

ALKALMAZOTT MATEMATIKAI LAPOK

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

ALAPÍTOTTÁK

KALMÁR LÁSZLÓ, TANDORI KÁROLY, PRÉKOPA ANDRÁS, ARATÓ MÁTYÁS

FŐSZERKESZTŐ

PÁLES ZSOLT

FŐSZERKESZTŐ-HELYETTESEK

BENCZÚR ANDRÁS, SZÁNTAI TAMÁS

FELELŐS SZERKESZTŐ

VIZVÁRI BÉLA

TECHNIKAI SZERKESZTŐ

KOVÁCS GERGELY

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI

Csirik János, Csiszár Imre, Demetrovics János, Ésik Zoltán, Frank András, Fritz József,

Galántai Aurél, Garay Barna, Gerencsér László, Györfi László,

Györi István, Hatvani László, Heppes Aladár, Iványi Antal, Járai Antal, Kátai Imre,

Katona Gyula, Komáromi Éva, Komlósi Sándor, Kovács Margit, Krisztin Tibor, Lovász László,

Maros István, Michaletzky György, Pap Gyula, Prékopa András, Recski András, Rónyai Lajos,

Schipp Ferenc, Stoyan Gisbert, Szeidl László, Tusnády Gábor, Varga László

KÜLSŐ TAGOK:

Csendes Tibor, Fazekas Gábor, Fazekas István, Forgó Ferenc, Friedler Ferenc, Fülöp Zoltán,

Kormos János, Maksa Gyula, Racskó Péter, Tallos Péter, Temesi József

33. kötet

Szerkesztőség és kiadóhivatal: 1055 Budapest, Falk Miksa u. 12.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és olyan eredeti tudományos cikkeket publikál, amelyek a gyakorlatban, vagy más tudományokban közvetlenül felhasználható új matematikai eredményt tartalmaznak, illetve már ismert, de színvonalas matematikai apparátus újszerű és jelentős alkalmazását mutatják be. A folyóirat közöl cikk formájában megírt, új tudományos eredménynek számító programokat, és olyan, külföldi folyóiratban már publikált dolgozatokat, amelyek magyar nyelven történő megjelentetése elősegítheti az elért eredmények minél előbbi, széles körű hazai felhasználását. A szerkesztőbizottság bizonyos időnként lehetővé kívánja tenni, hogy a legjobb cikkek nemzetközi folyóiratok különszámaként angol nyelven is megjelenhessenek.

A folyóirat feladata a Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai) Osztályának munkájára vonatkozó közlemények, könyvismertetések stb. publikálása is.

A kéziratok a főszerkesztőhöz, vagy a szerkesztőbizottság bármely tagjához beküldhetők. A főszerkesztő címe:

Páles Zsolt, főszerkesztő

1055 Budapest, Falk Miksa u. 12.

A folyóirat e-mail címe: aml@math.elte.hu

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért felelősséget nem vállal.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok előfizetési ára évfolyamonként 1200 forint. Megrendelések a szerkesztőség címén lehetségesek.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica,
2. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok megjelenését támogatja
a Magyar Tudományos Akadémia Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága.

A kiadásért felelős a BJMT főszerkesztője
Szerkesztő és felelős: Éliás Mariann

Nyomta a Synra Nyomda és Kiadó Kft., Budapest
Felelős vezető: Szűcs Ernő

Budapest, 2016
Megjelent 18 (A/5) ív terjedelemben
100 példányban
HU ISSN 0133-3399

ÚTMUTATÁS A SZERZŐKNEK

Az Alkalmazott Matematikai Lapok csak magyar nyelvű dolgozatokat közöl. A közlésre szánt dolgozatokat e-mailen az `aml@math.elte.hu` címre kérjük elküldeni az ábrákat tartalmazó fájlokkal együtt. Előnyben részesülnek a \LaTeX -ben elkészített dolgozatok.

A kéziratok szerkezeti felépítésének a következő követelményeket kell kielégíteni:

Fejléc: A fejlécnek tartalmaznia kell a dolgozat címét és a szerző teljes nevét.

Kivonat: A fejléc után egy, képletet nem tartalmazó, legfeljebb 200 szóból álló kivonatot kell minden esetben megadni.

Fejezetek: A dolgozatot címmel ellátott szakaszokra kell bontani, és az egyes szakaszokat arab sorszámozással kell ellátni. Az esetleges bevezetésnek mindig az első szakaszt kell megnevezni.

A dolgozatban előforduló képleteket a dolgozat szakaszokra bontásától független, folytatólagos arab sorszámozással kell azonosítani. Természetesen nem szükséges minden képletet számozással ellátni, csak azokat, amelyekre a szerző a dolgozatban hivatkozni kíván.

Mind az ábrákat, mind a lábjegyzeteket szintén folytatólagos arab sorszámozással kell ellátni. Az ábrák elhelyezését a dolgozat megfelelő helyén ábraazonosító sorszámokkal kell megadni. A lábjegyzetekre a dolgozaton belül az azonosító sorszám felső indexkénti használatával lehet hivatkozni.

Az esetleges definíciókat és tételeket (segédtételeket és lemmákat) szakaszonként újrakezdődő, ponttal elválasztott, kettős számozással kell ellátni. Kérjük a szerzőket, hogy ezeket, valamint a tételek bizonyítását a szövegben kellő módon emeljék ki.

Irodalomjegyzék: A dolgozatok szövegében az irodalmi hivatkozás számait szögletes zárójelben kell megadni, mint például [2] vagy [1, 7–13].

Az irodalmi hivatkozások formája a következő: Minden hivatkozást fel kell sorolni a dolgozat végén található irodalomjegyzékben, a szerzők, illetve a társszerzők esetén az első szerző neve szerint alfabetikus sorrendben úgy, hogy a cirill betűs szerzők nevét a Mathematical Reviews átírási szabályai szerint latin betűsre kell átírni. A folyóiratban megjelent cikkekre [1], a könyvekre [2] a következő minta szerint kell hivatkozni:

[1] FARKAS, J.: *Über die Theorie der einfachen Ungleichungen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **124**, (1902) 1–27.

[2] ZOUTENDIJK, G.: *Methods of Feasible Directions*, Elsevier Publishing Company, Amsterdam and New York (1960), 120 o.

Szerző adatai: Az irodalomjegyzék után, a kézirat befejezéseképpen fel kell tüntetni a szerző teljes nevét és a munkahelye (esetleg lakása) pontos címét, illetve e-mail címét.

Idegen nyelvű kivonat: Minden dolgozathoz csatolni kell egy angol nyelvű összefoglalót.

A szerzők a dolgozatukról 20 darab ingyenes különnyomatot kapnak. A dolgozatok után szerzői díjat az Alkalmazott Matematikai Lapok nem fizet.

TARTALOMJEGYZÉK

<i>Mészáros Alpár Richárd</i> , Átlagtérjátékok: Optimális vezérléstől optimális transzportig	1
<i>Dr. Vörös Gábor</i> , A véges szóhosszból adódó korlátozás hatása	19
<i>Kosztján Zsolt Tibor</i> , <i>Pribojszki-Németh Anikó</i> , <i>Kovács Zoltán</i> , Karbantartási projektek mátrix alapú tervezése	27
<i>Horváth Miklós</i> , A rezgő húr irányítása	57
<i>Simonovits András</i> , Matematikai közgazdaságtanról matematikusoknak	75
<i>Apáthy M. Sándor</i> , Az útvonaltervező algoritmus történeti áttekintése, különös tekintettel azok turisztikai célú alkalmazásaira	93

INDEX

<i>Alpár Richárd Mészáros</i> , Mean field games: From optimal control to optimal transport ...	1
<i>Dr. Gábor Vörös</i> , Effects of truncation in calculating data	19
<i>Zsolt Tibor Kosztján</i> , <i>Anikó Pribojszki-Németh</i> , <i>Zoltán Kovács</i> , Matrix-based maintenance management	27
<i>Miklós Horváth</i> , The control of vibrating strings	57
<i>András Simonovits</i> , On mathematical economics for mathematicians	75
<i>Sándor M. Apáthy</i> , A survey on route planning algorithms, focusing on its touristic applications	93

ÁTLAGTÉRJÁTÉKOK: OPTIMÁLIS VEZÉRLÉSTŐL OPTIMÁLIS TRANSPORTIG

MÉSZÁROS ALPÁR RICHÁRD

Jelen dolgozatunkkal egy rövid betekintést nyújtunk az újonnan bevezetett átlagtérjátékok elméletébe. Ezen rendszerek optimális vezérléssel való megfogalmazása és a Nash-típusú egyensúlyi fogalmak elemzése után, az optimális transzport modern elméletét felhasználva tárgyalunk néhány ún. variációs rendszert. Lokális kapcsolattal ellátott átlagtérjátékok gyenge megoldásainak létezését és unicitását mutatjuk be. Az alkalmazott módszerek az optimális transzport probléma ún. Benamou–Brenier-megfogalmazásából merítkeznek.

1. Bevezetés

Az átlagtérjátékok (ang. *mean field games*, a továbbiakban röviden *MFG*) elméletét nagyjából egyidejűleg J.-M. Lasry és a Fields-díjas P.-L. Lions ([17, 18, 19]) francia matematikusok, valamint M. Huang, P.E. Caines és R.P. Malhamé ([14]) Kanadában dolgozó mérnökök vezették be. Később Lions pár éven keresztül a párizsi Collège de France intézményben mutatta be ([20]) az elmélet további fejlődését. Tulajdonképpen Lions tekinthető az elmélet atyjának. 2006 óta az elmélet folyamatosan bővül újabb és újabb eredményekkel (lásd a további hivatkozásokat), amelyek nagy mértékben a francia és olasz parciális differenciálegyenletek és optimális vezérlés elméletek iskoláiban tevékenykedő neves kutatóknak köszönhetőek. Például, MFG rendszerek tanulmányozására kifejlesztett numerikus módszereket az [1, 2, 10, 16] dolgozatokban mutatnak be; MFG rendszerek gyenge megoldásai a [7, 8, 9] dolgozatban kerülnek tanulmányozásra, stb.

Az átlagtérjátékok valójában olyan differenciáljátékok¹, ahol a játékosok száma nagyon nagy, tart végtelenhez. Az elmélet alapötlete és elnevezése valójában a statisztikus fizikában és mechanikában is megtalálható átlagtér modellekből származik. Ha a Boltzmann-, vagy Vlasov-egyenletek származtatására gondolunk (folytonossági határértékből) látható, hogy az átlagtér elmélet nagyon hasznosnak bizonyul abban, hogy a részecskék mozgását (helyzetét, sebességét) úgymond átlagolva, egy parciális differenciálegyenlet-rendszerrel írjuk le. Így a több millió,

¹Olyan játékok, ahol a játékosok dinamikáját közönséges (sztochasztikus) differenciálegyenletek írják le.

milliárd közönséges differenciálegyenletről álló rendszer megoldása helyett (amelyek megadnák minden részecske pályáját), egy parciális differenciálegyenletekből álló rendszert tekintünk, ahol az egyik fő változó a részecskék sűrűsége (a másik általában a sebességük). Természetes az is, hogy nem pusztán eleganciából választjuk a második megközelítést, hiszen szinte azonnal belátható, hogy az első kivitelezése (például numerikusan) szinte lehetetlen. Ha csak az N -test problémára gondolunk a newtoni/hamiltoni mechanikában, rögtön érezhető a probléma nehézsége már $N = 2, 3, \dots, 10$ esetén is. A fenti problémakör esetén $N \approx 10^{18}$ nagyságrendű problémákról beszélünk.

Visszatérve az MFG rendszerekhez megjegyezzük, hogy ezek a játékok nem atomi játékok, vagyis minden játékosnak a játék teljességéhez való egyenkénti hozzájárulása elhanyagolható. Más szóval, egy játék során nem az egyének optimális pályájának megadásán, hanem a populáció sűrűség-evolúciójának tanulmányozásán van a hangsúly.

Jelen dolgozatunkkal egy rövid betekintést szeretnénk nyújtani ezen színes elméletbe. Az MFG-elmélet végső soron a parciális differenciálegyenletek elméletébe tartozik, de szoros kapcsolatban áll az optimális és sztochasztikus vezérléssel és az optimális transzport elmélettel. Nem utolsósorban mély valószínűségszámítási megközelítései is vannak. A dolgozat célja, hogy néhány ilyen kapcsolatot bemutassunk és elemezzünk. Melléktermékként rövid betekintést nyújtunk az optimális transzport újszerű elméletébe, amely alkalmazhatósága néhány variációs MFG-rendszer (gyenge) megoldásainak tanulmányozásában is megtalálható.

Egy MFG-rendszer általában a következő kapcsolt Hamilton-Jacobi-Bellman (a továbbiakban röviden HJB) és Fokker-Planck (a továbbiakban röviden FP) egyenletekből álló parciális differenciálegyenlet-rendszert jelenti

$$\begin{cases} -\partial_t u(t, x) - \nu \Delta u(t, x) + H(x, \nabla u(t, x)) = f(x, m(t, x)), & [0, T] \times \mathbb{T}^d \\ \partial_t m(t, x) - \nu \Delta m(t, x) - \operatorname{div}(\nabla_p H(x, \nabla u(t, x))m(t, x)) = 0, & (0, T] \times \mathbb{T}^d, \\ m(0, x) = m_0, \quad u(T, x) = g(x), & \mathbb{T}^d. \end{cases} \quad (\text{MFG})$$

Ebben a rendszerben az u változó jelenti egy tipikus ügynök nyereségfüggvényét, és az m változó a populáció sűrűségét adja meg. A rendszer bemeneti adatai az f, g függvények, a H hamiltoni függvény, a $\nu \geq 0$ valós paraméter, valamint m_0 az ügynökök kezdeti sűrűségfüggvénye. A játék $T > 0$ ideig tart, és jelen esetben a $\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ teren történik. A későbbiekben részletesen elemezzük ezen bemeneti adatokat.

A dolgozat felépítése a következő: A 2. fejezetben az MFG-rendszerek eredeti optimális vezérlés alapú megközelítését vázoljuk. Ebből a megközelítésből látható a Nash-egyensúlyi fogalom is. A 3. fejezetben röviden vázoljuk az optimális transzport elmélet főbb alappilléreit. Itt bemutatjuk a Monge-, illetve Kantorovich-problémákat, Brenier tételét, McCann interpolációját és a Wasserstein-terek szerkesztését. Továbbá megadjuk az ún. Benamou-Brenier dinamikus formulációt,

amely a Wasserstein-tér differenciálgeometriai elemzéséhez és geodetikuskok értelmezéséhez vezet. A 4. fejezetben teremtjük meg a kapcsolatot az optimális transzport Benamou–Brenier-formulációja és az MFG-rendszerek variációs megközelítése között. Parciális differenciálegyenletek optimális vezérlésére és a konvex analízisből ismeretes Fenchel–Rockafellar-típusú tételekre alapozva, igazolni lehet variációs MFG-rendszerek gyenge megoldásainak létezését és parciális iniciátát.

2. MFG-rendszerek optimális vezérlés alapú megfogalmazása

Ebben a fejezetben alapul véve J.-M. Lasry és P.-L. Lions bevezető munkáit (lásd [17, 18, 19]), valamint a későbbiekben P.-L. Lions által tartott előadás sorozatot ([20]), megadjuk néhány MFG-rendszer leírását. Az általánosság megsértése nélkül a $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ ($d \geq 2$) tóruszon dolgozunk (peremfeltételek elkerülése végett). A továbbiakban, egy \mathbb{T}^d -n értelmezett függvény azt jelenti, hogy a függvény \mathbb{R}^d -n értelmezett és \mathbb{Z}^d periódikus.

Tekintsük a következő sztochasztikus differenciáljátékot: adott egy $N > 1$ ügynökből álló populáció. Az ügynökök szabadon mozoghatnak \mathbb{T}^d -n $[0, T]$ időintervallum alatt. Az i -edik ügynök, aki a t időpillanatban az $x^i \in \mathbb{T}^d$ pontban tartózkodik tekinti, a következő sztochasztikus vezérlési problémát

$$u^i(t, x^i) := \inf \mathbb{E} \left\{ \int_t^T L(X^i(s), \alpha^i(s)) + f \left(X^i(s), \frac{1}{N-1} \sum_{i \neq j} \delta_{X^j(s)} \right) ds + g(X^i(T)) \right\}, \quad (1)$$

a

$$dX^i(s) = \alpha^i(s)ds + \sqrt{2\nu}dB^i(s), \quad s \in (t, T] \quad \text{és} \quad X^i(t) = x^i$$

feltételekkel. Ebben a problémában $L : \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ egy adott Lagrange-függvény; $f : \mathbb{T}^d \times \mathcal{P}(\mathbb{T}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ (itt $\mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ a \mathbb{T}^d Borel-halmazain értelmezett valószínűségi mértékek terét jelöli) adott függvény képezi a kapcsolatot a játékosok között és egyben az ún. *üzemeltetési költséget*; $g : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}$ szintén egy adott függvény, amely a játék *végző költségét* képezi. Látható, hogy minden ügynök optimalizálási problémája függ a többi ügynöktől, ezek empirikus mértéke szerint. Továbbá $\nu \geq 0$ egy valós paraméter, $\nu = 0$ esetén determinisztikus (elsőrendű) modelltől beszélünk, valamint a B^i -k $i \in \{1, \dots, N\}$ független d -dimenziós Brown-mozgások \mathbb{T}^d -n. A fenti problémában δ_x az $x \in \mathbb{T}^d$ pontban vett Dirac-delta mértékét jelöli.

Formálisan dolgozva, az empirikus mértékek konvergenciája mellett (a t időpillanatban a populáció sűrűségét megadó valószínűségi mértékhez),

$$\frac{1}{N-1} \sum_{i \neq j} \delta_{X^j(t)} \rightarrow m(t, \cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d), \quad \text{a gyenge} \ast \text{ topológiában, amint } N \rightarrow +\infty,$$

a fenti optimalizálási probléma felírható bármely tipikus ügynök esetén, bemenő változóként használva az ügynökök sűrűségét. Így ez a probléma felírható az in-

dexek elhagyása után a következő alakban:

$$u(t, x) := \inf \mathbb{E} \left\{ \int_t^T L(X(s), \alpha(s)) + f(X(s), m(s, X(s))) \, ds + g(X(T)) \right\},$$

a

$$dX(s) = \alpha(s)ds + \sqrt{2\nu}dB(s), \quad s \in (t, T] \quad \text{és} \quad X(t) = x$$

feltétellel. A bemeneti függvények bizonyos regularitási feltételei mellett a sztochasztikus vezérlés elmélete biztosítja az optimális α^* vezérlések létezését mindkét fenti probléma esetén (így mindkét problémában az inf valójában min). Továbbá α^* visszacsatolás (feedback) formában, az $\alpha^*(t, x) := -\nabla_p H(x, \nabla u(t, x))$ formulával adott, ahol a $H : \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ hamiltoni függvény az L második változó szerint vett Legendre–Fenchel-transzformáltja. Továbbá az u értékfüggvény formálisan megold egy *Hamilton–Jacobi–Bellman*-típusú egyenletet, míg a populáció sűrűsége, amely az $m(t, \cdot) := \text{Law}(X(t))$ formulával adott, egy *Fokker–Planck-egyenlet* szerint fog változni, a formálisan felírt optimális α^* vektormező szerint. Ezt könnyen beláthatjuk az Itô-kalkulust használva. Az imént használt Law-jelölés a következőképpen értelmezhető: egy \mathbb{T}^d -n értelmezett Y valószínűségi változó esetén, Y törvénye a $\mu := \text{Law}(Y)$ valószínűségi mérték, íh.

$$\int_{\mathbb{T}^d} \varphi(x) \, d\mu(x) = \mathbb{E}(\varphi(Y))$$

minden $\varphi : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény esetén.

A fentiek alapján az MFG-rendszer egy kapcsolt HJB- és FP-egyenletekből álló rendszer:

$$\begin{cases} -\partial_t u(t, x) - \nu \Delta u(t, x) + H(x, \nabla u(t, x)) = f(x, m(t, x)), & [0, T] \times \mathbb{T}^d \\ \partial_t m(t, x) - \nu \Delta m(t, x) - \text{div}(\nabla_p H(x, \nabla u(t, x))m(t, x)) = 0, & (0, T] \times \mathbb{T}^d, \\ m(0, x) = m_0, \quad u(T, x) = g(x), & \mathbb{T}^d. \end{cases}$$

Minden esetben ismeretes az ügynök populáció kezdeti konfigurációja, az $m_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ valószínűségi mérték.

A figyelmes olvasó észrevehette, hogy bizonyos értelemben „csalás” történt a fenti rendszer származtatása során. Valóban, hiszen az u értékfüggvény értelmezése során szükség van m -re, mint bemeneti adatra, később pedig m -et az optimális trajektória segítségével ($m(t, \cdot) := \text{Law}(X(t))$) – amely függ m -től – értelmeztük. Valójában a csalás azzal magyarázható, hogy a fenti rendszer megoldása egy Nash-egyensúlyt is kódol a játékban.

Pontosabban, a következő történik a rendszer származtatása során: az optimális vezérlés probléma esetén a tipikus ügynök „előrejelzi” a populáció sűrűségének változását, $m(t, \cdot)$ -et. Ennek segítségével meg tudja határozni az optimális pályáját, valamint az optimális vezérlést, α^* -t. Ez alapján értelmezni tud egy új valószínűségi mértéket, mint $\tilde{m}(t, \cdot) := \text{Law}(X(t))$, amely az FP-egyenlet megoldását

fogja eredményezni. Ha az előrejelzés helyes volt, vagyis $m = \tilde{m}$, akkor Nash-egyensúlyról beszélünk, valamint (MFG)-nek van megoldása. Ebben az esetben az m valószínűségi mérték egyben megközelítő Nash-egyensúlyként is szolgál véges, de nagy számmal rendelkező (1) típusú differenciáljátékok esetén.

A fenti (MFG) rendszer megoldásának létezése nehéz kérdésnek bizonyul. Abban az esetben, amikor a kapcsolatot jelentő f függvény nem lokális és regularizáló (például az m -szerinti függés valamilyen konvolúcióval adott) Lasry és Lions igazolták (lásd [17, 18, 19, 20]) az erős megoldások létezését (és bizonyos monotonicitási feltételek mellett az unicitását is), elsőrendű ($\nu = 0$) esetén is, többnyire fixpont alapú eljárásokat használva. Az előbbi előrejelzés-eljárás is utalás a fixpontos megközelítésre, de ez csak regularizáló operátor esetében kivitelezhető.

Lokális függvények esetén, amikor f nem regularizál (például $f(x, m) = m^\alpha$, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ adott hatvány), a létezés kérdése sokkal mélyebb. Itt megemlítenénk példának D. Gomes és munkatársai munkáját ([12]), akik a következő rendszert tanulmányozták:

$$\begin{cases} -\partial_t u(t, x) - \Delta u(t, x) + H(x, \nabla u(t, x)) = m(t, x)^\alpha, & [0, T] \times \mathbb{T}^d \\ \partial_t m(t, x) - \Delta m(t, x) - \operatorname{div}(\nabla_p H(x, \nabla u(t, x))m(t, x)) = 0, & (0, T] \times \mathbb{T}^d, \\ m(0, x) = m_0, \quad u(T, x) = g(x), & \mathbb{T}^d. \end{cases}$$

Néhány strukturális feltétel mellett, H szubkvadratikusan $1 + 1/(d+1) < \gamma < 2$ növekedéssel a második változóban, $0 < \alpha < \alpha_\gamma$, ahol α_γ egy felső korlát, ami konkrétan kiszámolható a többi paraméter függvényében, és $m_0, g \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$, a fenti lokális rendszernek létezik egyértelmű klasszikus megoldása. Az eredmény igazolására a szerzők Gagliardo–Nirenberg-típusú interpolációs eljárásokat és egyéb PDE-témakörben használatos a priori becsléseket használnak.

Ez a dolgozat is azt igazolja, hogy általános esetben még mindig nagyon keveset tudunk a lokális kapcsolattal ellátott MFG-rendszerekről. Továbbá előrevetíti azt a tényt is, hogy különböző gyenge megoldások létezésére sokkal több remény lehet. Egy nagyon hasznos elmélet, amely MFG-rendszerek tanulmányozásában is segítségünkre lesz, az *optimális transzport* elmélet. Ezen elmélet elemeit a következőkben vázoljuk.

3. Optimális transzport eszköztár

Az optimális transzport elmélet alapjait Gaspard Monge francia matematikus tette le 1781-ben (lásd [27]). Matematikai nyelvezettel ez a probléma a következőképpen fogalmazható meg: adott μ és ν , a d -dimenziós Lebesgue-mértékre (\mathcal{L}^d) nézve abszolút folytonos (jel: $\mu, \nu \ll \mathcal{L}^d$) valószínűségi mérték \mathbb{R}^d -n, f , illetve g

sűrűségfüggvényekkel, vagyis $\mu = f \cdot \mathcal{L}^d$ és $\nu = g \cdot \mathcal{L}^d$ úgy, hogy

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx = 1.$$

Találjuk meg azt a (mérhető) $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ leképezést amely az f sűrűséget a g -be *transzportálja* (jel: $T_{\#}f = g$) és közben optimalizálja a transzportálási költséget, azaz

$$T \in \operatorname{argmin} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |x - S(x)| f(x) dx : S_{\#}f = g \right\}. \quad (\text{MP})$$

A fenti probléma esetén, ha létezik optimális T , ezt *optimális transzport leképezésnek* nevezzük. Az (MP) problémát természetes módon megfogalmazhatjuk általános valószínűségi mértékek esetén (nem feltétlenül kell megkövetelni az abszolút folytonosságot).

A továbbiakban egy (X, d) lengyel (teljes, szeparábilis metrikus) tér esetén jelöljük az X Borel-halmazain értelmezett valószínűségi mértékek terét $\mathcal{P}(X)$ -szel. Nemkompakt X esetén megkülönböztetjük a $\mathcal{P}_p(X)$ tereket ($1 \leq p < +\infty$, véges p -edrendű momentummal rendelkező mértékek), amelyeket a következőképpen értelmezhetük: legyen $x_0 \in X$ egy tetszőleges rögzített pont. Ekkor

$$\mathcal{P}_p(X) := \left\{ \mu \in \mathcal{P}(X) : \int_X d(x_0, x)^p d\mu(x) < +\infty \right\}.$$

Nyilvánvalóan, ha X kompakt, akkor $\mathcal{P}(X)$ ekvivalens $\mathcal{P}_p(X)$ -szel bármely $1 \leq p < +\infty$ esetén.

A mi esetünkben általában $X = \mathbb{R}^d$, $X = \Omega$, ahol $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ egy kompakt halmaz, $X = \mathbb{T}^d$ a d -dimenziós tórusz ($\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$), vagy $X = M$, egy kompakt Riemann-sokaság. Mivel sok eredmény kijelentése esetén nem jelent plusz erőfeszítést absztraktabb terekkel dolgozni, ezért mi is általánosan lengyel terekkel fogunk dolgozni. Viszont legtöbbször sajátosan az euklidészi keretek között maradunk.

Most nézzük, mit is jelent pontosabban egy mérhető leképezés esetén a „transzportáció” fogalma. Legyenek X, Y lengyel terek, $T : X \rightarrow Y$ mérhető, és $\mu \in \mathcal{P}(X)$. Ekkor $\mathcal{P}(Y) \ni \nu := T_{\#}\mu$ (ν a μ mérték T leképezés által vett transzport mértéke, vagy ang. *push-forward*-ja) azt jelenti, hogy bármely $B \in \mathcal{B}(Y)$ Borel-halmaz esetén $\nu(B) = \mu(T^{-1}(B))$. Ez a feltétel tesztfüggvényekre térve azt jelenti, hogy

$$\int_X \varphi(T(x)) d\mu(x) = \int_Y \varphi(y) d\nu(y), \quad \forall \varphi : Y \rightarrow \mathbb{R} \text{ korlátos estén.}$$

Visszatérve Monge problémájához elmondhatjuk, hogy (MP) teljes általánosságában több mint 150 évig megoldatlan maradt. Nagyon egyszerű belátni, hogy a fenti problémának nem mindig létezik megoldása. Ennek érdekében tekintsük például az $X = Y = \mathbb{R}$ és $\mu := \delta_0$, valamint $\nu := \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_2$ esetet, ahol δ_x az

x pontban vett Dirac-delta mértéket jelöli. Ebben az esetben a $T_{\#}\mu = \nu$ feltétel üres, hiszen egyetlen leképezés sem létezik, amely „széthatáná” a 0-ban levő tömeget.

Tekintsünk egy másik példát (lásd [32]): Legyenek

$$X = Y = \mathbb{R}^2, \quad A = \{-1\} \times [0, 1], \quad B = \{0\} \times [0, 1] \quad \text{és} \quad C = \{1\} \times [0, 1]$$

függőleges szakaszok. Legyenek továbbá $\mu := \mathcal{H}^1 \llcorner B$ és $\nu := \frac{1}{2}\mathcal{H}^1 \llcorner A + \frac{1}{2}\mathcal{H}^1 \llcorner C$, ahol $\mathcal{H}^1 \llcorner D$ az 1-dimenziós Hausdorff-mértéknek a D \mathcal{H}^1 -mérhető halmazra való leszűkítését jelöli. Ekkor nyilván léteznek $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mérhető leképezések ú.h. $T_{\#}\mu = \nu$, de könnyű belátni, hogy nincsen optimális megoldása az (MP) problémának. Valóban, ennek érdekében szerkesszük a következő transzport leképezéseket: Legyen $n \in \mathbb{N}$, és osszuk fel a B szakaszt $2n$ részre úgy, hogy minden kis szakasz hossza $1/2n$ legyen. Legyenek ezek a szakaszok fentről lefele haladva $(B_i)_{i \in \{1, \dots, 2n\}}$. Osszuk fel továbbá az A és C szakaszokat n részre úgy, hogy minden kis szakasz hossza $1/n$ legyen. Legyenek ezek a szakaszok fentről lefele haladva $(A_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$, illetve $(C_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$. Ekkor szerkesszük meg a $T_n : B \rightarrow A \cup C$ darabonként affín leképezéseket, amelyek a B_{2i-1} szakaszokat A_i -be, valamint a B_{2i} szakaszokat a C_i -be viszik át, minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén. Minden ilyen leképezés költsége az (MP) problémában kisebb, vagy egyenlő, mint $\sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{2n} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2}$. Ha $n \rightarrow +\infty$, akkor ez a költség tart 1-hez, és nyilvánvaló, hogy ha létezik optimális transzport leképezés, akkor ennek költsége nem lehet kisebb, mint 1, hiszen a B pontjai legalább 1 távolságra vannak az A és a C pontjaitól is. Másfelől belátható, hogy a T_n leképezéssorozatnak nem létezik pontonkénti határértéke, hiszen az esetleges T határértékre egyidejűleg kellene teljesüljön, hogy $T = T_1$ és $T = T_2$, ahol $T_1(x) = x + e_1$, $T_2(x) = x - e_1$ és $e_1 = (1, 0)^T \in \mathbb{R}^2$, ami természetesen lehetetlen. Más szóval, ebben az esetben is az optimális leképezés szét kellene hasítsa a B pontjaiban levő tömegeket. Vegyük észre, hogy $T_n \rightarrow \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_2$, gyenge értelemben, amiből az is látszik, hogy (MP) nem bizonyul stabilnak a transzport leképezések gyenge konvergenciáját illetően.

Monge problémáját teljes általánosságában L. Kantorovich orosz matematikus és Nobel-díjas közgazdász válaszolta meg 1942-ben (lásd [15]). Ő az (MP) probléma egy következő relaxált változatát tekintette. Térjünk vissza az absztraktabb környezetbe, legyenek X és Y (nem feltétlenül kompakt) lengyel terek, és $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ egy tetszőleges alulról félig folytonos és alulról korlátos költségfüggvény (az euklidészi esetben $c(x, y) = |x - y|$ az előbb felírt (MP) probléma költségfüggvénye), és tekintsük a következő problémát:

$$\inf \left\{ \int_{X \times Y} c(x, y) \, d\gamma(x, y) : \gamma \in \Pi(\mu, \nu) \right\}, \quad (\text{KP})$$

ahol $\Pi(\mu, \nu) := \{\gamma \in \mathcal{P}(X \times Y) : (\pi^x)_{\#}\gamma = \mu, (\pi^y)_{\#}\gamma = \nu\}$ és $\pi^x : X \times Y \rightarrow X$, valamint $\pi^y : X \times Y \rightarrow Y$ a kanonikus projekciók. Könnyen belátható, hogy (KP)

esetén a feltétel soha nem lehet üres, hiszen bármely $\mu \in \mathcal{P}(X), \nu \in \mathcal{P}(Y)$ esetén $\mu \otimes \nu \in \Pi(\mu, \nu)$. Valóban, hiszen a $\mu \otimes \nu$ szorzatteren értelmezett meték x szerinti projekciója μ , és y szerinti projekciója ν .

Az is könnyen igazolható, hogy a (KP) problémának mindig van megoldása. Ez a tény belátható alkalmazva a variációs számítás direkt módszerét. Ehhez elegendő igazolni, hogy bármely $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ minimalizáló sorozatnak van gyenge- \star konvergens részsorozata, a gyenge határérték megengedhető megoldás valamint, hogy az (KP) problémában szereplő funkcionál alulról félig folytonos az imént említett konvergenciára nézve. Ha megkövetelnénk, hogy az X és Y terek kompaktak legyenek, akkor a minimalizáló sorozat szekvenciális kompaktsága a (szekvenciális) Banach–Alaoglu-tétel következménye lenne. Valóban, hiszen kompakt téren értelmezett folytonos függvények tere szeparábilis, és $\mathcal{P}(X \times Y)$ része ezen tér duálisának. Viszont általános esetben, ha az X és Y terek nem kompaktak, ez a megközelítés nem használható. Ekkor egy mélyebb eredmény, Prokhorov tétele fogja eredményezni a szekvenciális kompaktságot, hiszen a minimalizáló sorozat ún. *szűk* (ang. *tight*) mértéksorozat. A funkcionál alulról félig folytonossága a gyenge- \star konvergenciára nézve egy jól ismert eredmény, amely a c függvény alulról félig folytonosságának és alulról korlátosságának következménye.

A (KP) probléma γ optimalizálóját *optimális transzport tervnek* nevezzük. A kapcsolat az (MP) és (KP) problémák között könnyen felfedezhető: ha létezik optimális T leképezés az (MP) esetén, akkor $\gamma := (\text{id}, T)_{\#} \mu$ optimális terv a (KP) esetén.

3.1. Kantorovich-potenciál, Wasserstein-terek és Brenier tétele

Konvex analízisben használatos dualitási technikák segítségével felírhatjuk a (KP) probléma duálisát a következőképpen:

$$\sup \left\{ \int_X \varphi(x) d\mu(x) + \int_Y \psi(y) d\nu(y) : \varphi \in C_b(X), \psi \in C_b(Y) \text{ és } \varphi(x) + \psi(y) \leq c(x, y), \forall (x, y) \in X \times Y \right\}, \quad (\text{DP})$$

ahol $C_b(X)$ az X -en értelmezett folytonos és korlátos függvények terét jelöli.

A (DP)-ben használt φ és ψ függvényeket *Kantorovich potenciáloknak* nevezzük. Szintén konvex analízisből ismert Rockafellar tételének segítségével igazolható, hogy léteznek az optimális φ, ψ függvények, valamint $\min(\text{KP}) = \max(\text{DP})$.

$X = Y = \mathbb{R}^d$ esetén különös jelentőséggel bírnak a $c(x, y) = |x - y|^p$ alakú költségek ($1 \leq p \leq +\infty$). Ebben az esetben értelmezhetjük minden $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$ esetén az ún. *Wasserstein-metrikát*, mint

$$W_p(\mu, \nu) := \min \left\{ \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |x - y|^p d\gamma(x, y) : \gamma \in \Pi(\mu, \nu) \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

W_p metrizálja a valószínűségi mértékek gyengye-* topológiáját. A $(\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d), W_p)$ teret *Wasserstein-térnek* nevezzük. Természetesen ezen terek megszerkeszthetőek, ha $(\mathbb{R}^d, |x - y|)$ helyett egy általános (X, d) metrikus teret tekintünk.

Az elmúlt 25–30 évben az optimális transzport elmélet óriási fejlődésen ment keresztül. Valójában Y. Brenier és R. J. McCann voltak azok, akik lefektették az elmélet mai arculatának alapjait. A következőkben ismertetjük Y. Brenier tételét az optimális transzport leképezések létezéséről és jellemzéséről.

3.1. TÉTEL. (Y. Brenier, 1987, [5]) *Legyenek $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\Omega)$, ahol $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ kompakt. Tekintsük továbbá a $c(x, y) := h(x - y)$ költségfüggvényt, ahol $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ egy szigorúan konvex függvény. Ekkor létezik egy optimális $\gamma \in \mathcal{P}(\Omega \times \Omega)$ terv a (KP) problémában. Ha $\mu \ll \mathcal{L}^d$, akkor γ egyértelmű, létezik egy egyértelmű T optimális transzport leképezés az (MP) problémában és $\gamma = (\text{id}, T)_{\#}\mu$. Továbbá, léteznek $\varphi, \psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ optimális Kantorovich-potenciálok a (DP) problémában és*

$$T(x) := x - (\nabla h)^{-1}(\nabla \varphi(x)).$$

Megjegyzés.

- (i) A fenti tétel eredetileg a $c(x, y) = |x - y|^2$ költségfüggvényre volt megfogalmazva, de különösebb nehézség nélkül felírható minden

$$c(x, y) := h(x - y)$$

alakú függvényre a megadott feltételekkel (lásd [11]).

- (ii) A tétel feltételei közül a $\mu \ll \mathcal{L}^d$ feltétel (μ abszolút folytonos a d -dimenziós Lebesgue-mértékre nézve) kicserélhető arra, hogy $\mu(A) = 0$ bármely $A \subseteq \Omega$, ahol A Hausdorff-dimenziója $(d - 1)$ (lásd [11]).
- (iii) Y. Brenier tételét megfogalmazhatjuk kompakt Riemann-sokaságok esetében is, ahol a költségfüggvény $c(x, y) = d^2(x, y)$, és d a sokaságon értelmezett Riemann-távolság. Ez az eredmény R. J. McCann nevéhez fűződik (lásd [24]).

3.2. Benamou–Brenier-formuláció és geodetikusok $(\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d), W_p)$ -ben

J.-D. Benamou és Y. Brenier egy új formulációt adtak az (MP) és (KP) optimális transzport problémáknak (lásd [4]). Ötletük a folyadékmechanikából ered. Pontosabban a folyadékmechanikában ismeretes ún. euleri modellek ihlették a kutatókat a következő probléma felírására. Adott $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$ esetén tekintsük a következő problémát

$$\inf \left\{ \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} |v_t|^2 d\rho_t(x) dt : \partial_t \rho_t + \nabla \cdot (\rho_t v_t) = 0; \rho_0 = \mu, \rho_1 = \nu \right\}. \quad (\text{BB})$$

A fenti problémában az optimalizálás minden (ρ, ν) időfüggő (a $[0, 1]$ időintervallumon) mérték és vektormező páros szerint történik, amelyen gyenge megoldását képezik a felírt folytonossági egyenletnek a μ kezdeti és ν végső peremfeltételekkel.

Ismét konvex analízisbeli technikákat használva igazolhatjuk, hogy

$$W_2^2(\mu, \nu) = \min(\text{BB}),$$

ahol $W_2(\cdot, \cdot)$ a fentebb bevezetett Wasserstein-metrika.

A (BB) probléma megoldása során szerkesztünk egy optimális mértékgörbét $[0, 1] \ni t \mapsto \rho_t \in \mathcal{P}(\Omega)$ és egy vektormezőt, amelyek megoldanak egy folytonossági egyenletet. A $t \mapsto \rho_t$ görbe összeköti a μ és ν mértékeket úgy, hogy közben kinetikus energiát, ún. *hatást* (ang. *action*) minimalizál. Ebből a szempontból a ρ_t görbét *geodetikus vonalnak* tekinthetjük a Wasserstein-térben. Természetesen a (BB) problémát megfogalmazhatjuk általánosan bármely W_p ($1 \leq p \leq +\infty$) metrika esetén.

A geodetikus vonalakat másképpen is értelmezhetjük, R. J. McCann *interpolációja* segítségével. Tételezzük fel, hogy $\mu \ll \mathcal{L}^d$ és $\nu \ll \mathcal{L}^d$ (általános esetben a traszport leképezések helyett traszport tervekre kell térni), valamint tekintsük a kvadratikus esetet. Ekkor egyértelműen létezik egy optimális traszport leképezés T , megoldása az (MP) problémának. Értelmezzük minden $t \in [0, 1]$ esetén a

$$T_t := (1 - t)\text{id} + tT$$

leképezést és a

$$\rho_t := (T_t)_\# \mu$$

görbét. Ez a görbe egy geodetikus vonalat eredményez, amely összeköti a μ és ν mértékeket, valamint a megfelelő v_t vektormezővel – amelyet megadhatunk a $v_t := (T - \text{id}) \circ T_t^{-1}$ formulával – megoldása a (BB) problémának. Ezzel a szerkesztéssel R. J. McCann eredeti motivációja egy új konvexitási fogalom bevezetése volt. Ha funkcionálokot értelmezzünk a Wasserstein-téren, és optimalizálási feladatokat szeretnénk megoldani ezen funkcionálok segítségével, jogosan fogalmazzuk meg a kérdést, hogy melyik lenne a legtermészetesebb konvexitási fogalom ezen keretek között. Erre a kérdésre a már említett [23] dolgozat adja a választ, amely ilyen geodetikusok mentén vett konvexitást értelmez, amit a szerző *elmozdulás konvexitásnak* (ang. *displacement convexity*) keresztel.

Ebben a szöveggörnyezetben megemlítjük F. Otto munkáját is (lásd [28]), aki elsők között fogalmazta meg a Wasserstein-terek ezen jellegű differenciálgeometriai vonzatait. Így a szakirodalom mai álláspontja szerint nyilvánvaló, hogy a valószínűségi mértékek Wasserstein-tere, $(\mathcal{P}_p(X), W_p)$ ebből a szempontból egy végtelen dimenziós sokaságnak tekinthető, amelyet differenciális struktúrával láthatunk el. Ez a meglátás kaput nyitott a metrikus mértékterek egzotikus struktúráinak mélyebb megismeréséhez. Itt megemlítenénk idézés nélkül főként C. Villani, J. Lott, K.-T. Sturm, L. Ambrosio, N. Gigli, G. Savaré és mások munkáit, amelyek

robbanásszerűen kezdik feltárni ezt a 20 évvel ezelőtt még szinte ismeretlennek vélt világot. Manapság például (Ricci) görbület fogalommal tudunk ellátni metrikus mértéktereket és hőfolyamot tudunk értelmezni ugyanitt. És mindezt az optimális transzport elméletnek köszönhetően.

Az optimális transzport elmélet mélyreható naprakész eredményeit megtaláljuk a Fields-díjas C. Villani két monográfiájában (lásd [31, 32]), L. Ambrosio, N. Gigli és G. Savaré monográfiájában (lásd [3]), valamint a F. Santambrogio monográfiájában (lásd [30]).

4. MFG-rendszerek variációs megfogalmazása: kapcsolatok Benamou-Brenierrel

Ebben a fejezetben egy másik szempontból vizsgáljuk meg az MFG-rendszereket. Az eddig bemutatott optimális vezérlés alapú megfogalmazás, valamint a különböző PDE-technikák alkalmazása mellett az (MFG) típusú rendszerek hozzárendelhető variációs számításhoz kapcsolódó problémákhoz.

Valóban, formálisan az (MFG) rendszer felfogható, mint a következő variációs probléma optimalitási feltétele:

$$\inf_{(m,w) \in \mathcal{K}_P} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} \left\{ m(t,x) L \left(x, -\frac{w(t,x)}{m(t,x)} \right) + F(x, m(t,x)) \right\} dx dt + \int_{\mathbb{R}^d} g(x) m(T,x) dx, \tag{2}$$

ahol

$$\mathcal{K}_P := \{ (m, w) \in X_P \times Y_P : \partial_t m - \nu \Delta m + \operatorname{div}(w) = 0, m(0, x) = m_0 \},$$

és $F(x, m) := \int_0^m f(x, s) ds$, valamint $m_0 \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$, amely teljesíti az $m_0 \geq 0$

és $\int_{\mathbb{T}^d} m_0 dx = 1$ feltételeket. A fenti problémában felírt funkcionál valójában az (MFG) rendszer energiafunkcionáljának tekinthető.

Itt az X_P és Y_P terek függvénytereket jelölnek, amelyek természetesen függenek az L Lagrange-függvény és az F növekedésétől. A \mathcal{K}_P halmaz definíciójában vett Fokker–Planck-egyenletet a megfelelő gyenge értelemben tekintjük. A későbbiekben részletezzük ezen terek tulajdonságait, valamint további részletek megtalálhatóak a [7] és a [8] dolgozatokban.

A fenti probléma a Fokker–Planck-egyenlet egy optimális vezérlési feladatának tekinthető. A figyelmes olvasó ezen probléma olvasása során felismerheti a kapcsolatot az imént említett Benamou–Brenier-formulával (lásd (BB)). Valóban, $\nu = 0$ és $f \equiv 0$ esetén, valamint $L(x, p) = H(x, p) = |p|^2$ megválasztásával majdnem

a (BB) problémához jutunk. Pontosabban, ahhoz, hogy az így megfogalmazott problémának értelme legyen, egy végső sűrűséget ($m_T \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$) is meg kellene adni. Ebben az esetben a rendszer egyenletei (mivel nincsen kapcsolat a kettő között) külön-külön is megoldhatóak.

Látható, hogy az előző szemléltetés teljes mértékben formális. Először is, egyáltalán nem világos, hogy a fenti problémának létezik-e megoldása (ez természetesen kapcsolatban van az $X_P \times Y_P$ tér megválasztásával). Másodsor, ha igazolni is tudjuk a létezést, utána sem világos a optimalitási feltételek származtatása. Gyakorlatilag, szükségünk lenne a fenti funkcionál Gâteaux-szubdifferenciáljának a felírására. Ez viszonylag nehézkes kérdésnek bizonyul. Időfüggetlen problémák és viszonylag reguláris mértékek esetén, hasonló funkcionál szubdifferenciáljának jellemzése megtalálható a [26] dolgozatban.

Az optimalitási feltételek levezetése és a létezés igazolása érdekében bevezetjük a (2) probléma duálisát (konvex analízis értelemben). Tekintsük a következő problémát:

$$\inf_{(u, \alpha) \in \mathcal{K}_D} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} F^*(x, \alpha(t, x)) \, dx dt - \int_{\mathbb{T}^d} u(0, x) m_0(x) \, dx, \quad (3)$$

ahol

$$\mathcal{K}_D := \{(u, \alpha) \in X_D \times Y_D : -\partial_t u(t, x) - \nu \Delta u(t, x) + H(x, \nabla u(t, x)) = \alpha(t, x), \\ u(T, x) = g(x)\},$$

és az F^* az F függvény második változója szerint vett Legendre–Fenchel-transzformáltja. Ez a probléma a viszkózus Hamilton–Jacobi–Bellman-egyenlet optimális vezérlési feladatának tekinthető.

Innen is látszik, hogy az MFG-rendszerekben szereplő HJB-, valamint FP-egyenletek valójában egymás duálisai. A közelmúltban főként P. Cardaliaguet és munkatársai nagy mértékben tanulmányoztak hasonló típusú problémákat (lászt [7, 8, 9]). Így elmondhatjuk, hogy ebben a kontextusban valamelyest sikerült az MFG-rendszerek gyenge megoldásainak vizsgálata, mélyebb megértése. A következőkben szemléltetjük P. Cardaliaguet és P. J. Graber gyenge megoldásait.

4.1. P. Cardaliaguet és P. J. Graber gyenge megoldásai

P. Cardaliaguet és P. J. Graber többnyire elsőrendű rendszereket tanulmányoztak, de a gondolatmenet működik általánosabb, másodrendű rendszerek esetén is (lászt [9]). Ezért a továbbiakban mi is elsőrendű rendszereket tekintünk, vagyis $\nu = 0$ (a bemutatott eredmények megtalálhatók a [7, 8] dolgozatokban).

Tekintsük a következő feltételeket:

1. (Feltételek a kezdeti és végső adatokra.) Legyen m_0 egy folytonos valószínűségi mérték \mathbb{T}^d -n, amely abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre nézve, és $m_0 > 0$. Továbbá legyen $g : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-folytonos.

2. (Feltételek a Hamilton-i függvényre.) Legyen $H : \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos mindkét változóban, konvex és differenciálható a második változóban, és $\nabla_p H$ folytonos mindkét változóban. Továbbá H növekedése szuperlineáris a gradiens változóban: létezik $r > 1$ és $C > 0$ úh.

$$\frac{1}{rC}|p|^r - C \leq H(x, p) \leq \frac{C}{r}|p|^r + C, \quad (4)$$

$H^*(x, \cdot)$ az előbbi feltételek miatt teljesíti a

$$\frac{1}{r'C}|q|^{r'} - C \leq H^*(x, q) \leq \frac{C}{r'}|q|^{r'} + C \quad (5)$$

feltételt, ahol r' az r konjugáltja, vagyis $1/r + 1/r' = 1$.

3. (Feltételek a kapcsolatot teremtő függvényre.) Legyen f folytonos $\mathbb{T}^d \times (0, +\infty)$ -n, szigorúan növekvő a második változóban, és $f(x, 0) = 0$. Továbbá teljesüljön a következő növekedési feltétel: létezik $C > 0$ és $q > 1$ úh.

$$\frac{1}{C}|m|^{q-1} - C \leq f(x, m) \leq C|m|^{q-1} + C, \quad \forall m \geq 1, \quad (6)$$

ahol a kapcsolatot az r és a q között az $r > \max\{d(q-1), 1\}$ feltétel képezi. Hasonló növekedési feltétel fogalmazható meg az F függvényre is:

$$\frac{1}{C}|m|^q - C \leq F(x, m) \leq C|m|^q + C, \quad \forall m \geq 1. \quad (7)$$

A fenti feltételek mellett P. Cardaliaguet főbb eredményei a következők: legyen

$$X_P \times Y_P := L^1((0, T) \times \mathbb{T}^d) \times L^1((0, T) \times \mathbb{T}^d; \mathbb{R}^d).$$

Legyen \mathcal{K}_D azon $(u, \alpha) \in BV((0, T) \times \mathbb{T}^d) \times L^1((0, T) \times \mathbb{T}^d)$ párok halmaza, amelyre $\nabla u \in L^r((0, T) \times \mathbb{T}^d; \mathbb{R}^d)$, $u(T, \cdot) \leq g$ trace értelemben, $\alpha_+ \in L^p((0, T) \times \mathbb{T}^d)$ ($p = q^*$), $u \in L^\infty((t, T) \times \mathbb{T}^d)$ minden $t \in (0, T)$ esetén és

$$-\partial_t u + H(x, \nabla u) \leq \alpha,$$

disztribúció értelemben.

Ekkor a (2) problémának van megoldása a \mathcal{K}_P halmazon, valamint a (3) problémának van megoldása a \mathcal{K}_D halmazon, és a dualitás teljesül. Pontosabban

$$\min_{\mathcal{K}_P} (2) = - \min_{\mathcal{K}_D} (3).$$

A dualitásból könnyen levezethetők az optimalitási feltételek, amelyek a következő MFG-rendszert eredményezik.

4.1. *Definíció. (MFG-rendszer gyenge megoldásai)* Az

$$(u, m) \in BV((0, T) \times \mathbb{T}^d) \times L^q((0, T) \times \mathbb{T}^d)$$

az (MFG) rendszer gyenge megoldása, ha

1. $\nabla u \in L^r((0, T) \times \mathbb{T}^d)$ és $mf(x, m)$, $mH^*(x, -\nabla_p H(x, \nabla u))$ és $m\nabla_p H(x, \nabla u)$ integrálhatóak;
2. u teljesíti az elsőrendű HJ-egyenlőtlenséget

$$-\partial_t u + H(x, \nabla u) \leq f(x, m)$$

disztribúció értelemben, az $u(t, \cdot) \leq g$ peremfeltétel teljesül trace értelemben, valamint teljesül a következő egyenlőség

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} m(t, x) \{H(x, \nabla u(t, x)) - \nabla u(t, x) \cdot \nabla_p H(x, \nabla u(t, x)) \\ - f(x, m(t, x))\} dx dt \\ = \int_{\mathbb{T}^d} \{g(x)m(T, x) - u(0, x)m_0(x)\} dx; \end{aligned}$$

3. m megoldása a folytonossági egyenletnek

$$\partial_t m - \operatorname{div}(m\nabla_p H(x, \nabla u)) = 0, \quad ((0, T) \times \mathbb{T}^d) - \text{ben}, \quad m(0, \cdot) = m_0$$

disztribúció értelemben.

A fenti értelmezésből könnyen levezethető a HJ-egyenlet következő felírása:

$$(-\partial_t u)^{\text{ac}} + H(x, \nabla u(t, x)) = f(x, m(t, x))$$

m -majdnem mindenhol $((0, T) \times \mathbb{T}^d)$ -ban, ahol $(-\partial_t u)^{\text{ac}}$ a $-\partial_t u$ mérték Lebesgue-mérték szerinti abszolút folytonos részét jelöli. A [8] fő eredménye a következő tétel:

4.1. TÉTEL. (Létezés és parciális unicitás)

- (i) Legyen $(m, w) \in \mathcal{K}_P$ egy minimalizáló a (2) problémában és $(u, \alpha) \in \mathcal{K}_D$ minimalizáló a (3) problémában. Ekkor (u, m) az MFG-rendszer gyenge megoldása a 4.1 értelmezés értelmében. Továbbá $\alpha(t, x) = f(x, m(t, x))$ majdnem mindenhol.
- (ii) Fordítva, ha (u, m) gyenge megoldása az MFG-rendszernek, akkor létezik w, α ún. $(m, w) \in \mathcal{K}_P$ minimalizáló a (2) problémában, és $(u, \alpha) \in \mathcal{K}_D$ minimalizáló a (3) problémában.

- (iii) $Ha (u_1, m_1)$ és (u_2, m_2) két gyenge megoldása az MFG-rendszernek, akkor $m_1 = m_2$ majdnem mindenhol, és $u_1 = u_2$ majdnem mindenhol az $\{m_1 > 0\}$ halmazon.

Látható, hogy a fenti tétel segítségével meg tudjuk alapozni a lokális kapcsolattal ellátott rendszerek (gyenge értelemben vett, de alapos) származtatását. Továbbá megjegyezzük azt is, hogy az ilyen értelemben vett gyenge megoldások globális regularitása (ami szükséges lenne ahhoz, hogy következtessünk arra, hogy ezek a megoldások valójában klasszikus megoldások) egyelőre nyílt kérdésnek bizonyul ebben a témakörben.

5. Köszönetnyilvánítás

A kutatás a TÁMOP 4.2.4.A/2-11-1-2012-0001 azonosító számú Nemzeti Kiválóság Program - Hazai hallgatói, illetve kutatói személyi támogatást biztosító rendszer kidolgozása és működtetése országos program című kiemelt projekt keretében zajlott. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

Hivatkozások

- [1] ACHDOU, Y., CAPUZZO DOLCETTA, I.: *Mean field games: Numerical methods*, SIAM J. of Num. Anal., Vol. **48** (2010), No. **3**, 1136–1162.
- [2] ACHDOU, Y., CAMILLI, F., CAPUZZO DOLCETTA, I.: *Mean field games: numerical methods for the planning problems*, SIAM J. of Control and Optimization, Vol. **50** (2012), No. **1**, 77–109.
- [3] AMBROSIO, L., GIGLI, N., SAVARÉ, G.: *Gradient flows in metric spaces and in the spaces of probability measures*, Lectures in Mathematics, ETH Zürich, Birkhäuser, (2008).
- [4] BENAMOU, J.-D., BRENIER Y.: *A computational fluid mechanics solution to the Monge-Kantorovich mass transfer problem*, Numer. Math., Vol. **84** (2000), 375–393.
- [5] BRENIER, Y.: *Décomposition polaire et réarrangement monotone des champs de vecteurs*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., Vol. **305** (1987), No. **19**, 805–808.
- [6] CARDALIAGUET, P.: *Notes on Mean Field Games (from P.-L. Lions' lectures at Collège de France)*, <http://www.ceremade.dauphine.fr/~cardalia/MFG100629.pdf>.
- [7] CARDALIAGUET, P.: *Weak solutions for first order mean field games with local coupling*, Analysis and geometry in control theory and its applications, 111–158, Springer INdAM Ser., Vol. **11**, Springer, Cham, (2015).
- [8] CARDALIAGUET, P., GRABER, P. J.: *Mean field games systems of first order*, ESAIM: COCV, Vol **21** (2015), No. **3**, 690–722.

- [9] CARDALIAGUET, P., GRABER, P. J., PORRETTA, A., TONON, D.: *Second order mean field games with degenerate diffusion and local coupling*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl., Vol. **22** (2015), No. **5**, 1287–1317.
- [10] CARLINI, E., SILVA, F. J.: *A fully discrete semi-Lagrangian scheme for a first order mean field game problem*, SIAM J. Numer. Anal., Vol. **52** (2014), No. **1**, 45–67.
- [11] GANGBO, W., MCCANN, R. J.: *The geometry of optimal transportation*, Acta Math., Vol. **17**, No. **2** (1996), 113–161.
- [12] GOMES, D. A., PIMENTEL, E. A., SÁNCHEZ-MORGADO, H.: *Time-dependent mean-field games in the subquadratic case*, Comm. Partial Differential Equations, Vol. **40** (2015), No. **1**, 40–76.
- [13] GUÉANT, O., LIONS, P.-L., LASRY, J.-M.: *Mean Field Games and Applications*, Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance 2010. Tankov, Peter; Lions, Pierre-Louis; Laurent, Jean-Paul; Lasry, Jean-Michel; Jeanblanc, Monique; Hobson, David; Guéant, Olivier; Crépy, Stéphane; Cousin, Areski. Springer, Berlin (2011), 205–266.
- [14] HUANG, M., CAINES, P. E., MALHAMÉ, R. P.: *Large population stochastic dynamic games: closed-loop McKean-Vlasov systems and the Nash certainty equivalence principle*, Comm. Inform. Systems, Vol. **6** (2006, No. **3**), 221–252.
- [15] KANTOROVICH, L.: *On the transfer of masses*, Dokl. Acad. Nauk. USSR, Vol. **37** (1942), 7–8.
- [16] LACHAPELLE, A., SALOMON, J., TURINICI, G.: *Computation of mean field equilibria in economics*, Math. Models and Meth. in Appl. Sci., Vol. **20** (2010), No. **4**, 567–588.
- [17] LASRY, J.-M., LIONS, P.-L.: *Jeux à champ moyen I. Le cas stationnaire*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Vol. **343** (2006), No. **9**, 619–625.
- [18] LASRY, J.-M., LIONS, P.-L.: *Jeux à champ moyen II. Horizon fini et contrôle optimal*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Vol. **343** (2006), No. **10**, 679–684.
- [19] LASRY, J.-M., LIONS, P.-L.: *Mean field games*, Jpn. J. Math., Vol. **2** (2007), No. **1**, 229–260.
- [20] LIONS, P.-L.: *Cours au Collège de France*, www.college-de-france.fr.
- [21] MAURY, B., ROUDNEFF-CHUPIN, A., SANTAMBROGIO, F.: *A macroscopic crowd motion model of gradient flow type*, Mat. Mod. Meth. Appl. Sci., Vol. **20** (2010), No. **10**, 1787–1821.
- [22] MAURY, B., ROUDNEFF-CHUPIN, A., SANTAMBROGIO, F., VENEL, J.: *Handling congestion in crowd motion modeling*, Net. Het. Media, vol. **6** (2011), No. **3**, 485–519, Special issue on Crowd Dynamics: Results and Perspectives.
- [23] MCCANN, R. J.: *A convexity principle for interacting gases*, Adv. Math., Vol. **128** (1997), No. **1**, 153–159.
- [24] MCCANN, R. J.: *Polar factorization of maps on Riemannian manifolds*, Geom. Funct. Anal., Vol. **11** (2001), 589–608.
- [25] MÉSZÁROS, A. R.: *Mean field games with density constraints*, MSc thesis, École Polytechnique, Palaiseau, France, (2012).

- [26] MÉSZÁROS, A. R., SILVA, F. J.: *A variational approach for second order mean field games with density constraints: the stationary case*, J. Math. Pures Appl., Vol. **104** (2015), Issue **6**, 1135–1159.
- [27] MONGE, G.: *Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais*, Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris, (1781), 666–704.
- [28] OTTO, F.: *The geometry of dissipative evolution equations: the porous medium equation*, Comm. PDEs, Vol. **26**:1-2 (2001), 101–174.
- [29] SANTAMBROGIO, F.: *A modest proposal for MFG with density constraints*, Netw. Heterog. Media, Vol. **7** (2012), No. **2**, 337–347.
- [30] SANTAMBROGIO, F.: *Optimal Transport for Applied Mathematicians - Calculus of variations, PDEs and Modeling*, Birkhäuser, (2015).
- [31] VILLANI, C.: *Topics in Optimal Transportation*, Grad. Stud. Math., Vol. **58**, AMS, Providence, (2003).
- [32] VILLANI, C.: *Optimal Transport: Old and New*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. **338**, (2009).

(Beérkezett: 2015. február 12.)

MÉSZÁROS ALPÁR RICHÁRD

Department of Mathematics, University of California

520 Portola Plaza, 90095 Los Angeles, USA

Edutus Főiskola

Stúdium tér 1, Tatabánya, 2800, Magyarország

alpar@math.ucla.edu

MEAN FIELD GAMES: FROM OPTIMAL CONTROL TO OPTIMAL TRANSPORT

ALPÁR RICHÁRD MÉSZÁROS

With the present paper we provide a short survey to the recently introduced theory of Mean Field Games. After the optimal control formulation of these systems and the analysis of Nash-type equilibria notions, we use the modern theory of optimal transportation to describe some Mean Field Games via a variational characterization. With the help of the so-called Benamou-Brenier formulation of the optimal transportation problem we study the existence and unicity of weak solutions of some Mean Field Game systems with local couplings.

A VÉGES SZÓHOSSZBÓL ADÓDÓ KORLÁTOZÁS HATÁSA
GEOMETRIAI ADATOKBÓL SZÁMÍTOTT SZÁMJEGYVEZÉRLÉSŰ (NC)
PROGRAMOK SZERKESZTÉSÉNÉL

DR. VÖRÖS GÁBOR

1. Bevezetés

A 32 bites szóhosszúságú lebegőpontos ábrázolás esetén (1 bit előjel, 7 bit karakterisztika, 24 bit mantissza) a reprezentáció pontossága 2^{-24} , azaz 10^{-7} . Jóllehet az ábrázolható legnagyobb és legkisebb szám $\pm 9,2 \cdot 10^{18}$, a pontosságon a következőket kell érteni:

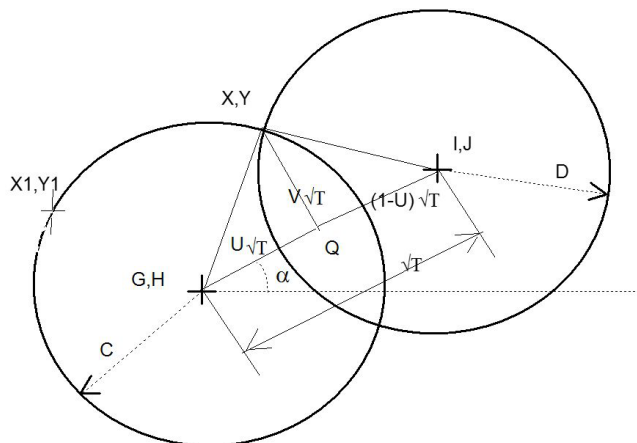
- Azonos karakterisztikák esetén két, M hosszúságú (esetünkben 24 bites) mantissza összeadásakor túlcsoordulás keletkezik, és az eredményt egy bittel jobbra kell léptetnünk (a bináris törtvessző a bal oldalon van). Amennyiben ez a bit zérus értékű volt, hibát nem követtünk el, logikai 1 esetén viszont $\pm 2^{-M}$ nagyságú hiba lép fel attól függően, hogy a szám pozitív, vagy negatív volt-e. Ennek a hibának a szórásnégyzete $\delta_1^2 = 2^{-M}/2$.
- Amikor pedig két M bites mantisszájú gépi szót összeszorunk, az eredmény $2M$ (esetünkben 48) bites mantisszájú gépi szó lesz. Mivel az ábrázolás miatt az eredményt újból M bitszámra kell visszaléptetnünk, hibát követtünk el, amelynek szórásnégyzete $\delta_1^2 = 2^{-2M}/12$.

2. A jelenség

Geometriai adatokból számított számjegyzérlésű (NC) programok szerkesztésénél (elemszámításkor) a bevezetőben körvonalazott csonkítási hibák csak akkor okoznak nehézséget, ha egy adott számítási módszerrel meghatározott körpontok egy ezt követő másik módszerrel (a körön fekvés ellenőrzésekor) a megengedett hibát meghaladva is eltérést jeleznek a kör kerületétől.

3. Elemzés

Két kör metszése esetén a metszéspont a következők szerint számítható:



- ahol C, D a sugarak
 G, H az egyik kör középpontjának x, y koordinátája
 I, J a másik kör középpontjának x, y koordinátája
 X, Y a kerületi metszéspontok
 T a középpontok távolságának négyzete

Ha bevezetjük a következő jelölést:

$$R = I - G, \quad (1)$$

akkor

$$R/\sqrt{T} \text{ az } \alpha \text{ szög koszinusza,}$$

valamint

$$S = J - H \quad (2)$$

esetén

$$S/\sqrt{T} \text{ az } \alpha \text{ szög szinusza.}$$

T értékét Pithagorász tételével S és R -ből számíthatjuk:

$$T = S^2 + R^2. \quad (2a)$$

A $[Q - G, H - X, Y]$ háromszögben

$$C^2 = U^2 \cdot T + V^2 \cdot T, \quad (P1)$$

míg a $[Q - I, J - X, Y]$ háromszögben

$$D^2 = (1 - U)^2 \cdot T + V^2 \cdot T. \tag{P2}$$

A (P1) jelű egyenletből kivonva (P2)-t kapjuk:

$$C^2 - D^2 = U^2 \cdot T - T + 2 \cdot U \cdot T - U^2 \cdot T,$$

így

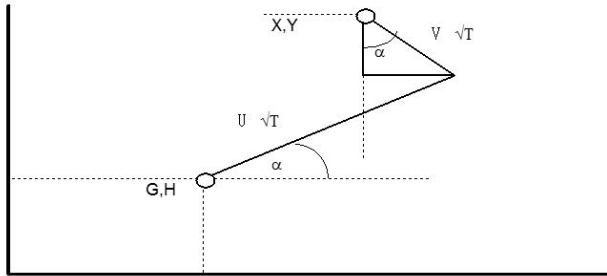
$$U = \frac{C^2 - D^2 + T}{2T} \tag{3}$$

és (P1)-ből:

$$V = \pm \sqrt{\frac{C^2}{T} - U^2} \tag{4}$$

Ez egyben az elrendezés diszkriminánsa: $U^2 > T^2/2$ esetén a két körnek nincs egyetlen közös pontja sem.

A keresett metszéspont X koordinátáját az alábbi ábra szerint határozhatjuk meg:



$$X = G + U \cdot \sqrt{T} \cos \alpha - V \cdot \sqrt{T} \sin \alpha,$$

de

$$\cos \alpha = R/\sqrt{T} \quad \text{és} \quad \sin \alpha = S/\sqrt{T}.$$

Így

$$X = G + U \cdot R - V \cdot S \tag{5}$$

hasonló okoskodással kapjuk, hogy

$$Y = H + U \cdot S + V \cdot R. \tag{6}$$

Amennyiben a két kör

$$(X - G)^2 + (Y - H)^2 = C^2,$$

illetve

$$(X - I)^2 + (Y - J)^2 = D^2$$

egyenleteiből a fenti geometriai jelentéstartalomtól függetlenül fejezzük ki X , Y értékeit, ezeket mintegy 50 %-kal több elemi művelet révén kaphatjuk csak meg az (1)-től (6) jelű számításokkal szemben (lásd Függelék).

Ezután következik a körön fekvés ellenőrzése: megmunkáláskor minden NC mondat kezdő és végpontjára nézve összevetés történik a megadott középpontra nézve, azaz az 1-jelű kör esetén:

$$\sqrt{(X1 - G)^2 + (Y1 - H)^2} - \sqrt{(X - G)^2 + (Y - H)^2} = \vartheta$$

vagy

$$\sqrt{(X - G)^2 + (Y - H)^2} - C = \vartheta$$

értékét a szerszám gép mechanikai pontosságnak figyelembe vételével állapítjuk meg (a gyakorlatban ez 3–5 mikron szokott lenni).

Végezzük most vizsgálatunkat csak pozitív számokra.

A korlátozott bitszám hatása úgy nyilvánul meg, hogy egy adott A érték helyet egy A' szerepel és

$$A = A' + \Delta a,$$

ahol Δa -val jelöltük a csonkítási hibát.

Most már (5) és (6) ezzel a formalizmussal átírható:

$$\begin{aligned} X &= X' + \Delta x = G + (U' + \Delta u) \cdot (R' + \Delta r) - (V' + \Delta v) \cdot (S' + \Delta s), \\ Y &= Y' + \Delta y = H + (U' + \Delta u) \cdot (S' + \Delta s) - (V' + \Delta v) \cdot (R' + \Delta r). \end{aligned}$$

Amennyiben a helyzetet úgy egyszerűsítjük, hogy $\Delta r = \Delta s = 0$ legyen, akkor

$$R' = R \quad \text{és} \quad S' = S,$$

így írható

$$\begin{aligned} X' + \Delta x &= G + U' \cdot R - V' \cdot S - \Delta v \cdot S + \Delta u \cdot R, \\ Y' + \Delta y &= H + U' \cdot S - V' \cdot R + \Delta v \cdot R + \Delta u \cdot S, \end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned} \Delta x &= -\Delta v \cdot S + \Delta u \cdot R, \\ \Delta y &= \Delta v \cdot R + \Delta u \cdot S. \end{aligned}$$

Amennyiben $R > S$ akkor előfordulhat, hogy $\Delta x > 0$ és $\Delta y < 0$. Így arra a meglepő közbenső eredményre jutunk, hogy pozitív számok esetén is előfordulhat, hogy csonkított érték (pl. Y') nagyobb lesz az elméletileg pontos értéknél (Y).

4. A probléma

A jelenség fellépésének szükséges feltétele, hogy például a 2-jelű körre

$$\Delta = \sqrt{(I - X' - \Delta x)^2 + (J - Y' + \Delta Y)^2} + \sqrt{(I - X')^2 + (J - Y')^2}$$

az általunk megadott (például 3 mikron) értékű hibahatárt meghaladja. A probléma az, hogy hogyan lehetne megadni azoknak az elrendezéseknek C , D és \sqrt{T} értékeitől függő halmazát, melyre nézve a fenti összefüggés teljesül.

Ezen számhalmaz ismeretében remélhető lenne, hogy a helyesbítés is korrekten elvégezhető.

5. Heurisztikus helyesbítés

Az elvi kritérium hiányában az X' , illetve Y' értékeket a következők szerint helyesbíthetjük:

A (9)-ből kapott Δ értékével D -t \mathcal{D} -re módosítjuk:

$$\mathcal{D} = D - \Delta \text{ szerint,}$$

azaz ellenkezően változtatjuk meg, mint amit a „túllövés” okozott.

Ezek után újból átszámítjuk a (3)-tól (9) összefüggéseket, de most már \mathcal{D} -vel D helyett. Szerencsés esetben remélhető, hogy Δ új értéke kisebb lesz a megengedett hibahatárnál.

6. A probléma heurisztikus megkerülése

A világszerte alkalmazott módszer a nagyobb bitszámú szóhossz bevezetése (64 bites lebegőpontos ábrázolás). Ilyenkor a csonkítások abszolút értékének nagyságrendekkel kisebb volta miatt az NC-gyakorlatban használt eddigi értékek esetén a jelenség nem lépett fel.

A probléma elvi megoldásának hiányában azonban nincs kizárva, hogy a jelenség fellépése nagyobb szóhossz esetén se fordulhasson elő. Lehetséges azonban, hogy ekkor ez már a mérnöki gyakorlat számára érdektelenné is válik, ezért a jelen sorok szerzője további vizsgálatok folytatásának lehetőségére hívja fel az érdeklődő Olvasó szíves figyelmét. Javasolható az újabban „divatos” kaotikus jelenségként történő kezelés is, hisz a jelenség determinisztikus és a „káoszt” nem filozófiai értelemben használva meghatározhatók lennének a kaotikus attraktorok.

7. Függelék

A metszéspontok kiszámítása pusztán algebrai módszerrel az

$$(X - G)^2 + (Y - H)^2 = C^2 \quad (\text{A})$$

$$(X - I)^2 + (Y - J)^2 = D^2 \quad (\text{B})$$

egyenletrendszer megoldását jelenti.

Elvégezve a négyzetre emeléseket, majd (B)-t kivonva (A)-ból:

$$2X(I - G) + G^2 - I^2 = C^2 - D^2(Y - H)^2 + (Y - J)^2,$$

ebből

$$X = R + S \cdot Y, \quad (\text{C})$$

ahol

$$R = \frac{I^2 - G^2 + C^2 - D^2 + J^2 - H^2}{2(I - G)} \quad (\text{D})$$

és

$$S = \frac{H - J}{I - G} \quad (\text{E})$$

(C)-t behelyettesítve (A)-ba

$$Y^2(1 - S^2) + Y(2RS - 2J - 2SG) + R^2 - 2RG + G^2 + H^2 - C^2 = 0.$$

Ha bevezetjük hogy,

$$T = RS - J - SG \quad (\text{F})$$

és

$$W = R^2 - 2RG + G^2 + H^2 - C^2 \quad (\text{G})$$

azt kapjuk, hogy

$$Y = \frac{-T \pm \sqrt{T^2 - (1 + S)^2 \cdot W}}{1 + S^2} \quad (\text{H})$$

A (C)-től (G)-ig terjedő egyenletek 17 szorzást, 3 osztást és 19 összeadást/kivonást írnak elő, szemben az (1)-től (6)-tal, ahol 9 szorzás, 2 osztás, 10 összeadás/kivonás szerepel, amit bizonyítani kellett.

Meg kell még jegyezni, hogy a megvalósító programban egy döntést kell végezni, hogy $I - G$ nem nulla-e? Amennyiben igen – azaz Y tengellyel párhuzamos egyenesen fekvő középpontok esetén – egy, az X/Y -ra nézve szimmetrikus kifejezéseket adó levezetést kell használnunk. Itt a nevezőben $J - H$ fog szerepelni, amellyel a számolás már elvégezhető. $J - H$ nulla esetén két koncentrikus körről van szó, amelynek nyilván nincs, vagy – egybevágóságuk miatt – végtelen sok közös pontja van.

(Beérkezett: 2015. december 6.)

DR. VÖRÖS GÁBOR

Az SzKI nyugalmazott villamosmérnöke

1036, Budapest, Uszály utca 12

dvig@kabelnet.hu vagy eddig vorosg37@gmail.com

EFFECTS OF TRUNCATION IN CALCULATING DATA
FOR NUMERICALLY CONTROLLED MACHINE TOOLS

DR. GÁBOR VÖRÖS

Truncation errors can cause a problem in dispatching geometrical data for NC machine tools. I. e: calculations of intersection points give a result of off-the-circle result with final checks. In our practice the permissible difference was 3 microns and mantissa-length of floating point data was 24. In metal working, the generally accepted method is to apply longer word-lengths. Pointing out that even with this, theoretical occurrence can not be excluded, we give a heuristic method of solving the problem. Finally, with a hint, we call the attention toward further development with chaotic attractors.

KARBANTARTÁSI PROJEKTEK MÁTRIX ALAPÚ TERVEZÉSE

KOSZTYÁN ZSOLT TIBOR, PRIBOJSZKI-NÉMETH ANIKÓ, KOVÁCS ZOLTÁN

Az ütemezési feladatok közül az egyik legnehezebb probléma, amikor egy projekt során a tevékenységek idő-, költségigényei mellett a projekt minőségi paramétereit harmonizálnunk kell egymással. Feltételezzük, hogy az idő-költség és a karbantartás esetében a rendszerelemek javító-megelőző tevékenységek hatásaként fellépő megbízhatóság növekedése között valamilyen függ-vénykapcsolat létesíthető. Ha pl. egy projektet rövidebb idő alatt kell elvégezni, akkor az többletköltséget igényel. Ugyanígy többletköltséggel járhat egy magasabb rendszer szintű megbízhatóság elérése. A szakirodalom ezeket a problémákat time-cost-quality trade-off problem (TCQTP) problémaosztályba sorolja, ahol ebben a példában a minőségi paraméter a rendszer megbízhatóságának növekedése lesz. Amennyiben az idő, a költség és a minőség között az ún. átváltási függvény diszkrét, akkor ez a probléma bizonyítottan NP-nehéz feladat. Cikkünkben bemutatjuk, hogy a megelőző karbantartási projekt is kezelhető és visszavezethető ilyen problémává, ugyanakkor ehhez ki kell terjesztenünk az eredeti problémaosztályra kifejlesztett módszerek alkalmazási kereteit. Egy karbantartási projekt ugyanis tartalmazhat, sőt legtöbbször tartalmaz is körfolyamatokat. Egy megelőző karbantartási projekt célja, hogy egy rendszer berendezési elemeit javítva a rendszer megbízhatóságát növelje, ugyanakkor egy meghatározott minimális megbízhatósági, vagy rendelkezésre állásbeli javuláshoz általában nem fogjuk valamennyi berendezéselemet javítani, hanem ebből ki kell válogatni azokat a javító megelőző tevékenységeket, melyek az elvárt minimális megbízhatóságjavulás érdekében elengedhetetlenek. Éppen ezért a hagyományos hálótervezési módszerekkel szakítva olyan mátrix alapú módszerek alkalmazása felé fordulunk, melyek képesek kezelni a bizonytalan tevékenység-előfordulásokat és a bizonytalan tevékenységkapcsolatokat is, ezáltal kiterjesztve az eredeti problémát sztochasztikus hálóstruktúrák kezelésére is.

1. Bevezetés

A berendezések komplexitása folyamatosan nő, ezzel párhuzamosan a karbantartás tárgyköre mára már nemcsak a berendezések állapotának megőrzésével és helyreállításával foglalkozik, hanem kiterjedt a berendezések egységeire is. A gazdasági kényszer és a megbízhatósággal szembeni követelmények arra ösztönzik a

vállalatokat, hogy növeljék a termelő berendezéseik megbízhatóságát, ugyanakkor ésszerűsítsék a karbantartási és javítási költségeket és az üzemfenntartás hiányosságaira visszavezethető hibákat. A nagyobb karbantartási feladatok ún. karbantartási projektekbe szervezhetőek. Ezek a karbantartási projektek (idő-, költség- és erőforrás)korlátok közé szorítják a terület szakembereit. *A lehető legrövidebb idő alatt kell a lehető legnagyobb mértékben javítani a rendszer megbízhatóságát vagy a rendelkezésre állását úgy, hogy a felhasznált költségeink minimálisak legyenek.*

A feladat komplexitását mutatja, hogy egyszerre kell megoldanunk egy projekt kiválasztási (project screening) és egy, a tevékenységek idő-költség-minőség paramétereire közötti átváltási problémát (time-quality-cost trade-off problem): bár valamennyi berendezésem megbízhatóságának javítására meghatározható egy vagy több javító-megelőző tevékenység, még egy ún. nagyleállás esetén – amikor szinte valamennyi berendezésemet felülvizsgáljuk – sem fogjuk az összes lehetséges javító megelőző tevékenységet végrehajtani. Az első kérdés, amit ilyenkor meg kell válaszolnunk, hogy egy adott költség- és időkeret esetén vajon mely tevékenységeket kell/lehet majd végrehajtani?

A tevékenységeket általában többféleképpen is meg lehet valósítani, melyekhez különböző költség, idő és minőségi paraméterek rendelhetők. A projektmenedzsernek e paraméterek figyelembevételével kell egyensúlyoznia, hogy valamennyi javító-megelőző tevékenységet a(z idő-, költség)korlátokat nem túllépve végre tudja hajtani/hajtatni.

A feladat specialitása, hogy itt az ún. minőségi (quality) paramétert a megbízhatósági értékek javulásából fogjuk számolni, ami nem triviális feladat. A rendszert leíró ún. megbízhatósági diagram (angolul: Reliability Block Diagram, rövidítve: RBD) akár teljesen más struktúrát is követhet, mint amilyen struktúrát maga a karbantartási projekt követ. Egy berendezés elemhez általában több javító-megelőző tevékenység is rendelhető, melyek hatására növekedhet a berendezés elem megbízhatósága és ezáltal a rendszer megbízhatósága is, vagy egy másik számításnál a rendszer rendelkezésre állása. Egy berendezésem minden önálló karbantartási egységet képező géprész, melynek/melyeknek meghibásodása során a karbantartás helyszínén azt/azokat tovább nem bontják.

Ebben a tanulmányban olyan, a kutatásunk során kifejlesztett mátrix alapú karbantartás-tervezési módszert (Matrix-based Maintenance Management Method = M^4) mutatunk be, amelyet sikerrel lehet alkalmazni berendezések karbantartásának tervezésére. Célunk, hogy a módszer alkalmazásával átláthatóbbá, egyszerűbbé tegyük az egyébként is bonyolultnak tűnő karbantartás-tervezést. Tesszük mindezt úgy, hogy a maximalizált rendszermegbízhatóság elérése érdekében törekszünk a berendezésegységek minél magasabb megbízhatóságára is amellet, hogy a vállalat által támasztott költség- és időterven belül maradjon az eredményként kapott karbantartási projektváltozat/-struktúra.

2. Szakirodalmi áttekintés

Mivel a javasolt módszer kombinálja az ún. átváltási módszereket a projekt-kiválasztási eljárásokkal, így e fejezetben elsősorban e területeket tekintjük át. A legtöbb költség-idő átváltási probléma már önmagában is általában kombinatorikus, ún. NP-nehéz feladat (lásd: 2.1. alfejezetet). A feladatot tovább bonyolítja a megbízhatósági paraméterek meghatározása, illetve ezek tervezés során történő figyelembevétele, így ezzel a területtel is külön foglalkozunk a 2.2. alfejezetben. A karbantartás- és projekttervezésnek egy mátrix alapú modell szolgáltat keretet. A 2.3. alfejezet bemutatja, hogy hogyan lehet a projekttervezési eljárásokat egy mátrixos modellben kombinálni.

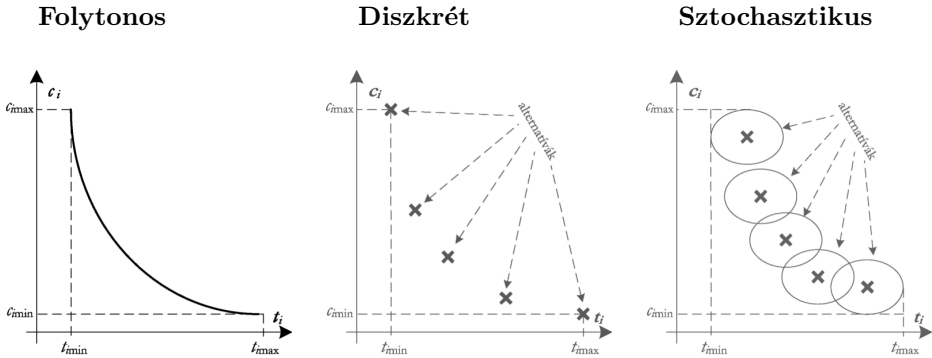
2.1. Idő-költség átváltási módszerek

Az idő- és költségcsökkentési eljárások már több mint ötven évre tekintenek vissza. Az elsők között még Fulkerson [13] foglalkozott olyan feladatokkal, ahol a tevékenységek időtartama és a költségigénye között feleltetett meg egy folytonos függvényt. Feltételezte, hogy amennyiben egy tevékenységet rövidebb idő alatt kell végrehajtani, akkor ahhoz több emberi erőforrás, drágább technológia, vagyis több (közvetlen) költségigény fog társulni. A probléma e változatát folytonos költség-idő átváltási problémának, angolul Continuous Time-Cost Trade-off Problem (CTCTP) nevezik. A nyolcvanas évekig nagyon élénk kutatás folyt ezen a területen. Az idő- és költségigények között nemcsak lineáris [18], hanem konvex [2], [26], sőt konkáv [11] függvénykapcsolatokat is tudtak kezelni.

A folytonos átváltási problémák általában nagyon gyorsan megoldhatók. A lineáris idő-költség átváltási problémákat visszavezetve minimális költségű folyamatokra közel lineáris futásidőben végrehajtható algoritmusokat kaphatunk (lásd pl. [15], [16], [29]).

A valóságot azonban sokkal jobban modellezi az átváltási probléma diszkrét változata. Nehezen elképzelhető ugyanis folytonos függvény a tevékenységek időtartama és pl. az emberi erőforrásszükséglet között. Ugyanígy nehézkes folytonos függvényekkel jellemezni egy költségesebb, de időtakarékosabb technológia alkalmazásának hatását.

A diszkrét modellben úgynevezett végrehajtási módokat határozzuk meg. Ehhez tartoznak idő- és költségadatokat. Általában itt is feltételezzük, hogy a végrehajtási időtartam csökkentése többletköltséggel jár (lásd az 1. táblázatot). Mindkét változat esetén számos célfüggvényt határoztak meg a legegyszerűbbektől (pl. legrövidebb, legkisebb költségigényű projektterv megadása) egészen a komplex, adott költségigényt nem túllépő, lehető legrövidebb, vagy éppen az adott időszükségletet nem túllépő, lehető legkisebb költségű projektterv meghatározásáig [10]. Szemben azonban a folytonos eset gyors megoldási lehetőségeihez képest, ez a probléma ilyen komplex célfüggvények esetén néhány speciális típusú projekt-hálót leszámítva NP-nehéz [9].



1. táblázat. Átváltási modellek

A problémát tovább bonyolítja, ha az idő- és költségigényeket a pontos értékek helyett csak intervallumon tudjuk becsülni [12]. Ekkor az időtartamok és a költségigények közötti összefüggéseket egy pont helyett pl. egy szórásellipszissel jellemezhetjük (lásd az 1. táblázatot).

A karbantartási projekteknél a tevékenység-időtartamokat és a költségigényeket előre meg kell becsülnünk, ugyanakkor ilyen esetekben nehezen értelmezhető a tevékenységek és az időtartamok közötti folytonos függvénykapcsolat; éppen ezért az átváltási probléma diszkrét változatával foglalkozunk. Ugyanakkor az idő- és költségadatok mellett a rendszer megbízhatóság növekedésével, mint a projekt egyfajta minőségi paraméterével foglalkozunk, de mint azt láthatjuk, e „minőségi” paraméter tevékenységekhez való rendelése korántsem triviális feladat.

Egy karbantartási projekt esetén a minőségi paraméter a berendezések vagy berendezéselemek megbízhatóságának, vagy más számítások esetén rendelkezésre állásának (várható) javulásaként értelmezhető. Ugyanakkor ezeket a tevékenységeket berendezéselemekhez kell rendelnünk. A rendszer megbízhatóságának javulását pedig a megbízhatóságot leíró megbízhatósági diagram segítségével jellemezhetjük, aminek a struktúrája a karbantartási projekt struktúrájától jelentős mértékben eltérhet. Elképzelhető, hogy egy alacsony megbízhatóságú rendszerem jelentős mértékű javítása sem fogja a rendszer megbízhatóságát számottevően emelni, hiszen, ha pl. egy alacsony megbízhatóságú elem meghibásodásakor egy tartalékrendszer a feladatokat átveszi, akkor ez kisebb mértékű zavart okoz, mintha egy jóval magasabb megbízhatóságú, de tartalék rendszerrel nem rendelkező berendezés elem esik ki, és veszélyezteti a teljes rendszer működését. A tartalékbeépítési tevékenység még az egyszerűbb eset, mert mind a költségek, mind pedig a megbízhatóság várható javulása jól jelezhető előre. Az egyéb, például meghibásodást megelőző beavatkozásoknál a költségek még viszonylag jó közelítéssel (bár sokszor csak a berendezés megbontása után), a várható megbízhatóság azonban nehezebben adható meg. Éppen ezért a javasolt modellben a minőségjavulás

kiszámítása során a megbízhatósági diagramot is figyelembe kell vennünk, ahogyan arra a 2.2. fejezetben részletesen is kitérünk.

1996-ban Babu és Suresh [1] voltak az elsők, akik azt javasolták, hogy az időtartam és költségigény közötti kapcsolatok mellett a minőség-költség és minőség-idő relációkat is értelmezzék. A problémát idő-költség-minőség átváltási problémaként határozták meg (angolul: Time-Cost-Quality Trade-off Problems, rövidítve: TCQTP). A modelleknél nemcsak azt feltételezik, hogy az időtartam rövidítése közvetlen költségnövekménnyel jár, hanem azt is, hogy a magasabb minőség elérése is általában más, drágább technológiát igényel.

E problémakör leggyakrabban alkalmazott diszkrét változata (DTCQTP) is NP-nehéz feladat, hiszen maga a diszkrét idő-költség átváltási feladat is NP-nehéz, ezért a legtöbb kutató ([35],[31]) igyekezett valamilyen heurisztikus közelítő megoldást adni a probléma kezelésére.

Valamennyi itt bemutatott modell abból indul ki, hogy a projekttervek, illetve a projektet megadó logikai hálóstruktúrák változatlanok. Ugyanakkor a karbantartási projektek esetén még az ún. nagyleállások esetén sem fogjuk valamennyi lehetséges javító megelőző tevékenységet elvégezni. Ki kell ezek közül választani azokat tevékenységeket, amelyek végrehajtása után egy kívánt rendelkezésreállást, vagy egy rendszermegbízhatósági szintet el tudunk érni, de emellett nem lépünk túl egy adott költségkeretet, ráadásul mindezeket a javításokat a folyamatos termelés fenntartása érdekében a lehető leghamarabb végre is tudjuk hajtani.

A feladat megoldásához először tehát el kell tudnunk dönteni, hogy mely tevékenységeket milyen sorrendben hajtjuk végre, végül pedig választanunk kell a megvalósítási alternatívák közül.

Cikkünkben egy új módszert javasolunk, amely segíti a projektmenedzserek munkáját abban, hogy mely tevékenységek megvalósíthatók egy adott szűkös költség- és időkeret között. Kombináljuk a tevékenységek kiválasztását a hagyományos átváltási modellekkel, létrehozva egy új feladatosztályt, melyet hibrid átváltási problémának nevezünk el. Ezek közül most a diszkrét változatra mutatunk egy példát, melynek neve angolul: Hybrid Discrete Time-Cost-Quality Trade-off Problem (HDTCQTP). Maga a feladatosztály sokkal bővebb, mint amit most cikkünkben körül tudunk járni. Lehetőségünk most csak a megelőző karbantartási projektek vizsgálatára szorítkozik, melynek angol neve: Preventive Maintenance Project Scheduling Problem (PMPSP).

2.2. Komplex rendszerek megbízhatósága

A megbízhatósági blokkdiagrammal (angolul: Reliability Block Diagram, rövidítve: RBD) általában a rendszer megbízhatóságát (angolul Total System Reliability, rövidítve: TSR) határozhatjuk meg, amit a továbbiakban úgy értelmezzünk, mint a helyes működés valószínűsége egy adott időintervallumban. Hasonlóan, a megbízhatósági blokkdiagram segítségével számítható ki a rendelkezésreállás, amely megmutatja, hogy egy adott időintervallum mekkora hányadában működő

képes a rendszerünk. A rendszerelemeket kétállapotúnak tekintjük, de ez a módszer szempontjából nem jelent megkötést, mert a valószínűség helyett kiterjesztett megbízhatóságkonceptió, például kapacitáskihasználás is alkalmazható lenne.

Az RBD megmutatja, hogy milyen logikai kapcsolat van a rendszer működéséhez szükséges elemek között. A blokkdiagramnak is számos változata ismert (lásd pl. Gertsbackh [14], illetve Idhammar [17] monográfiáit). A modellünkben minden berendezéselemről feltesszük, hogy bármely másiktól függetlenül működik. Egy rendszerelem lehet akár egy egész részrendszer, egy részegység, komponens vagy bármilyen más része a rendszernek.

Az egyszerű RBD-k soros vagy párhuzamos elemekből, vagy ezek kombinációból épülnek fel [28].

A blokkdiagram módszer során az i -edik blokk: $r_i : \mathcal{R}_0^+ \rightarrow [0, 1]$ megbízhatósági függvényének ismeretében határozzuk meg a műszaki rendszerek megbízhatóságát, modellünkben mindvégig feltételezve, hogy az egyes rendszerelemek meghibásodása egymástól független.

A teljes rendszer $TSR : \mathcal{R}_0^+ \rightarrow [0, 1]$, eredő megbízhatósági függvénye, amely adott $t \in \mathcal{R}_0^+$ időpontban értelmezhető. Az eredő megbízhatóság számításának gyorsasága függ a rendszer komplexitásától. A legegyszerűbb eset, ahol csak ÉS, illetve VAGY kapcsolatok fodrulnak elő, mert ekkor a szorzási szabály alkalmazható. ÉS kapcsolat esetén a rendszer működéséhez valamennyi berendezéselemének működőképes állapotban kell lennie. Ekkor

$$TSR(t) = \prod_{i=1}^n r_i(t).$$

A VAGY kapcsolat esetén a rendszer működéséhez elég, ha egy részrendszer át tudja venni a működés feladatait. Ekkor n párhuzamos blokk elrendezése esetén:

$$TSR(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - r_i(t))$$

összefüggéssel határozható meg a rendszer megbízhatósága.

Természetesen nem minden rendszert tudunk ilyen egyszerű alapelemekkel leírni. Gyakran előfordul, hogy olyan rendszereket kell modellezni, amikor is nem lehet a rendszert ÉS-VAGY alrendszerekre szétbontani, ekkor segíthet az ún. *igazságtáblával* [25] vagy a *működési útvonalak* módszerével történő rendszer megbízhatóság-számolás [32], vagy a még számolásigényesebb szimulációs eljárások [24].

Az igazságtábla (angolul: Event Space Method, rövidítve: ESM) szerinti eredőszámítás [36] azon alapul, hogy kétállapotú – működő és meghibásodott – elemeket feltételezve, meghatározzuk a rendszer működését eredményező állapotkombinációk valószínűségének összegét. A módszer nagy előnye, hogy gyakorlatilag bármilyen rendszerstruktúra esetén meghatározható a rendszer eredő megbízhatósága. Még a rendszerelemek megbízhatóság szempontjából való függetlenségét sem használjuk ki. Ugyanakkor nagy hátránya az eljárásnak, hogy valamennyi

rendszerelem működés/nem működés kombinációját számba kell venni. Ez pedig n elem esetén 2^n lehetséges (működési- vagy hiba)állapotot jelent.

A működési útvonalak módszere (angolul: Path-Tracing Method, rövidítve: PTM) az igazságtáblához hasonlító eljárás [32]. A PTM során a „működési” utak valószínűségeinek unióját vesszük alapul. Ebben az esetben az utak metszeteinek levonására is szükség van, hogy a teljes rendszerre számolt megbízhatóság ne tartalmazzon redundáns adatokat. Ebből adódóan legrosszabb esetben itt is 2^n lehetséges kombinációt kell számba vennünk.

A dekompozíciós eljárás (angolul: Decomposition Method, rövidítve: DCM, lásd az 5. ábrán látható pszeudo kódot) a fentiekkel ellentétben egy gyors eljárás, amely a teljes valószínűség elvét alkalmazza. Első lépésként kiválaszt egy ún. kulcselemet. Mivel a kulcselem megválasztásától függ a módszer számításigénye, ezért célszerű olyan kulcselemet választani, amelyik legna-gyobb fokszámú berendezés-elem a megbízhatósági diagramban. Jelölje rögzített $t > 0$ esetén $P(S) = TSR(t)$ az S (teljes) rendszer működési valószínűségét. Jelölje $P(K)$ egy $K \subset S$ kulcs elem működési valószínűségét ugyanebben $t > 0$ rögzített időpontban. Ekkor a teljes valószínűség elve szerint $TSR(t) = P(S) = P(S|K) \cdot P(K) + P(S|\bar{K}) \cdot P(\bar{K})$, ahol $P(\bar{K})$ jelöli a K kulcselem hibás működési valószínűségét, $P(S|K)$ pedig az S rendszer működési valószínűségét, ha feltételezzük, hogy $K \subset S$ kulcselemünk működőképes állapotban van. A kulcselem kiválasztása után, ha a hálózat ÉS-VAGY kapcsolódású elemekre bontható, akkor ezeket az elemeket összevonjuk, így határozva meg a rendszer megbízhatóságát; míg ha nem egyszerűsíthető a hálózat, akkor újabb kulcselemet választunk. A módszert a teljes megbízhatóság meghatározásáig ismételjük. A módszer pszeudo kódja megtalálható a Mellékletben (5. ábra).

A bemutatott módszerek nem csak abban segíthetnek, hogy meghatározzuk a rendszer megbízhatóságát, hanem abban is, hogy egy-egy berendezés elem javítása után mennyivel nő a rendszer megbízhatósága. Modellünkben az egyszerűség kedvéért egy statikus modelt alkalmazunk, ahol tehát $t > 0$ értéket rögzítjük, ugyanakkor egy következő cikkben bemutatjuk, hogy a megbízhatóságcsökkenést hogyan lehet felhasználni az ún. prediktív karbantartás során, ahol már a megbízhatóság időbeli változását is figyelembe vesszük.

2.3. Mátrix alapú projekttervezés

A berendezések megbízhatóságának, rendelkezésre állásának növelésére javító-megelőző tevékenységeket határoznak meg. A tevékenységek meghatározásának alapja lehet egy ún. hibamód és -hatás elemzés (angolul: Failure Mode and Effect Analysis, rövidítve: FMEA), ahol az egyes hibamódokhoz javító megelőző tevékenységeket rendelhetünk. Az eredeti FMEA modellben még egy hibamódhoz egy javító-megelőző tevékenység társult, ugyanakkor ezt a megkötést számos továbbfejlesztés feloldotta (részletes áttekintést olvashat az olvasó Sutrisno és Lee [34] dolgozatában).

A javító-megelőző tevékenységekből állíthatjuk össze a karbantartási projekteket. Ezek a projektek azonban speciális szerkezetűek, merőben eltérhetnek a hagyományos, pl. építési, beruházási projektektől.

A legfontosabb eltérés, hogy itt a legritkább esetben fog megvalósulni, hogy valamennyi javító-megelőző tevékenység megvalósul. Ez alól nem kivétel sem a nagyleállás, sem az időszakosan elvégzett ún. fővizsgálat sem.

A másik fontos eltérés, hogy a karbantartási projektek esetén nagyon sokszor fordul elő, hogy bizonyos tevékenységeket újra és újra el kell végeznünk egészen addig, ameddig a kívánt berendezésmegbízhatósági szintet el nem érjük.

A lehetséges visszatérések, mint körfolyamatok kezelése még nem igényelné feltétlen a mátrixos tervezést, hiszen nagyon korán, a hatvanas évek végén Pritsker [30] tanulmányában már kezelte ezt a problémát, de bizonyos javító-megelőző tevékenységek elhagyhatósága már kikényszeríti a hálós tervezési eljárások meghaladását.

A hálós tervezési eljárásoknál már a kifejlesztésük során gondoltak arra, hogy a hálós terveket majd mátrixok tárolják [6]. Ekkor a szomszédsági mátrix segítségével jelölhetők a tevékenységek. A mátrix celláiban lévő tevékenységekhez pedig rendelhetők idő- és költségadatokat is. Kifejezetten mátrixos projekttervezési módszer kidolgozása Steward [33] nevéhez köthető. Itt már nem megjelenési forma a mátrix, hanem a tervezés eszköze. A mátrix cellái nem a tevékenységeket, hanem a tevékenységek közötti kapcsolatokat jelenítették meg. Az így kapott négyzetes szomszédsági mátrixot Dependency Structure Matrix (röviden DSM) módszernek nevezték el.

Amíg a DSM-mátrix egy determinisztikus rendszert, illetve projektek esetén háló struktúrát feltételezett, ahol a tevékenységek közötti kapcsolatokat szigorú rákövetkezési kapcsolatokként tekintettük, a továbbfejlesztéseként javasolt Numerikus DSM (NDSM) mátrix [39] már képes volt modellezni a rákövetkezési kapcsolatok fontosságát, illetve valószínűségét is.

Elsőként Kosztyán és mtsai [20] mutattak rá arra, hogy ha valószínűségekként kezeljük a rákövetkezési relációkat, akkor attól függően, hogy egy rákövetkezést betartunk vagy elhagyunk, különböző hálóstruktúrát, illetve ezeket jellemző DSM-mátrixokat fogunk kapni. Az így kapott struktúrákat projektstruktúráknak nevezték el. A módszert, amellyel ezeket meg lehet határozni, pedig sztochasztikus hálótervezési eljárásnak (angolul: Stochastic Network Planning Method, rövidítve: SNPM) [22].

Azokat a kapcsolatokat, amelyek valószínűsége kisebb, mint egy, de nagyobb, mint nulla, *bizonytalan kapcsolatoknak* nevezzük. Ha megadjuk ezek valószínűségeit, akkor meg tudjuk határozni a lehetséges projektstruktúrák bekövetkezési valószínűségeit is [22]. A modell nagy előnye a hagyományos hálótervezési eljárásokhoz képest, hogy itt nem szükséges valamennyi lehetséges alternatíva hálóstruktúráját meghatározni, hanem egyetlen, ún. SNPM-mátrixban jelölni lehet a biztos és a bizonytalan kapcsolatokat is.

PDM		Determinisztikus									Nem determinisztikus													
Számszerűsített	PDM	A	B	C	D	E	<i>t</i>	<i>c</i>	r_1	r_2	PDM	A	B	C	D	E	t_{min}	t_{max}	c_{min}	c_{max}	r_{1min}	r_{1max}	r_{2min}	r_{2max}
	A	0.8	1	0.8	0.2	0.1	4	2.4	2	1	A	0.8	1	0.8	0.2	0.1	4	5	2.4	3.2	2	3	1	2
	B		1		0.4	0.9	2	1.8	3	3	B		1		0.4	0.9	2	3	1.8	2.0	3	4	3	3
	C			0.1		0.1	4	9.6	8	5	C			0.1		0.1	4	6	9.6	9.6	8	10	5	6
	D				0.2	0.3	10	42	12	2	D				0.2	0.3	10	12	42	44	12	15	2	4
	E					0.7	3	0.9	1	2	E					0.7	3	6	0.9	1.1	1	4	2	3
		Logic Domain (LD)				TD	CD	Resource Domain			Logic Domain (LD)				Time Domain		Cost Domain		Resource Domain (RD)					
Nem számszerűsített	PDM	A	B	C	D	E	<i>t</i>	<i>c</i>	r_1	r_2	PDM	A	B	C	D	E	t_{min}	t_{max}	c_{min}	c_{max}	r_{1min}	r_{1max}	r_{2min}	r_{2max}
	A	?	X	?	?	?	4	2.4	2	1	A	?	X	?	?	?	4	5	2.4	3.2	2	3	1	2
	B		X		?	?	2	1.8	3	3	B		X		?	?	2	3	1.8	2.0	3	4	3	3
	C			?		?	4	9.6	8	5	C			?		?	4	6	9.6	9.6	8	10	5	6
	D				?	?	10	42	12	2	D				?	?	10	12	42	44	12	15	2	4
	E					?	3	0.9	1	2	E					?	3	6	0.9	1.1	1	4	2	3
		Logic Domain (LD)				TD	CD	Resource Domain			Logic Domain (LD)				Time Domain		Cost Domain		Resource Domain (RD)					

2. táblázat. Project Domain Matrix

A módszer továbbfejlesztéseként egy ún. projekt szakértői mátrix segítségével [21] (angolul: Project Expert Matrix, rövidítve: PEM) már a bizonytalan tevékenység-előfordulások is modellezhetőek. Az ilyen bizonytalan tevékenység-előfordulásokat és bizonytalan kapcsolatokat tartalmazó projekttervek esetén először arról kell döntenünk, hogy mely tevékenységet fogjuk végrehajtani [19]. Eredményül SNPM-mátrixszal jellemezhető ún. *projektváltozatokat* kapunk. A második fázisban a korábban ismertetett módszerekkel kell arról döntenünk, hogy a tevékenységeket milyen sorrendben hajtjuk végre.

A mátrixalapú projekttervezési eljárásokat nem csak logikai tervezésre, hanem ütemezésre [7], [27], valamint költség- és erőforrástervezésre is alkalmazták [3], [38], [4], [23].

A modellezéshez az $n \times n$ -es logikai struktúrát leíró mátrix mellé további oszlopokat, ún. *domain*-eket határoztak meg az idő-, költség- és erőforrásadatok jelölésére. Az ilyen mátrixokat angulul Domain Mapping Matrixoknak (DMM) nevezték el a kutatók [8]. A PEM mátrix idő-, költség- és erőforrásadatokkal való kiterjesztése az ún. Project Domain Matrix (PDM) [23].

A PDM-mátrixból négy változatot határoztak meg attól függően, hogy a bizonytalan tevékenység-előfordulásokat, illetve tevékenységrelációkat számszerűsítjük, vagy sem (specified PDM/ semi-specified PDM); illetve hogy az idő-, költség- és erőforrásadatoknak több alternatíváját is meghatározzuk-e, vagy sem (deterministic PDM/ non-deterministic PDM) [23].

A javasolt PDM-mátrix minden esetben négy részmatrixot, ún. *domain*-t tartalmaz. Az első $n \times n$ -es részmatrix a logikai kapcsolatokat (Logic Domain, LD) írja le egy PEM-mátrix segítségével. A módszer alkalmazásához nem szükséges a logikai kapcsolatokat és a tevékenységeket számszerűsíteni. Elegendő csak azt meghatározni, hogy a tevékenység-előfordulások, illetve a kapcsolatok biztosak („X”-szel jelöljük) vagy bizonytalanok („?”-lel jelöljük). Az üres cellák felelnek meg annak, ha két tevékenység között nem értelmezünk rákövetkezési relációt.

A tevékenység-előfordulásokhoz, illetve a kapcsolaterőségekhez különböző számszerűsített adatokat társítunk. Ezek lehetnek pl. a tevékenység/kapcsolat-előfordulások valószínűségei pl. hasonló projekteket alapul véve. Lehetnek fontossági vagy prioritási értékek is. Mi a most javasolt modellünkben eltekintünk attól, hogy ezeket az értékeket számszerűsítsük, így a PDM nem számszerűsített változatát használjuk fel az általunk javasolt modellben.

A következő részmatrix (Time Domain, TD) a tevékenységek időtartamát mutatja. Ha minden tevékenység időtartamát egyetlen számmal jellemezzük, akkor az időadatokat determinisztikusnak tekintjük. Lehetőség van azonban különböző megvalósítási alternatívákhoz tartozó időadatokat is megadni. A 2. táblázat utolsó oszlopában ezek közül csak a minimális, illetve a maximális időtartamot jelöltük.

A harmadik részmatrix (Cost Domain, CD) a tevékenységek közvetlen költségét jellemzi. A költségek is lehetnek determinisztikusak, ekkor egy tevékenységhez csak egyetlen költségalternatívát rendelünk. Hasonlóan a tevékenységekhez, itt is lehet akár több költségigényt is rendelni egyetlen tevékenységhez, modellezve, hogy a tevékenységek különbözőképpen, ebből adódóan pedig különböző költségigénnyel hajthatók végre. A költségigényeket itt tágabban, nem megújuló erőforrásként is lehet értelmezni.

A PDM-modell utolsó részmatrixa a megújuló erőforrásokat tartalmazó részmatrix (Resource Domain, RD). Ha r db erőforrással rendelkezünk, akkor determinisztikus esetben r oszlopból áll ez a részmatrix. Itt is lehetőség van azonban egy-egy alternatívához különböző erőforrás-igényt rendelni.

Kosztyán [23] a javasolt mátrixmodellen túl egy polinomiális rendű, gyors algoritmust is javasolt számszerűsített determinisztikus PDM-mátrixok kiértékelésére. A módszer kihasználta, hogy minden bizonytalan tevékenység-előfordulás esetén két lehetséges alternatíva között kell döntenünk, nevezetesen: vagy megvalósítjuk, vagy elhagyjuk a tevékenységet a projektből. Minden lépésnél ki lehet számítani, hogy mi a legkisebb költségű projektterv (a kötelezőkön kívül minden még bizonytalan tevékenység-előfordulás elhagyása), mi a lehető legrövidebb projektterv (minden (még) bizonytalan kapcsolat feloldása és a tevékenységek legkorábbi időpontra való ütemezése) [19]. Ha a két lehetséges alternatíva közül bármelyiknél teljesül, hogy a korlátként szabott minimális költségigényt a lehető legkisebb költségigényű projektváltozat is túllépi, akkor azt a döntési ágat nem érdemes továbbértékelni, mert a kitűzött korlátokon belül nem valósítható meg a projekt. A módszerről részletesen olvashat Kosztyán [23] tanulmányában. Ebben

az esetben a tevékenység-előfordulásokhoz és kapcsolaterősségekhez rendelt pontértékekkel lehetett meghatározni a projektváltozatok és projektstruktúrák pontértékeit, költség- és erőforrásigényeit. Polinomiális rendben lehetett meghatározni az első N legvalószínűbb, legfontosabb, legrövidebb, vagy éppen legkisebb költséggel rendelkező projektterveket anélkül, hogy szükség lett volna valamennyi projektterv meghatározására. Jelen cikkünkben azonban olyan projekttervekkel foglalkozunk, amelyekben a projekttervben szereplő tevékenység-előfordulásokhoz nem feltétlenül tudunk pontértéket rendelni. Ezek alapján a projektváltozatok pontértékeit sem tudjuk meghatározni. A karbantartási projektterv összeállításánál javító-megelőző tevékenységeket hajtunk végre, amelyek különböző technológiával, különböző költség- és időigényekkel járhatnak, tehát a 2. táblázatban bemutatott PDM-mátrixok közül a nem számszerűsített nem determinisztikus változatot kell alkalmaznunk, illetve megbízhatósági blokkdiagramot, a berendezéselemekhez rendelhető javító-megelőző tevékenységet és a be-csült megbízhatóságnövekedést beépítve továbbfejlesztünk.

Ha többfajta logikai struktúrát kell összekapcsolnunk, akkor ki kell lépünk a korábban tárgyalt $n \times m$ -es több részmatrixot tartalmazó összetett mátrixok adta lehetőségek köréből. Az ilyen típusú modellezési problémák kezelésére fejlesztették ki az ún. *Multi-Domain Matrix*-ot (MDM). Itt lehetőség van pl. egy projekt esetén a szervezeti hierarchia, a feladatstruktúra és az ütemterv összekapcsolására. Danilovic és Browning [8] tanulmánya azonban még mindig fix kapcsolatot és tevékenység-előfordulásokat feltételezett. Ahogyan azt a korábbiakban már említettük, a karbantartási projekt a legkritkább esetben tartalmaz minden javító-megelőző tevékenységet. Ebből adódóan a Danilovic és Browning által javasolt megoldások nem alkalmazhatók a karbantartási projekt korrekt leírására.

3. Karbantartási projektek mátrixos tervezése

Mielőtt a javasolt mátrix alapú eljárást ismertetnénk, először a 3.1. fejezetben a feladat matematikai leírását adjuk meg. A probléma modellezését egy mátrixmodell segítségével valósítottuk meg, melynek részletes ismertetését a 3.2. fejezetben tárgyaljuk. A probléma megoldására javasolt algoritmus három fázisból áll, melynek első két fázisa polinomiális rendben vezeti vissza a megelőző karbantartási feladatot a diszkrét idő-minőség-költség átváltási problémára, mely már megoldható egyrészt a korábban már kifejlesztett eszközökkel (lásd: 2.1. fejezet), másrészt az általunk javasolt megoldással is.

3.1. A karbantartási probléma meghatározása

A probléma egy ún. hibrid idő-költség-minőség átváltási probléma (Hybrid Time-Cost-Quality Trade-off Problem, HTCQTP) diszkrét változatának egy spe-

ciális aleseteként tekinthető. Jelen cikkben ezt a megelőző karbantartás-tervezési feladatot (angolul: Preventive Maintenance Project Scheduling Problem, rövidítve: PMPSP) formalizáljuk, mely mint látni fogjuk, a diszkrét idő-minőség-költség átváltási probléma (DTCQTP) általánosításaként tekinthető. A formalizmus megadásánál kihasználjuk, hogy a megvalósítás mátrixok segítségével történik, így az absztrakt megadáson kívül a mátrixos leírást is ismertetjük.

3.1. Definíció. Jelölje $K := \{k_1, k_2, \dots, k_z\}$ a berendezések véges halmazát. A megbízhatósági diagram szomszédsági mátrixát megadó $z \times z$ mátrixot jelölje $\mathbf{K} \in \{0, 1\}^{z \times z}$.

A megbízhatósági diagramról feltételezzük, hogy egyszerű gráffal jellemezhető (többszörös élt és hurokért nem tartalmaz), ebből adódóan a szomszédsági mátrix átlója 0 értékeket tartalmaz, melyet a későbbiekben felhasználunk a kritikussági, megbízhatósági vagy rendelkezésre állási adatok jelölésére (lásd: 3.2. fejezetet).

3.2. Definíció. Jelölje $R : K \rightarrow [0, 1]$ a berendezés(elem) megbízhatósági függvényét. Jelölje továbbá $TSR(K) \in [0, 1]$ a teljes rendszer megbízhatóságát.

A megbízhatósági függvény jelen esetben egy rögzített $t > 0$ időpontban mutatja az $R_i = R(k_i)$ rendszerelem megbízhatóságát. Abban az esetben, ha ez a megbízhatósági érték egy úgynevezett cr_i kritikus megbízhatósági érték alá esik, akkor a berendezéselem javítására mindenképpen szükség lesz (lásd: 1. ábra).

3.3. Definíció. Jelölje $A := \{a_1, \dots, a_n\}$ n elemű véges halmaz a berendezéselemek megelőző karbantartásához kapcsolható javító-megelőző tevékenységek halmazát. Jelölje a bizonytalan tevékenység-előfordulások halmazát $\tilde{A} = \{\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_s\} \subseteq A$, valamint $\bar{A} = A \setminus \tilde{A}$ a kötelezően végrehajtandó javító-megelőző tevékenységek halmazát.

3.4. Definíció. $\mathcal{A} = (A, \prec, \sim, \bowtie)$ struktúrát **hibrid projekttervnek** nevezük, ahol (\prec, \sim, \bowtie) bináris relációkat $\forall a_i, a_j \in A, i \neq j$ esetén a következőképpen értelmezzük.

- (1) $a_i \prec a_j \Rightarrow a_i$ és a_j **között szigorú rákövetkezési reláció** áll fent. a_j a **követő**, míg a_i a **megelőző tevékenység**
- (2) $a_i \sim a_j \Rightarrow a_j$ nem követi a_i tevékenységet
- (3) $a_i \bowtie a_j \Rightarrow$ későbbi döntés eredményeként a_j követni fogja a_i -t, vagy nem. A döntés eredményéig az ilyen kapcsolatot **bizonytalan kapcsolatnak** nevezük.

Amennyiben a bizonytalan kapcsolatok számossága $|\tilde{A}|$ akkor a lehetséges projektváltozatok száma: $2^{|\tilde{A}|}$. A tevékenységeket és kapcsolataikat egy $n \times n$ -es PEM mátrix reprezentálhatja (lásd: 2.3. fejezetet).

3.5. Definíció. Jelölje $\Xi(A) := \{S \subseteq A : \bar{A} \subseteq S\}$ a **projektváltozatok halmazát**. A halmaz egy elemét a **kiválasztott projektváltozatnak** nevezzük: $S \in \Xi(A)$.

Egy kiválasztott projektváltozat már nem tartalmaz bizonytalan tevékenység-előfordulásokat. Egy $\mathcal{S} = (S, \prec, \sim, \bowtie)$ mátrix-reprezentációját egy SNPM mátrix írja le (lásd: 2.3. fejezetet). Mivel sem a bizonytalan tevékenység-előfordulásokat, sem pedig a bizonytalan kapcsolatokat nem számszerűsítjük, így a mátrixreprezentációkban a biztos kapcsolatokat jelölheti „X” illetve 1-es, a bizonytalan kapcsolatokat, illetve bizonytalan tevékenység-előfordulásokat „?” illetve 0, 5. A mátrix-reprezentációkban azokat a kapcsolatokat/tevékenységeket, melyeket elhagyunk a projektből, jelölje üres cella, „ \emptyset ” vagy 0.

3.6. Definíció. $\mathcal{X} = (S, \prec, \sim)$ struktúrát **projektstruktúrának** nevezzük, ahol $S \in \Xi(A)$ egy kiválasztott projektváltozat.

Egy projektstruktúra már nem tartalmaz bizonytalan kapcsolatokat. A projektstruktúra logikai tervének mátrixreprezentációja egy szomszédsági vagy DSM-mátrix.

Az ütemezési és különösen az átváltási problémáknál nagyon gyakran felteszik, hogy a tevékenységgráf, amit itt a projektstruktúra jellemez, nem tartalmaz kört. Ezt itt úgy írhatnánk le, hogy \prec reláció részben rendezés S halmazon. Ugyanakkor már a kezdeti mátrixtervezési módszerek (lásd: Steward [33]) is modellezték, detektálták (lásd: Xiao és mtsai [37]), illetve egynél kisebb valószínűségű visszacsatolásoknál fel is oldották (lásd: Kosztyán [23]) az ilyen visszacsatolásokat. Éppen ezért mi most csak az egyszerűség kedvéért tesszük fel, hogy egy projektstruktúra már nem tartalmaz köröket.

A javasolt algoritmus során minden bizonytalan tevékenység-előfordulásról döntünk, hogy megvalósítjuk vagy sem (1. fázis, lásd: 3.3. fejezetet). Ezután pedig minden bizonytalan kapcsolatról határozzunk, hogy előírjuk (soros megvalósítás), vagy sem (párhuzamos megvalósítás). A módszert egészen addig folytatjuk, ameddig egyetlen bizonytalan kapcsolat sem marad a modellünkben (2. fázis, lásd: 3.3. fejezetet). Vagyis az eredményül kapott, a projekttervet leíró mátrixreprezentáció már egyetlen „?” szimbólumot sem fog tartalmazni.

3.7. Definíció. Tegyük fel, hogy minden $a \in A := \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ tevékenységet $m \in \mathbb{Z}^+$ módon tudunk végrehajtani. Tegyük fel továbbá, hogy minden tevékenységhez összesen r -féle erőforrást rendelhetünk, akkor minden $a \in A$ tevékenységre vonatkozó végrehajtási módok $r + 3$ -asokkal írhatók le: $M_a := \{(t_a, c_a, \Delta R_a, r_{a_1}, r_{a_2}, \dots, r_{a_r}) : 1, 2, \dots, m\}$, melyek tartalmazzák a végrehajtási mód idő- (t_a), illetve költségigényét (c_a), valamint a javító-megelőző tevékenység adott berendezés elemre gyakorolt megbízhatóság-növekedését (ΔR_a), ezen kívül pedig az erőforrás-szükségleteket ($r_{a_1}, r_{a_2}, \dots, r_{a_r}$).

Megjegyzés. Jelölje egy $a_j \in A$ tevékenység $v, w \in \{1, 2, \dots, m\}$ végrehajtási módjainak időigényét: t_{jv}, t_{jw} , költségigényét: c_{jv}, c_{jw} , erőforrásigényeit leíró vektort: $\mathbf{r}_{jv}, \mathbf{r}_{jw}$, valamint a tevékenység hatására jelentkező megbízhatóság-növekedést: $\Delta R_{jv}, \Delta R_{jw}$. Az átváltási feladatoknál általában feltételezik, hogy $t_{jv} < t_{jw}$ esetén $c_{jv} \geq c_{jw}$, $\mathbf{r}_{jv} \geq \mathbf{r}_{jw}$ valamint $\Delta R_{jv} \leq \Delta R_{jw}$ teljesül, vagyis az időbeli rövidítés, pótlólagos (közvetlen) költségnövekménnyel (lásd: 1. táblázatot), illetve pótlólagos erőforrás-növekménnyel jár, miközben a rövidebb idő alatt kisebb mértékben lehet növelni a berendezéselemek és ezáltal a rendszer megbízhatóságát. Ugyanakkor látni fogjuk, hogy ezt az összefüggést a javasolt algoritmusunk során sehol nem használjuk ki. Csak annyit várunk el, hogy a különböző módokat tekintve az idő-, erőforrás- és költségigények korlátosak legyenek. Továbbá lehesen meghatározni a minimális és maximális szükségleteket, valamint a minimális és maximális megbízhatóságnövekményeket.

Miután meghatároztuk, mely tevékenységeket hajtjuk végre (1. fázis), valamint azt is megállapítottuk, hogy milyen sorrendben hajtjuk ezeket végre (2. fázis), ki kell választanunk hogy a tevékenységeket milyen módon hajtjuk végre (3. fázis). Eredményül egy úgynevezett projektütemtervet kapunk, amely tartalmazza a végrehajtandó tevékenységeket és a végrehajtás módját.

3.8. Definíció. Tekintsünk egy $\mathcal{X} = (S, \prec, \sim)$ projektstuktúrát, ahol $S \in \Xi(A)$ egy kiválasztott projektváltozat. A **projektütemterv** azon $a \in S$ tevékenységekre vonatkozó idő-, költség-, erőforrásigények, illetve a javító-megelőző tevékenység okozta megbízhatóságjavulások halmaza, $\vec{s}_{\mathcal{X}} = \{s_a : a \in S\}$ ahol $s_a \in M_a$.

3.9. Definíció. Egy rögzített $\mathcal{X} = (S, \prec, \sim)$ projektstruktúrára vonatkozó $\vec{s}_{\mathcal{X}}$ projektütemtervre a **projekt teljes költsége (Total Project Cost, TPC)** a projektütemtervben szereplő tevékenységek költségigényeinek összegeként tekinthető: $c(\vec{s}_{\mathcal{X}}) := \sum_{(c,t,\Delta R,r_1,\dots,r_r)=s_a, a \in S, s_a \in M_a} c$.

Hasonlóan kiszámítható az $\vec{s}_{\mathcal{X}}$ átfutási ideje (Total Project Time, TPT), melyet jelöljön $t(\vec{s}_{\mathcal{X}})$, valamint a rendszer megbízhatóságának (Total System Reliability, TSR) növekménye, a rendszer K berendezéseire, melyet jelöljön $\Delta TSR(K, \vec{s}_{\mathcal{X}})$. Jelölje továbbá $\mathbf{r}_{\max}(\vec{s}_{\mathcal{X}})$ az erőforrás-maximumokat tartalmazó r elemű vektort. (A függvények számításait az 5. és 7. pseudo kódok tartalmazzák.)

A bevezetett jelölésekkel már megfogalmazható a megelőző karbantartási projekttervezési probléma.

1. Probléma. (a) Megelőző karbantartástervezési probléma (Preventive Maintenance Project Scheduling Problem, PMPSP), legrövidebb átfutási idejű projektütemterv keresése: Legyen $K := \{k_1, k_2, \dots, k_z\}$ egy véges, berendezéselemeket tartalmazó halmaz. Legyen továbbá $A := \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ véges tevékenységeket tartalmazó halmaz. Jelölje $S \in \Xi(A)$ egy kiválasztott

projektváltozatot $S \subseteq A$, valamint jelöljön $\mathcal{X} = (S, \prec, \sim)$ egy projektstruktúrát. A projektstruktúra egy lehetséges projektütemtervét jelölje $\vec{s}_{\mathcal{X}}$. Legyen $C_c \geq 0$ a költség, $C_t \geq 0$ az idő, $\mathbf{C}_r \geq \mathbf{0}$ pedig az erőforráskorlát vektora. Jelölje továbbá $1 \geq C_{\Delta TSR} \geq 0$ az előírásként tekinthető minimális rendszer megbízhatóság-növekményt.

$$\begin{aligned} & \arg \min t(\vec{s}_{\mathcal{X}}) & (1) \\ & \text{feltéve, hogy} \\ & c(\vec{s}_{\mathcal{X}}) \leq C_c \\ & \mathbf{r}_{\max}(\vec{s}_{\mathcal{X}}) \leq \mathbf{C}_r \\ & 1 \geq \Delta TSR(K, \vec{s}_{\mathcal{X}}) \geq C_{\Delta TSR} \end{aligned}$$

A fenti feladat során azt az $\vec{s}_{\mathcal{X}}$ projektütemtervet kell meghatározni, ahol a költség- és erőforráskorlátokat figyelembe véve, egy minimális rendszer megbízhatóság-növekményt elérve a javító-megelőző tevékenységeket a lehető legrövidebb idő alatt tudjuk elvégezni. Mivel a gyakorlatban ez a feladat szokott a leggyakrabban előfordulni, hiszen a folyamatos működéshez a legfontosabb, hogy minél rövidebb idő alatt sikerüljön a karbantartási projektet végrehajtani, ezért a továbbiakban mi is ezzel a feladattal foglalkozunk. Ugyanakkor a bemutatott módszerünk alkalmas az adott korlátokat betartó legkisebb költséggel rendelkező, vagy éppen a legnagyobb rendszer megbízhatóság-növekményt elérő projektterv meghatározására is. Ekkor a feladatok a következőképpen írhatók le.

2. Probléma. (b) Megelőző karbantartás-tervezési probléma (Preventive Maintenance Project Scheduling Problem, PMPSP), **legkisebb költségű projektütemterv keresése:**

$$\begin{aligned} & \arg \min c(\vec{s}_{\mathcal{X}}) & (2) \\ & \text{feltéve, hogy} \\ & t(\vec{s}_{\mathcal{X}}) \leq C_t \\ & \mathbf{r}_{\max}(\vec{s}_{\mathcal{X}}) \leq \mathbf{C}_r \\ & 1 \geq \Delta TSR(K, \vec{s}_{\mathcal{X}}) \geq C_{\Delta TSR} \end{aligned}$$

3. Probléma. (c) Megelőző karbantartás-tervezési probléma (Preventive Maintenance Project Scheduling Problem, PMPSP), **legnagyobb rendszer megbízhatóság-növekménnyel járó projektütemterv keresése:**

$$\begin{aligned} & \arg \max \Delta TSR(K, \vec{s}_{\mathcal{X}}) & (3) \\ & \text{feltéve, hogy} \\ & t(\vec{s}_{\mathcal{X}}) \leq C_t \\ & c(\vec{s}_{\mathcal{X}}) \leq C_c \\ & \mathbf{r}_{\max}(\vec{s}_{\mathcal{X}}) \leq \mathbf{C}_r \end{aligned}$$

Lehetőség van továbbá ún. több célfüggvény szerint is megfelelő ún. Pareto-optimális megoldást találni. Ezzel azonban csak egy későbbi tanulmányunkban foglalkozunk részletesebben.

3.2. A mátrix alapú modell felépítése

A javasolt M^4 (Multi-domain Maintenance Management Matrix) mátrix modell összesen 7 részmatrixot (domaint) tartalmaz.

1. **Block domain (BD):** egy $z \times z$ mátrix, ahol z a berendezéselemek számát adja meg. A részmatrix a megbízhatósági blokkdiagram (RBD) mátrixreprezentációja, ahol az átlók tartalmazzák a kritikussági, megbízhatósági vagy rendelkezésre állás értékeit. Legyen β_{ij} egy cellája **BD** részmatrixnak, ahol $i \neq j$ esetén $\beta_{ij} = 1$ jelenti a megbízhatósági diagramban két berendezésem közötti kapcsolatot. $\beta_{ij} = 0$ pedig azt jelenti, hogy a két berendezésem között megbízhatósági szempontból nincs kapcsolat. A diagonális értékek $0 \leq R(k_i) = r_i = \beta_{ii} < 1$ a berendezéselemek megbízhatóság-értékei lesznek.
2. **Equipment-task mapping domain (ED):** egy $z \times n$ -es (átváltási) mátrix, ahol n a javító-megelőző tevékenységek, z pedig a berendezéselemek számát jelöli. **ED** (rész)matrix egy elemét jelölje: ε_{ij} ($i = 1, 2, \dots, z$; $j = 1, 2, \dots, n$). Az $1 \geq \varepsilon_{ij} \geq 0$ egy a_j javító-megelőző tevékenység relatív hatását mutatja egy k_i berendezésem megbízhatóságára. Egy berendezésemhez több javító-megelőző tevékenységet is rendelhetünk, de egy javító-megelőző tevékenység csak egy berendezés-elemhez tartozhat.
3. **Increase of reliability domain (ID):** egy $m \times n$ -es mátrix, ahol n a tevékenységek száma, míg m a lehetséges megvalósítási módok száma. Legyen $1 \geq \eta_{jw} \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$; $w = 1, 2, \dots, m$) az **ID** mátrix egy cellája. Ekkor η_{jw} azt mutatja, hogy ha egy a_j javító-megelőző tevékenységet jw módon valósítunk meg, akkor az mennyivel növelheti a berendezéselemek megbízhatóságát. Ekkor egy k_i berendezésemre vonatkozó megbízhatóságnövelés a következőképpen számítható: $\Delta R(k_i) = \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij} \eta_{jw}$. Egy a_j tevékenység végrehajtásából eredő minimális, illetve maximális megbízhatóság növekedést jelölje: $\eta_j^{\max} = \max_w \eta_{jw}$, illetve $\eta_j^{\min} = \min_w \eta_{jw}$. Jelölje $\Delta \mathbf{R}_{\max} := \{\eta_1^{\max}, \eta_2^{\max}, \dots, \eta_n^{\max}\}$, illetve $\Delta \mathbf{R}_{\min} := \{\eta_1^{\min}, \eta_2^{\min}, \dots, \eta_n^{\min}\}$ a maximális megbízhatóság-növekmény vektorokat.
4. **Logic domain (LD):** egy $n \times n$ -es mátrix, ahol n a javító-megelőző tevékenységek száma; λ_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) az **LD** (rész)matrix egy cellája. A diagonális (λ_{ii} , $i = 1, 2, \dots, n$) elemek reprezentálják tevékenység-előfordulásokat. 0 jelenti, ha nem valósítjuk meg a tevékenységet, 0,5 jelöli a bizonytalan tevékenység-előfordulást, 1 pedig a biztos tevékenységmegvaló-

sítást. A diagonálison kívüli cellák $(\lambda_{ij}, i \neq j)$ reprezentálják a tevékenységek közötti kapcsolatokat, ahol 0, jelöli a rákövetkezési kapcsolat hiányát, 1 a rákövetkezési kapcsolat meglétét. 0,5 pedig a bizonytalan kapcsolatot mutatja. Ebben a modellben nem adunk további pontértékeket sem a tevékenység-előfordulásoknak, sem a kapcsolaterőségeknek.

5. **Time domain (TD):** egy $n \times m$ -es mátrix, ahol n a javító-megelőző tevékenységek számát, m pedig a végrehajtási módok számát jelöli. $\tau_{jw} \geq 0$ cellaérték jelöli a w módon végrehajtandó a_j tevékenység időigényét. Jelölje egy a_j tevékenység maximális, illetve minimális időigényét $\tau_j^{\max} = \max_w \tau_{jw}$, illetve $\tau_j^{\min} = \min_w \tau_{jw}$. Jelölje továbbá $\mathbf{t}_{\max} := [\tau_1^{\max}, \tau_2^{\max}, \dots, \tau_n^{\max}]$, és $\mathbf{t}_{\min} := [\tau_1^{\min}, \tau_2^{\min}, \dots, \tau_n^{\min}]$ a maximális/minimális időigényeket tartalmazó vektort.
6. **Cost domain (CD):** egy $n \times m$ -es mátrix, ahol n a javító-megelőző tevékenységek számát, m pedig a végrehajtási módok számát jelöli. $\zeta_{jw} \geq 0$ cellaérték jelöli a w módon végrehajtandó a_j tevékenység költségigényét. Jelölje egy a_j tevékenység maximális, illetve minimális költségigényét $\zeta_j^{\max} = \max_w \zeta_{jw}$, illetve $\zeta_j^{\min} = \min_w \zeta_{jw}$. Jelölje továbbá

$$\mathbf{c}_{\max} := [\zeta_1^{\max}, \zeta_2^{\max}, \dots, \zeta_n^{\max}], \text{ és } \mathbf{c}_{\min} := [\zeta_1^{\min}, \zeta_2^{\min}, \dots, \zeta_n^{\min}]$$

a maximális/minimális erőforrás-igényeket tartalmazó vektort.

7. **Resource domain (RD):** egy $n \times rm$ -es mátrix, ahol n a javító-megelőző tevékenységek, r a (megújuló) erőforrás-igények, m pedig a végrehajtási módok számát jelöli. A mátrix első m oszlopában az első, a második m oszlopában a második, az r -edik m oszlopában az r -edik erőforrásoknak a tevékenységek egyes végrehajtási módjaihoz tartozó igényeit jelöljük.

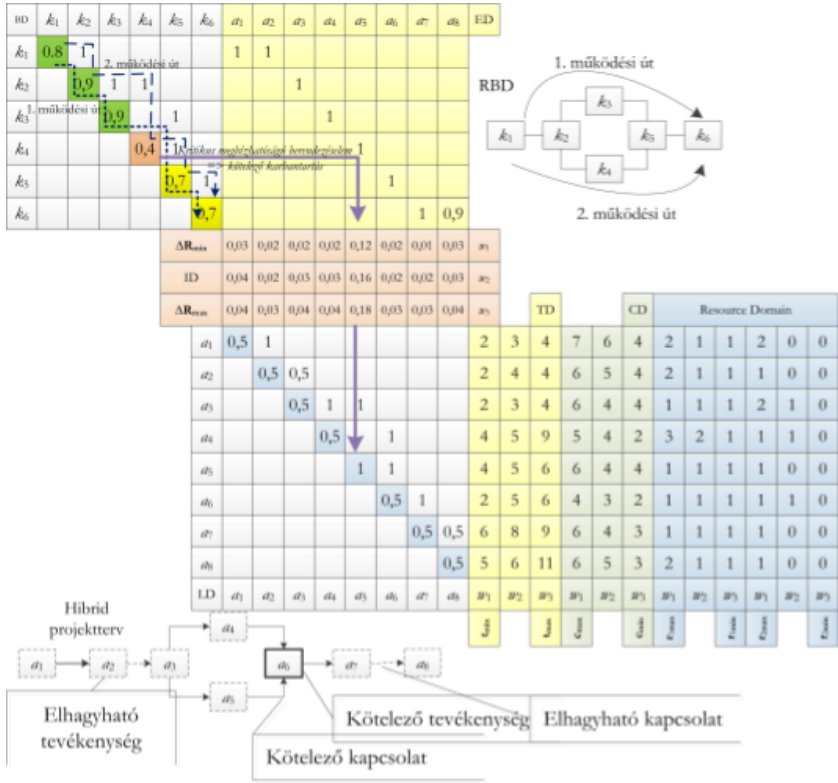
A hét részmatrrix elhelyezkedését mutatja az 1. ábra egy példán keresztül feltételezve, hogy a kritikus beavatkozási érték valamennyi berendezéselemre $cr = 0,5$. Mivel az 1. ábrán a k_4 berendezés-elemre $R(k_4) = 0,4 < cr$, ezért a k_4 megbízhatóságát mindenképpen javítani kell. Ebből adódóan az a_5 tevékenységet mindenképpen el kell végeznünk, hogy a minimális 0,5-ös megbízhatósági értéket elérjük.

Megbízhatósági szempontból a k_3 és k_4 berendezéselem párhuzamosan van csatolva egymással, e két elemmel pedig sorosan az összes többi rendszerelem. Az ábrán bejelölt 2 működési út adható meg. Ebből adódóan a rendszer megbízhatósága:

$$TSR = R(k_1)R(k_2)(1 - (1 - R(k_3))(1 - R(k_4)))R(k_5)R(k_6).$$

3.3. A javasolt algoritmus bemutatása

A javasolt algoritmus (melynek angol neve Preventive Maintenance Project Scheduling Algorithm, PMP SA, lásd: 6. ábrán látható pszeudo kódot) valamennyi



1. ábra. Megelőző karbantartás-tervezés mátrix alapú modellje

fázisában kihasználjuk, hogy az elérhető, idő-, költség-, erőforrás- és maximális megbízhatósági értéket anélkül kiszámíthatók, hogy az összes lehetséges projektváltozatot meg kellene határoznunk.

Legtöbb költségünk akkor keletkezik, ha valamennyi javító-megelőző tevékenységet végrehajtjuk, és ezek közül is a legköltségesebb alternatívát választjuk (C_{max}). Legkevesebb költségű projektváltozatot az a projektterv adja, ahol csak a kötelező tevékenységek szerepelnek a projekttervben és itt is a legkevésbé költséges alternatívát választjuk (C_{min}).

Nagyon hasonlóan a költségekhez, amennyiben a tevékenységek várható hatását meg tudjuk határozni, akkor becsülhető a maximális megbízhatóság-javulás (ΔTSR_{max}). Ezt az értéket itt is akkor érhetjük el, ha valamennyi javító-megelőző tevékenységet végrehajtjuk. Ha csak a kötelezőkre szorítkozunk, akkor a minimális megbízhatóság-javulást (ΔTSR_{min}) fogja jelölni.

Az időszükséglet számításához a fentiekén kívül a tevékenységek közötti kapcsolatokat is figyelembe kell vennünk. A legrövidebb projekttervet akkor kapjuk, ha valamennyi bizonytalan tevékenységet későbbi projektbe ütemezzük át, vagyis ebből a projektből elhagyjuk és valamennyi, technológiailag nem kötelező kapcsolatot feloldunk és a tevékenységek végrehajtását párhuzamosítjuk (T_{\min}). Ezzel szemben a leghosszabb átfutási időt (T_{\max}) valamennyi tevékenység végrehajtása és valamennyi tevékenységkapcsolat betartása fogja eredményezni.

Ha a tevékenységeket a legkorábbi időpontra ütemezzük, akkor az erőforrás-igények maximumát (r_{\max}) akkor kapjuk, amikor valamennyi bizonytalan tevékenységet végrehajtjuk, de valamennyi bizonytalan kapcsolatot feloldjuk (párhuzamos végrehajtás) és a megvalósítási módok közül azt választjuk, ahol az erőforrás-igény maximális. Ugyanígy a legkevesebb erőforrás-igény (r_{\min}) akkor keletkezik, ha valamennyi bizonytalan tevékenység-előfordulást elhagyjuk ebből a projektből (pontosabban átütemezzük egy későbbi, másik projektbe), a kötelező tevékenység-előfordulások kapcsolatait azonban meghagyjuk (soros végrehajtás), és az erőforrás-igények közül a minimálisakkal számolunk.

Az első és a második fázisban mindig két lehetséges alternatíva közül választunk, nevezetesen az első fázisban: megvalósítjuk, vagy elhagyjuk (átütemezzük) a tevékenységet, illetve a második fázisban: előírjuk, vagy feloldjuk két tevékenység között a kapcsolatot. Ebből adódóan a döntési fánk, amit be kell járnunk, egy speciális bináris fa lesz. Valamennyi döntési ág esetén ki tudjuk számítani a lehetséges legkisebb, illetve legnagyobb idő-, költség-, erőforrásigényeket, illetve a minimális, maximális rendszer megbízhatóság-növekményt, feltéve, hogy a tevékenységeket megvalósítjuk, vagy elhagyjuk. Ekkor tehát a döntési fánk egy ún. bináris kupac lesz (binary heap). A fa tetején meg tudjuk mondani, hogy mi az a legkisebb idő-, költség-, erőforrásigény, amelyet biztosan igényel bármely projektváltozat. Egy tevékenység megvalósításáról, vagy elhagyásáról döntve szintén ki tudjuk számolni a legkisebb idő-, költség-, illetve erőforrásigényt, vagy éppen a maximális rendszer megbízhatóság-növekményt.

Nagyon fontos, hogy minden döntés után is egy M4 mátrixreprezentációt kapunk, viszont az első fázisban minden lépésben eggyel csökken a bizonytalan tevékenységek, a másodikban a bizonytalan kapcsolatok száma. Őket a döntésünknek megfelelően vagy elhagyjuk, vagy előírjuk.

A javasolt módszer a projektváltozatok kiértékelése során azokat az alternatívákat részesíti előnyben, amelyek célfüggvény értéke kedvezőbb.

Mivel minden döntés után meg tudjuk mondani az elérhető legnagyobb rendszer megbízhatóság-növekményt, illetve minimális idő- és költségigényt, a következő végzési szabályokat határozhatjuk meg az első két fázisra.

1. Szabály. [TSR_CUT] Ha egy projektváltozatra számolt maximális rendszer megbízhatóság-növekmény kisebb, mint a korlátként támasztott előírt megbízhatóság növekmény: $\Delta TSR_{\max} < C_{\Delta TSR}$, akkor sem az adott, sem az ebből

származtatható projektváltozatok, sem pedig a projektváltozatból származtatható projektstruktúrák nem megengedettek.

2. Szabály. [TPC_CUT] Ha egy projektváltozat minimális költségigénye magasabb, mint a költségkorlát: $C_{\min} > C_c$, akkor sem az adott, sem az ebből származtatható projektváltozatok, sem pedig a projektváltozatból származtatható projektstruktúrák nem megengedettek.

3. Szabály. [TPT_CUT] Ha egy projektváltozat vagy egy projektstruktúra minimális időigénye magasabb, mint az időkorlát: $T_{\min} > C_t$, akkor sem az adott projektváltozat/projektstruktúra, sem az ebből származtatható projekttervek nem megengedettek.

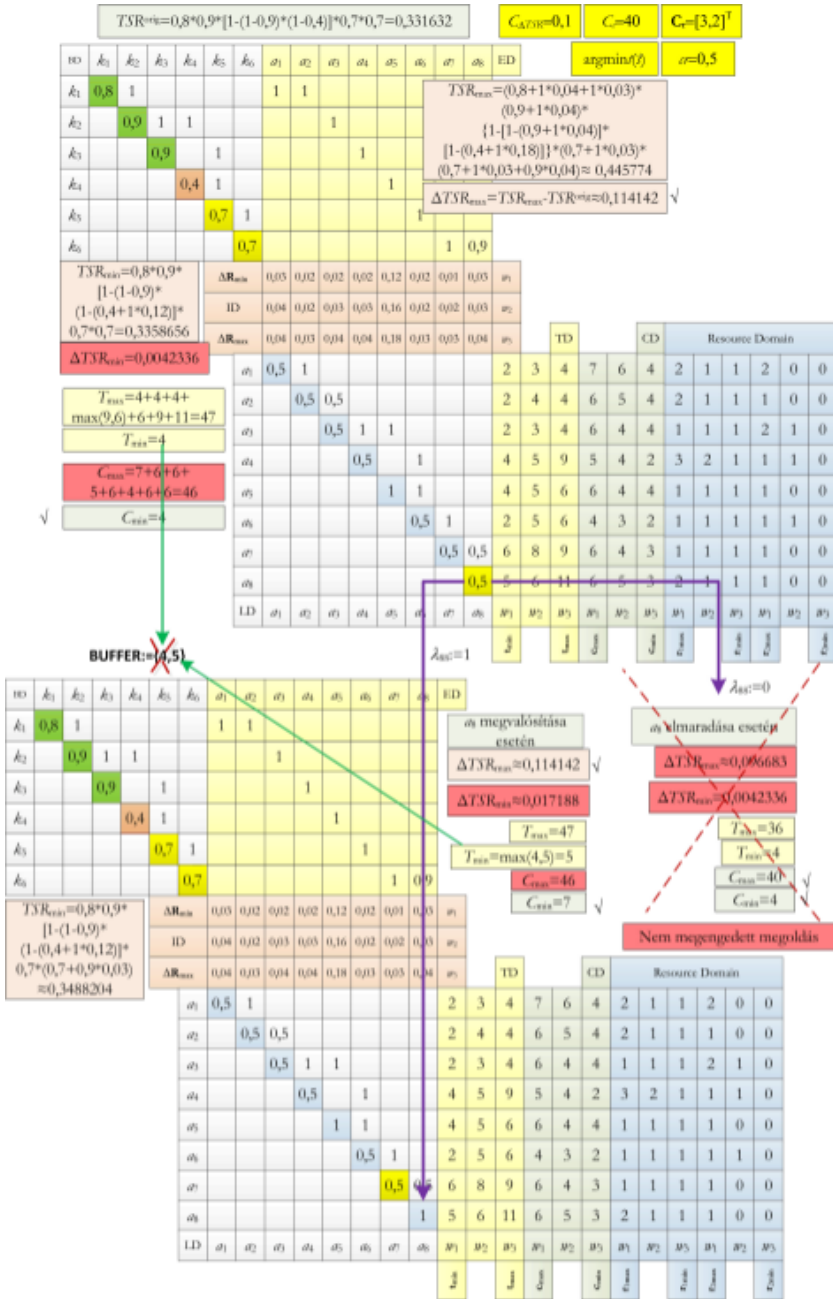
Erőforrásokra azért nem határozunk meg ilyen vágási szabályt, mert itt erőforrás-simító eljárást a harmadik fázisban fogunk végezni. A legkorábbi időpontra ütemezett tevékenységek esetében a maximális erőforrásigényen mind egy kiegyenlítési, mind pedig erőforrás-simítási algoritmussal csökkenteni lehet. Ennek számítási igénye ugyanakkor sokkal magasabb, mint pl. az ütemezését. A módszer első fázisának szemléltetésére tekintünk az alábbi példát.

3.1. Példa. Legyen adott a megelőző karbantartási terv mátrixos ütemterve (2. ábra). A feladat, hogy a karbantartási projektet a legkorábbi időpontban végezzük el úgy, hogy a rendszer megbízhatósága minimálisan 10%-ot növekedjen ($C_{\Delta TSR} = 0, 1$), de a költségigényként támasztott 40 e \$-t ne lépjük túl ($C_c = 40$). A feladatot 3 karbantartóval és 2 gépbeállítóval kell elvégeztetnünk ($\mathbf{C}_r = [3, 2]^T$). Feltétel, hogy a megbízhatósági diagramtól függetlenül minden berendezéslemnek legalább 0,5-ös megbízhatósági értéket el kell érnie ($cr = 0, 5$).

Mivel a célfüggvény a lehető legrövidebb projektátfutási idő megtalálása, így az első fázisban azokat a projektváltozatokat részesítjük előnyben, amelyek kevesebb tevékenységet tartalmaznak. Tehát minden lépésben, ha a tevékenység a kritikus úton van, akkor igyekszünk a tevékenységet elhagyni a projektből, mert ekkor kapunk rövidebb átfutási időt (lásd: 2. ábra); ugyanakkor, ha az így kapott mátrixra számolt legnagyobb rendszer megbízhatóság-növekménnyel járó projektváltozat megvalósítása sem tudja garantálni a 10%-os megbízhatóság-növekményt, akkor ezt az ágat, illetve valamennyi alágát ki kell vennünk a döntési fából. Vagyis a 2. ábra példáján a_8 tevékenység megvalósítása mellett döntünk.

Bár az algoritmus során a legjobb megoldás megtalálására törekszünk, szükség lehet a második, vagy épp harmadik legjobb megoldás megtalálására. Éppen ezért a lehetséges legrövidebb átfutási időket egy rendezett **BUFFER** halmazban tároljuk.

A második fázisban arról döntünk, hogy a tevékenységeket milyen sorrendben hajtjuk majd végre. Fontos megjegyezni, hogy mivel már döntöttünk arról,



2. ábra. Az első fázis első lépése

hogy egy tevékenységet végrehajtunk-e vagy sem, ezért azok minimális és maximális költségvonzatát, illetve a rendszer megbízhatóságának minimális és maximális növekményét a tevékenységek végrehajtási sorrendje (a javasolt modellünkben) nem befolyásolja. Éppen ezért elegendő csak a minimális és maximális lehetséges tevékenységidőket kiszámolni. Ehhez pedig elegendő a logikai tervet és az időigényeket tartalmazó részmatrix (lásd: 3. ábra) megadása.

A célfüggvénynek legmegfelelőbb projektstruktúra meghatározásakor csak a 3. vágási szabályt alkalmazhatjuk. A második fázis végére már egy projektstruktúrát kapunk, ahol a cél a célfüggvénynek leginkább megfelelő, a korlátokat nem túllépő projektütemterv meghatározása. Ebben a fázisban már az ismert diszkrét idő-minőség-költség átváltási problémát kell megoldanunk, mely sajnos NP-nehéz feladat [9]. Ugyanakkor, ha nincs túl sok lehetséges alternatívánk, akkor az első két fázisban ismertetet gondolatmenetet továbbvihetjük, nevezetesen: minden lépésben döntünk arról, hogy egy adott tevékenységet a lehetséges módok közül melyikkel valósítjuk meg. A döntési fában minden csúcsnak (kivéve az utolsó (n -edik szinten lévők)) m gyermeke van, hiszen minden tevékenységet m -féleképpen oldhatunk meg.

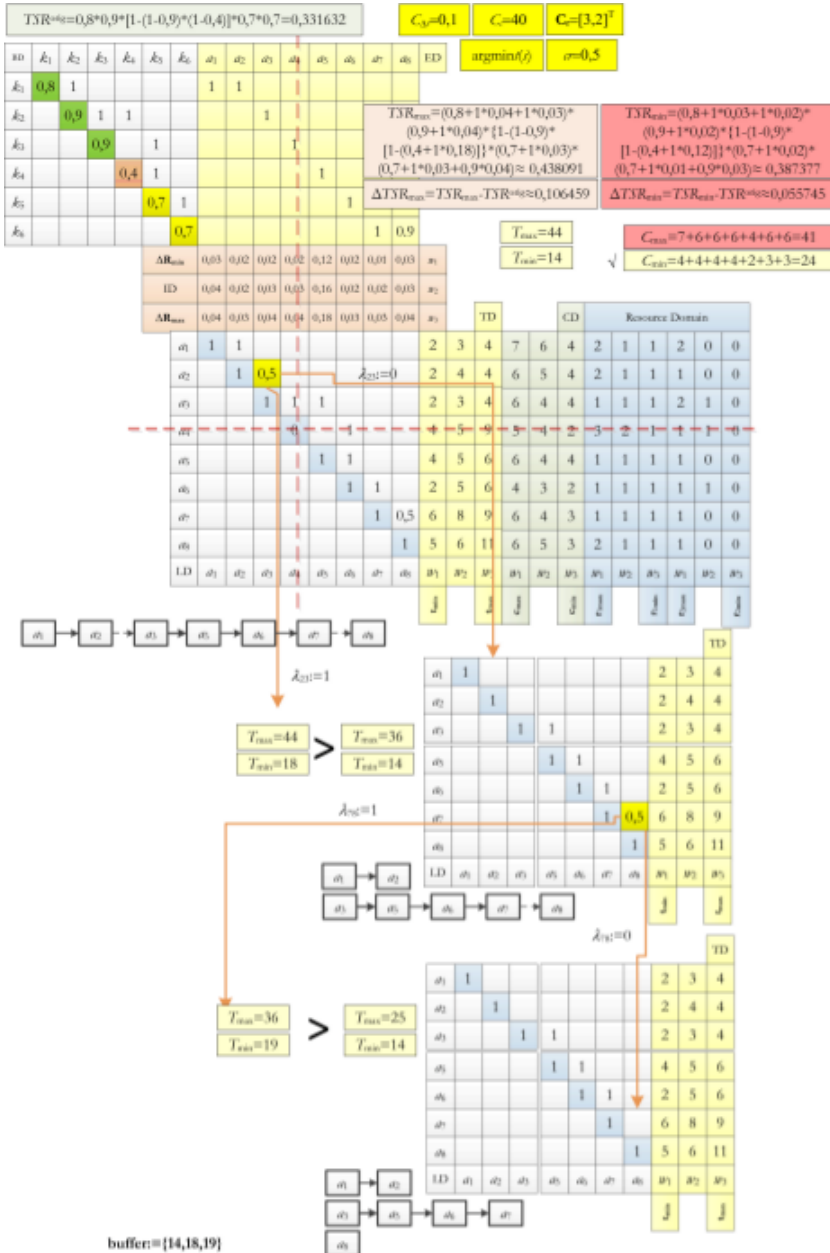
Minden pontban kiszámítjuk az elérhető legkisebb/legnagyobb átfutási idejű, költségigényű, valamint a legkisebb/legnagyobb rendszer megbízhatóság-növekményt eredményező projektterveket.

Az 1., 2., 3. vágási szabályokat alkalmazva egy adott célfüggvénynek leginkább megfelelő projektütemtervet kapunk.

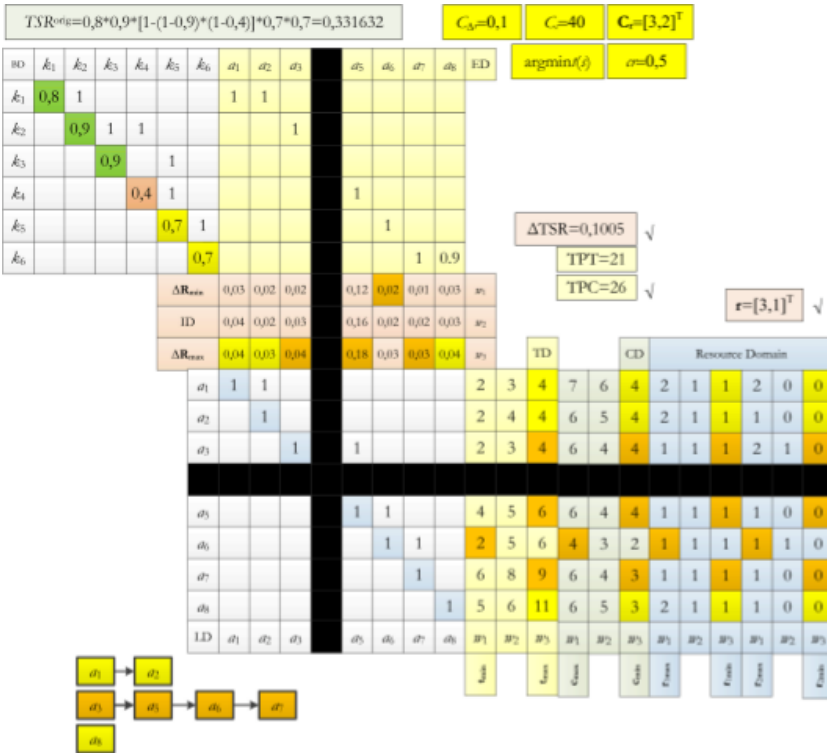
Az eredményül kapott ütemtervre végzünk el egy erőforrás-simítást. Ha eredményül egy, a korlátokat nem túllépő megoldást kapunk (jelen esetben ez $\mathbf{r} = [3, 1]^T$, amely nem lépi túl a $\mathbf{C}_r = [3, 2]^T$ korlátot), akkor ezt a projekttervet javasolhatjuk a karbantartók számára (lásd: 4. ábra). Ha az erőforrás-tervezés nem vezet eredményre, akkor vissza kell lépni a következő legjobb megoldásra és ott kell elvégeznünk újra az erőforrás-simítást.

4. A javasolt algoritmus komplexitása

Az első két fázisban kihasználjuk, hogy mindig csak két lehetséges alternatíva közül kell választanunk, nevezetesen megvalósítjuk vagy elhagyjuk a bizonytalan tevékenységeket, illetve a második fázisban előírjuk vagy feloldjuk a bizonytalan kapcsolatokat. A döntési fa minden ágán meg tudjuk mondani, hogy mi a leghosszabb/legrövidebb átfutási idő; legkisebb/legnagyobb projektköltség; legkisebb/legnagyobb megbízhatóság-növekmény, anélkül, hogy valamennyi projektváltozatot, illetve az ezekből eredeztethető projektstruktúrát meghatároznánk. A vágási szabályok segítségével pedig azokat a projektváltozatokat, illetve az azokból származtatható projektstruktúrákat ki sem kell értékelni, amelyek egy minimális (idő-, költség-, megbízhatóság-növekmény-) korlátot nem elégítenek ki.



3. ábra. Projektstruktúra meghatározása (2. fázis)



4. ábra. Optimális ütemterv meghatározása (3. fázis)

Az első két fázisban anélkül tudunk eljutni egy projektstruktúráig, hogy a döntési fában vissza kellene lépni. Ha a bizonytalan tevékenységek száma u , a bizonytalan kapcsolatok száma pedig v , akkor $O(u + v)$ lépésben kaphatunk egy projektstruktúrát. A harmadik fázis diszkrét átváltási probléma (lásd: De és mtsai [9]) és a legtöbb erőforrás-tervezési feladat (lásd: Brucker és mtsai [5]) már igazoltan NP-nehéz feladatok, ahol a javasolt módszerek mellett számos heurisztikus módszert is alkalmazhatunk [5].

5. Összefoglalás

A javasolt modell általánosítja a hagyományos idő-minőség-költség átváltási problémát, kiterjesztve azt bizonytalan tevékenység-előfordulások és bizonytalan kapcsolatok kezelésének lehetőségével. Egy $O(u + v)$ algoritmus (ahol u a bizony-

talán tevékenységek, v pedig a bizonytalan kapcsolatok száma) vezeti vissza a javasolt karbantartás-tervezési problémát egy hagyományos átváltási problémára. Ugyanakkor meg kell jegyezni, hogy a karbantartás-tervezés a rendszer megbízhatóságáról egy statikus állapotot feltételez, holott az akár a végrehajtás ideje alatt is változik, változhat. Egy előrejelző rendszer és a javasolt módszer kombinálása már nem csak a megelőző (preventive), hanem az ún. prediktív karbantartás-tervezés eszköztárát is gazdagíthatná. Ennek bemutatására ugyanakkor majd csak egy következő tanulmányban kerülhet sor.

6. Köszönetnyilvánítás

A kutatás a Új Nemzeti Kiválóság Program támogatásával készült.

Köszönetünket fejezzük ki továbbá az MTA-PE Regionális Innovációs és Fejlesztési Hálózati Kutatócsoport kollégáinak cikkünkhöz adott jobbító javaslatáikért.

A. Melléklet

```

1 function [BD,R]:=sp(BD,R)
2 i:=1 //Soros elemek összevonása
3 while i<|R| :
4 i:=false
5 if numel(find(BD(i,:)=1))=1 then: //Soros elemek keresése
6 j:=find(BD(i,:)=1) //j lesz i elemmel sorosan összekötött berendezésem
7 if numel(find(BD(:,j)=1))=1 //Ha i és j elem között csak egyreláció van...
8 i:=true //... akkor a soros elemeket összevonjuk.
9 R(i):=R(i)*R(j); //Az összevont elem megbízhatósága a soros elemek megb. szorzata
10 [BD,R]:=sp(BD{[1..|R|\{i},1..|R|\{j}],R{[1..|R|\{j}]} //i-edik sor és j-edik
11 end //oszlop elhagyása a mátrixból
12 end
13 if i=false then:
14 i:=i+1 //Ellenkező esetben nincs összevonás
15 end
16 end
17 i:=1 //Párhuzamos elemek összevonása
18 while i<|R| :
19 i:=false
20 if numel(find(BD(i,:)=1))>=2 then: //Párhuzamos elemek keresése
21 IJ:=find(BD(i,:)=1) : IJ=IJ[1..2] //Csak két párhuzamos elemet vonunk össze
22 if numel(find(BD(IJ,:)=1))=2 then:
23 i:=true
24 R(IJ(1))=1-(1-R(IJ(1)))*(1-R(IJ(2))) //Megbízhatóság kiszámítása
25 [BD,R]:=sp(BD{[1..|R|\{IJ(1)},1..|R|\{IJ(2)}],R{[1..|R|\{IJ(2)}]}
26 end
27 end
28 if i=false
29 i:=i+1
30 end
31 end
32 return [BD,R]

33 function [BD,R]:=DCM(BD,R)
34 for i:=2 to |R| : //Öres oszlop eltávolítása
35 if BD(i,i)=0 then [BD,R]:=rekeysp_decomp(BD{[1..|R|\{i},1..|R|\{i}],R{[1..|R|\{i}]}
36 for i:=2 to |R| : //Öres sor eltávolítása
37 if BD(i,i)=0 then [BD,R]:=rekeysp_decomp(BD{[1..|R|\{i},1..|R|\{i}],R{[1..|R|\{i}]}
38 [BD,R]:=sp(BD,R)
39 keyi=argmax(sum(BD,1),sum(BD,2)) //Maximális fokszámú kulcselem megtalálása
40 [BD,R]:=rekeysp_decomp(BD{[1..|R|\{key},1..|R|\{key}],R{[1..|R|\{key}]} //Eltávolítása

41 function tsr:=TSR(BD,R)
42 [BD,tsr]:=DCM(BD,R)
43 end

```

5. ábra. Pseudo kód. Rendszer megbízhatóság kiszámítása soros-párhuzamos összevonással és dekompozíciós módszerekkel

```

1 function M4s:=minTPT_ProjStruct(M4,M4s,duration,C2x,Ct,Ce,objDTCQTF):
2 global buffer //minimális átfutási időket tartalmazó rendezett halmaz
3 [i,j]:=impact(LD,TD)//Lásd 3. a pszeudokódot
4 if i≠0 and j≠0 then:
5   LD(i,j):=0 //Kapcsolat elhagyása
6   mins0:=TPT(LD,min(TD)) //tmin:=min(TD)
7   maxs0:=TPT(LD,max(TD)) //tmax:=max(TD)
8   if maxs0>duration and mins0<duration then:
9     M4s:=minTPT_ProjStruct M4,M4s,duration,C2x,Ct,Ce,objDTCQTF)
10    else: //Átfutási idők eltárolása
11      if mins0≠buffer then: buffer:=buffer∪mins0
12      LD(i,j):=1 //Kapcsolat előírása
13      mins1:=TPT(LD,min(TD)) //tmin:=min(TD)
14      maxs1:=TPT(LD,max(TD)) //tmax:=max(TD)
15      if maxs1>duration and mins1<duration then:
16        M4s:=minTPT_ProjStruct M4,M4s,duration,C2x,Ct,Ce,objDTCQTF)
17        else: //Átfutási idők eltárolása
18          if mins1≠buffer then: buffer:=buffer∪mins1
19    else: if [TD,CD,ID]=DTCQTF(M4,C2x,Ct,Ce,objDTCQTF) is feasible than : M4s:=M4s.M4
20    return M4s //objTCTP a DTCQTF célfüggvénye

21 function M4s:=ProjScen(M4,M4s,SCORE,C2x,Ct,Ce):
22 global BUFFER
23 i:=argmax(max(TD)) //tmax:=max(TD)
24 if i≠0 then:
25   LD(i,i):=0 //Tevékenység elhagyása
26   ΔRmax:=TSR(BD,diag(BD)+ED*(diag(LD).TΔRmax))T-TSR(BD,diag(BD))
27   Cmin:=TPC(diag(LD),min(CD)) //cmin:=min(CD)
28   Tmin:=TPT(LD,min(TD)) //tmin:=min(TD)
29   Tmax:=TPT(LD,max(TD)) //tmax:=max(TD)
30   if Tmax>SCORE and Tmin<=SCORE and Cmin<=Ce and Tmin<=Ct and ΔRmax>=C2x then:
31     M4s:=ProjScen(M4,M4s,SCORE,C2x,Ct,Ce)
32     else: //Átfutási idők eltárolása
33       if Tmin≠BUFFER then: BUFFER:=BUFFER∪Tmin
34       LD(i,i):=1 //Tevékenység előírása
35       ΔRmin:=TSR(BD,diag(BD)+ED*(diag(LD).TΔRmin))T-TSR(BD,diag(BD))
36       Cmin:=TPC(diag(LD),min(CD)) //cmin:=min(CD)
37       Tmin:=TPT(LD,min(TD)) //tmin:=min(TD)
38       Tmax:=TPT(LD,max(TD)) //tmax:=max(TD)
39       if Tmax>SCORE and Tmin<=SCORE and Cmin<=Ce and Tmin<=Ct and ΔRmin>=C2x then:
40         M4s:=ProjScen(M4,M4s,SCORE,C2x,Ct,Ce)
41         else: // Átfutási idők eltárolása
42           if Tmin≠BUFFER then: BUFFER:=BUFFER∪Tmin
43     else: M4s:=M4s.M4
44   return M4s

44 function M4s:=PMPSP[M4,C2x,Ct,Ce,objTCTP,n]:
45 global BUFFER,buffer
46 BUFFER:=TPT(LD,min(TD)) //tmin:=min(TD)
47 SCENARIOS:=∅ //Projektváltozatok halmaza
48 M4s:=∅ //Projektstruktúrák halmaza
49 i:=1
50 structures:=0
51 do
52   SCENARIOS:=SCENARIOS∪ProjScen[M4,SCENARIOS,BUFFER(i),C2x,Ct,Ce]
53   SCENARIO-SCENARIOS(i) //Projekt változatok
54   buffer:=TPT(LD,min(TD)) //tmin:=min(TD)
55   j:=1
56   do
57     PDMs:=PDMs∪minTPT_ProjStruct(SCENARIO,M4s,buffer(j),C2x,Ct,Ce,objDTCQTF)
58     j:=j+1
59   structures:=structures+1 //Projektstruktúra
60   while j<=|buffer| and structures<=n:
61     i:=i+1
62   while i<=|BUFFER|:
63   return PDMs

```

6. ábra. Pszeudo kód. Javasolt algoritmus a karbantartás-tervezési probléma (PMPSP) megoldására

```

1 function tpt:=TPT(LD,t):
2   n:=|t|
3   EST:=0 //Earliest Start Time = Legkorábbi kezdés
4   EFT:=t //Earliest Finish Time = Legkorábbi befejezés
5   if LD(i,j)>0 then: //if task may be completed
6     for i:=1 to (n-1):
7       for j:=i+1 to n:
8         if LD(i,j)>0 then: //Ha a tevékenységek között van kapcsolat
9           if EFT(i)>EST(j) then:
10            EST(j):=EST(i)
11            EFT(j):=EST(j)+t(j)
12          end
13        end
14      end
15    end
16  end
17  end
18  return max(EFT)

19 function tpc:=TPC(TASKS,c): //TASKS: LD részmatrix diagonálisa c: költségvektor
20   n:=|c|
21   tpc:=0
22   for i:=1 to n:
23     if TASKS(i)=1 then:
24       tpc:=tpc+c(i)
25     end
26   end
27   return tpc

28 function rMAX:=maxres(DSM,t,R)
29   n:=|T|
30   EST:=0 //EST: n elemű vektor null vektor
31   EFT:=t
32   for i:=1 to (n-1) :
33     for j:=i+1 to n :
34       if DSM(i,j)>0
35         if EST(j)<EFT(i) then:
36           EST(j):=EST(i)
37           EFT(j):=EST(j)+t(j)
38         end
39       end
40     end
41   end
42   BP:=sort(union(EST,EFT)) //Az erőforrás-függvény töréspontjainak meghatározása
43   b:=|BP| //Töréspontok száma
44   r:=|R(1,:)| //Erőforrások száma
45   RESFUNC:=zeros(b,r) //Erőforrásigények meghatározása
46   for i:=1 to b :
47     RESFUNC(i,:)=sum(R(find((EST<=BP(i)) & (EFT>BP(i))),:),1)
48   end
49   return max(RESFUNC)

50 function [i,j]:=Impact(LD,TD)
51   IMPACT:=0 : i:=0 : j:=0 : n:=|LD(:,i)|
52   for I:=1 to n-1:
53     for J:=i+1 to n:
54       dependency:=LD(I,J)
55       if LD(I,J)<1 and LD(I,J)>0 then: //bizonytalan kapcsolat
56         LD(I,J):=1
57         t_max:=TPT(LD,max(TD)) //t_max:=max(TD)
58         t_min:=TPT(LD,min(TD)) //t_min:=min(TD)
59         LD(I,J):=0
60         t_max:=TPT(LD,max(TD)) //t_max:=max(TD)
61         t_min:=TPT(LD,min(TD)) //t_min:=min(TD)
62         if IMPACT>(t_max-t_min) then:
63           i:=I : j:=J : IMPACT:=(t_max-t_min)
64         end
65         if IMPACT>(t_min-t_max) then:
66           i:=I : j:=J : IMPACT:=(t_min-t_max)
67         end
68       end
69     end
70   end
71   return [i,j]

```

7. ábra. Pszeudo kód. Segédfüggvények: átfutási idő (TPT), költségigény (TPC), maximális erőforrásigény (maxres) számítása, csúc kiválasztása (impact)

Hivatkozások

- [1] BABU, A. AND SURESH, N.: *Project management with time, cost, and quality considerations*. European Journal of Operational Research **88(2)** (1996): 320–327.
- [2] BERMAN, E. B.: *Resource allocation in a pert network under continuous activity time-cost functions*. Management Science **10(4)** (1964): 734–745.
- [3] BROWNING, T. AND EPPINGER, S.: *Modeling impacts of process architecture on cost and schedule risk in product development*. Engineering Management, IEEE Transactions on **49(4)** (2002): 428–442.
- [4] BROWNING, T. R.: *Managing complex project process models with a process architecture framework*. International Journal of Project Management **32(2)** (2014): 229–241.
- [5] BRUCKER, P., DREXL, A., MOHRING, R., NEUMANN, K., AND PESCH, E.: *Resource-constrained project scheduling: Notation, classification, models, and methods*. European Journal of Operational Research **112(1)** (1999): 3–41.
- [6] CAMARA, A. W.: *An automated pert/cpm production scheduling application on the uni-vac iii*. Technical report, DTIC Document (1968).
- [7] CHEN, C.-H., LING, S. F., AND CHEN, W.: *Project scheduling for collaborative product development using {DSM}*. International Journal of Project Management **21(4)** (2003): 291–299.
- [8] DANILOVIC, M. AND BROWNING, T. R.: *Managing complex product development projects with design structure matrices and domain mapping matrices*. International Journal of Project Management **25(3)** (2007): 300–314.
- [9] DE, P., DUNNE, E. J., GHOSH, J. B., AND WELLS, C. E.: *The discrete time-cost tradeoff problem revisited*. European Journal of Operational Research **81(2)** (1995): 225–238.
- [10] DE, P., DUNNE, E. J., GHOSH, J. B., AND WELLS, C. E.: *Complexity of the discrete time-cost tradeoff problem for project networks*. Operations Research **45(2)** (1997): 302–306.
- [11] FALK, J. E. AND HOROWITZ, J. L.: *Critical path problems with concave cost-time curves*. Management Science **19(4-part-1)** (1972): 446–455.
- [12] FENG, C., LIU, L., AND BURNS, S.: *Stochastic construction time-cost trade-off analysis*. Journal of Computing in Civil Engineering **14(2)** (2000): 117–126.
- [13] FULKERSON, D. R.: *A network flow computation for project cost curves*. Management science **7(2)** (1961): 167–178.
- [14] GERTSBAKH, I.: *Reliability Theory - With Applications to Preventive Maintenance*. Springer Berlin (2000).
- [15] GOLDBERG, A. AND TARJAN, R.: *Solving minimum-cost flow problems by successive approximation*. In Proceedings of the Nineteenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing, STOC '87,(1987), pages 7–18, New York, NY, USA. ACM.
- [16] GOLDBERG, A. V.: *An efficient implementation of a scaling minimum-cost flow algorithm*. Journal of Algorithms **22(1)** (1997): 1–29.
- [17] IDHAMMAR, C.: *Preventive Maintenance, Essential Care and Condition Monitoring Book*. IDCN inc. (1999)

- [18] KELLEY, J. E.: *Critical-path planning and scheduling: Mathematical basis*. Operations Research **9(3)** (1961): 296–320.
- [19] KOSZTYÁN, Z.: *Mátrix alapú stratégiai projekttervezési eljárások*. SZIGMA **44(1–2)** (2013): 65–94.
- [20] KOSZTYÁN, Z., FEJES, J., AND KISS, J.: *Sztochasztikus hálóstruktúrák kezelése projektütemezési feladatokban*. SZIGMA **39(1–2)** (2008): 85–103.
- [21] KOSZTYÁN, Z. AND KISS, J.: *Pem—a new matrix method for supporting the logic planning of software development projects*. In DSM 2010: Proceedings of the 12th International DSM Conference, Cambridge, UK, 22–23.07. (2010)
- [22] KOSZTYÁN, Z. AND KISS, J.: *Stochastic network planning method*. In Elleithy, K., editor, Advanced Techniques in Computing Sciences and Software Engineering (2010), pages 263–268. Springer Netherlands.
- [23] KOSZTYÁN, Z. T.: *Exact algorithm for matrix-based project planning problems*. Expert Systems with Applications **42(9)** (2015): 4460–4473.
- [24] KOVÁCS, Z.: *Karbantartási stratégiák monte carlo optimalizálása*. Szigma **XXXIX**. (2008): 185–198.
- [25] KOVÁCS, Z. AND VÍTEK, M.: *Rendszer-megbízhatóság számítása igazságtáblázat alkalmazásával*. Minőség és Megbízhatóság **4** (1991): 43–44.
- [26] LAMBERSON, L. R. AND HOCKING, R. R.: *Optimum time compression in project scheduling*. Management Science **16(10)** (1970): B–597–B–606.
- [27] MINOGUE, P. ET AL.: *“gant-like” dsms*. In DSM 2011: Proceedings of the 13th International DSM Conference.(2011)
- [28] MOUBRAY, J.: *Reliability-Centered Maintenance*. Second edition. Industrial Press, Inc.; 2 Revised edition. (1997)
- [29] ORLIN, J. B.: *A faster strongly polynomial minimum cost flow algorithm*. Operations Research **41(2)** (1993): 338–350.
- [30] PRITSKER, A. A. B.: *GERT: Graphical evaluation and review technique*. Rand Corporation. (1966)
- [31] RAHIMI, M. AND IRANMANESH, H.: *Multi objective particle swarm optimization for a discrete time, cost and quality trade-off problem*. World Applied Sciences Journal **4(2)** (2008): 270–276.
- [32] SHIKER, M.: *Some methods of calculating the reliability of mixed models*. Journal of Babylon University **21(3)** (2013): 770–774.
- [33] STEWARD, D. V.: *The design structure system- a method for managing the design of complex systems*. IEEE transactions on Engineering Management **28(3)** (1981): 71–74.
- [34] SUTRISNO, A. AND LEE, T.: *Service reliability assessment using failure mode and effect analysis (fmea): survey and opportunity roadmap*. International Journal of Engineering, Science and Technology **3(7)** (2011): 25–38.
- [35] TAREGHIAN, H. R. AND TAHERI, S. H.: *On the discrete time, cost and quality trade-off problem*. Applied Mathematics and Computation **181(2)** (2006): 1305–1312.

- [36] WANG, Y.-M. AND ELHAG, T.: *Evidential reasoning approach for bridge condition assessment*. Expert Systems with Applications **34(1)** (2008): 689–699.
- [37] XIAO, R., CHEN, T., AND TAO, Z.: *Information modeling and reengineering for product development process*. International Journal of Management Science and Engineering Management **2(1)** (2007): 64–74.
- [38] YAN, H.-S., WANG, Z., AND JIANG, M.: *A quantitative approach to the process modeling and planning in concurrent engineering*. Concurrent Engineering **10(2)** (2002): 97–111.
- [39] YASSINE, A., FALKENBURG, D., AND CHELST, K.: *Engineering design management: An information structure approach*. International Journal of Production Research **37(13)** (1999): 2957–2975.

(Beérkezett: 2016. január 28.)

KOSZTYÁN ZSOLT TIBOR
 PRIBOJSZKI-NÉMETH ANIKÓ
 KOVÁCS ZOLTÁN
 Pannon Egyetem
 Gazdaságtudományi Kar
 Menedzsment Intézet
 Kvantitatív Módszerek Intézeti Tanszék és Ellátási Lánc Menedzsment Intézeti Tanszék
 8200 Veszprém, Egyetem utca 10.
 {kzst,nemethani,kovacs}@gtk.uni-pannon.hu

MATRIX-BASED MAINTENANCE MANAGEMENT

ZSOLT TIBOR KOSZTYÁN, ANIKÓ PRIBOJSZKI-NÉMETH, ZOLTÁN KOVÁCS

In this paper a new problem, namely: *preventive maintenance project scheduling problem* is specified. This problem integrates the structures of system reliability and the sequences of the preventive maintenance tasks. Since in a preventive maintenance project scheduling problem usually not all equipment will be maintained, the problem specify a flexible project, which consist not only mandatory but also supplementary tasks. The proposed algorithm reduce the preventive maintenance project scheduling problem to a traditional discrete time-quality-cost trade-off problem within a polynomial time. The proposed algorithm is able to rank all the feasible project plans according to the predefined preferences of scores like time and cost. The developed matrix based methods and proposed exact algorithm may be important and essential components of a project expert system supporting strategic decision makings particularly in case of large, complex flexible maintenance projects.

A REZGŐ HÚR IRÁNYÍTÁSA

HORVÁTH MIKLÓS

Két belső pontban erőhatásnak alávetett, a végpontokban rögzített, kezdetben nyugalmi állapotban lévő húr lehetséges mozgásállapotait vizsgáljuk. Ismert, hogy a véges idő alatt elérhető összes mozgásállapot előáll (elegendően nagy) rögzített idő alatt is. Jelen dolgozatban megkeressük a minimális időt, amely alatt a húr az összes lehetséges mozgásállapotba átvihető. Megmutatjuk, hogy a kérdés egyszerű szerkezetű, soronként legfeljebb 4 nem-nulla elemet tartalmazó mátrixok rangjának vizsgálatára vezethető vissza. A dolgozat 3. részében megfogalmazott nyitott kérdés vizsgálatához a középiskolai ismeretanyag is elegendő.

1. Bevezetés

Tekintsük a következő egyenletet:

$$y_{tt}(x, t) = y_{xx}(x, t) + \delta(x - a_1)u_1(t) + \delta(x - a_2)u_2(t), \quad (1)$$

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Itt $y(x, t)$ jelöli a $[0, 1]$ szakaszon kifeszített húr x pontjának a nyugalmi állapotból (azaz $y = 0$ -ból) való transzverzális kitérését a t időpontban. A $0 < a_1 < a_2 < 1$ belső pontokban irányítjuk a húrt a négyzetesen integrálható valós $u_1(t)$, $u_2(t) \in L_2(0, T)$ függvényekkel. A húr két végpontja rögzített, tehát

$$y(0, t) = y(1, t) = 0. \quad (2)$$

A megfigyelés kezdeti $t = 0$ pillanatában a húr nyugalomban van, azaz minden pontjának pozíciója és sebessége is nulla:

$$y(x, 0) = y_t(x, 0) = 0. \quad (3)$$

A $T > 0$ idő alatt elérhető mozgásállapotok halmaza

$$R(T) = \{(y(\cdot, T), y_t(\cdot, T)) \mid u_1, u_2 \in L_2(0, T)\}.$$

Nyilvánvaló, hogy az $R(T)$ halmaz T függvényében monoton nő, hiszen ha $t = 0$ -tól egy adott értékig az u_1, u_2 irányítás nulla, akkor a húr nyugalomban marad, és ezután (időeltolódással) bármely kisebb T -hez tartozó mozgásállapot elérhető. Joó István [6] dolgozatában többek között igazolta, hogy ha a_1 és a_2 racionális, azaz

$$a_1 = \frac{p_1}{q}, \quad a_2 = \frac{p_2}{q}, \quad (p_1, p_2, q) = 1,$$

tehát p_1, p_2 és q legnagyobb közös osztója 1, akkor $2(q-1)/q \leq T_1 < T_2$ esetén $R(T_1) = R(T_2)$. Jelen dolgozat célja a legkisebb olyan T_0 megadása, amelyre $T_0 \leq T_1 < T_2$ esetén $R(T_1) = R(T_2)$. Ezt a minimális elérési időt jellemezzük lineáris algebrai eszközökkel.

A kérdéssel kapcsolatos korábbi kutatások között először említjük meg a Joó [5] dolgozatot, melynek egyik eredménye szerint ha csak egy belső pontban irányítjuk a húr, akkor a minimális elérési idő $T_0 = 2$ irracionális pont esetén, és $T_0 = 2(q-1)/q$, ha p/q -ban irányítunk, ahol $(p, q) = 1$. Castro [2] egyetlen mozgó pontban vizsgálta a húr irányítását. Több szerző vizsgálta a végpont(ok)ban irányított húr mozgásállapotait. Hansen és Zuazua [3] két darabból összetett húr vizsgált, ahol az illesztési pont nyugalmi helyzetből való kitérése az irányítás. Il'in és Moiseev [4] az egyik végpontban a kitérési sebességgel irányított húr vizsgálták, és megkeresték a minimális normájú kontrollt. Végül megemlítjük Avdonin és Edward [1] dolgozatát, ahol véges sok belső pontban a húrhoz tömegpontokat ragasztunk, és az egyik végpont kitérése az irányítás. Többek között megmutatják, hogy elég hosszú idő alatt minden, megfelelő függvénytérbe tartozó mozgásállapot elérhető.

A dolgozat felépítése a következő. A fenti, részben heurisztikus problémafelvetés pontos megfogalmazását és ekvivalens átalakításait adjuk meg a 2. részben. Ez nagyrészt a [6] cikkben is megtalálható anyag, melyet a könnyebb olvashatóság érdekében itt is áttekintünk. A 3. rész tartalmazza az új eredményeket, azaz T_0 jellemzését lineáris algebrai eszközökkel, továbbá diszkutáljuk a T_0 -ra adható explicit képleteket, megfogalmazva nyitott kérdéseket is.

2. A feladat pontos megfogalmazása és ekvivalens átalakításai

Az (1) másodrendű differenciálegyenlet Dirac-deltákat is tartalmaz, tehát közönséges értelemben y legfeljebb elsőrendű differenciálhatóságát várjuk. Legyen $z(x, t)$ egy tetszőleges függvény a

$$\begin{aligned} z(x, t) \in C^2([0, 1] \times [0, T]), \quad z(x, T) = z_t(x, T) = 0, \\ z(0, t) = z(1, t) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

tulajdonságokkal. Szorozzuk be az (1) egyenletet z -vel, és integráljunk $0 \leq x \leq 1$ -ben és $0 \leq t \leq T$ -ben is. Formálisan kétszeres parciális integrálást alkalmazva

az egyik, illetve másik változóban a kilépő tagok eltűnnek az y -ra és z -re kirótt kezdeti- és peremfeltételek miatt, ezért a következő egyenlet adódik:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^T y(x, t) [z_{tt}(x, t) - z_{xx}(x, t)] dt dx \\ &= \int_0^T [z(a_1, t)u_1(t) + z(a_2, t)u_2(t)] dt. \end{aligned} \tag{5}$$

Mivel ez az egyenlet nem igényli y simaságát, és implicit módon tartalmazza az y -ra kirótt kezdeti- és peremfeltételeket is, kézenfekvő az alábbi értelmezés:

2.1. Definíció. Az (1), (2), (3) rendszer megoldásán olyan $y \in L_2([0, 1] \times [0, T])$ függvényt értünk, mely tetszőleges, a (4) kikötéseket kielégítő $z(x, t)$ függvény esetén eleget tesz az (5) egyenletnek.

A változók szétválasztásának ismert módszerét alkalmazzuk: a

$$z(x, t) = \sin(n\pi x) \cdot b(t), \quad b \in C^2([0, T]), \quad b(T) = b'(T) = 0$$

függvényt helyettesítjük (5)-be. A következő állítás adódik:

2.1. TÉTEL. (Joó [6]) Az (1), (2), (3) rendszernek létezik pontosan egy, a 2.1. Definíció szerinti $y \in L_2([0, 1] \times [0, T])$ megoldása. A megoldás szinuszos sorfejtése az x változóban

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin(n\pi x), \tag{6}$$

ahol az együtthatók

$$\begin{aligned} c_n(t) &= \int_0^t \frac{\sin(n\pi(t - \tau))}{n\pi} g_n(\tau) d\tau, \\ g_n(t) &= 2[\sin(n\pi a_1)u_1(t) + \sin(n\pi a_2)u_2(t)]. \end{aligned} \tag{7}$$

A sor bármelyik változóban egyszer tagonként differenciálható:

$$\begin{aligned} y_t(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} c'_n(t) \sin(n\pi x), \\ y_x(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\pi c_n(t) \cos(n\pi x). \end{aligned}$$

Mindhárom sorfejtés konvergens $L_2([0, 1] \times [0, T])$ -ben és bármely rögzített t esetén $L_2([0, 1])$ -ben is. Végül az $y(x, t)$ megoldás benne van a $H^1([0, 1] \times [0, T])$ Szoboljev-térben.

A tétel bizonyítása megtalálható [6]-ban, azt nem ismételjük itt meg, de néhány megjegyzést teszünk. A (7) képletet deriválva kapjuk, hogy

$$c'_n(t) = \int_0^t \cos(n\pi(t-\tau))g_n(\tau) d\tau. \quad (8)$$

Innen először is látszik, hogy $c_n(0) = c'_n(0) = 0$, ahonnan (3) következik. A (8) képlet azt is mutatja, hogy c'_n is abszolút folytonos, a második derivált L_2 -ben van, és $c''_n = n^2\pi^2c_n + g_n$ teljesül majdnem minden $t \in [0, 1]$ -re. Ez az egyenlet (formálisan) az (1) képlettel ekvivalens. Ugyancsak a (7) formula szerint

$$|c_n(t)| \leq \frac{2}{n\pi} \left[\left| \int_0^t \sin(n\pi\tau)u_1(t-\tau) d\tau \right| + \left| \int_0^t \sin(n\pi\tau)u_2(t-\tau) d\tau \right| \right],$$

ahonnan a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség alkalmazásával látható, hogy $\sum_n |c_n|$ egyenletesen korlátos t -ben, és emiatt a (6) sor abszolút és egyenletesen konvergens $[0, 1] \times [0, T]$ -n. Ebből pedig következik, hogy y egy folytonos függvény, amely nulla a húr végpontjaiban.

A sorfejtések miatt az $R(T)$ halmazok növekedése helyett vizsgálhatjuk az összes lehetséges c_n, c'_n együttható-sorozatok halmazának növekedését is. Ez az ötlet a következő állításhoz vezet:

2.1. LEMMA. ([6]) Legyen

$$\Lambda = \left\{ \left(\begin{array}{c} \sin(n\pi a_1) \\ \sin(n\pi a_2) \end{array} \right) e^{\pm in\pi t} : n \geq 1 \right\},$$

és jelölje $B(T)$ a Λ halmaz momentumterét a két komponensű komplex L_2 térben, azaz

$$B(T) = \left\{ \left\langle \left(\begin{array}{c} \sin(n\pi a_1) \\ \sin(n\pi a_2) \end{array} \right) e^{\pm in\pi t}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle_{n=1}^{\infty} \left| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in L_2(0, T; \mathbb{C}^2) \right. \right\}.$$

A $B(T)$ momentumtér növekszik T -ben, és $B(T_1) = B(T_2)$ pontosan akkor, ha $R(T_1) = R(T_2)$.

Bizonyítás. Először is vegyük észre, hogy

$$c'_n(T) \pm in\pi c_n(T) = \int_0^T e^{\pm in\pi t} g_n(t) dt, \\ g_n(t) = 2[\sin(n\pi a_1)u_1(t) + \sin(n\pi a_2)u_2(t)].$$

Két valós sorozat, c_n és c'_n helyett egyetlen komplex sorozatból, $c'_n(T) + in\pi c_n(T)$ -ből is rekonstruálhatók az $y(\cdot, T)$, $y_t(\cdot, T)$ függvények. A fenti képlet szerint ilyenkor csak $n \geq 1$ jelenik meg az exponenciális függvény kitevőjében. Ha erről áttérünk a komplex L_2 tér momentumterére, akkor minden nemnulla index megjelenik

a kitevőben. A

$$\begin{aligned} & (c'_n(T) + in\pi c_n(T)) + \overline{(c'_n(T) - in\pi c_n(T))} \\ &= 4 \int_0^T \left\langle \begin{pmatrix} \sin(n\pi a_1) \\ \sin(n\pi a_2) \end{pmatrix} e^{in\pi t}, \begin{pmatrix} \Re v_1 \\ \Re v_2 \end{pmatrix} \right\rangle dt, \\ & (c'_n(T) + in\pi c_n(T)) - \overline{(c'_n(T) - in\pi c_n(T))} \\ &= 4i \int_0^T \left\langle \begin{pmatrix} \sin(n\pi a_1) \\ \sin(n\pi a_2) \end{pmatrix} e^{in\pi t}, \begin{pmatrix} \Im v_1 \\ \Im v_2 \end{pmatrix} \right\rangle dt \end{aligned}$$

képletek azt mutatják, hogy a komplex L_2 és a valós L_2 fenti momentumterei egymásból rekonstruálhatók, és az egyik pontosan akkor bővül, amikor a másik. Ezzel a bizonyítást befejeztük. \square

Érdeemes itt megjegyezni, hogy mivel a $2^{-1/2}e^{in\pi t}$ függvények ortonormált bázist alkotnak $L_2(0, 2; \mathbb{C})$ -ben, ezért $T \geq 2$ -re a $B(T)$ momentumtér az $n \neq kq$ koordinátákon vett teljes komplex ℓ_2 tér lesz. Emiatt a minimális elérési idő az a legkisebb $T_0 \leq 2$ érték lesz, amely fölött $B(T)$ az $n \neq kq$ koordinátákon vett teljes komplex ℓ_2 teret kiadja.

3. A minimális elérési idő jellemzése

A továbbiakban szükségünk lesz az alábbi fogalomra.

3.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy a H Hilbert-térben a H_1, \dots, H_N alterek erősen függetlenek, ha van olyan $0 < c$ konstans, hogy bármely $h_i \in H_i$ vektorokra

$$\|h_1 + \dots + h_N\| \geq c(\|h_1\| + \dots + \|h_N\|). \tag{9}$$

Ez valóban erősebb a lineáris függetlenségnél, mert (9) miatt $h_1 + \dots + h_N = 0$ -ból $h_1 = \dots = h_N = 0$ következik. Heurisztikusan a fogalom azt jelenti, hogy bármelyik altér pozitív szöget zár be a többi altér összegével, vagyis nincsenek bennük „majdnem párhuzamos” vektorok. Nyilván feltehető (és a nemtriviális esetekben szükségszerű), hogy $c < 1$. Az is világos, hogy ha H_1, \dots, H_N erősen független, akkor H_1 és $H_2 + \dots + H_N$ is erősen független, hiszen

$$\|h_1 + (h_2 + \dots + h_N)\| \geq c(\|h_1\| + \dots + \|h_N\|) \geq c(\|h_1\| + (\|h_2 + \dots + h_N\|)).$$

3.1. LEMMA. *Ha H_1 és H_2 erősen független zárt alterek H -ban, akkor*

a)

$$\|p_2^\perp h_1\| \geq c\|h_1\| \quad \forall h_1 \in H_1, \quad \|p_1^\perp h_2\| \geq c\|h_2\| \quad \forall h_2 \in H_2$$

ahol p_i^\perp a H_i ortokomplementer alterére, H_i^\perp -re való merőleges vetítés, és c az erős függetlenség definíciójában szereplő konstans.

b) Van olyan $0 < \delta < 1$ szám, mégpedig $\delta = \sqrt{1 - c^2}$, hogy

$$\|p_2 h_1\| \leq \delta \|h_1\| \quad \forall h_1 \in H_1, \quad \|p_1 h_2\| \leq \delta \|h_2\| \quad \forall h_2 \in H_2,$$

ahol p_i a H_i -re való merőleges vetítés.

c) Ha H_1 és H_2 erősen független, nem feltétlenül zárt alterek H -ban, akkor $H_1^\perp + H_2^\perp = H$.

Bizonyítás. a)-t és b)-t elég csak az egyik szereposztásban igazolni. $p_2^\perp h_1 = h_1 - p_2 h_1$ miatt $\|p_2^\perp h_1\| \geq c(\|h_1\| + \|p_2 h_1\|) \geq c\|h_1\|$ bizonyítja a)-t. Mivel $\|h_1\|^2 = \|p_2 h_1\|^2 + \|p_2^\perp h_1\|^2 \geq \|p_2 h_1\|^2 + c^2\|h_1\|^2$, ezért $\|p_2 h_1\|^2 \leq (1 - c^2)\|h_1\|^2$, ami bizonyítja b)-t. A c)-ben feltehető, hogy a H_1, H_2 alterek zártak, mert $\overline{H_i^\perp} = H_i^\perp$, és a definícióból láthatóan a $\overline{H_1}, \overline{H_2}$ alterek is erősen függetlenek. Legyen $h \in H$ tetszőleges vektor. Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy

$$h = p_1(p_2 p_1)^n h + p_1^\perp (h + p_2 p_1 h + \dots + (p_2 p_1)^n h) + p_2^\perp (p_1 h + \dots + p_1(p_2 p_1)^{n-1} h). \quad (10)$$

Valóban, $n = 0$ -ra $h = p_1 h + p_1^\perp h$, másrészt

$$\begin{aligned} p_1(p_2 p_1)^n h &= (p_2 p_1)^{n+1} h + p_2^\perp p_1(p_2 p_1)^n h \\ &= p_1(p_2 p_1)^{n+1} h + p_1^\perp (p_2 p_1)^{n+1} h + p_2^\perp p_1(p_2 p_1)^n h. \end{aligned}$$

A b)-beli becslések miatt (10) jobboldalán az első összeadandó normában 0-hoz tart, a másik két összeadandóban pedig a véges összegek normában konvergálnak, ezért limeszben kapjuk a

$$h = p_1^\perp h^* + p_2^\perp h^{**}, \quad h^* = \sum_{n=0}^{\infty} (p_2 p_1)^n h, \quad h^{**} = p_1 \sum_{n=0}^{\infty} (p_2 p_1)^n h$$

előállítást, amely bizonyítja c)-t is. \square

A momentumterek vizsgálatához szükségünk lesz a következő állításra:

3.2. LEMMA. Legyen $W_i, i = 1, \dots, N$ véges sok erősen független zárt altér a H Hilbert-térben és legyen p_i a W_i -re való merőleges vetítés. Akkor tetszőleges $h_i \in W_i$ vektorokhoz megadható olyan $h \in H$ vektor, hogy $p_i h = h_i, i = 1, \dots, N$.

Bizonyítás. Mivel W_i és $\text{Lin}(W_j, j \neq i)$ erősen függetlenek, az előző lemma c) pontja szerint minden i -re

$$H = W_i^\perp + (\text{Lin}(W_j, j \neq i))^\perp = W_i^\perp + \bigcap_{j \neq i} W_j^\perp.$$

Ennek megfelelően minden h_i -nek létezik egy $h_i = h_i^* + h_i^{**}, h_i^* \in W_i^\perp, h_i^{**} \in \bigcap_{j \neq i} W_j^\perp$ felbontása. Nyilván $p_i h_i^* = 0$ és $p_i h_j^{**} = 0$, ha $i \neq j$. Ezért $h_i = p_i h_i = p_i h_i^{**}$, és akkor $h = \sum_j h_j^{**}$ választással $p_i h = p_i h_i^{**} = h_i$. \square

Látható, hogy a Λ rendszerben a $(\sin(n\pi a_1), \sin(n\pi a_2))^T$ vektorok párhuzamosak, ha $n = \pm(2kq + j)$ vagy $n = \pm(2kq + 2q - j)$ alakú egy rögzített $1 \leq j \leq q - 1$ mellett. Jelöljük V_j -vel a

$$\Lambda_j = \left\{ e^{i(2kq \pm j)\pi t} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

rendszer által kifeszített zárt alteret az $L_2(0, T; \mathbb{C})$ térben. Végül legyen

$$W_j = \begin{pmatrix} \sin(j\pi p_1/q) \\ \sin(j\pi p_2/q) \end{pmatrix} V_j.$$

3.3. LEMMA. *A Λ_j rendszer momentumtere az $L_2(0, T; \mathbb{C})$ térben a komplex ℓ_2 tér, ha $T \geq 2/q$, és ℓ_2 valódi részhalma, ha $T < 2/q$.*

Bizonyítás. Bár a hasonló állításokat a Riesz-bázisok elméletének felhasználásával szokás bizonyítani, mi inkább egy elemi indoklást mutatunk. Legyen $f \in L_2(0, 2/q; \mathbb{C})$, és legyen $f_0 = f|_{(0, 1/q)}$, $f_1(t) = f(t + 1/q)$. Akkor az f momentumait megadó integrál

$$\int_0^{2/q} e^{i(2kq \pm j)\pi t} f(t) dt = \int_0^{1/q} e^{i2kq\pi t} g_{\pm}(t) dt,$$

$$g_{\pm}(t) = e^{\pm ij\pi t} [f_0(t) + e^{\pm ij\pi/q} f_1(t)].$$

Az $e^{i2kq\pi t}$ rendszer konstans normájú ortogonális bázis $L_2(0, 1/q; \mathbb{C})$ -ben, ezért pontosan akkor kapjuk a teljes ℓ_2 momentumteret, ha g_+ és g_- két tetszőleges eleme lehet $L_2(0, 1/q; \mathbb{C})$ -nek. A g_{\pm} függvényeket az f_0, f_1 függvényekből kapjuk a

$$g_+ e^{-ij\pi t} = f_0 + e^{ij\pi/q} f_1,$$

$$g_- e^{ij\pi t} = f_0 + e^{-ij\pi/q} f_1$$

lineáris egyenletrendszerrel. Mivel $T = 2/q$ esetén (f_0, f_1) tetszőleges L_2 -beli pár lehet, és az egyenletrendszer megoldása bármely L_2 -beli (g_+, g_-) pár esetén egy L_2 -beli (f_0, f_1) pár, ezért ilyenkor a momentumtér a teljes ℓ_2 . Emiatt nyilván maximális a momentumtér $T > 2/q$ -ra is. Ha viszont $T < 2/q$, akkor f_1 már nem választható tetszőlegesen, és emiatt a momentumtér is kisebb lesz. \square

A Λ_j által kifeszített V_j altérbeli függvények egyszerűen jellemezhetők:

3.4. LEMMA. *Legyen $T > 2/q$. Akkor*

$$V_j = \{f \in L_2(0, T; \mathbb{C}) \mid f(t + 2/q) = 2 \cos(\pi j/q) f(t + 1/q) - f(t) \text{ m.m. } t\text{-re}\}. \tag{11}$$

Ha pedig $f \in V_j$ és $k \geq 2$, akkor m.m. $t \in (0, 1/q)$ -ra

$$f(t + k/q) = \frac{\sin(jk\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f(t + 1/q) - \frac{\sin(j(k-1)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f(t). \tag{12}$$

Bizonyítás. Mivel az $e^{i2k\pi qt}$ függvények által kifeszített tér az összes $1/q$ -periodikus L_2 -beli függvényből áll, ezért nyilván

$$V_j = \{e^{ij\pi t} g_1 + e^{-ij\pi t} g_2 \mid g_1, g_2 \text{ } 1/q\text{-periodikus } L_2\text{-beli függvény.}\}$$

Ilyen alakban minden $L_2(0, 2/q; \mathbb{C})$ -beli függvény előáll: az előző bizonyítás jelölésével $f_0 = e^{ij\pi t} g_1 + e^{-ij\pi t} g_2$, $f_1 = e^{ij\pi/q} \cdot e^{ij\pi t} g_1 + e^{-ij\pi/q} \cdot e^{-ij\pi t} g_2$ befut minden L_2 -beli (f_0, f_1) párt. A

$$\left(z - e^{ij\pi/q}\right) \left(z - e^{-ij\pi/q}\right) = z^2 - 2 \cos(j\pi/q)z + 1$$

azonosságból következik, hogy (11) teljesül minden $e^{ij\pi t} g_1 + e^{-ij\pi t} g_2$ alakú függvényre. Ez egyúttal bizonyítja (12)-t is $k = 2$ -re. Nagyobb k esetén teljes indukciót alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(t + (k + 1)/q) &= 2 \cos(j\pi/q) f(t + k/q) - f(t + (k - 1)/q) \\ &= 2 \cos(j\pi/q) \left[\frac{\sin(jk\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f_1 - \frac{\sin(j(k - 1)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f_0 \right] \\ &\quad - \left[\frac{\sin(j(k - 1)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f_1 - \frac{\sin(j(k - 2)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f_0 \right] \\ &= \frac{\sin(j(k + 1)\pi/q) + \sin(j(k - 1)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f_1 \\ &\quad - \frac{\sin(jk\pi/q) + \sin(j(k - 2)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f_0 \\ &\quad - \frac{\sin(j(k - 1)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f_1 + \frac{\sin(j(k - 2)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f_0 \\ &= \frac{\sin(j(k + 1)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f(t + 1/q) - \frac{\sin(jk\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f(t). \end{aligned}$$

□

3.5. LEMMA. *Ha a W_j alterek lineárisan függetlenek valamilyen T -re $H = L_2(0, T; \mathbb{C}^2)$ -ben, akkor erősen függetlenek is.*

Bizonyítás. A lineáris függetlenség azt jelenti, hogy ha valamilyen $f_j \in V_j$ -vel

$$\sum_{j=1}^{q-1} F_j(t) = 0 \quad \text{m.m. } t \in (0, T)\text{-re,} \quad F_j(t) = \begin{pmatrix} \sin(j\pi p_1/q) \\ \sin(j\pi p_2/q) \end{pmatrix} f_j(t), \quad (13)$$

akkor $f_j = 0$ m.m., $j = 1, \dots, q - 1$. Az előző lemma szerint az f_j -k kifejezhetők az $f_{j,0} = f_j|_{(0,1/q)}$, $f_{j,1}(t) = f_j(t + 1/q)$, $0 < t < 1/q$ függvényekkel, ezért (13)

minden $t \in (r/q, (r+1)/q)$ esetén egy egyenletpárt ad. Ha $k/q < T \leq (k+1)/q$ és $f = (f_{j,0}, f_{j,1})_{j=1}^{q-1}$, akkor a (13) egyenletrendszer $(0, T - k/q)$ -n a $Cf = 0$, $(T - k/q, 1/q)$ -n a $C^*f = 0$ alakban írható, ahol a C és C^* mátrixok t -től függetlenek (és C a C^* két sorral való bővítése). A W_j -k függetlensége miatt $Cf = 0$ -nak és $C^*f = 0$ -nak is csak $f = 0$ a megoldása, ezért van olyan $\delta > 0$, hogy

$$|Cf|^2 \geq \delta \sum_{j=1}^{q-1} (|f_{j,0}|^2 + |f_{j,1}|^2), \quad |C^*f|^2 \geq \delta \sum_{j=1}^{q-1} (|f_{j,0}|^2 + |f_{j,1}|^2).$$

Az első becslést integrálva $(0, T - k/q)$ -n, a másodikat $(T - k/q, 1/q)$ -n, majd összeadva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \left\| \sum F_j \right\|_{L_2(0,T;\mathbb{C}^2)}^2 &\geq \delta \sum \|f_j\|_{L_2(0,2/q)}^2 \geq c_1 \sum \|f_j\|_{L_2(0,T)}^2 \\ &\geq c_2 \sum \|F_j\|_{L_2(0,T)}^2 \geq \frac{c_2}{q-1} \left(\sum \|F_j\|_{L_2(0,T)} \right)^2, \end{aligned}$$

ezért az erős függetlenséget igazoltuk $c = \sqrt{c_2/(q-1)}$ konstanssal. □

A minimális elérési időre a következő jellemzést adhatjuk:

3.6. LEMMA. T_0 az a legkisebb érték, amelyre a

$$W_j = \begin{pmatrix} \sin(j\pi p_1/q) \\ \sin(j\pi p_2/q) \end{pmatrix} V_j, \quad j = 1, \dots, q-1 \tag{14}$$

alterek lineárisan független rendszert alkotnak $L_2(0, T; \mathbb{C}^2)$ -ben minden $T > T_0$ -ra.

Bizonyítás. Láttuk, hogy T_0 a legkisebb idő, amely mellett minden $T > T_0$ -ra a Λ exponenciális rendszer $L_2(0, T; \mathbb{C}^2)$ -beli momentumtere a q -val nem osztható indexeken befutja az ℓ_2 teret. A 3.3. lemma szerint a (14) altereket kifeszítő Λ -beli vektorok momentumtere ℓ_2 lesz, ha $T \geq 2/q$, és ilyenkor az alterekben vannak olyan vektorok, melyek éppen egy előírt ℓ_2 -beli momentumsorozatot adnak. Ha a (14) alterek lineárisan függetlenek valamilyen T -re, akkor a 3.5. lemma szerint erősen függetlenek is, ezért a 3.2. lemma szerint ilyen T -re a teljes Λ rendszer momentumtere is befutja ℓ_2 -t, hiszen h és $p_j h$ skaláris szorzata egy W_j -beli függvényvel ugyanaz. Tegyük fel most, hogy a W_j alterek lineárisan összefüggők. A

$$\varphi_n = \begin{pmatrix} \sin(n\pi p_1/q) \\ \sin(n\pi p_2/q) \end{pmatrix} e^{i n \pi t}$$

jelöléssel élve ez azt jelenti, hogy a q -val nem osztható n indexeken létezik egy nem azonosan nulla $\{c_{n,0}\} \in \ell_2$ sorozat, amelyre $\sum_n c_{n,0} \varphi_n = 0$ (és az összeg $L_2(0, T; \mathbb{C}^2)$ -ben konvergens). Akkor viszont bármely $h \in L_2(0, T; \mathbb{C}^2)$ -re

$$0 = \langle h, \sum_n c_{n,0} \varphi_n \rangle = \sum_n \overline{c_{n,0}} \langle h, \varphi_n \rangle,$$

azaz minden momentumsorozat merőleges $\{c_{n,0}\}$ -ra, és akkor a momentuntér nem lehet maximális. □

A dolgozat fő eredményének kimondásához vezessük be a következő lineáris egyenletrendszert. Válasszunk $f_j \in V_j$ függvényeket, és vezessük be az

$$\begin{aligned} x_p &= \sum_{j=1}^{q-1} \sin(j\pi p/q) f_{j,0}, \\ y_p &= \sum_{j=1}^{q-1} \sin(j\pi p/q) f_{j,1} \end{aligned} \tag{15}$$

jelöléseket, ahol $f_{j,0} = f_j|_{(0,1/q)}$, $f_{j,1}(t) = f_j(t + 1/q)$, $0 < t < 1/q$. Vegyük észre, hogy az $(f_{j,0})_{j=1}^{q-1} \mapsto (x_p)_{p=1}^{q-1}$ és $(f_{j,1})_{j=1}^{q-1} \mapsto (y_p)_{p=1}^{q-1}$ hozzárendelések kölcsönösen egyértelműek. Valóban, ha

$$\sum_{j=1}^{q-1} \alpha_j \sin(j\pi p/q) = 0 \quad p = 1, \dots, q-1,$$

akkor a $\varphi(t) = \sum_{j=1}^{q-1} \alpha_j \sin(jt)$ egy olyan, legfeljebb $q-1$ -edfokú trigonometrikus polinom, melynek gyöke van az összes $\pi k/q$ pontban, tehát $[0, 2\pi)$ -ben van legalább $2q-1$ gyöke, ezért $\varphi \equiv 0$, vagyis $\alpha_1 = \dots = \alpha_{q-1} = 0$.

Az alábbiakban minden egyenlet egy egyenletpárt jelent, ahol p^* helyébe minden előfordulásakor p_1 -et, illetve minden előfordulásakor p_2 -t kell helyettesíteni:

$$(A) \begin{cases} [0] & x_{p^*} = 0, \\ [1] & y_{p^*} = 0, \\ [2] & y_{p^*+1} + y_{p^*-1} = 0, \\ [k] & y_{p^*+k-1} + y_{p^*-k+1} - x_{p^*+k-2} - x_{p^*-k+2} = 0, \quad k \geq 3. \end{cases}$$

Az x_p, y_p változók definíciójából látható, hogy

$$(B) \begin{cases} x_0 = x_q = 0, \quad x_{-p} = -x_p, \quad x_{q+p} = -x_{q-p}, \\ y_0 = y_q = 0, \quad y_{-p} = -y_p, \quad y_{q+p} = -y_{q-p}. \end{cases}$$

Látjuk, hogy a (B) redukció figyelembe vételével az (A) egyenletrendszer az $x_1, \dots, x_{q-1}, y_1, \dots, y_{q-1}$ változókat tartalmazza. Az egyenletrendszer mátrixa egyszerű szerkezetű: soronként legfeljebb négy ± 1 elemen kívül csak nullákat tartalmaz, és a nemnulla értékek is szabályosan helyezkednek el. Heurisztikusan azt lehet mondani, hogy két $q-1$ hosszúságú diszkrét húr p_1 és p_2 pontjából egy egységnyi jel szimmetrikusan továbbterjed mindkét irányba, és (B) szerint a húr

határához érve a jel ellentétes fázisban verődik vissza. A dolgozat fő eredménye, hogy a keresett minimális elérési idő attól függ, milyen k esetén lesz az (A), (B) egyenletrendszernek csak a nullvektor a megoldása, vagyis mikor lesz az egyenletrendszer mátrixának rangja a maximális $2q - 2$:

3.1. TÉTEL. *Tekintsük azt a lineáris egyenletrendszert az $x_1, \dots, x_{q-1}, y_1, \dots, y_{q-1}$ változókra, amely az (A)-beli $[0], [1], \dots, [k]$ egyenletpárokból adódik a (B) figyelembe vételével. Az a minimális T_0 elérési idő, amely fölött $R(T)$ már nem nő tovább, megadható $T_0 = (k_0 + 1)/q$ alakban, ahol k_0 a legkisebb olyan k érték, amelynél a (B) szerint módosított (A) lineáris egyenletrendszernek csak a nullvektor a megoldása. Az $R(T_0)$ halmaz már tartalmazza a húr összes, véges idő alatt elérhető mozgásállapotát.*

Bizonyítás. A 3.6. lemma szerint azt kell vizsgálnunk, milyen T -re lesznek a W_j alterek lineárisan függetlenek $L_2(0, T; \mathbb{C}^2)$ -ben. Legyen tehát $f_j \in V_j$, és vizsgáljuk a

$$\sum_{j=1}^{q-1} \sin(j\pi p^*/q) f_j = 0 \text{ m.m, } p^* = \begin{cases} p_1 \\ p_2 \end{cases} \quad (16)$$

egyenletpárt. A t időt felosztva $1/q$ hosszú szakaszokra az $f_{j,0} = f_j|_{(0,1/q)}$, $f_{j,1}(t) = f_j(t + 1/q)$, $0 < t < 1/q$ jelölésekkel az alábbi egyenletek adódnak:

$$x_{p^*} = \sum_{j=1}^{q-1} \sin(j\pi p^*/q) f_{j,0} = 0,$$

$$y_{p^*} = \sum_{j=1}^{q-1} \sin(j\pi p^*/q) f_{j,1} = 0,$$

a $k \geq 2$ indexekre pedig a 3.4. lemma szerint trigonometrikus azonosságok alkalmazásával az adódik, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \sum_{j=1}^{q-1} \sin(j\pi p^*/q) \left(\frac{\sin(jk\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f_{j,1} - \frac{\sin(j(k-1)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f_{j,0} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{q-1} \frac{\cos(j(p^* - k)\pi/q) - \cos(j(p^* + k)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f_{j,1} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{q-1} \frac{\cos(j(p^* - k + 1)\pi/q) - \cos(j(p^* + k - 1)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f_{j,0}. \end{aligned} \quad (17)$$

Mivel

$$2x_p = 2 \sum_{j=1}^{q-1} \sin(j\pi p/q) f_{j,0} = \sum_{j=1}^{q-1} \frac{\cos(j(p-1)\pi/q) - \cos(j(p+1)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f_{j,0},$$

és hasonlóan y_p -re, ezért (17) ekvivalens az

$$y_{p^*-k+1} + y_{p^*-k+3} + \cdots + y_{p^*+k-1} - (x_{p^*-k+2} + x_{p^*-k+4} + \cdots + x_{p^*+k-2}) = 0$$

egyenletpárral, ami a 2-vel kisebb k esetére felírt hasonló egyenletpár miatt ekvivalens az

$$y_{p^*-k+1} + y_{p^*+k-1} - (x_{p^*-k+2} + x_{p^*+k-2}) = 0$$

egyenletpárral. Vagyis az (A) egyenletrendszer adódik, és nyilvánvalóan a (B) azonosságok is teljesülnek. Ha $k/q < T \leq (k+1)/q$, akkor a $[0], [1], \dots, [k-1]$ egyenletek a teljes $[0, 1/q]$ szakaszon teljesülnek, $[k]$ pedig a $[0, T - k/q]$ szakaszon. Nézzük először a $k \leq k_0$, $k/q < T < (k+1)/q$ esetet. Akkor a $T - k/q < t < 1/q$ értékekre vett x_p, y_p változókra csak a $[0], [1], \dots, [k-1]$ egyenletek teljesülnek, ezért vannak olyan x_p, y_p nem mind nulla konstansok, melyek kielégítik $[0], [1], \dots, [k-1]$ -et. Legyen $0 < t < T - k/q$ -ra $f_{j,0} = f_{j,1} = 0$, $T - k/q < t < 1/q$ esetén pedig $f_{j,0}, f_{j,1}$ legyenek az x_p, y_p megoldásnak (15) szerint megfelelő nem mind nulla konstansfüggvények. Akkor a fentiek szerint megkapjuk a (16) egyenletnek egy nemtriviális megoldását, azaz a W_j alterek nem függetlenek, emiatt az $R(T)$ halmaz ilyen T -re nem maximális. Most legyen $k = k_0$, és $T = (k_0 - 1)/q$ vagy $k > k_0$. Akkor minden $0 < t < 1/q$ -hoz tartozó x_p, y_p -re teljesülnek a ((B) szerint módosított) $[0], [1], \dots, [k]$ egyenletek, vagyis csak $x_p = y_p = 0$ a megoldás, és emiatt a (16) egyenletnek csak triviális megoldása van. Ez azt jelenti, hogy a W_j alterek lineárisan függetlenek, akkor pedig a 3.6. lemma szerint bármely $T \geq (k_0 + 1)/q$ -ra az $R(T)$ halmaz maximális lesz. A bizonyítást befejeztük. \square

A tétel pontos leírását adja a minimális elérési időnek. A kritérium nem nagy p_1, p_2 és q értékekre papíron könnyen számolható, illetve bármely p_1, p_2, q esetén könnyen programozható a (módosított) $[0], [1], \dots, [k]$ egyenleteknek megfelelő mátrix rangjának vizsgálata. Ugyanakkor érdekes lenne egy explicit formula, mely p_1, p_2 és q függvényében megadja k_0 -t. Ez számos speciális esetben meghatározható, ezekből bemutatunk néhányat, teljes általánosságban viszont nem ismert.

Vezessük be az

$$u_k = y_k - x_{k-1}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

változókat. A (B) szerint

$$u_{-k} = x_{k+1} - y_k.$$

Nyilván u_k $2q$ -periodikus, de valójában $2q-2$ független új változót ad meg, melyekből az x_k, y_k változók egyértelműen kifejezhetők, és az (A) egyenletrendszer tovább egyszerűsíthető:

3.7. LEMMA. Az új u_k változókból a korábbi változók felírhatók az

$$\begin{aligned} x_k &= \sum_{j=0}^{k-1} u_{1-k+2j} = u_{k-1} + u_{k-3} + \dots + u_{1-k}, \\ y_k &= \sum_{j=0}^{k-1} u_{2-k+2j} = u_k + u_{k-2} + \dots + u_{2-k} \end{aligned} \tag{18}$$

alakban. Speciálisan

$$\sum_{j=0}^{q-1} u_{i+2j} = 0 \quad \forall i, \tag{19}$$

azaz a páratlan indexű u -k és a páros indexű u -k összege is 0, így valójában $2q - 2$ független u_k változót definiáltunk. Az új változókkal az (A) egyenletrendszer a következő alakot ölti a p/q , $(p + s)/q$ pontpár esetén:

$$(A') \begin{cases} [0] & \sum_{j=0}^{p-1} u_{1-p+2j} = 0, & \sum_{j=0}^{p+s-1} u_{1-p-s+2j} = 0, \\ [1] & \sum_{j=0}^{p-1} u_{2-p+2j} = 0, & \sum_{j=0}^{p+s-1} u_{2-p-s+2j} = 0, \\ [2] & u_{p+1} = u_{-p+1}, & u_{p+s+1} = u_{-p-s+1}, \\ [k] & u_{p+k-1} = u_{-p+k-1}, & u_{p+s+k-1} = u_{-p-s+k-1}, \quad k \geq 3. \end{cases}$$

Bizonyítás. Definíció szerint $u_0 = -x_{-1} = x_1$ és $u_1 = y_1$. Ezzel a (18) egyenleteket $k = 1$ -re megkaptuk. Nagyobb k esetén teljes indukciót alkalmazunk az $x_k = u_{1-k} + y_{k-1}$, illetve az $y_k = u_k + x_{k-1}$ formulák alapján. Így megkapjuk (18)-at, speciálisan az $x_q = y_q = 0$ egyenletek miatt (18)-ból (19) is adódik. Az (A') rendszerben [0] és [1] az $x_p = x_{p+s} = 0$ és $y_p = y_{p+s} = 0$ egyenletek (18) szerinti átírása, [k] pedig az eredeti egyenletpár $y_{p^*+k-1} - x_{p^*+k-2} = x_{p^*-k+2} - y_{p^*-k+1}$ alakra hozásából következik. \square

Az új (A') egyenletrendszer annyiban egyszerűbb, mint az (A), hogy a ≥ 2 indexű egyenletek két változó egyenlőségét állítják. A következőkben azt vizsgáljuk, melyik [k] esetén találjuk az első redundáns egyenletet. A [k] egyik egyenletét akkor nevezzük redundánsnak, ha kifejezhető [k] másik egyenletéből és a [0]-[k - 1] egyenletekből a $2q$ -periodikusság és (19) figyelembe vételével.

3.8. LEMMA. a) Ha az (A') egyenletrendszerben $[k_1]$ egyik egyenlete redundáns, akkor a $k > k_1$ indexű egyenletpárok megfelelő egyenlete is redundáns lesz. b) Ha először $[k_1]$ -ben van redundáns egyenlet, akkor

$$T_0 \left(\frac{p}{q}, \frac{p+s}{q} \right) = \frac{2q - k_1 - 2}{q}.$$

Bizonyítás.

a) A [2] egyenletpár [0] miatt ekvivalens a $\sum_{j=0}^{p-1} u_{3-p+2j} = 0, \sum_{j=0}^{p+s-1} u_{3-p-s+2j} = 0$ egyenletekkel. Hasonlóan látható teljes indukcióval, hogy [k] ekvivalens a $\sum_{j=0}^{p-1} u_{k-p+2j} = 0, \sum_{j=0}^{p+s-1} u_{k-p-s+2j} = 0$ egyenletpárral. Vagyis ekvivalens átalakítás után [k] egyenleteit úgy kapjuk, hogy [0] egyenleteiben minden indexet megnövelünk k-val. Emiatt ha [k] egyik egyenlete kifejezhető nem későbbi indexű más egyenletekkel, akkor az indexek eltolásával kapott későbbi egyenlet is redundáns lesz. Megjegyezzük, hogy a változók indexben vett 2q-periodikussága és a (19) egyenletek is invariánsak az indexek eltolására.

b) Tudjuk, hogy elég nagy [k] esetén a [0]-[k] egyenletrendszernek csak a nullvektor lesz a megoldása. Az a) szerint ha k_1 az első redundáns egyenlet, akkor $k_1 \leq k \leq k_0$ -ra [k] egyik egyenlete lesz redundáns, $k > k_0$ -ra pedig mindkettő. Összesen $2q - 2$ független egyenlet kell az egyértelmű megoldhatósághoz, ebből $k_1 - 1$ -ig van $2k_1$, utána kell még $2q - 2k_1 - 2$, tehát az utolsó információt hordozó egyenlet indexe $k_0 = 2q - k_1 - 3$. Mivel tudjuk, hogy $T_0 = (k_0 + 1)/q$, a bizonyítást befejeztük. \square

A fenti apparátussal $s = 1$ és $s = 2$ esetére fogjuk a minimális elérési időt meghatározni.

3.9. LEMMA.

$$T_0 \left(\frac{p}{q}, \frac{p+1}{q} \right) = \max \left(\frac{2p}{q}, \frac{2q - 2p - 2}{q} \right).$$

Bizonyítás. Az előző lemma miatt azt kell megmutatni, hogy $2p \leq 2q - 2p - 2$ esetén az első redundáns egyenlet indexe $k_1 = 2p$. Az egyenletrendszer

$$(A') \left\{ \begin{array}{l} [0] \quad \sum_{j=0}^{p-1} u_{1-p+2j} = 0, \quad \sum_{j=0}^p u_{-p+2j} = 0, \\ [1] \quad \sum_{j=0}^{p-1} u_{2-p+2j} = 0, \quad \sum_{j=0}^p u_{1-p+2j} = 0 \Leftrightarrow u_{-p} = 0, u_{p+1} = 0, \\ [2] \quad u_{p+1} = u_{-p+1}, \quad u_{p+2} = u_{-p} \Leftrightarrow u_{1-p} = 0, u_{p+2} = 0, \\ [3] \quad u_{p+2} = u_{-p+2}, \quad u_{p+3} = u_{-p+1} \Leftrightarrow u_{2-p} = 0, u_{p+3} = 0, \\ \vdots \\ [2p-2] \quad u_{3p-3} = u_{p-3}, \quad u_{3p-2} = u_{p-4} \Leftrightarrow u_{p-3} = 0, u_{3p-2} = 0, \\ [2p-1] \quad u_{3p-2} = u_{p-2}, \quad u_{3p-1} = u_{p-3} \Leftrightarrow u_{p-2} = 0, u_{3p-1} = 0, \\ [2p] \quad u_{3p-1} = u_{p-1}, \quad u_{3p} = u_{p-2} \Leftrightarrow u_{p-1} = 0, u_{3p} = 0. \end{array} \right.$$

A [0] első egyenletére tekintettel [2p - 2]-ből és a korábbi egyenletekből $u_{p-1} = 0$ következik; hasonlóan [0] második egyenletéből [2p - 1] szerint $u_p = 0$. Ezért

[2p] első egyenlete redundáns. Amint láttuk, a [0]-[2p-1] összesen 4p egyenletéből levezethető, hogy a -p és 3p-1 közötti indexű összes $u_k = 0$. Vagyis 4p egyenletből 4p ismeretlent meg lehet határozni, ezért ezen 4p egyenlet között csak akkor lehet redundáns, ha a 4p változó nem mind független, vagyis ha $-p + 2q - 2 \leq 3p - 1$, azaz $4p \geq 2q - 1$, tehát $2p \geq q$, de ez ellentmond a $2p \leq 2q - 2p - 2$ feltevésnek. \square

Az $s = 2$ esetben a következőképpen kapjuk az optimális elérési időt. Az állítást olyan alakban mondjuk ki, amely kiemeli a $p \leftrightarrow q - p - 2$ szimmetriát.

3.10. LEMMA. Legyen $T_0 = T_0(p/q, (p + 2)/q)$.

- a) Ha p páros és $q - p - 2$ páratlan, akkor $T_0 = \max(2p/q, (2q - 2p - 2)/q)$.
- b) Ha p páratlan és $q - p - 2$ páros, akkor $T_0 = \max((2p + 2)/q, (2q - 2p - 4)/q)$.
- c) Ha p és $q - p - 2$ is páratlan, akkor $T_0 = \max(2p/q, (2q - 2p - 4)/q)$ ha $p \neq q - p - 2$ és $T_0 = (2p + 2)/q = (2q - 2p - 2)/q = 1$, ha $p = q - p - 2$.

Bizonyítás. Most is megkeressük az első redundáns egyenletet.

$$(A') \left\{ \begin{array}{l} [0] \sum_{j=0}^{p-1} u_{1-p+2j} = 0, \quad \sum_{j=0}^{p+1} u_{-1-p+2j} = 0 \Leftrightarrow u_{-p-1} + u_{p+1} = 0, \\ [1] \sum_{j=0}^{p-1} u_{2-p+2j} = 0, \quad \sum_{j=0}^{p+1} u_{-p+2j} = 0 \Leftrightarrow u_{-p} + u_{p+2} = 0, \\ [2] u_{p+1} = u_{-p+1}, \quad u_{p+3} = u_{-p-1} \Leftrightarrow u_{-p-1} + u_{1-p} = 0, \quad u_{p+3} + u_{p+1} = 0, \\ [3] u_{p+2} = u_{-p+2}, \quad u_{p+4} = u_{-p} \Leftrightarrow u_{2-p} + u_{-p} = 0, \quad u_{p+4} + u_{p+2} = 0, \\ \vdots \\ [2p-3] \Leftrightarrow u_{p-6} + u_{p-4} = 0, \quad u_{3p-2} + u_{3p-4} = 0, \\ [2p-2] \Leftrightarrow u_{p-5} + u_{p-3} = 0, \quad u_{3p-1} + u_{3p-3} = 0, \\ [2p-1] \Leftrightarrow u_{p-4} + u_{p-2} = 0, \quad u_{3p} + u_{3p-2} = 0, \\ [2p] \quad \Leftrightarrow u_{p-3} + u_{p-1} = 0, \quad u_{3p+1} + u_{3p-1} = 0, \\ [2p+1] \Leftrightarrow u_{p-2} + u_p = 0, \quad u_{3p+2} + u_{3p} = 0, \\ [2p+2] \Leftrightarrow u_{p-1} + u_{p+1} = 0, \quad u_{3p+3} + u_{3p+1} = 0. \end{array} \right.$$

Legyen először p páros. Akkor [0] illetve [1] első egyenlete felírható

$$\begin{aligned} (u_{p-1} + u_{p-3}) + (u_{p-5} + u_{p-7}) + \dots + (u_{3-p} + u_{1-p}) &= 0, \\ (u_p + u_{p-2}) + (u_{p-4} + u_{p-6}) + \dots + (u_{4-p} + u_{2-p}) &= 0 \end{aligned}$$

alakban. Ezért a [4], [6], ..., [2p-4] egyenletekből kapjuk, hogy $u_{p-1} + u_{p-3} = 0$, emiatt [2p] első egyenlete redundáns. Most nézzük csak a [0]-[2p-1] egyenleteket. A [2], [4], ..., [2p-4], [2p-2], [2p-4], [0], [2], [4], ..., [2p-4], [2p-2] egyenletekből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} u_{-p-1} = -u_{1-p} = u_{3-p} = \dots = u_{p-5} = -u_{p-3} = u_{p-1} = -u_{p+1} \\ = u_{p+3} = -u_{p+5} = \dots = -u_{3p-3} = u_{3p-1}. \end{aligned}$$

Hasonlóan a $[3], [5], \dots, [2p-3], [2p-1], [2p-3], [1], [3], \dots, [2p-5], [2p-3], [2p-1]$ egyenletekből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} u_{-p} &= -u_{2-p} = u_{4-p} = \dots = u_{p-4} = -u_{p-2} = u_p = -u_{p+2} \\ &= u_{p+4} = \dots = u_{3p-4} = -u_{3p-2} = u_{3p}. \end{aligned}$$

Vagyis a $[0]-[2p-1]$ $4p$ egyenletéből a $-p-1$ és $3p$ közti indexű $4p+2$ változók alteréből két szabadsági fokú rendszer maradt. Emiatt a $[0]-[2p-1]$ egyenletek között csak akkor lehet redundáns, ha nem mind a $4p+2$ változó független, vagyis ha $-p-1+2q-2 \leq 3p$, $4p \geq 2q-4$, azaz $p \geq q-p-2$. Mivel páros p -re q páratlan, ezért $p \neq q-p-2$, ezzel beláttuk:

$$\text{Ha } p \leq q-p-2 \text{ páros, akkor } T_0 = \frac{2q-2p-2}{q}.$$

Legyen most p páratlan. Akkor $[0]$, illetve $[1]$ első egyenletének alakja

$$\begin{aligned} u_{p-1} + (u_{p-3} + u_{p-5}) + \dots + (u_{3-p} + u_{1-p}) &= 0, \\ u_p + (u_{p-2} + u_{p-4}) + \dots + (u_{4-p} + u_{2-p}) &= 0. \end{aligned}$$

Ezért $[2p-2]$ -ből $u_{p-1} = 0$, $[2p-1]$ -ből $u_p = 0$ következik. A páros indexű egyenleteket először csökkenő, aztán növekvő sorrendben figyelembe véve kapjuk, hogy

$$0 = u_{p-1} = u_{p-3} = u_{p-5} = \dots = u_{-p-1} = u_{p+1} = u_{p+3} = \dots = u_{3p+1},$$

és hasonlóan egy indexszel eltolva

$$0 = u_p = u_{p-2} = \dots = u_{3p+2}.$$

Innen következik, hogy $[2p+2]$ első egyenlete redundáns. Másrészt a $[0]-[2p+1]$ $4p+4$ egyenletéből megkaptuk, hogy az u_{-p-1} és u_{3p+2} közti $4p+4$ változó mindegyike nulla. Vagyis $[0]-[2p+1]$ -ben nem lehet redundáns egyenlet, ha a változók függetlenek, azaz $-p-1+2q-2 > 3p+2$, másképpen ha $p \leq q-p-3$. Ezzel igazoltuk:

$$\text{Ha } p \leq q-p-3 \text{ páratlan, akkor } T_0 = \frac{2q-2p-4}{q}.$$

Végül legyen $p = q-p-2$ páratlan. Akkor $[2p]$ első egyenlete redundáns. Ugyanis $3p+1 = 2q-p-3$ miatt

$$\begin{aligned} u_{3p+1} + u_{3p-1} &= u_{-p-3} + u_{-p-5} = -(u_{-p-1} + u_{1-p} + \dots + u_{2q-p-7}) \\ &= -[(u_{-p-1} + u_{1-p}) + \dots + (u_{p-5} + u_{p-3}) + u_{p-1} \\ &\quad + (u_{p+1} + u_{p+3}) + \dots + (u_{3p-5} + u_{3p-3})] = 0. \end{aligned}$$

Másrészt ha $[2p - 1]$ -ben is lenne redundáns egyenlet, akkor $[0] - [2p + 1]$ -ben legfeljebb $4p + 1 = 2q - 3$ független egyenlet volna, márpedig láttuk, hogy ezekből az egyenletekből következik, hogy mind a $2q - 2$ változó egyenlő nullával. Vagyis ez esetben az első redundáns egyenlet $[2p]$ -beli, ezért

$$T_0 = (2q - 2p - 2)/q = (2p + 2)/q = 1.$$

A fentiekből a lemma állításai már könnyen adódnak. Valóban, ha p páros és $q - p - 2$ páratlan, akkor $p \neq q - p - 2$ és $p < q - p - 2$ esetén $T_0 = (2q - 2p - 2)/q$, $p > q - p - 2$ esetén pedig $T_0 = (2q - 2(q - p - 2) - 4)/q = 2p/q$, ahonnan a lemma a) állítása következik. Ha p páratlan és $q - p - 2$ páros, akkor szintén $p \neq q - p - 2$ és $p < q - p - 2$ esetén $T_0 = (2q - 2p - 4)/q$; $p > q - p - 2$ esetén pedig $T_0 = (2q - 2(q - p - 2) - 2)/q = (2p + 2)/q$, amiből b) következik. Végül ha p és $q - p - 2$ is páratlan, de nem egyenlők, akkor $p < q - p - 2$ esetén $T_0 = (2q - 2p - 4)/q$; $p > q - p - 2$ esetén pedig $T_0 = (2q - 2(q - p - 2) - 4)/q = 2p/q$, a $p = q - p - 2$ esetet pedig már láttuk. Ezzel a c) is igazolást nyert, amivel a bizonyítást befejeztük. \square

Hivatkozások

- [1] S. A. AVDONIN AND J. EDWARD: *Exact controllability for a string with attached masses*, IMA Preprints, Minnesota (2015).
- [2] C. CASTRO: *Exact controllability of the 1-d wave equation from a moving interior point*, ESAIM: COCV **19** (2013), no. 1, 301–316.
- [3] S. HANSEN AND E. ZUAZUA: *Exact controllability and stabilization of a vibrating string with an interior point mass*, SIAM J. Control and Optim. **33** (1995), no. 5, 1357–1391.
- [4] V. A. IL'IN AND E. I. MOISEEV: *Optimization of the boundary control of string vibrations by an elastic force on an arbitrary sufficiently large time interval*, Diff. Equ. **42** (2006), no. 12, 1775–1786.
- [5] I. JOÓ: *On the reachability set of a string in two interior points*, Acta Math. Hung. **49** (1987), 203–211.
- [6] I. JOÓ: *The control of a string in two interior points*, Periodica Math. Hung. **22** (1991), no. 1, 15–25.

(Beérkezett: 2016. március 29.)

HORVÁTH MIKLÓS
 Matematika Intézet, Analízis Tanszék
 Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
 H 1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3–9.
 horvath@math.bme.hu

THE CONTROL OF VIBRATING STRINGS

MIKLÓS HORVÁTH

We investigate the reachable movement states of a finite string, fixed at the endpoints, with zero initial state and controlled in two interior points. It is known that all states reachable in finite time can be obtained in a fixed finite time T_0 . In this paper we give a simple linear algebraic characterization of the minimal reachability time T_0 .

MATEMATIKAI KÖZGAZDASÁGTANRÓL MATEMATIKUSOKNAK

SIMONOVITS ANDRÁS

Kulcsszavak: matematikai közgazdaságtan, optimalizálás, egyensúly, dinamika, kormányzati beavatkozás.

Köszönetnyilvánítás: Hálásan köszönöm Freud Róbert és Lázár Eszter értékes megjegyzéseit.

1. Bevezetés

Gondtalan gyermekkorát maga után hagyva minden ember *gyakorlati* közgazdász lesz. Rövid távon: adott árak és jövedelem mellett, hajlamait és ízlését követve eldönti, hogy a különféle termékek (és szolgáltatások) között hogyan osztja el a jövedelmét. Hosszabb távon: úgy választ foglalkozást, hogy képességeinek megfelelő jövedelmet érjen el, és úgy vesz föl hitelt, illetve úgy takarékoskodik, hogy élete minél kellemesebben teljen.

Ebben a cikkben viszont az *elméleti* közgazdaságtant, azon belül is a matematikai módszert mutatjuk be érdeklődő matematikusoknak. Modellek segítségével megpróbáljuk megmagyarázni, néha előrejelezni, hogy miért így dönt az egyén. Sőt, az egyénről az egész társadalomra kiterjesztve a modelleket, elemezzük a kialakuló piaci árakat és jövedelmeket. A politikusok tanácsadójává szegődve még azt is vizsgálhatjuk, hogyan érdemes a kormánynak az adók és transzferek révén a jövedelmek eloszlását módosítaniuk. Megjegyezzük, hogy a kvantitatív közgazdaságtannak létezik egy másik válfaja: az *ökonometria*, amely a matematikai statisztika megfelelően módosított eszközeivel próbálja meg feltárni a közgazdaságtanban érvényesülő statisztikai szabályosságokat. Ez utóbbival nem foglalkozunk.

A matematika hasonló szerepet játszik a közgazdaságtanban, mint a természettudományokban: nyelv. Csupán a modellezett jelenségekről szóló ismeretek bizonytalanabbak, és a beavatkozási célok és eszközök erkölcsi tartalma kétségesebb itt, mint ott.

A cikk szerkezete a következő: a 2. szakasz az egyéni döntések elméletét ismerteti, statikus és dinamikus nézőpontból. A 3. szakasz a többszereplős döntések

egyensúlyát vázolja: először statikus, majd dinamikus változatban, megkülönböztetve a sok és a kevésszereplős eseteket. A 4. szakasz a kormányzati beavatkozás legegyszerűbb modelljeit vázolja. Az 5. szakasz vázolja a történetet, míg a 6. szakasz megpróbál néhány következtetést levonni. Rövid hivatkozásjegyzék zárja a cikket.

Szándékosan a történeti összefoglalásra halasztottam az irodalmi hivatkozásokat, és nagyon megtartóztattam magam a hivatkozásokban, mert nem hiszem, hogy az átlagolvasó cikkem elolvasása után megveszi a többszáz-oldalas könyveket, hogy részletesebben is tájékozódjon a kérdéskörrel.

2. Egyéni fogyasztási döntések

Ebben a szakaszban először az egyéni fogyasztási döntések statikus, majd dinamikus modelljét mutatjuk be.

2.1. Statikus megközelítés

Statikus modellünkben egyetlen fogyasztó egyetlen időszaki vásárlási döntéseit vizsgáljuk. Legegyszerűbb esetben a fogyasztó jövedelme az $m > 0$ valós szám; az n természetes szám adja a vásárolható termékek számát, és $i = 1, 2, \dots, n$ az egyes termékek indexét. Legyen x_i az i -edik termékből vásárolt mennyiség és $p_i > 0$ az egységár (mindketten valós számok). Első közelítésben feltehetjük, hogy a fogyasztó minden jövedelmét elkölti:

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = m. \quad (1)$$

Vektoriális írásmóddal:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{és} \quad p = (p_1, p_2, \dots, p_n),$$

valamint

$$p \cdot x = m. \quad (1')$$

Itt lép fel az első kérdés: hogyan ossza el a fogyasztó a jövedelmét az egyes termékek között? Egy köznapi fogyasztó nagyon egyszerű választ ad erre a kérdésre: legyen (α_i) egy n -elemű valós sorozat, elemeinek összege 1:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1. \quad (2)$$

Jövedelme α_i részét költi az i -edik termékre:

$$x_i = \frac{m\alpha_i}{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Ha a súlyok értelmesen vannak megválasztva, és a jövedelemhez képest az árak is reálisak, akkor ez a szabály alkalmas a fogyasztói döntés leírására. Mutatja, hogy az egyes termék fogyasztása a jövedelemnek növekvő, az árak viszont csökkenő függvénye. Azt is tükrözi, hogy az ízlésnek szerepe van a fogyasztási döntésben: rögzített jövedelem és árak mellett egyesek többet esznek, mások többet isznak, megint mások többet utaznak. Természetesen ez a leírás nem tükrözi a *keresztárhataást*: ha az alma ára emelkedik, akkor a narancs fogyasztása nő.

A főáramú közgazdaságtan a fogyasztó statikus döntését optimalizálásra vezeti vissza. Az optimalizálandó függvényt *hasznosságfüggvénynek* nevezik, amelyről csak annyit tesznek föl, hogy a fogyasztási vektor skalárértékű, folytonosan differenciálható, szigorúan növekvő és szigorúan konkáv függvénye, jele $U(x)$. A szigorú konkavitásnál csak egyetlen belső maximum létezik. Feltesszük, hogy

$$U(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = -\infty, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ezt az U függvényt kell az (1) korlát mellett feltételesen maximalizálni.

A Lagrange-féle módszer segítségével a következő szükséges (és elégséges) feltételt kapjuk a belső optimumra. Legyen $\lambda \neq 0$ egy valós szám, és legyen $L(x) = U(x) - \lambda p \cdot x$.

2.1. TÉTEL. *Az (1) feltétel mellett az $U(x) \rightarrow \max$ feladat x^* megoldása kielégíti a következő egyenletrendszert:*

$$U'_i(x^*) = \lambda p_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Bizonyítás. $L'_x(x^*) = 0$. □

2.1. Példa. A közgazdaságtanban nagyon elterjedt a logaritmikus hasznosságfüggvény:

$$U(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \log x_i,$$

ahol teljesül (2). (4) segítségével könnyen belátható, hogy az optimális arányokat éppen (3) adja, és $\lambda = 1/m$.

A hasznosságfüggvény azért népszerű a közgazdaságtanban, mert az egyéni döntések kaotikus világába rendet visz. Ugyanakkor kétséges, hogy az egyének képesek-e ilyen bonyolult feladatokat megoldani (az én III. éves matematikus hallgatóim többsége képtelen erre). Még inkább problematikus az elméleti eredmények gyakorlati megvalósítása: a szándékoltnál többet eszünk, és kevesebbet kirándulunk.

2.2. Dinamikus megközelítés

Eddig statikusan vizsgáltunk, most rátérünk a dinamikus vizsgálatra. Maximális egyszerűsége törekedve, most csak a összes fogyasztás időbeli alakulását

vizsgáljuk. Diszkrét időben vizsgálódunk, ahol az időszakok (hónap, év stb.) száma $T > 1$ természetes szám, indexük $t = 1, 2, \dots, T$. Eltekintünk az inflációtól, és feltesszük, hogy fogyasztónk t -edik időszaki jövedelme m_t , és fogyasztása c_t . Eltekintünk attól a különbségtől, amely megtakarításunk és hitelünk után fizetett kamatláb között létezik. Időben is egységesnek tekintjük és R -rel jelöljük a kamattényezőt ($=1$ +kamatláb). Feltéve, hogy a dolgozó előre ismeri a jövedelmi pályáját, nem kap és nem hagy örökséget, egyetlen egyenletbe tömöríthetjük költségvetését. Ehhez a jövedelem és a fogyasztás ún. *jelenértékére* van szükség:

$$\text{PV}[m] = \sum_{t=1}^T m_t R^{-t} \quad \text{és} \quad \text{PV}[c] = \sum_{t=1}^T c_t R^{-t}. \quad (5)$$

Figyeljük meg, hogy az első kifejezés $-(m_t)$ Laplace-transzformáltja – az a jövedelem, amelyet ha életpályánk elején egy összegben elhelyeznénk a bankunkban, és T db számlára tennénk, akkor a t -edik időszak végére a t -edik számlán éppen $m_t R^{-t} R^t = m_t$ friss jövedelem állna a rendelkezésünkre. Hasonlóan, a második kifejezés t -edik tagja éppen $c_t R^{-t} R^t = c_t$, s ez a nevezett időszak fogyasztási költsége. Egyensúlyi feltételünk szerint a két jelenérték azonos:

$$\text{PV}[m] = \text{PV}[c]. \quad (6)$$

A variációs számításhoz hasonlóan a fogyasztás dinamikus elméletében a hasznosságfüggvényt időben additívnek feltételezik:

$$U(c_1, \dots, c_T) = \sum_{t=1}^T u_t(c_t),$$

ahol $u_t(\cdot)$ egy szigorúan növekvő és szigorúan konkáv függvény. További egyszerűsítésként feltételezik, hogy a t -edik időszaki hasznosság csupán abban különbözik az 1. időszakétól, hogy a jelenértékhez hasonlóan leszámítolják az ún. *leszámítolási tényezővel*, jele $\delta \in (0, 1]$:

$$U(c_1, \dots, c_T) = \sum_{t=1}^T \delta^t u(c_t), \quad (7)$$

ahol $u(\cdot)$ egy szigorúan növekvő és szigorúan konkáv függvény: $u(0) = -\infty$. Felhívjuk az Olvasó figyelmét, hogy valamilyen okból a diszkrét idejű modellekben a közgazdászok elfelejtették negatív előjellel ellátni a t kitevőt, ennél fogva minél közelebb van az 1-hez a leszámítolási együttható, annál kevésbé számítol le a fogyasztó.

Előkészítésünk végére érve kimondhatjuk a következő tételt:

2.2. TÉTEL. A (7) hasznosságfüggvényt az (5)–(6) egyensúlyi feltétel mellett maximalizáló (c_t^*) fogyasztási pálya kielégíti az ún. Euler-egyenletet:

$$u'(c_t^*) = \delta R u'(c_{t+1}^*), \quad t = 1, 2, \dots, T-1. \quad (8)$$

Megjegyzés. Az Euler-jelző a folytonos idejű variációszámítás Euler–Lagrange-egyenletének első szerzőjére utal.

Bizonyítás. Az 1. tétel gondolatmenetét alkalmazva a Lagrange-függvény

$$L(c_1, \dots, c_T) = \sum_{t=1}^T [\delta^t u(c_t) - \lambda c_t R^{-t}]$$

és a stacionaritási feltétel

$$0 = L'_i(c_1, \dots, c_T) = \delta^t u'(c_t) - \lambda R^{-t}, \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

Átrendezve: $\delta^t R^t u'(c_t) = \lambda$ és összehasonlítva a $t + 1$ -edik időszak hasonló feltételével adódik (8): $\lambda = u'(c_0)$. □

A (8) feltétel eléggé nehézkesnek látszik. Az azonban kiolvasható belőle, hogy a δR szorzat értéke kulcsszerepet játszik a fogyasztási pálya alakulásában.

2.1. KÖVETKEZMÉNY. *Ha $\delta R = 1$, akkor a fogyasztás időben állandó: $c_t \equiv c_1$; ha $\delta R > 1$, akkor a fogyasztás időben nő: $c_{t+1} > c_t$; s végül ha $\delta R < 1$, akkor a fogyasztás időben csökken: $c_{t+1} < c_t$.*

Megkönnyíti a 2.2. tétel megértését, ha megint a logaritmikus hasznosságfüggvényen szemléltetjük állításunkat.

2.2. *Példa.* Legyen az időszaki hasznosságfüggvény $u(x) = \log x$. Ekkor a (8) feltétel explicitté válik: $1/c_t = \delta R/c_{t+1}$, azaz $c_{t+1} = \delta R c_t$, azaz $c_t = (\delta R)^{t-1} c_1$. Visszahelyettesítve az (5)–(6) korlátba:

$$PV[m] = \sum_{t=1}^T R^{-t} (\delta R)^{t-1} c_1 = \frac{1 - \delta^T}{(1 - \delta)R} c_1, \quad \text{ha } \delta \neq 1,$$

ahonnan az optimális fogyasztási pálya

$$c_1^* = PV[m] \frac{(1 - \delta)R}{1 - \delta^T} \quad \text{és} \quad c_t^* = (\delta R)^{t-1} c_1^*, \quad t = 1, \dots, T.$$

Ezt a gondolatmenetet gyakran alkalmazzák a nyugdíjmodellezésben. Például a leszámítolási együttható kicsiny értékével indokolják a kötelező nyugdíjrendszer bevezetését, illetve a kamattényező nagy értékével magyarázzák a magánnyugdíjrendszer fölényét a tb-nyugdíjrendszerrel szemben. A dolog nem ilyen egyszerű: a valóságban a fogyasztó csak rövid távon rövidlátó, a 3., ..., T -edik időszakra már nem diszkontál. Csak az a gond, hogy 1 időszak elteltével a holnapból ma lesz, és újra kezdődik a leszámítolás. Hasonló gondot okoz, hogy az elméleti modellekben gyakran szereplő 10 százalékos körüli reál-kamatlábak ($R = 1,1$) csak alkotóik fejében léteznek. Végül nem igaz, hogy ugyanannyi kamatot fizet a fogyasztó 1 forintnyi tartozásáért, mint 1 forintnyi betétéért.

3. Egyensúly

Eddig egyetlen fogyasztóval számoltunk, márpedig a valóságban több fogyasztó (és a cikkben általában elhanyagolt termelő) lép kölcsönhatásba a piacon. Három esetet vizsgálunk ebben a szakaszban: a piaci egyensúly statikus modelljét, az együttélő nemzedékek dinamikus modelljét és a stratégiai gondolkodást is figyelembe vevő nem kooperatív játékelmélet Nash-egyensúlyát.

3.1. Piaci egyensúly

Visszatérünk a 2.1. szakasz statikus modelljéhez, de egy helyett r fogyasztóval, indexük $h = 1, \dots, r$. Föltesszük, hogy olyan sokan vannak, és egyenként olyan kicsi a súlyuk, hogy egyéni döntéseik nem hatnak a piac állapotára. Röviden megismételjük és általánosítjuk az ottani definíciókat és fogalmakat, majd újabbakat vezetünk be.

A h -adik fogyasztó jövedelme $m_h > 0$ valós szám, a továbbiakban is az n természetes szám adja a vásárolható termékek számát, és $i = 1, 2, \dots, n$ az egyes termékek indexét. Legyen $x_{i,h}$ az i -edik termékből a h -adik fogyasztó által vásárolt mennyiség és $p_i > 0$ az egységár (mindketten valós számok). Ismét feltesszük, hogy a h -adik háztartás minden jövedelmét elkölti:

$$\sum_{i=1}^n p_i x_{i,h} = m_h, \quad h = 1, \dots, r.$$

Vektoriális írásmóddal:

$$x^h = (x_{1,h}, x_{2,h}, \dots, x_{n,h}) \quad \text{és} \quad p \cdot x^h = m_h.$$

Feleslegesnek tartjuk a 2.1. pont optimumszámításának megismétlését, helyette bevezetjük a *cseregazdaságot*, amelyben nem termelnek, csak cserélnek. Feltesszük, hogy kezdetben a h -adik dolgozó *vagyona* $a^h = (a_{1,h}, \dots, a_{n,h})$ pozitív elemű vektor és a dolgozó csere útján x^h fogyasztásra törekszik. Termelés híján a cseregazdaságban teljesülnek a következő mérlegegyenletek: minden termékből az összvagyon = összfogyasztás, azaz

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{x}_i, \quad i = 1, \dots, n; \quad (9)$$

ahol

$$\mathbf{a}_i = \sum_{h=1}^r a_{i,h}, \quad \text{és} \quad \mathbf{x}_i = \sum_{h=1}^r x_{i,h} \quad i = 1, \dots, n. \quad (10)$$

Pontosabban: megengedjük, hogy az egyes termékekből a vagyon nagyobb legyen, mint a fogyasztás, de azoknak a terméknek az ára 0 kell hogy legyen. Képletben:

$$\mathbf{a}_i \geq \mathbf{x}_i, \quad i = 1, \dots, n; \quad (9')$$

és

$$\text{ha } \mathbf{a}_i > \mathbf{x}_i, \quad \text{akkor } p_i = 0. \quad (9'')$$

Kérdés: van-e olyan $n \times r$ -dimenziós $X = (x_{i,h})$ fogyasztásmátrix, amely minden háztartásnak optimális, és teljesíti a (9)–(10) mérlegegyenleteket? A válaszhoz egyelőre eltekintünk a mérlegegyenletektől, és változónak tekintve a korábban adottnak vett p árvektort, bevezetjük az egyes termékekre vonatkozó *piaci túlkeresleti függvényt*; $\mathbf{z}_i(p)$, amely az összfogyasztási tervek és az összvagyon különbsége:

$$\mathbf{z}_i(p) = \mathbf{x}_i(p) - \mathbf{a}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Vegyük észre, hogy most a jövedelmeket is az árvektor definiálja: $m_h = p \cdot a^h(p)$. Ezek segítségével felírhatjuk az egyéni túlkeresleti függvényeket is: $z^h(p) = x^h(p) - a^h(p)$. Érdekes, hogy ekkor az (1) egyenlet helyére a

$$p \cdot z^h(p) = 0, \quad h = 1, \dots, r \quad (11)$$

lép.

Ha bármilyen pozitív μ skalárral beszorozzuk az árakat, akkor a jövedelmek is ugyanezzel a skalárral szorozódnak meg, tehát az egyensúly szempontjából az árszint közömbös. A későbbiek miatt célszerű lesz alkalmasan normálni az árvektort: az árak összegét vesszük 1-nek: $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, azaz az árvektor egy n -dimenziós szimplex. (Másik alternatíva: az utolsó összetevőt vesszük 1-nek: $p_n = 1$, de nem élünk ezzel.)

*Egyensúly*nak nevezünk egy olyan $(p^*, X(p^*))$ hiper mátrixot, amelyre (9)–(11) egyszerre teljesül, továbbá $\mathbf{z}_i(p) = 0$.

3.1. TÉTEL. *Ha a $z(p)$ piaci túlkereslet-ár-függvény folytonos, akkor létezik legalább egy egyensúlyi p^* árvektor és hozzá tartozó $X(p^*)$ fogyasztási mátrix.*

Bizonyítás. A bizonyítás alapgondolata egyszerű: az árvektorok n -dimenziós szimplexét folytonos függvénnyel leképezzük e szimplexbe, s ekkor a nevezetes Brouwer-féle fixponttétel (1911) értelmében létezik legalább egy fixpont. Csak azt kell belátni, hogy e fixpont éppen az egyensúlyi ár. Szükségünk lesz egy vektor pozitív részének a jelölésére: $z_+ = (z_{1+}, \dots, z_{n+})$.

Lássuk a vázolt leképezést:

$$p' = T(p) = \frac{p + z_+(p)}{[p + z_+(p)]\mathbf{1}}, \quad \text{ahol } \mathbf{1} = (1, \dots, 1).$$

Könnyű belátni, hogy a $T(p)$ leképezés a n -dimenziós szimplexet ugyanabba a szimplexbe folytonosan képzi le, létezik tehát egy fixpont, pl. p^* .

Legyen $I(p)$ azon indexek halmaza, amelyre a piaci túlkereslet pozitív: $z_i > 0$, ha $i \in I(p)$. Ha ez nem üres halmaz, akkor a $T(p)$ leképezés emeli ezen termékek árát, és csökkenti a többiét. A piaci egyensúlyban nincsenek ilyen termékek: $I(p^*)$

üres halmaz, és a konstrukció miatt a p^* egyensúlyi árvektor T fixpontja. De a megfordítás is igaz: ha van fixpont, akkor az egyensúlyi árvektor. Valóban: jelölje a $T(p)$ nevezőjét λ , ekkor a fixpont-egyenletet rendezve:

$$\lambda p_i^* = p_i + z_{i+}(p^*), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Beszorozva mindkét oldalt p_i^* -gal, összeadva a kapott egyenleteket, és felhasználva, hogy az egyéni költségvetési korlátok miatt $p^* z^*(p^*) = 0$, adódik $\lambda p^{*2} = p^{*2}$, azaz $\lambda = 1$. Visszahelyettesítve a fixpont-egyenletbe: $z_{i+}(p^*) = 0$. \square

A tételt lefordítva a hétköznapok nyelvére, azt kaptuk, hogy kedvező körülmények között a piac optimálisan osztja el a javakat az emberek között. Ezt láttuk, amikor a „tervezésből” rövid időre kiruccantunk a piacgazdaságba, ahol mindent lehetett kapni, csak elég pénz kellett a vonzó áruk megvásárolásához.

De ez a tétel súlyos feltevésekre épül, és ha azokat elmozdítjuk, akkor a tétel kicsorbul. Csak a legfontosabb problémákat jelezzük, távirati stílusban.

a) Feltettük, hogy az egyes piaci szereplők súlya kicsi, és mindenki elfogadja a piaci árakat olyannak, amilyenek. Ezzel szemben a valóságban olyan óriásvállalatok is működnek, amelyek szinte szabadon alakítják az áraikat (Microsoft, hollywoodi filmipar stb.).

b) Feltettük, hogy minden szereplőnek van annyi kezdővagyon, amely elfogadható megélhetést biztosít a számára. Különösen a háborúk idején mutatkozik meg e feltevés életidegensége, ahol jegyrendszert kell bevezetni, nehogy a jobbmódúak az összes élelmiszert felvásárolják a szegények orra elől.

c) Föltettük, hogy az egyes szereplők döntései nem befolyásolják mások életét. Ezzel szemben a közösségeknek törvényekkel kell megakadályozni, hogy a környezetszennyező vállalatok költségtakarékosság címén tönkretegyék a körülöttük élők életét.

d) Föltettük, hogy az embereknek teljes információjuk van a vásárolt termékekről és szolgáltatásokról. A valóságban azonban a beteg csak azért bízhat meg vakon az orvosban, mert az állam oklevéllel igazolja az orvos szakértelmét. Hasonló aszimmetrikus információ jellemzi a beteg és a biztosító viszonyát, s ez indokolhatja a kötelező állami egészségbiztosítás bevezetését.

3.2. Az együttélő nemzedékek modellje

A 2.2. pont időben kiterjesztette a 2.1. szakasz statikus modelljét, miközben elhanyagolta a termékvilág sokszínűségét. Ehhez hasonlóan a 3.2. szakasz időben kiterjeszti a 3.1. szakasz többszereplős statikus modelljét, de közben visszatér az egytermékes világba. A lényeg: különböző életkorú nemzedékek élnek együtt.

Legyen $t = 1, 2, \dots$ az időszakok indexe, és $a = 1, 2$ az életkoré (fiatal, idős), gyakorlatilag 30 év hosszúságú időszakokkal dolgozva. Ekkor a jövedelmeket időtől függetlennek, de életkortól függőnek vesszük: m_1 és m_2 . Bevezetjük a t -edik időszak (s_t) megtakarításának $t + 1$ -edik időszakra vonatkozó kamattényezőjét: R_{t+1} , valamint az idő- és életkorfüggő fogyasztást: $(c_{1,t}, c_{2,t+1})$ -t. (A kamattényező indexe azért $t + 1$ és nem t , mert szokás szerint nem a kezdő, hanem a záró

időszakkal jelölik a két időszakot összekötő kamattényezőt.) Ekkor a fogyasztási egyenletek definíció szerint

$$c_{1,t} = m_1 - s_t \quad \text{és} \quad c_{2,t+1} = m_2 + R_t s_t. \quad (12)$$

Eltekintünk a halálozási kockázattól, azaz mindenkinek egységesen 2 időszaknyi felnőtt életet adunk. Föltesszük még, hogy minden anya $\nu > 0$ lányt szül, ahol ν szintén valós szám. (Ezt úgy kell elképzelni, hogy az anyákon belül vannak 0, 1, 2 stb. számú gyermeket szülők, és az így adódó nagy nevezőjű racionális számot valósnak tekintjük. Apákról és fiaikról külön nem beszélünk, de ők is léteznek.) Ha ragaszkodunk a korábban vázolt cseregazdasághoz, akkor a t -edik időszakbeli összes megtakarítások egyenlege 1 fiatalra vetítve 0; és a (12) második egyenletében szereplő időskori $R_t s_t$ megtakarítást 1 időszakkal visszadátumozzuk:

$$\nu s_t = R_{t-1} s_{t-1}. \quad (13)$$

Lemondva az optimalizálásról, csupán azt tesszük föl, hogy az s_t megtakarítás adott függvénye az R_t kamattényezőnek: $s_t = s(R_t)$. Föltesszük, hogy létezik olyan $R_B > 0$ szám, amelyre a megtakarítás eltűnik: $s(R_B) = 0$. Behelyettesítve (13)-ba, egy elsőrendű nemlineáris differenciaegyenletet kapunk az egymást követő kamattényezőkre:

$$\nu s(R_t) = R_{t-1} s(R_{t-1}), \quad t = 1, 2, \dots, \quad R_0 \quad \text{adott.} \quad (14)$$

Kimondhatjuk a következő tételt.

3.2. TÉTEL. a) *Az együttélő nemzedékek modelljében adott $s(\cdot)$ megtakarítási függvény esetén a kamattényező-dinamikát leíró (14) rendszernek általában két állandósult állapota van: $s(R_B) = 0$, ahol nincs megtakarítás, és ahol a kamattényező egyenlő a gyermekszámmal: $R_G = \nu$.* b) *A két állandósult állapot közül egyik vagy másik lehet lokálisan aszimptotikusan stabil. Például $R_B < \nu$ esetén R_B lokálisan aszimptotikusan stabil.*

Bizonyítás. a) Vegyük észre, hogy a (14) egyenlet mind R_B -re, mind $R_G = \nu$ -re fönnáll, tehát mindkettő állandósult állapot.

b) Az implicit függvény tétele szerint megfelelő feltevések mellett létezik (14) megoldása: $R_t = f(R_{t-1})$. Behelyettesítve (16)-ba, és deriválva R_{t-1} szerint: $\nu s'(f(R_{t-1}))f'(R_{t-1}) = s(R_{t-1}) + R_{t-1}s'(R_{t-1})$, azaz $0 < f'(R_B) = \nu/R_B < 1$ – a lokális stabilitás elégséges feltétele. \square

Megjegyezzük, hogy elvont szinten e modell a t_b - és a magánnyugdíjrendszert stilizálja. A magánrendszer hozama nyilván R_B , a t_b -rendszer belső hozama pedig ν . Sokan ennek az egyszerű összefüggésnek az alapján részesítik előnyben egyiket vagy másikat. A valóságban azonban a korábbi kormányzatok nem

a semmiből teremtettek egy új rendszert. Például a hazánkban 1998–2010 között fenálló kötelező magánnyugdíjrendszerbe terelt magánjárulékok hiányoztak a tb-nyugdíjrendszerből, ezért kellett őket állami forrásból pótolni.

Kiemelünk még egy kritikus feltevést: a dolgozó egy időszakra (30 évre) előre ismeri a kamattényezőt, ezt nevezik *tökéletes előrelátásnak* vagy általánosabban, *racionális várakozásnak*. Logikusnak tűnő feltevés, de a valóságban gyakran nem teljesül. Például akik 2004 és 2008 között Magyarországon svájci frank alapú jelzáloghitelt vettek föl, azt tételezték fel, hogy stabil forintárfolyam mellett megmarad a svájci frank kamatláb előnye a forinttal szemben. Ma már tudjuk, hogy az ellenkezője történt. Nem nehéz kiszámolni, hogy mi történik *naiv* várakozás esetén, amikor az előző időszak tényleges kamattényezőjét vetítik ki a jövőre. Persze, ez 30 év távlatában durva feltevés, de éves időszakra térve már nem.

3.3. Nash-egyensúly

Eddig eltekintettünk attól, hogy a szereplők esetleg olyan nagy súlyúak lehetnek, hogy hatásuk nem hanyagolható el a kölcsönhatási modellben. Most a játékelméletbe kiruccanva, egy olyan helyzetet vizsgálunk, ahol kevés játékos szerepel, és ezek figyelembe veszik döntéseik egymásra gyakorolt hatásait.

Legyen a játékosok száma $n > 1$, indexük $i = 1, 2, \dots, n$, *stratégiahalmazuk* S_i a d_i -dimenziós tér részhalmaza, elemeit pedig nevezzük a megfelelő játékosok *stratégiáinak*: $s_i \in S_i$. Az elemzési problémát az jelenti, hogy mindegyik játékos hasznosságát nemcsak saját, hanem a többi játékos stratégiája is befolyásolja. Leegyszerűsíti a jelöléseket, ha külön jelölést vezetünk be a „többi” stratégia vektorára, s így a hasznosságfüggvényekre:

$$s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n) \quad \text{és} \quad u_i(s_1, s_{-i}).$$

Egy (s_1^*, \dots, s_n^*) stratégiavektort *Nash-egyensúlynak* nevezzük, ha egyik játékos sem javíthat hasznosságán azáltal, hogy eltér saját Nash-stratégiájától, feltéve, hogy a többi játékos ragaszkodik a Nash-stratégiához. Képletben:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*), \quad \text{ha} \quad s_i \in S_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a) a Nash-egyensúly definíciójában burkoltan megjelenik a racionális várakozás, ugyanis minden játékos a többi játék egyensúlyi stratégiáját várja, és várakozása beteljesül; b) egy játéknak lehet több egyensúlya is, és c) ha legalább két játékos eltér az egyensúlytól, akkor ezeknek a játékosoknak nőhet a hasznossága.

3.3. TÉTEL. *Ha az S_i stratégiahalmaz a d_i -dimenziós euklideszi tér kompakt és konvex részhalmaza, az u_i hasznosságfüggvény folytonos, és s_i -ben konkáv ($i = 1, \dots, n$), akkor létezik legalább egy Nash-egyensúly.*

Bizonyítás. A bizonyítás a már említett fixponttétel halmazértékű függvényekre történő Kakutani-féle általánosításán (1941) alapul. Tegyük föl, hogy

$b_i(s_{-i}) \in S_i$ halmazértékű leképezés a többi játékos $s_{-i} \in S_{-i}$ stratégiájára adott *legjobb válaszok* halmaza. Megfelelő technikai feltevések mellett e halmazok nem üresek. Nash-egyensúly esetén $s_i^* \in b_i(s_{-i}^*)$. Defináljuk a

$$b(s) = (b_i(s_i, s_{-i}))_i$$

összetett leképezést, amely az $S_1 \times \dots \times S_n$ halmazt képezi le önmagába. Könnyű belátni, hogy a Nash-egyensúly a b leképezés fixpontja: $s^* \in b(s^*)$, márpedig ilyen fixpont létezik. \square

Egyik legegyszerűbb játékelméleti példa az ún. érempárosítás, amelyből kiderül, hogy Nash-egyensúly származtatásához szükség lehet az eredeti stratégiahalmazok radikális bővítésére.

3.1. Példa. Érempárosítás. Két játékos lerak az asztalra egy-egy azonos pénz-érmét, amelynek értéke 1 egység. Ha azonosat raknak (FF vagy II), akkor az 1. játékos nyeri el mindkét érmét; ha különbözőt raknak (FI vagy IF), akkor a 2. játékos nyeri el mindkét érmét. Ez egy nullaösszegű játék: $u_2 \equiv -u_1$. Ha csak ez a két (ún. tiszta) stratégia létezne, akkor nem létezne Nash-egyensúly. Érdemes tehát bővíteni a stratégiák terét a kevert stratégiák bevezetésével: egy $s_i \in [0, 1]$ valós számmal jelölt stratégia azt jelenti, hogy az i -edik játékos s_i valószínűséggel játszza Fejet, és $1 - s_i$ valószínűséggel az Írást. Belátható, hogy az 1. játékos várható nyeresége

$$u_1(s_1, s_2) = s_1 s_2 + (1 - s_1)(1 - s_2) - s_1(1 - s_2) - (1 - s_1)s_2.$$

Az s_1 lokális optimumát a parciális derivált gyöke adja:

$$\frac{\partial}{\partial s_1} u_1(s_1, s_2) = s_2 - 1 + s_2 - 1 + s_2 + s_2 = 0, \quad \text{azaz} \quad s_2^* = 1/2.$$

Furcsa, hogy az 1. játékos lokális optimuma csak a 2. játékos választásától függ, de a játék szimmetriája miatt a 2. játékos optimalitási feltételéből adódik az 1. játékos lokális optimuma is: $s_1^* = 1/2$. A sarokpontokat már kizártuk, ezért egyetlen Nash-egyensúly létezik, és ott mindkét játékos földobja a saját érméjét, és teljesen a véletlenre bízva a választást.

Csak technikai érdekességű példánk után most vázolunk egy gyakorlatban is nagyon fontos példát, amely fényt vet az autópiacon vagy olajpiacon óriások küzdelmére, valamint arra, hogy bizonyos feltételek mellett minél több vállalat verseng egymással, annál olcsóbban jutnak a vevők a termékhez.

3.2. Példa. Oligopoljáték. Legyen az egymással versengő vállalatok száma n , indexük $i = 1, \dots, n$. Homogén terméket állítanak elő, kapacitáskorlát nélkül. Ha (q_1, \dots, q_n) nemnegatív elemű valós vektor a vállalatok termelési vektora, akkor az össztermelés $Q = q_1 + \dots + q_n$. A 2.1. szakaszban vázolt $q_i(p_i)$ kereslet-ár-függvény

makrováltozata $Q = D(P)$, s ennek inverzeként bevezetjük az inverz keresleti függvényt, még hozzá lineáris változatban: $P = \alpha - \beta Q$, ahol $\alpha, \beta > 0$. Tegyük föl, hogy minden vállalat költségfüggvénye azonos, és homogén lineáris: q_i mennyiségű termék előállítás költsége γq_i , ahol $0 \leq \gamma < \alpha$ az egységköltség. A vállalatok úgy választják meg saját kibocsátásukat, hogy saját profitjukat maximalizálják, de az árfüggvényen keresztül a többi vállalat összegzett döntése, $Q_{-i} = Q - q_i$ is befolyásolja profitjukat:

$$\pi_i(q_i, Q_{-i}) = (P(q_i, Q_{-i}) - \gamma)q_i.$$

Behelyettesítve a lineáris árfüggvényt és $Q = q_i + Q_{-i}$ -t:

$$\pi_i(q_i, Q_{-i}) = [\alpha - \gamma - \beta(q_i + Q_{-i})]q_i.$$

Adottnak véve a Q_{-i} -t, az i -edik vállalat profitfüggvényére a következő maximalizálási feltétel adódik:

$$0 = \frac{\partial}{\partial q_i} \pi_i(q_i, Q_{-i}) = -\beta q_i + [\alpha - \gamma - \beta(q_i + Q_{-i})].$$

Visszahelyettesítve $Q_{-i} = Q - q_i$ -t az optimalitási feltételbe,

$$0 = -\beta q_i + \alpha - \gamma - \beta Q,$$

azaz minden vállalat ugyanannyit termel: $Q = nq_i$, azaz n -felső indexszel jelölve az n -vállalatos Nash-egyensúlyt:

$$q_i^n = \frac{\alpha - \gamma}{\beta(n + 1)}, \quad Q^n = \frac{(\alpha - \gamma)n}{\beta(n + 1)} \quad \text{és} \quad P^n = \frac{\alpha + \gamma n}{n + 1}.$$

Tanulság: minél több (hatékony) vállalat verseng, annál jobban közelít az ár a költséghez, azaz annál kisebb a profit.

A játékelmélet számos irányba fejlődött, ezek ismertetése külön tanulmányokat igényelnek. Itt csupán még egy egyszerű játékot mutatunk be, amelyben a valódi játékosok nem a szakemberek által elképzelt hasznosságfüggvényt maximalizálják.

3.3. Példa. Ultimátumjáték. Két játékosunk van, és a bíró letesz az asztalra 100 db ötforintost. Az első időszakban az 1. játékos bejelenti igényét az ötforintosokra ($0 \leq s_1 \leq 100$), és a 2. időszakban a 2. játékos vagy elfogadja az ajánlatot ($s_2 = 100 - s_1$) vagy felborítja az asztalt, és senki sem kap semmit sem. Könnyű belátni, hogy egyetlen Nash-egyensúly létezik: $s_1^* = 99$ és $s_2^* = 1$, de a kísérletek során a 2. játékos általában 20-30 ötforintosra tart igényt.

4. Adózás és jövedelemújraelosztás

Eddig csak a piaci szereplők kölcsönhatását vizsgáltuk, csupán megjegyzésben utaltunk arra, hogy gyakran szükség lehet a piac kormányzati befolyásolására. Például ha a legkisebb keresetű dolgozó piaci jövedelme nagyon kicsi, akkor a kormányzat adót vet ki, és alapjövedelem fizetésével újra elosztja a jövedelmeket.

Jó közelítéssel feltehetjük, hogy csak a dolgozók fizetnek személyi jövedelemadót. A nálunk megvalósult, matematikai értelemben valóban arányos adóval számolva, ahol egy 0 és 1 közötti valós θ az adókulcs, egy w a teljes munkaidőért járó, röviden *teljes* havi bérű, havonta l időt dolgozó egyén wl kereset után θwl adót fizet. (Nem érdemes órában mérni a munkaidőt, egyszerűbb, ha a maximális 176 órát tekintjük egységnek.)

A gyermekektől és a nyugdíjasoktól itt eltekintünk, és feltesszük, hogy az adózás egyetlen célja: minden dolgozónak azonos alapjövedelemmel (jele: b) kiegészíteni adózás utáni piaci jövedelmét.

Kiszemelt dolgozónk fogyasztása

$$c = (1 - \theta)wl + b.$$

A lehető legegyszerűbb hasznosságfüggvénnyel dolgozunk:

$$U(c, l) = 2c - wl^2. \quad (15)$$

Magyarázat: a fogyasztást duplán vesszük figyelembe, viszont minden dolgozó ódzkodása a munkától a munkaidő négyzetével arányos, és az arányossági tényező éppen w , a teljes havi bér.

4.1. TÉTEL. *Adott adókulcs és alapjövedelem esetén minden dolgozó optimális munkakínálata*

$$l^* = 1 - \theta.$$

Bizonyítás. Behelyettesítve a fogyasztást (15)-be, a hasznosságfüggvényt egyváltozósá tettük:

$$U[l] = 2[(1 - \theta)wl + b] - wl^2. \quad (16)$$

Az optimális munkakínálát $U'[l] = 2(1 - \theta)w - 2wl = 0$ -ból már közvetlenül adódik. \square

Megjegyzések. A 4.1. tétel modellje túlzottan egyszerű. 1. Nem veszi figyelembe, hogy a valóságban gyakran lehetetlen folyamatosan változó hosszúságú részmunkát vállalni. 2. Elhanyagolja a családfenntartó férfi és a gyermeknevelő nő helyzete közti különbséget. 3. Elsiklik az adómorál fölött, amely az adókulcs mellett szintén befolyásolja az adóelkerülés mértékét. Ennek ellenére fontos részigazságot kifejez: nagyobb adókulcshoz egyébként változatlan körülmények között kisebb munkakínálalat tartozik, ezért a kormányzatnak célszerű elkerülnie a munka túladóztatását.

Országos szinten a dolgozók kereseteloszlását egy F eloszlásfüggvény írja le, és olyan mértékegységben számolunk, hogy a teljes havi bér várható értéke egységnyi legyen: $\mathbf{E}w = 1$. Ekkor az alapjövedelem $b = \theta(1 - \theta)$. Behelyettesítve az adókulcstól függő munkakínálatot és alapjövedelmet (16)-ba, adódik

$$u(\theta) = (1 - \theta)^2 w + 2\theta(1 - \theta). \quad (17)$$

(Itt megkülönböztetésül írunk $U(\cdot)$ helyett $u(\cdot)$ -t.)

Tegyük föl, hogy a kormányzat a legkisebb hasznosságfüggvényű, esetünkben a minimálbérű dolgozó hasznosságát akarja maximalizálni, akinek teljes havi bére $0 < w_m < 1$.

4.2. TÉTEL. *Modellünkben a társadalmilag optimális adókulcs*

$$\theta^* = \frac{1 - w_m}{2 - w_m} < \frac{1}{2}. \quad (18)$$

Bizonyítás. (17)-be behelyettesítve $w = w_m$ -et és deriválva a függvényt, az optimálisi feltétel

$$0 = u'(\theta)/2 = -w_m(1 - \theta) + (1 - \theta) - \theta. \quad (19)$$

(19) gyöke valóban (18). □

Megjegyzés. A 4.2. tétel nagyon bölcsen azt sugallja, hogy minél nagyobb a keresetegyenlőtlenség, amelyet itt $1 - w_m$ mér, annál nagyobb az optimális adókulcs. Ugyanakkor e tétel még a 4.1. tételen is túlmegy a valóság egyszerűsítésében. Például a modellezett kormányzat csak a legrosszabb helyzetűek helyzetének javítását tűzi ki célul, és ezzel túllőhet a célon. Erről szól a következő tétel.

A társadalmi jólét kormányzati maximalizálása helyett egy tömegdemokráciában a választók határozzák meg az egyensúlyi adókulcsot. Ehhez szükségünk van a *mediánszavazó* fogalmára: legyen a dolgozók $F(w)$ kereseti eloszlása folytonos, ahol $F(w)$ a w -nél kevesebbet keresők aránya a dolgozó népességben. Jelölje w° a mediánkeresetet, amelyre teljesül, hogy $F(w^\circ) = 1/2$. Azaz ugyanannyi dolgozó keres w° -nál kevesebbet, mint amennyi többet. Föltesszük, hogy két párt vetélkedik a szavazatokért: egy baloldali párt magasabb (θ_L) adókulccsal, és egy jobboldali párt alacsonyabban (θ_R): $0 \leq \theta_R \leq \theta_L \leq 1$. A w keresetű szavazó arra a pártra szavaz, amely által ígért adókulcsnál a jóléte nagyobb, mint a másiknál. (17) alapján a w keresetű dolgozó pontosan akkor szavaz balra, ha

$$u[w, \theta_L] > u[w, \theta_R]. \quad (20)$$

(17) értelmében (20) ekvivalens a következő egyenlőtlenséggel

$$(1 - \theta_L)^2 w + 2\theta_L(1 - \theta_L) > (1 - \theta_R)^2 w + 2\theta_R(1 - \theta_R).$$

A 4.1. tétel értelmében [vö. (18)] a w keresetű dolgozó számára számára optimális adókulcs

$$\theta(w) = \frac{1-w}{2-w}. \quad (21)$$

Mindkét párt olyan adókulcsot javasol, amely győzelemmel kecsegtet.

4.3. TÉTEL. *A kétpárti modellben mindkét párt Nash-egyensúlyra törekszik, amelyben a mediánszavazó választása jut érvényre:*

$$\theta_L = \theta_R = \theta(w^o).$$

Bizonyítás. Könnyen belátható, hogy (21)-ben a $\theta(w)$ adókulcs a w kereset szigorúan csökkenő függvénye. A baloldali párt megszerzi a dolgozók szegényebb felének a szavazatait, ha $\theta(w^o)$ -t javasol, és a jobboldali párt megszerzi a dolgozók gazdagabb felét, ha $\theta(w^o)$ -t javasol. Ha bármelyik párt ettől eltér, a másik párt elcsábíthatja a másik párt szavazói hozzá közel eső részét. \square

Megjegyzések.

1. Úgy tűnhet, hogy e modell elfajult, hiszen mindkét párt ugyanazt a közpolitikát javasolja. A valóságban gyakran előfordul azonban, hogy mindkét párt középre húz, emiatt a szavazás nagyon kiegyenlített, és csak másodlagos kérdések döntenek el a választás eredményét.

2. Természetesen az is gyakori, amikor nem két nagy párt van, hanem több kisebb; vagy nem egy, hanem több kérdés játszik központi szerepet, és ilyenkor más modelleket kell alkalmazni.

5. Történeti vázlat

Nem akartam történeti részletekkel elvonni a figyelmet az elmélet logikájáról, de a vázlat végére érve helyénvalónak látszik a történet vázolója. Daniel Bernoulli volt talán az első gondolkodó, aki 1735-ben a szentpétervári paradoxon elemzése közben rábukkant a logaritmikus hasznosságfüggvényre. A közlekedésmérnök Cournot (1838) bevezette a keresleti függvényt, és két versengő vállalat esetén meghatározta az egyensúlyi megoldást. A hasznosságfüggvényen alapuló egyéni és piaci elemzés úttörője Walras (1874/77) volt, aki az általános egyensúlyelmélet számos kérdését vázolta, de az akkori matematika és a közgazdaságtan fejletlensége miatt a szabatos tárgyalás lehetetlen volt. A fixponttétel felhasználásával Neumann (1928) bizonyította be a nullaösszegű kétszemélyes játékok alaptételét. Samuelson (1947) monográfiája határkő volt a matematikai közgazdaságtan fejlődésében. A független hasznosságfüggvényű, sokszemélyes játékelmélet kialakítása Nash (1951) érdeme. Arrow és Debreu (1954) cikke tartalmazta az általános egyensúlyelmélet első szabatosan bizonyított tételét. Samuelson (1958) fedezte

föl az együttélő nemzedékek modelljét. Arrow (1963) már részletesen elemezte, hogy az aszimmetrikus információ és a morális kockázat miatt mennyire csorbul az általános egyensúlyelmélet érvényessége az egészségügyi szolgáltatások terén. Az optimális adózás klasszikusa Mirrlees (1971), a mediánszavazó elméletét Black (1948) dolgozta ki, és csírájában tartalmazta a Nash-egyensúlyt.

6. Következtetések

Egyes szám első személyre váltok. Lehetetlenek tűnő feladatra vállalkoztam: dióhéjban bemutatni a matematikai közgazdaságtant matematikusoknak. Nagyon visszafogtam magam: csak néhány alapvető modellt körvonalaztam. Próbáltam hangsúlyozni a modern főáramú közgazdaságtan egyik alapvető sajátosságát: mindent az egyéni optimalizálásra vezet vissza; s ebből a mikromegközelítésből kísérli meg levezetni a makroszinten megvalósuló egyensúlyt. A többtermékes statikus modell eredményeit szembesítettem az egytermékes dinamikus modellével. Hangsúlyoztam a kevés- és sokszereplős modellek közti különbséget.

Ugyanakkor röviden igyekeztem utalni az alkalmazott modellek korlátaira: például az egyén képtelen kiszámítani az optimális döntést, az egyensúly létezését szavatoló feltevések számos piacon nem állnak fenn, ezért az egyenúly vagy nem optimális vagy nem is létezik. A piaci rendszert mindig kiegészíti egy kormányzati szféra, amely például az adórendszeren keresztül befolyásolja a piac működését. Az adórendszer optimalitása is vizsgálható, még hozzá nem is egyféleképpen: mást ad a társadalmi jólétet maximalizáló tervezés és megint mást a két párt versengése.

Csak néhány alapvető cikk szerepel a hivatkozási listán. Az itt leírtak zöme megtalálható a legtöbb emelt szintű tankönyvben. Ajánlom a wikipédia *mathematical economics* címszavát, amely nem ennyire szabatosan, de nagyobb ívben tárgyalja a kérdést. Külön felhívom a figyelmet két további könyvre: Keynes (1936) a Nagy Válság mélypontja után elméletileg is megmagyarázta, hogy az elégtelen kereslet tömeges munkanélküliséghez vezet. Kornai (1971) monográfiája nemzetközileg is az elsők között mutatott rá az általános egyensúlyelmélet korlátaira.

Hivatkozások

- [1] ARROW, K. J. ÉS DEBREU, G.: *Existence of Equilibrium for a Competitive Economy*, *Econometrica*, **22** (1954): 265–290.
- [2] ARROW, K. J.: *Uncertainty and the Welfare Economics of Medical Care*, *American Economic Review* **53** (1963): 941–973.
- [3] BERNOULLI, D.: *Exposition of New Theory of the Measurement of Risk* (angol fordítás), *Econometrica*, **22** (1735/1954): 23–36.

- [4] BLACK, D.: *On the Rationale of Group Decision Making*, Journal of Political Economy, **56**, (1948): 23–34.
- [5] COURNOT, A.: *Recherches sur la Principe Mathematiques de la Theorie des Richesses*. (1838)
- [6] KEYNES, J. M.: *A foglalkoztatás, a kamat és a pénz általános elmélete* (1936), magyar fordítás, Bp. KJK, 1965.
- [7] KORNAI, J.: *Anti-Equilibrium*, Budapest, Akadémiai Kiadó. (1971)
- [8] MIRRLEES, J. A.: *An Exploration in the Theory of Optimum Income Taxation*, Review of Economic Studies **38** (1971): 175–208.
- [9] NASH, J.: *Non-Cooperative Games*, The Annals of Mathematics, **54** (1951): 286–295.
- [10] NEUMANN: *A társasjátékok elméletéről*, Válogatott előadások és tanulmányok, Budapest, KJK, (1928/1965): 121–156.
- [11] SAMUELSON, P. A.: *Foundations of Economic Analysis*, Cambridge, MA, Harvard University Press (1947), bővített kiadás, 1983.
- [12] SAMUELSON P. A.: *An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money*, Journal of Political Economy **66** (1958): 467–482.
- [13] WALRAS, L.: *Elements of Pure Economics*, London, Allen and Unwin (1874-1877) (a francia eredeti angol nyelvű fordítása), 1954.

(Beérkezett: 2016. május 19.)

SIMONOVITS ANDRÁS
MTA KRTK Közgazdaság-tudományi Intézet
Budaörsi út 45, Hungary, 1112
illetve BME, MI, Differenciálegyenlet Tanszék
simonovits.andras@krtk.mta.hu

ON MATHEMATICAL ECONOMICS FOR MATHEMATICIANS

ANDRÁS SIMONOVITS

This survey outlines the elements of mathematical economics for mathematicians. We introduce the static and the dynamic models of optimal consumption. We extend these models from one to many decision-makers, considering also the theory of strategic interaction: game theory. Pure market models are extended by government intervention. Appreciating the results, we point out unsolved problems.

AZ ÚTVONALTERVEZŐ ALGORITMUS TÖRTÉNETI ÁTTEKINTÉSE, KÜLÖNÖS TEKINTETTEL AZOK TURISZTIKAI CÉLÚ ALKALMAZÁSAIRA

APÁTHY M. SÁNDOR

Kevés rémesebb érzést tudok elképzelni, mint eltévedni egy idegen városban, főként, ha nyelvi akadályok miatt még segítségkérésre sem igen van lehetőségünk. Az idők során megannyi útvonaltervező eljárás született, és talán ezek születésében is hasonló élmények játszhattak közre. Cikkünk célja a jelenleg használatos turisztikai és szállítási célú útvonaltervező algoritmusokig vezető, helyenként rögös, és kitérőktől sem mentes tudományos út rövid bemutatása. A legrövidebb út problémájától indítva tudománytörténeti áttekintőnket láthatjuk, ahogyan a szerteágazó problémákat egyesíti a lineáris programozás technikája, majd rátérünk az utazóügynök feladatra, valamint az abból kifejlődő szállítási és útvonaltervezési problémákra koncentrálna. Mivel a 60-as évektől kezdve igen megnövekedett a különféle útvonaltervezési eljárások száma, így összefoglalónkat mindinkább a turisztikai megoldásokra szűkítjük, hogy tartani tudjuk a terjedelmi kereteket.

Kulcsszavak: Team Orienteering Problem, Route Planning, Heuristic Algorithm, Tourism JEL kód: C60, C61, Z32

1. Bevezetés

Az okostelefonok korában megannyi útvonaltervező alkalmazás áll rendelkezésünkre, hogy kirándulásaink megtervezésében segítségünkre legyen. Egy 3 napos út tervezése papíron, akár csak egy Budapest méretű városban is komoly kihívást jelent, és nem kevés munkaórát. Egy ilyen utat kevés személyes információ megosztása árán kalkulálni képes algoritmus, nyilvánvalóan temérdek tervezéssel töltött órát takaríthat meg a felhasználók számára, akik azon fáradoznak, hogy azt a néhány pihenésre szánt napot a számukra leginkább élvezetessé tegyék. Jelen cikk célja annak bemutatása, hogyan jutott idáig ez a tudományterület a legrövidebb út problémájától, mely már az őskorban is foglalkoztatta elődeinket az élelem lelőhely és a táboruk viszonylatában. Mint azt látni fogjuk, a lineáris programozási technika kifejlődése egységes keretet nyújtott a korábbi szerteágazó kombinatorikus optimalizálási feladatok megoldásának, melyeket korábban külön

kezelték. Ennek kialakulásában egy sor magyar tudós vett részt, akik munkásságának külön figyelmet szentelünk a cikkben. Az 50-es, 60-as évek megannyi olyan eredménnyel szolgált az operációkutatás területén, mely addig sohasem látott módon gyorsította fel a terület fejlődését. Hogy terjedelmi kereteinket tartani tudjuk, a korai eredmények ismertetése után az utazóügynök problémára fordítjuk figyelmünket, valamint az abból kifejlődő turisztikai és szállítmányozási célú eljárásokra. Az utolsó szakaszban a turisztikai útvonaltervező problémák néhány kiterjesztését mutatjuk be, illetve az azokra adott megoldásokat, számosságukra való tekintettel a teljesség igénye nélkül.

2. Legrövidebb út problémája

Az útvonaltervező algoritmusok szakirodalma messzire nyúlik vissza, hiszen már az őskorban is foglalkoztatta elődeinket, akárcsak az állatokat, hogyan tudnak a leggyorsabban, vagy leginkább energiatakarékos módon eljutni az élelem- vagy vízforráshoz. Első említést érdemlő mérföldköve a labirintusból való kijutást megoldó mélységi keresés algoritmus (Depth-first search), mely Trémaux nevéhez fűződik. Az eljárás lényege, hogy adott pontból úgy járunk végig egy gráfot, hogy addig megyünk előre a csomópontokon, míg lehetséges, majd visszalépünk az első olyan csomópontig, ahol elágazás volt, stb. Ez tehát egy mohó algoritmus, mely lokális optimumokon keresztül reméli elérni a globális optimumot. A mélységi bejárás módszeréről Wiernernél olvashatunk először 1873-ban [96]. A legrövidebb utakra adott megoldások további történeti áttekintése előtt következzen egy definíció.

2.1. Definíció. (legrövidebb út irányítatlan gráfon) Legyen $G(V, E)$ irányítatlan gráf, V a csúcok, E az élek halmaza, míg $P = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in V \times V \times \dots \times V$ úgy, hogy v_i szomszédos v_{i+1} -gyel $\forall 1 \leq i < n$, így P egy n hosszú út v_1 és v_n között. Legyen $e_{i,j}$ élköltség v_i és v_j csúcok között, valamint az éleken legyen adott $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ élköltség függvény. Ekkor v_0 és v^* között (ahol $v_0 = v_1$ és $v^* = v_n$) a legrövidebb út az, ami minden lehetséges n -re minimalizálja az alábbi kifejezést:

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(e_{i,i+1}).$$

Az irányított gráfok esetén csupán annyi a különbség a definícióban, hogy irányított $e_{i,j}$ éleket követelünk meg a szomszédos v_i és v_j csúcok között. Irányított gráfokra az 50-es években két megoldás is született. Ezen eljárásokban közös az alábbi, Ford [38] által leírt általános forma:

Legyen adott $G(V, E)$ irányított gráfon az $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ élköltség függvény, és két csúcs közötti távolságot definiáló függvény, $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$. Ekkor egy adott s csúcsból egy másik csúcsig tartó út hosszát az alábbiak szerint kalkuláljuk: legyen $d(s) = 0$ és $d(v_i) = \infty \forall v_i \in V/s$. Válasszuk (v_j, v_i) élt, ahol $d(v_i) > d(v_j) +$

$+ f(v_j, v_i)$ és legyen $d(v_i) := d(v_j) + f(v_j, v_i)$, majd folytassuk ezt addig, amíg már nem találunk ilyen élt. A két módszer közötti különbség ott van, ahogyan az iterációban a következő élt kiválasztjuk:

- A Bellman-Ford algoritmusban minden iterációban végigmegyünk az éleken, míg el nem fogynak, összesen maximum $|V|$ darab iterációban. Ezt a módszert (vagy ezzel ekvivalens módszert) írt le egymástól függetlenül Shimbel 1955-ben [79], Bellman 1958-ban [5] és Moore 1959-ben [66]. Shimbel telefonhálózatok mátrix reprezentációján igyekezett megoldani a legrövidebb út problémáját.
- A Dijkstra által 1959-ben közzétett algoritmusban [29] mindig a legkisebb $d(v_j)$ értékhez tartozó (v_j, v_i) élt választjuk, így minden él legalább egyszer kiválasztásra kerül, ha nincsenek negatív élköltségek. Ezzel ekvivalens megoldást írtak le Leyzorek et al. [62], a Case Institute of Technology kutatói is 1957-es riportjukban, és Shimbel korábbi eredményének komplexitásán is tudtak javítani javaslatukkal. Hasonló, és csak kicsit lassabb algoritmus az 1958-ban Dantzig cikkében megjelent módszer [25], amely szerint azt az élt kell választani a következő lépésben, amelyre a $d(v_j) + f(v_j, v_i)$ érték minimális.

Mint látható az évszámok közelségéből is, a korszak igen termékeny volt, a megoldások pedig kis túlzással egyszerűek, hiszen több kutató egymástól függetlenül is ekvivalens eredményre jutott. A korszakról bővebben Schrijver cikkében olvashatunk [78].

Rövid kitérő erejéig meg kell említenünk a témával kapcsolatosan a *minimális feszítőfa problémát*, mely egy összefüggő, irányítatlan gráfban a legkisebb összélköltségű feszítőfát keresi. (Feszítőfa alatt azt a fát értjük, amely a gráf összes csúcsát tartalmazza, élei a gráf eredeti élei, és minden csúcsból, minden csúcsba pontosan egy út vezet). A problémára már 1926-ban adott egy megoldást Boruvka [9], melynek egy egyszerűsített változatát írta meg Jarník 1929-es levelében Boruvkának, majd 1930-ban cseh nyelven cikk formájában is megjelent [53]. Ám ez feledésbe merült, és tőle függetlenül Prim 1957-ben [71], valamint Dijkstra 1959-ben ismét megalkották az eljárást [29], ezzel sikerült javítaniuk Kruskal 1956-ban megjelent megoldásának számításgényén [60], melyet Boruvka nyomán írt. Az eljárás igen egyszerű (Prim-algoritmus): legyen $G(V, E)$ összefüggő, irányítatlan gráf, valamint jelölje A a keresett feszítőfa csúcsainak halmazát, míg B az élék halmazát. Első lépésként válasszunk tetszőleges csúcsot V -ből, majd töröljük V -ből, és kerüljön A -ba. Válasszuk ki a legkisebb élköltségű (v_j, v_i) élt úgy, hogy $v_i \in V$ és $v_j \in A$. A kiválasztott (v_j, v_i) élt tegyük át B -be, és v_j -t töröljük V -ből, és tegyük A -ba. Ha már G gráf minden csúcsa A -ban van, akkor megkaptunk egy olyan feszítőfát (tehát nem feltétlenül egyértelmű megoldáshoz jutunk), melynek éleit B tartalmazza. Ennek az eljárásnak igen nagy szerepe van többek között közüzemi hálózatok telepítésében. Rövid kitérő erejéig meg kell említenünk a témával kapcsolatosan a minimális feszítőfa problémát, mely egy összefüggő, irányítatlan gráfban a legkisebb összélköltségű feszítőfát keresi. (Feszítőfa alatt azt a fát

értjük, amely a gráf összes csúcsát tartalmazza, élei a gráf eredeti élei, és minden csúcsból, minden csúcsba pontosan egy út vezet). A problémára már 1926-ban adott egy megoldást Boruvka [9], melynek egy egyszerűsített változatát írta meg Jarník 1929-es levelében Boruvkának, majd 1930-ban cseh nyelven cikk formájában is megjelent [53]. Ám ez feledésbe merült, és tőle függetlenül Prim 1957-ben [71], valamint Dijkstra 1959-ben ismét megalkották az eljárást [29], ezzel sikerült javítaniuk Kruskal 1956-ban megjelent megoldásának számításgényén [36], melyet Boruvka nyomán írt. Az eljárás igen egyszerű (Prim-algoritmus): legyen $G(V, E)$ összefüggő, irányítatlan gráf, valamint jelölje A a keresett feszítőfa csúcsainak halmazát, míg B az élek halmazát. Első lépésként válasszunk tetszőleges csúcsot V -ből, majd töröljük V -ből, és kerüljön A -ba. Válasszuk ki a legkisebb élköltségű (v_j, v_i) élt úgy, hogy $v_i \in V$ és $v_j \in A$. A kiválasztott (v_j, v_i) élt tegyük át B -be, és v_j -t töröljük V -ből, és tegyük A -ba. Ha már G gráf minden csúcsa A -ban van, akkor megkaptunk egy olyan feszítőfát (tehát nem feltétlenül egyértelmű megoldáshoz jutunk), melynek éleit B tartalmazza. Ennek az eljárásnak igen nagy szerepe van többek között közüzemi hálózatok telepítésében.

Visszatérve a legrövidebb út problémához, Dijkstra algoritmus után sok heurisztikus megoldás született a teljesítmény javítására. (A heurisztika minden esetben egy függvény, mely rangsorolja a lehetséges megoldásokat az elérhető információk alapján, ezzel segítve a továbblépésnél a gyorsabb döntést). Talán a legismertebb útkereső algoritmus, az A^* (A -star) is ekkor született 1968-ban a Stanford Research Institute-ban, mely az első legjobb keresési (best-first search) eljárást használja heurisztikaként minden iterációban [68], hogy a lehető leghamarabb megtalálja az optimális utat, lásd Hart et al. [51]. Egyéb heurisztikus megoldások, mint például a B^* (B -star) [7] vagy a kétirányú keresés (bi-directional search) után [16], 1987-ben sikerült a számítási igény terén áttörést elérnie Fredmannak és Tarjannak [39], Fibonacci-halmokon (F-heaps) alapuló, új adatstruktúrájuknak köszönhetően. A hálózatok bonyolultságának növekedésével nehezen tudta az informatika fejlődése tartani a versenyt, így 2005-ben a 9. alkalommal megrendezett Dimacs Challenge [98] nevű tudományos verseny a legrövidebb út témájában írta ki pályázatát, és mintaadatként rendelkezésre bocsátották az USA akkori teljes úthálózatának gráfját. A verseny igen sok új eredményt generált, közülük is kiemelkedő a Karlsruhe Institute of Technology csapata által publikált cikkek sora. A rövidség kedvéért csak egyet, Geisberger et al. [46] cikkét emelném ki, akiknek érdeme abban rejlik, hogy a korábbi eredményeket javítani tudták azzal, hogy a keresés során nem preferált elemeket előzetesen eltávolítják a gráfból. Eljárásuknak a rövidítési rangsor (contraction hierarchy) nevet adták. Gyorsabb megoldásuknak azonban igen komoly előkalkuláció az ára. Ennek kiváltására tett kísérletet Delling et al. [27] RAPTOR nevű algoritmus, mely egyáltalán nem igényel előkalkulációt, és mivel nem Dijkstra-algoritmusán alapszik, minden utat maximum egyszer vesz figyelembe iterációnként. Az előkalkulációk elhagyásával az algoritmus alkalmassá vált online alkalmazásokban való felhasználásra, hogy Pareto-optimális

utakat kalkuláljon tömegközlekedési hálózatok felhasználói számára. 2013-as cikkében Dibbelt et al. [28] közzétettek Connection Scan nevű algoritmusukat, mely bár nem sokkal gyorsabb, mint a RAPTOR, de lényegesen egyszerűbb, mindamellett képes kezelni komplex eseteket is, például a várható késéseket, és ezt figyelembe véve kalkulálja a felhasználók várható érkezési idejét. A témakörben a 90-es évek közepéig megalkotott algoritmusokat részletesen tárgyalja Cherkassky et al. [20], különös figyelmet fordítva azok számítási igényére.

A legrövidebb út problémára adott megoldások történeti áttekintése után térjünk rá az útvonaltervező eljárások gyakorlati problémákon való alkalmazásaira.

3. Útvonaltervező eljárások

Az egyik első útvonaltervező alkalmazás az utazóügynök probléma (Traveling Salesman Problem, röviden TSP), melyet először az 1930-as években Karl Menger formalizált, és adott rá megoldást [64]. Lényege, hogy az ügynöknek adott telephelyeket kell felkeresnie, és dönteni csak arról tud (az élköltségek ismeretében), milyen sorrendben teszi ezt, hogy a lehető legkisebb költséggel járja körbe a telephelyeket. Tehát minimális összköltségű Hamilton-kört keresünk a gráfon. Birkhoff [8] munkájának köszönhetően lehetővé vált a hozzárendelési feladatok megoldása lineáris programozási feladatként, melyet Dantzig, Fulkerson és Johnson alkalmazott elsőként a TSP megoldására [24]. 1954-es cikkükben olyan módszereket vezetnek be, mely ma kombinatorikus optimalizálás alapját képezik, mint például a metszősíkok módszere. Fontos megemlítenünk, hogy a kombinatorikai és gráfelméleti alapok megteremtéséből olyan magyar tehetségek vették ki részüket, mint Kőnig Dénes a páros gráfok ekvivalencia tételével [59], majd tanítványa, Gallai Tibor független- és lefogó halmazokról szóló tételével [40], és Egerváry Jenő, aki általánosította a Kőnig-tételt [31], majd később a szállítási feladat kapcsán is elért önálló eredményt [32]. A magyar gráfelméleti iskola jelentőségét az is jól mutatja, hogy Kuhn Magyar-módszernek nevezte el az Egerváry munkája nyomán megalkotott, ma is alapvető eljárását a hozzárendelési feladat kombinatorikai megoldására [61]. A témakör tudománytörténeti hátterét bővebben Schrijver dolgozta fel [77].

A későbbiekben is javarészt ipari és gazdasági motivációk vezérelték a kutatások fókuszát, így alakult önálló témakörre a szállítmányozás tervezését segítő jármű útvonaltervezési probléma (Vehicle Routing Problem, röviden VRP), mely egy teherszállító flotta járműveinek telephely központú körútjainak optimalizálását célozza idő- és kapacitáskorlátok mellett. A probléma első formalizálására Dantzig és Ramser 1959-es cikkében került sor [26]. Később ennek több változata alakult ki: jármű útvonaltervezési probléma időablakkal (Vehicle Routing Problem with Time Windows, röviden VRPTW), a korlátozó feltételek kibővültek a meglátogatandó célállomások nyitvatartási idejével, vagy éppen a kapacitáskorlátos jármű útvonaltervezési probléma esetén a szállítóeszköz kapacitás korlátjával

(Capacitated Vehicle Routing Problem, röviden CVRP), de több példát láthatunk a feltételek könnyítésére is: a többutas jármű útvonaltervezési probléma esetén a teherautók akár több körutat is tehetnek (Vehicle Routing Problem with Multiple Trips, röviden VRPMT), vagy nem feltétlenül szükséges az út végén a telephelyre visszatérniük a nyílt jármű útvonaltervezési problémában (Open Vehicle Routing Problem, röviden OVRP). Mivel a probléma NP-nehéz, így az idők során megannyi közelítő módszer született, ezek egyik jellemző iránya a heurisztikus megoldások köre:

- Genetikus algoritmusok, melyek utánozzák a mikrobiológusok által megfigyelt DNS-lánc javításának mechanizmusát, és az első fázisban - jellemzően mohó algoritmus segítségével - elkészült utakat variálják cserék és eltolások sorozatával. Az algoritmus futási ideje erősen függ attól, milyen megállási értéket állítanak be az algoritmusban (vagyis hány olyan random próbát tehet az algoritmus egymás után, ami nem javította a célfüggvény értékét, mielőtt új helyen próbál javulást elérni az algoritmus), lásd Chang és Chen [17].
- A hangya kolóniák módszere (ant colony system) a hangyák „motivációs eljárását” igyekszik utánozni: tudvalevő, hogy a hangyák feromonok segítségével kommunikálnak egymással. Amennyiben egy hangyának hosszú utat kell megtenni az élelem forrásáig, úgy egyre gyengül a feromon jel, amit maga után hagy. Ha azonban sikerül rövid utat találnia, ez a jel erős marad, így mind többen járnak majd a megtalált rövid úton. Ezt a logikát alkalmazták Bullnheimer et al. [12] VRP feladat megoldására.
- A szimulált lehűlés (simulated annealing) egy sztochasztikus technika, mely minden lépésben dönt - megfelelő kritériumok mellett -, hogy egy másik állapotba lépjen-e át, vagy helyben maradjon. A kohászatból vett kifejezés arra utal, ahogyan a fémet ellenőrzött körülmények között felhevítik, majd visszahűtik, hogy a szerkezetét erősítsék, és a benne található zárványokból minél több eltűnjön. Ezzel az eljárással keres globális optimumot VRPTW feladatra Czech és Czarnas [23].
- A tabu keresés (tabu search) megoldások a memóriában tárolják azokat a megoldásokat, melyek korábbi iterációkban tesztelve lettek és valamilyen előre megállapított szabály miatt tiltó listára kerültek (egy időre). Az eljárást például Bräysy és Gendreau alkalmazta VRPTW megoldására [11].
- A 2-opt általában más algoritmusokkal kombinálva jelenik meg a megoldásokban. Lényege, hogy olyan út, mely keresztezi saját magát, úgy legyen átrendezve, hogy ne legyen benne kereszteződés. Az algoritmus leírását elsőként Croes adta 1958-ban a TSP megoldására [22].
- A 3-opt olyan lokális keresési (local search) algoritmus, mely a gráfon, vagy úton 3 szomszédos csúcstól töröl, majd ezeket minden lehetséges módon újra-

rendezve igyekszik az optimális utat, vagy utakat megtalálni. Az algoritmust elsőként Lin formalizálta 1965-ben [57].

- A Lin-Kernighan-algoritmus a 2-opt és 3-opt eljárások általánosítása, melyben mindkét algoritmust adaptívan alkalmazzuk az útvonalakon. A Lin és Kernighan [58] által 1973-ban alkotott algoritmus az egyik leghatékonyabb eljárás a TSP megoldására.

Mindemellett egzakt algoritmusok is születtek:

- Korlátozás és szétválasztás (branch and bound) egy kombinatorikus optimalizációs eljárás, szétválasztás szakaszában a keresési halmazt diszkrét halmazokra bontja bizonyos szabályok alapján, majd a korlátozás szakaszban az egyes halmazokat „ritkítja”, ezzel gyorsítva fel a keresést a brute-force megoldásokhoz képest, lásd Bektas et al. [6]
- A vágás és szétválasztás (branch and cut) eljárás egészértékű lineáris programozási (Integer Linear Programming, röviden ILP) feladatok megoldására szolgál, melynek keretében először a korlátozás és szétválasztás algoritmust használjuk az LP feltételeinek könnyítésére, majd metszősíkok módszerével szűkítjük azokat, hogy az optimumhoz közelebb jussunk. Jó példa ennek alkalmazására VRP feladat megoldásában Pessoa et al. [69].
- Az egzakt algoritmusok számításgigénye gyakran csökkenthető olyan eljárásokkal, melyek egyszerű megfontolások alapján az irreleváns csúcsokat, vagy csúcskombinációkat eleve törlik. Erre jó példa Lu et al. [63] Trip-Mine algoritmus, ahol a csúcsook költség-profit alapú rendezésével, valamint már időben el nem érhető csúcsook törlésével lerövidítik a vizsgálandó esetek számát. Így a vizsgált „brute force” algoritmus (mely 12 csúcs kalkulálása esetén már majdnem 1 órás futási időt produkál, hiszen $12!$ esetet kell leszámolni) helyett javasolt eljárás néhány ezred másodpercre csökkenti annak futásidőjét.
- Mivel a VRPTV formalizálható egyenletrendszerként, így a probléma LP feladatként való megoldása is lehetséges, lásd Rousseau et al. [75].

Az utazóügynök problémából kifejlődő modellek másik ága a tájfutó problémája (*Orienteering Problem*, röviden OP), vagy más néven a szelektív utazóügynök probléma (*Selective Traveling Salesman Problem*, röviden STSP), ahol az egyes ügyfelekhez már profitot rendelnek, és az ügynököt szorító időkorláton belül a legnagyobb összprofitot kell begyűjtenie az útja során az ügyfelek meglátogatásával. Az elnevezés 1996-ban Chao et al. [18] cikkében szerepel, de már 1984-ben megjelent Tsiligirides-nél [88], ahol a TSP-ben az ügynöknek nincs elég ideje, hogy az összes várost meglátogassa egyedül. Cikkében olyan sztochasztikus algoritmust alkalmaz az optimális útvonal közelítő megoldására, mely minden iterációban Monte-Carlo-módszerrel keresi a következő csúcso, a távolság és a begyűjthető profit függvényében. A problémát már formalizálta Kataoka és

Morito 1988-ban [55], ám ők még maximális gyűjtési probléma (*Maximum Collection Problem*) néven hivatkoztak rá. A témáról bővebben Feillet et al. összefoglaló cikkében olvashatunk [35]. Az OP megfogalmazását az A.1. függelék alatt találjuk. Már a kezdetektől ismert volt ennek a technikának a természetjárásban és általában a turizmusban való alkalmazhatósága, hiszen az OP elnevezés is a tájfutásból ered, ahol a versenyzőknek egy térkép és egy iránytű segítségével kell felkeresni az előre kijelölt pontokat a lehető legrövidebb időn belül. Innen datálható a tudományág sport és turizmus területén történő hasznosítása, és terjedt ki nem csak a természetjárásra, de a városnézésre is. Ennek jó példája Wang et al. [95], ahol a legérdekesebb látványosságokat látogatja végig a turista a szállodából indulva, és a nap végén oda visszaérkezve. Golden, Levy és Vohra megmutatták, hogy az OP NP-nehéz [49], így az erre adott egzakt megoldások csak viszonylag kis számú csúcs esetén lehetséges. Ramesh et al. [73] korlátozás és szétválasztás algoritmust használnak, mellyel egzakt megoldást ad akár 150 csúcst tartalmazó gráfra is, míg Fischetti et al. [36] cikkükben brach-and-bound eljárással akár 500 csúcsra is egzakt megoldást tudnak adni. Ramesh és Brown [72] 4 fázisból álló heurisztikus megoldást adnak az OP-re, melyben a 2-opt és 3-opt eljárásokat alkalmazzák. Ennél jobb eredményeket ad Chao et al. [18] 5 lépésből álló megoldása, mely mohó algoritmust, sztochasztikus eljárást és opt-2 algoritmust ötvözve építi fel az útvonalat. A fenti heurisztikus megoldások komoly hátránya, hogy könnyen be tudnak ragadni egy lokális optimumba, melyet Gendreau et al. [48] tabu search megoldása hatékonyan hidal át. Mivel az eredmények turisztikában történő felhasználása igen nagy figyelmet kap, így cikkek sora foglalkozik azok térinformatikai beágyazásával is (mobil applikációk formájában), erre jó példát találunk az OP esetére Souffriau et al. 2008-as cikkében [80]. A tájfutó problémája időablakkal (*Orienteering Problem with Time Windows*, röviden OPTW) az OP általánosítása, ahol a csúcshoz nyitvatartási időket rendelünk. Az OPTW leírását az A.2. függelék alatt adjuk meg. Elsőként Kantor és Rosenwein [54] adtak rá megoldást 1992-ben. Első lépésben úgy illesztnek be az útvonalba új csúcshoz, hogy ne ütközzön időkorlátba, és az egységnyi időkölségre eső fajlagos profit a lehető legnagyobb legyen. Ezután mélységi keresési algoritmussal állítanak elő útszakaszokat, majd fűzik őket össze, elhagyva a nem megvalósítható elemeket. Mivel az időablakok miatt az OP-nél hatékonyan alkalmazható opt-2 és opt-3 algoritmusok OPTW esetén nem használhatóak, így annak egzakt megoldására más eljárásra van szükség. Az azonban igaz, hogy az OPTW megoldására használt eljárás alkalmazható az OP megoldására. Ezt megmutatják Tricoire et al. [87] 2010-es cikkükben. Righini és Salani 2009-es cikkében cite72 kétirányú dinamikus programozási megoldást javasol: a kezdő- és végcsúctól egyszerre kezdik el az út felépítését, végig ellenőrizve, hogy megvalósítható-e az egyes lépésekben javasolt megoldás, ha a két szakaszt összekapcsolnánk.

Az OP egy természetes kiterjesztése a tájfutó csapat probléma (*Team Orienteering Problem*, röviden TOP), ahol a turista „feladata”, hogy P nap alatt a

rendelkezésre álló időben a lehető legtöbb (számára érdekes) látványosságot meglátogasson, és minden nap végén visszatérjen a szállodájába, (ez igen hasonlít a VRPTW-ben megfogalmazott feladathoz). Ezt először Butt és Cavalier formalizálta 1994-ben [13], ahol egy toborzási feladat megoldására alkalmazták. A TOP megfogalmazását az A.3. függelék alatt találjuk. Az egzakt megoldások közül igen hatékonyan működnek az oszlopgeneráló algoritmuson [4] alapuló eljárások. Ekkor LP feladatként oldjuk meg a feladatot, de redukáljuk a dimenziók számát a gyorsabb futási idő érdekében, melyre jó példa Butt és Ryan 1999-es cikke [14], ahol akár 100 csúcsra is egzakt megoldást kaphatunk viszonylag rövid idő alatt. Később Boussier et al. [10] alkalmazta az oszlopgeneráló algoritmust, de már kombinálva a korlátozás és szétválasztás eljárással, hogy javítsanak az algoritmus teljesítményén. A heurisztikus megoldások közül a legkorábbi a már az OP kapcsán ismerttetett Chao et al. [18] cikkében szereplő 5 lépcsős eljárás kis átalakítással: itt az első P legjobb utat listázzuk ki eredményül [19]. Tang és Miller-Hooks [84], valamint Archetti et al. [3] is tabu keresés eljárást alkalmaz a TOP megoldására, míg Ke et al. [56] hangya kolóniák módszerét javasolja cikkében. Az első lépésben 4 eljárást is teszteltek, amivel egy megvalósítható eljáráshoz lehet jutni. Közülük az utakat szekvenciálisan felépítő algoritmus bizonyult a leghatékonyabbnak. Az egyes iterációkban elkészült megoldást 2-opt algoritmussal javítják, majd kiegészítik annyi csúccsal, amennyi az időkorlátba belefér. Vansteenwegen et al. két heurisztikus eljárást is kifejlesztett. Mind az irányított lokális keresés (*Guided Local Search*, röviden GLS) [90], mind a ferde változó szomszéd keresés (*Skewed Variable Neighborhood Search*, röviden SVNS) [92] eljárások ugyanazonok a lépéseken alapulnak: egy kezdeti eljárásból kiindulva „gyengébb” útszakaszokat törölünk, illetve kisebb útszakaszokat illesztünk össze, majd az így kapott út összprofitját igyekszik javítani cserékkel, illetve a menetidőket csökkenteni, és új pontokat beilleszteni a megtakarított idő terhére. Az SVNS más sorrendben variálja ezeket a lépéseket, és így jóval megelőzi a GLS-t. A TOP időablakkal általánosított változata a tájfutó csapat problémája időablakkal (*Team Orienteering Problem with Time Windows*, röviden TOPTW), melynek leírását az A.4. függelékben adjuk meg. A TOPTW-re adott megoldások közül Vansteenwegen et al. [91] iterált lokális keresés algoritmusát (*Iterated Local Search*, röviden ILS) messze a leggyorsabb, bár akadnak eljárások, melyek átlagosan kicsivel jobb megoldást adnak. Ilyen például Gambardella et al. [41] hangya kolóniák módszerén alapuló eljárása. Tricoire et al. [87] a TOPTW egy általánosítására, a többperiódusos, több időablakos tájfutó problémájára (*Multi-Period Orienteering problem with Multiple Time Windows*, röviden MPOPMTW) ad heurisztikus megoldást változó szomszéd kereső eljárással (*Variable Neighborhood Search*, röviden VNS) [50] eljárással, míg az útvonal megvalósíthatóságának ellenőrzésére egzakt algoritmust javasolnak. Ez esetben az egyes telephelyeknek napok között változó lehet a nyitvatartási ideje. Kísérleteik alapján 100 csúcs és 2 megtervezendő út esetén nagyjából 1 perc alatt jut megoldásra, míg Vansteenwegené ILS algoritmusával ez 1 másodperc.

4. Az útvonaltervező eljárások néhány kiterjesztése

A fent ismertetett modelleknek több lehetséges általánosítása létezik, melyek közül a teljesség igénye nélkül néhányat megemlítnék az alábbiakban:

- Az időfüggő tájfutó problémája (*Time-dependent OP*, röviden TDOP) lényege, hogy az egyes élköltségek időben változnak. Jól írja le ez a modell azt a gyakorlati problémát, hogy napszakonként eltérő a városi közlekedés minősége: változik a forgalom és a tömegközlekedési eszközök járatsűrűsége is. Ez talán akkor érint bennünket legkevésbé, ha csak gyalogosan közlekedünk a városban, bár a lámpák beállításai még így is időben változó módon befolyásolja menetidőnket, lásd Fomin és Lingas [37]. Verbeecq et al. [94] hangya kolóniák módszerét kombinálta lokális kereső eljárásokkal a TDOP megoldására. Korábban Abbaspour és Samadzadegan [1] adnak közelítő megoldást a TDOP-re genetikus algoritmus segítségével. Az ILS jó kompromisszumot nyújt gyorsaság és pontosság között, de minden csúcst külön kezel. Az időfüggő, időablakos tájfutó csapat problémája (*Time-dependent Team Orienteering Problem with Time Windows*, röviden TDOPTW) megoldása a hagyományos ILS módszerrel már nem lenne hatékony, így García et al. [43] előkalkulációs eljárással visszavezeti TOPTW feladatra, majd ILS algoritmussal oldja meg azt. Egy másik módszert is kidolgoztak, mely nem él az időbeni függés eliminálásával, ám helyette a tömegközlekedés menetrendjére tesznek periodicitási feltevéseket (mely koránt sem realizisztikus). Gavalas et al. [44] javasolja az egymáshoz közel eső pontok együtt kezelését a probléma egyszerűsítése érdekében, melyhez k -közép klaszterező (k -means clustering) eljárást alkalmaznak. Athéni helyszíneket és tömegközlekedést modellező kutatásukban klasztereken alapuló heurisztikus eljárásokat tovább fejlesztve 3 algoritmust is adnak a TDOPTW közelítésére, melyek az időablakok mellett kezelni tudják az időben változó utiköltségeket és a tömegközlekedési menetrendet is [45]. Az eljárásaik hátránya, hogy nem veszik figyelembe az újabb csúcok útvonalba történő beillesztésénél a következő helyszín várakozási idejében okozott változást, mikor a beillesztésről döntenek.
- Az általánosított tájfutó problémája (*Generalized Orienteering Problem*, röviden GOP) abban különbözik az OP-től, hogy célfüggvénye nem pusztán a csúcokban begyűjthető profitok összessége, hanem általánosabb, nemlineáris összefüggés a pontok között. Lehet például az egyes helyszínek változathatóságát extra profittal értékelni (például a negyedik múzeum meglátogatása helyett egy park felkeresése esetén), vagy bizonyos kiegészítő helyszínek megtekintése, például Glasgow-ban Mackintosh múzeummal alakított házának meglátogatása után érdemes felkeresni az általa tervezett Willow Tearooms enteriőrjét. Schilde et al. [76] cikkében a turisták különleges igényeit próbálja leírni nemlineáris célfüggvényekkel. Az Aurigo nevű alkalmazás [97] útvonaltervező algoritmusá igen egyszerű, hiszen csak az épp adott tartózkodási hely egy r

sugarú környezetében keresi a következő, legnagyobb profitú pontot, de a profitok adaptív módon, dinamikusan kerülnek meghatározásra a felhasználó ízlése, valamint a már meglátogatott pontok függvényében.

- Cikkek sora foglalkozik olyan modellekkel, ahol az egyes élekhez profitok vannak rendelve. Amennyiben a csúcsokhoz nincs, csak az élekhez, azt a szakirodalomban él útvonaltervező probléma (*Arc Routing Problem*, röviden ARP) néven találjuk. A feladat, hogy két adott pont között a lehető legtöbb profitot begyűjtve haladjunk át éleken, melyeknek költség vonzata is van. Souffriau et al. [81] például az észak-flandriai úthálózaton tesztelte biciklis útvonaltervező mohó véletlenszerű adaptív keresési eljárásukat (*Greedy Randomized Adaptive Search Procedure*, röviden GRASP) eljárását, mely előbb mohó algoritmussal jut egy kezdeti megoldáshoz, majd azt javítja a következő lépésben lokális keresési eljárással. Muyltermans et al. [67] az OP-t kiegészítve élekhez rendelt profitokkal formalizálta az általuk általános útvonaltervezési problémának (*General Routing Problem*, röviden GRP) nevezett feladatot, majd adott rá egzakt megoldást opt-2 és opt-3 algoritmusok felhasználásával. A feladat gyakorlati jelentősége a turisztikai célú útvonaltervezésben az lehet, hogy ezáltal a szebb, látványosabb útvonalakat, mint például a sugárutakat vagy folyópartokat, előnyben részesíthetjük.
- Ha az OP-ben egyes csúcsokat kötelezővé teszünk, az az általános tájfutó problémában (*Generalized Orienteering Problem*, röviden GOP) egy szélsőséges alesetnek tekinthető (végtelenül nagy profitokat rendelve bizonyos csúcsokhoz). Gendreau et al. [47] ilyen eljárással biztosítja, hogy a legfontosabb látnivalók minden egyedileg tervezett túraútban benne legyenek.
- Amennyiben az egyes csúcsoknál begyűjthető profitok értéke előre nem ismert, csupán azok eloszlásáról van tudomásunk, az OP-ben megismert feladatunk annyiban módosul, hogy az összprofitunk várható értékét kell maximalizálnunk, melyet sztochasztikus profitú tájfutó probléma (*Orienteering Problem with Stochastic Profits*, röviden OPSP) néven találunk a szakirodalomban. Például Ilhan et al. [52] genetikus algoritmust adott az optimum közelítésére, valamint egy egzakt megoldást is, melyben a sztochasztikus célfüggvényt vele ekvivalens, determinisztikus célfüggvényre cserélik, majd súlyozott összeg eljárással (weighthd sum method) [86] oldják meg a feladatot.
- A csúcsoknál gyűjthető profitok értéke lehet időben változó, de ismert érték. Ez főleg szállítási feladoknál fordul elő, ahol a késedelmes kiszállítás büntetéssel járhat. Erre adott eljárást Erkut és Zhang [34], ahol a szállítási feladatot időfüggő díjazású maximális gyűjtési probléma (*Maximum Collection Problem with Time Dependent Rewards*, röviden MCPTDR) modellel írta le, és a profitok időben lineárisan csökkentek. Ezt egészértékű programozási feladatként kezelték, melyre korlátozás és szétválasztás algoritmussal és egy mohó

algoritmussal adtak közelítő megoldást. Ennek több útra felírt változatára (*Multiple Tour Maximum Collection Problem with Time-Dependent rewards*, röviden MTMCPTD) ad megoldást Tang et al. [85], akik hibaelhárító szerezőcsoportok kiszállásait optimalizálására tabu keresés algoritmust adtak közelítő megoldásként. A turizmusban olyan gyakorlati esetekben fordulhat elő, mikor egy kiállítás valamely részlege csak szűkebb látogatási időben érhető el, és annak zárva tartása esetén a csúcsnál gyűjthető profit értéke kisebb, vagy mint Erdogan és Laporte cikkében [33], ahol az adott ponton töltött időtől függ a beszedhető profit.

- A TOPTW egy másik általánosítása a szelektív jármű útvonaltervezési probléma időablakokkal (*Selective Vehicle Routing Problem with Time Windows*, röviden SVRPTW), ahol két új korlátot vezethetünk be: a járművek nem csak időkorlátokkal bírnak, de távolsághorláttal is, valamint a rakterükből adódó kapacitáshorláttal. Ezt tetszőlegesen értelmezhetjük turistákra is, akik egy bizonyos távolság megtétele után elfáradnak, valamint anyagi lehetőségük is véges, így nem tudnak naponta egy adott összegnél többet elkölteni a nevezetességeknél megváltandó belépőjegyekre. Boussier et al. [10] korábban említett egzakt algoritmusára erre a problémára is megoldást ad akár 100 csúcs és 10 megtervezendő út esetére is.
- Ennek egy speciális változata a kapacitáshorláttal tájfutó csapat probléma (*Capacitated Team Orienteering Problem*, röviden CTOP), ahol csak egy extra kapacitáshorláttal (pénzügyi korlát) egészítjük ki a TOP modellt, lásd Archetti et al. [2].
- A turizmusban előforduló gyakorlati problémából fakad a szálloda választó tájfutó probléma (*Orienteering Problem with Hotel Selection*, röviden OPHS), ami a TOP feladat kibővítése azzal, hogy egy adott halmazból szállást kell választani az utakhoz (ahol azok kezdődnek és végződnek), lásd Divsalar et al. [30]. Castro et al. [15] a TSP-t egészíti ki szállodaválasztással (TSPHS), melyre ILS és egy speciális genetikus algoritmus kombinációjából álló heurisztikus megoldást adnak cikkükben.
- Külön említést érdemel még az útvonaltervező feladatok egy speciális családja, mely a turisták gyakorlati útvonaltervező feladatait kívánja megoldani, és gyakran köthető mobil alkalmazásokhoz, és ebből adódóan kis számításigényű eljárást kíván. Elnevezése, a turistaút tervezési probléma (*Tourist Trip Design Problem*, röviden TTDP), Vansteenwegen és Van Oudheusden 2007-es cikkéből származik [89]. A TTDP legegyszerűbb modellje az OP, és gyakorlati jelentőséget tulajdoníthatunk annak minden kiterjesztésének. A TTDP megoldások részletes áttekintését olvashatjuk Gavalas et al. [45] összefoglaló cikkében. A mobil eszközökre készült alkalmazások jó példája Sylejmani és Dika cikke [83], ahol Bécs turisztikai látványosságain tesztelték tabu search alapú heu-

risztikus algoritmusukat. García et al. [42] a TDTOPTW megoldására tesznek javaslatot heurisztikus algoritmusukkal, mely személyre szabott profitokkal látja el az egyes csúcsokat a felhasználó preferenciáinak megfelelően. A TDTOPTW mobil alkalmazásokra tervezett megoldások közül Souffriau et al. [82] ILS algoritmussal adott közelítése az egyik leghatékonyabb.

- Az útvonaltervező eljárások egy máshova kevésbé beilleszthető példája De Choudhury et al. [21] cikke, akik „közösségi kenyérmorzsáknak” (social bread-crumbs) nevezett információ alapján építenek túraútvonalakat. Az interneten (Facebook, Flickr stb.) megosztott fotók és egyéb bejegyzések gyűjtése és szisztematikus válogatása alapján, összeegyeztetve a felhasználó előre kinyilvánított preferenciáival. Mivel a fotókhoz időbélyegek (timestamp) is tartoznak, így Popescu és Grefenstette [70] korábbi munkája alapján már lehetőség nyílt az egyes helyszínek látogatási idejének, illetve a köztük megtett út menetidejének becslésére is. Hasonlóan közösségi adatokon alapszik Letchner et al. [36] munkája, akik helyi lakosok autós GPS adatai alapján jobb útvonalat tudtak javasolni az átutazóknak, mint amit bármilyen útvonaltervező adott, mert ők egy eddig fel nem használt információt építettek a tervezésbe: a tapasztalatot. A dolgozatban bemutatott útvonaltervezési problémák közötti kapcsolatot a B függelékben szemléltetjük

Az útvonaltervező algoritmusokról bővebb összefoglalót Vansteenwegen et al. cikkében olvashatunk [93], ahol külön kitérnek az egyes eljárások számítási igényére is.

5. Befejezés

A fentiekben ismertetett problémákon és azokra adott megoldások bonyolultságán láthatjuk, miként váltak az idők során egyre inkább életszerűvé és pontosabbá a modellek. Az eddigi problémák kiterjesztésének, valamint az újabb útvonaltervező eljárásoknak csak a fantázia és a rendelkezésre álló eszközök számítási teljesítménye szabhat határt. Nem kétséges, hogy még a mi életünkben több nagyságrenddel nagyobb bonyolultságú feladatok megoldásának lehetünk szemtanúi.

Hivatkozások

- [1] R. A. ABBASPOUR, F. SAMADZADEGAN: *Time-dependent personal tour planning and scheduling in metropolises*, Expert Systems and Applications, Vol. **38** (2011), 12439–12452. doi:10.1016/j.eswa.2011.04.025.
- [2] C. ARCHETTI, D. FEILLET, A. HERTZ, M. SPERANZA: *The capacitated team orienteering*

- and profitable tour problems*, Journal of the Operational Research Society, Vol. **60** (2009), 831–842. doi:10.1057/palgrave.jors.2602603
- [3] C. ARCHETTI, A. HERTZ, M. SPERANZA: *Metaheuristics for the team orienteering problem*, Journal of Heuristics, Vol. **13** (2007), 49–76. doi: 10.1007/s10732-006-9004-0
- [4] C. BARNHART, E. L. JOHNSON, G. L. NEMHAUSER, M. W. P. SAVELSBERGH, P. H. VANCE: *Branch-and-Price: Column Generation for Solving Huge Integer Programs*, Operations Research, Vol. **46**, No. **3** (1998), 316–329.
- [5] R. BELLMAN: *On a routing problem*, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. **16** (1958), 87–90.
- [6] T. BEKTAŞ, G. ERDOĞAN, S. RÖPKE: *Formulations and Branch-and-Cut Algorithms for the Generalized Vehicle Routing Problem*, Journal of Transportation Science, Vol. **45**, No. **3** (2011), 299–316. doi: 10.1287/trsc.1100.0352
- [7] H. BERLINER: *The B* Tree Search Algorithm. A Best-First Proof Procedure*, Artificial Intelligence, Vol. **12**, No. **1** (1979), 3–40. doi:10.1016/0004-3702(79)90003-1
- [8] [2] G. BIRKHOFF: *Tres observaciones sobre el algebra lineal*, Revista Facultad de Ciencias Exactas, Puras y Aplicadas Universidad Nacional de Tucuman, Serie A (Matematicas y Fisica Teorica), Vol. **5** (1946), 147–151.
- [9] O. BORUVKA: *O jistém problému minimálním [On a minimal problem]*, Práce Moravské Přírodovědecké Společnosti, Brno [Acta Societatis Scientiarum Naturalium Moravicae], Vol. **3** (1926), 37–58. (cseh nyelven, német előszóval)
- [10] S. BOUSSIER, D. FEILLET, M. GENDREAU: *An exact algorithm for the team orienteering problem*, 4OR, Vol. **5** (2007), 211–230. doi:10.1007/s10288-006-0009-1
- [11] O. BRÄYSY, M. GENDREAU: *Tabu Search Heuristics for the Vehicle Routing Problem with Time Windows*, Sociedad de Estadística e Investigación Operativa TOP, Vol. **10**, No. **2** (2003), 211–237. doi: 10.1007/BF02579017
- [12] B. BULLNHEIMER, R.F. HARTL, C. STRAUSS: *Applying the Ant System to the Vehicle Routing Problem*, S. Voss, I.H. Osman, C. Roucairol (eds.): *Meta-Heuristics: Advances and Trends in Local Search Paradigms for Optimization*, Kluwer Academic Publishers Norwell (1999), 285–296. doi: 10.1007/978-1-4615-5775-3_20
- [13] S. E. BUTT, T. M. CAVALIER: *A heuristic for the multiple tour maximum collection problem*, Computers and Operations research, Vol. **21** (1994), 101–111. *A heuristic for the multiple tour maximum collection problem*
- [14] S. BUTT, D. RYAN: *An optimal solution procedure for the multiple tour maximum collection problem using column generation*, Computers and Operations Research, Vol. **26** (1999), 427–441. doi:10.1016/S0305-0548(98)00071-9
- [15] M. CASTRO, K. SÖRENSEN, P. VANSTEENWEGEN, P. GOOS: *A fast metaheuristic for the travelling salesperson problem with hotel selection*, 4OR quarterly journal of the Belgian, French and Italian Operations Research Societies, Vol. **13**, No. **1** (2015), 15–34. DOI: 10.1007/s10288-014-0264-5
- [16] D. DE CHAMPEAUX, L. SINT: *An improved bidirectional heuristic search algorithm*, Journal of the ACM, Vol. **24**, No. **2** (1977), 177–191. doi:10.1145/322003.322004

- [17] Y. CHANG, L. CHEN: *Solving the Vehicle Routing Problem with Time Windows via a Genetic Algorithm*, Discrete and Continuous Dynamical Systems Supplement (2007), 240–249. doi: 10.1016/j.eswa.2008.09.001
- [18] I. CHAO, B. GOLDEN, E. WASIL: *Theory and methodology – a fast and effective heuristic for the orienteering problem*, European Journal of Operational Research, Vol. **88** (1996), 475–489. doi:10.1016/0377-2217(95)00035-6
- [19] I. CHAO, B. GOLDEN, E. WASIL: *Theory and methodology – the team orienteering problem*, European Journal of Operational Research, Vol. **88** (1996), 464–474. doi:10.1016/0377-2217(94)00289-4
- [20] B. V. CHERKASSKY, A. V. GOLDBERG, T. RADZIK: *Shortest paths algorithms: theory and experimental evaluation*, Mathematical Programming, Vol. **73**, No. **2** (1996), 129–174. doi: 10.1007/BF02592101
- [21] M. DE CHOUDHURY, M. FELDMAN, S. AMER-YAHIA, N. GOLBANDI, R. LEMPEL, C. YU: *Automatic construction of travel itineraries using social breadcrumbs*, in Proceedings of the 21st ACM conference on Hypertext and Hypermedia (2010), 35–44. doi: 10.1145/1810617.1810626
- [22] G. A. CROES: *A method for solving traveling salesman problems*, Operations Research, Vol. **6** (1958), 791–812. doi: 10.1287/opre.6.6.791
- [23] Z. J. CZECH, P. CZARNAS: *Parallel simulated annealing for the vehicle routing problem with time windows*, in Proceedings of the 5th International Conference (2003), 233–240. doi: 10.1109/EMPDP.2002.994313
- [24] G. DANTZIG, R. FULKERSON, S. JOHNSON: *Solution of a Large Scale Traveling Salesman Problem*, Journal of the Operations Research Society of America, Vol. **2** (1954), 393–410. doi: 10.1287/opre.2.4.393
- [25] G. B. DANTZIG: *On the Shortest Route through a Network*, The RAND Corporation, Santa Monica, California, paper P-1345. Published in Management Science, Vol. **6** (1958), 1960, 187–190.
- [26] G. B. DANTZIG, J. H. RAMSER: *The Truck Dispatching Problem*, Management Science, Vol. **6** (1959), 80–91. doi: 10.1287/mnsc.6.1.80
- [27] D. DELLING, T. PAJOR, R. F. WERNECK: *Round-Based Public Transit Routing*, in Proceedings of the Sixth International Symposium on Combinatorial Search (2012), 130–140. doi:10.1287/trsc.2014.0534
- [28] J. DIBBELT, T. PAJOR, B. STRASSER, D. WAGNER: *Intriguingly Simple and Fast Transit Routing*, in Proceedings of the 12th International Symposium on Experimental Algorithms (2013), 43–54. doi: 10.1007/978-3-642-38527-8_6
- [29] E. W. DIJKSTRA: *A note on two problems in connexion with graphs*, Numerische Mathematik, Vol. **1** (1959), 269–271. doi:10.1007/BF01386390
- [30] A. DIVSALAR, P. VANSTEENWEGEN, D. CATTRYSSSE: *A variable neighborhood search method for the orienteering problem with hotel selection*, International Journal of Production Economics, Vol. **145**, No. **1** (2013), 150–160. doi:10.1016/j.ijpe.2013.01.010
- [31] J. EGERVÁRY: *Mátrixok kombinatorius tulajdonságairól*, Matematikai és Fizikai Lapok, Vol. **38** (1931), 16–28.

- [32] E. EGERVÁRY: *Bemerkungen zum Transportproblem*, MTW Mitteilungen, Vol. **5** (1958), 278–284.
- [33] G. ERDOGAN, G. LAPORTE: *The orienteering problem with variable profits*, Networks, Vol. **61**, No. **2** (2013), 104–116. DOI: 10.1002/net.21496
- [34] E. ERKUT, J. ZHANG: *The maximum collection problem with time-dependent rewards*, Naval Research Logistics, Vol. **43**, No. **5** (1996), 749–763, DOI: 10.1002/(SICI)1520-6750
- [35] D. FEILLET, P. DEJAX, M. GANDREAU: *Traveling Salesman Problems with Profits*, Journal of Transportation Science, Vol. **39**, No. **2** (2004), 188–205. DOI: 10.1287/trsc.1030.0079
- [36] M. FISCHETTI, J. SALAZAR, P. TOTH: *Solving the orienteering problem through branch-and-cut*, INFORMS Journal on Computing, Vol. **10** (1998), 133–148. doi: 10.1007/978-3-319-18161-5_17
- [37] F. V. FOMIN – A. LINGAS: *Approximation Algorithms for Time-Dependent Orienteering*, Lecture Notes in Computer Science, Vol. **2138** (2001), 508–515., doi: 10.1007/3-540-44669-9_57
- [38] L. R. FORD, JR: *Network Flow Theory*, The RAND Corporation, Santa Monica, California, paper P-923, (1956).
- [39] M. L. FREDMAN, R. E. TARJAN: *Fibonacci Heaps and Their Uses in Improved Network Optimization Algorithms*, Journal of the Association for Computing Machinery, Vol. **34**, No. **3** (1987), 596–615. doi:10.1109/SFCS.1984.715934
- [40] T. GALLAI: *Maximum-minimum Satze uber Graphen*, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, Vol. **9** (1958), 395–434.
- [41] L. M. GAMBARDILLA, R. MONTEMANNI, D. WEYLAND: *Coupling ant colony systems with strong local searches*, European Journal of Operational Research, Vol. **220**, No. **3** (2012), 831–843. DOI: 10.1016/j.ejor.2012.02.038
- [42] A. GARCIA, O. ARBELAIZ, M. T. LINAZA, P. VANSTEENWEGEN, W. SOUFFRIAU: *Personalized tourist route generation*, in Proceedings of the 10th International Conference on Current Trends in Web Engineering (2010), 486–497. doi: 10.1007/978-3-642-16985-4_47
- [43] A. GARCIA, P. VANSTEENWEGEN, O. ARBELAIZ, W. SOUFFRIAU, M. T. LINAZA: *Integrating public transportation in personalised electronic tourist guides*, Computers & Operations Research, Vol. **40**, No. **3** (2013), 758–774. doi:10.1016/j.cor.2011.03.020
- [44] D. GAVALAS, C. KONSTANTOPOULOS, K. MASTAKAS, G. PANTZIOU, Y. TASOULAS: *Cluster-based heuristics for the team orienteering problem with time windows*, in Proceedings of 12th International Symposium on Experimental Algorithms (2013), 390–401. doi: 10.1007/978-3-642-38527-8_34
- [45] D. GAVALAS, C. KONSTANTOPOULOS, K. MASTAKAS, G. PANTZIOU, N. VATHIS: *Heuristics for the Time Dependent Team Orienteering Problem: Application to Tourist Route Planning*, Computers & Operations Research, Vol. **62** (2015), 36–50. doi:10.1016/j.cor.2015.03.016
- [46] R. GEISBERGER, P. SANDERS, D. SCHULTES, D. DELLING: *Contraction Hierarchies: Faster and Simpler Hierarchical Routing in Road Networks*, in Proceedings of the 7th international conference on Experimental Algorithms, WEA'08 (2008), 319–333 doi: 10.1007/978-3-540-68552-4_24

- [47] M. GENDREAU, G. LAPORTE, F. SEMET: *A branch-and-cut algorithm for the undirected Selective Travelling Salesman Problem*, Networks, Vol. **32** (1998), 263–273. DOI: 10.1002/(SICI)1097-0037(199812)32:4<263::AID-NET3>3.0.CO;2-Q
- [48] M. GENDREAU, G. LAPORTE, F. SEMET: *A tabu search heuristic for the undirected selective travelling salesman problem*, European Journal of Operational Research, Vol. **106** (1998), 539–545. doi:10.1016/S0377-2217(97)00289-0
- [49] B. GOLDEN, L. LEVY, R. VOHRA: *The Team Orienteering Problem*, Naval Research Logistics Quarterly, Vol. **34** (1984), 307–318. DOI: 10.1002/1520-6750(198706)34:3<307::AID-NAV3220340302>3.0.CO;2-D
- [50] P. HANSEN, N. MLADENOVIC, J. A. M. PEREZ: *Variable neighbourhood search: methods and applications*, Annals of Operations Research, Vol. **175** (2010), 367–407. doi: 10.1007/s10288-008-0089-1
- [51] š P. E. Hart, N. J. Nilsson, B. Raphael: *A Formal Basis for the Heuristic Determination of Minimum Cost Paths*, Transactions on Systems Science and Cybernetics, Vol. **4**, No. **2** (1968), 100–107. doi:10.1109/TSSC.1968.300136
- [52] T. ILHAN, S. IRAVANI, M. DASKIN: *The orienteering problem with stochastic profits*, IIE Transactions, Vol. **40** (2008), 406–421. DOI:10.1080/07408170701592481
- [53] V. JARNÍK: *O jistém problému minimálním (Egy bizonyos minimális problémáról)*, Práce Moravské Přírodovědecké Společnosti, Vol. **6** (1930), 57–63. (cseh nyelven)
- [54] M. KANTOR, M. ROSENWEIN: *The orienteering problem with time windows*, The Journal of the Operational Research Society, Vol. **43**, No. **6** (1992), 629–635. DOI: 10.2307/2583018
- [55] S. KATAOKA, S. MORITO: *An algorithm for the single constraint maximum collection problem*, Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol. **31**, No. **4** (1988), 515–530.
- [56] L. KE, C. ARCHETTI, Z. FENG: *Ants can solve the team orienteering problem*, Computers and Industrial Engineering, Vol. **54** (2008), 648–665. doi:10.1016/j.cie.2007.10.001
- [57] S. LIN: *Computer solutions of the traveling salesman problem*, Bell Systems Technology Journal, Vol. **44** (1965), 2245–2269. doi: 10.1002/j.1538-7305.1965.tb04146.x
- [58] S. LIN, B. W. KERNIGHAN: *An Effective Heuristic Algorithm for the Traveling-Salesman Problem*, Operations Research, Vol. **21** (1973), 498–516. doi:10.1287/opre.21.2.498
- [59] D. KÖNIG: *Graphok és mátrixok*, Matematikai és Fizikai Lapok, Vol. **38** (1931), 116–119.
- [60] J. B. KRUSKAL, JR.: *On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Travelling Salesman Problem*, in Proceedings of American Mathematics Society, Vol. **7** (1956), 48–50. doi:10.1090/S0002-9939-1956-0078686-7
- [61] H. W. KUHN: *The Hungarian method for the assignment problem*, Naval Research Logistics Quarterly, Vol. **2** (1955), 83–97. doi: 10.1007/978-3-540-68279-0_2
- [62] M. LEYZOREK, R. S. GRAY, A. A. JOHNSON, W. C. LADEW, S. R. MEAKER JR., R. M. PETRY, R. N. SEITZ: *Investigation of Model Techniques – A Study of Model Techniques for Communication Systems*, Case Institute of Technology, Cleveland, Ohio (1957).
- [63] E. H. C. LU, C. Y. LIN, V. S. TSENG: *Trip-Mine: An Efficient Trip Planning Approach with Travel Time Constraints*, in Proceedings of the IEEE 12th International Conference on Mobile Data Management, Vol. **1** (2011), 152–161. doi:10.1109/MDM.2011.13

- [64] K. MENGER: *Ein Theorem über die Bogenlänge*, Anzeiger – Akademie der Wissenschaften in Wien – Mathematisch-naturwissenschaftliche, Klasse **65** (1928), 264–266.
- [65] C. MILLER, A. TUCKER, R. ZEMLIN: *Integer programming formulations and travelling salesman problems*, Journal of the ACM, Vol. **7** (1960), 326–329. doi:10.1145/321043.321046
- [66] E. F. MOORE: *The shortest path through a maze*, in Proceedings of an International Symposium on the Theory of Switching, 2–5 April 1957, The Annals of the Computation Laboratory of Harvard University, Vol. **30** (1959), Harvard University Press, Cambridge, 285–292.
- [67] L. MUYLDERMANS, P. BEULLENS, D. CATTRYSSE, D. VAN OUDHEUSDEN: *Exploring variants of 2- and 3-opt for the general routing problem*, Operations Research, Vol. **53**, No. **6** (2005), 982–995. doi:10.1287/opre.1040.0205
- [68] J. PEARL: HEURISTICS: *Intelligent Search Strategies for Computer Problem Solving*, Addison-Wesley (1984), p. 48. doi:10.1016/S0736-5853(86)80081-8
- [69] A. PESSOA, M. POGGI DE ARAGAO, E. UCHOA: *Robust Branch-Cut-and-Price Algorithms for Vehicle Routing Problems*, The Vehicle Routing Problem: Latest Advances and New Challenges, series of the Operations Research/Computer Science Interfaces, Vol. **43** (2008), 297–325. doi: 10.1007/978-0-387-77778-8_14
- [70] A. POPESCU, G. GREFENSTETTE: *Deducing trip related information from flickr*, in Proceedings of the 18th international conference on World wide web (WWW'2009) (2009), 1183–1184. doi: 10.1145/1526709.1526919
- [71] R. C. PRIM: *Shortest connection networks and some generalizations*, Bell System Technical Journal, **36** (1957), 1389–1401. doi:10.1002/j.1538-7305.1957.tb01515.x
- [72] R. RAMESH, K. BROWN: *An efficient four-phase heuristic for the generalized orienteering problem*, Computers and Operations Research, Vol. **18** (1991), 151–165. doi:10.1016/0305-0548(91)90086-7
- [73] R. RAMESH, Y. YOON, M. KARWAN: *An optimal algorithm for the orienteering tour problem*, ORSA Journal on Computing, Vol. **4** (1992), 155–165. doi:10.1016/0305-0548(91)90086-7
- [74] G. RIGHINI, M. SALANI: *Dynamic programming for the orienteering problem with time windows*, Technical Report No. **91** (2006), Dipartimento di Tecnologie dell'Informazione, Università degli Studi Milano, Crema, Italy. doi:10.1016/j.cor.2008.01.003
- [75] L. M. ROUSSEAU, M. GENDREAU, G. PESANT, F. FOCACCI: *Solving VRPTWs with Constraint Programming Based Column Generation*, Kluwer Academic Publishers, Annals of Operations Research, Vol. **130** (2004), 199–216. doi: 10.1023/B:ANOR.0000032576.73681.29
- [76] M. SCHILDE, K. DOERNER, R. HARTL, G. KIECHLE: *Metaheuristics for the bi- objective orienteering problem*, Swarm Intelligence, Vol. **3** (2009), 179–201. doi: 10.1007/s11721-009-0029-5
- [77] A. SCHRIJVER: *Szemelvények a kombinatorikus optimalizálás történetéből (1960-ig)*, Alkalmazott Matematikai Lapok, Vol. **25**, No. **1** (2008), 1–74.
- [78] A. SCHRIJVER: *On the History of the Shortest Path Problem*, Documenta Mathematica, Extra Volume ISMP (2012), 155–168. doi:10.1016/S0927-0507(05)12001-5

- [79] A. SHIMBEL: *Structure in communication nets*, in Proceedings of the Symposium on Information Networks (New York, 1954), Polytechnic Press of the Polytechnic Institute of Brooklyn (1955), 199–203.
- [80] W. SOUFFRIAU, P. VANSTEENWEGEN, J. VERTOMMEN, G. VANDEN BERGHE, D. VAN OUDHEUSDEN: *A personalised tourist trip design algorithm for mobile tourist guides*, Applied Artificial Intelligence, Vol. **22**, No. **10** (2008), 964–985. doi: 10.1080/08839510802379626
- [81] W. SOUFFRIAU, P. VANSTEENWEGEN, G. VANDEN BERGHE, D. VAN OUDHEUSDEN: *The planning of cycle trips in the province of East Flanders*, Omega, Vol. **39**, No. **2** (2011), 209–213. doi:10.1016/j.omega.2010.05.001
- [82] W. SOUFFRIAU, P. VANSTEENWEGEN, G. VANDEN BERGHE, D. D. VAN OUDHEUSDEN: *The Multiconstraint Team Orienteering Problem with Multiple Time Windows*, Journal of Transportation Science, Vol. **47**, No. **1** (2013), 53–63. doi: 10.1287/trsc.1110.0377
- [83] K. SYLEJMANI, A. DIKA: *Solving touristic trip planning problem by using taboo search approach*, International Journal of Computer Science Issues, Vol. **8**, Issue **5**, No. **3** (2011), 139–149. doi: 10.1109/HIS.2012.6421351
- [84] H. TANG, E. MILLER-HOOKS: *A tabu search heuristic for the team orienteering problem*, Computer and Operations Research, Vol. **32** (2005), 1379–1407. doi:10.1016/j.cor.2003.11.008
- [85] H. TANG, E. MILLER-HOOKS, R. TOMASTIK: *Scheduling technicians for planned maintenance of geographically distributed equipment*, Transportation Research, Part E: Logistics and Transportation Review, Vol. **43**, No. **5** (2007), 591–609. doi:10.1016/j.tre.2006.03.004
- [86] E. TRIANTAPHYLLOU: *Multi-Criteria Decision Making: A Comparative Study*, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers (now Springer) (2000), p. 320. doi:10.1007/978-1-4757-3157-6
- [87] F. TRICOIRE, M. ROMAUCH, K. DOERNER, R. HARTL: *Heuristics for the multi-period orienteering problem with multiple time windows*, Computers and Operations Research, Vol. **37**, No. **2** (2010), 351–367. doi:10.1016/j.cor.2009.05.012
- [88] T. TSLIGIRIDES: *Heuristic methods applied to orienteering*, Journal of the Operational Research Society, Vol. **35**, No. **9** (1984), 797–809. doi:10.1057/jors.1984.162
- [89] P. VANSTEENWEGEN, D. VAN OUDHEUSDEN: *The mobile tourist guide: An or opportunity*, OR Insights, Vol. **20**, No. **3** (2007), 21–27. doi:10.1057/ori.2007.17
- [90] P. VANSTEENWEGEN, W. SOUFFRIAU, G. VANDEN BERGHE, D. VAN OUDHEUSDEN: *A guided local search metaheuristic for the team orienteering problem*, European Journal of Operational Research, Vol. **196**, No. **1** (2009), 118–127. doi:10.1016/j.ejor.2008.02.037
- [91] P. VANSTEENWEGEN, W. SOUFFRIAU, G. VANDEN BERGHE, D. VAN OUDHEUSDEN: *Iterated local search for the team orienteering problem with time windows*, Computers and Operations Research, Vol. **36**, No. **12** (2009), 3281–3290. doi:10.1016/j.cor.2009.03.008
- [92] P. VANSTEENWEGEN, W. SOUFFRIAU, G. VANDEN BERGHE, D. VAN OUDHEUSDEN: *Metaheuristics for tourist trip planning*, In: M. Geiger, W. Habenicht, M. Sevaux, K. Sörensen (eds.): *Metaheuristics in the Service Industry*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. **624** (2009), 15–31. doi:10.1016/j.cor.2015.03.016

- [93] P. VANSTEENWEGEN, W. SOUFFRIAU, D. VAN OUDHEUSDEN: *The orienteering problem: a survey*, European Journal of Operational Research, Vol. **209**, No. **1** (2011), 1–10. doi:10.1016/j.ejor.2010.03.045
- [94] C. VERBEECK, K. SÖRSENSEN, E. H. AGHEZZAF, P. VANSTEENWEGEN: *A fast solution method for the time-dependent orienteering problem*, European Journal of Operational Research, Vol. **236** (2014), 419–432. doi:10.1016/j.ejor.2013.11.038
- [95] X. WANG, B. GOLDEN, E. WASIL: *Using a genetic algorithm to solve the generalized orienteering problem*, In: B. Golden, S. Raghavan, E. Wasil (Eds.): *The Vehicle Routing Problem: Latest Advances and New Challenges* (2008), 263–274. doi:10.1007/978-0-387-77778-8_12
- [96] C. WIENER: *Ueber eine Aufgabe aus der Geometria situs*, Mathematische Annalen Vol. 6 (1873), 29–30.
- [97] A. YAHY, A. CHASSANG, L. RAYNAUD, H. DUTHIL, D. H. CHAU: *Aurigo - An Interactive Tour Planner for Personalized Itineraries*, in Proceedings of the 20th International Conference on Intelligent User Interfaces, 275–285. doi: 10.1145/2678025.2701366
- [98] <http://www.dis.uniroma1.it/challenge9/format.shtml>

A.1. függelék: Az Orienteering Problem formalizálása

Legyen adott egy $G(V, E)$ gráf, amelynek minden v_i csúcsához egy π_i nemnegatív profitérték van rendelve, melyet az ügynök megkap, ha meglátogatja a v_i csúcsot, valamint v_i és v_j csúcsok közötti e_{ij} élhez t_{ij} élköltséget rendelünk, ami a távolság megtételéhez szükséges idő. A feladat T_{max} idő alatt maximális pontot összegyűjteni úgy, hogy minden csúcs legfeljebb egyszer látogatható meg. A kezdő- és a végpont fix, és gyakran meg is egyeznek egymással. Jelölje továbbá h_i , hogy az i -edik csúcs hanyadik lépésben kerül sorra az úton, valamint τ_{ij} értéke legyen 1, ha az i -edik csúcs után a j -edik következik az úton, és 0 különben. Ugyan fontos szerepet játszik az egyes csúcsok kiválasztásában az ott töltendő idő is, ám ezt gyakran nem szerepeltetik a modellben, inkább szétesztják a csúcs előtti és utáni élekre (jellemzően fele-fele arányban). Ekkor az OP formalizálása a következőképpen alakul:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{i=2}^{N-1} \sum_{j=2}^N \pi_i \tau_{ij} \\ & \sum_{j=2}^N \tau_{1j} = \sum_{i=1}^{N-1} \tau_{iN} = 1 \\ & \sum_{j=2}^N \tau_{kj} = \sum_{i=1}^{N-1} \tau_{ik} \leq 1; \quad \forall k = 2, \dots, N-1 \\ & \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=2}^N \tau_{ij} t_{ij} \leq T_{max} \\ & h_i - h_j + 1 \leq (N-1)(1 - \tau_{ij}); \quad \forall i, j = 2, \dots, N \\ & 2 \leq h_i \leq N; \quad \forall i = 2, \dots, N \\ & \tau_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Az egyes sorok jelentése a következő:

1. A célfüggvény: a csúcsoknál begyűjtött profitok összege legyen maximális.
2. Az út az 1-es csúcsnál kezdődik, és az N -ediknél ér véget.
3. Az út összefüggő, és minden csúcsot csak legfeljebb egyszer látogatunk meg.
4. Betartjuk az időkorlátot.
5. és 6. együtt garantálja, hogy ne legyenek körök az útban, Miller-Tucker-Zemlin javaslata alapján [65].
7. A τ_{ij} értékészlete 0 vagy 1.

A.2. függelék: Az Orienteering Problem with Time Windows formalizálása

Az OP-nél leírtaktól annyiban tér el az OPTW, hogy minden csúcsot csak az $[O_i, C_i]$ nyitvatartási ideje alatt lehet meglátogatni, és jelöljük s_i -vel az i -edik csúcsához való megérkezés időpontját. Ekkor az OPTW leírható az alábbi módon:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=2}^{N-1} \sum_{j=2}^N \pi_i \tau_{ij} \\ \sum_{j=2}^N \tau_{1j} &= \sum_{i=1}^{N-1} \tau_{iN} = 1 \\ \sum_{j=2}^N \tau_{kj} &= \sum_{i=1}^{N-1} \tau_{ik} \leq 1; \quad \forall k = 2, \dots, N-1 \\ \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=2}^N \tau_{ij} t_{ij} &\leq T_{max} \\ s_i + t_{ij} - s_j + 1 &\leq M(1 - \tau_{ij}); \quad \forall i, j = 1, \dots, N \\ O_i \leq s_i \leq C_i; \quad &\forall i = 1, \dots, N \\ \tau_{ij} \in \{0, 1\} \quad &\forall i, j = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Látható, hogy az OP-hez képest csupán a körmentesség feltétele változott (itt M egy nagy konstans értéket jelöl), valamint kibővült a nyitvatartási idő korlátjával a feltételrendszer.

A.3. függelék: A Team Orienteering Problem formalizálása

Legyen adott egy $G(V, E)$ gráf, amelynek minden v_i csúcsához egy i nemnegatív profitérték van rendelve, melyet az ügynök megkap, ha meglátogatja a v_i csúcsot, valamint v_i és v_j csúcsok közötti e_{ij} élhez t_{ij} élköltséget rendelünk, ami a távolság megtételéhez szükséges idő. A feladat T_{max} idő alatt P darab ügynök számára maximális pontot összegyűjteni úgy, hogy minden csúcs legfeljebb egyszer látogatható meg. A kezdő- és a végpont fix, és gyakran meg is egyeznek egymással. Jelölje továbbá h_{ip} , hogy a p -edik útnál az i -edik csúcs hanyadik lépésben kerül sorra az úton, valamint τ_{ijp} értéke legyen 1, ha a p -edik útnál az i -edik csúcs után a j -edik következik az úton, és 0 különben. Legyen Θ_{ip} értéke 1, ha a p -edik úton az i -edik csúcsot meglátogatják, és 0 különben. Ekkor a TOP megfogalmazható a következőképpen:

$$\begin{aligned}
 & \max \sum_{p=1}^P \sum_{i=2}^{N-1} \pi_i \theta_{ip} \\
 & \sum_{p=1}^P \sum_{j=2}^N \tau_{1jp} = \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^{N-1} \tau_{iNp} = P \\
 & \sum_{p=1}^P \theta_{kp} \leq 1; \quad \forall k = 2, \dots, N-1 \\
 & \sum_{j=2}^N \tau_{kjp} = \sum_{i=1}^{N-1} \tau_{ikp} = \theta_{kp}; \quad \forall k = 2, \dots, N-1; \quad \forall p = 1, \dots, P \\
 & \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=2}^N \tau_{ijp} t_{ij} \leq T_{max}; \quad \forall p = 1, \dots, P \\
 & h_{ip} - h_{jp} + 1 \leq (N-1)(1 - \tau_{ijp}); \quad \forall i, j = 2, \dots, N; \quad \forall p = 1, \dots, P \\
 & 2 \leq h_{ip} \leq N; \quad \forall i = 2, \dots, N; \quad \forall p = 1, \dots, P \\
 & \tau_{ijp}, \theta_{ip} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j = 1, \dots, N; \quad \forall p = 1, \dots, P
 \end{aligned}$$

Az egyes sorok jelentése a következő:

1. A célfüggvény: a csúcsoknál begyűjtött profitok összege legyen maximális az összes utat figyelembe véve.
2. Minden út az 1-es csúcsnál kezdődik, és az N -ediknél ér véget.
3. Minden csúcsot csak legfeljebb egyszer látogatunk meg.
4. Minden út egyenként összefüggő.
5. Betartjuk az időkorlátot.
6. és 7. együtt garantálja, hogy ne legyenek körök az útban, Miller-Tucker-Zemlin javaslata alapján [65].
8. A τ_{ijp} és θ_{ip} értékészlete 0 vagy 1.

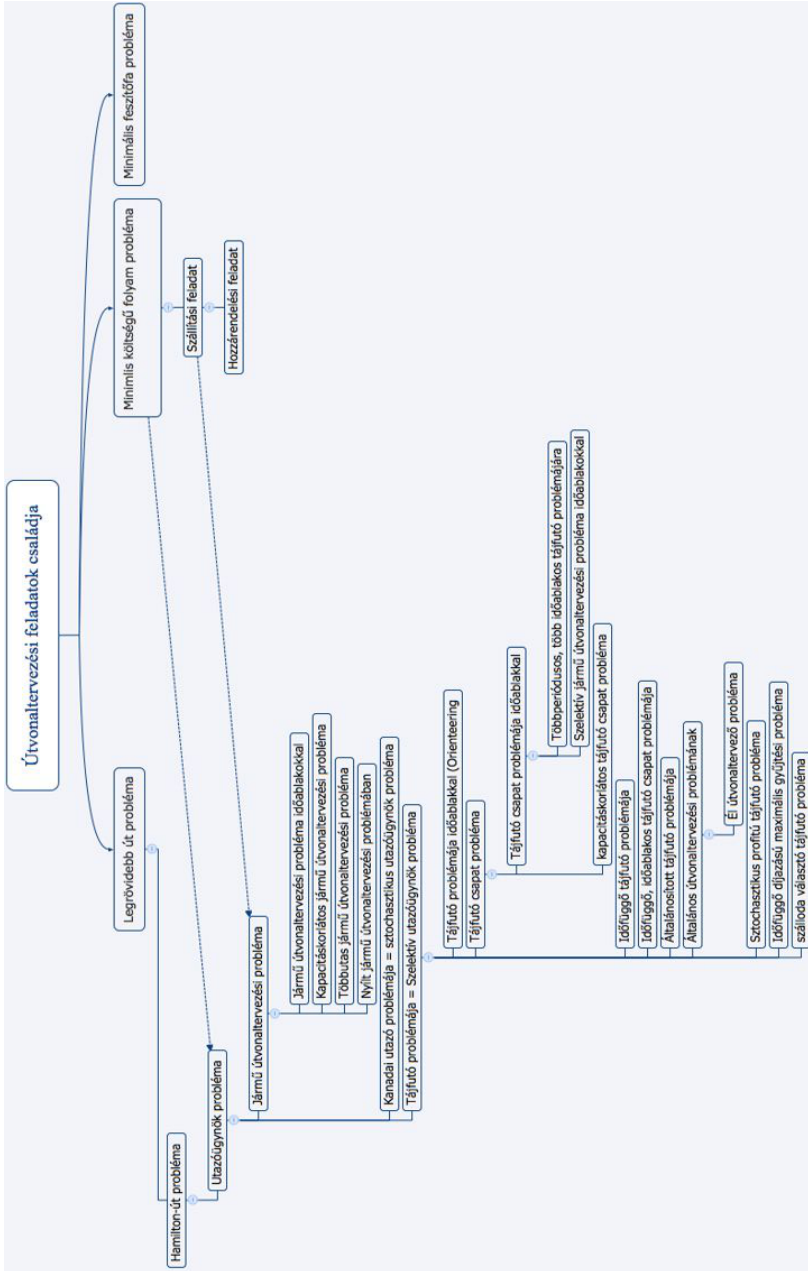
A.4. függelék: A Team Orienteering Problem with Time Windows formalizálása

A TOP-nél leírtaktól annyiban tér el a TOPTW, hogy minden csúcsot csak az $[O_i, C_i]$ nyitvatartási ideje alatt lehet meglátogatni, és jelöljük s_{ip} -vel a p -edik út

során az i -edik csúcshoz történő megérkezés időpontját. Ekkor a TOPTW leírható az alábbi módon:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{p=1}^P \sum_{i=2}^{N-1} \pi_i \theta_{ip} \\ & \sum_{p=1}^P \sum_{j=2}^N \tau_{1jp} = \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^{N-1} \tau_{iNp} = P \\ & \sum_{p=1}^P \theta_{kp} \leq 1; \quad \forall k = 2, \dots, N-1 \\ & \sum_{j=2}^N \tau_{kjp} = \sum_{i=1}^{N-1} \tau_{ikp} = \theta_{kp}; \quad \forall k = 2, \dots, N-1; \quad \forall p = 1, \dots, P \\ & \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=2}^N \tau_{ijp} t_{ij} \leq T_{max}; \quad \forall p = 1, \dots, P \\ & s_{ip} + t_{ij} - s_{jp} \leq M(1 - \tau_{ijp}); \quad \forall i, j = 1, \dots, N; \quad \forall p = 1, \dots, P \\ & O_i \leq s_{ip} \leq C_i; \quad \forall i = 1, \dots, N; \quad \forall p = 1, \dots, P \\ & \tau_{ijp}, \theta_{ip} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j = 1, \dots, N; \quad \forall p = 1, \dots, P \end{aligned}$$

Látható, hogy az OP-hez képest csupán a körmentesség feltétele változott (itt M egy nagy konstans értéket jelöl), valamint kibővült a nyitvatartási idő korlátjával a feltételrendszer.



APÁTHY M. SÁNDOR
Budapesti Corvinus Egyetem, Matematika Tanszék
Lakcím: 1064 Budapest, Vörösmarty utca 25/A
sandor.m.apathy@gmail.com

A SURVEY ON ROUTE PLANNING ALGORITHMS,
FOCUSING ON ITS TOURISTIC APPLICATIONS

SÁNDOR M. APÁTHY

There are few worse situations I could imagine than getting lost in a foreign city. It is even worse if the language barriers keeps us away from the chance of getting help. These experiences might have inspired many Researchers on the field of Route planning algorithms. The aim of this paper is to briefly present the cumbersome research efforts that lead to the recent touristic and transportation related algorithms. We start our survey from the Shortest Path Problem to show how the wide range of route planning problems were unified by the technique of Linear Programming, then a far-reaching set of transportation and travelling problems will be introduced that unfolded from the Traveling Salesman Problem. To keep the extent of the survey at a reasonable level our focus is narrowed more to the Touristic solutions due to the growing number of specific routing methods from the early '60s.

Keywords: Team Orienteering Problem, Route Planning, Heuristic Algorithm, Tourism JEL code: C60, C61, Z32