ELŐSZÓ

PRÉKOPA ANDRÁS, MOLNÁR EMIL

Százötven évvel ezelőtt, 1860. január 27-én halt meg Bolyai János, a magyar matematika és általában a magyar tudomány legnagyobb alakja. Az ő emlékére adjuk ki ezt a kötetet, mely bizonyára csupán egyike lesz a megemlékező kiadványoknak. Úgy gondoljuk, helyénvaló, hogy egyben megemlékezzünk apjáról, Bolyai Farkasról, aki szintén világhírű matematikus és polihisztor volt, továbbá a nemrég elhunyt Kiss Elemérről, a Bolyai-kutatás már életében klasszikussá vált egyéniségéről. Szomorú kötelességünk, hogy legalább az előszóban megemlékezzünk a Bolyai-irodalom másik klasszikusáról, Vekerdi Lászlóról, aki néhány héttel ezelőtt hagyott el bennünket, és akinek a temetése éppen Bolyai János halálának százötvenedik évfordulóján történt.

Kötetünk, a fentieken kívül, matematikatörténeti újdonságokat, geometriai és kisebb részben fizikai irányokról szóló munkákat tartalmaz. A Bolyaiaknak az analízishez kapcsolódó kézirataikról számol be Kiss Elemér és Szabó Péter Gábor dolgozata. Sajnálatos aktualitást is ad a munkának Kiss Elemér közbejött halála. A 2006. augusztusi Bolyai-tábor előadói még együtt látogathatták meg őt marosvásárhelyi lakásán, előadását személyesen már nem tudta megtartani. Kedves feleségével, Ágival, örömmel fogadta látogatóit, átadta nekik munkájának frissen megjelent új kiadását. Négy nappal később hunyt el.

Bolyai Farkas sorelméleti vizsgálatairól Sándor József és Oláh-Gál Róbert dolgozata a szakértőknek is sok újdonsággal szolgál. Szó esik benne a kor neves személyiségéről, Szász Károlyról, akivel János, később Farkas is együttműködött. Szabó Péter Gábor és Oláh-Gál Róbert dolgozata Bolyai Farkast, mint fiát levélben tanító atyát mutatja be. A kockakettőzés ún. déloszi problémáját – a kor akkori szintjén – közelítő szerkesztésekkel, körzőn, vonalzón kívüli többleteszközök használatával mutatta be. Ismeretes, hogy Bécsben Bolyai János a szögharmadoláson és a körnégyszögesítésen kívül foglalkozott e nevezetes szerkesztési problémával is. Ma már persze tudjuk, hogy ezek a problémák euklideszi szerkesztéssel nem oldhatók meg.

Szabó Péter Gábor új eredménye Bolyai János bűvös négyzet problémáját általánosítja.

Weszely Tibor dolgozata Bolyai Farkas híres „kudarcát” eleveníti fel. 1804 szeptemberében és 1808 decemberében két levelet is írt egykori egyetemi barátjának Karl Friedrich Gaussnak, melyekben az euklideszi párhuzamossági axiómát vélte bebizonyítani. Figyelemre méltó Gauss első válaszlevelének baráti hangneme, melyben rámutat Farkas hibájára. A második levélre Gauss már nem válaszolt. Ekkor keletkeztek a Bolyai Farkas-féle helyettesítő axiómák, melyekre Farkas még élete végén is visszatért. Ebből a kudarcból fakadt fiához írt aggódó levele: „... az Istenért kérlek! hagyj békét a paralléláknak ...!"

Bolyai „ujj más világá"-hoz kapcsolódik ifj. Böröczky Károly tanulmánya a hiperbolikus tér diszkrét geometriájáról. Fejes Tóth László körül magyar geométerek nemzetközi hírű iskolája alakult ki az 1950-es évektől kezdődően. Tagjai a hiperbolikus geometria jóval nehezebben megközelíthető területén is vizsgálták a klasszikus és újszerű témaköröket. Egészen napjainkig vezet bennünket a szerző, időszerű megoldatlan problémákat is említve.

Molnár Emil, Prok István és Szirmai Jenő dolgozatának témája közel áll az előző dolgozatéhoz: olyan kövezésekről szól, melyek egy paramétertől függő poliédersereg egybevágó példányaival szabályosan (azaz egy szimmetriacsoport szerint) töltik ki a teret. A paraméter kezdeti értékére korábbról ismert euklideszi térkövezést kapunk, a további végtelen sok egész értékre viszont hiperbolikus térkövezést. Számítógép segíti a szemléltetést, ami kapcsolódik napjaink kutatási módszereihez és eredményeihez.

A következő két dolgozat differenciálgeometriai jellegű. Oláh-Gál Róbert dolgozata a hiperbolikus sík euklideszi térbe történő, metrikusan hű beágyazhatóságáról szól. Jól ismert a Beltrami-féle traktrix-felület (két „trombita"-felületnek egy kör menti összeragasztásával), melyen kicsiben (lokálisan) a hiperbolikus sík metrikus viszonyai érvényesek. A felület éle viszont „szingularitást" jelent a beágyazásban, mely a háromdimenziós euklideszi térben nem is szüntethető meg. Máig nincs végleges megoldása a teljes hiperbolikus sík (szingularitásmentes) beágyazhatóságáról szóló Blanuša-problémának.

Szenthe János dolgozatának Riemann híres habilitációs előadása (1854) a kiinduló pontja. Bolyai János új hiperbolikus geometriája, mint állandó negatív görbületű tér a Riemann-geometriának speciális esete. A szerző, saját eredményeit is beleszőve, rövid áttekintést ad a Riemann-geometriáról és további általánosításairól.

A differenciálgeometriai terek és a modern fizikai térelméletek kapcsolatát tekinti át Toró Tibor ismertető tanulmánya, mely a Bolyaiak filozofikus meditációiból indul ki a körülöttünk lévő fizikai tér („az űr") természetéről, és eljut Einstein „álmához", a fizika geometrizálásának mai programjához. A több Nobel-díjjal is jutalmazott kutatásokon kívül persze még kérdéses irányok is csábítják a mai fizikust és matematikust.

A 150. évforduló alkalmából 2010. január 27-én Bolyai János eredeti sírját kopjafával jelölték meg a marosvásárhelyi református temetőben. Oláh-Gál Róbert és Bandi Árpád kezdeményezésére számos marosvásárhelyi személyiség alapított így új emlékhelyet a XIX. század legnagyobb magyar matematikusának, ahogy erről Weszely Tibor beszámol a Természet Világa 2010. februári számában.

Budapest, 2010. május 20.

KISS ELEMÉR, 1929–2006

PRÉKOPA ANDRÁS

Ha Csíkszeredából délkeleti irányba a főúton elindulunk, az Olt völgyében haladva eljutunk Csíkszentmártonba, és ha ott az északkeleti irányú mellékútvonalon haladunk tovább, akkor Csíkbánkfalva és Csíkszentgyörgy után eljutunk Csíkménaságba. A település nevét röviden Ménaságnak, vagy az ékezetet elhagyva, Menaságnak is mondják. A név egyesek szerint a málnás, mások szerint a ménes szóból ered. Orbán Balázs lelkesen ír a Taploca völgyében, havasok közé rejtett, magányos székely faluról, mely freskókkal díszített műemlék templomáról nevezetes. További nevezetessége az, hogy idevalósi a kiváló matematikus Kiss Elemér, a Bolyai-kutatás klasszikusa, a Magyar Tudományos Akadémia külső tagja. Brassóban született, 1929. augusztus 25-én, ám a család csak rövid ideig élt a nagyvárosban, magukat ménaságiaknak tartották, ott éltek az anyai felmenők, ott volt tanító az édesapa, hosszú időn át. Elemér egész életében rajongva szerette a természetet, gyerekkorában sokat barangolt a Ménaságot környező hegyekben. Egyébként is sportos ember volt, életének utolsó éveiben is rendszeresen gyalogtúrázott, sízett a marosvásárhelyi Somostetőn, és máshol, a hegyekben. Négy évvel ezelőtt együtt végigjártuk az erdélyi Bolyai-emlékhelyeket, pillanatok alatt felkúszott Domáldon Bolyai János édesanyjának, Árkosi Benkő Zsuzsannának egy magas dombtetőn lévő sírjához. A 2006 tavaszán elvégzett súlyos gyomorműtét után, amikor mások már tudták, hogy nincs remény életének megmentésére, feleségével hosszú gyalogtúrát tett Csíksomlyón. Ilyen állhatatos volt a tudományos munkában is. Halála előtt néhány nappal, ágyban fekve diktálta utolsó, „Bolyai János számelméleti eredményeinek utóélete” című dolgozatát, melyet a szintén matematikus felesége vetett papírra. A dolgozat keltezése 2007. augusztus 18, az eredeti terv szerint másnap, 19-én kellett volna az abban foglaltakról előadást tartania egy Marosvásárhelyen rendezett tudományos konferencián. Az elkészült kézirat alapján az előadást másvalaki megtartotta, Kiss Elemér már nem tudott felkelni az ágyból. Augusztus 23-án halt meg, 25-én, 77. születésnapján temettük el Marosvásárhelyen, nem messze a Bolyaiak sírjától, akik közül elsősorban János oly sokat foglalkoztatta.

Életének főbb állomásai a következők. 1936–1940 között a ménasági elemi iskolába járt, majd 1940–1948 között a Csíkszeredai Katolikus Főgimnázium tanulója volt, ott is érettségizett. Ezt követte a kolozsvári Bolyai Egyetemen eltöltött három év, 1948–1951 között, melynek végén matematika-fizika szakos tanári diplomát szerzett. Az egyetem elvégzése után tíz éven át tanított matematikát a négyszáz éves, hírneves, marosvásárhelyi Bolyai Farkas Elméleti Líceumban, egy év megszakítással, amikor Szászrégenben tanított. 1961–1978 között adjunktus volt a marosvásárhelyi Pedagógiai Főiskolán, mely 1978-ban Üzemmérnöki Intézetté alakult, ahol azután docensként működött 1990-ig. Az intézmény 1990-ben Petru Maior néven egyetemmé alakult, ettől kezdve Kiss Elemér ennek volt az egyetemi tanára 1999-ben bekövetkezett nyugdíjazásáig; 1976–1985 között tanszékvezető volt. Utána is tanított még az egyetemen három évig. Közben megalakult az erdélyi magyar nyelvű Sapientia Egyetem, melynek Kiss Elemér 2001-ben professzora lett. Itt tanított haláláig.

1974-ben a kolozsvári, akkor már Babeş–Bolyai néven működő egyetemen matematikai doktorátust szerzett. 1962–1965 között tagja volt a Romániai Matematikai Tudományos Társaság vezetőségének. Húsz éven át tagja volt a kolozsvári székhelyű Matematikai Lapok szerkesztőbizottságának, a lapnak alapító tagja is volt. 2001 májusában a Magyar Tudományos Akadémia külső taggá választotta, 2006 tavaszán Marosvásárhely díszpolgára lett.

Kutatómunkájának első szakaszában algebrával foglalkozott, ebből írta doktori disszertációját is. Eredményei nemzetközi viszonylatban is jelentősek. Általánosította a gyűrű centrumának a fogalmát, majd ennek segítségével megszerkesztette a nemkommutatív gyűrűk egy fontos osztályát, melyben a kommutatív gyűrűk több fontos tulajdonsága érvényes. Szükséges és elégséges feltételt adott algebrai egyenletek közös gyökeinek létezésére, és általánosította Hurwitz egy fontos tételét. Bevezette a félmodulusok koideáljának a fogalmát, melyet mások is eredményesen használtak. Ennek segítségével sikerült a félmodulusok kategóriájában az egzakt sorok létezését biztosítani és tanulmányozni. A több mint száz publikációja közül az első harmincban számolt be algebrai vonatkozású eredményeiről.

Legjelentősebb tudományos eredményei a Bolyai-kutatással kapcsolatosak. Bolyai János a nemeuklideszi geometria felfedezésével forradalmasította a matematikát, hatással volt az egyetemes emberi gondolkodásra az axiomatikus módszer széles körű elterjedése révén és más módon is. Felfedezését értetlenség, ledorongolás fogadta, ezért az 1831-ben megjelent Appendixen kívül mást nem publikált, ám hátrahagyott tizennégyezer oldal kéziratot. Ebből háromezer a matematikát tartalmazók száma. Mint ismeretes, évekkel Bolyai János 1860-ban bekövetkezett halála után az Akadémia a kéziratokat Marosvásárhelyről Pestre hozatta, ahol azokat egy akadémiai bizottság negyedszázadon át vizsgálta, csekély eredménnyel. Néhány, viszonylag könnyen olvasható kéziratot németre fordítottak, melyek elemzését azután a német Stäckel végezte el, és tette közzé cikkekben és egy 1913-ban németül, majd egy év múlva magyarul is megjelent, a két Bolyairól szóló monográfiában. A Teleki Tékában elhelyezett kéziratok rendezésére és a nem matematikai jellegűek feldolgozására a második világháború után került sor, a matematikai jellegűek túlnyomó részének azonban még az elolvasása sem történt meg a huszadik század végéig. Az elszántság és a szakértelem Kiss Elemér személyében találkozott. A kéziratok több mint tízéves, a legapróbb részletekbe menő, szakszerű tanulmányozása révén kimutatta, hogy azokban olyan tudományos eredmények, „matematikai kincsek” találhatók, melyek újak voltak a maguk korában, és melyekkel Bolyai évtizedekkel megelőzte azokat, akiknek az eredményeket később tulajdonították. Ilyen pl. az a közismert számelméleti tétel, melyet Jeans harmincnégy évvel Bolyai halála után közölt és ma tankönyvanyag. Ezzel megdőlt az a nézet, hogy Bolyai az Appendixben foglalt eredményein kívül érdemlegeset a matematikában nem alkotott, leszámítva a komplex számok elméletének a megalapozását, melyről szóló írása régóta ismeretes volt.

A Bolyai kéziratoknak már az elolvasása is rendkívül nehéz. Bolyai feljegyzéseit gyakran nem tiszta papírra írta, hanem olyanra, ami éppen rendelkezésére állt: kisfiának már teleírt iskolai füzetébe, színlapokra, boríték hátlapjára és sajátos, nehezen követhető jelöléseket, terminológiát használt. Ezekből ízelítőt kaphatunk, ha fellapozzuk Kiss Elemérnek a kutatási eredményeit tartalmazó, 1999-ben megjelent „Matematikai kincsek Bolyai János hagyatékából" című könyvét, ami maga is matematikatörténeti gyöngyszem. A könyv angolul is megjelent, a világ minden jelentős könyvtárába eljutott, és fontos szerepet tölt be a magyar kulturális értékek nemzetközi megismertetése terén. A könyvön kívül több tucat, részben nemzetközi fórumokon publikált cikkben is beszámolt eredményeiről. A nem matematikai tartalmú kéziratokat is tanulmányozta, és olyan, addig nem ismert Bolyai leveleket talált, melyek az apa és fiú személyes kapcsolatát helyezik új megvilágításba. Elmondhatjuk, Kiss Elemér lényegesen gazdagította a Bolyai Jánossal kapcsolatos ismereteinket. Bolyai János új, emberi arcát évtizedekkel ezelőtt Benkő Samu rajzolta meg. Kiss Elemér munkássága teljessé tette a képet, a magyar tudomány legnagyobb alakja matematikusi arculatának a teljes körű feltárása révén, miközben felfedezései Bolyai János emberi arculatának a jobb megismeréséhez is hozzásegítettek. 2002-ben, amikor Bolyai János születésének 200. évfordulóját ünnepeltük Budapesten egy nemzetközi tudományos konferenciával, Kiss Elemér volt az egyik főelőadó, aki meghívott előadóként akkoriban Európát és Amerikát is bejárta, hogy kutatási eredményeiről beszámoljon. Tudománytörténeti felfedezései alapvető fontossággal bírnak, és joggal szereztek számára nemzetközi hírnevet. Felesége, Ági, hűséges társa volt, nem csak az élet viszontagságai között. Matematikusként hozzáértő módon segítette férje Bolyaiakkal kapcsolatos kutatását.

Ezen a ponton érdemes megjegyezni azt, hogy a Bolyaiakról, főleg a régebbi szépirodalomban kialakított kép, elsősorban Benkő Samu és Kiss Elemér munkásságának betudhatóan, szinte teljesen elavult. Apa és fia, mindketten indulatos emberek lévén, gyakran civakodott, ám kapcsolatukat elsősorban az egymás iránti nagyrabecsülés és a gyöngéd érzelmek sokkal inkább jellemezték. Jóllehet János élete utolsó szakaszában ugyanabban a városban, Marosvásárhelyen lakott, mint apja, mégis megromlott egészségi állapotuk miatt gyakran inkább leveleztek egymással, mintsem vállalkoztak volna a hosszú gyalogútra, hogy személyesen beszéljék meg a matematikai problémákat és a napi dolgokat. Ezek a levelek is előkerültek a fáradhatatlan kutatómunka közben, és tanúskodnak a két zseni egymáshoz való viszonyáról.

Kiss Elemér dolgozatai között a fent említetteken kívül számos egyéb, érdekes mű található, egy részük alkalmazási jellegű. Apja, a ménasági tanító, szabad idejében méhészkedett, és Elemér kedvenc olvasmányai közé tartozott apjának egy méhészeti szakkönyve. Ennek hatására kezdett foglalkozni a méhek építkezésének geometriai problémáival. Két dolgozata is megjelent e témakörből, egy fiatalkori és egy tizenhat évvel ezelőtti. Alkalmazási szempontból igen érdekes az a dolgozata is, amelyet Szentpéteri József orvosprofesszorral közösen írt a fogak csúcsainak mozgásáról a rágás folyamata alatt.

Kiss Elemérnek nem csak a tudománya, de embersége is példamutató volt. Önzetlen volt a tanítványok nevelésében, az ismeretek átadásában, és habitusát páratlan szerénység jellemezte. Igaz, Fejér Lipót szavaival élve, neki volt mire szerénynek lennie. Egy alkalommal Levente fiánál, családja körében töltöttem vele egy estét, és egy szóval sem említette, hogy néhány nappal azelőtt Marosvásárhely városa díszpolgárává fogadta. Halála súlyos veszteség a nemzetközi Bolyai- és matematikatörténeti kutatás számára. Személye és munkássága világító fáklya lesz generációk számára.

A MATEMATIKAI ANALÍZIS PROBLÉMÁI A KÉT BOLYAI KÉZIRATOS HAGYATÉKÁBAN[1]

KISS ELEMÉR, SZABÓ PÉTER GÁBOR

Bolyai Farkas és Bolyai János kéziratos hagyatéka nagy részének a közelmúltban történt feltárása rávilágított a számelmélet és – Bolyai János esetében – az algebra területén végzett – eddig nem ismert –, sikeres munkásságukra [12, 22]. Igen hasznosnak bizonyult a két matematikus kéziratainak együttes tanulmányozása, jegyzeteik összehasonlítása. Így sikerült feltérképezni több olyan matematikai problémát, ahol vizsgálataik találkoztak [22].

A két Bolyai – apa és fiú – életük folyamán számos levelet váltottak egymással. A levelek hűen mutatják be a két tudós matematikus mindennapi gondjait és az őket foglalkoztató tudományos problémáikat. Igaz, hogy az 1990-es évek közepéig megismert levelek (mivel feldolgozóik nem voltak matematikusok) csak elvétve tartalmaznak matematikai szövegrészeket. Csak a kéziratos hagyaték újbóli átvizsgálása során kerültek elő azok a matematikai tartalmú levelek, amelyeket olvasva értesülhetünk az őket foglalkoztató kérdések nagy részéről. Túlzás nélkül mondhatjuk, hogy minden problémájukat megírták egymásnak, vagy – miután ismét egy városban laktak – megbeszélték egymással. Tudományos gondolataikat kicserélték, egymás eredményeit elismerték. Nem volt versengés közöttük. Emlékezzünk csak arra, hogy Bolyai János már a nevezetes temesvári levélben közös gondolkodásra kéri apját a binomiális sorral kapcsolatban: *„Erről a matériáról még értekeződünk; negatív exponensekre is majd megpróbáljuk”* (1565/1^v).

A két Bolyai kézirataiban gyakran találkozunk a matematikai analízis tárgykörébe tartozó feljegyzésekkel is. Meglehet, hogy az analízishez fűződő vizsgálatokkal nem értek el olyan látványos eredményeket, mint más területen, mégis úgy véljük, érdemes és szükséges feltérképezni a matematika e fejezetéhez tartozó gondolataikat is.

A rendkívül tehetséges Bolyai Jánosban igen korán feltűnt a matematika iránti fogékonysága. Gyermekkorában – akár későbbi élete folyamán is – természetesen a matematika minden ága érdekelte. Bolyai Farkas 1816. április 10-én Gausshoz írt levelében olvashatjuk: *„Az én (13 és 1/4) esztendős fiam... kedveli a differenciál- és integrálszámítást és rendkívül készséggel és könnyedén számol velük...”* [6, 81. old.]. A Bécsben tanuló fiát – 1818. szeptember 10-én – pedig így bíztatja: *„Olvasd ... Eulert, La Croix. Traité Élémentaire du Calcul differentiel et*

[1] A kutatás egy részét az Arany János Közalapítvány támogatta.

intégral, La Grange Théorie des Fonctions etc." [6, 99. old.]. Csak megjegyezzük, hogy Lagrangenak ezt a könyvét Bolyai János még 53 éves korában is *„nézegette"* [12, 181. old.]. Bolyai fiatal korában magától találta, hogy

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{k}{m}\right)^m = e^k$$

(1389/1). A már említett temesvári levél háromnegyed részében a binomiális sorról értekezik. Domáldról 1844-ben tudatja apjával, hogy *„Az integrálszámításban is tömérdek új, könnyű, tiszta tanom van..."* [12, 151. old.]. Kéziratainak oldalain gyakran olvashatunk az analízissel kapcsolatos kijelentéseket: *„... derék tanok mellett... hiba volt az integráltanban is nagyon sok."* (194/5) vagy *„... az integrálszámításban többet, kimerítőbbet szándokolok adni..."* (1032/13^v).

Szénássy Barna doktori disszertációjában [23] már 1937-ben rámutatott Bolyai Farkas infinitézimális gondolataira, majd később ezekről a rá jellemző alapos, részletes beszámolókat közölt nevezetes két könyvében [24, 150–155. old.] és [25, 139–144. old.]. A tanulmányokat Bolyai Farkas könyvei [2, 3, 4] alapján írta. Amint Szénássy megállapítja Bolyai Farkas eredeti kutatásai az analízis terén főképpen a végtelen sorok konvergenciájával kapcsolatosak. Szénássy nem olvas(hat)ta Bolyai Farkas és Bolyai János kéziratait. Talán ez lehet az oka annak, hogy disszertációjának 7. oldalán megjegyzi: *„Bolyai valószínűleg nem ismerte Cauchyt, kinek nevét meg nem említi műveiben"*. Úgy gondoljuk, hogy Szénássy Barnának ezt a mondatát kiegészíthetjük, pontosíthatjuk. Bolyai János kézirataiban számos alkalommal említi Cauchy nevét, többek között apjához 1844-ben írt egyik levelében is [12, 152. old.]. De Cauchy neve Ettingshausen könyvében is előfordul [9, 165. old.], ezt a könyvet viszont Farkas is ismerte. A [4, 175. old.]-ben így ír: *„... nézze a tanuló a derék Ettingshausent."*.

A Bolyaiak ismerték egymás munkáit, s az analízissel foglalkozó írásaikban is több közös problémával foglalkoztak. Bolyai János számos esetben hivatkozik apjának a Tentamenben közölt eredményeire. Például: *„a mind egyjegyű ízekből* [tagokból] *álló sor m-edik íze $= u_m$ s n bármely nagy pozitív szám, még ha $m^n u_m \to 0$ is, abból sem következik az, hogy a sor véghatáros* [konvergens]. *Az Olivier*[2] *ismertető jele* [kritériuma] *conversája* [fordítottja] *elsietett s hamis lévén a Tentamen 1. da-*

[2]Ki volt Olivier? Benkő Samu [6, 311. old.] azt írja, hogy Olivier August (1829–1876) svájci matematikus. Ő azonban nem lehet, mert Bolyai Farkas 1848. január 18-án azt írja Gaussnak: *„Mintegy 17 évvel ezelőtt küldött nekem egy volt tanítványom Bécsből (valószínűleg Ettingshausen növendékeként) egy cédulát ezzel a felírással: A sorok konvergenciájának Olivier által újonnan felfedezett kritériuma"* [6, 202–203. old.]. Tehát Bolyai 1831-ben kapta a cédulát, akkor az említett Olivier August 2 éves volt. 1843-ban is [4, 375. old.] azt írja Bolyai Farkas, hogy Olivier kritériumát *„egy hajdani kedves tanítványom Bécsből írta volt, azóta sehol említve nem találtam, de Burg Matematikájában (melyet magát még nem láttam) meg van mutatva"* (Burg, A. [6, 305. old.]) Másik helyen [4, 379. old.]: *„megkapván a Burg könyvét..."*. Sain Márton „Nincs királyi út!" c. könyvének 705. és 827. oldalán szerepel Olivier, Theodore (1793–1853), akit Sain a sorok elméletével foglalkozó matematikusok közé sorol. A 'Lexikon bedeutender Mathematiker' szerint Th. Olivier geométer volt. Ábrázoló geometriai könyvet írt. Ezt írja Florian Cajori is [8, 296. old.]. K. Knopp [13, 175. old.] egyik lábjegyzetében Olivier L.-ről ír, aki a Crelle-féle folyóirat 1827. Bd. 2., S. 34-ben közölte a kritériumát. Szénássy is L. Olivier-t ír [23, 23. old.], valószínűleg

rabja [I. kötete] *308. lapján, mint Atyám is megmutatta rakván elmésen oly sort össze, hol a sor tagjai a* 0*-hoz tartanak, de a sor összege* $\to \infty$*."* (711/1)

A Tentamen I. 308. oldalán valóban megtaláljuk az *„elmésen"* összerakott sort, ez pedig az

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \tag{1}$$

vagyis a harmonikus sor. A sor divergenciájának bizonyítását a Tentamen I. 152–153. oldalán végzi el Bolyai Farkas.

Bolyai János apjától különböző módon bizonyítja be ugyanezt a következő gondolatmenettel (26/8): ha (1) konvergens, azaz

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = s$$

lenne, akkor

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\right) = \tag{2}$$

$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2}s = s$$

alapján

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots = \frac{1}{2}s = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots$$

adódik, ami lehetetlen, mert ha tagonként összehasonlítjuk az összegeket

$$1 > \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3} > \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5} > \frac{1}{6}, \quad \dots$$

a bal oldalon lévők mind nagyobbak, mint a jobb oldalon lévők. Érdemes ezt összevetni a [19, 21–23. old.]-ben található bizonyítással. Látjuk, hogy Bolyai „megtakarítja" a (2)-beli felbontás jogosságának indoklását.

Jól ismert tény, hogy a harmonikus sorról Nicole Oresme (1323–1382) bizonyította be először, hogy divergens. A Bolyaiak is tudták ezt. Valószínűleg Montucla [18] könyvéből, amelyet mindketten olvastak (Montucla Oresmet könyvének II. kötetében a 663. oldalon említi), de egészen biztosan Gauss és Ettingshausen könyveiben is olvasták ugyanezt.

Szénássy Barna megjegyzi [25, 141. old.], hogy Bolyai Farkas *„mind az Olivier – mind a Burg-kritérium nem elegendő voltának igazolására ellenpéldaként említi a végtelen sorok történetében fontos szerepet játszó*

$$\sum \frac{1}{n \log n} \tag{3}$$

Knopp alapján. És valóban ő az, Louis Olivier, egy a személyében ma is kutatott matematikus (l. H.K. Sørensen (2006), Louis Olivier: A Mathematician Only Known Through his Publications in Crelle's Journal During the 1820s, Centaurus 48(3), pp. 201–231.).

divergens Abel-féle sort. Nem tudjuk nyomon követni, hogy Bolyai önállóan bukkant-e erre az ellenpéldára?" Bolyai Farkas kéziratos hagyatékában szerepel egy összefüggő 9 oldalas tanulmány (BF 52/1-5) sorok konvergenciakritériumairól „Egy kis értekezet Felsőbb Rendeletre" címmel. A harmonikus sorra vonatkozó példa ott is szerepel, más pl. a Montucla-kritériummal együtt.

Szénássy a munkájában [25, 145. old.] szinte kizárólag a Tentamen 2. kiadására [3] hivatkozik. Különös, hogy ebben a kiadásban több olyan rész van, ami nincs meg az első kiadásban [2]. Úgy tűnik ezeket a 2. kiadás sajtó alá rendezői a [4]-ből vették át, ui. Bolyai Farkas elismeri, hogy az utóbbi *„könyvben igen sok nincs meg a Tentamenből, bár némely jobban van..."* [4, 359. old.]. Bolyai Farkasnál [4, 379. old.]-ben találjuk meg a (3)-as példát. Ez a munka 1843-ban jelent meg, Gauss pedig a Bolyai Farkasnak 1848. április 20-i levelében említi a sort, tehát hajlunk afelé, hogy Bolyai Farkas önállóan találta. Ugyanakkor igazat kell adnunk a Tentamen 2. kiadása [2] sajtó alá rendezőinek abban, hogy Bolyai Farkas nem ismerhette Abelnek a Crelle Journalban 1828-ban megjelent cikkét [1]. Hisz az Olivier-féle kritériumról is egyik Bécsben tanuló diákja (valószínűleg Jakab Lajos) tájékoztatta [6, 202–203. old.]; [4, 375. old.] őt. A Crelle folyóiratról Bolyai János számos kéziratán szól (332/5, 456/6,...), egyik 1855-ben apjának írt levelében is megemlíti [12, 181. old.]. Tehát Farkas is hallott róla, ám matematikai írásaiban a folyóirat címét sehol sem találtuk meg[3]. A Teleki Tékában sincsenek meg a Crelle számai. Amint sikerült kimutatnunk [12, 67–68. old.] Bolyai János is a Crelle folyóiratnak csak az 1831 és 1832-es számaiból kapott parancsnokától „a derék" Zittatól kölcsönbe. Az 1820-as évfolyamokból nem láttak a Bolyaiak. A Burg kritériumról sem a publikációból, hanem Burg könyvéből szerzett tudomást [4, 379. old.].

Azt, hogy Bolyai János kéziratai analízis tárgyú feljegyzéseket is tartalmaznak, már az 1872. március 17-én keltezett és Kőnig Gyula, Vész János Ármin, Hunyady Jenő által elkészített Akadémiai Bizottsági jelentés is jelzi [16, RAL 1249/1872]. A bizottság tagjai észrevették a sorok- és integrálokkal kapcsolatos írásokat (különös, hogy nem tűntek fel számukra a számelméleti és algebrai jegyzetek, igaz, hogy *„Nyelv és írási nehézségek miatt a bizottság eddig még nem volt képes az összes kéziratot áttanulmányozni."*) Bolyai születésének 100. évfordulója alkalmával Kolozsvárott 1903. január 15-én rendezett ülésen pedig Schlesinger Lajos emlékbeszédében megjegyzi, hogy *„Bolyai János azt az integrált, melyre a tetraéder köbösítése vezet, elemi függvényekkel igyekszik kifejezni."*

A Bolyai János kézirataiban található analízis tárgyú feljegyzések főképpen az integrálok és a végtelen sorok elméletéhez fűződnek. Leggyakrabban az elliptikus integrállal az $\int \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$, $\int x^m(1-x^a)^n\,dx$, $\int \frac{x^{a-1}}{1-x^b}\,dx$ típusú integrálokkal, továbbá a hipergeometrikus és más sorokkal foglalkozik. Írásaiban állandóan hivatkozik Vega [26], Lacroix [14], Euler [10], Lagrange [15], Gauss [11] és Ettings-

[3]Szily Kálmán (1884) „Adatok Bolyai Farkas életrajzához" c. dolgozatában viszont megemlíti, hogy 1855-ben Bolyai Farkas levelet írt gr. Teleki Ferencnek, melyben tőle, ha megvan, a Crelle Journal 10-ik és 19-ik kötetét rövid használatra kéri: *„Ha Ngodnak jár Crells Journal: méltoztassék rövid időre beküldeni a 10. és 19. bandot."*. A levél teljes terjdelmében elolvasható Szily dolgozatának C mellékleteként.

hausen [9] műveire. Sajnos bizonyításait nem mindig fejezi be, számos alkalommal megelégszik egy-egy odavetett gondolattal, próbálkozással.

Az elliptikus integrálok nagy gondot okoztak Bolyai Jánosnak. Volt idő amikor úgy gondolta, hogy a feladat megoldása sikerülni fog. Magabiztosan ír erről $(1361/1, 1^v, 2)$: *„Jelen feladat megfejtése is a Nagy La Grange a Theorie des...-ban és mások, sőt maga Gauss által is lehetetlennek állíttatott... Gauss is e tárgyra a végtelen sorokra utasított... noha egy nagyon csinos és eredeti módját az ellipszis hossza általános meghatározásának kulcsát alább kézbesítendem. La Grange egy művének úgy láttam ily címét: Integration... de melyet magát nem kaphattam meg s nem is tudhatni a címből, hogy mi módon s mennyiben viszi véghez ezen integrálást. Ezen okból... méltán remélhetni miszerint a következő egyszerű és csinos általam megadása módja ezen integrálnak a szélesebb értelemben nagyon helyesen az algebrai függv.hez számítható* [hátrább megjegyzi, hogy a Nagy Euler ítélete szerint is]*, trigonometrikus függvények algebrai függvényei által a tökélyt kedvelő Tisztelt Olvasó előtt nem lesznek unalmasak..., melynek előadásához rögtön hozzáfogok.*

Ha a az ellipszis fél nagytengelye, b a fél kistengelye..., akkor ismeretesképpen egy ívének hossza

$$z = \int \sqrt{\frac{a^2 - c^2x^2}{a^2 - x^2}}\, dx \tag{4}$$

és ugyanilyen lesz a hiperbola ívének képlete...

Ezen oly híres úgynevezett integrale ellipticumnak lehető egyszerű kifejezésétől függ a jelen feladat megfejtése."

A továbbiakban $a = 1$-et véve – *„mi az általánosság minden csökkenése nélkül megeshetik"* – az

$$x = \sqrt{\frac{a + bt + ct^2}{p + qt + rt^2}}$$

helyettesítéssel próbálkozik és igen bonyolult kifejezésekhez jut.

Bolyai János kéziratainak még számos oldalán (pl. 165/6, 19; 226/1; 544/20, 22; 536/11, 14^v, 18^v) megtaláljuk az elliptikus integrál kiszámításával való „bajlódásait". A 26/8 oldalon például ezt írja: *„az elliptikus integrál megadását sor összegzése által is jó lesz megkísérteni."* Próbálkozásai nem hoztak sok sikert, mert egy 1853-as évszámot viselő papírlapon ($1373/9^v$) még mindig azt írja: *„a* (4)*-et meg kell kísérteni helyettesítéssel".*

Mivel ismeri az $\ln(1+x)$ sorba fejtését, ha $x \in [-1, 1]$, azonnal felírja (143/4) az

$$\int \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx = x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \ldots + C$$

értékét, bár egy alkalommal (137/9) az

$$x = \frac{a + bz}{c + dz}$$

változócserével is próbálkozik.

Az Euler-féle $\int_0^1 x^m(1-x^n)^p\,dx$ $(1399/2^v; 1270/5, 5^v)$ és $\int x^m e^{-x}\,dx$ (400/6) integrálokkal Vega [26, 557. old.] és Ettingshausen [9, 351. old.] könyvében találkozott, amint ezt pontosan meg is jegyzi. Exponenciális függvények integráljaival Bolyai Farkas kézirataiban is találkozunk, a (BF 101/1) jelzetű lapon Laplace neve mellett az

$$\int\int_0^\infty e^{-s(1+x^n)}\,ds\,dx$$

kiszámításakor. Bolyai Farkas itt felhasználva, hogy

$$\int_0^\infty e^{-s(1+x^n)}\,ds = \frac{1}{1+x^n}$$

kapja, hogy

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-s(1+x^n)}\,ds = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Bolyai Jánosnál két helyen ($446/11^v$, 794/4) is megtaláljuk az eléggé bonyolult

$$\int \frac{1+2q-q^2}{(1+q^2)^4}\sqrt{q(1-q^2)}\,dq$$

integrált azzal a megjegyzéssel, hogy *„ezt tudom bizonyos módomon integrálni – mit más nem tud”.*

Megjegyzi (1243/1), hogy az

$$\int \frac{dx}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}x\right)^2} = -\frac{1}{\sqrt{ac}+cx} + C$$

képletről *„a sok érdemű Ettingshausen a 343. lapon nem is álmodik. . . ”.* Ez a képlet valóban hiányzik az Ettingshausen által a [9, 342–344. old.]-ban felsorolt formulák közül.

Az

$$\int \frac{x^{a-1}}{1-x^b}\,dx \tag{5}$$

típusú integrálokra különböző sorok összegének meghatározásakor bukkan Bolyai János. A következőkben bemutatunk néhányat ezek közül az általa vizsgált feladatok közül.

1. A legegyszerűbb példa ($1227/7^v$; 1422/1): ha

$$u = \frac{x^a}{a} + \frac{x^{a+1}}{a+1} + \frac{x^{a+2}}{a+2} + \ldots,$$

akkor

$$u' = x^{a-1} + x^a + \ldots = \frac{x^{a-1}}{1-x}\,,$$

de

$$\frac{x^{a-1}}{1-x} = -x^{a-2} - x^{a-3} - \ldots - x - 1 + \frac{1}{1-x}\,,$$

tehát

$$u = -\frac{x^{a-1}}{a-1} - \frac{x^{a-2}}{a-2} - \ldots - \frac{x^2}{2} - x - \ln(1-x).$$

2. Több oldalon megtaláljuk Bolyai szerint *„a Leibniz által föltalált"* (ám valójában már a skót James Gregory (1638–1675) által is ismert [7])

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = 2\left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{9\cdot 11} + \ldots\right)$$

összeget. Ebből kiindulva megkérdezi (1222/2), hogy mennyi

$$y = \frac{x^3}{1\cdot 3} + \frac{x^7}{5\cdot 7} + \frac{x^{11}}{9\cdot 11} + \ldots, \quad \text{ha} \quad |x| < 1.$$

Észreveszi, hogy

$$\frac{xy'' - y'}{x^2} = \frac{1}{1-x^4}$$

és ha $y' = p$-t helyettesít, akkor a

$$p' - \frac{p}{x} = \frac{x}{1-x^4}$$

differenciálegyenlethez jut, amelynek megoldása (itt [9, 382. old]-ra hivatkozik):

$$p = y' = x\left(k + \int \frac{1}{1-x^4}\,dx\right).$$

Innen pedig

$$y = k\frac{x^2}{2} + \left(\frac{x^2}{8} - \frac{1}{8}\right)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}\right)\mathrm{arctg}\,(x) + C.$$

Bolyai megjegyzése: *„De már itt az a baj, hogy mivel ha $x = 0$ úgy $y = 0$ is s k határozatlan marad."*

3. Hasonló módon az

$$y = \frac{x}{1\cdot 3} + \frac{x^5}{5\cdot 7} + \frac{x^9}{9\cdot 11} + \ldots$$

sor esetén (1222/2^v) kapja, hogy

$$p' + \frac{3}{x}p = \frac{1}{x(1-x^4)},$$

amelynek megoldása

$$y = -\frac{k}{2x^2} + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8x^2}\right)\ln\frac{1+x}{1-x} + \left(\frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4}\right)\operatorname{arctg}(x) + C.$$

(Bolyainál $\frac{1}{8}$ helyett $\frac{1}{4}$ (ln előtt) és $\frac{1}{4}$ helyett $\frac{1}{2}$ (arctg előtt) van.)

4. Az

$$y = \frac{x^a}{a(a+2)} + \frac{x^{a+2m}}{(a+2m)(a+2m+2)} + \frac{x^{a+4m}}{(a+4m)(a+4m+2)} + \dots$$

sor esetén (1222/3) a

$$p' + \frac{3}{x}p = \frac{x^{a-2}}{1-x^{2m}}$$

egyenlethez jutunk, amelynek megoldása

$$p = \frac{1}{x^3}\left(k + \int \frac{x^{a+1}}{1-x^{2m}}\,dx\right).$$

Itt csak addig jut el, hogy

$$y = -\frac{k}{2x^2} - \frac{1}{2x^2}\int \frac{x^{a+1}}{1-x^{2m}}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{x^{a-1}}{1-x^{2m}}\,dx.$$

Ezt már nem folytatja az általános esetben, hanem csak az $a = 1$ és $m = 4$ értékekre oldja meg. Bonyolult képletet kap.

5. Ha

$$y = \frac{x^{a+b}}{a(a+b)} + \frac{x^{a+(m+1)b}}{(a+mb)\big[a+(m+1)b\big]} + \frac{x^{a+(2m+1)b}}{(a+2mb)\big[a+(2m+1)b\big]} + \dots +$$
$$+ \frac{x^{a+(nm+1)b}}{(a+nmb)\big[a+(nm+1)\big]} + \dots,$$

(1222/4^v) akkor a fentiek alapján (az $y' = p$ helyettesítéssel)

$$p' + \frac{1-b}{x}p = \frac{x^{a+b-2}}{1-x^{mb}},$$

amelynek megoldása

$$p = x^{b-1}\left(k + \int \frac{x^{a-1}}{1-x^{mb}}\,dx\right);$$

y értékét már nem számítja ki.

6. Számos alkalommal találkozunk a kéziratokban (például 652/7; 1201/7; 1296/1; 1404/1) az

$$u = \frac{x^a}{a} + \frac{x^{a+b}}{a+b} + \frac{x^{a+2b}}{a+2b} + \ldots + \frac{x^{a+mb}}{a+mb} + \ldots$$

sorral ($b = 1$-re az 1. példát kapjuk), ahol a és b pozitív egész számok. Bolyai megjegyzi (1404/1), hogy ez a sor minden $|x| < 1$-re konvergens, ha pedig b páratlan, akkor $x = -1$-re is. Szándékozik – mondja – a fenti sor összegének kiszámítása a konvergencia esetén. Az

$$u' = x^{a-1} + x^{a-1+b} + \ldots$$

szintén konvergens sor, amelynek összege

$$\frac{x^{a-1}}{1-x^b},$$

tehát

$$u = \int \frac{x^{a-1}}{1-x^b}\, dx.$$

De

$$\frac{x^{a-1}}{1-x^b} = -x^{a-1-b} - x^{a-1-2b} - \ldots - x^{a-1-nb} + \frac{x^{a-1-nb}}{1-x^b}.$$

Feltételezzük, hogy $a-1 \geq b$ és hogy $a-1-nb \geq 0$, de már $a-1-(n+1)b < 0$, ekkor $a-nb$ legalább 1, tehát $a-b, a-2b, \ldots, a-nb$ közül egyik sem nulla.

Akkor

$$u = -\frac{x^{a-b}}{a-b} - \frac{x^{a-2b}}{a-2b} - \ldots - \frac{x^{a-nb}}{a-nb} - \int \frac{x^{a-1-nb}}{x^b-1}\, dx.$$

Ha $a = sb$, $n = r-1$, akkor $a-1-nb = a-1-(r-1)b = b-1$, és

$$\int \frac{x^{a-1-nb}}{1-x^b}\, dx = \int \frac{x^{b-1}}{1-x^b}\, dx = -\frac{1}{b} \ln(1-x^b) + C.$$

Ha $b > 2$, akkor $x^b - 1 = (x-1)(x-r)(x-r^2)\ldots(x-r^{b-1})$, $r^b = 1$, $1 + r + r^2 + \ldots + r^{b-1} = 0$, itt Gauss Disq. ar. művére hivatkozik; s az $\frac{x^{a-1-nb}}{x^b-1}$ b résztörtre való bontásában az $x - r^q$ nevezőjű törthöz tartozó számláló $\frac{r^{qa}}{b}$, s így

$$-\frac{x^{a-1-nb}}{x^b-1} = \frac{1}{b}\left[\frac{1}{1-x} + \frac{r^a}{r-x} + \frac{r^{2a}}{r^2-x} + \ldots + \frac{r^{(b-1)a}}{r^{b-1}-x}\right]$$

és

$$u = -\frac{x^{a-b}}{a-b} - \frac{x^{a-2b}}{a-2b} - \ldots - \frac{x^{a-nb}}{a-nb} -$$

$$-\frac{1}{b}\left[\ln(1-x) + r^a \ln(r-x) + r^{2a}\ln(r^2-x) + \ldots + r^{(b-1)a}\ln\left(r^{b-1}-x\right)\right].$$

7. Bolyai János próbálkozik az

$$\int \frac{a^x dx}{x}$$

kiszámításával, amelyről megjegyzi (704/6), hogy *„...eddig a matematikusok a trigonometrikus függvények által, algebrailag ugyan kitehetetlennek* [megoldhatatlannak] *tartották*". Először

$$\int \frac{a^x\, dx}{x^m} = -\frac{a^x}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{\ln a}{m-1} \int \frac{a^x\, dx}{x^{m-1}}\text{-et}$$

számítja ki, de nem folytatja tovább. A feladatot minden bizonnyal Lacroix [14, 275–277. old.] könyvében látta. Ugyanitt megjegyzi, hogy *„az* $\int \frac{\ln(1-x)}{x^m}\, dx$ *integrált azonnal meg lehet adni* $= \frac{x^{1-m}}{1-m} \ln(1-x) + \frac{1}{1-m} \int \frac{1}{x^m(1-x)}\, dx \ldots$

Gauss

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots$$

hipergeometrikus sorát is több helyen (1336/1; 375/11) emlegeti. *„Nagyon elmésnek"*, *„fényes találmánynak"* nevezi. Nem foglalkozik részletesen a sorral, mivel – amint megjegyzi – azt Ettingshausen kimerítően tárgyalja [9, 56. old.]

Végül megemlítjük néhány, a tárgyhoz tartozó fogalomnak a Bolyai János-féle elnevezését: integrál (ösöny), konvergens (véghatáros), jele $\wedge$ (Bolyai Farkas „közelítőnek" mondja), divergens (szétfutó), jele $\vee$, kritérium (ismertető jel), ellipszis (kis nyomkör vagy kerekdék), hiperbola (fut-kör vagy mentelék), parabola (nyúl-kör), abszcissza (al-út), ordináta (fő-út), fókusztávolság (gyúpont-táv vagy kificamodvány) trigonometrikus függvény (kör-függöny), tag (íz). (Bolyai Farkas a határértékre használja a széjbecs kifejezést is.)

Irodalom

[1] Abel, N. H., Note sur le mémorie de Mr. L. Olivier No. 4. du second tome de ce journal, ayant pour titre „remarques sur les séries infinies et leur convergence", *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* **3** (1828), 79–82.

[2] Bolyai Farkas, *Tentamen...,* I–II, Marosvásárhely, 1832–1833.

[3] Bolyai Farkas, *Tentamen...,* I–II, 2. kiadás, Budapest, 1897, ill. 1904.

[4] Bolyai Farkas, *A Marosvásárhelyt 1829-ben nyomtatott Arithmetica elejének részint rövidített, részint bővített... kiadása,* Marosvásárhely, 1843.

[5] *Bolyai János kéziratos hagyatéka,* Marosvásárhely, Bolyai-Teleki Könyvtár.

[6] *Bolyai-levelek* (összeállította Benkő Samu), Kriterion Könyvkiadó, Bukarest, 1975.

[7] Burton, M. D., *The History of Mathematics,* An introduction, Allyn and Bacon Inc., Boston, London, 1985.

[8] Cajori, F., *A History of Mathematics,* Chelsea Publ. Co., New York, 1991.
[9] Ettingshausen, A., *Vorlesungen über die höhere Mathematik*, Wien, 1827.
[10] Euler, L., *Vollständige Anleitung zur Differenzial Rechnung* I–IV, Berlin, 1790,1790, 1793, 1798.
[11] Gauss, C. F., *Disquisitiones arithmeticae,* Leipzig, 1801.
[12] Kiss Elemér, *Matematikai kincsek Bolyai János kéziratos hagyatékából,* Akadémai és Typotex Kiadó, Budapest, 1999.
[13] Knopp, K., *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen* IV, Springer, Berlin und Heidelberg, 1947.
[14] Lacroix, S. F., *Traité élémentaire de calcul différential et de calcul intégral,* Deuxieme edition, Paris, 1806.
[15] Lagrange, J. L., *Théorie des functions analitiques,* 1797.
[16] Magyar Tudományos Akadémia Könyvtára, Kézirattár, Budapest.
[17] Mikolás Miklós, Some Historical Aspects of the Development of Mathematical Analysis in Hungary, *Historia Mathematica,* **2** (1975), 304-308.
[18] Montucla, J. E., *Historie de Mathématiques* I–IV, Paris, 1799–1802.
[19] Németh József, *Előadások a végtelen sorokról,* Polygon Könyvtár, Szeged, 2002.
[20] Olivier, L., Remarques sur les series infinites et leur convergence, *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* **2** (1827), Seite 34.
[21] Reiff, R., *Geschichte der unendliche Reichen,* Tübingen, 1889.
[22] Szabó Péter Gábor, Bolyai Farkas számelméleti vonatkozású kéziratos hagyatéka, *Természet Világa,* Bolyai-emlékszám (2003), 57–61.
[23] Szénássy Barna, *Bolyai Farkas infinitézimális gondolatai,* Debrecen, 1937 (Közlemények a Debreceni Tudományegyetem Matematikai Szemináriumából, 13. füzet).
[24] Szénássy Barna, *A magyarországi matematika története,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1970.
[25] Szénássy Barna, *Bolyai Farkas,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1975.
[26] Vega, G. F., *Vorlesungen über die Mathematik* I, Wien, 1802.

Elemér Kiss and Gábor Péter Szabó: Abstract – The problems of the mathematical analysis in the manuscript heritage of the two Bolyais

The paper presents some studies of the two Bolyais in the mathematical analysis. The problems arise from their manuscripts and related to the infinite series, elliptic integrals and differential equations. They often refer to the results of Vega, Lacroix, Euler, Lagrange, Gauss and Ettingshausen.

BOLYAI FARKAS SORELMÉLETI VIZSGÁLATAIRÓL ÉS A HOZZÁ KAPCSOLÓDÓ FEJLEMÉNYEKRŐL

SÁNDOR JÓZSEF, OLÁH-GÁL RÓBERT

1. Bevezetés

Bolyai Farkas matematikai tevékenységének érdekes és hasznos része az, amely a végtelen sorokkal foglalkozik. Könyveinek ezen kérdéseket vizsgáló részeiből is kitűnik kritikai érzéke és a végtelen iránti vonzalma.

Végtelen sorok és velük kapcsolatban összegük problémái már a görögöknél is felvetődtek, de a válaszok több mint két évezreden át sokszor pontatlanok vagy tévesek voltak. Ennek az a magyarázata, hogy még hiányzott a végtelen sorok konvergenciájának ma elfogadott értelmezése. A végtelen sorok konvergenciájának értelmezése egyidős a határérték *Bolzano* (1817) és *Cauchy* (1821) által adott definíciójával, valamint *Abel* (1826) egyik értekezésének a megjelenésével. Cauchy és Abel hosszú tépelődés után barátkozott meg azzal a gondolattal, hogy a részletösszegek sorozatának határértékét tekintsék egy végtelen sor „összegének". Elgondolásukat csak hosszabb idő múltán fogadták el.

Bolyai Farkas hátramaradt írásaiban és könyveiben főleg pozitív tagú sorokkal foglalkozott. Amint *Szénássy Barna* felhívja figyelmünket [33], habár Bolyai Farkas Tentamenjének első kiadásában (1832–1833) több helyen is szerepelnek végtelen sorok, az értékes gondolatok többségét azonban az „Errata" tartalmazza. Az Errataban levő javításokat és kiegészítéseket Bolyai Farkas folyamatosan tette közzé 1844-ig, és csatolta a Tentamenhez, összesen 50 oldal terjedelemben. A Tentamen második kiadása alkalmával a szerkesztők kihagyták az első kiadás hibás részeit (Bolyai Erratája alapján), ugyanakkor a megfelelő helyre beillesztették a kiigazításokat, és a Bolyai által folyamatosan közölt újabb eredményeket.

Bolyai Farkas ismerte a harmonikus soroknak *N. Oresme*-féle (1323–1382) divergenciabizonyítását. Olvashatta Montucla könyvéből [19], de Kiss Elemér szerint [16] találkozott vele Gauss és Ettigshausen műveiben is [12]. Egyik Bécsben tanuló diákja révén tájékozódott *L. Olivier* [21] kritériumáról, míg *A. Burg* [9] osztrák matematikus kritériumáról, ahogy írja az „Arithmetica eleje" bővített (1843) kiadásában, annak könyvéből értesült. Bolyai Tentamenjében található J. Montucla kritériumának kritikája is.

A továbbiakban célunk lesz közelebbről megvizsgálni ezeket a kritériumokat is.

Bolyai Farkas két legfontosabb eredménye a sorok elméletében az ún. „logaritmikus skála” felfedezése, illetve egy, a „Raabe-kritérium”-mal ekvivalens kritérium bizonyítása.

A logaritmikus skála, melyet A. de Morgannak tulajdonítanak [20] (és később O. Bonnet és J. Bertrand is felfedezett (lásd [8], [17])), azt állítja, hogy aszerint, hogy konvergens vagy divergens az a sor, melynek általános tagja $\frac{1}{n^a}$, ugyanazon a esetében konvergens vagy divergens az a sor is, melynek általános tagja $\frac{1}{nl^a}$, vagy $\frac{1}{n\cdot l\cdot l_1^a}$, vagy általánosabban $\frac{1}{n\cdot l\cdot l_1\cdot l_2\cdots l_t^a}$, ahol $l=\log n$, $l_1=\log l$, $\ldots$, $l_t=\log l_{t-1}$, és l_t egynél nem kisebb[1].

Bolyai Farkas legfontosabb konvergenciakritériumára Szénássy Barna [33] hívta fel a figyelmet. Ez a kritérium így szól: jelölje az $\frac{n-m}{n}$ alakú tört azt a tényezőt, amelyre $a_{n-1}\cdot\frac{n-m}{n}=a_n$. Ebből: $m=n-n\frac{a_n}{a_{n-1}}$. Ekkor

1. Ha $\exists\, k>1:\, m\geq k$, akkor a sor konvergens;
2. Ha $m\leq 1$, akkor a sor divergens;
3. Ha $m>1$, de $\lim_{n\to\infty} m=1$, akkor a sor viselkedéséről semmit nem mondhatunk. Kis általánosítással látható, hogy ez a kritérium a *Raabe*-féle kritériummal ekvivalens ([23]), azaz,
   ha $n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\Big)\geq k>1$, akkor a sor konvergens;
   ha $n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\Big)\leq 1$, a sor divergens.

Szénássy Barna szerint indokolt lenne erre a kritériumra a „Raabe–Bolyai-kritérium” vagy „Raabe–Bolyai Farkas” elnevezés. Megjegyezzük, hogy a Raabe-kritériumot nagyon sok helyen „Raabe–Duhamel” kritériumként is ismerik.

2. Az Olivier, Burg és Montucla kritériumokról

A végtelen sorokra vonatkozik L. Olivier alábbi kritériuma [21]:

1. állítás (Olivier)**.** *Legyen $a_n>0$, szigorúan csökkenő sorozat. Ekkor $\sum_{n\geq 1} a_n$ sor pontosan akkor konvergens, ha*

$$\lim_{n\to\infty} na_n=0. \tag{1}$$

Hogy ebből az (1)-es feltételből nem következik a sor konvergenciája, Bolyai Farkas a $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\log n}$ sor példájával mutatta ki. Valószínűleg Bolyai Farkas nem ismerte *Abelnek* 1828-ban megjelent cikkét [1], ahol a fenti divergens sorral is foglalkozik. Amint Kiss Elemér megjegyzi [16], ezt a sort már 1843-ban megtaláljuk Bolyai Farkasnál, pedig Gauss, 1848. április 20-án írott levelében említi neki ezt a

[1]Nemrég Sándor József és Henrig Krag Sørensen felfedezték, hogy a logaritmikus skála lényegében már megtalálható Abel kézirataiban *J. Sándor and H. K. Sørensen,* On an unpublished convergence criterion of N. H. Abel, *Octogon Math. Mag.,* **15** (2007), no. 1, 164–167.

sort. Habár, Szénássy Barna szerint [33] „…teljesen bizonyossággal ugyanis nem ismertek az összes olyan szálak, amelyek Bolyait a külföld tudományos köreivel összekapcsolták", mégis „…nem vethetjük el Bolyai Farkas önállóságát" (Kiss Elemér [16]).

A Burg-kritérium első megfogalmazása az alábbi [9]:

2. állítás (Burg)**.** *Legyen $a_n > 0$, szigorúan csökkenő. Ekkor $\sum_{n\geq 1} a_n$ pontosan akkor konvergens, ha*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = 0. \tag{2}$$

Ebben az esetben is $a_n = \frac{1}{n \log n}$ választással mutatta ki Bolyai Farkas (2) nem elegendő voltát a sor konvergenciájára.

Bolyai Tentamenjében megemlíti még az alábbi, Montucla „kritériumot", amelyről Szénássy Barna ezt írja: „egyébként az irodalomban alig található…". (Ezt Luciano Floridi olasz matematikatörténész is alátámasztja, aki jól ismeri Montucla életét és munkásságát [14].)

3. állítás (Montucla)**.** *Legyen $a_n > 0$, szigorúan csökkenő. Ekkor $\sum_{n\geq 1} a_n$ akkor és csak akkor konvergens, ha*

$$\frac{a_n(a_{n+1} - a_{n+2})}{a_n - a_{n+1}} > a_{n+2} \tag{3}$$

(vagy másképpen mondva: bármely három, egymás utáni a, b, c tagjára igaz a következő egyenlőtlenség: $\frac{a(b-c)}{a-b} > c$).

Bolyai Farkas az $a_n = \frac{n-1}{2} + \frac{n-2}{2^2} + \ldots + \frac{n-(n-1)}{2^{n-1}}$ példa segítségével mutatja ki, hogy habár (3) teljesül, a sor divergens.

Montucla életéről és munkásságáról lásd [28], jelenlegi reneszánszáról pedig lásd a [32] és [14] munkákat.

Végül még megemlítünk egy kritériumot, melyet Bolyai János kéziratai között fedeztünk fel nemrég. Ez a „BJ-299/1^v" kézirat, amelynek valószínűleg Bolyai Farkas kéziratai közé kellene kerülnie. Ebből a kéziratból tudjuk meg, hogy *Szász Károly* az alábbi kritériumot találta:

4. állítás (Szász)**.** *Ha $a_n > 0$, szigorúan növekvő, akkor $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n}$ akkor és csakis akkor konvergens, ha*

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = +\infty. \tag{4}$$

Valójában (amint Bolyai Farkas is megjegyzi fenti írásában) ez a kritérium ekvivalens a „Burg-kritériummal". Valóban, legyen $a_n = \frac{1}{b_n}$, ahol (b_n) szigorúan növekvő. Ekkor $a_{n+1} - a_n = \frac{b_n - b_{n+1}}{b_n b_{n+1}}$, és ha (4) teljesül, akkor könnyen látható, hogy (2) is igaz. Fordítva, (2)-ből következik (4). Ezért a 4. állítást Burg–Szász-kritériumként is említhetjük.

3. Olivier kritériumáról

Az 1. állítás helyett az alábbi állítás érvényes:

1. tétel (Olivier). *Ha $a_n > 0$, (a_n) szigorúan csökkenő, és $\sum_{n\geq 1} a_n$ konvergens, akkor* (1) *igaz.*

Ennek a tételnek legismertebb bizonyítása a maradéksorozat vizsgálatával történik. Vannak azonban természetesebb, de kevésbé vagy egyáltalán nem közismert bizonyítások is.

1. bizonyítás. (Knopp [18]) Legyen $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Mivel (a_n) csökkenő, úgy $na_{2n} \leq a_{n+1} + \ldots + a_{2n} = s_{2n} - s_n$. Tehát $2na_{2n} \leq 2(s_{2n} - s_n)$, és mivel a sor konvergens, $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} s_n = 0$, azaz

$$\lim_{n\to\infty} 2na_{2n} = 0. \tag{5}$$

Másfelől, hasonlóan okoskodva, $(n+1)a_{2n+1} \leq a_{n+1} + \ldots + a_{2n+1} = s_{2n+1} - s_n$, tehát $(2n+1)a_{2n+1} + a_{2n+1} \leq 2(s_{2n+1} - s_n) \to 0$, ha $n \to \infty$. Mivel $a_{2n+1} \to 0$, úgy kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} (2n+1)a_{2n+1} = 0. \tag{6}$$

(5) és (6) alapján mármost adódik (1). ■

2. bizonyítás (Cesàro [8], [11]). Alkalmazzuk a „Stolz–Cesàro” határértékszámítási kritériumot:

Ha $y_n > 0, (y_n)$ szigorúan növekvő, $y_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ és $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = l$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l \tag{7}$$

tetszőleges (x_n), (y_n) valós számsorozatokra, ahol $l \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Legyen most

$$x_n = \frac{s_n}{a_n} - n, \quad y_n = \frac{1}{a_n}, \tag{8}$$

ahol $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Mivel a sor konvergens, és (a_n) szigorúan csökkenő, úgy $y_n \nearrow \infty \quad (n \to \infty)$.

Továbbá

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = s_n, \qquad \frac{x_n}{y_n} = s_n - na_{n.} \tag{9}$$

Mivel $s_n \to s$ (véges), úgy (7) alapján $(s_n - na_n) \to s$, azaz $na_n \to 0$, vagyis (1) érvényes. ■

1. megjegyzés. Cesàro (vagy Stolz–Cesàro) tételének általánosításáról lásd [30].

3. Bizonyítás. Az 1. tétel következik egyes más, ismert kritériumokból is. Például, „Cauchy kondenzációs kritériuma" szerint ([8], [17], [18], [4]) ha $a_n > 0$, szigorúan csökkenő, akkor $\sum_{n\geq 1} a_n$ és $\sum_{n\geq 1} 2^n a_{2^n}$ ekvikonvergensek. Most az első sor konvergens, úgy a második is az. Jól ismert azonban, hogy ekkor $2^n a_{2^n} \to 0$, ha $n \to \infty$. Innen már következik (1) is, hiszen (a_n) szigorúan csökkenő lévén, véve a $2^k \leq n < 2^{k+1}$ intervallumot, következik, hogy $a_{2^k} \geq a_n > a_{2^{k+1}}$, azaz $2^k a_{2^k} \geq 2^k a_n > 2^k a_{2^{k+1}}$ és $2^k a_n \leq n a_n$, de $2^k a_n > \frac{1}{2} n a_n$, úgyhogy mindenképpen, ha $k \to \infty$, akkor $n \to \infty$ és $n a_n \to 0$. ■

Olivier kritériumáról és néhány alkalmazásáról lásd a [26] könyvet is.

Olivier kritériumának alábbi általánosításai érvényesek:

2. tétel. *Ha $a_n > 0$, és $\sum_{n\geq 1} a_n$ konvergens, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n}{n} = 0. \tag{10}$$

Bizonyítás. Legyen $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Belátjuk először is, hogy érvényes az alábbi azonosság:

$$\frac{a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n}{n} = s_n - \left(\frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1}}{n}\right). \tag{11}$$

Valóban,

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n &+ \\ a_2 + \ldots + a_n &+ \\ &\vdots \\ &+ a_n = ns_n - (s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1}). \end{aligned}$$

Innen adódik (11).

Most, ha $s_n \to s$ $(n \to \infty)$, akkor Cauchy egy jól ismert tétele alapján

$$\frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1}}{n-1} \to s, \quad \text{azaz} \quad \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1}}{n} \to s,$$

azaz (11) alapján következik (10). ■

1. következmény (1. tétel)**.** *Valóban, $a_1 \geq a_n, \ldots, a_{n-1} \geq a_n$ alapján $a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n \geq a_n(1 + 2 + \ldots + n) = a_n \frac{n(n+1)}{2}$.*

Így $\frac{a_n(n+1)}{2} \leq \frac{a_1+2a_2+\ldots+na_n}{n} \to 0$, azaz $\frac{a_n(n+1)}{2} \to 0$, ahonnan azonnali, hogy $a_n n \to 0$ $(n \to \infty)$.

2. megjegyzés. Egy $\sum_{n\geq 1} a_n$ sort „(C)-konvergensnek” (Cesàro-konvergensnek) nevezünk, ha $\left(\frac{s_1+s_2+\ldots+s_n}{n}\right)$ konvergens, ahol $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. A (11) reláció alapján Olivier kritériumának alábbi megfordítását találjuk:

2′. tétel. *Ha $na_n \to 0$, $a_n > 0$ tetszőleges, és a sor C-konvergens, akkor a sor konvergens is.*

Bizonyítás. Valóban, mivel Cauchy tétele alapján (11)-ben a bal oldal nullához tart, úgy $\lim_{n\to\infty}(s_n - \sigma_n) = 0$, azaz $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$, ahol $\sigma_n = \frac{s_1+s_2+\ldots+s_{n-1}}{n-1}$. ■

3. megjegyzések.

1. Nehezebb eljárással kimutatható, hogy a 3. tételben $na_n \to 0$ helyett elegendő feltenni, hogy az (na_n) sorozat korlátos.
2. Mivel (10) bizonyítása a (11) azonosságon alapul, a 2. tétel érvényes tetszőleges (a_n) komplex számsorozatra (nem csak $a_n > 0$-ra). Legyen $a_n = \frac{b_n}{n}$. Ekkor a 2. tétel alakja az alábbi:

2″. tétel. *Ha $\sum_{n\geq 1} \frac{b_n}{n}$ konvergens, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} = 0, \tag{12}$$

ahol $(b_n) \subset \mathbb{C}$ tetszőleges komplex számsorozat.

Most az $a_n = b_n - b_{n-1}$ $(n \geq 1)$, $b_0 = 0$ helyettesítést végezve a (11) azonosságban, mivel $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + (b_2 - b_1) + \ldots + (b_n - b_{n-1}) = b_n$, nyerjük a

$$\frac{b_1 + 2(b_2 - b_1) + \ldots + n(b_n - b_{n-1})}{n} = b_n - \left(\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1}}{n}\right) \tag{13}$$

azonosságot.

A (13) relációnak egy azonnali következménye:

3. tétel. *Ha $n(b_n - b_{n-1}) \to 0$ $(n \to \infty)$, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \left[b_n - \left(\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1}}{n}\right)\right] = 0. \tag{14}$$

Valóban, a feltétel alapján Cauchy tételéből a bal oldal határértéke (13)-ban nulla (Cauchy tétele: Ha $b_n \to b$, akkor $\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n} \to b$ $(n \to \infty)$; lásd még [10]).

2. következmény (Cauchy fordított tétele)**.** *Ha* $n(b_n - b_{n-1}) \to 0$, *és*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} = b,$$

akkor

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b. \tag{15}$$

4. megjegyzés. Olivier kritériumával (1. tétel) adható egy tétel $n(b_n - b_{n-1}) \to 0$ $(n \to \infty)$ teljesülésére is.

Valóban, tekintsük a $\sum_{n\geq 2}(b_{n-1} - b_n)$ végtelen sort, ahol $0 < b_n < b_{n-1}$. Ez a sor konvergens, hiszen $(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \ldots + (b_{n-1} - b_n) = b_1 - b_n < b_1$. Mivel a sor pozitív tagú, még feltéve azt, hogy $x_n = b_{n-1} - b_n$ által adott sorozat szigorúan csökkenő, Olivier kritériuma alapján $nx_n \to 0$, azaz $n(b_{n-1} - b_n) \to 0$ (tehát $n(b_n - b_{n-1}) \to 0$ is igaz). Mivel $x_{n+1} < x_n \iff (b_n - b_{n+1}) < (b_{n-1} - b_n) \iff b_n < \frac{b_{n-1} - b_{n+1}}{2}$, az előbbi feltétel éppen a (b_n) sorozat szigorú konvexitására redukálódik:

4. tétel. *Legyen* $b_n > 0$, *szigorúan csökkenő, szigorúan konvex számsorozat.*

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} n(b_{n-1} - b_n) = 0. \tag{16}$$

A további eredmények elérése érdekében szükségünk lesz egy jól ismert segédtételre:

1. lemma (Abel-transzformáció)**.** *Tetszőleges* (a_n), (b_n) *komplex számsorozatokra érvényes a*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n \tag{17}$$

azonosság, ahol $B_k = b_1 + b_2 + \ldots + b_k$.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n = a_1B_1 + a_2(B_2 - B_1) + \\ + a_3(B_3 - B_2) + \ldots + a_{n-1}(B_{n-1} - B_{n-2}) + a_n(B_n - B_{n-1}) = \\ = B_1(a_1 - a_2) + B_2(a_2 - a_3) + \ldots + B_{n-1}(a_{n-1} - a_n) + B_na_n, \end{aligned}$$

és (17) bizonyítva van. ■

3. következmény. *Ha $(a_n B_n)$ konvergens számsorozat, ahol $B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, akkor a $\sum_{n\geq 1} a_n b_n$ és*

$$\sum_{n\geq 1}(a_n - a_{n+1})B_n \tag{18}$$

sorok ekvikonvergensek.

Valóban, ha $\lim_{n\to\infty} a_n B_n = l$ véges, akkor

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \quad \text{vagy} \quad \sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k$$

határértékei összehasonlíthatók (17) alapján.

Az alábbi eredmény Olivier tételét teszi teljessé (bizonyos értelemben):

5. tétel. *Tegyük fel, hogy $a_n \to 0$, és (a_n) szigorúan csökkenő. Ekkor $\sum_{n\geq 1} a_n$ pontosan akkor konvergens, ha $na_n \to 0$ $(n \to \infty)$, és a $\sum_{n\geq 1} n(a_n - a_{n+1})$ sor is konvergens.*

Bizonyítás. Ha $\sum_{n\geq 1} a_n$ konvergens sor, ahol (a_n) szigorúan csökkenő, Olivier kritériuma (1. tétel) alapján $na_n \to 0$. Most (18)-ban véve $b_n \equiv 1$-et $(n \geq 1)$, kapjuk, hogy $B_n = n$, és hogy $\sum_{n\geq 1} a_n$ és $\sum_{n\geq 1} n(a_n - a_{n+1})$ ekvikonvergensek (mivel $a_n \to 0$). Így $\sum_{n\geq 1} n(a_n - a_{n+1})$ is konvergens.

Fordítva, mivel $a_n \to 0$, az előbbiek alapján, ha $\sum_{n\geq 1} n(a_n - a_{n+1})$ konvergens, akkor $\sum_{n\geq 1} a_n$ is az lesz. ■

A $2'$. tételben láttuk, hogy $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n}$ konvergenciája mit eredményezhet. Ha még feltesszük azt, hogy (a_n) szigorúan csökkenő, egy Olivier típusú eredményt kapunk:

6. tétel. *Legyen (a_n) szigorúan csökkenő, pozitív számsorozat. Ha $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n}$ konvergens, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \log n = 0. \tag{19}$$

Bizonyítás. Mivel (a_n) szigorúan csökkenő, úgy $\left(\frac{a_n}{n}\right)$ is az. Cauchy kondenzációs kritériuma alapján $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n}$ és $\sum_{k\geq 1} 2^k \frac{a_{2^k}}{2^k} = \sum_{k\geq 1} a_{2^k}$ ekvikonvergensek. Ha az első tehát konvergens, a második is az lesz. Mivel (a_{2^k}) sorozat k szerint szigorúan csökkenő, Olivier kritériuma (1. tétel) alapján $ka_{2^k} \to 0$, azaz $(\log 2^k)a_{2^k} \to 0$, ha $k \to \infty$. Mivel a $(\log n)$ sorozat szigorúan növekvő és (a_n) szigorúan csökkenő, innen (19) azonnal következik. ■

A (18) alapján, az 5. tételhez hasonlóan igazolható az alábbi:

7. tétel. *Legyen* $a_n \searrow 0$ $(n \to \infty)$. *Ekkor* $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n}$ *sor pontosan akkor konvergens, ha* $a_n \log n \to 0$ $(n \to \infty)$, *és a* $\sum(a_n - a_{n+1}) \log n$ *sor is konvergens.*

Az Olivier-kritérium 2. (Cesàro-féle) bizonyításánál a Stolz–Cesàro-tételt alkalmaztuk. Ez a tétel azonban általánosabban is ismert (lásd pld. [8], [17]):

2. lemma (Általánosított Stolz–Cesàro-tétel)**.** *Tegyük fel, hogy*

$$y_n \nearrow +\infty \quad (n \to \infty).$$

Ekkor

$$\underline{\lim}\, \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \leq \underline{\lim}\, \frac{x_n}{y_n} \leq \overline{\lim}\, \frac{x_n}{y_n} \leq \overline{\lim}\, \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}, \tag{20}$$

ahol $\underline{\lim}$, *illetve* $\overline{\lim}$ *a legkisebb, illetve legnagyobb torlódási pontokat jelölik (néha* $\underline{\lim} = \liminf$ *és* $\overline{\lim} = \limsup$ *jelölést is használjuk).*

Ennek egy azonnali következménye az, hogy ha (u_n), (v_n) pozitív tagú sorok, és $\sum_{n\geq 1} v_n$ divergens, akkor

$$\underline{\lim}\, \frac{u_n}{v_n} \leq \underline{\lim}\, \frac{U_n}{V_n} \leq \overline{\lim}\, \frac{U_n}{V_n} \leq \overline{\lim}\, \frac{u_n}{v_n}, \tag{21}$$

ahol $U_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, $V_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$.

Valóban, $y_n = V_n \nearrow \infty$ esetre alkalmazható (20). Például, az (nu_n) sorozatot véve figyelembe, $v_n = \frac{1}{n}$ választással, a harmonikus sor diverenciájából, (21) alapján, mivel $V_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \sim \log n$ (ha $n \to \infty$), lásd pl. [4], a következőt nyerjük:

$$\underline{\lim}\, nu_n \leq \underline{\lim}\, \frac{U_n}{\log n} \leq \overline{\lim}\, \frac{U_n}{\log n} \leq \overline{\lim}\, nu_n. \tag{22}$$

Most alkalmazzuk a (20) relációt az $x_n = \frac{s_n}{a_n} - n$, $y_n = \frac{1}{a_n}$ esetre, ahol (a_n) szigorúan csökkenő, nullához konvergáló számsorozat. Így nyerjük az alábbi általánosított Olivier-kritériumot:

8. tétel. *Ha* $a_n \searrow 0$ $(n \to \infty)$, *és* $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, *akkor*

$$\underline{\lim}\, s_n \leq \underline{\lim}\, (s_n - na_n) \leq \overline{\lim}\, (s_n - na_n) \leq \overline{\lim}\, s_n. \tag{23}$$

Sajátosan, ha (s_n) konvergens, azaz $\underline{\lim}\, s_n = \overline{\lim}\, s_n$, akkor azt nyerjük, hogy $\lim (s_n - na_n)$ létezik és egyenlő $\lim s_n$-nel. Innen már $na_n \to 0$ következik.

Mivel ha $\sum_{n\geq 1} a_n$ divergál, akkor $\lim (s_n - na_n) = +\infty$ következik (23)-ból, az alábbi felírást tehetjük:

8′. tétel. *Ha* $a_n \searrow 0$ $(n \to \infty)$, *és* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$, *akkor*

$$\lim_{n\to\infty} (s_n - na_n) = l.$$

Valóban, ha l véges, akkor éppen Olivier kritériumát kapjuk; míg, ha $l = +\infty$ (azaz a sor divergens), akkor $s_n - na_n \to \infty$ adódik. Olivier kritériumának másfajta általánosítását adja az alábbi:

9. tétel. *Legyen* $a_n \searrow 0$ $(n \to \infty)$ *és* (x_n) *egy tetszőleges valós számsorozat. Tételezzük fel, hogy* $\sum_{n\geq 1} a_n x_n$ *konvergens sor. Ekkor*

$$a_n X_n \to 0 \quad (n \to \infty), \tag{24}$$

ahol $X_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

Bizonyítás. Legyen $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k a_k$ $(s_0 = 0)$. Mivel egy sorozat konvergenciáját véges számú tag nem változtatja meg, feltételezzük, hogy $s_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Legyen $\varepsilon > 0$ és $|s_n| < \varepsilon$, ha $n > M \in \mathbb{N}^+$.

Ha most $S = \sup\left\{|s_n| : n \in \mathbb{N}\right\}$, akkor

$$a_n|X_n| = a_n\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{s_k - s_{k-1}}{a_k}\right| = a_n\left|\frac{s_n}{a_n} + \sum_{1\leq k<n} s_k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)\right| \leq$$

$$\leq \varepsilon + a_n S \sum_{1\leq k<M} \left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}\right) + \varepsilon a_n \sum_{M\leq k<n} \left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}\right) \leq \varepsilon + S\frac{a_n}{a_M} + \varepsilon,$$

ahol felhasználtuk a fenti jelöléseket és azt, hogy (a_n) szigorúan csökkenő. Mivel $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$, innen kapjuk, hogy $\overline{\lim}\, a_n|X_n| \leq 2\varepsilon$. Véve $\varepsilon \to 0$-t, az állítás következik, mert $|a_n X_n| \to 0 \Leftrightarrow a_n X_n \to 0$ $(n \to \infty)$. ∎

4. következmények.

1. *Ha* $x_n \equiv 1$ *a 9. tétel éppen az 1. tételt adja.*
2. *Véve* $x_n = \frac{1}{n}$*-et, mivel* $X_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \sim \log n$ *(ha* $n \to \infty$*), visszanyerjük a 6. tételt. Megjegyezzük, hogy az* $a_n = \frac{1}{b_n}$ *jelöléssel, innen* $\frac{\log n}{n} \to 0$, *azaz* $\frac{b_n}{\log n} \to \infty$ *következik. Mivel* $(\log n) \nearrow \infty$, *úgy az általánosított Stolz–Cesàro-kritérium alapján (lásd* (20)*) következik, hogy*

$$\overline{\lim}\, \frac{b_{n+1} - b_n}{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \geq \overline{\lim}\, \frac{b_n}{\log n} = +\infty.$$

Mivel $n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to \log e = 1$, *úgy innen* $\overline{\lim}\, n(b_{n+1} - b_n) = +\infty$, *vagyis: ha* $b_n \nearrow \infty$ $(n \to \infty)$, *és* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{nb_n}$ *konvergens, akkor*

$$\overline{\lim}\, n(b_{n+1} - b_n) = +\infty. \tag{25}$$

Mivel $(n+1)b_{n+1} - nb_n = n(b_{n+1} - b_n) + b_{n+1}$, *az ennél gyengébb*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \big[(n+1)b_{n+1} - nb_n\big] = +\infty \tag{25'}$$

összefüggés is következik. (25′) *partikuláris esete egy későbbi eredménynek.*

Végezetül, Olivier kritériumával kapcsolatosan három megjegyzést teszünk. Abel egy 1828-as dolgozatában ([1]) kimutatta az alábbi eredményt:

3. lemma (Abel)**.** *Ha* $\sum_{n\ge1} a_n$ *divergens* ($a_n > 0$), *akkor* $\sum_{n\ge1} \frac{a_{n+1}}{s_n}$ *is divergens, ahol* $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Bizonyítás. A $\log(1+x) < x$ $(x > 0)$ egyenlőtlenséget alkalmazzuk $x = \frac{a_{n+1}}{s_n}$-re: $\log\left(1 + \frac{a_{n+1}}{s_n}\right) < \frac{a_{n+1}}{s_n}$. Mivel $1 + \frac{a_{n+1}}{s_n} = \frac{s_{n+1}}{s_n}$, úgy $\frac{a_{n+1}}{s_n} > \log s_{n+1} - \log s_n$, tehát

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1}}{s_k} > \sum_{k=1}^{n} (\log s_{k+1} - \log s_k) = \log s_{n+1} - \log s_1 \to \infty,$$

mivel $s_{n+1} \to \infty$. ■

Ezt felhasználva Abel bebizonyította a következő tételt:

10. tétel (Abel)**.** *Nem létezik olyan* Φ *függvény, hogy*

$$\Phi(n)a_n \to 0 \iff \sum_{n\ge1} a_n \quad \textit{konvergens.} \tag{26}$$

Bizonyítás. Ha létezne ilyen Φ függvény, tekintsük a $\sum_{n\ge1} a_n = \sum_{n\ge1} \frac{1}{\Phi(n)}$ sort. Mivel $\Phi(n)a_n \to 1$, úgy a feltevés alapján a $\sum_{n\ge1} \frac{1}{\Phi(n)}$ sor divergens. Ezért a 3. lemma alapján ugyancsak divergens lesz a

$$\sum_{n\ge2} a'_n = \sum_{n\ge2} \frac{a_n}{s_{n-1}} = \sum_{n\ge2} \frac{1}{\Phi(n) \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{\Phi(m)}}$$

sor is.

Azonban $\Phi(n)a'_n = \frac{1}{\sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{\Phi(m)}} \to 0$, ha $n \to \infty$, az előbbi divergencia alapján. Így egyrészt $\Phi(n)a'_n \to 0$, másrészt $\sum_{n\ge2} a'_n$ divergál, ami ellentmond a feltevésnek. ■

H. K. Sørensen dán matematikus és történész tüzetesen megvizsgálta ([29], [15]) úgy L. Olivier életrajzát és munkásságát, mint Abel alapvető cikkének hátterét és fontosságát. Abel mondotta volt: „olvassátok a mestereket!” Lásd még M. Goar [15] cikkét is.

Második megjegyzésünk Olivier fordított tételére vonatkozik. Mivel Olivier kritériumának létezik Stolz–Cesàro tételére alapozott bizonyítása, Stolz–Cesàro fordított tételével ilyen eredményeket is nyerhetünk. Stolz–Cesàro fordított tételére adtak kritériumokat pl. [3], [36], [5] dolgozatokban.

Az egyik ilyen tétel például így szól [3]:

4. lemma. *Legyen* $y_n \nearrow \infty$, $\frac{y_{n+1}}{y_n} \geq K > 1$ *(ahol* K *állandó), és tegyük fel, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l. \tag{27}$$

Ekkor $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = l$.

Alkalmazva $y_n = \frac{1}{a_n}$ (ahol $a_n \searrow 0$) és $x_n = \frac{s_n}{a_n} - n$-re (27)-et, az alábbi eredményt nyerjük:

11. tétel. *Legyen* $a_n \searrow 0$ $(n \to \infty)$, $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq K > 1$, *ahol* K *állandó. Ha* $(s_n - na_n)$ *sorozat konvergens, akkor* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *sor is konvergens.*

A [36], illetve [5] dolgozatokban az erős $K > 1$ feltétel gyengébbekkel van helyettesítve.

Utolsó megjegyzésünk az ún. „statisztikus konvergenciával" kapcsolatos. 1951-ben H. Fast [13] bevezette a statisztikusan konvergens sorozat fogalmát. Azt mondjuk, hogy (a_n) statisztikusan konvergál a-hoz (jelben $\text{lim-stat}\, a_n = a$), ha $\forall\varepsilon > 0$, esetén $A(\varepsilon) = \{n : |a_n - a| \geq \varepsilon\}$ halmaz aszimptotikus sűrűsége nulla, azaz

$$d(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \chi_A(k) = 0, \tag{28}$$

ahol χ_A az A halmaz karakterisztikus függvénye: $\chi_A(k) = 1$, $k \in A$, és $\chi_A(k) = 0$, $k \notin A$.

2003-ban T. Šalat és V. Toma [13] kimutatták, hogy Olivier kritériuma érvényben marad, ha a sorozat monotonitási feltételét elhagyjuk, de a klasszikus konvergenciát statisztikus konvergenciával helyettesítjük:

12. tétel (Šalat–Toma)**.** *Ha* $a_n > 0$ *és* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *konvergens, akkor*

$$\text{lim-stat}\,(na_n) = 0. \tag{29}$$

4. Burg, Szász és Montucla kritériumairól

Amint láttuk, a Burg (2. állítás) és Szász (4. állítás) „kritériumok" ekvivalensek. Ezek lényegében azt állítják, hogy ha $a_n > 0$ szigorúan növekvő (Szásznál talán ez a követelmény sem szerepel), akkor $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n}$ pontosan akkor konvergens, ha $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = +\infty$.

A 4. állításnál említett dokumentumban Bolyai Farkas kimutatja ennek a kritériumnak a helytelenségét is. Először véve $a_n = n(n+1)$-et, nyilván $a_n \nearrow \infty$, és $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n}$ konvergens, és $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = +\infty$. Másfelől, $a_n = \frac{1}{n \log n}$-re az Abel-sor konvergens, és mégis itt is $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = +\infty$. Valóban,

$$(n+1)\log(n+1) - n\log n = \log(n+1) + n\big[\log(n+1) - \log(n)\big] \to \infty,$$

mert

$$n \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to 1, \quad \text{és} \quad \log(n+1) \to \infty.$$

Egy azonnali kritérium adható, ha az általánosított Stolz–Cesàro-tételt (2. lemma) alkalmazzuk. Legyen $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n}$ konvergens, ahol $a_n \nearrow \infty$. Ekkor Olivier kritériuma alapján $n\frac{1}{a_n} = \frac{n}{a_n} \to 0$, azaz $\frac{a_n}{n} \to +\infty$ $(n \to \infty)$. Alkalmazva a (20) relációt $y_n = n$, $x_n = a_n$ esetében, $\overline{\lim}\,(a_{n+1} - a_n) \geq \overline{\lim}\,\frac{a_n}{n} = +\infty$ adódik. Tehát igaz a

13. tétel. *Ha $a_n \nearrow \infty$, és $(a_{n+1} - a_n)$ felülről korlátos, akkor*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n} \tag{30}$$

sor divergens.

Valóban, ha $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n}$ konvergens lenne, akkor $\overline{\lim}\,(a_{n+1} - a_n) = +\infty$ adódna, ami a feltevés alapján nem lehetséges.

13′. tétel. *Ha $a_n \nearrow \infty$, és $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n}$ konvergens, akkor*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_{n+1} - a_n) = +\infty. \tag{31}$$

A következőkben felhasználjuk az alábbi eredményt ([25]):

5. lemma. *Ha $a_n > 0$, szigorúan növekvő, és $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n}$ divergens, akkor*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+1)a_{n+1} - na_n} \tag{32}$$

is divergens.

5. következmény. *Ugyanazon feltételek mellett,*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(a_{n+1} - a_n)} \tag{33}$$

is divergens.

Valóban, $(n+1)a_{n+1} - na_n = n(a_{n+1} - a_n) + a_{n+1} > n(a_{n+1} - a_n)$.

Tehát ha $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(a_{n+1}-a_n)}$ konvergens, akkor $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n}$ is az. Erre később is szükségünk lesz (lásd 16. tétel).

14. tétel. *Legyen* (a_n) *szigorúan növekvő,* $a_n > 0$, *és tegyük fel, hogy*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(a_{n+1}-a_n)}$$

konvergens. Tegyük fel továbbá, hogy (a_n) *szigorúan konvex számsorozat. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}-a_n) = +\infty. \tag{34}$$

Bizonyítás. Mivel (a_n) szigorúan konvex sorozat, $a_n < \frac{a_{n-1}-a_{n+1}}{2}$, tehát $a_{n+1} - a_n > a_n - a_{n-1} > 0$. Így $\big\{n(a_{n+1}-a_n)\big\}$ is szigorúan növekvő lesz, azaz

$$\left\{\frac{1}{n(a_{n+1}-a_n)}\right\}$$

szigorúan csökkenő.

Olivier kritériuma alapján $\lim_{n\to\infty} n\frac{1}{n(a_{n+1}-a_n)} = 0$, azaz (34) következik, mivel $a_{n+1} - a_n > 0$. ■

Most kimutatjuk, hogy még egy plusz feltételt kiróva a $13'$. tételben (31) megjavítható.

15. tétel. *Tegyük fel, hogy* $a_n > 0$, $a_n \nearrow \infty$, *és* $\left(\frac{a_n}{n}\right)$ *növekvő sorozat. Ekkor ha* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n}$ *konvergens, akkor* (34) *igaz.*

Bizonyítás. A 13. és $13'$. tételek bizonyításában láttuk, hogy ha $a_n > 0$, $a_n \nearrow \infty$, és $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n}$ konvergens, akkor $\left(\frac{a_n}{n}\right) \to \infty$. Most, mivel $b_n = \frac{a_n}{n}$ általános tagú sorozat monoton növekvő, úgy $b_{n+1} \geq b_n$, vagyis $\frac{a_{n+1}}{n+1} \geq \frac{a_n}{n}$. Innen azonban $a_{n+1} - a_n \geq \frac{n+1}{n}a_n - a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)a_n - a_n = \frac{a_n}{n}$. Így $a_{n+1} - a_n \to \infty$ is igaz lesz, azaz a (34) reláció érvényes. ■

Montucla „kritériuma” (3. állítás) is szoros kapcsolatban van a Burg–Szász és Olivier típusú kritériumokkal. Valóban, (3)-ban a_n helyett $\frac{1}{a_n}$-et téve, (3) új alakja

$$\frac{\frac{1}{a_n}\left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+2}}\right)}{\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}} > \frac{1}{a_{n+2}},$$

azaz $a_{n+2} - a_{n+1} > a_{n+1} - a_n$ lesz, vagyis az új alakja a „kritériumnak” az alábbi:

„Ha $a_n > 0$, szigorúan növekvő, akkor $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n}$ pontosan akkor konvergens, ha

$$(a_n) \tag{35}$$

szigorúan konvex számsorozat”.

Először megjegyezzük, hogy itt is megfelelők Bolyai Farkasnak a „Burg–Szász kritériumara” adott ellenpéldái. Valóban, mivel $f(x) = x(x+1)$, $x > 0$ és $g(x) = x \log x$ függvények másodrendű deriváltjai $f''(x) = 2 > 0$, $g''(x) = \frac{1}{x} > 0$, úgy e függvények szigorúan konvexek lévén, nyilván az $(n(n+1))$ és $(n \log n)$ sorozatok is szigorúan konvexek lesznek. Az alábbi segédtételt a [25] dolgozatban is alkalmaztuk.

6. lemma. *Ha $u_n > 0$, (u_n) csökkenő, és $\sum_{n\geq 1} u_n$ divergens, akkor*

$$\overline{\lim}\, \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1. \tag{36}$$

Valóban, a divergencia miatt a hányadoskritériumból kapjuk, hogy $\overline{\lim}\, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$. Másfelől, mivel $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, írhatjuk, hogy $\overline{\lim}\, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, és (36) következik.

Montucla kritériumával kapcsolatos az alábbi tétel:

16. tétel. *Legyen (a_n) szigorúan növekvő, szigorúan konvex pozitív számsorozat, és tegyük fel, hogy*

$$\overline{\lim}\, \frac{\Delta a_n}{\Delta a_{n+1}} < 1, \tag{37}$$

(ahol $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$). Ekkor a $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n}$ sor konvergens.

Bizonyítás. Ha $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n}$ divergens lenne, az 5. lemma (33) következménye alapján $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(a_{n+1}-a_n)}$ is divergens. Mivel (a_n) szigorúan konvex, úgy $(a_{n+1} - a_n)$ szigorúan növekvő, tehát a $\big(n(a_{n+1} - a_n)\big)$ sorozat is szigorúan növekvő lesz. Így alkalmazva a 6. lemmát $u_n = \frac{1}{n(a_{n+1}-a_n)}$ esetére, $\overline{\lim}\, \frac{n\Delta a_n}{(n+1)\Delta a_{n+1}} = 1$ adódik. Innen már $\overline{\lim}\, \frac{\Delta a_n}{\Delta a_{n+1}} = 1$, ami (37) alapján lehetetlen. ■

Az alábbi segédtétel [25]-ben található:

7. lemma. *Ha (x_n) pozitív, szigorúan növekvő számsorozat, és a $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{x_n^{\nu}}$ sor divergens valamilyen $\nu > 1$ esetén, akkor*

$$\underline{\lim}\, x_{n+1} - x_n = 0. \tag{38}$$

Ha a sor konvergens $0 < \nu \leq 1$ esetén, akkor

$$\overline{\lim}\, (x_{n+1} - x_n) = +\infty. \tag{39}$$

Bizonyítás. A teljesség kedvéért például megmutatjuk (38) bizonyítását. Mivel $(x_{n+1} - x_n) \geq 0$, úgy $\underline{\lim}\, (x_{n+1} - x_n) = \alpha \geq 0$. Ha $\alpha > 0$ lenne, akkor kapnánk olyan n_0 természetes számot, hogy $n \geq n_0$-ra $(x_{n+1} - x_n) \geq \alpha$. Innen $x_{n_0+1} \geq x_{n_0} + \alpha$, $x_{n_0+2} \geq x_{n_0} + 2\alpha$, …, $x_{n_0+k} \geq x_{n_0} + k\alpha$ $(k \geq 1)$, úgyhogy a $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{(x_{n_0+k})^{\nu}}$ sor konvergens lenne a $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{(x_{n_0}+k\alpha)^{\nu}}$ sorral való összehasonlítás alapján, hiszen $\nu > 1$-re az utóbbi sor a jól ismert $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^{\nu}}$ Riemann-sor alapján konvergens.

(39) bizonyítása hasonlóan történik. ■

Az alábbi lemma az első szerző egyik nem publikált, régebbi írásai közt található meg [27].

8. lemma. *Legyen* (x_n) *szigorúan növekvő számsorozat,* $a_n > 0$. *Tegyük fel, hogy* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n}$ *sor divergens, és hogy* $\underline{\lim}\, a_n(x_{n+1} - x_n) > 0$. *Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty. \tag{40}$$

Ha a $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n}$ *sor konvergens, és* $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n(x_{n+1} - x_n) < \infty$, *akkor*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n < \infty. \tag{41}$$

Bizonyítás. Ha $l = \underline{\lim}\, a_n(x_{n+1} - x_n) > 0$, akkor $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon$: ha $n \geq n_\varepsilon$, akkor $a_n(x_{n+1} - x_n) > l - \varepsilon$. Legyen $\varepsilon = \frac{l}{2}$.

Ekkor $n \geq n_\varepsilon = n_0$-ra $x_{n+1} - x_n > \frac{l}{2a_n}$, ahonnan $n = n_0, n_0 + 1, \ldots, n_0 + p$ alkalmazásával, összeadás után következik, hogy $x_{n_0+p+1} > \frac{l}{2}\Big(\frac{1}{a_{n_0}} + \ldots + \frac{1}{a_{n_0+p}}\Big)$. Ha $p \to \infty$, a sor divergenciájából következik, hogy $x_n \to \infty$, ha $n \to \infty$. Ezzel (40) bizonyítva van. (41) kimutatása hasonlóan történik. ■

Most legyen $x_n = a_n^{\frac{1}{\nu}} = a_n^\lambda$, hol $\lambda = \frac{1}{\nu} \in (0, 1)$. Ekkor a 7. lemma alapján a következő eredményt jelenthetjük ki.

17. tétel. *Legyen* $a_n > 0$, (a_n) *szigorúan növekvő számsorozat, és tegyük fel, hogy létezik* $\lambda \in (0, 1)$ *úgy, hogy*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \left(a_{n+1}^\lambda - a_n^\lambda\right) > 0. \tag{42}$$

Ekkor a $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n}$ *sor konvergens. Ha létezik* $\rho > 1$ *úgy, hogy*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(a_{n+1}^\rho - a_n^\rho\right) < \infty, \tag{43}$$

akkor a sor divergens.

Bizonyítás. Mivel $x_n^\lambda = a_n$, hol $\nu = \frac{1}{\lambda}$, ezért $\lambda \in (0, 1)$ estén $\nu > 1$. Így ha $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n}$ sor divergens lenne, a feltevés alapján a 7. lemmából (38) következne. Ez viszont ellentmond a (42) feltevésnek. A második rész bizonyítása hasonlóan történik. ■

18. tétel. *Legyen* (a_n) *pozitív számsorozat, és tegyük fel, hogy létezik egy szigorúan növekvő, felülről korlátos* (x_n) *számsorozat úgy, hogy*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n(x_{n+1} - x_n) > 0. \tag{44}$$

Ekkor a $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n}$ *sor konvergens.*

Ha létezne olyan (y_n) *szigorúan növekvő, felülről nem korlátos számsorozat, melyre*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n(x_{n+1} - x_n) < \infty, \tag{45}$$

akkor a $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n}$ *sor divergens.*

Bizonyítás. Hasonlóan történik a 8. lemma figyelembe vételével, mint a 17. tétel bizonyítása. ■

5. megjegyzések.

1. A 17. és 18. tételben adott kritériumok mások, mint a jól ismert Kummer-kritérium (lásd pl. [8]), amely szerint, ha létezik egy (p_n) pozitív számsorozat úgy, hogy $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{p_n}$ sor divergens, és

$$\underline{\lim} \left(p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} \right) > 0, \tag{46}$$

akkor $\sum_{n\geq 1} a_n$ konvergens $(a_n > 0)$; míg ha a (46)-ban ugyanazon kifejezés $\overline{\lim}$-ja negatív, akkor a sor divergens.
2. Nemrég J. Tong [28] azt a meglepő felfedezést tette, hogy az ilyen jellegű kritériumok szükséges és elégséges feltételt adnak a pozitív sorok konvergenciájára.

19. tétel (Tong)**.** *Legyen $a_n > 0$.*

(1) *$\sum_{n\geq 1} a_n$ pontosan akkor konvergens, ha létezik olyan (p_n) pozitív számsorozat és $c > 0$ valós szám, hogy $p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} \geq c$, bármely $n \geq 1$-re.*

(2) *$\sum_{n\geq 1} a_n$ pontosan akkor divergens, ha létezik olyan (p_n) pozitív számsorozat, hogy $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{p_n}$ divergens és $p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} \leq 0$, $n \geq 1$-re.*

Nyilván ezek a kritériumok csak elméleti szempontból jelentősek és nem adnak választ az Olivier, Burg vagy Montucla-féle speciális esetekre.

5. Függelék

1. Abelnek tulajdonítják az egyik híres mondást: „olvassátok a mestereket”. Ez az állítás ma már Abelre is nagyon érvényes. Az alábbiakban megmutatjuk Abel módszerét annak igazolására, hogy a $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n \log n}$ sor divergens. Ezt a legtöbb tankönyv másképp igazolja (pl. integrálkritériummal stb.). Pedig Abel módszere az igazi! (Erdős Pált parafrazálva, ez a bizonyítás „a könyvből van” [2]). Érdemes tehát továbbra is tanulmányozni Abel [1] dolgozatát (lásd még [30], [25]).

Abel a bizonyításban kétszer alkalmazza az $x > 0$-ra érvényes

$$\log(1+x) < x \tag{$*$}$$

egyenlőtlenséget. Legyen először $x = \frac{1}{n}$ a $(*)$-ban. Innen $\frac{1}{n} > \log(1+n) - \log n$, tehát $\log(n+1) < \log n + \frac{1}{n}$. Logaritmálva ezt az egyenlőtlenséget, $\log\log(n+1) < \log\left(\frac{n \log n + 1}{n}\right) = \log\left(\frac{n \log n + 1}{n \log n}\right) + \log\log n = \log\left(1 + \frac{1}{n \log n}\right) + \log\log n$.

Alkalmazzuk most másodszor a $(*)$ egyenlőtlenséget $x = \frac{1}{n \log n}$-re. Így a

$$\log\log(n+1) < \frac{1}{n \log n} + \log\log n$$

egyenlőtlenséget nyerjük. Összegezve ezeket $n = 2, 3, \ldots, m$-re, következik, hogy $\log\log(m+1) < \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k \log k} + \log\log 2$, és innen már a bizonyítás kész, hiszen $\log\log(m+1) \to \infty$, ha $m \to \infty$.

2. Miután Abel megcáfolta Olivier tételét (tehát, hogy a fordítottja nem igaz: arra adta azt a végtelen sort, az $\frac{1}{n \log n}$ átalános taggal), 1828-ban, Abel cikke után megjelent Olivier-nek egy egy oldalas jegyzete [22].

Ebben a jegyzetben elismeri, hogy Abelnek igaza van, és megjegyzi, hogy a végtelen mennyiségeket másképp kell kezelni, mint a végeseket. Javasol is egy másik tételt, a saját tételének fordítottjára. Mégpedig:

Ha (a_n) csökkenő sorozat, és $n(a_n + a_{2n} + a_{3n} + \ldots)$ tart a nullához, ha n tart a végtelenhez, akkor a sor konvergens. A bizonyítást Olivier nem adja meg, de az eredmény igaz!

Valóban, legyen R_n a végtelen sor maradéktagja: $R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = (a_{n+1} + \ldots + a_{2n}) + (a_{2n+1} + \ldots + a_{3n}) + \ldots \leq na_{2n} + na_{3n} + \ldots$, mivel a sorozat monoton csökkenő. Így a feltevés alapján R_n tart a nullához, ha n tart a végtelenhez. Ez pedig azt jelenti, hogy a végtelen sor konvergens.

3. Az alábbi irat Bolyai János kéziratai között van, de e sorok íróinak véleménye szerint ez Bolyai Farkas kézírása és így át kellene tenni Bolyai Farkas kéziratai közé! (Az iratnak nincs közvetlen köze Bolyai Jánoshoz, annál több Bolyai Farkashoz és Szász Károlyhoz!)

BJ-299/1v

„Sz. K. állítása, ha $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ egymás utáni ízek közösen, s, $b - a \to \infty$, a sor közelítő, különben távozó.

Okadat ez, a Karli írásában: Mert, ha $b = a + q$, $\frac{a}{b} = \frac{1}{1+\frac{q}{a}}$, s az állíttatik, hogy $\frac{q}{a} \to 1$, tehát $\frac{a}{b} \to \frac{1}{2}$; az – az a sor jel $\frac{1}{b} : \frac{1}{a} = \frac{a}{b} \to \frac{1}{2}$; mely nem igaz, mikor a sor jel $x \to 1$; például $\frac{1}{2}, \frac{1}{2.3}, \frac{1}{3.4}, \ldots$ban $x = \frac{n}{n+2} \to 1$; s $\frac{a}{b}$ éppen $\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2}$; s így $\frac{1}{b} = \frac{1.x}{a}$, s $\frac{a}{b} = \frac{a.x}{a} = x \to 1$.

NB. Az írt sorközelítés jel idettisek azzal a mit H. L, a Burg Mathesiéből ír.”

A kézirat másik oldalán ez áll, valószínűleg Szász Károly írása:

„Írd meg Bolyainak, hogy a mely demonstratiot hibásnak talált igen is az, de nem az enyém, hanem a tanítványomé. Szóbeli előadás rosszul érte, ebből eredet deductiója, mert azon tárgyalásra én nem adtam volt írást. A magam demonstratióját elküldöm alkalom szerint. A pesti jutalomnak tárgyáról nem tudok semmit.”

Irodalom

[1] N. H. Abel, Note sur un mémoire de M. Olivier, *J. reine angew. Math.,* Crelle, **3** (1828), 79-82; lásd Collected works (Christiania, 1881), vol I, 399–402, Ed. by L. Sylow and S. Lie.

[2] A. Aigner and G. M. Ziegler, *Proof from THE BOOK,* Springer Verlag 1998.

[3] D. Andrica, A reciprocal of Cesàro–Stolz theorem and applications (románul), *Rev. Mat. Timisoara,* **9** (1978), No. 2, 6–13.

[4] Balázs Márton és Kolumbán József, *Matematikai analízis,* Dacia Kiadó (1978).

[5] D. M. Bătineţu-Giurgiu and A. Semenescu, Lalescu's problem and the reciprocal of Cesàro–Stolz theorem (románul), *Lucr. Sem Didactica Mat.,* **15** (1999), 3–8.

[6] Bolyai Farkas, Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae. . . , *Timus I-II,* Marosvásárhely (1832–1833).

[7] Bolyai Farkas, *A Marosvásárhelyt 1829-ben nyomtatott Arithmetica elejének részint rövidített, részint bővített kiadása,* Marosvásárhely (1843).

[8] T. J. I'A. Bromwich, *An introduction to the theory of infinite series,* AMS Chelsea, Third ed. (1991).

[9] A. Burg, Allgemaine Regel zur Prüfung der Convergenz und Divergenz unendlicher Reihen, *Jahrbuch des Polytechn. Inst.* XVII, Wien (1832).

[10] A-L. Cauchy, Note sur les séries convergentes dont les divers termes sont des fonctions continnes d'nne variable réelle on imaginaire, entre des limites donnés, *Comptes Rendus,* **36** (1853), p. 454 (lásd még Oeuvres complétes d'Augustin Cauchy, vol. 12 of 1st series, pp. 30–36).

[11] E. Cesàro, *Analisi Algebrica,* Fratelli Bocca Editori, Torino (1894).

[12] A. Ettinshausen, *Vorlesung über die höhere Mathematik,* Wien (1827).

[13] H. Fast, Sur la convergence statistique, *Coll. Math.,* **2** (1951), 241–244.

[14] L. Floridi, *Mathematical scepticism: a sketch with historian foreground in: The skeptical tradition around 1800,* ed. by John van der Zande and Richard Popkin, Dordrecht, Kluver (1998), pp. 41–60

[15] M. Goar, Olivier and Abel on series convergence: an episode from early 19th century analysis, *Math. Mag.,* **72** (1999), No. 5, 347–355.

[16] Kiss Elemér, *Matematikai kincsek Bolyai János kéziratos hagyatékából,* 2. bővített kiadás, Typotex, Budapest (2005).

[17] K. Knopp, *Theorie und Anwendung der unedlichen Reihen,* Berlin–Heidelberg (1947), 125–126.

[18] K. Knopp, *Infinite sequences and series,* Dover Rubl. Inc., New York (1956).

[19] J. E. Montucla, *Histoire de Mathématiques*, I–IV, 1799–1802, Paris, Reprinted: Paris, Sci Teh. A. Blanchard (1968).

[20] A. de Morgan, *The differential and integral calculus,* London (1836–1842).

[21] L. Olivier, Remarques sur les séries infinies et leur convergence, *Crelle Journal,* **2** (1827), 31–44.

[22] L. Olivier, Remarque de Mr. L. Olivier, *Crelle Journal,* **3** (1828), pp. 82.

[23] J. L. Raabe, Note zur Theorie der Convergenz und Divergenz der Reihen, *Journal f.d. reine u. angen,* Math. **11** (1834), 309.

[24] T. Šalát and V. Toma, A classical Olivier's theorem and statistical convergence, *Annales math. Blaise Pascal,* **10** (2003), no. 2, 305–313.

[25] Sándor József, On sequences, series, and applications in prime number theory (románul), *Gaz. Mat. Perf. Met.Mat. Inf.* VI., **1–2** (1985), 38–48.

[26] Sándor József, Niels Henrik Abel, and mathematical notions due to him, or connected with his work, *Octogon Math. Mag.,* **12** (2004), no. 2A, 310–312.

[27] Sándor József, On Olivier's criterion, lásd: Selected Chapters of Geometry, *Analysis and Number theory, RGMIA Monographs in Mathematics,* Victoria Univ., Australia (2005).

[28] Sándor József, *Jegyzetek a sorok konvergenciájáról és divergenciájáról,* nem publikált kézirat (1980).

[29] G. Sarton, Montucla (1725–1799) *His life and notes,* Osiris, **1** (1936), 519–567.

[30] H. K. Sørensen, Lous Olivier, A mathematician only known through his publications in Crellé's Journal during the 1820s, *Centaurus,* **48(3)** (2006), 201–231.

[31] K. K. Sørensen, *Early 19th century rigor in analysis. The theory of infinite series as seen by N. H. Abel,* Palermo (May 24, 2000)
(lásd `www.henrikkragh.dk/palermo2k/lecture1.pdf`).

[32] R. Spiger, Cesàro's theorem for complex sequences, *J. Math. Anal. Appl.,* **180** (1993), No. 2, 317–324.

[33] N. M. Swerdlon, Montucla's legacy: The history of the exact sciences, *Journal of the history of ideas,* **54** (1993), No. 2, 299–328.

[34] Szénássy Barna, *Bolyai Farkas,* Akadémiai Kiadó, Budapest (1975).

[35] J. Tong, Kummer's test gives characterizations for convergence or divergence of all positive series, *Amer. Math Monthly,* **101** (1994), no. 4, 450–452.

[36] N. Vornicescu, A reciprocal of Stolz's theorem (románul) *Lucr. Semn. Did. Math.,* **12** (1996), 251–254.

[37] Weszely Tibor, *Bolyai Farkas,* Tudományos könyvkiadó, Bukarest (1974).

József Sándor, Róbert Gál-Oláh: On Farkas Bolyai's theorems on infinite series, and related developments

The aim of this paper is twofold. First, one gives an overview of Farkas Bolyai's results in the theory of infinite series, by examining his theorems historically, as well as from the mathematical points of view. On the other hand, there are considered new connections and results related to the little known criteria by Szász, Olivier, Burg, or Montucla. Some theorems, showing the present state of the art, are included, too.

Sándor József
BBTE, Kolozsvár
Románia

Oláh-Gál Róbert
BBTE, Csíkszereda
Románia

BOLYAI FARKAS KÉZIRATA A KOCKAKETTŐZÉS PROBLÉMÁJÁRÓL

SZABÓ PÉTER GÁBOR, OLÁH-GÁL RÓBERT

A budapesti Akadémiai Könyvtár Kézirattárának Bolyai-gyűjteménye több olyan levelet és levéltöredéket is őriz, amelyeket a két matematikus Bolyai, apa és fia, egykoron egymás számára írtak [1]. Bolyai Farkasnak *„A' Cubus dupplicatioja régen híres volt"* kezdetű (K 22/128 jelzetszámú) kézirata 1914-ben Szabó Péter (1867–1914) matematikatanár hagyatékából került a gyűjteménybe. E négyoldalas tanulmány a híres ókori görög szerkesztési problémával, a kockakettőzéssel foglalkozik.

A kockakettőzés problémája egy élével megadott kocka ismeretében egy olyan kocka élhosszúságának euklideszi értelemben vett megszerkesztését kívánja, melynek térfogata kétszerese lesz az eredeti kocka térfogatának. Az euklideszi szerkesztés csak körző és egyélű egyenes vonalzó használatát engedi meg. A körzőt adott középpontú, s két adott pont távolságával azonos sugarú kör megrajzolására, a vonalzót két adott ponton áthaladó egyenes szakasz meghúzására használhatjuk. Már az ókorban ismert volt több olyan ún. nemeuklideszi szerkesztési eljárás, amely a körző és vonalzó mellett más további eszközt (pl. síkban megrajzolt kúpszeleteket) is felhasznált a konstrukcióban. Ismert a problémának körzőt nem használó csak ún. betoló vonalzó segítségével való nemeuklideszi értelemben vett megoldása is. Fontos azonban hangsúlyozni, hogy ezek a szerkesztések az eredeti euklideszi értelmében nem megoldásai a feladatnak, hiszen nem csak a megengedett eszközöket használják. Több mint két évszázada tudjuk, hogy euklideszi szerkesztéssel a kockakettőzés problémája megoldhatatlan az euklideszi geometriában.

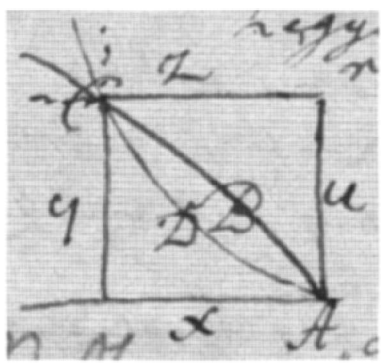
Valószínű, hogy a Bécsben tanuló Bolyai János levélbeli felvilágosítást kérhetett apjától a kockakettőzés matematikatörténeti hátteréről, illetve általában a három ógörög szerkesztési feladatról (a kockakettőzésről, a szögharmadolásról és a körnégyszögesítésről). Bolyai Farkas az alábbi levelet küldhette el fiának Bécsbe. Ezt abból gondoljuk, hogy Bolyai János maga is gót betűkkel papírra vetette ezzel a problémakörrel kapcsolatos gondolatait [3, 4], és főleg kadettsége alatt írt gót betűs német írással; később nyugdíjazása után áttért a latin betűre, még a német nyelvű feljegyzéseiben is.

Bolyai János diákkori szögharmadolási vizsgálatát már Paul Stäckel ismertette [5], de kockakettőzési jegyzetére csak a közelmúltban derült fény [3]. Szerves folytatása az, mondhatni szeminarizálása a jól megértett, most bemutatandó Bolyai Farkas előadásnak. A jelen dolgozatban Bolyai Farkasnak, ezt az eddig korábban nem publikált írását értelmezzük és tesszük betűhíven közzé. A levélben szereplő ábrákat az eredeti formájukban hagytuk. A szöveg könnyebb olvashatósága kedvéért az idegen vagy ma már nem használt kifejezések magyar megfelelőit több helyen lábjegyzetben hozzuk.

Az autográf irat kibetűzött formában:

„§ 1. A' Cubus dupplicatioja[1] régen hires volt; *Problema Deliacumnak*[2] hivták; Egy pestis alkalmatosságával azt felelte az Oraculum, hogy meg nem szűnik, míg az Delius[3] Apollo Oltárát (mely Cubus volt) meg nem kettöztetik. Tőrték fejéket, Plato 's mások; 's észre is vették, hogy arra két media proportionalis[4] kell 1 és 2 közt; mert ha az elsőnek oldala =1, a' két akkoráé $\sqrt[3]{2}$, mely ha $= z$, tehát $1 : z = z : z^2 = z^2 : (z^3 = 2)$. Találtak is külömböző instrumentumokat[5] ennek végbe vitelére. Ha tetszik a Pacqult Euclidesibe megnézheted. Azután két parabola által vitték véghez az itt legelébb leirando modon; 's más akármely két Conica Sectioval[6] is, 's más modon is tsak egy Curvával[7] is.

Legyen ABC parabolának x az abscissája, y az ordinatája, p a' parametere; ADC parabolának u az abscissája, z az ordinatája, q a' parametere; Tehát $y^2 = px$; $z^2 = qu$ és minthogy $z = x$, $u = y$; tehát $x^2 = qy$. Tehát $p : y = y : x$; és $y : x = x : q$. Tehát ha $p = 1$, 's $q = n$; lessz $1 : y = y : y^2 = y^2 : (y^3 = n)$. És igy $y = \sqrt[3]{(q = n)}$. Tehát az y oldalu cubus $n$szer akkora, mint az $(p = 1)$ oldalu. [1. ábra].



1. ábra

NB. Olvasast érdemelnek az it ki-huzottak is.[8]

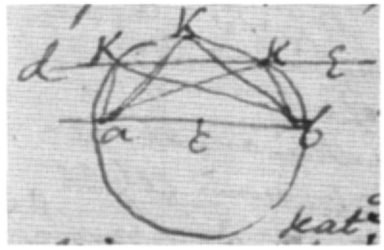
[1] a kocka kettőzése
[2] déloszi problémának
[3] Délosz (mai nevén Dílosz) görög sziget
[4] középarányos
[5] eszközöket
[6] kúpszelettel
[7] görbével
[8] A kézírás alapján későbbi bejegyzésnek tűnik ez a mondat.

Jegyzés. Tulajdonképpen geometrie construálni valamit, azt teszi, megszámlálhato[9] ollyan munkákkal vinni véghez, mellyek közzül mindenik vagy az rectát vonni[10], vagy az circulust irni[11]. Tehát magát a' parabolát se lehet igy, mert oda megszámlálhatatlan[12] ollyan munkák kellenének, tsak egy darab minden pontjainak megadására; nem is lehet a' rectán 's circuluson kivül többet irni geometrie, sem radix cubicát[13] kivonni, quadrátát[14] perse lehet a' media proportionalis által, sőt a' mit nem lehet is arithmetice, 2*ből* is ki lehet vonni, a' hypothenusa[15], melynek cathetussai[16] egyenlők, az. A' praxisra[17] a' calculus accurátabb[18] a' Constructionál; a' theoriába szép. A' régiek sokkal hátrább is lévén az Analysisbe construálni probálták az aequatiokat[19]. Sokat bajlodtak a' trisectio angulival[20] is; de az is cubica aequatiora[21] vezet, a' mint alább meg-irom; tehát proprie geometrice nem construálható; hanem meglehet *algebraica* vagy ugy nevezett *geometrica* curvákkal, a' mellyeknek algebraica az aequatiojak, meglehet transcendensekkel is.

A' régiek a' rectát 's circulust, nevezték *loca plananak* a' conica sectiokat *loca solida,* a' többit *loca linearia.* A' *loca solida* név onnan van, hogy a' Conus Sectiojából hozták ki a Conica sectiokat. *Locus geometricusnak* azt a' lineát vagy superficiest[22] hivják, melybe egy indefinita aequationak[23] minden valorai[24] végzödnek (egy bizonyos határtol véve). Illyen a' parabola $y^2 = px$*nek.* Ilyen a' circulus mind azon $\Delta\Delta ok$[25] apexeinek[26], mellyeknek basissok[27] ab, szembe levö szegletek[28] $= k$; illyen a'parallela $d\epsilon$ az azon egy basison állo egyenlő $\Delta\Delta$*oknak;* a' két locus geometricus egybe találkozik, a' hol a' circulus és recta vágják[29] egymást. [2. ábra]

§ 2. *Des Cartes* volt a' legelső a' ki a' Curvákra applicálta[30] az aequatiokat, és szárnyakat adott a' felsőbb Mathesis mezejére. Ugyanő tanította a' felsőbb aequatiok*nak* generaliter constructiojat következő modon: mely szerint rectákkal

[9] itt: véges sok
[10] egyenest húzni
[11] kört rajzolni
[12] itt: végtelen sok
[13] köbgyököt
[14] négyzetgyököt
[15] átfogó (Erős a gyanú, hogy az „átfogó" kifejezésnek Bolyai Farkas volt az elterjesztője, és talán a megalkotója is. Lásd [2, 392–395. old.])
[16] befogói
[17] gyakorlatra
[18] pontosabb
[19] egyenleteket
[20] szögharmadolással
[21] harmadfokú egyenletre
[22] felületet
[23] határozatlan egyenletnek
[24] értékei, gyökei
[25] triangulumok (háromszögek)
[26] csúcsainak
[27] alapjuk
[28] szögek
[29] metszik
[30] alkalmazta

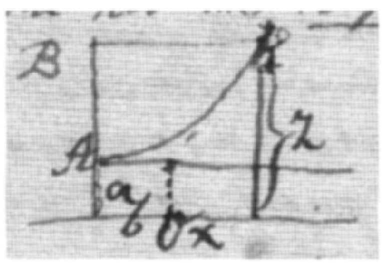


2. ábra

meg adodnak mind a' realis radixok[31]; vagy az abscissákkal, vagy az ordinatakkal, a' mit a' dolog rendeltetik. Két fő mod van.

§ 3. Vagy egy Curvával 's az Abscissák linéájával estek tsak, vagy két Curvával.

I. A' mi az elsőt illeti: Vannak valami linéák, mellyeket neveznek *lineae generis parabolice;* a' Definitiojak az: A' mely linéának aequatioja $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots + \sigma x^n$ azt nevezik *n gradusu parabolának.* A' közönséges $2dik$ gradusu; mert legyen AKB az AB az axis[32], A az Abscissák feje, parametere p; tehát $BK^2 = pAB$. Legyen már O az abscissák feje, s' z az ordinata; lessz $(b+x)^2 = pz + a$; tehát $z = \frac{-a+b^2+2bx+x^2}{p}$; mely világos hogy a' felső forma alá illik; mert $\alpha = \frac{-a+b^2}{p}$; $\beta = \frac{2b}{p}$; $\gamma = \frac{1}{p}$; Ha a' figurába $b = 0nak$ tétetik, 's a is $= 0$, tehát A és O eggyüvé esnek, akkor $z = \frac{x^2}{p}$; $\alpha = 0$; $\beta = 0$; $\gamma = \frac{1}{p}$, 's ha $p = 1$, tétetik, $\gamma = 1$. [3. ábra]

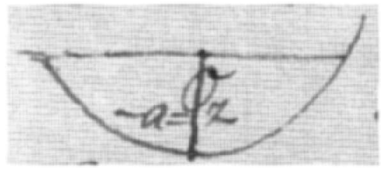


3. ábra

Vétessék már ugy is, hogy tsak b legyen $= 0$, a pedig nem; tehát lessz $z = -a + x^2$; tehát az O pontnak, a' hol $x = 0$, megfelelő z lessz $= -a$; világos az is, hogy x^2 addig nő, míg $-aval$ zerot tsinál, azt vágja a' curva az Abscissarum lineát. [4. ábra]

Ezen parabola nemü linéáknak sok köz tulajdonságok van. Mennek két ággal in ∞, sehol vissza nem térve. A' recta is az, ha $\beta án$ kivül minden coefficiens[33] zérus, a' recta az első gradusu parabola. Hajlásaiknak leg-nagyobb száma $n-1$ az n gradusunak; nem azt teszi hogy annyi van, hanem, hogy legfeljebb annyi. A köz

[31] valós gyökök
[32] tengely
[33] együttható



4. ábra

parabolának $2-1$ hajlása van, a rectának $1-1$; minden abscissának akár positiv akár negativ felel meg realis ordinata egy, és az nő in ∞, minden ordinatának n számu abscissa felel meg, a mellyek közzül lehetnek imaginariák is. Kepler elmésen caracterizálja a köz parabolát 's hyperbolát. *Parabola brachia non ut hyperbola expandit, sed contrahit ab* ∞*to, completu, semper plus quidem complectens, at semper numius appetens; cum hyperbola, quo plus actu inter brachia complectitur, hoc plus etiam appetat*[34]. Jegyezd meg azt is, hogy parabola minden gradusu (vagy ordoju) van, de perse hogy nem minden linea aequatioját lehet a felső formára huzni. Ha érkezem teszek a' végin a linéák ordóival egy kis jegyzést. Most a' tzélomhoz vissza térek.

§ 4. Ha egy n gradusu aequatiot kell resolválni, mely legyen $x^n + Ax^{n-1} \ldots + Jx^1 + Kx^0 = 0$, construálni kell egy ollyan parabolát, melynek aequatioja $y = \alpha x^0 + \beta x + \gamma x^2 \ldots + \rho x^{n-1} + \sigma x^n$'s minthogy α, β, γ... ollyanok a' mellyeket szabadon lehet venni, eggyeztetni kell a' két aequatiot, 's fel-téve $\sigma = 1$, $A = \rho$;... $J = \beta$, $K = \alpha$, ki-kell keresni mekkoráknak kell venni a' görög coefficienseket, hogy éppen a fel-adott aequatio fejezödjék ki. Akkor $yt = 0$ kell tenni; Az irt linea az Abscissarum linéát, a' hány realis valora van az aequationak, annyiszor vágja, 's azon vágás pontjaiig vett abscissák az aequatioba x helyibe téve, yt nullá teszik; tehát azon xek (a' mint lesznek az abscissák fejétől két felé positiv vagy negativ) rádixai az aequationak. A' mely radix tsak imaginaria vagy impossibilis, az tsak algebrai valor, tehát annak nem felel meg által-vágás pontja.

Így hát lehet a cubica parabolával is $n$suplicalni a' Cubust. Aequatioja annak ez; $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$. Tsak ezt kell megfejteni $x^3 - n = 0$ (a' mint feljebb megmondatott) tehát ezt a' lineat kell construálni $y = -n + x^3$; a 'hol $\alpha = -n$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 1$, három radixa van ezen aequationak $0 = x^3 - n$, de tsak egy realis radix cubicája van *nnek;* x pedig $= \sqrt[3]{n}$; ez a' radix meg-adodik az egy által vágás pontjával, az abscissák fejétől addig vett ab abscissával; és ez lessz az n akkor a cubus oldala.

Jegyzés. A' parabola nemű lineának construálni perse akár hány pontját lehet, mert geometrice multiplicálni[35], következésképpen egész potentiákra[36] emelni is,

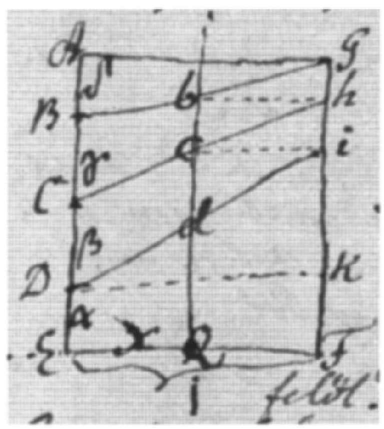
[34] A parabola a karjait nem úgy tárja szét, mint a hiperbola, hanem összehúzza a teljes végtelenségből. Igaz ugyan, hogy egyre többet ölel át, de egyre kevésbé tárul szét. A hiperbola azonban, minél több van ténylegesen a karjai között, egyre inkább széttárul. (Könyves Tóth Kálmán fordítása).

[35] szorozni

[36] hatványokra

dividálni[37] is lehet, tsak radixot nem lehet vonni quadratan feljül. Multiplicálni 's dividálni quarta proportionalis keresése által lehet; a' multiplicatioba az egész egy dolog lefolyása alatt azon egy Unitas[38] áll elől, a' divisioba a' divisor áll elől, az Unitas második helyt. De könnyebb modon tsinálni igy tanitatik.

Légyen E az Abscissák [...] légyen EF (mind a kétfelé continuálva)[39] 's unitásnak vétetve; 's ahoz képpest tétessenek fel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ...egymás után; az a pont ahol a' hol a' legfelsőbb (irt A) végzödik, neveztessék *Anak,* az also vége, mely felső a' következő *gra* nézve, legyen β 's ugy tovább. Ha már meg kell kapni a Q pontrol emelt perpendicularisnak mint ordinatának nagyságát; vonattassék AG parallela EFhez, szintugy bh, ci; meghatároztatnak b, c pontok. GB, hC recták által; 's *iből Dhez* vont recta megadja d pontot az ordinata véginek. Így lehet megkapni az ordinata végét, *xnek* vége akárhol vétessék *Etől* akár jobb akár bal felől. [5. ábra] Ezt így lehet megmutatni. Ha jó ez a mod az n gradusu parabolára, jó az $n+1$ gradusura is. Már meg-kell mutatni a *Minort* is, s a *Majort* is. Az első gradusura ugymint a' rectára, 's a' második gradusura könnyű megmutatni.

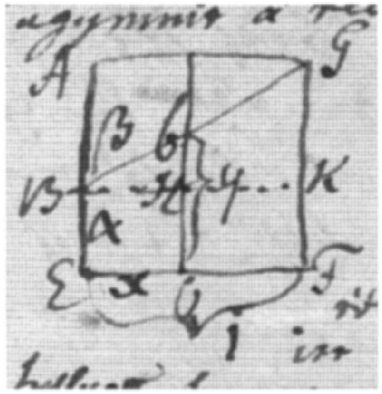


5. ábra

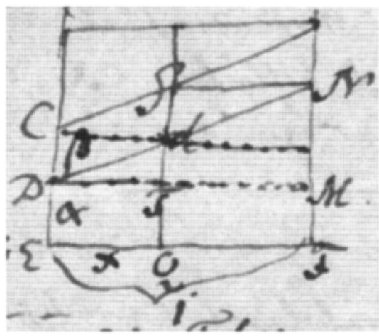
$BK = 1$, $KG = \beta$, $BH = x$; Továbbá $BK : KG = BH : Hb$; tehát $bH = \beta x$; és így $y = \alpha + \beta x = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots$ az az illik ezen forma alá, ha a' több coefficiens $= 0$. [6. ábra] Meg lehet a' $2dik$ gradusra is könnyen mutatni. De már a' majorra mutatom meg.

Legyen S egy az irt modon talált pont, melyről igaz, hogy $SQ = a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots$ tehát mivel itt a' *Cből EFhez* vont parallelák ahol $(\alpha + \beta) = CE$ áll az a helyett, ha azon feljül következve vannak téve egymás után $\gamma, \delta, \ldots$; tehát ha igaz a' törvény *SQrol,* úgy $SQ = (\alpha + \beta) + \gamma x + \delta x^2 + \ldots$. De dT [...] proportionalis $(DM = 1)hez$ $(MN = ST = SQ - \alpha)$; és *xhez;* tehát $1 : x = \beta + \gamma x + \delta x^2 : \beta x + \gamma x^2 \ldots + \delta x^3 \ldots$; És így $(dT + FQ = dQ) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots$. Tehát *Sről* helyes a' constructio a' $*$ pontra. [7. ábra.]

[37] osztani
[38] egység
[39] meghosszabítva



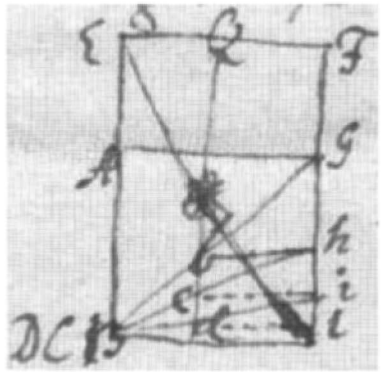
6. ábra



7. ábra

De meg kell jegyezni, hogy ha valamelyik a' Coefficiensek közzül $= 0$; legyen felteszen $y = -n + x^3 = -n + 0x + 0x^2 + 1x^3$; ekkor $x = -n$; ezt le-felé kell venni; legyen $= ED$; $\beta = 0$, $\gamma = 0$ de maradjanak ott a' betük, ugy hogy $DC = \beta$ és $CB = \gamma$ mint-egy folyjanak egy pontba; azután következik $A = 1 = EF$, azt B *ből* *Aig* mint posiociot felfelé kell transferálni; s a' betük megtartva, éppen ugy kell meg-kapni az c pontot a' hol a' $*$ van, 's a Q lesz az ordináta… [8. ábra]

§ 5. II. Már menyek a' másik modra, hogy kellessék két Curvával meg-fejteni a' felsőbb egyenletet. Mikor két linea egymást vágja, vagy éppen azon egy az ordinátáját, vagy legalább a' tetejek eggyütt végződik. Legyen azon esetre eggyiké y, a' másiké z, és z functioja *ynak;* 's y is z is functioja *xnek;* tehát $z = \phi(y)$, $y = f(x)$, $z = F(x)$; Az elsőből 's utolsóból y megint egy bizonyos functioja *xnek,* legyen $\psi(x)$; tehát $f(x) = \psi x$; Ezen aequatio, melybe már nints az eliminált y, ordináltatva, a' hányadik gradusu lessz, annyi algebraicus válora van benne az *xnek,* mellyek lehetnek imposibilisek is, a realis válorokat pedig (a' mint positivok vagy negativok 's a' mekkorák) mind kimutatják az abscissák azoknak fejétől véve azon pontokig, mellyekről emelt ordinaták, azon Curváknak egymást vágása pontjaiba végzödnek. Minthogy, ha y functioja *xnek,* x is az *ynak,* tehát ha x elimináltatik a'



8. ábra

két indefinita aequatiobol, hogy definita legyen, akkor a' vágás pontjairol botsátott ordináták a' radixok; a' mint a' következő példa mutatja.

Itt is perse (mint feljebb) a' fel-adott megfejtendő egyenletet eggyeztetni kell; az-az minekutánna mind az mind az írt $f(x) = \psi(x)$, ordináltattak, a' Coefficienseket egyenlőitvén, ki-kell keresni az $f(x) = \psi(x) be$ lévő csuszásokat, hogy azon Curvák, a' tzélra construáltassanak; melyhez ritka szemesség s egybe nézés kell. Továbbá ollyan két linea kell, a' mellyek vághassák egymást annyi pontba, a' hány gradusu a' meg-fejtendő egyenlet; biquadraticára elég a' parabola s circulus, a' mint mindjárt le-irom. Egy m ordoju linea nem vághatja több pontba az n ordojut *mnszernél.* Neveztetik pedig m ordojunak egy linea, ha az aequatiojának egy terminussába sem menyen többre; mnél sem az *ynak* sem az *xnek* exponense, sem az x és y exponenseiknek summája, de valamellyikbe menyen $m$re. Az $2di$ ordinis linéának generalis aequatioja az $y = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy + \kappa x^2 + \lambda y^2$. Nints több a' Conica Sectioknal, a' Circulust is oda értve; van demonstrálva Kästnerbe is.

Jegyezd meg ezt a' sort I.) a; II.) bx,cy; III.) dx^2, exy, fy^2; IV.) gx^3, hx^2y, iy^2x, ky^3; s így tovább. Az első rangú linea (mely a' recta) tart az equatiojába a' II*ből* valamely terminusa a' második rangu a III*dikból* szükség, hogy tartsa valamely terminust; a' $3dik$ rangu a' IV*ből* s ugy tovább, de egyik sem tarthat egy terminust is a következőkből.(∗)[40]

Meg nézheted annak is demonstratioját, vagy ha kivánod, le irom; de meg értheted: miért nevezik azon lineat $m + n$ ordojunak, melynek aequatiojába $x^m y^n$ van. A fő idea ez. Akármely algebraica curvára nézve, ha változik az abscissák lineája, feje, 's az ordináták szeglete (maga a' curva ott maradván) nem bajos az aequatioját meg találni, mivé változik. S meg-tetszik, hogy akkor az elébbi x hellyibe $a + x$ vagy y hellyibe $b + y$ jő, vagy x hellyibe cx, y hellyibe $y + gx$, x hellyibe $x + \frac{h}{k}y$; y hellyibe $sy - \frac{pt}{q}y$; És így látszik, hogy a' substitutioba az x és y exponensei megmaradnak; de megeshetik, hogy fel-teszem x hellyibe jővén

[40](∗)„Olvasd meg Segner, Cursus Mathematic Pars Secunda pag. 432 [...]" (Bolyai Farkas lábjegyzete a kéziraton.) E kötet szerzője Segner János András (1704–1777) magyarországi származású matematikus, fizikus és orvos.

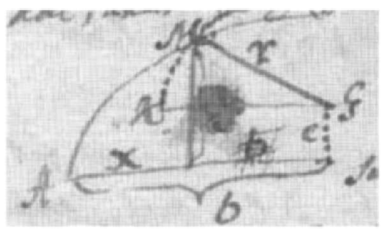
$x+\frac{h}{k}y$, tehát x^2 hellyibe lessz $x^2+\frac{h^2}{k^2}y^2+\frac{2h}{k}xy$; így lehet $x^m re$ könnyen érteni (**)[41] . De megint a' tzélra térek.

§ 6. Parabolával 's circulussal construálni a' biquadratica aequatiot, s a' Cubicát is így lehet akár az ordinátákkal, akár az abscissákkal adván meg a' radixiokat.

Vágja AM parabolát KM circulus, melynek centruma G; a' parabola ordinátája y, a' circulusa $y-c$; a' parabolába $y^2=px$, a' circulusba $(y-c)^2=r^2-(b-x)^2$; a' parabola abscissája x, a' circulusé $b-x$, a' parabolábol $x=\frac{y^2}{p}$; mellyet substinálva a' circulus aequatioba x eliminálódik, 's lessz ha ordinálodik.

$$y^4+\left.\begin{array}{l} p^2 \\ -2pb \\ \end{array}\right\} y^2-2p^2cy+\left.p^2\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \begin{array}{l} b^2 \\ +c^2=0 \\ -r^2 \end{array}$$

Legyen a' biquadratica aequatio mellyet meg kell fejteni $z^4+Bz^2+Cz+D=0$; Tsak a' coefficienseket kell eggyeztetni, fel-téve $B=p^2-2pb$, $C=2p^2c$; $D=p^2(b^2+c^2-r^2)$; 's ha ki-jönnek p, b, c, r, az által meg-adódik a' circulus centruma, ra diussa, 's a' hány valoságos radixa lessz az aequationak, annyi helyt vágja a' parabola a' circulust, 's az ordinaták meg-adják a' radixokat. [9. ábra]



9. ábra

A' mi a' Cubicát illeti. Legyen $r^2=b^2+c^2$; akkor a' circulus vágja a' parabolát A vertexbe; tehát $y=0$, és ez radixa az aequationak, mert akkor az utolsó tag $=0$, s a' többi is mind 0; tehát $y-0=0$ az egyik factor melyből áll az aequatio; következésképpen lesz

$$y^3+\left.\begin{array}{l} a^2 \\ \\ -2ab \end{array}\right\} y-2a^2c=0;$$

Ezt egyeztetni kell egy ollyan cubica aequatioval, melynek a második tagja elenyésztetett. Tétessék $p^2-2pb=B$; $-2p^2c=C$; s határoztassanak meg p, b, C; de két aequatio van, 's három ismeretlen; tehát eggyiket fel kell venni; vétessék p azért, hogy osztán egy parabola más cubica aequationak meg-fejtésére is szolgál. Vétethetik p unitásnak is; Tehát $b=\frac{h}{2}-\frac{B}{2}$; $c=-\frac{C}{2}$. Tehát meg-adódik a' circulus centruma, s onnan a vertexig lesz a radix. Olvasd még Kästnert, Analysis der endlichen grossen III. Auflage, pag. 342."

[41] „ugyan ott tovabb" (Bolyai Farkas lábjegyzete a kéziraton)

Régóta ismert az a feljegyzés Bolyai János kéziratos hagyatékából, amelyen Bolyai az egyenlő oldalú hiperbola segítségével osztott fel három egyenlő részre egy szöget [5]. Szintén jól ismert, hogy Bolyai János az Appendixben – ahogy az a mű eredeti címében is szerepel – az ún. S-rendszerben (a Bolyai-Lobacsevszkij-féle geometriában) megmutatja, hogy lehetséges a kör geometriai négyszögesítése. A közelmúltban feldolgozott Bolyai-kéziratok arról tesznek tanúságot, hogy mind Bolyai János (l. BJ 1114/2, 2v) [3, 4], mind Bolyai Farkas behatóan tanulmányozta a kockakettőzés feladatát is, vagyis a Bolyaiak mindhárom híres görög szerkesztési problémával eredményesen foglalkoztak.

Irodalom

[1] Fráter Jánosné, *A Bolyai-gyűjtemény (K 22-K 30),* A Magyar Tudományos Akadémia Könyvtára Kézirattárának Katalógusai, Budapest (1968).

[2] *Bolyai Farkasnak az 1834-es Mathematikai Műszótárban szereplő szakkifejezései* (közli: Gazda István). In. Egy halhatatlan erdélyi tudós, Bolyai Farkas (összeállította: Gazda István), Akadémiai Kiadó, Budapest (2002).

[3] Róbert Oláh-Gál and Alexandru Horváth, *Deep geometrical thoughts from some – until now not published manuscripts of János Bolyai,* Proceedings of the 3rd Conference on the History of Mathematics and Teaching of Mathematics, University of Miskolc, 21-23 May, 2004, pp. 65–75.

[4] Róbert Oláh-Gál, Die aus der Studienzeit stammenden Aufzeichnungen des Johann Bolyai über die Würfelverdoppelung, *Teaching Mathematics and Computer Science,* **4/2** (2006), pp. 307–316.

[5] Stäckel, Paul, *Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai.* A Magyar Tudományos Akadémia támogatásával kiadta, életrajzzal és magyarázattal ellátta Stäckel Pál. Magyarra fordította Rados Ignácz. 1–2. köt. Budapest (1914). Magyar Tudományos Akadémia. 1. köt.: A két Bolyai élete és művei. pp. 235–236.

Péter Gábor Szabó, Róbert Oláh-Gál: Farkas Bolyai's manuscript on the cube duplication

In this paper Farkas Bolyai's manuscript on a famous Greek problem of antiquity is published. This problem is the duplication of the cube. Farkas Bolyai's work is a part of a letter to his son János, who studied in Vienna. Farkas is shortly summarized the history of the problem and described some approaches based on conic sections and curves. The text is interesting along with mathematical subject in linguistic point of view too.

The original manuscript is in the Bolyai's Collection of the Library of the Hungarian Academy of Sciences in Budapest.

Szabó Péter Gábor

Szegedi Tudományegyetem
Alkalmazott Informatika Tanszék
6720 Szeged
Árpád tér 2.

pszabo@inf.u-szeged.hu

Oláh-Gál Róbert

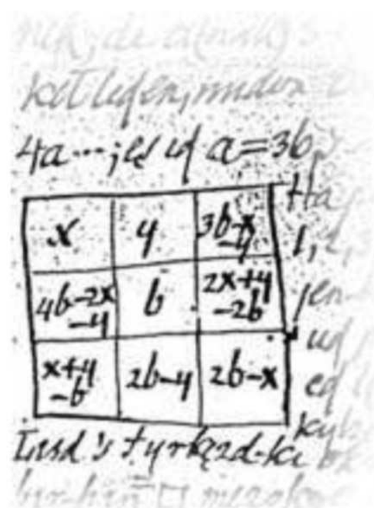
Babeş–Bolyai Tudományegyetem
Matematika és Informatika Kar
Csíkszeredai tagozat,
530241 Csíkszereda (Miercurea Ciuc)
Str. Toplita, Nr. 20

olah_gal@topnet.ro

BOLYAI JÁNOS BŰVÖS NÉGYZETÉNEK EGY ÁLTALÁNOSÍTÁSÁRÓL

SZABÓ PÉTER GÁBOR

Bűvös négyzetnek nevezzük az olyan négyzetes számtáblázatot, amelyben minden sorban és oszlopban, valamint a két átlóban álló elemek összege azonos. Ezt a konstans értéket szokás „bűvös összegnek” is mondani. Bolyai János Marosvásárhelyen őrzött kéziratos hagyatékában Kiss Elemér Bolyai-kutató egy 3×3-as nem szokványos bűvös négyzetet talált [2]. Bolyai bűvös négyzetének érdekessége, hogy benne három szabadon választható érték x, y és b segítségével határozhatjuk meg a többi elemet (1. ábra). A kéziratlapjának végén Bolyai felveti, hogy általánosítsuk az előbbi 3×3-as bűvös négyzetet tetszőleges $n \times n$-es négyzetre. Ennek egy lehetséges módját itt mutatjuk.



1. ábra. Bolyai János bűvös négyzete

Tekintsük az alábbi olyan $n \times n$-es számtáblázatot ($n \geq 3$), amelynek $n(n-2)$ elemét szabadon választhatjuk, és ezen elemeket a b betűjellel, valamint a helyüknek megfelelő indexpárral jelöljük. A többi $2n$ darab elemet a-val és a hozzá tartozó indexekkel jelöljük. Legyen továbbá B a táblázathoz tartozó bűvös összeg.

b_{11}	b_{12}	$\dots$	$b_{1,n-1}$	a_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$b_{n-2,1}$	$b_{n-2,2}$	$\dots$	$b_{n-2,n-1}$	$a_{n-2,n}$
$a_{n-1,1}$	$b_{n-1,2}$	$\dots$	$b_{n-1,n-1}$	$a_{n-1,n}$
a_{n1}	a_{n2}	$\dots$	$a_{n,n-1}$	a_{nn}

Számítsuk ki az a-val jelölt értékeket a b-vel jelölt szabadon választható elemek segítségével a következő módon:

1. lépés. Határozzuk meg az utolsó oszlop első $n-2$ elemét:

$$a_{in} = B - \sum_{j=1}^{n-1} b_{ij}, \quad \text{ahol} \quad (1 \le i \le n-2).$$

2. lépés. Határozzuk meg az utolsó sornak a 2.-tól az $(n-1)$-dik eleméig tartó értékeit:

$$a_{nj} = B - \sum_{i=1}^{n-1} b_{ij}, \quad \text{ahol} \quad (2 \le j \le n-1).$$

3. lépés. Határozzuk meg a bal alsó sarokban lévő elemet az a_{1n} segítségével, valamint az alapján, hogy az átlóban álló elemek összege B kell, hogy legyen:

$$a_{n1} = B - a_{1n} - \sum_{i=2}^{n-1} b_{i,n-i+1} = B - \left(B - \sum_{j=1}^{n-1} b_{1j}\right) - \sum_{i=2}^{n-1} b_{i,n-i+1} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} b_{1j} - \sum_{i=2}^{n-1} b_{i,n-i+1}.$$

4. lépés. Határozzuk meg az $a_{n-1,1}$ elemet az előbb kiszámolt a_{n1} felhasználásával:

$$a_{n-1,1} = B - a_{n1} - \sum_{i=1}^{n-2} b_{i1} = B - \sum_{j=1}^{n-1} b_{1j} + \sum_{i=2}^{n-1} b_{i,n-i+1} - \sum_{i=1}^{n-2} b_{i1}.$$

5. lépés. Határozzuk meg az $a_{n-1,n}$ elemet az előbbi $a_{n-1,1}$ segítségével:

$$a_{n-1,n} = B - a_{n-1,1} - \sum_{j=2}^{n-1} b_{n-1,j} =$$

$$= B - \left(B - \sum_{j=1}^{n-1} b_{1j} + \sum_{i=2}^{n-1} b_{i,n-i+1} - \sum_{i=1}^{n-2} b_{i1}\right) - \sum_{j=2}^{n-1} b_{n-1,j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} b_{1j} - \sum_{i=2}^{n-1} b_{i,n-i+1} + \sum_{i=1}^{n-2} b_{i1} - \sum_{j=2}^{n-1} b_{n-1,j}.$$

Az eddigi lépések egyértelműek voltak abban az értelemben, hogy egyetlen számolási szabály generálta a soron következő új érték meghatározását. Ahhoz azonban, hogy a végeredményként adódó táblázat valóban bűvös négyzet legyen, szükséges az is, hogy az utolsó lépésben kiszámolandó a_{nn} elem is egyértelmű legyen. A vizsgálat tárgyát itt az jelenti, hogy mivel az a_{nn} meghatározására három mód is kínálkozik, hiszen az utolsó oszlopban, az utolsó sorban, valamint az átlóban álló elemek összege is B, így fontos ellenőrizni, hogy az általunk vizsgált négyzetben a három számolási mód ugyanazt az értéket adja-e. Ez persze függeni fog a B értékétől, de pont ezek az egyenlőségek fogják magát a bűvös összeget is így meghatározni. Lássuk hát az utolsó lépést!

6. lépés. Határozzuk meg az a_{nn} elemet.

6.1. Az átlóban álló elemek alapján:

$$a_{nn} = B - \sum_{i=1}^{n-1} b_{ii}.$$

6.2. Az utolsó oszlopban álló elemek alapján (az $a_{n-1,n}$ elemet szándékosan külön írva):

$$\begin{aligned} a_{nn} &= B - a_{n-1,n} - \sum_{i=1}^{n-2} a_{in} = \\ &= B - \sum_{j=1}^{n-1} b_{1j} + \sum_{i=2}^{n-1} b_{i,n-i+1} - \sum_{i=1}^{n-2} b_{i1} + \sum_{j=2}^{n-1} b_{n-1,j} - \sum_{i=1}^{n-2} \left(B - \sum_{j=1}^{n-1} b_{ij} \right). \end{aligned}$$

6.3. Az utolsó sorban álló elemek alapján (az a_{n1} elemet szándékosan külön írva):

$$a_{nn} = B - a_{n1} - \sum_{j=2}^{n-1} a_{nj} = B - \sum_{j=1}^{n-1} b_{1j} + \sum_{i=2}^{n-1} b_{i,n-i+1} - \sum_{j=2}^{n-1} \left(B - \sum_{i=1}^{n-1} b_{ij} \right).$$

A három számítás során kapott értékeknek azonosnak kell lenniük. Ellenőrizzük először a 6.2. és 6.3. esetben kapottakat. Könnyen látható, hogy az első három tag

$$B - \sum_{j=1}^{n-1} b_{1j} + \sum_{i=2}^{n-1} b_{i,n-i+1}$$

azonos a két kifejezésben, tehát ezeket elhagyhatjuk. Igazolandó, hogy

$$-\sum_{i=1}^{n-2} b_{i1} + \sum_{j=2}^{n-1} b_{n-1,j} - \sum_{i=1}^{n-2} \left(B - \sum_{j=1}^{n-1} b_{ij} \right) = -\sum_{j=2}^{n-1} \left(B - \sum_{i=1}^{n-1} b_{ij} \right).$$

Mindkét oldalhoz adjunk $(n-2)B$-t:

$$-\sum_{i=1}^{n-2} b_{i1} + \sum_{j=2}^{n-1} b_{n-1,j} + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-1} b_{ij} = \sum_{j=2}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} b_{ij}.$$

A bal oldalon áll tehát

$$\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-1} b_{ij} - \sum_{i=1}^{n-2} b_{i1} + \sum_{j=2}^{n-1} b_{n-1,j} = \sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-1} b_{ij} - \sum_{i=1}^{n-2} b_{i1} + \sum_{j=1}^{n-1} b_{n-1,j} - b_{n-1,1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} b_{ij} - \sum_{i=1}^{n-2} b_{i1} - b_{n-1,1} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} b_{ij} - \sum_{i=1}^{n-1} b_{i1} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=2}^{n-1} b_{ij},$$

ami így már látható, hogy egyenlő a jobb oldallal. Mivel a 6.1 esetben is ugyanezt kell, hogy kapjuk, mint a 6.2. és a 6.3. esetekben, így ez csak úgy következhet be, ha

$$B - \sum_{i=1}^{n-1} b_{ii} = B - \sum_{j=1}^{n-1} b_{1j} + \sum_{i=2}^{n-1} b_{i,n-i+1} - \sum_{j=2}^{n-1}\left(B - \sum_{i=1}^{n-1} b_{ij}\right),$$

vagyis

$$B = \frac{1}{n-2}\left(\sum_{i=2}^{n-1} b_{ii} + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=2}^{n-1} b_{ij} - \sum_{i=1}^{n-1} b_{1i} + \sum_{i=2}^{n-1} b_{i,n-i+1}\right).$$

Az összegeket tanulmányozva egy kis egyszerűsítési lehetőségünk is van

$$B = \frac{1}{n-2}\left(\sum_{i=2}^{n-1} b_{ii} + \sum_{i=2}^{n-1}\sum_{j=2}^{n-1} b_{ij} + \sum_{i=2}^{n-1} b_{i,n-i+1}\right),$$

vagy még egyszerűbben

$$B = \frac{1}{n-2}\sum_{i=2}^{n-1}\left(b_{ii} + \sum_{j=2}^{n-1} b_{ij} + b_{i,n-i+1}\right).$$

Ellenőrzésként lássuk mit ad a bűvös összegre levezetett általános formula a Bolyai János által is vizsgált $n = 3$ esetben.

$$B = \frac{1}{n-2}\sum_{i=2}^{n-1}\left(b_{ii} + \sum_{j=2}^{n-1} b_{ij} + b_{i,n-i+1}\right) = b_{22} + b_{22} + b_{22} = 3b_{22},$$

vagyis a 3×3-as bűvös négyzet esetén a táblázat közepén lévő szám háromszorosa adódik, ahogyan természetesen Bolyainál is (az ő jelöléseit használva $3b$). A bűvös összeg tanulmányozása további érdekes észrevételeket eredményezhet. Látható például, hogy B pontosan azoktól az elemektől függ, amelyek nincsenek a bűvös négyzet peremén, vagyis amely elemek indexei között nincs 1 és n.

Befejezésül megemlítjük, hogy Kiss Elemér egyik munkájában azt is leírta [3], hogy Bolyai bűvös négyzetének közlése után Dénes József felhívta a figyelmét Jack Chernick egy 1938-ban bizonyított Bolyaiéhoz nagyon hasonló vizsgálatára [1]. Chernick a maga bűvös négyzetét abból a célból közölte, hogy megmutassa minden

3×3-as bűvös négyzet három változóval szerkeszthető. Vegyük észre, hogy ugyanezt Bolyai János is a maga bűvös négyzetének megadásával megmutatta, illetve a fentiek alapján éppen az ő példáját általánosítva azt is láthatjuk, hogy *minden* $n \times n$*-es bűvös négyzet* $n(n-2)$ *változóval szerkeszthető* $(n \geq 3)$. Megmutatható, hogy $n(n-2)$ darab változó itt szükséges is az általános esetben. Chernick szintén eljutott ehhez az állításhoz, habár a bizonyításában az ő konstrukciója más, mint a fenti.

Irodalom

[1] Jack Chernick, Solution of the general magic square, *Amer. Math. Monthly,* **3** (1938), 172–175.

[2] Kiss Elemér, *Matematikai kincsek Bolyai János kéziratos hagyatékából,* Akadémai és Typotex Kiadó, Budapest (1999).

[3] Kiss Elemér, Újabb kincsek Bolyai János hagyatékából, *Élet és Tudomány,* LVI. évf. 19. szám, 2001. május 11.

Péter Gábor Szabó: On a generalization of the magic square of János Bolyai

János Bolyai constructed a general 3×3 magic square using 3 variables. In this paper we presented a generalization of this result for the case $n \times n$ $(n \geq 3)$. We proved that the magic square of order n constructed by $n(n-2)$ variables. This proof based on Bolyai's example and it is different from Chernick's proof.

BOLYAI FARKAS MÁSODIK DOLGOZATA A PÁRHUZAMOSOK ELMÉLETÉRŐL

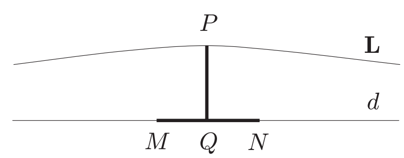
WESZELY TIBOR

Bolyai Farkas egyike a világ azon matematikusainak, akik 2000 éven át az euklideszi párhuzamossági axióma bebizonyításán fáradoztak. Erre a törekvésre az adott okot, hogy Euklidész (kb. i.e. 330–275) *Elemek* című művének elején felsorolt axiómák és posztulátumok azonnal belátható egyszerű kijelentései között, a párhuzamossági axióma valahogy elütött a többitől. A bonyolultabb megszövegezése is sokakban kételkedést ébresztett. Vagyis, nem tekintették „azonnal belátható"-nak, mint ahogyan azt a bizonyítás nélkül elfogadott alapigazságoktól általánosan elvárták. Így voltak akik azt hitték, hogy Euklidész itt egy bizonyítható tételt sorolt az axiómák közé. Ez a kérdés a 18. században a göttingai egyetemen is a sokat vitatott vizsgálandó kérdések közé tartozott ott, ahol ebben az időben Bolyai Farkas és Carl Friedrich Gauss diáktársak voltak. Amikor Farkas 1804-ben a marosvásárhelyi református kollégium matematika-fizika-kémia professzora lesz – mely státus hallgatólagosan a tudományos kutatást is elvárta –, újból elővesz a párhuzamos egyenesek kérdését, amelyet annakidején az egyetemi évek alatt Gauss-szal tárgyaltak. Rövidesen megírja „A párhuzamosak elmélete" című első tudományos dolgozatát, melyet az 1804. szeptember 16-án Gausshoz írt leveléhez csatol. A nagy német matematikus, még azon év november 25-én válaszol, melyben közli, hogy barátja melyik állításával nem ért egyet. Úgy tűnik, hogy Farkas ezután hosszasan tépelődött ezen a kérdésen, mert ezzel kapcsolatban csak 1808. december 27-én írt levelében tér ki részletesebben újra, mely leveléhez „A párhuzamosak elméletének toldaléka" című második dolgozatát mellékeli. Ebben is, akárcsak az elsőben, az Euklidész által az axiómák közé sorolt, párhuzamosokra vonatkozó kijelentését próbálja bizonyítani. Arra törekszik, hogy a Gauss által jelzett kifogásokra adjon választ, de a cél érdekében, érdekes módon, nemcsak kizárólag matematikai, hanem már szinte filozófiai körmönfont érveket is felhasznál. Ma már tudjuk, hogy Farkas akkori fáradozása, akárcsak 2000 éven át e témával foglalkozó többi matematikus társáé, hiábavaló volt, mivel ennek az „axiómának" igaz vagy nem igaz voltát, egy vele ekvivalens kijelentés állításának vagy tagadásának a felhasználása nélkül nem lehet eldönteni. Gauss az utóbbi levélre már nem válaszolt. Érdekes, hogy a későbbi Bolyai kutatók, akik Farkas párhuzamosokra vonatkozó vizsgálataira is részletesebben kitértek, csupán az első dolgozatával foglalkoztak kisebb-nagyobb mértékben, míg a másodikat, a legtöbb esetben, még meg sem említették. Ha esetleg említést tettek róla, csupán annyit jegyeztek meg, hogy ez is egy sikertelen próbálkozása volt Farkasnak, melyre Gauss válasza is elmaradt. Talán emiatt is érdekes lenne Bolyainak ebbe a dolgozatába kissé részletesebben bepillantani.

Amint a második dolgozatának a címe is jelzi, az ebben kifejezett gondolatok szorosan kapcsolódnak az első dolgozat tartalmához. Így ennek megértéséhez szükséges röviden felvázolni az első dolgozat főbb gondolatait és eljárásait.

Akárcsak a párhuzamosokkal foglalkozó számos elődje, Bolyai Farkas is szilárdan hitte, hogy a párhuzamossági axióma nem független a többi axiómától, vagyis azokból levezethető. Tehát csak a bizonyítását kell megkeresni. E témával foglalkozó matematikusok jelentős része úgy próbálta ezt a kérdést megoldani, hogy nem direkt a párhuzamossági axióma kijelentését (mely szerint: ha két síkbeli egyenest egy harmadikkal metszünk, akkor ez a két egyenes a metsző egyenes azon oldalán találkoznak, ahol a keletkezett két belső szög összege kisebb mint két derékszög), hanem ezen axiómával ekvivalens, esetleg könnyebben kimutatható állítást igyekeztek bebizonyítani. Innen pedig már csak egy lépés a párhuzamossági axióma igazolása. Egy ilyen ekvivalens állítás, melyet dolgozatában Bolyai Farkas igazolni akart az, hogy: *egy egyenes távolságvonala szintén egyenes.* Vagyis: a síkban egy egyenestől, az egyenes által meghatározott egyik félsíkban található ugyanolyan távolságra lévő pontok egy egyenesen vannak. Bolyainak az első dolgozatában közölt bizonyítási kísérlete röviden a következő.

Legyen d egy adott egyenes és rajta az MN szakasz (*1. ábra*).

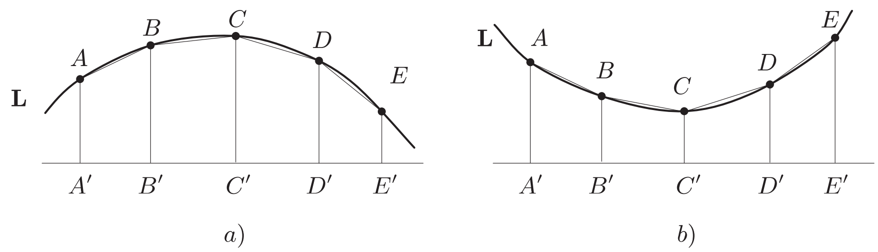


1. ábra

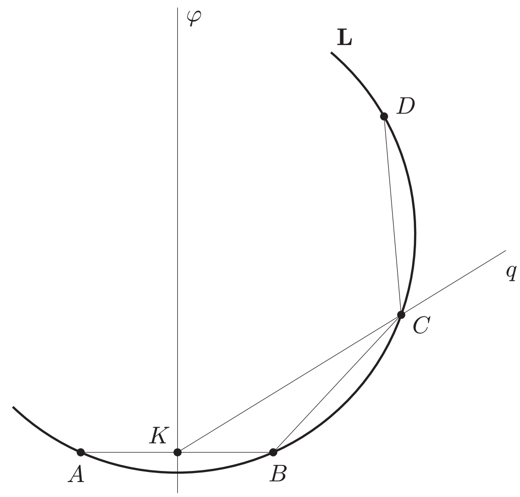
Az MN szakasz Q felezőpontjában felveszi a d egyenesre merőleges QP szakaszt. Nevezzük az MN és QP egyenes szakaszokból összetett fordított T alakú merev alakzatot **T**-nek. Ezt a **T**-t most úgy tekinti mint egy „geometriai mozgatható"-t, és ennek MN szakaszát a d egyenesen csúsztatja végig az egyenes mindkét irányában. A P pont által leírt görbét **L**-lel jelöli, mely nyilván nem más, mint a d egyenes távolságvonala. Farkas azt akarja bebizonyítani, hogy az **L** egyenes. Bizonyításában a *reductio ad absurdum* módszerét alkalmazza, melynek alapján felteszi, hogy **L** nem egyenes, és innen ellentmondáshoz akar jutni.

Körülményes és aprólékos bizonyítás után kimutatja, hogy ha **L** nem egyenes, akkor a *2.a*) vagy *2.b*) *ábrák* által jelzett alakok közül az egyik kell, hogy legyen, melyekbe akkor az $AB, BC, CD, \dots$ egyenlő húrokból álló $ABCD\dots$ domború töröttvonal írható, melyet Π-vel jelöl.

Mindkét esetben ez a *3. ábrán* látható helyzetbe hozható, ahol ezután felveszi az AB húr $K\varphi$ felező merőlegesét (melyről kimutatja, hogy ez az **L** távolságvonal szimmetriatengelye is), valamint a húr K felezőpontja körül forgó q egyenest. Ezt a q egyenest úgy forgatja a K pont körül, hogy rendre átmenjen az **L**-be írt Π töröttvonal $B, C, D, \dots$ csúcspontjain. Kissé hosszadalmas eljárással kimutatja, hogy



2. ábra



3. ábra

a rá következő be nem futott csúcspont a q-hoz viszonyítva a $K\varphi$ félegyenest tartalmazó félsíkban van, „tehát q mindig szöget ír le a K körül és ennyivel közelebb jut a $K\varphi$ egyeneshez”. Majd tovább folytatja Bolyai: „Ezért a q-t az előírt módon addig mozgatjuk, míg $K\varphi$-be jut”. Ez pedig nyilván azt jelenti, hogy $K\varphi$ szimmetriatengelyi mivoltát is figyelembe véve, az **L** önmagába visszatérő vonal, vagyis Farkas megfogalmazását idézve: „Eszerint **L**-nek – ha feltételezzük róla, hogy nem egyenes – önmagába visszatérőnek kell lennie”. Amint Bolyai is hangsúlyozza, ez valóban ellentmondáshoz vezet, mert ekkor a d egyenes két különböző Q pontjában (*1. ábra*) d-re emelt merőleges találkozna egymással. Az viszont már abszolút tétel (vagyis a párhuzamossági axiómától függetlenül bizonyítható), hogy ugyanarra az egyenesre annak két különböző pontjában emelt merőleges nem metszi egymást. Tehát – vonja le a következtetést Bolyai Farkas – *az* **L** *csak egyenes lehet,* és ezzel Euklidész párhuzamossági axiómája is bizonyítást nyert.

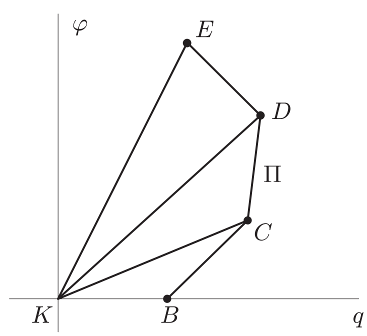
És most nézzük meg Gauss 1804. november 25-én írt válaszát:

„Dolgozatodat nagy érdeklődéssel meg figyelemmel olvastam át, és igazán gyönyörködtem a valódi alapos elmeéledben. De te nem üres dicséretemet várod, amely némileg részrehajlónak látszanék már azért is, mert a te eszmemeneted sokban hasonlít az enyémhez, amelynek alapján hajdan e gordiuszi csomónak kibontását megkíséreltem, és mindeddig hiába próbáltam.

Te csak őszinte nyílt ítéletemet kívánod. Ez pedig az, hogy a te eljárásod engem még nem elégít ki. Megpróbálom, hogy a botránykozás követ, melyet még benne találok (és amely ismét a szirtek ama csoportjához tartozik, amelyeken az én kísérleteim mindeddig hajótörést szenvedtek), oly tisztán amennyire tőlem telik, megmutassam.

Van még mindig reményem, hogy ama szirtek valamikor még az én életem vége előtt átjárást engednek. Nekem azonban egyelőre másféle dolgom van, hogy most reá sem gondolhatok, és hidd el nekem, hogy szívből örülnék, ha engem megelőznél és sikerülne neked, hogy legyőzz minden akadályt. Én aztán a legbensőbb örömmel megtennék mindent, hogy a te érdemed – amennyire tőlem telik – érvényesüljön és a kellő világosságba helyezkedjék. Mindjárt rátérek a dologra [...]

Valamennyi többi következtetés ellen nincsen semmi lényeges kifogásom: ami *nem* győzött meg engem, csupán a XIII. cikkelynek okoskodása. Te ott egy végnélkül folytatott Π, vagyis $KBCDE\ldots$ vonalat képzelsz (*4. ábra*), amely csupa egyenes és egyenlő KB, BC, CD stb. darabokból áll, és ahol a KBC, BCD, CDE stb. szögek egymással egyenlőek, és be akarod bizonyítani, hogy Π előbb-utóbb túl fog menni a $K\varphi$-n.



4. ábra

E végből a $KB\infty = q$ egyenest úgy mozgatod azon oldal felé, amelyen a Π fekszik, a K körül, hogy egymásután a Π egyik csúcsától annak következő csúcsához jusson. Helyesen megmutatod, hogy q amint fokozatosan a $B, C, D, \ldots$-n megy át, mindig közelebb jut $K\varphi$-hez; mindezek ellen semmi kifogás sem lehet. De folytatod: »Ezért a q-t előírt módon addig mozgatjuk, míg $K\varphi$-be jut stb.«, és ez az a következtetés, amelyet nem tudok átlátni. A te okoskodásodból az én belátásom szerint még nem következik, hogy az a szög, amelyet a q a $K\varphi$-hez közeledve a Π egyik csúcsától a másikig haladva leír, nem fogyhat annyira, hogy bármennyire is ismétlődnek ezek, a q által leírt szög ne lehessen akkora, hogy a q-t a $K\varphi$-be hozza. Ha be tudnád például bizonyítani, hogy a BKC, CKD, DKE stb. szögek egymással egyenlőek, a dolog mindjárt tisztában volna. De ez a tétel igaz ugyan, ámde aligha bizonyítható a párhuzamosok elméletének feltételezése nélkül [...].

Még mindig lehetne tehát attól tartani, hogy BKC, CKD, DKE stb. szögek fokozatosan fognak. Ha ez (csak példa kedvéért) geometriai haladvány szerint történnék, úgy, hogy $CKD = \psi BKC$, $DKE = \psi^2 BKC$ stb. (ahol ψ kisebb 1-nél), akkor valamennyi közeledés összege, bárhányszor is folytatjuk ezeket, mégis mindig kisebb maradna, mint $\frac{1}{1-\psi} BKC$, és ugyanakkor ez a határérték is mindig kisebb lehet, mint a $BK\varphi$ derékszög.

Őszinte ítéletemet kérted: én szolgáltam vele és ismételve biztosítlak arról, hogy majd szívből örülnék, ha minden nehézséget leküzdesz."

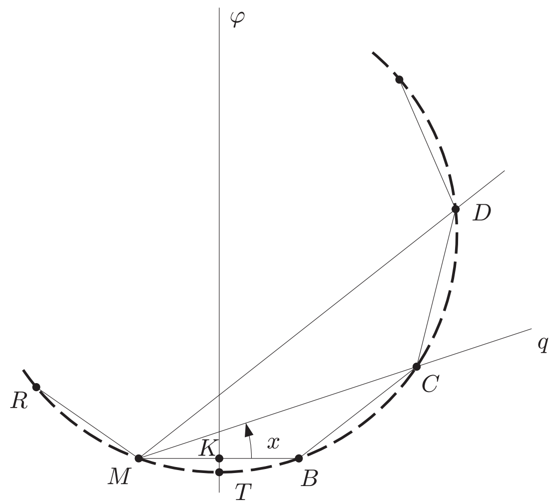
Gauss világos válaszához mi csak annyit fűznénk hozzá, hogy az abban található ábra némileg különbözik Bolyai Farkas eredeti dolgozatában levő ábrától. Arról van ugyanis szó, hogy Bolyai az AB húr felező merőlegesét nevezi $K\varphi$-nek, Gauss pedig ezt a merőlegest a húr A kezdőpontjában veszi fel, amely pontot azonosítja K-val. A lényegen azonban ez semmit sem változtat, mindezt inkább az esetleges félreértések elkerülése érdekében említettük meg.

Gauss éleslátását tükröző véleménye minden bizonnyal elszomorította Farkast. E témával kapcsolatos újbóli dolgozatát csak négy év után, az 1808. december 27-én írt leveléhez csatolva küldi el Gaussnak. Ennek, valamint az azelőtti (1807. december 18) Gausshoz írt leveleinek tartalma ékesen bizonyítja, hogy Farkas az eltelt négy év alatt rengeteget bajlódott ezzel a problémakörrel. Ebben a második dolgozatában, mely a matematikai szakirodalomban *„A párhuzamosok elméletének toldaléka"* címmel vált ismertté, Gauss észrevételeire igyekszik válaszolni. Továbbá is azt próbálja bizonyítani, hogy az említett q egyenes leír egy akkora szöget, hogy túllépjen a $K\varphi$-n. Az **L** görbe alakjára vonatkozó első dolgozatbeli bizonyításait igyekszik még mélyebb részletességgel tárgyalni (mint például: „**L**-nek valamely egyenessel nem lehet három különböző közös pontja" stb.), majd az utolsó részben rátér a kifogásolt állításának erőszakolt igazolására. Érdekes, hogy a második dolgozatában szereplő rajza, az első dolgozatában valamint a Gauss válaszában található ábrák ötvözete. Farkas továbbra is megtartja az **L** görbe egyik szimmetriatengelyét képező $K\varphi$ egyenest (*5. ábra*), amely az **L** MB húrjának felező merőlegese, de a mozgó q egyenest már nem a K pont körül, hanem a Gauss által közölt M húrvégpont körül forgatja úgy, hogy ez rendre áthaladjon a Π töröttvonal $B, C, D, \ldots$ csúcspontjain, melyek egyben az **L** pontjai is.

Amint az előbbiekben említettük, ez nem változtat a lényegen, csakhogy itt már a „q a $K\varphi$-be jut" helyett a „q a $K\varphi$-n túlmegy" kifejezést kell, hogy használja.

Mivel ennek az állításnak a helyességére vonatkozó bizonyítási kísérlet képezi a dolgozat leglényegesebb részét, ami Bolyai második dolgozatában sajnos némi érthetetlenségre is okot ad, úgy gondoljuk, hogy lényegi ismertetés helyett, sokkal helyesebb, hitelesebb és meggyőzőbb ha a szerző szó szerinti eredeti eszmefuttatását közöljük. Ugyanakkor úgy gondoljuk, hogy ennek elolvasása után talán magyarázatot is alkothatunk magunknak arról, hogy mi volt az egyik ok Gauss válaszának elmaradásához. Tehát íme, a dolgozat befejező részét képező XX. cikkely eredeti, teljes szövege:

„XX. Minthogy ez a szög (melyet x-nek akarunk nevezni) egyidejűleg egyenlő azzal a szöggel, melyet q az MB húrral alkot (*5. ábra*), vég nélkül folytonosan



5. ábra

növekedik, az vagy annyira növekedik, hogy q a $K\varphi$ ∞-en túlmegy, és akkor, ha az eddig mondottakat a T-ből kiinduló másik részre alkalmazzuk, az **L** vonalnak mind az $MTBC\ldots$ része, mind a $BTMR\ldots$ része majd túlmegy $K\varphi$ ∞-en, és így $K\varphi$ ∞-ben vagy két rész találkozik, vagy pedig $K\varphi$ ∞-nek a T-n kívül még két közös pontja lesz **L**-el, és így **L** visszatért; vagy pedig x-nek van olyan λ határa, amelyhez közelebb jut minden megadható mennyiségnél, amelyet azonban nem ér el soha azalatt, míg q az **L** mentén M körül forog. Legyen akkor B-ben $x = A$ [az *5. ábra* esetében $A = 0$] és a mindig újabb és újabb növekményei legyenek $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ A növekmények a folytonosság törvénye szerint keletkeznek ugyan, úgy hogy bármely kettő között még számtalan más van. Ezen a módon [az x-re] az $A + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots$ végtelen sor származik, amelynek összege határértékül a λ-t bírja, azaz, amelynek akárhány tagját is adjuk össze (elhagyva azt a részt, amely a végtelenig terjed), az összeg mindig kisebb lesz λ-nál, és bármely ε mennyiséget is adunk meg, bizonyos tagig valamennyi tag összege annyira terjeszthető ki, hogy ε-nál kevesebbet különbözzék λ-tól. Ha azonban a végtelen sor valamennyi tagját összegezhetnők, úgy hogy egy sem maradna fenn: akkor maga a határérték állana elő (ebben az esetben λ). Itt azonban q, miután az **L**∞ vonal $MTBCD\ldots$ részének minden pontján átmegy, valamennyi növekményre szert tett. Ha tehát a sornak már valamennyi tagját összegezzük – és ez éppen abban a rész nélküli időpontban áll majd be midőn q-nak először nincs **L**-el közös pontja [az M-en kívül], amely időpont és az **L** vonalnak elhagyása között semmi változás nem mehetett végbe, mert a változáshoz két időrész szükséges, az időpont pedig, amelyben q először lépett ki **L**-ből rész nélküli – akkor az x szög csak akkor válhatott egyenlővé λ-val, miután q az **L**-ből kilépett [vagyis az M-en kívül már nincs más közös pontja **L**-el]. Ez azonban képtelenség, mert akkor x a 0-sal vált egyenlővé. Így tehát képtelenség feltételezni azt, hogy x nem növekedett mindaddig, míg q a $K\varphi\infty$-en átmegy.

Így tehát **L**, hacsak nem egyenes visszatér (ami az elején mondottak alapján nem lehetséges). Tehát **L** egyenes."

Azt hiszem, nem túlzunk akkor, amikor kijelentjük, hogy itt Bolyai Farkas egy nem helytálló állítás igazolására valósággal ráerőszakolja a bizonyítás létezését. Mivel szigorú matematikai bizonyítást nem tudott adni, akkor ezt körmönfont filozófiai érvekkel próbálja áthidalni. Matematikai megalapozást nélkülöz az a kijelentése például, miszerint „ ... az x szög csak akkor válhatott egyenlővé λ-val, miután q az L-ből kilépett. Ez azonban képtelenség, mert akkor x a 0-sal vált egyenlővé."

Önkéntelenül felvetődik a kérdés: érheti-e kritika Bolyai Farkast e dolgozata miatt. A válasz a határozott *nem*. Ugyanis 2000 éven át szilárdan hitték, hogy Euklidész szóban forgó posztulátuma bizonyítható, és csak a bizonyítását kell megkeresni. Ezt hitték két évezreden át Poszeidóniosz (kb. i.e. 135–51), Geminosz (i.e. 1. század), Proklosz (410–485), Szaid al Dzsauhari (9. század), Hatim An-Nairizi (latinosított nevén Aniritius, 900. körül), Hasszán ibn al Haitham (latinosított nevén Alhazen, 965-1039), Omar Khajjam (1048–1123), Naszir-Eddin at Tuszi (1201–1274), Christoph Schlüssel (latinosított nevén Clavius, 1537–1612), John Wallis (1616–1703), Girolamo Saccheri (1667–1733), Heinrich Lambert (1728–1777), Adrien Legendre (1752–1823), az elején még C. F. Gauss (1777–1855) is, hogy csak néhány nevet említsünk a bizonyításkeresők közül. Bolyai Farkas az egyetlen magyar név, amely szerepel e nagy gondolkodók névsorában, és akit az egyetemes matematikai szakirodalom is számon tart. Bolyai Farkas nevéhez fűződik például az egyik olyan kijelentés, mely ekvivalens az euklideszi párhuzamossági posztulátummal (*három nem egy egyenesbe eső pont egy körön található,* vagy másképpen fogalmazva: *bármely háromszög köré kör írható*). De nekünk talán még ennél is jelentősebb az, hogy zseniális fiában, Bolyai Jánosban, akaratlanul, ő lobbantotta lángra e kérdéssel kapcsolatos vizsgálódás szenvedélyét, mely kérdés a fia által kapott eredmények révén a nemeuklideszi geometria felfedezéséhez vezetett.

Irodalom

[1] Bolyai Farkas és Gauss Frigyes Károly levelezése. A MTA megbízásából szerkesztették, jegyzetekkel és életrajzzal ellátták Schmidt Ferenc és Stäckel Pál. MTA Budapest (1899).

[2] Stäckel Pál: *Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai I–II.* Magyar Tudományos Akadémia, Budapest (1914).

[3] Szénássy Barna: *A magyarországi matematika története.* Akadémiai Kiadó, Budapest (1970).

[4] Weszely Tibor: *Bolyai Farkas a matematikus.* Tudományos Könyvkiadó, Bukarest (1974).

Weszely Tibor
Sapientia-Erdélyi Magyar Tudományegyetem
Marosvásárhely
weszely@rdslink.ro

Tibor Weszely: Farkas Bolyai's second paper on the theory of parallelism

Farkas Bolyai is one of the world's mathematicians who have worked on the demonstration of Euclid's axiom of parallelism. He sends his very first paper on this topic on 16 September 1804 to Carl Friedrich Gauss, his friend and former fellow student. Gauss immediately remarks the mistake of the paper and in his reply he tells it to Farkas, who will think of the solution for years. We know today that it is impossible to tell whether his problem is right or false. He sends his second attempt for solving this problem after four years on 27 December 1808, but the great German mathematician does not send any answer. Bolyai-researchers have dealt only with Farkas' first paper for the time being. The second paper has not even been mentioned yet. Our present paper deals with the demonstration attempts included in the second paper.

KÖVEZÉSEK, ELHELYEZÉSEK ÉS FEDÉSEK A HIPERBOLIKUS TÉRBEN

IFJ. BÖRÖCZKY KÁROLY[1]

1. Bevezetés

A cikk fő témája a $\mathbb{H}^n$ hiperbolikus térbeli egybevágó konvex testekkel való elhelyezések és fedések sűrűsége. Erről a témáról további információ található a L. Fejes Tóth [28] és K. Böröczky, Jr. [17] monográfiákban, és G. Fejes Tóth, W. Kuperberg [26] áttekintő cikkében.

Miután az $\mathbb{E}^n$ euklidészi térbeli elhelyezések és fedések tulajdonságait is áttekintjük, a fő fogalmakat mind a két térre definiáljuk. Jelölje $B(x, r)$ az x közepű, r sugarú gömböt, és $V(\cdot)$ a térfogatot. A később fellépő hányadostereken indukált mértéket is $V(\cdot)$-vel jelöljük az egyszerűség kedvéért. Legyen K konvex test $\mathbb{E}^n$-ben vagy $\mathbb{H}^n$-ben. K egybevágó példányainak halmazát elrendezésnek hívjuk, ha minden kompakt halmazt csak véges sok példány metsz, és létezik R, hogy bármely R sugarú gömb belemetsz valamely példányba. Az elrendezés elhelyezés (kitöltés), ha a példányok belsejei páronként diszjunktak, és fedés, ha a példányok úniója a teljes tér.

Az $\mathbb{E}^n$ euklidészi térben a témakör nagyon jól kidolgozott (lásd például C. A. Rogers [54], L. Fejes Tóth [30] vagy G. Fejes Tóth és W. Kuperberg [26]). Röviden áttekintjük a legfontosabb eredményeket. A K konvex test egybevágó példányai egy $\mathcal{C}$ elrendezésének $\Delta_+(\mathcal{C})$ felső, illetve $\Delta_-(\mathcal{C})$ alsó sűrűsége tetszőleges rögzített $x \in \mathbb{E}^n$ pontra

$$\Delta_+(\mathcal{C}) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\sum_{G\in\mathcal{C}} V\big(G \cap B(x,r)\big)}{V\big(B(x,r)\big)}, \tag{1}$$

$$\Delta_-(\mathcal{C}) = \liminf_{r\to\infty} \frac{\sum_{G\in\mathcal{C}} V\big(G \cap B(x,r)\big)}{V\big(B(x,r)\big)}. \tag{2}$$

Miután nagy gömbök felszíne elhanyagolható a térfogathoz képest az euklidészi térben, nem nehéz belátni, hogy a jobb oldali lim sup és lim inf nem függ az x választásától. Az is igaz, ha megadunk $\mathbb{E}^n$ egy olyan $\mathcal{P}$ cellafelbontását konvex poliéderekre, hogy a cellák beírt gömb sugaraira létezik pozitív alsó, a körülírt

[1]OTKA 068398 és 049301 támogatásával.

gömb sugaraira létezik felső korlát, akkor a cellákbeli sűrűségekre adott felső becslés $\Delta_+(\mathcal{C})$-ra is felső becslés, és a cellákbeli sűrűségekre adott alsó becslés $\Delta_-(\mathcal{C})$-ra is alsó becslés. Tehát ha minden cellában ugyanaz a Δ a sűrűség, akkor $\Delta = \Delta_+(\mathcal{C}) = \Delta_-(\mathcal{C})$.

Ezek után a $\delta(K)$ elhelyezési sűrűség a $\Delta_+(\mathcal{C})$ értékek szuprémuma K egybevágó példányainak összes $\mathcal{C}$ elhelyezésére, és a $\vartheta(K)$ fedési sűrűség a $\Delta_-(\mathcal{C})$ értékek infimuma K egybevágó példányainak összes $\mathcal{C}$ fedésére. Ismert, hogy létezik olyan $\mathcal{E}$ elhelyezés és $\mathcal{F}$ fedés K egybevágó példányaival, hogy

$$\delta(K) = \lim_{r\to\infty} \frac{\sum_{G\in\mathcal{E}} V\big(G\cap B(x,r)\big)}{V\big(B(x,r)\big)},$$

$$\vartheta(K) = \lim_{r\to\infty} \frac{\sum_{G\in\mathcal{F}} V\big(G\cap B(x,r)\big)}{V\big(B(x,r)\big)}.$$

Továbbá $\delta(K) = 1$, illetve $\vartheta(K) = 1$ pontosan akkor, ha K egybevágó példányaival kikövezhető a tér.

A hiperbolikus térben nagy gömbök felszíne lényegében arányos a térfogattal, ezért a fenti tulajdonságokat nem lehet az euklidészi esethez hasonlóan bizonyítani. Körülbelül két évtizedig kitartott a remény, hogy egy ügyes bizonyítás elvezet majd ezekre a tulajdonságokra, különösen azok után, hogy L. Fejes Tóth [27] bizonyos cellákra vonatkozó sűrűségbecsléseket igazolni tudott a hiperbolikus síkon is (lásd 5. fejezet). Végül Böröczky K. [12] éppen itt a Matematikai Lapokban mutatta meg, hogy a hiperbolikus síkon léteznek elhelyezések és fedések egybevágó körökkel, melyekre egyáltalán nem teljesülnek a fenti tulajdonságok, azaz nem létezik a sűrűségnek az euklidészit másoló definíciója a hiperbolikus síkon. A [12]-beli példák magasabb dimenziós változatait V. S. Makarov [40] írta le. Ezek után a hiperbolikus elhelyezések és fedések elmélete több szálon fejlődött. Egyrészt a sűrűségtől különböző mennyiségek extremalitását vizsgálták intenzíven (lásd 4. fejezet). A sűrűség esetén az első természetes problémák a cellarendszerekbeli sűrűség becslése (lásd 5. fejezet), és a véges elrendezések sűrűsége (lásd 6. fejezet). Bár periodikus elrendezésekre már korábban sikerült kiterjeszteni a sűrűség definícióját analitikus ezközökkel, ennél általánosabb elrendezésekre csak a XXI. században sikerült (lásd 6. fejezet). Ezen témák előkészítéséül a 2. fejezetben áttekintjük a hiperbolikus terek kövezéseit, a 3. fejezetben pedig a Dirichlet–Voronoj- és a Delone-kövezések kerülnek ismertetésre.

2. Kövezések

A $\mathbb{H}^n$ n-dimenziós hiperbolikus térben az x és y pontok távolságát $d(x,y)$ jelöli. Kövezésen $\mathbb{H}^n$-beli (különböző) konvex poliéderek egy olyan $\mathcal{P}$ családját értjük, melyre

- $\mathcal{P}$ elemei lefedik $\mathbb{H}^n$-t;

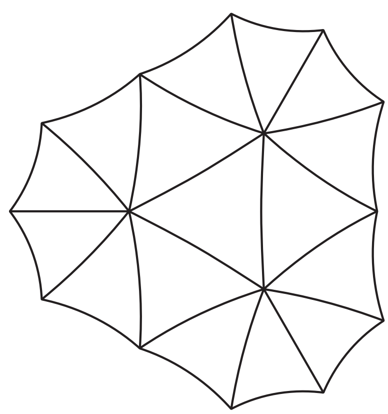
- bármely kompakt halmazt $\mathcal{P}$-nek csak véges sok eleme metsz;
- $\mathcal{P}$ bármely két elemének metszete közös lap.

A kövezést periodikusnak hívjuk, ha a szimmetriacsoportja szerinti faktora kompakt (lásd J. G. Ratcliffe [52], vagy Molnár E., Prok I., Szirmai J. [43]). Más szóval létezik olyan konvex poliéder (ún. alaptartomány), melynek a szimmetriacsoport szerinti képei kikövezik a teret. A periodikusság ekvivalens olyan $\varrho > 0$ és $x \in \mathbb{H}$ létezésével, melyekre a $B(gx, \varrho)$ gömbök lefedik a teret, ahogy g végigfut $\mathcal{P}$ szimmetriacsoportjának elemein. Az ún. Selberg-lemma (lásd J. G. Ratcliffe [52]) szerint ebben az esetben található olyan kompakt hiperbolikus sokaság, melyen $\mathcal{P}$ egy véges kövezést indukál.

A hiperbolikus sík egyik meghatározó tulajdonsága, hogy „exponenciálisan" tágul, ahogy egy rögzített pontjától távolodunk. Ez az észrevétel talán segít megérteni, hogy szabályos háromszögekkel való kövezésben a csúcsok foka tetszőleges nagy lehet. Pontosabban, legyenek p és q olyan pozitív egészek, melyekre

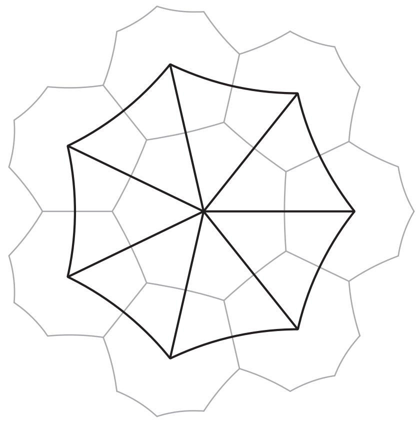
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Miután a hiperbolikus síkon egy p-szög szögeinek összege kisebb $(p-2)\pi$-nél, nem nehéz belátni a következő kövezés létezését. A kövek szabályos egybevágó p-szögek, és minden csúcsban q kő találkozik (lásd az *1. ábrát* a $p = 3$, $q = 7$ esetről, és a *2. ábrát,* ahol a kövezés a duálisával, a $p = 7$ és $q = 3$ esettel együtt látható). Könnyen látható, hogy a fenti kövezések a hiperbolikus síkon mind periodikusak. Megjegyzem, ha $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$, akkor az euklidészi síkon, ha pedig $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$ és $p, q \geq 3$,



1. ábra

akkor a gömbfelületen létezik hasonló kövezés. Ha $p = 3$, akkor C. Bavard, K. J. Böröczky, I. Prok, L. Vena, G. Wintsche [3] tetszőleges $q \geq 7$-re megkonstruálta a legkisebb területű olyan kompakt hiperbolikus felületet, mely szabályos háromszögekkel kövezhető, és minden csúcsban q háromszög találkozik. Z. Lučić és E. Molnár [39] igen sok alapvető eredményt bizonyít, például osztályozták a szabályos sokszögekkel való uniform (csúcstranzitív) kövezéseket.



2. ábra

A hiperbolikus síkot nagyon sokféleképpen lehet periodikusan kövezni (lásd például L. Fejes Tóth [28], vagy J. Molnár [46]). Ezzel együtt előfordulhat, hogy egy konvex sokszög egybevágó példányaival ki lehet kövezni a hiperbolikus síkot, de ez sehogysem tehető meg periodikus módon. Ilyen konvex sokszöget először Böröczky K. [12] konstruált, később G. A. Margulis, S. Mozes [41] a síkban, és V. S. Makarov [40] magasabb dimenziós terekben talált további példákat. Megjegyzem, hogy mai napig nyitott probléma, hogy az euklidészi síkon is létezik-e hasonló tulajdonságú konvex sokszög.

A síkbeli kövezések sokfélesége után talán meglepő, hogy a legalább háromdimenziós hiperbolikus terek közül egyedül a három- és négydimenziót lehet egy szabályos poliéder egybevágó példányaival kövezni. Ezek leírásához bevezetem az ún. Schläfli-szimbólumot, mely tetszőleges állandó görbületű térbeli szabályos poliéder egybevágó példányaival történő kövezés megadására a legáltalánosabban használt jelölés. Egy ilyen kövezésben egy adott csúcsból kiinduló élek végpontjai szintén szabályos poliédert alkotnak, mely egybevágóság erejéig nem függ a csúcs választásától, és a kövezés csúcsalakzatának hívjuk. Továbbá minden csúcsra az őt tartalmazó kövek körülírt gömb (kör) középpontjai is valamely szabályos poliéder csúcsai, és ezen utóbbi egybevágó szabályos poliéderek alkotják az ún. duális kövezést. Megjegyzem, hogy a $(k-1)$-dimenziós gömbfelület kövezései megfelelnek a k-dimenziós szabályos poliédereknek (melyek minden állandó görbületű térben léteznek). Ezek után a minket érdeklő kövezések a következőképpen adhatóak a Schläfli-szimbólum segítségével a dimenzióra vonatkozó indukcióval. Ha a síkban a kövek p-szögek és a csúcsalakzatok q-szögek, akkor a kövezés Schläfli-szimbóluma (p,q). Például a gömbfelületen (azaz ha $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{1}{2}$) a $(3,3)$ a szabályos tetraédert, a $(4,3)$ a kockát, az $(5,3)$ a dodekaédert, a $(3,4)$ az oktaédert és a $(3,5)$ az ikozaédert határozza meg. Három dimenzióban, ha a kövek maguk (p,q), a csúcsalakzatok (q,r) szimbólumhoz tartoznak, akkor a kövezés Schläfli-szimbóluma (p,q,r) (itt a q közös érték a kövek egy csúcsba futó éleinek a száma). Például a négydimenziós szabályos poliéderek (azaz a háromdimenziós gömbfelület kövezései) és Schläfliszimbólumaik a (3,3,3) szimplex, a $(4,3,3)$ hiperkocka, a $(3,3,4)$ keresztpoliéder, a $(3,4,3)$ 24-cella, az $(5,3,3)$ 120-cella, és végül a $(3,3,5)$ 600-cella. Az utolsó három poliéder elnevezése a hiperlapok (azaz a megfelelő háromdimenziós gömbfelületi kövezés köveinek) számát adja meg. $\mathbb{H}^3$-ban a következő Schläfli-szimbólumú kövezések léteznek: $(3,5,3)$, $(4,3,5)$, $(5,3,4)$, $(5,3,5)$. Négy dimenzióban, ha a kövek Schläfli-szimbóluma (p,q,r), akkor a csúcsalakzatok a (q,r,s) szimbólumhoz tartoznak valamely s-re, és a kövezés Schläfli-szimbóluma (p,q,r,s). $\mathbb{H}^4$-ben a következő Schläfli-szimbólumú kövezések léteznek: $(3,3,3,5)$, $(5,3,3,3)$, $(4,3,3,5)$, $(5,3,3,4)$, $(5,3,3,5)$. Megjegyzem, bármely dimenzióban a duális kövezés Schläfli-szimbóluma egyszerűen az eredeti Schläfli-szimbólum számjegyei sorrendjének megfordításával kapható.

A Böröczky-féle gömbelhelyezésekre vonatkozó szimplexkorlát miatt (lásd K. Böröczky [13]) fontos a szabályos szimplexekkel történő kövezés. A legalább háromdimenziós hiperbolikus terekben ilyen csak egy van, a $\mathbb{H}^4$-beli $(3,3,3,5)$ kövezés, mely $2r$ oldalhosszú szabályos szimplexekkel történik, ahol $\operatorname{ch} r = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Ennek duálisa, melynek csúcsai a szimplexek körülírtgömb-középpontjai, a 120-cellákkal való $(5,3,3,3)$ kövezés.

A $\mathbb{H}^4$-beli kövezések közül még a $(5,3,3,5)$ vált igen nevezetessé. Itt egy kő olyan 120-cella, melynek egy megfelelő szimmetriacsoport szerinti képei kikövezik a teret. Pontosabban M. W. Davis [21] konstruált hiperbolikus sokaságot ennek a 120-cella megfelelő oldalpárjainak párosításával. A Davis-féle 4-sokaság főbb tulajdonságait J. G. Ratcliffe és S. Tschantz [53] írta le.

Magasabb dimenziós kövezések leírása megtalálható H. S. M. Coxeter klasszikus [19] könyvében (ami a nem kompakt poliédereket is tárgyalja). Ezen cikk szempontjai szerint igen hasznos olvasmány J. Szirmai [55]. További tulajdonságokért lásd például a L. Németh [50] vagy I. Vermes [56] cikkeket, illetve Molnár E., Prok I., Szirmai J. [43] irodalomjegyzékében szereplő műveket.

3. Dirichlet–Voronoj-cellarendszer és Delone-háromszögelés

Ebben a fejezetben adott $\mathcal{P}$ ponthalmazhoz rendelünk két klasszikus kövezést, melyeknek gömbelrendezések esetén igen jelentős szerepük van. Feltesszük, hogy bármely kompakt halmaz $\mathcal{P}$-nek csak véges sok elemét tartalmazza, és létezik olyan pozitív R, hogy bármely R sugarú gömb tartalmazza $\mathcal{P}$ valamely elemét.

Bármely $p \in \mathcal{P}$ pont D_p Dirichlet–Voronoj-celláját a következőképpen definiáljuk. Legyen D_p azon $x \in \mathbb{H}^n$ pontok halmaza, melyekre $d(x,p) \leq d(x,q)$ teljesül bármely $q \in \mathcal{P}$ esetén. Természetesen D_p függ magától $\mathcal{P}$-től is, de ezt nem szokás jelölni.

Adott p-től különböző $q \in \mathcal{P}$-re a $d(x,p) \leq d(x,q)$ egyenlőtlenséget kielégítő pontok halmaza azon p-t tartalmazó féltér, melyet a pq szakasz felezőmerőlegese határol. Tehát D_p az ilyen félterek metszete, azaz konvex. A $\mathcal{P}$-re adott feltétel miatt $D_p \subset B(p,R)$. Ebből az is következik, hogy D_p a $\mathcal{P}$ azon (p-től különböző) elemeihez tartozó félterek metszete, melyek p-től való távolsága legfeljebb $2R$, vagyis D_p egy poliéder. Egy Dirichlet–Voronoj-cella D_p lapstruktúrája visszatükrözi $\mathcal{P}$-nek p körüli pontjainak geometriáját. Ha F egy k-dimenziós lap, akkor található $\mathcal{P}$-nek $n+1-k$ olyan pontja, melyek nincsenek egy $(n-k)$-dimenziós altérben, és a tőlük egyenlő távolságra lévő pontok halmaza az F által kifeszített k-dimenziós altér.

A Dirichlet–Voronoj-cellák együttese nyilván a tér egy kövezését adja. Könnyen látható, hogy bármely két metsző cella metszete egy közös lap. Ha $\mathcal{P}$ bármely két pontjának távolsága legalább $2r$, $r > 0$, akkor $B(p, r) \subset D_p$ minden $p \in \mathcal{P}$ esetén.

A $\mathcal{P}$-hez tartozó Delone-kövezés a fenti Dirichlet–Voronoj-cellarendszer duálisa, melyet B. N. Delone definiált [22] cikkében. Egy $\mathbb{H}^n$-beli gömböt nevezzünk üres gömbnek, ha a belseje nem tartalmaz $\mathcal{P}$-beli pontot, de a határa tartalmazza $\mathcal{P}$-nek legalább $n+1$ olyan pontját, melyek nincsenek egy $(n-1)$ dimenziós altérben. Vegyük észre, hogy hogy az üres gömbök középpontjai a Dirichlet–Voronoj-cellák csúcsai. Minden üres gömbhöz rendeljük hozzá azt a konvex poliédert, melynek csúcsai a $\mathcal{P}$-nek a gömb határán lévő pontjai. Az így kapott ún. Delone-cellák alkotják a Delone-kövezést. Bár nem triviális, azért viszonylag könnyen látható, hogy valóban kövezést kaptunk, és ismét bármely két metsző cella metszete egy közös lap. Ha minden egyes Delone-cellát szimplexekre osztunk a cella egy rögzített csúcsából kiinduló átlók segítségével, akkor $\mathbb{H}^n$-t lapokban csatlakozó szimplexekre bonthatjuk. Bármely ilyen kövezést Delone-háromszöglésnek hívunk. Megjegyezzük, hogy míg a Delone-kövezés egyértelműen rendelődik $\mathcal{P}$-hez, a Delone-háromszöglés függ attól, hogyan osztjuk szimplexekre a Delone-cellákat.

A 2. ábra a hiperbolikus sík szabályos háromszögekkel való kövezését mutatja hetedfokú csúcsokkal. Ha a pontrendszer a háromszögek csúcsaiból áll, akkor a Dirichlet–Voronoj-cellák a szabályos hétszögek, a Delone-cellák pedig a szabályos háromszögek.

Természetesen, ha a kinduló pontrendszer periodikus volt, akkor a kapcsolódó Dirichlet–Voronoj-cellarendszer és Delone-cellarendszer is periodikus. Továbbá ilyenkor mindig létezik periodikus Delone-háromszögelés is. Ha valamely kompakt hiperbolikus sokaságot $\mathbb{H}^n$ szimmetriáinak (izometriáinak) egy olyan csoportja határoz meg, mely invariánsan hagyja a pontrendszert, akkor könnyen látható (lásd például J. Horváth és Á. H. Temesvári [33]), hogy a pontrendszer természetesen beágyazódik a sokaságba, és $\mathbb{H}^n$ bármely fenti periodikus kövezése a kompakt sokaság egy kövezését határozza meg.

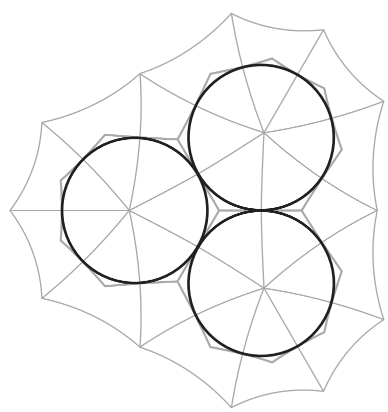
A Dirichlet–Voronoj- és Delone-kövezések egybevágó gömbökkel való elhelyezések és fedések esetén jutnak nagy szerephez. Elhelyezések esetén igen sok eredmény hátterében áll L. Fejes Tóth [27] (síkbeli eset) és K. Böröczky [13] (térbeli eset) következő, Dirichlet–Voronoj-cellákra vonatkozó becslése. Tekintsük r sugarú gömbök egy elhelyezését, és legyen x egy gömbközéppont. Ekkor x Dirichlet–Voronoj-cellájának bármely k-dimenziós lapjának az x-től való távolsága legalább akkora, mint a $(n-k)$-dimenziós $2r$ élhosszú szabályos szimplex körülírt köre. Ez a becslés nem javítható $\mathbb{H}^n$-ben semmilyen $n \geq 2$-re és $r > 0$-ra. Továbbá, ha az elhelyezés egy szabályos sokszögekkel ($n = 2$) vagy 120-cellákkal ($n = 4$) való $(5, 3, 3, 3)$ kövezés beírt köreiből, illetve gömbjeiből áll, és minden csúcsban $n+1$ kő találkozik (lásd *3. ábra*), akkor a kövek a Dirichlet–Voronoj-cellák, és minden Dirichlet–Voronoj-cellalapra éles a becslés.

4. Szoliditás, telítettség, szorosság

Ebben a fejezetben olyan fogalmakat tárgyalunk, amelyekkel megkerülhető a sűrűség definíciójának problémája.

Fejes Tóth Lászlótól (lásd [29]) ered a következő definíció. Egy K konvex test egybevágó példányaival való elhelyezést szolidnak hívjuk, ha belőle véges sok példány átrendezésével csak az eredetivel egybevágó módon kaphatunk elhelyezést. Hasonlóan, K egybevágó példányaival való fedést szolidnak hívjuk, ha belőle véges sok példány átrendezésével csak az eredetivel egybevágó módon kaphatunk fedést.

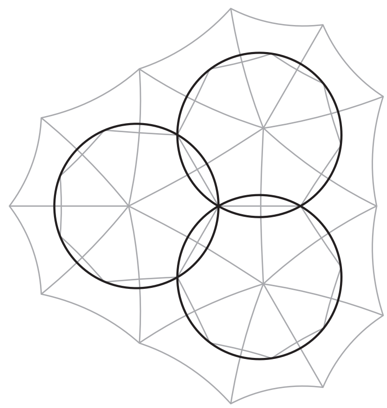
A hiperbolikus síkon a $2\pi/3$ szögű szabályos p-szögekkel való kövezés (tehát $p \geq 7$) beírt, illetve körülírt körei szolid elhelyezést, illetve fedést alkotnak (lásd 3. és *4. ábra*). Ezt L. Fejes Tóth [29] bizonyította háromszögkorlátjára alapozva (lásd



3. ábra

még M. Imre [34]). L. Fejes Tóth [29] azt is sejtette, hogy a fenti körelhelyezésből egy kört kivéve, a maradék elhelyezés is szolid. Ezt a sejtést A. Bezdek [4] igazolta $k \geq 8$-ra (lásd még L. Fejes Tóth [32] megjegyzéseit). Ennek a sejtésnek $p = 7$ esete még ma is nyitott.

Magasabb dimenzióban gömbök esetén csak két eredmény ismert szoliditásról. Tekintsük H^4-ben a 120-cellákkal való $(5, 3, 3, 3)$ kövezését. Ekkor a kövek beírt gömbjei, melyek r sugarára $\operatorname{ch} r = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ teljesül, szolid elhelyezést alkotnak K. Böröczky [13] szimplexkorlátja alapján. Továbbá ha K olyan konvex poliéder, melynek egybevágó példányaival egybevágóság erejéig pontosan egyféle módon kövezhető $\mathbb{H}^n$, akkor a kövezés nyilván szolid elhelyezés és szolid fedés is.



4. ábra

A szolid elhelyezések definícióját természetes módon ki lehet terjeszteni olyan körelhelyezésekre, melyekben több fajta kör is szerepel. G. Fejes Tóth [24] látta be, hogy több úgynevezett félig szabályos (másképp Archimédészi) kövezés beírt körei is szolid elhelyezést alkotnak.

A szoliditás fogalmának hiányossága, hogy nem minden K konvex testnek létezik szolid elhelyezése vagy fedése. Például ha K' a $2\pi/3$ szögű szabályos p-szögekkel való kövezés beírt köre, és K-t kis sapka rátételével kapjuk K'-ből, akkor K-nak nem léteznek szolid elhelyezései.

G. Fejes Tóth, G. Kuperberg, W. Kuperberg [25] a $\mathbb{H}^n$-beli K konvex test egybevágó példányaival való elhelyezést teljesen telítettnek hívja, ha belőle véges sok példányt kivéve nem lehet eggyel több példányt visszatenni úgy, hogy elhelyezést kapjunk. Hasonlóan, K egybevágó példányaival való fedést teljesen telítettnek hívja, ha belőle véges sok példányt kivéve nem lehet eggyel kevesebb példányt visszatenni úgy, hogy fedést kapjunk. A K bármely szolid maximális elhelyezése, illetve minimális fedése teljesen telített (ha az elhelyezést nem lehet kiegészíteni újabb példánnyal, vagy a fedésnél minden példányra szükség van). G. Fejes Tóth, G. Kuperberg, W. Kuperberg [25] sejtette, hogy bármely $\mathbb{H}^n$-beli K konvex test egybevágó példányaival létezik teljesen telített elhelyezés és szolid fedés. A sejtést L. Bowen és Ch. Radin [10] igazolta ergodikus elhelyezések felhasználásával (lásd 7. fejezet).

Az euklidészi térben könnyen látható, hogy egy tetszőleges konvex test szolid vagy teljesen telített elhelyezése legsűrűbb, és szolid vagy teljesen telített fedése legritkább. Meglepő módon L. Bowen és Ch. Radin [10] módszereivel konstruálható olyan poliéder, melynek egybevágó példányaival egyrészt kövezhető $\mathbb{H}^n$, másrészt létezik olyan teljesen telített elhelyezése, illetve fedése is, amelyek egyike sem kövezés. Sőt ennek a teljesen telített elhelyezésnek a sűrűsége bármely szóbajöhető értelemben kisebb, mint egy, illetve a fedés sűrűsége nagyobb, mint egy. Azaz a hiperbolikus térben teljesen telített elhelyezés nem biztos, hogy legsűrűbb, és teljesen telített fedés nem biztos, hogy legritkább, ellentétben az euklidészi térrel.

Egy másik, szintén Fejes Tóth Lászlótól eredő fogalom a szorosság (lásd L. Fejes Tóth [31] ekvivalens, de eltérő definíciójával). $\mathbb{H}^n$-ben K konvex test egybevágó példányaival való elhelyezés szorossága a példányok által kihagyott helybe írható gömbök sugarainak szuprémuma. Ha K egy r sugarú gömb, és a szorosság ϱ, akkor $r + \varrho$ a gömbközéppontok és a hozzájuk tartozó Dirichlet–Voronoj-cellák csúcsai közötti távolságok szuprémuma. Ebből következik, hogy a sík a $2\pi/3$ szögű szabályos p szögekkel való kövezése, illetve $\mathbb{H}^4$-nek 120-cellákkal való $(5,3,3,3)$ kövezése a beírt körökkel, illetve gömbökkel legkisebb szorosságú elhelyezést indukál.

Végül Molnár József vezette be a következő fogalmat (lásd például J. Horváth, Á. H. Temesvári [33]). Adott $R > r > 0$ esetén, az r sugarú körök elhelyzése kielégíti az R tágassági feltételt, ha bármely körközépponttól a saját Dirichlet–Voronoj-cellája csúcsai legalább R távolságra vannak. Legyenek p és q olyan pozitív egészek, melyek kielégítik (3)-at, tehát $\mathbb{H}^2$ kövezhető szabályos p-szögekkel és q-adfokú csúcsokkal. Legyen $r_{p,q}$ a p-szögek beírt köreinek a sugara, és $R_{p,q}$ a körülírt körök sugara. Ekkor az $r_{p,q}$ sugarú, $R_{p,q}$ tágassági feltételt kielégítő körelhelyezések közül a szabályos kövezés adja a legkisebb szorosságút. Ilyen módon bármely síkbeli szabályos kövezés szolgáltat extremális elhelyezést.

5. Sűrűségbecslések cellarendszerekre vonatkozóan

Adott $\mathbb{H}^n$-beli $\mathcal{G}$ gömbelrendezés és C konvex test esetén a $\mathcal{G}$ sűrűsége C-re vonatkozóan

$$\frac{\sum_{B\in G} V(B\cap C)}{V(C)} \tag{4}$$

(itt $\mathcal{G}$ véges is lehet). Legyen T egy szabályos szimplex $\mathbb{H}^n$-ben, és legyen $2r$ az élhossz, és R a körülírt gömb sugara. Ha T minden csúcsába r sugarú gömböt teszünk, akkor elhelyezést kapunk, és $\sigma(r)$-rel jelöljük ennek sűrűségét T-re vonatkozóan. Továbbá ha T minden csúcsába R sugarú gömböt teszünk, akkor a gömbök fedik T-t, és $\vartheta(R)$-rel jelöljük ennek sűrűségét T-re vonatkozóan. Az alábbiakban gömbelrendezésekről lesz szó, és a Dirichlet–Voronoj- vagy Delone-cellákat a gömbök középpontjaihoz rendeljük hozzá.

A hiperbolikus elrendezések vizsgálatát Fejes Tóth László kezdte (lásd klasszikus [28] könyvét). L. Fejes Tóth [27] belátta, hogy a hiperbolikus síkon r sugarú körök tetszőleges elhelyezése esetén az elhelyezés sűrűsége legfeljebb $\sigma(r)$ bármely Dirichlet–Voronoj-cellára vontakozóan. Továbbá, ha a körök által kimaradó részbe nem lehet további r sugarú kört helyezni, akkor az elhelyezés sűrűsége legfeljebb $\sigma(r)$ bármely Delone-cellára vonatkozóan is. Ezeket az eredményeket az elhelyezésekre vonatkozó háromszögkorlátnak hívjuk. Ezek a becslések nyilván élesek, ha a körök a $2\pi/3$ szögű szabályos sokszögekkel való kövezés beírt körei (lásd 3. ábra). Más r esetén J. Molnár [45] javította kismértékben a háromszögkorlátot. Maga $\sigma(r)$ az r-nek monoton növekvő függvénye, melynek határértéke a végtelenben $\frac{3}{\pi}$.

Továbbá, ha r nullához tart, akkor $\sigma(r)$ határértéke $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$, az euklidészi háromszögkorlát egybevágó körökkel való elhelyezésekre.

Egybevágó körök egyéb szabályos elhelyezéseit J. Molnár [46] vizsgálta. Különböző sugarú körök elhelyezéseire J. Molnár [47] adott becsléseket megfelelő cellákra vonatkozóan.

Magasabb dimenzióban Böröczky Károly látta be az ún. szimplexkorlátot H. S. M. Coxeter sejtését igazolva, lásd K. Böröczky és A. Florian [15] az $n = 3$ és K. Böröczky [13] az $n \geq 4$ esetben. Eszerint $\mathbb{H}^n$-beli r sugarú gömbök tetszőleges elhelyezése esetén az elhelyezés sűrűsége legfeljebb $\sigma(r)$ bármely Dirichlet–Voronoj-cellára vontakozóan. Ha $n \geq 3$ akkor a becslés pontosan akkor éles, ha $n = 4$, és az elhelyezés a 120-cellákkal való $(5, 3, 3, 3)$ kövezés beírt gömbjeiből áll. Magasabb dimenzió esetén ekkor ismert, hogy $\sigma(r)$ az r-nek monoton növekvő függvénye, ha $n = 3$ (lásd K. Böröczky és A. Florian [15]), vagy ha n nagyon nagy (lásd T. H. Marshall [42]).

Fedések esetén csak síkban léteznek eredmények, igaz, akkor kétféle definícóval is sikerült igazolni háromszögkorlátot. Mindkét eredmény $\mathbb{H}^2$ tetszőleges r sugarú körökkel való fedése esetén a Delone-háromszögeket tekinti, és persze feltesszük, hogy bármely kompakt halmaz csak véges sok kört metsz. A fenti (4) definíció szerint Böröczky K. [14] látta be, hogy a sűrűség legalább $\vartheta(r)$ bármely Delone-cellára vonatkozóan. Ennek az eredménynek a bizonyítása igen bonyolult. Könyvében L. Fejes Tóth [28] egy egyszerűen bizonyítható, és sok alkalmazáshoz elégséges becslést látott be. Legyen T egy Delone-háromszög, és legyenek α, β, γ a háromszög szögei. Ekkor a T-hez hozzárendelt sűrűség az r sugarú kör α, β, γ szögű körcikkjeinek összterületének és T területének a hányadosa. Erről igazolta L. Fejes Tóth [28] hogy legalább $\vartheta(r)$. Maga $\vartheta(r)$ az r-nek monoton csökkenő függvénye L. Fejes Tóth [28] szerint, melynek határértéke a végtelenben $\frac{\sqrt{12}}{\pi}$. Továbbá, ha r nullához tart, akkor $\vartheta(r)$ határértéke $\frac{2\pi}{\sqrt{27}}$, az euklidészi háromszögkorlát egybevágó körökkel való fedésekre.

6. Sűrűségbecslések véges elhelyezésekre és fedésekre

A Dirichlet–Voronoj- és a Delone-cellarendszerekre való becslések elvezetnek véges térfogatú hiperbolikus sokaságokon való gömbelhelyezésekre és fedésekre való sűrűségbecslésekhez. Bármely X n dimenziós hiperbolikus sokasághoz létezik egy $\pi : \mathbb{H}^n \to X$ szürjektív leképezés, mely bármely $p \in \mathbb{H}^n$ egy kis környezetében izometria πp egy környezetére. Más szóval X valamely diszkrét szimmetriacsoport szerinti faktora a $\mathbb{H}^n$-nek, és π a hányadosleképezés. Egy X-be ágyazott r sugarú gömbön valamely $B(x, r) \subset \mathbb{H}^n$ képét értjük, amennyiben π injektív $B(x, r)$ belsején.

Elhelyezések esetén legyen X tetszőleges, n dimenziós, véges térfogatú hiperbolikus sokaság. Az előző fejezetbeli Fejes Tóth-féle háromszögkorlátból illetve a Böröczky-féle szimplexkorlátból következik, ha X tartalmaz k darab elhelyezést alkotó r sugarú beágyazott gömböt, akkor $V(X) \geq k \cdot V\big(B(x,r)\big)/\sigma(r)$. T. H. Marshall [42] belátta, hogy $\sigma(r) \geq 2^{-0{,}5n+o(n)}$. Másrészt G. A. Kabatjanskii, V. I. Levenšteĭn [35] becsléséből következik, hogy $V(X) \geq k \cdot V\big(B(x,r)\big) \cdot 2^{0{,}599n+o(n)}$, mely ezek szerint nagy n-re erősebb becslés a szimplexkorlátnál.

A szimplexkorlát esetén egyenlőség, azaz $V(X) = k \cdot V\big(B(x,r)\big)/\sigma(r)$ a következő esetekben teljesül. Ha $n = 2$, és a körelhelyezés a $2\pi/3$ szögű szabályos sokszögekkel való kövezés beírt köreiből származik, vagy $n = 4$, és a gömbelhelyezés a 120 cellákkal való $(5,3,3,3)$ kövezés beírt gömbjeiből származik.

Fedések esetén csak a kétdimenziós esetben ismert becslés. Ha X egy kompakt hiperbolikus felület, mely lefedhető k beágyazott r sugarú körrel, akkor Böröczky K. [14] vagy L. Fejes Tóth [28] háromszögbecsléséből is következik, hogy X felszíne legfeljebb $k \cdot V\big(B(x,r)\big)/\vartheta(r)$. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a körfedés a $2\pi/3$ szögű szabályos sokszögekkel való kövezés körülírt köreiből származik.

A kétdimenziós körelhelyezéses és körfedéses eredmények közös általánosítása az ún. Momentum Tétel hiperbolikus felületeken (lásd B. Orvos–Nagyné Farkas [51]).

A hiperbolikus sokaságokon való gömbelhelyezésekre adott szimplexkorlátnak jelentős szerepe van e sokaságok térfogatára adott alsó becslésekben. Egy X véges térfogatú sokaság ϱ injektivitási sugara a maximális sugara az X-be beágyazható gömböknek. A szimplexkorlát szerint $V(X) \geq V\big(B(x,\varrho)\big)/\sigma(\varrho)$. Itt egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $n = 2$, és X egy $2\pi/3$ szögű szabályos $6m$-szög, $m \geq 2$, oldalazonosításaiból származik. A megfelelő oldalazonosítások létezését C. Bavard [2] látta be. Általában az injektivitási sugarat könnyebb becsülni, mint a térfogatot. Így a Böröczky-féle szimplexkorlát igen sok esetben vezetett rendkívül jó alsó korláthoz hiperbolikus sokaságok térfogatára, akár a minimumot is megadva a megfelelő sokaságosztályban (lásd például C. Adams [1], illetve R. Kellerhals [36] és [37]).

A továbbiakban $\mathbb{H}^n$-beli véges elrendezések sűrűségét vizsgáljuk. Tetszőleges dimenzióban csak Molnár J. [44] eredménye ismert. Ha P egy $\mathbb{H}^n$-beli poliéder, akkor tetszőleges F $(n-2)$-lapjánál fekvő dihedrális szög az F-et tartalmazó két hiperlap belső szöge. Ha a P poliéder minden dihedrális szöge legfeljebb $2\pi/3$, akkor [44] módszere szerint r sugarú gömbök bármely P-beli elhelyezésének sűrűsége P-re vonatkozóan legfeljebb $\sigma(r)$. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha egy P-beírt gömbünk van, és vagy $n = 2$, és P egy $2\pi/3$ szögű szabályos sokszög, vagy $n = 4$, $\operatorname{ch} r = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, és P egy szabályos 120 cella. Az eredmény a Fejes Tóth-féle háromszögkorlát illetve a Böröczky-féle szimplexkorlát egyszerű alkalmazása.

Végül hiperbolikus síkbeli eredményeket tekintünk. K. Bezdek [5] látta be, ha egy kör tartalmaz legalább két r sugarú kört, akkor az r sugarú körök sűrűsége a nagy körhöz képest legfeljebb $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$. A becslés nem mindig teljesül tetszőleges konvex síkidomban vett körelhelyezésre nagy r esetén, de K. Bezdek [6] talált konvex síkidomoknak egy elég általános családját, amelyekben teljesül a becslés (lásd még K. Böröczky, Jr. [16]). Megjegyezzük, hogy a hiperbolikus háromszögkorlát $\sigma(r)$ nagyobb $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$-nél, az euklidészi háromszögkorlátnál elhelyezésekre. Másrészt

K. Böröczky, Jr. [18] mutatta meg, ha egy kört lefed legalább két r sugarú kör, akkor az r sugarú körök összterületének és a lefedett kör területének hányadosa legalább $\frac{2\pi}{\sqrt{27}}$. Ez az eredmény is általánosítható megfelelő konvex síkidom fedésére, de nem teljesül tetszőleges konvex síkidom fedésére nagy r esetén. Megjegyezzük, hogy a hiperbolikus háromszögkorlát $\vartheta(r)$ kisebb $\frac{2\pi}{\sqrt{27}}$-nél, az euklidészi háromszögkorlátnál fedésekre. Nyitott probléma, hogy ha a (4) definíciót használjuk egy körnek legalább két r sugarú körrel való fedésére, akkor az r sugarú körök sűrűsége a lefedett körre vonatkozóan legalább $\vartheta(r)$-e.

7. Periodikus és ergodikus elrendezések sűrűsége

Legyen K konvex test $\mathbb{R}^n$-ben. Ebben a fejezetben olyan eredményeket tárgyalunk, melyek mégis lehetővé teszik egy, az euklidészihez hasonló sűrűségfogalom használatát, mégha csak speciális elrendezésekre is.

Legyen $\mathcal{C}$ egy periodikus elrendezés K egybevágó példányaival, és legyen X egy olyan kompakt hiperbolikus sokaság, melyet $\mathcal{C}$ szimmetriacsoportjának egy Γ részcsoportja határoz meg. Feltehető, hogy a hányadosleképezés $\mathcal{C}$ bármely elemén injektív (lásd G. Fejes Tóth, G. Kuperberg, W. Kuperberg [25]). Ha Γ a $\mathcal{C}$ elemeit k ekvivalenciaosztályba osztja, akkor analitikus eszközökkel bizonyítható (lásd például P. D. Lax és R. S. Phillips [38]), hogy bármely rögzített x-re

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\sum_{G\in\mathcal{C}}V\big(G\cap B(x,r)\big)}{V\big(B(x,r)\big)}=\frac{kV(K)}{V(X)}. \tag{5}$$

Bár a síkbeli esetben a periodikusság nem tűnik túl nagy megszorításnak, a periodikus elrendezések igen „kevesen vannak” a magas dimenziós terekben. A teret „egyenletesen betöltő” elrendezések megfelelő osztályát Lewis Bowen és Charles Radin találta meg. Elég nagy $R, N > 0$-ra, legyen Z a K példányaival való azon elrendezések halmaza, melyek bármely pontot legfeljebb N-szer fednek, és melyek komplementere nem tartalmaz R sugarú gömböt. Bár maga a tér persze függ az R, N megválasztásától, de a fő eredmények nem. L. Bowen és Ch. Radin [9] Z-n olyan topológiát definiál, melyben a tér kompakt, és rajta a $\mathbb{H}^n$ tér G^n szimmetriacsoportjának természetes hatása folytonos.

Rögzítünk egy $o\in\mathbb{H}^n$ pontot, és definiáljuk az $\omega: Z\to\mathbb{Z}$ függvény a

$$\omega(\mathcal{C})=\#\{G\in\mathcal{C}:\, o\in G\}$$

formulával. Az o választása nem befolyásolja az alábbi állítások helyességét. Egy Z-n értelmezett μ Borel-mértéket ergodikusnak hívunk, ha $\mu(Z)=1$ (azaz μ valószínűségi mérték), μ invariáns G^n hatására, és bármely G^n invariáns $A\subset Z$ esetén vagy $\mu(A)=0$, vagy $\mu(A)=1$. Könnyen látható, hogy az X-en értelmezett invariáns valószínűségi mértékek konvex halmazának extremális pontjai ergodikusak.

Bármely periodikus $\mathcal{C} \in Z$ definiál egy $\mu_{\mathcal{C}}$ ergodikus mértéket a következő tulajdonsággal. Legyen X egy olyan kompakt hiperbolikus sokaság, melyet $\mathcal{C}$ szimmetriacsoportjának egy Γ részcsoportja határoz meg. Ha Γ a $\mathcal{C}$ elemeit k ekvivalencia-osztályba osztja, akkor

$$\int_Z \omega \, d\mu_{\mathcal{C}} = \frac{kV(K)}{V(X)}. \tag{6}$$

Megjegyzzük, hogy $\mu_{\mathcal{C}}$ tartója a $\mathcal{C}$-vel egybevágó elrendezésekből áll. A. Nevo [48] és A. Nevo és E. M. Stein [49] eredményeit felhasználva L. Bowen és Ch. Radin [9] bizonyítja, ha $\mathcal{C} \in Z$ egy μ ergodikus mérték tartójába esik, akkor bármely rögzített x-re

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\sum_{G \in \mathcal{C}} V\big(G \cap B(x,r)\big)}{V\big(B(x,r)\big)} = \int_Z \omega \, d\mu.$$

Tehát (6) szerint periodikus elrendezésekre visszakapjuk (5)-t. De mindjárt meglátjuk, az új elmélet sok olyan érdekes tulajdonságú elrendezést szolgáltat, melyeket nem találunk meg a periodikusak között.

Legyen Z_e és Z_f a Z-beli elhelyezések, illetve fedések tere. Továbbá jelöljük $\mathcal{M}(Z_e)$ és $\mathcal{M}(Z_f)$-fel azon ergodikus mértékek halmazát, melyek tartója Z_e-be, illetve Z_f-be esik. L. Bowen és Ch. Radin [9] azt is belátta, hogy létezik

$$\delta_{\mathrm{erg}}(K) = \max_{\mu \in \mathcal{M}(Z_e)} \int_Z \omega \, d\mu, \tag{7}$$

$$\vartheta_{\mathrm{erg}}(K) = \min_{\mu \in \mathcal{M}(Z_f)} \int_Z \omega \, d\mu. \tag{8}$$

Azt mondjuk, hogy egy $\mathcal{C} \in Z_e$ optimális elhelyezés az ergodikus sűrűségre nézve, ha benne van egy olyan $\mu \in \mathcal{M}(Z_e)$ ergodikus mérték tartójában, mely egyenlőséget szolgáltat (7)-ben. Tehát ha $\mathcal{C} \in Z$ optimális elhelyezés az ergodikus sűrűségre nézve, akkor bármely rögzített x-re

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\sum_{G \in \mathcal{C}} V\big(G \cap B(x,r)\big)}{V\big(B(x,r)\big)} = \delta_{\mathrm{erg}}(K).$$

Továbbá egy $\mathcal{C} \in Z_f$ optimális fedés az ergodikus sűrűségre nézve, ha benne van egy olyan $\mu \in \mathcal{M}(Z_f)$ ergodikus mérték tartójában, mely egyenlőséget szolgáltat (8)-ban. Tehát ha $\mathcal{C} \in Z$ optimális fedés az ergodikus sűrűségre nézve, akkor bármely rögzített x-re

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\sum_{G \in \mathcal{C}} V\big(G \cap B(x,r)\big)}{V\big(B(x,r)\big)} = \vartheta_{\mathrm{erg}}(K).$$

L. Bowen és Ch. Radin [10] azt is belátta, ha $\mathcal{C} \in Z$ optimális elhelyezés vagy fedés az ergodikus sűrűségre nézve, akkor teljesen telített (lásd 4. fejezet).

L. Bowen és Ch. Radin [9] szerint létezik olyan megszámlálható halmaz, hogy ha K egy ϱ sugarú gömb $\mathbb{H}^n$-ben, és ϱ nem esik ebbe a halmazba, akkor legfeljebb egyetlen, az ergodikus sűrűségre nézve optimális elhelyezés vagy fedés sem periodikus. Másrészt, ha $n = 2$ és K kör, akkor L. Bowen [8] belátta, hogy (tetszőleges sugár esetén) $\delta_{\mathrm{erg}}(K)$ a K periodikus elhelyezéseinek (6) szerinti sűrűségeinek szuprémuma. Továbbá $n = 2$ és K kör esetén az ergodikus sűrűségre nézve optimális elhelyezések egybevágóak (lásd L. Bowen, C. Holton, C. Radin, L. Sadun [11]).

Bár az ergodikus sűrűségfogalom elégséges „szép” elrendezést szolgáltat, azért vannak hiányosságai. Legyen K egy olyan konvex poliéder, mellyel egybevágóság erejéig pontosan egyféleképpen lehet kövezni $\mathbb{H}^n$-t, és a kövezés nem periodikus. Ekkor azt várnánk, hogy optimális elhelyezési vagy fedési sűrűsége 1. Másrészt L. Bowen és Ch. Radin [10] módszerei mutatják, hogy

$$\delta_{\mathrm{erg}}(K) < 1 < \vartheta_{\mathrm{erg}}(K).$$

Köszönetnyilvánítás: Ezúton köszönöm meg Molnár Emilnek, Moussong Gábornak és Wintsche Gergelynek a hathatós segítséget.

Irodalom

[1] C. Adams: The noncompact hyperbolic 3-manifold of minimum volume, *Proc. AMS,* **100** (1987), 601–606.

[2] C. Bavard: Disques extrémaux et surfaces modulaires, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.,* **5** (1996), 191–202.

[3] C. Bavard, K. J. Böröczky, I. Prok, L. Vena, G. Wintsche: *Regularly triangulated hyperbolic surfaces,* készülő kézirat.

[4] A. Bezdek: Solid packing of circles in the hyperbolic plane, *Studia Sci. Math. Hungar.,* **14** (1979), 203–207.

[5] K. Bezdek: Ausfüllungen eines Kreises durch kongruente Kreise in der hyperbolische Ebene, *Studia Sci. Math. Hung.,* **17** (1982), 353–366.

[6] K. Bezdek: Ausfüllungen in der hyperbolische Ebene durch endliche Anzahl kongruente Kreise, *Ann. Univ. Sci. Budapest,* **27** (1984), 113–124.

[7] F. Bolyai: Tentamen Juventutem Studiosam in Elementa Matheseos Purae, Elementaris Ac Sublimioris, Methodo Intuituitiva, Evidentiaque Huic Propria, Introducendi. First edition, 1832–33; Second edition, 1904.

[8] L. Bowen: Circle packing in the hyperbolic plane, *Math. Phys. Electron. J.,* 6:paper No. 6, 2000.

[9] L. Bowen, Ch. Radin: Densest packing of equal spheres in hyperbolic space, *Disc. Comp. Geom.,* **29** (2003), 23–29.

[10] L. Bowen, Ch. Radin: Optimally dense packings of hyperbolic space, *Geom. Dedicata,* **104** (2004), 37–59.

[11] L. Bowen, C. Holton, C. Radin, L. Sadun: Uniqueness and symmetry in problems of optimally dense packings, *Math. Phys. Electron. J.,* **11** (2005), Paper 1, 34pp. (electronic).

[12] Böröczky K.: Gömbelhelyezések állandó görbületű terekben, I. *Mat. Lapok,* **25** (1974), 265–306.

[13] K. Böröczky: Packing of spheres in spaces of constant curvature, *Acta Math. Hungar.,* **32** (1978), 243–261.

[14] Böröczky K.: *Körfedések hiperbolikus síkon,* készülő kézirat.

[15] K. Böröczky, A. Florian: Über die dichteste Kugelpackung im hyperbolischen Raum, *Acta Math. Hungar.,* **15** (1964), 237–245.

[16] K. Böröczky, Jr.: Discrete point sets in the hyperbolic plane, *Studia Sci. Math. Hung.,* **39** (2002), 21–36.

[17] K. Böröczky, Jr.: *Finite packing and covering,* Cambridge University Press, 2004.

[18] K. Böröczky, Jr.: Finite coverings in the hyperbolic plane, *Disc. Comp. Geom.,* **33** (2005), 165–180.

[19] H. S. M. Coxeter: *Regular polytopes.* Third edition. Dover Publications, Inc., New York (1973).

[20] H. S. M. Coxeter: *Non-Euclidean geometry.* Sixth edition. MAA Spectrum. Mathematical Association of America, Washington, DC (1998).

[21] M. W. Davis: A hyperbolic 4-manifold, *Proc. Amer. Math. Soc.,* **93** (1985), 325–328.

[22] B. N. Delone: Sur la sphère vide, *Bull. Acad. Sci. URSS, VII. Ser.,* (1934), 793–800.

[23] G. L. Dirichlet: Über die Reduction der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen, *J. reine angew. Math.,* **40** (1850), 216–219.

[24] G. Fejes Tóth: Solid sets of circles, *Studia Sci. Math. Hungar.,* **9** (1974), 101–109.

[25] G. Fejes Tóth, G. Kuperberg, W. Kuperberg: Highly saturated packings and reduced coverings, *Monats. Math.,* **125** (1998), 127–145.

[26] G. Fejes Tóth, W. Kuperberg: Packing and covering. In: *Handbook of Convex Geometry,* P. M. Gruber, J. M. Wills (eds.), North Holland (1993), 799-860.

[27] L. Fejes Tóth: Kreisausfüllungen der hyperbolischen Ebene, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.,* **4** (1953), 103–110.

[28] L. Fejes Tóth: *Regular Figures,* Pergamon Press (1964).

[29] L. Fejes Tóth: Solid circle-packings and circle-coverings, *Studia Sci. Math. Hungar.,* **3** (1968), 401–409.

[30] L. Fejes Tóth: *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum,* Springer-Verlag, Berlin, 2nd edition (1972).

[31] L. Fejes Tóth: Remarks on the closest packing of convex discs, *Comment. Math. Helv.,* **53** (1978), 536–541.

[32] L. Fejes Tóth: Solid packing of circles in the hyperbolic plane, *Studia Sci. Math. Hungar.,* **15** (1980), 299–302.

[33] J. Horváth, Á. H. Temesvári: Einige Extremumaufgaben für D-V Zellensysteme von diskreten Punktsystemen, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.,* **46** (2003), 3–18.

[34] M. Imre: Kreislagerungen auf Flächen konstanter Krümmung, *Acta Math. Hungar.,* **15** (1964), 115–121.

[35] G. A. Kabatjanskii, V. I. Levenšteĭn: Bounds for packings on a sphere and in a space, *Problems. Inform. Transmission,* **14** (1978), 1–17.

[36] R. Kellerhals: Regular simplices and lower volume bounds for hyperbolic n-manifolds, *Ann. Global Anal. Geom.,* **13** (1995), 377–392.

[37] R. Kellerhals: Ball packings in spaces of constant curvature and the simplicial density function. Dedicated to Martin Kneser on the occasion of his 70th birthday, *J. Reine Angew. Math.,* **494** (1998), 189–203.

[38] P. D. Lax, R. S. Phillips: The asymptotic distribution of lattice points in Euclidean and non-Euclidean spaces, *Internat. Ser. umer. Math.,* **60**, Birkhäuser, Basel-Boston, Mass., (1981), 373–383.

[39] Z. Lučić, E. Molnár: Fundamental domains for planar discontinuous groups and uniform tilings, *Geom. Dedicata,* **40** (1991), 125–143.

[40] V. S. Makarov: On a nonregular partition of an n-dimensional Lobachevskiĭ space by congruent polytopes, *Proc. Steklov Inst. Math.,* (1992), 103–106. (*Trudy Mat. Inst. Steklov.,* **196** (1991), 93–96.)

[41] G. A. Margulis, S. Mozes: Aperiodic tilings of the hyperbolic plane by convex polygons, *Israel J. Math.,* **107** (1998), 319–325.

[42] T. H. Marshall: Asymptotic volume formulae and hyperbolic ballpacking, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.,* **24** (1999), 31–43.

[43] Molnár E., Prok I., Szirmai J.: Szimmetrikus kövezések végtelen sorozata a hiperbolikus térben, *Mat. Lapok,* ezen kötet.

[44] J. Molnár: Estensione del teorema di Segre-Mahler allo spazio. (Italian), *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.,* (8) **35** (1963), 166–168.

[45] J. Molnár: Kreislagerungen auf Flächen konstanter Krümmung, *Math. Ann.,* **158** (1965), 365–376.

[46] J. Molnár: Collocazioni di cerchi con esigenza di spazio. (Italian), *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.,* **9** (1966), 71–86.

[47] J. Molnár: Kreispackungen und Kreisüberdeckungen auf Flächen konstanter Krümmung, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.,* **18** (1967), 243–251.

[48] A. Nevo: Pointwise ergodic theorems for radial averages on simple Lie groups. I., *Duke Math. J.,* **76** (1994), 113–140.

[49] A. Nevo, E. M. Stein: Analogs of Wiener's ergodic theorems for semisimple groups. I., *Ann. of Math. (2),* **145** (1997), 565–595.

[50] L. Németh: On the 4-dimensional hyperbolic hypercube mosaic, *Publ. Math. Debrecen,* **70** (2007), 291–305.

[51] B. Orvos–Nagyné Farkas: *The hyperbolic momentum theorem and its stability,* kézirat.

[52] J. G. Ratcliffe: *Foundations of hyperbolic manifolds,* Springer (1994).

[53] J. G. Ratcliffe, S. Tschantz: On the Davis hyperbolic 4-manifold, *Topology Appl.,* **111** (2001), 327–342.

[54] C. A. Rogers: *Packing and covering,* Cambridge University Press (1964).

[55] J. Szirmai: The optimal ball and horoball packings to the Coxeter honeycombs in the hyperbolic d-space, *Beitr. Algebra Geom.,* **48** (2007), 35-47.

[56] I. Vermes: Über die Parkettierungsmöglichkeit des dreidimensionalen hyperbolischen Raumes durch kongruente Polyeder, *Studia Sci. Math. Hungar.,* **7** (1972), 267–278.

[57] G. F. Voronoi: Deuxième Mémoire. Recherches sur les parallélloèdres primitifs, *J. reine angew. Math.,* **134** (1908), 198–287.

ifj. Böröczky Károly
MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet
és ELTE TTK Geometria tsz.
carlos@renyi.hu

Károly Böröczky, Jr.: Tilings, packings and coverings in the hyperbolic space

We review the theory of the tilings, packings and coverings in the hyperbolic space by equal balls. We place special emphasis on results obtained since the classical monographs by László Fejes Tóth, and the thorough survey papers by Gábor Fejes Tóth.

SZIMMETRIKUS KÖVEZÉSEK VÉGTELEN SOROZATA A HIPERBOLIKUS TÉRBEN

MOLNÁR EMIL, PROK ISTVÁN, SZIRMAI JENŐ[1]

Reiman István Tanár Úr 80. születésnapjára

1. Bevezetés

A. W. M. Dress, D. H. Huson és az első szerző közös [3] munkájukban osztályozták az $\mathbf{E}^3$ euklideszi tér azon (T, Γ) kövezéseit, ahol a kövezés Γ szimmetriacsoportja a T kövezés lapjain tranzitívan hat. Tehát a kövezés bármely két lapjához létezik a Γ egybevágóságcsoportnak (legalább) egy olyan eleme, mely az első lapot a második lapra képezi. A probléma megoldásához kidolgozott algoritmus és számítógépes program nemcsak a lehetséges euklideszi kövezések teljes felsorolását eredményezte, hanem az összes háromdimenziós kombinatorikusan megadott laptranzitív poliéderkövezést táblázatba foglalta, ahol a kövező poliéderek csúcspontjai a mindenkori tér „végesben fekvő", valódi pontjai. Az algoritmus és a számítógépes program a D-szimbólumok (B. N. Delone (Delaunay), M. S. Delaney és A. W. M. Dress tiszteletére) elméletén alapul.

A fő és egyben a legnehezebben eldönthető kérdés, hogy melyik geometriai térben realizálódik egy kombinatorikusan megadott térkitöltés, ha egyáltalán realizálódik. W. P. Thurston vizsgálataiból ismert, hogy nyolc olyan maximális egyszeresen összefüggő homogén Riemann-tér (*Thurston-geometria*) létezik, amelyekben a kombinatorikusan adott kövezések metrikusan megvalósulhatnak:

$$\mathbf{E}^3,\ \mathbf{S}^3,\ \mathbf{H}^3,\ \mathbf{S}^2 \times \mathbf{R},\ \mathbf{H}^2 \times \mathbf{R},\ \widetilde{\mathbf{SL}_2\mathbf{R}},\ \mathbf{Nil},\ \mathbf{Sol}. \tag{1.1}$$

A [7] munkában szerepel a fenti geometriák projektív térbe való beágyazása, ezáltal lehetővé vált, hogy a projektív metrikus geometria apparátusának felhasználásával eldöntsük, hogy egy kombinatorikusan adott kövezés mely fenti térben realizálódik metrikusan. A módszernek néhány alkalmazását láthatjuk a [13], [14], [9], [10] munkákban.

Ebben a dolgozatban tehát a módszer bemutatására olyan (T, Γ) kövezéseket tekintünk, ahol a kövezés Γ szimmetriacsoportja a *T kövezés lapjain tranzitívan hat.* Tehát bármely két, f_1, f_2 laphoz létezik egy $\gamma \in \Gamma$, ami az első lapot a másodikba

[1] Készült a Horvát–Magyar Kormányközi Tudományos és Technológiai Együttműködési Program támogatásával.

viszi $f_2 = f_1^\gamma$ úgy, hogy közben a kövezés önmagára képeződik le, bármely csúcs csúcsba, él élre, lap lapra, test testre, illeszkedéstartó módon. *Két kövezés* (T_1, Γ_1), (T_2, Γ_2) *ekvivariáns,* ha létezik olyan bijektív, illeszkedéstartó transzformáció $\Phi : T_1 \to T_2$, amelyre $\Gamma_2 = \Phi^{-1}\Gamma_1\Phi$. Tehát Φ a Γ_1 bármely γ_1 hatását a Γ_2 csoport $\gamma_2 = \phi^{-1}\gamma_1\phi$ hatásába viszi. (Jobbról írjuk a pontleképezéseket.) Ha két kövezés kombinatorikusan izomorf ($T_1 \cong T_2$), de a megfelelő csoportokra teljesül, hogy Γ_2 gazdagabb mint Γ_1 ($\Gamma_2 \geq \phi^{-1}\Gamma_1\phi$), akkor a (T_1, Γ_1) kövezést a (T_2, Γ_2) *kövezés szimmetriatörésének* nevezzük.

Munkánkban csak olyan kövezéseket vizsgálunk, ahol a (T, Γ) kövezés szimmetriacsoportja *maximális*, vagyis a Γ csoport hatása ekvivariáns a kövezés illeszkedési struktúráját megtartó automorfizmus-csoporttal $\Gamma \cong \mathrm{Aut}\, T$.

Az általunk vizsgált háromdimenziós kombinatorikusan megadott kövezéssorozatról (T_p, Γ_p), $p \geq 4$, amelyet az említett D-szimbólumok nyelvén alapuló algoritmusból és számítógépes programból származtattunk, már korábban [14] bebizonyítottuk a következő tételt:

1.1. tétel. *Az alábbi* (T_p, Γ_p), $p \geq 4$ *maximális szimmetriacsoportú, laptranzitív, valós csúcsokkal rendelkező kövezéssorozat a Bolyai–Lobacsevszkij-féle hiperbolikus* $\mathbf{H}^3$ *térben realizálódik.*

1.2. megjegyzés. A $p = 3$ paraméterhez kapcsolódó eset a háromdimenziós euklideszi térben, $\mathbf{E}^3$-ban realizálódó kockakövezést (T_3, Γ_3) eredményez, ahol $\Gamma_3 \cong \mathbf{Ia\overline{3}}$ (206. sorszámú tércsoport a nemzetközi kristálytani táblázatban). Ez azonban nem lesz maximális csoporthatás, mert $\mathrm{Aut}\, T_3 \cong \mathbf{Pm\overline{3}m} > \Gamma_3$ (sűrűbb ráccsal). A további $p \geq 4$ esetekben mindegyik (T_p, Γ_p) kövezés maximális lesz.

Látni fogjuk, hogy kövezéseink megjeleníthetők a számítógép euklideszi képernyőjén a $\mathbf{H}^3$ tér Cayley–Klein-modellje alapján (*4–7. ábra*). Ez új kezdeményezésünk és eredményünk ebben a dolgozatban.

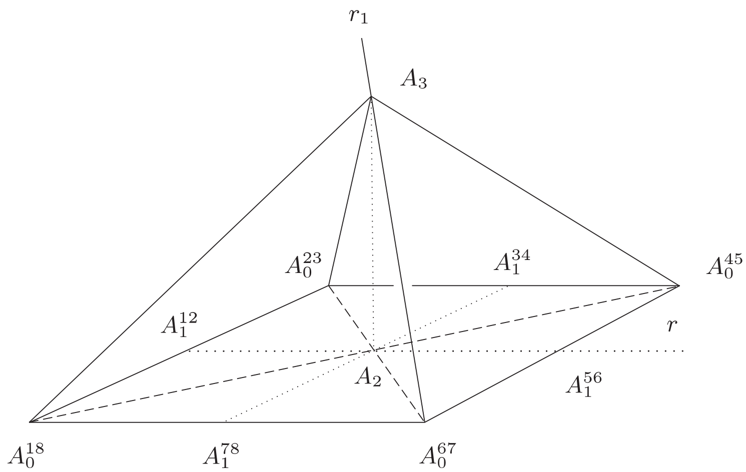
2. (T_p, Γ_p), $p \geq 4$ kövezéssorozat

A D szimbólumok elméletén alapuló algoritmusból és számítógépes programból megkaptuk a kövezéssorozat kombinatorikus megadását. Ebben a munkában nem térünk ki a D-szimbólumok elméletére, ezért mindjárt a kombinatorikus alaptartományok és a generáló transzformációk megadásával jellemezzük a kövezéseket (lásd [2], [3], [14], [10]).

Az első ábra mutatja a kövezések (T_p) 8 db ún. baricentrikus tetraéderből összeragasztott alaptartományának $\mathcal{F}_\Gamma$ vázát. Az alaptartományra alkalmazva a Γ_p csoport transzformációit, térkitöltést kapunk először kombinatorikus értelemben. Itt az „alaplap” pontozott és szaggatott vonalai mentén lehetségesek törések, tehát az alaplap csúcsai nem biztos, hogy (látjuk majd, hogy biztosan nem), egysíkúak lesznek a térben, ahol a kövezés megvalósul:

$$\mathcal{F}_\Gamma = A_0^{18}A_2A_3A_1^{12} \cup A_1^{12}A_2A_3A_0^{23} \cup A_0^{23}A_2A_3A_1^{34} \cup A_0^{18}A_2A_3A_1^{12} \cup \tag{2.1}$$

$$* \cup A_0^{45}A_2A_3A_1^{56} \cup A_1^{56}A_2A_3A_0^{67} \cup A_0^{67}A_2A_3A_1^{78} \cup A_1^{78}A_2A_3A_0^{18}.$$



1. ábra

A kombinatorikusan megadott transzformációk, amelyek a számítógépes listából kiolvashatók, a következők:

(2.2) $r:$ „tengelyes tükrözés” az $r = A_1^{12}A_1^{56}$ egyenesre (félforgás),

$$A_1^{12}A_0^{18}A_0^{67}A_1^{56} \to A_1^{12}A_0^{23}A_0^{45}A_1^{56};$$

(2.3) $z:$ forgatástükrözés:

az $\mathrm{r}_1 = A_0^{67}A_3$ körüli $2p$-forgatás ($2\pi/(2p)$ szöggel) és az r_1 egyenesre

A_3-ban állított „merőleges síkra” való tükrözés szorzata ($p \geq 4$),

$$A_0^{18}A_1^{12}A_0^{23}A_3 \to A_0^{23}A_1^{34}A_0^{45}A_3;$$

(2.4) $r_1:$ az $\mathrm{r}_1 = A_0^{67}A_3$ körüli p-forgatás ($2\pi/p$ szöggel),

$$A_0^{18}A_1^{78}A_0^{67}A_3 \to A_0^{45}A_1^{56}A_0^{67}A_3.$$

Láthatjuk, hogy $z^2 = r_1$.

A poliéderélek körüljárásából adódó Poincaré-algoritmus ([3], [6]) alapján az előbb felsorolt generáló, kombinatorikusan megadott (később látható módon a hiperbolikus térben realizálódó) transzformációk között a Γ_p csoport alábbi definiáló relációi állnak fenn:

$$r^2 = r_1^p = rzrr_1rr_1^{-1}rz^{-1} = zzr_1^{-1} = 1.$$

Mindezekből leolvasható a Γ_p csoport két generátorral történő megadása:

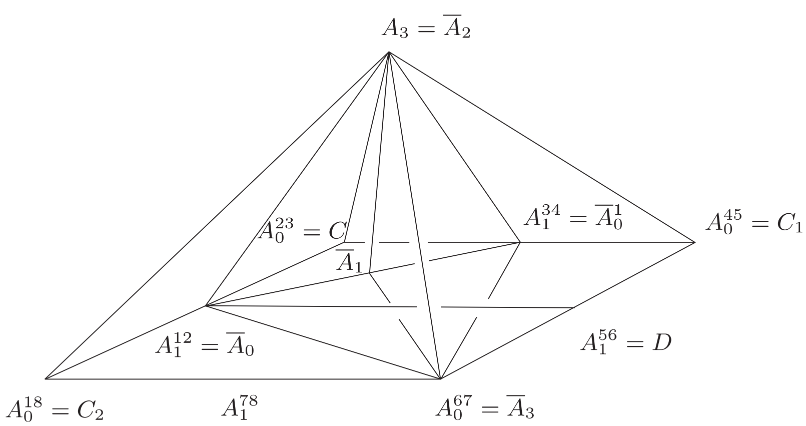
$$\Gamma_p = \{r, z - r^2 = z^{2p} = rzrz^2rz^{-2}rz^{-1} = 1\}. \tag{2.5}$$

2.1. A projektív koordináta-rendszer. Tekintsük a valós számtesten, $\mathbb{R}$-en értelmezett $\mathbf{V}^4$ vektorteret, és jelölje a duális terét $\boldsymbol{V}_4$. A második ábrán láthatjuk az $\overline{A}_0\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ tetraédert, amelyet a $\mathcal{F}_\Gamma$ alaptartományból származtathatunk. $\overline{A}_1$ az $A_1^{12}A_1^{34}$ szakasznak a (mint később látható, a hiperbolikus térben) felezéspontja. Jellemezze a $\boldsymbol{V}_4$ tér egy $\{\boldsymbol{b}^0, \boldsymbol{b}^1, \boldsymbol{b}^2, \boldsymbol{b}^3\}$ bázisa ennek a tetraédernek az oldalsíkjait; a $\boldsymbol{V}_4$ tér formáit dőlt félkövér betűkkel jelöljük a továbbiakban. Az $\overline{A}_i$ csúccsal szemben a $\boldsymbol{b}^i$, $(i = 0, 1, 2, 3)$ formával adott sík fekszik. A tetraéderhez később meghatározandó szimmetrikus *Coxeter–Schläfli-mátrix* a következő alakú:

$$(b^{ij}) := \begin{pmatrix} 1 & -\cos\frac{\pi}{2p} & 0 & 0 \\ -\cos\frac{\pi}{2p} & 1 & -\cos\beta^{12} & 0 \\ 0 & -\cos\beta^{12} & 1 & -\cos\beta^{23} \\ 0 & 0 & -\cos\beta^{23} & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

ahol a mátrixban β^{ij} jelöli a $(\boldsymbol{b}^i)$, $(\boldsymbol{b}^j)$ síkok szögét a (jövendőbeli) beágyazó $\mathbf{H}^3$ térben:

$$b^{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ -\cos\beta^{ij}, & i \neq j. \end{cases} \tag{2.7}$$



2. ábra

A (b^{ij}) mátrix segítségével értelmezzük majd a következő kvadratikus alakot, majd skaláris szorzatot a $\boldsymbol{V}_4$ formái (a síkok) között (Einstein-féle összegzést használunk az egyező alsó és felső betűindexekre 0-tól 3-ig):

$$\xi_i b^{ij}\xi_j = \left(\xi_0 - \cos\frac{\pi}{2p}\xi_1\right)^2 + \sin^2\frac{\pi}{2p}\left(\xi_1 - \frac{\cos\beta^{12}}{\sin^2\frac{\pi}{2p}}\xi_2\right)^2 + \tag{2.8}$$

$$+\left(1-\frac{\cos^2\beta^{12}}{\sin^2\frac{\pi}{2p}}\right)\xi_2\xi_2 - 2\cos\beta^{23}\xi_2\xi_3 + \xi_3\xi_3 =$$

$$= \left(\xi_0 - \cos\frac{\pi}{2p}\xi_1\right)^2 + \sin^2\frac{\pi}{2p}\left(\xi_1 - \frac{\cos\beta^{12}}{\sin^2\frac{\pi}{2p}}\xi_2\right)^2 +$$

$$+\left(\xi_3 - \cos\beta^{23}\xi_2\right)^2 + \xi_2\xi_2\left(1-\frac{\cos^2\beta^{12}}{\sin^2\frac{\pi}{2p}} - \cos^2\beta^{23}\right);$$

$$\langle\ ,\ \rangle : \boldsymbol{V}_4 \times \boldsymbol{V}_4 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle := \left\langle \boldsymbol{b}^i u_i, \boldsymbol{b}^j v_j\right\rangle = u_i b^{ij} v_j.$$

A kvadratikus alakban $\xi_2\xi_2$ együtthatója negatív lesz, ha $p \geq 4$. A skaláris szorzat majd a projektív metrikát is meghatározza. Az $\mathbf{a}_i \in \mathbf{V}^4$, $i \in I = \{0,1,2,3\}$, vektorok az $\mathbf{a}_i\boldsymbol{b}^j = \delta_i^j$ (Kronecker-delta) egyenlet segítségével a $\{\boldsymbol{b}^0, \boldsymbol{b}^1, \boldsymbol{b}^2, \boldsymbol{b}^3\}$ bázis $\{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ duális bázisát határozzák meg. Az $\mathbf{a}_i \in \mathbf{V}^4$, $i \in I = \{0,1,2,3\}$, vektorok az $\overline{A}_0\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ tetraéder csúcspontjainak lesznek meghatározó vektorai.

Ha $\det b^{ij} \neq 0$, akkor az $a_{ik}b^{kj} = \delta_i^j$ egyenlet alapján képezhető lesz a (b^{ij}) inverz mátrixa $(a_{ij}) = \left(b^{ij}\right)^{-1}$, amelynek segítségével értelmezhető az alábbi $\mathbf{V}^4$-beli (pontok közötti) skaláris szorzat (Einstein-konvenció!):

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbf{V}^4 \times \mathbf{V}^4 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle := \left\langle x^i\mathbf{a}_i, y^j\mathbf{a}_j\right\rangle = x^i a_{ij} y^j. \tag{2.9}$$

Mindezek alapján definiálható lesz egy lineáris polaritás és inverze a „formatér” és a „ponttér” között az alábbiak (fordított sorrendben is lehetséges [7]) szerint:

$$({}_*) : \boldsymbol{V}_4 \longrightarrow \mathbf{V}^4 : \boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{u}_* = \mathbf{u}, \quad ({}^*) : \mathbf{V}^4 \longrightarrow \boldsymbol{V}_4 : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^* = \boldsymbol{x}, \tag{2.10}$$

$$\mathbf{u} := \boldsymbol{u}_* = \left(\boldsymbol{b}^i u_i\right)_* = u_i \boldsymbol{b}^i_* = u_i b^{ij}\mathbf{a}_j,$$

$$\boldsymbol{x} := \mathbf{x}^* = \left(x^i\mathbf{a}_i\right)^* = \mathbf{a}_i^* x^i = \boldsymbol{b}^k a_{ki} x^i,$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}\rangle = \mathbf{x}\boldsymbol{u} = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}\rangle.$$

A fenti (b^{ij}) és (a_{ij}) mátrixok segítségével értelmezhetjük majd a háromdimenziós projektív metrikus teret $\mathcal{P}^3\left(\mathbf{V}^4, \boldsymbol{V}_4, \langle\ ,\ \rangle\right)$, amelyben ha $\mathbf{x} \in \mathbf{V}^4$, továbbá $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}_4$ és teljesül a $\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}\rangle = \mathbf{x}\boldsymbol{u} = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}\rangle = 0$ egyenlet, akkor az $(\boldsymbol{u})$ és $(\boldsymbol{x})$ síkok merőlegesek egymásra, vagy $(\mathbf{u})$ és $(\mathbf{x})$ egymáshoz konjugált pontok $\mathcal{P}^3$-ban, vagy az $(\boldsymbol{u})$ sík tartalmazza az $(\mathbf{x})$ pontot.

3. A $(\boldsymbol{T_p}, \boldsymbol{\Gamma_p})$, $p \geq 4$ kövezéssorozat metrikus realizációja

Legyenek a $C := A_0^{23}$ pont projektív koordinátái $C(\mathbf{c}) = (0, 1, c^2, c^3)$. Az első koordinátát 0-nak választjuk, ezzel (látjuk majd, jogosan) feltesszük, hogy C a $\boldsymbol{b}^0$ síkban fekszik, a második koordináta választható 1-nek, ha C nincs a $\boldsymbol{b}^1$ síkban. Továbbá legyenek c^2 és c^3 valós számok.

A gondolatmenetünk lényege a következő:

Feltesszük, hogy a kövezéssorozat minden $p \geq 4$ paraméter esetén a hiperbolikus térben valósul meg, majd a térkitöltést meghatározó ismeretlenek c^2, c^3, β^{12}, β^{23} számára a generáló transzformációk ((2.2), (2.3), (2.4)) *segítségével egyenletrendszert írunk fel. Ha biztosítani tudjuk, hogy minden $p \geq 4$ paraméter esetén létezik megoldás, akkor a kövezés valóban a Bolyai–Lobacsevszkij-féle hiperbolikus térben realizálódik. Ehhez még az is kell majd, hogy a* (2.10)*-beli b^{ij} és a_{ij} mátrixok szignatúrája valóban* $(\,-,\ +,\ +,\ +\,)$ *legyen.*

A $(\boldsymbol{b})$ síkra való s síktükrözést az $(\mathbf{x})$ pontra és $(\mathbf{x})^s$ képére az alábbi képlet alapján írhatjuk fel (amelynek pl. az $\{\mathbf{a}_i\}$ bázisbeli $\mathbf{a}_i \to s_i^j \mathbf{a}_j$ mátrixát is felírhatnánk):

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^s \sim \mathbf{x} - 2\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle}{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle}\mathbf{b}, \tag{3.1}$$

ahol $(\mathbf{b})$ a $(\boldsymbol{b})$ síknak a síkra nem illeszkedő pólusa, ezért $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \neq 0$.

A z forgatástükrözés (és mátrixa) felírható a $\boldsymbol{b}^1$, $\boldsymbol{b}^0$, $\boldsymbol{b}^3$ síkokra való tükrözések egymásutánjaként. A (2.3)-beli z transzformáció során a $C(\mathbf{c}) = (0, 1, c^2, c^3)$ pont a C_1 pontba jut (lásd *2. ábra*), az $\overline{A}_0$ pont a $\overline{A}_0^1 = A_1^{34}$ pontba kerül. A pontok koordinátáit a (3.1) képlet és (b^{ij}) (2.6–8) képletei alapján számítottuk ki:

$$C_1(\mathbf{c}_1) = \left(-2\cos\frac{\pi}{2p}, 4\cos^2\frac{\pi}{2p} - 1, c^2 + 2\cos\beta^{12} + 2c^3\cos\beta^{23}, -c^3\right), \tag{3.2}$$

$$A_1^{34} = \overline{A}_0^1(\mathbf{a}_0^1) = \left(1, -2\cos\frac{\pi}{2p}, 0, 0\right).$$

A projektív geometria szellemében bármely nullától különböző $\mathbf{x} \in \mathbf{V}^4 \setminus \{\mathbf{0}\}$ vektor és állandószorosa $c\mathbf{x}$ $(0 \neq c \in \mathbb{R})$ ugyanazt az $X(\mathbf{x})$ pontot határozza meg. Hasonlóan bármely nem zérus $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$ lineáris forma és $\boldsymbol{u}\frac{1}{c}$ ugyanazt az $u(\boldsymbol{u})$ síkot jellemzi. A fenti polaritás vagy skalárszorzat metrikát (távolság- és szögmetrikát) értelmez a hiperbolikus, $(\,-,\ +,\ +,\ +\,)$ szignatúrájú projektív metrikus térben [5].

Tehát $(\,-,\ +,\ +,\ +\,)$ szignatúra esetén az $u(\boldsymbol{u})$ és $v(\boldsymbol{v})$ síkok $\sigma(u, v)$ szögére

$$\cos\big[\sigma(u, v)\big] = \frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle}{\sqrt{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle}}$$

a fenti (b^{ij}) segítségével, ahogy ez a gömbi geometriában is szokásos. A $(-, +, +, +)$ szignatúrájú hiperbolikus tér $X(\mathbf{x})$ és $Y(\mathbf{y})$ pontjainak $\rho(X, Y)$ távolságát

$$\cosh\left[\frac{1}{k}\rho(X,Y)\right] = \frac{-\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle}}$$

a fenti (a_{ij}) segítségével képezzük (k a görbületi állandó, $-k^2 = K$ a szorzatgörbület).

A $C_1(\mathbf{c}_1)$ pontot a $(\boldsymbol{b}^0)$ síkra való tükrözés a $C_2(\mathbf{c}_2) = A_0^{18}$ pontba viszi (*2. ábra*), a koordináták a (3.1) képlet alapján számolhatók:

$$C_2(\mathbf{c}_2) \sim \mathbf{c}_1 - 2\frac{\langle \mathbf{c}_1, \mathbf{b}^0\rangle}{\langle \mathbf{b}^0, \mathbf{b}^0\rangle}\mathbf{b}^0 = \mathbf{c}_1 + 4\cos\frac{\pi}{2p}b^{0j}\mathbf{a}_j = \tag{3.3}$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{2p}\mathbf{a}_0 - \mathbf{a}_1 + \left(c^2 + 2\cos\beta^{12} + 2c^3\cos\beta^{23}\right)\mathbf{a}_2 - c^3\mathbf{a}_3.$$

Az r tengelyes tükrözés, vagy félforgás az $\mathrm{r} = \overline{A}_0D$ egyenes körül, ahol D az $\overline{A}_3C_1$ felezéspontja. A projektív metrikus geometria apparátusa alapján (az Einstein-konvenciót a 0,1 görög indexekre is kiterjesztjük) a félforgást az alábbi formula határozza meg (ennek $\mathbf{a}_i \to r_i^j\mathbf{a}_j$ mátrixát számítógépünkre bízzuk):

$$r: \mathbf{y} \mapsto \mathbf{y}^r := -\mathbf{y} + 2\langle \mathbf{y}, \mathbf{e}_\alpha\rangle e^{\alpha\beta}\mathbf{e}_\beta, \quad \alpha, \beta \in \{0, 1\}, \tag{3.4}$$

$$\text{ahol} \quad e_{\alpha\beta} := \langle \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta\rangle, \quad e^{\alpha\beta} := (e_{\alpha\beta})^{-1},$$

$$\text{a mi esetünkben} \quad \mathbf{e}_0 = \mathbf{a}_0, \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{d} = \mathbf{c}_1 + \sqrt{\frac{c_{11}}{a_{33}}}\mathbf{a}_3.$$

Ugyanis, kicsit hosszadalmasan belátható, hogy $D(\mathbf{d})$ így valóban a $C_1(\mathbf{c}_1)$ és $\overline{A}_3(\mathbf{a}_3)$ felezőpontja, az r involutív transzformációnál az $\overline{A}_0(\mathbf{a}_0 = \mathbf{e}_0)$ és $D(\mathbf{d} = \mathbf{e}_1)$ egyenesének pontjai fixpontok. A továbbiakat később biztosítjuk. A négy ismeretlen: c^2, c^3, $\cos\beta^{12}$, $\cos\beta^{23}$ közötti első összefüggés abból adódik, hogy az $\overline{A}_0$ pont a C_2C szakasz felezéspontja:

$$\mathbf{a}_0 \sim \mathbf{c}_2 + \mathbf{c} \Leftrightarrow c^2 + \cos\beta^{12} + c^3\cos\beta^{23} = 0. \tag{3.5}$$

A második egyenletet a $C\overline{A}_0D$ háromszögből kapjuk abból, hogy az $\overline{A}_0$ csúcsnál derékszög kell, hogy legyen:

$$\langle \mathbf{a}_0, \mathbf{c}\rangle\langle \mathbf{d}, \mathbf{a}_0\rangle - \langle \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_0\rangle\langle \mathbf{c}, \mathbf{d}\rangle = 0. \tag{3.6}$$

Hasonló meggondolás vezet a következő, harmadik egyenlethez. Az $\overline{A}_0D\overline{A}_3$ háromszögben a D csúcsnál derékszög lesz:

$$\langle \mathbf{d}, \mathbf{a}_0\rangle\langle \mathbf{d}, \mathbf{a}_3\rangle - \langle \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_3\rangle\langle \mathbf{d}, \mathbf{d}\rangle = 0. \tag{3.7}$$

A negyedik, (3.8) egyenletet csak számítógépünk írta fel. Ezt az $rzrr_1rr_1^{-1}rz^{-1} = 1$ reláció teljesüléséből kapjuk. Belátható, hogy ez geometriailag azt jelenti, hogy a D, $\overline{A}_0$, $\overline{A}_0^{z^{-2}rz^{-1}}$ pontok egy egyenesre illeszkednek, sőt az $\overline{A}_0$ pont felezéspont is.

A (3.5–8) egyenletrendszer megoldásának létezését minden $4 \leq p \in \mathbb{N}$ természetes szám paraméterre egy viszonylag hosszadalmas diszkusszió után biztosítottuk az [14] dolgozatban, amit most nem részletezünk. Továbbá konkrét p paraméter esetére számítógéppel ki is tudjuk számolni tetszőleges „gyakorlatias” pontossággal az ismeretlenek értékét. Mindezeket az 1. táblázatban foglaljuk össze. Sőt a megoldást jelentő $\overline{A}_0\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ szimplexet és a teljes $C_2CC_1\overline{A}_3\overline{A}_2$ gúlát is tudjuk számítógéppel animálni p függvényében a $\xi_i b^{ij}\xi_j = 0$, illetve $y^i a_{ij} y^j = 0$ abszolút alakzat változásával. Már említettük, hogy a $p = 3$-hoz tartozó, b^{ij}-ben $(\,0,\ +,\ +,\ +\,)$ szignatúra euklideszi realizációhoz, továbbá a $p = \infty$ esethez tartozó

$$(b^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$\xi_i b^{ij}\xi_j = (\xi_0 - \xi_1)^2 + (\xi_2 - \xi_3)^2$ alak, vagyis $(\,0,\ 0,\ +,\ +\,)$ szignatúra majd $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$-degenerációhoz vezet.

Table 4

p	$\cos\beta^{12}$	$\cos\beta^{23}$	c^2	c^3
4	0,29289322	0,78823876	0,41421356	$-0{,}89707182$
5	0,21850801	0,88289778	0,70710679	$-1{,}04838274$
6	0,16826219	0,93060486	0,91940168	$-1{,}16877089$
7	0,13293569	0,95662983	1,07764913	$-1{,}26425813$
8	0,10728706	0,97169944	1,19486358	$-1{,}34007552$
9	0,08816348	0,98085346	1,28557519	$-1{,}40055444$
...	...	...	...	...
15	0,03535790	0,99689705	1,54731829	$-1{,}58760244$
...	...	...	...	...
20	0,02049907	0,99895409	1,62401525	$-1{,}64623628$
...	...	...	...	...
30	0,00931964	0,99978331	1,68261344	$-1{,}69229978$
...	...	...	...	...
50	0,00339553	0,99997120	1,71397687	$-1{,}71742180$
...	...	...	...	...
$p \to \infty$	0	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$

4. A grafikus megjelenítésről

A *3. ábrán* kiindulunk az *1.* és *2. ábra* $p=3$ paraméterhez tartozó euklideszi kocka-középponti szöglet projektív $E_0=A_3=\overline{A}_2$, E_1^∞, E_2^∞, E_3^∞, $E=\overline{A}_3$ koordinátaszimplexéből, ahol E_0 a kocka középpontja, E_1^∞, E_2^∞, E_3^∞ rendre az x-, y-, z-tengely végtelen távoli, ideális pontja. Tehát az $E_0(\mathbf{e}_0)$, $E_1^\infty(\mathbf{e}_1)$, $E_2^\infty(\mathbf{e}_2)$, $E_3^\infty(\mathbf{e}_3)$, $E(\mathbf{e}=\mathbf{e}_0+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)$ ún. Descartes-féle homogén koordinátarendszerben:

$$(\mathbf{a}_0)=\overline{A}_0(1,-1,0,1),\quad (\mathbf{a}_1)=\overline{A}_1\left(1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right),\tag{4.1}$$

$$(\mathbf{a}_2)=\overline{A}_2(1,0,0,0),\quad (\mathbf{a}_3)=\overline{A}_3(1,1,1,1),$$

$$(\mathbf{c})=C(1,-1,-1,1),\quad (\mathbf{c}_1)=C_1(1,1,-1,1),$$

$$(\mathbf{c}_2)=C_2(1,-1,1,1),\quad (\mathbf{d})=D(1,1,0,1),$$

$$(\mathbf{f})=F(1,0,0,1),\quad (\mathbf{a}_0^1)=\overline{A}_0^1(1,0,-1,1).$$

A továbbiakban a korábbi $\overline{A}_0\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ koordinátaszimplexhez $p=4,5,\dots$ paraméterekhez kiszámított pontkoordinátákat (és síkkoordinátákat, azaz formákat) a fenti $E_0E_1^\infty E_2^\infty E_3^\infty$ koordinátarendszerben fejezzük ki és „ábrázoljuk”. Ehhez a (4.1)-ből az

$$\mathbf{a}_i=:A_i^j\mathbf{e}_j\quad\text{és}\quad \boldsymbol{b}^k=:\boldsymbol{e}^lB_l^k,\quad\text{azaz}\tag{4.2}$$

$$\begin{pmatrix}\mathbf{a}_0\\ \mathbf{a}_1\\ \mathbf{a}_2\\ \mathbf{a}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0&1\\1&-1/2&-1/2&1\\1&0&0&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_0\\ \mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\end{pmatrix},$$

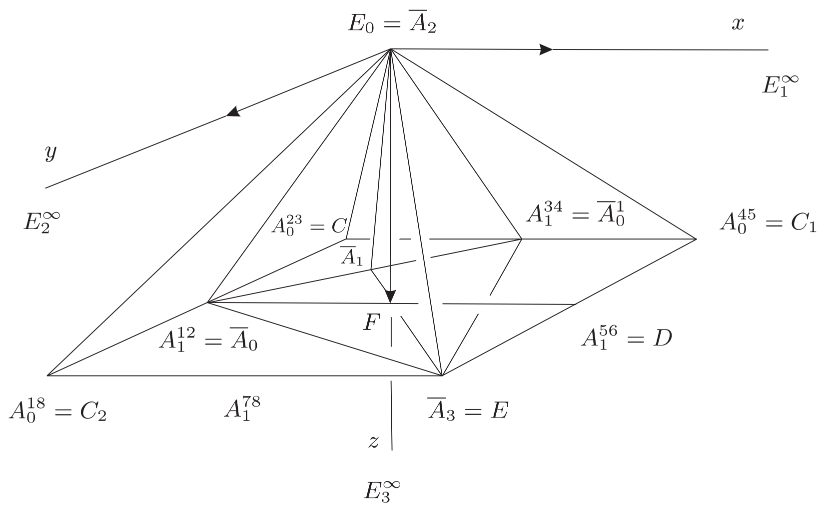
$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}^0&\boldsymbol{b}^1&\boldsymbol{b}^2&\boldsymbol{b}^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}^0&\boldsymbol{e}^1&\boldsymbol{e}^2&\boldsymbol{e}^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\-1&2/3&0&1/3\\1&-4/3&0&1/3\\0&2/3&-1&1/3\end{pmatrix}$$

egymáshoz inverz A_i^j és B_l^k mátrixokat használjuk fel, ahol persze $\mathbf{a}_i\boldsymbol{b}^k=\delta_i^k$, $\mathbf{e}_j\boldsymbol{e}^l=\delta_j^l$ fontos lesz, ezért igaz pl. $\mathbf{e}_k=B_k^l\mathbf{a}_l$. A $p=4,5,\dots$ paraméterértékekre az alaplapot az $\overline{A}_0D$ szakaszból, mondjuk az F felezőpontjából csillagszerűen kialakítva, az FC_2C, FCC_1, $FC_1\overline{A}_3$, $F\overline{A}_3C_2$ háromszögek egyesítésének tekintjük. A *3. ábra* $\mathcal{F}$ alaptartományához persze a (2.8–9) skalárszorzatok által származtatott szög illetve távolságmetrika tartozik, melyeket (4.2) alapján is kiszámíthatunk. Így a Cayley–Klein-modell abszolút pont- és síkalakzatának egyenleteit is kifejezhetjük a szokásos euklideszi koordinátákkal, és ábrázolhatjuk őket a számítógép képernyőjén, persze a $p=4,5,\dots$ paraméterektől függően. Ehhez például az abszolút pontalakzat $(x^i\mathbf{a}_i)$ pontja mely – (2.9) szerint – $0=x^ia_{ij}x^j$ egyenletnek tesz eleget $((a_{ij}) = (b^{ij})^{-1}$ a (2.8) képlet szerint), $x^i A_i^k \mathbf{e}_k =: \xi^k \mathbf{e}_k$ szerint $(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ homogén koordinátákkal rendelkezik, és (4.2) szerint

$$0 = x^i a_{ij} x^j = \xi^k B_k^i a_{ij} B_l^j \xi^l =: \xi^k e_{kl} \xi^l = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle, \tag{4.3}$$

$$B_k^i a_{ij} B_l^j =: e_{kl} = \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l \rangle$$

fejezi ki az abszolút alakzat egyenletét a Descartes-féle $E_0 E_1^\infty E_2^\infty E_3^\infty E$ koordinátarendszerben, és mutatja a ($-$, $+$, $+$, $+$) szignatúrájú származtatott skalárszorzatot.



3. ábra

A *3. ábra* $\mathcal{F}$ alaptartományához tehát az abszolút pontalakzatot is ábrázolhatjuk. Például a fenti kockaközépponti szöglet E_0C, E_0C_1, $E_0\overline{A}_3$, E_0C_2 félegyeneseken levő pontjait és a további $(t\mathbf{e}_0 + \xi^k \mathbf{e}_k)$ alakú pontjait, $(\xi^k \mathbf{e}_k)$ rögzítésével és t kiszámításával egy másodfokú egyenletből (4.3) alapján nyerjük. Az $\mathcal{F}$ tetszőleges Γ_p-képét is megkaphatjuk a (2.5) megadáshoz tartozó generátorok $\overline{A}_0\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ szimplexhez tartozó $\{\mathbf{a}_i\}$ bázisában felírva, majd – (4.2) szerinti konjugálással – az $E_0 E_1^\infty E_2^\infty E_3^\infty E$-hez tartozó $\{\mathbf{e}_i\}$ bázisban felírva. Ezt a számítógép végzi. Például az r félforgás (3.4) formulához tartozó $\mathbf{a}_i \to r_i^j \mathbf{a}_j$ mátrixából az $\{\mathbf{e}_k\}$ bázishoz tartozó $\mathbf{e}_k \to R_k^l \mathbf{e}_l$ mátrixot előbb

$$A_i^k \mathbf{e}_k \to r_i^j A_j^l \mathbf{e}_l, \quad \text{majd} \quad B_s^i A_i^k \mathbf{e}_k \to B_s^i r_i^j A_j^l \mathbf{e}_l \quad \text{és} \tag{4.4}$$

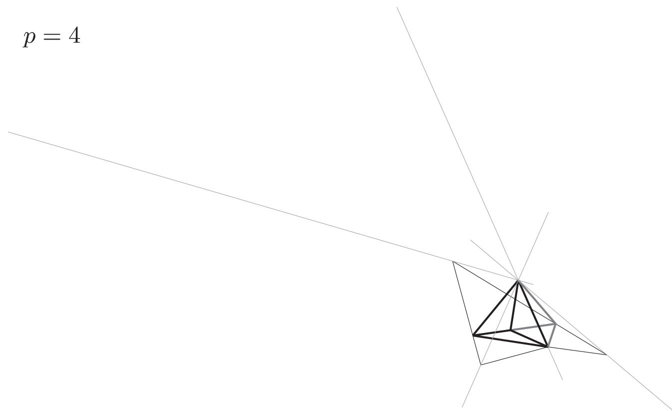
$$B_s^i A_i^k = \delta_s^k \quad \text{miatt} \quad \mathbf{e}_k \to B_k^i r_i^j A_j^l \mathbf{e}_l, \quad \text{végül} \quad R_k^l = B_k^i r_i^j A_j^l$$

alakban kapjuk (4.2)-ből. Ezért egy tetszőleges $(\xi^k \mathbf{e}_k)$ pont $(\eta^l \mathbf{e}_l)$ r-képére nyerjük:

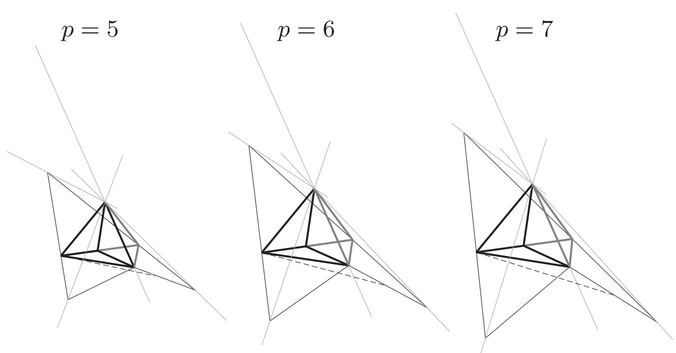
$$\xi^k \mathbf{e}_k \to \xi^k R_k^l \mathbf{e}_l =: \eta^l \mathbf{e}_l, \quad \text{tehát} \quad \eta^l = \xi^k R_k^l. \tag{4.5}$$

Az $E_0E_1^\infty E_2^\infty E_3^\infty E$ euklideszi koordinátarendszerben lévő számítógépi képernyőre való merőleges (euklideszi értelemben) vagy másfajta vetítés eljárását, valamint az egész Cayley–Klein-modell képernyőn történő euklideszi mozgatási eljárásait rutinszerűen végezhetjük az ismert programcsomagok alapján (lásd a *4–7. ábra* képeit, továbbá a [11] honlapot.

Talán rámutattunk a fentiekben arra, hogy a kövezések euklideszi és nem euklideszi terekben kibontakozó elmélete és realizációi, valamint ezek számítógépes megjelenítése még sok kutatási lehetőséget tartogat. Bolyai János „ujj más világa" különösen gazdag ebből a szempontból.



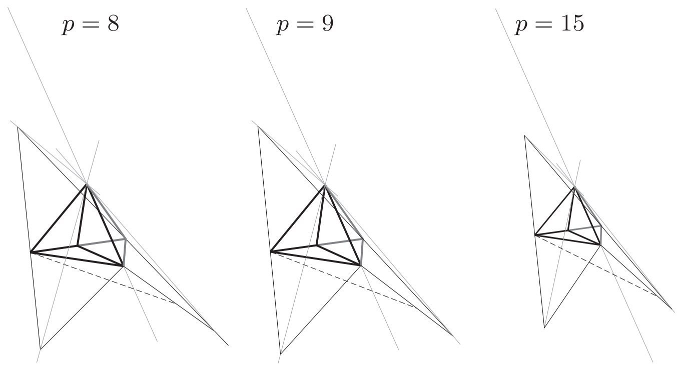
4. ábra



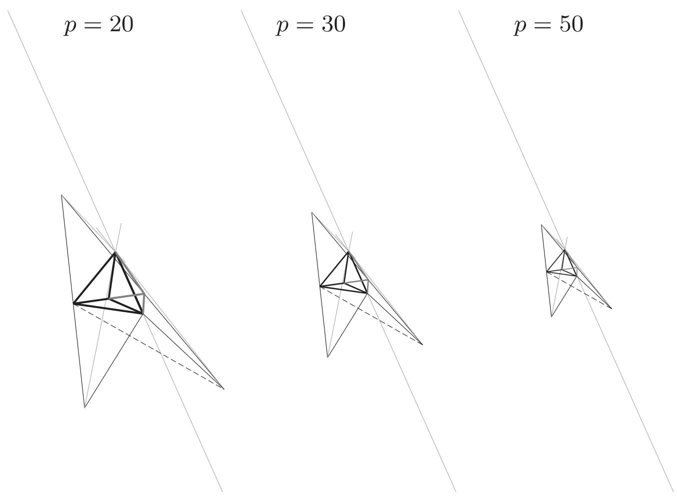
5. ábra

Irodalom

[1] Dress, A. W. M., Presentation of discrete groups, acting on simply connected manifolds in terms of parametrized systems of Coxeter matrices, *Advances in Math.,* **63** (1987), 196–212.



6. ábra



7. ábra

[2] Dress, A. W. M., D. H. Huson., On tilings on the plane, *Geometriae Dedicata,* **24** (1987), 295–310.

[3] Dress, A. W. M., D. H. Huson, Molnár, E., The classification of face-transitive periodic three-dimensional tilings, *Acta Crystallographica,* **A.49** (1993), 806–819.

[4] G. Horváth, Á., Szirmai, J., *Nemeuklideszi geometriák modelljei,* Typotex Kiadó, Budapest, (2004), ISBN: 963 9548 40 5.

[5] Molnár, E., Projective metrics and hyperbolic volume, *Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Math.,* **32** (1990), 127–157.

[6] Molnár, E., Polyhedron complexes with simply transitive group actions and their realizations, *Acta Math. Hungarica,* **59** (1992), 175–216.

[7] Molnár, E., The projective interpretation of the eight 3-dimensional homogeneous geometries, *Beiträge zur Algebra und Geometrie (Contributions to Algebra and Geometry),* **38** (1997), No. 2, 261–288.

[8] Molnár, E., Prok, I., Szirmai, J., Classification of solid transitive simplex tilings in simply connected 3-spaces, Part II. Metric realizations of the maximal simplex tilings, *Periodica Math. Hungar.,* **35(2)** (1997), 47–94.

[9] Molnár, E., Prok, I., Szirmai, J., Two families of fundamental tilings and their realizations in various 3-spaces, *Proc. of International Scientific Conferences of Mathematics, Zilina, Slovakia,* Vol. **2** (1998), 43–64.

[10] Molnár, E., Prok, I., Szirmai, J., Classification of tile-transitive 3-simplex tilings and their realizations in homogeneous spaces, *Non-Euclidean Geometries, János Bolyai Memorial Volume,* Ed. Prékopa, A. and Molnár, E., Mathematics and Its Applications, **581** Springer (2006), 321–363.

[11] Molnár, E., Prok, I., Szirmai, J., http://www.math.bme.hu/~geom.

[12] Prok, I., Data structures and procedures for Polyhedron Algorithm, *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering,* **36/3–4** (1992), 299–317.

[13] Szirmai, J., Metrische Realisierungen von zwei Familien der dreidimensionalen körpertransitiven Simplexpflasterungen, *Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Math.,* **39** (1996), 145–162.

[14] Szirmai, J., Über eine unendliche Serie der Polyederpflasterungen von flächentransitiven Bewegungsgruppen, *Acta Math. Hungar.,* **73 (3)** (1996), 247–261.

[15] Thurston, W. P., *Three-dimensional geometry and topology I.,* Ed. by Silvio Levy, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey (1997).

[16] Zhuk, I. K., Fundamental tetrahedra in Euclidean and Lobachevsky spaces, *Soviet Math. Dokl.,* **27** (1983), 540–543.

Emil Molnár, István Prok, Jenő Szirmai: An infinite series of symmetric tilings in the hyperbolic space[1]

The face-transitive Euclidean cube tiling under the crystallographic group $\Gamma_3 = \mathbf{Ia\overline{3}}$ and with fundamental domain in Fig. 1 can be extended combinatorially to the groups Γ_p $(4 \leq p \in \mathbb{N})$ by presentation (2.5). Our Theorem 1.1 says that every tiling (T, Γ_p) above can metrically be realized in the Bolyai–Lobachevskyan hyperbolic space $\mathbf{H}^3$. Moreover the projective metric realization can be animated by computer in $\mathbf{E}^3$ (in $\mathbf{E}^2$-pictures) by the fundamental domains $\mathcal{F}_p$, $p = 3$ (for $\mathbf{E}^3$), $4, 5, \ldots$ (for $\mathbf{H}^3$). These latter ones are made by various absolute quadratic forms, depending on parameter p.

Molnár Emil, Prok István, Szirmai Jenő

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Matematika Intézet, Geometria Tanszék
H–1521 Budapest

E-mail: emolnar@math.bme.hu, prok@math.bme.hu, szirmai@math.bme.hu
http://www.math.bme.hu/~emolnar, http://www.math.bme.hu/~prok,
http://www.math.bme.hu/~szirmai

[1]Supported by the Hungarian–Croatian Intergovernmental S&T Cooperation Programme.

A HIPERBOLIKUS SÍK BEÁGYAZHATÓSÁGÁRÓL

OLÁH-GÁL RÓBERT

1. Bevezetés

Hol valósul meg a Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometria?

Van-e olyan természetes közeg, ahol megvalósul a nemeuklideszi geometria?

Közismert, hogy sok logikai modellünk van a Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometriára és fontos matematikai alkalmazásai is vannak a nemeuklideszi geometriának. Ezért az alábbi bevezetőben inkább az alkalmazhatóság szempontjából ismertetem a hiperbolikus sík beágyazhatóságát, és arról szeretném meggyőzni az olvasót, hogy nincs olyan természeti jelenség vagy tárgy, amelyen a teljes Bolyai–Lobacsevszkij-féle síkgeometria megvalósulna. Természetesen ez inkább fizikai, mint filozófiai kérdés. A matematika anyagtalan, logikai tudomány, és a Bolyai–Lobacsevszkij-geometriának sok matematikai-logikai modellje és sok matematikai alkalmazása van.

De van-e olyan nyilvánvaló jelenség vagy tárgy, mozgás, amelyen természetes módon a Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometria valósulna meg? E sorok írójának véleménye szerint az ilyen jelenségek nagyon ritkák, és kuriózumszámba mennek. Például az égi mechanikában nemrég mutatták ki, hogy a kéttestprobléma megoldásában, az üstökösök mozgása természetesebben leírható a Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometria segítségével [7]. Olvastam olyan magyarázatot, hogy egy kelkáposzta levelén modellezhető a Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometria. De ezek mind csak kuriózumok, lokális tulajdonságok, ahogy egy közönséges 3 dimenziós térben, a konstans negatív görbületű felületeken lokálisan megvalósul a Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometria. Lássuk a következő analógiát:

Az absztrakt algebrában rengeteg modellünk van. Vegyük csak a csoportelméletet; ezt meghatározza a belső művelet fogalma és még három axióma. Példánk, vagyis modellünk nagyon sok van. Persze itt is vannak „természetes” prototípusok, mint amilyen az egész számok additív csoportja, vagy a permutációk csoportja, amely az n elemen létesített bijektív függvények halmaza a függvényösszetétel (kompozíció) műveletével, de sok más nyilvánvaló példánk van még. Ezzel szemben a geometriában, példák dolgában szegények vagyunk. Nagyon szegények! Mi ennek az oka? Nagyon gazdag axiómarendszerünk, és ezért kevés modellünk van, ezért olyan nehéz és vonzó a geometria! A kétdimenziós euklideszi geometriának az egyetlen természetes modellje a síkfelület. Persze differenciálgeometriailag minden nulla görbületű felület lokális modellje lehet az euklideszi síkgeometriának. Persze ennek van gyakorlati jelentősége is, hogy például a hengerfelületen vagy a kúpfelületen kicsiben megvalósul az euklideszi geometria, mert így az ácsok könnyebben tudnak kofrázst építeni a betonkiöntéshez, mint például egy nem riglálható felületnek. De azért sehol sem tanítják az euklideszi geometriát a hengerfelületen. A hengerfelületen csak lokálisan érvényesül az euklideszi geometria!

A Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometria „népszerűsítésének” első megrázó eseménye, David Hilbert tétele volt, mi szerint: a 3 dimenziós euklideszi térben nincs teljes állandó negatív görbületű felület. Vagyis a 3 dimenziós euklideszi térben a teljes Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometria természetes módon nem valósul meg.

A másik megrázó esemény máig sem vonult át a köztudatba, ezt Erhard Schmidt 1927-ben fedezte fel. Erhard Schmidt tétele alapján az n dimenziós euklideszi térben nem tudunk olyan konstans negatív görbületű teljes felületet előállítani, hogy egy euklideszi egyparaméteres mozgáscsoport egész térben érvényes transzformációjával a felületünket önmagába transzformálja. Ez azt jelenti, hogy még az n dimenziós euklideszi térben sem létezik a teljes hiperbolikus sík olyan formában, hogy rajta az alakzatok szabadon mozgathatók legyenek, legalább egy forgatás vagy eltolás erejéig. Tehát a hiperbolikus sík valamilyen értelemben, egészen újszerű objektum, és kikerül a természetes szemléletünkből.

Ez megrázó felismerés, és egyik magyarázata lehet annak, hogy nem tudjuk bevinni a köztudatba!

Felidézzük Erhard Schmidt egy 1927-ből való tárgyalását [3], amelyben megmutatta, hogy az n dimenziós euklideszi térben nem tudunk olyan konstans negatív görbületű felületet előállítani, hogy egy euklideszi egyparaméteres mozgáscsoport egész térben érvényes transzformációjával a felületünket önmagába transzformálja. Ismert megadási formája egy ilyen csoportnak a következő közönséges differenciálegyenletrendszer:

$$\dot{x}_i = \sum_k a_{ik} x_k + a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

integrálásából származik, ahol az a_{ik}, a_i együtthatók konstansok, és a_{ik} antiszimmetrikus mátrix. A csoportparaméternek, ami szerint itt deriváltunk, bármit vehetünk, azzal a feltétellel, hogy a csoportoperációra nézve additív legyen. Vegyünk akkor egy olyan szingularitásmentes, konstans negatív görbületű felületet, amelyet egy ilyen mozgáscsoport önmagába transzformál. A mozgáscsoport pályaíve legyen $u = 0$, és a hozzá tartozó ortogonális geodetikus vonal legyen $v = \text{konst}$, amely ortogonális trajektoriája legyen $u = \text{konst}$. Ezek ismét a mozgáscsoport pályaívei lesznek. A v paraméter az $u = 0$ pálya ívhosszparamétere, míg az u paraméter a $v = \text{konst}$ pálya ívhosszparamétere.

Az $u = \text{konst}$ pálya v és v_t közötti $\triangle v$ ív darabjának egy transzformáció során a darab hossza fog megfelelni, amiért a $\frac{ds}{dv}$ az $u = \text{konst}$ görbén konstans marad. Tudván még, hogy $K = -1$, a felület első alapformája

$$\dot{s}^2 = \dot{u}^2 + (\operatorname{ch} u + \alpha \operatorname{sh} u)^2 \dot{v}^2, \tag{2}$$

ahol α konstans. A bevezetett koordináták az egész felületen értelmezettek, ahol $\operatorname{ch} u + \alpha \operatorname{sh} u \neq 0$. Mivel geodétikus koordinátarendszert vezetünk be, ezért

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)dv^2,$$

amikor is $K = -\frac{\sqrt{G}_{uu}}{\sqrt{G}}$, és innen adódik (2), hiszen $\sqrt{G} = |\operatorname{ch} u + \alpha \operatorname{sh} u|$,

$$\sqrt{G}_u = |\operatorname{sh} u + \alpha \operatorname{ch} u|$$

és

$$\sqrt{G}_{uu} = |\operatorname{ch} u + \alpha \operatorname{sh} u|.$$

A bevezetett koordináták az egész felületen értelmezettek, ahol $\operatorname{ch} u + \alpha \operatorname{sh} u \neq 0$.

Akkor alkalmazzuk az (2) $u < u_0$-ra, ha $u_0 > 0$ és $u > u_0$-ra, ha $u_0 < 0$, így mindenütt $u = 0$ a tárgyalandó u érték tartozik.

Vegyünk egy darabot $u = \bar{u}$ pályagörbén, és v-t vehetjük csoportparaméternek. Az (1) alapján

$$\left(\frac{ds}{dv}\right)^2 = \sum \alpha_{ik} x_i x_k + 2 \sum \alpha_i x_i + \alpha_0,$$

ahol α_{ik}, α_i az a_{ik} és a_i által meghatározottak, és nyilvánvalóan konstansok.

$$A = \max_{i,j,k} \{\alpha_{ik}, \alpha_j\}, \quad X = \max_{u=\bar{u}} |x_i|.$$

$$\left(\frac{ds}{dv}\right)^2 < \sum AAXX + 2 \sum AX + A <$$

$$< A^2 \big(n^2 X^2 + 2nX + 1\big) = A^2 (nX + 1)^2.$$

Nyilvánvaló, hogy $X < X_0 + |\bar{u}|$, ahol $X_0 = \max_{u=0} |x_i|$, de a (2) alapján

$$\left(\frac{ds}{dv}\right)^2 = (\operatorname{ch} \bar{u} + \alpha \operatorname{sh} \bar{u})^2,$$

így hát

$$\operatorname{ch} \bar{u} + \alpha \operatorname{sh} \bar{u} < A\big(1 + n|X_0 + \bar{u}|\big)$$

bármely $\bar{u}$-n, amelyre tetszőleges nagy érték tartozik. Ez nyilvánvaló lehetetlenség!

A tények azt mondják, hogy az E^4-ben (4 dimenziós euklideszi tér), az E^3-mal szemben más tulajdonságú felületek is vannak. Vagyis a felületek egy olyan geometriai családot alkotnak a 4 dimenziós térben, amelyeknek nincsen 3 dimenzióbeli analogonja. Mert a 3 dimenzióbeli felületek 4 dimenzióbeli megfelelői a hiperfelületek és az E^4-beli hiperfelületek öröklik az E^3-beli felületek tulajdonságait. Erre adok néhány példát: Efimov [4], [5] tételét általánosították (egy bizonyos szempont szerint) a hiperfelületekre. Magasabb dimenziókban az a probléma, hogy milyen görbületet vegyünk, mert ott létezik skalár, Gauss–Kronecker, Ricci-görbület és még sok más. Efimov tételét általánosították a Ricci-görbületre nézve. E. Schmidt tételét Csikós Balázs továbbfejlesztette [10]. Ezekkel a kérdésekkel Tilla Klotz Milnor több dolgozatában is foglalkozott [11]. Hilbert azon tételét, hogy csak a gömb az egyetlen pozitív konstans görbületű teljes felület, általánosította Antonio Ros a hiperfelületekre is, ha a skalárgörbletet és a Gauss–Kronecker-görbületet veszi alapul [9]. Ha a Gauss–Kronecker-görbületet vesszük, akkor könnyen belátható, hogy ha a Gauss–Kronecker-görbület nulla, akkor az a hiperfelület lényegében egyenesből származtatható – akárcsak a 3 dimenzióbeli nulla görbületű felületek!

2. A hiperbolikus sík a Hilbert térben (L. Bieberbach beágyazása)

Bieberbach 1932-ben megszerkesztett egy konstans negatív görbületű felületet egy végtelen megszámlálható dimenziójú euklideszi térben [3], amit ma Hilbert-térnek nevezünk. Ez a felület analitikus és teljes.

Legyen $z_n = x_n + i\,y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(u + i\,v)^n$, ahol $n = 1, 2, \dots$ és $x_1 = u$, $x_2 = v$, akkor $dz_n = \sqrt{n}(u + i\,v)^{(n-1)}(du + i\,dv)$. Innen adódik, hogy:

$$ds^2 = dz_1.\overline{dz_1} + dz_2\overline{dz_2} + \cdots = du^2 + dv^2 + dx_2^2 + dy_2^2 + \dots,$$

másfelől

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum dz_n\overline{dz_n} = \\ &= \sum \left[\sqrt{n}(u+iv)^{(n-1)}(du+idv)\right]\left[\sqrt{n}(u-iv)^{(n-1)}(du-idv)\right] = \\ &= \sum n(u^2+v^2)^{(n-1)}(du^2+dv^2). \end{aligned}$$

Ha $u^2 + v^2 < 1$, akkor $\sum n(u^2+v^2)^{(n-1)} = \frac{1}{(1-u^2-v^2)^2}$, ha pedig $ds^2 = \frac{1}{(1-u^2-v^2)^2}$, akkor K, vagyis a görbület $K = -4$.

Ez a metrika reguláris az $u^2 + v^2 = 1$ egyenletű kör belsejében, tehát $u^2 + v^2 < 1$ kell, hogy teljesüljön.

A fenti okoskodásban figyelembe vettük, hogy $\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \dots$, és $r = u^2 + v^2 < 1$, melyet deriválva kapjuk, hogy: $\frac{1}{(1-r)^2} = 1 + 2r + \cdots + nr^{(n-1)} + \dots$, és eszerint

$$\frac{1}{(1-u^2-v^2)^2} = \sum n(u^2+v^2)^{(n-1)}.$$

A $ds^2 = du^2 + dv^2 + dx_2^2 + dy_2^2 + \dots$ metrika egy $u, v, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n, \dots$ Descartes-i koordinátákkal megadott Hilbert-tér metrikáját adja. Nyilvánvaló, hogy az $x_n + iy_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(u+iv)^n$ egyenlettel megadott felületünk két paramétertől függ.

$$\Big(x_1 = u, \quad y_1 = v, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u^2+v^2), \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}uv,$$

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(u^3 - 3uv^2), \quad y_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(3vu^2 - v^3),$$

$$x_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u^4 - 4u^2v^2 + v^4), \quad y_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(6vu^3 - 6uv^3), \quad \dots,$$

$$x_n + iy_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(u+iv)^n.\Big)$$

Az $u, v, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n, \dots$ Descartes-i koordinátákkal megadott Hilbert-térben, figyelembe véve, hogy ha $r = u^2 + v^2$, és

$$x_2 + iy_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u+iv)^2, \qquad x_2 - iy_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u-iv)^2,$$

ahonnan következik, hogy

$$x_2^2 + y_2^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_2+v_2)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}r^2.$$

Innen pedig következik, hogy

$$u_2 + v_2 + x_2^2 + y_2^2 + \dots + x_n^2 + y_n^2 + \dots = r + \frac{r^2}{2} + \dots + \frac{r^n}{n} + \dots = -\ln(1-r).$$

A fentiek alapján beláttuk Bieberbach tételét, miszerint: A Bolyai–Lobacsevszkij-féle sík izometrikusan és analitikusan beágyazható egy végtelen dimenziós euklideszi térbe.

Érdekes megjegyezni, hogy még nem ismerünk explicit analitikus és izometrikus beágyazását a hiperbolikus síknak egy véges dimenziós euklideszi térbe.

3. A hiperbolikus sík a 6 dimenziós euklideszi térben

1955-ben Danilo *Blanuša* szerkesztett egy C^∞ osztályú beágyazást a 6 dimenziós euklideszi térbe!

Blanuša horváth matematikus az $\mathbf{E}^6$ euklideszi térben megadta a következő $\Phi(u, v)$ felületet:

$x_1, x_2, \ldots, x_6$ Descartes-féle koordinátákkal:

$$x_1(u,v) = x_1(u) = \int_0^u \sqrt{1 - f_1'(y)^2 - f_2'(y)^2}\, dy, \tag{3}$$

$$x_2(u,v) = f_1(u) \cos\big(v\psi_1(u)\big), \tag{4}$$

$$x_3(u,v) = f_1(u) \sin\big(v\psi_1(u)\big), \tag{5}$$

$$x_4(u,v) = f_2(u) \cos\big(v\psi_2(u)\big), \tag{6}$$

$$x_5(u,v) = f_2(u) \sin\big(v\psi_2(u)\big), \tag{7}$$

$$x_6(u,v) = x_6(v) = v \qquad -\infty < u, v < \infty, \tag{8}$$

ahol

$$f_1(u) = \frac{\varphi_1(u) shu}{\psi_1(u)}, \qquad f_2(u) = \frac{\varphi_2(u) shu}{\psi_2(u)},$$

$$\psi_1(u) = e^{5+2\left[\frac{1+|u|}{2}\right]}, \qquad \psi_2(u) = e^{6+2\left[\frac{|u|}{2}\right]},$$

$$\varphi_1(u) = \left(\frac{1}{A}\int_0^{1+u} \frac{\sin(\pi x)}{e^{\sin^{-2}(\pi x)}} dx\right)^{1/2}, \qquad \varphi_2(u) = \left(\frac{1}{A}\int_0^{u} \frac{\sin(\pi x)}{e^{\sin^{-2}(\pi x)}} dx\right)^{1/2},$$

$$A = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{e^{\sin^{-2}(\pi x)}} dx, \qquad A \approx 0{,}141327,$$

$\varphi_1(u)$ és $\varphi_2(u)$ a következő tulajdonságú:

$$0 \le \varphi_1(u) \le 1, \qquad 0 \le \varphi_2(u) \le 1,$$

$$\varphi_1(u)^2 + \varphi_2(u)^2 = 1, \quad \varphi_1(u) = \varphi_2(u+1), \quad u \in R.$$

ψ_2-nek szakadási pontjai vannak páros egész u értékekre, míg ψ_1-nek szakadási pontjai vannak páratlan egész u értékekre, de ezekben a pontokban φ_1 illetve φ_2 eltűnik az összes magasabb rendű deriváltjával, így f_1 illetve f_2 függvények $\mathbf{C}^\infty$ osztályúak. Úgyszintén,

$$f_i{}'(u) = \frac{\varphi_i(u) \operatorname{ch} u + \varphi_i{}'(u) \operatorname{sh} u}{\psi_i(u)}, \qquad i = 1,2,$$

ahol ψ_i egy lépcsős függvény és nulla a deriváltja:

$$\big|f_i{}'(u)\big| < \frac{e^{|u|}\big|\varphi_i(u)\big| + e^{|u|}\big|\varphi_i{}'(u)\big|}{\psi_i(u)} < \frac{19e^{|u|}}{\psi_i(u)}, \qquad i = 1,2,$$

$$\big|f_i{}'(u)\big| < 19e^{|u|-(4+|u|)} = \frac{19}{e^4} < \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad i = 1,2.$$

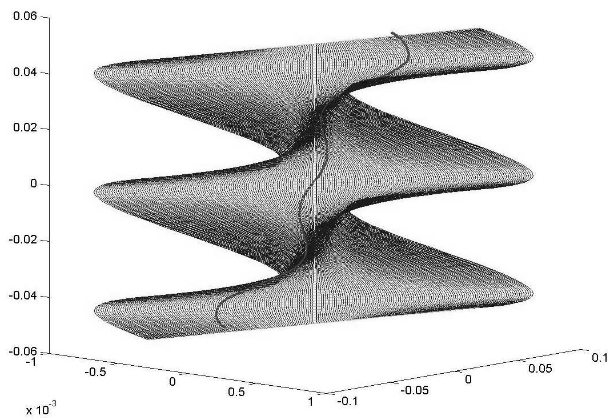
Figyelembe véve f_i fenti tulajdonságát, könnyű belátni, hogy

$$\sqrt{1 - {f_1}'(y)^2 - {f_2}'(y)^2}$$

valós, bármilyen u valós értékeire.

Blanuša megmutatta ([2]), hogy (3)–(8) egy $\mathbf{C}^\infty$ osztályú beágyazása a teljes (u, v) síknak $\mathbf{E}^6$-ba, míg $\Phi(u, v)$ indukált metrikája $\mathbf{E}^6$-ban $ds^2 = du^2 + \operatorname{ch}^2 u\, dv^2$, innen Φ-nek konstans negatív görbülete van.

Tétel (*Blanuša*'s [2] p. 218): (3)–(8) függvények $u, v \in \mathbf{R}$ egy $\mathbf{C}^\infty$ osztályú beágyazását adják a teljes hiperbolikus síknak $\mathbf{E}^6$-ba.



1. ábra

Ezt többen javították [1], [8].

Tominosuke Otsuki szerkesztett egy olyan teljes felületet, amely kompakt, és a görbülete ≤ 0 [12]. Ilyen sincs az E^3-ban, Efimov tétele alapján.

E^4 nagyon gazdag geometriai sokaságokban.

Már Hilbert felhívta a figyelmet, a nullagörbületű, teljes, kompakt felületre, a lapos tóruszra.

Továbbá, a Bolyai–Lobacsevszki-síkot, még immerzióval sem lehet megvalósítani az E^4-ben, mint egy általánosított forgásfelületet (tehát két tengely körüli forgatással):

$$x_1 = F(u) \cdot \cos(P \cdot v),$$
$$x_2 = F(u) \cdot \cos(P \cdot v),$$
$$x_3 = G(u) \cdot \cos(Q \cdot v),$$
$$x_4 = G(u) \cdot \cos(Q \cdot v).$$

Tehát nem létezik olyan F, G valós függvény (P, Q konstans), amelyekre a fenti felület teljes, és a görbülete konstans negatív lenne [6]!

Egy nagy differenciálgeométer, a tavalyelőtt elhunyt S. S. Chern 1951-ben vetette fel azt a még megválaszolatlan kérdést, hogy vajon az $\mathbf{E}^4$-ben létezik-e kompakt, sima és teljes konstans negatív görbületű felület. Tehát két alapvető kérdése még nyitott a „Bolyai–Gauss" felületek belső-geometria elméletének. Az egyik a fenti Chern-probléma, a másik az analitikus hiperbolikus sík explicit megadása véges (lehetőleg alacsony) dimenziós euklideszi terekben.

Bibliográfia

[1] E. R. Rozendorn, A realization of the metric $ds^2 = du^2 + f^2(u)\,dv^2$ in five-dimensional Euclidean space. (Russian. Armenian summary), *Akad. Nauk Armjan. SSR Dokl.,* **30** (1960), 197–199.

[2] Danilo Blanuša, Über die Einbettung hyperbolischer Räume in euklidische Räume, *Monatsh. Math.,* **59** (1955), 217–229.

[3] L. Bieberbach, Eine singularitätenfreie Fläche konstanter negativer Krümmung in Hilbertschen, *Raum. Comment. Math Helv.,* **4** (1932), 248–255.

[4] Smyth Brian, Xavier Frederico, Efimov's theorem in dimension greater than two, *Invent. Math.,* **90** (1987), 443–450.

[5] N. V. Efimov, Generation of singularities on surfaces of negative curvature, *Mat. Sb. N.S.,* **64** (1964), 286–320.

[6] Sabitov, I. Kh., Isometric immersions of the Lobachevskian plane in E^4. (Russian) *Sibirsk. Mat. Zh.,* **30** (1989), no. 5, 179–186, 218; translation in *Siberian Math. J.,* **30** (1989), no. 5, 805–811.

[7] Edward Belbruno, *Capture Dynamics and Chaotic Motions In Celestian Mechanics,* Princeton University Press (2004).

[8] Oláh-Gál Róbert: The n-dimensional hyperbolic spaces in E^{4n-3}, *Publ. Math. Debrecen,* **46/3–4** (1995), pp. 205–213.

[9] A. Ros, Compact hypersurfaces with constant scalar curvature and a congruence theorem, *J. Differential Geometry,* **27** (1988), no. 2, 215–220.

[10] Csikós Balázs: Equivariant isometric immersion, *New developments in differential geometry,* Budapest 1996, 103–110.

[11] Tilla Klotz Milnor: Complete open surfaces in E^3, Proc. Sympos. Pure Math. Vol. XXVII, Stanford Univ., Stanford Calif., 1973. Part 1, pp. 183–187.

[12] Otsuki, Tominosuke: A construction of closed surfaces of negative curvature in E^4, *Math. J. Okayama Univ.,* **3** (1954). 95–108.

Róbert Oláh-Gál: On the embedding of the hyperbolic plane

In this paper we present a survay of the history results on the embedding of the hyperbolic plane. We reconsider Hilbert's, Bieberbach's, E. Schmidt's, Blanuša's theorems concerning to this problem and we make some philosophical observations. An explicite construction of an analytical embedding of the hyperbolic plane into E^n is unknown even these days.

Oláh-Gál Róbert

Babeş–Bolyai Egyetem
Csíkszeredai Tagozat
Románia

MENNYIRE ÁLTALÁNOSÍTHATÓ A HIPERBOLIKUS GEOMETRIA?

SZENTHE JÁNOS

Miután Bolyai János 1823-ban, majd Nyikoláj Ivanovics Lobacsevszkij 1829-ben [27], [31] eljutottak a hiperbolikus geometria felfedezéséhez, a geometriai vizsgálatok számára egy teljesen új, az addigiaknál jóval általánosabb keretet teremtett Bernhardt Riemann, mikor az 1854-ben készített habilitációs értekezésében bevezette a Riemann-sokaság fogalmát [26]. Rövidesen ugyanis felismerték, hogy egy hiperbolikus tér úgy is felfogható, mint egy olyan Riemann-sokaság, melynek metszetgörbülete egy állandó negatív érték. De felismerték azt is, hogy egy euklideszi tér, illetve egy szférikus tér szintén felfogható úgy is, mint egy olyan Riemann-sokaság melynek metszetgörbülete állandó nulla, illetve pozitív érték. Így az állandó görbületű Riemann-sokaságok elmélete, amit Felix Klein egy 1890-ben megjelent munkájában vizsgált [17], és nemeuklideszi geometria néven népszerűsített, a 19. század nagy felfedezése lett. Később kiderült azonban, hogy az állandó görbületű terek úgy is tekinthetők, mint egy jóval általánosabb térfogalomnak, amit szimmetrikus tér néven Élie Cartan 1926-ban vezetett be [7], legegyszerűbb speciális esetei. Bár e szimmetrikus terek nagyon sokfélék, mégis egységes, igen gazdag elméletük van [12]. Ez az elmélet a 20. század geometriájának kiemelkedő alkotása volt. Felvetődik tehát a kérdés, hogy létezik-e a szimmetrikus tereket is tartalmazó olyan még bővebb osztálya a Riemann-sokaságoknak, amit szintén egy közös geometriai tulajdonság jellemez és ugyanúgy érdekes, igen gazdag elméletük van. Mivel a szimmetrikus terek a homogén Riemann-sokaságok egy osztályát alkotják, célszerűnek látszik a keresést ezek körében kezdeni. E kérdés nyitott és úgy tűnik, hogy egyszerű pozitív válasz nem adható rá; ez lesz látható az alábbiakból.

1. Néhány alapvető fogalom és tétel a homogén Riemann-sokaságokkal, a szimmetrikus terekkel, és az állandó görbületű terekkel kapcsolatban

Mivel a fentebb említett kérdés a homogén Riemann-sokaságokkal kapcsolatos, ezért először is az ezek elméletéből szükséges előismerteteket foglaljuk össze.

Legyen M egy sima sokaság, G egy Lie-csoport és minden egyes $g \in G$ csoportelemhez legyen egy $\Phi_g : M \to M$ diffeomorfizmus hozzárendelve úgy, hogy a következő két feltétel teljesül:

(1) $\Phi_e = Id_M$, ahol $e \in G$ az egységelem;

(2) $\Phi_g \circ \Phi_{g'} = \Phi_{gg'}$, $g, g' \in G$.

Ekkor azt mondjuk, hogy a G *csoport hat* az M sokaságon; ezt a *csoporthatást* akkor mondjuk *simának,* ha az így keletkező

$$\Phi : G \times M \ni (g, z) \mapsto \Phi_g(z) \in M$$

leképezés sima. A Φ csoporthatást *tranzitívnak* mondjuk abban a speciális esetben, mikor bármely $x, y \in M$ esetén van olyan $g \in G$, hogy

$$y = \Phi_g(x)$$

teljesül. Tranzitív csoporthatás létezése esetén az M sima sokaságot *homogénnek* mondjuk.

Legyen mostmár az M sokaságon egy $\langle , \rangle$ Riemann-metrika adott; akkor mondjuk, hogy a Φ sima csoporthatás *izometrikus,* ha minden egyes $\Phi_g : M \to M$, $g \in G$ diffeomorfizmus izometria. Egy Riemann-sokaságot *homogénnek* mondunk, ha létezik rajta tranzitív izometrikus csoporthatás.

Jól ismert tény, hogy az euklideszi, a hiperbolikus és a szférikus terek izometriacsoportjai tranzitívek ezeken a tereken, tehát ezek homogén Riemann-sokaságokként is felfoghatók. Sőt e terek izometriacsoportjai bizonyos értelemben a lehető legnagyobbak. Tekintsük ugyanis egy $\big(M, \langle , \rangle\big)$ Riemann-sokaság izometriáinak $\mathcal{I}\big(M, \langle , \rangle\big)$ halmazát; ez nyilván csoport az izometriák kompoziciójára nézve, amit a Riemann-sokaság *teljes izometriacsoportjának* nevezünk. Sőt kanonikus Liecsoport struktúrával rendelkezik a Meyers–Steenrod-tétel szerint ([18], I, 239–240). Ha pedig az M dimenziója m, akkor a

$$\dim \mathcal{I}\big(M, \langle , \rangle\big) \leq \frac{m(m+1)}{2}$$

egyenlőtlenség is érvényes, és itt az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha e Riemann-sokaság egyszeresen összefüggő és állandó görbületű ([18], I, 238–239).

Rögzítsünk egy $\big(M, \langle , \rangle\big)$ Riemann-sokaságban egy z pontot, és tekintsük ennek egy U normális környezetét. Ekkor a z pontból kiinduló geodetikusok egyrétűen fedik le a $U - \{z\}$ halmazt, tehát egy $x \in U - \{z\}$ ponthoz tartozik pontosan egy olyan természetes paraméterezésű

$$\gamma_x : (-\delta, \delta) \to M$$

geodetikus szakasz, hogy $\gamma_x(0) = z$ és $\gamma_x(\xi) = x$, ahol $\xi \in (-\delta, \delta)$. Így egy $\Sigma_z : U \to U$ leképezést értelmez a következő definíció:

$$\Sigma_z : U \ni x \mapsto \gamma_x(-\xi) \in U,$$

amit a z pontra vonatkozó *geodetikus tükrözésnek* nevezünk. A Σ_z nyilván involutív bijekciója az U halmaznak, és bizonyítható, hogy diffeomorfizmus ([12], 198–201). Ha speciálisan a Σ_z izometrikus is, akkor a Riemann-sokaság *lokális szimmetriájának* nevezzük. Egy Riemann-sokaságot akkor mondunk *lokálisan szimmetrikusnak,* ha minden pontjában létezik egy lokális szimmetria. Ha egy $\Sigma_z : U \to U$ lokális szimmetriát ki lehet terjeszteni egy $\widetilde{\Sigma}_z : M \to M$ involutív izometriává, akkor ezt a Riemann-sokaság z pontra vonatkozó *szimmetriájának* nevezzük. Egy Riemann-sokaságot pedig akkor mondunk *szimmetrikusnak* ha minden pontjában létezik szimmetriája ([12], 205–223). Jól ismert tény, hogy egy euklideszi, hiperbolikus, vagy szférikus térben minden ponthoz tartozik a térnek egy szimmetriája, vagyis e terek a szimmetrikus Riemann-sokaságok, vagy más szóval a *szimmetrikus terek* közé tartoznak. Egy szimmetrikus Riemann-sokaságban minden geodetikus teljes, vagyis a teljes $\mathbb{R}$ számegyenesen értelmezett ([18], II, 222–230). Ha tehát $\gamma : \mathbb{R} \to M$ egy természtes paraméterezésű geodetikus és $a = \gamma(\alpha)$, $b = \gamma(\beta)$, akkor a Σ_a, Σ_b szimmetriák

$$\Sigma_b \circ \Sigma_a : M \to M$$

szorzatát γ-menti *transzvekciónak* nevezzük ([12], 209). Bizonyítható, hogy egy szimmetrikus Riemann-sokaság transzvekciói által generált csoport tranzitív a sokaságon, vagyis a szimmetrikus Riemann-sokaságok homogének ([18], II, 236).

Azt a kérdést, hogy a szimmetrikus Riemann-sokaságok milyen helyet foglalnak el a homogén Riemann-sokaságok körében, algebrai eszközökkel lehet legegyszerűbben kezelni. Erről lesz szó a most következőkben. Tekintsünk először is egy M homogén Riemann-sokaságot és rögzítsük egy $o \in M$ pontját, majd tekintsük a csoporthatásban e pontban tartozó $H = G_o \subset G$ stabilitási részcsoportot; ismeretes, hogy ez kompakt ([18], I, 239–240). Mivel $\Phi_h(o) = o$, $h \in H$, ezért a Φ_h lineáris érintőleképezése

$$T_o\Phi_h : T_oM \ni v \mapsto T_o\Phi_h v \in T_oM, \quad h \in H$$

a H stabilitási részcsoport hatását értelmezi a T_oM érintőtéren, amit *lineáris izotrópia-reprezentációnak* neveznek. Mivel a Φ csoporthatás izometrikus, ezért

$$\langle T_o\Phi_h v, T_o\Phi_h w\rangle_z = \langle v, w\rangle_z, \quad v, w \in T_oM, \quad h \in H$$

is érvényes, vagyis a $\langle , \rangle_z$ euklideszi belső szorzás invariáns a fenti lineáris izotrópia-reprezentációval szemben. Egyszerűen igazolható a fenti állítás megfordítása, vagyis az, hogy ha egy M sima sokaságon adott egy tranzitív sima csoporthatás és a T_oM téren adott egy, a lineáris izotrópia reprezentációval szemben invariáns euklideszi belső szorzás, akkor ez egyértelműen terjeszthető ki egy invariáns Riemann-metrikává az M sokaságon. Úgy tűnik tehát, hogy a homogén Riemann-metrikák egyszerűen származtathatók az M sokaságon. Viszont a megfelelő egzisztencia- és unicitási tételek, valamint az így keletkező homogén Riemann-sokaságok geometriájának vizsgálata már lényegesen mélyebb eszközöket igényel.

Tekintsük ezért egy M homogén Riemann-sokaság esetén egy $o \in M$ ponthoz tartozó $H = G_o$ stabilitási részcsoporttal képezett baloldali mellékosztályok G/H halmazának kanonikus sima sokaság struktúráját. Ekkor a

$$\chi : G/H \ni gH \mapsto \Phi(gH, o) \in G(o) = M$$

leképezés diffeomorfizmus, ami lehetővé teszi azt is, hogy a $\langle , \rangle$ Riemann-metrikát a G/H sokaságra általa visszahúzva, azon egy Riemann-metrikát kapjunk. Sőt a G csoportnak egy $\Lambda_g : G/H \to G/H$, $g \in G$ sima hatása is értelmezhető a következő definícióval:

$$\Lambda_g : G/H \ni aH \mapsto g(aH) = (ga)H \in G/H.$$

Továbbá bizonyítható az is, hogy az így keletkező következő diagram kommutatív:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Phi_g} & M \\ \chi \Big\downarrow & & \chi \Big\downarrow \\ G/H & \xrightarrow{\Lambda_g} & G/H \end{array}$$

és így a Λ_g, $g \in G$ is izometria lesz. Tehát az M homogén Riemann-sokaság azonosítható azzal, ami a G Lie-csoportból annak $H \subset G$ kompakt részcsoportjával képezett G/H hányados sokaságán a Riemann-metrika visszahúzásával keletkezik. Egy G/H hányadossokaságon a $\Lambda_g : G/H \to G/H$, $g \in G$ hatással szemben invariáns Riemann-metrikát *balinvariánsnak* mondunk. Így az M homogén Riemann-sokaság vizsgálata a G/H hányadossokaságokon adott balinvariáns Riemann-metrikával keletkező Riemann-sokaságéra vezethető vissza. Lényegében ez a lépés teszi lehetővé az algebrai eszközök alkalmazását.

Ha ugyanis a G Lie-csoport $\mathfrak{g}$ Lie-algebráját a T_eG érintőtérrel és a H részcsoport $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ részalgebráját a $T_eH \subset T_eG$ altérrel azonosítjuk, akkor a $\pi : G \to G/H$ kanonikus projekció

$$T_e\pi : \mathfrak{g} \to T_H(G/H)$$

lineáris érintőleképezésének magja a $\mathfrak{h}$ részalgebra. Ha tehát $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ a $\mathfrak{h}$ részalgebrához komplementáris altér, akkor az erre történő megszorítással adódó

$$T_e\pi \lceil \mathfrak{m} : \mathfrak{m} \to T_H(G/H)$$

egy vektortér-izomorfizmus. Viszonylag egyszerűen kezelhető és igen fontos az a speciális eset, mikor

$$\mathrm{Ad}\,(h)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}, \quad h \in H$$

teljesül, vagyis az $\mathfrak{m}$ altér invariáns az adjungált reprezentációval szemben; ekkor azt mondjuk, hogy $\mathfrak{m}$ *reduktív komplementum,* a $(G/H, \mathfrak{m})$ párt pedig *reduktív homogén sokaságnak* nevezik ([18], II, 190). Ha egy reduktív komplementumon adott egy

$$\langle , \rangle_{\mathfrak{m}} : \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \to \mathbb{R}$$

euklideszi belső szorzás, és ez invariáns az

$$\mathrm{Ad}\,(h) : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}, \quad h \in H$$

adjungált reprezentációval szemben, akkor $\langle , \rangle_{\mathfrak{m}}$ kiterjeszthető a G/H sokaságon egy a Λ csoporthatással szemben invariáns Riemann-metrikává ([18], II, 200–201).

Mint általában a Riemann-sokaságoknál, úgy a homogének esetén is a geometriai kérdések tanulmányozásában fontos szerepe van a Levi-Cività-konnexiónak, vagyis kovariáns deriválásnak. Homogén sokaság esetén ez szintén invariáns, ami a következőt jelenti. Legyen M sima sokaság és $\mathcal{T}(M)$ e sokaságon értelmezett $X : M \to TM$ sima vektormezők halmaza. Ha $\varphi : M \to M$ diffeomorfizmus, akkor ez a

$$\varphi_* X = T\varphi \circ X \circ \varphi^{-1}$$

definícióval egy újabb sima vektormezőt szolgáltat, tehát egy

$$\varphi_* : \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$$

leképezést indukál. Ha most már

$$\nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$$

kovariáns deriválás az M sokaságon, akkor a következő definíció:

$$\varphi\nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \ni (X, Y) \mapsto \left(\varphi^{-1}\right)_* \left(\nabla_{(\varphi_* X)}(\varphi_* Y)\right) \in \mathcal{T}(M)$$

egy újabb kovariáns deriválást értelmez ([12], 26–28). Akkor mondjuk, hogy ∇ *invariáns* a φ diffeomorfizmussal szemben, ha $\varphi\nabla = \nabla$ érvényes. Legyen adott egy M sokaságon egy ∇ kovariáns deriválás és egy G Lie-csoport $\Phi_g : M \to M$, $g \in G$ sima tranzitív hatása; ha ∇ invariáns minden egyes Φ_g, $g \in G$ diffeomorfizmussal szemben, akkor ezt a homogén sokaság *invariáns konnexiójának* nevezzük ([12], 26–28). Egy homogén Riemann-sokaság Levi-Cività-kovariáns deriválása invariáns konnexió [25].

Mivel a kovariáns deriválás nem tenzor jellegű mennyiség, ezért egy $M \simeq G/H$ homogén sokaságon értelmezett invariáns kovariáns deriválást nem lehet egyetlen érintőtéren történő viselkedésével meghatározni, eltérően az invariáns Riemann-metrikától. Viszonylag egyszerűen kezelhető ez a kérdés abban az esetben, mikor a homogén sokaság reduktív, vagyis a $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ részalgebrának létezik egy $\mathfrak{m}$ reduktív komplementuma. Tekintsük ugyanis az $\mathrm{Exp} : \mathfrak{g} \to G$ exponenciális leképezést és a

$$\pi \circ \mathrm{Exp} : \mathfrak{g} \to G/H$$

leképezésnek az $\mathfrak{m}$ altérre történő ρ megszorítását. Bizonyítható, hogy létezik a $0 \in \mathfrak{m}$ olyan $U \subset \mathfrak{m}$ környezete, amit egyrészt a ρ diffeomorf módon képez le a

$H \in G/H$ egy U' környezetére, másrészt azt a $\sigma = \operatorname{Exp}\lceil \mathfrak{m}$ is diffeomorf módon képez le egy $U^0 \subset G$ sima részsokaságra [25]. Így tehát egy

$$\delta = \sigma \circ \rho^{-1} : U' \to U^0$$

diffeomorfizmus adódik. Egy $X' : U' \to TU'$ sima vektormezőt *kanonikusnak* mondunk, ha

$$X' = T\bigl(\delta^{-1}\bigr) \circ X \circ \delta$$

alakban állítható elő alkalmas $X \in \mathfrak{m}$ segítségével, ahol a $\mathfrak{g}$ elemeit most mint a G Lie-csoporton értelmezett balinvariáns vektormezőket tekintjük. Legyen most már adott egy ∇ invariáns konnexió a reduktív homogén sokaságon; ekkor egy

$$\alpha : \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$$

leképezést értelmez a következő definíció:

$$\alpha : \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \ni (X, Y) \mapsto T\rho^{-1} \nabla_{X'} Y' \in \mathfrak{m},$$

és bizonyítható, hogy ez bilineáris, továbbá az is, hogy ez az α leképezés ekvivariáns az adjungált reprezentációval szemben, vagyis

$$\alpha\bigl(\operatorname{Ad}(h)X, \operatorname{Ad}(h)Y\bigr) = \operatorname{Ad}(h)\alpha(X, Y), \quad X, Y \in \mathfrak{m}, \quad h \in H$$

érvényes [25]. Sőt megfordítva, minden olyan α bilineáris leképezéshez, mely a fenti ekvivariancia tulajdonsággal rendelkezik, egyértelműen tartozik egy ∇ invariáns konnexió a G/H reduktív homogén sokaságon [25].

A lehető legegyszerűbb olyan α leképezés, melyből geometriailag is érdekes invariáns konnexió származik egy G/H reduktív homogén sokaságon a következő:

$$\alpha : \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \ni (X, Y) \mapsto \frac{1}{2}[X, Y]_{\mathfrak{m}} \in \mathfrak{m},$$

ahol $[X, Y]_{\mathfrak{m}}$ a $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ reduktív dekompozíció által definiált komponenst jelenti. A fenti α által indukált invariáns konnexiót a reduktív homogén sokaság *természetes torziómentes konnexiójának* nevezik, ugyanis belátható, hogy ennek torziótenzora nulla ([18], II, 197).

A fenti előzmények alapján most már kijelölhető a szimmetrikus sokaságok helye a homogén Riemann-sokaságok körében.

Tekintsünk először is egy egyszeresen összefüggő szimmetrikus Riemann-sokaságot, és legyen ennek de Rham-felbontásában az euklideszi faktor M_0; ekkor tehát az $M = M_0 \times M'$ Riemann-szorzat adódik, és nyilván elég az M' nem-triviális faktorral foglalkozni. Ez szintén szimmetrikus Riemann-sokaság, és a teljes izometriacsoportja $G = \mathcal{I}\bigl(M', \langle , \rangle\bigr)$ egy féligegyszerű Lie-csoport ([12], 229–244, [18], II, 246). Ha most már $o \in M'$ tetszőlegesen rögzített pont, akkor a

$$H = G_o \subset G = \mathcal{I}\bigl(M, \langle , \rangle\bigr)$$

stabilitási részcsoport kompakt, és a G féligegyszerű Lie-csoport

$$B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$$

Cartan–Killing-formájának a $\mathfrak{h}$ részlagebrára történő megszorítása negatív definit. Így a $\mathfrak{h}$ ortogonális komplementuma $\mathfrak{h}^\perp$ egy $\mathrm{Ad}\,(H)$-invariáns altér, vagyis $\mathfrak{m} = \mathfrak{h}^\perp$ jelöléssel erre

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$$

érvényes, ez pedig a reduktív komplementum definíciójának infinitézimális változata ([12], 229–244, [18], II, 225–246).

Másodszor, bizonyítható, hogy a $\mathfrak{h}$ stabilitási részalgebrára és $\mathfrak{m}$ kanonikus reduktív komplementumra

$$[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$$

teljesül. Így adódnak a következő *Cartan-relációk:*

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}, \quad [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$$

([18], II, 225–226); lényegében ezek jellemzik algebrailag a szimmetrikus tereket a homogén Riemann-sokaságok körében. Ugyanis konkréten érvényes a következő: Egy kanonikus kölcsönösen egyértelemű megfeleltetés létesíthető az egyszeresen összefüggő G Lie-csoportokból alkalmas $H \subset G$ összefüggő részcsoportokkal keletkező szimmetrikus Riemann-sokaságok halmaza és a Cartan-relációkat teljesítő $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{m})$ hármasok halmaza között ([18], II, 226).

A fentiek megfordításaként a következő bizonyítható: Ha G féligegyszerű Lie-csoport és H ennek olyan kompakt részcsoportja, hogy $\mathfrak{h}$ Lie-algebrájának a Cartan–Killing-formára vonatkozó $\mathfrak{h}^\perp$ ortogonalizátorára a Cartan-relációk érvényesek, akkor az $\mathfrak{m} = \mathfrak{h}^\perp$ reduktív komplementumra megszorított B Cartan–Killing-forma egy $\mathrm{Ad}\,(h)$, $h \in H$ invariáns euklideszi belső szorzás az $\mathfrak{m}$ reduktív komplementumon, tehát egy invariáns Riemann-metrikát indukál a G/H homogén sokaságon, ami pedig ezzel már egy szimmetrikus sokaságot képez ([12], 229–244).

2. Az orbit-geodetikusú és a természetesen reduktív homogén Riemann-sokaságok

Ismeretes hogy az euklideszi, a hiperbolikus és a szférikus terekben bármely geodetikus, vagyis egyenes, orbitja valamely 1 paraméteres izometriacsoportnak. Belátható, hogy egy M szimmetrikus tér bármely $\gamma : \mathbb{R} \to M$ geodetikusa esetén az $a = \gamma(\alpha)$, $b = \gamma(\beta)$ pontokhoz tartozó transzvekció, vagyis a szimmetriák

$$\Sigma_b \circ \Sigma_a : M \to M$$

szorzata, a γ geodetikust önmagára képező izometria, ami csak a $\beta - \alpha$ értéktől függ ([12], 209; [18], II, 235–236). Így a γ geodetikushoz tartozó transzvekciók az

M izometriacsoportjában egy olyan 1 paraméteres részcsoportot alkotnak, amely a γ geodetikust önmagára képezi, vagyis a γ ennek a részcsoportnak orbitja.

Általánosságban, ha $\gamma : \mathbb{R} :\to M$ olyan geodetikusa egy $\big(M\langle,\rangle\big)$ homogén Riemann-sokaságnak, hogy ez orbitja az $\mathcal{I}\big(M,\langle,\rangle\big)$ teljes izometriacsoport valamely 1 paraméteres részcsoportjának, akkor azt mondjuk, hogy a γ *orbit-geodetikus.* Ha pedig az $\big(M,\langle,\rangle\big)$ minden egyes geodatikusa ilyen, akkor ezt *orbit-geodetikusú homogén Riemann-sokaságnak* nevezzük.

A fenti fogalommal kapcsolatos angol nyelvű terminológia nem egységes és nem is következetes. Egyes szerzők, míg az orbit-geodetikusra a „homogenous geodesic" elnevezést használják, addig az orbit-geodetikusú homogén Riemann-sokaságokra a „geodesic orbit space" elnevezést, „g. o. space" rövidítéssel alkalmazzák.

Mint láttuk, a szimmetrikus terek orbit-geodetikusú homogén Riemann-sokaságok, azonban ezeken a szimmetrikus tereken kívül léteznek még más orbit-geodetikusúak is. Ilyenek a természetesen reduktív homogén Riemann-sokaságok, definíciójuk a következő:

Legyen egy $(M,\mathfrak{m})$ reduktív homogén sokaságon egy olyan $\langle,\rangle$ invariáns Riemann-metrika adott, hogy ennek Levi-Cività-kovariáns deriválása a reduktív sokaság természetes torziómentes konnexiójával azonos; ekkor mondjuk, hogy a $\big(M,\langle,\rangle\big)$ homogén Riemann-sokaság *természetesen reduktív.*

A természetesen reduktív homogén Riemann-sokaságok egyik fontos tulajdonságát adja meg a következő tétel ([18], II, 192–197):

Legyen a $\big(G/H,\langle,\rangle\big)$ *homogén Riemann-sokaság természetesen reduktív az* $\mathfrak{m}\subset\mathfrak{g}$ *reduktív komplementumra nézve. Ekkor minden egyes* $\mathfrak{m}-\{0\}$ *esetén a*

$$\gamma(\tau)=\pi\circ\operatorname{Exp}(\tau X),\quad \tau\in\mathbb{R}$$

görbe, amely nyilván orbitja a

$$\mathbb{R}\ni\tau\mapsto\operatorname{Exp}(\tau X)\in G$$

1 paraméteres izometriacsoportnak a $\Lambda : G\times(G/H)\to G/H$ *hatásnál, egyben geodetikusa is a Riemann-sokaságnak.*

Mivel pedig a Λ csoporthatás izometrikus, ezért a sokaság bármely geodetikusa egyben a G csoport valamely 1 paraméteres részcsoportjának orbitja, vagyis egy orbit-geodetikus. Így a $\big(M,\langle,\rangle\big)$ homogén Riemann-sokaság orbit-geodetikusú.

Ha sikerülne azt bebizonyítani, hogy minden orbit-geodetikusú homogén Riemann-sokaság egyben természtesen reduktív is, akkor ezzel a homogén Riemann-sokaságok egy olyan újabb osztálya adódna, amit egyrészről egy markáns geometriai tulajdonság jellemez, másrészről pedig algebrai eszközökkel is jól körülhatárolható, és a szimmetrikus terek osztályát is magában foglalja. Így tehát a hiperbolikus geometria egy igen messzemenő általánosításához jutnánk.

A fenti problémával akkor kerültem szembe először, mikor egy dolgozatot kaptam referálásra, melyben a szerzők azt kívánták bizonyítani, hogy minden orbit-geodetikusú homogén Riemann-sokaság egyben természetesen reduktív, de a dolgozat hibás volt. Mivel a dolgozatban közölt „bizonyítás" menthetetlen volt, megpróbáltam ezt az állítást egy újabb megközelítéssel bizonyítani. Kiindulásul a következő egyszerű állítást bizonyítottam:

Legyen egy G/H hányadossokaságon adva egy torziómentes és invariáns ∇ konnexió, és legyen $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ a $\mathfrak{h}$ olyan reduktív komplementuma, hogy minden egyes $X \in \mathfrak{p}$ esetén a

$$\mathbb{R} \ni \tau \mapsto \mathrm{Exp}\,(\tau X) \in G$$

egy geodetikus, akkor ∇ a $\mathfrak{p}$ komplementumhoz tartozó természtes torziómentes konnexió.

Egy, a fenti feltételnek megfelelő, $\mathfrak{p}$ reduktív komplementumot *geodetikus komplementumnak* fogjuk nevezni. Így természetes gondolat volt az, hogy egy orbit-geodetikusú homogén sokaság esetén egy olyan reduktív komplementum létezését bizonyítsam be, amely egyben geodetikus komplementum. Pontosabban, kiindulva egy olyan $(G/H, \mathfrak{m})$ reduktív homogén sokaságból, mely orbit-geodetikusú, egy olyan $\mathfrak{p}$ reduktív komplementum létezését akartam bizonyítani, mely geodetikus komplementum.

Egy adott reduktív komplementumból a többiek előállítása a következő egyszerű összefüggés segítségével történhet:

Ha $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ reduktív komplementum és $\lambda : \mathfrak{m} \to \mathfrak{h}$ olyan vektortér-homomorfizmus, amely $\mathrm{Ad}\,(H)$*-ekvivariáns, vagyis*

$$\mathrm{Ad}\,(h)\lambda(X) = \lambda\big(\mathrm{Ad}\,(h)X\big), \quad X \in \mathfrak{m}, \quad h \in H$$

érvényes, akkor a

$$\mathfrak{p} = \big\{X + \lambda(X) \mid X \in \mathfrak{m}\big\}$$

halmaz is reduktív komplementum.

A fenti megállapítások adták a motivációt, hogy a következő állítást bizonyítsam:

Legyen G/H egy olyan hányadossokaság, melyhez egy $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ reduktív komplementum tartozik és ∇ olyan torziómentes invariáns konnexió, mellyel az orbit-geodetikusú lesz. Ekkor létezik egy olyan

$$\xi : \mathfrak{m} \to \mathfrak{h}$$

homogén és $\mathrm{Ad}\,(H)$*-ekvivariáns leképezés, hogy minden egyes $X \in \mathfrak{m}$ esetén az $X + \xi(X) \in \mathfrak{g}$ Lie-algebra-elemhez tartozó*

$$\mathbb{R} \ni \tau \mapsto \pi \circ \mathrm{Exp}\,\Big(\tau\big(X + \xi(X)\big)\Big) \in G/H$$

egy orbit-geodetikus. A ξ leképezés sima az $\mathfrak{m} - \{0\}$ halmazon.

Valójában persze azt szerettem volna bizonyítani, hogy a ξ leképezés vektortér-homomorfizmus. Ez ξ homogén volta miatt teljesülne is akkor, ha a ξ a $0 \in \mathfrak{m}$ pontban is sima lenne, amit viszont már nem sikerült bizonyítanom. Miután a fenti eredményt 1976-ban publikáltam [28], alkalom adódott, hogy több olyan kutatóval konzultáljak, akik a homogén sokaságok elméletével foglalkoztak; egyöntetű volt a véleményük, hogy a ξ sima volta igaz. Sőt időközben megtudtam azt is, hogy W. Ambrose és I. M. Singer még egy 1958-ban megjelent dolgozatukban [3] is azt állították, hogy minden orbit-geodetikusú homogén Riemann-sokaság előáll természetesen reduktívként. Mivel a ξ sima voltát ezek után sem sikerült igazolnom, felhagytam a további próbálkozással.

A fent ismertetett problémával kapcsolatban kialakult elképzelések váratlan gyökeres átalakulását okozta A. Kaplan 1983-ban megjelent dolgozata [16]; ebben ugyanis megadott egy olyan orbit-geodetikusú homogén Riemann-sokaságot, amely nem állítható elő mint természetesen reduktív homogén Riemann-sokaság. Konkrétan, ez a homogén Riemann-sokaság egy úgynevezett általánosított Heisenberg-csoporton egy alkalmas balinvariáns Riemann-metrika megadásával keletkezik, ez az általánosított Heisenberg-csoport pedig egy 6 dimenziós kétlépcsős nilpotens Lie-csoport, melynek centruma 2 dimenziós.

Így azután A. Kaplan példája nyomán újabb vizsgálatok indultak abból a célból, hogy megadják azokat a orbit-geodetikusú homogén Riemann-sokaságokat, melyek nem állíthatók elő mint természetesen reduktív homogén sokaságok. A vizsgálatok többsége lényegében ezeknek a sokaságoknak algebrai eszközökkel történő előállításával folyt, és egyben bizonyos osztályozásukat is szolgáltatta.

A vizsgálatok első eredményei O. Kowalski és L. Vanhecke egy dolgozatában jelentek meg 1991-ben [23]. Ebben a dolgozatban a problémát az alacsonyabb dimenziójú esetekben oldják meg. A dolgozatuk fő eredményei nagy vonalakban a következők:

(a) *Minden olyan orbit-geodetikusú homogén Riemann-sokaság, melynek dimenziója ≤ 4, előáll mint természetesen reduktív homogén sokaság.*

(b) *Egy 5 dimenziós $M = G/H$ orbit-geodetikusú homogén Riemann-sokaság vagy eleve természetesen reduktív, vagy előállítható olyan $M = G'/H'$ alakban is, ami már $SU(2)$-izotrópiatípusú, és így természtesen reduktív.*

(c) *Azoknak a 6 dimenziós orbit-geodetikusú homogén Riemann-sokaságoknak a listája, melyek nem állíthatók elő természetesen reduktívként, explicite megadható. A listában szerepel A. Kaplan példája és olyan kétlépcsős nilpotens Lie-csoportok 2 dimenziós centrummal és balinvariáns metrikával, melyek közel állnak e példához; valamint kompakt egyszeresen összefüggő homogén Riemann-sokaságok is.*

A felsorolt eredmények származtatásában az egyik fő eszköz az a fentebb már említett

$$\xi : \mathfrak{m} \to \mathfrak{h}$$

leképezés volt, amit korábban konstruáltam meg [28], és erre itt a *geodetikus gráf* elnevezést vezették be. De a ξ leképezésen kívül alkalmazták azokat az eredményeimet is, melyeket a ξ konstrukciójában használtam [28]. Ezek az eredmények egy invariáns konnexióval ellátott homogén sokaság orbit-geodetikusainak algebrai eszközökkel történő kezelését tették lehetővé. Így ezeket az eredményeket is részletesen ismertetik, részben azért, mert én azokat torziómentes invariáns konnexió esetére dolgoztam ki, míg ők invariáns Riemann-metrika Levi-Cività-kovariáns deriválásának speciálisabb esetére. Egy ilyen eredmény, mely a ξ geodetikus gráf konstrukciójában is lényeges szerepű, a következő:

Legyen $(G/H, \mathfrak{m})$ egy reduktív homogén sokaság és $X \in \mathfrak{m} - \{0\}$ esetén legyen

$$\mathfrak{q}_X = \big\{A \in \mathfrak{h} \mid [A, X] = \lambda X,\ \lambda \in \mathbb{R}\big\},$$

$$\mathfrak{n}_X = \big\{B \in \mathfrak{h} \mid [B, A] \in \mathfrak{q}_X,\ A \in \mathfrak{q}_X\big\}.$$

Ha egy ∇ torziómentes kovariáns deriválás adott a G/H sokaságon és $X \in \mathfrak{m} - \{0\}$, $A \in \mathfrak{h}$ esetén a

$$\gamma : \mathbb{R} \ni \tau \mapsto \pi \circ \operatorname{Exp}\big(\tau(X + a)\big) \in G/H$$

görbe ennek geodetikusa, akkor $A \in \mathfrak{n}_X$ érvényes.

A geodetikus gráf alkalmazásával elért eredmények nyomán számos további vizsgálat történt e fogalom alkalmazásával [9], [19], [14].

Majd 7 dimenzió esetén számos példát sikerült megadni olyan orbit-geodetikusú homogén Riemann-sokaságra, amely nem áll elő természetesen reduktívként [10].

A Kaplan-féle példa, ami egy nilpotens Lie-csoporton volt értelmezve, ugyancsak inspirált bizonyos további kutatásokat. Ezekkel kapcsolatban célszerű kiindulni a következő általánosabb fogalomból: Egy $\big(M, \langle,\rangle\big)$ homogén Riemann-sokaságról akkor mondjuk, hogy *homogén nilsokaság,* ha az $\mathcal{I}\big(M, \langle,\rangle\big)$ teljes izometriacsoportjának van olyan N nilpotens részcsoportja, amely tranzitív az M sokaságon. Ugyanis E. Wilson egy tétele szerint ekkor az N egyszeresen tranzitíven hat az M sokaságon, tehát az M sokaság és az N Lie-csoport azonosíthatók [32]. E homogén nilsokaságok esetét C. S. Gordon következő, 1996-ban publikált alapvető eredménye tette kezelhetővé [11]:

Ha egy $\big(M, \langle,\rangle\big)$ homogén nilsokaság orbit-geodetikusú, akkor az N nilpotens Lie-csoport kétlépcsős.

Így dolgozatában C. S. Gordon olyan 7 dimenziós nilsokaságot is megkonstruált, mely orbit-geodetikusú, de nem természetesen reduktív. A geodetikus gráfot a 6 dimenziós és 7 dimenziós esetekre Homolya Szilvia állította elő [13], [14].

3. Az orbit-geodetikusok létezése és halmazuk egy homogén Riemann-sokaságban

Ha azzal a kérdéssel akarunk foglalkozni, hogy egy homogén Riemann-sokaság milyen feltételek esetén lesz orbit-geodetikusú, akkor első lépésként a következőket célszerű megvizsgálni:

(1) *Egy homogén Riemann-sokaságban létezik-e mindig orbit-geodetikus?*

(2) *Mekkora lehet egy homogén Riemann-sokaságban az orbit-geodetikusok halmaza?*

Az első kérdésre a választ egy 2000-ben megjelent, O. Kowalskival közösen írt dolgozatunk tartalmazza; ebben a következő tételt bizonyítottuk [21]:

Egy $\big(G/H, \langle,\rangle\big)$ *homogén Riemann-sokaság bármely pontján mindig áthalad legalább egy orbit-geodetikus. Ha pedig* $\dim(G/H) = m$ *és a* G *Lie-csoport féligegyszerű, akkor a* G/H *bármely pontján áthalad* m *számú egymást páronként merőlegesen metsző orbit-geodetikus.*

Ezt a dolgozatot V. V. Kajzer egy eredménye inspirálta, mely szerint egy G Lie-csoporton adott balinvariáns Riemann-metrika esetén az $e \in G$ egységelemből mindig kiindul legalább egy orbit-geodetikus [15].

A második kérdés lényegesen bonyolultabb, ennek vizsgálatával főleg O. Kowalski és munkatársai foglalkoztak. Ők először olyan példákat igyekeztek megadni, ahol egy homogén Riemann-sokaságban az orbit-geodetikusok halmaza kicsi. Így kezdetben olyan homogén Riemann-sokaságokat tanulmányoztak, melyek izometriacsoportja viszonylag kicsi, és ezért várható, hogy az orbit-geodetikusok halmaza is az lesz [19], [8], [24]. Végül is sikerült olyan homogén Riemann-sokaságot is megadniuk, ahol bármely ponton át pontosan egy orbit-geodetikus halad [23]. Tehát a fent ismertetett egzisztencia-tételünk optimális.

A második kérdéssel kapcsolatban egy másik irányba is történtek kutatások. Ezek azt célozták, hogy a homogén Riemann-sokaságok egy-egy nagyobb osztályának egésze esetén adják meg az orbit-geodetikusok halmazait: így az 5 dimenziós általánosított szimmetrikus terek esetén [6], a feloldható Lie-csoportok esetén [5] és a zászlósokaságok esetén [1], [2]. Magam pedig a kompakt féligegyszerű balinvariáns Riemann-metrikával ellátott Lie-csoportok esetével foglalkoztam. Így sikerült élesítenem V. I. Arnold egy eredményét is, aki korábban egy orbit-geodetikus létezését bizonyította erre az esetre [4], míg nekem végtelen sok orbit-geodetikus létezését sikerült igazolnom [29]; továbbá, az orbit-geodetikusok halmazának egy algebrai leírását is megadtam [30].

Irodalom

[1] Alekseevsky, D. V., Arvanitoyeorgos, A., Metrics with homogeneous geodesics on flag-manifolds, *Comment. Math. Univ. Carolin.,* **43** (2002), 189–199.

[2] Alekseevsky, D. V., Arvanitoyeorgos, A., Riemannian flag manifolds with homogeneous geodesics, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **359** (2007), 3769–3789.

[3] Ambrose, W., Singer, I. M., On homogeneous Riemannian manifolds, *Duke Math. J.,* **25** (1958), 647–669.

[4] Arnold, V. I., Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l' hydrodynamique des fluides parfaites, *Ann. Inst Fourier (Grenoble),* **16** (1966), 319–361.

[5] Calvaruso, G., Kowalski, O., Marinosci, R. A., Homogenous geodesics in solcable Lie groups, *Acta Math. Hungar.,* **101** (2003), 303–322.

[6] Calvaruso, G., Marinosci, R. A., Homogeneous geodesics in five-dimensional generalized symmetric spaces, *Balkan J. Geom. Appl.,* **8** (2003), 1–19.

[7] Cartan, É., Sur les espaces de Riemann dans lesquels le transport parallélism conserve la courbure, *Rend. Acc. Lincei,* **3**i (1926), 544–547.

[8] Dusek, Z., Structure of geodesics in a 12-dimensional group of Heisenberg type, *Steps in Differential Geometry,* (Debrecen, 2002), 95–103.

[9] Dusek, Z., Explicite geodesic graphs of some H-type groups, *Rend. Circ. Math. Palermo,* **69** (2002), 77–88.

[10] Dusek, Z., Kovalski, O., Nikcević, S. Z., New examples of g. o. spaces in dimension 7, *Differential Geom. Appl.,* **21** (2004), 65–78.

[11] Gordon, C. S., Homogeneous Riemannian manifolds whose geodesics are orbits, *Topics in Geometry, in Memory of Joseph D' Atri,* Basel, 1969, 155–164.

[12] Helgason S., *Differential Gemetry, Lie Groups, and Symmetric Spaces,* New York, 1978.

[13] Homolya, S., Geodesic vectors of six-dimensional spaces, *Steps in Geometry (Debrecen, 2001)*, 139–146.

[14] Homolya, S., *Kétlépcsős Riemann-nilsokaságok geodetikusairól és izometriáiról,* Ph.D. értekezés, Debrecen, 2006.

[15] Kajzer, V. V., Conjugate points of left-invariant metrics on Lie groups, *Soviet. Math.,* **34** (1990), 32–44. Transl. from *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.,* **342** (1990), 27–37.

[16] Kaplan, A., On the geometry of groups of Heisenberg type, *Bul. London Math. Soc.,* **15** (1983), 35–42.

[17] Klein, F., Zur nicht-Euklidischen Geometrie, *Math. Ann.,* **37** (1890), 544–572.

[18] Kobayashi, S., Nomizu, K., *Foundations of Differential Geometry I, II.,* New York, 1963, 1969.

[19] Kowalski, O., Nikcević, S. Z., On geodesic graphs of Riemannian g.o. spaces, *Arch. Math.,* **73** (1999), 223–234. Appendix, *Arch. Math.,* **79** (2002), 158–160.

[20] Kowalski, O., Nikcević, S. Z., Vlasek, Z., Homogeneous geodesics in homogeneous Riemannian manifolds – examples, *Geometry and Topology of Submanifolds, X.* (Beijing/Berlin, 1999), 104–112.

[21] Kowalski, O., Szenthe, J., On the existence of homogeneous geodesics in homogeneous Riemannian manifolds, *Geom. Dedicata,* **81** (2000), 209–214. Erratum. *Geom. Dedicata,* **84** (2001), 331–332.

[22] Kowalski, O., Vanhecke, L., Riemannian manifolds with homogeneous geodesics, *Boll. Un. Mat. Ital.,* **5** (1991), 189–246.

[23] Kowalski, O., Vlasek, Z., Homogeneous Riemannian manifolds with only one homogeneous geodesic, *Publ. Math. Debrecen,* **62** (2003), 437–446.

[24] Marinosci, R. A., Homogeneous geodesics in a three-dimensional Lie group, *Comm. Math. Univ. Carolinae,* **43** (2002), 261–270.

[25] Nomizu, K., Invariant affine connections on homogeneous spaces, *Amer. J. Math.,* **76** (1954), 33–65.

[26] Riemann, B., Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, *Abh. Ges. Gött., Math. Kl.,* **13** (1868), 133–152.

[27] Szénássy, B., Supplement, *János Bolyai: Appendix, the Theory of Space* (Budapest, 1987), 220–238.

[28] Szenthe, J., Sur la connexion naturelle à torsion nulle, *Acta Sci. Math.,* **38** (1976), 383–398.

[29] Szenthe, J., Homogeneous geodesics of left-invariant metrics, *Univ. Iagel. Acta. Math.,* **38** (2000), 99–103.

[30] Szenthe, J., On the set of homogeneous geodesics of a left-invariant metric, *Univ. Iagel. Acta Math.,* **40** (2002), 171–181.

[31] Weszely, T., *Bolyai János. Az első 200 év* (Budapest, 2002.)

[32] Wilson, E., Isometry groups on homogeneous nilmanifolds, *Geom. Dedicata,* **12** (1982), 337–346.

János Szenthe: How far does hyperbolic geometry generalize?

Considering the two following properties of hyperbolic spaces: 1. the action of the isometry group is transitive; 2. each straight line is orbit of a 1-parameter subgroup of the isometry group, one studies those Riemannian manifolds which have the following two properties: 1. the action of the full isometry group is transitive; 2. each geodesic is orbit of a 1-parameter subgroup of the full isometry group. Such Riemannian manifolds were studied by C. Gordon, O. Kowalski, K. Nomizu, the author and many others. A systematic presentation of the concerning results is given.

BOLYAI REJTETT KINCSEITŐL EINSTEIN UTOLSÓ ÁLMÁIG

TORÓ TIBOR

A címben szereplő két kulcsfogalmat („Bolyai rejtett kincsei” és „Einstein utolsó álma”) nem e sorok írója találta ki. Ebben a cikkben csak megpróbálunk kapcsolatot teremteni e két fogalom között. A „rejtett kincsek” kifejezést maga Bolyai János fogalmazta meg egyik híres tézisében, a következőképpen: *„A tér belsejében nagyon is sok olyan kincset rejt, a melyet a felszínen haladó nem lát meg sohasem”* (*Paul Stäckel, Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai,* Bp. MTA, 1914, II. kötet 293. o.). Az Einstein utolsó álma fogalom a neves pakisztáni származású Nobel-díjas fizikustól, Abdus Salamtól származik, aki ezt az Einstein-centenáriumi előadásának címében fogalmazta meg: *„The Einstein's last dream, the space-time unfication of fundamental forces”* (UNESCO, Paris, 9. May 1979).

Cikkünkben azt kíséreljük meg bemutatni, hogy melyek lehetnek a tér-idő azon rejtett kincsei (a Weyl-féle non-metricitás, a Cartan-féle torzió, a Kaluza–Klein-típusú extradimenziók, a nem-abeli, Yang–Mills–Utiyama–Kibble, -mérték invarianciák, etc.) melyeken keresztül eljuthatunk Einstein utolsó álmának megvalósulásához.

De mit is értünk pontosabban, a Salam által megfogalmazott, Einstein utolsó álmán? Egy olyan, a ma ismert összes alapvető fizikai erőket (kölcsönhatásokat) leíró egységes (unikális) elméletről van szó, melyet a tér geometriai tulajdonságaival lehet jellemezni. Ennek az alapvető gondolata a *fizika geometrizálása* (physica more geometrico) melyet először kvantitatív formában Einstein dolgozott ki 1915–16-ban, híres általános relativitáselméletében, ahol a gravitációt mint fizikai erőteret geometrizálja. Ennek alapegyenlete az Einstein-féle gravitációs egyenlet, mely megteremti azt a kvantitatív kapcsolatot, mely a gravitációs erőtér és a 4 dimenziós Riemann (pszeudo-Riemann) tér között létezik a következőképpen:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu}. \tag{1}$$

Az egyenlet bal oldalán szerepelnek a 4 dimenziós görbült tér-idő, Riemann-tér szerkezetét leíró geometriai mennyiségek ($R_{\mu\nu}$ – a másodrendű, kétindexes, Einstein–Ricci-féle görbületi tenzor; $g_{\mu\nu}$ a metrikus alaptenzor és R a skalár görbület). A másik oldalon, pedig a gravitációt generáló anyag fizikai tulajdonságait jellemző $T_{\mu\nu}$, az energia-impulzus-tömeg tenzor. A G és a c két alapvető fizikai állandó, G a

Newton-féle gravitációs konstans, a c pedig a fény vákuumbeli sebessége. Tehát, ezt a gondolatot, vagyis azt, hogy szükséges kapcsolat létezik a fizikai gravitációs erőtér és a geometriai tér között, nevezzük a *fizika geometrizálásának.*

A XX. század elméleti fizikájának e fontos gondolata, érdekes módon, megjelenik Bolyai János gondolkodásában is. Több közölt dolgozatunkban, utoljára talán legrészletesebben 2004-ben, *A fizika geometrizálása (physica more geometrico) Bolyai János és Albert Einstein „befejezetlen szimfóniája"* című munkánkban (Bolyai Emlékkötet, Vince Kiadó, Bp. 2004) sikerült kimutatni, hogy Bolyai János, egy kéziratban maradt tételében (Bolyai-kézirati hagyaték 491-es számot viselő fólió, Teleki Téka, Marosvásárhely) kvalitatív formában, mintegy megsejti a gravitáció és a tér szerkezetének kapcsolatát, tehát a fizika geometrizálásának gondolatát a következőképpen: *„...az nehézkedés törvénye is szoros összveköttetésben foljtatásban tetszik (mutatkozik) az űr természetével, valójával (alkotásával) miljségével; s gondolom az egész természet (világ) foljása".*

Ahhoz, hogy Bolyai e sejtésétől, továbbá Einstein a gravitáció geometrizálásának 1915–16-os eredményeitől eljussunk a Salam által megfogalmazott „Einstein utolsó álma"-nak grandiózus gondolatához, igen hosszú utat kellett bejárni.

Ezen az úton, a tér belsejében levő rejtett kincsek első felfedezője Hermann Weyl, a XX. század egyik legnagyobb matematikai fizikusa és egyben tudományfilozófusa, még 1918–19-ben, tehát mindjárt Einstein 1916-os alapvető cikke után „Gravitation und Elektrizität" című alapvető munkájában (*Sitzungber. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin,* 1918, pp. 465–480), majd a ma már klasszikussá vált könyvében (Raum, Zeit, Materie, 1918) bevezeti a tér *non-metricitásának* a fogalmát a következőképpen:

$$\nabla_\rho g_{\mu\nu} = A_\rho g_{\mu\nu}. \tag{2}$$

Ebben az esetben a metrikus alaptenzor, a $g_{\mu\nu}$ kovariáns deriváltja különbözik zérótól ($\nabla_\rho g_{\mu\nu} \neq 0$), és kapcsolatba kerül az elektromágneses tér 4-es potenciáljával A_ρ-val. Tehát, ezzel az új geometriai „rejtett kinccsel", a geometriai tér nem-metrikus tulajdonságával, lehet értelmezni és leírni, geometriai módon (more geometrico) egységesen, az elektromágneses erőteret is. Ezzel egy új geometriai teret vezettünk be a *nem-metrikus Weyl-teret* melynek átviteli paramétereiben, a $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$-ban, megjelenik az elektromágneses tér 4-es potenciálja az A_ρ a következőképpen:

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \begin{Bmatrix} \mu \\ \nu\lambda \end{Bmatrix} + g^{\mu\sigma}\big(g_{\lambda\sigma}A_\nu + g_{\sigma\mu}A_\lambda - g_{\mu\lambda}A_\sigma\big), \tag{3}$$

ahol $\left\{{\mu \atop \nu\lambda}\right\}$ a Riemann-tér átviteli paraméterei (konnexiói):

$$\begin{Bmatrix} \mu \\ \nu\lambda \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma}\left(\frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\sigma}\right), \tag{4}$$

melyek az ismert II-fajú szimmetrikus Christoffel-féle szimbólumok.

Weyl elmélete szerint mind a non-metricitási feltétel, mind pedig a Weyl-tér átviteli paraméterei ($\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$-k) invariánsok a következő transzformációkkal szemben:

$$g'_{\mu\nu} \to e^{\chi} g_{\mu\nu} \quad \text{és} \quad A'_{\mu} \to A_{\mu} + \frac{\partial \chi}{\partial x_{\mu}}, \tag{5}$$

ahol a $\chi = \chi(x_\mu)$ egy tetszőleges, helytől függő, skaláris függvény. Ezt a transzformációt nevezte el Weyl *mérték-transzformációnak* (német eredetében „Eich”-transzformációnak) és a neki megfelelő szimmetriát és invarianciát mértékszimmetriának és mértékinvarianciának. De a ma használt mértékszimmetrián alapuló igazi mértékelmélet, mely az Einstein utolsó álma felé vezető úton az egyik legfontosabb rejtett kinccsé vált, H. Weyl egy 10 évvel későbbi munkájából származik. Itt H. Weyl-nek a kvantummechanika kifejlődése utáni, 1929-es, fontos cikkéről van szó, melynek címe: „Elektron und Gravitation” (*Zeitschrift für Physik,* 56. kötet, 330. oldal). Ezt a cikket mind matematikai-fizikai, mind pedig filozófiai szempontból is a XX. századi elméleti fizika egyik alapvető jelentőségű munkájának tekinthetjük, mert a dinamikát, tehát magát az alapvető erőt (kölcsönhatást) invariáns módon a *lokális mérték (gauge) szimmetria elvből* vezeti be. Mint említettük ez a kvantummechanika kialakulása után történik, tehát, mint a cím is mutatja, az elektrontól indul el, mégpedig az elektron Dirac-féle relativisztikus kvantumelmélet alapegyenletéből, a Dirac-féle spinoriális kölcsönhatás-mentes Dirac-egyenletből:

$$\gamma_{\mu} \frac{\partial \Psi}{\partial x_{\mu}} + \frac{m_0 c}{\hbar} \Psi = 0. \tag{6}$$

Itt Ψ egy négykomponensű spinorfüggvény, mely a 4 dimenziós kontinuum téridő kooordinátáitól, az x_μ-től ($\mu = 1, 2, 3, 4$) függ. A γ_μ pedig a 4 Dirac-féle mátrixot jelöli, az m_0 az elektron (pozitron) nyugalmi tömege, a c és a $\hbar$ az ismert univerzális állandók, melyek minden relativisztikus és kvantum jellegű egyenletben szerepelnek (a c a fény vákuumbeli sebessége, a $\hbar$ pedig a Planck-féle állandó). Ha most alkalmazzuk a Ψ spinor függvényre a következő transzformációt

$$\Psi \to \Psi' = e^{\frac{ie}{\hbar c}\chi} \Psi, \tag{7}$$

ahol a χ függvényt lokalizáljuk, azaz $\chi = \chi(x_\mu)$, akkor a Dirac-egyenlet invariáns marad, ha bevezetjük az elektromágneses kölcsönhatást jellemző A_μ négyes potenciált, és arra érvényesnek tartjuk a Weyl által bevezetett mértéktranszformációt is:

$$A_{\mu} \to A'_{\mu} = A_{\mu} + \frac{\partial \chi}{\partial x_{\mu}}. \tag{8}$$

Tehát a lokális mérték invariancia meghatározza magát a fizikai erőt, esetünkben az elektromágneses kölcsönhatást. Ezt nevezzük *lokális mérték-invarianciának.* Érdekes módon ezt a Weyl-féle lokális mérték-invarianciát 1954-ig, tehát egy negyedszázadig, senki sem próbálta továbbfejleszteni, általánosítani, más, közben megjelent alapvető kölcsönhatásokra, mint a nukleáris erős és gyenge kölcsönhatásokra.

Az első ilyen általánosítás *C. N. Yang* és *R. Mills* nevéhez fűződik. Mint látni fogjuk, ők alapozták meg 1954-ben az ún. *lokális nem-abeli mértékinvarianciát,* mely későbben továbbfejlesztve egyik legfontosabb rejtett kincse, rejtett szimmetriája lett a természetnek.

De mielőtt ennek a tárgyalására rátérnénk, említsük meg, hogy közben napvilágra került a téridőnek másik két rejtett kincse. Először is a 4 dimenziós Riemann-térnek magasabb, extradimenzióiról van szó, szintén az elektromágneses tér unitér geometriai elméletei keretében, ahol megnövelve az Einstein-féle gravitációs elméletben használt 4 dimenziós Riemann-tér dimenzióinak számát 1-gyel, öt dimenziót használtak (ezek a pentadimenziós elméletek).

Az első ilyen elmélet Theodor Kaluza lengyel származású német matematikus nevéhez fűződik, aki 1920-ban, az ötödik dimenzió segítségével próbálta geometriailag értelmezni az eletromágneses teret és annak a 4-es potenciálját. Később, 1926-ban, Oscar Klein neves stockholmi elméleti fizikus a kvantummechanika megszületése után kísérelte meg összhangba hozni Kaluza 5 dimenziós elméletét a kvantummechanika elveivel és az új, ötödik dimenzió topológiai tulajdonságaival. Innen származik a gravitáció és az eletromágnesesség új 5 dimenziós egységes elméletének rövid neve: Kaluza–Klein-elmélet (vagy tréfásan K und K elmélet). A Yang–Mills-féle nem-abeli lokális mérték invariancia elméletek továbbfejlesztésével ún. nem-abeli K-K elméletek is megjelennek, ahol ötnél magasabb extradimenziók is szerepelnek.

Az első K-K elméletek megjelenése után a húszas években a térnek egy másik érdekes rejtett kincse kerül felfedezésre. Itt a *torziós* terek felfedezéséről van szó, mely Élie Cartan, neves francia geométer, a modern differenciálgeometria egyik megalapítójának nevéhez fűződik. A tér új geometriai tulajdonsága a torzió mely a nem-szimmetrikus csatolású $\left(\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} \neq \Gamma^{\rho}_{\nu\mu}\right)$ tereknél jelenik meg a következőképpen:

$$T^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\mu}\right). \tag{9}$$

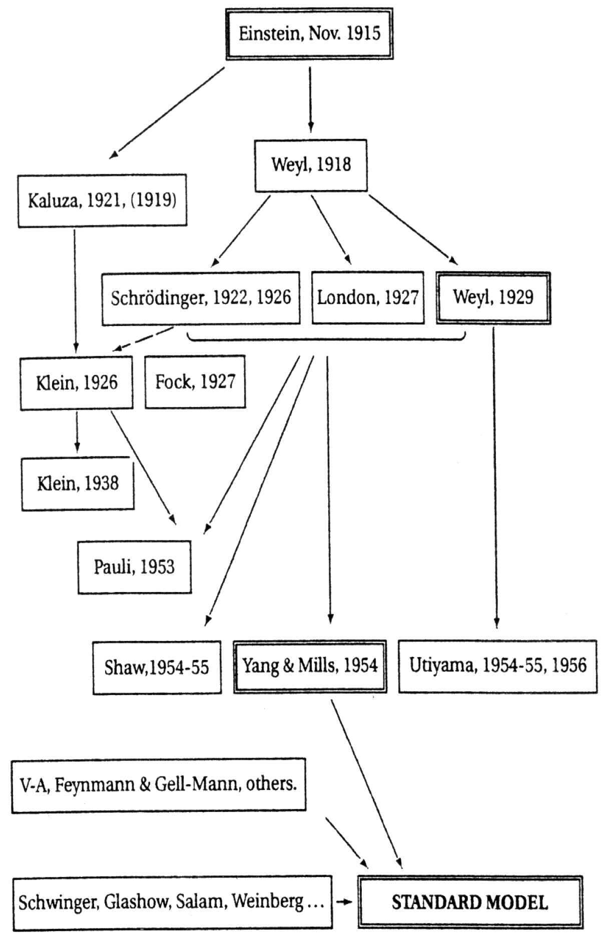
Ezeket a harmadrangú (3 indexszel rendelkező) tenzorokat 1923–1925 között publikált alapvető munkáiban Cartan fedezte fel, ezért a torzióval („csavarodás") rendelkező tereket, mivel a Riemann tereknek általánosításai, sokszor Riemann–Cartan-féle tereknek is nevezik.

Az utóbbi 2-3 évtizedben a Riemann-geometria fenti általánosítását felhasználó új gravitációelmélet alakult ki, az Einstein–Cartan-elmélet. Mint röviden látni fogjuk a lokális nem-abeli (Yang–Mills típusú) mértékelméletek továbbfejlesztésében kialakultak a gravitáció mértékelméletei, melyekre két angol tudós, az asztrofizikus, D. Sciama és az elméleti fizikus, T. W. Kibble, hívta fel a figyelmet, mintegy továbbfejlesztve a japán fizikus R. Utiyama által kidolgozott első gravitációs mértékelméletet.

Ezzel most visszaérkeztünk a már említett Yang–Mills-elmélethez, melyet 1954-ben, C. N. Yang és munkatársa R. Mills dolgoztak ki bevezetve az ún. *nem-abeli mértékterek* fogalmát, melyet röviden, szerzőik neve után, Yang–Mills-tereknek is neveznek. Ezt az 1954-es dolgozatot a híres amerikai folyóiratban, a Physical Review-ben közölték a következő címmel: „Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance” (*Phys. Rev.,* **96**, 191–195). Ebben a dolgozatban kiterjesztik a Weyl-féle elektromágneses mértékinvarianciát a magerők izotopikus mértékinvarianciájára. A Yang–Mills-tér kulcsfontosságú tulajdonsága az, hogy nem-abeli mértéktér, ami azt jelenti, hogy ebben az esetben a Yang–Mills-transzformációk nem kommutatív Lie-csoportot alkotnak, ez az $SU(2)$ csoport, nem kommutatív, tehát nem-abeli mértékcsoport, viszonyítva a Weyl-féle mérték transzformációkhoz, melyeknek mértékcsoportja az $U(1)$, kommutatív. Az $SU(2)$ egy speciális 2×2 transzformációs mátrixokat használó unitér csoport. Az elmúlt több mint fél évszázad alatt, a Yang–Mills-terek bevezetésétől napjainkig, a nem-abeli mérték erőtér (Yang–Mills) fogalma óriási változáson ment keresztül, de ma elmondhatjuk, hogy a ma ismert összes alapvető kölcsönhatások egységes leírásának fontos paradigmájává vált, és így kulcsszerepe van ma is Einstein utolsó álmának megvalósításában is. Természetesen, ezt a több mint fél évszázados fejlődést egy ilyen rövid cikk keretében, még vázlatos formában sem lehet elmondani. Ezért ennek illusztrálására bemutatjuk a nemrég eltávozott neves dublini elméleti fizikus, L. O'Raifeartaigh (1933–2000) és munkatársa N. Straumann kitűnő cikkének történeti sémáját (*Review of Modern Physics,* 2000. január, a címlapon.)

Ezen a táblázaton, Yang és Mills neve mellett látható a már többször említett, sajnos már nem élő, japán fizikus R. Utiyama neve is, 1954–1956 évszámokkal. Az ő nevének külön kiemelése azért is fontos, mert Utiyama Yanggal és Mills-szel egyidőben, talán japán nyelven őket megelőzve, kidolgozta a nem-abeli mértékterek jóval általánosabb elméletét, egy általános, nem-abeli Lie-mérték-csoportra, az $SU(N)$-re alapozva, melynek továbbá az $U(1)$ és az $SU(2)$ partikuláris esetei. Továbbá azt is kimutatta, hogy lényegében a gravitációs teret is értelmezhetjük nem-abeli mértéktérként, ha a speciális relativitáselméletben oly fontos szerepet játszó Lorentz-transzformációt lokalizáljuk. Mindezeket angolul csak 1956-ban, tehát két évvel a Yang–Mills-cikk megjelenése után tudta leközölni a Physical Review-ben, a következő címmel: „A kölcsönhatások invariantív elméleti értelmezése” (Invariant Theoretical Interpretation of Interaction, *Phys. Rev.,* **101**, 1597 (1956). Utiyamanak ezt a cikkét fejleszti tovább T. W. Kibble 1961-es híres dolgozatában (Lorentz Invariance and the Gravitational Field, *J. Math. Phys.,* **2**, 212, 1961), ahol a mértékcsoport az inhomogén Lorentz-csoport, amit Poincaré-csoportnak is neveznek. Itt azt mutatja ki, hogy ebben az esetben egy általánosabb gravitációelméletet kapunk az ún. Einstein–Cartan-féle gravitációs elméletet, a már említett, Cartan-féle torziós tér felhasználásával.

Majd csak ezután következnek a Yang–Mills-elmélet nagy sikerű alkalmazásai a különböző kölcsönhatások egyesítésére (a Glashow, Weinberg–Salam modell, az elektro-gyenge kölcsönhatások elmélete és kísérleti igazolásai, fizikai Nobel-díj 1976, 1979, 1984, 1999, majd a kvantumkromodinamika nem-abeli mértékelmélete, fizikai Nobel-díj 2002 és a három kvark-család szükségessége az elemi részecskék ún. standard modelljének kialakulásában, fizikai Nobel-díj 2008). Ezeken a területeken az elmúlt három évtized alatt, 15 fizikus részesült Nobel-díjban, a nem-abeli mérték-



1. ábra

elméletek területén elért jelentős elméleti és kísérleti eredmények elismeréseként. Ez mindenképpen jelentős szám, ami ritkaságszámba megy a Nobel-díj történetében.

Ismeretes, hogy az elemi részecskék és az alapvető fizikai kölcsönhatások ún. standard modellje nem foglalja magába a gravitációt, pontosan azt az alapvető kölcsönhatást, ahonnan „Einstein utolsó álma" kezdődött. Ahhoz, hogy ezt beépítsük a standard modellbe, és így megteremtsük a lehetőséget Einstein utolsó álmának megvalósításához, egy új rejtett kincsre, egy új rejtett szimmetriára volt szükség. Ezt az új szimmetriát a hetvenes évek elején fedezték fel. A neve *szuperszimmetria* (az angol super-symmetry tréfás rövidítése a „SUSY"). Ez nem más mint a *fermion-bozon-szimmetria,* mely összekapcsolja a félegész spinű elemirészecskéket (fermionokat) az egész spinnel rendelkező bozonokkal. Tehát, kiindulva egy ilyen belső rejtett fermion-bozon szimmetriából, mely egy tér-idő (Lorentz–Poincaré) szimmetriát is tartalmaz, és mértékesítve (lokalizálva) eljutunk egy lokális SUSY-elmélethez, mely nem más mint a *szupergravitáció.* De az ilyen szupergravitációs elméletekre az extradimenziók használata jellemző. Ezekkel pedig elérkeztünk, most már a 80-as években, a Kaluza–Klein-típusú elméletek reneszánszához, melyek ún. *nem-abeli K-K elméletek.*

Ezek a nem-abeli K-K elméletek nem pentadimenziósak, hanem magasabb extradimenziókkal rendelkeznek. A SUSY segítségével sikerült egy alsó korlátot meghatározni a térjellegű extradimenziókra. Ha az extradimenziók számát K-val jelöljük, akkor a dimenziók száma $d = 3 + 1 + K$. A fent említett határ kisebb vagy egyenlő 7-tel ($K \leq 7$), így a szuper-gravitációs elméletekben 11 dimenziós nem-abeli K-K elmélettel dolgozunk. (A dimenziókhoz kötődő vonatkozásokat is említi az alábbi cikk: Benedict Mihály: *Új dimenziók a matematikában és a fizikában, Utószó: G. J. Gorelik: Miért háromdimenziós a tér?* Gondolat, 1987, 203–217.)

Ma több olyan nem-abeli Kaluza–Klein-típusú elmélet van kidolgozás alatt, melynek segítségével megpróbálják megvalósítani Einstein utolsó álmát, megalkotni a *minden dolgok elméletét* (Theory of everything) vagyis, az összes ma ismert fundamentális kölcsönhatások (erős, elektromágneses, gyenge és gravitációs) geometriai szintézisét. Ezek közül a legnevezetesebb az ún. *szuperhúrelmélet.* Ennek egyik utolsó változatát a princetoni elméleti fizikus, az 1990-es Fields-díj kitüntetettje, Edward Witten javasolta. Ez egy 11 dimenziós (7 extradimenzióval rendelkező) K-K elmélet, melyet Witten M-elméletnek nevezett el. Ez logikus, koherens, matematikailag ellentmondásmentes, szép, sokat ígérő elmélet, csak az a nagy hiányossága, hogy érdekes és szenzációs jóslatainak, sajnos egyelőre nincsenek kísérleti bizonyítékai. A fizika pedig elsősorban kísérleti tudományág. Mint fentebb láttuk, a nem-abeli mértékelméletekért is csak akkor adományoztak Nobel-díjat, ha azok jóslatait kísérletileg is igazolták. Most a CERN-ben, a genfi nagy hadronütköztető – LHC (Large hadron collider) megépítésével és ennek rövid időn belüli újraindításával megvannak a lehetőségek több említett jóslat (szuperszimmetrikus részecskecsalád, a tér extradimenziói és sok más érdekes fizikai jelenség) kísérleti kimutatására. Ha a nemsokára kezdődő kísérletek igazolják ezeket, akkor az elkövetkezendő években teljesen új fizikai világképünk fog kialakulni az univerzum anyagának elemi építőköveiről és az azokat működtető fundamentális erőkről, kölcsönhatásokról. Reméljük, hogy ezek az eredmények pár lépéssel közelebb visznek a téridő itt felsorolt rejtett kincseinek megismeréséhez, Einstein utolsó álmának megvalósításához.

Tibor Toró: From Bolyai's hidden treasures to Einstein's last dream

In this paper we attempt to obtain a connection between the two keywords which are formulated in the title of our lecture: „Bolyai's hidden treasures" and „Einstein's last dream". The expression of „hidden treasures" appeared in a János Bolyai's thesis in the following manner: *„The space contains in its depths, such treasures which the man who is moving on the surface, never can see"* (Paul Stackel: *Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai,* Bp. MTA, 1914, vol. II, p. 293) The notion

of „Einstein's last dream" was formulated by the famous Nobel prize-winner physicist Abdus Salam, originated from Pakistan, in his Einstein's centenary memorial lecture, with following title: *„The Einstein's last dream: the space-time unification of fundamental forces"* (UNESCO, Paris 9 may, 1979). This is nothing else but the idea of *geometrization* of fundamental physical forces in wich was interested. Bolyai himself. (T. Toro: Physica more geometrico, Bolyai's and Einstein's unfinished symphony, in *Bolyai Memorial Volume,* Ed Vince, Bp. 2004). In our paper we will show which should be these hidden treasures of space-time (The Weyl's non-metricity, the torsion of Cartan, the Kaluza–Klein type extra-dimensions, the non-Abelian local gauge invariance of Yang–Mills, Utiyama, Kibble etc.) through which we hopefully will arrive to realization of Einstein's last dream.

Toró Tibor

Temesvári Tudományegyetem
Blvd. V. Parvan 4 Timisoara
300223 Timis
Románia

tt.neutrino@yahoo.com

TARTALOMJEGYZÉK

CONTENTS