Instud. O. 105/27.

# MATHEMATISCHE
UND
# NATURWISSENSCHAFTLICHE
# BERICHTE AUS UNGARN

MIT UNTERSTÜTZUNG
DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN UND DER
KÖNIGLICH UNGARISCHEN NATURWISSENSCHAFTLICHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

**ROLAND BARON EÖTVÖS UND JULIUS KÖNIG**

REDIGIERT VON

JOSEF KÜRSCHÁK UND FRANZ SCHAFARZIK
MITGLIEDER DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

SIEBENUNDZWANZIGSTER BAND · 1909
MIT 7 TAFELN

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1913

[IN WIEN BEI KARL GRAESER & KIE.]

300151

BIBLIOTHECA ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE
MAGYAR
TUDOMÁNYOS
AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA
BUDAPEST

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

# INHALT DES XXVII. BANDES.

## Abhandlungen.



## Sitzungsberichte.



## Bericht über die Tätigkeit, den Vermögensstand u. a.

der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und der Königl. Ungar. Naturwissenschaftlichen Gesellschaft.



M. T. AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

1.

# RECHERCHES GÉNÉRALES SUR LA QUADRATURE DES SURFACES COURBES.

Par ZOÁRD DE GEÖCZE.

## Première mémoire.

Dans un article* de ce même journal, j'ai indiqué la quadrature de la surface $z = f(x, y)$. En m'appuyant sur l'analogie, j'ai cherché à obtenir le même résultat pour une surface quelconque.

Ces recherches sont par leur nature d'une extrême longueur, aussi dans cette mémoire je me borne seulement à établir une condition nécessaire pour que l'aire d'une surface soit finie.

Soit $R$ une surface courbe. Nous allons montrer que lorsqu'on peut construire une certaine quantité positive $S$, $S < +\infty$ est une condition nécessaire pour que l'aire de $R$ soit finie.

Mais rien ne prouve qu'on puisse construire $S$ à une surface quelconque. Pour des classes très étendues de surfaces on peut construire $S$, et s'il est permis d'exprimer un avis il est très probable que dans le cas où $S$ n'existe pas l'aire est égale à zéro. De manière que lorsque $S$ n'existe pas, on peut poser $S = 0$, et ainsi $S$ étant toujours défini, $S < +\infty$ est la condition nécessaire pour que l'aire de $R$ soit finie.

Dans ces recherches je vais changer quelques-unes des notations du travail mentionné. Nous changeons les lettres $x, y, z, \xi, \eta, \zeta, a, b, f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}$ du Chap. I en $u, v, t, x, y, z, \bar{u}, \bar{v}, \varphi, \psi, \chi$ respectivement.

Les équations de $R$ seront donc

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)$$

le point $uv$ varie dans le rectangle $(0, \bar{u};\ 0, \bar{v}) \equiv P$ du plan $uv$.

* Quadrature des surfaces courbes. T. XXVI. 1910.

On peut évidemment supposer que la limite inférieure de chacune des fonctions $\varphi$, $\psi$, $\chi$ est égale à zéro.

Désignons par $a$, $b$, $c$ les limites supérieures de $\varphi$, $\psi$, $\chi$ respectivement. Les projections orthogonales de $R$ sur les plans $xy$, $xz$, $yz$ sont donc comprises dans les rectangles

$$P_1 \equiv (0, a; 0, b), \quad P_2 \equiv (0, a; 0, c), \quad P_3 \equiv (0, b; 0, c)$$

de ces plans.

Nous adoptons l'une quelconque des quantités $T_1, \ldots, T_6$ pour définition de l'aire (loc. cit.).

On prouve facilement que l'aire est égale à zéro lorsque deux des quantités $a$, $b$, $c$ sont égales à zéro.

Nous supposons donc que $a > 0$, $b > 0$, $c \geqq 0$.

Dans le Chap. I nous communiquons quelques théorèmes de la géometrie plane, en remarquant, qu'ils ont été déjà énoncés par certains auteurs.

Dans le Chap. II nous décrirons la quantité $S$, et nous communiquons sans démonstration un cas très important où l'existence de $S$ est certaine. De même: nous désignons un cas assez général où lorsque $S$ n'existe pas $T_6$ est égal à zéro. Nous communiquons encore les causes qui rendent très probable l'avis que lorsque $S$ n'existe pas l'aire est égale à zéro.

Nous employons les signes $X_l$, $Y_m$, $X_l Y_m$, $XY, \ldots, Z_n$, $XZ \ldots$, dans le sens qui a été indiqué dans les Chap. II, X, XIII du travail mentionné. Pour les divisions rectangulaires de $P$ nous employons le signe $U_l V_m$.

## Chapitre I.

## Théorèmes de la géométrie plane.

I. Soient $A$ et $B$ deux points donnés et soient $C_1, C_2, \ldots, C_n$ des points arbitraires en nombre fini. Construisons la ligne polygonale qui est formée par les distances rectilignes

$$\overline{AC_1}, \ \overline{C_1 C_2}, \ \ldots, \ \overline{C_{n-1} C_n}, \ \overline{C_n B}.$$

Nous disons que cette ligne polygonale est une chaine, qui en partant de $A$ va jusqu'à $B$ (qui joint $A$ et $B$). Les points $A, C_1, \ldots, C_n, B$ sont les sommets de la chaine, les distances ci-dessus en sont les côtés. Nous disons que la chaine est fermée lorsque $A \equiv B$. L'expression »nous parcourons la chaine de $A$ vers $B$« a un sens bien connu. La chaine est simple lorsqu'elle ne passe pas deux fois par le même point. Nous disons qu'elle appartient à la longueur $\delta$ ($\delta > 0$) lorsque ses côtés sont plus petits que $\delta$.

Considérons une chaine fermée $K$. Soit $D$ un point du plan qui n'appartient pas à $K$. Renfermons $K$ dans un cercle. Considérons toutes les chaines qui joignent $D$ avec un point de la circonférence. Il peut arriver que toutes ces chaines coupent $K$. Nous disons que la figure, qui est formée par tous les points de cette propriété, est l'aire renfermée par $K$, nous la désignons par $\widehat{K}$.

Nous disons qu'une figure admette des chaines, lorsque à chaque couple $A$, $B$ de ses points et à chaque longueur $\delta$ ($\delta > 0$) il existe une chaine qui joint $A$ et $B$, qui appartient à $\delta$ et dont les sommets sont points de la figure.

Lorsque la figure qui admette des chaines est encore parfaite* nous disons qu'elle est d'un seul tenant.

II. Soit $U_l V_m$ une division et soit $S$ une figure formée par quelques-uns des rectangles de $U_l V_m$ (les contours des rectangles compris). $S$ est donc parfaite. La condition nécessaire et suffisante pour que $S$ soit d'un seul tenant, est visiblement la suivante. Quelques soient les rectangles $\alpha$ et $\beta$ de $S$ on puisse trouver des rectangles $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ de $S$, tels que $\alpha$ et $\gamma_1$, $\gamma_1$ et $\gamma_2, \ldots, \gamma_n$ et $\beta$ soient voisins, c'est à dire qu'ils aient un ou deux sommets communs.

Soit $F$ une figure comprise dans $P$. Soit $U_{l_r} V_{m_r}$ une suite de divisions. Désignons par $S_r$ la figure qui est formée par les rectangles de la $r$-ième division de la suite, qui contiennent au moins un point de $F$.

La condition nécessaire et suffisante, pour que $F$ admette des chaines, est que $S_r$ ($r = 1, 2, \ldots$) soit d'un seul tenant.

III. Soit $F$ une figure qui admette des chaines. Soient $A$ et $B$ points de $F$ et soit $\delta > 0$ une longueur. Il existe une chaine $K$, qui joint $A$ et $B$, qui appartient à $\delta$, dont les

* Nous disons qu'une figure est parfaite, lorsqu'elle est fermée — c'est à dire qu'elle contient ses points limites — et de plus lorsque chacun de ses points est un point limite d'elle.

sommets sont points de $F$, de manière que $C$ étant un point quelconque de $F$ il existe au moins un sommet $D$ de $K$ de manière que $\overline{CD} < \delta$.

Nous disons que $K$ couvre $F$ à $\delta$ près.

IV. On ne peut diviser les points d'une figure qui admette des chaines en deux figures séparées.*

Soit $K$ une chaine fermée et soit $F$ une figure qui admette des chaines ayant un point dans $\widehat{K}$ et un point qui n'est pas situé dans $\widehat{K}$. $F$ aura au moins un point limite sur $K$.

Une figure fermée et admettant des chaines est d'un seul tenant.

V. Nous disons qu'une figure bornée $w$ est un domaine, lorsqu'elle a les propriétés suivantes.

1° $A$ étant l'un quelconque de ses points, un voisinage de $A$ (points intérieurs d'un cercle dont le centre est $A$) appartient à $w$.

2° $A$ et $B$ étant deux quelconques de ses points ils existent entre les chaines qui joignent $A$ et $B$ telles dont tous les points sont points de $w$ (qu'elles sont situées dans $w$).

3° L'aire renfermée par une chaine fermée et située dans $w$ appartient à $w$.

La frontière $f$ de $w$ (figure formée par les points limites de $w$ qui n'appartiennent pas à $w$) est d'un seul tenant. Soit $A$ un point de $w$, $B$ un point qui n'est pas point de $w$. Une chaine quelconque qui joint $A$ et $B$ coupe $f$.

VI. Soit $\varrho > 0$ une distance arbitraire donnée à l'avance. On peut construire une chaine $G$ simplement fermée, située dans $w$ de manière que la distance de $G$ et $f$ est partout plus petite que $\varrho$.**

---

* Soient $Q$ et $R$ deux figures, et soit $A$ un point de $Q$ et soit $B$ un point de $R$. Considérons toutes les distances $\overline{AB}$, soit $d$ la limite inférieure de leurs longueurs. On a $d \geq 0$. Lorsque $d > 0$, on dit que $Q$ et $R$ sont séparées et que $d$ est leur distance.

** Soient $P$ et $Q$ deux figures. Nous disons que la distance de $P$ de $Q$ est partout plus petite que $\varrho$, lorsqu'à chaque point $A$ de $P$ il existe au moins un point $B$ de $Q$ de manière que $\overline{AB} < \varrho$. Lorsque de plus la distance de $Q$ de $P$ est partout plus petite que $\varrho$, nous disons que la distance de $P$ et $Q$ est partout plus petite que $\varrho$.

VII. Soit $A$ un point de la frontière $f$ de $w$, et soit $O$ un point de $w$. Il existe das un voisinage quelconque de $A$ un point $H$ de $f$, tel qu'il existe une chaine qui joint $H$ et $O$ et dont tous les points (excepté $H$) sont situés dans $w$.

VIII. Soit $f$ (la frontière de $w$) telle qu'on la puisse décomposer en deux parties, dont l'une est une chaine simple qui n'a pas aucun point commun avec l'autre partie $f'$ que ses deux extrémités. $f'$ est d'un seul tenant. Nous disons que $f'$ est la frontière vrai de $w$.

Soit $w$ un domaine et soit $K$ une chaine simple, dont les points, exceptés ses deux extrémités qui sont points de $f$, sont situés dans $w$. Soit $A$ un point de $w$ et qui n'est pas situé sur $K$. Soit $w'$ la figure, qui est formée par des points tels de $w$ qu'on les peut joindre avec $A$ par des chaines situées dans $w$ qui ne coupent pas $K$. Soit $w''$ la figure qui est formée par les points de $w$ qui n'appartiennent pas à $w'$ ou à $K$.

$w'$ et $w''$ sont des domaines et $K$ appartient à la frontiére de chacun d'cux. Les frontières vraies de $w'$ et $w''$ peuvent avoir d'autres points communs que les extrémités de $K$. La réunion de ces deux frontières est $f$. On dit que $K$ décompose $w$ en $w'$ et $w''$.

IX. Soit $w$ un domaine tel qu'on puisse décomposer sa frontière en deux parties $K$ et $f'$, $K$ étant une chaine simple qui n'a que ses deux extrémités $A$ et $B$ commun avec $f'$. Soient $\overline{AA'}$ et $\overline{B'B}$ les côtés extrêmes de $K$. Soit $\varrho > 0$. On peut construire une chaine simple $N$, qui dans $w$ joint $\overline{AA'}$ et $\overline{B'B}$ de manière que la distance de $f'$ et $N$ est partout plus petite que $\varrho$. (Bien entendu les extrémités de $N$ n'appartiennent pas à $w$).

X. Soit $w$ un domaine et soit $f$ sa frontière. Renfermons $w$ et $f$ dans un domaine circulaire $L$, soit $M$ la circonférence de $L$. Désignons par $v$ la figure, qui est formée par de tels points de $L$ qu'on les peut joindre par des chaines avec les points de $M$ sans couper $f$. $v$ montre les propriétés 1° et 2° du No. V, mais $K$ étant une chaine fermée, située dans $v$, $K$ appartient ou à $v$ ou $\widehat{K}$ contient $w$ et $f$.

La frontière de $v$ est évidemment formée par $M$ et par points de $f$ et ces deux parties sont séparées. La partie $f_1$ qui est formée par des points de $f$ est d'un seul tenant.

Nous disons que $w$ est un domaine simple lorsque, $A$ étant un point quelconque de $f$, un voisinage quelconque de $A$ contient points de $v$.

Dans ce cas $f_1$ et $f$ sont les mêmes figures.*

Soit $w$ un domaine simple et soit $f$ sa frontière.

Soit $K$ une chaine, qui issue d'un point de $w$ va à l'extérieur de $w$. Soit $H$ le premier point commun de $K$ et $f$.

Soit $I$ l'ensemble qui est formé par tous les $H$. Nous disons que les $H$ sont en connexion avec $w$.

La figure dérivée de $I$ est $f$,** $I$ admette des chaines.

Soient $H_1$, $H_2$, $H_3$ points de $I$.

Soit $C$ un point de $w$, et soit $l$ une circonférence de centre $C$ située dans $w$. Nous parcourons $l$ toujours dans le même sens (par exemple que l'aire renfermée par $l$ soit à droite). Soient $K_1$, $K_2$, $K_3$ des chaines qui, issues de $H_1$, $H_2$, $H_3$ respectivement, vont dans $w$ jusqu'à $C$, et qui deux à deux n'ont pas aucun point commun.

Ces chaines coupent $l$. Soint $G_1$, $G_2$, $G_3$ les premiers points communs de $K_1$, $K_2$, $K_3$ avec $l$.

L'ordre circulaire des $G_1$, $G_2$, $G_3$ ne dépende que de $H_1$, $H_2$, $H_3$ (le sens du parcours de $l$ étant fixé). $I$ sera ainsi circulairement ordonné.

$H_1$ et $H_2$ étant deux points de $I$ il existe une infinité $H_3$ et $H_4$ (points de $I$) tels que l'ordre sera $H_1$, $H_3$, $H_2$, $H_4$.

Soit $\delta > 0$. On peut trouver un nombre limité de points $H_1, H_2, \ldots, H_i, \ldots, H_n$ de $I$ de manière que leur ordre est $H_1, \ldots, H_i, \ldots, H_n$ et que

$$\overline{H_i H_{i+1}} < \delta \qquad (i = 1, \ldots, n, n+1 \equiv 1).$$

Soit $G$ une chaine simplement fermée située dans le domaine simple $w$. Parcourons-la dans le même sens

* Même dans ce cas la réunion de $v$, $f$ et $w$ ne remplit pas $L$ en général. Les points de $L$ qui n'appartiennent pas à aucune des figures $v$, $f$ et $w$ forment des domaines simples, dont le nombre est au plus dénombrable. La frontière de chacun de ces domaines est formée par des points de $f$.

** Voir VII. L'ensemble $I$ a la même puissance que le continu.

que nous avons parcouru $l$ (c'est à dire que $\widehat{G}$ soit à droite). Soient $L_1, \ldots, L_i, \ldots, L_n$ les sommets de $G$ dans leur ordre.

Soit $\delta > 0$. On peut construire $G$ de manière que:

a) La distance de $G$ et $f$ est partout plus petite que $\delta$.

b) $\overline{L_i L_{i+1}} < \delta \quad (i = 1, \ldots, n, n+1 \equiv 1)$.

c) Il existe des points $H_1, \ldots, H_i, \ldots, H_n$ de $I$ tels que leur ordre est $H_1, \ldots, H_i, \ldots, H_n$ et que

$$\overline{H_i H_{i+1}} < \delta \qquad (i = 1, \ldots, n, n+1 \equiv 1),$$

et $\overline{L_i H_i} < \delta$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Soit $w$ un domaine simple. Répartissons les points de $I$ en quatre groupes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, de manière que deux à deux ils n'aient pas aucun point commun, chacun d'eux contienne plus qu'un point et que $A, B, C, D$ étant points quelconques de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ respectivement l'ordre de ces points soit $A, C, B, D$ (ou $A, D, B, C$ en changeant le sens du parcours).

On voit que chacun des $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ contient une infinité de points. De plus: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, admettent des chaines.

Soient $A$ et $B$ points de $I$. Joignons $A$ et $B$ par une chaine simple $K$ qui est d'ailleurs* située dans $w$. Par $K$ $w$ sera décomposé en deux domaines $w_1$ et $w_2$. (Voir VIII.)

Soit $I_1$ $(I_2)$ l'ensemble des points qui sont en connexion avec $w_1$ $(w_2)$ et qui ne sont pas points de $K$. $I_1$ et $I_2$ n'ont pas aucun point commun. La réunion de $I_1, I_2, A$ et $B$ sera $I$.

Lorsque $A$ et $B$ sont points de $\alpha$ l'un des $I_1, I_2$ ne contient que points de $\alpha$.

Lorsque $A$ est situé sur $\alpha$, $B$ sur $\beta$, l'un des $I_1, I_2$ contient $\gamma$, l'autre contient $\delta$.

Lorsque $\alpha$ et $\beta$, $\gamma$ et $\delta$ sont séparés, nous disons que $w$ est un domaine à quatre côtés.

$\alpha$ et $\beta$, $\gamma$ et $\delta$ sont des côtés opposés $\alpha$ et $\gamma$, $\alpha$ et $\delta, \ldots$, sont des côtés voisins.

---

* Nous exprimons par ce mot que $A$ et $B$ (qui sont points de $f$) ne sont pas situés dans $w$ tandis que les autres points de $K$ sont situés dans $w$.

Deux côtés voisins ont au moins un point limite commun. Chaque côté a des points qui ne sont pas points limites pour aucun des côtés voisins de lui. (Voir IV.)

## Chapitre II.

## Sur la quantité $S$.

XI. Soit $(\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2)$ un rectangle du plan $xy$ compris dans $P_1$ (ses côtés étant parallèles à ceux de $P_1$). Désignons par $\xi_1'$, $\xi_2'$ les projections orthogonales des sections $t = \xi_1$, $t = \xi_2$ de $t = \varphi(u, v)$ sur le plan de $P$. De même soient $\eta_1'$, $\eta_2'$ les projections orthogonales des sections $t = \eta_1$, $t = \eta_2$ de $t = \psi(u, v)$ sur $P$.*

Il peut arriver que $P$ contient au moins un domaine à quatre côtés, tel que ses côtés $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ (voir X.) sont formés par des points de $\xi_1'$, $\xi_2'$, $\eta_1'$, $\eta_2'$ respectivement.

Nous désignerons un tel domaine par $[\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2]$.

Soit donné un $[\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2]$, désignons-le aussi par $(w)$. Soit $\xi$ une valeur telle que $\xi > \xi_1$, $\xi < \xi_2$.

Je dis que dans $(w)$ il existe un $[\xi_1, \xi; \eta_1, \eta_2]$ et un $[\xi, \xi_2; \eta_1, \eta_2]$, de manière que ces deux domaines n'ont pas aucun point commun.

Un théorème analogue s'applique à un $\eta$ tel que $\eta > \eta_1$, $\eta < \eta_2$.

Démonstration:

a) Construction de $(w)'$ et de $(w)''$.

Nous désignons par $f$ la frontière de $(w)$ et nous désignons par $I$ l'ensemble des points qui sont en connexion avec $(w)$. Nous désignons par $\bar{\xi}_1$, $\bar{\xi}_2$, $\bar{\eta}_1$, $\bar{\eta}_1$ les $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ de $(w)$. Ces côtés sont situés sur $\xi_1'$, $\xi_2'$, $\eta_1'$, $\eta_2'$ respectivement. Soit $\xi'$ la projection orthogonale de la section $t = \xi$ de $t = \varphi(u, v)$ sur le plan de $P$.

Soit $w_1$ la figure qui est formée par toutes les chaines — en omettant leurs points de départs — qui issues des points de $\bar{\xi}_1$ sont d'ailleurs situées dans $(w)$ et qui ne coupent pas $\xi'$.**

* Les surfaces $t = \varphi(u, v)$, $t = \psi(u, v)$ sont situées dans l'espace $u$, $v$, $t$.

** On prouve facilement qu'une chaine qui dans $P$ joint un point de $\xi_1'$ avec un point de $\xi_2'$ coupe $\xi'$.

Soit $(w)''$ la figure, qui est formée par toutes les chaines — en omettant leurs points de départs — qui issues des points de $\bar{\xi}_2$ sont d'ailleurs situées dans $(w)$ et qui ne coupent pas la frontière de $w_1$.

Adjoignons à $w_1$ toutes les chaines — en omettant leurs points de départs — qui issues des points de $\bar{\xi}_1$, sont d'ailleurs situées dans $(w)$, et qui ne coupent pas la frontière de $(w)''$. Soit $(w)'$ la figure ainsi obtenue.

On voit, que $(w)'$ et $(w)''$ n'ont pas aucun point commun. De plus: leurs frontières sont formées par des points de $f$ et de $(w)$ et les points de ces frontières qui sont situés dans $(w)$ sont des points communs d'elles. Nous allons voir que $(w)'$ et $(w)''$ seront les $[\xi_1, \xi; \eta_1, \eta_2]$, $[\xi, \xi_2; \eta_1, \eta_2]$.

b) $(w)'$ est un domaine.

Par sa construction il satisfait à 1° du No. V.

Nous allons montrer qu'il satisfait à 2° du No. V.

Soient $C$ et $D$ points de $(w)'$. Par la construction de $(w)'$, ils existent des chaines simples $K_1$, $K_2$, qui, situées d'ailleurs dans $(w)'$, joignent $C$ et $D$ avec certains points $A$ et $B$ de $\bar{\xi}_1$. Lorsque $K_1$ et $K_2$ se coupent à 2° du No. V est satisfait. Lorsqu'ils ne se coupent pas, joignons $C$ et $D$ par une chaine simple $K_3$, située dans $(w)$, telle qu'elle ne coupe pas $K_1$ et $K_2$ que dans $C$ et $D$. Soit $K$ la réunion de $K_1$, $K_3$, $K_2$.

Par $K$ $(w)$ sera décomposé en deux domaines (VIII), dont l'un $v$ sera tel, que les points de sa frontière vrai qui sont en connexion avec lui sont points de $\bar{\xi}_1$ (X).

Soit $\varrho$ un nombre positif, tel que pour deux points $E$ et $F$ de $P$, tels que $\overline{EF} < \varrho$ d'ailleurs quelconques

$$|\varphi(E) - \varphi(F)| < \xi - \xi_1.$$

Soient $\overline{AA'}$, $\overline{B'B}$ les côtés extrêmes de $K$. D'après IX on peut construire une chaine $K'$, qui issue d'un point de $\overline{AA'}$ va dans $v$ jusqu'à un point de $\overline{B'B}$ et que la distance de $K'$ de la frontière vrai de $v$ est partout plus petite que $\varrho$. On a donc, pour les points de $K'$, $\varphi < \xi$. $\overline{AA'}$ et $\overline{B'B}$ sont dans $(w)'$ ($A$ et $B$ exclus), donc $K'$ est aussi dans $(w)'$. Ainsi $K_1$ et $K_2$ sont réunis par $K'$ dans $(w)'$. Donc $C$ et $D$ sont réunis dans $(w)'$.

Mais $(w)'$ satisfait aussi à 3° du No. V. Car soit $K$ une chaine fermée, située dans $(w)'$. Si $\widehat{K}$ n'appartient pas à $(w)'$, il contient au moins un point de la frontière de $(w)'$. Ainsi $\widehat{K}$ doit contenir points de $(w)''$ (voir a)), mais cela est d'après la construction de $(w)''$ (voir a)) impossible. En effet, une chaine quelconque, issue d'un point de $\widehat{K}$ et allant jusqu'à $\bar{\xi}_2$, coupe $K$ et contient ainsi au moins un point de $(w)'$.

c) $(w)''$ est un domaine. On voit que $(w)''$ satisfait à 1° du No. V. On démontre comme pour $(w)'$ qu'il satisfait à 2° du No. V. Mais il satisfait aussi à 3° du No. V Soit $K$ une chaine fermée située dans $(w)''$. Si $\widehat{K}$ contiendrait d'autres points que ceux de $(w)''$, il contiendrait au moins un point $A$ de la frontière de $(w)''$. $\widehat{K}$ est situé dans $(w)$, donc $A$ est sur la frontière de $(w)'$. La frontière de $(w)'$ coupe donc $K$, au moins dans un point $B$, car $A$ est dans $\widehat{K}$ et $\bar{\xi}_1$ (qui appartient à cette frontière) est à l'extérieur de $\widehat{K}$ (voir IV.). Mais cela est impossible, car un voisinage quelconque de $B$ contiendrait points de $(w)'$, tandis que $B$ comme point de $K$ est un point de $(w)''$, et ainsi un voisinage assez petit de $B$ ne contient que points de $(w)''$.

d) $(w)'$ est un domaine simple.

Renfermons $(w)$ dans un cercle, et soit $\mu$ la figure qui est formée par les points du cercle, qu'on peut joindre avec sa circonférence, sans couper la frontière $f$ de $(w)$. $(w)$ étant un domaine simple, chaque point de $f$ est tel, qu'un voisinage quelconque de lui contient points de $\mu$ (voir X). $(w)'$ est situé dans le cercle. Soit $A$ un point de sa frontière. Lorsque $A$ est un point de $f$, dans un voisinage quelconque de $A$ il existe des points $B$ de $\mu$. Si $A$ n'est pas point de $f$, il est situé dans $(w)$, et dans un voisinage quelconque de $A$ il existe des points $B$ de $(w)''$.

$\bar{\xi}_2$ contient des points qui ne sont pas points limites pour $\bar{\eta}_1$ ou $\bar{\eta}_2$ (voir X). Soit $C$ un tel point de $\bar{\xi}_2$.

Il est évident que la frontière de $(w)'$ ne peut contenir que points de $\bar{\xi}_1$, $\xi'$, $\bar{\eta}_1$, $\bar{\eta}_2$ et les points limites de ces figures. De plus; $\bar{\xi}_2$ est séparée de $\bar{\xi}_1$ et de $\xi'$.

Donc un voisinage assez petit de $C$ ne contient aucun point de la frontière de $(w)'$. Soit $D$ un point de $\mu$ situé dans ce voisinage. Donc une chaine qui issue de $B$ va dans $(w)''$ jusqu'à

$C$ et $CD$ forment une chaine, qui joint $B$ avec $\mu$ sans couper la frontière de $(w)'$.

Ainsi dans chaque cas il existe un voisinage aussi petit que l'on veut de $A$ tel qu'il contient des points $(B)$ tels, qu'on les peut joindre avec la circonférence sans couper la frontière de $(w)'$. Donc (voir X.) $(w)'$ est un domaine simple.

e) On démontre de la même manière que $(w)''$ est un domaine simple.

f) Propriétés de la frontière de $(w)'$.

Désignons par $I'$ l'ensemble des points qui sont en connexion avec $(w)'$. Il est évident que $I'$ ne contient que points de $I$ et de $(w)$. On prouve facilement que $I'$ ne contient aucun point de $\bar{\xi}_2$.

$I'$ contient $\bar{\xi}_1$ (voir a)). Joignons deux points quelconques de $\bar{\xi}_1$ par une chaine simple qui est d'ailleurs située dans $(w)'$. Par la chaine $(w)'$ sera decomposé en deux domaines, dont l'un est tel, que les points de sa frontière vrai qui sont en connexion avec lui sont points de $\bar{\xi}_1$, — car la chaine est aussi d'ailleurs dans $(w)$ (voir X).

Je dis que $I'$ contient points de $\bar{\eta}_1$ $(\bar{\eta}_2)$.

Soit $A$ un point de $\bar{\xi}_1$, $B$ un point de $\bar{\xi}_2$. Joignons-les par une chaine simple $K$ qui est d'ailleurs située dans $(w)$. Par $K$ $(w)$ sera décomposé en deux domaines, dont l'un $\lambda$ est tel, que de $\bar{\eta}_1$ et $\bar{\eta}_2$ seulement les points de $\bar{\eta}_1$ $(\bar{\eta}_2)$ sont en connexion avec lui (voir X).

Soit $\varrho > 0$ et tel que pour deux points $C$ et $D$ de $P$ tels que $\overline{CD} < \varrho$ on ait

$$|\varphi(C) - \varphi(D)| < \frac{\xi - \xi_1}{4}.$$

Soient $\overline{AA'}$ et $\overline{B'B}$ les côtés extrêmes de $K$. On peut (voir IX.) construire une chaine simple $K'$ qui, située d'ailleurs dans $\lambda$, joint un point $A''$ de $\overline{AA'}$ avec un point $B''$ de $\overline{B'B}$ de manière que la distance de $K'$ de la frontière vrai de $\lambda$ est partout $< \varrho$.

Parcourons $\overline{AA''}$, $K'$, $\overline{B''B}$ de $A$ vers $B$. $\varphi$ varie continument de $\varphi(A) = \xi_1$ jusqu'à $\varphi(B) = \xi_2$. Soit $C$ le premier point pour lequel $\varphi(C) = \frac{\xi_1 + \xi}{2}$. Soit $D$ un point de la frontière vrai de $\lambda$ pour lequel $\overline{CD} < \varrho$. Soit $E$ un point tel de $\overline{CD}$ que $\overline{EC}$ ne contient que $E$ de la frontière vrai de $\lambda$.

$E$ est évidemment un point limite de la figure qui est formée par $\overline{\eta}_1, \overline{\xi}_1, \overline{\xi}_2$. $\varphi(E)$ sera compris dans $\left(\frac{\xi_1+\xi}{2} - \frac{\xi-\xi_1}{4}, \frac{\xi_1+\xi}{2} + \frac{\xi-\xi_1}{4}\right)$ et ainsi $E$ sera un point limite tel de $\overline{\eta}_1(\overline{\eta}_2)$ qu'il n'est pas point limite aucune des $\overline{\xi}_1$, $\overline{\xi}_2$, $\xi'$.

De plus $E$ est un point de $I'$ car le chemin parcouru jusqu'à $C$ et $\overline{CE}$ appartiennent évidemment à $w_1$ et ainsi à $(w)'$. Donc $E$ est un point de $\overline{\eta}_1(\overline{\eta}_2)$. Comme les points de $I'$ assez voisins de $E$ sont évidemment points de $\overline{\eta}_1(\overline{\eta}_2)$, on voit que $I'$ contient plus qu'un point de $\overline{\eta}_1(\overline{\eta}_2)$.

Soient $A$ et $B$ points de $I'$ appartenant à $\overline{\eta}_1(\overline{\eta}_2)$. Joignons-les par une chaine simple qui est d'ailleurs située dans $(w)'$.

Par cette chaine $(w)'$ sera décomposé en deux domaines dont l'un ne contient sur sa frontière vrai que des points de $\overline{\eta}_1(\overline{\eta}_2)$ parmi les points qui sont en connexion avec $(w)'$ — car la chaine est située aussi dans $(w)$. Joignons deux points de $I'$ qui ne sont pas points de $(w)$ par une chaine simple qui est d'ailleurs située dans $(w)'$. Par cette chaine $(w)'$ sera décomposé en deux domaines. L'un d'eux sera tel, que sa frontière vrai ne contient de $I'$ que points de $I$ — car la chaine est située aussi dans $(w)$.

$I'$ contient aussi points de $(w)$ (voir a)). Ces points sont évidemment points de $\xi'$. Soient $A$ et $B$ de tels points. Joignons les par une chaine simple qui est d'ailleurs située dans $(w)'$. Par la chaine $(w)'$ sera décomposé en deux domaines. Je dis que l'un d'eux l'un sera tel qu'il ne contient sur sa frontière vrai parmi les points qui sont en connexion avec lui que des points tels de $I'$ qu'ils appartiennent à $\xi'$.

Supposons par exemple que la frontière vrai de chacun d'eux contient un tel point de $\overline{\eta}_1$. En les joignant par une chaine simple qui est d'ailleurs située dans $(w)'$, $(w)'$ sera décomposé en deux domaines. $A$ est situé sur la frontière vrai de l'un de ces domaines, $B$ sur la frontière vrai de l'autre. D'après ce qui précède $A$ ou $B$ appartiendrait à $\overline{\eta}_1$.

g) $(\omega)'$ est un domaine à quatre côtés. $I'$ est formé par des points de $\overline{\xi}_1$, $\xi'$, $\overline{\eta}_1$, $\overline{\eta}_2$. Répartissons les points de $I'$ en quatre groupes: 1° $\overline{\xi}_1$, 2° points de $(w)$ ces points sont points de $\xi'$, 3° points de $\overline{\eta}_1$, 4° points de $\overline{\eta}_2$.

On prouve facilement d'après f) et X que les figures 1°, 2°, 3°, 4° peuvent être les côtés $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ de $(w)'$, en remarquant que $\bar{\xi}_1$ et $\xi'$, $\bar{\eta}_1$ et $\bar{\eta}_2$ sont séparés.

h) On prouve de même que l'ensemble $II'$ des points qui sont en connexion avec $(w)''$ contient 1° points de $(w)$ ces points sont points de $\xi'$, 2° $\bar{\xi}_2$, 3° points de $\bar{\eta}_1$, 4° points de $\bar{\eta}_2$. En répartissant les points de $II'$ en ces quatre figures on prouve que ces figures peuvent être les côtés $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ de $(w)''$.

Donc $(w)'$ est un $[\xi_1, \xi; \eta_1, \eta_2]$ et $(w)''$ est un $[\xi, \xi_2; \eta_1, \eta_1]$.

Soient $A$, $B$, $C$, $D$ points de $\bar{\xi}_1$, $\bar{\xi}_2$, $\bar{\eta}_1$, $\bar{\eta}_2$, $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ points de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ de $(w)'$, $A''$, $B''$, $C''$, $D''$ points de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ de $(w)''$. Le sens du parcours étant le même pour les cercles de ces trois domaines, les ordres sont $A, C, B, D$; $A', C', B', D'$; $A'', C'', B'', D''$ ou $A, D, B, C; \ldots$; en changeant le sens du parcours.

Corollaire I. Il existe dans $(w)$ $[\xi_1, \xi; \eta_1, \eta]$, $[\xi_1, \xi; \eta, \eta_2]$, $[\xi, \xi_2; \eta_1, \eta]$, $[\xi, \xi_2; \eta, \eta_2]$ de manière que ces quatre domaines deux à deux n'ont pas aucun point commun.

Soient

$$\xi_{(0)}, \xi_{(1)}, \ldots, \xi_{(i)}, \ldots, \xi_{(l)}, \quad \eta_{(0)}, \eta_{(1)}, \ldots, \eta_{(j)}, \ldots, \eta_{(m)}$$

des valeurs telles que

$$\xi_1 = \xi_{(0)} < \xi_{(1)} < \cdots < \xi_{(i)} < \cdots < \xi_{(l)} = \xi_2 ,$$
$$\eta_1 = \eta_{(0)} < \eta_{(1)} < \cdots < \eta_{(j)} < \cdots < \eta_{(m)} = \eta_2 .$$

Il existe dans $(w)$ des domaines à quatre côtés

$$[\xi_{(i)}, \xi_{(i+1)}; \eta_{(j)}, \eta_{(j+1)}], \quad (i=0,\ldots,l-1, j=0,\ldots,m-1),$$

de manière que ces domaines deux à deux n'ont pas aucun point commun.

Corollaire II. D'après X la frontière de $[\xi_1, \xi; \eta_1, \eta]$ contient au moins un point qui appartient à $\xi'$ et à $\eta'$. Donc $(w)$ contient un point $C$ tel que

$$\varphi(C) = \xi, \quad \psi(C) = \eta.$$

XII. Soit $X_l Y_m$ une division de $P_1$, nous avons dèsigné (loc. cit. Chap. II) ses rectangles par $(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1})$. Supposons que pour une couple $(i, j)$ il existe au moins un $[x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1}]$, désignons-le par $[i, j]$.

Il est évident que pour un $(i, j)$ il peut exister une infinité même non dénombrable des $[i, j]$.

Soient $[i, j]'$, $[i, j]''$, ..., des domaines $[i, j]$ tels qu'ils n'ont pas deux à deux aucun point commun.

Quelque soit le choix de tels domaines leur nombre est un nombre qui est plus petit qu'un certain nombre fini qui ne dépende que de $X_l Y_m$.

D'après le Cor. II du No. XI dans chacun de ces domaines il existe au moins un point $C$ tel que

$$\varphi(C) = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \quad \psi(C) = \frac{y_j + y_{j+1}}{2}.$$

Soit $d$ un nombre positif plus petit que chaque

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{2}, \frac{y_{j+1} - y_j}{2} \quad (i = 0, \ldots, l-1, j = 0, \ldots, m-1).$$

$\varphi$ et $\psi$ sont continues, donc il existe un $\varrho > 0$ de manière que pour deux points $A$ et $B$ de $P$, tels que $\overline{AB} < \varrho$ d'ailleurs quelconques,

$$|\varphi(A) - \varphi(B)| < d, \quad |\psi(A) - \psi(B)| < d.$$

Le cercle de centre $C$ et de rayon $\varrho$ est donc situé dans le domaine. Donc la mesure intérieure de ce domaine (dans le sens de M. Jordan) est au moins $\varrho^2 \cdot \pi$. Donc le nombre des domaines $[i, j]'$, ..., est au plus l'aire de $P$ c'est à dire $\bar{u} \cdot \bar{v}$ divisée par $\varrho^2 \cdot \pi$, c'est à dire plus petite qu'un nombre fini qui ne dépend que de $X_l Y_m$.

XIII. Soit

$$(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_{l \cdot m}, j_{l \cdot m})$$

un arrangement des $l \cdot m$ couples $(i, j)$. Désignons-le par $J$.

Considérons les domaines $[i_1, j_1]$. Lorsqu'ils n'existent pas, posons $n_{i_1, j_1} = 0$. Lorsqu'il existe au moins un $[i_1, j_1]$, choisissons un nombre quelconque $n_{i_1, j_1} = 0, 1, 2, \ldots$, de ces domaines tels que deux à deux ils n'aient pas aucun point commun. Lorsque $n_{i_1, j_1} > 0$, désignons par $A^k_{i_1, j_1} (k = 1, \ldots, n_{i_1, j_1})$ les domaines choisis.

Considérons les domaines $[i_2, j_2]$. Lorsqu'ils n'existent pas ou dans le cas où ils existent et chacun d'eux a des points communs avec l'un au moins des $A^k_{i_1, j_1}$, posons $n_{i_2, j_2} = 0$. Supposons qu'ils existent de tels entre eux, qu'ils n'ont pas avec les $A^k_{i_1, j_1}$ aucun point commun.

Choisissons un nombre quelconque $n_{i_2, j_2} = 0, 1, \ldots$, de ces derniers domaines, mais tels que deux à deux ils n'aient pas aucun point commun. Lorsque $n_{i_2,j_2} > 0$ nous désignons par $A^k_{i_2,j_2}$ les domaines choisis.

Considérons les $[i_3, j_3]$. Lorsqu'ils n'existent pas ou lorsqu'ils existent mais chacun d'eux a des points communs avec la figure qui est formée par la réunion des $A^k_{i_1,j_1}$, $A^k_{i_2,j_2}$ nous posons $n_{i_3,j_3} = 0$.

Dans l'autre cas (c'est à dire lorsqu'il existe au moins un $[i_3, j_3]$ qui est à l'extérieur des $A^k_{i_1,j_1}$, $A^k_{i_2,j_2}$), on choisit de ces domaines quelques-uns en nombre $n_{i_3,j_3} = 0, 1, 2, \ldots$, tels que deux à deux ils n'ont pas des points communs. Lorsque $n_{i_3,j_3} > 0$ on les désigne par $A^k_{i_3,j_3}$. Et ainsi de suite.

Quelque soit $J$ et quelque soient $A^k_{i_1,j_1}$, $A^k_{i_2,j_2}$, ..., les $n_{i_1,j_1}$, $n_{i_2,j_2}$, ..., sont des nombres limités. (Voir XII.)

Considérons la somme

$$p = X_l Y_m n_{i,j} \cdot \alpha_{i,j}, \quad (\alpha_{i,j} = (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)).$$

La valeur de $p$ dépende évidemment de $J$ et du mode de choix des $A^k_{i,j}$. Mais il est évident que $p$ ne peut avoir qu'un nombre limité de valeurs.

Donc il existe un arrangement $J$ et un mode de choix des $A^k_{i,j}$ de manière que la valeur correspondante de $p$ n'est pas plus petite que tous les valeurs possibles de $p$.*

Pour exprimer que $J$ et les $A^k_{i,j}$ sont choisis de manière que $p$ ait la plus grande valeur possible, nous écrivons $N_{i,j}$ au lieu de $n_{i,j}$.

XIV. $XYN_{i,j} \cdot \alpha_{i,j}$ existe.

Soient $X_{L_s} Y_{M_s}$ et $X_{Q_v} Y_{R_v}$ des suites quelconques de divisions, il suffit évidemment démontrer que lorsque

$$X_{L_\infty} Y_{M_\infty} N_{i,j} \cdot \alpha_{i,j} = A', \quad X_{Q_\infty} Y_{R_\infty} N_{i,j} \cdot \alpha_{i,j} = A''$$

sont déterminés ils sont aussi égaux.

Supposons que $A' > A''$. Nous allons montrer que pour un $\delta > 0$ donné à l'avance et pour un $r$ choisi à volonté il existe un $v'$ de manière que lorsque $v > v'$

$$X_{L_r} Y_{M_r} N_{i,j} \cdot \alpha_{i,j} < X_{Q_v} Y_{R_v} N_{i,j} \cdot \alpha_{i,j} + \delta. \tag{1}$$

---

* On voit d'ailleurs qu'on obtient toutes les valeurs de $p$ pour un $J$ fixe.

Désignons par $x_i''$, $x_{i+1}'$ les points de $X_{Q_v}$ qui étant situés dans $(x_i, x_{i+1})$ de $X_{L_r}$ sont voisins de $x_i$, respectivement de $x_{i+1}$, $(x_i \leqq x_i'' \leqq x_{i+1}' \leqq x_{i+1})$.

De même, désignons par $y_j''$, $y_{j+1}'$ les points de $Y_{R_v}$ qui étant situés dans $(y_j, y_{j+1})$ de $Y_{M_r}$ sont voisins de $y_j$ respectivement de $y_{j+1}$ $(y_j \leqq y_j'' \leqq y_{j+1}' \leqq y_{j+1})$.

Il est évident que, ($r$ étant fixe) les $x_i'$, $x_i''$, $y_j'$, $y_j''$ existent pour les $v$ assez grands.

Nous choisissons un $v'$ si grand que pour les $v > v'$ on ait

$$(2) \qquad X_{L_r} Y_{M_r} N_{i,j} \cdot [\alpha_{i,j} - (x_{i+1}' - x_i'') \cdot (y_{j+1}' - y_j'')] < \delta .$$

Considérons un $A_{i,j}^k$ de $X_{L_r} Y_{M_r}$. Le rectangle $(x_i'', x_{i+1}'; y_j'', y_{i+1}')$ est compris dans le rectangle $\alpha_{i,j}$. Donc un domaine $[x_i'', x_{i+1}'; y_j'', y_{j+1}']$ est compris dans $A_{i,j}^k$ (voir XI).

A chaque rectangle $(x_h, x_{h+1}; y_l, y_{l+1})$ de $X_{Q_v} Y_{R_v}$ situé dans $(x_i'', x_{i+1}'; y_j'', y_{j+1}')$ appartient (voir XI) un domaine $[x_h, x_{h+1}; y_l, y_{l+1}]$ situé dans $[x_i'', x_{i+1}'; y_j'', y_{j+1}']$, de manière qu'en variant $i, j, k, h, l$ ces domaines deux à deux n'ont pas aucun point commun.

Ainsi un certain

$$X_{Q_v} Y_{R_v} n_{i,j} \cdot \alpha_{i,j}$$

est au moins égal à

$$X_{L_r} Y_{M_r} N_{i,j} \cdot (x_{i+1}' - x_i'') \cdot (y_{j+1}' - y_j'').$$

Mais on a (voir XI)

$$X_{Q_v} Y_{R_v} N_{i,j} \cdot \alpha_{i,j} \geqq X_{Q_v} Y_{R_v} n_{i,j} \cdot \alpha_{i,j}$$

et ainsi d'après (2), (1) est démontré.

Faisons tendre $\delta$ vers zéro, $r$ et $v$ vers $+\infty$, nous aurons de (1) $A' \leqq A''$ donc $A' = A''$. Posons $XYN_{i,j} \cdot \alpha_{i,j} = \mathsf{A}$.

Remarque. On démontre d'une manière analogue que lorsque $X_{l_r} Y_{m_r}$ est une suite de divisions de première espèce (loc. cit. Chap. II).

$$X_{l_{r+1}} Y_{m_{r+1}} N_{i,j} \cdot \alpha_{i,j} \geqq X_{l_r} Y_{m_r} N_{i,j} \cdot \alpha_{i,j} .$$

XV. Considérons $(w)$ de XI. Soit $\varepsilon > 0$ et donné à l'avance. Considérons le $\Delta_s^{(3)}$ du Chap. I du travail mentionné. Soit $G$ une chaine simplement fermée située dans $(w)$. Considérons la partie de $\Delta_s^{(3)}$ dont la projection orthogonale sur le plan de $P$ est formée par $\widehat{G}$ et $G$.

Désignons cette partie de $\varDelta_s^{(3)}$ par $G_s^{(3)}$. Soit $G_s$ la partie du $\varDelta_s$ (loc. cit.) qui corresponde à $G_s^{(3)}$. Soit $G_s t$ son aire.

On peut choisir $G$ de manière que dès que $s$ est assez grand

$$G_s t \geqq (\xi_2 - \xi_1) \cdot (\eta_2 - \eta_1) - \varepsilon .$$

Démonstration.

a) Soit $\delta > 0$. Soient $A$ et $B$ des points tels de $P$ que $\overline{AB} < \delta$. Soit $\mu$ la limite supérieure de tous les

$$|\varphi(A) - \varphi(B)| + |\psi(A) - \psi(B)| + |\chi(A) - \chi(B)|.$$

On a

$$\lim_{\delta = 0} \mu = 0 .$$

$L$ étant un point de $P$ désignons par $L^0$ le point de $R$ qui corresponde à $L$. On a $\overline{A^0 B^0} < \mu$.

Nous prenons $\delta$ aussi petite que

$$\xi_1 + 4\mu < \xi_2 - 4\mu, \quad \eta_1 + 4\mu < \eta_2 - 4\mu,$$
$$(\xi_2 - \xi_1 - 8\mu) \cdot (\eta_2 - \eta_1 - 8\mu) > (\xi_2 - \xi_1) \cdot (\eta_2 - \eta_1) - \varepsilon .$$

b) Construisons une chaine $G$, qui est la même pour $(w)$ et $\delta$ que $G$ dans le No. X l'est pour $w$ et $\delta$. Nous construisons les $L_i$ et les $H_i$ du No. X.

Il est évident que pour un $\delta$ assez petit chacun des $\bar{\xi}_1$, $\bar{\eta}_1$, $\bar{\xi}_2$, $\bar{\eta}_2$ contient quelques-uns des $H_i$.

On peut supposer que $H_n$ est situé sur $\bar{\eta}_2$ et $H_1$ sur $\bar{\xi}_1$. Il existe donc des nombres entiers $k$, $l$, $m$ tels que $1 < k < l < m < n$, de manière que les $H_i$ pour lesquels

$$1 \leqq i \leqq k, \quad k + 1 \leqq i \leqq l, \quad l + 1 \leqq i \leqq m, \quad m + 1 \leqq i \leqq n$$

sont situés sur $\bar{\xi}_1$, $\bar{\eta}_1$, $\bar{\xi}_2$, $\bar{\eta}_2$ respectivement.

Désignons par $Q$ la figure qui est formée par les distances $\overline{H_i^0 H_{i+1}^0}$ $(i = 1, \ldots, n, n + 1 \equiv 1)$.

Considérons le prisme droit dont la base est le rectangle $(\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2)$ du plan $xy$.

Soient (1), (2), (3), (4) ses faces situées dans les plans $x = \xi_1$, $y = \eta_1$, $x = \xi_2$, $y = \eta_2$ respectivement.

Il est évident que les $\overline{H_i^0 H_{i+1}^0}$ tels que

$$1 \leqq i < k, \quad k + 1 \leqq i < l, \quad l + 1 \leqq i < m, \quad m + 1 \leqq i < n$$

sont situées sur les faces (1), (2), (3), (4) respectivement. De plus $\overline{H_k^0 H_{k+1}^0}$, $\overline{H_l^0 H_{l+1}^0}$, $\overline{H_m^0 H_{m+1}^0}$, $\overline{H_n^0 H_1^0}$ sont plus petites que $\mu$.

Donc la projection orthogonale de $Q$ sur le plan $xy$ sera à l'extérieur du rectangle $(\xi_1 + \mu, \xi_2 - \mu; \eta_1 + \mu, \eta_2 - \mu)$. De plus, par une déformation continue $Q$ ne peut se réduire à un point, sans que sa projection sur le plan $xy$ ne balayerait pas le rectangle totalement.

On voit que la figure formée par les $\overline{L_i^0 L_{i+1}^0}$ a les mêmes propriétés relativement le rectangle $(\xi_1 + 2\mu, \xi_2 - 2\mu; \eta_1 + 2\mu, \eta_1 - 2\mu)$.

Désignons par $G^0$ la figure qui corresponde à $G$ sur $R$. $G^0$ a les mêmes propriétés relativement à $(\xi_1 + 3\mu, \xi_2 - 3\mu; \eta_2 + 3\mu, \eta_2 - 3\mu)$.

b) Soit $A$ un point de $G$. Menons par $A$ une ligne droite normale à $P$, et construisons sur cette droite un intervalle, dont la longueur est $2\mu$ et dont le milieu est le point commun de la normale et de $t = \varphi(u, v)$.

Soit $\alpha$ la figure qui sera décrite par l'intervalle en question lorsque $A$ décrit $G$.

Soient $\beta$ et $\gamma$ des figures analogues à $\alpha$ formées à l'aide de $t = \psi(u, v)$ respectivement $t = \chi(u, v)$.

Soient $A^\alpha$, $A^\beta$, $A^\gamma$ points arbitraires de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ qui se projettent en $A$. Soit $A'$ le point de l'espace $x$, $y$, $z$ dont les coordonnées $x$, $y$, $z$ sont égaux aux coordonnées $t$ de $A^\alpha$, $A^\beta$, $A^\gamma$ respectivement.

La projection orthogonale de $A'$ sur le plan $xy$ sera donc à l'extérieur de $(\xi_1 + 4\mu, \xi_2 - 4\mu; \eta_1 + 4\mu, \eta_2 - 4\mu)$.

Parcourons $G$ dans un sens. et marquons sur elle des points $A_1, \ldots, A_\nu$ de manière que leur ordre soit $A_1, \ldots, A_\nu$, et que $\overline{A_i A_{i+1}}$ $(i = 1, \ldots, \nu, \nu + 1 \equiv 1)$ soit situé sur $G$. Choisissons les $A_i^\alpha$, $A_i^\beta$, $A_i^\gamma$. On peut évidemment choisir les points $A_i$, $A_i^\alpha$, $A_i^\beta$, $A_i^\gamma$ de manière que; $\overline{A_i A_{i+1}} < \delta$, et que les $\overline{A_i^\alpha A_{i+1}^\alpha}$ soient situés dans $\alpha$, les $\overline{A_i^\beta A_{i+1}^\beta}$ dans $\beta$, les $\overline{A_i^\gamma A_{i+1}^\gamma}$ dans $\gamma$.

Donc la figure qui est formée par les $\overline{A_i' A_{i+1}'}$ et que nous désignons par $\Pi$ est telle, que sa projection orthogonale sur le plan $xy$ est à l'extérieur du rectangle $(\xi_1 + 4\mu, \xi_2 - 4\mu; \eta_1 + 4\mu,$

$\eta_2 - 4\mu$), de plus elle ne peut se réduire par une déformation continue à un point, sans que sa projection ne balayerait pas le rectangle.

c) Désignons par $\Delta_s^{(1)}$, $\Delta_s^{(2)}$ les polyèdres inscrits dans les surfaces $t = \varphi_s(u, v)$, $t = \psi_s(u, v)$ qui correspondent au polyèdre $\Delta_s^{(3)}$ qui est inscrit dans $t = \chi_s(u, v)$.*

En prenant $s$ assez grand la projection orthogonale du contour de $\Delta_s^{(3)}$ sur $P$ sera à l'extérieur de $\widehat{G}$ et $G$ (loc. cit.). Soit $G_s^{(3)}$ $(G_s^{(1)}, G_s^{(2)})$ la partie de $\Delta_s^{(3)}(\Delta_s^{(1)}, \Delta_s^{(2)})$ dont la projection orthogonale sur $P$ est $G$ et $\widehat{G}$.

Lorsque $s$ est assez grand, la partie de $G_s^{(3)}(G_s^{(1)}, G_s^{(2)})$ qui se projette sur $G$, sera comprise dans $\gamma(\alpha, \beta)$ (loc. cit.).

Le contour de $t = \chi(u, v)$ peut par une déformation continue coïncider avec le contour de $\Delta_s^{(3)}$, de manière que les points pendant le mouvement ne s'éloignent jamais plus loin qu'une quantité aussi petite que l'on veut du contour originelle de $t = \chi(u, v)$ dès que $s$ est assez grand (loc. cit.). De même pour $\varphi$ et $\Delta_s^{(1)}$ puis pour $\psi$ et $\Delta_s^{(2)}$. De plus la ligne polygonale qui est formée par les $\overline{A_i^\gamma A_{i+1}^\gamma}(\overline{A_i^\alpha A_{i+1}^\alpha}, \overline{A_i^\beta A_{i+1}^\beta})$ est simplement fermée.

Donc $\Delta_s^{(3)}(\Delta_s^{(1)}, \Delta_s^{(2)})$ peut se mouvoir continument de manière que $G_s^{(3)}(G_s^{(1)}, G_s^{(2)})$ reste invariable, et que la position finale de $\Delta_s^{(3)}(\Delta_s^{(1)}, \Delta_s^{(2)})$ sera telle, que son contour sera formé par les $\overline{A_i^\gamma A_{i+1}^\gamma}(\overline{A_i^\alpha A_{i+1}^\alpha}, \overline{A_i^\beta A_{i+1}^\beta})$, et que la partie $M_s^{(3)}(M_s^{(1)}, M_s^{(2)})$ de $\Delta_s^{(3)}(\Delta_s^{(1)}, \Delta_s^{(2)})$ qui est à l'extérieur de $G_s^{(3)}(G_s^{(1)}, G_s^{(2)})$ sera située dans $\gamma(\alpha, \beta)$.

Soit $\Delta_s'$ le polyèdre qui corresponde à ces positions finales des $\Delta_s^{(3)}(\Delta_s^{(1)}, \Delta_s^{(2)})$ dans l'espace $x$, $y$, $z$. A cause des propriétés de $\Pi$ (voir b)) qui est le contour de $\Delta_s'$, la projection de $\Delta_s'$ sur le plan $xy$ remplit le rectangle $(\xi_1 + 4\mu,\ \xi_2 - 4\mu;\ \eta_1 + 4\mu,\ \eta_2 - 4\mu)$.

Mais comme $M_s^{(3)}(M_s^{(1)}, M_s^{(2)})$ est situé dans $\gamma(\alpha, \beta)$ les points de $\Delta_s'$ qui se projettent dans le rectangle sont points de $G_s$.

Donc l'aire $G_s t$ de $G_s$ est au moins égale à

$$(\xi_2 - \xi_1 - 8\mu) \cdot (\eta_2 - \eta_1 - 8\mu)$$

et ainsi

$$G_s t \geqq (\xi_2 - \xi_1) \cdot (\eta_2 - \eta_1) - \varepsilon\,.$$

* $\varphi_s$, $\psi_s$, $\chi_s$ sont les $f_s^{(1)}$, $f_s^{(2)}$, $f_s^{(3)}$ du Chap. I du travail mentionné.

XVI. L'aire $T$ de $R$ est au moins égale à $\mathsf{A}$.

Soit $X_{l_r} X_{m_r}$ une suite de divisions. Soit $\delta_r > 0$, $\lim\limits_{r=\infty} \delta_r = 0$. Soit $\varepsilon_r > 0$ et

$$\Sigma X_{l_r} Y_{m_r} N_{i,j} \cdot \varepsilon_r < \delta_r.$$

Considérons les $A_{i,j}^k$ de la $r$-ième division. En prenant $s$ assez grand à chaque $A_{i,j}^k$ corresponde (voir XV) une partie de $\Delta_s$, dont l'aire est plus grande que $\alpha_{i,j} - \varepsilon_r$. Et lorsque le triple $i, j, k$ varie les parties correspondantes aux $A_{i,j}^k$ de $\Delta_s$ n'ont pas deux à deux aucun point commun. Donc l'aire $\Delta_s t$ de $\Delta_s$ est plus grande que

$$X_{l_r} Y_{m_r} N_{i,j} \cdot (\alpha_{i,j} - \varepsilon_r) > X_{l_r} Y_{m_r} N_{i,j} \cdot \alpha_{i,j} - \delta_r.$$

A la limite $r = \infty$ on peut prendre $s = \infty$, donc

$$\lim_{s=\infty} \Delta_s t \geqq \mathsf{A}$$

et ainsi

$$T \geqq \mathsf{A}.$$

Soient $\mathsf{B}$ et $\Gamma$ les quantités qui sont les mêmes pour les plans $xz$ et $yz$ que $A$ l'est pour le plan $xy$. Posons

$$S = \mathsf{A} + \mathsf{B} + \Gamma.$$

Il est évident que $S < +\infty$ est une condition nécessaire pour que l'aire de $R$ soit finie, en supposant bien entendu que $S$ existe.

Je vais communiquer deux théorèmes.

1° Soient $\varphi, \psi, \chi$ telles que pour deux points $A$ et $B$ de $P$ quelconques mais différents

$$|\varphi(A) - \varphi(B)| + |\psi(A) - \psi(B)| + |\chi(A) - \chi(B)| > 0.*$$

Dans ce cas $S$ existe pour chaque rectangle de $P$, et l'aire d'une telle surface n'est jamais égale à zéro.

2° Soit $\varphi$ telle que ses sections $t =$ const. se réduisent à des lignes droites, parallèles à l'axe des $u$, de manière que la mesure intérieure d'une telle section soit toujours égale à zéro. $\psi$ et $\chi$ sont générales. Lorsque $\mathsf{A}$ et $\mathsf{B}$

* La surface $R$ est toujours une image univoque de $P$, dans le cas du texte elle est une image biunivoque de $P$.

n'existent pas Γ n'existe pas aussi et l'aire $T_6$ est égale à zéro.*

Pour la surface $z = f(x, y)$ j'ai indiqué la construction de la suite des polyèdres, dont l'aire converge vers $T_4$.

On obtient un polyèdre de la suite, en construisant ses parties à l'aide des plans $xy$, $xz$, $yz$ et en établissant la connexion entre ces trois espèces de faces (loc. cit. Chap. XIII).

On peut dire, qu'on obtient la quadrature de $z = f(x, y)$, à l'aide de trois quadratures partielles et par l'établissement de la connexion.

Les faces qui établissent la connexion, ont dans leur ensemble une aire plus petite qu'un nombre positif donné à l'avance, lorsqu'on choisit convenablement les trois quadratures partielles.

Dans le cas de $R$ où $S$ existe j'ai pu déjà établir les mêmes procédés que j'ai désignés ci-dessus comme quadratures partielles. Mais je n'ai pas pu encore obtenir l'établissement de la connexion.

Ces faces cherchées, doivent avoir une aire très petite dans leur ensemble. Et ces faces sont liées à certains domaines de $P$.

Pour ces domaines une quantité $S'$ qui est analogue à $S$ peut être rendue aussi petite que l'on veut, par le choix convenable des trois quadratures partielles.

Dans quelques cas plus généraux que celui de $z = f(x, y)$ j'ai pu déjà obtenir l'établissement de la connexion. Dans ces cas l'aire de ces faces est aussi petite que l'on veut lorsque $S'$ est assez petit.

On a donc assez de faits, pour considérer comme très probable, que lorsque $S$ n'existe pas l'aire est égale à zéro. Ce cas est probablement l'un de ceux, où il n'y a pas une différence essentielle entre zéro et une quantité infiniment petite.**

* Les surfaces $t = \psi$ et $t = \chi$ seront comme $t = \varphi$ des cylindres dont les génératrixes sont parallèles à l'axe des $u$.

** Depuis le mois janvier de 1911, où ce travail était écrit, j'ai pu déjà établir la connexion dans le cas de $R$ qui est décrit dans 1° de XVI.

2.

# ÜBER DIE ANSTRENGUNGSLINIEN DER METALLE.

Von Dr. MORITZ RÉTHY in Budapest.

(Zusammenfassung zweier Publikationen, vorgelegt der ung. Akad. der Wiss. am 16. Nov. 1908 und am 18. März 1909.)

1. Wenn Metalle mit glatter Oberfläche oberhalb der Elastizitätsgrenze in Anspruch genommen werden, so erscheinen an der Oberfläche eigentümliche Scharen von Linien, die durch ihre große Regelmäßigkeit überraschen. Die Erscheinung wurde zuerst von W. LÜDERS* beobachtet, ausführlich und systematisch wurde sie jedoch erst von L. HARTMANN in Paris beschrieben.** Letzterer fast die Gesetzmäßigkeit der Erscheinungen in folgende zwei Sätze zusammen:

1. Bei großer Anstrengung kommen infolge der inneren Deformation der Körper Flächenscharen zustande, die voneinander durch Regionen getrennt werden, wo gewöhnliche elastische Deformation herrscht; die Anzahl der Flächen und die Größe ihrer Intervalle hängt von der Intensität der Anstrengung ab.

2. Diese Flächenscharen schneiden die Oberflächen der Körper in Linien, deren Tangenten in jedem Punkt einen Winkel von konstanter Größe mit der Richtung der dortigen Kraft einschließen. Der Wert des Winkels ist je nach der betreffenden Flächenschar $0^0$, $90^0$, $\alpha^0$ oder $90^0 - \alpha^0$, wo $\alpha$ eine eigentümliche Konstante der Materie des betreffenden Körpers ist.

Die von DUGUET, MOHR und MESNAGER herrührenden Erklärungen der Erscheinung beruhen auf der Annahme, daß die innere Reibung die Wirkung der elastischen Kräfte auf gewisse

---

* DINGLER: Polyt. Journal 1860, Bd. 155, S. 18—22.

** Distributions des déformations dans les métaux soumis à des efforts, 1896, pagg. 3—197. Communications du Congrès international 1901; Phénomènes, qui accompagnent la déformation permanente des métaux, pagg. 95—141.

Weise modifiziert. Mein verehrter Kollege H. Rejtö setzt außer der inneren Reibung in der Gruppierung der Schwerpunkte der Moleküle eine gewisse Gesetzmäßigkeit voraus, und die Erklärung antizipiert in vielen Dingen die von H. Hartmann erst in späterer Zeit publizierten Beschreibungen. Nach H. Ricour ist die Ursache der Erscheinungen in der polyedrischen Gestalt der Moleküle zu suchen.*

Aber alle diese Erklärungen beruhen auf dem Gleichgewicht der vorausgesetzten Kräfte; sie sind rein statischer Natur, und können demzufolge nur das Auftreten einer ausgezeichneten Richtung, aber auf keine Weise das Zustandekommen distinkter Linienscharen, geschweige denn solcher von überraschender Regelmäßigkeit erklären. Die Linien müßten eben sozusagen unendlich dicht, daher unwahrnehmbar sein. Soviel ich sehe, kann diese Erscheinung nur durch vibrierende und nachher gleitende Bewegung der Materie erklärt werden, und wir haben es hier, wie H. Osmond** richtig bemerkte, mit einer Interferenz von Wellenbewegungen zu tun; freilich sind diese Wellenbewegungen in allgemeinster Auffassung, nämlich als aus unendlich vielen einfachen Wellenbewegungen zusammengesetzt, zu verstehen.

Ich will hier meinen Versuch einer mathematischen Beschreibung der Erscheinungen in den Grundzügen veröffentlichen und sage vor allem Herrn Rejtö, der meine Aufmerksamkeit schon vor Jahren auf die Erscheinung zu lenken die Güte hatte, öffentlich Dank.

2. Ich setze bei Ableitung der Differentialgleichungen der Bewegung der Materie in dieser Publikation ebene Bewegungen voraus. Ich führe aber auch ganz allgemein zwei Begriffe ein: der eine ist der einer Polarisation ganz eigener Art der Materie, der andere ist der, daß sich zu den Druckkräften überall auch Druckkräftepaare gesellen.*** Ich setze nämlich voraus, daß die

---

* Ebendaselbst, Communication . . . 1901; pagg. 1—94.

** Mir ist diese Ansicht des H. Osmond nur aus den Worten bekannt, die in der im Jahre 1901 publizierten Arbeit des H. Hartmann pagg. 140, 141 zu lesen sind.

*** Vgl. Voigt: Theor. Phys. Bd. I, § 2. Es sei mir gestattet, hier zu erwähnen, daß ich auf diese Verallgemeinerung der Mechanik gerade durch

Materie bei großer Anstrengung überall und auf homogene Weise sich in Teile scheidet, die „relative“ Bewegungen ausführen und die aufeinander nicht nur Druckkräfte sondern auch Druckkräftepaare ausüben. Bei kleinen Kräften ist bloß die Bewegung des „Grundstoffes“ maßgebend, während bei großer Anstrengung der Materie ein Teil dieser eine stufenweise Polarisation von der beschriebenen Art erleidet; und gerade die vibrierende Bewegung dieser polarisierten Teile und die Umsetzung dieser in Wellen gelagerten Bewegungsenergie in andere Energieformen bewirken bei Schwächung der Stabilität das Auftreten der von H. HARTMANN beobachteten Anstrengungslinien.

Daß in der von Kräften angegriffenen Materie eine stufenweise Polarisation vor sich geht, das beweisen die neueren Beobachtungen des H. FRAICHET, nach denen bei fortschreitender Anstrengung die magnetische Polarisation stufenweise zunimmt, insbesondere solange die Elastizitätsgrenze nicht überschritten ist. Nach meiner Voraussetzung tritt die Polarisation der oben beschriebenen Art nach Überschreitung der Elastizitätsgrenze in vergrößertem Maße auf.* Die andere Voraussetzung hingegen, daß in einem und demselben scheinbar homogen erfüllten Raume Teile der Materie selbständige Bewegungen ausführen und aufeinander wirken, ist nicht neu; es genügt an die Theorien der anomalen Dispersion und der Endosmose zu erinnern.

Bei Voraussetzung ebener Kräfte und ebener Bewegungen mache ich den folgenden Ansatz: Es gibt in einem jeden Punkt zwei Flächenelemente, die durch je einen spezifischen Druck $\sigma_i$, $\tau_i$ angegriffen werden — wobei $\sigma_i$ die Normal- und $\tau_i$ die Tangential-

---

die in Rede stehende Erscheinung selbständig geführt wurde, und daß ich darüber 1898, 25. Dezember in der Sitzung der Math. und Phys. Gesellschaft in Budapest einen Vortrag gehalten habe.

* Eine ähnliche Annahme macht neuestens Dr.-Ing. RUDOLPH PLANK in seiner Abhandlung „Zur Thermodyn. elastischer und bleibender Formänderungen“, Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1910, 29. Okt., Bd. 54. Es wird da angenommen, daß beim Fließen des Metalls nur ein Teil des Materials fließend wird, während der übrige Teil elastisch bleibt. Dies Verhalten des Stoffs wurde übrigens schon von H. HARTMANN wahrgenommen. Freilich ist die von mir vorausgesetzte Bifurkation des fließenden Teils eine weitere Hypothese.

komponente bedeuten —, so daß die Gleichungen

$$(1)\qquad \tau_1 = f\sigma_1, \quad \tau_2 = -f\sigma_2$$

stattfinden, wo $f$ eine dem Stoff eigentümliche Konstante ist, deren Vorzeichen bei dem einen polarisierten Stoffteil positiv, bei dem andern negativ, und deren Größe sonst dieselbe ist.

Sind $x$ und $y$ in der Ebene beliebige Kartesische Koordinaten so folgt aus diesem Ansatz nach der üblichen Methode, daß die Druckkräfte auf die Grundebenen $x$, $y$ mittels $\sigma_1$ und $\sigma_2$ und mittels der ausgezeichneten Richtungen 1 und 2 berechnet werden können, wie folgt:

$$(2)\qquad \begin{aligned} X_x &= \sigma_1 \cos^2(x,1) + \sigma_2 \cos^2(x,2) + f(\sigma_1 - \sigma_2)\cos(x,1)\cos(x,2),\\ Y_x &= (\sigma_2 - \sigma_1)\cos(x,1)\cos(x,2) + f(\sigma_1\cos^2(x,1) + \sigma_2\cos^2(x,2)),\\ X_y &= (\sigma_2 - \sigma_1)\cos(x,1)\cos(x,2) - f(\sigma_1\sin^2(x,1) + \sigma_2\sin^2(x,2)),\\ Y_y &= \sigma_1\sin^2(x,1) + \sigma_2\sin^2(x,2) - f(\sigma_1 - \sigma_2)\cos(x,1)\cos(x,2). \end{aligned}$$

Die Verifikation dieser Gleichungen ist diese: Ich bezeichne mit $1_x$, $2_x$, die Komponenten der auf die Fläche, deren Normale $x$ ist, wirkenden spezifischen Druckkraft; daher sind

$$\begin{aligned} 1_x &= \sigma_1 \cos(x, 1) + \tau_2 \cos(x, 2),\\ 2_x &= \tau_1 \cos(x, 2) + \sigma_2 \cos(x, 2), \end{aligned}$$

Die Komponente des Druckes $(1_x, 2_x)$ in der Richtung $x$ sei $N$, die in der auf $x$ senkrechten Richtung sei $T$; also

$$\begin{aligned} N &= \phantom{-}1_x \cos(x, 1) + 2_x \cos(x, 2),\\ T &= -1_x \cos(x, 1) + 2_x \cos(x, 2); \end{aligned}$$

mithin

$$\begin{aligned} N &= \sigma_1 \cos^2(x, 1) + \sigma_2 \cos^2(x, 2) + (\tau_1 - \tau_2)\cos(x, 1)\cos(x, 2),\\ T &= \tau_1 \cos^2(x, 1) + \tau_2 \cos^2(x, 2) + (\sigma_2 - \sigma_1)\cos(x, 1)\cos(x, 2), \end{aligned}$$

Nun sind $N$ und $T$ in anderer Bezeichnung $X_x$, $Y_x$, usw.

Aus den Gleichungen (2) folgt

$$(2')\qquad Y_x - X_y = f(\sigma_1 + \sigma_2).$$

Ist also die Summe $\sigma_1 + \sigma_2 \gtrless 0$, so wirkt auf den im Raumelement befindlichen einen polarisierten Stoffteil ein Kräftepaar von gewissem Sinn, und auf den zweiten ebendaselbst befindlichen polarisierten Stoffteil, falls ich nur zwei solche voraussetze, ein ebensogroßes Kräftepaar von entgegengesetztem Sinn. Diese beiden Kräftepaare halten sich im Gleichgewicht, und üben auf die Bewegung des Ganzen keinen Einfluß aus. Hingegen ist die Bewegung der einzelnen polarisierten Teile durch die von $f$ abhängigen Kräfte wesentlich verändert.

Ich setze weiter von den mit $f$ nicht multiplizierten additiven Teilen der Drucke $X_x$, $Y_x$, ... voraus, daß ihnen ein durch die Deformation eindeutig bestimmtes Potential zukommt. Da in meinen Untersuchungen in erster Linie von den durch die Vibrationen der Drucke verursachten kleinen Vibrationen $u$, $v$ der Materie die Rede sein wird, so genügt es, bloß den mit $F$ zu bezeichnenden quatratischen Teil des Potentials* in Betracht zu ziehen, und demgemäß (2) in der Form zu schreiben:

$$(3)\qquad \begin{aligned} -X_x &= \frac{\partial F}{\partial x_x} - f\frac{\partial F}{\partial x_y}, & -X_y &= \frac{\partial F}{\partial x_y} - f\frac{\partial F}{\partial y_y}, \\ -Y_x &= \frac{\partial F}{\partial y_x} + f\frac{\partial F}{\partial x_x}, & -Y_y &= \frac{\partial F}{\partial y_y} + f\frac{\partial F}{\partial y_x}, \end{aligned}$$

wo die KIRCHHOFFschen Bezeichnungen benutzt sind

$$x_y = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad y_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad x_y = y_x = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Die Differentialgleichungen der stationären Bewegung der Punkte der polarisierten Materie lassen sich bei Zugrundelegung von (3) formal leicht hinschreiben, und indem ich gleich die Bezeichnung einführe

$$(4')\qquad \xi = \frac{u + fv}{1 + f^2}, \quad \eta = \frac{-u + fv}{1 + f^2},$$

schreibe ich dieselben in der übersichtlichen Form hin:

$$(4)\qquad \begin{aligned} \mu\frac{d^2\xi}{dt^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x_x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x_y}, \\ \mu\frac{d^2\eta}{dt^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y_x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y_y}, \end{aligned}$$

wo $\mu$ die Dichtigkeit des betrachteten polarisierten Stoffs bedeutet. Ein Blick auf die Gleichungen (4′) zeigt, daß der Vektor $\xi$, $\eta$ im Vergleich zum Vektor $u$, $v$ um den Winkel arctg $f$ verdreht, und

* Selbstverständlich sind die Koeffizienten in $F$ im allgemeinen nicht konstant, sondern von der Größe der im Punkt $x$, $y$ herrschenden Druckkräfte abhängig, also Funktionen von $x$, $y$.

im Maßstabe $1 : \sqrt{1 + f^2}$ vergrößert ist; daher ähnelt der durch (4) ausgesprochene Satz dem Gesetz des Herrn REJTÖ von der Richtung der „Kraftvermittlung“.* Ich bemerke, daß die zweite und dritte der Gleichungen (3) formal das DUGUETsche Gesetz der Reibung ausdrücken, wenn $f$ die Reibungskonstante der Materie ist. Mein Ansatz (1) ist tatsächlich aus dem DUGUETschen Gesetz entstanden, indem ich letzteres a priori eben nur bei *zwei* aufeinander senkrechten Lagen der gedrückten Flächenelemente zuließ.

3. Gleichmäßiger Zug eines Metallstreifens. Ich wähle die Längenachse zur $x$-Achse; diese sei zugleich die Richtung und der Sinn der Zugkraft, und der Anfangspunkt der Koordinaten sei der Angriffspunkt der Resultante der Zugkräfte; die Länge des Streifens sei $l$, und am Endpunkt greife die gleiche Resultante der Gegenzugkräfte an; Zug- und Gegenzugkräfte seien gleichmäßig verteilt. An den beiden Seiten des Streifens ($y = \pm b$) herrsche Luftdruck, dessen Größe im Vergleich zu den Zugkräften verschwindend klein zu betrachten ist; hier ist also

$$X_y = Y_x = 0. \tag{5}$$

Da das Gleichgewicht des gesamten Kräftesystems ein stabiles ist, so tritt bei Störung der Ruhelage des materiellen Systems eine Bewegung der Punkte um die Ruhelage ein. Werden also die Zugkräfte vergrößert oder verkleinert, so entstehen Vibrationen der materiellen Punkte um die neuen Gleichgewichtslagen. Dasselbe muß auch vom polarisierten Teil der Materie vorausgesetzt werden.

Da die Materie gleichmäßig gespannt ist, so sind die Koeffizienten von $F$ in allen Punkten dieselben; und ich nehme der durch die Spannung verursachten Anisotropie gemäß an, daß

$$2F = a x_x^2 + (a_{11} x_x + f a_{12} x_y + a_{22} y_y)^2 \tag{6}$$

sei, wo $a$ positiv, und die Koeffizienten $a_{ik}$ gerade Funktionen von $f$ seien.

Ich frage, ob unsere Differentialgleichungen eine den Grenz-

---

* Die innere Reibung der festen Körper, Leipzig 1897, pag. 8.

gleichungen (5) genügende partikuläre Lösung haben von der Form

$$(7) \qquad u = AKT, \quad v = BKT,$$

wo $A$ und $B$ Konstanten, $K$ eine Ortsfunktion, $T$ eine Zeitfunktion bedeuten; und ich verlange, daß die Lösung auch bei einer Verschmälerung des Streifens gültig bleibe. Da die Gleichungen (5) auf diese Weise auf dem ganzen Streifen zu gelten haben, so haben wir gemäß (3)

$$(6') \qquad \frac{\partial F}{\partial x_y} = \frac{\partial F}{\partial y_y} = 0$$

identisch zu erfüllen, demzufolgen die Gleichungen (4) übergehen in

$$(7') \qquad -fA + B = 0,$$

$$(8) \qquad \mu AKT'' = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x_x},$$

während (6′), d. i.

$$a_{11}x_x + fa_{12}x_y + a_{22}y_y = 0,$$

infolge (7) und (7′) übergehen in

$$(9) \qquad (a_{11} + f^2 a_{12})\frac{\partial K}{\partial x} + f(a_{12} + a_{22})\frac{\partial K}{\partial x} = 0,$$

eine partielle Differentialgleichung, deren allgemeine Lösung ist

$$K = K(x - gy),$$

wo

$$(10) \qquad g = \frac{a_{11} + f^2 a_{12}}{a_{12} + a_{22}}\frac{1}{f}.$$

Mittels Substitution von (10) in (8) folgt endlich

$$(11) \qquad \frac{\mu}{a}\frac{T''}{T} = \frac{K''}{K},$$

wo $T''$ den zweiten Differentialquotienten von $T$ nach $t$, $K''$ dasselbe von $K$ nach $(x - gy)$ bedeuten. Daher sind $T$ und $K$ entweder zugleich exponentielle oder zugleich periodische Funktionen, und man hat bei der vorausgesetzten Stabilität der Materie notwendigerweise

$$(12) \qquad T = T_0 \sin\frac{2\pi}{\tau}(t + \text{const.}), \quad K = \sin\frac{2\pi}{\lambda}(x - gy + \text{const.}),$$

wo $\tau$ und $\lambda$ der Materie eigentümliche Konstanten sind, die der Relation unterworfen sind

$$(12') \qquad \sqrt{\frac{a}{\mu}} = \frac{\lambda}{\tau}.$$

Man sieht aus (12), daß die Richtung der ebenen Wellenlinien mit der $x$-Achse (d. i. mit der Richtung der Zugkraft) den Winkel

$$(12'') \qquad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{g}$$

einschließt, während die wahre Wellenlänge

$$\lambda_1 = \lambda \sin \alpha = \lambda \frac{1}{\sqrt{1+g^2}} \cdot$$

Die räumliche Dilatation ist

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2\pi}{\lambda}(1 - fg) A T K',$$

verschwindet daher nur dann überall, wenn $1 - fg = 0$ ist, d. i. wenn zwischen den Koeffizienten $a_{ik}$ in (10) die Beziehung stattfindet

$$a_{11} - a_{22} + a_{12}(f^2 - 1) = 0.$$

Bei Ausschließung dieses Spezialfalles findet also in Wellenlinien, wo $K = 1$ ist, das Maximum des absoluten Wertes der Verdichtung statt, demnach in Linien von der Richtung $\alpha$, deren kleinster Abstand $= \frac{\lambda_1}{2}$ ist.

Da die Materie teilweise polarisiert ist, und die polarisierte Materie in zwei Gruppen zerlegt ist, die ihre eigenen Bewegungen ausführen, und da den beiden Gruppen entgegengesetzt gleiche Werte von $f$ bei ganz gleichen Werten der $a_{ik}$ und $a$ zukommen, so haben wir demnach zwei Systeme von Wellenlinien, die mit der Richtung der Längenachse des Streifens die Winkel $\alpha$ und $-\alpha$ einschließen.

4. Da mittels (12′) bloß das Verhältnis $\frac{\lambda}{\tau}$ bestimmt ist, so ist (7) auch dann eine Lösung, wenn an Stelle von $\lambda$ und $\tau$ die Werte $n_i \lambda$ und $n_i \tau$ treten, wo $n_i$ eine beliebige Zahl bedeutet. Da ferner unsere Differentialgleichungen sämtlich linear sind, so ist das System

$$(13) \qquad u = \sum_i A_i T_i K_i, \qquad v = f \sum_i A_i T_i K_i$$

eine allgemeine Lösung, wenn die $A_i$ beliebige Konstanten bezeichnen, und

$$(13') \qquad T_i = \sin \frac{2\pi n_i}{\tau}(t + t_i), \qquad K_i = \sin \frac{2\pi n_i}{\lambda}(x - gy + x_i)$$

gesetzt sind, wo $\tau_i$ und $x_i$ ebenfalls beliebige Konstanten bedeuten, und $g$ durch die Gleichung (10) bestimmt ist.

Wir haben aber zur näheren Bestimmung der Konstanten $A_i$, $t_i$ und $x_i$ kein Mittel zur Hand, da die an den Angriffsstellen der Zugkräfte herrschenden Grenzbedingungen völlig unbekannt sind.

Sind die $n_i$ ganze Zahlen, so ist in dem Zeitraum $\tau$ der Mittelwert der lebendigen Kraft an einer Stelle $x$, $y$ proportional der Größe

$$\sum_i n_i^2 A_i^2 \sin^2 \frac{2\pi n_i}{\lambda}(x - gy + x_i),$$

und der Mittelwert des Quadrats der Dichtigkeit proportional der Größe

$$\sum_i n_i^2 A_i^2 \cos^2 \frac{2\pi n_i}{\lambda}(x - gy + x_i).$$

Sind die $n_i$ nicht kleiner als 1, so gilt dasselbe für einen Zeitraum, der im Vergleich zu $\tau$ sehr groß ist, annäherungsweise auch dann, wenn die $n_i$ keine ganzen Zahlen sind.

Sowohl der Mittelwert der lebendigen Kraft, als des Quadrats der Dichtigkeit erreichen extreme Werte in die Linien, wo die Gleichung

$$\sum_i n_i^3 A_i \sin \frac{4\pi n_i}{\lambda}(x - gy + x_i) = 0$$

erfüllt ist und der Differentialquotient der linken Seite dieser Gleichung nicht verschwindet. Und an Stellen, wo die eine der beiden Größen ein Maximum wird, erreicht die andere ihre kleinsten Werte.

5. Die Koeffizienten $a_{ik}$ und $a$ nehmen bei zunehmender Anstrengung des Materials veränderliche Werte an, und ich mache die Annahme, daß bei wachsender Anstrengung $g$ und $\lambda$ konstant bleiben, während $a$ fortwährend abnehmend bei genügend großer Anstrengung negativ wird. Wir haben dann, in der Lösung (13) für $K_i$ denselben Wert beibehaltend, an Stelle von $T_i$ die Exponentialfunktion zu setzen

$$T_i = \tau_{1i} e^{\frac{2\pi n_i}{\tau} t} + \tau_{2i} e^{-\frac{2\pi n_i}{\tau} t},$$

wo die $\tau_{1i}$, $\tau_{2i}$ Konstanten bezeichnen. Bedeuten $n_i$ positive Zahlen, so sei die Anzahl der von 0 verschiedenen $\tau_{1i}$ endlich, während die Anzahl der $\tau_{2i}$ auch unendlich sein kann; es sei unter den zu $\tau_{1i}$ gehörenden $n_i$ die größte $= n_j$, also sei

$$(14) \qquad u_j = A_j \tau_{1j} e^{\frac{2\pi n_j}{\tau} t} \sin \frac{2\pi n_j}{\lambda}(x - gy + x_j)$$

dasjenige additive Glied von $n$, welches bei unendlich wachsendem $t$ unendlich größer wird als die Summe aller übrigen Glieder von $u$.

Wir können demnach aussprechen, daß unsere Lösung eine gleitende Bewegung der Materie bedeutet, die bei wachsendem $t$ sich der durch (14) und durch $v_j = f u_j$ bestimmten unendlich nähert. Diese (durch (14) bestimmte) Bewegung ist aber dadurch gekennzeichnet, daß sie am größten ist in Geraden, die mit der Längsrichtung des Parallelstreifens den Winkel

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{g}$$

einschließen und voneinander um die Länge

$$\frac{\lambda \sin \alpha}{2 n_j}$$

abstehen; ferner sind die Bewegungsrichtungen der Materie in den um diese Länge abstehenden Geraden entgegengesetzt gleiche Richtungen.

Bemerkung. Bleibt $\alpha$ während einer endlichen Zeitdauer $= 0$, so geht die Zeitfunktion $T$ selbstverständlich in

$$T = At,$$

also die Lösung (14) in

$$u_j = A_j t \sin \frac{2\pi n_j}{\lambda}(x - gy + x_j)$$

über. Die Bewegung bleibt auch in diesem Fall eine gleitende, und die Stellen, wo die Gleitung am größten und kleinsten ist, sind diskret liegende Geraden.

6. Meine Erklärung der HARTMANNschen Erfahrungen bei Anstrengung von Metallstreifen ist, dies vorausgeschickt, die folgende: Bei einem Zug nehmen die Angriffspunkte der Kräfte, solange die Elastizitätsgrenze nicht erreicht ist, außer den fortschreitenden auch vibrierende Bewegungen an; die Vibrationen

pflanzen sich im elastischen Mittel fort, und die von den beiden Seiten gleichzeitig ausgehenden Wellen setzen sich zu stehenden Wellen zusammen, und es entstehen auf diese Weise die in Nr. 3 und 4 beschriebenen stehenden Wellen der bewegten polarisierten Materie. Freilich ist die Beschreibung durch die Annahme, daß nur die in $x_x, \ldots$ quadratischen Glieder von $F$ zu berücksichtigen sind, idealisiert; denn diesem Umstande ist es zuzuschreiben, daß dabei die lebendige Kraft erhalten bleibt, während diese doch in Wirklichkeit in andere Energieformen umgesetzt wird. Aber der geometrische Charakter der Bewegung wird eben durch das betrachtete Glied von $F$ bestimmt, und wir sind berechtigt auszusprechen, daß bei den Schwingungen um die Ruhelage die größten Bewegungsenergien in den dort beschriebenen ausgezeichneten Geraden abgelagert werden, daher das Material an diesen Stellen am meisten abgeschwächt wird. — Wenn dann bei zunehmender Anstrengung des Materials die Flußgrenze erreicht ist, so findet an Stelle der Vibration eine Gleitung der Materie statt, und diese Gleitung ist an den Stellen am größten, wo das Material in der vorangegangenen Periode am meisten abgeschwächt wurde; so entstehen in jenen ausgezeichneten Geraden die von HARTMANN beschriebenen Linien; ihre Dichtigkeit nimmt nach der in Nr. 5 gegebenen Beschreibung zu, und nähert sich einer bestimmten Grenze, wo sie äquidistant werden, ohne diese aber im allgemeinen zu erreichen.

7. Anstrengungslinien bei Durchlöcherung und Zerschneidung von Metallplatten.

Ich führe Polarkoordinaten $r$, $\vartheta$ ein und bezeichne die Verschiebungskomponenten in Richtung von $r$, $\vartheta$ mit $u$ resp. $v$; ferner seien die Dilatationen im Punkte $r$, $\vartheta$ mit $\varrho$, $\varphi$, $\omega$ bezeichnet, und zwar seien*

$$
(15) \qquad
\begin{aligned}
\varrho &= \frac{\partial u}{\partial r}, \\
\varphi &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \vartheta}, \\
\omega &= \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \vartheta} - \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r}.
\end{aligned}
$$

---

* LAMÉ: Theorie math. de l'élasticité (1886, pag. 179—184); LOVE: Elasticity (1892, Vol. I, pag. 216—7).

Werden die Komponenten der von den Vibrationen oder Gleitungen herrührenden Drucke auf das senkrecht zu $r$ liegende Element mit $R_r$, $\Theta_r$, und auf das in $r$ liegende Element mit $R_\vartheta$, $\Theta_\vartheta$ bezeichnet, so sind die Differentialgleichungen der stationären Bewegung

$$(16)\quad \begin{aligned} \mu\frac{d^2u}{dt^2} &= -\frac{\partial R_r}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial R_\vartheta}{\partial \vartheta} - \frac{R_r - \Theta_\vartheta}{r}, \\ \mu\frac{d^2v}{dt^2} &= -\frac{\partial \Theta_r}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Theta_\vartheta}{\partial \vartheta} - \frac{R_\vartheta + \Theta_r}{r}. \end{aligned}$$

Der quadratische Teil des Potentials $F$ berechnet sich mittels

$$(17)\quad 2F = a_{11}\varrho^2 + 2a_{12}\varrho\varphi + a_{22}\varphi^2 + 2a_{13}\varrho\omega + 2a_{23}\varphi\omega + a_{33}\omega^2,$$

wo die Koeffizienten $a_{11}, \ldots, a_{33}$ von der Anstrengung des Materials abhängen, daher Funktion von $r$ und $\vartheta$ sind; dasselbe gelte auch bezüglich $\mu$.

Die Druckkomponenten $R_r, \ldots, \Theta_\vartheta$ werden durch $F$ auf analoge Weise ausgedrückt, wie in (3), nämlich

$$(18)\quad \begin{aligned} -R_r &= \frac{\partial F}{\partial \varrho} - f\frac{\partial F}{\partial \omega}, & -R_\vartheta &= \frac{\partial F}{\partial \omega} - f\frac{\partial F}{\partial \varphi}, \\ -\Theta_r &= \frac{\partial F}{\partial \omega} + f\frac{\partial F}{\partial \varrho}, & -\Theta_\vartheta &= \frac{\partial F}{\partial \varphi} + f\frac{\partial F}{\partial \omega}, \end{aligned}$$

Setzt man diese Werte in (16) ein und bezeichnet

$$(19')\quad \xi = \frac{u + fv}{1 + f^2}, \quad \eta = \frac{-fu + v}{1 + f^2},$$

so erhält man die Differentialgleichungen der stationären Bewegung in der Form:

$$(19)\quad \begin{aligned} \mu\xi'' &= \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial \varrho} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\frac{\partial F}{\partial \omega} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial F}{\partial \varrho} - \frac{\partial F}{\partial \varphi}\right), \\ \mu\eta'' &= \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial \omega} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\frac{\partial F}{\partial \varphi} + \frac{2}{r}\frac{\partial F}{\partial \omega}. \end{aligned}$$

8. Das Problem des Ringsektors in spezieller Fassung. Die Grenzen der Metallplatte seien zwei aus $O$ gezogene Geraden und zwei aus $O$ mit den Radius $r_0$ und $r_1$ beschriebenen Kreisbögen, wo $r_0$ sehr klein und $r_1$ sehr groß ist. Ich setze voraus, daß das Werkzeug das Material der Platte in den Punkten des mit $r_0$ beschriebenen Bogens überall in Richtung des Radius gleichmäßig drückt, während die äußere Grenze des Ringsektors auf einen überall genau anliegenden festruhenden Körper gesetzt ist.

Ich mache einstweilen die Voraussetzung, daß an den beiden Radialgrenzen die Druckkomponenten $R_\vartheta$ und $\Theta_\vartheta$ verschwinden, also die Grenzbedingungen bestehen

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = \frac{\partial F}{\partial \omega} = 0 . \tag{20}$$

Ich frage nach partikulären Lösungen der Differentialgleichungen (19), die den Grenzbedingungen (20) in allen Punkten eines beliebigen Radius genügen.

Die Form $F$ sei analog der durch (6) dargestellten gebildet, nämlich

$$2F = b\varrho^2 + (b_{11}\varrho + fb_{12}\omega + b_{22}\varphi)^2, \tag{17'}$$

wo die Koeffizienten $b$, $b_{11}$, $b_{12}$, $b_{22}$ Funktionen von $r$ sind. Die Gleichungen (20) gehen dann über in

$$b_{11}\varrho + fb_{12}\omega + b_{22}\varphi = 0, \tag{20'}$$

eine Gleichung, die in allen Punkten des Ringsektors zu erfüllen ist. Ich führe an Stelle von $r$ eine andere Variable ein mittels

$$x = \log r \tag{21}$$

Ich habe dann

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{1}{r} = \frac{\partial u}{\partial x} e^{-x},$$

daher ergeben sich für die Dilationen die Ausdrücke

$$e^x\varrho = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e^x\varphi = u + \frac{\partial v}{\partial \vartheta}, \quad e^x\omega = \frac{\partial u}{\partial \vartheta} - v + \frac{\partial v}{\partial x}, \tag{21'}$$

und die Bewegungsgleichungen nehmen (infolge (20')) die Form an:

$$\begin{aligned} \mu\xi'' &= e^{-2x}\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x\frac{\partial F}{\partial \varrho}\right), \\ \mu\eta'' &= 0, \end{aligned} \tag{21''}$$

Bedenkt man, daß die Bewegung keine fortschreitende ist, so folgt aus der zweiten Gleichung (21''), daß $\eta = 0$ ist. Daher folgt aus (19'), daß

$$v = fu, \quad \xi = u$$

bestehen. Die erste der Gleichungen (21'') geht daher über in

$$\mu u'' = e^{-2x}\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x\frac{\partial F}{\partial \varrho}\right) = e^{-2x}\frac{\partial}{\partial x}\left(be^x\frac{\partial u}{\partial r}\right),$$

d. i.

$$\mu u'' = e^{-2x}\frac{\partial}{\partial x}\left(b\frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{22}$$

Andererseits gehen die Gleichungen (21′) über in

$$(22') \qquad e^x \varrho = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e^x \varphi = u + f\frac{\partial u}{\partial \vartheta}, \quad e^x \omega = \frac{\partial u}{\partial \vartheta} - fu + f\frac{\partial u}{\partial x}.$$

daher (20′) die Form annimmt

$$(23) \qquad (b_{11} + f^2 b_{12})\frac{\partial u}{\partial x} + f(b_{11} + b_{22})\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + (b_{22} - f^2 b_{12})u = 0.$$

Die Koeffizienten $b_{ik}$ sind, wie vorausgesetzt wurde, Funktionen der einzigen Variablen $r$, also Funktionen von $x$. Da erfahrungsgemäß die zu verschiedenen Inanspruchnahmen gehörigen Kurven der Formänderungsmodulen ähnlich sind, so wollen wir demgemäß annehmen, daß die Verhältnisse der $b_{ik}$ ihre Werte unverändert beibehalten, mithin

$$(24') \qquad \begin{aligned} g &= \frac{b_{12} + b_{22}}{b_{11} + b_{12} f^2} f, \\ m &= \frac{b_{22} + b_{12} f^2}{b_{11} + b_{12} f^2} \end{aligned}$$

konstante Größen sind.

Die partielle Differentialgleichung (23) hat daher zur allgemeinen Lösung

$$(24) \qquad u = e^{-mx} K_1(x - g\vartheta),$$

wo $K_1(x - g\vartheta)$ eine beliebige Funktion von $(x - g\vartheta)$ bedeutet.

Noch ist die partielle Differentialgleichung (22) zu erfüllen, und da es nur darauf ankommt, Lösungen zu finden, die stehenden Wellen entsprechen, so mache ich den Ansatz

$$(24'') \qquad \begin{aligned} u &= e^{-mx} K(z) T(t), \\ z &= x - g\vartheta, \end{aligned}$$

wo $T$ bloß eine Funktion von $t$ bedeutet.

Mittels Substitution von (24″) in (22) ergibt sich

$$(25) \qquad \frac{\mu e^{2x}}{b} \frac{T''(t)}{T(t)} = -m \frac{d \log (b e^{-mx})}{dx} + \frac{K'(z)}{K(z)} \frac{d \log (b e^{-2mx})}{dx} + \frac{K''(z)}{K(z)}.$$

Da $\mu$, $b$ und $m$ unabhängig sind von $t$, so folgt aus dieser Gleichung, daß $T'' : T$ konstant ist, und ich will vorerst annehmen, daß diese Konstante negativ sei, daher

$$(25') \qquad T = T_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \text{const.}\right)$$

ist, wo $\tau$ die Schwingungszeit bedeutet. Dies in (25) eingesetzt, ergibt für $K(z)$ die Differentialgleichung

$$(25'') \quad 0 = 4\pi^2 \frac{\mu e^{2x}}{b\tau^2} - m \frac{d \log (b e^{-mx})}{dx} + \frac{K'(z)}{K(z)} \frac{d \log (b e^{-2mx})}{dx} + \frac{K''(z)}{K(z)}.$$

Da $\mu$, $b$ Funktionen von $r$ d. i. von $x$ sind, so folgt aus dieser Gleichung, daß die Gleichungen

$$(26) \quad \begin{aligned} 4\pi^2 \frac{\mu e^{2x}}{b\tau^2} - m \frac{d \log (b e^{-mx})}{dx} &= c_0, \\ \frac{d \log (b e^{-2mx})}{dx} &= c_1, \end{aligned}$$

bestehen müssen, wo $c_0$ und $c_1$ Konstante bedeuten; sind $\mu$ und $b$ den Gleichungen (26) gemäß bestimmt, so ist $K(z)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$(26') \quad 0 = K''(z) + c_1 K'(z) + c_0 K(z).$$

Nehme ich speziell $c_1 = 0$ an, und setze

$$c_0 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2},$$

so ist

$$(26'') \quad K(z) = K_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda}(z + \text{const.}),$$

und aus (26) folgt (mit $b_0$ eine Konstante bezeichnet)

$$(26''') \quad \begin{aligned} b &= b_0 e^{2mx} = b_0 r^{2m}, \\ \mu &= \mu_0 e^{2(m-1)x} = \mu_0 r^{2(m-1)}, \\ \mu_0 &= b_0 \frac{\tau^2}{4\pi^2}\left(m^2 + \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\right). \end{aligned}$$

Ich erhalte demnach auf die oben gestellte Frage die folgende Antwort: Das Gleichungssystem

$$(24'') \quad \begin{aligned} u &= \frac{T_0}{r^m} \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \sin 2\pi \frac{z}{\lambda}, \\ v &= fu, \\ z &= \log \frac{r}{r_0} - g\vartheta, \end{aligned}$$

wo $T_0$, $\tau$, $\lambda$, $r_0$, $g$ Konstante bedeuten, ist eine partikuläre Lösung der Differentialgleichungen (19), die den Grenzbedingungen (20) überall genügt, wenn für $F$ die Form (17′) angenommen wird, wo die Verhältnisse

$$b_{11} : b_{12} : b_{22}$$

konstant sind, und wenn außerdem bezüglich $b$ und $\mu$ das durch die Gleichungen (26‴) ausgesprochene Gesetz angenommen wird.

9. Fortsetzung; das Problem des Ringsektors. Die Lösung (24‴) ist bei reellem $\lambda$ nur solange reell, als das Potential $U$ definit positiv, d. i. solange $b$ positiv ist. Da nämlich $\mu$ positiv ist, so ist bei negativem $b$ (infolge der Gleichungen (26‴) die Größe $\tau^2$ negativ und bei $b = 0$ ist $\tau = \infty$.

Ist $b < 0$ also das durch (17′) definierte Potential, solange (20′) erfüllt ist, definit negativ, so tritt in der Lösung (24‴) an Stelle der ersten Gleichung die folgende:

$$u = \frac{1}{r^m}\left(Ae^{2\pi\frac{t}{\tau}} + Be^{2\pi\frac{t}{\tau}}\right)\sin 2\pi\frac{z}{\lambda},$$

während die beiden andern Gleichungen unverändert bestehen; dabei tritt an Stelle der ersten Gleichung in (26‴) bei positivem $b_0$

$$b = -b_0 r^{2m},$$

während die beiden andern Gleichungen des Systems dieselben bleiben.

Selbstverständlich können hier alle Folgerungen der Nummern 4., 5., 6. mutatis mutandis wiederholt werden, und man sieht, daß unsere Lösung als Gleichung der Gleitlinien das System

$$\log\frac{r}{r_0} - g\vartheta = \text{const.}$$

ergibt, daß also die Stellen, wo die Gleitung am größten ist, mit „zunehmender“ Zeit ein System von sozusagen „äquidistanten“ logarithmischen Spiralen bilden.

10. Beziehung zwischen Druck und Dilatation. Bisher war nur vom Gesetz der Druckschwankungen die Rede, bewirkt durch die Schwingungen der Materie. Wir wollen hier aus dem für die Druckschwankungen gefundenen Gesetz eine Folgerung machen auf die zwischen Druck und Dilatation bestehende Beziehung.

Wir betrachten den in Nr. 8 behandelten Fall des Ringsektors, wo nach (24‴) und (26‴) gefunden wurde, daß der Formänderungsmodul

$$b = b_0 r^{2m},$$

und die Amplitude der Schwingungskomponente $u$

$$= \frac{T_0}{r^m}$$

seien; hier bezeichnen $b_0$, $m$ und $T_0$ Konstanten, während $r$ die Entfernung des betreffenden Punktes des Ringsektors vom Mittelpunkt ist.

Aus dem Anderungsgesetz der Amplitude folgt vorerst, daß die untere Grenze von $m$ $\frac{1}{2}$ ist. Denken wir uns nämlich eine Welle ausgehend vom Kreisbogen $r_0$ in Richtung der wachsenden $r$, so ist die Intensität der lebendigen Kraft auf der Längeneinheit des Bogens proportional zu

$$r^{-2m},$$

also die lebendige Kraft auf dem ganzen Kreisbogen vom Radius $r$ proportional zu

$$r^{1-2m}.$$

Da nun die lebendige Kraft mit wachsendem Radius gewiß nicht zunimmt, so ist

$$1 - 2m \overline{\lessgtr} 0 \quad \text{q. e. d.}$$

Es seien $p$, $p_0$ die Mittelwerte des Druckes auf den Kreisbögen vom Radius $r$, resp. $r_0$; dann hat man in unserem Fall (Nr. 8)

$$pr = p_0 r_0,$$

also

$$b = b_0 (p_0 r_0)^{2m} p^{-2m},$$

wo $p$ und $p_0$ positiv seien.

Da $b$ proportional $\frac{dp}{dh}$ ist, wo $h$ den absoluten Wert der linearen Dilatation bedeutet, so setzen wir

$$\beta_0 \frac{dp}{dh} = p^{-2m},$$

wo $\beta_0$ positiv ist und proportional $b_0^{-1}(p_0 r_0)^{-2m}$. Daher hat man

$$h = h_0 + \frac{\beta_0 p^n}{n}, \tag{27}$$

wo der Exponent

$$n = 2m + 1 \geqq 2$$

ist.

Bezüglich dieser bei stabilem Gleichgewicht stattfindenden Beziehung zwischen Druck und Dilatation muß jedoch bemerkt werden, daß $b_0$ bei wachsendem $p_0$ abnimmt, und bei Erreichung der Flußgrenze verschwindet. Ich will den Fall brtrachten, daß die Materie oberhalb der Flußgrenze ins labile Gleichgewicht übergehe; dann wird (siehe Nr. 9) die Zeitfunktion $T(t)$ in Gleichung (24″) zur Exponentialfunktion, daher $\tau$ imaginär, und es folgt (wegen $\mu_0 > 0$) aus der dritten Gleichung von (26‴) $b_0 < 0$, mithin $\beta_0 < 0$, und man hat an Stelle von (27), die Beziehung

$$h = h_0 - |\beta_0| \frac{p^n}{n} :$$

Befindet sich die Materie oberhalb der Flußgrenze in labilem Gleichgewicht, so nimmt die Dilatation zu bei „abnehmendem" Druck. Auch im letzteren Fall ist nämlich $n = 2m + 1$, wegen $m > 0$, gewiß größer als 1.

11. Problem des vollen Ringes. Das Problem des Ringsektors wurde in den vorangegangenen Nummern bei der beschränkenden Voraussetzung behandelt, daß die Druckschwankungen $R_\vartheta$ und $\Theta_\vartheta$ verschwinden. Diese Voraussetzung mag einige Berechtigung haben, da doch an den Radialgrenzen konstant Luftdruck herrscht, und wir es ideal mit einer stationären Bewegung zu tun haben. Ganz anders verhält sich aber die Sache, wenn wir vom Ringsektor auf einen vollen Ring übergehen wollen, wo kräftige Radialdrücke auch in den zu den Radien senkrechten Richtungen große Spannungen hervorrufen.

Indem ich nun die Annahme (17′) durch die im wesentlichen allgemeinere

$$(28) \quad 2F = a(a_{11}\varrho^2 + a_{22}\varphi^2 + a_{33}\omega^2 + 2a_{12}\varrho\varphi + 2a_{23}\varphi\omega + 2a_{31}\omega\varrho)$$

ersetze, wo $a$ eine Funktion von $r$ ist, während die $a_{ik}$ konstant sind, stelle ich die folgende Frage:

Ist das Gleichungssystem

$$(29) \quad \begin{aligned} &u = \bar{u} \sin z, \quad \bar{u} = Te^{-mx}, \quad T = T_0 \sin 2\pi \frac{t}{\tau}, \\ &v = fu, \quad z = \frac{2\pi}{\lambda}(x + g\vartheta), \quad x = \log r \end{aligned}$$

auch dann eine Lösung unserer partiellen Differentialgleichungen (19), wenn $R_\vartheta$ und $\Theta_\vartheta$ nicht identisch verschwinden? Ferner welche Beziehungen ergeben sich aus der Forderung, daß (29) eine Lösung von (19) ist?

Da aus $v = fu$, $\eta'' = 0$ folgt, so lautet die zweite der Gleichungen (19), wie folgt:

$$0 = \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial F}{\partial \omega}\right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(r \frac{\partial F}{\partial \varphi}\right),$$

also

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(r^2 \frac{\partial F}{\partial \omega}\right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(r^2 \frac{\partial F}{\partial \varphi}\right),$$

mithin

$$(30) \qquad \begin{aligned} r^2 \frac{\partial F}{\partial \omega} &= \frac{\partial H}{\partial \vartheta}, \\ r^2 \frac{\partial F}{\partial \varphi} &= -\frac{\partial H}{\partial x}. \end{aligned}$$

Mittels der Gleichungen (15) hat man ferner

$$(31) \qquad \begin{aligned} \frac{1}{a} e^x \frac{\partial F}{\partial \varrho} &= \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \alpha_3 u, \\ \frac{1}{a} e^x \frac{\partial F}{\partial \varphi} &= \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \beta_3 u, \\ \frac{1}{a} e^x \frac{\partial F}{\partial \omega} &= \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma_2 \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \gamma_3 u, \end{aligned}$$

wo

$$(31') \qquad \begin{aligned} \alpha_1 &= a_{11} + a_{13} f, & \alpha_2 &= a_{12} f + a_{13}, & \alpha_3 &= a_{12} - a_{13} f, \\ \beta_1 &= a_{21} + a_{23} f, & \beta_2 &= a_{22} f + a_{23}, & \beta_3 &= a_{22} - a_{23} f, \\ \gamma_1 &= a_{31} + a_{33} f, & \gamma_2 &= a_{33} f + a_{33}, & \gamma_3 &= a_{32} - a_{33} f. \end{aligned}$$

Man substituiere nun $u$ aus (29) in (31). Ein Blick auf (30) lehrt dann, daß $H$ von der Form ist:

$$(32) \qquad H = (h_1 \sin z + h_2 \cos z)\overline{H},$$

wo $H$ eine Funktion von $x$ und $t$ ist, $h_1$ und $h_2$ aber konstant sind. Setze ich noch

$$(32') \qquad \overline{H} = T e^{(1-m-n)x}, \quad a = e^{-nx},$$

so ergeben sich zwischen den Konstanten die Gleichungen

$$(32'') \qquad \begin{aligned} \beta_1 + \beta_2 g &= -h_1 + \frac{2\pi}{\lambda}(m+n-1)h_2, \\ -m\beta_1 + \beta_3 &= (m+n-1)h_1 + \frac{2\pi}{\lambda}h_2, \\ \gamma_1 + \gamma_2 g &= g h_1, \\ -m\gamma_1 + \gamma_3 &= -\frac{2\pi}{\lambda} g h_2. \end{aligned}$$

Noch ist die Differentialgleichung

$$\mu \xi'' = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial \varrho} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\frac{\partial F}{\partial \omega} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial F}{\partial \varrho} - \frac{\partial F}{\partial \varphi}\right),$$

d. i.

$$\mu u'' r^2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \frac{\partial F}{\partial \varrho}\right) + e^{-x}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial H}{\partial x}\right)$$

zu erfüllen, woraus sich zwischen den Konstanten die fernere Gleichung ergibt:

$$(32''') \qquad m\alpha_1 + (m+n)(\alpha_1 + \alpha_2 g) - \alpha_3 = 0;$$

zugleich findet man für den Grad der Polarisation $\mu$ die Gleichung

$$(32^{\mathrm{IV}}) \qquad \frac{4\pi^2}{\tau^2}\frac{\mu r^2}{a} - \frac{4\pi^2}{\lambda^2}(\alpha_1 + \alpha_2 g) + (m+n)(m\alpha_1 - \alpha_3) = 0\,.$$

Die Gleichungen $(32'')$, $(32''')$, $(32^{\mathrm{IV}})$ sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die Gleichungen (29) definierte vibrierende Bewegung eine Lösung unserer Differentialgleichungen sei. Mittels Elimination von $h_1$ und $h_2$ aus den Gleichungen $(32'')$ findet man

$$(32^{\mathrm{V}}) \qquad \begin{aligned} &\beta_2 g^2 + (\beta_1 + \gamma_2) g + \gamma_1 + (m+n-1)(-m\gamma_1 + \gamma_3)\frac{\lambda^2}{4\pi^2} = 0,\\ &m(\beta_1 g + \gamma_1) + (m+n-1)(\gamma_1 + \gamma_2 g) - \beta_3 g - \gamma_3 = 0. \end{aligned}$$

Während die Gleichungen $(32''')$ und $(32^{\mathrm{V}})$ Beziehungen zwischen Konstanten geben, drückt die Gleichung $(32^{\mathrm{IV}})$ eine Funktionalbeziehung zwischen $\mu$ und $a$ aus; und da nach $(32')$ $a = r^{-n}$ ist, so spricht $(32^{\mathrm{IV}})$ für $\mu$ das Gesetz aus

$$\mu = \mu_0 r^{n+2},$$

wo $\mu_0$ eine Konstante ist, nämlich

$$(32^{\mathrm{VI}}) \qquad \frac{4\pi^2}{\tau^2}\mu_0 - \frac{4\pi^2}{\lambda^2}(\alpha_1 + \alpha_2 g) + (m+n)(m\alpha_1 - \alpha_3) = 0.$$

Die Gleichungen geben bei der Annahme

$$m + n = 0, \quad \alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_3 \neq 0$$

die einfachsten Beziehungen zwischen den Konstanten.

Aus $(32''')$ folgt so

$$m = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} = -n,$$

daher folgt aus $(32^{\mathrm{VI}})$

$$(33') \qquad \frac{\lambda^2}{\tau^2} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 g}{\mu_0},$$

und aus $(32^{\mathrm{V}})$

$$(33'') \qquad \frac{\lambda^2}{4\pi^2} = \frac{\beta_2 g^2 + (\beta_1 + \beta_2) g + \gamma_1}{\alpha_1 \gamma_3 - \alpha_3 \gamma_1} \alpha_1 ,$$

$$(33''') \qquad g = - \frac{\alpha_3 \gamma_1 + \alpha_2 (\gamma_2 + \gamma_3)}{\alpha_3 \beta_1 + \alpha_2 (\gamma_2 + \beta_3)} .$$

Diese Gleichungen sind natürlich von den beim Ringsektor gefundenen wesentlich verschieden, was schon daraus hervorgeht, daß infolge (33′) zu einem $i$-fachen $\lambda$ ein $i$-faches $\tau$ zugeordnet wird, im Gegensatz zur dritten Gleichung in (26‴).

Aus dem Umstande, daß die Lösung (29) auf dem Kreisring eindeutig sein muß, folgt endlich die Eindeutigkeit von $\sin \frac{2\pi}{\lambda} g \vartheta$ und $\cos \frac{2\pi}{\lambda} g \vartheta$; daher ist $\frac{4\pi^2}{\lambda} g$ notwendigerweise eine ganze Zahl.

12. Beim Problem des Ringsektors wurde auf dem Grenzbogen von kleinerem Radius ein Druck, auf den von größerem Radius ein Gegendruck vorausgesetzt, während auf den Grenzradien Luftdruck herrscht; und bei letzterer Annahme mußten notwendigerweise Druck und Gegendruck gleichzeitig vorausgesetzt werden. Beim gegenwärtigen Problem des vollen Kreisrings ist ein Druck auf den einen Grenzkreis $A$ auch ohne Gegendruck auf den andern $B$ möglich. Wenn wir aber in den Rechnungen der Nr. 10 die Voraussetzung einführen, daß die Druckschwankungen auf $B$ verschwinden (vgl. Nr. 8 Gleichungen 20), so kommen wir auf Beziehungen zwischen den Konstanten, die unabhängig sind vom Radius des Grenzkreises $B$; demzufolge müßten gleichzeitig auch die Druckschwankungen auf dem Grenzkreis $A$ verschwinden. Da letzteres kaum anzunehmen ist, wollen wir lieber die Voraussetzung fallen lassen, dergemäß die Druckschwankungen auf der freien Grenze verschwinden, und annehmen, daß die Schwingungen des Metalls auch auf die intermolekularen Ätherteile und von diesen auf die äußere imponderable Materie übergehen.

Tun wir das, so kommen wir zum Schluß, daß die Drucke $R_r$ und $\Theta_r$ das Gleichgewicht halten mit den Druckdifferenzen herrührend von den Schwingungen des inneren und äußeren Äthers, und wir kommen so zu Gleichungen zwischen den Koeffizienten der ponderablen und inponderablen Materie und wir sind von der obengenannten Schwierigkeit befreit. Ich will jedoch auf die Rechnungen nicht näher eingehen.

13. Die Anwendung dieser Betrachtungen auf die Beschreibung der von HARTMANN* bei Durchlöcherung und Zerschneidung von Metallplatten beobachteten Anstrengungslinien liegt auf der Hand. Ist nämlich der Winkel des Kreissektors $= \pi$, der Radius des inneren Halbkreises sehr klein, der Radius des äußeren unendlich groß, und liegt die Schneide des Druckwerkzeuges eben auf dem inneren Halbkreis an, während die den Gegendruck ausübende Unterlage den unendlich großen Halbkreis zur Grenze hat, so beschreiben unsere Resultate die beobachteten Erscheinungen, was die Form der Linien anbelangt, genau. Wohl stehen bei dem von Herrn HARTMANN (pag. 89 des zitierten Werkes) beschriebenen Experiment in großer Entfernung zwei Schneiden einander gegenüber: aber die Folge dieses Umstands ist nur die, daß logarithmische Spiralen von einer jeden Schneide aus sich ausbreiten.

Betrachten wir ferner eine in ihrer Mitte durchlöcherte Kreisplatte, und im Loch ein Werkzeug, welches das Loch gleichmäßig zu vergrößern strebt, so sind die Hauptspannungslinien konzentrische Kreise und deren Radien; demzufolge scheinen die Betrachtungen von 11. und 12. anwendbar zu sein. Es ist merkwürdig, daß die durch ihre große Regelmäßigkeit überraschenden logarithmischen Linien auch bei Durchlöcherung einer Metallplatte durch ein Projektil bei Flintenschuß momentan auftreten; die kurze Dauer der Wirkung wird hier durch die Vehemenz derselben ersetzt; der Umstand aber, daß hier ganz genau Schwingungen entstehen und Linien von derselben Form zur Erscheinung treten, als bei langsamer Wirkung, scheint dafür zu sprechen, daß auch im letzteren Fall die Ursache in den Schwingungen, resp. der Umsetzung der Schwingungsenergie in andere Energieformen zu suchen ist.

14. Das in Nr. 2 dargestellte Gleichungssystem (3, 4, 4′) ist natürlich nicht das einzige, das bei der dynamischen Beschreibung dieser Erscheinungen zugrundegelegt werden kann. Zerlegt man beispielsweise das Druckkomponentensystem

$$\begin{vmatrix} X_x & X_y \\ Y_x & Y_y \end{vmatrix}$$

* Distributions des déform. etc., 1896, pag. 44 (planche II. fig. 4, planche III. fig. 3), pag. 89.

auf die folgenden zwei Systeme:

$$(1)\quad \begin{vmatrix} X_x & \frac{X_y + Y_x}{2} \\ \frac{X_y + Y_x}{2} & Y_y \end{vmatrix}, \qquad (2)\quad \begin{vmatrix} 0 & \frac{X_y - Y_x}{2} \\ -\frac{X_y - Y_x}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

und nimmt an, daß dem Teilsystem (1) ein Potential $F$ zukommt, und dabei die Gleichung (2′) in Nr. 2 durch die beiden Teilsysteme erfüllt wird, setzt also

$$-X_x = \frac{\partial F}{\partial x_x}; \quad -X_y = \frac{\partial F}{\partial x_y} - \frac{f}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x_x} + \frac{\partial F}{\partial y_y}\right),$$

$$-Y_y = \frac{\partial F}{\partial y_y}; \quad -Y_x = \frac{\partial F}{\partial x_y} - \frac{f}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x_x} + \frac{\partial F}{\partial y_y}\right),$$

so kommt man auf ein System von Bewegungsgleichungen, das wohl minder einfach ist als (4), aber, wie es scheint, doch dieselben Dienste leistet wie jenes. Auch habe ich das erste System eben seiner größeren Einfachheit halber vorgezogen.

3.

# BEITRÄGE ZUR THEORIE DER POLARISATION DES VON GLASGITTERN GEBEUGTEN LICHTES.*

Von PAUL SELÉNYI in Budapest.

Vom o. M. Prof. I. Fröhlich der Ung. Akademie der Wissensch. vorgelegt in der Sitzung der III. Klasse am 17. Oktober 1910.

## Einleitung.

Die mathematisch-naturwissenschaftliche Kommission der Ung. Akademie der Wissenschaften betraute den Verfasser Anfangs 1909 mit der Ausführung eines Versuchsplanes, welcher sich auf das Studium der stehenden Lichtwellen mit Hilfe der ultramikroskopischen (an sehr kleinen Teilchen erfolgenden) Lichtbeugung bezog.

Gegenwärtige Arbeit enthält die ersten, allerdings nur mittelbaren Resultate meiner zufolge dieser Betrauung geführten Untersuchungen. Während derselben stellte ich nämlich im Sommer 1909 jene im § 1 zu erwähnenden Experimente an, welche mir den Impuls gaben, zu versuchen, meine über die an Glasgittern erfolgende Lichtbeugung schon früher entstandene Auffassung in mathematische Form zu fassen und mit der Erfahrung zu vergleichen.

Dieser theoretische Versuch und die sich hieran knüpfenden Experimente bilden den eigentlichen Inhalt dieser Arbeit, welche im übrigen den zweiten Teil meiner Inauguraldissertation in ungefähr ungeänderter Form und Inhalt enthält. Obzwar meine Meinung hinsichtlich des einen oder anderen Punktes (hauptsächlich auf Grund meiner neueren Versuche) sich seither etwas änderte, erachte ich es — im Interesse der Einheitlichkeit der Arbeit —

* Auszug aus der auch in den „Mathematikai és Physikai Lapok" Band XIX (1910), Heft V u. VI unter gleichem Titel erschienenen Inauguraldissertation des Verfassers.

doch für besser, den Text unverändert zu lassen und bloß in Form von Notizen die möglichen Modifikationen anzudeuten. Im übrigen bemerke ich, daß die darzulegende Theorie noch bei weitem nicht als endgültig betrachtet werden kann. Es ist zweifellos, daß die endgültige Theorie diejenige sein wird, welche die Polarisationsverhältnisse des gebeugten Lichtes ausschließlich aus der Differentialgleichung der Lichttheorie und aus den entsprechenden Grenzbedingungen ohne jede Hilfshypothese zu bestimmen gestattet.* Diese unserige ist bloß als erster Schritt des hierauf gerichteten Bestrebens anzusehen. Schon von diesem Gesichtspunkte aus war ich bemüht, jedes Resultat der Theorie möglichst durch die Erfahrung zu kontrollieren. Zu diesem Zwecke habe ich hauptsächlich die teils schon veröffentlichten, teils noch nicht publizierten und nur zu diesem Behufe überlassenen Messungsergebnisse des Herrn Prof. J. FRÖHLICH verwendet und andrerseits meine eigenen Versuche, die ich im Laboratorium des Herrn Prof. E. KLUPATHY anstellte. Es sei mir gestattet, meinen genannten Professoren für ihre freundlichen und vielseitigen Unterstützungen auch hier aufrichtigen Dank zu sagen.

## § 1. Weiterentwickelung der FRÖHLICHschen Theorie, Schwierigkeiten in der Deutung der Schwingungszentren. Die zur Verallgemeinerung der STOKESschen Auffassung führenden einfachen Experimente, Formulierung dieser Auffassung.

Grundlage und Ausgangspunkt unserer Entwickelungen wird die grundlegende und zusammenfassende Arbeit von FRÖHLICH: „Experimentelle Erforschung und theoretische Deutung der allgemeinen Gesetzmäßigkeiten der Polarisation des

* Inzwischen ist eine solche Theorie der (spektroskopischen) Gitterbeugung von Herrn Prof. Voigt (Götting. Nachrichten, math.-phys. Klasse 1911) angegeben worden. Es sei mir gestattet, hier zu erwähnen, daß in dem von mir allein betrachteten Falle normaler Inzidenz aus dieser Rayleigh-Voigt'schen Theorie mit den unsrigen identische Formeln bezüglich des Polarisationszustandes des gebeugten Lichtes sich ergeben, worauf mich Herr Béla Pogány gütigst aufmerksam machte. (Anm. bei der Korrektur.)

von Glasgittern gebeugten Lichtes" (Mathem. u. naturwiss. Berichte aus Ungarn XXII. Bd., 1907) sein, auf deren Resultate, als auf bekannte, wir uns berufen können. Wie es die im experimentellen Teil des Buches zusammengefaßten Messungen bezeugen, sind jene Lichtvektorsysteme, welche aus einem auf irgend ein Glasgitter fallenden linear-polarisierten Lichtstrahle durch Reflexionsbeugung entstehen, auf 2 Typen zurückführbar: auf die zirkumaxialen und die isogonalen Systeme. Im ersteren System sind die Lichtvektoren so verteilt, daß die — auf einer Kugel dargestellten — Polarisationsrichtungen Tangenten von zu einer gewissen Achse gehörenden parallelen Kreisen der Kugel sind, im letzteren aber sind diese Polarisationsrichtungen Tangenten einer Kreisschar, die von einer durch eine gewisse Tangente der Kugel gelegten Ebenenschar an der Kugeloberfläche ausgeschnitten wird.

Der theoretische Teil befaßt sich mit der Herstellung solcher Schwingungszentren, deren Strahlung die Eigenschaften der erwähnten Systeme aufweist. Nach den Resultaten dieses theoretischen Teiles ist zur Herstellung des zirkumaxialen Systems ein entlang der Achse des Systems lineare Schwingungen ausführendes Elektron geeignet; zur Herstellung des isogonalen Systems aber ein solches Elektron und ein darauf senkrecht schwingendes Magneton, resp. ein Elektron allein, welches eine lineare Oszillation und zugleich um eine hierauf senkrechte Achse eine Rotationsoszillation ausführt, vorausgesetzt, daß die Energie dieser beiden Schwingungen die gleiche ist.

Es ist beinahe überflüssig, auf die Bedeutung dessen hinzuweisen, daß es möglich war, die außerordentlich verwickelten Polarisationsverhältnisse des gebeugten Lichtes auf solche verhältnismäßig einfache Typen zurückzuführen und diese ebenfalls durch solch einfache schwingende Zentren hervorzubringen. Der nächste Schritt der Theorie wäre selbstverständlich nunmehr: Rechenschaft zu geben darüber, wie jene hypothetischen Schwingungszustände auf der Gitteroberfläche entstehen. Hier treten aber nicht geringe Schwierigkeiten auf.

Schon bei der Deutung der zirkumaxialen Polarisation begegnen wir Bedenklichkeiten. Zur Deutung des einfachsten

Falles* benötigen wir solche Schwingung, deren Richtung mit der des zurückgeworfenen Strahles von Null-Intensität zusammenfällt. Nach dem Gesetz BREWSTERS ist dies gerade die Schwingungsrichtung des gebrochenen Lichtes. Hier wäre also die Sache noch einigermaßen in Ordnung, obschon man sich schwer vorstellen kann, wie dieser Vektor das zirkumaxiale System in der Luft hervorbringt. Bei einem schon etwas allgemeineren Falle aber, wo nämlich die Polarisations-Ebene nicht senkrecht zu der des Einfalles ist, läßt uns auch diese Auffassung im Stich, da die Achse des jeweiligen zirkumaxialen Systems mit der jeweiligen Schwingungsrichtung des gebrochenen Lichtes nicht zusammenfällt.

Auf noch ernstere Hindernisse stoßen wir bei der Deutung des isogonalen Systems. Dies kann, nach der elektromagnetischen Lichttheorie, zustande kommen, wenn sowohl der elektrische, wie auch der magnetische Vektor des Lichtes erregend wirkt. Andererseits wieder ist es bekannt, daß zur Beschreibung aller bisher bekannten Lichtphänomene der bloße elektrische Vektor, als „maßgebender" Vektor zureichend ist. Es wäre also die ausnahmsweise Stellung dieser Phänomene einerseits von diesem Gesichtspunkte aus sehr überraschend, andererseits aber kann das Auftreten des magnetischen Vektors tatsächlich auf keine einfache Weise erklärt werden.**

Nach hierauf gerichteten erfolglosen theoretischen Versuchen führten mich schließlich einige einfache Experimente zu jener Theorie, die ich nachstehend darlegen werde.

Indem ich nämlich die auf kleinen Teilchen erfolgende Lichtbeugung experimentell untersuchen wollte, habe ich die über geschmolzenen Schwefel gehaltene eine Seite einer planparallelen Glasplatte (besseres Spiegelglas) mit den sich darauf abschlagenden feinen Schwefelkörnchen überzogen und die so präparierte Platte, auf einen nach allen Richtungen einstellbaren Rahmen montiert, in die Mitte eines großen JAMINschen Kreises gestellt. Das mittels einer Linse beinahe parallel gemachte Licht einer NERNST-Lampe fiel durch das polarisierende Prisma senkrecht auf die mit der Schichte (Schwefelteilchen) überzogenen Seite der erwähnten

* S. FRÖHLICH l. c. § 47, 48, 49.

** Diese Bemerkungen treffen nicht ganz zu. (Anm. bei der Korrektur.)

Platte. Das an den Schwefelteilchen in die *Luft* gebeugte (d. h. das *reflektiert-gebeugte*) Licht fand ich — bei genügend feinen Teilchen — beinahe vollständig linear-polarisiert, und die Verteilung der Polarisationsebenen (annähernd) *isogonal*, d. h. mit dem Polarisationsverhältnisse des von Glasgittern gebeugten Lichtes identisch.* Dieses Resultat war übrigens mit großer Wahrscheinlichkeit denn auch zu erwarten. Vergleichen wir jedoch diese Beobachtung mit dem, was wir über die in homogenem Medium erfolgenden Lichtzerstreuung wissen**, dann können wir behaupten, *daß das an einem kleinen Teilchen gebeugte Licht zirkumaxial polarisiert ist, wenn das Teilchen in ein homogenes Medium gebettet ist, und isogonal polarisiert, wenn es auf die Grenzfläche Luft — Glas gestellt ist.**** Und da wir, das Teilchen stufenweise der Glasfläche genähert, das *Phänomen* aus dem einen Fall in den anderen stetig überführen können, liegt der Gedanke nahe, diesen Prozeß auch *rechnerisch* zu verfolgen. Sobald das Teilchen $O$ nahe der Oberfläche kommt, gelangen aus allen Richtungen zwei (gebeugte) Strahlen zum Auge des Beobachters (s. Fig. 1); der eine ($I_1$) — gegen die Richtung des ankommenden Lichtes gebeugt — direkt; der andere ($I_{2v}$) — in der Richtung des durchgehenden Lichtes gebeugt — nach einer auf dem Glas erfolgenden Reflexion. Solange die Entfernung des Teilchens von der Glasfläche mindestens einige Lichtwellenlängen beträgt, können wir auf diese Reflexion sicher die FRESNELschen Formeln an-

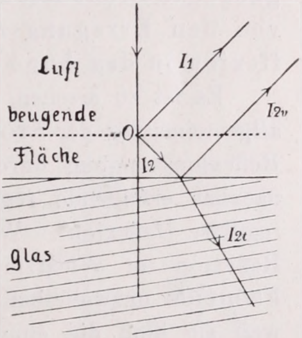



Fig. 1.

---

* Ich bemerke, daß sowohl diese, wie auch die unten zu erwähnenden Beobachtungen bloß qualitativer Natur waren, da ich diese Experimente eigentlich zu einem anderen Zwecke machte.

** Vgl. FRÖHLICH l. c. § 12, Seite 127—133, resp. seine neuere Abhandlung: Allgemeine Geltung des Gesetzes der zirkumaxialen Polarisation in optisch gleichmäßigen Mitteln, Math. und Naturwiss. Ber. aus Ung. XXV, 312. 1907.

*** Wenn nämlich das Licht normal auf die Oberfläche fällt und wir das reflektiert-gebeugte Licht beobachten.

wenden und somit das Resultat der Interferenz der beiden Strahlen ausrechnen. Vorausgesetzt nun, daß diese Formeln auch im Falle beliebig kleiner Entfernungen gelten, versuchte ich, die zu erwartende Verteilung der Polarisationsebenen für den Fall, als das Teilchen ganz zur Oberfläche gelangt, zu berechnen und bekam ein mit den Beobachtungen vollkommen übereinstimmendes Resultat.*

Demnach können wir uns von der Reflexionsbeugung eine solche Vorstellung bilden, daß das einfallende Licht vor der beugenden Fläche (obzwar unendlich nahe zu ihr) die Beugung erleidet (d. h. die zur Grenzfläche unendlich nahe liegenden Punkte des Mediums zu erregenden Zentren werden), und das beobachtete, reflektiert-gebeugte Licht Resultante jener beiden Strahlen ist, die von den Erregungszentren aus direkt, resp. durch Reflexion in das Auge des Beobachters gelangen.

Es ist zu ersehen, daß diese Deutung eine unmittelbare Verallgemeinerung der STOKESschen Auffassung ist, nach welcher die Reflexionsbeugung durch Beugung vor der Gitteroberfläche und nachher erfolgende regelmäßige Reflexion zustande kommt (irreguläre Reflexion). Wir sehen auch ein, warum die irreguläre Reflexion im Widerspruch mit der Erfahrung steht, wie dies FRÖHLICH unzweifelhaft bewies (l. c. § 72, S. 335—338). Eben weil sie bloß die eine Komponente des tatsächlichen Vektorensystems enthält. Zugleich stellt es sich heraus, daß die STOCKESsche Auffassung auch behufs Deutung der Reflexionsbeugung — was sie ursprünglich bezweckte — zu modifizieren ist. In der Tat, wenn wir im behandelten Falle (Fig. 1) das gebrochen-gebeugte Licht mit dem ins Glas tretenden ($I_{2t}$) Teil des ($I_2$)

---

* Die Tatsache, daß die von einem Punkte ausgehende Lichtschwingung nur in einer im Verhältnis zur Wellenlänge großen Entfernung zur einfachen Kugelwelle wird, während sie in unmittelbarer Nähe einen bedeutend verwickelteren Zustand aufweist, zeugt schon dafür (wie auch andere Überlegungen darauf führen), daß diese Voraussetzung nicht streng erfüllt sein kann. Dasselbe zeigten auch einige neuere vorläufige Experimente, die ich betreffend das Verhalten der zu irgend einer Grenzfläche sehr nahe fallenden punktförmigen Lichtquelle ausführte.

Strahles identifizieren wollten, würden wir im Glase nur innerhalb eines solchen Kegels gebeugtes Licht erhalten, dessen Halböffnungswinkel Grenzwinkel der totalen Reflexion ist.* Nach der Erfahrung füllt aber auch das gebrochen-gebeugte Licht seinen eigenen Halbraum aus. Auch zu diesem Resultat gelangen wir leicht, wenn wir auch im Glas (unendlich nahe zu dessen freier Oberfläche) eine beugende Fläche annehmen, was schon auch die Symmetrie erfordert, indem wir vorläufig keinen Grund haben, das eine Medium vor dem anderen auszuzeichnen. Die an diesem erfolgende Lichtbeugung (s. Fig. 2) liefert dann die Strahlen $(II_2)$ und $(II_{1v})$ zu dem gebrochen-gebeugten, den Strahl $(II_{1t})$ zu dem reflektiert-gebeugten Lichte.

Es ist hier am Platze, eine auf das Strahlensystem $(II_{1t})$ bezügliche Beobachtung zu erwähnen, welche mit unserer hier

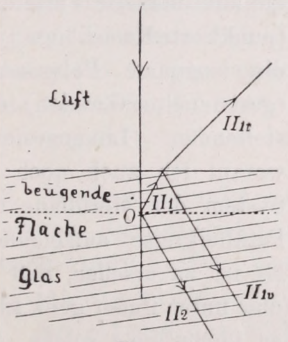


Fig. 2.

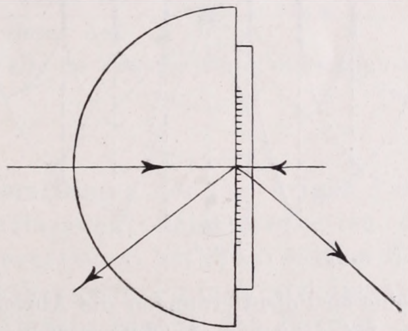


Fig. 3.

angeführten Auffassungsweise ebenfalls in enge Beziehung gebracht werden kann. Um die erwähnte, an Schwefelniederschlag erfolgende Lichtbeugung in homogenem Medium hervorzubringen, klebte ich die geschichtete Seite der Glasplatte durch Vermittlung eines Tropfens Zederöls an die Durchmesser-Fläche einer Glashalbkugel von fast gleichgroßem Brechungsexponenten (s. Fig. 3), nachdem ich die Schwefelschicht zum Schutze mit einem sehr dünnen Kollodiumhäutchen überzog. Fiel nun auf dieses Präparat

* Tatsächlich kamen in den Beobachtungen Stokes' bloß derlei Strahlen vor, weil er mit auf planparalleles Glas verfertigtem Gitter arbeitete. Übrigens vgl. Anm. * auf der vorigen Seite.

durch die Halbkugel, oder (senkrecht) durch die Platte linear-polarisiertes Licht, so zeigten von den an Schwefelteilchen gebeugten Strahlen die durch die Halbkugel ohne Richtungsänderung austretenden Strahlen die zu erwartende zirkumaxiale, während die durch die Platte mit gewöhnlicher Brechung austretenden Strahlen die isogonale Polarisation. Dieses Experiment zeigt daher, daß aus dem zirkumaxialen System durch eine einfache Brechung ein isogonales System entstehen kann.*

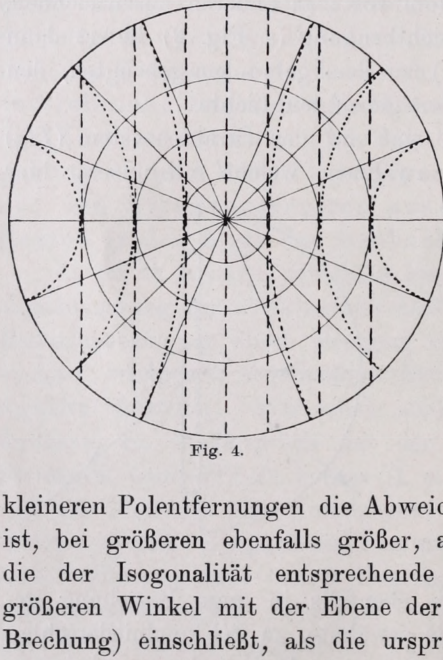


Fig. 4.

Um dieses auf den ersten Blick überraschende Resultat leichter einzusehen, stellte ich in der Fig. 4 in stereographischer Projektion eine Kugelfläche dar, darauf die die zirkumaxiale Verteilung (punktierte Kreisbögen) und die isogonale Polarisation (gestrichelte Geraden) darstellenden Liniensysteme, worauf ich auch noch das System der Meridiane und Parallelkreise aufzeichnete. Es ist zu ersehen, daß bei kleineren Polentfernungen die Abweichung unter ihnen ganz klein ist, bei größeren ebenfalls größer, aber immer eine solche, daß die der Isogonalität entsprechende Polarisationsrichtung einen größeren Winkel mit der Ebene der Beugung (und zugleich der Brechung) einschließt, als die ursprüngliche zirkumaxiale Richtung; entsprechend dem Umstande, daß bei der Brechung die Polarisationsebene sich von der Einfallsebene entfernt. Von all' diesem wird jedoch noch im Laufe der späteren Rechnungen die Rede sein. Bevor ich auf diese übergehe, fasse ich jetzt noch einmal das bisher Gesagte zusammen:

* Dies rechtfertigt zugleich auch die irreguläre Brechung Stokes', welche er eben behufs Beschreibung des Polarisationszustandes derlei aus dem Glase in die Luft gebrochen-gebeugten Lichtes konstruierte, aber nur in diesem allereinfachsten Falle, bis zum Grenzwinkel der inneren totalen Reflexion.

Von einer an der Grenzfläche zweier verschiedener Medien entstehenden Lichtbeugung können wir uns ein solches Bild konstruieren, daß dieses in unendlicher Nähe zu beiden Seiten der Grenzfläche, als in homogenem Medium entstehende Lichtbeugung, zustande kommt; und das beobachtete (reflektiert-, resp. gebrochen-) gebeugte Licht Resultante von aus diesen beugenden Zentren direkt, resp. nach einer Reflexion und Brechung sich in gleicher Richtung fortpflanzenden und mit einander interferierenden Strahlen ist (s. Fig. 5).

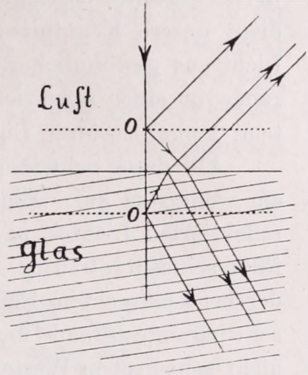



Fig. 5.

Im nächsten Paragraph werde ich zeigen, wie man auf Grund dieser Auffassung die im gegebenen Falle zu erwartenden Polarisationsazimute berechnen kann.

## § 2. Mathematische Formulierung der im vorigen Paragraphen dargelegten Auffassung; Schwierigkeiten des allgemeinen Falles. Voraussetzung: bei senkrechtem Einfall ist die primäre Lichtbeugung einfach zirkumaxial, Ableitung der sich hieraus ergebenden Formel.

Zwar müßte man auf Grund der im Vorhergehenden dargelegten Auffassung — wenn sie richtig ist — zur quantitativen Beschreibung der oben behandelten sämtlichen Phänomene gelangen, dennoch konnte ich diese Beschreibung bisher bloß für den Fall des senkrechten Einfalles durchführen. Es sei mir gestattet, über die Ursachen dieser Beschränkung einige Worte vorauszuschicken.

Das Wesen der in Rede stehenden Deutung ist, daß sie die auf der Grenzfläche entstehende Lichtbeugung auf einen einfacheren Fall, auf die in homogenem Medium entstehende Lichtbeugung, zurückführt.

Doch auch von dem in homogenem Medium gebeugten Licht ist bloß sein Polarisationszustand bekannt, seine Intensitätsverteilung aber nicht, obwohl wir doch auch diese benötigen, um das Polarisationsazimut der Resultante des direkten und des reflektierten Strahles berechnen zu können.* Weiter beziehen sich auch diese unsere Kenntnisse bloß auf jenen Fall, wenn das gebeugte Licht aus gewöhnlicher fortschreitender Lichtquelle entsteht, während vor einer reflektierenden Fläche im allgemeinen ein bedeutend komplizierterer Lichtschwingungszustand besteht.

All' diese Schwierigkeiten treten bei normalem Einfall noch am wenigsten auf. Einerseits ist die Intensität des regelrecht reflektierten Lichtes in diesem Falle am geringsten, andererseits fällt seine Richtung mit der Einfallsrichtung zusammen, d. h. der bei senkrechtem Einfall vor der Grenzfläche entstehende Lichtschwingungszustand unterscheidet sich — wenigstens bei dem nicht sehr großen Werte des Brechungsexponenten — nicht wesentlich von demjenigen Zustande, der in einer gewöhnlichen, fortschreitenden Lichtwelle herrscht. Auf der anderen Seite der Grenzfläche — im gebrochenen Licht — besteht natürlich immer dieser einfache Schwingungszustand, wir können daher mit der von diesem herrührenden Lichtbeugung sicherer rechnen.

Nennen wir einfachheitshalber erstes Medium dasjenige, in welchem die in Rede stehenden gebeugten Strahlen sich fortpflanzen und rechnen wir vorerst mit der Voraussetzung, daß

* Es wird hier am Platze sein, die in der Einleitung erwähnten Bemerkungen zu machen. Man kann sich die in Rede stehenden sekundären Zentren auf zweierlei Art vorstellen. Einerseits kann nämlich im Sinne des Huygensschen Prinzipes jeder Punkt irgend eines von Licht durchdrungenen Raumes als Ausgangspunkt elementarer Wellen angesehen werden, andererseits kann in einem anderen Sinne eine an einem unendlich kleinen materiellen Teilchen erfolgende Lichtbeugung, Lichtstreuung, als elementare Erregung betrachtet werden. Der Polarisationszustand sowohl der ersten (Stokesschen) wie auch der zweiten (Rayleighschen) elementaren Welle ist zirkumaxial. Bei der letzteren ist — nach der Theorie — auch die Intensitätsverteilung zirkumaxial-symmetrisch. Beim Abfassen meiner Arbeit dachte ich — vielleicht nicht ganz richtig — mehr an letztere. Die im Text über die Intensitätsverteilung gemachte Bemerkung bezieht sich darauf, daß die experimentell verwirklichte Lichtzerstreuung in der Regel nicht die symmetrische Verteilung der Lichtintensität zeigt. Die Ursachen hiervon werde ich in meiner nächsten Arbeit ausführlicher behandeln.

## 1. Die Lichtbeugung im ersten Medium erfolgt.*

Auf Grund der vorigen Betrachtungen von der einfachsten Voraussetzung über diese — in homogenem Medium entstehende — Lichtbeugung ausgehend nehmen wir an, daß in ihr sowohl der Polarisationszustand, als auch die Intensität eine solche einfache zirkumaxiale Verteilung aufweisen, deren Achse die Schwingungsrichtung des auf der Oberfläche sich befindenden Lichtvektors ist, den Lichtvektor mit dem elektrischen Vektor identifizierend.**

Es sei (s. Fig. 6) $\overrightarrow{ZO}$ die Richtung des einfallenden Lichtes, die $ZOX$-Ebene dessen Schwingungsebene, d. h. die $ZOY$-Ebene dessen Polarisationsebene; es sei $\overrightarrow{OR}$ ein beliebig gebeugter Strahl, $NOR \sphericalangle = \omega$ der Beugungswinkel und $POY \sphericalangle = \vartheta$ jener Winkel, welchen die $ZOR$-Beugungsebene mit der Polarisationsebene des einfallenden Lichtes bildet.

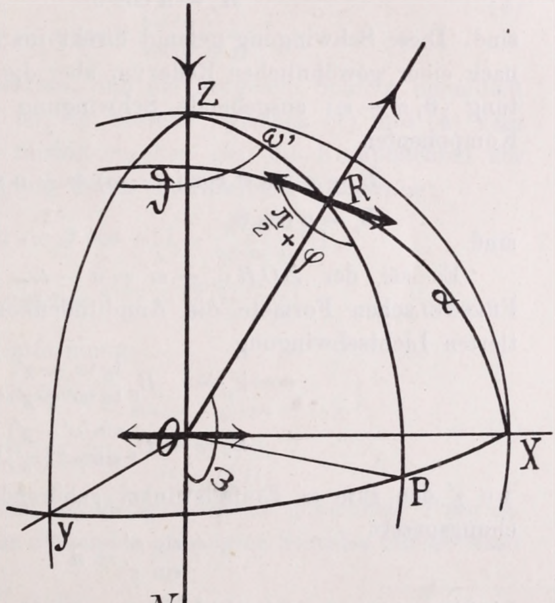



Fig. 6.

* Siehe Figur 1.

** Diese Voraussetzung bedeutet eigentlich, daß jenes — um mich so auszudrücken — primäre Lichtvektorsystem, welches auf der Grenzfläche entsteht und aus welchem wir das beobachtete gebeugte Licht auf die bereits öfter erwähnte Weise zusammensetzen, vollkommen bestimmt ist durch den lokalen Wert der sich auf der Oberfläche befindenden Lichtschwingung, sagen wir elektrischen Schwingung. Diese Voraussetzung ist jedenfalls bloß in erster Annäherung richtig, nachdem sie eher der Natur der streng genommenen Lichterregung (Fluoreszenz), ferner derjenigen der an den unendlich kleinen materiellen Teilchen erfolgenden

Es sei $a$ die Amplitude* der in $O$ erfolgenden zirkumaxialen Erregung, dann ist die mit der Beugungsebene parallel schwingende Amplituden-Komponente dieses einfallenden Vektors $a \sin \vartheta$ und ihre senkrecht auf die Beugungsebene schwingende Komponente $a \cos \vartheta$, während die entsprechenden Komponenten der direkt nach der $(\vartheta, \omega)$-Richtung ausgehenden Schwingung $(I_1)$ im Sinne der einfachen Zirkumaxialität

$$\left.\begin{aligned} K_p &= a \sin \vartheta \cos \omega, \\ K_s &= a \cos \vartheta \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

sind. Diese Schwingung gelangt direkt ins Auge des Beobachters; nach einer gewöhnlichen Reflexion aber die aus $O$ nach der Richtung $(\vartheta, \pi - \omega)$ ausgehende Schwingung ($I_2$ s. Fig. 1), deren Komponenten

$$\left.\begin{aligned} B_p &= a \sin \vartheta \cos (\pi - \omega) = - a \sin \vartheta \cos \omega \\ B_s &= a \cos \vartheta \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

sind.

Es sei der $ZOR \sphericalangle = \omega' = \pi - \omega$, dann sind nach den FRESNELschen Formeln die Amplitudenkomponenten der reflektierten Lichtschwingung

$$\left.\begin{aligned} V_p &= \quad B_p \frac{\operatorname{tg}(\omega' - \chi')}{\operatorname{tg}(\omega' + \chi')}, \\ V_s &= - B_s \frac{\sin(\omega' - \chi')}{\sin(\omega' + \chi')}, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

wo $\chi'$ den zum $\omega'$ Einfallswinkel gehörenden und aus dem Brechungsgesetz

$$\frac{\sin \omega'}{\sin \chi'} = n$$

---

Lichtzerstreuung entspricht, als der gewöhnlichen Lichtbeugung. In der Lichtbeugung spielt — außer den lokalen Werten des Lichtvektors — auch dessen in der Richtung der Normale genommener Differentialquotient eine Rolle. Dieser Umstand ergibt eben den wesentlichen Unterschied zwischen der FRESNELschen Anwendungsweise und der POISSON-KIRCHHOFFschen strengen Formulierung der HUYGENSschen Prinzipes.

* Der Lichtvektor selbst hätte also die Form $\frac{a}{r} \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{c}\right)$. Uns genügt jedoch, mit $a$, mit der Amplitude in der Entfernung Eins zu arbeiten. Wir wollen uns zugleich merken, daß wir bezüglich des $a$ keine bestimmte Voraussetzung (z. B., daß es proportional mit der einfallenden, eventuell der resultierenden Schwingung wäre etc.) aufstellen, außer, was seine Richtung betrifft.

sich ergebenden spitzen Winkel bedeutet. Es ist leicht einzusehen, daß wir in (3) an Stelle $\omega'$, $\omega = \pi - \omega'$ setzen können, wenn wir gleichzeitig anstatt $\chi'$ den sich aus

$$\frac{\sin \omega}{\sin \chi} = n$$

ergebenden und mit $\omega$ in ein und demselben Quadranten befindlichen, nunmehr also stumpfen $\chi$-Winkel setzen. Demnach ist also

$$\left.\begin{aligned} V_p &= -a \sin \vartheta \cos \omega \frac{\operatorname{tg}(\omega - \chi)}{\operatorname{tg}(\omega + \chi)}, \\ V_s &= -a \cos \vartheta \frac{\sin(\omega - \chi)}{\sin(\omega + \chi)}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Nachdem wir voraussetzten, daß die beugende Schicht unendlich nahe zur Grenzfläche ist, so besteht zwischen (1) und (4) kein Wegunterschied, und mithin ergeben sich die Komponenten der resultierenden Schwingung durch unmittelbare Addierung:

$$E_p = a \sin \vartheta \cos \omega \left(1 - \frac{\operatorname{tg}(\omega - \chi)}{\operatorname{tg}(\omega + \chi)}\right),$$

$$E_m = a \cos \vartheta \left(1 - \frac{\sin(\omega - \chi)}{\sin(\omega + \chi)}\right)$$

oder nach einfacher Umformung:

$$\left.\begin{aligned} E_p &= a \sin \vartheta \cos \omega \frac{2 \sin \chi \cos \chi}{\sin(\omega + \chi) \cos(\omega - \chi)}, \\ E_m &= a \cos \vartheta \frac{2 \sin \chi \cos \omega}{\sin(\omega + \chi)}. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Bezeichnen wir das von der Beugungsebene gerechnete Polarisationsazimut des in Rede stehenden gebeugten Strahles mit $\varphi$, dann ist also

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{E_p}{E_m} = \frac{\cos \chi}{\cos(\omega - \chi)} \cdot \operatorname{tg} \vartheta \quad (6)$$

der gesuchte Zusammenhang zwischen dem Polarisationsazimut des einfallenden und des gebeugten Lichtes, sowie dem Beugungswinkel und dem Brechungsexponenten des Gittermateriales.

Diese Formel kann unmittelbar in der STOKESschen Form

$$\operatorname{tg} \varphi = m' \operatorname{tg} \vartheta$$

geschrieben werden, wo im gegenwärtigen Falle

$$m' = \frac{\cos \chi}{\cos(\omega - \chi)}$$

ist.

Vor der Besprechung dieses Resultats wollen wir noch beweisen, daß wir — dem auf Seite 51 erwähnten Experimente entsprechend — zu dieser Formel auch auf einem einfacheren Wege gelangen können, wenn wir voraussetzen, daß

### 2. Die Lichtbeugung im zweiten Medium erfolgt.

Im Sinne dieser Annahme (Fig. 2) ist der im I. Medium beobachtete Strahl von $(\vartheta, \omega)$ Richtung nichts anderes, als der gebrochene Teil, $II_{1t}$ des im II. Medium in der Richtung $(\vartheta, \chi)$ abgehenden $II_1$ Strahles.

Analog mit (1) sind die Amplitudekomponenten der in der $(\vartheta, \chi)$ Richtung abgehenden zirkumaxialen Schwingung

$$\begin{aligned} B'_p &= a \sin \vartheta \cos \chi, \\ B'_m &= a \cos \vartheta . \end{aligned} \tag{7}$$

Aus diesen werden nach der Brechung (ebenfalls nach den durch die Einführung der $\omega$, $\chi$ Winkel gewonnenen FRESNEL-Formeln)

$$T'_p = B'_p \frac{2 \sin \omega \cos \chi}{\sin (\chi + \omega) \cos (\chi - \omega)},$$

$$T'_m = B'_m \frac{2 \sin \omega \cos \chi}{\sin (\chi + \omega)},$$

und so gewinnen wir für das Polarisationsazimut $\varphi$ des gebeugten Lichtes die mit (6) vollkommen übereinstimmende Formel*

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{T'_p}{T'_m} = \frac{\cos \chi}{\cos (\omega - \chi)} \operatorname{tg} \vartheta . \tag{8}$$

An diese zweite Ableitung können wir noch die Bemerkung knüpfen, daß es nicht nötig ist, die einfache Zirkumaxialität, d. h. auch die zirkumaxiale Intensitätsverteilung vorauszusetzen.** In der Tat, solange die zirkumaxiale Polarisation besteht, d. h. solange

* Da dieses eigentlich der von STOKES eingeschlagene Weg ist, so ergibt sich natürlich auch bei ihm dieselbe Formel, jedoch für das gebrochen-gebeugte Licht. Es ist zu ersehen, daß nach unserer Deutung eher die Unterscheidung gemacht werden müßte: in die Luft gebeugtes Licht, ins Glas gebeugtes Licht, während der Umstand, ob der in Rede stehende gebeugte Strahl auf der Seite des gebrochenen, oder reflektierten Lichtes ist, nebensächlich erscheint. Die Erfahrung rechtfertigt denn auch diese Folgerung, wie wir es sehen werden.

** STOKES verwendet tatsächlich die Intensitätsverteilung nach seinem Kosinus-Gesetz.

$$\frac{B'_p}{B'_m} = \operatorname{tg} \vartheta \cos \chi$$

ist, bleibt auch die Formel (8) unverändert, sodaß wir anstatt (7) auch die allgemeinen Voraussetzungen

$$B'_p = a \cdot f(\vartheta, \omega) \sin \vartheta \cos \chi,$$
$$B'_m = a \cdot f(\vartheta, \omega) \cos \vartheta$$

anwenden können und hier kann das $f(\vartheta, \omega)$ eine beliebige Funktion sein, während wir in die erste Ableitung mit derartiger Verallgemeinerung bloß eine solche Funktion einführen können, welche der Annahme

$$f(\vartheta, \omega) = f(\vartheta, \pi - \omega)$$

Genüge leistet.

In den Ableitungen, resp. in den zu ihnen gehörenden Zeichnungen setzen wir stillschweigend voraus, daß wir das in das I. Medium von kleinerem Brechungsexponenten tretende gebeugte Licht beobachten. Natürlich ergibt dieselbe Formel auch das Azimut des ins II. Medium tretenden Lichtes, wenn wir in sie die entsprechenden Werte des Beugungswinkels substituieren.

Es ist wohl kaum notwendig, zu erwähnen, daß die Formel (6) auch die Lichtbeugung im homogenen Medium enthält. In der Tat, da im Falle $n = 1$ $\chi = \omega$ ist, geht (6) in die wohlbekannte Formel der zirkumaxialen Polarisation

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \vartheta \cos \omega$$

über.

§ 3. Vergleich der Theorie und des Experimentes bei senkrechtem Einfall, im Falle von Glasgittern in die Luft reflektiert-gebeugten Lichtes. a) Das einfallende Licht ist linear-polarisiert. Vergleich von Fröhlichs Beobachtungen mit den berechneten Werten; sehr gutes Übereinstimmen. Die Daten von Kronstein; die Berechnung stimmt mit den Versuchsresultaten wahrscheinlich nicht überein, wenn $n > 1{,}60$ ist. b) Das einfallende Licht ist ein natürliches, nicht polarisiertes. Erweiterung von Fröhlichs Beobachtungen. Das gebeugte Licht ist in der Beugungsebene partiell polarisiert.

Wir gelangten nun endlich dazu, unsere auf theoretischem Wege erhaltenen Formeln mit den Beobachtungen zu vergleichen.

Diesen Vergleich stellte ich zunächst an der Reihe von Angaben an, die FRÖHLICH l. c. S. 316 mitteilt als die Polarisationsazimute der bei senkrechtem Einfalle linear-polarisierten Lichtes zustande kommenden reflektiert-gebeugten Lichtstrahlen.

Tab. I enthält die Vergleichsresultate; $\vartheta$, $\omega'$ bedeuten die Kugelkoordinaten des in Rede stehenden gebeugten Strahles, $\varphi_0$ das beobachtete, $\varphi_c$ das aus obiger Formel berechnete Polarisationsazimut; $\varphi_c - \varphi_0$ zeigt somit, in welchem Maße unsere Formel die Wirklichkeit wiedergibt, schließlich $\vartheta + \pi - \varphi_0$ die Abweichung der beobachteten Azimute von der strengen Isogonalität.

Tabelle I.

| $\vartheta$ | $\omega'$ | $\varphi_0$ | $\varphi_c$ | $\varphi_0 - \varphi_0$ | $\vartheta + \pi - \varphi_0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 00°,0 | 26°,0 | 179°,7 | 180°,0 | + 0°,3 | + 0°,3 |
| 00,0 | 45,0 | 180,1 | 180,0 | — 0,1 | — 0,1 |
| 00,0 | 80,0 | 180,0 | 180,0 | 0,0 | 0,0 |
| 45,0 | 26,0 | 223,3 | 224,1 | + 0,8 | + 1,7 |
| 45,0 | 45,0 | 221,0 | 222,6 | + 1,6 | + 4,0 |
| 45,0 | 80,0 | 223,9 | 224,0 | + 0,1 | + 1,1 |
| 90,0 | 26,0 | 270,2 | 270,0 | — 0,2 | — 0,2 |
| 90,0 | 45,0 | 270,1 | 270,0 | — 0,1 | — 0,1 |
| 90,0 | 80,0 | 270,7 | 270,0 | — 0,7 | — 0,7 |
| 135,0 | 26,0 | 316,3 | 315,9 | — 0,4 | — 1,3 |
| 135,0 | 45,0 | 319,0 | 317,4 | — 1,6 | — 4,0 |
| 135,0 | 80,0 | 318,4 | 316,0 | — 2,4 | — 3,4 |
| 180,0 | 26,0 | 359,5 | 360,0 | + 0,5 | + 0,5 |
| 180,0 | 45,0 | 359,7 | 360,0 | + 0,3 | + 0,3 |
| 180,0 | 80,0 | 360,2 | 360,0 | — 0,2 | — 0,2 |
| 225,0 | 26,0 | 43,6 | 44,1 | + 0,5 | + 1,4 |
| 225,0 | 45,0 | 41,4 | 42,6 | + 1,2 | + 3,6 |
| 225,0 | 80,0 | 43,2 | 44,0 | + 0,8 | + 1,8 |
| 270,0 | 26,0 | 90,4 | 90,0 | — 0,4 | — 0,4 |
| 270,0 | 45,0 | 90,4 | 90,0 | — 0,4 | — 0,4 |
| 270,0 | 80,0 | 90,8 | 90,0 | — 0,8 | — 0,8 |
| 315,0 | 26,0 | 137,1 | 135,9 | — 1,2 | — 2,1 |
| 315,0 | 45,0 | 139,5 | 137,4 | — 2,1 | — 4,5 |
| 315,0 | 80,0 | 137,9 | 136,0 | — 1,9 | — 2,9 |

Richten wir unser Augenmerk zuerst auf diese Rubrik, so gewahren wir, daß in dem gegenwärtigen Falle — wie schon angezeigt — das Gesetz der isogonalen Polarisation mit großer Annäherung gültig ist. Die Abweichungen davon sind aber zu groß und regelmäßig, um für Folgen von Beobachtungsfehlern erachtet werden zu können.

Ein Blick auf die vorletzte Rubrik überzeugt uns davon, daß unsere Formel

$$\operatorname{tg} \varphi = m' \operatorname{tg} \vartheta$$

auch diese feinen Abweichungen ziemlich genau wiedergibt.

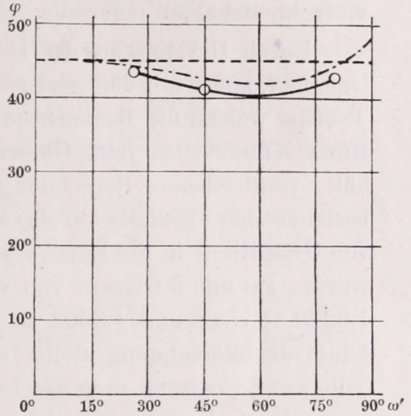


Fig. 7.

Die Übereinstimmung kann sogar, wenn die Tabelle für sich allein betrachtet wird, vorzüglich genannt werden, da auch die größte Abweichung von $2^0{,}4$ bei einem $\varphi_0$-Werte vorkommt, bei welchem auch der Einfluß des Gitterintervalles in einer Abweichung von $\pm 1^0{,}2$ sich äußert.* Zur besseren Übersicht wurden auf Fig. 7 die Azimute der Strahlen in der Beugungsebene $\vartheta = 45^0$ auch graphisch dargestellt, so wie sie aus den Beobachtungen (————), aus der Isogonalität (— — — —) und aus obiger Formel (— · — · —) sich ergeben. Die Rechnung ist übrigens sehr einfach. Aus der Formel $\sin \omega = n \sin \chi$ berechnet man die Werte von $\chi$ für $\omega = 26^0, 45^0, 80^0$, [aus dem Polarisationswinkel $P = 56^0\ 15'$ dieses Gitters $n = \operatorname{tg} P = 1{,}497$] nachher die entsprechenden

$$m = \frac{\cos \chi}{\cos (\omega' - \chi)},$$

Werte und zuletzt aus $\operatorname{tg} \varphi = m \operatorname{tg} \vartheta$ die Werte von $\varphi_c$; für $m = 1$ würde man die isogonale Polarisation erhalten, während z. B. im soeben behandelten Falle den Werten von $\omega' = 26^0, 45^0, 80^0$ die Werte

$$0{,}967\,,\ 0{,}920\,,\ 0{,}966 \text{ von } m$$

entsprechen. Die Werte von $m$ sind zugleich auch die Werte von $\operatorname{tg} \varphi_c$ für $\vartheta = 45^0$. Dies ist übrigens der interessanteste Fall, weil bei einem bestimmten $\omega$ in diesem Falle, oder genauer bei dem Werte von $\vartheta$, der sich aus $\operatorname{tg} \vartheta = \sqrt{\frac{1}{m}}$ ergibt, der größte Unterschied zwischen $\vartheta$ und $\varphi_c$ besteht. Aus dem Werte der tg

* Vgl. die 5. und 8. Rubrik der vollständigen Tabelle l. c.

ergibt sich natürlich nicht, in welchem Quadranten der entsprechende Winkel zu suchen ist; in dieser Tabelle haben wir das Azimut des zu dem in das Azimut $0^0$ polarisierten einfallenden Licht gehörenden, in sich selbst reflektierten Lichtes nach FRÖHLICH gleich $180^0$ gesetzt, die übrigen Werte sind hieraus schon auf Grund der Stetigkeit einwertig bestimmt. Fortan werden wir einfachheitshalber mehr die $|\varphi_c| \leqq \frac{\pi}{2}$ Werte anwenden.

Durch Gefälligkeit des Herrn Prof. FRÖHLICH hatte ich Gelegenheit, außer mit den jetzt mitgeteilten, mit den Daten noch einer Tabelle, welche die Beobachtungen des Lehramtskandidaten Herrn BÉLA KRONSTEIN, jetzt Oberrealschullehrer zu Debreczen, enthält, vergleichende Berechnungen zu machen. Diese Messungen beziehen sich ebenfalls auf das bei senkrechtem Einfall entstehende, von Glasgittern in die Luft reflektiert-gebeugte Lichtsystem, jedoch wurden sie mit 5 Gläsern von verschiedenen: $n_D = 1{,}4781$, $1{,}4782$, $1{,}6222$, $1{,}7547$ und $1{,}9303$ Brechungsexponenten ausgeführt. Im Laufe der Berechnung stellte sich aber heraus, daß in dieser Tabelle zwei, eventuell drei Brechungsexponenten wahrscheinlich verwechselt sind, weswegen ich das Resultat des Vergleiches nicht detailliert mitteilen werde. Doch als sehr wahrscheinliche Folgerungen kann ich erwähnen, daß die Daten der zwei Gitter von den kleinsten Brechungsexponenten mit der Berechnung ebenso gut übereinstimmen, wie die mitgeteilten FRÖHLICHschen Daten, während von $n_D = 1{,}6222$ angefangen aus den Daten, gegenüber unserer Theorie eine mit der Zunahme des Brechungsexponenten zunehmende Abweichung bestimmter Richtung herauszulesen ist. Namentlich, während nach der Theorie über $n = 1{,}60$ $m'$ sogar $> 1$, d. h. $|\varphi_c| > |\vartheta|$ wird, tritt dies nach den Messungen niemals ein, sogar ist $|\varphi_c|$ auf dem Gitter von größtem $n_D = 1{,}9303$ Brechungsexponenten schon wesentlich kleiner, als $|\vartheta|$. Offenbar sind bei so großen Werten des Brechungsexponenten die auf S. 55 gemachten einfachen Voraussetzungen nicht einmal annähernd erfüllt.

Es wäre aber noch viel zu früh, von einer Erweiterung der Theorie zu sprechen.

Ich will jetzt jene Beobachtungen erwähnen, die ich an den reflektiert-gebeugten Lichtstrahlen, welche aus dem auf das Glasgitter normal einfallenden nichtpolarisierten (natürlichen)

Licht entstehen, ausführte und welche Beobachtungen mich zur Erweiterung derjenigen von Fröhlich und in gewissem Sinne zur Bestätigung der Theorie führten.

Fröhlichs öfter zitiertes Werk enthält nämlich in § 43, Pkt. 2 die bemerkenswerte Beobachtung, daß *im Falle normal einfallenden linear-polarisierten Lichtes die Intensität des gebeugten Lichtes unabhängig vom Azimut des einfallenden Lichtes ist*; während nach Punkt 2 des § 39 *im Falle normal einfallenden, natürlichen Lichtes sämtliche gebeugte Strahlen ebenfalls natürlichen Zustandes sind*; welch letzteres im übrigen die unmittelbare Folge der vorherigen Gesetze ist.

Diese beiden Beobachtungen stehen aber im Gegensatze zu unserer Formel. In der Tat, nach Formel (5) auf Seite 57 ist die Intensität des gebeugten Lichtes

$$I_\vartheta = E_p^2 + E_m^2 = a^2\left(\frac{2\sin\chi\cos\omega}{\sin(\omega+\chi)}\right)^2\left\{\cos^2\vartheta + \left(\frac{\cos\chi}{\cos(\omega+\chi)}\right)^2\sin^2\vartheta\right\},$$

oder anders

$$I_\vartheta = I_{\vartheta=0}\{\cos^2\vartheta + m'^2\sin^2\vartheta\}.$$

Dies aber, insofern

$$m' \neq 1$$

von $\vartheta$ nicht unabhängig ist. So ist z. B. bei $n = 1{,}50$ und $\omega' = 45^0$

$$I_{\vartheta=90} = 0{,}846\, I_{\vartheta=0},$$

in solchem Verhältnis müßte also die Intensität des mit freiem Auge beobachteten Strahles sich ändern, wenn wir den Polarisator um $90^0$ verdrehen. Da mir über die Größenordnung der unter solchen Umständen bemerkbaren Intensitätsänderung keine Daten bekannt waren, machte ich die andere Folgerung der Theorie zum Gegenstand des Versuches, nämlich das, was sie betreffend des natürlich einfallenden Lichtes sagt. Hiernach ist das gebeugte Licht auch in diesem Falle kein natürliches, sondern *partiell polarisiertes* Licht. Da doch

$$\operatorname{tg}\varphi = m' \operatorname{tg}\vartheta$$

ist, so ist zugleich, falls, wie gewöhnlich, $m' < 1$, auch $|\varphi| < |\vartheta|$, mithin wird, von welch' beliebigem Wert der Polarisationsazimut

$\vartheta$ des einfallenden Lichtes auch ist, die in der Ebene der Beugung polarisierte Komponente des gebeugten Lichtes verhältnismäßig größer sein, somit wird das gebeugte Licht auch im Falle natürlich einfallenden Lichtes in der Ebene der Beugung partiell polarisiert.* Zum Erkennen der partiellen Polarisation aber verfügen wir über sehr empfindliche Polariskopen, und in der Tat fand ich, indem ich eine SAVARTsche Platte vor den Analisator legte, die in Rede stehenden Strahlen in der Ebene der Beugung partiell polarisiert. Ich versuchte sodann, diese partielle Polarisation auch auf die übliche Weise durch Kompensation mit einer Glasplatte zu messen.** So einfach aber im Prinzip die Messung der partiellen Polarisation auch ist, konnte ich mit den mir zur Verfügung gestandenen Mitteln genaue Messungen doch noch nicht vornehmen. Die Detaillierung der auftretenden Schwierigkeiten würde zu weit führen; anstatt dessen stellte ich an der II. Tabelle einige orientierende Daten zusammen, die ich an einem — ebenfalls von Herrn Prof. FRÖHLICH stammenden — auf der Hypotenusenfläche gefurchten, rechtwinkligen Glasprisma $n_D = 1,616$ gewann; darin bedeutet $\omega'$ den Winkel zwischen dem einfallenden und dem gebeugten Strahl, $i$ den Winkel des Einfalles auf das Glas, bei welchem die Kompensierung erfolgte, schließlich

$$p = 100\,\frac{1 - \cos^4(i - r)}{1 + \cos^4(i - r)}$$

die partielle Polarisation in Perzenten. Die ziemlich großen Werte*** des $p$ machen es wahrscheinlich, daß aus der Beobachtung nicht

* Senkrecht zur Beugungsebene, wenn $m' > 1$. Diese partielle Polarisation kann eigentlich schon aus jener experimentellen Tatsache, daß für den Fall von einfallendem linear-polarisiertem Licht der Polarisationszustand nicht streng isogonal, d. h. $\varphi \neq \vartheta$ ist, mit großer Wahrscheinlichkeit gefolgert werden.

** Vgl. z. B. WINKELMANN: Handb. d. Phys. II. Aufl. VI. Seiten 1250—52. Offenbar ist diese Kompensation nur in solchen Strahlen möglich, die dem STOKESschen allgemeinen Gesetze:

$$\operatorname{tg}\varphi = m' \operatorname{tg}\vartheta$$

unterworfen sind. Auf diese Weise wäre es möglich, dieses Gesetz zu kontrollieren und zugleich das $m'$ durch eine einzige Messung zu bestimmen.

*** Aus den erwähnten Daten KRONSTEINS würde sich eine ungefähr nur $^2/_3$ mal so große Polarisation ergeben.

jedes falsche Licht vollkommen ausgeschlossen war, obwohl eine partielle Polarisation dieser Ordnung mit einem Nicol noch immer nur bei entsprechender Intensität des Lichtes erkennbar ist.

Der Umstand, daß noch selbst bei $\omega' = 75^0$ eine partielle Polarisation in der Einfallsebene beobachtet wurde, zeigt, daß unsere Formel im Falle eines so großen Brechungsexponenten tatsächlich nicht mehr zu gebrauchen ist, hingegen macht die Möglichkeit der Kompensierung unzweifelhaft, daß diese Polarisation schon aus der Abweichung von der Isogonalität, mittels der Formel

Tabelle II.

| $\omega'$ | $i$ | $p$ |
|---|---|---|
| $30^0$ | $44^0$ | 9% |
| 45 | 52·4 | 14 |
| 60 | 57·1 | 18 |
| 75 | 45·7 | 10 |

$$m'_{obs} = \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{\operatorname{tg} \vartheta} = \cos^2 (i - r)$$

berechnet werden kann. Die Kontrolle dieses Zusammenhanges beansprucht aber schon viel genauere Messungen.

§ 4. Weiterer Vergleich der Theorie und des Experimentes; die Beugung des senkrecht einfallenden Lichtes erfolgt an der Grenzfläche: Glas — verschiedene Flüssigkeiten. Die Beobachtungen KRONSTEINS und KRONBERGERS; sehr gute Übereinstimmung. Wenn $n < 1$ ist, ergibt die Theorie elliptische Polarisation für die Strahlen über den Grenzwinkel der Totalreflexion hinaus; die für diese geltenden Formeln.

In dem Bisherigen sprachen wir über zwei typische Polarisationszustände, über die zirkumaxiale und die isogonale Polarisation und sahen, daß unsere Formel zur genauen, quantitativen Beschreibung beider geeignet ist.

Nachdem das zirkumaxiale System im Inneren von homogenem Medium, das isogonale auf der Grenzfläche wesentlich verschiedener optischen Medien (Glas und Luft) entsteht, bezeichnete es FRÖHLICH schon in seinem erwähnten Werk als wichtige Aufgabe, zu untersuchen, welche Systeme auf der Grenzfläche solcher Medien entstehen, deren relative Brechungsexponenten sich zwischen den Grenzen 1 und 1,5 bewegen.

Diese Untersuchung haben, im Rahmen einer THANschen Universitäts-Preisaufgabe, die damaligen Lehramtskandidaten Herren BÉLA KRONSTEIN und EDUARD KRONBERGER im Jahre 1907/08 durchgeführt; das Resultat dieser Messungen, das mir zu diesem Zwecke zur Verfügung zu stellen Herr Prof. FRÖHLICH die Freundlichkeit hatte, werde ich in diesem Kapitel mit unserer Theorie vergleichen.

Zuvor jedoch einige Worte über die Anordnung der Experimente. Zur Ausführung der Messungen diente ein Glaspräparat, das aus einer leeren Glas-Halbkugelschale (von der Firma C. ZEISS, Jena, hergestellt) und einem mit der gefurchten Fläche nach deren Innerem gewendeten, dazu geklebten Glasgitter bestand (wie es im Durchschnitt Fig. 8 darstellt). Erstere konnte durch eine kleine Öffnung mit der Flüssigkeit gefüllt werden, während die gefurchte Gitterebene mit der geometrischen diagonalen Ebene der Ersteren zusammenfiel. Das ganze Präparat war nach jeder Richtung (selbst in der Ebene der Grenzfläche) drehbar, in der Mitte des erwähnten JAMINschen Kreises aufmontiert. Das Resultat der Messungen, mit unserer Theorie verglichen, finden wir in nebenstehender Tabelle III.

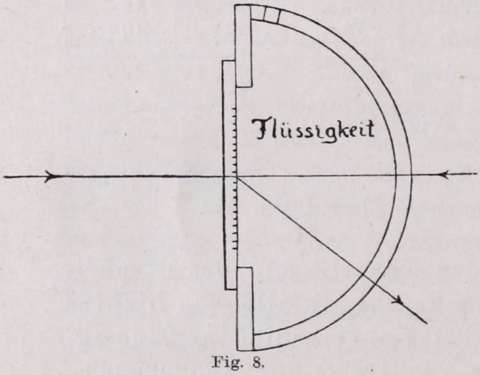


Fig. 8.

In dieser Tabelle bedeutet $\vartheta$ das von der Beugungsebene ab gemessene Polarisationsazimut des einfallenden Lichtes, $\omega$ der Beugungswinkel, d. h. den Winkel zwischen der positiven Richtung des einfallenden Lichtes und der positiven Richtung des gebeugten Strahles. Nachdem jedoch immer die von der Gitterfläche durch die Flüssigkeit austretenden Strahlen beobachtet wurden, so ist $0^0 \leqq \omega \leqq 90^0$, wenn das einfallende Licht durch die Glasplatte hindurch (in unserer Figur links) zu der gefurchten Fläche gelangt, die beobachteten gebeugten Strahlen sind also eigentlich sogenannte gebrochen-gebeugte Strahlen, während das einfallende Licht im Falle $90^0 \leqq \omega \leqq 180^0$ durch die Flüssigkeit hindurch (in unserer Figur rechts) zu der gefurchten

## Tabelle III.

| Das erste Medium | | Luft $n_D = 1,00$ | | | Wasser $n_D = 1,33$ | | | Alkohol $n_D = 1,36$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Relat. Brechungsexponent | | 1,48 | | | 1,112 | | | 1,088 | | |
| $\vartheta$ | $\omega$ | $\varphi_0$ | $\varphi_c$ | $\varphi_0-\varphi_c$ | $\varphi_0$ | $\varphi_c$ | $\varphi_0-\varphi_c$ | $\varphi_0$ | $\varphi_c$ | $\varphi_0-\varphi_c$ |
| 45° | ±150° | − 42°,5 | − 43°,8 | + 1°,3 | − 41°,7 | − 41°,8 | + 0°,1 | − 41°,0 | − 41°,6 | + 0°,6 |
| | ±135 | − 42,3 | − 42,5 | + 0,2 | − 37,2 | − 37,6 | + 0,4 | − 36,9 | − 37,3 | + 0,4 |
| | ±120 | − 40,7 | − 41,6 | + 0,9 | − 31,9 | − 32,4 | + 0,5 | − 31,1 | − 31,4 | + 0,3 |
| | ±105 | − 41,8 | − 42,5 | + 0,7 | − 26,1 | − 27,2 | + 1,1 | − 22,2 | − 25,2 | + 3,0 |
| | ± 75 | + 41,8 | + 42,5 | − 0,7 | + 26,1 | + 27,2 | − 1,1 | + 22,2 | + 25,2 | − 3,0 |
| | ± 60 | + 40,7 | + 41,6 | − 0,9 | + 31,9 | + 32,4 | − 0,5 | + 31,1 | + 31,4 | − 0,3 |
| | ± 45 | + 42,3 | + 42,5 | − 0,2 | + 37,2 | + 37,6 | − 0,4 | + 36,9 | + 37,3 | − 0,4 |
| | ± 30 | + 42,5 | + 43,8 | − 1,3 | + 41,7 | + 41,8 | − 0,1 | + 41,0 | + 41,6 | − 0,6 |
| | ± 15 | + 45,1 | + 44,7 | + 0,4 | + 44,4 | + 44,2 | + 0,2 | + 44,1 | + 44,1 | 0,0 |
| | 0 | + 45,3 | + 45,0 | + 0,3 | + 45,1 | + 45,0 | + 0,1 | + 45,0 | + 45,0 | 0,0 |

| Das erste Medium | | Terpentin $n_D = 1,48$ | | | Schwefelkohlenstoff $n_D = 1,63$ | | | Methylenjodid $n_D = 1,74$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Relat. Brechungsexponent | | 1,00 | | | 0,91 | | | 0,85 | | |
| $\vartheta$ | $\omega$ | $\varphi_0$ | $\varphi_c$ | $\varphi_0-\varphi_c$ | $\varphi_0$ | $\varphi_c$ | $\varphi_0=\varphi_c$ | $\varphi_0$ | $\varphi_c$ | $\varphi_0-\varphi_c$ |
| 45° | ±150° | − 40,1 | − 40,9 | + 0,8 | − 40,0 | − 39,9 | − 0,1 | − 39,1 | − 39,1 | 0,0 |
| | ±135 | − 34,6 | − 35,3 | + 0,7 | − 32,6 | − 32,3 | − 0,3 | − 29,5 | − 29,5 | 0,0 |
| | ±120 | − 25,5 | − 26,6 | + 1,1 | − 17,6 | − 17,1 | − 0,5 | − 3,0 | — | — |
| | ±105 | − 13,2 | − 14,5 | + 1,3 | − 0,5 | — | — | − 1,5 | — | — |
| | ± 75 | + 13,2 | + 14,5 | − 1,3 | + 0,5 | — | — | + 1,5 | — | — |
| | ± 60 | + 25,5 | + 26,6 | − 1,1 | + 17,6 | + 17,1 | + 0,5 | + 3,0 | — | — |
| | ± 45 | + 34,6 | + 35,3 | − 0,7 | + 32,6 | + 32,3 | + 0,3 | + 29,5 | + 29,5 | 0,0 |
| | ± 30 | + 40,1 | + 40,9 | − 0,8 | + 40,0 | + 39,9 | + 0,1 | + 39,1 | + 39,1 | 0,0 |
| | ± 15 | + 43,1 | + 44,0 | − 0,9 | + 43,7 | + 43,8 | − 0,1 | + 42,0 | + 43,6 | − 1,4 |
| | 0 | + 44,9 | + 45,0 | − 0,1 | + 45,0 | + 45,0 | 0,0 | + 45,0 | + 45,0 | 0,0 |

Fläche gelangt, die beobachteten Strahlen sind mithin reflektiert-gebeugte Strahlen. Die mit $\varphi_0$ bezeichnete Rubrik enthält die beobachteten Polarisationsazimute. Diese Daten zeigen auf den ersten Blick, daß das Azimut desselben Strahles das nämliche ist, ob es durch Refraktions- oder Reflexions-Beugung zustande kam.* Dieser Umstand unterstützt wesent-

* Die bis 0°,1 reichende Übereinstimmung ist freilich bloß dem Umstande zu verdanken, daß in die Tabelle die Mittelwerte der sehr nahe übereinstimmenden Daten eingestellt sind.

lich die bei der Ableitung unserer Formel als Grundlage benützte Annahme, daß die auf der Oberfläche entstehende Erregung in erster Annäherung nur von der dortbefindlichen Schwingung abhängt, dagegen die Richtung des einfallenden Lichtes außer Acht bleiben kann. Es ist leicht zu verstehen, daß diese Annahme gerade bei den der Einheit nahestehenden Brechungsexponenten mit großer Annäherung erfüllt ist. In der Rubrik $\varphi_c$ finden wir die mit unserer Formel berechneten Polarisationsazimute, schließlich in der Rubrik $\varphi_0 - \varphi_c$ die Differenz der gemessenen und berechneten Werte. Diese Differenz bleibt in den meisten Fällen innerhalb der Fehlergrenze der Messungen, so daß diese Datenreihe die Verwendbarkeit unserer Theorie — mit den erwähnten Beschränkungen — außer allen Zweifel setzt.

Wir müssen aber noch besonders über die Kontrolle der auf den Schwefelkohlenstoff und das Methylenjodid bezüglichen Resultaten sprechen. Da nämlich in diesen beiden Fällen der relative Brechungsexponent $n < 1$ ist, bekommen wir zu den größeren $\omega$ Werten, als der Grenzwinkel der Totalreflexion ist, keine der Gleichung

$$\frac{\sin \omega}{\sin \chi} = n$$

entsprechenden reellen $\chi$ Werte. Es wird daher auch jener Wert nicht reell sein, welchen die Formel

$$\frac{E_p}{E_m} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\cos \chi}{\cos (\omega - \chi)} \operatorname{tg} \vartheta$$

für das $\operatorname{tg} \varphi$ liefert. Dieser Umstand aber — wie dies aus der Optik bekannt ist — bedeutet, daß das in Rede stehende Licht nicht mehr linear, sondern elliptisch polarisiert ist. Schreiben wir das Verhältnis der beiden Amplitude-Komponenten in der Form

$$\frac{E_p}{E_m} = x + iy = \varrho e^{i\delta}, \tag{9}$$

dann bedeutet, wie bekannt, $\varrho$ das Verhältnis der reellen Amplituden, und $\delta$ die Phasendifferenz zwischen ihnen. Aus diesen Daten sind auch die Bestimmungselemente der Ellipse leicht darzustellen. Es sei (Fig. 9) $\varphi'$ die Neigung der Großachse der

Ellipse zu der $P$-Achse und

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \psi$$

das Verhältnis der beiden Achsen, dann ist

$$\operatorname{tg} 2\,\varphi' = 2\,\frac{\varrho}{\varrho^2 - 1} \cos \delta\,, \tag{10}$$

$$\sin 2\,\psi = 2\,\frac{\varrho}{\varrho^2 + 1} \sin \delta\,. \tag{11}$$

Zurückkommend auf die Daten unserer Tabelle, müßten wir nach dem Gesagten im Falle des Schwefelkohlenstoffes bei $\omega = 75^0$, im Falle des Methylenjodids bei $\omega = 60^0$ und $75^0$, sowie an den zu diesen symmetrischen Strahlen elliptische Polarisation finden. Nachdem die Beobachter dies nicht angeben, dagegen das an dem Nicol beobachtete Minimum unvollständig fanden, habe ich angenommen, daß sie die kleine Achse der Schwingungsellipse als Polarisationsrichtung beobachteten. Mit dieser Annahme sind nach den Formeln (9), resp. (10) und (11) die in der Tabelle IIIa enthaltenen Daten berechnet.

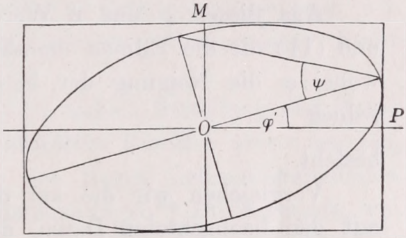


Fig. 9.

Tabelle IIIa.

| $\omega$ | Schwefelkohlenstoff | | | | Methylenjodid | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\varphi_0$ | $\varphi_c$ | $\varphi_0 - \varphi_c$ | $\varrho^2$ | $\varphi_0$ | $\varphi_c$ | $\varphi_0 - \varphi_c$ | $\varrho^2$ |
| $\pm 120^0$ | — | — | — | — | $-3{,}0^0$ | $-2{,}1^0$ | $-0{,}9^0$ | 0,068 |
| $\pm 105$ | $-0{,}5^0$ | $-2{,}1^0$ | $+1{,}6^0$ | 0,124 | $-1{,}5$ | $-8{,}7$ | $+7{,}2$ | 0,851 |
| $\pm 75$ | $+0{,}5$ | $+2{,}1$ | $-1{,}6$ | 0,124 | $+1{,}5$ | $+8{,}7$ | $-7{,}2$ | 0,851 |
| $\pm 60$ | — | — | — | — | $+3{,}0$ | $+2{,}1$ | $+0{,}9$ | 0,068 |

Diese Formeln gestalten sich im gegenwärtigen Fall wie folgt:

$$\frac{E_p}{E_m} = \operatorname{tg} \vartheta\, \frac{\cos \chi}{\cos(\omega - \chi)} = \operatorname{tg} \vartheta\, \frac{1}{\cos \omega + \operatorname{tg} \chi \sin \omega}, \tag{12}$$

wo

$$\sin \chi = \frac{1}{n} \sin \omega$$

ist; es sei ferner:

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{\sin\chi}{\cos\chi} = \frac{\sin\omega}{\sqrt{n^2 - \sin^2\omega}} = -i\frac{\sin\omega}{\sqrt{\sin^2\omega - n^2}} = -ik, \quad (13)$$

dann ist

$$\frac{E_p}{E_m} = \operatorname{tg}\vartheta\frac{1}{\cos\omega - ik\sin\omega} = \operatorname{tg}\vartheta\frac{\cos\omega + ik\sin\omega}{\cos^2\omega + k^2\sin^2\omega} = x + iy,$$

und schließlich

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg}\delta = \dfrac{y}{x} = k\dfrac{\sin\omega}{\cos\omega} = \dfrac{\sin^2\omega}{\cos\omega\sqrt{\sin^2\omega - n^2}} \\ \text{und} \\ \varrho = \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{tg}\vartheta\dfrac{1}{\sqrt{\cos^2\omega + k^2\sin^2\omega}} = \operatorname{tg}\vartheta\dfrac{1}{\cos\omega\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\delta}} \end{array}\right\} \quad (14)$$

Aus diesen $\varrho$ und $\delta$ Werten rechnen wir dann nach (10) und (11) die die Ellipse charakterisierenden $\varphi$ und $\psi$ Daten aus, wobei $\varphi$ die Neigung der kleinen Achse bedeutet, für welche jedoch

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \operatorname{tg} 2\varphi'$$

besteht.

Vergleichen wir die auf diese Weise berechneten Azimute mit den beobachteten Daten, dann finden wir, daß die Übereinstimmung eine sehr gute ist bei dem Methylenjodid im Falle $\omega = 60^0$, wo die Ellipse auch nach der Berechnung sehr flach ($\varrho^2 = 0{,}068$) ist, eine weniger gute im Falle des Schwefelkohlenstoffes $\omega = 75^0$, wo die Ellipse gewölbter ist ($\varrho^2 = 0{,}124$) und eine ganz schlechte im Falle des Methylenjodids $\omega = 75^0$, wo jedoch die Rechnung beinahe zirkular-polarisiertes Licht ergibt ($\varrho^2 = 0{,}851$), wo also von einem gewissen Polarisationsazimut nicht einmal annäherungsweise gesprochen werden kann.

### § 5. Fortsetzungsweiser Vergleich der Theorie und der Beobachtungen bezüglich des im Falle senkrechter Inzidenz an der Grenzfläche Luft — Glas ins Glas gebeugten Lichtes. Die Theorie erfährt eine vollständige Rechtfertigung durch die am Grenzwinkel der totalen Reflexion gemachten Beobachtungen. Phasen-Sprung, wenn das einfallende Licht linear-polarisiert ist; vollkommene Linearpolarisation, wenn das einfallende Licht natürliches, nicht polarisiertes Licht ist.

In diesem Paragraphen werden die auf der Grenzfläche Luft — Glas entweder durch Refraktions- oder durch Reflexions-Beugung zustande kommenden, aber immer ins Glas tretenden, gebeugten Strahlen behandelt.

Bezüglich dieser Strahlen gibt FRÖHLICH bereits l. c. im § 79 qualitative Daten an.* Nach diesen Beobachtungen mag von der Glasseite, oder aber der Luftseite aus linear-polarisiertes Licht senkrecht auf die Gitteroberfläche fallen, so sind immer von den ins Glas gebeugten Strahlen diejenigen, welche sich nahe bei den direkt einfallenden, bzw. durchgehenden fortpflanzen, ebenfalls linear-polarisiert, und zwar ist deren Polarisationszustand annähernd isogonal, während die mehr abgebeugten Strahlen elliptisch polarisiert sind, ja sie können auch fast zirkular-polarisiert sein, wie man sich hierüber mit dem BABINETschen Kompensator leicht überzeugen kann.

Zufolge einer freundlichen mündlichen Mitteilung des Herrn Prof. FRÖHLICH kam mir jenes namhafte Resultat seiner neueren, hauptsächlich unter Mitwirkung des Herrn Lehramtskandidaten FRANZ KURDILLA geführten Untersuchungen** zur Kenntnis, wonach — indem wir die in Rede stehenden gebeugten Strahlen mittels BABINET-Kompensator untersuchen und immer mehr abgebeugte Strahlen beobachten — der dunkle Streifen des Kompensators sich bei einem gewissen Winkel sozusagen sprungweise verschiebt, d. h. bei diesem Winkel tritt beinahe sprungweise eine erhebliche Phasendifferenz zwischen den beiden, zur Beugungsebene parallelen, bzw. dazu senkrechten Komponenten des gebeugten Lichtvektors ein.

Im Laufe der eingehenderen Betrachtung unserer obigen Formeln erkannte ich bald, daß dieses Resultat aus ihnen unmittelbar herausgelesen werden kann und zugleich, daß dieser Phasensprung beim Grenzwinkel der totalen Reflexion eintritt. In der Tat, insolange $\omega$ kleiner als dieser ist, solange ist das tg $\varphi$ reell, das gebeugte Licht linear-polarisiert; darüber hinaus ist

* Diese Beobachtungen erfolgten mittels eines auf eine planparallele Glasscheibe angebrachten Gitters, welches mit der nicht gefurchten, glatten Fläche der Glasscheibe auf die Durchmesser-Fläche einer Glashalbkugel von gleichgroßem Brechungsexponenten angeklebt war.

** Bei diesen Untersuchungen war die Durchmesserfläche der massiven Glas-Halbkugel gefurcht, sodaß ein besonderes Gitter nicht nötig war.

das tg $\varphi$ imaginär, das gebeugte Licht also elliptisch polarisiert; während der Phasenunterschied zwischen den beiden Komponenten sprungweise den $\frac{\pi}{2}$ Wert bei diesem Winkel annimmt*, da nach (14)

$$\operatorname{tg} \delta = \infty$$

sein wird, wenn

$$\sin \omega = n$$

ist.

Wenn aber

$$\operatorname{tg} \delta = \infty$$

ist, dann ist, bei jedem Werte von $\vartheta$, wenn nur

$$\operatorname{tg} \vartheta \neq \infty$$

ist, immer

$$\varrho = 0,$$

d. h. in welchem Azimut auch immer das auf die Grenzfläche Luft — Glas senkrecht einfallende Licht linear-polarisiert sei, die in das Glas unter dem Grenzwinkel der totalen Reflexion gebeugten Strahlen sind alle in der jeweiligen Beugungsebene linear-polarisiert (zugleich haben von ihnen diejenigen auf die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes senkrecht abgebeugten zwei Strahlen, auf welchen tg $\vartheta = \infty$ ist, die Intensität Null).

Dieselbe Folgerung ist auch dann gültig, wenn das einfallende Licht natürlichen Zustandes ist. Nennen wir nach FRÖHLICH Trennungskegel die um die nach dem Inneren des Glases zeigende Gitternormale, als Achse, mit dem Grenzwinkel der totalen Reflexion, als Halböffnungswinkel, beschriebene Kegelfläche, dann können wir unser letzteres Resultat auch so ausdrücken: Wenn auf eine gefurchte Glasfläche — sei es von der Seite des Glases, sei es von der der Luft — senkrecht natürliches Licht fällt, dann sind alle die im Glas längs des Trennungskegels sich fortpflanzenden gebeugten Strahlen vollkommen und zwar in der jeweiligen Beugungsebene linearpolarisiert.

---

* Auf eine sehr handgreifliche Weise wird dieser Phasensprung anschaulich gemacht durch den Bruch der Interferenzstreifen bei diesem Winkel, wenn wir den Kompensator mit in der Beugungsebene, d. h. horizontal liegenden Streifen vor das Beobachtungsrohr stellen.

All' diese Folgerungen wurden vollständig bestätigt durch die Beobachtungen, die ich an einer auf der diagonalen Fläche gefurchten Glashalbkugel ($n_D = 1{,}62$) ausführte.* Zwei Umstände muß ich aber erwähnen. Der eine ist, daß ich zu diesen Folgerungen nicht auf rein theoretischem Wege gelangte, und der andere, daß, wie genau auch immer unsere Formeln die Erscheinung des Trennungskegels wiedergeben, es doch nicht sicher ist, daß sie das in Rede stehende ganze Strahlensystem so genau beschreiben. Wenigstens erregten diesbezüglich einige qualitative Beobachtungen Zweifel in mir.**

Es wäre denn auch nicht überraschend, wenn bei diesem, gegenüber der Einheit sehr kleinen $n = \frac{1}{1{,}62} = 0{,}62$ Brechungsexponenten unsere Formel die Wirklichkeit ebenso nicht genau wiedergeben würde, wie sie bei einem viel größeren $n = 1{,}62$ Brechungsexponenten und hierüber hinaus wahrscheinlich ebenfalls nicht ganz der Wirklichkeit entspricht.

## § 6. Allgemeinere Fälle von in die Luft reflektiert-gebeugten Strahlensystemen. Nicht senkrechter Einfall; annähernde Übereinstimmung mit der Erfahrung im Falle des in der Einfallsebene linear-polarisierten Lichtes. Deutung der Abweichungen. Richtung der Erweiterung der Theorie. Zusammenfassung.

Mit der zu Anfang unserer Entwickelungen angedeuteten Einschränkung befaßten wir uns bisher ausschließlich mit dem Fall des senkrechten Einfalles. Nun will ich noch ganz kurz besprechen, was unsere Theorie in allgemeineren Fällen besagt, wie sie zum Zwecke deren Beschreibung eventuell erweitert werden soll.

Als nächststehende Verallgemeinerung müssen wir jene Fälle betrachten, bei denen der Winkel des Einfalles zwar nicht Null ist, das einfallende Licht aber immer noch in der Ebene des Ein-

---

* Diese Glashalbkugel verdanke ich ebenfalls der Freundlichkeit des Herrn Prof. Fröhlich.

** Es scheint jetzt diese Beschränkung überflüssig zu sein. (Anm. bei der Korrektur.)

falles polarisiert ist. Nach den FRÖHLICHschen Gesetzen ist die Verteilung der Polarisationsebenen in der Luft auch in diesen Fällen noch immer mit großer Annäherung isogonal.

In unserer Theorie fungiert, wie wir schon öfters betont haben, bloß die Richtung der auf der Oberfläche schwingenden elektrischen Kraft, als bestimmendes Element des ganzen gebeugten Strahlensystems. Diese Richtung aber bleibt unverändert, wie immer wir den Einfallswinkel des in der Einfallsebene polarisierten Lichtes auch ändern mögen; mithin müßte auch das gebeugte Strahlensystem unverändert bleiben. In erster Annäherung ist dies — wie gesagt — tatsächlich der Fall; bei größeren Einfallswinkeln gibt es aber schon sowohl von der Isogonalität, wie auch von unserer Theorie viel größere Abweichungen, als daß die eine oder die andere zur genaueren Beschreibung ausreichen würde. Diese Tatsachen deuten unverkennbar wieder darauf hin, daß bei diesen Lichtbeugungsphänomenen außer dem Lichtvektor (elektrischem Vektor) auch dessen nach der Flächennormale genommener Differentialquotient eine maßgebende Rolle spielt. In diesem letzteren zeigt sich eben die Richtung des einfallenden Lichtstrahles, die doch bei jedem Lichtbeugungsphänomen mehr oder weniger in Rücksicht zu ziehen ist. Zu demselben Resultat können wir auch durch andere Betrachtungen gelangen.

Den zirkumaxialen Polarisationszustand der in homogenem Medium an unendlich kleinen materiellen Teilchen erfolgenden Lichtbeugung (Lichtstreuung) bringt RAYLEIGH mittels der aus einer dielektrischen Kugel ausgehenden Strahlung hervor. Diese zeigt aber auch eine zirkumaxial-symmetrische Intensitätsverteilung, während in der Intensitätsverteilung des in gewöhnlichem Sinne genommenen gebeugten Lichtes die Richtung des durchgehenden Strahles als ausgezeichnete Richtung gilt.

Dieses unser Vektorensystem, welches aus dem RAYLEIGHschen einfachen Zirkumaxiale zusammengesetzt ist, kann als die Strahlung gedeutet werden, welche aus einem an der Grenzfläche zweier verschiedener Medien angebrachten und durch eine darauffallende ebene elektrische Welle erregten dielektrischen Kugelchen emittiert wird. Infolge der Art der Zusammensetzung üben bei uns die Intensitätsverhältnisse auch auf den Polarisationszustand einen Einfluß aus, es ist also begreiflich, daß dieses Bild in allgemeineren Fällen auch die Polarisationsverhältnisse nicht genau wiedergibt.* Dabei aber wird die Auffassungsweise selbst — wie ich mich hierüber in zahlreichen verschiedenen Fällen überzeugte — auch im allgemeinsten Falle annähernd über die Natur der zu erwartenden Erscheinung orientieren.

## Zusammenfassung.

1. Als unmittelbare Verallgemeinerung der STOKESschen Theorie habe ich über die auf der Grenzfläche zweier Medien erfolgende Lichtbeugung eine Auffassung dargelegt, nach welcher die Lichtbeugung an den beiden Seiten der Grenzfläche und zwar an zu ihr unendlich nahe liegenden Zentren, als einfache zirkumaxiale Erregung zustande kommt und das beobachtbare gebeugte Licht nichts anderes ist, als die Resultante der Interferenz der aus diesen Zentren ausgehenden, direkt, ferner durch Reflexion resp. Brechung in das Auge gelangenden Strahlen.

2. Diese Auffassung habe ich im Falle senkrechter Inzidenz in mathematische Form gefaßt und gezeigt, daß mittels dieser Formel nicht bloß die (auf das senkrecht einfallende Licht bezüglichen) bisherigen Beobachtungen mit großer Genauigkeit dargestellt werden können, sondern, daß man durch dieselbe auch zum Erkennen neuer, bisher unbekannter Erscheinungen gelangen konnte.

3. Schließlich habe ich versucht, die bisherigen Mängel der Theorie zu deuten und, die allgemeinen Züge der Natur der Lichtbeugung vor Augen haltend, den wahrscheinlichen Weg der Weiterentwickelung der Theorie zu bezeichnen.

* Zwischen unserem Vektorensystem und dem in der Wirklichkeit entstehenden besteht also ein derartiges Verhältnis, wie zwischen den RAYLEIGHschen und den STOKESschen elementaren Kugelwellen. Im übrigen vgl. Anmerkung auf S. 54.

4.

# ÜBER LICHTZERSTREUUNG IM RAUME WIENERSCHER INTERFERENZEN UND NEUE, DIESEN REZIPROKE INTERFERENZERSCHEINUNGEN.

Von PAUL SELÉNYI in Budapest.

Vom korr. Mitgl. Prof. E. Klupathy der ung. Akademie der Wiss. vorgelegt in der Sitzung der III. Klasse am 16. Januar 1911.

## Einleitung.

Bekanntlich ist nach der RAYLEIGHschen Theorie die Lichtbeugung, die auf einem im Verhältnisse zur Lichtwellenlänge sehr kleinen dielektrischen Teilchen zustande kommt (also die sogenannte ultramikroskopische Beugung oder Lichtzerstreuung) durch den FRESNELschen Vektor des auf dasselbe fallenden Lichtes das heißt durch den elektrischen Vektor allein schon bestimmt (sie hängt z. B. von der Richtung des einfallenden Lichtes nicht ab); es sind namentlich die Intensitätsverteilung und der Polarisationszustand des gebeugten Lichtes dieselben, wie die einer Strahlung, die von einem durch den bezüglichen elektrischen Vektor in Bewegung gebrachten Elektron emittiert wird.

Ist dem aber so, dann bietet die ultramikroskopische Beugung Mittel dazu, über den Schwingungszustand des Lichtes an einer bestimmten Stelle unmittelbar Aufschluß zu erhalten, indem man an die entsprechende Stelle derartig kleine Teilchen bringt, die weder die Homogenität des Mediums, noch den Schwingungszustand des Lichtes merkbar modifizieren, und sodann die Intensität und der Polarisationszustand des von ihnen ausgehenden zerstreuten Lichtes beobachtet. Das war der Gedankengang eines Untersuchungsplans, den ich Ende 1908 der mathematisch-naturwissenschaftlichen Kommission der ung. wiss. Akademie vorlegte und in welchem ich mir die Prüfung dieser Methode an einem sowohl theoretisch, wie auch experimentell genügend bekannten Beispiele, an den stehenden Lichtwellen, zur Aufgabe stellte.

Die Kommission betraute mich mit der Ausführung der Untersuchung und der Inhalt dieser Arbeit stellt die Resultate meiner Versuche dar. Die Arbeit soll aus zwei Teilen bestehen, der erste behandelt die mit Hilfe der Lichtzerstreuung ausgeführte Untersuchung der WIENERschen Interferenzen, was das eigentliche Ziel des Planes war; der zweite diejenigen der WIENERschen reziproken neuen Interferenzerscheinungen, auf welche ich durch eingehenderes Studium der ersteren geführt wurde.

## I. Teil.

1. Es scheint mir notwendig, das in der Einleitung aufgeworfene Problem etwas eingehender zu beleuchten. Es handelt sich darum, ob die Lichtzerstreuung geeignet ist, den Schwingungszustand eines von Licht durchdrungenen Raumes von Punkt zu Punkt zu bestimmen. Da zu einer solchen objektiven Untersuchung eines Lichtraumes die erste Möglichkeit von WIENER angegeben wurde*, war es naheliegend, die Anwendbarkeit einer anderen Lichtwirkung zum genannten Zwecke eben an den stehenden Lichtwellen, bezw. an den allgemeinen WIENERschen Interferenzerscheinungen zu erproben. Über die von ihm angegebenen Möglichkeit und Methode äußert sich WIENER mit folgenden Worten**: „Was die hier angewendete Untersuchungsmethode betrifft, so stellt das dünne, lichtempfindliche Häutchen gewissermaßen ein durchsichtiges Auge dar, welches gleichzeitig von entgegengesetzten Seiten Lichteindrücke aufnehmen kann. Während man bisher für die Untersuchung der Lichtbewegung an einem Orte darauf angewiesen war, aus der von dort in unser Auge fortgepflanzten Bewegung einen Schluß zu ziehen, ist jetzt die Möglichkeit gegeben, die Lichtbewegung an Ort und Stelle nach Amplitude, Phase und Schwingungsrichtung zu untersuchen.“ Zu einer solchen Untersuchung schien mir nun — nach dem im Vorwort Gesagten — die Lichtzerstreuung noch geeigneter. Denn die chemische und die Fluoreszenswirkung des Lichtes (mit welchen DRUDE und NERNST operierten***) geben

* O. WIENER, Stehende Lichtwellen Wied. Ann. 40. 203, 1890.

** l. c. p 243.

*** Über die Fluoreszenzwirkungen stehender Lichtwellen. Wied. Ann. 45, 460, 1892.

unmittelbar eigentlich nur die Lichtintensität an, die beiden anderen Bestimmungsstücke nur insofern, als deren räumliche Änderung mit der räumlichen Änderung der Intensitätsverteilung verknüpft ist. Die Lichtzerstreuung dagegen liefert unmittelbar sämtliche Bestimmungsstücke der Lichtschwingung, vorausgesetzt, daß sie — der Theorie gemäß — tatsächlich durch den elektrischen Lichtvektor allein völlig bestimmt ist. Doch schienen mir die bisnun verwirklichten Fälle dieser Voraussetzung nicht zu entsprechen*. Nach der Theorie nämlich kann im Falle linearpolarisierten einfallenden Lichtes das zerstreute Licht durch eine einzige RAYLEIGHsche (von FRÖLICH** einfach-zirkumaxial genannte) Kugelwelle dargestellt werden. In der Tat, sowohl nach früheren Erfahrungen, als auch nach den von FRÖHLICH*** in sehr vielen Fällen sowohl auf Luft, wie auf Flüssigkeiten und Glassorten sehr verschiedener Brechung ausgedehnten quantitativen Untersuchungen kann der Polarisationszustand des zerstreuten Lichtes durch die Gesetzmäßigkeit der erwähnten zirkumaxialen Polarisation sehr gut dargestellt werden; allein in der Intensitätsverteilung erscheint — entgegen der Theorie — die Richtung des durchgehenden Lichtes als ausgezeichnete Richtung in allen von mir bisnun beobachteten Fällen. So ist z. B. bei der Zerstreuung durch den Rauch der Kerzenflamme†, wo doch die Polarisation des zerstreuten Lichtes sehr vollkommen ist, das in der Richtung des durchgehenden Lichtes zerstreute Licht ca. dreimal intensiver, als in der entgegengesetzten Richtung. Nachdem aber das STOKESsche Gesetz der elementaren Lichterregung, das sog. Kosinus-Gesetz†† einen mit dem frühern übereinstimmenden Polarisationszustand, dagegen eine mit dem Beugungs-

* Dieser Idealfall war auch in meinen Versuchen nicht verwirklicht, doch kann man aus der hieraus entspringenden Modifizierung der Erscheinungen leicht Rechenschaft geben.

** Polarisation des gebeugten Lichtes, Math. u. Naturwiss. Ber. aus Ung., B. XXII, pp. 65—438, 1907, auch Teubner (1907), p. 424.

*** L. c. § 97, 98, 99; ferner FRÖHLICH, Allgemeine Geltung des Gesetzes der zirkumaxialen Polarisation in optisch gleichmäßigen Mitteln, Math. u. Naturwiss.-Ber. aus Ungarn XXV, 312, 1907.

† FRÖHLICH, l. c. § 99, S. 395.

†† Vergl. z. B. FRÖHLICH l. c. § 2 S. 86.

winkel abnehmende Intensität erfordert, war der Gedanke naheliegend, daß auch die Lichtzerstreuung (also die auf materiellen Teilchen entstehende Lichterregung) eher nach diesem Gesetz erfolgt und daher von der Richtung des einfallenden Lichtes nicht unabhängig ist.

Es wird sich herausstellen, daß dem nicht so ist; die Lichtzerstreuung geht tatsächlich laut den durch die Theorie geforderten Gesetzen von statten und die Abweichung der Intensitätsverteilung von der einfachen Zirkumaxialität kann aus der Tatsache, daß die einfachen Annahmen der Theorie in den Experimenten der Regel nach nicht mit genügender Annäherung erfüllt sind, vollkommen erklärt werden. In der Tat: die Theorie nimmt unendlich kleine Teilchen an, welche sich voneinander sehr weit befinden Ist die erste Voraussetzung nicht erfüllt, so wird in der Intensitätsverteilung — obwohl der Polarisationszustand sich noch kaum merkbar ändert — die Richtung des durchgehenden Lichtes schon als eine stark ausgezeichnete Richtung erscheinen, wie das im Falle metallener Kugelchen die theoretischen Untersuchungen von G. Mie zeigen*; sind dagegen die Teilchen dicht nebeneinander, so kann die Erscheinung — wie mir scheint — so erklärt werden, daß auch die Lücken, die unter denselben vorhanden sind, als beugende Flächen wirken und auf die Rayleighsche Welle noch eine dem Stokesschen Kosinusgesetzen entsprechende Welle sich überlagert, welche jedoch wieder nur die Intensitätsverteilung auf die erwähnte Weise modifiziert, nicht aber den Polarisationszustand.

2. Jedenfalls erklären diese Ursachen die negativen Resultate desjenigen meines Wissens einzigen Experimentes, das Drude und Nernst** — obwohl ziemlich nebensächlich — ausgeführt haben, um die stehenden Lichtwellen mit Hilfe der Lichtbeugung auf kleinen Teilchen nachzuweisen. Es sei mir gestattet, die diesbezüglichen Zeilen ihrer Arbeit wörtlich zu zitieren: „Wir versuchten auch, die Erscheinung der Diffusion des Lichtes an unregelmäßigen Partikelchen zum Studium stehender Wellen zu

* Beiträge zur Optik trüber Medien, Ann. d. Phys. 25, 377, 1908.

** a. a. O. S. 473.

verwerten. Es scheinen aber bei diesem Phänomen nicht gegeneinandergerichtete Wellenzüge in gegenseitigen Einfluß gesetzt zu werden, sondern sie scheinen durch das alleinige Verhalten eines in einer Richtung (und zwar ins Auge des Beobachters) sich fortpflanzenden Wellenzuges bestimmt zu sein, wie z. B. die NEWTONschen Ringe im reflektierten Licht. — Man kann eine Fläche, welche das Licht diffundiert, durch Behauchen einer kalten Glasplatte herstellen. Legt man eine solche, sehr dünn behauchte, auf eine warme, so setzen sich die im direkten Licht gebildeten NEWTONschen Interferenzstreifen (bei homogener Beleuchtung) weit fort in dem Teil, von welchem direktes Licht nichts mehr ins Auge reflektiert wird. Dreht man die Plattenkombination um, so daß nur die Hinterfläche behaucht ist, so sind Interferenzstreifen im diffusen Licht nicht wahrnehmbar, sondern nur eine gleichmäßige Helligkeit. — Ersetzt man die hintere (unbehauchte) Glasplatte durch einen angewärmten Silberspiegel, so werden die Interferenzstreifen im diffusen Licht nicht deutlicher, sondern undeutlicher als vordem; dies zeigt zur Genüge, daß nicht das Verhalten stehender Wellen bei dieser Erscheinung maßgebend ist und daß die Lage der Interferenzstreifen denselben Gesetzen unterworfen ist, wie die Lage der im direkt reflektierten Lichte sichtbaren NEWTONschen Streifen."

Wir können an diese Worte noch die Bemerkung knüpfen, daß im Falle einer solchen Versuchsanordnung außer der eventuellen übermäßigen Größe und dichten Lagerung der Teilchen noch ein Umstand dazu beiträgt, um bezüglich des in einer bestimmten Richtung gebeugten Lichtes das in derselben Richtung fortschreitende direkte Licht für maßgebend zu machen, nämlich daß die beugenden Teilchen an der Grenzfläche zweier verschiedener optischen Medien (Glas und Luft) sich befinden. Nun kann man aber auch nach der Theorie die einfache zirkumaxiale Welle — die also ausschließlich durch den lokalen Wert der elektrischen Kraft bestimmt wird — bloß im Falle eines in ein homogenes Medium gebetteten Teilchens erwarten. In meiner Inauguraldissertation* habe ich zwar nach-

* Siehe diese Berichte XXVII, S. 45. 1911.

M. T. AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

gewiesen, daß im Falle einer nicht allzugroßen Brechungsexponentendifferenz (wenn $0{,}6 < n_{1,2} < 1{,}6$) der Polarisationszustand des durch ein Glasgitter (also an einer Grenzfläche zweier verschiedener Medien) gebeugten Lichtes derselbe ist, als wenn bloß der lokale Wert der elektrischen Kraft maßgebend wäre; fraglich ist aber, ob dasselbe auch bezüglich der Intensitätsverteilung der Fall ist und ob zwischen dem so hervorgebrachten und dem in der Wirklichkeit zustande kommenden Lichtvektorsystem nicht derselbe Unterschied besteht, wie zwischen den RAYLEIGHschen und STOKESschen elementaren Wellen.

Dessen ungeachtet habe ich mit der Versuchsanordnung von DRUDE und NERNST einige orientierende Versuche ausgeführt, u. a. auch auf die Weise, daß ich die Fläche der zur Erzeugung der NEWTONschen Farbenringe gebrauchten Linse mit dem bei den späteren Experimenten zu erwähnenden Schwefelniederschlag überzog. In diesem Falle können sehr interessante und scheinbar nicht besonders einfache Interferenzerscheinungen beobachtet werden, deren Untersuchung ich vorläufig als außerhalb meines Zieles liegend hielt.*

3. Alle diese Komplikationen können einfach vermieden werden, wenn man den Zwischenraum des Spiegels und der die beugenden Teilchen tragenden Glasplatte mit einer Flüssigkeit, die mit dem Glas den gleichen Brechungsexponenten hat, ausfüllend, die Teilchen in das Innere eines einzigen homogenen Mediums bettet, wie das auch WIENER mit seiner lichtempfindlichen und DRUDE und NERNST mit seiner fluoreszierenden Schichte getan hatten.

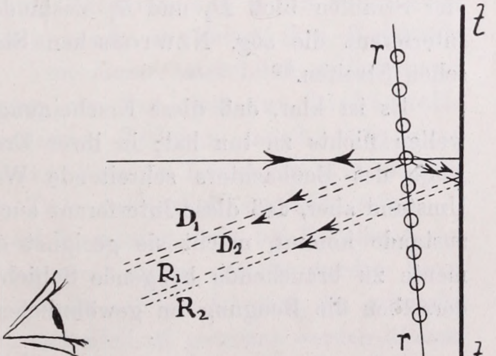


Fig. 1.

Wir wollen also auf diese Weise das in Fig. 1 skizzierte

* Allerdings glaube ich sie jetzt auf Grund der in dieser Arbeit zu beschreibenden Versuche ohne Schwierigkeit deuten zu können.

Präparat zusammenstellen; legen wir also vor den Silberspiegel *t* mit schwacher Neigung die beugende Schichte oder Fläche *r* (so wollen wir nachher der Kürze halber die die beugenden Teilchen tragende Glasfläche nennen), füllen wir den Zwischenraum mit einer Flüssigkeit desselben Brechungsexponenten aus und versuchen wir klarzulegen, welche Interferenzerscheinungen an diesem Präparate erwartet werden können, wenn wir senkrecht auf den Spiegel ein homogenes paralleles Strahlenbündel fallen lassen.*

Es ist leicht einzusehen, daß die zu erwartende Erscheinung nicht einfach ist, da von jedem Teilchen zwei gebeugte Strahlen in das Auge gelangen, der eine ($D$) direkt, der andere ($R$) nach Reflexion am Spiegel und jeder derselben wieder als die Resultante zweier Strahlen aufgefaßt werden muß, von denen der eine ($D_1$ und $R_1$) von dem einfallenden, der andere ($D_2$ und $R_2$) von den reflektierten Strahlen durch Beugung herstammt.

Nehmen wir zuerst den Fall, in welchem die Teilchen überhaupt nicht klein sind. In diesem Falle entsteht auf denselben die Lichtbeugung im gewöhnlichen Sinne; das gebeugte Licht steht in Phase mit dem direkt durchgehenden und hat nur in der Nähe des letzteren eine merkliche Intensität, so daß von den erwähnten vier Strahlen bloß $D_2$ und $R_1$ zustande kommen und als deren Interferenz die sog. NEWTONschen Staubringe oder QUETELETschen Streifen.**

Es ist klar, daß diese Erscheinung mit den stehenden Lichtwellen nichts zu tun hat; in ihrer Erzeugung ist der gegen das Auge des Beobachters schreitende Wellenzug maßgebend. Der Umstand aber, daß diese Interferenz auch im weißen Lichte immer zustande kommt, macht sie geeignet dazu, die bei dem Experimente zu brauchende beugende Schichte zu untersuchen, ob an derselben die Beugung im gewöhnlichen Sinne erzeugt wird. So

---

* Um die Sache mit den an der vorderen Fläche der Glasplatte stattfindenden Brechungen und Reflexionen nicht zu komplizieren, nehmen wir an, daß das beobachtende Auge sich ebenfalls in demselben Medium befindet.

** Vgl. E. LOMMEL, Über die Interferenz des gebeugten Lichtes, Erlangen 1875, und VERDET-EXNER, Wellentheorie des Lichtes, Bd. I, S. 214ff.

sind z. B. auf einem angehauchten Glasspiegel die QUETELETschen Streifen sehr deutlich sichtbar, in vollkommener Übereinstimmung mit dem, was DRUDE und NERNST von dieser Beugung behaupten; wogegen an den von mir gebrauchten in ein homogenes Medium gebeteten Schwefelniederschlag-Schichten nur ausnahmsweise und kaum merkbar zu sehen waren.

Betrachten wir jetzt den anderen Fall, da die Teilchen sehr klein sind, so daß nach der Theorie die auf denselben stattfindende Lichtzerstreuung bloß durch den lokalen Wert der elektrischen Kraft bestimmt ist. In diesem Falle ist es zweckmäßiger, die zu erwartende Erscheinung auf folgende Weise zu erklären:

Die Resultante des einfallenden und reflektierten Lichtes erzeugt eine stehende Lichtwelle und nach der gemachten Annahme werden die in den Knotenebenen sich befindenden Teilchen dunkel bleiben, die in den Bauchebenen sich befindenden aber sichtbar, leuchtend werden, d. h. in dem entstandenen Streifensystem offenbaren sich tatsächlich die stehenden Lichtwellen.

Es fragt sich nun, ob auf dem Präparate nur dies einzige Streifensystem sichtbar ist. Denn es gelangen ja aus jedem leuchtenden Teilchen wieder zwei Lichtstrahlen in das Auge des Beobachters, der eine direkt, der andere — gegen den Spiegel fortschreitend — durch Reflexion, und wenn diese zwei Strahlen interferenzfähig sind, so liefert ihre Resultante wieder ein Streifensystem. Von dieser tatsächlich realisierbaren neuen Interferenzerscheinung, wo die von der Lichtquelle (d. h. von den lichtzerstreuenden Teilchen) nach entgegengesetzten Richtungen ausgehenden Lichtstrahlen interferieren, wird im zweiten Teile ausführlich die Rede sein.

4. Vorläufig muß festgestellt werden, daß, bei Behaltung der bisheriger Versuchsanordnung nicht sicher gestellt werden kann, was wir eigentlich am Präparate sehen. Obwohl die zweierlei Erscheinungen voneinander unzweifelhaft getrennt werden können auf Grund der Sichtbarkeit, Lage und des Polarisationszustandes der Streifen, so ist es doch einfacher und führt auch eher zum Ziele, wenn wir diese Schwierigkeit der Unterscheidung vollkommen eliminieren. Daß diese Schwierigkeit bei einer solchen Einrichtung tatsächlich auftritt, mußte ich schon bei Gelegenheit

der Versuche, die ich im Sommer 1909 ausführte, bald wahrnehmen. Ich verweile auch gar nicht länger bei deren Beschreibung; ich will nur bemerken, daß die damals beobachteten zwei Streifensysteme mit den vorher erwähnten wahrscheinlich identisch waren; und jetzt will ich darlegen, wie es mir gelang, der erwähnten Schwierigkeit auszuweichen.

Es bot sich hierfür ein sehr einfaches Verfahren: das Präparat hinter dem Spiegel zu beoachten. Es ist klar, daß man in diesem Falle tatsächlich dasjenige und nur dasjenige Streifensystem sieht, das sich auf dem Präparate befindet.

Um also dieses Beobachtungsverfahren anwenden zu können, versuchte ich einen entsprechenden durchsichtigen Metallspiegel zu verfertigen. Während meiner diesbezüglichen Experimente stieß ich auf eine neue Schwierigkeit. Alle Metallspiegel, die ich verfertigte, zeigten nämlich eine starke diffuse Reflexion. Ich prüfte dieselben, indem ich das Bild des Stiftes einer Nernstlampe oder der Kohlen einer Bogenlampe auf den bezüglichen Metallspiegel projizierte; das Bild war an allen ebenso gut sichtbar, als wenn ich es auf einen Schirm projiziert hätte, der Regel nach besser, als an der später gebrauchten beugenden Fläche. Ich muß zugeben, daß ich die angewendeten verschiedenen Arten der Verfertigung von Metallspiegeln (Elektrodenzerstäubung, Einbrennen, Niederschlag auf chemischem Wege) nicht mit der größtmöglichen Sorgfalt studierte und ausprobierte, jedoch halte ich es für nicht ausgeschlossen, daß die beobachtete diffuse Reflexion nicht allein in der Unvollkommenheit der Spiegel (Oxydation usw.) ihre Erklärung findet, sondern zum Teil in der unvermeidlich kristallinischen Struktur der Metalle.

5. Alle diese Schwierigkeiten bewogen mich, Metallspiegel überhaupt nicht zu verwenden und die Spiegelung durch totale Reflexion zu erreichen. Dieses Verfahren bringt noch einige andere Vorteile mit sich, so daß man auf dieser Grundlage zu einer Versuchsanordnung gelangen kann, die in bezug auf Einfachheit, Übersichtlichkeit und Eindeutigkeit der beobachteten Erscheinungen nichts zu wünschen übrig läßt. Natürlich bringt die Anwendung der totalen Reflexion gleichzeitig eine gewisse Einschränkung mit sich; der Einfallswinkel kann nicht kleiner

sein als der Grenzwinkel, also z. B. im Falle des von mir bei den Experimenten gebrauchten Glimmers ($n = 1{,}60$) $40^0$. Von der Erzeugung stehender Wellen kann also keine Rede sein*, jedoch bedeutet das nur die Einschränkung der Grenzen der Versuche und nicht die der Folgerungen, welche aus ihnen gezogen werden können. Denn die stehenden Wellen sind nur ein spezieller Fall des Schwingungzustandes (man kann sagen der Interferenz), der vor einer spiegelnden Fläche als die Resultante des einfallenden und reflektierten Lichtes erzeugt wird und welcher bei rasantem Einfall noch vollkommen den Charakter der gewöhnlichen fortschreitenden Lichtwelle hat und welcher mit dem Abnehmen des Einfallswinkels kontinuierlich in den Bewegungszustand der stehenden Wellen übergeht.

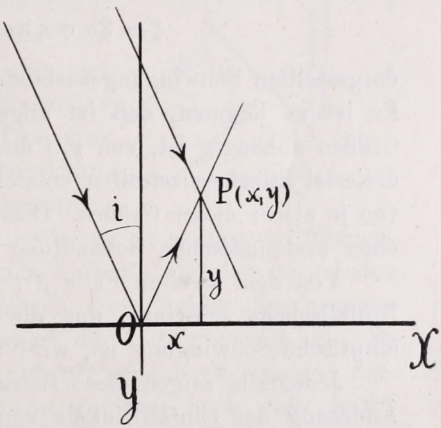


Fig. 2.

Daß dem so ist, kann man leicht einsehen. Bestimmen wir zu diesem Zwecke den Lichtschwingungszustand, der vor einer reflektierenden Fläche als Resultante des unter dem Winkel $i$ einfallenden und reflektierten Lichtes entsteht, wenn $\alpha$) die Schwingung senkrecht zur Einfallsebene vor sich geht. (Vergl. Fig. 2.)

Schreiben wir die einfallende Welle in der Form

$$\zeta'_P = a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \sin i + y \cos i}{\lambda}\right),$$

dann können wir die reflektierte Welle — vollständige Reflexion und keine Phasenänderung vorausgesetzt — durch

$$\zeta''_P = a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \sin i - y \cos i}{\lambda}\right)$$

* Ausgenommen, daß man die stehenden Lichtwellen nach dem von Drude und Nernst erwähnten Verfahren, d. h. durch Spiegelung an zwei zu dem einfallenden Strahle unter $45^0$ Winkel geneigten Spiegeln bzw. totalreflektierenden Prismen erzeugen wollte.

darstellen. Da die zwei Schwingungen längs derselben Richtung vor sich gehen, ist ihre Resultante gegeben durch

$$\zeta_p = \zeta'_p + \zeta''_p = 2a \cos 2\pi \frac{y \cos i}{\lambda} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \sin i}{\lambda}\right)$$

Man sieht, daß, wenn $i$ beinahe $90^0$ ist, dann unterscheidet sich der Schwingungszustand von der im Falle $i = 90^0$ auftretenden

$$\zeta = 2a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

gewöhnlichen fortschreitenden Welle nur dadurch, daß sich die Amplitude längs der $y$-Achse langsam und periodisch ändert, mit der Abnahme von $i$ dagegen sie sich in stetiger Weise dem im Falle $i = 0$ zustande kommenden und durch

$$\zeta = 2a \cos 2\pi \frac{y}{\lambda} \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

dargestellten Schwingungszustande der stehenden Wellen nähert*. Es ist zu betonen, daß im allgemeinen die Amplitude von drei Größen abhängig ist, von $y$, $i$ und $\lambda$; die später zu besprechenden dreierlei Interferenzstreifen entstehen eben durch die Veränderung von je einer dieser Größen. Dieser Umstand könnte als Grundlage einer systematischen Behandlung dieser Interferenzstreifen dienen.

Von dem zweiten Falle $\beta$), wo das einfallende Licht in der Einfallsebene schwingt, und die Resultante im allgemeinen eine elliptische Schwingung ist, wird noch weiter unten die Rede sein.

Jedenfalls zeigen diese Betrachtungen, wie die während der Änderung des Einfallwinkels von $90^0$ bis $40^0$ gemachten Beobachtungen eine Extrapolation gestatten für den Fall $i = 0^0$; dabei können noch die Folgerungen, die aus dem Studium der stehenden Wellen erhalten werden können, schon aus einem anderen wichtigen Falle dieser Interferenzen, nämlich aus der WIENERschen Interferenz des in der Einfallsebene bzw. senkreckt darauf polarisierten unter $45^0$ einfallenden Lichtes gezogen werden.

---

* Wie ich nachträglich fand, hat schon Herr Prof. A. COTTON [Les ondes lumineuses stationnaires, Journ. de Phys. (4) 1, 689. 1902] diesen kontinuirlichen Übergang der Erscheinungen von dem beinahe rasanten bis zum $45^0$igen Einfall mit einem Mikroskopobjektiv von genügend hoher numerischer Apertur beobachtet. Vgl. hierzu noch die Bemerkung von Seite 115.

Die zu gebrauchende Versuchsanordnung ergibt sich nun von selbst. Wir nehmen eine schwach keilförmige dünne Glasplatte, überziehen eine Fläche derselben mit den beugenden Teilchen und kleben sie mit dieser Fläche auf die Hypotenusenfläche eines rechtwinkligen Glasprimas desselben Brechungsexponenten, und zwar mit Hilfe eines Flüssigkeitstropfens vom selben Brechungsexponenten (Fig. 3). Das Licht gelangt durch eine Kathetenfläche in das Prisma und erleidet an der hinteren Fläche der Glasplatte totale Reflexion, und die so erhaltene und durch die beugenden Teilchen sichtbar gemachte Interferenz wird hinter der Platte beobachtet. Die tatsächlich angewandte Versuchsanordnung unterschied sich nun von dieser nur darin, daß statt der Glasplatte Glimmer angewendet wurde. Das einfallende Lichtbündel muß nämlich, damit scharfe Interferenzstreifen erhalten werden können, um so mehr homogen und von um so kleinerem Öffnungswinkel sein, je weiter die beugende Schichte von der spiegelnden Fläche sich befindet; je mehr jedoch diese beiden Forderungen erfüllt werden, um so mehr nimmt die Lichtintensität ab. Es muß also eine möglichst dünne Platte genommen werden; deshalb verwendete ich Glimmer, aus welchem noch ganz leicht Blättchen von der gebrauchten Größe ca. $20 \times 20$ mm hergestellt werden können, die dünner sind als 0,01 mm. Dabei bleibt das Glimmerblättchen, wenn wir es von der Mitte eines dickeren herstellen und bei der Herstellung es durchaus nicht berühren, absolut rein und frei von jedem Ritz, dessen Wichtigkeit nicht weiter betont zu werden braucht. Sein einziger Nachteil ist, daß es doppelbrechend ist, was jedoch bei den im folgenden zu beschreibenden Experimenten kaum in Betracht kommt; dagegen verursacht der Umstand, daß das Glimmerblättchen vollkommen gleichmäßig dick und nicht keilförmig ist, keine Schwierigkeit, ja er bringt sogar noch den Vorteil mit sich, ebenso den Fall wenn die spiegelnde und die zerstreuende Fläche zueinander parallel sind,

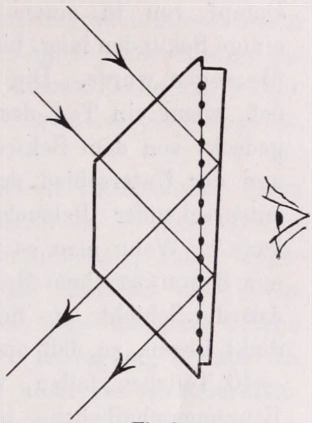


Fig. 3.

wie auch den anderen, wenn diese zwei Flächen nicht zueinander nicht parallel sein sollten, verwirklichen zu lassen. (Siehe Punkt 7.)

6. Die erste Aufgabe war eine brauchbare beugende Schicht zu gewinnen. Nach einigen Versuchen gelang dieses äußerst einfach. Das zu überziehende Blättchen hielt ich nämlich in den Dampf von in einem Porzellantiegel geschmolzenen Schwefel einige Sekunden lang, bis es von einem feinen blau-grauen Schleier überzogen wurde. Die gut brauchbare Schichte ist so schwach, daß, wenn ein Teil des Blättchens mit einem Papierstreifen zugedeckt von dem Schwefelüberzug frei gehalten wird, die Grenze und der Unterschied des überzogenen und des reinen Teiles bei entsprechender Beleuchtung gerade noch gut erkannt werden kann.* Wenn man es ultramikroskopisch (ZEISSsches Mikroskop mit REICHERTschem Spiegelkondensor) betrachtet, so sieht man, daß die Schichte aus Schwefelteilchen besteht, die gar nicht sehr dicht liegen, so daß auf ein Quadrat mit 8 $\mu$ Seitenlänge ca. 25—40 Teilchen fallen, während der Durchmesser eines (weißen) Beugungsscheibchens bei dem Gebrauch von Objektiv *F* und Okular Nr. 3 0.5—0.8 $\mu$ groß ist. Es ist erwähnenswert, daß die Anzahl der sichtbaren Teilchen in zwölf Stunden wesentlich abnimmt, wenn wir die Schichte liegen lassen und in einigen Tagen auch dann, wenn wir sie in Zedernöl betten und mit Deckglas bedecken. Dasselbe Verhalten (langsames Verschwinden in 2—3 Wochen) zeigen die in Benzol gebetteten Teilchen, obwohl der Schwefel in Benzol verhältmäßig gut lösbar ist. Auf diese Tatsache sind auch diejenigen Änderungen zurückzuführen, die ich an den in den Experimenten gebrauchten Präparaten beobachtete bald in der Form von Besserung bald in der von Verschlechterung; diese Beobachtungen sind jedoch sehr subjektiver Natur und wegen der Kürze der Beobachtungszeit (da ich bisher ein Präparat nie länger als zwei Wochen liegen ließ) noch sehr unbestimmt.

---

* Auf dieser Weise überzogene Blättchen verfertigte ich auf den Rat des Herrn Prof. FRÖHLICH zu dem Zwecke, um mich zu überzeugen, ob die zu erwähnenden Erscheinungen tatsächlich in dem an den Schwefelteilchen zerstreuten Lichte entstehen. In der Tat, an dem reinen Teile des Glimmers waren weder die im ersten, noch die im zweiten Teile zu erwähnenden Interferenzen sichtbar.

Als Lichtquelle diente eine mit 8—10 Amp. gespeiste Bogenlampe, deren Licht ich durch ein KRÜSSsches Spektroskop und später — damit ich eine größere Intensität erhalte — durch Spalt, Projektionsobjektiv und gradsichtiges Flüssigkeitsprisma von 35×35 mm Öffnung spektral zerlegte. So erhielt ich ein intensives kontinuierliches Spektrum beim Gebrauch gewöhnlicher Bogenlampenkohle; wenn aber eine homogene Beleuchtung gebraucht werden mußte, nahm ich gelbe BREMER-Kohle und wählte die in seinem Spektrum befindliche sehr intensive gelblich-grüne Linie* mit Okularspalt aus.

7. Ich will nun das erste Experiment beschreiben. Dazu verwendete ich ein 45°iges totalreflektierendes Prisma, dessen rechtwinklige Kante mit der Hyptenusenfläche parallel abgeschnitten wurde (siehe Fig. 3), damit das Einfallen und Beobachten des Lichtes ev. auch durch diese abgeschnittene Fläche geschehen kann. Nach sehr sorgfältiger Reinigung** habe ich die Hypotenusenfläche des Prismas (also nicht das Glimmerblättchen) mit der erwähnten Schwefelschichte überzogen, dieselbe zum Schutze mit einem Kollodiumhäutchen von $^1/_{15}$—$^1/_{20}$ $\lambda$ Dicke*** und endlich mit Hilfe von einem Tropfen Flüssigkeit mit einem Glimmerblättchen von ca. 14 $\mu$ Dicke überdeckt. Der Brechungsexponent des Prismas war $n_D = 1{,}6159$; die Flüssigkeit war Jodbenzol, das mit Hilfe einiger Tropfen Chlorbenzols ungefähr denselben Brechungsindex erhielt, wie das Glas (nach einer späteren Bestimmung $n_D = 1{,}6170$), während die Hauptbrechungsexponenten des Glimmers $n_D = 1{,}5632$, 1,5952, 1,6009 waren; es wurde jedoch bei diesem Versuche der

* Vielleicht ist ein rotes Band dieses Spektrums noch intensiver, aber weniger homogen. Diese beiden Linien sind übrigens so übermäßig intensiv im Verhältnis zu den andern, daß bis zu einem Wegunterschied von 30—40 $\lambda$ der Bremerbogen auch ohne spektrale Zerlegung gebraucht werden kann. Dieser Umstand kann beim Projizieren von allerhand Interferenzerscheinungen Anwendung finden.

** Ich habe gewöhnlich dasselbe nasse Reinigungsverfahren angewendet, das SIEDENTOPF für ultramikroskopische Zwecke vorschlägt. (Berichte d. deutsch. phys. Ges. 1910 Heft I.) Selbstverständlich braucht man, wenn die zu beschreibende Erscheinungen schon geklärt sind, bloß zu ihrer Wiederholung keinen so hohen Grad von Reinheit.

*** Das Kollodiumhäutchen habe ich später als überflüssig weggelassen.

Orientierung des Glimmers keine Aufmerksamkeit geschenkt. Das so hergerichtete Prisma habe ich mit seiner Basisfläche auf einem drehbaren (horizontalen) Tischchen derartig vor die Okularspalte (8—10 cm von ihr entfernt) gestellt, daß das von dort heraustretende homogene gelblich-grüne Lichtbündel ungefähr senkrecht auf eine Kathetenfläche falle, welche mit schwarzem Papier bedeckt wurde, mit Ausnahme eines vertikalen Streifens von ca. 3 mm Breite.* Wenn wir nun die Hypotenusenfläche von hinten her mit einer Lupe beobachten, so sehen wir wegen der zu großeu Entfernung der spiegelnden und der zerstreuenden Flächc d. h. wegen der nicht zureichenden Homogenität bzw. Parallelität des einfallenden Lichtes vorläufig keine Interferenz streifeu, sondern nur einen gleichmäßig beleuchteten grünen Streifen; sobald aber das Jodbenzol zu verdampfen anfängt und der Glimmer an manchen Stellen an das Prisma mehr und mehr näher kommt, werden verhältnismäßig verzerrte Interferenzkurven sichtbar, welche ungefähr an die Moiréseide oder an die Niveaulinien eines hügeligen Terrains erinnern. Die Streifen sind sehr lebhaft; mit der Zunahme des Einfallswinkels werden sie breiter, mit der Abnahme dichter, bis endlich (unterhalb des Grenzwinkels der totalen Reflexion) der gebrochen-austretende Strahl nicht erscheint, dann verschwinden sie momentan und vollkommen.

Es ist unzweifelhaft, daß dieses die gesuchte Erscheinung ist: die Offenbarung der Interferenz des einfallenden und totalreflektierten Lichtes mit Hilfe der Lichtzerstreuung. Diese beiden Strahlen treffen nämlich im allgemeinen mit einer Anzahl von Halbwellendifferenz

$$k = \frac{2y \cos i}{\lambda/2}$$

aufeinander. Im gegenwärtigen Falle ist das einfallende Licht homogen und parallel, d. h. $i$ und $\lambda$ sind konstant, folglich verschwindet die Lichtintensität an allen den $y$ Stellen, wo $k = (2\nu + 1)$ ist. ($\nu$ eine beliebige ganze positive Zahl.) Es sind

* Wir können auch auf die Weise verfahren, daß wir mit einer Linse von nicht kurzer Brennweite das Bild des Okularspaltes auf die Hypotenusenfläche projizieren.

also die entsprechende Streifen sog. Streifen gleicher Dicke oder gleichen Abstandes.

Bei den Experimenten von WIENER war die spiegelnde Fläche eine Ebene, also waren auch die Flächen gleicher Intensität Ebenen, die von der Ebene der lichtempfindlichen Schichte in Geraden geschnitten wurden; hier ist die spiegelnde Fläche die hintere Fläche des unebenen Glimmers, folglich werden die mit ihr parallelen Flächen gleicher Intensität durch die Ebene der beugenden Schichte in ziemlich verzerrten Kurven geschnitten.

Die Streifen können höchstens eine Stunde lang beobachtet werden; während dieser Zeit kann man sich auch davon überzeugen, daß sie beim Einfallen polarisierten Lichtes in dem in der Einfallsebene (also horizontal) polarisierten Lichte sehr gute dagegen in dem darauf senkrecht polarisierten Lichte bedeutend schwächer sichtbar sind; davon wird weiter unten noch ausführlich die Rede sein.

Die Art des Verschwindens ist ungefähr die, daß die Streifen breiter werden und dann in nicht zusammenhängende Flecken zerfallen, welche wieder zusammenschrumpfen, so daß am Ende die gleichmäßig beleuchtete Fläche nur von einzelnen kleinen Flecken unterbrochen wird. Während dieser Zeit verdampfte nämlich an den Grenzen des Glimmers die Flüssigkeit vollkommen und an der von einer unregelmäßigen Kurve begrenzten Fläche wo die Flüssigkeit noch zurückgeblieben war, haftete der Glimmer — mit Ausnahme einzelner zerstreuter Punkte — vollkommen an dem Glase. Dementsprechend sehen wir, wenn wir die hintere Fläche des Präparates in gewöhnlichem weißen Lichte untersuchen, an dem mit der Flüssigkeit ausgefüllten Teile auf dem sonst vollkommen glatten Glimmer kleine Ausbuchtungen, während an den Stellen, wo keine Flüssigkeit mehr ist, die Luftschichte die NEWTONschen Streifen des reflektierten Lichtes in Kurven, die den vorher erwähnten ähnlich sind, zeigt. Der die Flüssigkeit begrenzende erste Streifen ist fast vollkommen schwarz, als Beweis dafür, daß die Dicke der Flüssigkeitsschichte nur ein Bruchteil der Wellenlänge ist.

In diesem Stadium des Präparates, wenn also die spiegelnde Fläche und die beugende Schichte zueinander parallele Ebenen sind, kann wieder eine Interferenzerscheinung ganz anderer Art beobachtet werden. Wenn man nämlich durch Drehen des Prismas den Einfallswinkel des Lichtes ändert, so wird der beleuchtete Streifen der beugenden Schichte abwechselnd von größerer und kleinerer Intensität erscheinen. Die Erklärung der Erscheinung ist naheliegend. In diesem Falle ist die beugende Schichte eine Fläche von konstanter Wegdifferenz, also eine solche von gleicher Intensität; die Wegdifferenz hängt jedoch von dem Einfallswinkel ab, daher die periodische Schwankung der Intensität. Diese Interferenz kann ebenfalls in Form von Streifen erscheinen, wenn man statt eines parallelen Bündels ein stark divergentes auf das Prisma fallen läßt. Zu diesem Zwecke stellte ich ein LEITZsches horizontales Ablesemikroskop — nach Weglassung des Okulars — derartig in den Weg des vom Okularspalte austretenden Bündels, daß dasselbe das in dem Tubus sich befindende Kreisdiafragma vollkommen ausfüllt und so auf das Objektiv (Objektiv B von ZEISS) fällt. Das aus denselben austretende Licht wird in dem stark verkleinerten Bilde des Spaltes vereinigt und fällt durch die Kathetenfläche des Prismas als ein stark divergierender Kegel auf das Präparat (Fig. 4). In diesem Falle kann auf der kreisförmigen beleuchteten Fläche ein brillantes vertikales gerades Streifensystem beobachtet werden.

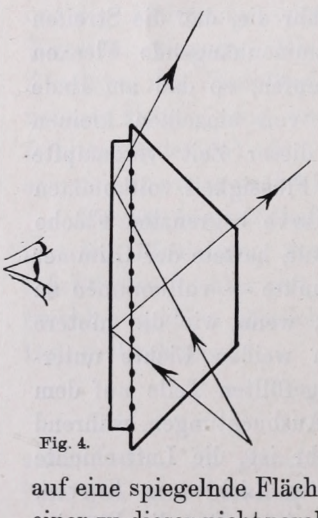


Fig. 4.

Während also die im vorangegangenen Punkte beschriebenen Streifen, die wir die Streifen erster Gattung nennen wollen, dann zustande kommen, wenn wir ein homogenes nahezu paralleles Lichtbündel auf eine spiegelnde Fläche fallen lassen und den Interferenzraum mit einer zu dieser nicht parallelen Fläche schneiden, wird dieses Streifensystem zweiter Gattung erzeugt, indem man auf die spiegelnde Fläche ein homogenes divergentes Lichtbündel fallen läßt und in dem Interferenzraum eine zu dieser parallele Ebene legt. D. h. in

$$k = \frac{2y \cos i}{\lambda/2}$$

ist jetzt $y$ und $\lambda$ konstant, folglich verschwindet die Lichtintensität an allen den Stellen, auf welche das Licht unter einem Einfallswinkel $i$ fällt, daß

$$k = 2\nu + 1$$

ist, es sind also diese Streifen zweiter Gattung ihrer Entstehungsweise nach Streifen gleicher Neigung.

In vollkommenem Einklange mit dieser Erklärung steht das Verhalten dieser Streifen bei der Änderung der verschiedenen Faktoren. Nähern wir z. B. das Prisma der Lichtquelle, dann nähern sich auch die Streifen einander (bis auf $^1/_2$—$^1/_3$ mm), stellen wir es dagegen weiter, dann können wir Streifen von einigen Millimetern Breite bekommen, eine Grenze wird bloß durch die Intensität des Lichtes bzw. im ersteren Falle durch die Breite des Spaltbildes gezogen. Ähnliche oder noch weitere Streifen kann man herstellen durch Vergrößerung des Inzidenzwinkels bis zum rasanten Einfall,' bei Verkleinerung desselben dagegen werden die Streifen schmäler, um beim Durchgang des Grenzwinkels — was hier an den Strahlen abnehmender Inzidenzwinkel allmählich geschieht (siehe Fig. 4) — gänzlich zu verschwinden.

Natürlich können diese beiden Darstellungen der Interferenzstreifen miteinander kombiniert und auf kontinuierliche Weise ineinander überführt werden. Dasselbe ist der Fall bei dem Streifensystem dritter Gattung, das durch diese Versuchsanordnung noch erzeugt werden kann. Ich muß vorausschicken, daß sowohl zu diesem, wie auch zur Darstellung der Streifen zweiter Gattung ein größeres Stück des Präparates notwendig ist als dasjenige, an dem der Glimmer mit der Flüssigkeit verbunden der Regel nach an dem Glase anhaftet.* Demnach ist es zweckmäßiger, die Schwefelschichte direkt auf den Glimmer aufzutragen und das Verdampfen des Benzols dadurch zu verhindern, daß wir die Grenze des Glimmers z. B. mit Kanadabalsam umgeben.** So kann man eine gleichmäßige beugende Schichte von ganz großem Flächeninhalt erhalten, soweit nämlich das gleichmäßige Über-

* Obwohl von dem Stücke, wo der Glimmer schon vollkommen anhaftet, das Jodbenzol nicht einmal nach Tagen verdampft.

** Der Kanadabalsam ist insofern nicht ganz entsprechend, als er sich im Benzol löst und so dessen Brechungsexponenten vermindert.

ziehen mit dem Schwefel gelungen ist. Mit Ausnahme der ersten beiden wurden die Präparate auf diese Art verfertigt.

Das erwähnte Streifensystem dritter Gattung (das ebenfalls aus vertikalen geraden Streifen besteht) wird nun erzeugt, wenn auf die spiegelnde Fläche kein homogenes Lichtbündel, sondern ein kontinuierliches Spektrum projiziert wird (siehe Fig. 5). Wenn die den Interferenzraum schneidende Ebene, wie in unserm Falle, zu dem Spiegel parallel und das Spektrum verhältnismäßig kurz ist, so sind die Streifen hauptsächlich dem Umstande zuzuschreiben, daß mit der von Stelle zu Stelle sich ändernden Wellenlänge auch die optische Wegdifferenz sich ändert, während, wenn die erwähnte Ebene sich zum Spiegel neigt, wie in den Experimenten von Wiener, hauptsächlich der demzufolge von Stelle zu Stelle sich ändernden geometrischen Wegdifferenz.

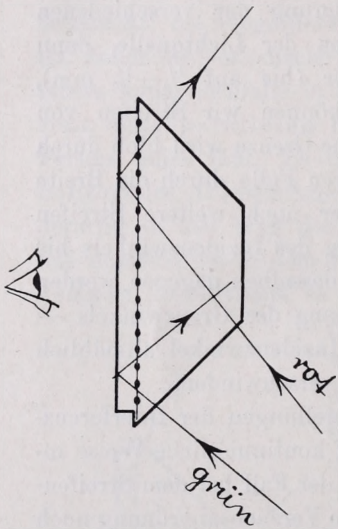


Fig. 5.

Mit anderen Worten, in

$$k = \frac{2y\cos i}{\lambda/2}$$

sind jetzt $y$ genau, $i$ annähernd konstant, folglich verschwindet die Intensität an allen den Stellen, auf welche Licht von solcher $\lambda$ fällt, daß

$$k = 2\nu + 1$$

ist; man könnte also diese Streifen Streifen gleicher Farbe benennen.

9. Ich will nun noch über das Verhalten der Streifen in polarisiertem Lichte sprechen und endlich die Einwendungen widerlegen, die überhaupt gegen die bisherige Erklärung der Experimente gemacht werden können.

Das Verhalten in polarisiertem Lichte habe ich hauptsächlich an den zuletzt erwähnten Streifen beobachtet und zwar so, daß ich mit Hilfe eines doppelbrechenden Prismas zwei zueinander senkrecht (in horizontaler und vertikaler Ebene) polarisierte, übereinander stehende Spektren auf das Prisma projizierte. Ich habe schon erwähnt, daß die Streifen in dem vorigen, also in der Einfallsebene polarisierten Lichte — wie zu erwarten — sehr lebhaft sichtbar sind, aber auch im letzteren unter keinen Einfallswinkel verschwinden, also auch beim Einfall von 45⁰ nicht, wo doch beim Gebrauch lichtempfindlicher oder fluoreszierender Schichten keine Spur von den Interferenzstreifen ist; ein auf den ersten Anblick etwas überraschendes Resultat.

Die Erklärung dieses Verhaltens ergibt sich aber sehr einfacher Weise aus der Natur der Lichtzerstreuung, und beweist zugleich sehr überzeugend die Richtigkeit unserer diesbezüglichen Voraussetzungen. Doch betrachten wir den allgemeineren Fall, wo also ein zur Einfallsebene senkrecht polarisiertes paralleles Lichtbündel von der Schwingungsamplitude $a$ unter beliebigem Winkel $i$ auf die vollkommen spiegelnde Fläche fällt, die wir wieder zur $XOY$-Ebene wählen wollen. (Fig. 6.)

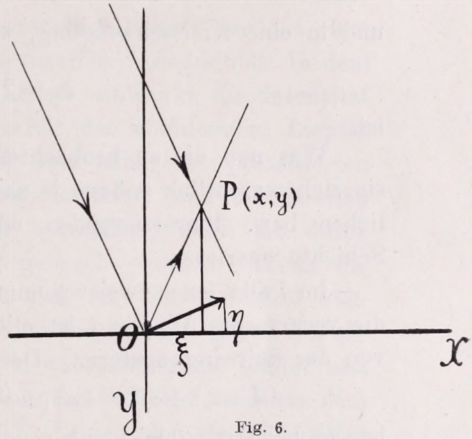



Fig. 6.

In diesem Falle können wir die einfallende Welle durch

$$\left.\begin{aligned} \xi'_P &= a \cos i \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \sin i + y \cos i}{\lambda}\right) \\ \eta'_P &= -\, a \sin i \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \sin i + y \cos i}{\lambda}\right) \\ \zeta'_P &= 0 \end{aligned}\right\}$$

darstellen, die reflektierte Welle dagegen durch

$$\left.\begin{aligned} \xi''_P &= -\, a \cos i \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \sin i - y \cos i}{\lambda}\right) \\ \eta''_P &= -\, a \sin i \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \sin i - y \cos i}{\lambda}\right) \\ \zeta''_P &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Die Resultante ist also

$$\left.\begin{aligned}\xi_P &= \xi'_P + \xi''_P = -2a\cos i\cdot\sin 2\pi\frac{y\cos i}{\lambda}\cdot\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x\sin i}{\lambda}\right)\\ \eta_P &= \eta'_P + \eta''_P = -2a\sin i\cdot\cos 2\pi\frac{y\cos i}{\lambda}\cdot\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x\sin i}{\lambda}\right)\end{aligned}\right\}$$

im allgemeinen eine elliptische Schwingung, welche speziell in eine lineare (längs der $OX$- bzw. $OY$-Achse) übergeht, wenn

$$2\pi\frac{y\cos i}{\lambda} = \Delta = (2\nu+1)\frac{\pi}{2}\ \text{bzw.}\ 2\nu\frac{\pi}{2}$$

und in eine Kreisschwingung, wenn

$$\Delta = 2\nu\frac{\pi}{2} - i$$

ist.

Was nun die zu beobachtende Erscheinung betrifft, gestaltet sie sich wesentlich anders, je nachdem wir mit einer lichtempfindlichen bzw. fluoreszierenden oder mit einer lichtzerstreuenden Schichte operieren.

Im Falle jener zweier kommt nur die Intensität in Rechnung, die verursachte Wirkung ist mit dieser proportional, unabhängig von der Schwingungsform. Da die Intensität

$$J = \bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2 = 4a^2(\cos^2 i\sin^2\Delta + \sin^2 i\cos^2\Delta)$$

ist, so bekommen wir eine sich mit $\Delta$ periodisch ändernde Wirkung* (Interferenzstreifen), ausgenommen, daß

$$\cos^2 i = \sin^2 i = 1/2,$$

d. h. $i = 45^0$ ist, in welchem Falle die Intensität

$$J = 2a^2$$

ist, unabhängig vom $\Delta$.

Dies ist auch das Resultat der Experimente von WIENER. sowie der von DRUDE und NERNST. Aber im Falle der Zerstreuung verhält sich die Sache ganz anders. Ein zerstreuendes Teilchen emittiert nämlich unter der Wirkung einer erregenden Schwingung in je einer Richtung nur die auf diese Richtung senkrechte Schwingungskomponente, d. h. eine solche Schwingungsform, wie diese aus jener Richtung gesehen erscheint. Da wir die Erscheinung hinter dem Spiegel, d. h. in der Richtung der $OY$-Achse beobachten, so gelangt in unser Auge nur das von

* Vollständige Minima aber nur bei $i = 0^0$ und $90^0$.

der $\xi$-Komponente emittierte Licht, d. h wir beobachten eine

$$J = \xi^2 = 4a^2 \cos^2 i \sin^2 \Delta$$

proportionale Lichtwirkung. Diese ändert sich aber mit $\Delta$ periodisch bei jedem Einfallswinkel und nimmt auch im Falle $i = 45^0$ den Wert 0 (vollständige Minima) an. Die Versuche — wie schon erwähnt — zeigen tatsächlich dieses auf den ersten Anblick etwas überraschende Verhalten der Interferenzstreifen. Aus dem bisher Gesagten werden auch die Intensitätsverhältnisse der bei dem Einfallswinkel $i = 45^0$ beobachteten Streifen verständlich: In dem in der Einfallsebene polarisierten Lichte schwankt die Intensität zwischen 0 und 4 (wenn die Intensität des einfallenden Lichtes als Einheit angenommen wird), in dem senkrecht polarisierten Lichte zwischen 0 und 2. In dem letzteren sind die Streifen tatsächlich sehr schwach, oft nur erkennbar, wenn sie durch Drehen des Prismas in Bewegung gebracht werden. Wenn die Richtung der Drehung derartig ist, daß der Einfallswinkel während derselben zunimmt, bewegen sich die Streifen gegen die abnehmenden Wellenlängen, sie werden während dessen breiter und gleichzeitig auch etwas lebhafter, d. h. die Differenz zwischen dem Maximum und Minimum nimmt zu.* Es ist klar, daß, je größer der Einfallswinkel wird, von um so niedrigerer Ordnung die Interferenzen werden, um so kleineren Einfluß hat die unvollkommene Reinheit des Spektrums. Wie wir aber bei der Besprechung der schon oben erwähnten neuen Interferenzen auch sehen werden, ist die Tatsache, daß die Interferenzen niedrigerer Ordnung reiner sind, nicht so sehr diesem Umstande, sondern dem anderen zuzuschreiben, daß die Interferenzen niedrigerer Ordnung durch die — eigentlich gar nicht unendlich kleinen — Dimensionen der Teilchen weniger beeinflußt werden.** In der Tat sind auf feinerer

---

* Auch verschieben sich die zwei aufeinander senkrecht polarisierten Streifensysteme gegeneinander, was zum Teil der Phasenänderung bei der Totalreflexion, zum Teil der Doppelbrechung des Glimmers zuzuschreiben ist.

** Die Größe der Teilchen versuchte ich durch Abwiegen und Abzählen zu bestimmen. Zu dem Zwecke habe ich eine Glasplatte von $100 \times 200$ mm Größe derart überzogen, daß durchschnittlich $0{,}5 \times 10^6$ Teilchen auf 1 mm$^2$ fielen, und ich fand die Gewichtszunahme 0,25 mgr; so ergibt sich für den Durchmesser eines Teilchens $2{,}9 \times 10^{-4}$ mm. Die Zuverbeugender Schichte auch die Streifen höherer Ordnung lebhafter und sie bleiben so beim Abnehmen des Einfallswinkels bis zum Grenzwinkel der totalen Reflexion; da verschwinden sie, wie schon erwähnt, vollkommen. Das kann besonders schön an den letzterwähnten Streifen beobachtet werden; sowie während der Drehung des Prismas nacheinander die grünen, gelben usw. gebrochenen Strahlen aus dem Prisma austreten (siehe Fig. 5), so verschwinden in den entsprechenden Farben die Interferenzstreifen. Das ist gleichzeitig ein Experiment von entscheidender Bedeutung dafür, daß die beschriebenen Erscheinungen tatsächlich auf die Weise zustande kommen, wie wir es dargelegt haben.*

Demzufolge kann nicht einmal die einzige noch mögliche Annahme in Frage kommen, daß nämlich bei dem Zustandekommen der Streifen die an der vorderen (die Flüssigkeit berührenden) Fläche des Glimmers stattfindende Reflexion eine wesentliche Rolle spielt Da auf dieser Fläche höchstens eine Brechungsexponentenänderung von 1,60 : 1,56 = 1,025 vorhanden ist, ist es klar, daß die Streifen nach dieser Annahme diesseits der totalen Reflexion lebhafter sein müßten, wo doch in der Wirklichkeit keine Spur von ihnen ist.

10. Wir können jetzt die bisherigen Resultate in folgender Weise zusammenfassen: Die Frage, ob die ultramikroskopische Beugung, die Lichtzerstreuung, zur Untersuchung des Schwingungszustandes eines lichtdurchdrungenen Raumes brauchbar ist, kann entschieden mit ja beantwortet werden. In der Tat, wir haben

---

sichtigkeit des Abwiegens wird aber stark vermindert durch den Umstand, daß beim Überziehen mit dem Schwefel die Platte sich erwärmt und wegen der Verdampfung des zum Glas absorbierten Wassers das erste Abwiegen eine Gewichtsabnahme von 4—5 mgr zeigt. Dabei geht die auf der S. 88 erwähnte Änderung der beugenden Schichte scheinbar parallel der Verminderung der Anzahl der Teilchen. Die Ordnungsgröße der Teilchen ist aber jedenfalls die angegebene; sie sind kleiner als die Wellenlänge des Lichtes, jedoch nicht bedeutend.

* Da erhellt der Vorteil der Anwendung der totalen Reflexion; mit einem Metallspiegel könnte dieses Experiment nicht ausgeführt werden. Derselbe Vorteil kommt auch in dem Umstande zur Geltung, daß die totalreflektierende Fläche für die von hinten her unternommene Beobachtung vollkommen durchsichtig ist.

mit Anwendung der Lichtzerstreuung die Untersuchung der Interferenzen durchgeführt, die vor einer (total) reflektierenden Fläche während der Änderung des Einfallswinkels von 90° bis 40° zu Stande kommen. Unsere Versuchsanordnung ließ dies nicht einwandsfrei entscheiden, es ist aber zweifellos, daß die Lichtzerstreuung auch zur Nachweisung stehender Lichtwellen, wie überhaupt zur vollständigen Analyse aller möglichen Lichtschwingungszustände geeignet ist. Was also die Gleichungen der Theorie des Lichtes ergeben, nämlich den Lichtvektor als Funktion der Zeit und des Ortes, das kann experimentell durch lichtzerstreuende Partikelchen, in den lichtdurchdrungenen Raum gebracht, bestimmt werden. Es ist erwähnenswert, daß diese vollständige, wir könnten sagen topographische Aufnahme eines lichtdurchdrungenen Raumes durch diejenige, in einem gewissen Sinne einfachste Wirkung des Lichtes durchführbar ist, wonach durch dasselbe die Körper leuchtend, sichtbar werden. Die Feststellung letzterer Tatsache betrachte ich als unser eigentliches Resultat. Mit dieser Feststellung ergibt sich zugleich, daß für diese Wirkung des Lichtes tatsächlich der FRESNELsche, d. h. der elektrische Vektor maßgebend ist, was — als eine bekannte Folgerung aus dem Polarisationsverhältnisse der Lichtzerstreuung — den eigentlichen Ausgangspunkt unserer Experimente bildete.

## II. Teil.

11. Im ersten Teile habe ich darauf hingewiesen, daß, wenn man die stehenden Lichtwellen durch die Lichtzerstreuung an ultramikroskopischen Teilchen sichtbar machen will und zu diesem Zwecke vor den Spiegel eine zu diesem schwach geneigte zerstreuende Fläche anbringt, man dann das Zustandekommen der bei dieser Anordnung beobachtbaren Streifensysteme nicht ohne weiteres eindeutig erklären kann. Die in den Knotenebenen befindlichen Teilchen werden nämlich — wenn unsere theoretischen Vorstellungen über die Lichtzerstreuung richtig sind — jedenfalls dunkel bleiben; es ist aber möglich, daß wir auch die in den Bauchebenen befindlichen leuchtenden Teilchen dunkel sehen, wenn die von ihnen emittierten zwei Strahlen, die in das

Auge des Beobachters direkt bezw. nach einer Reflexion gelangen, interferenzfähig sind und ihre Wegdifferenz ein ungerades Vielfache der Halbwellenlänge beträgt. Ich habe gezeigt, wie sich diese Zweideutigkeit dadurch eliminieren läßt, daß man die Beobachtung von hinter dem Spiegel her vornimmt, in welchem Falle von jedem Teilchen nur ein Strahl in das Auge gelangt. Mit dieser Anordnung ist es tatsächlich gelungen, die vor einer spiegelnden Fläche zustande gekommenen WIENERschen Interferenzen zu beobachten und zu untersuchen.

Schon während der Vorversuche bin ich aber darauf gekommen, daß die WIENERschen Interferenzen mit jenen zu erwartenden neuen Interferenzen in innigster Beziehung stehen: sind nämlich jene durch oder — besser gesagt — an der Lichtzerstreuung darstellbar, dann müssen auch diese existieren. Wir wollen nämlich annehmen, daß die Lichtzerstreuung zum Sichtbarmachen der stehenden Wellen geeignet ist. Dies bedeutet, daß die Lichtzerstreuung — wie schon erwähnt — durch den FRESNELschen Vektor allein bestimmt ist und zustande kommt. Dann kann aber die zerstreute Strahlung (schon der Symmetrie wegen) nichts anderes als eine RAYLEIGHsche (eine einfache zirkumaxiale) Welle sein, deren sämtliche Strahlen, also auch die von den entgegengesetzten Richtungen, mit derselben Phase ausgehen und also interferenzfähig sind.

Nicht von zwingender Kraft, aber sehr plausibel ist auch die Folgerung, daß, wenn auf einem solchen kleinen Partikelchen zwei in entgegengesetzten Richtungen fortschreitende Lichtstrahlen zur Interferenz gebracht werden können, dann müssen die von dem Partikelchen in entgegengesetzten Richtungen ausgehenden Lichtstrahlen wieder interferenzfähig sein.

12. Sobald es mir also auf dem ersten Präparate die Interferenzen zweiter (und dritter) Art hervorzubringen gelungen war, habe ich sofort versucht, das Experiment so zu modifizieren, daß ich auf die Hypotenusenfläche des Prismas von hinten ein kontinuierliches Spektrum projizierte* und durch die Kathetenfläche

---

* Es ist dies natürlich nur wegen der Eindeutigkeit des Experimentes geschehen; alle die zu beschreibenden Interferenzen sind auch bei durch

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

auf die beugende Schicht hinblickte (s. Fig. 7). Sofort habe ich ein brillantes, das kontinuierliche Spektrum vertikal durchschneidendes schwarzes Streifensystem beobachtet, das direkt auf der beugenden Schicht zu sehen war.

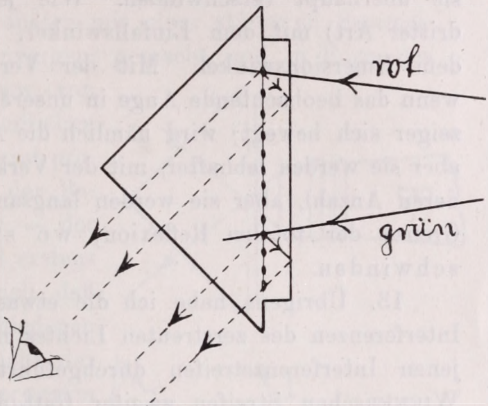



Fig. 7.

Es ist unzweifelhaft, daß dieses die gesuchte Erscheinung ist: die Interferenz eines auf direktem Wege und eines nach einer Reflexion ins Auge des Beobachters gelangten, von ein und demselben Partikelchen ausgegangenen Lichtstrahles (s. Fig. 7). In einem gewissen Sinne ist sie also das Reziproke der Interferenz dritter Gattung. Da nämlich das Glimmerblättchen überall gleiche Dicke hat und wenn man das Auge in etwas größerer Entfernung anbringt, auch der Emersionswinkel (wie man den Winkel zwischen einem Strahl des zerstreuten Lichtes und der Flächennormale nennen kann) aller in dasselbe gelangten Strahlen der gleiche ist, so sind die Streifen auch hier hauptsächlich dem Umstande zuzuschreiben, daß die in Wellenlängen gemessene Wegdifferenz des erwähnten Strahlenpaares von dem Rot nach dem Violett immer größer werdende Werte annimmt; alle Stellen des Spektrums, wo diese Wegdifferenz

$$\delta = 2\,d \cos \varepsilon = (2\nu + 1)\,\frac{\lambda}{2} \quad \text{(veränderlich das } \lambda)$$

beträgt, werden dunkel erscheinen.

Dem entspricht, daß, wenn wir das Prisma der Lichtquelle nähern, dann nähern sich mit dem Kürzerwerden des auffallenden

---

die Kathetenfläche vorgenommener Beleuchtung sichtbar, doch werden sie dann durch die Überlagerung der Interferenzen des einfallenden und (total) reflektierten Lichtes unnötiger Weise kompliziert.

Spektrums auch die Streifen einander so, daß die zwischen zwei bestimmten Farben sich befindlichen Streifen stets von derselben Anzahl bleiben, solange, bis das Spektrum so unrein wird, daß sie überhaupt verschwinden. Wie jene (die Interferenzstreifen dritter Art) mit dem Einfallswinkel, so ändern sich diese mit dem Emersionswinkel. Mit der Vergrößerung desselben (also wenn das beobachtende Auge in unserer Figur entgegen dem Uhrzeiger sich bewegt) wird nämlich die Anzahl der Streifen kleiner, aber sie werden lebhafter, mit der Verkleinerung derselben wächst deren Anzahl, aber sie werden langsam verwaschener, bis an die Grenze der totalen Reflexion, wo sie dann plötzlich verschwinden.

13. Übrigens habe ich die etwas nähere Untersuchung der Interferenzen des zerstreuten Lichtes nicht an diesen, sondern an jenen Interferenzstreifen durchgeführt, die als Reziproke der WIENERschen Streifen zweiter Gattung in homogener Beleuchtung herstellbar sind. Lassen wir nämlich auf die beugende Schicht kein Spektrum, sondern homogenes Licht fallen, indem wir das Prisma mit seiner Hypotenusenfläche einfach vor den Okularspalt des Spektroskopes stellen, dann beobachten wir mit dem auf Unendlich akkomodierten, dem Prisma möglichst nahe gestellten Auge ein den LUMMERschen Ringen ähnliches Streifensystem. Die Erklärung der Erscheinung, aus welcher auch die erwähnte Reziprokität erhellt, ist sehr einfach. Da nämlich homogenes Licht und Blättchen von gleichmäßiger Dicke angewendet wurden, sind die Wegdifferenzen der unter gleichem Emersionswinkel austretenden und in einem Punkte der Retina sich vereinigenden Strahlenpaare die gleichen; diese Wegdifferenz ändert sich aber mit dem Emersionswinkel, so daß wir in allen Richtungen, in welchen

$$\delta = 2\,d \cos \varepsilon = (2\nu + 1)\,\frac{\lambda}{2} \qquad \text{(veränderlich das } \varepsilon\text{)}$$

beträgt, Dunkelheit sehen. Das Auge muß man möglichst nahe stellen, um Strahlen von möglichst verschiedenem $\varepsilon$ in die Pupille eintreten lassen d. h. um möglichst viele Streifen sehen zu können.

Bevor ich auf die detaillierte Beschreibung dieser Streifen übergehe, will ich noch eine andere Methode ihrer Erzeugung erwähnen. Von der Überlegung geleitet, daß es überflüssig sei, einen größeren Teil der beugenden Schicht, als die Pupille, zu beleuchten, habe ich das aus dem Okularspalte austretende Licht zuerst mit einer schwachen, später mit einer stärkeren Sammellinse (ZEISSsches B-Obj.) konvergent gemacht und in Form des Bildchens von dem Spalte bezw. von eines im Mikroskoptubus befindlichen Kreisdiafragmas auf das Präparat projiziert (s. Fig. 8). Diese Art der Beleuchtung oder — sagen wir — der Erregung der Teilchen bringt erstens den praktischen Vorteil mit sich, daß man solcherweise die verschiedenen Teile der zerstreuenden Schicht der Untersuchung einzeln unterwerfen kann*, zweitens die prinzipielle Möglichkeit, die Lichtemission beliebig weniger also im Grenzfall eines einzelnen Teilchens beobachten zu können. Schaut man also bei solcher Beleuchtung aus normaler Sehweite auf das Präparat, dann sieht man darauf nur eine kleine, beinahe punktförmige, stark beleuchtete Fläche. Stellen wir dagegen das Auge möglichst nahe der Kathetenfläche und akkomodieren auf Unendlich, dann sehen wir eine kreisrunde beleuchtete Fläche (die Projektion der Pupille auf die Retina), durchzogen von den erwähnten, an die LUMMERschen erinnernden Streifen. Die Streifen sind vertikale Geraden aus der auf die Kathetenfläche nahezu senkrechten Richtung beobachtet; nach links konkav sind die unter größerem, nach rechts konkav die unter kleinerem Emersionswinkel befindlichen, welche letztere durch die Grenzkurve der totalen Reflexion begrenzt sind**, so daß Streifen unter einem Emersionswinkel kleiner als der Grenzwinkel überhaupt nicht oder

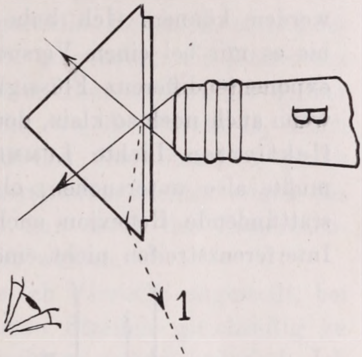


Fig. 8.

* Außerdem verursacht der stark divergierende Lichtkegel auf den anderen Flächen des Prismas keine so störende Beleuchtung und Reflexionen, wie ein nahezu paralleles Lichtbündel.

** Es sind hier eigentlich zwei Grenzkurven, die aber — wegen der Streifen — nicht leicht zu unterscheiden sind.

nur unverhältnismäßig schwächer sichtbar sind. Was die Lebhaftigkeit der Streifen anbelangt, bemerken wir, daß sie mit zunehmendem Emersionswinkel auch zunimmt, doch wird davon weiter unten noch die Rede sein.

· 14. Jetzt wollen wir aber erst besprechen, ob die betrachteten Interferenzstreifen nicht auch auf andere Weise erklärt werden können. Ich habe keine solche Möglichkeit gefunden, bis es mir bei einem Versuche aufgefallen ist, daß die Brechungsexponentendifferenz Flüssigkeit—Glimmer bzw. Glas—Flüssigkeit, wenn auch noch so klein, doch genügend ist, um in dem direkt reflektierten Lichte LUMMERsche Ringe hervorzubringen. Ich mußte also untersuchen, ob die an der vorderen Glimmerfläche stattfindende Reflexion auch bei dem Zustandekommen unserer Interferenzstreifen nicht eine Rolle spielen kann, ob es also nicht möglich sei, daß sie nicht Interferenzen zweier von den Teilchen in beinahe entgegengesetzten Richtungen ausgesandten Strahlen I und II (d. h. $II_2$) sind (s. Fig. 9), sondern die der Strahlen $II_1$ und $II_2$ (überlagert noch durch den Strahl I), daß also die Streifen tatsächlich LUMMERsche Ringe sind, die aus einem Strahle durch Reflexion an der vorderen und hinteren Fläche des Glimmers zustande kommen, wozu die zerstreuenden Teilchen als Lichtquelle dienen. Durch die Versuche glaube ich aber diese schon von vornherein sehr unwahrscheinliche Erklärung gänzlich widerlegt zu haben.

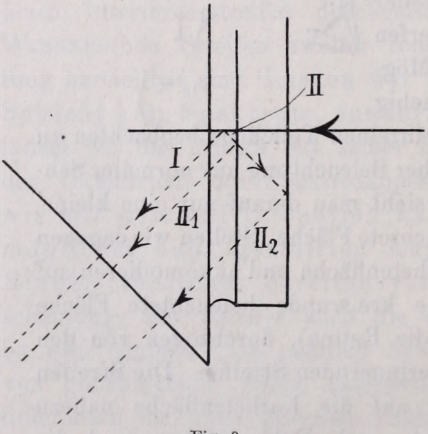


Fig. 9.

Ich folgte demselben, schon einmal (am Ende des Punktes 9) benutzten Gedankengange, den WIENER eingeschlagen hat, um zu zeigen, daß seine photographierten Streifen nicht durch die gewöhnlichen NEWTONschen Interferenzen verursacht waren. Da jede Interferenz umso vollständiger ist, je mehr die interferierenden Strahlen gleiche Intensität haben und umgekehrt, unvollständig ist, wenn der eine übermäßig intensiver ist, und da der Strahl $II_1$, wenn er überhaupt auftritt, jedenfalls sehr schwach ist (einige Zehntausendstel des Strahles II), so folgt, daß die Interferenz der Strahlen $II_1$ und $II_2$ (also die gewöhnlichen LUMMERschen Ringe) vollständiger ist beim Einfallswinkel, kleiner als der Grenzwinkel der totalen Reflexion, wo also auch an der hinteren Glimmerfläche nur eine partielle Reflexion stattfindet und der Strahl $II_2$ relativ schwach ist; umgekehrt: die Interferenz der Strahlen I und $II_2$ kann nur beim Emersionswinkel größer als der Grenzwinkel vollständig sein, wo der Strahl $II_2$ durch totale Reflexion hervorgebracht, also mit dem Strahle I gleich intensiv ist. Die Interferenzen des zerstreuten Lichtes zeigen das letztere Verhalten; sie können also nur durch das Zusammenwirken der Strahlen I und $II_2$ erklärt werden.

Zur weiteren Entscheidung habe ich Versuche angestellt, bei welchen die LUMMERschen und unsere Streifen gleichzeitig zu beobachten und auf ihr Verhalten direkt zu vergleichen sind. Ich ließ nämlich einen stark konvergenten homogenen Lichtkegel durch die Kathetenfläche auf das Präparat fallen und das zurückgeworfene Licht fing ich an einem weißen Schirme auf (Fig. 10). Der Lichtkegel war so gerichtet, daß er den Grenzwinkel der totalen Reflexion in sich enthielt und mit seiner Spitze die Hypotenusenfläche berührte. In diesem Falle wird der auf dem (in wenigstens 5—10 cm Entfernung befindlichen) Schirme erscheinende helle Kreis durch die Grenzkurve der totalen Reflexion in ein sehr stark und ein viel schwächer belichtetes Flächenstück geteilt; in diesem kann man schwache, aber noch ganz gut sichtbare Interferenzstreifen beobachten, während in jenem keine Spur von Streifen ist. Diese Erscheinung ist in Fig. 11 durch Photo-

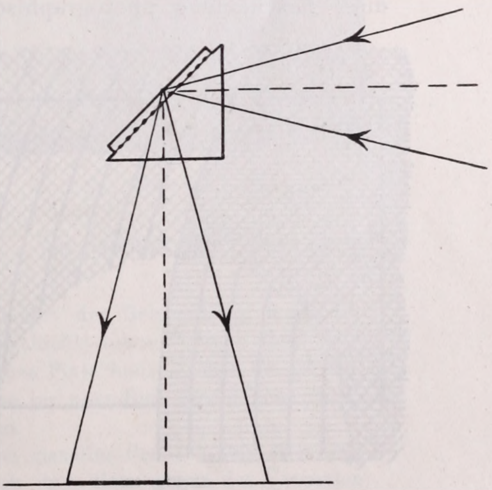


Fig. 10.

graphie wiedergegeben.* Diese Streifen sind also tatsächlich LUMMERsche Ringe, die durch Reflexion an der vorderen und hinteren Glimmerfläche entstehen und auf dem Schirme aufgefangen werden können, da im Verhältnis zu der Dimension der Glimmerfläche, auf welcher die Reflexion stattfindet, die Entfernung des Schirmes schon als unendlich gilt. Es ist nun die Grenzkurve auch in dem zerstreuten Lichte sehr gut sichtbar, aber Interferenzstreifen sind hier nur in dem jenseits derselben liegenden Teile zu beobachten, wo also der Emersionswinkel größer als der Grenzwinkel ist. Ich versuchte auch diese Erscheinung photographisch zu fixieren und zwar so, daß auf einem Bilde sowohl die im regelmäßig reflektierten, wie auch die im zerstreuten Lichte sichtbare Erscheinung zu sehen sei, wie es die Fig. 12 zeigt, auf welcher das Parallelogramm die Kontur der photographischen Platte, der Kreis die Begrenzung des regelmäßig reflektierten

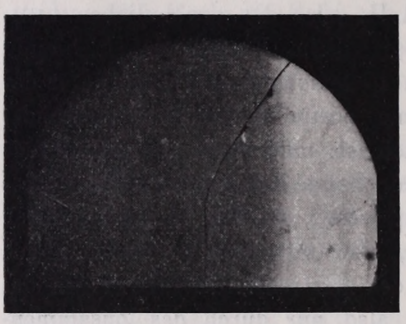


Fig. 11.

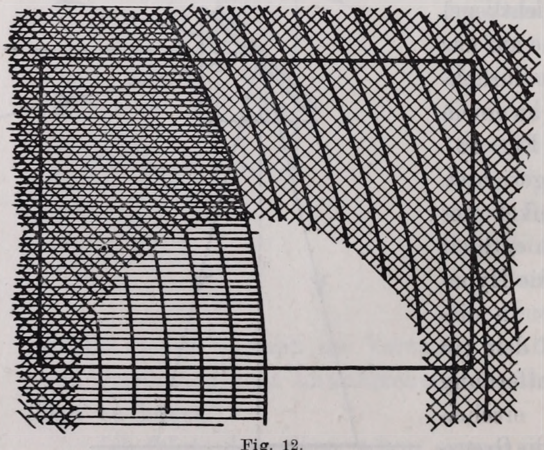


Fig. 12.

* Ich habe von der Erscheinung nur eine Aufnahme gemacht, die unglücklicherweise zerbrochen ist. Die Berührungslinien der zusammengekitteten Stücke sieht man gut auf der Figur, die schon auf dem Original schwache Inferenzstreifen sind leider bei der Reproduktion beinahe gänzlich verloren gegangen.

Lichtes und die durchziehende Kurve die Grenzkurve der totalen Reflexion bezeichnet. Wegen der geringen Intensität des zerstreuten Lichtes konnte ich aber auch mit einer Exposition von 30 Minuten kein Bild davon erhalten. Es ist mir aber auf andere Weise gelungen, auch die Interferenzen des zerstreuten Lichtes zu photographieren, und zwar so, daß ich das Licht mit innerer, beinahe streifender Inzidenz auf die Hypotenusenfläche fallen ließ und die bei noch größerer Emersion als die des reflektierten Lichtes auftretenden Streifen auf dem Schirme bzw. auf der lichtempfindlichen Platte auffing. In diesem Falle ist das zerstreute Licht von solch großer Intensität, daß ich auf dem Schirme sehr gut sichtbare Streifen und von diesen, mit einer Exposition von 15 Minuten das auf Fig. 13 befindliche Bild erhielt.* Auf der linken Seite dieses Bildes sieht man den durch das regelmäßig reflektierte Licht beleuchteten Kreis, ohne jede Spur von Interferenzstreifen.** Im Gegensatz dazu sind auf dem von diesem nach rechts liegenden und ausschließlich nur durch zerstreutes Licht belichteten Teile sehr schöne Streifen zu sehen.*** Vergleichen wir alle diese

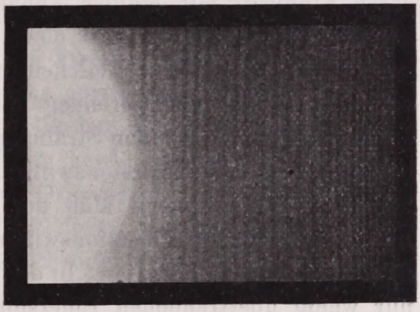


Fig. 13.

* Ich bemerkte später, daß diese Art der Beleuchtung (sowie die diesmal vielleicht etwas stärkere Schwefelschicht) diesen Versuch nicht ganz einwandfrei macht, doch es soll hier seinen Platz finden, schon als ein Beispiel, wie gut auf dieser einfachen Weise im unendlich befindlichen Interferenzstreifen sich photographieren lassen.

** Zwar konnte man auch hier bei visueller Beobachtung allerdings sehr schwache Streifen beobachten, doch sind diese wegen des Überexponierens des direkt belichteten Teiles nicht auf das Bild gekommen. Bei noch größerem Einfallswinkel werden natürlich auch diese Streifen immer deutlicher.

*** Wegen der Doppelbrechung des Glimmers geben zwei, aufeinander senkrecht polarisierte Lichtstrahlen zwei verschiedene Streifensysteme (siehe den folgenden Punkt); beim natürlichen Licht sind sie einander superponiert, Beobachtungen mit unseren vorherigen Überlegungen, dann können wir als mit vollständiger Sicherheit festgestelltes Resultat behaupten, daß die betrachteten Streifen tatsächlich durch die Interferenz zweier, von den zerstreuenden Teilchen als punktförmige Lichtquellen in sehr verschiedenen (beinahe entgegengesetzten) Richtungen ausgesandte Lichtstrahlen entstehen. Es ist erwähnenswert, daß in den bei dem Grenzwinkel liegenden Streifen zwei solche Strahlen interferieren, welche ursprünglich mit $100^0$ Divergenz emittiert wurden. Diese sind übrigens die Streifen von der höchsten Ordnungszahl und gleichfalls die am wenigsten lebhaften, welcher Umstand auch hier den endlichen Dimensionen der Teilchen zuzuschreiben ist. Um von deren Einflusse mit einiger Annäherung Rechenschaft geben zu können, nehmen wir anstatt eines Teilchens von der Dimension $\delta$ zwei unendlich kleine Teilchen in dem Abstande $d$ und $d + \delta$ vor der (total) reflektierenden Fläche an. Da die Wegdifferenz des aus diesen kommenden Strahlenpaares $2d \cos \varepsilon$ bzw. $2(d + \delta) \cos \varepsilon$ beträgt ($\varepsilon$ ist der Emersionswinkel), so sieht man, daß deren Differenz: $2\delta \cos \varepsilon$, die ein Maß der Unendlichkeit der Streifen ist, mit zunehmendem Emersionswinkel abnimmt, d. h. die Streifen werden (schärfer) lebhafter. In der Tat, bei einem den Grenzwinkel nur wenig übertreffenden Emersionswinkel sind die Minima schon ziemlich ausgeprägt. Zu demselben Resultate gelangen wir, wenn wir die Intensitätsverhältnisse der Zerstreuung vor Augen halten. Sind die Teilchen — wie hier — etwas größer, dann ist das in der Richtung des durchgehenden Lichtes zerstreute Licht bedeutend intensiver als das in der entgegengesetzten Richtung zerstreute. Von je niedrigerer Ordnungszahl der betrachtete Streifen ist, umso kleiner ist die Divergenz, also auch die Intensitätsdifferenz der in jenem interferierenden Strahlen, umso vollständiger also die Minima. Auch diese Folgerungen werden bestätigt durch die Beobachtungen, nach welchen die Lebhaftigkeit der Streifen an stärkeren Schichten schon bei niedrigerer Ordnungszahl verschwindet und umgekehrt: auch die Streifen von höherer

---

davon die Periodizität der Streifen; übrigens sind auch diese auf dem Original viel schöner.

Ordnungszahl werden deutlicher, wenn man die Schicht nicht von hinten her, sondern mit innerer streifender Inzidenz beleuchtet, in welchem Falle nämlich die zwei interferierenden Strahlen zu dem einfallenden erregenden Lichtstrahle mehr symmetrisch liegen.

15. Im polarisierten Lichte dargestellt, äußern sich diese Interferenzen des zerstreuten Lichtes in ziemlich komplizierten Streifensystemen, zu deren Deutung außer dem Polarisationszustande des zerstreuten Lichtes auch die totale Reflexion und besonders die Doppelbrechung des Glimmers in Rechnung gezogen werden muß.* Um die Erscheinungen doch möglichst zu vereinfachen, habe ich den Glimmer so auf die Hypotenusenfläche gelegt, daß die zwei Hauptrichtungen horizontal und vertikal liegen und die erstere die kristallinische Achsen enthalte. In diesem Falle ist im horizontal polarisierten Lichte kaum etwas Bemerkenswertes zu beobachten, insbesondere bleiben die Streifen unverändert bei einer Änderung des Einfallswinkels des (primären) Lichtes; ist aber das einfallende Licht in der vertikalen Ebene polarisiert, dann hängt das Aussehen der Streifen auch von der Richtung des Einfallens, sowie auch von der Orientierung der Beobachtungsebene (Emersionsebene) ab. Fällt diese, wie gewöhnlich, in die horizontale Ebene, dann sind die Streifen von gewöhnlichem Aussehen, sehen wir aber möglichst von unten oder von oben her auf die beleuchtete Fläche, so daß die Emersionsebene zu der horizontalen stark geneigt ist, dann kann man auf den Streifen eigentümliche Periodizität — hervorgebracht durch Zusammenschmelzen mehrerer von ihnen — beobachten, welche Erscheinung zweifellos auf die verschiedenen und mit der Emersionsrichtung sich ändernden Schwingungsformen der zwei interferierenden Lichtstrahlen zurückzuführen ist.** Es kommen noch neue Komplikationen hinzu, wenn das beleuchtende Licht nicht — wie bisher vorausgesetzt — senkrecht von hinten auf die Hypotenusenfläche

* Eigentlich entstehen die Streifen nie in natürlichem Lichte, auch dann nicht, wenn das einfallende Licht solches ist, wegen der polarisierenden Wirkung der Lichtzerstreuung.

** Der direkt in das Auge kommende Strahl ist nämlich immer linearpolarisiert, der andere dagegen wegen der Doppelbrechung des Glimmers (und wegen der Totalreflexion) im allgemeinen elliptisch polarisiert.

fällt. Sehen wir z. B. längs der Achse der Zirkumaxialität (in der Schwingungsrichtung des einfallenden Lichtes, was bei nicht senkrechter Inzidenz möglich ist), dann sehen wir keine Streifen, denn in dieser Richtung hat das zerstreute Licht die Intensität 0.* Doch lohnt es sich nicht auf die Einzelheiten der Erscheinung einzugehen, solange die durch die Doppelbrechung des Glimmers verursachten überflüssigen Schwierigkeiten nicht eliminiert sind, was durch die Anwendung dünner Glasplatten und noch homogenerem Lichtes (auf dessen Parallelität es hier nicht ankommt) leicht geschehen könnte.

Bevor wir diese Erscheinungen verlassen, möge hier eine Bemerkung Platz finden, betreffend den Polarisationszustand der zuletzt besprochenen Interferenzstreifen. In meiner Inauguraldissertation** habe ich nämlich gezeigt, daß man zu einer in allen Fällen brauchbaren qualitativen und im speziellen Falle der normalen Inzidenz zu einer genauen quantitativen Beschreibung der Polarisationsverhältnisse des von Glasgittern gebeugten Lichtes gelangen kann, wenn man auf beiden Seiten der Grenzfläche Glas—Luft, aber unendlich nahe zu ihr, sekundäre Erregungszentren annimmt, und das gebeugte Licht als die Resultante der aus diesen Zentren direkt bzw. durch Reflexion und Brechung ins Auge des Beobachters gelangten Lichtstrahlen betrachtet (s. Fig. 14). Zu dieser Auffassung, die augenscheinlich eine unmittelbare Verallgemeinerung der STOKESschen irregulären Reflexion und Brechung

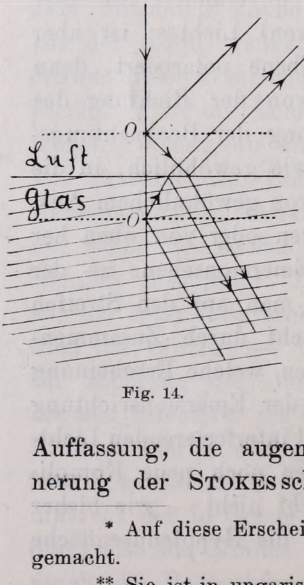


Fig. 14.

* Auf diese Erscheinung hat mich Herr Prof. FRÖHLICH aufmerksam gemacht.

** Sie ist in ungarischer Sprache unter dem Titel: *Adalékok az üvegrácson elhajlitott fény polárosságának elméletéhez* (Beiträge zur Theorie der Polarisation des von Glasgittern gebeugten Lichtes), Budapest 1910, auch im *„Mathematikai és Physikai Lapok“* (XIX, 244—263, 293—321, Heft V, VI, 1910) erschienen und abgekürzt der III. Klasse der ungar. Akad. der Wissenschaften in der Sitzung vom 17. Okt. 1910 vor gelegt. In dieser Form ist sie auch in deutscher Sprache in diesen Berichten XXVII, 45, 1911 erschienen.

darstellt*, bin ich eben durch die Vorversuche dieser Untersuchung geführt worden, und deshalb war es für mich eine besondere Genugtuung, aus den Versuchen zu erfahren, daß die damals hypothetisch angenommene Interferenz zweier in sehr verschiedenen Richtungen ausgesandten Lichtstrahlen sich tatsächlich verwirklichen läßt. Allerdings sind die zerstreuenden Teilchen materielle Lichtzentren, jene aber sekundäre Zentren nur im HUYGENSschen Sinne, obwohl ich sie — hauptsächlich der Einfachheit wegen — als die RAYLEIGHsche und nicht die STOKESsche Welle** emittierende annahm. Jedenfalls hätte es also mit Rücksicht hierauf ein gewisses Interesse, den Polarisationszustand unserer Streifen quantitativ zu verfolgen.

16. Bisher habe ich angenommen, daß beim Zustandekommen der in Rede stehenden Interferenzen der Natur der Lichtzerstreuung eine wesentliche Rolle zukommt, d. h. es sei wesentlich, daß unter Einfluß des einfallenden erregenden Lichtes jedes einzelne zerstreuende (dielektrische) Teilchen einen einfach-periodischen elektrischen Polarisationszustand annimmt und daher eine einzelne RAYLEIGHsche (einfach-zirkumaxiale) Kugelwelle emittiert, deren sämtliche verschieden gerichtete Strahlen kohärent sind. Mit anderen Worten, wollen wir die Lichtemission auf die elementarsten Zentren, auf die Elektronen zurückführen, so besagt diese Annahme, daß wir als wesentlich den Umstand angenommen haben, daß die in den einzelnen Teilchen befindlichen Elektronen in gleicher Phase schwingen.

Eine einfache Überlegung zeigt, daß wir es nicht nötig haben, die Bewegung der elementarsten Zentren derart geordnet anzunehmen und daß Erscheinungen durch irgend eine beliebige Lichtquelle hervorgebracht werden können, deren Dimensionen bzw. deren Tiefe in der Richtung der Spiegelnormale klein im Vergleich zur Wellenlänge ist, vorausgesetzt, daß die aus den einzelnen elementarsten Zentren emittierten Strahlen verschiedener Richtung kohärent sind.

---

* G. G. STOKES, On the dynamical Theory of Diffraction, Mathematical and Physical Papers Vol. II p. 298—300 und 319; s. auch J. FRÖHLICH, Polarisation des gebeugten Lichtes (Teubner 1907) § 2, p. 86—96.

** STOKES l. c. p. 286.

Um dies einzusehen, nehmen wir vor dem Spiegel $Sp$ irgendeine Lichtquelle mit vorläufig beliebigen Dimensionen an (Fig. 15), und betrachten alle die zu dem Emersionswinkel $\varepsilon$ gehörigen Strahlenpaare, die von je einem (von ein und demselben Punkte der Lichtquelle emittierten) direkten bzw. reflektierten Strahle gebildet sind. Es sei $d_i$ die Entfernung irgend eines Lichtpunktes von dem Spiegel, dann hat das aus diesem stammende Strahlenpaar die Wegdifferenz $2 d_i \cos \varepsilon$, und dies nimmt mit $d_i$ zugleich alle möglichen Werte an; das Resultat aller Strahlenpaare ist eine gleichmäßige Beleuchtung. Ist aber die Tiefe der Lichtquelle klein, so daß diese Wegdifferenzen alle beinahe gleich sind, dann bekommt man mehr oder weniger scharfe Interferenzstreifen. Damit z. B. diese Wegdifferenzen bis zum $k$-ten Teile der Wellenlänge die gleichen seien, muß bezüglich irgend zweier Lichtpunkte $i$ und $j$

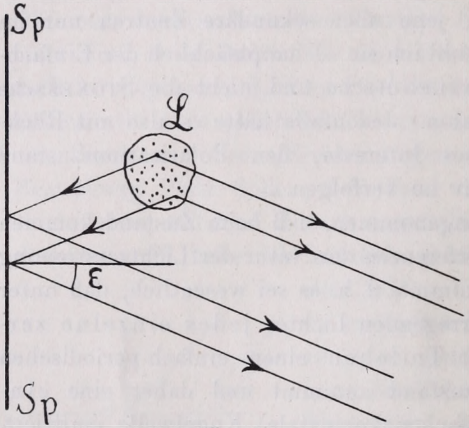



Fig. 15.

$$2(d_i - d_j) \cos \varepsilon \leqq \frac{\lambda}{k}$$

gelten, d. h. die Tiefe der Lichtquelle muß

$$t = (d_i - d_j)_{\max} \leqq \frac{\lambda}{2k \cos \varepsilon}$$

sein.

Man sieht, daß je größer $\varepsilon$ d. h. von je niedrigerer Ordnung die zu beobachtenden Interferenzstreifen sind, umso größer kann $t$ sein und umgekehrt: ist $t$ nur ein Bruchteil von $\lambda$, dann bekommt man auch bei normaler Emersion scharfe Interferenzen. Mit anderen Worten: Ist die Tiefe der Lichtquelle klein im Verhältnis zur Lichtwellenlänge, dann entstehen unsere Interferenzerscheinungen, mögen die verschiedenen Lichtpunkte eines beliebig kleinen Raumes kohärente sein oder nicht. Bei der Lichtzerstreuung ist wahrscheinlich das erstere der Fall; daß aber unsere diesbezüglichen Folgerungen richtig sind, und diese Kohärenz gar nicht nötig ist, beweist, daß ganz analoge Erscheinungen mit der Fluoreszenz als Lichtquelle darstellbar sind.

17. Als fluoreszierenden Stoff habe ich nach DRUDE und NERNST Fluorescein verwendet, das im Wasser wenig, in Natronlauge (als Natronfluorescein) sehr gut löslich ist und in entsprechender Konzentration ($^1/_{200}$ — $^1/_{500}$) sehr stark fluoresziert. Da dieses Fluoreszenzlicht gar nicht homogen ist, so können in diesen nur die Interferenzen niedrigster Ordnung entstehen bzw. ohne Spektroskop beobachtet werden. Deshalb wollte ich den Versuch in solcher Form ausführen, daß ich die eine Fläche einer 0,25 dioptr. bikonvexen Linie mit einer dünnen fluoreszierenden Gelatinehaut überziehen und auf eine halbversilberte Glasfläche anlegen wollte, den Zwischenraum mit einer Flüssigkeit von gleichem Brechungsindex ausfüllend. Erregt man jetzt das Fluoreszieren, indem man auf die Schicht von hinter dem Spiegel starkes Licht fallen läßt, dann sollte man auf derselben den NEWTONschen ähnliche Ringe beobachten. Die fluoreszierende Haut stellte ich nach der Vorschrift von DRUDE und NERNST her, doch es gelang mir nicht, gut brauchbare Schichten herzustellen, indem das Fluoresecin bei dem Eintrocknen nicht in jener Form der festen Lösung geblieben ist, in welcher es noch fluoresziert, sondern ging in den nicht-fluoreszierenden Zustand über.

Um diese Schwierigkeit zu vermeiden, wendete ich mich derselben Versuchsanordnung zu, die ich zur Herstellung der Interferenzen des zerstreuten Lichtes benutzt habe, indem ich die Hypotenusenfläche eines rechtwinkligen totalreflektierenden Prismas mit einem Tropfen einer am stärksten fluoreszierenden Lösung benetzte und mit einem 15—20 $\mu$ dicken Glimmerblättchen bedeckte. Wegen der kapillaren Kräfte adhäriert das Glimmerblättchen stark an der Glasoberfläche, die Flüssigkeit sickert aus bzw. häuft sich an einzelnen Stellen an, so daß man nach 10 bis 15 Minuten schon genügend große Oberflächenteile finden kann, wo die Dicke der Flüssigkeitsschicht nur einen Bruchteil der Lichtwellenlänge beträgt, was man aus dem Verschwinden der

NEWTONschen Interferenzstreifen dieser Flüssigkeitsschicht leicht beurteilen kann. Ist dieser Zustand erreicht, dann kann man das ganze Präparat als optisch homogen ansehen, denn eine so dünne Schicht von anderem Brechungsindex stört die Homogenität nicht merkbar.

18. Wir gehen jetzt zu der Beschreibung der eigentlichen Versuche über. Selbstverständlich fluoresziert eine so dünne Schicht nur bei sehr starker Belichtung genügend; ich benutzte daher wieder dieselbe Art der Erregung wie bei der Untersuchung mit dem zerstreuten Lichte, deren dort erwähnte Vorteile auch hier zur Geltung gelangten. Als Lichtquelle diente eine mit 10 bis 12 Amp. gespeiste Bogenlampe mit horizontaler positiver Kohle. Das mit einem Kondensator parallel gemachte (weiße) Licht fiel durch ein Kreisdiaphragma auf ein ZEISSsches B. Objektiv eines horizontalen Mikroskopes; hinter diesem war das Prisma so auf einem kleinen Tischchen aufgestellt, daß das stark verkleinerte Bild des Diaphragmas gerade auf die fluoreszierende Schicht fiel (s. Fig. 8). Die ganze Einrichtung ist mit der bei der Untersuchung des zerstreuten Lichtes benutzten identisch, man darf also auch hier im Unendlichen liegende Streifen erwarten. Wegen der Inhomogenität des Fluoreszenzlichtes kann man aber jetzt — wie schon erwähnt — mit freiem Auge nur die Streifen von der niedrigsten Ordnung beobachten, die bei rasanter Emersion, also wegen der Brechung an der Kathetenfläche in der an der Figur mit einem Pfeile bezeichneten Richtung (1) erscheinen.

Es sind etwa 8—9 Streifen gut zu unterscheiden, die Schärfe sinkt aber allmählich und mit dem 14.—15sten verschwinden sie gänzlich. Beim kleineren Emersionswinkel kann man nur mit Spektroskop Interferenzen beobachten. Ein kleines Taschenspektroskop entsprich vorzüglich diesem Zwecke. Das Aussehen der Streifen hängt natürlich von der Beobachtungsweise ab. Richten wir das Spektroskop mit vertikalem Spalte auf den fluoreszierenden Fleck, dann sind auch die das Spektrum des Fluoreszenzlichtes durchziehenden Streifen vertikale Geraden, und die ganze Erscheinung erinnert an das Streifensystem, welches durch die spektrale Zerlegung des von einem Glimmerblättchen zurückgeworfenen Lichtes entsteht. Drehen wir aber das Spektroskop um seine

Achse, dann bleiben die Streifen keine Geraden mehr, sondern sie werden gekrümmt, und im Falle horizontalen Spaltes nehmen sie die Gestalt einer Dispersionskurve an. Die Erklärung dieser Erscheinung ergibt sich in einfacher Weise aus dem Umstande, daß das Licht in die verschiedenen Punkte des Spaltes unter verschiedenem Emersionswinkel gelangt; es genügt hier zu erwähnen, daß die Streifen von links nach rechts geneigt und von unten konvex sind, wenn der Emersionswinkel von links nach rechts, die Wellenlänge im Spektrum von oben nach unten zunimmt. Übrigens verdienen und benötigen diese Erscheinungen noch weitere und eingehendere Untersuchungen. Dasselbe gilt natürlich von den Interferenzen des zerstreuten Lichtes, welche eventuell noch einigen Aufschluß über die ultramikroskopischen Teilchen und die Natur der sekundären Lichterregung ergeben können.

19. Jetzt wollen wir noch versuchen, unsere Ergebnisse aus einem einheitlichen Standpunkte zu übersehen.

Alle die vor den WIENERschen Versuchen bekannten Interferenzerscheinungen waren solche, daß die interferierenden Strahlen sowohl aus der Lichtquelle in nahezu derselben Richtung ausgegangen, wie in dem Interferenzraum unter sehr kleinem Winkel zusammengetroffen waren. WIENER hat nun diese Interferenzerscheinungen durch eine Gruppe neuer Interferenzen erweitert, indem er zeigte, daß auch Strahlen, die sich unter sehr großem, 90$^0$ bzw. 180$^0$, Winkel durchqueren, miteinander interferieren; zur Nachweisung dieser Interferenzen braucht man aber solche Indikatoren (Auge), deren Dimensionen bzw. Tiefe klein ist im Verhältnisse zu der Lichtwellenlänge.

Jetzt haben wir dagegen Interferenzerscheinungen kennen gelernt, welche durch Zusammentreffen zweier, aus der Lichtquelle unter sehr großem, sogar 100$^0$ Winkel ausgehenden Strahlen zustande kommen und zu deren Herstellung Lichtquellen nötig sind, deren Dimensionen bzw. Tiefe klein ist im Verhältnis zur Lichtquellenlänge*.

---

* Eigentlich benützt man eine ganz analoge Interferenzerscheinung bei der mikroskopischen Abbildung. Beobachtet man nämlich ein ultramikroskopisches Teilchen (oder sonst ein selbstleuchtendes Objekt) mit einem

Die Reziprokität zwischen diesen beiden Erscheinungsgruppen erhellt noch besser, wenn man bedenkt, daß beide mit derselben Versuchsanordnung herzustellen sind. Die primären Erscheinungen sind die WIENERschen Interferenzen; wendet man zu ihrem Nachweis solche Indikatoren an, welche auf die Lichtwirkung mit Lichtemission reagieren, dann entstehen unsere neuen Interferenzerscheinungen. Diese Reziprokität kann auch ganz allgemein beim Suchen nach neuen Erscheinungen als führendes Prinzip dienen, wie ich dies noch an einem anderen Beispiele hoffe zeigen zu können.

Was nun endlich die aus der Untersuchung dieser Erscheinungen sich ergebenden Folgerungen betrifft, müssen wir die Lichtzerstreuung und die Fluoreszenz gesondert behandeln. Aus der einfachen theoretischen Auffassung über die Lichtzerstreuung, wonach jedes einzelne Teilchen als Ganzes wie je ein Oszillator wirkt, können schon diese Erscheinungen mit Notwendigkeit gefolgert werden. Wollte man aber die Gleichphasigkeit der zu einem einzelnen Teilchen gehörigen Elektronen nicht annehmen (was ja möglich wäre, wozu aber keinerlei Grund vorliegt), dann ergibt sich aus diesen Erscheinungen, daß die aus den elementarsten Zentren (Elektronen) nach verschiedenen Richtungen ausgehenden Strahlen kohärent sind. Für die bei der Fluoreszenz wirkenden Zentren gilt jedenfalls diese letzte Folgerung und für die Erkenntnis dieser Zentren bildet sie einen neuen Beitrag. Es ist bemerkenswert, daß diese Tatsache am leichtesten durch die bisherige, allgemein angenommene Auffassung gedeutet werden kann, welche die elementarste Lichtemission mit der stetigen elektromagnetischen Strahlung eines Oszillators identi-

---

Mikroskopobjektiv von hoher numerischer Apertur, dann gelangen im Bildpunkte auch solche Strahlen zur Interferenz, die aus dem Teilchen mit sehr großer Divergenz ausgegangen sind. In dieser Hinsicht noch viel überzeugender ist ein Versuch von COTTON und MOUTON (Les ultramicroscopes et les objets ultramicroscopiques, S. 60), in welchem das Objektiv mit Ausnahme zweier schmaler Streifen abgedeckt, also nur die höhere Apertur zum Hervorbringen der Interferenzerscheinungen zweier Spalten im Lichte eines ultramikroskopischen Teilchens benutzt wurde, worauf mich Herr Prof. A. COTTON gütigst aufmerksam machte.

fiziert; sehr schwer aber sich mit der neueren, besonders von Stark kultivierten Auffassung der Lichterregung in Einklang bringen läßt.

* * *

Diese Arbeit ist im Laboratorium des Lehrstuhles für praktische Physik der Universität Budapest ausgeführt worden. Aufrichtigen Dank schulde ich dem Leiter des Laboratoriums, Herrn Prof. E. Klupathy, sowie Herrn Prof. I. Fröhlich für das lebhafte Interesse und Anregung, wodurch sie diese meine Arbeit stets gefördert haben; ebenso der mathem.-naturwissensch. Kommission der ungar. Akademie für ihre moralische und materielle Unterstützung, meinem Kollegen Herrn A. Somogyi für seine bereitwillige Anteilnahme und endlich meinen Freunden, Herrn E. Kálmán und R. Rieger, die die Arbeit der Übersetzung zum größten Teil übernommen haben.

5.

# BEITRÄGE ZUR MORPHOLOGIE UND PHYSIOLOGIE VON PENICILLIUM.

Von Dr. KARL SCHILBERSZKY (Budapest).

(Mit zwei Abbildungen.)

*Penicillium glaucum (Link?) Bref.** *(= P. crustaceum Fries?)* ist auf der ganzen Erde verbreitet und gedeiht, wie hinreichend bekannt, auf den verschiedenartigsten Substraten: faulenden organischen Substanzen, besonders auf feuchtgehaltenen Pflanzenteilen. Dieser Schimmelpilz lebt erfahrungsgemäß auf Eßwaren, Brot, Fruchtsäften, verschiedenen chemischen Lösungen, auf zuckerlosem schwarzen Kaffee, auf verdorbenen Kastanien (*Castanea vesca*),** auf Hopfenfrüchten, auf dachreifen Tabaksblättern; desgleichen kommt in schleimigen Tinten unter anderen Schimmelpilzen auch *Penicillium glaucum* vor.*** Die genannte *Penicillium*-Art ist der gemeinste Erreger der Faulstellen der Äpfel.† Ich konnte mich vielfach überzeugen, daß *P. glaucum* allgemein der am häufigsten auftretende Verderber des Lagerobstes, besonders der Äpfel, ist. Es kommt also außer auf toten Substraten auch auf reifen Früchten vor und zwar hier als Parasit.

Als ich seit dem Herbste des Jahres 1895 mit der Pilzvegitation der Obstfäule mich näher befaßte und infolge künst-

---

* Offenbar ein Sammelname für eine Reihe einander sehr ähnlicher grüner Spezies (eine Kollektivart).

** Auf verdorbenen Kastanien fand V. PEGLION toxische Formen von *P. glaucum* (Atti R. Acad. dei Lincei. Roma 1905. Ser. 5, p. 45).

*** Dr. FR. LAFAR: Handb. d. techn. Mykologie. I. Bd. S. 662.

† Dr. P. LINDNER: Mikroskop. Betriebskontrolle in den Gährungsgewerben. IV. Aufl. Berlin 1905. S. 334.

licher Kulturen, respektive durch Infektionsversuche Fäulniszustände hervorgehen ließ, hatte ich unter andern Gelegenheit, besonders das betreffende spezifische Verhalten von gewissen *Mucor*-Arten und *Penicillium* innerhalb des faulenden Obstgewebes zu beobachten und nebenbei einige besondere Entwickelungsformen dieser Pilze, mit Bezug der eigentümlichen lokalen Einflüsse auf dieselben, näher prüfen zu können. Hierdurch kam ich in die Lage, gewisse Angaben der diesbezüglichen Literatur genauer festzustellen, beziehungsweise berichtigen zu können, sowie einige neue Momente in der Entwickelungsweise und Formbildung dieser Pilze beobachten zu können.

In dieser Abhandlung will ich mich namentlich mit der Coremiumform von *Penicillium glaucum* näher befassen, um so mehr, da O. Brefeld* in seinen „Botanischen Untersuchungen über Schimmelpilze" von dieser eigenartigen und selteneren Entwickelungsform, welche von der gewöhnlich bekannten Konidienfruktifikation entschieden abweicht, nur eine ungenügende Beschreibung gibt. Auch die Zeichnung O. Brefelds** trifft nicht ganz zu, weshalb ich nebst einigen Habitusbildern von Coremienformen auch analytische Figuren dieser besonderen Bildungsart hier mitzuteilen für gut finde. O. Brefeld sagt, daß in sehr konzentrierter Lösung hier und da bei ganz dichten Mycelien sich die Fruchtträger bündelweise vereinigen und so einen baumähnlichen Pilz darstellen, dessen Stamm (von mir als Coremium-Columella bezeichnet) von den verschlungenen, außergewöhnlich lang gewordenen Fruchtträgern und dessen Krone von den aneinandergedrängten zahllosen sporenbildenden Basidien gebildet wird. Diese Form, die nur die zufällige Folge üppiger Ernährung ist, hat Link und Corda als besondere Gattung (*Coremium glaucum Link = C. vulgare Corda*) beschrieben.

Auch Rabenhorst*** erwähnt, daß die Konidienträger von *Penicillium glaucum* auf besonders günstigem Substrat oft in

* II. Heft: Die Entwickelungsgeschichte von Penicillium. S. 33 (Leipzig 1874).

** L. c. II. Heft. S. 29. Taf. VIII. Fig. 54.

*** Kryptogamenflora von Deutschland, Österreich und der Schweiz. Die Pilze. II. Abteil. S. 66.

solcher Masse entstehen, daß sie zu förmlichen Fruchtkörpern (Coremien) sich zusammenschließen. Leider gibt auch dieser Verfasser keinen Aufschluß darüber, was man in diesem Falle unter „besonders günstigem Substrat“ zu verstehen hat.

Wenn nun mehrere Konidienträger sich der Länge nach zusammenlegen, so entsteht ein — meist — aufrechtes Säulchen, das aus einem aus den Konidienträgern gebildeten Stiel und aus einem meist köpfchenartigen Teil besteht, an welchem die Sporenbildung vor sich geht. Man nennt ein solches Konidienträgerbündel allgemein ein Coremium. In einzelnen Fällen sind also die Konidienträger zu Bündeln vereinigt, wie z. B. bei den Gattungen *Penicilliopsis*, *Emericella* (erythrospora), *Meliola*. Bei *Penicillium glaucum* aber schließen sich die Konidienträger nur stellenweise zu Coremien zusammen.*

Mehrere Arten von *Penicillium* sind durch Neigung zur Coremiumbildung ausgezeichnet; bei einigen tritt dieselbe unregelmäßig, anscheinend abhängig von den Umständen (*P. luteum*, *P. glaucum*), bei anderen wieder sehr regelmäßig und fast unter allen Umständen auf (*P. granulatum*, *P. claviforme*). Auf Zuckergelatine, Würzgelatine, wie überhaupt auf allen Substraten, auf denen *Penicillium Juglandis Weidem.* gut wächst, entstehen häufig weiße Köpfchen (1—2 mm im Durchmesser), coremienartige Bildungen, die in wenigen Tagen grüne Konidien abschnüren, während noch neue weiße Köpfchen hervorsprossen. Auf sechsprozentig sauren gewöhnlichen Gelatinen wächst diese Art besser als auf zweiprozentig alkalischen; auf beiden Substraten ist das Wachstum nicht so intensiv, daß die Coremienform auftreten würde.**

Die bäumchenartigen Coremien von *Penicillium luteum* fallen durch Größe (bis 1 cm hoch) und zierlichen Wuchs auf; diejenigen von den durch BAINIER*** beschriebenen *P. claviforme* weichen insofern von den übrigen ab, als hier zierliche Isaria-artige, anfangs schneeweiße Keulen, deren Kopf sich später unter Ergrünen mit

* ENGLER-PRANTL: Die natürlichen Pflanzenfamilien. I. Teil, 1. Abteil. S. 304.

** C. WEIDEMANN: Morphol. und physiol. Beschreibung einiger Penicilliumarten. — Centralbl. für Bakteriologie etc. II. Abteil. Bd. XIX. S. 685.

*** Bulletin de la Soc. Mycol. de France. 1905. T. XXI. p. 126.

den Konidienträgern bedeckt, gebildet werden. Dieser Pilz, bei dem die Deckenoberfläche steril bleibt und Konidien nur auf dem bis über 1 cm langen keuligen Stroma entstehen, wäre überhaupt wohl zu *Isaria* zu stellen.

Die Coremiumform von *Penicillium glaucum** erscheint meiner Erfahrung gemäß verhältnismäßig seltener und wird durch äußerst üppig verzweigte, dicht und ziemlich parallel verlaufende Luftmycelienbündel gebildet, welche sich aus dem betreffenden Substrat gerade emporrichten; die einzelnen Fäden des Bündels verästeln sich hie und da. Hauptsächlich am oberen Endteil dieser Bündel bilden sich die konidientragenden Fruchtträger. Auf diese Weise kommt ein Columellaartiges, 1.5—2—3 mm hohes, teilweise fest ineinander geflochtenes Mycelbündel zustande, welches ich als „Aëroplectenchym" bezeichnen möchte; dieses wird in größerer Zahl von vorwiegend parallel verlaufenden Fäden gebildet, die sich zu einem Strang vereinigen (Abb. 1, Fig. 1—6). Diese Stränge werden in diesem Falle in ihrem Zusammenhalten von Anastomosenbildungen zwischen den benachbarten Fäden noch mehr verstärkt. Solche Aëroplectenchyme findet man namentlich häufig bei Fruchtträgern von Konidienpilzen.**

Charakteristisch ist für die Coremien von *Penicillium glaucum* das inselförmig isolierte, jedoch herdenweise Auftreten derselben (siehe die Textfigur), welche je nach den obwaltenden Umständen dichter oder spärlicher zugegen sind. Im Gegensatz dazu bildet, wie bekannt, die normale Konidienfruktifikation einen gleichförmigen, feinfädigen und staubenden Überzug auf dem Substrat. Die Fäden der „Columella" bilden am oberen Ende in massenhafter Verzweigung ihre Konidienträger; jedoch hier nicht ausschließlich, weil Konidienfruktifikation längs der Columellafäden — als seitliche Abzweigungen — ebenfalls zu beobachten sind, obzwar viel spärlicher (Abb. 1, Fig. 13, 14).

Infolgedessen, daß die Fäden der Coremium-columella Seitenäste bilden, kann ich mich nicht der Ansicht anschließen, daß

* *Coremium glaucum Link:* Observationes in ordines plantarum naturales, p. 19.

** Manche Arten (*Stilbaceae*) besitzen einen aus parallelen Hyphen zusammengesetzten Fruchtstiel.

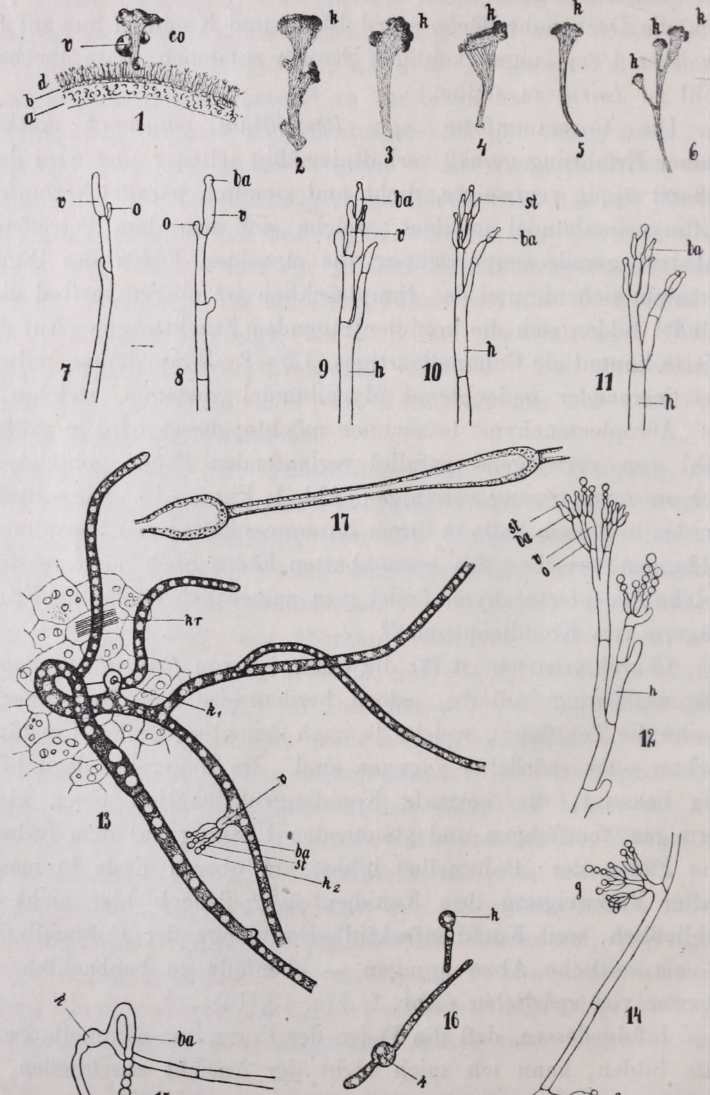



Abb. 1.

**Erklärung zu Abbildung 1.**

**Fig. 1.** Ein Coremium auf einem Gewebstück von der Fruchtschale einer Zitrone; *a* Zitronenschaledurchschnitt, *b* Decke aus dichtgewebten Hyphengeflecht, *a* normale Konidienfruktifikation, in der Mitte erhebt sich das Coremium (*co*) mit drei trüben Wassertropfen (*v*) an seinem Stielteil (schwach vergrößert).

**Fig. 2—6.** Verschiedene Coremiumformen von derselben Zitronenschale, *k* Konidienfruktifikation schwach vergrößert.

**Fig. 7—12.** Stufenweise Entwickelungsstadien der Konidienbildungen aus dem Kopfteil der Coremien von einer Apfelfrucht, zum Teil mit noch jugendlichen Basidien; *h* Hyphen, *v* Endzelle des Fruchtträgers; *o* Seitenzweig der nächst unteren Gliederzelle, *ba* Basidium, *st* Sterigma (Vergrößerung 250).

**Fig. 13.** Basalteil eines Coremiumstielteiles in Verbindung mit Zellen aus dem Fruchtfleisch eines faulen Apfels; $k_1$ Keimungsstelle des Konidiums, ein Hyphenzweig mit reduzierter Konidienfruktifikation, *v* Endzelle, *ba* Basidium, *st* Sterigma, $k_2$ Konidien, *kr* Kristallnadeln (Vergrößerung 250).

**Fig. 14.** Eine Hyphe aus dem Stielteil eines Coremiums von einer Zitronenschale, mit ähnlichen unvollkommen gebildeten Seitenfruktifikationen wie in Fig. 13; *f* einfache und *g* üppigere Fruktifikation (Vergrößerung 225).

**Fig. 15.** Jugendliche Konidienbildung auf unvollkommen entwickeltem Konidienträger von Penicillium glaucum; Keimungsstelle des Konidiums, *ba* ein Hyphenzweig bildet an seinem Ende eine Konidienkette (Vergrößerung 225).

**Fig. 16.** Keimende Konidien von einer Coremiumfruktifikation herstammend (Vergrößerung 300).

**Fig. 17.** Keulig aufgeblasene Gliederzellen einer vegetativen Hyphe aus einer Traubenzuckerkultur (Vergrößerung 250).

diese Columella als aus „verwobenen, außerordentlich langgewachsenen Konidienhältern gebildet“ betrachtet werden muß; sondern diese Fäden sind meiner Ansicht nach als wirkliche, langgestreckte Luftmycelien zu betrachten, an welchen oft durch Bildung von Seitenästen ebenfalls Konidienträger sich zu bilden pflegen. Es muß jedoch bemerkt werden, daß diese lateralen Konidienträger allemal mehr oder weniger rudimentär sind (Abb. 1, Fig. 13 u. 14), nämlich nur wenig (2 — 3 — 5) Basidien bilden. Diese Feststellung scheint umsomehr berechtigt zu sein, weil der Fadenteil der Konidienträger von *Penicillium glaucum* weder in der Form, noch in der Zellengröße verschieden ist von den Mycelfäden des Nährsubstrates, und einzig und allein durch die Gegenwart der die Konidien ablösenden Basidien charakteristisch ist. Mit diesen ist zugleich gegeben, daß die Konidienträger, welche streng genommen bloß als für die Konidienabschnürung transformiete, resp. adoptierte Mycelienfäden zu betrachten sind, im allgemeinen weder einen bestimmten Ursprung, noch eine gewisse Stellung am eigentlichen Mycelium erkennen lassen.* Folglich glaube ich nicht zu irren, wenn ich die Ansicht äußere, daß bei den beobachteten Penicillium-Coremien bloß jene apicale Abzweigungen des Columellaartigen Luftmyceliums richtig als Fruchtträger zu bezeichnen sind, an deren Enden — seltener auf ihren seitlichen Astbildungen — die konidienabschnürenden Basidien auftreten. In diesem Sinne besitzen die Mycelfäden der Columella — zwischen welchen sich auch durchwegs sterile vorfinden — terminale und laterale Fruktifikationen.

Was die Umstände der Coremiumbildung anbetrifft,** beobachtete ich dieselben am häufigsten an reifen Birnen, besonders oft an härteren, noch nicht völlig ausgereiften Winterbirnensorten (Hartenpont, Diel). Vorläufig kann ich diese Erscheinung nur als eine rein empirische Tatsache erwähnen, ohne jegliche Begründung. Das bezügliche Verhalten von Coremien auf den beobachteten Winterbirnen war mir umso auffallender, da es mir einigemal gelang durch Sporenaussaat auf denselben Coremien hervorgehen zu lassen; die Konidien wurden sowohl aus Coremien, wie auch aus normalen Fruktifikationen genommen. Bei Äpfeln und sehr saftigen Birnensorten glückte es mir nur seltener Coremien zu bekommen; dagegen konnte ich sehr gut entwickelte Coremien auf der Schale von Zitronen (*Citrus Limonium Risso*) durch Einschnittinfektionen zur Entwickelung gelangen lassen. Es scheint mir, daß ein bestimmter prozentiger Säuregehalt des zuckerhaltigen Substrates bei der Coremiumbildung nicht ohne Einfluß sei; der

---

* O. Brefeld: l. c. p. 30.

** Ein eigentümliches Vorkommen von Coremiumbildung (*P. glaucum*) verdanke ich Herrn Prof. Ludw. Hemző (1896 Mai), der mir besonders schön, kräftig und gesellig gewachsene Coremien übergab, welche in einer Kristallisierschale auf der Oberfläche von zuckerlosem Schwarzkaffee entstanden sind. Das submers entwickelte Mycel war ein dicht verwebtes lederartiges Gebilde.

Mangel, respektive das seltene Vorkommen von Coremien auf ganz reifen oder überreifen Birnen läßt diese Vermutung aussprechen, sowie auch das Vorkommen jener auf im Reifezustand säuerlichsüßen Apfel- und Birnensorten. Da der Säuregehalt des Saftes in Zitronen auf 7—9 % Zitronensäure steigen kann, ist die Beobachtung C. Weidemanns von Interesse, daß *Penicillium italicum* in 8 % Zitronensäurelösung noch reichlich fruktifiziert. Für *P. glaucum* sind mir vorläufig keine diesbezüglichen Erfahrungen über sein Verhalten bei so hoher Konzentration innerhalb der Zitronenfrucht bekannt. *Penicillium juglandis n. sp. Weidem.* zeigte starkes Wachstum auf 25 % Tanninlösung (!) und häufige Bildung von Coremien.*

Die am schönsten geformten Coremien erhielt ich auf Äpfeln und Zitronen. Die Frage also, ob außer *P. italicum* und *P. olivaceum*** auf Südfrüchten gelegentlich auch noch andere *Penicillium*-arten auftreten und Fäulnis erregen können,*** kann meinerseits dahin beantwortet werden, daß wenigstens *P. glaucum* in gewissen beobachteten Fällen diese Fähigkeit wirklich besitzt† (siehe die Abb. 1, Fig. 1—6 u. Abb. 2).

Entzweigeschnittene, völlig gesund aussehende Zitronen des

---

* C. Weidemann: Morphologische und physiologische Beschreibung einiger Penicillium-Arten (Inauguraldissertation, Kiel 1907).

** Dr. C. Wehmer hat unter den Fäulnispilzen auf Südfrüchten außer *Penicillium glaucum* noch ein *P. olivaceum* und *P. italicum* beschrieben (auf Apfelsinen und Zitronen häufig). Mikroskopisch ist die Unterscheidung der drei Arten oft außerordentlich schwierig. Erstere hat vorwiegend kugelige, die beiden anderen ellipsoidische Sporen. In seiner Abhandlung über die Pilze (Beiträge zur Kenntnis einheimischer Pilze, II. Bd.) findet sich gar keine Erwähnung über Coremienbildung. *P. italicum Wehmer* ist ebenso gemein auf Apfelsinen, Zitronen, Mandarinen und Orangen, wie das *P. glaucum* auf unseren einheimischen Kernobstarten erscheint.

*** *Penicillium digitatum (Fr.) Sacc.* kommt ausschließlich auf Citrusfrüchten vor (J. B. Pole Evans: The Citrus fruit-rot, caused bi Penicillium digitatum. Transvaal Agric. Journ. T. VII. p. 60).

† „Daß unser überall vorkommendes *Penicillium glaucum* auf zerschnittenen oder sonst stark verletzten Südfrüchten wächst, kann nicht überraschen" schreibt O. Schneider-Orelli (Penicillium italicum und P. glaucum als Fruchtparasiten. — Centralblatt für Bakteriologie etc. II. Abteil. Bd. XXI. S. 373).

Handels wurden unter eine Glasglocke in konstant feuchte Luft gebracht und vorher ihre Schalenoberflächen mit Konidien von *P. glaucum* (normaler Fruktifikation) besäet. Nach 8—10 Tagen erschienen auf der Schale ungleich große, isolierte weiße Schimmelflecken von *P. glaucum*, welche sich nach einigen Tagen (6—8) durch Konidienrasen bläulichgrün färbten. Die anfangs isolierten Flecken bildeten nach einigen Tagen eine fast ganz gleichmäßige, dichte Schimmeldecke. Ich ließ den Zersetzungsprozeß fortdauern und während weiterer 6—8 Tagen konnte nur ein fortwährendes Wuchern der Penicilliumvegetation beobachtet werden. Als die Zersetzung in das Stadium trat, daß aus dem Innern der Zitronenschale auf die Oberfläche gelangende, bräunliche, jauchige Tropfen (Abb. 1, Fig. 1) erschienen, sah ich hie und da weiße keulenförmige Coremien entstehen, welche in sehr kurzer Zeit Konidien erzeugten. Es ist also Tatsache, daß sowohl in diesem, wie in allen übrigen Fällen von Coremienbildung vorerst die normale Konidienfruktifikation erscheint und erst später auf derselben Schimmeldecke Coremien sich bilden. Nach den Umständen der Coremienbildung forschend, ergab sich in allen Fällen, daß nur dort sich Coremien bildeten, wo solche Tropfen auf der Oberfläche des Substrates erschienen, und daß die Coremien in mannigfaltigsten Formen auftraten und von ungleicher Größe waren. Der Stielteil (Columella) war bald dünn, bald dick, — gleichmäßig der ganzen Länge nach, oder dicker-dünner am Grunde —, auch bandförmige, fasziationsähnliche Stielformen konnten beobachtet werden. In vielen Fällen waren die Coremien selbst von den obigen mißfarbigen Tropfen bedeckt (Abb. 1, Fig. 1—6).


Abb. 2.
Die Spitzenhälfte einer faulen Zitronenfrucht; die dunkler schattierten Teile sind mehr-weniger faul, mit weißen kugelartigen Erhebungen (*b*) besetzt, welche sich bald zu Coremien gestalten. Das mit *a* bezeichnete Coremium ist in der Fig. 1 der Abb. 1 abgebildet (natürl. Größe).

Eigentümlich ist es, daß nicht nur im Laufe vieler Versuchsreihen (verschiedene Luftfeuchtigkeit, Licht und Dunkel, Temperatur zwischen 15—24° C, Birnen—Äpfel—Zitronen, Einschnitt- und Pinselinfektionen, mit und ohne Luftzufuhr) nicht alle Infektionen Coremien hervorgehen ließen, sondern die Coremienbildung auch in solchen Versuchsreihen nur gelegentlich vorkam, wo die bezüglichen Versuchsobjekte als Substrate zu gleicher Zeit, in derselben Räumlichkeit mit demselben Konidienmaterial usw. gleichmäßig behandelt worden waren.* Sporenkeimungen wurden ferner auf einprozentiger Traubenzuckerlösung vorgenommen, jedoch ebenfalls ohne jegliche Coremienbildung. Es muß jedoch bemerkt werden, daß Traubenzuckerlösungen sich im allgemeinen als sehr gute Nährsubstrate für Penicilliumkulturen erwiesen, was am besten daraus erkennbar war, daß schon nach 2—3 Tagen des Erscheinens der Mycel-Kolonien, Konidienbildung eintrat. In Kulturen von Traubenzuckerlösungen kamen bisweilen Mycelien vor, welche anstatt der gewöhnlichen bekannten, röhrenförmigen und quergegliederten Fäden aus mehr oder weniger auffallend tonnenförmig aufgeblasenen Zellen bestanden (Abb. 1, Fig. 17). Über solche keulige Anschwellungen der Hyphen, welche — wie es scheint — formative Wirkungen der Zufuhr von verschiedenen Zuckerarten sind, findet man auch in den Forschungsergebnissen von EM. BOURQUELOT und H. HÉRISSEY (auf *Penicillium Duclauxii Delacr.*) Angaben.** Die vegetativen Hyphen von *Aspergillus Okazakii n. sp.* zeigen nach K. OKAZAKI auch stellenweise seltener auftretende blasenförmige Anschwellungen und diese bleiben stets hell und farblos.***

Die morphologischen und Größenverhältnisse der Coremienbasidien und Konidien zeigen in den meisten Fällen eine Konkordanz mit jenen der normalen Fruktifikation. Aus meinen Messungen ergeben sich folgende Zahlen:

* Die Versuche wurden im Jahre 1896 (vom 22. Januar bis 25. Februar) und im Jahre 1898 (vom 12. Oktober bis 28. November) ausgeführt. Seither wurden gelegentlich Kontrollversuche mehrmals wiederholt.

** Comptes rendus de l'Acad. des Sciences. Paris 1898. Tome 127, p. 666 (LAFAR in „Handbuch der techn. Mykologie“).

*** Eine neue Aspergillusart und ihre praktische Anwendung. — Zentralblatt für Bakteriologie etc. II. Abteil. Bd. XIX. S. 482. Taf. I. Fig. 5.

| | |
|---|---|
| Endzelle ($v$) | 4—4.5 $\mu$ dick |
| Basidien ($ba$) | 8—12 $\mu \times$ 3—4 $\mu$ |
| Konidien | 3.5 $\mu$ Durchmesser |
| Hyphen | 3.5—4 $\mu$ dick (ausnahmsweise 5—6 $\mu$). |

Die Konidienfolge bei den Coremien ist natürlicherweise dieselbe, wie in Fällen der normalen Fruktifikation, nämlich die Reihenfolge der Konidienentstehung ist von der Spitze des Trägers nach seiner Basis zu gerichtet; die oberste Konidie der Kette ist also die älteste, und die unterste die jüngste. Die konidientragenden Sterigmen sind gewöhnlich merklich kürzer als ihre Tragzellen (Abb. 1, Fig. 12).

Meine Fälle von künstlichen Infektionen beweisen, daß Coremien aus Konidienkeimungen sicherlich hervorgehen können; ob jedoch auch aus Sporen der Asci solche entstehen können, soll durch weitere diesbezügliche Untersuchungen entschieden werden.

Was die feinere Struktur dieser Coremien anbetrifft, so sind diese aus unendlich vielen feinen und sehr lang gezogenen Fäden gebildet, welche in den meisten Fällen am oberen Ende der Coremien divergieren. Seltener kommen verästelte Coremien vor (Figg. 2, 6), in welchen Fällen die endständigen Konidienfruktifikationen an den einzelnen Abzweigungen selbständig erscheinen. Fig. 1 zeigt eine schwach vergrößerte Partie im Durchschnitt der Zitronenschale ($a$) bedeckt mit einem dichtgewebten Hyphengeflecht ($b$), aus welchen die normale Konidienfruktifikation in Form eines gleichmäßigen Überzuges sich erhebt ($d$); im mittleren Teil der Fig. 1 erhebt sich ein Coremium ($co$), an dessen Stielteil sich drei Tropfen finden ($v$); die ausgebreitete Oberfläche ist reichlich mit Konidien bedeckt. Im wesentlichen zeigen die Figg. 2—6 dieselbe Coremiumstruktur, an denen jedoch formelle Abänderungen vorkommen; die auffallendste Verästelung sehen wir in Fig. 6, welche ein dreifaches Coremium repräsentiert, wo der oberste Teil am kräftigsten ausgebildet ist. Die auffallendste divergierende Ausbreitung des Coremiumstielteiles sehen wir in Fig. 4.

Die Figg. 7—12 sind aus dem konidienführenden Teile der Coremien entnommen, und sind dabei in den verschiedensten Entwickelungstadien ausgewählt. Aus diesen Figuren, besonders aus

Fig. 12, kann das relative Verhalten zu der normalen Konidienfruktifikation beurteilt und verglichen werden.

Fig. 13 stammt aus dem Basalteil eines Coremiums, das sich auf einem Apfel bildete; bei $k_1$ ist die Konidie zu sehen, aus welcher die ungleich dicken und sehr lang gezogenen Myceläste entspringen und die Columella des Coremiums bilden; auf dem einen Mycelzweig rechts abwärts ist eine reduzierte Konidien-Fruktifikation zu sehen, wo die drei Basidien direkt auf einer kurzen Ausstülpung des Mycelfadens ($v$) angebracht sind, welche in morphologischer Beziehung der Endzelle in der normalen Konidienfruktifikation entspricht. Die Basidien, Sterigmen und Konidien sind in Form normal gebildet. Fig. 14 ist aus dem Columellateil eines anderen Coremiums (von Zitronenschale) entnommen; der Mycelfaden trägt an zwei Stellen Konidienbildungen, von welchen jene bei $f$ der in Fig. 13 ähnlich ist; während $g$ eine reichlichere Konidienfruktifikation darstellt, deren Basalzelle dem Konidienträger entspricht, der oberhalb drei Endzellen trägt. Die Anordnung der Basidien und der Konidienketten entspricht der normalen. Über solche Fälle, wie sie Fig. 13 und 14 zu sehen sind, weil nämlich die eine oder die andere mittlere Zelle eines langen Mycelfadens Fruchtträger hervorgehen läßt, welche mehr oder weniger abnorm gebildet sind, berichtet LAFAR* von *Botrytis cinerea* mit Abbildung. Eine ähnliche, laterale Konidienfruktifikation ist ferner auch von *Aspergillus Okazakii* bekannt geworden, welche in der Abhandlung des Verfassers auch abgebildet ist.**

Fig. 15 zeigt eine jugendliche Konidienbildung in nächster Nähe einer gekeimten Konidie ($k$); aus der Konidie traten zwei Fadenschläuche in entgegengesetzter Richtung hervor, von welchen der eine (in der Abbildung rechts) einen fast gebrochen-gebogenen, relativ kurzen Ast bildete, welcher an seinem Ende direkt eine Konidienkette entstehen ließ, und sich somit einer Basidie ($ba$) ähnlich verhielt. Es ist zu bemerken, daß in diesem Falle zwischen der gekeimten Konidie und der entstandenen Konidienkette gar keine Scheidewand gebildet worden ist. Schon O. BREFELD

* L. c. Band I, S. 170, Fig. 29.

** Centralblatt für Bakteriologie etc. II. Abteil. Bd. XIX Tafel II. Fig. 6—d.

erwähnt diesbezüglich,* daß „wie Wunderkinder unter den Menschen, beginnt *Penicillium* schon in der ersten Jugend der Natur Früchte zu tragen, zu einer Zeit, wo die Mycelien noch klein und in stärkstem Wachstum begriffen sind". —

Zum Schluß gebe ich eine tabellare Übersicht über Coremien, ihre verschiedenen bekannt gewordenen Substrate, in bezug auf die beobachteten Penicilliumarten. O. BREFELD kann trotz seiner grundlegenden Untersuchungen über *Penicillium* nicht berücksichtigt werden, da er sich nur im allgemeinen in dieser Beziehung äußerte, indem er sagt: Coremien entstehen auf besonders günstigem Substrat.

| Penicilliumart: | Substrat: | Corem. Größe: | Beobachter: |
|---|---|---|---|
| *P. juglandis Weidem.* | Zuckergelatine | — | C. WEIDEMANN |
| „ „ | Würzgelatine | — | „ |
| *P. luteum* | gelegentlich | bis 10 mm | — |
| *P. granulatum* | unter allen Umständen | — | ENGL-PRANTL. N. Pfl. |
| *P. claviforme* | „ „ „ | — | BAINIER |
| *P. glaucum (Link.) Bref.* | Reife Birnen | 1.5 bis 3 mm | K. SCHILBERSZKY |
| „ „ „ | Reife Äpfel | | „ |
| „ „ „ | Zitronen des Handels | | „ |
| „ „ „ | zuckerloser Kaffeedekokt | 2 mm | L. HEMZŐ |

* Botan. Untersuchungen über Schimmelpilze. II. Heft: Die Entwicklungsgeschichte von Penicillium, S. 29.

6.

# RECHERCHES GÉNÉRALES SUR LA QUADRATURE DES SURFACES COURBES.

Par ZOÁRD DE GEŐCZE.

## Deuxième Mémoire.

Dans ce mémoire nous allons rechercher les sections $x =$ const. des surfaces courbes pour lesquelles la quantité $A$ du No. XIV*) existe.

Dans le cas où $A + B$ (voir XVI) a une valeur finie, nous établissons un théorème qui est analogue à celui qui a été énoncé comme le quatrième**) dans le Chap. XIII du travail „Quadrature des surfaces courbes".

### Chapitre III.

### Construction de la figure $t = \varphi^{(1)}(u, v)$.

XVII. Nous allons définir une fonction $\varphi^{(1)}(u, v)$ pour les points de $(w)$ et de $I$, — $(w)$ étant le domaine $[\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2]$ et $I$ désigne l'ensemble des points qui sont en connexion avec lui (voir XI).

a) Construction de $Q$.

Soit $\xi$ une valenr comprise dans l'intervalle $(\xi_1, \xi_2)$. Construisons les domaines

$$(w)' \equiv [\xi_1, \xi; \eta_1, \eta_2] \quad \text{et} \quad (w)'' \equiv [\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2]$$

qui ont été définis dans XI.

---

* Les Nos I—XVI se trouvent dans le premier mémoire.

** La démonstration de ce théorème est parue en hongrois. Les développements du présent mémoire sont des généralisations et des simplifications des développements de ce travail hongrois.

Désignons par $\xi^0$ la figure, qui est formée par la partie de la frontière de $(w)'$ qui est comprise dans $(w)$.

D'après XI on a pour les points de $\xi^0$, $\varphi = \xi$, et $\xi^0$ est aussi la partie de la frontière de $(w)''$ qui est comprise dans $(w)$.*

Soit $(E) \equiv \xi_1, \xi_2, x_1, x_2, x_3, \ldots x_i, \ldots$, un ensemble dénombrable des points de $(\xi_1, \xi_2)$, de plus soit-il partout dense dans $(\xi_1, \xi_2)$. Nous supposons encore que $x_i \neq \xi_1, (\xi_2)$, et que lorsque $i \neq j$, $x_i \neq x_j$.

On a donc $\xi_1 < x_1 < \xi_2$.

Prenons $\xi = x_1$.

Nous obtenons d'après la construction décrite ci-dessus un $[\xi_1, x_1; \eta_1, \eta_2]$, un $[x_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2]$ et une figure $x_1{}^0$, (qui corresponde à $\xi^0$).

Supposons que $x_2$ soit compris dans $(\xi_1, x_1)$.

Nous avons construit les domaines $[\xi_1, \xi; \eta_1, \eta_2]$, $[\xi, \xi_2; \eta_1, \eta_2]$ et la figure $\xi^0$ de $[\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2]$ et de $\xi$.

Remplaçons $[\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2]$ et $\xi$ par $[\xi_1, x_1; \eta_1, \eta_2]$ (que nous avons construit ci-dessus) et par $x_2$. Nous obtenons par une construction analogue deux domaines $[\xi_1, x_2; \eta_1, \eta_2]$, $[x_2, x_1; \eta_1, \eta_2]$ et une figure $x_2{}^0$.

Supposons que $x_3$ soit compris dans $(x_2, x_1)$.

On remplace $[\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2]$ et $\xi$ par le $[x_2, x_1; \eta_1, \eta_2]$ construit ci-dessus et par $x_3$, et on obtient par une construction analogue un $[x_2, x_3; \eta_1, \eta_2]$ un $[x_3, x_1; \eta_1, \eta_2]$ et une $x_3{}^0$.

On voit comment doit-on continuer le procédé.

Nous obtenons ainsi une suite $x_1{}^0, x_2{}^0, \ldots x_i{}^0, \ldots$ des figures.** Considérons la figure qui est formée par la réunion de ces figures. Elle est, comme les $x_i{}^0$ qui la forment, comprise dans $(w)$. Soit $Q$ la partie de sa dérivée qui est comprise dans $(w)$.

---

* D'après X, $(w)$ peut contenir d'autres points que ceux de $(w)'$, $(w)''$ et $\xi^0$.

** Soit $x_j$ un élément de $(E)$. On sait de XI que $(w)$ contient au moins un $[\xi_1, x_j; \eta_1, \eta_2]$ et un $[x_j, \xi_2; \eta_1, \eta_2]$. $x_j{}^0$ est une figure unique. Dans tout ce qui suit nous désignons par $[\xi_1, x_j; \eta_1, \eta_2]$, $([x_j, \xi_2; \eta_1, \eta_2])$ le domaine qui est formé par des points de $(w)$ tels qu'on les peut joindre par des chaines situées d'ailleurs dans $(w)$ avec $\bar{\xi}_1$, $(\bar{\xi}_2)$ sans couper $x_j{}^0$. Soit $x_k > x_j$ un élément de $(E)$. Nous désignons par $[x_j, x_k; \eta_1, \eta_2]$ le domaine qui est formé par les points communs de $[x_j, \xi_2; \eta_1, \eta_2]$ et de $[\xi_1, x_k; \eta_1, \eta_2]$.

b) Définition de $\varphi^{(1)}$ pour les points de $(w)$.

Soit $C$ un point de $(w)$. $C$ appartient ou à $Q$ ou il n'appartient pas à $Q$.

Lorsque $C$ appartient à $Q$ nous posons

$$\varphi^{(1)}(C) = \varphi(C).*$$

Nous allons maintenant définir $\varphi^{(1)}$ pour les points de $(w)$ qui n'appartiennent pas à $Q$.

Le point $C$ de $(w)$ n'appartenant pas à $Q$, un voisinage assez petit et situé dans $(w)$ de $C$ n'appartient pas donc à $Q$. Désignons par $\nu$ la figure qui est formée par les point de $(w)$ qu'on peut joindre par des chaines situées dans $(w)$ avec $C$ sans couper $Q$.

Je dis que $\nu$ est un domaine.

Par sa construction elle satisfait à 1⁰ et à 2⁰ du No. V. Nous allons montrer qu'elle satisfait aussi à 3⁰ du No. V.

Soit $K$ une chaine fermée, située dans $\nu$. $K$ est donc comme $\nu$ situé dans $(w)$. Si $\widehat{K}$ (l'aire renfermée par $K$) contiendrait d'autres points que ceux de $\nu$, $\widehat{K}$ contiendrait au moins un point de $Q$. Donc $\widehat{K}$ contiendrait au moins un point $A$ qui est point d'un certain $x_j^0$.

D'après ce qui précéde la frontière de $[\xi_1, x_j; \eta_1, \eta_2]$ est formée par des points de $\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$ et par $x_j^0$, — les points de cette frontière qui sont situés dans $(w)$ forment $x_j^0$.

$\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$ sont à l'extérieur de $\widehat{K}$, $A$ est dans $\widehat{K}$. Donc (voir IV.) la frontière coupe $K$, et les points communs de la frontière et de $K$ sont situés comme $K$ dans $(w)$. Ainsi $K$ contiendrait au moins un point de $x_j^0$ c'est à dire un point de $Q$, ce qui est contraire à la hypothèse. Donc $\nu$ est un domaine.

La frontière de $\nu$ contient évidemment points de $(w)$, ces points sont d'après la définition de $\nu$ points de $Q$. Soient $A$ et $B$ de tels points. Pour ces points $\varphi^{(1)}$ est déjà définie, on a pour eux $\varphi^{(1)} = \varphi$.

Je dis que

$$\varphi^{(1)}(A) = \varphi^{(1)}(B).$$

Lemme. Soient $x_j$ et $x_k$ éléments de $(E)$. Soit $D$ un point de $x_j^0$ et $F$ un point de $x_k^0$. Une chaine quelconque qui dans

* On a donc pour les points de $x_i^0$ $\varphi^{(1)} = x_i$.

$(w)$ joint $D$ et $F$ coupe chaque $x_i^0$ dont le $x_i$ est compris entre $x_j$ et $x_k$. — Ce fait s'ensuit facilement de la construction des $x_i^0$.

Supposons que

$$|\varphi^{(1)}(A) - \varphi^{(1)}(B)| = d > 0.$$

La fonction $\varphi$ est continue dans $P$ ($P$ étant le rectangle dans lequel varie le point $uv$). Il existe donc un $\varrho > 0$ de manière que $G$ et $H$ étant des points de $P$ tels que $\overline{GH} < \varrho$ d'ailleurs quelconques on ait

$$|\varphi(G) - \varphi(H)| < \frac{d}{8}.$$

Choisissons dans $v$ deux points $A'$ et $B'$ de manière que $\overline{AA'}$ et $\overline{B'B}$ soient comprises dans $(w)$ et que

$$\overline{AA'} < \varrho, \quad \overline{B'B} < \varrho.$$

$A$ est un point de $Q$. On peut donc choisir un point $A''$ qui est situé sur une $x_j^0$, de manière que $\overline{A''A}$ est situé dans $(w)$ et que $\overline{A''A} < \varrho$.

De même: on peut choisir un point $B''$ qui est situé sur un $x_k^0$, de manière que $\overline{BB''}$ est située dans $(w)$ et que $\overline{BB''} < \varrho$.

On a donc

$$|x_k - x_j| > \frac{6d}{8}.$$

Joignons $A'$ et $B'$ par une chaine $K$ qui est située dans $v$. La chaine $K'$ qui est la réunion des $\overline{A''A}$, $\overline{AA'}$, $K$, $\overline{B'B}$, $\overline{BB''}$ coupe d'après le lemme chaque $x_i^0$ dont le $x_i$ est tel que

$$\left| x_i - \frac{x_j + x_k}{2} \right| < \frac{d}{8}.$$

Mais on a

$$\varphi(A'') = x_j, \quad \varphi(B'') = x_k$$

et la variation de $\varphi$ sur chacune des distances $\overline{A''A}$, $\overline{AA'}$, $\overline{B'B}$, $\overline{BB''}$ est plus petite que $\frac{d}{8}$. Donc aucun point commun de $K'$ et $x_i^0$ ne peut être situé sur aucune des distances $\overline{A''A}$, $\overline{AA'}$, $\overline{B'B}$, $\overline{BB''}$. Ainsi $K$ couperait $x_i^0$, mais cela est impossible car $K$ est dans $v$.

On a donc

$$\varphi^{(1)}(A) = \varphi^{(1)}(B).$$

Nous posons pour les points $C$ de $\nu$

$$\varphi^{(1)}(C) = \varphi^{(1)}(A) = \varphi^{(1)}(B) = \text{const.}$$

en remarquant que sur la partie de la froutière de $\nu$ qui est située dans $(w)$ on a

$$\varphi^{(1)} = \varphi = \text{const.}$$

c) Définition de $\varphi^{(1)}$ pour les points de I.

I est formé (voir XI) par $\bar{\xi}_1$, $\bar{\xi}_2$, $\bar{\eta}_1$, $\bar{\eta}_2$.

Pour les points de $\bar{\xi}_1$, $(\bar{\xi}_2)$ nous posons

$$\varphi^{(1)} = \xi_1, (\xi_2).$$

Nous allons définir $\varphi^{(1)}$ pour les points de $\bar{\eta}_1$. Soit $C$ un point de $\bar{\eta}_1$. Soit $\varepsilon > 0$.

L'ensemble $(E)$ étant partout dense dans $(\xi_1, \xi_2)$ on peut évidemment choisir des points de $(E)$

$$x_n^{(2)} < x_n^{(3)} < \cdots < x_n^{(h)} < \cdots < x_n^{(n-1)}, \qquad (n = 3, 4, \ldots,$$

de manière qu'en posant

$$x_n^{(1)} = \xi_1, \quad x_n^{(n)} = \xi_2$$

on ait

$$\left| (x_n^{(h+1)} - x_n^{(h)}) - \frac{\xi_2 - \xi_1}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{n}, \quad (n = 3, 4, \ldots, h = 1, \ldots n-1).$$

Considérons les domaines

$$[x_n^{(1)}, x_n^{(2)}; \eta_1, \eta_2], \ldots \quad [x_n^{(h)}, x_n^{(h+1)}; \eta_1, \eta_2], \ldots \quad [x_n^{(n-1)}, x_n^{(n)}; \eta_1, \eta_2].$$

On conclut de XI que $C$ est ou en connexion avec l'un et avec l'un seul de ces domaines ou il n'est pas en connexion avec aucun de ces domaines. Dans ce dernier cas on conclut de XI que $C$ sera en connexion avec l'un et avec l'un seul des domaines

$$[x_n^{(1)}, x_n^{(3)}; \eta_1, \eta_2], [x_n^{(2)}, x_n^{(4)}; \eta_1, \eta_2], [x_n^{(3)}, x_n^{(5)}; \eta_1, \eta_2], \ldots$$

Donc il existe pour chaque $n = 3, 4, \ldots$, un domaine

$$[x_{j_n}, x_{k_n}; \eta_1, \eta_2]$$

de manière que $C$ est en connexion avec lui, $x_{j_n}$ et $x_{k_n}$ étant des éléments tels de $(E)$ que

$$x_{j_n} < x_{k_n}, \quad x_{k_n} - x_{j_n} < 2 \cdot \frac{\xi_2 - \xi_1 + \varepsilon}{n}.$$

On a donc

$$\lim x_{j_n} = \lim x_{k_n} \quad (n = \infty).$$

Nous posons $\varphi^{(1)}(C)$ égale à cette limite.*

Nous définissons de la même manière $\varphi^{(1)}$ pour les points de $\overline{\eta}_2$.

d) La fonction $\varphi^{(1)}$ est continue dans $(w)$.

Soit $C$ un point de $(w)$. On doit démontrer que pour chaque $\delta > 0$, il existe un voisinage de $C$ situé dans $(w)$, de manière que pour un point $D$ quelconque de ce voisinage

$$|\varphi^{(1)}(C) - \varphi^{(1)}(D)| < \delta$$

$C$ appartient ou à $Q$ (voir a)) ou il n'appartient pas à $Q$.

Lorsque $C$ appartient à $Q$ on a (voir b))

$$\varphi^{(1)}(C) = \varphi(C).$$

Considérons un voisinage de $C$ tel qu'il soit compris dans $(w)$. Soit $D$ un point de ce voisinage.

Je dis que $\varphi^{(1)}(D)$ est égale à $\varphi(E)$, $E$ étant un point du même voisinage.

Car $D$ appartient ou à $Q$ ou il n'appartient pas à $Q$.

Lorsque $D$ appartient à $Q$ on a (voir b))

$$\varphi^{(1)}(D) = \varphi(D)$$

donc $E \equiv D$.

Lorsque $D$ n'appartient pas à $Q$ il est un point d'un certain $\nu$ (voir b)). $C$ appartient à $Q$. Donc une chaine qui dans le voisinage considéré joint $D$ avec $C$, coupe au moins en un point $E$ la frontière de $\nu$, et on a (voir b)

$$\varphi^{(1)}(D) = \varphi^{(1)}(E) = \varphi(E).$$

Donc en prenant le voisinage aussi petit que pour un point $E$ quelconque du voisinage on ait ($\varphi$ est continue)

$$|\varphi(C) - \varphi(E)| < \delta$$

on aura

$$|\varphi^{(1)}(C) - \varphi^{(1)}(D)| < \delta.$$

Lorsque $C$ n'appartient pas à $Q$ il sera un point d'un certain $\nu$ de b).

D'après b) pour les points $D$ d'un voisinage de $C$ situé dans $\nu$ et ainsi situé aussi dans $(w)$

$$\varphi^{(1)}(C) = \varphi^{(1)}(D).$$

---

* On prouve facilement que cette limite ne dépend que de $C$ (les $x_i^0$ étant déjà fixées).

On aura donc pour les points $D$ de ce voisinage

$$|\varphi^{(1)}(C) - \varphi^{(1)}(D)| < \delta.$$

e) Soit $C$ un point de $I$.

Soit $K$ une chaine qui issue d'un point de $(w)$ va dans $(w)$ jusqu'à $C$. La valeur de $\varphi^{(1)}$ sur la chaine varie continument car $\varphi^{(1)}$ est continue dans $(w)$. Mais je dis que: la limite de ces valeurs pour le point $C$ existe et elle est égale à $\varphi^{(1)}(C)$.

Considérons les $[x_{j_n}, x_{k_n}; \eta_1, \eta_2]$ de c). $K$ est fixe.

On peut donc choisir pour chaque $n \geqq 3$ und point $D_n$ de $K$, de manière que $D_n$ et la partie $K_n$ de $K$ qui est comprise entre $D_n$ et $C$ soient comprises dans $[x_{j_n}, x_{k_n}; \eta_1, \eta_2]$. De plus on peut choisir les $D_n$ que manière de $K_n$ contienne $K_{n+1}$, $(n = 3, 4, \ldots)$.

D'après la construction de $\varphi^{(1)}$ on a pour les points de $[x_{j_n}, x_{k_n}; \eta_1, \eta_2]$ et pour les points qui sont en connexion avec lui

$$\varphi^{(1)} \geqq x_{j_n}, \quad \varphi^{(1)} \leqq x_{k_n},$$

(voir le lemme 1⁰ du No. XVIII).

Soit $D^{(n)}$ un point de $K_n$. On aura donc

$$|\varphi^{(1)}(D^{(n)}) - \varphi^{(1)}(C)| \leqq x_{k_n} - x_{j_n}.$$

Mais (voir c))

$$\lim x_{k_n} = \lim x_{j_n} \quad (n = \infty).$$

On aura donc

$$\lim_{n=\infty} \varphi^{(1)}(D^{(n)}) = \varphi^{(1)}(C),$$

ce que démontre la proposition.

—. Nous avons donc défini (pour les points de $(w)$ et de $I$) une fonction $\varphi^{(1)}(u, v)$. A cette fonction corresponde une figure $t = \varphi^{(1)}(u, v)$, dans l'espace $u, v, t$.

XVIII. Soit $\xi$ une valeur comprise dans $(\xi_1, \xi_2)$. Désignons par $\xi'$ la projection orthogonale de la section $t = \xi$ de $t = \varphi^{(1)}$ sur le plan $uv$.

Nous allons démontrer que $\xi'$ admette des chaines.

Lemmes.

1⁰. Soit $x_j$ un élément de $(E)$ (voir XVII). On a pour les points de $[\xi_1, x_j; \eta_1, \eta_2]$ et pour les points qui sont en connexion avec lui

$$\varphi^{(1)} \geqq \xi_1, \quad \varphi^{(1)} \leqq x_j.$$

De même pour les points de $[x_j, \xi_2; \eta_1, \eta_2]$ et pour les points qui sont en connexion avec lui

$$\varphi^{(1)} \geqq x_j, \quad \varphi^{(1)} \leqq \xi_2.$$

Ces faits s'ensuivent facilement de la construction de $\varphi^{(1)}$. $x_j$ et $x_k > x_j$ étant des éléments de $(E)$, on a donc pour les points de $[x_j, x_k; \eta_1, \eta_2]$ et pour les points qui sont en connexion avec lui

$$\varphi^{(1)} \geqq x_j, \quad \varphi^{(1)} \leqq x_k.$$

2⁰. Soit $K$ une chaine fermée et située dans $(w)$.

D'après d) de XVII $\varphi^{(1)}$ est continue sur $K$. Soient $m$ et $M$ le minimum respectivement le maximum de $\varphi^{(1)}$ sur $K$. Soient $x_j$ et $x_k$ des éléments tels de $(E)$ que $x_j < m$, $x_k > M$. D'après 1⁰ $K$ est comprise dans $[\xi_1, \xi_k; \eta_1, \eta_2]$ et dans $[x_j, \xi_2; \eta_1, \eta_2]$. De même pour $\widehat{K}$.

3⁰. Soit $K$ une chaine simple qui étant située d'ailleurs dans $(w)$ joint deux points de $I$ dont aucun n'appartient pas à $\overline{\xi}_2$. Soit $M$ le maximum de $\varphi^{(1)}$ sur $K$ et soit $x_k$ un élément de $(E)$ tel que $M < x_k$.

Par $K$ $(w)$ sera décomposé en deux domaines, dont l'un sera tel (voir XI) que l'ensemble des points qui sont en connexion avec lui ne contient aucun point de $\overline{\xi}_2$. Ce domaine sera compris dans $[\xi_1, \xi_k; \eta_1, \eta_2]$. — On conclut ce fait facilement de 1⁰.

a) Construction de $w^{(1)}$.

Soit $w^{(1)}$ la figure qui est formée par des points tels de $(w)$ qu'on les peut joindre avec $\overline{\xi}_1$ (par des chaines situées d'ailleurs dans $(w)$) sans couper $\xi'$.

Je dis que $w^{(1)}$ est un domaine.

En effet d'après sa construction elle satisfait à 1⁰ du No. V. On démontre comme dans XI b) dans un cas analogue qu'elle satisfait à 2⁰ du No. V.

Mais elle satisfait aussi à 3⁰ du No. V.

Soit $K$ une chaine fermée et située dans $w^{(1)}$. On a pour ses points $\varphi^{(1)} < \xi$, de plus la limite supérieure de $\varphi^{(1)}$ sur $K$ est plus petit que $\xi$, car dans le cas contraire il existerait sur $K$ au moins un point de $\xi'$. On peut donc choisir un élément $x_k$ de $(E)$ tel que $x_k < \xi$ et que sur $K$ $\varphi^{(1)} < x_k$.

D'après le lemme 2⁰ $\widehat{K}$ est située dans $[\xi_1, x_k; \eta_1, \eta_2]$.

Mais d'après le lemme 1° et d'après la construction de $w^{(1)}$ $[\xi_1, x_k; \eta_1, \eta_2]$ et ainsi aussi $\widehat{K}$ appartient à $w^{(1)}$. Donc $w^{(1)}$ est un domaine.

b) Le domaine $w^{(1)}$ est en général non simple (voir X); soit $f$ sa frontière. Une chaine qui issue d'un point de $w^{(1)}$ va jusqu'à un point qui n'appartient pas à $w^{(1)}$ coupe $f$, soit $C$ son premier point sur $f$.

Nous disons que $C$ est adjoint à $w^{(1)}$. •

Soit $II$ l'ensemble de tous les $C$. On prouve facilement que dans un voisinage quelconque d'un point quelconque de $f$ il existe des points de $II$. La dérivée de $II$ est donc $f$ et $II$ comme $f$ (voir V) admette des chaines.

Soit $K$ une chaine simple qui étant située d'ailleurs dans $w^{(1)}$ joint deux points $A$ et $B$ de $II$. Par $K$ $w^{(1)}$ sera décomposé en deux domaines $\alpha$ et $\beta$.

Soit $II'$ la figure qui est formée par les points qui sont situés sur la frontière vraie de $\alpha$ et qui sont adjoints à $\alpha$.

Soit $II''$ la figure analogue pour $\beta$.

On prouve par des exemples que $II'$ et $II''$ peuvent avoir des points communs. La réunion de $II'$, $II''$ $A$ et $B$ est $II$.

Soit $C$ un point de $II'$, $D$ un point de $II''$ et soit $E$ un point de $K$ situé dans $w^{(1)}$. Joignons $C$ et $E$ par une chaine simple qui est d'ailleurs située dans $\alpha$, et joignons $D$ et $E$ par une chaine simple qui est d'ailleurs située dans $\beta$.

La réunion $K'$ de ces deux chaines décompose $w^{(1)}$ en deux domaines, dont l'un $\gamma$ contient la partie de $K$ qui va de $A$ jusqu'à $E$, l'autre $\delta$ contient la partie de $K$ qui va de $E$ jusqu'à $B$. $A$ est adjoint à $\gamma$, $B$ est adjoint à $\delta$.*

Je dis que $II$ contient $\bar{\xi}_1$, points de $\bar{\eta}_1$ et de $\bar{\eta}$ et points de $\xi'$.

D'après la construction de $w^{(1)}$ $II$ contient $\bar{\xi}_1$, il contient aussi points de $\xi'$. Spécialement les points de $II$ qui sont situés dans $(w)$ sont points de $\xi'$.

---

* On voit que ces considérations sont valables à un domaine quelconque. Nous remarquons que $II'$ et $II''$ dépendent de $A$, $B$ et aussi de $K$. De plus: il peut arriver que $A$ est aussi adjoint à $\delta$ et $B$ à $\gamma$.

On prouve comme dans XI b) dans un cas analogue, que $II$ contient une infinité de points de $\bar{\eta}_1$ et de $\bar{\eta}_2$, qui ne sont pas des points limites pour $\bar{\xi}_1$ et $\xi'$.

Je dis que lorsque $A$ et $B$ sont points de $\xi'$, l'une des figures $II'$, $II''$ ne contient que points de $\xi'$ quelque soit $K$.

Supposons que $II'$ contienne un point $C$ et que $II''$ contienne un point $D$ qui ne sont pas points de $\xi'$. $C$ et $D$ appartiennent donc à la figure $\bar{\xi}_1 + \bar{\eta}_1 + \bar{\eta}_2$ (réunion de $\bar{\xi}_1$, $\bar{\eta}_1$ et $\bar{\eta}_2$).

Choisissons $E$ et construisons $K'$. $K'$ décompose $(w)$ en deux domaines ($C$ et $D$ sont évidemment en connexion avec $(w)$), dont l'un $\varepsilon$ sera tel qu'il ne contient aucun point de $\bar{\xi}_2$ parmi les points qui sont en connexion avec lui (voir X). On prouve facilement que l'un des domaines $\gamma$ et $\delta$ sera compris dans $\varepsilon$. Soit $\gamma$ ce domaine. $A$ est donc ou un point de $\varepsilon$ ou il est en connexion avec $\varepsilon$ (dans ce cas il est situé sur la frontière vraie de $\varepsilon$).

Mais $K'$ d'après sa construction ne contient aucun point de $\xi'$. Donc (voir le lemme $3^0$) pour les points de $\varepsilon$ et pour les points qui sont en connexion avec lui $\varphi^{(1)} < \xi$. On a donc $\varphi^{(1)}(A) < \xi$, ce qui est contraire à la hypothèse.

Donc l'une des figures $II'$, $II''$ ne contient que points de $\xi'$ quelque soit $K$.

c) Soit $\delta > 0$. Soient $\alpha$ et $\beta$ points de la frontière de $w^{(1)}$ et situés dans $(w)$. Je dis qu'il existe une chaine qui joint $\alpha$ et $\beta$, dont les côtés sont plus petits que $\delta$ et dont les sommets sont points de $\xi'$ situés sur la frontière de $w^{(1)}$.

Soit $A$ un point de $II$ situé dans $(w)$ et tel que $\overline{A\alpha} < \delta$, et soit $B$ un point de $II$ situé dans $(w)$ et tel que $\overline{B\beta} < \delta$ (voir b)).

D'après b) pour $A$ et $B$ il existe une telle chaine dont l'existence pour $\alpha$ et $\beta$ est à démontrer.

La réunion de $\overline{\alpha A}$ de cette chaine et de $\overline{B\beta}$ sera une chaine qui satisfait à l'énoncé.

d) Parties de $\xi'$.

Soit $w^{(2)}$ la figure qui est formée par des points de $(w)$ tels qu'on les peut joindre par des chaines situées d'ailleurs dans $(w)$ avec $\bar{\xi}_2$ sans couper $\xi'$.

Pour $w^{(2)}$ on a des relations analogues à celles qui ont été établies pour $w^{(1)}$.

Je dis que les points de $(w)$ qui ne sont pas points de $w^{(1)} + w^{(2)}$ appartiennent à $\xi'$.

Soit $A$ un tel point, on ne le peut donc joindre avec $\xi_1$ ou avec $\xi_2$ (par des chaines situées d'ailleurs dans $(w)$) sans couper $\xi'$.

Supposons que $\varphi^{(1)}(A) < \xi$. D'après le lemme $1^0$ $A$ est donc compris dans un $[\xi_1, x_k; \eta_1, \eta_2]$ tel que $\varphi^{(1)}(A) < x_k < \xi$.

D'après le lemme $1^0$ ce domaine ne contient aucun point de $\xi'$. On peut donc construire dans ce domaine une chaine qui joigne $A$ avec $\xi_1$. Cette chaine ne couperait pas $\xi'$, et c'est contraire à la hypothèse. Donc $\varphi^{(1)}(A) < \xi$ est impossible et on démontre d'une manière analogue que $\varphi^{(1)}(A) > \xi$ est aussi impossible. On a donc $\varphi^{(1)}(A) = \xi$ c'est à dire que $A$ appartient à $\xi'$.

$\xi'$ contient nécessairement points de $(w)$, elle peut aussi contenir points de $I$.

Nous répartissons les points de $\xi'$ en quatre figures $1^0, 2^0, 3^0, 4^0$. $1^0$, $2^0$, $3^0$ ne contiendront que les points de $\xi'$ qui sont situés dans $(w)$.

$1^0$. sera formée par les points de la frontière de $w^{(1)}$ (situés dans $(w)$). Cette figure existe nécessairement.

$2^0$. sera formée par les points de la frontière de $w^{(2)}$ (situés dans $(w)$). Cette figure existe nécessairement. $1^0$ et $2^0$ peuvent avoir des points communs.

$3^0$. sera formée par les points de $\xi'$ (situés dans $(w)$) qui n'appartiennent pas à la figure $1^0 + 2^0$. Cette figure n'existe pas nécessairement, mais elle peut exister (voir X) même dans le cas où $1^0$ et $2^0$ coïncident.

On voit que la figure $1^0 + 2^0 + 3^0$ contient tous les points de $\xi'$ situés dans $(w)$.

$4^0$. sera formée par les points de $\xi'$ qui sont points de $I$. Cette figure n'existe pas nécessairement.

e) Nous allons maintenant montrer que $\xi'$ admette des chaines.

Convenons de dire qu'une figure $\alpha$ qui est comprise dans une figure $\beta$, admette des chaines dans $\beta$, lorsque $A$ et $B$ étant deux points quelconques de $\alpha$ il existe à chaque $\delta > 0$ une chaine qui joint $A$ et $B$ qui appartient à $\delta$ (voir I) et dont les sommets sont points de $\beta$.

Nous supposons que les figures $3^0$ et $4^0$ existent, on verra facilement les modifications causées par le cas contraire. On a vu dans c) que $1^0$ admette des chaines dans $\xi'$. De même pour $2^0$.

Soit $A$ un point de $3^0$. Soit $\nu$ la figure qui est formée par des points tels de $(w)$ qu'on les peut joindre (par des chaines situées dans $(w)$) avec $A$, sans couper $1^0 + 2^0$. On prouve facilement que $\nu$ est un domaine simple et que sa frontière contient une infinité des points de $1^0 + 2^0$.

Donc l'une au moins des figures $1^0 + \nu$, $2^0 + \nu$ admette des chaines dans $\xi'$.

Construisons une chaine qui étant située dans $(w)$ joint un point de $w^{(1)}$ avec un point de $w^{(2)}$. Parcourons-la de $w^{(1)}$ vers $w^{(2)}$, soit $K$ sa partie qui est comprise entre son dernier point sur $1^0$ et entre son premier point sur $2^0$.* $K$ appartient évidemment (voir d) à $\xi'$ et on voit que $1^0 + 2^0 + K$ admette des chaines dans $\xi'$. Donc $1^0 + 2^0 + K + (1^0 + \nu)$ ou $1^0 + 2^0 + K + (2^0 + \nu)$ admette des chaines des $\xi'$. $3^0$ est formée par certaines $\nu$, donc $1^0 + 2^0 + 3^0$ admette des chaines dans $\xi'$.

Soit $A$ un point de $4^0$. Ou bien un voisinage quelconque de $A$ contient points de $1^0 + 2^0 + 3^0$ et il est évident que dans ce cas $1^0 + 2^0 + 3^0 + A$ admette des chaines dans $\xi'$, ou il existe pour $A$ un voisinage de manière que ce voisinage ne contient aucun point de $1^0 + 2^0 + 3^0$.

Dans ce cas il est évident qu'on peut joindre $A$ ou avec $\bar{\xi}_1$ ou avec $\bar{\xi}_2$ par une chaine située d'ailleurs dans $(w)$ sans couper $\xi'$ que dans $A$. Dans ce cas d'après b) $1^0 + A$ ou $2^0 + A$ admette des chaines dans $\xi'$. Donc aussi dans ce cas $1^0 + 2^0 + 3^0 + A$ admette des chaines dans $\xi'$. $4^0$ est formée par les $A$. Donc $1^0 + 2^0 + 3^0 + 4^0$ admette des chaines dans $\xi'$. Mais la figure $1^0 + 2^0 + 3^0 + 4^0$ n'est autre chose que $\xi'$. Donc $\xi'$ admette des chaines dans $\xi'$. C'est-à-dire que $\xi'$ admette des chaines.

XIX. L'intervalle $(\xi_1, \xi_2)$ contient un ensemble de se-

---

* On prouve facilement, que la figure qui est formée par les points communs de la chaine et de $1^0$, $(2^0)$ est fermée.

conde catégorie que nous désignons par $(\xi_1)$ tel que $\xi$ étant un point de $(\xi_1)$, $\xi'$ ($\xi'$ est la projection orthogonale de la section $t = \xi$ de $t = \varphi^{(1)}$ sur le plan $uv$) aura les propriétés suivantes.

1⁰. Elle ne contient qu'au plus un point de $\overline{\eta}_1$. De même pour $\overline{\eta}_2$.

2⁰. $C$ étant l'un quelconque de ses points, dans un voisinage quelconque de $C$ il existe des points $D$, $E$ de $(w)$ tels que

$$\varphi^{(1)}(C) > \varphi^{(1)}(D), \quad \varphi^{(1)}(C) < \varphi^{(1)}(E).$$

3⁰. Sa mesure intérieure (dans le sens de M. JORDAN) est égale à zéro.

4⁰. On a pour ses points $\varphi^{(1)} = \varphi$. C'est-à-dire, la section $t = \xi$ de la figure $t = \varphi^{(1)}$ est située sur la surface $t = \varphi$.

Démonstration.

Désignons par $(E_1)$ l'ensemble des $\xi$ tels que $\xi'$ contient plus qu'un point de $\overline{\eta}_1$. Soit $(E_2)$ l'ensemble analogue relativement à $\overline{\eta}_2$.

Désignons par $(E')$ l'ensemble des $\xi$ tels que $\xi'$ contient au moins un point $C$ tel qu'il existe un voisinage de $C$, de manière que pour un point $D$ quelconque qui est situé dans $(w)$ de ce voisinage on ait ou

$$\varphi^{(1)}(C) - \varphi^{(1)}(D) \geqq 0$$

ou

$$\varphi^{(1)}(C) - \varphi^{(1)}(D) \leqq 0.$$

Désignons par $(E'')$ l'ensemble des $\xi$ tels que la mesure intérieure de $\xi'$ est plus grande que zéro.

— On prouve par des exemples que ces ensembles n'existent pas nécessairement.

Je dis que chacun de ces ensembles est (s'il existe) au plus dénombrable.

a) $(E_1)$ et $(E_2)$ sont au plus dénombrables.

Soit $\xi$ un élément de $(E_1)$. $\xi'$ contient donc au moins deux points $A$ et $B$ de $\overline{\eta}_1$. Soit $K$ une chaine simple qui étant située d'ailleurs dans $(w)$ joint $A$ et $B$. Par $K$ $(w)$ sera décomposé en deux domaines, dont l'un sera tel que sa frontière vraie ne contient que des points de $\overline{\eta}_1$ parmi les points qui sont en connexion avec lui (voir XI). Soit $\overline{\xi}$ la figure qui est formée par ces points de $\bar{\eta}_1$. On conclut de XVIII que $\bar{\xi}$ appartient à $\xi'$, de plus les figures $\bar{\xi}$ (qui correspondent aux diverses $\xi$ de $(E_1)$) n'ont deux à deux aucun point commun. Mais du théorème qui va suivre on conclut tout à coup que l'ensemble des $\bar{\xi}$ est au plus dénombrable. Ainsi $(E_1)$ et de même $(E_2)$ est au plus dénombrable.

Théorème.

Soit $w$ un domaine simple et soit $f$ sa frontière. Désignons par $I$ l'ensemble des points qui sont en connexion avec lui. Établissons dans $I$ un ordre de parcours. Soient $H'$ et $H''$ points de $I$. Désignons par $\widehat{H'H''}$ l'ensemble des points $H$ de $I$ tels que l'ordre de $H', H'', H$ soit $H', H, H''$. Un ensemble des $\widehat{H'H''}$ dont les éléments deux à deux n'ont aucun point commun est au plus dénombrable.

Pour démontrer ce théorème, nous allons construire un ensemble sous ensemble de $I$ ayant les propriétés suivantes.

A) Il est dénombrable partout dense dans $I$.

B) $H_1$ et $H_2$ étant des points quelconques de $I$, $\widehat{H_1H_2}$ contient points de l'ensemble.

Nous pouvons supposer que $w$ est compris dans $P$ ($P$ est le rectangle de variation du point $uv$).

Soit $U_{l_s} V_{m_s}$ une suite des divisions. Considérons les rectangles de la $s^{\text{ième}}$ division, qui contiennent points de $(w)$ et au moins un point de $f$.

Soit $\alpha_{i,j}$ un tel rectangle, nous désignons par $\bar{\alpha}_{i,j}$ le domaine rectangulaire dont la frontière est le contour de $\alpha_{i,j}$.

Par hypothèse $\alpha_{i,j}$ contient points de $w$, donc $\bar{\alpha}_{i,j}$ en contient aussi. Soit $A$ un point commun de $\bar{\alpha}_{i,j}$ et de $w$.

Soit $v$ la figure qui est formée par les point de $\bar{\alpha}_{i,j}$, tels qu'on les peut joindre avec $A$ par des chaines situées dans $\bar{\alpha}_{i,j}$ sans couper $f$. $v$ est donc compris dans $w$.

On prouve facilement que $v$ est un domaine simple, de plus que sa frontière contient des points parmi les points qui sont en connexion avec lui.

Soit $H''_{i,j}$ un tel point.

$\bar{\alpha}_{i,j}$ peut contenir encore d'autres points de $w$ que ceux de $v$, on prouve facilement que ces points forment des domaines comme $\nu$. Soient $\mu$, $\lambda$, ... ces domaines. On sait que leur ensemble est au plus dénombrable.* Choisissons pour chacun d'eux un point $H^{\mu}_{i,j}$, $H^{\lambda}_{i,j}$, ..., de la même manière que nous avons choisi $H^{\nu}_{i,j}$ pour $\nu$.

L'ensemble des points $H^{\nu}_{i,j}$, $H^{\mu}_{i,j}$, ..., est donc au plus dénombrable. L'ensemble $Q_s$ qui est la réunion de ces ensembles (dont le nombre est au plus $l_s \cdot m_s$) est aussi au plus dénombrable. $Q_s$ contient au moins un point, donc l'ensemble $(F)$ qui est la réunion des $Q_1$, $Q_2$, ... est dénombrable. Je dis qu'il satisfait à A) et à B).

Il satisfait à A).

En effet soit $A$ un point de $I$ et soit $\delta > 0$. Lorsque $s$ est assez grand tous les rectangles de la $s^{\text{ième}}$ division qui contiennent $A$ ($A$ peut être situé dans 1, 2 ou dans 4 rectangles) seront compris dans le cercle dont le centre est en $A$ et dont le rayon est égal à $\delta$. Mais $Q_s$ a évidemment au moins un point $E$ dans l'un au moins de ces rectangles. On a $\overline{AE} < \delta$ et $E$ est un point de $(F)$, donc $(F)$ est partout dense dans $I$.

Nous allons montrer que $(F)$ satisfait à B).

Joignons $H_1$ et $H_2$ par une chaine simple $K$, qui est d'ailleurs située dans $w$. Par $K$ $w$ sera décomposé en deux domaines dont l'un $\pi$ sera tel que les points de $\widehat{H_1 H_2}$ seront en connexion avec lui (voir X). Soit $A$ un point de $\widehat{H_1 H_2}$ (il est par définition différent de $H_1$ et de $H_2$)

Soit $s$ si grand que les rectangles de la $s^{\text{ième}}$ division qui contiennent $A$ ne contiennent aucun point de $K$.

Soit $\beta$ le rectangle qui est formé par les rectangles qui contiennent $A$, et soit $\bar{\beta}$ le domaine rectangulaire dont la frontière est le contour de $\beta$.

Soit $\overline{AB}$ une distance, qui issue de $A$ va dans $\pi$ et qui est comprise dans $\bar{\beta}$ ($A$ étant en connexion avec $\pi$ il existe une telle distance).

Construisons la figure $o$ qui est formée par des points de $\bar{\beta}$ tels, qu'on les peut joindre avec $B$ sans couper $f$.

* L'ensemble des domaines qui deux à deux n'ont aucun point commun est d'après un théorème de M. Cantor au plus dénombrable.

— On prouve facilement que $o$ est un domaine simple compris dans $w$, et que sa frontière a des points dans $\bar{\beta}$, ces points sont points de $f$.

Mais il est presque évident que $o$ et l'un au moins des rectangles qui forment $\beta$, ont au moins un domaine comme $v$ commun.

Soit $H^v$ le point d'espèce $H^v_{i,j}$ pour ce domaine.

Je dis que $H^v$ appartient à $\widehat{H_1 H_2}$.

Car on peut joindre $H^v$ et $A$ par une chaine qui est d'ailleurs dans $o$ et ainsi ($o$ étant partie de $w$) aussi dans $w$. La chaine étant dans $o$ est dans $\bar{\beta}$, elle ne coupe donc $K$, et $A$ est un point de $\widehat{H_1 H_2}$.

Donc $H^v$ est point de $\widehat{H_1 H_2}$ (voir X).

Ainsi $\widehat{H_1 H_2}$ contient points de $(F)$.

D'après ce qui précède on peut choisir dans chaque $\widehat{H' H''}$ un point $F'$ de $(F)$. A l'ensemble des $\widehat{H' H''}$ corresponde donc un ensemble des $F'$ — les éléments de cet ensemble étant différents entre eux. Mais $(F)$ est dénombrable, l'ensemble des $F'$ est donc au plus dénombrable.

Donc l'ensemble des $\widehat{H' H''}$ est au plus dénombrable.

b) $(E')$ est au plus dénombrable.

Lemme. Soit $(G)$ un ensemble de points d'un espace à $n$ dimensions ($n$ étant un nombre fini). Soit $F(G)$ une fonction définie pour les points $G$ de $(G)$. Bien entendu $F(G)$ est réelle, mais elle n'est pas nécessairement bornée et uniforme.

Nous disons que pour un point $H$ de $(G)$ la fonction $F$ a un maximum (minimum) lorsqu'il existe pour $H$ un voisinage (sphère à $n$ dimensions dont le centre est en $H$), de manière que pour les points $G$ de $(G)$ compris dans ce voisinage on ait

$$F(H) - F(G) \geqq 0, \quad (\leqq 0).$$

D'après un théorème de M. Janiszewsky l'ensemble des valeurs extrêmes (maximums, minimums) de $F$ est (s'il existe) au plus dénombrable.

$\xi$ étant un point de $(E')$ d'après 2° $\xi$ serait une valeur extrême de $\varphi^{(1)}$, donc $(E')$ est au plus dénombrable.

Remarque. De même, l'ensemble des $H$ pour lesquels $F$ a une valeur extrême essentielle*) est (s'il existe) au plus dénombrable.

Ces théorèmes furent établis pour les fonctions continues par M. SCHOENFLIESS et pour les minimas des fonctions semicontinues par l'auteur.

Mais on peut encore généraliser ces théorèmes.

Nous disons que pour un point $H$ de $(G)$, $F$ a un maximum (ou minimum) (valeur extrême), lorsqu'il existe un voisinage de $H$ de manière que pour les points $G$ de $(G)$ situés dans ce voisinage la relation

$$F(H) - F(G) \geqq 0, \quad (\leqq 0)$$

est en général satisfait, de manière que l'ensemble des valeurs de $F(G)$, ($G$ étant un point du voisinage considéré) qui ne satisfont pas à cette relation, soit un ensemble au plus dénombrable (ou de mesure nulle dans le sens de M. LEBESGUE). L'ensemble des valeurs extrêmes de $F$ est (s'il existe) un ensemble au plus dénombrable (ou de mesure nulle).

Nous disons que pour un point $H$ de $(G)$, $F$ a une valeur extrême essentielle, lorsqu'elle a une maximum (ou minimum) pour $H$ et lorsque dans un voisinage de $H$ les points $G$ de $(G)$ qui satisfont à la relation

$$F(H) - F(G) \leqq 0, \quad (\geqq 0),$$

forment un ensemble au plus dénombrable (ou de mesure nulle). L'ensemble des $H$ pour lesquels $F$ a une valeur extrême essentielle est (s'il existe) au plus dénombrable (de mesure nulle).

c) $(E'')$ est au plus dénombrable.

Soit $\xi$ un point de $(E'')$. $\xi'$ est formée par points de $(w)$ et par points de la frontière $f$ de $(w)$. La mesure intérieure de $\xi'$ est plus grande que zéro, donc d'après la définition connue de

---

* Lorsque $F$ a une valeur extrême pour $H$ et il existe un voisinage de $H$ de manière que pour les points $G$ de $(G)$ situés dans ce voisinage l'égalité

$$F(H) - F(G) = 0$$

n'est satisfait que pour $G \equiv H$, nous disons que $F$ a une valeur extrême essentielle pour $H$.

la mesure intérieure $\xi'$ contient un rectangle dont tous les points appartiennent à $\xi'$. Ce rectangle ne peut contenir des points de $f$ que sur son contour, car dans le cas contraire le rectangle contiendrait autres points que ceux de $\xi'$. Donc l'intérieur du rectangle appartient à $(w)$.

Soit $C$ un point de l'intérieur du rectangle, pour un point $D$ quelconque de l'intérieur du rectangle on a

$$\varphi^{(1)}(C) = \varphi^{(1)}(D) = \xi \quad \text{ou} \quad \varphi^{(1)}(C) - \varphi^{(1)}(D) = 0$$

et $D$ est un point de $(w)$.

Donc d'après b) $(E'')$ est au plus dénombrable.

d) Enlevons de $(\xi_1, \xi_2)$ les ensembles $(E_1), (E_2), (E'), (E'')$. Ces ensembles étant au plus dénombrables, la reste que nous désignons par $(\xi_1)$ sera de seconde catégorie. Je dis qu'il satisfait à l'énoncé.

On voit de a) b) c) qu'il satisfait à $1^0$, $2^0$, $3^0$.

Nous allons montrer qu'il satisfait aussi à $4^0$.

D'après XVIII parmi les points $E$ de $2^0$ il existe tels que

$$\varphi^{(1)}(E) = \varphi(E).$$

Soit $C$ un point de $\xi'$ situé dans $(w)$. $\varphi^{(1)}$ et $\varphi$ sont continues dans $(w)$. Donc

$$\varphi(C) = \lim_{E=C} \varphi(E) = \lim_{E=C} \varphi^{(1)}(E) = \varphi^{(1)}(C) = \xi.$$

Soit $C$ le seul point de $\xi'$ qui est situé sur $\overline{\eta}_1$. $C$ est évidemment la limite des points de $\xi'$ qui sont situés dans $(w)$.

Donc $\varphi$ étant continue

$$\varphi(C) = \xi.$$

On a donc toujours

$$\varphi(C) = \xi$$

donc $4^0$ est démontré.

Remarque. On prouve facilement que les domaines $w^{(1)}$ et $w^{(2)}$ pour un $\xi$ de $(\xi_1)$ sont des domaines

$$[\xi_1, \xi;\ \eta_1, \eta_2], \quad [\xi, \xi_2;\ \eta_1, \eta_2],$$

respectivement.

De plus pour un $\xi$ quelconque les parties des frontières de $w^{(1)}$ et $w^{(2)}$ qui sont parties de $\xi'$ seront telles que pour leurs points

$$\varphi^{(1)} = \varphi.$$

XX. Soit $X_{l_r}$ une suite de divisions (de l'intervalle $(0, a)$ de l'axe des $x$), et telle que les points diviseurs de sa $r^{\text{ième}}$ division, qui se trouvent dans $(\xi_1, \xi_2)$ soient points de $(\xi_1)$ pour chaque $r$.

L'ensemble dont les éléments sont les points diviseurs des $X_{l_r}$ qui se trouvent dans $(\xi_1, \xi_2)$ est évidemment dénombrable et partout dense dans $(\xi_1, \xi_2)$.

Choisissons deux points $\xi_{\text{I}}, \xi_{\text{II}}$ de cet ensemble, de manière que $\xi_{\text{I}} < \xi_{\text{II}}$.

Considérons le domaine $w^{(2)}$ relativement à $\xi_{\text{I}}$ et considérons le domaine $w^{(1)}$ relativement à $\xi_{\text{II}}$ (voir XVIII).

On prouve facilement que les points communs de ces domaines forment un $[\xi_{\text{I}}, \xi_{\text{II}}; \eta_1, \eta_2]$ qui est unique et bien déterminé.

Désignons-le par $[w]$

$[w]$ et les points qui sont en connexion avec lui sont évidemment compris dans $(w) + I$.

Le point $uv$ variant dans $[w]$ et dans l'ensemble des points qui sont en connexion avec $[w]$, nous définissons une figure $R^{(1)}$ par les équations

$$x = \varphi^{(1)}(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v).$$

Nous avons formé pour $R$ les quantités $A$ et $B$ (voir XIV), on peut évidemment former pour $R^{(1)}$ des quantités analogues $A^{(1)}$, $B^{(1)}$ (par un procédé analogue).

Je dis que

$$A^{(1)} \leqq A, \quad B^{(1)} \leqq B.$$

Rappellons que pour former $A$ on prend une suite de divisions $X_{l_r} Y_{m_r}$ et on forme à l'aide des $A^k_{i,j}$ (voir XIII) la suite des valeurs $X_{l_r} Y_{m_r} N_{i,j} \cdot \alpha_{i,j}$ (voir XIV). Cette suite de valeurs a une limite qui ne dépende pas de la suite $X_{l_r} Y_{m_r}$.

Donc pour former $A^{(1)}$ on peut prendre une suite de divisions $X_{l_r} Y_{m_r}$, de manière que la suite $X_{l_r}$ soit la suite considérée au debut (la suite $Y_{m_r}$ est arbitraire). Et on forme à l'aide des $A^k_{i,j}$ (relatives à $R^{(1)}$) la suite des valeurs $X_{l_r} Y_{m_r} N_{i,j} \cdot \alpha_{i,j}$ (relatives à $R^{(1)}$), la limite de cette suite sera $A^{(1)}$.

Mais d'après les propriétés de $R^{(1)}$ (respectivement de $t = \varphi^{(1)}(u, v)$) un $A^k_{i,j}$ de $R^{(1)}$ est un $[x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1}]$ de $R$. Donc la $X_{l_r} Y_{m_r} N_{i,j} \cdot \alpha_{i,j}$ qui est formée pour $R^{(1)}$ est égale à une $X_{l_r} Y_{m_r} n_{i,j} \cdot \alpha_{i,j}$ pour $R$ (voir XIII).

Mais (pour $R$) on a

$$X_{l_r} Y_{m_r} n_{i,j} \cdot \alpha_{i,j} \leqq X_{l_r} Y_{m_r} N_{i,j} \cdot \alpha_{i,j},$$

donc

$$X_{l_r} Y_{m_r} N_{i,j} \cdot \alpha_{i_1 j} \, (\text{pour } R^{(1)}) \leqq X_{l_r} Y_{m_r} N_{i,j} \cdot \alpha_{i,j} \, (\text{pour } R)$$

et ainsi

$$A^{(1)} \leqq A.$$

De même

$$B^{(1)} \leqq B.$$

Remarque. Ces relations sont aussi valables lorsque $A$ et $B$ ne sont formées que pour la partie de $R$ qui corresponde à la figure $(w) + I$.

## Chapitre IV.

## La fonction $H(\xi)$. Le cas où $A + B < +\infty$.

XXI. $\xi$ étant un point de $(\xi_1)$, considérons $\xi'$. Désignons par $(H)$ l'ensemble des points de $\xi'$ qui sont en connexion avec $w^{(1)}$ et qui sont situés dans $(w)$ (voir XIX).

Nous pouvons établir dans $(H)$ un ordre de parcours de la manière suivante. Soient $H_1$ et $H_2$ points de $(H)$. Soit $K$ une chaine simple qui étant située d'ailleurs dans $w^{(1)}$, joint $H_1$ avec un point de $\bar{\eta}_1$. Par $K$ $w^{(1)}$ sera decomposé en deux domaines. L'un d'eux ne contient sur sa frontière vraie que points de $\bar{\eta}_1$ et de $\xi'$ parmi les points qui sont en connexion avec lui (voir X et XIX). L'ordre de $H_1$ et $H_2$ sera $H_1$, $H_2$ si $H_2$ n'est pas en connexion avec ce domaine, l'ordre sera $H_2$, $H_1$ dans le cas contraire.

On prouve à l'aide de X que l'ordre de $H_1$, $H_2$ ne dépende que de $H_1$ et $H_2$.

L'ordre étant $H_1$, $H_2$ nous écrivons $H_1 < H_2$, $(H_2 > H_1)$.

Soit $(\widehat{H}) \equiv H_{(1)}, H_{(2)}, \ldots H_{(p)}, \ldots$, un ensemble dénombrable des points de $(H)$ écrits dans une suite simplement indéfinie. Rangeons les $q$ premiers éléments de la suite, soient

$$H_1 < H_2 < \cdots < H_p < H_{p+1} < \cdots < H_q$$

ces points. ($H_{(p)}$ et $H_p$ ne désignent pas en général le même point quoique $H_{(p)}(p = 1, \ldots q)$ et $H_p (p = 1, \ldots q)$ forment le même groupe des points).

Il est évident que

$$\sum_{1}^{q-1}{}^{p}\ \overline{H_p^0 H_{p+1}^0} \leqq \sum_{1}^{q}{}^{p}\ \overline{H_p^0 H_{p+1}^0},\ ^{*}$$

donc

$$\lim \sum_{1}^{q-1}{}^{p}\ \overline{H_p^0 H_{p+1}^0} \quad (q = \infty)$$

est déterminée.

Désignons-la par $(\widehat{H})(\xi)$.

Formons tous les $(\widehat{H})(\xi)$ qui peuvent exister. Cet ensemble de valeurs a une limite supérieure. Désignons-la par $H(\xi)$.

$H(\xi)$ est donc une fonction définie pour les points de $(\xi_1)$. Elle est évidemment non négative et uniforme.

Je dis que la fonction $H(\xi)$ est semicontinue.

Démonstration.

$H(\xi)$ étant uniforme et non négative, nous devons démontrer**, que pour chaque point $\xi$ de $(\xi_1)$ et pour chaque $\delta > 0$, on peut trouver un intervalle $(m, M)$, de manière que $m < \xi < M$ et que pour chaque point $\xi_0$ de $(\xi_1)$ compris dans cet intervalle on ait

$$H(\xi) - H(\xi_0) < \delta.^{***}$$

Il est évident qu'on peut choisir des points

$$H_1 < H_2 < \cdots < H_p < H_{p+1} < \cdots < H_q$$

de $(H)$ de manière que

$$H(\xi) - \sum_{1}^{q-1}{}^{p}\ \overline{H_p^0 H_{p+1}^0} < \frac{\delta}{2}. \tag{1}$$

Soit $C_p$ un cercle dont le centre est en $H_p$. On peut évi-

---

* $A$ étant un point $uv$, nous désignons par $A^0$ le point de $R$ qui corresponde à $A$.

On a:

$$\overline{H_p^0 H_{p+1}^0} = [(\psi(H_{p+1}) - \psi(H_p))^2 + (\varkappa(H_{p+1}) - \varkappa(H_p))^2]^{\frac{1}{2}},$$

car $\varphi(H_{p+1}) = \varphi(H_p) = \xi$.

** Voir quadrature des surfaces courbes. Chap. X.

*** On doit prendre

$$+\infty - a = \frac{1}{a},\quad (a \geqq 0),\quad \frac{1}{0} = +\infty,\quad \frac{1}{+\infty} = 0.$$

demment prendre le rayon des $C_p$ aussi petit qu'ils soient situées dans $(w)$ et qu'ils deux à deux n'aient aucun point commun.

De plus: soit $E_p$ un point de $C_p$. Les fonctions $\varphi, \psi, \varkappa$ étant continues on peut prendre le rayon des $C_p$ si petit que quelque soit d'ailleurs $E_p$

$$\left|\overline{H_p^0 H_{p+1}^0} - \overline{E_p^0 E_{p+1}^0}\right| < \frac{\delta}{2\cdot(q-1)},$$

et ainsi

$$\left|\sum_1^{q-1}{}^p\, \overline{H_p^0 H_{p+1}^0} - \sum_1^{q-1}{}^p\, \overline{E_p^0 E_{p+1}^0}\right| < \frac{\delta}{2}. \tag{2}$$

Soit $O$ un point de $w^{(1)}$ et construisons des chaines simples $K_p$, $(p = 1, \ldots q)$, qui issues de $O$ vont dans $w^{(1)}$ jusqu'à $H_p$, et qui deux à deux ne se coupent qu'en $O$. Soit $\overline{D_p H_p}$ le dernier côté de $K_p$.

Soit $\overline{F_p H_p}$ la partie de $\overline{D_p H_p}$ comprise dans $C_p$. Soit $m_p$ le maximum des valeurs de $\varphi^{(1)}$ sur la partie de $K_p$ qui est entre $O$ et $F_p$. On a (voir XVIII) $m_p < \xi$. Soit $m$ une valeur plus petite que $\xi$ mais plus grande que les $m_p$.

Soit $\xi_0$ un point de $(\xi_1)$ compris dans $(m, \xi)$. Désignons par $\xi_0'$ la projection orthogonale de la section $t = \xi_0$ de $t = \varphi^{(1)}$ sur le plan $uv$. $K_p$ coupe $\xi_0'$, mais d'après le choix de $m$, les points communs de $K_p$ et de $\xi_0'$ ne peuvent être situés que sur $\overline{F_p H_p}$. En partant de $O$ soit $E_p$ le premier point de $K_p$ sur $\xi_0'$. Ces points $E_p$ appartiennent évidemment à l'ensemble d'espèce $(H)$ de $\xi_0'$.

De plus on a évidemment

$$E_p < E_{p+1}, \quad \sum_1^{q-1}{}^p\, \overline{E_p^0 E_{p+1}^0} \leqq H(\xi_0).$$

Ainsi d'après (1) et (2) dans $(m, \xi)$

$$H(\xi) - H(\xi_0) < \delta.$$

Soit $G_p$ un point de $C_p$ situé dans $w^{(2)}$ choisi de manière que $K_p + \overline{H_p G_p}$ soit une chaine simple. Soit $M_p$ le maximum des valeurs de $\varphi^{(1)}$ sur $\overline{H_p G_p}$. On a $M_p > \xi$.

Soit $M$ une valeur plus grande que $\xi$, mais plus petite que les $M_p$.

Soit $\xi_0$ une valeur de $(\xi_1)$ comprise dans $(\xi, M)$. On prouve facilement que $K_p + \overline{H_p G_p}$ coupe $\xi_0'$ mais les points communs ne peuvent être situés que sur $\overline{H_p G_p}$. En partant de $O$ soit $E_p$ le premier point de $K_p + \overline{H_p G_p}$ sur $\xi_0'$. On démontre comme ci-dessus pour $(m, \xi)$ que aussi dans $(\xi, M)$

$$H(\xi) - H(\xi_0) < \delta$$

et ainsi $H(\xi)$ est semicontinue.

XXII. $X_{l_r} Y_{m_r}$ étant la suite des divisions que nous avons fixée au No. XX pour construire $A^{(1)}$, omettons de $(\xi_1)$ les points diviseurs de chaque $X_{l_r}$ (qui sont compris dans $(\xi_1, \xi_2)$). L'ensemble omis étant dénombrable le reste sera un ensemble de seconde catégorie de $(\xi_1, \xi_2)$. Nous désignons par $(\xi_2)$ sa partie qui est comprise dans $(\xi_{\mathrm{I}}, \xi_{\mathrm{II}})$.

Nous définissons pour les points $\xi$ de $(\xi_2)$ une suite de fonctions $F_r$ de la manière suivante.

Quelque soit $\xi$ et $r$ il est évident que $\xi$ est compris dans l'intérieur d'un certain intervalle de la $r^{\text{ième}}$ division $X_{l_r}$. Formons la valeur $A^{(1)} = X_{l_r} Y_{m_r} N_{i,j} \cdot \alpha_{i,j}$ (voir XX). Nous posons pour les $\xi$ de $(\xi_2)$ qui sont compris dans l'intervalle $(x_i, x_{i+1})$ de $X_{l_r}$

$$F_r(\xi) = Y_{m_r} \cdot N_{i,j} \cdot (y_{j+1} - y_j).$$

$F_r(\xi)$ est donc définie pour chaque $\xi$ et $r$.

$F_r(\xi)$ a donc la même valeur pour les points $\xi$ compris dans $(x_i, x_{i+1})$ de $X_{l_r}$. Ainsi $F_r(\xi)$ est continue sur l'ensemble $(\xi_2)$, de plus elle est intégrable, car on a évidemment

$$\int_{\xi_{\mathrm{I}}}^{\xi_{\mathrm{II}}} F_r(\xi)\, dx = X_{l_r} Y_{m_r} N_{i,j} \cdot \alpha_{i,j}.$$

Je dis que $F_{r+1} \geqq F_r$.

Considérons le domaine $w^{(2)}$ relativement à $x_i$ et considérons le domaine $w^{(1)}$ relativement à $x_{i+1}$ (voir XVIII). La partie commune de ces domaines est un domaine $[x_i, x_{i+1}; \eta_1, \eta_2]$ pour $R^{(1)}$ (et aussi pour $R$). Ce domaine est uniqne et bien déterminé. On prouve facilement que lorsqu'un $[x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1}]$ pour $R^{(1)}$ existe, il existe un $[x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1}]$ compris dans ce domaine.

On obtient donc la valeur de $F_r(\xi)$ dans $(x_i, x_{i+1})$ en faisant la somme des $y_{j+1} - y_j$ pour les $[x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1}]$ qui sont compris dans ce domaine, et qui sont choisis (voir XIII) de manière que deux à deux ils n'aient aucun point commun et que la somme en question ait la plus grande valeur possible.

$\xi$ de $(\xi_2)$ étant compris dans $(x_i, x_{i+1})$ de $X_{l_r}$ soit $(x', x'')$ l'intervalle de $X_{l_r+1}$ qui contient $\xi$. On a donc

$$x_i \leqq x' < \xi < x'' \leqq x_{i+1}.$$

Soient

$$y_j < y_j' < y_j'' < \cdots < y_j^{(q_j)} < y_{j+1}$$

les points diviseurs de $Y_{m_r+1}$ qui sont compris dans $(y_j, y_{j+1})$ de $Y_{m_r}$.

D'après XI un $[x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1}]$ (pour $R^{(1)}$) contient des

$$[x', x''; y_j', y_j''], \ [x', x''; y_j'', y_j'''], \ldots [x', x''; y_j^{(q_j)}, y_{j+1}]$$

(pour $R^{(1)}$) de manière que ces domaines deux à deux n'ont aucun point commun.

On aura donc

$$F_{r+1}(\xi) \geqq Y_{m_r} N_{i,j} \left[ (y_j' - y_j) + (y_j'' - y_j') + \cdots + (y_{j+1} - y_j^{(q_j)}) \right] =$$
$$= Y_{m_r} N_{i,j} \cdot (y_{j+1} - y_j) = F_r(\xi).$$

Rappelons que $F_r(\xi)$ est continue sur $(\xi_2)$, $F_{r+1}(\xi) \geqq F_r(\xi)$, et que $F_r(\xi)$ est intégrable.

D'après des théorèmes connus (voir Quad. d. surf. courb. Chap. X) la fonction

$$F(\xi) = \lim_{r=\infty} F_r(\xi)$$

sera semicontinue sur $(\xi_2)$ et on aura

$$\lim_{r=\infty} \int_{\xi_{\mathrm{I}}}^{\xi_{\mathrm{II}}} F_r(\xi)\, dx = \underline{\int_{\xi_{\mathrm{I}}}^{\xi_{\mathrm{II}}}} F(\xi)\, dx.$$

Mais on a

$$\lim_{r=\infty} \int_{\xi_{\mathrm{I}}}^{\xi_{\mathrm{II}}} F_r(\xi)\, dx = X_{l_\infty} Y_{m_\infty} N_{i,j} \cdot \alpha_{i,j} = A^{(1)}.$$

Donc

$$\underline{\int_{\xi_{\mathrm{I}}}^{\xi_{\mathrm{II}}}} F(\xi)\, dx = A^{(1)}.$$

La suite $X_{l_r}$ étant la même, remplaçons dans la construction des $F_r$ et de $F$, $y$, $\psi$, $Y_{m_r}$ par $z$, $\varkappa$, $Z_{n_r}$ respectivement. Nous obtenons une suite des fonctions $G_r$ et une fonction $G$ définies sur $(\xi_2)$, ayant des propriétés analogues à ceux des $F_r$, $F$.

XXIII. $\xi$ étant un point de $(\xi_2)$ je dis que

$$H(\xi) \leqq F(\xi) + G(\xi).$$

a) Soit $\delta > 0$. Nous prenons des points de $(H)$ (voir XXI)

$$H_1 < H_2 < \cdots < H_p < H_{p+1} < \cdots < H_q$$

de manière que

$$H(\xi) - \sum_{1}^{q-1} {}_p \overline{H_p^0 H_{p+1}^0} < \frac{\delta}{2}. \quad (1)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\mu$ la limite supérieure des $\overline{A^0 B^0}$, $A$ et $B$ étant des points du plan $uv$ tels que $\overline{AB} \leqq \varepsilon$, d'ailleurs quelconques. On a évidemment

$$\lim_{\varepsilon = 0} \mu = 0.$$

Soit $\varepsilon$ si petit que:

1°. Les cercles $C_p$ dont les centres sont les $H_p$ et dont les rayons sont égaux à $\varepsilon$, soient situés dans $[w]$ et qu'ils deux à deux n'aient aucun point commun (voir XX et XXI).

2°. $4(q-1) \cdot \mu < \frac{\delta}{4}$.

3°. Nous prenons encore $\varepsilon$ si petit que pour les couples $H_p$, $H_{p+1}$, pour lesquels

$$|\psi(H_{p+1}) - \psi(H_p)| > 0$$

on ait

$$8\mu < |\psi(H_{p+1}) - \psi(H_p)|.$$

De même: nous prenons $\varepsilon$ aussi petit que pour les couples $H_p, H_{p+1}$ pour lesquels

$$|\varkappa(H_{p+1}) - \varkappa(H_p)| > 0$$

on ait

$$8\mu < |\varkappa(H_{p+1}) - \varkappa(H_p)|.$$

Nous choisissons les $F_p$, $G_p$, $m$ et $M$ de XXI.

$X_{l_r}$ étant la suite de divisions de XX, lorsque $r$ est assez grand, l'intervalle $(x_i, x_{i+1})$ de $X_{l_r}$ qui contient $\xi$ sera tel que $m < x_i < x_{i+1} < M$.

Donc $x_i'$ coupe chaque $\overline{F_p H_p}$ et $x_{i+1}'$ coupe chaque $\overline{H_p G_p}$.*

Soit $L_p$ le point de $\overline{F_p H_p}$ qui étant point de $x_i'$ soit le plus

* $x_i'(x_{i+1}')$ désigne la projection orthogonale de la section $t = x_i$ $(x_{i+1})$ de $t = \varphi^{(1)}$ sur le plan $uv$.

près de $H_p$. De même soit $N_p$ le point de $\overline{H_p G_p}$ qui étant point de $x'_{i+1}$ soit le plus près de $H_p$. Désignons par $f_p$ la figure $\overline{L_p H_p} + \overline{H_p N_p}$.

$f_p$ décompose $[x_i, x_{i+1}; \eta_1, \eta_2]$* en deux domaines dont l'un est tel que les points de $\bar{\eta}_2$ qui sont en connexion avec $[x_i, x_{i+1}; \eta_1, \eta_2]$ sont en connexion avec lui. Nous le désignons par $[x_i, x_{i+1}; f_p, \eta_2]$.

$f_{p+1}$ décompose $[x_i, x_{i+1}; f_p, \eta_2]$ en deux domaines, dont l'un sera tel que les points de $f_p$ sont en connexion avec lui.

Nous désignons ce domaine par $[x_i, x_{i+1}; f_p, f_{p+1}]$.

Considérons les couples $H_p$, $H_{p+1}$ tels que

$$|\psi(H_{p+1}) - \psi(H_p)| > 0.$$

Supposons par exemple que $\psi(H_p) > \psi(H_{p+1})$.

Lorsque $r$ est assez grand la division $Y_{m_r}$ aura des points diviseurs dans $(\psi(H_{p+1}) + \mu, \psi(H_{p+1}) + 2\mu)$ et dans $(\psi(H_p) - 2\mu, \psi(H_p) - \mu)$.

Soient $y_j$ et $y_k$ de tels points ($y_j$ est compris dans le premier $y_k$ dans le seconde intervalle, d'après 3⁰ $y_j < y_k$).

Construisons la figure $\nu$ qui est formée par les points de $[x_i, x_{i+1}; f_p, f_{p+1}]$ tels qu'on les peut joindre avec $f_{p+1}$, par des chaines qui sont d'ailleurs situées dans $[x_i, x_{i+1}; f_p, f_{p+1}]$ sans couper $y'_j$ — en désignant par $y'_j$ la projection orthogonale de la section $t = y_j$ de $t = \psi$ sur le plan $uv$. On prouve facilement à l'aide de 3⁰ que $\nu$ et la frontière de $\nu$ ne contiennent pas $f_p$.

Soit $\varrho$ la figure qui est formée par les points de $[x_i, x_{i+1}; f_p, f_{p+1}]$ tels qu'on les peut joindre avec $f_p$, par des chaines situées d'ailleurs dans $[x_i, x_{i+1}; f_p, f_{p+1}]$, sans couper la frontière de $\nu$. On prouve facilement que $\varrho$ est un domaine à quatre côtés. Les points qui sont situés dans $[x_i, x_{i+1}; f_p, f_{p+1}]$ et qui sont en connexion avec lui sont points de $y'_j$. Ces points peuvent former l'un des côtés du domaine, le côté opposé peut être $f_p$, les deux autres côtés seront situés alors sur $x'_i$ respectivement sur $x'_{i+1}$. Nous désignons ce domaine par $[x_i, x_{i+1}; f_p, y_j]$, et désignons par $\bar{y}_j$ son côté qui est formé par des points de $y'_j$.

---

* Nous désignons par $[x_i, x_{i+1}; \eta_1, \eta_2]$ le domaine qui est la partie commune de $w^{(2)}$ relativement à $x_i$ et de $w^{(1)}$ relativement à $x_{i+1}$.

Soit $\lambda$ la figure qui est formée par des points de $[x_i, x_{i+1}; f_p, y_j]$ tels qu'on les peut joindre dans $[x_i, x_{i+1}; f_p, y_j]$ avec $f_p$, sans couper $y_k'$.

On prouve facilement à l'aide de 3⁰ que $\lambda$ et la frontière de $\lambda$ ne contiennent pas $\bar{y}_j$.

Construisons la figure qui est formée par des points de $[x_i, x_{i+1}; f_p, y_j]$ tels qu'on des peut joindre avec $\bar{y}_j$ dans $[x_i, x_{i+1}; f_p, y_j]$ sans couper la frontière de $\lambda$.

On prouve facilement que cette figure est un domaine à quatre côtés $[x_i, x_{i+1}; y_j, y_k]$.

b) Il est évident qu'en faisant varier $p$ les domaines comme $[x_i, x_{i+1}; y_j, y_k]$ n'ont deux à deux aucun point commun.

D'après la définition de $F_r(\xi)$ on a donc

$$\sum_1^{q-1}{}^p (y_k - y_j) \leqq F_r(\xi),$$

en remarquant que lorsque

$$\psi(H_{p+1}) = \psi(H_p)$$

on pose

$$y_k - y_j = 0.$$

On a d'après 3⁰ et d'après la convention

$$|\psi(H_{p+1}) - \psi(H_p)| < y_k - y_j + 4\mu \qquad (p = 1, \ldots, q-1).$$

Donc à l'aide de 2⁰

$$\sum_1^{q-1}{}^p |\psi(H_{p+1}) - \psi(H_p)| < \sum_1^{q-1}{}^p (y_k - y_j) + 4(q-1)\mu \leqq$$

$$\leqq F_r(\xi) + \frac{\delta}{4}.$$

On obtient de la même manière pour un $r$ assez grand

$$\sum_1^{q-1}{}^p |\varkappa(H_{p+1}) - \varkappa(H_p)| \leqq G_r(\xi) + \frac{\delta}{4}$$

On a de plus évidemment

$$H_p^0 H_{p+1}^0 \leqq |\psi(H_{p+1}) - \psi(H_p)| + |\varkappa(H_{p+1}) - \varkappa(H_p)|,$$

donc à l'aide de (1) pour un $r$ assez grand

$$H(\xi) \leqq F_r(\xi) + G_r(\xi) + \delta.$$

Mais $\delta$ est arbitraire et $F_r \leqq F$, $G_r \leqq G$. Donc

$$H(\xi) \leqq F(\xi) + G(\xi).$$

XXIV. On a évidemment.

$$\int_{\xi_{\mathrm{I}}}^{\xi_{\mathrm{II}}} H(\xi)\, dx \leqq \int_{\xi_{\mathrm{I}}}^{\xi_{\mathrm{II}}} [F(\xi) + G(\xi)]\, dx.$$

Mais $F(\xi)$ et $G(\xi)$ sont semicontinues et non négatives. Donc (voir Quad. d. surf. courb. Chap. X)

$$\underline{\int_{\xi_{\mathrm{I}}}^{\xi_{\mathrm{II}}}} [F(\xi) + G(\xi)]\, dx = \underline{\int_{\xi_{\mathrm{I}}}^{\xi_{\mathrm{II}}}} F(\xi)\, dx + \underline{\int_{\xi_{\mathrm{I}}}^{\xi_{\mathrm{II}}}} G(\xi)\, dx,$$

et ainsi d'après XXII

$$\underline{\int_{\xi_{\mathrm{I}}}^{\xi_{\mathrm{II}}}} H(\xi)\, dx \leqq A^{(1)} + B^{(1)} \leqq A + B.$$

Nous pouvons évidemment supposer que $\xi_{\mathrm{I}}$ et $\xi_{\mathrm{II}}$ coincident avec $\xi_1$ et $\xi_2$ respectivement — $((\xi_2)$ sera donc un ensemble de seconde catégorie de $(\xi_1, \xi_2))$.

Supposons que $A + B$ ait une valeur finie. On aura donc

$$\underline{\int_{\xi_1}^{\xi_2}} H(\xi)\, dx < +\infty.$$

Donc (voir Quad. d. surf. courb. Chap. X) il existe un ensemble de seconde catégorie* $(\xi_3)$ partie de $(\xi_2)$ (et ainsi partie de $(\xi_1)$) de manière que $H(\xi)$ (qui est semicontinue sur l'ensemble) a des valeurs finies pour les points de $(\xi_3)$.

XXV. Considérons l'ensemble $(H)$ de XXI. Soient $H_1$ et $H_2$ points de $(H)$ et soit $H_1 < H_2$.

Désignons par $\widehat{H_1 H_2}$ la figure qui est formée par des points $H$ de $(H)$ tels que $H_1 < H < H_2$.

---

* Je dois ici signaler un erreur de la dénomination commis par moi. L'ensemble que je désigne comme ensemble de seconde catégorie n'est pas un ensemble de seconde catégorie d'après la définition de M. Baire, mais il est un ensemble dont le complémentaire est de mesure nulle dans le sens de M. Lebesgue.

On peut trouver un ensemble $(H_0)$ partie de $(H)$ ayant les proprietés suivantes.

1°. Il est dénombrable.

2°. $H'$ et $H''$ étant des éléments quelconques de $(H_0)$, soit $H' < H''$. $(H_0)$ contient des éléments $H_{,}, H_{,,}, H_{,,,}$, tels que

$$H_{,} < H' < H_{,,} < H'' < H_{,,,}.$$

3°. La dérivée de $(H_0)$ contient $(H)$ et ainsi elle contient $\xi'$. Soient $H' < H''$ des éléments quelconques de $(H_0)$. La dérivée de la figure qui est formée par des points $H$ de $(H_0)$ tels que

$$H' < H < H''$$

contient $\widehat{H'H''}$.

4°. L'ensemble $(H_0)$ étant dénombrable, on peut évidemment ranger ses éléments en une suite simplement indéfinie.

Soit

$$H_{(1)}, H_{(2)}, \ldots, H_{(q)}, \ldots, \tag{1}$$

une telle suite.

Nous désignons par

$$H_1, H_2, \ldots H_p, \ldots H_q$$

les $q$ premiers points de (1) rangés de manière que

$$H_1 < H_2 < \cdots < H_p < \cdots < H_q$$

($H_{(p)}$ et $H_p$ ne désignent pas en général le même point quoique $H_{(p)}$ $(p = 1, \ldots q)$ et $H_p$ $(p = 1, \ldots q)$ forment le même groupe des points).

On peut choisir (1) de manière qu'il existe une suite de nombres positifs entiers

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_s \cdots,$$

de manière que pour chaque $\delta > 0$ dès que $s$ dépasse une certaine limite qui dépende de $\delta$

$$\overline{H_p H_{p+1}} < \delta \qquad (p = 1, \ldots (n_s - 1)).*$$

---

* Les fonctions $\varphi$, $\psi$, $\varkappa$, sont continues, donc $\overline{H_p^0 H_{p+1}^0}$ tend uniformément vers zéro avec $\overline{H_p H_{p+1}}$, ainsi ou peut aussi avoir

$$\overline{H_p^0 H_{p+1}^0} < \delta \quad (p = 1, 2, \ldots n_s - 1).$$

Démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $U_{l_s} V_{m_s}$ une suite de divisions. Soit $Q_{s-1}$ un ensemble de points de $(H)$ le nombre de ces points étant un nombre fini $k$. Soient

$$H^{(1)} < H^{(2)} < \cdots < H^{(p)} < H^{(p+1)} < \cdots < H^{(k)}$$

ces points.

Nous choisissons des points $K_1, K_2, \ldots K_p, K_{p+1}, \ldots K_k, K_{k+1}$ de $(H)$ de manière que

$$K_1 < H^{(1)} < K_2 < H^{(2)} < \cdots < K_p < H^{(p)} < K_{p+1} < \cdots < H^{(k)} < K_{k+1}.$$

Choisissons dans chaque rectangle de la $s^{\text{ième}}$ division qui contient au moins un point de

$$\widehat{K_1 H^{(1)}},\ \widehat{H^{(1)} K_2},\ \ldots\ \widehat{K_p H^{(p)}},\ \ldots\ \widehat{H^{(k)} K_{k+1}}$$

un point de chacune de ces figures (les points choisis seront par la définition de ces figures différents des $K_p$, $H^{(p)}$).

Soient

$$L_1 < L_2 < \cdots < L_p < L_{p+1} < \cdots < L_r$$

les points $K_p$, $H^{(1)}$ et les points choisis.

Choisissons des points $H_p^{(1)}, H_p^{(2)}, \ldots H_p^{(v)}, H_p^{(v+1)}, \ldots H_p^{(t_p)}$ de $(H)$ de manière que

$$L_p \equiv H_p^{(0)} < H_p^{(1)} < H_p^{(2)} < \cdots < H_p^{(v)} < H_p^{(v+1)} < \cdots$$
$$\cdots < H_p^{(t_p)} < H_p^{(t_p+1)} \equiv L_{p+1}$$

et que*

$$\overline{H_p^{(v)} H_p^{(v+1)}} < \frac{\varepsilon}{2^s} \qquad (p = 1, \ldots r-1,\ v = 0, \ldots t_p).$$

Soit $Q_s$ l'ensemble des points ainsi obtenus, $Q_s$ est formé évidemment d'un nombre fini de points.

En prenant pour $Q_0$ un groupe arbitraire de points de $(H)$ on construit $Q_1, Q_2, \ldots Q_s, \ldots$ Soit $n_s$ le nombre des points des $Q_s$.

Soient

$$H_{(1)},\ H_{(2)},\ \ldots\ H_{(n_1)}$$

les points de $Q_1$, et soient

$$H_{(n_{s-1}+1)},\ \ldots\ H_{(n_s)}$$

les points de $Q_s$ $(s = 2, 3, \ldots)$ qui ne sont pas points de $Q_{s-1}$.

---

* Voir X.

On prouve facilement que l'ensemble

$$H_{(1)}, H_{(2)}, \ldots, H_{(n_1)}, H_{(n_1+1)}, \ldots H_{(n_2)}, H_{(n_2+1)}, \ldots H_{(n_s)}, \ldots$$

satisfait à l'énoncé.

5⁰. On prouve de plus facilement que $(H_0)$ peut être tel que $(H_0)(\xi)$ (voir XXI) est égale à $H(\xi)$. De plus: $(H_0)$ peut être tel, que $H$ étant un point quelconque de $(H)$ il existe des points $H_l$ et $H_m$ de $(H_0)$ de manière que $H_l < H < H_m$.

XXVI. Je dis que lorsque pour un point $\xi$ de $(\xi_3)$ (voir XXIV) $H(\xi)$ a une valeur finie, la figure qui corresponde à la dérivée de $\xi'$ sur $R$ est une ligne courbe à longueur finie.

La longueur de cette ligne courbe est égale à $H(\xi)$.

Démonstration.

a) Soit $(H_0)$ un ensemble des points satisfaisant à 1⁰—5⁰ du No. XXV.

Soient

$$H_{(1)}, H_{(2)}, \ldots H_{(q)}, \ldots,$$

ses éléments (voir 4⁰ du No. XXV).

Soit $\overline{w}$ une variable qui varie dans l'intervalle $(0, 1)$ et soit $W$ un ensemble des valeurs de $\overline{w}$, dénombrable et partout dense dans $(0, 1)$ et tel qu'il ne contient pas les points 0 et 1.

On peut donc établir entre les éléments de $W$ et de $(H_0)$ une correspondance univoque et réciproque, de manière que $\overline{w}_{(p}$ étant l'image de $H_{(p)}$ dans $W$ on ait

$$\overline{w}_{(j)} < \overline{w}_{(k)} \quad \text{lorsque} \quad H_{(j)} < H_{(k)}.$$

Nous définissons pour les points de $W$ deux fonctions $f$ et $g$ en posant

$$f(\overline{w}_{(p)}) = \psi(H_{(p)}), \quad g(\overline{w}_{(p)}) = \chi(H_{(p)}),$$

ainsi $f$ et $g$ sont les coordonnées $y$ et $z$ de $H^0_{(p)}$.

b) Nous allons montrer que ($H(\xi)$ est finie) les fonctions $f$ et $g$ sont uniformément continues sur $W$.

C'est-à-dire nous allons démontrer que pour chaque $\lambda > 0$ il existe un $\mu > 0$ de manière que l'inégalité

$$|\overline{w}_{(j)} - \overline{w}_{(k)}| < \mu$$

entraine

$$|f(\overline{w}_{(j)}) - f(\overline{w}_{(k)})| < \lambda, \quad |g(\overline{w}_{(j)}) - g(\overline{w}_{(k)})| < \lambda. \tag{1}$$

Soit $s$ aussi grande (voir $4^0$, $5^0$ du No. XXV) que

$$\overline{H_p^0 H_{p+1}^0} < \frac{\lambda}{4} \quad (p = 1, \ldots (n_s - 1)),$$

et

$$H(\xi) - \sum_1^{n_s - 1}{}^p \overline{H_p^0 H_{p+1}^0} < \frac{\lambda}{4}. \tag{2}$$

Posons

$$0 = \overline{w}_0, \quad 1 = \overline{w}_{n_s + 1}$$

et désignons par $\overline{w}_p$ l'image de $H_p$.

Soit $\mu$ celle des

$$\overline{w}_1 - \overline{w}_0, \overline{w}_2 - \overline{w}_1, \ldots \overline{w}_{p+1} - \overline{w}_p, \ldots \overline{w}_{n_s+1} - \overline{w}_{n_s}$$

qui n'est pas plus grande que les autres.

Soient $\overline{w}_{(j)}$ et $\overline{w}_{(k)}$ des éléments tels de $W$ que

$$|\overline{w}_{(j)} - \overline{w}_{(k)}| < \mu$$

d'ailleurs quelconques.

$\overline{w}_{(j)}$ et $\overline{w}_{(k)}$ sont donc compris au moins dans un des

$$(\overline{w}_p, \overline{w}_{p+2}), \quad (p = 0, \ldots (n_s - 1)).$$

D'après la signification géometrique de $\sum_1^{n_s-1}{}^p \overline{H_p^0 H_{p+1}^0}$ et de $H(\xi)$ et d'après (2) les points $H_{(j)}^0$ et $H_{(k)}^0$ seront compris dans le cercle qui est situé dans plan $x = \xi$ et dont le centre est en $H_{p+1}^0$ et dont le rayon est égale à $\frac{\lambda}{2}$.

La différence des coordonnées $y$ de $H_{(j)}$ et de $H_{(k)}$ sera donc en valeur absolue plus petite que $\lambda$, de même pour les coordonnées $z$. Donc (1) est ainsi démontré.

c) $f$ et $g$ étant uniformément continues dans $W$ (qui est partout dense dans (0, 1)), d'après un théorème classique on peut trouver des fonctions $f^{(1)}$ et $g^{(1)}$ définies dans (0, 1) bornées, uniformes et continues et telles que

$$f^{(1)}(\overline{w}_{(p)}) = f(\overline{w}_{(p)}), \quad g^{(1)}(\overline{w}_{(p)}) = g(\overline{w}_{(p)}).$$

De plus, on sait que la figure

$$x = \xi, \quad y = f^{(1)}(\overline{w}), \quad z = g^{(1)}(\overline{w})$$

est la figure dérivée de la figure

$$x = \xi, \quad y = f(\overline{w}_{(p)}), \quad z = g(\overline{w}_{(p)}).$$

Mais d'après les propriétés de $(H_0)$ ($3^0$ du No. XXV) la dérivée de la seconde figure corresponde à la dérivée de $\xi'$ sur $R$, et la figure

$$x = \xi, \quad y = f^{(1)}(\overline{w}), \quad z = g^{(1)}(\overline{w})$$

est évidemment une ligne courbe, dont la longueur est $H(\xi)$.

On démontre encore facilement les propositions suivantes.

$1^0$. Soit $H$ un point de $(H)$. Il existe une infinité des points $H_{(l)}$ de $(H_0)$ tels que $H_{(l)} < H$ et une infinité de points $H_{(m)}$ de $(H_0)$ tels que $H < H_{(m)}$ (voir $5^0$ XXV).

La limite supérieure des $\overline{w}_{(l)}$ est égale à la limite inférieure des $\overline{w}_{(m)}$. Soit $\overline{w}$ cette valeur. Nous dirons qu'elle corresponde à $H$.

On a

$$\psi(H) = f^{(1)}(\overline{w}), \quad \chi(H) = g^{(1)}(\overline{w}).$$

$2^0$. Soient $H_{\mathrm{I}}$ et $H_{\mathrm{II}} > H_{\mathrm{I}}$ points de $H$ et soient $\overline{w}_{\mathrm{I}}$ et $\overline{w}_{\mathrm{II}}$ les valeurs correspondantes de $\overline{w}$. La figure qui corresponde à la dérivée de $\widehat{H_{\mathrm{I}}H_{\mathrm{II}}}$ sur la surface $R$ sera la ligne courbe

$$x = \xi, \quad y = f^{(1)}(\overline{w}), \quad z = g^{(1)}(\overline{w}); \quad \overline{w}_{\mathrm{I}} \leqq \overline{w} \leqq \overline{w}_{\mathrm{II}}.$$

---

## 7.

# SUR UNE APPLICATION DES FONCTIONS MODULAIRES À LA THÉORIE DE LA MOYENNE ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUE.

Par LOUIS DE DÁVID.

Il existe, comme on le sait, deux manières de définir l'algorithme de la moyenne arithmético-géométrique: la définition algébrique d'une part et la définition transcendante d'autre part. Nous allons confronter ces deux définitions. Pour cela nous ferons usage de la transformation linéaire des fonctions modulaires. En faisant cette comparaison, nous voulons expliquer la relation non seulement entre les algorithmes, mais aussi entre les deux ensembles des valeurs limites des deux algorithmes.

1. La définition algébrique sera donnée par l'identité suivante en $x$:

$$x^2 - 2\,{}^{(i+1)}a_1 x + {}^{(i+1)}a_2{}^2 \equiv (x - {}^{(i)}a_1)\,(x - {}^{(i)}a_2)$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots),$$

${}^{0)}a_1 = a_1$, ${}^{(0)}a_2 = a_2$ étant deux nombres complexes quelconques.

On a ainsi

$$^{(i+1)}a_1 = \tfrac{1}{2}\,({}^{(i)}a_1 + {}^{(i)}a_2), \quad {}^{(i+1)}a_2 = \sqrt{{}^{(i)}a_1\,{}^{(i)}a_2} \tag{1}$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Étant donnée une manière quelconque de choisir* les racines $\sqrt{{}^{(i)}a_1\,{}^{(i)}a_2}$, les limites $\lim {}^{(i)}a_1$ et $\lim {}^{(i)}a_2$ existent, et de plus elles seront égales:**

$$\lim_{i=\infty} {}^{(i)}a_1 = \lim_{i=\infty} {}^{(i)}a_2. \tag{2}$$

---

* L'ensemble des possibilités de choisir a la puissance du continu.

** Voir une Note de l'auteur: Zur Theorie der Schapiraschen Iteration. Journal de Crelle, t. 135, p. 62—74.

Les valeurs initiales $a_1$ et $a_2$ étant données, la valeur de la limite (2) dépendra naturellement de la manière de choisir les racines $\sqrt{{}^{(i)}a_1 {}^{(i)}a_2}$. Acceptant la notation de GAUSS, la valeur de la limite (2) sera designée par $M(a_1, a_2)$.

2. La définition transcendante de l'algorithme est la suivante. Soient

$$a_1 \neq 0, \quad a_2 \neq 0, \quad a_1 \pm a_2 \neq 0. \tag{3}$$

Il existe alors* une valeur $\omega_0 = \omega = \xi + \eta\sqrt{-1}$, $\eta > 0$ pour laquelle on a

$$a_1 : a_2 = \vartheta_{00}^2(\omega) : \vartheta_{01}^2(\omega), \tag{4}$$

ou

$$a_1 = \mu\,\vartheta_{00}^2(\omega), \quad a_2 = \mu\,\vartheta_{01}^2(\omega),$$

avec $\mu \neq 0$.

Nous allons introduire les notations

$$b_i = \mu\,\vartheta_{00}^2(\omega_i), \quad c_i = \mu\,\vartheta_{01}^2(\omega_i) \tag{5}$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots)\ (\omega_i = 2^i\omega).$$

Transformant les $\vartheta$ suivant les formules

$$\vartheta_{00}^2(\omega_{i+1}) = \tfrac{1}{2}(\vartheta_{00}^2(\omega_i) + \vartheta_{01}^2(\omega_i)),$$
$$\vartheta_{01}^2(\omega_{i+1}) = \vartheta_{00}(\omega_i)\,\vartheta_{01}(\omega_i),$$

il sera, comme dans (1),

$$b_{i+1} = \tfrac{1}{2}(b_i + c_i), \quad c_{i+1} = \sqrt{b_i c_i} \tag{6}$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots),$$

où on a

$$b_0 = a_1, \quad c_0 = a_2.$$

Les séries bien connues des $\vartheta$ donnent

$$\lim_{i=\infty} \vartheta_{00}^2(\omega_i) = \lim_{i=\infty} \vartheta_{01}^2(\omega_i) = 1. \tag{7}$$

Enfin, par (5),

$$\lim_{i=\infty} b_i = \lim_{i=\infty} c_i = \mu. \tag{8}$$

Le nombre $\omega$ étant fixé, les équations (5) définissent un algorithme

---

* Voir un Mémoire de l'auteur: Theorie des GAUSSschen verallgemeinerten und speziellen arithmetisch-geometrischen Mittels, t. XXV de cette Revue, p. 153—171, où l'on trouve aussi d'autres indications littéraires. Les notations du l. c. sont un peu modifiées.

univoque; et la valeur $\mu$, déterminée univoquement, est une des valeurs possibles de $M(b_0, c_0)$, c'est-à-dire de $M(a_1, a_2)$.

Soit $\omega' = \xi' + \eta'\sqrt{-1}$, $\eta' > 0$, une transformée de $\omega$, pour laquelle on a de nouveau

$$a_1 : a_2 = \vartheta_{00}^2(\omega') : \vartheta_{01}^2(\omega'),$$

ou

$$a_1 = \mu' \vartheta_{00}^2(\omega'), \quad a_2 = \mu' \vartheta_{01}^2(\omega') \quad (\mu' \neq 0).$$

La valeur $\mu'$ est alors aussi une des valeurs de $M(a_1, a_2)$.

3. Après cela, on se propose naturellement les questions suivantes:

Quelle est la relation entre les valeurs $\mu$ et $\mu'$?

Quelle est la relation entre les ensembles des valeurs $\mu$ et des valeurs $M(a_1', a_2)$?

Sans restreindre la généralité, nous voulons supposer que les inégalités (3) sont remplis. Car, si on a

$$a_1 a_2 (a_1 \pm a_2) = 0,$$

il sera identiquement

$$M(a_1, a_2) = 0, a_1.$$

4. Tout d'abord voici quelques théorèmes sur les fonctions modulaires sous une forme un peu adaptée aux applications suivantes:

a) »La condition nécessaire et suffisante, pour qu'on ait

$$a_1 : a_2 = \vartheta_{00}^2(\omega) : \vartheta_{01}^2(\omega) = \vartheta_{00}^2(\omega') : \vartheta_{01}^2(\omega')$$

est*

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta},$$

les $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant entiers, avec $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ et

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{4}.«$$

b) »La condition nécessaire et suffisante, pour qu'on ait

$$a_1^2 : a_2^2 = \vartheta_{00}^4(\omega) : \vartheta_{01}^4(\omega) = \vartheta_{00}^4(\omega') : \vartheta_{01}^4(\omega')$$

est**

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{2}.$$

---

* Voir: Klein-Fricke, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, t. I (1890), p. 663.

** Voir p. ex. Weber, Elliptische Funktionen etc. (1891), p. 140—141.

Danc ce cas on a aussi

$$\vartheta_{00}^2(\omega') = (\gamma\omega + \delta)\,\vartheta_{00}^2(\omega).«$$

L'équation dernière de b) subsiste aussi pour le mod. 4. Dans ce cas on a

$$\vartheta_{01}^2(\omega') = (\gamma\omega + \delta)\,\vartheta_{01}^2(\omega),$$

à cause de l'invariance de $a_1 : a_2$. (Voir a).)

Par suite:

c) »Pour le mod. 4 on a

$$\vartheta_{00}^2(\omega') = (\gamma\omega + \delta)\,\vartheta_{00}^2(\omega),$$
$$\vartheta_{01}^2(\omega') = (\gamma\omega + \delta)\,\vartheta_{01}^2(\omega).«$$

5. Et maintenant nous allons donner la réponse à la question première.

Transformons en (4) $\omega$, au sens du théorème a), en $\omega'$, et par ça $\mu$ en $\mu'$. Cette transformation nous conduit à toutes les valeurs de $M(a_1, a_2)$ qui peuvent être définies de manière transcendante. Et selon

$$a_1 = \mu\,\vartheta_{00}^2(\omega) = \mu'\,\vartheta_{00}^2(\omega') = \mu'(\gamma\omega + \delta)\,\vartheta_{00}^2(\omega),$$

on a

$$\mu' = \frac{\mu}{\gamma\omega + \delta} \qquad (\gamma \equiv 0,\ \delta \equiv 1,\ \text{mod. } 4). \tag{9}$$

Si après (9) il sera

$$\mu'' = \frac{\mu'}{\gamma'\omega' + \delta'},\quad \left(\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}\right) \qquad (\gamma' \equiv 0,\ \delta' \equiv 1,\ \text{mod. } 4),$$

alors:

$$\mu'' = \frac{\mu}{\bar\gamma\omega + \bar\delta},$$

où

$$\bar\gamma = \alpha\gamma' + \gamma\delta' \equiv 0,$$
$$\bar\delta = \beta\gamma' + \delta\delta' \equiv 1 \quad (\text{mod. } 4).$$

6. Pour recevoir une réponse à la deuxième question, nous demandrons: Étant donne l'entier $\lambda$, quelle est la substitution de $\omega$, pour laquelle

$$b_i : c_i \qquad (i = 0, 1, \ldots \lambda)$$

est invariable, mais

$$b_{\lambda+1} : c_{\lambda+1}$$

change de signe?

On voit sans peine que la substitution

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \tag{10}$$

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad \begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \pmod{4}, \quad \gamma = 2^{\lambda+2} r,$$

$r$ étant un entier impair, satisfera aux conditions proposées. Écrivons en effet

$$2^i \omega' = 2^i \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} = \frac{\alpha_i 2^i \omega + \beta_i}{\gamma_i 2^i \omega + \delta_i} \quad (i = 0, 1, \ldots \lambda),$$

$$2^{\lambda+1}\omega' = 2^{\lambda+1} \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} = \frac{\alpha_{\lambda+1} 2^{\lambda+1} \omega + \beta_{\lambda+1}}{\gamma_{\lambda+1} 2^{\lambda+1} \omega + \delta_{\lambda+1}},$$

on a d'une part

$$\alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i = \alpha\delta - 2^i \beta \cdot 2^{-i} \gamma = 1 \quad (i = 0, 1, \ldots \lambda, \lambda + 1),$$

d'autre part

$$\begin{pmatrix}\alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \pmod{4} \quad (i = 0, 1, \ldots \lambda),$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_{\lambda+1} & \beta_{\lambda+1} \\ \gamma_{\lambda+1} & \delta_{\lambda+1}\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \pmod{2}.$$

Les fractions $b_i : c_i$ $(i = 0, 1, \ldots \lambda)$ et $b^2_{\lambda+1} : c^2_{\lambda+1}$ restent suivant a) et b) les mêmes, mais par $\gamma_{\lambda+1} = 2r \not\equiv 0 \pmod{4}$, la fraction $b_{\lambda+1} : c_{\lambda+1}$ change de signe.

7. Soient maintenant les suites doubles correspondantes aux (1) et (5) les suivantes:

$$\begin{array}{cccc} a_1, & a_2 & \qquad a_1, & a_2 \\ {}^{(1)}a_1, & {}^{(1)}a_2 & \qquad b_1, & c_1 \\ {}^{(2)}a_1, & {}^{(2)}a_2 & \qquad b_2, & c_2 \\ \vdots & \vdots & \qquad \vdots & \vdots \end{array}$$

La première conduit à une valeur $M$ de $M(a_1, a_2)$, la deuxième à une valeur $\mu$. Cette valeur $\mu$, elle-même est aussi une valeur de $M(a_1, a_2)$.

Si les deux suites doubles sont identiques, c'est-à-dire ${}^{(i)}a_1 = b_i$, ${}^{(i)}a_2 = c_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, on aura

$$M = \mu.$$

Dans le cas contraire il y aura une première ligne, où ${}^{(i)}a_2$ et $c_i$

ont des signes différents. Soit cette ligne la $s^{\text{ième}}$, c'est-à-dire on aura ${}^{(s-1)}a_2 = -c_{s-1}$.

Nous appliquons une transformation (10) avec $\lambda + 1 = s - 1$. Nous aurons

$$b_i : c_i = \vartheta_{00}^2(2^i\omega') : \vartheta_{01}^2(2^i\omega') \quad (i = 0, 1, \ldots s-2),$$
$$b_{s-1} : -c_{s-1} = \vartheta_{00}^2(2^{s-1}\omega') : \vartheta_{01}^2(2^{s-1}\omega').$$

En tenant compte des équations (voir les formules n° 2)

$$b_{i+1} = \tfrac{1}{2}(b_i + c_i), \quad c_{i+1}^2 = b_i c_i \quad (i = 0, 1, \ldots s-2),$$

on verra l'existence d'un $\mu'$, pour lequel

$$b_i = \mu'\vartheta_{00}^2(2^i\omega'), \qquad c_i = \mu'\vartheta_{01}^2(2^i\omega') \quad (i = 0, 1, \ldots s-2),$$
$$b_{s-1} = \mu'\vartheta_{00}^2(2^{s-1}\omega'), \quad -c_{s-1} = \mu'\vartheta_{01}^2(2^{s-1}\omega').$$

En appliquant successivement ces transformations (10), on arrive à une suite des $\omega$:

$$\omega, \ \omega', \ \omega^{(2)}, \ldots \omega^{(\sigma)}, \ldots$$

et à une suite correspondante des $\mu$:

$$\mu, \ \mu', \ \mu^{(2)}, \ldots \mu^{(\sigma)}, \ldots$$

de manière qu'à tout entier $s$ il corresponde un $\sigma$, pour lequel

$${}^{(i)}a_1 = \mu^{(\sigma)}\vartheta_{00}^2(2^i\omega^{(\sigma)}),$$
$${}^{(i)}a_2 = \mu^{(\sigma)}\vartheta_{01}^2(2^i\omega^{(\sigma)}) \quad (i = 0, 1, \ldots s).$$

Alors l'équations (2) donnera

$$\lim_{i=\infty} \frac{\vartheta_{01}^2(2^i\omega^{(\sigma)})}{\vartheta_{00}^2(2^i\omega^{(\sigma)})} = 1,$$

d'où *

$$\lim_{i=\infty} \vartheta_{00}^2(2^i\omega^{(\sigma)}) = \lim_{i=\infty} \vartheta_{01}^2(2^i\omega^{(\sigma)}) = 1,$$

ou enfin

$$\lim_{\sigma=\infty} \mu^{(\sigma)} = M. \tag{11}$$

8. Nous ajoutons à l'équation (9) quelques remarques.

Étant données $\mu$ et $\omega$, en choisissant $\gamma \equiv 0$, $\delta \equiv 1$ (mod. 4) premiers entre eux, d'ailleurs quelconques: l'équation $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$

---

* Voir p. ex.: Tannery-Molk, Éléments de la théorie des fonctions ellipt. t. IV (1902), p. 126. $\left(q = \frac{\varkappa}{16} + \frac{\varkappa^3}{32}, \ \varkappa^2 = 1 - \varkappa'^2\right)$; ou Weber l.c. p. 144.

a une infinité de résolutions;* de plus: $\alpha_0$, $\beta_0$ étant une de celles, toutes les autres seront données par

$$\alpha = \alpha_0 + h\gamma, \quad \beta = \beta_0 + h\delta \quad (h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

La congruence $\gamma \equiv 0 \pmod{4}$ montre qu'on a $\alpha_0 \equiv 1, 3 \pmod{4}$. Supposons $\alpha_0 \equiv 3 \pmod{4}$. On aurait alors $\alpha_0\delta = 4m + 3$ et $\beta_0\gamma = \alpha_0\delta - 1 = 4m + 2$.

C'est ce qui est impossible au sens de $\gamma \equiv 0 \pmod{4}$. On doit avoir $\alpha_0 \equiv 1 \pmod{4}$ et enfin $\alpha = \alpha_0 + h\gamma \equiv \alpha_0 \equiv 1 \pmod{4}$.

Entre les $\alpha$ possibles il y aura un $\alpha'$ avec un $\beta'$ correspondant, où $\beta' \equiv 0 \pmod{4}$, parceque la congruence $\beta' = \beta_0 + h\delta \equiv 0 \pmod{4}$ a des résolutions, $\delta$ et 4 étant premiers entre eux.

Donc: étant données $\gamma \equiv 0$, $\delta \equiv 1 \pmod{4}$, premiers entre eux, d'ailleurs quelconques, il existe une résolution $\alpha \equiv 1$, $\beta \equiv 0 \pmod{4}$ de l'équation $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

En choisissant $|\gamma|$ et $|\delta|$ assez grandes,

$$|\mu'| = \frac{|\mu|}{|\gamma\omega + \delta|}$$

sera aussi petit que l'on veut. Un tel $\mu'$ est aussi une des valeurs de $M(a_1, a_2)$, et par cela on a démontré que le point zéro est un point limite des points $M(a_1, a_2)$.**

Étant donné les nombres $a_1$, $a_2$, l'ensemble des valeurs $M(a_1, a_2)$ soit l'ensemble $M$, les valeurs de $\mu$ forment l'ensemble $m$. Soient $M'$ et $m'$ les ensembles dérivés.

On peut énoncer certains des résultats qui précèdent sous la forme suivante:

Étant donné les nombres complexes $a_1$, $a_2$ satisfaisants aux conditions

$$a_1 \neq 0, \quad a_2 \neq 0, \quad a_1 \pm a_2 \neq 0,$$

$M(a_1, a_2)$ est une fonction infiniment multivoque. Le point zéro attient aux ensembles $M$ et $M'$. L'ensemble $m$ fait partie de $M$, et enfin: $M$ est contenu dans $m + m'$.

9. Après (9) on a

$$\frac{1}{\mu'(a_1, a_2)} = \frac{\delta}{\mu(a_1, a_2)} + \frac{\gamma\omega}{\mu(a_1, a_2)}.$$

---

* Voir p. ex.: Weber, Lehrbuch der Algebra t. I (1898), p. 407—408.

** Le point zéro est lui même une valeur de $M(a_1, a_2)$. Voir la Note citée Journal de Crelle, p. 73.

Si on a

$$a_1 : d = \vartheta_{00}^2(\omega) : \vartheta_{10}^2(\omega),$$

c'est-à-dire

$$d = \mu \vartheta_{10}^2(\omega),$$

on aura*

$$d = \sqrt{a_1^{\,2} - a_2^{\,2}},$$

$$\omega = \frac{i\mu(a_1, a_2)}{\mu(a_1, d)} + 4s \quad (i = \sqrt{-1})$$

$s$ étant un entier quelconque.

On trouve ainsi

$$\frac{1}{\mu'(a_1, a_2)} = \frac{\delta + 4\gamma s}{\mu(a_1, a_2)} + \frac{i\gamma}{\mu(a_1, d)}.$$

Pour indiquer que $\mu'(a_1, a_2)$ et $\mu(a_1, a_2)$ sont des valeurs de $M(a_1, a_2)$, nous écrivons

$$\frac{1}{\mathfrak{M}(a_1, a_2)} = \frac{\delta + 4\gamma s}{M(a_1, a_2)} + \frac{i\gamma}{M(a_1, d)}$$

ou en tenant compte que $\delta + 4\gamma s \equiv \delta \pmod{4}$ est une des valeurs possibles de $\delta$,

$$\frac{1}{\mathfrak{M}(a_1, a_2)} = \frac{\delta}{M(a_1, a_2)} + \frac{i\gamma}{M(a_1, d)} \quad (i = \sqrt{-1}). \tag{12}$$

Pour les valeurs de $M(a_1, a_2)$ qui ne font pas partie de l'ensemble $m$

$$\left| \frac{1}{\mathfrak{M}(a_1, a_2)} - \frac{\delta}{M(a_1, a_2)} - \frac{i\gamma}{M(a_1, d)} \right| \tag{12a}$$

sera aussi petit que l'on veut**, comme ces valeurs de $M(a_1, a_2)$ sont des points limites de l'ensemble $m$.

Au cas $\mathfrak{M}(a_1, a_2) = M(a_1, a_2)$ on aura $\gamma = 0$, $\delta = 1$.

L'égalité (12) se trouve, sans démonstration, dans les œuvres posthumes de Gauss***, exemplifié à un cas numérique.

Gauss traite le cas où les $a_1, a_2$ sont réels positifs, il entend par $M(a_1, a_2)$ la limite en choisissant toujours des racines positifs, en désignant par $\mathfrak{M}(a_1, a_2)$ une des valeurs de $M({}^{(s)}a_1, -{}^{(s)}a_2)$, $(s = 1, 2, \ldots)$.

La valeur $\delta = 1$ est possible pour (12), comme nous l'avons vu au n°. Gauss n'a noté que ce cas particulier.

---

* Voir le Mémoire cité t. XXV de cette Revue, p. 158—160.

** Exceptée naturellement la valeur $M(a_1, a_2) = 0$.

*** Werke t. III p. 378.

# EIN ELEMENTARER BEWEIS DES HADAMARDSCHEN DETERMINANTENSATZES.*

Von OTTO SZÁSZ.

Sei

$$D = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$$

eine Determinante $n$-ter Ordnung, deren Elemente beliebige komplexe Zahlen sind; den konjugierten Wert der Zahl $a_{ik}$ wollen wir mit $\bar{a}_{ik}$ bezeichnen. Dann ist

$$|D|^2 = D\bar{D} = \Sigma \pm c_{11} c_{22} \ldots c_{nn},$$

wobei

$$c_{ik} = a_{i1}\bar{a}_{k1} + a_{i2}\bar{a}_{k2} + \cdots + a_{in}\bar{a}_{kn}.$$

J. HADAMARD** hat für den absoluten Wert der Determinante eine obere Grenze angegeben, indem er bewies, daß

$$\Sigma \pm c_{11} c_{22} \ldots c_{nn} \leqq c_{11} c_{22} \ldots c_{nn}. \tag{I}$$

Zur Herleitung dieses Satzes beweist HADAMARD den folgenden allgemeineren Satz:

$$D\bar{D} \leqq (\Sigma \pm c_{11} c_{22} \ldots c_{n-1,n-1}) \cdot c_{nn}. \tag{II}$$

Nachdem der HADAMARDsche Satz in der Theorie der Integralgleichungen eine Rolle spielt, wird es vielleicht nicht überflüssig sein, einen solchen Beweis des Satzes mitzuteilen, der sich bloß auf die elementarsten Eigenschaften der Determinanten stützt; dies findet sich in § 1. In § 2 leite ich eine von E. FISCHER gegebene Verallgemeinerung des Satzes (II) auf kürzerem Wege ab, mit Benutzung eines, sich auf die stetigen Funktionen beziehenden WEIERSTRASSschen Satzes.***

---

* Diese Arbeit ist eine Übersetzung meiner in ungarischer Sprache erschienenen Note: Az HADAMARD-féle determinánstétel egy elemi bebizonyítása, Mathematikai és Physikai Lapok, XIX, 1910, p. 221—227; jedoch ist hier § 3 neu hinzugefügt und erscheint in den „Math. és Phys. Lapok" unter dem Titel: „Egy determinánstételröl".

** Bulletin des sciences mathématiques (2), XVII (1893). Résolution d'une question relative aux déterminants.

*** Bezüglich anderer Beweise vgl. W. WIRTINGER, Monatshefte f. Math. u. Phys. 1907. — E. FISCHER, Archiv der Math. u. Phys., Bd. 13 (1908).

Kürzlich fand ich, daß auch E. J. NANSON einen Beweis des Satzes (I) gab*, er erhielt selben, indem er folgenden Satz bewies:

Sei

$$\varDelta = [b_{ik}]_1^n$$

eine symmetrische Determinante, deren sämtliche Hauptminoren positiv sind, dann gilt folgende Ungleichung:

$$\varDelta \leqq b_{11} b_{22} \ldots b_{nn}.$$

Wohl bezieht sich dieser Satz bloß auf Determinanten mit reellen Elementen, jedoch ist es leicht, die NANSONsche Betrachtung auf HERMITEsche Determinanten auszudehnen. Dieser Satz ist nicht allgemeiner als Satz (I), denn die quadratische Matrix $(b_{ik})$ läßt sich (bei den gegebenen Bedingungen) durch zeilenweise Komposition einer Matrix $(u_{is})$ mit der konjugiert komplexen $(\bar{u}_{is})$ erzeugen, d. h. es ist

$$b_{ik} = \sum_{s=1}^{N} u_{is} \bar{u}_{ks} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n), \ (N \leqq n).$$

Vgl. hierzu: FISCHER, loc. cit. p. 34, Punkt 2.

Im § 3 gebe ich nochmals einen einfachen Beweis des FISCHERschen Satzes (Satz III der FISCHERschen Note), indem ich die NANSONsche Beweisführung verallgemeinere.

## 1.

Ich transformiere die gegebene Determinante — ohne ihren Wert zu ändern — auf die Form:

$$D = \Sigma \pm \alpha_{11} \alpha_{22} \ldots \alpha_{nn},$$

Neuerdings hat T. BOGGIO (Bulletin des sciences mathématiques, 1911) einen Beweis des Satzes veröffentlicht, der sich von meinem Beweise wenig unterscheidet. Herr T. BOGGIO war so freundlich, in einem an mich gerichteten Schreiben sein Bedauern darüber auszusprechen, daß er von meiner in ungarischer Sprache erschienenen Note keine Kenntnis besaß. In seiner Note finden sich weitere Literaturangaben.

* Messenger of Mathematics 31 (1901), A determinant inequality. NANSON bemerkt, daß diesen Satz LORD KELVIN bereits im Jahre 1886 aussprach und an TH. MUIR mitteilte und später dieser Satz in der „The Educational Times" erschien. Einer freundlichen Mitteilung des Herrn NANSON entnehme ich, daß MUIR den Satz im Jahre 1901 in der „The Educational Times" als „Question 14792" veröffentlichte. Ein Beweis von MUIR findet sich in: Mathematical Questions and Solutions from the Eductional Times, Vol. 1. New Series, p. 52. Auch der NANSONsche Beweis ist hier abgedruckt.

so, daß zwischen ihren Elementen folgende Beziehungen bestehen sollen:

$$\alpha_{i1}\bar{\alpha}_{k1} + \alpha_{i2}\bar{\alpha}_{k2} + \cdots + \alpha_{in}\bar{\alpha}_{kn} = 0,$$

oder in kurzer Bezeichnungsweise

$$\gamma_{ik} = 0, \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, n \\ i \neq k \end{pmatrix}$$

was man so ausdrückt, daß die Zeilen zueinander orthogonal seien.*

Es ist dann

$$D\bar{D} = \gamma_{11}\gamma_{22}\cdots\gamma_{nn}. \tag{$\gamma$}$$

Die Transformation erreiche ich in folgenden Schritten:

Die erste Zeile der Determinante lasse ich unverändert; es wird also

$$\alpha_{11} = a_{11}, \ \alpha_{12} = a_{12}, \ldots, \alpha_{1n} = a_{1n}.$$

Die zweite Zeile wird zur ersten orthogonal, indem ich an ihre Stelle folgende setze:

$$\alpha_{21} = a_{21} + x_{11}\alpha_{11}, \quad \alpha_{22} = a_{22} + x_{11}\alpha_{12}, \ldots, \alpha_{2n} = a_{2n} + x_{11}\alpha_{1n},$$

wo die noch unbestimmte Zahl $x_{11}$ durch folgende Gleichung bestimmt werde:

$$(a_{21} + x_{11}\alpha_{11})\bar{\alpha}_{11} + (a_{22} + x_{11}\alpha_{12})\bar{\alpha}_{12} + \cdots + (a_{2n} + x_{11}\alpha_{1n})\bar{\alpha}_{1n} = 0.$$

Jetzt wird die dritte Zeile zu den vorhergehenden orthogonal, indem ich setze:

$$\alpha_{31} = a_{31} + x_{12}\alpha_{11} + x_{22}\alpha_{21}, \ldots, \alpha_{3n} = a_{3n} + x_{12}\alpha_{1n} + x_{22}\alpha_{2n},$$

wo also $x_{12}$ und $x_{22}$ bzw. durch die Gleichungen

$$(a_{31} + x_{12}\alpha_{11})\bar{\alpha}_{11} + \cdots + (a_{3n} + x_{12}\alpha_{1n})\bar{\alpha}_{1n} = 0,$$
$$(a_{31} + x_{22}\alpha_{21})\bar{\alpha}_{21} + \cdots + (a_{3n} + x_{22}\alpha_{2n})\bar{\alpha}_{2n} = 0$$

bestimmt werden.

Dies setze ich soweit fort, bis auch die letzte Zeile zu den vorhergehenden orthogonal wird.

---

* Sind $\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in}$ reell und die Koordinaten eines Vektors im $n$-dimensionalen Raume, so bedeuten diese Gleichungen, daß die Vektoren zueinander orthogonal sind.

Diese Transformation ist eindeutig, denn die $x$ können sukzessive aus linearen Gleichungen berechnet werden, sofern nicht der Koeffizient irgendeines $x$ verschwindet, dies würde aber bedeuten, daß für einen Wert des Index $i$

$$\alpha_{i1} = 0, \quad \alpha_{i2} = 0, \ldots, \alpha_{in} = 0$$

wird; diesen Fall können wir aus unseren Betrachtungen ausschließen, denn es wird jetzt $D = 0$, und der Satz ist trivial.

Zu dem Hadamardschen Satze führt jetzt der Umstand, daß die einzelnen Schritte das Produkt $c_{11} c_{22} \ldots c_{nn}$ nicht vergrößern, höchstens unverändert lassen. Denn die erste Zeile blieb unverändert, es ist daher

$$c_{11} = \gamma_{11};$$

die Veränderung der zweiten Zeile zieht bloß eine Änderung des Faktors $c_{22}$ nach sich; und zwar ist $x_{11}$ so bestimmt, daß der Ausdruck

$$\varphi(x) = (a_{21} + x\alpha_{11})(\bar{a}_{21} + \bar{x}\bar{\alpha}_{11}) + \cdots + (a_{2n} + x\alpha_{1n})(\bar{a}_{2n} + \bar{x}\bar{\alpha}_{1n})$$

für $x = x_{11}$ zum Minimum wird; $\varphi(x)$ unterscheidet sich nämlich von dem Produkte

$$\psi(x) = \left[ x(\alpha_{11}\bar{\alpha}_{11} + \cdots + \alpha_{1n}\bar{\alpha}_{1n})^{\frac{1}{2}} + \frac{\bar{\alpha}_{11} a_{21} + \cdots + \bar{\alpha}_{1n} a_{2n}}{(\alpha_{11}\bar{\alpha}_{11} + \cdots + \alpha_{1n}\bar{\alpha}_{1n})^{\frac{1}{2}}} \right] \cdot$$
$$\cdot \left[ \bar{x}(\alpha_{11}\bar{\alpha}_{11} + \cdots + \alpha_{1n}\bar{\alpha}_{1n})^{\frac{1}{2}} + \frac{\alpha_{11} \bar{a}_{21} + \cdots + \alpha_{1n} \bar{a}_{2n}}{(\alpha_{11}\bar{\alpha}_{11} + \cdots + \alpha_{1n}\bar{\alpha}_{1n})^{\frac{1}{2}}} \right]$$

nur in einer additiven Konstante, daher können wir statt des Minimums von $\varphi(x)$ dasjenige von $\psi(x)$ betrachten; $\psi(x)$ wird niemals negativ, wenn es also den Wert 0 annimmt, dann wird es zum Minimum, dies erfolgt aber an der Stelle $x = x_{11}$. Nachdem offenbar $c_{22} = \varphi(0)$ und $\gamma_{22} = \varphi(x_{11})$ ist, somit ist klar, daß

$$c_{22} \geqq \gamma_{22}.$$

Eine ähnliche Bemerkung gilt in bezug der Veränderung der dritten Zeile; wir haben gesehen, daß für denjenigen Wert von $x$, für den die Zeile $a_{2i} + x\alpha_{1i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ zu der Zeile $\alpha_{1i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ orthogonal wird, gleichzeitig der Ausdruck $\sum\limits_{(i)} (a_{2i} + x\alpha_{1i})(\bar{a}_{2i} + \bar{x}\bar{\alpha}_{1i})$

zum Minimum wird — mutatis mutandis —, wird jetzt für denjenigen Wert von $x_1$, für den die Zeile

$$a_{3i} + x_1\alpha_{1i} + x_2\alpha_{2i} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

zur Zeile $\alpha_{1i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ orthogonal wird, zugleich der Ausdruck $\sum\limits_{(i)}(a_{3i} + x_1\alpha_{1i} + x_2\alpha_{2i})(\bar{a}_{3i} + \bar{x}_1\bar{\alpha}_{1i} + \bar{x}_2\bar{\alpha}_{2i})$ zum Minimum ($x_2$ sei einstweilen ein unbestimmter Parameter), dies erfolgt für $x_1 = x_{12}$, weiter wird für den Wert von $x_2$, für den die Zeile $a_{3i} + x_{12}\alpha_{1i} + x_2\alpha_{2i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ zur Zeile $\alpha_{2i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ orthogonal wird, zugleich der Ausdruck

$$\sum_{(i)}(a_{3i} + x_{12}\alpha_{1i} + x_2\alpha_{2i})(\bar{a}_{3i} + \bar{x}_{12}\bar{\alpha}_{1i} + \bar{x}_2\bar{\alpha}_{2i})$$

zum Minimum. Somit ist bewiesen, daß

$$c_{33} \geqq \gamma_{33}.$$

Es ist klar, daß in bezug der übrigen Schritte eine ähnliche Bemerkung gilt, so daß ferner

$$c_{44} \geqq \gamma_{44}, \ldots, c_{nn} \geqq \gamma_{nn}.$$

Aus diesen Relationen, vereint mit der Gleichung ($\gamma$), folgt, daß

$$c_{11}c_{22}\ldots c_{nn} \geqq D\bar{D}, \tag{I'}$$

was eben zu beweisen war.

Es ist klar, daß in (I) das Gleichheitszeichen gilt, wenn irgendeines der $c_{ii}$ verschwindet (d. h. wenn $a_{i1} = 0$, $a_{i2} = 0, \cdots, a_{in} = 0$), oder wenn $c_{ik} = 0$ für jedes $i$ und $k$ $(i \neq k)$; aber auch nur in diesen Fällen, denn wenn keine dieser Bedingungen erfüllt ist, so kann ich auf die angegebene Art zu einer anderen Determinante vom Werte $D$ übergehen, so daß die obere Grenze sinkt, also nicht schon das Minimum sein konnte.

Mittels derselben Beweismethode läßt sich der Satz für beliebige Matrices ableiten.

## 2.

Die von Fischer gegebene Verallgemeinerung des Satzes (II) lautet folgendermaßen:

Sei

$$M = \begin{Vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} \ldots a_{mn} \end{Vmatrix}, \quad m \leqq n$$

eine beliebige Matrix, dann ist

$$M\overline{M} \leqq (\Sigma \pm c_{11} \dots c_{\varrho\varrho})(\Sigma \pm c_{\varrho+1,\varrho+1} \dots c_{mm}) \qquad \text{(M)}$$

oder kurz

$$M\overline{M} \leqq \Gamma(a_{ik}),$$

$\varrho$ bedeute eine der Zahlen 1, 2, . . ., $m-1$.

Hier ist

$$M\overline{M} = \Sigma \pm c_{11} c_{22} \dots c_{mm}.$$

Ich unterscheide drei Fälle:

$\alpha$) Sämtliche Minoren $\varrho$-ter Ordnung, gebildet aus den $\varrho$ ersten Kolonnen, verschwinden; in diesem Falle ist der Satz trivial ($M\overline{M} = 0$).

$\beta$) Es verschwinden alle aus den $\varrho$ ersten Kolonnen gebildeten Minoren $\varrho$-ter Ordnung, mit Ausnahme des in $\Gamma$ vorkommenden Minors; in diesem Falle gilt in ($M$) das Gleichheitszeichen.

$\gamma$) Außer dem Minor $\Sigma \pm c_{11} \dots c_{\varrho\varrho}$ gibt es noch mindestens einen aus den $\varrho$ ersten Kolonnen gebildeten Minor, der nicht verschwindet.*

In diesem Falle kann ich ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß für ein $k$, das größer ist als $\varrho$,

$$\sum \pm c_{k1} c_{22} \dots c_{\varrho\varrho} \neq 0.$$

Jetzt seien die Elemente $a_{ik}$ der Matrix variabel, so zwar, daß

$$\sum \pm c_{11} c_{22} \dots c_{mm} = K \qquad \text{(F)}$$

konstant und von Null verschieden sei, womit der Fall $\alpha$) ausgeschlossen ist.

Ich betrachte also eine $mn-1$ dimensionale Menge von Matrizen, zwischen denen die Matrix $M$ enthalten ist. Nachdem $\Gamma$ eine stetige Funktion der $a_{ik}$ ist, die niemals negativ wird, so hat sie ein Minimum bei der Bedingung (F). Sei dies Minimum z. B. mit den Elementen der Matrix

$$M_u = \left\| \begin{matrix} u_{11} \dots u_{1n} \\ \vdots \\ u_{m1} \dots u_{mn} \end{matrix} \right\|$$

erreicht; wenn ich beweisen kann, daß für diese Matrix der Fall

* Ein vierter Fall ist unmöglich.

$\beta$) eintritt, so ist unser Satz schon erreicht, denn es ist dann

$$\Gamma_{\min} = \Gamma(u_{ik}) = M_u \overline{M}_u = K,$$

also

$$\Gamma(a_{ik}) \geqq K$$

oder

$$\Gamma(a_{ik}) \geqq M\overline{M}.$$

Daß für $M_u$ der Fall $\beta$) eintritt, beweise ich so: ich nehme das Gegenteil an, dann wäre gemäß dem Fall $\gamma$)

$$\sum \pm z_{k1} z_{22} \ldots z_{\varrho\varrho} \neq 0,$$

wo

$$z_{ik} = u_{i1}\overline{u}_{k1} + u_{i2}\overline{u}_{k2} + \cdots + u_{in}\overline{u}_{kn},$$

und ich zeige, daß ich $x$ so bestimmen kann, daß der zu

$$M_u' = \begin{Vmatrix} u_{11} + x u_{k1} & \ldots & u_{1n} + x u_{kn} \\ u_{21} & \ldots & u_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{m1} & \ldots & u_{mn} \end{Vmatrix}$$

gehörige Wert $\Gamma(M_u')$ kleiner wird als $\Gamma(M_u)$; dies ist aber ein Widerspruch, denn $\Gamma(M_u)$ ist laut Voraussetzung das Minimum.*

$\Gamma(M_u')$ und $\Gamma(M_u)$ unterscheiden sich nur in ihrem ersten Faktor; dieser ist in $\Gamma(M_u)$:

$$\sum \pm z_{11} \ldots z_{\varrho\varrho} = \begin{vmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1\varrho} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{\varrho 1} & \cdots & z_{\varrho\varrho} \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} u_{11} & \ldots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{\varrho 1} & \ldots & u_{\varrho n} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \overline{u}_{11} & \ldots & \overline{u}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{u}_{\varrho 1} & \ldots & \overline{u}_{\varrho n} \end{Vmatrix}$$

und der entsprechende Faktor in $\Gamma(M_u')$ ist:

$$\begin{Vmatrix} u_{11} + x u_{k1} & \ldots & u_{1n} + x u_{kn} \\ u_{21} & \ldots & u_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{\varrho 1} & \ldots & u_{\varrho n} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \overline{u}_{11} + \overline{x}\,\overline{u}_{k1} & \ldots & \overline{u}_{1n} + \overline{x}\,\overline{u}_{kn} \\ \overline{u}_{21} & \ldots & \overline{u}_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{u}_{\varrho 1} & \ldots & \overline{u}_{\varrho n} \end{Vmatrix},$$

nach Ausführung der Multiplikation geht dieses Produkt über in den Ausdruck:

$$\sum \pm z_{11} z_{22} \ldots z_{\varrho\varrho} + x \sum \pm z_{k1} z_{22} \ldots z_{\varrho\varrho} + \overline{x} \sum \pm \overline{z}_{k1} \overline{z}_{22} \ldots \overline{z}_{\varrho\varrho}$$
$$+ x\overline{x} \sum \pm z_{kk} z_{22} \ldots z_{\varrho\varrho}$$

und dieser kann durch entsprechende Wahl des $x$ offenbar kleiner

---

* Es ist klar, daß $M_u' \overline{M}_u' = K$.

gemacht werden als $\Sigma \pm z_{11} \ldots z_{\varrho\varrho}$, denn der Koeffizient von $x$ ist — laut Voraussetzung — von Null verschieden.

Somit ist der Satz (M) vollständig bewiesen.

Es ist klar, daß in den Fällen $\alpha$) und $\beta$) in (M) das Gleichheitszeichen gilt; aber auch nur in diesen Fällen, denn im Falle $\gamma$) ist — wie wir sahen — der Wert von $\Gamma$ nicht der minimalste.*

Indem ich den Satz wiederholt auf die einzelnen Faktoren von $\Gamma$ anwende, erhalte ich, daß

$$M\overline{M} \leqq \left(\sum \pm c_{11} \ldots c_{\varrho_1 \varrho_1}\right)\left(\sum \pm c_{\varrho_1+1, \varrho_1+1} \ldots c_{\varrho_2 \varrho_2}\right) \ldots$$
$$\ldots \left(\sum \pm c_{\varrho_k+1, \varrho_k+1} \ldots c_{mm}\right)$$
$$(\varrho_1 < \varrho_2 < \cdots < \varrho_k < m).$$

Diese Relation enthält alle vorangeführten Sätze als spezielle Fälle in sich.

3.

Wir beweisen folgenden Satz:

Jeder Hauptminor der HERMITEschen Determinante $\varDelta = [b_{ik}]_1^n$ sei positiv, dann ist

$$\sum \pm b_{11} \ldots b_{nn} \leqq \left(\sum \pm b_{11} \ldots b_{\varrho-1, \varrho-1}\right)\left(\sum \pm b_{\varrho\varrho} \ldots b_{nn}\right).$$

Der Satz gilt offenbar für $n = 1, 2$. Ich setze voraus, daß er für die Ordnungen, die kleiner sind als $n$, gilt und beweise, daß er dann auch für die Ordnung $n$ gilt.

Offenbar ist die adjungierte Determinante von $\varDelta$

$$\left(\sum \pm B_{11} \ldots B_{nn}\right)$$

auch eine HERMITEsche Determinante; es ist gemäß eines JACOBIschen Satzes:

$$\sum \pm B_{11} \ldots B_{\varrho\varrho} = \varDelta^{\varrho-1} \sum \pm b_{\varrho+1, \varrho+1} \ldots b_{nn}, \tag{1}$$

also ist auch jeder Hauptminor der adjungierten Determinante positiv. Jetzt ist laut Voraussetzung:

---

* Ich kann nachträglich nur kurz bemerken, daß der Fall $\beta$) dann und nur dann eintritt, wenn $[c_{ik}]_1^\varrho \neq 0$ und $c_{ik} = 0$ für $i = \varrho + 1, \cdots, m$; $k = 1, \cdots, \varrho$ (auch von FISCHER angegeben); dies ergibt sich daraus, daß die Determinante des Gleichungssystems

$$c_{i1} D_{k1} + \cdots + c_{i\varrho} D_{k\varrho} = 0 \qquad (k = 1, \cdots, \varrho;\ i > \varrho)$$

nicht verschwindet. Hier bedeutet $D_{ik}$ den in $[c_{ik}]_1^\varrho$ zu $c_{ik}$ gehörigen Minor.

$$\sum \pm B_{11} \ldots B_{\varrho\varrho} \leqq B_{\varrho\varrho} \sum \pm B_{11} \ldots B_{\varrho-1,\varrho-1} \tag{2}$$

$$B_{\varrho\varrho} \leqq \left(\sum \pm b_{11} \ldots b_{\varrho-1,\varrho-1}\right)\left(\sum \pm b_{\varrho+1,\varrho+1} \ldots b_{nn}\right) \tag{3}$$

Aus den Relationen (1), (2) und (3) folgt nun

$$\Delta^{\varrho-1} \leqq \left(\sum \pm b_{11} \ldots b_{\varrho-1,\varrho-1}\right)\left(\sum \pm B_{11} \ldots B_{\varrho-1,\varrho-1}\right).$$

Es ist noch

$$\sum \pm B_{11} \ldots B_{\varrho-1,\varrho-1} = \Delta^{\varrho-2}\left(\sum \pm b_{\varrho\varrho} \ldots b_{nn}\right)$$

also wird schließlich

$$\Delta \leqq \left(\sum \pm b_{11} \ldots b_{\varrho-1,\varrho-1}\right)\left(\sum \pm b_{\varrho\varrho} \ldots b_{nn}\right).* \tag{4}$$

Der Satz läßt sich noch etwas verallgemeinern, indem auch folgender Satz gilt:

Wenn sämtliche Hauptminoren der Determinante $\Delta$ positiv sind und wenn solche Zahlen $b_1, \ldots, b_n$ existieren, daß $\left[b_{ik}\frac{b_i}{b_k}\right]_1^n$ eine HERMITEsche Determinante wird, so ist

$$\sum \pm b_{11} \ldots b_{nn} \leqq \left(\sum \pm b_{11} \ldots b_{\varrho-1,\varrho-1}\right)\left(\sum \pm b_{\varrho\varrho} \ldots b_{nn}\right).$$

Der Satz folgt daraus, daß $[b_{ik}]$ und $\left[b_{ik}\frac{b_i}{b_k}\right]_1^n$ in ihren sämtlichen Hauptminoren übereinstimmen.

Bemerkung: Sei $\Delta$ eine orthogonale Determinante, dann ist

$$\Delta = 1 = \prod_{i=1}^{n} \left(b_{i1}\bar{b}_{i1} + \cdots + b_{in}\bar{b}_{in}\right)^{\frac{1}{2}}$$

und andererseits

$$1 = \prod_{i=1}^{n} b_{ii},$$

daher ist

$$b_{ii} = 1, \quad b_{ik} = 0, \quad i \neq k.$$

In Worten: Die einzige positiv definite HERMITEsche Form von $n$ Variabeln, deren Diskriminante eine orthogonale Determinante ist, ist: $x_1\bar{x}_1 + \cdots + x_n\bar{x}_n$.

---

* Auch hier läßt sich leicht zeigen, daß für nichtverschwindendes $\Delta$ in (4) dann und nur dann Gleichheit gilt, wenn $b_{ik} = 0$ für $i = \varrho, \cdots, n$; $k = 1, \cdots, \varrho - 1$. Dies ergibt sich mit vollständiger Induktion. Wegen Raummangel kann ich dies nicht ausführen.

9.

# HERLEITUNG DER FUCHSSCHEN PERIODENRELATIONEN FÜR LINEARE DIFFERENTIALSYSTEME.

Von GEORG HRONYECZ

Professor am evang. Lyceum in Kesmark (Ungarn).

L. FUCHS* hat aus dem ABEL-JACOBIschen verallgemeinerten Vertauschungssatze für lineare Differentialgleichungen Relationen hergeleitet, die denjenigen analog sind, die WEIERSTRASS aus dem Satze über die Vertauschung von Parameter und Argument für die Perioden der hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Gattung gewonnen hat. Die FUCHSschen Relationen stellen Beziehungen dar, die die Integrale, erstreckt über die Lösungen einer linearen Differentialgleichung des FUCHSschen Typus zwischen den Verzweigungspunkten als Grenzen, mit den Koeffizienten der Fundamentalsubstitutionen der Monodromiegruppe jener Differentialgleichung verknüpfen. SCHLESINGER** hat diese FUCHSschen Relationen in Verbindung gesetzt mit der von ihm gegebenen Verallgemeinerung des ABEL-JACOBIschen Vertauschungssatzes, und HIRSCH*** hat die gedachten Relationen hergeleitet und verallgemeinert, indem er von den SCHLESINGERschen Untersuchungen über die EULERsche Transformierte Anwendung machte.

Herr Professor SCHLESINGER hat mir vorgeschlagen, die analogen Relationen für die Integralmatrizen schlechthin kanonischer

---

* CRELLE Journal Bd. 76 (1874), Werke I (1904) S. 415 ff.; Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1892, Werke III (1901) S. 141 ff.

** Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Bd. II, (1897) XII. Abschnitt.

*** Mathematische Annalen. Bd. 54 (1900), S. 202 ff.

linearer Differentialsysteme erster Ordnung aufzustellen, und ich lege im folgenden die Ergebnisse meiner Untersuchungen vor. Die darin befolgte Methode stimmt im wesentlichen mit der von FUCHS überein. Sie stützt sich einerseits auf die von SCHLESINGER in seinen Vorlesungen* entwickelten Methoden der Theorie der linearen Differentialsysteme, andererseits auf die von SCHLESINGER in seinem Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen Bd. $\mathrm{II}_1$, § 257, 258, 259 gegebene Darstellung der in Rede stehenden FUCHSschen Resultate; auch konnte ich an einigen im folgenden genauer bezeichneten Stellen von schriftlichen Aufzeichnungen und mündlichen Mitteilungen Gebrauch machen, die Herr Professor SCHLESINGER mir freundlichst zur Verfügung gestellt hat.

## I. Adjungierte lineare Differentialsysteme.**

Es sei

(a)
$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda k}$$
$$(k = 1, 2, 3 \cdots n)$$

ein lineares Differentialsystem, so ist dessen adjungiertes Differentialsystem bekanntlich

(b)
$$\frac{dz_k}{dx} = -\sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda a_{\varkappa\lambda}.$$
$$(k = 1, 2, 3 \cdots n)$$

Wir betrachten den Fall eines schlechthin kanonischen Differentialsystems, setzen also

$$a_{\lambda k}(x) = \frac{g_{\lambda k}(x)}{\varphi(x)},$$

wo $\varphi(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_\sigma)$ und $g_{\lambda k}(x)$ eine ganze

---

* Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen (Leipzig, Teubner 1908). Ich habe diese Vorlesungen im Wintersemester des Jahres 1905 und im Sommersemester des Jahres 1906 an der Universität zu Klausenburg gehört. Im folgenden werde ich sie kurz unter dem Titel: SCHLESINGER: „Vorlesungen" zitieren.

** Teilweise nach den mündlichen Mitteilungen von Herrn Professor SCHLESINGER, teilweise nach seinen „Vorlesungen."

rationale Funktion höchstens vom Grade $\sigma - 1$ in $x$ ist. Dann haben die Differentialsysteme (a) und (b) die Form

$$\text{(A)} \qquad \varphi(x)\frac{dy_k(x)}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda(x) g_{\lambda k}(x)$$

$$\text{(b}'\text{)} \qquad \varphi(x)\frac{dz_k(x)}{dx} = -\sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda(x) g_{k\lambda}(x).$$

Das Differentialsystem (b′) verwandelt sich durch Anwendung der Substitution

$$\text{(1)} \qquad z_k(x) = \varphi(x)\mu_k(x)$$

in die Gleichungen

$$\text{(B)} \qquad \frac{d(\varphi(x)\mu_k(x))}{dx} = -\sum_{\lambda=1}^{n} \mu_\lambda(x) g_{k\lambda}(x).$$

Dies ist das zu (A) gehörige adjungierte Differentialsystem.

## II. Der Vertauschungssatz von Parameter und Argument für die linearen Differentialsysteme.*

Es ist

$$\frac{d}{dx}\left[\varphi(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k(z)}{z-x}\mu_k(x)\right] - \frac{d}{dz}\left[\varphi(z)\sum_{k=1}^{n} y_k(z)\frac{\mu_k(x)}{x-z}\right] =$$

$$= \varphi'(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k(z)}{z-x}\mu_k(x) + \varphi(x)\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{y_k(z)}{(z-x)^2}\mu_k(x) + \frac{y_\varkappa(z)}{z-x}\cdot\frac{d\mu_k(x)}{dx}\right\}$$

$$-\varphi'(z)\sum_{k=1}^{n} y_k(z)\frac{\mu_k(x)}{x-z} - \varphi(z)\sum_{k=1}^{n}\left\{y_k(z)\frac{\mu_k(x)}{(x-z)^2} + \frac{dy_k(z)}{dz}\frac{\mu_k(x)}{x-z}\right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{y_k(z)}{(z-x)^2}\mu_k(x)\varphi(x) - \varphi(z)y_k(z)\frac{\mu_k(x)}{(x-z)^2}\right\} - \sum_{k=1}^{n}\frac{y_k(z)}{x-z}\mu_k(x)\varphi'(z)$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k(z)}{z-x}\left\{\varphi'(x)\mu_k(x) + \varphi(x)\frac{d\mu_k(x)}{dx}\right\} - \sum_{k=1}^{n}\varphi(z)\frac{dy_k(z)}{dz}\frac{\mu_k(x)}{x-z},$$

* Mit Benutzung einer mir von Herrn Prof. Schlesinger übergebenen schriftlichen Aufzeichnung.

also nach (A) und (B)

$$\frac{d}{dx}\Big[\varphi(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k(z)}{z-x}\mu_k(x)\Big]-\frac{d}{dz}\Big[\varphi(z)\sum_{k=1}^{n}y_\varkappa(z)\frac{\mu_k(x)}{x-z}\Big]$$

$$=\sum_{\varkappa=1}^{n}y_k(z)\,\mu_k(x)\left\{\frac{\varphi(x)-\varphi(z)}{(z-x)^2}-\frac{\varphi'(z)}{x-z}\right\}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n}y_k(z)\,\mu_\lambda(x)\frac{g_{k\lambda}(x)-g_{k\lambda}(z)}{x-z}$$

oder

$$\text{(c)}\quad \frac{d}{dx}\Big[\varphi(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k(z)}{z-x}\mu_k(x)\Big]-\frac{d}{dz}\Big[\varphi(z)\sum_{k=1}^{n}y_k(z)\frac{\mu_k(x)}{x-z}\Big]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n}y_k(z)\mu_\lambda(x)\,U_{k\lambda}(x,z),$$

wo

$$U_{k\lambda}(x,z)=\begin{cases}\dfrac{g_{k\lambda}(x)-g_{k\lambda}(z)}{x-z}, & \text{für } k\neq\lambda\\[2ex] \dfrac{g_{k\lambda}(x)-g_{k\lambda}(z)}{x-z}+\dfrac{\varphi(x)-\varphi(z)}{(z-x)^2}-\dfrac{\varphi'(z)}{x-z}, & \text{für } k=\lambda.\end{cases}$$

$U_{k\lambda}(x, z)$ ist eine ganze rationale Funktion von $x$ und $z$ vom Grade $\sigma-2$. Für $k\neq\lambda$ ist dies ohne weiteres klar. Um dasselbe für $k=\lambda$ einzusehen, entwickeln wir $\varphi(x)$ nach dem TAYLORschen Satze in der Umgebung von $x=z$; es ist

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(z)}{(z-x)^2}-\frac{\varphi'(z)}{x-z}=\frac{\varphi''(z)}{2!}+\frac{\varphi^{(3)}(z)}{3!}\,x-z+\cdots+\frac{\varphi^{(\sigma)}(z)}{\sigma!}\,(x-z)^{\sigma-2},$$

woraus man sieht, daß $U_{k\lambda}(x, z)$ auch für $k=\lambda$ eine ganze rationale Funktion in $x$, $z$ vom Grade $\sigma-2$ ist.

Es bedeute $(y_{ik})$ eine Integralmatrix des Differentialsystems (A) und $(\mu_{ik})$ die adjungierte Integralmatrix des Systems (B). Setzen wir nun in der Gleichung (c) $y_{ik}$ statt $y_k$, $\mu_{jk}$ statt $\mu_k$ und $\mu_{j\lambda}$ statt $\mu_\lambda$, so ist:

$$\text{(c')}\quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n}y_{ik}(z)\,\mu_{j\lambda}(x)\,U_{k\lambda}(x,z)=\frac{d}{dx}\Big[\varphi(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{y_{ik}(z)}{z-x}\mu_{jk}(x)\Big]$$

$$-\frac{d}{dz}\Big[\varphi(z)\sum_{k=1}^{n}y_{ik}(z)\frac{\mu_{jk}(x)}{x-z}\Big];$$

setzen wir weiter $\mu_{jk}(x) = Y_{kj}(x)$ und $\mu_{j\lambda}(x) = Y_{\lambda j}(x)$, wo nach (1) und nach SCHLESINGER: „Vorlesungen" 3. Vorlesung:

$$(\varphi(x)\, Y_{ik}(x)) = (y_{ik}(x))^{-1}$$

ist, so können wir die Gleichung (c′) in der Form

$$\text{(C)} \qquad (y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x, z))\,(Y_{ik}(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{y_{ik}(z)}{z - x}\right)(\varphi(x)\, Y_{ik}(x))$$
$$- \frac{d}{dz}\,(\varphi(z)\, y_{ik}(z))\left(\frac{Y_{ik}(x)}{x - z}\right)$$

als Matrizengleichung schreiben.

## III. Die Voraussetzung über die Wurzeln der zu den singulären Punkten gehörigen determinierenden Fundamentalgleichungen und daraus folgende Gleichungen.

Unserer Festsetzung nach ist (A) ein schlechthin kanonisches Differentialsystem, seine kanonische Integralmatrix in der Umgebung des singulären Punktes $x = c$ hat also die Form:

$$\text{(2)} \qquad (\eta_{ik}(x)) = ((x - c)^{r_i}\, \varphi_{ik}(x))$$
$$(i, k = 1, 2 \ldots n),$$

wo die $\varphi_{ik}(x)$ in der Umgebung von $x = c$ holomorphe Funktionen bedeuten, deren Determinante $|\varphi_{ik}(x)|$ für $x = c$ nicht verschwindet und $r_i$ die Wurzeln der zum singulären Punkte $x = c$ gehörigen determinierenden Fundamentalgleichung des Differentialsystems (A) sind, und wo weiter $x = c$ einer der singulären Punkte $a_1, a_2 \ldots a_\sigma$ ist. Wir setzen voraus, daß die Wurzeln $r_i$ voneinander verschieden und so beschaffen sind, daß ihre reellen Teile zwischen 0 und $-1$ liegen. Dann liegt der reelle Teil der Wurzeln, der zum singulären Punkte $x = c$ gehörigen determinierenden Fundamentalgleichung des Differentialsystems (b) nach den „Vorlesungen" von SCHLESINGER* zwischen 0 und $+1$ und der reelle Teil der Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung des Systems (B) liegt wieder zwischen 0 und $-1$.

---

* „Vorlesungen": 2. und 3. Vorlesung.

Es war schon im vorigen Paragraphen gesetzt worden

$$\mu_{ik} = Y_{ki} \tag{3}$$
$$z_{ik} = \varphi Y_{ki},$$

setzen wir noch

$$(\eta_{ik}(x))^{-1} = (H_{ik}(x))\,\varphi(x), \tag{4a}$$

dann ist nach (2):

$$(\zeta_{ki}(x)) = (\eta_{ik}(x))^{-1} = (\varphi(x) H_{ik}(x)) = ((x-c)^{-r_k} \Phi_{ik}(x)), \tag{4b}$$

wo die Matrix $(\zeta_{ik}(x))$ die kanonische Integralmatrix des adjungierten linearen Differentialsystems (b′) ist. Aus (4b) ergibt sich:

$$(H_{ik}(x)) = ((x-c)^{-r_k-1} \overline{\Phi}_{ik}(x)),$$

wo der reelle Teil von $-r_k$ eine zwischen 0 und $+1$ liegende und folglich $-r_k-1$ eine zwischen 0 und $-1$ liegende Größe ist. Die Funktionen $\Phi_{ik}(x)$ und $\overline{\Phi}_{ik}(x)$ sind in der Umgebung von $x = c$ holomorph.

Aus unserer Voraussetzung folgt, daß

$$[\varphi(z)\eta_{ik}(z)]_{z=c} = [(z-c)^{r_i+1}\overline{\varphi}_{ik}(z)]_{z=c} = 0,$$
$$(i, k = 1, 2 \ldots n)$$

ist, da die $\overline{\varphi}_{ik}(z)$ in der Umgebung von $z = c$ holomorphe Funktionen sind.

Ebenso ist

$$[\varphi(x) H_{ik}(x)]_{x=c} = [(x-c)^{-r_k}\Phi_{ik}(x)]_{x=c} = 0,$$

also auch für die aus diesen gebildeten Matrizen:

$$[(\varphi(z)\eta_{ik}(z))]_{z=c} = (0) \tag{6a}$$

$$[(\varphi(x) H_{ik}(x))]_{x=c} = (0). \tag{6b}$$

Es ist

$$(y_{ik}(z)) = (c_{ik})(\eta_{ik}(z)), \tag{7}$$

wo $(c_{ik})$ die zu dem singulären Punkte $z = c$ gehörige lineare Übergangssubstitution ist, deren Elemente Konstanten sind, natürlich mit der Bedingung, daß die Determinante $|c_{ik}|$ nicht verschwindet. Es ist weiter

$$(y_{ik}(x))^{-1} = (\varphi(x)\, Y_{ik}(x)),$$

also

$$(\varphi(x)\, Y_{ik}(x)) = ((c_{ik})(\eta_{ik}(x)))^{-1} = (\eta_{ik}(x))^{-1}(c_{ik})^{-1}$$

und nach (4a)

$$(8\text{a}) \qquad (\varphi(x)\,Y_{ik}(x)) = (\varphi(x)\,H_{ik}(x))\,(c_{ik})^{-1}$$

$$(8\text{b}) \qquad (Y_{ik}(x)) = (H_{ik}(x))\,(c_{ik})^{-1}.$$

Da $(c_{ik})$ eine konstante Matrix ist, so ergibt sich aus (6)

$$(9\text{a}) \qquad [(\varphi(z)\,y_{ik}(z))]_{z=c} = (0)$$

$$(9\text{b}) \qquad [(\varphi(x)\,Y_{ik}(x))]_{x=c} = (0).$$

## IV. Die erste Fuchssche Relation.

Integrieren wir die Gleichung (C) § II in bezug auf $x$ von $a_\mu$ bis $a_\nu$ und in bezug auf $z$ von $a_\varkappa$ bis $a_\lambda$, wo $\mu \lesseqgtr \nu \lesseqgtr \varkappa \lesseqgtr \lambda$ und die Integrationswege so gewählt sind, daß sie sich nicht treffen, so haben wir

$$\int\limits_{a_\mu}^{a_\nu} dx \int\limits_{a_\varkappa}^{a_\lambda} dz\,(y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x,z))\,(Y_{ik}(x)) =$$

$$\left[\left(\int\limits_{a_\varkappa}^{a_\lambda} \frac{y_{ik}(z)}{z-x}\,dz\right)\left(\varphi(x)\,Y_{ik}(x)\right)\right]_{x=a_\mu}^{x=a_\nu} - \left[\left(\varphi(z)\,y_{ik}(z)\right)\left(\int\limits_{a_\mu}^{a_\nu} \frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\,dx\right)\right]_{z=a_\varkappa}^{z=a_\lambda}.$$

Zufolge der Voraussetzung über die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen und gemäß der Festsetzung, daß die Integrationswege sich nicht treffen sollen, verschwinden die Integrale:

$$\int\limits_{a_\mu}^{a_\nu} \frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\,dx, \quad \int\limits_{a_\varkappa}^{a_\lambda} \frac{y_{ik}(z)}{z-x}\,dz;$$

zieht man dies und die Gleichungen (9) in Betracht, so folgt

$$\int\limits_{a_\mu}^{a_\nu} dx \int\limits_{a_\varkappa}^{a_\lambda} dz\,(y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x,z))\,(Y_{ik}(x)) = (0).$$

Diese Gleichung wird als die erste Fuchssche Relation bezeichnet.

## V. Die zweite Fuchssche Relation.

Wir integrieren die Gleichung (C) § II in bezug auf $x$ von $a_\mu$ bis $a_\nu$ und in bezug auf $z$ von $a_\nu$ bis $a_\varkappa$, wo $\mu < \nu < \varkappa$. Setzen wir der Kürze wegen $a_\mu = a$, $a_\nu = c$, $a_\varkappa = b$, so ist:

$$\text{(D)} \qquad \int_a^c dx \int_c^b dz (y_{ik}(z)) (U_{ik}(x, z)) (Y_{ik}(x))$$

$$= \int_a^c dx \int_c^b dz \frac{d}{dx}\left(\frac{y_{ik}(z)}{z-x}\right)(\varphi(x) Y_{ik}(x)) - \int_a^c dx \int_c^b dz \frac{d}{dz}(\varphi(z) y_{ik}(z))\left(\frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\right).$$

In diesem Falle treffen sich die beiden Integrationswege im singulären Punkte $z = c$. Um die auf der rechten Seite stehenden Integrale ausrechnen zu können, werden wir zuerst die einzelnen Doppelintegrale zerlegen; dann nehmen wir die einzelnen notwendigen Reduktionen vor.

### 1. Das auf der rechten Seite der Gleichung (D) stehende erste Doppelintegral ausgedrückt durch ein einfaches Integral.

Es bezeichne $s$ den von $a$ bis $c$ in der $x$-Ebene führenden Integrationsweg, und $\sigma$ den in der $z$ Ebene von $c$ bis $b$ führenden Weg. Es soll sowohl der Weg $s$, als auch der Weg $\sigma$ zerlegt werden und zwar

$$s = ac = aa' + a'c$$

$$\sigma = cb = cb' + b'b.$$

Die Punkte $a'$ bezw. $b'$ seien auf den Wegen $s$ bezw. $\sigma$ so gewählt, daß weder der Punkt $a'$, noch der Punkt $b'$ mit einem der Punkte $a_1 \ldots a_\sigma$ zusammenfällt.

In bezug auf die Integrationswege machen wir noch die folgende Bemerkung. Wir verbinden die singulären Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ in dieser Reihenfolge durch eine von $a_1$ bis $a_\sigma$ gehende Linie, die sich selbst nicht schneidet, und bringen entlang derselben einen Schnitt an. Die Integrationswege seien dann so bestimmt, daß sie für $\mu < \nu < \varkappa$ auf der rechten Seite des Schnittes bleiben, für $\mu > \nu > \varkappa$ aber gerade auf der entgegengesetzten Seite liegen. Wenn aber $\mu < \nu > \varkappa$ jedoch $\mu \mp \varkappa$, so bleiben die Integrationswege bezüglich der einen Veränderlichen auf der einen Seite des Schnittes, dagegen für die andere Variable auf der anderen Seite des Schnittes. Der Fortschritt möge aber immer im positiven Sinne erfolgen.

Dann ist

$$\int_a^c dx = \int_a^{a'} dx + \int_{a'}^c dx$$

$$\int_c^b dz = \int_c^{b'} dz + \int_{b'}^c dz,$$

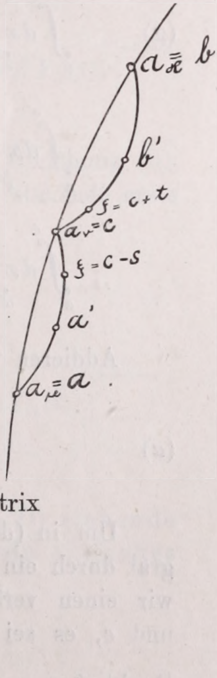
und wenn wir der Kürze wegen die Bezeichnung einführen:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_{ik}(z)}{z-x}\right)(\varphi(x)\,Y_{ik}(x)) = V,$$

so bekommen wir:

$$\text{(d)}\quad \int_a^c dx \int_c^b dz\, V = \int_a^{a'} dx \int_c^{b'} dz\, V + \int_a^{a'} dx \int_{b'}^{b} dz\, V + \int_{a'}^{c} dx \int_c^{b'} dz\, V + \int_{a'}^{c} dx \int_{b'}^{b} dz\, V.$$

Die auf der rechten Seite stehenden Doppelintegrale werden wir durch einfache Integrale ausdrücken, und zwar ist das erste, zweite, vierte Integral direkt durch ein einfaches Integral ausdrückbar, da sich die Integrationswege bei diesen nicht treffen, es ist nämlich:




$$\int_a^{a'} dx \int_c^{b'} dz\, V = \left[\left(\int_c^{b'} \frac{y_{ik}(z)}{z-x}\,dz\right)(\varphi(x)\,Y_{ik}(x))\right]_{x=a}^{x=a'}$$

$$\int_a^{a'} dx \int_{b'}^{b} dz\, V = \left[\left(\int_{b'}^{b} \frac{y_{ik}(z)}{z-x}\,dz\right)(\varphi(x)\,Y_{ih}(x))\right]_{x=a}^{x=a'}$$

$$\int_{a'}^{c} dx \int_{b'}^{b} dz\, V = \left[\left(\int_{b'}^{b} \frac{y_{ik}(z)}{z-x}\,dz\right)(\varphi(x)\,Y_{ik}(x))\right]_{x=a'}^{x=c}.$$

Beachtet man, daß nach (9b)

$$(\varphi(x)\,Y_{ik}(x)) = (0)$$

ist, für $x = a_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, \sigma)$, und daß die Matrix

$$\left(\int_c^{b'} \frac{y_{ik}(z)}{z-x}\,dz\right)$$

für $x = a = a_\mu$ und ebenso die Matrix

$$\left(\int_{b'}^{b} \frac{y_{ik}(z)}{z-x}\,dz\right)$$

für $x = a = a_\mu$, bezw. für $x = c = a_\nu$ endlich ist, so bekommen wir:

$$\left[\left(\int_c^{b'} \frac{y_{ik}(z)}{z-x} dz\right)(\varphi(x)\, Y_{ik}(x))\right]_{x=a} = (0)$$

$$\left[\left(\int_{b'}^{b} \frac{y_{ik}(z)}{z-x} dz\right)(\varphi(x)\, Y_{ik}(x))\right]_{x=a} = (0)$$

$$\left[\left(\int_{b'}^{b} \frac{y_{ik}(z)}{z-x} dz\right)(\varphi(x)\, Y_{ik}(x))\right]^{x=c} = (0).$$

Es bleibt also aus den vorigen Gleichungen:

$$\text{(g)} \qquad \int_a^{a'} dx \int_c^{b'} dz\, V = \left[\left(\int_c^{b'} \frac{y_{ik}(z)}{z-x} dz\right)(\varphi(x)\, Y_{ik}(x))\right]^{x=a'}$$

$$\int_a^{a'} dx \int_{b'}^{b} dz\, V = \left[\left(\int_{b'}^{b} \frac{y_{ik}(z)}{z-x} dz\right)(\varphi(x)\, Y_{ik}(x))\right]^{x=a'}$$

$$\int_{a'}^{c} dx \int_{b'}^{b} dz\, V = \left[\left(\int_{b'}^{b} \frac{y_{ik}(z)}{z-x} dz\right)(\varphi(x)\, Y_{ik}(x))\right]_{x=a'}.$$

Addieren wir die letzten zwei Gleichungen, so ergibt sich

$$(\alpha) \qquad \int_a^{a'} dx \int_{b'}^{b} dz\, V + \int_{a'}^{c} dx \int_{b'}^{b} dz\, V = (0).$$

Um in (d) das auf der rechten Seite stehende dritte Integral durch ein einfaches Integral ausdrücken zu können, nehmen wir einen veränderlichen Punkt auf dem Wege $s$, zwischen $a'$ und $c$, es sei dieser $\xi = c - s$, wo $\lim\limits_{s=0}(c - s) = c$, und einen Punkt $\zeta = c + t$ auf dem Wege $\sigma$, zwischen $c$ und $b'$, wo $\lim\limits_{t=0}(c + t) = c$ ist.

Es ist dann

$$(\mathrm{h})\quad \int_{a'}^{c} dx \int_{c}^{b'} dz V = \lim_{\substack{s=0\\t=0}} \int_{a'}^{c-s} dx \int_{c+t}^{b'} dz \frac{d}{dx}\left(\frac{y_{ik}(z)}{z-x}\right)(\varphi(x)\, Y_{ik}(x))$$

$$= \lim_{\substack{s=0\\t=0}} \left[\left(\int_{c+t}^{b'} \frac{y_{ik}(z)}{z-x} dz\right)(\varphi(x)\, Y_{ik}(x))\right]^{x=c-s}$$

$$+ \left[\left(\int_{c}^{b'} \frac{y_{ik}(z)}{z-x}\right)(\varphi(x)\, Y_{ik}(x))\right]_{x=a'}.$$

In dem zweiten Ausdruck wurde $\lim\limits_{t=0}(c+t) = c$ genommen, da dort $z$ und $x$ sich nicht treffen.

Die Summe der Gleichungen (g) und (h) ist:

$$(\beta) \int_{a}^{a'} dx \int_{c}^{b'} dz V + \int_{a'}^{c} dx \int_{c}^{b'} dz V = \lim_{\substack{s=0\\t=0}} \left[\left(\int_{c+t}^{b'} \frac{y_{ik}(z)}{z-x} dz\right)(\varphi(x)\, Y_{ik}(x))\right]^{x=c-s}.$$

Aus ($\alpha$) und ($\beta$) ergibt sich die linke Seite der Gleichung (d), d. h. das auf der rechten Seite der Gleichung (D) stehende erste Integral, ausgedrückt durch ein einfaches Integral:

$$(10)\quad \int_{a}^{c} dx \int_{c}^{b} dz \frac{d}{dx}\left(\frac{y_{ik}(z)}{z-x}\right)(\varphi(x)\, Y_{ik}(x))$$

$$= \lim_{\substack{s=0\\t=0}} \left[\left(\int_{c+t}^{b'} \frac{y_{ik}(z)}{z-x} dz\right)(\varphi(x)\, Y_{ik}(x))\right]^{x=c-s}.$$

## 2. Das auf der rechten Seite der Gleichung (D) stehende zweite Doppelintegral ausgedrückt durch ein einfaches Integral.

Der Gang ist derselbe wie vorhin.

Bezeichnen wir

$$\frac{d}{dz}(\varphi(z) y_{ik}(z))\left(\frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\right) = W,$$

so ist nach (d)

$$\text{(f)} \int_a^c dx \int_c^b dz\, W = \int_a^{a'} dx \int_c^{b'} dz\, W + \int_a^{a'} dx \int_{b'}^{b} dz\, W + \int_{a'}^{c} dx \int_c^{b'} dz\, W + \int_{a'}^{c} dx \int_{b'}^{b} dz\, W.$$

Dann folgt gerade so, wie im vorigen Paragraphen für das erste, zweite und vierte Doppelintegral:

$$\int_a^{a'} dx \int_c^{b'} dz\, W = \left[ (\varphi(z)\, y_{ik}(z)) \left( \int_a^{a'} \frac{Y_{ik}(x)}{x-z} dx \right) \right]_{z=c}^{z=b'}$$

$$\int_a^{a'} dx \int_{b'}^{b} dz\, W = \left[ (\varphi(z)\, y_{ik}(z)) \left( \int_a^{a'} \frac{Y_{ik}(x)}{x-z} dx \right) \right]_{z=b'}^{z=b}$$

$$\int_{a'}^{c} dx \int_{b'}^{b} dz\, W = \left[ (\varphi(z)\, y_{ik}(z)) \left( \int_{a'}^{c} \frac{Y_{ik}(x)}{x-z} dx \right) \right]_{z=b'}^{z=b}$$

Es ist nach (9a)

$$(\varphi(z)\, y_{ik}(z)) = (0)$$

für $z = a_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, \sigma)$; während die Matrix

$$\left( \int_a^{a'} \frac{Y_{ik}(x)}{x-z} dx \right)$$

für $z = c$ und $z = b$, ebenso die Matrix

$$\left( \int_{a'}^{c} \frac{Y_{ik}(x)}{x-z} dx \right)$$

für $z = b$ endlich ist. Beachtet man dies, so findet man

$$\left[ (\varphi(z)\, y_{ik}(z)) \left( \int_a^{a'} \frac{Y_{ik}(x)}{x-z} dx \right) \right]_{z=c} = (0),$$

$$\left[ (\varphi(z)\, y_{ik}(z)) \left( \int_a^{a'} \frac{Y_{ik}(x)}{x-z} dx \right) \right]^{z=b} = (0),$$

$$\left[ (\varphi(z)\, y_{ik}(z)) \left( \int_{a'}^{c} \frac{Y_{ik}(x)}{x-z} dx \right) \right]^{z=b} = (0)$$

und folglich

$$\int_a^{a'} dx \int_c^{b'} dz W = \left[ (\varphi(z)\, y_{ik}(z)) \left( \int_a^{a'} \frac{Y_{ik}(x)}{x-z} dx \right) \right]^{z=b'}$$

$$\int_a^{a'} dx \int_{b'}^{b} dz W = \left[ (\varphi(z)\, y_{ik}(z)) \left( \int_a^{a'} \frac{Y_{ik}(x)}{x-z} dx \right) \right]_{z=b'}$$

$$(\mathrm{g}') \qquad \int_{a'}^{c} dx \int_{b'}^{b} dz W = \left[ (\varphi(z)\, y_{ik}(z)) \left( \int_{a'}^{c} \frac{Y_{ik}(x)}{x-z} dx \right) \right]_{z=b'}.$$

Durch Addition der ersten zwei Gleichungen ergibt sich

$$(\alpha') \qquad \int_a^{a'} dx \int_c^{b'} dz W + \int_a^{a'} dx \int_{b'}^{b} dz W = (0).$$

Wir drücken jetzt mittels des früher eingeführten Limes das auf der rechten Seite der Gleichung (f) stehende dritte Doppelintegral durch ein einfaches Integral aus:

$$\int_{a'}^{c} dx \int_c^{b'} dz W = \lim_{\substack{s=0\\ t=0}} \int_{a'}^{c-s} dx \int_{c+t}^{b'} dz \frac{d}{dz} (\varphi(z) y_{ik}(z)) \left( \frac{Y_{ik}(x)}{x-z} \right)$$

$$(\mathrm{h}') \qquad = \left[ (\varphi(z)\, y_{ik}(z)) \left( \int_{a'}^{c} \frac{Y_{ik}(x)}{x-z} dx \right) \right]^{z=b'}$$

$$+ \lim_{\substack{s=0\\ t=0}} \left[ (\varphi(z)\, y_{ik}(z)) \left( \int_{a'}^{c-s} \frac{Y_{ik}(x)}{x-z} dx \right) \right]_{z=c+t}.$$

In dem ersten Ausdruck wurde $\lim\limits_{s=0}(c-s) = c$ genommen, da dort $z$ und $x$ sich nicht treffen.

Addieren wir die Gleichungen (g′) und (h′), so bekommen wir

$$(\beta') \qquad \int_{a'}^{c} dx \int_c^{b'} dz W + \int_{a'}^{c} dx \int_{b'}^{b} dz W$$

$$= \lim_{\substack{s=0\\ t=0}} \left[ (\varphi(z)\, y_{ik}(z)) \left( \int_{a'}^{c-s} \frac{Y_{ik}(x)}{x-z} dx \right) \right]_{z=c+t}.$$

Aus ($\alpha'$) und ($\beta'$) ergibt sich der Ausdruck von (f), d. i. das auf der rechten Seite der Gleichung (D) stehende, zweite Doppelintegral, ausgedrückt durch ein einfaches Integral:

$$(11)\quad \int_a^c dx \int_c^b dz \frac{d}{dz}(\varphi(z)\, y_{ik}(z))\left(\frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\right)$$
$$= \lim_{\substack{s=0\\t=0}} \left[(\varphi(z)\, y_{ik}(z))\left(\int_{a'}^{c-s} \frac{Y_{ik}(x)}{x-z}dx\right)\right]_{z=c+t}.$$

Indem wir die Ausdrücke (10) und (11) in (D) einsetzen, ergibt sich:

$$\int_a^c dx \int_c^b dz (y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x,z))\,(Y_{ik}(x))$$
$$= \lim_{\substack{s=0\\t=0}} \left\{\left[\left(\int_{c+t}^{b'} \frac{y_{ik}(z)}{z-x}\right)(\varphi(x)\, Y_{ik}(x))\right]^{x=c-s}\right.$$
$$\left. - \left[(\varphi(z)\, y_{ik}(z))\left(\int_{a'}^{c-s} \frac{Y_{ik}(x)}{x-z}dx\right)\right]_{z=c+t}\right\}.$$

Setzen wir hier auf der rechten Seite die Werte von $(y_{ik}(z))$ und $(Y_{ik}(x))$ aus (7) bzw. aus (8), so wird:

$$\int_a^c dx \int_c^b dz (y_{ik}(x))\,(U_{ik}(z))\,(Y_{ik}(x))$$
$$(\mathrm{F})\quad = (c_{ik}) \lim_{\substack{s=0\\t=0}} \left\{\left[\left(\int_{c+t}^{b'} \frac{\eta_{ik}(z)}{z-x}dz\right)(\varphi(x)\, H_{ik}(x))\right]^{x=c-s}\right.$$
$$\left. - \left[(\varphi(z)\, \eta_{ik}(z))\left(\int_{a'}^{c-s} \frac{H_{ik}(x)}{x-z}dx\right)\right]_{z=c+t}\right\}(c_{ik})^{-1}.$$

3.

Ehe wir die Reduktion und die Berechnung der unter dem Limes stehenden Ausdrücke in Angriff nehmen, führen wir erst einige im Nachfolgenden notwendige Rechnungen durch.

Es folgt aus der Theorie* der adjungierten linearen Differentialsysteme, daß die Lösungen der Gleichungen (A) und (b′) dem Gleichungssystem

$$\sum_{\lambda=1}^{n} y_{i\lambda} z_{k\lambda} = \delta_{ik}; \qquad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

genügen, wo

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{für } i = k \\ 0, & \text{für } i \neq k \end{cases}$$

ist; es war aber

$$z_{k\lambda}(x) = \varphi(x)\mu_{k\lambda}(x) = \varphi(x)\, Y_{\lambda k}(x),$$

also ist

$$\varphi(x) \sum_{\lambda=1}^{n} y_{i\lambda}(x)\, Y_{\lambda k}(x) = \delta_{ik}$$

oder:

$$(\delta) \qquad (y_{ik}(x))(\varphi(x)\, Y_{ik}(x)) = (\delta_{ik}).$$

Es ist aber nach § III (2) und (7)

$$(y_{ik}(x)) = (c_{ik})\,(\delta_{ik}(x-c)^{r_i})\,(\varphi_{ik}(x)),$$

und nach (4) und (8)

$$(\varphi(x)\, Y_{ik}(x)) = (\Phi_{ik}(x))\,(\delta_{ik}(x-c))^{-r_i}\,(c_{ik})^{-1}.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in ($\delta$) ein, so wird

$$(c_{ik})\,(\delta_{ik}(x-c)^{r_i})(\varphi_{ik}(x))(\Phi_{ik}(x))(\delta_{ik}(x-c)^{-r_i})(c_{ik})^{-1} = (\delta_{ik});$$

es ist also

$$(\varphi_{ik}(x))(\Phi_{ik}(x)) = (\delta_{ik}).$$

Setzen wir hier $x = c$, so bekommen wir

$$(12) \qquad \varphi'(c)(\varepsilon^0_{ik})(E^0_{ik}) = (\delta_{ik}),$$

wo $\varepsilon^0_{ik}$ das erste Glied in der Reihenentwicklung der Funktion $\varphi_{ik}(x)$, und $E^0_{ik}$ das erste Glied in der Reihenentwicklung der Funktion $\frac{\Phi_{ik}(x)}{\varphi(x)}$ in der Umgebung von $x = c$ ist.

### 4. Die Reduktion des auf der rechten Seite der Gleichung (F) unter dem Limes stehenden ersten Ausdrucks.

Wir zerlegen die Matrix $(\eta_{ik}(z))$ folgendermaßen:

$$(\eta_{ik}(z)) = ((z-c)^{r_i}\varepsilon^0_{ik}) + ((z-c)^{r_i+1}\overline{\varphi}_{ik}(z)),$$

* Schlesinger, „Vorlesungen“. Zweite und dritte Vorlesung.

ebenso zerlegen wir die Matrix $(\varphi(x) H_{ik}(x))$:

$$(\varphi(x) H_{ik}(x)) = ((x-c)^{-r_k} \varphi'(c) E_{ik}^0) + ((x-c)^{-r_k+1} \overline{\Phi}_{ik}(x)),$$

wo $\varepsilon_{ik}^0$, $\varphi'(c)$, $E_{ik}^0$ Konstanten, $\overline{\varphi}_{ik}(z)$ in der Umgebung von $z=c$ und $\overline{\Phi}_{ik}(x)$ in der Umgebung von $x=c$ holomorphe Funktionen sind.

Komponiert man mit der Matrix $(\varphi(x) H_{ik}(x))$ die Matrix $\left(\frac{\eta_{ik}(z)}{z-x}\right)$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\eta_{ik}(z)}{z-x}\right)(\varphi(x) H_{ik}(x)) &= \left(\frac{(z-c)^{r_i}}{z-x} \varepsilon_{ik}^0\right)((x-c)^{-r_k} \varphi'(c) E_{ik}^0) \\ &+ \left(\frac{(z-c)^{r_i}}{z-x} \varepsilon_{ik}^0\right)((x-c)^{-r_k+1} \overline{\Phi}_{ik}(x)) \\ &+ \left(\frac{(z-c)^{r_i+1}}{z-x} \overline{\varphi}_{ik}(z)\right)((x-c)^{-r_k} \varphi'(c) E_{ik}^0) \\ &+ \left(\frac{(z-c)^{r_i+1}}{z-x} \overline{\varphi}_{ik}(z)\right)((x-c)^{-r_k+1} \overline{\Phi}_{ik}(x)).\end{aligned}$$

Integriert man diese Gleichung in bezug auf $z$ von $c+t$, bis $b'$, setzt für $x$ den Wert $c-s$ der oberen Grenze und nimmt den Limes für $s=0$ und $t=0$, so ist:

$$\begin{aligned}&\lim_{\substack{s=0\\t=0}} \left[\left(\int_{c+t}^{b'} \frac{\eta_{ik}(z)}{z-x} dz\right)(\varphi(x) H_{ik}(x))\right]^{x=c-s} \\ &= \lim_{\substack{s=0\\t=0}} \left[\left(\varepsilon_{ik}^0 \int_{c+t}^{b'} \frac{(z-c)^{r_i}}{z-x} dz\right)((x-c)^{-r_k} \varphi'(c) E_{ik}^0)\right]^{x=c-s} \\ &+ \lim_{\substack{s=0\\t=0}} \left[\left(\varepsilon_{ik}^0 \int_{c+t}^{b'} \frac{(z-c)^{r_i}}{z-x} dz\right)((x-c)^{-r_k+1} \overline{\Phi}_{ik}(x))\right]^{x=c-s} \\ &+ \lim_{\substack{s=0\\t=0}} \left[\left(\int_{c+t}^{b'} \frac{(z-c)^{r_i+1}}{z-x} \overline{\varphi}_{ik}(z)\, dz\right)((x-c)^{-r_k} \varphi'(c) E_{ik}^0)\right]^{x=c-s} \\ &+ \lim_{\substack{s=0\\t=0}} \left[\left(\int_{c+t}^{b'} \frac{(z-c)^{r_i+1}}{z-x} \overline{\varphi}_{ik}(z)\, dz\right)((x-c)^{-r_k+1} \overline{\Phi}_{ik}(x))\right]^{x=c-s}.\end{aligned}$$

Wir untersuchen nun den auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden zweiten, dritten und vierten Ausdruck. Der zweite ist:

$$\lim_{\substack{s=0\\t=0}} \left[\left(\varepsilon_{ik}^0 \int\limits_{c+t}^{b'} \frac{(z-c)^{r_i}}{z-x} dz\right)\left((x-c)^{-r_k+1}\overline{\Phi}_{ik}(x)\right)\right]^{x=c-s}$$

$$= \lim_{\substack{s=0\\t=0}} \left[\left(\varepsilon_{ik}^0 \int\limits_{c+t}^{b'} \left(-1+\frac{z-c}{z-x}\right)(z-c)^{r_i} dz\right)\left((x-c)^{-r_k}\overline{\Phi}_{ik}(x)\right)\right]^{x=c-s}$$

$$= \left(\varepsilon_{ik}^0 \int\limits_{c}^{b'} \left(-1+\frac{z-c}{z-c}\right)(z-c)^{r_i} dz\right)\left[\left((x-c)^{-r_k}\overline{\Phi}_{ik}(x)\right)\right]^{x=c} = (0),$$

es sind nämlich die Elemente der ersten Matrix alle Null, weil der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck selbst gleich Null ist, und ebenso sind auch alle Elemente der zweiten Matrix gleich Null, weil $-r_k > 0$ ist.

Der dritte Ausdruck ist:

$$\lim_{\substack{s=0\\t=0}} \left[\left(\int\limits_{c+t}^{b'} \frac{(z-c)^{r_i+1}}{z-x}\overline{\varphi}_{ik}(z)\, dz\right)\left((x-c)^{-r_k}\varphi'(c) E_{ik}^0\right)\right]^{x=c-s}$$

$$= \left(\int\limits_{c}^{b'} (z-c)^{r_i}\overline{\varphi}_{ik}(z)\, dz\right)\left[\left((x-c)^{-r_k}\varphi'(c) E_{ik}^0\right)\right]^{x=c} = (0),$$

da die Elemente der ersten Matrix endlich sind und alle Elemente der zweiten Matrix für $x = c$ verschwinden, weil $-r_k > 0$ ist.

Es folgt aus dem zweiten und dritten Ausdruck, daß die Elemente des vierten Ausdrucks auch alle Null sind, es bleibt also:

$$\lim_{\substack{s=0\\t=0}} \left[\left(\int\limits_{c+t}^{b'} \frac{\eta_{ik}(z)}{z-x} dz\right)\left(\varphi(x) H_{ik}(x)\right)\right]^{x=c-s}$$

$$= \varphi'(c)(\varepsilon_{ik}^0)(E_{ik}^0)\left(\left[\delta_{ik} \lim_{\substack{s=0\\t=0}} (x-c)^{-r_k} \int\limits_{c+t}^{b'} \frac{(z-c)^{r_i}}{z-x} dz\right]^{x=c-s}\right).$$

Zieht man noch die Gleichung (12) in Betracht, so ergibt sich:

$$\lim_{\substack{s=0\\t=0}} \left[\left(\int\limits_{c+t}^{b'} \frac{\eta_{ik}(z)}{z-x} dz\right)\left(\varphi(x) H_{ik}(x)\right)\right]^{x=c-s}$$

(13)

$$= \left[\left(\delta_{ik} \lim_{\substack{s=0\\t=0}} (x-c)^{-r_i} \int\limits_{c+t}^{b'} \frac{(z-c)^{r_i}}{z-x} dz\right)\right]^{x=c-s}.$$

5. Die Reduktion des auf der rechten Seite der Gleichung (F) unter dem Limes stehenden zweiten Ausdruckes.

Der Gang ist derselbe, wie im vorigen Paragraphen. Wir machen bei den Matrizen $(\varphi(z)\eta_{ik}(z))$ und $(H_{ik}(x))$ folgende Zerlegungen:

$$(\varphi(z)\eta_{ik}(z)) = ((z-c)^{r_i+1}\varphi'(c)\varepsilon_{ik}^0) + ((z-c)^{r_i+2}\overline{\varphi}_{ik}^*(z))$$

$$(H_{ik}(x)) = ((x-c)^{-r_k-1}E_{ik}^0) + ((x-c)^{-r_k}\overline{\Phi}_{ik}^*(x)),$$

wo $\varphi'(c)$, $\varepsilon_{ik}^0$, $E_{ik}^0$ Konstanten, $\overline{\varphi}_{ik}^*(z)$ in der Umgebung von $z=c$ und $\overline{\Phi}_{ik}^*(x)$ in der Umgebung von $x=c$ holomorphe Funktionen sind. Komponieren wir mit der Matrix $\left(\frac{H_{ik}(x)}{x-z}\right)$ die Matrix $(\varphi(z)\eta_{ik}(z))$, so ist

$$\begin{aligned}(\varphi(z)\eta_{ik}(z))\left(\frac{H_{ik}(x)}{x-z}\right) &= ((z-c)^{r_i+1}\varphi'(c)\varepsilon_{ik}^0)\left(\frac{(x-c)^{-r_k-1}}{x-z}E_{ik}^0\right)\\ &+ ((z-c)^{r_i+2}\overline{\varphi}_{ik}^*(z))\left(\frac{(x-c)^{-r_k-1}}{x-z}E_{ik}^0\right)\\ &+ ((z-c)^{r_i+1}\varphi'(c)\varepsilon_{ik}^0)\left(\frac{(x-c)^{-r_k}}{x-z}\overline{\Phi}_{ik}^*(x)\right)\\ &+ ((z-c)^{r_i+2}\overline{\varphi}_{ik}^*(z))\left(\frac{(x-c)^{-r_k}}{x-z}\overline{\Phi}_{ik}^*(x)\right);\end{aligned}$$

ferner ist der auf der rechten Seite der Gleichung (F) stehende zweite Ausdruck:

$$\begin{aligned}&\lim_{\substack{s=0\\t=0}}\left[(\varphi(z)\eta_{ik}(z))\left(\int_{a'}^{c-s}\frac{H_{ik}(x)}{x-z}dx\right)\right]_{z=c+t}\\ &=\lim_{\substack{s=0\\t=0}}\left[((z-c)^{r_i+1}\varphi'(c)\varepsilon_{ik}^0)\left(E_{ik}^0\int_{a'}^{c-s}\frac{(x-c)^{-r_k-1}}{x-z}dx\right)\right]_{z=c+t}\\ &+\lim_{\substack{s=0\\t=0}}\left[((z-c)^{r_i+2}\overline{\varphi}_{ik}^*(z))\left(E_{ik}^0\int_{a'}^{c-s}\frac{(x-c)^{-r_k-1}}{x-z}dx\right)\right]_{z=c+t}\\ &+\lim_{\substack{s=0\\t=0}}\left[((z-c)^{r_i+1}\varphi'(c)\varepsilon_{ik}^0)\left(\int_{a'}^{c-s}\frac{(x-c)^{-r_k}}{x-z}\overline{\Phi}_{ik}^*(x)dx\right)\right]_{z=c+t}\end{aligned}$$

$$+\lim_{\substack{s=0\\t=0}}\left[\left((z-c)^{r_i+2}\overline{\varphi}^*_{ik}(z)\right)\left(\int_{a'}^{c-s}\frac{(x-c)^{-r_k}}{x-z}\overline{\Phi}^*_{ik}(x)\,dx\right)\right]_{z=c+t}.$$

Der zweite und dritte Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung verschwindet, was direkt zu sehen ist, wenn wir diese umformen, und zwar ist der zweite Ausdruck, wie wir es im vorigen Paragraphen gesehen haben:

$$\lim_{\substack{s=0\\t=0}}\left[\left((z-c)^{r_i+2}\overline{\varphi}^*_{ik}(z)\right)\left(E^0_{ik}\int_{a'}^{c-s}\frac{(x-c)^{-r_k-1}}{x-z}\,dx\right)\right]_{z=e+t}$$

$$=\lim_{\substack{s=0\\t=0}}\left[\left((z-c)^{r_i+1}\overline{\varphi}^*_{ik}(z)\right)\left(E^0_{ik}\int_{a'}^{c-s}\left(-1+\frac{x-c}{x-z}\right)(x-c)^{-r_k-1}dx\right)\right]_{z=c+t}$$

$$=\left((z-c)^{r_i+1}\overline{\varphi}^*_{ik}(z)\right)\Big]_{z=c}\left(E^0_{ik}\int_{a'}^{c}\left(-1+\frac{x-c}{x-c}\right)(x-c)^{-r_k-1}dx\right)=(0).$$

Der dritte Ausdruck ist:

$$\lim_{\substack{s=0\\t=0}}\left[\left((z-c)^{r_i+1}\varphi'(c)\,\varepsilon^0_{ik}\right)\left(\int_{a'}^{c-s}\frac{(x-c)^{-r_k}}{x-z}\overline{\Phi}^*_{ik}(x)\,dx\right)\right]_{z=c+t}$$

$$=\left[\left((z-c)^{r_i+1}\varphi'(c)\,\varepsilon^0_{ik}\right)\right]_{z=c}\left(\int_{a'}^{c}(x-c)^{-r_i-1}\overline{\Phi}^*_{ik}(x)\,dx\right)=(0),$$

da $r_i+1>0$ und $-r_k-1$ zwischen 0 und $-1$ liegt.

Es folgt aus dem zweiten und dritten Ausdruck, daß der vierte auch eine Matrix ist, deren alle Elemente Null sind.

Zieht man dies in Betracht, so bekommt man:

$$\lim_{\substack{s=0\\t=0}}\left[\left(\varphi(z)\,\eta_{ik}(z)\right)\left(\int_{a'}^{c-s}\frac{H_{ik}(x)}{x-z}\,dx\right)\right]_{z=c+t}$$

$$=\varphi'(c)(\varepsilon^0_{ik})(E^0_{ik})\left(\delta_{ik}\left[\lim_{\substack{s=0\\t=0}}(z-c)^{r_i+1}\int_{a'}^{c-s}\frac{(x-c)^{-r_k-1}}{x-z}\,dx\right]_{z=c+t}\right)$$

und nach (12):

$$(14)\qquad \lim_{\substack{s=0\\t=0}}\left[(\varphi(z)\eta_{ik}(z))\left(\int\limits_{a'}^{c-s}\frac{H_{ik}(x)}{x-z}\,dx\right)\right]_{z=c+t}$$

$$=\left[\left(\delta_{ik}\lim_{\substack{s=0\\t=0}}(z-c)^{r_i+1}\int\limits_{a'}^{c-s}\frac{(x-c)^{-r_i-1}}{x-z}\right)\right]_{z=c+t}.$$

Setzen wir in (F) die Werte der Ausdrücke (13) und (14) ein, so ist

$$\int\limits_a^c dx\int\limits_c^b dz\,(y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x,z))\,(Y_{ik}(x))$$

$$(\mathrm{G})\quad =(c_{ik})\left(\delta_{ik}\lim_{\substack{s=0\\t=0}}\left\{\left[(x-c)^{-r_i}\int\limits_{c+t}^{b'}\frac{(z-c)^{r_i}}{z-x}\,dz\right]^{x=c-s}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left[(z-c)^{r_i+1}\int\limits_{a'}^{c-s}\frac{(x-c)^{-r_i-1}}{x-z}\,dx\right]_{z=c+t}\right\}\right)(c_{ik})^{-1}.$$

6.

Integrieren wir die Gleichung (C) § II in bezug auf $x$ von $c$ bis $b$ und in bezug auf $z$ von $a$ bis $c$, so ist:

$$(\mathrm{D}')\quad\left\{\begin{aligned}&\int\limits_c^b dx\int\limits_a^c dz\,(y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x,z))\,(Y_{ik}(x))\\&=\int\limits_c^b dx\int\limits_a^c dz\,\frac{d}{dx}\left(\frac{y_{ik}(z)}{z-x}\right)(\varphi(x)\,Y_{ik}(x))\\&-\int\limits_c^b dx\int\limits_a^c dz\,\frac{d}{dz}(\varphi(z)\,y_{ik}(z))\left(\frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\right).\end{aligned}\right.$$

Wir zerlegen nun, um die Ausrechnung dieser Doppelintegrale durchführen zu können, die einfachen Integrale so, wie wir es im § V 1 getan haben; wir nehmen also auf dem Wege $s=ac$ einen Punkt $a'$, und auf dem Wege $\sigma=cb$ einen Punkt $b'$ an. Die beiden Punkte $a', b'$ dürfen mit den singulären Punkten nicht zusammenfallen. Integrieren wir in bezug auf $x$ zuerst von $c$ bis $b'$,

MAGYAR
[illegible]MÁNYO[illegible]KADÉMIA
KÖNYVTÁR

dann von $b'$ bis $b$, und in bezug auf $z$ zuerst von $a$ bis $a'$, dann von $a'$ bis $c$, so ist:

$$\int_c^b dx = \int_c^{b'} dx + \int_{b'}^b dx$$

$$\int_a^c dz = \int_a^{a'} dz + \int_{a'}^c dz.$$

Wenn wir dies tun, so wird das erste Doppelintegral auf der rechten Seite der Gleichung (D'):

$$(*\mathrm{d})\int_c^b dx \int_a^c dz V = \int_c^{b'} dx \int_a^{a'} dz V + \int_{b'}^b dx \int_a^{a'} dz V + \int_c^{b'} dx \int_{a'}^c dz V + \int_{b'}^b dx \int_{a'}^c dz V,$$

wo

$$V = \frac{d}{dx}\left(\frac{y_{ik}(z)}{z-x}\right)(\varphi(x)\, Y_{ik}(x))$$

ist. Drücken wir die auf der rechten Seite der Gleichung (*d) stehenden Doppelintegrale durch einfache Integrale aus, so kann man ebenso, wie wir im § V 1 gesehen haben, verifizieren, daß die Ausdrücke:

$$\left[\int_a^{a'} V dz\right]_{x=c}, \quad \left[\int_a^{a'} V dz\right]^{x=b}, \quad \left[\int_{a'}^c V dz\right]^{x=b}$$

nach der im § III gemachten Voraussetzung und nach den Gleichungen (9) verschwinden, und so bekommen wir, wenn wir auch hier bei dem Ausdrucke des dritten Doppelintegrals den im § V 1 eingeführten Grenzwert einführen:

$$\int_c^b dx \int_a^c dz V = \left[\int_a^{a'} V dz\right]^{x=b'} + \left[\int_a^{a'} V dz\right]_{x=b'} + \left[\int_{a'}^c V dz\right]^{x=b'}$$

$$+ \lim_{\substack{s=0\\t=0}} \left[\int_{a'}^{c-s} V dz\right]_{x=c+t} + \left[\int_{a'}^c V dz\right]_{x=b'}.$$

Es ist aber

$$\left[\int_a^{a'} V dz\right]^{x=b'} + \left[\int_a^{a'} V dz\right]_{x=b'} = 0,$$

$$\left[\int_{a'}^c V dz\right]^{x=b'} + \left[\int_{a'}^c V dz\right]_{x=b'} = 0,$$

also bleibt:

$$(10') \qquad \int\limits_c^b dx \int\limits_a^c dz V = \lim_{\substack{s=0\\t=0}} \left[\int\limits_{a'}^{c-s} V dz\right]_{x=c+t}.$$

Das auf der rechten Seite in der Gleichung (D′) stehende zweite Doppelintegral ergibt sich, wenn wir die vorher gemachte Zerlegung der einfachen Integrale benützen und auch hier die im § V 2 eingeführte Bezeichnung

$$W = \frac{d}{dz}(\varphi(z) y_{ik}(z)) \left(\frac{Y_{ik}(x)}{x-z}\right)$$

geltend machen, als Summe von vier Doppelintegralen, und zwar wird:

$$(d') \qquad \int\limits_c^b dx \int\limits_a^c dz W = \int\limits_c^{b'} dx \int\limits_a^{a'} dz W + \int\limits_{b'}^b dx \int\limits_a^{a'} dz W$$

$$+ \int\limits_c^{b'} dx \int\limits_{a'}^c dz W + \int\limits_{b'}^b dx \int\limits_{a'}^c dz W.$$

Die auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden Doppelintegrale sind aber, wie wir schon im § V 2 gesehen haben, durch einfache Integrale ausdrückbar. Man kann dann ebenso, wie im § V 2 verifizieren, daß diese Ausdrücke

$$\left[\int\limits_c^{b'} W dx\right]_{z=a'}, \quad \left[\int\limits_{b'}^b W dx\right]_{z=a'}, \quad \left[\int\limits_{b'}^b W dx\right]^{z=c}$$

nach der im § III gemachten Voraussetzung und nach den Gleichungen (9) verschwinden. Es bleibt, wenn wir auch hier den im § V 1 eingeführten Grenzwert benützen:

$$\int\limits_c^b dx \int\limits_a^c dz W = \underbrace{\left[\int\limits_c^{b'} W dx\right]^{z=a'}}_{1} + \underbrace{\left[\int\limits_{b'}^b W dx\right]^{z=a'}}_{2} + \lim_{\substack{s=0\\t=0}} \underbrace{\left[\int\limits_{c+t}^{b'} W dx\right]^{z=c-s}}_{3}$$

$$+ \underbrace{\left[\int\limits_c^{b'} W dx\right]_{z=a'}}_{4} + \underbrace{\left[\int\limits_{b'}^b W dx\right]_{z=a'}}_{5}.$$

Die Summe der Ausdrücke 1 und 4 ist Null, ebenso ist die Summe der Ausdrücke 2 und 5 Null, d. i.

$$\Big[\int_c^{b'} W dx\Big]^{z=a'} + \Big[\int_c^{b'} W dx\Big]_{z=a'} = 0$$

$$\Big[\int_{b'}^{b} W dx\Big]^{z=a'} + \Big[\int_{b'}^{b} W dx\Big]_{z=a'} = 0.$$

Wir bekommen also aus (d′)

$$\text{(11′)} \qquad \int_c^b dx \int_a^c dz\, W = \lim_{\substack{s=0\\t=0}} \Big[\int_{c+t}^{b'} W dx\Big]^{z=c-s}.$$

Die Werte von (10′) und (11′) setzen wir in (D′) ein, und setzen dann auf der rechten Seite statt $(y_{ik}(z))$ dessen entsprechenden Ausdruck aus der Gleichung (7) und statt $(Y_{ik}(x))$ seinen entsprechenden Ausdruck aus der Gleichung (8); dann geht die Gleichung (D′) in folgende über:

$$\int_c^b dx \int_a^c dz (y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x,z))\,(Y_{ik}(x))$$

$$\text{(F′)} \qquad = (c_{ik}) \lim_{\substack{s=0\\t=0}} \Big\{ \Big[\Big(\int_{a'}^{c-s} \frac{\eta_{ik}(z)}{z-x} dz\Big)(\varphi(x) H_{ik}(x))\Big]_{x=c+t}$$

$$- \Big[(\varphi(z)\eta_{ik}(z))\Big(\int_{c+t}^{b'} \frac{H_{ik}(x)}{x-z} dx\Big)\Big]^{z=c-s} \Big\} (c_{ik})^{-1}.$$

Machen wir auch für unsere jetzigen auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden Ausdrücke die im § V 4 und 5 durchgeführten Reduktionen und ziehen die Gleichung (12) in Betracht, so bekommen wir aus der Gleichung (F′):

$$\int_c^b p\, x \int_a^c dz (y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x,z))\,(Y_{ik}(x))$$

$$\text{(G′)} \quad = (c_{ik}) \Big( \delta_{ik} \lim_{\substack{s=0\\t=0}} \Big\{ \Big[(x-c)^{-r_i} \int_{a'}^{c-s} \frac{(z-c)^{r_i}}{z-x} dz\Big]_{x=c+t}$$

$$- \Big[(z-c)^{r_i+1} \int_{c+t}^{b'} \frac{(x-c)^{-r_i-1}}{x-z} dx\Big]^{z=c-s} \Big\}\Big) (c_{ik})^{-1}.$$

## 7. Die Umformung und Ausrechnung des Limes in den Gleichungen (G) und (G′).

Die Identität:

$$(15)\qquad (z-c)^{r_i}\frac{d}{dx}\frac{(x-c)^{-r_i}}{z-x}=(x-c)^{-r_i-1}\frac{d}{dz}\frac{(z-c)^{r_i+1}}{x-z}$$

ist leicht verifizierbar.

Integrieren wir diese in bezug auf $x$ von $a'$ bis $c-s$ und in bezug auf $z$ von $c+t$ bis $b'$ und nehmen den Grenzwert für $s=0$, $t=0$, so bekommen wir:

$$\lim_{\substack{s=0\\t=0}}\left[(x-c)^{-r_i}\int_{c+t}^{b'}\frac{(z-c)^{r_i}}{z-x}dz\right]_{x=a'}^{x=c-}$$

$$=\lim_{\substack{s=0\\t=0}}\left[(z-c)^{r_i+1}\int_{a'}^{c-s}\frac{(x-c)^{-r_i-1}}{x-z}dx\right]_{z=c+t}^{z=b'}.$$

Es ergibt sich aus dieser Gleichung, wenn wir die Glieder anders ordnen:

$$(16)\quad \lim_{\substack{s=0\\t=0}}\left\{\left[(x-c)^{-r_i}\int_{c+t}^{b'}\frac{(z-c)^{r_i}}{z-x}dz\right]^{x=c-s}-\left[(z-c)^{r_i+1}\int_{a'}^{c-s}\frac{(x-c)^{-r_i-1}}{x-z}dx\right]_{z=c+t}\right\}$$

$$=\lim_{\substack{s=0\\t=0}}\left\{\left[(z-c)^{r_i+1}\int_{a'}^{c-s}\frac{(x-c)^{-r_i-1}}{x-z}dx\right]^{z=b'}-\left[(x-c)^{-r_i}\int_{c+t}^{b'}\frac{(z-c)^{r_i}}{z-x}dz\right]_{x=a'}\right\}$$

$$=(b'-c)^{r_i+1}\int_{a'}^{c}\frac{(x-c)^{-r_i-1}}{x-b'}dx+(a'-c)^{-r_i}\int_{c}^{b'}\frac{(z-c)^{r_i}}{z-a'}dz.$$

In dem letzten Ausdruck konnte man den Grenzwert weglassen und die Werte von $z$ und $x$ einsetzen, da die Integrationswege hier sich nicht treffen.

Die jetzt erhaltenen einfachen Integrale können wir direkt ausrechnen, und zwar verfahren wir folgendermaßen: Da die Wahl der Punkte $a'$ bzw. $b'$ auf dem Wege $s$ bzw. $\sigma$ ganz beliebig war (nur dürfen sie mit den singulären Punkten nicht zusammenfallen), sollen sie so gewählt werden, daß

$$\frac{b' - c}{a' - c} = e^{\pi\sqrt{-1}} \tag{17}$$

sei. Wenden wir jetzt auf das zweite Integral die Substitution

$$z - c = -(a' - c)\zeta,$$

an, so ist

$$z - a' = -(a' - c)(1 + \zeta)$$

und das zweite Integral ist:

$$(a' - c)^{-r_i} \int_c^{b'} \frac{(z - c)^{r_i}}{z - a'} dz = e^{r_i \pi \sqrt{-1}} \int_0^1 \frac{\zeta^{r_i}}{1 + \zeta} d\zeta.$$

Machen wir weiter im ersten Integral die Substitution:

$$x - c = \frac{a' - c}{\zeta},$$

so ist nach (17)

$$x - b' = \frac{(a' - c)(1 + \zeta)}{\zeta},$$

und das erste Integral wird

$$(b' - c)^{r_i + 1} \int_{a'}^{c} \frac{(x - c)^{-r_i - 1}}{x - b'} dx = -\left(\frac{b' - c}{a' - c}\right)^{r_i + 1} \int_1^\infty \frac{\zeta^{r_i}}{1 + \zeta} d\zeta.$$

Dies ist weiter nach der Gleichung (17)

$$(b' - c)^{r_i + 1} \int_{a'}^{c} \frac{(x - c)^{-r_i - 1}}{x - b'} dx = e^{r_i \pi \sqrt{-1}} \int_1^\infty \frac{\zeta^{r_i}}{1 + \zeta} d\zeta.$$

Durch Addition des ersten und zweiten Integrals folgt, daß

$$(b' - c)^{r_i + 1} \int_{a'}^{c} \frac{(x - c)^{-r_i - 1}}{x - b'} dx + (a' - c)^{-r_i} \int_c^{b'} \frac{(z - c)^{r_i}}{z - a'} dz$$

$$= e^{r_i \pi \sqrt{-1}} \int_0^\infty \frac{\zeta^{r_i}}{1 + \zeta} d\zeta = e^{r_i \pi \sqrt{-1}} \frac{\pi}{\sin r_i \pi}$$

ist. Es ist dann nach der Gleichung (16) der Wert des Limes in der Gleichung (G):

$$
(18)\qquad \lim_{\substack{s=0\\t=0}}\left\{\left[(x-c)^{-r_i}\int\limits_{c+t}^{b'}\frac{(z-c)^{r_i}}{z-x}\,dz\right]^{x=c-s}\right.
$$

$$
\left.-\left[(z-c)^{r_i+1}\int\limits_{a'}^{c-s}\frac{(x-c)^{-r_i-1}}{x-z}\,dx\right]_{z=c+t}\right\}=\pi\,\frac{e^{r_i\pi\sqrt{-1}}}{\sin r_i\pi}.
$$

Wir berechnen nunmehr den Limes in der Gleichung (G′); dazu integrieren wir die zu Anfang dieses Paragraphen aufgestellte Identität (15) in bezug auf $x$ von $c+t$ bis $b'$, und in bezug auf $z$ von $a'$ bis $c-s$, und nehmen dann den Grenzwert für $s=0$, $t=0$. Nach geeigneter Gruppierung der Glieder, kann man bei einer Gruppe der Glieder den Grenzwert weglassen und für $x$ und $z$ die entsprechenden Werte einsetzen; man findet so:

$$
(16')\quad \lim_{\substack{s=0\\t=0}}\left\{\left[(x-c)^{-r_i}\int\limits_{a'}^{c-s}\frac{(z-c)^{r_i}}{z-x}\,dz\right]_{x=c+t}-\left[(z-c)^{r_i+1}\int\limits_{c+t}^{b'}\frac{(x-c)^{-r_i-1}}{x-z}\,dx\right]^{z=c-s}\right\}
$$

$$
=-(a'-c)^{r_i+1}\int\limits_{c}^{b'}\frac{(x-c)^{-r_i-1}}{x-a'}\,dx-(b'-c)^{-r_i}\int\limits_{a'}^{c}\frac{(z-c)^{r_i}}{z-b'}\,dz.
$$

Machen wir in dem zweiten Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung die Substitution:

$$
z-c=(a'-c)\zeta,
$$

so ergibt sich nach der Gleichung (17)

$$
-(b'-c)^{-r_i}\int\limits_{a'}^{c}\frac{(z-c)^{r_i}}{z-b'}\,dz=e^{-r_i\pi\sqrt{-1}}\int\limits_{0}^{1}\frac{\zeta^{r_i}}{1+\zeta}\,d\zeta;
$$

und wenn wir auf das erste Integral die Substitution

$$
x-c=-\frac{a'-c}{\zeta}
$$

anwenden, so ist

$$
-(a'-c)^{r_i+1}\int\limits_{c}^{b'}\frac{(x-c)^{-r_i-1}}{x-a'}\,dx=e^{-r_i\pi\sqrt{-1}}\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\zeta^{r_i}}{1+\zeta}\,d\zeta;
$$

Ziehen wir diese beiden letzten Ergebnisse in Betracht, so folgt aus (16′)

$$(18') \quad \lim_{\substack{s=0\\t=0}}\left\{\left[(x-c)^{-r_i}\int\limits_{a'}^{c-s}\frac{(z-c)^{r_i}}{z-x}\,dz\right]_{x=c+t} - \left[(z-c)^{r_i+1}\int\limits_{c+t}^{b'}\frac{(x-c)^{-r_i-1}}{x-z}\,dx\right]^{z=c-s}\right\}$$

$$= e^{-r_i\pi\sqrt{-1}}\int\limits_0^\infty\frac{\zeta^{r_i}}{1+\zeta}\,d\zeta = \pi\,\frac{e^{-r_i\pi\sqrt{-1}}}{\sin r_i\pi}.$$

Die Gleichungen (18) und (18′) verwandeln sich mit Benutzung der Formeln von Euler in die folgenden

$$(19) \quad \lim_{\substack{s=0\\t=0}}\left\{\left[(x-c)^{-r_i}\int\limits_{c+t}^{b'}\frac{(z-c)^{r_i}}{z-x}\,dz\right]^{x=c-s} - \left[(z-c)^{r_i+1}\int\limits_{a'}^{c-s}\frac{(x-c)^{-r_i-1}}{x-z}\,dx\right]_{z=c+t}\right\}$$

$$= 2\pi\sqrt{-1}\,\frac{\omega_i}{\omega_i-1} = 2\pi\sqrt{-1}\left\{1+\frac{1}{\omega_i-1}\right\},$$

$$(19') \quad \lim_{\substack{s=0\\t=0}}\left\{\left[(x-c)^{-r_i}\int\limits_{a'}^{c-s}\frac{(z-c)^{r_i}}{z-x}\,dz\right]_{x=c+t} - \left[(z-c)^{r_i+1}\int\limits_{c+t}^{b'}\frac{(x-c)^{-r_i-1}}{x-z}\,dx\right]^{z=c-s}\right\}$$

$$= 2\pi\sqrt{-1}\,\frac{1}{\omega_i-1},$$

wo

$$\omega_i = e^{2r_i\pi\sqrt{-1}}$$

gesetzt wurde.

## 8.

Setzen wir in den Gleichungen (G) bzw. (G′) die gefundenen Ausdrücke für die Grenzwerte aus (19) bzw. (19′) ein, so erhalten wir:

$$(\mathrm{H}) \quad \int\limits_a^c dx\int\limits_c^b dz\,(y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x,z))\,(Y_{ik}(x))$$

$$= 2\pi\sqrt{-1}\left\{(\delta_{ik}) + (c_{ik})\left(\frac{\delta_{ik}}{\omega_i-1}\right)(c_{ik})^{-1}\right\},$$

$$(\mathrm{H}') \quad \int\limits_c^b dx\int\limits_a^c dz\,(y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x,z))\,(Y_{ik}(x))$$

$$= 2\pi\sqrt{-1}\,(c_{ik})\left(\frac{\delta_{ik}}{\omega_i-1}\right)(c_{ik})^{-1}.$$

Die auf der linken Seite stehenden Ausdrücke zeigen die folgende Zusammensetzung. Es ist

$$(*) \qquad (y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x,z))\,(Y_{ik}(x)) = \sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} y_{i\lambda}(z)\,U_{\lambda\nu}(x,z)\,Y_{\nu k}(x)$$

Nun haben wir im § II gezeigt, daß $U_{ik}(x, z)$ eine ganze Funktion vom Grade $\sigma - 2$ in $x$ und $z$ ist:

$$U_{ik}(x,z) = \sum_{\alpha}\sum_{\beta} C_{ik}^{(\alpha,\beta)} x^\alpha z^\beta, \quad (\alpha+\beta \leqq \sigma-2),$$

wo sich die konstanten Koeffizienten $C_{ik}^{(\alpha,\beta)}$ ganz und rational aus den in den Koeffizienten des Differentialsystems (A) auftretenden Konstanten zusammensetzen. Die Elemente der Matrix (*) sind folglich Aggregate von Ausdrücken der Form

$$C_{\lambda\nu}^{(\alpha,\beta)}\, y_{ik}(z) z^\beta \,.\, Y_{ik}(x)\, x^\alpha,$$

so daß also die Elemente der auf der linken Seite der Gleichungen (H), (H′) auftretenden Matrizen Aggregate von Ausdrücken der Form

$$\int_a^c y_{ik}(z)\, z^\beta\, dz, \qquad \int_c^b Y_{ik}(x)\, x^\alpha\, dx$$

werden, wo $a, b, c$ singuläre Punkte des Differentialsystems (A) bedeuten. Wir bezeichnen solche Ausdrücke nach Hirsch* als Perioden der Integrale

$$\int y_{ik}(z)\, z^\beta\, dz, \qquad \int Y_{ik}(z)\, z^\alpha\, dz.$$

In diesen Perioden sind also die Elemente der linken Seite der Gleichungen (H), (H′) bilinear mit konstanten Koeffizienten, während die Elemente der rechten Seite sich aus der zu einem der singulären Punkte $a, b, c$ gehörigen Übergangssubstitution $(c_{ik})$ und aus den Wurzeln $\omega_i$ der zu diesem Punkte gehörigen Fundamentalgleichung zusammensetzen.

---

* Mathematische Annalen Bd. 54.

Man kann nun aus der Übergangssubstitution $(c_{ik})$ und aus den Wurzeln $\omega_i$ der Fundamentalgleichung auch die Fundamentalsubstitution $(A_{ik})$ selbst bilden, und zwar ist diese:

$$(A_{ik}) = (c_{ik})\,(\delta_{ik}\,\omega_i)\,(c_{ik})^{-1}.$$

Subtrahieren wir von der Matrix $(A_{ik})$ die Einheitsmatrix, so ist:

$$(A_{ik} - \delta_{ik}) = (c_{ik})\,(\delta_{ik}(\omega_i - 1))\,(c_{ik})^{-1}.$$

Wir bilden nun die inverse dieser Matrix

$$(A_{ik} - \delta_{ik})^{-1} = \left((c_{ik})(\delta_{ik}(\omega_i - 1))(c_{ik})^{-1}\right)^{-1} = (c_{ik})\left(\frac{\delta_{ik}}{\omega_i - 1}\right)(c_{ik})^{-1}$$

und führen diese in (H) und (H′) ein. Bezeichnen wir dann die Tatsache, daß die Fundamentalsubstitution $(A_{ik})$ zu dem singulären Punkte $c = a_\nu$ gehört, durch den oberen Index $\nu$, und setzen $a = a_\mu$, $c = a_\nu$, $b = a_\varkappa$, so bekommen wir:

$$(\mathrm{K})\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{a_\mu}^{a_\nu} dx \int_{a_\nu}^{a_\varkappa} dz\, (y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x, z))\,(Y_{ik}(x)) \\ \qquad\qquad = 2\pi\sqrt{-1}\,(A_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik})^{-1} + 2\pi\sqrt{-1}\,(\delta_{ik}), \\ \displaystyle\int_{a_\nu}^{a_\varkappa} dx \int_{a_\mu}^{a_\nu} dz\, (y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x, z))\,(Y_{ik}(x)) = 2\pi\sqrt{-1}\,(A_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik})^{-1}, \end{cases}$$

wo $i, k = 1, 2, 3, \ldots, n$, und $\nu = 1, 2, 3, \ldots, \sigma$ ist.

Diese Gleichungen stellen uns also bilineare Relationen dar, zwischen den vorhin charakterisierten Perioden und den Elementen einer Fundamentalsubstitution. Diese Relationen sind immer bestimmt, da die inverse Matrix von $(A_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik})$ immer bestimmbar ist, indem die Determinante

$$(A_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik}) \neq 0$$

ist; weil zufolge unserer Voraussetzung die zu $x = a_\nu$ gehörige Fundamentalgleichung

$$(A_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik}\,\omega) = 0$$

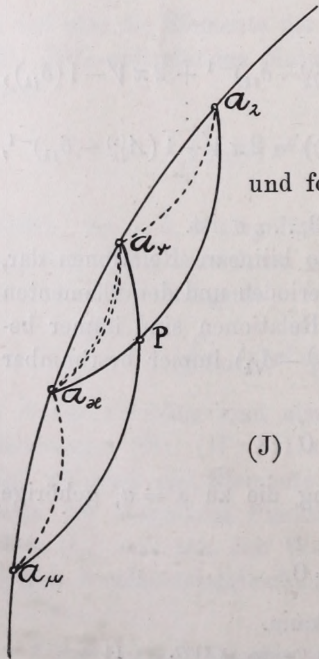
durch $\omega = 1$ nicht befriedigt werden kann.

## VI. Dritte Gruppe der Relationen.

Bei der dritten Gruppe der Relationen sind die Grenzen der beiden auf die Integralmatrix des Differentialsystems bezüglichen Integrale dieselben singulären Punkte. Diese Relationen, die für den Fall einer linearen Differentialgleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung zuerst HIRSCH aufgestellt hat, sind übrigens algebraische Folgen der ersten und zweiten FUCHSschen Relationen.

Wir integrieren die linke Seite der Gleichung (C) § II in bezug auf $x$ von $a_\mu$ bis $a_\nu$ und in bezug auf $z$ von $a_\varkappa$ bis $a_\lambda$, wo $\mu < \nu$, $\varkappa < \lambda$ und $\varkappa < \nu$ sind. Bleiben beide Integrationswege auf einem Ufer des die singulären Punkte miteinander verbindenden Schnittes, so treffen sich dieselben im Punkte $P$.

Wir führen die Integration folgendermaßen durch. Wir integrieren in bezug auf $x$ zuerst von $a_\mu$ bis $a_\varkappa$, dann von $a_\varkappa$ bis $a_\nu$, und in bezug auf $z$ zuerst von $a_\varkappa$ bis $a_\nu$, dann von $a_\nu$ bis $a_\lambda$. Dann ist




$$\int_{a_\mu}^{a_\nu} dx = \int_{a_\mu}^{a_\varkappa} dx + \int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dx,$$

$$\int_{a_\varkappa}^{a_\lambda} dz = \int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dz + \int_{a_\nu}^{a_\lambda} dz$$

und folglich

$$\text{(J)} \left\{ \begin{aligned} &\int_{a_\mu}^{a_\nu} dx \int_{a_\varkappa}^{a_\lambda} dz\, (y_{ik}(z))\, (U_{ik}(x, z))\, (Y_{ik}(x)) \\ &= \int_{a_\mu}^{a_\varkappa} dx \int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dz\, (y_{ik}(z))\, (U_{ik}(x, z))\, (Y_{ik}(x)) \\ &+ \int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dx \int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dz\, (y_{ik}(z))\, (U_{ik}(x, z))\, (Y_{ik}(x)) \\ &+ \int_{a_\mu}^{a_\varkappa} dx \int_{a_\nu}^{a_\lambda} dz\, (y_{ik}(z))\, (U_{ik}(x, z))\, (Y_{ik}(x)) \\ &+ \int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dx \int_{a_\nu}^{a_\lambda} dz\, (y_{ik}(z))\, (U_{ik}(x, z))\, (Y_{ik}(x)). \end{aligned} \right.$$

Die Werte der auf der rechten Seite dieser Gleichung befindlichen ersten und vierten Integrale lassen sich nach der Gleichung (K) bestimmen, und das dritte Integral ist nach der ersten FUCHSschen Relation Null. Wir bekommen also aus (J)

$$\int_{a_\mu}^{a_\nu} dx \int_{a_\varkappa}^{a_\lambda} dz\, (y_{ik}(z))\, (U_{ik}(x, z))\, (Y_{ik}(x))$$
$$= 2\pi\sqrt{-1}\,\{(\delta_{ik}) + (A_{ik}^{(\varkappa)} - \delta_{ik})^{-1}\}$$
$$+ \int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dx \int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dz\, (y_{ik}(z))\, (U_{ik}(x, z))\, (Y_{ik}(x))$$
$$= 2\pi\sqrt{-1}\,\{(\delta_{ik}) + (A_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik})^{-1}\},$$

wo $(A_{ik}^{(\varkappa)})$ die zu dem singulären Punkte $a_\varkappa$ und $(A_{ik}^{(\nu)})$ die zu dem singulären Punkte $a_\nu$ gehörige Fundamentalsubstitution ist. Nun ist aber

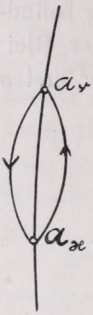
$$\int_{a_\mu}^{a_\nu} dx \int_{a_\varkappa}^{a_\lambda} dz\, (y_{ik}(z)\, (U_{ik}(x, z))\, (Y_{ik}(x))$$
$$= -\int_{a_\mu}^{a_\nu} dx \int_{a_\lambda}^{a_\varkappa} dz\, (y_{ik}(z))\, (U_{ik}(x, z))\, (Y_{ik}(x)).$$

Bei dem letzten Doppelintegral befindet sich der auf $x$ bezügliche Integrationsweg auf der rechten Seite des Schnittes, der auf $z$ bezügliche aber auf der linken Seite; beide schreiten in positivem Sinne fort, demnach treffen sie sich nicht. Zufolge der ersten FUCHSschen Relation ist also der Wert dieses Doppelintegrals gleich Null. Zieht man dies in Betracht, so ergibt sich aus der vorigen Gleichung:

$$\int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dx \int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dz\, (y_{ik}(z))\, (U_{ik}(x, z))\, (Y_{ik}(x))$$
$$= -4\pi\sqrt{-1}\,(\delta_{ik}) - 2\pi\sqrt{-1}\,\{A_{ik}^{(\varkappa)} - \delta_{ik})^{-1} + (A_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik})^{-1}\},$$

oder

$$\int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dx \int_{a_\nu}^{a_\varkappa} dz\, (y_{ik}(z))\, (U_{ik}(x, z))\, (Y_{ik}(x))$$
$$= 4\pi\sqrt{-1}\,(\delta_{ik}) + 2\pi\sqrt{-1}\,\{(A_{ik}^{(\varkappa)} - \delta_{ik})^{-1} + (A_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik})^{-1}\},$$




wo der auf $x$ bezügliche Integrationsweg auf der rechten Seite des Schnittes im positiven Sinne und der auf $z$ bezügliche Integrationsweg auf der linken Seite des Schnittes im positiven Sinne geht.

Integrieren wir die linke Seite der Gleichung (C) § II in bezug auf $x$ von $a_\varkappa$ bis $a_\lambda$, in bezug auf $z$ von $a_\mu$ bis $a_\nu$, und zwar so, daß wir in bezug auf $x$ zuerst von $a_\varkappa$ bis $a_\nu$, dann von $a_\nu$ bis $a_\lambda$ und in bezug auf $z$ zuerst von $a_\mu$ bis $a_\varkappa$, dann von $a_\varkappa$ bis $a_\nu$ integrieren, so bekommen wir eine der Gleichung (J) entsprechende Gleichung:

$$\begin{aligned}
&\int_{a_\varkappa}^{a_\lambda} dx \int_{a_\mu}^{a_\nu} dz\,(y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x,z))\,(Y_{ik}(x))\\
&= \int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dx \int_{a_\mu}^{a_\varkappa} dz\,(y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x,z))\,(Y_{ik}(x))\\
&+ \int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dx \int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dz\,(y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x,z))\,(Y_{ik}(x))\\
&+ \int_{a_\nu}^{a_\lambda} dx \int_{a_\mu}^{a_\varkappa} dz\,(y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x,z))\,(Y_{ik}(x))\\
&+ \int_{a_\nu}^{a_\lambda} dx \int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dz\,(y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x,z))\,(Y_{ik}(x)),
\end{aligned}$$

wo der Wert der auf der rechten Seite stehenden ersten und vierten Doppelintegrale aus der Gleichung (K′) bestimmbar, und der Wert des dritten Doppelintegrals nach der ersten Fuchsschen Relation Null ist. Es bleibt also

$$\begin{aligned}
&\int_{a_\varkappa}^{a_\lambda} dx \int_{a_\mu}^{a_\nu} dz(y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x,z))\,(Y_{ik}(x)) = 2\pi\sqrt{-1}\,(A_{ik}^{(\varkappa)} - \delta_{ik})^{-1}\\
&+ \int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dx \int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dz(y_{ik}(z))\,(U_{ik}(x,z))\,(Y_{ik}(x)) + 2\pi\sqrt{-1}\,(A_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik})^{-1}.
\end{aligned}$$

Integrieren wir in dieser Gleichung in bezug auf $x$ auf der linken Seite des Schnittes, und in bezug auf $z$ auf der rechten Seite des

Schnittes, so treffen sich die Integrationswege bei dem Doppelintegrale auf der linken Seite dieser Gleichung nicht; dasselbe ist also gleich Null, und wir erhalten

$$\int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dx \int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dz\, (y_{ik}(z))\, (U_{ik}(x, z))\, (Y_{ik}(x))$$

$$= -\,2\pi\sqrt{-1}\,\{(A_{ik}^{(\varkappa)} - \delta_{ik})^{-1} + (A_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik})^{-1}\}$$

oder

$$\int_{a_\nu}^{a_\varkappa} dx \int_{a_\varkappa}^{a_\nu} dz\, (y_{ik}(z))\, (U_{ik}(x, z))\, (Y_{ik}(x))$$

$$= 2\pi\sqrt{-1}\,\{(A_{ik}^{(\varkappa)} - \delta_{ik})^{-1} + (A_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik})^{-1}\},$$

wo der auf $x$ bezügliche Integrationsweg auf der linken Seite des Schnittes im positiven Sinne, und der auf $z$ bezügliche Integrationsweg auf der rechten Seite des Schnittes in positivem Sinne verläuft.

Die erhaltenen Relationen sind unter der Bedingung abgeleitet worden, daß die reellen Teile der Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen zwischen 0 und $-1$ liegen. Diese Bedingung läßt sich beseitigen, indem man die Integration statt zwischen je zwei singulären Punkten über die um diese singulären Punkte herumgelegten Doppelschleifen erstreckt. Vergl. A. Hirsch, Mathematische Annalen Bd. 54, § 14, S. 269 ff.

10

# BEITRÄGE ZUR KENNTNIS DER IN SÜSSWÄSSERN LEBENDEN MERMITHIDEN.

Von Prof. Dr. EUGEN VON DADAY.

Mit 4 Tafeln.

Vor einigen Jahren ersuchten mich Herr FR. ZSCHOKKE, Professor an der Universität Basel, und Herr O. FUHRMANN, Professor an der Universität Neuchâtel, die aus dem Vierwaldstätter- und aus dem Neuenburger See gesammelten, frei lebenden Nematoden zu untersuchen und zu bestimmen. Ich konnte mich erst im Frühjahre 1910 an die Aufarbeitung des mir zugekommenen Materials machen, und da fand ich zu meinem größten Erstaunen, daß das sonst reiche Material nur sehr wenig frei lebende Nematoden, aber desto mehr *Mermithiden* enthielt. Während meiner Studien bezüglich der Bestimmung der *Mermithiden*-Arten gelang ich zu solch bedeutenden Resultaten, daß ich es nicht nur für zweckmäßig, sondern selbst für notwendig erachte, dieselben im nachfolgenden auch monographisch zu beschreiben, bzw. — bevor ich auf die Einzelheiten übergehe — die auf Grund meiner Studien erhaltenen allgemeinen Daten der *Mermithiden*-Familie in einer kurzen Übersicht darzustellen.

Infolge der Untersuchungen von F. DUJARDIN (1842), TH. V. SIEBOLD (1842—1858) und einer ganzen Reihe späterer Forscher: E. CORTI, O. V. LINSTOW, KOHN, MEISSNER, RAUTHER, DE MANN usw. ist es allgemein bekannt, daß die *Mermithiden* eine sehr interessante Gruppe der *Nemathelminthen* bilden. Diese kleine Tiergruppe ist besonders durch ihre Lebensweise interessant. Wie die *Gordiiden*, so schmarotzen auch alle *Mermithiden*-Arten in jungem

Larvenzustande in Gliederfüßlern und ausnahmsweise in Schnecken, wogegen die älteren Larven und die geschlechtsreifen Tiere teilweise in nassem Boden, teilweise im Schlamme der Gewässer frei leben. Von den bisher beschriebenen 38 Arten stammen die geschlechtsreifen Exemplare zweier Arten aus nassem Boden, 21 Arten als Larven von verschiedenen Wirttieren (Insekten, Spinnen, Flohkrebsen, Schnecken), geschlechtsreife Exemplare von 13 Arten aus Wasser bzw. Schlamm, und schließlich Larven zweier Arten aus Wasserinsektenlarven (Chironomus, Simulia).

Die ersten Kenntnisse bezüglich der im Schlamme der Gewässer lebenden *Mermithiden* verdanken wir F. DUJARDIN, der im Jahre 1845 (*5*) als *Filaria aquatilis* und *Filaria lacustris* die nach O. v. LINSTOW heute unter der Benennung *Paramermis aquatilis* DUJ. bekannte Art beschrieb. T. LEIDY erwähnt 1852—57 die im Wasser lebenden Arten *Mermis elongata* LEIDY, *Mermis crassicaudata* LEIDY und *Mermis ferruginea* LEIDY (*27*), die er anfangs als selbständige Arten, später als Varietäten der *Mermis albicans* annahm, die aber laut O. v. LINSTOW eben ihrer Lebensweise wegen als selbständige Arten zu betrachten sind (*16* p. 157). Ohne Angabe des Fundortes beschreibt A. SCHNEIDER 1866 die beiden Geschlechtsindividuen einer neuen Art unter dem Namen *Mermis lacinulata* (*23* p. 178, Tab. 14, Fig. 5—7), die auch O. v. LINSTOW für in Wasser lebende Tiere erklärt (*12* p. 390). FEDTSCHENKO erwähnt 1874 eine aus Turkestan stammende *Mermis explicans* genannte Art (*8*), aber, wie O. v. LINSTOW mit Nachdruck bemerkt, ohne von derselben eine Beschreibung zu geben (*13* p. 154). Die Beschreibung des größten Teiles der im Wasser lebenden Arten verdanken wir O. v. LINSTOW, der in seinem 1883 erschienenen Werke (*11* p. 300—301) die aus Turkestan stammenden Arten *Mermis paludicola*, *Mermis acuminata* und *Mermis rotundata* beschreibt, bezüglich der zwei letzteren aber bemerkt, daß der „Fundort unbekannt“ und „der Fundort nicht angegeben ist“ (*11* p. 301—302). In seiner im Jahre 1889 erschienenen zweiten diesbezüglichen Arbeit finden wir die Beschreibung der neuen Arten *Mermis contorta* und *Mermis crassa* (*12* p. 391, 392, Tab. 22 Fig. 1—8) mit den gleichzeitigen Detailangaben der anatomischen Verhältnisse der letzteren Art. Von großer Bedeutung ist für die

Kenntnis der *Mermithiden* das 1899 erschienene zusammenfassende Werk O. v. LINSTOWS (*16* p. 149, Tab. 8), in welchem er bei gleichzeitiger weitläufigeren oder kürzeren Beschreibung der bis dahin bekannten Arten die bezüglich der anatomischen Verhältnisse der *Mermis*-Arten erreichten Ergebnisse zusammenfaßt und außer den in feuchtem Boden lebenden und in verschiedenen Tieren entoparasiten Larven noch 10 in Wasser lebende Arten bespricht. Ein großer Vorteil dieses Werkes ist noch, daß es die frühere bezügliche vollständige Literatur umfaßt und die Synonyma bestimmt. In demselben Werke ist noch als ein wichtiger Fortschritt zu bezeichnen, daß nämlich mit Rücksicht auf die Anzahl der Spiculen des Männchens das *Paramermis*-Genus geschaffen bzw. vom *Mermis*-Genus geschieden wurde, indem die Männchen des *Paramermis*-Genus ein Spiculum besitzen den mit zwei Spiculen versehenen Männchen der eigentlichen *Mermis*-Gattungen gegenüber. Unsere Kenntnisse über die Spezies und Genera bezeichnet O. v. LINSTOW noch durch sein im Jahre 1904 erschienenes Werk (*17*), indem er darin das neue Genus *Neomermis macrolaimus,* ferner die Arten *Mermis piscinalis* und *Pseudomermis Zykoffi* DE MAN bzw. das Weibchen letzterer Art beschreibt. Außer den erwähnten erschienen noch mehrere andere Arbeiten LINSTOWS, die sich mit den *Mermithiden* befassen (*13, 14, 15, 18, 19*), diese enthalten aber meist bloß Angaben über Larven.

In neuester Zeit vermehren E. CORTI und J. G. DE MAN die Zahl der Gattungen und der Arten der in Wasser lebenden *Mermithiden.* 1902 erschien von E. CORTI eine eingehende Beschreibung der neuen Art *Hydromermis rivicola,* sowie seiner Larven und entwickelten geschlechtsreifen Individuen (*2*). J. G. DE MAN schuf im Jahre 1903 das *Pseudomermis*-Genus und beschrieb die Larve der *Zykoffi*-Art (*20*), deren geschlechtsreifes Weibchen O. v. LINSTOW aufgefunden hat (*17*).

Ich muß schließlich noch der in 1905 erschienenen Arbeit F. G. KOHNS Erwähnung tun, in welcher derselbe eine *Mermithide,* seiner Ansicht nach eine *Paramermis contorta* v. LINST. anatomisch beschreibt. Diese Arbeit gab den Impuls zur Polemik zwischen O. v. LINSTOW (*18*) und E. CORTI (*3*) und letzterer bestätigt, daß die *Paramermis contorta* LINST. KOHNS mit der *Mer-*

*mis contorta* LINST.-Art durchaus nicht identisch, daß sie überhaupt weder dem *Mermis*- noch dem *Paramermis*-Genus angehöre, sondern ein neuer Vertreter des *Hydromermis*-Genus sei.

**Die Körperform im allgemeinen.**

Um die Ursachen der bei der Unterscheidung der Arten und der Gattungen zu beachtenden bzw. von mir befolgten Prinzipien klarzulegen, werde ich die anatomischen Verhältnisse der in Wasser lebenden *Mermithiden* auf Grund meiner eigenen Untersuchungen und unter Heranziehung der entsprechenden Daten der einschlägigen Literatur im folgenden zusammenfassen.

Der Körper der geschlechtsreifen Exemplare, sowie der ins freie, bzw. ins Wasser gelangten, auf verschiedenen Entwicklungsstufen stehenden Larven ist zylindrisch, fadenförmig, seine Länge und sein Durchmesser dagegen schwanken zwischen weiten Grenzen. Die Körperlänge sämtlicher von mir untersuchten geschlechtsreifen Exemplare schwankt zwischen 7,5—23 mm und innerhalb dieser Grenzen schwankt auch die Länge der Larven. Unter den Arten besitzt *Hydromermis conura* DAD. den kürzesten, den längsten Körper aber die noch sehr junge *Limnomermis uncata* DAD. Die Körperlänge der von anderen Forschern untersuchten geschlechtsreifen Individuen und Larven beträgt 8—330 (596) mm; es hat nämlich innerhalb dieser Arten den kürzesten Körper die *Mermis-Limnomermis aquatilis* DUJ. und den längsten die *Mermis lacinulata* SCHNEID., denn die Länge von 596 mm der LEIDYschen *Mermis ferruginea* ist kaum für möglich zu erachten. Diese Angabe hat schon O. v. LINSTOW mit einem Ausrufungszeichen versehen und ich glaube, daß es sich hier eher um einen ins frei ziehenden *Gordius* handle, als um einen wirklichen *Mermis*. Der Durchmesser des Körpers ist schon bei den verschiedenen Körperregionen ein und derselben Art auffallend ungleich. Im allgemeinen ist der Vorderteil des Körpers beim Munde sowie in der Papillenregion am dünnsten; am dicksten dagegen ist der Körper — beim Weibchen — bei der Vagina, beim Männchen bei der Vereinigung der beiden Hoden und in der Umgebung der Geschlechtsöffnung. Bei den geschlechtsreifen Exemplaren der von mir untersuchten Arten beträgt der kürzeste Durchmesser 0,13 mm (*Limnomermis limnobia*

DAD.), der längste 0,35 mm (*Bathymermis helvetica* DAD.), während bei den jungen Exemplaren der kürzeste Durchmesser 0,08 mm (*Limnomermis ensicauda* DAD.) und der längste Durchmesser 0,28 mm lang war (*Limnomermis uncata* DAD.). Von den von andern Forschern untersuchten Arten und Exemplaren befanden sich diejenigen, die den kürzesten Durchmesser hatten (0,07 mm) unter den von KOHN untersuchten und den längsten Durchmesser (0,9 mm) hatte die *Paramermis crassa* LINST. Unter den Angaben der Forscher befinden sich auch solche, laut welchen die Larve etwas größer ist als das geschlechtsreife Individuum; dies ist bei der Art *Pseudomermis Zykoffi* DE MAN der Fall, deren Larve laut DE MAN 11 mm lang ist, das geschlechtsreife Weibchen hingegen laut v. LINSTOW nur eine Länge von 10,3 mm erreicht.

Das vordere Ende des Körpers ist in der Regel schmäler als der mittlere Teil und schon vor der Papillenzone bzw. um die Mundöffnung herum beginnt der Körper sich zu verjüngen; ausnahmsweise kommt es aber auch vor, daß das Vorderende desselben erst hinter der Papillenzone sich zu verschmälern beginnt und das Kopfende sich hier gewissermaßen einschnürt (*Eumermis gracilis* DAD., Tab. 4, Fig. 14, und *Mermis paludicola* v. LINST., *11* Tab. 9. Fig. 42). Das Kopfende und bzw. der Saum der Mundöffnung ist meistens mehr oder weniger bogenförmig erhoben und gerundet, manchmal etwas kegelförmig erhöht (*Limnomermis limnobia* DAD., Tab. 1, Fig. 7), bald beinahe geradlinig (*Bathymermis helvetica* DAD., Tab. 2, Fig. 10, und *Limnomermis gracilis* DAD., Tab. 2, Fig. 9), und schließlich erweist es sich auch als in Bogen gegliedert (*Eumermis gracilis* DAD., Tab. 4, Fig. 14, und *Mermis paludicola* v. LINST. *11,* Tab. g, Fig. 42).

Meistens verdickt sich das Kopfende hinter der Papillenzone allmählich nach rückwärts, manchmal aber schnürt es sich etwas ein, bzw. verdünnt es sich zuerst hinter der Papillenzone und beginnt erst nur dann dicker zu werden. In diesem Falle scheint sich am Kopfende ein Teil als Hals abzusondern (*Eumermis gracilis* DAD., Tab. 4, Fig. 14; *Hydromermis bathycola* DAD., Tab. 4, Fig. 6, *Mermis paludicola* v. LINST. *11,* Tab. g, Fig. 42; *Limnomermis gracilis* DAD., Tab. 2, Fig. 9; *Limnomermis ensicauda* DAD., Tab. 2, Fig. 5, und *Limnomermis curvicauda* DAD., Tab. 2, Fig. 3).

Das hintere, bzw. das Schwanzende des Körpers ist in allen Fällen verjüngt, bisweilen sogar dünner als das Kopfende. Die Schwanzenden der gänzlich geschlechtsreifen Männchen und Weibchen sind bezüglich der Form nur in geringem Maße voneinander abweichend; im allgemeinen sind sie einem Kegel mit stumpf oder schärfer abgerundeter Spitze nicht unähnlich; während aber ihr Dorsalrand in der Regel abschüssig gebogen ist, verläuft ihr Ventralrand gerade. Die *Limnomermis limnetica* DAD. bildet aber eine Ausnahme von dieser Regel, indem das Schwanzende des Weibchens kegelförmig abgerundet erscheint (Tab. 1, Fig. 15), wohingegen das Männchen ein Schwanzende mit einer tatsächlich spitzen Kegelform besitzt (Tab. 1, Fig. 13). Unter diesen Arten befinden sich aber auch solche, deren geschlechtsreife Weibchen am Schwanzende nicht bloß einfach abgerundet sind, sondern die dortselbst in der Fortsetzung des Ventralrandes mit einer kleineren oder größeren kegelförmigen Erhebung versehen sind, wie die *Hydromermis annulosa* DAD., Tab. 4, Fig. 5. und die *Hydromermis acuminata* DAD., Tab. 4, Fig. 2.

Die noch nicht ganz geschlechtsreifen Exemplare, wie es von den früheren Forschern auch O. v. LINSTOW bestätigte (*12*, *16*), können auch schon durch den Bau ihres Schwanzendes von den geschlechtsreifen unterschieden werden. Unter den von mir untersuchten, noch nicht geschlechtsreifen Exemplaren fand ich nämlich ein Männchen, dessen Schwanzende länglich zugespitzt war (*Limnomermis acuticauda* DAD., Tab. 2, Fig. 2); ferner fand ich ein junges Weibchen, dessen Schwanzende einem kurzen Dolch ähnlich war, und daneben ein solches junges Männchen, welches einen langen, sich stark verjüngenden Schwanzfortsatz hatte (*Limnomermis ensicauda* DAD., Tab. 2, Fig. 8). Dem soeben erwähnten jungen Männchen ähnelt in anbetracht des Schwanzendes auch das noch nicht geschlechtsreife Weibchen der *Limnomermis bathybia* DAD., ihr Schwanz ist aber kürzer und sanft aufwärts gekrümmt (Tab. 1, Fig. 4). Das noch nicht geschlechtsreife Weibchen der *Bathymermis helvetica* DAD. trägt an der Spitze ihres Schwanzendes einen S-förmig gekrümmten Cuticulardorn (Tab. 3, Fig. 16). Das Schwanzende des noch nicht geschlechtsreifen Männchens der *Limnomermis curvicauda* DAD. setzt sich in einen ziemlich langen, allmählich sich verjüngenden, ab- und vorwärts gekrümmten Cuticularfortsatz fort (Tab. 2, Fig. 4). Das Schwanzende des noch nicht geschlechtsreifen Weibchens der *Limnomermis uncata* DAD. ist sehr eigentümlich, indem auf dem höchsten Gipfelpunkte desselben aus einem abgesonderten Grunde ein kurzer, nach vorne gekrümmter Cuticularhaken emporreicht (Tab. 2, Fig. 14).

Was das Schwanzende des Körpers anbelangt, muß ich bemerken, daß ich dasselbe bei allen Exemplaren sämtlicher Arten in geringerem oder größerem Maße einwärts gekrümmt sah, so daß also dieser Umstand bei der Beschreibung der Arten überhaupt nicht von Belang sein kann. Außerdem kamen unter meinen Exemplaren auch solche vor, deren Kopf- und Schwanzende von der Mitte des Körpers an gerechnet in gleicher Länge und gleichmäßig eingekrümmt waren — und schließlich auch solche, deren Körper eine förmliche Spirale bildeten.

### Das Integument mit den Längswülsten.

Bezüglich der Struktur des Integumentes der *Mermithiden* sind die Forscher sehr verschiedener Ansicht. F. DUJARDIN unterscheidet im Integument der *Mermis nigrescens* drei Schichten, und zwar eine äußere homogene, eine mittlere faserige und eine innere abermals homogene Schicht; da aber die Fasern der mittleren Schicht sich kreuzen, bilden dieselben eigentlich zwei Schichten (*6*, p. 136, Tab. 3, Fig. 5). Im Integument der *Mermis albicans* unterscheidet MEISSNER ebenfalls drei Schichten (*21*), wohingegen O. v. LINSTOW infolge seiner an der *Mermis nigrescens* vollzogenen Untersuchungen behauptet, daß das Integument aus vier Schichten, und zwar aus einer strukturlosen Epidermisschicht und einem dreischichtigen Corium, innerhalb dessen die Hypodermis folgt (*15*, p. 504, Tab. 29, Fig. 13). In einer seiner späteren Arbeiten beruft sich O. v. LINSTOW auf diese Angaben, vergißt aber hierbei, daß er im Integument der *Mermis crassa* außer der Epidermisschicht nur zwei Coriumschichten und die Hypodermis beobachten konnte (*12*, p. 393).

Im schroffsten Gegensatze zu den erwähnten Forschern behauptet F. G. KOHN, daß das Integument der von ihm beschriebenen *Paramermis contorta* nur aus zwei Schichten bestehe und unterscheidet in demselben eine äußere helle und eine dunkler färbbare innere Cuticularschicht, von denen er aber bemerkt, daß „die Differenz zwischen einem hellen äußeren und einem ausgezackten, dunkelfärbbaren inneren Teil der Cuticula, die wir oft auf Schnitten zur Ansicht bekommen, auf Verquellung im Fixierungsmittel beruhen kann" (*9*, p. 224).

Auf Grund der aus meinen Untersuchungen resultierenden Ergebnisse kann ich denjenigen Forschern Recht geben, die das Integument der *Mermithiden* für mehrschichtig erklären (Corti, Dujardin, O. v. Linstow, Meissner), und hierbei kam ich diesbezüglich zu folgenden Ergebnissen.

Das gemeinsame Kennzeichen sämtlicher *Mermithiden* besteht darin, daß ihr Integument — abgesehen von den um den Mund herum sich befindlichen Papillen und von den prä- und postanalen Papillen der Männchen — ebenso bei den Larven, wie bei den noch nicht geschlechtsreifen und auch bei den geschlechtsreifen Individuen eine ganz glatte, ausnahmsweise ringförmig gefaltete Oberfläche besitzt (*Hydromermis annulosa* Dad., Tab. 4, Fig. 3) und in geringem Maße biegsam ist. Ein anderes Kennzeichen des Integuments der *Mermithiden* besteht in der Zweiteilung in eine *Epidermis-* und eine *Hydrodermisschicht*, deren Entwicklungsgrad und Struktur bei der Unterscheidung der Genera und eventueller Arten von großer Wichtigkeit ist.

Die Epidermisschicht bzw. die Cuticularbedeckung der *Mermithiden* ist für die sämtlichen *Nemathelminthen*, ja man kann sogar behaupten, für sämtliche *Würmer* bezeichnend, und sie besteht, wie es die Beobachtungen F. G. Kohns und meine eigenen Erfahrungen bestätigen, aus einem von Kalilauge stark angreifbaren Cuticularstoffe. Diese Cuticularmasse bzw. Bedeckung ist in einem jeden Falle geschichtet, die Zahl und die Struktur ihrer Schichten ist aber innerhalb gewisser bestimmter Gruppen verschieden.

Mich auf meine eigenen Untersuchungen stützend und die auf die *Paramermis crassa* bezüglichen Angaben von Dujardin, Meissner und O. v. Linstow ins Auge fassend, kann ich als allgemeine Regel feststellen, daß die Epidermis bzw. die Cuticulabedeckung der *Mermithiden* und speziell sämtlicher mir vorgelegenen Exemplare aus drei Schichten, nämlich aus einer *äußeren*, einer *mittleren* und einer *inneren Schicht* besteht.

Die *äußere Cuticularschicht* ist stets homogen durchsichtig, verschieden dick und besitzt scharfe Grenzlinien. Bei den von mir untersuchten Exemplaren fand ich solche, deren Cuticularschicht einen Durchmesser von nur 0,0012—0,0015 mm sowie auch derartige mit einem Durchmesser von 0,003 mm. Als zwischen den beiden Extremen liegend erachtete E. DUJARDIN die äußere Cuticularschicht der *Mermis nigrescens*, deren Durchmesser er mit 0,0018 mm bestimmte (*6*, p. 136). Nebenbei sei bemerkt, daß die ganze Cuticularbedeckung und im Zusammenhange hiermit auch ihre äußere Schicht bei den von mir untersuchten jugendlichen Exemplaren dünner ist als bei den geschlechtsreifen.

Die Struktur der *mittleren Cuticularschicht* entwickelte sich nach zwei Typen; bei den Gattungen der einen Gruppe besteht sie nämlich aus zwei Schichten von sich unter einem gewissen Winkel, nach O. v. LINSTOW im allgemeinen unter 50°—130° kreuzenden Fasern (*12*, p. 393; *16*, p. 163); bei den Angehörigen der anderen Gruppe dagegen ist sie entweder homogen oder besitzt sie in der Längsrichtung feine Fasern, ohne auch Querfasern aufzuweisen (Tab. 1, Fig. 3; Tab. 4, Fig. 4). Diesen in der Struktur der Cuticularbedeckung sich kundgebenden Unterschied hält E. CORTI in bezug auf die *Mermithiden* für so sehr wichtig, daß er die frühere einheitliche Familie in zwei Unterfamilien zu gliedern vorschlägt und die mit einer kreuzfaserigen Cuticula versehenen Genera und Spezies der Unterfamilie der *Mermithinen* und die eine glatte Cuticula aufweisenden der Unterfamilie der *Hydromermithenen* zuweist (*3*, p. 631). Außer E. CORTI betrachten auch J. G. DE MAN und O. v. LINSTOW den in der Struktur der mittleren Cuticularschicht sich zeigenden und soeben erwähnten Unterschied für wichtig und legen hierauf bei der Unterscheidung der Gattungen ein großes Gewicht. Bei den mir vorliegenden Arten fand ich, wie es sich bei der systematischen Beschreibung derselben zeigen wird, die mittlere Cuticularschicht nach beiden Typen entwickelt, — ich fand aber auch eine solche Art, wo die mittlere Cuticularschicht parallele ringförmige Fasern aufwies (*Hydromermis annulosa* DAD., Tab. 4, Fig. 4).

Die gekreuzte Fasern enthaltende und die homogene Schicht unterscheiden sich nicht nur bezüglich ihrer Struktur, sondern auch in Anbetracht ihrer Dicke voneinander. Die kreuzfaserige Cuticularschicht ist im allgemeinen dünner als die homogene; so fand sie F. Dujardin bei der *Mermis nigrescens* 0,0017 mm stark (*6*, p. 137), während ich Durchmesser von 0,0018—0,002 mm gemessen habe. Dagegen ist nach meinen Messungen die gleichartige Cuticularschicht 0,0048—0,005 mm, die mit parallelen ringförmigen Fasern versehene aber 0,0028 mm dick.

Die Entwicklungsstufe und die Struktur der *inneren Cuticularschicht* scheint mit derjenigen der äußeren in innigem Zusammenhang zu stehen. Bei der mit einer kreuzfaserigen mittleren Schicht versehenen Cuticulabedeckung ist die innere Schicht stark entwickelt und im Vergleich zu den beiden anderen sehr dick, indem ihr Durchmesser nach meinen Messungen zwischen 0,01—0,18 mm schwankt (*Eumermis gracilis* Dad., *Bathymermis Fuhrmanni* Dad.) und hierbei auch in der Längsrichtung verlaufende feine Fasern zu enthalten scheint. Bei der Cuticulabedeckung aber, die eine glatte oder parallele ringförmige Fasern aufweisende Schicht besitzt, schwankt die Dicke der inneren Schicht nur zwischen 0,0012—0,002 mm und dieselbe ist hierbei gänzlich strukturlos bzw. homogen (*Hydromermis conura* Dad., *Limnomermis bathybia* Dad., *Mesomermis Zschokkei* Dad., *Hydromermis annulosa* Dad.).

Es ist für sämtliche Arten der *Mermithiden* ein gemeinsames Kennzeichen, daß bei allen freilebenden Individuen, also ebenso bei den Larven und den noch nicht ganz geschlechtsreifen, wie auch bei den geschlechtsreifen, in einer Zone hinter dem Munde aus der Epidermis Papillen, sogenannte postorale Papillen hervorragen. Auf der Epidermis der sämtlichen geschlechtsreifen männlichen *Mermithiden* entwickelten sich aber außer den postoralen Papillen auch noch sogenannte *anale Papillen*, die ihrer Lage nach als *praeanale* und *postanale Papillen* bezeichnet werden können. Die *postoralen* wie auch die *analen Papillen* können als Erhebungen der Epidermis, welche infolge der Veränderung der Hypodermis entstanden sind, angenommen und teilweise als Tast-, teilweise als Anhaftungsorgane betrachtet werden, ihre Entwicklungsstufe und ihre Zahl schwankt zwischen sehr weiten Grenzen.

Die *postoralen Papillen* resultieren aus der lokalen Verdickung und Erhebung der Hypodermisschicht, in die dann noch Muskelfasern hineindringen und schließlich über sich auch die Cuticularschicht aufstülpen. Die postoralen Papillen sind meistens mehr oder weniger kegelförmig, manchmal ähneln sie aber Scheiben, wie diejenigen der Art *Pseudomermis Zykoffi* DE MAN. In beiden Fällen haben sie aber ein kleines, leicht brechendes, kugelförmiges Zentralkörperchen. Die Zahl der postoralen Papillen ist sehr verschieden, indem unter den Arten auch solche vorkommen, die vier Papillen haben (*Mermis pachyderma* LINST., *Mermis involuta* LINST., *Pseudomermis Zykoffi* DE MAN), ferner gibt es auch eine, die mit zehn Papillen versehen ist (*Neomermis macrolainus* LINST.), die meisten Arten besitzen aber nur sechs Papillen und scheint diese Zahl, wie schon O. v. LINSTOW und F. G. KOHN bemerken (*9*, p. 226), für die *Mermithiden* im allgemeinen charakteristisch zu sein. Zugunsten dieser Annahme spricht noch der Umstand, daß innerhalb derselben Gattung sich Arten mit vier und sechs postoralen Papillen vorfinden. So hat z. B. laut J. G. DE MAN und O. v. LINSTOW die *Pseudomermis Zykoffi* DE MAN (*20*, 117) nur vier postorale Papillen, wogegen nach LINSTOWS Angaben (*19*) die *Pseudomermis pusilla* LINST. schon sechs postorale Papillen besitzt.

Die Lage der postoralen Papillen ist ebenfalls verschieden, für die Arten aber in einem gewissen Maße bezeichnend. Von den postoralen Papillen sind bei einem Teile der von mir untersuchten Arten 2—2 lateral, eine dorsal und eine ventral (*Bathymermis*-Gattungen, *Eumermis Zschokkei, Limnomermis ensicauda, Limnomermis gracilis, Limnomermis acuticauda, Limnomermis curvicauda, Limnomermis limnetica, Limnomermis uncata, Mesomermis lacustris*); beim anderen Teile liegen von den Papillen 1—1 lateral, zwei dorsal und zwei ventral, bzw. 1—1 mediolateral, zwei dorsolateral und zwei ventrolateral (*Hydromermis conura, Hydromermis annulosa, Hydromermis bathycola, Limnomermis bathybia, Hydromermis acuminata, Limnomermis limnobia, Paramermis limnophila*). Bei den Arten mit vier postoralen Papillen gibt es zwei laterodorsale und zwei lateroventrale Papillen, wogegen nach den Angaben O. v. LINSTOWS von den Papillen der mit 10 postoralen Papillen versehenen *Neomermis macrolaimus* LINST. eine dorsal, eine ventral und vier-vier lateral liegen (*17*, p. 491).

Das Vorhandensein von *analen Papillen* ist für die vollkommen geschlechtsreifen Männchen charakteristisch, und sind dieselben im allgemeinen viel kleiner als die postoralen, manchmal sind sie selbst so klein, daß sie nur bei stärkerer Vergrößerung wahrnehmbar sind. Ein allgemeiner Charakterzug der analen Papillen besteht darin, daß sie sich so vor wie hinter der Geschlechtsöffnung in Längslinien aneinander reihen und wie schon bemerkt, ihrer Lage nach in *prae-* und *postanale Papillen* gruppiert werden können. Die Zahl der prae- und postanalen Papillenreihen ist sehr verschieden und diesbezüglich können wir uns auf die Angaben der einschlägigen Literatur stützend (*16*), folgende Resultate festlegen:

1. *Paramermis aquatilis* LINST., 3 praeanale Papillenreihen (*16*, p. 155).

2. *Neomermis macrolaimus* LINST., 3 prae- und 3 postanale Papillenreihen (*17*, p. 491).

3. *Mermis lacinulata* SCHNEID. 3 prae- und 3 postanale Papillenreihen, von denen die mittlere aber vor und hinter der Geschlechtsöffnung entzweigeteilt ist (*23*, p. 178).

4. *Mermis paludicola* LINST. 2 praeanal-laterale, 2 postanal-laterale und 2 postanal-mediale Papillenreihen (*16*, p. 154).

5. *Mermis albicans* SIEBOLD 6 praeanale Papillenreihen, und zwar 2—2 laterale und 2 mediale Reihen (*16*, p. 151—152).

6. *Mermis crassa* LINST. 6 praeanale und 4 postanale Papillenreihen, und zwar 2—2 praeanal-laterale, 2 praenal-mediale, 1—1 postanal-laterale und 2 postanal-mediale Reihen (*16*, p. 153 bis 154).

Soweit ich im Verlaufe meiner Untersuchungen konstatieren konnte, hatten alle geschlechtsreifen Männchen der mir vorgelegenen Arten 3 prae- und 3 postanale Papillenreihen, und zwar in beiden Gruppen 1—1 laterale und eine mediale Reihe. Bei den verschiedenen Arten ist die Zahl der Papillen ebenso in den praeanalen wie in den postanalen Reihen verschieden, so daß ich die Zahl der Papillen der einzelnen Reihen als ein sekundäres Geschlechtskennzeichen auch bei der Unterscheidung der Arten für einen wichtigen Fingerzeig erachte. In Übereinstimmung mit den früheren Forschern betone auch ich, daß das genaue Feststellen der Zahl der analen Papillenreihen und der einzelnen Papillen mit ziemlichen Schwierigkeiten verbunden ist.

Die *Hypodermisschicht* des Integuments besteht im allgemeinen aus granuliertem Syncytium, ist aber nicht unter der ganzen Cuticulabedeckung und nicht bei sämtlichen *Mermithiden* gleichmäßig entwickelt. Im ganzen genommen ist die Hypodermisschicht eine kernlose, dünne Plasmaschicht, die aber in der Längsrichtung des ganzen Körpers an gewissen Punkten bzw. in der Richtung gewisser Längslinien zu Wülsten verdickt ist. Die Zahl und die Lage dieser sogenannten *Längs-* oder *Longitudinalwülste,* von manchen Forschern (F. G. KOHN, p. 14) auch *Längslinien* genannten Verdickungen ist sehr verschieden, dient aber bei der Unterscheidung der Gattungen als wichtige Charakteristik.

In Anbetracht der Lage und der Zahl der Längswülste kann unter allen bisher bekannten *Mermithiden* die *Neomermis macrolaimus* LINST. die Ausgangsform bilden, indem die Hyprodermis dieser Art nur in der Medianlinie der Rücken- und Bauchtseite zu einem Wulst verdickt ist und hierdurch eine sogenannte *dorsale* und eine *ventrale Wulst* entsteht, wie dies übrigens aus den Untersuchungen O. v. LINSTOWS bereits bekannt ist (*17*, p. 491).

Die Hypodermis der Mehrzahl der Gattungen und Arten ist auf gewissen Linien des Körpers zu sechs Längswülsten verdickt. Von den sechs Längswülsten bilden 1—1 die Medianlinie der Rücken und der Bauchseite, 1—1 ziehen an beiden Seiten des Körpers entlang, etwas ober der Medianlinie und 1—1 befindet sich ebenfalls zu beiden Seiten des Körpers, aber schon mehr der Bauchseite gegenüber. Die soeben erwähnten Längswülste werden mit Ausnahme der *dorsalen* und der *ventralen* Wülste von den Forschern mit verschiedenen Namen bezeichnet. So nennt O. v. LINSTOW die sich an den beiden Seiten des Körpers befindenden, ein wenig der Rückenseite genäherten beiderseitigen Wülste *dorsolaterale Wülste,* wogegen F. G. KOHN dieselben als *ventrolaterale Linien* erwähnt (*9*, p. 15, 17); ferner werden die an beiden Seiten des Körpers befindlichen, der Bauchseite näher liegenden beiden Seitenwülste von O. v. LINSTOW *ventrolaterale Wülste,* von F. G. KOHN *laterale Linien* genannt. Unter den bisher bekannten Gattungen, die von mir untersuchten neuen inbegriffen, sind es folgende, deren Hypodermis die erwähnten Längswülste bildet: *Bathymermis* DAD., *Limnomermis* DAD., *Mermis* DUJ., *Mesomermis* DAD., *Paramermis* LINST. Wahrscheinlich gehört hierher auch das Genus *Pseudomermis* DE MAN, bei dem J. G. DE MAN nur von dorsalen, ventralen und lateralen Wülsten spricht (*20*), gleichzeitig aber auch die Möglichkeit des Vorhandenseins der beiden ventrolateralen Wülste nicht ausschließt.

Schließlich kommen unter den Gattungen auch zwei solche vor, deren Hypodermis sich schon zu acht Längswülsten verdickte, nämlich die *Hydromermis* CORTI und die *Eumermis* DAD. Die in Rede stehenden acht Längswülste sind ihrer Lage nach folgende: 1. eine *dorsale*, 2. eine *ventrale*, 3. je eine *dorsolaterale*, 4. je eine *mediolaterale*, 5. je eine *ventrolaterale*. Wenn wir dann die Gattungen mit sechs Längswülsten mit denen, die acht besitzen, vergleichen, so können wir festsetzen, daß die letzteren sich von den ersteren durch die beiden sogenannten *dorsolateralen* Wülste, die zwischen die zwei lateralen Wülste eingedrungen sind, unterscheiden.

Gleichzeitig bemerke ich, daß ich, mit Rücksicht auf die Gattungen mit acht Längswülsten bei der Benennung der Längswülste, die Nomenklatur F. G. KOHNs annehme, mit dem Unterschiede, daß ich für *Linie* das Wort Wulst annehme. Infolgedessen unterscheide ich *dorsale, ventrale, mediolaterale, dorsolaterale* und *ventrolaterale Wülste.*

Bezüglich der Struktur der Wülste will ich auf Grund meiner Untersuchungen nur folgende Bemerkungen machen. Von sämtlichen Wülsten sind die *mediolateralen* die am besten entwickelten bzw. die breitesten und höchsten, diesen folgen dann der *dorsale* und der *ventrale* Wulst, während endlich die zwei *dorsolateralen* und *ventrolateralen* gewissermaßen bloß als sehr schmale Linien erscheinen. Mit der höheren Entwicklung steht auch die Struktur der Längswülste in engem Zusammenhange, indem die granulierte Masse der breiten und hohen mediolateralen Wülste wie auch der ventralen, sehr oft selbst die der dorsalen Wulst ei- oder seltener kugelförmige Kerne enthält, wogegen ich in den dorsolateralen und in den ventrolateralen Wülsten nicht ein einzigesmal Kerne aufzufinden vermochte. Die meisten Kerne befinden sich in den mediolateralen Wülsten und sind bei allen Arten anders disloziert; bald liegen dieselben in einer Ebene in zwei oder mehr Längsreihen, bald sind sie schichtenmäßig übereinander gelagert, was in Querschnitten sehr gut beobachtet werden kann. Meinen Erfahrungen nach enthalten die mediolateralen und die ventralen Wülste an den zwei Körperenden in der Regel mehr Kerne als in der Körpermitte. In den mediolateralen Wülsten der noch nicht ganz geschlechtsreifen Exemplare kann man manchmal auch noch die Grenzlinien der Zellen wahrnehmen, wie dies z. B. bei den Arten *Limnomermis acuticauda* DAD. (Tab. 2, Fig. 1, 2), *Limnomermis uncata* DAD. (Tab. 2, Fig. 14, 15), *Limnomermis curvicauda* DAD. (Tab. 2, Fig. 3, 4) der Fall ist; dies kann aber auch bei ganz geschlechtsreifen Individuen vorkommen, wie u. a. bei der Art *Mesomermis Zschokkei* DAD. (Tab. 2, Fig. 12, 13).

Die allgemeine Aufgabe der Hypodermis ist bekanntlich das Ausscheiden der Cuticularschichten der Epidermis, die aus derselben entstandenen Längswülste spielen aber eine andere wichtige Rolle. Es durchbohren nämlich sämtliche Längswülste die Muskulatur und teilen dieselbe in eine entsprechende Anzahl von Muskelbündel, wie es bei Besprechung der Muskulatur dargelegt werden wird. Eine andere Aufgabe der Längswülste besteht darin, daß sie mit ihren Plasmafortsätzen die inneren Organe, wie z. B. den Fettkörper und die Geschlechtsorgane in der Körperhöhle befestigen bzw. anhängen. Diese Funktion der Längswülste ist schon bei äußerer Ansicht besonders bei schon längst geschlechtsreifen, wenig oder gar keine Fettkörperchen enthaltenden Weibchen, die alle ihre Eier abgestoßen haben, auffallend; in Querschnitten ist diese Funktion auch bei nicht geschlechtsreifen Individuen unverkennbar.

### Die Muskulatur.

Die Muskulatur der *Mermithiden* gleicht im wesentlichen derjenigen der freilebenden *Nematoden* nicht nur histologisch, sondern im hohen Grade auch bezüglich ihrer Gliederung und bildet eigentlich innerhalb der Hypodermis einen Hautmuskelschlauch, welcher aus mit der Längsachse des Körpers parallel laufenden Muskellammellen besteht. Durch das Integument betrachtet erscheinen die Grenzlinien der Muskellamellen als langgestreckte Fasern. Dieselben bilden aber keinen einheitlichen Schlauch, denn ihre mehr oder minder umfangreichen Büschel werden — wie schon erwähnt — durch die Längswülste der Hypodermis in Muskelbündel geteilt. (Betreffs der spezielleren histologischen Beschreibung s. bei F. G. Kohn, p. 233).

Die Zahl der Längswülste der Hypodermis und diejenige der langgestreckten Muskelbündel stehen in enger Beziehung zu einander. Die dorsale und die ventrale Längswulst der *Neomermis macrolaimus* Linst. teilen die Muskulatur in zwei mächtige, langgestreckte Muskelbündel. Die Muskulatur der Gattungen und Arten mit sechs Längswülsten zerfällt der Zahl der Längstwülste entsprechend in sechs Längsbündel, deren zwei zwischen den dorsalen und mediolateralen Wülsten liegen; dies sind die *Dorsalbündel*; zwei befinden sich zwischen den mediolateralen und ventrolateralen Wülsten, das sind die *ventrolateralen Bündel*; endlich gibt es zwei Muskelbündel zwischen den ventralen und ventrolateralen Wülsten und das sind die *Ventralbündel.* Die Gliederung der Muskulatur der Gattungen und Arten mit acht Längswülsten entspricht der Zahl der Längswülste, und kann man ihrer Lage nach folgende Muskelbündel unterscheiden: 1. *dorsale Muskelbündel* zwischen den dorsalen und dorsolateralen Längswülsten; 2. *dorsolaterale Muskelbündel* zwischen den dorsolateralen und mediolateralen Längswülsten; 3. *ventrolaterale Muskelbündel* zwischen den mediolateralen und den ventrolateralen Längswülsten und schließlich 4. *ventrale Muskelbündel* zwischen den ventralen und ventrolateralen Längswülsten.

Ein jedes Muskelbündel beginnt am vorderen Körperende bzw. an der postoralen Papillenzone und reicht bis zum hinteren Körperende, sich fortwährend verjüngend, oder richtiger alle Muskelbündel beginnen keilförmig zugespitzt und enden in derselben Form. Der Durchmesser der einzelnen Muskelbündel bzw. ihre Breite ist verschieden. Bei der *Neomermis macrolaimus* Linst. sind beide Muskelbündel gleichmäßig breit. Die dorsalen Muskelbündel der Arten mit sechs Muskelbündeln sind breiter als die dorsolateralen und die ventrolateralen. Was ihre Dicke anbelangt, so gibt es zwischen den einzelnen Muskelbündeln keinen augenfälligen Unterschied, doch scheinen manchmal die ventralen und die ventrolateralen Muskeln etwas mehr gewölbter zu sein als die übrigen.

Im innern Körper findet man typisch entwickelte Muskelfasern nur im hinteren Körperende der Männchen, und zwar von der praeanalen Papillenreihe angefangen bis zum Körperende. Ähnlich wie bei den frei lebenden *Nematoden* befinden sich nämlich im hinteren Körperende der Männchen, in dorsoventraler Richtung dünnere oder dickere, einfache oder an ihren Enden sich verzweigende Muskelfasern, deren Funktion gelegentlich der Paarung eine große Rolle spielt (Tab. 1, Fig. 6; Tab. 1, Fig. 10; Tab. 1, Fig. 13; Tab. 2, Fig. 12; Tab. 3, Fig. 2; Tab. 3, Fig. 7; Tab. 3, Fig. 15; Tab. 4, Fig. 17). Ausnahmsweise kommen auch unter den Weibchen solche ganz geschlechtsreife vor, in deren hinterem Körperende wir eine in dorsoventraler Richtung verlaufende stärkere, an ihrem dorsalen Ende baumähnlich verzweigte Muskelfasern antreffen (wie z. B. ein Weibchen der *Limnomermis bathybia* DAD. (Tab. 1, Fig. 2).

### Das Nervensystem.

Die ausführlichsten Angaben bezüglich des Nervensystems der *Mermithiden* finden wir in der Studie G. MEISSNERS über die *Mermis albicans* (*21*). Außerdem finden wir mehr oder weniger umfangreiche Beobachtungen in den Arbeiten von SCHNEIDER (*23*), O. v. LINSTOW (*12, 15, 16*) und F. G. KOHN (*9*). Ich selbst befaßte mich nicht eingehender mit dem Nervensystem der *Mermithiden*, und zwar einesteils deshalb, weil das mir vorgelegene Material solchen Untersuchungen nicht entsprach, andernfalls aber, weil dies von dem mir vorschwebenden Ziele weit abseits lag. Um aber eine Beschreibung des gesamten Organismus der *Mermithiden* zu liefern, will ich dieselben — indem ich mich teilweise auf die einschlägige Literatur, teilweise auf meine eigenen Beobachtungen stütze — nun kurz besprechen.

Was die Lage und die Struktur des Zentrums des Nervensystems bei den *Mermithiden* anbelangt, so erinnert es im hohen

Grade an dasjenige der freilebenden *Nematoden.* Als Nervenzentrum dient nämlich der von der Mundöffnung mehr oder weniger entfernte Schlundring, welcher bei den noch nicht vollkommen geschlechtsreifen Individuen komplizierterer Struktur zu sein scheint, als bei den Eier führenden oder ihre Eier schon abgestoßenen alten Weibchen. Am Schlundringe der noch nicht ganz geschlechtsreifen oder noch jungen Individuen befindet sich, wie schon F. G. KOHN bemerkte (*9*, p. 235), ein etwas schief und quer durchlaufendes, aus Nervenfasern bestehendes Bündel, hinter und vor welchem ein Haufen kleinerer oder größerer, kugelförmiger Nervenzellen liegt. Bei den älteren, besonders bei den die Eier schon abgelegten Individuen bleibt von dem soeben erwähnten Schlundring sozusagen nichts weiter übrig, als das Bündel der querverlaufenden Fasern, wohingegen die Nervenzellen beinahe schon ganz verschwunden sind, indem sie im Verlaufe des Lebens wahrscheinlich aufgesogen wurden.

Aus dem Schlundringe gehen nach rückwärts und in der Richtung des Mundrandes Nerven aus, und zwar verläuft nach G. MEISSNERS und O. v. LINSTOWS Angaben je ein stärkerer Nerv in der dorsalen und in der ventralen Längswulst, die miteinander durch Seitenfasern in Verbindung zu stehen scheinen bzw. mit ihren Seitenfasern die Muskelfasern zu innervieren. Nach G. MEISSNER gehören zu diesen Hauptnerven auch noch zwei seitliche Nerven, welche ebenfalls nach rückwärts verlaufen und zwischen die zwei früher erwähnten eingeschaltet sind.

Die äußeren Empfindungsorgane werden bei den *Mermithiden* durch die hinter dem Munde befindlichen und schon erwähnten postoralen Papillen vertreten. Mehr oder weniger hinter dieser Papillenzone entfernt gibt es aber ein Organ, welches ich mit J. G. DE MAN als ein *Seitenorgan* bzw. als ein eigentliches Empfindungsorgan betrachte, im Gegensatze zu O. v. LINSTOW, F. G. KOHN und anderen Forschern, die dieses Organ für eine *Ausführungsöffnung* — einen Porus excretorius — halten, durch welche sich die ausgeschiedenen Säfte entfernen. Die Richtigkeit meiner Ansicht wird in erster Reihe dadurch bekräftigt, daß es J. G. DE MAN gelang, an der Art *Pseudomermis Zykoffi* außer den Seitenorganen eine solche Öffnung zu entdecken, die dem wirklichen

Porus excretorius zu entsprechen scheint (*20*). Für meine Ansicht zeugt auch noch der Umstand, daß die von mir als Seitenorgane betrachteten Organe tatsächlich lateral, und zwar beiderseits des Körpers mediolateral liegen, wogegen der Porus excretorius singulär ist und sich in ventraler Lage befindet, und zwar von den postoralen Papillen in einer weit größeren Entfernung, als die Seitenorgane. Hierzu kommt auch noch der Umstand, daß die Lage der eigentlichen Seitenorgane der frei lebenden Nematoden derjenigen der *Mermithiden* analog ist.

Die Seitenorgane der von mir untersuchten *Mermithiden* liegen auf größere oder kleinere Entfernungen von der postoralen Papillenzone, bald in der mediolateralen Linie, bald etwas in dorsaler oder ventraler Richtung verschoben. Die Seitenorgane des größten Teiles der Exemplare sind kreisförmig und nur ausnahmsweise eiförmig; in einem einzigen Falle fand ich viereckige, und zwar bei der *Mesomermis Zschokkei* DAD. (Tab. 2, Fig. 12). Die eigentümlichsten Seitenorgane beobachtete ich an der *Limnomermis limnobia* DAD. (Tab. 1, Fig. 7), indem ihre Seitenorgane scharf begrenzte kreisförmige, schlauchartige Vertiefungen bilden. In der Mitte des Gebietes der kreis- und eiförmigen Seitenorgane ist ein scharf begrenzter, kreisförmiger runder Hof ersichtlich, der vielleicht eine Öffnung darstellt.

### Das Verdauungsorgan.

Seitdem F. DUJARDIN in seiner Beschreibung der *Mermis nigrescens* feststellte, daß das Verdauungsorgan nur unvollkommen entwickelt ist und daß der Anus während der ganzen Lebensdauer der Art fehlt (*6*), haben die späteren Forscher bewiesen, daß die verkümmerte Darmröhre ebenso, wie auch das Fehlen eines Anus für alle Arten der *Mermithiden* charakteristisch ist.

Der Darmkanal sämtlicher *Mermithiden* beginnt am Vorderende des Körpers mit der Mundöffnung, die in den meisten Fällen am Ende der Längsachse des Körpers liegt, selten etwas der Bauchseite zu genähert, wie es z. B. nach O. v. LINSTOW bei der *Paramermis aquatilis* LINST. vorkommt (*16*, p. 155). Bei den meisten Arten ist der Ort der Mundöffnung schon äußerlich erkenntlich, indem ihre Umgebung mehr oder weniger trichterförmig vertieft ist, wie dies z. B. bei der *Bathymermis Fuhrmanni* (Tab. 3, Fig. 9), *Hydromermis acuminata* (Tab. 4, Fig. 1), *Paramermis limnophila* (Tab. 3, Fig. 14) und bei der *Limnomermis ensicauda* (Tab. 2, Fig. 5) ersichtlich ist. In anderen Fällen ist die Umgebung der Mundöffnung abgeplattet oder flach gekrümmt, wie z. B. bei der *Limnomermis gracilis* (Tab. 2, Fig. 9), *Limnomermis limnetica* (Tab. 1, Fig. 11, 12), *Limnomermis uncata* (Tab. 2, Fig. 14), *Limnomermis curvicauda* (Tab. 2, Fig. 3) und bei der *Mesomermis lacustris* (Tab. 3, Fig. 1). Seltener kommt es schließlich vor, daß die Umgebung der Mundöffnung kegelförmig emporragt und die Mundöffnung sich auf dem höchsten Teile des Kegels befindet, wie bei der *Limnomermis bathybia* (Tab. 1, Fig. 1) und noch auffallender bei der *Limnomermis limnobia* (Tab. 1, Fig. 7). Die Mundöffnung der meisten Arten fand ich offen, es gibt aber auch manche Arten, deren Mund geschlossen zu sein scheint, wie dies O. v. LINSTOW von der Art *Mremis nigrescens* (*15*, p. 507) behauptet. Die Mundöffnung der Arten, wo dieselbe geschlossen ist, ist von der Oberfläche mehr oder weniger zurückgezogen, wie dies bei der *Limnomermis bathybia* (Tab. 1, Fig. 1), *Limnomermis gracilis* (Tab. 2, Fig. 9) und bei der *Eumermis gracilis* (Tab. 4, Fig. 14) der Fall ist. Die Mundöffnung führt stets zu einer kurzen, schmalen, röhrenförmigen Mundhöhle, deren aus verdickter Cuticula bestehende Wandung ohne merkbare Grenze in die Wandung des Oesophagus übergeht.

Der *Oesophagus* bildet ebenso hinsichtlich seiner Struktur wie auch seiner Länge ein auffallendes Kennzeichen der *Mermithiden* und unterscheidet sich von dem der frei lebenden *Nematoden* wesentlich darin, daß derselbe die Muskulatur seiner Wandung gänzlich entbehrt. Die Wandung des Oesophagus der jüngeren Individuen wird durch körnige Plasma, eventuell noch durch selbständige Zellen gebildet, die aber während der Geschlechtsreife allmählich verschwinden, so daß bei vollkommen geschlechtsreifen, bzw. den alten, die Eier schon abgestoßenen Individuen nur seine von körniger Plasma umschlossene Cuticulawandung übrig bleibt.

Das Cuticularrohr des Oesophagus liegt anfangs in der Medianlinie des Körpers, bald aber zieht es sich mehr oder weniger weit hinter dem Nervenring auf die Bauchseite und endet schließlich nach mehreren wellenförmigen Windungen bei den Weibchen in der Nähe der Geschlechtsöffnung, bei den Männchen in geringerer oder größerer Distanz von der Körpermitte. Seine Länge ist nicht nur bei den einzelnen Arten, sondern auch bei den einzelnen Individuen verschieden. Von sämtlichen bisher bekannten *Mermithiden* besitzt *Neomermis macrolaimus* LINST. das größte Oesophagusrohr, indem dasselbe bei dieser Art nach O. v. LINSTOWS Angaben ganz bis zum Schwanzende reicht (*17*, p. 492).

Mit der feineren Struktur des Cuticularrohres des Oesophagus beschäftigen sich O. v. LINSTOW (*16*. *18*) und F. G. KOHN (*9*, p. 237).

Beide Forscher sind derselben Ansicht, daß nämlich das Cuticularrohr nach rückwärts zu immer enger und endlich zu einer kompakten Schnur wird und sodann blind endet. Beide Forscher stimmen auch darin überein, daß sich an der Wandung des Cuticularrohres zerstreut knotenförmige Verdickungen vorfinden, die mit je einer Öffnung versehen sind, durch die das Lumen des Rohres mit der Körperhöhle in Verbindung steht. Außerdem erwähnt F. G. KOHN auch die in der Nähe der Knoten entspringenden Verzweigungen, die seiner Ansicht nach in das zellige Gebilde des Oesophagus hineinreichen. Infolge meiner Untersuchungen kann ich konstatieren, daß das Cuticularrohr des Oesophagus nach rückwärts tatsächlich immer enger wird, dagegen aber, daß es am Ende kompakt wäre und blind ende, könnte ich nicht behaupten, da ich gesehen habe, daß es am Ende mit einer Öffnung versehen ist. Die Knoten der Wandung des Cuticularrohrs zu beobachten gelang mir jedoch nicht, und noch weniger die feinen seitlichen Verzweigungen.

Das Cuticularrohr des Oesophagus mündet mit seinem hinteren Ende nicht in einen Magen, sondern in die Körperhöhle.

Bezüglich der An- oder Abwesenheit eines Magens sind die Forscher verschiedener Meinung. Die früheren Forscher, namentlich F. DUJARDIN, G. MEISSNER, FEDTSCHENKO sowie in neuester Zeit auch F. G. KOHN betrachten den mehr oder weniger vom vorderen Körperende entfernt beginnenden und über den Geschlechtsteilen vorbeiziehenden, also sich der Rückenseite nähernden, beinahe bis zum hinteren Körperende reichenden, mit Fetttröpfchen ähnlichen Kügelchen erfüllten, ferner mit einer selbständigen Wandung versehenen und von allen Seiten geschlossenen Schlauch als einen eigentümlich veränderten Magen. Hiergegen betrachtet O. v. LINSTOW den soeben erwähnten Schlauch nicht als einen Magen, sondern als einen *Fettkörper* (*16. 18*). Dieser Meinung schließt sich gelegentlich der Beschreibung der *Pseudomermis Zykoffi* auch J. G. DE MAN an (*20*) und derselben Ansicht bin auch ich. Von der Richtigkeit dieser Ansicht überzeugt mich auch der schon von O. v. LINSTVW betonte Umstand, daß dieser Schlauch auch in den Larven gänzlich geschlossen ist und mit dem Oesophagus in gar keiner Verbindung seht. Mehrere Umstände zeugen dafür, daß dieser Schlauch mit seinem Fettkörperchen ähnlichen Inhalt tatsächlich die Rolle eines Fettkörpers spielt und solche Reservestoffe enthält, die während der gänzlichen Entwicklung des Tieres aufgebraucht werden, wie dies schon O. v. LINSTOW vorausgesetzt hat (*12. 15*). Der Fettkörper ist nämlich in den ins Freie gelangenden und geschlechtlich noch vollkommen unreifen Larven am meisten entwickelt. Sobald die Entwicklung der Geschlechtsorgane beginnt, nehmen die Fettkörper an Menge ab und bei der Reife der Geschlechtsprodukte bleibt von der Fettkörpermenge nur bloß noch sehr wenig zurück. In den die Geschlechtsprodukte abgestoßenen Individuen schließlich bleibt vom Fettkörper infolge des gänzlichen Verbrauches desselben fast gar nichts mehr übrig. Diesbezüglich bieten besonders schöne Beispiele die noch nicht ganz und die vollkommen geschlechtsreifen Weibchen der *Bathymermis*-Arten und der *Limnomermis bathybia* DAD.

An dieser Stelle muß ich noch die Exkretionsorgane der *Mermithiden* kurz erwähnen. Diesbezüglich finden wir in der einschlägigen Literatur nur Angaben von O. v. LINSTOW und F. G. KOHN. In mehreren seiner Arbeiten tut O. v. LINSTOW des Exkretionsorganes der einen oder anderen Art Erwähnung. Zunächst spricht er von den Exkretionsorganen der *Mermis-Paramermis crassa* (*12*, p. 393) und erwähnt zwei in der Dorsalwulst sich befindliche Gefäße, die *wahrscheinlich* mit dem Wassergefäßsystem in Verbindung stehen. Aus der linksseitigen dorsolateralen - lateralen Wulst der *Mermis nigrescens* erwähnt O. v. LINSTOW ein Wassergefäß, dessen Wandung stark, chitinartig ist (*15*, p. 506). Dasselbe wiederholt er in seiner zusammenfassenden Arbeit über das *Mermis*-Genus (*16*, p. 164). In seiner Arbeit über das *Paramermis*-Genus schließlich scheint O. v. LINSTOW seine frühere Ansicht aufzugeben (*18*, p. 394) und erklärt, daß die früher als Porus excretorius betrachtete Öffnung eine ventrale Drüsenöffnung wäre. F. G. KOHN hat in der anatomischen Beschreibung der von ihm untersuchten Art festgestellt (*9*, p. 232), daß es kein abgesondertes Exkretionsorgan gibt, sondern daß dessen Rolle andere innere Organe, eventuell die Längswülste der Hypodermis und vielleicht der Fettkörper übernehmen, die hinter der postoralen Papillenzone sichtbare Öffnung hingegen die Mündung eines den Halsdrüsen mehrerer freilebenden *Nematoden* ähnlichen Organes sein möge.

Mit Rücksicht darauf, daß ich aus allen mir zur Verfügung gestandenen Arten Querschnitte anfertigte und ich in keinem einzigen Längswulste solche Absonderungen finden konnte, die an Querschnitte von Exkretions- bzw. Ausführungsgefäßstämme erinnern würden, schließe ich mich der Ansicht F. G. KOHNS an.

Der Unterschied zwischen F. G. KOHNS Ansicht und der meinigen besteht nur darin, daß ich — wie schon erwähnt — die hinter der postoralen Papillenzone in der mediolateralen Linie liegenden zwei eigentümlichen Organe in Übereinstimmung mit J. G. DE MAN für *Seitenorgane* halte.

### Das weibliche Geschlechtsorgan.

Seit G. MEISSNERS Untersuchungen ist es bekannt (*21*), daß alle *Mermithiden* getrennt geschlechtig sind. Die zwei Geschlechtsindividuen sind in geringerem oder größerem Maße schon äußerlich erkenntlich, und zwar durch die Lage der Geschlechtsöffnung. Die weibliche Geschlechtsöffnung befindet sich nämlich immer in der Region der Körpermitte, bald ein bißchen nach vorn, bald nach hinten verschoben, wogegen die männliche Geschlechtsöffnung ausnahmslos in der Nähe des hinteren Körperendes liegt. Während ferner die nächste Umgebung der weiblichen Geschlechtsöffnung ganz glatt ist, ragen um die männliche Geschlechtsöffnung herum die schon erwähnten prae- und postanalen Papillenreihen empor.

Es ist für sämtliche *Mermithiden* ein gemeinsames Charakteristikon, daß das weibliche Geschlechtsorgan aus zwei *Eierstöcken*

— Ovarien —, aus den denselben sich anschließenden *Eileitern* — Oviductus — bzw. des *Uterus* und aus der unpaaren *Vagina* besteht, die in die *Geschlechtsöffnung* — Vulva — führt.

Die *Vulva* oder die weibliche Geschlechtsöffnung, wie schon oben erwähnt, liegt immer beiläufig in der Körpermitte auf der Bauchseite, je nach den Arten etwas nach vorn oder nach hinten verschoben und bildet einen Querspalt. Bei den auf der Seite liegenden Individuen ist die Vulva in den meisten Fällen auf den ersten Blick zu erkennen, da ihr Rand charakteristisch kraterförmig aufgedunsen ist.

Die *Vagina* sämtlicher *Mermithiden* ist ein unpaares und mit einer muskulösen Wandung versehenes Organ, aber nach zwei Typen entwickelt. Die Vagina der meisten Arten ist nämlich gestreckt, zylindrisch, meist S-förmig, seltener hakenförmig gekrümmt, sie geht anfangs auf- und rückwärts, bald wendet sie sich auf- und vorwärts und verbindet sich dann mit den zwei Uteris (Tab. 1, Fig. 5; Tab. 1, Fig. 8 usw.), wie dies schon O. v. LINSTOW, E. CORTI und F. G. KOHN beobachtet haben. Die Vagina der Minderzahl ist ein mehr oder weniger in dorsaler Richtung sich erhebender, etwas birnförmiger Schlauch, der vorn und hinten mit dem Uterus in Verbindung steht (Tab. 3, Fig. 8, 13); einen ähnlichen Fall beschrieb J. G. DE MAN bei der *Pseudomermis Zykoffi* (*20*).

Die erwähnte zweierlei Ausbildung der Vagina ist so auffallend, daß man infolgedessen die Gattungen in zwei Gruppen teilen und dieselben voneinander leicht unterscheiden kann. Eine zylindrische, langgestreckte und verschiedenartig gekrümmte Vagina kommen bei folgenden Generen vor: *Mermis* DUJ., *Paramermis* v. LINST., *Hydromermis* CORTI, *Neomermis* v. LINST., *Limnomermis* DAD., *Eumermis* DAD., *Mesomermis* DAD. Eine schlauchförmige Vagina wurde bisher nur bei den Gattungen *Pseudomermis* DE MAN und *Bathymermis* DAD. gefunden.

Die zylindrische, langgestreckte, verschiedenartig gekrümmte Vagina und die schlauchförmige unterscheiden sich voneinander auch in histologischer Hinsicht. Die dicke Wandung der zylindrischen, langgestreckten Vagina besteht aus sich dicht aneinander reihenden Muskelfasern, die von der Cuticularwandung des Lumens der Vagina bis zur die Oberfläche bedeckenden Cuticularhülse verlaufen, wie dies infolge der durch frühere Forscher angestellten Untersuchungen bekannt ist. Die Hauptmasse der Wandung der schlauchförmigen Vagina wird von ringförmigen, konzentrisch liegenden, in dorsoventraler Richtung verlaufenden Muskelfasern gebildet (Tab. 3, Fig. 8). Diese zweierlei Lage der Muskelfasern steht natürlich in festem Zusammenhange mit der äußeren Form der Vagina und mit dem Verlaufe des Lumens. Das Lumen der zylindrischen, langgestreckten Vagina ist nämlich ein langes zylindrisches Rohr, wogegen dasjenige der schlauchförmigen ein schlauchförmiges Rohr ist, und so kann das erstere Lumen nur mittels radialen, das letztere hingegen nur mittels konzentrischen, ringförmigen Muskelfasern zusammengezogen und erweitert werden. Die die Wandung des Lumens der Vagina bedeckende Cuticularhülle ist die ununterbrochene Fortsetzung der Epidermis und wahrscheinlich ist auch das die Oberfläche bedeckende Cuticularhäutchen ähnlichen Ursprungs.

Mit der Vagina stehen zwei Uteri in direkter Verbindung, von den der eine nach vor-, der andere nach rückwärts liegt und die je in einen *Oviductus* übergehen. Die Wandung der Uteri scheint körnig zu sein und Ringmuskelfasern zu enthalten; in ihrem Verlaufe ist sie manchmal sanft gewellt. Die Oviductus verlaufen in den meisten Fällen einfach, seltener bilden sie, wie bei der *Bathymermis helvetica* DAD. eine Schlinge.

Ein jeder Oviductus übergeht unmerklich in je ein *Ovarium*, von denen das eine in der Nähe des Vorderendes, das andere in der Nähe des hinteren Endes des Körpers auf verschiedene Entfernungen von der Mundöffnung bzw. vom Schwanzende beginnt. Wie ich aus eigenen Erfahrungen weiß, gibt es hinsichtlich der Länge der zwei Ovarien auch bei den verschiedenen Arten einen kleinen Unterschied, augenfälliger aber ist derselbe zwischen den ihre Eier schon abgestoßenen und den jüngeren geschlechtsreifen Weibchen derselben, indem die Ovarien der letztgenannten immer viel weiter in das Kopf- und Schwanzende hineinragen, als die der ersterwähnten.

Die vollkommen entwickelten Eier sind kugel- oder eiförmig, sie sind verschieden groß und ihre Oberfläche wird in der Regel durch eine einfache mehr oder minder dicke Cuticularhülle bedeckt. Eine auffallende Ausnahme bildet die *Mermis nigrescens* Duj., deren Eier an ihren beiden Polen mit einer in einem Büschel endenden Schnur versehen sind, was bereits seit den Untersuchungen F. Dujardins bekannt ist.

### Das männliche Geschlechtsorgan.

Bezüglich der männlichen Geschlechtsorgane der *Mermithiden* sind die Angaben in der einschlägigen Literatur voneinander sehr abweichend. Nach O. v. Linstow hätten die Männchen nur eine Hode (*16*, p. 33) und dies bestätigte auch G. Meissner bei den zwei Männchen der *Mermis albicans*, wogegen er bei einem dritten zwei parallel laufende Hoden findet samt ihren Accessorien (*21*). Auch E. Corti erwähnt in der Beschreibung der *Hydromermis rivicola* nur eine Hode (*2*). Abweichend von den soeben erwähnten Forschern fand F. G. Kohn an dem Männchen der von ihm untersuchten Art (*Hydromermis contorta* Kohn) zwei Hoden, von denen die eine in der Nähe des Vorderendes des Körpers, die andere in der Nähe des hinteren Endes des Körpers entspringt und dann beiläufig in der Körpermitte in dem auf der Bauchseite liegenden *Vas deferens* zusammenlaufen, welch letzteres sich bis zu der in der Nähe des Schwanzendes liegenden Geschlechtsöffnung, bzw. bis zum Spiculum erstreckt (**9**, p. 245).

Indem ich mich auf die an den Männchen der mir vorliegenden Arten gemachten Beobachtungen stütze, kann ich die Richtigkeit der F. G. Kohnschen Mitteilungen in vollem Maße bekräftigen. Ich habe nämlich bei den Männchen aller von mir abgegrenzten Gattungen und Arten zwei Hoden beobachtet, von denen die eine am Vorderende, die andere am hinteren Ende des Körpers, mehr oder weniger weit von der Mundöffnung bzw. vom Schwanzende entfernt entspringt und von denen sich die eine nach vorwärts, die andere nach rückwärts bis beiläufig zur Körpermitte hin erstreckt, wo beide ineinander übergehen und in das längs der Bauchseite verlaufende Vas deferens einmünden. Mit dem eingehenderen Studium der feineren Struktur der Hoden befaßte ich mich nicht.

Die Männchen aller *Mermithiden* besitzen, gleich den freilebenden *Nematoden*, ein als Begattungsglied funktionierendes sogenanntes *Spiculum*, oder nach O. v. Linstow einen *Cirrus*, welcher durch die Geschlechtsöffnung je nach der Tätigkeit der hinausschiebenden und zurückziehenden Muskeln ausstülpbar und zurückziehbar ist. Die Struktur und besonders die Zahl dieses Begattungsgliedes bzw. *Spiculums* ergeben zwei Typen. Bei einem Teil der Genera haben nämlich die Männchen zwei Spicula, wie z. B. die Männchen der *Mermis* Duj., *Neomermis* Linst., *Bathymermis* Dad. In der anderen und gleichzeitig größeren Gruppe der Genera besitzen die Männchen nur ein Spiculum, wie z. B. die Männchen der *Paramermis* Linst., *Hydromermis* Corti, *Limnomermis* Dad. und der *Eumermis* Dad. Es ist für die Männchen der *Mermithiden* im allgemeinen bezeichnend, daß die paarweisen Spicula immer länger sind als die unpaaren.

Die Struktur und den Entwicklungsgang der Samenfäden habe ich keinem speziellen Studium unterzogen, soviel kann ich jedoch bemerken, daß die Samenfäden zweifellos einen gut entwickelten Schwanz haben, denn ich habe im Vas deferens der vollkommen geschlechtsreifen Männchen ganze Knäuel beobachten können.

Bezüglich des *Entwicklungsganges* beschränke ich mich auf grund der Angaben früherer Forscher, sowie auch meiner eigenen besonders aber auf die zusammenfassende Beschreibung O. v. Linstows mich stützend nur auf folgende Bemerkungen.

Das Kennzeichen der aus den in nassen Boden oder ins Wasser gelegten Eiern sich entwickelnden und dann ins Freie gelangenden Larven besteht in der ziemlich lebhaften Bewegung und in dem an die *Dorylaimen* erinnernden durch die Mundöffnung ausstreckbare dolchförmige Cuticulargebilde, die als eine Fortsetzung des Oesophagus erscheint. Nach einiger Zeit freien Lebens bohren sich diese Lärvchen mittels ihres Dolches in das entsprechende Wirttier, und zwar die im Wasser meist in *Chironomus*- oder in andere im Wasser lebenden Insektenlarven, diejenigen, welche sich in nassem Boden befinden, in die verschiedensten Gliederfüßler, und zwar ebenso in Larven, wie in entwickelte Tieren selbst.

Das in das entsprechende Wirttier geratene Lärvchen verliert seinen bohrenden Dolch und seine Regsamkeit; indem sie sich von den Säften des Wirttieres nähren, fangen sie rasch zu wachsen an, wobei sich in ihrer Körperhöhle die zum späteren freien Leben nötige Reservenahrung bzw. der Fettkörper ansammelt.

Nach einer Zeit verläßt die während des Schmarotzens die typische Größe und Entwicklung erreichte Larve das Wirttier noch vor dem Einpuppen und gerät als noch nicht ganz geschlechtsreifes Weibchen oder Männchen wieder in die Außenwelt, in nassen Boden oder ins Wasser. Die aus dem Wirttiere in die Außenwelt wandernde, nennen wir sie *alte Larve*, ist in hohem Maße den geschlechtsreifen Individuen ähnlich, von denselben aber doch durch mehrere Kennzeichen leicht zu unterscheiden. Im allgemeinen können wir behaupten, daß die alten Larven, bzw. die noch nicht geschlechtsreifen, freilebenden Exemplare dadurch charakterisiert sind, daß ihr hinteres Körperende nicht abgerundet, wie das der geschlechtsreifen, sondern entweder spitz ist (*Limnomermis acuticauda* ♂ juv. Tab. 2, Fig. 1, *Limnomermis ensicauda* ♀ juv. Tab. 2, Fig. 7), oder aber einen verschiedenförmigen und verschieden großen schwanzähnlichen Kutikularfortsatz besitzt, wie es beim größten Teil der bisher bekannten alten Larven tatsächlich der Fall ist (S. O. v. LINSTOW *12, 13, 14, 16, 19*; F. DUJARDIN *5*, E. CORTI *2*, J. G. MAN *20*, F. G. KOHN *9*). Die alte Larve der *Limnomermis uncata* DAD. ist insofern interessant, daß ihr Schwanzfortsatz unverkennbar ein selbständiges Gebilde ist, welches aus einem Grund- und aus einem Giebelteile besteht (Tab. 2, Fig. 15).

Was die Struktur der ins Freie gewanderten alten Larven betrifft, so unterscheidet sich dieselbe von den geschlechtsreifen Tieren dadurch, daß ihr Fettkörper sehr groß ist und unendlich viele Fettkörperchen enthält, infolgedessen derselbe ganz undurchsichtig erscheint. Hieran schließt sich noch der Umstand, daß ihre Geschlechtsorgane nur noch im Entstehen begriffen sind und von denselben bei den Weibchen die Anlage zur Vagina, bei den Männchen zum Spiculum sich am frühesten zeigt und am ehesten erkennbar ist (*Limnomermis acuticauda* ♂ juv. Tab. 2, Fig. 2; *Limnomermis curvicauda* ♀ juv. Tab. 2, Fig. 4).

### Übersicht der Gattungen und der Arten.

Die erste Gattung der *Mermithiden* charakterisierte F. DUJARDIN im Jahre 1842 unter dem Namen *Mermis* (*6*). Zu den charakteristischen Charakteren dieses Genus erwähnt er als besonders wichtig das verkümmerte Verdauungsorgan, bzw. den Mangel an einer Afteröffnung, ferner die sich kreuzenden Fasern des Integumentes. Außer den soeben erwähnten Kennzeichen des Genus *Mermis* erkennt unter den späteren Forschern A. SCHNEIDER die Wichtigkeit der Anwesenheit der sechs Längswülste (*23* p. 177). Bis zu der im Jahre 1899 erschienenen Monographie O. v. LINSTOWS (**16**) wurden alle bis dahin bekannten *Mermithiden* als dem Genus *Mermis* angehörend betrachtet; in seiner Monographie hat aber O. v. LINSTOW mit Rücksicht auf den Unterschied bezüglich der Zahl der männlichen Spicula zwei Genera aufgestellt. Die Arten mit zwei Spicula beließ er im alten *Mermis*-Genus und die mit einem Spiculum wies er dem Genus *Paramermis* zu (*16* p. 167). Mit der Zeit vermehrte sich aber die Zahl der Genera. Im Jahre 1902 fand E. CORTI eine solche im Wasser lebende geschlechtsreife *Mermithiden*-Art, deren Integument die Kreuzfasern entbehrte, deren Hautmuskelschlauch durch acht Längswülste in Muskeln geteilt wurde, und deren Männchen nur ein Spiculum besaßen. Um diese Individuen einteilen zu können, kreierte E. CORTI das neue Genus und die neue Art *Hydromermis rivicola* (*2*). Auch J. G. de MAN und O. v. LINSTOW haben auf das Integument Rücksicht genommen, und letzterer erachtete bei der Errichtung der Genera *Pseudomermis* de MAN und *Neomermis* LINST. auch die Anzahl der Längstwülste für ein wichtiges unterscheidendes Kennzeichen. Die Abwesenheit der Kreuzfasern im Integumente fiel übrigens auch schon F. DUJARDIN auf und erschien ihm so wichtig, daß er die in anderer anatomischer Beziehung mit der *Mermis* gleichen *Filaria aquatilis* DUJ. und die *Filaria lacustris* DUJ. nicht dem *Mermis* sondern in das Genus *Filaria* versetzte (*5*, p. 68).

Bei der Beschreibung der *Paramermis contorta* LINST. — recte *Hydromermis contorta* (KOHN) — war F. G. KOHN eben entgegengesetzter Ansicht (*9*). F. G. KOHN legte nämlich gar kein Gewicht auf die An- oder Abwesenheit der sich kreuzenden Fasern des Integuments, er schrieb sogar dem Umstande, ob die Längswülste sechs oder acht an der Zahl sind, keine Wichtigkeit zu, sondern richtete sich bei der Unterscheidung der Genera ausschließschließlich nur nach der Anzahl der Spiculen. Dies war die Ursache, daß er die mit acht Längswülsten versehene *Hydromermis* *contorta* (KOHN), deren Integument keine Kreuzfasern aufweist und unter dem Namen *Paramermis contorta* LINST., die ein Kreuzfasern besitzendes Integument und sechs Längswülste hat, beschrieb und auch als solches betrachtete (*9*).

Gewissermaßen als Provokation bot die soeben erwähnte Arbeit F. G. KOHNs dem angegriffenen O. v. LINSTOW ferner E. CORTI den Anlaß zur neueren, bzw. kategorischen Zusammenfassung der Kennzeichen der Genera (*3*, 18). Beide Forscher und in Übereinstimmung mit ihnen auch J. G. de MAN erklären und erachten bei der Charakterisierung der *Mermithiden*-Genera die Anwesenheit oder den Mangel von Kreuzfasern im Integument, die Zahl sechs oder acht der Längswülste, ferner die Anwesenheit eines einzigen oder zweier Spiculen für maßgebend.

Bei der Untersuchung der mir vorgelegenen *Mermithiden* habe ich mich bei der Unterscheidung der Genera vollinhaltlich den Ansichten O. v. LINSTOWs, E. CORTIs und J. G. de MANs angeschlossen, ergänzte aber dieselben mit den in der weiblichen Vagina sich zeigenden Abweichungen. Meiner Ansicht nach kann und muß also — was ich weiter unten auch befolge — bei der Unterscheidung der *Mermithiden*-Genera die feinere Struktur des Integuments, die Anzahl der Längswülste und der Spiculen, ferner die Form und die Struktur der Vagina entscheidend sein.

Diese Prinzipien vor Augen haltend, können die bisher bekannten, sowie die von mir festgesetzten Genera in der unten stehenden Tabelle folgendermaßen gruppiert werden:

**Bestimmungstabelle der derzeit bekannten Mermithiden-Gattungen.**

1. Hypodermis mit mehreren Längswülsten . . . . . . . . . . . . . . . 2
   Hypodermis mit nur zwei Längswülsten; Körperkutikula mit sich kreuzenden Fasern; zwei Spicula . . . . . . . . . . . . *Neomermis* LINST.
2. Hypodermis mit sechs Längswülsten . . . . . . . . . . . . . . . . . 3
   Hypodermis mit acht Längswülsten . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8
3. Körperkutikula ohne sich kreuzende Fasern . . . . . . . . . . . . 4
   Körperkutikula mit sich kreuzenden Fasern . . . . . . . . . . . . 6
4. Männchen mit einem Spiculum . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5
   Männchen mit zwei Spiculen . . . . . . . . . . . . *Mesomermis* DAD.

5. Vagina gestreckt, zylindrisch, S-förmig gekrümmt . *Limnomermis* DAD.
Vagina birnenförmig . . . . . . . . . . . . . . *Pseudomermis* de MAN.
6. Vagina gestreckt, zylindrisch, S-förmig gekrümmt . . . . . . . . . 7
Vagina birnenförmig . . . . . . . . . . . . . . . *Bathymermis* DAD.
7. Männchen mit einem Spiculum . . . . . . . . . . *Paramermis* LINST.
Männchen mit zwei Spiculen . . . . . . . . . . . . . . *Mermis* DUJ.
8. Körperkutikula ohne sich kreuzende Fasern . . . . *Hydromermis* CORTI.
Köperkutikula mit sich kreuzenden Fasern . . . . . . . *Eumermis* DAD

### Gen. *Neomermis* v. LINST.

Neomermis LINSTOW O. v. 17, p. 491.

Körperkutikula mit gekreuzten Fasern, Hypodermis nur mit dorsaler und ventraler Längstwulst; zwei Längsmuskelbündel. Die Kutikularöhre des Oesophagus zieht bis an das hintere Körperende. Männchen mit zwei gleichen Spiculen. Postorale Papillenzone mit 10 Papillen.

Diese Gattung ist eine der in freiem Zustande im Wasser lebenden Gattungen und enthält nur die folgende, bis jetzt bekannte Art.

### *Neomermis macrolaimus* v. LINST.

Neomermis macrolaimus O. v. LINSTOW, 17, p. 491. Taf. 28, Fig. 13—15.

Männchen: 26—34 mm lang, 0,26—0,31 mm dick. Das Schwanzende ist abgerundet, von der Genitalöffnung an gerechnet 0,13 mm lang. In der Umgebung der Genitalöffnung gibt es drei Reihen Prae- und Postanalpapillen. Die praeanalen Papillenreihen mit 24—25, die postanalen hingegen mit 7—8 Papillen. Die Spiculen sind leicht gebogen, 0,28—0,31 mm lang. Die Kutikularöhre des Oesophagus reicht bis an die Genitalöffnung.

Das Weibchen ist 65 mm lang und 0,33—0,35 mm dick. Das Schwanzende ist abgerundet und in einer Entfernung von 0,21 mm von dessen Spitze gerechnet, mit einer Papille versehen. Genitalöffnung im Bereich der Körpermitte. Die Kutikularöhre des Oesophagus endet 0,091 mm von der Schwanzspitze.

Fundort: Saratow, woselbst in einem Teiche am Ufer der Wolga, zwischen den Wurzeln von Wasserpflanzen 2 Männchen und 2 Weibchen gesammelt wurden.

Gen. *Limnomermis* DAD.

Körperkutikula ohne gekreuzte Fasern. Hypodermis mit 6 Längswülsten, u. zw. einer dorsalen, einer ventralen, zwei mediolateralen und zwei ventrolateralen. Unter der Hypodermis befinden sich 6 Muskelbündel. Die Kutikularöhre des Oesophagus erreicht die Körper mitte nicht. Zone der postoralen Papillen mit 6 Papillen. Mit einem Spiculum, am hinteren Körperende mit je drei prae- und postanalen Papillenreihen mit für die einzelnen Arten charakteristischer Papillenzahl. Vagina des Weibchens gestreckt, zylindrisch, gewöhnlich S-förmig gekrümmt.

Diese Gattung ist eine der artenreichsten Gattungen. Die ins Freie gelangten Larven und die geschlechtsreifen Exemplare leben sämtlich im Wasser bzw. im Schlamme. Die hierher gehörige erste Art ist schon von F. DUJARDIN als eine Spezies der Gattung Filaria unter dem Namen *Filaria aquatilis* und *Filaria lacustris* beschrieben worden. Zu bemerken ist, daß die Arten der Lage der postoralen Papillen nach in zwei Gruppen eingeteilt werden können, und zwar gibt es solche, von deren 6 postoralen Papillen sich je eine in der mediolateralen, zwei in der dorsalen und zwei in der ventralen Linie erheben, während bei anderen von den 6 postoralen Papillen je zwei in der mediolateralen und je eine in der dorsalen und ventralen Linie liegen. Zu der ersten Gruppe gehören *Limnomermis bathybia* DAD. und *Limnomermis limnobia* DAD., während die übrigen Arten Repräsentanten der zweiten Gruppe sind.

*Limnomermis bathybia* DAD.

Tab. I, Fig. 1—6.

Das Männchen ist 11,5—18 mm lang, am vorderen und hinteren Körperende viel dünner als in der Mitte; der Durchmesser beträgt hinter der Zone der postoralen Papillen 0,04 mm; in der Gegend der Körpermitte 0,15—0,2 mm, hinter der Genitalöffnung und in der Nähe der Schwanzspitze nur bloß 0,05 mm. Die Mitte des Kopfendes d. h. die Umgebung der Mundöffnung ist schwach gebogen. Das hintere Körperende verschmälert sich vom Anfang des Spiculums an plötzlich und ziemlich stark; seine Bauchseite ist gerade, während seine Rückenseite und das Endteil ebenfalls abschüssig gebogen ist, so, daß es mit dem Bauchrande fast einen spitzen Winkel bildet (Tab. I, Fig. 6). Die Körperkutikula ist dünn und mißt bloß 0,004—0,05 mm. Von den Hypodermislängswülsten sind die zwei mediolateralen am breitesten, ihr Durchmesser beträgt in der hinteren Körperhälfte 0,043—0,045 mm und enthalten dieselben längst ihres Randes eiförmige Kerne (Taf. 1, Fig. 6). Die Länge der Kutikularöhre des Oesophagus schwankt im Zusammenhange mit der ganzeu Körperlänge zwischen 3,2 bis 6,5 mm. Der Fettkörper ist nur noch spurweise vorhanden. Das Spiculum ist sichelförmig 0,13 mm lang. Die Genitalöffnung liegt 0,15 mm weit vom Endpunkte des Schwanzes. Vor und hinter der Genitalöffnung erheben sich je drei prae- und postanale Papillenreihen, und zwar je eine mediale und zwei laterale; in der praeanalen lateralen Papillenreihe sind je 9, in der medialen 16, in den postanalen lateralen je 7 und endlich in der medialen 7 Papillen vorhanden (Taf. I, Fig. 6).

Das Weibchen ist 12,08—13,3 mm lang; der Körperdurchmesser beträgt hinter der Zone der postoralen Papillen 0,04 bis 0,07 mm, bei der Genitalöffnung 0,15—0,26 mm und in der Nähe des Schwanzendes 0,11—0,16 mm. Das Kopfende ist in der Umgebung der Mundöffnung hügelförmig etwas erhoben (Taf. I, Fig. 1). Das hintere Ende des Körpers verschmälert sich plötzlich und ist ziemlich spitz abgerundet; die gerade Bauchseite bildet indessen mit der abschüssig gebogenen Rückenseite keinen Winkel, in seinem Inneren befinden sich in dorsoventraler Richtung verlaufende Muskelfasern (Taf. I, Fig. 2). Die Körperkutikula ist 0,005 bis 0,006 mm dick; von den drei Schichten derselben ist die mittlere die dickste, die äußere und innere dagegen sind gleichmäßig dünn (Taf. I, Fig. 3). Von den Hypodermislängswülsten gleichen die mediolateralen in der Struktur denen des Männchens, ihr Durchmesser schwankt aber zwischen 0,038 bis zu 0,05 mm. Von den postoralen Papillen sind gleich jenen beim Männchen, je eine in der mediolateralen, je zwei in der dorsolateralen und je zwei in der ventrolateralen Linie gelegen. Hinter der Zone der postoralen Papillen liegt in einer Entfernung von 0,01 mm das kreisförmige

Seitenorgan, dessen Durchmesser 0,01 mm besitzt. Die Länge der Kutikularöhre des Oesophagus schwankt zwischen 5—7 mm. Der Fettkörper ist in den älteren Exemplaren fast ganz aufgezehrt, bei jüngeren Exemplaren entspringt derselbe 0,13—0,22 mm weit von der Mundöffnung und endet 0,15—0,17 mm weit von der Schwanzspitze. Die Genitalöffnung liegt 6,3—7 mm weit von der Mundöffnung. Die gestreckte zylindrische Vagina windet sich zuerst nach oben und vorn, dann nimmt sie die Richtung nach hinten und oben (Taf. I, Fig. 5). Der Oviductus bildet bei älteren Exemplaren eine Schleife. Das vordere Ovarium entspringt vom Mundende 0,9—1,4 mm weit, während das Ende des hinteren Ovariums 0,46—0,66 mm weit von der Endspitze des Schwanzes liegt. Die Eier sind kugelrund, dünnschalig, mit einem Durchmesser von 0,04—0,05 mm.

Die noch nicht ganz geschlechtsreifen Weibchen sind 11,5 mm lang, mit einem größten Durchmesser von 0,15 mm. Das hintere Körperende ist schwach nach unten gekrümmt, allmählich verjüngt und endet mit einem zugespitzten Kutikulafortsatz, dessen Länge 0,15 mm beträgt. Die Körperkutikula ist 0,015 mm dick. Der Fettkörper bildet einen undurchsichtigen Schlauch. Von den Genitalien konnte ich nur die schon ganz entwickelte Vagina beobachten.

Es liegen mir mehrere Exemplare dieser Art vor, welche Prof. Fr. ZSCHOKKE aus dem Vierwaldstätter See gesammelt hat, und zwar aus folgenden Tiefen: 40 m Tiefe 1 ♀ 2 ♀ juv.; 70 m Tiefe 1 ♀; 80 m Tiefe 2 ♀; 96 m Tiefe 1 ♂; 214 m Tiefe 1 ♂. Die jungen Weibchen waren dunkel, die älteren Weibchen und die Männchen waren lichter gelblichbraun.

*Limnomermis limnobia* DAD.

Taf. I, Fig. 7—10.

Das Männchen ist 10—16 mm lang, sein Körperdurchmesser hinter der postoralen Papillenzone 0,055 mm; in der Umgebung der Körpermitte 0,24 mm bei der Genitalöffnung 0,13 mm. Das Kopfende in der Umgebung der Mundöffnung ist etwas kegelförmig erhoben (Taf. I, Fig. 7). Das hintere Körperende ist von der Genitalöffnung an stark verschmälert und der Schwanz endet ziemlich spitz gerundet; die Bauchseite ist zwar gerade, übergeht aber ganz unmerklich zur Schwanzspitze, während die Rückenseite abschüssig gebogen ist (Taf. I, Fig. 10). Die Körperkutikula ist 0,005 mm dick. Von den Hypodermislängswülsten ist der Durchmesser der mediolateralen hinter der Umgebung der Körpermitte 0,06 mm und enthalten diese in drei Längsreihen eiförmige Kerne. In der postoralen Papillenzone gibt es je eine mediolaterale, zwei dorsolaterale und zwei ventrolaterale Papillen. Hinter der postoralen Papillenzone liegt in der mediolateralen Linie je ein schlauchförmiges Seitenorgan, welches mit seiner eigentümlichen Form das auffallendste Kennzeichen dieser Art bildet (Taf. I, Fig. 7). Die Kutikularöhre des Oesophagus beträgt nur 1,75 mm, sie ist also auffallend kurz. Der Fettkörper ist fast ganz verschwunden. Die vordere Hode entspringt in einer Entfernung von 1,2 mm von dem Mundende, während die Spitze der hinteren Hode 1,5 mm weit von dem Schwanzende liegt. Die Genitalöffnung öffnet sich 0,17 mm weit von der Schwanzspitze und vor derselben erheben sich 3 prae- und hinter derselben 3 postanale Papillenreihen. Die 2 äußeren praeanalen Papillenreihen enthalten je 5, die mediale 10, die 2 äußeren postanalen je 3, die mediale aber 6 Papillen (Taf. I, Fig. 10). Das sichelförmige Spiculum ist 0,16 mm lang.

Das Weibchen ist 20 mm lang, der Körperdurchmesser desselben beträgt hinter der postoralen Papillenzone 0,052 mm, bei der Vagina 0,27 mm, in der Nähe des Schwanzes 0,17 mm. Das Schwanzende des Körpers ist nicht so dünn, wie das des Männchens und seine Endspitze ist etwas stumpfer abgerundet (Taf. I, Fig. 9). Die Körperkutikula ist 0,005 mm dick. Breite der mediolateralen Hypodermislängswülste beträgt 0,085 mm und ist ihre Struktur derjenigen des Männchens ähnlich. Der Oesophagus ist 10 mm lang. Der größte Teil des Fettkörpers ist bereits verschwunden. Die Genitalöffnung liegt vor des Körpermitte, 9,2 mm weit von der Mundöffnung entfernt. Die Vagina ist in dorsaler Richtung S-förmig gekrümmt und verläuft anfangs schräg nach hinten und oben, dann biegt sie sich nach vorn und wendet sich schließlich nach oben (Taf. I, Fig. 8). Das vordere Ovarium entspringt 1,11 mm weit von der Mundöffnung, das hintere indessen 0,8 mm entfernt von der Schwanzspitze. Die Eier sind eiförmig, dünnschalig und 0,04 mm lang.

Das Männchen ist hell-, das Weibchen dunkel gelblichbraun.

Fundort: Vierwaldstädter See, aus dem Prof. Fr. ZSCHOKKE dieselben gesammelt hat, und zwar aus 40 m Tiefe 1 ♂; aus 50 m Tiefe 1 ♀ und aus 95 m Tiefe 1 ♂.

### *Limnomermis limnetica* DAD.

Taf. I, Fig. 11—15.

Das Männchen ist 11,2 mm lang, der Körperdurchmesser hinter der postoralen Papillenzone beträgt 0,03 mm; in der Umgebung der Körpermitte 0,15 mm, bei der Genitalöffnung 0,1 mm. Das Kopfende ist in der Umgebung der Mundöffnung stumpfbogig, hinter der postoralen Papillenzone etwas eingeschnürt (Taf. I, Fig. 12). Das Schwanzende verschmälert sich von der Genitalöffnung an und endigt scharf zugespitzt; der Dorsalrand ist abschüssig, der Ventralrand gerade und beide bilden zusammen einen spitzen Winkel (Taf. I, Fig. 13). Die Körperkutikula ist sehr dünn: 0,0023 mm. Die mediolateralen Hypodermiswülste sind durchschnittlich 0,04—0,05 mm breit und scheinen in ihrer ganzen Länge aus 3 Zellenreihen zu bestehen. In der postoralen Papillenzone befinden sich je 2 mediolaterale, ferner 1 dorsale und 1 ventrale Papille, die kegelförmig sind und je mit einem hellen Kügelchen endigen (Taf. I, Fig. 11). Das Seitenorgan liegt hinter der postoralen Papillenzone 0,018 mm weit und ist kreisförmig mit einem Durchmesser von 0,012 mm (Taf. I, Fig. 11). Die Kutikularöhre des Oesophagus ist 3 mm lang. Der Fettkörper entspringt 0,32 mm weit vom Kopfende und endigt 0,6 mm weit vom Schwanzende. Die vordere Hode entspringt 4 mm weit vom Kopfende, die hintere hingegen 1,5 mm weit vom Schwanzende. Das Spiculum ist sichelförmig, 0,105 mm lang. Die Genitalöffnung liegt 0,2 mm weit vom Schwanzende entfernt, vor und hinter derselben erheben sich je 3 Papillenreihen. Die praeanalen 2 lateralen Papillenreihen enthalten je 10, die mediale 14, die postanalen 2 lateralen je 7 und die mediale 11 Papillen (Taf. I, Fig. 13).

Das Weibchen ist 12,8 mm lang, sein Körperdurchmesser hinter der postoralen Papillenzone beträgt 0,06 mm; bei der Genitalöffnung 0,22 mm, in der Nähe des Schwanzendes 0,14 mm. Die Körperkutikula ist 0,003—0,005 mm dick. Die Struktur des

Kopfendes ist dem des Männchens ähnlich, ebenso die mediolateralen Hypodermislängswülste, deren Durchmesser durchschnittlich 0,05 mm beträgt. Der Rückenrand des Schwanzendes ist abschüssig gebogen, senkt sich tief unter die Medianlinie des Körpers und bildet mit dem Bauchrande einen sich nach unten gerichteten abgerundeten Gipfel (Taf. I, Fig 15). Die Kutikularöhre des Oesophagus ist 6,5 mm lang. Der Fettkörper liegt vom Mundende 0,28 mm, vom Schwanzende aber 0,11 mm entfernt. Die Genitalöffnung liegt vom Mundende 7,2 mm weit, also hinter der Körpermitte. Die Vagina erhebt sich in dorsaler Richtung S-förmig gekrümmt (Taf. I, Fig. 14). Das vordere Ovarium entspringt 0,78 mm weit vom Mundende, das hintere hingegen 0,1 mm weit vom Schwanzende. Die Eier sind kugelförmig, dünnschalig und haben einen Durchmesser von 0,4 mm.

Beide Geschlechtsindividuen sind gelblichbraun, das Weibchen indessen dunkler.

Fundort: Vierwaldstädter See; gesammelt von Prof. Fr. ZSCHOKKE, und zwar 1 ♀ aus 40 m Tiefe, 1 ♂ aus 80 m Tiefe.

Außer den soeben beschriebenen, geschlechtsreifen Arten untersuchte ich auch noch einige nicht ganz geschlechtsreife, d. h. ins Freie gelangte alte Larven. Nachdem ich aber nicht mit voller Sicherheit feststellen konnte, welche von diesen Larven zu dem einen oder zum anderen geschlechtsreifen Exemplare gehört, bin ich genötigt, diese unter selbständigen Artennahmen zu beschreiben, umsomehr, da das Beschreiben der Larven unter selbständigen Namen in der *Mermithiden*-Literatur ein allgemeiner Gebrauch ist.

### *Limnomermis acuticauda* DAD.

Taf. II, Fig. 1, 2.

Körperlänge 14,2 mm; Durchmesser hinter der postoralen Papillenzone 0,04 mm; in der Nähe der Körpermitte 0,2 mm, beim Spiculum 0,1 mm. Das Mundende ist bogenförmig gerundet und besitzt hinter der postoralen Papillenreihe keine Einschnürung (Taf. II, Fig. 1). Das Schwanzende ist vom Spiculum an stark verjüngt und endigt keilförmig zugespitzt (Taf. II, Fig. 2). In der postoralen Papillenzone liegen je 2 Papillen längs der mediolateralen Linie, ferner liegt eine Papille dorsal und eine ventral (Tab. II,

Fig. 1). Die Körperkutikula ist 0,05 mm dick. Die mediolateralen Hypodermislängswülste sind mit Ausnahme des Mund- und Schwanzendes durchschnittlich 0,05 mm breit; sie scheinen am Kopfende aus 3, sonst aber aus 2 Zellenreihen zu bestehen, deren Zellkerne eine rundlich ovale Form besitzen (Taf. II, Fig. 2). Das Seitenorgan ist kreisförmig, mit einem Durchmesser von 0,01 mm und liegt neben der postoralen Papillenzone. Die Kutikularöhre des Oesophagus mißt 6,5 mm in der Länge. Der Fettkörper enthält nur wenige Fettkörnchen. Die Hoden waren noch nicht entwickelt. Das Spiculum zeigte sich als eine faserige Masse. Von den analen Papillen konnte ich keine wahrnehmen (Taf. II, Fig. 2). Farbe: hell gelblichbraun. Die Genitalöffnung liegt 0,6 mm von der Schwanzspitze entfernt.

Fundort: Vierwaldstädter See, ein Männchen gesammelt von Prof. Fr. ZSCHOKKE aus 190 m Tiefe. Ich halte es nicht für ausgeschlossen, daß die soeben beschriebene alte, männliche Larve dem Kreise der *Limnomermis limnetica* DAD. angehört, besonders wenn wir die Form des Schwanzes in Betracht ziehen.

### *Limnomermis curvicauda* DAD.

Taf. II. Fig. 3, 4.

Die Körperlänge beträgt 9,3 mm, der Durchmesser bei der Papillenzone 0,06 mm und in der Umgebung der Körpermitte 0,17 mm. Das vordere Körperende ist in der Mundgegend stumpfbogig und fast gerade abgeschnitten, hinter der postoralen Papillenzone scharf eingeschnürt, weiter nach hinten allmählich verdickt (Taf. II, Fig. 3). Das Schwanzende verschmälert sich hinter der Geschlechtsöffnung kaum merklich und geht in einen hakenförmig nach der Bauchseite und vorne gekrümmten kutikularen Schwanzfortsatz über, welcher 0,13 mm lang ist (Taf. II, Fig. 4). Die Körperkutikula ist 0,005 mm dick. Die mediolateralen Hypodermislängswülste sind, mit Ausnahme des Mund- und Schwanzendes, durchschnittlich 0,05 mm breit; sie bestehen aus 3 Zellenreihen und sind ihre Zellkerne eiförmig. In der postoralen Papillenzone liegen je 2 mediolaterale, ferner in der dorsalen und in der ventralen Linie je eine Papille. Die Kutikularöhre des Oesophagus ist 4 mm lang. Der Fettkörper ist voll mit Fettklümpchen, sein

Vorderende liegt 0,35 mm von dem Mundende, das Hinterende aber 0,4 mm weit vom Schwanzende entfernt. Die Hoden waren noch nicht entwickelt. Das Spiculum stellte sich als eine birnförmige, faserige Masse dar. Entfernung der Genitalöffnung vom Schwanzende 0,24 mm. Analpapillen konnte ich keine wahrnehmen. Farbe: gelblichweiß.

Fundort: Vierwaldstädter See; eine ältere männliche Larve aus 35 m Tiefe gesammelt von Prof. Fr. ZSCHOKKE.

### *Limnomermis ensicauda* DAD.

Taf. II, Fig. 5—8.

Das Männchen ist 9 mm lang, sein Körperdurchmesser hinter der postoralen Papillenzone 0,04 mm, an der Körpermitte 0,09 mm, in der Nähe der Genitalöffnung aber 0,07 mm. Das vordere Körperende ist in der Mundgegend stumpf abgerundet, bis zur postoralen Papillenzone stark verjüngt, hinter derselben eingeschnürt, von da aber rasch anschwellend. Das Schwanzende verjüngt sich hinter der Genitalöffnung auffallend und geht in einen 0,13 mm langen spitzen, allmählich dünneren, dolchförmigen Schwanzfortsatz über (Taf. II, Fig. 8). Die Körperkutikula mißt 0,008 mm. Die mediolateralen Hypodermiswülste sind mit Ausnahme des vorderen und hinteren Körperendes 0,04 mm breit und bestehen aus 3 Zellenreihen. Von den postoralen Papillen sind je 2 mediolateral, eine dorsal und eine ventral. Die Kutikularöhre des Oesophagus ist 3,5 mm lang. Der Fettkörper enthält sehr viele Fettkügelchen und beginnt von der Mundöffnung 0,2 mm entfernt und endigt von der Schwanzspitze 0,38 mm weit. Das Seitenorgan ist eiförmig, es liegt von der postoralen Papillenzone 0,015 mm ab und ist sein größter Durchmesser 0,014 mm lang. Die Hoden konnte ich nicht wahrnehmen, indessen ist das sichelförmige Spiculum gut entwickelt und besitzt eine Länge von 0,09 mm. Die Genitalöffnung mündet 0,27 mm weit von der Schwanzspitze aus. Von den analen Papillen war noch keine erhoben (Taf. II, Fig. 8). Körperfarbe: gelblichbraun.

Das Weibchen ist 8 mm lang, der Körperdurchmesser beträgt bei der postoralen Papillenzone 0,022 mm, an der Körpermitte 0,13 mm; an der Basis des Schwanzfortsatzes 0,04 mm. Das

Mundende ist in der Mundgegend stumpfbogig, bis zu der postoralen Papillenzone und auch noch etwas weiter nach hinten zu stark verjüngt und ein wenig eingeschnürt (Taf. II, Fig. 5). Das Schwanzende verdünnt sich kaum merkbar, es läuft in einen spitzigen Schwanzfortsatz aus, dessen Länge 0,05 mm beträgt (Taf. II, Fig. 7). Die Körperkutikula ist 0,01 mm dick. Die mediolateralen Längswülste der Hypodermis sind breit und scheinen aus 3 Zellenreihen zu bestehen. In der postoralen Papillenzone liegen je 2 Papillen mediolateral, eine dorsal und eine ventral. Das Seitenorgan ist kreisförmig mit einem Durchmesser von 0,01 mm (Taf. II, Fig. 5). Die Kutikularöhre des Oesophagus ist 9,5 mm lang. Der Fettkörper enthält sehr viele Fettkörnchen; derselbe beginnt 0,21 mm von der Mundöffnung und endet 0,12 mm weit von der Schwanzspitze. Die zwei Ovarien waren schon bemerkbar, aber mit der Vagina noch nicht zusammengewachsen. Die Genitalöffnung mündet 4 mm weit von der Mundöffnung, also ganz in der Körpermitte. Die Vagina ist verhältnismäßig lang, stark gekrümmt; sie erhebt sich anfangs nach oben, dann biegt sie sich nach hinten und oben, in der Mittellinie des Körpers windet sie sich nach vorn und senkt sich dann langsam in ventraler Richtung nach unten (Taf. II, Fig. 6). Körperfarbe: hell gelblichbraun.

Fundort: Vierwaldstädter See, woselbst Prof. FR. ZSCHOKKE das oben beschriebene junge Männchen und Weibchen aus einer Tiefe von 40 m gesammelt hat.

### *Limnomermis gracilis* DAD.

Taf. II, Fig. 9—11.

Körperlänge 14,2 mm; Körperdurchmesser bei der postoralen Papillenzone 0,03 mm, in der Vaginagegend 0,18 mm, am Hinterende des Fettkörpers 0,07 mm. Das vordere Körperende ist in der Mundgegend kaum merklich gebogen, fast gerade, hinter der postoralen Papillenzone etwas eingeschnürt. In der postoralen Papillenzone sind je 2 Papillen mediolateral, eine dorsal und eine ventral gelegen. Das Seitenorgan ist kreisförmig mit einem Durchmesser von 9,01 mm, dasselbe liegt von der postoralen Papillenreihe 0,012 mm weit (Taf. II, Fig. 9). Die Körperkutikula ist 0,006 mm dick. Die hypodermalen mediolateralen Längswülste sind 0,03 mm breit und enthalten am Rande je eine Längsreihe eiförmiger Kerne, die Grenzlinien der Zellen konnte ich aber nicht bemerken (Taf. II, Fig. 9, 10). Die Kutikularöhre des Oesophagus ist 6 mm lang. Der Fettkörper enthält ziemlich viele Fettkörnchen, beginnt 0,04 mm weit von der Mundöffnung und endet 0,08 mm weit vom Schwanzende. Das vordere Ovarium beginnt 3,8 mm weit von der Mundöffnung, das hintere hingegen 0,8 mm weit von der Schwanzspitze. Die Vagina hat anfangs die Richtung nach vorn, alsbald biegt sie sich dann nach hinten, bald wieder nach vorn und trifft mit den Uteris zusammen (Taf. II, Fig. 11). Die Genitalöffnung liegt 7 mm weit vom Mundende, also fast in der Mitte des Körpers. Die 2 Uteri enthalten keine Eier. Körperfarbe: hell gelblichbraun.

Fundort: Vierwaldstädter See, wo Prof. FR. ZSCHOKKE das einzige junge Weibchen aus einer Tiefe von 40 m gesammelt hat.

### *Limnomermis uncata* DAD.

Taf. II, Fig. 14, 15.

Die Körperlänge beträgt 20—23 mm, der Körperdurchmesser bei der postoralen Papillenzone 0,05 mm, in der Körpermitte 0,25 bis 0,28 mm, in der Nähe der Schwanzspitze 0,05 mm. Das Vorderende ist bis zur postoralen Papillenzone sehr dünn, weiterhin wird es dicker. Die Umgebung der Mundöffnung ist stumpfbogig, fast gerade (Taf. II, Fig. 14). Das hintere Körperende ist kegelförmig zugespitzt, mit abgerundeter Endspitze, trägt indessen einen aus zwei Stücken zusammengesetzten Schwanzfortsatz. Das Basalstück des Schwanzfortsatzes ist scheibenförmig, es erscheint wie vom Schwanze abgesondert und steht auch mit dem Apikalstück in Gelenkverbindung. Das Apikalstück ist hackenförmig; es beginnt mit breiter Basis, verschmälert sich dann stark und krümmt sich schließlich nach vorne (Taf. II, Fig. 15); seine ganze Länge mißt 0,07 mm. Die Körperkutikula ist 0,01 mm dick, die mediolateralen Längswülste der Hypodermis sind, mit Ausnahme des Mund- und Schwanzendes, 0,045 mm breit und scheinen aus 3 Zellenreihen zu bestehen (Taf. II, Fig. 14, 15). In der postoralen Papillenzone liegen je 2 Papillen mediolateral, eine dorsal und eine ventral (Taf. II, Fig. 14). Das Seitenorgan ist kreisförmig mit einem Durchmesser von 0,015 mm und liegt von der postoralen Papillenreihe 0,02 mm weit ab. Der Fettkörper entspringt 0,25 mm weit vom Mundende, endet 0,27 mm weit vom Schwanzende und enthält viele Fettkörnchen. Die Ovarien sind noch nicht entwickelt. Die Vagina erhebt sich auf kurzer Strecke nach oben, dann läuft sie in der Mittellinie des Körpers nach hinten und schließlich krümmt sie sich stark und richtet sich auf der ventralen Seite nach vorne. Die Genitalöffnung liegt 9,6 mm weit vom Mundende, also noch vor der Körpermitte. Körperfarbe: dunkel gelblichbraun.

Fundort: Vierwadstädter See, aus dem Prof. FR. ZSCHOKKE 3 junge Weibchen aus einer Tiefe von 35 m gesammelt hat.

*Limnomermis aquatilis* DUJ.

Filaria aquatilis DUJARDIN F., 7, p. 68, Taf. III, Fig. E.
„ lacustris DUJARDIN F., 7, p. 68, Taf. III, Fig. F.

Die Körperlänge des geschlechtsreifen Weibchens beträgt 8 bis 11 mm, dessen Durchmesser 0,102 mm. Das Vorderende in der Umgebung des Mundes ist bogenförmig erhoben. Das Schwanzende wird allmählich dünner und endet bogenförmig. Die Genitalöffnung liegt vor der Körpermitte. Die Eier sind kugelförmig mit einem Durchmesser von 0,062 mm. Körperfarbe: weißlich.

Die Körperlänge der Larve beträgt 13,5 mm, der Durchmesser 0,175 mm. Das Vorderende ist in der Umgebung des Mundes schwach gebogen. Das Schwanzende ist kegelförmig und endigt mit einem kleinen Fortsatze. Die Genitalöffnung liegt hinter der Körpermitte. Körperfarbe: hell rosafarbig.

Fundort: Rennes und Vilaine, wo F. DUJARDIN dieselben unter Blättern von Nymphaeen gefunden hat.

Eine mangelhaft bekannte Art, welche ich nur deshalb in Kreis der Gattung Limnomermis aufgenommen habe, weil laut F. DUJARDIN („tégument homogène, sans stries"), die sich kreuzenden Fasern der Körperkutikula fehlen. Ich halte es nicht für ausgeschlossen, daß diese Art eventuell ebenfalls ein Glied der Gattung *Hydromermis* CORTI sei, ohne die Kenntnis der hypodermalen Längswülste aber ist diese Frage nicht zu entscheiden. Ich halte es indessen für gänzlich ausgeschlossen, daß die DUJARDINsche *Filaria aquatilis* und *Filaria lacustris* mit der LINSTOW-schen *Mermis aquatilis* = *Paramermis aquatilis*, in deren Körperkutikula die sich kreuzende Fasern vorhanden sind, identisch seien.

### Gen. *Pseudomermis* de MAN.

Pseudomermis de MAN I. G. 20, p. 61.

Körperkutikula ohne gekreuzte Fasern. Hypodermis mit 6 Längswülsten (?). Körpermuskulatur in 6 Bündel geteilt (?). Postorale Papillenzone mit 4—6 Papillen. Seitenorgan kreisförmig. Die Vagina bildet einen birnförmigen Schlauch.

Von den eben erwäheten charakteristischen Merkmalen der Gattung sind nur das Fehlen der sich kreuzenden Fasern in der Körperkutikula und die Struktur der Vagina unbedingt maßgebend, weil bezüglich des übrigen derzeit die endgültigen Angaben noch ausstehen. Zu bemerken ist, daß während J. G. DE MAN und mit ihm O. v. LINSTOW die Zahl 4 der postoralen Papillen als für die Gattung charakteristisch halten (17, 20), O. v. LINSTOW später unter dem Namen *Pseudomermis pusilla* LINST. doch noch eine Art mit 6 postoralen Papillen beschreibt (19, p. 248).

Derzeit sind zwei Arten dieser Gattung bekannt, von denen *Pseudomermis Zykoffi* de MAN als freie Larve und geschlechtsreifes Weibchen aus Wasser, *Pseudomermis pusilla* LINST. hingegen bloß als parasitische Larve aus ostafrikanischen Insekten bekannt sind (19, 248, Fig. 22, 26) und so die letztere in den Kreis unserer Betrachtungen nicht einbezogen werden kann.

#### *Pseudomermis Zykoffi* de MAN.

Pseudomermis Zykoffi de MAN J. G. 20, p. 61, Taf. I.
„ „ LINSTOW O., 17, p. 490.

Die Körperlänge der freilebenden nicht geschlechtsreifen Larve beträgt 11 mm, der Körperdurchmesser 0,13 mm. Das Mundende ist gleichmäßig abgerundet, hinter der postoralen Papillenzone ohne Einschnürung. Das Schwanzende ist ebenfalls spitzgerundet, mit abschüssig gewölbtem Dorsalrand und fast geradem Bauchrande, welche in einen kleinen, nach hinten gerichteten, dornförmigen Schwanzfortsatz auslaufen. In der postoralen Papillenzone liegen 4 lateral angeordnete Papillen und sitzen die Seitenorgane nur in kleiner Entfernung von diesen. Die lateralen bzw.

die mediolateralen Längswülste der Hypodermis haben eine Breite von $^1/_3$ des Körperdurchmessers und bestehen aus zwei Zellenreihen. Die Kutikularöhre des Oesophagus erreicht $^1/_4$ der Länge des Körpers. Der Fettkörper erfüllt die ganze Körperhöhle. Die Genitalöffnung liegt fast in der Mitte der Körperlänge. Die Vagina stellt einen dickwandigen Schlauch dar.

Die Körperlänge des geschlechtsreifen Weibchens beträgt 10,3 mm, der Körperdurchmesser 0,15 mm. Das Schwanzende entbehrt den Schwanzfortsatz. Die Genitalöffnung liegt hinter der Körpermitte. Nach O. v. LINSTOW ähnelt das geschlechtsreife Weibchen im übrigen der von de MAN beschriebenen Larve und im Zusammenhang mit dieser Äußerung macht er von der Zahl der postoralen Papillen, den Längswülsten der Hypodermis und der Struktur der Vagina keine Erwähnung.

Fundort: Saratow, ein Teich am Ufer der Volga, aus deren Schlamm ZYKOFF die vorliegenden Exemplare gesammelt hat.

Gen. *Mesomermis* DAD.

Körperkutikula ohne gekreuzte Fasern. Die Hypodermis bildet 6 Längswülste, und zwar eine dorsale, eine ventrale, zwei mediolaterale und zwei ventrolaterale. Die Körpermuskulatur ist in 6 Bündel geteilt. Die postorale Papillenzone ist mit 6 Papillen versehen. Das Männchen hat zwei Spiculen und zwei Hoden.

Die in obigem charakterisierte Gattung stimmt in den allgemeinen Organisationsverhältnissen, und zwar besonders die 6 Längswülste der Hypodermis betreffend, auffällig mit der Gattung *Limnomermis* DAD. überein, von der sie sich indessen durch die Zahl der Spiculen unterscheidet, was ich für wichtig genug halte, um die zwei Gattungen voneinander zu trennen.

Während meiner Untersuchungen fand ich die zwei folgenden Arten dieser Gattung.

*Mesomermis lacustris* DAD.

Taf. III, Fig. 1, 2.

Die Körperlänge beträgt 9—12 mm, der Körperdurchmesser 0,08—0,15 mm. Das Vorderende ist in der Umgebung der Mundöffnung gebogen, etwas erhoben, hinter der postoralen Papillenzone dagegen schwach eingeschnürt (Taf. III, Fig. 1). Das Schwanzende wird von den Spiculen an rasch dünner, es ist kegelförmig mit ziemlich abgerundeter Endspitze. Der Rückenrand des Schwanzendes ist abschüssig gebogen, der Bauchrand hingegen bis zum Übergang der Endspitze gerade (Taf. III, Fig. 2). In der postoralen Papillenzone sind 6 Papillen vorhanden, von denen eine dorsal, eine ventral und je 2 mediolateral liegen; sämtliche sind kegelförmig und enden mit einem kleinen, hellen Kügelchen (Taf. III, Fig. 1). Die Seitenorgane sind kreisförmig, haben einen Durchmesser von 0,013 mm und liegen 0,02 mm weit von der postoralen Papillenzone ab. Die Körperkutikula ist 0,01 mm dick und enthält keine gekreuzte Fasern. Der größte Durchmesser der mediolateralen Längswülste der Hypodermis ist 0,02—0,035 mm und bestehen dieselben aus zwei Zellenreihen. Die Kutikularöhre des Oesophagus ist durchschnittlich 5,5 mm lang. Der Fettkörper ist größtenteils aufgezehrt und enthält nur noch sehr wenig Fettkörnchen. Die zwei Spiculen sind in ihrer hinteren Hälfte hackenförmig gekrümmt und in dieser Lage 0,6 mm lang. Die Genitalöffnung mündet 0,65—0,7 mm weit von der Endspitze des Schwanzes aus, und liegen vor derselben 3 praeanale und hinter ihr 3 postanale Papillenreihen. Die mittlere praeanale Papillenreihe enthält 12, die 2 lateralen 7, 7, die mittlere postanale 11 und die 2 lateralen endlich 7, 7 Papillen (Taf. III, Fig. 2). Körperfarbe: hell gelblichbraun.

Fundort: Vierwaldstädter See, aus dem Prof. FR. ZSCHOKKE mehrere Exemplare herausfischte, und zwar aus einer Tiefe von 35 m 2 ♂; von 40 m 2 ♂ und von 70 m 1 ♂, welche sämtlich geschlechtsreif waren.

### *Mesomermis Zschokkei* DAD.

Taf. II, Fig. 12, 13.

Körperlänge 5,6 mm, Körperdurchmesser bei der postoralen Papillenzone 0,07 mm, in der Umgebung der Körpermitte 0,26 mm; in der Nähe der Schwanzspitze 0,17 mm. Das Mundende ist in der Umgebung der Mundöffnung schwach gebogen und hinter der postoralen Papillenzone etwas eingeschnürt (Taf. II, Fig. 12). Das Schwanzende verjüngt sich von der Genitalöffnung an stark und endet in eine abgerundete Spitze, welche in der Verlängerung der Bauchlinie liegt, nachdem der Rückenrand stark nach unten zu abschüssig ist, während der Bauchrand gerade verläuft (Taf. II, Fig. 13). Die Körperkutikula ist 0,01 mm dick und besitzt keine sich kreuzende Fasern. Von den 6 hypodermalen Längswülsten besitzen die mediolateralen den größten Durchmesser, und zwar 0,06 mm und bestehen aus 3 Zellenreihen. In der postoralen Papillenzone liegen je 2 mediolateral, eine dorsal und eine ventral und sämtliche sind kegelförmig (Taf. II, Fig. 13). Die Seitenorgane gleichen einem eigentümlichen Viereck und liegen 0,04 mm weit ab von der postoralen Papillenzone. Die Kutikularöhre des Oesophagus ist 5,8 mm lang. Der Fettkörper enthält nur sehr wenige und kleine Fettkörnchen. Die vordere Hode entspringt 3,6 mm entfernt von der Mundöffnung, die hintere hingegen 0,6 mm von der Schwanzspitze. Die 2 Spiculen sind gerade, jede ist 0,27 mm lang. Die Genitalöffnung liegt 0,17 mm weit von der Schwanzspitze und erheben sich vor derselben 3 praeanale und hinter derselben 3 postanale Papillenreihen. Die mittlere praeanale Papillenreihe enthält 14, die 2 lateralen je 5, die mittlere postanale 8, die 2 lateralen 3, 3 Papillen. Körperfarbe: hell gelblichbraun.

Fundort: Vierwaldstädter See, woselbst Prof. FR. ZSCHOKKE das einzige geschlechtsreife Männchen in einer Tiefe von 50 m auffischte. Hier muß ich bemerken, daß ich ein Stück des Exemplars zur Anfertigung der Schnittserien benützte; das Schwanzende habe ich mit den Spiculen in Kalilauge ausgekocht, wobei dasselbe zu meinem Bedauern zugrunde ging.

Diese Art ist vom *Mesomermis lacustris* durch die Zahl der analen Papillen, durch die Form des Seitenorgans, sowie durch die Länge und Form der Spiculen leicht zu unterscheiden. Zwischen den beiden Arten bieten indessen auch die Form und Struktur des Schwanzendes unterscheidende Merkmale.

### Gen. *Bathymermis* DAD.

Körperkutikula mit sich kreuzenden Fasern. Hypodermis mit 6 Längswülsten. Körpermuskulatur in 6 Muskelbündel geteilt, postorale Papillenzone mit 6 Papillen. Vagina verkürzt, mehr oder minder einen birnförmigen Schlauch bildend. Das Männchen hat 2 Spiculen und in der Umgebung der Genitalöffnung je 3 prae- und postanale Papillenreihen.

Interessant ist diese Gattung dadurch, daß sie die wichtigsten Merkmale der Gattungen *Pseudomermis* de MAN und *Mermis* DUJ. LINST. in sich vereinigt. Mit den sich kreuzenden Fasern der Körperkutikula und mit den 2 Spiculen der Männchen stimmt nämlich diese Gattung mit *Mermis* DUJ. LINST., hingegen mit der verkürzten, schlauchförmigen Vagina mit *Pseudomermis* DE MAN überein. Dieser Umstand hat mich zur Aufstellung dieser Gattung veranlaßt.

Derzeit sind zwei Arten dieser Gattung bekannt, welche als freie Larven und geschlechssreife Individuen Wasserbewohner sind.

### *Bathymermis Fuhrmanni* DAD.

Taf. III, Fig. 3—9.

Das Männchen ist 8,4 mm lang; der Körperdurchmesser beträgt bei der postoralen Papillenzone 0,05 mm, am Oesophagusende 0,23 mm, bei der Genitalöffnung 0,16 mm. Das Mundende ist kegelförmig erhoben, ziemlich hoch gewölbt, um die in der Mittellinie des Körpers liegende Mundöffnung herum buchtartig eingeschnürt (Taf. III, Fig. 9). Das Schwanzende verjüngt sich in der Umgebung der Genitalöffnung unvermittelt, sein Dorsalrand ist gekrümmt abschüssig, der Ventralrand dagegen gerade und bilden beide zusammen eine abgerundete Spitze (Taf. III, Fig. 7). Die Körperkutikula ist 0,015—0,02 mm dick und ihre mittlere Schicht mit sich kreuzenden Fasern versehen (Taf. III, Fig. 6). Von den hypodermalen Längswülsten sind die mediolateralen durchschnittlich 0,04 mm breit und bestehen dieselben aus 4 bis 5 Zellenreihen, die Zahl der Zellenreihen vermindert sich indessen gegen das Mund- und Schwanzende sukzessive auf 2. In der postoralen Papillenzone liegen von den 6 Papillen je 2 mediolateral, eine dorsal und eine ventral 0,02 mm weit von der Mundöffnung weg. Die Seitenorgane sind ziemlich eiförmig mit einem Durchmesser von 0,018 mm und liegen 0,018 mm weit von der postoralen Papillenzone entfernt (Taf. III, Fig. 9). Das Kutikularohr des Oesophagus ist 3 mm lang. Die Masse des Fettkörpers ist fast ganz aufgebraucht und von derselben sind nur sehr wenige Fettkörnchen zurückgeblieben. Von den zwei Hoden entspringt die vordere 0,8 mm vom Mundende, die hintere indessen 0,7 mm weit vom Schwanzende. Die 2 Spiculen sind am Ende etwas in ventraler Richtung gebogen und 0,32 mm lang. Die Genitalöffnung liegt 0,17 mm weit vom Schwanzende entfernt. Von den praeanalen Papillenreihen enthält die mittlere 14, die zwei lateralen je 7, von den postanalen die mittlere 7 und die zwei lateralen je 3 Papillen (Taf. III, Fig. 7). Körperfarbe: hell gelblichbraun.

Das Weibchen ist 8,5—12 mm lang; sein Körperdurchmesser beträgt bei der postoralen Papillenzone 0,016—0,02 mm, in der Umgebung der Vagina 0,3—0,35 mm, am Schwanzende mißt dasselbe 0,25 mm. Das Mundende ist abgerundet spitz, die Umgebung der Mundöffnung ist indessen buchtartig vertieft (Taf. III, Fig. 3, 4). Der Dorsalrand des Schwanzendes ist bogenförmig abschüssig, der Ventralrand gerade und bilden beide zusammen einen ziemlich breit gerundeten Gipfel (Taf. III, Fig. 5). Die postoralen Papillen liegen gleich jenen des Männchens, aber viel näher zur Mundöffnung. Die Seitenorgane sind kreisförmig mit einem Durchmesser von 0,03 mm und liegen 0,015 mm weit von der postoralen Papillenzone. Die Körperkutikula ist 0,02—0,023 mm dick. Von den hypodermalen Längswülsten sind die mediolateralen 0,15 mm breit und bestehen aus 4 Zellenreihen, deren Zahl sich indessen am Mund- und Schwanzende auf je 2 vermindert. Die Kutikularöhre des Oesophagus ist 3,2—5,3 mm lang. Der Fettkörper enthält sehr wenige Fettkörnchen, sein Vorderende liegt 0,3 mm weit von der Mundöffnung, sein Hinterende dagegen 1,28 mm weit von der Schwanzspitze entfernt. Die Genitalöffnung mündet 4,5 mm weit vom Mundende. Die Vagina ist schlauchförmig, enthält in ihrer Wandung konzentrisch gelagerte Ringmuskelfasern (Taf. III, Fig. 8). Das vordere Ovarium entspringt 2,2 mm vom Mundende, das hintere hingegen 2,8 mm weit vom Schwanzende. Die Eier sind dünnschalig, kugelförmig und haben einen Durchmesser von 0,08 mm. Körperfarbe: hell gelblichbraun.

Fundort: Neuenburger See, aus dem Prof. O. FUHRMANN 2 ♀ aus einer Tiefe von 90 m und 1 ♂ aus einer Tiefe von 104 m dreggte. Die Art wurde zu Ehren des Herrn Prof. O. FUHRMANN benannt.

*Bathymermis helvetica* DAD.

Taf. III, Fig. 10—13, 16.

Die Körperlänge des geschlechtsreifen Weibchens beträgt 9,4 bis 12,4 mm, der Körperdurchmesser bei der postoralen Papillenzone 0,06 mm, in der Umgebung der Vagina 0,03—0,35 mm; in der Nähe des Schwanzendes 0,15 mm. Das Mundende des Körpers scheint abgestutzt zu sein, die dorsalen und ventralen postoralen Papillen sind indessen kugelförmig erhoben und die Umgebung des Mundes erscheint etwas gebogen (Taf. III, Fig. 10—13). Das Schwanzende verjüngt sich nur wenig, der Dorsalrand ist abschüssig bogenförmig, der ventrale hingegen gerade, und beide bilden zusammen, näher zur Ventralseite eine ziemlich scharfe Spitze mit abgerundetem Ende (Taf. III, Fig. 13). Die Körperkutikula ist 0,01 bis 0,02 mm dick und enthält in ihrer mittleren Schichte die charakteristischen Kreuzfasern. Der größte Durchmesser der mediolateralen Längswülste der Hypodermis ist 0,06 mm und bestehen dieselben aus zwei Zellenreihen mit verschwommenen Umrissen. In der postoralen Papillenzone liegen je zwei Papillen mediolateral, eine dorsal und eine ventral und sind sämtliche kegelförmig. Die kreisförmigen Seitenorgane haben einen Durchmesser von 0,02 mm und liegen zur postoralen Papillenzone sehr nahe (Taf. III, Fig. 10, 11). Die Kutikularöhre des Oesophagus ist 3,4—4 mm lang. Der Fettkörper enthält mehr oder weniger Fettkörnchen und liegt 0,8 mm vom Mund-, 0,9 mm vom Schwanzende entfernt. Die Genitalöffnung liegt 4—6 mm weit vom Mundende ab, also fast in der Körpermitte. Die Vagina bildet einen annähernd kugelförmigen Schlauch und enthält in ihrer dicken Wandung konzentrische Muskelfasern (Taf. III, Fig. 12). Das vordere Ovarium entspringt 1—1,2 mm weit vom Mundende, das hintere hingegen 1—1,5 mm weit vom Schwanzende. Der Uterus bildet in der Nähe der Vagina eine Schlinge. Die Eier sind glattschalig, kugelförmig mit einem Durchmesser von 0,1 mm. Körperfarbe: hell gelblichbraun.

Die Körperlänge des freilebenden, noch nicht geschlechtsreifen Weibchens beträgt 9,4 mm, sein größter Durchmesser 0,16 mm. Die Struktur des Kopfendes gleicht vollständig dem der alten Weibchen. Auch in der Struktur der inneren Organe findet sich zwischen den jungen und alten Weibchen kein Unterschied, der

Fettkörper der ersteren enthält indessen sehr viele Fettkörnchen und sind ferner auch die Geschlechtsorgane noch nicht vollständig ausgebildet. Charakteristisch ist für die jungen Weibchen das Schwanzende, da die abgerundete Spitze desselben fast in der Mittellinie des Körpers liegt, sowie ferner, daß von denselben ein S-förmig gekrümmter 0,04 mm langer dornförmiger Schwanzfortsatz herabhängt (Taf. III, Fig. 16). Die Körperfarbe der jungen Weibchen ist dunkel gelblichbraun und wegen der vielen Fetttröpfchen sehr undurchsichtig.

Fundort: Vierwaldstädter See, aus dem Prof. FR. ZSCHOKKE mehrere Exemplare aus einer Tiefe von 35 m, und zwar zwei ganz geschlechtsreife und drei noch nicht geschlechtsreife Weibchen auffischte. Diese Art unterscheidet sich von *Bathymermis Fuhrmanni* DAD., mit der sie übrigens nahe verwandt ist, hauptsächlich durch die Form des Mund- und Schwanzendes, sowie durch die Struktur ihrer Vagina.

### Gen. *Paramermis* LINST. v.

Mermis LINSTOW O. v. pro parte.
Paramermis O. v. LINSTOW, 16, p. 167, 18, p. 393.
„ CORTI E. 3, p. 627.

Körperkutikula mit sich kreuzenden Fasern. Hypodermis mit sechs Längswülsten. Körpermuskulatur in sechs Längsbündel geteilt. Postorale Papillenzone mit sechs Papillen. Vagina gestreckt zylindrisch, gewöhnlich S-förmig gekrümmt. Männchen mit einem Spiculum.

Hier erwähne ich, daß diese Gattung durch ihre allgemeinen Merkmale mit der *Limnomermis* DAD. augenfällig übereinstimmt und von dieser so ziemlich nur durch die Struktur ihrer Körperkutikula abweicht. Die Arten dieser Gattung sind in geschlechtsreifem Zustande aus Wasser bekannt.

### *Paramermis aquatilis* LINST.

Mermis-Paramermis aquatilis O. v. LINSTOW 16, p. 165.
Taf. VIII, Fig. 7—10.

Das Männchen ist 12 mm lang und besitzt einen Durchmesser von 0,176 mm. Die Kutikularöhre bildet $1/_{24}$, der Schwanz hingegen $1/_{62}$ der Körperlänge. Das Spiculum hat eine pfriemenförmig gebaute Gestalt und ist 0,26 mm lang. Vor der Genitalöffnung gibt es drei praeanale Papillenreihen, und zwar eine mediale und zwei laterale. Hinter der Genitalöffnung auf der Bauchseite finden wir einen langen Spalt.

Das Weibchen ist 19 mm lang und hat einen Durchmesser von 0,273 mm. Die Kutikularöhre des Oesophagus nimmt fast die halbe Körperlänge ein. Die Genitalöffnung liegt hinter der Körpermitte. Die Vagina hat einen Durchmesser von 0,07 mm und erstreckt sich nach hinten 0,4 mm weit und ist dann nach vorne und oben gebogen. Die Eier sind kugelförmig und besitzen einen Durchmesser von 0,049 mm.

Fundort: Genfer See bei Morges, wo BUGNION dieselben aus einer Tiefe von 2—80 m zwischen Wurzeln von *Potamogeton* und *Myriophyllum* gesammelt hat. Diese Art wurde, wie O. v. LINSTOW bemerkt, auch von ASPER im Schlamme der Schweizer Seen aufgefunden.

### *Paramermis contorta* LINST. v.

Mermis contorta LINSTOW O. v. 12, p. 391, Taf. XXII, Fig. 1, 16, p. 154.
Paramermis contorta O. v. LINSTOW 18, p. 393, Fig. 1.

Die Körperlänge des Männchens beträgt 14,8 mm, der größte Durchmesser 0,17 mm. Das Schwanzende ist kegelförmig zugespitzt. Um die Genitalöffnung herum erheben sich anale Papillen, in einer Reihe mit 14 Papillen.

Die Körperlänge des geschlechtsreifen Weibchens beträgt 21,1—49 mm, sein Durchmesser schwankt zwischen 0,23—0,28 mm. Das Kopfende ist stumpf abgerundet. In der postoralen Papillenzone sind je zwei Papillen mediolateral, eine dorsal und eine ventral gelegen. Die Seitenorgane sind kreisartig geformt und 0,026 mm weit vom Kopfende aufsitzend. Das Schwanzende ist kegelförmig zugespitzt. Die Genitalöffnung liegt etwas vor der Körpermitte. Die Vagina ist gestreckt, 0,36 mm lang, 0,049 mm dick, zuerst bogig nach vorn und oben gekrümmt, dann aber gegen die Bauchseite umgeschlagen. Die Eier sind kugelförmig, glattschalig, mit einem Durchmesser von 0,059 mm.

Fundort: Göttingen, wo dieselben von O. v. LINSTOW im Schlamme einer Pfütze gesammelt wurden. An dieser Stelle bemerke ich, daß die von F. G. KOHN unter dem Namen *Paramer-*

*mis contorta* beschriebene Art (9) mit der *Paramermis contorta* (LINST.) nicht identisch ist, wie dies übrigens auch O. v. LINSTOW (18) und E. CORTI (3) festgestellt haben.

### *Paramermis crassa* (v. LINST.)

Mermis crassa O. v. LINSTOW 12, p. 392, Taf. 22, Fig. 2—8; 13, p. 244; 16, p. 153.

Mermis crassa STIELES p. 160.

Die Körperlänge des Männchens beträgt 10—28 mm, die des Weibchens schwankt zwischen 13,2—90 mm und die verschieden entwickelten Exemplare sind 0,29—0,9 mm dick. Das Schwanzende des Männchens ist zugespitzt. Um die Genitalöffnung herum sind prae- und postanale Papillenreihen vorhanden, und zwar eine mediale und zwei laterale. Die mediale Papillenreihe ist prae- und postanal, also in ihrem ganzen Verlauf verdoppelt; ebenso auch die praeanale laterale, und also kommen in der Tat sechs praeanale und vier postanale Papillenreihen vor. Die Kutikularöhre des Oesophagus endigt beim Weibchen vor der Körpermitte.

Fundort: nach O. v. LINSTOW Mitteleuropa und speziell Göttingen.

Bei dieser Gelegenheit muß ich bemerken, daß ich die obige kurze Beschreibung bloß auf grund der Mitteilungen O. v. LINSTOWS zusammengestellt habe, da mir die zweite Abhandlung von STIELES nicht zur Verfügung gestanden ist. Ich halte es indessen nicht für ausgeschlossen, daß die Abhandlung von STIELES über Merkmale dieser Art auch keine weiteren Details enthält, weil sie O. v. LINSTOW sonst bei der neuesten Beschreibung derselben benützt hätte (16). Ebenso muß ich auch bemerken, daß O. v. LINSTOW unter Fragezeichen als Synonyme die *Mermis chironomi* v. SIEB und *Mermis simuliae reptantis* v. SIEB, wie auch die KRAEMERsche *Merinthoideum mucronatum* aufzählt (16, p. 153).

### *Paramermis limnophila* DAD.

Taf. III, Fig. 14, 15.

Die Körperlänge beträgt 10,4 mm, der Körperdurchmesser bei der postoralen Papillenreihe 0,06 mm, bei der Vereinigung der Hoden 0,2 mm, bei der Genitalöffnung 0,12 mm. Das Vorderende ist in der Umgebung der Mundöffnung kaum merklich gebogen, fast gerade, die Mundöffnung selbst etwas vertieft (Taf. III, Fig. 14). Das Schwanzende verjüngt sich hinter der Genitalöffnung auffallender, sein Dorsalrand ist abschüssig gebogen, der Ventralrand hingegen gerade und beide bilden zusammen einen unter der Mittellinie des Körpers tiefliegenden gerundeten Gipfel (Taf. III, Fig. 15). In der postoralen Papillenzone liegen je eine dorsolaterale, zwei dorsale und zwei ventrale Papillen, welche von der Seite gesehen kegelförmig erscheinen (Taf. III, Fig. 15). Die Körperkutikula ist 0,013 mm dick mit den für diese Gattung charakteristischen sich kreuzenden Fasern. Von den hypodermalen Längswülsten besitzen die mediolateralen eine größte Breite von 0,03 mm; dieselben dürften aus drei Zellenreihen zusammengesetzt sein, da ich nämlich in denselben drei Kernreihen unterscheiden konnte. Die Kutikularöhre des Oesophagus ist 3 mm lang. Der Fettkörper enthält sehr wenig Fetttröpfchen. Die vordere Hode entspringt vom Mundende 0,8 mm, die hintere vom Schwanzende ungefähr 1,2 mm weit. Das Spiculum ist sichelförmig gekrümmt, 0,14 mm lang. Die Genitalöffnung liegt 0,2 mm weit von der Schwanzspitze, vor derselben erheben sich drei praeanale, hinter derselben drei postanale Papillenreihen. Die mediale praeanale Papillenreihe enthält 12, die zwei lateralen je 15, die mediale postanale 15 und die zwei lateralen je 10 Papillen. Körperfarbe: hell gelblich.

Fundort: Vierwaldstädter See, wo Prof. Fr. Zschokke ein geschlechtsreifes Männchen aus einer Tiefe von 70 m gedreggt hat..

### Gen. *Mermis* Duj.

Mermis Dujardin F. 6, p. 129. Linstow O. v. 16, p. 149.

Körperkutikula mit sich kreuzenden Fasern. Hypodermis mit sechs Längswülsten. Körpermuskulatur in sechs Längsmuskelbündel geteilt. Postorale Papillenzone mit sechs Papillen. Vagina gestreckt, zylindrisch, S-förmig gekrümmt. Männchen mit zwei Spiculen.

Zum Kreise dieser Gattung gehörend haben die Forscher zahlreiche Arten beschrieben, unter welchen *Mermis nigrescens* Duj. und *Mermis albicans* v. Sieb auch geschlechtsreif bekannt sind und zwar aus feuchter Erde. Der größte Teil der Arten lebt in geschlechtsreifem Zustande im Wasser, und zwar die unten kurz beschriebenen *Mermis acuminata* LINST., *Mermis lacinulata* SCHNEID., *Mermis paludicola* LINST., *Mermis piscinalis* LINST. und *Mermis rotundata* LINST. Im Larvenzustand sind aus Wasser *Mermis crassicauda* LEIDY, *Mermis elongata* LEIDY und *Mermis ferruginea* LEIDY bekannt, von denen nach den Angaben O. v. LINSTOWS nur die Längsdimensionen bekannt sind (16, p. 157). Endlich ist der größte Teil der Arten nur als parasitische Larve aus verschiedenen Wirttieren zum Vorschein gekommen und beträgt ihre Zahl derzeit 20. Als Wirttiere fungieren Gammariden, Spinnen, Insekten und Schnecken. Es dürfte späteren Untersuchungen vorbehalten sein, aufzuklären, ob die 20 parasitierenden *Mermis*-Larven eigentlich in der Erde oder in Wasser leben und wieviele Arten sie repräsentieren.

### *Mermis acuminata* LINST.

Mermis acuminata O. v. LINSTOW 11, p. 301, Taf. IX, Fig. 44; 16, p. 156.

Die Körperlänge beträgt 15 mm, der größte Körperdurchmesser 0,72 mm. Das Mundende ist ziemlich scharf gerundet. Das Schwanzende ist kegelförmig zugespitzt. Die postorale Papillenzone hat sechs Papillen und zwei spitze Erhebungen. Die Eier sind eiförmig mit 0,055 mm kleinstem und 0,069 mm größtem Durchmesser.

Das einzige geschlechtsreife Weibchen dieser Art, über deren Merkmale in den Beschreibungen O. v. LINSTOWS nichts Weiteres zu finden ist, hat FEDTSHENKO in Turkestan gesammelt, ohne den Fundort näher angegeben zu haben.

### *Mermis lacinulata* SCHNEIDER.

Mermis lacinulata SCHNEIDER A. 23, p. 178, Taf. XIV, Fig. 5—7.
" " O. v. LINSTOW 16, p. 156.

Das Männchen ist 84 mm, das Weibchen 330 mm lang. Das Vorderende ist kegelförmig abgerundet. Die Spitze des Schwanzendes ist kegelförmig zugespitzt. Das Schwanzende des Weibchens ist dicker als sein Mundende. Die postorale Papillenreihe hat sechs Papillen. Vor und hinter der männlichen Geschlechtsöffnung befinden sich je drei anale Papillenreihen. Die zwei lateralen Papillenreihen sind im ganzen Verlaufe ungegliedert, während die mediale Reihe vor und hinter der Geschlechtsöffnung sich in zwei Äste gabelt, deren jeder je vier Papillen aufweist. Sämtliche Papillenreihen sind gleichlang, von der Schwanzspitze an 6 mm weit nach vorn reichend. Die zwei Spiculen sind zylindrisch, gekrümmt, stumpf spitzig.

Fundort unbekannt, ein Männchen und ein Weibchen wurden von HARTMANN gesammelt.

### *Mermis paludicola* LINST.

Mermis paludicola O. v. LINSTOW 11, p. 300, Taf. IX, Fig. 42, 43, 16, p. 154.

Das Männchen ist 36 mm lang mit einem Durchmesser von 9,34 mm. Das Weibchen ist 78 mm lang und 0,48 mm dick. Das Kopfende ist in der Umgebung des Mundes etwas erhoben. Schwanzende bei beiden Geschlechtern mit abgerundeter Spitze. Postorale Papillenzone mit sechs Papillen. Um die Geschlechtsöffnung des Männchens herum sind zwei prae- und postanale laterale Papillenreihen, außerdem postanal noch zwei mediale Reihen von Papillen vorhanden. Die laterale Papillenreihe hat in der praeanalen Hälfte 9, in der postanalen 11 Papillen, während die mediolateralen Papillenreihen 4, 4 Papillen besitzen. Die Spiculen sind 1,3 mm lang, dünn, stäbchenförmig und mit einem Stützapparat versehen; Körperfarbe braun.

Fundort: Durschan-Kul-See in Sarawschantal in Turkestan, wo FEDTSHENKO dieselben sammelte, und wie dies O. v. LINSTOW bemerkt, unter dem Namen *Mermis explicans* ohne Beschreibung anführte (**16**, p. 154).

### *Mermis piscinalis* LINST.

Mermis piscinalis O. v. LINSTOW 17, p. 490.

Die Körperlänge beträgt 29 mm, der Durchmesser 0,40 mm. Die postorale Papillenreihe hat 6 Papillen. Das Schwanzende besitzt eine abgerundete Spitze. Die Genitalöffnung liegt in der Körpermitte. Die Eier sind kugelförmig, dickschalig und haben einen Durchmesser von 0,035 mm.

Fundort: ein Teich am Wolgaufer bei Saratow, von woher von O. v. LINSTOW ein einziges Weibchen vorgelegen ist.

### *Mermis rotundata* LINST.

Mermis rotundata O. v. LINSTOW 11, p. 301; 16, p. 157.

Körperlänge 14 mm, Durchmesser 0,17 mm. Vorderende gerade abgestutzt, Hinterende hingegen mit abgerundeter Spitze.

Fundort: Turkestan, wo diese Art von FEDTSHENKO ohne nähere Fundortsangabe gesammelt wurde. O. v. LINSTOW selbst hat in seiner ersten Abhandlung diese Art als eine „species inquirenda“ markiert und konnte er auch in seiner neueren Beschreibung über die Merkmale dieser Art keine weiteren Angaben anführen.

Ich glaube nicht zu irren, wenn ich im allgemeinen bemerke, daß die im Wasser lebenden Arten der *Mermis*-Gattung sämtlich mangelhaft beschrieben und auf grund der Beschreibungen schwer oder aber gar nicht zu erkennen sind. Dies gilt besonders von jenen Arten, von den nur die Weibchen bekannt sind, weil man von ihnen nicht einmal das bestimmt feststellen kann, ob sie in der Tat zum Genus Mermis oder aber zu Paramermis gehören.

### Gen. *Hydromermis* CORTI.

Hydromermis CORTI E., 2, p. 105, 3, p. 631.
„ KOHN F. G., 9, p. 249.

Körperkutikula ohne sich kreuzende Fasern. Hypodermis mit acht Längswülsten. Die Körpermuskulatur ist in acht Längsmuskelbündel geteilt. Die postorale Papillenreihe weist sechs Papillen auf. Die Vagina ist gestreckt, zylindrisch, S-förmig gekrümmt. Das Männchen besitzt nur ein Spiculum.

Die geschlechtsreifen Exemplare der Gattung leben im Wasser, während die Larven hauptsächlich in Chironomus-Larven schmarotzen.

### *Hydromermis acuminata* DAD.

Taf. III, Fig. 17; Taf. IV, Fig. 1, 2.

Die Länge des Körpers beträgt 10—12 mm, sein Durchmesser bei der postoralen Papillenzone 0,4 mm, beim Anfang des Ovariums 0,17 mm, in der Nähe des Schwanzendes 0,1—0,13 mm. Das Vorderende ist ziemlich spitz gerundet, bei der Mundöffnung etwas vertieft (Taf. IV, Fig. 1). Der Dorsalrand des Schwanzendes ist abschüssig und senkt sich ziemlich stark gebogen nach unten zum geraden Ventralrande und bildet mit demselben einen gerade nach hinten gerichteten, kurzen Kegel (Taf. IV, Fig. 2). Die Körperkutikula ist 0,005 mm dick. Von den hypodermalen Längswülsten besitzen die mediolateralen einen größten Durchmesser von 0,04 mm und sind dieselben aus drei Zellenreihen zusammengesetzt, die Zellgrenzen sind aber verschwommen und nur die Kernreihen deuten noch auf das ehemalige Vorhandensein von Zellen hin. In der postoralen Papillenzone erhebt sich je eine dorsolaterale, je eine mediolaterale und je eine ventrolaterale, kegelförmige Papille (Taf. IV, Fig. 1). Die Seitenorgane sind kreisförmig mit einem Durchmesser von 0,01 mm und liegen der Papillenzone nahe. Die Kutikularöhre des Oesophagus ist 3,5—4,6 mm lang. Der Fettkörper ist von Fettröpfchen erfüllt, derselbe entspringt 0,55 mm weit vom Mundende und endet 0,033 mm weit von der Schwanzspitze. Die zwei Ovarien entspringen und enden gerade an derselben Stelle wie der Fettkörper. Die Genitalöffnung liegt 5—5,8 mm weit von der Mundöffnung, also in der Körpermitte oder etwas vor derselben. Die gestreckte zylindrische Vagina hebt sich zuerst in dorsaler Richtung, dann biegt sie sich nach hinten und etwas nach unten, später krümmt sie sich nach oben und richtet sich endlich nach vorne (Taf. III, Fig. 17). Die Eier sind kugelförmig, dünnschalig, mit einem Durchmesser von 0,05 mm. Körperfarbe dunkel gelblichbraun.

Fundort: Vierwaldstädter See, wo Prof. Fr. Zschokke zwei geschlechtsreife Weibchen gesammelt hat, und zwar in einer Tiefe von 30 und 40 m.

### *Hydromermis annulosa* Dad.

Taf. IV, Fig. 3—5.

Die Körperlänge beträgt 14 mm, der Körperdurchmesser bei der postoralen Papillenzone 0,05 mm, in der Gegend der Körpermitte 0,23 mm, in der Nähe des Schwanzendes 0,17 mm. Das Kopfende ist auffällig dünn, ziemlich regelmäßig und spitzbogig (Taf. IV, Fig. 3). Der Dorsalrand des Schwanzendes senkt sich bogenförmig und abschüssig zum geraden Ventralrande und würde mit demselben eine Spitze bilden, wenn sich nicht eine kleine

Bucht in denselben einsenken würde, deren unterer Rand zahnartig hervorragt (Taf. IV, Fig. 5). Die mittlere Schicht der Körperkutikula enthält Ringfasern (Taf. IV, Fig. 4), deren Anwesenheit die Ursache der Artenbenennung gewesen ist. Auf der ganzen Körperfläche, besonders am Mund- und Schwanzende ist die Oberfläche der Körperkutikula ringförmig gerunzelt (Taf. IV, Fig. 3—5); ihr Durchmesser mißt 0,005 mm. Von den hypodermalen Längswülsten sind die ventrolateralen 0,018 mm, die dorsolateralen 0,012 mm und die mediolateralen 0,1 mm breit und scheinen dieselben aus drei Zellenreihen zusammengesetzt zu sein. In der postoralen Papillenzone erheben sich je eine mediolaterale, zwei dorsolaterale und zwei ventrolaterale, kegelförmige Papillen (Taf. IV, Fig. 3). Die Seitenorgane sind kreisförmig und haben einen Durchmesser von 0,012 mm. Die Kutikularöhre des Oesophagus ist 6,4 mm lang. Der Fettkörper enthält sehr viele Fettröpfchen und entspringt derselbe 0,58 mm weit von der Mundöffnung und endet 0,2 mm weit von der Schwanzspitze entfernt. Das Ende der zwei Ovarien entspringt mit dem Fettkörper an derselben Stelle. Die Genitalöffnung liegt 4,8 mm weit von der Mundöffnung, also noch bedeutend vor der Körpermitte und dem Ende der Kutikularöhre des Oesophagus. Die Vagina ist S-förmig gekrümmt. Die Eier waren noch nicht ganz entwickelt. Körperfarbe gelblichweiß.

Fundort: Neuenburger See, wo Prof. O. Fuhrmann ein einziges junges Weibchen gesammelt hat, und zwar aus einer Tiefe von 75 m.

*Hydromermis bathycola* Dad.

Taf. IV, Fig. 6—9.

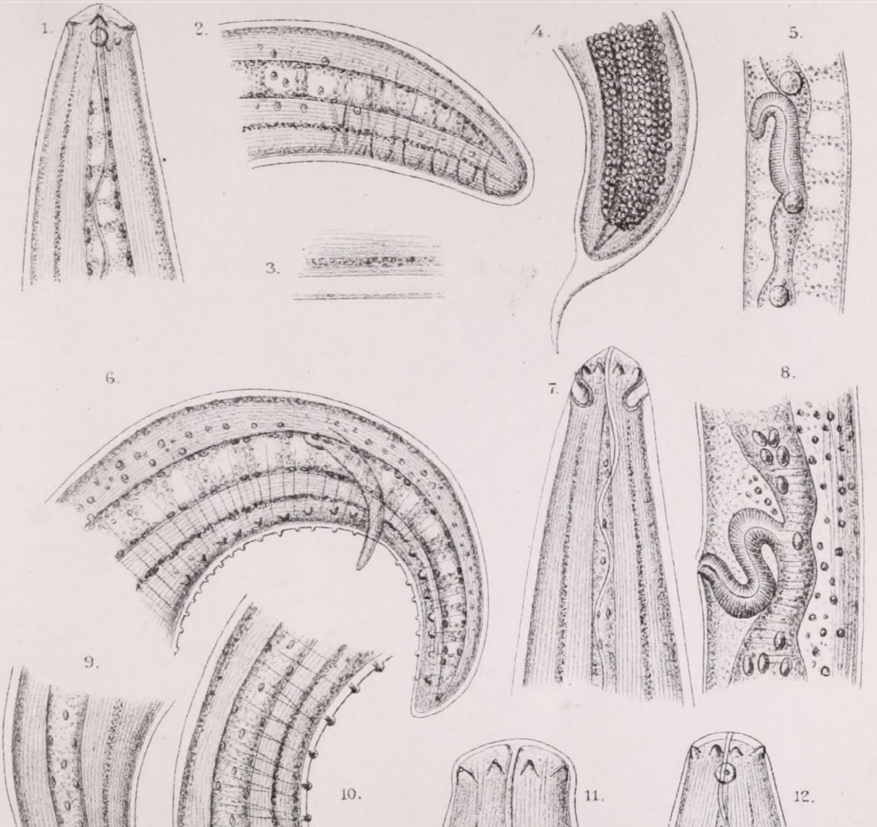
Die Körperlänge beträgt 13,5 mm, der Körperdurchmesser bei der postoralen Papillenzone 0,03 mm, bei der Vagina 0,18 mm, in der Nähe der Schwanzspitze 0,05 mm. Das Kopfende ist bis zu den Seitenorganen auffallend dünn, fast halsartig, in der Umgebung des Mundes stumpfbogig, fast gerade (Taf. IV, Fig. 6, 7). Das Schwanzende fängt nur unweit der Spitze an sich zu verjüngen; sein Dorsalrand ist abschüssig, sein Ventralrand gerade, beide bilden zusammen unter der Mittellinie des Körpers eine kegelförmige, gerundete Spitze (Taf. IV, Fig. 8). In der postoralen Papillenzone erhebt sich je eine mediolaterale, je eine dorsolaterale und je eine ventrolaterale kegelförmige Papille. Die Seitenorgane sind kreisförmig, liegen 0,02 mm weit von der postoralen Papillenzone ab, und besitzen einen Durchmesser von 0,01 mm. Die Körperkutikula ist 0,002 mm dick, glatt, ohne sich kreuzende Fasern. Von den hypodermalen Längswülsten haben die mediolateralen eine größte Breite von 0,03 mm und zeigen in zwei Längsreihen geordnete Kerne. Die Kutikularröhre des Oesophagus ist 5,2 mm lang. Der Fettkörper enthält viele Fetttröpfchen, sein Vorderende entspringt 0,26 mm weit von der Schwanzspitze. Das Ende der zwei Ovarien fällt mit den zwei Enden des Fettkörpers zusammen. Die Geschlechtsöffnung mündet 7,1 mm weit vom Mundende, also noch vor der Körpermitte. Die gestreckte, zylindrische Vagina ist nach oben und hinten gerichtet, bald dreht sie sich nach unten und verläuft dann nach vorn (Taf. IV, Fig. 9). Die Eier sind eiförmig, dünnschalig, mit einem größten Durchmesser von 0,04 mm. Körperfarbe: hell gelblichbraun.

Fundort: Vierwaldstädter See, wo Prof. FR. ZSCHOKKE ein einziges Weibchen sammelte, und zwar aus einer Tiefe von 95 m.

*Hydromermis contorta* (KOHN.)

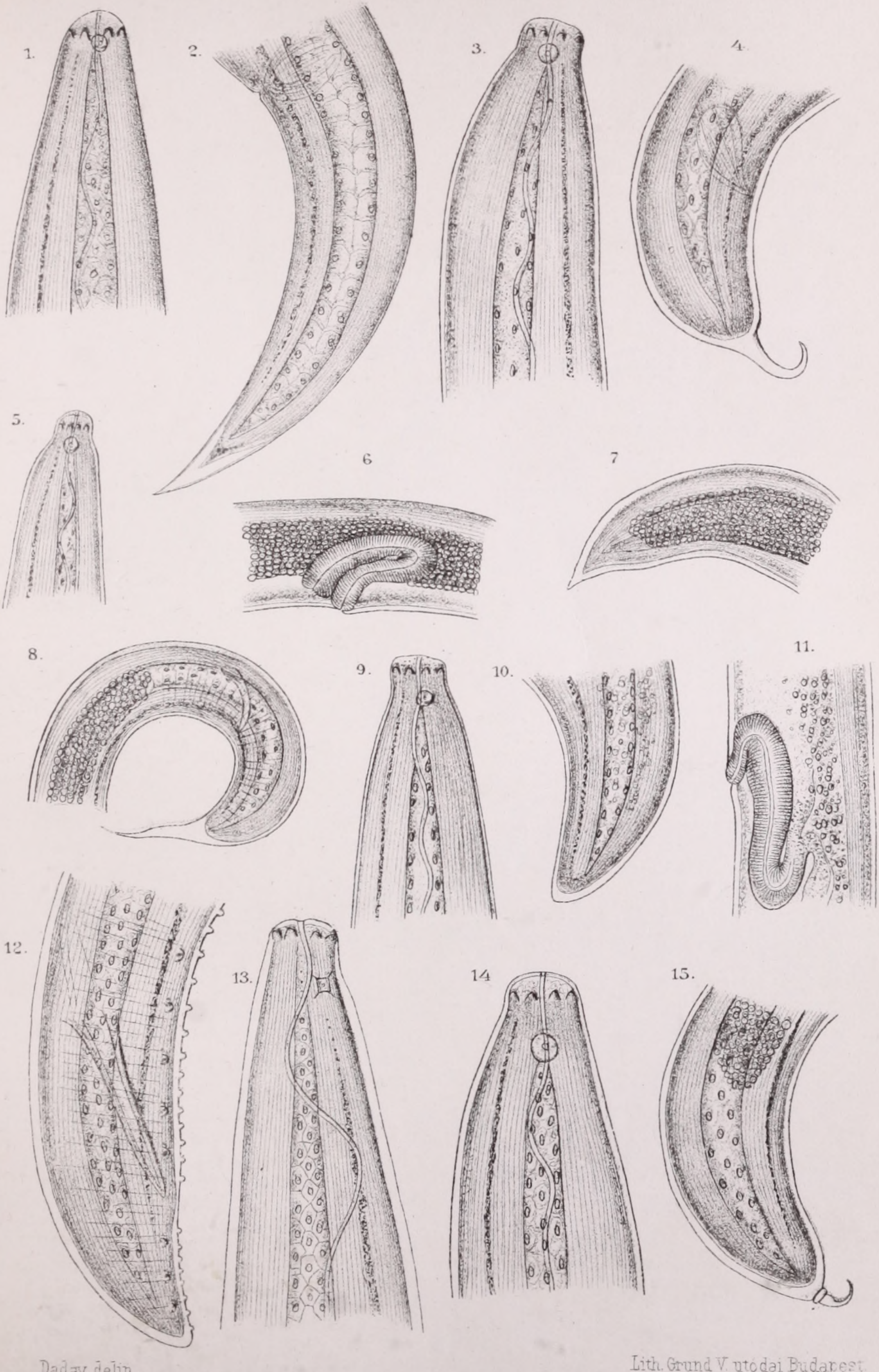
Paramermis contorta KOHN F. G. 9, p. 213, Taf. XVI, Fig. 1—26.
Hydromermis implicata CORTI E, 3, p. 629.

Die Körperlänge des Männchens beträgt 13—26 mm, die des Weibchens 26—50 mm und der Durchmesser 0,07—0,21 mm, bzw. 0,18—0,37 mm. Das Vorderende ist in der Umgebung des Mundes stumpfbogig. Das Schwanzende verjüngt sich langsam und endet scharf zugespitzt. Die Körperkutikula ist 0,005—0,008 mm dick, ohne sich kreuzende Fasern. Von den hypodermalen Längstwülsten bilden die mediolateralen zusammen 40 $^0/_0$ des Körperumfanges und enthalten 3—4 Längsreihen von Zellkernen. In der postoralen Papillenreihe liegt je eine Papille dorsal und ventral, während zwei dorsolateral, zwei hingegen ventrolateral angeordnet sind. Die Kutikularöhre des Oesophagus zieht sich beim Weibchen bis in die Nähe der Vagina hin. Der Fettkörper entspringt 0,3 mm weit von der Mundöffnung und endet beim Weibchen 0,25—0,55 mm weit von der Schwanzspitze. Die vordere Hode beginnt 2 mm weit vom Mundende, die hintere dagegen in geringerer Entfer-



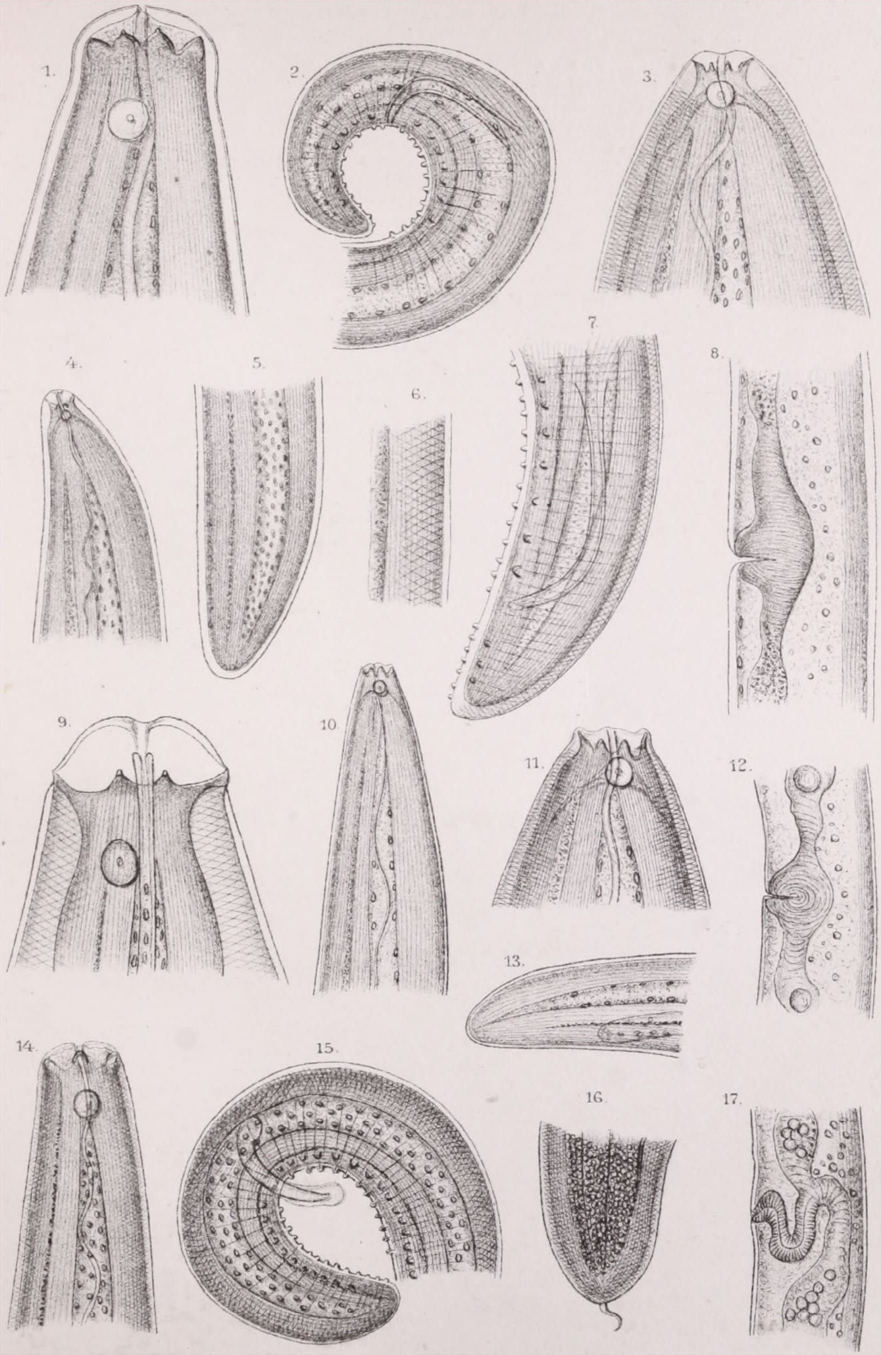

Daday delin.

Lith. Grund V. utódai Budapest.



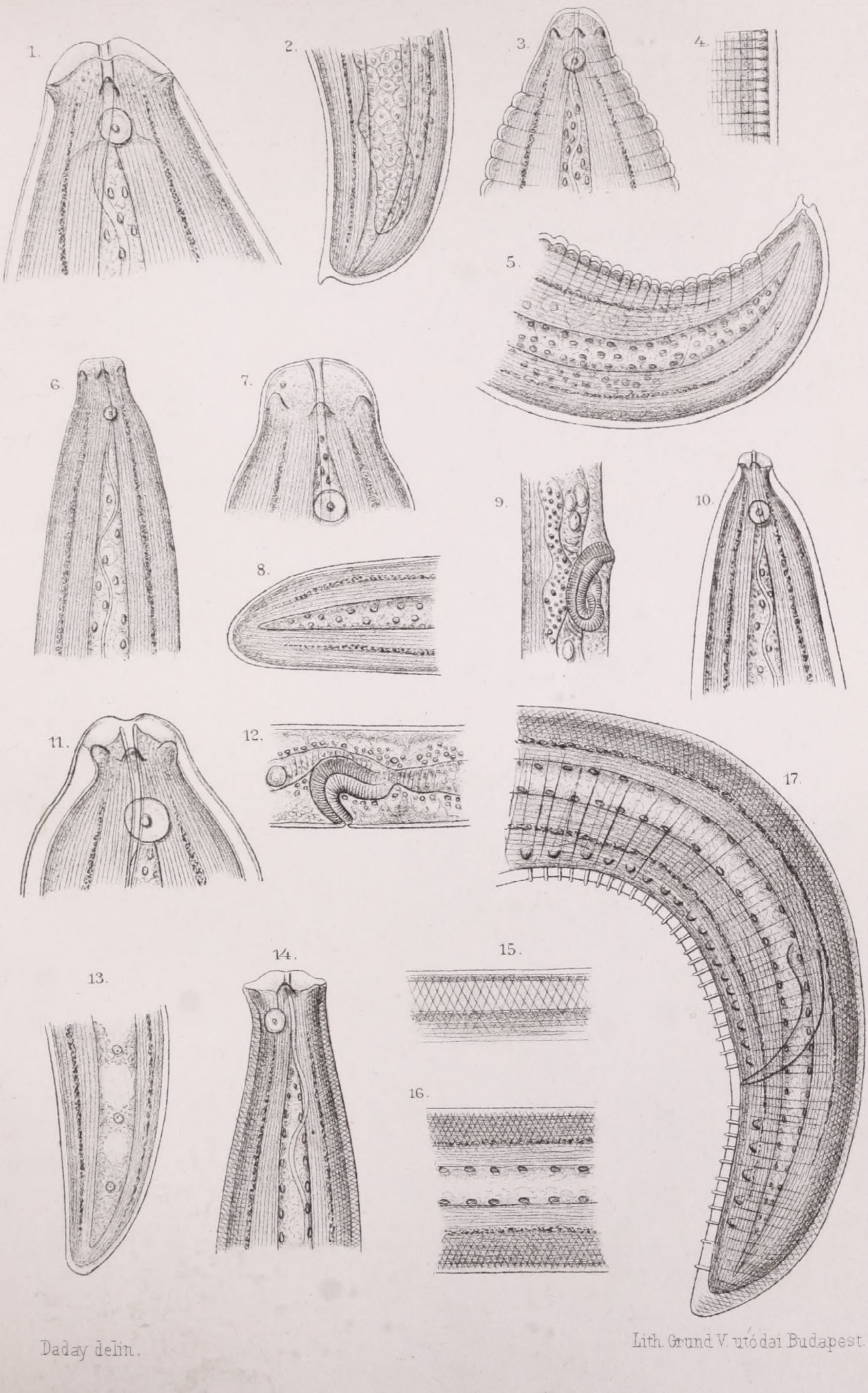

Daday delin.

Lith. Grund V. utódai Budapest




Daday delin.

Lith. Grund V. utódai Budapest




Daday delin.

Lith. Grund V. utódai Budapest.

BIBLIOTHECA ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA
BUDAPEST

nung vom Spiculum. Das Spiculum ist sichelförmig gebogen. Das Schwanzende des Weibchens verjüngt sich plötzlich stark und endet in einer nach oben gerichteten Spitze. Das vordere Ovarium beginnt 0,6 mm weit vom Mundende, das hintere hingegen 0,08 mm weit von der Schwanzspitze. Die Genitalöffnung mündet 1—1,5 mm weit von der Körpermitte aus. Die Vagina ist gestreckt, zylindrisch und erhebt sich anfangs schräg nach oben und hinten, dann biegt sie sich nach vorne und unten, endlich wendet sie sich wieder nach oben. Der Durchmesser der Eier beträgt 0,053—0,068 mm.

Fundort: Ein Tümpel zwischen Liesing und Brunn, wo dieselben K. C. SCHNEIDER sammelte. Ich halte es übrigens für nicht unwahrscheinlich, daß in dem KOHNschen Artnamen mehr als eine Art verborgen ist.

### *Hydromermis conura* DAD.

Taf. IV, Fig. 10—13.

Die Körperlänge beträgt 7,5 mm, der Körperdurchmesser bei der Papillenzone 0,03 mm, in der Gegend der Vagina 0,2 mm, in der Nähe der Schwanzspitze 0,23 mm. Das Vorderende verjüngt sich auffallend von der postoralen Papillenzone an, in der Umgebung der Mundöffnung ist es gebogen (Taf. IV, Fig. 10, 11). Der Dorsalrand des Schwanzendes ist abschüssig gebogen und senkt sich tief unter die Mittellinie des Körpers; der Ventralrand ist gerade, bildet aber mit dem Dorsalrande eine in der Ventrallinie liegende, abgerundete Spitze (Taf. IV, Fig. 13). Die Körperkutikula ist 0,009 mm dick und besitzt keine sich kreuzenden Fasern. Von den hypodermalen Längswülsten sind die ventrolateralen und dorsolateralen 0,01 mm, die mediolateralen hingegen 0,05 mm breit, und ich konnte in denselben eine einzige in der Mitte liegende Kernreihe unterscheiden. In der postoralen Papillenzone erheben sich je eine kegelförmige Papille mediolateral, zwei dorsolateral und zwei ventrolateral. Die Seitenorgane sind kreisförmig mit einem Durchmesser von 0,015 mm und liegen 0,02 mm weit von der postoralen Papillenzone (Taf. IV, Fig. 11). Die Kutikularöhre des Oesophagus ist 2,4 mm lang. Der Fettkörper enthält ziemlich wenig Fettröpfchen, er beginnt 0,3 mm weit von der Mundöffnung und endigt 0,18 mm weit von der Schwanzspitze.

Das vordere Ovarium beginnt 0,45 mm von der Mundöffnung, das hintere 0,18 mm weit von der Schwanzspitze. Die Genitalöffnung liegt 4 mm weit von der Mundöffnung, also hinter der Körpermitte. Die Vagina erhebt sich anfangs nach oben und etwas nach vorn, dann krümmt sie sich nach hinten und ist in der Mittellinie des Körpers plaziert (Taf. IV, Fig. 12). Die Eier sind kugelförmig, glattschalig mit einem Durchmesser von 0,06 mm. Körperfarbe gelblichweiß.

Fundort: Neuenburger See, wo Prof. O. FUHRMANN das einzige mir zur Verfügung stehende Weibchen gesammelt hat, und zwar aus einer Tiefe von 104 m.

*Hydromermis rivicola* CORTI.

Hydromermis rivicola CORTI E., 2, p. 105.

Die Körperkutikula ist 0,004—0,005 mm dick, ohne sich kreuzende Fasern. Unter den hypodermalen Längswülsten erreichen die mediolateralen 50 % des Körperumrisses. In der postoralen Papillenzone erheben sich je eine mediolaterale, zwei dorsolaterale und zwei ventrolaterale Papillen. Die Kutikularöhre des Oesophagus reicht bis zur Körpermitte. Der Fettkörper beginnt, bzw. endigt 0,5 mm weit von beiden Körperenden.

Die Körperlänge des Männchens beträgt 15—32 mm, der Köperdurchmesser in der Umgebung der postoralen Papillenzone 0,072—0,097 mm, sonst aber 0,182—0,275 mm. Das Vorderende ist abgerundet eckig. Das Schwanzende läuft in eine Spitze aus. Das Spiculum ist 0,227—0,318 mm lang, gebogen und von gelblicher Farbe. Um die Genitalöffnung herum liegen prae- und postanale Papillenreihen, die Zahl der in ihnen befindlichen Papillen aber ist unbekannt.

Die Körperlänge des Weibchens beträgt 18—56 mm, der Körperdurchmesser 0,023—0,028 mm. Das Vorderende ist einfach gerundet mit einem Durchmesser von 0,050—0,085 mm. Das Schwanzende ist abgestutzt. Die Genitalöffnung liegt der Körpergröße der einzelnen Exemplare entsprechend bald in der Körpermitte, bald in kleinerer oder größerer Entfernung von derselben 1—8 mm weit vom Vorderende des Körpers. Die Vagina ist gestreckt, zylindrisch, S-förmig gekrümmt, und zwar anfangs nach vorn und oben, dann nach der Ventralseite gebogen, hierauf biegt sie sich wieder nach der Rückenseite. Die Eier sind kugelförmig, glattschalig, mit einem Durchmesser von 0,066—0,072 mm.

Fundort: Ein Tümpel bei Pavia, wo E. CORTI dieselben sammelte, und zwar die schmarotzenden Larven aus *Chironomus venustus*, die geschlechtsreifen Individuen aus dem Schlamm. Die etwaige Unvollständigkeit der sonst in jeder Hinsicht eingehenden Beschreibung CORTIs besteht darin, daß sie beim Männchen keine ausführliche Daten über die Zahl der prae- und postanalen Papillenreihen und der in ihnen enthaltenen Papillen angibt.

### Gen. *Eumermis* DAD.

Körperkutikula mit sich kreuzenden Fasern. Hypodermis mit acht Längswülsten. Körpermuskulatur in acht Längsmuskelbündel geteilt. Postorale Papillenzone mit sechs Papillen. Männchen mit zwei Hoden und nur mit einem Spiculum.

Diese Gattung ähnelt — mit den sich kreuzenden Fasern der Körperkutikula und dem einzigen Spiculum des Männchens — der Paramermis LINST., während die acht hypodermalen Längstwülste zwischen beiden eine scharfe Grenze bilden und diesem Genus vielmehr in der Nachbarschaft des Gen. *Hydromermis* CORTI seinen Platz anweisen.

### *Eumermis gracilis* DAD.

Taf. IV, Fig. 14—17.

Die Körperlänge beträgt 22 mm, der Körperdurchmesser bei der postoralen Papillenzone 0,06 mm, in der Gegend des Schlundringes 0,155 mm, in der Mitte des Körpers 0,25 mm, vor dem Spiculum 0,2 mm. Das Vorderende ist in der Umgebung des Mundes hügelförmig erhoben, bei der Mundöffnung ausgebuchtet und bildet beiderseits bemerkbare kegelförmige Gipfelchen (Taf. IV, Fig. 14). Das Schwanzende verjüngt sich hinter der Genitalöffnung auffällig, sein Dorsalrand ist abschüssig gebogen und senkt sich bis zum geraden Ventralrande, mit welchem es eine kegelförmige Spitze bildet (Taf. IV, Fig. 17). Die Körperkutikula ist 0,01 mm dick, die sich kreuzenden Fasern ihrer mittleren Schicht sind scharf ausgeprägt, die innere Schicht ist zweimal so dick als die beiden anderen zusammengenommen (Taf. IV, Fig. 15). Von den hypodermalen Längstwülsten schwankt der größte Durchmesser der mediolateralen zwischen 0,02—0,03 mm und ziehen sich in ihrer granulierten Masse zwei Längsreihen von Kernen hin (Taf. IV, Fig. 16). In der postoralen Papillenzone erheben sich je eine mediolaterale, je zwei dorsolaterale und ventrale, kegelförmige Papillen. Die Seitenorgane sind kreisförmig mit einem Durchmesser von 0,012 mm und liegen ebenso weit von der postoralen Papillenzone. Die Kutikularöhre des Oesophagus ist 7 mm lang. Der Fettkörper beginnt 0,49 mm weit von dem Mundende und 0,5 mm von der Schwanzspitze und enthält ziemlich viele Fettröp chen. Die vordere Hode beginnt 0,44 mm von der Mundöffnung, die hintere hingegen 0,6 mm weit von der Schwanzspitze. Das einzige Spiculum ist 0,13 mm lang und sichelförmig. Die Genitalöffnung liegt 0,28 mm weit von der Schwanzspitze, vor und hinter derselben erheben sich je drei prae- und postanale Papillenreihen. Die mittlere praeanale Papillenreihe enthält 24, die zwei lateralen zählen hingegen 18 Papillen. Die mittlere postanale Papillenreihe zählt 11, die zwei lateralen enthalten hingegen 5 Papillen (Taf. IV, Fig. 17). Körperfarbe hellgelblichbraun.

Fundort: Vierwaldstädter See, wo Prof. Fr. Zschokke das mir zur Verfügung stehende Männchen aus einer Tiefe von 40 m gesammelt hat.

### Literaturverzeichnis.

1. Bugnion: Verhandl. d. schweizer. naturf. Gesellschaft. Jahresber. 1876 bis 77 (78), p. 247. (Sec. Linstow O. v.).
2. Corti E.: Di un nuovo Nematode parasita in larva di Chironomus. — Rendi conti del reale istituto lombardo di Scienze e lettere. Ser. 2. Vol. 35. 1902, p. 105.
3. „ Sulla Paramermis contorta di Kohn. — Zool. Anzeiger. Bd. 29. Nr. 20. 1906, p. 627.
4. Diesing: Systema Helminthum 1851. II, p. 108.
5. „ Revision der Nematoden. 1861, p. 607.
6. Dujardin F.: Sur les Mermis et les Gordius. — Anal. des Scienc. Natur. Ser. 2. Tom. 18. 1842, p. 129, Tab. 6, Fig. 1—16.
7. „ Histoire des Helminthes. 1845, p. 68, Tab. 3, Fig. E. F.
8. Fedtschenko: Berichte d. Freunde d. Naturw. Bd. 10, H. 2. 1874, p. 58, Tab. 14, Fig. 16. (Sec. Linstow O. v.)

9. Kohn F. G.: Einiges über Paramermis contorta (v. Linst.) = Mermis contorta Linst. — Arbeiten a. d. zool. Inst. d. Univers. Wien. Bd. 15. 1905, p. 213, Tab. 16.

10. Kraemer: Illust. Medic. Zeitung, Bd. 3, 1855, p. 291, Tab. 11, Fig. 9, 10. (Sec. Linstow.)

11. Linstow O. v.: Nematoden, Trematoden und Aeanthocephalen, gesammelt von Prof. Fedtschenko in Turkestan. — Archiv. f. Naturg. 43. Jahrg. 1883, p. 274, Tab. 9, Fig. 42—43.

12. „ Bemerkungen über Mermis. — Arch. f. mikr. Anat., Bd. 34, 1889, p. 390, Tab. 22.

13. „ Weitere Beobachtungen an Gordius tolosanus und Mermis. — Arch. f. mikr. Anat., Bd. 37, 1891, p. 239, Tab. 12, Fig. 10.

14. „ Beobachtungen an Helminthen. — Arch. f. mikr. Anat., Bd. 39, 1892, p. 325, 15, Fig. 9, 10.

15. „ Über Mermis nigrescens. — Arch. f. mikr. Anat., Bd. 40, 1892 p. 498, Tab. 28, 20.

16. „ Das Genus Mermis. — Arch. f. mikr. Anat., Bd. 53, 1899, p. 149, Taf. 8.

17. „ Neue Beobachtungen an Helminthen. — Arch. f. mikr. Anat., Bd. 64, 1904, p. 484, Tab. 28.

18. „ Zur Anatomie des Genus Paramermis. — Zool. Anzeiger. Bd. 29, Nr. 12, 1906, p 393, Fig. 1.

19. „ Gordiiden und Mermithiden des königlichen Zoologischen Museums in Berlin. — Mitteilungen aus dem Zoologischen Museum zu Berlin. Bd. 3, H. 2, 1906, p. 243, Taf. 4, 5.

20. Man J. G. de: Materialien zur Wolga-Fauna, Zykow's. — Bulletin de Moscou. 1903, p. 51, Tab. 1. (Sec. de Man.)

21. Meissner G.: Beiträge zur Anatomie und Physiologie von Mermis albicans. — Zeitschr. f. wiss. Zool., Bd. 5, 1854, p. 207, Tab. 11 bis 15. Bd. 7, 1855, p. 144, 250. (Sec. Linstow O. v.)

22. Rauther M.: Beiträge zur Kenntnis von Mermis albicans Sieb. — Zool. Jahrb. Vol. 23. Anat. 1906.

23. Siebold Th. v.: Über die Fadenwürmer der Insekten. Eine Bitte an die Entomologen. — Stettiner entom. Zeit., Bd. 3, 1842, p. 146.
Erster Nachtrag. Ibid. Bd. 4, 1843, p. 78.
Zweiter Nachtrag. Ibid. Bd. 9, 1848, p. 290.
Dritter Nachtrag. Ibid. Bd. 11, 1850, p. 329.
Vierter Nachtrag. Ibid. Bd. 15, 1854, p. 103.
Fünfter Nachtrag. Ibid. Bd. 19, 1858, p. 325.

24. „ Beitrag zur Naturgeschichte der Mermithen. — Zeitschr. f. wiss. Zool., Bd. 5, 1854, p. 201.

25. Stiles: Note préliminaire sur quelques parasites. — Bullet. Soc. Zool. de France. 1891. Annee 16, p. 163.

26. STILES: Notes on Parasites II. — Journ. comp. Med. Weter. Arch. Vol. 13, 1892, p. 523, Fig. 9—12. (Sec. KOHN F. G.)

27. LEIDY I.: Proceed. Acad. Philadelphia. T. 5, 1852, p. 263. T. 8, 1857, p. 58. (Sec. LINSTOW O. v.)

28. RAUTHER M.: Morphologie und Verwandtschaftsbeziehungen der Nematoden und einiger ihnen nahe gestellter Vermalien. — Ergebnisse und Fortschritte der Zoologie. Bd. 1, 1909, p. 491, Fig. 1—21.

## Erklärung der Abbildungen.

### Tafel I.

Fig. 1. *Limnomermis bathybia* DAD. ♀ Mundende von der Seite. REICH. Oc. 6. Obj. 4.

„ 2. „ „ „ ♀ Schwanzende von der Seite. REICH. Oc. 6. Obj. 4.

„ 3. „ „ „ ♀ Durchschnitt der Körperkutikula. REICH. Oc. 6. Obj. 7.

„ 4. „ „ „ ♀ juv. Schwanzende von der Seite. REICH. Oc. 6. Obj. 4.

„ 5. „ „ „ ♀ Vagina von der Seite. REICH. Oc. 6. Obj. 2.

„ 6. „ „ „ ♂ Schwanzende von der Seite. REICH. Oc. 6. Obj. 4.

„ 7. *Limnomermis limnobia* DAD. ♂ Mundende von der Bauchseite. REICH. Oc. 6. Obj. 4.

„ 8. „ „ „ ♀ Vagina von der Seite. REICH. Oc. 6. Obj. 2.

„ 9. „ „ „ ♀ Schwanzende von der Seite. REICH. Oc. 6. Obj. 4.

„ 10. „ „ „ ♂ Schwanzende von der Seite. REICH.

„ 11. *Limnomermis limnetica* DAD. ♂ Mundende von der Seite. REICH. Oc. 6. Obj. 7.

„ 12. „ „ „ ♀ Mundende von der Seite. REICH. Oc. 6. Obj. 4.

„ 13. „ „ „ ♂ Schwanzende von der Seite. REICH. Oc. 6. Obj. 4.

„ 14. „ „ „ ♀ Vagina von der Seite. REICH. Oc. 6. Obj. 4.

„ 15. „ „ „ ♀ Schwanzende von der Seite. REICH. Oc. 6. Obj. 4.

### Tafel II.

„ 1. *Limnomermis acuticauda* DAD. ♂ juv. Mundende von der Seite. REICH. Oc. 6. Obj. 4.

Fig. 2. *Limnomermis acuticauda* Dad. ♂ juv. Schwanzende von der Seite. Reich. Oc. 6. Obj. 4.

„ 3. *Limnomermis curvicauda* Dad. ♂ juv. Mundende von der Seite. Reich. Oc. 6. Obj. 4.

„ 4. „ „ „ ♂ juv. Schwanzende von der Seite. Reich. Oc. 6. Obj. 4.

„ 5. *Limnomermis ensicauda* Dad. ♀ juv. Mundende von der Seite.

„ 6. „ „ „ ♀ juv. Vagina von der Seite. Reich. Oc. 6. Obj. 4.

„ 7. „ „ „ ♀ juv. Schwanzende von der Seite. Reich. Oc. 6. Obj. 4.

„ 8. „ „ „ ♂ juv. Schwanzende von der Seite. Reich. Oc. 6. Obj. 4.

„ 9. *Limnomermis gracilis* Dad. ♀ juv. Mundende von der Seite. Reich. Oc. 6. Obj. 4.

„ 10. „ „ „ ♀ juv. Schwanzende von der Seite. Reich. Oc. 6. Obj. 4.

„ 11. „ „ „ ♀ juv. Vagina von der Seite. Reich. Oc. 6. Obj. 4.

„ 12. *Mesomermis Zschokkei* Dad. ♂ Mundende von der Seite. Reich. Oc. 6. Obj. 4.

„ 13. „ „ „ ♂ Schwanzende von der Seite. Reich. Oc. 6. Obj. 4.

„ 14. *Limnomermis uncata* Dad. ♀ juv. Mundende von der Seite. Oc. 6. Obj. 4.

„ 15. „ „ „ ♀ juv. Schwanzende von der Seite. Oc. 6. Obj. 4.

Tafel III.

„ 1. *Mesomermis lacustris* Dad. ♂ Mundende von der Seite. Reich. Oc. 6. Obj. 7.

„ 2. „ „ „ ♂ Schwanzende von der Seite. Reich. Oc. 6. Obj. 4.

„ 3. *Bathymermis Fuhrmanni* Dad. ♀ Mundende von der Seite. Reich. Oc. 6. Obj. 7.

„ 4. „ „ „ ♀ Mundende von der Seite. Reich. Oc. 6. Obj. 7.

„ 5. „ „ „ ♀ Schwanzende von der Seite. Reich. Oc. 6. Obj. 2.

„ 6. „ „ „ ♀ Struktur der Körperkutikula. Reich. Oc. 6. Obj. 7.

„ 7. „ „ „ ♂ Schwanzende von der Seite. Reich. Oc. 6. Obj. 7.

„ 8. „ „ „ ♀ Vagina von der Seite. Reich. Oc. 6, Obj. 7.

| | |
|---|---|
| Fig. 9. *Bathymermis Fuhrmanni* Dad. | ♂ Mundende von der Seite. Reich. Oc. 6. Obj. 7. |
| „ 10. *Bathymermis helvetica* Dad. | ♀ Mundende von der Seite. Reich. Oc. 6. Obj. 2. |
| „ 11. „ „ „ | ♀ Mundende von der Seite. Reich. Oc. 6. Obj. 4. |
| „ 12. „ „ „ | ♀ Schwanzende von der Seite. Reich. Oc. 6. Obj. 2. |
| „ 13. „ „ „ | ♀ Vagina von der Seite. Reich. Oc. 6. Obj. 2. |
| „ 14. *Paramermis limnophila* Dad. | ♂ Mundende von der Seite. Reich. Oc. 6. Obj. 4. |
| „ 15. „ „ „ | ♂ Schwanzende von der Seite. Reich. Oc. 6. Obj. 4. |
| „ 16. *Bathymermis helvetica* Dad. | ♀ juv. Schwanzende von der Seite. Oc. 6. Obj. 4. |
| „ 17. *Hydromermis acuminata* Dad. | ♀ Vagina von der Seite. Reich. Oc. 6. Obj. 7. |

Tafel IV.

| | |
|---|---|
| „ 1. *Hydromermis acuminata* Dad. | ♀ Mundende von der Seite. Reich. Oc. 6. Obj. 7. |
| „ 2. „ „ „ | ♀ Schwanzende von der Seite. Reich. Oc. 6. Obj. 7. |
| „ 3. *Hydromermis annulosa* Dad. | ♀ Mundende von der Seite. Reich. Oc. 6. Obj. 4. |
| „ 4. „ „ „ | ♀ Struktur der Körperkutikula. Reich. Oc. 6. Obj. 7. |
| „ 5. „ „ „ | ♀ Schwanzende von der Seite. Reich. Oc. 6. Obj. 4. |
| „ 6. *Hydromermis bathycola* Dad. | ♀ Mundende von der Seite. Reich. Oc. 6. Obj. 4. |
| „ 7. „ „ „ | ♀ Mundende von der Seite. Reich Oc. 6. Obj. 7. |
| „ 8. „ „ „ | ♀ Schwanzende von der Seile. Reich. Oc. 6. Obj. 4. |
| „ 9. „ „ „ | ♀ Vagina von der Seite. Reich. Oc. 6. Obj. 2. |
| „ 10. *Hydromermis conura* Dad. | ♀ Mundende von der Seite. Reich. Oc. 6. Obj. 4. |
| „ 11. „ „ „ | ♀ Mundende von der Seite. Reich. Oc. 6. Obj. 7. |
| „ 12. „ „ „ | ♀ Vagina von der Seite. Reich. Oc. 6. Obj. 2. |

Fig. 13. *Hydromermis conura* DAD. ♀ Schwanzende von der Seite. REICH. Oc. 6. Obj. 4.

„ 14. *Eumermis gracilis* DAD. ♂ Mundende von der Seite. REICH. Oc. 6. Obj. 4.

„ 15. „ „ „ ♂ Struktur der Körperkutikula. REICH. Oc. 6. Obj. 7.

„ 16. „ „ „ ♂ Körperstück mit den lateralen Längswülsten von der Seite. REICH. Oc. 6. Obj. 4.

„ 17. „ „ „ ♂ Schwanzende von der Seite. REICH. Oc. 6. Obj. 4.

Sämtliche Figuren wurden mit dem Zeichenapparat angefertigt.

# I. NEUERE BEITRÄGE ZUR STRATIGRAPHIE DER TERTIÄRBILDUNGEN IN DER UMGEBUNG VON BUDAPEST.*

Nebst einigen Bemerkungen zu JULIUS HALAVÁTS: „Die neogenen Sedimente der Umgebung von Budapest".

Von I. LŐRENTHEY, korresp. Mitglied der Ungar. Akademie der Wissenschaften.

In neuerer Zeit machte ich gelegentlich meiner Exkursionen in der Umgebung von Budapest viele interessante geologische und paläontologische Entdeckungen. Eine im Mai 1910 unter dem Titel „Die neogenen Sedimente der Umgebung von Budapest"** von JULIUS HALAVÁTS erschienene Arbeit bewog mich, meine geologischen Neuigkeiten bald möglichst zu publizieren.

Bevor ich jedoch an die Besprechung meiner neueren Daten schreiten würde, erlaube ich mir einige Bemerkungen zu dieser Arbeit, damit die erste Kritik gerade vom Forum der Akademie ausgehe.

Verfasser behauptet in der Einleitung unter anderem, daß die mannigfaltige Umgebung von Budapest „immer und immer wieder studiert wird umsomehr, als sich hierzu in den künstlichen Aufschlüssen, welche durch die industrielle Regsamkeit geschaffen werden, beständig neue Gelegenheit bietet".

Später aber äußert er sich folgendermaßen: „Diese Stufen des Neogens sind in natürlichen Aufschlüssen: Wasserrissen, sowie in künstlichen Aufschlüssen: Eisenbahneinschnitten, in den Tongruben der Ziegeleien, in Schottergruben so häufig und so gut aufgeschlossen, daß sie aus den bisherigen Mitteilungen schon genau bekannt sind. So genau, daß diesmal nichts zu ihrer Kenntnis beigetragen werden kann, und ich mich hauptsächlich darauf

---

* Diese Arbeit erschien ungarisch in wenig abweichender Form — etwas kürzer — im Math. és Termtud Értesitö, Bd. XXIX, Heft 1—2, 1911.

** Diese Arbeit erschien deutsch im XVII. Bd. der „Mitteilungen aus dem Jahrbuch der kgl. ungar. geologischen Reichsanstalt" als von der Akademie preisgekröntes Werk.

beschränken muß, die verstreuten Daten zu sammeln und im Rahmen der neueren Auffassung von den neogenen Bildungen der Umgebung von Budapest ein einheitliches Bild zu entwerfen."

Verfasser bricht mit diesen beiden Zitaten selbst den Stab über seine Arbeit, denn wenn sich in den Aufschlüssen der Umgebung von Budapest beständig Gelegenheit zum Studium der in Rede stehenden Bildungen bietet, so ist es mehr als eine Versäumnis, wenn er sich — wie er erklärt — bloß darauf beschränkt, die verstreuten Daten zu sammeln, um so ein einheitliches Bild von den neogenen Sedimenten der Umgebung zu entwerfen.

Gute zusammenfassende Werke, von Fachleuten mit Kritik und Benutzung sämtlicher neuen Daten verfaßt, können der Wissenschaft sehr gute Dienste leisten, keineswegs aber kritiklose, mangelhafte und nicht fachgemäße Kompilationen. Daß aber die Arbeit Halaváts sogar als Kompilation sehr oberflächlich und schlecht ist, werde ich im weiteren mit reichlichen Daten nachweisen. Halaváts versucht in der Einleitung eine geschichtliche Übersicht über die Kenntnis des Neogens der Umgebung von Budapest zu liefern, doch reicht seine Kenntnis der Literatur bloß bis 1879 zurück, wo doch fast sämtliche Arbeiten, welche diese Bildungen systematisch und dem heutigen Stande der Wissenschaften gemäß besprechen, erst nach 1879 erschienen sind. Übrigens ist es einem Fachmanne, der seinen Gegenstand liebt und denselben mit der gebührenden Gewissenhaftigkeit behandelt, unerklärlich, daß eine im Mai 1910 abgeschlossene Arbeit, dessen vorwortartige Einleitung vom 28. Februar 1906 datiert ist, die Literatur bloß einigermaßen bis einschließlich 1903 in Betracht zieht.

Die Vernachlässigung der Literatur erstreckt sich vornehmlich auf jene Arbeiten, die Julius Halaváts infolge ihres Inhaltes unangenehm sind. Solche sind besonders die in den letzten Jahren von mir erschienenen Arbeiten, in denen die literarische Tätigkeit J. Halaváts auf ihren wahren Wert herabgesetzt wurde. Er fühlte das Gewicht der dort angeführten Wahrheiten, und da eine Verteidigung nicht möglich ist, übergeht er meine Bemerkungen mit Schweigen. Damit das Außerachtlassen meiner Arbeiten weniger auffalle, nimmt er auch von den übrigen nach 1903 erschienenen Aufsätzen keine Kenntnis. Trotzdem er jedoch z. B. meine Arbeit „Über das Alter der Schotter am Sashalom bei Rákosszentmihály“* und „Über die pannonischen und levantinischen Schichten von Budapest und deren Fauna“** betitelten Arbeiten nicht anführt, zählt er die in diesen Arbeiten niedergelegten Resultate dennoch auf — jedoch ohne Hinweis auf die Quelle.

Da also HALAVÁTS mit absichtlicher Umgehung der neueren Arbeiten bloß die ältere Literatur in Betracht zieht und auch diese — wie gezeigt werden soll — falsch, da er ferner die Steinbrüche und Sandgruben, die diese Bildungen aufschließen, nicht untersuchte, die sich täglich bietenden neuen Daten also gewissentlich nicht berücksichtigte, die alten Fehler aber nicht korrigierte, so liefert seine Zusammenstellung ein falsches Bild von dem Neogen der Umgebung von Budapest. In der Arbeit sind insgesamt die Daten von BÉLA VON ZSIGMONDY und Dr. A. FRANZENAU neu. ZSIGMONDY stellte ihm das Bohrmaterial und die Daten einiger Brunnen zur Verfügung, FRANZENAU aber bearbeitete die aus diesen Bohrungen zutage gelangten Foraminiferenfaunen. Die übrigen — nicht von FRANZENAU bestimmten — Foraminiferen sind der Arbeit keineswegs „im Rahmen der neueren Auffassung“ eingefügt, wie dies HALAVÁTS verspricht, sondern der neueren Auffassung gerade entgegengesetzt, wie später gezeigt werden soll. Daß aber die in der Arbeit HALAVÁTS’ enthaltenen Daten vor dem Erscheinen der Arbeit verstreut gewesen wären, wie er behauptet, entspricht der Wahrheit durchaus nicht. Dr. FR. SCHAFARZIK faßte in den Erläuterungen zum geologischen Kartenblatt „Umgebung von Budapest und Szentendre“ bereits alles zusammen, seither aber trug auch ich einiges zum Sammeln und zur Ergänzung dieser Daten bei.

Diese Arbeit J. HALAVÁTS’ war schon bei ihrem Erscheinen veraltet; wenn HALAVÁTS ein gewissenhaftes Werk hätte schaffen wollen, so hätte er einerseits die Literatur mit zahlreichen neuen Daten bereichern können, andererseits aber die teilweise von ihm reambulierte Karte der Umgebung von Budapest wesentlich verbessern können. Das interessanteste Ergebnis dieser Arbeit wäre

* Földtani Közlöny, Bd. XXXIV, 1904.

** Math. und naturwissensch. Berichte aus Ungarn, Bd. XXIV.

der Glaukoniensand und -sandstein, den HALAVÁTS aus dem Bohrbrunnen des Mátyásföld erwähnt. Eine ganze Seite lang schreibt er von diesen Bildungen (S. 340 des ungarischen Textes), ohne die Wichtigkeit der Glaukonien wahrzunehmen. Ja, da er die in Rede stehenden Bildungen trotz dieser guten Leitfossilien, statt in die Kreide in das Mediterran versetzt, muß man annehmen, daß es sich hier wieder um eine HALAVÁTSsche schlechte Genus-Bestimmung handelt.*

Meine kritischen Bemerkungen zu der Arbeit HALAVÁTS' will ich unter meinen eigenen neueren Beobachtungen anführen, da er keine einzige Bildung bespricht, über die ich nicht neuere und die bisherigen Kenntnisse modifizierende Daten besäße. Außer den neogenen Schichten erstrecken sich meine Beobachtungen jedoch auch auf die paläogenen Bildungen, und mit diesen will ich mich nun in erster Reihe befassen.

Auch erachte ich es als meine Pflicht der ungarischen Akademie der Wissenschaften für die Unterstützung, mit der sie meine Forschungen und Aufsammlungen so wirksam förderte, meinen besten Dank auszusprechen.

## 1. Ein neuerer Pteropodenhorizont innerhalb des Budaer Mergels.

Aus dem Paläogen Ungarns führte ich als erster Pteropoden auf und zwar im Jahre 1903 in einer „Pteropodenmergel in den alttertiären Bildungen von Budapest"** betitelten Arbeit. In diesem Aufsatz beschrieb ich den oberen, durch massenhaftes Auftreten von Pteropoden charakterisierten Horizont des Budaer Mergels vom S.-Fuße des Kissváb-berges und Rozsahügels sowie aus dem tiefen Graben im Farkasvölgy. Später erwähnt A. KOCH*** diesen Horizont vom Diana-út an der O.-Lehne des Nagysváb-berges und hinter dem Roten Kreuzspital unterhalb des Horizontes der Alkotásgasse, wodurch meine Annahme, daß der Pteropodenmergel

* In der deutschen Ausgabe der HALAVÁTSschen Arbeit (Mitteil. a. d. Jahrb. d. kgl. ungar. geol. R.-A., Bd. XVII. Heft 2) erscheint dieser Fehler durch den Redakteur ausgebessert. ** Földtani Közlöny, Bd. XXXIII.

*** Neuere Beiträge zu dem Vorkommen von Trachytmaterial in den alttertiären Ablagerungen des Budapester Gebirges (Földtani Közlöny, Bd. XXXVIII, S. 377).

in der oberen Partie des Budaer Mergels einen wohl charakterisierten und leicht kenntlichen Horizont bildet, bestätigt wurde. In diesem Horizont tritt eine Art der Gattung *Valvatella* in großer Anzahl auf. Meine neueren Forschungen ergaben auch aus den unteren Horizonten des Budaer Mergels Pteropoden, und zwar Balantiumarten.

Gegenüber der Ujlaker Ziegelei am Anfange des Szépvölgy wurden kürzlich interessante Aufschlüsse geschaffen. Der eine ist der Einschnitt der Pusztaszeristraße, der andere derjenige des auf letzteren senkrecht verlaufenden Zöldmáliweges. Beide schneiden sich in die aus Budaer Mergel bestehende Zöldmállehne ein. Es erschien mir notwendig, aus diesem Aufschluß Material zu sammeln und die sich hier darbietenden Daten für die Wissenschaft zu retten, noch bevor der Zahn der Zeit im Vereine mit der Kultur die aufgeschlossene Schichtenfolge vernichtet.


Fig. 1. Schichtenfolge der Pusztaszeri-Straße und des entsprechenden Teiles der Zöldmálistraße.

Beiliegende Fig. 1 veranschaulicht die N.-Wand der Pusztaszeristraße und die Schichtenfolge des gegenüber der Pusztaszeristraße gelegenen Abschnittes des Aufschlusses am Zöldmáliwege. Dieses Profil schließt in etwa 40 m Länge eine zusammenhängende, vollständige Schichtenreihe auf, in der weichere Mergelbänke (1 a—13 a) mit festen Kalkmergelbänken abwechseln (1—13). Die festen Kalkmergelbänke sind verhältnismäßig dünner als die weicheren mergeligeren Bänke; die letzteren betragen nämlich mit Ausnahme der Bank 11 a, welche 2,5—3 m mächtig ist, durchschnittlich ungefähr 1 m. Die festen Kalkmergelbänke sind im Durchschnitt 0,5 m mächtig mit Ausnahme der Bank 10, welche ebenfalls ungefähr 2,5—5 mächtig ist. Das Einfallen der Schichten ist N—S 25—30°.

Im Schlämmungsrückstand der weicheren Mergelbänke und in den Dünnschliffen der härteren Kalkmergelbänke kommen vorwiegend kleine Foraminiferen, wenig Bryozoen und Lithothamnien vor. Steinkerne von größeren Fossilien sind etwas seltener.

Hinsichtlich seiner Fossilführung zeichnet sich der mit 9a bezeichnete weichere Mergel, die untere Partie des Kalkmergels Nr. 10 sowie die mit 11a bezeichnete Mergelbank aus. In ersterem spielt besonders die Mikrofauna eine große Rolle, indem der Schlämmrückstand ganz erfüllt ist von ausgezeichnet erhaltenen Bryozoen und verhältnismäßig großen Foraminiferen. Durch ihre Größe zeichnet sich besonders *Verneuillina abnormis* HANTK. sp. aus, welche Art von HANTKEN unter dem Namen *Rhynchospira abnormis* als interessante neue Form beschrieben wurde.* HANTKEN bezeichnet diese Art als eines der am leichtesten erkennbaren und charakteristischsten Fossilien des Budaer Mergels und hebt hervor, daß er dieselbe im Budaer Mergel am Baugrunde des LÓNYAYschen Hauses auf der Albrechtstraße in großer Menge antraf. In Gesellschaft von *V. abnormis* HTK. sp. ist auch *Clavulina angularis* D'ORB var. *Szabói* HTK. häufig. Besonders reichlich und in großer Formverschiedenheit treten die Bryozoen auf, was für jene HANTKENsche Auffassung spricht, daß der Bryozoenmergel bloß eine Fazies des Budaer Mergels darstellt, nicht aber einen besonderen Horizont oder eine besondere Stufe. Hierfür spricht übrigens auch der Umstand, daß sich innerhalb des Budaer Mergelkomplexes Bryozoenhorizonte bzw. -fazies mehrfach wiederholen. In Dünnschliffen aus der unteren Partie der im Hangenden dieser lockeren Mergelschicht auftretenden festen Kalkmergelbank kommen große Bryozoen-, Lithothamnien und Foraminiferendurchschnitte fast ohne jede Bindesubstanz vor. *Balantien* kommen in der mit 11a bezeichneten Schicht bloß in der Form von schlecht erhaltenen Steinkernen vor; es ist wohl möglich, daß spätere Aufsammlungen besseres Material liefern werden, doch darf man sich diesbezüglich — in anbetracht der Zerbrechlichkeit der Gehäuse — keinen allzugroßen Hoffnungen hingehen. Unter solchen Umständen lassen sich diese Formen ebenso wie die von mir aus den höheren Schichten des Budaer Mergels beschriebenen Valvatellen nicht mit Sicherheit bestimmen. Meine zahlreichen Exemplare

* Die Fauna der *Clavulina Szabói*-Schichten. I. Teil: Foraminiferen, S. 63, Taf. VII, Fig. 17—19.

stimmen am ehesten mit dem von G. SEQUENZA* aus dem kalabrischen Pliozän beschriebenen *Balantium acutissimum* SEQU. überein. Insofern es an den mangelhaft erhaltenen Steinkernen und Abdrücken zu beurteilen ist, weichen die oligozänen Exemplare von Budapest von jenen aus dem Pliozän Kalabriens nur darin ab, daß sie etwas kleiner sind. Da jedoch die Exemplare von beiden Fundorten schlecht erhalten sind, vermag ich meine Form von *Balantium acutissimum* SEQU. nicht zu trennen. Es fand sich außerdem — in einigen noch schlechter erhaltenen Exemplaren — auch noch eine andere *Balantium*-Art vor, die wahrscheinlich neu ist. Diese fragmentaren Exemplare erinnern am ehesten an *B. Bellardii* AUD. sp., doch weichen sie auch von dieser Art ab, und zwar darin, daß die Zuwachstreifen kräftiger, die von der Spitze bis zur Mündung verlaufenden beiden Furchen aber mehr gegen die Mitte zu verschoben sind als bei *B. Bellardii* AUD.

In demselben, mit 11a bezeichneten weicheren Mergel sind auch Steinkerne und Eindrücke von größeren Mollusken nicht selten, doch sind diese leider kaum näher bestimmbar. In dieser Schicht fand ich die im Mittelländischen Meer auch heute noch lebende und im Eozän, Oligozän und Miozän überhaupt verbreitete *Terebratulina caput-serpentis* L. in einer prächtig erhaltenen Doppelklappe. Diesem Horizont verleihen besonders die Pteropoden Wichtigkeit.

Ich will diesen massenhaft auftretenden Pteropoden keine stratigraphische Wichtigkeit zuschreiben, sondern sie scheinen mir eher in paläontologischer Hinsicht interessant; diese Formen haben, ebenso wie die Bryozoen in fazieller Beziehung Wichtigkeit. Als Tatsache muß ich jedoch hervorheben, daß in diesem unteren Horizont des Budaer Mergels im Gegensatz zum oberen Pteropodenhorizont nicht *Valvatellen-*, sondern — wie erwähnt — *Balantium*-Arten auftreten. Balantien kommen massenhaft in den nahen norditalienischen miozänen Pteropodenmergeln und im Oligozän Mährens vor. Aus Ungarn war diese Gattung bisher meines Wissens unbekannt. Die Pteropoden werden in Ungarn im oberen Mediterran bloß durch wenige *Vaginellen*, im Budaer Mergel aber durch *Valvatellen* und diese *Balantien* vertreten.

* Le formazioni terziarie nella provincia di Reggio (Calabria) (Reale accademia dei lincei). Roma 1879, S. 276, Taf. XVI, Fig. 35.

## 2. Ein neuer Fundort von *Pectunculus obovatus*-Schichten.

Seitdem ich in meiner Arbeit über das Alter der Schotter am Sashalom bei Rákosszentmihály* nachgewiesen habe, daß die auf der von der kgl. ungarischen geologischen Reichsanstalt herausgegebenen geologischen Karte der Umgebung von Budapest als Mastodonschotter ausgeschiedenen Schotter von Rákosszentmihály untermediterran sind und daß dieselben unter durchschnittlich 20° gegen SW. einfallen, war ich stets bestrebt, nordöstlich davon die Liegenschichten zu entdecken. (Fig. 2.)

Vor vier Jahren eröffnete J. v. Borhy, Inspektor der Staatsbahnen, in seinem Weingarten in der Anna-Kolonie bei Rákosszentmihály, gegenüber dem Meierhofe Kisszentmihály, eine Ziegelei. In der Lehmgrube der Ziegelei fand ich bei meinem ersten Besuche keinerlei Fossilien, die einen Schluß auf das Alter dieser Ablagerung erlaubt hätten. Ich war daher sehr erfreut, als ich im Sommer 1910 von Herrn Universitätsassistenten Dr. G. Strömpl, der bei dem Studium der alten Donauterrassen nach Rákosszentmihály gelangte, vernahm, daß er in der besagten Grube zahlreiche *Pectunculus*-Exemplare gesammelt habe.

In Gesellschaft Herrn Strömpls besuchte ich dann alsbald, am 20. Juli, die Tongrube und nahm mit großer Freude wahr, daß in den tieferen, erst neuerlich aufgeschlossenen Schichten der chattische *Pectunculus obovatus* in großer Menge vorkommt. Seither besuchte ich die Grube öfters, um die Fauna der Schichten einzusammeln.

Ich konnte folgendes Profil feststellen:

1. Zu oberst in ungefähr 0,5 m Mächtigkeit humoser Sand.
2. Schotter mit Einsackungen 0,3 m.
3. Konkretionen führender Sand mit Schotterschnüren. Dies ist eine ungefähr 2,5 m mächtige Linse, die sich gegen N. vollkommen auskeilt, so daß dort die Schicht zwei unmittelbar dem tieferen
4. feinen Quarzsand auflagert, der durchschnittlich 1,5—2 m mächtig ist.
5. Wohlgeschichteter, in ungefähr spannweite Bänke gegliederter sandiger Ton, stellenweise Sandstein mit kalkig-eisenschüs-

* Földtani Közlöny, Bd. XXXIV, 1904.

sigen Konkretionen, dünneren-mächtigeren Quarzschotterlinsen. Es konnten, die in dem Probeschacht aufgeschlossenen Schichten mit eingerechnet, bisher sechs solche Linsen beobachtet werden. Zurzeit (Herbst 1910) ist diese Schichtenfolge der chattischen Stufe in einer Mächtigkeit von etwa 10 m aufgeschlossen. Die Schichten fallen unter 10—12° gegen SWS. ($14^h$) ein.

Die Schicht 1. ist unbedingt holozän, während die Schichten 2. und 3. wohl jedenfalls pleistozän sein dürften. Den feinen Quarzsand (4.) betrachte ich auf Grund mehrerer Echinidenstacheln und einem Exemplar von *Polymorphina digitalis* D'ORB. als untermediterran, und zwar als tiefsten Horizont des Anomiensandes. Der sandige Ton (5.) schließlich gehört auf Grund seiner Fossilien bereits in die chattische Stufe des Oligozäns. Dieser sandige Ton führt scheinbar keine größeren Fossilien, im Schlämmungsrest hingegen finden sich viel kleine Echinidenstacheln und wenige Foraminiferen. In den zwischengelagerten Sandsteinkonkretionen und feineren schotterigen Linsen, die sich zwischen den Schichten finden, gibt es Fossilien, doch sind dieselben dermaßen ausgelaugt, daß es keineswegs leicht ist, gut erhaltene Exemplare zu bekommen. Die oberste fossilführende Lage ist ein handflächenbreiter feinerer glimmeriger Sand, welcher einer Kalk- und eisenschüssige Konkretionen führenden Tonschicht unterlagert. Die zweite fossilführende Linse ist noch etwas dünner, dieselbe führt gröberen Schotter, unter denen sich auch solche von Haselnußgröße finden. Diese Linse liegt etwa zwei Meter tiefer als die erste. Noch einen Meter tiefer befindet sich die dritte schotterige Linse, welche etwa spannbreit ist. Die übrigen drei schotterigen, fossilführenden Linsen befinden sich je einen Meter tiefer und sind ca. handflächenbreit.

Aus den drei oberen fossilführenden Schichten sammelte ich folgende Fauna:

*Nonionina depressula* WALC. & JACOB sp. h.
*Polystomella crispa* L. s.
*Echinodermen*-Stacheln zieml. h.
*Perna* sp. ind. s.
*Anomia ephippium* L. var. *costata* BROCC. sehr s.
*Ostrea* 2 sp.
*Modiola* sp. ind. s.

**Nucula peregrina* DESH. h.
* „ *comta* GOLDF. s. s.
**Pectunculus obovatus* LAM. s. h.
**Cardium cingulatum* GOLDF. h.
* „ *thuenense* EYM.? s.
* „ *Sandbergeri* GÜMB. s. h.
**Tellina Nystii* DESH.
*Corbula carinata* DUJ. s. s.
*Lucina* sp. ind. Bruchstücke.
*Potamides (Tympanotomus) margaritaceum* BROCC. var. *calcaratum* GRAT. h.
*Bittium plicatum* BRUG. h.
*Natica* sp. ind. s.
*Tectura(?) tauroconica* SACCO (Steinkern aus der Sandsteinlinse) s.
*Balanus* sp. ind.
*Lamna (Odontaspis) cuspidata* AG. s.

Diese Ausbildung des Oligozäns stimmt vollkommen mit jener der Oligozänbildung von Verőcze überein, von welcher H. v. BÖCKH* betreffs des Vorkommens von *Pectunculus obovatus* LAM. berichtet, daß dieselben durchweg in den zwischen den sandig-tonigen Schichten vorkommenden Schotterlagen auftreten. Während also diese Formen den schotterigen Meeresboden bevorzugten, mieden die Foraminiferen denselben, und hiermit ist es zu erklären, daß hier in Gesellschaft von verhältnismäßig zahlreichen Mollusken Foraminiferen so spärlich vorkommen.

Der nächste bisher bekannte Fundort von *Pectunculus obovatus*-Schichten befindet sich an der Donau bei Gőd in der FLOCHschen Ziegelei, wo ebenfalls blauer sandiger Ton aufgeschlossen ist. Diese Schichten fallen gegen $15^h$ unter $10-15^0$ ein, das Einfallen stimmt also mit jenen der Schichten von Kisszentmihály überein.

Es ist nicht uninteressant, daß, während in den gleichalterigen Schichten von Buda nach H. v. BÖCKH unter 31 Arten 26 oligozän und 5 miozän, im Oligozän aber unter 19 Arten 10 oli-

* Die geologischen Verhältnisse der Umgebung von Nagymaros (Mitteil. a. d. Jahrb. d. kgl. ungar. geol. Anstalt, Bd. XIII, S. 21) 1899.

gozän und 9 miozän sind, hier bei Kisszentmihály unter den auch spezifisch bestimmbaren 15 Arten bloß die sieben mit Sternchen (*) bezeichneten Arten oligozän sind, während die übrigen auch in das Miozän hinaufreichen.

### 3. Neuere Beiträge zur Entwicklung und Verbreitung des unteren Mediterrans.

In meiner Arbeit über das Alter der Schotterablagerungen am Sashalom bei Rákosszentmihály habe ich nachgewiesen, daß die nach J. v. SZABÓ* von A. SCHMIDT** als pleistozän angesprochenen, auf der Karte der Umgebung von Budapest aber als Mastodonschotter ausgeschiedenen Schotterbildungen dieser Gegend untermediterran sind, und daß das untere Mediterran laut verschiedenen Brunnengrabungen in Rákosszentmihály mehrfach auch auf Grund von Fossilien nachgewiesen werden konnte. Was mir früher nicht gelungen ist, gelang mir neulich: nämlich in der „Ditrichischen“ Schottergrube am Sashalom in Rákosszentmihály charakteristische Fossilien zu finden. Ich sammelte hier:

*Ostrea gingensis* SCHLOTH? (Bruchstück) und
*Ostrea (Ostreola) miocucullata* SCHFF.?

Seit dem Erscheinen dieser Arbeit haben mich mehrere künstliche Aufschlüsse davon überzeugt, daß die Verbreitung des unteren Mediterrans in der Umgebung von Rákosszentmihály, Czinkota und Csömör viel größer bzw. viel mannigfaltiger ist als bisher angenommen wurde.

Betreffs der Verbreitung dieser Ablagerung ist auf Grund der bisherigen Literatur und der Karten nur soviel bekannt, daß das untere Mediterran in Form von drei nicht zusammenhängenden Inseln ausgebildet ist. Die eine befindet sich nordwestlich von Czinkota, die andere nördlich von Mátyásföld am linken Ufer des Sósbaches, die dritte aber in dem von mir beschriebenen Hügellande um Rákosszentmihály. Die in Rede stehende Arbeit HALAVÁTS' erwähnt nur die zwei ersten Vorkommen, da ihr Verfasser die nach 1893 erschienene Literatur dieses Gebietes nicht

* Die geol. und hydrogr. Verhältnisse der Quellen der Umgeb. v. Göd.
** Die geol. Verhältnisse von Czinkota (Földtani Közlöny, Bd. XXIII, S. 388).

kennt; solcherart ist ihm auch über das Burdigalien von Rákosszentmihály nichts bekannt, — wenigstens erwähnt er meine Publikation nicht, — obzwar er die Karte im Sinne meiner Arbeit ausführte.

Der am wenigsten übersichtliche der Aufschlüsse von Czinkota ist die nordwestlich von der Ortschaft zwischen der Landstraße und dem Teich befindliche Wand mit den ehemaligen Tongruben. Hier ist der mediterrane Sand unter den pannonischen Schichten, ja teilweise an Stelle der abgetragenen pannonischen Schichten mit Gras bewachsen und höchstens in 1 m Mächtigkeit als grünlicher Quarzsand aufgeschlossen.

An dieser Stelle sammelte ich folgende Faunula:

*Pecten* (*Aequipecten*) *praescabriusculus* FONT. s. h.
*Exogyra* (*Aetostrion*?) *miotaurinensis* SACCO s. h.
*Dentalium* sp. (ein Exemplar).

Gegenüber des Caprerabades, an der elektrischen Bahn, befindet sich ebenfalls eine Sandgrube, deren Fauna am reichsten ist; hier sammelte ich folgende Formen:

An *Dendrophyllien* erinnernde verwitterte Korallenstöcke
*Cidaris* (*Cyathocidaris*) *avenionensis* DESMOUL.
„ (*Plegiocidaris*) *Peroni* COTT.
*Pecten* (*Aequipecten*) *praescabriusculus* FONT. h.
„ (*Chlamys*) *gloriamaris* DUB.?
„ (*Macrochlamys*) *Tournali* SERR.?
„ sp. ind.
*Anomia ephippium* L. var. *costata* BROCC.
*Ostrea* (*Crassostrea*) *crassissima* LAM.
„ sp. ind. (Fragmente).
*Exogyra* (*Aetostrion*?) *miotaurinensis* SACCO. s. h.
*Balanus* sp. ind.

Der größte und interessanteste Aufschluß befindet sich hier westlich vom Caprerabade in der großen Grube am Berge. Hier ist der Schotter durchschnittlich etwas grobkörniger, als an den bisher erwähnten Punkten oder den Aufschlüssen in Mátyásföld und stimmt in dieser Hinsicht mit den Schottern des Sashalomhügels umsomehr überein, als es auch hier stellenweise linsenförmige Konglomeratbänke gibt, ebenso wie am Sashalom. Diese härteren Bänke fallen unter 9—10° gegen S. ein. Der Schichtenkomplex ist in seinen oberen Partien bräunlichgelb und falsch geschichtet. Das Ganze wird von spannbreitem Humus bedeckt, in dessen unterem Teile zumeist grober Schotter vorkommt, welcher an dieser Stelle ausnahmsweise keine Säcke bildet; bloß einen einzigen Sack gibt es an der östlichen Steilwand.

Hier sammelte ich folgende Fauna:

*Pecten (Aequipecten) praescabriusculus* FONT.,
" *(Macrochlamys) Tournali* DE SERR.,
*Exogyra (Aetostrion?) miotaurinensis* SACCO,
*Oxyrhina xyphodon* AG. (ein Exemplar) und
abgerollte fossile Hölzer.

Die zweite Gruppe oder Insel von untermediterranen Schichten ist, wie bereits erwähnt, bei Mátyásföld ausgebildet und zwar ist die schon von A. SCHMIDT von der Steilwand bei Mátyásföld erwähnte Grube die älteste, die diese Schichten aufschließt. Diese Grube wurde von der Vizinalbahnunternehmung gelegentlich des Eisenbahnbaues eröffnet. Die Grube selbst befindet sich nördlich von Mátyásföld, an der nördlichen Seite der Landstraße Budapest—Czinkota, an der elektrischen Bahn. Das Mediterran wird hier von dem Einsackungen zeigenden Schotter überlagert. An der Grenze der beiden sieht man an der Nordwand der Grube größere Andesitstücke. So fanden sich hier unter anderem ein im Durchmesser $^3/_4$ m großer Amphibolandesitblock, außerdem mehrere Pyroxen- und Biotitandesitstücke.

An diesem Aufschluß sammelte ich:

*Pecten (Aequipecten) praescabriusculus* FONT.,
*Exogyra (Aetostrion?) miotaurinensis* SACCO.

Etwas weiter nordwestlich von diesem Aufschluß, ebenfalls am linken Ufer des Sóspatak, am Steilufer von Mátyásföld, gegenüber der Eisgrube und dem Ziehbrunnen gibt es noch zwei Sandgruben. Die östliche wurde vor zwei Jahren durch den Gastwirt in Czinkota, A. LANGFELDER, eröffnet und wird zurzeit durch die Häuserbau-A.-G. „Tuskulanum“ gepachtet. Die Sandschichten fallen unter 4—6° gegen SW. ein. Zu gleicher Zeit eröffnet wurde die etwas westlicher gelegene und an die vorige fast unmittelbar anstoßende

BENICZKYsche Sandgrube, in welcher die Schichten zu unterst unter 15° gegen SW. einfallen, während sie oben fast horizontal lagern. In den oberen Schichten finden sich große bimsteinartige Rhiolithtuffeinschlüsse, die ich noch besonders besprechen werde. Dieser mediterrane Sand wird stellenweise von 1—2,5 m mächtigem pleistozänen Schotter bedeckt. Im Mediterran zeigen sich ziemlich viel Fossilien, doch sind dieselben mit Ausnahme der Haifischzähne sehr ausgelaugt, schlecht erhalten. Die Fauna selbst ist überhaupt bloß hinsichtlich der Individuenzahl reich, an Gattungen, Arten ist dieselbe arm.

Bisher sammelte ich hier folgende kleine Fauna:

*Cidaris (Cyathocidaris) avenionensis* DESMOUL.
„ *(Plegiocidaris) Peroni* COTT.
*Pecten (Aequipecten) praescabriusculus* FONT. s. h.
„ *pseudo-Beudanti* BAST.? s. h.
*Exogyra (Aetostrion?) miotaurinensis* SACCO h.
*Ostrea digitalina* DUB.
*Turritella* sp.
*Balanus* sp. ind.
*Oxyrhina xyphodon* AG.
„ *Desorii* AG.
*Lamna (Odontaspis) elegans* AG.
„ „ cfr. *duplex* AG
„ „ *cuspidata* AG.
„ „ *subulata* AG.
An *Dendrophyllien* erinnernde verwitterte, zerfallende Korallen.
Abgerollte fossile Hölzer.

Weiter gegen NW. in dem aufgelassenen SCHOSSBERGERschen Grubeneinschnitt finden wir auf einer Strecke von einigen hundert Metern gröberen Sand aufgeschlossen, in welchem Fragmente einer großen Ostrea aus der Gruppe der *Ostrea gingensis* SCHLOTH. zu finden sind. Am nordwestlichen Ende des Aufschlusses ist das Liegende des Schotters in Form von etwa 3 m mächtigen Anomiensand aufgeschlossen.

Aus diesem sammelte ich die folgende kleine Fauna:

*Anomia ephippium* L. var. *costata* BROCC.
„ „ „ var. *aspera* PHIL.
„ „ „ var. *pergibbosa* SACCO.
*Pecten pseudo-Beudanti* BAST.? (Bruchstück)
„ *(Aequipecten) praescabriusculus* FONT.
*Balanus sp. ind.* (Bruchstück).

Die Aufschlußverhältnisse dieser Schicht sind nicht die günstigsten, soweit man jedoch die Verhältnisse überblicken kann, fällt dieser Anomiensand durchschnittlich gegen SW. ein. Auf dieses lockere Gestein ist es wahrscheinlich zurückzuführen, daß sich das Gelände gegen N. verflacht. Der sogenannte Anomiensand war bisher in der näheren Umgebung von Budapest von der Oberfläche nicht bekannt.

In meiner des öfteren angeführten Arbeit über das Alter der Schotter am Sashalom habe ich nachgewiesen, daß in dem Brunnen des dortigen Forrásbades der Anomiensand in mehr als 36 m Mächtigkeit durchbohrt wurde. Daß derselbe auch an der Oberfläche in beträchtlicher Mächtigkeit vorhanden ist, das zeigt die Fortsetzung des Profils. Wenn man nämlich auf dem Fahrweg südöstlich von der Dőrzsukallee an das rechte Ufer des Sósbaches oder des Szilastales überschreitet, so findet man dort in einem seichten Einschnitt des auf den Hügel führenden Fahrweges tonigen Sand aufgeschlossen, aus welchem ich Anomienfragmente sammelte. An der Ostlehne dieses Hügels, in der Grube der Ziegelei von Kisszentmihály ist ebenfalls der Anomiensand und dessen Liegendes, der im vorigen Abschnitt besprochene *Pectunculus obovatus*-Ton aufgeschlossen.

Dieses Profil ist im großen ganzen mit dem von H. v. BÖCKH beschriebenen Profil von Verőcze identisch, indem im Aufschlusse oberhalb des Bahnwächterhauses Nr. 4 östlich von Verőcze ebenfalls Anomiensand unmittelbar über den *Pectunculus obovatus*-Schichten folgt, dann eine schotterige Schicht mit *Cyrena semistriata* und *Potamides plicatus,* welche hier nicht auftritt, schließlich hierauf der auch hier sehr verbreitete schotterige Sand mit *Pecten praescabriusculus* FONT.

Weiter gegen NO., auf dem Acker südlich von dem gegenüber der Ziegeleigrube gelegenen Meierhof, an der Straße von

Árpádtelep nach Czinkota, fand ich aufgepflügte Sandsteinblöcke. Diese führen zwar keine bestimmbaren Fossilien, doch möchte ich aus den vielen Fossilspuren und Eindrücken auf das obere Oligozän schließen. In diesem Falle würden diese, Sandsteinlinsen führenden Schichten das Liegende der Bildungen in der Ziegeleigrube darstellen. Dies ist umso wahrscheinlicher, als in dem Tone stellenweise ebenfalls fossilführende Sandsteinlinsen vorkommen. Östlich von hier muß eine Dislokationslinie angenommen werden, was auch durch jene meine interessante Entdeckung unterstützt wird, daß der Sand und das Konglomerat, welches in der Sandgrube am nördlichen Ende von Csömör aufgeschlossen ist, keine brackische Bildung der pannonischen Stufe, wie J. BÖCKH, der Aufnahmegeologe von Csömör und Umgebung auf der geologischen Karte der Umgebung von Budapest ausschied und wie auch FR. SCHAFARZIK gelegentlich der Reambulation übernahm, sondern ein untermediterranes Meeressediment, und zwar Anomiensand ist. Das Fallen ist hier — wie es scheint infolge von geringeren lokalen Störungen — schwer zu bestimmen. Diese Schichten scheinen mit den Anomien führenden Bildungen der Gruben von Rákosszentmihály eine flache Antiklinale zu bilden, obzwar die Schichten hier etwas sanfter einfallen, und zwar unter 8—10° gegen O. oder etwas gegen ONO.

Hier sammelte ich folgende meist schlecht erhaltene oder in Form von Steinkernen oder Eindrücken erhaltene Fossilien:

Ein unbestimmbarer Koralleneindruck.
*Lunulites* sp. einige Eindrücke und Steinkerne.
*Hemithyris De Buchi* MICHT. sp. var. *perumbonata* SACCO.?
*Anomia ephippium* L. var. *costata* BROCC. (einige Exemplare).
*Ostrea* sp. Fragmente.
*Pecten* sp. (cfr. *gloriamaris* DUB.)
*Turritella* sp. (cfr. *imbricataria* LAMK.?)
*Oxyrhina xiphodon* NOETH. (non AG.)?

Obzwar diese Formen infolge ihrer schlechten Erhaltung nicht sicher zu bestimmen sind, zeigt diese Fauna doch, daß wir es hier mit keiner pannonischen Bildung zu tun haben, wie bisher allgemein angenommen wurde, sondern mit Meeressedimenten, die gegen W. mit dem übrigen marinen Neogen in Verbindung stehen.

Eines der hauptsächlichsten Resultate meiner Exkursionen ist die Richtigstellung des Alters dieser Bildung, wodurch auch unsere Kenntnisse betreffs der Verbreitung des Burdigaliens und der pannonischen Stufe eine Veränderung erfuhren.

Nach allem ist es natürlich, daß auch die der in Rede stehenden Arbeit HALAVÁTS' beigefügte Karte falsch ist, da dieselbe nicht nach eigenen Erfahrungen, sondern auf Grund von kritikloser Übernahme der Angaben in der Literatur entworfen wurde, wo doch HALAVÁTS' nach aufmerksamer Besichtigung der vor mehr als 50 Jahren eröffneten Grube westlich von Csömör kaum pannonische Bildungen ausgeschieden hätte, sondern die östliche Grenze des Burdigalien bis Csömör und Czinkota ausgedehnt hätte.

Auf Grund dieser meiner Beobachtungen müssen auf der geologischen Karte der Umgebung von Budapest an Stelle des Flugsandes zwischen den mediterranen Inseln in der Umgebung von Mátyásföld, Rákosszentmihály und Czinkota die Schichten des unteren Mediterran bzw. der chattischen Stufe ausgeschieden und so diese Inseln miteinander verbunden werden; ferner muß das untere Mediterran bis Csömör ausgedehnt werden.

Auf Grund meiner Untersuchungen erfährt die Karte jedoch nicht bloß auf dem Gebiete zwischen Rákosszentmihály und Csömör wesentliche Veränderungen, sondern auch in Mátyásföld und südöstlich von Rákosszentmihály.

In Mátyásföld ist nämlich in dem Brunnen des östlichsten in Bau begriffenen Hauses an dem zur Felsőmalom führenden Wege 1 m brauner humoser Flugsand, dann unter ungefähr 2,5 m mächtigem gelben Sand in mehr als 10 m Mächtigkeit derselbe grünlichweiße Sand aufgeschlossen, welcher in den Sandgruben am linken Ufer des Sósbaches freigelegt ist. Der Sand ist auch hier erfüllt mit Schalen von:

*Pecten (Aequipecten) praescabriusculus* FONT. und
*Exogyra (Aetiostrion?) miotaurinensis* SACCO.

HALAVÁTS erwähnt von Mátyásföld ebenfalls einen Bohrbrunnen, welcher 194,30 m tief ist und welcher nach ihm 1 m

Holozän, 15,40 m blauen Sand und dunklen tonigen pannonischen oder wie er sich fälschlich ausdrückt, pontischen Sand und in 177,90 m Mächtigkeit burdigalenische Bildungen aufschließt.

Obzwar er aus dem pannonischen Ton und tonigen Sand keine Fossilien anführt, die seine Bestimmung bekräftigen würden, will ich auf Grund der Ähnlichkeit in den petrographischen und Lagerungsverhältnissen dieser Bildung mit jenen im nahen Czinkota, diese Schichten tatsächlich als pannonische ansehen. In dem von mir weiter oben besprochenen Brunnenprofil fehlt die pannonische Stufe, trotzdem der Punkt nur um weniges nordöstlich von dem von HALAVÁTS beschriebenen Bohrbrunnen liegt, und so muß hier die nordöstliche Grenze des Pannonischen zwischen den zwei in Rede stehenden Brunnen gezogen werden, was für die Unrichtigkeit der HALAVÁTSschen Karte samt dem pannonischen Vorkommen bei Csömör spricht.

Aus dem Quarzsande unter den pannonischen Schichten erwähnt HALAVÁTS bereits Fossilien, und zwar *Glauconien*, die nach unseren bisherigen Kenntnissen für die Kreide charakteristisch sind; trotzdem aber stellt HALAVÁTS diese glaukonienführenden Schichten ins Burdigalien. Hieraus erhellt, daß entweder die in Rede stehenden Schichten nicht zum Neogen gehören, sondern zur Kreide, oder die paläontologische Bestimmung falsch ist. In betracht auf die im benachbarten Czinkota festgestellte Tatsache, daß die pannonischen Sedimente unmittelbar über den Schichten mit *Pecten praescabriusculus* FONT. folgen, sowie mit Rücksicht darauf, daß in dem von mir soeben besprochenen Brunnen ebenfalls dieser Pecten führende Sand aufgeschlossen ist, muß angenommen werden, daß wir einer falschen paläontologischen Bestimmung gegenüber stehen; das Kreidefossil muß sich also ebenso wie früher einmal die falschen jurassischen Angaben aus der Fossilliste der Umgebung von Budapest streichen.

Eine meiner wichtigsten Beobachtungen ist die, daß ich auch das Verbindungsglied der mediterranen Inseln von Rákosszentmihály und Mátyásföld bzw. Sósbache entdeckte, und zwar in Form von sehr interessanten Schichten, deren Verhältnis zueinander und zu den übrigen älteren und jüngeren Bildungen in Figur 2 veranschaulicht wurde.

In der zu Czinkota gehörigen Kolonie Felső-Mátyásföld wurde in der Margit-Gasse ein Brunnen gegraben, aus welchem ich aus 13,5 m Tiefe unter gröberem Sand von J. KARDOS feinen, glimmerreichen Sand erhielt, in welchem *Salicornaria farciminoides* JOHNST. und winzige Echinidenstacheln in großer Menge vorkommen. Außerdem fand ich darin:

Ostrakoden,
*Antedon* sp. Armglieder,
*Monactinellen-Spicula* und Skeletteile von Kieselspongien,
*Ventriculites* sp. indeterminata,
*Polystomella crispa* L. s. h.
„ *macella* F. M. sp.
*Textularia gramen* D'ORB.?
*Miliolina (Quinqueloculina)* sp.
*Heterolepa Dutemplei* D'ORB. sp. usw.

Dem hier vorherrschenden Einfallen der Schichten nach zu urteilen lagert dieser feine, *Salicornaria* führende Sand über dem groben Sand mit *Pecten praescabriusculus* und unter dem westlich aufgeschlossenen, Spongien-Spicula führenden Sande. Diese Spongienschichten traf ich im nordöstlichen Teil der Ehmankolonie in dem Brunnen des Hauses Petőfigasse 24 und des nicht nummerierten Baugrundes von ALEXANDER SZERGI in der Szt. Istvángasse unter dem humosen Flugsand mehrere Meter mächtig als feinen grünlichen Sand an, in welchem bald mergelige Schnüre, bald Sandsteinlinsen vorkommen. Dieser ganze sandige Schichtenkomplex, besonders jedoch dessen untere Partie, ist erfüllt mit Spicula und Skeletteilen von Spongien.

Unter den bisher erwähnten Ablagerungen sind diese Spongienschichten am interessantesten, da bisher aus den tertiären Sedimenten Spongien nicht bekannt wurden, während hier solche in großer Menge vorkommen.* In dieser interessanten Fauna sind

* Neuerdings erwähnte E. NOSZKY, Professor am Obergymnasium in Késmárk, in der Fachsitzung der Ungarischen Geologischen Gesellschaft am 4. Januar 1911 aus dem Komitat Nógrád eine untermediterrane Bildung, in welcher er Spongien-Spicula fand. Später (1912) publizierte er darüber unter dem Titel „Daten zur Geologie der Mátra“, Jahrb. d. kgl. ung. geol. R. A. f. 1910.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

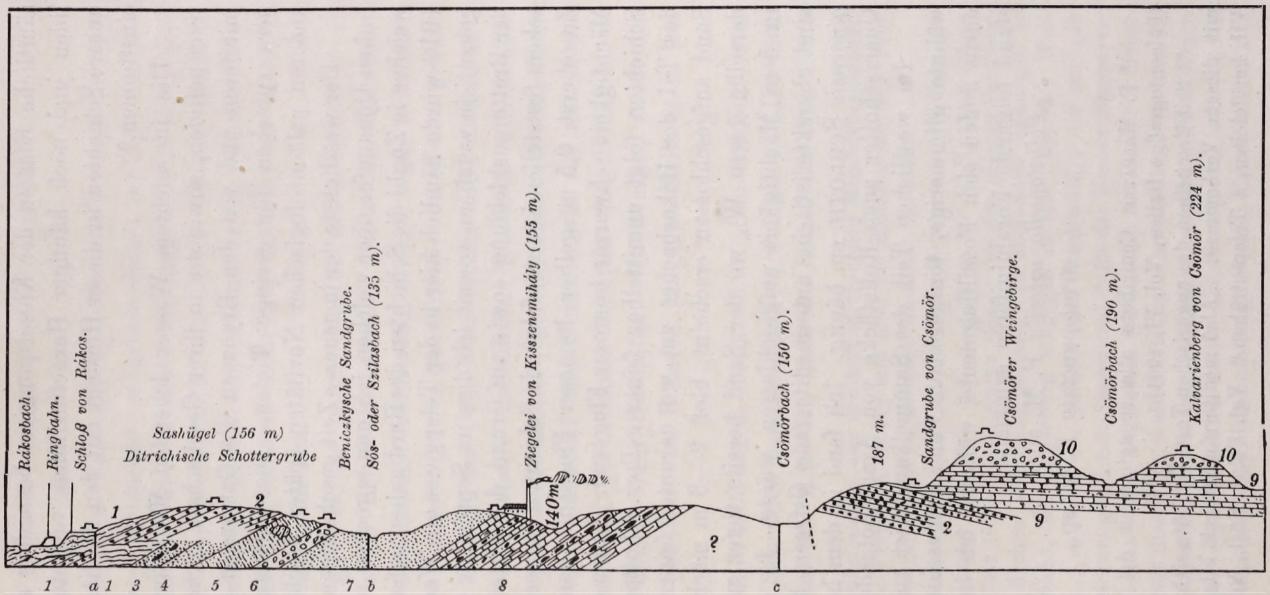



Fig. 2. Überhöhtes Profil des Hügellandes von Rákosszentmihály-Csömör (Länge 1 : 70000, Höhe 1 : 2000), welches das Gebiet bis zum Weingebirge bei Csömör in südwest—nordöstlicher Richtung, dann in nordwest—südöstlicher Richtung 1. Bimstein führender Dazittuff, 2. untermediterraner Schotter und Konglomerat, 3. Spongien führender feiner Sand mit kalkigen Sandsteinlinsen, 4. Bryozoen führender feiner Sand, 5. gröberer Sand mit Pect. praescabriusculus und Dazittuff-Einschlüssen, 6. grober Sand mit Ostreen, 7. feiner Anomiensand, 8. Pectunculus obovatus-Ton, Sand mit Sandsteinlinsen, 9. Oberpannonischer Ton, toniger mergeliger Sand und Sandstein mit Congeria Partschi, 10. levantinischer? Schotter. *a, b, c* Dislokationslinien.

sämtliche Klassen der Kieselspongien, besonders aber Tetractinelliden und noch häufiger Hexactinelliden vertreten, so daß diese unsere Schichten in dieser Hinsicht mit den norditalienischen übereinstimmen.*

Die in seichtem Wasser lebenden Monactinelliden und Tetractinelliden, sowie die in ihrer Gesellschaft vorkommenden Foraminiferen und von den Bryozoen die Gattungen *Crisia* und *Hornera* sprechen für geringe Tiefen. Diese Fauna will ich samt anderen paläontologischen Novitäten später beschreiben.

Der westlichste der in neuerer Zeit geschaffenen Aufschlüsse, am linken Donauufer über welchen ich nun sprechen möchte, ist jener, welcher in Zugló die Schichten des Burdigalien aufschließt. Im Jahre 1910 wurde nämlich hier in der Telepgasse ein Wassersammelkanal gebaut, in welchem, soweit ich dies im September durch die Fugen der Bretterauskleidung sowie auf Grund der Mitteilungen des Aufsehers feststellen konnte, folgende Schichten aufgeschlossen sind:** Zu oberst 0,5 m gelber humoser Flugsand, dann in 0,5—1 m Mächtigkeit schwarzer humoser Flugsand. Unter diesen alluvialen Schichten folgt unmittelbar feiner gelber Schotter, welcher gegen das Tal des Rákosbaches zu, wo darunter feiner blauer, toniger Sand aufgeschlossen erscheint, bloß 2—3 m mächtig ist, während derselbe gegen W., wo der Sand bereits tiefer zu liegen kommt, in 5 m Mächtigkeit aufgeschlossen wurde. In diesem Schotter sind charakteristische untermediterrane Ostreen, besonders *Ostrea gingensis* SCHLOTH. sp. häufig. Ich fand in dem herausgeworfenen Quarzschotter auch Rollstücke von Amphibolnadesit.

Im westlichen Teil des Sammelkanals ist zu unterst der erwähnte glimmerige, tonige blaue Sand aufgeschlossen (2—3 m), darin finden sich Fossilfragmente, während ich im Schlämmrückstand folgende Foraminiferen sammelte:

*Polystomella macella* F. M. sp.,
„ *striatopunctata* F. M. sp.,

* P. MALFATTI, Contributo alla spongiofauna del cenozoico italiano (Paleontografica Italica, Vol. VI, 1901).

** Seit Erscheinen des ungarischen Textes befaßte sich auch Dr. A. VENDL mit diesem Vorkommen. „Alsó mediterrán rétegek kibukkanása a főváros VII. kerületében, a Telep-utrában.“ Vgl. Földt. Közl., Bd. XLI, S. 47.

*Rotalia Beccarii* L. sp.,
*Miliolina* sp. usw.

Nachdem ich meine Beobachtungen betreffs des unteren Mediterrans am linken Donauufer mitgeteilt habe, erübrigt es noch einige Beobachtungen über dieselbe Bildung in der Umgebung von Budafok zu besprechen, nicht als ob das Thema damit erschöpft wäre, wie dies HALAVÁTS schon vor Erscheinen dieser meiner Arbeit annahm, sondern mehr nur deshalb, um damit zu weiterem Forschen anzuregen.

HALAVÁTS gliedert das untere Mediterran, nachdem er als Hauptverdienst seiner Arbeit hervorhebt, daß er die Kenntnisse in den Rahmen der neueren Auffassung einfügt, nach westlichem Muster in zwei Horizonte, in Aquitanien und Burdigalien. In den ersteren stellt er auf Grund der bereits 1894 erschienenen Arbeit FUCHS'* die Horner** und Molter Schichten mit *Cardium Kübecki* HAUER sp. und *Pectunculus (Axinea) Fichteli* DESH., ferner die Schichten von Loibersdorf und Korod sowie die mit diesem gleichalte untere Partie der feinen Schotter von Budafok; die Gauderndorfer, Eggenburger Schichten, den Schlier, sowie den oberen Teil der Schotter von Budafok hingegen stellt er in letzteren.

Schon im Jahre 1903 zog R. HOERNES im „Bau und Bild Österreichs“ all diese Schichten zum Burdigalien, welches von DÉPERET aufgestellt worden ist. Auch ich finde auf Grund der Aufschlüsse

---

* FUCHS, Tertiärfossilien aus den kohlenführenden Miozänablagerungen der Umgebung von Krapina Radoboj und über die Stellung der sog. aquit. Stufe (Mitt. a. d. Jahrb. d. Kgl. ungar. geol. Anst. Bd. X, 1894).

** Über die Horner Schichten sagt SCHAFFER in seiner Arbeit über „das Miozän von Eggenburg“ (Abhandl. d. k. k. g. R.-A. Bd. XXII, 1910) folgendes: „In früherer Zeit ist in der Literatur immer von den ‚Horner Schichten‘ und dem ‚Horner Becken‘ die Rede gewesen, da aber diese Bildungen bei Horn überhaupt nicht, bei Eggenburg hingegen in sehr typischer Weise entwickelt sind . . ., so ist es nur gerecht und zweckmäßig, die alte ganz unbegründete Bezeichnung fallen zu lassen und dafür den Namen ‚Eggenburg‘ zu setzen. Vom Namen selbst abgesehen, wurden die als Horner Schichten bezeichneten und mit diesen gleichalten Bildungen bereits lange vor dem Erscheinen der HALAVÁTSschen Arbeit zum Burdigalien gestellt, wohin übrigens HALAVÁTS die Eggenburger Schichten stellt. Da diese jedoch mit den sog. Horner Schichten identisch sind, ist diese Zergliederung HALAVÁTS' hinfällig.

von Budafok und meiner Studien keine Veranlassung, diese Sande in zwei Teile zu gliedern und den einen Teil in die aquitanische, den anderen in die burdigalenische Stufe zu stellen.

Da die Arbeit HALAVÁTS' nicht auf Grund von Arbeiten im Felde verfaßt worden ist, da ferner die Aufschlüsse auf unseren Karten nicht ausgesteckt wurden, einige derselben aber bereits zu verschwinden beginnen, dürfte es angezeigt, ja sogar nötig sein, einiger derselben mit wenigen Worten zu gedenken, und damit die zahlreichen Lücken der HALAVÁTSschen Arbeit auszufüllen.

Am nördlichen Ende von Budafok, oberhalb den letzten Häusern, befindet sich eine außer Betrieb gestellte und deshalb bereits mit Gras bewachsene Sand- bzw. Schottergrube, in welcher feinerer oder gröberer Quarzschotter aufgeschlossen ist, stellenweise mit grobem Konglomerat und gröberen Sandlinsen. Fossilien sind nicht häufig, ausgelaugt und deshalb schwer zu sammeln. Am besten erhalten sind sie noch in den Konglomeratbänken, in denen besonders:

*Pecten pseudo-Beudanti* DEP. & ROM.

und

*Balanus concavus* BRONN

häufig sind.

An der nordöstlichen Wand der Grube ist unten unter den Schottern in einer Mächtigkeit von einigen Metern grünlicher glimmeriger Mergel mit Fischspuren mit Steinkerne von *Xenophora* und *Calyptraea* aufgeschlossen, in welchem ich einen Cephalothorax von

*Neptunus* cfr. *convexus* RISTORI

sammelte.

In demselben Horizont wie diese Grube befindet sich, um weniges nördlicher an der Berglehne, die zweite Gruppe, an deren Basis eine etwa $1/2$ m mächtige Ostreenbank aufgeschlossen ist, die aus den Schalen von

*Ostrea (Crassostrea) crassissima* LAM.

aufgebaut zu sein scheint. Zwei, drei Meter höher fanden wir vor einigen Jahren in dem auffallend weißen Quarzschotter einen fast ganz zu Wachsopal umwandelten Stamm von

*Platanium purosum* FELIX.?

TH. FUCHS erwähnt von Gauderndorf, aus dem Aufschluß an dem nach Kattau führenden Feldweg, welcher die nach Horn führende Straße kreuzt, ebenfalls eine Bank von *Ostrea crassissima.*

Während der Drucklegung dieser Arbeit fand ich im Hofe des HAASZschen Wirtshauses zur „Blauen Kugel" in Budafok, Péter-Pál-Gasse in der dort abgegrabenen Wand, sowie dem im Graben befindlichen Keller an der Grenze des groben Schotters und des tonigen Sandes eine solche ostreenführende Schicht, aus welcher *Ostrea crassissima* in Unmasse zutage gelangte. Die Fauna dieser Schicht ist die folgende:

*Ostrea (Crassostrea) crassissima* LAM.
„ *(Ostreola) miocucullata* SCHFF.
*Cidaris* sp. ind. Stachel.

Wenn wir auf der Fahrstraße weiter gegen Budaörs schreiten, so gelangen wir über dem Brunnen hinaus zur Mündung eines von Süden nach Norden ziehenden Grabens, wo sich an der südlichen Wand eine kleine Sandgrube befindet, aus welcher ich folgende Arten sammelte:

*Anomia ephippium* L. var. *costata* BROCH.
*Pecten pseudo-Beudanti* DEP. & ROM. Bruchstücke.
*Pecten (Manupecten) crestensis* FONT. var. *laevis* SCHFF.
*Pectunculus (Axinea) Fichteli* DESH.
*Ancillaria (Baryspira) glandiformis*, LAM. var. *dertocallosa*, SCC.

Zwischen dem gröberen Sand, welcher in dem steilwandigen, allmählich mehr und mehr überwucherten Graben aufgeschlossen ist, sind Sandstein und feinere Sandlinsen gelagert. Der Sandstein ist stellenweise förmlich ein Konglomerat von *Pecten (Aequipecten) praescabriusculus* FONT. und *Anomia ephippium* L. var. *pergibbosa* SACCO. Die petrographische Beschaffenheit des feinkörnigen eisenschüssigen Sandes konserviert auch die zerbrechlichen Schalen vollkommen. So gelang es mir, eine vollkommen erhaltene rechte (untere) Klappe von Anomia zu finden, welche meines Wissens das erste Exemplar aus Ungarn ist. Aus dem gröberen und feineren Sande sammelte ich folgende Fauna:

*Pecten pseudo-Beudanti* DEP. & ROM. *var. rotundata* SCHFF.
„ „ „ „ „ *nov. var.?*

*Pecten (Manupecten) crestensis* FONT. *var. laevis* SCHFF.
„ *(Aequipecten) praescabriusculus* FONT.
„ *(Amussiopecten) gigas* SCHLOTH.
„ „ „ „ *var. plana* SCHAFF.
*Avicula sp.* ind.
*Anomia ephippium* L.
„ „ *var. squamula* L.
„ „ *var. ornata* SCHFF.
„ „ *var. aspera* PHIL.
„ „ *var. costata* BROCC.
„ „ *var. ruguloso-striata* BROCC.
„ *rugosa* SCHFF.
*Ostrea lamellosa* BROCC.
„ *fimbriata* GRAT.
„ „ „ *var. crassa* SCHFF.
„ *gingensis* SCHLOTH.
„ *(Crassostrea) crassissima* LAM.
„ „ „ *var.* anom. *compressula* SACCO.
„ *(Cubitostrea) frondosa* DE SERR.
*Lithodomus?* (Wohnungsröhre in Ostrea).
*Pectunculus (Axinea) Fichteli* DESH.
*Dosinia exoleta* L.
*Venus Haidingeri* HÖRN.
*Tellina planata* L. *var. lamellosa* D. C. G.? (Fragment).
*Mactra Bucklandi* DEFR.? (ein schlecht erhaltener Steinkern).
*Lutraria (Eastonia) mitis* MAY.? (Fragment).
*Xenophora Deshayesi* MICHT. *sp.?* (Steinkerne).
*Balanus concavus* BRONN.
„ *nov. sp.?* (vgl. *stellaris* BR. *sp.*).

Gegen sein Ende zu wird dieser Graben breiter und hier in dem auch heute gegrabenen, fossilarmen Sande sind fossile Hölzer häufig.

Die bisher erwähnten Aufschlüsse waren bisher in der Literatur unbekannt. Um weniges westlich von diesem Aufschluß befindet sich der zweite tiefe Graben, welcher, da er in der Literatur schon längst bekannt war, auch von HALAVÁTS erwähnt wird, indem er auf Grund des in der Sammlung der Kgl. ungar. geologischen Reichsanstalt aufbewahrten Materials, die aus dem Graben bereits bekannte Fauna aufzählt. Die Bestimmung der Arten ist jedoch, wie sofort gezeigt werden soll, größtenteils veraltet.

HALAVÁTS sagt über diesen Aufschluß im „Nagyárok" bloß soviel, daß die Schichten des „aquitanischen" groben Schotters vom Gebirge weg gegen $13^h$ unter $25^0$ fallen, und daß hier die schönsten Fossilien zu sammeln sind. Zu der hier an „Fossilien armen" burdigalischen Stufe rechnet er bloß die obere Partie des Sandes, obzwar das Ganze in diese Stufe gehört; natürlich wäre diese Zusammengehörigkeit sofort augenfälliger, wenn der gleichförmige Sand oben und unten gleichmäßig fossilreich wäre.

Auch hier gibt es im Sand stellenweise Sandsteinlinsen. In einer solchen an der westlichen Wand des oberen Drittels des Grabens, um weniges vor der Abzweigung, fand ich an der Basis der Bildung eine Bank, welche ein wahres Konglomerat der Reste von

*Pecten (Aequipecten) praescabriusculus* FONT.
*Anomia ephippium* L. var. *pergibbosa* SACCC.
sowie „ „ „ „ *costata* BROCCH.

ferner untergeordneter

*Xenophora Deshayesi* MICHT. — Steinkernen

ist.

Also von lauter solchen Arten, die hier in der Umgebung von Budapest sozusagen Leitfossilien des Burdigalien sind. Unmittelbar unter dieser Sandsteinbank ist gelblicher, feiner, glimmeriger Quarzsand mit wenig feinem Schotter aufgeschlossen, welcher erfüllt ist mit

*Pectunculus (Axinea) Fichteli* DESH.

worunter auch mehrere solche Exemplare vorkommen, die Übergänge zu *vindobonensis* SCHFF. bilden (den eigentlichen Typus *vindobonensis* fand ich bisher nicht). Neben diesen kommen außerdem seltener vor:

*Pecten pseudo-Beudanti* DEP. & ROM.

und

*Anomia ephippium* L. var. *ornata* SCHFF.

Also durchwegs Formen, die stellenweise auch in den Eggenburger Schichten häufig sind.

Ich glaube, es ist ganz zweifellos, daß diese Schotter von Budafok in ihrer ganzen Masse in das Burdigalien gehören, und nicht, wie HALAVÁTS behauptet, teils ins Aquitanien.

Wenn man zu dem bisher Gesagten hinzunimmt, daß ich vor Jahren am Adlerberg bei Budafok auch den Bryozoenkalk des unteren Mediterrans entdeckte*, welcher in den dem Ostrea-crassissima-Schotter aufgelagerten sandigen Ton oder tonig-kalkigen Sandkomplex mehrfach eingelagert und an der südlichen Wand der Péter-Pál-Gasse auch heute noch aufgeschlossen ist, worüber HALAVÁTS freilich nichts bekannt ist, da er dieselben nicht einmal auf dem südlichen, von ihm reambulierten Kartenblatt der Umgebung von Budapest ausscheidet, so ist die Ausbildung des unteren Mediterrans in der Umgebung von Budapest, glaube ich, recht interessant und auch nach der Arbeit HALAVÁTS' des Studiums wert.

Hierauf deutet auch die Tatsache, daß die hier aufgezählte fragmentare Fauna mehrere solche genau bestimmbare Formen enthält, die aus der Umgebung von Budapest bisher noch nicht erwähnt worden sind. Solche sind: *Neptunus* cfr. *convexus* RISTORI, *Balanus concavus* BRONN., *Ancillaria (Baryspira) glandiformis* LAM. var. *dertocallosa* SCC., *Ostrea fimbriata* GRAT. var. *crassa* SCHFF., *Ostrea (Crassostrea) crassissima* LAM. var. anom. *compressula* SACCO, *Ostrea (Ostreola) miocucullata* SCHFF., *Anomia ephippium* L. var. *squamula* L., *A. ephippium* L. var. *ornata* SCHFF., *A. ephippium* L. var. *aspera* PHILL., *A. ephippium* L. var. *ruguloso-striata* BROCC., *A. ephippium* L. var. *pergibbosa* SACCO, *Anomia rugosa* SCHFF., *Pecten pseudo-Beudanti* DEP. & ROM. var. *rotundata* SCHFF., *Pecten (Manupecten) crestensis* FONT. var. *laevis* SCHFF., *P. (Amussiopecten) gigas* SCHLOTH. var. *plana* SCHFF., *Cidaris (Cyathocidaris) avenionensis* DESM. und *Cidaris (Plegiocidaris) Peroni* COTT.

Daß HALAVÁTS das Material des Neogens der Umgebung von

* Paläontologische Studien über tertiäre Decapoden (Math. Naturw. Ber. aus Ungarn, Bd. XXII, S. 31).

Budapest* nicht nur nicht im Rahmen der modernen Auffassung behandelt, sondern im Gegenteil teils veraltete, teils unrichtige Daten mitteilt, wurde bereits mit mehreren Beispielen beleuchtet. Nun will ich meine Behauptung im Anschluß an das Vorhergehende noch mit folgenden aus der Fauna des unteren Mediterrans entnommenen Beispielen unterstützen.

So wird von Halaváts *Pecten palmatus* aufgezählt, obwohl schon in der auch von Halaváts angeführten Arbeit Déperets**, die 1892, also acht Jahre vor dem Erscheinen der Arbeit Halaváts' herausgegeben worden ist, nachgewiesen wird, daß die von Eggenburg unter diesem Namen beschriebenen Formen nicht mit Lamarcks*** *P. palmatus*, sondern dem von Fontannes† beschriebenen *Pecten crestensis* Font. identisch sind, und demnach zur Untergattung *Manupecten* gehören. Es ist eine allbekannte Sache, daß die von M. Hörnes†† als *P. Beudanti* bezeichnete Art nicht mit Basterots *P. Beudanti* identisch ist, worauf schon Fuchs 1879 in seiner Arbeit „Über die von Dr. E. Tietze aus Persien mitgebrachten Tertiärversteinerungen" hinwies; Déperet und Roman††† stellten schon 1902 für diese Formen auf Grund der Abweichungen unter dem Namen *P. pseudo-Beudanti* Dep. & Rom. eine neue Art auf.

Auch ist es längst bekannt, daß Tournouër bereits 1874 nachgewiesen hat, daß unter dem Namen *P. solarium* zwei verschiedene Formen zusammengefaßt werden, wovon gerade die aus Eggenburg stammenden und so die mit diesen übereinstimmenden Budapester Exemplare zu der Schlotheimschen Arten *Pecten gigas**† und ebenfalls in das Subgenus *Amussiopecten* gehören. Bei Halaváts finden wir diese Art auch noch als *P. solarium* Lam. angeführt. Halaváts zählt aus den burdigalischen Schichten des

* Brady, Report on the foraminifera collected by H. M. S. Challenger during the years 1873—76.

** Déperet, Classification et parallelisme du système miocène, p. CXLIX.

*** Fontannes, Bassin du Rhône vol. VI, p. 164, pl. VI, fig. 1—4.

† Denkschr. d. Akad. Wien, Bd. XLI, p, 105.

†† Pectinides neogènes de l'Europe I. part., p. 20, pl. II, fig. 3.

††† Terrains miocènes de Sos et Gabarret, p. 163.

*† Pectinites gigas Schlotheim, Naturgesch. d. Versteinerungen, S. 92.

Grabens Nagyárok bei Budafok *Pecten Rollei* HÖRN. auf. Wie bekannt, wurde dieser Name jedoch bereits vor HÖRNES durch STOLICZKA für einen liassischen Pecten beschlagnahmt, weshalb DÉPERET und ROMAN in ihrer bereits erwähnten Arbeit, die 1902, also ebenfalls acht Jahre vor der HALAVÁTSschen Arbeit erschien, den Namen in *Pecten Hornensis* DEP. & ROM. abänderten usw.

Es wurde gezeigt, daß HALAVÁTS in seiner Arbeit kaum etwas Neues bietet, und man würde deshalb zumindest erwarten, daß er das Altbekannte in den Rahmen der neueren Auffassung einpaßt, wie er dies als ausschließliches Resultat seiner Arbeit verspricht; auch dies ist ihm jedoch nicht gelungen.

## 4. Beiträge zum genaueren Alter des Rhyolithtuffes.

J. v. SZABÓ betrachtete den tonigen Rhyolith der Umgebung von Budapest in seiner Arbeit über die hydrographischen Verhältnisse der Umgebung von Göd als diluvial, d. i. für umgeschwemmt.* Dieser Ansicht war anfangs auch FR. SCHAFARZIK**, wie er in seiner Erläuterung zu dem geologischen Kartenblatt Budapest—Szentendre Ausdruck verleiht, indem er über die Aufschlüsse in der Nähe des Schlosses Rákos behauptet, daß der untere, schief gelagerte Schotter levantinisch sei, während die darüber folgende, bimsteinführende Schicht bereits diluvial sein dürfte. Obzwar SCHAFARZIK*** später in „Die Pyroxenandesite des Cserhát“ schreibt: „Spuren des weißen Bimsteintuffes habe ich nämlich auch neben der Czinkotaer Straße, südsüdöstlich vom Schlosse Rákos, auf dem Királyhegy genannten Hügel, unter dem Flugsand beobachtet, an welcher Stelle derselbe daher ebenfalls ins Liegende des bei der Eisenbahnstation Rákos aufgeschlossenen Leithakalkes fallen würde“, so scheidet er doch diesen Tuff,

* Göd környéke forrásainak geologiai és hydrografiai viszonyai (Die hydrographischen und geologischen Verhältnisse der Quellen der Umgebung von Göd; nur ungarisch).

** Umgebung von Budapest und Szentendre; Erläuterungen zur geologischen Spezialkarte der Länder der ungarischen Krone. Budapest 1902, S. 54 des ungarischen Textes.

*** Die Pyroxenandesite des Cserhát; Mitteil. a. d. Jahrb. der kgl. ungar. geol. Anst., Bd. IX, S. 340, 1895.

abgesehen von der allernächsten Umgebung von Mogyoród, südlich von dieser Ortschaft auf der geologischen Karte von Budapest nirgend aus.

In meiner Abhandlung über das Alter der Schotter am Sashalomhügel bei Rákosszentmihály* habe ich nachgewiesen, daß die beim Schlosse Rákos aufgeschlossenen, schief gelagerten konglomeratischen Schotter nicht Mastodonschotter, also nicht levantinisch, sondern auf Grund der darin vorkommenden Fossilien untermediterran sind. Ferner daß der darüber gelagerte, kugelige Bimsteinkonkretionen führende Rhyolithtuff nicht umgeschwemmt, also nicht diluvial, sondern gleichalterig mit dem Tuff des Királyhügels, also ebenfalls untermediterran ist. Zugleich habe ich mit Berufung auf das Profil des Eisenbahneinschnittes Királyvágány bei Rákos jene Annahme SCHAFARZIKs bekräftigt, daß der Rhyolithtuff des Királyhügels in das Liegende des Leithakalkes von Rákos entfällt. Dies habe ich in einem geologischen Profil auch dargestellt, zugleich meiner Verwunderung Ausdruck gebend, daß J. HALAVÁTS, der das südliche Blatt der geologischen Karte von Budapest reambuliert hat, diesen Rhyolithtuff von Rákos weder auf der Karte ausscheidet noch in dem erklärenden Texte** erwähnt, von demselben also überhaupt keine Kenntnis hat. F. SCHAFARZIK beruft sich in dem deutschen Texte seiner Kartenerläuterung*** auf diese meine Beobachtungen, jedoch die Karte in diesem Sinne zu korrigieren, war nicht mehr möglich.

Nach Veröffentlichung dieser meiner Arbeit nahm endlich auch J. HALAVÁTS Kenntnis davon, daß auf dem von ihm reambulierten Gebiet tatsächlich auch ein Eruptivgestein vorkommt, und zwar der in Rede stehende Rhyolithtuff, welcher jetzt, nachdem ich denselben beschrieben habe, auch von ihm in dem Királyvágány genannten Bahneinschnitte bemerkt wurde (Neogen der Umgebung von Budapest, S. 37). Jedoch erwähnt er dabei weder meine noch Dr. VADÁSZ' Arbeit, aus welchen er die Angaben geschöpft hat.

---

* Földtani Közlöny, Bd. XXXIV, 1904.

** Umgebung Budapest und Tétény, usw. 1902.

*** Die Umgebung von Budapest und Sztendre. 1903.

Bei fortgesetzter Untersuchung der geologischen Verhältnisse der Umgebung von Budapest ist es mir seither gelungen, festzustellen, daß dieser Tuff auf der Karte von Budapest als ziemlich ausgedehnte Partie auszuscheiden ist. Ostlich vom Schlosse Rákos ist diese Partie beinahe bis zur Haltestelle der elektrischen Bahn bei der Almássy Pál-Kolonie, nordwestlich bis zur Árpádgasse in Rákosszentmihály und südlich bis zur Eisenbahnlinie Budapest—Gödöllő auszudehnen. Auch westlich vom Rákosbach ist noch Rhyolithtuff zu kartieren, da, wie ich beschrieben habe*, gegenüber von Rákosfalva in dem Brunnen des Marktplatzes an der südlichen Seite der Landstraße in der Tiefe von 2,70 m unter dem Alluvium der Tuff in einer 9 m mächtigen Schicht aufgeschlossen wurde.

Über das Alter des in ursprünglicher Lage befindlichen Rhyolith- oder Dacittuffes ist in der Literatur bisher folgendes bekannt: Dr. F. SCHAFARZIK äußert sich in seiner Abhandlung über die Pyroxenandesite des Cserhát** folgendermaßen: „. . . zögere ich nicht, das gegenseitige Verhältnis der Tuffe von Fót-Mogyoród zu einander analog den im Cserhát gemachten Erfahrungen derart aufzufassen, daß der weiße rhyolithische Bimsteintuff auch hier die älteste Formation bilde, die wir im Hinblick auf die Verhältnisse von Salgó-Tarján hier ebenfalls für untermediterran halten können. Über denselben hat sich nun der Pyroxenandesit abgelagert, einerseits im Somlyó bei Fót, anderseits um Mogyoród herum, welcher wieder auch hier, sowie im Cserhát allgemein der Leithastufe und den übrigen jüngeren Ablagerungen als Grundlage diente.“ (Vgl. den ungar. Text, S. 302).

Aus dieser Äußerung SCHAFARZIKs ist ersichtlich, daß er sich bezüglich des Alters des „weißen rhyolithischen Bimsteintuffes“ nicht entschieden genug äußert, er hält denselben für eine untermediterrane Bildung, die sich unter die Schichten des Obermediterrans erstreckt; es ist mir auch tatsächlich gelungen, dies zu beweisen und in der Abhandlung über das Alter des Schotters von Sashalom in einem geologischen Profil darzustellen. Hieraus

* Über das Alter der Schotter am Sashalom bei Rákosszentmihály, p. 296.

** Mitteilungen aus dem Jahrbuch der königlich ungarischen geologischen Anstalt, Bd. IX, p. 340, 1893.

ließe sich bloß feststellen, daß der Rhyolithtuff das Ende des Untermediterran bezeichnet, zu welchem Resultate auch J. Böckh* gelangt ist, indem er meint, daß „die unmittelbare Überlagerung desselben im Graben des Orditó-erdő durch Kongerienton mache es wahrscheinlich, daß dieses Gebilde das jüngste Glied der Leithaformation darstelle", und da hier der von ihm Leithaformation genannte Schichtenkomplex durch das untere Mediterran repräsentiert wird, verlegt auch er die Zeit der Eruption an die Grenze des Unter- und Obermediterrans. H. Böckh sagt in seiner Arbeit über die geologischen Verhältnisse von Nagymaros bezüglich der Zeit der Eruption das gleiche, indem er sich S. 12 folgendermaßen äußert: „vor der Überfuhr bei Dunakesz treten dann Rhyolithtuffe zutage. Diese liegen in der benachbarten Umgebung, wie wir dies aus den Arbeiten meines Vaters wissen, „Über den *Pecten praescabriusculus* führenden Schichten, und wir müssen in den darunter liegenden sandigen Schichten die *Pecten praescabriusculus* führenden Schichten vermuten."

J. Halaváts sagt in seiner Arbeit über das Neogen der Umgebung von Budapest folgendes (S. 347): „diese zwei Daten bezeugen, daß der eruptive Tuff tatsächlich der burdigalenischen Stufe zugezählt werden muß. Die Eruption trat ungefähr gegen die Mitte dieser Epoche ein, ihre Asche fiel ins Wasser (Meer), auf dessen Grunde sie sich ablagerte."

Halaváts verlegt also die Eruptionszeit des bimsteinführenden Rhyolithtuffes von der bisherigen Auffassung abweichend nicht an das Ende, sondern in die Mitte des unteren Mediterrans. Begründen kann er dies aber nicht — umsoweniger, da er auch in den Profilen der gebohrten Brunnen die Grenze zwischen der burdigalenischen und vindobonischen Stufe ganz willkürlich zieht. So betrachtet er z. B. im Profil des Brunnens Nr. 4 der Dreherschen Brauerei den feinschotterigen groben Sand von 149 m als die untere Grenze des oberen Mediterran, den *Alveolina melo* F. M. sp. *Rotalia Beccarii* L. und *Polystomella crispa* d'Orb. sp. und *Polystomella macella* F. & U. sp. führenden Sandstein hin-

* Fót Gödöllő, Aszód környékének földtani viszonyai (= Die geologischen Verhältnisse der Umgebung von Fót, Gödöllö, Aszód; ungar.) (Földtani Közlöny, Bd. II, p. 13) 1872.

gegen trennt er willkürlich von den dieselbe Fauna führenden obermediterranen Schichten und stellt ihn in das untere Mediterran, obwohl derselbe auf petrographischer und faunistischer Grundlage unbedingt zu dem oberen gehört. Diese meine Behauptung wird übrigens von HALAVÁTS selbst bekräftigt, indem er sagt (p. 349): „Bei der Feststellung der Grenze zwischen den burdigalenischen und vindobonischen Ablagerungen ... war der Umstand maßgebend, daß das Schlämmen der Bohrproben aus den vindobonischen Schichten eine zufriedenstellende Ausbeute an Foraminiferen gibt, in welcher hauptsächlich Alveolinen und Miliolinen vertreten sind, während die burdigalenischen Schichten — wie ich schon erwähnte — im Untergrund fossilleer sind." Hiernach läßt sich also über die Eruptionszeit des Tuffes noch immer nichts Sicheres sagen.

Ich glaube jedoch, daß sich auch die Lösung dieser Frage wenigstens um einen Schritt vorwärts bringen läßt auf Grund des Aufschlusses, welcher in der Beniczkyschen Schottergrube bei Czinkota zu beobachten ist. An der nördlichen Wand derselben sind nämlich in dem hier aufgeschlossen *Aequipecten praescabriusculus*-Sande große Rhyolithtuffblöcke eingebettet, wie auf Fig. 3 einer derselben vorgeführt wurde.

Unter diesen ist schon infolge seiner Masse einer der interessantesten der an der Grenze des unteren und oberen Niveaus der Grube befindliche große Block, welcher in seinem heutigen Zustande ungefähr 3 m breit, 3 m hoch und aus dem vorhandenen Teile zu urteilen mehrere Meter lang gewesen sein mochte. Da derselbe durch die Spitzhauen bald für ewig vernichtet sein wird und damit bald einer der schönsten Beweise zur Beurteilung der Altersverhältnisse der Tuffe verschwindet, erachtete ich es für notwendig, denselben in einer photographischen Aufnahme nebenstehend zu fixieren.

In dem höher gelegenen Niveau dieser Grube, etwa 5 m unter dem oberen diluvialen(?) Schotter finden sich ebenfalls im *Aequipecten praescabriusculus* führenden Sande noch zwei andere Dazittuffblöcke, welche beide mehr als einen halben Meter im Durchmesser aufweisen.

Durch diesen Aufschluß wird jedenfalls unumstößlich bewiesen, daß entgegen den bisherigen Auffassungen die Eruptionszeit des Dazittuffes nicht an das Ende, sondern an den Anfang des unteren Mediterrans zu verlegen sei, da sich in den *Pecten praescabriusculus* führendem Sande bereits erhärtete


Fig. 3. Rhyolithtuff-Block im *Aequipecten praescabriusculus*-Sande, aus der Beniczkyschen Schottergrube bei Czinkota. Phot. Aufnahme des Verfassers.

Blöcke vorfinden; es wird aber zugleich auch bewiesen, daß diese Blöcke nicht von fernher stammen und sich der Krater in der Nähe befunden haben muß. Es ist aber wahrscheinlich, daß auch die oberflächliche Verbreitung dieser Tuffe hier eine größere war und dieselben durch die Erosion später teilweise abgetragen worden sind.

## 5. Neue Beiträge zur Entwicklung und zur Fauna des oberen Mediterran.

Unter den das obere Mediterran von Budapest behandelnden Arbeiten ist ebenfalls die in Rede stehende Arbeit von J. HALA-

VÁTS über das Neogen der Umgebung von Budapest* die allerjüngste Erscheinung. Diese Arbeit bietet jedoch kein richtiges Bild vom oberen Mediterran, weder bezüglich der Ausbildung dieser Formation und noch weniger hinsichtlich seiner Fauna.

Die Ursache davon liegt einesteils darin, daß er die Literatur der letzten zehn Jahre nicht in Betracht zog und die ältere Literatur ohne jede Kritik behandelte, andererseits aber, daß er die neueren Aufschlüsse nicht in Betracht zog.

So war es möglich, daß er einen der interessantesten Aufschlüsse von Budapest, welcher das Neogen am schönsten vorweist, gar nicht erwähnt. Mit diesem in der Literatur beinahe noch völlig unbekannten Aufschluß hätte sich gerade eine das Neogen der Umgebung von Budapest behandelnde Arbeit eingehender befassen müssen, umso mehr, da deren Vorhandensein als Straßeneinschnitt von Budaörs-Diós bereits von Dr. VADÁSZ erwähnt wurde**, der besonders das häufige Auftreten von Lithodomus hervorhob.

Dieser Aufschluß befindet sich an der westlichen Grenze von Budapest zwischen dem Kamaraerdő und Kőérberek. Dieses schöne Profil verdankt seinen Ursprung jener Straße, welche von Kelenföld neben der Eisenbahnstation „Kőérberek“ zum Militärschießplatze führt und die Kante des Tétényer Plateaus durchschneidet. Schon unterhalb der nördlichen Berglehne, in der Nähe der Villen werden durch den Einschnitt und die beiden Abzugsgräben blaue tonige und sandige fossilführende Schichten aufgeschlossen, welche den *Pectunculus obovatus*-Schichten der kattischen Stufe angehören. Südlich von hier läuft die Straße über die Humusdecke, sodaß hier die untermediterranen Schotter und Sandschichten nicht aufgeschlossen erscheinen. Bei der Annäherung an die Plateaukante gegen den Waldesrand zu schließt ein Straßeneinschnitt nun aufs neue sedimentäre marine Schichten auf. Hier ist folgende interessante Schichtenfolge bloßgelegt:

* Mitteilungen aus dem Jahrbuch der könglich ungarischen geologischen Anstalt, Bd. XVII, Heft 2, 1910.

** Über die obermediterrane Fauna von Budapest — Rákos (Földtani Közlöny, Bd. XXXVI, p. 323) 1906.

1. Unter dem Humus tritt schotteriger, 1—2 m mächtiger Alveolinenkalk zutage.

2. Über demselben befindet sich eine grünlich mergelige, schuppenartig zerfallende Schicht, in welcher ebenfalls Quarzschotter vorkommt, besonders häufig im oberen und unteren Teil der Schicht. Die größte Mächtigkeit dieser Schicht beträgt 3 m und charakteristisch ist für dieselbe der Reichtum an Cidarisstacheln. Stellenweise kommen in diesem Schichtenkomplex von Lithothamnienknollen erfüllte schmälere Hydrozoen-(Millepora-)Linsen vor, an deren Aufbau von riffbildenden Elementen auch noch Korallen (Heliastraea) teilnehmen. In diesen riffartigen Linsen sind auch hier wie in Rákos in großer Anzahl Bohrmuscheln (*Lithophagus, Gastrochaena, Jouannetia, Saxicava*) enthalten.

An organischen Resten sind mir bisher aus dieser Schicht folgende bekannt: *Lithothamnium* sp. Knollen (sehr häufig),
*Alveolina melo* D'ORB. (s. h.),
*Heliastraea conoidea* RSS.? (h.),
*Millepora* sp. ind. (s. h.),
*Serpula* sp.
*Cidaris Desmoulensi* SISM.? (h.),
„ *Schwabenaui* LBE. (h.),
„ *sp.* (*cfr. Peroni* COTTO.) (s.),
„ *sardica* LAUB.
„ *(Ciathocidaris) avenionensis* DESM.
*Echinolampas sp.* (*hemisphericus* LAUB.?)
*Cellepora globularis* RSS. (h.),
*Crania abnormis* DEFR.,
*Lima sp.?* (s.),
*Pecten aduncus* EICHW. (s. h.),
„ *(Chlamys) trigonocosta* HILB.,
„ „ *gloriamaris* DUB.?
„ *sp. (cfr. [Chlamys] Sturi)* HILB.),
„ *sp.*,
*Lithophagus lithophagus* L. sp. (s. h.),
*Arca (Anadara) turonica* DUJ.,
„ *sp.*,
*Pectunculus obtusus* PARTSCH. (h.),

*Chama sp. (gryphina* LAM.?*)*
*Cypricardia transsylvanica* HÖRN. (s. h.),
*Lucina sp.*,
*Lucina (Jagonia) reticulata* POLI sp.,
*Gastrana (Capsa) lacunosa* CHEMN. sp.
*Tellina sp.*,
*Venus clathrata* DUJ.,
*Saxicava arctica* L. *cfr. var. elongata* BR.,
*Gastrochaena dubia* PENN. (s. h.),
" *intermedia* HÖRN. *var. obesa* FONT.,
" *cfr. intermedia* HÖRN. *var. tauroblonga* SACCO,
*Jouannetia semicaudata* DESM. (h.),
*Haliotis ovata* BON. (z. h.),
*Natica ind. sp.*,
*Vermetus (Burtinella) turbinata* PHIL. sp.,
*Cypraea (Aricia) leporina* LAM. sp.,
" " *Lanciae* BRUS.,
*Conus (Chelyconus) ventricosus* BRONN.? (h.),
" *(Leptoconus) Dujardini* DESH.? (h.),
*Pagurus cfr. subsimilis* M. EDW.,
*Calappa Heberti* BROCC.,
*Neptunus sp. (granulatus* M. EDW.?),
Scherenfragment eines großen *Decapoden*,
*Chrysophrys sp.?*

3. Dieser Mergel geht beinahe unmerklich in die über derselben befindliche kalkige, locker konglomeratartige Bank über, in welcher ebenfalls Quarzschotter eingestreut ist. Die Schotterstückchen sind zumeist grünlich und von Erbsengröße. In dieser Schicht finden sich bloß wenig Fossilienbruchstücke und Cidarisstacheln. Das oberste Viertel dieser 2 m mächtigen Schicht besteht aus gröberem Schotter und führt viele Hydrozoenknollen.

4. Die oberste Schicht des oberen Mediterrans ist typischer poröser Leithakalk mit zahlreichen Steinkernen und Abdrücken von Fossilien und stellenweise mit Hydrozoennestern. In dieser $^1/_4$—$^1/_2$ m mächtigen Schicht sind wie in dem oberen Teil der darrunter liegenden Schicht eigroße Schotter anzutreffen. Aus dieser Schicht konnte ich folgende Fauna bestimmen:

*Alveolina melo* D'ORB. (h.),
*Miliolina sp.*,
*Heliastraea sp.*,
*Millepora sp.*,
*Pinna cfr. Deshayesi* MAYER,
*Lima inflata* CHEMN.,
*Lima (Radula) lima* L. sp.,
*Pecten substriatus* D'ORB.,
*Arca (Barbatia) barbata* L.,
„ *(Barbatia) dichotoma* HÖRN.,
„ *(Anadara) turonica* DUJ.,
„ *(Anadara) diluvii* LAM.,
„ *Noae* L.,
*Cardita rufescens* LK. *var. elongata* BON.,
„ *cfr. calyculata* L.,
*Chama gryphina* LAM.,
*Venus (Ventricola) praecursor* MAY.?
„ „ *excentrica* AG. sp.
*Dosinia exoleta* L.
*Mitrularia hungarica* LÖRENT. n. sp.*,
*Vermetus (Burtinella) turbinata* PHIL. sp.,
*Serpula sp.*,
*Buccinum (Uzita) obliquum* HILB.,
*Conus (Chelyconus) mediterraneus* HWASS.,
„ „ *ventricosus* BRONN.?

Leider sind, wie in der Leithakalkfazies überall, so auch hier die meisten Fossilien nur als Eindrücke und Steinkerne erhalten, was die Bestimmung sehr erschwert und sogar häufig unmöglich macht. Unter den vielen Fossilien finden sich nur die Pectenarten, Echinodermaten und Crustazeen in beschaltem Zustande. Außer den angeführten Arten liegen mir noch außerordentlich viele von den aufgezählten abweichende Muschel- und Schneckeneindrücke vor, welche jedoch unbestimmbar sind.

Diesen unter 4—5° gegen $13^h$ fallenden Schichten ist kon-

* Diese interessante neue Art beschreibe ich in meiner demnächst in dieser Zeitschrift erscheinenden Abhandlung „Paläontologische Novitäten aus den tertiären Sedimenten Ungarns."

kordant sarmatischer Kalk aufgelagert, welchen ich aber in Abschnitt 6 unter besonderem Titel behandle.

Die Schicht Nr. 2 dieses Aufschlusses ist ebenso wie die im Eisenbahneinschnitt von Rákos auf die untere Tuffschicht gelagerte riffartige Milleporenschicht durch einen großen Reichtum an Milleporen, Lithothamnien, Bryozoen, Korallen und Bohrmuscheln charakterisiert. Diese riffartige Bank ist auch hier linsenförmig in den grünen Mergel eingelagert, ebenso wie in dem Sande des Eisenbahneinschnittes bei Rákos. Diese riffartige Ausbildung sowie die Fauna und die zahlreichen in den Schichten befindlichen Schotterkörner weisen auf einen ganz littoralen Flachseeursprung dieser Ablagerung hin. Die abweichende Ausbildung der Schichten dieses Fundortes von den Schichten der übrigen obermediterranen Fundorte drückt auch dieser Fauna ihren Stempel auf, ebenso wie auch die Fauna des ähnlich ausgebildeten unteren Niveaus von Rákos.

Diesem Umstand ist es zuzuschreiben, daß hier Gattungen und Arten in großer Anzahl vorkommen, welche andernorts als Seltenheiten gelten. So *Lithophagus lithophagus* L. *sp.*, *Gastrochaena intermedia* HÖRN., *Gastrochaena dubia* PENN., *Saxicava arctica* L. *sp.*, *Jouannetia semicaudata* DESM., *Cypricardia transsylvanica* HÖRN. und *Haliotis ovata* BON. Es gibt in der Fauna (in der Schicht Nr. 4) auch eine für das ungarische Mediterran überhaupt neue Gattung, die seichtes Wasser liebende *Mitrularia* und zwar eine neue Art derselben, *Mitrularia hungarica n. sp.*, welche anscheinend nicht einmal selten ist, da in einem verhältnismäßig kleinem Material zwei Exemplare vorhanden sind. Andere Arten der Fauna sind für das obere Mediterran von Galizien und untere Mediterran von Eggenburg charakteristisch und aus Ungarn bisher nur aus den Hydrozoenbänken des oberen Mediterran von Rákos bekannt, so *Pecten (Chlamys) trigonocosta* HILB. und *Pecten (Chlamys) gloriamaris* DUB.?; *Conus (Chelyconus) mediterraneus* HWASS., *Lima inflata* CHEMN. und *Arca (Barbatia) barbata* L. hingegen sind rezente Arten.

Sehr interessant ist die große Übereinstimmung zwischen dem Galizischen und dem Budapester Obermediterran und Sarmatikum. Noch augenfälliger als jene Ähnlichkeit, welche in der Gemeinsamkeit der beiden obenerwähnten Pectenarten besteht, ist jene Übereinstimmung, welche sich in der ganzen Ausbildung der Ablagerungen obiger Punkte kundgibt. Sowohl für das Mediterran von Rákos bei Budapest, als auch für das an der Militärstraße ist das fast vollständige Fehlen von dickschaligen, großen Mollusken und das gänzliche Fehlen von großen Foraminiferen, wie *Heterostegina costata* und *Amphistegina Haueri*, charakteristisch. Dies ist umso auffälliger, als große, reichverzierte Mollusken sowie das massenhafte Auftreten der erwähnten Foraminiferen für das obere Mediterran Ungarns und des Wiener Beckens im allgemeinen bezeichnend ist; in dieser Beziehung bildet nur das obere Mediterran Galiziens eine Ausnahme. Dieses erscheint nämlich, wie aus den Untersuchungen UHLIGS* bekannt ist, durch kleine, einfache Formen charakterisiert, ebenso wie jenes an der Militärstraße bei Budapest. UHLIG schließt aus dem galizischen Vorkommen (Goldaberg), daß sich diese Sedimente in verhältnismäßig seichtem Wasser, auf ebenem oder höchstens schwach welligem Grunde ablagerten. Diese Annahme UHLIGS wird auch durch den faunistisch mit dem galizischen vielfach übereinstimmenden Aufschluß an der Militärstraße bei Budapest bestätigt, indem hier einesteils der Gehalt an grobem Schotter, anderenteils aber die riffartige (Hydrozoenriff) Ausbildung eines Teiles der Ablagerung auf Entstehung des Sedimentes in seichtem Wasser, in Strandnähe hinweist. Diese Hydrozoenriffe dürften als Wellenbrecher gedient haben, zwischen welchem Mollusken leben konnten, ohne mit dicker Schale versehen zu sein.

Die Ähnlichkeit der Ausbildung des ostgalizischen und Budapester oberen Mediterrans wird noch durch den Umstand erhöht, daß darüber hier (an der Militärstraße) wie dort auf das obere Mediterran ein sarmatisches Bryozoenriff folgt.

Aus diesem Aufschluß am Katona-út erhielt ich auch Material von den Herren Dr. RUDOLF STRÉDA und Dr. E. M. VADÁSZ, wofür ich ihnen auch an dieser Stelle meinen Dank ausspreche.

* Über die geol. Beschaffenheit eines Teiles der ost- und mittelgalizischen Tiefebene (Jahrb. d. k. k. geol. R.-A. Bd. XXXIV, 1884, S. 180—181).

Schon im Jahre 1904 habe ich einen neuen Fundort des Obermediterrans von Budafok bekannt gemacht.* Hier lagert zu unterst ein alveolinenreicher, sandiger Kalk, mit *Lucina (Linga) columbella*, Sh., *Microcorystes* nov. gen. *latifrons* n. sp., *Calianassa Munieri*, Brocc., *Calianassa Chalmasii*, Brocc., *Calianassa* sp.; *Matuta inermis*, Brocc., *Calappa* sp. usw. und in demselben ein aus nußgroßen Quarzkörnern bestehender Schotter. Zu oberst folgt sarmatischer Oolitkalk mit von Kalkkrusten umgebenen Fossilien.

Ohne Kenntnis dieser interessanten Aufschlüsse läßt sich kein richtiges Bild des Neogens der Umgebung von Budapest geben, und noch weniger, wenn man auch das Profil des Eisenbahneinschnittes von Rákos nicht kennt, und dennoch wollte J. Halaváts nicht nur Beiträge liefern, sondern dem Titel seiner Abhandlung nach zu urteilen ein vollständiges Bild des Neogens der Umgebung von Budapest bieten. Dies ist ihm jedoch, wie ich in vorstehendem bewiesen habe, in keinerlei Weise geglückt.

Betrachten wir jedoch nun, inwiefern es ihm gelungen ist, was er in seiner Arbeit versprochen hat, nämlich alle neueren Angaben zu sammeln und im Rahmen der heutigen Auffassung ein einheitliches Bild von den Neogenablagerungen der Umgebung von Budapest zu entwerfen.

Die Gewissenhaftigkeit, mit welcher J. Halaváts die neueren Daten sammelte, habe ich zum Teil bereits charakterisiert, als ich hervorgehoben habe, daß er in seiner 1910 erschienenen Arbeit bloß die bis 1903 erschienene Literatur — recht und schlecht — berücksichtigt hat. Jetzt möchte ich bloß das auf Grund der Literatur von ihm gebotene Bild des oberen Mediterran besprechen. Hinsichtlich der Ausbildung dieser Formation muß es sofort auffallen, daß er nicht nur in dieser Hinsicht nichts neues erbringt, sondern nicht einmal von der bereits 1906 erschienenen interessanten Beobachtung Dr. Vadász' Kenntnis hat, daß in dem Eisenbahneinschnitt von Rákos über den von mir nachgewiesenen** und auch in einem geologischen Profil dargestellten Dazittuff zwei riff-

* Paläontologische Studien über tertiäre Decapoden. [Math. naturw. Berichte aus Ungarn. Bd. XXII.]

** J. Lőrenthey, Über das Alter der Schotter am Sashalom bei Rákosszentmihály. (Földtani Közlöny, Bd. XXXIV, 1904).

artige Hydrozoenbänke (Linsen) eingelagert sind*, wie ich ähnliche vorhin von der Militärstraße gegenüber von Budapest beschrieben habe.

Wenn er schon die geologische Schichtenfolge unrichtig und lückenhaft anführt, sehen wir einmal nach, ob es ihm vielleicht bezüglich der Fauna auch tatsächlich gelungen ist, alle Angaben zu sammeln und von denselben im Rahmen der neueren Auffassung ein einheitliches Bild zu geben.

Inwiefern dies HALAVÁTS gelungen ist, indem er von Rákos 86 Foraminiferen, 45 Mollusken, 1 Echinoderme und auf Grund meiner Arbeit 11 Dekapoden, also insgesamt 143 Tierarten erwähnt, erhellt sofort daraus, wenn man die Entwicklung unserer Kenntnisse über diese Fauna näher betrachtet.

AUGUST FRANZENAU beschreibt bereits im Jahre 1881** 86 Foramiferen, 46 Mollusken und 1 Echinoderme und erwähnt hierbei, daß auch noch Scheren und Panzerteile von Krebsen vorkommen. 1895 bringt J. HALAVÁTS in einer von der Akademie ebenfalls preisgekrönten Arbeit*** die Angaben FRANZENAUS von neuem und ändert nur soviel daran, daß er aus der Fossilliste eine „*Lucina sp.*" ausläßt, „*Pecten Leytajanus*" in „*Pecten Sievringensis*" ändert und statt den Krebsscheren und Panzern FRANZENAUS „Krebsschere" und „Fischpanzer" erwähnt, nicht wissend, daß inzwischen P. BROCCHI im Jahre 1883, also 12 Jahre vor dem Erscheinen der Arbeit HALAVÁTS die dortigen Krebse beschrieben hat und zwar 5 neue Arten.† Sodann habe ich im Jahre 1898 in der einzigen von HALAVÁTS zitierten meiner Arbeiten†† bereits 12 Jahre vor Erscheinen der in Rede stehenden Abhandlung von HALAVÁTS 20 von hier noch unbekannte Arten beschrie-

* M. E. VÁDASZ: Über die obermediterrane Fauna von Budapest—Rákos (Földtani Közlöny, Bd. XXXVI, 1906).

** Beiträge zur obermediterranen Foraminiferenfauna von Rákos (Budapest (Földtani Közlöny, Bd. XI, 1881).

*** Die geologischen Verhältnisse des Alföld zwischen Donau und Theiß; Mitteil. a. d. Jahrb. d. kgl. ungar. geol. Anst., Bd. XI.

† Notes sur les crustacés fossiles des terrains tertiaires de la Hongrie (Ann. d. sc. géol, tom. XIV, 1883).

†† Dekapodenfauna des ungarischen Tertiärs; Természetr. Füz. Bd. XXI.

ben, und zwar einen Stachelhäuter, eine Vermesart, elf Mollusken, fünf Krebse und zwei Fische. Später, im Jahre 1905, also 5 Jahre vor dem Erscheinen der HALAVÁTSschen Arbeit, habe ich wiederum zwei neue Mollusken von hier beschrieben.*

Sodann hat im Jahre 1906, also 4 Jahre vor dem Erscheinen der HALAVÁTSschen Arbeit, teils auf Grund des von mir gesammelten Materials, teils auf Grund eigener Aufsammlungen Dr. VADÁSZ** die Zahl der Arten um 73 vermehrt, so daß er die 4 unsicher bestimmten Formen weglassend und die Zahl der Foraminiferenarten nach der neueren Nomenklatur um 10 verringernd, von diesem Fundorte bereits 219 Arten anführt.

Stellt man also den bereits 1906 beschriebenen 219 Arten die 143 Arten der 1910 erschienenen HALAVÁTSschen Arbeit gegenüber, so läßt sich das Resultat auch mit dem besten Willen nicht als Fortschritt ansprechen, da der Verfasser hiermit nicht einmal den Rahmen der neueren Auffassung ausgefüllt, geschweige denn ein einheitliches, sondern höchstens ein ärmliches Bild der Formation und ihrer Fauna geliefert hat. Daß HALAVÁTS dieselbe, aus dem Jahre 1881 stammende Fossilienliste im Jahre 1910 aufs neue, zum dritten Male, herausgibt, beweist nur, daß sich seine Kenntnisse seit 1881 nicht bereichert haben. Er hat bloß insofern den bereits 1881 von FRANZENAU veröffentlichten Angaben und festgestellten wissenschaftlichen Wahrheiten seinen individuellen Stempel aufgeprägt, daß er *Scutella vindobonensis* den Mollusken zuzählt und auf Grund meiner Dekapodenarbeit die dort beschriebenen Arten anführt. Demnach ist HALAVÁTS auch die Zusammenstellung der angeblich verstreuten, tatsächlich jedoch bereits gesammelten Angaben nicht gelungen, da er meine erwähnten zwei Literaturnachträge und die ausschließlich diese Fauna behandelnde Arbeit von Dr. VADÁSZ nicht kennen will und neueres Material nicht gesammelt hat, obwohl man fast bei jedem Ausfluge etwas Neues finden kann. So sind ihm von

* Auszug aus dem Protokoll der Fachsitzung (Földtani Közlöny, Bd. XXXV, S. 189, 1905, ungarisch).

** Über die obermediterrane Fauna von Budapest—Rákos (Földtani Közlöny, Bd. XXXVI, 1906).

hier weder Coelenteraten, noch Vermes, Bryozoen, Cephalopoden, Cirripedien, Vertebraten bekannt, welche in der Literatur sämtlich bereits beschrieben wurden.

Daß HALAVÁTS auch diese von anderen übernommenen Daten in den Rahmen der neueren Auffassung nicht eingefügt hat, wie er es versprochen hat, erhellt daraus, daß er die alten Synonymen der Foraminiferen sämtlich als besondere Arten anführt, und zwar nicht nur diejenigen der Rákoser Fauna, sondern auch diejenigen aus dem artesischen Brunnen des Stadtwäldchens, so daß bei ihm *Truncatulina Dutemplei* D'ORB., ferner *Rotalina* (bei HALAVÁTS konsequent *Rosalina*) *Dutemplei* D'ORB. als besondere Arten auf derselben Seite stehen (S. 328), während anderenorts *Heterolepa Dutemplei* D'ORB. vorkommt und auch diese unrichtig statt „*Heterolepa Dutemplei* D'ORB. sp.“ usw. usw. Auf S. 328 der Arbeit HALAVÁTS' wird „*Rosalina Schreibersi* D'ORB.“ und auf S. 329 „*Truncatulina Schreibersi* D'ORB.“ aufgezählt, obzwar es eine Art unter dem Namen *Rosalina Schreibersi* überhaupt nicht gibt, da von D'ORBIGNY bloß eine *Rotalina Schreibersii* beschrieben worden ist, die nach den Untersuchungen BRADYs im Jahre 1884 zur Gattung *Pulvinulina* gehört. *Truncatulina Schreibersi* D'ORB., welche von HALAVÁTS aufgezählt wird, ist nun wieder ein Synonym von *Pulv. Schreibersi* D'ORB. sp., jedoch unter dem Gattungsnamen *Truncatulina* eine SEQUENZAsche, nicht aber wie HALAVÁTS meint, eine D'ORBIGNYsche Art. Kurz, aus jeder Zeile der HALAVÁTschen Arbeit offenbart sich die literarische Unbewandertheit des Verfassers. Die HALAVÁTsche Art *Rosalina viennensis* D'ORB. ist „im Rahmen der neueren Auffassung“ mit der LINNÉschen *Rotalia Beccarii* L. sp. identisch, usw. usw. Aber nicht nur die Foraminiferen, sondern auch die Mollusken sind nicht in den Rahmen der neueren Auffassung eingefügt, die meisten Bestimmungen sind sogar gerade im Rahmen der alten Auffassung geblieben und deshalb bereits veraltet. Alles dies bezeugt die oberflächliche und unfachmäßige Behandlung der Literatur.

Auf dieser Grundlage reduzieren sich die 143 von HALAVÁTS aufgezählten Rákoser Arten auf 133, denen gegenüber Dr. VADASZ bereits vor Jahren 219 angeführt hat, zu welchen noch die Resultate der neueren Sammlungen hinzugefügt:

*Vioa ind. sp.*,
*Heliastraea conoidea* Rss.,
*Ostrea (Cubitostrea) frondosa* de Serr.,
*Meretrix (Amiantis) gigas* Lk. *sp.*,
*Cardita (Megacardita) Jouanneti* Bast.,
*Myristica cornuta* Ag. *sp.*,
*Pagurus cfr. subsimilis* M. Edw.,*
*Dorippe margaretha nov. sp.*,
*Portumnus tricarinatus nov. sp.*,
*Portunus rákosiensis nov. sp.*,
*Zozymus mediterraneus nov. sp.*

wir heute insgesamt 230 Arten hätten, von welchen zwei abgezogen werden müssen, da *Lithophagus Aritensis* May. *sp.*, inzwischen mit *Lithophagus lithophagus* Lam. *sp.* vereint wurde und ferner *Andorina elegans* Lőrent. mit dem bei Vadász unter besonderem Namen angeführten *Lambrus? sp. ind.* identisch ist. Somit verbleibt also die Zahl der Arten 228 gegenüber den 133 Arten von Halaváts.

Welch ein anderes Bild ergibt sich also aus der Vadászschen Liste von dieser Fauna als aus derjenigen von Halaváts und welche ganz andere faunistische, paläogeographische und Faziesfolgerungen lassen sich aus einer Fauna ziehen, in welcher alle acht Tierstämme vertreten sind, als aus einer solchen, in welcher nur vier derselben mit der halben Artenzahl angeführt erscheinen!

Durch das bisher Gesagte wird glänzend bewiesen, wie unmotiviert auch hinsichtlich des oberen Mediterrans jene Selbstbeschwichtigung Halaváts ist, nämlich daß das Neogen der Umgebung von Budapest bereits so sehr bekannt sei, daß es unser Wissen mit wesentlichen neuen Angaben nicht mehr bereichern könne. Abgesehen von den bisher erwähnten neuen geologischen Angaben wird durch die organischen Einschlüsse dieser Schichten selbst auch die obermediterrane Fauna Ungarns durch zahlreiche interessante Formen bereichert.

* Diese fünf neuen Dekapoden beabsichtige ich noch im Laufe dieses Jahres in einer Abhandlung „Tertiäre Dekapoden aus der Umgebung von Budapest“ in dieser Zeitschrift zu beschreiben.

So sind für das obere Mediterran Ungarns neu: *Cidaris (Cyathocidaris) avenionensis* DESM., *Cid. sardica* LAUBE, *Cid. Desmoulensi* SISM.?, *Ostrea (Cubitostrea) frondosa* DE SERR, *Pecten (Chlamys) trigonocosta* HILB., *Pinna cfr. Deshayesi* MAYER, *Lima (Radula) lima* L. sp., *Pagurus cfr. subsimilis* M. EDW. Gänzlich neue Arten sind: *Mitrularia hungarica nov. sp.*, *Sepia mediterranea nov. sp.*, *Dorippe margaretha nov. sp.*, *Portumnus tricarinatus nov. sp.*, *Portunus rákosiensis nov. sp.*, *Zozymus mediterranaeus nov. sp.* Zählt man noch den im oberen Mediterran von Budafok von mir aufgefundenen interessanten neuen Dekapoden *Microcorystes n. gen. latifrons nov. sp.* hinzu, so beträgt die Zahl der neuen Arten bereits sieben. Unter denselben befinden sich auch zwei neue Gattungen; die drei Arten, *Portumnus tricarinatus, Zozymus mediterraneus* und *Dorippe margaretha* sind die ersten fossilen Vertreter ihrer Gattung und verleihen aus diesem Grunde der Fauna besonderes Interesse. Von denselben war bisher bloß *Zozymus* in subfossilem Zustande bekannt.

Nachdem ich im bisherigen nachgewiesen habe, daß die Arbeit HALAVÁTS über das Neogen der Umgebung von Budapest, ausschließlich am Schreibtisch angefertigt wurde und unser Wissen mit wesentlichen neuen Angaben gar nicht bereichern konnte, trotzdem jeder Ausflug etwas Neues bietet; nachdem wir ferner gesehen haben, daß er aus der Literatur nur die ihm gefälligen Werke berücksichtigt hat und auch diese bloß oberflächlich ohne jede Kritik, betrachten wir jetzt, in welcher Weise er die neueren Angaben von A. ZSIGMONDY und A. FRANZENAU verwertet und welche Folgerungen er aus denselben zieht. Auch in dieser Hinsicht machte ich bereits einige Bemerkungen in dieser Abhandlung. Wie wir gesehen haben, erwähnt er *Glauconien*-Sande als Resultat der Bohrung eines Brunnens in Mátyásföld, wo doch der geologische Aufbau der Umgebung das Vorkommen der Kreideformation von vornhinein ausschließt. Ferner haben wir gesehen, daß obwohl in den Brunnenprofilen die Grundlage zur Scheidung der Schichten des oberen und unteren Mediterrans voneinander, wie HALAVÁTS selbst sagt, bloß der Foraminiferenführung des oberen Mediterrans zufällt gegenüber dem unteren, er trotzdem im Profil des vierten Brunnens der Dreherschen Brauerei den „feinschotterigen groben Sand" in 159 m Tiefe als untere Grenze des oberen Mediterrans bezeichnet — die durch *Alveolina melo, Rotalia Beccarii, Polystomella crispa* und *Polystomella macella* charakterisierten Sandsteine hingegen anstatt dem oberen, dem unteren Mediterran zuzählt (S. 358).

Auf Grund der Schichten des Bohrbrunnens konstruiert HALAVÁTS die die stratigraphischen Verhältnisse des Untergrundes von Budapest darstellenden Profile fehlerhaft, indem er keinerlei Bruchlinie eingesetzt hat, wo doch zur Genüge bekannt ist, daß die Schichten mehr oder minder schachbrettartig zertrümmert und verworfen sind. Diesbezüglich werde ich noch Gelegenheit haben, Beweise anzuführen, hier verweise ich nur entgegen der Behauptung von HALAVÁTS, daß „. . . die noch jüngeren Gebilde (wie der Kiszceller Ton) in viel niedrigerem Gelände in ruhiger konkordanter Lagerung am Aufbau des das Gebirge umsäumenden Hügellandes teilnehmen" (S. 243) auf meine zwei veröffentlichten geologischen Profile, namentlich auf das I. Profil meiner Abhandlung „Über das Alter des Schotters am Sashalom bei Rákosszentmihály" und Fig. 2 in der vorliegenden Arbeit, welche gegen ruhige Lagerung sprechen bzw. für die später eingetretenen tektonischen Störungen den Beweis liefern. Gegenüber der alten irrigen Behauptung von HALAVÁTS, daß die jüngeren Schichten sämtlich konkordant gelagert sind, möchte ich bloß auf die eine Tatsache hinweisen, welche schon vor langem durch J. v. SZABÓ* und B. v. INKEY** und später auch von mir — gerade gegen HALAVÁTS — nachgewiesen wurde, daß den sarmatischen Schichten die pannonischen geradezu diskordant aufgelagert sind***; in dieser Hinsicht sind also auch seine geologischen Profile fehlerhaft. HALAVÁTS bezeichnet bei seinen Profilen weder die Maße noch den Grad der Überhöhung, ja nicht einmal die Himmelsrichtungen, in welcher das Profil angefertigt wurde. Bloß bei dem Profil Fig. 1 bezeichnet er die Richtung W.—O., aber auch bei diesem fehlerhaft, da er im Text von den hier aufgeschlossenen Schichten folgendes sagt: die Schich-

* Földtani Közlöny, Bd. XXXIV, S. 237.

** Math. és Term. tud. Értesitö, Bd. XXIV, S. 123.

*** Über die pannonischen und levantinischen Schichten von Budapest und deren Fauna. (Math. u. naturw. Berichte aus Ungarn. Bd. XXIV, S. 267.

ten fallen von dem Gebirge ab, z. B. im Nagyárokgraben bei Budapest unter 25° gegen $13^h$. Sollte dies richtig sein, so ist die Abbildung falsch. Wenn nämlich das Profil ein aus gegen $13^h$ fallenden Schichten aufgebautes Hügelland durchschneidet, so kann ein westöstliches Profil nur in der Streichrichtung verlaufen. Der Text und das Profil stehen also im Widerspruch zueinander. Das Profil verläuft tatsächlich in der Richtung S.—N. und nicht W.—O.

Aus der absichtlichen Nichtbeachtung der Literatur ist auch die Behauptung HALAVÁTS' zu erklären, welche er von dem im Eisenbahneinschnitt bei Rákos aufgeschlossenen eruptiven Tuff macht, nämlich: „. . . die Asche fiel ins Wasser, auf dessen Grund sie sich ablagerte.“ Denn konnte er sich schon durch eigene Beobachtung nicht davon überzeugen, daß dieser Tuff überhaupt nicht geschichtet ist, sondern mächtige Bomben mit schaliger Struktur führt und keine Spur mariner organischer Einschlüsse in denselben enthalten ist, so hätte er doch wenigstens die mehrfach erwähnte Rákoser Arbeit von Dr. VADÁSZ in Betracht ziehen können, wo derselbe sagt, daß angenommen werden muß, daß die unterste Tuffschicht noch auf festes Land gefallen ist und erst nach Ablagerung dieser Tuffschicht die Transgression des Meeres ihren Anfang nahm.

Diese Tatsachen sind jedenfalls beachtenswert und dürften nicht mit Stillschweigen übergangen werden, umso weniger, da sie zu interessanten paläographischen Folgerungen berechtigen.

### 6. Bryozoenriffe innerhalb der sarmatischen Schichten.

Aus dem Tertiär der Umgebung von Budapest sind bisher zwei Horizonte bekannt, welche durch das massenhafte Auftreten von Bryozoen charakterisiert werden. Der eine wurde aus dem unteren Niveau des Budaer Mergels, der andere aus dem oberen Niveau des unteren Mediterrans beschrieben. Als die dritte kann noch die von HANTKEN* als Schicht Nr. 24 aus der Umgebung von Perbál und Páty bekannt gemachte Sarmatschicht hier erwähnt werden.

Der stellenweise an Broyzoen reiche untere Teil des Budaer Mergels wurde eben deshalb Bryozoenmergel genannt und nach

* Geolog. tanulm. Buda és Tata között. 1861. (Ungarisch.)

Karl Hofmann als oberster Horizont der bartonischen Stufe betrachtet, während M. v. Hantken diese Bryozoenmergel für eine Fazies des Budaer Mergels hält und in den unteren Teil des Oligozäns stellt. Diese strittige Frage ist noch nicht entschieden, in neuerer Zeit mehren sich jedoch stetig die Beweise, welche dafür sprechen, daß die an Bryozoen reichen Bänke nur eine fazielle Ausbildung des Budaer Mergels darstellen. Da ich dies bei einer späteren Gelegenheit noch ausführlicher besprechen will, berufe ich mich hier nur auf zwei Beispiele. Einesteils sind in dem sog. „Bryozoenmergel" von Piszke Bryozoen kaum zu finden*, andernteils aber sind auch im Budaer Mergel bryozoenreiche Niveaus vorhanden, wie man sich in dem Einschnitte des Púsztaszeriút überzeugen kann.** Dies für sich allein beweist jedoch nur soviel, daß das massenhafte Auftreten der Bryozoen eine Lokalerscheinung ist und daß übereinstimmende fazielle Verhältnisse zu verschiedenen Zeiten, aber auch gleichzeitig an verschiedenen Orten vorhanden sein konnten. Daß jedoch diese sog. Bryozoenmergel nicht in das Eozän, sondern eher in das Oligozän zu stellen sind, also dem Wesen nach tatsächlich Budaer Mergel sind, das zu beweisen ist die Gesamtfauna berufen. Diesbezüglich verweise ich auf die Beobachtungen Dr. Viktor Vogls über den „Bryozoenmergel" von Piszke, aus welchen erhellt, daß „die Fauna des Mergels von Piszke jünger als diejenige des Bryozoenmergels der Umgebung von Buda und von unteroligozänem Charakter ist." Obwohl Dr. V. Vogl geneigt ist, nur den sog. Bryozoenmergel von Piszke für oligozän zu betrachten und diejenigen der Umgebung von Buda für älter, bin ich doch der Meinung, daß eine systematischere Untersuchung der letzteren die diesbezüglichen Ansichten ebenfalls modifizieren wird.***

Das zweite an Bryozoen reiche Niveau ist der Bryozoenkalk der unteren mediterranen Stufe, welche bei Pomáz, Fót und Csomád den oberen Horizont des unteren Mediterrans bezeichnet. F. Schafarzik hat auf der geologischen Karte der Umgebung

* Dr. V. Vogl, Die Fauna des sog. Bryozoenmergels von Piszke. Mitt. a. d. Jahrb. d. kgl. ungar. geol. Anst., Bd. XVIII, Heft 3. ** Siehe hier S. 286.

*** Mitteilungen aus dem Jahrbuch der königlich ungarischen Reichsanstalt, Bd. XVIII, 1910.

von Budapest diesen Horizont auch besonders ausgeschieden. Auf dem von HALAVÁTS reambulierten südlichen Blatte jedoch ist dieses Gebilde nicht verzeichnet und wird dasselbe auch im erklärenden Text nicht erwähnt. Ich habe auf diesen Mangel der HALAVÁTSschen Karte bereits hingewiesen und auch erwähnt*, daß ich solche Bryozoenkalke auch bei Budafok gefunden habe, und zwar an der südlichen Seite des Adlerberges, im Graben der zur Kirche von Budafok führenden Péter-Pál-Gasse, wo diese Bänke als Zwischenschichten im sandigen Ton oder tonig-kalkigen Sandkomplex mehrfach eingelagert sind; auch hier den oberen Niveau des Obermediterrans bildend.

Jetzt möchte ich außer diesen bisher bekannten Bryozoenkalken auch eine aus der sarmatischen Stufe beschreiben.

Bereits im vorigen Kapitel habe ich gelegentlich der Besprechung der im Einschnitte der Militärstraße an der westlichen Grenze von Budapest aufgeschlossenen Schichten erwähnt, daß auf die unter 4—5$^0$ gegen 14$^h$ einfallenden obermediterranen Schichten in konkordanter Lagerung sarmatische Kalke folgen. Innerhalb dieser Formation findet man in gewaltigen Blöcken felsartige bryozoenführende Massen, welche sich oben an der südlichen Lehne des Berges auch herausgeackert vorfinden.

Auffallend ist in diesen Brackwasserschichten das Vorkommen von Bryozoen in gesteinbildenden Mengen. Es kommen zwar auch in der verhältnismäßig salzarmen Ostsee zahlreiche Bryozoen vor, obwohl nicht gesteinbildend, und anderenteils finden sich in Rußland (Krim), in dem oberen Teil des Sarmatischen ebenfalls mächtige Bryozoenriffe**, vielleicht in noch größeren Massen als die von mir entdeckten, jedoch besitzen die Bryozoen der Ostsee Chitinschalen, und gehören auch diejenigen der krimischen Riffe der Gattung *Membranipora* an, bei welcher die Vorderwand der Cyste ebenfalls aus Chitin besteht.

Während also das Material dieser Gattungen, ganz oder teil-

---

* Über die pannonischen und levantinischen Schichten von Budapest und deren Fauna. (Math. u. naturw. Berichte aus Ungarn, Bd. XXIV, S. 271 bis 272 (Fußnote), 1906).

** N. ANDRUSSOW, Die fossilen Bryozoenriffe der Halbinseln Kertsch und Taman, 1903.

weise aus Chitin bestehend, mit dem geringen Salzgehalt des Wassers im Verhältnis ist, bilden die ungarischen Exemplare in dieser Hinsicht eine Ausnahme, da sie der ganz aus Kalk bestehenden Gattung *Hemieschara* angehören und deshalb ist ihr massenhaftes Auftreten in Brackwasserablagerungen umso überraschender.

Die *Hemiescharen* bilden im russischen Mediterran Kalksteine, wie mir aus einer brieflichen Mitteilung N. Andrussows bekannt ist.

Leider sind rezente Bryozoenriffe unbekannt und so auch die Lebensweise und die Entwicklung derselben.

Aus Russisch-Polen wurden bereits 1866 durch Barbot de Marny sarmatische Bryozoenriffe bekannt.* Olszewsky behauptet 1875, daß in Ostgalizien auf das brackische Sarmatikum wieder marine Schichten, die zweite marine Bildung folgt. H. Wolf** wies jedoch 1876 nach, daß die zweite, bryozoenführende, marine Schicht nicht die oberste Partie des Sarmatikums — wie Olszewsky annahm — sondern im Gegenteil das tiefste Glied dieser Bildung ist, und zwischen dem oberen Mediterran und dem Sarmatikum eine mächtige Übergangsschicht bildet. Teisseyre*** faßt den Hügelzug Miodobora in Podolien als Bryozoenriff auf. Als interessanten Aufschluß beruft er sich auf den Steinbruch bei Zbaraž, in welchem die Auflagerung des Bryozoenkalkes („Pleuroporenkalkstein") auf das obermediterrane sog. Kaiserswalder Lithothamnienkonglomerat schön zu sehen ist. Anderweitig sind dünngeschichtete sarmatische Kalksteinbänke zwischengelagert.

Wenn man das Vorkommen dieser sarmatischen Bryozoenkalke mit jenen an der Militärstraße bei Budapest vergleicht, so tritt ihre völlige Übereinstimmung sofort vor Augen, indem der bryozoenführende Sarmatkalk auch an der Militärstraße auf Lithothamnien, Hydrozoen führenden und schotterigen Leithakalk lagert.

Während die mediterranen Bryozoenkalke von Fót dicht sind und anscheinend größenteils aus Bryozoendetritus bestehen, werden die in Rede stehenden sarmatischen durch sich voneinander

* Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. LIII, S. 339.

** Verh. d. k. k. geol. R.-A. 1876, S. 290.

*** Teisseyre, Der podolische Hügelzug d. Miodoboren als ein sarmatisches Bryozoenriff (Jahrb. d. k. k. geol. R.-A. Bd. 34, 1884).

häufig lösende kugelige Schichten gebildet, an deren Oberfläche die Wohnkammern der Bryozoen deutlich sichtbar sind. Die größeren Blöcke sind genau so kugelig geschichtet, wie dies ANDRUSSOW aus dem russischen Sarmatikum abbildet.

Auf dem Tétényer Plateau ist die ganze Oberfläche bewachsen, so daß nur spätere eventuelle Aufschlüsse die Untersuchung dieser riffartigen Bryozoenkalke ermöglichen werden.

In dieser Abhandlung möchte ich nur die Aufmerksamkeit der Fachkreise darauf hinlenken, daß auch in dem Sarmatikum Ungarns Bryozeonriffe vorkommen. Diese Tatsache beweist wiederum, daß HALAVÁTS im Irrtum ist, wenn er behauptet, daß das Neogen der Umgebung von Budapest völlig bekannt sei, da z. B. das Sarmatikum völlig unbekannt ist. Von den übrigen Formationen des Neogens habe ich bereits schon nachgewiesen, daß sie in vieler Hinsicht ebenfalls unbekannt sind.

Die neueren Untersuchungen bestätigen, daß unsere sarmatische Stufe sowohl ihrer Entwicklung nach als auch hinsichtlich ihrer Fauna ganz unbekannt ist; da z. B. Dr. STEPHAN V. GAÁL* und Dr. ZOLTÁN SCHRÉTER** in neuerer Zeit im Sarmatikum auch Festlandschichten, nachgewiesen haben, was darauf hinweist, daß die Ausbildung unserer sarmatischen Formation mehr mit der russischen als mit der österreichischen übereinstimmt, obwohl HALAVÁTS in seiner Arbeit über das Budapester Neogen sich ausschließlich auf letzteres bezieht.

## 7. Neuere Beiträge zur Kenntnis der Ausbildung und Fauna der pannonischen Bildungen in der Umgebung von Budapest.

Das Studium der pannonischen Bildungen von Budapest und das Einsammeln ihrer Fauna habe ich bereits vor mehr als zehn Jahren begonnen. Während dieser Studien gelangte ich — man könnte fast sagen zufällig — zu jenen neuen Daten, die ich in den vorhergehenden sechs Mitteilungen publizierte, und deren Ver-

---

* Die sarmatische Gastropodenfauna von Rákosd im Kom. Hunyad (Mitt. a. d. Jahrb. der kgl. ungar. geol. Reichsanst., Bd. XVIII, Heft 1, 1910).

** Bericht über die im Neogengebiet von Orsova und Mehádia-Kornya vorgenommenen geologischen Untersuchungen (Jahresbericht d. kgl. ungar. geol. Reichsanst. f. 1908, S. 122).

öffentlichung ich noch in einigen paläontologischen Aufsätzen fortsetzen will.

Meine erste Mitteilung über die Fauna der pannonischen Bildungen erschien 1902 in Palaeontographica unter dem Titel „Die pannonische Fauna von Budapest"; gegenwärtig arbeite ich an dem zweiten und dritten, abschließenden Teil. Ein kurzer Auszug aus den geologischen Ergebnissen dieses Schlußteiles erschien 1906 als akademische Antrittsrede unter dem Titel „Über die pannonischen und levantinischen Schichten von Budapest und deren Fauna".* Hierin wurde die Entwicklung unserer, diese Bildungen betreffenden Kenntnisse skizziert und nachgewiesen, daß sich HALAVÁTS zwar in mehreren Abhandlungen mit dieser Frage als seinem Spezialstudium befaßt, unsere Kenntnisse sich jedoch seit 1856, seit dem Erscheinen der ersten, von J. v. SZABÓ verfaßten, hierauf bezug habenden Arbeit trotzdem kaum entwickelten, bis schließlich meine unter obigen Titeln erschienene Arbeiten die pannonischen Bildungen in ein ganz anderes Licht stellten.

Die Verfasser der älteren Arbeiten legten — wie ich bereits betonte — lediglich auf die Verbreitung und petrographische Ausbildung der pannonischen und levantinischen Bildungen in der Umgebung von Budapest Gewicht, ließen jedoch die reiche Fauna dieser Sedimente und die hieraus folgenden stratigraphischen Schlüsse außer acht.

Ich beschrieb in meinen eingangs erwähnten Arbeiten sehr reiche Faunen aus jenen Schichten, welche von HALAVÁTS als fossilleer bezeichnet wurden, so daß diese heute zu den reichsten pannonischen Faunen Ungarns gehören. Auf Grund dieser Faunen konnte ich in den Aufschlüssen der Umgebung von Budapest fast sämtliche bisher bekannte Horizonte der pannonischen Stufe nachweisen, die bisher von hier gänzlich unbekannt waren.

Bevor ich nun an die Besprechung der Ergebnisse meiner neueren Exkursionen schreiten würde, muß ich noch der bereits oft erwähnten, die neogenen Sedimente der Umgebung von Budapest behandelnden Arbeit von HALAVÁTS, als der neuesten literarischen Erscheinung, die auf die Bildungen bezug hat, gedenken.

* Math. u. naturw. Berichte aus Ungarn. Bd. XXIV. 1906.

Man würde gerade von diesem Abschnitt der Arbeit von HALAVÁTS das meiste erwarten, da einerseits diese Pliozänbildungen das Spezialstudium HALAVÁTS' bilden, andererseits aber weil dies der selbständigste Teil seiner Arbeit ist, indem die durch ZSIGMONDY und FRANZENAU bekannt gewordenen Brunnenprofile hierfür kaum Daten liefern.

Leider ist jedoch dieser Teil der Arbeit — wenn dies überhaupt möglich ist — noch schlechter als die vorigen. HALAVÁTS befaßte sich vordem bereits in zwei Abhandlungen ausführlicher mit diesen Pliozänbildungen, nämlich in „Die geologischen Verhältnisse der Alföld zwischen Donau und Theis" sowie in der Erläuterung zu dem von ihm reambulierten südlichen Kartenblatt von Budapest. Durch diese Arbeiten wurde jedoch die Kenntnis dieser Bildungen, wie ich bereits in meiner akademischen Antrittsrede „Über die pannonischen und levantinischen Schichten von Budapest und deren Fauna" nachwies, keineswegs bereichert; ich sagte schon dort: „Die pannonischen Bildungen ... hat HALAVÁTS ohne Begehung des Gebietes — also ohne Reambulation — in die Karte eingetragen, im erläuternden Text aber ... bloß die alten literarischen Daten wiederholt und auch hier manchmal fehlerhaft" (S. 271). So z. B. bezeichnet er *Aceratherium incisivium* CUV. sp. als *Anthracotherium magnum* CUV. sp. In dieser Arbeit führte ich aus den von HALAVÁTS fossilleer bezeichneten Schichten eine sehr reiche Fauna an, die nicht nur betreffs der Arten-, sondern vornehmlich betreffs der Individuenanzahl überaus reich ist. Auf Grund der Fauna bestimmte ich sodann die Stratigraphie der pannonischen Schichten von Budapest. „Nunmehr können wir sagen, daß die Ausbildung des Pliozäns in der Umgebung von Budapest zu den interessantesten Vorkommen Ungarns gehört und die Fauna desselben eine der reichhaltigsten ist." Wenn man das weiß, und das was HALAVÁTS in seiner Einleitung sagt: „Es ist also natürlich, daß die an Abwechslung so reiche Umgebung von Budapest immer und immer wieder studiert wird, um so mehr, als sich hierzu in den künst-

* Mitteilungen a. d. Jahrb. d. kgl. ungar. geol. Anst. Bd. XI, 1896.

** Umgebung von Budapest und Tétény.

lichen Aufschlüssen, welche durch die industrielle Regsamkeit geschaffen werden, beständig neue Gelegenheit bietet", würde man von diesem Abschnitt das meiste Neue erwartet haben.

Diesem Abschnitt ist es am wenigsten anzusehen, daß er die neuere Literatur, besonders meine für ihm unangenehme Arbeiten außer Acht gelassen hat. Damit nämlich hier gegenüber seinen diesen Gegenstand betreffenden früheren Arbeiten ein gewisser Fortschritt zu verzeichnen sei, benutzt er die Daten meiner oben erwähnten, 1906 erschienenen Arbeit zum Teil, natürlich ohne Berufung auf die Quelle. Er erwähnt z. B. bereits den Aufschluß der Ziegelei in Erzsébetfalva, von der interessanten Fauna jedoch, die ich von hier aus zwei Horizonten anführte, erwähnt er nichts. Er spricht auch von dem Aufschluß der Ziegelei von Szentlörinc, führt jedoch von hier nur aus der höchsten, „*Unio Wetzleri*", führenden Schicht — gegenüber meinen 13 Arten — 5 Spezies auf, während er von der interessanten Fauna der tieferen Schichten, die $^9/_{10}$ des Aufschlusses ausmachen, nichts erwähnt. Hingegen führt er von hier als oberste Schicht Mastodonschotter an, welcher, wie ich später auch in einem Profil vorführen will, hier vollständig fehlt.

Aus den Aufschlüssen der „Ungarischen Dampfziegelei und Zementfabrik A. G." führt er aus der einen Schicht 2, aus einer anderen 6 Fossilien an, während ich bereits vier Jahre früher aus einer der zahlreichen fossilführenden Schichten aus der Schicht 11, 37 Molusken, 3 Fische und viel Ostrakoden, aus der Schicht 2 aber 39 Molluskenarten und viel Ostrakoden erwähnte.

Aus der Tongrube der keramischen Fabrik führt HALAVÁTS bloß eine einzige schlecht bestimmte Art an, während ich deren 26 aufzählte. Aus den Gruben der Seifertschen und der Örleyschen Fabrik finden wir dasselbe schlecht erhaltene Fossil angeführt, während ich aus der ersteren 20, aus der letzteren 13 Arten namhaft mache. Der Hofhausersche Aufschluß wird von HALAVÁTS gerade nur erwähnt, während ich in demselben die stratigraphisch wichtige *Congeria ungula-caprae* sammelte; desgleichen wird auch der Virava- und Lechnersche Aufschluß gerade nur erwähnt, wogegen ich aus dem ersteren eine interessante Fauna aus 10 Arten, aus dem letzteren aber eine solche aus 14 Arten anführte.

Von meinen, die pannonischen Bildungen der Umgebung von Budapest behandelnden Arbeiten führt er nur „Die pannonische Fauna von Budapest“ aus dem Jahre 1902 an, und so sind ihm bloß die aus den Gruben der Steinbrucher Dampfziegelei A. G. und der Kohlengruben und Ziegelei A. G. sowie aus dem Brunnen der Eigelschen Schweinemastanstalt hervorgegangenen Faunen und zwar fast ausschließlich bekannt, daß ich jedoch in ersterer oberhalb des bereits seit langem bekannten *Congeria ungula-caprae*-Horizont auch den *Congeria triangularis* und *balatonica*-Horizont entdeckte, ist ihm nicht bekannt, sowie er auch nicht weiß, daß *Orygoceras corniculum* BRUS., „in den Rahmen der neueren Auffassung“ eingefügt, *Orygoceras Fuchsi* KITTL. sp. entspricht, was ich bereits 1903, also sieben Jahre vor dem Erscheinen der Arbeit HALAVÁTS', nachwies. Auch davon hat HALAVÁTS keine Kenntnis, daß zwei Jahre vor dem Erscheinen seiner Arbeit von J. MÉHES* auf Grund eines von mir aus dem Brunnen der Eigelschen Schweinemastanstalt gesammelten Materials folgende 18 Ostrakodenarten beschrieben wurden: *Cypris hieroglyphica* MÉHES, *Aglaia reticulata* MÉHES, *Aglaia rákosiensis* MÉHES, *Herpetocypris strigata* O. F. M. *sp.*, *Herpetocypris reptans* BAIRD. *sp.*, *Cypria reniformis* HÉJJAS *sp.*, *Candona lactea* BAIRD., *Candona Sieberi* MÉHES, *Candona martoniensis* MÉHES, *Candona elegans* MÉHES, *Darwinula Dadayi* MÉHES, *Loxoconcha porosa* MÉHES, *Cytheridea banatica* MÉHES, *Cytheridea pannonica* MÉHES, *Cytheridea pannonica* MÉHES *var. tuberculata* MÉHES, *Cytheridea ampullata* MÉHES, *Cythereis Lőrentheyi* MÉHES und *Cythereis hungarica* MÉHES.

Aus dem bisher Gesagten ist also ersichtlich, daß auch dieser Abschnitt der Arbeit von HALAVÁTS weder in kompilatorischer Hinsicht noch betreffs der oberflächlichen Inbetrachtnahme der Literatur hinter den übrigen Teilen steht.

---

* J. MÉHES, Beiträge zur Kenntnis der pliozänen Ostrakoden Ungarns. I. Die Cypridaeen der unterpannonischen Stufe (Földtani Közlöny 1907, S. 498). II. Die Darwinulidaeen und Cytheridaeen der unterpannonischen Stufe (Ibid. 1908, S. 601).

Halaváts wollte auch darin konsequent bleiben, daß er — wenn er auf dem südlichen, von ihm reambulierten Blatte der geologischen Karte von Budapest jene Partie von pannonischen Bildungen wegließ, welche die Gruppe der Ziegelei von Kispest aufschließt — diese auch in seiner Arbeit über das Neogen der Umgebung von Budapest nicht erwähnt, ja ganz außer acht läßt, daß ich u. a. auch auf diesen Fehler seiner Karte hinwies und 1906, also vier Jahre vor dem Erscheinen seiner Arbeit, von hier eine aus 18 Arten bestehende interessante Fauna beschrieb. Auf seiner Karte erscheint also in der Umgebung des Ziegelofens („Z.O.") Flugsand ausgeschieden, wo man doch damals (1902) hier noch keine Ziegel aus Sand herstellte, sondern am linken Donauufer überall aus pannonischem Ton; auch diese Tatsache konnte Halaváts nicht bewegen, den Punkt zu besuchen. Ebenso ist ihm auch der pannonische Aufschluß nächst dem Fuchsschen Meierhofe nicht bekannt, wo doch dieser auf der Karte ebenfalls mit dem Zeichen „Z.O." (Ziegelofen) angedeutet erscheint. Von dem berühmten Souheitelschen Aufschluß bemerkt er nur: „nächst der Station Pusztaszentlörinc, etwas nördlich von derselben, gibt es ebenfalls eine kleine Ziegelgrube, in welcher unter dünnem humosen Sand gelber, Mergelkonkretionen führender Ton aufgeschlossen ist." Wenn sich Halaváts beim Verfassen seiner Arbeit auf Beobachtungen im Felde gestützt hätte, so hätte er sich überzeugen müssen, daß dies keine so verachtenswerte kleine Ziegelgrube, sondern eine seit Jahrzehnten in Betrieb stehende mächtige Grube, die interessanteste unter ihresgleichen in der Umgebung von Budapest ist. Als seit langem in Betrieb stehende mächtige Grube wird sie bereits 1892 von B. v. Inkey* in seiner Arbeit über die Umgebung von Szentlörinc, und zwar unter dem Namen ihres Besitzers Souheitl erwähnt. Ich selbst habe in meiner erwähnten kurzen Arbeit über das Pannonische der Umgebung von Budapest sogar aus vier Schichten derselben Faunen aufgezählt. Es wäre hier nicht am Platze, sich mit den Schichten dieses Aufschlusses und deren Faunen eingehender zu befassen,

---

* Geolog. u. agronom. Kartierung von Pusztaszentlörinc. Mitt. a. d. Jahrb. d. kgl. ungar. geol. Anst. Bd. X.

da ich dies im zweiten Teil meiner Arbeit über „Die pannonische Fauna von Budapest" ohnehin zu tun gedenke. Hier will ich gegenüber der Geringschätzung HALAVÁTS' nur betonen, daß gerade die in dieser Grube aufgeschlossenen Schichten die besterhaltenen Fossilien und die reichsten Faunen führen, andererseits aber diese Sumpfsedimente mit ihren Sandsteinlinsen und reine Süßwasserfaunen führenden Sandlinsen hier in ihrer typischesten Ausbildung anzutreffen sind. Hier grub Dr. Z. SCHRÉTER* 1910 den schönsten Mastodonfund Ungarns aus. Mit einem Wort, diese „kleine Ziegelgrube" ist in der Umgebung von Budapest der interessanteste Aufschluß der pannonischen Bildungen, auf den ich künftig noch des öfteren zurückkommen muß.

Über den die pannonischen Bildungen behandelnden Abschnitt seiner Arbeit bricht übrigens HALAVÁTS selbst den Stab, indem er betont (S. 379), daß diese Bildungen in den Profilen der Bohrungen eine bereits untergeordnete Rolle spielen, so daß man sich vornehmlich auf die Beobachtungen ober Tage stützen muß; Beobachtungen ober Tage zu machen trachtete aber er selber nicht, ja er beachtete — wie gezeigt wurde — auch die Beobachtungen anderer nicht, so daß dies der am wenigsten gelungene Abschnitt der literaischen Zusammenstellung wurde.

Nachdem im obigen kurz geschildert wurde, was die Arbeit HALAVÁTS' von all jenem nicht enthält, das sie enthalten sollte, wollen wir nur den die pannonischen Bildungen betreffenden Inhalt der Arbeit betrachten.

I. HALAVÁTS beschreibt ebenso wie die älteren Erforscher der pannonischen Bildungen der Umgebung von Budapest fast ausschließlich die petrographische Ausbildung und Verbreitung der Ablagerungen, ohne die Fauna zu beachten.

II. Er spricht davon, daß das Wiener und Grazer Becken westliche Buchten des großen, von den Karpathen umsäumten pannonischen Beckens waren, die jedoch in der zweiten Hälfte

* Diesen interessanten Fund legte Dr. Z. SCHRÉTER der Fachsitzung der Ungarischen Geologischen Gesellschaft am 16. November 1910 vor, und bestimmte denselben vorläufig als *Mastodon longirostris,* wie dies aus dem in Bd. XL des Földtani Közlöny erschienenen Sitzungsprotokoll hervorgeht (S. 679).

der pannonischen Zeit, nachdem die Grenzen des pannonischen Binnensees enger geworden sind, trocken gelegt wurden; sie wichen vor der Donau, welche zu dieser Zeit die Belvedere-Schotter ablagerte. In diesen Becken sind, wie HALAVÁTS behauptet, nach unseren Beobachtungen die durch *Congeria banatica* R. HOERN. und *Limnocardium Lenzi* R. HOERN. charakterisierten Schichten die tiefsten, welche unter anderen z. B. in der Umgebung von Zagreb im Komitate Szilágy und in Siebenbürgen an mehreren Orten ausgebildet sind.

III. In der Umgebung von Budapest sind die pannonischen Ablagerungen konkordant auf den sarmatischen Kalksteinen gelagert, diese unmittelbar aufgelagerten Schichten stammen jedoch nach HALAVÁTS nicht vom Anfang der pannonischen Zeit, sondern haben sich später abgelagert, so daß zwischen den beiden Bildungen eine zeitliche Lücke besteht. Dies erklärt er so, daß „gegen Ende der sarmatischen Zeit die Verbreitung des Wassers infolge stärkerer Tätigkeit der gebirgsbildenden Kräfte viel geringer ist, das einstige sarmatische Meer wurde dem Ufer entlang an zahlreichen Stellen trocken gelegt, und an diesen Stellen setzten sofort die erodierenden Kräfte mit ihrer zerstörenden Wirkung ein.“ Deshalb sind nach ihm „Übergangsschichten bis jetzt vollständig unbekannt.“.

IV. Endlich spricht HALAVÁTS auch über die stratigraphischen Verhältnisse der pannonischen Schichten der Umgebung von Budapest. Er behauptet — und zwar ohne es zu beweisen —, daß die von mir bei Tinnye und im Brunnen der Eigelschen Schweinemastanstalt im Kőbánya gefundenen *Melanopsis Martiniana*-Schichten in die untere pannonische Stufe gehören und mit den *Congeria ungula-caprae*-Schichten gleichalterig seien, so daß zwischen denselben kein Unterschied des Horizontes, sondern nur der Fazies bestehe.

In eine besondere mittlere Stufe reiht er den durch *Congeria triangularis* und *balatonica* charakterisierten Horizont, während in die obere seiner Ansicht nach bloß der durch „*Congeria rhomboidea* und *Limnocardium cristagalli*“ charakterisierte Horizont und dessen Süßwasserfazies sowie der durch „*Unio Wetzleri*“ charakterisierte Horizont gehöre. Und hierher zählt er endlich noch die hoch über dem *Unio Wetzleri*-Sand gelegenen *Mastodon Borsoni*-führenden Schichten von Batta.

Bevor ich auf die gelegentlich meiner Ausflüge gemachten neueren Beobachtungen übergehe, sei mir gestattet, zu den hier skizzierten Resultaten der in Rede stehenden Arbeit von JULIUS HALAVÁTS Punkt für Punkt einige kritische Bemerkungen hinzuzufügen.

I. Nachdem wir gesehen haben, daß bezüglich der räumlichen Verbreitung der Bildung die Angaben von HALAVÁTS sehr mangelhaft sind, möchte ich kurz noch darauf hinweisen, daß, wie ich bereits oben in dem 3. Abschnitt über das untere Mediterran ausgeführt habe, HALAVÁTS die östliche Grenze der untermediterranen marinen Ablagerungen bei Csömör zugunsten der pannonischen Bildungen unrichtig zeichnet. Auf HALAVÁTS' Karte sind nämlich westlich von Csömör levantinische Schotter und pannonische Schichten ausgeschieden, wo doch in der am nordwestlichen Ende des Dorfes befindlichen Sandgrube nicht pannonische Schichten, sondern wie ich nachgewiesen habe, Anomienführende untermediterrane Sande und Sandsteine sich befinden. Für eine Verschiebung der Grenzen der pannonischen Bildungen gegen Osten spricht ferner, wie ich in dem Kapitel über das untere Mediterran ebenfalls bereits ausgeführt habe, auch meine Beobachtung, daß in dem am östlichen Ende von Mátyásföld, an dem Fahrwege zur Fölsömalom gegrabenen Brunnen die pannonischen Bildungen nicht mehr vorhanden waren, indem unter dem Humus, unter wahrscheinlich holozänem gelben Sand unmittelbar der *Pecten (Aequipecten) praescrabiusculus* FONT. führende untermediterrane feine Schotter gelagert ist; nach der Karte von HALAVÁTS ist aber noch ganz Mátyásföld auf den Schichten der pannonischen Formation erbaut.

II. Die Bemerkung HALAVÁTS', daß das Wiener und das Grazer Becken als Buchten der pannonischen Binnensee nur zu Beginn der pannonischen Zeit unter Wasser waren, in den späteren Abschnitten derselben aber infolge einer Abnahme der See bereits trocken gelegt wurden und so der Bildung kontinentaler Ablagerungen Raum gewährten, besitzt nicht nur für diese, sondern, wie ich hinzufügen kann, nach unseren gegenwärtigen Kenntnissen auch für das Siebenbürgische Becken Gültigkeit!

Auf die Äußerung HALAVÁTS', daß die durch die in den Formenkreis von *Congeria banatica* und *Limnocardium Lenzi* gehörenden Arten charakterisierten Mergel und Tone das tiefste Niveau der pannonischen Formation bilden, sei mir gestattet, Folgendes zu bemerken. Anfangs war ich selbst der Meinung*, daß dieselben das tiefste Glied der pannonischen Stufe bilden, da ich sie an den mir bekannten Fundorten tatsächlich überall unter den durch *Melanopsis Martiniana* und *Mel. vindobonensis* charakterisierten groben Sanden gefunden habe, wie auch an dem klassischen Fundort bei Vercserova der *Melanopsis Martiniana* und *Mel. vindobonensis* führende Schotter auf *Congeria banatica* führendem Ton gelagert ist. Später hat jedoch KARL GORJANOVIĆ KRAMBERGER** gerade in der Umgebung von Zagreb — auf welche sich auch HALAVÁTS als Beweis für seine Behauptung beruft — nachgewiesen, daß der *Congerica banatica* führende Mergel nicht das unterste Niveau bildet, sondern in die *Melanopsis Martiniana*-Sande wiederholt abwechselnd eingelagert ist. Später hat auch FR. V. PÁVAY-VAJNA*** in der Umgebung von Nagyenyed über den *Melanopsis*-Schichten mit *Congeria banatica* erfüllte sandige Mergelschichten gefunden.

Dasselbe habe ich bei Szócsán beobachtet, an dem klassischen Fundorte, wo der Übergang des Sarmatischen ins Pannonische Schritt für Schritt zu verfolgen ist.† Eine kurze Beschreibung

---

* LŐRENTHEY, Bericht über die Resultate meiner geologischen Exkursionen im Sommer 1891 (Értesitö II, Term. tud. szak. Kolozsvár 1893) und Beiträge zur Kenntnis der unterpontischen Bildungen d. Szilágyer Komitates und Siebenbürgens (Értesitö II, Term. tud. szak. Kolozsvár 1903).

** Das Tertiär des Agramer Gebirges (Jahrb. d. k. k. geol. R.-A. Bd. 47, 1898).

*** Die geologischen Verhältnisse der Umgebung von Oláhlapád. (Földtani Közlöny, Bd. XL, 1910).

† Ein klassischer Fundort der die sarmatischen und pannonischen Bildungen überbrückenden Schichten in Ungarn. (Földtani Közlöny, Bd. XXXIII, 1903)

dieses interessanten Fundortes habe ich 1903 gegeben auf Grund des von VIKTOR ARADI gesammelten Materials. Später suchte ich dann selbst Szócsán auf, um weiteres Material zu sammeln. Bei dieser Gelegenheit fand ich, zwischen die Sandschichten gelagert, eine schieferige tonige Schicht, in welcher ich zwar bisher *Congaria banatica* nicht angetroffen habe, obwohl sie bei eingehender Durchmusterung des reichen Materials noch zum Vorschein kommen kann; ich fand aber darin die durch eine große Menge charakteristisch dünnschaliger und gewöhnlich kleiner Cardien charakterisierte Fauna, welche für diese Schichten überall bezeichnend ist. Auch dieser Fundort bekräftigt also die Beobachtungen von GORJANOVIĆ-KRAMBERGER, L. ROTH V. TELEGD, FR. V. PÁVAY-VAJNA usw. und bestätigt zugleich, daß HALAVÁTS auch hier die bereits bedeutend früher erschienene Literatur nicht in Betracht gezogen hat, sonst hätte er sich nicht zu der kategorischen Äußerung verleiten lassen, daß zwischen den sarmatischen und pannonischen Bildungen „Übergangsschichten bisher vollständig unbekannt sind“. Diese Äußerung hat er nämlich 1910 getan, während ich die Übergangsschichten von Szócsán bereits 1903 beschrieben habe, also sieben Jahre vor dem Erscheinen von HALAVÁTS' Arbeit. In meinem Bericht über Szócsán weise ich nämlich nach, daß von der sarmatischen Bildung aufwärts Foraminiferen, und für das Sarmatische charakteristische Cerithien, Tapes, Ervilia, Trochus, Bulla usw. abnehmen, die Congerien, Orygoceras und hauptsächlich aber Melanopsis-Arten (*Lyrcaea*) hingegen zunehmen.

Wenn schon HALAVÁTS von den von mir entdeckten Übergangsschichten keine Notiz nehmen, noch deren Existenz widerlegen wollte, so hätte er wenigstens die von FUCHS entdeckte Übergangsschicht in Betracht ziehen können, welche dieser bereits 1875 entdeckte*, und welche in dem Werke „Bau und Bild Österreichs“ auf Seite 981 auf Grund der FUCHSschen Arbeit ebenfalls als „Grenzschicht zwischen den Congerien- und sarmatischen Schichten“ angeführt ist. R. HOERNES verlegt

* FUCHS, Geologische Studien in den Tertiärbildungen des Wiener Beckens. Nr. XXI. (Jahrb. d. k. k. geol. R.-A., Bd. 25, 1875.)

ebenfalls in dem Werke „Bau und Bild Österreichs" auf Seite 971 bis 972 diese Schichten in die mäotische Stufe; HALAVÁTS bemerkt zwar sieben Jahre später (S. 379), daß diese Schichten ausgesprochen pannonisch sind. Beweise dafür führt er jedoch nicht an. FR. SCHAFFER* führt aus dieser Schicht 1906, also vier Jahre vor dem Erscheinen der HALAVÁTSschen Arbeit auf Grund des Manuskriptes von FUCHS folgende Fauna an: „*Columbella scripta* BRLL. (4.), *Buccinum duplicatum* SOW. (8.), *Murex sublavatus* BAST. (3.), *Cerithium rubiginosum* EICHW. (h.), *Acme Frauenfeldi* HOERN. (h.), *Trochus pictus* EICHW. (1.), *Nerita sp.*, *Paludina immutata* FRFLD. (h.), *Melanopsis impressa* KRAUSS (h. h.), *Melanopsis vindobonensis* FUCHS (2. 1.), *Planorbis tenuis* FUCHS (5.), *Limnaeus sp.*, *Cardium cf. simplex* FUCHS (h.), *Congeria ornithopsis* BRUS. (h.)."

Diese interessante gemischte Fauna wurde in der Umgebung von Wien an mehreren Punkten gefunden, als Beweis dessen, was ich auch über den Fund von Szócsán mit SCHAFFER übereinstimmend sagen kann: „die Mischung der sarmatischen Fauna mit der pannonischen (bei ihm pontischen) weist auf keine Unterbrechung der Wasserbedeckung oder gar Erosion hin, wie sie anderwärts beobachtet worden sind."

Darüber ist *Melanopsis impressa* und *Congeria ornithopsis* führender Sand und Geröll gelagert. Die altbekannte Tatsache, daß in den großen *Melanopsis Martiniana*-Sandkomplex mehrfach *Congeria banatica* führende bzw. Cardienmergel zwischengelagert sind, bestätigt, daß diese Schichtengruppe den untersten Teil der pannonischen Stufe bildet, und so ist die Behauptung von HALAVÁTS unbegründet, daß die *Melanopsis Martiniana*-Schichten, welche in der Umgebung von Budapest von mir aus dem Brunnen der Schweinemastanstalt zu Köbánya und auch von Tinnye beschrieben worden sind, nicht vom Anfang der pannonischen Zeit stammen, sondern sich später abgelagert haben und so zwischen den sarmatischen und den pannonischen Schichten eine Lücke bestehen würde. Die Voraussetzung solch einer Lücke ist umso unnötiger, als wie wir gesehen haben,

* Geologie von Wien. II. Teil, S. 108.

z. B. durch die Ausbildung der pannonischen Stufe bei Szócsán und bei Wien erwiesen ist, daß bei uns in Ungarn sich ebenso Übergänge zwischen den sarmatischen und pannonischen Bildungen finden, wie in Rußland und Rumänien, und nur J. HALAVÁTS keine Kenntnis davon besitzt, trotzdem bereits 35 Jahre vor Erscheinen seiner Arbeit FUCHS und 7 Jahre vorher ich diese interessante Schichtenreihe beschrieben habe.

In faunistischer Hinsicht ist dies eine einheitliche Schichten gruppe, in welcher bloß die petrographische Fazies die faunistischen Abweichungen hervorruft. Es ist nämlich auffallend, daß die durch *Melanopsis Martiniana* charakterisierte Fauna, welche ich im folgenden noch besprechen werde, in ihrer vollständigen Reichhaltigkeit — wenigstens nach unseren bisherigen Kenntnissen — stets an feineren und gröberen Sand und Schotter gebunden ist, während *Congeria banatica* oder die Gesellschaft der dünnschaligen meist kleinen Cardien aus tonigen Schichten bekannt ist, was darauf hinweist, daß letztere einem trüberen, schlammigeren Wasser den Vorzug gaben im Gegensatz zu der *Melanopsis*-Fauna. Der häufige Wechsel dieser Faziesverhältnisse ist leicht verständlich, wenn wir uns die pannonische Binnensee mit ihren zahlreichen Buchten und den an den seichten Ufern entstandenen Lagunen vor Augen führen. Der Seespiegel selbst hob sich zeitweilig um mehrere Meter, so daß das Wasser die Ufer überflutete und die dort befindlichen gesonderten Lagunen und ausgesüßten kleineren Teiche und Lachen vereinigte und es ermöglichte, daß sich auf den dort abgelagerten Süßwasserschichten Ablagerungen aus salzigerem Wasser bilden konnten. Mit einem Sinken des Seespiegels geht an dem von der See verlassenen Gestade stets die Bildung zahlreicher kleiner Sümpfe und Pfützen Hand in Hand, in welchen das Wasser ausgesüßt wird (während das Seewasser durch etwaige Verdunstung an Salzgehalt zunimmt), und so entstehen in der Nähe der Ufer die Süßwasserlinsen, in welche auch zahlreiche Festlandformen hineingelangten. Aber nicht nur das Steigen oder Sinken des Spiegels der Binnensee bewirkt an den Ufern größere Veränderungen, sondern auch die Einmündung der Flüsse. An den Mündungsstellen der Flüsse sind z. B. die sandigen schotterigen Ablagerungen mit der *Melanopsis Mar-*

*tiniana*-Fauna entstanden, während sich zur selben Zeit weiter seewärts die schlammige mergelige *Cardium*- oder *Congeria banatica*-Schicht ablagerte. Der Fluß verbaut aber seine Mündung immer mehr, so daß er nach einer gewissen Zeit entfernter in das Meer zu münden gezwungen ist, dort, wo sich vorher z. B. Mergel ablagerte, so daß er jetzt auf diesen mergeligen Ablagerungen seinen Sand und Schotter absetzen wird. Ein solcher Wechsel der Lokalverhältnisse zieht naturgemäß einen Wechsel, ein Wandern der Fauna nach sich. Später, nach Wiederherstellung der früheren Verhältnisse, wechseln die Faunen wiederum ihre Plätze, und stellt man sich dies mehrfach wiederholt vor, so wird die Faziesänderung der unterpannonischen Stufe und deren mehrfache Wiederholung verständlich.

Ein interessantes Beispiel dieser Faziesänderung bietet die pannonische Bildung des Wiener Beckens, deren typische Ausbildung SCHAFFER aus der Umgebung von Wien in folgendem beschreibt:

1. Auf die von FUCHS entdeckte und schon oben erwähnte Grenzschicht mit der charakteristischen Fauna, welche die sarmatischen und pannonischen Bildungen überbrückt und durch die große Individuenzahl von *Congeria ornithopsis* und *Melanopsis impressa* charakterisiert ist, als unterste Schicht folgen

2. Blöcke enthaltende Schotter- und Landschichten mit *Melanopsis impressa* und wenigen *Congeria ornothopsis.*

3. Sodann dichte fette Tone mit Ostrakoden und kleinen Bithinien und wie auch in Ungarn in ihrem unteren Teile mit *Cardium simplex*-ähnlichen kleinen gerippten Cardien.

4. Hierauf folgen *Congeria Partschi* und *Melanopsis Martiniana* führende Sande und Schotter mit Tegel wechselnd, in welchem Schichtenkomplex untergeordnet *Melanopsis vindobonensis* und kleine Exemplare von *Congeria subglobosa* vorkommen.

5. Darüber ist mit feinem Sande wechselnder Tegel gelagert. Der Tegel ist oben sandig mit wenigen *Congeria Cžjžeki* und *Cardium apertum* var. *Schedelianum*, während einige Bänke mit *Cadium carnuntinum* erfüllt sind. Im oberen Teile des Schichtenkomplexes finden sich *Congeria subglobosa*, *Cardium conjungens*,

*Cardium apertum, Melanopsis vindobonensis, Melanopsis pygmaea, Melanopsis Bouéi* und Säugerreste.

6. Zu oberst lagern Konkretionen führende Sande mit *Congeria spathulata* und *Cardium apertum,* Pflanzen und Säugerresten.

Man sieht auf den ersten Blick, daß diese Fauna mit unserer unterpannonischen Stufe identisch ist, auf welche die Worte SCHAFFERs gleicherweise passen: „Es ist selbstverständlich, daß diese Verteilung der Fauna keinen ausschließlichen Zug der einzelnen Horizonte bildet. Vielmehr treten fast alle Formen in allen Lagen auf und nur das auffällige Vorherrschen in bestimmten Tiefen ist zu einem Kriterium für deren Stellung geworden, die wohl keinen stratigraphischen Wert für sich in Anspruch nehmen kann“ (S. 149). Und da, wie auch SCHAFFER hervorhebt, die Schichtenreihe nicht überall in ihrer Gesamtheit ausgebildet ist, so ist klar, daß diese Faunaunterschiede nur den Charakter der Fazies besitzen. Dieser sandige, schotterige *Lyrcaea*-Horizont des Wiener Beckens mit seinen tonigen *Cardium*-Zwischenlagen entspricht also vollständig unserer unterpannonischen Stufe. Und geschieht das Sammeln mit genügender Umsicht und Vorsicht, so kommt auch die für unsere unterpannonische Stufe charakteristische Mikrofauna zutage, wie die Fauna von Leobersdorf beweist.

Aus dem Bisherigen haben wir gesehen, daß JULIUS HALAVÁTS in der Ausbildung dieses unteren Teiles der pannonischen Stufe völlig unbewandert ist. Es ist dies jener Horizont, welcher von SP. BRUSINA nach den charakteristischen *Melanopsis (Lyrcaea) Martiniana* und *Melanopsis (Lyrcaea) vindobonensis* usw., *Lyrcaea*-Horizont genannt wurde. In diesen sind in mehrfacher Wiederholung als Faziesbildungen jene Mergel gelagert, welche durch eine große Menge flacher, dünnschaliger *Didacna*-Arten, flache kleine Congerien, wie *Congeria banatica, Pisidium? costatum, Orygoceras*-Arten, dünnschalige *Planorbis*-Formen usw. charakterisiert sind. Auch bezüglich der Ausbildung dieser Formationen ist es also JULIUS HALAVÁTS nicht gelungen, die Kenntnis in den Rahmen der modernen Auffassung einzufügen, wie er als Hauptverdienst seiner Arbeit hervorhebt, im Gegenteil, da ihm die Literatur der letzten zehn Jahre unbekannt ist, sind seine Daten das Abbild der ältesten, längst veralteten Verhältnisse.

Die Äußerung von JULIUS HALAVÁTS, daß im pannonischen Becken und dessen Wiener und Grazer Buchten nach dem heutigen Stande (1910) der Erfahrungen die tiefste Stufe der pannonischen (bei ihm pontischen) Stufe durch die durch *Congeria banatica* R. HOERN. und *Limnocardium Lenzi* R. HOERN. charakterisierten Schichten gebildet wird, ist auch schon deshalb unrichtig, da solche Schichten bisher weder aus dem Wiener, noch aus dem Grazer Becken bekannt sind.

Daß aber auch im Wiener Becken innerhalb dieses Horizontes die petrographischen und damit auch die faunistischen Fazies vorhanden sind, wird dadurch bewiesen, daß in den mit den unterpannonischen Bildungen von Budapest in faunistischer Hinsicht am besten übereinstimmenden Leobersdorfer Ablagerungen nach OSKAR V. TROLL* sich ebenfalls auf Brackwasser hinweisender Ton, sodann auf süßeres Wasser deutender Mergel und auch auf noch süßeres Wasser deutender Sand mit kalkigem Sandstein und Süßwasserkalklinsen vorhanden sind. Wie wir gesehen haben, finden sich auch in den drei tonigen Schichten SCHAFFERS an dünnschaligen gerippten Cardien reiche Einlagerungen. Der typische *Melanopsis Martiniana*-Horizont ist auch hier durch feineren und gröberen Sand vertreten.

Hier im Wiener Becken war die Aussüßung des Wassers eine bedeutendere, als z. B. in der Umgebung von Budapest. In der Umgebung von Budapest und in Ungarn überhaupt ist ein solcher Grad der Aussüßung nur innerhalb der Schichten der oberpannonischen Stufe prächtig sichtbar, z. B. in dem Souheitelschen Steinbruch bei Szentlörinc. Hier in dem ungarischen Becken ist nämlich das Sinken des Wasserspiegels erst gegen Ende der pannonischen Zeit eingetreten, welches, dem gänzlichen Zurückweichen der See vorangehend, im Wiener und Siebenbürgischen Becken bereits in der Mitte der pannonischen Zeit eingetreten war. Ob aber in dem nach Zurückweichen der See trocken ge-

* Die pontischen Ablagerungen von Leobersdorf und ihre Fauna (Jahrb. d. k. k. geol. R.-A., Wien 1907).

legten Wiener Becken die See tatsächlich sofort der pannonischen Donau das Feld überließ und ob die Donau die Belvedere-Schotter tatsächlich in der zweiten Hälfte der pannonischen Zeit abgelagert hat, wie JULIUS HALAVÁTS behauptet, werden wir weiter unten sehen.

III. JULIUS HALAVÁTS behauptet bezüglich der Lagerung der pannonischen Bildungen, daß dieselben konkordant auf den sarmatischen Schichten lagern. Ich muß wiederholt darauf hinweisen, was ich bereits in meiner Arbeit „Über die pannonischen und levantinischen Schichten von Budapest und deren Fauna" (S. 308) gerade HALAVÁTS gegenüber betont habe, daß die pannonischen Ablagerungen seiner Behauptung gerade entgegengesetzt diskordant auf den sarmatischen Schichten lagern. Dies haben übrigens vor mir bereits J. v. SZABÓ (1883) und B. v. İNKEY (1892) betont, nur HALAVÁTS will keine Notiz davon nehmen. Ich kann nicht verstehen, wo HALAVÁTS in seinen Angaben die Beweise für seine Behauptungen erbringt, da er das Fallen der sarmatischen Schichten bei Gubacs mit $5^h$ $25^0$, und bei Köbánya in der Tongrube der Lechnerschen Ziegelei mit $12^h$ gemessen hat, die pannonischen Schichten aber, sowohl nach ihm wie auch nach İNKEY, gegen ESE ($7{,}5^h$) fallen. Daß übrigens die pannonischen Schichten nicht ungestört auf den sarmatischen lagern können, folgt bereits daraus, daß nach HALAVÁTS in der Zeit zwischen der Ablagerung der pannonischen und sarmatischen Schichten größere Niveauveränderungen stattgefunden haben. Er sagt nämlich, „daß gegen Ende der sarmatischen Zeit die Verbreitung des Wassers infolge stärkerer Tätigkeit der gebirgsbildenden Kräfte viel geringer war, die einstige sarmatische Binnensee wurde dem Ufer entlang an zahlreichen Stellen trocken gelegt."

Ob in dem *Lyrcaea*-Sande die *Congeria banatica* führende oder die eine derselben gleichwertige Fauna einschließende Cardienmergelfazies vorhanden ist oder fehlt, oder, falls vorhanden, nur einmal oder mehrfach wiederholt eingelagert ist: das hängt alles von den Lokalverhältnissen ab, die in der pannonischen Zeit herrschten, und bewirkt, meiner Ansicht nach, an der allgemeinen Einteilung keine Änderung.

IV. HALAVÁTS macht bezüglich der stratigraphischen Altersverhältnisse der unterpannonischen Bildungen zwei unrichtige Äußerungen. Zuerst, daß der unterste Horizont der *Congeria banatica* führende Mergel ist und auf demselben der *Lyrcaea*-Horizont folgt; damit hat HALAVÁTS unsere Kenntnisse bezüglich der unterpannonischen Stufe bei Budapest nicht nur nicht in den Rahmen der neueren Auffassung eingefügt, sondern einfach auf einen bereits vor nahezu zwei Jahrzehnten widerlegten und also veralteten Standpunkt gestellt. Die zweite Behauptung ist, daß die durch massenhaftes Auftreten von *Congeria ungula-caprae* (welche er konsequent *Congeria Hoernesi* nennt) und *Congeria Partschi* charakterisierten Schichten mit dem *Lyrcaea*-Horizont gleichalterig seien, also in die unterpannonische Stufe gehören. Dies behauptet er alles nur so nebenbei, ohne es im geringsten zu beweisen.

Diesbezüglich weise ich auf meine ausnahmsweise auch von HALAVÁTS zitierte Arbeit „Die pannonische Fauna von Budapest" (S. 288) hin, in welcher ich auf faunistischer Grundlage ausführe, daß die durch massenhaftes Auftreten von *Congeria ungula-caprae* charakterisierten Schichten in die oberpannonische und nicht in die unterpannonische Stufe gehören. Auf diese faunistischen Charaktere werde ich übrigens bei Charakterisierung der unteren und oberen pannonischen Stufe zurückkehren. Hier möchte ich nur noch erwähnen, daß ich auch in den im Liegendsten der *Congeria ungula-caprae*-Schichten befindlichen und also unmittelbar auf den sarmatischen Kalk gelagerten eisenschüssigen Schottern bei Budapest-Rákos neben *Congeria Partschi* solche Formen gesammelt habe, welche die oberpannonische Stufe charakterisieren, wie *Limnocardium Penslii* FUCHS *sp.*, *Limn. secans* FUCHS *sp.*, *Limn. subdesertum* LŐRENT. und *Limn. Steindachneri* BRUS. *sp.*

Trotzdem ich dies bereits 1902 ausgeführt habe und trotzdem diese meine Arbeit ausnahmsweise auch HALAVÁTS bereits bekannt ist, nimmt er doch die von mir angewendete Einteilung nicht an, ohne jedoch das Warum zu begründen. Und ich wäre doch sehr gespannt, die Gegengründe zu hören, welche gegen die von mir benützte Einteilung sprechen.

Tatsache ist, daß sich hier in der Umgebung von Budapest und zwar am linken Ufer der Donau durch die Lagerung der

Schichten nicht gut beweisen läßt, daß die *Congeria ungula-caprae* und an der Basis *Congeria Partschi* führenden Schichten mit dem von mir aus dem Brunnen der Schweinemastanstalt beschriebenen *Lyrcaea*-Horizont nicht gleichalterig seien, also keine Fazies desselben bilden, da beide gleicherweise auf sarmatischem Kalk lagern. Zwar liegen einesteils die im Brunnen der Schweinemastanstalt aufgeschlossenen *Lyrcaea*-Schichten etwas tiefer als die in den Tongruben der Ziegeleien aufgeschlossenen *Congeria Partschi*- und *Congeria ungula-caprae*-Schichten, doch läßt sich anderenteils feststellen, daß die in den Tongruben der Ziegeleien aufgeschlossenen Schichten aus ihrem ESElichen Fallen gefolgert in das Hangende des *Lyrcaea*-Horizontes fallen.

Spätere Untersuchungen werden vielleicht feststellen, warum die Schichten dieser beiden Horizonte, ja sogar Stufen, hier in der Nähe nirgends aufeinander gelagert zu finden sind. Wir müssen annehmen, daß zu Beginn der pannonischen Periode, zur Zeit der Ablagerung des *Lyrcaea*-Horizontes, die das Liegende der Tongruben der heutigen Ziegeleien bildenden sarmatischen Schichten als Inseln aus der See emporragten und erst in der zweiten Hälfte der pannonischen Periode von Wasser überflutet wurden, oder aber wir müssen uns mit der von vielen angenommenen Erosion zu Beginn der pannonischen Zeit befreunden.

Ich muß jedoch erwähnen, daß meiner Ansicht nach die Erosion auf ein viel kleineres Gebiet beschränkt, sozusagen mehr lokal war, als viele Forscher annehmen. Nimmt man als Erklärung für das oben Gesagte die Erosion an, so muß ich, um die Sache klar zu machen, auch noch von jenen größeren Niveauschwankungen sprechen, welche auch Julius Halaváts erwähnte, und welche hier am Saum der großen ungarischen Tiefebene, wenn auch in geringerem Maße, vielleicht auch heute noch tätig sind. Daß dieselben auch in der pannonischen Zeit tätig waren, dafür werde ich noch mehr Beweise auch auf Grund meiner neueren Beobachtungen erbringen. Hier möchte ich nur auf die zu Beginn der pannonischen Zeit wirksam gewesenen tektonischen Kräfte hinweisen, deren Wirkungsresultate bei Budapest-Rákos und Budapest-Köbánya an mehreren Stellen zu beobachten ist. So ist, wie ich bereits in meiner Arbeit „Über die pannonischen und levantischen Schichten von Budapest und deren Fauna“ erwähnte (S. 315), in der Tongrube der Örleyschen Ziegelei in Rákos der sarmatische Kalkstein einer nord-südlichen Bruchlinie entlang um 5 m verworfen, an dieser Verwerfung nehmen jedoch die darüber gelagerten *Congeria Partschi-* und *Congeria ungula-caprae-*Schichten nicht mehr teil, als Zeichen dafür, daß die Verwerfung vor der Ablagerung der oberpannonischen Schichten erfolgt ist.

Gelegentlich der monographischen Bearbeitung meines Materials werde ich mich noch auf zahlreiche Verwerfungsrichtungen und Linien berufen, hier möchte ich nur noch auf ein in meiner Arbeit über das Alter der Schotter am Sashalom bei Rákosszentmihály* veröffentlichtes Profil hinweisen (Profil Nr. 1), an welchem der sarmatische Kalkstein um etwa 30 m abgesunken ist.

Nehmen wir die Erosion zu Beginn der pannonischen Zeit an, so läßt sich in Verbindung mit diesen Verwerfungen die Abtragung der Schichten der unterpannonischen Stufe so vorstellen, daß hier in der Umgebung von Kőbánya und Rákos die Erosion ihre Wirksamkeit erst nach Ablagerung eines Teiles des *Lyrcaea*-Horizontes begann, diese Bildung völlig erodierte, mit Ausnahme der kleinen Partie, welche im Brunnen der Eigelschen Schweinemastanstalt aufgeschlossen worden ist. Die Erhaltung dieser Partie läßt sich nur so erklären, daß sie in eine von Verwerfungen umgrenzte brunnenartige Vertiefung gelangte, aus welcher sie durch die Erosionskräfte nicht ausgewaschen werden konnte.

Zieht man eine derartige Ausbildung des Terrains in Betracht, so läßt sich auch hier im Gebiet von Budapest feststellen, daß die *Congeria ungula-caprae-* und *Congeria Partschi*-Schichten keine Faziesbildungen des *Lyrcaea*-Horizontes darstellen, sondern jünger sind. Noch augenscheinlicher wird diese Tatsache durch andere Fundorte erwiesen, so im Gebirge von Zagreb, über welche K. Gorjanović-Kramberger unter anderem folgendes schreibt**: „... als auch die nächst tiefere die der *Congeria Partschi* zu konstatieren. Unter diesen Etagen folgen noch die tief-

* Földtani Közlöny, Bd. XXXIV, 1904.

** Die Gliederung des Pliozäns am südlichen Abhange des Agramer Gebirges (Verhandl. d. k. k. R.-A., Jahrg. 1897).

sten Glieder der pontischen Abteilungen: der Sandstein von Bacun und Sandsteine mit *Melanopsis Martiniana*."

Zum Beweis dessen, daß die *Congeria ungula-caprae*-Schichten einem höheren Niveau angehören, als der „*Lyrcaea*-Horizont", braucht man übrigens nicht einmal bis nach Zagreb zu gehen, da man den Beweis dafür bereits am Balatonsee findet, wie eine — anscheinend auch von ihm selbst vergessene — Arbeit von HALAVÁTS beweist.* Er faßt hier nämlich die *Congeria ungula-caprae* sowie die daraufgelagerten, durch *Congeria balatonica* und *Congeria triangularis* charakterisierten Schichten mit Recht in eine Gruppe zusammen und irrt nur darin, daß er in denselben Vertreter einer besonderen mittelpannonischen Stufe erblickt.

Daß übrigens die *Congeria ungulata-caprae*-Schicht von Budapest-Rákos nicht, wie JULIUS HALAVÁTS behauptet, eine gleichalterige Fazies des im Brunnen der Schweinemastanstalt von Budapest-Köbánya aufgeschlossenen *Lyrcaea*-Horizontes sei, erhellt außer dem bisher Angeführten meiner Ansicht nach bereits daraus, daß in den beiden Faunen nur eine gemeinsame Art vorkommt, nämlich *Congeria Partschi* CŽJŽEK.** Wären es aber gleichalterige Schichten, so müßten bei so großer Nähe unbedingt mehr gemeinsame Arten vorhanden sein.

Durch das im folgenden Angeführte wird übrigens, glaube ich, jedermann zu der Überzeugung gelangen, daß die beiden Horizonte nicht nur nicht gleichalterig sind, sondern daß die Grenze zwischen der ober- und unterpannonischen Stufe gerade zwischen diesen beiden Horizonten gezogen werden muß. Um dies zu beweisen, will ich die Charaktere der beiden Stufen der pannonischen Bildungen noch einmal kurz zusammenfassen***, mit der

* Die Fauna der pontischen Schichten in der Umgebung des Balatonsees. Budapest 1902. S. 79 (Tabelle).

** Von der anderen gemeinsamen Art, *Planorbis solenoëides*, wurde nachgewiesen, daß die aus den Schichten von Köbánya unter diesem Namen von mir angeführten Stücke Vertreter einer neuen Art, *Planorbis parvulus* LÖRENT. sind, so daß *Pl. solenoëides* bislang für die unterpannonische Stufe eigentümlich ist.

*** LÖRENTHEY, Beiträge zur Fauna und stratigraph. Lage der pannon. Schichten in der Umgebung des Balatonsees (Result. d. wiss. Erforsch. d. Balatonsees 1906).

Bemerkung, daß es nicht statthaft ist, auf Grund der Säugerreste, welche bei uns noch nicht genügend untersucht sind, Parallelisierungen oder Niveaueinteilungen vorzunehmen.

In der unterpannonischen Stufe besteht die Fauna überwiegend aus kleinen Arten, wie *Congeria Mártonfii* LÖRENT., *Cong. scrobiculata* BRUS., an diejenigen der indischen Süßwasser erinnernden kleinen *Planorbis*-Arten, an die Süßwasser-Hydrobiiden Ostasiens erinnernden *Hydrobia*-Arten wie *Caspia*, und die offene Windungen besitzende *Baglivia*, kleine stachelige *Cardium*-Arten, wie *Didacna (Pontalmyra) Andrussowi* LÖRENT. *var. spinosa* LÖRENT., *Orygoceras*-Arten mit ovalem Querschnitt, *Papyrotheca*. Unter den großen Formen sind die massenhaft auftretenden *Lyrcaea*-Arten, wie *Melanopsis* (*Lyrcaea) Martiniana* FÉR., *Melanopsis (Lyrcaea) vindobonensis* FUCHS, *Melanopsis (Lyrcaea) impressa* KRAUSS *var. Bonellii* E. SISMD. und andere *Melanopsis*-Arten am wichtigsten. In großer Menge kommen von den großen Congerien hauptsächlich noch *Congeria ornithopsis* BRUS., an anderen Stellen *Congeria subglobosa* PARTSCH. usw. vor, sowie in den Formenkreis von *Melania (Melanoides) Escheri* gehörige große *Melanoides*-Arten. Große *Limnocardium-*, *Unio-* und *Vivipara*-Arten kommen vereinzelt vor, während in der oberen Stufe gerade diese Formen überwiegen. Nach unseren bisherigen Kenntnissen fehlen *Anodonta*, *Dreissensia*, *Dreissensiomya*. Dies ist die Fauna der sandigen und schotterigen Fazies; in der zwischengelagerten mergeligen, tonigen Schichten finden sich folgende Formen: *Congeria banatica* R. HOERNES, dünnschalige *Cardium*-Arten, welche mitunter eine beträchtliche Größe erreichen, wie *Limnocardium sirmiense* und *Limnocardium Lenzi* R. HOERN.; die meisten dünnschaligen Formen gehören in den Formenkreis von *Didacna (Pontalmyra) tinnyeana* LÖRENT. und füllen stellenweise ganze Schichten an. Eine verbreitete Art ist *Pisidium? costatum* KRAM. GORJ. Auch hier sind *Orygoceras*-Arten häufig, sowie die asiphonalen *Valenciennesia*-Arten und die großen *Lymnaea*-Arten.

Der Unterschied zwischen den beiden Fazies findet in der petrographischen Beschaffenheit der einschließenden Schichten seine Erklärung: die mergeligen, tonigen, für Wasser wenig durchlässigen Schichten sind zur Erhaltung der dünnschaligen Formen geeignet, während in der sandigen schotterigen Fazies bloß die großen *Lyrcaea-*, *Melania-* und *Congeria*-Arten erhalten bleiben, die dünnschaligen kleinen Formen hingegen durch die rasch durchsickernden Wasser aufgelöst werden und fossil nur jene glücklichen Exemplare erhalten bleiben, welche in das Innere irgendeines großen Schneckenhauses gelangt und so gegen Auslaugung und Verwitterung geschützt waren.

Die oberpannonische Stufe ist charakterisiert durch die großen und prächtigen *Cardium*-Arten, *Budmania* und besonders *Limnocardium*, welche hier in großer Artenzahl vorhanden sind; während die für die untere Stufe charakteristischen kleinen Formen oder die *Didacna*-Arten hier sehr selten sind. *Lyrcaea*-Arten von sarmatischem Typus wie *L. impressa var. Bonellii* fehlen, *Martiniana* ist eine große Seltenheit, während dieselben für die untere Stufe charakteristisch sind; auch mit Stacheln stark verzierte *Melanopsis*-Arten sind hier selten. Hier spielen die siphonalen *Valenciennesia-* und *Dreissensiomya*-Arten eine gewisse Rolle, hier treten *Anodonta*, *Dreissensia* und *Vivipara* auf, *Orygoceras*-Arten jedoch fehlen bisher gänzlich.

Diese gemeinsamen Charaktere fügen die einzelnen Schichten der ober- und der unterpannonischen Stufe untereinander so eng zusammen und stellen die beiden Stufen in einen so schroffen Gegensatz zueinander, daß es unmöglich ist, das durch massenhaftes Auftreten von *Congeria triangularis* und *balatonica* charakterisierte Niveau als besondere mittelpannonische Stufe abzutrennen, wie es HALAVÁTS tut, aber nicht begründen kann. Meine Behauptung diesbezüglich wird auch noch durch K. GORJANOVIĆ-KRAMBERGER unterstützt, der in dem erläuternden Text zu einer geologischen Karte von Kroatien und Slavonien folgendes sagt*: „. . . scheint mir am natürlichsten zu sein, die pontische Stufe des Agramer Gebirges in zwei große Abteilungen zu zerlegen, in: 1. eine obere brackische, das sog. *Rhomboidea*-Niveau umfassende Abteilung, bestehend zu oberst aus gelben Sanden mit großen Limnocardien (L. Schmidti) und 2. einen unteren aus Süß- und

* Geologische Übersichtskarte des Königreichs Kroatien-Slavonien (Erläuterungen zur geologischen Karte von Agram, 1908).

Brackwasserablagerungen bestehenden Komplex, umfassend zu oberst den *Lyrcaea*-Horizont, ferner brackische Mergel mit *Congeria Partschi, Valenciennesia Arthaberi, Val. Langhofferi, Val. limnaeoidea,* als auch Mergel mit *Congeria banatica, Limnaea Pančiči,* darunter wieder Flußschotter mit *Melanopsis Martiniana* oder stellenweise Mergel mit *Planorbis* und *Limnaeus,* endlich Sandsteine mit Congerien und Cardien."

Wollte man in Übereinstimmung mit Halaváts eine besondere mittelpannonische Stufe unterscheiden, so müßte man auch das *Congeria ungula-caprae*-Niveau hinzurechnen, da dasselbe zwischen der unteren pannonischen Stufe und der die mittlere Stufe Halaváts' bildenden *Cong. triangularis*- und *balatonica*-Schicht gelegen ist.

Grojanović-Krambergers Einteilung bestätigt in jeder Hinsicht, daß Halaváts im Irrtum ist, als er die pannonische Stufe in drei Etagen sondert, sowie daß er auch in der Beziehung einen veralteten Standpunkt vertritt, daß die *Congeria banatica*-Schicht ein besonderer Horizont sei, welchen man zu unterst stellen müsse, wo doch, wie ich bereits früher ausgeführt habe, bei uns ebenso wie in der Umgebung von Zagreb und auch anderwärts dieselbe nichts anderes ist als die Fazies des *Lyrcaea*-Horizontes.

Gegen die Auffassung dieser *Congeria banatica*- und denselben gleichaltrigen Cardien-Mergel als besonderer Horizont spricht auch der innige genetische Zusammenhang, welcher zwischen der Fauna der *Melanopsis*-Fazies der sarmatischen und unterpannonischen Stufe besteht. Durch die Zwischenlagerung dieses Horizontes würde nämlich eine Unterbrechung zwischen den beiden Faunen eintreten.

Jetzt möchte ich nur noch kurz auf das Verhältnis hinweisen, welches zwischen den pannonischen Schichten der Umgebung von Budapest und des Auslandes besteht.

Unsere unterpannonische Stufe, sowie die gleichalterigen Bildungen des Wiener und Grazer Beckens entsprechen der mäotischen Stufe in Rußland und Rumänien. Dieselbe enthält teilweise noch viele sarmatische Formen, wie bei Szócsán oder auch anderwärts, z. B. *Limnocardium obsoletum, Didacna (Pontalmyra) Tinnye-*

*ana**, *Didacna (Pontalmyra) Andrussovi* und deren *var. spinosa*. In den Formenkreis von *Melanopsis (Lyrcaea) impressa* gehörende Formen, besonders *Bonellii, Matheroni*, dann *Orygoceras, Baglivia* und andere kleine Hydrobiiden, anderenteils mehrere an das Sarmatische erinnernde Arten, wie z. B. *Limnocardium Čekusi, Limn.? Kozići* usw. Ich bin überzeugt, daß, sobald wir die ungarischen größtenteils noch unbekannten sarmatischen Bildungen eingehend kennen lernen werden, der enge Zusammenhang jedermann klar werden wird, welcher zwischen unseren sarmatischen und unterpannonischen Ablagerungen besteht. Soweit ich diese Bildungen heute kenne, wage ich zu behaupten, daß die Lücke zwischen der Fauna der unter- und oberpannonischen Stufe beinahe größer ist als diejenige zwischen der unterpannonischen und der sarmatischen Stufe. Dieser Ansicht entspricht übrigens auch im wesentlichen die Tabelle IV (S. 104) der Arbeit ANDRUSSOWS, „Fossile und lebende Dreissensidae Eurasiens", wo er die pannonischen Schichten des Wiener Beckens mit unserem *Lyrcaea*-Horizont und der *Congeria banatica*-Fazies zusammen der mäotischen Stufe gleichstellt und das Ganze als oberstes Glied des Miozän betrachtet. In den unteren Teil des Pliozäns verlegt er den Belvedereschotter und die seiner Ansicht nach demselben gleichwertigen Congerienschichten, also unsere

---

* Diese Art habe ich in meiner Arbeit „Die pannonische Fauna von Budapest" als *Pontalmyra Jagići* BRUS. beschrieben, da in der BRUSINAschen Sammlung, als ich das Material von Tinnye mit dieser verglich, die mit meiner Form übereinstimmenden Exemplare diesen Namen führten. In der Iconographia bildet er dann später eine andere Form unter diesem Namen ab, so daß ich genötigt war, meine Form neu zu benennen, wie dies in meiner Balaton-Arbeit ausgeführt wurde. Trotzdem ich diesen Namen 1905 in die Literatur eingeführt habe, hat HALAVÁTS noch 1910 keine Kenntnis davon genommen, sondern berichtigt, wie er sagt, meine Art in *Soosi*, wo doch BRUSINA eine solche Art gar nicht aufgestellt hat und in seiner Iconographia nur eine Art namens *Stoosi* anführt, welche jedoch, wie ich in meiner Balaton-Arbeit ausführte, mit meiner Art nicht identisch ist, und wäre dies auch der Fall, so hätte doch bezüglich der Benennung meine Art das Prioritätsrecht, da dieselbe bereits 1902 mit Beschreibung und Abbildung in die Literatur eingeführt war.

oberpannonische Stufe, sowie die rumänischen und russischen gleichaltrigen sogenannten „pontischen“ Schichten.

Innerhalb der oberpannonischen Stufe sind die Süßwasser- und Brackwasser-Fazies ebenfalls vorhanden, welche die Feststellung der Gleichaltrigkeit der Niveaus entfernter Fundorte erschweren. Diese will ich hier nicht ausführlicher behandeln, obwohl ich nur auf die Schichtenreihe der von HALAVÁTS geringschätzig behandelten Sucheutelschen Tongrube hinzuweisen brauche, ich unterlasse dies jedoch hier, da ich bei der monographischen Bearbeitung des Materials hierüber noch ausführlich sprechen werde.

Diese obere Stufe entspricht der russischen und rumänischen eigentlichen pannonischen Stufe, da der untere Teil hier überall die mäotische Stufe ist. In Rumänien sind von den für unsere pannonische Stufe charakteristischen Arten vertreten: *Congeria rhomboidea*, *Valenciennesia Reussi*, *Cardium Steindachneri*, *Vivipara Fuchsi*, *Hipparion gracile* usw.

Schon heute, da die Fauna des mitteleuropäischen Pliozän zur Genüge bekannt ist, ist deutlich ersichlich, daß unsere unterpannonischen Schichten und die Schichten der mäotischen Stufe auf den Zusammenhang mit dem sarmatischen Meere, die oberpannonischen Schichten hingegen auf die Verbindung mit dem Pontus Euxinus hinweisen. Es ist also gewissermaßen berechtigt, wenn manche Forscher den unteren Teil in das Miozän, den oberen in das Pliozän stellen. In welchem Maße unsere unterpannonische Stufe noch den sarmatischen Stempel trägt, diesbezüglich berufe ich mich auf die Äußerung Prof. ANDRUSSOWS, der sich in seinen „Studien über die Brackwassercardiden *Didacna*“ folgendermaßen äußert (S. 10): „daß eine flüchtige Betrachtung der pannonischen Sammlung LÖRENTHEYS in ihm den Eindruck erweckte, wie auch in Professor LASKAREW, daß diese (nämlich die Fauna von Tinnye) der russischen unteren Congerienschicht und auch den oberen sarmatischen Schichten entspreche.“

Gelegentlich der Besprechung der in der zweiten Hälfte der pannonischen Zeit im Grazer und Wiener Becken eingetretenen

Veränderungen sagt J. HALAVÁTS: „... der See wird ... in engere Grenzen gedrängt; sein Wasser verliert allmählich seinen Salzgehalt, im Westen wird das Wiener und Grazer Becken trocken gelegt. Die Flüsse beginnen ihre zerstörende Tätigkeit und die pontische (richtiger pannonische) Donau setzt jenen mächtigen Schotterkegel ab, welcher als ‚Belvedereschotter' bekannt ist" (S. 306).

Ich würde mich über diese Behauptung nicht wundern, hätte nicht HALAVÁTS selbst als Hauptziel seiner Arbeit angegeben, die Angaben „im Rahmen der neueren Auffassung" zu einem einheitlichem Bild zu vereinigen. Nach dieser Äußerung aber müssen wir uns wundern, daß er die neuere Literatur des Belvedereschotters gar nicht kennt, bzw. die neuere in dem Sinne, daß sie seit 1902, also nur acht Jahre vor HALAVÁTS' Arbeit, erschienen ist. Dr. FR. SCHAFFER weist nämlich in seiner Arbeit, „Die alten Flußterrassen im Gemeindegebiete der Stadt Wien" und später in der „Geologie von Wien" nach, daß die Belvederefauna nicht aus dem Schotter oder dem in den Schotter gelagerten Sand stammt, sondern aus dem unterpannonischen Sand, welcher, wie er sagt, mit den Congerienschichten in engem Zusammenhang steht, während der Schotter diskordant auf den Sand oder in die Furchen und Löcher des Tons gelagert ist; da aber die Belvederefauna mit dem Belvedereschotter gar nicht in Zusammenhang steht, verwirft SCHAFFER ganz richtig zur ein- für allemaligen Vermeidung von Mißverständnissen die Benennung „Belvedereschotter", da derselbe aus den Schottern zweier verschiedenen Terrassen bestehe, der älteren Laaerberger und der jüngeren Arsenalterrasse. SCHAFFER begründet dies folgendermaßen: „Da die Belvederefauna nicht aus dem Belvedereschotter stammt und zu demselben in keinerlei stratigraphischen Beziehungen steht, war ich gezwungen, ja, ich konnte es nur auf diese Weise zum Ausdruck bringen, eine dieser Benennungen zu verwerfen. Da aber die Bezeichnung der Belvederefauna — besonders im Auslande — völlig in die wissenschaftliche Literatur übergegangen ist, mußte ich dieselbe behalten und die andere (Belvederesand) verwerfen."

Durch die Entdeckung SCHAFFERS, daß diese Schottermasse in ihrer Gesamtheit keine gleichaltrige Bildung unserer oberpannonischen Stufe darstellt, sondern der untere Teil wahrscheinlich noch levantinisch, der obere oder vielleicht das Ganze pleistozän ist, wird auch die Behauptung HALAVÁTS' hinfällig, daß dieselbe durch die pannonische „Donau" abgelagert worden ist und damit fallen auch sämtliche daran geknüpfte Folgerungen.

Später werden wir sehen, daß auch die Schotter der Umgebung von Budapest teilweise levantinisch, teilweise pleistozän sind, wie ich bereits 1906 in meiner Abhandlung „Über die pannonischen und levantinischen Schichten von Budapest und deren Fauna" angedeutet habe.

Durch den von SCHAFFER erbrachten Nachweis jedoch, daß die „Belvedereschotter" genannten Schotter beträchtlich jünger sind, als man bisher angenommen hatte, entstand eine gewisse Lücke zwischen den pannonischen Schichten des Wiener Beckens und diesen Schottern, welche Lücke, wie SCHAFFER selbst bemerkt, früher sehr bequem durch den sogenannten Belvedereschotter ausgefüllt werden konnte.

Die interessante Ähnlichkeit, welche in der Ausbildung der pannonischen Bildungen von Mannersdorf bei Angern einerseits und den in der Tongrube der Szentlörinczer Ziegelei der Ungarischen Allgemeinen Kreditbank oder der Budapest-Szentlörinczer Aktiengesellschaft zutage tritt, berechtigt mich, mich auch mit diesen zu befassen und dies um so mehr, da ich guten Grund zu haben glaube, diese niederösterreichischen Schichten als Ausfüllung dieser Lücke zu betrachten. Die Mannersdorfer Aufschlüsse wurden von E. KITTL* und T. FUCHS** untersucht und beide geben ihrer Überraschung Ausdruck, daß, wie FUCHS schreibt (S. 45), „in diesem Mergel keine Spur der in den Congerienschichten gemeinen Cardien und Congerien vorhanden ist und sich nur einige Spuren von *Unio-* und *Helix*-Arten fin-

* Die jungtertiären Säugetierfunde in der Mannersdorfer Ziegelei bei Angern (Annalen des k. k. Naturhist. Hofmus. 1891, 1892).

** Über eine neuartige Ausbildungsweise pontischer Ablagerungen in Niederösterreich (Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. in Wien, Math.-naturw. Klasse. Bd. CXI, Abt. I, 1902).

den, so daß man diesen Mergel für eine Süßwasserablagerung halten muß und nicht für Brackwasserschichten, wie die Congerienschichten." FUCHS fügt noch hinzu, „daß aus der in den Congerienschichten als gemein bekannten Fauna hier nicht nur die Cardien und Congerien, sondern auch die *Melanopsis*- und *Vivipara*-Arten fehlen, wodurch der faunistische Charakter dieser Schichten noch fremdartiger erscheint." In diesen bankigen mergeligen Schichten finden sich stellenweise Sand und Schotterlinsen mit Knochen von Vertebraten, wie „*Mastodon longirostris* KAUP., *Dinotherium giganteum* KAUP., *Rhinoceros cfr. Schleiermacheri* KAUP., *Hipparion gracile* KAUP., *Amphicyon Gutmanni* KITTL"; ferner sind in den Schnüren von Quarzgeröllen unter dem Mergel an einer Stelle an *Helix Turonensis* erinnernde *Helix*-Formen nicht selten. Die Eigentümlichkeiten, welche diese Pliozänschichten von den übrigen sog. „Congerien"schichten des Wiener Beckens unterscheiden, nähmlich das Fehlen der *Cardium*-, *Congeria*- und *Vivipara*-Arten sind alles solche Charaktere, welche eine große Übereinstimmung zwischen den Mannersdorfer und Szentlörinczer Schichten ergeben.

Die Tongrube der Szentlörinczer Ziegelei schließt hauptsächlich Tonschichten auf, welche hier und da sandig sind. Aus diesen Schichten erwähnt bereits BÉLA V. INKEY* folgende Fossilien: *Helix cfr. robusta* ROSS., *Melanopsis Bouéi* FÉR., *Neritina radmanesti* FUCHS, *Planorbis sp.* und *Unio sp.* Später fand ich nach Vertiefung des Steinbruches sechs Meter tiefer ausschließlich *Helix*-Formen, welche ich, soweit sich aus der mehr oder weniger zusammengedrückten Gestalt feststellen ließ, als *Helix (Tacheocampylaea) Doderleini* BRUS. bestimmte. *Melanopsis*-Stücke fand ich nicht, wahrscheinlich ist jedoch INKEYS Art mit der seither aufgestellten und in den oberen Niveaus verbreiteten *Melanopsis Entzi* BRUS. identisch. In den von verwesenden Pflanzen schwarz gefärbten Tonschichten, welche typische Sumpfablagerungen darstellen, sind Knochen von *Hipparion gracile* KAUP. *sp.*, *Tragoceros*

---

* Geolog. und agronom. Kartierung von Pusztaszentlörincz (Mitt. a. d. Jahrb. d. k. ungar. geol. Anst., Bd. X, 1892).

*Lóczyi nov. sp.*, *Cervus Lóczyi* POHLIG, *Rhinoceros cfr. Schleiermacheri* KAUP., *Mastodon sp. ind.* häufig. Eine Hyäne wurde durch Dr. ZOLTÁN SCHRÉTER von hier erwähnt.*

Einesteils diese faunistische Übereinstimmung, welche zwischen den niederösterreichischen und den Szentlörinczer Fundorten besteht, anderenteils die Übereinstimmung in dem negativen Charakter, daß an beiden Punkten die Cardien, Congerien und Viviparen fehlen, berechtigen uns, dieselben für gleichaltrig zu halten. Zwar erwähnt ganz richtig auch TROLL**, daß die ausschließlich durch das Klima beeinflußten festländischen Mollusken der pannonischen Zeit ein längeres Leben besaßen, als die durch den schwankenden Salzgehalt des Brackwassers beeinflußten Binnenwasserarten. Trotzdem glaube ich nicht im Irrtum zu sein, indem ich diese Schichten in den oberen Teil der pannonischen Stufe verlege und dem *Congeria rhomboidea*-Horizont gleichwertig halte, als dessen vollkommen ausgesüßte litorale Ablagerung. Die Entstehung solcher Süßwasserablagerungen sowohl im Wiener Becken als auch in der Umgebung von Budapest läßt sich gut durch das schrittweise Zurückweichen und Sinken der See erklären, womit die Entstehung litoraler Teiche Hand in Hand geht. TH. FUCHS hält die Mannersdorfer Schichten nur für pannonisch und enthält sich einer genaueren Altersbestimmung, und daß ich weitergehe und dieselben in die oberpannonische Stufe und auch in deren oberen Teil verlege, dazu berechtigen mich gerade die Pusztaszentlörinczer Verhältnisse. Bei Szentlörincz liegen nämlich, genau so wie bei Mannersdorf, zu oberst pleistozäne Schotterablagerungen, unter diesen lagert jedoch bei Szentlörincz der aus Ungarn bisher als jüngste Bildung bekannte und durch massenhaftes Auftreten von *Unio Wetzleri* HOERN. (non DUNK.) charakterisierte feine Quarzsand; während in der Umgebung von Budapest unter dieselben, dem Fallen der Schichten nach zu urteilen, die in der inneren Zone verbreiteten *Congeria triangularis*- und *Congeria balatonica*-Schichten sich erstrecken.

Aus dem über die *Helix* und Säugerreste führenden Schichten

---

* Földtani Közlöny, Bd. XL, Sitzungsprotokoll S. 679. 1910.

** Die pontischen Ablagerungen von Leobersdorf und ihre Fauna (Jahresb. d. k. k. geol. R.-A., Bd. 57, 1907).

gelagerten panonnischen Sande habe ich in meiner Abhandlung „Über die pannonischen und levantinischen Schichten von Budapest und deren Fauna“ folgende Arten beschrieben: „*Unio Wetzleri* HÖRN. (non DUNK.), *Congeria Neumayri* ANDR., *Pisidium sp. ind.*, *Planorbis (Coretus) cornu* L., *Helix (Tachea) baconicus* HALAV.?, *Helix (Tacheocampylaea) Doderleini* BRUS.?, *Vivipara Fuchsi* NEUM., *Melanopsis praemorsa* L., *Melanopsis Entzi* BRUS., *Melanopsis sp. ind.*, *Valvata Entzi nov. sp.*, *Valvata Entzi* LÖRENT. *var. tricarinata nov. form.* und *Neritina (Clithon) sp. ind.*

Trotzdem ich diese aus 13 Arten bestehende Fauna bereits 1906 beschrieben habe, erwähnt JULIUS HALAVÁTS in seiner vier Jahre später erschienenen Arbeit von hier dennoch nur fünf Arten.

* *
*

Auf die eigentlichen Resultate meiner Untersuchungen übergehend, muß ich vorausschicken, daß die geologische Karte von Budapest hinsichtlich der pannonischen Ablagerungen keine großen Hoffnungen wachruft, da auch die in meiner Arbeit „Über die pannonischen und levantinischen Schichten von Budapest und deren Fauna“ beschriebenen Fundorte nur teilweise auf der Karte ausgeschieden sind, östlich und nördlich von dem in dieser Arbeit geschilderten Gebiet sind erst recht nur einige pannonische Partien ausgeschieden, und der Karte nach beinahe das ganze Gebiet durch diluvialen Sand, zum geringen Teil von alluvialem Flugsand und sehr wenig Bülte eingenommen wird.

In der Literatur haben sich mit den pannonischen Schichten dieses Gebietes nur JOHANN BÖCKH*, A. SCHMIDT**, I. TIMKÓ*** und meine Wenigkeit befaßt. In meiner bereits erwähnten Arbeit „Die pannonischen und levantinischen Schichten von Budapest und und ihre Fauna“ behandle ich das näher zu Budapest gelegene Gebiet. Die entfernteren Gegenden, den sich an das Mátra-Ge-

* FÓTH, Gödöllö, Aszód környékének földtani viszonyai (Földtani Közlöny, III. köt. 1872).

** Die geologischen Verhältnisse von Czinkota (Földtani Közlöny, XXIII. köt. 1893).

*** Die agrogeologischen Verhältnisse der am rechten Ufer der Donau gelegenen Umgebung von Budapest, ferner der Umgebung von Gödöllö und Isaszeg. Jahresbericht von 1907. 1909.

birge anschließenden nördlichen Teil des Sandrückens zwischen der Donau und der Tisza haben hauptsächlich BÖCKH und TIMKÓ untersucht. J. BÖCKH hat diese Schichten bei Mogyoród in den beiden Gräben des Orditóerdö und in den Gräben des Weinberges zwischen Verescgyhár und Szada nachgewiesen und dieselben übrigens auch auf der Karte ausgeschieden. Am Schluß der Behandlung der pannonischen Congerienschichten erwähnt er, daß ein Teil des in der Umgebung von Gödöllö und Aszód in solch ungeheurer Menge vorkommenden Sandes und Tones noch hierher gehöre. Da jedoch hier auch noch aus ähnlichem Ton bestehende jüngere Bildungen vertreten sind, sei es in Ermangelung von Fossilien schwer zu bestimmen, was noch zu den Congerienschichten gehöre. Über die letzteren fossilleer erscheinenden Schichten des Sandrückens zwischen der Donau und der Tisza äußert sich auch I. TIMKÓ in ähnlicher Weise, indem er sagt, daß die ältesten Bildungen dieser Gegend der pannonische Sand, Sandstein, sandige Mergel und Ton seien. Der Schichtenkomplex ist oben mehr sandig und sandsteinartig, mergelig, kalkig, in seinen unteren Partien anscheinend mehr tonig. Von der gewaltigen Mächtigkeit dieser Bildung geben uns zwei Angaben TIMKÓs einen Begriff, nach welchen man bei der Ilkameierei von Isaszeg bis zu 300 Meter, in dem Bohrbrunnen der Szentgyörgy-puszta aber 500 Meter tief in dieselbe vordrang. Fossilien erwähnen weder J. BÖCKH noch I. TIMKÓ aus diesen Schichten.

Fossilführende Schichten sind in der Literatur bisher nur auf Grund von A. SCHMIDTs und meiner Arbeit bekannt, und zwar sind die östlichsten Fundorte Czinkota und Csömör und die nordöstlichsten auf Grund der Arbeit von J. v. BÖCKH Mogyoród und Veresegyháza.

Das Czinkotaer Vorkommen der pannonischen Bildungen wurde von A. SCHMIDT und nach ihm auch von SCHAFARZIK und HALAVÁTS beschrieben. Ich möchte hier nur soviel erwähnen, daß bei Czinkota am südwestlichen Ende des Dorfes, auf dem zwischen der Landstraße und dem aufgestauten Teich befindlichen jetzigen Marktplatze und der von SCHMIDT „Dorf-Lehmgrube“ genannten und heute bereits im Verwachsen begriffenen Aufschlüsse diese Bildung unmittelbar auf *Pecten (Aequipecten) praescrabrius-*

*culus* führenden Sand lagert und aus bläulichem, stellenweise eisenschüssigen tonigen Sand besteht, in welchem ich zahlreiche Exemplare von *Congeria Partschi* Cžjž. sammelte.

Dieser Fundort bestätigt in seinem heutigen Zustande, was A. Schmidt bloß voraussetzte, daß nämlich die pannonischen Schichten hier unmittelbar auf das untere Mediterran gelagert sind. Dasselbe bestätigt auch das von Halaváts mitgeteilte Brunnenprofil von Mátyásföld. Daß übrigens der Untergrund von ganz Czinkota aus pannonischen Schichten besteht, welche nur hier und da durch Schotter und Humus verdeckt werden, erhellt auch aus dem interessanten großen Aufschluß, welcher gelegentlich der Bauarbeiten des Vereins der ungarischen Hausfrauen im südlichen Teile des Dorfes zustande kam, welcher den pannonischen Ton in etwa 5 Meter Mächtigkeit bloßlegte. Es kam bloß ein großer Beinknochen zum Vorschein, welcher leider durch die Hauen der Arbeiter zertrümmert wurde. Aller Wahrscheinlichkeit nach war es ein Knochen des in unseren pannonischen Schichten so verbreiteten *Mastodon.*

Nach Schmidt ist gegen Norden, in der Umgebung von Csömör, die pannonische Stufe ebenfalls aufgeschlossen. Unter pleistozänem Schotter, sandigem Schotter und grobkörnigem gelben Sand soll in den Wasserrissen bei Csömör gelblichweißer, glimmeriger, glatter Sand oder graulicher, mergeliger Kalkstein anstehen, tiefer soll sich festgefügter, bankiger, glimmeriger Sand befinden, am Grunde mit Sandsteinlinsen und zu unterst geht die Schicht in gelblich-bläulichgrauen sandigen Ton über. Fossilien hat A. Schmidt in diesen Schichten nicht gesammelt, so daß er die Schichtengruppe bloß auf Grund des Gesteinsmateriales und der Lagerung der Schichten in die pannonische Stufe stellte. Mir ist es 1903 gelegentlich des Baues der Kerepeser Vizinalbahn zuerst gelungen, im westlichen Einschnitt des Csömörer Kalvarienberges unter der Überbrückung des Fahrweges, aus der dort in beträchtlicher Länge aufgeschlossenen bläulichen, sandigen Tonbank mehrere Exemplare von *Congeria Partschi* Cžjžek und schlecht erhaltene Stücke mehrerer *Limnocardium*-Arten zu sammeln.

Meine neueren Untersuchungen haben bestätigt, daß die ganze Masse des Kalvarienberges aus pannonischem Ton, Mergel und

Sandschichten besteht, mit Ausnahme des unter der Kote, 224 Meter, in dem auf der Spitze befindlichen Steinbruch aufgeschlossenen Deckschotters. Ferner wurde erwiesen, daß der Csömörer Bach in seinem östlich von Csömör befindlichen oberen Lauf sein Bett ebenfalls in pannonische Bildungen eingräbt. In dem mit Gras ziemlich bewachsenen Bette fand ich nämlich, etwa in der Mitte des westlichen Armes, eine handbreite eisenschüssige Sandbank, in welcher ich folgende kleine Fauna sammelte:

*Congeria Partschi* CŽJŽ. (h. h.)
*Limnocardium Penslii* FUCHS *sp.* (z. h.)
„ *Rogenhoferi* BRUS.? (Fragment)
*Valvata Ottiliae* PENECKE (1 Exemplar).

Unter dem Sand ist hier und da bläulicher Ton aufgeschlossen, in diesen hat sich jedoch der Bach erst wenig eingeschnitten. Auch in diesem sind *Congeria Partschi* und *Limnocardium Penslii* zu finden, jedoch bedeutend seltener als im Sande.

Gegen Westen, an der westlichen Seite des auf der Karte Óhegy genannten Teiles des Csömörer Weinberges führt JOHANN BÖCKH pannonischen Süßwasserkalk an. Gegenwärtig ist diese Bank zu Bauzwecken bereits abgebaut, zum Glück aber ist sie in der Literatur fixiert. Ich habe diese Berglehne wiederholt begangen und an der Stelle, wo auf der Karte der Süßwasserkalk ausgeschieden ist, gegenüber dem neben den zwei Kirchen vorbeiführenden Wege hinter der Apotheke glimmerige Sandsteinstücke ausgepflügt gefunden, was hier ebenso wie der Saßwasserkalk auf die pannonische Stufe hinweist. Es kann also kein Zweifel bestehen, daß auch dieser wie der Kalvarienberg in seiner Hauptmasse aus pannonischen Ablagerungen besteht und auch hier ist der ganze Berg mit demselben Schotter bedeckt wie der Kalvarienberg.

Dieses Vorkommen der pannonischen Bildungen in dem Weinberg ist hier das westlichste, da, wie ich bereits weiter oben im 3. Abschnitt bei Besprechung des Untermediterran nachgewiesen habe, in der gegenüberliegenden Sandgrube bereits nicht mehr pannonischer Sand aufgeschlossen ist, wie die Karte von Budapest angibt, sondern untermediterraner Sand. Hier ist zugleich ersichtlich, daß die anscheinend horizontal gelagerten pannonischen

Schichten diskordant auf den ziemlich steil einfallenden untermediterranen Schichten gelagert sind, wie ich dies in Fig. 2 auch zum Ausdruck gebracht habe.

Als ich gesehen hatte, daß hier in den Hügeln dieses Sandrückens die Schichten der pannonischen Stufe ein großes zusammenhängendes Gebiet bedecken und nicht kleine isolierte Partien bilden, wie auf der geologischen Karte von Budapest angegeben ist, begann ich dem Zusammenhang der pannonischen Partien von Csömör und Czinkota nachzuspüren, und es gelang mir auch, denselben festzustellen. Dies wurde ermöglicht durch die gelegentlich des Baues der die Csömörer Schlinge der Kerepeser elektrischen Bahnlinie abschneidenden und verkürzenden Linie durchgeführten Erdarbeiten. Nicht weit von der an der Biegung der Csömör-Kistarcsaer Strecke — an der westlichen Seite der Landstraße — befindlichen Schottergrube wurde ein Bahnwächterhaus gebaut, bei dessen Fundamentierung unter $^1/_2$ m mächtigem, schwarzem Humus gelber Ton aufgeschlossen wurde, dessen Zugehörigkeit zu den pannonischen Bildungen der neben dem Hause gegrabene Brunnen beweist, in welchem derselbe Ton mit schieferigen, sandigen Schichten wechselt. Die petrographische Beschaffenheit dieser Schichten stimmt also mit dem Material der Csömörer und Czinkotaer pannonischen Schichten überein, deren Zugehörigkeit zum Pannonischen durch Fossilien erwiesen ist. Der Brunnen ist nach Aussage der dort arbeitenden Leute 27 m tief und das Wasser 4 m. Das Wasser wird also unbedingt auch hier wie in den meisten Brunnen dieser Gegend von dem hier das Liegende der pannonischen Schichten bildenden untermediterranen Schotter geliefert.

In diesem Brunnen beträgt also die Mächtigkeit der auf den untermediterranen Schotter gelagerten pannonischen Bildungen 25 bis 26 m. Etwas nördlich — und in etwas höherem Niveau — liegt die bereits erwähnte Schottergrube, an deren Grund an zwei Stellen bis zu 1—1,5 m bläulicher Ton in den Schotter empordringt, welcher bereits als pannonischer Ton angesehen werden muß, um so mehr, als in der Mitte der Grube sich ein 2—3 m tiefer Brunnen befindet, dessen Wasser von dem zweiten Reservoir, dem pannonischen Ton, geliefert wird; dieser Ton befindet sich — wie wir gesehen haben — bei dem Bahnwächterhaus bereits beinahe an der Oberfläche. Die am Grunde der Grube befindlichen und gleichsam in den Schotter emporgefalteten beiden pannonischen Tonschollen lassen sich durch knetende Wirkung des Schotters, oder nur so erklären, daß sich der Schotter auf sehr ungleichmäßiges Terrain gelagert hat, dessen Unebenheit entweder durch Verwerfung entstanden, oder aber der Erosion ihren Ursprung verdanken.

Durch diese größtenteils wieder verbauten und so verschwundenen Aufschlüsse läßt sich der Zusammenhang der Czinkotaer und Csömörer pannonischen Partien nachweisen. Das beweist aber zugleich, daß die Karte heute auch in dieser Hinsicht wesentlicher Verbesserung bedürftig ist.

Im Norden finden sich in der Umgebung von Mogyoród wieder solche Aufschlüsse, durch welche erwiesen wird, daß sich die pannonischen Bildungen bis dahin erstrecken. Diese erwähnt bereits J. Böckh in seiner zitierten Arbeit, als den am Rande des „Orditóerdö" befindlichen Graben, welchen er auch auf der geologischen Karte von Budapest ausscheidet.

J. Böckh erwähnt von hier *Cardium apertum* Münst. und *Congeria subglobosa* Partsch.

Auf der Generalstabskarte 1 : 25 000 ist der Berg, welchen Böckh als Orditóerdö bezeichnet, unter dem Namen Juhállás eingetragen. Von demselben haben zwei süd—nördlich gerichtete Rinnsale ihre Betten eingefurcht und in beiden sind dort, wo das Bett in die Masse des Berges und nicht in die Ebene eingeschnitten ist, pannonische Schichten aufgeschlossen.

Der westlichere Graben Nr. I, welcher auf der Generalstabskarte 1 : 75 000 unter dem Höhenpunkt 169 m endigt, schneidet sein Bett in der Ebene in Löß und in den darunter befindlichen Gehängeschutt ein, während er am Berge folgende Schichten aufschließt: 1. Sandsteinplatten (pannonisch) enthaltender Deckschotter, in welchem ich einen größeren Wirbeltierknochen fand; dieser ist möglicherweise levantinisch; 2. darunter kohlenschmitziger, sodann gelber pannonischer Ton; 3. darunter zertrümmerter Sandstein, und 4. zu unterst Sand. Die Mächtigkeit der drei Schichten der pannonischen Bildungen beträgt insgesamt einige Meter.

Der östlichere Graben Nr. II, welchen auch J. BÖCKH erwähnt, schließt die Schichten schöner auf. Am Anfang bei der Mündung des Grabens ist etwa in 35 Meter Mächtigkeit untermediterraner Rhyolittuff aufgeschlossen, dessen Bänke 15—16$^h$ 5—6$^0$ fallen. Hierauf lagern in dem östlicheren größeren Rinnsal unter 5$^0$ gegen ENE fallende pannonische Schichten, welche aus wechselnden Schichten von Ton, tonigem Sand und Sandsteinlinsen und Bänke einschließendem Sand bestehen. Die Mächtigkeit der ganzen Bildung beträgt mindestens 30 m und die meisten Schichten führen Fossilien. Aus der von mir mit Nr. 10 bezeichneten blauen Tonschicht sammelte ich eine zusammengedrückte Doppelklappe von *Congeria Partschi* CŽJŽ, aus der mit Nr. 11 bezeichneten eisenschüssigen Sandschicht viele meist doppelte Klappen von *Congeria Partschi* CŽJŽ. (BÖCKH erwähnt *Congeria subglobosa)*, zwei Exemplare von *Limnocardium Penslii* FUCHS. (BÖCKH erwähnt *Cardium apertum)* und Fragmente von *Limnocardium secans* FUCHS *sp.*

Östlich von Mogyoród, an dem gegen Gödöllö führenden Fahrweg schließt die Tongrube der an der Kreuzung der elektrischen Bahn befindlichen Ziegelei ebenfalls die pannonischen Schichten auf, wie wir später noch sehen werden.

Im Norden sind die pannonischen Schichten wieder bei Veresegyháza aufgeschlossen und zwar östlich vom Dorf in den nordwestlichen Gräben und Wegeinschnitten des Margitahegy. Diese Punkte erwähnt auch BÖCKH in seiner Arbeit und scheidet sie auch auf der geologischen Karte von Budapest aus. BÖCKH führt aus dem Congerienton von Veresegyháza folgende Fossilien an: außer Blattabdrücken noch *Melanopsis Aquensis* GRAT, *Melanopsis Bouéi* FÉR., *Vivipara Sadleri* PARTSCH, *Vivipara acuta* DRAP., *Congeria Basteroti* DESH., *Cardium apertum* MÜNST., *Unio atavus* PARTSCH und *Neritina sp.*

In der an der Kreuzung der Fahrstraße befindlichen Abgrabung des von der Spitze des Margitahegy bis zu den nordöstlichsten Häusern hinreichenden Wassergabens habe ich sehr viele Wirbelteile von *Congeria ungula-caprae* MÜNST. gesammelt, als Zeichen dessen daß das unterste Niveau der oberpannonischen Stufe auch hier vorhanden ist. In diesem kommt, wie wir bei

Csömör, Czinkota und Mogyoród gesehen haben, überall *Congeria Partschi* Cžjž massenhaft vor, hier hingegen *Congeria ungula-caprae*. Anscheinend vertreten diese beiden Arten einander und zwar derart, daß *Congeria Partschi* massenhaft stets in den schotterigen und sandigen, meistens eisenschüssigen rostigen Schichten vorkommt. In den Tongruben der Rákoser und Kőbányaer Ziegeleien ist sie stets in der auf den sarmatischen Kalkstein gelagerten rostigen schotterigen Sandbank in großer Menge vertreten. Bei Csömör, Czinkota und Mogyoród habe ich sie in jedem Aufschluß in größerer Menge in eisenschüssigem Sande gefunden.

Bei Budapest-Rákos und Kőbánya ist in den auf den rostigen *Congeria Partschi*-Schotter gelagerten Tonschichten *Congeria ungula-caprae* in riesiger Menge vorhanden, und hier bei Veresegyháza habe ich sie ebenfalls im Ton gefunden.

Anscheinend liebte also *Congeria Partschi* süßeres und weniger trübes, höchstens eisenhaltiges Wasser, während *Congeria ungula-caprae* salzigerem, trüberen, schlammigeren Wasser den Vorzug gab.

Bedeutend höher an der nordwestlichen Lehne des Margitahegy habe ich aus den fossilführenden sandigen und tonigen Schichten des Hacskóer Hohlweges folgende Fauna gesammelt:

*Congeria Neumayri* Andr. (h. h.) (bei Böckh *C. Basteroti*).
*Dreissensia serbica* Brus (h. h.)
*Unio Halavátsi* Brus (h. h.) (bei Böckh *Unio atavus*).
*Limnocardium decorum* Fuchs *sp.* (h.)
„ *apertum* Münst. *sp.* (s.)
*Hydrobia syrmica* Neum. (h.)
*Bythynia? proxima* Fuchs (s.)
*Micromelania? laevis* Fuchs *sp.* (h. h.)
„ *? Schwabenaui* Fuchs *sp.* (h.)
„ *Haidingeri* Stol. *sp.* (s.)
*Melanopsis (Lyrcaea) cylindrica* Stol. (s.) (bei Böckh *M. Aquensis*).
*Melanopsis (Lyrcaea) Petrovići* Brus. (s.)
„ *oxyacantha* Brus. (h. h.) (bei Böckh *M. Bouéi.*)
„ *Entzi* Brus (z. h.)
„ *decollata* Stol. (h.)

*Valvata balatonica* ROLLE (z. h.)
„ *variabilis* FUCHS (s.)
„ *Kimakovicsi* BRUS (s. s.)
*Vivipara cfr. Fuchsi* (NEUM.) (s. s.)
*Neritina (Clithon) radmanesti* FUCHS? (s. s.)
Fischknochen, meistens Flossenstacheln.

Eine ähnliche Fauna habe ich aus der Umgebung von Budapest bisher nur aus der Tongrube der Kispester Ziegelei und von Érd beschrieben. Nach unseren bisherigen Kenntnissen bilden diese den sog. „Congeria rhomboidea-Horizont“.

Das bisher geschilderte Gebiet bezeichnet in dem Teil am linken Donauufer der Umgebung von Budapest die westliche Grenze der pannonischen Bildungen, von hier östlich und südlich sind mir zahlreiche Aufschlüsse bekannt, in welchen Schichten von änlicher petrographischer Beschaffenheit aufgeschlossen sind; aus denselben hat jedoch bisher niemand Fossilien beschrieben.

J. BÖCKH hebt bei Besprechung der Congerien-Bildungen der Umgebung von Veresegyháza hervor, daß dieselben organische Einschlüsse führen, „während weiter ostwärts zwar Ton, Sand und Sandstein in großen Massen vorkommt, hier aber von Fossilien keine Spur zu finden ist“. Dasselbe sagt auch I. TIMKÓ.

Durch die gelegentlich des Baues der elektrischen Bahnlinie Kerepes-Gödöllö eröffneten Aufschlüsse wurden unsere Kenntnisse auch in dieser Richtung einen gewaltigen Schritt weiter gefördert. Ein Hauptresultat meiner Untersuchungen ist nämlich daß ich in diesen Schichten, in welchen noch niemand Fossilien fand, Fauna sammelte, auf Grund deren es mir gelungen ist, das genauere Alter dieser über ein großes Gebiet sich erstreckenden mächtigen Schichtengruppe festzustellen.

Am Fuße des westlich von Kerepes gelegenen Látóhegy, am steilen östlichen Abhange des Sziláspatak befindet sich ein auch auf der Karte bezeichneter Steilhau, an welchem die pannonischen Schichten 4 m mächtig unter dem Deckschotter aufgeschlossen sind und zwar sandiger Ton und Mergelkonkretionen führender toniger Sand. Und oben am Berge im Einschnitt der elektrischen Bahn ist ebenfalls pannonischer Ton und Sandsteinkonkretionen, tonige Linsen und Gehängeschutt führender pannonischer Sand aufgeschlossen. Aus den etwa in der Mitte dieses ca. 12 m mächtigen Aufschlusses befindlichen großen Sandsteinkonkretionen habe ich die Steinkerne folgender Fossilien gesammelt:

*Unio Wetzleri* HÖRN. (non DUNK.)
*Planorbis cfr. cornu* L.
*Planorbis sp.*

Bei Mogyoród in den Tongruben der an der Kreuzung der elektrischen Bahn und der Gödöllöer Fahrstraße gelegenen Ziegelei, sowie in sämtlichen Einschnitten der Eisenbahn ist überall Ton- und Sandsteinkonkretionen führender Sand aufgeschlossen.

In dem großen Eisenbahneinschnitt am nördlichen Abhange des Bolnokahegy, gegenüber von Puszta Szentjakab, nahe dem östlichen Ende des Einschnittes von der südlichen Wand derselben sammelte ich aus den Konkretionen zahlreiche Steinkerne von

*Unio Wetzleri* HÖRN. (non DUNK.)
*Planorbis cfr. cornu* L.

Diese glücklichen Funde bestimmen das Alter dieser bisher als fossilleer bekannten Schichten, indem sie die Zugehörigkeit derselben zur oberpannonischen Stufe genau feststellen. Zwar habe ich in der Umgebung von Budapest in der Tongrube der von HALAVÁTS so gering eingeschätzten Souheitelschen Ziegelei in Szentlörincz selbst innerhalb des durch *Congeria triangularis* und *Congeria balatonica* charakterisierten Horizontes solche süßeren Schichten gefunden, in welchen ich mehrere Exemplare von „*Unio Wetzleri*“ gesammelt habe. Bei Tihany hat Dr. STEPHAN VITÁLIS „*Unio Weizleri*“ in derselben Schicht gefunden; sodann habe ich diese Art bei Neszmély in dem höheren, sogenannten *Congeria rhomboidea*-Horizont der oberpannonischen Stufe in großer Menge gesammelt. Am charakteristischesten ist sie aber doch für das bisher bekannte höchste Niveau der pannonischen Stufe, das „Unio Wetzleri-Niveau“. Demnach wäre diese Art nach unseren bisherigen Kenntnissen mit Ausnahme des durch *Congeria ungula-caprae* charakterisierten untersten Niveaus aus sämtlichen Horizonten der oberpannonischen Stufe bekannt.

Leider sind bisher nur wenig vollständig erhaltene Exemplare dieser interessanten Form bekannt, so daß wir nicht in der Lage sind ein endgültiges Urteil darüber abgeben zu können, ob in sämtlichen Horizonten tatsächlich *Unio Wetzleri* vorhanden ist, oder ob die aus den verschiedenen Niveaus stammenden Exemplare vielleicht Vertreter nahe verwandter Arten darstellen? BRUSINA bildet in seiner Ikonographie ebenfalls bereits eine in diese Gruppe gehörige Form unter dem Namen *Unio Pučiči* ab (Tafel XXIII, Fig. 15—17), welche er natürlich nicht beschreibt, so daß sie in der Literatur nicht in Betracht kommen kann, um so weniger, da auch der Schloßrand und die Schließmuskelabdrücke unbekannt sind.

Soviel konnte ich bereits feststellen, daß unsere Exemplare der „*Unio Wetzleri*" mit dem bei M. HÖRNES von Ács abgebildeten Stück identisch sind, aber nicht mit der von DUNKER unter diesem Namen beschriebenen Art, wie ich durch Vergleich mit einem aus Schwenditobel bei Pfrungen erhaltenen Exemplar feststellen konnte. Aber falls sich auch alle unsere aus den verschiedenen Niveaus bekannten Exemplare tatsächlich mit der Art *Unio Wetzleri* HÖRN. (und nicht DUNKER) identisch erweisen, so würde dies dem stratigraphischen Wert der Art keinen Abbruch tun, da die Gesellschaft, in welcher sie vorkommt stets die stratigraphische Lage der Schicht verrät. In Gesellschaft der Exemplare aus dem durch *Congeria triangularis* und *balatonica* charakterisierten Horizonte der Souheitelschen Ziegelei sammelte ich noch folgende Arten: *Unio Halavátsi* BRUS, *Limnocardium decorum* FUCHS, *Limnocardium sp.*, *Limnocardium ponticum* HALAV.? *Vivipara Sadleri* PARTSCH, *Vivipara ind. sp.*, *Planorbis grandis* HALAV.

Bei Neszmély findet sie sich ebenfalls in Zwischenschichten mit salzigeren und reicheren Faunen, im obersten „*Unio Wetzleri*"-Horizont hingegen ist sie durch eine ärmliche Süßwasserfauna begleitet, beinahe so wie auch hier in der Umgebung von Kerepes und Mogyoród. Meist kommt sie in der Gesellschaft von wenig anderen *Unio*-Arten, *Planorbis (Coretus) cornu* L., *Helix (Tachea) baconica* HALAV?, *Helix (Tacheocampylaea) Doderleini* BRUS? *Vivipara Fuchsi* NEUM. und *Pisidium sp.* seltener *Melanopsis prae-*

*morsa* L. *M. Entzi* Brus. *Valvata Entzi n. sp.* und einer Varietät dieser, *Congeria Neumayri* Andr. und *Neritina sp.*

Auf Grund der in obigem geschilderten vertikalen Verbreitung von „*Unio Wetzleri*" gehören die Kerepeser und Mogyoróder Schichten in die oberpannonische Stufe und nach dem eben vorhin Ausgeführten wahrscheinlich in den höchsten Horizont dieser Stufe, in den „*Unio Wetzleri*"-Horizont. Ich wage jedoch nicht zu behaupten, daß der ganze große Schichtenkomplex, welcher unter dieser fossilführenden Schicht liegt und aus welchem bisher Fossilien nicht bekannt sind, durchwegs in diesen Horizont gehöre. Ich bin sogar der Meinung, daß besonders dort, wo diese Bildungen eine Mächtigkeit von 300—500 m erreichen, wie bei Isaszeg (nach Timkó) dieselben die ganze oberpannonische Stufe umfassen. Ich halte aber auch noch für wahrscheinlich, daß in den tonigen, mergeligen, sandigen, Sandstein und Kalkstein führenden großen Schichtenkomplexen dieser Hügelländer des Sandrückens zwischen der Donau und der Tisza auch noch die levantinischen Schichten enthalten sind. Zu dieser Annahme berechtigt uns die Tatsache, daß die in Rede stehenden Schichten durchschnittlich 5—8° gegen OSO fallen und sich so weiter ostwärts bereits in beträchtlichen Tiefen befinden können, so daß man in den darüber liegenden Schichten allenfalls auch bereits die levantinischen Schichten erblicken muß; wie auch in der steilen Wand von Erd-Batta über dem „*Unio Wetzleri*"-Horizont eine gewaltige Masse der levantinischen Bildungen ruht.

Die „*Unio Wetzleri*"-Schichten der Umgebung von Budapest stehen sowohl durch ihre Ausdehnung, als auch durch ihre petrographische Beschaffenheit und vollständige Ausbildung im Widerspruch mit der Annahme, daß man es mit fluviatilen Ablagerungen zu tun habe, man muß dieselben vielmehr ebenso wie die übrigen salzigeren pannonischen Ablagerungen für Absätze aus stehendem Wasser halten.

Diese Bildungen sind also auf der Karte hauptsächlich mit der Farbe der pannonischen, bzw. insofern auch die levantinischen darin enthalten sein können, der pliozänen Bildungen zu bezeichnen. So sind auf der geologischen Karte von Budapest die Flugsandgebiete wenigstens in dem besprochenen Gebiet, als Pliozän einzutragen, welche in der Umgebung von Kerepes und Mogyoród noch unbedingt pannonisch sind. Die Ausdehnung dieser pliozänen und hauptsächlich pannonischen Schichten ist sehr beträchtlich. So ist nördlich von Ecser das durch die Isohypse 290 m des Erdöhegy umschriebene und auch den Rákoscsabaer Szárazhegy und den Péczeler Bartushegy einschließende große Gebiet aus diesen Süßwasser-Kalkstein- oder kalkige Sandsteinbänke führenden Bildungen aufgebaut, wie dies durch zahlreiche — auf der Karte nicht angegebene — kleine Aufschlüsse erwiesen ist. Ebenso sind auch bei Péczel, im Maglóder und Ecserer Gebiet überall, sowie auch am Kopaszhegy in großer Menge Süßwasserkalk oder kalkige Sandsteinbänke ausgepflügt. Der Aufschluß am Péczeler Weinberge, sowie auch der Steinbruch südöstlich vom Schloß beweisen, daß hier ebenso wie am Péczeler Várhegy und in der Umgebung von Tarcsa überall dieselben Schichten aufgeschlossen sind, ja diese Schichten schließt auch die Gödöllöer kleine Lehmgrube S. W-lich von der Ortschaft und N. O-lich von der Tanga auf, in welcher Sand und Lehm aufgeschlossen ist. Wenn ich noch erwähne, daß I. TIMKÓ diese Schichten auch von Isaszeg erwähnt, so habe ich genugsam begründet, daß der östliche Teil der Karte von Budapest mit der Farbe der pannonischen Bildungen bezeichnet werden muß, mit Ausnahme des wenigen Diluviums und des Alluviums der Bachbetten. Die ganze Terrainbildung dieser Gegend wird durch die pannonischen Bildungen beeinflußt. Durch die das Terrain formenden nachpliozänen Erosionen wurde das lose Material der pannonischen Bildungen abgetragen und nur jene Stellen blieben als Hügel erhalten, welche durch größere oder kleinere Kalk- oder Sandsteinlinsen geschützt waren.

Neben diesen äußeren Einwirkungen waren, wenn auch vielleicht in geringerem Maße, auch tektonische Kräfte an der Ausbildung des Terrains tätig. Ich habe bereits früher erwähnt und mich auch auf einige meiner Profile berufen, um zu beweisen, daß die Geländeformen der Umgebung von Budapest in der ersten Hälfte der pannonischen Zeit von sicher nachweisbaren Erdbewegungen gestört worden sind. Ähnliche kleinere einige Meter weite Verwerfungen sind auch in dem Einschnitt der nach Gödöllö führenden elektrischen Eisenbahn am N-lichen Teil des Bolnoka-Berges zu beobachten. Dies weist darauf hin, daß die tektonischen Kräfte an der Ausbildung der Geländeformen in der Umgebung von Budapest nicht nur am Anfang sondern auch am Ende der pannonischen Periode in Wirkung waren.

## 8. Einige Bemerkungen über die levantinischen und pleistozänen Bildungen aus der Umgebung von Budapest.

Bereits in meiner Abhandlung „Über die pannonischen und levantinischen Schichten von Budapest und deren Fauna“ habe ich die levantinischen und pleistozänen Schotter von Budapest erwähnt.

Einige neuere Beobachtungen, besonders aber die Arbeit von JULIUS HALAVÁTS über das Neogen der Umgebung von Budapest veranlassen mich, als Abschluß dieser Serie kurz auch diese jüngsten Schichten zu besprechen.

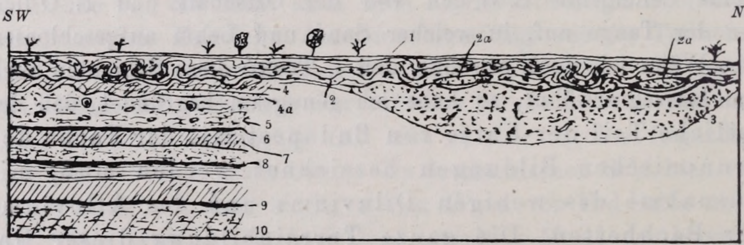



Fig. 4. Überhöhtes Profil der Tongrube der Ziegelei und der Schottergrube bei Szentlörincz (Länge 1 : 30000, Höhe zirka 1 : 1000). Die aufgeschlossenen Schichten sind folgende: 1. Schotteriger Humus. 2. Säcke-bildender pleistozäner Schotter mit Sandlinsen (2a). 3. Ungestörter levantinischer Mastodonschotter mit Knochen. 4. In den „Sack-Schotter“ eingefalteter oberpannonischer „Unio Wetzleri“-Ton mit Sandsteinlinsen (4a). 5. Toniger Sand mit Mergelkonkretionen und *Helix*. 6. Dunkler Sumpfton mit Kohlenspuren, dann mit *Helix, Melanopsis, Planorbis, Unio* und Knochen. 7. Sandiger Ton mit *Helix*. 8—9. Schwärzlicher fetter Sumpfton mit *Helix*. 10. Sandiger Ton mit vielem *Helix* und Knochen. — Die Schichten von 5—10 sind oberpannonischen Alters.

In früherer Zeit waren aus der Umgebung von Budapest nur Schotter, als levantinische fluviatile Ablagerungen bekannt, mir gelang zuerst in meiner erwähnten Arbeit der Nachweis anderer levantinischer und zwar von Binnensee-Ablagerungen, von welchen jedoch die Arbeit von HALAVÁTS keine Notiz nimmt.

In dem erläuternden Text zu dem von ihm reambulierten südlichen Teil der Karte von Budapest begründet HALAVÁTS das levantinische Alter dieser Schotter damit, daß diese über den *„Unio Wetzleri“* führenden Sand gelagert seien und Reste von *Mastodon arvernensis* und *Mastodon Borsoni* enthalten. Ich habe dem entgegen — bei Anerkennung des levantinischen oder jungpliozänen Alters dieser Schichten — nachgewiesen, daß einesteils die in Rede stehenden Mastodon-Schotter nicht auf dem *„Unio Wetzleri“*-Sande lagern, wie auch auf dem nebenstehenden Profil (Fig. 4) ersichtlich ist, andernteils daß es in der Umgebung von Budapest und zwar bei Batta Mastodon-Schichten gibt, welche tatsächlich auf die *„Unio-Wetzleri“*-Schichten gelagert sind.

Nach Feststellung dieser Tatsachen ändert JULIUS HALAVÁTS in seiner neueren, vier Jahre nach dem Erscheinen meiner Arbeit veröffentlichten Abhandlung über das Neogen von Budapest, meine Arbeit natürlich nicht zitierend, unter dem Einfluß derselben seine Ansicht insofern, daß er den aus Ton und sandigem Ton von gewaltiger Mächtigkeit bestehenden Battaer Schichtenkomplex zwar nicht in dem Abschnitt über die levantinischen Bildungen erwähnt, sondern bei Besprechung der pannonischen Bildungen nach Erwähnung der von Batta stammenden Exemplare von *Mastodon Borsoni*, besonders aber des Exemplares der Universität, folgendes sagt: „Diese Reste gelangten aus dem Aufschlusse der Ziegelei nächst Batta zutage, welcher doch über dem Sande mit *‚Unio Wetzleri‘* lagert.“

Vergleicht man diese Äußerung HALAVÁTS’ und seine zur Altersbestimmung der levantinischen Schotter angewendete Definition, so sieht man, daß dieselben sich gegenseitig decken. Es ist also unverständlich, warum HALAVÁTS diese Schichten nicht für levantinisch hält, wenn dieselben doch hoch über den *„Unio-Wetzleri“*-Schichten gelegen sind und wenn sie die Reste der für die levantinische Stufe besonders charakteristischen *Mastodon Borsoni* enthalten. Es ist nicht zu verurteilen, sondern eine lobenswerte Wertachtung des Wissens, wenn jemand seinen Irrtum eingesteht, nachdem ihn neuere Funde von der Irrigkeit seiner früheren Meinung überzeugt haben. Gegenwärtig sind nämlich von Batta auch an der Oberfläche bereits levantinische Binnenseeablagerungen bekannt und nicht nur aus dem Untergrund der ungarischen Tiefebene wie HALAVÁTS noch immer behauptet.

Es ist mir gelungen etwa von der Mitte dieses Battaer Schichtenkomplexes aus sandigem bläulichen Ton Fossilien und zwar schlecht erhaltene *Planorbis*-Arten zu sammeln. Ein Teil derselben gehört in den Formenkreis von *Planorbis (Coretus) cornu* L. oder ist mit dieser Art eventuell auch identisch. Dies beweist, daß dieser mächtige Schichtenkomplex eine Binnenseeablagerung darstellt, welche auf Grund ihrer Lagerung und der Einschlüsse von *Mastodon Borsoni* für levantinisch gehalten werden muß.

Ich bin geneigt ebenso auch die im nordöstlichen Graben I des Juhállás genannten Berges bei Mogyoród aufgeschlossene oberste Schicht für levantinisch zu halten, welche hier aus auf den pannonischen Schichten lagerndem Deckschotter besteht, welcher zahlreich aus den pannonischen Bildungen stammende Steintafelbruchstücke enthält. Ich sammelte in demselben die Knochenstücke eines größeren Säugetiers. Tiefer am Fuß des Berges findet sich diluviales Geröll und darüber Löß. Ich halte es ferner für wahrscheinlich, daß in dem großen (mehr als 500 m mächtigen) pliozänen Schichtenkomplex des Sandrückens zwischen der Donau und der Tisza sich auch levantinische Schichten befinden.

Jene Schotter jedoch, welche als Sack-Schotter bekannt sind, gehören nicht dieser Epoche an. Es ist vielmehr, wie bereits BÉLA V. INKEY 1892 hervorhebt, richtig, dieselben für diluvial zu halten, wenn man die tiefer liegende mächtige Schotterablagerung nicht mit dem oberflächlichen Schotter verwechselt. Später, 1906 habe auch ich auf das verschiedene Alter dieser beiden Schotter hingewiesen, HALAVÁTS nimmt aber trotzdem noch 1910 auch diese für levantinisch, ohne sein Vorgehen auch nur im geringsten zu begründen.

Dieser gröbere Deckschotter ist außer seinen anderen Charakteren und der gelblichen rostigen Farbe besonders durch seine eigentümlich sackartige Beschaffenheit scharf von dem darunter befindlichen, meist bläulichgrauen und ruhig gelagerten oder nur wenig falsch geschichteten kleinkörnigeren Mastodonschotter geschieden. (Fig. 5 und 6.)

Die Verbreitung dieser sackartigen Schotter ist hier in der Umgebung von Budapest besonders in dem der Donau näher gelegenen niedrigeren Gelände viel größer als diejenige des Mastodonschotter, wie ich in meiner bereits erwähnten Arbeit hervorgehoben habe. Dieser Schotter erstreckt sich aber nicht soweit gegen Osten, wie der Mastodonschotter, wenigstens nicht in der typischen sackartigen Ausbildung. Von der an der großen Biegung der Strecke Csömör-Kistarcsa der Gödöllöer elektrischen Bahn befindlichen Schottergrube westlich bis zur Tongrube der Ziegelei von Erzsébetfalva, also bis zur Donau ist in den Aufschlüssen dieser sackartige Deckschotter überall vorhanden und zwar wie aus den Untersuchungen von Dr. GABRIEL STRÖMPL bekannt ist, in verschiedenen Terrassen. Diese sackartigen Schotter entsprechen ungefähr den früher „Belvedereschotter" genannten Terrassenschotter der Umgebung von Wien, von welchen DEPÉRET die Laaerbergterrasse noch für pliozän hält, während DE LAMOTHE dieselbe samt der jüngeren Arsenalterrasse für pleistozän hält.

Leider wurden auch in diesen unseren sackartigen Terrassenschottern bisher keine Säugetierreste gefunden. Nur bei Erzsébetfalva hörte ich von den Arbeitern, daß sie einen großen Schienbeinknochen gefunden hätten, konnte denselben aber leider nicht mehr zu Gesicht bekommen. Mit diesen sackartigen Schottern ist wahrscheinlich der von HALAVÁTS nach „*Elephas meridionalis*" benannte Schotter gleichaltrig. Dieser Elephant ist nach neueren Untersuchungen nicht der Art *meridionalis*, sondern *Elephas antiquus*.* Es würde zu weit führen und liegt auch nicht in meiner Absicht, mich mit diesen Schottern eingehender zu befassen. Mit dem Studium derselben beschäftigt sich Dr. GABRIEL STRÖMPL seit Jahren mit schönem Resultat. Hier möchte ich nur einige

---

* Diese Bestimmung wird durch L. v. LÓCZY in einer Fußnote in Form einer redaktionellen Bemerkung in der Arbeit von TH. KORMOS: Neue Beiträge zur Geologie und Fauna der unterpleistozänen Schichten in der Umgebung des Balatonsees rektifiziert. (Resultate der wissensch. Erforschung des Balatonsees 1910.)

Fig. 5. Sackartiger pleistozäner Schotter auf levantinischem Mastodonschotter gelagert bei Szentlörincz. Phot. Aufnahme des Verfassers.

Bemerkungen zu dem Meinungsaustausch über die Entstehungsweise der in den pleistozänen Schottern beobachteten Säcke hinzufügen. Einige Forscher erblickten in den trichterartigen Faltungen die Trichter emporsteigender Quellen, dann erklärte sie Béla v. Inkey und nach ihm Julius Halaváts durch im Anschluß an Niveauerhebungen eingetretene Rutschungen. Gegen diese Erklärung spricht jedoch die ungestörte Lagerung der tieferen levantinischen Mastodonschotter. E. v. Cholnoky hält sie für die Durchschnitte von durch periodische Wüstentorrenten verursachten wadiartigen Furchen. Dagegen spricht jedoch die Art und Weise der Faltung, indem es meist so steilwandige mit senkrecht stehendem Schotter gefüllte Vertiefungen sind, daß dieselben nicht die Einschnitte von Bächen bilden können. Es finden sich in großer Zahl auch solche Säcke, deren Wände überhängen. Das schönste Beispiel hierfür liefert die Tongrube der Ziegelei bei Szentlörincz, welche früher Eigentum der Ung. allgemeinen Kreditbank, heute der Budapest-Szentlörinczer A.-G. ist.

In der nördlichen Wand dieser Grube, wo die Schotterschicht am mächtigsten und die Lagerung derselben auf die „*Unio Wetzleri*"-Schicht der oberpannonischen Stufe deutlich sichtbar ist, befindet sich ein etwa 5 m breiter und 2,5 m tiefer solcher Sack, welcher aber oben an der Mündung nur etwa 3 m Durchmesser zeigt (Fig. 4). Etwas derartiges kann man nicht für wadiartige Furchen halten.

Später habe ich in meiner Arbeit „Über die pannonischen und levantinischen Schichten von Budapest und deren Fauna" der Meinung Ausdruck verliehen, daß nachdem die bisherigen Ansichten zur Erklärung der Erscheinung nicht ausreichend sind, möglicherweise die mit dem Schotter stellenweise wechsellagernden Sandschichten und Linsen durch zwischen die Schotter eingesickerte und dort ablaufende Wasser ausgewaschen worden und sodann in die entstandenen Lücken die oberen Schichten eingestürzt seien. Dort wo der Schotter auf pannonischem Ton liegt, oder der Ton auch in den Schotter eingefaltet ist, wie in der Grube der Örleyschen Ziegelei, kann man auch daran denken, daß der Ton infolge der großen Feuchtigkeit gequollen und der schwere Schotter eingesunken ist. Diese Erklärung ist in den Fällen annehmbar, wo der Untergrund aus Ton besteht. Hierher zu zählen sind vielleicht auch die Tonauffaltungen, welche an der Basis der Schottergrube an der großen Biegung der Strecke Csömös-Kistarcsa der Gödöllöer elektrischen Bahn zu sehen sind. Dr. Fr. Schafarzik verlieh auf dem Gesellschaftsausflug der Geologischen Gesellschaft vom 8. Oktober 1910 der Meinung Ausdruck, daß diese sackartige Ausbildung des oberen Schotters mit der größeren Niederschlagsmenge und niedrigeren Temperatur (Nähe der Gletscher) der Pliozänzeit in Zusammenhang stehe. Schafarzik führt diese Ansicht auch in seinem für seine Hörer als Manuskript herausgegebenen und viele wertvolle neuere Angaben enthaltenden Führer auf Ausflügen aus. Seiner Ansicht nach war das flache über den Wasserspiegel der Flußarme kaum emporragende Deltagelände besonders im Frühjahr der Schauplatz häufiger Überschwemmungen. Bei solcher Gelegenheit kamen häufig Eisstauungen vor und die Eisschollen erhoben sich manchmal bis zu Turmhöhe und waren natürlich von quellender Wirkung auf dem durchweichten Boden. Und nach der Eisschmelze füllten sich diese durch Eis hervorgebrachten Gruben langsam aus. Für diese Annahme spricht der in der westlichen Wand der nördlichen Schottergrube von Szentlőrincz befindlich etwa 2 m² große kantige Leithakalkeinschluß, dessen Vorhandensein im Schotter sich am besten durch das Eis erklären läßt. Nach Entfernung des Eises müßten sie die Säcke horizontal ausfüllen, dies ist aber nicht der Fall, sondern die darin befindlichen Schotter stehen manchmal sogar senkrecht, was mit einer derartigen Entstehung der Säcke einigermaßen in Widerspruch steht.

Fig. 6. Sackartiger pleistozäner Schotter auf levantinischem Mastodonschotter gelagert bei Szentlőrincz. Phot. Aufnahme des Verfassers.

Wahrscheinlich spielten unter den mechanischen Wirkungen die spülende und quellende Kraft des Wassers, besonders aber das Eis eine Rolle.

Für die von mir eingeführte Auswaschungstheorie spricht der Umstand, daß wo im Schotter unten die Sandlinsen vorhanden sind, oben der Schotter weniger gefaltet ist, wie in der „Komitatsgrube“ von Szentlőrincz deutlich sichtbar ist, wo hingegen die

Sandlinsen bereits ausgewaschen sind, ist die Deckschicht eingestürzt und erscheint so gefalteter.

Ich vermag die Entstehung dieser Schottersäcke vermittels der Einwirkung von Wasser am besten damit erklären, daß die Schotter durch torrente Bäche aufgestaut wurden, andererseits anstelle der ausgewaschenen Sandlinsen der Deckschotter nachgesunken ist, während im Winter das gefrorene Wasser durch Volumzunahme die Schotter auseinanderschob und aufstellte und die Schichten zugleich faltete. Im Frühjahr floß das Schmelzwasser langsamer ab und veränderte die Lage der Schotter nicht oder nur wenig.

Diese Schottersäcke verdanken vielleicht ähnlichen Erscheinungen ihren Ursprung, wie sie Dr. E. v. CHOLNOKY als „Tundrenerscheinung“ von den Spitzbergen beschreibt.* Durch die zwischen den Schotter abfließenden Wasser und den Frost erhalten die Schotterkörner auch dort in der Hammada eine eigentümliche senkrechte Lage.

Während ich bisher bezüglich des Alters diese sackartigen Schotter nicht mit völliger Sicherheit von den unteren, levantinischen Schottern zu trennen wagten, überzeugten mich meine neueren Beobachtungen davon, daß diese beiden Bildungen jedenfalls zu trennen sind. Beide Schotter haben sich unter abweichenden Verhältnissen abgelagert, indem der obere grobkörnige sackartige Schotter die Ablagerung eines viel reißenderen und wasserreicheren Flusses darstellt, als der untere feinkörnigere Mastodonschotter. Außerdem ist die Verbreitung und wahrscheinlich auch die Ursprungstelle der beiden Schotter eine verschiedene.

## Schlußwort.

Im obigen wurde gezeigt, daß HALAVÁTS' Behauptung, daß das Neogen von Budapest schon gründlich bekannt sei und er demnach die Kenntnis desselben mit keinerlei wichtigeren Daten bereichern könne, nur zu seiner eigenen Beschwichtigung dienen kann, indem er seine Arbeit nicht auf Grund von eigenen Beobachtungen an Ort und Stelle, sondern nach der größtenteils bereits veralteten Literatur ohne jede Kritik zusammenstellte und die neuere Lite-

* Die Spitzbergen (Földr. Közlemények. Abrégé Bd. XXXIX, 1911.)

ratur dabei absichtlich bei Seite ließ. HALAVÁTS gegenüber kann ich ruhig behaupten, daß ein Geologe oder Paläontologe offenen Auges keine Exkursion in die Umgebung von Budapest zu unternehmen vermag, ohne neue Beobachtungen anstellen zu können. Was ich in obigen Zeilen mitgeteilt habe, ist das Ergebnis von bloß wenigen Exkursionen, und doch wie sehr verändert es unsere Kenntnisse betreffs der Stratigraphie von Budapest; die geologische Karte des Teiles am linken Donauufer aber wird — wie wir bisher sahen — beträchtlich geändert werden müssen. Außer diesen geologischen Resultaten bilden die paläontologischen ebenfalls den Gegenstand mehrerer Abhandlungen.

Es wurde gezeigt, daß ich im Budaer Mergel außer der von mir bisher beschriebenen Pteropodenschicht, welche den oberen Horizont des Budaer Mergels zu charakterisieren scheint; in der unteren Partie auch einen anderen Horizont antraf, welcher im Gegensatz zu den *Valvatellen* des oberen Horizontes durch *Balantien* charakterisiert erscheint. Derselbe Aufschluß erbringt auch dafür den Beweis, daß es innerhalb des Budaer Mergelkomplexes mehrere Bryozoenhorizonte bzw. Fazies gibt, was für jene Auffassung M. v. HANTKENS zu sprechen scheint, daß der Bryozoenmergel bloß eine Fazies des Budaer Mergels ist, nicht aber ein tieferer Horizont, wie dies K. HOFMANN angenommen hat.

Die kattische Stufe des Oligozän war am linken Donauufer bisher nur von Göd bekannt, im obigen lernen wir dieselbe nun auch von Rákosszentmihály kennen, wo sie in bezug auf Streichen und Fallen mit dem Vorkommen bei Gőd übereinstimmend ausgebildet ist. Infolgedessen ist auf dem als Diluvialsand kartierten Gebiete bei Rákosszentmihály als neu hinzugekommen der *Pectunculus obovatus*-Sand auszuscheiden.

Jene drei untermediterranen Inseln, welche auf der Karte bei Csinkota, Csömör, Mátyásföld, Rákosszentmihály durch Pleistozänsand getrennt erscheinen, sind meinen Beobachtungen nach zu vereinigen, mit jener kleinen Unterbrechung, welche die kleine Partie der „chattischen Stufe“ bei Kisszentmihály bildet. Das Untermediterran ist auch westlich von Rákosszentmihály auszuscheiden, auf Grund des im obigen beschriebenen Vorkommens bei Zugló bis hierher; gegen Osten aber auf Kosten der pannonischen Stufe bis zum Weinberg von Csömör, nachdem ich nachgewiesen habe, daß der hiesige pannonische Süßwassersand ein marines Sediment des unteren Mediterrans ist. HALAVÁTS mußte, da er seine Arbeit lediglich am Schreibtisch ausführte, die Daten der Karte ohne jede Kritik übernehmen, und zieht dem nach auch die östliche Grenze des Burdigalien und der pannonischen Stufe falsch.

Auf Grund meiner im obigen mitgeteilten neueren Entdeckungen erscheint daher die Schichtenfolge des Burdigalien am linken Donauufer beträchtlich erweitert und kann heute bereits mit der Schichtenfolge von Göd in Parallele gestellt werden, wie dies das beiliegende Profil 2 beweist. Die Schichtenfolge beginnt auch dort mit dem Anomiensande, welcher nach aufwärts in dem Sand oder Schotter mit *Pecten praescabriusculus* übergeht.

Der einige hundert Meter mächtige Schichtenkomplex mit *Pecten praescabriusculus* besteht aus abwechselnden Schichten von gröberem oder feinerem Schotter, Sand, Sandstein, tonigem Sand und dünnen mergeligen Bänken. Der petrographischen Fazies entsprechend ändert sich auch die zoologische Fazies. Im feinen Sand herrschen *Anomien,* im feinen Schotter und Grobsand *Pecten praescabriusculus,* im groben Schotter große dickschalige Austern *(Ostrea gingensis),* im feinen kalkig-mergeligen Sand und Sandstein *Kieselspongien* vor. Die Fauna dieser Schichten ist nicht besonders mannigfaltig, indem darin bloß wenige Gattungen vertreten sind, diese jedoch in großer Individuenzahl. Viele der Fossilien zerfallen gänzlich zu Staub, wie z. B. die Korallen, jene aber, welche in diesen wasserdurchlässigen Schichten nicht verwittern, besitzen, wie alle in seichtem Wasser auf schotterigem, sandigen Ufer lebende Formen stark abgerollte Schalen, so daß sie häufig nicht sicher zu bestimmen sind. Weitere sorgfältige Aufsammlungen und Untersuchungen werden auch an diesen Punkten viel Neues zeitigen, besonders hinsichtlich der Mikrofauna, welche ich hier nicht aufzählte, obwohl ich bereits ein ziemlich reiches Material besitze. Ich bin überzeugt, daß auch die mir nachfolgenden Forscher in diesem Gebiete reichlich zu tun haben werden, was zugleich beweist, daß J. HALAVÁTS nur von sich selbst behaupten konnte, daß er unsere Kenntnisse mit keinen neueren

Daten zu bereichern imstande wäre, da dies andere noch in großem Maße tun werden können.

Auch in der unteren Partie des Budaer Mergels findet man an dem von mir beschriebenen Fundorte in jeder einzelnen Schicht (2) reiche Mikrofaunen, in einzelnen reiche Broyzoen, die reichlich Material zu späteren Studien bieten.

Interessante, für die untermediterrane Fauna der Umgebung von Budapest neue Arten sind *Cidaris (Cyathocidaris) avenionensis* DESMOUL., *Cidaris (Plegiocidaris) Peroni* COTT., *Terebratula Hoernesi* SUESS, *Exogyra (Aetostrion?) miotaurinensis* SACCO und *Ancillaria (Baryspira) glandiformis* LAM. var. *dertocallosa* SCC., aus den Schichten mit *Pecten praescabriusculus* und aus dem Rhyolithtuff. Armglieder von *Antedon* aus dem Sande mit *Salicornaria farciminoides* und aus diesem sowie den darüber folgenden sandigen Schichten *Kieselspongien*, welche aus den tertiären Bildungen Ungarns bisher literarisch überhaupt unbekannt sind.

Jedoch nicht nur das Untermediterran an der linken Donauseite, sondern wie gezeigt wurde auch an der rechten Seite bei Budafok ist zum Teil unbekannt. Ich habe nämlich hier fünf bisher in der Literatur noch unbekannte Fundorte mit samt ihrer Fauna beschrieben. In dieser Fauna befinden sich folgende nicht nur für Budapest, sondern auch, wie die vorerwähnten, für ganz Ungarn neue Arten: *Neptunus cf. convexus* RISTORI, *Balanus concavus* BRONN., *Ancillaria (Baryspira) glandiformis* LAM. var. *dertocallosa* SCC., *Ostrea fimbriata* GRAT. *var. crassa* SCHFF., *Ostrea (Crassostrea) crassissima* LAM. *var.* anom. *compressula* SACCO, *Ostrea (Ostreola) miocucullata* SCHFF., *Anomia ephippium* L. *var. squamula* L., *A. ephippium* L. *var. ornata* SCHFF., *A. ephippium* L. *var. aspera* PHIL., *A. ephippium* L. *var. ruguloso-striata* BROCC. *A. ephippium* L. *var. pergibbosa* SACCO, *A ephippium* L. *var. ornata* SCHFF. *Anomia rugosa* SCHFF., *Pecten Pseudo-Beudanti* DEP. et ROM. *var. rotundata* SCHFF., *Pecten (Manupecten) crestensis* FONT. *var. laevis* SCHFF. und *Pecten (Amussiopecten) gigas* SCHLOTH *var. plana* SCHFF., *Cidaris (Cyathocidaris) avenionensis*, DESMOUL. und *Cidaris (Plegiocidaris) Peroni* COTT.

Hier am rechten Donauufer des Budapester Gebietes sind die beiden charakteristischen Fossilien des Burdigalen *Pecten praesca-*

*briusculus* und die Varietäten von *Anomia ephippium* nicht in solchem Maße nach der petrographischen Fazies der Schichten gesondert, wie am linken Ufer der Donau in der Umgebung von Rákosszentmihály, obwohl auch hier beide Arten in dem feinkörnigeren Sand und besonders Sandstein in großer Anzahl gemeinsam vorkommen. *Pecten praescabriusculus* ist in der Umgebung von Budafok bedeutend größer gewachsen als bei Rákosszentmihály, ein Zeichen dessen, daß die Existenzbedingungen hier günstiger waren. Obwohl der untermediterrane Sand von Budafok nicht gerade der feinstkörnige ist, ist derselbe doch sehr geeignet zur Erhaltung auch der feinstschaligen Fossilien. So konnte ich darin die rechte (untere) Klappe einer *Anomia* sammeln, meines Wissens in Ungarn die erste. Im groben Sande sind natürlich auch bei Budafok die dickschaligen großen Pectenarten und besonders Ostreaschalen überwiegend.

Wir haben gesehen, daß HALAVÁTS gänzlich unbegründeterweise den unteren Teil dieses Budafoker Sandschichtenkomplexes in die aquitanische, den oberen in die burdigalenische Stufe verlegt; unbegründet ist dieses Vorgehen schon deshalb, da die beiden charakteristischen Fossilien des Burdigalien, *Pecten (Aequipecten) praescabriusculus* FONT. und die Varietäten von *Anomia ephippium* L. besonders *var. pergibbosa* SACCO (in der Literatur *var. costata* BROCC.) sowohl im oberen Teil des Sandes als auch in dem am Grunde gelagerten Sandstein in gesteinbildender Menge auftreten. Übrigens gehören und zwar „in den Rahmen der neueren Auffassung eingefügt“ die mit diesen Sanden gleichaltrigen Koróder, Molter und Loibersdorfer Schichten sämtlich in das Burdigalien. HALAVÁTS kennt die obere Abteilung des untermediterrans nicht, trotzdem ich schon längst nachgewiesen habe, daß die Bryozoenkalke auch in Budafok darin vorhanden sind, ebenso wie bei Pomáz, Fóth und Csomád. SCHAFARZIK hat auf der geologischen Karte der Umgebung von Budapest (nördliches Blatt) diesen Horizont auch besonders ausgeschieden. HALAVÁTS verzeichnet dieses Gebilde auf dem von ihm reambulierten südlichen Blatte nicht und erwähnt auch entweder im erklärenden Text des Blattes noch in seiner Neogenarbeit kein Wort darüber. Hier in Budafok sind eben diese Bryozoenriffe sehr interessant, wo die auch im obermediterran und sarmatikum vorhanden sind. Es ist wohl wahr, daß HALAVÁTS auch von diesen keine Kenntnis nimmt.

Daß es HALAVÁTS auch in anderer Hinsicht nicht gelungen ist, unsere Kenntnisse in den Rahmen der neueren Auffassung einzufügen, zeigt, daß, wie wir gesehen haben, seine Artbestimmungen meist veraltet und so größtenteils schlecht sind.

Im obigen wurde nachgewiesen, daß der lange als umgeschwemmt (diluvial) betrachtete Rhyolithtuff auch hier in der Umgebung von Budapest bzw. Rákosszentmihály mediterran ist und daß derselbe in der Umgebung von Czinkota, Rákosszentmihály, Rákos und Rákosfalva auf einem großen Gebiete auszuscheiden ist, wo auf der Karte der Umgebung von Budapest Rhyolithtuff bisher vollständig fehlt. (4. Abschnitt.)

Auf Grund eines neueren Aufschlusses konnte ich feststellen, daß die letzte Dazittufferuption* hier in der Umgebung von Budapest nicht an das Ende, sondern an den Beginn des unteren Mediterrans zu stellen ist.

So wie die Arbeit J. HALAVÁTS' vom unteren Mediterran kein richtiges Bild entworfen hat, so ist auch seine Schilderung des oberen Mediterrans sowohl betreffs der Ausbildung, als auch der Fauna dieser Sedimente falsch, da er die Literatur der letzten zehn Jahre teils überhaupt nicht in Betracht zieht, teils aber die Daten derselben ohne jede Kritik übernimmt, die in den letzten zehn Jahren entstandenen Aufschlüsse wie den Straßeneinschnitt zwischen Budaörs—Diósd nicht kennt. Die hier sowie bei Rákos aufgeschlossenen Hydrozoen- und Bryozoenriffe sowie deren interessante Bohrmuschelfauna ist ihm gänzlich unbekannt, deshalb ist auch seine Schichtenfolge lückenhaft.

Während also HALAVÁTS ein zusammenfassendes einheitliches Bild vom Neogen der Umgebung von Budapest entwerfen wollte und versprochen hat, die neueren Daten in den Rahmen der heu-

---

* In neuerer Zeit sammelte ich bei Mogyoród, an jenem von J. BÖCKH beschriebenen Fundorte, wo im Rhyolithtuff Fossilien vorkommen (im tiefen Graben nördlich von der Ortschaft, an der Wand des Wasserfalles) in der Gesellschaft von Pecten und anderen Fragmenten ein einziges Exemplar einer *Terebratula Hoernesi* SUESS., welches meines Wissens überhaupt das erste dieser Art in Ungarn ist.

tigen Auffassung einzufügen, sind seine Bestimmungen größtenteils verjährt, während seine Zusammenfassung darin besteht, daß er von den bereits 1906 beschriebenen 228 Arten bloß 143 kennt, was durchaus nicht als Fortschritt oder als Zusammenfassen der Daten aufgefaßt werden kann.

In meiner vorstehenden Arbeit wurden folgende für das obere Mediterran der Umgebung von Budapest neue Arten aufgezählt, von welchen die mit * bezeichneten für Ungarn überhaupt neu sind: *Vioa ind. sp.*, *Heliastraea conoidea* RSS., **Cidaris (Cyathocidaris) avenionensis* DESM., **Cid. sardica* LB., **Cid. Desmoulensi* SISM.?, *Cid. Schwabenaui* LBE., *Cellepora globularis* RSS., *Crania abnormis* RSS., **Ostrea (Cubitostrea) frondosa* DE SERR., *Lima (Radula) lima* L., *Pecten substriatus* D'ORB., **Pecten (Chlamys) trigonocosta* HILB., **Pinna cfr. Deshayesi* MAYER, *Arca (Barbatia) dichotoma* HÖRN., *Arca (Anadara) Noae* L., *Cardita rufescens* LK. *var. elongata* BRN., *Cardita cfr. calyculata* L., *Meretrix (Amiantis) gigas* LK. *sp.*, *Venus clathrata* DUJ., *Venus (Ventricola) praecursor* MAY.?, *Venus (Ventricola) excentrica* AG., *Cypricardia transylvanica* HÖRN., *Lucina (Jagonia) reticulata* POLI., *Gastrochaena dubia* PENN., *Gastrochaena intermedia* HÖRN. *var. obesa* FONT., *Gastrochaena cfr. intermedia* HÖRN. *var. tauroblonga* SACCO, *Haliotis ovata* BON., *Vermetus (Burtinella) turbinata* PHIL., *Buccinum (Uzita) obliquum* HILB., *Conus (Chelyconus) mediterraneus* HWASS., *Myristica cornuta* AG. *sp.*, **Pagurus cfr. subsimilis* M. EDW., *Chrysophrys sp.?*, also 34 Arten, wovon 8 für ganz Ungarn neu sind.

Überhaupt neu sind von Gastropoden *Mitrularia hungarica* n. s., von Cephalopoden *Sepia mediterranea* n. sp. und von Dekapoden *Mycrocorystes nov. gen. latifrons nov. sp.*, *Dorippe margaretha nov. sp.*, *Portumnus tricarinatus nov. sp.*, *Portunus rákosiensis nov. sp.*, *Zozymus mediterraneus nov. sp.*, die ich demnächst im Rahmen von zwei Abhandlungen beschreiben will.

HALAVÁTS konstruiert auf Grund der Profile der Bohrbrunnen auch das Profil der Schichtverhältnisse in der Umgebung von Budapest falsch, ja auch die Grenze zwischen dem unteren und oberen Mediterran wurde nicht immer richtig gezogen. Seine Profile sind falsch oder schlecht orientiert oder die Weltrichtungen überhaupt nicht angegeben.

Interessant ist auch die große Übereinstimmung in der Ausbildung der obermediterranen und sarmatischen Schichten von Budapest und Ostgalizien.

In dem Einschnitt der Militärstraße nämlich, an diesem Halaváts nicht bekannten Fundort, ist wie in Galizien das ganze obere Mediterran durch kleine Arten charakterisiert, während in Ungarn und auch im Wiener Becken die Fauna durch große, dickschalige, die Brandung besser vertragende Formen sowie große Foraminiferen charakterisiert wird. Die Faunen aus der Umgebung von Budapest und Galizien weisen also gleicherweise darauf hin, daß die einschließenden Schichten in seichtem Wasser und gleichmäßigen oder sehr wenig welligem Meeresgrund zum Absatz gelangten.

Noch interessanter wird die Sache dadurch daß sich an beiden Orten an der Grenze des oberen Mediterran und des Sarmatischen die erwähnten Bryozoenriffe finden. In Ungarn sind Bryozoenschichten im Sarmatischen bisher nur von hier aus der Militärstraße, bzw. aus dem Plateau von Tétény und nach Hantken aus der Umgebung von Perbál und Páty bekannt. Dies alles beweist, wieviel Neues noch zu finden ist für den suchenden Forscher.

Gegenüber jener Behauptung Halaváts, daß das Neogen der Umgebung von Budapest gänzlich bekannt ist, kann ich außer den bisherigen Angaben, die gerade dessen Gegenteil beweisen, behaupten, daß z. B. der mächtige Schichtenkomplex des Sarmatischen in seinen Details vollkommen unbekannt ist. Schon das allein, daß ich innerhalb des brackischen Sarmatikums ein Riff entdeckte, welches völlig aus Kalkkammern besitzenden Bryozoen aufgebaut ist, spricht deutlich gegen Halaváts.

Die hier mitgeteilten Daten entdeckte ich während des Studiums der pannonischen Stufe und ihrer Fauna, also ohne eigentlich nach denselben geforscht zu haben.

Der selbständigste Teil der Halavátsschen Arbeit bezieht sich auf die pannonischen Bildungen, da einesteils hierzu weder Zsigmondy noch Franzenau Angaben liefern, anderenteils die pliozänen Bildungen seit Jahrzehnten das Lieblingsstudium von Halaváts bilden. Aber trotzdem ist dies der schwächste Teil der ganzen Arbeit, da eben in diesem Teil am deutlichsten zutage tritt, daß der Verfasser die Literatur der letzten zehn Jahre ganz außer acht gelassen hat, obwohl gerade das Studium dieser Bildungen in dieser Zeit am eifrigsten betrieben wurde und was wir über dieselben wissen, sozusagen das Resultat der Forschung der letzten zehn Jahre ist. Einzelne Daten meiner Forschungen werden zwar von ihm übernommen, jedoch ohne Angabe der Quelle. HALAVÁTS kennt weder die Fauna dieser Bildungen noch die interessantesten Aufschlüsse, und auch die Lagerungsweise nicht, und gibt die Verbreitung dieser Bildungen auf seiner Karte auch irrig an.

Auf die Unbewandertheit von JULIUS HALAVÁTS in der Literatur ist es zurückzuführen, daß er zwischen den sarmatischen und pannonischen Bildungen keine Übergangsschichten kennt, obwohl solche durch FUCHS aus dem Wiener Becken und von mir von Szócsán beschrieben wurden. Die pannonischen Bildungen werden von HALAVÁTS unrichtig klassifiziert, da er als unterstes Niveau die *Congeria banatica*-Mergel betrachtet, obwohl es seit langem allgemein bekannt ist, daß dieselben mit den *Melanopsis (Lyrcaea) Martiniana*-Sanden wechsellagern und daß diese Fazies in der Fauna teils mit der verschiedenen Konservationsfähigkeit des Materials der einzelnen Schichten im Zusammenhang steht. Es ist eine oft beobachtete Tatsache, daß z. B. in wasserdurchlässigen Sand- und Schotterschichten keine Spur einer Mikrofauna erhalten ist. Dennoch sind aus diesen Schichten die reichsten Mikrofaunen bekannt, indem solche aus dem inneren der großen Schnecken in reicher Menge und vorzüglicher Erhaltung zu sammeln sind; hier waren sie nämlich vor der Auslaugung durch das Wasser geschützt. Sie gelangten hierher teils nach ihrem Absterben mit dem Meeresschlamm, teils aber lebten sie, vor ihren Feinden Schutz suchend in leeren ausgestorbenen Schneckengehäusen, wo sie abstarben und konserviert wurden. Man muß zumindest in jenen Fällen hieran denken, wo man in den Schnecken Doppelklappen von Congerien und Limnocardien findet.

Wie wir gesehen haben, läßt sich die pannonische Stufe nicht in drei Teile gliedern, wie es HALAVÁTS tut, sondern nur in eine untere und eine obere Stufe, deren Niveaus miteinander durch das gemeinsame Vorkommen der einzelnen Formen innig zusammenhängen. Wie wir gesehen haben, besitzt die unterpannonische Stufe sarmatischen, die obere pontischen Charakter. Die Schichten der unteren Stufe sind mit den rumänischen und russischen „maeotischen Schichten" gleichaltrig. Die Schichten der unteren Stufe sind in der Umgebung von Budapest nur bei Budapest-Köbánya aus dem Brunnen der Schweinemastanstalt bekannt und entferntere Fundorte sind Váczbottyán, Iklad, Domony, Tótgyörk, Mácsa. Abgesehen von dem Charakter der Fauna, widerspricht schon die Tatsache, daß sich in der aus dem Brunnen der Schweinemastanstalt hervorgelangten Fauna und in der Fauna der in den Tongruben der nahen Ziegeleien aufgeschlossenen *Congeria-ungula-caprae*-Schichten nur eine gemeinsame Art findet, der Annahme, daß diese Bildungen gleichaltrig seien, wie HALAVÁTS behauptet.

Die pannonischen *Lyrcaea*-Schichten des Wiener Beckens gehören in die unterpannonische Stufe, nach deren Ablagerung das Meer zurücktrat und das Becken trocken legte. So nimmt HALAVÁTS als Ablagerung der ganzen zweiten Hälfte der pannonischen Zeit auf Grund der älteren Literatur bloß den sog. „Belvedereschotter" an. Nachdem aber SCHAFFER acht Jahre vor Erscheinen der HALAVÁTSschen Arbeit nachgewiesen hat, daß diese Schotter nicht pleistozän, sondern jünger sind, entstand eine Lücke zwischen den beiden Bildungen. Bis endlich FUCHS von Mannersdorf eine Binnenseeablagerung beschrieb, deren genaueres Alter auf Grund ihrer Fauna — über ihre Lagerung ist nicht viel zu ermitteln — nicht zu bestimmen war, und welche sich bisher nicht gut in die aus Ungarn bekannten Horizonte der oberpannonischen Stufe einreihen ließ. Da jedoch diese Fauna mit derjenigen übereinstimmt, welche ich von Szentlörincz beschrieben habe, glaube ich nicht zu irren, wenn ich beide für gleichaltrig halte. Die Schichten bei Szentlörincz besitzen eine glücklichere Lagerung als bei Mannersdorf, indem sie hier von einer fossilführenden Schicht und zwar der obersten „*Unio Wetzleri*"-Schicht der pannonischen Stufe überlagert sind und anderseits, nach dem Einfall der Schichten geurteilt, fällt in das Hangende der durch *Congeria triangularis* und *Cong. balatonica* charakterisierte Horizont; und so kann man, glaube ich, mit Recht auch die Mannersdorfer Schichten in den oberen Teil der oberpannonischen Stufe stellen.

Wählt jemand die pannonischen Bildungen der Umgebung von Budapest zum Studium, so bietet ihm weder die geologische Karte von Budapest, noch die Arbeit von HALAVÁTS über das Neogen viel Aufmunterung. Trotzdem ist es mir gelungen einesteils aus den für fossilleer gehaltenen Schichten Fossilien zu sammeln, anderenteils aus solchen Schichten, aus denen nur wenige Arten bekannt waren, eine ansehnlichere Fauna zu erbeuten. Als für die pannonische Fauna von Budapest neue Arten sammelte ich *Hydrobia syrmica* NEUM. und *Valvata Kimakovicsi* BRUS. Auf Grund der gesammelten Fauna wurde es möglich, einesteils die Niveauverhältnisse der als pannonisch bekannten Schichten innerhalb des pannonischen Schichtenkomplexes festzustellen, anderesteils von den als fossilleer bekannten Schichten auf Grund der Fossilien nachzuweisen, daß dieselben in den obersten durch „*Unio Wetzleri*“ charakterisierten Horizont der pannonischen Stufe gehören. Natürlich ist infolgedessen auch die geologische Karte von Budapest in mancher Hinsicht abzuändern, imdem am östlichen Rande des Blattes von Czínkota, Kerepes bis Mogyoród, Veresegyháza, Gödöllö, Péczel, Maglód, Ecser durch das Alluvium einiger weniger Bachtäler und wenige pleistozäne Partien unterbrochen überall pliozäne bzw. oberpannonische Schichten an die Stelle des gegenwärtig angeführten Flugsandes auszuscheiden sind.

Während nach HALAVÁTS levantinische Schichten abgesehen von den Mastodonschottern nur aus dem Untergrunde des großen Alföld bekannt sind, gelang es mir, solche aus der Umgebung des Balatonses von Fonyód, und aus der Umgebung von Budapest von Batta und Mogyoród nachzuweisen. Wie wir sahen, sind jedoch die fossilleeren tonig-mergeligen Schichten des sich dem Mátragebirge anlehnenden Teiles des Sandrückens zwischen Donau und Tisza in der Umgebung von Gödöllö und Aszód und O-lich von hier teilweise ebenfalls als levantinisch zu betrachten.

Es gilt heute bereits für erwiesen, daß die levantinischen Mastodonschotter und die sog. sackartigen Schotter von verschiedenem Alter sind, letztere sind größtenteils pleistozän und gleichaltrig mit den sogenannten „Belvedereschottern“ des Wiener Beckens. Der Mastodonschotter lagert auch nicht auf den „*Unio Wetzleri*“-Schichten, wie HALAVÁTS behauptet, sondern füllt als Flußschotter ein in die tonigen Schichten der oberpannonischen Stufe eingetieftes Bett aus, und befindet sich so mit den „*Unio-Wetzleri*“-Schichten in einem Niveau, wie mein beigefügtes Profil beweist (Fig. 4). Der jüngere sackartige Schotter hingegen bedeckt sowohl den Mastodonschotter, als auch das „*Unio Wetzleri*“-Niveau. Nach ihrer Verbreitung und wahrscheinlich auch nach ihrem Ursprung sind die zweierlei Schotter verschieden, sogar haben sich beide unter abweichenden Verhältnissen abgelagert; denn der obere grobkörnige sackartige Schotter stellt die Ablagerung eines viel reißenderen und wasserreicheren Flusses dar, als der untere feinkörnigere Mastodonschotter.

Die Schottersäcke entstanden durch die mechanische Einwirkung fließenden Wassers, wie durch die auswaschende und quellende Wirkung des Wassers, jedoch hauptsächlich durch die Wirkung von Frost und Eis.

Wie viel mehr interessante neue Daten hätte irgend jemand finden müssen, der sich wie J. HALAVÁTS speziell bloß mit dem Neogen der Umgebung von Budapest befaßt hat.

(Aus den Sitzungen der III. Klasse der ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 16. Januar 1911, 15. Mai 1911 und 22. Januar 1912.)

12.

# PALÄONTOLOGISCHE NOVITÄTEN AUS DEN TERTIÄREN SEDIMENTEN UNGARNS.

Von I. LŐRENTHEY, korresp. Mitglied.

(Mit drei Tafeln.)

Besonders aus den tertiären Sedimenten der Umgebung von Budapest gelangten in den letzten Jahren mehrere interessante paläontologische Funde zutage. Unter diesen will ich alle jene, welche aus den pannonischen Bildungen stammen, unter dem Titel „Die pannonische Fauna von Budapest“ in Palaeontographica als zweiten, Schlußteil meiner dort erschienenen Arbeit publizieren. Das Dekapodenmaterial wird als Fortsetzung meiner bereits begonnenen Studie über tertiäre Dekapoden, ungarisch in Mathem. és Termtud. Közlemények, deutsch in den Math. Naturw. Berichten aus Ungarn ebenfalls als besondere Arbeit erscheinen. Sonstige paläontologische Neuigkeiten sollen aber von Zeit zu Zeit unter obigem Titel zusammengefaßt publiziert werden, damit diese Mitteilungen, welche wegen ihres geringen Umfanges in der Literatur schwer zu finden wären, so gesammelt, leichter zugänglich seien. Bei dieser Gelegenheit will ich im Rahmen von drei kleinen Abhandlungen einige seltene oder neue Arten aus dem Tertiär der Umgebung von Budapest beschreiben.

## 1. Über einige interessante und neue Fossilien aus den alttertiären Sedimenten von Budapest.

In dem Budaer Mergel, welcher die Basis des unteren Oligocäns bildet, sind guterhaltene Fossilien sehr selten, indem fast alle in Form von Steinkernen oder Abdrücken erhalten bleiben. Eines der am besten erhaltenen, bisher bekannten Fossilien ist jener *Spondylus,* mit welchem ich mich im folgenden befassen will. Derselbe gehört zwar keiner neuen Art an, sondern einer Spezies, die bisher aus Ungarn nicht bekannt war, und auch außerhalb Ungarns meines Wissens nur aus der Umgegend von Lattorf in Deutschland aus dem dortigen Unteroligocän beschrieben worden ist, obwohl sie auch dort nicht gerade häufig auftritt. In der Literatur wurde sie meist mit *Spondylus Buchi* identifiziert.

Diese interessante, seltene Art schafft einen Zusammenhang zwischen dem deutschen und ungarischen Unteroligozän, und spricht vielleicht auch dafür, daß der Budaer- (bzw. Bryozoen-) Mergel nicht eozän, sondern oligocän ist.

### *Spondylus limaeformis* Giebel.

(Tafel I, Figur 1—2.)

1864. *Spondylus limaeformis,* Giebel: Die Fauna der Braunkohlenformation von Latdorf bei Bernburg (Abhandl. d. naturforsch. Gesellsch. z. Halle Bd. VIII, S. 261, Taf. IV, Fig. 18).

1864. *Spondylus Buchi* (non Phill.) Koenen: Das nordd. Unteroligocän u. seine Molluskenfauna (Abhandl. z. geol. Spezialkarte v. Preußen u. d. Thüringischen Staaten Bd. X, Heft 5, S. 1036, Taf. LXVI, Fig. 1—4).

Die Doppelklappe vom Kissvábhegy stimmt mit der von Koenen gelieferten Beschreibung und Abbildung von „*Spondylus Buchi*" aus dem Unteroligocän von Lattorf (oder Latdorf) und Calbe a. S. überein. Die Erhaltung der einzigen mir vorliegenden Doppelklappe ist ideal schön, abgesehen davon, daß die Wirbelgegend besonders an der unteren, rechten Klappe etwas verdrückt ist. Doch ist auch so gut zu sehen, daß die rechte Klappe mit ihrem Wirbel mehr nach vorn geneigt ist als die linke (vgl. beigefügte Textfigur).

Die Klappen sind quer oval, unten etwas nach hinten verbreitert. Die Länge des Schloßrandes ist bedeutend geringer als der Breitendurchmesser. Die Oberfläche erscheint durch 21 dachförmige Rippen verziert, welche gegen die Seiten zu schwächer, schmäler und abgerundet werden, und hier nur etwa halb so breit sind als in der Mitte der Klappe. Sechs Rippen der rechten (unteren) Klappe tragen Stacheln, und werden auf meinem Exemplar beständig durch je drei glatte Rippen getrennt, mit Ausnahme der zwei vorderen, welche bloß durch zwei glatte Rippen voneinander getrennt erscheinen. Die Stacheln sind an den beiden mittleren Rippen am längsten, hier werden sie über 20 mm lang und legen sich den Rippen an; die Stacheln der folgenden rechten und linken Rippe sind bereits weniger lang und liegend, an den zwei äußeren stacheligen Rippen sind sie am kürzesten und ragen gerade empor. Die Stacheln sind einander in der Wirbelgegend am meisten genähert, gegen den Rand der Klappe zu entfernen sie sich voneinander. Ob in der Wirbelgegend jede Rippe schuppig-stachelig ist, konnte infolge der ungünstigen Erhaltung des Wirbels nicht mit Bestimmtheit festgestellt werden, obzwar diese Schuppen an mehreren stachellosen Rippen deutlich zu sehen sind. An der Seite jeder Rippe treten in der Wirbelgegend ein bis zwei starke Längsrippchen auf, deren Zahl Hand in Hand mit dem Zunehmen des Abstandes gegen den Rand der Klappe durch Einfügung neuer Rippchen auf 4—5, ja auf der linken Klappe bis auf 6 zunimmt. Außer diesen sind stellenweise auch sehr zarte Längsfurchen zu sehen. Die radialen Furchen werden durch Zuwachslamellen gekreuzt, wodurch die Seiten der Rippen eine schuppige Skulptur erhalten.

Auch am hinteren Ohr befindet sich ein kräftiger Stachel, welcher nach vorne gerichtet den Schloßrand weit überragt.

Die Rippen der linken Klappe stimmen betreffs Struktur und Skulptur mit jenen der rechten Klappe überein, indem es auch hier mit Stacheln verzierte Rippen gibt, und zwar derart angeordnet, daß die Rippen mit den kräftigsten Stacheln — drei an der Zahl — sich, durch je drei stachellose Rippen voneinander getrennt, in der Mitte der Klappe befinden; gegen die Seiten der Klappe findet sich noch je eine mit schwächeren Stacheln verzierte Rippe, welche von der zunächstliegenden ebenfalls durch je drei stachellose Rippen getrennt wird. Die Stacheln sind hier viel schwächer als auf der rechten Klappe und beschränken sich lediglich auf den oberen Teil der Klappe, indem sie in der unteren Hälfte bereits fehlen. Die Längsberippung und Schuppenstruktur stimmt mit jener auf der rechten Klappe vollkommen überein. An der Grenze des Ohres und der eigentlichen Klappe verläuft eine starke Falte, dieselbe ist jedoch bloß vorn zu sehen, während sie am hinteren Ohr, wahrscheinlich infolge der ungünstigen Erhaltung des Exemplars nicht zu beobachten ist. Übrigens werden die Ohren durch starke Zuwachsstreifen, Falten bedeckt.

Die Rippen werden an beiden Klappen gegen die Ränder zu breiter und etwas flacher, während sie in der Mitte der Klappen und in der Wirbelgegend sehr scharf sind, im Gegensatz zu den Rippen von *Sp. Buchi*, die gerade hier abgerundet sind.

Trotzdem das Exemplar von Lattorf mit jenem von Budapest vollkommen übereinstimmt, und trotzdem v. KOENEN hervorhebt, „die Schalen tragen meist je 21 dachförmige Rippen,“ so bestimmt er sein Exemplar doch als *Sp. Buchi*, wo doch PHILIPP, der Autor dieser Art folgendes besagt*: „20—22 Rippen, welche anfangs gerundet sind, zuletzt aber flach dreieckig werden ... Die Zwischenräume sind schmäler als die Rippen.“ Zwischenräume sind weder an dem Lattorfer noch an dem Budapester Exemplar, da die dachförmigen Rippen miteinander an der Basis in unmittelbarer Berührung stehen und die einzelnen Rippen nur durch schmale Furchen getrennt sind, wie bei BELLARDIS *Sp. limoides*, und so kann das Lattorfer Exemplar auch in dieser Hinsicht nicht zu *Sp. Buchi* gestellt werden, wie es v. KOENEN tut (und naturgemäß auch das von Budapest nicht), sondern zu der von GIEBEL aus Lattorf beschriebenen Art *Spondylus limaeformis***, welche KOENEN in seiner Arbeit als Synonym von *Spondylus Buchi* erwähnt. Die Selbständigkeit dieser Art ist aber durch die oben angeführten Unterschiede gerechtfertigt.

*Spondylus limoides* BELL***, *Sp. limaeformis* GIEB. und *Sp. Buchi* PHIL. bilden eine von den typischen Spondylen abweichende Gruppe, da dieselben keine festsitzenden Formen sind.

GIEBEL beschreibt *Sp. limaeformis* auf Grund einer einzigen und zwar der Abbildung nach zu urteilen, einer linken Schalen-

---

* Verzeichnis der in der Gegend von Magdeburg aufgefundenen Tertiärversteinerungen (Palaeontographica I, B. 65, Taf. VII, Fig. 9).

** GIEBEL, Fauna von Latdorf. (B. 261, Taf. IV, Fig. 18.)

*** LOUIS BELLARDI, Catalogue raisonné des fossiles nummulitiques du comté de Nicé (Mem. de la soc. géol. Franç. Ser. II Vol 4).

klappe. In der Beschreibung hebt er hervor, daß die gleichgroßen Ohren durch eine kräftige Falte von den übrigen Teilen der Klappe gesondert sind. Die 22* Rippen sind der Beschreibung nach „stark dachförmig", infolgedessen verläuft der Rand wellenförmig; die Rippen sind außerdem überall durch gedrängt stehende regelmäßige Querleisten bedeckt, welche auf dem Kiel der Rippen schwach erscheinen. Nach Giebel erinnert die Form an *Lima comta* aus dem London-Ton, daher der Name. Koenens Exemplar ist vollständiger, die Beschreibung mustergültig und sowohl die Abbildung, als auch die Beschreibung verrät, daß sein Lattorfer Exemplar nicht mit *Sp. Buchi* identisch ist, trotzdem er es ganz unbegründet dieser Art zuzählt.

Diese interessante und sowohl bei Lattorf und Calbe a. S als auch bei Budapest gleicherweise seltene Art stellt einen Zusammenhang zwischen dem deutschen Unteroligocän der Umgegend von Bernburg und demjenigen von Ungarn, bzw. Budapest her. Die hier beschriebene Doppelklappe stammt aus dem Mergel im Hangenden des obereozänen Kalksteines (Barton) am Kissvábhegy, welchen Dr. Karl Hofmann noch als „Bryozoenmergel" in das Eocän, M. v. Hantken hingegen als „Budaer Mergel" in das untere Oligocän stellt. Dieser Fund scheint unter anderem ebenfalls für die Richtigkeit der Auffassung Hantkens zu sprechen.

Nach dieser interessanten und seltenen Art möchte ich über eine andere in dem unteren Oligocän von Häring und Budapest gleichermaßen häufige Art, *Pecten (Parvamusium) Bronni* C. Mayer einige Bemerkungen machen. Aus dem Budaer Mergel des Wegeinschnittes im Rézmál-dülö bei Budapest gelangte ein mangelhafter und deshalb nicht mit völliger Sicherheit bestimmbarer Steinkern, der im italienischen Unteroligocän (tongriano), sowie in dem gleichaltrigen Budaer Mergel und Kisczeller Ton gleicherweise verbreiteten *Xenophora (Tugurium) subextensa* d'Orb *sp.* zutage, welcher, wie auf Tafel II, Fig. 1 ersichtlich, sieben Exemplare von *Pecten (Parvamusium) Bronni* in sein Haus eingebaut hat. Diese Stücke sind zum kleineren Teil die Steinkerne von an ihrer Innenfläche festgewachsenen Exemplaren, größtenteils

* Auf der Abbildung sind irrtümlicherweise 30 Rippen gezeichnet.

aber mit der Außenfläche angewachsene beschalte Stücke, an welchen man nur die Innenteile untersuchen kann. Solche Exemplare, an welchen auch das Äußere der Schale zu untersuchen wäre, finden sich weder in dem von HOFMANN gesammelten Material, noch in dem meinigen. Die ersten Abbildungen von *Pecten Bronni* hat Dr. K. HOFMANN publiziert*, der hervorhebt, daß die inneren Rippen auf der rechten Klappe bis zum Rand derselben reichen, auf der linken hingegen wenig über dem zweiten Drittel der Höhe endigen. PAUL OPPENHEIM** äußert sich zwar schon mit weniger Bestimmtheit, aber doch noch im gleichen Sinne, da er die Besprechung der Rippen mit folgenden Worten schließt: „welche auf der linken Klappe etwas früher vom Rande zu endigen scheinen, als auf der rechten.“

Soweit ich an den mir bekannten Exemplaren feststellen konnte, hängt die Länge der Rippen meist von der Größe der Schale ab, und nicht davon, ob es die rechte oder die linke ist. Anscheinend reichen die Rippen bei jungen Exemplaren sowohl auf der rechten als auch auf der linken Klappe gleicherweise bis zum Klappenrand, bei größeren ausgewachsenen Exemplaren hingegen nur etwa bis zu zwei Drittel der Klappe. Ich habe nämlich linke Klappen beobachtet, an welchen die Rippen bis zum Klappenrand reichen und rechte Klappen, an welchen dies nicht der Fall ist. Hieraus folgt, daß das Wachstum der Rippen mit dem Wachstum der Schale nicht gleichen Schritt hält, sondern erstere, nachdem die Rippen eine gewisse Länge erlangt haben, früher zum Stillstand kommt, als das Wachstum der Schale. *P. Bronni* gehört in die Gruppe der auch nach OPPENHEIM schwer zu unterscheidenden kleinen glatten Arten. Unter diesen besitzt *P. squamula* LAM. 8, der neogene *P. duodecimlamellatus* BRONN hingegen 11—12 Rippen und 10—12 Rippen weist nach OPPENHEIM auch *P. Bronni* MAY. auf. Zugleich bemerkt er je-

* Beitr. z. Kenntnis d. Fauna d. Hauptdolomiten u. d. ält. Tertiärgebilde d. Ofen-Kovácsier Gebirge; Mitt. a. d. Jahrb. d. kgl. ungar. geol. Anst. Bd. II, Taf. XIV, Fig. 1. 1873.

** Über einige alttertiäre Faunen der Österreichisch-Ungarischen Monarchie. (Beitr. z. Paläont. und Geol. Österreich-Ungarns usw. Bd. XIII, S. 231. 1901.)

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

doch, daß nachdem K. HOFMANN auch ein Exemplar mit 8 Rippen abbildet, dasselbe sich infolge dieser Eigentümlichkeit den älteren Arten nähert. Und er hebt hervor, daß, falls dies nicht ein Irrtum des Zeichners ist, diese Art einen Übergang zwischen den eocänen und miocänen Formen darstellen und dafür sprechen würde, daß in dieser Gruppe ein größeres Zusammenziehen der verschiedenen Arten begründet wäre, infolgedessen der stratigraphische Wert dieser Gruppe bedeutend sinken würde. Um festzustellen, ob auf HOFMANNS Fig. 1b tatsächlich nur 8 Rippen vorhanden sind, untersuchte ich das Original und stellte fest, daß 8 Rippen deutlich sichtbar, außerdem aber noch zwei in schwachen Spuren angedeutet sind. An den von mir untersuchten Exemplaren fand ich übrigens allgemein 9—10 Rippen, und so läßt sich die Art schön zwischen *squamula* und *duodecimlamellatus* einreihen. Exemplare mit 12 Rippen fanden sich in der Umgebung von Budapest nicht, auch nicht mit 11 Rippen mit Sicherheit.

An den im Rézmáldülö gesammelten Exemplaren von *Pecten (Parvamusium) Bronni* läßt sich eine interessante Beobachtung machen, welche übrigens auch an HOFMANNS Exemplaren sichtbar ist, so daß es zu verwundern ist, daß sie der Aufmerksamkeit der Forscher bisher entgangen ist. Bei manchen Exemplaren treten nämlich zwischen den Rippen mehrere feine, jedoch auch mit unbewaffnetem Auge deutlich sichtbare radiale Furchen auf, welche mit den Rippen parallel verlaufen. Bei anderen Exemplaren hingegen werden die inneren Rippen durch starke Zuwachsstreifen gekreuzt. Sowohl an den Steinkernen als auch an der Innenseite der Klappen sind die radialen Furchen und die Zuwachsfalten deutlich sichtbar, beide Skulpturen finden sich jedoch niemals an ein und demselben Exemplar vereint. Nach meinen bisherigen Beobachtungen scheinen die radialen Furchen für die linke, die kräftigen Zuwachsfalten aber für die rechte Klappe charakteristisch zu sein. Exemplare mit sichtbarer Außenfläche sind mir leider unbekannt, und so läßt sich nicht feststellen, ob diese verschiedene Skulptur auch auf der Außenfläehe sichtbar oder nur auf die Innenseite der Schale beschränkt ist; sie dürfte wahrscheinlich von außen noch deutlicher sichtbar gewesen sein.

Aus dem Budaer Mergel war bisher nur eine *Lima*art bekannt und zwar *Lima (Acesta) Szabói* HOFM. sp., in neuerer Zeit erhielt jedoch Herr Prof. Dr. ANTON KOCH eine zweite Art aus dem nördlichen Teile des Tunnels durch den Gellérthegy der Südbahn, wo die gegen Nord fallenden Bänke des Budaer Mergels in dem Eisenbahneinschnitt aufgeschlossen sind. Er war so liebenswürdig, mir dieses schöne Exemplar zur Untersuchung und Beschreibung zu überlassen, wofür ich ihm auch an dieser Stelle meinen Dank ausspreche. Das gefundene Exemplar erwies sich als Vertreter einer neuen Art, deren Beschreibung ich in Folgendem gebe:

### *Lima (Mantellum) praeinflata* nov. sp.

(Tafel II, Fig. 1—2.)

Die verhältnismäßig dünne, ungleichseitige Schale ist queroval, mäßig gewölbt und anscheinend vorn und hinten klaffend, mit verhältnismäßig großen Ohren. Der Wirbel ist spitzig und scheint den Schloßrand nicht zu überragen. Die Oberfläche ist durch zahlreiche radiale Rippen verziert, welche in der Mitte flacher und breiter, gegen den Rand zu abgerundeter und schmäler erscheinen; die Zwischenräume sind etwas breiter als die scharf gesonderten Rippen, was besonders in der Mitte auffallend ist, wo mitunter in den Zwischenräumen noch sehr feine Rippchen zu beobachten sind. Die Rippen werden außer von zarten hier und da auch von kräftigeren Zuwachsstreifen gekreuzt, wodurch sie einen welligen Verlauf annehmen. Das allein erhaltene linke hintere Ohr ist durch sechs kräftige Rippen verziert. Die Klappe war an der Innenseite wahrscheinlich ebenfalls, wenn auch schwach geschwungen. Die einzige linke Klappe ist etwa 108 mm lang, 66 mm breit und 6 mm dick.

Es ist mir keine einzige fossile Art bekannt, mit welcher sich diese oligocäne Art identifizieren ließe. Am nächsten steht ihr noch die aus dem Mediterran bekannte und nach WEINKAUF* in den seichteren Regionen des Mittelländischen Meeres noch heute sehr verbreitete *Lima (Mantellum) inflata* CHEMNITZ. Jedoch auch von dieser weicht unser Exemplar wesentlich ab, einesteils ist es viel größer, da das bei HÖRNES abgebildete Exemplar

* Fossile Moll. d. Wiener Beckens. Taf. 54, Fig. 5a—5e.

bloß 17 mm lang, 12 mm breit und wie er hervorhebt „kräftig gewölbt“ 8 mm dick, das bei SACCO* abgebildete Exemplar hingegen 62 mm lang, 54 mm breit ist, wo doch meine neue Art bei einer Länge von 108 mm, 66 mm breit und etwa 6 mm dick ist. Es ist also beträchtlich größer, weniger gewölbt, der Wirbel anscheinend schwächer und weniger nach vorne ragend, die Ohren, soweit sich dies nach dem vorhandenen hinteren Ohr der einzigen, mangelhaften linken Klappe beurteilen läßt, bedeutend kräftiger. Die Zwischenräume der Rippen sind nur wenig breiter als die Rippen selbst, bei *inflata* hingegen mehr als doppelt so breit (Fig. 5d von HÖRNES). Nimmt man zu diesen Unterschieden noch die Altersdifferenz, so erscheint die Beschreibung dieser interessanten Form des Budaer Mergels als neue Art gerechtfertigt, welche ich, da man sie als Vorfahren von *L. inflata* auffassen kann, *praeinflata* nenne. Leider ist auch die einzige mangelhafte linke Klappe (Tafel II, Fig. 1) bloß als Abdruck erhalten, an welchem nur hier und da ein kleiner Rest der Schale erhalten blieb. Deshalb erachtete ich es für notwendig, in Fig. 2 auch den Gypsabguß nach einer photographischen Aufnahme zu veröffentlichen. Der mangelhafte Erhaltungszustand läßt nicht alle Charaktere mit Sicherheit feststellen, und so kann auch die Beschreibung der Art keinen Anspruch auf Vollkommenheit erheben.

### 2. Sepien in den tertiären Bildungen von Budapest.

(Tafel III, Fig. 2.)

Aus Ungarn habe ich die erste und bisher einzige *Sepia hungarica* LŐRENT. aus dem unteroligocänen „Budaer Mergel“ von Piszke (Kom. Esztergom) in meiner Arbeit „Sepia im ungarischen Tertiär“ beschrieben.** Seither ist es mir gelungen an zwei Orten, in zwei verschiedenen Schichten Sepien zu finden und zwar beide in dem Gebiete von Budapest.

Die unteroligocäne *Sepia hungarica* habe ich an einem neuen Fundorte, am Szt. Gellérthegy*** bei Budapest gesammelt. Ein Exemplar dieser Art gelangte damals zutage, als gelegentlich des

* I. Moll. tertiarii d. Prémote etc. (Part. XXV) Tav. V, Fig. 1.

** Math. u. Naturw. Ber. a. Ungarn Bd. XV 1898.

*** LÖVENTHEY, Protokollauszug aus der Fachsitzung (Földtani Közlöny Bd. XXXV) 1905.

Baues der Erzsébetbrücke ein Teil am nordwestliehen Ende des Gellérthegy gesprengt und abgetragen wurde. Diese Sepia stammt aus dem, mit demjenigen von Piszke, also mit dem nach Dr. KARL HOFMANN obereocänen Bryozoenmergel, beziehentlich mit M. v. HANTKENS unteroligocänen „Budaer Mergel“ gleichaltrigen grauen Kalkstein, in welchem die spärlichen größeren Fossilien, abgesehen von den mikroskopischen, als Pyritabdrücke und Steinkerne erhalten sind.

Durch diese interessante Sepie, welche die älteste Form der bisher bekannten echten Sepien darstellt, erleidet unser Wissen über die Abstammung der Sepien eine interessante Änderung. Da die aus dem Eocän unter dem Namen Sepien beschriebenen dibranchiaten Cephalopoden bekanntlich keine Sepien sind, waren die echten Sepien erst vom Miocän an bekannt, bis ich nicht die *Sepia hungarica* beschrieb. PAUL OPPENHEIM hält den von ihm als *Orcagnia trivigiana* beschriebenen Cephalopoden für eine Form, welche von den mesozoischen Belemniten zu den miocänen Sepien eine Brücke schlägt. In seiner Abhandlung „Über Orcagnia trivigiana n. g. n. sp., einen neuen dibranchiaten Cephalopoden“ äußert er sich hierüber folgendermaßen: „. . . ohne Zwang ein Zwischenstadium auf dem Wege darstellen, der von den mesozoischen Belemniten zu den rezenten und neogenen Sepien geführt hätte. Da echte Sepien erst vom Miocän an nachgewiesen wurden, so wäre die Entstehung dieser Gattung in das Oligocän zu verlegen.“

Kurze Zeit vor der Abhandlung OPPENHEIMS erschien meine Beschreibung der *Sepia hungarica*, welche OPPENHEIM während der Korrektur erhielt, weshalb er in einer Fußnote nachträglich bemerkt: „Neuerdings hat Herr LŐRENTHEY eine echte Sepia (*Sepia hungarica* LŐRENT.) aus dem unteroligocänen Bryozoenmergel von Piszke bei Esztergom beschrieben und abgebildet.“ Ebenso unter dem Einfluß dieses äußert sich PAUL OPPENHEIM in seiner späteren Priabonarbeit, gelegentlich der Besprechung der selbständigen Gattungsberechtigung von Orcagnia, bereits zurückhaltender, daß diese wahrscheinlich in der Mitte steht zwischen den mesozoischen Belemniten und den lebenden und neogenen, in neuerer Zeit sogar bereits bis in das untere Oligocän verfolgbaren Sepien.

Eben deshalb aber, da die echten Sepien auf Grund unserer ungarischen Funde bereits zu Beginn des Oligocän lebten, also beinahe gleichzeitig mit der nach OPPENHEIM ihre Abstammung vermittelnden *Orcagnia*, so kann meines Erachtens *Orcagnia* als vermittelndes Bindeglied zwischen den mesozoischen Belemniten und den gegen Ende des Eocäns lebenden Sepien nicht betrachtet werden.

*Orcagnia* ist in ihren morphologischen Eigentümlichkeiten noch ein Belemnit (das Proostracum und Rostrum) und zwar ein verkümmerter tertiärer Repräsentant der mesozoischen Belemniten, mit welchem nach unseren bisherigen Kenntnissen diese Gattung ausgestorben ist. *Sepia hungarica* hingegen ist eine vollkommen typische Sepie, welche sich von den heute lebenden Sepien bloß artlich unterscheidet. Es läßt sich nun nicht vorstellen, daß vom oberen Eocän bis zum unteren Oligocän, also in verhältnismäßig sehr kurzer Zeit eine derartig große Umwandlung zustande kommen konnte, welche aus der *Orcagnia* die *Sepia* entwickeln ließe. Meines Erachtens ist die Stammform, von welcher die *Sepien* und vielleicht auch die *Orcagnia* abzuleiten ist, tiefer zu suchen, die *Orcagnia* selbst kann man jedoch auf keinen Fall als so nahen Vorfahren der *Sepia* betrachten.

Die bisher bekannte älteste Sepie, *Sepia hungarica* LÖRENT. ist anscheinend in Ungarn nicht einmal selten. In dem von mir beschriebenen Material der paläontologischen Sammlung der Universität Budapest, habe ich von Piszke 6 Exemplare erwähnt; in dem von Dr. THOMAS V. SZONTAGH gesammelten Material, welches Dr. VIKTOR VOGL beschrieben hat*, befinden sich ebenfalls mehrere Exemplare. Nach der Zeugenschaft des neuen Fundortes am Gellérthegy war die Art in dem Unteroligocän Mittelungarns auch ziemlich weit verbreitet.

Auch in dem ungarischen Miocän habe ich eine Sepia gefunden und zwar bei Budapest-Rákos in dem dortigen obermediterranem Kalkstein. Die Beschreibung gebe ich in Folgendem:

---

* Die Fauna des sogenannten Bryozoenmergels von Piszke. (Jahrb. d. kgl. ung. geol. Reichsanstalt Bd. XVIII, Heft 3.)

### *Sepia mediterranea* nov. sp.

(Tafel II, Fig. 2.)

1906. *Sepia sp.* Vadász M. E. Budapest-Rákos felsö mediterránkorú faunája. (Földt. Közlöny Bd. XXXVI, S. 279).

1906. *Sepia sp.* Vadász M. E. Über die obermediterrane Fauna von Budapest-Rákos (Ibidem S. 348).

1911. *Sepia mediterranea nov. sp.* Lőrenthey Újabb adatok Budapest környéke harmadidöszaki üledékeinek geologiájához. 5. Újabb adatok a felsö mediterrán kifejlödéséhez és faunájához (Math. és Term. tud. Értesitö Nr. XXIX, S. 531).

1912. *Sepia mediterranea* n. sp. Lőrenthey Neuere Beiträge zur Stratigr. d. Tertiärbildungen in der Umgebung von Budapest. Nebst einigen Bemerkungen zu Julius Halavats „Die neogenen Sedimente d. Umgeb. v. Budapest. Math. u. Naturw. Ber. a. Ungarn. Bd. XXVII, S. 327 u. 389.

Die Schulpe ist, aus den Zuwachsstreifen gefolgert stark länglich und ziemlich gewölbt, mit ziemlich breiten Rippen an der dorsalen Oberfläche, obwohl von den drei Rippen nur die mittlere scharf umgrenzt ist, während die beiden lateralen nur gegen die Mitte zu begrenzt sind, und gegen den Rand zu unmerkbar in die lateralen Teile der Schulpe übergehen. Die Oberfläche war wahrscheinlich glatt. Der einzige mir vorliegende mangelhafte Steinkern gibt, die Form auf Grund der Zuwachsstreifen ergänzt folgende Maße: Länge ohne den Stachel gemessen etwa 120 mm, Breite etwa 45 mm.

Obwohl diese aus Ungarn bisher einzig beschriebene mediterrane Sepia nur als sehr mangelhafter Steinkern vorliegt, ist die Beschreibung derselben als neue Art meines Erachtens dennoch auf Grund der Vergleichung mit den bisher beschriebenen Sepien berechtigt.

Bezüglich der Ausbildung der Rippen steht die aus dem Pliozän beschriebene *Sepia Bertii* Foresti* der *S. mediterranea* unter den bisher bekannten fossilen Formen am nächsten. Meine Form weicht jedoch von *S. Bertii* hinsichtlich der äußeren Ge-

* *Sepia Bertii* Foresti (Boll. del. soc. geol. italiana V. IX fasc. 1). Roma 1890.

stalt und der Skulptur der Oberfläche wesentlich ab. *S. Bertii* ist nämlich gegen das Hinterende zu plötzlich verschmälert, meine Form hingegen endet — soweit sich dies aus den Zuwachsstreifen beurteilen läßt — nicht verschmälert, sondern abgerundet. Ferner ist die Oberfläche bei *S. Bertii* mit Höckern verziert, bei *S. mediterranea* hingegen anscheinend vollkommen glatt.

Die übrigen fossilen Sepien kommen hinsichtlich der drei Rippen der Oberfläche für eine Vergleichung mit *S. mediterranea* nicht in Betracht, da bei jenen die beiden lateralen Rippen viel kräftiger ausgebildet scheinen, wie z. B. bei *Sepia Gastaldii* Bell., *Sepia Michelottii* Gast., *S. verrucosa* Bell., *Sepia granosa* Bell., *Sepia vindobonensis* Schloenb. und der dieser nahe verwandten *Sepia calaritana* Parona und *Sepia Lovisatoi* Par.*, sowie bei *Sepia rugulosa* Bell. var. *miocebana* Sacco.**

Hinsichtlich der schwach ausgebildeten drei Rippen und der glatten Oberfläche ähnelt meine neue Art der *S. Craverii* Gast. und *S. stricta* Bell., obwohl sie auch von diesen wesentlich abweicht. Bei *S. stricta* sind nämlich die Rippen noch schwächer ausgebildet und bei *S. Craverii* scheint wenigstens die mittlere etwas schwächer, die lateralen aber divergieren unter einem größeren Winkel, als bei meiner Art. In den Umrissen stimmt die Schulpe mehr mit *stricta* überein, am meisten jedoch mit der aus dem oberen Aquitanien beschriebenen *S. rugulosa* Bell. var. *miocebana* Sacco.**

*S. complanata* Bell., *S. Isseli* Bell und *S. sepulta* Micht, sowie auch die mit letzterer wahrscheinlich identische *S. sp.****, welche Fuchs aus dem Badener Tegel von Malta abbildet, weichen infolge ihrer nach hinten zugespitzten lanzenförmigen Gestalt wesentlich von *S. mediterranea* ab, ferner auch darin, daß ihre Oberfläche nicht mit drei Rippen verziert ist; als solche bilden sie mit *S. hungarica* zusammen† eine besondere Gruppe.

* Descr. d. alc. foss. mioceniei di Sardegna (Atti d. soc. Ital. d. soc. nat. XXXIV. 1892).

** Bellardi Sacco. I Moluschi terziari del Piemonte. Parte XXX, P. 3, Tav. I, Fig. 1.

*** Über den sogenannten „Badener Tegel" auf Malta (Sitzb. d. k. Akad. d. Wiss. in Wien Bd. LXXIII, 1878).

† Durch das abgerundete Hinterende weicht meine Art von den an-

Mit einem Worte, wie aus diesen Ausführungen ersichtlich, weicht meine *Sepia mediterranea,* soweit sich dies wegen des mangelhaften Erhaltungszustandes beurteilen läßt, von sämtlichen bisher beschriebenen fossilen Arten ab. Die größte Ähnlichkeit besitzt sie noch mit der noch heute lebenden *S. officinalis* L., obwohl sie anscheinend hinten rundlicher ist, als auch diese, und die mittlere Rippe kräftiger ausgebildet ist, als bei S. *officinalis.*

Die Zahl der aus dem Mediterran bekannten Arten *(vindobonensis, calaritana, Gastaldii, Michelottii, Lovisatoi, verrucosa* und *sepulta)* hat also durch *S. mediterranea* um eine Art zugenommen, von welcher wahrscheinlich *S. officinalis* unmittelbar abstammt.

Aus Ungarn sind also bisher zwei Sepiaarten beschrieben und zwar *S. hungarica* aus dem unteren Oligocän (Piszke, Budapest), welche zugleich die älteste bisher bekannte Sepia ist, und *Sepia mediterranea* aus dem obermediterranen Grobkalkstein (Budapest-Rákos). Damit sind in Ungarn beide Gruppen der fossilen Sepien vertreten, die mit drei Rippen verzierten durch *S. mediterranea,* und die Gruppe der nicht mit drei Rippen versehenen durch *S. hungarica.*

Im Sitzungsbericht der Wiener Zoologischen Gesellschaft vom 21. Mai 1908 wird noch eine ungarische Sepie erwähnt. Der Präsident der Gesellschaft Prof. O. Abel erwähnt, daß A. Handlirsch, Kustos am Museum, in einer Ziegelgrube bei Dévényújfalu, wahrscheinlich aus untermediterranem marinen Ton, einen Sepiaschild gesammelt hat. (Meines Wissens ist dieser noch nicht näher beschrieben.)*

### 3. Mitrularia hungarica, eine neue Gastropodenart aus dem oberen Mediterran von Budapest.

In meiner Arbeit: „Neuere Beiträge zur Stratigraphie der Tertiärbildungen in der Umgebung von Budapest". Nebst einigen Be-

---

deren „pfeilartig" endenden Arten „ohne drei Rippen" wesentlich ab. Ich muß noch erwähnen, daß ich in der gelegentlich der Beschreibung der Art gegebenen Diagnose hervorhebe, daß statt der drei Längsrippen bei *S. hungarica* tiefe Längsfurchen vorhanden sind. Das neuerdings gesammelte Material überzeugte mich, daß dieser Charakter nicht wesentlich sei, da er nicht an jedem Stück sichtbar ist.

* Verh. d. k. M. Zool.-Bot. Gesellsch. von Wien. Jahrg. 1908.

merkungen zu JULIUS HALAVÁTS: „Die neogenen Sedimente der Umgebung von Budapest“* habe ich bei Besprechung des Mediterrans der Umgegend von Budapest den zwar nicht neuen, aber in der Literatur doch bisher unbekannten Aufschluß aus der Militärstraße beschrieben, welcher sich im Einschnitte der zur militärischen Schießstätte führenden Abzweigung der Straße Budaörs-Diósd befindet. Hier tritt unter der Humusdecke 1. schotteriger Alveolinenkalk auf, auf welchen 2. eine Cidaridenstacheln in größerer Menge führende und stellenweise ebenfalls schotterig, in grünliche Blättchen zerfallende mergelige Schicht gelagert ist. In derselben finden sich Lithothamniumknollen und Hydrozoenlinsen mit vielen Bohrmuscheln (Lithophagus, Gastrochaena, Jouannetia, Saxicava). Diese Schicht geht nach aufwärts nahezu unmerklich in 3. lockeres Konglomerat über, zu oberst liegt endlich unter den sarmatischen Schichten 4. typischer poröser Leithakalk.

Die Schichten Nr. 2 und 4 sind am fossilreichsten. Die in Rede stehende neue Mitrularia stammt aus der fossilienreichen 4. Schicht. Leider sind hier die meiste Fossilien als Abdrücke oder Steinkerne erhalten, in ähnlich mangelhaftem Zustande befindet sich auch die in Rede stehende neue Mitrularia. In meiner eingangs zitierten Arbeit führe ich auf Grund des mir vorliegenden Materials auch die Fauna an, in welcher die neue Mitrularia lebte.

### *Mitrularia hungarica* n. sp.

(Tafel III, Fig. 3a—3d.)

1911. *Mitrularia hungarica nov. sp.* LŐRENTHEY. Újabb adatok Budapest környéke harmadidöszaki üledékeinek geológiájához. (Math. és Term. tud. Értesitö. Bd. XXXIX, S. 524).

1912. *Mitrularia hungarica* n. sp. LŐRENTHEY: Neuere Beiträge zur Stratigraphie der Tertiärbildungen in der Umgebung von Budapest usw. Math. u. Naturwiss. Ber. aus Ung. Bd. XXVII, S. 318, 319, 327 u. 389.

Das Gehäuse ist konisch, der Scheitel stark nach rückwärts und etwas nach links gerückt, der Wirbel teils einwärts ge-

* Math. u. Naturwissensch. Ber. a. Ungarn Bd. XXIX 1911.

krümmt, von innen mit einem halbkonischen dünnen lamellenartigen Anhang verwachsen, welcher nach vorne offen und nur oben unter dem Scheitel an die Hinterwand angewachsen ist; der Rand des Gehäuses ist rundlich, erhält jedoch durch mehrere unregelmäßige Vorsprünge eine wellige Form, so daß er nicht einmal in einer Ebene liegt, sondern besonders vorne unregelmäßig aufwärts und abwärts gebogen ist. Der Wirbel ist soweit nach hinten gerückt, daß die schwach konkave Hinterwand beinahe senkrecht steht. Soweit sich nach den bisher bekannten zwei Steinkernen beurteilen läßt, ist die Oberfläche durch einige kräftigere Zuwachsstreifen schwach treppenförmig gestaltet, aus den an der Oberfläche sichtbaren Furchen und dem welligen Verlauf der Apertur folgernd war die Oberfläche mit vom Scheitel ausstrahlenden breiteren Falten verziert, während die unmittelbare Umgebung des Scheitels wahrscheinlich glatt war.

Die Maße des abgebildeten Exemplars sind: Höhe 18 mm, größte Länge 20 mm, größte Breite 19 mm.

Den zweiten bedeutend größeren mangelhaften Steinkern opferte ich, um die Gestalt des die rudimentäre Spindel ersetzenden inneren lamellaren Anhanges zu untersuchen. Zu diesem Zwecke goß ich die am Steinkern zurückgebliebene Höhlung mit Stearin aus, den Kalksteinkern selbst löste ich sodann in Salzsäure.

Wir fanden insgesamt zwei Steinkerne dieser aus Ungarn bisher unbekannten und im fossilen Zustand überhaupt seltenen Gattung. Die beiden Stücke erwiesen sich als Vertreter einer Art und zwar einer guten neuen Art, welche dem Äußeren nach am besten mit der aus dem Obereocän bekannten *M. Bernayi* COSSM. *sp.** übereinstimmt, da der Scheitel auch bei dieser sehr weit nach hinten gerückt und die Apertur oval ist; ein Unterschied besteht darin, daß unsere Art etwas höher ist, als *M. Bernayi*, die Apertur nicht ganzrandig und auch nicht in einer Ebene liegt, wie bei *M. Bernayi*, da dieselbe stark wellig und auf und abgebogen ist; ferner ist die Oberfläche bei *Bernayi* stark gerippt,

* Catalogue illustré des coquilles fossiles de l'éocène des environs de Paris. Bruxelles 1883. T. VII, F. 16—19. — *M. Boutillieri* COSSM. Ibidem. T. VII, F. 25—28.

bei *hungarica* hingegen stark gewellt, was besonders an der Apertur auffällig wird, die Zuwachsstreifen sind bei *hungarica* viel unregelmäßiger als bei *Bernayi*, weshalb die Oberfläche meiner Form schwach treppenförmig ist. Die zwischen Scheitel und der Apertur befindliche Hinterseite bildet bei *Bernayi* eine flache Ebene, bei meiner Art ist sie schwach konkav, und endlich bildet die innere Lamelle bei *Bernayi* — soweit sich dies nach COSSMANNS Abbildung beurteilen läßt — ein gestieltes Hufeisen, bei *hungarica* hingegen eine halbkonische Lamelle.

Der Scheitel ist bei beiden Formen soweit nach hinten gerückt, daß hierdurch der Charakter der Gattung eine Änderung erleidet, da nach SCHUMACHER der Scheitel eine nahezu zentrale Lage einnimmt, hier aber beinahe bis zum Hinterrand gerückt ist. Auch bei KOENENS *M. rugulosa* liegt der Scheitel viermal weiter vom Vorderrande als vom Hinterrande.

Im welligen Verlauf und der unebenen Lage der Apertur stimmt *M. hungarica* am meisten mit der mitteleocänen *M. Boutillieri* COSSM. überein, obwohl sie von dieser in der ovalen Gestalt der Apertur, der Oberflächenskulptur und in anderen Eigentümlichkeiten abweicht, da die Umrisse der Apertur bei *Boutillieri* beinahe rund und nicht oval sind und die Oberfläche fein gerippt ist, nicht so grob wie bei *hungarica*. Durch die ovalen Umrisse unterscheidet sie sich auch von den rundlichen oligocänen *M. conica* SPEYER *sp.** und *M. rugulosa* v. KOEN.**, sowie von der miocänen *M. Bredai* MICHL. *sp.****

Meine Form ist von der einzigen miocänen Art, *M. Bredai*, auf den ersten Blick zu unterscheiden, da bei *Bredai* die Apertur beinahe kreisförmig ist, der Scheitel beinahe zentral liegt, dieselbe also eine typische Mitrularia ist. Zu den bisher fossil bekannten sechs Arten (*Boutillieri*, *Bernayi*, *rugulosa*, *conica*, *Bredai* und *Bredai var. rugulosa* SACCO) schließt sich also als siebente die

---

* SPEYER. Die Tertiärfauna von Söllingen usw. (Palaeontographica X).

** v. KOENEN. Das norddeutsche Unteroligocän usw. Bd. X, H. 4, 1892. P. 907, T. LVIII, F. 5—6.

*** MICHELOTTI, Descr. Foss. Mioc. P. 137, T. V, F. 3. 1847. — SACCO, Moll. d. Terr. tert. de Piemonte etc. Bd. XX, P. 46, F. 29. — *Bredai var. rugulosa* SACCO. Ibidem. T. V, F. 30.

neue Art *hungarica* an, die erste Vertreterin ihrer Gattung in Ungarn. Wollte man dieselbe ableiten, so ließe sie sich aus *Boutillieri* durch Vermittlung von *Bernayi* und *rugulosa* herleiten.

Betreffs des Umstandes, daß ihr Gehäuse stark konisch und ihr Wirbel weit nach hinten gerückt ist, erinnert *M. hungarica* sehr an die heute lebende *M. tectum sinensis* CH. sp., von welcher sich zwei Exemplare von Amboina in meiner Sammlung befinden. Die Ähnlichkeit wird auch noch dadurch bedeutend erhöht, daß der hintere zwischen dem Wirbel und der Apertur befindliche Teil des Gehäuses auch an der rezenten Art nahezu senkrecht und konkav ist, ferner daß die innere, ein Rudiment der Kolumelle darstellende Lamelle bei beiden Arten ganz gleich ausgebildet ist. Im übrigen, in den Konturen des Gehäuses der Oberflächenskulptur weichen die beiden Arten bedeutend voneinander ab.

Das abgebildete Exemplar erhielt ich von seiner Hochwürden Herrn Katecheten Dr. REZSÖ STREDA, wofür ich ihm auch hier meinen Dank ausspreche.

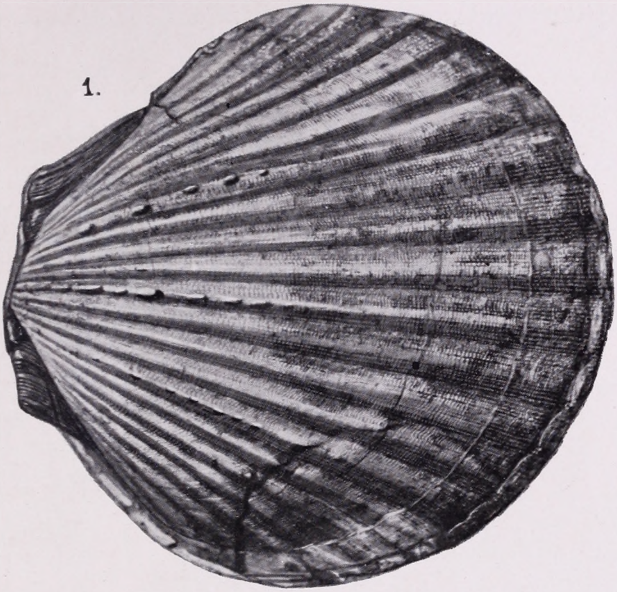
### Erklärung der Tafeln.

Tafel I. *Spondylus limaeformis,* GIEB. aus dem unteroligocänen Mergel des Kissvábhegy bei Budapest.

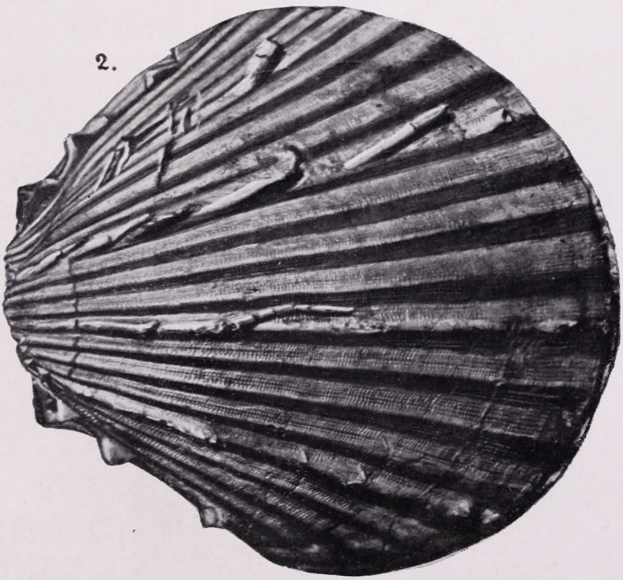
Tafel II. *Lima (Mantellum) praeinflata n. sp.* aus dem unteroligocänen Mergel des Gellérthegy bei Budapest.

Tafel III. Fig. 1. *Pecten (Parvamusium) Bronni* C. MAY in das Gehäuse von *Xenophora (Tugurium) subextensa* D'ORB. sp.? eingebaut aus dem unteroligocänen Mergel des Rézmáldülö bei Budapest. — Fig. 2. *Sepia mediterranea n. sp.*, Steinkern aus dem obermediterranen Kalk von Budapest-Rákos. — Fig. 3. *Mitrularia hungarica n. sp.* aus dem obermediterranen Kalk des Wegeinschnittes von Köérberek bei Budapest.

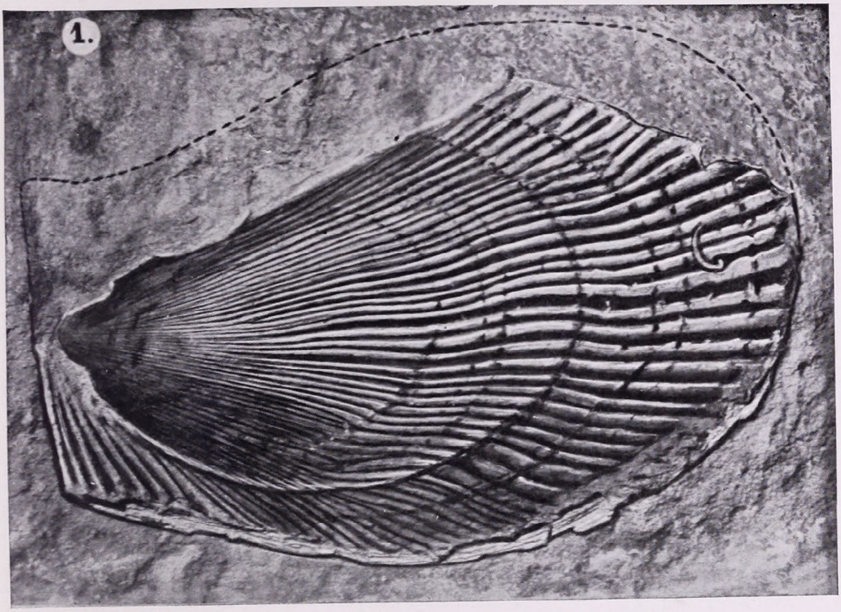
1.

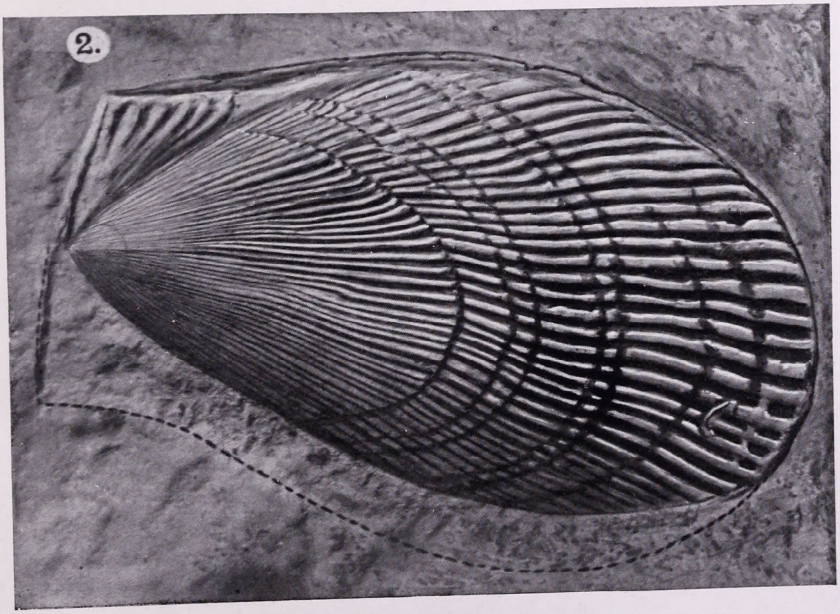


2.



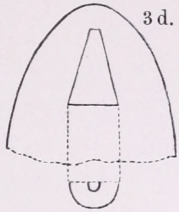
M. T. AKADÉMIA KÖNYV-TÁRA


1.

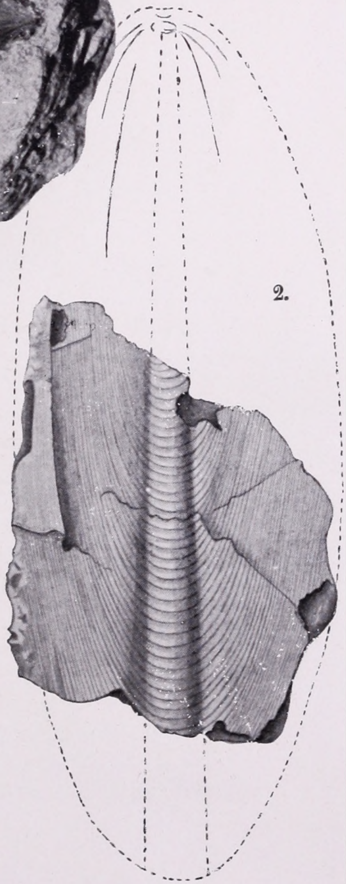

2.

1.

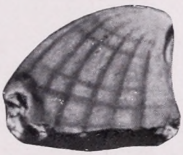
3 d.



2.



3 a.



3 b.

3 c.

[BIBLIOT]HECA ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE
MAGYAR
TUDOMÁNYOS
AKADEMIA
KÖNYVTÁRA
BUDAPEST

# SITZUNGSBERICHTE.

**I. In den Sitzungen der III. (mathematisch-naturwissenschaftlichen) Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften** wurden vom Oktober 1908 bis Ende 1909 von den nachbenannten Autoren die folgenden Arbeiten vorgelegt:

### Sitzung am 19. Oktober 1908.

1. Josef Krenner, o. M.: *„Metacinnabarit und Berthierit aus Nagybánya"*.
2. Géza Zemplén: *„Über den Nitrogengehalt der Blätter von Waldbäumen"*.

### Sitzung am 16. November 1908.

1. Leopold Fejér, k. M.: *„Bestimmung asymptotischer Werte"*. Antrittsvortrag.
2. Maurus Réthy, o. M.: *„Über die Anstrengungslinien der Metalle"*. (S. Seite 22—44 dieses Bandes.)
3. Julius Prinz: *„Die Pleistocen-Bildungen des nördlichen Teiles des centralen Thian-schans"*. Vorgelegt durch A. Koch, o. M.
4. Stefan Bolkay: *„Die Larven der Frösche Ungarns"*. Vorgelegt durch L. v. Méhely, k. M.

### Sitzung am 14. Dezember 1908.

1. Adolf Ónodi, k. M.: *„Die Stirnhöhle"*.
2. Alfred Haar und Dionysius König: *„Über einfach geordnete Mengen"*. Vorgelegt durch J. König, o. M.
3. Koloman Róka: *„Die Reduktion der Orthonitrophenyl-Propiolsäure zu Indigo"*. Vorgelegt durch L. v. Ilosvay, o. M.
4. Paul Dienes: *„Die Elemente der analytischen Funktionen am Rande des Konvergenzkreises"*. Vorgelegt durch G. Rados, o. M.
5. Paul Kéri: *„Der Stoffwechsel von Säugetieren im Winterschlafe"*. Vorgelegt durch F. Tangl, k. M.
6. Dionysius Fuchs: *„Der Einfluß der Blutmenge auf den Stoff- und Energieumsatz"*. Vorgelegt durch F. Tangl, k. M.

### Sitzung am 18. Januar 1909.

1. Győző Zemplén, k. M.: *„Untersuchungen über die innere Reibung der Gase“*. (Antrittsvortrag.)
2. Josef Krenner, o. M.: *„Warthait, ein neues ungarisches Mineral.*
3. Béla Mauritz: *„Die eruptiven Gesteine des Mátra-Gebirges“*. Vorgelegt durch J. Krenner, o. M.
4. Paul Dienes: *„Untersuchungen über die Unendlichkeitsstellen der analytischen Funktionen“*. Vorgelegt durch G. Rados, o. M.
5. Friedrich Riesz: *„Über lineare homogene Integralgleichungen“*. Vorgelegt durch G. Rados, o. M.

### Sitzung am 15. Februar 1909.

1. August Franzenau, k. M.: *„Über die Calcite Ungarns“*.
2. Johann Tuzson: *„Die phyletische und paläontologische Entwicklungsgeschichte des Pflanzenreiches“*. Vorgelegt durch J. Klein, o. M.
3. Karl Zimányi, k. M.: *„Vasheggit, ein neues Mineral aus dem Komitate Gömör“*.
4. Julius Verzàr: *„Die biologische Wirkung der Alkohole“*. Vorgelegt durch F. Tangl, k. M.
5. Alexander Kalecsinszky: *„Die Wirkung der Wärme auf artesische Brunnen.*

### Sitzung am 15. März 1909.

1. Isidor Fröhlich, o. M.: *„Allgemeine Geltung des Gesetzes der zirkumaxialen Polarisation in optisch gleichmäßigen Mitteln“*. (S. Seite 312 bis 315 des XXV. Bandes.)
2. Maurus Réthy, o. M.: *„Über die Anstrengungslinien der Metalle“*. (S. Seite 22—44 dieses Bandes.)
3. Gustav Rados, o. M.: *„Zur Theorie der Kongruenzen mit mehreren Unbekannten“*.
4. Emerich Lörenthey, k. M.: *„Neuere Beiträge zur Geologie des Széklerlandes“*.
5. Stefan Bugárszky, k. M. und Béla Horváth: *„Neue Methode zur quantitativen Bestimmung der Jodide und des reinen Jods.*

### Sitzung am 19. April 1909.

1. Eugen Klupáthy, k. M.: *„Die Festigkeit der Flüssigkeiten“*. (Antrittsvortrag.)
2. Maurus Réthy, o. M.: *„Über die Anstrengungslinien der Metalle“*. Neuere Mitteilungen.
3. Julius Prinz: *„Über die Morphologie des kuldschaer Thian-schans“*. Vorgelegt durch A. Koch, o. M.

4. KARL ZIMÁNYI, k. M.: „*Über Kristallform des brasilischen Phenakits*".
5. GUSTAV BOGNÁR: „*Die Wirkung von Brom und Formylsäure aufeinander.*" Vorgelegt durch ST. BUGARSZKY, k. M.

### Sitzung am 17. Mai 1909.

1. PAUL SCHEITZ: „*Die Farbstoffe des Lakmus*". Vorgelegt durch L. v. ILOSVAY, o. M.
2. VALERIE DIENES: „*Über logarithmische Verzweigungsstellen*". Vorgelegt durch G. RADOS, k. M.
3. THEODOR BÁRSONY und TIBERIUS SZÁSZ: „*Der Einfluß der Nahrung und des Trinkwassers auf die molekulare Konzentration des Blutes*". Vorgelegt durch F. TANGL, o. M.

### Sitzung am 14. Juni 1909.

1. LUDWIG V. ILOSVAY, o. M.: „*Neuere Verwendung hydrosalpetriger Säure bzw. des Zinkhydrosulfites. Das Molybdenblau. Blaues Wolframhaltiges Produkt. Das Uranosulfit.* (Antrittsvortrag.)
2. EMERICH LÖRENTHEY, k. M.: „*Bemerkungen über Ungarns alttertiäre Foraminiferen-Fauna*".
3. STEFAN GAÁL: „*Über die sarmatische festländische Mollusken-Fauna von Rákosd*". Vorgelegt durch E. LÖRENTHEY, k. M.
4. ALEXANDER ABONYI: „*Zur Histologie des Darmkanals der See-Knochenfische*". Vorgelegt durch G. ENTZ sen., o. M.
5. ELEMÉR VERESS: „*Die Bewegung der Medusen*". Vorgelegt durch G. ENTZ sen., o. M.

### Sitzung am 18. Oktober 1909.

1. KARL TANGL, k. M.: „*Über die Messung der Spannung an der gemeinsamen Grenzfläche von festen und flüssigen Körpern*". (Antrittsvortrag.)
2. FRANZ TANGL, k. M.: „*Biologische und energetisehe Untersuchungen über Metamorphose*".
3. PAUL SCHEITZ: „*Über künstlichen Lakmus*". Vorgelegt durch L. v. ILOSVAY, o. M.
4. LUDWIG DÁVID: „*Über die Grenzfunktion der algebraischen Iteration*". Vorgelegt durch G. RADOS, o. M.

### Sitzung am 15. November 1909.

1. JULIUS FARKAS, k. M.: „*Grundlegungen zur Kontinuitätstheorie der Elektrizität und des Magnetismus*".
2. FERDINAND MAUTHNER: „*Neue allgemeine Synthese der Phenylfettsäuren.* Vorgelegt durch B. LENGYEL, o. M.
3. PAUL DIENES und VALERIE DIENES: „*Über algebraische und logarithmische Singularitäten*". Vorgelegt durch G. RADOS, o. M.

4. JULIUS GRÓH: *„Über den Zusammenhang des Oxidationspotentials und der Geschwindigkeiten des Oxydierens“*. Vorgelegt durch F. TANGL, o. M.
5. JAKOB GOLDBERGER: *„Über die Änderung des Hydrogen-Ion-Inhaltes der Muskel während der Arbeit“*. Vorgelegt durch F. TANGL, o. M.

### Sitzung am 13. Dezember 1909.

1. LEOPOLD FEJÉR, k. M.: *„Die Lebesgueschen Konstanten und divergente Fouriersche Reihen“*.
2. JOSEF KÜRSCHÁK, k. M., und KARL GULYÁS: *„Der Briefwechsel des Grafen SAMUEL TELEKY mit ausländischen Mathematikern“*.
3. PETER SZABÓ: *„JOHANN BOLYAIS Jugend“*. Verlegt durch G. RADOS, o. M.
4. JULIUS PRINZ: *„Vorläufiger Bericht über meine zweite Reise in Mittel-Asien“*. Vorgelegt durch A. KOCH, o. M.

**II. In den Sitzungen der Königl. Ungarischen Naturwissenschaftlichen Gesellschaft** wurden vom Oktober 1908 bis Ende 1909 die folgenden Vorlesungen gehalten:

## A) Fachsektion für Zoologie.

### Sitzung am 9. Oktober 1908.

1. ST. RÁTZ: *„Über die in Muskeln parasitierenden Sarcosporidien und deren in Ungarns Fauna vorkommenden Arten“*.
2. J. LEIDENFROST: *„Neuere Beiträge zur Kenntnis der Fauna des Quarnero und der Adria“*

### Sitzung am 6. November 1908.

1. L. MÉHELY: *„Über den Begriff des Parasitismus“*. Verf. unterzieht die von Z. SZILÁDY vertretene Auffassung, welcher er in seinem Vortrage „Über die Ausdehnung des Begriffes des Parasitismus“ (am 8. Mai 1908) Ausdruck verlieh, einer Kritik. SZILÁDYS Auffassung, daß auch die Viviparität eine Erscheinung des Parasitismus sei, hält der Verf. für unbegründet.
2. L. KOCZIÁN: *„Über den Bau der Augenhöhle der Primaten“*.

### Sitzung am 9. Dezember 1908.

1. K. KERTÉSZ: *„Gedächtnisrede über den ungarischen Zoologen R. KOHAUT“*.
2. G. ENTZ, jun.: *„Die Organisationsverhältnisse von Nyctotherus piscicola“*.
3. K. BUDINSZKY: *„Im Piliser Gebirge gesammelte Knochenreste von Felis spelaea.*
4. D. FÉNYES: *„Über Albinismus“* mit Vorzeigung einiger Albinos aus der Vogelsammlung des Ung. National-Museums.
5. E. CSIKI: *„Über die mexikanische Melolonthiden-Gattung Chrysina.*

### Sitzung am 8. Januar 1909.

1. St. Bolkay: „*Über den systematischen Wert von Rana chinensis*".
2. B. Hankó: „*Beiträge zur Morphologie und Physiologie der Bursa Fabricii der Vögel*".
3. St. Rátz: „*Trichomonas aus der Leber der Haustauben*".

### Sitzung am 5. Februar 1909.

1. G. Entz, jun. besprach den *biologischen Kurs in Bergen* im Herbst 1907 und legt die während dieser Zeit gesammelten Tiere vor.

### Sitzung am 5. März 1909.

1. J. Leidenfrost: „*Die Muniden des Quarnero*".
2. K. Kertész legt den IV. Band seines „*Catalogus Dipterorum*" vor.

### Sitzung am 2. April 1909.

1. G. Horváth: „*Riesenwanze (Amorgius sicloticus) in der Fauna Ungarns*"
2. K. Kertész bespricht Veralls Werk: „*British Flies*".
3. A. Szüts: „*Die Lumbriciden Ungarns*". Vorgelegt durch L. Soós.

### Sitzung am 7. Mai 1909.

1. P. Hári: „*Über den Winterschlaf*".
2. F. Pávay-Vajna: „*Onesia cognata als Vogelparasit*".

### Sitzung am 1. Oktober 1909.

1. Z. Sziládу: „*Über die Ausdehnung des Begriffes des Parasitismus*". (Erwiderung an L. v. Méhely.)
2. B. Hankó: „*Symbiose von Branchipus und Alge*".
3. V. Köpe: „*Über die Statocyste von Paludina vivipara*".

### Sitzung am 5. November 1909.

1. J. Leidenfrost bespricht A. Pütters „*Untersuchungen über die Ernährung der Wassertiere und den Stoffhaushalt des Meeres*".

### Sitzung am 2. Dezember 1909.

(Zur Feier des hundertsten Geburtstages Ch. Darwins und der fünfzigsten Jahreswende des Erscheinens „Die Entstehung der Arten".)

1. G. Entz, sen.: „*Zur Erinnerung an Charles Darwin*".
2. L. Méhely: „*Wesen und derzeitiger Stand des Darwinismus*".

## B) Fachsektion für Botanik.

### Sitzung am 14. Oktober 1908.

1. G. Dobys Arbeit *„Über die Rolle der oxalsauren Salze bei der Keimung“* wird durch B. Augustin vorgelegt.
2. Als erste Mitteilung aus dem Nachlasse Hazslinszkys wird eine tabellarische Arbeit: *„Beiträge zur Algen- und Moosflora von Kroatien und Fiume“* durch A. Mágocsi-Dietz vorgelegt.
3. G. Moesz hält einen Vortrag: *„Der amerikanische Stachelbeermehltau (Sphaerotheca mors uvae) in Ungarn“*.
4. R. Rapaics' Arbeit: *„Phyllodie der Lupinenblüte“* wird vorgelegt durch G. Lengyel.
5. G. Lengyel legt *Wallnußwurzeln* vor, die dem Anscheine nach von den spitzen und festen Rhyzomen von *Cynodon Dactylon* durchbohrt wurden.

### Sitzung am 11. November 1908.

1. B. Augustin hält einen Vortrag *„Über die Kiefern- und Fichtenharzgewinnung in Ungarn“*.
2. J. Bernátsky hält einen Vortrag unter dem Titel: *„Iris-Studien“*.
3. F. Hollendonner bespricht die *Anatomie des Stengels von Alyssum Arduini.*
4. G. Moesz legt vor und bespricht *einige eingewanderte Pflanzen Ungarns.*

### Sitzung am 9. Dezember 1908.

1. J. Rónas *„Erinnerung an Thomas Nendtvich“* wird von J. Tuzson vorgelesen.
2. R. Augusztin bespricht und führt *neuere Utensilien* vor.
3. G. Moesz hält einen Vortrag über *„Die ungarischen Cordiceps-Arten“*.
4. Die Arbeit R. Rapaics': *„Über die Gattung Aquilega“* wird durch G. Moesz vorgelegt.

### Sitzung am 13. Januar 1909.

1. L. Thaisz hält einen Vortrag: *„Syringa Josikaea als pflanzengeographischer Wegweiser“*.
2. J. Tuzson bespricht das Werk:
   F. Pax: *„Grundzüge der Pflanzenverbreitung in den Karpathen, Bd. II.“*

### Sitzung am 10. Februar 1909.

1. F. Gombocz legt vor und bespricht die von L. Biró im April 1903 gesammelten und vom Vortragenden bestimmten *„Pflanzen aus Tunis“*, insgesamt 70 Arten, darunter eine neue Varietät *„Muricaria prostata var. echinocarpa Gombocz“*.

2. Derselbe legt selbstangefertigte Photographien vor aus dem *Algierer botanischen Garten* und aus dem Algierer Atlas.
3. G. Moesz hält einen Vortrag: *„Pilze aus Budapest und Umgebung"*.
4. Z. Szabó hält einen Vortrag: *„Die Morphologie der Knautien"*.
5. R. Szalóki gibt *„Beiträge zur Flora des Komitates Szepes"*.

**Sitzung am 10. März 1909.**

1. Gy. Prodáns *„Beiträge zur Flora des Bükk und seiner Vorgebirge"* werden von J. Tuzson vorgelegt.
2. Z. Szabó hält einen Vortrag: *„Die Anatomie der Knautien"*.

**Sitzung am 14. April 1909.**

1. M. Fucskó bespricht die Anatomie, Entwicklung und Biologie *des Pericarpiums der Papilionaceen.*
2. R. Rapaics' Arbeit: *„Die Mannigfaltigkeit der einheimischen Aconitenblüten"* wird vorgelegt durch G. Moesz.
3. Z. Szabó hält einen Vortrag: *„Entwicklungsgeschichtliche Beobachtungen an Knautia-Arten"*.

**Sitzung am 12. Mai 1909.**

1. M. Fucsko hält einen Vortrag: *„Die Entwicklung und Biologie der Papilionaceenfrüchte"*.
2. G. Moesz bespricht die Arbeit:
P. Privat-Deschanel: *„Die Salzgebiete Australiens und der Salt-bush"*.

**Sitzung am 9. Juni 1909.**

1. Vorsitzender J. Klein gedenkt des Hinscheidens J. Fialowszkys.
2. A. Mágocsi-Dietz demonstriert ein *zweiblättriges* blühendes Exemplar von *Streptocarpus Wendlandii.* Am Grunde jeder Blattspreite bildeten sich Blütenstände.
3. K. Bartals *„Daten zur Flora der Umgebung von Szekszárd"* werden von A. Mágocsy-Dietz unterbreitet.
4. G. Moesz spricht über *„Pilze aus dem Velebit-Gebirge"*.
5. R. Sztankovics macht vorläufige Mitteilungen über seine *„Untersuchungen an dem Rhizom der inländischen Iris-Arten"*.
6. L. Thaisz': *„Daten zur Flora des Komitates Abauj-Torna"* werden durch J. Tuzson vorgelegt.

**Sitzung am 13. Oktober 1909.**

1. J. B. Kümmerle spricht über *„Eine neue Art der Gattung Ceterach"*.
2. L. Simonkai legt vor und bespricht *„Ein immergrüne, einheimische Zerreiche"*.

3. J. Tuzson bespricht und legt *„Eine neue Nymphaea der ungarischen Flora“* vor.

   Derselbe spricht *„Über einige interessante Beitäge zur Kenntnis des Madaras-Gebirges“.*

   Derselbe berichtet ferner in seiner Mitteilung *„Neuere Beiträge zur Kenntnis der Jurányia hemiflabellata“* über das Vorkommen dieser fossilen Palme nächst Ruszkabánya (Komitat Krassó-Szörény).

**Sitzung am 10. November 1909.**

1. J. Podráns Arbeit: *„Beiträge zur Flora des Komitates Bács-Bodrog und dessen Umgebung“* wird vorgelegt durch J. Tuzson.
2. L. Sántha gibt: *„Beiträge zur Kenntnis der Flechtenflora der Umgebung von Budapest“.*
3. L. Szabó bespricht: *„Die Knautia-Arten Ungarns, mit Rücksicht auf das System der Gattung“.*
4. K. Schilberszky legt eine Teratologie von *Diospyros Kaki* vor.

**Sitzung am 9. Dezember 1909.**

1. J. Bernátskys Arbeit: *„Die Vegetation der Margit-Insel (Budapest) und die Angelegenheit des bot. Gartens der Universität“* wird vorgelegt von G. Moesz.
2. J. Fehér spricht über: *„Die Kleistogamie und einige blütenbiologische Erscheinungen bei Convolvulus arvensis“.*
3. E. Gombócz: *„Die Entwickelung der pflanzen-anat. Terminologie in Ungarn“.*
4. J. Tuzson: *„Über einige Pflanzen der ungarischen Flora (Robinia pseudacacia f. cleistogama* und *Cirsium canum* $\times$ *oleraceum)“.*

## C) Fachsektion für Chemie und Mineralogie.

**Sitzung am 27. Oktober 1908.**

1. Béla Lengyel meldet das Hinscheiden von Karl v. Than, Präsidenten der Fachsektion.
2. Béla Bittó und S. Zeisel: *„Über die Kondensationsprodukte höherer Ordnung des Acetaldehyds“.*
3. Gedeon Lechner: *„Über die Vorbedingungen der Ozonbildung“.*
4. Victor Zsivny: *„Die elektrochemischen Ursachen der Kesselkorrosion“.*

**Sitzung am 24. November 1908.**

1. Andreas Kazay: *„Die Atomrefraktion des Schwefels in verschiedenen Verbindungen.*

2. Ladislaus Széll: „*Die Absorptionserscheinung des Humus und die Ernährung der Pflanzen.*“ Vorgelegt durch Alex v. Sigmund.
3. Eduard Tóth: „*Die Bestimmung der gesamten Laugigkeit des Zementes*“. Vorgelegt durch J. Ferenczy.

**Sitzung am 15. Dezember 1908.**

1. Robert Brandenburg: „*Die Wirkung von Borsäure und Phosphorsäure auf Flintglas*“.
2. Alex v. Sigmund: „*Über die Faktoren der Wirkung des Düngers*“.

**Sitzung am 26. Januar 1909.**

1. Josef Nuricsán: „*Die Wirkung von Chlor auf Jod in Gegenwart von Kaliumhydroxyd oder Kaliumkarbonat*“.
2. Stefan Weiser: „*Die Veränderung der chemischen Zusammensetzung der Fourage während des Gärens*“.
3. Arthur Zaitschek: „*Die Schwankungen in der chemischen Zusammensetzung der Milch*“.

**Sitzung am 23. Februar 1909.**

1. Emil Fischer und Géza Zemplén: „*Verhalten der Cellobiose und ihres Osons gegen einige Enzyme*“. Vorgelegt durch L. v. Ilosvay.
2. Aladár Vajdaffy: „*Über die Regeneration des bei der künstlichen Seidenfabrikation benützten Alkoholäthers*“.

**Sitzung am 30. März 1909.**

1. Stefan Bugarszky und Béla Horváth: „*Eine neue Methode zur quantitativen Bestimmung der Jodide und des Jods*“.
2. Hugo Dubovitz: a) „*Die Trennung der flüssigen und der festen Fettsäuren.* b) „*Neue Methode zur schnellen und genauen Bestimmung der in der Seife enthaltenen Fettsäure*“.
3. Eduard László: „*Über Magnesiumkarbonat*“.
4. Josef Loczka: „*Die Bestimmung des Fluors im Fluorit nach der Methode von Jamasch*“.
5. Emil Fischer und Géza Zemplén: „*Neue Synthese der inaktiven $\alpha-\gamma$ Diaminovaleriansäure und des Prolins*“.

**Sitzung am 4. Mai 1909.**

1. Gustav Bognár: „*Der Mechanismus der Wirkung von Brom und Formylsäure aufeinander in wässeriger Lösung*“.
2. Cornelius Szalágyi: „*Die Elektrolyse des Nitrosoeisensulfates*“.

3. Otto Seidl: *„Die elektrolytische Reduktion und Oxydation des Wolframs und seiner chemischen Verbindungen“.*
4. Julius Weszelszky: *„Über die radioaktive Umwandlung“.*

### Sitzung am 25. Mai 1909.

1. Rudolf Balló: *„Die Gefriererscheinungen von Gemengen, an gesättigten Fettsäure- und Wasser-Gemengen untersucht“.*
2. Robert Brandenburg: *„Die Bestimmung des freien Kalkgehaltes des Zementes“.*
3. Robert Brandenburg: *„Über die Entfernung des Calciums und Magnesiums aus hartem Wasser mittels Permutit“.*

### Sitzung am 26. Oktober 1909.

1. Emil Fischer und Géza Zemplén: *„Synthese der beiden optisch-aktiven Proline“.* Vorgelegt durch L. Szathmáry.
2. Géza Doby und Hérissey: *„Die Oxydation von Dimethyldehydrodiisoeugenol und Dimethyldehydrodivanilin“.*
3. Michael Rózsa: *„Über den Parallelismus der Atomwärme und der Volumenänderung der Elemente“.*
4. Ladislaus Szathmáry: *„Sind Diphenylaminblau und Triphenylpararosanilin identisch?“*

### Sitzung am 30. November 1909.

1. Julius Gróh: *„Beitrag zur Kenntnis des Zusammenhanges zwischen dem Oxydationspotential und der Oxydationsgeschwindigkeit“.*
2. Ferdinand Mauthner: *„Eine allgemeine Synthese der Phenylfettsäuren“.*

# BERICHTE
# ÜBER TÄTIGKEIT, VERMÖGENSSTAND U. A.
## DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN UND DER KGL. UNG. NATURWISSENSCHAFTLICHEN GESELLSCHAFT.

### I. Ungarische Akademie der Wissenschaften.

1.

Die LIX. feierliche Jahresversammlung der ungarischen Akademie der Wissenschaften wurde am 2. Mai 1909 gehalten.

Unter anderen wurde von Ludwig Thallóczy eine Gedenkrede über Benjamin Kállay gehalten.

---

2.

Die Vermögensverhältnisse der Akademie sind aus folgenden Daten ersichtlich:

| | Kronen | Heller |
|---|---|---|
| Die Akademie besaß am 31. Dezember 1908 ein Vermögen von . . . . . . . . | 5 740 130 | 15 |
| Davon entfallen auf das Gebäude, die Bibliothek, den Büchervorrat usw. . . . . . | 2 000 000 | — |
| Das Budget der Akademie belief sich im Jahre 1908 auf . . . . . . . . . . | 405 006 | 94 |
| Die Ausgaben der III. Klasse beliefen sich im Jahre 1908 auf . . . . . . . . . | 36 185 | 23 |

3.

Die Anzahl der Mitglieder der Ungarischen Akademie der Wissenschaften am Ende des Jahres 1908 ist aus folgender Tabelle ersichtlich:

| | I. (sprachwissenschaftl. u. ästhetische) Klasse | II. (philosophische und historische) Klasse | III. (mathematische u. naturwissenschaftl.) Klasse | Zusammen |
|---|---|---|---|---|
| Ehrenmitglieder | 6 | 8 | 7 | 21 |
| Ordentl. Mitgl. | 12 | 23 | 22 | 57 |
| Korresp. Mitgl. | 35 | 53 | 53 | 141 |
| Auswärt. Mitgl. | 29 | 30 | 30 | 89 |
| Zusammen ..... | 82 | 104 | 112 | 298 |

Die Vermögensangelegenheit verwaltete der Direktionsrat der Akademie, welcher aus dem Präsidenten und Vizepräsidenten, dem Generalsekretär und 24 Mitgliedern bestand.

Nach den Statuten beträgt der Status der Akademie: Ehrenmitglieder 24, ordentliche Mitglieder 60, korrespondierende Mitglieder 156.

Im Mai 1909 wurden in der III. Klasse die folgenden neuen Mitglieder gewählt:

Zum ordentlichen Mitgliede:

Rudolf Kövesligethy, Astronom, bisher k. M.

Zu korrespondierenden Mitgliedern:

Ladislaus Udránszky, Biolog,
Johann Tuzson, Botaniker.
Maurus Déchy, Geograph.

---

4.

Bibliothek. Die Anzahl der geordneten Fächer beträgt 54. Diese enthalten 78 197 Werke. Darunter:

| | |
|---|---|
| Anthropologie . . . . . . . . . . | 579 |
| Mathematik . . . . . . . . . . . | 1300 |
| Naturwissenschaft . . . . . . . | 253 |
| Physik . . . . . . . . . . . . | 1096 |
| Chemie . . . . . . . . . . . | 478 |
| Naturgeschichte . . . . . . . . | 140 |
| Zoologie . . . . . . . . . . . | 763 |
| Botanik . . . . . . . . . . . | 498 |
| Mineralogie und Geologie . . . . . | 592 |
| Medizinische Wissenschaft . . . . | 2653 |
| Ausgaben von Akademien und wissenschaftlichen Gesellschaften . . . | 664 |
| Ausgaben der Ung. Akademie d. W. . | 394 |
| Ungarische Zeitschriften . . . . . | 403 |
| Ausländische Zeitschriften . . . . | 207 |
| Bolyaiana . . . . . . . . . . . | 41. |

Der Fachkatalog besteht aus 139 Bänden und 50 Zettelkasten. Angekauft wurden 566 Werke. Als Pflichtexemplare wurden erhalten von 235 Druckereien 9087 Werke. Private und Behörden schenkten 194 Werke.

Im Lesesaal der Bibliothek benutzten 6245 Personen 8127 Werke. Ausgeliehen waren an 136 Personen 788 Werke.

---

5.

Von der III. Klasse wurden die landwirtschaftlichen Schriften und die zur Förderung der Landwirtschaft ausgeübte Tätigkeit ALEXANDER CSERHÁTIS mit dem FORSTER-Preis gekrönt.

---

## II. Kgl. Ungarische Naturwissenschaftliche Gesellschaft.

1.

Die Gesellschaft hielt ihre Generalversammlung am 28. Januar 1909 ab. Nach der Eröffnungsrede des Präsidenten Prof. VINZENZ WARTHA folgte der Jahresbericht des Sekretärs Prof. LUDWIG V. ILOSVAY, aus dem wir die folgenden Daten entnehmen:

Im Jahre 1908 sind in die Gesellschaft 725 neue Mitglieder eingetreten. Die Gesellschaft hat jetzt 9204 Mitglieder.

Die Gesellschaft gibt die folgenden ungarischen Zeitschriften heraus:

*Természettudományi Közlöny* (Naturwissenschaftliche Mitteilungen) und *Pótfüzetek a Természettudományi Közlönyhöz* (Ergänzungshefte der Naturwissenschaftlichen Mitteilungen);

*Állatani Közlemények* (Zoologische Mitteilungen);

*Növénytani Közlemények* (Botanische Mitteilungen);

*Magyar Chemiai Folyóirat* (Ungarische Chemische Zeitschrift).

Außerdem erscheinen im Verlage der Gesellschaft auch selbständige naturwissenschaftliche Bücher.

---

2.

Aus dem Berichte des Kassierers entnehmen wir die folgenden Daten:

| | Kronen | Heller |
|---|---|---|
| Die Gesellschaft besaß am 31. Dezember 1908 ein Vermögen von . . . . . . . . . . | 515 401 | 75 |

| | Kronen | Heller |
|---|---|---|
| Davon entfallen auf das Gebäude . . . . . | 238 000 | — |
| auf die Bibliothek . . . . . | 100 000 | — |
| auf den Büchervorrat . . . . | 40 000 | — |
| Die Ausgaben der Gesellschaft beliefen sich im Jahre 1908 auf . . . . . . . . . . . | 152 886 | 32 |

3.

Aus dem Berichte des Bibliothekars erfahren wir, daß die Bibliothek der Gesellschaft im Jahre 1908 um 756 Bände gewachsen ist, so daß sie mit Ende 1908 insgesamt 29 059 Bände umfaßte. Den Mitgliedern standen im Lesezimmer 130 Zeitschriften zur Verfügung. Auf neue Bücher und Einbände wurden 5043 Kronen verwendet. Der Bibliothek wurden im Jahre 1908 von 1951 Mitgliedern 2345 Bände entliehen.

Magyar Tudományos
Könyvtára 55146/1951 sz.

# MATHEMATISCHE
UND
# NATURWISSENSCHAFTLICHE
# BERICHTE AUS UNGARN.

MIT UNTERSTÜTZUNG
DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN UND DER
KÖNIGLICH UNGARISCHEN NATURWISSENSCHAFTLICHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

ROLAND BARON EÖTVÖS UND JULIUS KÖNIG.

REDIGIERT VON

JOSEF KÜRSCHÁK UND FRANZ SCHAFARZIK,
MITGLIEDER DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

---

SIEBENUNDZWANZIGSTER BAND. 1909.
3. HEFT.
MIT 4 TAFELN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1913.

[IN WIEN BEI KARL GRAESER & KIE.]

# MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE BERICHTE AUS UNGARN.

SIEBENUNDZWANZIGSTER BAND. 1909.

## INHALT DES 3. HEFTES.



## AVIS.

**Die Mathematischen und naturwissenschaftlichen Berichte aus Ungarn werden jährlich in vier Heften herausgegeben. Der Preis eines Jahrganges von 20—22 Bogen beträgt 8 Mark. — Das letzte Heft des Bandes XXVI erscheint später. Die Redaktion.**

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

# LEHRBUCH DER PHYSIK FÜR MEDIZINER UND BIOLOGEN

VON

DR. ERNST LECHER

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT WIEN

Mit 499 Abbildungen. gr. 8. 1912. Geh. M. 8.–, in Leinwand geb. M. 9.–

Den erstsemestrigen Medizinern ist es meist unmöglich, eines der derzeitig gebräuchlichen Lehrbücher der Physik so zu bewältigen, daß ihnen daraus bleibender Lebensgewinn erwächst. Darum empfindet auch die Mehrzahl das Studium derselben Physik, welche der modernen Medizin so unschätzbare Dienste geleistet hat, als überflüssige Last. Diesem Mißstand will Verfasser mit seiner „Physik für Mediziner und Biologen" abhelfen. Dies Lehrbuch bringt nur jene wichtigsten Hauptlehren, deren Kenntnis für jeden naturwissenschaftlich Gebildeten, also auch für den Arzt unerläßlich ist; anderseits aber werden alle jene zahlreichen physikalischen Resultate, welche in Physiologie, Diagnostik und Therapie zur Verwendung kommen, möglichst eingehend behandelt. Gerade durch die Erkenntnis der biologischen und medizinischen Wichtigkeit bestimmter physikalischer Erscheinungen soll dauerndes Interesse des angehenden Mediziners für die Physik erregt werden.

**Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin**

Vollständig liegt jetzt vor:

# Lehrbuch der Paläozoologie

Von a. o. Prof. Dr. **E. Stromer von Reichenbach**

Privatdozent an der Universität München.

gr. 8. 2 Teile. In Leinw. geb. je M. 10.—. I. Teil: Wirbellose Tiere. Mit 398 Abb. 1909.
II. Teil: Wirbeltiere. Mit 234 Abbildungen. 1912.

Verfasser legt im engsten Anschlusse an die Resultate der Zoologie die Organisation der Tiere klar erörtert ihre Lebensweise, während die Systematik nur in ihren Prinzipien und bis zu den Ordnungen genauere Berücksichtigung findet. Der allgemeinen Paläozoologie wird ein größerer Raum gewährt. So folgen im ersten Bande der kurzen Definition und Vorgeschichte der Wissenschaft eine ausführliche Darstellung der Erhaltungsbedingungen von Tierresten, eine Abhandlung über Skelettbildung und eine Klarlegung des Verhältnisses der Paläozoologie zu den anderen beschreibenden Naturwissenschaften. Im speziellen Teile werden dann die Stämme der Wirbellosen besprochen. Im zweiten Bande werden die Wirbeltiere ebenso behandelt, und zum Schlusse eine Darstellung der Rolle der gesamten Tierwelt in den früheren Zeiten, ihrer Gesamtentwicklung und der dabei geltenden Gesetze und damit eine Klarlegung der Bedeutung der Paläozoologie für die Tiergeographie und die Abstammungslehre gegeben.

Urteile über den I. Band:

„Der Titel bedeutet ein Programm. Der Verfasser will im engsten Anschluß an die Zoologie vor allem den Bau der Tiere klarlegen. Natürlich handelt es sich dabei den paläontologischen Bedürfnissen entsprechend vor allem um die erhaltsfähigen Hartteile. Die Weichteile werden nur so weit geschildert, als sie auf die Gestaltung des Skeletts von Einfluß sind. Das Stromersche Werk will also nicht etwa das Studium zoologischer Lehrbücher überflüssig machen, es setzt im Gegenteil deren Kenntnis voraus. . . wer sich diese aber angeeignet hat, wird in dem Buche einen ausgezeichneten Führer beim paläontologischen Studium finden. Die Darstellung wird unterstützt durch zahlreiche vorzügliche Abbildungen." **(Liter. Zentralblatt.)**

„Das Werk Stromers ist mit großer Freude zu begrüßen. Es läßt die Tatsachen sprechen, die in der zuverlässigsten Weise vorgeführt werden. Gegenüber gewissen anderen Werken der Paläontologie ist seine Verläßlichkeit, die es absolut gestattet, auf Grund der gemachten Angaben sich wirklich exakt zu orientieren und weiter zu arbeiten, besonders hervorzuheben." **(Naturwissenschaftl. Wochenschrift.)**

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

## DIE KULTUR DER GEGENWART

IHRE ENTWICKLUNG U. IHRE ZIELE · HERAUSGEGEBEN VON PROF. PAUL HINNEBERG

III. Teil, I. Abteilung:

# Die mathematischen Wissenschaften

Unter Leitung von F. Klein.

Erste Lieferung:

## Die Mathematik im Altertum und im Mittelalter

Von Professor **Dr. H. G. Zeuthen** in Kopenhagen

[VIII u. 95 S.] Lex.-8. 1912. Geheftet M. 3.—

Der Verfasser führt uns zunächst von der Bildung des Zahlbegriffes und der Zahlzeichen bei primitiven Völkern zu den Zahlensystemen, dem Rechnen und den astronomischen Anwendungen der Mathematik bei den Babyloniern und Indern. Hierauf schildert er ausführlicher die Entstehung der geometrischen Wissenschaften und die Blütezeit der griechischen Mathematik und ihrer Anwendungen auf Statik, Optik, Geodäsie und Astronomie. Wir gewinnen Einblick in das Geistesleben und die Forschungsresultate der Großen dieser Zeit, eines Archimedes, Euklid, Appollonius. Einer kurzen Darlegung der Ursachen des Verfalles der griechischen Mathematik folgt die Einführung in die jüngere indische und chinesische Mathematik. Den Abschluß bildet die Würdigung der mathematischen Arbeit der Araber und der westeuropäischen Mathematik des Mittelalters. Überall ist auf die logische Verknüpfung der mitgeteilten historischen Tatsachen und die Aufdeckung ihrer Zusammenhänge mit dem gesamten Kulturleben der betreffenden Epochen besondere Sorgfalt verwendet. Die Herbeiziehung konkreter Beispiele ermöglichte überall eine anschauliche jedem gebildeten Laien ohne weiteres verständliche Ausdrucksform.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

# Die mathematischen Instrumente

von Professor **Dr. A. Galle**

Abteilungsvorsteher des Kgl. Geodätischen Instituts in Potsdam

Mit 86 Abbildungen u. Figuren. [VI u. 187 S.] 8. 1912. Steif geh. M 4.40, in Leinwand geb. M 4.80.

Außer in den enzyklopädischen Werken fehlte bei uns in Deutschland noch immer eine zusammenfassende Darstellung der namentlich in neuerer Zeit in großer Zahl konstruierten mathematischen Instrumente. Die vorliegende Bearbeitung ist bestimmt, diese Lücke in unserer Literatur auszufüllen. Wenn in Anbetracht des knappen Umfanges auf Vollständigkeit, die auch für manche praktischen Zwecke unnötig erscheint, verzichtet werden mußte, so kommen doch die wichtigsten Typen zur Besprechung. Die Erklärung und Theorie der Instrumente ist nach Möglichkeit leicht verständlich gemacht und unter einheitlichen Gesichtspunkten geordnet.

# MATHEMATISCHE
UND
# NATURWISSENSCHAFTLICHE
# BERICHTE AUS UNGARN

MIT UNTERSTÜTZUNG
DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN UND DER
KÖNIGLICH UNGARISCHEN NATURWISSENSCHAFTLICHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

ROLAND BARON EÖTVÖS UND JULIUS KÖNIG

REDIGIERT VON

JOSEF KÜRSCHÁK UND FRANZ SCHAFARZIK
MITGLIEDER DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

---

SIEBENUNDZWANZIGSTER BAND · 1909
4. HEFT
MIT 3 TAFELN

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1913

[IN WIEN BEI KARL GRAESER & K[IE.]]

# MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE BERICHTE AUS UNGARN.

SIEBENUNDZWANZIGSTER BAND. 1909.

## INHALT DES 4. HEFTES.



## AVIS.

**Die Mathematischen und naturwissenschaftlichen Berichte aus Ungarn werden jährlich in vier Heften herausgegeben. Der Preis eines Jahrganges von 20—22 Bogen beträgt 8 Mark. Die Redaktion.**

WISSENSCHAFT UND HYPOTHESE

# Henri Poincaré

# Wissenschaft und Hypothese

Deutsch von F. und L. Lindemann in München.
2. Auflage. 8. 1906. In Leinwand geb. M. 4.80.

Wenige Forscher sind sowohl in der reinen als in der angewandten Mathematik mit gleichem Erfolge tätig gewesen wie der Verfasser des vorliegenden Werkes. Niemand war daher mehr als er berufen, sich über das Wesen der mathematischen Schlußweisen und den erkenntnis-theoretischen Wert der mathematischen Physik im Zusammenhange zu äußern. Und wenn auch in diesen Gebieten die Ansichten des einzelnen zum Teil von subjektiver Beanlagung und Erfahrung abhängen, werden doch die Entwicklungen des Verfassers überall ernste und volle Beachtung finden, um so mehr als er sich bemüht, auch einem weiteren, nicht ausschließlich mathematischen Leserkreise verständlich zu werden, und als ihm dies durch passende und glänzend durchgeführte Beispiele in hohem Maße gelingt. Die Erörterungen erstrecken sich auf die Grundlagen der Arithmetik, die Grundbegriffe der Geometrie, die Hypothesen und Definitionen der Mechanik und der ganzen theoretischen Physik in ihrer neuesten Entwicklung sowohl als in ihrer klassischen Form. Um dem allgemeinen Verständnisse noch mehr entgegenzukommen, sind der deutschen Ausgabe durch den Herausgeber zahlreiche Anmerkungen hinzugefügt, die teils einzelne Stellen des Werkes näher erläutern, teils durch literarische Angaben dem Leser die Mittel zu weiterem Studium der besprochenen Fragen an die Hand geben.

# Der Wert der Wissenschaft

Mit Genehmigung des Verfassers ins Deutsche übertragen von E. Weber.
Mit Anmerkungen und Zusätzen von H. Weber, Professor in Straßburg i. E., und einem Bildnis des Verfassers.
2. Auflage. 8. 1910. In Leinwand geb. M. 3.60.

Der berühmte Verfasser gibt einen Überblick über den heutigen Standpunkt der Wissenschaft und über ihre allmähliche Entwicklung, wie sie sowohl bis jetzt vor sich gegangen ist, als wie er sich ihre zukünftigen Fortschritte denkt, der besonders geeignet ist, dem nicht wissenschaftlich vorgebildeten Leser einen klaren Begriff von dem zu geben, was der Zweck der Wissenschaft, das Ziel aller Bemühungen der Gelehrten ist, und einen Einblick in die Mittel, mit denen sie zu Werke gehen, und die Schwierigkeiten, gegen die sie zu kämpfen haben. Er beweist, daß die Wissenschaft nie vergeblich ist, und daß die darauf verwendete Zeit und Mühe auch dann noch nicht als verloren zu betrachten sind, wenn spätere Generationen die Theorien der Vorfahren als irrtümlich und unzutreffend ansehen. Er zeigt, daß ein Mißerfolg den Gelehrten nie entmutigen und abschrecken darf, daß er im Gegenteil stets von neuem seine Kraft einsetzen muß, auch ohne praktischen Nutzen zu sehen, ja daß gerade der schönste Zweck der Wissenschaft nur der ist, die Wissenschaft zu bereichern.

# Wissenschaft und Methode

Deutsch von F. u. L. Lindemann in München. 1913. [Erscheint demnächst.]

Die Methode der mathematischen und naturwissenschaftlichen Forschung wird in vorliegendem Werke einer kritischen Besprechung unterzogen. Insbesondere führt uns Poincaré den Mathematiker bei seiner Arbeit vor, wie er oft erst nach vielen unnützen Kombinationen den richtigen Weg findet, und wie die Befriedigung des ästhetischen Gefühls an der Lösung sich deckt mit den Forderungen des abstrakten Denkens. Die in neuester Zeit so vielfach gepflegten Beziehungen zwischen Logik und Mathematik kommen besonders ausführlich zur Darstellung.

**Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin**

Verlag von B. G. TEUBNER in LEIPZIG und BERLIN

# DIE KULTUR DER GEGENWART

## IHRE ENTWICKLUNG UND IHRE ZIELE

HERAUSGEGEBEN VON PROF. PAUL HINNEBERG

III. Teil, I. Abteilung:

## Die mathematischen Wissenschaften

Unter Leitung von **F. Klein**

Daß es seine ganz besonderen Schwierigkeiten hat, im Rahmen der „Kultur der Gegenwart“ die Mathematik in sachgemäßer Weise zur Geltung zu bringen, leuchtet von vornherein ein. Das folgende kurze Inhaltsverzeichnis läßt erkennen, wie man versucht, dieser Schwierigkeiten Herr zu werden. Nr. 1 gibt eine erste Orientierung über das Wesen der mathematischen Wissenschaft, die als solche jedem Gebildeten verständlich sein will. Sodann werden in Nr. 2 und Nr. 6 Fragen herausgegriffen, die zwar nicht ohne tiefer gehende Fachkenntnisse voll erfaßt werden können, aber doch sozusagen an das natürliche Interesse auch des Nichtmathematikers anknüpfen. Bleibt für Nr. 3, 4, 5 die schwierige Aufgabe, von dem besonderen Inhalt der mathematischen Wissenschaft, ohne irgend in Einzelheiten einzugehen, eine allgemeine Übersicht zu geben. Eine systematische Dartellung schien hier von vornherein unmöglich, der Gegenstand soll vielmehr dem allgemeinen Denken dadurch näher gebracht werden, daß die großen Züge der historischeu Entwickelung herausgearbeitet werden.

Für die Durchführung des hiermit charakterisierten Planes ist in besonderem Grade — mehr, als bei anderen Bänden der „Kultur der Gegenwart“ — eine gewisse Einheitlichkeit der Darlegungen wünschenswert. Es mußte also nach der Möglichkeit gesucht werden, daß der eine Autor auf dem anderen aufbauen kann. Die Verlagsbuchhandlung hat zu diesem Zwecke ausnahmsweise einer Ausgabe des Bandes in einzelnen Lieferungen zugestimmt.

1. **Die Beziehungen der Mathematik zur Kultur der Gegenwart.** Von A. Voß.
2. **Mathematik u. Philosophie.** Von A. Voß. (Nr. 1 und 2 erscheinen als 2. Lieferung.)
3. **Die Mathematik im Altertum und im Mittelalter.** Von H. G. Zeuthen. (Ist als 1. Lieferung erschienen). [IV u. 95 S.] Lex.-8. 1912. Geh. ℳ 3.—
4. **Die Mathematik im 16., 17. und 18. Jahrhundert.** Von P. Stäckel.
5. **Die Mathematik der Neuzeit.** Von N. N.
6. **Die Verbreitung mathematischer Auffassungen und Kenntnisse.** Von H. E. Timerding. (Erscheint als 3. Lieferung.)