ACTA MATHEMATICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

TOMUS V

SUPPLEMENTUM

QUO CONTINENTUR THESES PROLATAE
SESSIONE SOLLEMNI

(DIEBUS XIV—XVIII MENSIS DECEMBRIS ANNO MCMLII)

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

IN HONOREM

IOANNIS BOLYAI

ANTE ANNOS CENTUM ET QUINQUAGINTA NATI

1954

INDEX

SUPPLEMENTUM TOMI V

INDEX

TOMUS V

Technikai szerkesztő: Molnár Ferenc

A kiadásért felelős: az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki felelős: Tóth Ferenc

Szegedi Nyomda Vállalat, Szeged 54-3120 — Felelős vezető: Vincze György

ЖИЗНЬ И ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ ЯНОША БОЯИ[1]

Академик Г. АЛЕКСИЧ (Будапешт)

Янош Бояи, один из величайших математиков всех времен, был гением с трагической судьбой. Судьба его была не только личной трагедией. В ней отражается борьба каждого прогрессивного мыслителя венгерского народа, осмеливавшегося выступать за правду и столкивавшегося поэтому с мировоззрением господствующего класса. Бояи боролся за признание научной идеи, которая являлась революционной. А развитие отдельных отраслей науки не является изолированным явлением. Взрывающий успех подготавливается не только внутренним развитием данной отрасли науки, но и многочисленными различными изменениями в структуре общества, которые по сложной капилярной системе жизни проникают в науку, чтобы наконец в творчестве гения революционизировать науку. А революция даже в области науки вызывает ненависть господствующего класса.

Янош Бояи роился 5 декабря 1802 г. в г. Коложваре, в доме отца своей матери, хирурга Йожефа Венко. До двухлетнего возраста он воспитывался в Домальде, в имении своего отца Фаркаша Бояи. Семья в 1804 г. переселилась в г. Марошвашархель, куда Фаркаш Бояи был приглашен на должность преподавателя математики, физики и химии в реформатский коллегий.

Янош с молодых лет проявлял чрезвычайную способность к математике. В четырехлетнем возрасте он уже знал, что такое круг, радиус, центр, эллипс и. даже синус. В девять лет отец привлек его к систематической учебе. В то время он изучал книги Эвклида и алгебру Эйлера. Математике почти не приходидось его учить, потому что он сразу воспринимал услышанную теорему и предвидел ее доказательсьство. „Как дьявол прыгнул он ко мне — рассказывает отец — и требовал продолжение". В возрасте 13-и лет он уже имел навыки по инфинитезимальной математике.

Он сдал экзамен на аттестат зрелости, так называемый „rigorosum" в 1817 г. в г. Вашархеле, и тем самым добился права на продолжение учебы в университете.

[1] Фамилию „Бояи" часто пишут так: „Больаи". Выбранная нами запись более соответсвует венгерскому произношенню слова „BOLYAI".

Фаркашу Бояи хотелось, чтобы его сын продолжал занятия в г. Геттинген под руководством „princeps mathematicorum" Гаусса. Имея ввиду, что в молодости Фаркаш имел дружеские отношения с Гауссом, он написал ему письме в котором попросил его принять сына к себе.

Однако с течением времени эти отношения охладели и Фаркаш не получил ответа на свое письмо, написанное им в слишком непосредственном тоне. Так прекратилась всякая возможноть для того, чтобы Янош мог добиться тщательной высшей математической подготовки.

В то время в Венгрии немозможно было изучать высшую математику. Лет пятнадцати Янош Бояи владел математикой в такой степени, выше которой внутри страны нельзя было подняться. Серьезную подготовку он мог получить тогда только в Геттингене или Париже. Но для этого у Фаркаша нехватило денег, ведь его жалование за год составляло сумму в 400 форинтов, не считая плату натурой, чем он мог жить очень скромно вместе со своей семьей. Только денежная поддержка помещиков-аристократов сделала бы возможным воспитывать его сына за границей, и на это популярный Фаркаш мог по тогдашним обычаям рассчитывать. Но если кто-нибудь является меценатом, то он определяет и цель, которую он поддерживает своими деньгами. А в то время консервативная трансильванская аристократия мало интересовалась математикой а больше всего политикой династии Габсбургов. Поэтому Фаркаш не мог надеяться на то, чтобы помещики-аристократы финансировали занятия его сына в Геттингене или Париже, но мог надеяться на то, что они возьмут на себя финансирование учебы в Академии военных инженеров в Вене, так как они в этом были политически заинтересованы. Помещики-аристократы, преданные династии Габсбургов, считали даже своим долгом способствовать выдвижению сыновей мелких дворян в офицеры австрийской армии, с тем, чтобы ослабить ряды мятежных дворян, воспитывая их сыновей и родственников преданными императому янычарами. Год спустя Фаркашу удалось добиться того чтобы несколько аристократов взяли на себя расходы по воспитанию Яноша в Вене, составляющие около 8000 форинтов за четыре года. И так Янош Бояи в 1818 г. после успешного приемного экзамена поступил в венскую академию военных инженеров.

По программе академии Яношу пришлось изучать математику еще 3 года, на четвертом курсе он изучал военные дисциплины. Дух академии соответствовал воззрениям австрийской военщины того времени: воспитанники воспитывались в духе казенного мировоззрения. К тому же-, в академии готовили не математиков-исследователей, а военных инженеров, так что в области математики требовали только знаний, необходимых военным инженерам того времени. Таким образом Янош Бояи не получил такой математической подготовки, на которую будущий исследователь мог бы опираться. Незнаком был ему также способ обращения с представителями науки, ведь замкнутый воспитательнюй метод военного учреждения не способствовал свободному движению. Нам известно, что по воскресеньям он ходил вместе с одним товарищем к Мейслеру, знаменитому виртуозу на скрипке, с которым участвовал в квартете. Тот факт, что венский виртуоз Мейслер принял Яноша в квартет, свидетельствует о том, что Янош уже в академии замечательно играл на скрипке. Об этом упоминают все его биографии.

С математиками он не был связан за исключением Кароя Саса, жившего в то время в Вене. Но Сас не был математиком-исследователем. Разговоры с ним не способствовали научному развитию Яноша.

На жизнь Бояи оказал огромное влияние тот факт, что он был вынужден поступить на военную службу. Военная служба его началась шаблонно: после окончания с отличными результатами военной академии, его назначили в 1823 г. младшим лейтенантом в темешварскую крепость, в 1826 г. его перевели в Арад, в 1827 г. он был произведен в лейтенанты. Вследствие своей деятельности на болотистых территориях он заболел маллярией и — как можно полагать на основании его более поздних жалоб — также воспалением в суставах. Усиление этих двух болезней причиняло частые припадки. Принимая во внимание его болезнь, его перевели во Львов в 1830 г., но явиться в гарнизон он мог только в 1831 г. По дороге он заболел холерой, о чем упоминает в письме к своему брату: „в 1831 г. по пути во Львов заболел в Бестерце холерой ... Я чувствовал себя очень слабым“.[2]

С отцом Янош встретился в 1825 г. по случаю своего посещения в г. Марошвашархель, второй раз они встретились перед выездом Яноша во Львов на неизвестном нам месте. Оба раза они имели оживленные споры по вопросу о неевклидовой геометрии. Фаркаш не был способен целиком и полностью следовать за слишком смелой и революционной теорией Яноша, уничтожившей двухтысячилетние окаменелые научные предрассудки.

При их второй встрече, они расстались с тем, что Янош напишет свою теорию как приложение к „Tentamen“ и Фаркаш направит один экземпляр Гауссу: пусть он решит правильна или неправильна теория Яноша.

Причиной, по которой даже такой отличный математик как Фаркаш не мог следовать за мыслями Яноша, является по существу предрассудок тысячелетней древности, Этот предрассудок заключается в той метафизической концепции, будто мир подвергается вечным и неизменным законам, математическим отражением этих законов должна быть только евклидова геометрия. Правда, основное положение евклидовой геометрии, так называемый V. постулат подвергался критике еще в древности, так как он не так очевиден, как остальные аксиномы. Но результатом этой критики являлся

[2] Отдел рукописей Библиотеки Венгерской Академии Наук. Письмо, написанное в 1857 г.

ошибочный вывод, согласно которому V. постулат является по содержанию не аксиомой, а такой теоремой, которая на основании остальных аксиом геометрии наверняка может быть доказана. Следовательно, критика V. постулата не изменила окоченелое метафизическое представление о мире, согласно которому евклидова геометрия необходимо верна; она имела своей целью только найти точное доказательство для подтверждения своего убеждения, считавшегося верным a priori.

Геометрическое содержание V. постулата может быть выражено простейшим образом в формулировке Прокла: Через данную точку P в плоскости S может быть проведена только одна прямая, параллельная данной прямой e. Эта аксиома действительно не является такой очевидной, как остальные, потому что она не имеет конечного характера, т. е. на основе опытов, полученных в конечной части пространства, нельзя убедиться в осуществлении утверждения аксиомы в физическом пространстве. Это обстоятельство являлось причиной того, что больше двух тысяч лет искали доказательство V. постулата, без которого евклидова геометрия и вместе с тем все миросозерцание того времени оставалось без логического обоснования.

Критику проблемы V. постулата в древности продолжали математики арабской культуры. В Европе в этой области в 1663 г. Валлис сделал большой маг вперед тем, что указал, что V. постулат эквивалентен со следующим утверждением: существуют подобные треугольники произвольной величины. Труд его продолжали в 1733 г. Саккери, потом Ламберт, Даламбер, Фурье, Монж, Карно, Лаплас, Лагранж, Фаркаш Бояи, Швейкарт, Тауринус и Гаусс, которые развивали методы исследования с целью разрешения этой двухтысячелетней проблемы. Характерно для силы предрассудкив, что Ламберт, не находя противоречия при предположении ошибочноси V. постулата не опубликовал свою работу, которая была издана только после его смерти, в 1786 г. Тауринус же в. 1826 г. мог основать свое убеждение в том, что эвкидова геометрия является единственной правильной теорией пространства только на предрассудки философского характера. Но самым характерным является поведение Гаусса, который в основном увидел, что неевклидова геометрия, заменяющая V. постулат другой аксиомой, является логически равноправной с евклидовой геометрией, но так как эта идея коренным образом противоречила общественному мнению, он не посмел опубликовать свои результаты в этой области.

Значение творчества Бояи заключается в последовательной разработке той по революционному смелой мысли, что V. постулат можно заменить следующей аксиомой: через данную точку P в плоскости S можно провести бесконечно много непересекающихся с прямой e прямых (параллелей), если e не содержит P. Бояи в своей гениальной работе „Appendix“ сделал выводы из этой аксиомы и показал, что эвклидова геометрия, основывающаяся на V. постулат, логически нисколько не является более необходимой, чем неевклидова геометрия. Значит Бояи своим правильным методом сверг двухтысячелетние предрассудки, считавшие евклидовы воззрения единственно возможными a priori, и тем создал новую геометрическую картину о мире, как он об этом и писал своему отцу 3 ноября 1823 г.: „Я создал новый мир из ничего“. К смелости его открытия действительно применима характеристика настоящей науки, по которой прогрессивная наука:[3] „. . . Должна иметь смелость, решимость ломать старые традиции, нормы, установки, когда они превратились в тормоз для движения вперед, и которая умеет создавать новые традиции новые нормы, новые установки.“

Фаркаш Бояи, подобно большинству математиков того времени, не мог следовать за чрезвычайно смелой теорией своего сына. Сопротивление его против этого открытия понятно, потому что „Appendix“ требовал от читателя того времени не только математических знаний, но и того, чтобы читатель воспринял такие мысли, которые были прямо противоположны мировозрению, считавшемуся святым и неприкосновенным. Тот, кто хотел следовать за неевклидовой геометрией, должен быть принять, что сумма углов треугольника равна не 180°, а меньше, что подобными могут быть только равные треугольники, что нет треугольников с как угодно большой площадью, чте нетрудно провести квадратуру круга и еще много поразительных фактов. Именно поэтому теория Бояи требовала не только математических знаний, но и моральной силы, способной отбросить предрассудки идеологического характера. Отдельные оттиски Аппендикса были готовы уже в июне 1831 г. Известно, что Фаркаш послал 20 июня 1831 г. экземпляр Гауссу, но этот экземпляр потерялся. Гаусс получил второй экземпляр в январе 1832 г. Ответ его написан 6 марта 1832 г. Ответ Гаусса как известно очень странный. Вот, часть, относящаяся к этому делу:[4]

„Теперь кое-что о работе твоего сына. Если начать тем, что „я не должен хвалить его“ ты наверно удивишься, но иначе поступить не могу, так как хвалить его означало бы хвалить самого себя, потому что все содержание труда, путь исследования и достигнутые результаты, почти полностью совпадают с моими рассуждениями последних 30-ти лет. Действительно, это меня очень поразило. Я имел намерение не опубликовывать в своей жизки этот труд, относительно которого очень мало излагал в письменной форме. Большинство людей не способно воспринять сущность этого дела и я встретил очень мало таких людей, которые проявили бы особый интерес к тому, о чем я сообшил им. Этому способствует лишь очень яркое ощущения того, чего собственно нехватает, а это большинству людей неясно. Однако я имел намерение, со временем написать

[3] И. В. Сталин, Речь на приеме в Кремле работников высшей школы 17 мая 1938 г., В. И. Ленин, Избранные произведения, т. 1 (1949), стр. 34.

[4] Переписка Гаусса и Фаркаша Бояи (Будапешт, 1899), стр. 108—113.

все, чтобы все мои мысли не пропали после моей смерти. Поэтому меня очень поразило, что уже могу не беспокоиться об этом и очень рад, что именно сын моего старого друга опередил меня."

Очень поразительно звучит это письмо, в котором Гаусс как бы присваивает себе творчество Яноша Бояи! Правда, на основе его писем, заметок и исследований в теории поверхностей нам известно, что Гаусс знал элементы неевклидовой геометрии. Но он не разработал свои результаты в единую теорию. Таким образом он не имел никаких моральных основ писать такое письмо, в котором осторожно выражает свое признание, но в то же время претендует в некоторой степени на приоритет. Моральных основ он не имел хотя бы потому, что неизвестно, как далеко он продвинулся в этом направлении, но причины, по которым он не опубликовал свои результаты в области неевклидовой геометрии, известны: Гаусс по его собственным словам боялся „крика беотийцев" он боялся возможного возмущения общественного мнения, вызванного чрезвычайной смелостью теории. Он знал, что такая теория, по которой возможно, что созданное нами математическое представление о мире неправильно, является революционной по крайней мере в области науки. Но господствующий класс того времени- в период господства Священного Союза боялся революции даже в области науки. Итак Гаусс из-за общественных причин не смел опубликовать свои результаты. Скажем прямо: придворному советнику Гауссу нехватило смелости для того, чтобы следовать за мыслями математика Гаусса.

Янош Бояи, очень правильно, смотрел на обиду, нанесенную ему Гауссом прежде всего с точки зрения всеобщего интереса. Он справедливо писал,[5] что упомянутые Гауссом причины, по которым он воздержался от публикации своих результатов „бессильны и недействительны, ведь в науке... всегда о том идет речь, что надо выяснить необходимые и общеполезные, но неясные дела..." Он совершенно прав в том, что непонимание важнейших идей людьми с посредственными способностями „не может служить причиной рассудительным людям для поверхностного и посредственного творчества и для того чтобы оставить науку в летаргичеком, наследственном ее состоянии..., ведь жизнь, труд и заслуги состоят не в этом".

Однако Янош Бояи смотрел на письмо Гаусса не только с точки зрения всеобщего научного интереса. Своим отказом от публичного признания гениального труда Гаусс сильно ударил по человеку с напряженными нервами, больному, долгие годы желающему освободиться от военной службы. Было бы ошибочно думать, что Бояи огорчало только обиженное самолюбие. Речь шла не только об этом. Он давно ненавидел военную службу и неохотно выполнял свои обязанности даже в здоровом

[5] P. Stäckel, Wolfgang und Johann Bolyai (Лейпциг и Берлин, 1913), т. 1, стр. 92—93.

состоянии. Но он мог освободиться от военной службы только назначением на должность преподавателя математики. И это могло обеспечить ему только признание Гаусса. Письмо Гаусса означало что и после опубликования своего гениального открытия перед Бояи не открылся путь научного творчества. На основании данных из военных бумаг нам ясно, как развязалось его огорчение.

В гарнизоне, где он служил прежде, Бояи повидимому имел разногласия с некоторыми членами офицерского состава, и прослыл поэтому среди них сварливым. Подполковник Циммер, командир львовского гарнизона, которому поручили расследование этого дела, характеризует Яноша в 1831 г., т. е. до прибытия ответа Гаусса:[6] „Ничего не выявилось из этой наклонности к спорам, или невыносимости его, наоборот, он всем известен как скромный и добродушный человек“. Значит, в 1831 г., когда Янош Бояи мог надеяться, что с помощью успеха своего труда освободится от тяжелой военной службы, что в качестве учителя по математике сможет заниматься научными исследованиями, он вел себя как „скромный и добродушный человек“. Но когда он получил письмо Гаусса и узнал, что из этого положения его не выведет даже его гениальное творчество, он стал огорчаться. Характеристики 1831—1832 гг. ясно показывают изменения, происходящие в его поведения:[7]

	в 1831 г.	в 1832 г.
Нрав:	спокойный, добродушный	очень обидчивый, вспыльчивый
Отношение к гражданам:	хорошее	неизвестно
Поведение в военной части:	почтительное отношение с вышестоящими	избегает всякого общения с офицерами
Отношение к подчиненным:	хорошее	молчаливый
Какие страсти имеет:	нет	страсть к игре в шахматы и отводит много времени для этой игры

Огорчение Яноша Бояи понятно не только с точки зрения его разочарования, но еще больше потому, что он ясно видел, что значение неевклидовой геометрии выходит за пределы „внутренних дел“ математики. Это открытие изменило коренным образом научное понятие о геометрии, но и вообще о материальном мире. Дело в том, что абсолютная геометрия в неявной форме заключает в себе признание того решающего факта, что любая система аксиом геометрии не описывает непосредственно простран-

[6] Отдел рукописей Библиотеки Венгерской Академии Наук.

[7] Отдел рукописей Библиотеки Венгерской Академии Наук.

ственные отношения материальной действительности, а является абстрактным дальнейшим развитием понятия о пространстве, содержащее в качестве специального случая описание действительного физического пространства, но которое с развитием нащего математического и физического познания и само способно к дальнейшему развитию. Замена метафизического представления о мире, отражающегося в вере в единственной правильности евклидовой геометрии, диалектическим представлением о мире абсолютной геометрии, охватывающей разные возможности в одно целое, открыла новую научную эпоху, в которой даже казавшаяся окончательно установленной аксиоматика геометрии является непрерывно развивающимся знанием.

Янош Бояи как упомянуто выше целиком и польностью сознавал огромное научное значение своего открытия, но видел и то, в чем заключается значение его открытия для мировоззрения. В введении к своему труду Наука о пространстве, написанном им 1834 г., он отмечает, что геометрическое познание не означает раз на всегда окончательное отражение материального мира, а по мере знаний о природе данной эпохи „следует удовлетвориться возможно лучшим описанием“.[8] Таким образом Бояи ясно видел, что отражающаяся в геометрии картина мира является не метафизической, а развивающейся, диалектической.

Нельзя не останавиться хотя бы на мгновение на том диалектическом развитии познания пространства, которое началось благодаря открытиям Бояи и Лобачевского. Исследования, проведенные Риманом, Гельмгольцом и Ли завершили процесс, начатый Бояи и Лобачевским. Без предыдущих открытий в области неевклидовой геометрии они никогда не добились бы этих результатов. Современная дифференциальная геометрия следовательно имеет тесную, почти непосредственную связь с идеями Бояи и Лобачевского относительно обоснования неевклидовой геометрии. Однако математическое понятие о пространстве могло подняться на обобщенную ступень настоящего времени только тогда когда к началу века созрело сознание того, что кажущиеся различными классическая геометрия и теория точечных множеств обединяются в понятии абстрактного математического пространства в одно целое. Мысль об абстрактном пространстве в общем виде появилось впервые в трудах Фреше,[9] который основал теорию математического пространства отчасти на сходимости последовательностей точек, отчасти на аксиоматическую трактовку понятия о растоянии. Однако, самое обобщенное абстрактное понятие о пространстве могло быть создано только после познания того, что единственным признаком топологического пространства является то, что в нем можно различить точки сгуще-

[8] P. Stäckel, т. 1, стр. 223. Подчеркнуто от Бояи.

[9] M. Fréchet, Sur quelques points du calcul fonctionnel, *Rend. Circ. Mat. Palermo,* **22** (1906), стр. 174.

ния и изолированные точки. Это решающее начало положил Фридеш Рисс.[10] Последующее ему развитие очень разветвленное: однако важным результатом его работы являестя создание связи между различными видами абстракных пространств, что выражается самым ясным образом в известой теореме Урысона.[11] Согласно этой теореме (в расширенной форме[12]), всякое регулярное топологическое пространство с базисом, является гомеоморфным к основному прямоугольнику Гильбертова пространства. Таким образом теорема Урысона устранила резкую границу между абстрактным топологическим пространством и более наглядным координатным пространством.

Мысли Яноша Бояи относительно структуры пространства способствовали необыкновенному развитию науки о пространстве. Это развитие способствовало: с одной стороны тому, что даже кажущиеся как бы аморфными множества подводились под понятие математического пространства, с другой стороны удалось в широком классе метрических пространств охарактеризовать евклидовые и неевклидовые пространства обладающие более наглядными геометрическими свойствами. Для того, чтобы упомянуть один из результатов подобного характера, необходимо следующее понятие: назовем центром пары точек p, q точку r, если расстояния между ними удовлетворяют условию $\overline{pr} = \overline{qr} = \frac{\overline{pq}}{2}$. Метрическое пространство назовем правильно выпуклым, если любая пара точек имеет один и только один центр, кроме того для каждой пары точек p, q найдется такая точка r, что точка q является центром точек p, r. Буземан[13] показал, что трехмерные неевклидовые пространства с метрикой Минковского совпадают с теми трехмерными правильно выпуклыми полными пространствами, которые сверх того удовлетворяют условиям, названным Буземаном аксиомами предельного круга.

Основой этого огромного развития понятия о пространстве является круг идей Бояи. Эта богатая сокровищница новых математических понятий предоставляла нам и средства, необходимые для создания современного физического представления о мире. Благодаря этому стало возможным математическое изложение многочисленных разделов общей теории относительности и квантовой механики.

[10] F. Riesz, A térfogalom genezise, *Math. és Phys. Lapok,* **15** (1906), стр. 97—122, **16** (1906), стр. 145—161. Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre, *Atti IV. Congr. Internazionale dei Matematici, Roma,* II (1908), стр. 18.

[11] P. Urysohn, Der Hilbertsche Raum als Urbild der metrischen Räume, *Math. Annalen,* **92** (1924), стр. 302—304.

[12] A. Tychonoff, Über einen Metrisationssatz von P. Urysohn, *Math. Annalen,* **95** (1926), стр. 189—142.

[13] H. Busemann, Über die Geometrien, in denen „die Kreise mit unendlichem Radius" die kürzesten Linien sind, *Math. Annalen,* **106** (1932), стр. 140—160.

В 1832 г. Янош Бояи был произведен в капитана второго ранга и его перевели в Ольмютц. Во время путешествия воз опрокинулся и больной Бояи подвергся сотрясению мозга. По указанию главного командования, он прошел медицинскую комиссию и по распоряжению от 28 мая 1833 г. ему дали отставку, с жалованием в 280 форинтов в год, которое ему выплачивало помесячно военное финансовое учреждение. Тем самым закончилась военная карьера Яноша Бояи и 16-го июня 1833 г. он отправился домой, в Марошвашархель.

В Марошвашархеле он пробыл в доме отца почти год. В это время развязались между отцом и сыном ожесточенные споры. О сущности этих перебранок нам ничего не известно, но на основе нескольких признаков, можно предполагать, что они возникали частично в результате научных, частично в результате мировозренческих разногласий. В основном Фаркаш являлся прогрессивным человеком, находящимся под влиянием рационального духа энциклопедистов, однако бытовые условия заставляли его не защищать свои взгляды. Янош, наоборот, во всех отношениях высказывал свое радикальное мнение с неограниченной откровенностью, твердо настаивая на том, что человек убежденный в своих правах должен смело выступать на защиту своих идей против любого противника. Понятно, что Фаркаш, которого и тупая мелкая буржуазия г. Марошвашархель науськивала против своего „неблагодарного и черствого сына", не терпел поведенния Яноша, которое со временем могло угрожать даже общественному положению Фаркаша. В последствии сильной ссоры, Фаркаш выгнал Яноша из своего дома. Некоторое время спустя по просьбе своего брата Антала Бояи, он согласился на его переселениее в с. Домальд с тем, чтобы хозяйничать в имении Фаркаша. В этом Янош очень нуждался, так как его пенсия, составляющая сумму в 280 форинтов в год еле обеспечивала ему насущные средства к жизни.

Янош Бояи в 1834 г. переселился в с. Домальд,[14] являющееся мизерным селом в области Кишкюкюле (в Трансcильвании), где он прожил до 1846 г., значит 12 лет деревенским отшельником, далеко от культурного мира. Однако Янош Бояи продожал свой труд и в Домальде, несмотря на отсутствие пособий. К этому времени относится труд Responsio отправленный на конкурс, устроенный в г. Лейпциг обществом им. Яблоновского с целью развития теории комплексных чисел.

Написанию Responsio предшествовала переписка с Фаркашом содержащая научною дискуссию, в которой Янош указал Фаркашу на одну ошибку его теории по обоснованию комплексных чисел. Свое письмо он закончил следующими словами:[15] „Теперь вы не могли не убедиться, что

[14] Характерно, что население Домальда 100 лет спустя, в 1930 г. все еще было всего 871 человек.

[15] P. Stäckel, т. 1, стр. 122.

Ваша теория опровергнута, рассеивание всяких продолжительных, неясностей или ошибок является для меня удовольствием и наслаждением, и предпологаю что у Вас тоже так". Однако „рассеивание неясностей" не означало для Фаркаша „удовольствия и наслаждания", в результате чего между отцом и сыном развязялось особое, даже можно сказать состязание спортивного характера в связи с конкурсам. Оба направили свои конкурсные работы в Лейпциг, но ни один из них не получил премии. Половина премии была присуждена преподавателю Дебреценской Коллегии Ференцу Керешу, конкурсная работа которого являлась шаблонной.

Написанное в 1837 г. Responsio на восьми листах напоминает скорее всего набросок, хотя в ней изложено много глубоких идей. Янош Бояи определил комплексные числа введением четырех единиц, указывая на то, что подобная теория при введении больше единиц чем четыре, не может быть построена, так как в этом случае например квадратный корень не был бы двузначным. Следовательно Янош Бояи разработал эту теорию в том же самом году, когда Гамилтон создал теорию кватернионов. Глубокое математическое остроумие Бояи показывает и то, что в Responsio он определил степень с комплексным показателем с помощью ряда Маклорена функции e^x, о чем говорит и Эйлер, но Бояи кроме того использует это для определения логарифма при комплексном аргументе, как обратную функцию от e^x. Несомненно, что Responsio несмотря на небрежное изложение, само по себе достаточно для того, чтобы обеспечить место для Яноша Бояи в истории математики.

Фаркаш не был доволен хозяйственной деятельностью Яноша в с. Домальд. В 1846 г. он выслал его из имения, которое отдал в аренду. Янош со своей семьей поселился в г. Марошвашархель, где он на свои сбереженные в Домальде средства построил себе домик.

В Марошвашархеле Янош Бояи жил почти как Робинзон на своем острове. Характерно для его изолированности от общественной жизни, что его друг с молодых лет Кароль Сас, во время его четырехлегнего пребывания в Марошвашархеле, „не посетил его, так как и не смел его посетить, чтобы не скомпрометировать себя".[16] Консервативные буржуа г. Марошвашархель настолько страшились смелого и прогрессивного Яноша Бояи, что его знаменитый немецкий биограф Штекель, пребывавший там в начале века писал следующее:[17] „Даже сорок лет после его смерти можно было наблюдать, насколько имя Яноша Бояи было ненавистным и презренным в Марошвашархеле".

1948 г. имеет особенное значение в жизни Бояи. События борьбы за свободу вырвали его из своей замкнутости. Как бывший офицер он с охотой поступил бы на военную службу, но в этом воспрепятствовала ему болезнь.

[16] P. Stäckel, т. 1, стр. 171.

[17] P. Stäckel, т. 1, стр. 171.

В одном письме его с начала 1848 г. можно читать следующее: [18] „...вследствие моего слабого физического состояния... я совершенно непригоден для военной жизни,[19] но стараюсь хотя бы личными услугами продвинуть общее дело... ведь пока имеется хоть один недовольный, никто не может хвалиться совершенным счастливым состоянием." Однако, когда войска секеев в октябре одержали победу под Раднотом и 30-го октября собралось несколько лиц на секретное совещание на квартире майора Шанта для обсуждения дальнейших военных действий, Янош Бояи тоже покинул постель. В одном отрывке своего дневника трансильванский историк Фаркаш Деак рассказывает, что на этом совещании [20] „Бояи представил четкий и конкретный план, предусматривающий очищение области Себен, фехервара и всей Транссильвании..., обещая к новому году передать в руки венгерского правительства всю Трансильванию." „Этот план не был принят, — продолжает Деак —... потому что руководители и командиры из-за самолюбия отказали Яношу Бояи, и главным образом из-за того, что Дрешнер был реакционнером, а Жомбори[21] колеблющимся, и поэтому они стремились опровергнуть этот наилучший план. Поразительно, насколько точно описывает Деак в своем дневнике характерную черту истории революций: неприятель устраивает в генеральный штаб революции своих выбранных агентов, которые под маской специалиста доказывают о хорошем будто оно плохо, и наоборот, вызывая тем самым катастрофы. Тоже самое произошло и в Марошвашархеле: недисциплинированные части секеев были разгромлены регулярными войсками императора и австрийский генерал—лейтенант Гедеон вступил в Марошвашархель, разрешая свободный грабеж, а Янош Бояи, как пишет Деак,"... вернулся в только что покинутое им одиночество".

Янош Бояи воодушевленный особенно успехами Бема, не раз хотел идти на место боя, но ему всегда препятствовала болезнь. В годы послереволюционного угнетения, он совершенно удалился от общества. Но еще во время борьбы за свободу он получил научное произведение, возбудившее его интерес. Это была работа Лобачевского Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien, вышедшая в свет в 1840 г.

Труд Лобачевского Бояи получил от Фаркаша, который случайно узнал о труде. Прочитав эту книгу, он с удивлением установил, что ее содержание сходно с Appendix-ом. В первое время он подозревал, что Лобачевского не сущесвует, под этим псевдонимом скрывается Гаусс, а труд является плагиатом Appendix-а. К этому выводу привело его

[18] Отдел рукописей Библиотеки Венгерской Академии Наук.

[19] Трудно разобрать эти два слова.

[20] Иштван Батта, К жизни Яноша Бояи. В журнале Академии, 29 (1948), стр. 445.

[21] Дрешнер и Жомбори в качестве офицеров штаба учавтвовали специалистами на совещании.

поведение Гаусса, который якобы похвалил труд Лобачевского, отмалчивая Appendix. Правда-ли это было, или нет — что более вероятно —, но Яношу внушили, что именно так и произошло. При таких обстоятельствах он конечно имел полное право подозревать, что Geometrische Untersuchungen создались вследствии присвоения Гауссом его мыслей. Не трудно понять это подозрение, если мы обратим внимание на то, что Янош Бояи несколько десятов лет жил в одиночестве далеко от научного мира, не зная о развитии проблемы, предшествующем изданию Appendix и вдруг узнал, что после неуспехов в протяжении двух тысяч лет появился третий создатель неевклидовой геометрии.

Совершенно понятно, что он, поражаясь этим фактом и возмущаясь как предыдущим, так и нынешним поведением Гаусса подумал сперва о плагиате. Поэтому он составил тщательные конспекты по труду Лобачевского, с целью выявить такие ошибки, по которым можно было бы убедиться в том, что труд является плагиатом. Несмотря на то, что в своих записках он подвергал строгой критике более или менее значительные ошибки Лобачевского, он все-же признал что Лобачевский равный ему гений. В своих примечаниях он выражает свое признание в сложном стиле апеляционных судей того времени, а именно:[22] „бодро шагая, подымаясь на необычайные высоты подобно величайшему, ловчайшему, тончайшему артисту-канатоходу Лобачевский прекрасно, четко и отлично трактует самостоятельность сферической тригонометрии.“

Что касается до приоритета этих двух гениальных авторов, то наше мнение может заключаться только в том, что вопрос о приоритете здесь даже поднять неуместно. Несомненно, что труд Лобачевского был издан на два года[23] раньше чем труд Бояи. Однако мы знаем, что Бояи открыл самую существенную основную мысль еще в 1823 г., когда он написал своему отцу, что „создал новый мир из ничего“, в то время как Лобачевский тогда еще не нашел дорогу к решению, о чем свидетельствуют рукописи его в 1823 г. Но в 1825 г. оба написали свои результаты: Бояи подал рукопись в начале 1826 г. своему учителю по математике, капитану Вольтеру, а Лобачевский в 1826 г. передал рукопись на физико-математический факультет казанского университета. Обе рукописи потерялись. Это блестяще свидетельствует о том, что оба гения, в основном, в тоже самое время, независимо друг от друга открыли неевклидовую геометрию.

Метод трактовки их творчества является различным. Бояи трактует несколько задач на построение, доказывает, что в неевклидовой геометрии квадратура круга разрешима, в то время, как Лобачевский стремился

[22] P. Stäckel, т. 1, стр. 148.

[23] Первый труд Лобачевского был издан в 1829—1830 г. в Казанском Вестнике, а в 1831 г. был издан Appendix.

прежде всего к тому, чтобы найти и в неевклидовой геометрии формулы для разрешения обычных геометрических вычислений. Эти различия в трактовке объясняются общественным положением этих двух ученых. Бояи как человек замкнутый, имел в своем распоряжении лишь бумагу и чернила, поэтому он занимался выводами теоретического характера, которые он был в состоянии проверить. Но Лобачевский, как профессор университета и образованный астроном, с самого начала надеялся определить опытным путем евклидовую или неевклидовую природы физического пространства, и поэтому он искал средства, которыми астрономия могла бы практически пользоваться в связи с этим вопросом.

Труд Лобачевского возбудил у Бояи интерес к геометрии: в 1850 г. он стал заниматься рукописью Учение о пространстве, к которой он еще несколько раз вернулся до 1855 г. Из отрывков, а также и из записок, содержание которых известно нам, видно, что Янош Бояи и в этом труде занимался значительными новыми идеями. Самой значительной частью является та, в которой он занимается общей теорией поверхностей и кривых. Это показывает, что Бояи перед многочисленными исследователями осознал значение топологии поверхностей и кривых. Он делил кривые на простые и узловитые. Он поставил себе целью составить перечень типов фигур, называемых им простыми поверхностями. Простой поверхностью, он называл повидимому двумерные многообразия. Бояи различал полные поверхности и поверхности с выемкой: это указывает на его стремление охарактеризовать типы поверхностей по связности. Следующее его замечание свидетельствует об очень тонком геометрическом чутье:[24] „На любой простой поверхности можно сделать произвольное число выемок поместить в этих местах трубки и соединить их попарно. Простая поверхность обладает этим свойством в самом общем случае.“ И он добавляет: „Проверить доказательство!“

Совершенно справедливо замечание Бояи относительно доказательства теоремы Эйлера о многогранниках согласно которому[25] „теорема великого Эйлера... доказана в недостаточно общем виде, потому что не всякое соотношение многогранников получается путем отрезания пирамид“. К сожалению доказательство Бояи нам неизвестно и поэтому мы не знаем, для каких многосвязных многогранников удалось ему обобщить теорему Эйлера, когда он говорил, что нашел доказательство соотношения Эйлера[25] „для кольцеобразных многогранников и дуплисто-плоских пространств“.

В 1856 г. Бояи снова начал заниматься вопросом, является ли неевклидова геометрия непротиворечивой в трехмерном пространстве. Он ясно видел, что если даже плоская евклидова и неевклидова геометрия обе

[24] P. Stäckel, т. 1, стр. 178—179.
[25] P. Stäckel, т. 1, стр. 178.

являются непротиворечивыми, из этого еще нельзя делать вывод о евклидовых или неевклидовых отношениях в трехмерном пространстве. В этом отношении Бояи продвинулся несколько дальше Лобачевского, удовлетворившегося тем, что геометрия неевклидовой плоскости непротиворечива. Бояи хотел решить вопрос следующим образом: если взять тетраэдр с вершинами A, B, C, D и взять точку E вне его, то эти пять точек определяют 10 ребер, 10 треугольников и 30 углов между гранями. Применяя абсолютные тригонометрические формулы к тригонометрическим соотношениям последних он надеялся разрешить таким путем вопрос непротиворечивости. В одно время он ошибался, так как вследствие одной ошибки ему казалось, будто удалось доказать на основе конструкций трехмерного пространства, что V. постулят, или XI аксиома необходимо верна. Он даже начал писать сочинение под заголовком: „Доказательство всемирного значения XI евклидовой аксиомы доныне недоказанной и служащей основой всей науке о пространстве и движении. Написано капитаном-инженером Яношем Бояи.“ Но больше предисловия не написал, так как он заметил ошибку. Ему не удалось доказать непротиворечивость неевклидовой геометрии. Это, как нам известно, доказали после его смерти.

После сметри Фаркаша Бояи в 1856 г. Янош в 1857 г. переселился на окраину города, на улицу Калвария, вблизи католическугo кладбища, где он арендовал маленький домик. Здесь жил он одиноко, нетрудоспособный и больной. Только своему брату Гергею писал иногда письма о своих семейных делах, о своей болезни. В 1857 г., вспоминая наслаждения научной работы, он писал:[26] „...я узнал рай, который я при всей суровости моего образа жизни не отдал бы ни за что на свете и который может узнать любой, работая над собой прилежно и с воодушевлением“. В последнее время он почти все время лежал и был в лихорадке, Все время ему было холодно, и даже летом спал в меховой шапке. Нам неизвестно, чем он страдал. Он жаловался на то, что ноги у него болят. Возможно, что он страдал воспалением суставов. 18 января 1860 г. он заболел воспалением легких и вскоре после этого стал умирать. 27 января его служанка Юлианна Сёч писала следующее трагическое письмо Гергею Бояи:[27] „Хотела Вас известить и раньше о состоянии г. капитана, но когда он чувствовал себя лучше, не разрешал мне писать Вам, потому что боялся расходов. Но сегодня 26-го января к 10 часам вечера он лишился речи и потерял сознание, каждую минуту жду его смерти. Прошу, Ваше благородие, спешите к своему брату, один бог его знает найдете-ли его живым, кроме того неизвестно, у кого он держал свои деньги, потому что он нам никогда не говорил об этом. Почтенно просит Вас спешить служанка Юлианна Сёч. — В то время как я писала письмо г. капитан умер так что его больше нет.“

[26] В отделе рукописей Библиотеки Венгерской Академии Наук.
[27] Отдел рукописей Библиотеки Венгерской Академии Наук.

На похоронах его участвовали кроме военной делегации только три человека. Могила его оставалась без памятинка. Когда Ференц Шмидт, первый венгерский исследователь Бояи, в 1893 г. искал его могилу, только старая служанка Юлианна Сёч могла ему показать могилу Яноша Бояи.

Жизнь Бояи является действительно трагедией, потому что его замечательное открытие долгое время не было понято, а сам он был вынужден думать в одиночестве о таком мире, в котором разум и наука побеждают нелепое насилие. Рашающая причина его неуспехов заключается в том, что в первой половине XIX века научные исследования в Венгрии и даже во всей Габсбургской монархии не имели общественной почвы. Точные науки, особенно математика, наука абстрактного характера являются важными только для такого общества, способ производства которого делает необходимым непосредственное или косвенное применение достижений математики в производстве. Не случайно именно греки, народ кустарников и моряков, развили в древности математику на такую высокую ступень. Не случайно в XVII веке именно в Англии и Франции, т. е. там, где промышленное развитие и использование географических открытий являлось важнейшим общественным требованием современная математика стала развиваться таким размахом. Значит, математикой интересовались те общества, идеологию которых определяли развитые для данной эпохи производительные силы и передовые производственные отношения.

Характерно для отсталости производительных сил во время жизни Бояи, что в 1841 г. в Венгрии работало 6 паровых машин общей мощностью в 74 л. с., в то время как в австрийской промышленности работала 231 паровая машина, а во Франции около 4000 паровых машин. У нас источником энергии являлась эксплуатация труда крепостных крестьян и батраков. При феодальных условиях промышленность состояла из умирающих гильдий или в крайнем случае из нескольких мануфактур, которые играли совершенно подчиненную роль.

Отсталость производительных сил и связанных с ними производственных отношений венгерского общества того времени создала такую идеологию, при которой точные науки и исследования еле могли развиваться. Господствующий класс, защищающий феодальную эксплоатацию до крайности, не поддерживал ни точные исследования, ни тех, кто основывал свое миросозерцание на достижениях естествознания. Таков был и Янош Бояи. Его желанием было заниматься не только математическими исследованиями, а решать при помощи научных методов все вопросы, включая и проблемы общества. Вследствие такого его поведения, рано или поздно он должен был столкнуться со всеми, кто примкнул к общепринятому тогда мировоззрению. Следовательно трагичный ход жизни Яноша Бояи не является результатом личных отношений и индивидуальных свойств, а страданием творителя —

гения и сторонника коренных реформ, бьющегося в тисках отсталого венгерского общественного строя того времени.

Янош Бояи был мыслителем, интересующимся философией. Кроме математики он занимался натурфилософическими и общественными вопросами. Его смелые мысли показывают его, как последовательного рационалиста, выдвигавшего по сущности — особенно в области математической философии — материалистические идеи.

Особое внимание заслуживает например, что Янош Бояи говоря о теории комплексных чисел в § 11 своего Responsio пишет следующее:[28] „. . . предметом трезвого исследования могут являеться лишь такие вещи и таким образом лишь такие количества, которые действительно существуют (например: материальные части тела или внешнего мира, или по крайней мере мыслимы и возможны)".

Итак, Бояи выступал против произвольного создания математических понятий и в отношении математического идеализма или материализма он решительно примкнул к материализму. Он считал комплексные числа своеобразным отражением действительности, несмотря на то, что в его время господствовало убеждение, будто комплексные числа являются воображаемыми объектами, не описывающими материальную действительность.

Однако, не только отдельные примечания Яноша Бояи, но и все содержание Appendixа, его воззрение на математическое пространство свидетельствуют о том, что его научный метод является по сути дела материалистическим. Еще о происхождении своей геометрии он пишет, что должен был решиться на отклоненме евклидова воззрения „ . . . так как считаю, что природу нельзя принудить, природу нельзя формировать по привидениям и мечтам, а правду или самую природу следует раскрыть рациональным и естественным способом и необходимо удовлетвориться возможно лучшим рассмотрением".[29] Следовательно Бояи считал мир объективной действительностью, описание которой является задачей математики. Это описание не должно выражать истины, сформулированные произвольно „по привидениям и мечтам", а независимые от нашего сознания объективные истины. Эта точка зрение отвечает взгляду считавшегося Энгельсом, как критерий материализма: „материалистическое мировоззрение, говорит Энгельс, означает просто понимание природы такой какова она есть, без всяких посторонных прибавлений." Следует упомянуть, что Бояи знал, что наши понятия, служащие отражением природы, тоже развиваются, значит во всякой конкретно исторической обстановке „необходимо удовлетвориться возможно лучшим рассмотрением."

[28] P. Stäckel, т. II, стр. 247.
[29] P. Stäckel, т. I, стр. 223.

Непротиворечивость неевклидового пространства нанесла сильный удар идеалистической теории Канта, считающей наше понятие о пространстве априорным, следовательно его математического картину окончательной, не способной к дальнейшему развитию. Однако открытие Бояи, имевшее своим результатом расширение математического понятия о пространстве подтвердило, что как евклидовый, так и неевклидовый характер физического пространства a priori одинаково возможны и поэтому идеализм Канта или любое другое метафизическое представление о физическом пространстве неверны. Это значит, что одно только математическое содержание Appendixa является значительным шагом в сторону диалектического материализма. Бояи сознательно вел борьбу против пустоты метафизических фраз. Он пишет в своем труде Raumlehre следующее:[30] „схоластическая метафизика является большей частью жалким отродьем перенапряженных, болезненных, недостаточно сведущих в области человеческого знания сил, так как то, что се наукой точно установлено, относится к математике, как к единственной, настоящей основной науке, все остальное — чистейшее крохоборство, отвлекающее нас от величественных полей самых полезных и самых плодородных наук.“ Это замечание является критикой метафизики, хотя и не материалистический критикой. Бояи, как рационалист, ожидал все от математики. Характерно для мировоззрения Бояи, что он — подобно Лапласу — считал мир единым целым, в котором каждая часть находится в закономерной связи с любой другой частью мира, так что их движения взаимно определяют друг друга. „Между частями всего мира — пишет Бояи[31] — имеется необходимая и строгая закономерность. Без любой частицы, даже без пылинки мир не мог бы существовать... с другой стороны, какая бы то ни было большая часть, хотя бы. весь мир без пылинки, недостаточна для управления всем миром“. Интересно сравнить эти мысли Бояи с учением диалектического материализма, согласно которому диалектика рассматривает природу не как случайное скопление предметов, явлений оторванных друг от друга, изолированных друг от друга — а как связное единое целое, где предметы, явления органически связаны друг с другом, зависят друг от друга и обуславливают друг груга.“

Рационалистическая основа идей Бояи, разумеется, ослабляет последовательность его материалистических взглядов. Это видно из его заметок, касающихся вопроса об объективном существовании пространства и времени. Он пишет:[32] „Существуют-ли пространство и время в действительности или только в нашем сознании — это должно быть для умного и рассудительного философа безразличным, и оставаться вне рассмотрения в такой же мере, в какой этот вопрос в строжайшем смысле нельзя решить; впрочем эти идеи

30 P. Stäckel, т. I, стр. 186.

31 J. Bedőházi, A két Bolyai (Марошвашархель, 1897), стр. 379.

32 P. Stäckel, т. I, стр. 259.

ажутся такими, которые должны относиться к действительно существующим вещам, так как повидимому идея существования пространства и времени правильна и сомневаться в этом означало бы выйти за всякие пределы..." Вот, последовательний рационализм заставляет Бояи колебаться в вопросе об объективном существовании времени и пространства, так как он хочет разрешить этот вопрос рационалистически, в то время как это „в строжайшем смысле" т. е. математическим способом невозможно. Действительно, формально математический способ приведет к тем же результатам, считаем мы пространство действительным или кажущимся. Но Бояи не застрял в рационалистических сомнениях, а сделал шаг вперед к материалистическому воззрению, так как по его мнению сомневаться в объективном существовании времени и пространства означало бы „выйти за всякие пределы", т. е. держаться неразумного мировоззрения.

Бояи интересовался и общественными вопросами, особенно к концу своей жизни (1850—1855 гг.) составлял план реформ, которые казались современникам слишком крайними, даже безумными. Он думал о создании „Учения о благе", которое содержало бы утопически-социалистическую реформу общества с одной стороны, а с другой энциклопедию наук, напоминающую идеи Комта. Он не закончил даже схему этого труда, мы можем восстановить его содержание только из его заметок и из мнения его современников.

Прогрессивный характер планов общественных реформ Бояи состоит в том, что он заметил нищету, возникающую из-за классового угнетения, и он не был намерен по обычаям того времени отделаться набожными фразами, обещаниями за счет потустороннего мира, а искал метод для преодоления нищеты. По его мнению [33] „общество полно нищеты, несчастья, но оно не должно быть необходимо таковым. Счастливым можно быть и на земле." Главной причиной несчастья человечества является индивидуализм нескольких людей, который должен быть заменен соблюдением общих интересов. В одной заметке он говорит: [34] „...печально и сомнительно... но и опасно ...строить свое личное счастье на основе угнетения других." В другом месте он пишет: [35] „Нет никакого личного счастья без счастья всего общества."

Янош Бояи считал, что производство должно происходить на базе распределения труда и сообща, а распределения продуктов должно происходить на основе равноправия. По его мнению такое социалистическое общество будет создаваться путем морального воздействия, убеждения. „Только духовное насилие, т. е. убеждение, победа и добровольное преобразование, возрождение могут привести к благу и надеемся, что еще до 2000

[33] J. Bedőházy, стр. 384.

[34] В отделе рукописей Библиотеки Венгерской Академии Наук.

[35] P. Stäckel, т. 1, стр. 188.

года — без всяких, конечно, грез наступит этот час.“ — пишет он в одном письме.[36] К „добровольному преобразованию“ приводит познание и освоение „Учения о благе“ людьми и наступающее вслед за этим улучшение их нравов. „Значительную часть блага составляет освоение учения о благе, другую, не менее благородную и выдающуюся, способ жизни, соответствующий учению.“[37]

Янош Бояи был социалистом утопистом со всеми достоинствами и недостатками утопистов. Достоинство его идей о преобразовании общественного строя заключается в том, что он хочет положить конец эксплоатации и классовому угнетению. Именно поэтому его реформаторские идеи являются прогрессивными. Его недостаток-наивность следствие незнания материальных сил, определяющих движение общества. Причина этой наивности та же, что и в случае всех остальных утопистических грез: „Это фантастическое описание будущего общества возникает в то время, когда пролетариат еще находится в очень неразвитом состоянии и представляет себе поэтому свое собственное положение еще фантастически, оно возникает из первого исполненного предчувствия порыва пролетариата к всеобщему преобразованию общества“ (Маркс—Энгельс).

Прошло 150 лет со дня рождения Яноша Бояи. За это время в Венгрии и в Румынии, где он родился, под руководством пролетариата осуществился тот мир, в котором невозможно „строить свое личное счастье на основе угнетения“. В этом новом мире роль науки и ученого изменилась коренным образом. Нет больше той эпохи, в которой „господствовали над трудящимся народом люди поклоняющиеся золотому теленку и богу-грошу, верующее только в наличные деньги и вслушивающиеся только в их музыку“.[38] Там, где народы взяли власть в свои руки, наука является общим делом всего народа. Там ученые творят не для нескольких людей, а для всего народа. Бояи сегодня уже принадлежит всему передовому человечеству. В Советском Союзе издан Аппендикс, у нас он вышел недавно. В Румынской Народной Республике университет назван по имени Яноша Бояи, а у нас в Сегеде есть математический институт и математическое общество имени Яноша Бояи. В Румынии торжественно отмечают 150-ую годовщину со дня его рождения. Его достижениями знакомится наш рабочий класс по лекциам, прочитанным на заводах и фабриках, миллионы трудящихся уважают его. Перед нами появляется Бояи, таким как он был в действительности: настоящим ученым, боровшимся за дело правды. Он был великаном среди ученых. Он всегда искал правду, служащую в конечном счете всегда трудящемуся народу. А освобожденный народ 150 лет спустя вспоминает с горячей любовью своего многострадального гениального сына.

[36] В отделе рукописей Библиотеки Венгерской Академии Наук.
[37] P. Stäckel, т. I, стр. 187.
[38] Отдел рукописей Библиотеки Венгерской Академии Наук.

ИДЕОЛОГИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ БОЯИ—ЛОБАЧЕВСКОГО

АЛЬФРЕД РЕНЬИ (Будапешт), член-корреспондент АН

„... природу нельзя создавать согласно бредам, рожденным фантазией, а надо рассматривать истину или самое природу разумно и естественно.“

(Янош Бояи)

„Материалистическое мировоззрение означает просто понимание природы такой, какова она есть, без всяких посторонних прибавлений.“

(Ф. Энгельс)

Введение

Открытие геометрии Бояи—Лобачевского является одним из самых выдающихся событий истории математики. Речь идет не только о том, что Янош Бояи и Н. И. Лобачевский независимо друг от друга решили одну более, чем двухтысячелетнюю основную проблему математики. Исходя из того твердого убеждения, что много оспоренная аксиома параллельности (V. постулат Эвклида) не есть последствие остальных аксиом Эвклида, они создали такую геометрическую систему, в которой указанная аксиома не действительна. Речь идет не только о том, что успех их попытки явился поразительным, ведь усилия математиков более, чем в течение двух тысяч лет, начиная с Паппуса и Прокла до Омара Хаяма, с Насиреддинна и Саххери и кончая Ламбертом и Лежандром, направлялись на то, чтобы доказать V. постулат Эвклида; Бояи и Лобачевский же дошли до создания того, что попытки эти не увенчались успехом потому, что успешными они и не могли быть. Недостаточно также характеризовать значение открытия Бояи и Лобачевского указанием на то, что оно означает новую эпоху в истории геометрии и даже всей математики. Открытие Бояи и Лобачевского имело значение не только с точки зрения развития математики. Целью настоящего доклада является освещение идеологического значения открытия Бояи—Лобачевского, указание на то, что этим открытием, кроме математики, познание материального мира вообще было продвинуто вперед. Укажу на то, что открытие геометрии Бояи—Лобачевского явилось событием большего значения и с точки зрения научного материалистического мировоззрения. Геометрия Бояи—Лобачевского по-новому осветила сложное диалектическое отношение математики и действительности, разгромила целый ряд вековых предрассудков, множество широко распространенных неправильных идеалистических или метафизических взглядов. Вопрос взаимоотношения математики и действительности в свою очередь представляет из себя существенную проблему теории познания, без правильного понимания которой невозможно правильно ориентироваться в характере и значении результатов физики и вообще точных естественных наук, работающих математическими методами. В этом заключается причина того, почему открытие неэвклидовой геометрии имеет столь большое идеологическое значение; в чем это состоит, мы изложим ниже.

Из того, что геометрия Бояи—Лобачевского имеет исключительно большое идеологическое значение, естественно следует, что это открытие не является безразличным для развития общества. Это было ясно самому Бояи. В переработанном издании Аппендикса на немецком языке, сделанном самим Яношом Бояи в 1832 году, в последнем, значительно отличающемся от оригинального латинского текста § 33, мы читаем следующие слова:[1] „Автор убежден в том, что выяснением данного предмета был сделан один из самых важных и самых блестящих шагов в направлении подлинного обогащения науки, образования умов и, таким образом, продвижения вперед человеческой судьбы." Нет сомнения, что в настоящее время нам кажется необыкновенным, что ученый оценивает значение собственных открытий в такой открытой и наивной форме. Несомненно и то, что вся жизнь и деятельность Бояи сформировались бы совсем иначе, если бы слова эти были написаны не им, а его современниками. Следует, однако, отметить, что оценка результатов работы Яноша Бояи в приведенных выше словах ученого вовсе не преувеличены. Заслуживает внимания цитированная фраза и потому, что в ней выражается одна из характерных черт мировоззрения Яноша Бояи: он был сторонником просвещения XVIII века, убежденным рационалистом. Выражение в этой фразе о том, что открытие неевклидовой геометрии было одним из самых важных и блестящих шагов „в направление образования умов и, таким образом, продвижения вперед человеческой судьбы", отражает основное положение мировоззрения просвещения, согласно которому развитие мышления является решающим условием и рычагом человеческого прогресса. Здесь мы встречаемся с таким же взглядом, как у Руссо, а затем, без исключения, у всех социалистов-утопистов. Согласно этому взгляду, вполне достаточно объяснить людям, что существующий общественный строй неразумный, а также и то, каким именно должно быть благораз-

[1] Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai (изд. Stäckel Pál), часть 2 (Budapest, 1914), стр. 216.

умное общество, чтобы это немедленно осуществилось. Янош Бояи еще не видел с достаточной ясностью, как связан прогресс человеческого мышления с общественным развитием. Ему не было ясно, что борьба между прогрессивным и реакционным мировоззрениями является только одной из сторон борьбы прогрессивных и реакционных общественных сил классовой борьбы. Однако, ему было ясно, что борясь за научную истину, он одновременно борется и за человеческий прогресс и, что победа, одержанная в области науки, непосредственно или косвенно фактически продвигает вперед судьбу человечества. В лице Яноша Бояи, 150 летие со дня рождения которого мы теперь отмечаем, мы не только уважаем гениального ученого, но и человека, сознательно и смело боровшегося за человеческий прогресс, человека, полностью сознавшего, что, борясь за научную истину, он борется не за личную славу, или же за какой-либо другой личный интерес, а за прогресс всего человечества. Понимание этого по-новому освещает приведенные выше слова Бояи, цитированные мною для того, чтобы показать, насколько сам Бояи сознавал идеологическое значение своего открытия. По сути дела то же самое относится и к Н. И. Лобачевскому, отчетливо знавшему, что он со своей новой „воображаемой“ геометрией нанес сокрушительный удар неправильной идеалистической кантовской концепции о врожденности понятия абсолютного пространства. Это доказывают следующие слова Н. И. Лобачевского: „Первые понятия, с которых начинается какая-нибудь наука, должны быть ясны и приведены к самому меньшему числу. Тогда только они могут служить прочным и достаточным основанием учения. Такие понятия приобретаются чувствами, врожденным — не должно верить.“ [2]

И Гауссу было ясно, каким решающим доказательством служит открытие Яноша Бояи против идеалистической философии Канта. Об этом говорят его нижеследующие слова, написанные Фаркашу Бояи после чтения Аппендикса: „Именно невозможность того, чтобы априори решать между Σ (эвклидовой геометрией) и S (гиперболической геометрией), яснее всего доказывает, что Кант не был прав утверждая, что пространство является лишь формой нашего созерцания. На другую столь же сильную причину я указал в одной из моих маленьких работ; в ней ты найдешь, изложенную на нескольких страницах, суть моих взглядов на мнимые числа.“ В статье Гаусса, на которую он здесь ссылается,[3] где он занимается ныне употребляемым геометрическим изображением комплексных чисел и стремится разогнать „тайную мрак“, связанную с комплексными числами, в примечании пишет следующее: „Оба замечания были сделаны еще Кантом и непонятно, что этот философ выдающегося ума в первом заме-

[2] Н. И. Лобачевский, Сочинения, т. 1 (Гостехиздат, 1946), стр. 186.

[3] Theoria residuorum biquadraticorum, commentatio secunda, C. F. Gauss, *Werke*, Bd. 2 (Göttingen, 1863), стр. 177.

чании думает видеть доказательство того, что пространство есть только форма нашего внешнего содержания, тогда как другое замечание так ясно доказывает противоположное, то есть то, что пространство должно иметь независимое от нашего созерцания реальное значение.“ (Указанные замечания относятся к тому, что на плоскости мы можем произвольно выбирать систему координат, однако ее зафиксирование может произойти только в связи с материальной действительностью.)

Следует отметить, что на это замечание Гаусса крупнейший продолжатель неевклидовой геометрии, Б. Риманн также ссылается в своем знаменитом докладе.[4]

Оказывается, что сознание идеологического значения, революционного материалистического содержания неевклидовой геометрии служили основной причиной того, что заставило осторожного Гаусса в годы господства реакции воздержаться от опубликования своих мыслей, касающихся этого. То, что Гаусс так воздержался от открытого признания заслуг Бояи объясняется и тем, что в нем недоставало смелости решительно выступить на стороне Бояи против господствоващего в то время идеалистического взгляда, несмотря на то, что он был убежден в неправильности идеалистических концепций Канта. Конечно, Канта можно критиковать и справа и слева. Например, Канта подвергали критике и позитивисты. В связи с этим необходимо подчеркнуть, что Бояи и Лобачевский, также как и Гаусс, критиковали Канта с позиций материализма „Осторожность“ Гаусса, отказ от открытого выступления на стороне открытия Бояи может подвергнуться законной критике. В то же время огромное значение имеет тот факт, что один из крупнейших математиков XIX в. (в свое время его называли „королем математиков“) в других случаях занимал такую твердую позицию против кантовской идеалистической концепции о пространстве, на стороне материалистической концепции. Кажется, что он крепче стоял на своих ногах в области комплексных чисел и считал свою позицию легче отстаиваемой, чем в неевклидовой геометрии, где ему приходилось бы боротьсв не только с идеалистическими взглядами, относящимися к пространству, но и с укоренившимися в течение двух тысяч лет предрассудками математиков. Учитывая осторожную позицию Гаусса, мы с еще большим уважением должны смотреть на смелое и решительное выступление Бояи и Лобачевского.

Для того, чтобы понять идеологическое значение геометрии Бояи—Лобачевского мы должны рассмотреть вопрос в историческом плане. Геометрия, как и все другие отрасли науки, с момента ее существования является ареной борьбы между прогрессивным и реакционным мировоззрениями.

[4] B. Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. *Ges. Math. Werke* (Leipzig, 1876), стр. 255.

между материализмом и идеализмом. Поэтому мы прежде всего должны заняться вопросом борьбы между материалистическим и идеалистическим мировоззрениями в геометрии, начиная с Эвклида вплоть до начала XIX в., а затем займемся вопросом об идеологическом значении геометрии Бояи—Лобачевского.

1. Борьба материалистических и идеалистических взглядов в геометрии

Геометрия, как и все другие разделы математики и естественных наук, возникла так, что на определенном этапе развития общества люди стремились удовлетворить с ее помощью потребности, предъявленные производством. Такие потребности возникли еще 2000 лет до нашей эры в древней Вавилонии и Египте, в связи с строительством, измерением земель, и измерением емкостей посуд. В начале они довольствовались некоторыми неточными практическими правилами, рецептами, так, например, за площадь круга они трижды брали квадрат радиуса. Из Вавилонии и Египта остались только сборники практических задач. Из них мы видим, что они знали уже много правильных результатов, например, формулы объема призмы и пирамиды, но они их не доказывали, а рассматривали как изолированные опытные факты. Развитие общества, прежде всего развитие ремесла и торговли, в связи с этим развитие мореплавания, что в свою очередь требовало ориентировки на море, вследствие чего и развития астрономии, изготовления первых географических карт и т. д., привело к тому, что эти опытные правила становились неудовлетворительными, нужны были более достоверные, систематические, логически более связанные геометрические знания. Так возникла геометрия, как наука, в Греции (в VI—V вв.) до н. э. У первых представителей геометрии эти непосредственные влияния еще ясно ощутимы. Вот почему их взгляды — как, например, взгляды Фалеса — в основном были материалистическими. Характерной чертой греческой математики, является то, что она не останавливается на опыте, а ищет связей; более сложные теоремы старается свести к простым, общеизвестным теоремам, значит возникает математическое доказательство. Первый систематический учебник геометрии был написан хиосским Гиппократом в конце V. в. до н. э. Развитие греческой математики тесно связано с развитием греческого мышления, греческой философии: математические знания почти ни в какой другой период не составляли столь органическую часть мышления, культуры как в древнегреческой культуре.

Углубляющаяся, ищущая более глубоких причин явлений, тенденция греческой философии, дискуссионный метод, развернувшийся под влиянием греческой общественной жизни, юридической и политической жизни, искусство софистов аргументировать — диалектика в первоначальном, узком смысле этого слова — несомненно является решающим источником научного метода греческой математики, ищущей точных доказательств, и тем самым является и источником ее силы. В то же время в греческой философии в противовес начальным материалистическим течениям все более преобладает идеалистическое течение, достигшее своей наивысшей точки в лице Платона. Это течение оказало вредное влияние на геометрию, тормозив ее развитие. И Платон, и его ученики отделяли геометрию, как науку доказательств, от арифметики (по терминологии того времени — „логистики"), как от низких расчетов торговцев и рабов, недостойных философов, и тем самым они впервые построили искусственную стену между математикой и ее практическим применением. Одновременно они исключили из геометрии целый ряд проблем, разрешение которых могло бы дать новый толчок ее развитию (например, задачу удвоения куба, проблему трисекции угла и т. д.). Возникла мистика чисел (Пифагор), а также возник ложный взгляд, самым решительным представителем которого был Платон, о том, что математические знания человечество приобретает не из опыта, а они являются врожденными и человек лишь „вспоминает" то, что раз уже видел в „мире идей". Если ближе подойти к этому лишенному всякого объективного основания взгляду, его тенденция станет ясной: философ, геометр не должны изучать действительность, а должны мечтать, вспоминать „мир идей". Тем самым платонизм в геометрии становится тормозом развития. Против идеалистических взглядов Платона и — добавим еще — Канта направлено глубоко материалистическое высказывание Бояи, которое я выбрал эпиграфом настоящего доклада.

Первое наиболее полное, систематическое изложение греческой геометрии, подытоживающее результаты многовекового развития греческой математики, принадлежит Эвклиду, в III в. до н. э. Три столетия до нашей эры были периодом несомненного расцвета греческой математики; в это время центром математической жизни был город Александрия. Труд Эвклида в течение двух тысяч лет был „библией" геометрии, содержание которой только комментировалось, пополнялось, но ее не превзошли и считали методологическим образцом. Труд Эвклида верно отражает и силу, и слабость, и ограниченность греческой математики, а также отражает борьбу между материалистическим и идеалистическим взглядами в области геометрии. Ахиллесовой пятой греческой математики явилось отсутствие понятия иррационального числа, на что указал А. Н. Колмогоров в своей статье „Математика" в Большой Советской Энциклопедии. Греческие геометры открыли, что есть несоизмеримые расстояния, но ввиду того, что они знали только целые и дробные числа, из этого они сделали вывод, что в геометрии невозможно работать числами, и отделили геометрию от арифметики (об анализе в это время еще нельзя говорить, несмотря на то, что — как дальше укажем — Архимед уже знал некоторые элементы исчисления бесконечно малых). Полностью эта стена была разрушена только Декартом. Именно в этом и состоит огромное значение создания аналитической геометрии. Многочисленные буржуазные историки-математики, в том числе Кантор, Зейтен и другие, опираясь на одно из высказываний неоплатониста Прокла, более или менее тенденциозно отстаивают такую позицию, якобы Эвклид был платонистом. Этот взгляд и в СССР лишь в последнее время оспаривается и подвергается критике. В. Н. Молодший и А. Е. Майстров[5] указали на то, что Эвклид в основном был сторонником Аристотеля, который, как указал В. И. Ленин,[6] в этом вопросе занял материалистическую позицию, хотя и не выдержал последовательно этой точки зрения.

Мне кажется, что не будет лишним кратко изложить основные выводы этой дискуссии. М. Я. Выгодский[7] аргументировал тем, что Эвклид в „Элементах" отказывается от употребления чисел, вследствие чего и не занимается применениями геометрии. По мнению Выгодского, это является результатом влияния Платона. Молодший и Майстров рассматривают это как результат отсутствия понятия иррациональных чисел (упомянутый выше недостаток греческой математики) и указывают на то, что Аристотель утверждал, что свои понятия геометрия отвлекает из материального мира. В связи с этим Аристотель писал: „Примером служит то рассмотрение, которому математик подвергает объекты, полученные посредством отвлечения. Он производит это рассмотрение всплошь устранивши все чувственные свойства, например, тяжесть и легкость, жесткость и противоположное ей, далее, тепло и холод, и все остальные чувственные противоложности, а сохраняет только количественную определенность и непрерывность."[8]

Таким образом, речь идет об ограниченности данной эпохи, а не о влиянии идеалистической философии, в частности Платона. Молодший и Майстров указывают, что Эвклид занимался исключительно такими геометрическими фигурами, которые могут быть сконструированы, и обращает очень большое внимание на эти конструкции. Это рассматривается, как доказательство его материалистического взгляда.

В рамках настоящего доклада нет возможности ознакомить слушателей с подробностями этой дискуссии, желаю лишь сделать два существенных

[5] Историко-математические исследования (Гостехиздат 1949), Вып. II, стр. 499—507.

[6] См. замечания В. И. Ленина на Метафизику Аристотеля. „Книга 13, гл. 3 разрешает эти трудности превосходно, отчетливо, ясно, материалистически. (Математика и другие науки абстрагируют одну из сторон тела, явления, жизни.) Но автор не выдерживает последовательно этой точки зрения" — В. И. Ленин, „Заметки на Метафизику Аристотеля", 1934, стр. 15.

[7] Историко-математические исследования (Гостехиздат, 1949), Вып. I, стр. 217—295.

[8] Метафизика Аристотеля (1934), стр. 185—186.

вывода. Во первых: даже буржуазные историки-математики не могут оспорить того, что цели и методы труда Эвклида не могут быть ясно поняты без анализа философских взглядов Эвклида. Не подлежит сомнению тот факт, что борьба между материалистическим и идеалистическим взглядами шла и в области геометрии, в крайнем случае спорно лишь то, какова была позиция самого Эвклида. Во-вторых: вышесказанное доказывает, что хотя в труде Эвклида и заметно влияние как материалистической, так и идеалистической философии, все-же влияние материалистического взгляда неотделимо от ценностей великого труда Эвклида, в то время, как влияние идеализма — если оно в известной мере и проявилось в труде Эвклида — его ограничило. Идеалистическая философия в греческой математике в целом, являлась тормозом прогресса.

С этой точки зрения интересно рассмотреть труды величайшего греческого математика Архимеда. Как известно, Архимед достиг удивительных результатов в геометрии, превзойденных только полтора тысяч лет спустя. Низшей и высшей оценкой числа π $\left(\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}\right)$, определением площади сегмента параболы, объема шара и параболоида, поверхности шара, центра тяжести разных тел, открытием наименованной по его имени спирали и т. д., Архимед разрешил такие задачи, которые доказывают, что у него уже имелись зародыши исчисления бесконечно малых, в частности интегрального исчисления. Свои мысли об исчислении бесконечно малых Архимед не считал точным методом, а хэуристическим принципом, и был в полном сознании того, что они в корне противоречат господствовавшим в то время взглядам на геометрию. Свои результаты он впоследствии доказал методом „исчерпания." На самом деле метод Архимеда, касающийся исчисления бесконечно малых, с одной стороны основывался на механических соображениях, а с другой стороны отражает влияние атомистической теории греческих материалистов, поскольку тела он разлагал на бесконечно малые „пластинки", плоские фигуры же на бесконечно малые „палочки"; это, однако, противоречило господствовавшему тогда в греческой математике направлению, находившемуся под влиянием идеализма. Своих замечательных успехов Архимед достиг в борьбе с влиянием идеализма, опираясь на материалистическое мировоззрение. Архимед был революционером не только в математике, но и в области применения математики: архимедов винт, его знаменитые метательные машины, помогавшие при обороне города Сиракузы, его открытия в связи с стабильностью плавающих тел и т. д. — все это свидетельствует о том, что Архимед не считал унизительным, рабским трудом ставить свои математические знания на службу практике. С этой точки зрения очень интересно письмо Архимеда Эратосфену, главному представителю „официальной" математики, открытое лишь в 1906 г. В этом письме говорится[9]: „Так как я уже говорил, что считаю тебя ученым и выдающимся философом, ... я считаю целесообразным изложить и осветить тебе в этой книге тот особый метод, при помощи которого я получил замечательное вспомогательное средство для исследования с помощью механики известных математических проблем. Я глубоко уверен, что это средство окажется не менее полезным для доказательства теорем: многие факты стали для меня ясными именно путем механических соображений, но затем я счел необходимым доказать их и геометрически, так как указанный метод не дает строгих доказательств. Однако, ясно, что легче найти строгое доказательство тогда, когда с помощью указанного (механического) способа мы получили определенную ориентировку в указанном вопросе, нежели найти такое доказательство без такой предварительной ориентировки. Вот почему в отношении теорем, доказанных впервые Эвдоксем, то есть, что конус составляет одну треть цилиндра, имеющего равную с ним основу и высоту и точно так же, пирамида составляет одну треть соответствующей ей призмы, (Архимед здесь говорит об объеме), не малую роль сыграл Демокрит, впервые установивший эти теоремы без строгих доказательств". Демокрит был самым выдающимся представителем греческого материализма, сознательно применявший свою атомную теорию к геометрии, причем, по словам Архимеда, с большим успехом. Учения Демокрита были „бойкотированы" греческим идеализмом и, таким образом, они во время Архимеда были менее известны, а атомистический взгляд его был оценен официальной греческой философией как ненаучный. Как Платон, так и Аристотель категорически утверждали, что введение атомных соображений противоречит основным учениям геометрии, согласно которому всякое тело неограниченно делимо. Видно, что это диалектическое противоречие — освещенное, но все еще не преодоленное результатами физики XX века, противоречие между делимым и неделимым, между постоянной и корпускулярной концепциями материи — было одним из основных рычагов развития еще в греческой математике. Архимед был революционером в греческой математике, смело боровшийся с господствующим идеалистическим взглядом и высказывавшийся на стороне материализма, опираясь на свои замечательные достижения.

Вышеприведенные слова Архимеда исключительно поучительны хотя бы и потому, что они доказывают то, что еще более относится к математическим исследованиям современности: математики, когда они ищут новых путей, приобретают себе первую ориентировку не точными методами, а наглядными соображениями. Таким образом, они возвращаются к материальным основам математики и только после этого обыкновенно происходит точное доказательство. Во избежание всяких недоразумений: это

[9] См. С. Я. Лурье, Архимед (1945), стр. 137—138.

замечание не касается вопроса о необходимости точных доказательств. Сам Архимед был непревзойденным мастером геометрических доказательств, которым он уделял большое внимание, а только стремился завоевать право на существование наглядных (хэуристических) соображений, основывавшихся на механических аналогиях или опирающихся на атомистические соображения, — против господствовавших концепций своей эпохи. Его слова и в настоящее время служат орудием в борьбе против математического формализма. Заслуживает большого внимания и то, что Архимед, уделяя огромное внимание физическим соображениям, одновременно отчетливо видел необходимость точного математического доказательства. Многие математики и поныне не понимают с достаточной ясностью важность опираться на физические соображения, и многие физики не видят значения математической строгости. Обе ошибки ведут к формальному применению математики. Обращая внимание математиков и физиков на вышеприведенные слова Архимеда, я одновременно должен указать и на то, что Архимед был не только самым выдающимся представителем математики и прикладной математики древности, но и крупнейшим физиком.

В средние века развитие геометрии и в связи с ней идеологическая борьба внутри геометрии только немного продвинулись вперед. Заслуга арабских и персидских математиков, что они заботливо занимались греческой геометрией. В области геометрии, в частности в области „аксиомы параллельности“, интересные исследования принадлежат Омару Хаяму и Насиреддину. Первые достопримечательные исследования в Европе, как, например, исследования Саххери, непосредственно связаны с попыткой Насиреддина доказать аксиому параллельности. Так называемый четыреугольник Саххери мы найдем и в работах Насиреддина и Омара Хаяма. Я считаю необходимым обратить внимание на это, так как эти достижения арабской и персидской культуры у нас не известны должным образом. В истории геометрии решающим шагом является создание аналитической геометрии, которое связано с именем Декарта. Это позволило перевести проблемы геометрии на язык алгебры, а затем анализа и наоборот. Тем самым прекратилась та изолированность геометрии, которая создалась в греческой математике из-за отсутствия понятия иррационального числа. В аналитической геометрии осуществилось диалектическое единство геометрии и алгебры, что способствовало созданию дифференциального и интегрального исчислений, а также тому, чтобы математика разработала большой аппарат для описания движения, изменения. Наряду с огромными преимуществами этого развития оно имело и определенные отрицательные стороны. Распространение аналитических методов в геометрии и одновременно и в механике, тесная связь между ними, вызвала ошибочный взгляд, продержавшийся начиная с Ньютона вплоть до Бояи и Лобачевского. Согласно этому взгляду геометрия не является равноценным разделом математики, а имеет подчиненное значение внутри математики, геометрия есть не что иное, как одна — бесспорно важная — область применения математического анализа. В этот период геометрия в самом деле не рассматривалась, как математика, а как один из разделов прикладной математики, занимающийся вопросом применения математики и изучению физического пространства, соответствующего ньютонской мировой картине. Некоторые дошли до того, что геометрию считали частью механики. Этот взгляд отражает концепцию метафизического материализма. Вот почему имела кантовская идеалистическая концепция о пространстве такое большое влияние на свою эпоху, господствовавший тогда метафизический взгляд не в состоянии был должным образом опровергать его, и эти две концепции во многих отношениях соприкасались. Так обстоял этот вопрос в начале XIX в. Дальнейшее развитие началось с революционного открытия Бояи и Лобачевского.

В настоящем докладе нет возможности дальше анализировать историю геометрии, но считаю, что сказанное показывает, какое огромное значение в истории геометрии имела борьба идеализма и материализма и, что материалистический взгляд продвинул развитие геометрии вперед, в то время, как идеалистические концепции рано или поздно становились тормозом развития.

2. Значение геометрии Бояи—Лобачевского в борьбе материалистического и идеалистического мировоззрений

Математика занимается определенными закономерностями материального мира, в своеобразной отвлеченной форме. Таким образом, в отношении предмета математики она родственна с естественными науками, а в отношении ее методов она существенно отличается от них. Что касается предмета математики, определение Энгельса по сей день имеет силу: „Чистая математика имеет своим предметом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, т. е. весьма реальное содержание. Тот факт, что это содержание появляется в крайне абстрактной форме, может лишь слабо затушевать его происхождение из внешнего мира. Чтобы научить эти формы и отношения в их чистом виде, следует их оторвать совершенно от их содержания, устранить его как нечто безразличное для дела.“ [10]

С методологической точки зрения характерным признаком математики является абстракция, как на это указывают приведенные выше слова

[10] Сочинения К. Маркса и Ф. Энгельса, т. 1, стр. 39.

Энгельса. Количественные и пространственные формы материального мира, познаваемы в своей чистоте при условии, если путем абстракции мы отделяем эти общие формы от их конкретных воплощений и исследуем их вообще. Суть математической абстракции освещают слова И. В. Сталина: „В этом отношении грамматика напоминает геометрию, которая дает свои законы, абстрагируясь от конкретных предметов, рассматривая предметы как тела, лишенные конкретности, и определяя отношения между ними не как конкретные отношения таких-то конкретных предметов, а как отношения тел вообще, лишенные всякой конкретности.“[11]

Абстрактный способ изложения в математике не означает ухода от действительности, а, наоборот, ведет к познанию общих закономерностей, скрывающихся в глубине материального мира. На это яснее всего указывает В. И. Ленин в своем указании о науке вообще. Следует отметить, что абстрактными понятиями работает не только одна математика, а в большей или меньшей степени все науки, так как отвлеченные научные понятия, оформившиеся на основании опыта, практики, выражают объективную реальность более сжато и глубоко, нежели непосредственный чувственный опыт. — „Мышление, восходя от конкретного к абстрактному, не отходит, — если оно правильное — от истины, а подходит к ней“ — пишет В. И. Ленин.[12] „Абстракция материи, закона природы, абстракция стоимости и т. д. одним словом все научные (правильные, серьезные, не вздорные) абстракции отражают природу глубже, вернее, полнее. От живого содержания к абстрактному мышлению и от него к практике — таков диалектический путь познания истины, познания объективной реальности“. В этом же труде, несколько дальше (стр. 153) В. И. Ленин пишет: „Образование (абстрактных) понятий и операций с ними уже включают в себя представление, убеждение, сознание закономерности объективной связи мира“. Эти слова В. И. Ленина одновременно указывают и на то, что понятие абстракции может быть вполне понято только на основании диалектического материализма, также, как и о предмете, задачах, свойствах метода математики можно создать ясную картину только на основании диалектического материализма. Абстракция в математике идет дальше, чем в других отраслях науки; на своеобразных чертах математической абстракции, отличающих ее от применяемой в других науках абстракции, мы здесь не остановимся

В прошлом как среди математиков, так и среди естествоведов и философов было распространено множество неправильных ошибочных соображений относительно математики. Неправильные взгляды эти все еще существуют — хотя в меньшей мере — и у нас. Этим следует заниматься хотя бы потому, что без этого мы не можем понять того нового, что было для науки открытие

[11] И. В. Сталин, Относительно марксизма в языкознании (Госполитиздат, 1950), стр. 21—22.

[12] Философские тетради, стр. 146.

неевклидовой геометрии. Количество неправильных взглядов на математику — уйма. Из них подробно рассмотрим только несколько.

Рассмотрим прежде всего точку зрения идеализма. Она отрицает объективный характер законов математики, а математику рассматривает, как произвольное создание человеческого разума. Эта идеалистическая концепция не в состоянии объяснить причину того, почему методы математики так блестяще применяются к естественным наукам и технике, к практической деятельности человечества, направленное на познание и преобразование природу и общества. Идеалистический взгляд на математику необоснован, ненаучен и вреден. Первым последовательным защитником идеалистического взгляда на геометрию, как уже было отмечено, был Платон. Эта концепция по сей день живет в буржуазной науке и в настоящее время отчетливее всего проявляется в виде конвенционализма. Согласно идеалистической концепции предметом геометрии служит исследование врожденного с человеком „априорного“ понятия пространства. В эпоху Бояи самым решительным представителем этого взгляда был Кант, утвердивший, что наши представления о пространстве являются врожденными априорными идеями, формами нашего созерцания, которые абсолютно независимы от действительности, опыта. Согласно Канту положения евклидовой геометрии единственно возможные, неизменимые законы человеческого мышления. Взгляд этот был решительнее всего опровергнут открытием геометрии Бояи—Лобачевского.

Открытие геометрии Бояи—Лобачевского нанесло удар не только идеализму, но и тому неправильному метафизическому взгляду на математику, который отождествлял законы математики данной эпохи с законами природы. Ошибочность этого взгляда очевидна: законы математики отражают закономерности материального мира, однако, отражение — каким бы верным оно ни было — не тождественно с тем, что оно отражает. Как и всякое человеческое познание, математика дает только относительно, приблизительно верную картину действительности, более или менее упрощая ее. Разумеется, это приближение не имеет принципиальных, непреодолимых пределов, точность приближения, достоверность картины, данной математикой об определенных явлениях материального мира, постоянно растет; в этом именно заключается развитие. Однако, материальный мир, в своей полноте, многосторонности, богатстве, математика всегда отражает только более или менее упрощено, схематично. Тот, что хоть немного занимался применением математики к любой области, хорошо знает, что основная проблема приложения математики состоит именно в разрешении вопроса о том, какие соотношения, какие факторы должны быть учтены при описании какого-либо реального явления или процесса в математической форме и какие могут быть пренебрежены, (ведь в действительности явления связаны друг с другом); а также вопрос о том, в какой упрощенной форме должны быть учтены характер явлений, влияние учитываемых факторов, — одним словом, как подобрать математическую модель, отражающую исследованное явление или процесс с точностью, потребованной практикой. (Точность в отдельных случаях может быть исключительно большая.) Именно этим объясняется и то, почему имеются пределы применяемости математического метода. Следует отметить, что нельзя перепутать вопросы правильности и точности математической модели. Математическая модель, отражающая действительную связь явлений с определенной точностью, в общих чертах правильно, в основном необходимо считать правильной даже в том случае, если ее точность может быть увеличена путем дальнейшего уточнения модели. В таких случаях дальнейшее уточнение модели, которым увеличивается точность описания, отражения, не опровергает общей точности приближающей картины, а только лишь дополняет ее. Таково положение например в случае классической и релятивистической механики. На этот важный вопрос указал Риман, который писал:[13] „Связи между элементами картины и оригинала должны совпадать и только в этом случае картина правильна. Правильность картины не зависит от степени точности картины. Если заменить элементы картины группой более тонких элементов, то тем самым растет наше понимание соотношений вещей, без того, чтобы считать первоначальное соображение неправильным." В то время, как идеалистический взгляд ведет к недооценке прилагаемости математических методов, указанный метафизический взгляд, отождествляющий законы материального мира с их отражением в математической форме, ведет в некотором отношении к переоценке прилагаемости математических методов (в других отношениях и метафизический взгляд ведет к недооценке математики): обе неправильных концепции являются источником больших ошибок в практике. Из того, что для описания действительности математика всегда служит только моделями, следует, что математическое изложение, служащее для описания какого-нибудь явления природы, или процесса не определено категорически, а его можно подбирать по-разному и в каждом отдельном случае опыт показывает, какие из них подходящие. Так, например, при описании колебаний струны можно рассматривать струну непрерывной, но можно ее как цепь, состоящая из изолированных и эластично связанных друг с другом материальных точек. Изложение, основывающееся на двух различных моделях, во многих отношениях ведет по существу к одинаковым результатам, однако, в случае возбужденных колебаний, при определенных условиях, возникает принципиальное расхождение. Указанная метафизическая концепция, отождествляющая объективные законы материального мира с отражающей их математической моделью, в области физики позднее переплелась с махизном. Следует знать что махистский взгляд ошибочно отождествляет физи-

[13] Ges. Werke, стр. 491.

ческую действительность с нашими наблюдениями, опытом. Именно на этом пункте махизм присоединяется к неправильному метафизическому взгляду на математику, отождествляющему наш опыт с математическими отношениями, установленными наукой для описания этого опыта. Таким образом, создаются пустые фразы о том, что „материя исчезла и остались лишь уравнения."

Здесь следует указать на еще одно неправильное идеалистическое направление, — агностицизм. Метафизические философы, не знающие сложной диалектики человеческого познания, из того факта, что математическая модель не тождественна с действительностью, а лишь отражает ее в более или менее упрощенной форме, приближаясь к ней, сделали такой неправильный вывод, что закономерности материального мира непознаваем. Такой вывод лишен всякого основания, ведь удивительная точность результатов полученных путем приложения математических методов, например в астрономии, физике, а также огромные успехи, сопровождающие стремления человека и преобразование природы, все это неопровержимо доказывает, что материальный мир познаваем и применение математических методов является бесценным оружием познания. Пренебрежения, допускаемые нами при подборе математической модели, необходимы хотя бы и потому, что суть явлений можно схватить только в том случае, если пренебречь всем несущественным. Вопрос можно осветить с помощью такого сравнения: наука делает подобно знатому, изучающему какую-либо картину то приближаясь к ней, то удаляясь от нее, чтобы изучить ее в деталях и одновременно получать о ней соответствующее общее представление. В этом метод математики в принципе совпадает с методом любой другой науки, хотя разумеется, этот вопрос в математике, как и во всех других отраслях науки, приобретает своеобразный характер. Согласно механическому материализму все явления мира могут быть описаны с полной точностью, с помощью математических уравнений. Сторонником этого взгляда был например Лаплас, который писал: „Если бы какой-либо дух, в данный момент знающий все силы, проницающие природу и относительное положение вещей, составляющих природу, всеобъемлющий ум, умеющий анализировать эти данные, снел бы в формулу движение крупнейших небесных тел и малейшего атома вселенной, для него ничего не осталось бы неопределенным и перед его глазами широко открылось бы будущее, как и прошлое . . ."[14]

Теперь мы уже хорошо знаем, что представление такой универсальной формулы является наивные и математика ставит перед собой гораздо более скромные задачи, зато эти задачи разрешаются ей во всей большей мере. Приведенные выше слова Лапласа содержат и упрощение вопроса необходимости и случайности; высказать свое мнение относительно этого

[14] Essai Philosophique sur les Probabilités (1814).

вопроса я имел возможность в другом месте, поэтому в настоящем докладе этим не буду заниматься.[15] Интересно отметить, что метафизический, взгляд в то время как с одной стороны переоценивает роль и возможности математики, с другой стороны старается ограничить сферу исследований математики. То-есть, тем, что метафизический взгляд не в состоянии понять роль математической абстракции, мешает математике в создании общих абстрактных теорий. Таково было положение в случае комплексных чисел, к которому я еще вернусь; однако, уже здесь отмечаю, что вопрос Общества Яблоновского о том, могут-ли быть построены мнимые величины (на который Янош Бояи послал исключительно глубокий ответ), даже в своей формулировке показывает, что в это время (1837) ограниченный, механистический, метафизический взгляд на математику был еще сильно распространен. Что же касается комплексных чисел, и Энгельс указал, что их нельзя понять метафизическим мышлением и в то же время констатировал: „Что было бы с математикой как низшей, так и высшей, если бы ей запрещено было оперировать с $\sqrt{-1}$?“[16]

В области геометрии в XVII и XVIII вв. господствовал указанный выше механистический взгляд. Это означало, что физическое пространство они отождествляли с пространством евклидовой геометрии. Законы евклидовой геометрии они сиитали физическими законами и не могли даже представить, что математика может заниматься пространством иной структуры. Этот механистический взгляд встретился с философией Канта. Это служит лишним примером того, как метафизическое мышление ведет к идеализму.

Как уже было указано, этот же взгляд господствовал не только в геометрии, но и в других отраслях математики; развитие понятия о числах в большой мере тормозилось метафизической концепцией, отождествившей числа с физическими величинами. Эта же концепция препятствовала созданию понятия комплексных чисел. Господством этой концепции объясняется то, почему понятие комплексного числа встретилось с таким недоверием и почему — по словам Гаусса — окуталось „мистической иглой“. Перелом вековых предрассудков в области геометрии и алгебры произошел в один период, в первой половине XIX века, и эти два революционных преобразования тесно связаны друг с другом. Уже было указано на то, что Янош Бояи сам занимался вопросом комплексных чисел в ответе, данном им на конкурс лейпцигского Яблоновского Общества, в 1837 году.[17] Позднее, в 1850 году Янош Бояи включил в эту же

[15] См. А. Реньи, Принципиальные вопросы теории вероятностей в свете диалектического материализма, *Filozófiai Évkönyv* (1952), стр. 64—97.

[16] Ф. Энгельс, Анти-Дюринг (Госполитиздат, 1938), стр. 126.

[17] П. Штекель, Геометрические исследования Фаркаша и Яноша Бояи (Будапешт, 1914) т. II. стр. 239—249.

работу примечание, согласно которому в связи с его геометрическими исследованиями еще около 1826 года занимался созданием теории комплексных чисел. Мы видели, что и Гаусс занимался проблемой основ геометрии и теорией комплексных чисел в тесной связи друг с другом. В этом отношении не представляют исключения и Н. И. Лобачевский, которого тоже интересовал вопрос теории комплексных чисел, Н. И. Лобачевский об этом пишет:[18] „Употребление $\sqrt{-1}$ в математике столько нужно, что я почел обязанностью говорить более о воображаемых степенях, нежели это обыкновенно делается, стараясь дать ясные понятия и положить твердые основания для вычислений, где берётся в помощь $\sqrt{-1}$.“ Исключительно интересно, что в своем работе, опубликованном в 1834 г., Лобачевский впервые определяет тригонометрические функции чисто аналитическим способом, с помощью их степеннего ряда и строит тригонометрию чисто аналитическим способом, с помощью отношения Эйлера. Хотя степенные ряды тригонометрических функций и указанное соотношение Эйлера были уже давно известны, такой методологической позиции до Лобачевского еще никто не занял, как указывают А. П. Юшкевич и И. Г. Башмакова в недавно вышедшей статье.[19] На этом месте опять совпадают мысли Лобачевского с мыслями Яноша Бояи, у которого в работе „О мнимых величинах“ также находим определение тригонометрических функций с помощью степенных рядов, а именно сразу для комплексные значение переменного. Эту мысль Янош Бояи и Н. И. Лобачевский открыли независимо друг от друга приблизительно в одно и то же время, так же как и мысль неевклидовой геометрии.

Из „Responsio“ Бояи цитируем следующую фразу:[20] „Только такие вещи и, следовательно, такие величины могут служить предметом (разумного) исследования, которые фактически существуют (например, если материальные, то части телесного или внешнего мира или по крайней мере представляемые и возможные).“ Тем самым Бояи занял решительную позицию против ложного идеалистического учения о произвольности создания математических понятий. Правильную позицию Бояи показывает следующая фраза его критики, высказанной им в связи с указанным трудом Гаусса: „... вряд-ли можно оправдать то предложение, что другие виды величин нельзя включить в науку о величинах. Ведь, выше довольно ясно показано, что можно ввести любое количество величин, только это не является необходимым.“

Однако связь между неевклидовой геометрией и современной теорией комплексных чисел имеет не только идеологический и исторический характер, но имеется и тесная предметная связь между ними. Эта связь

[18] В своем труде „Алгебра или вычисления конечных“ (стр. 25).

[19] Историко математические исследования, II. стр. 72—128.

[20] Loc. cit.[17] II. стр. 239—249.

освещается, между прочим, еще в Дополнении к Аппендиксу, написанном Фаркашем Бояи, но содержащем мысли Яноша Бояи. В ходе дальнейшего развития связь эта стала еще яснее и в настоящее время является настолько общеизвестной, что нет необходимости остановиться на ее освещении. Нас прежде всего интересует идеологическая сторона вопроса; то, что неправильные метафизические взгляды на математику, тормозившие развитие, были опровергнуты в первой половине XIX в. в двух областях: по вопросу о понятии пространства и по вопросу о теории комплексных чисел. Оба события имеют революционное значение не только в области математики, но являются также победой материалистического мировоззрения.

После этого рассмотрим, в чем состоит значение открытия геометрии Бояи—Лобачевского с точки зрения материалистического мировоззрения. Это я постараюсь свести в три пункта:

1. Показом того, что возможны несколько равноценных геометрических систем, и только опыть может решить какая из них вернее всего описывает фактическую структуру физического пространства, Бояи и Лобачевский разгромили идеалистические кантовские концепции о врожденном и независимом от опыта характере абсолютного понятия пространства.

2. Тем, что своим открытием они неопровержимо доказали, что следует отличать физическое пространство, в котором мы живем, от различных математических понятий пространства, служащих для описания свойств этого пространства, вульгарный метафизический взгляд, отождествляющий физическую действительность с отражающей ее математической моделью, стал несостоятельным. Тем самым открылась дорога к дальнейшему развитию математического понятия пространства и в то же время к глубокому изучению физической структуры пространства.

3. Своим открытием и всей своей научной деятельностью они эффективно способствовали созданию правильного материалистического взгляда на отношение математики и действительности. Они, между прочим, сознательно боролись против идеалистических взглядов о произвольности основных понятии математики и одновременно боролись против метафизического взгляда, направленного на недооценку и ограничение роли и значения математики.

К этим трем пунктам следует добавить некоторые замечания.

К пункту 1.: Опровержение кантовской концепции бесспорно явилась значительной победой материализма. В книге: „Материализм и эмпириокритицизм“ В. И. Ленин пишет:[21] „Признавая существование объективной реальности, т. е. движущейся материи независимо от нашего сознания, материализм неизбежно должен признавать также объективную реальность времени и пространства, в отличие, прежде всего, от кантианства,

[21] В. И. Ленин, Сочинения, изд. 4-ое, т. 14, стр. 162.

которое в этом вопроса стоит на стороне идеализма, считая время и пространство не объективной реальностью, а формами человеческого созерцания.“ На несколько страниц ниже (стр. 173) В. И. Ленин продолжает: „Одно дело вопрос о том, как именно при помощи различных органов чувств человек воспринимает пространство и как, путем долгого исторического развития, вырабатываются из этих восприятий абстрактные понятия пространства — совсем другое дело вопрос о том, соответствует ли этим восприятиям и этим понятиям человечества объективная реальность, независимая от человечества.“ В. И. Ленин кончает эту мысль такими словами: „Наш „опыт“ и познание все более приспособляются к объективному пространству и времени, все правильнее и глубже их отражая.“ (Стр. 174.)

В связи с этим вопросом возникает проблема: за какую геометрию стоит опыт. Известно, что решением этой проблемы занимался еще Н. И. Лобачевский. Следует отметить, что Лобачевский на основании астрономических измерений старался установить сумму углов треугольника, а влияние погрешностей измерения он старался учесть применением теории вероятностей. С этой целью он провел ценные исследования в области теории вероятностей, в том числе он исследовал распределения суммы равномерно распределенных и независимых случайных величин. Н. И. Лобачевский исходил из того, что если бы выяснилось, что есть такой треугольник, сумма углов которого меньше двух прявых углов, то этим было бы доказано, что в физическом пространстве действительна неевклидова геометрия; это, однако, не противоречило бы древнему опыту, что в масштабах Земли законы евклидовой геометрии в пределах точности измерения действительны, ведь, если абсолютная единица расстояния гиперболической геометрии очень велика, то отклонение от евклидовой геометрии было бы заметно только в том случае, если исследовать геометрические фигуры порядка величины, соответствующего этой единице (в отношении суммы углов положение такое, что дефицит суммы углов пропорционален площади треугольника). Таким образом, невозможно доказать измерениями, что во всей вселенной законы евклидовой геометрии действительны, ведь всегда остается возможность, что в самом деле гиперболическая геометрия действительна, только единица расстояния ее очень велика, даже по сравнению с наибольшим измеренным расстоянием. Как Бояи, так и Лобачевский так ставили вопрос: действительно либо евклидова, либо неевклидова геометрии. В настоящее время мы уже знаем, что неправильно ставить вопрос в такой форме.

Со времени исследований Бояи и Лобачевского геометрия и физика сделали большой шаг вперед. Дальше развивая и обобщая гениальные успехи Бояи и Лобачевского, Риман открыл третий вид геометрии: эллиптическую геометрию. Результаты исследований Римана были использованы Эйнштейном при создании общей теории относительности. Со времени Эйнштейна нам известно, что структура физического пространства зависит от распределения материи, и может быть описана с помощью эллиптической геометрии, соответствующей концентрации материи. Таким образом, исследования Бояи и Лобачевского фактически продвинули дело исследования физического пространства вперед, так как создание геометрии Римана является продолжением пути, начатого Бояи и Лобачевским. Менее известно, что и гиперболическая геометрия имеет большее значение в теории относительности, в связи с трансформацией Лоренца. Ссылаюсь на § 11 замечательной статьи В. Н. Делоне,[22] „Геометрия Н. И. Лобачевского", в которой указано, что трансформация Лоренца нужно рассматривать как движения гиперболического пространства.

К пункту 2. Выяснением понятия физического пространства и геометрического понятия пространства открылась дорога перед дальнейшим развитием геометрии. Геометрия остала быть наукой второстепенного значения и стала равноценным разделом математики, а одновременно с этим значительно расширился круг ее задач. Современная геометрия занимается уже не только описанием обычного физического пространства, понятие пространства истолковывается геометрией в более общем виде, например, геометрия занимается пространствами размерности n, даже пространствами бесконечной размерности и т. д. В связи с этими общими пространствами слово „пространство" в математике в настоящее время употребляется в отвлеченном смысле. Геометрия, алгебра и анализ сливаются в более высокое единство в современном функциональном анализе. В этих исследованиях значительную роль играли и играют и венгерские математики: заслуга создания понятия топологического пространства принадлежит Фридьешу Риссу, он же в значительной мере дальше развил теорию пространств Гильберта. Общие пространства получили важное применение и в физике, так, например, пространство размерности 4 в теории относительности, пространства размерности в связи с понятием так называемого фазового пространства, например, в статистической механике, теория пространства Гильберта в квантовой механике и т. д. Слово „геометрия" в настоящее время включает в себя гораздо больше, чем математическое описание реального физического пространства. Большая Советская Энциклопедия об этом пишет: „Исследование этих абстрактных математических пространств вовсе не имеет своей единственной целью создание запаса гипотетических систем отражения свойств реального пространства. Практические применения современной геометрии чрезвычайно широки. Например состояние механической системы из материальных точек изображается точкой фазового пространства системы, которое, вообще говоря, $6n$-мерно (точка фасового пространства определяется $3n$ декартовыми координатами n материальных точек и $3n$ компонентами из скоростей), и. т. д."

[22] История Наук в СССР.

(ВСЭ, т. 1, стр. 615.) Вот почему мы не можем согласиться с позицией согласно которой геометрия стала одним из разделов физики.[23] Такой подход означал бы возвращение к устаревшей позиции механического материализма. Сторонником такого взгляда может быть только тот, кто в противовес принятому в настоящее время употреблению слова, под геометрией подразумевает физическое исследование физического пространства. Однако, в таком случае утверждение становится ничего не значащим, является тавтологией. Взгляд, согласно которому геометрия стала составной частью физики, по существу означает отрицание математики, как самостоятельной науки; такой взгляд противоречит диалектическому материализму и вреден для развития науки. Соображение о том, что геометрия является составной частью физики, коренным образом противоречит указанным словам тов. И. В. Сталина о геометрии, ведь очевидно, что физика изучает тела не как „тела, лишенные всякой конкретности". Диалектический материализм учит, что предметом математики служат пространственные формы и количественные отношения материального мира. Предметом физики, в свою очередь, является исследование самой материи и законов ее движения. Очевидно, что это разные вещи. Из сказанного следует что физические и математические исследования должны иметь тесную связь, физики и математики должны теснейшим образом сотрудничать. Это необходимо подчеркнуть с одной стороны для того, чтобы отмежеваться от неправильной позиции идеализм проповедущего самоцель математики, а с другой стороны потому, что в этой области у нас еще не установлено достаточно тесное сотрудничество.

Открытие геометрии Бояи—Лобачевского имел с точки зрения развития математики революционное значение и оказало исключительно большое влияние на развитие всей математики. Исследования Бояи и Лобачевского в области аксиоматического построения геометрии положили начало развитию современного аксиоматического метода в математике. В связи с неевклидовой геометрией впервые возник вопрос о польной аксиоматической системы, об отсутствии в ней противоречий, проблема создания модели и т. д. В связи с этим вопросом ссылаюсь на доклад Л. Кальмара. Только отмечаю, что аксиоматический метод приобрел большое значение не только в математике, но и в физике. В Большой Советской Энциклопедии об этом пишется следующее: „Положительное значение аксиоматический метод изложения приобрел в механике и в теоретической физике. Аксиоматическое построение статики восходит еще к Архимеду, всей классической механики — Ньютону. Классическим примером аксиоматического изложения раздела физики может служить термодинамика." (БСЭ, т. 1. стр. 616.)

Очень интересно исследовать, в какой степени сами Бояи и Лоба-

[23] Например Н. В. Марков в статье „Значение геометрии Лобачевского для физики" (Философские вопросы современной физики. Москва 1952, стр. 212) пишет: „Геометрия, следовательно, есть ветвь, отрасль, часть физики".

чевский осознали идеологические последствия собственного открытия. Настоящий доклад прежде всего посвящен идеологическому значению геометрии Бояи—Лобачевского, а не самому мировоззрению Бояи и Лобачевского. Однако, сказанные показывают, что Янош Бояи также, как и Н. И. Лобачевский были в основном воинствующими материалистами; необходимо, конечно, учесть, что они не могли знать диалектического материализма. В мышлении Яноша Бояи были еще метафизические элементы, однако, диалектическое мышление ему не было чуждо. Для примера приведу маленькую цитату. В труде о комплексных числах Бояи пишет: „Возьмем кроме этого какую либо совсем субстанциальную вещь: например нуль, так как ничто есть только лишь отрицательное понятие и если рассмотреть этот вопрос ближе, то легко понять, что невозможно обозначать ничто и подвергать его операциям. Нельзя утверждать и того, что, например, $a+0$ равно a потому, что в этом случае ничего не нужно прибавить к a, так как по этой же причине необходимо было бы утвердить и то, что $\frac{a}{0}=a$. Такой более строгий подход сразу показывает, что метафизика изложения нуль (0) до сих пор опиралась на весьма ложное основание.“ (Стр. 240—241.) Сравним теперь эти слова с словами Энгельса о нуле, в примечаниях к „Диалектике природы“:[24] „Нуль обладает весьма определенным содержанием.“ Сравнение это, кажется, не нуждается в комментариях, также как и высказывания Энгельса и Бояи, выбранные в качестве эпиграфов настоящего доклада, которые яснее всего доказывают материалистические взгляды Бояи.

Сказанным я желал показать, каким огромным, знаменующим эпоху событием истории математикии явилось открытие геометрии Бояи—Лобачевского и какое большое значение оно имеет для борьбы материализма с идеализмом. Мы видели, что открытие геометрии Бояи—Лобачевского явилось новой победой материалистического мировоззрения, разгромившей „бреды, рожденные фантазией“ идеализма. Это же открытие опровергнуло неправильный кантовский взгляд на пространство, и одновременно осветило несостоятельность метафизических взглядов. Таким образом, оно правильно объяснило соотношение математики к действительности вообще. Мы, венгерские математики, дальше продолжая научное наследство гордости венгерской науки Яноша Бояи, высоко поднимаем знамя прогрессивной науки. „Наука знает в своем развитии немало мужественных людей, которые умели ломать старое и создавать новое, несмотря ни на какие препятствия, вопреки всему“ — говорит товарищ Сталин. К числу таких именно людей, относится Янош Бояи. В своей повседневной работе мы должны черпать силу из памяти Яноша Бояи, гениального математикии, смело боровшегося против вековых предрассудков за научную правду.

[24] Диалектика природы, изд. 6-ое (Партиздат, 1935), стр. 115.

О ПОНЯТИИ ПРОСТРАНСТВА В ТОПОЛОГИИ

П. С. АЛЕКСАНДРОВ (Москва)

Одним из основных последствий создания неевклидовой геометрии явилось познание того факта, что система евклидовой геометрии не является единственной мыслимой геометрической системой. Таким образом, возникла проблема изучения различных систем геометрических образов, удовлетворяющих тем или иным аксиомам. Различные такие системы геометрических образов („многообразия“ или „абстрактные пространства“) составляют предмет изучения различных геометрических дисциплин (различных „геометрий“).

В настоящем докладе нас интересуют те аксиоматически введенные геометрические соотношения, которые называются топологическими и изучением которых занимается топология.

Впервые на путь аксиоматического изучения основных топологических понятий предела и непрерывности вступили французский математик Морис Фреше и выдающийся венгерский математик Фридьеш Рисс примерно в одно и то же времяоколо 1906 года. Фреше в своей диссертации ввел такие ныне прочно вошедшие в математику понятия, как понятия метрического пространства, компактности и полноты; кроме того, в диссертации Фреше имеются многочисленные попытки подойти к понятию топологического пространства, т. е. дать аксиоматический подход к основным топологическим соотношениям (предельная точка множества, непрерывность отображения) непосредственно, минуя понятие расстояния. Однако, в этом отношении Фреше успеха не имел: среди многочисленных, предложенных им вариантов понятия топологического пространства ни один не может считаться удавшимся. С другой стороны, приблизительно в это же время Ф. Рисс формулирует аксиомы топологического пространства, непосредственно аксиоматизируя понятие предельной точки и приходя таким образом к классу топологических пространств, который под названием класса T_1-пространств — занял в современной топологии вполне окончательное место.

Итак, первым удачным введением понятия топологического пространства наука обязана Ф. Риссу. При этом весьма примечательно, что Ф. Рисс предложил сразу же прямую аксиоматику топологического пространства, т. е. аксиоматику, касающуюся непосредственно топологически инвариантных соотношений (в данном случае, соотношения между множеством и множеством его предельных точек) и не пользующуюся никаким вспомогательным аппаратом (каким является, например, понятие системы окрестностей). На этом последнем понятии аксиоматика топологических пространств построена *Хаусдорфом* в 1914 году, в его известной книге по теории множеств. Аксиоматика *Хаусдорфа* определяет пространства, известные под названием хаусдорфовых или T_2-пространств. Этот класс является более узким, чем класс введенных *Риссом* T_1-пространств и выделяется среди них более сильной, так называемой хаусдорфовой аксиомой отделимости.

В настоящее время классификация топологических пространств по аксиомам отделимости уже вполне определилась и имеет следующий вид. Понятие топологического пространства в широком смысле слова, не предполагает никаких аксиом отделимости: под топологическим пространством ронимается множество элементов произвольной природы (называемых точками пространства), в котором выделены некоторые подмножества, называемые открытыми множествами данного пространства; при этом предполагаются выполненными следующие *аксиомы топологического пространства*:

сумма любого числа и пересечение конечного числа открытых множеств суть открытые множества; всё пространство и пустое множество являются открытыми.

Замкнутые множества определяются как дополнения к открытым. Очевидно, замкнутые множества удовлетворяют следующим условиям: пересечение любого числа и сумма конечного числа замкнутых множеств замкнуты; всё пространство и пустое множество являются замкнутыми множествами. Отсюда вытекает, что пересечение всех замкнутых множеств пространства R, содержащих данное произвольное множество M, есть наименьшее замкнутое множество $[M]$, содержащее множество M; множество $[M]$ называется *замыканием* множества M, а его точки — *точками прикосновения* множества M.

Операция замыкания, ставящая в соответствие каждому множеству M его замыкание $[M]$, удовлетворяет следующим условием:

1° $[M_1 \cup M_2] = [M_1] \cup [M_2]$,

2° $M \subseteq [M]$,

3° $[[M]] = [M]$,

4° замыкание пустого множества пуста: $[\Lambda] = \Lambda$.

Можно было бы определить топологическое пространство, потребовав, чтобы для каждого подмножества M данного множества R было определено замыкание $[M]$ так, чтобы при этом выполнялись условия 1°—4°; после этого замкнутые множества определились бы, как множества, совпадающие со своим замыканием, а открытые — как множества, дополнительные к замкнутым. Определенные таким образом топологические пространства суть в точности те самые, которые мы определили сначала посредством открытых множеств. Такой способ введения понятия топологического пространства принадлежит Куратовскому (1922), который таким образом и является автором современного наиболее широкого понятия топологического пространства.

Постепенное сужение класса топологических пространств осуществляется посредством введения всё усиливающихся аксиом отделимости. Назовем окрестностью данного множества (данной точки) любое открытое множество, содержащее это множество (это точку). Последовательные аксиомы отделимости формулируются так:

Аксиома T_0 (Колмогоров). Из всяких двух различных точек пространства по крайней мере одна имеет окрестность, не содержащую вторую точку.

Аксиома T_1 (Рисс). Из произвольных двух различных точек пространства каждая имеет окрестность, не содержащую вторую точку.

Аксиома T_2 (Хаусдорф). Любые две различные точки пространства имеют непересекающиеся окрестности.

Аксиома T_3. Каковы бы ни были точка x и замкнутое множество Φ, не содержащие эту точку, точка x и множество Φ имеют непересекающиеся окрестности.

Аксиома T_4. Всякие два непересекающиеся замкнутые множества имеют непересекающиеся окрестности.

Аксиома Рисса T_1 эквивалентна требованию, чтобы всякое множество, состоящее из одной точки, было замкнутым. Поэтому из отделимости (посредством окрестностей) замкнутых множеств не следует отделимость точек. Чтобы не осложнять чрезмерно всю систему, мы называем T_1-пространствами или риссовскими пространствами топологические пространства, удовлетворяющие аксиоме T_1, а T_1-пространства, удовлетворяющие аксиоме T_3 соотв. T_4 называем T_3- соотв. T_4-пространствами. T_3-пространства называются иначе регулярными, а T_4 — нормальными пространствами.

Наряду с отделимостью посредством окрестностей, которая легла в основу только что приведенной классификации топологических пространств, имеется еще другой подход к отделимости, именно так назыв. функциональная отделимость. Мы скажем, что два замкнутых множества Φ_0 и Φ_1 данного T_1-пространства R функционально-отделимы, если существует определенная во всем пространстве R и непрерывная в нем действительная функция f,[1] принимающая во всех точках множества Φ_0 значение 0, во всех точках множеств Φ_1 значение 1 и удовлетворяющая неравенству $0 \leqq f(x) \leqq 1$ во всех точках $x \in R$.

П. С. Урысоном было доказано замечательное предложение, известное под названием леммы Урысона и заключающаяся в том, что в нормальном пространстве всякие два непересекающиеся замкнутые множества функционально отделимы. Так как с другой стороны очевидно, что всякие два функционально отделимые множества отделимы и посредством окрестностей, то в силу леммы Урысона требование функциональной отделимости, примененное ко всем парам непересекающихся замкнутых множеств данного пространства, эквивалентно требованию обычной отделимости посредством окрестностей. Однако, если потребуем только, чтобы каждая точка T_1-пространства была функционально отделима от каждого не содержащего эту точку замкнутого множества, то мы подучим новый, оказавшийся чрезвычайно важным, класс пространств, более узкий, чем класс регулярных, и более широкий, чем класс нормальных пространств. Этот класс пространств был введен А. Н. Тихоновым в 1925 г. под названием класса вполне регулярных пространств. Эти пространства называются также T_ρ-пространствами или тихоновскими пространствами. Значение тихоновских пространств особенно выясняется в связи с теорией бикомпактных пространств, к которой мы еще перейдем; оно связано с тем, что свойство полной регулярности пространства является (в отличие от свойства нормальности), как говорят наследственным, т. е. принадлежа данному пространству принадлежит и всякому лежащему в нем множеству.[2]

Дальнейшая специализация понятия топологического пространства происходит в двух совершенно различных направлениях: первое из них заключается в требовании существования в пространстве счётной базы.[3] Это требование в силу фундаментальной теоремы П. С. Урысона выражает условие, необходимо и достаточно для того, чтобы нормальное пространство было гомеоморфно множеству, лежащему в гильбертовом пространстве.

Если к этому требованию присоединить требование конечной размер-

[1] Отображение f топологического пространства X в топологическое пространство Y называется непрерывным, если полный прообраз всякого открытого в Y множества, есть открытое в X множество; действительная непрерывная функция, определенная в пространстве X есть непрерывное отображение этого пространства в числовую прямую.

[2] Всякое множество M, лежащее в топологическом пространстве R, является топологическим пространством: открытыми в M считаются множества, являющиеся пересечением множества M с открытыми множествами пространства R.

[3] Базой топологического пространства R называется любая система B открытых множеств этого пространства, обладающая тем свойством, что всякое открытое множество пространства R является суммой некоторых множеств, являющихся элементами системы B.

ности,[4] то получим условие, необходимое и достаточное для того, чтобы пространство было гомеоморфно множеству, лежащему в евклидовом пространстве того или иного числа измерений.

Мы получаем таким образом решение первой основной задачи, стоящей перед общей теорией топологических пространств — задачи „логического спуска" от наиболее общих образований — топологических пространств в самом широком смысле слова, к точечным множествам гильбертова и евклидовы пространств: нормальность (и даже уже регулярность)[5] вместе с наличием счётной базы вполне характеризует с топологической точки зрения множества, лежащие в гильбертовом пространстве, а совокупность требований регульярности, наличия счётной базы и конечной размерности сразу дает множества, лежащие в евклидовых пространствах.

С проблемой топологической характеризации „элементарных" точечных множеств (т. е. множеств, лежащих в гильбертовом и евклидовых пространствах) тесно связана вторая большая проблема теории топологических пространств, проблема метризации, т. е. нахождение необходимых и достаточных условий для того, чтобы топологическое пространство было гомеоморфно метрическому. Так как всякое метрическое пространство — нормально, и гильбертово пространство является метрическим, то приведенная только теорема Урысона о том, что всякое нормальное пространство со счётной базой гомеоморфно некоторому множеству, лежащему в гильбертовом пространстве, может быть сформулирована следующим образом: Для того, чтобы пространство со счётной базой было метризуемо (т. е. гомеоморфно метрическому пространству) необходимо и достаточно, чтобы оно было нормально.

Общая проблема метризации — без предположения наличия у пространства счётной базы в течение трех десятилетий не поддавалась решению, несмотря на многочисленные попытки, делавшиеся различными авторами. Правда, формально решения этой проблемы давались, и не один раз, но ни одно из этих решений (первое из них было дано П. С. Александ-

[4] Теория размерности не входит в тему этого доклада, поэтому я ограничиваюсь тем, чтобы напомнить лишь индуктивом определение размерности. Пустому множеству приписывается размерность -1; предположим, что уже определены пространства размерности $n-1$. Мы скажем, что топологическое пространство R имеет размерность n, если у него существует база, границы элементов которой имеют размерность $\leqq n-1$ и если в то же время в данном пространстве нет базы, границы элементов которой имели бы размерность $n-2$. Под границей какого-либо открытого множества G в топологическом пространстве R понимается множество всех точек прикосновения множества Γ, не принадлежащих этому множество, т. е. множество $[\Gamma]\setminus\Gamma$.

[5] Как показал А. Н. Тихонов, всякое регулярное пространство со счётной базой нормально.

ровым и П. С. Урысоном в 1923 г.) не могло считаться удачным и окончательным, в виду громоздкости и искусотвенности предложенных условий. Окончательное, во всех отношениях исчерпывающее решение было дано в 1950 г. молодым советским ученым Ю. Смирновым. Назовем какую-либо систему множеств, лежащих в данном топологическом пространстве, локально конечной, если каждая точка пространства имеет окрестность пересекающуюся лишь с конечным числом элементов данной системы. Теорема Смирнова формулируется так: Для того, чтобы топологическое пространство було метризуемо, необходимо и достаточно, чтобы оно было регулярно и имело базу, которая может быть представлена как сумма не более чем счётного числа локально конечных систем открытых множеств. Этот замечательный результат содержит в качестве частного случая метризационную теорему Урысона: так как счётная база какого-либо пространства, естественно, может быть представлена как сумма счётного числа систем, каждая из которых состоит лишь из одного элемента, то для метризуемости пространства со счётной базой необходима и достаточна его регулярность.

Необходимость метризационного условия Ю. Смирнова сразу следует из ранее доказанного Стоном свойства паракомпактности всякого метрического пространства — свойства, заключающегося в том, что в каждое покрытие[6] метрического пространства можно вписать локально конечное покрытие. Достаточность доказывается способом, представляющим и некоторый самостоятельный интерес. Именно, Ю. Смирнов показывает, что всякое удовлетворяющее его условиям топологическое пространство R данного веса[7] τ гомеоморфно некоторому множеству, лежащему в обобщенном гильбертовом пространстве[8] H^{τ} веса τ. Искомое топологическое отображение

[6] Под покрытием здесь и во всем дальнейшем понимается система открытых множеств, сумма которых есть всё данное пространство. Говорят, что покрытие β вписано в покрытие α, если каждый элемент покрытия β содержится хотя бы в одном элементе покрытия α.

[7] Весом топологического пространства называется наименьшее такое кардинальное число τ, что в пространстве имеется база мощности τ. Таким образом, пространства со счётной базой суть пространства веса $\aleph_0$.

[8] Обобщенное гильбертово пространство H^{τ} веса τ строится так. Его точки суть функции $\xi(\theta)$ определенные на некотором произвольном множестве Θ мощности τ и удовлетворяющие следующим условиям:

а) значения функции $\xi(\theta)$ суть действительные числа, которые могут быть отличны от нуля не более чем для счётного множества значений аргумента θ;

б) ряд $\sum\limits_{\theta\in\Theta} (\xi(\theta))^2$ сходится. Как и в случае обыкновенного гильбертова пространства для двух точек ξ и η ряд $\sum\limits_{\theta\in\Theta} (\xi(\theta)-\eta(\theta))^2$ сходится и неотрицательное число $\sqrt{\Sigma(\xi(\theta)-\eta(\theta))^2}$ называется расстоянием между точками ξ и η. Легко проверяется, что это определение удовлетворяет всем аксиомам расстояния в метрическом пространстве.

пространства R в H^{τ} строится следующим образом. Прежде всего из метризационного условия Ю. Смирнова выводится, что пространство R не только регулярно, но и нормально, и что в нем всякое замкнутое множество является пересечением счётного числа открытых множеств, и следовательно множеством нулей некоторой непрерывной функции.

Теперь возьмем базу γ пространства R, являющуюся суммой счётного числа локально конечных систем $\gamma_n = \{\Gamma_{n\alpha}\}$ открытых множеств $\Gamma_{n\alpha}$. Через Θ обозначим множество всех пар $\theta = (n\alpha)$, которыми обозначены элементы $\Gamma_{n\alpha}$ базы γ. Так как R нормально и каждое замкнутое в R множество является множеством нулей некоторой непрерывной в R функции, то для каждого $\Gamma_{n\alpha}$ можно построить непрерывную функцию $p_{n\alpha}$, удовлетворяющую неравенству $0 \leq p_{n\alpha}(x) \leq 1$ для всех $x \in R$, и обращающуюся в нуль во всех точках множества $R \setminus \Gamma_{n\alpha}$, и только в этих точках. Так как система γ_n локально конечна, то при данном n в каждой точке $x \in R$ лишь конечное число функций $p_{n\alpha}$ отлично от нуля. Поэтому сумма $1 + \sum\limits_{\alpha} p_{n\alpha}^2(x)$ имеет смысл для любой точки $x \in R$ и представляет положительную, непрерывную во всем пространстве R функцию. А потому и функции

$$q_{n\alpha}(x) = \frac{p_{n\alpha}(x)}{\sqrt{1 + \sum\limits_{\alpha} p_{n\alpha}^2(x)}}$$

определены и непрерывны во всем R, при чем

$$\sum_{\alpha} q_{n\alpha}^2(x) < 1, \qquad \sum_{\alpha} \big(q_{n\alpha}(x) - q_{n\alpha}(y)\big)^2 < 2.$$

Положив теперь $\xi_{n\alpha}(x) = \dfrac{1}{2^n} q_{n\alpha}(x)$, видим, что система $\xi_{n\alpha}(x)$, где x произвольная точка пространства R, а $\theta = (n\alpha)$ пробегает всё множество Θ, есть точка пространства H^{τ}, которую и обозначаем через $f(x)$. Определенное таким образом отображение f пространства R в H^{τ} оказывается топологическим, чем и завершается доказательство теоремы Ю. Смирнова. Заметим, что легко построить пример хаусдорфова нерегулярного пространства, имеющего базу, которая может быть представлена как сумма счётного числа локально конечных систем.

Среди многочисленных работ, написанных за последние годы по вопросам абстрактной топологии (как иногда называют теорию топологических пространств) большинство так или иначе связано с понятием бикомпактного пространства. Как известно, бикомпактным называется такое топологическое пространство, в котором выполнена так наз. теорема Бореля—Лебега, т. е. в котором всякая система открытых множеств, дающих в сумме всё пространство, содержит конечную подсистему, также покрывающую всё пространство („каждое покрытие содержит в себе конечное покрытие“). Бикомпактные топологические пространства могут быть определены и как такие топологические пространства, в которых каждая (не только счётная) вполне упорядоченная система убывающих непустых замкнутых множеств имеет непустое пересечение, а также как пространства, в которых каждое бесконечное множество имеет хотя бы одну точку полного накопления. При этом под точкой полного накопления бесконечного множества M понимается точка, каждая окрестность которой пересекается с множеством M по подмножеству, имеющему ту же мощность, как и всё множество M.

Среди бикомпактных топологических пространств наиболее интересными и важными являются бикомпактные хаусдорфовы пространства, называемые просто бикомпактами.

Все бикомпакты являются нормальными пространствами и могут быть охарактеризованы как нормальные пространства, замкнутые во всяком объемлющем их нормальном пространстве; более того: они замкнуты во всяком объемлющем их хаусдорфовом пространстве, и регулярное пространство, замкнутое во всяком объемлющем его хаусдорфовом (или даже только во всяком объемлющем его регулярном пространстве) оказывается бикомпактом. Хаусдорфово пространство, замкнутое во всяком объемлющем его хаусдорфовом пространстве может не быть бикомпактным. Однако, если это свойство замкнутости во всяком хаусдорфовом пространстве потребовать не только от самого данного хаусдорфова пространства R, но и от всякого его замкнутого подмножества, то снова R окажется бикомпактом.[9]

Основы теории бикомпактных пространств были заложены в мемуаре П. С. Александрова и П. С. Урысона „О компактных топологических пространствах“, еще 30 лет тому назад. Дальнейшее развитие этой теории находим прежде всего в работах А. Н. Тихонова, который ввёл свое известное определение топологического произведения любого числа топологических пространств и доказал важную теорему о том, что произведение любого числа бикомпактов является бикомпактом. Тихонов в частности ввёл в рассмотрение свои „кубы“, т. е. бикомпакты, являющиеся топологическими произведениями любого данного кардинального числа отрезков. Он доказал, что эти кубы обладают следующим свойством универсальности: всякое вполне регулярное пространство данного произвольного веса τ гомеоморфно некоторому множеству, лежащему в тихоновском кубе того же веса, т. е. топологическом произведении τ экземпляров отрезка $[0, 1]$.

Помня, что все бикомпакты являются нормальными пространствами и что свойство полной регулярности наследственно, мы выводим из только что сформулированной тихоновской теоремы „о погружении“ дальнейший

[9] Эта трудная теорема в виде гипотезы, высказанная П. С. Александровым и П. С. Урысоном, впервые была доказана М. Стоном; более простое, но всё же остающееся довольно трудным доказательство было впоследствии дано С. В. Фоминым.

важный результат: Всякое вполне регулярное пространство и только вполне регулярное пространство гомеоморфно множеству, лежащему в бикомпакте.

Теорема Тихонова о погружении является обобщением теоремы Урысона о возможности топологически погрузить всякое (вполне) регулярное пространство со счетной базой в гильбертов фундаментальный параллелепипед, т. к. этот последний является тихоновским кубом веса $\aleph_0$. Теорема Урысона, её обобщение, данное Тихоновым и метризационная теорема Смирнова показывают, с какой принудительной силой бесконечномерные координатные пространства, а вместе с ними — действительное число — вторгаются в казалось бы совершенно независимую от действительных чисел область абстрактной топологии; общая основа для этого заключается в замечательном предложении, принадлежащем Урысону и названном выше леммой Урысона.

Понятие топологического умножения в смысле Тихонова привело к рассмотрению других замечательных пространств, определяемых как топологические произведения. Среди них укажем на пространство D^τ — дисконтинуум веса τ — т. е. произведение τ экземпляров пространства, состоящего из двух изолированных точек („простое двоеточие“) и на пространство F^τ, являющееся произведением τ экземпляров пространства, называемого связным двоеточием. Под этим названием разумеют единственное связное T_0-пространство, состоящее из двух точек: в нем одна из двух его точек образует единственное собственное открытое подмножество (вторая точка, следовательно, образует единственное собственное замкнутое подмножество). Пространства D^τ и F^τ обладают следующими свойствами универсальности: всякое T_0-пространство веса τ гомеоморфно некоторому подмножеству пространства F^τ и следовательно,[10] является взаимнооднозначным и непрерывным образом некоторого множества, лежащего в пространстве D^τ; всякий бикомпакт веса τ является непрерывным образом некоторого замкнутого множества, лежащего в пространстве D^τ.

Как известно, всякий компакт, т. е. бикомпакт счетного веса, является непрерывным образом канторова дисконтинуума $D^{\aleph_0}$; при $\tau > \aleph_0$ не всякий бикомпакт веса τ является непрерывным образом всего пространства D^τ; те бикомпакты, которые являются непрерывными образами дисконтинуумов D^τ, называются диадическими, они очевидно, образуют минимальный класс пространств, содержащих пару изолированных точек и замкнутый по отношению к операциям непрерывного отображения и топологического умножения. Этот класс заслуживает специального изучения: диадические бикомпакты обладают многими замечательными свойствами, из которых

[10] Очевидно, всё пространство F^τ есть взаимно однозначный и непрерывный образ пространства.

некоторые установлены Н. А. Шаниным. Например, всякое непрерывное упорядоченное множество, которое в своей естественной порядковой топологии является диадическим бикомпактом подобно отрезку числовой прямой; диадический бикомпакт не может быть представлен в виде суммы вполне упорядоченной системы (любой мощности) растущих нигде не плотных подмножеств и т. д.

Упомянутый выше пример связного двоеточия показывает, что если понятие топологического пространства брать в достаточной общности (а именно, рассматривать T_0-пространства), то и конечное множество может иметь нетривиальную топологию. Конечные T_0-пространства и вообще T_0-пространства, в которых не только сумма, но и пересечение открытых множеств (взятых в любом конечном или бесконечном числе) открыты называются дискретными пространствами. Частным случаем дискретных пространств являются симплициальные комплексы.

* * *

Бикомпакты замечательны тем, что все они и только они могут быть получены посредством своеобразного предельного перехода, отправляясь от конечных дискретных пространств, и даже от конечных симплициальных комплексов. Это обстоятельство имеет большое принципиальное значение, так как именно оно явилось основой перенесения на бикомпакты и прежде всего на компакты основных понятий и методов комбинаторной топологии комплексов.

Предельный переход, который здесь имеется в виду, был построен мною в 1925—1929 г. г. сначала для компактов; он был потом обобщен А. Г. Курошем для случая произвольных бикомпактов. Так называемый „проекционный спектр“, составляющий сущность этого аппроксимационного процесса, получил дальнейшее развитие в работах Фройденталя, Стинрода, Лефшеца и мн. др. и в этом расширенном виде стал постоянно действующим орудием не только топологии, но и теории топологических групп и её приложений.

Вообразим себе так называемое направленное[11] множество топологических пространств X_α при чем, если в этом множестве X_β следует за X_α (что мы записываем просто: $\beta > \alpha$), то дано непрерывное отображение ϖ_α^β пространства X_β в пространство X_α, называемое проекцией и удовлетворяющее условию транзитивности: если $\gamma > \beta > \alpha$, то $\varpi_\alpha^\gamma = \varpi_\alpha^\beta \varpi_\beta^\gamma$.

Проекционным спектром называется направленное множество пространств X_α вместе со связывающими эти пространства проекциями ϖ_α^β и обозначается через $\{X_\alpha, \varpi_\alpha^\beta\}$.

[11] Направленным множеством называется частично упорядоченное множество, в котором к любым двум элементам имеется третий, следующий за ними обоими.

Назовем нитью спектра всякое множество точек $x_\alpha \in X_\alpha$, по одной[12] из каждого X_α, удовлетворяющее условиям: при $\beta > \alpha$ всегда $\overline{\omega}_\alpha^\beta x_\beta = x_\alpha$. Нити образуют топологическое пространство: взяв в каком-либо X_α произвольное открытое множество Γ_α, обозначим через O_{Γ_α} множество всех нитей, „проходящих через Γ_α“, т. е. множество тех нитей $\xi = \{x_\alpha\}$, у которых $x_\alpha \in \Gamma_\alpha$.

Множества O_{Γ_α} и всевозможные их суммы объявляются открытыми множествами пространства всех нитей данного спектра. Это пространство нитей и называется пределом данного проекционного спектра; оно обозначается через $\lim\{X_\alpha, \overline{\omega}_\alpha^\beta\}$.

Существуют различные частные случаи и видоизменения этого понятия. Один из важнейших частных случаев получается, если предположить, что все X_α суть бикомпакты. Тогда, как не трудно видеть, предельное пространство $X = \lim\{X_\alpha, \overline{\omega}_\alpha^\beta\}$ является замкнутым множеством в топологическом произведении всех пространств X_α и, следовательно, является бикомпактом.

Особенно важен случай, когда все X_α являются бикомпактными топологическими группами, а проекции $\overline{\omega}_\alpha^\beta$-непрерывными гомоморфизмами. Тогда и предельное пространство является группой при покоординатном умножении: если $\xi = \{x_\alpha\}$, $\eta = \{y_\alpha\}$ суть две нити, то $\xi\eta = \{x_\alpha y_\alpha\}$. Этот способ построения новых групп, отправляясь от заданных групп X_α, широко применяется в частности при определении различных аналогов групп Бетти. Находит он идругие применения. Пусть, например, α пробегает все натуральные значения $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$, и каждое X_α есть пространство, состоящее из 2^n изолированных точек, каждая из которых есть комбинация

$$(i_1 \ldots i_n)$$

в которой все i_k равны 0 или 1. Проекции определяем так:

$$\overline{\omega}_n^{n+1}(i_1 \ldots i_{n+1}) = (i_1 \ldots i_n).$$

Предельное пространство есть канторово совершенное множество.

Во втором примере положим снова $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$. Пространство X_α есть окружность $|z| = 1$ на плоскости комплексного переменного. Считая фиксированной последовательности целых чисел $m_\alpha \geqq 2$,

$$m_1, m_2, \ldots, m_\alpha, \ldots$$

определяем для каждого α проекцию как отображение $X_{\alpha+1}$ на X_α заданное формулой

$$z_\alpha = z_{\alpha+1}^{m_\alpha}.$$

Предельное пространство есть наиболее общий соленоид — одномерный континуум в трехмерном пространстве, являющийся пересечением после-

[12] Без ограничения общности можно предположить, что пространства X_α не имеют попарно общих точек.

довательно вложенных друг в друга кольцевидных тел C_α (гомеоморфных замыканию внутренней области обыкновенного тора), из которых $C_{\alpha+1}$, находясь внутри C_α, обегает его n_α раз.

Другой крайний случай проекционных спектров, получим, предполагая, что все X_α суть конечные дискретные T_0-пространства. Тогда и предельное пространство $X = \lim\{X_\alpha, \overline{\omega}_\alpha^\beta\}$, которое в этом случае будем называть полным пределом спектра — является T_0-пространством. Однако, здесь наряду с этим полным пределом оказывается интересным рассматривать еще и другие предельные образования, а именно так наз. нижний и верхний пределы. Ограничимся определением первого из них. Скажем, что нить $\xi = \{x_\alpha\}$ объемлет нить $\xi' = \{x'_\alpha\}$, если для каждого α имеем[13] $x'_\alpha \in [x_\alpha]$. Называем нить минимальной, если она не объемлет никакую отличную от неё нить. Подмножество полного предела данного спектра, состоящее из всех минимальных нитей, называется нижним пределом спектра. Нижний предел проекционного спектра также является бикомпактным пространством. Это бикомпактное пространство оказывается хаусдорфовым, если спектр удовлетворяет следующему условию отделимости:

(H). *Каковы бы ни были две минимальные нити* $\xi' = \{x'_\alpha\}$ *и* $\xi'' = \{x''_\alpha\}$, *можно найти такое* α, *что в* X_α *не существует никакой точки* X_α, *замыкание которой содержит обе точки*[14] X'_α *и* X''_α.

Итак, нижний предел спектра удовлетворяется условию (H) есть бикомпакт.

Можно доказать и обратное утверждение, а именно, что всякий бикомпакт является нижним пределом некоторого спектра, удовлетворяющего только что сформулированному условию отделимости (H).

Этот спектр строится так. Рассмотрим какую-либо конечную систему попарно не пересекающихся открытых множеств $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ пространства R, имеющих всюду плотную в R сумму. Точками дискретного пространства X_α являются по определению всевозможные выражения вида $(\alpha; i_1, \ldots, i_r)$, где $[\Gamma_{\alpha i_1}] \cap \cdots \cap [\Gamma_{\alpha i_r}] \neq \Lambda$ (как всегда, Λ—пустое множество).

Чтобы ввести в X_α топологию (или что тоже самое, чтобы сделать множество X_α частично упорядоченным), полагаем

$$(\alpha; j_0, \ldots, j_q) \leqq (\alpha; i_0, \ldots, i_p)$$

если $i_0, \ldots, i_p$ суть некоторые из $j_0, \ldots, j_q$.

[13] Рассмотрение конечных дискретных пространств в точности эквивалентно рассмотрению конечных частично упорядоченных множеств: полагаем $x'_\alpha \leqq x_\alpha$, если точка X'_α данного дискретного пространства X_α входит в замыкание множества, состоящего из точки X_α того же пространства.

[14] Т. е. не существует такого X_α, для которого было бы одновременно $X_\alpha \geqq x'_\alpha$ и $X_\alpha \geqq x''_\alpha$ (если рассматривать X_α как частично упорядоченное множество).

Полагаем далее $\beta > \alpha$, если система $\beta = \{\Gamma_{\beta 1}, \ldots, \Gamma_{\beta t}\}$ является подразделением системы $\alpha = \{\Gamma_{\alpha 1}, \ldots, \Gamma_{\alpha s}\}$, т. е. каждое $\Gamma_{\beta j}$ содержится в некотором (и тогда, очевидно, единственном)[15] $\Gamma_{\alpha i}$.

Проекции определяются так: каждому $\Gamma_{\beta j}$ соответствует единственное содержащее его $\Gamma_{\alpha i}$, что и дает нам

$$\varpi_{\alpha}^{\beta}(\beta, j) = (\alpha, i).$$

После этого полагаем:

$$\varpi_{\alpha}^{\beta}(\beta; j_0, \ldots, j_q) = (\alpha, \varpi_{\alpha}^{\beta}(\beta, j_0), \ldots, \varpi_{\alpha}^{\beta}(\beta, j_q))$$

(совпадающие элементы справа считаются лишь один раз).

Это определение завершает построение спектра $\{X_\alpha, \varpi_{\alpha}^{\beta}\}$; он называется спектром данного пространства R; при определении этого спектра мы бикомпактностью пространства R не пользовались; если R—бикомпакт, то его спектр имеет нижний предел, гомеоморфный пространству R.

Среди различных вопросов теории бикомпактных пространств наибольшее развитие в последние 10—15 лет получили вопросы, касающиеся бикомпактных расширений топологических, а именно, вполне регулярных пространств.

Из основного результата Тихонова о возможности погрузить всякое вполне регулярное пространство R в бикомпакт в тихоновский куб того же веса, что и данное пространство R, следует, что *всякое вполне регулярное пространство R имеет бикомпактное расширение bR*, т. е. бикомпакт, содержащий данное пространство в качестве всюду плотного множества: для получения бикомпактного расширения bR имеющего тот же вес τ, что и само R, достаточно погрузить R в тихоновский куб веса τ и взять там замыкание.

В связи с этим возникает вопрос об изучении всех вообще бикомпактных расширений данного вполне регулярного пространства R, и этот вопрос послужил предметом большой и интересной теории. Прежде всего, бикомпактные расширения данного вполне регулярного R образуют естественным образом частично упорядоченное множество: расширение b_2R следует за расширением b_1R, если существует непрерывное отображение пространства b_2R на b_1R, оставляющее неподвижным все точки R. Оказывается, в частично упорядоченном таким образом множестве всех бикомпактных расширений пространства R имеется наибольший элемент-бикомпактное расширение αR, обладающее тем свойством, что оно при неподвижных точках R может быть непрерывно отображено на всякое бикомпактное расширение пространства R. Это максимальное (или *чеховское*) бикомпактное расширение αR однозначно определено своим свойством

[15] Тогда, как легко видеть, сумма всех $\Gamma_{\beta j}$, содержащихся в данном $\Gamma_{\alpha i}$, есть множество, всюду плотное в этом $\Gamma_{\alpha i}$.

максимальности. Построено оно может быть следующим образом. Систему γ открытых множеств Γ пространства R назовем правильной, если к каждому элементу Γ этой системы можно в системе γ найти элемент Γ', подчиненный элементу Γ, т. е. вполне регулярно включенный в Γ (в том смысле, что Γ' и $R \setminus \Gamma$ функционально отделимы в R). Центрированная[16] и правильная система открытых множеств пространства R, не содержащая ни в какой отличной от нее центрированной правильной системе, называется концом пространства R. Легко видеть, что системы всех окрестностей произвольной точки x пространств R есть конец. Отождествляя каждую точку пространства с концом, состоящим из ее окрестностей, можем считать пространство R подмножеством множества всех концов этого пространства. В это множество вводится топология следующим образом: пусть Γ—произвольное открытое в R множество; обозначим через O_Γ множество всех концов, имеющих множество Γ одним из своих элементов. Множество O_Γ и всевозможные суммы таких множеств суть по определению открытые множества в пространстве αR всех концов пространства R. Мы уже видели, что само пространство R можно рассматривать как множество, лежащее в пространстве αR. Это включение пространства R в αR есть включение топологическое, и при этом R оказывается всюду плотным множеством пространства αR. Таким образом αR есть бикомпактное расширение пространства R и это-то расширение αR и оказывается максимальным.[17]

Если усилить понятие подчинения, т. е. считать подчиненными множеству Γ не все регулярно включенные в него открытые множества Γ, а только некоторые из них так, чтобы при этом соблюдались некоторые естественные требования, то можно — подбирая каждый раз надлежащее правило подчинения — получить не только максимальное, но и любое наперед заданное бикомпактное расширение пространства R.

Заметим наконец, что нижний предел спектра любого нормального пространства R есть максимальное бикомпактное расширение αR пространства R.

В настоящее время бикомпактные расширения данного вполне регулярного пространства привлекают к себе внимание с совершенно новой точки зрения, а именно с точки зрения так называемой равномерной топологии. Известно предложенное А. Вейлем (A. WEIL) определение равномерных пространств („равномерных структур“). Это определение не кажется мне исчерпывающим и вполне удовлетворительным уже хотя бы по одному

[16] Система множеств называется центрированной, если, любая конечная ее подсистема имеет непустое пересечение.

[17] Первое построение пространства αR было дано Э. Чехом (Ed. ČECH) в 1937 году; проведенное здесь построение, совершенно отличное от построения Э. Чеха, предложено мною в 1939 году.

тому, что в основе его лежит некоторая специальная конструкция, аналогичная системе окрестностей (базе) топологического пространства. От этого недостатка свободно предложенное В. А. Ефремовичем понятие пространства близости, в основе которого лежит понятие близости между двумя множествами (совершенно так же, как в основе обычной топологии лежит понятие близости точки к множеству: „точка близка к множеству, если входит в его замыкание"). Итак, множество P каких либо элементов, называемых точками, есть по определению пространство близости, если между его подмножествами введено отношение близости, т. е. любых двух множеств $A \subseteq P$, $B \subseteq P$ установлено, являются ли они „близкими" между собою или нет (если два множества не близки, то они называются далекими). При этом предполагается, что выполнены следующие условия: „аксиомы пространств близости" (предложенные В. А. Ефремовичем):

1. Если множество A близко к множеству B, то и B близко к A.

2. Сумма двух множеств A_1 и A_2 близка к множеству B тогда и только тогда, когда по крайней мере одно из множеств A_1, A_2 близко к множеству B.

3. Две точки a и b близки тогда и только тогда, когда они совпадают.

4. Всё множество P далеко от пустого множества.

5. Любые два далеких множества A и B могут быть заключены в два непересекающихся множества U и V, такие, что A далеко от $P \setminus U$ и B далеко от $P \setminus V$.

Замечание: Множество $U \supseteq A$, удовлетворяющее тому условию, что A далеко от $P \setminus U$, называется „близостной окрестностью" множества A.

Сам основатель теории В. А. Ефремович показал, что во всякое пространство близости естественно вводится топология (точка p, близкая к множеству A, называется точкой прикосновения множества A), и что в этой топологии всякое пространство близости является вполне регулярным топологическим пространством. Обратно, во всяком вполне регулярном пространстве может быть введена и вообще говоря, многими различными способами близость между множествами[18] так, что будут выполнены условия 1—5. Таким образом естественный подход к пространствам близости заключается в следующем: Дано вполне регулярное пространство R; найти все „растущие на нем" пространства близости (т. е. все те пространства бли-

[18] Одним из способов введения близости во вполне регулярном пространстве R заключается в том, что два множества объявляются далекими, если они функционально отделены в R.

зости P, состоящие из точек пространства R, естественная топология в которых дает нам именно пространство R).

Естественно назвать равномерно-непрерывным отображением пространства близости X в пространство близости Y всякое отображение, при котором два множества, близкие в X переходят в множества, близкие в Y. Ясно, что такие отображения будут и непрерывными в смысле естественной топологии пространств близости X и Y. Частным случаем пространств близости являются метрические пространства (в которых близки множества, находящиеся на расстоянии равном нулю) и топологические группы. При этом, как заметил В. А. Ефремович, обычная равномерная непрерывность отображений метрических пространств совпадает с равномерной непрерывностью в смысле сохранения близости.

Всякая равномерная структура в смысле А. Вейля также однозначно определяет близость, но на одном и том же пространстве близости растут, вообще говоря, многие равномерные пространства. Таким образом, взаимная связь понятий: вполне регулярное пространство, пространство близости, равномерное пространство заключается, если так можно выразиться, в последовательно расщеплении первого понятия во второе и второго в третье.

Наиболее интересным и далеко продвинутым представляется вопрос о взимоотношениях между топологическими (вполне регулярными) пространствами и пространствами близости. Здесь положение вещей привело в полную ясность благодаря следующей теореме Ю. Смирнова: *пространства близости, растущие на данном вполне регулярном пространстве R, находятся во взаимно-однозначном соответствии с бикомпактными расширениями пространств R: каждому бикомпактному расширению bR пространства R соотвествует вполне определенное пространство близости P_b, растущее на R, именно, два множества считаются близкими в P_b, если их замыкания в bR пересекаются; при этом, таким путем можно получить все пространства близости, растущие на R, каждое один лишь раз.* Естественно считать пространство близости $P_{b''}$ следующим за пространством близости $P_{b'}$ (оба пространства растут на одном и том же топологическом пространстве R), если тождественное отображение пространства $P_{b''}$ на $P_{b'}$ равномерно непрерывно. Оказывается, это следование в точности соответствует следованию бикомпактных расширений: пространство близости $P_{b''}$ следует за $P_{b'}$ тогда и только тогда, когда бикомпактное расширение $b''R$, порождающее $P_{b''}$, следует (в ранее установленном смысле) за бикомпактным расширением $b'R$, порождающим $P_{b'}$.

Попутно Ю. Смирнов отвечает и на вопрос: Когда данное вполне регулярное пространство R имеет лишь единственное бикомпактное расширение или (что в силу сказанного — одно и то-же), допускает лишь единственное определение близости. Оказывается, что условие бикомпактности R будучи тривиальным образом достаточным,[19] отнюдь не является необходимым. Необходимое-же и достаточное условие для того, чтобы данное пространство R имело единственное бикомпактное расширение заключается в том, чтобы в R не существовало никакой пары функционально отделимых небикомпактных замкнутых множеств: например, пространство всех порядковых чисел $< \omega_1$ (в их естественной порядковой топологии) не будучи бикомпактным, имеет тем не менее единственное бикомпактное расширение и следовательно допускает единственное определение близости.

Большое принципиальное значение установленного Ю. Смирновым взаимно-однозначного соответствия между бикомпактными расширениями данного вполне регулярного пространства R и растущими на R пространствами близости заключается в осуществленной таким образом полной редукции понятия пространства близости к более старому понятию бикомпактного расширения. Эта редукция не мешает, конечно, существованию связанной с пространствами близости специальной проблематики (отметим, например, что, как показал В. А. Ефремович, евклидова и гиперболическая плоскость представляют собою два различных пространства близости, растущих на одной и той же „топологической плоскости").

Из основной теоремы Смирнова вытекает также, что пространство близости, замкнутое во всяком объемлющем его пространстве близости, необходимо бикомпактно. Это показывает, что вопрос об определении полных пространств близости не может решаться по аналогии с метрическими пространствами, и требует к себе отдельного подхода. Задача определения класса полных метрических пространств также решена Смирновым, но мы не можем сейчас входить в рассмотрение этого вопроса. Отметим только следующий интересный результат, касающийся полных в обычном смысле слова метрических пространств: Для того, чтобы метрическое пространство R было полным, необходимо и достаточно, чтобы в бикомпактном расширении, порождающем данное метрическое пространство как пространство близости, только точки самого R удовлетворяли первой аксиоме счетности.

Я не имею сейчас времени касаться доказанных Смирновым теорем о взаимоотношениях между пространствами близости и равномерными пространствами в смысле А. Вейля и могу лишь отослать интересующихся этим вопросом к оригинальным публикациям.

Заканчивая этот по необходимости краткий обзор, я надеюсь, что он все же дает представление о наличии в настоящее время в теории топологических пространств интересных направлений исследования, среди которых исследования, связанные с пространствами близости, кажутся мне особенно заслуживающими дальнейшего развития.

[19] Единственность определения близости на бикомпакте была в самом начале установлена В. А. Ефремовичем.

ЛИТЕРАТУРА

[1] П. С. Александров, О понятии пространства в топологии, Успехи Матем. Наук, **2/1** (1947), стр. 5—57.
[2] В. А. Ефремович, Инфинитезимальные пространства, ДАН СССР, **76** (1951), стр. 341—343.
[3] В. А. Ефремович, Геометрия близости 1, Математический Сборник, **31** (1952), стр. 189—200.
[4] Ю. М. Смирнов, О метризации топологических пространств, Успехи Матем. Наук, **6/6** (1951), стр. 100—111.
[5] Ю. М. Смирнов, Отображение систем открытых множеств, Матем. Сборник, **31** (1952), стр. 152—166.
[6] Ю. М. Смирнов, ДАН СССР, **84** (1952), стр. 895—898.
[7] N. Bourbaki, *Actualités scientifiques et industrielles,* **858** (1942).

СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ НА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЯХ И ПРИЛОЖЕНИЕ ИХ К ВАРИАЦИОННЫМ ЗАДАЧАМ

С. М. НИКОЛЬСКИЙ (Москва)

1. Мы начнем с того, что рассмотрим простейшую задачу Дирихле.

Требуется найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую внутри заданной области G уравнению

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

и имеющую на границе Γ области предельные значения, равные заданной функции $f(s)$, где s длина дуги Γ.

В свое время еще Риман предположил вариацонный метод решения этой задачи, заключающийся в том, что искомая гармоническая функция находится как функция, которая образует в минимум интеграл Дирихле

$$D[F] = \iint\limits_G \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 \right\} dx\, dy \tag{2}$$

среди всевозможных (допустимых) функций $F(x, y)$, определенных на области G, имеющих интегрируемые на G вместе со своими квадратами частные производные и удовлетворяющих заданным граничным условиям

$$F|_s = f(s). \tag{3}$$

В дальнейшем, как известно, этот метод встретил возражение со стороны Вейерштрасса. Вейерштрасс привел пример граничной непрерывной функции $f(s)$, которой соответствует гармоническая функция u с бесконечным интегралом $D[u]$ Дирихле и для которой, следовательно, решение задачи вариационным методом невозможно.

В сязи с этим некоторое время было неясно, в каких случаях вариационный принцип применим при решении краевых задач и в каких случаях он неприменим. Выход из положения был найден уже в нашем столетии, именно было установлено, что если только данные граничные условия допускают возможность существования на области G хотя бы одной (допустимой) функции $F(x, y)$, удовлетворяющей этим граничным условиями и имеющей конечный интеграл $D[F]$, то задачу можно решать вариационным методом и в этом случае всегда существует функция u, обращающая $D[F]$ в минимум; она при этом гармоническая. С другой стороны, если допустимая функция не существует, то, очевидно, не может быть и речи о применении вариационного метода для решения краевой задачи, хотя само решение может благополучно существовать.

Все сказанное хорошо обосновано в настоящее время нетолько в случае рассматриваемой здесь простейшей задачи, но и в случае широкого класса других краевых задач при весьма общих граничных условиях (см. [5], [13]).

Однако, подобное разрешение проблемы обходит, оставляя не разрешенным, существенный вопрос, каким все же условиям должна удовлетворять граничная функция, чтобы ее можно было продолжить за Γ в область G так, чтобы получилась допустимая функция F?

Обобщая этот вопрос, имея в виду более общий класс краевых задач, мы приходим к следующей проблеме.

В n-мерном пространстве точек $(x_1, \ldots, x_n)$ задана область G и на ней функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, интегрируемая в p-ой степени $(1 \leqq p \leqq \infty)$ вместе со своими частными производными до определенного порядка включительно. Что можно сказать о предельных значениях этой функции и ее частных производных на границе S области G?

Эта проблема впервые в тридцатых годах была поставлена и изучалась в работах С. Л. Соболева ([12], [13]), а затем в работах его ученика В. И. Кондрашева [4]. В результате этими авторами были получены далеко идущие необходимые условия.

Мне удалось в последнее время усилить эти необходимые условия настолько, что оказалось возможным соответствующие теоремы, носящие название теорем вложения, обратить. Этому и посвящается настоящий доклад.

2. Прежде чем перейти к описанию результатов, я хочу вкратце остановиться на методах их получения.

С одной стороны, это есть методы продолжения функции за пределы области, где она была задана, так чтобы сохранялись ее дифференциальные свойства. С другой стороны, широко применялись методы теории приближения функций.

Если задавалась на некоторой области G пространства функция, обладающая определенными дифференциальными свойствами, то для того чтобы прийти к тому, что она обладает некоторыми другими дифференциальными свойствами, обычно эта функция продолжалась за G на все пространство с сохранением дифференциальных свойств. Затем она раскладывалась в ряд по целым функциям конечной степени.

Функция $g_{\nu_1 \ldots \nu_n}(z_1, \ldots, z_n)$ называется целой функцией степеней $\nu_1, \ldots, \nu_n$ соответственно по переменным $z_1, \ldots, z_n$ если она целая по каждой из этих переменных и для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое A, что для всех комплексных z_k

$$|g_{\nu_1\ldots\nu_n}| < Ae^{\sum\limits_1^n(\nu_k+\varepsilon)|z_k|}.$$

Оценки для членов ряда получались с помощью обобщенных неравенств Джексона. Далее применялись теоремы типа обратных теорем С. Н. Бернштейна [3]. И здесь существенную роль играли не только обобщенные неравенства С. Н. Бернштейна (см. [6])

$$\left\|\frac{\partial g_{\nu_1\ldots\nu_n}}{\partial x_i}\right\|_p^{(n)} \leqq \nu_i\|g_{\nu_1\ldots\nu_n}\|_p^{(n)}, \tag{4}$$

с помощью которых оценивается норма частной производной функции $g_{\nu_1\ldots\nu_n}$, но и неравенства другого типа

$$\|g_{\nu_1\ldots\nu_n}\|_p^{(m)} \leqq 2^n\left(\prod_{m+1}^n\nu_k\right)^{1/p}\|g_{\nu_1\ldots\nu_n}\|_p^{(n)}, \tag{5}$$

доказанные в [6], при помощи которых можно оценить норму функции $g_{\nu_1\ldots\nu_n}$, рассматриваемой только по переменным $x_1,\ldots,x_m$ при фиксированных $x_{m+1},\ldots,x_n$ через ее норму, вычисленную по пространству R_n переменных $x_1,\ldots,x_n$. Мы считаем, таким образом, что

$$\|f\|_p^{(m)} = \left(\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}|f(x_1,\ldots,x_m,x_{m+1},\ldots,x_n)|^p dx_1\ldots dx_m\right)^{1/p}, \tag{6}$$

где x_i—вещественны.

Неравенства, аналогичные (4) и (5), имеют место и для тригонометрических полиномов от многих переменных, если только под соответствующими нормами понимать интегралы вида (6), распространенные на куб с ребром равным 2π.

3. Условимся, что если G есть область пространства R_n вещественных $x_1,\ldots,x_n$, то G_η обозначает область состоящую из точек G, удаленных от границы G на расстояние большее η. Если $G=R_n$, то $G_\eta=R_n$.

Будем говорить, что функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ имеет частную производную $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ по переменной x_1 на G, если эту функцию можно видоизменить на множестве n-мерной меры нуль, так что после этого она почти для всех фиксированных $x_2,\ldots,x_n$ будет как функция от x_1 абсолютно непрерывна на любом замкнутом принадлежащем к G отрезке и, следовательно, будет на всяком таком отрезке иметь почти всюду производную по x_1, которую мы и будем обозначать символом $\frac{\partial f}{\partial x_1}$. Подобным образом определяются по индукции частные производные от f высшего порядка. Если все они до определенного порядка ϱ интегрируемы на G в p-ой степени (в смысле $L_p(G)$), то они не зависят с точностью до множества меры нуль от порядка дифференцирования.

Зададим число $r>0$ и пусть $r=\bar r+\alpha$, где $0<\alpha\leqq 1$ и $\bar r$ — целое. Будем говорить, что функция f принадлежит к классу $H^{(r)}_{px_1}(G;M)$, если она определена и интегрируема в p-ой степени $(1\leqq p\leqq\infty)$ на G вместе со своими частными производными по x_1 до порядка $\bar r$ включительно и, кроме того, при $\alpha<1$ выполняется неравенство

$$\Big(\int\limits_{G_\eta}\cdots\int|f^{(\bar r)}_{x_1}(x_1+h,x_2,\dots,x_n)-f^{(\bar r)}_{x_1}(x_1,\dots,x_n)|^p dx_1\dots dx_n\Big)^{1/p}\leqq M|h|^\alpha,$$

а при $\alpha=1$

$$\Big(\int\limits_{G_\eta}\cdots\int|f^{(\bar r)}_{x_1}(x_1+h,x_2,\dots,x_n)-2f^{(\bar r)}_{x_1}(x_1,\dots,x_n)+$$
$$+f^{(\bar r)}_{x_1}(x_1-h,x_2,\dots,x_n)|^p dx_1\dots dx_n\Big)^{1/p}\leqq M|h|,$$

если $|h|<\eta$.

Если функция f принадлежит одновременно к классам $H^{(r)}_{px_i}(G;M)$ $(i=1,\dots,n)$, то будем писать, что $f\in H^{(r)}_p(G;M)$.

Сделаем еще следующее замечание. Функция f, принадлежащая к классу $H^{(r)}_p(G;M)$, определена, вообще говоря, только почти всюду на G, поэтому формально она как функция от $x_1,\dots,x_m$, при фиксированных $x_{m+1},\dots,x_n$, является неопределенной. Но, оказывается, если удовлетворяется дополнительное условие $r-\dfrac{n-m}{p}>0$ всегда можно f видоизменить на множестве меры нуль так, что после этого будет иметь место

$$\lim_{\sum\limits_{m+1}^{n}|x_i-x_i^{(0)}|\to 0}\int\limits_{\sigma}\cdots\int|f(x_1,\dots,x_m,x_{m+1},\dots,x_n)-f(x_1,\dots,x_m,x^{(0)}_{m+1},\dots x^{(0)}_n)|^p dx_1\dots dx_m=0$$

для всякого замкнутого множества σ точек $(x_1,\dots,x_m)$, принадлежащего к соответствующему сечению G. В этом смысле можно говорить совершенно определенно о функции $f(x_1,\dots,x_m,x_{m+1},\dots,x_n)$ от переменных $x_1,\dots,x_m$, когда зафиксированы $x_{m+1},\dots,x_n$.

4. Справедливы теоремы:

Т е о р е м а 1. Пусть задана функция $f(x_1,\dots,x_n)\in H^{(r)}_p(R_n;M)$ и система (λ) неотрицательных целых чисел $\lambda_{m+1},\dots,\lambda_n$, для которых

$$\lambda=\sum_{m+1}^{n}\lambda_k<r.$$

Кроме этого, пусть

$$\varrho^{(\lambda)}=r-\lambda-\frac{n-m}{p}>0.$$

Тогда при любых фиксированных $x_{m+1},\dots,x_n$

$$\psi(x_1,\dots,x_m)=\frac{\partial^\lambda f(x_1,\dots,x_m,0,\dots,0)}{\partial x_{m+1}^{\lambda_{m+1}}\dots\partial x_n^{\lambda_n}}\in H_p^{(\varrho(\lambda))}(R_m;K),$$

где

$$\left.\begin{matrix} K \\ \|\psi\|_p^{(n)} \end{matrix}\right\} < c(\|f\|_p^{(n)} + M)$$

и c—константа, не зависящая от $\|f\|_p^{(n)}$ и M.

Теорема 2 (обратная к теореме 1). Задано положительное число r и натуральные числа m и n, для которых $1 \leqq m < n$. Кроме того, заданы всевозможные системы (λ) неотрицательных целых чисел

$$\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n,$$

для которых

$$\lambda = \sum_{m+1}^{n} \lambda_j < r$$

и числа

$$\varrho^{(\lambda)} = r - \lambda - \frac{n-m}{p} > 0.$$

Пусть, далее, каждой системе (λ) приведена в соответствие функция $\varphi_{(\lambda)}(x_1, \ldots, x_m)$ от m переменных, принадлежащая соответственно к классу $H_p^{(\varrho(\lambda))}(R_m; M^{(\lambda)})$, где $M^{(\lambda)}$ некоторые положительные числа.

Тогда можно построить функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных, обладающую следующими свойствами:

1. $f \in H_p^{(r)}(R_n; K)$, где

$$\left.\begin{matrix} K \\ \|f\|_p^{(n)} \end{matrix}\right\} < c \sum_{\lambda} (\|\varphi_{(\lambda)}\|_p^{(n)} + M^{(\lambda)}),$$

2. $$\frac{\partial^{\lambda} f(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)}{\partial x_{m+1}^{\lambda_{m+1}} \ldots \partial x_n^{\lambda_n}} = \varphi_{(\lambda)}(x_1, \ldots, x_m).$$

При $\lambda = 0$ частная производная совпадает с самой функцией.

Теоремы 1 и 2 обобщаются также на тот случай, когда речь идет о функции f, принадлежащей к более общему классу $H_p^{(r_1, \ldots, r_n)}(M_1, \ldots, M_n)$, представляющему собой пересечение классов $H_{px_i}^{(r_i)}(M_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$, но мы на этом останавливаться не будем.

5. Нас будет интересовать получение аналогичных теорем в случае, когда вместо m-мерного линейного подпространства фигурирует произвольное кривое достаточно гладкое m-мерное многообразие.

m-мерное многообразие S определяется следующим образом. Это есть замкнутое ограниченное множество, принадлежащее к R_n такое, что каждая его точка P_0 может быть окружена шаром с центром в ней и настолько малого радиуса, что он отсекает от S кусок σ, определяемый при соответствующей нумерации осей координат уравнениями

(7) $$x_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = m+1, \ldots, n),$$

когда точка $(x_1, \ldots, x_m)$ пробегает некоторую m-мерную область G. При этом предполагается, что возможно с каждой точкой $P \in \sigma$ связать $n-m$ единичных векторов ортогональных между собой и таких, что каждый из них ортогонален к линейному касательному в точке P к S многообразию.

Что касается проекций этих векторов

$$\overline{N}_j = (\alpha_1^{(j)}, \ldots, \alpha_n^{(j)}) \qquad (j = m+1, \ldots, n),$$

то они пусть будут функции от $x_1, \ldots, x_m$, имеющие непрерывные частные производные порядков до $\bar{r}+1$ включительно.

Если теперь задана функция от n переменных $f \in H_p^{(r)}(R_n; M)$, то можно совершенно корректно определить функцию $f|_S$, которую индуцирует f на S. При этом на куске σ многообразия S она может быть выражена как функция от $x_1, \ldots, x_m$, определенная на G; ее естественно записать так:

$$f|_\sigma = f(x_1, \ldots, x_m, \varphi_{m+1}, \ldots, \varphi_n).$$

При известных условиях, о которых будет итти речь ниже, можно определить также и производную

$$\left.\frac{\partial^\lambda f}{\partial N_{m+1}^{\lambda_{m+1}} \ldots \partial N_n^{\lambda_n}}\right|_\sigma, \tag{8}$$

но на подробностях, связанных с этим определением, мы останавливаться не будем. Заметим только, что при условиях, которые имеют место в формулируемых ниже теоремах, выражения для частных производных (8) преобразуются при замене одних m координат на другие и одних $n-m$ нормальных к S векторов на другие так, как это имеет место в классическом случае, когда все входящие в рассмотрение частные производные от функции f непрерывны.

6. Теорема 3. Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит к классу $H_p^{(r)}(R_n; M)$ и задана система (λ) неотрицательных чисел $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n$, для которых

$$\lambda = \sum_{m+1}^{n} \lambda_k$$

и

$$\varrho^{(\lambda)} = r - \lambda - \frac{n-m}{p} > 0.$$

Тогда существует функция

$$\left.\frac{\partial^\lambda f}{\partial N_{m+1}^{\lambda_{m+1}} \ldots \partial N_n^{\lambda_n}}\right|_\sigma,$$

принадлежащая к классу $H_p^{(\varrho(\lambda))}(G_1; M_{G_1})$, где G_1 любая область, замыкание которой принадлежит к G. При этом

$$\left.\begin{array}{c} M_{G_1} \\ \left\| \dfrac{\partial^\lambda f}{\partial N_{m+1}^{\lambda_{m+1}} \ldots \partial N_n^{\lambda_n}} \right\|_\sigma \end{array}\right\} < c(M + \|f\|_p^{(n)}).$$

7. Теорема 4 (обратная теореме 3). Пусть в пространстве R_n задана конечная система неперекрывающихся попарно многообразий

$$S_1, \ldots, S_\mu$$

соответственно, имеющих измерения

$$m_1, \ldots, m_\mu \quad \left(r - \frac{n - m_K}{p} > 0\right).$$

Каждое многообразие покрыто конечным числом лежащих на нем перекрывающихся кусков σ. Куски эти явно выражаются через те или иные m_K координат при помощи равенств (7) и с точками их связаны определенные системы нормальных к σ векторов $\bar N_{m_K+1}, \ldots, \bar N_n$.

Задано далее положительное число r и всевозможные (допустимые), связанные с каждым многообразием S_K, системы (λ) неотрицательных чисел $\lambda_{m_K+1}, \ldots, \lambda_n$, для которых

$$\lambda = \sum_{m_K+1}^{n} \lambda_j$$

и

$$\varrho^{(\lambda)_K} = r - \lambda - \frac{n - m_K}{p} > 0.$$

С каждым куском σ, лежащим на многообразии S_K, и с каждой допустимой системой $(\lambda)_K$ пусть связана функция $F_{(\lambda)_K\sigma}$, определенная на куске σ, которую еще можно обозначать через $F_{(\lambda)_\sigma\sigma}$. Если кусок σ явно выражается через координаты $x_1, \ldots, x_{m_K}$ (или другие m_K координат), то функция $F_{(\lambda)_\sigma\sigma}$, выраженная через эти координаты, пусть принадлежит к классу $H_p^{\varrho^{(\lambda)_K}}(G_\sigma; M)$, где G_σ есть проекция куска σ на линейное подпространство переменных $x_1, \ldots, x_{m_K}$ (или других переменных).

На общих перекрывающихся кусках одного и того же многообразия S функции $F_{(\lambda)_K\sigma}$ предполагаются согласованными друг с другом в том смысле, что они подчиняются соответствующим формулам преобразования от одной системы нормальных векторов к другой и от одних m_K переменных к другим, необходимым для того, чтобы были возможны равенства

$$\left.\frac{\partial^\lambda F}{\partial N_{m_K+1}^{\lambda_{m_K+1}} \cdots \partial N_n^{\lambda_n}}\right|_\sigma = F_{(\lambda)_K\sigma} \tag{9}$$

для всех допустимых систем $(\lambda)_K$ и всех кусков, покрывающих одно и то же многообразие при одной и той же функции $F(x_1, \ldots, x_n)$.

В таком случае в пространстве R_n можно построить функцию $F(x_1, \ldots, x_n)$, подчиняющуюся условиям

1. $F \in H_p^{(r)}(M^*)$

$$\left.\begin{matrix} M^* \\ \|F\|_p^{(n)} \end{matrix}\right\} < c\Big(\sum_\sigma \sum_{(\lambda)\sigma} \|F_{(\lambda)_\sigma\sigma}\|_{L_p(G_\sigma)} + M\Big).$$

Здесь вторая сумма распространена на всевозможные допустимые системы $\lambda_{m_K+1}, \ldots, \lambda_n$, соответствующие куску σ (в зависимости от числа его измерений), а первая сумма распространяется на всевозможные, покрывающие по теореме наши многообразия, куски σ. Константа c не зависит от

$$\sum_{\sigma}\sum_{(\lambda)\,\sigma} \| F_{(\lambda)_\sigma \sigma} \|_{L_p(G_p)} \quad \text{и} \quad M.$$

2. Справедливо равенство (9) для все допустимых $(\lambda)_K$ кусков σ.

8. С помощью теорем 3 и 4 имеется возможность определять по свойствам функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, заданной в R_n, свойства этой функции на многообразии S, принадлежащем к R_n. Но в приложениях часто приходится иметь дело несколько с другой ситуацией. Именно функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ обычно задана не во всем пространстве R_n, где находится многообразие S, а в области G, которую ограничивает данное многообразие ($n-1$-го измерения) с одной стороны. В связи с этим возникает вопрос, который был поставлен в начале как по свойствам функции f на G узнать ее свойства, точнее свойства ее предельных значений, на границе G. Решение этого вопроса можно свести к доказанным нами теоремам следующим образом.

Допустим, задана в некоторой области $G \subset R_n$ с границей, представляющей собой дифференцируемое $n-1$-мерное многообразие S, функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ и, допустим, нам удалось эту функцию продолжить на R_n за пределы S так, что продолженная функция окажется принадлежащей к классу $H_p^{(r)}(R_n; M)$ с некоторой константой M. Тогда уже S окажется погруженным в пространство R_n, где определена функция, и для того, чтобы судить о поведении на S ее или ее частных производных мы можем применить сформулированные выше теоремы.

Вот важный случай, когда такое продолжение осуществить возможно.

Лемма. Пусть область $G \subset R_n$ имеет в качестве своей границы r-раз непрерывно дифференцируемое многообразие S (измерения $n-1$). Пусть далее на G задана функция f интегрируемая в p-ой степени ($1 \leq p \leq \infty$) вместе со своими частными производными порядков до r включительно.

Тогда ее можно продолжить за пределы G на R_n так что полученная функция ψ будет обладать указанными свойствами на R_n. При этом

$$\left\| \frac{\partial^\alpha \psi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right\|_{p}^{(n)}_{0 \leq \alpha \leq r} < c \sup_{0 \leq \sum_1^n \alpha_k \leq r} \left\| \frac{\partial^\alpha f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right\|_{L_p(G)},$$

где c константа.

Нетрудно устанавливается, что полученная в результате продолжения функция ψ будет принадлежать к классу $H_p^{(r)}(R_n; M)$, где

$$M = \sup_{1 \leq i \leq n} \left\| \frac{\partial^r \psi}{\partial x_i^r} \right\|_{L_p(G)}.$$

9. В качестве приложения рассмотрим полигармоническую задачу.

Задана область G, границей которой является дифференцируемое многообразие S ($n-1$ измерений). Требуется найти функцию $u(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющую внутри G уравнению

$$\Delta^r u = 0$$

и на границе S, подчиняющуюся условиям

$$\left.\frac{\partial^\lambda u}{\partial N^\lambda}\right|_S = f_\lambda \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, r-1),$$

где f_λ заданные на S функции.

Соответствующая вариационная задача в данном случае выглядит так. Требуется среди всевозможных функций $F(x_1, \ldots, x_n)$ интегрируемых во второй степени вместе со своими частными производными порядка до r включительно и удовлетворяющих граничным условиям

$$\left.\frac{\partial^\lambda F}{\partial N^\lambda}\right|_\varrho = f_\lambda \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, r-1) \tag{10}$$

найти ту, для которой интеграл

$$D_r[F] = \int_G \ldots \int \sum_{\Sigma \alpha_i = r} \frac{r!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} \left(\frac{\partial^r F}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\right)^2 dx_1 \ldots dx_n$$

обращается в минимум.

Если существует хотя бы одна допустимая функция F, удовлетворяющая заданным граничным условиям и в то же время имеющая конечный интеграл $D_K[u]$, то, как это доказано в работах С. Л. Соболева (см. [13]), минимум интеграла $D_r[F]$ достигается и притом для полигармонической функции.

Мы ставим вопрос, каковы должны быть условия, которые надо наложить на f_λ, чтобы обеспечить существование допустимой функции.

Если F допустимая функция, то продолжим ее согласно сформулированной леммы на R_n так, чтобы продолженная функция $\overline{F}$ принадлежала к классу $H_2^{(r)}(R_n; M)$.

Теперь согласно теоремы 3 на куске σ многообразия S, явно выражаемом через координаты $x_1, \ldots, x_n$ (или другие координаты) равенствами

$$x_j = \varphi_j(x_1, \ldots, x_m) \quad (j = m+1, \ldots, n), \quad (x_1, \ldots, x_m) \in G_\sigma$$

функция

$$\left.\frac{\partial^\lambda F}{\partial N^\lambda}\right|_\sigma = f_\lambda \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, r-1)$$

необходимо должна принадлежать к классу $H_2^{\left(r-\lambda-\frac{1}{2}\right)}(G_\sigma; M)$ с некоторой константой M, так как

$$\varrho^{(\lambda)} = r - \lambda - \frac{n-m}{p} = r - \lambda - \frac{1}{2} > 0 \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, r-1).$$

Если бы мы теперь задали функции f_λ, соотвественно принадлежащие на кусках σ к классам $H_2^{\left(r-\lambda-\frac{1}{2}\right)}(G_\sigma; M)$, то соответствующие примеры доказывают (см. [2] и [7], что они в одних случаях будут допускать существование допустимых функций, а в других нет. Однако, если функции f_λ будут на кусках σ принадлежать соответственно к классам $H_2^{\left(r+\varepsilon-\lambda-\frac{1}{2}\right)}(G_\sigma, M)$, где $\varepsilon > 0$, то при этих обстоятельствах уже заведомо существует допустимая функция, так как по теореме 4 можно построить на R_n функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, принадлежащую к классу $H_2^{r+\varepsilon}(R_n; M^*)$, для которой имеет место (10). Но тогда она имеет интегрируемые вместе со своими квадратами производные порядка до r вкючительно, что влечет конечность $D_r[u]$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Т. И. Аманов, К теореме вложения дифференцируемых функций многих переменных, ДАН СССР (печатается).

[2] Т. И. Аманов, К решению бигармонической задачи, ДАН СССР, (печатается).

[3] С. Н. Бернштейн, Собрание сочинений, т. 1 (1952), АН СССР.

[4] В. И. Кондрашов, О некоторых свойствах функций из пространства L_p, ДАН СССР, **48** (1945), стр. 563—566.

[5] R. Courant und D. Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik*, Bd. 2.

[6] С. М. Никольский, Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных, Труды Математического института АН СССР, **38** (1951), стр. 244—278.

[7] С. М. Никольский, К задаче Дирихле, ДАН СССР, **83** (1952), стр. 23—26.

[8] С. М. Никольский, О продолжении дифференцируемых функций многих переменных, ДАН СССР, **82** (1952), стр. 521—524.

[9] С. М. Никольский, Вторая заметка о продолжении дифференцируемых функций, ДАН СССР (печатается).

[10] С. М. Никольский, Свойства дифференцируемых функций многих переменных на замкнутых гладких многообразиях, ДАН СССР (печатается).

[11] С. М. Никольский, К вопросу о решении полигармонического уравнения вариационным методом, ДАН СССР (печатается).

[12] С. М. Соболев, Об одной теореме функционального анализа, Математический Сборник **4** (46) : 3 (1938), стр. 471—497.

[13] С. М. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Ленинградский Гос. Университет (1950).

L'INFLUENCE DE LA GÉOMÉTRIE DE BOLYAI—LOBATCHEVSKY SUR LE DÉVELOPPEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

Par

OTTÓ VARGA (Debrecen), correspondant de l'Académie

En étudiant l'influence de la découverte de JEAN BOLYAI sur le développement de la géométrie, je désire commencer par les considérations suivantes:

Nous traitons d'abord les recherches géométriques qui suivent, au point de vue de la méthode, l'examen synthétique de JEAN BOLYAI. Le résultat de ces recherches conduit à la fondation axiomatique moderne de la géométrie. Ensuite, nous donnons un aperçu sur les études qui, tout en fournissant les résultats de J. BOLYAI, ont eu pour effet la découverte des géométries bien plus générales que celle de BOLYAI. Parmi ces considérations nouvelles, l'une aboutit, en employant la conception projective de CAYLEY—KLEIN, à la fondation des géométries basée sur la théorie des groupes, tandis que l'autre prend son point de départ dans la célèbre thèse de RIEMANN, pour aboutir, en dernier lieu, à la fondation de différentes disciplines géométriques basée sur la géométrie différentielle.

On sait que les recherches des précurseurs de la géométrie non-euclidienne — G. SACCHERI (1667—1733), H. LAMBERT (1728—1777), A. M. LEGENDRE (1752—1833) — suivent la méthode synthétique-axiomatique d'EUCLIDE. Ces recherches s'étaient cependant bornées au problème de l'axiome des parallèles et leur but était de démontrer que cet axiome découlait des autres axiomes euclidiens. BOLYAI et LOBATCHEVSKY avaient déjà consciemment pris pour point de départ un axiome contraire à l'axiome euclidien, un axiome hyperbolique et non-euclidien des parallèles, s'efforçant de construire un système géométrique aussi bien possible que celle d'Euclide. Ils ont, comme on sait, déduit à cet effet d'importantes propositions de planimétrie, de stéréométrie, de trigonométrie et de géométrie analytique. Mais les autres définitions et postulats figurant dans l'édifice de la géométrie euclidienne demandaient encore un éclaircissement. Comme on sait, plusieurs des définitions données par EUCLIDE n'ont, en vérité, aucun contenu mathématique. L'exigence que, une fois les définitions et les axiomes établis, tout théorème puisse être obtenu de ceux-là par la voie de la déduction logique, n'était non plus strictement observée. La cause principale de ces lacunes était l'emploi d'un nombre de notions indéfinies, empruntées à l'intuition. Faute d'une axiomatique géométrique avancée, même BOLYAI et LOBATCHEVSKY n'ont su démontrer d'une manière conforme aux exigences actuelles que l'axiome euclidien des parallèles ne découlait pas des autres axiomes. Pour BOLYAI et LOBATCHEVSKY la preuve en était que la trigonométrie absolue était sans contradiction. Pourtant un système trigonométrique n'est pas en lui-même un système géométrique complet, mais seulement une partie d'un tel système. Nous avons le droit de supposer que BOLYAI entrevoyait cet état de choses, car STÄCKEL[1] nous apprend que, longtemps après l'apparition de l'Appendix, BOLYAI poursuivit des recherches dans cette direction.

L'examen critique des recherches euclidiennes a abouti à la fondation axiomatique des fondements de la géométrie. Ce n'est qu'à la fin du siècle dernier et au commencement de notre siècle que ces recherches sont parvenues, dans un certain sens, à une conclusion. C'est D. HILBERT[2] qui a donné la fondation axiomatique la plus conforme aux exigences actuelles des géométries euclidienne et non-euclidienne. En élaborant les fondements de la géométrie euclidienne de l'espace, HILBERT considère le point, la droite et le plan comme des notions fondamentales non définies. Entre celles-ci il considère des relations. Pour décrire ces relations, il emploie les termes "incider", "correspondre", "entre", "congruence", "continuité". Ces relations constituent les axiomes de la géométrie. Chez HILBERT, l'axiomatique de la géométrie euclidienne se compose de cinq groupes. Les deux premiers groupes sont d'un caractère descriptif, puisque le premier groupe concerne l'incidence des éléments fondamentaux, tandis que le deuxième groupe concerne l'ordre des points sur la droite ainsi que la division du plan en deux parties par une droite. Le troisième groupe décrit les mouvements de l'espace par les axiomes de congruence. En quatrième lieu, nous y trouvons l'axiome euclidien des parallèles tandis que le cinquième groupe se compose des deux axiomes de continuité. Chez HILBERT, les axiomes de continuité se composent de l'axiome d'ARCHIMÈDE et d'un axiome dit de l'intégralité. Dans la plupart des travaux concernant ce sujet, on trouve au lieu de l'axiome de l'intégralité l'axiome de CANTOR. L'axiome de HILBERT en est entièrement différent, car il proclame en essence que le système donné ne saurait être enrichi par d'autres éléments d'une manière à maintenir valables les trois premiers groupes d'axiomes. En ce qui concerne ces groupes d'axiomes, il convient de souligner que les deux premiers groupes, ceux d'un caractère descriptif, ont

[1] P. STÄCKEL, Untersuchungen aus der absoluten Geometrie aus Johann Bolyai's Nachlaß, *Természettudományi Értesítő*, **20** (1902), p. 180—186.

[2] D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, 7 éd. (Berlin, 1930).

été introduits et étudiés pour la première fois par M. PASCH.[3] En ce qui concerne le troisième groupe d'axiomes, deux points de vue sont également possibles. Le premier propose de considérer le mouvement comme une notion fondamentale non définie et de le mettre en relation avec les autres notions fondamentales au moyen d'axiomes convenables. L'autre possibilité consiste à remplacer cette notion par celle de la congruence. HILBERT a choisi la deuxième possibilité. Quant à la première, qui permet non seulement d'introduire la géométrie euclidienne et la géométrie non-euclidienne, mais aussi de décrire d'autres systèmes géométriques, nous aurons l'occasion d'y revenir par la suite.

HILBERT a démontré que son système d'axiomes satisfait aux exigences que l'on doit poser à un système d'axiomes rigoureusement construit. Un tel système d'axiomes doit être exempt de contradictions, les groupes d'axiomes doivent être indépendants les uns des autres et le système d'axiomes doit être complet. Quant à l'absence des contradictions, HILBERT la démontre par l'arithmétisation du système géométrique. Le modèle arithmétique ainsi obtenu n'est autre chose que la géométrie analytique ordinaire de DESCARTES. Le système d'axiomes est ainsi exempt de contradictions, pourvu que l'arithmétique le soit elle-même. En ce qui concerne la démonstration de l'indépendance des groupes, HILBERT recourt également à des modèles arithmétiques convenables. Citons en premier lieu l'indépendance de l'axiome des parallèles, car c'est celle-ci qui implique l'existence de la géométrie non-euclidienne. Dans son ouvrage, HILBERT étudie le modèle de KLEIN.[4] A cet effet, il faut prendre, dans la géométrie analytique de DESCARTES dont nous avons parlé plus haut, une sphère et les points de la géométrie à construire seront les points situés à l'intérieur de cette sphère. Par droites et par plans, nous entendons les parties de droites et de plans ordinaires, situées à l'intérieur de la sphère. En ce qui concerne ces points, ces droites et ces plans, les axiomes d'incidence et d'ordre auront le même sens que dans la géométrie analytique complète de DESCARTES. Les axiomes de congruence seront vérifiés, si l'on prend des transformations dans lesquelles la sphère se transforme en elle-même et les droites se transforment en droites. Les segments, les angles et les triangles sont congruents, s'ils se transforment les uns dans les autres par ces collinéations. Etant donné cette congruence des segments, le postulat d'ARCHIMÈDE est facile à introduire. L'axiome de continuité de CANTOR enfin — puisqu'il n'est fondé que sur des axiomes d'ordre — est également vérifié dans ces conditions. Nous obtenons ainsi un modèle dans lequel tous les axiomes énumérés sont vérifiés, à l'exception de celui des

[3] M. PASCH, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, 2 éd. (avec M. DEHN) (Berlin, 1934).

[4] F. KLEIN, Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, *Nachrichten d. Kgl. Ges. d. Wiss. Göttingen*, **17** (1871), p. 419—433.; *Math. Annalen*, **4** (1871), p. 573—625 et **6** (1873), p. 112—145.

parallèles. Ce dernier n'est manifestement pas vrai. La possibilité d'une géométrie non-euclidienne se trouve donc ainsi démontrée. Les recherches de HILBERT concernant les axiomes de continuité sont tout particulièrement intéressantes. Une des conséquences les plus importantes de ses résultats est l'impossibilité de donner la fondation de la géométrie projective sans les axiomes de continuité. Pour démontrer que l'axiome de l'intégralité (ou l'axiome de CANTOR) est indépendant des autres axiomes de continuité, il suffit de prendre dans la géométrie analytique de DESCARTES, pour coordonnées des points et des droites les nombres que nous obtenons en formant la fermeture quadratique à partir des éléments positifs du corps de nombres rationnels. Quant à l'axiome d'ARCHIMÈDE, elle ne dépend non plus des autres axiomes. HILBERT en donne la démonstration en construisant un corps non-archimédien: Soit une quantité indéterminée soumise aux opérations rationnelles et à l'opération $|\sqrt{1+\omega^2}|$, où ω est une fonction quelconque obtenue par ces mêmes opérations. On définit les opérations de corps, en employant les règles formelles de l'algèbre élémentaire. L'ordre est donnée par la convention suivante: Pour deux éléments a et b du corps, $a > b$ si $a - b$ est positif pour t assez grand. Les éléments 1 et t du corps ne satisfont pas à l'axiome d'ARCHIMÈDE. En fondant la géométrie analytique sur ce corps non-archimédien, on obtient une géométrie pour laquelle les quatre premiers groupes d'axiomes sont valables, mais non pas les axiomes de continuité. Les recherches de HILBERT sur le groupe d'axiomes de continuité ont une grande importance d'un autre point de vue aussi, notamment en connexion avec la fondation de la géométrie projective. Ces études se concentrent autour du théorème de PAPPUS ou théorème particulier de PASCAL, et autour du rôle joué par ce théorème dans la fondation de la géométrie. HILBERT construisit un système de nombres non-commutatif, qu'il nomma, pour ses relations avec le théorème de DESARGUES, système de nombres de DESARGUES. Ce système n'est pas commutatif, et il n'est non plus continu, car, comme il a été démontré également par HILBERT, un système de nombres archimédiquement ordonné est nécessairement commutatif. Dans la géométrie analytique fondée sur ce système de nombres, les deux groupes d'axiomes de caractère descriptif sont valables, aussi bien que l'axiome des parallèles. Le théorème de DESARGUES relatif aux triangles est également valable. On peut fonder sur ce théorème un calcul de segments. Le système de nombres qui en résulte est isomorphe au système non-commutatif dont nous nous avons servis à définir cette géométrie. Pourtant, dans le calcul de segments, la multiplication n'est commutative qu'au cas où le théorème de PAPPUS est valable. Il suit donc de l'isomorphisme mentionné que les axiomes de la géométrie projective, y compris l'axiome des parallèles, mais sans les conditions de continuité, n'impliquent pas le théorème de PAPPUS. On voit donc que la géométrie projective ne peut être fondée exclusivement sur des axiomes descriptifs.

En ce qui concerne la géométrie non-archimédienne, il faut encore mentionner les recherches de M. DEHN[5] relatives aux axiomes de parallélisme et de continuité. Il a démontré, qu'on peut construire une géométrie non-archimédienne, dans laquelle tous les théorèmes de la géométrie euclidienne sont valables, mais il passe par un point une infinité de parallèles à une droite, sans que l'axiome correspondant de la géométrie hyperbolique soit satisfaite.

Enfin HILBERT[6] a donné une fondation de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky à deux dimensions qui ne recourt qu'aux trois premiers groupes d'axiomes de la géométrie plane, et à l'axiome hyperbolique des parallèles.

Nous passons maintenant à la fondation de la géométrie non-euclidienne par la géométrie projective. Nous avons parlé plus haut du modèle de KLEIN qui sert à la démonstration de l'indépendance de l'axiome des parallèles. Dans ses recherches, HILBERT a introduit ce modèle après avoir donné un exposé complet de la géométrie euclidienne. Cette introduction du modèle a permis de démontrer l'indépendance de l'axiome des parallèles, mais ne permet pas de construire une géométrie non-euclidienne indépendante de la géométrie euclidienne. FELIX KLEIN introduit ce modèle non pas par la géométrie euclidienne, mais par la géométrie projective, ce qui lui permet de donner une fondation entièrement nouvelle de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky. Les travaux de F. KLEIN s'inspirent de deux idées. La première est celle de la métrique projective de CAYLEY[7] et la deuxième est la conception d'une géométrie projective exempte de toute notion de métrique. On sait que, pour obtenir la métrique projective de CAYLEY, il faut prendre dans l'espace projectif une quadrique, appelée figure absolue. La droite passant par deux points donnés A et B a avec la figure absolue deux points d'intersection, P et Q. De la même façon, en partant du sommet de l'angle ab nous pouvons tracer dans le plan de l'angle les tangentes p et q à la figure absolue. Dans les collinéations de l'espace où la figure absolue est invariante, les rapports anharmoniques $(ABPQ)$ et $(abpq)$ sont des invariants qui ne dépendent que des deux points, respectivement des deux droites. Si, parmi les fonctions de ce rapport anharmonique, nous prenons celles qui possèdent la propriété additive exigée par la distance, elles seront déterminées, sauf un coefficient constant, par le logarithme du rapport anharmonique. Pour l'angle nous prenons la valeur de cette constante égale à $\frac{i}{2}$, car ainsi nous obtenons que l'angle complet est égal à 2π. Partant de ce point, F. KLEIN[4] est parvenu de la

[5] M. DEHN, Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck, *Math. Annalen*, **53** (1900), p. 404—439.

[6] D. HILBERT, Neue Begründung der Bolyai—Lobatschefskijschen Geometrie, *Math. Annalen*, **57** (1903), p. 137—150 et *Grundlagen der Geometrie*, Anhang III.

[7] A. CAYLEY, Six memoir upon quantics, *London Transactions*, **149** (1859) or *Coll. Math. Papers*, vol. 2. A memoir on abstract geometry, *London Transactions*, **160** (1870), p. 51—63, or *Coll. Math. Papers*, vol. 6.

manière suivante à la géométrie euclidienne, à celle de Bolyai—Lobatchevsky, ainsi qu'à une autre géométrie non-euclidienne, dite elliptique. Il a tout d'abord esquissé une fondation axiomatique de la géométrie projective, qui ne dépend pas de la géométrie euclidienne. Sous ce rapport, v. STAUDT[8] a déjà largement développé la géométrie projective, partant exclusivement des axiomes descriptifs. Les conditions de continuité qui font défaut chez STAUDT ont été définitivement réunies par les travaux de KLEIN,[9] J. LÜROTH, H. G. ZEUTEN et DARBOUX.[10] KLEIN a esquissé encore une autre considération fondamentale, à savoir une description de la géométrie projective au moyen d'axiomes qui ne concernent qu'une partie bornée de l'espace. Mais ces travaux ébauchés par KLEIN n'ont été menés à bonne fin que par M. PASCH.[3] Les éléments fondamentaux de ces axiomes sont, outre le point non pas la droite et le plan, mais toujours le segment et la partie de plan. Ainsi les axiomes ne se réfèrent qu'à une partie bornée de l'espace. Les centres des faisceaux et des gerbes de droites permettent d'élargir l'espace par des points idéaux. Si nous remplaçons maintenant les 1^er^, 2^e^, et 5^e^ groupes d'axiomes de HILBERT par les axiomes correspondants de PASCH en y ajoutant des axiomes convenables de congruence, le groupe de collinéations dans lequel deux figures congruentes passent l'une dans l'autre, sera caractérisé par le fait qu'il est permutable à un certain système de polarité. La surface de coincidence de ce système de polarité aboutit précisément à la figure absolue de CAYLEY. Quant à cette figure absolue, il faut distinguer trois cas.

Dans le premier cas, la figure absolue est une surface elliptique. Les points, les droites et les plans doivent être considérés, comme nous l'avons dit plus haut en parlant du modèle de KLEIN, à l'intérieur de la surface. Pour la longueur des segments, la constante k de la formule de CAYLEY doit être choisie réelle. Pour la métrique angulaire cette constante est égale à $\frac{i}{2}$. Cette géométrie est identique à celle de Bolyai—Lobatchevsky. Pour obtenir les deux parallèles à une droite en partant d'un point situé en dehors de cette droite, on relie ce point aux deux points d'intersection de la droite et de la figure absolue.

Dans le deuxième cas, la figure absolue est imaginaire. Cette géométrie opère sur l'espace projectif entier. Mais dans cette géométrie, deux droites situées dans un même plan ont toujours un point d'intersection. Dans cette géométrie, il n'existe donc pas de parallèles du tout. C'est la géométrie non-euclidienne dite elliptique. Si dans le système de HILBERT nous faisons

[8] CHR. VON STAUDT, *Beiträge zur Geometrie der Lage* (Nürnberg, 1849).

[9] F. KLEIN, Nachtrag zu dem zweiten Aufsatze über Nicht-Euklidische Geometrie, *Math. Annalen,* **7** (1874), p. 531—537, ou *Gesammelte Abhandl.* 1.

[10] E. DARBOUX, Sur le théorème fondamental de la géométrie projective, *Math. Annalen,* **17** (1880), p. 55—62.

abstraction de l'axiome des parallèles, pour ne considérer que la géométrie dite absolue, on peut démontrer qu'on peut tracer à toute droite, par un point quelconque non situé sur elle, au moins une parallèle. La géométrie absolue ne peut donc être prolongée que dans les géométries euclidienne et de Bolyai—Lobatchevsky. L'apparente contradiction soulevée par la géométrie elliptique est supprimée dès qu'on tient compte du fait que les droites du plan elliptique sont des lignes fermées, tout comme celles du plan projectif. C'est précisément cette possibilité qui se trouve exclue par le système d'axiomes de la géométrie absolue de HILBERT. Les axiomes de PASCH de la géométrie projective, qui ne se réfèrent qu'à une partie bornée de l'espace, ne décident pas si la droite doit être ouverte ou fermée. Ils peuvent donc servir de fondement aux deux géométries. Dans la formule de distance de CAYLEY, la constante doit être choisie imaginaire pure, tandis que dans la formule angulaire la constante restera.

Dans le troisième cas, l'absolue se dégénère en une conique imaginaire. Les points du plan de l'absolue doivent être exclus des points, des plans et des droites de l'espace. Dans cet espace, à toute droite et par tout point non situé sur elle, il y a exactement une parallèle, car une droite coupe le plan de l'absolue exactement en un point. C'est la droite relient ce point au point donné, qui constitue le parallèle en question. Les mouvements de l'espace sont les collinéations pour lesquelles l'absolue et, avec elle, le plan de l'absolue restent invariants. Cette géométrie est la géométrie dite parabolique ou équiforme. Au moyen de la formule de CAYLEY, la métrique angulaire peut être définie d'une façon analogue à la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky et à la géométrie elliptique. Pour le cas donné, cette forme projective de la formule angulaire était déjà connue par E. LAGUERRE.[11]

Partant de la géométrie parabolique, la géométrie euclidienne peut être caractérisée par les deux conditions suivantes : 1. Deux segments aboutissant à un point commun sont congruents s'ils constituent les côtés voisins d'un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires. 2. Deux segments parallèles sont congruents s'ils constituent les côtes opposés d'un parallélogramme. Ces deux conditions permettent de constater la congruence de deux segments situés d'une façon quelconque. Selon la conception projective de CAYLEY—KLEIN, la géométrie non-euclidienne et la géométrie euclidienne peuvent donc l'une et l'autre être subordonnées à la géométrie projective. Cette conception dépasse donc celle de BOLYAI.

Nous verrons par la suite que cette conception projective se trouve à l'origine de la fondation de la géométrie fondée sur la théorie des groupes, qui se rattache également au nom de KLEIN. Nous devons cependant ajouter d'abord certaines remarques à ce qui vient d'être exposé.

[11] E. LAGUERRE, Notes sur la théorie des foyers, *Nouvelles Annales*, **12** (1853), ou *Oeuvres* 2.

La fondation de la géométrie projective elle-même joue un rôle très important dans la conception de KLEIN. Ce sont les axiomes de continuité qui jouent le rôle le plus remarquable dans la fondation axiomatique de cette discipline. En effet, alors que les axiomes de caractère descriptif expriment soit des faits intuitifs, soit des propositions qui devraient être l'objet des recherches même s'il ne s'agissait pas d'axiomatique — citons par exemple le théorème de DESARGUES relatif aux triangles qui joue un rôle dans l'étude axiomatique du plan projectif — les axiomes de continuité sont artificiels et servent seulement à pouvoir représenter, à l'aide du modèle analytique habituel, la géométrie projective. Le progrès moderne a suivi l'orientation que voici : A l'aide de seuls axiomes d'incidence — en y ajoutant, s'il s'agit du plan, le théorème de DESARGUES, considéré comme un axiome — il est possible d'introduire un calcul de points qui se réfère tout d'abord aux points d'une droite en y induisant un corps. Comme les corps correspondant aux différentes droites sont isomorphes, ce corps correspond à la géométrie projective même. On peut démontrer que le corps de la géométrie projective peut être choisi arbitrairement. On peut donc formuler l'axiome suivant:

Le corps de la géométrie projective est un corps quelconque.

Cet axiome ne suffit pas pour établir la continuité de la géométrie. Nous y parviendrons en formulant *l'axiome de continuité* que voici :

Les éléments du corps de la géométrie projective doivent former un espace topologique connexe et localement bicompact.

Nous avons déjà dit que nous introduisons le corps de la géométrie projective en considérant une droite quelconque, de sorte que l'axiome de continuité représentant une condition relative à ce corps topologique n'est en vérité autre chose q'une formulation de la notion de la continuité de la droite. En supposant que ce corps est commutatif, ou bien — ce qui revient au même — en prenant le théorème de PAPPUS pour axiome au lieu du théorème de DESARGUES, nous parviendrons, à l'aide de l'axiome de continuité, au théorème suivant de L. S. PONTRIAGUINE :[12]

Le corps de la géométrie projective est le corps des nombres réels ou celui des nombres complexes.

Ce résultat de l'école soviétique de géométrie constitue un fondement satisfaisant de la géométrie projective.

Deux généralisations de la géométrie dûes respectivement à MINKOWSKI[13] et à HILBERT[14] se rattachent également à la conception projective de CAYLEY—KLEIN. Pour arriver à la géométrie de MINKOWSKI, il faut également prendre

[12] L. S. PONTRJAGIN, Über stetige algebraische Körper, *Annals of Math.*, **33** (1932), p. 163—174.

[13] H. MINKOWSKI, *Geometrie der Zahlen* (Leipzig, 1896).

[14] D. HILBERT, Über die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte, *Math. Annalen*, **46** (1895) ou *Grundlagen der Geometrie*, Anhang I.

une figure absolue. Rattachons l'espace affine à un système x^i $(i=1,\ldots,n)$ de coordonnées cartésiennes. Considérons, dans cet espace, un corps convexe contenant l'origine du système des coordonnées. Nous prenons pour figure absolue la surface de ce corps. Si nous relions un point quelconque x^i de l'espace à l'origine O du système des coordonnées, le rayon ainsi obtenu aura un point d'intersection ξ^i avec la surface. La valeur absolue du rapport $Ox^i : O\xi^i$ nous donne la fonction $F(x)$ de distance du corps convexe considéré. La surface de la figure absolue sera donc caractérisée par l'équation $F(x)=1$. La fonction de distance peut être caractérisée par les conditions

1. $F(x)>0,\qquad$ si $x^i \neq 0,$
2. $F(\mu x)=\mu F(x),$ si $\mu>0,$
3. $F(x+y)\leqq F(x)+F(y),$

invariantes pour des centroaffinités. MINKOWSKI définit la distance des deux points x^i et y^i par la relation $d(x,y)=F(y-x)$. Il s'ensuit des propriétés 1. à 3. que la fonction de distance ainsi introduite jouit des propriétés 1. $d(x,y)>0$, si $x^i\neq y^i$, et 2. $d(x,y)+d(y,z)\geqq d(x,z)$. MINKOWSKI a introduit cette géométrie aux fins de la théorie des nombres et les propriétés que nous venons d'énumérer ont été démontrées par GOLAB[15] et HÄRLEN.[16] Ces propriétés permettent de conclure que dans cette géométrie les lignes les plus courtes sont les droites. Cela se prouve aussi de la manière suivante : on obtient de la définition de la distance pour la longueur d'arc d'une courbe différentiable $x^i=x^i(t)$ l'expression

$$s=\int_{t_0}^{t_1} F(\dot{x})dt$$

qui est invariant par rapport à des transformations de paramètres. Les extrémales du problème des variations correspondant à cette intégrale sont cependant les droites ordinaires de l'espace affine. Dans ce sens, cette géométrie est compatible avec la géométrie projective. Il convient d'ajouter que la distance ne reste invariante que pour les translations. Celle-ci fournissent alors les mouvements dans la géométrie de MINKOWSKI.

Le moyen le plus simple de parvenir à la géométrie de HILBERT consiste à poser le réciproque du problème précédent, c'est-à-dire à chercher toutes les géométries métriques de l'espace projectif dans lesquelles les droites sont les lignes les plus courtes et dans lesquelles toutes les droites sont d'une longueur infinie. HILBERT résout ce problème de la manière suivante : Toutes les géométries de ce type sont obtenues si l'on prend une surface convexe

[15] ST. GOLAB, Quelques problèmes métriques de la géométrie de Minkowski, *Trav. Acad. Mines. Cracovie,* **6** (1932).

[16] ST. GOLAB und H. HÄRLEN, Minkowskische Geometrie I—II. *Monatshefte f. Math. u. Phys.,* **38** (1931) p. 387—398.

fermée et si l'on ne considère que les points situés à l'intérieur du corps convexe, et si l'on détermine la distance des deux points A et B par la formule $d = c \log (ABXY)$ de CAYLEY—KLEIN, où X et Y sont de nouveau les points d'intersection de la droite reliant les points A et B avec la surface convexe. Une telle notion de distance satisfait aux exigences décrites plus haut sous 1. et 2., dont il découle que les droites sont les lignes les plus courtes.

L'idée de la démonstration que HILBERT donne pour l'inégalité du triangle est la suivante: Si l'on fixe les points A et B et si l'on modifie le corps convexe de telle façon que, sur la droite AB, X' soit plus près du point A que le point X, et Y' soit plus près de B que Y, alors $\bar{d}$, la distance des points A et B par rapport à la nouvelle figure absolue sera plus grande que d. Considérons maintenant un plan contenant les points A et B, de même qu'un point C. Les segments AC et BC ont les points d'intersection U, V et T, Z respectivement avec la courbe convexe du plan. Les deux droites reliant U à Z et T à V déterminent un point d'intersection W. Dans le plan des points A, B et C nous considérons le triangle UTW au lieu de l'intersection du corps convexe primitivement donné. La droite AB a avec le triangle les points d'intersection X' et Y', situés relativement à AB de la manière décrite ci-dessus. Or, pour la distance des côtés du triangle ABC il est aisé d'obtenir la relation

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB},$$

où $\overline{AB}$ est la distance de ces deux points par rapport au triangle UTV, tandis que $\overline{AC}$ et $\overline{CB}$ sont des distances par rapport à la courbe primitive. L'inégalité du triangle est maintenant une conséquence de notre remarque précédente.

A l'analogie de la géométrie équiforme et par conséquent de la géométrie euclidienne qui sont déterminées par une courbe plane dégénérée de second ordre, la géométrie de MINKOWSKI comprend le cas où la surface convexe se dégénère en une courbe plane convexe.

Passons maintenant à la fondation de la géométrie basée sur la théorie des groupes. Dans nos observations concernant l'axiomatique, nous avons déjà souligné qu'au lieu des axiomes de congruence on pourrait prendre pour notion fondamentale le mouvement lui-même. Dans la conception de KLEIN, telle que nous l'avons décrite tout à l'heure, cette considération est très nettement mise en relief aussi bien en ce qui concerne la géométrie euclidienne que la géométrie non-euclidienne. Les géométries peuvent, en effet, être caractérisées par ceux des sous-groupes du groupe des collinéations de l'espace projectif pour lesquels les trois figures absolues, dont nous avons parlé plus haut, demeurent invariantes. Les notions fondamentales de la métrique deviennent ainsi des invariants de ces groupes, et par là, ces géométries sont déterminées d'une manière univoque. Dans le Programme d'Erlangen,

F. KLEIN[17] a très clairement exposé la corrélation entre la théorie des groupes et la géométrie. Selon sa conception, la caractérisation la plus générale d'une géométrie doit prendre pour point de départ une variété quelconque et un groupe de transformations qui s'y rattache. Dans ce cas, la géométrie est la théorie des invariants de ce groupe. Ce qui est important, c'est que F. KLEIN a souligné des conséquences importantes de ce principe, qui permettent la démonstration de l'équivalence de certaines géométries. KLEIN appelait ces conséquences principe de transition (Übertragungsprinzip). L'essentiel de ce principe tient en deux observations.

Une variété donnée A peut être appliquée sur une variété A'. Avec A, le groupe de transformations B passe également dans un groupe B', qui lui est semblable. En vertu de l'isomorphisme des deux groupes, leurs théories des invariants sont identiques, et par conséquent les deux géométries sont équivalentes.

Pour illustrer ce point de vue, considérons un exemple donné par F. KLEIN. Nous projetons une quadrique stéréographiquement sur un plan. Par le centre de la projection passent deux génératrices, ayant deux points d'intersection avec le plan. Les transformations projectives du plan, laissant invariant ces deux points, donnent les applications projectives sur elle-même de la surface de second ordre, pour lesquelles le centre de la projection reste invariant. Si la surface est une ellipsoïde, les deux points mentionnés du plan forment un couple de points imaginaire et il s'ensuit que le groupe du plan, que nous venons de définir, donne précisément la géométrie élémentaire. Cette géométrie est donc équivalente à la géométrie projective possédant un point fixe d'une surface de second ordre.

La deuxième observation est la suivante: Parmi les points de la variété A on peut choisir une figure M qui sera par exemple une droite de l'espace projectif. Cette figure doit dépendre d'un nombre N de paramètres. La figure M peut alors être considérée comme point d'une variété A' à N dimensions. Le groupe B opérant sur cette figure deviendra maintenant le groupe des transformations de la variété A' et la géométrie ainsi obtenue sera équivalente à la géométrie de la figure M en A.

Pour illustrer ce principe, citons la méthode par laquelle KLEIN a développé la géométrie des droites de l'espace projectif à trois dimensions. Les droites de cet espace peuvent être caractérisées par six coordonnées de ligne, et ces coordonnées satisfont à une relation quadratique. Nous les interprétons comme les coordonnées des points d'un espace projectif à six dimensions. Ainsi on obtient les points de l'hypersurface de second ordre caractérisée par la dite relation quadratique. Nous voyons donc que la géométrie des droites de l'espace à trois dimensions est équivalente à la géométrie de l'espace pro-

[17] F. KLEIN, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, *Math. Annalen,* **43** (1893).

jective à six dimensions, dont l'absolue coïncide avec l'hypersurface de second ordre en question.

Le principe de transition a entraîné des conséquences importantes pour la géométrie des cercles et des sphères. Il est, en effet, possible de démontrer que la géométrie des cercles de MOEBIUS est équivalente à celle des géométries métriques de l'espace à trois dimensions qui a la sphère pour figure absolue; la géométrie des cercles de LAGUERRE est par contre équivalente à celle des géométries de l'espace projectif à trois dimensions qui a pour figure absolue une ellipse située dans le plan de l'infini. La géométrie des cercles de LIE est équivalente à la géométrie métrique d'un espace projectif à quatre dimensions. L'absolue n'est pas dégénéré et sa signature est égale à 1.

La conception de KLEIN sur la fondation des géométries euclidienne et non-euclidienne présuppose déjà la fondation complète de la géométrie projective. C'est H. HELMHOLTZ[18] qui a initié les recherches concernant la possibilité de fonder ces géométries au moyen de la théorie des groupes seule, étant donné une caractérisation topologique de la variété considérée. S. LIE[19] a rattaché ces recherches à la théorie des groupes découvertes par lui; en formulant avec exactitude les notions ébauchées par HELMHOLTZ, il a pu résoudre complètement le problème dont nous avons parlé plus haut. Les groupes de transformations qui figurent dans ces recherches sont différentiables et ces recherches se rattachent aux travaux de RIEMANN sur la fondation des géométries par la géométrie différentielle. Nous ne traiterons donc en détail les recherches de HELMHOLTZ et de LIE qu'après avoir étudié celles de RIEMANN, dont il vient d'être question.

C'est D. HILBERT[20] qui a fourni à ce problème une solution exempte de toute condition de différentiabilité. Les recherches de HILBERT ne concernent que la géométrie du plan. HILBERT définit le plan topologiquement comme image homéomorphe du plan arithmétique. Par mouvements il entend les applications biunivoques du plan sur lui-même, pour lesquelles l'orientation d'une courbe de JORDAN reste invariante. Pour toute transformation correspondant à un mouvement la transformation inverse doit, elle aussi, exister. Le mouvement laissant un point M fixe, s'appelle rotation autour du point M. Après ces définitions, HILBERT propose les trois axiomes suivants:

I. L'effectuation consécutive de deux mouvements est un mouvement.

Ce qui veut dire en autres mots:

I. Les mouvements forment un groupe.

[18] H. HELMHOLTZ, Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen, *Mediz. Verein. Heidelberg*, **4** (1866), ou *Göttinger Nachrichten* (1868), p. 193—221.

[19] S. LIE und F. ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppen* III, Kapit. 5, (Leipzig, 1893).

[20] D. HILBERT, Über die Grundlagen der Geometrie, *Math. Annalen*, **56** (1902) ou *Grundlagen der Geometrie*, Anhang IV.

II. Si A et M sont deux point différents du plan, par les rotations autour du point M, le point A passe en un nombre infini de points.

Hilbert appelle l'ensemble de points obtenu par une telle rotation une circonférence véritable, car il démontre dans sa note que la circonférence véritable est homéomorphe à une circonférence du plan arithmétique. L'axiome II peut donc être exprimé sous la forme suivante, identique à la première:

II. Toute circonférence véritable se compose d'un nombre infini de points.

III. S'il existe un mouvement qui transporte trois points A, B et C dans un voisinage quelconque des points A', B' et C', il doit exister un mouvement qui transforme les points A, B et C en A', B' et C'.

Hilbert a démontré, en vertu de ces trois axiomes, que la géométrie en question est la géométrie euclidienne ou la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky. Nous avons déjà remarqué que Hilbert a démontré la homéomorphie de la circonférence véritable et de la circonférence arithmétique, ce qui veut dire que le groupe des rotations autour de M et les groupes de rotations euclidiennes ordinaires sont isomorphes. L'introduction de la droite véritable se fait par les étapes suivantes: Nous appelons segment tout couple de points AB. Deux segments sont congruents, si un mouvement fait passer l'un dans l'autre. Une rotation autour du point M est appelée demi-rotation si, effectuée deux fois de suite, elle donne pour résultat le mouvement identique. Or, si A, B et C sont trois points, tels que A passe par une demi-rotation autour de B en C et C passe en même temps en A, B est le milieu du segment AC. Si, en partant des points A et B, nous poursuivons infiniment ce procédé de bissection et si, à l'ensemble ainsi obtenu, nous ajoutons ses points-limites, nous obtenons la droite véritable reliant les points A et B. En effectuant des demi-rotations et des bissections, la droite véritable reliant A à B peut être complétée à donner une droite véritable complète. Hilbert démontre que la droite véritable est déterminée par deux de ses points. Il démontre aussi, pour le point et la droite véritable, la validité des axiomes d'incidence et d'ordre du plan. Si l'on considère encore des triangles, les axiomes de congruence sont aussi valables. Comme le plan a été défini topologiquement, les axiomes de continuité le sont aussi. Quant à la position relative des droites, elle est décrite ou bien par le postulat des parallèles d'Euclide, ou bien par celui de Bolyai—Lobatchevsky. Ainsi il est démontré, que le système d'axiomes donné caractérise la géométrie euclidienne, ou bien la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky.

Nous venons d'exposer certains éléments importants de la fondation projective et de la fondation basée sur la théorie des groupes de la géométrie. Ces considérations permettent de donner une interprétation nouvelle de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky et, en même temps, ils nous offrent la possibilité d'obtenir d'autres systèmes de géométrie.

Une troisième et nouvelle direction des recherches géométriques a été inaugurée par la célèbre thèse de B. RIEMANN: „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen".[21] Il s'agit là d'une caractérisation des espaces par la géométrie différentielle.

En parlant du programme d'Erlangen de KLEIN, nous avons déjà dit que l'espace géométrique est une certaine variété à n dimensions, munie d'un groupe de transformations. A ce sujet, nous n'avons pas encore souligné que la notion de variété exige une définition rigoureuse. C'est RIEMANN qui, le premier, en a compris la nécessité, en donnant dans sa thèse citée plus haut, 18 ans avant le Programme d'Erlangen, les premiers éléments d'une définition de la notion de variété. C'est au moyen d'un procédé recurrent qu'il arrive à ce que les points de l'espace à n dimensions peuvent être caractérisés par de systèmes ordonnés de n nombres et qu'ainsi la variété est l'image homéomorphe d'un certain domaine de l'espace arithmétique. Il convient d'ajouter que c'était H. POINCARÉ[22] qui a donné une définition de la dimension analogue à celle de RIEMANN. La géométrie de RIEMANN se fonde sur deux notions.

1. Sur la variété à n dimensions, dans laquelle l'élément appelé point est un système ordonné de n nombres x^i $(i=1,\dots,n)$.

2. Sur la notion de la métrique en vertu de laquelle il est exigé que dans le voisinage d'un point la métrique déterminée par le théorème de PYTHAGORE.

Exposée plus détaillément, la deuxième exigence signifie que, dans les différentiels de coordonnées dx^i, le carré de l'élément d'arc est une forme quadratique positive définie dont les coefficients sont des fonctions des coordonnées de points. Partant de l'élément d'arc, RIEMANN propose une expression qui est fonction de l'élément de surface. Il appelle cette fonction la mesure de courbure de l'espace. Lorsque l'élément d'aire est déterminé par les coordonnées de PLÜCKER $(\Delta x)^{ik}$, la mesure de courbure est un quotient dont le dénominateur et le numérateur sont des formes quadratiques dans les coordonnées $(\Delta x)^{ik}$. La forme qui figure dans le dénominateur est la mesure du carré de l'élément d'aire. La forme quadratique figurant dans le numérateur est obtenue en tenant compte, dans le développement du carré de l'élément d'arc, outre les termes de second ordre, des termes de quatrième ordre. RIEMANN établit que la condition suffisante et nécessaire pour qu'une figure soit librement mobile dans l'espace et qu'au cours de ce mouvement, les rapports métriques de cette figure ne se changent pas, c'est que la mesure

[21] B. RIEMANN, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen,* Habilitationsschrift (1854), ou *Göttinger Abhandl.*, **13** (1868), p. 1—20.

[22] H. POINCARÉ, *Revue de méthaphysique et de morale* (1918).

de courbure soit constante. D'après que cette constante est négative ou positive, nous obtenons précisément la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky, respectivement la géométrie non-euclidienne elliptique. Lorsque la constante est égale à zéro, l'espace en question est l'espace euclidien.

A sa seconde hypothèse, selon laquelle l'espace est localement euclidien, RIEMANN donne la motivation suivante:

D'abord on suppose que dans l'espace à n dimensions toute ligne est mesurable par toute ligne. Donc, si nous voulons mesurer une courbe, nous pouvons la décomposer en de parties élémentaires mesurables. Si une telle partie élémentaire est déterminée par les points x^i et x^i+dx^i, sa longueur est appelée l'élément d'arc ds correspondant à l'élément linéaire dx^i. A cause de l'additivité de la mesure on suppose que l'élément d'arc est une fonction homogène de premier degré dans les dx^i, qui ne dépend pas de l'orientation de l'élément linéaire dx^i. Pour déterminer plus précisément l'élément d'arc, RIEMANN recourt à la notion de la distance de points non-voisins. Soit $\underset{0}{x}^i$ un point fixe et x^i un point variable, mais ayant une certaine distance de $\underset{0}{x}^i$. La distance de ces deux points est déterminée par la fonction $F(x, \underset{0}{x})$. Dans le voisinage du point $\underset{0}{x}^i$ cette fonction est croissante pour tout x^i, donc elle atteint son minimum à $\underset{0}{x}^i$. Cette fonction est supposée pourvue de derivées continues de second ordre au moins. D'après la condition du minimum, les termes linéaires s'annulent dans le différentiel de la fonction, et dF prend la forme

$$dF=\sum_{i,k}\frac{\partial^2 F(x,\underset{0}{x})}{\partial x^i\,\partial x^k}\,dx^i\,dx^k.$$

Mais le carré de l'élément d'arc correspondant à l'élément linéaire dx^i, issu du point $\underset{0}{x}^i$, ne peut différer de cette expression qu'en un constant dépendant du point $\underset{0}{x}^i$. Le carré de l'élément d'arc est donc, en effet, une forme quadratique des différentiels. Cette motivation donnée par RIEMANN présente pourtant des lacunes, car elle suppose que deux points non voisins ont aussi une distance, ce qui n'est pas le cas dans les espaces généraux de RIEMANN. En caractérisant la géométrie euclidienne et les deux géométries non-euclidiennes parmi les espaces généraux de RIEMANN par le fait que les figures y sont librement mobiles sans déformation, il suppose implicitement l'existence d'un groupe de transformations continu et transitif, pour lequel la forme différentielle quadratique caractérisant l'élément d'arc est invariante.

La motivation de la seconde hypothèse de RIEMANN et la fondation des géométries euclidiennes et non-euclidiennes ont été réalisées d'une manière parfaitement satisfaisante par les recherches de HELMHOLTZ[18] et de LIE,[19] dont nous avons parlé plus haut. Dans ces recherches, il n'est pas question de la métrique mais seulement du fait que dans l'espace à n dimensions — qui est, selon la première hypothèse de RIEMANN, l'image homéomorphe de l'espace arithmétique — la mobilité libre est définie de la manière suivante, au moyen d'un groupe de transformations G continu et transitif:

Soit P un point quelconque de l'espace et $M_1, \ldots, M_k, \ldots, M_{n-1}$ des éléments de surface passant par ce point, de dimensions $1, \ldots, n-1$ respectivement. Dans ce cas, le point P étant fixe, les transformations de G transforment M_1 en un M_1' quelconque, M_2 passant par M_1 en M_2', un M_k passant par les éléments $M_1, M_2, \ldots, M_{k-1}$ précédents en un M_k' quelconque passant par $M_1, \ldots, M_{k-1}$. Si $k = n-1$, le système $M_1, \ldots, M_{n-1}$ d'éléments de surface incidents ne reste invariant que pour la transformation identique.

Dans ces conditions, c'est LIE qui a prouvé rigoureusement que l'espace ne peut être identique qu'avec l'espace euclidien ou avec les deux espaces non-euclidiens. Mais dans un tel espace, le carré de l'élément d'arc est déterminé par une forme différentielle quadratique et la mesure de courbure qui appartient à cet élément d'arc est constante.

Omettons maintenant la condition que la mobilité libre de l'espace soit garantie par un groupe transitif G et supposons ce qui suit: L'espace vectoriel qui se compose des éléments linéaires dx^i partant d'un même point, doit disposer dans un point P quelconque de mobilité libre, dans le sens suivant:

Les dx^i soient soumis à l'opération d'un groupe projectif P_n, qui transforme les éléments de surface $M_1, \ldots, M_{n-1}$ issus de P de la manière décrite plus haut, la transformation identique étant notemment la seule qui laisse invariant le système d'éléments incidents $M_1, \ldots, M_{n-1}$.

Sous cette condition, il existe une forme quadratique dans les dx^i, invariante par rapport au groupe P_n. Si deux éléments linéaires sont considérés congruents dans le cas où P_n contient une transformation faisant passer les deux éléments linéaires l'un dans l'autre, et si la longeur d'éléments linéaires congruents est considérée égale, alors le carré de l'élément d'arc satisfera précisément à la deuxième hypothèse de RIEMANN. Formulée également par S. LIE, cette constatation révèle le sens profond de la deuxième hypothèse de RIEMANN.

Si l'on considère l'homogénéité de l'espace, exprimée par sa mobilité libre, comme sa propriété principale, il semble que le travail de RIEMANN n'a servi à rien, puisqu'en dernier ressort ce sont seulement les espaces euclidiens et non-euclidiens qui ont de l'importance. Mais RIEMANN en pensait autrement. Il affirme que la métrique de l'espace est déterminée par des causes intrinsèques, particulièrement accessibles à la physique. H. WEYL[23] interprète cette pensé de RIEMANN en déclarant que l'espace est une variété amorphe à trois dimensions et que seule la matière remplissant l'espace lui

[23] H. WEYL, *Raum, Zeit, Materie*, 5e éd. (Berlin, 1923).

donne la forme et détermine sa métrique. La théorie einsteinienne de la relativité justifie magnifiquement cette affirmation.

Jusqu'à présent, nous avons considéré la géométrie de RIEMANN dans un certain système de coordonnées. L'analyse donnée par LIE et HELMHOLTZ de la deuxième hypothèse de RIEMANN est indépendante du système de coordonnées. La forme quadratique doit donc être invariante par rapport à des transformations de coordonnées. Il est cependant évident que dans la géométrie de RIEMANN, toute relation exprimant un fait géométrique quelconque doit être indépendante du système de coordonnées. C'est G. C. RICCI [24] qui a proposé un tel calcul invariant par rapport à des transformations de coordonnées. Le fondement algébrique de ce calcul est donné par l'algèbre tensorielle. Le tenseur est essentiellement déterminé par des éléments de surface d'un certain ordre. L'ordre de ces derniers détermine aussi l'ordre du tenseur. La partie analytique s'en compose de l'introduction d'opérateurs différentiels également invariants par rapport à des transformations de coordonnées. De cette manière, la dérivation ordinaire et la dérivation partielle sont remplacées par une dérivation invariante, respectivement covariante. La première ne change pas le caractère tensoriel des quantités, tandis que la seconde augmente d'une unité l'ordre des tenseurs. Dans un espace euclidien muni d'un système de coordonnées cartésiennes ces dérivations se réduisent aux opérations ordinaires de dérivation. Ces notions sont devenues beaucoup plus claires depuis que LEVI-CIVITA [25] a introduit le déplacement parallèle de vecteurs dans l'espace de RIEMANN, le long d'une courbe. Ce déplacement parallèle laisse invariant la longueur des vecteurs et l'angle formé par eux. Au moyen du déplacement parallèle on peut définir le différentiel invariant essentiellement de la même façon que la dérivation ordinaire. Si l'on conduit un vecteur, parallèlement à lui-même, sur une courbe fermée infinitésimale, située sur un élément de surface, le vecteur de la différence entre la situation initiale et la situation finale donnera précisément le tenseur de quatrième ordre qui détermine la mesure de courbure de RIEMANN si nous négligeons des quantités d'un ordre supérieur à celui de l'élément d'aire. C'est le tenseur de courbure de RIEMANN—CHRISTOFFEL, établissant le caractère invariant de la mesure de courbure par rapport à des transformations de coordonnées.

C'est à ces considérations que se rattache le problème fondamental suivant de la géométrie de RIEMANN. Il faut déterminer un système d'invariants différentiels, nécessaire et suffisant pour caractériser l'espace. Après avoir construit un tel système, on peut constater si deux espaces de RIEMANN sont équivalents ou non, c'est-à-dire si leurs éléments d'arc peuvent passer

[24] G. C. RICCI, Sulla derivazione covariante ad una forma quadratica differenziale, *Rendiconti Circ. Mat. Palermo,* **42** (1917).

[25] T. LEVI-CIVITA, Nozione di parallelismo in una varietà qualunque, *Rendiconti Circ. Mat. Palermo,* **42** (1917), p. 173—205.

l'un dans l'autre par une transformation de coordonnées. Ce problème fondamental a été résolu par E. B. CHRISTOFFEL.[26] Exprimée en termes modernes, cette solution est la suivante:

Outre la forme différentielle quadratique qui détermine l'élément d'arc, le système des invariants différentiels se compose des formes dont les coefficients sont le tenseur de courbure, respectivement les tenseurs qu'on obtient de ce tenseur par dérivation covariante.

Il s'ensuit que le tenseur de courbure et l'opération de la dérivation covariante suffisent pour caractériser l'espace d'une manière invariante par rapport à des transformations de coordonnées.

On peut constater que les espaces dont la fondation peut être donnée à l'aide de la géométrie différentielle, ne sont pas interprétables selon la théorie de KLEIN basée sur la théorie des groupes. En effet, s'il en était ainsi, cela entraînerait la mobilité libre de l'espace et nous aboutirions ainsi, comme il a été dit plus haut, non pas à des espaces généraux de RIEMANN, mais seulement à la géométrie euclidienne et aux deux géométries non-euclidiennes. J. A. SCHOUTEN,[27] puis E. CARTAN[28] ont pris l'initiative de recherches, qui se proposent d'élargir la théorie de KLEIN, de manière à pouvoir embrasser les géométries récemment découvertes.

Le procédé de J. A. SCHOUTEN est le suivant: Prenons un repère d'ordre n en un point P quelconque de l'espace et une courbe arbitraire retournant au point P. Si nous déplaçons parallèlement ce repère le long de cette courbe jusqu'à ce qu'elle revienne de nouveau en P, il s'ensuit des propriétés du déplacement parallèle que ce repère peut être transporté dans le repère primitif, par une transformation appartenant au groupe de rotations. En considérant maintenant toutes les courbes fermées qui passent par le point P, on peut démontrer que les rotations correspondantes constituent un sous-groupe G du groupe de rotations. Abstraction faite des isomorphismes, ce groupe G est indépendant du repère que nous avons choisi. On peut établir également que les groupes qu'on fait correspondre par ce procédé aux points de l'espace sont isomorphes entre eux, ce qui revient à dire qu'ils représentent le même groupe abstrait.

En vertu du caractère localement euclidien de l'espace, tout repère d'ordre n, défini en un point quelconque de l'espace, peut être considéré comme localement euclidien. D'après E. CARTAN, la courbe fermée mentionnée plus haut, ainsi que les espaces euclidiens locaux correspondant à ses points, sont appliqués isométriquement sur l'espace euclidien à n dimensions. L'image

[26] E. B. CHRISTOFFEL, Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades, *Journ. f. reine u. angew. Math.*, **70** (1870), p. 46—70.

[27] J. A. SCHOUTEN, On the number of degrees of freedom of the geodetically moving systems, *Proc. Kon. Acad. Wet. Amsterdam*, **27** (1919), p. 16—22.

[28] E. CARTAN, Les groupes d'holonomie des espaces généralisés, *Acta Math.*, **48**

ainsi obtenue de la courbe fermée est une courbe ouverte et P, comme point d'origine et extrémité, possédera deux images. Les images des deux repères d'ordre n obtenus dans le point P peuvent être faites coïncider au moyen d'une translation et d'une rotation. Si nous effectuons cette opération sur toutes les courbes fermées appartenant à P, les transformations dont nous venons de parler détermineront un sous-groupe M du groupe de mouvements qui sera indépendant du point P et dont la partie homogène sera identique au groupe G. Ce groupe M est le groupe d'holonomie de l'espace de RIEMANN. Certains auteurs appliquent cette dénomination au groupe G lui-même.

Ce groupe jouit en outre de la propriété fondamentale suivante. Considérons deux points P et Q et les espaces localement euclidiens correspondants, ainsi qu'une courbe quelconque reliant ces deux points. Si ξ^i est un vecteur en P, il pourra être considéré comme point dans l'espace local de P. Si, dans l'espace local appartenant à Q, nous faisons correspondre à ce point le point obtenu par le déplacement parallèle du vecteur ξ^i en Q, nous obtenons une application congruente entre ces deux espaces locaux. Toutes les applications congruentes entre tous les espaces locaux quelconques déterminent précisément le groupe M.

Le groupe d'holonomie M détermine l'espace de RIEMANN dans le sens suivant: En prenant pour point de départ un sous-groupe M de l'espace euclidien, on peut démontrer que celui-ci peut toujours être considéré comme le groupe d'holonomie d'un espace de RIEMANN et cela caractérise l'espace de RIEMANN. C'est G. LAPTIEV[29] qui a mené à bonne fin ces recherches, conduisant en même temps à la construction de l'espace de RIEMANN. Partant d'un groupe de LIE donné, G. LAPTIEV a même construit des espaces d'un type plus général que celui de RIEMANN. Il est important pour la construction de ces espaces de représenter le groupe par les opérateurs de LIE. A l'aide des combinaisons linéaires de ces derniers on peut déterminer toute transformation infinitésimale de groupe. Dans le cas de l'espace de RIEMANN le point de départ de la construction est une variété à n dimensions, dont les éléments correspondent aux espaces euclidiens locaux. L'application congruente de deux espaces locaux voisins quelconques est déterminée par la transformation infinitésimale du groupe donné, qui détermine en même temps le déplacement parallèle. La métrique, localement euclidien en vertu du caractère euclidien des espaces locaux, doit être tel que le déplacement parallèle qui en résulte, soit identique au déplacement parallèle obtenu plus haut. La réalisation effective de ces idées ne demande que la solution d'équations aux dérivées partielles.

Nous venons d'examiner deux problèmes principaux de la géométrie de RIEMANN, à savoir le problème de l'équivalence et celui de la subordination de la géométrie au moyen du groupe d'holonomie à des considérations de la

[29] Г. Лаптев, Доклады Акад. Наук СССР, **71** (1950), p. 597—600.

théorie des groupes. L'élément fondamental unique de l'espace a toujours été le point. Mais dans la géométrie de RIEMANN, les droites possèdent également des analogues immédiates. Ce sont les lignes géodésiques, déterminées par la métrique. Le rôle important de ces lignes a été aperçu par BELTRAMI, avant que le développement de la géométrie de RIEMANN que nous venons d'esquisser, eût été réalisé. A l'aide de ces lignes, BELTRAMI a démontré l'identité des deux géométries non-euclidiennes et des espaces à courbure constante. BELTRAMI[30] a étudié les applications des espaces de RIEMANN, par lesquelles les lignes géodésiques passent en lignes géodésiques. Il a en particulier examiné le cas, où l'espace donné est applicable sur un espace dont les lignes géodésiques peuvent être obtenues au moyen d'équations linéaires. Cela signifie que l'espace donné est applicable sur l'espace euclidien. BELTRAMI finit par constater que cette représentation n'est possible que si la courbure de l'espace donné est constante. Il a consacré deux mémoires à l'étude des relations avec la géométrie non-euclidienne. Le premier traite le cas de deux dimensions,[31] tandis que dans le deuxième la dimension est quelconque.[32] Dans ces travaux, il démontre que lorsque la courbure est une constante négative, l'application décrite plus haut fait correspondre aux points de l'espace l'intérieur d'une hypersphère. Les lignes géodésiques deviendront donc les cordes de l'hypersphère. Aux plans à dimensions différentes de l'image correspondront dans l'espace primitif des variétés géodésiques totales. Si nous considérons maintenant l'hypersphère comme figure absolue, l'élément d'arc de la métrique de CAYLEY correspondante coincidera exactement avec l'élément d'arc de l'espace primitif. Il s'ensuit que la géométrie de cet espace est identique à la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky. En cas de courbure positive, l'espace peut être appliqué sur l'espace euclidien entier. Si nous prenons pour figure absolue une quadrique non dégénérée et purement imaginaire, l'élément d'arc de la métrique de CAYLEY correspondante sera identique à l'élément d'arc de l'espace primitif. Cette géométrie sera donc identique à la géométrie elliptique.

Les considérations développées plus haut permettent de conclure que, dans les espaces à courbure constante, il existe des surfaces géodésiques totales de dimensions $2, \ldots, n-1$, et que leurs images dans l'espace-image euclidien sont des plans ordinaires, à dimensions correspondantes. Dans les espaces à courbure constante, il existe donc dans tous les points et dans toutes les directions des variétés géodésiques totales. F. SCHUR[33] à démontré

[30] E. BELTRAMI, Sulla flessione delle superficie rigate, *Annali di Mat.*, **7** (1866).

[31] E. BELTRAMI, Saggio di interpretazione della geometria non-euklidea, *Giornale di Mat.*, **6** (1868), p. 285—315.

[32] E. BELTRAMI, Teoria fondamentale degli spazii di curvature constante, *Annali di Mat.*, Ser. II., **2** (1868—69), p. 232—255.

[33] F. SCHUR, Über den Zusammenhang der Räume constanten Riemannschen Krümmungsmaßes mit den projektiven Räumen, *Math. Annalen*, **27** (1886), p. 537—567.

que s'il est possible de faire passer des surfaces géodésiques totales dans toutes les directions par deux points de l'espace de RIEMANN, cela doit également être possible pour n'importe quel point de l'espace et l'espace est de courbure constante.

Pour revenir à l'idée de BELTRAMI, il convient de souligner qu'il n'a utilisé essentiellement que les lignes géodésiques et leurs applications. Cette idée a conduit au développement de géométries dont les éléments sont, outre le point, des trajectoires, déterminées par des équations différentielles de second ordre. Les fondements de cette géométrie des trajectoires ont été posés par H. WEYL,[34] L. P. EISENHART,[35] O. VEBLEN[36] et T. Y. THOMAS.[37] Tout comme la géométrie de RIEMANN doit être regardée comme la généralisation de la géométrie euclidienne, la géométrie des trajectoires est une généralisation de la géométrie projective. Il s'agit là, en effet, d'une géométrie déscriptive pure, qui se propose d'examiner les propriétés invariantes par rapport à des applications laissant invariantes les trajectoires. Il faut citer, sous ce rapport, les recherches de B. KAGAN[38] sur les espaces subprojectifs. KAGAN a étudié une géométrie de trajectoires, dans laquelle la trajectoire est située, employant un système convenable de coordonnées, dans un plan ordinaire à deux dimensions. Il suppose, en outre, que tous les plans correspondant à des trajectoires, passent par un point fixé de l'espace. Les systèmes de coordonnées, dans lesquels cette propriété reste invariante, forment précisément le groupe de l'espace subprojectif.

Entre la géométrie de trajectoires non-métrique et la géométrie de RIEMANN, une autre géométrie doit prendre place, qui est la généralisation affine, due à H. WEYL,[39] de la géométrie de RIEMANN. Cette géométrie est caractérisée par le fait qu'entre les espaces vectoriels locaux de l'espace à n dimensions, une application affine est définie, qui dépend des courbes reliant les espaces locaux aussi. La connexion affine est déterminée par certains paramétres Γ^i_k. Ceux-ci se distinguent par le fait que, soumis à des transformations de coordonnées, ils satisfont à une certaine règle de transformation.

[34] H. WEYL, Einordnung der projektiven und konformen Auffassung, *Göttinger Nachrichten,* (1921), p. 99—112.

[35] L. P. EISENHART, Spaces with corresponding paths, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA,* **8** (1922), p. 233—238.

[36] O. VEBLEN, Projective and affine geometry of paths, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* **8** (1922), p. 347—350.

[37] O. VEBLEN and T. Y. THOMAS, The geometry of paths, *Transactions Amer. Math. Soc.,* **25** (1924), p. 551—608.

[38] B. KAGAN, Sur les espaces sousprojectifs, *C. R. Acad. Sci. Paris,* **191** (1930), p. 548—550, et Über eine Erweiterung projektiver Räume und den zugehörigen Absolut, Труды Семин. по Вект. и Тенз. Анализу, **1** (1933), p. 12—101.

[39] H. WEYL, Reine Infinitesimalgeometrie, *Math Zschrift,* **2** (1918), p. 384—411.

Si nous n'exigeons pas la mobilité libre d'un espace vectoriel appartenant à un point quelconque d'une variété à n dimensions, le carré de l'élément d'arc ne sera plus déterminé par une forme quadratique dans les différentiels de coordonnées. RIEMANN lui-même a déjà indiqué ce cas dans sa thèse, mais la géométrie métrique, ainsi obtenue, n' a été décrite que par P. FINSLER,[40] dans sa thèse. Ici l'élément d'arc ds est donné par une fonction $F(x, dx)$ qui est du premier degré, positive et homogène dans les dx^i. Les droites de cette géométrie seront les extrémales du problème de variations $\int F(x, \dot{x})\, dt$ de sorte que celles-ci seront les trajectoires de l'espace. Dans ce cas, l'espace n'est librement mobile que dans le voisinage d'une direction fixée. Cela signifie qu'un espace euclidien local n'appartient plus à un point, mais à un élément linéaire. Il est donc convenable de considérer l'espace non plus comme une variété de points, mais comme une variété d'éléments linéaires.

Pour cette géométrie, le calcul invariant par rapport à des transformations de coordonnées a été établi pour la première fois par L. BERWALD.[41] Cependant BERWALD ne considérait pas encore l'espace comme une variété d'éléments linéaires, de sorte qu'au cours du déplacement parallèle correspondant à la dérivation invariante qu'il a introduite, la longueur des vecteurs ne reste pas invariante. Mais dans l'espace de RIEMANN, cette propriété est justement la propriété principale du déplacement parallèle de LEVI-CIVITA.

E. CARTAN[42] considère déjà la variété comme une variété d'éléments linéaires et c'est ainsi qu'il est parvenu en 1934 à établir un calcul invariant convenable. Dans ce cas, si nous ne considérons plus une courbe fermée, mais une variété d'éléments linéaires dans laquelle l'élément linéaire initial et final coïncident, le déplacement parallèle des vecteurs fournira trois tenseurs de courbure. Dans le cas particulier de la géométrie de RIEMANN, l'un de ceux-ci se réduit au tenseur de courbure de RIEMANN—CHRISTOFFEL, tandis que les deux autres tenseurs s'annulent. A l'aide de ce tenseur, BERWALD[41] a généralisé la mesure de courbure de RIEMANN à l'espace de FINSLER. Ce tenseur peut d'ailleurs être remplacé par un tenseur plus simple, le tenseur dit de courbure principale, introduit par OTTO VARGA.[43] On sait que, dans l'espace de RIEMANN, la mesure de courbure, correspondant à un élément de

[40] P. FINSLER, *Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen,* Dissertation (Göttingen, 1918, et Basel, 1951).

[41] L. BERWALD, Über Parallelübertragung in Räumen mit allgemeiner Maßbestimmung, *Jahresbericht d. Deutschen Math. Verein.*, **34** (1925), p. 213—220; Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus, *Math. Zschrift,* **25** (1926), p. 40—73.

[42] E. CARTAN, *Les espaces de Finsler,* Actualités scientifiques et industrielles, **79** (Paris, 1934).

[43] O. VARGA, Über affinzusammenhängende Räume von Linienelementen insbesondere deren Äquivalenz, *Publicationes Math. Debrecen,* **1** (1949), p. 7—17.

surface quelconque, coïncide avec la courbure de GAUSS de la surface, déterminée par les lignes géodésiques passant par l'origine de l'élément de surface et tangentes à celle-ci. Une telle surface est appelée géodésique à l'origine de l'élément de surface. O. VARGA[44] a démontré que la courbure de BERWALD appartenant, dans l'espace de FINSLER, à un élément de surface et à une direction de celui-ci, coïncide avec la courbure intérieure de FINSLER, correspondant à la surface géodésique qui passe par l'origine de l'élément de surface et à la direction donnée. Dans le cas des surfaces, dont la métrique est déterminée par une forme quadratique, cette courbure intérieure de FINSLER se réduit à la courbure de GAUSS.

La caractérisation de la géométrie de FINSLER au moyen d'un système d'invariants différentiels — ce qui revient de nouveau au problème d'équivalence de l'espace — a été résolue par O. VARGA.[43] Il a trouvé que le tenseur fondamental appartenant à la fonction $F(x, dx)$ qui détermine la métrique, le tenseur de courbure principale, ainsi que deux autres tenseurs qui caractérisent la différence de l'espace de RIEMANN et les dérivations covariantes de ceux-ci, donnent un système complet d'invariants.

Dans ce cas encore, conformément aux recherches de BELTRAMI, nous pouvons poser la question de savoir quels sont les espaces de FINSLER susceptibles d'être appliqués les uns sur les autres, de manière que leurs trajectoires passent les unes dans les autres. C'est L. BERWALD[45] qui a étudié le premier ces applications. Là encore, le cas qui nous intéresse est celui où l'espace donné est applicable sur un espace dont les trajectoires peuvent être déterminées par des équations linéaires. Nous appelons ces espaces des espaces plan-projectifs. Mais dans ce cas, il ne s'ensuit pas que la mesure de courbure de BERWALD de l'espace soit constante. Lorsque nous exigeons de plus que la courbure de l'espace soit une constante négative et que la longueur d'une courbe soit indépendante de son orientation, c'est-à-dire que $F(x, \dot{x}) = F(x, -\dot{x})$, les espaces obtenus coïncideront précisément avec les espaces de HILBERT dont nous avons parlé et dont l'absolue est une surface convexe. Lorsque la constante est zéro, nous aboutissons à la géométrie de MINKOWSKI. Mais tandis que parmi les espaces de FINSLER les espaces de HILBERT peuvent être caractérisés par les trois propriétés citées plus haut, à savoir que 1. l'espace est plan-projectif; 2. sa courbure est constante et 3. la relation $F(x, \dot{x}) = F(x, -\dot{x})$ est valable, il n'en est pas ainsi dans la géométrie de MINKOWSKI, car il existe, en effet, des géométries de MINKOWSKI, dans lesquelles la relation $F(x, \dot{x}) = F(x, \dot{x})$ n'est pas valable. Cette caractérisation des espaces de HILBERT et de MINKOWSKI en tant qu'espaces de

[44] O. VARGA, Über das Krümmungsmaß in Finslerschen Räumen, *Publicationes Math. Debrecen*, **1** (1949), p. 116—122.

[45] L. BERWALD, Über Finslersche und Cartansche Geometrie. IV, *Annals of Math.*, **48** (1947), p. 755—781.

Finsler particuliers a été établie par P. FUNK[46] et L. BERWALD.[47] Parmi les géométries de FINSLER, la géométrie de MINKOWSKI est caractérisée par l'annulément de deux tenseurs de cette géométrie ainsi que cela a été démontré par E. CARTAN[42] et O. VARGA[48].

Nous voilà arrivés à la fin de notre aperçu historique concernant le développement imposant réalisé par la géométrie et en particulier par la geométrie différentielle dans les temps modernes. Nous tenons à souligner, encore une fois, que c'étaient les idées géniales de BOLYAI et de LOBATCHEVSKY qui ont ouverts à la science ces nouvelles perspectives brillantes.

ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИИ БОЯИ—ЛОБАЧЕВСКОГО НА РАЗВИТИЕ ГЕОМЕТРИИ

О. ВАРГА (Дебрецен)

(Резюме)

Автор указывает на то, как исследования Бояи и Лобачевского положили начало развитию современной аксиоматики евклидовой и неевклидовой геометрий, потом дает очерк проективного и теоретическо-группового понимания геометри ипо Кейли и Клейну. Наконец, трактуются дифференциально-геометрические соображения, которыми Риман руководился при обосновании геометрии. В каждом из этих трех направлений автор старается дойти до новейших исследований.

[46] P. FUNK, Über Geometrien, bei denen die Geraden die Kürzesten sind, *Math. Annalen*, **101** (1929), p. 226—237.

[47] L. BERWALD, Über die n-dimensionalen Geometrien konstanter Krümmung, in denen die Geraden die kürzesten sind, *Math. Zschrift*, **30** (1929), p. 449—469.

[48] O. VARGA, Zur Begründung der Minkowskischen Geometrie, *Acta Sci. Math. Szeged*, **10** (1943), p.

LA GÉOMÉTRIE NON-EUCLIDIENNE ET LES DÉFINITIONS AXIOMATIQUES

Par

J. HADAMARD (Paris)

(*Présenté par* G. HAJÓS)

Reportons nous aux célèbres réflexions que, dans la première partie de ses Pensées, PASCAL consacre à la Géométrie. Avec lui, nous noterons que l'idéal serait de démontrer tout ce que l'on avance et de définir tout terme que l'on va employer. Il s'agit — et PASCAL qui ne peut avoir là-dessus le moindre doute, le formule explicitement — de *définitions nominales,* c'est à dire d' "impositions de noms aux choses qu'on a clairement désignées en termes parfaitement connus".

Or à la réalisation de ce double idéal il y a un obstacle qui semble insurmontable. On ne peut prouver déductivement quoi que ce soit qu'en partant de principes antérieurs. Si ceux-ci, à leur tour demandent à être démontrés de manière analogue, et ainsi de suite, il y aura bien, au bout du compte, un moment où il faudra s'arrêter dans cette voie. Ceci, c'est une remarque formulée de haute antiquité: c'est le célèbre "diallèle" qui de tout temps a préoccupé la Philosophie, et que nous allons d'ailleurs laisser de côté comme étranger à notre objet actuel.

Mais il en est tout à fait de même en ce qui regarde les définitions: "Il est évident que les premiers termes qu'on voudrait définir en supposeraient de précedents pour servir à leur explication. ... Aussi, en poussant les recherches de plus en plus, on arrive nécessairement à des mots primitifs qu'on ne peut plus définir et à des principes si clairs qu'on n'en trouve plus qui le soient davantage."

Il y a donc finalement des notions premières dont la définition est impossible. Heureusement, au moins à ce qu'il semble au premier abord — et la Science avait toujours raisonné ainsi —, cette définition se trouve inutile par le fait que le sens des notions employées dans ces conditions est parfaitement clair et intelligible à chacun.

Seulement, cette position que nous sommes contraints d'adopter comme position de repli et qui semble la seule possible, va, à son tour, se révèler intenable; ou plutôt elle aurait dû apparaître comme intenable à PASCAL lui-même: car incidemment, dès ce premier exposé,[1] il énonce une remarque qui

[1] *Pensées,* première partie, art. II.

est une des conquêtes les plus fondamentales que la Logique ait jamais réalisées. Faisant allusion aux erreurs qu'on peut commettre dans l'emploi des définitions, il voit à cela un remède infaillible qui est:

"de substituer mentalement la définition à la place du defini et d'avoir toujours la définition si présente que toutes les fois qu'on parle, par exemple, de nombre pair, on entende précisément que c'est celui qui est divisible en deux parties égales, et que ces deux choses soient tellement jointes et inséparables dans la pensée qu'aussitôt que le discours exprime l'une, l'esprit y attache immédiatement l'autre".

Cette remarque, qui se présente ainsi comme en passant et accessoirement, PASCAL[2] y remet plus explicitement l'accent lorsque, dans la section suivante, l'*Art de Persuader,* il résume ses considérations précédentes par huit règles dont il nous suffira, ici, de rappeler la première et la dernière:

I. *N'entreprendre de définir aucune des choses tellement connues d'elles-mêmes qu'on n'ait point de termes plus clairs pour les expliquer.*

. . . .

VIII. *Substituer toujours mentalement les définitions à la place des définis, pour ne pas se tromper par l'équivoque des termes que les définitions ont restreints.*

Voilà donc huit règles qui sont fondamentales dans toute logique, dans tout raisonnement, dans tout acte de la pensée; et il en est ainsi, en particulier, de la dernière d'entre elles. Mais comment, entre deux principes qui se succèdent à quelques lignes de distance, le génial auteur des *Pensées* n'a-t-il pas vu éclater une étrange contradiction? Car on ne peut songer à substituer une définition à la place d'un défini, là où il n'y a point de définition.

Ce qui semble avoir manqué à PASCAL en l'espèce, sans que cela parvienne à expliquer pleinement la cécité psychique que nous constatons,[3] c'est d'avoir pleinement réalisé la portée du principe qu'il vient d'énoncer. La substitution des définitions aux définis est indispensable en toute circonstance: dans la pensée courante elle est, comme il le dit, indispensable pour éviter les erreurs; mais pour le mathématicien, elle a un autre rôle encore, un rôle non plus négatif, mais positif. Ce n'est pas seulement un principe critique, c'est un principe constructif et indispensable comme principe constructif. Sans lui, non seulement on serait exposé à s'égarer, mais on ne saurait faire un pas. Cela se manifeste dans n'importe quelle démonstration. Soit, par exemple,

[2] Ibid, art. III.

[3] Ce phénomène, qu'on pourrait croire unique tant il est incompréhensible, s'est présenté à maintes reprises dans l'histoire de la Science. Voir notre *Essay of the Psychology of Invention in the mathematical Field,* deuxième édition (Princeton, N. J., U. S. A., 1949); notre communication au tricentenaire de Newton, publiée par la Société Royale de Londres, 1946, et Congrès de l'Association Française pour l'avancement des Sciences, Genéve, 1949.

à démontrer que le diamètre est la plus grande corde du cercle: autrement dit, que si A et B sont deux points situés sur une circonférence de centre O et de rayon R, AB sera toujours au plus égal à $2R$. Le premier soin du géomètre sera de joindre OA et OB. Pourrait-il faire autrement? Assurément non, puisqu'il lui faut exprimer la définition de la circonférence, qui consiste précisément en ce que chacune des distances OA et OB est égale à R; et il en est ainsi d'un bout à l'autre de la Géométrie.

Aucune notion ne peut donc intervenir dans le raisonnement autrement que par l'intermédiaire de sa définition. Mais comment cela pourrait-il se faire là où la définition n'existe pas?

* * *

PASCAL ne serait-il pas revenu sur ce point et ne l'aurait-il pas élucidé s'il s'était occupé de l'axiome d'EUCLIDE? Celui-ci, après PASCAL comme avant lui, a fait l'objet des recherches des géomètres, croyant si souvent, et toujours à tort, démontrér le mystérieux Axiome, sans que le rapport entre cette question et la dernière règle de l'*Art de Persuader*, tombée dans un incompréhensible oubli, leur soit apparu.

Un siècle après l'*Art de Persuader*, il est bien curieux de lire la première édition, parue en l'An II (1794) des Éléments de Géométrie[4] où LEGENDRE, dans son préambule, annonce le but de son ouvrage que l'on peut considérer comme résumant l'état de la Science à la veille du XIX[e] siècle. Il reproche à ses prédécesseurs une rigueur insuffisante.

"On reproche aux éléments de géométrie d'être peu rigoureux. Plusieurs de ces ouvrages peuvent avoir des avantages particuliers et remplir assez bien le but pour lequel ils ont été composés, mais il n'en est aucun où l'on ait réussi à démontrer toutes les propositions d'une manière absolument satisfaisante. Tantôt les auteurs supposent des choses qui ne sont pas contenues dans les définitions; tantôt ces définitions elles-mêmes sont défectueuses; quelquefois ils se contentent d'invoquer le témoignage des yeux, ailleurs ils emploient des principes qui sont vrais en eux-mêmes, mais qui paraissent entraîner quelques négligences dont l'esprit n'est pas satisfait. En général il est très difficile de faire des éléments rigoureux, non seulement dans la géométrie, mais dans toutes les sciences: les propositions les plus simples sont les plus embrassantes et celles qu'on démontre avec le moins de succès. La difficulté n'est cependant pas une raison qui doive empêcher d'entreprendre des ouvrages aussi utiles."[5]

[4] Les Éléments de Clairaut, lequel vise non à la rigueur, mais à la simplicité et se base à toute occasion sur l'observation courante, n'ont pas à intervenir ici.

[5] L'incompréhension du rôle des notions premières est d'autant plus étrange que Legendre a soin de renvoyer aux *Mélanges de Philosophie* où d'ALEMBERT, parfaitement conscient du rôle de qu'il appelle les "notions simples", reconnaît, lui, expressément l'impossibilité de les définir.

Faut-il croire que LEGENDRE n'a pas lu l'*Art de Persuader?* La tâche qu'il prétend entreprendre est plus qu' "embarassante", plus que difficile: elle sera forcément impossible; l'embarras qu'il craint à juste titre le montrera bien par la suite, chez lui comme chez tous ses prédecesseurs.

Avant de s'attaquer à l'axiome d'EUCLIDE (on sait que LEGENDRE lui-même en a, à deux reprises au moins, tenté des démonstrations, naturellement aussi fausses que toutes les autres), on a dû ou on aurait dû se préoccuper de deux définitions fondamentales, celle de la ligne droite et celle des figures égales ou plutôt congruentes.[6] Cette dernière précède l'autre qui lui est en réalité subordonnée et précisément parce que plus fondamentale, elle a été toujours plus ou moins escamotée, alors que celle de la ligne droite faisait couler beaucoup d'encre.

Point d'idée plus simple et plus claire à un chacun que celle de la ligne droite "dont un fil tendu nous offre l'image". Mais c'est précisément, nous le savons, ce qui fait la difficulté: c'est parce que cette idée est particulièrement claire et simple dans l'observation courante que la Géométrie ne saurait se contenter de l'envisager ainsi.

Un siècle avant les Éléments de LEGENDRE, presque au même moment où PASCAL composait les *Pensées,* les notions fondamentales de la Géométrie faisaient l'objet d'un examen très approfondi et particulièrement digne d'attention puisqu'il était le fait de LEIBNIZ. Le grand philosophe passe en revue tous les aspects de la question et tous particulièrement les diverses définitions auxquelles ont peut songer pour la ligne droite.

La définition d'EUCLIDE lui-même: *Recta lines est quae ex aequo suis interjicitur punctis,* a un défaut majeur, celui... d'être peu compréhensible. C'est ce que LEIBNIZ et LEGENDRE constatent tous deux en se rencontrant[7] — chose curieuse chez ces deux auteurs qui se sont ignorés — dans la remarque (LEGENDRE, deuxième édition, p. VI de la Préface) que cette définition "pourrait être supprimée comme n'étant nécessaire à aucune démonstration".

C'est, on le voit, rejoindre la règle de PASCAL, puisque c'est dire avec lui qu'une définition doit être réputée non existante si elle n'intervient pas dans les raisonnements.

Ayant à en adopter une autre, LEGENDRE l'emprunte à ARCHIMÈDE (lequel l'avait en fait, présentée comme postulat): "La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre".

[6] Nous emploierons cette dénomination. Non seulement elle est préférable à celle de "figures égales", dont l'adoption dans l'enseignement me paraît regrettable: mais, en particulier, ce changement de terminologie s'impose pour suivre les discussion dont nous parlons et dans lesquelles les mots "figures égales" s'appliqueraient à ce que nous appelons aujourd'hui "figures équivalentes".

[7] Le travail de Leibniz paraît n'avoir pas fait, en son temps, l'objet d'une publication. Il nous est connu grâce aux *Leibnizens Mathematische Schriften,* éditées par C. I. Gerhardt, t. V (Halle, 1858).

Si (pour une raison d'ordre pédagogique assez discutable d'ailleurs) LEGENDRE prend pour point de départ cette définition d'ARCHIMÈDE ce n'est pas qu'il la considère comme préférable en réalité. Dans sa Préface il parle un autre langage: il rappelle que la propriété ainsi énoncée peut être déduite et a été déduite par EUCLIDE de son axiome X: *La ligne droite est celle qui ne peut avoir qu'une position entre deux points donnés*, lequel est dit-il à cet endroit, "la définition la plus simple et la plus générale qu'on puisse donner de la ligne droite".

Peut-on, en effet, déduire l'énoncé d'ARCHIMÈDE de l'axiome X? Oui et non: la déduction peut se faire à partir de l'axiome en question ... joint, *mais sans qu'on le dise* (pas plus chez LEGENDRE que chez EUCLIDE) au fait que toutes les lignes droites sont des figures congruentes et que, inversement, toute figure congruente à une ligne droite est une ligne droite. Cet axiome X, tacitement complété comme nous venons de le dire, reçoit de LEGENDRE[8] une forme particulièrement frappante, laquelle coïncide avec la définition donnée par LEIBNIZ, celle même vers laquelle s'orientera la marche ultérieure de la Science: *la ligne droite est celle qui demeure immobile du moment que deux de ses points restent fixes.*

Une dernière définition[9] à laquelle LEIBNIZ avait songé se ramène au fond à la précédente.

Aucune de ces définitions, ainsi qu'il *apparaît* sur l'énumération que nous venons d'en donner avec LEIBNIZ, n'échappe à la nécessité de résoudre tout d'abord une autre question mentionnée plus haut, la définition des figures *congruentes.*

Pour autant que l'on puisse donner un sens à celle, si peu claire, donnée par EUCLIDE lui-même, elle voudrait dire que la ligne droite est celle dont tout segment est congruent (totalement ou partiellement) à tout autre; et alors, comme l'a remarqué dès l'antiquité Appolonius, elle s'appliquerait aussi bien à la circonférence ou à l'hélice circulaire.

Cette objection n'échappe pas à LEIBNIZ; pour y répondre, il caractérise la ligne droite par la condition que tout segment en soit *semblable* à tout autre, c'est à dire en remplaçant la notion de figure congruente par une autre beaucoup moins primitive et dont au surplus, l'introduction supprimerait la question qui nous occupe, puisque, comme nous le savons, admettre l'existance de figures semblables sans être congruentes (les segments de droites exceptés) revient à admettre le postulatum d'EUCLIDE.

La définition d'ARCHIMÈDE, elle, n'a visiblement de sens que si l'on dit ce que c'est que des longueurs et, plus précisément, des longueurs égales.

[8] Deuxième édition, Préface; VII.

[9] Loc. cit. (7), p. 174, Nos (11), (13) où, par l'intervention du No (2), p. 172, la notion de figures congruentes est expressément invoquée.

Nous avons vu plus haut comment devrait être complété, pour fonder le premier Livre de Géométrie, l'axiome X d'EUCLIDE.

Enfin, à la définition sur laquelle se recontrent, LEIBNIZ et LEGENDRE, il ne manque que d'avoir spécifié... dans quel mouvement ou, plus exactement, dans quels déplacements la ligne dont on dit seulement que deux de ses points restent fixes, est par ailleurs entrainée: est-elle considérée comme plongée dans du bois ou dans de la guimauve?

Ainsi dans tous les cas, quoique tacitement et par une véritable restriction mentale, on part de la définition, des figures congruentes et même de celle de "figure invariable". Seulement, là — nous en étions bien sûrs à l'avance après avoir lu PASCAL — la Géométrie se dérobe totalement. LEGENDRE énonce que *deux grandeurs*, ligne, surface ou solide sont égales, lorsque étant placées l'une sur l'autre, elles coïncident dans toute leur étendue.

Passons sur l'emploi du mot "grandeur" là où nous dirions "figure" ainsi que des mots grandeurs "égales" (cet adjectif pris dans le sens ou nous l'employons maintenant; LEIBNIZ dit "congrua") qui était peut être courant autrefois, puisque nous le trouvons également chez LEIBNIZ; mais comment excuser l'équivoque, révélatrice de l'embarras que nous prévoyions dès l'abord, qui apparaît dans le membre de phrase suivant, lequel désignerait, semble-t-il, des figures qui *sont* portées l'une sur l'autre? Strictement parlant, la définition aurait un sens — mais aucune utilité — en ce qui concerne un dessin et son calque, au moment même où l'on trace ce calque; elle n'en aurait aucun une fois le calque enlevé. Et s'il s'agit de figures *susceptibles d'être portées* l'une sur l'autre, dans quelles conditions ce transport sera-t-il permis? Si nous étions en Analysis Situs, la coïncidence pourrait être ainsi obtenue pour des triangles absolument quelconques. C'est donc la question de la figure invariable qui est soulevée sans le dire: qui est escamotée.

LEGENGRE n'est donc pas arrivé, plus qu'EUCLIDE, à faire de la Géométrie, du moins dans ses premiers principes, la Science exacte et rigoureuse qu'il annonçait.

* * *

C'est cet édifice, par lui-même si mal assis sur ses fondations, que la découverte de BOLYAI et de LOBATCHEVSKY ruine d'un coup.

Non qu'en fondant cette nouvelle Géométrie ils eussent montré, en toute rigueur et sans objection possible, qu'elle ne peut conduire à aucune contradiction. Certes, ils n'en avaient rencontré aucune dans les propriétés, se succédant comme celles de la Géométrie ordinaire qu'ils déduisaient de la négation du Postulatum d'EUCLIDE. Mais si loin qu'ils aient poussé les déductions sans rencontrer d'impossibilités, n'était-il pas possible qu'on en rencontrât une en allant encore plus loin dans la même voie? On n'est arrivé à répondre avec certitude par la négative qu'en construisant des figures où ces propriétés soient effectivement réalisées: propriétés identiques à celles de la Géométrie ordinaire qui précèdent le Postulatum, mais différentes à partir du moment où ce Postulatum intervient.

Une analogie encourageante était offerte par la Géométrie sur la surface d'un sphère, où les propriétés des triangles s'écartent de celles des triangles rectilignes ordinaires comme le font celles de la Géométrie non-euclidienne,[10] mais en sens inverse, puisque la somme des angles d'un triangle *sphérique* est *plus grande* que deux droits: Géométrie que RIEMANN a pu étendre à tout l'espace, en prenant pour "lignes droites" les cercles dont les plans passent par un point donné O et qui sont conservé par une certaine inversion I de pôle O.

Aussi BELTRAMI avait-il cru réaliser effectivement une Géométrie non-euclidienne, du moins une Géométrie non-euclidienne à deux dimensions, en définissant une surface, la *pseudosphère,* sur laquelle règne cette Géométrie? C'est une surface de révolution s'étendant à l'infini dans les deux sens parallèlement à son axe et composée de deux nappes séparées par un parallèle de rebroussement. Sur chacune de ces deux nappes on peut tracer des lignes géodésiques et des triangles géodésiques, lesquels (quand ils ne sont pas trop grands) comportent les trois cas classiques d'égalité (mais non de similitude) et vérifient toute la série des premiers théorèmes de la Géométrie ordinaire, pendant que, d'autre part, la somme de leurs angles est plus petite que deux droits, leurs propriétés étant conformes à la théorie de BOLYAI—LOBATCHEVSKY. Seulement il faut que les dits triangles ne soient pas trop grands: il ne faut pas qu'ils aillent jusqu'au parallèle singulier, et il faut qu'ils ne fassent par leur tour de la surface mais puissent, au contraire, être réduits au voisinage d'un point unique par déformation continue sur cette surface. L'exemple construit par BELTRAMI ne serait probant que si l'on disposait d'une surface à courbure totale constante négative dépourvue de singularités et simplement connexe: or HILBERT a montré qu'une surface de cette note ne saurait exister.

Il y a donc là une impossibilité qui, nous le verrons finalement, tient profondément à la nature des choses; et il fallait opérer autrement. On y arrive d'une manière que POINCARÉ a exposé sous une forme particulièrement frappante dans la *Revue Générale des Sciences,*[11] en supposant un milieu renfermé dans l'intérieur d'une sphère S où, moyennant une certaine distribution des températures, tous les objets subissent, à mesure qu'on s'éloigne du centre, une

[10] Contrairement à plusieurs auteurs, je ne considère pas qu'il y ait lieu d'attribuer le nom de Géométrie non-euclidienne à celle qui a été ainsi constituée par RIEMANN (distincte, inutile de le dire, de celle autrement fondamentale, qui fait l'objet de sa Thèse inaugurale). Ce nom doit, à mon sens, être réservé aux Géométries où le Postulatum est faux *et toutes les propositions antérieures vraies.* Or cette dernière condition n'est pas remplie dans la Géométrie de RIEMANN, dans laquelle tout point a un opposé (son transformé par l'inversion I) lequel peut être joint à lui par „droites" riemanniennes.

[11] Tome III, 1892, p. 75.

contraction convenable aboutissant à les rendre de dimensions infiniment petites à mesure qu'on se rapproche de plus en plus de la surface sphérique. Des figures qui existeraient dans ces conditions à l'intérieur de la sphère seraient régies par les lois de BOLYAI—LOBATCHEVSKY.

Les propriétés de la ligne droite, conformément à l'une quelconque des définitions rappelées plus haut, appartiennent non plus aux droites que nous connaissons, mais aux cercles orthogonaux à la sphère S; les "plans" seraient maintenant les sphères orthogonales à S et sur chacune desquelles on pourrait, par un point donné, mener plusieurs "droites" parallèles à une "droite" donnée, nous voulons dire à un cercle donné.

Le résultat est ainsi obtenu dans une direction toute différente de la voie — voie sans issue — suivie par BELTRAMI. Pour ce dernier, les lignes tracées sur la pseudosphère avaient des longueurs définies à la manière ordinaire; il en est tout autrement dans les milieux fictifs de POINCARÉ, comme aussi dans la puissante généralisation de RIEMANN.

Le bouleversement que représente la théorie de BOLYAI est donc beaucoup plus profond que ne pouvait le concevoir BELTRAMI: il vise et atteint le défaut que nous avons constaté plus haut dans la cuirasse euclidienne. D'EUCLIDE à LEIBNIZ et à LEGENDRE, les géomètres étaient incapables de définir ce que l'on doit entendre par figures *égales* ou *congruentes*, par *longueurs égales* et par *lignes droites;* et nous voyons maintenant qu'il ne pouvait en être autrement, puisque nous pouvons maintenant, avec POINCARÉ, employer ces mêmes mots dans des sens différents de ceux qu'on leur avait donnés classiquement.

Mais dès lors, nous voici ramenés à la question qui aurait pu se poser à PASCAL et que nous nous sommes posée en le lisant: par quoi pouvons nous remplacer ces définitions dont nous avons constaté l'inexistance — dont nous reconnaissons même l'impossibilité, puisque les mêmes mots auraient un sens différent pour les euclidiens et les non-euclidiens — et dont, cependant, la VIII-ème règle de l'*Art de Persuader* nous montre qu'il est impossible de se passer si l'on veut soumettre à un raisonnement quelconque les notions dont il s'agit?

La Science contemporaine a résolu cette question, à laquelle PASCAL, s'il avait pris conscience de la difficulté, aurait sans doute répondu, faisant avancer ainsi de plus de deux siècles la marche de la Logique mathématique. Certes, il est impossible de donner des notions fondamentales dont il s'agit une de ces "définitions de nom", seules connues de PASCAL; mais nous pouvons les caractériser par un système d'axiomes exprimant les propriétés dont elles seront dotées et qui pourront servir de base de raisonnements.

C'est ainsi que le groupe de "déplacements", auquel peut être soumise une figure qui doit rester "invariable", sera caractérisé par un ensemble d'axiomes tels que:

ce groupe de transformations ponctuelles est transitif lorsqu'on l'applique à un point unique. Au contraire, il n'est pas deux fois transitif:

appliqué à deux points, il admet un invariant (lequel, moyennant des propriétés supplémentaires bien connues, faisant également partie de la liste des axiomes, donnera la distance);

les transformations du groupe qui laissent immobiles deux points distincts arbitrairement donnés laissent également immobiles tous les points d'une certaine ligne illimitée dans les deux sens (par définition, la ligne droite);

Il existe des surfaces (par définition, les plans), telles que la ligne droite joignant deux points de l'une d'entre elles y soit entièrement contenue;

etc.

et aussi, moyennant la définition (nominale) habituelle des parallèles, l'axiome d'EUCLIDE:

A. Par un point extérieur à une droite, il ne passe qu'une parallèle à cette droite

ou si l'on veut,

A'. La somme des angles d'un triangle rectiligne est égale à deux droits.

Toutefois, un système d'axiomes n'est acceptable comme définition que s'il est compatible, s'il n'implique pas de contradictions.[12] En ce qui concerne les axiomes qui définissent la notion de figure invariable, cette compatibilité se ramène, moyennant les données de la Géométrie Analytique, à la compatibilité des axiomes de l'Arithmétique.

On devra, d'autre part, examiner si ces axiomes sont indépendants, c'est à dire si aucun d'eux n'est conséquence des autres. Il faut aussi qu'ils permettent de distinguer l'objet défini de ce qui en est essentiellement différent.[13]

[12] Si étrange que cela paraisse, les idées sont restées longtemps confuses (voir l'importante édition critique d'EUCLIDE par ENRIQUES: *Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna* (Stock, Rome, 1925) en ce qui regarde cette condition imposée à une définition, et on a semblé croire, malgré une mise en garde formelle d'Aristote, lequel ne s'y était pas trompé, qu'une définition assurait par elle-même l'existence de l'objet défini. ENRIQUES (loc. citée) remarque que ce fait permet de comprendre la faveur dont a été l'objet un raisonnement aussi absurde que l'„argument ontologique", adopté jusque et y compris DESCARTES et même repris sous une forme légèrement différente par SPINOZA.

[13] L'addition du mot „essentiellement" est nécessitée par le fait que rien ne serait changé si l'on soumettait tout l'espace à n'importe quelle transformation ponctuelle biunivoque et continue. Toutes les propriétés, à commencer par celles des déplacements, seraient exactement les mêmes pour les figures transformées que pour les primitives, en sorte que leurs théories seraient les mêmes en tout point. C'est ainsi qu'on pourrait, théoriquement, tracer les figures de Géométrie sphérique en projection de MERCATOR, si fortement que celle-ci les altère au voisinage du pôle qu'elle rejette à l'infini: tous les théorèmes resteraient valables dans ces conditions.

A ces deux questions, en ce qui concerne la notion de figure invariable, la Géométrie, jusqu'à BOLYAI et LOBATCHEVSKY, avait cru pouvoir répondre par l'affirmative — même, pour la deuxième, en exceptant de la liste des axiomes celui d'EUCLIDE. Nous savons qu'il y a là une double erreur: l'axiome A est indépendant des autres et, sans lui, le groupe des déplacements *n'est pas* complètement défini; on a encore un système d'axiomes compatible (celui qui varie le milieu fictif de POINCARÉ) en remplaçant l'axiome A par l'axiome contraire:

B. Par un point extérieur à une droite, on peut mener plusieurs parallèles à cette droite.

ou si l'on veut,

B'. Il existe des triangles rectilignes dans lesquels la somme des angles est inférieure à deux droits.

Les définitions axiomatiques ainsi obtenues, l'une pour la Géométrie euclidienne et l'autre pour la Géométrie non-euclidienne, remplacent donc relativement à la notion de figure invariable, la définition nominale absente. La faute d'un LEGENDRE ou d'un LEIBNIZ n' est pas de ne pas l'avoir donnée — il est impossible de la donner — mais d'avoir cru pouvoir s'y dérober en se bornant à une autre qui n'avait pas de sens sans elle et d'avoir ainsi méconnu la règle fondamentale de PASCAL. C'est à la lumière de BOLYAI et de LOBATCHEVSKY qu'est apparue l'impossibilité d'esquiver et, par conséquent, la nécessité de donner sous forme axiomatique la définition de la figure invariable.

Cette nécessité n'avait pas été aperçue par BELTRAMI. Sa tentative a échoué et devait fatalement échouer: car elle ne portait pas la question sur son véritable terrain en n'allant pas jusqu'à examiner la base fondamentale de la Géométrie, la notion de Métrique que, dans ce qui précède nous avons essayé d'élucider et, qui par ailleurs, a fait l'objet d'une révision beaucoup plus profonde encore dans l'oeuvre par laquelle le génie de RIEMANN prépare l'oeuvre d'EINSTEIN.

НЕЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ И АКСИОМАТИЧЕСКИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Ж. АДАМАР (Париж)

(Резюме)

Исходя из некоторых утверждений Паскаля, высказанных им в сочинении „Мысли" автор указывает на недостатки более старых взглядов об аксиоматических определениях. Оценивается также влияние открытия Бояи и Лобачевского на аксиоматические определения.

DIVERSES PRÉSENTATIONS ÉLÉMENTAIRES DE LA TRIGONOMÉTRIE HYPERBOLIQUE

Par

PAUL SZÁSZ (Budapest)

Dans cette conférence, je me propose d'exposer trois présentations élémentaires de la trigonométrie hyperbolique, essentiellement différentes au point de vue méthodologique. La première est une présentation spatiale selon la voie classique créée par JEAN BOLYAI et LOBATCHEVSKY; la deuxième est une présentation plane se servant de moyens classiques, comme celle de H. LIEBMANN; enfin la troisième est une présentation directe, dans laquelle l'emploi de moyens classiques n'est pas utilisé, comme le fit tout d'abord L. GÉRARD.

I. Présentation d'après la voie classique

JEAN BOLYAI et LOBATCHEVSKY ont tous les deux établi la trigonométrie hyperbolique en se basant sur le fait que la géométrie euclidienne est valable sur l'horisphère si l'horicycle est considéré comme droite. Dans les détails, leurs voies diffèrent complètement l'une de l'autre. Par contre leur point de départ commun est le théorème suivant: si l'on considère des horicycles concentriques distants entre eux de x (fig. 1), le rapport des deux arcs $\widehat{AB}$ et $\widehat{A'B'}$ est

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{A'B'}} = e^{\frac{x}{k}}, \tag{1}$$

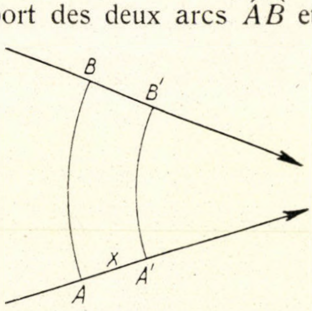

Fig. 1

où k est une certaine distance déterminée que l'on désigne *l'unité naturelle* de longueur ou *paramètre* de la géométrie hyperbolique. Ce théorème est la conséquence du fait que le rapport $\widehat{AB}:\widehat{A'B'}$ ne dépend que de la distance x et croît en même temps que celle-ci en prenant toutes les valeurs supérieures à 1. En effet, la fonction $\widehat{AB}:\widehat{A'B'} = f(x)$ est par conséquent continue et vérifie l'équation fonctionnelle

$$f(x+y)=f(x)f(y)$$

(fig. 2), d'où d'après CAUCHY $f(x)=f(1)^x$; en désignant donc par k la longueur pour laquelle $f(k)=e$, on obtient $f(x)=e^{\frac{x}{k}}$.

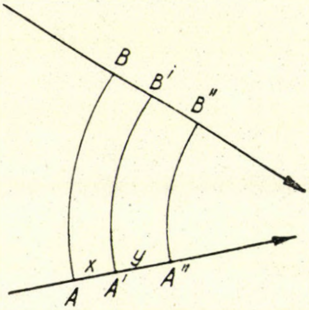

Fig. 2

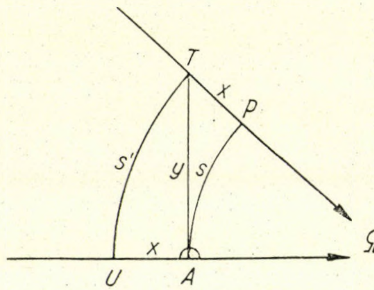

Fig. 3

Je crois que, de nos jours aussi, en partant du théorème (1), la trigonométrie hyperbolique peut le plus simplement s'établir à partir de la géométrie euclidienne de l'horisphère. Il nous faut seulement établir, selon

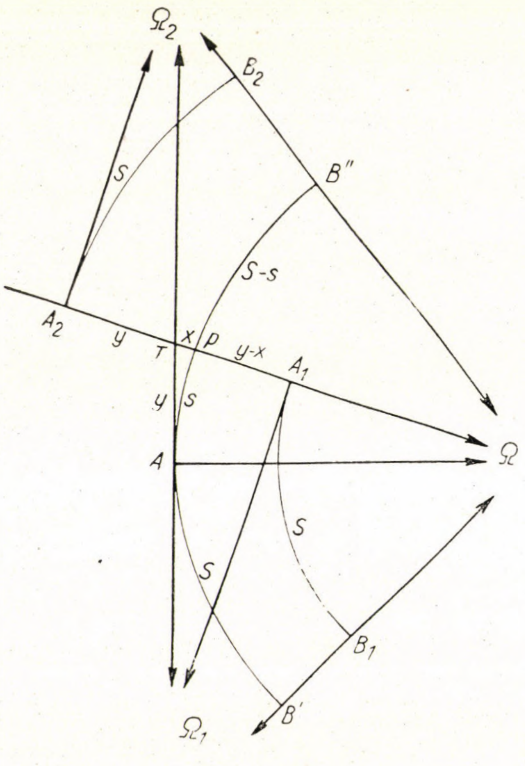

Fig. 4

H. LIEBMANN, l'équation de l'horicycle et il nous faut également joindre à certaines configurations spatiales de JEAN BOLYAI et de LOBATCHEVSKY une configuration de V. F. KAGAN. Ce mode nouveau de présentation, nous le donnons en détail dans ce qui suit.

Considérons un point T situé sur l'horicycle de centre Ω et passant par le point U, et soit A la projection de T sur la droite $U\Omega$ (fig. 3). Soit de plus $\overline{UA}=x$ et $\overline{AT}=y$. La question qui se pose est de savoir quelle relation existe entre x et y? Si l'horicycle de centre Ω et passant par A coupe la droite $T\Omega$ en P, on a également $\overline{TP}=x$. La question qui se pose est donc, en d'autres termes, la suivante: quelle est l'équation qui relie le segment de tangente $\overline{AT}=y$, tangente à l'horicycle passant par A et de centre Ω, au segment de droite $\overline{TP}=x$ qui n'est autre que la distance du point T à cet horicycle? La subtile configuration de H. LIEBMANN[1] répondant à cette question est la suivante (fig. 4).

Soient Ω_1 et Ω_2 les points à l'infini de la droite AT situés respectivement l'un dans la direction TA, l'autre dans la direction AT. Prenons sur la droite $T\Omega$ les longueurs $\overline{TA_1}=\overline{TA_2}=y$ de telle façon que A_1 et A_2 soient de part et d'autre de T, comme le montre la figure 4. Des faits que $\widehat{\Omega_1 TA_1}=$ $=\widehat{\Omega_2 TA_2}$ et que la *distance de parallélisme* correspondant à cet angle $\overline{AT}=y$, il résulte que $\widehat{TA_1\Omega_1}=\widehat{TA_2\Omega_2}=90°$. Comme l'horicycle de centre Ω passant par A_1 coupe $\Omega\Omega_1$ en B_1, de même l'horicycle passant par A_2 coupe $\Omega\Omega_2$ en B_2, enfin l'horicycle de centre Ω passant par A coupe respectivement ces deux droites en B' et B'', on a

$$\widehat{A_1B_1}=\widehat{A_2B_2}=\widehat{AB'}=\widehat{AB''}=S,$$

où S est l'arc d'horicycle déterminé dont la hauteur est la distance de parallélisme correspondant à l'angle de 45° (fig. 5). En désignant l'arc $\widehat{AP}$ par s, on a d'aprés la construction $\widehat{B'P}=S+s$ et $\widehat{B''P}=S-s$; de même $\overline{A_1P}=y-x$ et $\overline{A_2P}=y+x$. Il en résulte d'une part que

$$\frac{S+s}{S}=e^{\frac{y-x}{k}} \tag{2}$$

et d'autre part que

$$\frac{S-s}{S}=e^{-\frac{y+x}{k}}. \tag{3}$$

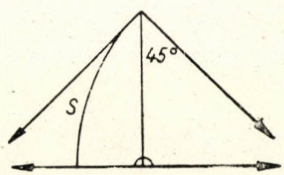

Fig. 5

Par addition de ces deux équations on obtient

$$2=e^{-\frac{x}{k}}\left(e^{\frac{y}{k}}+e^{-\frac{y}{k}}\right)$$

[1] H. LIEBMANN, Elementargeometrischer Beweis der Parallelenkonstruktion und neue Begründung der trigonometrischen Formeln der hyperbolischen Geometrie, *Mathematische Annalen*, **61** (1905), p. 185—199, particulièrement p. 194.

autrement dit

$$(4) \qquad e^{\frac{x}{k}} = \operatorname{ch} \frac{y}{k},$$

équation cherchée de l'horicycle.

La différence de (2) et de (3) nous donne

$$2\frac{s}{S} = e^{-\frac{x}{k}}\left(e^{\frac{y}{k}} - e^{-\frac{y}{k}}\right)$$

d'où, d'après (4)

$$(5) \qquad s = S \operatorname{th} \frac{y}{k}.$$

D'après la relation $s' = se^{\frac{x}{k}}$ qui se déduit du théorème (1) et dans laquelle $s' = \widehat{UT}$ (fig. 3), on déduit de (5) en vertu de (4)

$$(6) \qquad s' = S \operatorname{sh} \frac{y}{k}.$$

Nous voyons donc que l'arc d'horicycle est proportionnel à la tangente hyperbolique du segment de tangente, ou bien au sinus hyperbolique de la hauteur, les distances étant mesurées avec l'unité naturelle de longueur k.

La possession de ces relations nous donne déjà la possibilité de déduire, de la configuration suivante, les formules fondamentales de la trigonométrie hyperbolique. Soit un triangle rectangle ABC ($\hat{C} = 90°$), dont les éléments sont

$$(7) \qquad \overline{AB} = c, \ \overline{BC} = a, \ \overline{CA} = b, \ \hat{A} = \lambda, \ \hat{B} = \mu.$$

Menons la perpendiculaire en A au plan du triangle, et soit Ω l'un des points à l'infini de cette perpendiculaire (fig. 6). Traçons les horisphères de centre Ω passant respectivement par les trois sommets B, A, C du triangle. JEAN BOLYAI[2] se servit de la première de ces horisphères, LOBATCHEVSKY[3] de la deuxième et V. F. KAGAN[4] de la troisième. Le trièdre ($A\Omega, B\Omega, C\Omega$) coupe respectivement ces horisphères suivant trois triangles horisphériques A_1BC_1, AB_2C_2, A_3B_3C. De ces constructions, il résulte que

$$\widehat{BA_1C_1} = \widehat{B_2AC_2} = \widehat{B_3A_3C} = \lambda$$

[2] J. BOLYAI, *Appendix*. Scientiam spatii absolute veram exhibens, etc. (Marosvásárhely [Hongrie] 1832), § 25, en français par J. HOÜEL, La science absolue de l'espace, etc., par Jean Bolyai, précédé d'une Notice sur la vie et les travaux de W. et J. Bolyai par M. Fr. Schmidt, *Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, **5** (1867), p. 189—248; existant aussi sous forme de livre, Paris, Gauthier-Villars, 1868 (2e éd. Paris, 1895).

[3] N. I. LOBAČEVSKY, *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* (Berlin, Fincke, 1840), § 35 (2e éd. Berlin, Mayer und Müller, 1887).

[4] V. F. KAGAN, voir l'édition russe de Geometrische Untersuchungen etc., par N. I. Lobatchevsky (Moscou-Leningrad, 1945), p. 133.

et

$$\widehat{A_1C_1B} = \widehat{AC_2B_2} = \widehat{A_3CB_3} = 90^\circ.$$

Par conséquent, en vertu du fait que la géométrie euclidienne est valable sur

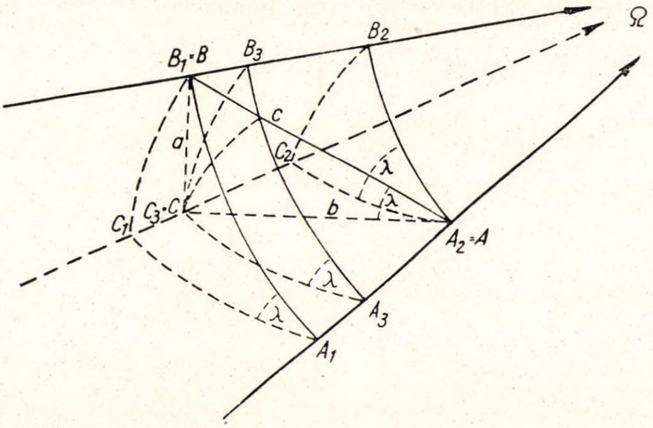

Fig. 6

l'horisphère, nous obtenons, en considérant respectivement les triangles précédents:

$$\sin\lambda = \frac{\widehat{BC_1}}{\widehat{A_1B}}, \cos\lambda = \frac{\widehat{AC_2}}{\widehat{AB_2}}, \ \operatorname{tg}\lambda = \frac{\widehat{B_3C}}{\widehat{A_3C}},$$

autrement dit, en tenant compte de (5) et de (6)

$$\text{(I)} \qquad \sin\lambda = \frac{\operatorname{sh}\dfrac{a}{k}}{\operatorname{sh}\dfrac{c}{k}},$$

$$\text{(II)} \qquad \cos\lambda = \frac{\operatorname{th}\dfrac{b}{k}}{\operatorname{th}\dfrac{c}{k}},$$

$$\text{(III)} \qquad \operatorname{tg}\lambda = \frac{\operatorname{th}\dfrac{a}{k}}{\operatorname{sh}\dfrac{b}{k}}.$$

D'après (I) et (II), en vertu de (III), nous déduisons

$$\frac{\operatorname{th}\dfrac{a}{k}}{\operatorname{sh}\dfrac{b}{k}} = \frac{\operatorname{sh}\dfrac{a}{k}}{\operatorname{sh}\dfrac{c}{k}} \ \frac{\operatorname{th}\dfrac{c}{k}}{\operatorname{th}\dfrac{b}{k}}$$

c'est-à-dire

$$\text{(IV)} \qquad \operatorname{ch}\frac{c}{k} = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k}.$$

De la formule (II) et de la formule analogue à (I) relative à l'angle μ, nous obtenons

$$\frac{\cos\lambda}{\sin\mu} = \frac{\operatorname{th}\frac{b}{k}}{\operatorname{th}\frac{c}{k}}\,\frac{\operatorname{sh}\frac{c}{k}}{\operatorname{sh}\frac{b}{k}},$$

donc, en utilisant la relation (IV), on a

$$\text{(V)} \qquad \frac{\cos\lambda}{\sin\mu} = \operatorname{ch}\frac{a}{k}.$$

Enfin de cette formule et de la formule analogue correspondant au côté b, nous en déduisons d'après (IV)

$$\text{(VI)} \qquad \operatorname{ctg}\lambda\operatorname{ctg}\mu = \operatorname{ch}\frac{c}{k}.$$

Les relations (I) à (VI) sont les formules fondamentales de la trigonométrie hyperbolique, les équations existant entre les trois côtés et les deux angles aigus du triangle rectangle.

La méthode de V. F. KAGAN,[5] qui n'utilise pas le théorème (1), est plus directe que ce mode de présentation, mais demande plus de calculs. Dans un de mes ouvrages[6] j'expose une autre méthode dans laquelle est également évité l'emploi du théorème (1). Le point de départ de ces deux méthodes est la démonstration du théorème suivant, se basant sur la géométrie euclidienne de l'horisphère: le produit d'un arc quelconque d'horicycle $p(a)$ de hauteur a par la tangente de *l'angle de parallélisme* $\Pi(a)$ correspondant à la distance a, est

$$p(a)\operatorname{tg}\Pi(a) = S,$$

S étant l'arc d'horicycle dont j'ai déjà fait mention ci-dessus (fig. 5). JEAN BOLYAI[7] avait déjà démontré ce théorème d'une façon beaucoup plus compliquée, et la fin en était d'ailleurs incomplète. De ce théorème se déduit la trigonométrie angulaire du triangle rectangle (j'entends par trigonométrie angulaire du triangle rectangle les équations existant entre les angles du triangle et les angles de parallélisme correspondant aux côtés). Nous obtenons ensuite

$$\text{(8)} \qquad \operatorname{tg}\frac{\Pi(a)}{2} = e^{-\frac{a}{k}},$$

[5] V. F. KAGAN,[4] p. 130—146.

[6] PAUL SZÁSZ, Neue Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie durch Verwendung der Grenzkugel, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae,* 3 (1952), p. 327—333.

[7] J. BOLYAI,[2] loc. cit., § 30.

relation classique[8] qui nous permet d'établir les formules (I) à (VI). Dans une de mes anciennes notes,[9] j'ai déjà publié la présentation simple de cette formule se déduisant de la trigonométrie angulaire.

II. Présentation plane par les moyens classiques

Dans ses manuscrits antérieurs, JEAN BOLYAI[10] s'était déjà demandé s'il n'était pas possible de présenter la trigonométrie hyperbolique uniquement dans le plan, sans l'utilisation de l'espace. Cette question fut résolue par H. LIEBMANN[11] qui, le premier, en s'aidant de moyens classiques à savoir l'emploi des droites parallèles et de l'horicycle, a fait une présentation plane de la trigonométrie hyperbolique. J'ai[12] simplifié sa méthode en me servant de la configuration classique de JEAN BOLYAI[13] pour la détermination de l'angle de parallélisme. Je présente ici une méthode beaucoup plus simple qui se trouve dans un de mes autres ouvrages,[14] et dont le raisonnement est le suivant.

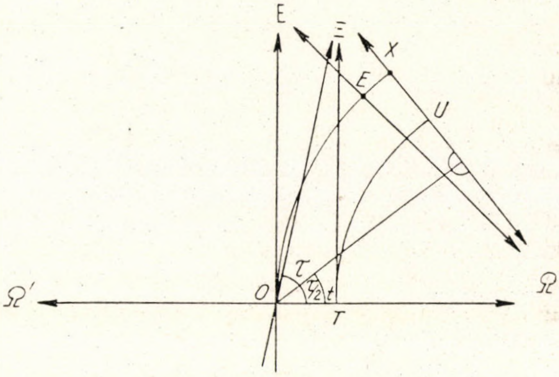

Fig. 7

[8] Comparer à J. BOLYAI[2] § 29, de plus F. ENGEL, *Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij* (Leipzig, 1898), p. 20, formule (12).

[9] PÁL SZÁSZ, A hiperbolikus trigonometriáról (Sur la trigonométrie hyperbolique), *Matematikai és Fizikai Lapok,* **48** (1941), p. 401—409.

[10] Comparer á PAUL STÄCKEL, *Wolfgang und Johann Bolyai, Geometrische Untersuchungen,* t. II, p. 273.

[11] H. LIEBMANN, Elementare Ableitung der nichteuklidischen Trigonometrie, *Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig,* Math.-phys. Klasse, **59** (1907), p. 187—210.

[12] PAUL SZÁSZ, Verwendung einer klassischen Konfiguration Johann Bolyai's bei der Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie in der Ebene, *Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged,* 14 (1952), p. 174—178.

[13] J. BOLYAI, [2] loc. cit., § 29.

[14] PAUL SZÁSZ, Neue Bestimmung des Parallelwinkels in der hyperbolischen Ebene mit den klassischen Hilfsmitteln, *Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged,* **14** (1952), p. 247—251.

Je définis de la façon suivante la *coordonnée* ξ d'un point à l'infini Ξ autre que le point Ω, dans le système de coordonnées défini par le point O et le point à l'infini Ω, dans le plan orienté.[15] Soit (fig. 7) E le point à l'infini situé sur la partie positive de la normale en O à la droite $O\Omega$ orientée de O vers Ω et soient E et X les points respectifs d'intersection des droites ΩE et $\Omega\Xi$ avec l'horicycle de centre Ω et passant par le point O. J'entend pour coordonnée du point à l'infini Ξ, le rapport

$$\xi = \frac{\widehat{OX}}{\widehat{OE}}$$

positif ou négatif selon que $\widehat{OX}$ et $\widehat{OE}$ sont de même sens ou de sens contraire. La coordonnée ξ prend toutes les valeurs réelles une fois et une seule. La coordonnée du point E est égale à 1, celle de Ω', l'autre point à l'infini de la droite $O\Omega$, est égale à zéro.

Considérons maintenant la coordonnée ξ du point à l'infini Ξ en tant que fonction de l'angle $\tau = \widehat{\Omega O \Xi}$. Soit $\xi = f(\tau)$ cette fonction, l'angle étant mesuré *analytiquement*, c'est-à-dire l'unité d'angle étant choisie de telle sorte que la mesure de l'angle droit soit $\frac{\pi}{2}$. Cette fonction est positive dans l'intervalle $0 < \tau < \pi$, et va constamment en décroissant pendant que τ croît, en prenant toutes les valeurs positives (la hauteur de l'arc $\widehat{OX}$ n'étant autre que la distance de parallélisme correspondant à l'angle $\frac{\tau}{2}$), elle est donc continue. Dans l'intervalle en question, j'établis, à partir de cette fonction, une équation fonctionnelle en exprimant $f(\tau+\varphi)$ au moyen des valeurs $f(\tau)$ et $f(\varphi)$. Par simple raisonnement, on trouve

$$f(\tau+\varphi) = \frac{f(\tau)f(\varphi)-1}{f(\tau)+f(\varphi)}.$$

En tenant compte que $f(\tau) > 0$ dans l'intervalle $0 < \tau < \pi$, nous pouvons écrire

$$f(\tau) = \operatorname{ctg} F(\tau), \quad 0 < F(\tau) < \frac{\pi}{2},$$

cette équation fonctionnelle prend alors la forme

$$F(\tau+\varphi) = F(\tau) + F(\varphi).$$

De plus la continuité de $f(\tau)$ entraîne également celle de $F(\tau)$, par conséquent, selon CAUCHY, on déduit de cette équation fonctionnelle

$$F(\tau) = c\tau,$$

[15] Comparer à BÉLA KERÉKJÁRTÓ, A geometria alapjairól (Sur les fondements de la géométrie), t. I, (Szeged, 1937), § 20; en français aussi paru, Budapest, 1955.

où c est une constante. On a de plus

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg} F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

autrement dit $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$. Il en résulte que

$$c = \frac{1}{2},$$

par suite

$$f(\tau) = \operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}.$$

Mais, si l'horicycle de centre Ω et passant par la projection T du point à l'infini Ξ sur la droite $O\Omega$ coupe la droite $\Omega\mathrm{E}$ en U (fig. 7), on a $\widehat{TU} = \widehat{OE}$. On en déduit, en vertu du théorème (1) que

$$f(\tau) = \frac{\widehat{OX}}{\widehat{OE}} = \frac{\widehat{OX}}{\widehat{TU}} = e^{\frac{t}{k}},$$

expression dans laquelle $t = \overline{OT}$ est la distance de parallélisme correspondant à l'angle τ. De ces deux expressions de la fonction $f(\tau)$ nous obtenons l'équation classique

$$e^{\frac{t}{k}} = \operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}$$

entre la distance t et l'angle de parallélisme correspondant à cette distance (relation que nous avons déjà écrite sous une autre forme, cf. (8)). De ce qui précède, et en suivant le raisonnement élégant de J. HJELMSLEV,[16] on déduit facilement les formules précédentes (I) à (VI).

III. Présentation directe

Comme je l'ai mentionné au début de cette conférence, L. GÉRARD[17] fut le premier qui fit une présentation plane directe de la trigonométrie hyperbolique en se passant de l'emploi de moyens classiques. Cela, W. H. YOUNG[18] le réalisa par la suite en employant une autre méthode. J'ai aussi publié[19]

[16] J. HJELMSLEV, *Grundlag for den projektive Geometri* (Kobenhavn, 1943), § 7, 36—37.

[17] L. GÉRARD, Sur la géométrie non euclidienne, *Thèse* (Paris, 1892), Chapitre I.

[18] W. H. YOUNG, On the analytical basis of non-euclidean geometry, *American Journal of Mathematics*, **33** (1911), p. 249—286.

[19] PAUL SZÁSZ, Neue Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie in der Ebene, *Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged*, **12** (1950), p. 44—52.

une autre présentation plane directe se basant sur les recherches respectives faites par MÓR RÉTHY[20] et CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN.[21]

Dans un de mes ouvrages plus étendus[22] j'expose une présentation analogue directe, utilisant cependant un raisonnement spatial (de même que la méthode esquissée par MÓR RÉTHY),[23] et par conséquent quelque peu plus simple.

Le point le plus spécial de mon exposition est ici l'introduction de la fonction

$$K(r) = \lim \frac{s}{\sigma} \qquad (\sigma \to 0) \tag{9}$$

dans laquelle σ et s sont respectivement les mesures d'un angle au centre quelconque du cercle de rayon r et de sa corde correspondante, l'angle σ étant mesuré analytiquement. L'existence de cette fonction résulte de ce fait que le rapport $\frac{s}{\sigma}$ va constamment en croîssant en même temps que σ décroît, mais reste cependant borné (théorème étant d'autre part indépendant de l'axiome des parallèles). Par un simple raisonnement dans l'espace, on peut voir, que *pour le triangle rectangle, en désignant ses éléments comme dans* (7), *le rapport*

$$\frac{K(a)}{K(c)} = S(\lambda) \tag{10}$$

est uniquement fonction de l'angle λ.

Nous pouvons ensuite montrer que $\frac{K(r)}{r}$ *tend vers une valeur positive lorsque* $r \to 0$.

Après avoir démontré encore que *pour le triangle rectangle*

$$\sin \lambda = \lim \frac{a}{c} \qquad (c \to 0)$$

λ *étant fixé*, il résulte de la forme

$$\frac{a}{c} = \frac{a}{K(a)} \frac{K(a)}{K(c)} \frac{K(c)}{c},$$

[20] MÓR RÉTHY, Bolyai János „újj más világának" ismertetése (Le „nouvel Univers" de Jean Bolyai), Első közlemény (Communication première), *Matematikai és Fizikai Lapok,* **12** (1903), p. 1—29.

[21] CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN, Sur le géométrie non euclidienne, *Mathesis* (Gand), (2), **5** (1895), Suppl. V, p. 6—15.

[22] PÁL SZÁSZ, A hiperbolikus trigonometria közvetlen előállítása a tér felhasználásával (Présentation directe de la trigonométrie hyperbolique en utilisant l'espace), *A Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának Közleményei,* **3** (1953), p. 535—559.

[23] MÓR RÉTHY,[20] loc. cit., particulièrement p. 14—15.

d'après (10)

$$\sin\lambda = \frac{K(a)}{K(c)}. \tag{11}$$

Cette relation peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\sin\lambda}{\lambda} = \frac{K(a)}{a}\,\frac{a}{\lambda}\,\frac{1}{K(c)},$$

et c étant fixe, $\lambda \to 0$ quand $a \to 0$. Par conséquent

$$\frac{K(a)}{a} \to 1 \quad \text{lorsque} \quad a \to 0, \tag{12}$$

parce que d'après (9)

$$\frac{a}{\lambda} = \frac{2a}{2\lambda} \to K(c).$$

Ensuite, un triangle quelconque étant considéré comme la somme ou la différence de deux triangles rectangles, nous déduisons de la formule (11) le théorème des sinus de JEAN BOLYAI[24] présenté sous sa forme implicite: *si a, b, c sont les côtés du triangle et λ, μ, ν les angles respectifs opposés à ces côtés, on a la relation*

$$\sin\lambda : \sin\mu : \sin\nu = K(a) : K(b) : K(c). \tag{13}$$

En utilisant l'idée maîtresse de MÓR RÉTHY,[25] à savoir en complétant le triangle rectangle ABC ($\widehat{C} = 90°$) par sa figure symétrique par rapport à AC, en vertu du théorème (13) on obtient

$$\frac{\cos\lambda}{\sin\mu} = \frac{K(2a)}{2K(a)} = \varphi(a), \tag{14}$$

fonction ne dépendant que de a (théorème jouant, d'autre part, un rôle fondamental chez JEAN BOLYAI).[26] Puisque $\lambda + \mu < \frac{\pi}{2}$ (cette inégalité résulte de la négation de l'axiome des parallèles), on a $\varphi(a) > 1$. Selon MÓR RÉTHY[27] nous pouvons encore montrer que la valeur

$$\frac{K(a)^2}{\varphi(a)^2 - 1} = h^2 \tag{15}$$

est constante. En vertu de (14) et (15) les fonctions $\frac{K(x)}{h}$ et $\varphi(x)$ vérifient les équations fonctionnelles

$$\frac{K(2x)}{h} = 2\,\frac{K(x)}{h}\,\varphi(x)$$

[24] J. BOLYAI,[2] loc. cit., § 25.
[25] MÓR RÉTHY,[20] loc. cit., particulièrement p. 15—16.
[26] J. BOLYAI,[2] loc. cit., § 27.
[27] MÓR RÉTHY,[20] loc. cit., particulièrement p. 16—17.

et

$$\varphi(x)^2 = \left(\frac{K(x)}{h}\right)^2 + 1.$$

Par conséquent, en tenant compte de (12),

$$\varphi(x) = \operatorname{ch}\frac{x}{k}, \quad \frac{K(x)}{h} = \operatorname{sh}\frac{x}{k}.$$

On déduit ensuite d'après (11) et (14) et des notations (7) que dans le triangle rectangle

$$\sin\lambda = \frac{\operatorname{sh}\frac{a}{k}}{\operatorname{sh}\frac{c}{k}}, \quad \frac{\cos\lambda}{\sin\mu} = \operatorname{ch}\frac{a}{k}.$$

À partir de ces deux formules, il est facile d'obtenir ensuite les quatre autres formules fondamentales.

Une telle présentation directe de la trigonométrie hyperbolique signifie qu'il est possible, dès le début, de traiter analytiquement la géométrie hyperbolique et de l'interpréter sous une forme euclidienne. Mais un traité plus étendu de ce fait nous conduit en dehors des limites de cette conférence.

РАЗЛИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ВЫВОДЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ТРИГОНОМЕТРИИ

П. САС (Будапешт)

(Резюме)

В настоящей работе излагаются три элементарных вывода гиперболической тригонометрии, существенно различные в методическом отношении. Первый-есть классический пространственный вывод, созданный Бояи и Лобачевским. Второй вывод не выходит из плоскости, но использует классические средства, как и вывод Х. Либмана. Третий вывод является непосредственным и не использует классические средства; такой вывод был впервые найден Л. Жераром.

L'INFLUENCE DE LA GÉOMÉTRIE DE BOLYAI—LOBATCHEVSKY SUR LE DÉVELOPPEMENT DE LA MÉTHODE AXIOMATIQUE

Par

L. KALMÁR (Szeged), correspondant de l'Académie

Plusieurs conférences faites pendant la semaine Bolyai ont mentionné l'influence de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky sur le développement de beaucoup de branches des mathématiques. Nous allons traiter dans cet article de l'influence exercée par cette géométrie sur le développement d'une méthode particulière des mathématiques: la méthode axiomatique. Il est bien connu que JEAN BOLYAI et LOBATCHEVSKY n'ont pas entrepris leurs recherches créatrices dans le but d'enrichir les mathématiques par des méthodes nouvelles, mais avec l'intention d'éliminer des mathématiques les hypothèses arbitraires et de la rendre apte à la description de la vérité objective; d'autre part, l'importance principale de leur découverte n'est pas l'influence méthodologique; mais la commémoration de l'Académie des Sciences de Hongrie du 150-ième anniversaire de la naissance de JEAN BOLYAI serait toutefois incomplète, si nous ne faisions pas mention de l'influence de BOLYAI et de son contemporain génial LOBATCHEVSKY sur le développement de la méthode axiomatique.

La création de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky forme un tournant dans l'histoire de la méthode axiomatique. Les recherches géométriques de BOLYAI et de LOBATCHEVSKY ont mis un point final aux recherches axiomatiques millénaires ayant pour but la solution du "problème des parallèles"; à savoir la démonstration de l'axiome des parallèles d'Euclide à l'aide des autres axiomes de la géométrie euclidienne. Ces recherches ont en même temps ouvert le chemin à une série de recherches modernes concernant la méthode axiomatique.

JEAN BOLYAI a déjà exprimé dans le titre de l'Appendix son opinion que le problème, si l'axiome euclidien des parallèles est valable dans l'espace réel, c'est-à-dire dans l'espace qui est la scène des mouvements de la matière ou non, est "à ne jamais résoudre a priori", par conséquent, il est uniquement résoluble par les moyens empiriques. LOBATCHEVSKY fut aussi convaincu que cette question sera résolue au cours du développement de la science, au moyen de l'expérience.

Le fait que la validité de l'axiome des parallèles dans l'espace réel ne peut être prouvé par les moyens de la logique, signifie que la géométrie d'Euclide et celle de Bolyai—Lobatchevsky sont toutes deux logiquement possibles. Ou, plus précisément: si le système d'axiomes de la géométrie euclidienne est non-contradictoire, celui de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky l'est également, tandis que si le système d'axiomes de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky est non-contradictoire, le système d'axiomes de la géométrie euclidienne l'est également. Cette assertion fut vérifiée par BOLYAI comme par LOBATCHEVSKY par des moyens empiriques, par la déduction détaillée de la géométrie hyperbolique, dans laquelle ils ont traité toutes les questions traitées d'habitude dans la géométrie euclidienne, sans se heurter aux contradictions.

Cet argument empirique est de poids, mais non tout à fait satisfaisant. En effet on pourrait se figurer qu'au cours du développement ultérieur de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky, c'est-à-dire en suivant les déductions des axiomes de la géométrie l'on parviendrait finalement à une contradiction. Cette contradiction fournirait la démonstration indirecte de l'axiome euclidien des parallèles. Naturallement, on pourrait se figurer le contraire, c'est-à-dire que l'évolution ultérieure de la géométrie euclidienne conduira une fois à une contradiction. Cette contradiction signifierait la réfutation de l'axiome euclidien des parallèles.

Or les recherches de BOLYAI prouvent que ce dernier cas est impossible, en supposant que les axiomes de la géométrie absolue, c'est-à-dire les axiomes de la géométrie euclidienne, à l'exception de l'axiome des parallèles, forment un système non-contradictoire. BOLYAI a notamment démontré qu'en introduisant, dans les axiomes de la géométrie euclidienne, au lieu de la notion du plan, la notion de surface F (c'est-à-dire la parasphère) et au lieu de la droite, la ligne L (c'est-à-dire le paracycle), on obtient de ces axiomes, y compris l'axiome des parallèles, des théorèmes qui peuvent être démontrés au moyen de la géométrie hyperbolique. Il en résulte que cette transformation nous donne la possibilité de démontrer en s'appuyant sur les axiomes de la géométrie hyperbolique les transformés non seulement des axiomes de la géométrie euclidienne, mais aussi des théorèmes fondés sur ces axiomes mêmes.

En général cette idée peut se concevoir de la façon suivante. Soient A et B deux systèmes d'axiomes. Supposons qu'à chaque notion fondamentale du système d'axiomes A corresponde une notion définissable dans le système d'axiomes B (éventuellement une notion fondamentale de ce système). Faisons correspondre à chaque proposition T — ne contenant aucune autre notion que des notions logiques et des notions fondamentales du système d'axiomes A — une proposition T', formée de telle manière qu'on y remplace toutes les notions fondamentales par la notion correspondante, définissable dans le système d'axiomes B. Supposons, qu'au moyen de cette opération transformant T en T', tout axiome du système d'axiomes A se transforme en un théorème démontrable à l'aide du système d'axiomes B (éventuellement en un axiome du système d'axiomes B). Nous disons en ce cas, que la transformation ci-dessus qui fait correspondre à chaque notion fondamentale du système d'axiomes A une notion définissable dans le système d'axiomes B, est un *modèle* du système d'axiomes A dans le système d'axiomes B; nous appelons la transformation $T \rightarrow T'$ *l'application* de ce modèle. Or, *l'application du modèle transforme non seulement les axiomes du système A en théorèmes démontrables à l'aide du système d'axiomes B, mais elle transforme également les théorèmes démontrables à l'aide du système A en théorèmes démontrables à l'aide du système B.* Soit en effet T un théorème quelconque, démontrable à l'aide du système d'axiomes A et soit D une démonstration quelconque du théorème T dans le système d'axiomes A. Donc, D est une suite de propositions $T_1, T_2, \ldots, T_n$, dont chacune est ou bien l'un des axiomes du système d'axiomes A, ou bien une conséquence logique des propositions qui la précèdent dans cette suite, et T_n n'est autre que le théorème T. Désignons, pour $k = 1, 2, \ldots, n$, par T'_k la proposition obtenue de T_k par l'application du modèle. Nous allons maintenant démontrer que T'_k est un théorème démontrable à l'aide du système d'axiomes B. D'après notre supposition, cette assertion est valable pour les valeurs de k, pour lesquelles T'_k est un axiome du système d'axiomes A, en particulier pour $k = 1$ (car T_1 ne peut être une conséquence logique des propositions qui la précèdent dans D vu qu'il n'existe aucune proposition qui la précède, de sorte que T_1 ne peut être qu'un axiome du système d'axiomes A). Supposons maintenant que notre assertion soit valable pour tous les indices moindres que k; nous allons démontrer qu'en ce cas elle est aussi valable pour k. Il ne nous faut démontrer cette assertion que dans le cas ou T_k n'est pas un des axiomes du système d'axiomes A, en telle sorte qu'elle est la conséquence logique de quelques-unes des propositions $T_1, T_2, \ldots, T_{k-1}$. La proposition T'_k est également une conséquence logique des propositions correspondantes parmi $T'_1, T'_2, \ldots, T'_{k-1}$, l'application du modèle conservant les rapports logiques reliant les propositions. Or, les propositions $T'_1, T'_2, \ldots, T'_{k-1}$ sont, par hypothèse, des théorèmes démontrables à l'aide du système d'axiomes B; il en résulte donc que T'_k l'est également, puisque toute conséquence logique des théorèmes démontrables à l'aide du système d'axiomes B est également démontrable à l'aide du système d'axiomes B. Par conséquent, la proposition T'_n, obtenue de la proposition T par l'application du modèle, est aussi un théorème démontrable à l'aide du système d'axiomes B.

Il en résulte donc que si le système d'axiomes A possède un modèle dans le système d'axiomes B, et si le système d'axiomes B est non-contradictoire, le système d'axiomes A l'est également. En effet, si le système d'axiomes A était contradictoire, c'est-à-dire s'il existait deux propositions T et $\bar{T}$, toutes deux théorèmes démontrables à l'aide du système d'axiomes A, et dont

$\overline{T}$ était la négation de la proposition T (c'est-à-dire qu'elle affirme que T n'est pas vraie), nous obtiendrions, par l'application du modèle, les propositions T' et $\overline{T}'$, qui seraient toutes deux des théorèmes démontrables à l'aide du système d'axiomes B, et dont $\overline{T}'$ serait la négation de la proposition T' (puisque le fait qu'une proposition est la négation d'une autre est conservé dans l'application du modèle). En ce cas, le système d'axiomes B serait de même contradictoire. En d'autres termes, si nous réussissons de donner un modèle du système d'axiomes A dans le système d'axiomes B, cela signifie que nous avons ramené la question de la non-contradiction du système d'axiomes A à la même question concernant le système d'axiomes B. On peut alors s'exprimer de cette façon aussi : nous avons démontré la non-contradiction *relative* du système d'axiomes A par rapport au système d'axiomes B.

Du fait que JEAN BOLYAI construisit un modèle du système d'axiomes de la géométrie euclidienne dans le système d'axiomes de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky, il résulte que si le système d'axiomes de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky est non-contradictoire, le système d'axiomes de la géométrie euclidienne l'est également. Ce n'est pas dans ce but que BOLYAI construisit un modèle du système d'axiomes de la géométrie euclidienne dans le système d'axiomes de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky — car en ce temps-là, la possibilité de la contradiction de la géométrie euclidienne ne venait même pas à l'esprit — mais dans le but d'accélérer l'établissement de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky. En effet, au moyen de cette méthode beaucoup de théorèmes de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky ont été déduits d'un seul coup, à savoir tous les théorèmes qui résultent des théorèmes de la géométrie euclidienne en y remplacant les notions du plan et de la droite, par les notions respectives de la surface F, et de la ligne L. Cependant, c'est sans doute le mérite de BOLYAI d'avoir introduit dans la géométrie la première application *de la méthode des modèles.*

Cette méthode nous a conduit à la solution du problème mentionné ci-dessus et laissé sans résolution par BOLYAI (et par LOBATCHEVSKY) : à savoir la réduction de la non-contradiction du système d'axiomes de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky à la non-contradiction du système d'axiomes euclidien. On n'avait besoin à ce but que de la construction d'un modèle du système d'axiomes de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky dans le système d'axiomes de la géométrie euclidienne. Un tel modèle fut établi pour la première fois par CAYLEY et par FELIX KLEIN d'une part et par JULES KÖNIG de l'autre. Le modèle de JULES KÖNIG, peu connu, présente un intérêt particulier. Il est basé sur le fait qu'il est facile de construire, dans le système d'axiomes de l'espace euclidien à quatre dimensions, un modèle du système d'axiomes de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky ; pour cela, il suffit de considérer, dans cet espace à quatre dimensions, une hypersurface à trois dimensions ayant une courbure négative constante, d'en substituer les points aux points de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky, les lignes géodétiques aux droites de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky, et les surfaces géodétiques à deux dimensions aux plans de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky ; les notions d'incidence, d'ordre et d'égalité se transforment en elles-mêmes. D'autre part, il n'est pas difficile, en s'appuyant sur le fait que les droites de l'espace forment une configuration à quatre dimensions, de construire dans le système d'axiomes de la géométrie euclidienne à trois dimensions, un modèle du système d'axiomes de la géométrie euclidienne à quatre dimensions (les droites de la géométrie à trois dimensions correspondent dans ce modèle aux points de la géométrie à quatre dimensions). Par la réunion de ces deux modèles, JULES KÖNIG réussit à obtenir un modèle du système d'axiomes de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky dans le système d'axiomes de la géométrie euclidienne, modèle dans lequel certaines droites de la géométrie euclidienne correspondent aux points de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky, à savoir les droites qui relient les points d'une hyperbole équilatère aux points d'une hyperboloïde à une enveloppe formée par la rotation d'une autre hyperbole équilatère. Le modèle de Cayley—Klein, tout aussi bien que celui de J. König, prouve que si le système d'axiomes de la géométrie euclidienne est non-contradictoire, le système d'axiomes de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky l'est également.

Le fait qu'il fut possible de ramener la question de la non-contradiction du système d'axiomes de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky à la question correspondante du système d'axiomes de la géométrie euclidienne, a soulevé la question de la non-contradiction de la géométrie euclidienne. HILBERT réussit à ramener cette question à la non-contradiction du système d'axiomes de l'arithmétique des nombres réels, également à l'aide de la méthode des modèles. Dans ce but, il lui fallut construire un modèle du système d'axiomes de la géométrie euclidienne dans le système d'axiomes de l'arithmétique des nombres réels. Cela était facile, en utilisant l'idée fondamentale de la géométrie analytique de Descartes. Il fit correspondre, aux points de la géométrie euclidienne, des triples de nombres réels, aux plans de la géométrie euclidienne, des équations linéaires à trois inconnues (plus précisément, l'ensemble des équations formées par multiplication d'une équation linéaire à trois inconnues par une constante), et aux droites de la géométrie euclidienne, des systèmes d'équations formées par deux équations linéaires à trois inconnues (plus précisément, l'ensemble des équations formées par multiplication par des constantes et par addition de deux équations linéaires à trois inconnues, n'étant pas contradictoires entre elles) ; à l'incidence, la relation suivant laquelle un triple de nombres vérifie une équation linéaire à trois inconnues, respectivement qu'une équation linéaire à trois inconnues résulte par multiplication par des constantes et par addition de deux équation linéaires à trois inconnues ; enfin, à la notion d'ordre et à celle d'égalité des segments, les relations arithmétiques qui expriment ces notions géométriques dans la géométrie analytique.

La réduction de la question de la non-contradiction du système d'axiomes de la géométrie, à la question correspondante du système d'axiomes des nombres réels, a soulevé la question de la non-contradiction du système d'axiomes des nombres réels. La méthode des modèles n'est pas applicable pour résoudre cette question, car elle ne fournit que des démonstrations de non-contradiction relatives, mais il ne s'agit plus ici d'une telle démonstration. HILBERT prouva la possibilité en principe de démontrer, dans "le sens absolu", la non-contradiction d'un système d'axiomes. Il nous faut, pour cela, savoir exactement, ce que nous entendons par proposition ainsi que par démonstration et par contradiction, à ce but, il est nécessaire d'autre part, de définir d'une façon précise la condition sous laquelle on peut affirmer qu'une proposition est une conséquence logique d'autres propositions, où bien qu'elle est la négation d'une autre proposition. On a réussi de définir de façon précise ces notions par l'application des méthodes de la logique mathématique. Il fut de plus nécessaire de considérer, en dehors de la transformation que nous désignons application d'un modèle, d'autres transformations, qui transforment les démonstrations en de nouvelles démostrations (éventuellement en démonstrations appartenant au même système d'axiomes). HILBERT a établi une théorie complète pour la démonstration absolu de la non-contradiction des systèmes d'axiomes; cette théorie est connue sous le nom de Théorie des démonstrations d'Hilbert. Par l'application de cette théorie, NOVIKOV et GENTZEN ont réussi — indépendamment l'un de l'autre — à démontrer, que le système d'axiomes des nombres naturels est non-contradictoire; en outre, la non-contradiction du système d'axiomes des nombres rationnels ou celui des nombres algébriques ainsi que celle du système d'axiomes de la géométrie euclidienne ou de celui de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky peut être également ramenée à la non-contradiction du système d'axiomes des nombres naturels si nous supprimons l'axiome de continuité de DEDEKIND, et le remplaçons par quelques axiomes qui affirment l'existence des points communs des droites et des circonférences, axiomes qui rendent possibles les constructions au sens euclidien. Quoiqu'il en soit, nous sommes encore très loin de la démonstration de la non-contradiction de l'arithmétique des nombres réels.

En dehors de son application à la non-contradiction des systèmes d'axiomes, il existe encore beaucoup d'autres applications de la méthode des modèles. Dans beaucoup de cas la construction du modèle prend la forme d'une définition. La définition des nombres réels d'après DEDEKIND (ou WEIERSTRASS, ou CANTOR) en montre un exemple typique, si l'on la considère du point de vue qui suit. Pour la construction de l'analyse nous avons besoin des propriétés des nombres réels qui caractérisent leur ensemble comme un corps continu au sens de DEDEKIND et pourvu d'un ordre archimédien. Ces propriétés forment un système d'axiomes. La définition des nombres réels par les coupures de DEDEKIND n'est rien d'autre que la construction d'un modèle pour ce système d'axiomes dans le système d'axiomes de l'arithmétique et de la théorie des ensembles des nombres rationnels (où donc on n'exige que l'existence des ensembles dont les éléments sont des nombres rationnels).

Parmi les récentes applications de la méthode des modèles il faut de mentionner la démonstration due à GÖDEL de ce que si le système d'axiomes de la théorie des ensembles est non-contradictoire, l'hypothèse de CANTOR concernant le problème du continu ne peut être réfutée à l'aide de ce système d'axiomes. GÖDEL le démontre en construisant, dans le système d'axiomes de la théorie des ensembles, un modèle du système d'axiomes que l'on obtient en y ajoutant l'hypothèse de CANTOR. On arrive à ce modèle lorsqu'on remplace la notion d'*ensemble* par la notion d'*ensemble construisible* (par les méthodes de la logique mathématique et de la théorie des ensembles, dans un certain sens précisément défini). La relation de contenir se transforme en elle-même.

La géométrie de Bolyai—Lobatchevsky eut une influence sur le développement de la méthode axiomatique non seulement par la méthode des modèles. Le fait que la géométrie euclidienne et celle de Bolyai—Lobatchevsky sont simultanément non-contradictoires, peut être formulé de la façon suivante: l'axiome euclidien des parallèles ne peut être ni démontré, ni réfuté à l'aide des axiomes communs à ces deux géométries. C'est cela que nous avons l'habitude d'exprimer en disant que l'axiome euclidien des parallèles est *indépendant* des autres axiomes de la géométrie euclidienne. En général, un certain axiome P est appelé indépendant des axiomes d'un système d'axiomes A dans le cas où ni P ni sa négation ne peuvent être démontrés dans le système d'axiomes A. Le fait que l'axiome euclidien des parallèles est indépendant des autres axiomes de la géométrie euclidienne fut le premier exemple non banal de l'indépendance de l'un des axiomes d'un système d'axiomes des autres axiomes de ce même système. La méthode que l'on applique ici à démontrer l'indépendance d'un axiome peut être formulée dans la forme générale que suit: *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un axiome P, appartenant au système d'axiomes non-contradictoire A, soit indépendant des autres axiomes du système A, est que le système d'axiomes formé à partir de A en remplacent P par $\bar{P}$ soit également non-contradictoire.* Or, nous pouvons traiter cette question en utilisant la méthode des modèles, car nous supposons ordinairement dans l'étude de l'indépendance, que le système en question n'est pas contradictoire. La découverte de l'indépendance de l'axiome euclidien des parallèles des autres axiomes de la géométrie fut le point de départ d'une série d'études sur l'indépendance. Ces recherches nous ont conduit à des notions importantes, comme par exemple dans l'algèbre, la notion du corps non-archimédien, ou bien la notion du corps de caractéristique p.

Le fait que l'axiome des parallèles ne dépend nullement des autres axiomes de la géométrie nous prouve encore, qu'en supprimant du système d'axiomes de la géométrie euclidienne l'axiome des parallèles, nous obtenons un système d'axiomes *incomplet,* et ceci en deux sens. D'une part, il existe une proposition pouvant se formuler au moyen des notions fondamentales du système d'axiomes de la géométrie, par exemple l'axiome même des parallèles qui, de même que sa négation, ne peut être démontré dans le système d'axiomes en question. D'autre part, il existe deux modèles du système d'axiomes, déduit du système d'axiomes de la géométrie euclidienne en supprimant l'axiome des parallèles (par exemple dans le système d'axiomes de l'arithmétique des nombres réels), qui ne sont pas isomorphes dans un sens précisément définissable (l'un pouvant se construire sur le modèle de la géométrie analytique euclidienne, l'autre sur celui de la géométrie analytique hyperbolique). La propriété d'après laquelle toute assertion T qui ne contient que les notions fondamentales d'un système d'axiomes A et les notions de la logique ou bien elle-même, ou bien sa négation $\overline{T}$, doit être démontrable dans le système d'axiomes A, est appelée *catégoricité* du système d'axiomes A. Tandis que le fait exigeant que deux modèles quelconques d'un système d'axiomes A (par exemple deux modèles arithmétiques) soient isomorphes est nommé *monomorphisme* du système d'axiomes A.

La découverte d'après laquelle le système d'axiomes de la géométrie euclidienne est incomplet sans l'axiome des parallèles (bien qu'en espérant de pouvoir y démontrer par la suite l'axiome euclidien des parallèles, on l'ait considéré comme complet), plus exactement, le fait qu'il n'est ni monomorphe, ni catégorique, a donné naissance à l'étude du monomorphisme, et de la catégoricité de divers systèmes d'axiomes. Dans ces études aussi, on a tout d'abord prouvé ces propriétés d'une façon relative, c'est-à-dire qu'on a supposé qu'autres systèmes d'axiomes les possèdent. Ces recherches ont obtenu des résultats en apparence positifs; HILBERT, par exemple, a démontré que si le système d'axiomes de l'arithmétique des nombres réels est monomorphe, le système d'axiomes de la géométrie l'est également. Mais lorsque l'on a commencé à examiner la question de ces propriétés au sens absolu, les recherches ont abouti à des résultats négatifs. SKOLEM, par exemple, a démontré que les systèmes d'axiomes qui ont à caractériser les ensembles indénombrables (comme par exemple les systèmes d'axiomes de l'arithmétique des nombres réels, de la géométrie, de la théorie des ensembles) ne sont pas monomorphes pourvu qu'ils soient non-contradictoires, car ils possèdent en ce cas un modèle dans lequel le rôle des éléments des ensembles qu'ils caractérisent est joué par des nombres naturels, c'est-à-dire qu'ils possèdent un modèle "dénombrable". Ce résultat de SKOLEM, qui est une application d'un théorème de la logique mathématique dû à LÖWENHEIM, n'exclut pas la possibilité du monomorphisme des systèmes d'axiomes qui ont à caractériser des ensembles dénombrables.

Mais SKOLEM a démontré en même temps, que même l'arithmétique des nombres naturels ne possède pas de système d'axiomes monomorphe (système contenant un nombre fini ou dénombrable d'axiomes), car on peut construire, pour chacun de ces systèmes d'axiomes, un modèle dans lequel le rôle des nombres naturels est joué par certaines fonctions arithmétiques qui ne sont pas ordonnées suivant le type ω.

Les recherches sur la catégoricité des systèmes d'axiomes ont également abouti à un résultat négatif. GÖDEL a démontré que, si un système d'axiomes est suffisamment expressif pour qu'on y puisse définir certaines notions arithmétiques et en même temps assez régulier pour qu'on y puisse caractériser, d'une certaine façon arithmétique, la condition pour qu'une proposition soit la conséquence logique d'autres propositions, si d'autre part ce système est non-contradictoire, il ne peut être catégorique.

Ces recherches nous ont conduit à reconnaître que la méthode axiomatique n'est pas applicable ni à la caractérisation univoque à un isomorphisme près des notions fondamentales ni à la décision définitive au moyen des axiomes donnés de tous les problèmes d'une discipline non banale. Par d'autres mots, pour la caractérisation complète des notions reproduisant correctement la réalité il nous faut constamment développer nos méthodes, nos systèmes d'axiomes, et le fait de vouloir connaître de degré en degré la réalité dans sa totalité nous contraint, lui aussi, au développement de ces systèmes. D'après le point de vue du matérialisme dialectique cela semble être naturel, mais il est quand même très important de pouvoir atteindre cette connaissance sans aucune hypothèse philosophique, par les moyens seuls de la mathématique. (En fin de compte, cela est tout naturel, car les assertions du matérialisme dialectique ne sont pas fondées sur des hypothèses particulières, mais sur les résultats des sciences.) C'est un mérite impérissable de JEAN BOLYAI et de NICOLAS IVANOVITCH LOBATCHEVSKY que leurs recherches concernant le système d'axiomes de la géométrie, donc un système d'axiomes particulier, ont conduit finalement à cette connaissance générale concernant la méthode axiomatique.

ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИИ БОЯИ—ЛОБАЧЕВСКОГО НА РАЗВИТИЕ АКСИОМАТИЧЕСКОГО МЕТОДА

Л. КАЛЬМАР (Сегед)

(Резюме)

Автор показывает, каким образом открытие геометрии Бояи—Лобачевского привело к современным исследованиям, относящимся к непротиворечивости, независимости и полноте систем аксиом. Бояи уже в заглавии своего „Аппендикс“ выразил мысль, что вопрос о том, имеет-ли место евклидова аксиома параллельности в действительном пространстве (в котором происходит движение материи) „a priori никогда не может быть решен“. Это значит, что геометрии Евклида и Бояи—Лобачевского логически одинакого возможны, то есть непротиворечивы одновременно. Бояи указал и метод, с помощью которого Кэли, Клейн и Дьюла Кёниг впоследствии привели непротиворечивость геометрии Бояи—Лобачевского к соответствующему вопросу, относящемуся к евклидовой геометрии: это — метод моделей, хотя сам Бояи применил его не для исследовании, относящихся к непротиворечивости, а для более простое построение гиперболической геометрии. Автор излагает результаты, достигнутые впоследствии методом моделей, вплоть до теоремы Гёделя о неопровержимости гипотезы Кантора относительно проблемы континуума; он указывает границы метода моделей, приведшие к необходимости применения новых методов в исследованиях вопросов непротиворечивости и приводит новейшие результаты, достигнутые этими методами.

Тот факт, что геометрия Бояи—Лобачевского является непротиворечивым одновременно с евклидовой, означает, что аксиома параллельности является независимой от остальных аксиом геометрии. Это обстоятельство открыло дорогу исследованиям относительно независимости дальнейших аксиом; эти исследования привели между прочим к открытию таких важных алгебраических понятий, как неархимедово поле, или как поле с характеристикой p.

Независимость аксиомы параллельности от остальных аксиом геометрии показывает также, что система аксиом геометрии без аксиомы параллельности неполна в двух отношениях: она некатегорическая, т. е. существует такое предложение формулируемое с помощью основных понятий данной системы аксиом и логических понятий, которое в этой системе аксиом нельзя ни доказать, ни опровергнуть, и она немономорфна, т. е. имеет две неизоморфные модели. Это открытие дало толчок исследованиям, относящимся к категоричности и мономорфизму систем аксиом и приведшим после положительных, но относительных результатов к отрицательным в абсолютном смысле результатам, в том числе к теореме Лёвенгейма—Сколема и к теореме Гёдела о существовании проблем неразрешимых в данной (достаточно выразительной и достаточно правильной) системе аксиом. Эти отрицательные результаты привели к тому результату, — который с точки зрения диалектического материализма естестбенен — что для полной характеристики понятий, правильно отражающих действительность, и для полного познания действительности, необходимо непрерывное развитие наших методов, в том числе—развитие систем аксиом.

LA VIE ET LES OEUVRES DE N. I. LOBATCHEVSKY

Par
F. KÁRTESZI (Budapest)

Lorsque nous fêtons le 150-e anniversaire de la naissance de JEAN BOLYAI, nous commémorons également le souvenir de NICOLAS IVANOVITCH LOBATCHEVSKY, son grand contemporain. Dans les mathématiques leurs noms sont inséparables, puisque leurs découvertes ont eu lieu en même temps, sans qu'il y ait eu aucun rapport entre eux. Leur sort est également semblable en beaucoup de points et les deux peuples qui ont donné au monde ces deux grands savants, se sont unis sur la voie ascendante du progrès, du travail et de la pensée socialiste. A leur époque, sans se connaître, ils travaillaient à des questions semblables. Par leurs travaux scientifiques ils ont été amenés à faire des découvertes similaires et à atteindre des points de vue analogues. Tous deux désiraient rencontrer un esprit congénial, qui fut capable de les comprendre et pourtant ils sont morts sans même se connaître.

En nous rappelant le souvenir de ces deux grands esprits, il nous faut tout d'abord mettre en relief le parallèle existant entre leur sort et leurs oeuvres. Né en Russie et y faisant ces études, LOBATCHEVSKY fut le premier mathématicien russe à obtenir pour sa patrie la gloire impérissable d'être un des plus grands mathématiciens de tous les temps. La science soviétique regarde aujourd'hui le grand géomètre avec autant de fierté, que la science hongroise considère JEAN BOLYAI. CLIFFORD nommait LOBATCHEVSKY "le Copernic de la géométrie". Il établit un parallèle entre eux: "Tous deux ont révolutionné la pensée scientifique. Toutes les deux révolutions ont une importance énorme, car elles ont transformé notre considération du monde universel".

LOBATCHEVSKY est né le 20 novembre 1792. Il fit ses études au lycée de Kazan avec deux de ses frères; vu les conditions de l'époque, il eut une éducation scientifique soignée. L'université de Kazan se développa d'un lycée et ne devint une institution indépendante qu'en 1814. Cependant dès 1808, l'université de Kazan atteignit un niveau élevé en ce qui concerne les mathématiques. L'intérêt de LOBATCHEVSKY pour les mathématiques a probablement été éveillé par KARTACHEVSKY et BARTELS, mathématicien appartenant au cercle de GAUSS. A cette époque, le professeur BARTELS était un mathématicien de renommée européenne et un excellent pédagogue. Il reconnut aussitôt le talent exceptionnel de LOBATCHEVSKY et dirigea avec joie les études du jeune homme. Un autre professeur célèbre de LOBATCHEVSKY, LITTROFF s'intéressa à son excellent élève, et lui enseigna non seulement l'astronomie, mais encore le pourvut d'oeuvres philosophiques et littéraires. Les cours du professeur LOUBKINE jouèrent également un rôle important dans l'élargissement de sa culture philosophique. LOUBKINE critiquait violemment l'idée kantienne de l'espace et du temps. Il aimait et considérait beaucoup le jeune LOBATCHEVSKY. La vaste culture de LOBATCHEVSKY reçut à cette époque une base solide, et ses amis cultivés ne firent qu'approfondir l'effet de l'atmosphère universitaire.

En 1814, LOBATCHEVSKY obtint le titre de maître des sciences mathématiques. En 1816, il devint professeur chargé de cours, puis en 1818 professeur ordinaire de l'université de Kazan. De 1827 à 1846 il en fut le recteur. Ces 19 années eurent une très grande importance pour le développement de l'université de Kazan. En 1846, en vertu du règlement de l'époque, il dut être mis à la retraite. Le conseil de l'université demanda au ministre que le grand savant, qui n'avait que 53 ans, puisse continuer son travail universitaire. Il dut cependant partir. C'est alors qu'il fut nommé substitut du directeur général des établissements scolaires de l'arrondissement. Cette nomination était un avancement, mais pour LOBATCHEVSKY ce fut un rude coup. L'université de Kazan et ses étudiants étaient sa raison de vivre et maintenant il dut quitter tout cela à jamais. Dans sa vie familiale, LOBATCHEVSKY fut plusieurs fois rudement secoué. De plus, sa vue faiblissait et bientôt le sort le frappa de cécité. Étant donné la grande activité de LOBATCHEVSKY, cet effondrement physique aggrava beaucoup sa situation. Il mourut à l'âge de 64 ans le 26 février 1856.

Il est certain que LOBATCHEVSKY, par rapport à son époque, eut une excellente éducation mathématique. Il fut l'élève de professeurs excellents, qui le consideraient à sa juste valeur et qui découvrirent son talent exceptionnel. Son érudition était large. Avec l'aide de grands penseurs russes et de ses amis cultivés, il fit la connaissance des pensées et de la littérature du XVIII-e siècle, siècle éclairé, lesquelles il adapta à son génie.

Il est à noter que son instruction dans les sciences naturelles atteignait la profondeur de son érudition mathématique. Ses cours universitaires traitant des bases de la géométrie contenaient des éléments difficilement compréhensibles même pour les esprits les plus cultivés. Ses cours de physique et d'astronomie, dans lesquels son talent de conférencier ressortait toujours malgré la difficulté des problèmes, attiraient et captivaient un vaste auditoire. Ses ouvrages des mathématiques ne furent pas particulièrement appréciés par ses contemporains à cause de la profondeur des pensées et des problèmes qui y sont traités.

Il est certain que ses talents divers, sa culture intellectuelle de vaste envergure, ses excellentes qualités pédagogiques, ses capacités d'organisateur, son immense activité et sa grandeur morale étaient à la base du respect qu'il inspirait. En ce qui concerne les mathématiques, son entourage se composait de spécialistes médiocres qui étaient incapables de comprendre ses découvertes géniales, sa pensée originale et profonde. Le fait que ses contemporains n'étaient pas capables de le comprendre et de le suivre, dans ce qu'il a fait de plus grand, le désolait. Les attaques inspirées par la mauvaise foi et par l'étroitesse d'esprit le rendirent d'autant plus triste, qu'elles étaient justement la conséquence de ses découvertes géométriques.

Il est certain que LOBATCHEVSKY, dans sa carrière universitaire, se développa rapidement et atteignit dans sa jeunesse la position qui lui était dûe. Il eut cependant beaucoup à souffrir de la brutalité du despotisme d'Araktcheiev, et l'atmosphère étouffante qui l'entourait le forçait à se replier sur lui même. C'est dans ses cours seulement qu'il se sentait dans son vrai élément. L'esprit ouvert et épris de progrès de la jeunesse le consolait de l'aveuglement et de l'opposition de ses contemporains. C'est pourquoi il eut tant de peine à quitter sa chaire en 1846.

A la publication de son oeuvre, un seul homme le comprit: GAUSS. C'est sur la proposition de GAUSS qu'il fut élu membre correspondant de la Société Savante Royale de Goettingue. Dans une lettre écrite en 1843, il remercie GAUSS et la Société de ce modeste signe de reconnaissance. Dans ses conversations intimes et dans ses lettres, GAUSS reconnaît la génialité de l'oeuvre de LOBATCHEVSKY. Il ne ressentit cependant pas l'obligation morale de faire davantage dans l'intérêt de ce grand savant inconnu au-delà des frontières de la Russie. Son attitude ressemble fort à celle prise envers JEAN BOLYAI, attitude toute passive. Il mentionna à FARKAS BOLYAI l'oeuvre de LOBATCHEVSKY, cependant il ne fit jamais mention de l'Appendix à LOBATCHEVSKY. Et si nous considérons son action, nous pouvons constater que LOBATCHEVSKY, à son époque, n'eut guère d'avantage pour avoir été loué par GAUSS.

Je voudrais souligner dans cette conférence le fait tragique suivant: bien que BOLYAI et LOBATCHEVSKY aient suivi la même voie dans leurs recherches, bien que la manière dont ils considéraient les problèmes présentent la parenté la plus proche, ils eurent à lutter, tout isolés, sans se connaître, pour faire accepter leurs thèses scientifiques. Il eût été la tâche de GAUSS de présenter les deux mathématiciens l'un à l'autre. Mais il ne le fit pas, ce qui fut une grande perte pour la science.

Dans cette conférence, je présente un parallèle entre les travaux de BOLYAI et ceux de LOBATCHEVSKY en soulignant ce qu'ils ont de commun et ce qu'ils ont de différent.

Je dois commencer par dire que tous deux ont découvert que le V^e postulat d'EUCLIDE ne peut se déduire d'autres axiomes et postulats du système euclidien. Ceux-là sont compatibles avec la négation du V^e postulat aussi, puisque cette négation entraîne le développement d'une géométrie sans contradiction, tout comme la géométrie euclidienne. Ce résultat, ils l'ont atteint presque en même temps et indépendamment l'un de l'autre. Il ne serait pas juste de soulever ici la question de la priorité. Ce n'est pas le but de ce que j'ai à exposer par la suite.

Leur conception de l'espace se rapprochait de celle du matérialisme dialectique. Pourtant si je m'efforçais de prouver, en citant leurs paroles, qu'ils furent les précurseurs du matérialisme dialectique, je m'égarerais sur une fausse voie. Il est cependant certain que leur effort scientifique résolu, qui les a conduits à la découverte de la géométrie non-euclidienne, était la conséquence de leur conception claire et précise qui, à certains égards, se rapprochait de celle du matérialisme dialectique. Parti de cette base, ils ont découvert que la géométrie euclidienne n'est pas la seule manière logique de donner une description mathématique de l'espace véritable. C'est ainsi qu'ils sont arrivés à la conclusion que l'on ne doit pas identifier les rapports véritables existant dans l'espace avec leurs interprétations géométriques. L'axiome des parallèles appartenant au système d'axiomes qui est à la base de la géométrie euclidienne est indépendant des autres axiomes. Tout ce qui peut être déduit des autres axiomes, c'est que la somme des angles du triangle ne dépasse pas $2R$ et que selon que la somme des angles $=2R$, ou $<2R$ dans le cas particulier d'un seul triangle, le même fait se déduit logiquement pour tous les triangles. Ces théorèmes ont, déjà été éclaircis par les recherches de SACCHERI et de LAMBERT. Leur formulation explicite ainsi que leurs démonstrations précises se trouvent chez LEGENDRE. Mais avant LOBATCHEVSKY et BOLYAI les mathématiciens s'arrêtaient à ce point. Bien que LAMBERT et particulièrement TAURINUS aient soupçonné qu'il n'y a pas de contradiction logique entre l'axiome "somme des angles $<2R$" et les autres axiomes d'EUCLIDE, ils ont rejeté ce système non-euclidien. Ils l'ont rejeté parce qu'il aboutit à des théorèmes qui sont en contradiction avec les donnés expérimentaux sur l'espace véritable". Seuls BOLYAI et LOBATCHEVSKY ont vu que certains théorèmes de la géométrie non-euclidienne sont contraires non pas aux expériences dans l'espace véritable, mais à l'explication euclidienne de ces expériences. Ils ont donc établi une géométrie non-euclidienne logiquement aussi bien possible que la géométrie euclidienne. Laquelle des deux géométries : l'euclidienne ou la non-euclidienne, donne une description juste de l'espace véritable ? Ce problème ne peut être résolu que par l'expérience scientifique.

LOBATCHEVSKY et BOLYAI ont qualifié d'arbitraire l'axiome des parallèles d'EUCLIDE. Ils ont établi la géométrie non-euclidienne en tant que système également apte à rendre les rapports des réalités objectives de l'espace que celui d'EUCLIDE, et aussi juste que celui-ci. Ainsi ils ont transformé la géométrie d'une manière révolutionnaire et essentiellement matérialiste.

Il est possible de constater qu'ils sont parvenus à cette conception nouvelle et révolutionnaire à peu près à la même époque. En 1823 LOBATCHEVSKY voyait clairement que la déduction du V^e axiome des autres axiomes n'est pas un problème résolu, mais il ne voyait pas bien encore la manière d'éclaircir ce problème. Dans une lettre datée du 3 novembre 1823, BOLYAI écrivait qu'il est arrivé à un résultat décisif dans la géométrie non-euclidienne.

Le 24 février 1826 LOBATCHEVSKY présenta une thèse à la faculté de physique et de mathématique de l'université de Kazan. Cette thèse est disparue, mais il est possible de conclure de ses autres travaux qu'il y développait les fondements d'une géométrie non-euclidienne.

Au début de 1826 BOLYAI remettait à son ex-professeur, le capitaine WOLTER, le manuscrit de son ouvrage sur la géométrie non-euclidienne. Ce manuscrit est également disparu.

La première oeuvre imprimée, qui rend compte de la découverte de LOBATCHEVSKY a paru en 1829. L'année 1829—1830 de la revue "Kazansky Vestnik" publie un ouvrage sur "Les fondements de la géométrie". Dans cet ouvrage LOBATCHEVSKY déduit les rapports entre les côtés et les angles du triangle rectangle dans le plan hyperbolique, puis il expose la géométrie différentielle et analytique de l'espace hyperbolique ainsi que son utilisation pour le calcul de certaines intégrales définies.

L' "Appendix" est la première et unique oeuvre parue de BOLYAI qui rend compte des résultats de ses recherches. Les tirages à part en avaient déjà paru en juin 1831.

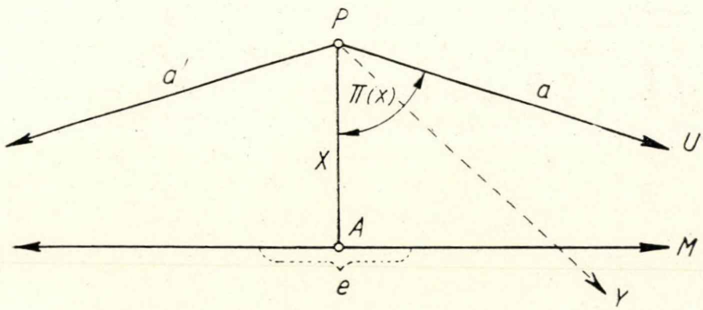

Fig. 1

LOBATCHEVSKY et BOLYAI ont également pris pour point de départ le système d'axiomes se déduisant du système euclidien par la suppression du V^e axiome, et ils commencent l'exposition par une nouvelle définition de la notion du parallélisme. Soit $PA \perp e$. Considérons les demi-droites $\overrightarrow{PY}$ ayant le point P pour origine et situées dans le plan déterminé par la droite e et par ce même point P situé en dehors de e. Il s'ensuit du système restant d'axiomes l'existence d'une demi-droite $\overrightarrow{PU}$ ne coupant pas $\overrightarrow{AM}$, située du même côté que $\overrightarrow{AM}$ de la droite PA, et telle que toute demi-droite ayant P pour origine et située dans l'angle $APU\sphericalangle$ coupe la demi-droite $\overrightarrow{AM}$. La droite a, et la droite a' symétrique de a par rapport à la droite PA, sont appelées parallèles à la droite e. La distance $PA = x$ est appelée distance de parallélisme et l'angle $APU\sphericalangle$ est l'angle de parallélisme corespondant à la distance x; $APU\sphericalangle = \Pi(x)$.

Deux cas sont possibles: pour chaque configuration de cette sorte ou bien $\Pi(x) = R$,[1] ou bien $\Pi(x) < R$.

Si nous admettons l'assertion $\Pi(x) = R$ comme axiome en l'ajoutant au système restant d'axiomes, nous pouvons déduire du système d'axiomes ainsi obtenu la géométrie euclidienne.

Si, par contre, nous admettons l'hypothèse $\Pi(x) < R$ et nous l'ajoutons au système restant d'axiomes, nous obtenons un nouveau système d'axiomes qui nous conduit à la géométrie non-euclidienne.

Deux voies se présentent dans l'exposition qui suit:

1. Élaborer les conséquences de l'hypothèse $\Pi(x) < R$. Ce fut la voie suivie par LOBATCHEVSKY.

2. Ne faire aucune hypothèse sur l'angle de parallélisme — sauf que l'assertion $\Pi(x) > R$ est en tout cas fausse — et ne déduire que les conséquences du système restant d'axiomes. Le système géométrique ainsi obtenu contient en même temps les deux types de géométries. Telle fut la voie suivie par BOLYAI.

En partant de l'hypothèse $\Pi(x) < R$, LOBATCHEVSKY construit la géométrie dite hyperbolique et il traite les deux géométries, la géométrie euclidienne et la géométrie hyperbolique, parallèlement mais séparée l'une de l'autre. De son côté BOLYAI, en faisant ressortir le noyau commun des deux types de géométries, traita les deux géométries ensemble, et il en fit une synthèse d'un degré plus élevé, et ne les sépara que dans le cas où, dans l'un ou dans l'autre système, il désirait faire ressortir quelque relation présentant une certaine particularité caractéristique. LOBATCHEVSKY, en tant qu'astronome et physicien qualifié avait en sa possession les instruments de mesurage nécessaires, et il était convaincu qu'au moyen de l'expérience scientifique il est possible de décider si l'espace physique est de nature euclidienne ou non-euclidienne. C'est pourquoi il donna une élaboration très détaillée des relations métriques de la géométrie hyperbolique ainsi que de leurs applications. Suivant cette voie, il parvint à des problèmes intéressants

[1] Désigne ici l'angle droite.

et obtint des résultats de valeur dans la théorie des probabilités. BOLYAI par contre, dans son isolation, ne pouvait même penser à la solution de tels problèmes. Dans ses recherches ultérieures, il visa plutôt à développer les aspects théoriques de la nouvelle géométrie.

Donnant une élaboration plus détaillée des fondations de la géométrie hyperbolique, en développant minutieusement la géométrie différentielle et analytique non-euclidienne, en établissant des théorèmes et des formules immédiatement applicables, enfin en publiant tout cela, LOBATCHEVSKY a produit beaucoup plus que BOLYAI.[2] D'autre part, BOLYAI a également poursuivi ses recherches et de ses notes qu'il avait préparées pour lui-même, on peut constater que dans l'élaboration des géométries valables sur les surfaces à courbure constante de l'espace absolue — c'est par ce nom que l'on désigne l'espace satisfaisant au système restant d'axiomes — il était parvenu à un tel degré de perfection qui ne fut atteint qu'à la fin du XIX[e] siècle par des mathématiciens travaillant dans des circonstances beaucoup plus favorables.

Ce n'est pas seulement dans le domaine des recherches géométriques que LOBATCHEVSKY a rencontré BOLYAI, mais aussi dans d'autres branches des mathématiques. Ainsi, ils firent tous les deux la critique détaillée du formalisme, de la formation arbitraire des idées générales, procédé très en vogue dans l'arithmétique de ce temps-là. En effet, cette conception critiquée vivement par eux empêcha le développement de la notion de nombre. LOBATCHEVSKY, dans son livre intitulé "L'algèbre ou le calcul des quantités finies" et BOLYAI dans son manuscrit "Responsio" donnèrent à certaines questions un traitement dont l'idée maîtresse se répandait d'une façon générale beaucoup plus tard.

Leurs recherches analogues les amenèrent également à découvrir les rapports étroits reliant la théorie des nombres complexes à la géométrie non-euclidienne. Par l'emploi des nombres complexes, nous pouvons mettre en évidence les relations formelles étroites existant entre les géométries hyperboliques et sphériques. Dans les §§ 9 et 11 de sa "Responsio", BOLYAI étudie cette question d'une manière particulièrement approfondie. Quant à LOBATCHEVSKY, il traite cette question en détail dans son oeuvre "La géométrie imaginaire".

La manière de LOBATCHEVSKY d'envisager les problèmes et ses exigeances élevées montrées à l'égard de la formation des idées générales en mathématiques l'ont conduit aussi dans ses recherches sur l'analyse mathé-

[2] Les oeuvres ultérieures de LOBATCHEVSKY traitant de la géométrie non-euclidienne sont les suivantes : *La géométrie imaginaire* (1835). *L'application de la géométrie imaginaire à quelques intégrales* (1836). *Les nouveaux fondements de la géométrie avec la théorie complète des parallèles* (1835—1838). *Recherches géométriques sur la théorie des parallèles* (1840). *Pangéométrie* (1855).

matique à des résultats originels et remarquables. Il aperçut que la différentiabilité d'une fonction ne découle pas nécessairement de sa continuité et que la continuité est possible sans différentiabilité. BOLYAI a aussi fortement critiqué l'imprécision dans certaines notions générales de l'analyse. Ses tendences nous rappellent parfois la rigueur weierstrassienne. Par exemple, il a même critiqué la notion de cercle à rayon infini, prétendant que la notion du cercle suppose les notions ordinaires de la distance et du point. Il a introduit la notion de courbe uniforme, ayant pour propriété déterminante que les perpendiculaires élevées aux milieux de ses cordes forment un faisceau de droites. Cette notion comprend le cercle, le paracycle et l'hypercycle.

Tous deux ont aussi atteints de grands résultats dans le domaine de l'analyse. Le développement en série de puissance des fonctions trigonométriques, de même la relation d'EULER :

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x$$

étaient déjà connus avant LOBATCHEVSKY. Mais il fut le premier à en déduire les conséquences profondes. LOBATCHEVSKY définit les fonctions trigonométriques par leurs développements en série. Il donne une construction analytique de la trigonométrie et montre que cette trigonométrie comprend la trigonométrie classique. Dans son ouvrage "Responsio", BOLYAI suit la même voie méthodique. Notamment dans le § 8, il établit une nouvelle théorie des logarithmes. Il considère le logarithme comme la fonction inverse d'une fonction définie par une série, puis en partant de cette définition, il définit la notion de puissance pour un exposant quelconque.

Nous pouvons également constater une ressemblance intéressante entre les pensées et les créations des deux mathématiciens dans le domaine de la topologie. LOBATCHEVSKY emploie fréquemment des considérations de caractère topologique, et dans son exposition il préfère — avec un sens particulier — les raissonnements ne dépendant pas de considérations métriques. Nous pouvons déjà en trouver des exemples dans sa "Géométrie" parue en 1823. Dans les notes de BOLYAI datant d'une époque postérieure, on trouve des pensées remarquables qui nous permettent de constater qu'il a découvert ou pressenti certaines relations appartenant au domaine de la topologie combinatoire. C'est en particulier son manuscrit "Raumlehre" qui contient de telles idées.

Revenons aux oeuvres de LOBATCHEVSKY concernant la géométrie noneuclidienne. Ses contemporains — ne les comprenant pas en général — les critiquèrent et attaquèrent violemment. GAUSS traita ces critiques de "stupidités". En 1848, le livre de LOBATCHEVSKY intitulé "Recherches géométriques sur la théorie des parallèles" parvint à FARKAS et JEAN BOLYAI. Le fait est remarquable que chez nous il y avait déjà des critiques compétents au milieu du siècle dernier, alors que la plupart des mathématiciens ne comprenaient pas encore LOBATCHEVSKY. JEAN BOLYAI a lu cette oeuvre de son contemporain et nous a laissé pour critique un manuscrit volumineux que l'on cite seulement sous le nom de "Remarques". Cette critique tranchante mais tout à fait objective rend compte de certaines lacunes de l'exposition et des conséquences plus profondes de certains théorèmes. Dans une remarque géniale, il esquisse l'idée fondamentale d'un procédé expérimental basé sur la formule de gravitation de NEWTON dans l'espace absolue qui pourrait peut être servir à décider le caractère euclidien ou non-euclidien de l'espace. Cette critique, BOLYAI ne l'écrivit pas pour les lecteurs, mais seulement pour lui-même. L'élégance et la finesse de l'exposition du grand mathématicien russe le captivent. Dans ses notes, on trouve des remarques enthousiastes. FARKAS BOLYAI, dans son petit livre de 65 pages intitulé "Kurzer Grundriß" (1851) consacre 9 pages à la discussion de l'oeuvre en question de LOBATCHEVSKY.

LOBATCHEVSKY, très cultivé, avait une instruction scientifique très avancée. Instruit en philosophie, il était un excellent professeur et savant génial d'une vaste culture scientifique. Ses idées philosophiques étaient très avancées par rapport à son époque. Il vécut dans l'atmosphère de l'université de Kazan, entouré d'amis cultivés. Et pourtant ni son entourage ni ses contemporains ne comprenaient ses découvertes révolutionnaires. Ce n'est pas seulement en mathématiques, mais aussi en physique que LOBATCHEVSKY eut des idées originales. Son instruction dans les sciences naturelles eut une influence favorable sur ses idées mathématiques. Il était profondément convaincu que l'essence des mathématiques ne réside pas dans des constructions abstraites et formelles. Au contraire, les mathématiques possèdent une base matérielle et physique. Et ce qui est essentiel dans les mathématiques c'est de refléter de plus en plus fidèlement les traits les plus profonds de cette base. Suivant une autre voie et dans des circonstances différentes, BOLYAI parvint essentiellement à la même conclusion. L'instruction de BOLYAI ainsi que ses connaissances mathématiques sont incomplètes comparées à celles de LOBATCHEVSKY. Dans l'entourage de BOLYAI ne se trouvaient que très peu d'hommes cultivés. Son père même ne pouvait que difficilement suivre ses pensées scientifiques, l'essentiel de ses découvertes faisant époque. Dans ses années fécondes, après sa mise à la retraite, il vécut dans un milieu extrêmement primitif, et végéta dans de lamentables conditions matérielles. Il eut été volontiers professeur, mais même ce désir était irréalisable. Sa découverte mathématique, noyée dans l'atmosphère de l'indifférence, ne reçut même pas une critique malveillante, pour la bonne raison que l'on ne s'en souciait point. Par contre, LOBATCHEVSKY, sinon pour sa grandiose découverte, fut au moins aimé et honoré. A tout cela, BOLYAI ne participait guère.

Dans la société socialiste d'aujourd'hui, tout en le sachant, nous ne pouvons nous faire une idée juste de la lutte tragique qu'ont menée LOBATCHEVSKY et BOLYAI pour faire connaître et reconnaître leurs découvertes monumentales.

Cent cinquante ans se sont écoulées depuis la naissance de BOLYAI. Depuis ce temps-là, le monde a fait la connaissance des oeuvres de LOBATCHEVSKY et de BOLYAI. Leurs conceptions, leurs idées scientifiques faisaient sentir leur influence féconde sur le développement mathématique de tout un siècle. La science soviétique et hongroise regardent avec une fierté juste les deux grands savants: NICOLAS IVANOVITCH LOBATCHEVSKY et JEAN BOLYAI.

ЖИЗНЬ И ТВОРЧЕСТВО ЛОБАЧЕВСКОГО

Ф. КАРТЕСИ (Будапешт)

(Резюме)

Автор описывает жизнь и творчество Николая Ивановича Лобачевского сравнивая его с Яношем Бояи. Указываются интересные согласия и замечательные различия. Даются сведения об их воспитании, социальной среде, карьере, об их связи с Гауссом, об оценке их деятельности современниками и потомством. Говоря об их творчестве, автор останавливается на решении проблемы параллельных путем создания гиперболической геометрии, на обосновании теории комплексных чисел и их применении в теории функций, и на параллельности между их научными и философскими взглядами. При этом показывается тесная идейная родственность между двумя великими ученами, которая, однако, не поразительна, ведь оба они добились успехов в той же обпасти науки, и работы обоих возбуждали революцию в этой области. Глубокая родственность их творческих интеллектов выражалась и в их материалических взглядах, которые делали их способными на великие открытия.

REMARQUES AU SUJET DE LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE PROJECTIVE

Par

E. ČECH (Prague)

Les idées révolutionnaires de BOLYAI et LOBATCHEVSKY ont ouvert la voie au développement vraiment gigantique de la géométrie et il n'est pas douteux que ce développement va se continuer avec la même vitesse pour encore long temps. C'était en géométrie différentielle où pour la première fois, par le mérite du génie de RIEMANN, les espaces non-euclidiens de BOLYAI et LOBATCHEVSKY se sont montré être seulement des premiers exemples d'une famille de plus en plus croissante d'espaces, dont l'étude occupe dans les dernières décades une place étendue dans les mathématiques modernes, grâce surtout au fait que la théorie de la relativité a attiré l'attention des physiciens aux méthodes et aux résultats de la géométrie différentielle.

Cependant, il me semble quelque fois que la géométrie différentielle moderne, si bien puissante que soit son étendue, commence à négliger l'intuition géométrique; quoiqu'il en soit, il est sûr qu'en géométrie différentielle, la littérature contient une disproportion trop élevée de Mémoires ne contenant que des généralisations aisées et des calculs formels et moi je me demande parfois si c'est encore de la *géométrie* que l'on y présente aux lecteurs. Aussi, il y a dans la géométrie différentielle moderne des thèmes de recherches étendues où la tâche d'exposer d'une manière à la fois courte et précise le contenu essentiel de l'investigation aux savants travaillant dans d'autres domaines de mathématiques, serait peut-être bien plus difficile que l'exposition détaillée déstinée pour les spécialistes. Or ceci, à mon avis, est regrettable.

C'étaient des considérations de tel genre qui m'ont conduit à oser de passer en revue devant cette audience éminente quelques résultats en géométrie différentielle projective qui, peut-être, n'ont pas une grande importance intrinsèque, mais où, d'autre part, l'énoncé des définitions et des résultats est bien moins compliqué que les démonstrations.

Naturellement, ceci n'est pas l'occasion pour une revue complète, de façon que je vais me limiter à une question particulière. C'était en 1916 [1]

[1] G. FUBINI, Applicabilità proiettiva di due superficie, *Rend. Circ. Mat. di Palermo* **41** (1916), p. 135—162.

que mon ami regretté FUBINI a introduit la notion de déformation projective et c'était en 1920 [2] qu'É. CARTAN a résolu, par moyen de la théorie des systèmes de PFAFF en involution, presque tout qu'à ce temps là semblait constituer le corps de problèmes s'y rattachant. Quelques années plus tard, j'ai réussi [3,4] à donner, usant des méthodes spéciales, des compléments qu'il serait peut-être difficile d'obtenir au moyen des méthodes d'É. CARTAN, quelque puissants que soient ces méthodes, en général. Pendant les 20 dernières années, au contraire, il semble que la théorie de la déformation projective n'a plus à signaler rien que soit essentiellement nouveau.

Or, j'ai créé récemment [5] une théorie générale des propriétés projectives de transformations, ce qui m'a conduit à trouver de nouvelles propriétés géométriques de la déformation projective, que je vais indiquer plus tard.

En quittant ces généralités, je commence par la définition du *contact analytique* due à FUBINI. Il est classique de dire que deux variétés V et V' ont au point commun A un contact d'ordre s, s'il est possible d'établir entre V et V' une correspondance à point fixe A telle que la distance de deux points correspondants prochains à A soit infinitésimale d'ordre $s+1$. C'est que FUBINI appelle *contact géométrique* d'ordre s, tandis que la notion de contact analytique s'applique seulement à une correspondance *donnée* entre V et V' et signifie naturellement que la propriété énoncée plus haut a lieu relativement à cette correspondance elle-même.

Ceci étant, supposons qu'une correspondance C entre deux variétés V et V' soit donnée; choisissons un point A de V et désignons par B l'image de A dans V'. Soit alors H une correspondance auxiliaire, dépendant de la position de A, entre la variété V et une variété auxiliaire V^*, et portant elle aussi le point A dans le point B. Cela donne lieu à une correspondance entre les deux variétés V' et V^*, possédant un point fixe en B. Si maintenant V' et V^* ont en B un contact analytique d'ordre s, alors nous disons que la correspondance auxiliaire H réalise, au point A, un contact analytique d'ordre s entre V et V'. Le cas qui nous intéresse ici est celui où H est une *homographie*; alors, si l'ordre de contact $s=1$, nous disons que H est une

[2] É. CARTAN, Sur la déformation projective des surfaces, *Ann. Éc. Norm. Sup.*, (3) **37** (1920), p. 259—356.

[3] E. ČECH, Sur les surfaces qui admettent ∞^1 déformations projectives en elles mêmes, *Publ. Fac. Sc. de l'Univ. Masaryk*, n° 40, (1924), 47 pages.

[4] E. ČECH, Réseaux R à invariants égaux, *Publ. Fac. Sc. de l'Univ. Masaryk*, n° 143 (1931), 29 pages.

[5] E. ČECH, Проективная дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами, Чехословацкий Математический Журнал; I. **2** (77) (1952), p. 92—107; II. **2** (77) (1952), p. 109—123; III. **2** (77) (1952), p. 125—148; IV. **2** (77) (1952), p. 149—166; V. **2** (77) (1952), p. 167—188. Les Mémoires VI et VII de cette série sont en train d'être publiés au même Journal; le Mémoire VIII est en préparation. Les Mémoires I, II, III ont paru aussi en français au même Journal: I. **74** (1949), p. 32—48; II. **75** (1950), p. 123—136; III. **75** (1950), p. 137—157.

homographie tangente au point A à la correspondance entre V et V'; si $s=2$, nous disons que H est une *homographie osculatrice* au point A à la correspondance entre V et V'. Il est bien évident que l'homographie *tangente* existe toujours, quelque soit la correspondance initiale C entre V et V'; naturellement, je suppose que C soit suffisamment regulière et je suppose même que C soit exprimable par des fonctions holomorphes. D'ailleurs, l'homographie tangente n'est pas déterminée univoquement.

FUBINI considère le cas d'une correspondance C entre deux *surfaces* V et V' de l'espace ordinaire et il appelle C une *déformation projective* si, pour chaque position du point A sur la surface V, il existe une homographie osculatrice H, qui de nouveau n'est pas déterminée univoquement. FUBINI exclut le cas de surfaces développables et il prouve que condition nécessaire et suffisante pour la déformation projective est l'invariance d'une forme différentielle fractionnaire $(\beta du^3+\gamma dv^3):2du\,dv$, où u et v sont des paramètres *asymptotiques* de la surface V. Il en résulte que la notion de courbe asymptotique est invariante pour les déformations projectives, ce qui découle d'ailleurs immédiatement de la définition géométrique de la déformation projective. Quant au numérateur $\beta du^3+\gamma dv^3$, il s'évanouit identiquement pour les quadriques et il se réduit a βdu^3 dans le cas ou V est une surface réglée dont $u=$const. sont les génératrices. Si enfin V est une surface non réglée, alors $\beta du^3+\gamma dv^3=0$ définit une terne de tangentes à V au point A qu'on appelle tangentes de DARBOUX. L'invariance des tangentes de DARBOUX par rapport aux déformations projectives découle géométriquement p. ex. de l'invariance des courbes asymptotiques et de la construction suivante des tangentes de DARBOUX donnée dans un de mes premiers travaux scientifiques: [6] dans le plan tangent à la surface V au point A, il existe deux paraboles, chacune desquelles a en A un contact du 2^e^ ordre avec une courbe asymptotique et dont l'axe est parallèle à l'autre tangente asymptotique en A; les deux paraboles se coupent, outre en A, dans trois points A_1, A_2, A_3 et les droites AA_1, AA_2, AA_3 sont les tangentes de DARBOUX.

FUBINI ne résout pas les questions d'existence, ce qui, comme j'ai déjà dit, a été fait par É. CARTAN. Les théorèmes de CARTAN sont les suivants:

(1) Les plans sont projectivement indéformables; plus précisément, une déformation projective d'un plan se réduit à une simple homographie.

(2) Chaque surface développable (qui n'est pas un plan) est projectivement déformable et la déformation dépend de 3 fonctions arbitraires d'un argument.

(3) Chaque surface réglée non développable est projectivement déformable et la déformation dépend d'une fonction arbitraire d'un argument.

[6] E. ČECH, L'intorno d'un punto d'una superficie considerato dal punto di vista proiettivo, *Annali di Matem.*, (3) **31** (1922), p. 191—206.

(4) Quant aux surfaces non réglées projectivement déformables, elles sont *exceptionnelles* et dépendent de 6 fonctions arbitraires d'un argument. Si la surface non règlée V est projectivement déformable, alors la déformation dépend seulement de constantes arbitraires dont le nombre h ne peut être égal qu'à 1, 2 ou 3. Le cas $h=1$ est le cas général; le cas $h=3$ a lieu pour les surfaces dont les asymptotiques appartiennent à des complexes linéaires et qui dépendent de 2 fonctions arbitraires, mais le cas $h=3$ a lieu pour d'autres classes de surfaces dont les propriétés géométriques sont moins claires et qui dépendent seulement de quelques constantes arbitraires. Quant au cas $h=2$, CARTAN a prouvé seulement que des surfaces de tel genre, *s'il en existe*, ne peuvent dépendre que des constantes arbitraires. La question d'existence ainsi posée est déclarée non résolue au nécrologue d'É. CARTAN paru récemment au *Bull. Amer. Math. Soc.*, [7] quoique j'ai donné des exemples effectifs de telles surfaces déjà en 1924 [3] et d'autres exemples sept années plus tard. [4]

Cependant, à ce qu'il me semble, la détermination de *toutes* les surfaces avec $h=2$ n'a pas été faite jusqu'à présent.

En laissant de côté le cas de surfaces développables, à chaque déformation projective d'une surface on peut attacher un réseau conjugué appelé par CARTAN *réseau conjugué de déformation projective*; en suivant M. FINIKOFF [8] je l'appellerai plus brièvement *réseau base* (de déformation), ces tangentes *tangentes de base* et les congruences engendrées par ces tangentes, *congruences base.* Au Mémoire de 1920, CARTAN ne donne qu'une déscription géométrique compliquée des tangentes base. Quelques années plus tard, CARTAN et moi ont trouvé, [9] indépendamment l'un d'autre, une autre déscription bien plus simple, à savoir que l'homographie osculatrice H dans un point A de la surface V réalise un contact géométrique du 3e ordre pour une courbe tracée sur V et passant par A si, et seulement si, sa tangente en A est une tangente de base. A ce qu'il me semble, c'est à FUBINI qu'on doit la remarque que les réseaux base sont identiques aux réseaux nommés R et introduit indépendamment par DEMOULIN [10] et TZITZÉICA [11] par une voie tout-à-fait différente. Il existe une théorie étendue de transformations dites asymptotiques de réseaux et congruences R que je me contente à mentionner. [12]

[7] S. S. CHERN et C. CHEVALLEY, Élie Cartan and his mathematical work, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **58** (1952), p. 217—250.

[8] С. П. Ф и н и к о в, Теория конгруэнций (1950), p. 434.

[9] V. G. FUBINI et E. ČECH, Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces, (1931), p. 89.

[10] A. DEMOULIN, Sur les surfaces R et les surfaces Ω, *Comptes Rendus Acad., Paris,* **153** (1911), p. 590—593.

[11] G. TZITZÉICA, Sur certains réseaux conjugués, *Comptes Rendus Acad., Paris,* **152** (1911), p. 1077—1079.

[12] V. G. FUBINI et E. ČECH, *Geometria proiettiva differenziale,* vol. I (1926), chap. V.

D'autre part, pour raisons de brièveté je n'était pas parfaitement précis dans ce qui précède: en réalité, il se peut que le réseau base se réduise à une famille de courbes asymptotiques comptée deux fois; mais, dans cet exposé sommaire, je vais continuer à n'être pas subtilement précis.

Je finirai ces courtes notices historiques en remarquant que déjà en 1920 CARTAN [13] a exposé, d'une manière extrêmemant sommaire, les résultats qu'il a acquis dans une théorie de la *déformation projective des congruences de droites* dont la définition géométrique est presque le même comme la définition donnée plus haut de la déformation projective des surfaces. Il se trouve qu'une congruence de droites est en général projectivement indéformable, les congruences projectivement déformables dépendant d'une fonction arbitraire de deux arguments. Parmi les déformations projectives il y a une classe distinguée, la classe des *déformations projectives singulières,* définie par la propriété de l'homographie osculatrice de porter les foyers de la première congruence dans ceux de la seconde. Or les déformations projectives singulières des congruences de droites sont attachées aux déformations projectives de surfaces, les congruences dont il s'agit étant celles que j'ai appelé plus haut congruences base de déformation projective des surfaces. Cependant la connexion découverte par CARTAN entre le problème de déformation projective des surfaces et celui de déformation projective singulière de congruences de droites n'apparaît chez lui que par voie de calcul et se sont seulement mes derniers travaux qui ont révélé la vraie mature géométrique de cette connexion remarquable, comme je vais l'expliquer plus loin.

La communication citée de CARTAN est intitulée Sur le problème général de déformation. Le programme qui est esquis dans cette communication n'a pas d'ailleurs été poussé beaucoup plus loin dans les 30 années découlées jusqu'ici du moment de sa publication. Dans mes travaux récents et dans ceux qui vont suivre, mon point de départ est différent de celui de CARTAN et de tous les travailleurs antérieurs. Au lieu de définir à priori certaines classes de transformations et d'étudier ensuite les problèmes d'existence relatives, je me propose de créer une théorie différentielle générale non plus de variétés, mais de transformations elles mêmes. La méthode extrêmement puissante des systèmes différentiels en involution, crée en 1901 par É. CARTAN [14] et généralisée ensuite par KÄHLER, [15] permet de résoudre très vite une foule de questions d'existence, ce qui permet de prévoir quelles sont les classes de transformations qui méritent une étude plus détaillée.

[13] É. CARTAN, Sur le problème général de la déformation, *C. R. du Congrès Int. des Math. de Strasbourg en* 1920, p. 397—400.

[14] É. CARTAN, Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales, *Ann. Ec. Norm. Sup.* (3), **18** (1901), p. 241—311.

[15] E. KÄHLER, *Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen* (1934).

Les résultats de mes recherches font objet d'une série de *Mémoires au Journal Tchécoslovaque de Mathématiques.*[5] Jusqu'ici, 5 Mémoires de la série ont déjà paru, deux sont sous presse et je suis en train de finir le manuscrit du huitième. Jusqu'à présent je n'expose que la théorie différentielle projective des transformations d'espaces *linéaires.*

Parmi les correspondances autre deux espaces linéaires S_n et S'_n, une classe particulièrement simple est donnée par les correspondances qui se laissent décomposer en ∞^1 de *transformations homographiques d'hyperplans.* Dans un Mémoire non publié, mais écrit il y a déjà quelques années, j'ai fait la classification de telles correspondances pour $n = 3$. Par contre, j'ai publié seulement la détermination de *correspondances développables.* Voici ce qui ceci veut dire. Considérons une famille ∞^1 de correspondances homographiques $H(t)$ entre S_n et S'_n, dépendant d'un paramètre t. Dans l'espace doublement projectif $S_n \times S'_n$, chaque homographie $H(t)$ a comme image une variété à n dimensions dépendant du paramètre t. S'il arrive que ces ∞^1 variétés possèdent une enveloppe, alors cette enveloppe est l'image d'une correspondance entre S_n et S'_n, et ce sont précisément des correspondances de cette nature que j'appelle développables. L'expression analytique de correspondances développables est extrêmement simple. En négligeant des cas limites, on prend une correspondance arbitraire entre une courbe $A(t)$ appartenant à S_n et une courbe $B(t)$ appartenant à S'_n et on attache au point

$$X = A(t) + \tau_1 A'(t) + \cdots + \tau_{n-1} A^{(n-1)}(t)$$

le point

$$Y = B(t) + \tau_1 B'(t) + \cdots + \tau_{n-1} B^{(n-1)}(t).$$

Il y a des correspondances entre S_n et S'_n de nature simple dont l'étude est très utile comme un moyen d'étudier des correspondances plus compliquées. Je vais mentionner ici ce qu'on peut appeler des *projections doubles.* Immergons l'espace $S_n = S'_n$ dans un S_{n+1} et considérons dans S_{n+1} une variété V à n dimensions ainsi que deux points fixes P et Q en dehors de S_n. La projection double correspondante attache au point X de S_n le point Y de S'_n si les deux droites PX ef QY ont un point commun situé sur V.

En particulier, soit pour $n = 2$ V une quadrique doublement réglée et pour $n \geqq 3$ un cône projetant une telle quadrique, le centre de projection ayant $n-3$ dimensions. La projection double correspondante est une transformation se laissant décomposer *en deux manières différentes l'une de l'autre* en ∞^1 de transformations homographiques d'hyperplans et il n'existe pas d'autres transformations qui permettent deux décompositions pareilles. Le cas de *trois* décompositions de tel genre est possible seulement pour $n = 2$ et c'est seulement la *transformation quadratique birationnelle du plan* qui jouit de cette propriété.

Je n'insisterai pas sur la foule d'autres correspondances remarquables que j'ai trouvé pendant mes recherches et je passe à expliquer les résultats relatifs à la déformation projective mentionnés plus haut. Soit une déformation projective portant une surface non développable V dans une surface V', forcément aussi non développable. A chaque point A de V il existe ∞^1 homographies osculatrices H, mais la partie de H relative au plan tangent à V en A est la même pour chaque choix de H. Or faisons passer par chaque point A de V une tangente déterminée τ à la surface V. Nous obtenous une transformation C de l'espace ambiant S_3 en faisant correspondre, à chaque point de τ, le point qui lui correspond dans l'homographie H relative au point de contact A. On peut se demander s'il est possible d'arranger cette construction de manière que H soit l'homographie tangente à C tout le long de chaque droite τ. Il se trouve que ceci a lieu si et seulement si τ est une tangente base. C'est de cette manière que j'attache géométriquemet à une déformation projective de la surface V la déformation projective singulière C de la congruence L engendrée par les droites τ.

Mais il y a plus. La transformation C de la congruence L possède une propriété géométrique caractéristique, qui est extrêmement simple et intuitive. En effet C est une transformation asymptotique de la congruence L. Voici ce qui cela veut dire: *Une surface réglée S tout à fait arbitraire contenue dans L est portée par C dans une surface réglée S' de telle façon qu'à chaque courbe asymptotique de S correspond une courbe asymptotique de S'*. Outre ceci, nous avons une autre circonstance très remarquable. Si on choisit la surface réglée S de telle façon qu'elle touche la surface originale V le long d'une courbe asymptotique de V, alors il se montre que, dans ce cas particulier, la correspondance entre les deux surfaces réglées S et S' est une déformation projective. En partant de ceci, on prouve qu'une déformation projective d'une surface non réglée V peut être considérée comme une enveloppe d'une famille ∞^1 de déformations projectives de surfaces réglées. A ce qu'il me semble, ce fait mérite d'être approfondi. Après 36 années depuis la création de la notion de déformation projective, cette notion acquiert ainsi finalement une vie nouvelle, cette fois vraiment géométrique et intuitive. Quel dommage que je ne puis plus communiquer ces résultats au feu ami FUBINI qui avait guidé mes premiers pas dans la vie scientifique!

ЗАМЕЧАНИИ К ПРОЕКТИВНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Э. ЧЕХ (Прага)

(Резюме)

Автор дает обзор исследований, связанных с проективными деформациями, введенными Фубини. Говоря о роли этого понятия в исследованиях по проективной геометрии, он дает сводку относящихся сюда своих результатов и результатов Э. Картана.

ÜBER EINE AXIOMATISCHE BEGRÜNDUNG DER INNEREN GEOMETRIE DER FLÄCHEN

Von

W. RINOW (Greifswald)

Als das wesentliche Ziel der geometrischen Axiomatik sieht man nach der allgemein üblichen Auffassung die Begründung der euklidischen Geometrie an. Die Untersuchungen über die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms haben darüber hinaus zur Axiomatik der Bolyai—Lobatschefskischen Geometrie geführt und die Forderung nach einer Begründung der projektiven Geometrie, welche unabhängig von der euklidischen Geometrie ist, hat das projektive Axiomensystem entstehen lassen. Vom Standpunkt der Differentialgeometrie aus gesehen, bedeutet diese Auffassung eine Beschränkung auf die Klasse der Räume konstanter Krümmung. Es erscheint mir als sehr wünschenswert, diese Beschränkung aufzugeben und zu versuchen, die vorliegenden Axiomensysteme so abzuändern, daß sie eine möglichst allgemeine Klasse von Räumen umfassen. Der Weg, differentialgeometrische Räume als spezielle metrische Räume zu charakterisieren, ist bereits beschritten worden. Ich möchte hier jedoch über eine andere Möglichkeit der axiomatischen Begründung der inneren Differentialgeometrie sprechen, die von metrischen Begriffen unabhängig ist, sich also an die projektive Axiomatik anschließt, und die nur die Dimensionszahl 2 in Betracht zieht.

Bevor ich auf die eigentlichen axiomatischen Fragen eingehe, möchte ich an einige bekannte Tatsachen aus der Flächentheorie erinnern. Eine Fläche wird durch eine Parameterdarstellung $\mathfrak{x}(u^1, u^2)$ definiert. Sie sei mindestens dreimal stetig differenzierbar und genüge der Forderung der Regularität: $\mathfrak{x}_{u^1} \times \mathfrak{x}_{u^2} \neq 0$. Die positiv definite quadratische Differentialform $g_{ik} du^i du^k$ mit $g_{ik} = \mathfrak{x}_{u^i} \mathfrak{x}_{u^k}$ bestimmt die Längen- und Winkelmetrik auf der Fläche. Abbildungen von Flächen aufeinander, welche die Längen und Winkel erhalten, heißen isometrisch. Unter der inneren metrischen Geometrie versteht man die Lehre von denjenigen Eigenschaften einer Fläche, welche bei isometrischen Abbildungen ungeändert bleiben. Als wichtigster Bestandteil der inneren Geometrie gilt die Theorie der geodätischen Linien. Diese werden als Extremalen des Variationsproblems $\delta \int \sqrt{g_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k} = 0$ definiert und genügen einem System von Differentialgleichungen der Form $\ddot{u}^i + \Gamma^i_{kl} \dot{u}^k \dot{u}^l = 0$, wobei die Γ^i_{kl}, die Christoffelschen Dreiindizessymbole, aus den g_{ik} und ihren ersten Ableitungen berechnet werden können, und der Kurvenparameter die Bogenlänge ist.

Zu einer allgemeineren Auffassung der inneren Geometrie gelangt man, wenn man analog dem Vorgehen in der projektiven Geometrie der Ebene den Begriff der geodätischen Linie als das unmittelbar gegebene ansieht, von den übrigen metrischen Eigenschaften jedoch abstrahiert. Es sei also auf einer Fläche ein System von Kurven als Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\ddot{u}^i + F^i(u^1, u^2; \dot{u}^1, \dot{u}^2) = 0 \tag{1}$$

gegeben. Die Funktionen $F^i(u^1, u^2; \dot{u}^1, \dot{u}^2)$ sollen stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzen und in den Variablen $\dot{u}^1, \dot{u}^2$ homogen vom Grade 2 sein. Diese Voraussetzung ist für $F^i = \Gamma^i_{kl}\dot{u}^k\dot{u}^l$ erfüllt, allgemeiner z. B. auch für die Extremalen eines regulären Variationsproblems $\delta\int F(u^1, u^2; \dot{u}^1, \dot{u}^2) = 0$. Die Lösungen des Systems (1) sollen wieder geodätische Linien heißen. Eine Fläche, auf der in diesem Sinne geodätische Linien gegeben sind, heiße eine projektive Fläche. Unter einer projektiven Abbildung versteht man eine umkehrbar eindeutige Abbildung zweier projektiver Flächen aufeinander, welche die geodätischen Linien der beiden Flächen ineinander überführt. Die innere projektive Geometrie ist alsdann die Lehre von denjenigen Eigenschaften einer Fläche, welche bei projektiven Abbildungen ungeändert bleiben. Für projektive Abbildung ist auch die Bezeichnung "geodätische Abbildung" üblich, und die innere projektive Geometrie wird in der Literatur meist "geometry of paths" genannt. Ich bemerke noch, daß es sowohl für die innere metrische als auch für die innere projektive Geometrie unwesentlich ist, sich die Flächen im euklidischen Raum eingebettet vorzustellen.

Die wichtigsten Eigenschaften der geodätischen Linien einer projektiven Fläche kommen in dem von J. H. C. WHITEHEAD bewiesenen Satze zum Ausdruck:

Verbindbarkeitssatz im Kleinen: Um jeden Punkt einer projektiven Fläche gibt es eine einfach konvexe Umgebung. Dabei heißt eine Umgebung einfach konvex, wenn je zwei ihrer Punkte durch genau eine geodätische Linie verbunden werden können, die zwischen den Punkten ganz in der Umgebung verläuft. Diese Eigenschaft entspricht dem Verbindbarkeitsaxiom der ebenen Geometrie.

Zur Vorbereitung der Axiomatik muß ich nun noch auf eine weitere bekannte Tatsache der Flächentheorie hinweisen. Sind durch die Tangentenvektoren $\overset{i}{v}_1, \overset{i}{v}_2, \overset{i}{v}_3, \overset{i}{v}_4$ vier Richtungen in einem Punkt einer Fläche gegeben, so läßt sich unabhängig von der Parameterdarstellung der Fläche ein Doppelverhältnis dieser vier Richtungen

$$D(v_1, v_2; v_3, v_4) = \frac{(v_3, v_1)(v_4, v_2)}{(v_4, v_1)(v_3, v_2)}$$

definieren. Das Symbol (v_μ, v_ν) bezeichnet dabei die Determinante aus den Vektorkoordinaten $\overset{i}{v}_\mu, \overset{i}{v}_\nu$. Nun gibt es bekanntlich durch jeden Punkt in jeder

Richtung genau eine geodätische Linie. Richtungen und geodätische Linien entsprechen einander also eineindeutig. Es ist damit ein Doppelverhältnis von vier geodätischen Linien g_1, g_2, g_3, g_4 durch einen Punkt erklärt, indem man $D(g_1, g_2; g_3, g_4) = D(v_1, v_2; v_3, v_4)$ setzt, wenn v_i die der Linie g_i entsprechende Richtung bezeichnet. Das Büschel der geodätischen Linien durch einen Punkt wird somit zum Träger einer eindimensionalen projektiven Struktur und sämtliche Begriffe und Sätze der projektiven Geometrie des Geradenbüschels lassen sich auf Büschel geodätischer Linien übertragen. Projektive Abbildungen von Büscheln aufeinander sind demgemäß solche umkehrbar eindeutigen Zuordnungen ihrer Büschellinien, die je vier Linien eines Büschels vier Linien eines anderen Büschels mit dem gleichen Doppelverhältnis entsprechen lassen. Ferner ist eine Involution eine projektive Abbildung eines Büschels in sich, die mit ihrer Umkehrung identisch ist. Daß die projektive Geometrie der inneren projektiven Geometrie der Flächen angehört, ergibt sich aus dem folgenden bekannten Satz: Bei jeder regulären Abbildung $\bar{u}^i = \bar{u}^i(u^1, u^2)$ zweier Flächen aufeinander mit $\frac{\partial(\bar{u}^1, \bar{u}^2)}{\partial(u^1, u^2)} \neq 0$ bleibt das Doppelverhältnis von vier Richtungen invariant. Hierin ist als Sonderfall die Aussage enthalten: Das Doppelverhältnis von vier geodätischen Linien durch einen Punkt ist eine Invariante der projektiven Flächenabbildungen.

Ich komme nun zur projektiven Axiomatik der Flächentheorie. Zur Durchführung eines solchen Vorhabens wird man sich an dem Vorgehen bei der axiomatischen Begründung der ebenen projektiven Geometrie zu orientieren versuchen. Nach den bisherigen Ausführungen über die Struktur des Systems der geodätischen Linien einer projektiven Fläche wird es nahegelegt, als gemeinsamen Ausgangspunkt die Axiome der Verknüpfung, der Anordnung und der Stetigkeit zu wählen. Um die Formulierungen nicht unnötig zu komplizieren, beschränke ich mich ausdrücklich darauf, die Axiomatik einfach konvexer Flächen zu studieren. Die Übertragung auf allgemeine projektive Flächen bietet nach dem Verbindbarkeitssatz im Kleinen keine prinzipiellen Schwierigkeiten. Der Kürze und der Einprägsamkeit halber werde künftig den Namen "Gerade" statt "geodätische Linie" verwendet.

Man stelle sich eine Menge von Dingen, Punkte genannt, vor, in der gewisse Teilmengen als Geraden ausgezeichnet sind. Folgende Axiome seien erfüllt:

V I: Je zwei verschiedene Punkte gehören einer und nur einer Geraden an.

V II: Auf jeder Geraden gibt es wenigstens zwei verschiedene Punkte.

V III: Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

Zwischen den Punkten ist ferner eine dreistellige Relation (A, B, C) gegeben, die zu lesen ist: B liegt zwischen A und C. Diese Relation genüge folgenden Axiomen:

A I: Gilt (A, B, C), so sind A, B, C drei verschiedene Punkte einer Geraden.

A II: Aus (A, B, C) folgt (C, B, A).

A III: Sind A, B verschiedene Punkte, so gibt es einen Punkt C mit (A, B, C).

A IV: Aus (A, B, C) folgt, daß weder (B, A, C) noch (A, C, B) gilt.

A V: A, B, C seien drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Die Gerade g gehe weder durch A, noch durch B, noch durch C. g enthalte einen Punkt D, für den (B, D, C) gelte. Dann enthält g einen Punkt E, für den (A, E, B) oder (A, E, C) gilt.

A V ist das sogenannte Paschsche Axiom, dem ich eine solche Fassung gegeben habe, daß sich daraus die Zweidimensionalität der Fläche ergibt.

Für die Stetigkeitsaxiome sind verschiedene Formulierungen möglich. Man muß jedoch darauf achten, daß metrische Begriffe vermieden werden. Vermöge der Zwischenbeziehung läßt sich in bekannter Weise auf jeder Geraden eine Ordnung ihrer Punkte definieren. Im Sinne dieser Ordnung sind in der folgenden Fassung die Begriffe „dicht" und „Dedekindscher Schnitt" zu verstehen.

S I: Auf jeder Geraden gibt es eine abzählbare, überall dichte Punktmenge.

S II: Jeder Dedekindsche Schnitt auf einer beliebigen Geraden bestimmt einen Punkt dieser Geraden.

Daß alle diese Axiome auf einer einfach konvexen Fläche erfüllt sind, folgt ohne erhebliche Schwierigkeiten aus dem Verbindbarkeitssatz im Kleinen und der topologischen Struktur der Fläche und derjenigen der geodätischen Linien.

Man weiß, welche Rolle der Desarguessche und der Pascalsche Satz beim weiteren Ausbau der ebenen Geometrie spielen. Sie sind nötig zur Einführung spezifisch projektiver Strukturen auf der Geraden und im Büschel. Insbesondere gestatten sie die Einführung projektiver Koordinaten und des Doppelverhältnisses. Für unser Vorhaben, möglichst alle projektiven Flächen zu erfassen, sind sie jedoch nicht brauchbar, denn die Forderung ihrer Gültigkeit würde sofort zur ebenen projektiven Geometrie führen. Man muß sich daher nach einem Ersatz etwa für den Desarguesschen Satz umsehen.

Wie gezeigt worden ist, sind die Büschel geodätischer Linien Träger einer eindimensionalen projektiven Struktur. Für die Axiomatik besteht die Aufgabe, diese konstruktiv zu erzeugen. Es liegt nun vielleicht der Gedanke nahe, die Methoden der ebenen projektiven Geometrie ins Infinitesimale zu übertragen, die erforderlichen Konstruktionen also durch Grenzprozesse zu bewältigen. Zur axiomatischen Begründung wäre dann die Gültigkeit des Desarguesschen Satzes im Unendlichkleinen zu fordern. Daß ein solches Vorgehen möglich ist, sollen die nachstehenden Betrachtungen plausibel machen.

Einen Satz der ebenen projektiven Geometrie kann man ganz allgemein auffassen als eine Aussage folgender Natur: Gegeben sind eine endliche Anzahl von Punkten P_i und Geraden g_j, zwischen denen gegebene projektive Beziehungen bestehen; dann bestehen zwischen anderen Punkten Q_k und Geraden h_l, die durch gegebene Schnitt- und Verbindungsoperationen aus den P_i und g_j erzeugt werden, gewisse weitere Inzidenzbeziehungen und Doppelverhältniseigenschaften. Unter einem infinitesimalen Analogon eines solchen Satzes verstehe ich die folgende Aussage: Rücken die P_i und g_j unter Aufrechterhaltung ihrer projektiven Beziehungen und der Konstruktionsvorschriften für die Q_k, h_l gegen gewisse gegebene Grenzlagen, so streben auch die Q_k und h_l gegen bestimmte Grenzlagen und zwischen diesen Grenzlagen bestehen die im elementaren Satze ausgesagten Inzidenzbeziehungen und Doppelverhältniseigenschaften. Natürlich handelt es sich hierbei nur um ein heuristisches Prinzip. Außerdem ist zu bedenken, daß es zu einem gegebenen elementaren Satz je nach der Art der Grenzübergänge verschiedene infinitesimale Analoga geben kann.

Ich möchte dieses eben beschriebene Verfahren an dem Beispiel des Satzes von den harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks erläutern. Ich gebe dem Satz die folgende Fassung: A, B, C, D seien die Ecken eines vollständigen Vierecks. E, F, G seien die Schnitte von AC und BD, AB und DC, AD und BC. Dann wird das Geradenpaar AC, BD durch das Geradenpaar EF, EG harmonisch getrennt. Zu einem infinitesimalen Analogon gelangt man z. B. so: A, B, C, D mögen gegen einen und denselben Punkt O konvergieren und zwar derart, daß die Geraden AB, CD beide gegen eine Gerade g_1, AD, BC beide gegen g_2 und AC gegen g_3 konvergieren. Sind g_1, g_2, g_3 von einander verschieden, so konvergiert BD gegen eine Gerade g_4; g_1, g_2, g_3, g_4 gehen durch O, und g_1, g_2 wird durch g_3, g_4 harmonisch getrennt. Die Punkte E, F habe ich als unwesentlich für die Gültigkeit des Satzes und der Einfachheit halber außer Betracht gelassen. Ein derartiger Satz läßt sich nun in der Tat für geodätische Vierecke auf einer beliebigen projektiven Fläche beweisen. Auf den Beweis kann ich hier nicht eingehen.

Zu den meisten Sätzen der ebenen projektiven Geometrie z. B. auch dem Desarguesschen und Pascalschen Satz lassen sich infinitesimale Analoga formulieren, die auf projektiven Flächen Gültigkeit besitzen. Der infinitesimale Desarguessche Satz läßt sich, indem man für den Grenzübergang unwesentliche und überflüssige Elemente wegläßt, erheblich vereinfachen und auf folgende Aussage reduzieren, welche als Spezialfall den oben formulierten Satz enthält:

Satz vom infinitesimalen Viereck: Auf einer projektiven Fläche mögen die vier Punkte A, B, C, D vier Folgen durchlaufen, welche gegen ein und denselben Punkt O konvergieren. Dabei mögen die Geraden AB, BC, CD, DA, AC gegen die Geraden a, b, c, d, e streben. Unter diesen fünf Geraden sollen keine drei in eine Gerade zusammenfallen, und es sei nicht zugleich $a=b$ und $c=d$ oder zugleich $a=d$ und $c=b$. Dann konvergiert BD gegen eine Gerade f, und $(a, c), (b, d), (e, f)$ bilden drei Paare einer Involution im Büschel der geodätischen Linien durch O.

Kehren wir nun zum weiteren Ausbau der Axiomatik der Flächentheorie zurück. Wir stehen vor der Aufgabe, auf der abstrakten Fläche eine Topologie einzuführen, um die Grenzprozesse möglich zu machen. Dies ist aber leicht zu erledigen. Auf Grun dder Axiome V I—III und A I—V läßt sich der Begriff des Inneren eines Polygons definieren. Man vergleiche etwa die Darstellung von D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, 7. Auflage (1930), S. 10. Das Innere eines Polygons definiere man als Umgebung eines jeden seiner Punkte.

Dieser Umgebungsbegriff erzeugt eine Topologie, von der sich nachweisen läßt, daß sie äquivalent der Topologie der euklidischen Ebene ist. Hiermit steht auch der Begriff der Konvergenz zur Verfügung. Als weiteres Axiom kann nunmehr gefordert werden:

J I: Die Gültigkeit des Satzes vom infinitesimalen Viereck: BD konvergiert gegen eine Grenzlage f.

Die zusätzliche Behauptung über die involutorische Eigenschaft der sechs Grenzgeraden muß natürlich wegbleiben, da der Begriff der Involution noch nicht zur Verfügung steht, sondern ja erst axiomatisch eingeführt werden soll. Man zeigt nun, daß die Gerade f durch a, b, c, d, e eindeutig und unabhängig von der Art des Grenzüberganges bestimmt ist. Hält man die Geraden a, b, c, d fest, so ist jeder Geraden e eindeutig eine Gerade f zugeordnet. Diese Zuordnung nenne man eine Involution. Die Grundeigenschaften einer Involution sind dann, wie man aus den Axiomen ableiten kann, erfüllt. Nunmehr ist man in der Lage, Involutionen im Geradenbüschel durch einen Grenzprozeß konstruktiv zu erzeugen. Auf der Konstruktion von Involutionen beruht aber die Einführung von Doppelverhältnissen. Nach einem Vorgang, der dem in der ebenen projektiven Axiomatik ganz analog ist, lassen sich im Geradenbüschel Doppelverhältnisse erklären. Im wesentlichen auf Grund von J I und den Stetigkeitsaxiomen ergibt sich, daß die Doppelverhältnisse einen Körper bilden, der isomorph ist dem Körper der reellen Zahlen. Doppelverhältniskoordinaten auf der Fläche kann man so definieren: A, B, C seien drei Punkte allgemeiner Lage, die Fundamentalpunkte, E sei ein innerer Punkt des Dreiecks ABC, der Einheitspunkt. Ist dann P ein willkürlicher Punkt der Fläche, so bilde man die Doppelverhältnisse $u=D(AP, AE; AB, AC)$ und $v=$ $=D(BP, BE; BC, BA)$. u, v sind die Doppelverhältniskoordinaten des Punktes P. Mit der Aufstellung des Axioms J I ist der erste wesentliche Schritt für eine Begründung der Flächentheorie geleistet, nämlich die Konstruktion der projektiven Struktur im Geradenbüschel. Auf nähere Einzelheiten und auf Beweise kann ich in diesem Vortrag nicht eingehen. Ich verweise auf eine Arbeit, die demnächst erscheinen wird. Ebenso muß ich es mir versagen, die weiteren Schritte, die für den Ausbau der Axiomatik nötig sind, ausführlich zu beschreiben. Ich beschränke mich auf einige Andeutungen.

Das nächste Ziel ist der Nachweis, daß die Geraden der Fläche einem System von Differentialgleichungen der Gestalt $\ddot{u}^i + F^i(u^1, u^2; \dot{u}^1, \dot{u}^2) = 0$ genügen. Wir haben erkannt, daß man auf der Fläche Koordinaten einführen kann. Es ist also zunächst zu zeigen, daß die Geraden in diesen Koordinaten eine mindestens zweimal stetig differenzierbare Parameterdarstellung $u^1(t), u^2(t)$ besitzen. Eng verknüpft damit ist die Frage, ob zwei verschiedene Doppelverhältnis-Koordinatensysteme durch eine reguläre zweimal stetig differenzierbare Koordinatentransformation verbunden sind. Selbst wenn man sich vorerst auf die erste Differentiationsordnung beschränkt, genügt zum Nachweis dieser Eigenschaften der Geraden und der Koordinatensysteme das Axiom J I nicht. Es liegt das daran, daß in J I nur Grenzprozesse berücksichtigt sind, bei denen die Ausgangspunkte (das Viereck) gegen einen gemeinsamen Punkt konvergieren, das Viereck also schließlich in einen Punkt ausartet. Man benötigt aber auch dazu duale Grenzübergänge, bei denen gegebene Geraden gegen eine gemeinsame Gerade konvergieren. Die entsprechenden Untersuchungen über die zweite Differentiationsordnung sind noch nicht abgeschlossen.

Eine weitere wichtige Frage, die unabhängig von dem Vorigen behandelt werden kann, ist die folgende: Durch welche geometrische Eigenschaften sind diejenigen Flächen charakterisiert, für welche die Geraden einem Differentialgleichungssystem der spezielleren Gestalt $\ddot{u}^i + \Gamma^i_{kl}(u^1, u^2)\dot{u}^k \dot{u}^l = 0$ genügen? Hierüber liegen noch keine Untersuchungen vor.

Zum Abschluß meiner Ausführungen möchte ich noch auf eine Analogie zur ebenen projektiven Axiomatik aufmerksam machen. Ohne Stetigkeitsaxiome ist der Desarguessche Satz nicht ausreichend, man benötigt den Pascalschen Satz. Jedoch folgt der Pascalsche aus dem Desarguesschen Satz mit Hilfe der Stetigkeitsaxiome. Entsprechend ist J I durch das infinitesimale Analogon des Pascalschen Satzes zu ersetzen, wenn man auf die Stetigkeitsaxiome verzichten will und der infinitesimale Pascalsche Satz ist eine Folge aus J I, falls die Stetigkeitsaxiome zugelassen sind.

ОБ ОДНОМ АКСИОМАТИЧЕСКОМ ОБОСНОВАНИИ ВНУТРЕННЕЙ ГЕОМЕТРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В. РЫНОВ (Грейфсвальд)

(Резюме)

Желание обосновать проективную геометрию независимо от евклидовой привело к установлению проективной системы аксиом, означающей с точки зрения дифференциальной геометрии ограничение пространствами постоянной кривизны. Является желательным отказаться от этого ограничения, и изменять систему аксиом так, чтобы она охватывала возможно более широкий класс пространств. В соответсвии с этим, автор исследует возможность аксиоматического обоснования внутренней дифференциальной геометрии, независимо от метрических понятий; обоснование этого примыкает к проективной аксиоматике и относится только к двум измерениям.

Les Acta Mathematica paraissent en russe, français, anglais et allemand et publient des mémoires du domaine des sciences mathématiques.

Les Acta Mathematica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en un volume.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction et écrits à la machine à l'adresse suivante:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints ($ 6.50) par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur des Livres et Journaux „Kultúra" (Budapest, VI., Sztálin út 21. Compte-courant No. 45-790-057-50-032) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

The Acta Mathematica publish papers on mathematics in Russian, French, English and German.

The Acta Mathematica appear in parts of various size, making up one volume.

Manuscripts should be typed and addressed to:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Mathematica is 110 forints ($ 6.50) a volume. Orders may be placed with „Kultúra" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest, VI., Sztálin út 21. Account No. 45-790-057-50-032) or with representatives abroad.

Die Acta Mathematica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der mathematischen Wissenschaften in russischer, französicher, englischer und deutscher Sprache.

Die Acta Mathematica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind, mit Maschine geschrieben, an folgende Adresse zu senden:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Redaktion und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnemetspreis pro Band 110 Forints ($ 6.50). Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen „Kultúra" (Budapest, VI., Sztálin út 21. Bankkonto Nr. 45-790-057-50-032) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

40,— forint

INDEX

Technikai szerkesztő: Molnár Ferenc

A kiadásért felelős: Az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki felelős: Tóth Ferenc
A kézirat beérkezett: 1954. V. 12. — Példányszám: 800. — Terjedelem: 13 1/2 (A/5) ív, 8 ábra.

Szegedi Nyomda Vállalat, Szeged 54-3120 — Felelős vezető: Vincze György