellentéteknek dialektikus egységét, a népszerűségnek és színvonalnak, az ös-zefüggésben tárgyalásnak és a legérdekesebb részek kiemelésének, a leíró részeknek és a feladatoknak, számításoknak és kísérleteknek, az elméletnek és a gyakorlatnak impozáns egységét találjuk meg Perelman itt ismertetendő és a többi népszerűsítő munkáiban is.

Ennek megmutatására azt hiszem a legmeggyőzőbb lesz, ha röviden ismertetem e könyvek tartalmát, csak néhány helyen emelve ki belőlük bővebben egy-egy részletet is.

Mindkét könyvben rövid leíró részek, problémák és megoldásaik szerves

* Über Zahlen und Figuren. Fordító ezt „A számok és testek"-nek fordította, a szerzőket pedig Rademaher és Teplicnek írta.

egységben, váltogatják egymást. Egy-egy főcím alatt számítások és kísérletek (mérési módszerek), horizontálisan hasonló természetű, vagy vertikálisan folytatólag összefüggő kérdések váltogatják egymást, de a legtöbb kérdés, vagy kérdéscsoport önállóan is érthető.

A *„Szórakoztató geometria"* Geometria szabadban című első részének első fejezete terepen, erdőben végzett távolság- és magasságmeghatározási feladatokkal kezdődik, majd képletet ad, mely egyaránt érvényes hasáb, henger, gúla, kúp, csonkagúla, csonkakúp, gömb, gömbréteg, gömbszelet, parallelogramma, trapéz, háromszög területének ill. köbtartalmának kiszámítására. Ez a képlet: $\frac{h}{6}(b_1 + 4b_2 + b_3)$ ahol h a magasság, b_1 az alsó b_2 a középső b_3 a felső keresztmetszet nagysága. A képlet a Simpson-féle közelítő integrálási eljárásnak Kepler-féle hordószabálynak is nevezett legegyszerűbb esete, mely első-, másod- és harmadfokú integranduszra tudvalévően pontos eredményt ad. Az első fejezet fatörzsek szélességmérése módszerének és néhány biológiai menynyiségi viszonynak leírásával zárul.

A második fejezet folyók szélességének, túloldalukon lévő méreteknek, sebességüknek, vízhozamuknak meghatározására ad meg részben kísérleti, részben geometriai, részben egyenletmegoldásos módszereket, majd a vízben hullámzáskor keletkező köröket, közös érintőpárú köröket, körhullám terjedését tárgyalja, végül pedig egy adott állandó sebességű és szélességű folyón a két parttól bizonyos távolságra lévő pontok legrövidebb kombinált vízi és szárazföldi összekötését oldja meg geometriai úton, úgy, hogy a folyón való átkelés irányát és nagyságát megadó vektorral eltolja az innenső parton lévő pontot és az így kapott pontnak a túlsó parti ponttal való egyenes összekötésének túlparti része adja a valódi legrövidebb út túlsó parti részét is, ami már az egész utat is megadja.

A harmadik fejezet (geometria a mezőn) a látszólagos nagyság és látószög (hold, távolban lévő ember, fotomontázs, térkép, egyszerű eszközök látószög mérésére, tűzérségi mérések, látás élessége, nap különböző nagysága és sebessége az ég különböző pontjain, árnyék, távcső, felhőmagasság megállapítása, fényképezéssel történő magasságmeghatározás, és egyéb feladatok kérdéseivel foglalkozik).

A negyedik fejezet (geometria az úton) a lépésekkel, szemmértékkel méréssel, lejtő-hajlás, kúposság, kúp köbtartalma számításával, kanyarok sugarának számításos megállapításával (körszeletből körsugár) vízdomborulat magassága (sugárból körszeletmagasság) megállapításával foglalkozik.

Az ötödik fejezet (trigonometria képletek és táblázatok nélkül), a szögfüggvények elemi meghatározását adja fokonként, majd négyzetgyökvonásra ad közelítő módszert úgy, hogy a mindig következő maradékra kapott másodfokú egyenletből a négyzet elhanyagolásával csinál elsőfokút; utána a szinuszból határozza meg elemien a szöget. A trigonometriát a nap magasságának, folyóntúli távolságoknak meghatározására alkalmazza, majd a csak körző segítségével való szögmérés módszerét ismerteti.

A hatodik fejezet a látóhatár megállapításával foglalkozik léghajóról, hajóról, a moszkvai egyetem tornyáról, vasúti sínekről; villámlás észlelési távolsága meghatározásánál, holdnál, csillagoknál. Ez a fejezet is néhány ilyen természetű kitűzött feladattal zárul.

A hetedik fejezet Robinson tájékozódását írja le szigete földrajzi helyzetéről és méreteiről.

A második rész címe: Valóság és tréfa a geometriában. Ezen belül a nyolcadik fejezet (Geometria a homályban) Majnrid: Tengerész fiú című regényéből kiindulva a hordó-köbtartalom meghatározását adja és azt is tárgyalja, hogy miért készítik domborúra a hordókat majd, több a sötétség által okozott térbeli tévedés lehetőségét mutatja meg, és az emberi hosszúságmértékeket ismerteti (láb, arasz, ujj). A fejezet az egyiptomi 3, 4, 5, oldalú derékszögű háromszög bemutatásával végződik.

A kilencedik fejezet (régi és új dolgok a körről) először π kiszámításának történetével foglalkozik, majd a geometriai-valószínűség-meghatározással kapcsolatos kísérleti kiszámítását mutatja meg. A továbbiakban a kör rektifikációjára és kvadratúrájára mutat közelítő módszereket. Az egyenlítőn megtett útnál fejünk és lábunk által megtett utak különbségét ill. az egyenlítőre kifeszített drót megrövidítését számítja ki, majd a hatszöges körrácsból kiindulva lekerekítési és gördülési (ciklois, epi- és hipociklois) problémákat tárgyal. Itt is külön kiemelem azt a — a paralleltartomány gondolatát tartalmazó — feladatot, hogy több egyenlő sugarú dobra kifeszített hajtószíj hossza hogyan határozható meg a tengelytávolságokból és a dob sugarából. Ez a hossz a (konvex alakzatban elhelyezett) tengelyek távolságösszegénél mindig ép egy szíjdob kerületével nagyobb. Itt tárgyalja a könyv a több egyidejű mozgást végző testek útját (pl. földforgás és repülőgép) és azt a feladatot, hogy hogyan kell a varjúnak egy korsót döntenie ahhoz, hogy a benne félig lévő vizet elérje.

A tizedik fejezet (számítás és mérés nélküli geometria) a körzőnélküli szerkesztésnek, a lemezsúlypont meghatározásának, a szögharmadoló eszközöknek, a körosztásnak, szabályossokszögek közelítő szerkesztésének, az adott számú visszaverődés után az adott helyre érkező billiárdgolyónak és vele kapcsolatban az áttöltési feladatok ábrázolásának, az egy vonallal húzható ábráknak (gráfok), a kaliningrádi (königsbergi) hidaknak és néhány geometriai játéknak, tréfának, kísérletnek tárgyalását adja.

A tizenegyedik fejezet (nagy és kicsiny a geometriában) főleg hosszak, területek és köbtartalmak összehasonlítását adja, továbbá feltűnően nagy vagy kicsiny mennyiségekre vezető geometriai feladatokat.

A tizenkettedik fejezet „geometriai ökonómia" címen geometriai szélsőértékfeladatokkal foglalkozik és pedig egy legrövidebb útra vonatkozó feladat után az izoperimetrikus probléma Steiner-féle tárgyalását adja, majd egy a számtani és mértani közép módszerének továbbfejlesztésén alapuló módszert, (ld. alább). Végül egy deszkafelület-összeállítási szélsőérték feladattal és a fény-visszaverődési út minimum-probléma (két falu közti legrövidebb út folyó érintésével) tükrözéses geometriai megoldásával fejezi be a fejezetet és egyúttal az egész könyvet.

A *„Szórakoztató algebra"* című könyv első fejezete az ötödik mennyiségtani művelet címmel a hatványozást tárgyalja; különböző, hatványozás útján nagy számokra vezető feladatokat sorol fel, ezeket a szokottnál sokkal alaposabban tárgyalja, pl annak megállapítása mellett, hogy a három 9-essel felírható legnagyobb szám 9^{9^9} megemlíti, hogy sem 2-eseknél sem 3-asoknál nem ez a helyzet, ott 2^{2^2} ill. 3^{3^3} a legnagyobb, csak 4-től kezdve adja a hatványozás iterálása a legnagyobb eredményt, míg pl. a négy kettessel felírható legnagyobb szám $2^{2^{2^2}}$.

Az algebra nyelve című második fejezet egyenletekkel foglalkozik, fő érdeme, hogy mindenütt igen világosan állítja fel az (egy vagy többismeretlenes) egyenletet; egy táblázattal, melynek baloldala a feladat egyes részeit szavakkal, jobboldala ugyanazt az algebra nyelvén tartalmazza. Sok érdekes szöveges feladatot tartalmaz ez a rész, melyek során arra is felhívja a szerző a figyelmet, hogy többismeretlenes egyenletre vezető feladat gyakran egyismeretlenes egyenlettel is megfogalmazható és, hogy gyakran egyenlet felállítása nélkül is megoldhatók a feladatok. Sor kerül egyenletek redukciójára elsőfokú egyenletté és ellentmondó, valamint nem-független egyenletek tárgyalására is. Több mozgási stb. példa után az átlagsebességgel kapcsolatban a harmonikus közép bevezetésével és egyenletmegoldó gép illetve grafikus eljárás megemlítésével zárul a második fejezet.

A harmadik fejezet (az algebra, mint a számtan és mértan segítőtársa) azt mutatja meg, hogy az algebrai azonosságok, hogyan segítenek aritmetikai és geometriai feladatok gyorsabb megoldásához ($(a^2-b^2=(a+b).(a-b)$ alkalmazásai, hatványszámok végződése, oszthatóság 11-gyel és 19-cel, pythagorasi számok, a^4+4 összetett szám volta, tetszésszerinti számú konzekutív összetett szám, prímszámok végtelen száma, relativisztikus sebesség, bonyolultabb körbeli adatok kiszámítása stb.).

A negyedik fejezet diofantikus egyenletek, (határozatlan egyenletek) pozitív egész megoldásainak megkeresését mutatja be sok szép példán a szokott módszerekkel. Tárgyal többváltozós és magasabbfokú diofantikus egyenleteket is, így megemlíti a nagy Fermat-féle problémát is.

Az ötödik fejezet a hatodik matematikai művelettel, a gyökvonással foglalkozik. Több, gyökvonásra vezető feladat mellett felhívom a figyelmet pl. az $x^{x^3}=3$ feladatra, mely az $x^3=y$ transzformációval az $y^y=3^3$ egyenletre vezet és megoldása $y=3$, $x=\sqrt[3]{3}$. A fejezet néhány algebrai álokoskodást is tartalmaz, melyek a gyökvonás többértékűségén alapszanak.

A hatodik fejezet másodfokú egyenletekkel foglalkozik. A szöveges feladat matematikai megfogalmazását és megoldását itt is mindig behelyettesítéssel való ellenőrzés követi. Érdekesek a függőleges hajítással, különböző erejű hangszórók egyensúlyi helyével, néhány konzekutív négyzet- és köbszám összegével kapcsolatos feladatok.

Rendkívűl érdekes és fontos a hatodik fejezet azon két része, mely két, a szokásostól eltérő, rendkívül szellemes elemi módszert ismertet szélsőértékfeladatok megoldására. Ezeket egy-egy jellemző példán szeretném bemutatni.

Az egyiket talán szélsőértékfeladatok „fordított menetű megoldásának" neveztném, ugyanis úgy tesz, mintha ismerné a minimumot és abból másodfokú egyenlet megoldása útján kifejezi a változót és megállapítja, mi az állítólag ismert, de valóban még ismeretlen minimum legkisebb olyan értéke, melynél a változó mennyiség még létezik (valós) vagyis a diszkrimináns még nem negatív. Példának vegyük azt a feladatot, hogy egy vasútvonaltól 20 km-re fekvő várostól hogyan kell utat vezetni a vasútvonalhoz, melynek a vasúttal való érintkezési pontjánál átrakodó állomás létesítendő, ahol a rendszeresen egy irányból 0,8 km/min sebességű vonaton érkező árut átrakják 0,2 km/min sebességű kocsikra úgy, hogy az összes szállítás ideje a lehető legkisebb legyen. A megoldás érdekében először tegyük fel, hogy az áruk mind a szomszédos, a városnak a vasútvonalra való V vetületi pontjától a km távolságban lévő kiinduló állomásról jönnek és jelöljük x-szel a létesítendő átrakodóállomás távolságát a város V vetületi pontjától. Akkor a vasúti szállítás távolsága $a-x$, ideje $\frac{a-x}{0{,}8}$; a kocsin való szállítás útja $\sqrt{x^2+20^2}$, ideje $\frac{\sqrt{x^2+400}}{0{,}2}$. Így $\frac{a-x}{0{,}8}+\frac{\sqrt{x^2+400}}{0{,}2}$ minimumát keressük; jelöljük ezt m-mel: $\frac{a-x}{0{,}8}+\frac{\sqrt{x^2+400}}{0{,}2}=m$, $a-x+4\sqrt{x^2+400}=0{,}8\,m$. Ha $0{,}8\,m-a=k$, akkor $16(x^2+400)=(x+k)^2$, $15x^2-2kx+6400-k^2=0$, $x=\frac{k\pm\sqrt{16k^2-96000}}{15}$ x-nek csak akkor van (valós) értéke, ha $16k^2\geq 96000$ tehát k^2 legkisebb megengedhető értéke $\frac{96000}{16}=6000$; $k=(0{,}8\,m-a)$ legkisebb megengedhető értéke; $k=\sqrt{6000}$, ebből nyerhető m legkisebb érték is. Ehhez $x=\frac{k\pm 0}{15}=\frac{\sqrt{6000}}{15}=5.16\,km$ tartozik: ilyen távolságban kell lennie a város vetületi pontjától az átrakodó állomásnak. Ez független a kiinduló állomás a távolságától, tehát az így létesített átrakodó állomás ebből az irányból akárhonnan érkező áruk szempontjából a legkedvezőbb helyzetű, a legrövidebb szállítási összidőt biztosítja.

A másik meglepő elemi szélsőértékszámítási módszer a számtani-mértani közép egyenlőtlenség együtthatós alkalmazásával dolgozik. Ezt egy olyan példán szeretném bemutatni, mely egyike azoknak, ahol éppen nem gondoltuk volna, hogy a feladat másképp, mint differenciálszámítással megoldható volna és melyet ez a módszer elemien megold. Az a oldalú négyzetalakú bádoglap négy sarkából hogyan kell négy egybevágó négyzetet levágva felhajtással a legnagyobb köbtartalmú nyitott tartályt, dobozt előállítani. A doboz magassága x, alapja $(a-2x)$ oldalú négyzet, köbtartalma $(a-2x)^2.x$, ennek maximumát keressük.

Azt eddig is tudtuk, hogy a mértaniszámtani közép egyenlőtlenség alkalmazásával állandó összegű számok szorzatának maximumát megkapjuk, éspedig éppen a szóbanforgó számok egyenlőségekor.

Azonban a mi $(a-2x)^2x$ szorzatunkban a tényezők összege $(a-2x)^2+x$ illetve $(a-2x)+(a-2x)+x=2a-3x$ nem állandó. Perelman egyszerű ötlete abban áll, hogy az egyik tényezőt egy állandóval megszorozza (így az egész szorzat szorzódott ezzel az állandóval és ettől annak maximum-helye nem változik), úgy, hogy most már állandó legyen a tényezők összege: $(a-2x)^2x$ ugyanott maximális, ahol $4.(a-2x)^2x=$ $=(a-2x)(a-2x).4x$ és e szorzat tényezőinek összege már állandó: $(a-2x)+(a-2x)+4x=2a$ tehát ez a szorzat ott maximális ahol tényezői egyenlők $a-2x=a-2x=4x$, $6x=a$, $x=\frac{a}{6}$-nál, tehát akkor kapunk maximális köbtartalmat, ha a négyzetből minden oldal két végén annak egy-egy hatodát vágjuk le és a maximális köbtartalom $\frac{2}{27}a^3$. Ezt az egyszerű ötletet, amely rengeteg kérdést tesz elemien megoldhatóvá, ilyen tisztán megfogalmazva és következetesen alkalmazva még másutt sem láttam.

Hogy ez a két módszer szélsőértékfeladatok milyen gazdag sokaságát teszi elemien megoldhatóvá, amelyekről eddig azt hittük, hogy tipikusan csak differenciálszámítással oldhatók meg, erről azt hiszem a következő puszta felsorolás is meggyőz: két merőlegesen haladó vonat minimális távolsága, kombinált vízi és szárazföldi szállítás legolcsóbb megoldása, legnagyobb térfogatú, vagy súlyú (lehetne legnagyobb teherbírású stb.) gerenda adott rönkből, legnagyobb felületű papirsárkány, adott területű legkisebb kerítéshosszú földdarab és fordítva, régi fal legolcsóbb kiegészítése újjá, legnagyobb keresztmetszetű csatorna, adott körlapból készíthető legnagyobb tölcsér, legélesebb megvilágítás, legnagyobb területű háromszög, háromszögből kivágható legnagyobb téglalap, kúpból kiesztergálható legnagyobb henger stb. szerepel Perelman példái közt.

A hetedik fejezet haladványokkal foglalkozik, a számtani haladvány összegképletének mértani megindokolását és a mértani haladvány összegképletét azonos átalakításokkal levezetve is tartalmazza, valamint több szöveges példát számtani és mértani haladványokra és összegeikre.

A nyolcadik fejezet a hetedik mennyiségtani művelet címmel logaritmusszámításról szól. A logaritmus értelmezése után a négyzetes-, majd logaritmus-táblák rövid története következik és a fejezet további során néhány meglepő példán mutatja be, hogy hol mindenütt szerepelhet a logaritmus: bűvészmutatványnál (számkitalálás), gazdasági udvarban, csillagászatban, villanyvilágításnál (nagyobb hőfokon izzó kryptongáz fénymennyiségkibocsátásának megnövekedése), kamatos-kamatozásnál. Ez utóbbi kapcsán bevezeti az e számot. A fejezet és vele a könyv is egy logaritmusos álokoskodással $\left(2>3 \text{ mert } 2\lg\frac{1}{2}=\lg\left(\frac{1}{2}\right)^2=\right.$ $\left.=\lg\frac{1}{4}>\lg\frac{1}{8}=3\lg\frac{1}{2}\right)$ és annak megmutatásával zárul hogy három 2-essel és matematikai jelekkel minden egész szám előállítható

$$\left(\text{pl. } 3=-{}^2\log{}^2\log\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}\right).$$

Azt hiszem már ez a rövid ismertetés is, de még inkább Perelman könyveinek elolvasása mindenkit meggyőz arról, hogy itt rendkívül értékes és érdekes, sőt izgalmas műveket ismertünk meg, melyek az olvasás élvezetén kívül komoly hasznot is hajtanak mindenkinek: a matematika művelője kitünő, szellemes matematikai ötleteket, a matematikát tanuló a matematika több ágába való kitűnő bevezetést, a matematikát oktató ragyogó pedagógiai módszereket, példákat, gyakorlati feladatokat, a matematikát alkalmazó mérnök és technikus a matematika gyakorlati alkalmazásának tanulságos példáit kapja ezekből a könyvekből.

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENT—INHALT

A Bolyai János Matematikai Társulatba belépni szándékozók forduljanak a Társulat elnökségéhez (Budapest V, Reáltanoda-utca 13—15. Telefon: 187—330). Közlésre szánt dolgozatok (lehetőleg gépírással s a lap egyik oldalát használva) a Lap szerkesztőségéhez ugyanoda küldendők (Budapest V, Reáltanoda-utca 13—15).

Kérjük cikkíróinkat, hogy amennyiben különlenyomatra tartanak igényt, cikkük kefelevonatának visszaküldésekor ezirányú kívánságukat a kért különlenyomatok számának megjelölésével feltétlenül jelentsék be.

Ára 14·— Ft.
Előfizetés évi 20·— Ft.

Nyomott példányszám: 800.

Akadémiai Kiadó: (Budapest V, Alkotmány-u. 21). Felelős: Mestyán János

Csongrádmegyei Nyomdaipari Vállalat, Szeged 524881 Felelős vezető: Vincze György