ACTA MATHEMATICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

TOMUS II. FASCICULI 1—2.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1951

ACTA MATHEMATICA HUNGARICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK MATEMATIKAI KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST, V., ALKOTMÁNY-U. 21

Az Acta Mathematica orosz, francia, angol és német nyelven közöl értekezéseket a matematika köréből.

Az Acta Mathematica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet. Évenként általában egy kötet jelenik meg 20 ív terjedelemben.

A közlésre szánt kéziratok, lehetőleg géppel írva, a következő címre küldendők:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Mathematica előfizetési ára kötetenként (egy évre) belföldre 40 forint, külföldre 60 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó"-nál (Budapest, V., Alkotmány-u. 21. Bankszámla 936.550), külföld számára pedig a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest, VIII., Rákóczi-út 5. Bankszámla 929.040 sz.) vagy külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

„Acta Mathematica" издает работы из области математических наук на русском французском, английском и немецком языках.

„Acta Mathematica" выходит в брошюрах переменного объема несколько выпусков объединяются в одном томе. (20 печатных листов.)

Ежегодно предвидено издание одного тома.

Предназначенные для публикации авторские рукописи следует направлять, по возможности машинописью, по следующему адресу:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

По этому же адресу направляется всякая корреспонденция для редакции и администрации.

Подписная цена *„Acta Mathematica"* — 60 форинтов за том. Заказы принимает Предприятие по внешней торговле книг и газет *„Kultúra"* (*Budapest, VIII., Rákóczi-út 5.* Счет Банка No. 929.040) или его заграничные представительства и уполномоченные.

ACTA MATHEMATICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

TOMUS II.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1951

ACTA MATH. HUNG.

INDEX

TOMUS II.

Akadémiai Kiadó (Budapest, V., Alkotmány-u. 21.) Felelős: Mestyán János

Csongrádmegyei Nyomdaipari Vállalat, Szeged 52387 Felelős vezető: Vincze György

Jelen füzet borítójának belső oldalán az előfizetési árak helytelenül vannak feltüntetve. A helyes előfizetési ár: kötetenként belföldre 80·— Ft, külföldre 110·— Ft.

Действующая подписная цена настоящего издания, в отличие от данных на внутренней странице обложки этого выпуска, равна 110·— фор. за том.

A la page intérieure de la couverture, le prix de l' abonnement est à corriger. Au lieu de 60 forints, il est 110 forints (6,50 dollars) par volume.

The subscription price indicated on the reverse of the cover-sheet is erroneous. The correct price amounts to Ft. 110 per copy (dollar 6,50).

Auf der inneren Seite des Umschlages ist bei Angabe des Abonnementspreises ein Irrtum unterlaufen. Der Preis lautet richtig 110 Forint (6,50 Dollar) per Band.

Akadémiai nyomda, Gerlóczy-u. 2. — 18692/52

ÜBER DIE TRANSFORMIERTEN DER ARITHMETISCHEN MITTEL VON ORTHOGONALREIHEN

Von

GEORG ALEXITS (Budapest), Mitglied der Akademie

1. Einleitung

1. 1. Sei $\{\varphi_n(x)\}$ ein im Intervall (a, b) definiertes System von normierten Orthogonalfunktionen. Betrachten wir die Entwicklung

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \qquad c_n = \int_a^b f(x)\, \varphi_n(x)\, dx$$

der Funktion $f(x)$. Ist $\{\lambda_n\}$ irgendeine Zahlenfolge, so verstehen wir unter der λ-Transformierten der Reihe $\sum c_n \varphi_n(x)$ die Reihe $\sum \lambda_n c_n \varphi_n(x)$. Gehört $f(x)$ zu einer Funktionenklasse A und ist die λ-Transformierte ihrer Entwicklung die Entwicklung einer Funktion $g(x)$, welche zur Funktionenklasse B gehört, so sagen wir, daß $\{\lambda_n\}$ zur Klasse (A, B) gehört.

1. 2. Eine besonders in der Theorie der Fourierreihen viel untersuchte Frage ist die folgende: Unter welchen Bedingungen läßt sich behaupten, daß eine vorgegebene Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ zur Klasse (A, B) gehört? Im folgenden werden wir mehrere, nur für Fourierreihen bewiesene Sätze aus diesem Fragenkreis auf viel allgemeinere Orthogonalreihen übertragen. Ihre aus der Theorie der Fourierreihen bekannten Beweise nützen recht spezielle Eigenschaften der Fourierreihe aus. Unsere Verallgemeinerungen erreichen wir dadurch, daß wir zeigen: Der gemeinsame Kern aller dieser Sätze besteht einzig und allein in der (bei den Fourierreihen wohlbekannten) Eigenschaft des Orthogonalsystems $\{\varphi_n(x)\}$, daß die Lebesgueschen Funktionen

$$\int_a^b \left| \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \varphi_k(t)\, \varphi_k(x) \right| dt$$

der arithmetischen Mittel der nach den $\varphi_n(x)$ fortschreitenden Entwicklungen fast überall gemeinsam beschränkt bleiben.

2. Allgemeine Sätze über die Transformierten der arithmetischen Mittel von Funktionenreihen

2. 1. Sei $\sum a_n$ eine beliebige Reihe. Bezeichne σ_n ihr n-tes arithmetisches Mittel und $\sigma_n(\lambda)$ das arithmetische Mittel ihrer λ-Transformierten, oder was dasselbe bedeutet, die λ-Transformierte des n-ten arithmetischen Mittels σ_n. Wir beweisen die folgende Beziehung über die λ-Transformierten der arithmetischen Mittel[1]:

(1) $$\sigma_n(\lambda)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)(k+1)\sigma_k\cdot\Delta^2\lambda_k+$$
$$+\frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\sigma_k\cdot\Delta\lambda_{k+1}+\lambda_n\sigma_n.$$

Sei, in der Tat, $\delta_k=\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\lambda_k$, ferner $\delta_k'=\delta_k-\delta_{k+1}$ und $\delta_k''=\delta_k'-\delta_{k+1}'$. Ist s_n die n-te Partialsumme der Reihe $\sum a_n$, so ergibt sich mittels einer Abel-Transformation zunächst

$$\sigma_n(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}a_k\delta_k=\sum_{k=0}^{n-1}s_k\delta_k'+s_n\delta_n,$$

sodann folgt unter Beachtung von $\delta_n=\delta_n'$ nach wiederholter Abel-Transformation

(2) $$\sigma_n(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}s_k\delta_k'=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\sigma_k\delta_k''+(n+1)\sigma_n\delta_n'.$$

Die zweiten Differenzen δ_k'' sollen jetzt den zweiten Derivierten des Produktes zweier Funktionen ähnlich dargestellt werden:

$$\delta_k''=\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\cdot\Delta^2\lambda_k+2\Delta\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\cdot\Delta\lambda_{k+1}+\lambda_{k+2}\Delta^2\left(1-\frac{k}{n+1}\right).$$

Da $\Delta\left(1-\frac{k}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}$, also $\Delta^2\left(1-\frac{k}{n+1}\right)=0$ ist, folgt somit

$$\delta_k''=\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\Delta^2\lambda_k+\frac{2}{n+1}\Delta\lambda_n.$$

Beachten wir noch $\delta_n'=\frac{\lambda_n}{n+1}$, so ergibt sich demnach (1) unmittelbar aus (2).

2. 2. Wählen wir für a_n irgendwelche Funktionen f_n, die zu einem Funktionenraum $\mathfrak{F}$ gehören, in welchem eine lineare Operation $U(f)$, deren Werte zu einem Banachschen Raum gehören, mit der Elementennorm $\|U(f)\|$ erklärt ist. Wir beweisen den folgenden Satz:

[1] Diese Beziehung wurde für ganz andere Zwecke bewiesen von R. E. A. C. Paley und A. Zygmund, On some series of functions, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **26** (1930), pp. 337 357.

Ist $\|U(\sigma_n)\| = O(1)$ *und* $\{\lambda_n\}$ *eine konvexe Nullfolge, so gilt*

$$\|U[\sigma_n(\lambda) - \sigma_m(\lambda)]\| = o(1).$$

Die Beziehung (1) führt zunächst zu folgender Ungleichung:

$$\|U[\sigma_n(\lambda) - \sigma_m(\lambda)]\| \leqq$$

$$\leqq \left\| U\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)(k+1)\sigma_k \cdot \Delta^2\lambda_k - \sum_{k=0}^{m-1}\left(1 - \frac{k}{m+1}\right)(k+1)\sigma_k \cdot \Delta^2\lambda_k\right]\right\| +$$

$$+ \frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\|U(\sigma_k)\| \cdot \Delta\lambda_{k+1} + \frac{2}{m+1}\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)\|U(\sigma_k)\| \cdot \Delta\lambda_{k+1} +$$

$$+ \lambda_n\|U(\sigma_n)\| + \lambda_m\|U(\sigma_m)\|.$$

Da $\{\lambda_n\}$ eine Nullfolge und $\|U(\sigma_n)\| = O(1)$ ist, sind die beiden letzten Glieder von der Größenordnung $o(1)$ und wegen der Konvexität ist auch $(k+1)\Delta\lambda_{k+1} = o(1)$, also sind auch die beiden vorletzten Glieder von der Größenordnung $o(1)$. Bezeichne nun S_n die n-te Partialsumme der Reihe $\sum(k+1)\sigma_k \cdot \Delta^2\lambda_k$ und $S_n^{(1)}$ ihr n-tes arithmetisches Mittel. Mit dieser Bezeichnung läßt sich alsdann schreiben:

$$\begin{aligned}(3)\qquad &\|U[\sigma_n(\lambda) - \sigma_m(\lambda)]\| \leqq \|U(S_n^{(1)} - S_m^{(1)})\| + o(1) \leqq \\ &\leqq \|U(S_n^{(1)} - S_n)\| + \|U(S_n - S_m)\| + \|U(S_m - S_m^{(1)})\| + o(1).\end{aligned}$$

Die Reihe $\sum(k+1)\Delta^2\lambda_k$ ist konvergent, da $\{\lambda_n\}$ eine konvexe Nullfolge ist, also gilt

$$\begin{aligned}(4)\qquad \|U(S_n - S_m)\| &\leqq \sum_{k=m+1}^{n}(k+1)\|U(\sigma_k)\| \cdot \Delta^2\lambda_k = \\ &= O(1)\sum_{k=m+1}^{n}(k+1)\Delta^2\lambda_k = o(1).\end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{k}{m+1}(k+1)\|U(\sigma_k)\| \cdot \Delta^2\lambda_k = o(1).$$

Dann ist aber

$$(5)\qquad \|U(S_m - S_m^{(1)})\| \leqq \sum_{k=1}^{m}\frac{k}{m+1}(k+1)\|U(\sigma_k)\| \cdot \Delta^2\lambda_k = o(1)$$

und auf derselben Weise ergibt sich

$$(6)\qquad \|U(S_n^{(1)} - S_n)\| = o(1).$$

Die Beziehungen (3), (4), (5) und (6) sind insgesamt mit unserer Behauptung gleichwertig.

2. 3. *Ist* $\|U(\sigma_n)\| = o(1)$, *so läßt sich eine gegen Unendlich konvergierende, positive, konkave Zahlenfolge* $\{\lambda_n\}$ *bestimmen, für welche* $\|U[\sigma_n(\lambda) - \sigma_m(\lambda)]\| = o(1)$ *ist.*

Bezeichne $\{\mu_n\}$ eine gegen Unendlich konvergierende, positive, konkave Zahlenfolge mit folgenden Eigenschaften:

1^0 $\|U(\sigma_n)\| \leqq \frac{1}{\mu_n^2}$,

2^0 $\Delta\mu_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$,

3^0 $\Delta^2\mu_n = O\left(\frac{\Delta\mu_n}{n}\right)$.

Die Erfüllbarkeit von 1^0 folgt aus der Annahme $\|U(\sigma_n)\| = o(1)$. Man wähle nämlich eine genügend langsam gegen Null konvergierende, positive, monotone Zahlenfolge $\{\nu_n\}$ mit $\nu_n^2 \geqq \|U(\sigma_n)\|$ und bezeichne mit $\{1/\mu_n\}$ die konvexe Hülle von $\{\nu_n\}$. Dann leistet $\{\mu_n\}$ das Verlangte. 2^0 ist erfüllt, wenn $\{\mu_n\}$ genügend langsam gegen Unendlich strebt (z. B. für $\mu_n = \log n$), endlich ist auch 3^0 erfüllt, wenn das Anwachsen von $\{\mu_n\}$ genügend langsam erfolgt (3^0 ist z. B. richtig für $\mu_n = \log n$). Aus (1) fogt dann wegen 1^0 und 2^0

$$\|U[\sigma_n(\mu)]\| \leqq \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\|U(\sigma_k)\| \cdot |\Delta^2\mu_k| + \frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\|U(\sigma_k)\|\cdot \Delta\mu_{k+1} +$$
$$+\mu_n\|U(\sigma_n)\| = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\|U(\sigma_k)\|\cdot|\Delta^2\mu_k| + o(1).$$

Mithin gilt nach 1^0 und 3^0

$$\|U[\sigma_n(\mu)]\| \leqq \sum_{k=1}^{n-1} O\left(\frac{|\Delta\mu_k|}{\mu_k^2}\right) + o(1). \tag{7}$$

Da aber die Folge $\{\mu_k\}$ monoton wächst, ferner $\{|\Delta\mu_k|\}$ wegen der Konkavität monoton abnimmt, ist

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{|\Delta\mu_k|}{\mu_k^2} \leqq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{|\Delta\mu_{k-1}|}{\mu_{k-1}\mu_k} = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\mu_{k-1}} - \frac{1}{\mu_k}\right) < \frac{1}{\mu_0},$$

also ergibt sich aus (7) die Abschätzung

$$\|U[\sigma_n(\mu)]\| = O(1). \tag{8}$$

Sei nun $\{\bar\lambda_n\}$ eine konvexe Nullfolge, für welche $\{\bar\lambda_n\mu_n\}$ konkav und gegen Unendlich strebend bleibt. Setzen wir $\lambda_n = \bar\lambda_n\mu_n$. Gehen wir dann statt der im Satz **2.2** figurierenden Reihe $\sum f_n$ von der Reihe $\sum \mu_n f_n$ aus, so muß in der Behauptung des Satzes **2.2** $\sigma_n(\mu)$ statt σ_n und $\sigma_n(\bar\lambda)$ statt $\sigma_n(\lambda)$ stehen. Letzteres, weil $\sigma_n(\lambda)$ nichts anderes, als die $\bar\lambda$-Transformierte von $\sigma_n(\mu)$ ist. Unser Satz folgt also unmittelbar aus (8) und dem Satze **2.2.**

3. Die mit konvexen Nullfolgen gebildeten Transformierten der arithmetischen Mittel von Orthogonalreihen

3. 1. Wir wollen gewisse Eigenschaften der Orthogonalreihen als Anwendungen unserer vorangehenden Sätze behandeln. Das können wir leicht tun, wenn wir für den zugrunde gelegten Funktionenraum $\mathfrak{F}$ einen der folgenden wählen: den Raum L der (im Lebesgueschen Sinne) integrierbaren Funktionen, für $p > 1$ den Raum L^p der samt ihren p-ten Potenzen integrierbaren Funktionen, den Raum M der fast überall beschränkten Funktionen, den Raum C der stetigen Funktionen. $U(f)$ bedeutet dann f, d. h. die identische Transformation, also ist $\|U(f)\|$ die in $\mathfrak{F}$ gemessene Entfernung der Funktion f von der Funktion $g(x) \equiv 0$. Um die Existenz der Entwicklung $f(x) \sim \sum c_n \varphi_n(x)$ zu sichern, setzen wir voraus, daß die Orthogonalfunktionen $\varphi_n(x)$ Elemente des zu $\mathfrak{F}$ konjugierten Raumes[2] sind. Wir werden das Orthogonalsystem $\{\varphi_n(x)\}$ auf einer Menge $(C, 1)$-*regulär* nennen, wenn in jedem Punkte x dieser Menge (von x abhängend) die Beziehung

$$\int_a^b \left| \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \varphi_k(t) \varphi_k(x) \right| dt = O(1)$$

besteht.

3. 2. *Ist $\{\varphi_n(x)\}$ stetig und (überall) gleichmäßig $(C, 1)$-regulär, $\{\lambda_n\}$ irgendeine konvexe Nullfolge, so gehört $\{\lambda_n\}$ zur Klasse (M, C).*[3]

Der zugrunde gelegte Funktionenraum sei M. Aus der vorausgesetzten gleichmäßigen $(C, 1)$-Regularität folgt für die arithmetischen Mittel $\sigma_n(x)$ der Entwicklung von $f(x)$:

$$\operatorname*{Max}_{a \leq x \leq b} |\sigma_n(x)| = \|U(\sigma_n)\| = O(1).$$

Nach **2. 2** ist somit

$$\operatorname*{Max}_{a \leq x \leq b} |\sigma_n(\lambda, x) - \sigma_m(\lambda, x)| = o(1),$$

also $\{\sigma_n(\lambda, x)\}$ gleichmäßig konvergent.

3. 3 *Ist $|\varphi_n(x)| \leq M_n$ und $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall $(C, 1)$-regulär, gilt außerdem für irgendeine Zahlenfolge $\{\mu_n\}$ auch*

$$\int_a^b \left| \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \mu_k \varphi_k(x) \right| dx = O(1), \tag{9}$$

[2] Der konjugierte Raum von L ist M, der von L^p ist $L^{\frac{p}{p-1}}$.

[3] Dieser Satz ist für Fourierreihen bekannt, s. A. ZYGMUND, *Trigonometrical series* (Warszava - Lwów, 1935), p. 105.

so gibt es zu jeder konvexen Nullfolge $\{\lambda_n\}$ *eine Funktion* $f \in L$, *für welche*

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx = \lambda_n \mu_n$$

ist.

Der zugrunde gelegte Funktionenraum sei L und wir setzen

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \mu_k \varphi_k(x).$$

Dann bedeutet (9) so viel, wie $\|U(\sigma_n)\| = O(1)$, woraus nach **2. 2**

$$\|U[\sigma_n(\lambda) - \sigma_m(\lambda)]\| = o(1)$$

folgt. Diese Beziehung ist aber hinreichend[4] für die Existenz einer Funktion $f \in L$ mit der gewünschten Eigenschaft.

Bemerkung. Ist $\varphi_n(x) = \cos nx$, so gilt unser Satz auch für $\mu_n = 1$, da in diesem Fall (9) erfüllt bleibt. Setzt man aber $\varphi_n(x) = \sin nx$, so ist bekanntlich

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \sin kx \right| dx \sim \log n,$$

also für $\mu_n = 1$ weder die Bedingung (9), noch die Bedingung der $(C, 1)$-Regularität fast überall erfüllt. Damit ist der eigentliche Grund des bekannten Satzes[5] beleuchtet, nach welchem $\sum \lambda_n \cos nx$ für alle konvexe Nullfolgen $\{\lambda_n\}$ eine Fourierreihe ist, während $\sum \lambda_n \sin nx$ nur unter zusätzlichen Bedingungen eine Fourierreihe sein kann.

4. Die mit konkaven, gegen Unendlich konvergierenden Folgen gebildeten Transformierten der arithmetischen Mittel von Orthogonalreihen

4. 1. *Gehört* $\{\varphi_n(x)\}$ *zum konjugierten Raum von* L *bzw.* L^p *und ist es ein fast überall* $(C, 1)$*-reguläres Orthogonalsystem, so läßt sich zu der Entwicklung jeder Funktion* $f \in L$, *bzw.* $f \in L^p$ *eine gegen Unendlich konvergierende, konkave Zahlenfolge* $\{\lambda_n\}$, *die zur Klasse* (L, L), *bzw.* (L^p, L^p) *gehört, bestimmen.*[6]

Der zugrunde gelegte Funktionenraum sei L, bzw. L^p. Bedeutet $\sigma_n^*(x)$ das n-te arithmetische Mittel der Entwicklung $f(x) \sim \sum c_n \varphi_n(x)$, so gilt bekannt-

[4] W. Orlicz, Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen, I. *Studia Mathematica,* **1** (1929), pp. 1—39.

[5] W. H. Young, On the Fourier series of bounded functions, *Proc. London Math. Soc.,* **12** (1913), pp. 41—70.

[6] Die Behauptung unseres Satzes betreffs $f \in L$ wurde — ebenfalls von der Beziehung (1) ausgehend — bewiesen von R. Salem, Sur les transformations des séries de Fourier, *Fundamenta Mathematicae,* **33** (1945), pp. 108 114.

lich[4] $\|U(\sigma_n^*-\sigma_m^*)\|=o(1)$, oder was damit vollständig gleichwertig ist: $\|U(\sigma_n^*-f)\|=o(1)$. Wählen wir nun die Glieder f_n der im Satze **2. 3** auftretenden Reihe $\sum f_n$ folgenderweise: $f_0=c_0\varphi_0-f$ und für $n\geqq 1$ setzen wir $f_n=c_n\varphi_n$. Dann ist $\sigma_n=\sigma_n^*-f$, also $\|U(\sigma_n)\|=o(1)$. Nach **2. 3** läßt sich die Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ so wählen, daß auch $\|U[\sigma_n(\lambda)-\sigma_m(\lambda)]\|=o(1)$ sei. Hier ist aber $\sigma_n(\lambda)$ die λ-Transformierte des n-ten arithmetischen Mittels der Reihe $[c_0\varphi_0-f]+c_1\varphi_1+\cdots+c_n\varphi_n+\cdots$. Wenn wir also $\sigma_n^*(\lambda, x)$ für die λ-Transformierte von $\sigma_n^*(x)$ schreiben, so ist

$$\sigma_n(\lambda)-\sigma_m(\lambda)=\sigma_n^*(\lambda, x)-\sigma_m^*(\lambda, x).$$

Es gilt somit

$$\|U[\sigma_n^*(\lambda, x)-\sigma_m^*(\lambda, x)]\|=o(1),$$

woraus in Verbindung mit der vorausgesetzten $(C, 1)$-Regularität fast überall nach der öfters zitierten Arbeit des Herren ORLICZ[4] die Existenz einer Funktion $g\in L$, bzw. $g\in L^p$ folgt, deren Entwicklungskoeffizienten die Zahlen

$$\int_a^b g(x)\,\varphi_n(x)\,dx=\lambda_n c_n$$

sind. Damit ist unser Satz bewiesen.

4.2. Es ist bekannt,[7] daß aus der $(C, 1)$-Regularität fast überall des Orthogonalsystems $\{\varphi_n(x)\}$ die $(C, 1)$-Summierbarkeit fast überall der Entwicklung jeder Funktion $f\in L^2$ folgt. Auf Grund des vorangehenden Satzes läßt sich dieses Resultat — allerdings nur unter einer starken Zusatzannahme — auf die Entwicklungen der Funktionen $f\in L$ erweitern:

Ist $f\in L$, bzw. $f\in L^p$ und besitzt das fast überall $(C, 1)$-reguläre Orthogonalsystem die Eigenschaft, daß die arithmetischen Mittel der Entwicklung jeder Funktion $f\in L$, bzw. $f\in L^p$ fast überall unter einer von x abhängenden Schranke bleiben, so ist die Entwicklung der Funktion $f(x)$ fast überall $(C, 1)$-summierbar.

Bezeichne $\sigma_n(x)$ das n-te arithmetische Mittel der Entwicklung $f(x)\sim\sim\sum c_n\varphi_n(x)$ und $\sigma_n(\mu, x)$ seine μ-Transformierte. Nach **4. 1** läßt sich die Zahlenfolge $\{\mu_n\}$ konkav und gegen Unendlich konvergierend wählen derart, daß $g(x)\sim\sum\mu_n c_n\varphi_n(x)$ ein Element des Raumes L, bzw. L^p sei. Nach Annahme gilt fast überall $|\sigma_n(\mu, x)|=O(1)$. Setzt man also

$$U[\sigma_n(\mu, x)]=\sigma_n(\mu, x)$$

für einen festen Punkt x und

$$\|U[\sigma_n(\mu, x)]\|=|\sigma_n(\mu, x)|,$$

so ist damit für ein festes x eine lineare Operation mit ihrer Norm erklärt, und zwar ist $\|U[\sigma_n(\mu, x)]\|=O(1)$ für fast alle x. Setzen wir $\lambda_n=\dfrac{1}{\mu_n}$, so

[7] S. KACZMARZ, Notes on orthogonal series, I. *Studia Mathematica,* **5** (1935), pp. 24–28.

ist $\sigma_n(x)$ die λ-Transformierte von $\sigma_n(\mu, x)$, aus dem Satze **2. 2** folgt mithin

$$\|U[\sigma_n(x)-\sigma_m(x)]\|=o(1)$$

für fast alle x, w. z. b. w.

Bemerkung. Es ist nicht bekannt, ob die gewünschte Schranke wenigstens für die arithmetischen Mittel der Entwicklungen einer Funktion $f\in L^p$ mit $1<p<2$ nicht eventuell eine Konsequenz der $(C, 1)$-Regularität fast überall ist. Wäre die Antwort auf diese Frage bejahend, so würde sich daraus auf Grund unseres soeben bewiesenen Satzes die $(C, 1)$-Summierbarkeit fast überall der $(C, 1)$-regulären Entwicklungen von solchen Funktionen ergeben.

4. 3. *Sind die Orthogonalfunktionen $\varphi_n(x)$ stetig und besitzt das (überall) gleichmäßig $(C, 1)$-reguläre System $\{\varphi_n(x)\}$ die Eigenschaft, daß die Entwicklung jeder stetigen Funktion gleichmäßig $(C, 1)$-summierbar ist, so läßt sich zu jedem $f\in C$ eine zur Klasse (C, C) gehörende konkave, gegen Unendlich konvergierende Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ bestimmen.*[8]

Sei C der zugrunde gelegte Funktionenraum. Setzen wir $f_0=c_0\varphi_0-f$ und $f_n=c_n\varphi_n$ für $n\geqq 1$, dann ist $\sigma_n=\sigma_n(x)-f(x)$, wo $\sigma_n(x)$ das n-te arithmetische Mittel der Entwicklung $f(x)\sim\sum c_n\varphi_n(x)$ bedeutet. Nach Annahme gilt dann $\|U(\sigma_n)\|=o(1)$. Nach dem Satze **2. 3** läßt sich daher die Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ so wählen, daß auch $\|U[\sigma_n(\lambda)-\sigma_m(\lambda)]\|=o(1)$ sei. Die Entwicklung $g(x)\sim$ $\sim\sum\lambda_n c_n\varphi_n(x)$ ist also gleichmäßig konvergent, folglich $g(x)$ stetig.

4. 4. Unsere Betrachtungen beruhen im Wesen auf der Darstellung (1) der λ-Transformierten der $(C, 1)$-Mittel. Ähnliche Darstellungen lassen sich aber auch für (C, r)-Mittel höherer Ordnung angeben.[9] Wenn wir statt (1) eine entsprechende Darstellung der λ-Transformierten von (C, r)-Mitteln höherer Ordnung zum Ausgangspunkt gewählt hätten, so wäre es möglich — allerdings nach langwieriger Rechnung, — die Bedingung der $(C, 1)$-Regularität durch die weniger fordernde (C, r)-Regularität zu ersetzen. Die solcherweise erhältbaren Resultate würden jedoch prinzipiell nicht viel mehr besagen, wogegen sich die Rechnungen bedeutend komplizierter gestalten würden. Dies war der Grund, daß wir uns auf die Untersuchung der arithmetischen Mittel beschränkt haben.

(Eingegangen am 13. März 1951.)

[8] Dieser Satz wurde für Fourierreihen von R. SALEM, a. a. O.[6], bewiesen.

[9] S. z. B. G. H. HARDY, *Divergent series* (Oxford, 1949), p. 129.

О ПРЕОБРАЗОВАННЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ СРЕДНИХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

Д. АЛЕКСИЧ (Будапешт)

(Резюме)

Пусть $\mathfrak{F}$ пространство функций, где определен оператор U; значения U относятся к некоторому пространству Банаха. Обозначим норму от $U(f)$ $(f \in \mathfrak{F})$ следующим образом: $\|U(f)\|$. Пусть $f_n \in \mathfrak{F}$ и σ_n обозначает арифметическую среднюю порядка n ряда Σf_n, и $\sigma_n(\lambda)$ —ряда $\Sigma \lambda_n f_n$, где $\{\lambda_n\}$ произвольная последовательность чисел. Доказываются следующие теоремы:

1. Если $\{\lambda_n\}$ выпуклая последовательность чисел, $\lambda_n \to 0$ и $\|U(\sigma_n)\| = o(1)$, то $\|U[\sigma_n(\lambda) - \sigma_m(\lambda)]\| = o(1)$.

2. Если $\|U(\sigma_n)\| = o(1)$, то можно найти такую вогнутую последовательность положительных чисел стремящуюся к бесконечности, для которой $\|U[\sigma_n(\lambda) - \sigma_m(\lambda)]\| = o(1)$.

Эти две теоремы позволяют перенести ряд результатов, известных в теории рядов Фурье, на ортогональные ряды.

WINKELABWEICHUNG UND BETRAGSABWEICHUNG BEI POLYNOMEN

Von

GYULA SZ.-NAGY (Szeged), Mitglied der Akademie

§ 1. Winkelabweichung

1. Die Winkelabweichung $W(c, d)$ einer analytischen Funktion $f(z)$ zwischen den Punkten c und d hat dann einen Sinn, wenn $f(c)f(d) \neq 0$ ist. Dann genügt $W(c, d)$ den Relationen

$$(1) \qquad W(c, d) = \left| \operatorname{arc} \frac{f(d)}{f(c)} \right| = \left| \operatorname{arc} \frac{f(c)}{f(d)} \right| \quad \text{und} \quad 0 \leqq W(c, d) \leqq \pi.$$

Hat die Funktion $f(z)$ im Bereich $\mathfrak{B}$ keine Nullstelle und ist c bzw. z ein fester bzw. beliebiger Punkt von $\mathfrak{B}$, so wird das Maximum der Winkelabweichung $W(c, z)$ die *Winkelabweichung der Funktion $f(z)$ im Bereich $\mathfrak{B}$ bezüglich des Punktes c* genannt.

Auf Grund dieser Definitionen gilt der Satz:

I. *Hat ein Polynom $f(z)$ n-ten Grades im Kreis $|z-c| \leqq r$ keine Nullstelle, so ist seine Winkelabweichung im konzentrischen Kreis*

$$(2) \qquad |z-c| \leqq r \sin \frac{\omega}{n}, \quad 0 < \omega \leqq \pi$$

bezüglich des Mittelpunktes c kleiner als ω.

Hat das Polynom $f(z)$ die Form

$$(3) \qquad f(z) = a_0(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n), \quad a_0 \neq 0,$$

so sind

$$\frac{f(z)}{f(c)} = \prod_{k=1}^{n} \frac{z-z_k}{c-z_k} \quad \text{und} \quad \operatorname{arc} \frac{f(z)}{f(c)} = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arc} \frac{z-z_k}{c-z_k} = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k.$$

Hier bezeichnet φ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ den (mit Drehungssinn versehenen) Winkel, unter dem der Vektor $\overrightarrow{cz}$ vom Punkt z_k aus erscheint. Aus der letzten Gleichung folgt die Ungleichung

$$(4) \qquad W(c, z) = \left| \operatorname{arc} \frac{f(z)}{f(c)} \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \right| \leqq \sum_{k=1}^{n} |\varphi_k| = \sum_{k=1}^{n} \omega_k,$$

wo ω_k der Winkel ist, unter dem die Strecke (c, z) vom Punkt z_k erscheint.

Von den Punkten des Kreises $|z-c|=r$ aus erscheint der Kreis (2) unter dem Winkel $\frac{2\omega}{n}$, ein Halbmesser dieses Kreises unter einem Winkel $\leqq \frac{\omega}{n}$. Vom Punkt z_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ aus erscheint ein Halbmesser des Kreises (2) unter einem Winkel $<\frac{\omega}{n}$, weil z_k außerhalb des Kreises $|z-c|=r$ liegt. Liegt der Punkt z im Kreis (2), so ist (c, z) eine Teilstrecke eines Halbmessers des Kreises (2). Die Strecke (c, z) erscheint also vom Punkt z_k aus unter einem Winkel $\omega_k < \frac{\omega}{n}$.

Für einen Punkt z der Kreisscheibe (2) ist also $\sum_{k=1}^{n} \omega_k < \omega$. Damit ist der Satz I bewiesen.

2. Kennt man auch die einzelnen Nullstellen des Polynoms $f(z)$, so kann man einen größeren Bereich der Punkte z bestimmen, in denen die Winkelabweichung $W(c, z) \leqq \omega$ ist $[f(c) \neq 0]$.

II. *Hat das Polynom $f(z)$ n-ten Grades die Nullstellen $z_1, z_2, \ldots, z_n$, ist $f(c) \neq 0$, sind $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ der Gleichung*

$$\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n = \omega \quad (0 < \omega \leqq \pi) \tag{5}$$

genügende positive Zahlen und bezeichnet $W_k (k=1, 2, \ldots, n)$ den Winkelraum vom Scheitel z_k und von der Öffnung $2\omega_k$, dessen Winkel $2\omega_k$ durch die Halbgerade $z_k c$ halbiert wird, so hat das Polynom $f(z)$ in jedem gemeinsamen Punkt z der Winkelräume $W_1, W_2, \ldots, W_n$ eine Winkelabweichung $W(c, z) \leqq \omega$.

Der Durchschnitt D von $W_1, W_2, \ldots, W_n$ ist ein konvexes Vieleck. Das Polynom $f(z)$ hat also im Vieleck D bezüglich des Punktes c eine Winkelabweichung $W(c, z) \leqq \omega$. In jedem inneren Punkte z von D ist $W(c, z) < \omega$.

Bezeichnen $D', D'', \ldots$ die Durchschnitte von je n durch die Punkte $c, z_1, z_2, \ldots, z_n$ ähnlich definierten Winkelräumen, die zu verschiedenen Lösungen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ der Gleichung (5) oder zu verschiedenen Reihenfolgen der Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ einer Lösung gehören, so hat das Polynom $f(z)$ bezüglich des Punktes c in der Vereinigungsmenge der Bereiche $D, D', D'', \ldots$ eine Winkelabweichung $\leqq \omega$.

Der Durchschnitt D der Winkelräume $W_1, W_2, \ldots, W_n$ ist ein konvexes Vieleck, weil W_k konvex ist, und es hat höchstens $2n$ Seiten. Die Gerade einer jeden Seite geht durch mindestens eine Nullstelle des Polynoms $f(z)$.

In einem Punkt z des Winkelraumes $W_k (z \neq z_k)$ ist

$$\left| \operatorname{arc} \frac{z-z_k}{c-z_k} \right| \leqq \omega_k. \tag{6}$$

Das Gleichheitszeichen besteht hier dann, wenn z auf einem Schenkel von W_k liegt, also ein Randpunkt von W_k ist. In einem gemeinsamen Punkt

z der Winkelräume $W_1, W_2, \ldots, W_k$ ist also

$$W(c,z) = \left|\operatorname{arc}\frac{f(z)}{f(c)}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\operatorname{arc}\frac{z-z_k}{c-z_k}\right| \leqq \sum_{k=1}^{n}\left|\operatorname{arc}\frac{z-z_k}{c-z_k}\right| = \sum_{k=1}^{n}\omega_k = \omega.$$

In einem inneren Punkt z von D ist $W(c,z) < \omega$, weil dann die Ungleichung (6) für mindestens einen Index mit Ungleichheitszeichen gilt. In einem Randpunkt z von D besteht die Gleichung $W(c,z) = \omega$ dann und nur dann, wenn z auf dem Rand sämtlicher Winkelräume W_k liegt.

Damit ist der Satz II bewiesen. Aus seinem Beweis folgt die folgende Verallgemeinerung des Satzes I:

III. *Bezeichnen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ die Nullstellen des Polynoms $f(z)$ n-ten Grades, sind*

$$f(c) \neq 0, \quad |z_k - c| = r_k, \quad r_1 \geqq r_2 \geqq \cdots \geqq r_n > \varrho > 0$$

und genügen die positiven Winkel ϑ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ den Relationen

$$r_1 \sin\vartheta_1 = r_2 \sin\vartheta_2 = \cdots = r_n \sin\vartheta_n = \varrho \quad \text{und} \quad \vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_n = \omega \leqq \pi,$$

so hat das Polynom $f(z)$ im Kreis $|z-c| \leqq \varrho$ bezüglich des Mittelpunktes c höchstens die Winkelabweichung ω. Dies gilt auch im konvexen Vieleck V, das von den Tangentenpaaren des Kreises $|z-c| = \varrho$ gebildet wird, die durch die Nullstellen des Polynoms $f(z)$ gehen.

Vom Punkt z_k aus erscheint ein Halbmesser des Kreises $|z-c| = \varrho$ unter einem Winkel $\leqq \vartheta_k$. Daraus folgt, daß eine Strecke (c, z) dieses Kreises oder des Vielecks V vom Punkt z_k aus unter einem Winkel $\leqq \vartheta_k$ erscheint. In der Ungleichung (6) läßt sich also ω_k durch ϑ_k ersetzen. Aus dem Satz II folgt damit der Satz III.

Im Satz III besteht die Ungleichung $\omega \leqq \pi$, falls $\varrho \leqq r_k \sin\frac{\pi}{n}$ ist, weil dann $\vartheta_1 \leqq \vartheta_2 \leqq \cdots \leqq \vartheta_n \leqq \frac{\pi}{n}$ sind.

3. Der Satz II läßt sich in der Form verallgemeinern:

IV. *Hat das Polynom $f(z)$ n-ten Grades die Nullstellen $z_1, z_2, \ldots, z_n$, ist $f(c) \neq 0$, genügen die nichtnegativen bzw. positiven Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ bzw. $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ der Gleichung*

$$(7) \qquad \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n = \omega \quad (0 < \omega \leqq \pi) \quad \text{bzw.} \quad \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n = 2\omega$$

und den Ungleichungen $\omega_k < \sigma_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ und bezeichnet W_k' bzw. W_k'' $(k = 1, 2, \ldots, n)$ den Winkelraum vom Scheitel z_k, dessen Schenkel zur Halbgeraden $z_k c$ die Winkel ω_k und $\omega_k - \sigma_k$ bzw. $-\omega_k$ und $\sigma_k - \omega_k$ bilden, so hat das Polynom $f(z)$ bezüglich des Punktes c im Durchschnitt der Winkelräume $W_1', W_2', \ldots, W_n'$ oder $W_1'', W_2'', \ldots, W_n''$, in der Vereinigungsmenge dieser zwei Durchschnitte und auch in der Vereinigungsmenge dieser und anderer Durchschnitte von je n Winkelräumen ähnlicher Art eine Winkelabweichung $\leqq \omega$.

In einem Punkt z des Winkelraumes W_k' bzw. W_k'' ist

$$\omega_k - \sigma_k \leqq \operatorname{arc} \frac{z - z_k}{c - z_k} \leqq \omega_k \quad \text{bzw.} \quad -\omega_k \leqq \operatorname{arc} \frac{z - z_k}{c - z_k} = \sigma_k - \omega_k .$$

In einem gemeinsamen Punkt z der n Winkelräume W_k' bzw. W_k'' ist also

$$\sum_{k=1}^{n} (\omega_k - \sigma_k) = -\omega \leqq \operatorname{arc} \frac{f(z)}{f(c)} \leqq \sum_{k=1}^{n} \omega_k = \omega$$

bzw.

$$-\sum_{k=1}^{n} \omega_k = -\omega \leqq \operatorname{arc} \frac{f(z)}{f(c)} \leqq \sum_{k=1}^{n} (\sigma_k - \omega_k) = \omega .$$

Damit ist der Satz IV bewiesen.

Die Winkelräume W_k' und W_k'' sind in bezug auf die Halbgerade $z_k c$ symmetrisch. Die Vereinigungsmenge der Durchschnitte der Winkelräume W_k' bzw. W_k'' $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ist also ein konvexes Vieleck, das bezüglich der Geraden $c z_k$ symmetrisch ist. Im Falle $\sigma_k = 2\,\omega_k$ stimmen die Winkelräume W_k, W_k' und W_k'' überein. Der Satz IV enthält also den Satz II in sich.

4. Der größte (c enthaltende) zusammenhängende Bereich der komplexen Ebene, im dem das Polynom $f(z)$ n-ten Grades bezüglich des Punktes c eine Winkelabweichung $\omega (0 < \omega \leqq \pi)$ besitzt, wird von einer Lucas'schen Stelloide n-ter Ordnung begrenzt. [1]

Der Ort der Punkte z in der komplexen Ebene, in denen ein Polynom $f(z)$ n-ten Grades denselben Winkel besitzt, ist eine Stelloide n-ter Ordnung. Sie hat n Asymptoten, die durch den Schwerpunkt der Nullstellen des Polynoms gehen und eine n-strahlige Windrose bilden.

Sind

$$z = x + iy, c = a + ib, f(c) \neq 0, F(z) = \frac{f(z)}{f(c)} = \frac{f(x+iy)}{f(a+ib)} = P(x, y) + i Q(x, y),$$

wo die Koeffizienten der Polynome n-ten Grades $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ reell sind, so genügen die Punkte $z = x + iy$, in denen $F(z) = |F(z)|\, e^{i\varphi}$ ist, der Gleichung

$$\frac{Q(x, y)}{P(x, y)} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

oder

$$S(x, y; \varphi) = \cos \varphi \, Q(x, y) - \sin \varphi \, P(x, y) = 0. \tag{8}$$

Die Stelloiden mit den Gleichungen

$$S(x, y; \omega) = 0 \text{ und } S(x, y; -\omega) = 0 \quad (0 < \omega < \pi)$$

[1] Vgl. das fünfzehnte Kapitel, Geometrie der Polynome im Lehrbuch von G. LORIA, *Spezielle algebraische und transzendente Kurven* (B. G. Teubner Leipzig und Berlin, zweite Auflage, 1910), Bd. I, S. 439 453.

haben in den Nullstellen des Polynoms $f(z)$ gemeinsame Punkte und teilen die Ebene in gewisse zusammenhängende Bereiche $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$, die in den Nullstellen des Polynoms $f(z)$ Eckpunkte haben. Enthält der Bereich $\mathfrak{B}$ den Punkt c, so ist die Winkelabweichung von $f(z)$ im Bereich $\mathfrak{B}$ bezüglich des Punktes c kleiner oder gleich ω bzw. kleiner als ω, je nachdem der Rand von $\mathfrak{B}$ dem Bereich $\mathfrak{B}$ zugerechnet bzw. nicht zugerechnet wird.

In einem inneren Punkt eines zu $\mathfrak{B}$ (längs eines Randbogens) benachbarten Bereichs $\mathfrak{B}_k$ ist $|\varphi| > \omega$ ($\varphi = \operatorname{arc} F(z), |\varphi| \leqq \pi$). $\mathfrak{B}$ ist also der größte c enthaltende geschlossene Bereich, in dem das Polynom bezüglich des Punktes c eine Winkelabweichung $\leqq \omega \neq \pi$ besitzt.

§ 2. Betragsabweichung

5. Die *Betragsabweichung* $B(z_0; c)$ *eines Polynoms* $f(z)$, das im Punkt c nicht verschwindet, *zwischen den Punkten* z_0 *und* c wird durch das Verhältnis

$$B(z_0; c) = \left| \frac{f(z_0)}{f(c)} \right|, \quad f(c) \neq 0 \tag{9}$$

definiert. Im Falle $f(z_0) \neq 0$ ist also $B(z_0; c)\, B(c; z_0) = 1$.

Es gilt der Satz

V. *Hat ein Polynom* $f(z)$ *n-ten Grades im offenen Kreisbereich* $|z-c| < r$ *bzw.* $|z-c| > r$ *keine Nullstelle und sind* $f(c) \neq 0$, $0 < t < 1$ *bzw.* $t > 1$, *so besteht die Ungleichung*

$$(1-t)^n \leqq B(z_0; c) = \left| \frac{f(z_0)}{f(c)} \right| \leqq (1+t)^n \tag{10}$$

bzw.

$$(t-1)^n \leqq B(z_0; c) = \left| \frac{f(z_0)}{f(c)} \right| \leqq (t+1)^n \tag{11}$$

in jedem Punkt z_0 *des abgeschlossenen Kreisbereichs* $|z-c| \leqq rt$ *bzw.* $|z-c| \geqq rt$.

Ein Gleichheitszeichen gilt in der Ungleichung (10) *oder* (11) *dann und nur dann, wenn die Nullstellen des Polynoms* $f(z)$ *in einem Punkt* ζ *des Kreises* $|z-c| = r$ *zusammenfallen und* z_0 *der Schnittpunkt des Kreises* $|z-c| = rt$ *und der die Punkte* c *und* ζ *verbindenden Geraden ist.*

In einem Punkt z der komplexen Ebene ist

$$\frac{f(z)}{f(c)} = \prod_{k=1}^{n} \frac{z-z_k}{c-z_k} = \prod_{k=1}^{n} \left[1 - \frac{z-c}{z_k-c} \right] = \prod_{k=1}^{n} [1-\tau_k(z)], \quad \tau_k(z) = \frac{z-c}{z_k-c}. \tag{12}$$

Sind

$$|z_k - c| \geqq r \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \quad |z_0 - c| \leqq rt \quad \text{und} \quad 0 < t < 1,$$

so sind

$$|\tau_k(z_0)| = \left| \frac{z_0-c}{z_k-c} \right| \leqq t, \quad 1-t \leqq 1 - |\tau_k(z_0)| \leqq 1+t \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

und

$$(1-t)^n \leqq \prod_{k=1}^{n} |1-\tau_k(z_0)| \leqq \left|\frac{f(z_0)}{f(c)}\right| = B(z_0; c) \leqq (1+t)^n.$$

In dieser Ungleichung besteht ein Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn $|z_k-c|=r, |z_0-c|=rt$ und entweder $\tau_k(z_0)=-t$ oder $\tau_k(x_0)=t$ $(k=1,2,\ldots,n)$ ist.

Damit ist der Satz V für den Fall $0<t<1$ bewiesen. Ebenso kann man ihn auch für den Fall $t>1$ beweisen.

6. Der Satz V läßt sich auf folgende Weise verschärfen:

VI. *Hat ein Polynom $f(z)$ n-ten Grades die Nullstellen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ und sind*

$$f(c) \neq 0, \quad \left|\frac{z_0-c}{z_k-c}\right| = t_k < 1 \quad (k=1,2,\ldots,m), \quad \left|\frac{z_0-c}{z_k-c}\right| = T_k > 1$$
$$(k=m+1, m+2,\ldots,n),$$

so besteht die Ungleichug

$$\prod_{k=1}^{m}(1-t_k)\prod_{k=m+1}^{n}(T_k-1) \leqq \left|\frac{f(z_0)}{f(c)}\right| \leqq \prod_{k=1}^{m}(1+t_k)\prod_{1=m+1}^{n}(T_k+1). \tag{13}$$

In dieser Ungleichung besteht ein Gleichheitszeichen dann, wenn die Nullstellen des Polynoms $f(z)$ entweder auf die Halbgerade cz_0 oder auf ihre Verlängerung fallen.

Wegen der Annahmen des Satzes VI sind

$$\begin{aligned} 1-t_k &\leqq |1-\tau_k(z_0)| \leqq 1+t_k \qquad (k=1,2,\ldots,m) \\ T_k-1 &\leqq |1-\tau_k(z_0)| \leqq T_k+1 \quad (k=m+1, m+2,\ldots,n). \end{aligned} \tag{14}$$

Man kann also auf dem Grund der Identität (12) die Ungleichung (13) leicht einsehen. In der Ungleichung (13) besteht das erste bzw. zweite Gleichheitszeichen dann, wenn jede der Ungleichungen (14) mit dem ersten bzw. zweiten Gleichheitszeichen gilt. Dann ist jede Zahl $\tau_k(z_0) (k=1,2,\ldots,n)$ positiv bzw. negativ. Die Punkte $z_1, z_2, \ldots, z_n$ liegen dann auf der Halbgeraden cz_0 bzw. auf ihrer Verlängerung.

Damit ist der Satz VI bewiesen.

7. Bereiche, in denen die Betragsabweichung $B(z_0; c)$ des Polynoms $f(z)$ n-ten Grades <1 bzw. >1 ist, lassen sich durch den folgenden Satz bestimmen.

VII. *Verschwindet das Polynom $f(z)$ n-ten Grades*

$$f(z) = a_0(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n) \qquad (a_0 \neq 0)$$

im Punkt c nicht, bedeuten $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ der Gleichung

$$|a_0|\,\varrho_1\varrho_2\cdots\varrho_n = |f(c)| \tag{15}$$

genügende beliebige positive Zahlen und bezeichnet $K_h (h=1,2,\ldots,n)$ den Kreis $|z-z_h|=\varrho_h$, so besteht die Ungleichung $|f(z_0)|<|f(c)|$ bzw. $|f(z_0|>|f(c)|$ in *den Punkten* z_0, *die innerhalb bzw. außerhalb sämtlicher Kreise* $K_h (h=1,2,\ldots,n)$ *liegen, d. h. in jedem inneren Punkt* z_0 *des Durchschnittes* D_i *bzw.* D_a *der abgeschlossenen Kreisinneren bzw. Kreisäußeren von* $K_1, K_2, \ldots, K_n$ *gilt die Ungleichung*

$$|f(z_0)| < |f(c)| \quad bzw. \quad |f(z_0)| > |f(c)|.$$

Bezeichnen $D_i', D_i'', \ldots$ *bzw.* $D_a', D_a'', \ldots$ *die Durchschnitte der abgeschlossenen Inneren bzw. Äußeren von je n Kreisen, deren Mittelpunkte in den Nullstellen des Polynoms* $f(z)$ *liegen und deren Halbmesser* ϱ_h $(h=1,2,\ldots,n)$ *der Gleichung* (15) *genügen, und bezeichnet* z_0 *einen inneren Punkt der Vereinigungsmenge* V_i *bzw.* V_a *der Durchschnitte* $D_i, D_i', D_i'', \ldots$ *bzw.* $D_a, D_a', D_a'', \ldots$ *so ist*[2]

$$|f(z_0)| < |f(c)| \quad bzw. \quad |f(z_0)| > |f(c)|.$$

In einem inneren Punkt z_0 von D_i bzw. D_a ist

$$|z_0 - z_h| \leqq \varrho_h \quad \text{bzw.} \quad |z_0 - z_h| \geqq \varrho_h \quad (h=1,2,\ldots,n)$$

und mindestens eine Ungleichung gilt mit Ungleichheitszeichen. Deshalb ist

$$|f(z_0)| = |a_0| \prod_{h=1}^{n} |z_0 - z_h| < |a_0| \varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_n = |f(c)| \quad \text{bzw.} \quad |f(z_0)| > |f(c)|.$$

Damit ist der Satz VII bewiesen.

8. Die Punkte z der komplexen Ebene, in denen $|f(z)| = |f(c)| \neq 0$ oder $B(z;c)=1$ ist, liegen auf einer Lemniskate L_n n-ten Grades ($2n$-ter Ordnung), die durch den Punkt c geht und in den Nullstellen des Polynoms $f(z)$ n-ten Grades ihre Mittelpunkte (Brennpunkte) besitzt.[3] Die Kurve L_n kann aus mehreren geschlossenen Teilen bestehen.

Bezeichnet m die Anzahl der verschiedenen Nullstellen des Polynoms $f(z)$ n-ten Grades, so wird die komplexe Ebene von der Lemniskate L_n in einen mehrfach zusammenhängenden unendlichen Bereich $\mathfrak{B}_0$ und in höchstens m einfach zusammenhängende endliche Bereiche geteilt. Jeder dieser endlicher Bereiche enthält wenigstens eine Nullstelle des Polynoms $f(z)$. In einem Punkt z_0 der komplexen Ebene ist $|f(z_0)| = |f(c)|$, $|f(z_0)| > |f(c)|$ bzw. $|f(z_0)| < |f(c)|$, je nachdem z_0 auf der Lemniskate L_n, im Innern des unendlichen Bereichs $\mathfrak{B}_0$ oder im Innern eines endlichen Bereichs liegt.

(*Eingegangen am 15. Dezember 1950.*)

[2] Dieser Satz läßt sich aus den Resultaten einer früheren Arbeit von mir ableiten: GYULA SZ.-NAGY, Die Lage der A-Stellen eines Polynoms bezüglich seiner Nullstellen, *Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged,* **11** (1947), S. 147—151.

[3] Vgl. die Arbeit: GYULA SZ.-NAGY, Über die allgemeinen Lemniskaten, *Acta Scient. Math. Szeged,* **11** (1948), S. 207—224.

ИЗМЕНЕНИЯ АРГУМЕНТА И МОДУЛЯ МНОГОЧЛЕНА

Д. С.-НАДЬ (Сегед)

(Резюме)

В работе доказана следующая теорема:

Пусть многочлен $f(z)$ степени n не имеет корней в окружности $|z-c| \leqq r$, тогда имеем $W(c, z) \leqq \omega$ $(0 < \omega \leqq \pi)$, если $|z-c| \leqq r \sin\frac{\omega}{n}$, где

$$W(c, d) = \left| \operatorname{arc} \frac{f(c)}{f(d)} \right| \qquad (0 \leqq W(c, d) \leqq \pi).$$

Кроме этого доказаны некоторые другие теоремы такого типа.

CONTRIBUTIONS TO THE REDUCTION THEORY OF THE DECISION PROBLEM

Third paper

Prefix $(x_1)(Ex_2)\cdots(Ex_{n-2})(x_{n-1})(x_n)$, a single binary predicate

By

LÁSZLÓ KALMÁR (Szeged), corresponding member of the Academy

1. In a previous paper,[1] it has been proved that any formula of the first order predicate calculus is equivalent (as to being satisfiable or not) to some binary first order formula having a Gödel prefix[2]

$$(x_1)(x_2)(x_3)(Ex_4)\cdots(Ex_n) \tag{1}$$

and a matrix containing a single predicate variable. In another paper,[3] I have shown that in the above statement, we can replace the prefix (1) by the prefix

$$(x_1)(x_2)(Ex_3)\cdots(Ex_{n-1})(x_n), \tag{2}$$

containing three universal quantifiers just as (1), but having an advantage over (1) as to the *order* of the existential quantifiers[4] which is 3 in (1) but only 2 in (2). In the same paper, I proposed the question whether the same holds for the prefix

$$(x_1)(Ex_2)\cdots(Ex_{n-2})(x_{n-1})(x_n) \tag{3}$$

[1] LÁSZLÓ KALMÁR and JÁNOS SURÁNYI, On the reduction of the decision problem, second paper, Gödel prefix, a single binary predicate, *Journal of Symbolic Logic,* **12** (1947), pp. 65–73.

[2] See KURT GÖDEL, Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls, *Monatshefte für Mathematik und Physik,* **40** (1933), pp. 433–443, where an analogous reduction theorem has been proved, but saying nothing about the number of predicate variables contained in the matrix.

[3] LÁSZLÓ KALMÁR, Contributions to the reduction theory of the decision problem, first paper, prefix $(x_1)(x_2)(Ex_3)\ldots(Ex_{n-1})(x_n)$, a single binary predicate, *Acta Math. Hung.*, **1** (1950), pp. 64–73.

[4] I. e. the number of universal quantifiers preceding, or, the number of arguments of the descriptive functions involved by, the existential quantifiers in question.

too, where the order of the existential quantifiers is reduced to one.[5] Now, I shall answer this question affirmatively by

THEOREM 1. *To any given formula of the first order predicate calculus it is possible to construct an equivalent one with a prefix of the form* (3) *and a matrix containing no predicate variable other than a single binary one.*

2. To prove this theorem, we cannot use the *set-theoretic* method adopted in the previous papers (loc. cit. [1] and [3]), for it is based on the fact that for any individuals x, y, there is an ordered pair p with x and y as its first and second component, respectively, which requires, when formalized, a second order existential quantifier (Ep). Therefore, we shall employ an *arithmetic* method similar to that used in an older paper[6] where the analogous theorem for the Ackermann prefix[7]

$$(4)\qquad (Ex_1)(x_2)(Ex_3)(x_4)\cdots(x_n)$$

has been proved. In that paper, the set of positive integers divisible by 3 was used for the set of individuals (this can be done by the familiar Löwenheim—Skolem theorem); the pairs of individuals were replaced by the integers of the form $3k-1$, the ordered pair (x, y), $x, y \equiv 0 \pmod 3$, being represented by $3\omega(x/3, y/3)-1$, $\omega(i, j)$ denoting for any positive integers i, j the ordinal number of the pair (i, j) in the Cauchy enumeration of the pairs,

$$(1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (1,3),\ (2,2),\ (3,1),\ (1,4),\ (2,3),\ldots$$

(The integers of the form $3k+1$ were used, besides replacing the predicates contained in the original formula, as second exemplars of the individuals, in order to make it possible to express the relations corresponding to those

[5] A further reduction of the order of *all* existential quantifiers, viz. to zero, is impossible by CHURCH's theorem on the unsolvability of the decision problem by any recursive algorithm (ALONZO CHURCH, A note on the Entscheidungsproblem, *Journal of Symbolic Logic,* **1** (1936), pp. 40—41 and 101—102) and by an obviously recursive solution of the satisfiability question for first order formulae with a prefix containing no other existential quantifiers than those of order zero, see P. BERNAYS and M. SCHÖNFINKEL, Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, *Math. Annalen,* 99 (1928), pp. 342—372, especially pp. 359—360. However, the order of *some* of the existential quantifiers can be reduced to zero; hence the question arises, which is the smallest positive integer m such that to any first order formula **A** it is possible to construct another one with a prefix of the form $(Ex_1)\ldots(Ex_n)(y_1)(Ex_{n+1})\ldots(Ex_{n+m})(y_2)(y_3)$ and containing a single, binary, predicate variable in the matrix, n being dependent of **A**. By a slight modification of the argument used in the present paper, we can prove that this proposition holds for $m=50$ (and indeed, as we can prove by a further device, for $m=48$ too), see footnote [22]; but the minimal value of m is probably much less.

[6] LÁSZLÓ KALMÁR, On the reduction of the decision problem, first paper, Ackermann prefix, a single binary predicate, *Journal of Symbolic Logic,* 4 (1939), pp. 1—9.

[7] See WILHELM ACKERMANN, Beiträge zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, *Math. Annalen,* **112** (1936), pp. 419—432, where the analogous theorem but saying nothing about the number of predicate variables in the matrix has been proved.

between a pair and its components, as well as the predicates figuring in the original formula, by means of a single, binary, predicate.) Thus, instead of postulating the existence of a pair $p = (x, y)$ to any individuals x, y, we can construct it as $3\omega(x/3, y/3) - 1$; this construction can be formalized by means of the recursion equations of the function $\omega(i, j)$, requiring universal quantifiers only, and by means of the Peano existence postulates for 1 and $x+1$, playing a special rôle in the recursion equations, which require two existential quantifiers of the orders zero and one, respectively.

For our present purposes, we have to perform some modifications in this method. First, we shall use non-negative integers instead of positive ones, thus 0 instead of 1 as first integer; therefore, for non-negative integers i, j, $\omega(i, j)$ has to denote the ordinal number of the pair (i, j) in the sequence

$$(0,0),\ (0,1),\ (1,0),\ (0,2),\ (1,1),\ (2,0),\ (0,3),\ (1,2),\ (2,1), \ldots,$$

defined by the recursion equations

$$\left\{\begin{array}{l} \omega(0,0) = 1, \\ \omega(0, j+1) = \omega(j, 0) + 1, \\ \omega(i+1, j) = \omega(i, j+1) + 1. \end{array}\right. \tag{5}$$

This modification serves merely for technical convenience (owing to $3.0 = 0$ while $3.1 = 1 + 1 + 1$). Secondly, besides of pairs, we have to operate with triads of (non-negative) integers, for we have to regard the ternary descriptive functions involved by the third-order existential quantifiers of the original formula[8] as unary descriptive functions of triads. Thus, we need an enumerating function $\omega(i, j, k)$, analogous to $\omega(i, j)$, for triads instead of pairs. Such a function can be readily constructed by means of $\omega(i, j)$; e. g. by

$$\omega(i, j, k) = \omega(i, \omega(j, k) - 1). \tag{6}$$

Thirdly, we do not have as many universal quantifiers at disposal as needed to formalize the recursion equations of $\omega(i, j)$ as in the case of the prefix (4). Therefore, we have to use also existential quantifiers in the formalization; this is possible, because the recursion equations, being singular propositions, may be regarded as existential or universal propositions with the same right. In the case of regarding them as existential propositions, we shall need the corresponding unicity statements too; we shall see, three universal quantifiers will do for their formalization. In order to avoid existential quantifiers of the second or higher order, we shall formalize the recursion equations of the

[8] We shall suppose that the original first order formula (to which we have to construct an equivalent one with a prefix of the form (3) and a matrix containing a single, binary, predicate variable) has a prefix of the form (1); this we can do on account of the Gödel reduction theorem quoted above. As a matter of fact, we shall suppose $n = 4$ in (1) which we can do by Surányi's reduction theorem quoted in footnote [10]. Owing to the complications caused by the extraordinary universal quantifier (x_n), it is not profitable to spare use of triads by supposing that the original formula has a prefix of the form (2).

inverse functions $i=\chi_1(m), j=\chi_2(m)$ of the function $\omega(i,j)$, i. e. the unique solutions of the equation $\omega(i,j)=m$, viz.[9]

$$(7)\qquad \begin{cases} \chi_1(1)=\chi_2(1)=0, & \\ \left.\begin{array}{l}\chi_1(m+1)=0\\ \chi_2(m+1)=\chi_1(m)+1\end{array}\right\} & \text{if } \chi_2(m)=0, \\ \left.\begin{array}{l}\chi_1(m+1)=\chi_1(m)+1\\ \chi_2(m+1)=\chi_2(m)-1\end{array}\right\} & \text{if } \chi_2(m)\neq 0, \end{cases}$$

rather than the recursion equations (5). Fourthly, we have to replace the existential quantifier of order zero by a first order one, i. e. to interchange it with the immediately following universal quantifier. We shall justify this interchange similarly as in the papers loc. cit. [1] and [3], viz. by formulating a characteristic property of the individual belonging to the existential quantifier in question (i. e., of the integer 0) and postulating the unicity of an individual having that property. For this purpose, we shall sacrifice the simplest unary predicate $\Psi(x,x)$ which can be formed by means of the single binary predicate $\Psi(x,y)$ contained in the new formula, by defining $\Psi(x,x)$ to hold if and only if $x=0$; consequently, the characterization of the cases $x\equiv 0, 1, 2 \pmod 3$ will become more sophisticated, and requires some changes in the definition of $\Psi(x,y)$, in the first line for $x\equiv y \pmod 3$.

3. After these preliminaries, let us proceed to prove our theorem. Let **A** be a first order formula to which we want to construct an equivalent one with a prefix of the form (3) and a matrix containing no predicate variable but a single binary one. By a theorem of SURÁNYI,[10] we may suppose that **A** has the form

$$(8)\qquad \mathbf{A}=(x_1)(x_2)(x_3)(Ex_4)\mathbf{M},$$

where the matrix

$$\mathbf{M}=\mathbf{M}(F_1,\ldots,F_l;x_1,x_2,x_3,x_4)$$

contains the binary predicate variables $F_1,\ldots,F_l$ but no others; thus, **M** is a truth-function of the $16l$ arguments $F_\lambda(x_\mu,x_\nu)$; $\lambda=1,\ldots,l$; $\mu,\nu=1,2,3,4$.

[9] For the functions ω,χ_1,χ_2 defined by (5) and (7), we can prove readily by induction that

$$\omega(\chi_1(m),\chi_2(m))=m,$$
$$\chi_1(\omega(i,j))=i,\ \chi_2(\omega(i,j))=j$$

for any integers $m\geqq 1$; $i,j\geqq 0$.

[10] JÁNOS SURÁNYI, A logikai függvénykalkulus eldöntés-problémájának redukciójáról (Hungarian with German abstract: Zur Reduktion des Entscheidungsproblems des logischen Funktionenkalküls), *Matematikai és Fizikai Lapok*, **50** (1943), pp. 51—74, especially theorem 1, pp. 57—65 (and pp. 73—74 of the abstract); Contributions to the reduction theory of the decision problem, second paper, three universal, one existential quantifiers, *Acta Math. Hung.*, **1** (1950), pp. 261—271.

If **A** can be satisfied at all, then, by a familiar argument,[11] it can be satisfied over the set I of non-negative integers divisible by 3; moreover, for some predicates $\Phi_1, \ldots, \Phi_l$ defined over I, and for arbitrary non-negative integers[12] $x_1, x_2, x_3 \equiv 0$, we have

$$\mathbf{M}\left(\Phi_1, \ldots, \Phi_l; x_1, x_2, x_3, 3\omega\left(\frac{x_1}{3}, \frac{x_2}{3}, \frac{x_3}{3}\right)\right). \tag{9}$$

We define a predicate $\Psi(x, y)$ on the set J of all non-negative integers as follows:

(a) For $x \equiv 1, y \equiv 0$, $\Psi(x, y)$ holds if and only if either $x = 1, y = 0$ or $x = 3\lambda + 1, 1 \leq \lambda \leq l$, and $\Phi_\lambda\big(3\chi_1(y/3), 3\chi_2(y/3)\big)$ holds.

(b) For $x \equiv 0, y \equiv 2$, $\Psi(x, y)$ holds if ad only if $x = 3\chi_1\big((y+1)/3\big)$.

(c) For $x \equiv 2, y \equiv 1$, $\Psi(x, y)$ holds if and only if $y = 3\chi_2\big((x+1)/3\big) + 1$.

(d) For $y \equiv x + 1$, $\Psi(x, y)$ holds if and only if $y = x + 1$.

(e) For $x \equiv y \equiv 0$, $\Psi(x, y)$ holds if and only if $x = y = 0$.

(f) For $x \equiv y \equiv 1$, $\Psi(x, y)$ holds if and only if one of x, y equals 1, but not both.

(g) For $x \equiv y \equiv 2$, $\Psi(x, y)$ holds if and only if one of x, y equals 2, but not both.

In concise form, we can tabulate the definition of $\Psi(x, y)$ as follows:[13]

$x \equiv$ \\ $y \equiv$	0	1	2
0	$x = y = 0$	$y = x + 1$	$y = 3\chi_1\left(\frac{y+1}{3}\right)$
1	$(x = 1)(y = 0) \vee$ $\vee (4 \leq x \leq 3l + 1)\, \Phi_{\frac{x-1}{3}}\left(3\chi_1\left(\frac{y}{3}\right), 3\chi_2\left(\frac{y}{3}\right)\right)$	$(x = 1)(y \neq 1) \vee$ $\vee (x \neq 1)(y = 1)$	$y = x + 1$
2	$y = x + 1$	$y = 3\chi_2\left(\frac{x+1}{3}\right) + 1$	$(x = 2)(y \neq 2) \vee$ $\vee (x \neq 2)(y = 2)$

4. In the sequel, we shall need some lemmas, the first of which is obvious by (e), (f), (g).

LEMMA 1. *$\Psi(x, x)$ holds if and only if $x = 0$.*

LEMMA 2. *$\bar{\Psi}(x, x)\, \Psi(0, x)\, \Psi(x, 0)$ holds if and only if $x = 1$.*

PROOF. We have $\bar{\Psi}(1, 1)$, $\Psi(0, 1)$ and $\Psi(1, 0)$ by (f), (d) and (a), respectively. On the other hand, for $x \equiv 0, x \neq 0$ we have $\bar{\Psi}(0, x)$ by (e) and the

[11] Compare e. g. WILHELM ACKERMANN, loc. cit., especially pp. 421 - 422.

[12] Here and in the rest, "$a \equiv b$" means $a \equiv b \pmod 3$.

[13] For simplicity, we omit the conjunction sign. Later on, we shall abbreviate conjunctions of many terms with the product sign Π.

same holds also for $x \equiv 1, x \neq 1$ by (d); for $x \equiv 2$, we have $\overline{\Psi}(x, 0)$ by (d); and, for $x = 0$, $\overline{\Psi}(x, x)\, \Psi(0, x)$ yields a contradiction.

LEMMA 3. $\overline{\Psi}(x, x)\, \Psi(0, x)\, \Psi(1, x)$ *holds if and only if* $x = 2$.

PROOF. We have $\overline{\Psi}(2, 2)$ by (g), $\Psi(1, 2)$ by (d) and, owing to $\chi_1(1) = 0$, $\Psi(0, 2)$ by (b). On the other hand, for $x \equiv 0, x \neq 0$ we have $\overline{\Psi}(0, x)$ by (e) and the same holds also for $x \equiv 1, x \neq 1$ by (d); for $x \equiv 2, x \neq 2$, we have $\overline{\Psi}(1, x)$ by (d); and, for $x = 0$, $\overline{\Psi}(x, x)\, \Psi(0, x)$, for $x = 1$, $\overline{\Psi}(x, x)\, \Psi(1, x)$ are contradictions.

LEMMA 4. $\overline{\Psi}(x, 1)\, \overline{\Psi}(x, 2)$ *holds if and only if* $x \equiv 0, x \neq 0$.

PROOF. For $x \equiv 0, x \neq 0$, we have $\overline{\Psi}(x, 1)$ by (d) and, owing to $\chi_1(1) = 1$, $\overline{\Psi}(x, 2)$ by (b). On the other hand, for $x \equiv 1, x \neq 1$, we have $\Psi(x, 1)$ by (f) and the same holds also for $x = 0$ by (d) and for $x = 2$ by (c) and $\chi_2(1) = 0$. For $x \equiv 2, x \neq 2$, we have $\Psi(x, 2)$ by (g) and the same holds, by (d), for $x = 1$ too.

LEMMA 5. $\overline{\Psi}(0, x)\, \Psi(1, x)$ *holds if and only if* $x \equiv 1, x \neq 1$.

PROOF. For $x \equiv 1, x \neq 1$, we have $\overline{\Psi}(0, x)$ by (d), and $\Psi(1, x)$ by (f). On the other hand, for $x \equiv 0, x \neq 0$ we have $\overline{\Psi}(1, x)$ by (a) and the same holds also for $x \equiv 2, x \neq 2$ by (d) and for $x = 1$ by (f). For $x = 0$, we have $\Psi(0, x)$ by (e) and the same holds, by (b) and $\chi_1(1) = 0$, for $x = 2$ too.

LEMMA 6. $\overline{\Psi}(x, 0)\, \Psi(x, 2)$ *holds if and only if* $x \equiv 2, x \neq 2$.

PROOF. For $x \equiv 2$ we have $\overline{\Psi}(x, 0)$ by (d) and, supposing $x \neq 2$, also $\Psi(x, 2)$ by (g). On the other hand, for $x \equiv 0, x \neq 0$ we have $\overline{\Psi}(x, 2)$ by (b) and $\chi_1(1) = 0$, and the same holds also for $x \equiv 1, x \neq 1$ by (d) and for $x = 2$ by (g). For $x = 0$ we have $\Psi(x, 0)$ by (e) and the same holds, by (a), for $x = 1$ too.

Let us abbreviate

$$\Psi(x, x) \vee \overline{\Psi}(x, r_1)\, \overline{\Psi}(x, r_2) \text{ to } \Theta_0(x; r_1, r_2),$$
$$\overline{\Psi}(x, x)\, \Psi(r_0, x)\, \Psi(x, r_0) \vee \overline{\Psi}(r_0, x)\, \Psi(r_1, x) \text{ to } \Theta_1(x; r_0, r_1),$$
$$\overline{\Psi}(x, x)\, \Psi(r_0, x)\, \Psi(r_1, x) \vee \overline{\Psi}(x, r_0)\, \Psi(x, r_2) \text{ to } \Theta_2(x; r_0, r_1, r_2).$$

We infer from lemmas 1 and 4, from lemmas 2 and 5 and from lemmas 3 and 6,

LEMMA 7. $\Theta_0(x; 1, 2)$ *holds if and only if* $x \equiv 0$,

LEMMA 8. $\Theta_1(x; 0, 1)$ *holds if and only if* $x \equiv 1$

and

LEMMA 9. $\Theta_2(x; 0, 1, 2)$ *holds if and only if* $x \equiv 2$,
respectively.

Let us abbreviate

$$\{\Theta_0(x; r_1, r_2)\,\Theta_1(I; r_0, r_1) \vee \Theta_1(x; r_0, r_1)\,\Theta_2(y; r_0, r_1, r_2) \vee \vee\,\Theta_2(x; r_0, r_1, r_2)\,\overline{\Psi}(y, r_1)\,\overline{\Psi}(y, r_2)\}\,\Psi(x, y) \text{ to } \Gamma(x, y; r_0, r_1, r_2);$$

we have by lemmas 7, 8, 9, 4 and by (d),

LEMMA 10. $\Gamma(x, y; 0, 1, 2)$ *holds if and only if* $y = x + 1$.

Further, let us abbreviate

$$\Theta_2(x; r_0, r_1, r_2)\,\Theta_0(y; r_1, r_2)\,\Psi(y, x) \text{ to } X_1(x, y; r_0, r_1, r_2),$$
$$\Theta_2(x; r_0, r_1, r_2)\,\Theta_1(y; r_0, r_1)\,\Psi(x, y) \text{ to } X_2(x, y; r_0, r_1, r_2);$$

by lemmas 7, 8, 9 and by (b), (c) we have

LEMMA 11. $X_1(x, y; 0, 1, 2)$ *holds if and only if* $x \equiv 2$ *and* $y = 3\chi_1\left(\frac{x+1}{3}\right)$,

LEMMA 12. $X_2(x, y; 0, 1, 2)$ *holds if and only if* $x \equiv 2$ *and* $y = 3\chi_2\left(\frac{x+1}{3}\right) + 1$.

Finally, let us abbreviate

$$(\Psi(x, z) \sim \Psi(y, z))\,(\Psi(z, x) \sim \Psi(z, y)) \text{ to } \Delta(x, y; z);$$

obviously, we have then

LEMMA 13. *For any non-negative integers* x, z, $\Delta(x, x; z)$ *holds*.

5. Let x, y, z be arbitrary non-negative integers. We shall denote by $r_k\,(k = 0, \ldots, 3l+1)$; s, s', s''; x_ν, x'_ν $(\nu = 1, 2, 3, 4)$; x''_1, x'''_1; $y_1, y_2, y_3, y'_3, y''_3$; $p_{\mu\nu}, p'_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, 3, 4)$ special functions depending on x (at most).

In particular, let $r_0 = 0$, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$. Then we have

$$\Psi(r_0, r_0) \tag{10}$$

by lemma 1,

$$\Psi(y, y) \rightarrow \Delta(y, r_0; z) \tag{11}$$

by lemmas 1 and 13,

$$\overline{\Psi}(r_1, r_1)\,\Psi(r_0, r_1)\,\Psi(r_1, r_0) \tag{12}$$

by lemma 2,

$$\overline{\Psi}(y, y)\,\Psi(r_0, y)\,\Psi(y, r_0) \rightarrow \Delta(y, r_1; z) \tag{13}$$

by lemmas 2 and 13,

$$\overline{\Psi}(r_2, r_2)\,\Psi(r_0, r_2)\,\Psi(r_1, r_2) \tag{14}$$

by lemma 3, finally

$$\overline{\Psi}(y, y)\,\Psi(r_0, y)\,\Psi(r_1, y) \rightarrow \Delta(y, r_2; z) \tag{15}$$

by lemmas 3 and 13. By (10)—(15) the existence and the unicity of the integers 0, 1, 2 are formalized.

6. Let $s = x + 1$. We have

$$\Gamma(x, s; r_0, r_1, r_2) \tag{16}$$

by lemma 10,

$$\Gamma(x, y; r_0, r_1, r_2) \rightarrow \Delta(y, s; z) \tag{17}$$

and

$$\Gamma(y, s; r_0, r_1, r_2) \rightarrow \Delta(y, x; z) \tag{18}$$

by lemmas 10 and 13. By (16)—(18) the existence, unicity and admission of a unique inverse of $s = x + 1$ are formalized.

Further, let $r_k = k$ for $k = 3, \ldots, 3l + 1$. We have by lemma 10,

$$\Gamma(r_k, r_{k+1}; r_0, r_1, r_2) \text{ for } k = 2, \ldots, 3l. \tag{19}$$

7. We have by lemmas 7, 8, 9,

$$\Theta_0(x; r_1, r_2) \rightarrow \bar{\Theta}_1(x; r_0, r_1), \tag{20}$$

$$\Theta_1(x; r_0, r_1) \rightarrow \bar{\Theta}_2(x; r_0, r_1, r_2), \tag{21}$$

$$\Theta_2(x; r_0, r_1, r_2) \rightarrow \bar{\Theta}_0(x; r_1, r_2); \tag{22}$$

they formalize that the cases $x \equiv 0, x \equiv 1, x \equiv 2$ exclude each other.

8. Let $x_1 = 3\chi_1\left(\frac{x+1}{3}\right)$ for $x \equiv 2$ and[14] 0 for $x \not\equiv 2$; $y_1 = 3\chi_2\left(\frac{x+1}{3}\right) + 1$ for $x \equiv 2$ and 1 for $x \not\equiv 2$. By lemmas 11, 12 and 13, we have the propositions

$$\mathrm{X}_1(x, y; r_0, r_1, r_2) \rightarrow \Delta(x_1, y; z), \tag{23}$$

$$\mathrm{X}_2(x, y; r_0, r_1, r_2) \rightarrow \Delta(y_1, y; z) \tag{24}$$

and, owing to the fact that $\chi_1(m) = \chi_1(n)$ and $\chi_2(m) = \chi_2(n)$ imply $m = n$,

$$\Theta_2(x; r_0, r_1, r_2)\, \mathrm{X}_1(y, x_1; r_0, r_1, r_2)\, \mathrm{X}_2(y, y_1; r_0, r_1, r_2) \rightarrow \Delta(y, x; z), \tag{25}$$

formalizing the unicity of $\chi_1(m)$, $\chi_2(m)$ and the admission (together) of a unique inverse. At the same time, they formalize the unicity of a pair with given components.[15]

9. Next, we shall formalize the recursion equations (7) for $\chi_1(m)$, $\chi_2(m)$. Omitting the double equation[16] $\chi_1(1) = \chi_2(1) = 0$, we can write them as follows,

[14] The definitions of x_1 and y_1 for $x \not\equiv 2$ are chosen as if we should have $\chi_1(m) = \chi_2(m) = 0$ for non-integral values of m.

[15] Remember that the integer $3m - 1$ represents the pair $\left(3\chi_1(m), 3\chi_2(m)\right)$, and $3\chi_2(m) + 1$ represents a second exemplar of the integer $3\chi_2(m)$; see section **2.**

[16] We can omit this equation for the proposition formalizing it, viz.

$$\mathrm{X}_1(r_2, r_0; r_0, r_1, r_2)\, \mathrm{X}_2(r_2, r_1; r_0, r_1, r_2),$$

or, written in full,

$$\begin{gathered}\left(\bar{\Psi}(r_2, r_2)\, \Psi(r_0, r_2)\, \Psi(r_1, r_2) \vee \bar{\Psi}(r_2, r_0)\, \Psi(r_2, r_2)\right)\left(\Psi(r_0, r_0) \vee \right.\\ \left. \vee \bar{\Psi}(r_0, r_1)\, \bar{\Psi}(r_0, r_2)\right) \Psi(r_0, r_2) \left(\bar{\Psi}(r_2, r_2)\, \Psi(r_0, r_2)\, \Psi(r_1, r_2) \vee \right.\\ \left. \vee \bar{\Psi}(r_2, r_0)\, \Psi(r_2, r_2)\right)\left(\bar{\Psi}(r_1, r_1)\, \Psi(r_0, r_1)\, \Psi(r_1, r_0) \vee \bar{\Psi}(r_0, r_1)\, \Psi(r_1, r_1)\right) \Psi(r_2, r_1),\end{gathered}$$

x denoting an arbitrary positive integer with $x \equiv 2$,

$$(26)\qquad 3\chi_1\left(\frac{(x+3)+1}{3}\right)=0 \text{ if } 3\chi_2\left(\frac{x+1}{3}\right)+1=1,$$

$$(27)\qquad 3\chi_2\left(\frac{(x+3)+1}{3}\right)+1=3\chi_1\left(\frac{x+1}{3}\right)+4=x_1+4 \text{ if } 3\chi_2\left(\frac{x+1}{3}\right)+1=1,$$

$$(28)\qquad 3\chi_1\left(\frac{(x+3)+1}{3}\right)=3\chi_1\left(\frac{x+1}{3}\right)+3=x_1+3 \text{ if } 3\chi_2\left(\frac{x+1}{3}\right)+1\neq 1,$$

$$(29)\qquad 3\chi_2\left(\frac{(x+3)+1}{3}\right)+1=3\chi_2\left(\frac{x+1}{3}\right)-2=y_1-3 \text{ if } 3\chi_2\left(\frac{x+1}{3}\right)+1\neq 1.$$

Defining $s'=x+2$ and $s''=x+3$, we have

$$(30)\qquad \Gamma(s,s';r_0,r_1,r_2)\,\Gamma(s',s'';r_0,r_1,r_2)$$

by lemma 10 and

$$(31)\qquad \mathrm{X}_2(x,r_1;r_0,r_1,r_2)\rightarrow \mathrm{X}_1(s'',r_0;r_0,r_1,r_2)$$

by (26), lemmas 11 and 12. Further, defining $x_1'=x_1+1$, $x_1''=x_1+2$, $x_1'''=x_1+3$ and[17] $y_2=x_1+4$, we have

$$(32)\qquad \Gamma(x_1,x_1';r_0,r_1,r_2)\,\Gamma(x_1',x_1'';r_0,r_1,r_2)\,\Gamma(x_1'',x_1''';\ r_0,r_1,r_2)\,\Gamma(x_1''',y_2;r_0,r_1,r_2)$$

by lemma 10,

$$(33)\qquad \mathrm{X}_2(x,r_1;r_0,r_1,r_2)\rightarrow \mathrm{X}_2(s'',y_2;r_0,r_1,r_2)$$

by (27) and lemma 12, and[18]

$$(34)\qquad \Theta_2(x;r_0,r_1,r_2)\,\overline{\mathrm{X}}_2(x,r_1;r_0,r_1,r_2)\rightarrow \mathrm{X}_1(s'',x_1''';r_0,r_1,r_2)$$

by (28), lemmas 9, 11 and 12. Finally, defining $y_3=y_1-3$, $y_3'=y_1-2$ and $y_3''=y_1-1$, we have

$$(35)\qquad \Gamma(y_3,y_3';r_0,r_1,r_2)\,\Gamma(y_3',y_3'';r_0,r_1,r_2)\,\Gamma(y_3'',y_1;r_0,r_1,r_2)$$

by lemma 10 and

$$(36)\qquad \Theta_2(x;r_0,r_1,r_2)\,\overline{\mathrm{X}}_2(x,r_1;r_0,r_1,r_2)\rightarrow \mathrm{X}_2(s'',y_3;r_0,r_1,r_2)$$

is an obvious consequence of

$$\overline{\Psi}(r_2,r_2)\,\Psi(r_0,r_2)\,\Psi(r_1,r_2)\,\Psi(r_0,r_0)\,\overline{\Psi}(r_1,r_1)\,\Psi(r_0,r_1)\,\Psi(r_1,r_0)\,\Psi(r_2,r_1),$$

i. e. of (14), (10), (12) and $\Psi(r_2,r_1)$. The last of them is, again, a consequence of (22); indeed, taking r_2 for x and writing in full, (22) becomes

$$\big(\overline{\Psi}(r_2,r_2)\,\Psi(r_0,r_2)\,\Psi(r_1,r_2)\vee\overline{\Psi}(r_2,r_0)\,\Psi(r_2,r_2)\big)\rightarrow\overline{\Psi(r_2,r_2)\vee\overline{\Psi}(r_2,r_1)\,\overline{\Psi}(r_2,r_2)};$$

here, the antecedent holds by (14) and the consequent can be written as

$$\overline{\Psi}(r_2,r_2)\big(\Psi(r_2,r_1)\vee\Psi(r_2,r_2)\big)$$

which implies obviously $\Psi(r_2,r_1)$.

[17] For typographical reasons, we denote x_1+4 by y_2 rather than by x_1''''.

[18] By the definition of X_2 and by (12), the antecedent of (34) and (36) can be simplified to

$$\Theta_2(x;r_0,r_1,r_2)\,\Psi(x,r_1).$$

by (29), lemmas 9 and 12. By (30)—(36), the required formalization of the recursion equations (26)—(29) has been performed.

10. Finally, we have to formalize the fact that for any triad[19] (x_1, x_2, x_3) of non-negative integers x_1, x_2, x_3 divisible by 3, there is a non-negative integer $x \equiv 0$, viz. $x_4 = 3\omega\left(\frac{x_1}{3}, \frac{x_2}{3}, \frac{x_3}{3}\right)$, such that, on account of (9), $\mathbf{M}(\Phi_1, \ldots, \Phi_l; x_1, x_2, x_2, x_4)$ holds. Conforming to the representation of a pair (x, y) by $3\omega(x/3, y/3) - 1$ (x and y being non-negative integers divisible by 3), we shall represent the triad (x_1, x_2, x_3) by the integer

$$x = 3\omega(x_1/3, x_2/3, x_3/3) - 1 = 3\omega(x_1/3, \omega(x_2/3, x_3/3) - 1) - 1,$$

whence $x_1 = 3\chi_1((x+1)/3)$ and

$$\omega\left(\frac{x_2}{3}, \frac{x_3}{3}\right) = \chi_2\left(\frac{x+1}{3}\right) + 1 = \frac{y_1+2}{3}, \tag{37}$$

thus $x_2 = 3\chi_1((y_1+2)/3)$, $x_3 = 3\chi_2((y_1+2)/3)$. We shall adopt these equations as definitions of the functions x_2, x_3 of x and this for $x \not\equiv 2$ too, in which case, owing to $y_1 = 1$, we have $x_2 = x_3 = 0$; we get (37) as a consequence of these definitions. Further, we define $x_4 = 3\omega(x_1/3, x_2/3, x_3/3)$, so that we have $x_4 = x + 1$ for $x \equiv 2$ (and $x_4 = 3$ for $x \not\equiv 2$) and thus, by lemma 10,

$$\Theta_2(x; r_0, r_1, r_2) \rightarrow \Gamma(x, x_4; r_0, r_1, r_2). \tag{38}$$

Now, to make possible a formalization of $\mathbf{M}(\Phi_1, \ldots, \Phi_l; x_1, x_2, x_3, x_4)$ by means of the single predicate Ψ, we introduce the integers $p_{\mu\nu}$ representing the pairs (x_μ, x_ν), viz. $p_{\mu\nu} = 3\omega(x_\mu/3, x_\nu/3) - 1$ for $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$. In particular, we have $p_{23} = 3\omega(x_2/3, x_3/3) - 1 = y_1 + 1$ by (37), hence

$$\Gamma(y_1, p_{23}; r_0, r_1, r_2) \tag{39}$$

by lemma 10. On the other hand, we have

$$x_\mu = 3\chi_1\left(\frac{p_{\mu\nu}+1}{3}\right), \quad x_\nu = 3\chi_2\left(\frac{p_{\mu\nu}+1}{3}\right) \quad \text{for } \mu, \nu = 1, 2, 3, 4;$$

therefore, defining $x'_\nu = x_\nu + 1$ for $\nu = 2, 3, 4$ too[20], we have

$$\Gamma(x_\nu, x'_\nu; r_0, r_1, r_2) \quad \text{for } \nu = 2, 3, 4 \tag{40}$$

by lemma 10,

$$\mathrm{X}_1(p_{\mu\nu}, x_\mu; r_0, r_1, r_2) \quad \text{for } \mu, \nu = 1, 2, 3, 4 \tag{41}$$

by lemma 11, and

$$\mathrm{X}_2(p_{\mu\nu}, x'_\nu; r_0, r_1, r_2) \quad \text{for } \mu, \nu = 1, 2, 3, 4 \tag{42}$$

[19] Here, x_1 denotes (as well as x_2 and x_3) any non-negative integer divisible by 3, not necessarily the function of x defined in section **8.** Later on, it will coincide automatically again with that function.

[20] We defined $x'_1 = x_1 + 1$ in section **9.**

by lemma 12. Finally, defining $p'_{\mu\nu} = p_{\mu\nu} + 1 = 3\omega(x_\mu/3, x_\nu/3)$ for $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$, we have

(43) $$\Gamma(p_{\mu\nu}, p'_{\mu\nu}; r_0, r_1, r_2) \quad \text{for } \mu, \nu = 1, 2, 3, 4$$

by lemma 10 and, on account of $x_\mu = 3\chi_1(p'_{\mu\nu}/3)$, $x_\nu = 3\chi_2(p'_{\mu\nu}/3)$ and of (a) (see section 3), we have

$$\Phi_\lambda(x_\mu, x_\nu) \sim \Psi(r_{3\lambda+1}, p'_{\mu\nu}) \quad \text{for } \lambda = 1, \ldots, l;\ \mu, \nu = 1, 2, 3, 4.$$

Consequently, denoting the matrix formed of $\mathbf{M}(F_1, \ldots, F_l; x_1, x_2, x_3, x_4)$ by replacing $F_\lambda(x_\mu, x_\nu)$ throughout by $G(u_{3\lambda+1}, v_{\mu\nu})$ for $\lambda = 1, \ldots, l; \mu, \nu = 1, 2, 3, 4$, by $\mathbf{M}^* = \mathbf{M}^*(G; u_4, u_7, \ldots, u_{3l+1}, v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{44})$, we have

(44) $$\mathbf{M}^*(\Psi; r_4, r_7, \ldots, r_{3l+1}, p'_{11}, p'_{12}, \ldots, p'_{44}).$$

11. Now, let us form the conjunction of (10)—(25), (30)—(36), (38)—(44), replace Ψ throughout[21] by a predicate variable G, let us bind the individual variable x by a universal quantifier, $r_0, \ldots, r_{3l+1}, s, s', s'', x_1, x_2, x_3, x_4, x'_1, x''_1, x'''_1, x'_2, x'_3, x'_4, y_1, y_2, y_3, y'_3, y''_3, p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{44}, p'_{11}, p'_{12}, \ldots, p'_{44}$ (regarded as individual variables) by existential quantifiers, and the individual variables y, z by universal quantifiers again[22]. Thus, we get a first order formula $\mathbf{B}$ whose prefix has obviously the form (3) and its matrix contains the single predicate variable G. By the above arguments, $\mathbf{B}$ can be satisfied if $\mathbf{A}$ can. To prove theorem 1, we have still to show that the converse statement holds too.

12. If $\mathbf{B}$ can be satisfied on a (non empty) set J', then, for a suitable binary predicate Ψ defined over J', the proposition formed of (10)—(25), (30)—(36) and (38)—(44) by replacing the individual variables $r_0, \ldots, r_{3l+1}, s, s', s'', x_1, x_2, x_3, x_4, x'_1, x''_1, x'''_1, x'_2, x'_3, x'_4, y_1, y_2, y_3, y'_3, y''_3, p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{44}, p'_{11}, p'_{12}, \ldots, p'_{44}$ by suitable unary descriptive functions $\varrho_0(x), \ldots, \varrho_{3l+1}(x), \sigma(x), \sigma'(x), \sigma''(x), \xi_1(x), \xi_2(x), \xi_3(x), \xi_4(x), \xi'_1(x), \xi''_1(x), \xi'''_1(x), \xi'_2(x), \xi'_3(x), \xi'_4(x), \eta_1(x), \eta_2(x), \eta_3(x), \eta'_3(x), \eta''_3(x), \pi_{11}(x), \pi_{12}(x), \ldots, \pi_{44}(x), \pi'_{11}(x), \pi'_{12}(x), \ldots, \pi'_{44}(x)$, defined over J', holds for arbitrary $x, y, z \in J'$. We shall quote the proposition formed thus by the numbers of the original propositions; similarly for some different substitutions and other modifications to be indicated later on.

[21] Of course, in the abbreviations $\Theta_0(x; r_1, r_2)$, $\Theta_1(x; r_0, r_1)$, $\Theta_2(x; r_0, r_1, r_2)$, $\Gamma(x, y; r_0, r_1, r_2)$, $X_1(x, y; r_0, r_1, r_2)$, $X_2(x, y; r_0, r_1, r_2)$, $\Delta(x, y; z)$ too.

[22] Of course, this is to be understood that the quantifiers are placed at the beginning of the conjunction in the order mentioned above. Interchanging the existential quantifiers $(Er_0)\ldots(Er_{3l+1})$ with the general quantifier (x), we get another formula $\mathbf{B}'$ which can be proved, by a slight modification of our proof, to be equivalent to $\mathbf{A}$ $\mathbf{B}'$ has a prefix of the form $(Ex_1)\ldots(Ex_n)(y_1)(Ex_{n+1})\ldots(Ex_{n+50})(y_2)(y_3)$, mentioned in footnote [5]. By a further modification, we could save two existential quantifiers by giving the rôle of x_4 and x'_4 to s and s', respectively; thus, we should get a formula $\mathbf{B}''$, equivalent to $\mathbf{A}$, having a prefix of the form $(Ex_1)\ldots(Ex_n)(y_1)(Ex_{n+1})\ldots(Ex_{n+48})(y_2)(y_3)$ (and a matrix containing a single, binary, predicate variable).

By the definition of $\Delta(x, y; z)$ we have obviously

LEMMA 14. *If, for some $x, y \in J'$, we have $\Delta(x, y; z)$ for any $z \in J'$, then we can replace x by y, and conversely, in any proposition containing the single predicate Ψ* (thus, in any proposition composed, besides of Ψ, of the predicates $\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \Gamma, \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \Delta$ and $\mathbf{M}^*$, these predicates being abbreviations for some propositions formed of Ψ alone).

13. Let ξ_0 be an arbitrary fixed element of J'. Let $\varrho_\varkappa = \varrho_\varkappa(\xi_0)$ for $\varkappa = 0, \ldots, 3l+1$. We have by (10), taking ξ_0 for x,

$$\Psi(\varrho_0, \varrho_0); \tag{10'}$$

hence, by (11), $y = \varrho_0$, we infer

$$\Delta(\varrho_0, \varrho_0(x); z) \tag{45}$$

for any $x, z \in J'$. Thus, by lemma 14, we can replace r_0 by ϱ_0 (instead of $\varrho_0(x)$) in (12)—(25), (30)—(36) and (38)—(44).

Again, by (12), $x = \xi_0$, we have

$$\overline{\Psi}(\varrho_1, \varrho_1)\, \Psi(\varrho_0, \varrho_1)\, \Psi(\varrho_1, \varrho_0); \tag{12'}$$

hence, by (13), $y = \varrho_1$, we infer

$$\Delta(\varrho_1, \varrho_1(x); z) \tag{46}$$

for any $x, z \in J'$. Thus, by lemma 14, we can replace r_1 by ϱ_1 (instead of $\varrho_1(x)$) in (14)—(25), (30)—(36) and (38)—(44).

Again, by (14), $x = \xi_0$, we have

$$\overline{\Psi}(\varrho_2, \varrho_2)\, \Psi(\varrho_0, \varrho_2)\, \Psi(\varrho_1, \varrho_2); \tag{14'}$$

hence, by (15), $y = \varrho_2$, we infer

$$\Delta(\varrho_2, \varrho_2(x); z) \tag{47}$$

for any $x, z \in J'$. Thus, by lemma 14, we can replace r_2 by ϱ_2 (instead of $\varrho_2(x)$) in (16)—(25), (30)—(36) and (38)—(44).

14. Let us abbreviate $\Gamma(x, y; \varrho_0, \varrho_1, \varrho_2)$ to $\Gamma(x, y)$, $\Theta_0(x; \varrho_1, \varrho_2)$ to $\Theta_0(x)$, $\Theta_1(x; \varrho_0, \varrho_1)$ to $\Theta_1(x)$, $\Theta_2(x; \varrho_0, \varrho_1, \varrho_2)$ to $\Theta_2(x)$, $\mathrm{X}_1(x, y; \varrho_0, \varrho_1, \varrho_2)$ to $\mathrm{X}_1(x, y)$, $\mathrm{X}_2(x, y; \varrho_0, \varrho_1, \varrho_2)$ to $\mathrm{X}_2(x, y)$. Thus, we can omit the arguments after the semicolon, except of Δ and $\mathbf{M}^*$, in (16)—(25), (30)—(36) and (38)—(44).

Now, we prove

LEMMA 15. *For any $x, y, z, u \in J'$, we have*

$$\Gamma(x, y)\, \Gamma(x, u) \rightarrow \Delta(u, y; z)$$

and

$$\Gamma(x, y)\, \Gamma(u, y) \rightarrow \Delta(u, x; z).$$

Indeed, suppose first $\Gamma(x, y)$ and $\Gamma(x, u)$. Then, we have by (17),

$$\Delta(y, \sigma(x); z)\, \Delta(u, \sigma(x); z)$$

for any $z \in J'$; hence, by lemma, $\Delta(u, y; z)$. Suppose secondly $\Gamma(x, y)$ and $\Gamma(u, y)$. Then, we have again, by (17), $\Delta(y, \sigma(x); z)$ for any $z \in J'$; hence, by lemma 14, $\Gamma(u, \sigma(x))$ which gives, by (18), $\Delta(u, x; z)$ for any $z \in J'$.

As an application of lemma 15, we can prove, for any $x, z \in J'$, the proposition

(48) $$\Delta(\varrho_\varkappa, \varrho_\varkappa(x); z),$$

shown for $\varkappa = 0, 1, 2$ by (45), (46), (47), respectively, for $\varkappa = 3, \ldots, 3l+1$ too. Indeed, supposing (48) true for some $\varkappa$, $\varkappa = 2, \ldots, 3l$, we have

$$\Gamma(\varrho_\varkappa, \varrho_{\varkappa+1}(x))$$

by (19) and lemma 14 and

(19′) $$\Gamma(\varrho_\varkappa, \varrho_{\varkappa+1})$$

by (19), $x = \xi_0$; hence, we get $\Delta(\varrho_{\varkappa+1}, \varrho_{\varkappa+1}(x); z)$ by lemma 15; thus, (48) has been proved by induction.

We show that (19′), just proved for $\varkappa = 2, \ldots, 3l$, holds for $\varkappa = 0$ and $\varkappa = 1$ too. Indeed, by (10′), (12′) and (14′) we have, remembering to the definitions of Θ_0, Θ_1, and Θ_2,

(49) $$\Theta_0(\varrho_0)\, \Theta_1(\varrho_1)\, \Theta_2(\varrho_2);$$

as we have $\Psi(\varrho_0, \varrho_1)$ and $\Psi(\varrho_1, \varrho_2)$ by (12′) and (14′), respectively, a glance at the definition of Γ shows that $\Gamma(\varrho_0, \varrho_1)$ and $\Gamma(\varrho_1, \varrho_2)$ hold.

Defining

$$\varrho_{\varkappa+1} = \sigma(\varrho_\varkappa) \text{ for } \varkappa = 3l+1, 3l+2, \ldots,$$

we see by (16), $x = \varrho_\varkappa$, that (19′) holds for $\varkappa = 3l+1, 3l+2, \ldots$ too.

By (19′) we infer[23] from lemma 15

(50) $$\Gamma(\varrho_\varkappa, y) \rightarrow \Delta(y, \varrho_{\varkappa+1}; z)$$

and

(51) $$\Gamma(y, \varrho_{\varkappa+1}) \rightarrow \Delta(y, \varrho_\varkappa; z)$$

for $\varkappa = 0, 1, \ldots$ and any $y, z \in J'$. More generally, we get

LEMMA 16. *For*[24] $\varkappa = 0, 1, \ldots; \nu = 1, 2, \ldots$ *and for any* $y, y', \ldots, y^{(\nu-1)}$, $z \in J'$ *we have*

(52) $$\Gamma(\varrho_\varkappa, y)\, \Gamma(y, y') \cdots \Gamma(y^{(\nu-2)}, y^{(\nu-1)}) \rightarrow \Delta(y^{(\nu-1)}, \varrho_{\varkappa+\nu}; z)$$

and

(53) $$\Gamma(y, y')\, \Gamma(y', y'') \cdots \Gamma(y^{(\nu-2)}, y^{(\nu-1)})\, \Gamma(y^{(\nu-1)}, \varrho_{\varkappa+\nu}) \rightarrow \Delta(y, \varrho_\varkappa; z).$$

PROOF. For $\nu = 1$, (52) and (53) become identical with (50) and (51), respectively. Supposing (52) for some ν, we have

$$\Gamma(\varrho_\varkappa, y)\, \Gamma(y, y') \cdots \Gamma(y^{(\nu-2)}, y^{(\nu-1)})\, \Gamma(y^{(\nu-1)}, y^{(\nu)}) \rightarrow \Gamma(\varrho_{\varkappa+\nu}, y^{(\nu)})$$

[23] For $\varkappa = 3l+1, 3l+3, \ldots$, we get (50) and (51) more directly from (17) and (18) by taking $x = \varrho_\varkappa$.

[24] We shall need lemma 16 for $\nu = 3$ and $\nu = 4$ only.

by lemma 14, and

$$\Gamma(\varrho_{\varkappa+\nu}, y^{(\nu)}) \to \Delta(y^{(\nu)}, \varrho_{\varkappa+\nu+1}; z)$$

by (50); hence, (52) with $\nu+1$ instead of ν follows. Again, supposing (53) for some ν and for any $y, y', \ldots, y^{(\nu-1)}, z \in J'$, we have

$$\Gamma(y', y'')\,\Gamma(y'', y''')\cdots\Gamma(y^{(\nu-1)}, y^{(\nu)})\,\Gamma(y^{(\nu)}, \varrho_{\varkappa+\nu+1}) \to \Delta(y', \varrho_{\varkappa+1}; z);$$

therefore, by lemma 14

$$\Gamma(y, y')\,\Gamma(y', y'')\cdots\Gamma(y^{(\nu-1)}, y^{(\nu)})\,\Gamma(y^{(\nu)}, \varrho_{\varkappa+\nu+1}) \to \Gamma(y, \varrho_{\varkappa+1});$$

hence, (53) with $\nu+1$ instead of ν follows by (51).

15. By (20), (21) and (22) we see, remembering to the definition of Γ, that

$$\Gamma(x, y) \to \big(\Theta_0(x) \to \Theta_1(y)\big)\big(\Theta_1(x) \to \Theta_2(y)\big)\big(\Theta_2(x) \to \overline{\Psi}(y, r_1)\,\overline{\Psi}(y, r_2)\big);$$

hence, by

(54) $$\overline{\Psi}(y, r_1)\,\overline{\Psi}(y, r_2) \to \Theta_0(y)$$

which is a consequence of the definition of Θ_0, we have

$$\Gamma(x, y) \to \big(\Theta_0(x) \to \Theta_1(y)\big)\big(\Theta_1(x) \to \Theta_2(y)\big)\big(\Theta_2(x) \to \Theta_0(y)\big).$$

By (19′), we infer

$$\big(\Theta_0(\varrho_\varkappa) \to \Theta_1(\varrho_{\varkappa+1})\big)\big(\Theta_1(\varrho_\varkappa) \to \Theta_2(\varrho_{\varkappa+1})\big)\big(\Theta_2(\varrho_\varkappa) \to \Theta_0(\varrho_{\varkappa+1})\big),$$

which, combining with (49), gives by an obvious induction

(55) $$\Theta_0(\varrho_{3\nu})\,\Theta_1(\varrho_{3\nu+1})\,\Theta_2(\varrho_{3\nu+2}) \quad \text{for } \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

Further, by (10′) and by the definition of Θ_1 and Θ_2 (or by (49), (20) and (22)) we have

$$\overline{\Theta}_1(\varrho_0)\,\overline{\Theta}_2(\varrho_0);$$

hence, as we have $\Psi(\varrho_0, \varrho_1)$ by (12′) (or as we have $\Psi(\varrho_0, \varrho_2)$ by (14′)), the definition of Γ gives

(56) $$\overline{\Gamma}(x, \varrho_0)$$

for any $x \in J'$.

16. Now we prove

LEMMA 17. *For any $x, y, z, u, v \in J'$, we have*

$$\mathrm{X}_1(x, y)\,\mathrm{X}_1(x, u) \to \Delta(u, y; z)$$
$$\mathrm{X}_2(x, y)\,\mathrm{X}_2(x, v) \to \Delta(v, y; z)$$

and

$$\mathrm{X}_1(x, u)\,\mathrm{X}_2(x, v)\,\mathrm{X}_1(y, u)\,\mathrm{X}_2(y, v) \to \Delta(x, y; z).$$

Indeed, supposing $\mathrm{X}_1(x, y)$ and $\mathrm{X}_1(x, u)$, we have by (23)

$$\Delta(\xi_1(x), y; z)\,\Delta(\xi_1(x), u; z)$$

for any $z \in J'$; hence, by lemma 14, $\Delta(u, y; z)$. Similarly, supposing $\mathrm{X}_2(x, y)$

and $X_2(x, v)$, we have by (24)

$$\Delta(\eta_1(x), y; z)\,\Delta(\eta_1(x), v; z)$$

for any $z \in J'$; hence, by lemma 14, $\Delta(v, y; z)$. Finally, supposing $X_1(x, u)$, $X_2(x, v)$, $X_1(y, u)$ and $X_2(y, v)$, we have $\Theta_2(x)$ by the definition of X_1 (or of X_2) and

$$\Delta(\xi_1(x), u; z)\,\Delta(\eta_1(x), v; z)$$

for any $z \in J'$; hence, by lemma 14, we have

$$X_1(y, \xi_1(x))\,X_2(y, \eta_1(x));$$

therefore, from (25) we infer $\Delta(y, x; z)$.

17. Now, we proceed to prove

LEMMA 18. *For* $\nu = 1, 2, \ldots$ *we have*

(57) $$X_1(\varrho_{3\nu-1}, \varrho_{3\chi_1(\nu)})$$

and

(58) $$X_2(\varrho_{3\nu-1}, \varrho_{3\chi_2(\nu)+1}).$$

For $\nu = 1$, we have to prove $X_1(\varrho_2, \varrho_0)$ and $X_2(\varrho_2, \varrho_1)$, i. e., on account of the definitions of X_1 and X_2, $\Theta_2(\varrho_2)\,\Theta_0(\varrho_0)\,\Psi(\varrho_0, \varrho_2)$ and $\Theta_2(\varrho_2)\,\Theta_1(\varrho_1)\,\Psi(\varrho_2, \varrho_1)$. As we have $\Theta_0(\varrho_0)$, $\Theta_1(\varrho_1)$ and $\Theta_2(\varrho_2)$ by (49) and $\Psi(\varrho_0, \varrho_2)$ by (14'), we have still to show[25] $\Psi(\varrho_2, \varrho_1)$. In the opposite case, i. e. $\overline{\Psi}(\varrho_2, \varrho_1)$, we should have by $\overline{\Psi}(\varrho_2, \varrho_2)$ (see (14')) and (54), $\Theta_0(\varrho_2)$, while, by (49) and (22), we have $\overline{\Theta}_0(\varrho_2)$. Thus, we have proved (57) and (58) for $\nu = 1$.

Now, suppose (57) and (58) for some ν; we shall prove

(59) $$X_1(\sigma''(\varrho_{3\nu-1}), \varrho_{3\chi_1(\nu+1)})$$

and

(60) $$X_2(\sigma''(\varrho_{3\nu-1}), \varrho_{3\chi_2(\nu+1)+1}).$$

As we have $\Gamma(\varrho_{3\nu-1}, \sigma(\varrho_{3\nu-1}))$ by (16) and $\Gamma(\sigma(\varrho_{3\nu-1}), \sigma'(\varrho_{3\nu-1}))\,\Gamma(\sigma'(\varrho_{3\nu-1}), \sigma''(\varrho_{3\nu-1}))$ by (30) and therefore, $\Delta(\sigma''(\varrho_{3\nu-1}), \varrho_{3\nu+2}; z)$ for any $z \in J'$ by lemma 16, (59) and (60) imply, by lemma 14, $X_1(\varrho_{3\nu+2}, \varrho_{3\chi_1(\nu+1)})$ and $X_2(\varrho_{3\nu+2}, \varrho_{3\chi_2(\nu+1)+1})$, i. e. (57) and (58) with $\nu+1$ instead of ν.

Corresponding to the recursive definition of χ_1 and χ_2, we have to distinguish between the cases $\chi_2(\nu) = 0$ and $\chi_2(\nu) \neq 0$. In the first case, we have $X_2(\varrho_{3\nu-1}, \varrho_1)$ by (58); hence, by (31), $X_1(\sigma''(\varrho_{3\nu-1}), \varrho_0)$, i. e., (59) (since $\chi_1(\nu+1) = 0$ by (7)); and, by (33),

(61) $$X_2(\sigma''(\varrho_{3\nu-1}), \eta_2(\varrho_{3\nu-1})).$$

Now, we have

$$\Gamma(\xi_1(\varrho_{3\nu-1}), \xi_1'(\varrho_{3\nu-1}))\,\Gamma(\xi_1'(\varrho_{3\nu-1}), \xi_1''(\varrho_{3\nu-1}))\cdot$$
$$\cdot\,\Gamma(\xi_1''(\varrho_{3\nu-1}), \xi_1'''(\varrho_{3\nu-1}))\,\Gamma(\xi_1'''(\varrho_{3\nu-1}), \eta_2(\varrho_{3\nu-1}))$$

[25] The following proof of $\Psi(\varrho_2, \varrho_1)$ is essentially the same as that of $\Psi(r_2, r_1)$ in footnote [16].

by (32) and

(62) $$\Delta(\xi_1(\varrho_{3\nu-1}), \varrho_{3\chi_1(\nu)}; z)$$

for any $z \in J'$ by (57) and (23); hence, by lemma 14,

(63) $$\Gamma(\varrho_{3\chi_1(\nu)}, \xi_1'(\varrho_{3\nu-1}))\, \Gamma(\xi_1'(\varrho_{3\nu-1}), \xi_1''(\varrho_{3\nu-1}))\cdot \cdot \Gamma(\xi_1''(\varrho_{3\nu-1}), \xi_1'''(\varrho_{3\nu-1}))\, \Gamma(\xi_1'''(\varrho_{3\nu-1}), \eta_2(\varrho_{3\nu-1}))$$

and therefore, by lemma 16, $\Delta(\eta_2(\varrho_{3\nu-1}), \varrho_{3\chi_1(\nu)+4}; z)$ for any $z \in J'$; hence, (61) gives by lemma 14, $X_2(\sigma''(\varrho_{3\nu-1}), \varrho_{3\chi_1(\nu)+4})$, i. e., (60) (since $\chi_2(\nu+1) = \chi_1(\nu)+1$ by (7)).

In the second case $\chi_2(\nu) \neq 0$, we prove first

(64) $$\overline{X}_2(\varrho_{3\nu-1}, \varrho_1).$$

Indeed, in the opposite case, we should have $\Delta(\varrho_{3\chi_2(\nu)+1}, \varrho_1; z)$ for any $z \in J'$ by (58) and lemma 17; hence, $\Gamma(\varrho_{3\chi_2(\nu)}, \varrho_1)$ by (19′) ($\varkappa = 3\chi_2(\nu)$) and lemma 14. (51) would give then $\Delta(\varrho_{3\chi_2(\nu)}, \varrho_0; z)$ for any $z \in J'$; hence, by (19′) ($\varkappa = 3\chi_2(\nu)-1$) and lemma 14, we should have $\Gamma(\varrho_{3\chi_2(\nu)-1}, \varrho_0)$, contrarily to (56).

By $\Theta_2(\varrho_{3\nu-1})$ (see (55)) and (64) we get from (34) and (36)

(65) $$X_1(\sigma''(\varrho_{3\nu-1}), \xi_1'''(\varrho_{3\nu-1}))$$

and

(66) $$X_2(\sigma''(\varrho_{3\nu-1}), \eta_3(\varrho_{3\nu-1})).$$

Now, we infer from lemma 16 by (63) (omitting the last conjuction term), that $\Delta(\xi_1'''(\varrho_{3\nu-1}), \varrho_{3\chi_1(\nu)+3}; z)$ for any $z \in J'$; hence, (65) gives $X_1(\sigma''(\varrho_{3\nu-1}), \varrho_{3\chi_1(\nu)+3})$ by lemma 14, i. e., (59) (since $\chi_1(\nu+1) = \chi_1(\nu)+1$ by (7)). Again, we have

$$\Gamma(\eta_3(\varrho_{3\nu-1}), \eta_3'(\varrho_{3\nu-1}))\, \Gamma(\eta_3'(\varrho_{3\nu-1}), \eta_3''(\varrho_{3\nu-1}))\, \Gamma(\eta_3''(\varrho_{3\nu-1}), \eta_1(\varrho_{3\nu-1}))$$

by (35) and

(67) $$\Delta(\eta_1(\varrho_{3\nu-1}), \varrho_{3\chi_2(\nu)+1}; z)$$

for any $z \in J'$ by (58) and (24); hence, by lemma 14,

$$\Gamma(\eta_3(\varrho_{3\nu-1}), \eta_3'(\varrho_{3\nu-1}))\, \Gamma(\eta_3'(\varrho_{3\nu-1}), \eta_3''(\varrho_{3\nu-1}))\, \Gamma(\eta_3''(\varrho_{3\nu-1}), \varrho_{3\chi_2(\nu)+1})$$

and therefore, by lemma 16, $\Delta(\eta_3(\varrho_{3\nu-1}), \varrho_{3\chi_2(\nu)-2}; z)$ for any $z \in J'$; hence, (66) gives $X_2(\sigma''(\varrho_{3\nu-1}), \varrho_{3\chi_2(\nu)-2})$ by lemma 14, i. e., (60) (since $\chi_2(\nu+1) = \chi_2(\nu)-1$ by (7)).

18. Let $I' = \{\varrho_0, \varrho_3, \varrho_6, \ldots\}$; we shall prove that the predicates $\Phi_1, \ldots, \Phi_l$, defined over I' by

(68) $$\Phi_\lambda(\varrho_{3\mu}, \varrho_{3\nu}) = \Psi(\varrho_{3\lambda+1}, \varrho_{3\omega(\mu,\nu)}) \text{ for } \lambda = 1, \ldots, l;\ \mu, \nu = 0, 1, \ldots,$$

satisfy the formula **A** on I'.

Indeed, let $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ be arbitrary non-negative integers; let $\varkappa_4 = \omega(\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3)$ and $\varkappa_{\mu\nu} = \omega(\varkappa_\mu, \varkappa_\nu)$ for $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$, so that $\varkappa_4 = \omega(\varkappa_1, \varkappa_{23}-1)$. Choose

$x = \varrho_{3\varkappa_4-1}$. By (62) and (67), $\nu = \varkappa_4$ and so $\chi_1(\nu) = \varkappa_1$, $\chi_2(\nu) = \varkappa_{23}-1$, we have

(69) $$\Delta(\xi_1(x), \varrho_{3\varkappa_1}; z)$$

and

$$\Delta(\eta_1(x), \varrho_{3\varkappa_{23}-2}; z)$$

for any $z \in J'$. The last proposition shows that (39) implies, by lemma 14,

$$\Gamma(\varrho_{3\varkappa_{23}-2}, \pi_{23}(x)),$$

hence, by (50),

(70) $$\Delta(\pi_{23}(x), \varrho_{3\varkappa_{23}-1}; z)$$

for any $z \in J'$; therefore, (41) and (42) with $\mu = 2, \nu = 3$ give

(71) $$X_1(\varrho_{3\varkappa_{23}-1}, \xi_2(x))$$

and

(72) $$X_2(\varrho_{3\varkappa_{23}-1}, \xi_3'(x))$$

by lemma 14. Now, (57) with $\nu = \varkappa_{23}$, $\chi_1(\nu) = \varkappa_2$ and (71) on the one hand, (58) with $\nu = \varkappa_{23}$, $\chi_2(\nu) = \varkappa_3$ and (72) on the other hand give by lemma 17 that

(73) $$\Delta(\xi_2(x), \varrho_{3\varkappa_2}; z)$$

and

(74) $$\Delta(\xi_3'(x), \varrho_{3\varkappa_3+1}; z)$$

hold for any $z \in J'$. By (74), we infer from (40) with $\nu = 3$ by lemma 14 that

$$\Gamma(\xi_3(x), \varrho_{3\varkappa_3+1})$$

holds; hence, we see by (51) that

(75) $$\Delta(\xi_3(x), \varrho_{3\varkappa_3}; z)$$

holds for any $z \in J'$. Now, by $\Theta_2(\varrho_{3\varkappa_4-1})$ (see (55)) and (38) we have

$$\Gamma(\varrho_{3\varkappa_4-1}, \xi_4(x))$$

which implies, by (50),

(76) $$\Delta(\xi_4(x), \varrho_{3\varkappa_4}; z)$$

for any $z \in J'$.

On account of (69), (73), (75) and (76), we infer from the first conjunction term of (32) and from (40) by lemma 14 that

$$\Gamma(\varrho_{3\varkappa_\nu}, \xi_\nu'(x)),$$

hence, by (50), that

(77) $$\Delta(\xi_\nu'(x), \varrho_{3\varkappa_\nu+1}; z)$$

hold for[26] $\nu = 1, 2, 3, 4$ and for any $z \in J'$. By (69), (73), (75), (76) and (77), we infer from (41) and (42) by lemma 14, that $X_1(\pi_{\mu\nu}(x), \varrho_{3\varkappa_\mu})$ and $X_2(\pi_{\mu\nu}(x), \varrho_{3\varkappa_\nu+1})$ hold for $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$; on the other hand, (57) and (58) give, taking $\varkappa_{\mu\nu}$ instead of ν, $X_1(\varrho_{3\varkappa_{\mu\nu}-1}, \varrho_{3\varkappa_\mu})$ and $X_2(\varrho_{3\varkappa_{\mu\nu}-1}, \varrho_{3\varkappa_\nu+1})$ for $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$

[26] For $\nu = 3$, we have shown this already; see (74).

(since $\chi_1(\varkappa_{\mu\nu}) = \varkappa_\mu$, $\chi_2(\varkappa_{\mu\nu}) = \varkappa_\nu$). Therefore, lemma 17 gives

$$\varDelta(\pi_{\mu\nu}(x), \varrho_{3\varkappa_{\mu\nu}-1}; z)$$

for[27] $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$ and for any $z \in J'$; hence, (43) gives

$$\Gamma(\varrho_{3\varkappa_{\mu\nu}-1}, \pi'_{\mu\nu}(x))$$

by lemma 14; this implies by (50)

$$\varDelta(\pi'_{\mu\nu}(x), \varrho_{3\varkappa_{\mu\nu}}; z) \tag{78}$$

for $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$ and for any $z \in J'$.

Now, lemma 14 shows by (48) and (78) that (44) implies

$$\mathbf{M}^*(\Psi; \varrho_4, \varrho_7, \ldots, \varrho_{3l+1}, \varrho_{3\varkappa_{11}}, \varrho_{3\varkappa_{12}}, \ldots, \varrho_{3\varkappa_{44}}).$$

By (68), we have

$$\Phi_\lambda(\varrho_{3\varkappa_\mu}, \varrho_{3\varkappa_\nu}) = \Psi(\varrho_{3\lambda+1}, \varrho_{3\varkappa_{\mu\nu}})$$

for $\lambda = 1, \ldots, l$; $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$; hence, owing to the definition of $\mathbf{M}^*$, we have

$$\mathbf{M}(\Phi_1, \ldots, \Phi_l; \varrho_{3\varkappa_1}, \varrho_{3\varkappa_2}, \varrho_{3\varkappa_3}, \varrho_{3\varkappa_4}).$$

That is, for any $x_1 = \varrho_{3\varkappa_1}, x_2 = \varrho_{3\varkappa_2}, x_3 = \varrho_{3\varkappa_3} \in I'$, there is an $x_4 = \varrho_{3\varkappa_4} = \varrho_{3\omega(\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3)} \in I'$ so that $\mathbf{M}(\Phi_1, \ldots, \Phi_l; x_1, x_2, x_3, x_4)$ holds; therefore, the predicates (68) satisfy **A** on the set I', and so our theorem 1 holds.

19. We observe that z does not figure in **B** unless as third argument of $\varDelta(x, y; z)$; on the other hand, the predicate

$$\varDelta(x, y) = \begin{cases} \textit{true} & \text{for } x = y \\ \textit{false} & \text{for } x \neq y \end{cases}$$

shares all the properties of $\varDelta(x, y; z)$ used in the above reasoning. Hence, denoting by **C** the formula formed of the conjunction of (10)—(25), (30)—(36), (38)—(44) by replacing $\varDelta(x, y; z)$ throughout by $\varDelta(x, y)$ and[28] Ψ by a predicate variable G, finally, binding x by a universal quantifier, $r_0, \ldots, r_{3l+1}$, $s, s', s'', x_1, x_2, x_3, x_4, x_1', x_1'', x_1''', x_2', x_3', x_4', y_1, y_2, y_3, y_3', y_3'', p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{44}, p_{11}'$, $p_{12}', \ldots, p_{44}'$ by existential quantifiers and y by a universal again[29], we see that **C** is equivalent[30] to **A**. Thus, we have the following theorem, refining some results of PEPIS[31].

[27] For $\mu = 2, \nu = 3$, we have shown this already; see (74).

[28] Of course, after replacing $\Theta_0(x; r_1, r_2)$, $\Theta_1(x; r_0, r_1)$, $\Theta_2(x; r_0, r_1, r_2)$, $\Gamma(x, y; r_0, r_1, r_2)$, $\mathrm{X}_1(x, y; r_0, r_1, r_2)$ and $\mathrm{X}_2(x, y; r_0, r_1, r_2)$ by their expressions by means of Ψ.

[29] See footnote [22], first sentence.

[30] I. e., if **A** can be satisfied, then **C** can be satisfied too, and conversely. The proposition "**C** can be satisfied" is to be understood to mean that there is a domain of individuals J and a binary predicate Ψ defined over J so that replacing G by Ψ, defining $\varDelta(x, y)$ over J as above and taking J as range of the quantifiers, **C** becomes true.

[31] JÓZEF PEPIS, *a)* Beiträge zur Reduktionstheorie des logischen Entscheidungsproblems, *Acta Sci. Math.*, **8** (1936—37), pp. 7—41, especially theorems 38 and 39, pp. 37—41; *b)* Untersuchungen über das Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, *Fundamenta Math.*, **30** (1938), pp. 257—348, especially theorem 33, p. 319. In PEPIS's theorem, on the one hand, we have a more complicated prefix instead of (79), viz. $(x_1)(Ex_2)\ldots(Ex_{n-2})(x_{n-1})$

THEOREM 2. *To any given first order formula it is possible to construct an equivalent one with a prefix of the form*

$$(x_1)(Ex_2)\cdots(Ex_{n-1})(x_n) \tag{79}$$

and a matrix containing, besides the fixed "identity predicate" $\varDelta(x,y)$, no predicate variable other than a single binary one.

THE BOLYAI INSTITUTE, UNIVERSITY OF SZEGED

(Received 8 May 1950)

(Ex_n) (and, in theorem 39 of the paper *a)*, $(Ex_1)(x_2)(Ex_3)\ldots(Ex_{n-2})(x_{n-1})(Ex_n)$), on the other hand, the number of predicate variables is greater, viz. in theorem 38 of the paper *a)*, we have two binary and three unary predicate variables, in theorem 33 of the paper *b)*, we have two binary and one unary predicate variable, and in theorem 36 of the paper *a)*, two binary predicate variables (besides of the fixed identity predicate $\varDelta(x,y)$).

ВКЛАДЫ В ТЕОРИЮ ПРИВЕДЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ РАЗРЕШИМОСТИ.

Третья статья. Префикс вида $(x_1)(Ex_2)\cdots(Ex_{n-2}),(x_{n-1})(x_n)$ единственный, двухпеременный предикат

Л. КАЛЬМАР (Сегед)

(Резюме)

В вышедшей под этим же заголовком первой статье автор доказал, что проблема разрешимости узкого логического исчисления предикатов может быть приведена к вопросу выполнимости таких логических формул, префикс которых имеет вид $(x_1)(x_2)(Ex_3)\ldots(Ex_{n-1})(x_n)$ и которые содержат лишь одну двухпеременную логическую переменную функцию. Этот результат является обобщением результатов, достигнутых автором совместно с Я. Шурани, относительно префикса Геделя $(x_1)(x_2)(x_3)(Ex_4)\ldots(Ex_n)$, так как экзистенциальные кванторы доказанного префикса выражают существование лишь двухпеременных математических функций, в то время, как экзисциальные кванторы, встречающиеся в префиксе Геделя предполагают существование некоторых трёхпеременных функций. В настоящей работе автор идёт ещё дальше в том же направлении, доказывая, что проблема р зрешимости может быть приведена к вопросу выполнимости таких логических формул, префикс которых имеет вид указанный в подзаголовке и в которых встречается так же всего одна логическая переменная функция. Доказательство этого уже нельзя провести при помощи метода теории множеств, использованного в первой статье, заменением переменной, встречающейся в двух общих кванторах префикса Геделя, упорядоченной парой, ибо упорядоченная пара, как функция двух своих компонент, двухпеременная математическая функция. Вместо этого автор изменяет арифметический метод, встречающийся в одной из его предыдущих работ (Journal of Symbolic Logic, 4ый том) так, что в место упорядоченных пар натуральных чисел формализуются рекурсивные определение тех функций, относящихся к некоторому упорядоченных троик› которые выражают 3 компоненты упорядоченной тройми чисел при помощи номера полученного при подсчёте. Так как это функция одного переменного, можно достичь того, что в префиксе некоторый общий квантор опережает экзистенциальные кванторы. Если кроме встречающейся в формуле двухпеременной логикеской функции допустим ещё предикат $x = y$, то можно опустить и последний общий квантор.

ON CARLSON'S THEOREM IN THE THEORY OF THE ZETA-FUNCTION OF RIEMANN

By

P. TURÁN (Budapest), corresponding member of the Academy

§ I. Introduction

1. It is well known the misterious role played by the zeros of the zeta-function of RIEMANN in theory of the distribution of the primes. This function, defined on the complex $s=\sigma+it$ plane for $\sigma>1$ by the series

$$\zeta(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots,$$

is such that $\zeta(s)-\frac{1}{s-1}$ can be continued analytically over the whole plane and $\zeta(s)$ has an infinity of zeros in the strip $0<\sigma<1$ and moreover at $s=-2n\,(n=1,2,\cdots)$. The former type of zeros, called non-trivial zeros and denoted by $\varrho=\sigma_\varrho+it_\varrho$, are particularly important in the prime-number theory and many attempts had been made to prove RIEMANN's famous conjecture according to which all these zeros lie on the line $\sigma=\frac{1}{2}$. Even the meagrer assertion, the existence of a numerical Θ with $\frac{1}{2}\leqq\Theta<1$ such that $\zeta(s)\neq 0$ for $\sigma>\Theta$, is unproved so far. After many attempts the mathematicians set smaller goals. BOHR and LANDAU[1] took the initiative by proving that „almost all" non-trivial zeros lie „near" to $\sigma=\frac{1}{2}$. More exactly, if $N(\sigma_0,T)$ denotes the number of the zeros in the domain

$$\sigma_0\leqq\sigma<1,\qquad 0<t\leqq T,$$

then for every fixed $\sigma_0>\frac{1}{2}$ and $T\to\infty$ we have

$$N(\sigma_0,T)=o(T); \tag{1.1.1}$$

[1] For all results mentioned in § I which are now classical, one may consult TITCHMARSH's excellent book *The zeta-function of Riemann,* Cambr. Tracts in Math. and Math. Phys., No. 26. Hence only those results will be explicitly quoted which are of later origin.

this is to be compared with the fact that the whole number $N(T)$ of the zeros in the strip $0<\sigma<1$ between $t=0$ and $t=T$ is $\sim \frac{1}{2\pi} T \log T$. In the estimation (1. 1. 1) the value of σ_0 is unessential; CARLSON[1] improved it to

(1. 1. 2) $$N(\sigma_0, T) = O(T^{4\sigma_0(1-\sigma_0)+\delta})$$

for arbitrarily small positive δ, if $\sigma_0 > \frac{1}{2}$ is fixed and $T \to \infty$. One observes that for $\frac{1}{2} < \sigma_0 \leqq 1$ the exponent is <1 and is decreasing if σ_0 increases. It seemed for a long time as if results of this type, however important, have no number-theoretic applications. It was HOHEISEL[2] the first who starting from (1. 1. 2) or rather from the estimation

(1. 1. 3) $$N(\sigma_0, T) = O(T^{4\sigma_0(1-\sigma_0)} \log^6 T)$$

improved by him, which is valid uniformly for $\frac{1}{2} \leqq \sigma_0 \leqq 1$, obtained estimations for the difference of consecutive primes which seemed unattainable before. He proved first the existence of a numerical $\vartheta < 1$ such that

$$p_{n+1} - p_n < p_n^{\vartheta},$$

where p_ν denontes the ν^{th} prime. The analysis of his method due to INGHAM[3] showed—using instead of LITTLEWOOD'S estimation of a zero-free domain of $\zeta(s)$ a new one due to TCHUDAKOFF[4] based on VINOGRADOFF'S estimation — that as to what the upper estimation of $(p_{n+1}-p_n)$ concerns, essential is only an estimation of the type

(1. 1. 4) $$N(\sigma_0, T) = O(T^{\lambda(1-\sigma_0)} \log^{\varkappa} T)$$

with positive numerical λ and $\varkappa$, valid uniformly for $\frac{1}{2} \leqq \sigma_0 \leqq 1$; then one can obtain

(1. 1. 5) $$p_{n+1} - p_n < p_n^{1-\frac{1}{\lambda}+\varepsilon}$$

with an arbitrarily small positive ε. The estimation (1. 1. 3) of CARLSON-HOHEISEL gives $\lambda = 4$, $\varkappa = 6$ as admissible values and hence

$$p_{n+1} - p_n < p_n^{\frac{3}{4}+\varepsilon}, \qquad n > n_0(\varepsilon).$$

[2] G. HOHEISEL, Primzahlprobleme in der Analysis, *Berliner Sitzungsberichte,* **1930,** pp. 580—588.

[3] A. E INGHAM, On the difference between consecutive primes, *Quart. Journ. of Math., Oxford Ser.,* **8** (1937), pp. 255—266.

[4] N. G. TCHUDAKOFF, On the zeros of Dirichlet's *L*-functions, *Rec. Math.* (Moscou), Nouv. Sér., **1** (43) (1936), pp. 591—602.

2. Hence it became important to prove estimations of type (1. 1. 4) with a possibly small λ. Owing to

$$\lim_{\overline{T\to\infty}} \frac{1}{T\log T} N\left(\frac{1}{2}, T\right) > 0$$

we have evidently

$$\lambda \geqq 2.$$

TITCHMARSH'S[1] improvement

$$N(\sigma_0, T) = O\left(T^{\frac{4}{3-2\sigma_0}(1-\sigma_0)+\varepsilon}\right),$$

though better for all $\frac{1}{2} < \sigma_0 < 1$ than CARLSON'S estimation, gives again $\lambda = 4$ only. INGHAM[3] succeeded in proving the estimation

(1. 2. 1) $$N(\sigma_0, T) = O(T^{g(\sigma_0)(1-\sigma_0)} \log^5 T),$$

uniformly for $\frac{1}{2} \leqq \sigma_0 \leqq 1$, where $g(\sigma_0)$ is defined for any fixed $\frac{1}{2} \leqq \sigma_0 \leqq 1$ by

(1. 2. 2) $$g(\sigma_0) = \min(2 + 4\alpha,\ 1 + 2\sigma_0);$$

here α means a constant for which

(1. 2. 3) $$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = O(t^{\alpha}), \qquad t \to \infty$$

is true. Using the value $\alpha = \frac{1}{6} + \frac{\varepsilon}{4}$, which is admissible according to HARDY and LITTLEWOOD, he obtained $\lambda = \frac{8}{3} + \varepsilon$, i. e.

$$p_{n+1} - p_n < p^{\frac{5}{8}+\varepsilon}, \qquad n > n_1(\varepsilon).$$

If one supposes the truth of the unproved hypothesis of LINDELÖF, according to which

$$\zeta(\sigma + ti) = O(t^{\varepsilon}), \qquad \sigma \geqq \frac{1}{2}$$

for arbitrarily small positive ε, then we get

$$p_{n+1} - p_n < p_n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, \qquad n > n_2(\varepsilon),$$

a result, which is essentially the same as that of H. CRAMÉR[5] who used however the (stronger) hypothesis of RIEMANN. The latest improvement of INGHAM[6]

$$N(\sigma_0, T) = O(T^{g_1(\sigma_0)(1-\sigma_0)} \log^5 T),$$

[5] H. CRAMÉR, Some theorems concerning prime numbers, *Arkiv för Mat. Astr. och Fys.*, **15** (1920), no. 5.

[6] A. E. INGHAM, On the estimation of $N(\sigma, T)$, *Quart. Journ. of Math., Oxford ser.*, **11** (1940), pp. 291—292.

where

$$g_1(\sigma_0) = \min\left(2+4\alpha, \frac{3}{2-\sigma_0}\right) \tag{1.2.4}$$

gives no improvement of λ; the same can be told of the estimation of A. SELBERG[7] which constitutes an improvement only near to the line $\sigma = \frac{1}{2}$. The importance of estimations of CARLSON'S type was even enhanced by the remarkable discoveries of U. V. LINNIK. He found first that after extending them suitably to DIRICHLET'S L-functions, they play an essential role also in the additive prime-number-theory. Using them he could prove the theorem of VINOGRADOFF-GOLDBACH, making passable the way opened first by HARDY and LITTLEWOOD which seemed to be hopeless after their wonderful attempt. Having possibility to obtain better remainder-terms by this method the way is paved for investigating finer questions of the additive prime-number theory. He found further that such estimations play an important role also in the equidistribution-theory of the primes.

3. Hence the importance of such estimations is clear. In what follows I shall improve all the former estimations about $N(\sigma_0, T)$ in a region where they are, in a certain sense, the most critical and deep. This region is "near" to $\sigma_0 = 1$. More exactly I shall prove the following

THEOREM I. *There are sufficiently large C_1, C_2 and sufficiently small B numerical positive constants such that for $1-B \leqq \sigma_1 \leqq 1$ and $T > C_1$, we have*[8]

$$N(\sigma_1, T) < C_2 T^{2(1-\sigma_1)+600(1-\sigma_1)^{\frac{101}{100}}} \log^6 T. \tag{1.3.1}$$

This estimation asserts, roughly speaking, that here we have

$$N(\sigma_1, T) = O(T^{(2+\varepsilon)(1-\sigma_1)} \log^6 T).$$

As already mentioned, this estimation, if proved for $\frac{1}{2} \leqq \sigma_1 \leqq 1$, would imply $p_{n+1} - p_n = O\left(p_p^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$. Now the very interesting question arises whether or not theorem I implies $p_{n+1} - p_n = O\left(p_n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$. I shall return to this subject in another paper.

4. As mentioned, INGHAM deduced from LINDELÖF'S hypothesis the inequality

$$N(\sigma_1, T) = O(T^{(2+\varepsilon)(1-\sigma_1)} \log^5 T), \tag{1.4.1}$$

[7] A. SELBERG, Contributions to the theory of the Riemann zeta-function, *Arch. f. Math og Naturv.*, **48** (1946), pp. 89–155.

[8] Combining this estimation with INGHAM's estimation (1. 2. 4) the best known estimation of $(p_{n+1} - p_n)$ could be improved a little. We laid no stress on replacing the term $600\,(1-\sigma_1)^{\frac{101}{100}}$ by a smaller one.

valid uniformly for $\frac{1}{2} \leqq \sigma_1 \leqq 1$. If one supposes the truth of LINDELÖF'S hypothesis only for $\sigma \geqq \Theta$ with $\frac{1}{2} \leqq \Theta < 1$, then INGHAM'S method cannot give the inequality (1.4.1) for $\sigma_1 \geqq \Theta$. A suitable modification of my proof of theorem I gives the following

THEOREM II. *If there is a* $\frac{1}{2} \leqq \Theta < 1$ *such that with an arbitrarily small positive* ε *for*

$$\sigma \geqq \Theta, \quad t \geqq D_1 = D_1(\varepsilon)$$

we have the estimation

$$|\zeta(\sigma + it)| \leqq t^{\varepsilon},$$

then with a suitable $D_2(\varepsilon)$ *for*

$$T \geqq 2, \quad \sigma_1 \geqq \Theta + \varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

we have the estimation

$$N(\sigma_1, T) < D_2(\varepsilon) T^{2(1+3\varepsilon^{\frac{1}{9}})(1-\sigma_1)} \log^6 T.$$

We shall not give the details of the proof of this theorem, though LINDELÖF'S hypothesis comes in in a way, which differs completely from INGHAM'S argument.

5. Since the proof of theorem I is rather intricate, it is perhaps not superfluous to say a few words about it. The first ideas of it are contained in a paper[9] from 1941, but I did not have at that time the proof of the most important lemma III of this paper, only that of lemma II. I started at that time from the identity

$$(1.5.1) \qquad (-1)^{\nu} \frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)} =$$

$$= \sum_{n} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \log^{\nu} n = \nu! \left(\frac{1}{(s-1)^{\nu+1}} - \sum_{\varrho} \frac{1}{(s-\varrho)^{\nu+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(s+2n)^{\nu+1}} \right),$$

valid for $\sigma > 1$, as well as from the observation that fixing $s = s_1$ in this half-plane so that it be nearer to the imaginary axis than to the point $s = 1$ and forming the expression

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} \sqrt[\nu]{\frac{1}{\nu!} \left| \frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)} \right|_{s=s_1}}, \qquad s_1 = \sigma_1 + it_1$$

which measures the domain of regularity around s_1, we obtain $\left(\sigma_1 - \frac{1}{2}\right)^{-1}$ if we

[9] P. TURÁN, Über die Verteilung der Primzahlen I, *Acta Sci. Math Szeged,* **10** (1941), pp. 81–104.

replace heuristically $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)}_{s=s_1}$ by its quadratic mean-value taken along the vertical line $\sigma=\sigma_1$. Hence, if σ_1 is „large" and this operation is justified for a "dense" set on $\sigma=\sigma_1$, then the corresponding regularity-circles of $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ overlap "almost" the whole half-plane $\sigma>\frac{1}{2}$. In order to replace this heuristical reasoning by a correct one, I restricted t by $T\leqq t\leqq 2T$, choosed σ_1 "large" as a function of T and confined ν to a "short" interval depending upon T; the investigation of

$$(1.5.2)\qquad \int_T^{2T}\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_1+it)^{(\nu)}\right|^2 dt$$

showed that for a fixed ν the quantity $\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)}\right|$ is "small" on the segment

$$\sigma=\sigma_1,\quad T\leqq t\leqq 2T,$$

except a set E_ν of "small" measure. Since the number of the ν's is small, the union E of the E_ν's is again small; thus on the complementary set $\bar{E}$ of E, $\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)}\right|$ is small for *every* permissible choise of ν. The second representation of $(-1)^\nu\frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)}$ in (1.5.1) gave further the possibility of expressing this result in terms of non-trival zeros of $\zeta(s)$ and, using the hypothesis by which I substituted at that time the lemma corresponding to lemma III of the present paper, I obtained after a suitable choice of ν the estimation

$$N(\sigma_0,T)=O(T^{2(1-\sigma_0)}\exp(13\log^{0,18}T))$$

uniformly for $\frac{1}{2}\leqq\sigma_0\leqq 1$. The hypothesis asserted roughly that consecutive power-sums of n complex numbers $z_1,z_2,\cdots,z_n$ cannot all be "small". The new steps of the present paper compared with the paper[9] after having lemma III are the recognition that s must be chosen near to the line $\sigma=1$ in the half-plane $\sigma>1$ and that a more suitable start can be made from the identity

$$(1.6.1)\qquad \sum_{n>\omega}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\log^\nu\frac{n}{\omega}=\nu!\left(\frac{\omega^{1-s}}{(s-1)^{\nu+1}}-\sum_\varrho\frac{\omega^{\varrho-s}}{(s-\sigma)^{\nu-1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega^{-2n-s}}{(s+2n)^{\nu+1}}\right),$$

where $\sigma>1$ and ω is large, since the factors $\omega^{\varrho-s}$ make the contribution of the σ's with smaller real part less relevant. All these were used in another paper[10] for proving equivalence theorems concerning RIEMANN'S hypothesis;

[10] P. TURÁN, On Riemann's hypothesis, *Bull. de l'Acad. des Scinces de l'URSS*, Sér. math., **11** (1947), pp. 97–262. I realised only later that the equivalence theorem can be deduced also from the simpler identity (1.5.1). This is definitely *not* the case with theorem I of the present paper.

hence the present paper can be considered as a child from the marriage of my papers[9] and[10]. However no knowledge of the quoted papers is supposed, only some classical properties of $\zeta(s)$ which can be find e. g. in[1].

6. I remark that there is a possibility of improving theorem I, again near to $\sigma=1$. Namely the result depends upon the measure of the set E defined above and estimated by the quadratic mean-value (1.5.2). Taking another type of mean-value, the measure of E can perhaps be diminished. Another type of possible further application of the method is the investigation of the "small" zeros of the L-functions of DIRICHLET. I intend to return to both subjects in another paper.

7. Concerning the lemmas of § II, I remark the following. In the case of equal d_ν's they are contained in a slightly weaker and different form in my paper[10]. I used later the general form of lemma I in a series of applications; see e. g. my lecture at the Meeting of the Czechoslovakian and Polish Mathematical Associations in Prague entitled *On a new method in the analysis with applications* delivered on 3 Sept. 1949. Lemma III in its general but slightly weaker form is announced without proof at the end of the paper[10]; although I need it in this paper only in the case of equal d_ν's, I shall prove it in § II in its general form owing to some further intended applications. Even the improvement of the numerical constant is of significance in an application concerning algebraic equations. I remark further that it would be desirable to improve the dependence of the lower estimation on the d_ν's.

8. As far as I know, A. SELBERG[11] was the first who investigated the expression

(1.8.1) $$N(\sigma_1, T+U)-N(\sigma, T)$$

where $U>T^a$, $\sigma_1>\frac{1}{2}$, $a>\frac{1}{2}$. He proved with this restriction that

(1.8.2) $$N(\sigma, T+U)-N(\sigma, T)=O\left(\frac{U}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)$$

uniformly for $\frac{1}{2}<\sigma\leqq 1$. Obviously he was interested in estimating the expression (1.8.1) near to $\sigma_1=\frac{1}{2}$; our method, which works well near to $\sigma=1$, gives in this range much sharper estimations than (1.8.2) and even the restriction $U>T^a$, $a>\frac{1}{2}$ can be made essentially milder. We shall however not go into details in this paper.

[11] A. SELBERG, On the zeros of Riemann's zeta-function, *Skrifter d. Norske Vid. Akad. Oslo*, I. Mat. Naturv. Klasse, No. **10** (1942).

9. In what follows we shall use three sequences of constants. The first is denoted by $a_1, a_2, \cdots$; they are numerical constants. The second is the sequence b; instead of such sentences "true for all sufficiently small values of the positive variable x" we shall write shortly "true for $x < b$." In this case b does not mean of course the same constant. Similarly such sentences as "true for all sufficiently large values of the variable y" will be abbreviated "true for $y > c$"; this will be the third sequence of numerical constants. The complex variable will be denoted by $s = \sigma + it$, except in § IV in the proofs of lemmas X and IX where s occurs as a fixed parameter, further in § II and in § VII; here the complex variable will be denoted by $w = u + iv$.

Finally we mention two elementary inequalities which will be used often. They are

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < \frac{1}{e} n! \tag{1.9.1}$$

and

$$(2n)! < 4^n . n!^2. \tag{1.9.2}$$

§ II. Lemmas on power-sums of complex numbers

1. Lemma I. *Let $0 < K < 1$ and $z_1, z_2, \ldots, z_k$ denote complex numbers $(k > 1)$ such that*

$$\min_{j=1,2,\ldots,k} |z_j| \geqq K. \tag{2.1.1}$$

Then for all $m \geqq 1$ we have

$$M_1 = \max_{\substack{m \leqq \nu \leqq m+k \\ \nu \text{ integer}}} |d z_1^\nu + d_2 z_2^\nu + \cdots + d_k z_k^\nu| > |d_1 + \cdots + d_k| K^m \left(\frac{K}{1+K} \cdot \frac{k}{e(m+k)}\right)^k.$$

For the proof first we suppose that m is an integer. With the above z_j's we form the expressions

$$f_1(w) = \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{w}{z_j}\right) = \sum_{j=0}^{k} d_j^{(1)} w^j, \quad d_0^{(1)} = 1, \tag{2.1.2}$$

$$f_2(w) = \frac{1}{f_1(w)} = \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{1 - \frac{w}{z_j}} = \sum_{j=1}^{\infty} d_j^{(2)} w^j, \quad |w| < K, \quad d_0^{(1)} = 1, \tag{2.1.3}$$

$$s_m\left(\frac{1}{f_1}\right) = \sum_{j=0}^{m} d_j^{(2)} w^j,$$

$$f_3(w) = 1 - f_1(w) s_m\left(\frac{1}{f_1}\right) = \sum_{j=0}^{m+k} d_j^{(3)} w^j. \tag{2.1.4}$$

It is easy to see that

$$d_0^{(3)} = d_1^{(3)} = \cdots = d_m^{(3)} = 0,$$

i. e.,

$$f_3(w)=\sum_{j=m+1}^{m+k} d_j^{(3)} w^j . \tag{2.1.5}$$

From (2. 1. 2), (2. 1. 4) and (2. 1. 5) we have

$$\sum_{j=m+1}^{m+k} d_j^{(3)} z_\nu^j = 1 \qquad (\nu = 1, 2, \dots, k) .$$

Multiplying by d_ν and summing with respect to ν, with the notation

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{k} d_\nu z_\nu^x$$

we obtain the identity

$$\sum_{j=m+1}^{m+k} d_j^{(3)} f(j) = d_1 + d_2 + \cdots + d_k .$$

From this identity — putting

$$\max_{\substack{m+1 \leqq j \leqq m+k \\ j \text{ integer}}} |f(j)| = M_1' (\leqq M_1)$$

— we obtain the inequality

$$|d_1 + \cdots + d_k| \leqq M_1' \sum_{j=m+1}^{m+k} |d_j^{(3)}| . \tag{2.1.6}$$

Now we need upper bounds for the numbers $d_j^{(1)}$, $d_j^{(2)}$ and $d_j^{(3)}$. Obviously we have

$$\sum_{j=0}^{k} |d_j^{(1)}| \leqq \prod_{j=1}^{k} \left(1+\frac{1}{|z_j|}\right) \leqq \left(1+\frac{1}{K}\right)^k . \tag{2.1.7}$$

Further from the identity

$$d_j^{(2)} = \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_k=j \\ i_1 \geqq 0,\, i_2 \geqq 0, \dots,\, i_k \geqq 0}} z_1^{-i_1} z_2^{-i_2} \cdots z_k^{-i_k} ,$$

$$|d_j^{(2)}| \leqq \frac{1}{K^j} \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_k=j \\ i_1 \geqq 0,\, i_2 \geqq 0, \dots,\, i_k \geqq 0}} 1 = \frac{1}{K^j} \text{ coeffs. } z^j \text{ in } \frac{1}{(1-z)^k} =$$

$$= \frac{1}{K^j} \binom{-k}{j} (-1)^j = \frac{1}{K^j} \binom{k+j-1}{k-1} ,$$

we get

$$\sum_{j=0}^{m} |d_j^{(2)}| \leqq \frac{1}{K^m} \sum_{j=0}^{m} \binom{k+j-1}{k-1} = \frac{1}{K^m} \binom{m+k}{k} . \tag{2.1.8}$$

Since $d_j^{(3)}$ is a sum of terms of the form $d_l^{(1)} d_{j-l}^{(2)}$, from (2. 1. 7) and (2. 1. 8) we have obviously

$$\sum_{j=m+1}^{m+k} |d_j^{(3)}| \leqq \left(\sum_{j=0}^{k} |d_j^{(1)}|\right) \left(\sum_{l=0}^{m} |d_l^{(2)}|\right) \leqq \frac{(1+K)^k}{K^{m+k}} \binom{m+k}{k}$$

or from (2.1.6) and (1.9.1)

$$(2.1.9)\quad M_1' \geqq |d_1+\cdots+d_k| \frac{K^{k+m}}{(1+K)^k}\frac{1}{\binom{m+k}{k}} > |d_1+\cdots+d_k|\frac{K^{k+m}}{(1+K)^k}\frac{k!}{(m+k)^k} >$$

$$> |d_1+\cdots+d_k| K^m \left(\frac{K}{1+K}\cdot\frac{k}{e(m+k)}\right)^k$$

what is our assertion for integer m.

If m is an arbitrary real number $\geqq 1$, then applying (2.1.9) with $[m]$ instead of m we obtain

$$M_1 = \max_{\substack{m\leqq j\leqq m+k\\ j \text{ integer}}} |f(j)| \geqq \max_{\substack{[m]+1\leqq j\leqq [m]+k\\ j \text{ integer}}} |f(j)| = M_1' >$$

$$> |d_1+\cdots+d_k| K^{[m]} \left(\frac{K}{1+K}\cdot\frac{k}{e([m]+k)}\right)^k \geqq$$

$$\geqq |d_1+\cdots+d_k| K^m \left(\frac{K}{1+K}\cdot\frac{k}{e(m+k)}\right)^k.$$

Q. e. d.

2. Before turning to the most essential lemma III, we need a lemma in the theory of Newton-interpolation. Though it is probably classical I could nowhere find it.

LEMMA II. *Let l be a simple closed curve consisting of analytical arcs on the w-plane and $g(w)$ a regular function outside and on l so that $g(w)\to 0$ uniformly if $|w|\to\infty$. Given different points $w_1, w_2, \ldots, w_r$ outside l, the polynomial $R(w)$ of degree $\leqq r-1$ which coincides with $g(w)$ for $w=w_\nu$ $(\nu=1,2,\ldots,r)$ can be written in the form*

$$R(w) = e_0 + e_1(w-w_1) + e_2(w-w_1)(w-w_2) + \cdots + e_{r-1}(w-w_1)\cdots(w-w_{r-1}),$$

where

$$e_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_{(l)} \frac{g(\eta)}{(\eta-w_1)(\eta-w_2)\cdots(\eta-w_{\nu+1})}\,d\eta.$$

The existence and unicity of the required polynomial is of course classical; only the coefficient-formula needs a verification. Hence we have to consider the polynomial

$$R_1(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(l)} g(\eta)\left(\frac{1}{\eta-w_1} + \frac{w-w_1}{(\eta-w)(\eta-w_2)} + \right.$$

$$\left. + \cdots + \frac{(w-w_1)(w-w_2)\cdots(w-w_{r-1})}{(\eta-w_1)(\eta-w_2)\cdots(\eta-w_r)}\right)d\eta$$

of degree $\leqq r-1$ and to show that $R_1(w)\equiv R(w)$. For this it is sufficient to show

$$R_1(w_\nu) = R(w_\nu) = g(w_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, r),$$

or for $\nu=1,2,\ldots,r$ the formula

$$(2.2.1)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{(l)} g(\eta)\left(\frac{1}{\eta-w_1}+\frac{w_\nu-w_1}{(\eta-w_1)(\eta-w_2)}+\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{(w_\nu-w_1)(w_\nu-w_2)\cdots(w_\nu-w_{\nu-1})}{(\eta-w_1)(\eta-w_2)\cdots(\eta-w_\nu)}\right)d\eta=g(w_\nu).$$

But we have obviously

$$\frac{1}{\eta-w_\nu}\left\{\frac{(w_\nu-w_1)(w_\nu-w_2)\cdots(w_\nu-w_{j-1})}{(\eta-w_1)(\eta-w_2)\cdots(\eta-w_{j-1})}-\frac{(w_\nu-w_1)\cdots(w_\nu-w_j)}{(\eta-w_1)\cdots(\eta-w_j)}\right\}=$$
$$=\frac{(w_\nu-w_1)\cdots(w_\nu-w_{j-1})}{(\eta-w_1)\cdots(\eta-w_j)};$$

hence summing for $j=2,3,\ldots,\nu$ we obtain

$$\sum_{j=2}^{\nu}\frac{(w_\nu-w_1)\cdots(w_\nu-w_{j-1})}{(\eta-w_1)\cdots(\eta-w_j)}=\frac{1}{\eta-w_\nu}\cdot\frac{w_\nu-w_1}{\eta-w_1}$$

or, adding the term $(\eta-w_1)^{-1}$ to both sides, the identity

$$\frac{1}{\eta-w_1}+\frac{w_\nu-w_1}{(\eta-w_1)(\eta-w_2)}+\cdots+\frac{(w_\nu-w_1)(w_\nu-w_2)\cdots(w_\nu-w_{\nu-1})}{(\eta-w_1)(\eta-w_2)\cdots(\eta-w_\nu)}=\frac{1}{\eta-w_\nu}.$$

This and (2. 2. 1) prove our assertion.

3. We need further the[12]

LEMMA III. *For $m\geqq n$, $1=|z_1|\geqq|z_2|\geqq\cdots\geqq|z_n|$ we have*

$$M_2=\max_{\substack{m\leqq\nu\leqq m+n\\ \nu\text{ integer}}}|d_1z_1^\nu+d_2z_2^\nu+\cdots+d_nz_n^\nu|\geqq\left(\frac{n}{e^6m}\right)^n\min_{j=1,\ldots,n}|d_1+\cdots+d_j|.$$

For the proof of this lemma we may suppose $n\geqq 2$. We make use of the following theorem of BOUTROUX—H. CARTAN[13]. If $h_1(w)$ is a polynomial of degree n with 1 as leading coefficient and H denotes an arbitrarily prescribed positive number, then the estimation

$$|h_1(w)|\geqq\left(\frac{H}{e}\right)^n$$

holds on the whole complex plane, except possibly a set, which can be covered by circles, the sum of whose radii is $\leqq 2H$. Applying this theorem to $h_2(w)=\prod_{j=1}^{n}(w-z_j)$ and $H=d\dfrac{n}{m}$ where d denotes a numerical constant to

[12] We could give a form of this lemma valid for all $m\geqq 1$, but for the intended applications this is unnecessary.

[13] For a complete proof see G. VALIRON, *Directions de Borel des fonctions meromorphes* (Paris, 1938 , pp. 11—12.

be determined later, we obtained that

$$\prod_{j=1}^{n} |w-z_j| \geqq \left(\frac{d}{e}\cdot\frac{n}{m}\right)^n$$

outside of n circles at most, the diameter-sum of which is $\leqq 4d\frac{n}{m}$. Thus one can assure the existence of an r_0 with

(2. 3. 1) $$1-4d\frac{n}{m} \leqq r_0 \leqq 1$$

such that *on the whole periphery* of $|w| = r_0$

$$\prod_{j=1}^{n} |w-z_j| \geqq \left(\frac{d}{e}\cdot\frac{n}{m}\right)^n$$

holds. Since every factor on the left is absolutely $\leqq 2$ on $|w| = r_0$, for every choice of the indices

$$1 \leqq i_1 < i < \cdots < i_\lambda \leqq n$$

we obtained the estimation

(2. 3. 2) $$\prod_{j=1}^{\lambda} |w-z_{i_j}| \geqq \left(\frac{d}{2e}\cdot\frac{n}{m}\right)^n.$$

We have to distinguish two cases.

4. *Case I.* Every $|z_\nu|$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ is $\geqq r_0$. Then we may apply lemma I or indeed (2. 1. 9) with

$$K = 1-4d\frac{n}{m}, \quad k = n.$$

With the notation

$$M_2' = \max_{\substack{m+1 \leqq j \leqq m+n \\ j \text{ integer}}} |f(j)|$$

this gives

$$M_2' \geqq |d_1+d_2+\cdots+d_n| \left(1-4d\frac{n}{m}\right)^m \left(\frac{1-4d\frac{n}{m}}{2e}\cdot\frac{n}{m+n}\right)^n$$

or, using $m \geqq n$,

(2. 4. 1) $$M_2' > |d_1+d +\cdots+d_n| \left(1-4d\frac{n}{m}\right)^m \left(\frac{1-4d\frac{n}{m}}{4e}\cdot\frac{n}{m}\right)^n.$$

If

(2. 4. 2) $$d \leqq \frac{1}{8},$$

then

$$1-4d\frac{n}{m} \geqq \frac{1}{2}$$

and

$$\left(1-4d\frac{n}{m}\right)^m > \exp\left(-\frac{4dn}{1-4d\frac{n}{m}}\right) \geqq e^{-8dn};$$

thus from (2. 4. 1) it follows

$$(2.4.3)\quad M_2' > |d_1+\cdots+d_n|\left(\frac{1}{8}e^{-1-8d}\frac{n}{m}\right)^n > |d_1+\cdots+d_n|\left(e^{-4-8d}\frac{n}{m}\right)^n.$$

5. *Case II.* There is an integer l such that

$$(2.5.1)\qquad 1 \leqq l < n$$

and

$$1 = |z_1| \geqq |z_2| \geqq \cdots \geqq |z_l| > r_0 > |z_{l+1}| \geqq \cdots \geqq |z_n|.$$

The restriction $|z_l| > r_0 > |z_{l+1}|$ means no loss of generality, since on $|w| = r_0$ we have

$$\prod_{j=1}^{n} |w-z_j| \geqq \left(\frac{d}{e}\frac{n}{m}\right)^n > 0.$$

Let m first be an integer and all the numbers z_j different from each other. Then we form new auxiliary polynomials. First

$$(2.5.2)\qquad f_4(w) = \prod_{j=l+1}^{n}(w-z_j) = \sum_{j=0}^{n-l} d_j^{(4)} w^{n-l-j}.$$

We have for these

$$(2.5.3)\qquad |d_j^{(4)}| = \left|\sum_{l+1\leqq h_1<h_2<\dots<h_j\leqq n} z_{h_1}z_{h_2}\cdots z_{h_j}\right| \leqq \binom{n-l}{j}.$$

Let further $f_5(w)$ be that polynomial of degree $\leqq(l-1)$, which assumes for $w=z_1, w=z_2, \dots, w=z_l$ the values

$$\frac{1}{z_1^{m+1}f_4(z_1)}, \frac{1}{z_1^{m+1}f_4(z_2)}, \dots, \frac{1}{z_l^{m+1}f_4(z_l)}$$

respectively. If $l=1$, we have simply

$$(2.5.4)\qquad f_5(w) = \frac{1}{z_1^{m+1}f_4(z_1)} = d_0^{(5)}.$$

If $1<l<n$, we may represent $f_5(w)$ as a Newton-interpolatorical polynomial

$$(2.5.5)\qquad f_5(w) = d_0^{(5)} + d_1^{(5)}(w-z_1) + d_2^{(5)}(w-z_1)(w-z_2) + \\ + \cdots + d_{l-1}^{(5)}(w-z_1)(w-z_2)\cdots(w-z_{l-1}).$$

We have to estimate the coefficients $d_j^{(5)}$. According to lemma II we have

$$d_j^{(5)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=r_0} \frac{dw}{w^{m+1}f_4(w)(w-z_1)(w-z_2)\cdots(w-z_{j+1})} \qquad (j=0,1,\dots,l-1).$$

But the polynomial

$$f_4(w)(w-z_1)(w-z_2)\cdots(w-z_{j+1})$$

is obviously of the form (2. 3. 2); hence using the estimation (2. 3. 2) we obtain

$$|d_j^{(5)}| \leqq \frac{1}{2\pi} 2\pi r_0 \frac{1}{r_0^{m+1}} \cdot \left(\frac{2e}{d} \frac{m}{n}\right)^n,$$

or from (2. 3. 1) and (2. 4. 2)

$$(2.5.6)\quad |d_j^{(5)}| \leqq \left(\frac{1}{1-4d\frac{n}{m}}\right)^m \left(\frac{2e}{d}\frac{m}{n}\right)^n < \left(e^{\frac{4d}{1-4d\frac{n}{m}}} \frac{2e}{d}\frac{m}{n}\right)^n < \left(\frac{2}{d} e^{1+8d} \frac{m}{n}\right)^n.$$

We may arrange this polynomial $f_5(w)$ in the usual form

$$f_5(w) = \sum_{j=0}^{l-1} d_j^{(6)} w^j.$$

We need also upper estimation for the quantities $|d_j^{(6)}|$. This can be derived easily from (2. 5. 6) if we express the coefficients $d_j^{(6)}$ by the $d_j^{(5)}$'s. We have

$$d_{l-1}^{(6)} = d_{l-1}^{(5)}$$

and (if $1 < l < n$) for $j = 0, 1, \ldots, l-2$:

$$d_j^{(6)} = d_j^{(5)} - d_{j+1}^{(5)} \sum_{1 \leqq r_1 \leqq j+1} z_{r_1} + d_{j+2}^{(5)} \sum_{1 \leqq r_1 < r_2 \leqq j+2} z_{r_1} z_{r_2} - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{l-j-1} d_{l-1}^{(5)} \sum_{1 \leqq r_1 < r_2 < \cdots < r_{l-j-1} \leqq l-1} z_{r_1} z_{r_2} \cdots z_{r_{l-j-1}}.$$

Hence from (2. 5. 6) and $|z_j| \leqq 1$ for $j = 0, 1, \ldots, l-2$

$$(2.5.7)\quad |d_j^{(6)}| \leqq \left(\frac{2}{d} e^{1+8d} \frac{m}{n}\right)^n \left\{1 + \binom{j+1}{1} + \binom{j+2}{2} + \cdots + \binom{l-1}{l-j-1}\right\} =$$

$$= \left(\frac{2}{d} e^{1+8d} \frac{m}{n}\right)^n \binom{l}{j+1}.$$

We form finally the auxiliary polynomial

$$(2.5.8)\qquad f_6(w) = w^{m+1} f_4(w) f_5(w) = \sum_{j=m+1}^{m+n} d_j^{(7)} w^j.$$

It follows from the definitions of $f_4(w)$ and $f_5(w)$ that

$$f_6(z_1) = f_6(z_2) = \cdots = f_6(z_l) = 1, \qquad f_6(z_{l+1}) = f_6(z_{l+2}) = \cdots = f_6(z_n) = 0.$$

We replace here $f_6(w)$ by the explicit form (2. 5. 8) and multiply by the respective d_ν's. After a summation with respect to ν, using again the notation

$$d_1 z_1^x + d_2 z_2^x + \cdots + d_n z_n^x = f(x),$$

we obtain the identity

$$\sum_{\nu=1}^{l} d_\nu = \sum_{j=m+1}^{m+n} d_j^{(7)} f(j),$$

or the estimation

$$(2.5.9) \qquad \left|\sum_{\nu=2}^{l} d_\nu\right| \leqq M_2' \sum_{j=m+1}^{m+n} |d_j^{(7)}|.$$

Since

$$d_j^{(7)} = \sum_v d_v^{(6)} \text{ coeffs. } w^{j-v-m-1} \text{ in } f_4(w) = \sum_v d_v^{(6)} d_{n-l-j+v+m+1}^{(4)},$$

from (2. 5. 3) and (2. 5. 7) we obtain

$$\sum_{j=m+1}^{m+n} |d_j^{(7)}| \leqq \left(\sum_{j=0}^{l-1} |d_j^{(6)}|\right)\left(\sum_{j=0}^{n-l} |d_j^{(4)}|\right) \leqq \left(\frac{4}{d} e^{1+8d} \frac{m}{n}\right)^n.$$

Thus from (2. 5. 9) we conclude that

$$(2.5.10) \quad M' \geqq \left(\frac{d}{4} e^{-1-8d} \frac{n}{m}\right)^n \left|\sum_{\nu=2}^{l} d_\nu\right| \geqq \left(\frac{d}{4} e^{-1-8d} \frac{n}{m}\right)^n \min_{j=1,2,\ldots,n} \left|\sum_{\nu=1}^{j} d_\nu\right|.$$

Choosing $d = \frac{1}{8}$ we have

$$e^{-4-8d} = e^{-5}, \qquad \frac{d}{4} e^{-1-8d} = \frac{1}{32} e^{-2} > e^{-6};$$

hence we obtain from (2. 4. 3) and (2. 5. 10)

$$(2.5.11) \qquad M_2' \geqq \left(\frac{n}{e^6 m}\right)^n \min_{j=1,2,\ldots,n} |d_1 + \cdots + d_j|$$

with the restrictions that m is an integer and the z_ν's are all different.

6. First we get rid of the hypothesis of the z_ν's being all different from each other. We construct an infinite sequence $(z_{1l}, z_{2l}, \ldots, z_{nl})$ $l = 1, 2, \ldots$ where for all fixed $\nu = 1, 2, \ldots, n$

$$z_{\nu l} \to z_\nu \quad \text{if} \quad l \to \infty$$

and

$$z_{il} \neq z_{jl} \quad \text{for} \quad 1 \leqq i < j \leqq n.$$

Denoting by $f_l(x)$ the quantity

$$\sum_{\nu=1}^{n} d_\nu z_{\nu l}^x,$$

(2. 5. 11) assures the existence of an integer $p = p(l)$ with

$$m + 1 \leqq p \leqq m + n$$

and

$$|f_l(p)| \geqq \left(\frac{n}{e^6 m}\right)^n \min_{j=1,2,\ldots,n} |d_1 + \cdots + d_j|.$$

Since p can assume a finite number of values only, there is at least one of them, say p^*, for which

$$|f_l(p^*)| \geqq \left(\frac{n}{e^6 m}\right)^n \min_{j=1,2,\ldots,n} |d_1 + \cdots + d_j|$$

holds for an infinity of l-values. This proves (2. 5. 11) even if some of the z_ν's are equal.

To get rid of the condition of m being an integer, we apply again (2. 5. 11) with $[m]$ (if $m \geqq n$, then $[m] \geqq n$ is true of course) instead of m. Hence

$$M \geqq \max_{\substack{[m]+1 \leqq \nu \leqq [m]+n \\ \nu \text{ integer}}} |f(\nu)| = M_2' \geqq \left(\frac{n}{e^6 [m]}\right)^n \min_j |d_1 + \cdots + d_j| \geqq$$

$$\geqq \left(\frac{n}{e^6 m}\right)^n \min_{j=1,2,\ldots,n} |d_1 + \cdots + d_j| .$$

Q. e. d.

7. We shall actually use in the case $d_1 = d_2 = \cdots = d_n = 1$ the following

LEMMA IV. *If $n \leqq N$, and $z_1, z_2, \ldots, z_n$ are such that*

$$1 \geqq |z_1| \geqq |z_2| \geqq \ldots \geqq |z_n| ,$$

further $m \geqq N$, then we have

$$\max_{\substack{m \leqq \gamma \leqq m+N \\ \gamma \text{ integer}}} |d_1 z_1^\gamma + d_2 z_2^\gamma + \cdots + d_n z_n^\gamma| \geqq \left(\frac{N}{e^6 m}\right)^N \min_{j=1,\ldots,n} |d_1 + \cdots + d_j| .$$

For the proof we introduce the numbers $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ by

$$z_j = \xi_j m^*$$

where

$$m^* = \max_{j=1,\ldots,n} |z_j| .$$

Then we have obviously

$$|\xi_1| = 1 \qquad |\xi_j| \leqq 1 \qquad (j = 2, 3, \ldots, n);$$

hence lemma III is applicable to the numbers

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ \xi_{n+1} = \xi_{n+2} = = \cdots = \xi_{[N]} = 0.$$

Thus we obtain

$$\max_{\substack{m \leqq \gamma \leqq m+N \\ \gamma \text{ integer}}} |d_1 z_1^\gamma + d_2 z_2^\gamma + \cdots + d_n z_n^\gamma| =$$

$$= \max_{\substack{m \leqq \gamma \leqq m+N \\ \gamma \text{ integer}}} m^{*\gamma} |d_1 \xi_1^\gamma + d_2 \xi_2^\gamma + \cdots + d_n \xi_n^\gamma + 0 . \xi_{n+1}^\gamma + \cdots + 0 . \xi_{[N]}^\gamma| \geqq$$

$$\geqq \max_{\substack{m \leqq \gamma \leqq m+[N] \\ \gamma \text{ integer}}} |d_1 \xi_1^\gamma + d_2 \xi_2^\gamma + \cdots + 0 . \xi_{[N]}^\gamma| \geqq \left(\frac{[N]}{e^6 m}\right)^{[N]} \min_j |d_1 + \cdots + d_j| \geqq$$

$$\geqq \left(\frac{N}{e^6 m}\right)^N \min_j |d_1 + \cdots + d_j| .$$

Q. e. d.

§ III. The estimation of a square-integral and its consequences on the distribution of values of the function $f(s, \nu, \xi)$

1. We need the trivial

LEMMA V. *If* $\varkappa \geqq 9$, $\lambda \geqq 5$, $1 < h \leqq 3$, *then putting*

$$J(\varkappa, \lambda, h) = \sum_{n \geqq \lambda} n^{-h} \log^{\varkappa} \frac{n}{\lambda} \tag{3.1.1}$$

we have

$$J(\varkappa, \lambda, h) < 2 \frac{\varkappa!\, \lambda^{1-h}}{(h-1)^{\varkappa+1}}.$$

For a proof of this lemma we remark that

$$\frac{d}{dy}\left(y^{-h} \log^{\varkappa} \frac{y}{\lambda}\right) = y^{-h-1} \log^{\varkappa-1} \frac{y}{\lambda}\left(\varkappa - h \log \frac{y}{\lambda}\right)$$

vanishes for $y > \lambda$ only if

$$y = \lambda e^{\frac{\varkappa}{h}},$$

i. e., the maximal term on the right of (3. 1. 1) is

$$\leqq \frac{\left(\frac{\varkappa}{h}\right)^{\varkappa}}{\lambda^h e^{\varkappa}} = \frac{1}{\lambda^h}\left(\frac{\varkappa}{eh}\right)^{\varkappa} < \frac{1}{e} \frac{\varkappa!}{\lambda^h h^{\varkappa}},$$

using (1. 9. 1). Hence

$$J(\varkappa, \lambda, h) < \frac{1}{e} \frac{\varkappa!}{\lambda^h h^{\varkappa}} + \int_{\lambda}^{\infty} y^{-h} \log^{\varkappa} \frac{y}{\lambda}\, dy < \frac{\varkappa!}{\lambda^h h^{\varkappa}} + \lambda^{1-h} \int_0^{\infty} e^{-(h-1)x} x^{\varkappa} dx =$$

$$= \frac{h}{\lambda} \frac{\varkappa!\, \lambda^{1-h}}{h^{\varkappa+1}} + \frac{\lambda^{1-h} \varkappa!}{(h-1)^{\varkappa+1}} < 2 \frac{\varkappa!\, \lambda^{1-h}}{(h-1)^{\varkappa+1}}.$$

2. The function $f(s, \nu, \xi)$ mentioned in the title of this chapter is defined by

$$f(s, \nu, \xi) = \sum_{n \geqq \xi} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \log^{\nu} \frac{n}{\xi}. \tag{3.2.1}$$

The integer ν will be restricted in this moment only by

$$10 < \nu + 1 \leqq 3 \log T \tag{3.2.2}$$

with $T > c$; for ξ we require

$$\xi \geqq e^{\nu+1} (\geqq e^{10}). \tag{3.2.3}$$

If

$$1 < \sigma_0 \leqq \frac{3}{2}, \tag{3.2.4}$$

the square-integral in question will be

(3. 2. 5) $$J=\int\limits_{\substack{T\\ \sigma=\sigma_0}}^{2T}|f(s,\nu,\xi)|^2dt.$$

For J we need the following

LEMMA VI. *With the provisions* (3. 2. 2), (3. 2. 3) *and* (3. 2. 4) *we have*

$$J<\nu!^2\log^3\xi\left(230\frac{\xi^{2-2\sigma_0}}{(\sigma_0-1)^{2\nu+4}}+16\,T\frac{\xi^{1-2\sigma_0}}{\left(\sigma_0-\frac{1}{2}\right)^{2\nu+1}}\right).$$

8. For the proof of this lemma first we use the obvious fact that the series (3. 2. 1) defining $f(s,\nu,\xi)$ is absolutely convergent in the domain of integration; hence

$$J\leqq T\sum_{n\geqq\xi}\log^{2\nu}\frac{n}{\xi}\frac{\log^2 n}{n^{2\sigma_0}}+4\sum_{m>n\geqq\xi}\frac{\log^{\nu}\frac{n}{\xi}\log^{\nu}\frac{m}{\xi}}{(mn)^{\sigma_0}}\frac{\log m\log n}{\log\frac{m}{n}}.$$

Since for $j=0,1,2$ we have evidently

$$\log^j n=\left(\log\xi+\log\frac{n}{\xi}\right)^j\leqq 2\left(\log^j\xi+\log^j\frac{n}{\xi}\right),$$

we obtain

$$J\leqq 4\,T\max_{j=0,2}\left\{\log^{2-j}\xi\sum_{n\geqq\xi}\frac{\log^{2\nu+j}\frac{n}{\xi}}{n^{2\sigma_0}}\right\}+$$

$$+16\max_{j_1,j_2=0,1}\left\{\log^{2-j_1-j_2}\xi\sum_{m>n\geqq\xi}\frac{\log^{\nu+j_1}\frac{m}{\xi}\log^{\nu+j_2}\frac{n}{\xi}}{(mn)^{\sigma_0}\log\frac{m}{n}}\right\}.$$

Introducing $J(\varkappa,\lambda,h)$ of lemma V wherever possible, we get

(3. 3. 1) $$J\leqq 4\,T\max_{j=0,2}\{\log^{2-j}\xi\,.\,J(2\nu+j,\xi,2\sigma_0)\}+$$

$$+\frac{16}{\log 2}\max_{j_1,j_2=0,1}\left\{\log^{2-j_1-j_2}\xi\sum_{m,n\geqq\xi}\frac{\log^{\nu+j_1}\frac{n}{\xi}\log^{\nu+j_2}\frac{m}{\xi}}{(mn)^{\sigma_0}}\right\}+$$

$$+\frac{16}{\log 2}\max_{j_1,j_2=0,1}\left\{\log^{2-j_1-j_2}\xi\sum_{2n>m>n\geqq\xi}n\frac{\log^{\nu+j_1}\frac{n}{\xi}\log^{\nu+j_2}\frac{m}{\xi}}{(mn)^{\sigma_0}(m-n)}\right\}<$$

$$<4\,T\max_{j=0,2}\{\log^{2-j}\xi\,.\,J(2\nu+j,\xi,2\sigma_0)\}+$$

$$+\frac{16}{\log 2}\max_{j_1,j_2=0,1}\{\log^{2-j_1-j_2}\xi\,.\,J(\nu+j_1,\xi,\sigma_0)\,J(\nu+j_2,\xi,\sigma_0)\}+$$

$$+\frac{16}{\log 2}\max_{j_1,j_2=0,1}\left\{\log^{2-j_1-j_2}\xi\sum_{n\geqq\xi}\log 2n\frac{\log^{\nu+j_1}\frac{n}{\xi}\log^{\nu+j_2}\frac{2n}{\xi}}{n^{2\sigma_0-1}}\right\}.$$

We consider the sum behind the last max. This is obviously

$$< \log \xi \sum_{n \geqq \xi} \frac{\log^{2\nu+j_1+j_2} \frac{2n}{\xi}}{n^{2\sigma_0-1}} + \sum_{n \geqq \xi} \frac{\log^{2\nu+j_1+j_2+1} \frac{2n}{\xi}}{n^{2\sigma_0-1}} <$$

$$< 2 \max_{j_3=0,1} \left\{ \log^{1-j_3} \xi . J\left(2\nu+j_1+j_2+j_3, \frac{\xi}{2}, 2\sigma_0-1\right) \right\}.$$

Putting this into (3. 3. 1), the last term becomes

$$< \frac{32}{\log 2} \max_{j=0,1,2,3} \left\{ \log^{3-j} \xi . J\left(2\nu+j, \frac{\xi}{2}, 2\sigma_0-1\right) \right\}.$$

Hence

$$J < 4 T \max_{j=0,2} \{ \log^{2-j} \xi . J(2\nu+j, \xi, 2\sigma_0) \} + 23 \max_{j_1, j_2=0,1} \{ \log^{2-j_1-j_2} \xi .$$
$$. J(\nu+j_1, \xi, \sigma_0) J(\nu+j_2, \xi, \sigma_0) \} + 46 \max_{j=0,1,2,3} \left\{ \log^{3-j} \xi . J\left(2\nu+j, \frac{\xi}{2}, 2\sigma_0-1\right) \right\}. \tag{3. 3. 2}$$

4. Now we may apply lemma V and finish the proof of lemma VI. The conditions of lemma V are fulfilled owing to (3. 2. 2), (3. 2. 3) and (3. 2. 4); thus from (3. 3. 2) we get

$$J < 8 T \max_{j=0,2} \left\{ \log^{2-j} \xi \frac{(2\nu+j)! \, \xi^{1-2\sigma_0}}{(2\sigma_0-1)^{2\nu+j+1}} \right\} + 92 \max_{j_1, j_2=0,1} \left\{ \log^{2-j_1-j_2} \xi . \right.$$
$$\left. \frac{(\nu+j_1)! (\nu+j_2)! \, \xi^{2-2\sigma_0}}{(\sigma_0-1)^{2\nu+j_1+j_2+2}} \right\} + 92 \max_{j=0,1,2,3} \left\{ \log^{3-j} \xi . \frac{(2\nu+j)! \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2-2\sigma_0}}{(2\sigma_0-2)^{2\nu+j+1}} \right\}. \tag{3. 4. 1}$$

Owing to $(\nu+1) \leqq \log \xi$ we have further

$$\max_{j=0,1} \frac{(2\nu+j)! \log^{-j} \xi}{(2\nu)!} \leqq \max \left(1, \frac{(2\nu+1)(2\nu+2)}{\log^2 \xi} \right) \leqq 4,$$

$$\max_{j_1, j_2=0,2} \frac{(\nu+j_1)! (\nu+j_2)! \log^{-j_1-j_2} \xi}{\nu!^2} \leqq \max \left(1, \frac{\nu+1}{\log \xi}, \frac{(\nu+1)^2}{\log^2 \xi} \right) \leqq 1,$$

$$\max_{j=0,1,2,3} \frac{(2\nu+j)! \log^{-j} \xi}{(2\nu)!} \leqq$$

$$\leqq \max \left(1, \frac{2\nu+1}{\log \xi} \frac{(2\nu+1) 2\nu+2)}{\log^2 \xi}, \frac{(2\nu+1)(2\nu+2)(2\nu+3)}{\log^3 \xi} \right) \leqq 12.$$

Hence (3. 4. 1) gives

$$J \leqq 32 T \frac{(2\nu)! \, \xi^{1-2\sigma_0} \log^2 \xi}{(2\sigma_0-1)^{2\nu+1}} + 92 \frac{\nu!^2 \, \xi^{2-2\sigma_0} \log^2 \xi}{(\sigma_0-1)^{2\nu+4}} + 1104 \frac{\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2-2\sigma_0} \log^3 \xi . (2\nu)!}{(2\sigma_0-2)^{2\nu+4}}.$$

Owing to $\sigma_0 < \frac{3}{2}$ and (1. 9. 2) we obtain

$$J < 16\,T\,\frac{\nu!^2\,\xi^{1-2\sigma_0}\log^2\xi}{\left(\sigma_0-\frac{1}{2}\right)^{2\nu+1}} + 92\,\frac{\nu!^2\,\xi^{2-2\sigma_0}\log^2\xi}{(\sigma_0-1)^{2\nu+4}} + 138\,\frac{\nu!^2\,\xi^{2-2\sigma_0}\log^3\xi}{(\sigma_0-1)^{2\nu+4}} <$$

$$< \nu!^2\log^3\xi\left(16\,T\,\frac{\xi^{1-2\sigma_0}}{\left(\sigma_0-\frac{1}{2}\right)^{2\nu+1}} + 230\,\frac{\xi^{2-2\sigma_0}}{(\sigma_0-1)^{2\nu+4}}\right).$$

Q. e. d.

5. In order to obtain the estimation required for the investigation of $f(s,\nu,\xi)$, we need the simple

LEMMA VII. *If a function $A(t)$ is integrable in $[T, 2T]$ and β is an arbitrary number with $0<\beta<1$, then we have in $[T, 2T]$*

$$(3.5.1)\qquad |A(t)| \leqq T^{-\frac{\beta}{2}}\left(\int_T^{2T}|A(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

except perhaps a set D of measure

$$(3.5.2)\qquad \leqq T^{\beta}.$$

The proof of this lemma follows simply from the fact that — denoting the measure of D by $m(D)$ — we have

$$\int_T^{2T}|A(t)|^2dt \geqq \int_D |A(t)|^2dt \geqq m(D)\,T^{-\beta}\int_T^{2T}|A(t)|^2dt.$$

Q. e. d.

6. Now we apply lemmas VI and VII with $A(t)=f(\sigma_0+it,\nu,\xi)$. This gives that the inequality

$$(3.6.1)\qquad |f(\sigma_0+it,\nu,\xi)| \leqq T^{-\frac{\beta}{2}}\,\nu!\log^2\xi\left(4\sqrt{T}\,\frac{\xi^{\frac{1}{2}-\sigma_0}}{\left(\sigma_0-\frac{1}{2}\right)^{\nu+1}} + 16\,\frac{\xi^{1-\sigma_0}}{(\sigma_0-1)^{\nu+2}}\right)$$

holds for $T\leqq t\leqq 2T$ except at most a set $D=D_{\nu,\xi}$ with

$$(3.6.2)\qquad m(D)\leqq T^{\beta}.$$

In what follows ξ will be a function of ν. Since ν assumes according to (3.2.2) at most $3\log T$ values, we obtain that omitting from $T\leqq t\leqq 2T$ a set L, the measure of which is according to (3.6.2)

$$(3.6.3)\qquad \leqq 3\,T^{\beta}\log T,$$

the inequality (3.6.1) holds (with the provisions (3.2.2)—(3.2.3)—(3.2.4) of course). This is the fact about the distribution of values of $f(s,\nu,\xi)$ we meant by the title of chapter III.

7. We use this distribution-theorem in a specialised form. We divide the interval $[T, 2T]$ into parts

$$(3.7.1)\qquad \sigma=\sigma_0,\quad T+\frac{j}{[\log^3 T]}\leqq t< T+\frac{j+1}{[\log^3 T]}$$

and denote them by l_j. We denote by l_j'' resp. by l_j' those l_j's which belong to L resp. contain at least one t-value *not* belonging to L; in the last case we call these t-values permissible. The number of the intervals l_j'' is from (3. 6. 3) and (3. 7. 1) obviously

(3. 7. 2) $$< 3\, T^{\beta} \log^4 T.$$

Hence we obtain

LEMMA VIII. *Apart from at most* $3\,T^{\beta}\log^4 T$ *intervals* l_j'' *of* (3. 7. 1) *the remaining ones contain at least one permissible t-value, i. e. one for which the inequality* (3. 6. 1) *with the provisions* (3. 2. 2), (3. 2. 3), (3. 2. 4) *holds.*

§ IV. Lemmas from the theory of the zeta-function

1. In order to draw conclusions for the zeros from lemma VIII, we have to express $f(s, v, \xi)$ by these zeros. This is performed by

LEMMA IX. *For* $\sigma > 1$, $\eta > 1$ *and integer* $k \geqq 2$ *we have*

$$f(s, k, \eta) = k!\left[\frac{\eta^{1-s}}{(s-1)^{k+1}} - \sum_{\varrho} \frac{\eta^{\varrho-s}}{(s-\varrho)^{k+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta^{-2n-s}}{(s+2n)^{k+1}}\right].$$

The proof of this lemma which occurs in my paper[10] can be modelled after the proof of the exact formula of RIEMANN—VON MANGOLDT and therefore it is sufficient to sketch it. We start from the integral

(4. 1. 2) $$I = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\alpha')} \frac{\eta^{w}}{w^{k+1}} \frac{\zeta'}{\zeta}(s+w)\,dw,$$

where $w = u + iv$ and α' is restricted only by

(4. 1. 2) $$0 > \alpha' > 1 - \sigma.$$

We may insert the Dirichlet-series for $-\frac{\zeta'}{\zeta}(s+w)$ and integrate term by term; we obtain

(4. 1. 3) $$I = \sum_{n} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(\alpha')} \frac{\left(\frac{\eta}{n}\right)^{w}}{w^{k+1}}\,dw = (-1)^{k+1} \sum_{n \leqq \eta} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \frac{\log^k \frac{n}{\eta}}{k!}.$$

On the other hand we can find for all integer $m \geqq 2$ a T_m with

$$m < T_m < m+1$$

such that on the segment

$$-1 \leqq \sigma + u \leqq 2, \qquad t + v = T_m$$

the inequality

(4. 1. 4) $$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s+w)\right| \leqq a_1 \log^2 T_m$$

holds. Hence replacing I by

$$I_m = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha'+(-T_m-t)i}^{\alpha'+(T_m-t)i} \frac{\eta^w}{w^{k+1}}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+w)\,dw,$$

we can apply CAUCHY's theorem to I_m along the parallelogramm (P)

$$\begin{array}{lll} u+\sigma=\alpha', & -T_m \leqq t+v \leqq T_m, & (l_1) \\ -\omega \leqq u+\sigma \leqq \alpha', & t+v=\pm T_m, & (l_2),(l_3) \\ u+\sigma=-\omega, & -T_m \leqq t+v \leqq T_m, & (l_4) \end{array}$$

where ω is an arbitrary large odd integer. By a routine-estimation one can show that the integrals along (l_2), (l_3), (l_4) tend to 0, when $m \to \infty$ and $\omega \to \infty$, further that $I_m \to I$ and for $\omega \to \infty$

$$I_m = +\frac{\eta^{1-s}}{(1-s)^{k+1}} - \sum_{|t_\varrho|<T_m} \frac{\eta^{\varrho-s}}{(\varrho-s)^{k+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta^{-2n-s}}{(-2n-s)^{k+1}}.$$

Q. e. d.

2. Here we mention some facts from the theory of the zeta-function which we need in the rest of the proof. Denoting as usual by $N(U)$ the number of the zeros of $\zeta(w)$ in the parallelogramm

$$0<u<1, \qquad 0<v<U,$$

we have

(4. 2. 1) $$N(U) < a_2 U \log U$$

and

(4. 2. 2) $$N(U+1)-N(U) < a_2 \log U.$$

Further we have the estimation[14]

(4. 2. 3) $$|\zeta(u+iv)| < a_3 |v|^{(1-u)^{\frac{6}{5}}} \log^3 |v|$$

valid for $|v| \geqq 2$, $1 \geqq u \geqq 1-b$. From this it follows by a usual application of a lemma of LANDAU that $\zeta(w)$ does not vanish in the domain

(4. 2. 4) $$u > 1 - \frac{a_4}{\log^{\frac{5}{6}} |v|}, \quad |v| > c.$$

3. We shall use the following simple lemma too.

LEMMA X. *If*

(4. 3. 1) $$c < T \leqq t_0 \leqq 2T, \quad \frac{1}{\log^2 T} \leqq \alpha < b$$

[14] The stronger inequality with $(^5/_4-\varepsilon)$ instead of $^6/_5$ is contained in TITCHMARSH's paper: On $\zeta(s)$ and $\pi(x)$, *Quart. Journ. of Math., Oxf. Ser.*, **9** (1938), pp. 97—108, deduced from the estimation of VINOGRADOFF. Using the new improved form of VINOGRADOFF's estimation one could replace the exponent $^6/_5$ in (4. . 3) by $(^3/_2-\varepsilon)$ But even (4. 2. 3) is unnecessarily strong for our aims, we use it for convenience only. Similar remarks hold for (4. 2. 4) too.

and we denote by N_2 the number of the zeros of $\zeta(w)$ in the parallelogramm P_1 defined by

$$(1>)\,u \geqq 1-\alpha, \quad |v-t_0| \leqq \alpha,$$

then for $T>c$ we have

$$N_2 > (6\alpha)^{-\frac{6}{5}} \log T + 7 \log\log T.$$

The proof of this lemma follows easily from JENSEN's inequality. Calling K_1 the circle

$$|w-s_1| \equiv |w-(1+\alpha+it_0)| = 7\alpha,$$

we have from this inequality—using (4. 2. 3) and also the trivial inequalities

$$\frac{1}{|\zeta(s_1)|} < \frac{1+\alpha}{\alpha} < \frac{2}{\alpha} < 2\log^2 T < \log^3 T, \quad \log\frac{7}{\sqrt{5}} > 1$$

— the estimation

$$N_2 < 3\log\log T + \log \max_{|w-s_1|=7\alpha} |\zeta(w)| < (6\alpha)^{-\frac{6}{5}} \log(2T+1) +$$

$$+ 6\log\log T < (6\alpha)^{-\frac{6}{5}} \log T + 7\log\log T$$

for $T>c$.

§ V. The basic inequality

1. From lemmas VIII and IX with $k=\nu$, $\eta=\xi$ we shall obtain easily our basic inequality. Remarking that t denotes throughout the rest of the paper permissible t-values (and correspondingly $s=\sigma_0+it$ permissible s-values) we obtain

$$(5.1.1) \quad \left| \frac{\xi^{1-s}}{(s-1)^{\nu+1}} - \sum_{\varrho} \frac{\xi^{\varrho-s}}{(s-\varrho)^{\nu+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^{-2n-s}}{(s+2n)^{\nu+1}} \right| \leqq$$

$$\leqq T^{-\frac{\beta}{2}} \log^2 \xi \left(4\sqrt{T} \frac{\xi^{\frac{1}{2}-\sigma_0}}{\left(\sigma_0-\frac{1}{2}\right)^{\nu+1}} + 16 \frac{\xi^{1-\sigma_0}}{(\sigma_0-1)^{\nu+2}} \right).$$

2. For a fixed j we denote by

$$(5.2.1) \qquad \varrho^* = \sigma^* + it^*$$

that zero of $\zeta(w)$ in the horizontal strip

$$T + \frac{j}{[\log^3 T]} \leqq v < T + \frac{j+1}{[\log^3 T]}$$

(if there is any) whose real part is maximal. Now choosing the s of (5. 1. 1) permissible in I'_j, we multiply both sides of (5. 1. 1) by

$$(5.2.2) \qquad |\xi^{s-\varrho^*}(s-\varrho^*)^{\nu+1}| = \xi^{\sigma_0-\sigma^*}|s-\varrho^*|^{\nu+1}.$$

Since we have

$$|s-\varrho^*| \leqq (\sigma_0-\sigma^*)+\frac{1}{\log^3 T},$$

we obtain our basic inequality

$$(5.2.3) \quad \left| \xi^{1-\varrho^*}\left(\frac{s-\varrho^*}{s-1}\right)^{\nu+1} - \sum_{\varrho} \xi^{\varrho-\varrho^*}\left(\frac{s-\varrho^*}{s-\varrho}\right)^{\nu+1} - \sum_{n=1}^{\infty} \xi^{-2n-\varrho^*}\left(\frac{s-\varrho^*}{s+2n}\right)^{\nu+1} \right| <$$

$$> 16\frac{T^{-\frac{\beta}{2}}\log^2\xi}{\sigma_0-1}\left[\sqrt{T}\,\xi^{\frac{1}{2}-\varrho^*}\left(\frac{(\sigma_0-\sigma^*)+\frac{1}{\log^3 T}}{\sigma_0-\frac{1}{2}}\right)^{\nu+1} + \xi^{1-\sigma^*}\left(\frac{(\sigma_0-\sigma^*)+\frac{1}{\log^3 T}}{\sigma_0-1}\right)^{\nu+1}\right],$$

which holds under the assumptions (3. 2. 2), (3. 2. 3), (3. 2. 4).

§ VI. The main lemma

1. In this chapter we prove a lemma from which the theorem itself will follow easily. For the sake of brevity we introduce the abbreviations

$$(6.1.1) \qquad \varepsilon^* = \beta^{\frac{1}{100}},$$

$$(6.1.2) \qquad A_1 = \frac{1}{2} - 200\,\beta^{\frac{1}{100}}$$

and we choose a positive β so small that

$$(6.1.3) \qquad \varepsilon^* < \frac{1}{80\,000},$$

$$(6.1.4) \qquad \frac{1}{3} < A_1 < \frac{1}{2},$$

$$(6.1.5) \qquad \beta^{\frac{147}{125}} \log\frac{1}{\beta} < \frac{1}{40}\beta^{\frac{101}{100}},$$

$$(6.1.6) \qquad \beta < \frac{6A_1}{1-\varepsilon^*}\,399\,\beta^{\frac{1}{100}} < 1.$$

All of these can obviously be fulfilled if $\beta < b$. We require further that $T > c$ and

$$(6.1.7) \qquad \beta \geqq \left(\frac{1}{\log T}\right)^{0,9}.$$

No other restrictions are made upon β.

2. Fixing such a β we determine σ_0 by

$$(6.2.1) \qquad \sigma_0 = 1 + (1-\varepsilon^*)^2 \frac{1}{399^2}\beta^{\frac{49}{50}}.$$

By this choice (3. 2. 4) is satisfied on account of (6. 1. 3). Now we consider those strips of the form

$$(6.2.2)\qquad T+\frac{j}{[\log^3 T]}\leqq t< T+\frac{j+1}{[\log^3 T]}$$

for which the segment

$$\sigma_0+it,\quad T+\frac{j}{[\log^3 T]}\leqq t< T+\frac{j+1}{[\log^3 T]}$$

is an l'_j in the sense of § III. Now we state the following

LEMMA XI. *In all such strips* $\zeta(w)\neq 0$ *for*

$$u>1-\frac{\beta}{2}+200\,\beta^{\frac{101}{100}}\equiv 1-A_1\beta.$$

We can state this lemma even in a slightly different form. Fixing a strip (6.2.2) and denoting as in (5.2.1) by ϱ^* the zero with a maximal σ^*, we have

$$(6.2.3)\qquad \sigma^*\leqq 1-A_1\beta$$

(if there are zeros in the strip at all).

3. For the proof of the main lemma we start from the basic inequality (5.2.3) applying it with

$$(6.3.1)\qquad \xi=\exp\left(\frac{6A_1}{1-\varepsilon^*}\cdot\frac{399}{\beta^{\frac{99}{100}}}(\nu+1)\right)\equiv e^{A_2(\nu+1)},$$

where A_2 is an abbreviation for

$$(6.3.2)\qquad \frac{6A_1}{1-\varepsilon^*}\cdot\frac{399}{\beta^{\frac{99}{100}}}.$$

Hence A_2 is independent of ν. Owing to (6.1.6) we have $A_2>1$, i.e.

$$\xi>e^{\nu+1},$$

which means that not only (3.2.4) but even (3.2.3) is fulfilled by our choices of σ_0 resp. ξ. Moreover, owing to the right inequality of (6.1.6) we have

$$(6.3.3)\qquad \xi<e^{\frac{\nu+1}{\beta}}.$$

Fixing j, the value of s is fixed, i.e. independent of ν. Only ν is not yet defined in the basic inequality and we have to take care of (3.2.2). ν will be chosen properly later; here we make the further restriction

$$(6.3.4)\qquad \nu+1>\frac{1-\varepsilon^*}{6A_1}\,\frac{1}{399}\,\beta^{\frac{99}{100}}\log T\equiv\frac{\log T}{A_2}.$$

This will enable us to drop the second term in brackets on the right in the basic inequality (5.2.3). But previously we have to show that this new restriction (6. 3. 4) is compatible with (3. 2. 2). From (6. 1. 6) we have evidently

$$\frac{1-\varepsilon^*}{6A_1}\frac{1}{399}\beta^{\frac{99}{100}}<3$$

which shows this compatibility. Hence (6. 3. 4) and (3. 2. 2) can be melted into a single restriction. Since from (6. 1. 6) we have

$$A_2<\frac{1}{\beta},$$

from (6. 3. 4) it follows

$$\nu+1>\beta\log T$$

and from (6. 1. 7)

$$\nu+1>\log^{0,1}T;$$

thus for $T>c$ we have

$$\nu+1>10.$$

Hence the only restriction on ν is, if $T>c$, that

(6. 3. 5) $$\frac{\log T}{A_2}\leqq\nu+1\leqq 3\log T.$$

Then using (6. 3. 4) we have indeed a fortiori

$$\nu+1>\frac{\log T}{A_2+\log\frac{1}{4(\sigma_0-1)^2}},$$

i. e.

$$\left(\frac{1}{2(\sigma_0-1)}\right)^{\nu+1}>\sqrt{\frac{T}{e^{A_2(\nu+1)}}}=\sqrt{\frac{T}{\xi}},$$

and since $\sigma_0-\frac{1}{2}>\frac{1}{2}$, again a fortiori

$$\left(\frac{\sigma_0-\frac{1}{2}}{\sigma_0-1}\right)^{\nu+1}>\sqrt{\frac{T}{\xi}}.$$

Taking this into account, the basic inequality becomes

(6. 3. 6) $$\left|\xi^{1-\varrho^*}\left(\frac{s-\varrho^*}{s-1}\right)^{\nu+1}-\sum_{\varrho}\xi^{\varrho-\varrho^*}\left(\frac{s-\varrho^*}{s-\varrho}\right)^{\nu+1}-\sum_{n=1}^{\infty}\xi^{-2n-\varrho^*}\left(\frac{s-\varrho^*}{s+2n}\right)^{\nu+1}\right|<$$

$$<32\,T^{-\frac{\beta}{2}}\frac{\xi^{1-\sigma^*}\log^2\xi}{\sigma_0-1}\left(\frac{(\sigma_0-\sigma^*)+\frac{1}{\log^3 T}}{\sigma_0-1}\right)^{\nu+1},$$

valid with the single restriction (6. 3. 5).

4. Now we suppose our lemma IX, i. e., that the inequality (6. 2. 3) is not true for a certain strip (6. 2. 2) and we shall show that this leads to a contradiction. This means that for a certain strip (6. 2. 2), which we now fix, we suppose

(6. 4. 1) $$\sigma^*>1-A_1\beta.$$

Then we estimate the last factor on the right of (6. 3. 6). Using (6. 2. 1) and (6. 4. 1) for the expression

$$(6.4.2)\qquad U=\frac{\sigma_0-\sigma^*+\dfrac{1}{\log^3 T}}{\sigma_0-1}$$

we have the estimation

$$U=\frac{1-\sigma^*+(1-\varepsilon^*)^2\dfrac{\beta^{\frac{49}{50}}}{399^2}+\dfrac{1}{\log^3 T}}{(1-\varepsilon^*)^2\dfrac{1}{399^2}\beta^{\frac{49}{50}}}<1+A_1\frac{399^2}{(1-\varepsilon^*)^2}\beta^{\frac{1}{50}}+\left(\frac{399}{1-\varepsilon^*}\right)^2\frac{1}{\beta^{\frac{49}{50}}\log^3 T}.$$

Owing to (6. 1. 7) we have

$$\frac{1}{\log^3 T}\leqq\beta^{\frac{10}{3}},$$

i. e.

$$(6.4.3)\quad U<1+\left(\frac{399}{1-\varepsilon^*}\right)^2(A_1\beta^{\frac{1}{50}}+\beta^{2+\frac{1}{50}})=1+(A_1+\beta^2)\left(\frac{399}{1-\varepsilon^*}\right)^2\beta^{\frac{1}{50}}<$$

$$<\exp\left((A_1+\beta^2)\beta^{\frac{1}{50}}\left(\frac{399}{1-\varepsilon^*}\right)^2\right).$$

Further from (6. 3. 1) and (6. 4. 1) we have

$$\xi^{1-\sigma^*}<\exp(A_2(\nu+1)A_1\beta),$$

i. e., from this and (6. 4. 3) we have

$$(6.4.4)\quad \xi^{1-\sigma^*}\left(\frac{\sigma_0-\sigma^*+\dfrac{1}{\log^3 T}}{\sigma_0-1}\right)^{\nu+1}<\exp\left(\left\{A_1A_2\beta+\left(\frac{339}{1-\varepsilon^*}\right)^2\beta^{\frac{1}{50}}(A_1+\beta^2)\right\}(\nu+1)\right).$$

To make the right of (6. 4. 4) simpler we replace the restriction (6. 3. 5) by the stronger one

$$(6.4.5)\qquad \frac{\log T}{A_2}\leqq\nu+1\leqq\frac{1}{1-200\,\varepsilon^*}\cdot\frac{\log T}{A_2}.$$

Then for the exponent on the right of (6. 4. 4) we have

$$(\nu+1)\left\{A_1A_2\beta+(A_1+\beta^2)\left(\frac{399}{1-\varepsilon^*}\right)^2\beta^{\frac{1}{50}}\right\}\leqq\frac{\log T}{1-200\,\varepsilon^*}\left\{A_1\beta+\frac{A_1+\beta^2}{A_2}\left(\frac{399}{1-\varepsilon^*}\right)^2\beta^{\frac{1}{50}}\right\}=$$

$$=\frac{\log T}{1-200\,\varepsilon^*}\left\{\frac{1-400\,\varepsilon^*}{2}\beta+\frac{A_1+\beta^2}{6A_1}\,\frac{399}{1-\varepsilon^*}\beta^{\frac{101}{100}}\right\}$$

and, owing to (6. 1. 3) and (6. 1. 4),

$$<\log T\left\{\frac{\beta}{2}-\frac{100\,\varepsilon^*}{1-200\,\varepsilon^*}\beta+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{1000}\right)\frac{399}{0{,}98}\beta^{\frac{101}{100}}\right\}<$$

$$<\log T\left\{\left(\frac{1}{2}-100\,\varepsilon^*\right)\beta+80\,\beta^{\frac{101}{100}}\right\}<\frac{1-\varepsilon^*}{2}\beta\log T.$$

Hence from (6. 4. 4) we obtain

$$(6.4.6) \qquad \xi^{1-\sigma^*}\left(\frac{\sigma_0-\sigma^*+\frac{1}{\log^3 T}}{\sigma_0-1}\right)^{\nu+1} < T^{\frac{1-\varepsilon^*}{2}\beta}.$$

Since from (6. 3. 3), (6. 2. 1), (6. 3. 5) and (6. 1. 7) for $T>c$ we have

$$\frac{\log^2 \xi}{\sigma_0-1} < \frac{(\nu+1)^2}{\beta^2(1-\varepsilon^*)^2}\,\frac{399^2}{\beta^{\frac{49}{50}}} < \frac{9\cdot 399^2}{(1-\varepsilon^*)^2}\,\frac{\log^2 T}{\beta^3} < \frac{1}{32}\log^6 T,$$

from this, (6. 4. 6) and (6. 3. 6) for $T>c$ we get

$$(6.4.7) \qquad \left|\xi^{1-\sigma^*}\left(\frac{s-\varrho^*}{s-1}\right)^{\nu+1} - \sum_{\varrho}\xi^{\varrho-\varrho^*}\left(\frac{s-\varrho^*}{s-\varrho}\right)^{\nu+1} - \sum_{n=1}^{\infty}\xi^{-2n-\varrho^*}\left(\frac{s-\varrho^*}{s+2n}\right)^{\nu+1}\right| <$$

$$< T^{-\frac{\varepsilon^*\beta}{2}}\log^6 T = T^{-\frac{1}{2}\beta^{1,01}}\log^6 T$$

with the restriction (6. 4. 5). Denoting

$$(6.4.8) \qquad \beta^{\frac{49}{50}} = \varepsilon_1$$

it follows from the inequality (6. 4. 7) — taking (6. 3. 1) and (6. 4. 1) into account — that

$$(6.4.9) \qquad Z = \left|\sum_{\substack{\sigma_\varrho \geqq 1-\varepsilon_1 \\ |t_\varrho - t| \leqq \varepsilon_1}}\left(e^{A_2(\varrho-\varrho^*)}\frac{s-\varrho^*}{s-\varrho}\right)^{\nu+1}\right| = \left|\sum_{\substack{\sigma_\varrho \geqq 1-\varepsilon_1 \\ |t_\varrho - t| \leqq \varepsilon_1}}\xi^{\varrho-\varrho^*}\left(\frac{s-\varrho^*}{s-\varrho}\right)^{\nu+1}\right| <$$

$$< T^{-\frac{\varepsilon^*\beta}{2}}\log^6 T + \left|\sum_{|t_\varrho - t|>\varepsilon_1}\xi^{\varrho-\varrho^*}\left(\frac{s-\varrho^*}{s-\varrho}\right)^{\nu+1}\right| + \left|\sum_{\substack{\sigma_\varrho<1-\varepsilon_1 \\ |t_\varrho - t|\leqq\varepsilon_1}}\xi^{\varrho-\varrho^*}\left(\frac{s-\varrho^*}{s-\varrho}\right)^{\nu+1}\right| +$$

$$+ \left|\xi^{1-\varrho^*}\left(\frac{s-\varrho^*}{s-\varrho}\right)^{\nu+1}\right| + \left|\sum_{n=1}^{\infty}\xi^{-2n-\varrho^*}\left(\frac{s-\varrho^*}{s+2n}\right)^{\nu+1}\right| < T^{-\frac{\varepsilon^*\beta}{2}}\log^6 T +$$

$$+ \sum_{t_\varrho - t>20}\xi^{A_1\beta}\left|\frac{s-\varrho^*}{s-\varrho}\right|^{\nu+1} + \sum_{20\geqq t_\varrho - t\geqq\varepsilon_1}\xi^{A_1\beta}\left|\frac{s-\varrho^*}{s-\varrho}\right|^{\nu+1} + \sum_{-\varepsilon_1>t_\varrho-t>-20}\xi^{A_1\beta}\left|\frac{s-\varrho^*}{s-\varrho}\right|^{\nu+1} +$$

$$+ \sum_{t_\varrho - t<-20}\xi^{A_1\beta}\left|\frac{s-\varrho^*}{s-\varrho}\right|^{\nu+1} + \sum_{\substack{\sigma_\varrho\leqq 1-\varepsilon_1 \\ |t_\varrho - t|\leqq\varepsilon_1}}\xi^{A_1\beta}\left|\frac{s-\varrho^*}{s-\varrho}\right|^{\nu+1} + \xi^{A_1\beta}\left|\frac{s-\varrho^*}{s-1}\right|^{\nu+1} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\xi^{-2n}\left|\frac{s-\varrho^*}{s+2n}\right|^{\nu+1} = T^{-\frac{\varepsilon^*\beta}{2}}\log^6 T + Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5 + Z_6 + Z_7.$$

We remember that here t denotes a permissible value in the sense of § III.

5. The estimations of Z_6 and Z_7 are completely trivial Using $\xi < e^{\frac{\nu+1}{\beta}}$ (see (6. 3. 3)) and $A_1 < \frac{1}{2}$ (see (6. 1. 4)) we have for $T>c$

$$(6.5.1) \qquad Z_6 < e^{\frac{\nu+1}{2}}\left(\frac{2}{T}\right)^{\nu+1} < \left(\frac{4}{T}\right)^{\nu+1} < \left(\frac{4}{T}\right)^{10} < \frac{1}{T^5}$$

and

$$(6.5.2) \qquad Z_7 < \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{s-\varrho^*}{s+2n} \right|^{\nu+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{s-\varrho^*}{s+2n} \right|^{\nu-1} \cdot \left| \frac{s-\varrho^*}{s+2n} \right|^{2} \leqq$$

$$\leqq \left(\frac{2}{T}\right)^{\nu-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{2n}\right)^2 < \frac{1}{T^5}.$$

To estimate Z_1 we obtain first using (4. 2. 2) and (6. 3. 3)

$$Z_1 < a_2 \sum_{n>20} \log(t+n)\, e^{A_1(\nu+1)} \left(\frac{2}{n}\right)^{\nu+1} < 2a_2 \log T \sum_{n>20} \log n \left(\frac{4}{n}\right)^{\nu+1} < a_3 \frac{\log T}{5^{\nu+1}}.$$

But from (6. 3. 4) and (6. 1. 6) we have

$$\nu+1 > \beta \log T,$$

i. e., from (6. 5. 3)

$$(6.5.4) \qquad Z_1 < a_3 \frac{\log T}{T^\beta}.$$

The estimation of Z_4 runs analogously. We estimate the sum Z_2 as follows. Using (4. 2. 2), (6. 3. 3), (6. 1. 4) again and the definition of σ_0 (see (6. 2. 1)) we have

$$Z_2 < 40 a_2 \log T \cdot e^{\frac{\nu+1}{2}} \left(\frac{\sigma_0 - \sigma^* + \frac{1}{\log^3 T}}{\varepsilon_1} \right)^{\nu+1} <$$

$$< 40\, a_2 \log T \left(\sqrt{e}\, \frac{1 + \frac{1}{339^2} \beta^{\frac{49}{50}} - \sigma^* + \frac{1}{\log^3 T}}{\beta^{\frac{49}{50}}} \right)^{\nu+1}.$$

But from (6. 1. 7) and (6. 1. 3) we have the inequalities

$$\frac{1}{\log^3 T} < \beta^{\frac{30}{9}} < \beta, \qquad \frac{3}{2}\beta < \frac{1}{399^2} \beta^{\frac{49}{50}},$$

i. e. using (6. 4. 1) too

$$Z_2 < 40\, a_2 \log T \left(\sqrt{e}\, \frac{\frac{\beta}{2} + \frac{1}{399^2}\beta^{\frac{49}{50}} + \beta}{\beta^{\frac{49}{50}}} \right)^{\nu+1} < 40\, a_2 \log T \left(\frac{4}{399^2} \right)^{\nu+1}.$$

As we have seen, $\nu+1 > \beta \log T$; hence

$$(6.5.5) \qquad Z_2 < 40\, a_2 \frac{\log T}{T^\beta}.$$

For Z_3 the same procedure works. For the remaining sum Z_5 we have similarly

$$(6.5.6) \qquad Z_5 < 2\, a_2 \log T. e^{\frac{\nu+1}{2}} \left(\frac{\sigma_0 - \sigma^* + \frac{1}{\log^3 T}}{\sigma_0 - 1 + \varepsilon_1} \right)^{\nu+1} <$$

$$< 2\, a_2 \log T \left(\sqrt{e}\, \frac{\frac{\beta}{2} + \frac{1}{399^2}\beta^{\frac{49}{50}} + \beta}{(1-\varepsilon^*)^2 \frac{1}{399^2} \beta^{\frac{49}{50}} + \beta^{\frac{49}{50}}} \right)^{\nu+1} < 2\, a_2 \log T \left(\frac{1}{399^2} \right)^{\nu+1} < \frac{2\, a_2 \log T}{T^\beta}.$$

Collecting all these we obtain from (6. 4. 9) for $T > c$

$$Z \equiv \left| \sum_{\substack{\sigma_\varrho \geqq 1-\varepsilon_1 \\ |t_\varrho - t| \leqq \varepsilon_1}} \left(e^{A_2(\varrho-\varrho^*)} \frac{s-\varrho^*}{s-\varrho} \right)^{\nu+1} \right| < 2\, T^{-\frac{\varepsilon^*\beta}{2}} \log^6 T,$$

provided that (6. 4. 5), (6. 1. 7) and the supposition (6. 4. 1) hold.

6. To obtain a lower estimation for Z we shall choose $(\nu+1)$ suitably. This will be done by application of lemma IV. The domain of summation as well as the terms in Z are independent of ν; they will play the role of the z_j's of lemma IV. The condition

$$\max_j |z_j| \geqq 1$$

is fulfilled; we have to take only the term corresponding to $\varrho = \varrho^*$. We choose

$$m = \frac{\log T}{A_2} = \frac{1-\varepsilon^*}{6A_1} \frac{\beta^{\frac{99}{100}}}{399} \log T \tag{6.6.1}$$

as m of lemma IV. We have further to determine N of lemma IV. As N can serve any upper estimation of the number of the zeros lying in the domain of summation in (6. 5. 7). Such an estimation can be derived from lemma X choosing our permissible t as t_0 and ε_1 as α of this lemma. Only the second condition in (4. 3. 1) needs a verification; but owing to (6. 1. 7)

$$\frac{1}{\log^2 T} = \left(\frac{1}{\log^{0,9} T} \right)^{\frac{20}{9}} \leqq \beta^{\frac{20}{9}} < \beta^{\frac{49}{50}} = \varepsilon_1,$$

i. e. lemma X is applicable indeed. Hence

$$n \leqq (6\varepsilon_1)^{\frac{6}{5}} \log T + 7 \log\log T = N.$$

In order to apply lemma IV, we have to verify a) that $m \geqq N$ is fulfilled, and then to show b) that the whole interval $[m, m+N]$ is included in the interval (6. 4. 5), for only this assures that our $(\nu+1)$ in Z can be chosen as the γ of lemma IV, i. e., restriction (6. 4. 5) is fulfilled. According to the definition of m and N in (6. 6. 1) resp. in (6. 6. 2), this is certainly true if

$$\frac{1}{4.399} \beta^{\frac{99}{100}} > (6\beta^{\frac{49}{50}})^{\frac{6}{5}} + 7 \frac{\log\log T}{\log T},$$

which is fulfilled for $T > c$ if

$$\frac{1}{1600} \beta^{\frac{99}{100}} > 36\beta + 7 \left(\frac{1}{\log T} \right)^{0,9}$$

or — taking (6. 1. 7) into account —

$$\frac{1}{1600} \beta^{\frac{99}{100}} > 43\beta.$$

But this is true according to (6. 1. 3). Assertion b) is equivalent to the inequality

$$N \leqq \left(\frac{1}{1-200\,\varepsilon^*}-1\right)\frac{\log T}{A_2} = \frac{200\,\beta^{\frac{1}{100}}}{1-200\,\varepsilon^*}\cdot\frac{1-\varepsilon^*}{6\,A_1}\frac{\beta^{\frac{99}{100}}}{399}\log T,$$

which holds good if

$$(6\,\beta^{\frac{49}{50}})^{\frac{6}{5}} + 7\frac{\log\log T}{\log T} < \frac{1}{8}\beta$$

resp. if

$$36\,\beta^{\frac{147}{125}} + \frac{1}{\log^{0,95} T} < \frac{1}{8}\beta. \tag{6.6.3}$$

But this is true indeed, since from (6. 1. 7) we have

$$\frac{1}{\log^{0,95} T} \leqq \beta^{\frac{19}{18}},$$

i. e., the left side of (6. 6. 3) is

$$< 36\,\beta^{\frac{147}{125}} + \beta^{\frac{19}{18}} < 37\,\beta^{\frac{19}{18}} < \frac{1}{8}\beta$$

according to (6. 1. 3). Hence we choose in (6. 5. 7) as $(\nu+1)$ the value γ given by lemma IV. Thus

$$Z > \left(\frac{(6\,\varepsilon_1)^{\frac{6}{5}}\log T + 7\log\log T}{e^6\,\frac{1-\varepsilon^*}{6\,A_1}\,\frac{\beta^{\frac{99}{100}}}{399}\log T}\right)^{(6\,\varepsilon_1)^{\frac{6}{5}}\log T + 7\log\log T} >$$

$$> \left(\frac{(6\,\varepsilon_1)^{\frac{6}{5}}\,6\,A_1 399}{e^6\,\beta^{\frac{99}{100}}}\right)^{(6\,\varepsilon_1)^{\frac{6}{5}}\log T}\left(\frac{6\,A_1\,399}{e^6\,\beta^{\frac{99}{100}}\log T}\right)^{7\log\log T} >$$

$$> \left(\frac{800}{e^6}\,\beta^{\frac{1}{5}}\right)^{36\,\beta^{\frac{147}{125}}\log T}\left(\frac{1}{\log T}\right)^{7\log\log T} > T^{-8\,\beta^{\frac{147}{125}}\log\frac{1}{\beta}}\,e^{-7\,(\log\log T)^2}$$

and (6. 5. 7) gives

$$T^{\left(\frac{1}{2}\beta^{\frac{101}{100}} - 8\,\beta^{\frac{147}{125}}\log\frac{1}{\beta}\right)} < 2\log^6 T.\, e^{7\,(\log\log T)^2} < e^{8\,(\log\log T)^2}$$

or

$$\frac{1}{2}\beta^{\frac{101}{100}} - 8\,\beta^{\frac{147}{125}}\log\frac{1}{\beta} < 8\,\frac{(\log\log T)^2}{\log T}.$$

But then it follows from (6. 1. 5)

$$\beta^{\frac{101}{100}} < 32\,\frac{(\log\log T)^2}{\log T}.$$

Therefore using (6. 1. 7) we could conclude

$$\frac{1}{\log^{\frac{909}{1000}} T} < 32 \frac{(\log\log T)^2}{\log T},$$

which is certainly false if $T > c$. Hence our assumption (6. 4. 1) led to a contradiction, i. e., our main lemma XI is completely proved.

§ VII. Proof of theorem I

1. After having the proof of the crucial lemma XI we can easily prove theorem I. Let $T > c$ and again

$$\left(\frac{1}{\log T}\right)^{0,9} \leqq \beta \leqq b, \tag{7. 1. 1}$$

and consider with a fixed β the number of the zeros of $\zeta(w)$ in the domain

$$T \leqq v \leqq 2T, \qquad u \geqq 1 - \frac{\beta}{2} + 200\,\beta^{\frac{101}{100}}. \tag{7. 1. 2}$$

Forming with the σ_0 defined in (6. 2. 1) the intervals I_j' and I_j'', our main lemma asserts that the horizontal strips corresponding to the intervals I_j' do not contain zeros of $\zeta(w)$ for

$$u \geqq 1 - \frac{\beta}{2} + 200\,\beta^{\frac{101}{100}}.$$

Hence the other ones can only contain zeros in the domain (7. 1. 2). The number of such strips is according to (3. 7. 2) at most $3T^\beta \log^4 T$ and a strip can contain according to (4. 2. 2) at most $2a_2 \log T$ zeros. Hence the domain (7. 1. 2) contains at most

$$6a_2 T^\beta \log^5 T \tag{7. 1. 3}$$

zeros of $\zeta(w)$ provided that the provisions of (7. 1. 1) hold.

2. Now we estimate for $T > c$ the number N_1 of the zeros of $\zeta(w)$ in the domain

$$\sqrt[4]{T} \leqq v \leqq T, \quad u \geqq 1 - \frac{\beta}{2} + 200\,\beta^{\frac{101}{100}} \tag{7. 2. 1}$$

when $\left(\frac{1}{\log \sqrt[4]{T}}\right)^{0,9} \leqq \beta \leqq b$. We have to replace T in (7. 1. 3) by $\frac{T}{2}$, $\frac{T}{2^2}, \ldots, \frac{T}{2^{d_1}}$ where the integer d_1 is determined by

$$\frac{T}{2^{d_1-1}} > \sqrt[4]{T} \geqq \frac{T}{2^{d_1}}.$$

So we obtain for N_1 the upper estimation

$$6a_2 \log^5 T \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{T}{2^j}\right)^{\beta} < a_4 T^{\beta} \log^{5,9} T < a_4 T^{\beta} \log^6 T. \tag{7.2.2}$$

3. Now we estimate N_1 defined above when

$$0 < \beta \leqq \left(\frac{1}{\log \sqrt[4]{T}}\right)^{0,9}. \tag{7.3.1}$$

Then for the points of the domain (7. 2. 1) we have

$$u \geqq 1 - \frac{\beta}{2} + 200\,\beta^{\frac{101}{100}} > 1 - \frac{\beta}{2} \geqq 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log \sqrt[4]{T}}\right)^{0,9} > 1 - 2\,\frac{1}{\log^{0,9} v},$$

i. e., in the case of (7. 3. 1) the whole domain (7. 2. 1) belongs to a domain in which $\zeta(w) \neq 0$ according to (4. 2. 4). Hence (7. 2. 2) holds trivially supposing (7. 3. 1); thus the estimation (7. 2. 2) of N_1 is proved for

$$0 < \beta \leqq b, \tag{7.3.2}$$

provided that $T > c$.

4. To obtain the estimation of

$$N\left(1 - \frac{\beta}{2} + 200\,\beta^{\frac{101}{100}},\, T\right),$$

we have only to estimate the number of the zeros of $\zeta(w)$ in the domain

$$0 < v \leqq \sqrt[4]{T}, \qquad u \geqq 1 - \frac{\beta}{2}. \tag{7.4.1}$$

This can be done e. g. by the estimation (1. 1. 3) of CARLSON—HOHEISEL. This gives the upper estimation

$$a_5 \left(T^{\frac{1}{4}}\right)^{4\frac{\beta}{2}} \log^6 T = a_4 T^{\frac{\beta}{2}} \log^6 T. \tag{7.4.2}$$

(7. 4. 2) and (7. 3. 2) together give the estimation

$$N\left(1 - \frac{\beta}{2} + 200\,\beta^{\frac{101}{100}},\, T\right) < a_6 T^{\beta} \log^6 T, \tag{7.4.3}$$

provided that

$$T > c, \qquad 0 < \beta < b. \tag{7.4.4}$$

5. The estimation (7. 4. 3) is essentially our theorem I; to obtain it in the final form we need only the trivial fact that for the function

$$y = f(x) = 1 - \frac{x}{2} + 200\,x^{\frac{101}{100}}$$

in the interval

$$0 < x < \frac{1}{404^{100}}$$

the inequality

$$x \leqq 2(1-y) + 600(1-y)^{\frac{101}{100}} \tag{7.5.1}$$

is valid for

$$f\left(\frac{1}{404^{100}}\right) \leqq y \leqq 1.$$

Hence if the b in (7. 4. 4) is $< \frac{1}{404^{100}}$, we can replace $1 - \frac{\beta}{2} + 200\,\beta^{1,01}$ by σ_1; then according to (7. 5. 1) we have

$$\beta \leqq 2(1-\sigma_1) + 600(1-\sigma_1)^{\frac{101}{100}}.$$

Putting this into (7. 4. 3) our theorem follows.

(Received 13 September 1950)

ТЕОРЕМА КАРЛСОНА В ТЕОРИИ ζ-ФУНКЦИИ РИМАНА

П. ТУРАН (Будапешт)

(Р е з ю м е)

После инициативы Бора и Ландау Карлсон открыл теорему, котороя в форме Гохейзеля утверждает, что если число корней ζ-функции Рнмана в параллелограмме $\sigma > \sigma_0$, $|t| \leqq T$ плоскости комплексного переменного $s = \sigma + it$ обозначим через $N(\sigma_0, T)$, справедлива оценка

$$N(\sigma_0, T) < c\, T^{4\sigma_0(1-\sigma_0)} \log^6 T, \tag{1}$$

если только $1 \geqq \sigma_0 \geqq \frac{1}{2}$; здесь c_1 а в дальнейшем и $c_2, \ldots$ обозначают положительные числовые постоянные. Как видно из исследований Гохейзеля и Ю. В. Линника, такие оценки имеют большое значение в различных областях теории чисел, как например, верхняя оценка разности $p_{n+1} - p_n$ (где $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ последовательность простых чисел) в теории распределения простых чисел mod 1 и — обобщив для родственных L-функций — в аддитивной теории чисел; эти результаты являются тем более лучшими, чем лучше можно понизить показатель степени T в (1). Если, например λ постоянная, и для $\frac{1}{2} \leqq \sigma_0 \leqq 1$

$$N(\sigma_0, T) \leqq c_2\, T^{\lambda(1-\sigma_0)} \log^6 T, \tag{2}$$

то при всяком $\varepsilon > 0$ для $n > n_0(\varepsilon)$

$$p_{n+1} - p_n < p_n^{1-\frac{1}{\lambda}+\varepsilon}. \tag{3}$$

Из (1 следует $\lambda = 4$. Из улучшенной оценки Ингэма, согласно которой

$$N(\sigma_0, T) \begin{cases} < c_3\, T^{\frac{8}{3}(1-\sigma)} \log^5 T, & \text{если } 1 \geqq \sigma_0 \geqq \frac{5}{6}, \\ < c_3\, T^{(1+2\sigma_0)(1-\sigma_0)} \log^5 T, & \text{если } \frac{5}{6} \geqq \sigma_0 \geqq \frac{1}{2}, \end{cases} \tag{4}$$

получается $\lambda = \frac{8}{3}$. С другой стороны легко заметить, что $\lambda \geqq 2$, то есть $p_{n+1} - p_n < p_n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ лучший результат, который можно так получить, и что оценки (1) и (4) „наиболее глубоки“ в левой окрестности $\sigma_0 = 1$. В настоящей работе именно для этой области достигаем результатов, дающих оценку для $N(\sigma_0, T)$ являющуюся лучше предыдущих. Главная теорема доказывает существование таких c_4, c_5 и c_6 что при $T > c_4$ и $1 \geqq \sigma_0 \geqq 1 - c_6$

$$N(\sigma_0, T) < c_5\, T^{2(1-\sigma_0)+600(1-\sigma_0)^{1,01}} \log^6 T. \tag{5}$$

Если из (1) и (4) следует $\lambda \sim 2$ для правой окрестности $\sigma_0 = \frac{1}{2}$, то (5) даёт этот же результат для левой окрестности $\sigma_0 = 1$. Возможно того, что $p_{n+1} - p_n < p_n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, следует уже из (5).

ÜBER EINE VERSCHÄRFUNG EINES ZAHLENTHEORETISCHEN SATZES VON THUE

Von

L. RÉDEI (Szeged), korrespondierendem Mitglied der Akademie

§ 1.

Durchweg bezeichne p und n eine gegebene Primzahl bzw. natürliche Zahl. Im allgemeinen nennen wir

$$x=(x_1,\ldots,x_n) \tag{1}$$

einen Punkt oder (n-dimensionalen) Vektor mit den Koordinaten x_i; oft nennen wir (1) auch das System der Elemente x_i oder eine (n-gliedrige) Folge mit den Gliedern x_i.

Zwei ganzzahlige Systeme

$$(x_1,\ldots,x_n),\qquad (y_1,\ldots,y_n)$$

nennen wir äquivalent, wenn es passende ganze Zahlen $a, b (p \nmid a)$ gibt, so daß

$$y_i \equiv ax_i+b \pmod{p} \tag{2}$$

gilt. Es ist klar, daß es dabei in der Tat um einen Äquivalenzbegriff handelt, der in der Menge aller Systeme von n ganzen Zahlen erklärt ist. Die entsprechenden Äquivalenzklassen nennen wir kurz die n-Klassen.

Es erhebt sich die Frage nach einem möglichst engen Zahlintervall, der aus jeder n-Klasse alle Koordinaten mindestens eines Repräsentanten $(x_1,\ldots,x_n)$ enthält. Offenbar darf dieses Intervall ohne Einschränkung der Allgemeinheit in der Form $(0, L)$ mit einer ganzen Zahl $L (0 \leqq L \leqq p-1)$ angenommen werden. Dann ist $L=L_n(p)$ eine (eindeutige) Funktion von p und n, die wir das n-te Affinmaß für p nennen können.[1] Wir beweisen den

[1] Würde man in (2) statt der „Affinitäten" $y \equiv ax+b \pmod{p}$ die „Projektivitäten"

$$y\equiv\frac{ax+b}{cx+d} \pmod{p}$$

zulassen, so könnte man entsprechend das „n-te projektive Maß für p" definieren, dessen Bestimmung ein sehr schwieriges Problem zu sein scheint.

SATZ. *Es gilt*

$$L_n(p) \leqq \frac{2}{\sqrt[n-1]{n}} \sqrt[n-1]{p^{n-2}} \qquad (n=2,3,\ldots). \tag{3}$$

Später unten werden wir zeigen, daß aus einem elementaren Satz von THUE[2] sehr leicht die schwächere Abschätzung

$$L_n(p) \leqq 2\left(\left[\sqrt[n-1]{p}\right]+1\right)^{n-2} \qquad (n=2,3,\ldots) \tag{4}$$

folgt, wobei $[z]$ die größte ganze Zahl $\leqq z$ bezeichnet; deshalb ist unser Satz als eine Verschärfung dieses Thueschen Satzes anzusehen.

Zum Beispiel gilt nach (3)

$$L_2(p) \leqq 1,\quad L_3(p) \leqq \sqrt{\frac{4p}{3}},\quad L_4(p) \leqq \sqrt[3]{2p^2},\quad L_5(p) \leqq \sqrt[4]{\frac{16p^3}{5}}.$$

(Insbesondere gilt aber trivial $L_2(p)=1$).

Unseren Satz werden wir mit Hilfe eines sehr allgemeinen früheren Satzes von uns gewinnen,[3] den wir ein endlich-projektivgeometrisches Analogon des Minkowskischen Fundamentalsatzes (über die Gitterpunkte) genannt und mit seiner Hilfe schon früher[4] einige Resultate über gewisse Verteilungsfragen der Potenzreste mod p gewonnen haben. Einen Teil der letzteren hat auch KANOLD[5] bekommen und daraus einige weitere Schlüsse gezogen.

§ 2.

Mit R_n bezeichnen wir den n-dimensionalen Euklidischen Raum, dessen Punkte wir in der Form (1) annehmen. Die Punkte von R_n mit ganzen Koordinaten nennen wir Gitterpunkte.

Mit K_p bezeichnen wir den (endlichen) Primkörper von der Charakteristik p mit dem Einselement ε.

Unter dem $n-1$-dimensionalen projektiven Raum $\mathfrak{P}_{n-1}$ über K_p verstehen wir wie üblich die Menge der Punkte

$$\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n) \qquad (\xi_i \in K_p;\ \text{nicht alle } \xi_i=0),$$

wobei in den Koordinaten ein gemeinsamer Faktor ($\neq 0$) gleichgültig bleibt.

[2] THUE, Et par antydninger til en taltheoretisk methode, *Christiania Videnskabs-Selskabs Forh.*, 1902, No. 7, S. 1—21.

[3] L. RÉDEI, Endlich-projektivgeometrisches Analogon des Minkowskischen Fundamentalsatzes, *Acta Math.*, **84** (1950), S. 155—158.

[4] L. RÉDEI, Über die Anzahl der Potenzreste mod p im Intervall $1, \sqrt{p}$, *Nieuw Archief voor Wiskunde, Groningen,* **23** (1950):2; S. 272—281.

[5] H. J. KANOLD, Eine Bemerkung zur Verteilung der r-ten Potenznichtreste einer ungeraden Primzahl, *Journal für reine und angew. Math.*, **188** (1950), S. 74—77.

Einem Gitterpunkt $x=(x_1,\ldots,x_n)$ von R_n mit nicht lauter durch p teilbaren Koordinaten x_i ordnen wir den Punkt

$$(x_1\varepsilon,\ldots,x_n\varepsilon)$$

von $\mathfrak{P}_{n-1}$ zu, den wir auch mit $(x_1,\ldots,x_n)\varepsilon$ bezeichnen.

Mit $\mathfrak{K}$ bezeichnen wir vorläufig eine beliebige Punktmenge in R_n (später soll $\mathfrak{K}$ ein konvexer Körper sein). Wir sagen, daß $\mathfrak{K}$ den Raum $\mathfrak{P}_{n-1}$ erzeugt, wenn die den Gitterpunkten (mit nicht lauter durch p teilbaren Koordinaten) zugeordneten Punkte von $\mathfrak{P}_{n-1}$ den ganzen Raum $\mathfrak{P}_{n-1}$ erschöpfen.

Für eine positive Zahl c bezeichne $c\mathfrak{K}$ das c-fache von $\mathfrak{K}$, d. h. die Menge aller cx $(x\in\mathfrak{K})$.

Mit $\mathfrak{D}$ bezeichnen wir den zentralsymmetrischen konvexen Körper mit dem Mittelpunkt 0, dessen Punkte x durch die Ungleichungen

$$|x_i|,\ |x_i-x_k|\leqq 1 \qquad (i,k=1,\ldots,n) \tag{5}$$

definiert sind. Offenbar ist $\mathfrak{D}$ die konvexe Hülle des Einheitswürfelpaars

$$0\leqq x_i\leqq 1,\quad -1\leqq x_i\leqq 0 \qquad (i=1,\ldots,n). \tag{6}$$

Diesen Körper nennen wir nach MINKOWSKI eine *Doppelwabe*. Es ist klar, daß

$$V(\mathfrak{D})=n+1 \tag{7}$$

ist, wobei V das Volumen für konvexe Körper bezeichnet.

HILFSSATZ. *Für $n\geqq 1$ ist $L_{n+1}(p)$ gleich der kleinsten positiven Zahl c_0, wofür der Körper $c_0\mathfrak{D}$ den Raum $\mathfrak{P}_{n-1}$ erzeugt.*

Vor allem ist nämlich klar, daß die Zahl c_0 existiert. Zuerst beweisen wir

$$L_{n+1}(p)\leqq c_0. \tag{8}$$

Hierzu betrachten wir eine beliebige $n+1$-Klasse. Nach der Definition gibt es in dieser einen Repräsentanten von der Form

$$(g_1,\ldots,g_n,0). \tag{9}$$

Vorläufig lassen wir den Fall $p|g_1,\ldots,g_n$ beiseite. Wegen der Bedeutung von c_0 gibt es in $c_0\mathfrak{D}$ einen Gitterpunkt x mit

$$(x_1,\ldots,x_n)\varepsilon=(g_1,\ldots,g_n)\varepsilon, \tag{10}$$

für den dann nach (5) auch

$$|x_i|,\ |x_i-x_k|\leqq c_0 \qquad (i,k=1,\ldots,n) \tag{11}$$

gilt. Wegen (10) existiert eine ganze Zahl a mit $p\nmid a$ und

$$x_i\equiv ag_i \pmod{p} \qquad (i=1,\ldots,n). \tag{12}$$

Wir unterscheiden zwei Fälle **a**), **b**).

a) Wenn alle $x_i\geqq 0$ sind, so gilt nach (11)

$$0\leqq x_i\leqq c_0 \qquad (i=1,\ldots,n), \tag{13}$$

ferner ist (9) nach (12) äquivalent zu

$$(14) \qquad (x_1, \ldots, x_n, 0).$$

In diesem Falle enthält also die betrachtete $n+1$-Klasse einen Repräsentanten (14), dessen sämtliche Elemente wegen (13) im Intervall $(0, c_0)$ liegen, und das gilt trivial auch im oben ausgeschlossenen Falle $p \mid g_1, \ldots, g_n$.

b) Wenn unter den x_i auch negative vorkommen, so bezeichne $x_t (< 0)$ ein kleinstes unter allen x_i. Wir setzen

$$(15) \qquad y_i = x_i - x_t, \quad y_{n+1} = -x_t \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Wegen (11) gilt dann

$$(16) \qquad 0 \leqq y_i \leqq c_0 \qquad (i = 1, \ldots, n+1).$$

Setzt man für einen Augenblick $g_{n+1} = 0$, $x_t = -b$, so folgt aus (12), (15)

$$y_i \equiv a g_i + b \pmod{p} \qquad (i = 1, \ldots, n+1).$$

Hiernach ist $(y_1, \ldots, y_{n+1})$ mit (9) zusammen ein Repräsentant der betrachteten $n+1$-Klasse. Wegen (16) haben wir ein ähnliches Resultat wie im vorigen Falle, aus beiden folgt die Richtigkeit von (8).

Zum vollständigen Beweis des Hilfssatzes zeigen wir dann die Umkehrung

$$(17) \qquad c_0 \leqq L_{n+1}(p)$$

von (8). Hierzu betrachten wir einen beliebigen Punkt von $\mathfrak{P}_{n-1}$, den wir in der Form

$$(18) \qquad (g_1, \ldots, g_n)\varepsilon$$

mit ganzen, nicht lauter durch p teilbaren g_i annehmen dürfen. Wegen der Definition ist das System

$$(19) \qquad (g_1, \ldots, g_n, 0)$$

äquivalent einem (ganzzahligen) System

$$(20) \qquad (x_1, \ldots, x_{n+1}),$$

wofür

$$(21) \qquad 0 \leqq x_i \leqq L_{n+1}(p) \qquad (i = 1, \ldots, n+1)$$

gilt. Offenbar dürfen wir dabei annehmen, daß mindestens ein $x_i = 0$ ist. Dann gibt es ganze Zahlen a, b mit $p \nmid a$ und

$$(22) \qquad x_i \equiv a g_i + b \pmod{p}, \quad x_{n+1} \equiv b \pmod{p} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Wieder unterscheiden wir zwei Fälle **c**), **d**).

c) Wenn $p \mid b$ ist, so besagt (22) die Gleichheit

$$(23) \qquad (g_1, \ldots, g_n)\varepsilon = (x_1, \ldots, x_n)\varepsilon,$$

somit ist der Punkt (18) dem Gitterpunkt x zugeordnet, der wegen (21) im Körper $L_{n+1}(p)\mathfrak{D}$ liegt.

d) Wenn $p \nmid b$ ist, so gilt $p \nmid x_{n+1}$, also muß nach der Annahme ein $x_i = 0$ sein $(i = 1, \dots, n)$. Man darf annehmen, daß eben $x_1 = 0$ ist. Dann folgt aus (22)

$$b \equiv -a g_1 \pmod{p},$$

also

$$x_i \equiv a(g_i - g_1) \pmod{p}, \quad x_{n+1} \equiv -g_1 \pmod{p} \quad ((i = 2, \dots, n).$$

Dies ergibt

$$(24) \qquad -x_{n+1} \equiv a g_1 \pmod{p}, \quad x_i - x_{n+1} \equiv a g_i \pmod{p} \qquad (i = 2, \dots, n).$$

Die linken Seiten bezeichnen wir mit

$$(25) \qquad y_1 = -x_{n+1}, \quad y_i = x_i - x_{n+1} \qquad (i = 2, \dots, n).$$

Dann gilt wegen (24)

$$(26) \qquad (y_1, \dots, y_n)\varepsilon = (g_1, \dots, g_n)\varepsilon.$$

Anderseits folgt aus (21), (25)

$$|y_i|, \ |y_i - y_k| \leqq L_{n+1}(p) \qquad (i, k = 1, \dots, n),$$

folglich ist y ein Punkt von $L_{n+1}(p)\mathfrak{D}$. Wieder ist also nach (26) der betrachtete Punkt (18) einem Gitterpunkt von $L_{n+1}(p)\mathfrak{D}$ zugeordnet, somit folgt aus der Definition von c_0 die Richtigkeit der Ungleichung (17). Dies mit (8) zusammen beweist den Hilfssatz.

§ 3.

Der zu verwendende Satz aus der Arbeit[3] lautet so: Ist $\mathfrak{A}_r$ ein r-dimensionaler linearer Unterraum des projektiven Raumes $\mathfrak{P}_{n-1}$, ferner $\mathfrak{K}$ ein konvexer Körper in R_n mit dem Mittelpunkt 0 und dem Volumen

$$(27) \qquad V(\mathfrak{K}) \geqq 2^n p^{n-r-1} \qquad (r = 0, \dots, n-1),$$

der keinen Gitterpunkt $\neq 0$ mit lauter durch p teilbaren Koordinaten enthält, so gibt es in $\mathfrak{K}$ einen Gitterpunkt $\neq 0$, dem ein Punkt von $\mathfrak{A}_r$ zugeordnet ist.

Dabei sind die linearen Unterräume wie üblich zu definieren. Insbesondere sind die $\mathfrak{A}_0$ (Fall $r = 0$) die sämtlichen Punkte von $\mathfrak{P}_{n-1}$, folglich ergibt dieser Satz, daß $\mathfrak{K}$ im Falle

$$(28) \qquad V(\mathfrak{K}) \geqq 2^n p^{n-1}$$

(bei sonst unveränderten Annahmen) den Raum $\mathfrak{P}_{n-1}$ erzeugt.

Da nach (7)

$$(29) \qquad V(c\mathfrak{D}) = (n+1)\, c^n \qquad (c > 0)$$

ist, so gilt

$$(30) \qquad V(c\mathfrak{D}) = 2^n p^{n-1} \qquad \left(c = \frac{2}{\sqrt[n]{n+1}} \sqrt[n]{p^{n-1}}\right).$$

Nach obigem erzeugt also dieser Körper $c\mathfrak{D}$ den Raum $\mathfrak{P}_{n-1}$, folglich gilt für dieses c und für das c_0 im Hilfssatz die Ungleichung $c_0 \leqq c$. Das bedeutet

$$L_{n+1}(p) \leqq \frac{2}{\sqrt[n]{n+1}} \sqrt[n]{p^{n-1}}.$$

Dies stimmt mit (3) überein, womit der Satz bewiesen ist.

§ 4.

Wir wollen auseinandersetzen, daß unser Satz als eine Verschärfung eines Satzes von THUE anzusehen ist. Der gemeinte Satz von THUE[2] lautet mit unwesentlicher Umformulierung so: Ist $p (> 0)$ eine ganze Zahl (nicht notwendig Primzahl) und $(a_1, \ldots, a_n)$ ein ganzzahliges System, in welchem alle a_i zu p prim sind, bezeichnet ferner k die ganze Zahl mit

(31) $$(k-1)^n < p \leqq k^n,$$

so gibt es ganze Zahlen $r_1, \ldots, r_n, q$ $(p \nmid q)$ mit

(32) $$q a_i \equiv r_i \pmod{p}, \quad |r_i| \leqq k^{n-1} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Betrachten wir hiervon nur den Fall einer Primzahl p. Dann gilt

(33) $$k = [\sqrt[n]{p}] + 1.$$

Der Satz läßt sich auch auf solche Systeme $(a_1, \ldots, a_n)$ anwenden, in denen (mindestens) ein durch p teilbares a_i vorkommt, und zwar liefert dann der Satz für die r_i (bei Anwendung mit $n-1$ statt n) die schärfere Abschätzung

(34) $$|r_i| \leqq k^{n-2}, \quad k = [\sqrt[n-1]{p}] + 1.$$

Da es nun in jeder n-Klasse auch solche Repräsentanten $(a_1, \ldots, a_n)$ gibt, in denen ein a_i verschwindet, so besagt THUES Satz für unser Problem, daß jede n-Klasse einen Repräsentanten im Intervall $(-k^{n-2}, k^{n-2})$ enthält, wobei k den in (34) angegebenen Wert hat. Das gilt dann auch für das Intervall $(0, 2k^{n-2})$, somit führt THUES Satz zur Abschätzung $L_n(p) \leqq 2k^{n-2}$. Nach (34) stimmt dies mit (4) überein.

Ob sich (3) weiter verschärfen läßt, scheint eine sehr schwierige Frage zu sein. Soviel läßt sich sagen, daß sich unser Verfahren nicht verbessern läßt. Das hat seinen Grund darin, daß sich der Raum R_n durch gitterförmig angeordneten Doppelwaben $\mathfrak{D}$ einfach und lückenlos ausfüllen läßt, für solche Körper läßt sich bekanntlich selbst der (unseren Untersuchungen zugrunde liegende) Fundamentalsatz von MINKOWSKI nicht schärfer formulieren.

Insbesondere für $n = 3$ scheint die gefundene Abschätzung

(35) $$L_3(p) \leqq \sqrt{\frac{4p}{3}}$$

die bestmögliche zu sein, denn für die Primzahlen von der Form

$$p = 3t^2 + 3t + 1 \tag{36}$$

läßt sich leicht

$$L_3(p) = 2t + 1$$

beweisen, andererseits liefert (35) für diesen Fall die Abschätzung

$$L_3(p) \leq \sqrt{(2t+1)^2 + \frac{1}{3}};$$

beide stimmen im wesentlichen überein. Man weiß aber nicht, ob es unendlich viele Primzahlen (36) gibt, weshalb hierdurch noch nicht entschieden ist, ob die Abschätzung (35) für unendlich viele p bestmöglich ist.

(Eingegangen am 21. März 1951.)

ОБОСТРЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ТУЭ В ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Л. РЭДЭИ (Сегед)

(Резюме)

Пусть p простое число, $n \geqq 2$ целое число. Рассмотрим все системы $S_n = (x_1, \ldots, x_n)$ [$x_1, \ldots, x_n$ целые числа]. Пусть $S'_n = (y_1, \ldots, y_n)$ другая такая система. Мы говорим, что S_n эквивалентно с S'_n, если существуют 2 таких целых числа a, b, что

$$y_i \equiv a x_i + b \pmod p \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Пусть $L = L_n(p)$ наименьшее целое положительное число, для которого справедливо, что интервал $(0, L)$ содержит по крайней мере одного представителя $S_n = (x_1, \ldots, x_n)$ из каждого класса эквивалентных систем. Тогда

$$L_n(p) \leqq \frac{2}{\sqrt[n-1]{n}} \sqrt[n-1]{p^{n-2}}\,.$$

Доказательство производится на основе одной предыдущей теоремы автора[3]. Из одной теоремы Туэ[2] вытекает более слабая оценка

$$L_n(p) \leqq 2([\sqrt[n-1]{p}] + 1)^{n-2}.$$

ON COMPOSED POISSON DISTRIBUTIONS, II

By

ALFRÉD RÉNYI (Budapest), corresponding member of the Academy

Introduction

The present paper is a continuation of a joint paper of L. JÁNOSSY, J. ACZÉL and the author [1]. It consists of four parts. In § 1 the general form of inhomogeneous stochastic processes of random events is obtained (Theorem 1). This § is a generalization of § 2 of the paper [1] cited above. In § 2 of the present paper, the following problem is solved: let us suppose that every event in a composed Poisson process is the starting point of a happening, which has a definite duration, being also a random variable; it is to be taken into consideration that the distribution law of the duration of a happening may depend on the time when the happening started; we ask about the probability distribution of the number η_t of happenings going on at some time t. We shall prove that this distribution is also a composed Poisson distribution (Theorem 2). This problem for the case the underlying process of random events is an ordinary Poisson process, has been solved recently by the author, in the paper [2], where applications of this problem to several physical and technical questions (radioactive disintegration, telephone engineering, flight of electrons in a vacuum tube) are also mentioned. Another application is mentioned in § 3 of the present paper. In § 3 the general composed Poisson distribution is obtained as limiting distribution of sums of integer-valued independent random variables; as a matter of fact, it is proved (Theorem 3) that if $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots \xi_{nk_n}$ are independent integer-valued random variables, which are „infinitely small", i. e. if we suppose

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqq k\leqq k_n} P(\xi_{nk} \neq 0) = 0, \tag{1}$$

and if the distributions of the sums

$$\eta_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \cdots + \xi_{nk_n} \tag{2}$$

are tending to a non-degenerated limiting distribution for $n \to \infty$, this limiting distribution is necessarily a composed Poisson distribution. Necessary and sufficient conditions for the convergence of the distributions of the sums (2) are also found, by applying a theorem of B. V. GNEDENKO and A. N. KOLMOGOROFF [3]. This result is closely connected with the fact established in § 4 (Theorem 4) that the class of composed Poisson distributions may be characterized as the class of infinitely divisible distributions of integer-valued random variables, which assume the value 0 with positive probability.

The theory of composed Poisson distributions, as developed in [1] and the present paper, is now in many respects complete; but the possibilities of applications of these distributions are far from being explored.

I am thankful to Á. CSÁSZÁR for his valuable remarks which I utilized in preparing the manuscript of the present paper.

§ 1. Non-homogeneous composed Poisson processes

Let the process start at $t=0$, and let us denote by ζ_t $(t>0)$ the number of events which occur in the time interval $(0,t)$. The following assumptions are made:

A) If $s_1<t_1\leqq s_2<t_2\leqq\cdots\leqq s_r<t_r$, the random variables $\zeta_{t_1}-\zeta_{s_1}$, $\zeta_{t_2}-\zeta_{s_2},\ldots,\zeta_{t_r}-\zeta_{s_r}$ are independent.

B) Let $W_k(s,t)$ denote the probability of exactly k events occuring in the time interval (s,t), i. e. let us put $(s<t;\,k=0,1,2,\ldots)$

$$W_k(s,t)=P(\zeta_t-\zeta_s=k); \tag{1.1}$$

we suppose, that for an arbitrary small $\varepsilon>0$ and any arbitrary large $T>0$, a positive number $\delta>0$ can be found such that for arbitrary $r=1,2,\ldots$ and $s_1<t_1\leqq s_2<t_2\leqq\cdots\leqq s_r<t_r<T$ for which

$$\sum_{j=1}^{r}(t_j-s_j)<\delta,$$

we have

$$\prod_{j=1}^{r}W_0(s_j,t_j)>1-\varepsilon. \tag{1.2}$$

Condition **B)** postulates the „rarity“ of the events forming our process in the sense that it is highly probable that no event will take place during a sufficiently short time consisting of an arbitrary number of time intervals. In [2] a second „rarity“ condition (Condition C) excluding multiple events, has also been postulated; in the present paper this condition is dropped.

We shall prove the following

THEOREM 1. *Under conditions* **A)** *and* **B)**, *denoting by*

$$\varphi(s,t,z)=\sum_{k=0}^{\infty}W_k(s,t)\,z^k \tag{1.3}$$

the generating function of our process, we have

$$\log \varphi(s,t,z) = \sum_{r=1}^{\infty} (z^r - 1) \int_s^t c_r(\tau)\, d\tau \tag{1.4}$$

where the $c_r(\tau)$ are non-negative integrable functions and $\sum_{r=1}^{\infty} c_r(\tau)$ converges almost everywhere. In other words we have

$$W_k(s,t) = \exp\left(-\sum_{r=1}^{\infty} \int_s^t c_r(\tau)\, d\tau\right) \cdot \sum_{r_1+2r_2+\dots+kr_k=k} \prod_{j=1}^{k} \frac{\left(\int_s^t c_j(\tau)\, d\tau\right)^{r_j}}{r_j!} .$$

Thus ζ_t is distributed according to a composed Poisson law for every $t > 0$.

Proof. Let us put

$$-\log \varphi(s,t,z) = \psi(s,t,z); \tag{1.5}$$

we have evidently

$$\varphi(s,\tau,z)\, \varphi(\tau,t,z) = \varphi(s,t,z) \tag{1.6}$$

and thus

$$\psi(s,\tau,z) + \psi(\tau,t,z) = \psi(s,t,z) \tag{1.7}$$

for $s < \tau < t$.

Taking into account that $0 \leqq \varphi(s,t,z) \leqq 1$ for all real positive $z \leqq 1$, it follows that

$$\psi(s,t,z) = \psi_z(I) \tag{1.8}$$

is an additive function of the interval $I = (s,t)$, which is non-negative for $0 \leqq z \leqq 1$. We shall prove that for $s \leqq t \leqq T$, $\psi_z(I)$ is absolutely continuous, uniformly for $|z| \leqq 1$. As a matter of fact, let us suppose that $0 \leqq s_1 < t_1 \leqq s_2 < < t_2 \leqq \dots \leqq s_r < t_r \leqq T$ and $\sum_{j=1}^{r} (t_j - s_j) < \delta$, where δ is chosen so that (1.2) holds for some $\varepsilon > 0$. In what follows we shall always suppose that $\varepsilon < \frac{1}{4}$, which implies that $W_0(s_j, t_j) > \frac{3}{4}$; it follows that

$$|\varphi(s_j, t_j, z)| \geqq W_0(s_j, t_j) - \sum_{k=1}^{\infty} W_k(s_j, t_j) = 2W_0(s_j, t_j) - 1 > \frac{1}{2} > 0 \tag{1.9}$$

and

$$|1 - \varphi(s_j, t_j, z)| \leqq \sum_{k=1}^{\infty} W_k(s_j, t_j)\, |1 - z^k| \leqq 2(1 - W_0(s_j, t_j)) < \frac{1}{2} .$$

Thus $\varphi(s_j, t_j, z)$ is different from zero in the closed unit circle $|z| \leqq 1$ and therefore $\psi_z(I_j) = -\log \varphi(s_j, t_j, z)$ is analytic in the unit circle. Using the inequality $\left|\log \frac{1}{1-\alpha}\right| \leqq 2|\alpha|$ valid for any complex α, with $|\alpha| < \frac{1}{2}$, we obtain

$$|\psi_z(I_j)| = \left|\log \frac{1}{1-(1-\varphi(s_j, t_j, z))}\right| \leqq 2|1-\varphi(s_j, t_j, z)| \leqq 4(1-W_0(s_j, t_j))$$

and taking into account that $\alpha < \log \frac{1}{1-\alpha}$ for $0 < \alpha < 1$, we obtain, using (1. 2), that

$$\text{(1. 10)} \quad \sum_{j=1}^{r} |\psi_z(I_j)| \leqq 4 \sum_{j=1}^{r} (1-W_0(s_j, t_j)) \leqq 4 \log\left(\prod_{j=1}^{r} \frac{1}{W_0(s_j, t_j)}\right) \leqq 4 \log \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

As we have remarked above, $\psi_z(I_j)$ is analytic in the unit circle; thus we may put

$$\text{(1. 11)} \qquad \psi_z(I_j) = c_0(I_j) - \sum_{k=1}^{\infty} c_k(I_j) z^k$$

where $c_k(I)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ are functions of the interval $I = (s, t)$. It follows, by CAUCHY's formula, that

$$c_0(I) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\psi_\zeta(I)}{\zeta} d\zeta$$

and

$$\text{(1. 12)} \qquad c_k(I) = -\frac{k!}{2\pi i} \int \frac{\psi_\zeta(I)}{\zeta^{k+1}} d\zeta \qquad \text{for } k = 1, 2, \ldots$$

where the integration is extended over the circle $|\zeta| = r < 1$. But using (1. 10) if $\sum_{j=1}^{r} (t_j - s_j) < \delta$ and $I_j = (s_j, t_j)$, we have

$$\sum_{j=1}^{r} |c_k(I_j)| \leqq \frac{8\varepsilon \, . \, k!}{r^k}$$

and thus $c_k(I)$ are also absolutely continuous additive functions of interval. Thus we may put

$$c_k(I) = \int_s^t c_k(\tau)\, d\tau$$

where $c_k(\tau)$ is L-integrable, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Now we shall prove that $c_k(\tau) \geqq 0$ for $k = 1, 2, \ldots$ This can be proved by the same method, as used in [1], by showing the non-negativity of the coefficients c_k figuring there, as follows. We shall prove that

$$\text{(1. 13)} \qquad c_k(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{W_k(t, t+\Delta t)}{\Delta t} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

for almost every t, and thus $c_k(t) \geqq 0$ for $k = 1, 2, \ldots$. As a matter of fact, we have

$$\sum_{k=0}^{\infty} W_k(t, t+\Delta t) z^k = e^{-\psi_z(\Delta I)}$$

where $\Delta I = (t, t + \Delta t)$. Differentiating both sides k times with respect to z and substituting $z = 0$, we obtain

$$k!\, W_k(t, t + \Delta t) =$$

$$= \left[-\psi_0^{(k)}(\Delta I) + \sum_{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + (k-1)\alpha_{k-1} = k} c_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{k-1}} \prod_{j=1}^{k-1} \left(-\psi_0^{(j)}(\Delta I)\right)^{\alpha_j} \right] e^{-\psi_0(\Delta I)}$$

where $c_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{k-1}}$ are numerical coefficients, α_j are non-negative integers, $j = 1, 2, \ldots, k-1$. As $\psi_0^{(j)}(\Delta I) = -j!\, c_j(\Delta I)$, we have for $|z| \leqq 1$ and almost every t, $|\psi_0^{(j)}(\Delta I)| = o(\Delta t)$ for $j = 1, 2, \ldots, k-1$, if k is fixed, and thus we obtain, using $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{k-1} \geqq 2$ for $k > 2$ that

$$k!\, W_k(t, t + \Delta t) = [-\psi_0^{(k)}(\Delta I) + o(\Delta t)]\, e^{-\psi_0(\Delta I)}$$

and therefore (1. 13) follows. Thus $c_0(I) - \psi_z(I) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(I) z^k$ is a power series with non-negative coefficients. Thus taking into account that $\psi_1(I) = 0$ and consequently $\lim_{z \to 1} \sum_{k=1}^{\infty} c_k(I) z^k = c_0(I)$, we obtain that $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(I)$ converges and its sum equals $c_0(I)$, and therefore we may write

$$\psi_z(I) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(I)(1 - z^k).$$

Thus Theorem 1 is proved.

If the process is homogeneous, $c_k(\tau)$ does not depend on τ, $c_k(\tau) \equiv c_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ and we obtain as a special case the results of [1] § 2. If $c_k = 0$ for $k = 2, 3, \ldots$ we obtain the ordinary Poisson process. Let us mention that in case of an inhomogeneous Poisson process the inhomogeneity is not essential, as it can be eliminated by a change of the scale of time. As a matter of fact, we have only to put $t' = \int_0^t c_1(\tau)\, d\tau$. On the other hand, in the case of inhomogeneous composed Poisson processes this is not possible, because by introducing a new time scale we can make one arbitrarily chosen $c_k(\tau)$ constant, but in general not all of them at the same time. Thus there exist *„genuinely"* inhomogeneous composed Poisson processes.

§ 2. The distribution law of η_t

The following theorem will be proved:

THEOREM 2. *Let us start from an inhomogeneous Poisson process of random events, the characteristic function of which is given by* (1. 3) *and* (1. 4). *We suppose that* $\sum_{k=1}^{\infty} k c_k(t) = \mu(t)$ *converges and is L-integrable, i. e. that the mean value of* ζ_t *exists for every* $t > 0$. *Let us suppose that each event of this* *process is the starting point of some happening, the duration of which depends also on chance, and let $F(\tau, x)$ denote the distribution function of the duration of a happening starting at time t and let us put $\Phi(\tau, x) = 1 - F(\tau, x)$; we suppose that $\Phi(\tau, x)$ is continuous, further that $\Phi(\tau, x) > 0$ for all τ and x.*[1] *Let us denote by η_t the number of happenings going on at time t. The law of distribution of η_t is a composed Poisson distribution, with generating function*

$$\chi(z, t) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} d_k(t)(z^k - 1)\right) \tag{2. 1}$$

where

$$d_k(t) = \int_0^t \left[\sum_{n=k}^{\infty} c_n(\tau)\binom{n}{k} \Phi^k(\tau, t-\tau)(1-\Phi(\tau, t-\tau))^{n-k}\right] d\tau \tag{2. 2}$$

and $c_n(\tau)$ is defined by (1. 4); *evidently we have $d_k(t) \geqq 0$.*

Proof[2]. Let us divide the interval $(0, t)$ into n equal parts by means of the points $t_k = \frac{kt}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ and let us denote by ΔI_k the interval (t_{k-1}, t_k); let us put further $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ and

$$M_k = \operatorname*{Max}_{t_{k-1} \leqq \tau \leqq t_k} \Phi(\tau, t-\tau); \qquad m_k = \operatorname*{Min}_{t_{k-1} \leqq \tau \leqq t_k} \Phi(\tau, t-\tau). \tag{2. 3}$$

Let $V_k(r)$ denote the probability that there are exactly r such happenings going on at time t which started in the time interval $\Delta I_k (k = 1, 2, \ldots, n)$. First we shall prove the following inequality:

$$\sum_{s=r}^{\infty} \binom{s}{r} W_s^{(k)} m_k^r (1 - M_k)^{s-r} \leqq V_k(r) \leqq \sum_{s=r}^{\infty} \binom{s}{r} W_s^{(k)} M_k^r (1 - m_k)^{s-r} \tag{2. 4}$$

where $W_s^{(k)} = W_s(t_{k-1}, t_k)$. In fact, if r happenings are going on at time t, all of which started in the time interval ΔI_k, there must have been $s \geqq r$ events in this interval; now if a happening started exactly at time τ $(t_{k-1} \leqq \tau \leqq t_k)$, the probability that it will continue going on at time t is $\Phi(\tau, t-\tau)$; as we do not know the exact value of τ, only that it lies in ΔI_k, we can state only that this probability lies somewhere between m_k and M_k; similarly the probability that the happening considered is finished before t being equal to $F(\tau, t-\tau)$ with τ in ΔI_k, lies somewhere between $1 - M_k$ and $1 - m_k$.

Now let us introduce the functions

$$\chi^{(k)}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} V_k(r) z^r \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{2. 5}$$

[1] If $F(\tau, x)$ does not depend on τ, the condition $\Phi(\tau, x) > 0$ can be dropped.

[2] The idea of the proof of Theorem 2 is the same as that applied in § 2 of [2].

It follows from (2. 5) and (1. 4) that for $0 \leqq z \leqq \frac{1}{2}$

$$(2.6)\qquad \begin{gathered}\exp\left[\sum_{r=1}^{\infty} c_r(\Delta I_k)\left((m_k z+1-M_k)^r-1\right)\right] \leqq \\ \leqq \chi^{(k)}(z) \leqq \exp\left[\sum_{r=1}^{\infty} c_r(\Delta I_k)\left((M_k z+1-m_k)^r-1\right)\right].\end{gathered}$$

(To ensure the convergence of the series in the exponent at the right of (2. 6), we choose n sufficiently large, to obtain[3] $M_k \leqq 2m_k$.) Denoting the mean value of $\zeta_{t_k}-\zeta_{t_{k-1}}$ by μ_k, we have by (1. 4)

$$(2.7)\qquad \mu_k=\sum_{n=1}^{\infty} n W_n(t_{k-1}, t_k)=\left(\frac{\partial \varphi(s, t, z)}{\partial z}\right)_{z=1}=\sum_{r=1}^{\infty} r c_r(\Delta I_k)$$

(the existence of μ_k has been postulated!), we obtain easily

$$(2.8)\qquad \chi^{(k)}(z)=\exp\left[-\psi(t_{k-1}, t_k, m_k z+1-M_k)+\vartheta \mu_k(M_k-m_k)\right]$$

with $|\vartheta| \leqq 2$.

Now let $p_N(t)$ denote the probability of exactly N happenings going on at time t. We have evidently

$$(2.9)\qquad p_N(t)=\sum_{r_1+r_2+\ldots+r_n=N} V_1(r_1) V_2(r_2) \ldots V_n(r_n)$$

where the summation is extended over all *ordered* n-tuples of non-negative integers $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ satisfying $r_1+r_2+\cdots+r_n=N$. Let us put

$$(2.10)\qquad \chi(z, t)=\sum_{N=0}^{\infty} p_N(t) z^N;$$

$\chi(z, t)$ is the generating function of the random variable η_t. According to (2. 9) we have

$$(2.11)\qquad \chi(z, t)=\prod_{k=1}^{n} \chi^{(k)}(z)$$

and thus, in view of (2. 8)

$$(2.12)\qquad \chi(z, t)=\exp\left[-\sum_{k=1}^{n} \psi(t_{k-1}, t_k, m_k z+1-M_k)+\vartheta' \sum_{k=1}^{n} \mu_k(M_k-m_k)\right]$$

$|\vartheta'| \leqq 2$. Now, if $n \rightarrow \infty$, the second member in the exponent at the right of (2. 12) tends to 0, while the limit of the first member is

$$(2.13)\qquad \pi(z, t)=\sum_{r=1}^{\infty} \int_0^t c_r(\tau)\left[\Phi(\tau, t-\tau) z+1-\Phi(\tau, t-\tau)\right]^r d\tau.$$

Thus we obtain

$$\chi(z, t)=e^{\pi(z, t)}.$$

[3] We use here that $\Phi(\tau, x)>0$ and that $\Phi(\tau, x)$ is continuous.

By simple rearrangement we obtain

$$\pi(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(t)(z^k - 1) \tag{2. 15}$$

where $d_k(t)$ is defined by (2. 2); thus Theorem 2 is proved.

Let us mention that if $c_k(\tau) \equiv 0$ for $k = 2, 3, \ldots$, i. e. if the underlying process is an ordinary Poisson process, we have (cf. [2])

$$\pi(z, t) = (z-1) \int_0^t c_1(\tau)\, \Phi(\tau, t-\tau)\, d\tau, \tag{2. 16}$$

hence η_t is distributed according to an ordinary Poisson distribution. More generally, let us call a composed Poisson distribution to be of degree D if $c_n(\tau) \equiv 0$ for $n > D$; it follows that the degree of the distribution of η_t is equal to that of ζ_t (this holds also for $D = \infty$!).

§ 3. Convergence to composed Poisson distributions

In this § we shall prove the following

THEOREM 3. *Let $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nk_n}$ denote non-negative independent integer-valued random variables ($n = 1, 2, \ldots$) which are „infinitely small", that is, let us suppose*

$$\lim_{n \to \infty} \max_{1 \le k \le k_n} P(\xi_{nk} \neq 0) = 0. \tag{3. 1}$$

Let us put

$$\eta_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \cdots + \xi_{nk_n}, \tag{3. 2}$$

further $p_{nks} = P(\xi_{nk} = s)$ and $c_{ns} = \sum_{k=0}^{k_n} p_{nks}$. The necessary and sufficient condition for the convergence of the distribution functions of the sums η_n is the existence of a sequence of non-negative numbers $c_1, c_2, \ldots, c_s, \ldots$ with the following properties: $\sum_{s=1}^{\infty} c_s$ converges, and $\sum_{s=1}^{\infty} c_s > 0$, further

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{s=1}^{\infty} |c_{ns} - c_s| = 0. \tag{3. 3}$$

If (3. 3) is satisfied, the distribution of η_n tends for $n \to \infty$ to the composed Poisson distribution function having the generating function

$$\varphi(z) = \exp\left(\sum_{s=1}^{\infty} c_s (z^s - 1)\right). \tag{3. 4}$$

Proof. We shall deduce Theorem 3 from the following important theorem of B. V. GNEDENKO and A. N. KOLMOGOROFF (Theorem 1 of § 25 of [3]): The necessary and sufficient conditions for the existence of constants $A_n (n = 1, 2, \ldots)$ ensuring the convergence to a limiting distribution of the distributions of the sums $\eta_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \cdots + \xi_{nk_n} - A_n$ of independent, infinitely small random variables, the distribution function of ξ_{nk} being denoted by $F_{nk}(x)$, are as follows: the existence of non-decreasing functions $M(u)$ $(-\infty < u < 0; M(-\infty) = 0)$ and $N(u)$ $(0 < u < +\infty; N(+\infty) = 0$ of bounded variation and of a constant σ such that

a) in every point of continuity of $M(u)$ resp. of $N(u)$ we have

$$\left\{\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n} F_{nk}(u) = M(u) && \text{for } u < 0, \\ &\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n} (F_{nk}(u) - 1) = N(u) && \text{for } u > 0; \end{aligned}\right. \tag{3. 5}$$

b)

$$\left\{\begin{matrix} \lim\limits_{\varepsilon\to\infty}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \\ \lim\limits_{\varepsilon\to\infty}\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \end{matrix}\right\} \sum_{k=1}^{k_n}\left[\int\limits_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - \left(\int\limits_{|x|<\varepsilon} x\,dF_{nk}(x)\right)^2\right] = \sigma^2. \tag{3. 6}$$

In case the above conditions are satisfied, the constants A_n may be chosen so that

$$A_n = \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x|<\beta} x\,dF_{nk}(x)$$

where β is an arbitrary positive number such that $-\beta$ and β are points of continuity of $M(u)$ resp. of $N(u)$. Denoting by $f(t)$ the characteristic function of the limiting distribution of η_n, we have (formula of P. LÉVY)

$$\begin{aligned} \log f(t) = i\gamma t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \\ + \int_{-\infty}^{0}\left(e^{iut} - 1 - \frac{iut}{1+u^2}\right) dM(u) + \int_{0}^{\infty}\left(e^{iut} - 1 - \frac{iut}{1+u^2}\right) dN(u) \end{aligned} \tag{3. 7}$$

where $M(u)$, $N(u)$ and σ are defined as above and γ is a real constant.

In our case the condition that the variables ξ_{nk} are "infinitely small" is equivalent to the condition $\lim\limits_{n\to\infty}\min\limits_{1\leq k\leq k_n} p_{nk0} = 1$. We have further $F_{nk}(u) = 0$ for $u < 0$, (thus the first condition of **a)** is satisfied with $M(u) \equiv 0$) and $F_{nk}(u) = \sum\limits_{s<u} p_{nks}$ for $u > 0$, and therefore, in view of $\sum\limits_{s=0}^{\infty} p_{nks} = 1$,

$$\sum_{k=1}^{k_n} (F_{nk}(u) - 1) = -\sum_{s\geq u} c_{ns}. \tag{3. 8}$$

Hence the second condition of **a)** is equivalent to the existence of the limits

$$\lim_{n\to\infty} D_{nu} = D_u \quad \text{with} \quad \lim_{u\to\infty} D_u = 0 \tag{3. 9}$$

for $u=1,2,\ldots$ where $D_{nu}=\sum_{s\geqq u} c_{ns}$. (Clearly the sequence $D_1, D_2, \ldots, D_u, \ldots$ is non-increasing.) Condition **b)** is in our case automatically satisfied with $\sigma=0$, in view of the fact that for $\varepsilon<1$ all integrals figuring in (3. 6) vanish. For similar reasons, in case conditions (3. 9) are satisfied we may choose $A_n=0$ $(n=1,2,\ldots)$. Putting $C_u=D_u-D_{u+1}$ (clearly $c_u\geqq 0$ and $\sum_{u=1}^{\infty} c_u$ converges), it is evident that (3. 9) implies

$$\lim_{n\to\infty}(c_{ns}-c_s)=0 \qquad (s=1,2,\ldots). \tag{3. 10}$$

Of course the contrary of this is not valid, but if we replace the set of conditions (3. 10) by the single one

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{\infty}|c_{ns}-c_s|=0, \tag{3. 11}$$

then it is easy to see that (3. 11) is equivalent to the set of conditions (3. 9). As a matter of fact, let us show that (3. 9) follows from (3. 11) and vice versa. If (3. 11) is satisfied, we have

$$|D_{nu}-D_u|=\left|\sum_{s\geqq u}(c_{ns}-c_s)\right|\leqq\sum_{s=1}^{\infty}|c_{ns}-c_s|, \tag{3. 12}$$

thus (3. 9) is valid for every $u=1,2,\ldots$. Conversely, from (3. 9) it follows

$$\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{\infty}|c_{ns}-c_s|=\\&=\sum_{s=1}^{\infty}(c_{ns}-c_s)+2\sum{}'(c_s-c_{ns})\leqq D_{n1}-D_1+2\sum_{s=N}^{\infty}c_s+2N\varepsilon_n^{(N)}\end{aligned} \tag{3. 13}$$

where Σ' is extended only over those values of s for which $c_s-c_{ns}>0$, and $\varepsilon_n^{(N)}=\max_{s<N}|c_s-c_{ns}|$; thus

$$\sum_{s=1}^{\infty}|c_{ns}-c_s|\leqq D_{n1}-D_1+2D_N+2N\varepsilon_n^{(N)}. \tag{3. 14}$$

Clearly $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n^{(N)}=0$ for every fixed value of N, according to (3. 10). Now let us choose N sufficiently large to obtain $D_N<\frac{\varepsilon}{6}$ and then n_0 sufficiently large so as to ensure $|D_{n1}-D_1|<\frac{\varepsilon}{3}$ and $\varepsilon_n^{(N)}<\frac{\varepsilon}{6N}$ for $n\geqq n_0$. It follows that the right-hand side of (3. 14) is $<\varepsilon$ for $n>n_0$, which is equivalent to (3. 11). Therefore if and only if (3. 3) is valid, the conditions of the theorem of B. V. GNEDENKO and A. N. KOLMOGOROFF are satisfied with $M(u)\equiv 0$ and $N(u)=-\sum_{s\geqq u}c_s$, $\sigma=0$ and $A_n=0$ and thus the distribution function of the sum $\eta_n=\xi_{n1}+\xi_{n2}+\cdots+\xi_{nk_n}$ converges to a limiting distribution having the characteristic function $f(t)$, where

$$\log f(t)=i\gamma t+\int_0^\infty\left(e^{iut}-1-\frac{iut}{1+u^2}\right)dN(u)=\sum_{s=1}^\infty c_s(e^{ist}-1)+it\left(\gamma-\sum_{s=1}^\infty\frac{sc_s}{1+s^2}\right).$$

As η_n assumes only non-negative integes values, and $\varliminf_{n\to\infty} P(\eta_n=0)>0$,[4] we must have (see § 4) $\gamma=\sum_{s=1}^\infty\frac{sc_s}{1+s^2}$ and thus

$$f(t)=\exp\left(\sum_{s=1}^\infty c_s(e^{ist}-1)\right)$$

which is equivalent to (3. 4), owing to $f(t)=\varphi(e^{it})$. Thus Theorem 3 is completely proved.

This limit theorem suggests new applications of composed Poisson distribution. For example, let us consider the mixture of two or more grained materials having different specific weights. In particular, suppose that there are only two materials and the ratio of their specific weights is 1 : 2. The specific weight of the mixture will be evidently a mean value of the specific weights of the components, the factors being proportional to the quantities (volumes) of the different components. But if we investigate the specific weight of small parts of the mixture, we shall find that it fluctuates around the mentioned value and we may ask about the distribution law of this specific weight. Clearly we can construct a simple urn-model which describes adequately the mentioned situation, and it follows by Theorem 3 that the distribution of the specific weight of a selected small portion of the mixture is approximately a composed Poisson distribution with generating function $\exp(c_1(z-1)+c_2(z^2-1))$. The same consideration can be applied to the specific weight of small parts of an alloy of two or more different metals, etc.

§ 4. Characterization of composed Poisson distributions

Finally let us prove the following theorem, which throws light on the above results.

[4] We have $P(\eta_n=0)=\prod_{k=1}^{k_n} p_{nk0}=\prod_{k=n}^{k_n}\left(1-\sum_{s=1}^\infty p_{nks}\right)$, as by

(3. 1) $$\lim\ \max_{1\leqq k\leqq k_n}\left(\sum_{s=1}^\infty p_{nks}\right)=0 \text{ we have } \sum_{s=1}^\infty p_{nks}<\frac{1}{2} \text{ for } n\geqq n_0,$$

and using $1-x>e^{-2x}$ for $0<x<\frac{1}{2}$, it follows

$$\varliminf_{n\to\infty} P(\eta_n=0)\geqq\varliminf_{n\to\infty} e^{-2\sum\limits_{s=1}^\infty c_{ns}}=e^{-2\sum\limits_{s=1}^\infty c_s}>0.$$

THEOREM 4. *The class of composed Poisson distributions can be characterized as the class of infinitely divisible distributions of non-negative, integer-valued random variables, which assume the value* 0 *with a probability* >0.

Proof. We start from the canonical form

$$\log f(t) = i\gamma t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} +$$

$$+\int_{-\infty}^{0}\left(e^{iut}-1-\frac{iut}{1+u^2}\right)dM(u)+\int_{0}^{\infty}\left(e^{iut}-1-\frac{iut}{1+u}\right)dN(u) \tag{3. 15}$$

(where γ and σ are real numbers, $M(u)$ and $N(u)$ non-decreasing functions of bounded variation in the intervals $(-\infty, 0)$ resp. $(0, +\infty)$, and $M(-\infty) = N(+\infty) = 0$) of the logarithm of the characteristic function of an infinitely divisible distribution. The logarithm of the characteristic function of a composed Poisson distribution is of the form

$$\log f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (e^{int}-1) \quad \text{with} \quad c_n \geqq 0 \quad \text{and} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty. \tag{3. 16}$$

Putting $\sigma = 0$, $M(u) = 0$ in (3. 15) and choosing for $N(u)$ the following function: $N(u) = -\sum_{n \geqq u} c_n$ for $u > 0$ and putting $\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nc_n}{1+n^2}$, we conclude that *every composed Poisson distribution is infinitely divisible.* As a matter of fact this can be seen also by taking into account that any composed Poisson distribution is the convolution of a finite or an enumerably infinite number of Poisson distributions (see [1]). Conversely, let us suppose that the variable ξ assumes only non-negative integer values and its distribution is infinitely divisible, i. e. for any $n = 2, 3, 4, \ldots$ it can be represented in the form $\xi = \xi_1^{(n)} + \xi_2^{(n)} + \cdots + \xi_n^{(n)}$ where the variables $\xi_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ are independent and equally distributed. Denoting by $f(t)$ the characteristic function of ξ, we know that $\log f(t)$ can be represented in the form (3. 15). Clearly $\sigma = 0$, because if not, the distribution function of ξ would be continuous. As a matter of fact, let us put

$$f(t) = f_1(t) f_2(t)$$

where $f(t) = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$. As $f_2(t)$ is the characteristic function of the normal distribution function $F_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\,du$, if $F(x)$ denotes the distribution function of ξ and $F_1(x)$ the infinitely divisible distribution function whose characteristic function is equal to $f_1(t)$, we have

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(x-y)\, dF_1(y).$$

Taking into account that $|F_2(a+h)-F_2(a)|\leqq\frac{|h|}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$, it follows that $|F(x+h)-F(x)|\leqq\frac{|h|}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$, which means that $F(x)$ is a continuous function; this contradicts our assumption that ξ assumes only non-negative integer values. But since

$$(3.17)\qquad f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}P_k e^{ikt}\qquad (P_k=P(\xi=k)),$$

we see that $f(2\pi)=1$, and hence the real part of $\log f(2\pi)$ must vanish. Therefore we have

$$(3.18)\qquad \int_{-\infty}^{0}(\cos 2\pi u-1)\,dM(u)+\int_{0}^{\infty}(\cos 2\pi u-1)\,dN(u)=0.$$

Using the fact that $M(u)$ and $N(u)$ are non-decreasing and $\cos 2\pi u-1<0$ if $u\neq 0 \bmod 1$, we obtain that $M(u)$ and $N(u)$ can increase only for negative resp. positive integer values of u. Thus putting $c_n=M(n+0)-M(n-0)$ for $n=-1,-2,\ldots$ and $c_n=N(n+0)-N(n-0)$ for $n=1,2,\ldots$, we obtain

$$(3.19)\qquad \log f(t)=it\gamma'+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' c_n(e^{int}-1)$$

(here and in what follows Σ' means that the summation is extended for every n except for $n=0$) and we have to put $\gamma'=\gamma-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}'\frac{nc_n}{1+n^2}$. But it is easy to see that in case $c_{-1}, c_{-2},\ldots,c_{-n},\ldots$ were not all equal to 0, ξ would assume also negative integer values; as a matter of fact, we have

$$(3.20)\qquad \begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}A_n e^{it(n-\gamma')}&=\exp\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' c_n(e^{int}-1)\right)=\\ &=\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' c_n e^{int}\right)^k}{k!}\right]\exp\left(-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' c_n\right)\end{aligned}$$

since $c_n\geqq 0$ for $n=\pm 1,\pm 2,\ldots$, if $c_{-n}\neq 0$ for some $n>0$, we should obtain arbitrary large negative integer powers of e^{it} with positive coefficients at the right of (3. 20), but not at the left of (3. 20), which is a contradiction; thus $c_{-n}=0$ for $n=1,2,\ldots$. As we have supposed $A_0\neq 0$, we obtain that at the left-hand side of (3. 20) the non-vanishing term containing the lowest power of e^{it} is $A_0e^{-it\gamma'}$. But at the right-hand side of (3. 20) the term of lowest power in e^{it} is the constant $e^{-\sum_1^{\infty} c_n}\neq 0$; hence we must have $\gamma'=0$. Accordingly we obtain

$$(3.21)\qquad \log f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(e^{int}-1)$$

As we supposed that $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = -N(0)$ is finite, it follows that (3. 20) is the characteristic function of a composed Poisson distribution; Theorem 4 is hereby proved. Let us mention the following

COROLLARY. *If a composed Poisson distribution $F(x)$ is the convolution of two infinitely divisible distributions, $F_1(x)$ and $F_2(x)$ which have positive jump at $x=0$, these must also be composed Poisson distributions of degree not exceeding that of $F(x)$.*

This is a generalization of a well-known fact concerning Poisson-distributions. (Cf. [3]). The proof is obvious.

It should be pointed out also that the theorem of § 3 of [1] is a simple consequence of Theorem 4.

INSTITUTE FOR APPLIED MATHEMATICS
OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

Bibliography

[1] L. JÁNOSSY, A. RÉNYI and J. ACZÉL, On composed Poisson distributions, I, *these Acta,* **1** (1950), pp. 209–224.

[2] A. RÉNYI, On some problems concerning Poisson processes, *Publicationes Mathematicae* (Debrecen), **2** (1951), pp. 66—73.

[3] Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. (Гостехиздат, Москва—Ленинград, 1949). (Hungarian translation: B. V. GNYEGYENKO és A. N. KOLMOGOROV: *Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1950.)

(Received 8 May 1951)

ОБОБЩЕННЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТИПА ПУАССОНА, II

А. РЕНЬИ (Будапешт)

(Резюме)

Работа является продолжением совместной работы [1] Л. Яноши, Я. Ацел и автора настоящей статьи. Продолжаются исследования составных раипределений Пуассона, т. е. распределений, характеристическая функция которых имеет вид

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,(e^{int}-1)\right), \tag{1}$$

где $c_n \geqq 0\ (n=1, 2, \ldots)$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится. В § 1 найден общий вид нестационарных марковских стохастических процессов случайных событий, так как доказывается следующая

Теорема 1. Пусть ζ_t означает число событий, происходящих в интервале времени $(0, t), (\zeta_0 \equiv 0)$, и предположим что выполнены следующие условия:

а) если $s_1 < t_1 \leqq s_2 < t_2 \leqq \cdots \leqq s < t_r$, то случайные величины $\zeta_{t_1}-\zeta_{s_1}, \zeta_{t_2}-\zeta_{s_2}, \ldots, \zeta_{t_r}-\zeta_{s_r}$ независимы,

в) пусть $W_k(s, t)$ означает вероятность события $\zeta_t-\zeta_s=k\ (k=0, 1, 2, \ldots, s<t)$ и предположим что для всякой $\varepsilon>0$ и $T>0$ найдется такая $\delta>0$, что если $s_1<t_2 \leqq s_2<t_2 \leqq \cdots \leqq s_r<t_r<T$ и

$$\sum_{j=1}^{r}(t_j-s_j)<\delta, \text{ то имеем } \prod_{j=1}^{r} W_0(s_j, t_j)>1-\varepsilon.$$

Тогда характеристическая функция

$$\varphi(s, t, u)=\sum_{k=0}^{\infty} W_k(s, t)\, e^{iku}$$

имеет вид

$$\varphi(s, t, u)=\exp\left(\sum_{r=1}^{\infty}(e^{iru}-1)\int_s^t c_r(\tau)\, d\tau\right),$$

где $c_r(\tau)$ — неотрицательная, L-интегрируемая функция, и ряд $\sum_{r=1}^{\infty} c_r(\tau)$ сходится почти всюду, т. е. процесс $\{\zeta_t\}$ является нестационарным составным процессом Пуассона.

В § 2 исследуется следующая проблема: пусть каждое событие некоторого нестационарного составного процесса Пуассона является исходным пунктом некоторого другого события второго типа, которое продолжается в течение некоторого промежутка времени; продолжительность события второго рода, которое началось во время t, является случайной величиной с законом распределения $F(t, T)$. Положим $\Phi(t, T)=1-F(t, T)$, и обозначим через η_t число событий второго рода, которые происходят в момент t и пусть $p_N(t)$ означает вероятность того что $\eta_t=N\ (N=0, 1, \ldots)$. Тогда имеет место следующая

Теорема 2. Если $\Phi(t, T)$ является непрерывной и положительной функцией, тогда положив

$$\chi(z, t)=\sum_{N=0}^{\infty} p_N(t)\, z^N$$

имеем

$$\chi(z, t) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} d_k(t)\,(z^k - 1)\right),$$

где

$$d_k(t) = \int_0^t \sum_{n=k}^{\infty} c_n(\tau) \binom{n}{k} (\Phi(\tau, t-\tau))^k (1-\Phi(\tau, t-\tau))^{n-k}\, d\tau,$$

т. е. распределение случайной величины η_t является составным распределением Пуассона. Частный случай этой теоремы доказан в работе [2].

В § 3 доказана следующая

Теорема 3. Пусть $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nk_n}$ — независимые случайные величины, принимающие лишь неотрицательные целые значения, и предположим, что величины ξ_{nk} „бесконечно малы", т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} \max\limits_{1 \leq k \leq k_n} P(\xi_{nk} \neq 0) = 0$.

Положим

$$\chi_n = \sum_{k=1}^{k_n} \xi_{nk}, \qquad p_{nks} = P(\xi_{nk} = s) \quad \text{и} \quad c_{ns} = \sum_{k=0}^{k_n} p_{nks}$$

для того чтобы распеределине от χ_n сходилось бы к некоторому предельному распределению при $n \to \infty$, необходимо и достаточно существование таких постоянных $c_s (s = 1, 2, \ldots)$, что $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{=1}^{\infty} |c_{ns} - c_s| = 0$. Если это условие выполняется, то распределие от χ_n является составным распределением Пуассона, характеристическая функция котогоро есть

$$\exp\left(\sum_{s=1}^{\infty} c_s (e^{ist} - 1)\right).$$

Доказательство этой теоремы опирается на одну теорему Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогорова [3].

В § 4 составные распределения Пуассона характеризуются как безгранично делимые распределения неотрицательных целочисленных случайных величин, которые принимают значение 0 с положительной вероятностью.

В работе указаны некоторые возможные физические и технические применения теории составных распределений Пуассона, например при исследовании тока в электронных лампах, в области явлений радиоактивного распада, при изучении нагрузки телефонных станций, при определении распределения значений удельного веса в сплавах и т. д.

REALITÄTSGRAD UND REALITÄTSSTELLEN VON KOMPLEXEN POLYNOMEN

Von

GYULA SZ.-NAGY (Szeged), Mitglied de Akademie

1. Besitzt das Polynom $f(z)$ mit komplexen Koeffizienten m reelle Nullstellen und p bzw. q nichtreelle Nullstellen mit positiven bzw. negativen Imaginärteilen (jede Nullstelle nach ihrer Vielfachheit gerechnet), so wird die Zahl $r = m + |p - q|$ der *Realitätsgrad* des Polynoms $f(z)$ genannt.

Das Polynom $f(z)$ hat den Grad $n = m + p + q$ und den Realitätsgrad $r = m + p - q = n - 2q$ bzw. $r = m + q - p = n - 2p$, je nachdem $p \geqq q$ bzw. $p < q$ ist. Der Realitätsgrad ist also um eine nichtnegative gerade Zahl kleiner als der Grad. Die Zahlen n und r stimmen dann überein, wenn alle nichtreellen Nullstellen von $f(z)$ oberhalb oder alle unterhalb der reellen Achse liegen. Der Realitätsgrad von $f(z)$ verschwindet, falls das Polynom $f(z)$ keine reelle Nullstelle besitzt und oberhalb der reellen Achse ebenso viel nichtreelle Nullstellen vorhanden sind, wie unterhalb.

Sind $c_1, c_2, \ldots, c_m$ die reellen Nullstellen des Polynoms $f(z)$ und sind $a_1, a_2, \ldots, a_p$ bzw. $b_1, b_2, \ldots, b_q$ seine nichtreellen Nullstellen mit positiven bzw. negativen Imaginärteilen, so hat $f(z)$ die Form

$$f(z) = f_0(z)\, g(z),$$

$$f_0(z) = \prod_{k=1}^{m} (z - c_k), \quad g(z) = C \prod_{h=1}^{p} (z - a_h) \prod_{k=1}^{q} (z - b_k), \quad (C \neq 0). \tag{1}$$

Die *Realitätsstellen* des Polynoms $f(z)$ sind die Punkte x der reellen Achse, in denen der Wert $f(x)$ reell ist. Diese Punkte sind entweder Realitätsstellen des komplexen Polynoms $g(z)$ oder Nullstellen des reellen Polynoms $f_0(z)$. Ist

$$g(z) = U(z) + i\,V(z) \text{ und } W(z) = f_0(z)\, V(z),$$

und haben die Polynome $U(z)$ und $V(z)$ reelle Koeffizienten, so stimmen die Realitätsstellen des Polynoms $f(z)$ und die reellen Nullstellen des Polynoms $W(z)$ überein. Eine s-fache reelle Nullstelle des Polynoms $W(z)$ sei eine s-fache Realitätsstelle des Polynoms $f(z)$ genannt. Das Polynom $V(z)$ hat den

Grad $p+q$, wenn C nichtreell ist. Ist aber C reell, so hat $V(z)$ einen Grad $p+q-s$ $(s \geqq 1)$. Dann ist $z=\infty$ als eine s-fache Nullstelle den reellen Nullstellen von $V(z)$ und als eine s-fache Realitätsstelle den Realitätsstellen von $f(z)$ zuzurechnen.

Hat das Polynom $V(z)$ t Paare nichtreeller Nullstellen, so besitzt das Polynom $f(z)$ genau $w=m+p+q-2t$ Realitätsstellen. Die Differenz

$$w-r=p+q-|p-q|-2t$$

ist immer eine gerade Zahl.

Auf Grund dieser Definitionen gilt der Satz:

Ein Polynom r-ten Realitätsgrades besitzt mindestens r Realitätsstellen. Der Grad eines (nichtreellen) Polynoms ist nie kleiner als die Anzahl w seiner Realitätsstellen. Ist die Anzahl w der Realitätsstellen größer als r, so ist sie um eine gerade Zahl größer.

Ist $n \geqq r$ und $n-r$ gerade, so gibt es Polynome n-ten Grades und r-ten Realitätsgrades, die genau r endliche und verschiedene Realitätsstellen besitzen. Bei diesen Polynomen ist der Koeffizient der höchsten Potenz nichtreell.

Es genügt offenbar diesen Satz für den Fall $f(z) \equiv g(z)$ zu beweisen.

Während ein Punkt x die reelle Achse in positiver Richtung beschreibt, verändern sich die Winkel $\operatorname{arc}(x-a_h)$ und $\operatorname{arc}(x-b_k)$ von $-\pi$ bzw. von $+\pi$ bis Null stetig und monoton. Unterdessen verändert sich der Winkel

$$\omega(x)=\operatorname{arc} g(x)=\operatorname{arc} C+\sum_{h=1}^{p} \operatorname{arc}(x-a_h)+\sum_{k=1}^{q} \operatorname{arc}(x-b_k)$$

von $A=\operatorname{arc} C-p\pi+q\pi$ ausgehend bis $B=\operatorname{arc} C$ stetig, somit durchläuft $\omega(x)$ eine Strecke von der Länge $|p-q|\pi$. Der Wert $g(x)$ ist dann und nur dann reell, wenn $\omega(x)$ mit einem der Punkte $k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ zusammenfällt. Zwischen den Punkten A und B gibt es offenbar $r=|p-q|$ bzw. $r-1$ Punkte $k\pi$, je nachdem C nichtreell bzw. reell ist. Im zweiten Fall ist aber auch der unendlichferne Punkt als eine Realitätsstelle zu betrachten.

Die gerade Zahl $w-r$ ist also nichtnegativ. Damit ist der erste Absatz des Satzes bewiesen.

Wir beweisen, daß es zu jedem Paar n, r (mit $r \leqq n$, $n-r$ gerade) ein Polynom gibt, bei welchem $\omega(x)$ sich monoton verändert. Wir wählen $\frac{n-r}{2}$ Paare konjugiert komplexer Zahlen und r Zahlen γ_h mit positiven Imaginärteilen für Nullstellen eines Polynoms $f(z)$ mit einem beliebigen nichtreellen Anfangskoeffizienten C. Dann ist $f(z)$ ein Polynom n-ten Grades und r-ten Realitätsgrades, da $\omega(x)=\operatorname{arc} f(x)=\operatorname{arc} C+\sum_{h=1}^{r} \operatorname{arc}(x-\gamma_h)$ von $\operatorname{arc} C-r\pi$ bis $\operatorname{arc} C$ monoton wächst.

Aus der Interpolationsformel ergibt sich unmittelbar, daß der Grad eines nichtreellen Polynoms nie kleiner ist, als die Anzahl seiner Realitätsstellen.

Damit ist der Satz bewiesen.

2. Für zwei Realitätsstellen eines Polynoms, dessen nichtreelle Nullstellen auf der einen Seite der reellen Achse liegen, gilt der Satz:

Hat ein Polynom $f(z)$ nur auf der einen Seite der reellen Achse nichtreelle Nullstellen, ist ferner die Anzahl seiner nichtreellen Nullstellen $\leqq p$, und nimmt das Polynom in den Punkten u und v $(u \neq v)$ der reellen Achse von Null verschiedene reelle Werte an, so enthält das Kreiszweieck $K\left(u, v; \dfrac{\pi}{p}\right)$, von dessen Punkten aus die Strecke (u, v) unter einem Winkel $\geqq \dfrac{\pi}{p}$ erscheint, mindestens eine nichtreelle Nullstelle des Polynoms.

Zum Beweis dieses Satzes kann man offenbar annehmen, daß $f(z)$ genau p nichtreelle Nullstellen besitzt und diese positive Imaginärteile haben, daß ferner $u < v$ ist.

Hat das Polynom $f(z)$ die Form (1), so hat das Verhältnis

$$\frac{f(v)}{f(u)} = \frac{f_0(v)}{f_0(u)} \prod_{h=1}^{p} \frac{v - a_h}{u - a_h}$$

einen von Null verschiedenen reellen Wert. Daher ist die Zahl e in der Gleichung

$$\sum_{h=1}^{p} \operatorname{arc} \frac{v - a_h}{u - a_h} = \sum_{h=1}^{p} \alpha_h = e\pi \tag{2}$$

eine ganze Zahl.

Die Zahl α_h bedeutet den Winkel, unter dem der Vektor $\overrightarrow{uv}$ vom Punkt a_h aus erscheint. Da $u < v$ ist und die Punkte a_h oberhalb der reellen Achse liegen, sind $\alpha_h > 0$ und $e \geqq 1$.

Wäre jede nichtrelle Nullstelle a_h des Polynoms $f(z)$ außerhalb des Kreiszweiecks $K\left(u, v; \dfrac{\pi}{p}\right)$ gelegen, so beständen die Ungleichungen

$$0 < \alpha_h < \frac{\pi}{p} \quad \text{und} \quad 0 < \sum_{h=1}^{p} \alpha_h < \pi.$$

Dies ist aber ein Widerspruch, weil $\Sigma \alpha_h \geqq \pi$ ist. Aus diesem Widerspruch folgt die Richtigkeit des Satzes.

Dieser Satz läßt sich auf folgende Weise verallgemeinern:

Liegen die nichtreellen endlichen Nullstellen $a_1, a_2, \ldots, a_p$ bzw. die nichtreellen endlichen Pole $b_1, b_2, \ldots, b_q$ einer gebrochenen rationalen Funktion $R(z)$ oberhalb bzw. unterhalb der reellen Achse und sind die Werte von $R(z)$ in den Punkten u und v der reellen Achse reell und von Null verschieden, so enthält das Kreiszweieck $K\left(u, v; \dfrac{\pi}{p+q}\right)$ mindestens einen der Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_p$ und $b_1, b_2, \ldots, b_q$.

Die Funktion $R(z)$ hat offenbar die Form

$$R(z) = CR_0(z)\,R_1(z), \quad C \neq 0, \quad R_1(z) = \prod_{h=1}^{p} (z - a_h) : \prod_{k=1}^{q} (z - b_k),$$

wo $R_0(z)$ eine rationale Funktion mit reellen Koeffizienten, Nullstellen und Polen ist.

Das Verhältnis

$$\frac{R(v)}{R(u)} = \frac{R_0(v)}{R_0(u)} \prod_{h=1}^{p} \frac{v - a_h}{u - a_h} : \prod_{k=1}^{q} \frac{v - b_k}{u - b_k}$$

ist eine von Null verschiedene reelle Zahl. Daraus folgt die Gleichung

$$\text{(3)} \qquad \sum_{h=1}^{p} \operatorname{arc} \frac{v - a_h}{u - a_h} - \sum_{k=1}^{q} \operatorname{arc} \frac{v - b_k}{u - b_k} = \sum_{h=1}^{p} \alpha_h - \sum_{k=1}^{q} \beta_k = e\pi,$$

wo e eine ganze Zahl ist. Der Wert α_h bzw. β_k bedeutet den Winkel, unter dem der Vektor $\overrightarrow{uv}$ vom Punkt a_h bzw. b_k aus erscheint.

Im Falle $u < v$ ist $0 < \alpha_h < \pi$ und $0 > \beta_k > -\pi$, weil die Punkte a_h bzw. b_k oberhalb bzw. unterhalb der reellen Achse liegen. Beide Winkel α_h und $-\beta_k$ liegen also zwischen 0 und π.

Enthielte das Kreiszweieck $K\left(u, v; \dfrac{\pi}{p+q}\right)$ keinen der Punkte a_h und b_k, so beständen die Ungleichungen

$$0 < \alpha_h < \frac{\pi}{p+q}, \quad 0 < -\beta_k < \frac{\pi}{p+q} \quad \text{und} \quad 0 < e\pi = \sum_{h=1}^{p} \alpha_h - \sum_{k=1}^{q} \beta_k < \pi.$$

Dies ist aber ein Widerspruch, weil e eine ganze Zahl ist.

(Eingegangen am 27. April 1950.)

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ СТЕПЕНИ И МЕСТА КОМПЛЕКСНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Д. С.-НАДЬ (Сегед)

(Резюме)

Если многочлен с комплексными коэффициентами имеет m действительных корней и p комплексных корней с положительной и q с отрицательной мнимой частью, то $r=m+|p-q|$ есть действительная степень, а $n=m+p+q$ его алгебраическая степень. Действительные места многочлена те точки на действительной оси, где многочлен принимает действительные значения. Сюда же относится и место $z=\infty$, если коэффициент старшего члена многочлена действителен.

Многочлен, с действительной степенью, равной r, имеет по крайней мере r действительных мест.

Есть такие многочлены, которые имеют именно r конечных отличных друг от друга действительных мест.

Если для многочлена $f(z)$, $p>0, q=0$ и если в точках u и v действительной оси $f(u)$ и $f(v)$ не равные нулю действительные числа, то многочлен имеет по крайней мере один комплексный корень в том двухугольнике из дуг окружности из точек которого интервал (u, v) виден под углом не меньшим $\frac{\pi}{p}$. Эту теорему можно обобщить и для таких рациональных дробных функций, комплексные корни и полюса которых находятся на противоположных сторонах действительной оси.

EINE DETERMINANTENIDENTITÄT FÜR SYMMETRISCHE FUNKTIONEN

Von

L. RÉDEI (Szeged), korrespondierendem Mitglied der Akademie

Bezeichne $p_i (i = 0, 1, \ldots)$ und $s_i (i = 0, \ldots, n)$ die Potenzsumme bzw. elementarsymmetrische Funktion i-ten Grades der Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ (insbesondere $s_0 = 1$), ferner werde $s_i = 0$ für $i > n$ gesetzt. Mit $|a_{ik}|_n$ bezeichnen wir die Determinante n-ter Ordnung mit dem Element a_{ik} in der i-ten Zeile und k-ten Spalte.

Der bekannten Diskriminantenformel

$$|p_{i+k}|_n = \prod_{1 \leqq i < k \leqq n} (x_i - x_k)^2$$

stellen wir eine einigermaßen ähnlich gebaute Formel beiseite im folgenden

SATZ. *Es gilt*

$$(1) \qquad |s_{i-k} - s_{i+k}|_{n-1} = \prod_{1 \leqq i < k \leqq n} (1 - x_i x_k) \qquad (n \geqq 2).$$

FOLGERUNG. Bezeichnet $S_i \left(i = 1, \ldots, \binom{n}{2} \right)$ die i-te elementarsymmetrische Funktion der Produkte $x_i x_k (1 \leqq i < k \leqq n)$, so läßt sich die rechte Seite von (1) als

$$1 - S_1 + S_2 - \cdots \pm S_{\binom{n}{2}}$$

schreiben. Somit lehrt (1), wie man die S_i durch die s_i ausdrücken kann. Das wird bequemer, wenn man (1) durch Einführung einer neuen Variablen z homogenisiert und dann z^2 durch z ersetzt:

$$(2) \qquad |z^k s_{i-k} - s_{i+k}|_{n-1} = z^{\binom{n}{2}} - S_1 z^{\binom{n}{2}-1} + \cdots S \pm_{\binom{n}{2}}.$$

BEMERKUNG. Die linke Seite von (1) ist die zur Matrizendifferenz

$$(3) \qquad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ s_1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ s_{n-2} & \cdots & s_1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ s_3 & & \cdot & \\ \vdots & \cdot & & \\ s_n & & & \end{pmatrix}$$

gehörige Determinante (über der Hauptdiagonale bzw. unter der Nebendiagole stehen lauter 0). Übrigens dürfte man in (1) auf der linken Seite n statt $n-1$ schreiben.

BEWEIS. Man liest von (3) ab, daß die linke Seite von (1) das konstante Glied 1 hat und vom Grade $n(n-1)$ ist. Deshalb genügt es wegen Symmetriegründe zu beweisen, daß die linke Seite von (1) durch $1-x_{n-1}x_n$ teilbar ist.

Um diese Teilbarkeit auszuweisen, verfahren wir zweckmäßig so, daß wir $n+2$ statt n schreiben. Dann haben wir zu zeigen, daß

$$(4) \qquad |\sigma_{i-k}-\sigma_{i+k}|_{n+1}$$

durch $1-x_{n+1}x_{n+2}$ teilbar ist, wobei σ_i das Analogon von s_i für $n+2$ statt n bedeutet. Dann gilt

$$\sigma_i = s_i + s_{i-1}(x_{n+1}+x_{n+2}) + s_{i-2}x_{n+1}x_{n+2},$$

also

$$\sigma_i \equiv s_i + s_{i-2} + s_{i-1}t \pmod{1-x_{n+1}x_{n+2}} \qquad (i=0, \pm 1, \ldots),$$

wobei $t = x_{n+1}+x_{n+2}$ gesetzt wurde. Hiernach ist (4) kongruent

$$(5) \qquad |(s_{i-k}-s_{i+k-2})+(s_{i-k-2}-s_{i+k})+(s_{i-k-1}-s_{i+k-1})t|_{n+1}$$

mod $(1-x_{n+1}x_{n+2})$. Wir führen die $(n+1)$-dimensionalen Spaltenvektoren

$$\mathfrak{a}_k = (s_{i-k}-s_{i+k-2}) \qquad (k=1, \ldots, n+3)$$

ein. Dann ist die k-te Spalte der Determinante (5) gleich

$$\mathfrak{a}_k + \mathfrak{a}_{k+2} + t\,\mathfrak{a}_{k+1} \qquad (k=1, \ldots, n+1).$$

Da aber die drei Spaltenvektoren

$$\mathfrak{a}_2 = (s_{i-1}-s_{i-1}), \quad \mathfrak{a}_{n+2} = (s_{i-n-2}-s_{i+n}), \quad \mathfrak{a}_{n+3} = (s_{i-n-3}-s_{i+n+1})$$

verschwinden, so hängen alle Spalten der Determinante (5) von den n Spalten $\mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_{n+1}$ linear ab. Das bedeutet das Verschwinden von (5), d. h. die behauptete Teilbarkeit von (4) und somit die Richtigkeit des Satzes.

(Eingegangen am 21. März 1951.)

ОДНО ОПРЕДЕЛИТЕЛЬНОЕ ТОЖДЕСТВО ДЛЯ СИММЕТРИЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Л. РЭДЭИ (Сегед)

(Резюме)

Пусть $p_i (i = 0, 1, \ldots)$ обозначает сумму степеней, а $s_i (i = 0, 1, \ldots, n)$ элементарную симметричную функцию переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $s_0 = 1$ и $s_i = 0$, если $i < 0$ или $i > n$. Пусть $|a_{ik}|_n$ определитель степени n, в котором a_{ik} k-й элемент i-ой строки. Доказывается формула

$$|s_{i-k} - s_{i+k}|_{n-1} = \prod_{1 \leq i \leq k \leq n} (1 - x_i x_k)$$

похожая на известную формулу

$$|p_{i+k}|^n = \prod_{1 \leq i \leq k < n} (x_i - x_k)^2.$$

Отсюда

$$|z^k s_{i-k} - s_{i+k}|_{n-1} = z^{\binom{n}{2}} - S_1 z^{\binom{n}{2}-1} + \ldots \pm S_{\binom{n}{2}},$$

где z переменное и S_l l-ая элементарная симметричная функция произведений $x_i x_k$ $1 \leq i \leq k \leq n$). Из этого тождества можно выразить S_i при помощю s_i.

ÜBER DIE ABSCHNITTE DER SCHLICHTEN FUNKTIONEN

Von

LJUBOMIR ILIEFF (Sofia)

(*Vorgelegt von* A. Rényi)

Es bezeichne S_1 die Klasse der Funktionen von der Form

(1) $$f_1(z) = z + a_2 z^2 + \ldots,$$

die innerhalb des Kreises $|z| < 1$ schlicht und regulär sind und S_2 die Klasse der Funktionen

(2) $$f_2(z) = z + a_3 z^3 + \ldots,$$

die innerhalb desselben Kreises ungerade, schlicht und regulär sind.

In der vorliegenden Mitteilung stellen wir die folgenden Sätze auf:

Satz I. *Es gehöre die Funktion*

(3) $$f_1(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$$

zur Klasse S_1 *und es sei:*

(4) $$\sigma_n^{(1)}(z) = z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n.$$

Das Polynom

(5) $$\frac{\sigma_n^{(1)}(z)}{z} = 1 + a_2 z + \cdots + a_n z^{n-1}$$

verschwindet $n \geqq 1$ *im Kreise* $|z| < 1 - 2\dfrac{\ln 3n}{n}$, — *bei* $n \geqq 55$ *im Kreise* $|z| < 1 - 2\dfrac{\ln n}{n}$ — *nicht. Allgemein, bei jedem* $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* N, *so daß* (5) *im Kreise* $|z| < 1 - 2\dfrac{\ln \varepsilon n}{n}$ *nicht verschwindet, falls* $n \geqq N$.

Satz II. *Es gehöre die Funktion*

(6) $$f_2(z) = z + a_3 z^3 + \ldots$$

zur Klasse S_2 *und es sei*

(7) $$\sigma_n^{(2)}(z) = z + a_3 z^3 + \ldots + a_{2n+1} z^{2n+1}.$$

Das Polynom

$$\frac{\sigma_n^{(2)}(z)}{z} = 1 + a_3 z^2 + \ldots + a_{2n+1} z^{2n} \tag{8}$$

verschwindet bei $n \geqq 1$ *im Kreise* $|z| < \sqrt{1 - \frac{\ln 4{,}3\, n}{n}}$ *nicht. Allgemein, bei jedem* $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* N, *so daß* (8) *im Kreise* $|z| < \sqrt{1 - \frac{\ln \varepsilon n}{n}}$ *nicht verschwindet, falls* $n \geqq N$.

Beweis des Satzes I. Man setze

$$f_1(z) = \sigma_n^{(1)}(z) + p_n^{(1)}(z). \tag{9}$$

Es ist nach dem Verzerrungssatz

$$\left| \frac{f_1(z)}{z} \right| \geqq \frac{1}{(1+r)^2}, \tag{10}$$

wo $|z| \leqq r < 1$. Gilt also für $|z| \leqq r_n < 1$ die Ungleichung

$$\left| \frac{p_n^{(1)}(z)}{z} \right| < \frac{1}{(1+r_n)^2}, \tag{11}$$

d. h.

$$\left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu z^{\nu-1} \right| < \frac{1}{(1+r_n)^2}, \tag{12}$$

so verschwindet $\frac{\sigma_n^{(1)}(z)}{z}$ im Kreise $|z| < r_n$ nicht.

Die Ungleichung (12) ist erfüllt, wenn

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} |a_\nu| r_n^{\nu-1} < \frac{1}{(1+r_n)^2} \tag{13}$$

ist.

G. M. Golusin [1] hat die Abschätzungen $|a_\nu| < \frac{3}{4} e \nu, \nu = 2, 3, \ldots$, festgestellt, so daß (13) erfüllt is, wenn

$$\frac{3}{4} e \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu r_n^{\nu-1} < \frac{1}{(1+r_n)^2} \tag{14}$$

oder, wenn

$$3e \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu r_n^{\nu-1} < 1 \tag{15}$$

esteht.

Aus der Identität

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} r^\nu = \frac{r^{n+1}}{1-r} \tag{16}$$

bei $0 < r < 1$, folgt, daß

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu r^{\nu-1} = r^n \cdot \frac{(n+1)(1-r)+r}{(1-r)^2}. \tag{17}$$

Mit Rücksicht auf (17), geht die Ungleichung (15) in

$$3er_n^n \frac{(n+1)(1-r_n)+r_n}{(1-r_n)^2} < 1 \tag{18}$$

über.

Nun sei

$$r_n = 1 - \frac{\alpha}{n}, \quad 0 < \alpha < n, \tag{19}$$

also

$$r_n^n = \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n < e^{-\alpha} \tag{20}$$

und

$$(n+1)(1-r_n)+r_n = \alpha + 1. \tag{21}$$

Damit wird (18) erfüllt, wenn

$$3en^2e^{-\alpha}\frac{\alpha+1}{\alpha^2} < 1. \tag{22}$$

Setzt man $\alpha = 2\ln 3n$, also $r_n = 1 - 2\frac{\ln 3n}{n}$, so ist (22) bei $n \geqq 1$ erfüllt; setzt man $\alpha = 2\ln n$, so ist (22) bei $n \geqq 55$ richtig. Allgemein, bei jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein N, so daß (22) erfüllt ist, wenn $\alpha = 2\ln \varepsilon n$ und $n \geqq N$.

Der *Satz II* wird mit derselben Methode bewiesen. Man braucht nur folgendes zu bemerken: Gehört die Funktion

$$f_2(z) = z + a_3z^3 + \dots$$

zur Klasse S_2, so ist nach dem Verzerrungssatz

$$\left|\frac{f_2(z)}{z}\right| \geqq \frac{1}{1+r^2}$$

und, wie V. LEVIN [2] bewiesen hat: $|a_{2\nu+1}| < 3{\cdot}4$, $\nu = 1, 2, 3, \dots$

Zitierte Literatur

1. Г. М. Голузин, Мат. сборник, 22 (64), (1948), S. 373—279.
2. V. LEVIN, *Proc. London Math. Soc.*, 39 (1935), S. 467–480.

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU SOFIA.

(Eingegangen am 8. Februar 1951.)

ТЕОРЕМЫ О КОНЕЧНЫХ СУММАХ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

ЛЮБОМИР ИЛИЕВ (Со ия)

(Резюме)

Пусть S_1 класс функций

(1) $$f_1(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

регулярных и однолистных в круге $|z| < 1$, и S_2—класс функций

(2) $$f_2(z) = z + a_3 z^3 + \dots$$

нечетных, регулярных и однолистных в том же круге.

В настоящей работе установлены следующие теоремы:

Теорема I. Пусть функция

(3) $$f_1(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

принадлежит классу S_1 и

(4) $$\sigma_n^{(1)}(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n.$$

Многочлен

(5) $$\frac{\sigma_n^{(1)}(z)}{z} = 1 + a_2 z + \dots + a_n z^{n-1}$$

при $n \geqq 1$ не обращается в ноль в круге $|z| < 1 - 2\dfrac{\ln 3n}{n}$; при $n \geqq 55$ тот же многочлен не обращается в ноль в круге $|z| < 1 - 2\dfrac{\ln n}{n}$. Вообще, при всяком $\varepsilon > 0$ существует индекс N, так что многочлен (5) не обращается в ноль в круге $|z| < 1 - 2\dfrac{\ln \varepsilon n}{n}$, если $n \geqq N$.

Теорема II. Пусть функция

(6) $$f_2(z) = z + a_3 z^3 + \dots$$

принадлежит классу S_2 и

(7) $$\sigma_n^{(2)}(z) = z + a_3 z^3 + \dots + a_{2n+1} z^{2n+1}.$$

Многочлен

(8) $$\frac{\sigma_n^{(2)}(z)}{z} = 1 + a_3 z^2 + \dots + a_{2n+1} z^{2n}$$

при $n \geqq 1$ не обращается в ноль в круге $|z| < \left\{1 - \dfrac{\ln 4{,}3n}{n}\right\}^{1/2}$. Вообще при всяком $\varepsilon > 0$ существует индекс N, так что многочлен (8) не обращается в ноль в круге $|z| < \left\{1 - \dfrac{\ln \varepsilon n}{n}\right\}^{1/2}$, если $n \geqq N$.

UNE REMARQUE SUR LES FORMULES DE RÉCURRENCE

Par
RICHARD OBLÁTH (Budapest)
(*Présenté par* P. TURÁN)

Introduction

On considère dans l'Analyse beaucoup de fonctions importantes qui admettent des *formules de récurrence* ou des *théorèmes d'addition.* Rappelons nous p. e. les fonctions sphériques et les fonctions de Bessel. Il y a deux espèces de ces fonctions P_n et Q_n; et I_n et O_n liées par les relations fondamentales

$$\frac{1}{x-z}=\sum_{0}^{\infty}(2n+1)P_n(z)\,Q_n(x),$$

$$\frac{1}{x-z}=\sum_{0}^{\infty}\varepsilon_n I_n(z)\,O_n(x) \qquad (\varepsilon_0=1;\varepsilon_1=\varepsilon_2=\ldots=\varepsilon_n=\ldots=2)$$

où Q_n respectivement O_n sont des coefficients de l'expansion selon des P_n ou des I_n. Aussi ces fonctions "de second espèce" admettent des formules de récurrence qui ont une connexion étroite avec les formules auxquelles obéissent les fonctions P_n, respectivement I_n. Par exemple

$$P'_{n+1}-P'_{n-1}=(2n+1)P_n, \quad Q'_{n+1}-Q'_{n-1}=(2n+1)Q_n,$$

ou

$$2I'_n=I_{n-1}-I_{n+1}, \quad 2O'_n=O_{n-1}-O_{n+1}.$$

Ce rapport se présente aussi chez d'autres systèmes de fonctions; mais les démonstrations que l'on rencontre dans la littérature sont très différentes puisqu'elles se servent des propriétés particulières des fonctions spéciales considérées. Nous allons généraliser l'observation de ce rapport, faite audessus, aux classes de fonctions plus étendues. Notre démonstration met à la fois en évidence la vraie raison de cette connexion entre des formules linéaires de récurrence qui subsistent entre deux systèmes de fonctions. Cette raison est le rôle symétrique de deux systèmes dans l'expansion (1).

Considérons une suite de fonctions de la variable complexe

$$G_0(z), G_1(z), \ldots, G_n(z), \ldots$$

holomorphes dans un domaine commun. Définissons la fonction $\varphi(x, z)$ dans l'intérieur d'un contour fermé, composé seulement des arcs analytiques ou dans une étoile où la valeur x est fixe, et supposons, pour fixer les idées, qu'elle y soit régulière, exception faite d'un pôle d'ordre quelconque en $z = x$. Nous supposons en outre que — au moins dans une partie du domaine mentionné — le développement

$$\varphi(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(x) G_n(z) \tag{1}$$

converge uniformément et absolument et que la fonction représentée par la série des modules soit continue. Les fonctions $R_n(x)$ sont des fonctions rationelles ou méromorphes de leur argument. (La restriction du domaine de la variable x mène quelquefois aux théorèmes remarquables.) Ces conditions sont remplies par des fonctions importantes. De tels développements, souvent sous des conditions plus restrictives, ont une littérature immense.[1] Si le développement (1) existe, nous appelons ses coefficients $R_n(x)$ les fonctions "réciproques aux fonctions $G_n(z)$". Par exemple, les fonctions sphériques

[1] Le cas traité le plus souvent est $\varphi(x, z) = \dfrac{1}{x-z}$. Un type important est dans lequel on a $G_k(z) = (z-c)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$. Le mémoire le plus ancien y relatif est: J. König, Über die Darstellung der Functionen durch unendliche Reihen, *Math. Ann.*, **5** (1870), pp. 310-340, mais il est resté inconnu.

Les problèmes qui se rattachent au domaine de convergence uniforme et l'unicité du développement (1) sont complétement résolus dans les trois mémoires: G. Julia, Sur un développement des fonctions holomorphes, *Acta Math.*, **54** (1930), pp. 263-295; G. Valiron, Sur une classe de développements en série, *Bull. des Sciences Math.*, (2) **69** (1934), pp. 26—44; L. Onofri, Su una speciale classe di serie di funzioni analitiche, *Annali di mat. pura ed appl.*, (4), **12** (1933—34), pp. 41—56 et (4), **13** (1934—35), pp 209—225.

Des oeuvres importants sur ce sujet traitant à la fois l'unicité du développement sont G. D. Birkhoff, Sur une généralisation de la série de Taylor, *Comptes Rendus Acad. Paris*, **164** (1917), pp. 942—945; W. Gontcharoff, Recherches sur les dérivées successives des fonctions analytiques. Généralisation de la série d'Abel, *Ann. Scient. de l'École normale sup.*, (3), **47** (1930), pp. 1—78; J. Okada, On a certain expansion of analytic functions, *The Tôh. Math. Journ.*, **22** (1923), pp. 325—335; L. V. Widder, A generalisation of Taylor's series, *Transact. of the Amer. Math. Soc.*, **30** (1928), pp. 126—154; S. Izumi, On the expansion of analytic functions, *The Tôh. Math. Journal*, **28** (1927), pp. 97-106; S. Takahashi, On the expansion of analytic functions, *ibid.*. **35** (1932), pp. 242 243, et A generalisation of Taylor's series, *Japanese Journ. of Math.*, **7** (1930), pp 187—198; S. Kakeya, *Proc. of the Phys. Math. Soc. of Japan*, **2** (1920), pp. 96—104.

On trouve la bibliographie chez: Gertrude Stith Ketchum, On certain generalisations of the Cauchy--Taylor expansion theory, *Transact. Amer. Math. Soc.*, **40** (1936). pp. 208—224. J'ai l'intention de revenir à ce sujet.

$Q_n(x)$ et $P_n(z)$ sont réciproques dans ce sens. Les problèmes qui se rattachent à la détermination du domaine de convergence uniforme des séries du type (1) et à l'unicité de la représentation par ce développement sont traités dans la littérature à plusieurs reprises.

Il y a des fonctions remarquables considérées dans l'Analyse qui admettent des formules de récurrence et souvent des théorèmes d'addition. Leur démonstration varie pour presque chaque classe de fonctions. [2]

Nous donnons dans la note présente un procédé très simple, valable à la fois pour une classe très étendue de fonctions. Nous allons voir *qu'il y a une connexion étroite entre les formules de récurrence linéaires (et les théorèmes d'addition) des fonctions réciproques, ce qui est une conséquence du développement* (1). *Chaque formule à laquelle satisfont les fonctions* $G_n(z)$ *entraîne une correspondante pour le système* $R_n(x)$.

Nous relevons encore le théorème 1, intéressant par soimême, selon lequel *la dérivée d'une série de fonctions absolument convergente, est également absolument convergente* si encore la série des modules représente une fonction continue. Nous en avons besoin pour assurer la légitimité de nos conclusions.

1 §. Un théorème sur le développement en série de la dérivée

Avant d'aborder le sujet qui fait l'objet de la note présente, nous laissons précéder un théorème dont nous avons besoin dans la démonstration et qui peut rendre de bons services dans quelques problèmes d'Analyse.

Soient (pour simplifier la notation)

$$f_1(z), f_2(z), \dots$$

des fonctions holomorphes de la variable complexe z dans un domaine infini, ou clos, entouré par une courbe composée des arcs analytiques.

THÉORÈME I. *La convergence uniforme et absolue du développement*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \tag{1, a}$$

[2] Voir p. e. SCHLÄFLI, Einige Bemerkungen zu Herrn Neumanns Untersuchungen über die Besselschen Funktionen, *Math. Ann.*, 3 (1870), p. 134; GRAF-GUBLER, *Theorie der Besselschen Funktionen*, Bd. II. (Zürich, 1900), pp. 75 et 79; J. KÖNIG, Über die Darstellung der Functionen durch unendliche Reihen, *Math. Ann*, **5** (1870), pp. 310—340, et *ibid.* **17**, p. 85; L. GEGENBAUER, Über die Funktion X_n^m, *Sitz. Ber. Akad. Wien*, 2. Cl., **70** (1873), pp. 6—16; SONINE, Les fonctions cylindriques, *Math. Ann*, **16** (1880), pp. 1—80; GRAF, Über die Addition und Subtraktion der Argumente bei Besselschen Funktionen nebst einer Anwendung, *ibid.*, **43** (1893), pp. 136—144. Le même théorème d'addition était publié pour beaucoup d'autres fonctions analogues p. e. WATSON, *A treatise on the Bessel functions* (Cambridge, second ed. 1944), pp. 66, 71, 74, 79, 82, 274, 311, 342 etc.; E. W. HOBSON, *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics* (Cambridge, 1931), pp. 67, 289, 373, 380—384.

entraîne la convergence uniforme et absolue de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z)$$

dans le même domaine et représente ici $f'(z)$, sous la condition qu'encore la série des modules de $f_n(z)$ représente une fonction continue.

Une partie de ce théorème est identique avec le célèbre "Doppelreihensatz" dû à WEIERSTRASS. Reste à démontrer la proposition sur la convergence absolue. La démonstration fondée sur l'intégrale de CAUCHY est suggérée par la démonstration bien connue du Doppelreihensatz.

En vertu du théorème de CAUCHY on a

$$f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f_n(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^2}$$

étendue sur un contour dans l'intérieur ou sur la périphérie du domaine mentionné. On a donc

$$|f_n'(z)| \leqq \frac{1}{2\pi} \int \frac{|f_n(\zeta)|\, |d\zeta|}{|\zeta - z|^2}$$

et pour N quelconque

$$\sum_{n=N}^{N+k} |f_n'(z)| \leqq \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{|\zeta - z|^2} \sum_{n=N}^{N+k} |f_n(\zeta)|\, |d\zeta|,$$

mais la série (1, a) est absolument et uniformément convergente, c. à. d. il appartient à tout $\varepsilon > 0$ un nombre $N = N(\varepsilon)$ qu'on ait

$$\sum_{n=N}^{N+k} |f_n(\zeta)| < \varepsilon.$$

Pour nous convaincre de la légitimité de cette conclusion, rappelons nous le théorème important connu de DINI [3] selon lequel si une série de fonctions à termes positifs représente une fonction continue, la série est uniformément convergente. Nous avons supposé que la série des modules de la série (1, a) est continue, [4] du théorème que nous venons de mentionner s'en suit qu' elle est u n i f o r m é m e n t convergente. Notre conclusion est donc juste, si ζ appartient au domaine mentionné. Nous sommes par conséquent à même de choisir un nombre N convenant pour lequel

$$\sum_{n=N}^{N+k} |f_n'(z)| \leqq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|^2}.$$

[3] G. H. HARDY, Sir George Stokes and the concept of uniform con ergence, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **19** (1918), pp. 148—156. Voir aussi E. C. TITCHMARSH, *The theory of functions* (Oxford Universiiy Press; 2 edition, 3-ème photoprint 1949), p. 13, Art. 1.31.

[4] La convergence absolue n'entraîne pas toujours la convergence uniforme M. P. TURÁN en avait donné un exemple assez simple.

Cette dernière intégrale étant bornée, il y a un tel nombre M que la condition

$$\int \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|^2} < M$$

soit remplie dans tous les points du chemin de l'intégration et par suite

$$\sum_{n=N}^{N+k} |f_n'(z)| \leqq \frac{\varepsilon}{2\pi} M = \delta$$

ce qui démontre le théorème.

§ 2. Formules de récurrence

Les deux séries qui résultent de la série (1) par différentiation membre par membre selon z et x convergent uniformément et absolument en vertu du théorème 1, ce qui est la conséquence immédiate de la convergence uniforme et absolue en deux variables postulées de la série (1). Ces conditions sont également remplies par la plupart des fonctions étudiées. Le théorème 1 garantie la légitimité de nos conclusions.

Théorème 2. *Si la relation*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{2}$$

subsiste et si $G_n(z)$ satisfait à la formule récursive

$$\frac{dG_n(z)}{dz} = \sum_{r=-k}^{k} a_r G_{n+r}(z) \qquad (G_r = 0 \text{ pour } r < 0) \tag{I, 1a}$$

on a simultanément

$$\frac{dR_n(x)}{dx} = -\sum_{r=-k}^{k} a_{-r} R_{n+r}(x) \qquad (R_r = 0 \text{ pour } r < 0). \tag{I, 1b}$$

Démonstration. La convergence uniforme, l'unicité du développement et la convergence absolue supposées nous assurent en vertu du théorème 1 que toutes nos conclusions que nous allons faire, sont permises. On a notamment

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dG_n(z)}{dz} R_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(x) \sum_{r=-k}^{+k} a_r G_{n+r}(z) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} R_n (a_{-k} G_{n-k} + a_{-k+1} G_{n-k+1} + \ldots + a_k G_{n+k}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} G_n (a_{-k} R_{n+k} + a_{-k+1} R_{n+k-1} + \ldots + a_k R_{n-k}) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(z) \frac{dR_n(x)}{dx}.$$

Sous la condition (2), la dérivée R_n' de la fonction réciproque satisfait à la formule récursive (I, 1b) tout-à-fait analogue à la formule (I, 1a) avec le signe contraire et des coefficients rangés dans l'ordre inverse. On voit immédiatement comment doit-on modifier ce résultat si l'on remplace la condition (2) par une équation linéaire différentielle plus générale

$$a\frac{\partial \varphi}{\partial x}+b\frac{\partial \varphi}{\partial z}=0. \tag{2, a}$$

Nous passons maintenant au cas si les fonctions G_n elles-mêmes admettent une formule récursive du type (I, 2a).

THÉORÈME 3. *Sous la condition* (2), *il s'ensuit de*

$$G_n=a_{-k}G_{n-k}+a_{-k+1}G_{n-k+1}+\cdots+a_kG_{n+k} \qquad (G_r=0 \text{ pour } r<0) \tag{I, 2a}$$

que

$$R_n=(a_{-k}R_{n+k}+a_{-k+1}R_{n+k-1}+\cdots+a_kR_{n-k}) \qquad (R_r=0 \text{ pour } r<0). \tag{I, 2b}$$

La démonstration par sommation partielle est tout-à-fait analogue à la précédente. On peut démontrer par la même méthode le

THÉORÈME 4. *La formule de récurrence*

$$G_n=\sum_{r=-k}^{+k}a_rG'_{n+r} \qquad (G_r=0 \text{ pour } r<0) \tag{I, 3a}$$

implique sous la condition (2) *la formule*

$$R_n=\sum_{r=-k}^{+k}a_rR'_{n-r} \qquad (R_r=0 \text{ pour } r<0). \tag{I, 3b}$$

Sur le modèle des fonctions de Bessel il subsiste le

THÉORÈME 5. *La formule*

$$G_n^{(s)}=\sum_{r=-k}^{+k}a_rG_{n+r} \qquad (G_r=0 \text{ pour } r<0) \tag{I, 4a}$$

entraîne sous la condition (2) *la formule*

$$R_n^{(s)}=(-1)^s\sum_{r=-k}^{+k}a_rR_{n-r} \qquad (R_r=0 \text{ pour } r<0). \tag{I, 4b}$$

THÉORÈME 6. *Si le système de fonctions* $G_n(z)$ *admet deux types de formules de récurrence, par exemple les formules* (I, 1a) *et aussi les formules du genre*

$$\sum_{r=-l}^{l}b_rG_{n-r}=\sum_{r=-m}^{m}c_rG_{n-r},$$

il en est de même pour des fonctions $R_n(x)$ *c.-à-d. elles satisfont aussi aux formules analogues dont les coefficients sont composés de* a_r, b_r, c_r.

Cette proposition n'est que la combinaison des théorèmes 2 et 3. Elle est une généralisation d'une propriété bien connue des fonctions sphériques.

§ 3. Théorèmes d'addition

Entre les théorèmes d'addition des fonctions $G_n(z)$ et $R_n(x)$ subsiste une réciprocité tout-à-fait analogue à celle des formules de récurrence. Nous énonçons par exemple le

THÉORÈME 7. *Si l'on a*

(II, a) $$G_n(z+t) = \sum_{r=-k}^{+k} \{a_r G_{n-r}(z) - b_r G_{n+r}(z)\} G_r(t)$$

et par exemple la relation

(3) $$\varphi(x, z+t) = \varphi(x-t, z),$$

on a encore

(II, b) $$R_n(x-t) = \sum_{r=-k}^{k} \{a_r R_{n+r}(x) - b_r R_{n-r}(x)\} G_r(t).$$

La série se termine parce que les fonctions G_n et R_n ne sont définies en général que pour des indices n entiers naturels. (On sait qu'il y a des fonctions spéciales supportables avec les conditions imposées à nos fonctions, qui sont aussi définies pour des indices négatifs ou même fractionnaires, p. e. les fonctions cylindriques. C'est d'ailleurs une propriété spéciale.) La démonstration est basée aussi sur la sommation partielle.

Le cas spécial $b_r = 0$, est digne d'être mentionné, on a alors

(II, c) $$R_n(x-t) = \sum_{r=-k}^{+k} a_r R_{n+r}(x) G_r(t).$$

On voit qu'on pourrait augmenter aisément le nombre des théorèmes de ce genre mais nous nous contentons des précédents.

Je suis reconnaissant à M. PAUL TURÁN pour ses bons conseils amicaux.

(Reçu le 1. Mars 1951.)

ЗАМЕЧАНИЕ О РЕКУРСИВНЫХ ФОРМУЛАХ

Р. ОБЛАТ (Будапешт)

(Резюме)

Если функции $G_0(z), G_1(z), \ldots$ голоморфны в некоторой области, единственным полюсом мероморфной функции $\varphi(x, z)$ является $z = x$, и ряд $\varphi(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(x)\, G_n(z)$ равномерно и абсолютно сходится в некоторой области, то рекурсивные формулы или теоремы сложения функций $G_n(z)$ влекут за собой соответствующие рекурсивные формулы или теоремы сложения для функций $R_n(x)$. Например формулы (I, 1a) и 1b, (I, 2a) и 2b, и. т. д. § 1 содержат необходимые исследования сходимости.

ON A THEOREM OF PONTRJAGIN

By

T. SZELE (Debrecen)

(*Presented by* G. HAJÓS)

The following criterion for countable torsion free abelian groups to be the direct sum of cyclic groups is due to PONTRJAGIN. *A countable torsion free abelian group is the direct sum of cyclic groups if and only if every increasing sequence of subgroups of an arbitrary finite rank r contains only a finite number of different subgroups.*[1] Another proof of this important theorem has been given by KULIKOFF who derived it from a general result of his.[2] In the present note I intend to give a short and simple proof of this theorem in a new, but plainly equivalent formulation.

Let G be an additive abelian group. The letters a, b, c denote elements of G, while the other Latin small letters serve to denote rational integers. The group G is called *torsion free* if it contains no element $\neq 0$ of finite order. The elements $a_1, \ldots, a_k$ of such a group G are *linearly independent,* if an equation $m_1 a_1 + \cdots + m_k a_k = 0$ implies $m_1 = \cdots = m_k = 0$. The maximal number of linearly independent elements of G is the *rank* of G. The only fact, of which I shall make use in what follows, is the basis theorem of finitely generated abelian groups, according to which (for torsion free groups): *a finitely generated torsion free abelian group is the direct sum of r cyclic groups where r is the rank of the group.*

Now we are going to prove the following

THEOREM. *A countable torsion free abelian group G is the direct sum of cyclic groups if and only if in G every subgroup of finite rank is finitely generated.*

REMARK. On account of the cited basis theorem, this criterion may be reformulated in the following obvious manner: a countable torsion free abelian group is the direct sum of cyclic groups if and only if the same is true for

[1] L. PONTRJAGIN, *Topological groups* (Princeton, 1946), pp. 168–169.

[2] L. KULIKOFF, Zur Theorie der Abelschen Gruppen von beliebiger Mächtigkeit, *Mat. Sbornik, N. S.*, **9** (51), (1941), pp. 165—181.

any of its subgroups of finite rank. It is easy to see the equivalence of our criterion with that of PONTRJAGIN. However, the criterion just given is of another character, since it contains a requirement concerning each single subgroup of G and not concerning the lattice of all subgroups of it.

PROOF. The necessity of the condition stated in the theorem follows — even in case G is not countable — from the obvious fact that a subgroup, of finite rank, of the direct sum of cyclic groups is necessarily contained in the direct sum of a finite number of these cyclic groups.

For the sufficiency of the condition we consider a countable torsion free abelian group G whose subgroups of finite rank are finitely generated. We count the elements of G: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ and put $A_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$ (this symbol denotes the group generated by $a_1, \ldots, a_n$). Since the rank of A_{n+1} is at most one greater than that of A_n, there exists an ascending chain $B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_n \subset \cdots$ of subgroups of G such that B_n is of rank n and each element of G belongs to some B_n. Let C_n be the subgroup of G consisting of B_n and of all elements $b \in G$ with $mb \in B_n$ for some natural integer m. (C_n is a group, for $mb \in B_n$ and $m'b' \in B_n$ imply $mm'(b \pm b') \in B_n$.) It is obvious that the rank of C_n is n, the factor group G/C_n is torsion free and each element of G belongs to a certain term of the chain $C_1 \subset C_2 \subset \cdots \subset C_n \subset \cdots$. Since C_n is of rank n and hence finitely generated, we have by the basis theorem the direct sum representation

$$C_n = \{c_1\} + \cdots + \{c_n\}.$$

We show that the elements c_k may be chosen so that c_k is the same for all C_n ($n \geqq k$). Indeed, the rank of C_{n+1} is one greater than the rank of C_n, therefore C_{n+1}/C_n is a finitely generated torsion free abelian group of rank 1, i. e. an (infinite) cyclic group. Consequently, choosing c_{n+1} from a generating coset of the cyclic factor group C_{n+1}/C_n, we obtain

$$C_{n+1} = C_n + \{c_{n+1}\},$$

proving our assertion. This implies that the direct sum

$$\{c_1\} + \cdots + \{c_n\} + \cdots$$

comprises G, for each element of G is contained in some of C_n. This completes the proof of the theorem.

(Received 2 April 1951)

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ПОНТРЯГИНА

Т. СЕЛЕ (Дебрецен)

(Резюме)

Согласно замечательной теореме Понтрягина счетная абелева группа без кручения разложима в прямую сумму циклических групп тогда и только тогда, если каждая возрастающая цепочка её подгрупп, имеющих один и тот же конечный ранг r, обрывается[1]. Теорема эта была выведена Куликовым из одного из его более общих результатов.[2] В настоящей статье автор дает очень краткое и простое доказательство следующей новой, но как без труда видно, эквивалентной формы теоремы:

Счетная абелева группа без кручения разложима в прямую сумму циклических групп тогда и только тогда, если любая её подгруппа конечного ранга является генерированным конечным числом элементов.

Akadémiai Kiadó (Budapest, Alkotmány-u. 21.) Felelős: Mestyán János

Délmagyarország Nyomda, Szeged 514049 Felelős vezető: Priskin Sándor.

Les Acta Mathematica paraissent en russe, français, anglais et allemand et publient des mémoires du domaine des sciences mathématiques.

Les Acta Mathematica sont publiés en cahiers qui seront réunis en volumes de 300 à 350 pages. Il paraît, en général, un volume par an.

Les manuscrits, autant que possible écrits à la machine, doivent être envoyés à l'adresse suivante:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est 60 forints par volume.

On peut s'abonner à l'entreprise de commerce extérieur des livres et journaux „Kultúra" (Budapest, VIII., Rákóczi-út 5. Compte courant No. 929.040) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

The Acta Mathematica publish papers on mathematics in Russian, French, English and German.

The Acta Mathematica appear in parts of various size, making up volumes of 300 to 350 pages. On the average, one volume is published annually.

Manuscripts should, if possible, be typewritten and addressed to:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

Correspondence with the editors or publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Mathematica, is 60 forints a volume. Orders may be placed with „Kultúra" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest, VIII., Rákóczi-út 5. Account No. 929.040) or with representatives abroad.

Die Acta Mathematica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der mathematischen Wissenschaften in russischer, französicher, englischer und deutscher Sprache.

Die Acta Mathematica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band von 20 Bogen. Im allgemeinen erscheint jährlich ein Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind, möglichst mit Maschine geschrieben, an folgende Adresse zu senden:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Redaktion und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu senden.

Abonnementspreis pro Band 60 Forints. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Aussenhandels-Unternehmen „Kultúra" (Budapest, VIII., Rákóczi-út 5. Bankkonto Nr. 929.040) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

32 forint

INDEX

Akadémiai Kiadó (Budapest, V., Alkotmány-u. 21.) Felelős: Mestyán János

Délmagyarország nyomda, Szeged 514049 Felelős vezető: Priskin Sándor

ACTA MATHEMATICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

TOMUS II. FASCICULI 3—4.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

BUDAPEST, 1951

ACTA MATH. HUNG.

ACTA MATHEMATICA HUNGARICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK MATEMATIKAI KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST, V., ALKOTMÁNY-U. 21

Az Acta Mathematica orosz, francia, angol és német nyelven közöl értekezéseket a matematika köréből.

Az Acta Mathematica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet. Évenként általában egy kötet jelenik meg 20 ív terjedelemben.

A közlésre szánt kéziratok, lehetőleg géppel írva, a következő címre küldendők:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Mathematica előfizetési ára kötetenként (egy évre) belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó"-nál (Budapest, V., Alkotmány-utca 21. Bankszámla 04-878-111-48), külföld számára pedig a „Kultúra" Könyv- és Hirlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest, VIII., Rákóczi-út 5. Bankszámla 45-790-057-50-032 sz.) vagy külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

„Acta Mathematica" издает работы из области математических наук на русском, французском, английском и немецком языках.

„Acta Mathematica" выходит в брошюрах переменного объема несколько выпусков объединяются в одном томе. (20 печатных листов.)

Ежегодно предвидено издание одного тома.

Предназначенные для публикации авторские рукописи следует направлять, по возможности машинописью, по следующему адресу:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

По этому же адресу направляется всякая корреспонденция для редакции и администрации.

Подписная цена *„Acta Mathematica"* — 110 форинтов за том. Заказы принимает Предприятие по внешней торговле книг и газет *„Kultúra"* (*Budapest, VIII., Rákóczi-út 5.* Счет Банка No. 45-790-057-50-032) или его заграничные представительства и уполномоченные.

CONTRIBUTIONS TO THE REDUCTION THEORY OF THE DECISION PROBLEM

Fourth paper
Reduction to the case of a finite set of individuals

By

LÁSZLÓ KALMÁR (Szeged), corresponding member of the Academy

1. In view of CHURCH's theorem[1] stating the non-existence of a recursive[2] algorithm for the solution of the decision problem of the first order predicate calculus, the researches dealing with the decision problem are going through two lines. On the one hand, one is looking for particular cases of the general problem with a solution by a recursive algorithm; on the other hand, one tries to reduce the general problem (by recursive means) to some of its particular cases. A pair of results in both directions can be regarded in some respect as *final* if the particular case to which the general problem has been reduced is in that respect the *next more complicated one* to the particular case which has been solved by a recursive algorithm. E. g. the solution of the decision problem (in the satisfiability formulation) for first order formulae having a Skolem prefix with two universal quantifiers,[3] i. e. of the form

$$(x_1)(x_2)(Ex_3)\cdots(Ex_n)\mathbf{M},$$

where the matrix $\mathbf{M}$ does not contain any quantifier, and GÖDEL's reduction

[1] A. CHURCH, A note to the Entscheidungsproblem, *The Journal of Symbolic Logic,* **1** (1936), pp. 40—41 and 101—102.

[2] *Recursive* (algorithm, function, dependence etc.) means throughout general recursive in the sense of HERBRAND—GÖDEL—KLEENE; see S. C. KLEENE, General recursive functions of natural numbers, *Math. Annalen,* **112** (1936), pp. 727—742.

[3] See K. GÖDEL, Ein Spezialfall des Entscheidungsproblems der theoretischen Logik, *Ergebnisse eines math. Kolloquiums,* **2** (1932), pp. 27—28, and Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls, *Monatshefte für Math. und Phys.,* **40** (1933), pp. 433—443, especially pp. 433—441; L. KALMÁR, Über die Erfüllbarkeit derjenigen Zählausdrücke, welche in der Normalform zwei benachbarte Allzeichen enthalten, *Math. Annalen,* **108** (1933), pp. 466—484; K. SCHÜTTE, Untersuchungen zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, *Math. Annalen,* **109** (1934), pp. 572—603, and Über die Erfüllbarkeit einer Klasse von logischen Formeln, *Math. Annalen,* **110** (1935), pp. 161—194.

theorem[4] stating the equivalence of the decision problem with the satisfiability question for first order formulae having a Skolem prefix with three universal quantifiers, i. e. of the form

$$(1) \qquad (x_1)(x_2)(x_3)(Ex_4)\cdots(Ex_n)\mathbf{M},$$

form a final result as to the number of the universal quantifiers.[5]

One is inclined to regard the classical solution[6] of the decision problem for sets of a given finite number of individuals, together with LÖWENHEIM's theorem[7] reducing the decision problem to the case of an enumerable set of individuals, as a final result, for there is no cardinal number between the finite integers and the cardinal number $\aleph_0$ of the enumerable sets. However, in this paper I shall sharpen LÖWENHEIM's reduction theorem by using the concept of an *arbitrary* finite integer as intermediate between the concept of a *given* finite integer and $\aleph_0$. Indeed, I shall show that the decision problem is equivalent to the question whether or not a finite set exists where a given first order formula can be satisfied. More explicitly, I shall prove the

THEOREM. *To any given first order formula* **A** *it is possible to construct another first order formula* **B** *such that* **A** *is satisfiable if and only if there is no finite set on which* **B** *can be satisfied.*

As a corollary of this theorem and the fact, to be seen from its proof, that **B** depends recursively on **A**, we shall obtain a theorem, proved formerly by TRACHTENBROT by another method,[8] stating the non-existence of a recursive algorithm for deciding, which first order formulae are satisfiable in the finite,

[4] K. GÖDEL, loc. cit. *(Monatshefte für Math. und Phys.)*, especially pp. 441—443.

[5] The finality of this result does not exclude a possibility of sharpening the reduction theorem (or of extending the solved particular case) in some other direction E. g. in the reduction theorem, one can reach $n = 1$, see J. SURÁNYI, A logikai függvénykalkulus eldöntés-problémájának redukciójáról, *Mat. és Fiz. Lapok,* **50** (1943), pp. 51—74, especially pp. 57—65 and Contributions to the reduction theory of the decision problem, second paper: Three universal, one existential quantifiers, *these Acta,* **1** (1950), pp. 261—271; or, alternatively, one can reduce the number of the predicate variables to a single binary one, see L. KALMÁR and J. SURÁNYI, On the reduction of the decision problem, second paper, Gödel prefix, a single binary predicate, *The Journal of Symbolic Logic,* **12** (1947), pp. 65—73.

[6] See e. g. D. HILBERT und W. ACKERMANN, *Grundzüge der theoretischen Logik,* 3rd edition (Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1949), pp. 97—98.

[7] L. LÖWENHEIM, Über Möglichkeiten im Relativkalkül, *Math. Annalen,* **76** (1915), pp. 447—470, especially pp. 450—456. See also TH. SKOLEM, Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen, *Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania,* Mat.-naturv. klasse, **1920**, no. 4, pp. 1—33, especially pp. 4—10, and Über einige Grundlagenfragen der Mathematik, *Skrifter utgitt av Det Norske Videnkaps-Akademi i Oslo,* Mat.-naturv. Klasse, **1929**, no. 4, pp. 1—48, especially pp. 23—29.

[8] Б. А. ТРАХТЕНБРОТ, Невозможность алгорифма для проблемы разрешимости на конечных классах, Доклады Академии Наук СССР, новая серия, **70** (1950), pp. 569—572.

i. e. on an appropriate finite set. Also some further corollaries, one of which has been formulated also by TRACHTENBROT in the quoted paper, will be inferred.

2. The main idea of the proof is as follows. According to a lemma due to SKOLEM and HERBRAND[9], the *satisfiability* of **A** is equivalent to the *consistency* of a certain elementary axiom system $\mathfrak{A}$ which we call *the axiom system associated with* **A**; elementary in the sense of being based on the proposition calculus only, i. e. of not containing any bound variable. Now, the *inconsistency* of an axiom system is a business taking place within a finite set, viz. the set formed of the formulae, together with their sub-terms and sub-formulae, of a proof leading to a contradiction. Hence, the inconsistency of $\mathfrak{A}$ can be expressed as the *satisfiability* of a certain first order formula **B** *on a finite set; thus,* **A** *can be satisfied* at all if and only if **B** *cannot be satisfied on any finite set.*[10]

3. Now, let us proceed to the details of the proof. First, I have to give in full the axiom system $\mathfrak{A}$ associated with a given first order formula **A**. For technical convenience, I confine myself to the case, where **A** has the form (1) with a matrix

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(F; x_1, \ldots, x_n)$$

containing but a single, binary, predicate variable; by the result of a paper of SURÁNYI and myself,[11] I can do this without loss of generality.[12] Plainly we may suppose that $x_1, \ldots, x_n$ all occur in **M**. Also I suppose, **M** does not contain any truth function but $\rightarrow$ and $\overline{}$; i. e., it is formed from expressions

[9] TH. SKOLEM, loc. cit.[7] *(Vid.-Akademi i Oslo)*, especially pp. 24—29; J. HERBRAND, Recherches sur la théorie de la démonstration, *Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego*, Wydz. III, Nr. **33** (1930), pp. 1—128, especially pp. 112-117. See also D. HILBERT and P. BERNAYS, *Grundlagen der Mathematik*, vol. 2 (Berlin, 1939), pp. 149—163.

[10] By means of the Gödel completeness theorem (see K. GÖDEL, Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, *Monatshefte für Math. und Phys.*, **37** (1930), pp. 349—360) instead of the Skolem—Herbrand lemma, another proof of the theorem is possible. Indeed, by that theorem, the *satisfiability* of **A** is equivalent to the *non-existence of a proof of* $\overline{\mathbf{A}}$ in the axiom system of the first order predicate calculus; and the *existence of a proof of* **A** in that axiom system can be expressed as the *satisfiability* of a certain first order formula **B'** on a finite set. However, I choose the way through the Skolem-Herbrand lemma for I prefer to deal with an *elementary* axiom system instead of that of the first order predicate calculus.

[11] Loc. cit.[5].

[12] Alternatively, I could suppose, **A** has the form (1) with $n = 4$ and a matrix of the form

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(F_1, \ldots, F_l; x_1, x_2, x_3, x_4)$$

(see J. SURÁNYI, loc. cit.[5]); this would give about the same degree of technical convenience. Of course, the proof would be possible without any restriction on **A**; however, the formulae would become much more complicated.

of the form $F(x_\mu, x_\nu)$ $(\mu, \nu = 1, \ldots, n)$ by means of a finite number of applications of the operations yielding $(\mathbf{G} \to \mathbf{H})$ from $\mathbf{G}$ and $\mathbf{H}$, or $\overline{\mathbf{G}}$ from $\mathbf{G}$.

Now the primitive frame of $\mathfrak{A}$ is as follows:

Symbols of $\mathfrak{A}$ are: $a; f_4, \ldots, f_n; F; \to, \overline{}$; ((left parenthesis),) (right parenthesis), , (comma).[13]

Terms of $\mathfrak{A}$ are formed according to the rules: (i) a is a term of $\mathfrak{A}$; (ii) if $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ are terms of $\mathfrak{A}$, $f_4(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3), \ldots, f_n(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)$ are also terms of $\mathfrak{A}$; (iii) nothing else is a term of $\mathfrak{A}$.[14]

Formulae of $\mathfrak{A}$ are formed according to the rules: (i) if $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ are terms of $\mathfrak{A}$, $F(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ is a formula of $\mathfrak{A}$; (ii) if $\mathbf{G}$ and $\mathbf{H}$ are formulae of $\mathfrak{A}$, $(\mathbf{G} \to \mathbf{H})$ is also a formula of $\mathfrak{A}$; (iii) if $\mathbf{G}$ is a formula of $\mathfrak{A}$, $\overline{\mathbf{G}}$ is also a formula of $\mathfrak{A}$; (iv) nothing else is a formula of $\mathfrak{A}$.

Axioms of $\mathfrak{A}$ are particular formulae of $\mathfrak{A}$ formed according to the rules: (i) if $\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{K}$ are formulae of $\mathfrak{A}$, then the formulae of $\mathfrak{A}$

$$(2) \qquad \begin{cases} (\mathbf{H} \to (\mathbf{G} \to \mathbf{H})), \\ ((\mathbf{G} \to (\mathbf{H} \to \mathbf{K})) \to ((\mathbf{G} \to \mathbf{H}) \to (\mathbf{G} \to \mathbf{K}))) \\ ((\overline{\mathbf{H}} \to \overline{\mathbf{G}}) \to (\mathbf{G} \to \mathbf{H})) \end{cases}$$

are axioms of $\mathfrak{A}$ (called *axioms of the propositional calculus*); (ii) if $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ are terms of $\mathfrak{A}$, then the formula of $\mathfrak{A}$[15]

$$\mathbf{M}(F; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3, f_4(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3), \ldots, f_n(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3))$$

is an axiom of $\mathfrak{A}$ (called a *proper axiom*); (iii) nothing else is an axiom of $\mathfrak{A}$.

The only *rule of inference* of $\mathfrak{A}$ is the *modus ponens*, yielding the formula $\mathbf{H}$ out of the formulae $\mathbf{G}$ and $(\mathbf{G} \to \mathbf{H})$; i. e. *theorems* of $\mathfrak{A}$ (which are particular formulae of $\mathfrak{A}$) are formed according to the rules: (i) if $\mathbf{G}$ is an axiom of $\mathfrak{A}$, then $\mathbf{G}$ is a theorem of $\mathfrak{A}$; (ii) if $\mathbf{G}$ and $(\mathbf{G} \to \mathbf{H})$ are theorems of $\mathfrak{A}$, then the formula $\mathbf{H}$ is a theorem of $\mathfrak{A}$; (iii) nothing else is a theorem of $\mathfrak{A}$.[16]

4. We can now formulate the Skolem-Herbrand lemma for first order formulae $\mathbf{A}$ of the particular form under consideration as follows.

[13] By using the familiar Łukasiewicz notation system (see e. g. J. Łukasiewicz und A. Tarski, Untersuchungen über den Aussagenkalkül, *Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego*, Wydz. III., **23** (1930), pp. 30–50), we could spare the three last symbols.

[14] I. e., the set of the terms of $\mathfrak{A}$ is the smallest set (that is, the intersection of all sets) having a, and, together with $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ and $\mathbf{t}_3$, also $f_1(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3), \ldots, f_n(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)$ as elements. Hence, we can prove a theorem for arbitrary terms of $\mathfrak{A}$ by proving it for a, and, supposing it to hold for $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ and $\mathbf{t}_3$, by proving it for $f_1(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3), \ldots, f_n(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)$ too. A similar remark holds for the formulae of $\mathfrak{A}$ as well as for the theorems of $\mathfrak{A}$ too.

[15] By the hypothesis concerning the form of the matrix $\mathbf{M}$, this is a formula of $\mathfrak{A}$ indeed.

[16] As easily seen, $\mathbf{G}$ is a theorem of $\mathfrak{A}$ if and only if it is a member of a finite sequence $\mathbf{G}_1, \ldots, \mathbf{G}_m$ such that every $\mathbf{G}_\mu$ is either an a axiom of $\mathfrak{A}$, or there are integers $\mu', \mu'' < \mu$ such that $\mathbf{G}_{\mu''} = (\mathbf{G}_{\mu'} \to \mathbf{G}_\mu)$.

The first order formula **A** *is satisfiable if and only if the associated axiom system* $\mathfrak{A}$ *is consistent, i. e. if there is no theorem* **G** *of* $\mathfrak{A}$ *such that also* $\overline{\mathbf{G}}$ *is a theorem of* $\mathfrak{A}$.

For convenience of the reader, I prove this lemma without supposing acquaintance with the papers of SKOLEM and HERBRAND.[17] First, suppose, **A** is satisfiable. Then, there is a (non-empty) set I as well as a predicate Φ and $n-3$ descriptive functions $\varphi_4, \ldots, \varphi_n$ such that we have[18]

$$M(\Phi; x_1, x_2, x_3, \varphi_4(x_1, x_2, x_3), \ldots, \varphi_n(x_1, x_2, x_3)) = \uparrow \tag{3}$$

for arbitrary $x_1, x_2, x_3 \in I$. Let b be a fixed element of I. We attach to each term of $\mathfrak{A}$ an element of I as follows: (i) to a we attach b; (ii) supposing, to $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ the elements c_1, c_2, c_3 of I have been attached, respectively, we attach $\varphi_\nu(c_1, c_2, c_3)$ to $f_\nu(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)$ for $\nu = 4, \ldots, n$. Further, we attach to each formula of $\mathfrak{A}$ one of the logical values $\uparrow$ and $\downarrow$ as follows: (i) if to $\mathbf{t}_1$ and $\mathbf{t}_2$ the elements c_1 and c_2 of I have been attached, respectively, then we attach the logical value of $\Phi(c_1, c_2)$ to $F(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$; (ii) to $(\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H})$ we attach $\downarrow$ if $\uparrow$ has been attached to G and $\downarrow$ to **H**, otherwise we attach $\uparrow$ to $(\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H})$; (iii) we attach $\downarrow$ or $\uparrow$ to $\overline{\mathbf{G}}$ according as $\uparrow$ or $\downarrow$ has been attached to **G**.

We see at once that to an axiom of $\mathfrak{A}$ always $\uparrow$ has been attached. For an axiom of the propositional calculus, this follows from the fact that (2), considered as truth-functions of **G**, **H** and **K**, are identically true, and for a proper axiom, from (3). Also, if $\uparrow$ has been attached to the formulae **G** and $(\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H})$ of $\mathfrak{A}$, the same holds for **H** too. Hence we see by induction that $\uparrow$ has been attached to every theorem **G** of $\mathfrak{A}$, thus $\downarrow$ has been attached to $\overline{\mathbf{G}}$; therefore, $\overline{\mathbf{G}}$ cannot be a theorem of $\mathfrak{A}$, i. e., $\mathfrak{A}$ is consistent.

Secondly, suppose $\mathfrak{A}$ to be consistent. Consider an enumeration

$$\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m, \ldots$$

of the proper axioms. Let T_m be the set of the terms figuring in one of $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ (as $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$, or as $f_4(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3), \ldots, f_n(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_3)$) and T_ω the set of all terms of $\mathfrak{A}$. Plainly $T_1 \subseteq T_2 \subseteq \cdots \subseteq T_m \subseteq \cdots \subseteq T_\omega$, and $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ can be considered as truth-functions of the variables $F(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ with $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in T_m$.

Using $(\mathbf{G} \,\&\, \mathbf{H})$ as an abbreviation for $\overline{(\mathbf{G} \rightarrow \overline{\mathbf{H}})}$ and $(\mathbf{G}_1 \,\&\, \mathbf{G}_2 \,\&\, \cdots \,\&\, \mathbf{G}_m)$ for $(\cdots(\mathbf{G}_1 \,\&\, \mathbf{G}_2) \,\&\, \cdots \,\&\, \mathbf{G}_m)$, we assert that $(\mathbf{A}_1 \,\&\, \cdots \,\&\, \mathbf{A}_m)$ is a theorem of $\mathfrak{A}$. Indeed, owing to the completeness of (2), considered as an axiom system

[17] In SKOLEM, the proof of the lemma (besides omitting its easier part) is imbedded into the proof without use of the axiom of choice which has been given by SKOLEM for the Löwenheim theorem (loc. cit. [7]). In HERBRAND, the proof has been made difficult by the "proof-theoretic" standpoint, whereas in this paper, the "set-theoretic" standpoint has been accepted. However, the theorem of this paper can be proved on the basis of the "proof-theoretic" standpoint too; in this case, HERBRAND's proof of the lemma has to be adopted.

[18] I use the symbols $\uparrow$ and $\downarrow$ for the truth-values "true" and "false", respectively.

for the propositional calculus,[19]

$$(\mathbf{G} \to (\mathbf{H} \to \overline{(\mathbf{G} \to \overline{\mathbf{H}})}))$$

is a theorem of $\mathfrak{A}$ for arbitrary formulae $\mathbf{G}$ and $\mathbf{H}$ of $\mathfrak{A}$, for, considered as a truth-function, it is identically true. Therefore, by two applications of the *modus ponens*, we see that for theorems $\mathbf{G}$ and $\mathbf{H}$ of $\mathfrak{A}$, $(\mathbf{G} \& \mathbf{H})$, i. e. $\overline{(\mathbf{G} \to \overline{\mathbf{H}})}$, is likewise a theorem of $\mathfrak{A}$. An iterated application of this fact shows that $(\mathbf{A}_1 \& \cdots \& \mathbf{A}_m)$ is indeed a theorem of $\mathfrak{A}$, hence, considered as a truth-function of the variables $F(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ with $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in T_m$, it cannot be identically $\downarrow$, for in the opposite case $\overline{(\mathbf{A}_1 \& \cdots \& \mathbf{A}_m)}$ would be identically $\uparrow$, thus also a theorem of $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{A}$ would be inconsistent. In other words, there is a binary predicate Φ defined on T_m such that $(\mathbf{A}_1 \& \cdots \& \mathbf{A}_m)$ becomes $\uparrow$ when F is replaced by Φ; hence, the same holds for $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ too.

Let us attach to each such predicate Φ a vertex P_{mr} of a graph[20] ($r = 1, \ldots, s_m$, where s_m is the number of such predicates Φ; s_m is obviously finite for there is only a finite number of binary predicates defined on the finite set T_m). Join the vertices P_{mr} and $P_{m'r'}$ by an edge of the graph if and only if $|m' - m| = 1$ and the predicates Φ and Φ' corresponding to P_{mr} and $P_{m'r'}$ coincide within $T_{\min(m, m')}$. Obviously, every vertex $P_{m+1, r}$ ($m = 1, 2, \ldots$; $r = 1, \ldots, s_{m+1}$) has been joined with one vertex $P_{mr'}$ ($r' = 1, \ldots, s_m$) at least. Hence, our graph satisfies the condition of D. KŐNIG's infinity lemma[21]; therefore, there is an infinite path $P_{1r_1} P_{2r_2} \cdots$ within this graph, i. e. an infinite sequence $P_{1r_1}, P_{2r_2}, \ldots$ of its vertices such that P_{mr_m} is joined with $P_{m+1, r_{m+1}}$ by an edge of the graph. Denoting by Φ_m the binary predicate defined on T_m, belonging to P_{mr_m}, Φ_{m+1} coincides with Φ_m within T_m; hence, for $m' > m$, $\Phi_{m'}$ coincides with Φ_m within T_m. Now, define the binary predicate Φ_ω throughout T_ω by $\Phi_\omega(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) = \Phi_m(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ for arbitrary terms $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ of $\mathfrak{A}$, m denoting the smallest integer for which $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in T_m$. We have then $\Phi_\omega(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) = \Phi_m(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ for any $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in T_m$. Let $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ be arbitrary terms of $\mathfrak{A}$; then $M(F; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3, f_4(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3), \ldots, f_n(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3))$ is a proper axiom, $\mathbf{A}_m$, say. Then we have obviously $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3, f_4(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3), \ldots, f_n(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3) \in T_m$ and hence

[19] See e. g. L. KALMÁR, Über die Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls, *Acta Scientiarum Math.*, **7** (1935), pp. 222—243, especially pp. 239—243. The axiom system (2) of the propositional calculus is essentially due to FREGE.

[20] As to the idea of a graph and related notions, see e. g. D. KŐNIG, *Theorie der endlichen und unedlichen Graphen* (Leipzig, 1936), pp. 1—2. The graph terminology has been shown by KŐNIG very useful in several branches of mathematics, especially in set theory and logic.

[21] D. KŐNIG, Sur les correspondances multivoques des ensembles, *Fundamenta Math.*, **8** (1926), pp. 114—134, especially pp. 120—124; Über eine Schlußweise aus dem Endlichen ins Unendliche, *Acta Scientiarum Math.*, **3** (1927), pp. 121—130, especially § 1, and loc. cit. [20], pp. 81—82.

$$\mathbf{M}(\Phi_\omega; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3, f_4(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3), \ldots, f_n(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)) =$$
$$= \mathbf{M}(\Phi_m; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3, f_4(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3), \ldots, f_n(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)) = \uparrow,$$

i. e. the predicate Φ_ω satisfies **A** on T_ω, thus **A** is satisfiable.

5. Now, I shall construct a first order formula **B** which is satisfiable on a finite set if and only if the axiom sytem $\mathfrak{A}$ is inconsistent. Suppose first that $\mathfrak{A}$ is inconsistent. Then there is a finite sequence $\mathbf{G}_1, \ldots, \mathbf{G}_m$ of *different* formulae of $\mathfrak{A}$ such that, for $\mu = 1, \ldots, m$, $\mathbf{G}_\mu$ is either an axiom of $\mathfrak{A}$, or there are positive integers $\mu', \mu'' < \mu$ such that $\mathbf{G}_{\mu''} = (\mathbf{G}_{\mu'} \rightarrow \mathbf{G}_\mu)$; finally, there are positive integers $\mu, \mu' \leqq m$ such that $\mathbf{G}_{\mu'} = \overline{\mathbf{G}_\mu}$.[22]

Let J denote the (finite) set formed of the formulae $\mathbf{G}_1, \ldots, \mathbf{G}_m$, together with their sub-formulae and sub-terms.[23] Define the predicates $\Psi_4, \ldots, \Psi_n, \Omega, \Gamma, \Lambda, \Sigma, \Theta$ and Ξ on J as follows:

$\Psi_\nu(x_1, x_2, x_3, y) = \uparrow$ if and only if x_1, x_2, x_3 are terms and y is the term $f_\nu(x_1, x_2, x_3)$ $(\nu = 4, \ldots, n)$;

$\Omega(x_1, x_2, y) = \uparrow$ if and only if x_1 and x_2 are terms and and y is the formula $F(x_1, x_2)$;

$\Gamma(x_1, x_2, y) = \uparrow$ if and only if x_1 and x_2 are formulae and y is the formula $(x_1 \rightarrow x_2)$;

$\Lambda(x, y) = \uparrow$ if and only if x is a formula and y is the formula $\bar{x}$;

$\Sigma(x, y) = \uparrow$ if and only if x is a sub-term or a sub-formula of y;

$\Theta(x) = \uparrow$ if and only if x is one of the formulae $\mathbf{G}_1, \ldots, \mathbf{G}_m$;

$\Xi(x, y) = \uparrow$ if and only if x is a formula $\mathbf{G}_\mu$, y is a formula $\mathbf{G}_{\mu'}$ and $\mu < \mu'$.

Then the following propositions[24] have the truth-value $\uparrow$ for $\nu = 4, \ldots, n$ and for arbitrary values of the free variables.

$$\Psi_\nu(x_1, x_2, x_3, y) \rightarrow \Sigma(x_1, y)\Sigma(x_2, y)\Sigma(x_3, y). \tag{4}$$

[22] Indeed, apply the remark of footnote [16] to the formulae $\mathbf{G}$ and $\overline{\mathbf{G}}$ which are both theorems of $\mathfrak{A}$, juxtapose the sequences obtained thus and cancel each formula which is iden ical with a preceding one.

[23] Sub-term and sub-formula (more exactly, proper sub-term and proper sub-formula) is defined as follows. (i) a has no sub-term; (ii) if $\mathbf{t} = f_\nu(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)$ $(\nu = 4, \ldots, n)$, then the sub-terms of $\mathbf{t}$ are $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ as well as their sub-terms; (iii) nothing else is a sub-term of a term and a term has no sub-formula; (iv) if $\mathbf{G} = F(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$, then the sub-terms of $\mathbf{G}$ are $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ as well as their sub-terms, and $\mathbf{G}$ has no sub-formula; (v) if $\mathbf{K} = (\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H})$, then the sub-terms of $\mathbf{K}$ are those of $\mathbf{G}$ and $\mathbf{H}$, the sub-formulae of $\mathbf{K}$ are $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ as well as their sub-formulae; (vi) if $\mathbf{H} = \overline{\mathbf{G}}$, then the sub-terms of $\mathbf{H}$ are those of $\mathbf{G}$, the sub-formulae of $\mathbf{H}$ are $\mathbf{G}$ as well as its sub-formulae; (vii) nothing else is a sub-term or a sub-formula of a formula.

[24] In writing down we use the usual abbreviations of propositional calculus (omission of parentheses, omission of the conjunction sign or replacement of it by a dot, abbreviation of a conjunction of analogous terms by a product sign etc). There is no danger of misunderstanding through using the same symbols $\overline{}$ and $\rightarrow$ for negation and implication as in the axiom system $\mathfrak{A}$. Also, we use the symbol $(x = y)$ for the proposition which has the truth-value $\uparrow$ if and only if x and y are the same elements.

Indeed, if $y = f_\nu(x_1, x_2, x_3)$, then x_1, x_2 and x_3 are sub-terms of y.

(5) $$\Omega(x_1, x_2, y) \rightarrow \Sigma(x_1, y)\, \Sigma(x_2, y).$$

Indeed, if $y = F(x_1, x_2)$, then x_1 and x_2 are sub-terms of y.

(6) $$\Gamma(x_1, x_2, y) \rightarrow \Sigma(x_1, y)\, \Sigma(x_2, y).$$

Indeed, if $y = (x_1 \rightarrow x_2)$, then x_1 and x_2 are sub-formulae of y.

(7) $$\Lambda(x, y) \rightarrow \Sigma(x, y).$$

Indeed, if $y = \bar{x}$, then x is a sub-formula of y.

(8) $$\bar{\Sigma}(x, x).$$

Indeed, no element x of J can be a (proper) sub-term or sub-formula of itself.

(9) $$\Sigma(x, y)\, \Sigma(y, z) \rightarrow \Sigma(x, z).$$

Indeed, if x is a sub-term or a sub-formula of y and y is a sub-term or a sub-formula of z, then x is a sub-term or a sub-formula of z.

(10) $$\Psi_\nu(x_1, x_2, x_3, z)\, \Psi_\nu(y_1, y_2, y_3, z) \rightarrow (x_1 = y_1)\,(x_2 = y_2)\,(x_3 = y_3).$$

Indeed, if $z = f_\nu(x_1, x_2, x_3) = f_\nu(y_1, y_2, y_3)$, then we have $x_1 = y_1, x_2 = y_2$ and $x_3 = y_3$.

(11) $$\Omega(x_1, x_2, z)\, \Omega(y_1, y_2, z) \rightarrow (x_1 = y_1)\,(x_2 = y_2).$$

Indeed, if $z = F(x_1, x_2) = F(y_1, y_2)$, then we have $x_1 = y_1$ and $x_2 = y_2$.

(12) $$\Gamma(x_1, x_2, z)\, \Gamma(y_1, y_2, z) \rightarrow (x_1 = y_1)\,(x_2 = y_2).$$

Indeed, if $z = (x_1 \rightarrow x_2) = (y_1 \rightarrow y_2)$, then we have $x_1 = y_1$ and $x_2 = y_2$.

(13) $$\Lambda(x, z)\, \Lambda(y, z) \rightarrow (x = y)$$

Indeed, if $z = \bar{x} = \bar{y}$, then we have $x = y$.

(14) $$\Psi_\nu(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow$$
$$\rightarrow \prod_{\substack{\nu'=4 \\ \nu' \neq \nu}}^{n} \bar{\Psi}_{\nu'}(y_1, y_2, y_3, x_4) \prod_{\mu=1}^{4} \left(\bar{\Omega}(y_1, y_2, x_\mu)\, \bar{\Gamma}(y_1, y_2, x_\mu)\, \bar{\Lambda}(y, x_\mu)\right).$$

Indeed, if $x_4 = f_\nu(x_1, x_2, x_3)$, then x_4 cannot be of the form $f_{\nu'}(y_1, y_2, y_3)$ with $\nu' \neq \nu$; further, x_1, x_2, x_3 and x_4 being terms, they cannot be of any of the forms $F(y_1, y_2)$, $(y_1 \rightarrow y_2)$, or $\bar{y}$.

(15) $$\Omega(x_1, x_2, x_3) \rightarrow \prod_{\mu=1}^{2} \bar{\Omega}(y_1, y_2, x_\mu) \prod_{\mu=1}^{3} \left(\bar{\Gamma}(y_1, y_2, x_\mu)\, \bar{\Lambda}(y, x_\mu)\right).$$

Indeed, if $x_3 = F(x_1, x_2)$, then x_1 and x_2, being terms, cannot be of any of the forms $F(y_1, y_2)$, $(y \rightarrow y_2)$, or $\bar{y}$; also, x_3 cannot be of either of the forms $(y_1 \rightarrow y_2)$, or $\bar{y}$.

(16) $$\Gamma(x_1, x_2, z) \rightarrow \prod_{\mu=1}^{2} \big((Ey_1)(Ey_2)\, \Omega(y_1, y_2, x_\mu) \vee$$
$$\vee (Ey_1)(Ey_2)\, \Gamma(y_1, y_2, x_\mu) \vee (Ey)\, \Lambda(y, x_\mu)\, \bar{\Lambda}(x, z)\big).$$

Indeed, if $z=(x_1 \to x_2)$, then x_1 and x_2, being formulae, are of one of the forms $F(y_1, y_2)$, $(y \to y_2)$, or $\bar{y}$, where y_1, y_2, or y, as sub-ter msor sub-formulae of x_1 or x_2, respectively, belong to J together with x_1 and x_2; further, z cannot be of the form $\bar{x}$.

(17) $\Lambda(x, z) \to ((Ey_1)(Ey_2)\Omega(y_1, y_2, x) \vee (Ey_1)(Ey_2)\Gamma(y_1, y_2, x) \vee (Ey)\Lambda(y, x))$.

Indeed, if $z=\bar{x}$, then x, as a formula, is of one of the forms $F(y_1, y_2)$, $(y_1 \to y_2)$, or $\bar{y}$, where y_1 and y_2, or y, being sub-terms, or a sub-formula, of x, respectively, belong to J together with x.

(18) $$\Theta(x)\,\Theta(y) \to ((x=y) \vee \Xi(x, y) \vee \Xi(y, x)).$$

Indeed, if $x=\mathbf{G}_\mu$ and $y=\mathbf{G}_{\mu'}$ $(\mu, \mu'=1, \ldots, m)$, then we have either $\mu=\mu'$, or $\mu<\mu'$, or $\mu'<\mu$.

(19) $$\bar{\Xi}(x, x).$$

Indeed, $x=\mathbf{G}_\mu=\mathbf{G}_{\mu'}$ $(\mu, \mu'=1, \ldots, m)$ with $\mu<\mu'$ is impossible, for $\mathbf{G}_1, \ldots, \mathbf{G}_m$ are different.

(20) $$\Xi(x, y)\,\Xi(y, z) \to \Xi(x, z).$$

Indeed, if $x=\mathbf{G}_\mu$, $y=\mathbf{G}_{\mu'}$, $z=\mathbf{G}_{\mu''}$ $(\mu, \mu', \mu''=1, \ldots, m)$ and $\mu<\mu'<\mu''$, then we have $\mu<\mu''$.

(21) $$(Ex)(Ey)(\Theta(x)\,\Theta(y)\,\Lambda(x, y)).$$

Indeed, there are $\mu, \mu'(=1, \ldots, m)$ such that $\mathbf{G}_{\mu'}=\bar{\mathbf{G}}_\mu$; for $x=\mathbf{G}_\mu, y=\mathbf{G}_{\mu'}$ (which belong to J) we have $\Theta(x)=\Theta(y)=\Lambda(x, y)=\uparrow$.

We need one more proposition depending on the structure of $\mathbf{M}$. To specify this structure, we remark that, according to the suppositions made on $\mathbf{M}$, there is a sequence

$$\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_r$$

of matrices $\mathbf{M}_\varrho=\mathbf{M}_\varrho(F; x_1, \ldots, x_n)$ formed of $F(x_1, x_1), F(x_1, x_2), \ldots, F(x_n, x_n)$ by means of a finite number of implications and negations, such that every $\mathbf{M}_\varrho$ is (i) either one of $F(x_\mu, x_\nu)$, $\mu, \nu=1, \ldots, n$; (ii) or an implication $(\mathbf{M}_{\varrho'} \to \mathbf{M}_{\varrho''})$ with $\varrho', \varrho''<\varrho$; (iii) or a negation $\bar{\mathbf{M}}_{\varrho'}$ with $\varrho'<\varrho$; finally (iv) $\mathbf{M}$ is identical with $\mathbf{M}_r$. Let $\varrho_{11}, \ldots, \varrho_{1i}$ denote the values of ϱ for which (i) holds; $\varrho_{21}, \ldots, \varrho_{2j}$ those, for which (ii) holds; and $\varrho_{31}, \ldots, \varrho_{3k}$ those, for which (iii) holds $(i+j+k=r)$. Moreover, let

$$\mathbf{M}_{\varrho_{1\varkappa}}=F(x_{\mu_\varkappa}, x_{\nu_\varkappa}) \text{ for } \varkappa=1, \ldots, i$$
$$(\mu_\varkappa, \nu_\varkappa=1, \ldots, n);$$
$$\mathbf{M}_{\varrho_{2\varkappa}}=(\mathbf{M}_{\varrho_{4\varkappa}} \to \mathbf{M}_{\varrho_{5\varkappa}}) \text{ for } \varkappa=1, \ldots, j$$
$$(\varrho_{4\varkappa}, \varrho_{5\varkappa}=1, \ldots, \varrho_{2\varkappa}-1);$$
$$\mathbf{M}_{\varrho_{3\varkappa}}=\bar{\mathbf{M}}_{\varrho_{6\varkappa}} \text{ for } \varkappa=1, \ldots, k$$
$$(\varrho_{6\varkappa}=1, \ldots, \varrho_{3\varkappa}-1).$$

Now, the following proposition also has the truth-value $\uparrow$:

$$(22)\quad \Theta(x)\rightarrow\Big((Ep_1)(Ep_2)(Ep_{12})\big(\Gamma(p_1,p_2,p_{12})\,\Gamma(p_2,p_{12},x)\big)\vee$$
$$\vee(Ep_1)(Ep_2)(Ep_3)(Ep_{12})(Ep_{13})(Ep_{23})(Ep_{123})(Ep_{1213})\big(\Gamma(p_1,p_2,p_{12})\cdot$$
$$\cdot\,\Gamma(p_1,p_3,p_{13})\,\Gamma(p_2,p_3,p_{23})\,\Gamma(p_1,p_{23},p_{123})\,\Gamma(p_{12},p_{13},p_{1213})\cdot$$
$$\cdot\,\Gamma(p_{123},p_{1213},x)\big)\vee(Ep_1)(Ep_2)(Ep_{12})(Ep_1')(Ep_2')(Ep_{21}')\big(\Gamma(p_1,p_2,p_{12})\cdot$$
$$\cdot\,\Lambda(p_1,p_1')\,\Lambda(p_2,p_2')\,\Gamma(p_2',p_1',p_{21}')\,\Gamma(p_{21}',p_{12},x)\big)\vee$$
$$\vee(Ey_1)\cdots(Ey_n)(Ez_1)\cdots(Ez_r)\Big(\prod_{\nu=4}^{n}\Psi_\nu(y_1,y_2,y_3,y_\nu)\prod_{\varkappa=1}^{i}\Omega(y_{\mu_\varkappa},y_{\nu_\varkappa},z_{\varrho_{1\varkappa}})\cdot$$
$$\cdot\prod_{\varkappa=1}^{j}\Gamma(z_{\varrho_{4\varkappa}},z_{\varrho_{5\varkappa}},z_{\varrho_{2\varkappa}})\cdot\prod_{\varkappa=1}^{k}\Lambda(z_{\varrho_{6\varkappa}},z_{\varrho_{3\varkappa}})\,(x=z_r)\Big)\vee$$
$$\vee(Ey)(Ez)\big(\Theta(y)\,\Theta(z)\,\Xi(y,x)\,\Xi(z,x)\,\Gamma(y,x,z)\big)\Big).$$

Indeed, if $x=\mathbf{G}_\mu$ $(\mu=1,\ldots,m)$, then x is (i) either an axiom of the proposition calculus of the form $(\mathbf{H}\rightarrow(\mathbf{G}\rightarrow\mathbf{H}))$, or (ii) an axiom of the proposition calculus of the form $((\mathbf{G}\rightarrow(\mathbf{H}\rightarrow\mathbf{K}))\rightarrow((\mathbf{G}\rightarrow\mathbf{H})\rightarrow(\mathbf{G}\rightarrow\mathbf{K})))$, (iii) or an axiom of the proposition calculus of the form $((\overline{\mathbf{H}}\rightarrow\overline{\mathbf{G}})\rightarrow(\mathbf{G}\rightarrow\mathbf{H}))$, (iv) or a proper axiom of the form

$$\mathbf{M}(F;\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2,\mathbf{t}_3,f_4(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2,\mathbf{t}_3),\ldots,f_n(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2,\mathbf{t}_3)),$$

(v) or else there are positive integers $\mu',\mu''<\mu$ such that $\mathbf{G}_{\mu''}=(\mathbf{G}_{\mu'}\rightarrow\mathbf{G}_\mu)$. In case (i), $p_1=\mathbf{G}$, $p_2=\mathbf{H}$, and $p_{12}=(\mathbf{G}\rightarrow\mathbf{H})$ are sub-formulae of $x=\mathbf{G}_\mu$, thus elements of J; and we have $p_{12}=(p_1\rightarrow p_2)$ and $x=(p_2\rightarrow p_{12})$. In case (ii), $p_1=\mathbf{G}$, $p_2=\mathbf{H}$, $p_3=\mathbf{K}$, $p_{12}=(\mathbf{G}\rightarrow\mathbf{H})$, $p_{13}=(\mathbf{G}\rightarrow\mathbf{K})$, $p_{23}=(\mathbf{H}\rightarrow\mathbf{K})$, $p_{123}=(\mathbf{G}\rightarrow(\mathbf{H}\rightarrow\mathbf{K}))$ and $p_{1213}=((\mathbf{G}\rightarrow\mathbf{H})\rightarrow(\mathbf{G}\rightarrow\mathbf{K}))$ are sub-formulae of $x=\mathbf{G}_\mu$, thus elements of J; and we have $p_{12}=(p_1\rightarrow p_2)$, $p_{13}=(p_1\rightarrow p_3)$, $p_{23}=(p_2\rightarrow p_3)$, $p_{123}=(p_1\rightarrow p_{23})$, $p_{1213}=(p_{12}\rightarrow p_{13})$, and $x=(p_{123}\rightarrow p_{1213})$. In case (iii), $p_1=\mathbf{G}$, $p_2=\mathbf{H}$, $p_{12}=(\mathbf{G}\rightarrow\mathbf{H})$, $p_1'=\overline{\mathbf{G}}$, $p_2'=\overline{\mathbf{H}}$, $p_{21}'=(\overline{\mathbf{H}}\rightarrow\overline{\mathbf{G}})$ are sub-formulae of $x=\mathbf{G}_\mu$, thus elements of J; and we have $p_{12}=(p_1\rightarrow p_2)$, $p_1'=\overline{p}_1$, $p_2'=\overline{p}_2$, $p_{21}'=(p_2\rightarrow p_1)$, and $x=(p_{21}'\rightarrow p_{12})$. In case (iv), $y_1=\mathbf{t}_1$, $y_2=\mathbf{t}_2$, $y_3=\mathbf{t}_3$, $y_4=f_4(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2,\mathbf{t}_3),\ldots,y_n=f_n(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2,\mathbf{t}_3)$ are sub-terms of $x=\mathbf{G}_\mu$ (for $x_1,\ldots,x_n$ all occur in $\mathbf{M}(F;x_1,\ldots,x_n)$), $z_\varrho=\mathbf{M}_\varrho(F;\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2,\mathbf{t}_3,f_4(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2,\mathbf{t}_3),\ldots,f_n(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2,\mathbf{t}_3))$ $(\varrho=1,\ldots,r)$ are sub-formulae of $z_r=\mathbf{M}(F;\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2,\mathbf{t}_3,f_4(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2,\mathbf{t}_3),\ldots,f_n(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2,\mathbf{t}_3))=x=\mathbf{G}_\mu$, thus $y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_r$ belong to J; and we have $y_\nu=f_\nu(y_1,y_2,y_3)$ $(\nu=4,\ldots,n)$; $z_{\varrho_{1\varkappa}}=F(y_{\mu_\varkappa},y_{\nu_\varkappa})$ $(\varkappa=1,\ldots,i)$; $z_{\varrho_{2\varkappa}}=(z_{\varrho_{4\varkappa}}\rightarrow z_{\varrho_{5\varkappa}})$ $(\varkappa=1,\ldots,j)$; $z_{\varrho_{3\varkappa}}=\overline{z}_{\varrho_{6\varkappa}}$ $(\varkappa=1,\ldots,k)$; and $x=z_r$. In case (v), $y=\mathbf{G}_{\mu'}$, $z=\mathbf{G}_{\mu''}$ belong to J; we have $\mu'<\mu$, $\mu''<\mu$ and $z=(y\rightarrow x)$.

Now, form the conjuction of (4)—(22) (in (4), (10), and (14), for $\nu=4,\ldots,n$), bind the free variables by means of general quantifiers, and replace the predicates $\Psi_4,\ldots,\Psi_n,\Omega,\Gamma,\Lambda,\Sigma,\Theta$, and Ξ by different predicate variables. We thus obtain a first order formula (containing the identity symbol) which we denote by **B**. By what has been proved, **B** is satisfiable on the finite set J if $\mathfrak{A}$ is inconsistent, i. e. if **A** is not satisfiable on any set.

6. We have still to prove that conversely, if **B** can be satisfied on a finite set then $\mathfrak{A}$ is inconsistent, i. e. **A** cannot be satisfied on any set.

Suppose **B** is satisfied on a (non-empty) finite set J' by an appropriate choice of the predicates $\Psi_4, \ldots, \Psi_n, \Omega, \Gamma, \Lambda, \Sigma, \Theta$, and Ξ, defined on J' and to be substituted for the predicate variables of **B**. Then, (4)—(22) hold for arbitrary elements of J', J' being the range of the existential quantifiers.

We define some sub-sets of J' as well as some descriptive functions defined on these sub-sets. Let J'_{Ψ_ν} be the set of all $z \in J'$ for which $\Psi_\nu(x_1, x_2, x_3, z)$ is true for some $x_1, x_2, x_3 \in J'$ $(\nu = 4, \ldots, n)$. Owing to (10), these x_1, x_2 and x_3 are uniquely determined by z; let $x_1 = \psi_1(z), x_2 = \psi_2(z), x_3 = \psi_3(z)$. It is not necessary to mark ν in the notation, since on account of (14), $\Psi_\nu(x_1, x_2, x_3, z)$ and $\Psi_{\nu'}(y_1, y_2, y_3, z)$ cannot be both true for $\nu' \neq \nu$. Thus, no two of $J'_{\Psi_4}, \ldots, J'_{\Psi_n}$ have any elements in common and the descriptive functions ψ_1, ψ_2, ψ_3 are defined on $J'_\Psi = J'_{\Psi_4} + \cdots + J'_{\Psi_n}$. By (4), we have $\Sigma(\psi_\mu(z), z) = \uparrow$ for $z \in J'_\Psi$ and $\mu = 1, 2, 3$.

Similarly, let J'_Ω be the set of all $z \in J'$ for which $\Omega(x_1, x_2, z)$ is true for some $x_1, x_2 \in J'$. Because of (11), these x_1 and x_2 are uniquely determined by z; let $x_1 = \omega_1(z)$, $x_2 = \omega_2(x)$ (ω_1, ω_2 are defined on J'_Ω). By (5), we have $\Sigma(\omega_\mu(z), z) = \uparrow$ for $z \in J'_\Omega$ and $\mu = 1, 2$.

Let J'_Γ be the set of all $z \in J'$ for which $\Gamma(x_1, x_2, z)$ is true for some $x_1, x_2 \in J'$. Because of (12), these x_1 and x_2 are uniquely determined by z; let $x_1 = \gamma_1(z)$, $x_2 = \gamma_2(z)$ (γ_1, γ_2 defined on J'_Γ). By (6), we have $\Sigma(\gamma_\mu(z), z) = \uparrow$ for $z \in J'_\Gamma$ and $\mu = 1, 2$.

Finally, let J'_Λ be the set of all $z \in J'$ for which $\Lambda(x, z)$ is true for some $x \in J'$. Because of (13), this x is uniquely determined by z; let $x = \lambda(z)$ (λ defined on J'_Λ). By (7), we have $\Sigma(\lambda(z), z) = \uparrow$ for $z \in J'_\Lambda$.

In consequence of (14), (15) and (16), no two of $J'_\Psi, J'_\Omega, J'_\Gamma$ and J'_Λ have an element in common. Let $J'_\Phi = J'_\Omega + J'_\Gamma + J'_\Lambda, J'_T = J' - J'_\Phi$ (the subscripts Φ and T have to remind to "formula" and "term", respectively). Owing to (14), (15), (16) and (17), we have $\psi_1(z), \psi_2(z), \psi_3(z) \in J'_T$ for $z \in J'_\Psi$, $\omega_1(z), \omega_2(z) \in J_T$ for $z \in J'_\Omega$, $\gamma_1(z), \gamma_2(z) \in J'_\Phi$ for $z \in J'_\Gamma$ and $\lambda(z) \in J'_\Phi$ for $z \in J'_\Lambda$.

(21) shows that J'_Λ and hence, J'_Φ is not empty. To prove the same for J'_T too, we need the following lemma of which we shall make use several times in the sequel.

There is no non-empty subset J'' of J' throughout which a descriptive function $\delta(z)$ can be defined such that for $z \in J''$ we have $\delta(z) \in J''$ and $\Sigma(\delta(z), z) = \uparrow$.

Indeed, if such a J'' and $\delta(z)$ would exist, let $u_1 \in J''$, and define $u_{l+1} = \delta(u_l)$ for $l = 1, 2, \ldots$. Then we have $u_l \in J''$ and $\Sigma(u_{l+1}, u_l) = \uparrow$ for $l = 1, 2, \ldots$

Hence, by (9), we have $\Sigma(u_p, u_q) = \uparrow$ for $p, q = 1, 2, \ldots,\ p < q$. Thus, by (8), $u_p \neq u_q$ for $p, q = 1, 2, \ldots,\ p \neq q$; i. e., $u_1, u_2, \ldots$ are different, in contradiction to the finiteness of J'.

Our lemma shows that J'_Ω is not empty. Indeed, in the opposite case we should have $J'_\Phi = J'_\Gamma + J'_\Lambda$; hence, defining

$$\delta(z) = \begin{cases} \gamma_1(z) & \text{for } z \in J'_\Gamma, \\ \lambda(z) & \text{for } z \in J'_\Lambda, \end{cases}$$

$\delta(z)$ would be defined throughout J'_Φ and we should have $\delta(z) \in J'_\Phi$, $\Sigma(\delta(z), z)) = \uparrow$ for $z \in J'_\Phi$, which is impossible according to the lemma.

Hence, neither J'_T is empty; indeed, for any $z \in J'_\Omega$ we have $\omega_1(z) \in J'_T$.

By the definition of J'_T (as a matter of fact, by (14)), we have $J'_\Psi \subseteq J'_T$. Moreover, we have $J'_\Psi \subset J'_T$, i. e. J'_Ψ is a proper subset of J'_T. For in the opposite case $J'_\Psi = J'_T$, $\delta(z) = \psi_1(z)$ would be defined throughout J'_T and we should have $\delta(z) \in J'_T$ as well as $\Sigma(\delta(z), z)) = \uparrow$ for $z \in J'_T$ in contradiction to the lemma.

Now, we attach a term of $\mathfrak{A}$ to some elements of J'_T and a formula of $\mathfrak{A}$ to some elements of J'_Φ according to the following rules. (i) If $z \in J'_T - J'_\Psi$, let the term a be attached to z. (ii) If $z \in J'_{\Psi_\nu}$ $(\nu = 4, \ldots, n)$ and, for $\mu = 1, 2, 3$, the term $\mathbf{t}_\mu$ has been attached to $\psi_\mu(z)$, then we attach the term $f_\nu(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)$ to z. (iii) If $z \in J'_\Omega$ and, for $\mu = 1, 2$, the term $\mathbf{t}_\mu$ has been attached to $\omega_\mu(z)$, then we attach the formula $F(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ to z. (iv) If $z \in J'_\Gamma$ and, for $\mu = 1, 2$, the formula $\mathbf{H}_\mu$ has been attached to $\gamma_\mu(z)$, then we attach the formula $(\mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbf{H}_2)$ to z. (v) If $z \in J'_\Lambda$ and the formula $\mathbf{H}$ has been attached to $\lambda(z)$, then we attach the formula $\overline{\mathbf{H}}$ to z.

We assert that in this way, to *each* element of J'_T a term of $\mathfrak{A}$ and to each element of J'_Φ a formula of $\mathfrak{A}$ has been attached. Indeed, let J''_T be the set of all elements of J'_T to which no term of $\mathfrak{A}$ has been attached. If $z \in J''_T$, we must have $z \in J'_\Psi$ (for to the elements of $J'_T - J'_\Psi$, the term a has been attached) and at least one of $\psi_1(z), \psi_2(z), \psi_3(z)$ must belong to J''_T. Defining $\delta(z)$ for $z \in J''_T$ as the first of $\psi_1(z), \psi_2(z), \psi_3(z)$, belonging to J''_T, $\delta(z)$ is defined throughout J''_T and we have $\delta(z) \in J''_T$ as well as $\Sigma(\delta(z), z)) = \uparrow$ for $z \in J''_T$. Hence, by the lemma, J''_T is empty. Further, let J''_Φ be the set of all elements of J'_Φ to which no formula of $\mathfrak{A}$ has been attached. If $z \in J''_\Phi$, we must have $z \in J'_\Gamma + J'_\Lambda$, for in case $z \in J'_\Omega$ we have $\omega_1(z), \omega_2(z) \in J'_T$, thus, by what we have proved, some terms of $\mathfrak{A}$ have been attached to $\omega_1(z)$ and $\omega_2(z)$; further, in case $z \in J''_\Phi J'_\Gamma$, either $\gamma_1(z)$ or $\gamma_2(z)$, in case $z \in J''_\Phi J'_\Lambda$, $\lambda(z)$ must belong to J''_Φ. Hence, defining

$$\delta(z) = \begin{cases} \gamma_1(z) & \text{for } z \in J''_\Phi J'_\Gamma,\ \gamma_1(z) \in J''_\Phi, \\ \gamma_2(z) & \text{for } z \in J''_\Phi J'_\Gamma,\ \gamma_1(z) \,\overline{\in}\, J''_\Phi, \\ \lambda(z) & \text{for } z \in J''_\Phi J'_\Lambda, \end{cases}$$

$\delta(z)$ is defined throughout J''_Φ and we have $\delta(z) \in J''_\Phi$ as well as $\Sigma(\delta(z), z) = \uparrow$ for $z \in J''_\Phi$; thus by the lemma, J''_Φ is also empty.

Now, the above rules (ii) — (v) of attaching terms and formulae to elements of J' can be stated also as follows. (ii) If $\Psi_\nu(x_1, x_2, x_3, z) = \uparrow$, then some terms $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ of $\mathfrak{A}$ have been attached to x_1, x_2, x_3, respectively; and the term $f_\nu(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)$ has been attached to z. (iii) If $\Omega(x_1, x_2, z) = \uparrow$, then some terms $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ of $\mathfrak{A}$ have been attached to x_1, x_2, respectively; and the formula $F(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ has been attached to z. (iv) If $\Gamma(x_1, x_2, z) = \uparrow$, then some formulae $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ of $\mathfrak{A}$ have been attached to x_1, x_2, respectively; and the formula $(\mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbf{H}_2)$ has been attached to z. (v) If $\Lambda(x,z) = \uparrow$, then some formula $\mathbf{H}$ of $\mathfrak{A}$ has been attached to x; and the formula $\overline{\mathbf{H}}$ has been attached to z. Indeed, if $\Psi_\nu(x_1, x_2, x_3, z) = \uparrow$, then we have $x_1 = \psi_1(z), x_2 = \psi_2(z), x_3 = \psi_3(z) \in J'_\Gamma$; if $\Omega(x_1, x_2, z) = \uparrow$, then we have $x_1 = \omega_1(z), x_2 = \omega_2(z) \in J'_T$; if $\Gamma(x_1, x_2, z) = \uparrow$, then we have $x_1 = \gamma_1(z), x_2 = \gamma_2(z) \in J'_\Phi$; finally, if $\Lambda(x, z) = \uparrow$, then we have $x = \lambda(z) \in J'_\Phi$.

By (18), (19) and (20) (which have also the truth of $\Xi(x, y) \rightarrow \overline{\Xi}(y, x)$ as a consequence), the elements of J' for which $\Theta(x) = \uparrow$ holds (and, by (21), there are such elements), form a set which is linearly ordered by the relation $\Xi(x, y)$. Let $g_1, \ldots, g_m$ be the elements of this set in this order, so that for $\mu, \mu' = 1, \ldots, m$ we have $\Xi(g_\mu, g_{\mu'}) = \uparrow$ if and only if $\mu < \mu'$. Denote by $\mathbf{G}_\mu$ the term or the formula of $\mathfrak{A}$ attached to g_μ ($\mu = 1, \ldots, m$).

By (22), we have, for each $\mu = 1, \cdots, m$, one of the following possibilities.

(i) There are elements $p_1, p_2,$ and p_{12} of J' such that $\Gamma(p_1, p_2, p_{12})$ and $\Gamma(p_2, p_{12}, g_\mu)$ are true.

(ii) There are elements $p_1, p_2, p_3, p_{12}, p_{13}, p_{23}, p_{123},$ and p_{1213} of J' such that $\Gamma(p_1, p_2, p_{12}), \Gamma(p_1, p_3, p_{13}), \Gamma(p_2, p_3, p_{23}), \Gamma(p_1, p_{23}, p_{123}), \Gamma(p_{12}, p_{13}, p_{1213})$ and $\Gamma(p_{123}, p_{1213}, g_\mu)$ are true.

(iii) There are elements $p_1, p_2, p_{12}, p'_1, p'_2,$ and p'_{21} of J' such that $\Gamma(p_1, p_2, p_{12}), \Lambda(p_1, p'_1), \Lambda(p_2, p'_2), \Gamma(p'_2, p'_1, p'_{21}),$ and $\Gamma(p'_{21}, p_{12}, g_\mu)$ are true.

(iv) There are elements $y_1, \cdots, y_m, z_1, \cdots, z_r$ of J such that, for $\nu = 4, \ldots, n$, $\Psi_\nu(y_1, y_2, y_3, y_\nu)$; for $\varkappa = 1, \ldots, i$, $\Omega(y_{\mu_\varkappa}, y_{\nu_\varkappa}, z_{\varrho_{1\varkappa}})$; for $\varkappa = 1, \ldots, j$, $\Gamma(z_{\varrho_{4\varkappa}}, z_{\varrho_{5\varkappa}}, z_{\varrho_{2\varkappa}})$; and, for $\varkappa = 1, \ldots, k$, $\Lambda(z_{\varrho_{6\varkappa}}; z_{\varrho_{3\varkappa}})$ are true; further we have $g_\mu = z_r$.

(v) There are elements y and z of J' such that $\Theta(y), \Theta(z), \Xi(y, x), \Xi(z, x),$ and $\Gamma(y, g_\mu, z)$ are true.

In case (i), owing to $\Gamma(p_1, p_2, p_{12}) = \uparrow$, some formulae $\mathbf{G}$ and $\mathbf{H}$ of $\mathfrak{A}$ have been attached to p_1 and p_2, respectively, and the formula $(\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H})$ has been attached to p_{12}. Hence, in consequence of $\Gamma(p_2, p_{12}, g_\mu) = \uparrow$, the formula $(\mathbf{H} \rightarrow (\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}))$ has been attached to g_μ. Thus, the formula $\mathbf{G}_\mu$ attached to g_μ is an axiom of the propositional calculus.

In case (ii), owing to $\Gamma(p_1, p_2, p_{12}) = \Gamma(p_1, p_3, p_{13}) = \Gamma(p_2, p_3, p_{23}) = \uparrow$, some formulae $\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{K}$ of $\mathfrak{A}$ have been attached to p_1, p_2, p_3, respectively, and the formulae $(\mathbf{G} \to \mathbf{H}), (\mathbf{G} \to \mathbf{K}), (\mathbf{H} \to \mathbf{K})$ have been attached to p_{12}, p_{13}, p_{23}, respectively. Hence, in consequence of $\Gamma(p_1, p_{23}, p_{123}) = \Gamma(p_{12}, p_{13}, p_{1213}) = \Gamma(p_{123}, p_{1213}, g_\mu) = \uparrow$, the formulae $(\mathbf{G} \to (\mathbf{H} \to \mathbf{K})), ((\mathbf{G} \to \mathbf{H}) \to (\mathbf{G} \to \mathbf{K}))$, and $((\mathbf{G} \to (\mathbf{H} \to \mathbf{K})) \to ((\mathbf{G} \to \mathbf{H}) \to (\mathbf{G} \to \mathbf{K})))$ have been attached to p_{123}, p_{1213}, and g_μ, respectively. Thus, the formula G_μ attached to g_μ is an axiom of the propositional calculus in this case too.

In case (iii), owing to $\Gamma(p_1, p_2, p_{12}) = \uparrow$, some formulae $\mathbf{G}$ and $\mathbf{H}$ of $\mathfrak{A}$ have been attached to p_1, and p_2, respectively, and the formula $(\mathbf{G} \to \mathbf{H})$ has been attached to p_{12}. Hence, in consequence of $\Lambda(p_1, p_1') = \Lambda(p_2, p_2') = \Gamma(p_2', p_1', p_{21}') = \Gamma(p_{21}', p_{12}, g_\mu) = \uparrow$, the formulae $\overline{\mathbf{G}}, \overline{\mathbf{H}}, (\overline{\mathbf{H}} \to \overline{\mathbf{G}})$, and $((\overline{\mathbf{H}} \to \overline{\mathbf{G}}) \to (\mathbf{G} \to \mathbf{H}))$ have been attached to p_1', p_2', p_{21}', and g_μ, respectively. Thus, the formula $\mathbf{G}_\mu$ attached to g_μ is an axiom of the propositional calculus in this case too.

In case (iv), owing to $\Psi_\nu(y_1, y_2, y_3, y_\nu) = \uparrow$, some terms $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ of $\mathfrak{A}$ have been attached to y_1, y_2, y_3, respectively, and the term $\mathbf{t}_\nu = f_\nu(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)$ has been attached to y_ν $(\nu = 4, \cdots, n)$. In consequence of $\Omega(y_{\mu_\varkappa}, y_{\nu_\varkappa}, z_{\varrho_{1\varkappa}}) = \uparrow$ $(\varkappa = 1, \cdots, i)$, $\Gamma(z_{\varrho_{4\varkappa}}, z_{\varrho_{5\varkappa}}, z_{\varrho_{2\varkappa}}) = \uparrow$ $(\varkappa = 1, \ldots, j)$, and $\Lambda(z_{\varrho_{6\varkappa}}, z_{\varrho_{3\varkappa}}) = \uparrow$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$, some formulae $\mathbf{H}_1, \ldots, \mathbf{H}_r$ have been attached to $z_1, \ldots, z_r$, respectively. We assert that we have

$$\mathbf{H}_\varrho = \mathbf{M}_\varrho(F; \mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n) = \mathbf{M}_\varrho(F; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3, f_4(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3), \ldots, f_n(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)) \tag{23}$$

for $\varrho = 1, \ldots, r$. This holds for $\varrho = \varrho_{11}, \ldots, \varrho_{1i}$, for, according to $\Omega(y_{\mu_\varkappa}, y_{\nu_\varkappa}, z_{\varrho_{1\varkappa}}) = \uparrow$, we have

$$\mathbf{H}_{\varrho_{1\varkappa}} = F(\mathbf{t}_{\mu_\varkappa}, \mathbf{t}_{\nu_\varkappa}) = \mathbf{M}_{\varrho_{1\varkappa}}(F; \mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n)$$

for $\varkappa = 1, \ldots, i$. Supposing (23) holds for each $\varrho' < \varrho$, it holds for ϱ too. Indeed, for $\varrho = \varrho_{2\varkappa}$ $(\varkappa = 1, \ldots, j)$ we have then, owing to $\Gamma(z_{\varrho_{4\varkappa}}, z_{\varrho_{5\varkappa}}, z_{\varrho_{2\varkappa}}) = \uparrow$, taking $\varrho_{4\varkappa} < \varrho_{2\varkappa}$ and $\varrho_{5\varkappa} < \varrho_{2\varkappa}$ into account,

$$\mathbf{H}_{\varrho_{2\varkappa}} = (\mathbf{H}_{\varrho_{4\varkappa}} \to \mathbf{H}_{\varrho_{5\varkappa}}) = (\mathbf{M}_{\varrho_{4\varkappa}}(F; \mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n) \to \mathbf{M}_{\varrho_{5\varkappa}}(F; \mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n)) = \\ = \mathbf{M}_{\varrho_{2\varkappa}}(F; \mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n);$$

and for $\varrho = \varrho_{3\varkappa}$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$ we have similarly, owing to $\Lambda(z_{\varrho_{6\varkappa}}, z_{\varrho_{3\varkappa}}) = \uparrow$, and $\varrho_{6\varkappa} < \varrho_{3\varkappa}$,

$$\mathbf{H}_{\varrho_{3\varkappa}} = \overline{\mathbf{H}}_{\varrho_{6\varkappa}} = \overline{\mathbf{M}}_{\varrho_{6\varkappa}}(F; \mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n) = \mathbf{M}_{\varrho_{3\varkappa}}(F, \mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n).$$

Finally, on account of $g_\mu = z_r$, we have

$$\mathbf{G}_\mu = \mathbf{H}_r = \mathbf{M}_r(F; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3, f_4(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3), \ldots, f_n(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3));$$

hence in this case, $\mathbf{G}_\mu$ is a proper axiom.

In case (v), owing to $\Theta(y) = \Theta(z) = \uparrow$, we have $y = g_{\mu'}, z = g_{\mu''}$ for some $\mu', \mu'' = 1, \ldots, m$. In consequence of $\Xi(y, x) = \Xi(z, x) = \uparrow$, we have $\mu' < \mu$ and $\mu'' < \mu$. In consequence of $\Gamma(y, g_\mu, z) = \Gamma(g_{\mu'}, g_\mu, g_{\mu''}) = \uparrow$, $\mathbf{G}_{\mu'}, \mathbf{G}_\mu$ and

$G_{\mu''}$ are formulae of $\mathfrak{A}$ and we have $\mathbf{G}_{\mu''} = (\mathbf{G}_{\mu'} \rightarrow \mathbf{G}_{\mu})$; i. e. $\mathbf{G}_{\mu}$ is a consequence, by the *modus ponens,* of $\mathbf{G}_{\mu'}$ and $\mathbf{G}_{\mu''}$.

Summarized, $\mathbf{G}_{\mu}$ is always a formula of $\mathfrak{A}$; moreover, it is either an axiom of $\mathfrak{A}$, or the consequence, by the *modus ponens,* of two formulae, prior to it in the sequence $\mathbf{G}_1, \ldots, \mathbf{G}_m$.

By (21), there are elements x and y of J' such that $\Theta(x) = \Theta(y)$ $\Lambda(x, y) = \uparrow$; hence, we have $x = g_{\mu}$ and $y = g_{\mu'}$ for some $\mu, \mu' = 1, \ldots, m$. By $\Lambda(x, y) = \Lambda(g_{\mu}, g_{\mu'}) = \uparrow$, we have $\mathbf{G}_{\mu'} = \overline{\mathbf{G}}_{\mu}$; that is, $\mathfrak{A}$ is inconsistent, hence **A** cannot be satisfied on any set, and our theorem holds.

The formula **B** contains the equality predicate. However, this predicate can be eliminated by known methods;[25] i. e., to **B** another first order formula **B**$'$ can be constructed, not containing the equality predicate, such that **B** is satisfiable on some finite set if and only if the same holds for **B**$'$ too.[26]

7. As easily seen, **B** depends recursively on **A**. Hence, taking CHURCH's theorem on the recursive unsolvability of the decision problem (loc. cit. [1]) into consideration, we get the following corollaries.

COROLLARY 1. *There exists no recursive algorithm for deciding as to which first order formulae are satisfiable on an appropriate finite set; i. e., the class of the first order formulae satisfiable on some finite set* (shortly: the set of the formulae satisfiable in the finite) *is non-recursive.*

COROLLARY 2, TRACHTENBROT'S THEOREM. *There exists no recursive algorithm for deciding as to which first order formulae are identically true on every finite set; i. e. the class C_ω of the first order formulae which are identically true on every finite set* (shortly: the set of the finitely identical formulae) *is non-recursive.*

Indeed, a first order formula **B** is satisfiable in the finite if and only if $\overline{\mathbf{B}}$ is not finitely identical.

COROLLARY 3. *The class C_ω of the finitely identical formulae is not recursively enumerable.*

Indeed, as easily seen from the classical solution of the decision problem for finite sets of a given cardinal number, for each $k = 1, 2, \ldots$, the class C_k of the first order formulae which are identically true on a set of k elements, and also its complementary class $\overline{C}_k$, i. e. the class of the first order formulae which are not identically true on a set of k elements, are recursive, depending recursively on k too. Hence, the sum $\sum \overline{C}_k$ of the classes $\overline{C}_k$ is recursively enumerable. Obviously, $\sum \overline{C}_k$ is the class of the first order formulae which are not identically true on every finite set, i. e. the complementary class

[25] See GÖDEL, loc. cit. [10], pp. 356—357, or L. KALMÁR, Eine Bemerkung zur Entscheidungstheorie, *Acta Scientiarum Math.*, 4 (1929), pp. 248—252.

[26] Indeed, as I have remarked (loc. cit. [25], p. 251), the minimal cardinal number of sets on which **B** is statisfiable equals the analogous minimal cardinal number for **B**$'$.

$\bar{C}_\omega$ of C_ω. Now, if C_ω would be recursively enumerable as well, then an argument due to KLEENE[27] would show that C_ω is a recursive class, in contradiction to TRACHTENBROT's theorem.

COROLLARY 4. *There is no axiom system with a finite number, or a recursively enumerable class, of axioms, and a finite number of recursive rules of inference,*[28] *the theorems of which are exactly the finitely identical formulae.* (Shortly, the class of the finitely identical formulae is not recursively axiomatizable.)

Indeed, according to a lemma due to ROSSER,[29] the theorems of an axiom system having the properties specified in Corollary 4, form a recursively enumerable class.

Corollary 4 can be contrasted with the fact that the class $C_{\aleph_0}$ of the first order formulae which are identically true on an enumerable infinite set (hence, by LÖWENHEIM's theorem, loc. cit. [7], the class of the first order fomulae which are identically true on every set), as well as, for each finite cardinal number k, the class C_k of the first order formulae which are identically true on a set of k elements, are recursively axiomatizable (by GÖDEL's completeness theorem, loc. cit. [10], and by a theorem of WAJSBERG,[30] respectively). Note that the class C_ω of the finitely identical formulae is deductively closed under the rules of inference of the first order predicate calculus, just as the classes $C_{\aleph_0}$ and C_k.

As a particular case of Corollary 4 we have

COROLLARY 5. *Adjoining a finite number, or a recursively enumerable class, of finitely identical formulae to the axiom system of the first order predicate calculus, there are finitely identical formulae which do not become provable.*[31]

Indeed, owing to the deductive closure property of C_ω, all formulae which become provable are finitely identical; hence the converse cannot hold, for C_ω is not recursively axiomatizable.

Corollary 5 can be contrasted with the fact, that, according to WAJSBERG's theorem (loc. cit. [30]), adjoining to the axioms of the first order predicate calculus an arbitrary first order formula which is identically true on a set of k elements but not on a set of $k+1$ elements, every first order formula becomes provable which is identically true on a set of k elements. Hence, such

[27] Loc. cit. [2], proof of theorem XVI, p. 741.

[28] In the sense of B. ROSSER, Extensions of some theorems of Gödel and Church, *The Journal of Symbolic Logic,* **1** (1936), pp. 87—91, especially Definition on p. 88. (Formulae have to be replaced by their Gödel numbers.)

[29] Loc cit. [28], Lemma II on pp. 88—89.

[30] M. WAJSBERG, Untersuchungen übe den Funktionenkalkül für endliche Individuenbereiche, *Math. Annalen,* **108** (1933), pp. 218—228.

[31] See (for the case of *one* new axiom) ТРАХТЕНБРОТ, loc. cit., p. 571.

an axiom can be interpreted as a condition to the effect that there are not more than k individuals. Analogously, one is ready to consider a finitely identical formula which is not identically true on an infinite set as a finiteness condition for the set of individuals. Corollary 5 shows that given a finite number or even a recursively enumerable class of such finiteness conditions, there is a further finiteness condition which is not deducible of them within the axiom system of the first order predicate calculus.[32]

COROLLARY 6. *The class $C_\omega - C_{\aleph_0}$ of the first oder formulae which are identically true on each finite set, but not on an infinite set, is not recursively enumerable.*

Indeed, the class $C_{\aleph_0}$ is recursively axiomatizable, hence recursively enumerable. If the same would hold for the class $C_\omega - C_{\aleph_0}$ too, then the sum C_ω of $C_{\aleph_0}$ and $C_\omega - C_{\aleph_0}$ would be recursively enumerable as well.

(Received 29 August 1950)

[32] In D. HILBERT und P. BERNAYS, *Grundlagen der Mathematik*, vol. 1 (Berlin, 1934) p. 124, footnote [1], for the particular finitely identical formulae

$$(x)\bar{R}(x,x)\,\&\,(x)(y)(z)(R(x,y)R(y,z)\rightarrow R(x,z))\rightarrow(Ex)(y)\bar{R}(x,y)$$

and

$$(Ex)(y)\bar{S}(y,x)\,\&\,(x)(y)(z)(u)(S(x,u)S(y,u)S(v,x)\rightarrow\bar{S}(v,y))\rightarrow(Ex)(y)S(x,y)$$

the conjecture has been expressed that neither of them becomes provable when the other adjoined to the axioms of the first order predicate calculus. *(Added in the proof, 5 November 1951.* This conjecture has been proved since by H. HASENJAEGER, Über eine Art von Unvollständigkeit des Prädikatenkalküls der ersten Stufe, *The Journal of Symbolic Logic*, **15** (1950), pp. 273—276.)

ВКЛАДЫ В ТЕОРИЮ ПРИВЕДЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ РАЗРЕШИМОСТИ

Четвёртая статья

Приведение на случай конечного множества индивидуумов

Л. КАЛЬМАР (Сегед)

(Резюме)

В этой статье автор доказывает следующую теорему:

Для любой формулы **A** (узкого исчисления предикатов) можно построить другую формулу **B** такого рода, что **A** выполнима в том и только в том случае, если нет конечного множества, на котором **B** выполнима.

Значит, проблема разрешимости приводима к проблеме выполнимости формул узкого исчисления предикатов на конечных классах. Это является улучшением теоремы Левенгейма, которая приводит проблемы разрешимости на случай счетных множеств.

В качестве следствия доказана теорема Трахтенброта о рекурсивной неразрешимости проблемы выполнимости формул узкого исчисления предикатов на конечных классах. Из этого автор доказывает, что множество формул узкого исчисления предикатов тождественно истинных на любом конечном классе, не является рекурсивно счетным и, поэтому, хотя замкнуто относительно дедукции, не рекурсивно аксиоматизируемо. Дальше множество формул узкого исчислния предикатов, тождественно истинных на любом конечном классе, но не тождественно истинных на бесконечных классах, не является рекурсивно счетным.

EINE GEOMETRISCHE CHARAKTERISIERUNG DER FINSLERSCHEN RÄUME SKALARER UND KONSTANTER KRÜMMUNG

Von

O. VARGA (Debrecen), korrespondierendem Mitglied der Akademie

Unter den Riemannschen Räumen V_n, spielte seit jeher die Klasse derjenigen von konstanter Krümmung S_n eine besondere Rolle. Bloß für den Fall, daß die Krümmung null ist, der vorliegende Raum also mit einem euklidischen Raum identisch ist, ist in der Fachliteratur die Charakterisierung mittels der (Levi-Civitaschen) Parallelverschiebung längs einer geschlossenen Kurve allgemein bekannt. Aber auch die Räume von konstanter nicht verschwindender Krümmung lassen, wie einer Arbeit von E. BORTOLOTTI zu entnehmen ist,[1] eine Charakterisierung mittels Parallelführung um eine geschlossene Kurve zu. Zur Orientierung formulieren wir den Satz bloß für den Fall eines infinitesimalen Parallelogrammes und verweisen wegen allgemeinerer Annahmen auf unsere Arbeit, die ja auch den Fall eines Riemannschen Raumes in sich schließt. Das Kriterium können wir dann so fassen: Der V_n ist dann und nur dann ein S_n, falls bei Parallelführung eines Vektors um ein infinitesimales Parallelogramm, die Differenz zwischen Anfangs- und Endlage der 2-Richtung des Parallelogrammes angehört, falls Größen von höherer Kleinheitsordnung als die Maßzahl des Parallelogrammes vernachlässigt werden. Der Satz ist analytisch damit äquivalent, daß der Weylsche Projektivkrümmungsaffinor verschwindet, der V_n also geodetisch auf einen gewöhnlichen affinen Raum abbildbar ist, was nach dem Beltramischen Satz die Konstanz der Krümmung nach sich zieht. Hieraus folgt, daß unter den affinzusammenhängenden Mannigfaltigkeiten mit symmetrischem Zusammenhang die projektivebenen Räume durch dasselbe Kriterium charakterisiert werden können. Für Finslersche Räume hat L. BERWALD ein Krümmungsmaß R definiert, das die Verallgemeinerung des Riemannschen Krümmungsmaßes darstellt. Es ist für diejenige 2-Richtung erklärt, deren eine Richtung v^{α} mit der Richtung des im betreffenden Punkt vorgegebenen Linienelementes zusammenfällt,

[1] E. BORTOLOTTI [1] (siehe Literaturverzeichnis am Ende dieser Arbeit), insbes. S. 95.

während die zweite Richtung η^α willkürlich ist. Es ist also $R = R(x, v, \eta)$. Falls R nur eine Funktion der Linienelementmannigfaltigkeit ist, d. h. unabhängig von η^α ist, heißt der Raum nach L. BERWALD von skalarer Krümmung. Ist R eine Konstante, so ist der Raum ein solcher von konstanter Krümmung.[2] Hauptziel dieser Arbeit ist nun die in den Sätzen 1 und 3 des § 2 enthaltene Charakterisierung der Räume skalarer bzw. konstanter Krümmung durch Parallelführung eines Vektors um eine geschlossene einfache Kurve. Mit diesen Sätzen äquivalent sind die Sätze 2 und 4 des § 2, die eine Charakterisierung der Räume skalarer und konstanter Krümmung mittels eines Krümmungsaffinors zulassen. Da wir in unserer Darstellung die affine Theorie der Bahnen nicht benützen,[3] weiter hervorheben wollen, daß die Krümmungsverhältnisse durch den von Verf. eingeführten Hauptkrümmungsaffinor[4] gekennzeichnet werden, haben wir in dem § 1 eine Zusammenstellung der Grundbegriffe des Finslerschen Raumes von diesem Gesichtspunkt aus gegeben. Dabei konnten wir unter Benutzung von Ergebnissen von H. TIETZE[5] eine unseren Zwecken entsprechende Herleitung des Krümmungsaffinors durch Herumführung um eine einfache geschlossene Kurve geben.

§ 1. Grundbegriffe der Finslerschen Geometrie

Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Koordinaten $x^\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ wird dadurch zu einem Finslerschen Raum, daß eine Grundfunktion $L(x, v)$ der $2n$ Veränderlichen x^α, v^α vorgegeben wird, mittels der für eine beliebige mindestens einmal stetig differenzierbare Kurve $x^\alpha = x^\alpha(t)$, eine Bogenlänge s durch

$$s = \int_{t_0}^{t} L\left(x(t), \frac{dx}{dt}\right) dt \tag{1, 1}$$

bestimmt ist. Von der Grundfunktion $L(x, v)$ wird vorausgesetzt, daß sie eine in den v^α von erster Ordnung positiv-homogene positive Funktion ist, die hinsichtlich sämtlicher Veränderlicher stetige partielle Ableitungen der ersten vier Ordnungen besitzt und daß ferner die mit den

$$g_{\alpha\beta} = \partial_{v^\alpha} \partial_{v^\beta} \left(\frac{1}{2} L^2\right); \quad \partial_{v^\alpha} F = \frac{\partial F}{\partial v^\alpha} \tag{1, 2}$$

gebildete quadratische Form

$$g_{\alpha\beta}(x, v) X^\alpha X^\beta \tag{1, 3}$$

[2] Siehe L. BERWALD [1], insbes. No. 25.

[3] Eine äußerst übersichtliche Darstellung von diesem Gesichtspunkt aus findet sich bei L. BERWALD [2], insbes. No. 2.

[4] Siehe O. VARGA [1], § 3.

[5] Siehe H. TIETZE [1].

der Hilfsveränderlichen X^α, für alle zulässigen Wertesysteme der x^α und v^α (das Wertesystem $v^\alpha = 0$ ausgeschlossen) positiv definit ist. Die Finslersche Geometrie kann nun nach E. CARTAN[6] der Theorie einer $(2n-1)$-dimensionalen euklidisch zusammenhängenden Mannigfaltigkeit von Linienelementen unterordnet werden. Die Transformationsschar, die dem Studium einer solchen Mannigfaltigkeit zu Grunde liegt, besteht aus den zumindestens als viermal stetig differenzierbar vorausgesetzten Transformationen

$$x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^\alpha), \qquad \mathrm{Det}\, A_\alpha^{\alpha'} \neq 0;\; A_\alpha^{\alpha'} \overset{\text{def.}}{=} \partial_\alpha x^{\alpha'} \tag{1, 4}$$

und den Transformationen

$$v^{\alpha'} = A_\alpha^{\alpha'} v^\alpha. \tag{1, 5}$$

Die Mannigfaltigkeit wird bestimmt:

I. Durch Angabe eines kovarianten Tensors 2-ter Stufe $g_{\alpha\beta}(x, v)$, der den „Bogen" einer mindestens einmal stetig differenzierbaren Linienelementfolge

$$x^\alpha = x^\alpha(t), \quad v^\alpha = v^\alpha(t) \tag{1, 6}$$

durch das Integral

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{\alpha\beta}(x(t), v(t)) \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt}}\, dt \tag{1, 7}$$

bestimmt.

Die Form $g_{\alpha\beta}(x, v) X^\alpha X^\beta$ möge denselben Forderungen genügen, wie die Form (1, 3).

II. Durch Angabe einer invarianten Ableitung

$$\frac{\delta \xi^\alpha}{dt} = \frac{d\xi^\alpha}{dt} + \left[C_{\beta\gamma}^{\cdot\cdot\alpha} \frac{dv^\beta}{dt} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{dt} \right] \xi^\gamma, \tag{1, 8}$$

die dem längs (1, 6) definierten Vektorfeld $\xi^\alpha(x, v)$ das Vektorfeld $\dfrac{\delta \xi^\alpha}{dt}$ zuordnet.

Da Affinoren in den v^α stets von von nullter Ordnung homogen sein sollen, folgt aus (1, 8) unmittelbar, daß die $C_{\beta\gamma}^{\cdot\cdot\alpha}$ von (-1)-ter Ordnung, die $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ von nullter Ordnung positiv-homogen in den v^α sind und daß ferner

$$C_{\beta\gamma}^{\cdot\cdot\alpha} v^\beta = 0 \tag{1, 9}$$

gilt.

Falls für ein längs (1, 6) erklärtes Vektorfeld

$$\frac{\delta \xi^\alpha}{dt} = 0 \tag{1, 10}$$

besteht, so wird es als parallel in Bezug auf (1, 6) bezeichnet. Umgekehrt stellt (1, 10) ein Differentialgleichungssystem dar so, daß man einen Vektor stets längs einer vorgegebenen Linienelementfolge parallel verschieben kann.

[6] Siehe E. CARTAN [1], wo die in diesem Paragraphen nur angedeuteten Formeln (1, 1) — (1, 22) auf S. 3—17 ausführlich hergeleitet werden.

Wird die Länge und der Winkel von Vektoren mit Hilfe von $g_{\alpha\beta}$ so wie in der Riemannschen Geometrie erklärt, dann lautet die dritte Forderung:

III. Die Länge von Vektoren und der von zwei Vektoren eingeschlossene Winkel bleibe bei einer Parallelverschiebung ungeändert.

Dies führt zu den Beziehungen

$$\partial_\gamma g_{\alpha\beta} = \Gamma_{\gamma\alpha\beta} + \Gamma_{\gamma\beta\alpha}\,; \quad \Gamma_{\alpha\beta\gamma} = g_{\beta\varrho}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\varrho} \tag{1, 11}$$

und

$$\partial_{v^\varrho} g_{\alpha\beta} = C_{\gamma\alpha\beta} + C_{\gamma\beta\alpha}\,; \quad C_{\alpha\beta\gamma} = g_{\varrho\gamma} C_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\varrho}. \tag{1, 12}$$

Der Finslersche Raum unterordnet sich nun der Linienelementmannigfaltigkeit dadurch, daß wir $g_{\alpha\beta}$, $C_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma}$ und $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ mit Hilfe der Grundfunktion so bestimmen, daß I, II und III in koordinateninvarianter Art bestehen. $g_{\alpha\beta}$ soll durch (1, 2) bestimmt sein. Ferner sei

$$C_{\cdot\beta\gamma\delta} = g_{\varrho\delta} C_{\beta\gamma}^{\cdot\cdot\varrho} = \frac{1}{3}\,\partial_{v^\beta}\partial_{v^\gamma}\partial_{v^\delta} L^2 \tag{1, 13}$$

und

$$\Gamma_{\alpha\gamma\beta} = \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha g_{\gamma\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}\right) + C_{\varrho\beta\alpha} G_\gamma^\varrho - C_{\varrho\gamma\alpha} G_\beta^\varrho, \tag{1, 14}$$

wobei

$$G_\beta^{\ \alpha} = \partial_{v^\beta} G^\alpha\,; \quad G^\alpha = \frac{1}{4} g^{\alpha\varrho}\left[v^\varkappa \partial_{v^\varrho}\partial_{v^\varkappa} L^2 - \partial_\varrho L^2\right]. \tag{1, 15}$$

Die Relationen (1, 11) und (1, 12) sind auf Grund von (1, 13) und (1, 14) offensichtlich erfüllt.

Wir bemerken noch, daß die in (1, 15) auftretenden, in den v^α von 2-ter Ordnung positiv-homogenen Funktionen G^α gerade die Eulerschen Differentialgleichungen des zur Grundfunktion $L(x, v)$ gehörigen Variationsproblems bestimmen. Geht man nämlich von den bekannten Eulerschen Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^\beta} - \frac{\partial L}{\partial x^\beta} = 0\,; \quad \dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt} \tag{1, 16}$$

aus, und führt den durch (1, 1) bestimmten Bogenparameter s ein, so können diese Differentialgleichungen auf die Gestalt

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + 2G^\alpha\left(x, \frac{dx}{ds}\right) = 0 \tag{1, 17}$$

gebracht werden.

Wir bezeichnen den Einheitsvektor

$$l^\alpha = \frac{v^\alpha}{L(x, v)}, \tag{1, 18}$$

dessen Richtung mit der seines Linienelementes zusammenfällt, als normiertes Linienelement. Aus (1, 8), (1, 9), (1, 10), (1, 14) und (1, 15) folgt, daß die normierten Linienelemente in Bezug auf die Linienelementfolge (1, 6) parallel sind, falls

$$\frac{dl^\alpha}{dt} = -G_\beta^{\ \alpha}(x, l)\frac{dx^\beta}{dt} \equiv -\frac{1}{L}G_\beta^{\ \alpha}(x, v)\frac{dx^\beta}{dt} \tag{1, 19}$$

gilt. Wegen (1, 18) bedeutet dies eine Differentialgleichung für die v^α. Demnach kann ein normiertes Linienelement bloß längs einer Kurve $x^\alpha = x^\alpha(t)$ parallel verschoben werden und nicht längs einer Linienelementfolge. Falls für eine Linienelementfolge (1, 6) die normierten Linienelemente parallel sind (d. h. (1, 19) gilt), wollen wir, der Kürze wegen, die Linienelementfolge (1, 6) als parallel bezeichnen. Die invariante Ableitung eines Vektorfeldes ξ^α längs einer Folge von parallelen Linienelementen wird wegen (1, 8) und (1, 9) von der Gestalt

$$\frac{\delta\xi^\alpha}{dt} = \frac{d\xi^\alpha}{dt} + \Gamma^{*\alpha}_{\beta\gamma}(x, v)\frac{dx^\beta}{dt}\xi^\gamma \tag{1, 20}$$

sein, wobei

$$\Gamma^{*\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{*\alpha}_{\gamma\beta} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} - G_\beta^{\ \varrho} C_{\varrho\gamma}^{\ \cdot\cdot\ \alpha} \tag{1, 21}$$

gesetzt werde.

Falls in der Linienelementfolge (1, 6) $x^\alpha(t) \equiv \overset{}{\underset{0}{x^\alpha}}$ ist, dann wird die durch (1, 10) bestimmte Parallelverschiebung zu einer durch

$$\frac{d\xi^\alpha}{dt} = -C_{\beta\gamma}^{\cdot\cdot\ \alpha}\frac{dv^\beta}{dt}\xi^\gamma \tag{1, 22}$$

erklärten Drehung.

Zu den Krümmungsaffinoren kann man in entsprechender Verallgemeinerung zur Riemannschen Geometrie durch Parallelführung um eine geschlossene Linienelementfolge gelangen. Im folgenden benötigen wir ausschließlich den ganz speziellen Fall, in dem ein normiertes Linienelement um eine geschlossene Kurve parallelverschoben wird. Wir betrachten eine auf der Fläche

$$x^\alpha = x^\alpha(u, v) \tag{1, 23}$$

gelegene, doppelpunktfrei durch

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad t_0 \leqq t \leqq t_1 \tag{1, 24}$$

bestimmte Kurve. Aus (1, 19) folgt für den Differenzenvektor

$$\Delta l^\alpha = l^\alpha(t_1) - l^\alpha(t_0) \tag{1, 25}$$

zwischen Anfangs- und Endlage

$$\Delta l^\alpha = -\int_{t_0}^{t_1} G_\beta^{\ \alpha}(x, l)\frac{dx^\beta}{dt}dt. \tag{1, 26}$$

Trifft man die Voraussetzungen, daß für die in der (u, v)-Parameterebene liegende Kurve (1, 24)

$$|u(t) - u_0| < \Delta u, \quad |v(t) - v_0| < \Delta v; \quad \varepsilon = \Delta u + \Delta v \tag{1, 27}$$

gilt, und ihre (euklidisch gemessene) Länge kleiner als $\mu\varepsilon$ ist (μ eine positive Konstante), so kann man für das in (1, 26) auftretende Integral in Verallgemeinerung von Überlegungen von H. TIETZE[7] zeigen, daß

$$(1,28)\quad \begin{aligned} \Delta l^\alpha &= \int_{t_0}^{t_1}\left[\left(-G_{\dot\beta}{}^\alpha(x,l)\frac{\partial x^\beta}{\partial v}\right)\frac{dv}{dt}-\left(G_{\dot\beta}{}^\alpha(x,l)\frac{\partial x^\beta}{\partial u}\right)\frac{du}{dt}\right]dt= \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(-G_{\dot\beta}{}^\alpha(x,l)\frac{\partial x^\beta}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(G_{\dot\beta}{}^\alpha(x,l)\frac{\partial x^\beta}{\partial u}\right)\right]_{t=t_0}\Delta\bar S+O^\alpha(\varepsilon^3)\end{aligned}$$

gilt.

Auf der rechten Seite von (1, 28) bedeutet $\Delta\bar S$ den (euklidisch gemessenen) Flächeninhalt, der von der Kurve (1, 24) eingeschlossen wird, und $O^\alpha(\varepsilon^3)$ für jeden Wert von α die aus der Zahlentheorie bekannte Funktion. Es ist also

$$(1,29)\qquad O^\alpha(\varepsilon^3)\leqq K^\alpha\cdot\varepsilon^3,$$

wobei die positiven Konstanten K^α von dem Anfangslinienelement $\underset{0}{x}^\alpha, \underset{0}{v}^\alpha$, den Werten der Funktionen (1, 23), den Größen $G_{\dot\beta}{}^\alpha$ und ihren partiellen Ableitungen abhängen, hingegen unabhängig von $\Delta u, \Delta v$ und der gewählten Kurve sind. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial u}$ bzw. $\frac{\partial}{\partial v}$ in dem dritten Porten von (1, 28) haben ebenfalls die bei TIETZE angegebene symbolische Bedeutung,[8] d. h. man bilde, falls irgend eine Funktion von x^α und v^α gegeben ist, die Richtungsableitung

$$(1,30)\qquad \frac{dF}{dt}=F_1\frac{du}{dt}+F_2\frac{dv}{dt}.$$

Es bedeutet dann $F_1=\frac{\partial}{\partial u}(F), F_2=\frac{\partial}{\partial v}(F)$. Bei der Bildung von (1, 30) ist noch zu berücksichtigen, daß die $\frac{dv^\alpha}{dt}$ der Gleichung (1, 19) zu genügen haben. Beachtet man dies, so ergibt die Berechnung von (1, 28)

$$(1,31)\qquad \Delta l^\alpha=\frac{1}{2}R_{\beta\dot\delta}{}^\alpha(x_0,v_0)\left(\frac{\partial(x^\delta x^\beta)}{\partial(u,v)}\right)_{t=t_0}\Delta\bar S+O^\alpha(\varepsilon^3),$$

mit

$$(1,32)\qquad R_{\beta\dot\delta}{}^\alpha(x,v)=\frac{2}{L}\left[\partial_{[\beta}G_{\dot\delta]}{}^\alpha+G_{[\dot\beta|\dot\varrho|}{}^\alpha G_{\dot\delta]}{}^\varrho\right];\qquad G_{\dot\beta\dot\varrho}{}^\alpha=\partial_{\dot v^\beta}G_{\dot\varrho}{}^\alpha.$$

Führen wir für die beiden Vektoren

$$(1,33)\qquad \frac{\partial x^\alpha}{\partial u}\Delta\bar S=t_1^\alpha,$$

$$(1,34)\qquad \frac{\partial x^\alpha}{\partial v}\Delta\bar S=t_2^\alpha,$$

[7] Siehe H. TIETZE [1], insbes. die No. 1—6.

[8] Siehe in H. TIETZE [1] die Formeln (12) auf S. 311.

die der die Fläche (1, 23) in $\underset{0}{u}, \underset{0}{v}$ berührenden 2-Richtung angehören, ein, so kann (1, 31) wegen der schiefen Symmetrie in den Zeigern β und δ auch auf die Form

$$(1, 31') \qquad \Delta l^{\alpha} = R_{\beta\dot{\delta}}{}^{\alpha}(x_0, v_0) t_1^{\delta} t_2^{\beta} + O^{\alpha}(\varepsilon^3)$$

gebracht werden. Der Affinor (1, 32) tritt zuerst bei E. CARTAN[9] auf, und für den Fall der affinen Theorie bei L. BERWALD.[10] Wir können die eben betrachtete Folge von parallelen Linienelementen längs der durch (1, 23) und (1, 24) bestimmten Kurve dadurch abschließen, daß wir zwischen $l^{\alpha}(t_1)$ und $l^{\alpha}(t_0)$ eine Linienelementfolge

$$(1, 35) \qquad l^{\alpha} = l^{\alpha}(t_1) + \sigma(l^{\alpha}(t_0) - l^{\alpha}(t_1)) \qquad 0 \leqq \sigma \leqq 1$$

einschalten. Wird längs der so gewonnenen Linienelementfolge ein Vektor ξ^{α} gemäß (1, 10) und (1, 20) parallelverschoben, so erhält man durch eine ähnliche Überlegung wie oben, bei der jetzt noch die Paralleldrehung (1, 22) ferner (1, 31) zu benützen ist, für den Differenzenvektor von Anfangs- und Endlage

$$(1, 36) \qquad \Delta\xi^{\alpha} \equiv \xi^{\alpha}(t_1) - \xi^{\alpha}(t_0) = R_{\dot{\beta}\dot{\delta}\dot{\gamma}}{}^{\alpha}(x_0, v_0)\left(\frac{\partial(x^{\delta}x^{\beta})}{\partial(u, v)}\right)_{t=t_0} \cdot \xi^{\gamma}(t_0)\Delta\bar{S} + O^{\alpha}(\varepsilon^3),$$

wobei jetzt[11]

$$(1, 37) \qquad R_{\dot{\beta}\dot{\delta}\dot{\gamma}}{}^{\alpha}(x, v) = 2\partial_{[\beta}\Gamma^{*\alpha}_{\delta]\gamma} - 2G^{\varrho}_{[\beta}\partial_{v|\varrho|}\Gamma^{*\alpha}_{\delta]\gamma} + 2\Gamma^{*\varrho}_{[\delta|\gamma|}\Gamma^{*\alpha}_{\beta]\varrho}.$$

Die in (1, 29) auftretenden Konstanten K^{α} hängen jetzt auch von den $\Gamma^{*\alpha}_{\beta\gamma}$ und ihren partiellen Ableitungen ab. Wir merken noch den sich aus (1, 37) und (1, 32) ergebenden Hauptkrümmungsaffinor

$$(1, 38) \qquad T_{\dot{\beta}\dot{\delta}\dot{\gamma}}{}^{\alpha} = R_{\dot{\beta}\dot{\delta}\dot{\gamma}}{}^{\alpha} - L C_{\dot{\varrho}\dot{\gamma}}{}^{\alpha} R_{\dot{\beta}\dot{\delta}}{}^{\varrho}$$

an.[12] Es kann nachgewiesen werden, daß derselbe dadurch entsteht, wenn der oben betrachtete Vektor nicht um die durch (1, 35) abgeschlossene Folge von parallelen Linienelementen herumgeführt wird.

§. 2. Finslersche Räume von skalarem und konstantem Krümmungsmaß

Um das von L. BERWALD eigeführte Krümmungsmaß definieren zu können, führen wir die rein kovarianten Komponenten des Krümmungsaffinors $R_{\dot{\beta}\dot{\delta}\dot{\gamma}}{}^{\alpha}$ gemäß

[9] E. CARTAN [1], S. 36, Formel XX, wo dieser Affinor mit $R_0{}^{\alpha}{}_{\delta\beta}$ bezeichnet ist.

[10] L. BERWALD [2], S. 759, Formel (2, 9). Der dort auftretende mit $K_{\delta}{}^{\alpha}{}_{\beta}$ bezeichnete Affinor steht mit dem hier behandelten in dem durch $LR_{\dot{\beta}\dot{\delta}}{}^{\alpha} = K_{\delta}{}^{\alpha}{}_{\beta}$ bestimmten Zusammenhang.

[11] Tritt zuerst in E. CARTAN [1] auf. Siehe S. 36, Formel (XIX). Dort wird dieser Affinor mit $R_{\gamma}{}^{\alpha}{}_{\delta\beta}$ bezeichnet.

- Für den Fall von affinzusammenhängenden Mannigfaltigkeiten zuerst in O. VARGA [1], S. 13, Formel (3, 13).

$$(2,1)\qquad R_{\beta\delta\gamma\varepsilon}(x,v)=g_{\alpha\varepsilon}(x,v)\,R_{\beta\gamma\delta}{}^{\alpha}(x,v)$$

ein.

Setzen wir ferner

$$(2,2)\qquad T_{\beta\delta}^{\cdot\,\cdot\,\alpha}\overset{\text{def}}{=}T_{\beta\delta\gamma}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\alpha}l^{\gamma},$$

dann folgt wegen (1, 9), (1, 13), (1, 14), (1, 21), (1, 32) und (1, 37)

$$(2,3)\qquad R_{\beta\delta\gamma}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\alpha}l^{\gamma}=T_{\beta\delta\gamma}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\alpha}l^{\gamma}=R_{\beta\delta}^{\cdot\,\cdot\,\alpha}=T_{\beta\delta}^{\cdot\,\cdot\,\alpha}.$$

Aus (2, 1) und (2, 3) ergibt sich:

$$(2,4)\qquad R_{\beta\delta\varepsilon}=g_{\alpha\varepsilon}R_{\beta\delta}^{\cdot\,\cdot\,\alpha}=R_{\beta\delta\gamma\varepsilon}l^{\gamma},$$

$$(2,4')\qquad T_{\beta\delta\varepsilon}=g_{\alpha\varepsilon}T_{\beta\delta}^{\cdot\,\cdot\,\alpha}=T_{\beta\delta\gamma\varepsilon}l^{\gamma},$$

$$(2,4'')\qquad T_{\beta\delta\varepsilon}=R_{\beta\delta\varepsilon}.$$

Außer diesen Affinoren benötigen wir noch die folgenden sich aus $R_{\beta\delta}^{\cdot\,\cdot\,\varepsilon}$ bzw. $T_{\beta\delta}^{\cdot\,\cdot\,\varepsilon}$ durch Überschiebung mit dem normierten Linienelement ergebenden Affinoren

$$(2,5)\qquad R^{*}_{\beta\varepsilon}\overset{\text{def}}{=}R_{\beta\delta\varepsilon}l^{\delta}=R_{\beta\delta\gamma\varepsilon}l^{\delta}l^{\gamma},$$

$$(2,5')\qquad T^{*}_{\beta\varepsilon}\overset{\text{def}}{=}T_{\beta\delta\varepsilon}l^{\delta}=T_{\beta\delta\gamma\varepsilon}l^{\delta}l^{\gamma},$$

für die wegen (2, 4″)

$$(2,5'')\qquad R^{*}_{\beta\varepsilon}=T^{*}_{\beta\varepsilon}$$

gilt. Durch Heraufziehen des Zeigers ε in (2, 5″) folgt wegen (2, 3), (2, 4) und (2, 4′)

$$(2,6)\qquad R^{*}{}_{\beta}^{\cdot\,\alpha}=T^{*}{}_{\beta}^{\cdot\,\alpha}=R_{\beta\delta}^{\cdot\,\cdot\,\varepsilon}l^{\delta}=T_{\beta\delta}^{\cdot\,\cdot\,\varepsilon}l^{\delta}.$$

Durch Verjüngung von $R^{*}{}_{\beta}^{\alpha}$ erhalten wir den durch

$$(2,7)\qquad R^{*}(x,v)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{n-1}R^{*}{}_{\alpha}^{\cdot\,\alpha}=\frac{1}{n-1}T^{*}{}_{\alpha}^{\cdot\,\alpha}$$

erklärten Skalar.

Die Verjüngung des Krümmungsaffinors $R_{\beta\delta\gamma}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\alpha}$ und des Hauptkrümmungsaffinors $T_{\beta\delta\gamma}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\varepsilon}$ führt zu den beiden durch

$$(2,8)\qquad R_{\delta\gamma}\overset{\text{def}}{=}R_{\alpha\delta\gamma}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\alpha},$$

$$(2,9)\qquad T_{\delta\gamma}\overset{\text{def}}{=}T_{\alpha\delta\gamma}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\alpha}$$

bestimmten Affinoren. Der Zusammenhang zwischen diesen Affinoren ergibt sich unmittelbar aus (1, 38) in der Form

$$(2,10)\qquad R_{\delta\gamma}=T_{\delta\gamma}+C_{\varrho\gamma}^{\cdot\,\cdot\,\mu}R_{\delta\mu}^{\cdot\,\cdot\,\varrho}.$$

Aus den Affinoren (2, 8) und (2, 9) gewinnt man durch Überschiebung mit l^{γ} die Vektoren

$$(2,11)\qquad R_{\delta}\overset{\text{def}}{=}R_{\delta\gamma}l^{\gamma}$$

und

$$(2,12)\qquad T_{\delta}\overset{\text{def}}{=}T_{\delta\gamma}l^{\gamma},$$

für die wegen (2, 10), (1, 9) und (1, 13)

(2, 13) $$R_\delta = T_\delta$$

gilt. Nochmalige Überschiebung mit l^δ gibt den Skalar

(2, 14) $$R(x, v) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n-1} R_\delta l^\delta = \frac{1}{n-1} T_\delta l^\delta .$$

Aus (2, 3), den Definitionen (2, 8) und (2, 11) von $R_{\delta\gamma}$ bzw. R_δ folgt, daß

(2, 15) $$R_\delta = R_{\mu\dot{\delta}}{}^{\mu}$$

ist. Entsprechend folgt aus (2, 3), (2, 9), (2, 12) und (2, 13):

(2, 16) $$R_\delta = T_\delta = T_{\dot{\mu}\dot{\delta}}{}^{\mu}.$$

Aus (2, 6), (2, 7), (2, 14)—(2, 16) folgt

(2, 17) $$R^*(x, v) = R(x, v).$$

Wir heben noch folgendes Ergebnis hervor, daß eine Folge von (2, 14) ist:

Der Krümmungsskalar $R(x, v)$ des Finslerschen Raumes kann aus dem Hauptkrümmungsaffinor (1, 38) *durch Verjüngung bzw. Überschiebung mit dem normierten Linienelement gewonnen werden.*

Eine wichtige Feststellung, die auf Grund der Definition (2, 5) von $R^*_{\beta\alpha}$ durch eine Rechnung aus (1, 32) und (2, 1) folgt, ist die Symmetrieeigenschaft[13]

(2, 18) $$R^*_{\beta\alpha} = R^*_{\alpha\beta}.$$

Wir setzen im folgenden $n \geqq 3$ voraus.

Wir betrachten nun das normierte Linienelement (x, l) und den in denselben definierten, von ihm linear unabhängigen Vektor η^α. Die für die 2-Richtung l^α, η^α des Linienelementes (x, l) bestimmte Invariante

(2, 19) $$R(x, v, \eta) \overset{\text{def}}{=} \frac{R_{\beta\delta\gamma\varepsilon}\eta^\beta \eta^\varepsilon l^\delta l^\gamma}{(g_{\beta\varepsilon} g_{\delta\gamma} - g_{\beta\gamma} g_{\delta\varepsilon}) \eta^\beta \eta^\varepsilon l^\delta l^\gamma}$$

ist das zu dieser 2-Richtung gehörige Berwaldsche Krümmungsmaß des Finslerschen Raumes. Aus (2, 5), (2, 5') und daraus, daß l^α ein Einheitsvektor ist, folgt für das Krümmungsmaß sofort die Darstellung

(2, 20) $$R(x, v, \eta) = \frac{R^*_{\beta\varepsilon}\eta^\beta \eta^\varepsilon}{(g_{\beta\varepsilon} - l_\beta l_\varepsilon)\eta^\beta \eta^\varepsilon} = \frac{T^*_{\beta\varepsilon}\eta^\beta \eta^\varepsilon}{(g_{\beta\varepsilon} - l_\beta l_\varepsilon)\eta^\beta \eta^\varepsilon} .$$

Das Krümmungsmaß läßt sich also aus dem Hauptkrümmungsaffinor, dem metrischen Grundtensor $g_{\alpha\beta}$ und dem Vektor l^α herleiten.

Falls $R(x, v, \eta)$ ein von η^α unabhängiger Skalar $I(x, v)$ ist, so heißt der Finslersche Raum von skalarer Krümmung. Ist $I(x, v)$ eine Konstante, so heißt der Raum von konstanter Krümmung.[14] L. BERWALD hat in Verallgemeinerung

[13] Vgl. E. CARTAN [1], S. 32, Formel XXIII, wo statt $R^*_{\alpha\beta}$ die Bezeichnung $R_{0\alpha 0\beta}$ verwendet wird.

[14] Vgl. L. BERWALD [2], S. 773—774.

eines Ergebnisses von F. SCHUR nachgewiesen, daß aus der Unabhängigkeit des Krümmungsmaßes $I(x, v)$ von der Richtung schon seine Konstanz fogt.[15] Für einen Raum skalarer Krümmung folgt aus der Willkürlichkeit von η^α und der Symmetrieeigenschaft (2, 18) die Beziehung

$$R^*{}_{\beta\varepsilon} = I(x, v)(g_{\beta\varepsilon} - l_\beta l_\varepsilon) \tag{2, 21}$$

und hieraus durch Überschiebung mit $g^{\alpha\varepsilon}$

$$R^*{}_{\beta}{}^{\cdot\,\alpha} = I(x, v)(\delta^\alpha - l_\beta l^\alpha). \tag{2, 21'}$$

Durch Verjüngung folgt hieraus wegen (2, 12) und (2, 17)

$$I(x, v) = R(x, v). \tag{2, 22}$$

Das Krümmungsmaß eines Finslerschen Raumes skalarer Krümmung ist sonach mit dem Krümmungsskalar identisch.

Aus (2, 22) folgen wegen (2, 21) und (2, 21′) die für den Finslerschen Raum skalarer Krümmung charakteristische Relation

$$R^*{}_{\beta\varepsilon} = R(x, v)(g_{\beta\varepsilon} - l_\beta l_\varepsilon), \tag{2, 23}$$

bzw.

$$R^*{}_{\beta}{}^{\cdot\,\alpha} = R(x, v)(\delta^\alpha_\beta - l_\beta l^\alpha). \tag{2, 23'}$$

Benützt man die aus (1, 32) und (2, 6) folgende Beziehung

$$L^2 R^*{}_{\beta}{}^{\cdot\,\alpha} = 2\partial_\beta G^\alpha - \partial_{v^\beta} G^\varrho_{\cdot} \partial_{v^\varrho} G^\alpha - \partial_\varrho G_{\beta}{}^{\cdot\,\alpha}{}_{\cdot} v_\varrho + 2 G_{\beta\varrho}{}^{\cdot\,\alpha} G^\varrho, \tag{2, 24}$$

so kann man $R_{\beta\delta}{}^{\cdot\,\alpha}$ in der Form

$$L R_{\beta\delta}{}^{\cdot\,\alpha} = \frac{2}{3} \partial_{v[\beta} L^2 R^*{}_{\delta]}{}^{\alpha} \tag{2, 25}$$

darstellen.[16] Ist der Raum von skalarer Krümmung, so können auf der rechten Seite von (2, 25) die sich aus (2, 23′) ergebenden Werte von $R^*{}_{\beta}{}^{\cdot\,\alpha}$ eingeführt werden. Dies gibt[17]

$$\begin{aligned} R_{\beta\delta}{}^{\cdot\,\alpha} = \left(\frac{1}{3} L \cdot \partial_{v^\delta} R + R l_\delta\right)\delta^\alpha_\beta - \left(\frac{1}{3} L \cdot \partial_{v^\beta} R + R l_\beta\right)\delta^\alpha_\delta + \\ + \frac{1}{3}(l_\delta \cdot \partial_{v^\beta} R - l_\beta \partial_{v^\delta} R) l^\alpha. \end{aligned} \tag{2, 26}$$

Die durch (2, 26) bestimmte Form des Affinors (2, 26) ist für Räume skalarer Krümmung charakteristisch, wie schon L. BERWALD bemerkt hat. In der Tat erhält man nach Überschiebung mit l^δ die Relationen (2, 23). Für Räume konstanter Krümmung folgt aus (2, 26) als kennzeichnend die Beziehung

$$R_{\beta\delta}{}^{\cdot\,\alpha} = 2R\,\delta^\alpha_{[\beta} l_{\delta]}. \tag{2, 27}$$

[15] Vgl. L. BERWALD [2], No. 16.

[16] Die Formeln (2, 23), (2, 25) bei L. BERWALD, No. 13. Formel (2, 24) bei E. CARTAN [1], S. 36, Formel XXI.

[17] Vgl. L. BERWALD [2], S. 774, Formel (13, 5).

Führt man das normierte Linienelement l^α um eine gemäß (1, 23) und (1, 24) bestimmte und den dort angegebenen Anforderungen genügende Kurve eines Raumes skalarer Krümmung herum, so folgt für den Differenzenvektor Δl^α von Anfangs- und Endlage wegen (1, 31′) und der Gestalt (2, 26) des Affinors $R_{\beta\dot{\delta}}{}^\alpha$ die Beziehung

$$\Delta l^\alpha = A t_2^\alpha + B t_1^\alpha + C l^\alpha(x_0, v_0) + O^\alpha(\varepsilon^3). \tag{2, 28}$$

Wir erinnern daran (siehe (1, 33) und (1, 34)), daß t_2^α und t_1^α der 2-Richtung angehören, die die Kurve im Ausgangspunkt berührt. Wegen (2, 27) folgt durch Parallelführung von l^α um eine geschlossene Kurve der gleichen Art wie oben, im Falle eines Raumes konstanter Krümmung für den Differenzenvektor

$$\Delta l^\alpha = a t_2^\alpha + b t_1^\alpha + O^\alpha(\varepsilon^3). \tag{2, 29}$$

Wir wollen nun nachweisen, daß die Gestalt (2, 28) bzw. (2, 29) des Differenzenvektors für Räume skalarer bzw. konstanter Krümmung charakteristisch ist.[18]

Aus (2, 28) und (1, 31) folgt, daß bei Vernachlässigung von Glieder der Ordnung $O(\delta^3)$

$$R_{\beta\dot{\delta}}{}^\alpha t_2^\beta t_1^\delta = A t_2^\alpha + B t_1^\alpha + C l^\alpha \tag{2, 30}$$

für beliebige t_1^α und t_1^α gelten muß. Daraus ergibt sich aber, das $R_{\beta\dot{\delta}}{}^\alpha$ von der Gestalt

$$R_{\beta\dot{\delta}}{}^\alpha = \delta_\beta^\alpha a_\delta - \delta_\delta^\alpha a_\beta + p_{\beta\delta} l^\alpha \tag{2, 31}$$

ist, wobei

$$p_{\beta\delta} = -p_{\delta\beta}. \tag{2, 32}$$

Durch die Verjüngung $\alpha = \beta$ folgt aus (2, 31) wegen (2, 15)

$$R_\delta = (n-1) a_\delta + p_{\mu\delta} l^\mu. \tag{2, 33}$$

Überschieben wir diese Gleichung mit l^δ, so folgt wegen (2, 14) und (2, 32)

$$R = a_\delta l^\delta. \tag{2, 34}$$

Wir können daher für den Vektor a_δ den Ansatz

$$a_\delta = \psi_\delta + R l_\delta \tag{2, 35}$$

machen, wobei

$$\psi_\delta l^\delta = 0 \tag{2, 36}$$

sein muß. Aus (2, 31) folgt durch Herunterziehen des Index α

$$R_{\beta\delta\varepsilon} = g_{\beta\varepsilon} a_\delta - g_{\delta\varepsilon} a_\beta + p_{\beta\delta} l_\varepsilon. \tag{2, 37}$$

Wegen der schiefen Symmetrie des Affinors $R_{\beta\delta\gamma\varepsilon}$ in den Zeigern γ, ε und aus (2, 3) folgt hieraus, daß

$$R_{\beta\delta\varepsilon} l^\varepsilon = 0 \tag{2, 38}$$

ist. Überschieben wir daher (2, 37) mit l^ε, so ergibt sich hieraus

$$p_{\beta\delta} = l_\delta a_\beta - l_\beta a_\delta. \tag{2, 39}$$

[18] Die Notwendigkeit dieser Bedingungen findet sich bereits bei L. BERWALD [2], No. 14.

Führen wir hier noch den Wert von a_δ aus (2, 35) ein, so erhalten wir

$$p_{\beta\delta}=l_\delta\psi_\beta-l_\beta\psi_\delta. \tag{2, 40}$$

Wegen (2, 35) und (2, 40) erhält man so aus (2, 31)

$$R_{\beta\dot{\delta}}{}^{\alpha}=\delta_\beta^\alpha(\psi_\delta+Rl_\delta)-\delta_\beta^\alpha(\psi_\beta+Rl_\beta)+(l_\delta\psi_\beta-l_\beta\psi_\delta)l^\alpha. \tag{2, 41}$$

Für den Vektor ψ_δ ergibt sich durch die Verjüngung $\alpha=\beta$

$$\psi_\delta=\frac{1}{n-2}R_\delta-\frac{n-1}{n-2}Rl_\delta. \tag{2, 42}$$

Durch Überschiebung der Gleichung (2, 41) mit l^δ folgt wegen (2, 6) und (2, 36) die für den Finslerschen Raum skalarer Krümmung charakteristische Relation (2, 23). Damit haben wir folgenden Satz gewonnen:

Satz 1. *Damit ein Finslerscher Raum von skalarer Krümmung sei, ist notwendig und hinreichend, daß bei Parallelführung des normierten Linienelementes l^α um eine auf einer zweidimensionalen Fläche* (1, 23) *gelegene geschlossene doppelpunktfreie Kurve* (1, 24), *der Differenzenvektor von Anfangs- und Endlage, falls von Größen der Ordnung $O(\varepsilon^3)$ abgesehen wird, eine lineare Kombination von l^α (im Ausgangspunkte) und den beiden Vektoren t_1^α und t_2^α ist, die die Fläche* (1, 23) *im Ausgangspunkte berühren.*

Aus der Formel (2, 41) folgt noch eine weitere Charakterisierung der Finslerschen Räume skalarer Krümmung:

Satz 2. *Ist ψ_α ein beliebiger kovarianter Vektor, für den $\psi_\alpha l^\alpha=0$ gilt und ist $R(x,v)$ irgendein Skalar, dann ist der Finslersche Raum, dessen Affinor $R_{\beta\dot{\delta}}{}^{\alpha}$ von der Gestalt* (2, 41) *ist, von skalarer Krümmung und das Krümmungsmaß ist durch $R(x,v)$ bestimmt.*

Wir betrachten jetzt den Fall, in dem der Differenzenvektor bei der fraglichen Parallelverschiebung in der durch Gleichung (2, 29) angegebenen Form darstellbar ist. Aus (1, 31) folgt dann

$$R_{\beta\dot{\delta}}{}^{\alpha}t_2^\beta t_1^\delta=at_2^\alpha+bt_1^\alpha, \tag{2, 43}$$

falls Glieder von der Größenordnung $O(\varepsilon^3)$ vernachlässigt werden. Aus (2, 43) folgt nun, daß

$$R_{\beta\dot{\delta}}{}^{\alpha}=\delta_\beta^\alpha b_\delta-\delta_\delta^\alpha b_\beta \tag{2, 44}$$

ist. Durch die Verjüngung $\beta=\alpha$ und Überschiebung mit l^δ folgt dann wegen (2, 14) und (2, 15)

$$b_\delta l^\delta=R. \tag{2, 45}$$

Machen wir daher wie im vorangehenden Fall den Ansatz

$$b_\delta=\varphi_\delta+Rl_\delta \tag{2, 46}$$

so muß

$$\varphi_\delta l^\delta=0 \tag{2, 47}$$

sein. Führen wir die Ausdrücke (2, 46) von b_δ in (2, 44) ein und ziehen dann den Index α herunter, so erhalten wir

(2, 48) $$R_{\beta\delta\varepsilon} = g_{\beta\varepsilon}(\varphi_\delta + Rl_\delta) - g_{\delta\varepsilon}(\varphi_\beta + Rl_\beta).$$

Überschieben wir diese Gleichung mit l^ε und l^δ, so folgt hieraus

(2, 49) $$\varphi_\delta = 0$$

und daher wird (2, 46) zu

(2, 50) $$b_\delta = Rl_\delta .$$

Wegen (2, 50) und (2, 47) besitzt der Affinor $R_{\beta\delta}{}^{\alpha}$ gerade die für Räume konstanter Krümmung kennzeichnende Form (2, 27).

Damit haben wir nun folgendes nachgewiesen:

SATZ 3. *Damit ein Finslerscher Raum von konstanter Krümmung ist, ist notwendig und hinreichend, daß der Differenzenvektor, der sich bei Parallelführung um eine auf der Fläche* (2, 23) *gelegene geschlossene, doppelpunktfreie Kurve ergibt, bei Vernachlässigung von Größen der Ordnung $O(\varepsilon^3)$ der 2-Richtung angehört, die die Fläche* (2, 23) *im Ausgangspunkt berührt.*

Satz 3 können wir auch folgende Fassung geben:

SATZ 4. *Ist b_α ein beliebiger kovarianter Vektor, dann ist der Finslersche Raum, dessen Affinor $R_{\beta\delta}{}^{\alpha}$ sich durch b_α mittels* (2, 44) *darstellen läßt, von konstanter Krümmung.*

(Eingegangen am 1. Oktober 1951.)

Literaturverzeichnis

L. BERWALD [1] Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus, *Math. Zeitschr.*, **25** (1926), S. 40—73.

[2] Über Finslersche und Cartansche Geometrie, IV. Projektivkrümmung allgemeiner affiner Räume und Finslersche Räume von skalarer Krümmung, *Ann. of Math.*, **48** (1947), S. 755—781.

E. BORTOLOTTI [1] Sulle geometria delle varietà a connessione affine. Teoria invariantiva delle transformazioni che conservano il parallelismo, *Ann. di Mat. Bologna*, IV 8, (1930), S. 53—101.

E. CARTAN [1] *Les espaces de Finsler*, Actualités scientifiques et industrielles, 79 (Paris, 1934).

H. TIETZE [1] Über die Parallelverschiebung in Riemannschen Räumen, *Math. Zeitschr.* **16** (1923), S. 308—317.

O. VARGA [1] Über affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Linienelementen, insbesondere deren Äquivalenz, *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*, **1** (1949), S. 7—17.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ХАРАКТЕРИЗОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВ ФИНСЛЕРА СКАЛЯРНОЙ И ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

О. ВАРГА (Дебрецен)

(Резюме)

В настойщей работе характеризуются пространства Финслера постоянной скалярной кривизны с помощью параллельного перенесения нормированного линейного элемента вдоль замкнутой кривой без двойных точек. Если кривая лежит на двумерной поверхности F, а P служит исходным пунктом параллелного перенесения e^{α}, между тем как t_1^{α} и t_2^{α} суть два касательных вектора поверхности F в точке P, то при пренебрежении, определяемом соотношением (1, 29) имеют место теоремы 1 и 3, утверждение которых по сущности заключается в следующем:

Пространство имеет скалярную кривизну тогда и только тогда, если вектор, представляющий разность между исходным и окончательным положением l^{α} в P, принадлежит векторному пространству, определенному посредством t_1^{α}, t_2^{α} и l^{α}, кривизна же является постоянной тогда и только тогда, если этот вектор лежит даже и в векторном пространстве, порожденном векторами t_1^{α} и t_2^{α}.

ÜBER POLYNOME, DEREN NULLSTELLEN AUF EINEM KREIS LIEGEN

Von

GYULA SZ.-NAGY (Szeged), Mitglied der Akademie

1. Das *Polarpolynom* $P_\zeta f(z)$ des Polynoms

$$(1) \qquad f(z) = (z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n)$$

in Bezug auf den Pol ζ, oder die *Derivierte* von $f(z)$ in Bezug auf den Pol ζ wird durch die Gleichung

$$(2) \qquad P_\zeta f(z) = n f(z) + (\zeta - z) f'(z) = f(z) \sum_{k=1}^{n} \frac{\zeta - a_k}{z - a_k}$$

definiert.[1] Bedeuten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ beliebige positive Zahlen, so ist

$$(3) \qquad g(x) = f(z) \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\zeta - a_k}{z - a_k}$$

ein *verallgemeinertes* oder *anisobares Polarpolynom* von $f(z)$ mit den Gewichten $p_1, p_2, \ldots, p_n$.[2] Das Polarpolynom (2) ist *isobar*.

I. *Liegen die Nullstellen des Polynoms $f(z)$ n-ten Grades auf einem Kreis K (oder auf einer Geraden), so fallen die Nullstellen jedes Polarpolynoms von $f(z)$ in Bezug auf irgendeinen auf K liegenden Pol ζ auf dem Kreis K und sie trennen mit dem Pol ζ zusammen auf K die Nullstellen von $f(z)$. Bewegt sich der Pol auf K in einem Sinne, so bewegen sich die von den mehrfachen Nullstellen von $f(z)$ abweichenden Nullstellen des Polarpolynoms im entgegengesetzten Sinne.*[3]

Beim Beweis dieses Satzes nehmen wir zuerst an, daß K die reelle Achse ist und daß $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ ist. Die geschlossene reelle Achse wird

[1] E. LAGUERRE, *Oeuvres I,* S. 133—139. Vgl. G. PÓLYA und G. SZEGŐ, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis,* I. S. 55—58.

[2] Vgl. Gy. SZ.-NAGY, Verallgemeinerung der Derivierten in der Geometrie der Polynome, *Acta Scient. Math. Szeged,* **13** (1950), S. 164—178.

[3] Der Satz I wurde für isobare Polarpolynome von LAGUERRE (mit einer anderen Methode) bewiesen.

von den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in n Strecken, in die $n-1$ endlichen Strecken

$$(a_1, a_2), (a_2, a_3), \ldots, (a_{n-1}, a_n)$$

und in die unendliche Strecke $(a_n, a_1) = (a_n, +\infty) + (-\infty, a_1)$ geteilt.

Die Funktion

$$G(z) = \frac{g(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\zeta - a_k}{z - a_k} \tag{4}$$

ist im Innern jeder der n Strecken stetig. Am Anfang und am Ende haben die Werte von $G(z)$ dieselben bzw. entgegengesetzte Vorzeichen, je nachdem die Strecke den Pol ζ enthält bzw. nicht enthält. Daraus folgt, daß die Funktion $G(z)$ und damit das Polynom $g(z)$ $(n-1)$-ten Grades auf der ζ enthaltenden Strecke keine Nullstelle, auf den übrigen $n-1$ Strecken genau je eine Nullstelle besitzt. Widrigenfalls hätte nämlich das Polynom $g(z)$ mehr als $n-1$ Nullstellen.

Ist z eine Nullstelle des Polynoms $g(z)$, so erhält man aus (4)

$$\zeta = z - \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k}{\sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{z - a_k}}$$

und

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{z-a_k}\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} p_k \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{(z-a_k)^2}}{\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{z-a_k}\right)^2} =$$

$$= -\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{z-a_k}\right)^{-2} \sum_{1 \leq h < k \leq n} p_h p_k \left(\frac{1}{z-a_h} - \frac{1}{z-a_k}\right)^2.$$

Daraus folgt, daß ζ eine abnehmende Funktion von z ist. Bewegt sich also ζ auf der reellen Achse in einem Sinne, so bewegen sich die (von den Nullstellen des Polynoms $f(z)$ verschiedenen) Nullstellen von $g(z)$ im entgegengesetzten Sinne.

Ist

$$f(z) = (z-a_1)^{q_1} (z-a_2)^{q_2} \cdots (z-a_\nu)^{q_\nu}, \quad q_1 + q_2 + \cdots + q_\nu = n, \quad a_1 < a_2 < \cdots < a_\nu,$$

so hat die Funktion (4) die Form

$$G(z) = \frac{g(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{\nu} q_k p_k \frac{\zeta - a_k}{z - a_k}, \qquad p_k > 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, \nu.$$

Der Punkt a_k ist eine $(q_k - 1)$-fache Nullstelle von $g(z)$. Dieses Polynom besitzt in den mehrfachen Nullstellen von $f(z)$ $\sum_{k=1}^{\nu} (q_k - 1) = n - \nu$ Nullstellen, auf derjenigen der Strecken $(a_1, a_2), (a_2, a_3), \ldots, (a_{\nu-1}, a_\nu), (a_\nu, a_1)$, wo der Pol ζ liegt, keine Nullstelle, auf den übrigen $\nu - 1$ Strecken je eine Nullstelle. Die letzten bewegen sich in zur Bewegungsrichtung von ζ entgegengesetztem Sinne, worauf durch die im erst betrachteten Falle gegebene Ableitung gefolgert werden kann.

Damit ist der Satz I für den Fall der reellen Achse bewiesen. Aus diesem speziellen Fall ergibt sich der Satz für einen Kreis durch eine lineare Transformation von z.

2. Bezeichnet z_0 eine (von den mehrfachen Nullstellen des Polynoms (1) abweichende) Nullstelle des (isobaren) Polarpolynoms $P_\zeta f(z)$, so besteht die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\zeta - a_k}{z_0 - a_k} \equiv \sum_{k=1}^{n} (\zeta z_0 a_k) = 0. \tag{5}$$

Dividiert man die Gleichung durch das Teilungsverhältnis $(\zeta z_0 a_s)$ $(1 \leqq s \leqq n)$, so ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(\zeta z_0 a_k)}{(\zeta z_0 a_s)} \equiv \sum_{k=1}^{n} (\zeta z_0 a_k a_s) = 0. \tag{6}$$

Liegen die Nullstellen a_k und der Pol ζ auf einem Kreis K, so liegt auch der Punkt z_0 auf K. Dann ist jedes Doppelverhältnis in der Summe von (6) reell. Die Punkte ζ und z_0 teilen den Kreis K in zwei Bogen $(\zeta z_0)_+$ und $(\zeta z_0)_-$. Während ein Punkt z von ζ ausgehend den einen Bogen beschreibt, nimmt der absolute Betrag des Doppelverhältnisses

$$DV = (\zeta z_0 z a_s) \tag{7}$$

von Null bis ∞ beständig zu. In den Punkten z des Kreisbogens $(\zeta z_0)_+$ bzw. $(\zeta z_0)_-$ ist das Vorzeichen von DV positiv bzw. negativ. Im Punkte $z = a_s$ ist $DV = 1$, a_s liegt also auf dem Bogen $(\zeta z_0)_+$.

Wir nehmen an, daß die Nullstellen von $f(z)$ auf K die Aufeinanderfolge $a_1, a_2, \ldots, a_n$ haben. Sie teilen K in n Kreisbogen

$$(a_1, a_2), (a_2, a_3), \ldots, (a_{n-1}, a_n), (a_n, a_1), \tag{8}$$

unter denen einige verschwindende Länge haben können. Liegt der Pol ζ auf dem Bogen (a_n, a_1), so besitzt das Polarpolynom $P_\zeta f(z)$ auf den übrigen (nicht ausgearteten) Kreisbogen je eine Nullstelle. Liegt die Nullstelle z_0 von $P_\zeta f(z)$ auf dem Bogen (a_p, a_{p-1}) $(1 \leqq p < n)$ und ist $s = p + 1$, so gibt es in der Summe von (6) p negative und $n - p$ positive Doppelverhältnisse und zwar diejenigen, für welche $k \leqq p$ bzw. $k > p$ ist.

Aus der Aufeinanderfolge der Punkte a_k auf dem Bogen $(\zeta z_0)_-$ bzw. $(\zeta z_0)_+$ folgen die Ungleichungen

$$0 < -(\zeta z_0 a_1 a_{p+1}) \leqq -(\zeta z_0 a_2 a_{p+1}) \leqq \cdots \leqq -(\zeta z_0 a_p a_{p+1}),$$

bzw.

$$0 < (\zeta z_0 a_n a_{p-1}) \leqq (\zeta z_0 a_{n-1} a_{p+1}) \leqq \cdots \leqq (\zeta z_0 a_{p+1} a_{p+1}) = 1,$$

Ein Gleichheitszeichen besteht hier nur dann, wenn zwei aufeinanderfolgende Nullstellen des Polynoms $f(z)$ zusammenfallen.

Dann hat die Gleichung (6) die Form

$$\sum_{k=1}^{p} -(\zeta z_0 a_k a_{p+1}) = \sum_{k=p+1}^{n} (\zeta z_0 a_k a_{p+1}),$$

wo jedes Glied der linken und der rechten Seite positiv ist. Auf Grund der vorigen Ungleichungen ist

$$-p(\zeta z_0 a_p a_{p+1}) \geqq 1 \quad \text{und} \quad -(\zeta z_0 a_p a_{p+1}) \leqq n-p \leqq n-1,$$

weil $-(\zeta z_0 a_p a_{p+1})$ bzw. $(\zeta z_0 a_{p+1} a_{p+1})$ das größte Glied der linken bzw. rechten Summe ist. Diese Ungleichungen lassen sich in der Form

(9) $$-(a_p a_{p+1} z_0 \zeta) \leqq p \leqq p-1 \quad \text{und} \quad -(a_{p+1} a_p z_0 \zeta) \leqq n-p \leqq n-1$$

schreiben. Damit wurde ein Satz von LAGUERRE[4] über die Lage der Nullstellen der Derivierten eines Polynoms mit lauter reellen Nullstellen und seine von mir gegebene Verschärfung[5] verallgemeinert.

II. *Liegen sämtliche Nullstellen $a, b\ (\neq a), c, \ldots$ des Polynoms $f(z)$ n-ten Grades und der Pol ζ auf einem Kreis K, enthält ferner der Kreisbogen (a, b) von K weder den Pol ζ noch eine Nullstelle von $f(z)$ im Innern und sind $(aba'\zeta) = -(n-1)$, $(bab'\zeta) = -(n-1)$, so enthält der Teilbogen (a', b') von (a, b) eine Nullstelle des isobaren Polarpolynoms $P_\zeta f(z)$.*

Enthält derjenige Kreisbogen (ζ, b) bzw. (ζ, a) von K, wo der Punkt a bzw. b liegt, im Innern p bzw. $n-p$ Nullstellen von $f(z)$ und sind $(aba''\zeta) = -(n-p)$, $(bab''\zeta) = -(n-p)$, so enthält auch der Teilbogen (a'', b'') von (a, b) eine Nullstelle des Polarpolynoms $P_\zeta f(z)$.

Aus diesem Satz folgt

III. *Liegen sämtliche Nullstellen $a, b\ (\neq a), c, \ldots$ eines Polynoms $f(z)$ und der Pol ζ auf einem Kreis K, enthält ferner der Bogen (ζ, b) von K im Innern den Punkt a, aber keine andere Nullstelle von $f(z)$, und ist $(ab\zeta\zeta') = -1$, so enthält der Teilbogen (a, ζ') von (ζ, b) — unabhängig vom Grad des Polynoms $f(z)$ — stets eine Nullstelle des Polarpolynoms $P_\zeta f(z)$.*

Der Punkt ζ' lä t sich auf folgende Weise[6] konstruieren: Ist η der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden der Punkte a und b mit der Tangente des Kreises K im Punkt ζ, so ist ζ' der Berührungspunkt auf der von η ausgehenden anderen Tangente des Kreises K. Durch entsprechende Wiederholungen dieser bekannten Konstruktion harmonischer Punkte auf einem Kreis lassen sich die Punkte a', b', a'', b'' des Satzes II konstruieren.

3. Im Falle $p = 1$ und $s = n$ erhält man bei der angenommenen Aufeinanderfolge der Punkte a_k und ζ auf K für die auf dem Kreisbogen (a_1, a_2)

4 E. CESÀRO, Solution d'une question de M. Laguerre, *Nouvelles Annales de Math.*, (3) **4** (1883), S. 328—330.

5 GY. (J.) SZ.-NAGY, Über algebraische Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **18** (1918), S. 37 43.

6 E. CESÀRO—G. KOWALEWSKI, *Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und Infinitesimalrechnung* (1904), S. 336.

liegende Nullstelle $z_1 (= z_0)$ des Polarpolynoms $P_\zeta f(z)$ aus der Gleichung (6) die Ungleichung

$$-(\zeta z_1 a_2 a_n) \geqq n-1 \quad \text{oder} \quad -(a_n a_1 z_1 \zeta) \geqq n-1,$$

weil dann

$$(\zeta z_1 a_1 a_n) < 0 \quad \text{und} \quad (\zeta z_1 a_2 a_n) \geqq (\zeta z_1 a_3 a_n) \geqq \cdots \geqq (\zeta z_1 a_n a_n) = 1$$

sind. Ebenso erhält man im Falle $p = n-1$ und $s = 1$ für die auf dem Bogen (a_{n-1}, a_n) liegende Nullstelle z_{n-1} des Polarpolynoms $P_\zeta f(z)$ die Ungleichung

(10) $$-(a_1 a_n z_{n-1} \zeta) \geqq n-1.$$

Damit wird ein anderer von mir gegebener Satz[7] verallgemeinert.

IV. *Liegen die Nullstellen a, b $(\neq a), c, \ldots$ eines Polynoms $f(z)$ n-ten Grades und der Pol ζ auf einem Kreis K, enthält der Bogen (a, b) jede Nullstelle von $f(z)$, den Pol ζ aber nicht und sind $(b a a^* \zeta) = -(n-1)$, $(a b b^* \zeta) = -(n-1)$, so enthalten beide Teilbogen $(a. a^*)$ und (b, b^*) des Kreisbogens (a, b) mindestens je eine Nullstelle des Polarpolynoms $P_\zeta f(z)$.*

4. Ein Punkt $z\,(z \neq a, z \neq b)$ eines Kreisbogens (a, b) läßt sich durch das *Bogenverhältnis*

$$BV(abz) = \frac{(a\,z)}{(b\,z)}$$

angeben, wo (az) bzw. (bz) die Länge des Teilbogens (a, z) bzw. (b, z) von (a, b) bezeichnet. Das Bogenverhältnis ist also eine positive reelle Zahl. Es gilt der folgende Hilfssatz:

Bezeichnet $BV(abz)$ bzw. (abz) das Bogenverhältnis bzw. das Teilungsverhältnis eines Punktes z von einem Kreisbogen (a, b), der nicht größer ist, als ein Halbkreis, so ist entweder $1 < |(abz)| < BV(abz)$, oder $1 > |abz)| > > BV(abz)$, oder $1 = |(abz)| = BV(abz)$.

Dies folgt unmittelbar aus der bekannten Eigenschaft der Funktion

$$\frac{\sin x}{x},$$

daß sie im Intervall $(0, \pi)$ monoton abnimmt. Bezeichnen nämlich $2x_1$ und $2x_2$ die Zentriwinkel der Bogen (a, z) und (b, z), so ist

$$BV(abz) = \frac{x_1}{x_2} \quad \text{und} \quad |(abz)| = \frac{\sin x_1}{\sin x_2}.$$

Liegen also die Punkte a, b, z auf einem Halbkreis und ist $|(abz)| \leqq 1$ bzw. $|(abz)| \geqq 1$, so ist

$$BV(abz) \leqq |(abz)| \quad \text{bzw.} \quad BV(abz) \geqq |(abz)|.$$

[7] Vgl. den Satz I in der Fußnote [5] zitierten Arbeit.

Aus der Ungleichung (10) erhält man im Falle $|(a_1 a_n \zeta)| \geqq 1$ die Ungleichung

$$BV(a_1 a_n z_{n-1}) \geqq n-1.$$

Diese Ungleichung läßt sich auf folgende Weise ausdrücken:

V. *Die Nullstellen $a, b\,(\neq a), c, \ldots$ eines Polynoms $f(z)$ n-ten Grades und der Pol ζ liegen auf einem Kreis K, der Bogen (a, b) von K sei nicht größer als ein Halbkreis und er enthalte den Pol ζ nicht. Wir teilen diesen Bogen (a, b) in n gleiche Teilbogen. Enthält der Bogen (a, b) jede Nullstelle des Polynoms $f(z)$ und liegt ζ nicht näher zu a als zu b, so enthält sein Teilbogen mit dem Endpunkt b mindestens eine Nullstelle des Polarpolynoms $P_\zeta f(z)$.*

Hat ζ von a und b gleiche Entfernungen, so gilt die Behauptung des Satzes für die beiden äußersten Teilbogen von (a, b).

5. Der Satz I läßt sich auf folgende Weise ergänzen:

VI. *Werden die Nullstellen des Polynoms*

$$f(z) = (z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n)$$

auf einem Kreis K von den Nullstellen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des Polynoms $h(z)$ n-ten Grades getrennt, so ist das Polynom

$$\frac{h(z)}{z-b_h} \qquad (1 \leqq h \leqq n)$$

zu einem (anisobaren) Polarpolynom von $f(z)$ in Bezug auf den Pol $\zeta = b_k$ proportional.

Es genügt offenbar diesen Satz für den Fall zu beweisen, in dem K der Einheitskreis $|z| = 1$ und der Pol $\zeta = b_k = 1$ ist.

Die Transformation

$$z = \frac{x+i}{x-i}$$

führt die reelle Achse in den Einheitskreis und ihren unendlichfernen Punkt in den Punkt $z = 1$ über. Dadurch wird das Polynom $f(z)$ bzw. $h(z)$ in ein Polynom $F(x)$ n-ten Grades bzw. in ein Polynom $H(x)$ $(n-1)$-ten Grades überführt. Beide Polynome haben lauter reelle Nullstellen und die Nullstellen von $F(x)$ werden auf der reellen Achse von den Nullstellen des Polynoms $H(x)$ getrennt.

Auf Grund der Eigenschaften der Polynompaare mit auf der reellen Achse sich trennenden Nullstellen[8] gibt es eine Darstellung von der Form

$$\frac{H(x)}{F(x)} = C \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{x-\alpha_k}, \; C \neq 0, \; A_k > 0, \; a_k = \frac{\alpha_k + i}{\alpha_k - i} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

[8] Vgl. GY. SZ.-NAGY, Totalreelle Funktionen, *Acta Scient. Math. Szeged,* **12** A (1950), S. 1—10. Die in der Fußnote [1] dieser Arbeit angeführte Literatur über Polynompaare mit auf der reellen Achse sich trennenden Nullstellen ist mit der folgenden Arbeit von P. MONTEL zu ergänzen: Sur les fonctions méromorphes limites de fonctions rationelles à termes entrelacées, *Ann. Éc. Norm.* (3), **50** (1933), S. 172—196.

Die inverse Transformation führt die Funktionen $F(x), H(x), x-\alpha_k$ bzw. $\frac{1}{x-\alpha_k}$ in die Funktionen $f(z)$, $h(z)$,

$$i\frac{z+1}{z-1}-i\frac{a_k+1}{a_k-1}=-2i\frac{z-a_k}{(z-1)(a_k-1)} \quad \text{bzw.} \quad -\frac{(z-1)i}{2}\,\frac{1-a_k}{z-a_k}$$

über. Daraus folgt, daß

$$\frac{h(z)}{f(z)}=\frac{-Ci}{2}\,z-1\sum_{k=1}^{n}A_k\frac{1-a_k}{z-a_k}\equiv c(z-1)\sum_{k=1}^{n}A_k\frac{1-a_k}{z-a_k}$$

und

$$\frac{h(z)}{z-1}=cf(z)\sum_{k=1}^{n}A_k\frac{1-a_k}{z-a_k}\equiv cg(z).$$

sind. Damit ist der Satz VI bewiesen, weil $g(z)$ ein Polarpolynom von $f(z)$ in Bezug auf den Pol $\zeta=1$ ist.

(Eingegangen am 27. April 1950.)

О МНОГОЧЛЕНАХ С КОРНЯМИ НА ОКРУЖНОСТИ

Д. С.-НАДЬ (Сегед)

(Резюме)

$$P_\zeta f(z) = nf(z) + (\zeta - z) f'(z) = f(z) \sum_{k=1}^{n} \frac{\zeta - a_k}{z - a_k}$$

есть изобарный полярный многочлен с полюсом равным ζ, многочлена $f(z) = (z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_n)$ а

$$g(z) = f(z) \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\zeta - a_k}{z - a_k}, \qquad p_k > 0 \ \ (k = 1, 2, \dots, n),$$

есть его анизобарный полярный многочлен. Если корни $f(z)$ и полюс ζ лежат на какой-нибудь окружности K, то корни полярных многочленов $f(z)$ обоих типов также лежат на этой окружности и вместе с ζ разделяют корни многочлена. Если полюс ζ движется по окружности в каком-либо направлении K, то любой корень полярного многочлена, отличный от многократных корней многочлена $f(z)$ движется в противоположном направлении.

Настоящая работа обобщает теорему Лагерра о корнях производной многочлена, обладающего лишь действительными корнями, и некоторые относящиеся сюда результаты автора для изобарного полярного многочлена, если корни $f(z)$ и полюс ζ лежат на окружности K.

Следствием более общих теорем является следующая теорема:

Пусть корни многочлена $f(z)$ степени n есть $a, b (\neq a), c, \dots$ и эти корни, а также ζ лежат на K. Дуга (a, b) меньшая полуокружности, не содержит ζ. Разбиваем её на n равных частей. Если ζ не лежит к a ближе чем к b и дуга (a, b) содержит все корни $f(z)$, то последний субинтервал, оканчивающийся в точке b, содержит по крайней мере один корень многочлена $P_\zeta f(z)$.

STUDY OF A STOCHASTIC PROCESS ARISING IN THE THEORY OF THE ELECTRON MULTIPLIER

By

L. JÁNOSSY (Budapest), member of the Academy

§ 1. The fluctuation of the electron cascade in an electron multiplier is a typical stochastic problem, it was dealt with by P. FARAGÓ and L. TAKÁCS [1] and independently by FRISCH [2]. The problem can be formulated as follows. An electron falling on one of the plates of a multiplier will give rise to a number of secondary electrons, the probability of giving rise to k electrons being $p(k)$. Each electron falls on the next plate and each gives rise to new secondaries independently of the others. The question arises as to the probability $p(N,\nu)$, that ν electrons arise out of a multiplier containing N plates. The distribution $p(N,\nu)$ can be determined by a recursion. We have

$$p(N,\nu)=\sum_{\substack{\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_k=\nu\\ k=0,1,2,\dots}} p(N-1,k)p(\nu_1)p(\nu_2)\dots p(\nu_k). \tag{1}$$

Indeed, each term in the above sum represents the probability that in the $N-1$-st stage there are k electrons, these electrons giving rise respectively to $\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_k$ electrons. The sum of all these probabilities is the total probability of finding ν particles in the Nth stage.

To make the recursion (1) complete, we have to postulate as an initial condition that the first plate receives exactly one electron. This can be expressed formally as

$$p(0,\nu)=\begin{cases}0 & \text{if } \nu\neq 1,\\ 1 & \text{if } \nu=1.\end{cases} \tag{2}$$

§ 2. Equations (1) and (2) completely define the probabilities $p(N,\nu)$, provided $p(\nu)$ is given. Without specialising $p(\nu)$ we shall only assume that $0<p(0)<1$ and that both $\sum \nu p(\nu)$ and $\sum \nu^2 p(\nu)$ exist. The direct evaluation of $p(N,\nu)$ from (1) and (2) is, however, too cumbersome to be of practical use. The calculation can be greatly simplified by introducing generating functions. We thus put

$$(3)\qquad \begin{cases} \sum_{\nu=0}^{\infty} u^{\nu} p(N,\nu) = G_N(u) & (N=0,1,2,\ldots), \\ \sum_{\nu=0}^{\infty} u^{\nu} p(\nu) = G(u). \end{cases}$$

From equations (2) and (3) we have

$$(4)\qquad G_0(u) = u,$$

introducing (3) into (1) we find the well-known recursion

$$(5)\qquad G_N(u) = G(G_{N-1}(u)).$$

In particular for $N=1$ with help of (4)

$$(6)\qquad G_1(u) = G(u).$$

From equation (5) we obtain expressions for the semi-invariants. We have for the average number of electrons

$$p_N = \left(\frac{\partial}{\partial u} \ln G_N(u)\right)_{u=1} = p \cdot p_{N-1},$$

where $\left(\frac{\partial}{\partial u} \ln G(u)\right)_{u=1}$ is the average number of secondary electrons. Thus with help of (6) we have

$$(7)\qquad p_N = p^N.$$

Similarly we get recursions for the higher moments. A simple calculation (see e. g. P. FARAGÓ and L. TAKÁCS [1]) gives for the dispersion

$$(8)\qquad q_N = q \cdot p^{N-1} \frac{p^N - 1}{p - 1}$$

with

$$q_N = \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} \ln G_N(u)\right)_{u=1}, \quad q = q_1.$$

Similar expressions are obtained for higher moments. In the following we describe a practical method for determining $p(N,\nu)$ numerically, and give also a numerical example.

§ 3. The generating function $G_N(u)$ can be obtained by iterating $G(u)$ with help of (4) and (5). From expression (3) we have

$$p(N,\nu) = \frac{1}{\nu!}\left(\frac{\partial^{\nu} G_N(u)}{\partial u^{\nu}}\right)_{u=0};$$

for not too large values of ν, $p(N,\nu)$ can be thus evaluated. However, for $p >> 1$ the probabilities for $\nu >> 1$ are mainly of interest and direct differentiation becomes too cumbersome to be useful. For large values of ν it is useful to replace (8) by a complex integral, namely

$$p(N,\nu)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{u=0}\frac{G_N(u)}{u^{\nu+1}}\,du, \tag{9}$$

the integration to be taken in the complex plane around $u=0$. So as to evaluate the above integral numerically, we investigate the behaviour of $G_N(u)$ in the complex u-plane in some detail.

§ 4. We investigate the limiting functions

$$\lim_{N=\infty} G_N(u)=g(u). \tag{10}$$

For this purpose we have to find the roots u_k satisfying the equation

$$G(u)=u, \quad u=u_k. \tag{11}$$

For each root u_k we find from (5) and (11) that

$$G_N(u_k)=G_{N-1}(u_k),$$

and therefore

$$g(u_k)=u_k.$$

By virtue of G being a generating function, we have

$$G(1)=1$$

and thus $u_1=1$ is a root of (11) and

$$g(1)=1.$$

Further, if

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}G(u)\right)_{u=1}=p>1,$$

then $G(u)<u$ in a certain interval $0<b\leqq u\leqq c<1$. (See Fig. 1.)

Further $G(0)=p(0)>0$; therefore there is another interval $0\leqq u\leqq a<b$ in which $G(u)>u$. As $G'(u)>0$, for $0<G(u)\leqq 1$ the function increases monotonically in the interval 0 to 1 and there must be a root u_2

$$G(u_2)=u_2 \text{ with } 0<a\leqq u_2<b<1,$$

there can be no other root in the interval 0 to 1.

Considering a u-value $u_2<u<1$, we have

$$u>G(u)>u_2.$$

Applying the function G to the above equation $N-1$ times in succession we have

$$G_{N-1}(u)>G_N(u)>u_2.$$

Thus the sequence $G_1(u), G_2(u), \dots$ is monotone and bounded and has therefore a limit. The limit must be u_2 itself. A similar proof holds for the interval $0\leqq u<u_2$. We conclude therefore that

$$g(u)=\begin{cases} u_2 & \text{for } 0\leqq u<1, \\ 1 & \text{for } u=1. \end{cases}$$

We extend this result to complex u-values with $|u| < 1$. As the coefficients $p(N, \nu)$ of the expansion of $G_N(u)$ are non-negative, we have

$$|G_N(u) - G_N(0)| \leqq |G_N(|u|) - G_N(0)|,$$

provided $|u| < 1$. The right hand expression converges towards zero for $N \to \infty$, therefore

$$\lim_{N=\infty} G_N(u) = \lim_{N=\infty} G_N(0) = u_2.$$

Thus we have

$$(12) \qquad \begin{cases} g(u) = u_2 & \text{for } |u| < 1, \\ g(u) = 1 & \text{for } u = 1. \end{cases}$$

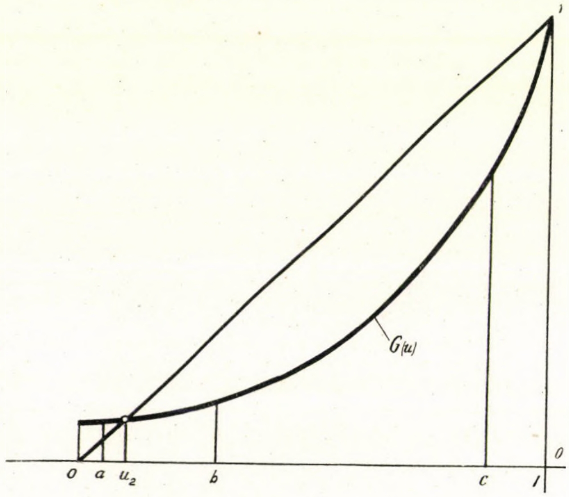

Fig. 1

From equation (12) incidentally follows the interesting result that the equation

$$G(u) = u$$

has only one root in $|u| < 1$, and this one is real and positive, where we have to assume of $G(u)$ only that the coefficients of the expansion of $G(u)$ are non-negative, $G(0) > 0$, $G(1) = 1$ and the radius of convergence of the expansion of $G(u)$ around the origin at least equals one.

Indeed, if there existed a root u_3,

$$u_3 \neq 1, u_2, \qquad |u_3| < 1,$$

then the iteration at this point would give

$$g(u_3) = u_3,$$

in contradiction to (12).

This incidental result can also be proved directly by purely algebraic means as was pointed out by A. RÉNYI.

§ 5. We proceed now to discuss and to evaluate the integral (9). As $G(u)$ is regular for $|u| \leqq 1$, the integration can be carried out along a circle with radius $\varrho \leqq 1$. We have thus

$$p(N, \nu) = \frac{1}{2\pi\varrho^\nu} \int_0^{2\pi} \exp(-i\nu\varphi + \ln G_N(\varrho e^{i\varphi}))\, d\varphi. \tag{13}$$

In the limiting case $N \to \infty$ we have thus with help of (12)

$$\pi(\nu) = \lim_{N=\infty} p(N, \nu) = \begin{cases} u_2 & \text{for } \nu = 0, \\ 0 & \text{for } 0 < \nu < \infty. \end{cases} \tag{14}$$

Thus all the probabilities, except for no electron to emerge, vanish in the limiting case. This result is easily understandable. The electron avalanche may be brought to a stop at any stage, and once brought to a stop, it cannot start again. Therefore there is a non-vanishing probability for this to happen, however large the number of stages. If on the other hand the avalanche develops, then the resulting numbers of particles are scattered over a wide interval and any particular number of electrons has an increasingly small probability for being realised.

The $p(N, \nu)$ values for finite but large N can be evaluated by the saddle point method. For moderately large values of N one finds that $G_N(u) \approx u_2$, except in the immediate neighbourhood of $u = 1$. Therefore choosing $\varrho \sim 1$ the main part of the integral (13) arises from the part near the real axis. We may choose ϱ such that for $\varphi = 1$ the integrand has a maximum, and then we may approximate the integrand by a Gauss function. We find thus that ϱ must be chosen so as to satisfy the following condition

$$\nu = \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} \ln G_N(\varrho)\,; \tag{15}$$

for the approximate value of the integral we find

$$p(N, \nu) = \frac{G_N(\varrho)}{\varrho^{\nu+1} \sqrt{2\pi\left(\frac{d^2(\ln G_N(\varrho))}{d\varrho^2} + \frac{\nu}{\varrho^2}\right)}}. \tag{16}$$

Equations (15) and (16) give a parameter representation of $p(N, \nu)$ with ϱ as independent parameter.

For $\varrho = 1$ we find in this way with help of (15)

$$\nu = p^N$$

and with help of (8)

$$p(N, p^N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(q_N + p_N)}}.$$

From equation (15) we see that $\nu \leqq p_N$ for $\varrho \leqq 1$; thus the saddles inside the unit circle define the distribution $p(N, \nu)$ up to the average value. For $\nu > p_N$ we get a saddle only then if $G_N(\varrho)$ converges for certain values $\varrho > 1$. If the radius of convergence of $G(\varrho)$ and thus of $G_N(\varrho)$ is equal to R, then the largest ν value for which a saddle can be found is

$$\nu_{\max} = \limsup_{\varrho = R} \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} \ln G_N(\varrho).$$

$\nu_{\max}$ may be infinite, then saddles can be found for any value of ν. Whether the saddle point integration is justified outside the circle $\varrho = 1$ even if $G(\varrho)$ converges has to be investigated separately in each individual case.

§ 6. We see from (15) and (16) that the $p(N, \nu)$'s can be calculated if $G_N(u)$ and its first and second derivatives are known. These can all be calculated successively putting $N = 1, 2, \ldots$. The calculation of G_N and its derivatives can, however, be much simplified as follows. Starting with an u-value very near to $u = 1$ we can obtain by successive application of the function G the following set of values. Put $u = 1 - h$; we have successively

$$(17) \qquad \left\{ \begin{array}{l} G_1(1-h) = 1 - h_1 \\ G_2(1-h) = G(1-h_1) = 1 - h_2 \\ G_3(1-h) = G(1-h_2) = 1 - h_3 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \end{array} \right.$$

The $G_N(1-h)$ values remain close to unity for a number of steps, but suddenly they run away and finally they converge towards u_2. From the definition of $G_N(u)$ we have

$$G_{N+k}(u) = G_N(G_k(u)).$$

Thus once the expressions (17) are tabulated numerically we can read off from this table $G_N(u)$ in the following parametric representation:

$$(18) \qquad G_N(u) = G_{N+k}(1-h), \quad u = G_k(1-h).$$

The latter representation can be much improved by extending the definition of $G_k(1-h)$ to non-integer values of k. This can be done particularly easily, if $G(u)$ can be expanded in a power series around $u = 1$, i. e. if the radius of convergence of $G(u)$ is larger than unity. In this case we have

$$G(1-h) = 1 - ph + \frac{1}{2} Q h^2 - + \ldots .$$

Carrying out the iteration n times, we find as the result of a simple calculation

$$G_n(1-h) = 1 - p^n h + \frac{1}{2} Q \frac{p^{2n} - p^n}{p^2 - p} h^2 - + \ldots;$$

the latter series can now be taken as the *definition* of $G_n(1-h)$ for non-integer n in the interval $0 \leqq n < 1$; for larger suffixes we may put $G_{n+k}(1-h) =$

TABLE I

$h = 2{,}35785 . 10^{-7}$

n	$G_n(1-h)$	$\frac{\partial G_n(1-h)}{\partial n}$	$G_n(1+h)$	$\frac{\partial G_n(1+h)}{\partial n}$
5,0	0,9993	0,0012	1,0007	0,0012
5,2	0,9990	0,0016	1,0010	0,0016
5,4	0,9986	0,0023	1,0014	0,0023
5,6	0,9981	0,0031	1,0019	0,0031
5,8	0,9973	0,0043	1,0027	0,0043
6,0	0,9963	0,0059	1,0037	0,0060
6,2	0,9949	0,0081	1,0051	0,0082
6,4	0,9930	0,0112	1,0070	0,0114
6,6	0,9904	0,0154	1,0097	0,0157
6,8	0,9868	0,0211	1,0135	0,0219
7,0	0,9818	0,0290	1,0186	0,0303
7,2	0,9750	0,0396	1,0258	0,0422
7,4	0,9657	0,0540	1,0358	0,0589
7,6	0,9531	0,0733	1,0499	0,0826
7,8	0,9359	0,0989	1,0696	0,1168
8,0	0,9130	0,1323	1,0976	0,1663
8,2	0,8824	0,1749	1,1378	0,2398
8,4	0,8424	0,2276	1,1963	0,3517
8,6	0,7908	0,2900	1,2831	0,5285
8,8	0,7259	0,3591	1,4173	0,8227
9,0	0,6472	0,4281	1,6294	1,3410
9,2	0,5555	0,4856	1,9917	2,3361
9,4	0,4547	0,5170	2,6681	4,4319
9,6	0,3513	0,5086	4,1195	8,9592
9,8	0,2540	0,4555	8,0150	
10,0	0,1713	0,3666	23,2646	
10,2	0,1083	0,2634	142,3725	
10,4	0,0654	0,1697	4190,2500	
10,6	0,0390	0,0996		
10,8	0,0240	0,0547		
11,0	0,0159	0,0290		
11,2	0,0116	0,0152		
11,4	0,0093	0,0079		
11,6	0,0082	0,0040		
11,8	0,0076	0,0021		
12,0	0,0073	0,0011		
12,2	0,0071	0,0006		
12,4	0,0071	0,0003		
12,6	0,0070	0,0001		
12,8	0,0070			
13,0	0,0070			

The above functions can for $n < 5$ be obtained by the following approximate formulae with at least four figure accuracy:

$$G_n(1 \pm h) \sim 1 \pm 2{,}35785 \cdot 10^{-7} . 5^n$$

$$\frac{\partial G_n}{\partial n}(1 \pm h) \sim 3{,}79481 . 10^{-7} . 5^n$$

TABLE II

n	$G_{10}(u)$	$\frac{\partial G_{10}(u)}{\partial u}\cdot 5^{-10}$	$\frac{\partial^2 G_{10}(u)}{\partial u^2}\cdot 5^{-20}$	$G_{10}(v)$	$\frac{\partial G_{10}(v)}{\partial v}\cdot 5^{-10}$	$\frac{\partial^2 G_{10}(v)}{\partial v^2}\cdot 5^{-20}$
	$u \sim 1-h\cdot 5^{n-10}$			$v \sim 1+h\cdot 5^{n-10}$		
5,0	0,9993			1,0007		
5,2	0,9990	0,9992		1,0010		
5,4	0,9986	0,9996		1,0014		
5,6	0,9981	0.9980		1,0019	1,0010	
5,8	0,9973	0,9966		1,0027	1,0030	
6,0	0,9963	0,9971		1,0037	1,0042	
6,2	0,9949	0,9936		1,0051	1,0056	
6,4	0,9930	0,9914		1,0070	1,0079	
6,6	0,9904	0,9876		1,0097	1,0109	
6,8	0,9868	0,9837		1,0135	1,0167	
7,0	0,9818	0,9770		1,0186	1,0229	
7,2	0,9750	0,9688		1,0258	1,0316	
7,4	0,9657	0,9571	0,5491	1,0358	1,0438	
7,6	0,9531	0,9415	0,5340	1,0499	1,0610	
7,8	0,9359	0,9205	0,5195	1,0696	1,0870	
8,0	0,9130	0,8924	0,5031	1,0976	1,1219	0,6455
8,2	0,8824	0,8551	0,4785	1,1378	1,1725	0,6811
8,4	0,8424	0,8067	0,4469	1,1963	1,2465	0,7270
8,6	0,7908	0,7449	0,4062	1,2831	1,3573	0,8101
8,8	0,7259	0,6685	0,3596	1,4173	1,5315	0,9209
9,0	0,6472	0,5776	0,3031	1,6294	1,8093	1,0975
9.2	0,5555	0,4749	0,2406	1,9917	2,2844	1,4230
9,4	0,4547	0,3664	0,1769	2,6681	3,1411	
9,6	0,3513	0,2613	0,1182	4,1195	4,6022	
9,8	0,2540	0,1696	0,0704	8,0150		
10,0	0,1713	0,0989	0,0366	23,2646		
10,2	0,1083	0,0515	0,0165	142,3725		
10,4	0,0654	0,0241	0,0064	4190,2500		
10,6	0,0390	0,0102	0,0022			
10,8	0,0240	0,0041	0,0007			
11,0	0,0159	0,0016				
11,2	0,0116	0,0010				
11,4	0,0093	0,0002				
11,6	0,0082	0,0001				
11,8	0,0076					
12,0	0,0073					
12,2	0,0071					
12,4	0,0071					
12,6	0,0070					
12,8						

For h see Table I.

$=G_k(G_n(1-h))$ and thus we define $G_n(1-h)$ for arbitrary non-negative values of n.

Regarding now k as a continuous parameter, we may differentiate (18) with respect to k and obtain thus

$$\frac{\partial G_N(u)}{\partial u}\cdot\frac{du}{dk}=\frac{\partial G_{N+k}(1-h)}{\partial k},\quad \frac{du}{dk}=\frac{\partial G_k(1-h)}{\partial k}.$$

Thus

$$\frac{\partial G_N(u)}{\partial u}=\frac{\partial G_{N+k}(1-h)}{\partial k}:\frac{\partial G_k(1-h)}{\partial k},\quad u=G_k(1-h). \tag{19}$$

Similarly

$$\frac{\partial^2 G_N(u)}{\partial u^2}=\left\{\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{\partial G_{N+k}(u)}{\partial u}\right):\frac{\partial G_k(u)}{\partial u}\right\}_{k=0}. \tag{20}$$

The equations (19) and (20) can be used with great advantage for actual numerical computation. We have to tabulate for this purpose $G_n(1-h)$ for sufficiently small steps of n and evaluate numerically the derivatives into n.

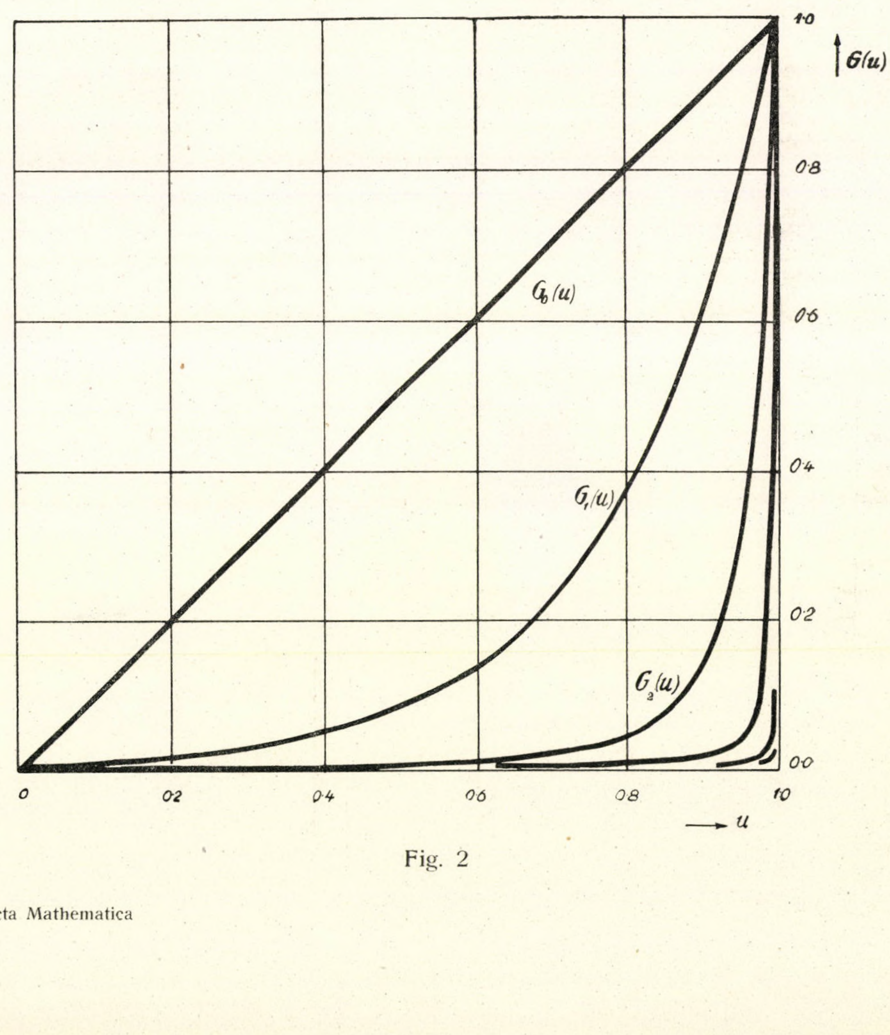

Fig. 2

Dividing suitable pairs of derivatives we obtain with help of (19) the parameter representation of $\frac{\partial G_N(u)}{\partial u}$, and repeating the procedure we obtain the second derivative.

Starting a sequence with $u = 1 + h$, $G_N(u)$ and its derivatives for $u > 1$ can be tabulated in a similar way.

The process of defining $G_n(u)$ for non-integer n-values is of great practical use; the significance of this procedure will be dealt with in a subsequent paper.

§ 7. As a numerical example, we consider the case of the Poisson distribution. Thus we assume

$$p(k) = e^{-p} \frac{p^k}{k!} \tag{21}$$

and

$$G(u) = e^{p(u-1)}. \tag{22}$$

Putting further $p = 5$, we find

$$u_2 = 0{,}006977.$$

Further putting $h = p^{-10}$, we obtained the tables to be found on pp. 171—172. With help of (18) we can read off say $G_{10}(u)$ for various u-values from this table, in this way we obtain Table II first column. With help of (19) and (20) we get $G'_{10}(u)$ and $G''_{10}(u)$ (see also Table II). From Table I we can also read off $G_N(u)$ for various values of N; a family of curves thus obtained is shown in Fig. 2. Finally we have evaluated $p(10, \nu)$ as shown in Fig. 3.

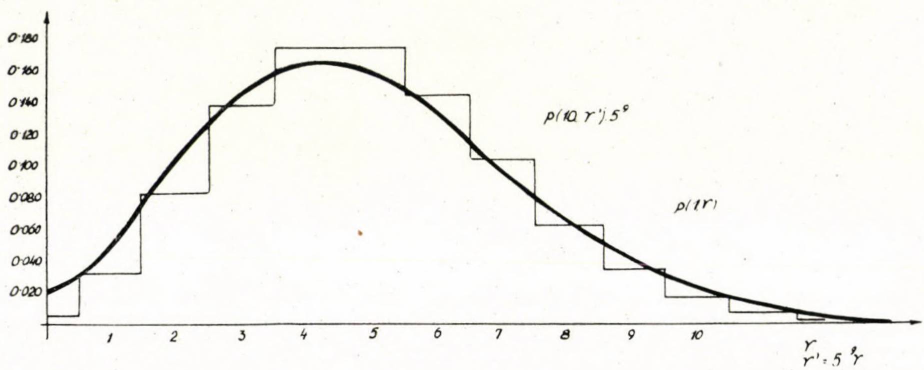

Fig. 3

We have also plotted the original Poisson distribution in Fig. 3. The two distributions are remarkably similar. As a check of the procedure we have evaluated by numerical integration $\sum p(\nu)$, $\sum \nu p(\nu)$ and $\sum (\nu - \bar{\nu})^2 p(\nu)$ from the values shown in Fig. 3 the results are shown below.

	$\sum p(\nu)$	$\frac{1}{p^{10}}\sum \nu p(\nu)$	$\frac{1}{p^{20}}\sum (\nu-\bar{\nu})^2 p(\nu)$
numerical integration	1,029	1,033	0,256
exact	1	1	0,25

The values for the moments obtained by numerical integration do not differ from the exact values by more than can be explained by the inaccuracy of the numerical integration. Thus the error involved by the application of the saddle point method cannot be more serious, but it is probably of the same order of magnitude.

The distribution shown in Fig. 3 does not agree with the distribution given by DALLOS [3] for the pulse size distribution of one electron multiplier.

This seems to suggest that the distribution found by DALLOS cannot be built up of Poisson distributions.

§ 8. The use of the saddle point integration for $u > 1$ could be avoided by evaluating $G_N(u)$ for $|u| = 1$ along the unit circle and evaluating (13) by numerical integration. This procedure would have to be adopted anyhow, if $G(u)$ did not converge for $u > 1$. But even if $G(u)$ converges, the numerical integration has the disadvantage that the integrand is oscillating along the path of integration. The value of the integral thus depends on the difference between the positive and the negative sections. The saddle point method avoids this difficulty. — Whether the saddle point integration is justified for $u > 1$ depends on whether a return path completing the integration across the saddle can be found so that the integral along this path is negligibly small. This seems to be so for the example considered above and therefore it seems that we were justified in our procedure. However, the function $G_N(u)$ for complex u is exceedingly complicated and therefore we postpone its detailed discussion to a later occasion.

I am indebted to my wife LEONIE for having carried out the numerical computations in the above article.

(Received 16 July 1951)

References

[1] P. FARAGÓ and L. TAKÁCS, *Hung. Acta Phys.*, **I**, 6 (1949).
[2] O. FRISCH (personal communication).
[3] L. DALLOS, *Acta Phys. Hung.*, 1, 56 (1951).

ИССЛЕДОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОНМУЛТИПЛЕРА

Л. ЯНОШИ (Будапешт)

(Резюме)

Распространение лавины электронов, возникающей в электронмултиплере, является типичным стохастическим процессом. Настоящая статья занимается изучением таких процессов. Даётся метод численного определения функции распределения лавины. В качестве примера численно вычисляется случай, состоящий из десяти шагов.

ON THE GENERALIZATION OF LAPLACE TRANSFORM IN PROBABILITY THEORY

By

L. JÁNOSSY (Budapest), member of the Academy

§ 1. The Laplace transformation is used with great advantage in some probability problems. In the following we show that the well known methods involving this transformation represent a special case of a more general method.

The Laplace transformation is used for the determination of the distribution resulting from the superposition of independent probability distributions. Consider k distributions defined by densities $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_k(x)$. We shall suppose $a(x)=0$ for $x<0$, although this assumption could easily be dispensed with. We determine the distribution $A_k(x)$ which gives the probability that simultaneously the k single distributions give such x-values $x_1, x_2, \ldots, x_k$ that

$$X \leqq x_1 + x_2 + \cdots + x_k < X + dX. \tag{1}$$

The distribution $A_k(x)$ is thus given by

$$A_k(X)\,dX = \int_{X \leqq x_1+x_2+\cdots+x_k < X+dX} \cdots \int a_1(x_1)\,a_2(x_2)\cdots a_k(x_k)\,dx_1\cdots dx_k. \tag{2}$$

The Laplace transform of the above integral is easily evaluated. One finds

$$L_{A_k}(\lambda) = L_{a_1}(\lambda)\,L_{a_2}(\lambda)\cdots L_{a_k}(\lambda) \tag{3}$$

with

$$L_{A_k}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} A_k(x)\,dx, \quad L_{a_i}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} a_i(x)\,dx \tag{4}$$

$(i=1,2,\ldots,k)$. The above relation becomes particularly simple if we put $a_1(x)=a_2(x)=\cdots=a_k(x)$. In this case writing $L_{a_1}(\lambda)=L_1(\lambda)$ and $L_{a_k}(\lambda)=L_k(\lambda)$, we have simply

$$L_k(\lambda) = (L_1(\lambda))^k. \tag{5}$$

From (5) we get for the first and second semi-invariants:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln L_k(\lambda)\right)_{\lambda=0} = kA, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\ln L_k(\lambda)\right)_{\lambda=0} = kB$$

where

$$A = -L_1'(0) = \int_0^\infty x a_1(x)\,dx, \quad B = L_1''(0) = \int_0^\infty (x-A)^2 a_1(x)dx.$$

Thus the average value and the scatter of the k-fold distribution is exactly k times that of the single distribution. The reverse transform of (3) can be written

$$A_k(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_0-i\infty}^{\lambda_0+i\infty} e^{\lambda x}(L_1(\lambda))^k\,d\lambda. \tag{6}$$

For sufficiently large values of k the asymptotic form of (6) is

$$A_k(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi k B}}\, e^{-(x-kA)^2/2kB}$$

provided $|x-kA|$ is not too large. Thus with help of the Laplace transform A_k can be determined both for moderate values of k and in the asymptotic case of $k \gg 1$.

Equations (5) and (6) admit a generalization. $A_k(x)$ is the resulting distribution arising from the superposition of exactly k events. Often, however, the number of events itself is subject to a distribution. Supposing p_k, $k=0, 1, 2, \ldots$, to be the probability for exactly k events to take place. Then the final distribution becomes a superposition of the A_k's, namely

$$A(x) = \sum p_k A_k(x).$$

The transform $L(\lambda)$ of $A(x)$ can thus be written

$$L(\lambda) = f(L_1(\lambda)) \quad \text{when} \quad f(u) = \sum p_k u^k; \tag{7}$$

thus $f(u)$ is the generator function of the p_k-distribution, and the generalized inverse is written as

$$A(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_0-i\infty}^{\lambda_0+i\infty} e^{\lambda x} f(L_1(\lambda))\,d\lambda. \tag{8}$$

An important special case is that where the numbers of events show a Poisson distribution, i. e.

$$p_k = e^{-p}\frac{p^k}{k!} \quad \text{and} \quad f(u) = e^{p(u-1)}.$$

Thus

$$L_p(\lambda) = e^{p(L_1(\lambda)-1)}$$

and the semi-invariants, expressing average value and scatter of the chain can be written as

$$-\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln L_p(\lambda)\right)_{\lambda=0} = pA, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\ln L_p(\lambda)\right)_{\lambda=0} = p(B+A^2).$$

The inverse transform itself can be written as

$$A_p(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_0-i\infty}^{\lambda_0+i\infty} e^{\lambda x + p(L_1(\lambda)-1)}\,d\lambda. \tag{9}$$

The latter distribution is again asymptotically normal for $p \to \infty$. One finds in the usual way

$$A_p(x) \sim \frac{e^{(x-pA)^2/2(B+A^2)p}}{\sqrt{2\pi(B+A^2)p}}. \tag{10}$$

Thus the scatter is larger than the scatter of one term multiplied by the average number of terms.

§ 2. The latter considerations can be further generalized as follows. Consider a stationary Markoff chain of k terms. $a(x, y)$ should be the probability density that in the course of one event a change $x \to y$ takes place. The probability of a change $X \to Y$ in k steps can thus be written

$$A_k(X, Y) = \int \cdots \int a(X, x_1)\, a(x_1, x_2) \cdots a(x_{k-1}, Y)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_{k-1}. \tag{11}$$

In the special case when

$$a(x, y) = a(x-y) \tag{12}$$

(11) reduces to (2) $(a_1 = a_2 = \cdots = a)$. In the latter case the integral can be evaluated by the Laplace transform.

On the other hand, if $a(x, y)$ is not of the special type (12), then the Laplace transform of (11) is of no advantage. (11) can, however, be simplified as follows. Consider $a(x, y)$ as the kernel of an integral equation of the second kind

$$\varphi_s(y) - s\int \varphi_s(x)\, a(x, y)\, dx = 0, \tag{13}$$

or of the conjugate equation

$$\psi_s(x) - s\int \psi_s(y)\, a(x, y)\, dy = 0. \tag{14}$$

The eigenfunctions of (13) or (14) are suitable to be used for a "generalized Laplace transformation". Indeed let us write

$$\int \varphi_s(X) A_k(X, Y)\, dX = \Phi_k(s, Y) \tag{15}$$

or

$$\int \psi_s(Y) A_k(X, Y)\, dY = \Psi_k(s, X), \tag{16}$$

then we find with help of (11), (13) and (14)

$$\Phi_k(s, Y) = s^{-k} \varphi_s(Y), \quad \Psi_k(s, X) = s^{-k} \psi_s(X). \tag{17}$$

Equation (17) is reminiscent of (5). The analogy becomes even more striking if we make use of the orthogonality relation between the φ's and ψ's, namely

$$\int \varphi_s(x)\, \psi_t(x)\, dx = 0, \quad \text{if} \quad s \neq t, \tag{18}$$

and if we assume, at least for the moment, that the following normalization may be imposed

$$\int \varphi_s(x)\, \psi_s(x)\, dx = 1. \tag{19}$$

We have from (17), (18) and (19)

$$\Phi_k(s) = s^{-k} \quad \text{with} \quad \Phi_k(s) = \iint \varphi_s(X)\, \psi_s(Y)\, A_k(X, Y)\, dX dY. \tag{20}$$

Thus the transformed distribution of the chain of k terms appears in a simple form ($1/s$ in the general case corresponds to $L_1(\lambda)$ in the special case).

If we were to deal with chains of a fluctuating number of terms, p_k being again the probability of a chain having exactly k terms, then we have with help of (18) instead of (17) or of (20)

$$\Phi(s, Y) = \varphi_s(Y)\, f\left(\frac{1}{s}\right), \quad \Psi(s, X) = \psi_s(X) f\left(\frac{1}{s}\right) \tag{21}$$

and

$$\Phi(s) = f\left(\frac{1}{s}\right). \tag{22}$$

(Again we have to replace $f\left(\frac{1}{s}\right)$ by $f(L_1(\lambda))$ to arrive at the special case of the Laplace transformation.) So as to complete the analogy we have to find the reverse transform of the generalized transformation. We write down (21) explicitly (assuming $f(s) \neq 0$)

$$\varphi_s(Y) - \frac{1}{f\left(\frac{1}{s}\right)} \varphi_s(X)\, A(X, Y)\, dX = 0, \tag{23}$$

or

$$\psi_s(X) - \frac{1}{f\left(\frac{1}{s}\right)} \int \psi_s(Y)\, A(X, Y)\, dY = 0.$$

Comparing (23) with (15) and (16), we see that $A(X, Y)$ is a kernel which possesses the same eigenfunctions as $a(x, y)$ but the eigenvalues s have to be replaced by $1/f\left(\frac{1}{s}\right)$.

Now a wide class of kernels can be developed from their complete set of eigenfunctions as follows:

$$a(x, y) = \sum \frac{\psi_s(x)\, \varphi_s(y)}{s}. \tag{24}$$

The sum has to be extended over all eigenvalues s; in case of a partly or wholly continuous spectrum it has to be replaced by a suitable integration.

Postulating (24), we see immediately that

$$A(X, Y) = \sum \psi_s(X)\, \varphi_s(Y)\, f\left(\frac{1}{s}\right), \tag{25}$$

provided (25) converges. Indeed, introducing (25) into (23) we get identities, but (25) can also be constructed introducing (24) into (11) and making use of the orthogonality relations.

In particular for a chain of exactly k terms we have

$$A_k(x, y) = \sum_s \frac{\psi_s(x)\,\varphi_s(y)}{s^k}. \tag{26}$$

So as to give (26) the form of an inverse transform we introduce (17) into (26) and find

$$A_k(X, Y) = \sum_s \varphi_s(Y)\,\Psi_k(s, X). \tag{26a}$$

X can be regarded as a fixed parameter and (26a) shows how to calculate the function $A_k(X, Y)$ from its transform $\Psi_k(s, X)$. The generalized inverse transforms corresponding to (6), (8) and (9) can thus be written as

$$A_k(X, Y) = \sum_s \varphi_s(Y)\frac{1}{s^k}\psi_s(X) \quad \text{and} \quad A(X, Y) = \sum_s \varphi_s(Y) f\left(\frac{1}{s}\right)\psi_s(X),$$

and if the number of terms of the chain show a Poisson distribution, we have

$$A_p(X, Y) = \sum \varphi_s(Y)\, e^{p\left(\frac{1}{s}-1\right)}\psi_s(X).$$

The analogy between the above equations and (6), (8) and (9) has to be understood in such a way that

$$\sum_s \longleftrightarrow \int\limits_{\lambda_0 - i\infty}^{\lambda_0 + i\infty}, \qquad \varphi_s(Y) \longleftrightarrow e^{\lambda Y},$$

$f\left(\frac{1}{s}\right) \longleftrightarrow f(L_1(\lambda))$ and $\psi_s(X)$ is a weight factor caused by the fact that an integration into λ is now replaced by a sum over s.

Equation (26) can be used to obtain the asymptotic distribution for $k \to \infty$, as can be seen in the following manner. Equation (14) has always one trivial solution, namely $s = 1$, $\psi_s(y) \equiv 1$; indeed

$$\int a(x, y)\,dy \equiv 1 \tag{27}$$

is simply the usual normalization condition for the density $a(x, y)$. Further $s = 1$ is the absolute smallest eigenvalue as can be shown in the following manner[1] provided the eigenfunctions can be assumed to be bounded.

Suppose $|\psi_s(x)| \leqq M$, equal sign standing for $x = x_0$. From (14) we have

$$|\psi_s(x)| \leqq |s|\,M = |s|\,|\psi_s(x_0)|.$$

As the latter has to stand for $x = x_0$, we have $|s| \geqq 1$. Thus (14) has no eigenvalue absolutely smaller than $s = 1$. If there exists a smallest eigenvalue, then it is necessarily $s = 1$. According to (24) this is also the smallest eigenvalue of (13). Equation (25) can thus be written (note that $f(1) = 1$ for every generating function)

$$A(X, Y) = \varphi_1(Y) + \sum_{s \neq 1} \psi_s(X)\,\varphi_s(Y)\, f\left(\frac{1}{s}\right);$$

[1] I am indebted to A. Rényi for this proof; similar proofs are used in the case of discrete Markoff chains.

in particular if $f(s)=s^k$.

$$A_k(X, Y)=\varphi_1(Y)+\sum_{|s|>1}\frac{\psi_s(X)\varphi_s(Y)}{s^k}.$$

If the eigenvalue $s=1$ is an isolated one, then with increasing k the sum vanishes and we have

$$A_k(X, Y)\to\varphi_1(Y) \quad \text{for} \quad k\to\infty. \tag{28}$$

Thus the asymptotic distribution is the eigenfunction of (13) corresponding to the smallest eigenvalue. If, however, $s=1$ is not isolated, but is the boundary of a continuous band of eigenvalues, then the asymptotic value is not necessarily given by the eigenfunction $\varphi_1(y)$.

§ 3. We show now in detail how the Laplace transform arises as a special case.

The Laplace transformation is useful if the kernel has the form given by (12), i. e. if the kernel depends only on the difference of the variables. In this special case (13) can be witten as

$$\varphi_s(y)=s\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_s(x)\,a(x-y)\,dx, \tag{29}$$

$$\psi_s(x)=s\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_s(y)\,a(x-y)\,dy. \tag{30}$$

The above equations are fulfilled in a formal manner by

$$\varphi_s(y)=e^{\lambda y}, \quad \psi_s(x)=e^{-\lambda x}, \quad 1/s=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\lambda z}a(z)\,dz. \tag{31}$$

If we restrict ourselves to bounded eigenfunctions, then we have to put λ purely imaginary. Thus restricting ourselves to a function $a(z)=0$ for $z<0$, we have

$$\varphi_s(y)=e^{i\lambda y}, \qquad \psi_s(x)=e^{i\lambda x}, \qquad s=1/L_1(i\lambda). \tag{32}$$

1. Introducing (32) into the various expressions we see clearly the connections which have already been pointed out as suggestive analogies. In detail we have $L_1(0)=1$ and since $a(z)\geqq 0$, this is the maximum value of $L_1(i\lambda)$ and also of $1/s$, thus $\varphi_1(x)=1$ and $s=1$ is the smallest eigenvalue.

2. Introducing (32) into (26a) we obtain (apart from normalization) the reverse Laplace transformation.

3. Equations (24), (25), (26) are identical with the reverse transforms for $a(x)$, $A(x)$ and $A_k(\lambda)$.

In the case of the Laplace transformation asymptotic distribution for $k\to\infty$ is not given by $\varphi_1(y)$, since $s=1$ is not isolated.

In the case of the Laplace transformation we can combine different probability densities $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_k(x)$ to a chain. This can be done because the corresponding eigenfunctions do not depend on the shape of these functions, the form of the function $a(z)$ itself determines only the eigenvalues. The general Markoff chain with transition probabilities $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, etc. can again be treated simply, provided these functions, regarded as kernels, contain exactly the same eigenfunctions. This is possible, if e. g. $a(x, y)$ and $A_k(x, y)$ possess the same set of eigenfunctions.

The restriction that the functions $a_k(x, y)$ $(k=1, 2, 3)$, should have the same eigenfunctions is, however, in general a very severe one.

§ 4. The *Mellin transform* is obtained if we were to postulate

$$a(x, y)=a(y/x).$$

The case of the Mellin transform is, however, not essentially different from that of the Laplace transform and no special discussion is necessary.

A simple example is the case where $a(x, y)$ is a polynomial. Suppose e. g.

$$a(x, y)=\begin{cases} \sum\limits_{\nu, \mu=0}^{n} a_{\nu\mu} x^{\nu} y^{\mu} & \text{if } 0 \leqq x, y \leqq 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The normalization condition gives

$$\sum \frac{a_{\nu\mu}}{\mu+1}=\begin{cases} 1 & \text{if } \nu=0, \\ 0 & \text{if } \nu \neq 0. \end{cases}$$

There are n pairs of eigenfunctions

$$\varphi_s(y)=\sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{s\nu} y^{\nu}, \qquad \psi_s(x)=\sum_{\nu=1}^{n} \psi_{s\nu} x^{\nu}, \qquad s=s_1, s_2, \ldots, s_n.$$

The s_k are the solutions of a secular equation which is obtained by inserting (32) into (13) and (14).

A numerical example is the following

$$a(x, y)=1+x-2xy.$$

The eigenfunctions and eigenvalues are as follows

s	$\varphi_s(y)$	$\psi_s(x)$	$s \int \varphi_s(y)\, \psi(y)\, dy$
1	$5-3y$	1	7
-6	$2y-1$	$7x-3$	7

The above example shows all the properties discussed further above:

(1) The absolute smallest eigenvalue is $s=1$ corresponding to $\psi_1(x)$.

(2) $a(x, y)$ can be developed in terms of the eigenfunctions:

$$1+x-2xy=\frac{5-3y}{7}-\frac{(2y-1)(7x-3)}{7}.$$

The asymptotic distribution is given by $(5-3y)/7$. Polynomials containing more terms can be treated similarly.

(Received 16 July 1951)

ОБОБЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Л. ЯНОШИ (Будапешт)

(Резюме)

При помощи преобразования Лапласа можно очень просто рассматривать некоторые стохастические процессы. В настоящей статье доказывается, что метод преобразования Лапласа можно считать специальным случаем некоторого более общего преобразования функций. Такое более общее преобразование приводит к ц ли и тогда, когда нельзя применить преобразования Лапласа.

ÜBER GEWISSE RINGKONSTRUKTIONEN DURCH SCHIEFES PRODUKT

Von

L. RÉDEI (Szeged), korrespondierendem Mitglied der Akademie

In einer vorigen Arbeit [3] habe ich das allgemeine *schiefe Produkt* (oder das Hamiltonsche Produkt) von beliebigen Strukturen $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ definiert, es dann dort in der Hauptsache nur zur Konstruktion von Gruppen verwendet. (Vgl. auch KOCHENDÖRFFER [2].) Hier werden wir zwei einfache Beispiele zur Konstruktion von Ringen betrachten, die übrigens einander sehr ähneln werden.

Als Ausgangspunkt nehmen wir die bekannte Ringkonstruktion

$$(1) \qquad (a, \alpha)+(b, \beta)=(a+b, \alpha+\beta), \quad (a, \alpha)(b, \beta)=(ab, b\alpha+a\beta+\alpha\beta).$$

Über diese weiß man folgendes. Sind α, β die Elemente eines Ringes P, sind ferner a, b ganze Zahlen, so wird durch (1) die Menge der Paare (a, α) zu einem Erweiterungsring von P, der ein Einselement besitzt (nämlich $(1, 0)$). (Vgl. McCOY [1].)

Jetzt wollen wir aber aus anderen Voraussetzungen ausgehen, und zwar wir nehmen stets an, daß P, R zwei Ringe mit den Elementen $\alpha, \beta, \ldots$ bzw. $a, b, \ldots$ sind. Damit dann (1_2) einen Sinn hat, nehmen wir noch an, daß R ein Linksoperatorenbereich zu P ist. Das bedeutet, daß ein (eindeutiges) „Operatorprodukt" $a\alpha (\in \mathrm{P})$ erklärt ist, über die Art dieser Operation soll aber nichts vorausgesetzt werden. Mit Σ bezeichnen wir die Menge der Paare (a, α). In dieser definieren wir die Addition und Multiplikation durch (1) und bezeichnen die so entstandene (algebraische) Struktur mit Σ_1.

Ferner betrachten wir auch diejenige Struktur Σ_2, die von Σ_1 darin abweicht, daß in ihr die beiden Verknüpfungen (statt (1)) durch

$$(2) \qquad (a, \alpha)+(b, \beta)=(a+b, \alpha+\beta), \quad (a, \alpha)(b, \beta)=(ab, \alpha b+a\beta+\alpha\beta)$$

definiert werden (man hat bloß $b\alpha$ durch αb ersetzt). Damit das aber einen Sinn hat, soll jetzt R links- und rechtsseitiger Operatorenbereich von P sein mit den beiden Operationen $a\alpha, \alpha a (\in \mathrm{P})$.

Beide Strukturen Σ_1, Σ_2 können wir im Sinne der Arbeit [3] ein schiefes Produkt der Ringe R, P nennen. Wir stellen uns die Aufgabe, alle Ringe Σ_1, Σ_2 zu bestimmen.

Zur Lösung machen wir die folgende Vorbereitung. Wird die Operation $a\alpha$ durch die neue Operation

(3) $$(a\alpha)' = a\alpha + \varrho \qquad (2\varrho = 0)$$

ersetzt, wobei ϱ ein, der Bedingung $2\varrho = 0$ unterworfenes, konstantes Element von P ist, so bleibt (1), folglich auch Σ_1 unverändert. Wenn ferner die Operationen $a\alpha$, αa durch die neuen Operationen

(4) $$(a\alpha)' = a\alpha + \sigma, \quad (\alpha a)' = \alpha a - \sigma$$

ersetzt werden, wobei σ ein konstantes Element von P ist, so bleibt (2), folglich auch Σ_2 unverändert. Diese „Transformationen" (3), (4) der Operationen nennen wir kurz (zulässige) *Verschiebungen.*

SATZ 1. *Unter den durch* (1) *definierten schiefen Produkten* Σ_1 *gewinnt man die sämtlichen Ringe so, daß man die Operationen* $a\alpha$ *den Bedingungen*

(5) $$a(\beta+\gamma) = a\beta + a\gamma,$$

(6) $$(a+b)\gamma = a\gamma + b\gamma,$$

(7) $$a\beta\gamma = (a\beta)\gamma = \beta(a\gamma),$$

(8) $$ab\gamma = a(b\gamma) = b(a\gamma)$$

unterwirft. (Hierzu kommen noch die verschobenen Operationen (3), die aber dasselbe leisten.)

SATZ 2. *Unter den durch* (2) *definierten schiefen Produkten* Σ_2 *gewinnt man die sämtlichen Ringe so, daß man die Operationen* $a\alpha, \alpha a$ *den Bedingungen*

(9) $$a(\beta+\gamma) = a\beta + a\gamma, \qquad (\alpha+\beta)c = \alpha c + \beta c,$$

(10) $$(a+b)\gamma = a\gamma + b\gamma, \qquad \alpha(b+c) = \alpha b + \alpha c,$$

(11) $$a\beta\gamma = (a\beta)\gamma, \qquad \alpha\beta c = \alpha(\beta c),$$

(12) $$ab\gamma = a(b\gamma), \qquad \alpha bc = (\alpha b)c,$$

(13) $$(a\beta)c = a(\beta c),$$

(14) $$(\alpha b)\gamma = \alpha(b\gamma)$$

unterwirft. (Hierzu kommen noch die verschobenen Operationen (4), die aber dasselbe leisten.)

BEMERKUNGEN. Es ist interessant, daß (5)—(8) eben mit den wohlbekannten Operatorbedingungen für die Algebren P mit Einselement über R zusammenfallen. In einer anderen Arbeit [4] werde ich den Begriff der *Doppelalgebren* einführen (wichtige Ringe gehören hierzu wie z. B. die Polynomringe, die vollen Matrizenringe, die Ringe der sogenannten alternierenden Zahlen, die Quaternionenringe). (9)—(14) stimmen im wesentlichen mit den

Operatorbedingungen der Doppelalgebren überein. Man bedenke, daß die Operatorbedingungen für Algebren (und ebenfalls für Doppelalgebren) die Sache einer *willkürlichen* Vereinbarung sind, dagegen erweisen sich in den Sätzen 1, 2 dieselben Operatorbedingungen als *notwendig* (und hinreichend), damit Σ_1, Σ_2 Ringe sind. Deshalb erblickt man in den Bedingungen (5)—(14) ein erfreuliches Zusammentreffen der Willkür und Notwendigkeit. Man sieht übrigens auch, daß man die Ringeigenschaft von R nicht vorauszusetzen braucht (nur die Ausführbarkeit der beiden Verknüpfungen $a+b, ab$ in ihm), denn offenbar muß R ein Ring sein, damit Σ_1 oder Σ_2 ein Ring ist.

Wir beweisen nun *Satz 1.* Wegen (1_1) ist Σ_1 ein Modul. Die Bedingung der linksseitigen Distributivität lautet nach (1) offenbar

$$(b+c)\alpha + a(\beta+\gamma) = b\alpha + c\alpha + a\beta + a\gamma. \tag{15}$$

Ferner ist dies zugleich auch die Bedingung der rechtsseitigen Distributivität.

Zur Unterscheidung von 0, dem Nullelement von P, bezeichne man mit $\mathbf{0}$ das Nullelement von R. Für $\gamma = 0$, bzw. $c = \mathbf{0}$ folgt aus (15)

$$(b+c)\alpha = b\alpha + c\alpha + a0, \tag{16}$$

$$a(\beta+\gamma) = a\beta + a\gamma + \mathbf{0}\alpha. \tag{17}$$

Die Einsetzung in (15) ergibt

$$a0 + \mathbf{0}\alpha = 0 \tag{18}$$

für alle $a(\in R), \alpha(\in \mathrm{P})$. Hiernach sind $a0, \mathbf{0}\alpha$ von a und α unabhängig und somit beide gleich $\mathbf{0}0$. Wird dieses Element mit $\varrho(\in \mathrm{P})$ bezeichnet, so gilt dann nach (18)

$$a0 = \mathbf{0}\alpha = \varrho, \quad 2\varrho = 0. \tag{19}$$

Wird nunmehr die Verschiebung (3) angewendet und die neue Operation $(a\alpha)'$ wieder mit $a\alpha$ bezeichnet, so gehen (16), (17) eben in (5), (6) über, aus denen umgekehrt (15) folgt. Hiernach sind (5), (6) die Bedingungen der Distributivität von Σ_1. Diese dürfen wir im folgenden schon voraussetzen, und dann haben wir nur noch zu zeigen, daß (7), (8) die Bedingung der Assoziativität für die Multiplikation (1_2) in Σ_1 ist.

Da nach (1_1) die Zerlegung

$$(a, \alpha) = (a, 0) + (\mathbf{0}, \alpha) \tag{20}$$

gilt, so genügt es wegen der Distributivität, daß man die Bedingungen der Assoziativität der Multiplikation für die Elemente von der Form $(a, 0), (\mathbf{0}, \alpha)$ aufstellt. Es kommen die 8 Dreierprodukte

$$(a, 0)(b, 0)(c, 0), \qquad (\mathbf{0}, \alpha)(\mathbf{0}, \beta)(\mathbf{0}, \gamma), \tag{21}$$

$$(a, 0)(b, 0)(\mathbf{0}, \gamma), \qquad (\mathbf{0}, \alpha)(\mathbf{0}, \beta)(c, 0), \tag{22}$$

$$(a, 0)(\mathbf{0}, \beta), (c, 0), \qquad (\mathbf{0}, \alpha)(b, 0)(\mathbf{0}, \gamma), \tag{23}$$

$$(\mathbf{0}, \alpha)(b, 0)(c, 0), \qquad (a, 0)(\mathbf{0}, \beta)(\mathbf{0}, \gamma) \tag{24}$$

in Betracht. Die Produkte (21) sind wegen (1_2) offenbar assoziativ. Für (22), (23) sind die Assoziativitätsbedingungen nach (1_2) eben (7), (8). Dagegen führt (24) zu keinen neuen Bedingungen, womit Satz 1 bewiesen ist.

Im Beweis von *Satz 2* tritt nur wenig Änderung auf. Die Moduleigenschaft von Σ_2 ist nach (2_1) klar. Die Distributivitätsbedingungen sind jetzt nach (2)

$$a(b+c)+a(\beta+\gamma)=ab+ac+a\beta+a\gamma, \tag{25}$$

$$(b+c)\alpha+(\beta+\gamma)a=b\alpha+c\alpha+\beta a+\gamma a. \tag{26}$$

Man setze in (25), (26) zuerst $\gamma=0$, dann $c=\mathbf{0}$ ein:

$$\alpha(b+c)=\alpha b+\alpha c+a0, \tag{27}$$

$$(b+c)\alpha=b\alpha+c\alpha+0a, \tag{28}$$

$$a(\beta+\gamma)=a\beta+a\gamma+\alpha\mathbf{0}, \tag{29}$$

$$(\beta+\gamma)a=\beta a+\gamma a+\mathbf{0}\alpha. \tag{30}$$

Werden diese in (25), (26) eingesetzt, so folgt

$$a0+\alpha\mathbf{0}=0,$$

$$0a+\mathbf{0}\alpha=0.$$

Die vier Glieder links müssen von a und α unabhänging sein, hieraus folgt sofort

$$a0=\mathbf{0}\alpha=-\sigma,\quad \alpha\mathbf{0}=0a=\sigma$$

mit einem passenden $\sigma(\in P)$, das übrigens gleich $0\mathbf{0}$ ist. Wird (4) angewendet und werden die verschobenen Operationen $(a\alpha)$, $(\alpha a)'$ wieder mit $a\alpha, \alpha a$ bezeichnet, so gehen (27)—(30) in (9), (10) über, aus denen umgekehrt (25), (26) folgt. Das übrige geschieht so wie vordem, und zwar sind (11)—(14) nach (2_2) eben die Assoziativitätsbedingungen für die Produkte (22)—(24). Satz 2 haben wir somit bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] N. H. McCoy, *Rings and ideals* (Buffalo, 1948).

[2] R. Kochendörffer, Zur Theorie der Rédeischen schiefen Produkte, *Journ. für reine u. angew. Math.* (im Erscheinen).

[3] L. Rédei, Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie, *Journ. für reine u. angew. Math.*, **188** (1950), 201—227.

[4] L. Rédei, Doppelalgebren, *Acta Math.* (in Vorbereitung).

(Eingegangen am 5. November 1951.)

О НЕКОТОРЫХ ПОСТРОЕНИЯХ КОЛЕЦ ПРИ ПОМОЩИ КОСОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Л. РЭДЭИ (Сегед)

(Резюме)

В одной предыдущей работе [3] автор рассмотрел принцип общего косого произведения (или произведения Гамильтона) и применил его к построению групп. Здесь рассматриваются два простых примера построения колец.

В первом примере применяется очень простое правило действий:

(1) $$(a, \alpha)+(b, \beta)=(a+b, \alpha+\beta). \qquad (a, \alpha)(b, \beta)=(ab, b\alpha+a\beta+\alpha\beta).$$

Известно, что если α, β элементы некоторого кольца P и a, b целые числа, то пары (a, α) на основании (1) составляют кольцо, которое может считаться кольцом расширения P (McCoy [1]). Здесь исходным пунктом является более общее условие, согласно которому a, b элементы кольца R, которое относится к P в качестве (левой) области операторов, то есть каждое произведение операторов $a\alpha$ есть оцределённый элемент P, о котором ничего больше не предполагается, а исследовано необходимое и достаточное условие того, чтобы пары (a, α) образовывали кольцо на основании (1) За исключением незначительных расхождений получаются обычные в алгебрах операторные условия.

Во втором примере определено произведение равенством

$$(a, \alpha)(b, \beta)=(ab, a\beta+\alpha b+\alpha\beta)$$

предполагая, что R является одновременно левой и правой областью операторов P. Получающееся таким образом операторные условия в сущности те же, которыми определены двойные алгебры, соответствующие алгебре, в одной готовящейся работе [4].

ÜBER DIE FEUERBACHSCHEN KUGELN MEHRDIMENSIONALER ORTHOZENTRISCHER SIMPLEXE

Von

G. HAJÓS (Budapest), korrespondierendem Mitglied der Akademie

E. EGERVÁRY[1] hat für $(n-1)$-dimensionale orthozentrische Simplexe Σ in Verallgemeinerung der bekannten zwei- und dreidimensionalen Fälle die Folge $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ Feuerbachscher Kugeln eingeführt, unter welchen Φ_k die Schwerpunkte und die Orthozentren aller $(k-1)$-dimensionalen Teilsimplexe von Σ enthält. Ist $k=2$, so ist dabei als Orthozentrum einer Kante die orthogonale Projektion des Orthozentrums von Σ auf die Kante zu verstehen. Ist $k=1$, so erhält man die Umkugel Φ_1 des Simplexes; ist $k=n$, so bedeutet Φ_n die Thaleskugel über die Verbindungsstrecke des Schwerpunktes und des Orthozentrums von Σ.

E. EGERVÁRY hat bei seiner Untersuchung auf Σ bezogene baryzentrische Koordinaten benutzt und u. a. bewiesen, daß die Folge der Feuerbachschen Kugeln einem Kugelbüschel zugehört; daß ihre Mittelpunkte $C_1, C_2, \ldots, C_n$ auf der durch das Orthozentrum O und den Schwerpunkt S bestimmten Eulerschen Geraden liegen und

$$OC_k : OS = n : 2k$$

ist; daß weiter für ihre Halbmesser $r_1, r_2, \ldots, r_n$ eine Relation

$$(2kr_k)^2 = a(n-2k)^2 + b$$

mit Konstanten a und b besteht, woraus insbesondere für die Halbmesser komplementärer Feuerbachscher Kugeln die Relation

$$kr_k = (n-k)\, r_{n-k}$$

folgt; daß ferner, wenn O_{n-k} das Orthozentrum eines $(n-k-1)$-dimensionalen Teilsimplexes bedeutet und O_k' durch

$$OO_k' : OO_{n-k} = (n-k) : k$$

auf der Geraden OO_{n-k} bestimmt ist, dann O_k' auf Φ_k liegt; daß endlich bei einem orthozentrischen Punktsystem von $n+1$ Punkten [im $(n-1)$-dimen-

[1] E. EGERVÁRY, On orthocentric simplexes, *Acta. Scient. Math. Szeged.*, **9** (1940), pp. 218—226; On the Feuerbach-spheres of an orthocentric simplex, *Acta Math. Hung.*, **1** (1950), pp. 5—15.

sionalen Raume] die Kugeln Φ_k aller enthaltenen Simplexe nur bei $2k = n+1$ gleiche Halbmesser besitzen.

Das Ziel vorliegender Arbeit ist, die erwähnten Resultate mit Hilfe elementarer Vektorrechnung zu beweisen. Die anzuwendende Methode entstand aus einer von T. SZELE[2] gegebenen vektorarithmetischen Behandlung des Feuerbachschen Kreises in der Ebene. Unsere Überlegungen werden auch gewisse Ergänzungen der erwähnten Resultate liefern.

1. Wir bezeichnen die Scheitelpunkte des $(n-1)$-dimensionalen $(n>2)$ orthozentrischen Simplexes Σ mit $A_1, A_2, \dots, A_n$ und ihre aus dem Orthozentrum O auslaufenden Ortsvektoren mit $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$.

Laut der Definition ist der Vektor $\mathbf{a}_i$ auf alle nicht aus A_i auslaufenden Kanten orthogonal, also

$$\mathbf{a}_i(\mathbf{a}_j-\mathbf{a}_k)=0 \qquad (j, k \neq i),$$

woraus folgt, daß

$$\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j=c \qquad (i\neq j;\ i,j=1,2,\dots,n)$$

eine von der Wahl der Indizes i,j unabhängige Konstante ist. Daraus folgt unmittelbar der

HILFSSATZ. Ist $|\varepsilon_1|=|\varepsilon_2|=\dots=|\varepsilon_n|=1$, so bleibt die Länge des Vektors

$$\varepsilon_1\mathbf{a}_1+\varepsilon_2\mathbf{a}_2+\dots+\varepsilon_n\mathbf{a}_n$$

unverändert, wenn die Koeffizienten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ permutiert werden.

Das Quadrat dieses Vektors ist nämlich

$$\sum_i \mathbf{a}_i^2+2c\sum_{i\neq j}\varepsilon_i\varepsilon_j,$$

welcher Ausdruck tatsächlich keine Änderung unter einer Permutation der Zahlen ε_i erleidet. Um spätere Rechnung zu erleichtern, bemerken wir schon hier, daß für $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\dots=\varepsilon_k=-1,\ \varepsilon_{k+1}=\dots=\varepsilon_n=1$

$$2\sum_{i\neq j}\varepsilon_i\varepsilon_j=(n-2k)^2-n$$

ist.

Wir werden nur von O auslaufende Ortsvektoren benutzen und die Schreibweise $A=\mathbf{a}$ gebrauchen, wenn $\mathbf{a}$ der Ortsvektor von A ist. Mit λA bezeichnen wir den Punkt vom Ortsvektor $\lambda\mathbf{a}$.

2. Sei $k=1,2,\dots,n-1$. Wir betrachten die Schwerpunkte der $(k-1)$-dimensionalen Teilsimplexe von Σ. Einer von diesen ist

$$S_k=\frac{1}{k}(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\dots+\mathbf{a}_k).$$

Alle diese Schwerpunkte liegen auf einer um

$$C_k=\frac{1}{2k}(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\dots+\mathbf{a}_n)$$

[2] T. SZELE, Elemi geometriai problémák megoldása vektorokkal, *A középiskolai matematikatanítás kérdései* (Budapest, 1950), pp. 75—93.

geschlagenen Kugel Φ_k, denn die Länge des aus C_k in S_k führenden Vektors

$$\frac{1}{2k}(-\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2-\cdots-\mathbf{a}_k+\mathbf{a}_{k+1}+\cdots+\mathbf{a}_n)$$

bleibt nach dem Hilfssatz bei Permutation der Indizes unverändert.

Wir betrachten weiter die Schwerpunkte S_{n-k} der $(n-k-1)$-dimensionalen Teilsimplexe und behaupten, daß die Punkte S_k und $\frac{n-k}{k} S_{n-k}$ paarweise diametral gegenüber einander auf Φ_k liegen. Ist nämlich einer der Punkte S_{n-k}

$$S_{n-k}=\frac{1}{n-k}(\mathbf{a}_{k+1}+\mathbf{a}_{k+2}+\cdots+\mathbf{a}_n),$$

also

$$\frac{n-k}{k} S_{n-k}=\frac{1}{k}(\mathbf{a}_{k+1}+\mathbf{a}_{k+2}+\cdots+\mathbf{a}_n),$$

so ist mit dem obigen S_k

$$S_k+\frac{n-k}{k} S_{n-k}=2C_k,$$

was eben unsere Behauptung beweist.

3. Sei O_k das Orthozentrum eines $(k-1)$-dimensionalen Teilsimplexes $A_1A_2\cdots A_k$. Sein $(k-1)$-dimensionaler Raum ist total orthogonal auf den $(n-k)$-dimensionalen, die Punkte $O, A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots, A_n$ enthaltenden Raum. Da O_k gemeinsamer Punkt beider Räume ist, da ferner der eine Raum den Punkt S_k, der andere den Punkt $\frac{n-k}{k} S_{n-k}$ enthält, und beide genannten Punkte diametral gegenüber einander auf Φ_k liegen, liegt nach dem Thales'schen Satze auch O_k auf Φ_k.

Ähnliche Überlegung zeigt, daß auch die Punkte $\frac{n-k}{k} O_{n-k}$ auf Φ_k liegen, wobei O_{n-k} das Orthozentrum eines $(n-k-1)$-dimensionalen Teilsimplexes bezeichnet. Ist nämlich O_{n-k} das Orthozentrum des durch die Punkte $A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots, A_n$ bestimmten Teilsimplexes, so ist $\frac{n-k}{k} O_{n-k}$ in beiden durch die Punkte $O, A_1, A_2, \ldots, A_k$, bzw. $\frac{n-k}{k} A_{k+1}, \frac{n-k}{k} A_{k+2}, \ldots, \frac{n-k}{k} A_n$ ausgespannten, total orthogonalen Räumen enthalten. Da aber der eine der ganannten Räume den Punkt S_k, der andere den Punkt $\frac{n-k}{k} S_{n-k}$ enthält, liegt $\frac{n-k}{k} O_{n-k}$ nach dem Thales'schen Satze auf Φ_k.[3]

[3] Mit Hilfe der in der Einleitung über r_k und r_{n-k} erwähnten Formel folgt einfach, daß die Kugeln Φ_k und Φ_{n-k} samt allen ihren oben erwähnten Punkten homothetisch bezüglich des Punktes O liegen.

4. Im Falle $k=n$ kann von der um

$$C_n=\frac{1}{2n}(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\cdots+\mathbf{a}_n)$$

geschlagenen, den Schwerpunkt S von Σ enthaltenden Kugel Φ_n nur behauptet werden, daß sie auch das Orthozentrum O von Σ enthält und daß S und O diametral gegenüber einander auf ihr liegen. Das folgt nämlich unmittelbar aus $S=2C_n$. Somit ergibt sich die orthozentroidale Kugel Φ_n von Σ als Abschließung der Folge von Feuerbachschen Kugeln.

5. Die Ortsvektoren der Mittelpunkte $C_1, C_2, \ldots, C_n$ zeigen, daß sie auf der die Punkte O und S verbindenden Eulerschen Geraden liegen und

$$C_k=\frac{n}{2k}S$$

ist. Bei ungerader Dimensionszahl ist also auch S selbst Mittelpunkt einer Feuerbachschen Kugel.

Für den Halbmesser r_k von Φ_k ergibt sich nach 1 und 2

$$r_k^2=\left[\frac{1}{2k}(-\mathbf{a}_1-\cdots-\mathbf{a}_k+\mathbf{a}_{k+1}+\cdots+\mathbf{a}_n)\right]^2=\frac{1}{4k^2}\left[\sum_i \mathbf{a}_i^2+c((n-2k)^2-n)\right],$$

womit wir die in der Einleitung erwähnte Formel erhalten haben. Diese Formel zeigt zugleich, daß r_k^2 ein quadratisches Polynom von $\frac{1}{k}$, also auch des Mittelpunktabstandes OC_k ist (mit von k unabhängigen Koeffizienten), daß also die Feuerbachschen Kugeln demselben Kugelbüschel zugehören.

6. Die Eulersche Gerade enthält auch

$$E=\frac{1}{n+1}(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\cdots+\mathbf{a}_n),$$

den Schwerpunkt der Punkte $O, A_1, A_2, \ldots, A_n$. Wegen $C_k=\frac{n+1}{2k}E$ ergibt sich

$$EC_k : EO = 1 - OC_k : OE = 1-\frac{n+1}{2k}.$$

Wir betrachten nun das orthozentrische System der $n+1$ Punkte $O, A_1, A_2, \ldots, A_n$. Durch Weglassen eines von diesen erhält man n Punkte, die ein orthozentrisches Simplex bestimmen, dessen Orthozentrum der weggelassene Punkt ist. Nach den eben Bemerkten gehen die Eulerschen Geraden aller dieser $n+1$ Simplexe durch den Punkt E. Die zu diesen Simplexen gehörenden Punkte C_k bilden ein mit dem ursprünglichen orthozentrischen Punktsystem homothetisches Punktsystem. Das Zentrum dieser Homothetie ist E und das Homothetieverhältnis ist $1-\frac{n+1}{2k}$.

7. Um die Halbmesser aller vorkommenden Feuerbachschen Kugeln vergleichen zu können, führen wir die Quadratsumme aller Abstände der $n+1$ Punkte ein, welche Quadratsumme

$$q = \sum \mathbf{a}_i^2 + \sum (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j)^2 = n \sum \mathbf{a}_i^2 - n(n-1)c$$

ausfällt. Somit ist nach 5

$$r_k^2 = \frac{1}{4k^2}\left[\frac{q}{n} + ((n-2k)^2 - 1)c\right].$$

Ist A_i der weggelassene Punkt, so tritt an Stelle von c der Ausdruck

$$\mathbf{a}_i(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j) = \mathbf{a}_i^2 - c.$$

Sind alle diese Ausdrücke gleich c, so ist

$$\cos(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \frac{c}{|\mathbf{a}_i|\,|\mathbf{a}_j|} = \frac{1}{2}$$

und somit das Simplex Σ regelmäßig. Die Halbmesser der $n+1$ Kugeln Φ_k stimmen also für ein jedes k nur bei regelmäßigen Simplexen überein.

Ist Σ nicht regelmäßig, so sind die Halbmesser der $n+1$ Kugeln Φ_k nach der obigen Formel nur bei $k = \frac{n+1}{2}$ gleich, was nur bei gerader Dimensionszahl vorkommen kann. Ist $k = \frac{n+1}{2}$, so stimmen nicht nur die Halbmesser überein, sondern die Kugeln Φ_k selbst fallen auch zusammen, da in diesem Falle das oben erwähnte Homothetieverhältnis 0 ist.

(Eingegangen am 20. Dezember 1951.)

О ШАРАХ ФЕЙЕРБАХА МНОГОМЕРНЫХ ОРТОЦЕНТРИЧЕСКИХ СИМПЛЕКСОВ

Г. ГАЁШ (Будапешт)

(Резюме)

Э. Эгервари ввёл последовательность шаров Фейербаха $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ относительно $n-1$ мерных ортоцентрических симплексов. Шар содержит центры тяжести и ортоцентры $k-1$ мерных субсимплексов исходного симплекса. Э. Эгервари прн помощи барицентрических координат, относящихся к ортоцентрическому симплексу, определил распределение этих шаров относительно друг друга и доказал ряд характерных для них свойств.

Настоящая работа добывает эти же результаты векторарифметическим путём и несколько дополняет их.

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ СИЛОВСКИХ p-ПОДГРУПП СИММЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП

Л. А. КАЛУЖНИН (Берлин)

(Представлено Л. Рэдэи)

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена одному обобщению силовских p-подгрупп симметрических групп. Силовские p-подгруппы симметрических групп изучались в моей работе „La structure des p-groupes de Sylow des groupes symétriques finis"[1], где были, между прочим, установлены все характеристические подгруппы таких групп. Изучение это производилось при помощи так называемого „представления таблицами" — метода, который связан с понятием полного произведения групп.

Это понятие я ввожу в § 1 настоящей работы. Если $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}$ группы подстановок множеств M и N, то полное призведение $\mathfrak{G} \circ \mathfrak{H}$ — это импримитивная группа таких подстановок σ теоретико-множественного произведения $M \times N$, что:

1. подмножества $\mu \times N$ множества $M \times N$ с зафиксированной первой координатой μ суть системы импримитивности σ,

2. σ индуцирует во множестве этих систем импримитивности подстановку, принадлежащую к группе $\mathfrak{G}$,

3. σ индуцирует в каждой такой системе импримитивности подстановку, принадлежащую к группе $\mathfrak{H}$.

Понятие полного произведения двух групп распространяется непосредственно на случай любой конечной или трансфинитной последовательности групп подстановок.[2]

Группы $\mathfrak{P}_m$ таблиц ранга m, рассматриваемые мною в вышеуказанной работе (KALOUJNINE [1]), являются полными произведениями m циклических

[1] *Ann. Ec. Normale*, **3** (65), (1948), p. 239—276. (Цитируется в дальнейщем как KALOUJNINE [1].)

[2] Как оказывается, полное произведение групп теснейщим образом связано с теорией Шрейера о расширениях групп и с возможными обобщениями этой теории. Этот вопрос рассматривается в работе M. KRASNER—L. KALOUJNINE, Produit complet des groupes de permutations et problème d'extension de groupes. I, *Acta Scient. Math.*, **13** (1950), p. 208—230.; II. **14** (1951), p. 39—66; III. **14** (1951), p. 69—82.

групп порядка простого числа p. В настоящей работе изучается полное произведение бесконечной последовательности циклических групп порядка p — группа, которую мы обозначаем через $\mathfrak{P}_\infty$.

$\mathfrak{P}_m$ является силовской p-подгруппой конечной симметрической группы степени p^m (KALOUJNINE [1]), откуда непосредственно следует, что любая конечная p-группа изоморфна некоторой транзитивной подгруппе группы $\mathfrak{P}_m$ для подходящего m. Подобную характеристику можно так-же дать и для группы $\mathfrak{P}_\infty$. Мы называем полуконечной группой абстрактную группу $\mathfrak{G}$, обладающую такой цепочкой подгрупп $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^{(0)} \supset \mathfrak{G}^{(1)} \supset \cdots \supset \mathfrak{G}^{(\nu)} \supset \cdots$, что 1. для каждого ν индекс $(\mathfrak{G} : \mathfrak{G}^{(\nu)})$ конечен и что 2. $\bigcap\limits_{\nu} \mathfrak{G}^{(\nu)}$ содержит только единицу группы $\mathfrak{G}$. В частности, полуконечная группа $\mathfrak{G}$ называется p_∞-группой, если для каждого ν $(\mathfrak{G} : \mathfrak{G}^{(\nu)})$ есть степень простого числа p. Оказывается, что любая p_∞-группа изоморфна некоторой подгруппе группы $\mathfrak{P}_\infty$ и, так как сама группа $\mathfrak{P}_\infty$ является p_∞-группой, то она в этом смысле универсальная p_∞-группа.

С другой стороны, группа $\mathfrak{P}_\infty$ может быть охарактеризована как силовская p-подгруппа (в смысле Ван Данцига[3] и А. Г. Куроша[4]) группы изометрий некоторого пространства Кантора.

Для установления вышеуказанных результатов я развил в §§ 3 и 4 теорию представления полуконечных и в частности Канторовских групп изометриями нульмерных (ультраметрических) пространств. Мне кажется, что связь этой теории с понятием полного произведения не лишена интереса.

В § 5 я устанавливаю, пользуясь результатами моей работы (KALOUJNINE [1]), все характеристические подгруппы группы $\mathfrak{P}_\infty$, замкнутые относительно некоторой топологии.

§ 1. ПОЛНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ГРУПП ПОДСТАНОВОК

Пусть $\mathfrak{G}$ группа подстановок некоторого множества M, а $\mathfrak{H}$ группа подстановок множества N. Мы поределим новую группу подстановок $\mathfrak{S}$ теоретико-множественного произведения $S = M \times N$ — группу, которую мы назовем полным произведением групп $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}$ и которую будем записывать в виде $\mathfrak{S} = \mathfrak{G} \circ \mathfrak{H}$.

Множество $S = M \times N$ является по определению множеством пар (μ, ν), где $\mu \in M$ и $\nu \in N$. Пусть $\mathfrak{S}$ — совокупность подстановок σ множества S, определённых следующим образом:

$$\sigma(\mu, \nu) = (\mu', \nu'),$$

причём

[3] D. VAN DANTZIG, Zur topologischen Algebra, III. *Compositio Math.*, **3** (1936), p. 408—426.

[4] А. Г. Курош, Силовские подгруппы нульмерных топологических групп, Изв. Ак. Наук СССР матем. серия, **9** (1945), стр. 65—78.

1. $\mu' = \gamma\mu$, где γ принадлежит к $\mathfrak{G}$ и

(1, 1)

2. $\nu' = \chi_\mu \nu$, где χ_μ есть подстановка из группы $\mathfrak{H}$, зависящая от μ. Положим $g = \{\mu \to \gamma\mu\}$ и $h(x) = \{\nu \to \chi_x \nu\}$, $(x \in M)$ (т. е. $h(x)$ есть функция, определённая на M со значениями в группе подстановок $\mathfrak{H}$), тогда подстановку σ мы будем записывать в форме $\sigma = [g, h(x)]$ и будем называть $[g, h(x)]$ *таблицей подстановок*, соответствующей подстановке σ.

Очевидно, что подстановки σ, определённые уравнениями (1, 1) обладают следующими свойствами:

а. Множества $S_\mu = \mu \times N$ элементов S с фиксированной первой координатой μ суть системы импримитивности подстановок σ.

б. Подстановки, индуцированные σ в первых координатах элементов S, принадлежат к группе $\mathfrak{G}$.

в. Подстановки, индуцированные σ в множествах $S_\mu = \mu \times N$, суть элементы группы $\mathfrak{H}$ (зависящие от μ).

С другой стороны ясно, что всякая подстановка σ, удовлетворяющая условиям а. б. в., может быть записана в вышеуказанной форме таблицы подстановок и является элементом $\mathfrak{S}$.

Произведение $\bar\sigma\sigma$ двух подстановок $\sigma = [g, h(x)]$ и $\bar\sigma = [\bar g, \bar h(x)]$ из $\mathfrak{S}$ будет, очевидно, подстановкой множества $S = M \times N$, определённой следующими равенствами:

$$\bar\sigma\sigma(\mu, \nu) = (\mu'', \nu''),$$

причём

$$\mu'' = \bar\gamma(\gamma\mu) = \bar\gamma\gamma\mu$$

и, обозначая через μ' первую координату от $\sigma(\mu, \nu)$,

$$\nu'' = \chi_{\mu'}(\chi_\mu \nu) = \chi_{\gamma(\mu)}\chi_\mu \nu.$$

Отсюда мы находим нижеследующий закон умножения таблиц подстановок:

$$[\bar g, \bar h(x)] \cdot [g, h(x)] = [\bar g g, \bar h(\gamma x)\, h(x)]. \tag{1, 2}$$

Этот закон, конечно, ассоциативен.

Пусть $1(\mathfrak{G})$ — единица группы $\mathfrak{G}$, а $e(x)$ — функция тождественно равная тождественной подстановке $1(\mathfrak{H})$ группы $\mathfrak{H}$. Тогда совершенно ясно, что таблица подстановок $[1(\mathfrak{G}), e(x)]$ представляет собой тождественную подстановку множества $S = M \times N$. С другой стороны, в силу закона (1, 2), для любой таблицы $\sigma = [g, h(x)]$, принадлежащей к $\mathfrak{S}$, имеет место равенство

$$[g^{-1}, h^{-1}(\gamma^{-1}x)]\,[g, h(x)] = [1(\mathfrak{G}), e(x)] = 1(\mathfrak{S}),$$

что показывает существование обратной таблицы

$$[g, h(x)]^{-1} = [g^{-1}, h^{-1}(\gamma^{-1}x)] \tag{1, 3}$$

для каждой таблицы $\sigma \in \mathfrak{S}$. Тем самым, $\mathfrak{S}$ образует группу подстановок множества $S = M \times N$, которую мы и называем *полным произведением групп* $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}$.

Не трудно показать, что группа $\mathfrak{S}$ транзитивна в том и только том случае, если группы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}$ транзитивны.

Совершенно очевидно так-же, что если $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}$ группы подстановок конечной степени, то для порядка и степени их полного произведения $\mathfrak{S} = \mathfrak{G} \circ \mathfrak{H}$ имеют место равенства:

$$\text{порядок } (\mathfrak{G} \circ \mathfrak{H}) = (\text{порядок } \mathfrak{G}) \cdot (\text{порядок } \mathfrak{H})^{\text{степень } \mathfrak{G}} \tag{1, 4}$$

и

$$\text{степень } (\mathfrak{G} \circ \mathfrak{H}) = (\text{степень } \mathfrak{G})\ (\text{степень } \mathfrak{H}). \tag{1, 5}$$

Из этого уже видно, что, вообще говоря, $\mathfrak{G} \circ \mathfrak{H} \not\simeq \mathfrak{H} \circ \mathfrak{G}$, т. е. полное произведение не перестановочно.

С другой стороны, полное произведение ассоциативно; а именно, если $\mathfrak{K}$ какая-то третья группа подстановок множества K, то полные произведения $(\mathfrak{G} \circ \mathfrak{H}) \circ \mathfrak{K}$ и $\mathfrak{G} \circ (\mathfrak{H} \circ \mathfrak{K})$ представляют собой одну и ту-же группу подстановок множества $M \times N \times K$, которую мы будем записывать $\mathfrak{G} \circ \mathfrak{H} \circ \mathfrak{K}$.

Подстановки $\tau \in \mathfrak{G} \circ \mathfrak{H} \circ \mathfrak{K}$ — суть подстановки множества $M \times N \times K$ такие, что

$$\tau(\mu, \nu, \varkappa) = (\mu', \nu', \varkappa'),$$

причём

$$\begin{array}{lll} 1)\ \mu' = \gamma\mu & \gamma \in \mathfrak{G}, & \\ 2)\ \nu' = \chi_\mu \nu & \chi_\mu \in \mathfrak{H} & \text{зависящий от } \mu, \\ 3)\ \varkappa' = \zeta_{\mu,\nu}\varkappa & \zeta_{\mu,\nu} \in \mathfrak{K} & \text{зависящий от } \mu, \nu. \end{array}$$

Таким образом мы можем рекурентно определить полное произведение конечного числа групп подстановок. Путем трансфинитной индукции можно также определить полное произведение любого благорасположенного множества групп подстановок.

Дадим такое определение непосредственно. Пусть будет a какое-то ординальное (трансфинитное) число. Будем обозначать через Ω_a отрезок ординальных чисел $< a$. Для каждого $b \in \Omega_a$, пусть будет $\mathfrak{G}^{(b)}$ группа подстановок $\gamma^{(b)}$ абстрактного множества $M^{(b)} = \{\mu^{(b)}\}$. Для удобства записи прибавим к этим множествам некоторое множество M^0, состоящее из одного только элемента μ^0. Для всякого ординального числа d, $0 \leqq d \leqq a$, обозначим через U^d теоретико-множественное произведение множеств $M^{(c)} (0 \leqq c < d)$

$$U^{(d)} = \prod^{c<d} M^{(c)}.$$

В силу определения, элементы $u^{(d)}$ множества $U^{(d)}$ суть семейства $(\mu^{(c)})$, где для всякого $c < d$ $\mu^{(c)} \in M^{(c)}$. $\mu^{(c)}$ называется c-той координатой элемента $u^{(d)}$.

Для $f \leqq d$, $u^{(f)} \in U^{(f)}$ будет называться f-отрезком элемента $u^{(d)}$, если для всякого $g < f$ g-тая координата $u^{(f)}$ совпадает с g-той координатой $u^{(d)}$. $U^{(a)}$ и $u^{(a)}$ будут также записываться U и u.

Для всякого $b \in \Omega_a$ пусть будет $g^{(b)}(x^{(b)})\,(x^{(b)} \in U^{(b)})$ отображение $U^{(b)}$ в $\mathfrak{G}^{(b)}$. Образ в $\mathfrak{G}^{(b)}$ какого нибудь определённого элемента $\bar{u}^{(b)}$ при этом отображении будем записывать $g^{(b)}(\bar{u}^{(b)}) = \gamma^{(b)}_{u(b)}$. Назовём **таблицей подстановок** последовательность $A = [g^{(b)}(x^{(b)})]$, где b пробегает $\Omega_a \cdot g^{(b)}(x^{(b)})$ называется b-**той координатой** таблицы A и обозначается через $[A]_b$. Условимся называть **рангом** таблицы число $a-1$, если a конечное число, и число a, если a бесконечное ординальное число.[5]

Для всякого $b < a$, пусть будет $A^{(b)}$ таблица подстановок ранга b, все координаты которой совпадают с соответствующими координатами таблицы A. $A^{(b)}$ назовём b-**отрезком** таблицы A.

С помощью этих понятий мы можем теперь определить полное произведение групп $\mathfrak{G}^{(b)}$. Каждой таблице подстановок мы сопоставим отображение множества U в самое-себя, положив для всякого $u \in U$ $Au = u'$, причём координаты $u'^{(b)}$ элемента u' определяются следующим образом:

$$u'^{(0)} = u^{(0)}$$

и

$$u'^{(b)} = \gamma_{u(b)} \cdot u^{(b)}, \quad \text{где} \quad \gamma_{u(b)} = g^{(b)}(u^{(b)}) \in \mathfrak{G}^{(b)}.$$

Легко видеть, что для $b < a$ отображение, индуцированное таблицей A в $U^{(b)}$, соответствует как раз отрезку ранга b таблицы A.

Последовательное применение отображений, соответствующих таблицам $A = [g^{(b)}(x^{(b)})]$ и $A' = [g'^{(b)}(x^{(b)})]$, есть отображение $A'A$, соответствующее таблице

$$A'A = [g'^{(b)}(x^{(b)})]\,[g^{(b)}(x^{(b)})] = [g'^{(b)}(A^{(b)}x^{(b)}) \cdot g^{(b)}(x^{(b)})]. \tag{1, 6}$$

Тождественному отображению соответствует таблица $[e^{(b)}(x^{(b)})]$, где $e^{(b)}(x^{(b)})$ есть функция, тождественно равная единице группы $\mathfrak{G}^{(b)}$.

Каждая таблица A обладает обратной; а именно

$$A^{-1} = [g^{(b)}(x^{(b)})]^{-1} = [(g^{(b)}(A^{(b)-1}x^{(b)}))^{-1}], \tag{1, 7}$$

причём таблицы $A^{(b)-1}$ определяются рекурентно.

Тем самым совокупность $\mathfrak{S}$ отображений U (в самое себя), определённых вышеуказанным образом таблицами, представляют собой группу лодстановок множества U. Эту группу $\mathfrak{S}$ мы и называем полным произведением (трансфинитной) последовательности групп $\mathfrak{G}^{(b)}$ и записываем её в виде

$$\mathfrak{S} = \prod^{b<a} \circ\, \mathfrak{G}^{(b)}.$$

Группа $\mathfrak{S}$ может быть характеризована внутренними свойствами следующим образом:

[5] Таким образом, при конечном количестве групп ранг таблицы равен числу её координат. Если множество координат A подобно ряду целых чисел, то рангом A является ω. Таблицы ранга $\omega+1$ — суть те, последние координаты которых типа $g^{(\omega)}(x^{(\omega)})$ и. т. д.

Полное произведение $\mathfrak{S}$ (трансфинитной) последовательности групп подстановок $\mathfrak{G}^{(b)}$ множеств $M^{(b)} (b < a)$ есть группа всех таких подстановок σ теоретико-множественного произведения $U = \prod^{c<a} M^{(c)}$, что

1. для всякого $b<a$ непересекающиеся подмножества $u^{(b)} V^{(b)} = u^{(b)} \prod^{b \leqq c < a} M^{(c)}$ всех элементов U, обладающих отрезком $u^{(b)}$, суть системы импримитивности подстановки σ, и что

2. для всякого $b < a$ и для всякого зафиксированного $u^{(b)}$ подстановка b-тых координат элементов $u^{(b)} V^{(b)}$, индуцированная σ, является подстановкой принадлежащей к группе $\mathfrak{G}^{(c)}$.

В настоящей работе мы будем пользоваться только таблицами ранга $\leqq \omega$.

§ 2. ПОЛНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ КОНЕЧНЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП

Рассмотрим сперва случай полного произведения конечного числа конечных симметрических групп.

Пусть $\mathfrak{S}_{n_1}, \mathfrak{S}_{n_2}, \ldots, \mathfrak{S}_{n_s}$ симметрические группы подстановок конечных множеств $N^{(1)}, N^{(2)}, \ldots, N^{(s)}$ и пусть $N^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ содержит n_i элементов. Полное произведение

$$\mathfrak{S}_{n_1, n_2, \ldots, n_s} = \mathfrak{S}_{n_1} \circ \mathfrak{S}_{n_2} \circ \cdots \circ \mathfrak{S}_{n_s}$$

мы будем называть мета-симметрической группой подстановок множества $N = N^{(1)} \times N^{(2)} \times \cdots \times N^{(s)}$, а последовательность целых чисел $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$ — мета-степенью группы $\mathfrak{S}_{n_1, n_2, \ldots, n_s}$.

В силу определения полного произведения, $\mathfrak{S}_{n_1, n_2, \ldots, n_s}$ является группой всех подстановок множества $N = N^{(1)} \times N^{(2)} \times \cdots \times N^{(s)}$, для которых для всякого $i < s$ множества элементов N с зафиксированными i первыми координатами суть системы импримитивности.

Порядок группы $\mathfrak{S}_{n_1, n_2, \ldots, n_s}$ легко вычисляется по формуле (1, 4), и мы находим

$$(2, 1) \qquad \text{порядок } \mathfrak{S}_{n_1, n_2, \ldots, n_s} = n_1!(n_2!)^{n_1} \cdots (n_s!)^{n_1, n_2, \ldots, n_{s-1}}.$$

В частности, для случая когда все n_i равны простому числу p

$$(2, 2) \qquad \text{порядок } \mathfrak{S}_{\underbrace{p, p, \ldots, p}_{m}} = (p!)^{p^{m-1} + p^{m-2} + \cdots + 1}.$$

Поэтому наивысшая степень p, делящая порядок группы $\mathfrak{S}_{\underbrace{p, p, \ldots, p}_{m}}$ равняется $p^{p^{m-1} + p^{m-2} + \cdots + 1}$. Но это, как известно, также наивысшая степень p, делящая $p^m!$, т. е. порядок симметрической группы всех подстановок множества N. Тем самым доказана

Лемма 1. *Всякая силовская p-подгруппа группы $\mathfrak{S}_{\underbrace{p, p, \ldots, p}_{m}}$ является одновременно силовской p-подгруппой симметрической группы $\mathfrak{S}_{p^m}$.*

Структура силовской p-подгруппы $\mathfrak{P}_m$ группы $\mathfrak{S}_{p^m}$ изучалась в работе Kaloujnine [1]. Читатель, знакомый с этой работой, заметит, что группа $\mathfrak{P}_m$ является полным произведением m циклических групп порядка p (рассматриваемых как группы подстановок, соответствующих их регулярному представлению). В силу Леммы 1 тоже самое имеет место для силовских p-подгрупп группы $\mathfrak{S}_{\underbrace{p, p, \ldots, p}_{m}}$. Этот факт легко доказать и непосредственно. Докажем для этого следующую лемму:

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$ будут группами подстановок конечных множеств $M^{(1)}$ и $M^{(2)}$, а $\mathfrak{H}_i$ одной из силовских p-подгрупп группы $\mathfrak{G}_i$ $(i = 1, 2)$, тогда $\mathfrak{H}_1 \circ \mathfrak{H}_2$ является одной из силовских p-подгрупп группы $\mathfrak{G}_1 \circ \mathfrak{G}_2$.*

Доказательство. Совершенно ясно, что полное произведение подгруппы группы $\mathfrak{G}_1$ и подгруппы группы $\mathfrak{G}_2$ есть подгруппа группы $\mathfrak{G}_1 \circ \mathfrak{G}_2$.

Пусть m_1 — число элементов множества $M^{(1)}$. Порядки групп $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ обозначим через k_1, k_2, а наивысшие степени p, делящие k_1, k_2 через p^{l_1}, p^{l_2}. Тогда

$$\text{порядок } (\mathfrak{G}_1 \circ \mathfrak{G}_2) = k_1 k_2^{m_1},$$

а наивысшая степень p, делящая этот порядок, равняется $p^{l_1 + m_1 l_2}$. Но $p^{l_1 + m_1 l_2}$ является как раз порядком группы $\mathfrak{H}_1 \circ \mathfrak{H}_2$, а это и показывает, что $\mathfrak{H}_1 \circ \mathfrak{H}_2$ силовская p-подгруппа группы $\mathfrak{G}_1 \circ \mathfrak{G}_2$, ч. и. т. д.

Лемма обобщается по индукции непосредственно на случай полного произведения любого конечного числа групп подстановок. Силовская p-подгруппа симметрической группы $\mathfrak{S}_p$ есть циклическая группа порядка p и тем самым, в силу Леммы 2, силовская p-подгруппа мета-симметрической группы $\mathfrak{S}_{\underbrace{p, p, \ldots, p}_{m}}$ есть полное прозведение m циклических групп порядка p.

Таково положение вещей для случая полного произведения конечного числа конечных симметрических групп. Но, как мы видели в § 1, возможно также построить полное произведение трансфинитной последовательности групп подстановок. В частности, можно определить полное произведение трансфинитной последовательности конечных симметрических групп.

Если для каждого трансфинитного числа $b < a$, $\mathfrak{S}_{n_b}$ является симметрической группой подстановок конечного множества $N^{(b)}$ из n_b элементов, то полное произведение $\prod\limits^{b<a} \circ\, \mathfrak{S}_{n_b}$ мы будем, как и в случае конечного a, называть мета-симметрической группой теоретико-множественного произведения $\prod\limits^{b<a} N^{(b)}$, а (трансфинитную) последовательность (n_b) мета-степенью этой мета-симметрической группы.

Пусть $\mathfrak{S}_{\underbrace{p, p, \ldots}_{a}}$ будет мета-симметрической группой для которой все $n_b = p$, а $\mathfrak{P}_a$ полное произведение циклических групп порядка p, рассматриваемых как группы подстановок. Совершенно очевидно, что $\mathfrak{P}_a$ представляет некоторую подгруппу группы $\mathfrak{S}_{\underbrace{p,\, p,\, \ldots}_{a}}$. Ограничиваясь случаем $a = \omega$, мы покажем, что $\mathfrak{P}_\omega = \mathfrak{P}_\infty$ представляет „силовскую p-подгруппу“ группы $\mathfrak{S}_{\underbrace{p,\, p,\, \ldots}_{a}}$, если соответственным образом обобщить понятие p-группы, а также, что группа $\mathfrak{P}_\infty$ является в некотором смысле универсальной для обобщенных p-групп. В §§ 3, 4 мы изложим эти необходимые обобщения — т. е. теорию ван Данцига и её связь с понятием полного произведения.

§ 3. ПОЛУКОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ — УЛЬТРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Полуконечной будем называть группу $\mathfrak{G}$ обладающую последовательностью подгрупп

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{K}^{(0)} \supset \mathfrak{K}^{(1)} \supset \cdots \supset \mathfrak{K}^{(\nu)} \supset \cdots \tag{3, 1}$$

таких, что

IC. Для всякого ν индекс $(\mathfrak{G} : \mathfrak{K}^{(\nu)})$ конечен и

IIC. $\bigcap\limits_{\nu} \mathfrak{K}^{(\nu)} = 1(\mathfrak{G})$.

Последовательность подгрупп $\mathfrak{G}$ удовлетворяющих IC. и IIC. будем называть *цепочкой* и обозначать через $[(\mathfrak{K}^{(\nu)})]$.

Для всякой подгруппы $\mathfrak{H}$ полуконечной группы $\mathfrak{G}$ индекс $(\mathfrak{H} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{K}^{(\nu)})$ конечен и $\bigcap\limits_{\nu} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{K}^{(\nu)}) = 1(\mathfrak{H})$; таким образом подгруппа $\mathfrak{H}$ полуконечна.

Мы будем говорить, что цепочка $[(\mathfrak{K}^{(\nu)})]$ группы $\mathfrak{G}$ является *p-цепочкой*, если для всех ν $(\mathfrak{G} : \mathfrak{K}^{(\nu)})$ суть степени простого числа p. Полуконечная группа, обладающая p-цепочкой, будет называться *p_∞-группой*. (p_∞-группа может, конечно, иметь цепочки, не являющиеся p-цепочками, и может даже для разных простых чисел p' и p'' быть p'_∞-группой и p''_∞-группой. Это видно на простом примере аддитивной группы Z целых рациональных чисел, которая является q_∞-группой для любого простого числа q.)

Вполне очевидно, что любая конечная подгруппа p_∞-группы является p-группой. Отсюда следует в частности, что порядок какого-либо элемента p_∞-группы или бесконечен или является степенью p.

Если полуконечная группа $\mathfrak{G}$ обладает цепочкой $[(\mathfrak{K}^{(\nu)})]$ и если $\mathfrak{K}^{(\nu)}$ не обязательно инвариантные подгруппы группы $\mathfrak{G}$, то $[(\bigcap\limits_{A \in \mathfrak{G}} A\mathfrak{K}^{(\nu)}A^{-1})]$ будет также цепочкой группы $\mathfrak{G}$, состоящей из инвариантных подгрупп. При этом, если $[(\mathfrak{K}^{(\nu)})]$ — p-цепочка, то и $[(\bigcap\limits_{A \in \mathfrak{G}} A\mathfrak{K}^{(\nu)}A^{-1})]$ будет p-цепочкой. Впредь, когда мы будем говорить о цепочках, мы будем всегда подразумевать, что дело идет о цепочках, состоящих из инвариантных подгрупп группы $\mathfrak{G}$.

Если $\mathfrak{G}$ p_∞-группа, а $[(\mathfrak{K}^{(\nu)})]$ — p-цепочка $\mathfrak{G}$, то для каждого ν $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}^{(\nu)}$ является конечной p-группой. В конечной p-группе индекс двух последовательных членов всякого главного ряда равняется p. Из этого легко заключить (пополняя цепочку $[(\mathfrak{K}^{(\nu)})]$), что $\mathfrak{G}$ обладает цепочками $[(\mathfrak{L}^{(\nu)})]$ такими, что для каждого ν индекс $(\mathfrak{L}^{(\nu-1)}:\mathfrak{L}^{(\nu)})=p$. Такие p-цепочки мы будем называть главными p-цепочками.

В полуконечной группе $\mathfrak{G}$ цепочка $[(\mathfrak{K}^{(\nu)})]$ позволяет следующим образом определить метрику:

Пусть будет η вещественное положительное число <1, выбранное раз на всегда (и которое не будет меняться на протяжении всей работы). Для двух различных элементов A и B группы $\mathfrak{G}$ пусть будет n наибольшее из чисел ν таких, что $A^{-1}B\in\mathfrak{K}^{(\nu)}$.

Положим

$$d(A,B)=\eta^n.$$

(Определение это имеет смысл, ибо в силу II C. существуют такие μ, что $A^{-1}B\notin\mathfrak{K}^{(\mu)}$.)

Для каждого $A\in\mathfrak{G}$ положим

$$d(A,A)=0.$$

Функция явно удолетворяет нижеследующим условиям:

I U. $d(A,B)$ является или нулем или целой положительной степенью вещественного числа $\eta<1$.

II U. $d(A,B)=0$ тогда, и только тогда, если $A=B$.

III U. $d(A,B)=d(B,A)$.

IV U. $d(A,C)\leqq \operatorname{Max}\big(d(A,B),d(B,C)\big)$.

Имеет место более точное соотношение

IVa U. Если $d(A,B)\neq d(B,C)$,

то $d(A,C)=\operatorname{Max}\big(d(A,B),d(B,C)\big)$.

Функция d двух переменных, определённая на каком-либо множестве и удолетворяющая условиям I U—IV U называется ультра-метрическим расстоянием. Ультра-метрическим пространством называется множество, на котором определено ультраметрическое расстояние.[6]

Мы видим таким образом, что в полуконечой группе цепочка $[(\mathfrak{K}^{(\nu)})]$ позволяет определить структуру ультраметрического пространства.

Для трех любых элементов A,B,C группы $\mathfrak{G}$ AB и AC (а также BA и CA) лежат в том-же классе $\bmod\,\mathfrak{K}^{(\nu)}$ тогда, и только тогда, если B и C лежат в том-же классе. Поэтому

$$d(AB,AC)=d(BA,CA)=d(B,C)$$

и, в силу, этого умножение в группе непрерывно по отношению к опреде-

[6] Термины „ультраметрическое расстояние“ и „ультраметрическое пространство“ были введены М. Краснером.

лённой ультраметрике. Легко также убедиться, что отображение $A \to A^{-1}$ непрерывно для этой ультраметрики.

Полуконечную группу $\mathfrak{G}$, с определённой на ней вышеуказанным образом ультраметрикой, мы будем называть (полуконечной) ультраметрической группой.

Иногда более удобно рассматривать ультраметрическую группу как топологическую группу с топологией, соответствующей ультраметрике. За фундаментальную систему (открытых) окрестностей элемента $A \in \mathfrak{G}$ берется тогда совокупность классов $\bmod \mathfrak{K}^{(\nu)}$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ содержащих A.

Для характеризации замкнутых подмножеств (и, в частности, замнутых подгрупп) ультраметрической группы мы будем часто пользоваться следующей элементарной леммой:

Лемма 3. *Подмножество M группы $\mathfrak{G}$ замкнуто тогда, и только тогда, если*

$$M = \bigcap_{\mu} M \mathfrak{K}^{(\mu)}. \tag{3, 2}$$

Теория представлений конечных групп группами подстановок естественным образом обобщается на случай ультраметрических групп. Дадим краткий обзор этой обобщённой теории.

Пусть будет T ультраметрическое пространство, а $a, b, c, \ldots$ его элементы. Для каждого ν отношение $d(a, b) \leqq \eta^{\nu}$ является отношением эквивалентности в T. (Рефлексивность следует из II U, симметричность из III U, транзитивность из IV U.) Поэтому для каждого ν T разлагается в сумму попарно не пересекающихся множеств (классов эквивалентности). Эту эквивалентность мы будем называть ν-тым девизором Δ_{ν} пространства T, а классы девизора Δ_{ν} будем обозначать через $T_u^{(\nu)}$ (где u пробегает какое-то множество индексов). Совокупность классов $T_u^{(\nu)}$ будем записывать T/Δ_{ν}. Выражение „a сравнимо с b по модулю Δ_{ν}“ ($a \equiv b (\bmod \Delta_{\nu})$) будет означать, что a и b лежат в том-же классе эквивалентности $\bmod \Delta_{\nu}$.

Если ν пробегает неотрицательные целые числа, то последовательность девизоров Δ_{ν} ультраметрического пространства T удовлетворяет, очевидно, следующим условиям:

I D. T/Δ_0 состоит из одного единственного класса $T^0 = T$ („тривиальная эквивалентность“).

II D. Для всякого ν, каждый класс $T_u^{(\nu)} \in T/\Delta_{\nu}$ является объединением некоторых классов $T_u^{(\nu+1)}$ множества $T/\Delta_{\nu+1}$.

III D. Для двух различных элементов a и b из T существует такое целое число ν, что

$$a \not\equiv b (\bmod \Delta_{\nu}).$$

Обратно, если на каком-то множестве $\bar{T}$ определена последовательность эквивалентностей $\bar{\Delta}_{\nu}$ удолетворяющих условиям I D—III D и если, с одной стороны, для двух различных $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{T}$ положить $\bar{d}(\bar{a}, \bar{b}) = \eta^{m}$, где m есть наибольшее из чисел μ таких, что $\bar{a} \equiv \bar{b} (\operatorname{mod} \bar{\varDelta}_\mu)$ и, с другой стороны, $d(\bar{a}, \bar{a}) = 0$ для всякого $\bar{a} \in \bar{T}$, то легко проверить, что функция $\bar{d}$ удовлетворяет условиям IU—IVU и $\bar{T}$ становится таким образом ультраметрическим пространством, девизорами которого являются эквивалентности $\bar{\varDelta}_\nu$.

Отображение φ ультраметрического пространства T на ультраметрическое пространство T' будем называть гомометрией, если образ каждого класса ν-того девизора пространства T если класс ν-того девизора пространства $\bar{T}$, а прообраз каждого класса ν-того девизора T' есть объединение классов ν-того девизора T. Если существует гомометрия T на T', то мы будем говорить, что пространство T' гомометрично пространству T.

Изометрией $\varPhi$ ультраметрического пространства T на ультраметрическое пространство T' будем называть такую гомометрию, что прообраз каждого класса ν-того девизора $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ T' состоит из одного класса ν-того девизора пространства T; иначе говоря, $\varPhi$ есть такое отображение T на T', что для любых двух $a, b \in T$

$$d(a, b) = d'\big(\varPhi(a), \varPhi(b)\big) \text{ (где } d \text{ расстояние в } T, \text{ а } d' \text{ расстояние в } T').$$

Такое отображение $\varPhi$ автоматически одно-однозначно, т. к. из $\varPhi(a) = \varPhi(b)$ следует

$$0 = d'\big(\varPhi(a), \varPhi(b)\big) = d(a, b), \qquad \text{т. е.} \quad a = b.$$

Нам чаще всего придется рассматривать изометрии пространства T на самое себя. В таком случае мы будем просто говорить об изометриях пространства T. Совокупность изометрий пространства T образует группу, которую мы будем обозначать через $\mathfrak{S}(T)$.

Ультраметрическое пространство T будет называться конечным и однородным, если последовательность его девизоров $\varDelta_\nu$ вместо IID удовлетворяет более сильному условию

II'D: Для каждого ν существует целое число n_ν, такое что каждый класс из $T/\varDelta_\nu$ является объединением $n_{\nu+1}$ классов из $T/\varDelta_{\nu+1}$. $n_{\nu+1}$ будет называться индексом $\varDelta_{\nu+1}$ в $\varDelta_\nu$, а последовательность $(n_1, n_2, \ldots)$ — последовательностью индексов пространства T.

Теорема 1. Если T ультраметрическое конечное и однородное пространство, то его группа изометрий $\mathfrak{S}(T)$ полуконечна.

Доказательство. Всякая изометрия, в силу своего определения, индуцирует, для каждого ν, однозначное отображение $T/\varDelta_\nu$ на самое себя, т. е. подстановку конечного множества $T/\varDelta_\nu$. Пусть будет $\mathfrak{N}^{(\nu)}$ совокупность изометрий индуцирующих в $T/\varDelta_\nu$ тождественную подстановку. $\mathfrak{N}^{(\nu)}$ подгруппа $\mathfrak{S}(T)$ и $\varPhi_\nu \in \mathfrak{N}^{(\nu)}$ характеризуется соотношением $d\big(\varPhi_\nu(a), a\big) \leqq \eta^\nu$, для всякого $a \in T$. $\mathfrak{N}^{(\nu)}$ инвариантна в $\mathfrak{S}(T)$, ибо для каждого $\varPhi$ в $\mathfrak{S}(T)$ и для каждого $a \in T$ имеет место

$$d(\Phi\Phi_\nu\Phi^{-1}(a), a) = d(\Phi^{-1}(\Phi\Phi_\nu\Phi^{-1}(a)), \Phi^{-1}(a)) = d(\Phi_\nu(\Phi^{-1}(a)), \Phi^{-1}(a)) \leqq \eta^\nu.$$

$\Phi, \Phi' \in \Xi(T)$ лежат в том-же классе $\mathrm{mod}\,\mathfrak{N}^{(\nu)}$ тогда и только тогда, если они индуцируют ту-же подстановку в T/Δ_ν. Тем самым, для каждого ν группа $\Xi(T)/\mathfrak{N}^{(\nu)}$ конечна, ибо она изоморфна группе подстановок конечного множества.

Пусть $\Psi \in \bigcap_\nu \mathfrak{N}^{(\nu)}$. Тогда для каждого $a \in T$ и для каждого целого ν

$$d(\Psi(a), a) \leqq \eta^\nu,$$

т. е. $d(\Psi(a), a) = 0$, и тем самым, в силу II U

$$\Psi(a) = a,$$

что показывает, что $\Psi = 1(\Xi(T))$. Мы видим, что $\bigcap_\nu \mathfrak{N} = 1(\Xi(T))$. $[(\mathfrak{N}^{(\nu)})]$ цепочка группы $\Xi(T)$ и $\Xi(T)$ полуконечна, ч. и. т. д.

Цепочка $[(\mathfrak{N}^{(\nu)})]$ группы $\Xi(T)$, определённая в доказательстве Теоремы 1, будет называться канонической цепочкой. Впредь мы будем рассматривать группу $\Xi(T)$ как полуконечную ультраметрическую группу с ультраметрикой, определённой канонической цепочкой.

Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}'$ две ультраметрические группы. Мы будем говорить, что $\mathfrak{H}'$ гомоморфна $\mathfrak{H}$, если существует отображение φ $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}'$, которое одновременно является гомоморфизмом абстрактной группы $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}'$ и гомометрией пространства $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}'$. Если-же существует отображение Φ $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}'$, которое является изоморфизмом абстрактной группы $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}'$ и изометрией пространства $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}'$, то группы $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}'$ будет считаться изоморфными.

Если транзитивная подгруппа $\bar{\mathfrak{H}}$ группы $\Xi(T)$ гомоморфна в вышеуказанном смысле данной ультраметрической группе $\mathfrak{H}$, то мы будем называть $\bar{\mathfrak{H}}$ представлением группы $\mathfrak{H}$ (изометриями ультраметрического пространства T). Если $\bar{\mathfrak{H}}$ изомофна $\mathfrak{H}$, то мы будем говорить о точном представлении ультраметрической группы $\mathfrak{H}$.

Пусть $\mathfrak{G}$ будет ультраметрической группой и $[(\mathfrak{K}^{(\nu)})]$ её цепочкой. Установим все представления $\mathfrak{G}$.

Если $\mathfrak{H}$ подгруппа группы $\mathfrak{G}$, то мы будем обозначать через $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ совокупность (правых) классов $A\mathfrak{H}\,\mathrm{mod}\,\mathfrak{H}$. Для $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ классы $A\mathfrak{K}^{(\nu)}\mathfrak{H}\,\mathrm{mod}\,\mathfrak{K}^{(\nu)}\mathfrak{H}$ образуют, очевидно, последовательность разложений $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ на попарно не пересекающиеся множества. Эта последовательность явно удовлетворяет условиям I D и II D. Покажем, что она также удовлетворяет условию II' D и укажем соответствующие индексы n_ν. Для этого мы должны установить число классов $A\mathfrak{K}^{(\nu+1)}\mathfrak{H}$, содержащихся в одном классе $B\mathfrak{K}^{(\nu)}\mathfrak{H}$. Как видно, для $K, K' \in \mathfrak{K}^{(\nu)}$, $AK\mathfrak{K}^{(\nu+1)}\mathfrak{H}$ и $AK'\mathfrak{K}^{(\nu+1)}\mathfrak{H}$, лежащие в одном и том-же классе $\mathrm{mod}\,\mathfrak{K}^{(\nu)}\mathfrak{H}$, совпадают тогда и только тогда, если

$$AK' \in AK\mathfrak{K}^{(\nu+1)}\mathfrak{H},$$

откуда следует $K^{-1}K' \in \mathfrak{K}^{(\nu+1)}\mathfrak{H}$, т. е.

$$K^{-1}K' \in \mathfrak{K}^{(\nu)} \cap \mathfrak{K}^{(\nu+1)}\mathfrak{H}.$$

Тем самым искомое число $n_{\nu+1}$ равняется индексу

$$n_{\nu+1} = (\mathfrak{K}^{(\nu)} : \mathfrak{K}^{(\nu)} \cap \mathfrak{K}^{(\nu+1)}\mathfrak{H}).$$

Из этого видно также, что если $[(\mathfrak{K}^{(\nu)})]$ p-цепочка, то для всякого ν n_ν степень числа p.

Покажем наконец, что последовательность разложений $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ на классы $A\mathfrak{K}^{(\nu)}\mathfrak{H}$ удовлетворяет условию III D в том и только в том случае, если подгруппа $\mathfrak{H}$ замкнута в $\mathfrak{G}$.

Действительно, условие необходимо: пусть будет $A\mathfrak{H}$ класс $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ отличный от $\mathfrak{H}$. Вследствие условия III D должны существовать такие целые числа ν, что $\mathfrak{K}^{(\nu)}\mathfrak{H}$ не содержит $A\mathfrak{H}$. Поэтому $\bigcap\limits_\nu \mathfrak{K}^{(\nu)}\mathfrak{H} = \bigcap\limits_\nu \mathfrak{H}\mathfrak{K}^{(\nu)} = \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}$ замкнута в силу Леммы 3.

Если наоборот $\mathfrak{H}$ замкнута, то $\mathfrak{H} = \bigcap\limits_\nu \mathfrak{K}^{(\nu)}\mathfrak{H}$. Пусть будут $A\mathfrak{H}$ и $B\mathfrak{H}$ два разных класса из $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$, и пусть будет ν такое целое число, что $\mathfrak{K}^{(\nu)}\mathfrak{H}$ не содержит $B^{-1}A\mathfrak{H}$. Но тогда $B\mathfrak{K}^{(\nu)}\mathfrak{H} \not\supset A\mathfrak{H}$.

Когда мы впредь будем рассматривать $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ как ультраметрическое пространство, то будет подразумеваться, что дело идет об ультраметрике, определённой последовательностью разложений $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ на классы $\mathrm{mod}\,\mathfrak{K}^{(\nu)}\mathfrak{H}$.

Таким образом, мы доказали:

Л е м м а 4. *Для ультраметрической группы $\mathfrak{G}$ и для замнутых, и только для замнутых подгрупп $\mathfrak{H}$ группы $\mathfrak{G}$, разложение на классы $A\mathfrak{K}^{(\nu)}\mathfrak{H}$ $(\nu = 0, 1, 2 \ldots)$ определяет на $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ структуру ультраметрического пространства.*

З а м е ч а н и е I. Если $\mathfrak{H}$ единица группы $\mathfrak{G}$, то ультраметрическое пространство $\mathfrak{G}/\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$ совпадает с пространством, определённым цепочкой $[(\mathfrak{K}^{(\nu)})]$.

З а м е ч а н и е II. Для замнутой подгруппы $\mathfrak{H}$ группы $\mathfrak{G}$, отображение $A \to A\mathfrak{H}$ $\mathfrak{G}$ на $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ отображает класс $C\mathfrak{K}^{(\nu)}$ на $C\mathfrak{K}^{(\nu)}\mathfrak{H}$ и, с другой стороны, прообраз в $\mathfrak{G}$ класса $C\mathfrak{K}^{(\nu)}\mathfrak{H}$ является объединением классов $\mathrm{mod}\,\mathfrak{K}^{(\nu)}$. Поэтому, указанное отображение — гомометрия пространства $\mathfrak{G}$ на пространство $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$.

Известно, что если абстрактная группа $\mathfrak{G}'$ гомоморфна абстрактной группе $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{G}'$ изоморфна факторгруппе $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$, где $\mathfrak{D}$ инвариантная подгруппа группы $\mathfrak{G}$ — прообраз единицы группы $\mathfrak{G}'$. Канонический гомоморфизм группы $\mathfrak{G}$ на $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ осуществляется отображением $A \to A\mathfrak{D}/\mathfrak{D} (A \in \mathfrak{G})$. Если $\mathfrak{G}$ ультраметрическая группа, то в силу Леммы 4 и Замечания II этот гомоморфизм является одновременно гомометрией в том и только в том случае, если нормальный делитель $\mathfrak{D}$ замкнут в $\mathfrak{G}$. Этим доказывается

Лемма 5. Ультраметрическая группа $\mathfrak{G}'$ гомоморфна ультраметрической группе $\mathfrak{G}$, тогда и только тогда если она изоморфна факторгруппе $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ группы $\mathfrak{G}$ по замкнутому нормальному делителю $\mathfrak{D}$.

Пусть $\mathfrak{H}$ подгруппа группы $\mathfrak{G}$. Если каждому элементу $A \in \mathfrak{G}$ сопоставить подстановку

$$X\mathfrak{H} \to AX\mathfrak{H}$$

множества $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$, то, как известно, совокупность этих подстановок образует представление абстрактной группы $\mathfrak{G}$. Будем записывать это представление через $\mathfrak{T}(\mathfrak{G};\mathfrak{G}/\mathfrak{H})$.

Известно, что, вплоть до подобия, все транзитивные представления абстрактной группы $\mathfrak{G}$ могут быть получены таким образом.

Если $\mathfrak{G}$ ультраметрическая группа, а $\mathfrak{H}$ замкнутая подгруппа группы $\mathfrak{G}$, то мы можем рассматривать $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ как ультраметрическое пространство. В этом случае, для всякого целого ν и для всякого элемента $A \in \mathfrak{G}$ подстановка $X\mathfrak{H} \to AX\mathfrak{H}$ отображает каждый класс $X'\mathfrak{K}^{(\nu)}\mathfrak{H}$ на класс $AX'\mathfrak{K}^{(\nu)}\mathfrak{H}$. Таким образом, эта подстановка является изометрией пространства $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{T}(\mathfrak{G};\mathfrak{G}/\mathfrak{H})$ есть подгруппа группы $\mathfrak{S}(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})$.

Положим $\mathfrak{H}^* = \bigcap\limits_{C \in \mathfrak{G}} C\mathfrak{H}C^{-1}$. $\mathfrak{T}(\mathfrak{G};\mathfrak{G}/\mathfrak{H})$ изоморфна, как абстрактная группа, факторгруппе $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}^*$; причём изоморфизм осуществляется соответствием

$$\bar{A} = (X\mathfrak{H} \to AX\mathfrak{H}) \longleftrightarrow A\mathfrak{H}^*/\mathfrak{H}^*.$$

Будем рассматривать $\mathfrak{T}(\mathfrak{G};\mathfrak{G}/\mathfrak{H})$ как ультраметрическую группу и обозначим её каноническую цепочку через $[(\mathfrak{T}^{(\nu)}(\mathfrak{G};\mathfrak{G}/\mathfrak{H}))]$. В силу определения канонической цепочки, изометрия $\bar{A} = (X\mathfrak{H} \to AX\mathfrak{H})$ принадлежит к $\mathfrak{T}^{(\nu)}(\mathfrak{G};\mathfrak{G}/\mathfrak{H})$ в том и только в том случае, если она сохраняет все классы $\operatorname{mod} \mathfrak{K}^{(\nu)}\mathfrak{H}$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы A принадлежал к $\bigcap\limits_{C \in \mathfrak{G}} C\mathfrak{K}^{(\nu)}\mathfrak{H}C^{-1} = \mathfrak{K}^{(\nu)}\mathfrak{H}^*$. Но $[(\mathfrak{K}^{(\nu)}\mathfrak{H}^*)]$ является как раз цепочкой группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}^*$ и поэтому отображение

$$\bar{A} = (X\mathfrak{H} \to AX\mathfrak{H}) \longleftrightarrow A\mathfrak{H}^*/\mathfrak{H}^*$$

изометрия пространства $\mathfrak{T}(\mathfrak{G};\mathfrak{G}/\mathfrak{H})$ на пространство $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}^*$. Таким образом, ультраметрическая группа $\mathfrak{T}(\mathfrak{G};\mathfrak{G}/\mathfrak{H})$ изоморфна ультраметрической группе $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}^*$ и является представлением ультраметрической группы $\mathfrak{G}$. Это представление точное, если $\mathfrak{H}^* = 1(\mathfrak{G})$.

Регулярным представлением $\mathfrak{G}$ называется то, которое получается вышеуказанным образом, если за подгруппу $\mathfrak{H}$ взять единицу $1(\mathfrak{G})$ группы $\mathfrak{G}$.

Пусть будет $\mathfrak{Q}$ ультраметрической p_∞-группой с p-цепочкой $[(\mathfrak{K}^{(\nu)})]$. В силу изложенной теории представлений, $\mathfrak{Q}$ обладает представлениями, являющимися группами изометрий конечных и однородных пространств с последовательностями индексов, которые суть степени p.

Если, в частности выбрать в $\mathfrak{Q}$ главную p-цепочку и расссматривать соответствующую ультраметрику $\mathfrak{Q}$, то можно получить представления $\mathfrak{Q}$ как группы изометрий ультраметрических пространств с последовательностью индексов типа $(p, p, \ldots)$. Такие пространства мы будем называть p-пространствами. Среди таких представлений всегда имеются и точные — например регулярное представление.

§ 4. ПРОСТРАНСТВА КАНТОРА И ГРУППЫ КАНТОРА

Метрическое пространство полно, если в нём любая последовательность Коши имеет предел.

Конечное и однородное ультраметрическое полное пространство назовем пространством Кантора. p-пространством Кантора мы будем называть пространство Кантора с последовательностью индексов типа $(p, p, \ldots, p, \ldots)$.

Ультраметрическую группу, пространство которой является пространством Кантора, назовём группой Кантора. Если группа Кантора является p_∞-группой, мы будем называть её p-группой Кантора.

В силу известных результатов Ван Данцига о пополнении метрических групп, любая ультраметрическая группа может быть (и притом однозначным образом) пополнена до группы Кантора.

Пусть $N^{(1)}, N^{(2)}, \ldots, N^{(\nu)}, \ldots$ последовательность конечных множеств $N^{(\nu)}$. Предположим, что $N^{(\nu)}$ состоит из n_ν элементов, которые мы будем обозначать через ξ_ν. Прибавим к этой последовательности вспомагательное множество $N^{(0)}$ из одного единственного элемента ξ_0. В теоретико-множественном произведении $N = \prod_{\nu=0}^{\infty} N^{(\nu)}$ введем ультраметрическое расстояние d_N положив: 1. для двух разных элементов $\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_\nu, \ldots)$ и $\xi' = (\xi'_0, \xi'_1, \ldots, \xi'_\nu, \ldots)$ из N, $d_N(\xi, \xi') = \eta^m$, где $m+1$ есть наименьшее такое число, что $\xi'_{m+1} \neq \xi_{m+1}$ и 2. $d_N(\xi, \xi) = 0$ для всякого $\xi \in N$.

Нетрудно убедиться, что N пространство Кантора с последовательностью индексов $(n_1, n_2, \ldots, n_\nu, \ldots)$.

Теорема 2. *Два пространства Кантора T и T' изометричны тогда и только тогда, если их последовательности индексов совпадают.*

Следствие. Пространство Кантора с последовательностью индексов $(n_1, n_2, \ldots, n_\nu, \ldots)$ изометрично вышеопределённому пространству $N = \prod_{\nu=0}^{\infty} N^{(\nu)}$.

Доказательство теоремы: Условие необходимо. Действительно, предположим, что T и T', — изометричны. Изометрия T на T' — по своему определению, налагает одно-однозначно для всякого $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ каждый класс $T^{(\nu)} \in T/\Delta_\nu$ на класс $T'^{(\nu)} \in T'/\Delta'_\nu$ и индуцирует поэтому одно-однозначное отображение множества T/Δ_ν на множество T'/Δ'_ν. Так как эти множества конечны, то они должны содержать одинаковое число элементов. Пусть $(n_1, n_2, \ldots, n_\nu, \ldots)$ и $(n'_1, n'_2, \ldots, n'_\nu, \ldots)$ последовательности индексов пространств T и T', тогда число элементов в T/Δ_ν $n_1 n_2 \ldots n_\nu$, а число элементов в T'/Δ'_ν $n'_1 n'_2 \ldots n'_\nu$. Так как это имеет место для $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ то отсюда следует, что $n_\nu = n'_\nu$. Условие достаточно. Для доказательства мы покажем, что если $(n_1, n_2, \ldots, n_\nu, \ldots)$ последовательность индексов T, то T изометрично пространству $N = \prod\limits_{\nu=0}^{\infty} N^{(\nu)}$ определённому выше.

Пусть $T^{(\nu)} \in T/\Delta_\nu$. Согласно II' D $T^{(\nu)}$ распадается на $n_{\nu+1}$ классов $T/\Delta_{\nu+1}$. Выберем для $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ и для каждого элемента $T^{(\nu)} \in T/\Delta_\nu$ одно-однозначное отображение $\psi_{T^{(\nu)}}$ множества классов $\dot{T}^{(\nu+1)}$ содержащихся в $T^{(\nu)}$ на множество $N^{(\nu+1)}$. Тогда $\psi_{T^\nu}(\dot{T}^{(\nu+1)}) = \xi_{\nu+1}$, где $\xi_{\nu+1} \in N^{(\nu+1)}$. Положим $\psi(T^{(0)}) = \xi_0$, $\xi_0 \in N^{(0)}$.

Рекурентно по ν построим теперь следующим образом одно-однозначное отображение φ_ν множеств T/Δ_ν на множество $\prod\limits_{\lambda=1}^{\nu} N^{(\lambda)}$ ν-отрезков элементов N:

1. Положим $\varphi_0(T^{(0)}) = \psi(T^{(0)}) = \xi_0$.

2. Предположим, что мы уже определили отображение φ_ν множества T/Δ_ν на множество $\prod\limits_{\lambda=0}^{\nu} N^{(\lambda)}$. Тогда для каждого $T^{(\nu)} \in T/\Delta_\nu$ $\varphi_\nu(T^{(\nu)})$ является элементом $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_\nu)$ множества $\prod\limits_{\lambda=0}^{\nu} N^{(\lambda)}$. Если $\dot{T}^{(\nu+1)} \in T/\Delta_{\nu+1}$ класс содержащийся в $T^{(\nu)}$ и если $\psi_{T^{(\nu)}}(\dot{T}^{(\nu+1)}) = \xi_{\nu+1}$, то мы положим

$$\varphi_{\nu+1}(\dot{T}^{(\nu+1)}) = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_\nu, \xi_{\nu+1}).$$

Поступая так с каждым классом из T/Δ_ν, мы определим отображение $\varphi_{\nu+1}$ множества $T/\Delta_{\nu+1}$ на множество $\prod\limits_{\lambda=0}^{\nu+1} N^{(\lambda)}$, которое будет, очевидно, одно-однозначным.

Пусть $y = (\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_\nu, \ldots)$ элемент N. Для всякого $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ $\varphi_\nu^{-1}(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_\nu)$ есть класс $U^{(\nu)} \in T/\Delta_\nu$ и согласно построению φ_ν, $U^{(\nu+1)} \subset U^{(\nu)}$. Определяемый сходящейся последовательностью множеств $U^{(0)}, U^{(1)}, \ldots, U^{(\nu)}, \ldots$ элемент из T мы ставим в соответствии элементу $y \in N$.

Легко видеть, что этим устанавливается взаимно-однозначное отображение пространства N на пространство T. Согласно определению ультраметрики, это отображение будет изометрией, ч. и. т. д.

Теорема 3. *Группа изометрий Кантора пространства T с последовательностью индексов $(n_1, n_2, \ldots, n_\nu, \ldots)$ является метасимметрической группой $\mathfrak{S}_{n_1, n_2, \ldots}$ метастепени $(n_1, n_2, \ldots, n_\nu, \ldots)$.*

Доказательство. Эта теорема непосредственно следует из Теоремы 2 и последующего следствия. Действительно, пространство T изометрично пространству $N=\prod_{\lambda=0}^{\infty} N^{(\lambda)}$, где классы $N/\Delta_\nu^{(N)}$ по ν-тому девизору $\Delta_\nu^{(N)}$ являются как раз подмножествами элементов из N с совпадающими ν-отрезками. Изометрия пространства N есть любая подстановка множества такая, что для каждого $\nu=0, 1, 2, \ldots$ она отображает класс из $N/\Delta_\nu^{(N)}$ на класс того-же множества. Согласно изложенному в § 2, эти подстановки как раз элементы мета-симметрической группы $\mathfrak{S}_{n_1, n_2, \ldots}$, ч. и. т. д.

Пусть $[g_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1})]$ $(\nu=0, 1, 2, \ldots)$ таблицы представляющие элементы из $\mathfrak{S}_{n_1, n_2, \ldots}$ $\left((x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}) \in \prod_{\lambda=1}^{\nu-1} N^{(\lambda)}\right.$ и $g_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1})$ отображение $\prod_{\lambda=1}^{\nu-1} N^{(\lambda)}$ в симметрическую группу подстановок множества $\left.N^{(\nu)}\right)$. Такая таблица сохраняет все классы из $N/\Delta^{(\nu)}$ тогда и только тогда, если для $\mu \leqq \nu$ $g_\mu(x_1, x_2, \ldots, x_{\mu-1}) \equiv 1(\mathfrak{S}_{n_\mu})$, т. е. если $g_\mu(x_1, x_2, \ldots, x_{\mu-1})$ отображение, тождественно равное тождественной подстановке множества $N^{(\mu)}$. Совокупность таких подстановок является инвариантной подгруппой $\mathfrak{K}^{(\nu)}$ группы $\mathfrak{S}_{n_1, n_2, \ldots}$, и $[(\mathfrak{K}^{(\nu)})]$ есть как раз та каноническая цепочка группы $\mathfrak{S}_{n_1, n_2, \ldots}$, которая по условию прошлого параграфа определяет ультраметрику в $\mathfrak{S}_{n_1, n_2, \ldots}$.

Согласно закону умножения таблиц подстановок (1, 6), две таблицы находятся в том-же классе mod $\mathfrak{K}^{(\nu)}$ тогда и только тогда, если их первые ν координат совпадают. Если мы обозначим через $\Gamma^{(\nu)}$ множество всех отображений $\prod_{\lambda=1}^{\nu-1} N^{(\lambda)}$ в симметрическую группы $\mathfrak{S}_{n_\nu}$ множества $N^{(\nu)}$, то видно, что $\mathfrak{S}_{n_1, n_2, \ldots}$ изометрично пространству $\prod_{\nu=1}^{\infty} \Gamma^{(\nu)}$ с соответствующей ультраметрикой. Это показывает, что ультраметрическое пространство группы $\mathfrak{S}_{n_1, n_2, \ldots}$ является пространством Кантора с последовательностью индексов $(n_1!, (n\ !)^{n_1}, (n_3!)^{n_1 n_2}, \ldots)$. Группа $\mathfrak{S}_{n_1, n_2, \ldots}$ есть следовательно группа Кантора.

Перейдём теперь к частному случаю p-пространства Кантора — пространство, которое мы обозначим через E_∞. Группа изометрий этого пространства есть метасимметрическая группа $\mathfrak{S}_{p, p, \ldots}$ метастепени $(p, p, \ldots)$. Согласно Теореме 2, можно рассматривать E_∞ как пространство $\prod_{\lambda=0}^{\infty} E^{(\lambda)}$, где для $\lambda=1, 2, \ldots$, множества $E^{(\lambda)}$ состоят из p элементов, а множество $E^{(0)}$ состоит из одного элемента ξ_0. Выберем за $E^{(\lambda)}$ множество элементов поля Галуа G_p, состоящего из p элементов. Таким образом, E_∞ становится векторным пространством счетного измерения с основным полем G_p, т. е. E_∞ — множество векторов $\xi=(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots)$ (где ξ_0 — фиксированный элемент, а ξ_λ, $\lambda = 1, 2, \ldots$ пробегают независимо друг от друга элементы поля G_p) с ультраметрикой, определённой девизорами $\varDelta^{(E_\infty)}$, такими что для $X = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots)$, $Y = (\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots)$

$$X \equiv Y (\mathrm{mod}\ \varDelta_\nu^{(E_\infty)})$$

тогда и только тогда, если $\xi_\lambda = \eta_\lambda$ для $\lambda \leqq \nu$.

Обозначим через $[a]^{(\nu)} (a \in G_p)$ циклическую подстановку $n \to n + a$ множества $E^{(\nu)}$, а через $[G_p]^{(\nu)}$ — совокупность таких подстановок. При этом обозначение для произведения двух циклических подстановок имеем

$$[a]^{(\nu)} [b]^{(\nu)} = [a + b]^{(\nu)},$$

и $[G_p]^{(\nu)}$ является циклической группой порядка p.

Пусть $\mathfrak{P}_\infty$ — полное произведение групп $[G_p]: \mathfrak{P}_\infty = \prod\limits_{\nu=1}^{\infty} \circ [G_p]^{(\nu)}$. $\mathfrak{P}_\infty$ является группой некоторых изометрий пространства E_∞, и при нашем обозначении, таблицы подстановок, соответствующие элементам этой группы, пишутся в виде $[a_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1})]$, где $a_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1})$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ суть функции со значениями в G_p, определённые на пространствах $E_{\nu-1}$ $(\nu-1)$-отрезков элементов E_∞. Закон произведения этих таблиц, частный случай общего закона (1, 6), следующий:

$$\begin{aligned} &[a_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1})]\, [b_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1})] = \\ &= \big[a_\nu\big(x_1 + b, x_2 + b(x_1), \ldots, x_{\nu-1} + b(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-2})\big) + b_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1})\big]. \end{aligned} \tag{4, 1}$$

Единицей $\mathfrak{P}_\infty$ является таблица, где все $a_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1})$ тождественно равны 0. Для каждой таблицы $[a_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1})]$ обратная таблица $[a_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1})]^{-1}$ равна

$$[a_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1})]^{-1} = [-a_\nu(x_1 - a, x_2 - a(x_1 - a), \ldots)]. \tag{4, 2}$$

Пусть $\mathfrak{D}_s$ — группа таблиц из $\mathfrak{P}_\infty$, s первых координат которых тождественно равны 0. Мы будем говорить, что эти таблицы г л у б и н ы[7] $\geqq s$. $\mathfrak{D}_s$ — инвариантная подгруппа группы $\mathfrak{P}_\infty$ всех изометрий, сохраняющих классы $E_\infty / \varDelta_s^{(E_\infty)}$, т. е. $\mathfrak{D}_s = \mathfrak{P}_\infty \cap \mathfrak{K}^{(\nu)}$, и $[(\mathfrak{D}_\nu)]$ — каноническая цепочка группы $\mathfrak{P}_\infty$.

$$A = [a_\nu(x_1, x_1, \ldots, x_{\nu-1})] \equiv B = [b_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1})] \qquad (\mathrm{mod}\ \mathfrak{D}_s) \tag{4, 3}$$

тогда и только тогда, если первые s координат этих таблиц совпадают.

Обозначим через $\Xi^{(\nu)}$ множество всех отображений $a_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1})$ $E_{\nu-1}$ в G_p, тогда ультраметрическое пространство группы $\mathfrak{P}_\infty$ изометрично пространству $\prod\limits_{\nu=0}^{\infty} \Xi^{(\nu)}$, т. е. $\mathfrak{P}_\infty$ — группа Кантора с последовательностью индексов $(p, p^p, p^{p^2}, \ldots)$. Тем самым:

[7] Все вышесказанное является непосредственным обобщением теории, изложенной в работе Kaloujnine [1].

1. $\mathfrak{P}_\infty$ является p_∞-группой.

2. $\mathfrak{P}_\infty$ — замкнутая подгруппа группа $\mathfrak{S}_{p,p,p,\ldots}$. (Ибо $\mathfrak{P}_\infty$ полное подпространства $\mathfrak{S}_{p,p,p,\ldots}$).

$$\mathfrak{P}_\infty \mathfrak{K}^{(\nu)}/\mathfrak{K}^{(\nu)} \cong \mathfrak{P}_\infty/\mathfrak{D}_\nu \cong \mathfrak{P}_\nu = \prod_{\sigma=1}^{\nu} [G_p]^{(\sigma)},$$

и тем самым $\mathfrak{P}_\infty \mathfrak{K}^{(\nu)}/\mathfrak{K}^{(\nu)}$ является силовской p-подгруппой группа $\mathfrak{S}_{p,p,\ldots}$ $\mathfrak{K}^{(\nu)} \cong \cong \mathfrak{S}_{p,p,\ldots,p}$.

Из результатов ван Данцига[8], а также из более общих результатов Куроша[9] вытекает, что в силу свойств 1—3, группа $\mathfrak{P}_\infty$ является максимальной p_∞-подгруппой группа $\mathfrak{S}_{p,p,\ldots}$ и что все максимальные p-подгруппы группы $\mathfrak{S}_{p,p,\ldots}$ изоморфны между собой.

В прошлом параграфе мы видели, что всякая p_∞-группа обладает точным представлениям изометриями p-пространств.

Если $\mathfrak{H}$ p_∞-группа Кантора, то она обладает точными представлениями изометриями p-пространства Кантора, т. е. $\mathfrak{S}_{p,p,\ldots}$ содержит замкнутую подгруппу $\mathfrak{H}'$, изоморфную $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{H}'$ также замкнутая подгруппа некоторой максимальной p_∞-подгруппы $\mathfrak{Q}$ группы $\mathfrak{S}_{p,p,\ldots}$, и в силу вышесказанного группа $\mathfrak{Q}$ изоморфна группе $\mathfrak{P}_\infty$. Этим показано, что любая p_∞-группа Кантора изоморфна (по крайней мере одной) замкнутой подгруппе группы $\mathfrak{P}_\infty$.

Наконец, если $\mathfrak{H}$ произвольная p_∞-группа, не обязательно полная, то её всегда можно погрузить в p_∞-группу Кантора $\bar{\mathfrak{H}}$, и, так как $\bar{\mathfrak{H}}$ изоморфна некоторой подгруппе группы $\mathfrak{P}_\infty$, то и группа $\mathfrak{H}$ изоморфна некоторой подгруппе этой группы. Таким образом,

для всякой p_∞-группы $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{P}_\infty$ содержит подгруппу, изоморфную $\mathfrak{H}$. С другой стороны, группа $\mathfrak{P}_\infty$ сама p_∞-группа; так что, если $\mathfrak{B}$-группа, которая содержит для любой p_∞-группы $\mathfrak{H}$ подгруппу $\mathfrak{H}'$, изоморфную $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{B}$ содержит также в частности подгруппу изоморфную $\mathfrak{P}_\infty$. В этом смысле группа $\mathfrak{P}_\infty$ есть универсальная группа для p_∞-групп.[10]

§ 5. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПОДГРУППЫ ГРУППЫ $\mathfrak{P}_\infty$

В предыдущем параграфе мы охарактеризовали группу $\mathfrak{P}_\infty$ как силовскую p_∞-подгруппу группы изометрий p-пространства Кантора. Мы видели, кроме того, что $\mathfrak{P}_\infty$ допускает (каноническую) ультраметрику, соответствующую цепочке $[(\mathfrak{D}_s)]$, где $\mathfrak{D}_s$ подгруппа таблиц глубины $\geqq s$. Относительно этой ультраметрики $\mathfrak{P}_\infty$ является группой Кантора, и для каждого $s = 0, 1, 2, \ldots$ фактор-группа $\mathfrak{P}_\infty/\mathfrak{D}_s$ изоморфна группе $\mathfrak{P}_\infty$ таблиц ранга s.

[8] См. [3].

[9] См. [4].

[10] $\mathfrak{P}_\infty$ не единственная универсальная в этом смысле p_∞-группа. Легко дать примеры других таких групп, не изоморфных группе $\mathfrak{P}_\infty$.

В этом параграфе мы обобщим результаты о характеристических подгруппах групп $\mathfrak{P}_{\infty}$, установленных в работе Kaloujnine [1], на случай группы $\mathfrak{P}_{\alpha}$.

Резюмируем сначала то, что было доказано в цитируемой работе для характеристических подгрупп групп $\mathfrak{P}_m$.

Группа $\mathfrak{P}_m$ является полным произведением циклических групп порядка p и может быть представлена в виде группы таблиц

$$A = [a, a(x_1), a(x_1, x_2), \ldots, a(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})] = [a(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1})], \tag{5, 1}$$

(где для $\nu = 1, 2, \ldots, m$ $a(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1})$— функции, аргументы и значения которых пробегают поле Галуа G_p) с законом умножения: [11]

$$\begin{aligned} AB = {} & [a, a(x_1), \ldots, a(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})]\,[b, b(x_1), \ldots, b(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})] = \\ & = [a+b, a(x_1+b)+b(x_1), \ldots, a(x_1+b, x_2+b(x_1), \ldots, x_{m-1} + \\ & + b(x_1, x_2, \ldots, x_{m-2})) + b(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})]. \end{aligned} \tag{5, 2}$$

Функции $a(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1})$ можно рассматривать как многочлены от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}$ с коэффициентами из G_p, при том такие, что их степень относительно каждой из переменных не превосходит $p-1$. (Такие многочлены мы будем называть приведёнными). Действительно, чтобы привести $a(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1})$ к такому виду, достаточно применить формулу Лагранжа:

$$\begin{aligned} & a(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}) = \\ & = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\nu-1}) \in G_p \times G_p \times \cdots \times G_p} \frac{x_1 - x_1^p}{x_1 - \alpha_1} \cdot \frac{x_2 - x_2^p}{x_2 - \alpha_2} \cdots \frac{x_{\nu-1} - x_{\nu-1}^p}{x_{\nu-1} - \alpha_{\nu-1}} a(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\nu-1}). \end{aligned} \tag{5, 3}$$

С другой стороны, известно, что два многочлена $f(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1})$ и $g(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1})$ из кольца $G_p[x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}]$ многочленов переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}$ определяют одну и ту-же функцию тогда и только тогда, если они сравнимы по модулю идеала $(x_1^p - x_1, x_2^p - x_2, \ldots, x_{\nu-1}^p - x_{\nu-1})$. Тем самым представление функций приведёнными многочленами одно-однозначно. Поэтому мы впредь будем рассматривать функции $a(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1})$ как приведённые многочлены. При этом условии умножение таблиц по вышеуказанному закону проводится как рациональная операция в кольцах $G_p[x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}]$, после чего многочлены результата редуцируются $\operatorname{mod}(x_1^p - x_1, x_2^p - x_2, \ldots, x_{\nu-1}^p - x_{\nu-1})$ к приведённой форме.

[11] В работе Kaloujnine [1] закон умножения таблиц определён в виде

$$\begin{aligned} & [a, a(x_1), \ldots, a(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})]\,[b, b(x_1), \ldots, b(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})] = \\ & = [a+b, a(x_1) + b(x_1 - a), \ldots, a(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}) + b(x_1 - a, \ldots, x_{m-1} + \\ & + b(x_1 - a, \ldots, x_{m-1} - a(x_1, x_2, \ldots, x_{m-2}))]. \end{aligned}$$

Это объясняется несколько иным определением таблиц в этой работе. Все приведённые там доказательства остаются дословно неизменными, если за закон умножения принять тот, который определён в настоящее работе.

Введём в совокупности приведённых одночленов лексикографический порядок. С этой целью мы определяем высоту приведённого одночлена $X_h = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_{\nu-1}^{i_\nu}$ как число $h(x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_{\nu-1}^{i_{\nu-1}}) = 1 + i_1 + i_2 p + \cdots + i_{\nu-1} p^{\nu-2}$. Если многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1})$ является суммой $\sum c_\lambda X_\lambda$ различных одночленов X_λ, то за высоту $h(f(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}))$ многочлена $f(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1})$ мы принимаем наибольшее из чисел λ таких, что $c_\lambda \neq 0$.

Для таблицы $A = [a(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1})]$ мы обозначаем через $|A|_\nu$ высоту её ν-той координаты $a(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1})$, а последовательность целых чисел $\langle |A|_1, |A|_2, \ldots, |A|_m \rangle$ мы называем индикатрисой таблицы A и обозначаем её через $|A|$. (Легко видеть, что $0 \leqq |A|_\nu \leqq p^{\nu-1}$. С другой стороны, всякая последовательность $K = \langle k_1, k_2, \ldots, k_m \rangle$ целых чисел $0 \leqq k_\nu \leqq p^{\nu-1}$ — индикатриса какой-то таблицы.)

В совокупности таблиц (и индикатрис) мы вводим частичную упорядоченность, положив $|A| \leqq |B|$ тогда и только тогда, если для каждого $\nu = 1, 2, \ldots, m$, $|A|_\nu \leqq |B|_\nu$.

В работе Kaloujnine [1] доказывается следующее:

1. Если $K = \langle k_1, k_2, \ldots, k_m \rangle$ индикатриса, то совокупность таблиц $A \in \mathfrak{P}_m$ таких, что $|A| \leqq K$ образует подгруппу группы $\mathfrak{P}_m$.

Такую подгруппу мы называем параллелотопической подгруппой (сокращено Г. П.), а последовательность K — индикатрисой этой Г. П.

Ясно, что Г. П. вполне определяется своей индикатрисой.[12]

2. Г. П., вообще говоря, не инвариантные подгруппы группы. Но можно характеризовать те среди них, которые обладают этим свойством.

Если $K = \langle 0, 0, \ldots, 0, k_{s+1}, k_{s+2}, \ldots, k_m \rangle$ (где k_{s+1} первый неравный нулю член K) индикатриса Г. П. $\mathfrak{G}$, то подгруппа $\mathfrak{G}$ инвариантна тогда и только тогда, если для $\sigma \geqq s+1$ $k_\sigma \geqq p^{\sigma-1} - p^s$.

Инвариантные Г. П. мы обозначаем через Г. П. И.

3. Оказывается, что для $p \neq 2$ совокупность Г. П. И. совпадает с совокупностью характеристических подгрупп $\mathfrak{P}_m$.[13]

Можно установить индикатрисы различных характеристических подгрупп, определённых внутренними свойствами группы $\mathfrak{P}_m$. Так, например, μ-тый член нисходящего центрального ряда имеет индикатрису

$$(5,4) \qquad \langle (1-\mu)^+, (p-\mu)^+, (p^2-\mu)^+, \ldots, (p^{m-1}-\mu)^+ \rangle$$

(где $(a)^+ = \mathrm{Max}(a, 0)$). Оказывается, что в группе $\mathfrak{P}_m$ нисходящий и восходящий центральные ряды совпадают.

[12] Легко видеть, что совокупность Г. П. образует дистрибутивную структуру. Этот факт в неявном виде неоднократно употребляется в работе.

[13] Для $p = 2$ это утверждение неверно.

Все вышеуказанные результаты легко обобщаются на случай группы $\mathfrak{P}_\infty(p \neq 2)$, если мы будем рассматривать $\mathfrak{P}_\infty$ как ультраметрическую группу с канонической метрикой и условимся:

а. Рассматривать только замкнутые подгруппы группы $\mathfrak{P}_\infty$.

б. Понимать под автоморфизмом группы $\mathfrak{P}_\infty$ только такие, которые сохраняют её ультраметрику т. е. сохраняют в целом все группы $\mathfrak{D}_s$.[14] Характеристическими подгруппами будем называть только такие замкнутые подгруппы $\mathfrak{P}_\infty$, которые сохраняются при всех автоморфизмах в вышеуказанном смысле.

При этих условиях вышеуказанные результаты обобщаются следующим образом:

Также как в случае группы, мы принимаем за координаты таблицы $A = [a(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1})] \in \mathfrak{P}_\infty$ приведённые многочлены с коэффициентами из G_p и определяем таким же образом индикатрису $|A| = \langle |A|_1, |A|_2, \ldots, |A|_\nu, \ldots \rangle$. Это бесконечная последовательность $K = \langle k_1, k_2, \ldots, k_\nu, \ldots \rangle$ целых рациональных чисел k_ν, $0 \leqq k_\nu \leqq p^{\nu-1}$. Теми-же условиями, как и выше, мы определяем частичный порядок таблиц (и индикатрис).

1. Если $K = \langle k_1, k_2, \ldots, k_\nu, \ldots \rangle$ индикатриса, то совокупность таблиц $A \in \mathfrak{P}_\infty$, таких что $|A| \leqq K$, есть (замкнутая) подгруппа группы $\mathfrak{P}_\infty$.

Действительно, обозначим через $\mathfrak{G}_K$ совокупность таблиц, удовлетворяющих вышеуказанному условию. Тогда для каждого $s = 0, 1, 2, \ldots$ $\mathfrak{G}_K \mathfrak{D}$ есть совокупность всех таблиц A', таких, что $|A'| = \langle k_1, k_2, \ldots, k_s, p^s, p^{s+1}, \ldots \rangle$, и $\mathfrak{G}_K \mathfrak{D}_s / \mathfrak{D}_s$ является Г. П. группы $\mathfrak{P}_\infty / \mathfrak{D}_s \simeq \mathfrak{P}_s$. $\mathfrak{G}_K \mathfrak{D}_s$ замкнутые подгруппы $\mathfrak{P}_\infty$ и тем-же свойством обладает их пересечение $\bigcap\limits_s \mathfrak{G}_K \mathfrak{D}_s = \mathfrak{G}_K$.

Так-же, как и в случае группы $\mathfrak{P}_\infty$, мы будем называть группу $\mathfrak{G}_K$ Г. П. группы $\mathfrak{P}_\infty$, а последовательность K её индикатрисой.

2. Если $K = \langle 0, 0, \ldots, 0, k_{s+1}, k_{s+2}, \ldots \rangle$ (где k_{s+1} первый неравныйнулю член K) — индикатриса Г. П. $\mathfrak{G}$ группы $\mathfrak{P}_\infty$, то подгрупп $\mathfrak{G}$ инвариантна в $\mathfrak{P}_\infty$ тогда и только тогда, если для $\sigma \geqq$ $\geqq s+1$ имеет место неравенство

$$k_\sigma \geqq p^{\sigma-1} - p^s.$$

Действительно, условие достаточно. Если оно удовлетворяется, то для каждого $\nu = 0, 1, 2, \ldots$. $\mathfrak{G}\mathfrak{D}_\nu / \mathfrak{D}_\nu$ — инвариантная подгруппа группы $\mathfrak{P}_\infty / \mathfrak{D}_\nu$. Подгруппы $\mathfrak{G}\mathfrak{D}_\nu$ инвариантны в $\mathfrak{P}_\infty$ и тем-же свойством обладает и их пересечение $\mathfrak{G}$.

С другой стороны, если подгруппа $\mathfrak{G}$ инвариантна в $\mathfrak{P}_\infty$, то для каждого $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ подгруппа $\mathfrak{G}\mathfrak{D}_\nu$ инвариантна в $\mathfrak{P}_\infty$, а $\mathfrak{G}\mathfrak{D}_\nu / \mathfrak{D}_\nu$ инва-

[14] Остается открытым вопрос, не все-ли автоморфизмы абстактной группы $\mathfrak{P}_\infty$ обладают этим свойстом. В работе Kaloujnine [1] было доказано, что в группе $\mathfrak{P}_m \mathfrak{D}_s$ характеристические подгруппы; но при доказательстве мы пользовались в неявном виде тем фактом, что m конечное число.

вариантна в $\mathfrak{P}_\infty/\mathfrak{D}_\nu = \mathfrak{P}_\nu$. Но индикатрисой группа $\mathfrak{G}\mathfrak{D}_\nu/\mathfrak{D}_\nu$ будет $\langle 0, 0, \ldots, 0, k_{s+1}, \ldots, k_\nu \rangle$ откуда мы видим, что указанное условие необходимо.

Как и в случае конечного m, инвариантные Г. П. группы $\mathfrak{P}_\infty$ мы обозначаем через Г. П. И.

3. Совокупность Г. П. И. группы $\mathfrak{P}_\infty (p \neq 2)$ совпадает с совокупностью характеристических подгрупп ультраметрической группы $\mathfrak{P}_\infty$.

Если $\mathfrak{G}$ характеристическая подгруппа, то для каждого $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ $\mathfrak{G}\mathfrak{D}_\nu$, также характеристическая подгруппа группы $\mathfrak{P}_\infty$ (ибо $\mathfrak{D}_\nu$ характеристическая подгруппа по условию б). Покажем, что $\mathfrak{G}\mathfrak{D}_\nu/\mathfrak{D}_\nu$ является Г. П. И. группы $\mathfrak{P}_\infty/\mathfrak{D}_\nu \simeq \mathfrak{P}_\infty$.[15]

Пусть $W = (w_1, w_2, \ldots, w_\nu, \ldots)$ — бесконечная последовательность элементов $w_\nu \in G_p$, причём все $w_\nu \neq 0$. Определим отображение W группы $\mathfrak{P}_\infty$ в себя, положив для каждой таблицы $A \in \mathfrak{P}_\infty$

$$(5,5)\quad W(A) = W([a(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1})]) = [w_\nu a(w_1^{-1} x_1, w_2^{-1} x_2, \ldots, w_{\nu-1}^{-1} x_{\nu-1})].$$

Легко проверить, что W является автоморфизмом группы, допустимым в смысле условия б). Совокупность таких автоморфизмов образует абелеву группу $\mathfrak{W}$. Если $\mathfrak{G}$ характеристическая подгруппа группы $\mathfrak{P}_\infty$, то для каждого $W \in \mathfrak{W}$ $W(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$. W индуцирует в $\mathfrak{P}_\infty/\mathfrak{D}_\nu \simeq \mathfrak{D}_\nu$ автоморфизм W_ν, определённый аналогичным образом в $\mathfrak{P}_\nu$ для последовательности $(w_1, w_2, \ldots, w_\nu)$, W_ν сохраняет подгруппы $\mathfrak{G}\mathfrak{D}_\nu/\mathfrak{D}_\nu$ группы $\mathfrak{P}_\infty/\mathfrak{D}_\nu \simeq \mathfrak{P}_\nu$. Но в работе KALOUJNINE [1] было доказано, что инвариантная подгруппа группы $\mathfrak{P}_\nu$, сохраняемая автоморфизмами W_ν, является Г. П. И. группы $\mathfrak{P}_\nu$. Поэтому подгруппа $\mathfrak{G}\mathfrak{D}_\nu/\mathfrak{D}_\nu$ есть Г. П. И. группы $\mathfrak{P}_\infty/\mathfrak{D}_\nu$ и подгруппа $\mathfrak{G}\mathfrak{D}_\nu$ есть Г. П. И. группы $\mathfrak{P}_\infty$. Но группа $\mathfrak{G}$ совпадает с пересечением групп $\mathfrak{G}\mathfrak{D}_\nu$ (ибо $\mathfrak{G}$ замкнута в силу условий а) и б), и поэтому сама является Г. П. И. группы $\mathfrak{P}_\infty$.

С другой стороны, если $\mathfrak{G}$ есть Г. П. И. группы $\mathfrak{P}_\infty$, то тем-же свойством обладают и все $\mathfrak{G}\mathfrak{D}_\nu \cdot \mathfrak{G}\mathfrak{D}_\nu/\mathfrak{D}_\nu$ — Г. П. И. и следовательно характеристическая подгруппа группы $\mathfrak{P}_\infty$. Но тогда и $\mathfrak{G} \bigcap\limits_\nu \mathfrak{G}\mathfrak{D}_\nu$ — характеристическая подгруппа группы $\mathfrak{P}_\infty$.

(Поступило 13. IV. 1951.)

[15] Мы не можем непосредственно утверждать, что $\mathfrak{G}\mathfrak{D}_\nu/\mathfrak{D}_\nu$ характеристическая подгруппа группы $\mathfrak{P}_\infty/\mathfrak{D}_\nu$, ибо не ясно (и это даже неправильно), что любой автоморфизм группы $\mathfrak{P}_\infty/\mathfrak{D}_\nu$ может быть продолжен в автоморфизм группы $\mathfrak{P}_\infty$. Это обстоятельство немного усложняет доказательство.

ÜBER EINE VERALLGEMEINERUNG DER p-SYLOWGRUPPEN SYMMETRISCHER GRUPPEN

L. KALOUJNINE (Berlin)

(Resumé)

In meiner Arbeit „La structure des p-groupes de Sylow des groupes symétriques finis" *(Ann. Ec. Normale,* **3** (65), (1948), p. 239—176) wurden die Eigenschaften der p-Sylowgruppen $\mathfrak{P}_m$ der symmetrischen Gruppen $\mathfrak{S}_{p^m}$ des Grades p^m untersucht. Unter anderen sind dort die charakteristischen Untergruppen der Gruppen $\mathfrak{P}_m$ bestimmt worden. Diese Untersuchungen sind mit Hilfe der Darstellungen der Gruppen $\mathfrak{P}_m$ durch s. g. „Tabellen" durchgeführt worden.

In der zitierten Arbeit wurde folgendes gezeigt: Ist G_p das Galoisfeld von p Elementen (p eine Primzahl), so sei $a(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ eine Funktion von l Variablen, deren Argument- und Wertbereich G_p i t. Als Tabelle des Ranges m bezeichnete ich eine Folge

$$A = [a, a(x_1), a(x_1, x_2), \ldots, a(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})]$$

von solchen Funktionen, wobei die erste Funktion eine Konstante $a \in G_p$ ist und allgemein die ν-te Funktion (—diese heißt die ν-te Koordinate von A) $a(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1})$ von $\nu-1$ Variablen (aus G_p) abhängt. Definiert man eine Multiplikation der Tabellen durch die Festsetzung

$$[a, a(x_1), \ldots, a(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})]\ [b, b(x_1), \ldots, b(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})] =$$
$$= [a+b, a(x_1+b)+b(x_1), \ldots, a(x_1+b, x_2+b(x_1), \ldots, x_{m-1}+b(x_1, x_2, \ldots, x_{m-2}))+$$
$$+ b(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})],$$

so bildet die Menge der Tabellen eine Gruppe $\mathfrak{P}_m$. $\mathfrak{P}_m$ ist einer p-Sylowgruppe der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_{p^m}$ des Grades p^m isomorph. Durch die Anwendung der Lagrangeschen Interpolationsformel lassen sich die Funktionen $a(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ als Polynome mit Koeffizienten aus G_p in den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ schreiben, wobei der Grad in keiner der Variablen $p-1$ übersteigt. Nimmt man diese Schreibweise an, so kann die Multiplikation in der Gruppe $\mathfrak{P}_m$ als rationale Operation in dem Polynombereich $G_p(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ aufgefaßt werden. Die Auswertung dieser Idee ergibt weitgehende Auskunft über die Struktur der Gruppe $\mathfrak{P}_m$.

Die vorliegende Arbeit ist der Gruppe $\mathfrak{P}_\infty$ der unendlichen Tabellen

$$A = [a, a(x_1), a(x_1, x_2), \ldots, a(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}), \ldots]$$

mit der Multiplikationsregel

$$[a, a(x_1), a(x_1, x_2), \ldots]\ [b, b(x_1), b(x_1, x_2), \ldots] =$$
$$= [a+b, a(x_1+b)+b(x_1), a(x_1+b, x_2+b(x_1))+b(x_1, x_2), \ldots]$$

gewidmet. Die Gruppe $\mathfrak{P}_\infty$ wird folgendermaßen als topologische Gruppe aufgefaßt: Die Menge $\mathfrak{T}_s$ der Tabellen, deren s erste Koordinaten identisch Null sind, ist ein Normalteiler von $\mathfrak{P}_\infty$; die Menge dieser Normalteiler $\mathfrak{T}_s$ wählt man als ein fundamentales Umgebungssystem der Einheit von $\mathfrak{P}_\infty$. Versteht man unter charakteristischer Untergruppe von $\mathfrak{P}_\infty$ eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathfrak{P}_\infty$, die durch alle stetigen Automorphismen von $\mathfrak{P}_\infty$ auf sich abgebildet wird, so können die Ergebnisse der oben angeführten Arbeit bezüglich der charakteristischen Untergruppen von $\mathfrak{P}_m$ leicht auf den Fall der Gruppe $\mathfrak{P}_\infty$ verallgemeinert werden.

Im Mittelpunkt der gesamten Arbeit steht der Begriff des vollständigen Produktes von Permutationsgruppen.

Das vollständige Produkt von zwei Permutationsgruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ der Mengen M und N wird als die Menge der Permutationen σ des mengentheorischen Produktes $M \times N$ definiert, die folgenden Bedingungen genügen:

1. die Untermengen $\mu \times N$ von $M \times N$ mit einer festen ersten Koordinate $\mu \in M$ sind Imprimitivitätssysteme von σ;

2. setzt man $\sigma(\mu \times N) = \sigma\mu \times N$, so gehört die Permutation $\mu \rightarrow \sigma\mu$ zu $\mathfrak{G}$,

3. setzt man $\sigma(\mu, \nu) = (\mu', \nu')$, so ist für festes $\mu \in M$, $\nu \rightarrow \nu'$ eine Permutation aus $\mathfrak{H}$, die von μ als Parameter abhängt.[1]

Man zeigt, daß die Menge solcher Permutationen eine Gruppe bildet, die ich das vollständige Produkt der Permutationsgruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ nenne und mit $\mathfrak{G} \circ \mathfrak{H}$ bezeichne. Das vollständige Produkt ist assoziativ, d. h. es gilt für drei Permutationsgruppen: $(\mathfrak{G} \circ \mathfrak{H}) \circ \mathfrak{K} = \mathfrak{G} \circ (\mathfrak{H} \circ \mathfrak{K})$. Man kann daher durch Rekurrenz das vollständige Produkt einer endlichen Folge von Permutionsgruppen erklären. Es ist sogar möglich das vollständige Produkt einer beliebigen wohlgeordneten Menge von Permutationsgruppen zu definieren.

Es stellt sich nun heraus, daß $\mathfrak{P}_\infty$ das vollständige Produkt einer unendlichen Folge von zyklischen Gruppen der Ordnung p ist.

Es sei $\mathfrak{S}_p$ die symmetrische Gruppe des Grades p. Man bilde das vollständige Produkt $\mathfrak{S}_{p,\,p,\,\dots}$ einer unendlichen Folge von Gruppen, die zu $\mathfrak{S}_p$ isomorph sind. In der Gruppe $\mathfrak{S}_{p,\,p,\,\dots}$ läßt sich nun auf eine natürliche Weise eine Topologie erklären, die $\mathfrak{S}_{p,\,p,\,\dots}$ zu einer kompakten nulldimensionalen Gruppe macht. Es zeigt sich, daß $\mathfrak{P}_\infty$ isomorph zu einer p-Sylowgruppe (im Sinne von VAN DANTZIG—A. KUROSCH) von $\mathfrak{S}_{p,\,p,\,\dots}$ ist.

Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ soll p_∞-Gruppe heißen, wenn sie eine Untergruppenreihe

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 \supset \mathfrak{G}_1 \supset \mathfrak{G}_2 \supset \dots$$

besitzt, so daß

1. für jedes ν, $(\mathfrak{G} : \mathfrak{G}_\nu)$ endlich und eine Primzahlpotenz p^{f_ν} ist, 2. $\bigcap_\nu \mathfrak{G}_\nu = 1\,(\mathfrak{G})$ ist.

Wir zeigen, daß $\mathfrak{P}_\infty$ eine p_∞-Gruppe ist und daß es zu jeder p_∞-Gruppe $\mathfrak{G}$ mindestens eine zu ihr isomorphe Untergruppe $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{P}_\infty$ gibt. In diesem Sinne ist $\mathfrak{P}_\infty$ eine universelle p_∞-Gruppe.

[1] Näheres über das vollständige Produkt ist in der Arbeit M. KRASNER – L. KALOUJNINE. Produit complet des groupes de permutations et problème d'extension de groupes, I. *Acta Scient. Math. Szeged,* **13** (1950), S. 208—230. Teil II. **14** (1951), S. 39—66; Teil III. **14** (1951), S. 69—82, enthalten.

О НЕКОТОРЫХ АДДИТИВНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ*

К. К. МАРДЖАНИШВИЛИ (Москва)

Советская математика имеет блестящие достижения в самых разнообразных направлениях. Мне, как ученику крупнейшего советского математика — академика И. М. Виноградова, наиболее близка область теории чисел — область, в которой русские математики давно уже пользовались заслуженной известностью и которая, благодаря работам советских ученых, была подвергнута самым глубоким исследованиям. Не имея возможности, хотя бы вкратце, коснуться всех советских работ в области теории чисел я остановлюсь лишь на фундаментальных работах И. М. Виноградова, создавшего новый метод в аналитической теории чисел. В виде примера применения этого метода я разрешу себе коснуться и некоторых моих работ, непосредственно примыкающих к исследованиям И. М. Виноградова.

Основными задачами аддитивной теории чисел являются проблема Варинга и проблема Гольдбаха.

В 1770 г. Варинг высказал предположение, что всякое целое положительное N может быть представлено в виде

$$N = x_1^n + x_2^n + \cdots + x_s^n, \tag{1}$$

где n заданное целое положительное число, $x_1, x_2, \ldots, x_s$ целые положительные и s не превосходит некоторой величины, зависящей лишь от n. Это утверждение Варинга было доказано в общем виде лишь в текущем столетии Д. Гильбертом. Однако, решение Гильберта было несовершенно; оно приводило к очень большим значениям s. В 1919 г. Харди и Литтльвуд дали новый метод решения проблемы Варинга. Пусть $G(n)$ представляет целое число, обладающее свойством, что все достаточно большие N представимы в форме (1) при $s \leqq G(n)$, но существуют сколь угодно большие N, которые непредставимы в форме (1) при $s < G(n)$. Харди и Литтльвуд показали, что $G(n)$ представляет величину, порядок которой не превосходит $n \cdot 2^n$, а также нашли асимптотическую формулу для числа представлений N в форме (1).

* Доклад, прочитанный в ноябре 1950 года на сессии Отделения Математических и естественных наук Внгерской Академ и Наук.

Независимо от Харди и Литтльвуда академик И. М. Виноградов в своей опубликованной в 1924 г. работе пришел к асимптотической формуле, аналогичной формуле этих ученых. Метод, примененный тогда академиком И. М. Виноградовым для исследования проблемы Варинга, значительно превосходил метод Харди—Литтльвуда в отношении простоты и обозримости. При этом И. М. Виноградовым были использованы оценки так называемых тригонометрических сумм, т. е. сумм вида

$$\sum_{Q \leqq x < Q+P} e^{2\pi i f(x)}, \tag{2}$$

где $f(x)$—некоторая функция от x (в частности, целая рациональная функция) и x пробегает последовательность целых чисел. И. М. Виноградов показал, что вопрос о наименьшем числе слагаемых, необходимом для вывода асимптотической формулы в проблеме Варинга, может быть поставлен в зависимость от точности оценки сумм (2).

В 1934 г. И. М. Виноградов дал новый метод в аналитической теории чисел, основанный на оценке сумм вида

$$\sum \sum \xi(x)\, \eta(y)\, e^{2\pi i f(x, y)}, \tag{3}$$

где суммирование распространяется на все целые точки (x, y) некоторой области. Новый метод И. М. Виноградова обладает необычайной силой; его применение привело к ряду фундаментальных результатов (И. М. Виноградов, Ю. В. Линник, Н. Г. Чудаков). В частности, И. М. Виноградов показал, что для $G(n)$ в проблеме Варинга справедлива оценка

$$G(n) < n(3 \log n + 11).$$

Эта оценка является близкой к окончательной, так как существуют сколь угодно большие целые N непредставимые в виде (1) при $s \leqq n$. Новый метод И. М. Виноградова дал ему возможность чрезвычайно уточнить оценку сумм (2).

*

В 1929 г. И. М. Виноградов установил асимптотическую формулу для числа $I(M, N; s)$ решений системы диофантовых уравнений

$$\begin{cases} x_1^n + x_2^n + \cdots + x_s^n = N, \\ x_1^m + x_2^m + \cdots + x_s^m = M, \end{cases} \tag{4}$$

где $n > m > 1$, при числе слагаемых порядка $n^2 \cdot 2^n$. Именно И. М. Виноградов показал, что если $M = hN^{\frac{m}{n}}$ и h удовлетворяет неравенствам

$$1 < K_1 \leqq h \leqq K_2 < s^{1-\frac{m}{n}}, \tag{5}$$

где K_1 и K_2—постоянные, то

$$I(M, N; s) = B(h)\, N^{\frac{s}{n}-1-\frac{m}{n}} \left(S(M, N; s) + O\left(N^{\frac{-0,1}{n}}\right)\right), \tag{6}$$

причем $B(h) < C_0(m, n, K_1, K_2; s) > 0$ и „особый ряд“ S определяется арифметическими свойствами чисел M, N и S.

В 1936 г. я впервые исследовал этот особый ряд и показал, что если при простом p $p^{\alpha} | (n-m), p^{\alpha+1} \not| (n-m)$ и

(7) $$N \equiv M (\operatorname{mod} \prod_{\substack{p \\ p-1 | n-m}} p^{\min(m,\, 1+\alpha+\eta)}),$$

где $\eta = 1$ при $p = 2, \alpha > 0$ и $\eta = 0$ в остальных случаях, то прн $s \geqq 24n^6$

$$S(M, N; s) > G(m, n, s) > 0.$$

Кроме того, пользуясь новыми оценками И. М. Виноградова тригонометрических сумм, я показал, что асимптотическая формула (6) имеет место при числе слагаемых порядка $n^6 \log n$.

Таким образом была установлена представимость в форме (4) пары чисел (N, M) удовлетворяющих условиям (5) и (7). При этом условия (7) являются необходимыми для разрешимости (4), что же касается неравенств (5), то при любых неотрицательных действительных числах $x_1, \ldots, x_s$

(8) $$\left(\sum_{k=1}^{s} x_k^n\right)^{\frac{m}{n}} \leqq \sum_{k=1}^{s} x_k^m \leqq s^{1-\frac{m}{n}} \left(\sum_{k=1}^{s} x_k^n\right)^{\frac{m}{n}},$$

и, следовательно, необходимым условием разрешимости (4) является

(9) $$N^{\frac{m}{n}} \leqq M \leqq s^{1-\frac{m}{n}} N^{\frac{m}{n}}.$$

Условия вида (5) или (9) с одной стороны, и условия вида (7) — с другой являются характерными при изучении систем нелинейных диофантовых уравнений. Условия первого типа будем называть условиями порядка, а условия второго типа — арифметическими условиями.

В 1937 г. мною для достаточно большого s была выведена асимптотическая формула для числа решений системы

(10) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_s = N_1, \\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_s^2 = N_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1^n + x_2^n + \cdots + x_s^n = N_n, \end{cases}$$

и проведено исследование соответствующего особого ряда, причем были установлены необходимые арифметические условия представимости системы $(N_1, \ldots, N_n)$ в форме (10), которые являются также и достаточными в случае, когда эта система удовлетворяет некоторым условиям порядка.

Как уже указывалось выше, академиком И. М. Виноградовым установлено, что $G(n)$ в проблеме Варинга есть величина порядка $n \log n$, что же касается асимптотической формулы для числа представлений N в виде

(11) $$N = x_1^n + x_2^n + \cdots + x_s^n,$$

то она сейчас может быть выведена лишь при значениях порядка $n^2 \log n$. При таком же числе слагаемых можно вывести асимптотическую формулу и для числа решений системы

$$\begin{cases} x_1^l + \cdots + x_s^l = N_l, \\ x_1^m + \cdots + x_s^m = N_m, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1^n + \cdots + x_s^n = N_n, \end{cases} \tag{12}$$

где $0 < l < m < \ldots < n < s$ — постоянные. Однако, мною показано, что система (12) разрешима при s порядка $ng \log n$, где g — число чисел $l, m, \ldots, n$ — если $N_l, \ldots, N_n$ удовлетворяют определенным условиям порядка, а также некоторым условиям арифметического характера (разрешимость конечного числа определенных сравнений).

*

В 1937 г. академик И. М. Виноградов показал, что его метод годится для оценки тригонометрических сумм (2) и в том случае, когда x пробегает не все числа данного интервала, а лишь простые. Это дало И. М. Виноградову возможность в том же году решить знаменитую проблему Гольдбаха, возникшую в 1742 г. из переписки Л. Эйлера с другим членом Российской Академии Наук, Х. Гольдбахом о том, что всякое достаточно большое нечетное N представимо в виде

$$N = p_1 + p_2 + p_3, \tag{13}$$

где p_1, p_2, p_3 — простые. При этом И. М. Виноградов вывел асимптотическую формулу для числа представлений N в виде (13).

Вопрос о представлении достаточно большого четного N в виде

$$N = p_1 + p_2$$

до сих пор остаетстя открытым. Однако, профессор А. Реньи доказал представимость N в виде суммы простого и „почти простого“ числа, т. е. в виде

$$N = p + p_1 p_2 \ldots p_k, \tag{14}$$

где k не превосходит некоторой абсолютной константы.

Метод И. М. Виноградова открыл возможность решения целого ряда аддитивных задач с простыми числами. В частности, в 1938 г. И. М. Виноградов и Хуа Ло-Кен изучили вопрос о представимости целого N в виде сумм степеней простых чисел, т. е. в виде

$$N = p_1^n + p_2^n + \cdots + p_s^n. \tag{15}$$

Для случая $n = 2$ И. М. Виноградов показал, что всякое достаточно большое $N \equiv s \pmod{24}$ представимо в форме (15) при $s \geqq 5$.

Системы диофантовых уравнений с простыми числами впервые были рассмотрены мною в опубликованной в 1940 г. работе. Именно в этой работе изучался вопрос о представлении системы заданных целых положительных чисел $N_1, \ldots, N_n$ в виде

$$
(16)\qquad \begin{cases} p_1 + p_2 + \cdots + p_s = N_1, \\ p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_s^2 = N_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_1^n + p_2^n + \cdots + p_s^n = N_n, \end{cases}
$$

где $p_1, \ldots, p_s$ — простые. Мною была найдена асимптотическая формула для числа представлений системы чисел $N_1, \ldots, N_n$, удовлетворяющих определенным условиям порядка, в форме (16) при числе слагаемых s порядка $n^3 \log n$ и было проведено исследование особого ряда при достаточно большом числе слагаемых; аналогичная работа была выполнена Хуа Ло-Кеном.

В 1942 г. мною было показано, что система

$$
(17)\qquad \begin{cases} p_1 + p_2 + \cdots + p_s = N_1, \\ p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_s^2 = N_2 \end{cases}
$$

разрешима при $s \geqq 7, s \equiv N_2 \pmod{24}, N_1 \equiv N_2 \pmod 2$ в случае, когда

$$
1 + \varepsilon \leqq \frac{N_1}{\sqrt{N_2}} \leqq \sqrt{s} - \varepsilon,
$$

где ε — произвольно-малое положительное постоянное и $N_1 > C(\varepsilon)$.

В 1947 г. мною было опубликовано доказательство того, что асимптотическая формула для числа решений (16) имеет место уже при числе слагаемых порядка $n^2 \log n$. Хуа Ло-Кен, также в 1947 г., опубликовал сообщение о том, что данная асимптотическая формула верна при числе слагаемых порядка $n^2 \log n$. Следует отметить, что этот порядок числа слагаемых, необходимых для вывода данной асимптотической формулы, является близким к предельному. Наконец, мною было доказано, что система

$$
(18)\qquad \begin{cases} p_1^l + p_2^l + \cdots + p_s^l = N_l, \\ p_1^m + p_2^m + \cdots + p_s^m = N_m, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_1^n + p_2^n + \cdots + p_s^n = N_n, \end{cases}
$$

где $0 < l < m < \cdots < n$ — заданные постоянные и $N_l, \ldots, N_m$ — целые, удовлетворяющие определенным условиям, разрешима при числе слагаемых порядка $ng \log n$, где g — число чисел $l, m, \ldots, n$. Следует отметить, что исследование системы (16) дает возможность рассматривать и системы более общего вида

$$
(19)\qquad \begin{cases} f_1(p_1) + f_1(p_2) + \cdots + f_1(p_s) = N_1, \\ f_2(p_1) + f_2(p_2) + \cdots + f_2(p_s) = N_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(p_1) + f_n(p_2) + \cdots + f_n(p_s) = N_n, \end{cases}
$$

где $f_i(x)$ — целые рациональные функции степени i от x.

(Поступило 6. IX. 1951.)

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION $\sum_{k=1}^{n} A_k \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_{ki}} = A_0$ EN NOMBRES RATIONNELS

Par

G. GEORGIEV (Sofia)

(Présenté par L. RÉDEI)

Considérons la transformation

$$(1) \qquad x_i = \prod_{r=1}^{n} X_r^{\lambda_{ri}}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

de l'espace euclidien n-dimensionnel R^n en lui-même suivant laquelle au point $X(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de R^n correspond le point $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ également de R^n, les nombres λ_{ri} étant supposés réels. Pour trouver une transformation inverse à (1) nous supposerons que le déterminant

$$L = |\lambda_{ri}| = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \cdots & \lambda_{nn} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro et nous nous proposons de vérifier les relations (1) identiquement par les fonctions X_r des variables x_i de la forme

$$(1') \qquad X_r = \prod_{k=1}^{n} x_k^{\mu_{kr}}, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

les nombres μ_{kr} étant convenablement choisis. En remplaçant dans (1) X_r par (1') et en identifiant les coefficients, on trouve

$$\sum_{r=1}^{n} \lambda_{ri}\mu_{kr} = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq k; \quad \sum_{r=1}^{n} \lambda_{ri}\mu_{ir} = 1, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

d'où on calcule

$$(2) \qquad \mu_{kr} = \frac{L_{rk}}{L}, \qquad (L \neq 0; \quad k, r = 1, 2, \ldots, n),$$

L_{rk} désignant le complément algébrique de λ_{rk} dans le déterminant L. Pour les déterminants L et $M = |\mu_{rk}|$ on aura

$$L \cdot M = 1. \tag{2'}$$

On appelle la transformation (1) *rationnelle,* lorsque les exposants λ_{ri} sont des nombres entiers et *birationnelle,* lorsque la transformation inverse (1') est aussi rationnelle. Il est évident que les transformations (1) et (1') sont simultanément birationnelles.

Des relations (2) et (2') on déduit la propriété suivante des transformations birationnelles:

Pour que la transformation rationnelle (1) *soit birationnelle, il faut et il suffit que* $L = \pm 1$. *Dans ce cas* $\mu_{kr} = L \cdot L_{rk}$, $M = L$.

Dans ce travail nous donnons des conditions suffisantes pour qu'on puisse résoudre complètement en nombres rationnels des équations indéterminées de la forme

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ki}} = A_0. \tag{3}$$

Nous y arrivons[1] en appliquant des transformations birationnelles de la forme (1).

Nous supposerons que les exposants a_{ki} de l'équation (3) sont entiers et que le déterminant

$$A = |a_{ki}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro. En appliquant la transformation (1), l'équation (3) devient

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \prod_{r=1}^{n} X_r^{b_{kr}} = A_0, \tag{4}$$

où

$$b_{kr} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} \lambda_{ri}, \qquad (k, r = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Pour le déterminant $|b_{kr}|$ on trouve

$$|b_{kr}| = |\lambda_{ri}| \cdot |a_{ki}|, \tag{6}$$

et par conséquent

$$|b_{kr}| = \pm |a_{ki}| \quad \text{pour} \quad |\lambda_{ri}| = \pm 1, \tag{7}$$

c'est-à-dire:

[1] V. la note des M. M. L. Tchakaloff et Chr. Karanikoloff, Résolution de l'équation $Ax^m + By^n = z^p$ en nombres rationnels, *Comptes Rendus,* Paris, **210** (1940), p. 281—283.

V. aussi la thèse de M. Chr. Karanikoloff, *Contribution à la théorie des équations indéterminées* (Sofia, 1942).

La valeur absolue du déterminant $A = |a_{ki}|$ *est invariante lorsqu'on transforme l'équation* (3) *au moyen d'une transformation birationnelle de la forme* (1).

En résolvant les relations (5) une fois par rapport à λ_{ri}, autre fois par rapport à a_{ki}, on obtient

$$\lambda_{rp} = \frac{1}{A}\sum_{k=1}^{n} b_{kr} A_{kp}, \qquad (r, p = 1, 2, \ldots, n), \tag{8}$$

$$a_{kp} = \frac{1}{L}\sum_{r=1}^{n} b_{kr} L_{rp}, \qquad (k, p = 1, 2, \ldots, n), \tag{9}$$

A_{kp} et L_{rp} étant les compléments algébriques respectivement de a_{kp} et λ_{rp} dans les déterminants A et L.

Désignons par a_k et b_k les plus grands diviseurs communs des éléments de k-ième ligne, respectivement des déterminants $|a_{ki}|$ et $|b_{kr}|$. La relation (5) montre que a_k est un diviseur des nombres $b_{k1}, b_{k2}, \ldots, b_{kn}$, c'est-à-dire que a_k est un facteur de b_k. La relation (9) montre que b_k est un diviseur des nombres $a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn}$ à condition que $L = \pm 1$, c'est-à-dire que b_k est un facteur de a_k. Or, $a_k = b_k$,

$$a_k = (a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn}) = (b_{k1}, b_{k2}, \ldots, b_{kn}) = b_k. \tag{10}$$

Ainsi nous avons démontré la propriété suivante:

Le plus grand diviseur commun des exposants a_{ki} *du k-ième terme de l'équation* (3) *est invariant lorsqu'on transforme cette équation au moyen d'une transformation birationnelle de la forme* (1).

Considérons les exposants b_{kr} de l'inconnue X_r dans l'équation transformée (4) et soit β le plus grand diviseur commun de ces nombres, β_k — le quotient de b_{kr} et β:

$$b_{kr} = \beta \cdot \beta_k; \quad \beta = (b_{1r}, b_{2r}, \ldots, b_{nr}); \quad (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = 1. \tag{11}$$

Ainsi les nombres (8) deviendront

$$\lambda_{rp} = \frac{\beta}{A}\sum_{k=1}^{n} \beta_k A_{kp}, \qquad (p = 1, 2, \ldots, n). \tag{12}$$

Si l'on pose

$$\Delta = \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k A_{k1}, \sum_{k=1}^{n} \beta_k A_{k2}, \ldots, \sum_{k=1}^{n} \beta_k A_{kn}\right), \tag{13}$$

on trouvera

$$\frac{\beta \cdot \Delta}{|A|} = \left(\frac{\beta}{A}\sum \beta_k A_{k1}, \frac{\beta}{A}\sum \beta_k A_{k2}, \ldots, \frac{\beta}{A}\sum \beta_k A_{kn}\right),$$

c'est-à-dire

$$\frac{\beta \cdot \Delta}{|A|} = (\lambda_{r1}, \lambda_{r2}, \ldots, \lambda_{rn}).$$

Mais λ_{rp}, $(p = 1, 2, \ldots, n)$, sont des nombres premiers entre eux parce que ces nombres sont les éléments de la r-ième ligne du déterminant $|\lambda_{ri}| = \pm 1$ et par conséquent $\frac{\beta \cdot \Delta}{|A|} = 1$, c'est-à-dire

(14) $$\beta = \frac{|A|}{\Delta}.$$

En remplaçant dans (12) β par (14), on obtient

(15) $$\lambda_{rk} = \pm \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{n} \beta_k A_{kp}, \qquad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

où l'on prend le signe $+$ lorsque $A > 0$ et le signe $-$ lorsque $A < 0$.

Réciproquement, soit $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ un système arbitraire de n nombres entiers et premiers entre eux. Suivant la définition (13) de Δ, les n nombres (15) seront aussi entiers et premiers entre eux. Mais dans ce cas, d'après un théorème[2] d'HERMITE, il existe encore $n(n-1)$ nombres entiers λ_{uv}, $(u = 1, 2, \ldots, r-1, r+1, \ldots, n;\ v = 1, 2, \ldots, n)$, tels que $|\lambda_{ri}| = \pm 1$. Ces n^2 nombres λ_{ki} déterminent donc une transformation birationnelle de la forme (1). Considérons les exposants b_{kr} de l'inconnue X_r de l'équation (4), obtenue de l'équation (3) au moyen de cette transformation. Ainsi on aura

$$b_{kr} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} \lambda_{ri} = \pm \sum_{i=1}^{n} a_{ki} \left(\frac{1}{\Delta} \sum_{s=1}^{n} \beta_s A_{si} \right) = \pm \frac{1}{\Delta} \sum_{s=1}^{n} \beta_s \left(\sum_{s=1}^{n} a_{ki} A_{si} \right),$$

c'est-à-dire

(16) $$b_{kr} = \frac{|A|}{\Delta} \beta_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous démontrerons que le nombre $\frac{|A|}{\Delta}$ est toujours entier quel que soit le système $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ des nombres entiers et premiers entre eux. En effet, si l'on pose

$$\beta = \left(\frac{A\beta_1}{\Delta}, \frac{A\beta_2}{\Delta}, \ldots, \frac{A\beta_n}{\Delta} \right),$$

on aura $\beta \cdot \Delta = |A| \cdot (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, c'est-à-dire $\beta \cdot \Delta = |A|$. Cette relation montre que Δ est un diviseur de A. En vertu de (7) et de (16), on trouve

(17) $$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1,r-1} & \beta_1 & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2,r-1} & \beta_2 & b_{2,r+1} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{n,r-1} & \beta_n & b_{n,r+1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \pm \Delta.$$

Ainsi nous avons établi le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Dans l'équation* (4), *obtenue de l'équation* (3) *par une transformation birationnelle de la forme* (1), *les exposants* b_{ks} *de quelconque*

[2] *Journal de Mathém. pures et appl.*, **14 (1)**, (1849), p. 21.

des inconnues X_r sont toujours de la forme

$$\text{(f)} \qquad b_{ks} = \frac{|A|}{\Delta} \cdot \beta_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

où les nombres β_k sont entiers et premiers entre eux, Δ est le plus grand diviseur commun des nombres $\sum_{k=1}^{n} \beta_k A_{kp}$, $(p = 1, 2, \ldots, n)$, A_{kp} est le complément algébrique de a_{kp} dans le déterminant $A = |a_{ki}|$:

$$\Delta = \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k A_{k1}, \sum_{k=1}^{n} \beta_k A_{k2}, \ldots, \sum_{k=1}^{n} \beta_k A_{kn} \right), \qquad (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = 1.$$

Réciproquement, lorsque les n nombres b_{ks} sont de la forme (f), *alors il existe une transformation birationnelle de la forme* (1) *telle, que les exposants d'une des inconnues X_r dans l'équation transformée* (4) *coïncident avec ces nombres. Tous les exposants b_{kr} de l'équation transformée* (4) *vérifient la relation* (17).

Suivant les conditions de ce théorème, si l'on pose $\beta_k = 1$, on trouvera le corollaire suivant:

COROLLAIRE. *Pour chaque équation de la forme* (3) *il existe une transformation birationnelle qui ramène cette équation à une équation de la même forme et telle que les exposants d'une des inconnues sont égaux tous au nombre*

$$b = \frac{|A|}{\Delta'} \quad \text{où} \quad \Delta' = \left(\sum_{k=1}^{n} A_{k1}, \sum_{k=1}^{n} A_{k2}, \ldots, \sum_{k=1}^{n} A_{kn} \right).$$

Tous les exposants b_{kr} de l'équation transformée vérifient la relation (17) *dans laquelle on a $\beta_k = 1$, $\Delta = \Delta'$.*

Envisageons les nombres $b_{ks} = \frac{|A|}{\Delta} \beta_k$ du théorème 1. Il est évident que pour qu'on ait $b_{ks} = 0$ il faut et il suffit que $\beta_k = 0$. Il est aussi évident que pour qu'on ait $b_{ks} = 1$ il faut et il suffit que $\frac{|A|}{\Delta} \beta_k = 1$, $\beta_k = 1$. Mais pour qu'on ait $\Delta = |A|$ il suffit que les nombres

$$\delta_p = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^{n} \beta_k A_{kp}, \qquad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

soient entiers. En effet, on aura

$$\sum_{k=1}^{n} a_{sp} \delta_p = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^{n} \beta_k \left(\sum_{p=1}^{n} a_{sp} A_{kp} \right),$$

c'est-à-dire

$$\sum_{p=1}^{n} a_{sp} \delta_p = \beta_s, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Ces relations montrent que le plus grand diviseur commun δ des nombres δ_p est un diviseur de tous les nombres β_s, c'est-à-dire que δ est un facteur du plus grand diviseur commun d des nombres β_s. Mais d étant égal à 1, on aura $\delta = 1$.

Ainsi nous sommes arrivés au théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Pour que l'équation* (3) *puisse être ramenée au moyen d'une transformation birationnelle de la forme* (1) *à une équation de la même forme, mais linéaire par rapport à une des inconnues, il faut et il suffit qu'il existe un système de n nombres* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ *qui sont des zéros et des unités, sans que tous les* ε_k *soient égaux à zéro et tels, que les nombres* $\frac{1}{A}\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k A_{kp}$, $(p = 1, 2, \ldots, n)$, *soient entiers. Les exposants* b_{kr} *de l'équation transformée vérifient la relation* (17), *dans laquelle on aura* $\beta_k = \varepsilon_k$, $\Delta = |A|$.

Suivant les conditions du théorème 1, si l'on pose $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_{n-1} = 0$, $\beta_n = 1$, on obtiendra le théorème suivant:

THÉORÈME 3. *Pour chaque équation de la forme* (3) *il existe une transformation birationnelle de la forme* (1) *telle que les* $n-1$ *premiers termes de l'équation transformée* (4) *ne dépendront que des* $n-1$ *inconnues nouvelles* $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$. *La valeur absolue du déterminant* $|b_{kr}|$, *composé des exposants* b_{kr} *des* $n-1$ *premiers termes de l'équation transformée, est égale au plus grand diviseur commun de tous les déterminants d'ordre* $n-1$ *de la matrice*

$$\left\|\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,n} \end{array}\right\|.$$

Soit (1) la transformation birationnelle transformant les $n-1$ premiers termes y_k

$$y_k = \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ki}}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{18}$$

de l'équation (3) en fonctions

$$y_k = \prod_{s=1}^{n-1} X_s^{b_{ks}}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{19}$$

où

$$b_{ks} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}\lambda_{si}, \quad (k, s = 1, 2, \ldots, n-1); \quad |\lambda_{ri}| = \pm 1. \tag{20}$$

En vertu du théorème 3, il existe une autre transformation birationnelle de la forme

$$X_r = \prod_{s=1}^{n-1} Z_s^{\mu_{ks}}, \quad (r = 1, 2, \ldots, n-1), \quad |\mu_{ks}| = \pm 1, \tag{21}$$

qui ramène les $n-2$ premières fonctions (19) aux fonctions

$$y_k = \prod_{r=1}^{n-2} Z_r^{c_{kr}}; \quad c_{kr} = \sum_{s=1}^{n-1} b_{ks}\mu_{rs}, \quad (k, r = 1, 2, \ldots, n-2). \tag{22}$$

Posons

(23) $$\lambda'_{rs} = \mu_{rs}, \quad \lambda'_{rn} = \lambda'_{ns} = 0, \quad \lambda'_{nn} = 1 \quad \text{pour} \quad r, s = 1, 2, \ldots, n-1.$$

On a évidemment

$$|\lambda'_{ri}| = |\mu_{rs}| = \pm 1.$$

Posons encore

(24) $$\vartheta_{ri} = \sum_{s=1}^{n} \lambda'_{rs} \lambda_{si}, \qquad (r, i = 1, 2, \ldots, n).$$

De la définition (24) des nombres ϑ_{ri} il s'ensuit que tous ces nombres sont entiers et que $|\vartheta_{ri}| = |\lambda'_{rs}| \cdot |\lambda_{si}|$, c'est-à-dire que

$$|\vartheta_{ri}| = \pm 1.$$

En d'autres termes, la transformation

$$x_i = \prod_{r=1}^{n} Z_r^{\vartheta_{ri}}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

est une transformation birationnelle. Nous démontrerons que cette transformation ramène les premiers $n-2$ termes (18) de l'équation (3) au $n-2$ termes (22) de l'équation transformée (4). En effet, en vertu de (24) on aura

$$c'_{kr} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} \vartheta_{ri} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} \left(\sum_{s=1}^{n} \lambda'_{rs} \lambda_{si} \right) = \sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki} \lambda_{si} \right) \lambda'_{rs},$$

et selon (20) on obtient

$$c'_{kr} = \sum_{s=1}^{n} b_{ks} \lambda'_{rs} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

De ces relations et de (23) on déduit $c'_{kr} = \sum_{s=1}^{n-1} b_{ks} \mu_{rs}$, $(k, r = 1, 2, \ldots, n-1)$, c'est-à-dire $c'_{kr} = c_{kr}$, $(k, r = 1, 2, \ldots, n-2)$.

Ainsi il est évident que par induction complète on est ramené au théorème suivant:

Théorème 4. *Pour chaque équation de la forme* (3) *il existe une transformation birationnelle de la forme* (1) *telle, que les* m, $(m < n)$, *premiers termes de l'équation transformée* (4) *ne dépendront que des* m *inconnues nouvelles* $X_1, X_2, \ldots, X_m$.

Admettons que l'équation transformée (4) est de la forme

(25) $$\sum_{k=1}^{n} A_k X_k^{m_k} = A_0.$$

Dans ce cas on aura

(26) $$\begin{gathered} b_{kr} = 0 \quad \text{pour} \quad k \neq r, \quad b_{kk} = m_k \neq 0, \qquad (k, r = 1, 2, \ldots, n), \\ b_k = (b_{k1}, b_{k2}, \ldots, b_{kn}) = |b_{kk}| = |m_k|, \end{gathered}$$

et par conséquent, en vertu de (10), on obtient

(27) $$|m_k| = a_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ainsi, en tenant compte de (7), (26) et (27), on aura $\pm|a_{ki}| = |b_{kr}| = \prod_{k=1}^{n} b_{kk} = = \prod_{k=1}^{n} m_k = \pm \prod_{k=1}^{n} a_k$, c'est-à-dire

$$(28) \qquad |a_{ki}| = \pm \prod_{k=1}^{n} a_k .$$

Réciproquement, supposons que la condition (28) est remplie et posons

$$\lambda_{rp} = \frac{a_r A_{rp}}{A}, \qquad (r, p = 1, 2, \ldots, n),$$

A_{rp} étant le complément algébrique de a_{rp} dans le déterminant $A = |a_{ki}|$, a_r étant le plus grand diviseur commun des exposants $a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{rn}$. Suivant la condition (28) on trouve

$$\lambda_{rp} = \pm \frac{A_{rp}}{\alpha_r}, \qquad \alpha_r = a_1 a_2 \ldots a_{r-1} a_{r+1} \ldots a_n .$$

On voit facilement que les nombres λ_{rp} sont entiers. En effet, chaque ligne du déterminant A_{rp} est composée des éléments appartenants tous à une ligne du déterminants A, c'est-à-dire les éléments des lignes différentes de A_{rp} se divisent respectivement par $a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}, a_{r+1}, \ldots, a_n$.

Si l'on calcule le déterminant $|\lambda_{rp}|$, on trouvera

$$|\lambda_{rp}| = \left| \frac{a_r A_{rp}}{A} \right| = \frac{\prod a_r}{A^n} \cdot |A_{rp}| = \frac{\prod a_r}{A^n} \cdot A^{n-1} = \frac{\prod a_r}{A},$$

et par conséquent, selon (28), on obtiendra $|\lambda_{rp}| = \pm 1$. Ainsi nous avons prouvé que les nombres $\lambda_{rp} = \frac{a_r A_{rp}}{A}$ déterminent une transformation birationnelle de la forme (1). On démontre facilement que cette transformation ramène l'équation (3) à l'équation (25), dans laquelle on a $m_k = a_k$. En effet,

$$b_{kr} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} \lambda_{ri} = \frac{a_k}{A} \sum_{i=1}^{n} a_{ki} A_{ri},$$

c'est-à-dire $b_{kr} = 0$ pour $k \neq r$, $b_{kk} = a_k$.

Ainsi nous avons établi le théorème suivant:

Théorème 5. *Pour que l'équation* (3) *puisse être ramenée au moyen d'une transformation birationnelle de la forme* (1) *à l'équation* (25), *il faut et il suffit que l'exposant* m_k *soit égal au plus grand diviseur commun* a_k *des exposants* a_{ki}, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *et que la condition* $|a_{ki}| = \pm \prod_{k=1}^{n} a_k$ *soit remplie.*

Corollaire. *Pour que l'équation* (3) *puisse être ramenée au moyen d'une transformation birationnelle de la forme* (1) *à l'équation* $\sum_{k=1}^{n} A_k X_k^m = A_0$, *il faut et il suffit que l'exposant* m *soit le plus grand diviseur commun des éléments de chaque ligne du déterminant* $A = |a_{ki}|$ *et qu'on ait* $A = \pm m^n$.

THÉORÈME 6. *Pour que l'équation* (3) *puisse être ramenée au moyen d'une transformation birationnelle de la forme* (1) *à l'équation linéaire* $\sum_{k=1}^{n} A_k X_k = A_0$ *il faut et il suffit qu'on ait* $|a_{ki}| = \pm 1$.

Envisageons l'équation

$$\sum_{k=1}^{n-1} A_k \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ki}} = A_0, \tag{29}$$

à n inconnues x_i, dont le premier membre contient $n-1$ termes. En vertu du théorème 3, on aura le théorème suivant:

THÉORÈME 7. *Pour chaque équation de la forme* (29) *il existe une transformation birationnelle de la forme* (1) *qui la ramène à l'équation*

$$\sum_{k=1}^{n-1} A_k \prod_{r=1}^{n-1} X_r^{b_{kr}} = A_0,$$

qui est de la forme (3). *La valeur absolue du déterminant* $|b_{kr}|$ *est égale au plus grand diviseur commun de tous les déterminants d'ordre* $n-1$ *de la matrice*

$$M = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \end{array} \right\|.$$

A l'aide de ce théorème et du théorème 6 on trouve le théorème suivant:

THÉORÈME 8. *Pour que l'équation* (29) *puisse être ramenée au moyen d'une transformation birationnelle de la forme* (1) *à l'équation linéaire* $\sum_{k=1}^{n-1} A_k X_k = A_0$, *il faut et il suffit que tous les déterminants d'ordre* $n-1$ *de la matrice* M *soient des nombres premiers entre eux.*

Envisageons l'équation

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ik}} = 0, \tag{30}$$

et appliquons pour cette équation le corollaire du théorème 1. Ainsi on démontre le théorème suivant:

THÉORÈME 9. *Pour chaque équation de la forme* (30) *il existe une transformation birationnelle de la forme* (1) *qui la ramène à l'équation*

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \prod_{r=1}^{n-1} X_r^{b_{kr}} = 0 \tag{31}$$

où les exposants b_{kr} *vérifient la relation*

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,n-1} & 1 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2,n-1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{n,n-1} & 1 \end{vmatrix} = \pm \Delta', \quad \Delta' = \left(\sum_{k=1}^{n} A_{k1}, \sum_{k=1}^{n} A_{k2}, \dots, \sum_{k=1}^{n} A_{kn} \right). \tag{32}$$

En divisant l'équation (31) par $\prod_{r=1}^{n-1} X_r^{b_{nr}}$, on obtiendra l'équation

$$\sum_{k=1}^{n-1} A_k \prod_{r=1}^{n-1} X_r^{c_{kr}} + A_n = 0, \qquad c_{kr} = b_{kr} - b_{nr}, \tag{33}$$

qui est de la forme (3). On voit facilement que $|c_{kr}| = \pm \Delta'$, où Δ' est défini par (32). En vertu du théorème 6 il existe une transformation birationnelle qui ramène l'équation (33) à l'équation $\sum_{k=1}^{n-1} A_k Y_k + A_n = 0$, si $\Delta' = 1$. Lorsqu'on pose $Y_k = \dfrac{X_k}{X_n}$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$, cette équation deviendra $\sum_{k=1}^{n} A_k X_k = 0$.

Ainsi on a démontré le théorème suivant:

THÉORÈME 10. *Pour que l'équation* (30) *puisse être ramenée au moyen d'une transformation birationnelle de la forme* (1) *à l'équation linéaire* $\sum_{k=1}^{n} A_k X_k = 0$, *il faut et il suffit que les sommes* $\sum_{k=1}^{n} A_{kp}$, $(p = 1, 2, \ldots, n)$, *soient des nombres premiers entre eux.*

Envisageons l'équation

$$\sum_{k=1}^{n} A_k x_k^{m_k} = 0, \qquad (m_k \neq 0 \text{— nombres entiers}), \tag{34}$$

qui est un cas particulier de l'équation (30). En effet, si l'on pose dans l'équation (30)

$$a_{ki} = 0 \quad \text{pour} \quad k \neq i, \quad a_{kk} = m_k \neq 0,$$

on obtiendra l'équation (34). Dans ce cas, on aura

$$A_{ki} = 0 \quad \text{pour} \quad k \neq i, \; A_{kk} = \frac{m}{m_k}, \quad m = m_1 m_2 \ldots m_n,$$

ce qui donne $\sum_{k=1}^{n} A_{kp} = A_{pp} = \dfrac{m}{m_p}$. De cette manière, la condition suivante: $\left(\sum_{k=1}^{n} A_{k1}, \sum_{k=1}^{n} A_{k2}, \ldots, \sum_{k=1}^{n} A_{kn}\right) = 1$ se réduit à la condition

$$\left(\frac{m}{m_1}, \frac{m}{m_2}, \ldots, \frac{m}{m_n}\right) = 1.$$

Mais cette condition est équivalente à la condition que les nombres m_k soient deux à deux premiers entre eux.

Ainsi on a établi le corollaire suivant:

COROLLAIRE. *Pour que l'équation* (34) *puisse être ramenée au moyen d'une transformation birationnelle de la forme* (1) *à l'équation linéaire* $\sum_{k=1}^{n} A_k X_k = 0$, *il faut et il suffit que les exposants* m_k *soient deux à deux premiers entre eux.*

En transformant l'équation (34) au moyen de (1) on obtient l'équation

$$(35) \qquad \sum_{k=1}^{n} A_k \prod_{r=1}^{n} X_r^{b_{kr}} = 0; \quad b_{kr} = m_k \lambda_{rk}, \quad (k, r = 1, 2, \ldots, n).$$

Les exposants de l'inconnue X_n sont évidemment les nombres $b_{1n}, b_{2n}, \ldots, b_{nn}$. Nous nous proposons de chercher les conditions pour que b_{kn} soient de la forme

$$(36) \qquad b_{kn} = \lambda + \varepsilon_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

λ étant un nombre entier et $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ étant égaux ou bien à 0, ou bien à 1, sans que tous les ε_k soient égaux entre eux. Dans ce cas, l'équation (35) ne contiendra que les puissances X_n^{λ} et $X_n^{\lambda+1}$ et sera de la forme

$$X_n^{\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{n} A_k X_n^{\varepsilon_k} \prod_{r=1}^{n-1} X_r^{b_{kr}} = 0.$$

On déduit de (35) pour $r = n$ et de (36)

$$m_k \lambda_{nk} = \lambda + \varepsilon_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

d'où l'on tire pour $\varepsilon_p = 1, \varepsilon_q = 0, \; m_p \lambda_{np} = \lambda + 1, \; m_q \lambda_{nq} = \lambda$. En éliminant λ, on obtient

$$(37) \qquad m_p \lambda_{np} - m_q \lambda_{nq} = 1.$$

Pour que cette équation en λ_{np} et λ_{nq} admette des solutions en nombres entiers, il faut et il suffit que m_p et m_q soient premiers entre eux,

$$(38) \qquad (m_p, m_q) = 1.$$

Remarquons, que le système ε_k permet de répartir les nombres m_k en deux groupes: dans le premier nous mettons tous les m_p pour lesquels $\varepsilon_p = 1$ et dans le deuxième — tous les autres. On conclut de (38) que chaque nombre du premier groupe est premier avec chaque nombre du second.

Ainsi nous avons trouvé une condition nécessaire pour que notre problème ait une solution. Nous montrerons qu'elle est suffisante. Pour cela nous supposerons que les exposants m_k vérifient cette condition. En changeant l'ordre des termes dans l'équation (34), on peut admettre que le premier groupe contient les s premiers nombres m_p, et le second — tous les autres nombres m_q. On en conclut que les produits

$$m = m_1 \, m_2 \ldots m_s, \quad m' = m_{s+1} \, m_{s+2} \ldots m_n,$$

sont aussi des nombres premiers entre eux,

$$(m, m') = 1.$$

Considérons maintenant l'équation

$$(39) \qquad m\mu - m'\mu' = 1,$$

aux inconnues μ, μ'. Comme $(m, m') = 1$, cette équation admet des solutions entières et soit μ, μ' une telle solution. Posons

$$(40) \quad \lambda_{np} = \frac{m}{m_p} \mu, \quad (p = 1, 2, \ldots, s); \quad \lambda_{nq} = \frac{m'}{m_q} \mu', \quad (q = s+1, s+2, \ldots, n).$$

On voit facilement que les nombres entiers λ_{nk}, $(k=1,2,\ldots,n)$, sont premiers entre eux. En effet, chaque nombre λ_{np}, $(p\leqq s)$, est premier avec chaque nombre λ_{nq}, $(q>s)$, car on déduit de (40) et de (39) que $m_p\lambda_{np}-m_q\lambda_{nq}=$ $=m\mu-m'\mu'=1$, c'est-à-dire la condition (38) est satisfaite pour $p\leqq s, q>s$. Mais d'après le théorème d'HERMITE déjà cité, il existe encore $n(n-1)$ nombres entiers λ_{uv}, $(u=1,2,\ldots,n-1;\ v=1,2,\ldots,n)$, tels que $|\lambda_{ki}|=\pm1$. Il est évident que la transformation birationnelle déterminée par tous les nombres λ_{ki} ramènera l'équation (34) à l'équation (35), dans laquelle les exposants b_{kn} de l'inconnue X_n seront

$$b_{pn}=m_p\lambda_{np}=m\mu,\ (p=1,2,\ldots,s);\ b_{qn}=m_q\lambda_{nq}=m'\mu',\ (q=s+1,s+2,\ldots,n).$$

Par conséquent, les s premiers termes de l'équation (35) contiennent $X_n^{m\mu}$ et les autres $X_n^{m'\mu'}$ et comme $m\mu-m'\mu'=1$, après avoir divisé par $X_n^{m'\mu'}$, on obtient une nouvelle équation linéaire en X_n.

Ainsi nous avons démontré le théorème suivant:

THÉORÈME 11. *Pour que l'équation* (34) *puisse être ramenée au moyen d'une transformation birationnelle de la forme* (1) *à l'équation* (35), *qui est linéaire par rapport à une des inconnues, il faut et il suffit que les exposants* m_k *se répartissent en deux groupes non vides, de façon que chaque nombre du premier groupe est premier avec chaque nombre du second.*

Envisageons l'équation

$$\sum_{k=1}^{m} A_k \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ki}} = A_0, \qquad (m<n). \tag{41}$$

Suivant le théorème 4 on aura le théorème suivant:

THÉORÈME 12. *Chaque équation de la forme* (41) *peut être ramenée au moyen d'une transformation birationnelle de la forme* (1) *à l'équation* $\sum_{k=1}^{m} A_k \prod_{r=1}^{m} X_r^{b_{kr}} = A_0$, *dont le premier membre contient aussi m termes, mais avec le même nombre des inconnues* X_r.

En transformant l'équation (41) au moyen de (1) on obtient l'équation

$$\sum_{k=1}^{m} A_k \prod_{r=1}^{n} X_r^{b_{kr}} = A_0;\quad b_{kr}=\sum_{i=1}^{n} a_{ki}\lambda_{ri},\quad (k=1,2,\ldots,m;\ r=1,\ldots,n). \tag{42}$$

Nous nous proposons de chercher les conditions pour que les exposants b_{kn} de l'inconnue X_n soient de la forme

$$b_{kn}=\varepsilon_k,\qquad (k=1,2,\ldots,m), \tag{43}$$

les nombres ε_k étant des zéros et des unités, sans que tous les ε_k soient égaux à zéro. Dans ce cas on obtient de (42) pour $r=n$ et de (43)

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki}\lambda_{ni}=\varepsilon_k,\qquad (k=1,2,\ldots,m). \tag{44}$$

De cette manière on est amené à résoudre en nombres entiers le système (44) de m équations à n inconnues λ_{ni}. D'autre part, on peut montrer qu'une solution arbitraire λ_{ni} du système (44) et composée des nombres premiers entre eux. En effet, pour $\varepsilon_p = 1$ on obtient de (44) la relation $\sum_{i=1}^{n} a_{pi}\lambda_{ni} = 1$, qui montre que les nombres λ_{ni} sont premiers entre eux. Mais d'après le théorème d'HERMITE déjà cité, il existe encore $n(n-1)$ nombres entiers λ_{uv}, $(u=1, 2, \ldots, n-1;\ v=1, 2, \ldots, n)$ tels que $|\lambda_{ki}| = \pm 1$. Ainsi il est évident, que la transformation birationnelle (1), déterminée par tous les nombres λ_{ki} ramènera l'équation (41) à une équation de la même forme, mais linéaire par rapport à l'inconnue X_n. D'autre part, d'après un théorème [3] de I. HEGER, pour que le système (44) ait des solutions en nombres entiers, il faut et il suffit que le plus grand diviseur commun de tous les déterminants d'ordre m de la matrice composée des coefficients des inconnues λ_{ni} soit égal au plus grand diviseur commun de tous les déterminants d'ordre m de la matrice composée de tous les coefficients du système (44).

Ainsi nous avons démontré le théorème suivant:

THÉORÈME 13. *Pour que l'équation* (41) *puisse être ramenée au moyen d'une transformation birationnelle de la forme* (1) *à une équation de la même forme, mais linéaire par rapport à une des inconnues, il faut et il suffit qu'il existe un systéme de m nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$, qui sont de zéros et des unités, sans que tous les ε_k soient égaux à zéro, de façon que le plus grand diviseur commun de tous les déterminants d'ordre m de la matrice*

$$M \equiv \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \right\|,$$

soit égal au plus grand diviseur commun de tous les déterminants d'ordre m de la matrice

$$M' \equiv \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & \varepsilon_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & \varepsilon_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & \varepsilon_m \end{matrix} \right\|.$$

Considérons enfin l'équation

$$(45) \qquad \sum_{k=1}^{m} A_k \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ki}} = 0, \qquad (m < n).$$

En transformant cette équation au moyen de (1), on obtient l'équation

$$(46) \quad \sum_{k=1}^{m} A_k \prod_{r=1}^{n} X_r^{b_{kr}} = 0; \quad b_{kr} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}\lambda_{ri}, \quad (k = 1, 2, \ldots, m;\ r = 1, 2, \ldots, n).$$

[3] *Denkschriften d. Kais. Akademie der Wissenschaften,* Mathem. Naturwissensch. Klasse, Wien, **14** (1858), II, p. 1. V. aussi; E. CAHEN, *Théorie des nombres,* t. I. (1914), I, p. 170.

Nous nous proposons de chercher les conditions pour que les exposants b_{kn} de l'inconnue X_n soient de la forme

$$(47) \qquad b_{kn} = \lambda + \varepsilon_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

λ étant un nombre entier et $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ étant égaux ou bien à 0, ou bien à 1, sans que tous les ε_k soient égaux entre eux. Dans ce cas on obtient de (46) pour $r = n$ et de (47)

$$(48) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ki}\lambda_{ni} = \lambda + \varepsilon_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

De cette manière on est amené à résoudre en nombres entiers le système (48) de m équations à $n+1$ inconnues λ, λ_{ni}. D'autre part, on peut montrer que les n nombres λ_{ni} d'une solution arbitraire λ, λ_{ni} du système (48) sont toujours premiers entre eux. En effet, pour $\varepsilon_p = 1, \varepsilon_q = 0, (p, q \leqq n)$, on déduit de (48) les relations $\sum_{i=1}^{n} a_{pi}\lambda_{ni} = \lambda + 1, \sum_{i=1}^{n} a_{qi}\lambda_{ni} = \lambda$. L'élimination de λ conduit enfin à la relation $\sum_{i=1}^{n} (a_{pi} - a_{qi})\lambda_{ni} = 1$, qui montre que les nombres λ_{ni} sont premiers entre eux.

En appliquant les théorèmes d'HERMITE et de HEGER, comme dans le théorème précédent, on trouve le théorème suivant:

THÉORÈME 14. *Pour que l'équation* (45) *puisse être ramenée au moyen d'une transformation birationnelle de la forme* (1) *à une équation de la même forme, mais linéaire par rapport à une des inconnues, il faut et il suffit qu'il existe un système de m nombres* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$, *qui sont des zéros et des unités, sans que tous les* ε_k *soient égaux entre eux, de façon que le plus grand diviseur commun de tous les déterminants d'ordre m de la matrice*

$$N \equiv \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & 1 \end{matrix} \right\|$$

soit égal au plus grand diviseur commun de tous les déterminants d'ordre m de la matrice

$$N' \equiv \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 1 & \varepsilon_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 1 & \varepsilon_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & 1 & \varepsilon_m \end{matrix} \right\|.$$

Les résultats que nous avons obtenus relativement aux transformations birationnelles des équations servent à résoudre les équations en nombres rationnels. Nous y arriverons en appliquant les deux propriétés suivantes:

(α) *Lorsque l'équation* $\sum_{k=1}^{n} A_k \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ki}} = A_0$ *est linéaire par rapport à une des inconnues* x_i *et ses coefficients* A_k *et ses exposants* a_{ki} *sont des nombres entiers, il est alors possible de la résoudre complètement en nombres rationnels.*

(β) *Lorsqu'on peut résoudre complètement l'équation* $\sum_{k=1}^{n} A_k \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ki}} = A_0$, *dont les coefficients* A_k *et les exposants* a_{ki} *sont des entiers, en nombres rationnels, il est alors possible de résoudre complètement en nombres rationnels chaque équation obtenue de l'équation donnée par une transformation birationnelle de la forme* (1) *et inversement.*

En se servant des propriétés (α), (β) et des théorèmes précédents, on obtient les théorèmes suivants:

THÉORÈME 15. *On peut trouver toutes les solutions rationnelles de l'équation*

(41) $$\sum_{k=1}^{m} A_k \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ki}} = A_0, \quad (A_k, a_{ki} \text{ nombres entiers; } m \leqq n),$$

à condition qu'il existe un système de m nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$, *qui sont des zéros et des unités, sans que tous les* ε_k *soient égaux à zéro, de façon que le plus grand diviseur commun de tous les déterminants d'ordre m de la matrice*

$$M \equiv \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \right\|$$

soit égal au plus grand diviseur commun de tous les déterminants d'ordre m de la matrice

$$M' \equiv \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & \varepsilon_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & \varepsilon_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & \varepsilon_m \end{matrix} \right\|.$$

THÉORÈME 16. *On peut trouver toutes les solutions rationnelles de l'équation*

(3) $$\sum_{k=1}^{n} A_k \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ki}} = A_0, \qquad (A_k, a_{ki} \text{ nombres entiers}),$$

à condition qu'il existe un système de n nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, *égaux à* 0, *ou bien à* 1, *sans que tous les* ε_k *soient égaux à* 0 *et tels, que les nombres* $\frac{1}{A}\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k A_{kp}$, $(p = 1, 2, \ldots, n)$, A_{kp} *désignant le complément algébrique de* a_{kp} *dans le déterminant* $A = |a_{ki}| \neq 0$, *soient entiers.*

COROLLAIRE. *On peut trouver toutes les solutions rationnelles de l'équation* (3) *à condition que* $|a_{ki}| = \pm 1$.

THÉORÈME 17. *On peut trouver toutes les solutions rationnelles de l'équation* (3) *à condition que* $|a_{ki}| = \pm \prod_{k=1}^{n} a_k$, a_k *désignant le plus grand diviseur commun des éléments* a_{ki} *de* k*-ième ligne du déterminant* $|a_{ki}|$ *et qu'au moins un de ces diviseurs soit égal à* 1.

THÉORÈME 18. *On peut trouver toutes les solutions rationnelles de l'équation*

$$\sum_{k=1}^{n-1} A_k \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ki}} = A_0, \qquad (A_k, a_{ki} \text{ nombres entiers}), \tag{29}$$

à condition que tous les déterminants d'ordre $n-1$ *de la matrice*

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \end{matrix} \right\|,$$

soient des nombres premiers entre eux.

THÉORÈME 19. *On peut trouver toutes les solutions rationnelles de l'équation*

$$\sum_{k=1}^{m} A_k \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ki}} = 0, \quad (A_k, a_{ki} \text{ nombres entiers}; \ m \leq n), \tag{45}$$

à condition qu'il existe un système de m *nombres* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$, *qui sont des zéros et des unités, sans que tous les* ε_k *soient égaux entre eux, de façon que le plus grand diviseur commun de tous les déterminants d'ordre* m *de la matrice*

$$N \equiv \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 1 \end{matrix} \right\|,$$

soit égal au plus grand diviseur commun de tous les déterminants d'ordre m *de la matrice*

$$N' \equiv \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & \varepsilon_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 1 & \varepsilon_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 1 & \varepsilon_m \end{matrix} \right\|.$$

THÉORÈME 20. *On peut trouver toutes les solutions rationnelles de l'équation*

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \prod_{i=i}^{n} x_i^{a_{ki}} = 0, \qquad (A_k, a_{ki} \text{ nombres entiers}), \tag{30}$$

à condition que les sommes $\sum_{k=1}^{n} A_{kp}$, $(p = 1, 2, \dots, n)$, *soient des nombres premiers entre eux.*

THÉORÈME 21. *On peut trouver toutes les solutions rationnelles de l'équation*

$$\sum_{k=1}^{n} A_k\, x_k^{m_k} = 0, \qquad (A_k,\ m_k \neq 0 \text{ nombres entiers}), \tag{34}$$

à condition que les exposants m_k se répartissent en deux groupes non vides, de façon que chaque nombre du premier groupe est premier avec chaque nombre du second.

COROLLAIRE. *On peut trouver toutes les solutions rationnelles de l'équation* (34) *à condition que les exposants m_k soient deux à deux premiers entre eux.*

(Reçu le 12 Septembre 1951.)

О РЕШЕНИИ В РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЛАХ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО УРАВНЕНИЯ $\sum_{k=1}^{n} A_k \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ki}} = A_0$

Г. ГЕОРГИЕВ (София)

(Резюме)

В настоящей работе устанавливаются теоремы относительно полного решения в рациональных числах неопределенного уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ki}} = A_0, \tag{u}$$

где некоторые из целых чисел A_k, a_{ki} могут быть нулями. Рассмотрены прежде всего случаи $A_0 \neq 0$ и $A_0 = 0$. Решение задачи осуществляется посредством трансформации вида

$$x_i = \prod_{r=1}^{n} X_r^{\lambda_{ri}}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

которая называется рациональной, если показатели λ_{ri} целые числа и бирациональной, если и обратная ей трансформация

$$X_r = \prod_{k=1}^{n} x_k^{u_{kr}}, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n), \tag{1'}$$

является также рациональной. Легко устанавливается, что для того, чтобы рациональная трансформация (1) была бирациональной необходимо и достаточно, чтобы определитель $|\lambda_{ri}|$ имел значение ± 1.

Трансформируя уравнение (u) с помощью бирациональной трансформации (1) в уравнение линейное относительно одной из неизвестных, мы находим все рациональные решения этого последного уравнения, тем самым находим все рациональные решения данного уравнения (u).

PROBLEME DER HILBERTSCHEN THEORIE DER HÖHEREN STUFEN VON REKURSIVEN FUNKTIONEN

Von

RÓZSA PÉTER (Budapest)

(*Vorgelegt von* L. KALMÁR)

Einleitung

I.

1. Unter *rekursiven Funktionen* werden diejenige zahlentheoretische Funktionen verstanden, welche von gewissen Ausgangsfunktionen ausgehend durch endlich viele Substitutionen und Rekursionen definiert werden können. Dabei kann der Begriff der Rekursion auf verschiedene Weisen abgegrenzt werden; so gelangt man zu verschiedenen Funktionenklassen, die in der mathematischen Grundlagenforschung bereits vielmals angewandt wurden. Die Untersuchung des Zusammenhanges der verschiedenen rekursiven Funktionenklassen wurde zuerst durch die Art angeregt, wie HILBERT[1] das Kontinuumproblem in Angriff genommen hat. Hier handelt es sich bekanntlich um die Vermutung, daß es zwischen dem Abzählbaren und dem Kontinuum keine Mächtigkeit gibt; und da die Menge der zahlentheoretischen Funktionen von der Mächtigkeit des Kontinuums ist, wollte HILBERT jene Vermutung dadurch beweisen, daß er den immer größeren transfiniten Zahlen der zweiten Zahlklasse Rekursionen immer „höherer Art" zuordnet, und dann zeigt: die Annahme, daß die durch immer höhere Rekursionen definierten zahlentheoretischen Funktionen die Menge sämtlicher zahlentheoretischen Funktionen erschöpfen, kann zu keinem Widerspruch führen. In diesen Untersuchungen wurde der Begriff der rekursiven Funktion von höherer Stufe eingeführt: man unterscheidet zwischen Funktionen der I-ten, II-ten, III-ten Stufe, usw., je nachdem zu ihrem Aufbau bloß Funktionen von Zahlenvariablen, oder auch Funktionen von Funktionsvariablen, von Funktionsfunktionsvariablen, usw. zugelassen werden (die Werte jeder dieser Hilfsfunktionen sind dabei jedoch Zahlen).

2. Zur Ausführung des Hilbertschen Programms wäre vor allem notwendig zu zeigen, daß die Zulassung immer höherer Stufen die entstehenden

[1] D. HILBERT, Über das Unendliche, *Math. Annalen,* **95** (1926), S. 161–190.

Funktionenklassen immer erweitert: daß es z. B. rekursive Funktionen der II-ten Stufe gibt, die auf der I-ten Stufe nicht definiert werden können. ACKERMANN[2] hat das für den Fall bewiesen, wo man sich auf *einfache* Rekursionen beschränkt (d. h. wobei die Rekursion nach einer einzigen Variablen verläuft): er hat nämlich gezeigt, daß die a-te Funktion, die man durch sukzessive Iterationen aus der Addition gewinnt, angewandt auf a und a, sämtliche einfach-rekursiven Funktionen der I-ten Stufe majorisiert, und auf der II-ten Stufe durch einfache Rekursionen definiert werden kann.

Aber ACKERMANN hat für seine Funktion auch eine rekursive Definition auf der I-ten Stufe angegeben, wobei die Rekursion „zweifach" ist, d. h. nach zwei Variablen simultan verläuft (in solchem Fall heißt die definierte Funktion „2-rekursiv"). Werden sowohl auf der I-ten, wie auf der II-ten Stufe auch *mehrfache* (nach mehreren Variablen verlaufende) Rekursionen zugelassen (und somit „k-rekursive" Funktionen für beliebige k definiert), so ist es bis heute noch nicht entschieden, ob die Zulassung der II-ten Stufe die Klasse der rekursiven Funktionen der I-ten Stufe erweitert oder nicht.

3. In einem Vortrag am Internationalen Mathematikerkongreß in Oslo (1936) habe ich behauptet, daß die Klasse der mehrfach-rekursiven Funktionen der I-ten Stufe mit der Klasse der einfach-rekursiven Funktionen der II-ten Stufe identisch ist. Ich konnte nämlich beweisen, daß sich eine jede mehrfache Rekursion der I-ten Stufe auf der II-ten Stufe auf einfache Rekursionen auflösen läßt[3] (den allgemeinen Beweis dieser Tatsache gebe ich in § 1); ferner hatte ich eine sehr verwickelte Methode zur Zurückführung der einfachen „primitiv-rekursiven" Definition einer Funktion der II-ten Stufe auf eine mehrfache Rekursion der I-ten Stufe (meine Notizen über die letztere Methode sind während des Krieges verloren gegangen). Eine Rekursion heißt dabei *primitiv*, wenn die in der Rekursion nicht teilnehmenden Variablen („Parameter" genannt) unverändert bleiben, also keine Einsetzungen für die Parameter erfolgen (jedoch können die Parameter auf der II-ten Stufe „gebunden" sein); und es ist mir früher gelungen zu beweisen,[4] daß auf der I-ten Stufe sämtliche Rekursionen, in welchen für die Parameter die verwickeltesten (sogar von früheren Werten der zu definierenden Funktion abhängigen) Einsetzungen erfolgen („eingeschachtelte Rekursionen" genannt), auf einfache primitive Rekursionen und Substitutionen aufgelöst werden können. Die am Osloer Kongreß ausgesprochene Behauptung beruhte auf der Annahme,

[2] W. ACKERMANN, Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen, *Math. Annalen*, **99** (1928), S. 118—133.

[3] R. PÉTER, *Rekursive Funktionen* (Akademischer Verlag, Budapest, 1950), S. 97—102.

[4] R. PÉTER, Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion, *Math. Annalen*, **110** (1934), S. 612—632. — Siehe noch: A rekurziv függvények elméletéhez (Ungarisch mit deutschem Auszug), *Matematikai és Fizikai Lapok*, **42** (1935), S. 25—49.

daß diese Auflösung auch auf der II-ten Stufe möglich ist. Aber in gewissen — für die II-te Stufe charakteristischen — Fällen würde das gleiche Auflösungsverfahren die Definition einer unendlich-vielstelligen Funktion (genauer gesagt: einer Funktion mit einer veränderlichen Anzahl von Variablen) erfordern, wie in § 4 vorliegender Arbeit gezeigt wird.

4. In § 2 gebe ich eine durchaus einfache neue Methode zur Zurückführung der *primitiv-rekursiven* Definition einer Funktion der II-ten Stufe auf eine mehrfache Rekursion der I-ten Stufe. Die Methode läßt sich ohne weiteres auch auf *solche eingeschachtelten* Rekursionen anwenden, die ähnlich wie auf der I-ten Stufe gebildet werden, nämlich auf solche, wobei nur an Stelle von Zahlenvariablen Einschachtelungen erfolgen; sogar dann, wenn es sich um eine mehrfache Rekursion der II-ten Stufe handelt; dies sieht man deutlich am Beispiel des § 3.

Die betrachtete Art einfache eingeschachtelte Rekursion läßt sich auf der II-ten Stufe sogar auf Substitutionen und primitive Rekursion zurückführen.

So scheint es im ersten Augenblick, als ob die II-te Stufe gar nicht mehr liefern könnte, als die I-te.

5. Es kann jedoch auf der II-ten Stufe auch eine neue Art eingeschachtelte Rekursion auftreten: eine solche, wobei Einschachtelungen auch an den Stellen der *Funktionsvariablen* erfolgen. Wie das Beispiel in § 4 zeigt: wenn die Methode in einem solchen Fall angewandt wird, so erhält man auf der I-ten Stufe die mehrfach-rekursive Definition einer Funktion δ von unendlich vielen Variablen; d. h. es hängt von einem der Argumente ab, wievielstellig bei diesem Argument δ ist. Eine solche Funktion kann auch durch Substitution einfach-rekursiver Funktionen aus einer einstelligen Funktion erhalten werden, welche durch eine transfinite Rekursion vom Typus ω^{ω} definiert wird.

6. So liegt es nahe zu glauben, daß die unendlich-vielstellige Diagonalfunktion ψ der mehrfach-rekursiven Funktionen der I-ten Stufe[5] (welche sich von allen mehrfach-rekursiven Funktionen der I-ten Stufe unterscheidet) ebenfalls zu den rekursiven Funktionen der II-ten Stufe gehört; diese Diagonalfunktion läßt sich ja ebenso wie δ mit Hilfe einer mehrfachen Rekursion mit variabler Vielfachheit (oder mit Hilfe einer transfiniten Rekursion vom Typus ω^{ω}) definieren. Könnte man das beweisen, so hätte man ein Beispiel für eine rekursive Funktion der II-ten Stufe, welche nicht zur Klasse der rekursiven Funktionen der I-ten Stufe gehört.

Betrachtet man aber näher die „unendlich-vielfache" Rekursion, welche unsere Funktion δ, und jene unendlich vielfache Rekursion, welche die Diagonalfunktion ψ definiert, so entdeckt man einen Unterschied, den ich folgenderweise bezeichnen werde: die Definition von ψ ist „vollzählig-mehr-

[5] R. PÉTER, Zusammenhang der mehrfachen und transfiniten Rekursionen, *Journal of Symbolic Logic,* **15** (1950), S. 248—272.

fach", die Definition von δ dafür „zerstreut-mehrfach". Ergibt sich nämlich nach der Angabe eines gewissen Argumentes, daß ψ dabei z. B. r-stellig ist, so müssen (für $n_1 . n_2 \ldots n_r \neq 0$) zum Aufbau von $\psi(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ sowohl solche Funktionswerte angewandt werden, wobei das erste Argument kleiner als n_1 ist, wie auch solche, wobei das erste Argument n_1, das zweite kleiner als n_2 ist, und so weiter lückenlos ganz bis zum Funktionswert $\psi(n_1, \ldots, n_{r-1}, n_r - 1)$. Bei der Definition von δ gibt es aber eine ganz bestimmte Zahl k, so daß, wie groß auch r sein mag, wenn sich δ nach der Angabe eines gewissen Argumentes als r-stellig ergibt, im Aufbau von $\delta(m_1, m_2, \ldots, m_r)$ bloß solche frühere Funktionswerte teilnehmen, bei welchen höchstens k der Argumente (aber an anderen Stellen andere) kleiner als das entsprechende $m_1, m_2, \ldots$ oder m_r sind, während die früheren Argumente den entsprechenden $m_1, m_2, \ldots$ gleich sind.

7. In § 5 werden offene Probleme bezüglich der „zerstreut-transfiniten" Rekursion dargelegt. Die Frage, ob es uneinschmelzbare Zwischendinge zwischen den transfiniten Rekursionen vom Typus ω^k mit endlichem k und zwischen der vollzähligen Rekursion vom Typus ω^ω gibt, lautet gewissermaßen ähnlich, wie das Kontinuumproblem.

Zum Beweis, daß die II-te Stufe umfassender als die I-te ist, bietet sich außer dem Diagonalverfahren eine Ausdehnung des Ackermannschen Beispiels. Das Ackermannsche Majorisierungsverfahren kann aber, wie in § 5 nahegelegt wird, für mehrfache Rekursionen nur soviel ergeben, daß es eine durch $k+1$ einfache Rekursionen der II-ten Stufe definierte Funktion gibt, die keine k-rekursive Funktion der I-ten Stufe ist (was auch viel einfacher eingesehen werden kann); so kommt man aber auch nicht zu einer Funktion der II-ten Stufe, welche von sämtlichen mehrfach-rekursiven Funktionen der I-ten Stufe verschieden ausfallen, nämlich sämtliche solche Funktionen insgesamt majorisieren würde.

Man gewinnt den Eindruck, daß die Ausdehnung des Begriffes der rekursiven Funktion der I-ten Stufe, wie man es auch versucht, ganz natürlich die Einführung einer veränderlichen Anzahl von Variablen, einer veränderlichen Anzahl von Definitionsgleichungen erfordert. Daß es bisher nicht gelungen ist, die meisten Probleme der II-ten Stufe zu lösen, hängt damit zusammen, daß man sich auch auf der II-ten Stufe auf Funktionen mit einer festen Anzahl von Variablen beschränkt, welche durch eine feste Anzahl von Substitutionen und Rekursionen definiert werden.

II.

8. Ich werde folgende Zeichen benutzen: für Zahlen und Zahlvariablen kleine lateinische Buchstaben (wenn die Zahlenvariablen gebunden sind, vom Ende des Alphabetes); für Funktionen und Funktionsvariablen kleine griechische Buchstaben; für Funktionsfunktionen große lateinische Buchstaben. Gebundene

Variablen werden in jenem Sinne verstanden, wie in einem Integral

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

die Variable x gebunden ist: der Wert dieses Integrals hängt nicht von x, sondern von $\varphi(x)$ als Funktion von x und von den Zahlen a und b ab. Ein Ausdruck, der von mehreren Variablen abhängt, kann als Funktion von beliebigen seiner Variablen aufgefaßt werden; um zu bezeichnen, welche diese Variablen sind, benutze ich das von CHURCH[6] eingeführte Zeichen λ. So bedeutet z. B.

$$\lambda x[a^x]$$

die Funktion a^x als Funktion des Exponenten; und wird das für φ in eine Funktionsfunktion

$$A(\varphi; b)$$

eingesetzt, wobei φ eine einstellige Funktionsvariable ist, so entsteht eine zahlentheoretische Funktion von a und b. Ist hier z. B.

$$A(\varphi; b) = \varphi(b^2),$$

so ist

$$A(\lambda x[a^x]; b) = a^{b^2}.$$

Die verschiedenartigen Variablen werde ich auch in den Folgenden durch einen Strichpunkt trennen.

Bezüglich der allgemeinen Kenntnisse über rekursive Funktionen berufe ich mich auf mein Buch,[7] worin diese zusammengefaßt wurden. Die gebräuchlichsten Funktionen der elementaren Zahlentheorie haben sich alle als einfach-primitiv-rekursiv auf der I-ten Stufe erwiesen, so z. B. auch die in den Folgenden benutzten Funktionen

$$\left.\begin{array}{r} p_0 = 2 \\ p_{n+1} = \text{die } n+2\text{-te Primzahl} \end{array}\right\},$$

$$\exp_a(n) = \text{der Exponent von } p_a \text{ in der Primfaktorenzerlegung von } n,$$

$$\max(n_1, \ldots, n_k) = \text{das größte von } n_1, \ldots, n_k.$$

[6] A. CHURCH, A set of postulates for the foundation of logic, *Ann. of Math.*, **34** (1933), S. 863.

[7] Siehe Fußnote [3].

§ 1. Auflösung der mehrfachen Rekursionen der I-ten Stufe auf einfache Rekursionen der II-ten Stufe

1. In einigen Spezialfällen habe ich bereits gezeigt,[8] wie sich die mehrfachen Rekursionen der I-ten Stufe auf einfache Rekursionen der II-ten Stufe auflösen lassen. Der allgemeine Beweis kann genau so geführt werden.

Die allgemeine k-fache Rekursion läßt sich auf folgende „Normalform" zurückführen[9] (für $n_1 . n_2 \ldots n_k = 0$ könnte der Wert von $\alpha(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ beliebig gewählt werden):

$$\alpha(n_1, n_2, \ldots, n_k) = 0, \text{ falls } n_1 \cdot n_2 \ldots n_k = 0$$

$$\alpha(n_1 + 1, \ldots, n_k + 1) = \beta(n_1, \ldots, n_k, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k),$$

wo für $i = 1, 2, \ldots, k$

$$\alpha_i = \alpha(n_1 + 1, \ldots, n_{i-1} + 1, n_i, \gamma_1^{(i)}(n_1, \ldots, n_k, \alpha(n_1 + 1, \ldots, n_{k-1} + 1, n_k)), \ldots$$
$$\ldots, \gamma_{k-i}^{(i)}(n_1, \ldots, n_k, \alpha(n_1 + 1, \ldots, n_{k-1} + 1, n_k))),$$

wobei die Funktionen β und $\gamma_j^{(i)}$ für $i = 1, 2, \ldots, k-1$; $j = 1, 2, \ldots, k-i$ aus den in der ursprünglichen (nicht normierten) Definition angewandten Funktionen (aus den „Bausteinen" von α) durch einfache primitive Rekursionen der I-ten Stufe und Substitutionen aufgebaut werden können.

Nun werde ich diese Definition auf k einfache Rekursionen der II-ten Stufe auflösen. Sei $k > 1$. Werden die Funktionen

$$\alpha(n_1, x_1, \ldots, x_{k-1}),\ \alpha(n_1 + 1, n_2, x_1, \ldots, x_{k-2}), \ldots,\ \alpha(n_1 + 1, \ldots, n_{k-2} + 1,\ n_{k-1}, x_1)$$

durch die Funktionsvariablen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{k-1}$ ersetzt, so ergibt die Definition statt $\alpha_k = \alpha(n_1 + 1, \ldots, n_{k-1} + 1, n_k)$ eine Funktionsfunktion $A_0(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}; n_1, \ldots, n_k)$:

$$A_0(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}; n_1, \ldots, n_{k-1}, 0) = 0$$

$$A_0(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}; n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k + 1) =$$
$$= \beta(n_1, \ldots, n_k, B_1, \ldots, B_{k-1}, A_0(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}; n_1, \ldots, n_k)),$$

wobei für $i = 1, 2, \ldots, k-1$

$$B_i = \varphi_i(\gamma_1^{(i)}(n_1, \ldots, n_k, A_0(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}; n_1, \ldots, n_k)), \ldots$$
$$\ldots, \gamma_{k-i}^{(i)}(n_1, \ldots, n_k, A_0(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}; n_1, \ldots, n_k))).$$

Man sieht leicht, daß

$$A_0(\lambda x_1 \ldots x_{k-1}[\alpha(n_1, x_1, \ldots, x_{k-1})], \lambda x_1 \ldots x_{k-2}[\alpha(n_1 + 1, n_2, x_1, \ldots, x_{k-2})], \ldots$$
$$\ldots, \lambda x_1[\alpha(n_1 + 1, \ldots, n_{k-2} + 1, n_{k-1}, x_1)]; n_1, \ldots, n_k) = \alpha(n_1 + 1, \ldots, n_{k-1} + 1, n_k)$$

gilt. Für $n_k = 0$ steht nämlich an beiden Seiten 0; und wenn die Behauptung für ein n_k bereits gilt, so ist

[8] Siehe Fußnote [3].

[9] R. PÉTER, Über die mehrfache Rekursion, *Math. Annalen,* **113** (1936), S. 489—527

$$A_0(\lambda x_1 \ldots x_{k-1}[\alpha(n_1, x_1, \ldots, x_{k-1})], \ldots, \lambda x_1[\alpha(n_1+1, \ldots, n_{k-2}+1, n_{k-1}, x_1)];$$
$$; n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k+1) =$$
$$= \beta(n_1, \ldots, n_k, B'_1, \ldots, B'_{k-1}, A_0(\lambda x_1 \ldots x_{k-1}[\alpha(n_1, x_1, \ldots, x_{k-1})], \ldots$$
$$\ldots, \lambda x_1[\alpha(n_1+1, \ldots, n_{k-2}+1, n_{k-1}, x_1)]; n_1, \ldots, n_k)) =$$
$$= \beta(n_1, \ldots, n_k, B'_1, \ldots, B'_{k-1}, \alpha(n_1+1, \ldots, n_{k-1}+1, n_k)),$$

wobei für $i = 1, 2, \ldots, k-1$

$$B'_i = \alpha(n_1+1, \ldots, n_{i-1}+1, n_i, \gamma_1^{(i)}(n_1, \ldots, n_k, \alpha(n_1+1, \ldots, n_{k-1}+1, n_k)), \ldots$$
$$\ldots, \gamma_{k-i}^{(i)}(n_1, \ldots, n_k, \alpha(n_1+1, \ldots, n_{k-1}+1, n_k))) = \alpha_i;$$

nach der Definition von α ist daher

$$\beta(n_1, \ldots, n_k, B'_1, \ldots, B'_{k-1}, \alpha(n_1+1, \ldots, n_{k-1}+1, n_k)) =$$
$$= \beta(n_1, \ldots, n_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha(n_1+1, \ldots, n_{k-1}+1, n_k)) = \alpha(n_1+1, \ldots, n_k+1).$$

So überträgt sich die Behauptung von n_k auf n_k+1; demnach gilt sie allgemein.

Die beiden Gleichungen

$$\alpha(n_1, \ldots, n_k) = 0, \text{ falls } n_1 . n_2 \ldots n_{k-1} = 0$$
$$\alpha(n_1+1, \ldots, n_{k-1}+1, n_k) = A_0(\lambda x_1 \ldots x_{k-1}[\alpha(n_1, x_1, \ldots, x_{k-1})], \ldots$$
$$\ldots, \lambda x_1[\alpha(n_1+1, \ldots, n_{k-2}+1, n_{k-1}, x_1)]; n_1, \ldots, n_k)$$

ergeben eine $k-1$-fache Rekursion der II-ten Stufe für α.

2. Ich werde aber jetzt die Einsetzungen von $\lambda x_1 \ldots x_{k-1}[\alpha(n_1, x_1, \ldots, x_{k-1})], \ldots, \lambda x_1[\alpha(n_1+1, \ldots, n_{k-2}+1, n_{k-1}, x_1)]$ für $\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}$ schrittweise ausführen; so gelange ich über lauter einfache Rekursionen zu α.

Sei also

$$A_1(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-2}; n_1, \ldots, n_{k-2}, 0, n_k) = 0$$
$$A_1(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-2}; n_1, \ldots, n_{k-2}, n_{k-1}+1, n_k) =$$
$$= A_0(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-2}, \lambda x_1[A_1(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-2}; n_1, \ldots . n_{k-1}, x_1)]; n_1, \ldots, n_k),$$
$$A_2(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-3}; n_1, \ldots, n_{k-3}, 0, n_{k-1}, n_k) = 0$$
$$A_2(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-3}; n_1, \ldots, n_{k-3}, n_{k-2}+1, n_{k-1}, n_k) =$$
$$= A_1(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-3}, \lambda x_1 x_2[A_2(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-3}; n_1, \ldots, n_{k-2}, x_1, x_2)]; n_1, \ldots, n_k),$$

. . . .

für $0 < i < k$

$$A_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1-i}; n_1, \ldots, n_{k-1-i}, 0, n_{k+1-i}, \ldots, n_k) = 0$$
$$A_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1-i}; n_1, \ldots, n_{k-1-i}, n_{k-i}+1, n_{k+1-i}, \ldots, n_k) =$$
$$= A_{i-1}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1-i}, \lambda x_1 \ldots x_i[A_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1-i}; n_1, \ldots, n_{k-i}, x_1, \ldots, x_i)]; n_1, \ldots, n_k),$$

. . . .

zuletzt

$$A_{k-1}(0, n_2, \ldots, n_k) = 0$$
$$A_{k-1}(n_1+1, n_2, \ldots, n_k) = A_{k-2}(\lambda x_1 \ldots x_{k-1}[A_{k-1}(n_1, x_1, \ldots, x_{k-1})]; n_1, \ldots, n_k).$$

So ist $A_{k-1}(n_1, \ldots, n_k)$ eigentlich keine Funktionsfunktion mehr, sondern eine zahlentheoretische Funktion. Ich behaupte, daß

$$A_{k-1}(n_1, \ldots, n_k) = \alpha(n_1, \ldots, n_k)$$

gilt. Das ergibt sich leicht aus folgendem

HILFSSATZ. *Für* $r = 0, 1, \ldots, k-1$ *gilt*

$$A_{k-1}(n_1+1, \ldots, n_r+1, n_{r+1}, \ldots, n_k) = A_{k-1-r}(\lambda x_1 \ldots x_{k-1}[A_{k-1}(n_1, x_1, \ldots, x_{k-1})], \ldots$$
$$\ldots, \lambda x_1 \ldots x_{k-r}[A_{k-1}(n_1+1, \ldots, n_{r-1}+1, n_r, x_1, \ldots, x_{k-r})]; n_1, \ldots, n_k).$$

Dies ist nämlich für $r = 0$ trivial; und falls die Behauptung für ein $r < k-1$ bereits gilt, so folgt durch Einsetzung von $n_{r+1}+1$ für n_{r+1}

$$A_{k-1}(n_1+1, \ldots, n_{r+1}+1, n_{r+2}, \ldots, n_k) = A_{k-1-r}(\lambda x_1 \ldots x_{k-1}[A(n_1, x_1, \ldots, x_{k-1}), \ldots$$
$$\ldots, \lambda x_1 \ldots x_{k-r}[A_{k-1}(n_1+1, \ldots, n_{r-1}+1, n_r, x_1, \ldots, x_{k-r})];$$
$$; n_1, \ldots, n_r, n_{r+1}+1, n_{r+2}, \ldots, n_k).$$

Hier kann aber die rechte Seite nach der Definition auch als

$$A_{k-1-(r+1)}(\lambda x_1 \ldots x_{k-1}[A_{k-1}(n_1, x_1, \ldots, x_{k-1})], \ldots$$
$$\ldots, \lambda x_1 \ldots x_{k-r}[A_{k-1}(n_1+1, \ldots, n_{r-1}+1, n_r, x_1, \ldots, x_{k-r})],$$
$$, \lambda y_1 \ldots y_{k-1-r}[A_{k-1-r}(\lambda x_1 \ldots x_{k-1}[A_{k-1}(n_1, x_1, \ldots, x_{k-r})], \ldots$$
$$\ldots, \lambda x_1 \ldots x_{k-r}[A_{k-1}(n_1+1, \ldots, n_{r-1}+1, n_r, x_1, \ldots, x_{k-r})];$$
$$; n_1, \ldots, n_{r+1}, y_1, \ldots, y_{k-1-r})]; n_1, \ldots, n_k)$$

geschrieben werden, und nach der Annahme ist darin

$$A_{k-1-r}(\lambda x_1 \ldots x_{k-1}[A_{k-1}(n_1, x_1, \ldots, x_{k-1})], \ldots, \lambda x_1 \ldots x_{k-r}[A_{k-1}(n_1+1, \ldots$$
$$\ldots, n_{r-1}+1, n_r, x_1, \ldots, x_{k-r})]; n_1, \ldots, n_{r+1}, y_1, \ldots, y_{k-1-r}) =$$
$$= A_{k-1}(n_1+1, \ldots, n_r+1, n_{r+1}, y_1, \ldots, y_{k-1-r});$$

so ist endlich (die gebundenen Variablen $y_1, \ldots, y_{k-1-r}$ wieder mit $x_1, \ldots, x_{k-1-r}$ bezeichnet)

$$A_{k-1}(n_1+1, \ldots, n_{r+1}+1, n_{r+2}, \ldots, n_k) =$$
$$= A_{k-1-(r+1)}(\lambda x_1 \ldots x_{k-1}[A_{k-1}(n_1, x_1, \ldots, x_{k-1})], \ldots$$
$$\ldots, \lambda x_1 \ldots x_{k-r}[A_{k-1}(n_1+1, \ldots, n_{r-1}+1, n_r, x_1, \ldots, x_{k-r})],$$
$$, \lambda x_1 \ldots x_{k-1-r}[A_{k-1}(n_1+1, \ldots, n_r+1, n_{r+1}, x_1, \ldots, x_{k-1-r})]; n_1, \ldots, n_k).$$

Die Gültigkeit des Hilfssatzes überträgt sich also von r auf $r+1$, solange $r < k-1$ ist; und demnach gilt der Hilfssatz allgemein.

3. Speziell für $r = k-1$ ergibt der Hilfssatz:

$$A_{k-1}(n_1+1, \ldots, n_{k-1}+1, n_k) = A_0(\lambda x_1 \ldots x_{k-1}[A_{k-1}(n_1, x_1, \ldots, x_{k-1})], \ldots$$
$$\ldots, \lambda x_1[A_{k-1}(n_1+1, \ldots, n_{k-2}+1, n_{k-1}, x_1)]; n_1, \ldots, n_k).$$

Nun komme ich zum Beweis von

$$A_{k-1}(n_1, \ldots, n_k) = \alpha(n_1, \ldots, n_k).$$

Erstens gilt diese Behauptung für $n_1 . n_2 \ldots n_k = 0$. In diesem Fall ist nämlich $\alpha(n_1, \ldots, n_k) = 0$; und falls das erste verschwindende Argument n_{r+1} ist, so ist der Wert von $A_{k-1}(n_1, \ldots, n_k)$ mit dem Wert von A_{k-1-r} an einer solchen Stelle identisch, wo für die $r+1$-te Zahlenvariable 0 eingesetzt wird; an einer solchen Stelle ist aber nach der Definition der Wert von A_{k-1-r} auch 0.

Nehmen wir jetzt an, daß die Behauptung bereits für alle Vorgänger einer Stelle $(n_1+1, \ldots, n_k+1)$ gilt (als Vorgänger werden solche Stellen betrachtet, wo das erste Argument n_1, oder das erste Argument n_1+1, das zweite n_2, usw., endlich wo das erste Argument n_1+1, das zweite $n_2+1, \ldots$, das $k-1$-te $n_{k-1}+1$, und das k-te n_k ist). Dann ergibt sich aus dem Hilfssatz für $r=k-1$

$$A_{k-1}(n_1+1, \ldots, n_k+1) = A_0(\lambda x_1 \ldots x_{k-1}[\alpha(n_1, x_1, \ldots, x_{k-1})], \ldots$$
$$\ldots, \lambda x_1[\alpha(n_1+1, \ldots, n_{k-2}+1, n_{k-1}, x_1)]; n_1, \ldots, n_k).$$

Von der rechten Seite hat es sich aber in Nr. **1** bereits herausgestellt, daß sie mit $\alpha(n_1+1, \ldots, n_k+1)$ identisch ist. Es ist also tatsächlich

$$A_{k-1}(n_1+1, \ldots, n_k+1) = \alpha(n_1+1, \ldots, n_k+1).$$

So ist es gelungen, die Funktion $\alpha(n_1, \ldots, n_k)$, welche ursprünglich aus gewissen schon früher definierten „Bausteinen" durch eine k-fache Rekursion definiert wurde, durch k einfache Rekursionen der II-ten Stufe zu definieren. Da aber sämtliche mehrfach-rekursiven Funktionen der I-ten Stufe von 0 und $n+1$ ausgehend durch eine endliche Kette von Substitutionen und mehrfachen Rekursionen der I-ten Stufe aufgebaut werden können, folgt daraus, daß sich diese Funktionen alle auch durch Substitutionen und einfache Rekursionen der II-ten Stufe aufbauen lassen. Dabei hat man auf der II-ten Stufe zu den Grundfunktionen 0 und $n+1$ auch die Grundfunktionsfunktionen

$$V_1(\varphi; a) = \varphi(a),\ V_2(\varphi; a_1, a_2) = \varphi(a_1, a_2), \ldots,\ V_i(\varphi; a_1, \ldots, a_i) = \varphi(a_1, \ldots, a_i), \ldots$$

hinzuzunehmen.

§ 2. Zurückführung der primitiven Rekursionen der II-ten Stufe auf mehrfache Rekursionen der I-ten Stufe

1. Betrachten wir nun ein einfaches Beispiel einer rekursiven Funktion der II-ten Stufe. Sei

$$\alpha(0, a) = a$$
$$\alpha(n+1, a) = B(\lambda x[\alpha(n, x)]; n, a),$$

wo

$$B(\varphi; 0, a) = \varphi(a^2)$$
$$B(\varphi; n+1, a) = C(\lambda x[B(\varphi; n, x)]; n, a),$$

und

$$C(\varphi; 0, a) = \varphi(a)$$
$$C(\varphi; n+1, a) = \varphi(C(\varphi; n, a)).$$

2. Ich nenne diese Rekursionen primitiv, obwohl der Parameter a von α und B in $B(\lambda x[\alpha(n,x)]; n, a)$ und in $C(\lambda x[B(\varphi; n, x)]; n, a)$ nicht unverändert geblieben ist. Eine solche Bindung des Parameters ist aber unvermeidlich auf der II-ten Stufe. Denn die Definition soll eine zahlentheoretische Funktion ergeben, durch Vermittelung gewisser Funktionsfunktionen. Es treten also im Aufbau der definierten Funktion auch Funktionsvariablen auf; diese müssen aber zum Schluß verschwinden. Verschwinden sie bloß dadurch, daß bekannte Funktionen für sie eingesetzt werden, so hätte man von Anfang an statt Funktionsvariablen diese bekannten Funktionen anwenden können, und so hätte man garnicht aus der I-ten Stufe heraustreten sollen. (Vgl. die Methode der „Rückverlegung der Einsetzungen" in der Beweistheorie.) Durch eine Rekursion verschwindet aber eine Funktionsvariable bloß dann, wenn die zu definierende Funktion, mit kleineren Werten der Rekursionsvariablen, als Funktion gewisser Parameter für sie eingesetzt wird.

In der Definition von B (oder von α) könnte freilich ein früherer Funktionswert auch für eine Zahlenvariable eingesetzt werden. Ein solcher Fall läßt sich aber immer auf einen Fall, wo die Einsetzung des früheren Funktionswertes (als Funktion gewisser Parameter betrachtet) für eine Funktionsvariable erfolgt, und auf Substitution zurückführen. Betrachten wir z. B. folgende Definition:

$$B_1(\varphi; 0, a) = \varphi(a^2)$$

$$B_1(\varphi; n+1, a) = C(\varphi; B_1(\varphi; n, a), a).$$

Sei

$$C_1(\varphi, \psi; a) = C(\varphi; \psi(a), a),$$

so ist

$$B_1(\varphi; n+1, a) = C_1(\varphi, \lambda x[B_1(\varphi; n, x)]; a).$$

3. Nun kehren wir zurück zur obigen Definition von $\alpha(n, a)$. Diese Definition ist darum eine Rekursion der II-ten Stufe, weil darin außer der zu definierenden zahlentheoretischen Funktion $\alpha(n, a)$ auch die Funktionsfunktionen $B(\varphi; n, a)$ und $C(\varphi; n, a)$ vorkommen. Offenbar braucht man aber diese Funktionsfunktionen zur Definition von $\alpha(n, a)$ nicht für eine beliebige Funktion φ, sondern nur für gewisse spezielle (selbstverständlich mit der zu definierenden Funktion α in einem gewissen Zusammenhang stehende) Funktionen; z. B. braucht man die Funktionsfunktion B nur für $\varphi = \lambda x[\alpha(n, x)]$. Eine Funktionsfunktion geht aber für eine spezielle Wahl ihrer Funktionsvariablen in eine Funktion von Zahlenvariablen über. Daher kann man versuchen, die Definition von α sozusagen auf die I-te Stufe zu übersetzen, indem man die Funktionsfunktionen B und C durch jene zahlentheoretischen Funktionen ersetzt, die aus ihnen durch Einsetzung derjeniger speziellen Funktionen für φ entstehen, für die man jene Funktionsfunktionen zur Definition von $\alpha(n, a)$ braucht. (Falls dabei B oder C für mehrere, für φ eingesetzte, spezielle Funktionen gebraucht wird, so wird sie natürlich durch mehrere zahlentheoretische Funktionen ersetzt.)

Dieser Zurückführungsgedanke läßt sich aber nicht ohne weiteres durchführen. In der Tat, man kann statt der Funktionsfunktion $B(\varphi; n, a)$ nicht die zahlentheoretische Funktion

$$\beta(n, a) = B(\lambda x[\alpha(n, x)]; n, a)$$

durch Rekursion definieren, da $B(\varphi; n, a)$ durch Rekursion nach seinem zweiten Argument n definiert wurde, und n kommt in $\beta(n, a)$ auch als Argument von $\lambda x[\alpha(n, x)]$ vor. Wird daher

$$\beta(n+1, a) = B(\lambda x[\alpha(n+1, x)]; n+1, a)$$

mit Hilfe der zweiten Rekursionsgleichung von B berechnet, so erhält man

$$\beta(n+1, a) = C(\lambda x[B(\lambda y[\alpha(n+1, y)]; n, x)]; n, a)$$

und hier kann man statt $B(\lambda y[\alpha(n+1, y)]; n, x)$ nicht die Funktion β einführen (auch nicht durch Verwendung der zweiten Rekursionsgleichung von α, die nur

$$\begin{aligned}\beta(n+1, a) &= C(\lambda x[B(\lambda y[B(\lambda z[\alpha(n, z)]; n, y)]; n, x)]; n, a) = \\ &= C(\lambda x[B(\lambda y[\beta(n, y)]; n, x)]; n, a)\end{aligned}$$

ergibt, wobei man $B(\lambda y[\beta(n, y)]; n, x)$ wiederum nicht durch β allein ausdrücken kann).

Daher soll die Rekursionsvariable n von B von dem mit ihr zufällig zusammenfallenden Argument n von $\lambda x[\alpha(n, x)]$ unterschieden werden, d. h. es soll statt der obigen Funktion $\beta(n, a)$ die Funktion

$$\beta(n_1, n_2, a) = B(\lambda x[\alpha(n_1, x)]; n_2, a)$$

betrachtet werden. Mit Hilfe dieser Funktion läßt sich die zweite Rekursionsgleichung der Funktion $\alpha(n, a)$ wie folgt schreiben:

$$\alpha(n+1, a) = \beta(n, n, a).$$

Ferner gilt nach der ersten Rekursionsgleichung der Funktionsfunktion $B(\varphi; n, a)$ die Gleichung

$$\beta(n_1, 0, a) = B(\lambda x[\alpha(n_1, x)]; 0, a) = \alpha(n_1, a^2),$$

und nach der zweiten Rekursionsgleichung von B,

$$\begin{aligned}\beta(n_1, n_2+1, a) &= B(\lambda x[\alpha(n_1, x)]; n_2+1, a) = \\ &= C(\lambda x[B(\lambda y[\alpha(n_1, y)]; n_2, x)]; n_2, a) = C(\lambda x[\beta(n_1, n_2, x)]; n_2, a).\end{aligned}$$

So braucht man zur Definition der Funktion $\beta(n_1, n_2, a)$ (statt der Funktionsfunktion $C(\varphi; n, a)$ für eine beliebige Funktion φ) nur die zahlentheoretische Funktion

$$\gamma(n_1, n_2, a) = C(\lambda x[\beta(n_1, n_2, x)]; n_2, a).$$

Nun ist es aus dem gleichen Grunde wie vorher nötig, die Rekursionsvariable n_2 von C von dem mit ihr zufällig zusammenfallenden Argument n_2 von $\lambda x[\beta(n_1, n_2, x)]$ zu unterscheiden, d. h. statt dieser dreistelligen Funktion γ die vierstellige Funktion

$$\gamma(n_1, n_2, n_3, a) = C(\lambda x[\beta(n_1, n_2, x)]; n_3, a)$$

zu betrachten. Mit Hilfe dieser Funktion läßt sich die zuletzt für $\beta(n_1, n_2+1, a)$ erhaltene Gleichung wie folgt schreiben:

$$\beta(n_1, n_2+1, a) = \gamma(n_1, n_2, n_2, a);$$

ferner gelten nach den Rekursionsgleichungen der Funktionsfunktion $C(\varphi; n, a)$ die Gleichungen

$$\gamma(n_1, n_2, 0, a) = C(\lambda x[\beta(n_1, n_2, x)]; 0, a) = \beta(n_1, n_2, a)$$

$$\gamma(n_1, n_2, n_3+1, a) = C(\lambda x[\beta(n_1, n_2, x)]; n_3+1, a) =$$

$$= \beta(n_1, n_2, C(\lambda x[\beta(n_1, n_2, x)]; n_3, a)) = \beta(n_1, n_2, \gamma(n_1, n_2, n_3, a)).$$

4. Die hiermit erhaltene simultane Definition

$$\begin{aligned}
&\alpha(0, a) = a,\\
&\alpha(n_1+1, a) = \beta(n_1, n_1, a),\\
&\beta(n_1, 0, a) = \alpha(n_1, a^2),\\
&\beta(n_1, n_2+1, a) = \gamma(n_1, n_2, n_2, a),\\
&\gamma(n_1, n_2, 0, a) = \beta(n_1, n_2, a),\\
&\gamma(n_1, n_2, n_3+1, a) = \beta(n_1, n_2, \gamma(n_1, n_2, n_3, a))
\end{aligned}$$

der zahlentheoretischen Funktionen α, β und γ läßt sich leicht zu einer 4-fachen Rekursion zusammenziehen: als vierte Rekursionsvariable wird der „Index" dieser Funktionen auftreten. Ein jeder Funktionswert ist hier nämlich entweder mit Hilfe eines an früherer Stelle angenommenen Wertes, oder mit Hilfe einer „früheren" Funktion definiert.

Sei also

$$\begin{aligned}
&\delta(n_1, n_2, n_3, 0, a) = \alpha(n_1, a),\\
&\delta(n_1, n_2, n_3, 1, a) = \beta(n_1, n_2, a),\\
&\delta(n_1, n_2, n_3, i+2, a) = \gamma(n_1, n_2, n_3, a).
\end{aligned}$$

(Die „Indexvariable" i ließe sich übrigens auch in n_3 einschmälzen: man könnte δ auch folgenderweise definieren:

$$\begin{aligned}
&\delta(n_1, n_2, 3n_3, a) = \alpha(n_1, a),\\
&\delta(n_1, n_2, 3n_3+1, a) = \beta(n_1, n_2, a),\\
&\delta(n_1, n_2, 3n_3+2, a) = \gamma(n_1, n_2, n_3, a);
\end{aligned}$$

dann wäre δ 3-rekursiv.)

So lautet die Definition von δ:

$$\begin{aligned}
&\delta(0, n_2, n_3, 0, a) = a\\
&\delta(n_1+1, n_2, n_3, 0, a) = \delta(n_1, n_1, n_3, 1, a)\\
&\delta(n_1, 0, n_3, 1, a) = \delta(n_1, 0, n_3, 0, a^2)\\
&\delta(n_1, n_2+1, n_3, 1, a) = \delta(n_1, n_2, n_2, 2, a)\\
&\delta(n_1, n_2, 0, i+2, a) = \delta(n_1, n_2, 0, 1, a)\\
&\delta(n_1, n_2, n_3+1, i+2, a) = \delta(n_1, n_2, n_3, 1, \delta(n_1, n_2, n_3, i+2, a))
\end{aligned}$$

und das ist tatsächlich eine 4-fache Rekursion der I-ten Stufe. Dabei ist z. B.

$$\alpha(n, a) = \delta(n, 0, 0, 0, a).$$

So entsteht $\alpha(n, a)$ durch eine einfache Substitution aus δ, demnach ist sie eine mehrfach-rekursive Funktion der I-ten Stufe.

5. An diesem Beispiel werde ich auch genau nachprüfen, daß die durch $\delta(n_1, n_2, n_3, 0, a)$ definierte Funktion tatsächlich für beliebige n_2, n_3 mit der durch die ursprünglichen Rekursionen der II-ten Stufe definierten Funktion $\alpha(n_1, a)$ indentisch ist. Die Behauptung lautet

$$(1) \qquad \alpha(n_1, a) = \delta(n_1, n_2, n_3, 0, a).$$

Dies gilt für $n_1 = 0$, da in diesem Fall auf beiden Seiten a steht. Nehmen wir an, daß sie bereits für ein n_1 gilt. Dann werde ich, um ihre Gültigkeit für $n_1 + 1$ zu zeigen, wegen

$\alpha(n_1 + 1, a) = B(\lambda x[\alpha(n_1, x)]; n_1, a)$ und $\delta(n_1 + 1, n_2, n_3, 0, a) = \delta(n_1, n_1, n_3, 1, a)$

gleich allgemeiner

$$(2) \qquad B(\lambda x[\alpha(n_1, x)]; n_2, a) = \delta(n_1, n_2, n_3, 1, a)$$

für jedes n_3 beweisen.

Dies gilt für $n_2 = 0$, da nach den Definitionen und nach der Annahme in diesem Fall auf der rechten Seite

$$\delta(n_1, 0, n_3, 1, a) = \delta(n_1, 0, n_3, 0, a^2) = \alpha(n_1, a^2),$$

also auf beiden Seiten $\alpha(n_1, a^2)$ steht. Nehmen wir an, daß für ein n_2 bereits (2) gilt. Um auf $n_2 + 1$ zu schließen, beweise ich wegen

$$B(\lambda x[\alpha(n_1, x)]; n_2 + 1, a) = C(\lambda x[B(\lambda y[\alpha(n_1, y)]; n_2, x)]; n_2, a)$$

und

$$\delta(n_1, n_2 + 1, n_3, 1, a) = \delta(n_1, n_2, n_2, 2, a)$$

gleich allgemeiner

$$(3) \qquad C(\lambda x[B(\lambda y[\alpha(n_1, y)]; n_2, x)]; n_3, a) = \delta(n_1, n_2, n_3, 2, a).$$

Das gilt für $n_3 = 0$, da in diesem Fall nach den Definitionen und der letzten Annahme auf der rechten Seite

$$\delta(n_1, n_2, 0, 2, a) = \delta(n_1, n_2, 0, 1, a) = B(\lambda x[\alpha(n_1, x)]; n_2, a)$$

steht, und auch die linke Seite damit identisch ist. Nehmen wir an, daß (3) bereits für ein n_3 gilt. So gilt es auch für $n_3 + 1$, denn nach den Definitionen und Annahmen ist

$$\begin{aligned}\delta(n_1, n_2, n_3 + 1, 2, a) &= \delta(n_1, n_2, n_3, 1, \delta(n_1, n_2, n_3, 2, a)) = \\ &= B(\lambda y[\alpha(n_1, y)]; n_2, C(\lambda x_1[B(\lambda y_1[\alpha(n_1, y_1)]; n_2, x_1)]; n_3, a)) = \\ &= C(\lambda x[B(\lambda y[\alpha(n_1, y)]; n_2, x)]; n_3 + 1, a).\end{aligned}$$

Damit ist (3), dadurch (2) und dadurch (1) allgemein bewiesen.

6. Allgemein lautet die primitiv-einfach-rekursive Definition einer Funktionsfunktion:

$$A(\varphi_1,\ldots,\varphi_r;0,a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_t)=B(\varphi_1,\ldots,\varphi_r;a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_t)$$

$$A(\varphi_1,\ldots,\varphi_r;n+1,a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_t)=$$
$$=C(\varphi_1,\ldots,\varphi_r,\lambda x_1\ldots x_t[A(\varphi_1,\ldots,\varphi_r;n,a_1,\ldots,a_s,x_1,\ldots,x_t)];$$
$$;n,a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_t).$$

Dabei sind

$B(\varphi_1,\ldots,\varphi_r;a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_t)$ und $C(\varphi_1,\ldots,\varphi_r,\varphi_{r+1};n,a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_t)$

früher definierte Funktionsfunktionen (wobei φ_{r+1} eine t-stellige Funktionsvariable ist). Es komme diese Definition als ein Teil der Rekursion II-ter Stufe einer gewissen zahlentheoretischen Funktion η vor. Dann soll die Funktionsfunktion A nach dem vorher verwendeten Gedanken durch Einsetzung gewisser speziellen, von η abhängigen, Funktionen $\zeta_1,\ldots,\zeta_r$ (nämlich derjenigen, für welche die Funktionsfunktion A zur Definition von η gebraucht wird) durch eine zahlentheoretische Funktion

$$\alpha(c_1,\ldots,c_u,n,a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_t)=A(\zeta_1,\ldots,\zeta_r;n,a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_t)$$

ersetzt werden, wobei $c_1,\ldots,c_u$ die in $\zeta_1,\ldots,\zeta_r$ insgesamt vorkommenden Variablen sind (unter denen die Rekursionsvariable von A gewiß nicht vorkommt, da diese sonst von der entsprechenden Variablen C unterschieden werden muß). Für diese Funktion α gewinnt man aus den Rekursionsgleichungen von A die Definition

$$\alpha(c_1,\ldots,c_u,0,a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_t)=B(\zeta_1,\ldots,\zeta_r;a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_t)$$

$$\alpha(c_1,\ldots,c_u,n+1,a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_t)=$$
$$=C(\zeta_1,\ldots,\zeta_r,\lambda x_1\ldots x_t[A(\zeta_1,\ldots,\zeta_r;n,a_1,\ldots,a_s,x_1,\ldots,x_t)];$$
$$;n,a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_t)=$$
$$=C(\zeta_1,\ldots,\zeta_r,\lambda x_1\ldots x_t[\alpha(c_1,\ldots,c_u,n,a_1,\ldots,a_s,x_1,\ldots,x_t)];$$
$$;n,a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_t).$$

Hier soll man analog für $B(\zeta_1,\ldots,\zeta_r;a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_t)$ eine zahlentheoretische Funktion $\beta(c_1,\ldots,c_u,a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_t)$ einführen; so lautet die erste Definitionsgleichung von α

$$\alpha(c_1,\ldots,c_u,0,a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_t)=\beta(c_1,\ldots,c_u,a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_t).$$

Für

$C(\zeta_1,\ldots,\zeta_r,\lambda x_1\ldots x_t[\alpha(c_1,\ldots,c_u,n,a_1,\ldots,a_s,x_1,\ldots,x_t)];n,a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_t)$

kann man aber nicht unmittelbar eine zahlentheoretische Funktion $\gamma(c_1,\ldots,c_u,n,a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_t)$ einführen, sondern man hat zuerst, falls die Funktionsfunktion $C(\varphi_1,\ldots,\varphi_r,\varphi_{r+1};n,a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_t)$ durch Rekursion definiert wurde, die Bezeichnung der Rekursionsvariablen in C (nicht aber innerhalb $\lambda x_1\ldots x_t[\alpha(c_1,\ldots,c_u,n,a_1,\ldots,a_s,x_1,\ldots x_t)]$) in eine neue Variable m

abzuändern, und für die so aus

$$C(\zeta_1, \ldots, \zeta_r, \lambda x_1 \ldots x_t[\alpha(c_1, \ldots, c_u, n, a_1, \ldots, a_s, x_1, \ldots, x_t)]; a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_t)$$

entstehende Funktion eine Bezeichnung wie $\gamma(c_1, \ldots, c_u, n, a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_t, m)$ einzuführen. Um aber die Definition dieser Funktion wirklich aufzuschreiben, hätte man jedesmal dasjenige von $n, a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_t$ durch eine Bezeichnung anzugeben, das als Rekursionsvariable der Funktionsfunktion C dient; und dies für sämtliche in der Definition von η vorkommende Funktionsfunktionen (da man sämtliche Rekursionsgleichungen II-ter Stufe von η braucht, um ihre mehrfach-rekursive Definition I-ter Stufe angeben zu können). Dazu kommt noch die Komplikation, daß die Funktionsfunktion C zuweilen durch Substitution entstehen kann. Um also die Zurückführungsmethode der vorigen Nummer allgemein aufschreiben zu können, müßte man eine variable Anzahl von voneinander abhängigen Fallunterscheidungen in einer Formelfolge aufschreiben können, das geht aber ohne irgendeinen neuen bezeichnungstechnischen Gedanken nicht. (Es handelt sich um eine technische Schwierigkeit von der Art, vielleicht um eine noch größere, als jene, die man überwinden müßte, falls man etwa den Multiplikationssatz der Determinanten ohne die Determinantenbezeichnung aufschreiben wollte.)

Indessen scheint es mir ohne eine allgemeine Angabe der Reduktionsmethode plausibel zu sein, daß dieselbe Methode, die in der vorigen Nummer für einen Spezialfall durchgeführt wurde, für jede primitiv-einfach-rekursive Definition II-ter Stufe anwendbar ist.

Es können also sämtliche primitiv-einfach-rekursiven Funktionen der II-ten Stufe auch als mehrfach-rekursive Funktionen der I-ten Stufe definiert werden.

Der Gedankengang läßt sich ohne weiteres auch auf höhere Stufen übertragen; so lassen sich z. B. die primitiv-einfach-rekursiven Funktionsfunktionen der III-ten Stufe auch als mehrfach-rekursive Funktionsfunktionen der II-ten Stufe definieren.

§ 3. Anwendung der Methode auf eingeschachtelte (sogar mehrfache) Rekursionen, wobei sich nur Zahlenparameter verändern

1. Zur Analogie der eingeschachtelten Rekursion der I-ten Stufe können auf der II-ten Stufe z. B. solche Definitionen gebildet werden:

$$\alpha(0, a) = a$$
$$\alpha(n+1, a) = B(\lambda x[\alpha(n, x)]; n, a),$$

wobei

$$B(\varphi; 0, a) = \varphi(a)$$
$$B(\varphi; n+1, a) = J(\lambda x[B(\varphi; n, C(\varphi; n, a, B(\varphi; n, x)))]; n, a),$$

wo J und C bereits definierte Funktionen sind; oder um gleich eine mehrfache eingeschachtelte Rekursion der II-ten Stufe zu betrachten:

$$\alpha(0, a) = a$$

$$\alpha(n+1, a) = B(\lambda x[\alpha(n, x)]; n, a, a),$$

wobei

$$B(\varphi; m, n, a) = \varphi(a^2), \text{ falls } m \cdot n = 0$$

$$B(\varphi; m+1, n+1, a) = J(\lambda x[B(\varphi; m, B(\varphi; m+1, n, x), a)]; m, n)$$

und

$$J(\varphi; 0, a) = \varphi(a)$$

$$J(\varphi; n+1, a) = \varphi(J(\varphi; n, a)).$$

Verwenden wir unsere Methode auf die letztere Definition. Sei

$$B(\lambda x[\alpha(n_1, x)]; n_2, n_3, a) = \beta(n_1, n_2, n_3, a)$$

(man muß die erste und zweite Zahlenvariable von $B(\lambda x[\alpha(n, x)]; n, a, a)$, die zufällig mit der ersten Variablen von α in $\lambda x[\alpha(n, x)]$ bzw. mit der dritten Zahlenvariablen von $B(\lambda x[\alpha(n, x)]; n, a, a)$ übereinstimmen, von jenen Variablen unterscheiden, da sie beide Rekursionsvariablen von B sind; dann ist

$$\alpha(n+1, a) = \beta(n, n, a, a),$$

und

$$\beta(n_1, n_2, n_3, a) = B(\lambda x[\alpha(n_1, x]; n_2, n_3, a) = \alpha(n_1, a^2), \text{ falls } n_2 \cdot n_3 = 0,$$

$$\begin{aligned}\beta(n_1, n_2+1, n_3+1, a) &= B(\lambda x[\alpha(n_1, x)]; n_2+1, n_3+1, a) = \\ &= J(\lambda x[B(\lambda y[\alpha(n_1, y)]; n_2, B(\lambda y[\alpha(n_1, y)]; n_2+1, n_3, x), a)]; n_2, n_3) = \\ &= J(\lambda x[\beta(n_1, n_2, \beta(n_1, n_2+1, n_3, x), a)]; n_2, n_3) = \\ &= \iota(n_1, n_2+1, n_3, n_2, a),\end{aligned}$$

wobei $\iota(n_1, 0, n_3, n_4, a)$ beliebig, z. B. als 0 definiert werden kann, ferner

$$\iota(n_1, n_2+1, n_3, n_4, a) = J(\lambda x[\beta(n_1, n_2, \beta(n_1, n_2+1, n_3, x), a)]; n_4, n_3)$$

ist, also

$$\begin{aligned}\iota(n_1, n_2+1, n_3, 0, a) &= J(\lambda x[\beta(n_1, n_2, \beta(n_1, n_2+1, n_3, x), a)]; 0, n_3) = \\ &= \beta(n_1, n_2, \beta(n_1, n_2+1, n_3, n_3), a),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iota(n_1, n_2+1, n_3, n_4+1, a) &= J(\lambda x[\beta(n_1, n_2, \beta(n_1, n_2+1, n_3, x), a)]; n_4+1, n_3) = \\ &= \beta(n_1, n_2, \beta(n_1, n_2+1, n_3, J(\lambda x[\beta(n_1, n_2, \beta(n_1, n_2+1, n_3, x), a)]; n_4, n_3)), a) = \\ &= \beta(n_1, n_2, \beta(n_1, n_2+1, n_3, \iota(n_1, n_2, n_3, n_4, a)), a).\end{aligned}$$

Somit erhält man die folgende simultane Definition für die zahlentheoretischen Funktionen α, β und ι:

$$\alpha(0, a) = a,$$

$$\alpha(n_1+1, a) = \beta(n_1, n_1, a, a),$$

$$\beta(n_1, n_2, n_3, a) = \alpha(n_1, a^2), \text{ falls } n_2 \cdot n_3 = 0,$$

$$\beta(n_1, n_2+1, n_3+1, a) = \iota(n_1, n_2+1, n_3, n_2, a),$$

$$\iota(n_1, n_2+1, n_3, 0, a) = \beta(n_1, n_2, \beta(n_1, n_2+1, n_3, n_3), a),$$

$$\iota(n_1, n_2+1, n_3, n_4+1, a) = \beta(n_1, n_2, \beta(n_1, n_2+1, n_3, \iota(n_1, n_2, n_3, n_4, a)), a).$$

Wird

$$\delta(n_1, n_2, n_3, n_4, 0, a) = \alpha(n_1, a),$$
$$\delta(n_1, n_2, n_3, n_4, 1, a) = \beta(n_1, n_2, n_3, a),$$
$$\delta(n_1, n_2, n_3, n_4, i+2, a) = \iota(n_1, n_2, n_3, n_4, a)$$

gesetzt, so läßt sich δ genau so, wie in Nr. 4 des § 2 durch eine mehrfache (hier 5-fache) Rekursion der I-ten Stufe definieren; und aus δ ergibt sich α zum Beispiel durch die Substitution:

$$\alpha(n_1, a) = \delta(n_1, 0, 0, 0, 0, a).$$

2. Die einfachen eingeschachtelten Rekursionen der betrachteten Art lassen sich auf der II-ten Stufe auch leicht auf uneingeschachtelte Rekursionen und Substitutionen auflösen.

Betrachten wir z. B. das erste Beispiel der vorigen Nummer, worin die eingeschachtelte Rekursion

$$B(\varphi; 0, a) = \varphi(a)$$
$$B(\varphi; n+1, a) = J(\lambda x[B(\varphi; n, C(\varphi; n, a, B(\varphi; n, x)))]; n, a)$$

teilgenommen hat. Wird eine Funktionsfunktion C_1 durch Substitution aus C und aus der Grundfunktionsfunktion $V(\psi; b) = \psi(b)$ wie folgt definiert:

$$C_1(\varphi, \psi; n, a, b) = \psi(C(\varphi; n, a, \psi(b))),$$

so lautet die zweite Definitionsgleichung von B:

$$B(\varphi; n+1, a) = J(\lambda x[C_1(\varphi, \lambda y[B(\varphi; n, y)]; n, a, x)]; n, a).$$

Bildet man also durch Substitution aus J und C_1 die Funktionsfunktion

$$J_1(\varphi, \psi; n, a) = J(\lambda x[C_1(\varphi, \psi; n, a, x)]; n, a),$$

so kann B durch die primitive Rekursion

$$B(\varphi; 0, a) = \varphi(a)$$
$$B(\varphi; n+1, a) = J_1(\varphi, \lambda x[B(\varphi; n, x)]; n, a)$$

definiert werden.

Jedoch gibt es auf der II-ten Stufe eine neue Art von Einschachtelungen; und von diesen ist es zu erwarten, daß sie von der Klasse der rekursiven Funktionen der I-ten Stufe hinausführen.

§ 4. Einschachtelungen an den Stellen der Funktionsvariablen

1. Das Charakteristische der II-ten Stufe ist, daß hier auch Funktionsvariablen als Parameter auftreten; etwas Neues ist davon zu erwarten, wenn diese neuartigen Parameter sich bei einer Rekursion verändern.

Handelt es sich um eine einfache Rekursion, so kann eventuell auch dieser Fall auf primitive Rekursion und Substitutionen aufgelöst werden; mit der selben Methode, wie das auf der I-ten Stufe geschehen ist. [10]

[10] Siehe Fußnote [4].

Wenden wir diese Methode z. B. auf die folgende Definition an:

$$A(\varphi; 0, a) = B(\varphi; a)$$

$$A(\varphi; n+1, a) = C(\lambda x[A(\lambda y[A(\varphi; n, y)]; n, x)]; n, a),$$

wobei B und C früher eingeführte Funktionsfunktionen sind.

Hier ist

$$A(\varphi; 0, a) = B(\varphi; a),$$

$$A(\varphi; 1, a) = C(\lambda x[A(\lambda y[A(\varphi; 0, y)]; 0, x)]; 0, a) =$$

$$= C(\lambda x[B(\lambda y[B(\varphi; y)]; x)]; 0, a),$$

. . . .

Man sieht, daß sich die Werte von $A(\varphi; n, a)$ durch Ineinanderschachtelungen von $B(\varphi; a)$ und $C(\varphi; n, a)$ aufbauen, wobei für n in $C(\varphi; n, a)$ verschiedene Zahlen eingesetzt werden. Wird also eine Funktionsfunktion $D(\varphi; 0, a)$ durch

$$D(\varphi; 0, a) = \varphi(a)$$

und für $n \neq 0$

$$D(\varphi; n, a) = \begin{cases} B(\lambda x[D(\varphi; \exp_1(n), x)]; a), & \text{falls } \exp_0(n) = 0, \\ C(\lambda x[D(\varphi; \exp_1(n), x)]; \exp_2(n), a) & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert, so kommen unter den Werten von $D(\varphi; n, a)$ auch die Werte von $A(\varphi; n, a)$ vor: man beweist genau so, wie auf der I-ten Stufe, daß es eine 1-rekursive Funktion $\varkappa(n)$ der I-ten Stufe gibt, für welche

$$A(\varphi, n, a) = D(\varphi; \varkappa(n), a)$$

gilt. (Die Definition von D ist noch keine primitive Rekursion, läßt sich aber — genau so, wie die ähnlichen „Wertverlaufsrekursionen" der I-ten Stufe — auf primitive Rekursion und Substitution auflösen.)

2. Aber z. B. bei der Rekursion

$$A(\varphi; 0, a_1, a_2) = B(\varphi; a_1, a_2)$$

$$A(\varphi; n+1, a_1, a_2) = C(\lambda xy[A(\lambda z[A(\varphi; n, x, z)]; n, a_1, y)]; n, a_1, a_2)$$

versagt unsere Methode. Betrachtet man hier den Aufbau von

$$A(\varphi; 0, a_1, a_2), A(\varphi; 1, a_1, a_2), A(\varphi; 2, a_1, a_2), \ldots,$$

so sieht man, daß darin zwar ebenfalls Ineinanderschachtelungen von B und C auftreten, aber um diese sukzessiv bilden zu können, haben wir immer mehr Variablen einzuführen. Z. B. ist

$$A(\varphi; 1, a_1, a_2) = C(\lambda xy[A(\lambda z[A(\varphi; 0, x, z)]; 0, a_1, y)]; 0, a_1, a_2) =$$

$$= C(\lambda xy[B(\lambda z[B(\varphi; x, z)]; a_1, y)]; 0, a_1, a_2).$$

Hier hängt das innerste $B(\varphi; x, z)$ von 2 freien Variablen (x und z) ab, aber

$$B(\lambda z[B(\varphi; x, z)]; a_1, y)$$

bereits von 3 freien Variablen: x, a_1 und y. Im Aufbau von $A(\varphi; 2, a_1, a_2)$ wird auch eine 4-stellige Funktionsfunktion angewandt, usw. Daher kann man hier mit endlicher Variablenanzahl keine Funktionsfunktion D angeben, welche sämtliche Bausteine im Aufbau der Werte von A annehmen würde.

Wenn man die betrachtete Methode zur Auflösung der Einschachtelungen einer mehrfachen Rekursion anwenden will, so versagt sie bereits auf der I-ten Stufe.

3. Wurde aber die Funktionsfunktion $B(\varphi; m, n, a)$ (oder $A(\varphi; n, a)$ in Nr. **1** dieses Kapitels) zur Definition einer zahlentheoretischen Funktion α verwendet, so könnte man doch glauben, daß sich die Definition von α durch die in Nr. **3** vom **§ 2** eingeführte Methode auf eine mehrfache Rekursion der I-ten Stufe zurückführen läßt.

Sei z. B. (um gleich eine mehrfache Rekursion zu untersuchen) die vollständige Definition von α:

$$\alpha(0, a) = a$$
$$\alpha(m+1, a) = B(\lambda x[\alpha(m, x)]; m, a, a),$$

mit

$$B(\varphi; m, n, a) = \varphi(a), \text{ falls } m \cdot n = 0$$
$$B(\varphi; m+1, n+1, a) = J(\lambda x[B(\lambda y[B(\varphi; m, y, a)]; m+1, n, x)]; n, a)$$

und

$$J(\varphi; 0, a) = \varphi(a)$$
$$J(\varphi; n+1, a) = \varphi(J(\varphi; n, a)).$$

Nach der genannten Methode hätte man hier

$$\alpha(m_0+1, a_0) = B(\lambda x[\alpha(m_0, x)]; m_1, a_0, a_0) = \beta(m_0, m_1, a_0, a_0)$$

zu setzen, wobei

$$\beta(m_0, m_1, n, a_0) = B(\lambda x[\alpha(m_0, x)]; m_1, n, a_0)$$

ist, also

$$\beta(m_0, m_1, n, a_0) = \alpha(m_0, a_0), \text{ falls } m_1 \cdot n = 0$$
$$\beta(m_0, m_1+1, n+1, a_0) = B(\lambda x[\alpha(m_0, x)]; m_1+1, n+1, a_0) =$$
$$= J(\lambda x[B(\lambda y[B(\lambda z[\alpha(m_0, z)]; m_1, y, a_0)]; m_1+1, n, x)]; n, a_0) =$$
$$= J(\lambda x[B(\lambda y[\beta(m_0, m_1, y, a_0)]; m_1+1, n, x)]; n, a_0).$$

Hier wird für φ in $B(\varphi; m, n, a)$ nicht $\lambda x[\alpha(m_0, x)]$, sondern $\lambda y[\beta(m_0, m_1, y, a_0)]$ gesetzt, so hat man außer β auch

$$\beta'(m_0, m_1, m_2, n, a_0, a_1) = B(\lambda y[\beta(m_0, m_1, y, a_0)]; m_2, n, a_1)$$

einzuführen; damit ergibt sich

$$\beta(m_0, m_1+1, n+1, a_0) = J(\lambda x[\beta'(m_0, m_1, m_1+1, n, a_0, x)]; n, a_0) =$$
$$= \iota(m_0, m_1, m_1+1, n, n, a_0),$$

falls

$$J(\lambda x[\beta'(m_0, m_1, m_2, n, a_0, x)]; r, a_0) = \iota(m_0, m_1, m_2, n, r, a_0)$$

gesetzt wird. (Dabei hat sich das zweite Argument vermindert.) So läßt sich ι mit Hilfe von β durch folgende Rekursion nach r definieren:

$$\iota(m_0, m_1, m_2, n, 0, a_0) = J(\lambda x[\beta'(m_0, m_1, m_2, n, a, x)]; 0, a_0) =$$
$$= \beta'(m_0, m_1, m_2, n, a_0, a_0)$$
$$\iota(m_0, m_1, m_2, n, r+1, a_0) = J(\lambda x[\beta'(m_0, m_1, m_2, n, a, x)]; r+1, a_0) =$$
$$= \beta'(m_0, m_1, m_2, n, a_0, J(\lambda x[\beta'(m_0, m_1, m_2, n, a, x)]; r, a_0)) =$$
$$= \beta'(m_0, m_1, m_2, n, a_0, \iota(m_0, m_1, m_2, n, r, a_0)).$$

Aber in der rekursiven Definition von β' muß für φ in $B(\varphi; m, n, a)$ wieder eine andere Funktion eingesetzt werden als bisher; dies erfordert die Einführung neuer Funktionen β'' und ι':

$$\beta'(m_0, m_1, m_2, n, a_0, a_1) = B(\lambda y[\beta(m_0, m_1, y, a_0)]; m_2, n, a_1) =$$
$$= \beta(m_0, m_1, a_1, a_0), \text{ falls } m_2 \cdot n = 0,$$
$$\beta'(m_0, m_1, m_2+1, n+1, a_0, a_1) = B(\lambda y[\beta(m_0, m_1, y, a_0)]; m_2+1, n+1, a_1) =$$
$$= J(\lambda x[B(\lambda y[B(\lambda z[\beta(m_0, m_1, z, a_0)]; m_2, y, a_1)]; m_2+1, n, x)]; n, a_1) =$$
$$= J(\lambda x[B(\lambda y[\beta'(m_0, m_1, m_2, y, a_0, a_1)]; m_2+1, n, x)]; n, a_1) =$$
$$= J(\lambda x[\beta''(m_0, m_1, m_2, m_2+1, n, a_0, a_1, x)]; n, a_1) =$$
$$= \iota'(m_0, m_1, m_2, m_2+1, n, n, a_0, a_1),$$

(dabei hat sich das dritte Argument vermindert); wo

$$\beta''(m_0, m_1, m_2, m_3, n, a_0, a_1, a_2) = B(\lambda y[\beta'(m_0, m_1, m_2, y, a_0, a_1)]; m_3, n, a_2)$$

und

$$\iota'(m_0, m_1, m_2, m_3, n, r, a_0, a_1) = J(\lambda x[\beta''(m_0, m_1, m_2, m_3, n, a_0, a_1, x)]; r, a_1)$$

ist.

Hier kann ι' wieder mit Hilfe von β'' durch eine Rekursion nach r definiert werden; die rekursive Definition von β'' erfordert aber die Einführung neuer Funktionen β''' und ι''; und so fort. So müssen unendlich viele, immer mehr-stellige Funktionen eingeführt werden, wobei immer neue Argumente als Rekursionsvariablen auftreten. Man gelangt zu einer eleganteren Bezeichnung, falls man β_1 statt β, β_2 statt β', β_3 statt β'' usw. schreibt, und die Funktion α selbst auch durch β_0 bezeichnet; so ist β_s eine Funktion von $2s+2$ Argumenten, von denen die ersten $s+1$ durch $m_0, \ldots, m_s$, die $s+2$-te durch n, die letzten s (für $s \geqq 1$) durch $a_0, \ldots, a_{s-1}$ bezeichnet werden. Aus dem gleichen Grunde soll

$$\iota_s(m_0, \ldots, m_{s+2}, n, r, a_0, \ldots, a_s) = J(\lambda x[\beta_{s+2}(m_0, \ldots, m_{s+2}, n, a_0, \ldots, a_s, x)]; r, a_s)$$

gesetzt werden, so daß ι_0 die bisher durch ι, ι_1 die bisher durch ι' bezeichnete Funktion bedeutet, usw. Wird also auch der „Index" s als eine Variable betrachtet, so gelangt man zu einer Art Funktion, bei welcher es von einem Argument abhängt, wievielstellig die Funktion ist.

Die Definition von β_s lautet also:

$$\beta_0(m_0, n) = \alpha(m_0, n)$$
$$\beta_{s+1}(m_0, \ldots, m_{s+1}, n, a_0, \ldots, a_s) = B(\lambda y[\beta_s(m_0, \ldots, m_s, y, a_0, \ldots, a_{s-1})]; m_{s+1}, n, a_s);$$

daher ist

$$\alpha(m_0+1, a_0) = B(\lambda y[\alpha(m_0, y)]; m_0, a_0, a_0) = B(\lambda y[\beta_0(m_0, y)]; m_0, a_0, a_0) =$$
$$= \beta_1(m_0, m_0, a_0, a_0).$$

Aus den rekursiven Definitionen der Funktionsfunktionen B und J gewinnt man eine Art rekursive Definition für die Funktionen β_s und ι_s wie folgt:

$$\beta_0(m_0, n) = \alpha(m_0, n)$$

$$\beta_{s+1}(m_0, \ldots, m_{s+1}, n, a_0, \ldots, a_s) = B(\lambda y[\beta_s(m_0, \ldots, m_s, y, a_0, \ldots, a_{s-1})]; m_{s+1}, n, a_s) =$$
$$= \beta_s(m_0, \ldots, m_s, a_s, a_0, \ldots, a_{s-1}), \text{ falls } m_{s+1} \cdot n = 0$$

$$\beta_{s+1}(m_0, \ldots, m_s, m_{s+1}+1, n+1, a_0, \ldots, a_s) =$$
$$= B(\lambda y[\beta_s(m_0, \ldots, m_s, y, a_0, \ldots, a_{s-1})]; m_{s+1}+1, n+1, a_s) =$$
$$= J(\lambda x[B(\lambda y[B(\lambda z[\beta_s(m_0, \ldots, m_s, z, a_0, \ldots, a_{s-1})]; m_{s+1}, y, a_s)];$$
$$; m_{s+1}+1, n, x)]; n, a_s) =$$
$$= J(\lambda x[B(\lambda y[\beta_{s+1}(m_0, \ldots, m_{s+1}, y, a_0, \ldots, a_s)]; m_{s+1}+1, n, x)]; n, a_s) =$$
$$= J(\lambda x[\beta_{s+2}(m_0, \ldots, m_{s+1}, m_{s+1}+1, n, a_0, \ldots, a_s, x)]; n, a_s) =$$
$$= \iota_s(m_0, \ldots, m_{s+1}, m_{s+1}+1, n, n, a_0, \ldots, a_s),$$

und

$$\iota_s(m_0, \ldots, m_{s+2}, n, 0, a_0, \ldots, a_s) = J(\lambda x[\beta_{s+2}(m_0, \ldots, m_{s+2}, n, a_0, \ldots, a_s, x)]; 0, a_s) =$$
$$= \beta_{s+2}(m_0, \ldots, m_{s+2}, n, a_0, \ldots, a_s, a_s)$$

$$\iota_s(m_0, \ldots, m_{s+2}, n, r+1, a_0, \ldots, a_s) = J(\lambda x[\beta_{s+2}(m_0, \ldots, m_{s+2}, n, a_0, \ldots, a_s, x)];$$
$$; r+1, a_s) =$$
$$= \beta_{s+2}(m_0, \ldots, m_{s+2}, n, a_0, \ldots, a_s, J(\lambda x[\beta_{s+2}(m_0, \ldots, m_{s+2}, n, a_0, \ldots, a_s, x)]; r, a_s)) =$$
$$= \beta_{s+2}(m_0, \ldots, m_{s+2}, n, a_0, \ldots, a_s, \iota_s(m_0, \ldots, m_{s+2}, n, r, a_0, \ldots, a_s)).$$

Somit erhält man die folgende simultane Definition für die Funktionen α, β_s und ι_s:

$\alpha(0, a_0) = a_0,$

$\alpha(m_0+1, a_0) = \beta_1(m_0, m_0, a_0, a_0),$

$\beta_0(m_0, n) = \alpha(m_0, n),$

$\beta_{s+1}(m_0, \ldots, m_{s+1}, n, a_0, \ldots, a_s) = \beta_s(m_0, \ldots, m_s, a_s, a_0, \ldots, a_{s-1}),$ falls $m_{s+1} \cdot n = 0,$

$\beta_{s+1}(m_0, \ldots, m_s, m_{s+1}+1, n+1, a_0, \ldots, a_s) = \iota_s(m_0, \ldots, m_{s+1}, m_{s+1}+1, n, n, a_0, \ldots, a_s),$

$\iota_s(m_0, \ldots, m_{s+2}, n, 0, a_0, \ldots, a_s) = \beta_{s+2}(m_0, \ldots, m_{s+2}, n, a_0, \ldots, a_s, a_s),$

$\iota_s(m_0, \ldots, m_{s+2}, n, r+1, a_0, \ldots, a_s) =$

$\quad = \beta_{s+2}(m_0, \ldots, m_{s+2}, n, a_0, \ldots, a_s, \iota_s(m_0, \ldots, m_{s+2}, n, r, a_0, \ldots, a_s)).$

4. Fassen wir nun diese Definitionen zusammen. Sei

$\delta(m_0, \ldots, m_{s+2}, r, 0, s, n, a_0, \ldots, a_s) = \alpha(m_0, a_0),$

$\delta(m_0, \ldots, m_{s+2}, r, 1, s, n, a_0, \ldots, a_s) = \beta_s(m_0, \ldots, m_s, n, a_0, \ldots, a_{s-1}),$

$\delta(m_0, \ldots, m_{s+2}, r, i+2, s, n, a_0, \ldots, a_s) = \iota_s(m_0, \ldots, m_{s+2}, n, r, a_0, \ldots, a_s).$

So lautet die Definition von δ (für Argumente, von welchen δ an der betrachteten Stelle nicht tatsächlich abhängt, kann freilich beliebiges gesetzt werden):

$$\delta(0, m_1, \ldots, m_{s+2}, r, 0, s, n, a_0, \ldots, a_s) = a_0$$

$$\delta(m_0+1, m_1, \ldots, m_{s+2}, r, 0, s, n, a_0, \ldots, a_s) = \delta(m_0, m_0, m_2, m_3, r, 1, 1, a_0, a_0, a_0)$$

$$\delta(m_0, m_1, m_2, r, 1, 0, n, a_0) = \delta(m_0, m_1, m_2, r, 0, 0, n, n)$$

$$\delta(m_0, \ldots, m_{s+3}, r, 1, s+1, n, a_0, \ldots, a_{s+1}) = \delta(m_0, \ldots, m_{s+2}, r, 1, s, a_s, a_0, \ldots, a_{s-1}),$$
$$\text{falls } m_{s+1} \cdot n = 0$$

$$\delta(m_0, \ldots, m_s, m_{s+1}+1, m_{s+2}, m_{s+3}, r, 1, s+1, n+1, a_0, \ldots, a_{s+1}) =$$
$$= \delta(m_0, \ldots, m_{s+1}, m_{s+1}+1, n, 2, s, n, a_0, \ldots, a_s)$$

$$\delta(m_0, \ldots, m_{s+2}, 0, i+2, s, n, a_0, \ldots, a_s) =$$
$$= \delta(m_0, \ldots, m_{s+2}, 0, 0, 0, 1, s+2, n, a_0, \ldots, a_s, a_s, a_s)$$

$$\delta(m_0, \ldots, m_{s+2}, r+1, i+2, s, n, a_0, \ldots, a_s) =$$
$$= \delta(m_0, \ldots, m_{s+2}, 0, 0, r+1, 1, s+2, n, a_0, \ldots, a_s;$$
$$; \delta(m_0, \ldots, m_{s+2}, r, i+2, s, n, a_0, \ldots, a_s), a_s);$$

und daraus ergibt sich α durch die Substitution:

$$\alpha(m_0, a_0) = \delta(m_0, \ldots, m_{s+2}, r, 0, s, n, a_0, \ldots, a_s)$$

für beliebige $m_1, \ldots, m_{s+2}, r, s, n, a_1, \ldots, a_s$, etwa als

$$\alpha(m_0, a_0) = \delta(m_0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, a_0).$$

Die Funktion δ ist eigentlich unendlich-vielstellig: genauer, es hängt von ihrem Argument s ab, wievielstellig sie bei gegebenem s ist. Ihre Definition ist eine unendlich-vielfache Rekursion: die Rekursion verläuft zwar bei jedem s nach den 5 Variablen m_0, m_s, r, i, s (m_0 vertritt dabei die Rekursionsvariable von α, ebenso m_s eine Rekursionsvariable von B, und r die Rekursionsvariable von J), dabei bedeutet aber m_s für jedes s eine andere Variable.

5. Die Definition von δ kann auch als eine transfinite Rekursion vom Typus ω^ω formuliert werden. Das kann z. B. so geschehen, daß

$$\gamma(m) = \delta(\exp_0(m), \exp_1(m), \ldots, \exp_{2s+7}(m))$$

gesetzt wird, so daß

$$\delta(m_0, \ldots, m_{s+2}, r, i, s, n, a_0, \ldots, a_s) = \gamma\left(\left\{\prod_{j=0}^{s+2} p_j^{m_j}\right\}\left\{p_{s+3}^{r} p_{s+4}^{i} p_{s+5}^{s} p_{s+6}^{n}\right\}\prod_{j=s+7}^{2s+7} p_j^{a_j}\right)$$

gilt. So ergibt sich speziell

$$\alpha(m, a) = \delta(m, 0, 0, 0, 0, 0, 0, a) = \gamma(2^m \cdot 19^a).$$

Aus der Definition von δ erhält man für γ eine solche Rekursion, wobei eine Stelle m dann als Vorgänger einer Stelle n betrachtet wird, wenn die erste unter den Primzahlen

$$p_0, p_1, p_2, \ldots$$

welche in den Primfaktorenzerlegungen von m und n mit verschiedenem Exponenten teilnimmt, in der Zerlegung von m einen kleineren Exponenten besitzt, als in der Zerlegung von n. Eine solche Anordnung der Zahlen ist aber vom Typus ω^ω.

§ 5. Offene Probleme

1. Nach Nr. 5 vom § 4 scheint die II-te Stufe geeignet zu sein, zahlentheoretische Funktionen, die durch Substitution aus solchen Funktionen entstehen, welche durch transfinite Rekursionen vom Typus ω^ω angegeben wurden, ohne transfinite Rekursionen zu definieren.

Die „Diagonalfunktion" der mehrfach-rekursiven Funktionen der I-ten Stufe (welche von sämtlichen mehrfach-rekursiven Funktionen der I-ten Stufe verschieden ist), ist aber auch eine Funktion dieser Art.[11] Könnte man die Diagonalfunktion auf der II-ten Stufe definieren, so hätte man einen Beweis dafür, daß die II-te Stufe eine weitere Funktionenklasse liefert, als die I-te.

Betrachtet man aber die Definition der Diagonalfunktion näher, so sieht man, daß diese unendlich-vielfache Rekursion „vollzählig-mehrfach" ist, in dem Sinne, daß die Rekursion an jeder Stelle, wo keine der Rekursionsvariablen 0 ist, nach sämtlichen auftretenden Rekursionsvariablen verläuft. Die Definition von unserem δ kann dafür „zerstreut-mehrfach" genannt werden, da diese Rekursion bei jedem s bloß nach 5 der $s+6$ Rekursionsvariablen verläuft (aber bei verschiedenen s nach anderen). Die Definition anderer Funktionen der II-ten Stufe kann auch immer auf eine solche Rekursion ohne Funktionsvariable zurückgeführt werden, welche an jeder Stelle nach Variablen einer ganz bestimmten Anzahl verläuft: diese Anzahl hängt von der Struktur der ursprünglichen Definition (der II-ten Stufe) ab.

Wenn es gelingen würde, die Diagonalfunktion der I-ten Stufe auf der II-ten Stufe zu definieren, so hätte man ein Beispiel für eine vollzählig-mehrfache Rekursion, welche sich auf zerstreut-mehrfache Rekursion und Substitution zurückführen läßt. Es ist sehr fraglich, ob dies bei einer so wesentlich vollzählig-mehrfachen Rekursion möglich ist, wie die Definition jener Diagonalfunktion.

Es wäre freilich auch möglich, daß unser δ und ebenso beliebige Funktionen der II-ten Stufe — wenn die bisherigen Methoden auch versagen — auf irgendeine Art doch durch mehrfache Rekursionen der I-ten Stufe (oder, was auf dasselbe herauskommt, durch transfinite Rekursionen vom Typus ω^k, wobei k endlich ist) und Substitutionen definiert werden könnten; daß sich also die zerstreut-vielfachen Rekursionen noch auf endlich-vielfache Rekursionen auflösen ließen. Dann würde die II-te Stufe nichts Neues gegenüber der I-ten Stufe liefern. Dies scheint aber auch nicht wahrscheinlich zu sein.

[11] Siehe Fußnote [5].

Auch an sich ist das Problem interessant: gibt es gewisse Zwischendinge zwischen den transfiniten Rekursionen vom Typus ω^k mit endlichem k und der vollzähligen transfiniten Rekursion vom Typus ω^ω — nämlich die zerstreute (d. h. auf zerstreut-mehrfache, an jeder Stelle nach 1, oder nach 2, oder nach 3, ... Variablen verlaufende Rekursionen übersetzbare) transfinite Rekursionen vom Typus ω^ω; oder lassen sich die zerstreut-transfiniten Rekursionen vom Typus ω^ω auf jene vom Typus ω^k auflösen; oder läßt sich etwa die vollzählig-transfinite Rekursion vom Typus ω^ω auf zerstreute auflösen?

Dieses Problem lautet gewissermaßen ähnlich, als jenes: ob es Zwischen-Mächtigkeiten zwischen dem Abzählbaren und dem Kontinuum gibt; aber im Gegensatz zur Kontinuumhypothese scheint es wahrscheinlich, daß es hier tatsächlich uneinschmelzbare Zwischendinge gibt.

2. Dieselbe Methode, wodurch aus einer Definition der II-ten Stufe die Funktionsvariablen ausgeschaltet wurden (und welche bei gewissen Einschachtelungen zu zerstreut-transfiniten Rekursionen geführt hat), kann auch auf die Definitionen zahlentheoretischer Funktionen der III-ten Stufe, zur Ausschaltung der Funktionsfunktionsvariablen angewandt werden. So erhält man bei gewissen Einschachtelungen zerstreut-transfinite Rekursionen der II-ten Stufe. Wird auf eine solche Rekursion dieselbe Methode, nun zur Ausschaltung der Funktionsvariablen, noch einmal angewandt, so führt sie zu einer zerstreut-transfiniten Rekursion von höherem Typus. Vollzählig-transfinite Rekursionen sind auch von höheren (endlichen) Stufen nicht zu erwarten. Es ist sehr fraglich, ob sich die Diagonalfunktion der I-ten Stufe auf irgendeiner Stufe von endlicher Höhe definieren läßt.

Jedenfalls erhebt sich die Frage, ob sich eine vollzählig-transfinite Rekursion auf zerstreut-transfinite Rekursion von höherem Typus und Substitution zurückführen läßt?

Es wäre auch interessant zu untersuchen, welche Typen der transfiniten Rekursionen (oder eventuell andere Arten der allgemeinen Rekursion) für die verschiedenen Stufen charakteristisch sind.

3. Gelingt es auch nicht, die Diagonalfunktion der I-ten Stufe auf der II-ten Stufe zu definieren, so bietet sich noch ein Weg zu zeigen, daß die II-te Stufe mehr zahlentheoretische Funktionen umfaßt als die I-te: die Ackermannsche Majorisierungsmethode. [12]

Der Grundgedanke dieser Methode ist, daß ACKERMANN die „Bausteine" einer zweistelligen eingeschachtelten einfachen Rekursion der I-ten Stufe durch monoton nicht-abnehmende Majoranten ersetzt; diese nehmen nicht ab, wenn ein jedes ihrer Argumente durch das größte ersetzt wird, und so kommt er zu einer Majoranten der durch die betrachtete Rekursion definierten Funktion, welche (statt der verschiedenen neuen Bausteine die größte von ihnen genom-

[12] Siehe Fußnote [2].

men) etwa so definiert werden könnte:

$$\alpha(0, a) = \beta(a)$$
$$\alpha(n+1, a) = \beta(\alpha(n, \beta(n, \ldots, \beta(\alpha(n, \beta(a)))\ldots))).$$

Wird hier die Rekursion aufgelöst, so sieht man, daß

$$\alpha(0, a) = \beta(a),$$
$$\alpha(1, a) = \beta(\beta(\ldots\beta(\beta(a))\ldots)),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ist; hier handelt es sich also einfach um Iterationen von $\beta(a)$, wobei es von n abhängt, wievielmalige Iteration den Wert von $\alpha(n, a)$ ergibt. Daraus folgt leicht, daß wenn man, aus einer Majoranten der im Aufbau der einfach-rekursiven Funktionen zu Grunde genommenen Funktionen ausgehend, durch Iterationen immer neue Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ bildet, dadurch eine solche Funktion φ_n erhält, welche für ein geeignet gewähltes n eine beliebige einfach-rekursive Funktion der I-ten Stufe majorisiert.

Den Gedankengang auf eine k-fache Rekursion (von „Normalform") angewandt, würde man als Majorante der dadurch definierten k-stelligen Funktion zunächst eine Funktion erhalten, welche durch eine Rekursion etwa folgender Form definiert wird:

$$\alpha(n_1, \ldots, n_k) = \max(n_1, \ldots, n_k), \text{ falls } n_1 \ldots n_k = 0$$
$$\alpha(n_1+1, \ldots, n_k+1) = \beta(\alpha_0(n_1, \beta(\alpha_1(\beta(\alpha_2(\ldots\beta(\alpha_{k-1})\ldots)))), \ldots$$
$$\ldots, \beta(\alpha_1(\beta(\alpha_2(\ldots\beta(\alpha_{k-1})\ldots)))))),$$

wobei für $i = 1, 2, \ldots, k-1$

$$\alpha_i(a) = \alpha(n_1+1, \ldots, n_i+1, n_{i+1}, a, \ldots, a),$$

und so speziell für $i = k-1$

$$\alpha_{k-1} = \alpha(n_1+1, \ldots, n_{k-1}+1, n_k)$$

ist. Ganz innen kommt hier überall eben $\alpha_{k-1} = \alpha(n_1+1, \ldots, n_{k-1}+1, n_k)$ vor; und ist $n_k \neq 0$, so kann das durch einen genau so aufgebauten Ausdruck als die rechte Seite der zweiten Definitionsgleichung ersetzt werden, mit dem einzigen Unterschied, daß statt $\alpha(n_1+1, \ldots, n_{k-1}+1, n_k)$ darin $\alpha(n_1+1, \ldots, n_{k-1}+1, n_k-1)$ steht. Ist hier $n_k - 1 \neq 0$, so kann $\alpha(n_1+1, \ldots, n_{k-1}+1, n_k-1)$ wieder durch einen ähnlichen Ausdruck ersetzt werden, usw., bis man nach n_k+1 Schritten zu einem Ausdruck kommt, wo innen

$$\alpha(n_1+1, \ldots, n_{k-1}+1, 0) = \max(n_1+1, \ldots, n_{k-1}+1)$$

steht. So entsteht $\alpha(n_1+1, \ldots, n_k+1)$ durch n_k+1-malige Iteration an der Stelle $\max(n_1+1, \ldots, n_{k-1}+1)$ aus

$$\beta(\alpha_0(n_1, \beta(\alpha_1\ldots\beta(\alpha_{k-2}(\beta(x)))\ldots), \ldots, \beta(\alpha_1\ldots, \beta(\alpha_{k-2}(\beta(x)))\ldots))),$$

und daher kann α auf der II-ten Stufe mit Hilfe der durch

$$I(\varphi, 0, a) = a$$
$$I(\varphi; n+1, a) = \varphi(I(\varphi; n, a))$$

definierten Iterations-Funktionsfunktion durch die $k-1$-fache Rekursion

$$\alpha(n_1, \ldots, n_k) = \max(n_1, \ldots, n_k), \text{ falls } n_1 . n_2 \ldots n_k = 0$$

$$\alpha(n_1+1, \ldots, n_k+1) =$$

$$= I(\lambda x[\beta(\alpha_0(n_1, \beta(\alpha_1 \ldots \beta(\alpha_{k-2}(\beta(x))) \ldots), \ldots, \beta(\alpha_1 \ldots \beta(\alpha_{k-2}(\beta(x))) \ldots)))];$$

$$; n_k+1, \max(n_1+1, \ldots, n_{k-1}+1))$$

definiert werden, wobei für $i = 1, 2, \ldots, k-2$

$$\alpha_i(a) = \alpha(n_1+1, \ldots, n_i+1, n_{i+1}, a, \ldots, a)$$

ist (n_k ist hier keine Rekursionsvariable mehr, bloß ein Parameter).

Würde nun zuerst eine Majorante $\alpha_0(a)$ der Grundfunktionen für $\beta(a)$ gesetzt, dann mit der dadurch definierten Funktion $\alpha(n_1, \ldots, n_k)$ die einstellige Funktion $\alpha_1'(a) = \alpha_1(a, \ldots, a)$, usw., so könnte man Funktionen $\alpha_0'(a), \alpha_1'(a), \alpha_2'(a), \ldots$ erhalten, unter welchen Majoranten einer beliebigen k-rekursiven Funktion $\gamma(n_1 \ldots, n_k)$ der I-ten Stufe vorkommen würden (in dem Sinne, daß für ein geeignetes m, falls $\max(n_1, \ldots, n_k)$ genügend groß ist, $\gamma(n_1, \ldots, n_k) < \alpha_m(\max(n_1, \ldots, n_k)$ gilt).

$$\alpha_m(n_1, \ldots, n_k) = \alpha(m, n_1, \ldots, n_k)$$

gesetzt, ergäbe sich für diese Majorantenfunktion der k-rekursiven Funktionen der I-ten Stufe eine k-fache Rekursion der II-ten Stufe. Diese Rekursion ließe sich auch auf k einfache Rekursionen auflösen; und als $k+1$-te müßte noch die einfache Rekursion für I dazukommen. (Daß es aber eine 1-rekursive Funktion der II-ten Stufe gibt, welche auf der I-ten Stufe nicht k-rekursiv ist, erfordert nicht einen so langwierigen Beweis: es ist bekannt,[13] daß es eine $k+1$-rekursive Funktion der I-ten Stufe gibt, welche nicht k-rekursiv ist, und diese $k+1$-rekursive Funktion läßt sich nach § 1 auf $k+1$ einfache Rekursionen der II-ten Stufe auflösen.) Im Aufbau einer Funktion der II-ten Stufe können jedoch nur Rekursionen von einer endlichen Anzahl teilnehmen. Auf diesem Wege kann man daher keine Funktion der II-ten Stufe erhalten, welche die k-rekursiven Funktionen der I-ten Stufe für alle k insgesamt majorisieren würde.

(Eingegangen am 9. Oktober 1951.)

[13] Siehe Fußnote [9].

ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ГИЛЬБЕРТА РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ ВЫСШИХ КЛАССОВ

Р. ПЭТЭР (Будапешт)

(Резюме)

Арифметические функции, которые могут быть построенны из некоторых основных функций путём конечного числа замещений и рекурсий, называются рекурсивными функциями. Различно определив понятие рекурсии получим разные классы функций (которые часто играли роль в исследованиях оснований математики). Исследованию связи различных классов рекурсивных функций дал толчок тот метод, которым Гильберт[1] хотел решить проблему континуума. Речь идёт о гипотезе, согласно которой между счётным множеством и множеством континуума не существует промежуточным множеств. Так как множество арифметических функций есть множество мощности континуума, Гильберт хотел доказать гипотезу тем, что к более высоким трансфинитным числам определяет рекурсии „более высокие" и показывает, что предположение, согласно которому арифметические функции, определённые всё более высокими рекурсиями, исчерывают множество всех арифметических множеств, не ведёт к абсурдуму. В этих исследованиях было определено понятие рекурсивных функций высших классов: о функциях класса I, II, III и т. д. говорим соответственно тому, что в построении принимают участие лишь функции зависящие от численного переменного, или принимают участие и функции, зависящие от функциональных переменных, функцио функциональных переменных и т. д.

Для того, чтобы выполнить программу Гильберта, нужно прежде всего доказать, что высшие классы дают и новые функции: например, доказать, что существует рекурсивная функция класса II, которая не может быть определена, в классе I. Аккерман[2] доказал это, если ограничиться случаем однократных рекурсий (когда рекурсия производится по одному переменному). Но двухкратной рекурсией и в классе I может быть определена рекурсия Аккермана. Если разрешим многократные рекурсии, по настоящий день не разрешён вопрос: является-ли класс II обширнее класса I. Кажется, что для разрешения этой проблемы метод маёризации Аккермана не годится.

На международном математическом конгрессе в Осло в 1936-ом году автор утверждала, что многократно рекурсивные функции класса I тождественны однократным рекурсиям класса II. Это утверждение основывалось на том предположении, что как и в классе I,[4] в классе II, можно однократные „вкрапленные" рекурсии свести к „примитивным" рекурсиям (в которых переменные не участвующие в рекурсии остаютсй неизменными); доказательство было очень сложно и относящиеся к нему записи пропали во время войны.

Сейчас автор впервые публикует общее доказательство того, что многократно рекурсивные функции класса I могут быть определены в классе II однократными рекурсиями; и даёт очень простой новый метод сведения примитивных однократных рекурсий класса II к многократным рекурсиям класса I. Этот метод может употребляться и в таких случаях вкрапления (и для многократных рекурсий), которые строятся по методу строения вкрапленных рекурсий класса I, где вкрапленные значения встречаются лишь на местах численных переменных.

Но для класса II характерна возможность вкрапления нового типа: когда вкрапленные значения фигурируют на месте функциональных переменных. Если мы хотим привести такую рекурсию к примитивной старым или новым методом, нужно использовать такую функцию, от одного аргумента которой зависит сколькими переменными обладает функция при данном аргументе.

Новая функция δ встречающаяся при применении нового метода, может быть дана при помощи бесконечно-кратной рекурсии или трансфинитной рекурсией типа ω^ω. Известно,[5] что определение „диагональной функции“ ψ, выводящей из класса I, такое же. Но определение ψ „полное“, в то время как определению δ может быть дано название „распылённой“ бесконечно-кратной или, соответственно, трансфинитной рекурсии, так как после того, как мы дадим какой-то аргумент, ψ оказывается функцией r переменных, то в определении $\psi(n_1+1, \ldots, n_r+1)$ принимает участие и такое значение ψ, которое она принимает при первом аргументе n_1, и такое, которое она принимает при n_1+1, n_2 первых двух аргументах и т. д. без пробела, до $\psi(n_1+1, \ldots, n_{r-1}+1, n_r)$, в то время как в определении δ рекурсия на каждои месте происходит при поможи определённого числа переменных, но в разным местах по разным переменным. Таким образом очень соминтельно, можио ли определить в классе II функцию ψ, выходяшую из класса I.

В связи с этим возникают и сами по себе интересные проблемы. Есть лн промежуточные степени между рекурсиями ω^k при конечном k (k— кратными класса I) и полными трансфинитными типа ω^ω, которые не могут быть влиты ни в одну из них? (Здесь можно чувствовать некоторое сходство с поднятием вопроса проблемы континуума. но в противоположност пробл ме континуума, здесь кажется вероятным существование промежуточных степеней).

Нельзя ли полную рекурсию типа ω^ω, свести к распылённой рекурсии высшего типа? (И в связи с этим определить диагональную функцию ψ если не в классе II, то в каком нибудь высшем классе?) Было бы интересно исследовать и то, трансфинитные рекурсии какого типа характерны для высших классов.

OCCURRENCE AND COINCIDENCE PHENOMENA IN CASE OF HAPPENINGS WITH ARBITRARY DISTRIBUTION LAW OF DURATION

By

LAJOS TAKÁCS (Budapest)

(*Presented by* A. RÉNYI)

I. OCCURRENCE PHENOMENA

§ 1. Formulation of the problem

Let us consider a stochastic process of the Poisson type. Let the density of events be denoted by p. In this case the probability of *one (or at least one) event taking place* between the moments u and $u+\Delta u$ is equal to $p\Delta u+o(\Delta u)$, whilst the probability of more than one event taking place in the same time interval is[1] $o(\Delta u)$, and thus the mean value of the number of occurrences is $p\Delta u$ [3]. In what follows, for the sake of brevity, we shall say that the probability of one event occurring between the moments u and $u+du$ is $p\,du$.

Let us examine the Poisson process in the time interval $0 \leqq u < \infty$ and let us define a new process as follows: let us suppose that the events occurring in the time interval $0 \leqq u < \infty$ give rise at the same moment to a *happening*, in case the event takes place at a moment when no happening is going on. An event occurring during the course of a happening does not give rise to any new happening. Let the duration of a happening be a random variable: ξ.

While the process of events is a Markoff process (Poisson process), the process of happenings is no longer a Markoff process, as the future behaviour of the process does not depend on the present condition only, but also on how the process has reached the present condition.

[1] $o(\Delta u)$ denotes a function for which $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{o(\Delta u)}{\Delta u}=0$, whereas $O(\Delta u)$ is a function, for which $\left|\dfrac{O(\Delta u)}{\Delta u}\right|$ is bounded.

For the sake of definiteness, let us think of the particles counted by means of a Geiger-Müller counter. The particles to be counted are producing ions in the gas space and these ions are causing a pulse-like discharge. The progress of the discharge once started is not influenced by any further particles arriving. Accordingly, for new particles possibly arriving during the discharge the counter is insensitive. According to our terminology, we shall say that at a given moment *an event occurs* if at that moment a particle arrives. In many cases, e. g. in the disintegration of radio-active atoms, the arrival of particles forms a Poisson process. It is the duration of the discharges that we are calling *happenings*.

The idea of the stochastic process of happenings has been introduced in the paper [6] of A. RÉNYI. The difference between the discussions there and in the present paper lies in the fact that in the case investigated by A. RÉNYI it is possible for new happenings to begin during a happening going on, whereas in our case this is excluded.

We are going to investigate the following problem: we suppose that happenings are started only by events occurring after the moment $u=0$, i. e. we consider the process of happenings to begin at the moment $u=0$ and we suppose that the duration ξ of each happening possesses the same probability distribution $H(x)$. ($H(x)$ means the probability that the duration ξ of a happening is $\leqq x$.) Let $W(t,n)$ denote the probability of the number of happenings beginning in the time interval $(0,t)$ being $\leqq n$ and let $m(t)$ design the mean value of the number of happenings beginning in the interval $(0,t)$ which value, if it is finite, can be expressed as follows:

$$m(t)=\sum_{n=0}^{\infty}[1-W(t,n)]. \tag{1}$$

Let further $\Omega(t, z)$ denote the distribution function of the duration of the happenings taking place in the time interval $(0, t)$, i. e. the probalility of the event that the duration in question is $\leqq z$, and let $\tau(t)$ denote the mean value of the duration of the happenings taking place in the time interval $(0,t)$ which can be expressed as follows:

$$\tau(t)=\int_0^t[1-\Omega(t, z)]\,dz. \tag{2}$$

It is these quantities we shall determine in what follows.

For the purpose of calculating the values $m(t)$ and $\tau(t)$ we introduce two new functions. Let the probability of a happening going on at the moment u be $F(u)$. In this case the probability of a happening starting between the moments u and $u+\Delta u$ is

$$[1-F(u)]\,[p\Delta u+o(\Delta u)],$$

since the probability of a happening starting in the time interval $(u,u+\Delta u)$

is equal to the product of the probabilities of the following two independent events: 1) no happening is going on at the moment u whose probability is $1-F(u)$ and 2) an event occurs in the time interval $(u, u+\Delta u)$ whose probability is $p\Delta u+o(\Delta u)$. In what follows, the probability of a happening starting in the time interval between the moments u and $u+\Delta u$ will be denoted as follows:

$$f(u)\Delta u+o(\Delta u).$$

Here

$$f(u)=[1-F(u)]p. \tag{3}$$

The probability of more than one happening starting in the time interval $(u, u+\Delta u)$ is, as easy to understand, $o(\Delta u)$. This will be expressed in what follows by saying shortly that the probability of a happening beginning between the moments u and $u+du$ is $f(u)du$.

§ 2. The determination of $f(u)$ and $F(u)$

Let us suppose that the mean value of ξ,

$$\alpha=\int_0^{\infty}[1-H(x)]dx \tag{4}$$

exists and is finite.

First of all, we may write

$$F(u)=\int_0^{u}f(u-x)[1-H(x)]dx. \tag{5}$$

The reason for this may be given simply in the following way:

At the moment u a happening is going on if a happening has begun between the moments $u-x-dx$ and $u-x$, the probability whereof is $f(u-x)dx$, and if the duration of this happening is greater than x, the probability thereof is $1-H(x)$. The probability of the occurrence of these two independent events is the product of the two, and $F(u)$ is obtained by integration for all possible values of x.

By substituting (5) into (3), we obtain a Volterra integral equation of the second kind

$$f(u)=p-p\int_0^{u}f(u-x)[1-H(x)]dx \tag{6}$$

by which $f(u)$ is defined. Knowing $f(u)$, it is possible, by aid of (3), to obtain $F(u)$. The following theorem holds:

THEOREM 1. *If the value of the integral*

$$\int_0^{\infty}[1-H(x)]dx$$

is a finite number α, then there exists one and only one non-negative, bounded and continuous solution $f(u)$ of the integral equation (6).

In accordance with a well known theorem of the theory of Volterra integral equations of the second kind, if $1-H(x)$ is measurable and bounded in any finite interval, then there exists one and only one bounded measurable solution $f(u)$ of (6). (See [7].) In our case the distribution function $H(x)$ is non-decreasing and $0 \leqq H(x) \leqq 1$, and, accordingly, satisfies the requirements, and thus there exists a bounded, measurable solution $f(u)$. It is easy to prove, but is also evident from (3), that

$$0 \leqq f(u) \leqq p.$$

There remains to be proved the continuity of $f(u)$. Our integral equation may also be written in the following form:

$$f(u) = p - p \int_0^u f(x)[1-H(u-x)]\,dx. \tag{7}$$

Hence

$$f(u+\Delta u) - f(u) = p \int_0^u f(x)[H(u+\Delta u - x) - H(u-x)]\,dx - \tag{8}$$
$$-p \int_u^{u+\Delta u} f(x)[1-H(u+\Delta u - x)]\,dx.$$

$H(x)$ being a non-decreasing function, $H(u+\Delta u-x)-H(u-x) \geqq 0$ and further $1-H(u+\Delta u-x) \geqq 0$ and $0 \leqq f(u) \leqq p$ and, consequently

$$|f(u+\Delta u)-f(u)| \leqq p^2 \left[\int_u^{u+\Delta u} H(x)\,dx - \int_0^{\Delta u} H(x)\,dx \right] + p^2 \Delta u \leqq 2p^2 \Delta u,$$

i. e., $f(u)$ is continuous.

The explicit determination of $f(u)$ can often be performed easily by means of Laplace transformation. Let

$$\psi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,dH(x), \tag{9}$$

the integral being convergent for $\Re(s) \geqq 0$, and

$$\Psi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}[1-H(x)]\,dx = \frac{1-\psi(s)}{s} \tag{10}$$

which is likewise convergent for $\Re(s) \geqq 0$.

With the above function

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-su} f(u)\,du \tag{11}$$

is convergent for $\Re(s) > 0$ *and the following equation is valid*:

$$\varphi(s) = \frac{p}{s[1 + p\Psi(s)]} = \frac{p}{s + p - p\psi(s)} \tag{12}$$

which permits the determination of $f(u)$ *in its points of continuity, that is to say, for all values of* u.

$f(u)$ is bounded and continuous for all values of u, and, accordingly, $\varphi(s)$ exists for $\Re(s) > 0$ and from equation (6) we immediately obtain that

$$\varphi(s) + p\varphi(s)\Psi(s) = \frac{p}{s}$$

from which (12) can be obtained. It is known from the theory of Laplace transforms that from $\varphi(s)$ it is possible to determine the value of $f(u)$ in all its points of continuity.

With the aid of $f(u)$ and $F(u)$ the mean values can be determined in a simple manner.

§ 3. Determination of the mean values

The average number of happenings beginning in the time interval $(0,t)$ *is*

$$m(t) = \int_0^t f(u)\,du \tag{13}$$

whilst the average total length of duration in the time interval $(0,t)$ *of the happenings beginning in the same interval is*

$$\tau(t) = \int_0^t F(u)\,du. \tag{14}$$

PROOF. The probability of a happening beginning in the time interval $(u, u + \Delta u)$ is $f(u)\Delta u + o(\Delta u)$. The probability of more than one happening beginning is $o(\Delta u)$: It is easily seen that the sum for the average number of the happenings extended to more than one happening is $o(\Delta u)$ in consequence of the fact that in case of a Poisson process the sum for the average number of the events extended to more than one event is $o(\Delta u)$ and it is even true for the happenings. Accordingly, the average number of happenings beginning in the interval $(u, u + \Delta u)$ is $f(u)\Delta u + o(\Delta u)$. What interests us is the average number of happenings beginning in the interval $(0,t)$. Let us divide the interval $(0,t)$ by means of the dividing points $u_0 = 0, u_1, u_2, \ldots, u_n = t$ into n subintervals, the length of each of which is $\Delta u = t/n$. The average number of events beginning in the ith subinterval is $f(u_i)\Delta u + o(\Delta u)$ and, according to the definition of the mean value,

$$m(t) = \sum_{i=1}^{n} [f(u_i)\Delta u + o(\Delta u)].$$

As $f(u)$ is bounded and continuous in the interval $(0,t)$, it follows that in case $n \to \infty$ the above Riemann sum converges to the integral

$$\int_0^t f(u)\,du,$$

that is to say, (13) is true.

The mean value of the duration of the happenings falling within the interval $(u, u+\Delta u)$ is determinated as follows. We distinguish three kinds of happenings: 1) Happenings going on at the moment u which are not terminated in the interval $(u, u+\Delta u)$; the probability of such a happening is $F(u)+O(\Delta u)$ and its duration is Δu. 2) Happenings going on at the moment u, and terminated in the time interval $(u, u+\Delta u)$; the probability of such a happening is $O(\Delta u)$ and its duration is smaller than Δu. 3) Happenings beginning in the interval $(u, u+\Delta u)$ the average number of which is $o(\Delta u)$, whilst their duration is smaller than Δu.

This is due to the following reasons: first of all, the probability of a happening, going on at some moment u, not being terminated within the interval $(u, u+\Delta u)$, is equal to the probability of a happening going on at the moment $u+\Delta u$, whose starting point falls within the time interval $(0, u)$, that is, does not fall into the time interval $(u, u+\Delta u)$. As in case a happening is going on at time $u+\Delta u$ two mutually exclusive cases are possible: the starting point of the happening may either fall into the interval $(0, u)$ or into the interval $(u, u+\Delta u)$, the probability of this latter event being, as can easily be seen, $O(\Delta u)$, the probability sought for is $F(u+\Delta u)-O(\Delta u)$. Here, owing to the continuity of $F(u)$, $F(u+\Delta u)=F(u)+O(\Delta u)$. Accordingly, the probability sought for differs from $F(u)$ by $O(\Delta u)$.

Further, a happening taking place at the moment u (the probability of which is denoted by $F(u)$) is possible in two ways mutually excluding each other: either the happening does not terminate in the interval $(u, u+\Delta u)$, the probability whereof is, as we have seen, $F(u)-O(\Delta u)$, or it terminates, the probability whereof amounts, according to what has been said above, to $O(\Delta u)$.

Thus, the average duration of the happenings taking place in the time interval $(u, u+\Delta u)$ amounts to

$$F(u)\Delta u + o(\Delta u).$$

Let us divide the interval $(0,t)$ by means of the dividing points mentioned above into n parts, in which case we may, in accordance with the definition of the mean value, write

$$\tau(t) = \sum_{i=1}^{n} [F(u_i)\Delta u + o(\Delta u)].$$

As $F(u)$ is bounded in the interval $(0,t)$ $(0 \leqq F(u) \leqq 1)$ and continuous, it follows that in case $n \to \infty$ the right side converges to the integral

$$\int_0^t F(u)\,du$$

and thus (14) is true.

REMARK 1. With the aid of the expressions (13) and (14) of the mean values, it results directly from equation (3) that the following relation holds between $m(t)$ and $\tau(t)$:

$$m(t)+p\tau(t)=pt. \tag{15}$$

REMARK 2. If the Laplace transform $\varphi(s)$ of $f(u)$ is known, it follows that the Laplace transform of the expression $m(t)=\int_0^t f(u)\,du$, well known from the theory of Laplace transforms, is $\varphi(s)/s$ from which $m(t)$ can often be determined easily. Then by (15) the Laplace transform of $\tau(t)$ is $\frac{1}{s^2}-\frac{1}{p}\frac{\varphi(s)}{s}$.

Remembering that if the Laplace transform of $f(u)$ is

$$\varphi(s)=\sum_{\nu=0}^{n}\left(\frac{A_{1\nu}}{s-s_\nu}+\frac{A_{2\nu}}{(s-s_\nu)^2}+\ldots+\frac{A_{m_\nu\nu}}{(s-s_\nu)^{m_\nu}}\right)e^{su_0}, \tag{16}$$

it follows that

$$f(u)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n}\left(A_{1\nu}+A_{2\nu}\frac{(u-u_0)}{1!}+\ldots+A_{m_\nu\nu}\frac{(u-u_0)^{m_\nu-1}}{(m_\nu-1)!}\right)e^{s_\nu(u-u_0)} & \text{if } u\geqq u_0,\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases} \tag{17}$$

the results of the examples enumerated below will be obtained easily.

EXAMPLE 1. Suppose that $\xi=\alpha$ (constant). In this case $\psi(s)=e^{-s\alpha}$ and

$$\varphi(s)=\frac{p}{p+s-pe^{-s\alpha}}=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{p}{p+s}\right)^{j+1}e^{-s\alpha j} \tag{18}$$

whence

$$f(u)=p\sum_{j=0}^{\left[\frac{u}{\alpha}\right]}e^{-p(u-\alpha j)}\frac{p^j(u-\alpha j)^j}{j!} \tag{19}$$

and

$$m(t)=\left[\frac{t}{\alpha}\right]+1+\sum_{j=0}^{\left[\frac{t}{\alpha}\right]}\sum_{k=0}^{j}\frac{p^k(t-\alpha j)^k}{k!}e^{-p(t-\alpha j)}. \tag{20}$$

EXAMPLE 2. Let the distribution function of ξ be $H(x)=1-e^{-x/\alpha}$. In this case $\psi(s)=\frac{1}{1+\alpha s}$ and

$$\varphi(s)=\frac{p(1+\alpha s)}{(1+\alpha p)s+\alpha s^2}=\frac{p}{(1+\alpha p)s}+\frac{\alpha^2p^2}{(1+\alpha p)(1+\alpha p+\alpha s)}, \tag{21}$$

hence

$$f(u)=\frac{p}{1+\alpha p}+\frac{\alpha p^2}{1+\alpha p}e^{-\frac{1+\alpha p}{\alpha}u} \tag{22}$$

and

$$m(t)=\frac{p}{1+\alpha p}t+\frac{\alpha^2 p^2}{(1+\alpha p)^2}\left(1-e^{-\frac{1+\alpha p}{\alpha}t}\right). \tag{23}$$

§ 4. The asymptotic behaviour of $f(u)$

THEOREM 2. *If the average duration of the happenings*

$$\alpha=\int_0^\infty [1-H(x)]\,dx \tag{24}$$

is finite, then we have

$$\lim_{u\to\infty} f(u)=\frac{p}{1+\alpha p}. \tag{25}$$

PROOF. First we observe that evidently

$$[m(t)-1]\,\alpha \leqq \tau(t) \leqq m(t)\alpha. \tag{26}$$

Hence in view of (15) we have

$$\frac{p}{1+\alpha p}\leqq\frac{m(t)}{t}\leqq\frac{p}{1+\alpha p}+\frac{\alpha p}{1+\alpha p}\frac{1}{t}, \tag{27}$$

that is,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(u)\,du=\frac{p}{1+\alpha p}. \tag{28}$$

From (25) we obtain (28), but to prove the converse we have to show that $\lim_{u\to\infty} f(u)$ exists. So there are only two possibilities: either $\lim_{u\to\infty} f(u)$ exists and this gives (25) or the latter does not exist.

We perform the proof by means of the following theorem which can be found in the book of PALEY-WIENER [5] (p. 59, Theorem 17):

Let $f(u)$ be measurable and bounded in every finite interval $(0, u)$ and let $K(x)$ belong to $L(0,\infty)$, i. e.

$$\int_0^\infty |K(x)|\,dx<+\infty. \tag{29}$$

Let

$$f(u)+\int_0^u K(u-x)\,f(x)\,dx\to C \quad \text{as} \quad u\to\infty. \tag{30}$$

Then if

$$\int_0^\infty K(x)\,e^{-sx}\,dx\neq-1, \quad \Re(s)\geqq 0, \tag{31}$$

we shall have

$$f(u) \to \frac{C}{1+\int\limits_0^\infty K(x)\,dx} \quad \text{as} \quad u \to \infty. \tag{32}$$

Conversely, let $K(x)$ belong to $L(0, \infty)$, let

$$\int\limits_0^\infty K(x)\,dx \neq -1 \tag{33}$$

and let (30) imply (32) for every $f(u)$ satisfying our conditions. Then (31) must be true.

Let now $f(u)$ be the solution of the integral equation (7). We have shown that $f(u)$ is bounded and continuous. Let

$$K(x) = p[1-H(x)]. \tag{34}$$

Taking (24) into account, it may be proved that this satisfies our requirements concerning $K(x)$. With this function, by virtue of (7), we have

$$f(u) + p\int\limits_0^u f(x)\,[1-H(u-x)]\,dx = p, \tag{35}$$

whence $C = p$.

Since

$$\int\limits_0^\infty K(x)\,dx = p\int\limits_0^\infty [1-H(x)] = p\alpha \tag{36}$$

and $C = p$, therefore (25) exists if

$$\int\limits_0^\infty K(x)\,e^{-sx}\,dx = p\int\limits_0^\infty [1-H(x)]\,e^{-sx}\,dx = p\frac{1-\psi(s)}{s} \neq -1, \quad \Re(s) \geqq 0. \tag{37}$$

But this is true since for $s=0$ on the left side we have $\alpha p \neq -1$; and supposing that there exists an s with $s \neq 0$ and $\Re(s) \geqq 0$, not satisfying (37), we have

$$\psi(s) = 1 + \frac{s}{p}.$$

For $\Re(s) \geqq 0$ we have $|\psi(s)| \leqq 1$ and for $s \neq 0$, $\Re(s) \geqq 0$ $\left|1+\frac{s}{p}\right| > 1$. Therefore every s on the right half plane satisfies (37). Hence our theorem is proved.

REMARK 1. Theorem 2 for the case $\alpha p < 1$ was proved by A. RÉNYI in an elementary way. His method can be probably extended to the case $\alpha p \geqq 1$, which would make possible to avoid the use of the deeper theorem of PALEY-WIENER.

REMARK 2. If $\lim\limits_{u\to\infty} f(u)$ exists, then denoting by $\varphi(s)$ the Laplace transform of $f(u)$, we have

$$\lim_{u\to\infty} f(u) = \lim_{s\to 0} s\varphi(s) \tag{38}$$

(see for example [4], p. 458, Theorem 3). If $f(u)$ is again the solution of the integral equation (7), then for the function $\varphi(s)$ furnished by (12) we obtain

$$\lim_{s\to 0} s\varphi(s) = \frac{p}{1+p\Psi(0)} = \frac{p}{1+p\alpha}. \tag{39}$$

The converse of this theorem in general fails to hold. But theorem 1 on p. 488 of [1] gives the possibility for an asymptotic expansion of $f(u)$ by means of $\varphi(s)$. In our case this reduces to the limit of $f(u)$.

REMARK 3. If in (27) for $m(t)$ we substitute (13) then we have

$$0 \leqq \int_0^t \left[f(u) - \frac{p}{1+\alpha p}\right] du \leqq \frac{\alpha p}{1+\alpha p}. \tag{40}$$

This estimation is stronger than that of (28).

§ 5. The determination of $W(t,n)$

$W(t,n)$ is a continuous function of t. As $0 \leqq W(t,n) \leqq 1$, its Laplace transform:

$$\omega_n(s) = \int_0^\infty e^{-st} W(t,n)\, dt \tag{41}$$

is convergent for $\Re(s) > 0$, and if

$$\psi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dH(x) \tag{42}$$

which is convergent for $\Re(s) \geqq 0$, it will be true that

$$\omega_n(s) = \frac{1}{s}\left[1 - \frac{p^{n+1}(\psi(s))^n}{(p+s)^{n+1}}\right] \tag{43}$$

which equation permits the determination of $W(t,n)$ in all its point of continuity, i. e. for all values of t.

PROOF. First of all, we shall show that $W(t,n)$ is continuous. The event that the number of happenings beginning in the time interval $(0,t+\Delta t)$ is $\leqq n$, the probability of which is equal to $W(t+\Delta t,n)$, can be produced in the following ways, mutually excluding each other: 1) n happenings begin in the interval $(0,t)$ and no happening begins in the interval $(t,t+\Delta t)$ (the probability of the latter being smaller than 1, and greater than or equal to that of no event occurring in the interval $(t,t+\Delta t)$ and this latter probability being $[1-p\Delta t-o(\Delta t)]$); 2) or, $n-1$ happenings begin in the interval $(0,t)$ and one happening begins in the interval $(t,t+\Delta t)$, the probability whereof is smaller than or equal to the probability of one event occurring in the interval $(t,t+\Delta t)$, and the probability hereof is $p\Delta t+o(\Delta t)$, and is greater than or equal to zero (more exactly, it is $o(\Delta t)$); 3) or else less than $n-1$ happenings begin in the interval $(0,t)$ and more than one in the interval $(t,t+\Delta t)$, the probability whereof is $o(\Delta t)$. Thus

$$W(t+\Delta t,n)\leqq W(t,n)+W(t,n-1)(p\Delta t+o(\Delta t))+o(\Delta t)$$

and

$$W(t+\Delta t,n)\geqq W(t,n)[1-p\Delta t-o(\Delta t)]+W(t,n-1)o(\Delta t)+o(\Delta t)$$

and therefore

$$-p\Delta t+o(\Delta t)\leqq W(t+\Delta t,n)-W(t,n)\leqq p\Delta t+o(\Delta t)$$

from which the continuity of $W(t,n)$ follows.

Let us denote in the process beginning at the time $u=0$ the starting points of the consecutive happenings by $u_1,u_2,\ldots,u_n,\ldots$ Then the probability of not more than n happenings starting in the interval $(0,t)$ is equal to that of the $(n+1)$-st happening starting at a moment later than t, that is to say,

$$W(t,n)=P(t<u_{n+1}). \tag{44}$$

As $P(t<u_{n+1})+P(u_{n+1}\leqq t)=1$, therefore

$$W(t,n)=1-P(u_{n+1}\leqq t). \tag{45}$$

Let the difference of the starting points of two consecutive happenings be $\xi_i=u_i-u_{i-1}(i=2,3,\ldots)$ and $\xi_1=u_1$, then

$$W(t,n)=1-P(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_{n+1}\leqq t). \tag{46}$$

The random variables $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots$ are mutually independent. The introduction of the difference of the starting points of consecutive happenings, and thereby the reduction of the problem to the determination of the distribution function of a sum of independent random variables, can be found in the works of various authors, for instance, in the work [2] of R. Fortet.

The density function of ξ_1 is $g_1(x)=e^{-px}p$. The variables $\xi_2,\xi_3,\ldots$ possess the same probability density function

$$g(x)=p\int_0^x e^{-p(x-\eta)}dH(\eta) \tag{47}$$

for the following reason. The difference of the starting points of two consecutive happenings can possess the value x only if the duration of the happening is equal to η, and if, following it, after the lapse of a length of time $x-\eta$, an event occurs, which is at the same time also the starting point of a happening.

The density functions $g_1(x)$ and $g(x)$ are continuous. The Laplace transform of $g_1(x)$ is $\gamma_1(s)=\dfrac{p}{p+s}$ and the Laplace transform of $g(x)$ is $\gamma(s)=$ $=\dfrac{p}{p+s}\psi(s)$. Both are convergent, if $\Re(s)\geqq 0$. As the random variables

$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ are mutually independent, the Laplace transform of the density function of the random variable $\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_{n+1}$ is equal to the product of the Laplace transforms of the individual variables ξ_i, that is to say, to $\gamma_1(s)[\gamma(s)]^n$. Further, the Laplace transform of the distribution function of the random variable $\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_{n+1}$ is obtained on division by s, and thus

$$\omega_n(s)=\frac{1}{s}-\frac{\gamma_1(s)[\gamma(s)]^n}{s}=\frac{1}{s}\left[1-\frac{p^{n+1}[\psi(s)]^n}{(p+s)^{n+1}}\right] \tag{48}$$

which is convergent if $\Re(s)>0$.

If $\omega_n(s)$ is known, $W(t,n)$ can be determined in all its points of continuity, and as $W(t,n)$ is continuous, it can be determined for all values of t.

REMARK 1. It follows from (1) that the Laplace transform of $m(t)$ is

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{s}-\omega_n(s)\right]=\frac{\gamma_1(s)}{s}\sum_{n=0}^{\infty}[\gamma(s)]^n=\frac{\gamma_1(s)}{s[1-\gamma(s)]}=\frac{p}{s[p+s-p\psi(s)]}, \tag{49}$$

taking into account that if $\Re(s)>0$, it follows $|\gamma(s)|<1$, and thus the series is convergent. This formula is in accordance with the result obtained earlier.

REMARK 2. Denoting by $m_r(t)$ the rth moment of $W(t,n)$, if this is finite, we have

$$m_r(t)=\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)^r-n^r][1-W(t,n)]. \tag{50}$$

The Laplace transform of this is

$$\int_0^{\infty} e^{-st} m_r(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)^r-n^r]\frac{p^{n+1}[\psi(s)]^n}{s(p+s)^{n+1}}= \tag{51}$$

$$=\frac{p}{s}\sum_{j=1}^{r}\mathfrak{S}_r^j\frac{j!\,[p\psi(s)]^{j-1}}{[p+s-p\psi(s)]^j}$$

where $\mathfrak{S}_r^j$ denote Stirling numbers of second kind. Here we have applied the well-known relation

$$n^r=\sum_{j=1}^{r}\mathfrak{S}_r^j\frac{n!}{(n-j)!}. \tag{52}$$

EXAMPLE 1. $\xi=\alpha$ (constant). In this case $\psi(s)=e^{-s\alpha}$ and

$$\omega_n(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}\left(\frac{p}{p+s}\right)^{n+1}e^{-s\alpha n}=\frac{1}{s}-\left[\frac{1}{s}-\sum_{j=1}^{n+1}\frac{p^{j-1}}{(p+s)^j}\right]e^{-s\alpha n} \tag{53}$$

and thus

$$W(t,n)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1}\frac{p^{j-1}(t-n\alpha)^{j-1}}{(j-1)!}e^{-p(t-n\alpha)} & \text{if } n\alpha\leqq t,\\ 1 & \text{if } n\alpha\geqq t.\end{cases} \tag{54}$$

In case $n\alpha\leqq t$ we can write (54) in the form

$$W(t,n)=1-\int_0^{t-n\alpha}e^{-px}\frac{(px)^n}{n!}p\,dx.$$

EXAMPLE 2. The distribution function of ξ is $H(x)=1-e^{-x/\alpha}$. In this case $\psi(s)=\frac{1}{1+\alpha s}$ and if $\frac{1}{\alpha}\neq p$, then

$$\omega_n(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}\left(\frac{p}{p+s}\right)^{n+1}\left(\frac{1}{1+\alpha s}\right)^{n}=\sum_{j=1}^{n+1}\frac{A_j}{(p+s)^j}+\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j\alpha^j}{(1+\alpha s)^j} \tag{55}$$

where

$$A_j=p^{j-1}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-j}\binom{n+k-j}{k-1}\frac{\alpha^{n+2-j}p^{n+1}}{(1-\alpha p)^{n+k-j+1}}$$

and

$$B_j=\frac{1}{\alpha^{j-1}}+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\binom{n+k-j+1}{k-1}\frac{p^{k-1}}{\alpha^{j-k}(1-\alpha p)^{n+k-j}};$$

if $\frac{1}{\alpha}=p$ it follows that

$$\omega_n(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}\left(\frac{p}{p+s}\right)^{2n+1}=\sum_{j=1}^{2n+1}\frac{p^{j-1}}{(p+s)^j}. \tag{56}$$

In accordance herewith, if $\frac{1}{\alpha}\neq p$, then

$$W(t,n)=\sum_{j=1}^{n+1}\frac{A_j\cdot t^{j-1}}{(j-1)!}e^{-pt}+\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j\cdot t^{j-1}}{(j-1)!}e^{-t/\alpha} \tag{57}$$

and if $\frac{1}{\alpha}=p$, then

$$W(t,n)=\sum_{j=1}^{2n+1}\frac{(pt)^{j-1}}{(j-1)!}e^{-pt}. \tag{58}$$

It is worth mentioning that the distribution function (58) can be obtained from the Poisson distribution by adding the probabilities of each two consecutive integer values.

This can be deduced also directly. Notably, $W(t,n)=1-P(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_{n+1}\leqq t)$, where the density function of ξ_1 is $g_1(x)=e^{-px}p$, and the density function of $\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_{n+1}$ is $g_1(x)*g_1(x)$, i. e. the composition of $g_1(x)$ with itself. As $g_1(x)$ is the density function of the consecutive events in a Poisson process characterized by the density p, it follows that $P(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_{n+1}\leqq t)$ is the probability of at least $2n+1$ events occurring during the length of time t. The probability hereof is

$$P(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_{n+1}\leqq t)=\int_0^t e^{-pu}\frac{(pu)^{2n}}{(2n)!}p\,du=1-\sum_{j=0}^{2n}e^{-pt}\frac{(pt)^j}{j!} \tag{59}$$

and thus (58) can be confirmed in this way also.

Similarly, (57) can be produced as a composition of Poisson distributions.

§ 6. The determination of $\Omega(t, z)$

$\Omega(t, z)$ will denote the distribution function of the duration of the happenings taking place in the time interval $(0, t)$, in a process of happenings which started at the moment $u = 0$.

The distribution function of the duration of a happening is $H(x)$. Let $H_n(x)$ be the n-fold convolution of $H(x)$. If the Laplace-Stieltjes transform of $H(x)$ is

$$\psi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dH(x), \tag{60}$$

then the Laplace transform of $H_n(x)$ is

$$\int_0^\infty e^{-sx} H_n(x)\, dx = \frac{[\psi(s)]^n}{s} \tag{61}$$

which enables us to determine $H_n(x)$ for all continuous values of x. (We put $H_0(x) = 0$, if $x < 0$ and $H_0(x) = 1$, for $x \geqq 0$.)

As we saw, in our process the happenings and intermissions change. The density function of the intermissions is $e^{-px}p$. The Laplace transform of this is

$$\int_0^\infty e^{-sx} e^{-px} p\, dx = \frac{p}{p+s}. \tag{62}$$

Let the distribution function of the convolution of n intermissions be $G_n(x)$. The Laplace transform of this is

$$\int_0^\infty e^{-sx} G_n(x)\, dx = \frac{1}{s}\left(\frac{p}{p+s}\right)^n \tag{63}$$

from which we obtain

$$G_n(x) = \int_0^x e^{-px} \frac{(px)^{n-1}}{(n-1)!}\, p\, dx = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} e^{-px} \frac{(px)^j}{j!}. \tag{64}$$

The distribution function of the duration of the happenings taking place in the time interval $(0, t)$, *is*

$$\Omega(t, z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} H_n(z)\, e^{-p(t-z)} \frac{[p(t-z)]^n}{n!} & \text{if } 0 \leqq z \leqq t, \\ 1 & \text{if } t \leqq z. \end{cases} \tag{65}$$

Proof. Let us denote the duration of the consecutive happenings by the random variables $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ and let $\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n = \zeta_n$. (The variables ξ_k are not the same, as in the last section.) Since $P(\xi_k \leqq x) = H(x)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ and the random variables ξ_k are independent, we have $P(\zeta_n \leqq x) = H_n(x)$. Let us denote the duration of the consecutive intermissions by the random variables $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$ and put $\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_n = \chi_n$. Then $P(\eta_k \leqq x) = 1 - e^{-px}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ and $P(\chi_n \leqq x) = G_n(x)$, since the variables η_k are independent

Let n denote the number of the happenings taking place in the time interval $(0, t)$. If $n=0$, — the probability of which equals e^{-pt} — then $z=0$. If $n \geqq 1$ then there are two ceses to distinguish: the happenings taking place in the time interval $(0, t)$ are terminated in the interval $(0, t)$, or not. The probability of the event that n happenings are starting and terminated in the time interval $(0, t)$ and the duration in question is $\leqq z$, is equal to the probability of the simultaneous occurrence of the following events: $0 \leqq \zeta_n \leqq z$ and $\zeta_n + \chi_n \leqq t < \zeta_n + \chi_{n+1}$. The probability of the event that there are n happenings starting in the time interval $(0, t)$ and the nth is not terminated and the duration in question is $\leqq z$, is equal to the probability of the simultaneous occurrence of the following events: $t-z \leqq \chi_n \leqq t$ and $\chi_n + \zeta_{n-1} \leqq t < \chi_n + \zeta_n$. In the first case the duration of the happenings should be $\leqq z$, i. e. $\zeta_n = x$ where $0 \leqq x \leqq z$ and $\chi_n \leqq t-x < \chi_{n+1}$. In the second case the duration of the intermissions should be $\geqq t-z$, i. e. $\chi_n = x$ where $t-z \leqq x \leqq t$ and $\zeta_{n-1} \leqq t-x < \zeta_n$.

Taking into consideration that $P(\chi_n \leqq t-x < \chi_{n+1}) = G_n(t-x) - G_{n+1}(t-x)$ and $P(\zeta_{n-1} \leqq t-x < \zeta_n) = H_{n-1}(t-x) - H_n(t-x)$, we obtain easily the following result:

$$(66) \quad \Omega(t, z) = e^{-pt} +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^z [G_n(t-x) - G_{n+1}(t-x)]\, dH_n(x) + \int_{t-z}^{t} [H_{n-1}(t-x) - H_n(t-x)]\, dG_n(x) \right\}.$$

Since

$$\int_0^z G_n(t-x)\, dH_n(x) - \int_{t-z}^{t} H_n(t-x)\, dG_n(x) = H_n(z)\, G_n(t-z)$$

and

$$\int_0^z G_{n+1}(t-x)\, dH_n(x) - \int_{t-z}^{t} H_n(t-x)\, dG_{n+1}(x) = H_n(z)\, G_{n+1}(t-z),$$

further

$$\int_{t-z}^{t} H_0(t-x)\, d\, G_1(x) = e^{-p(t-z)} - e^{-pt},$$

therefore we have for $\Omega(t, z)$ the following expression:

$$(67) \qquad \Omega(t, z) = e^{-p(t-z)} + \sum_{n=1}^{\infty} H_n(z) [G_n(t-z) - G_{n+1}(t-z)].$$

Here $G_n(t-z) - G_{n+1}(t-z)$ is the probability of the occurrence of n events during the time interval $t-z$ in a Poisson process of density p, i. e.

$$(68) \qquad G_n(t-z) - G_{n+1}(t-z) = e^{-p(t-z)} \frac{[p(t-z)]^n}{n!}.$$

Finally it results

$$\Omega(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(z) e^{-p(t-z)} \frac{[p(t-z)]^n}{n!}. \tag{69}$$

REMARK 1. The average duration of the happenings taking place in the interval $(0, t)$ is

$$\tau(t) = \int_0^t [1 - \Omega(t, z)]\, dz. \tag{70}$$

The Laplace transform of this is

$$\int_0^\infty e^{-st} \tau(t)\, dt = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\psi(s)]^n}{s} \left(\frac{p}{p+s}\right)^{n+1} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} \frac{1}{p+s-p\psi(s)}, \tag{71}$$

as obtained previously. By means of the Laplace transform we can easily determine $\tau(t)$.

REMARK 2. The rth moment of the duration of the happenings taking place in the interval $(0, t)$ is

$$\tau_r(t) = \int_0^t z^r d_z \Omega(t, z) = r \int_0^t z^{r-1} [1 - \Omega(t, z)]\, dz. \tag{72}$$

Let the Laplace transform of this be

$$\Phi_r(s) = \int_0^\infty e^{-st} \tau_r(t)\, dt, \tag{73}$$

then by means of (65) we have

$$\Phi_r(s) = \frac{r!}{s^{r+1}} - r \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{p^n}{(p+s)^{n+1}} \cdot \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} \left(\frac{[\psi(s)]^n}{s}\right) \tag{74}$$

from which $\tau_r(t)$ can be determined.

EXAMPLE. Let the duration of the happenings be $\xi = \alpha$ (constant). Then we have

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < \alpha, \\ 1 & \text{if } x \geqq \alpha, \end{cases} \quad \text{and} \quad H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < n\alpha, \\ 1 & \text{if } x \geqq n\alpha. \end{cases}$$

By means of (65) we have

$$\Omega(t, z) = \sum_{n=0}^{\left[\frac{z}{\alpha}\right]} e^{-p(t-z)} \frac{[p(t-z)]^n}{n!} \qquad \text{if } 0 \leqq z \leqq t. \tag{75}$$

We can also write this expression as

$$\Omega(t, z) = 1 - G_{k+1}(t-z) = 1 - \int_0^{t-z} e^{-px} \frac{(px)^k}{k!}\, p\, dx \tag{76}$$

where $k = \left[\frac{z}{\alpha}\right]$.

§ 7. Stationary processes

In the preceding sections we have discussed the case in which the process has begun at the moment $u=0$, and it was in the interval $(0,t)$ that we examined the mean values of the number of happenings and that of the duration of happenings as well as their distribution functions. If the process has already been going on for an endless time, and the mean values and the distribution functions of the number and the duration of happenings is being examined in some time interval of the length t, these will result as independent of the starting point of the interval examined, and will depend only on the length of the said interval. In this case we call the process *stationary*.

Now also, the mean values can be determined in a simple way by the probabilities of beginning and of happening, on the basis of the formulas (13) and (14), their values being now constant, viz.

$$f^* = \lim_{u\to\infty} f(u) = \frac{p}{1+\alpha p} \tag{77}$$

and

$$F^* = \lim_{u\to\infty} F(u) = \frac{\alpha p}{1+\alpha p}. \tag{78}$$

Accordingly, in the case of a stationary process we have

$$m^*(t) = \frac{pt}{1+\alpha p} \tag{79}$$

and

$$\tau^*(t) = \frac{\alpha p t}{1+\alpha p}. \tag{80}$$

Let us now denote by $W^*(t,n)$ the probability distribution of the number of happenings beginning in a time interval of length t.

$W^*(t,n)$ is continuous for all values of t, consequently its Laplace transform

$$\omega_n^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} W^*(t,n)\,dt \tag{81}$$

is convergent if $\Re(s) > 0$ and

$$\omega_n^*(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}\frac{p}{1+\alpha p}\left(1-\frac{p\psi(s)}{p+s}\right)\left(\frac{p}{p+s}\right)^n (\psi(s))^n \tag{82}$$

which enables $W^*(t,n)$ to be determined for all continuous values of t, that is, for all values of t.

PROOF. The continuity of $W^*(t,n)$ can be proved in the same way as that of $W(t,n)$. Similarly to the treatment of the question employed in the preceding section, and, using the same notations, we can write

$$W^*(t,n) = 1 - P(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_{n+1} \leqq t) \tag{83}$$

where, however, the density function of the probability variable ξ_1 is, differently from the preceding one,

$$g_1(x) = \frac{p}{1+\alpha p}[1-G(x)]. \tag{84}$$

The reason hereof is that if the distribution function $G(x)$ of the duration of any event is continuous, and its mean is μ, then the probability of any event just going on at a given moment should terminate within a time not exceeding x, is equal, as well-known [4], to

$$\int_0^x \frac{1-G(x)}{\mu}\,dx, \tag{85}$$

and the density function of this probability is

$$\frac{1-G(x)}{\mu}. \tag{86}$$

In our case $G(x)$ is the distribution function belonging to the density function $g(x)$ defined under (47), and

$$\mu = \int_0^\infty x g(x)\,dx = \frac{1}{p} + \alpha = \frac{1+\alpha p}{p}. \tag{87}$$

The Laplace transform of $g_1(x)$, which is for $\Re(s) \geqq 0$ convergent, is

$$\gamma_1(s) = \frac{p}{1+\alpha p}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s}\frac{p\psi(s)}{p+s}\right]. \tag{88}$$

With the aid of the latter we obtain, in a manner similar to the treatment employed in the previous section, the equation (82).

Remark. The Laplace transform of the mean value of the number of happenings is

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{s} - \omega_n^*(s)\right] = \frac{1}{s^2}\frac{p}{1+\alpha p}, \tag{89}$$

that is to say,

$$m^*(t) = \frac{pt}{1+\alpha p}$$

as obtained previously.

Example. $\xi = \alpha$ (constant). In this case $\psi(s) = e^{-s\alpha}$, and

$$\begin{aligned} \omega_n^*(s) &= \frac{1}{s} - \frac{p}{1+\alpha p}\frac{1}{s^2}\left(\frac{p}{p+s}\right)^n e^{-s\alpha n} + \frac{p}{1+\alpha p}\frac{1}{s^2}\left(\frac{p}{p+s}\right)^{n+1} e^{-s\alpha(n+1)} = \\ &= \frac{1}{s} - \frac{p}{1+\alpha p}\left[\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s} - \frac{n}{p}\right) + \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+1-k)p^{k-1}}{(p+s)^k}\right]e^{-s\alpha n} + \\ &+ \frac{p}{1+\alpha p}\left[\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s} - \frac{n+1}{p}\right) + \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(n+2-k)p^{k-1}}{(p+s)^k}\right]e^{-s\alpha(n+1)} \end{aligned} \tag{90}$$

whence

$$
\begin{aligned}
(91)\qquad W^*(t,n) = 1 - \frac{p}{1+\alpha p}\Bigg[\left(t-\frac{n}{p}\right) &+ \\
+\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+1-k)\,p^{k-1}(t-\alpha n)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-p(t-\alpha n)}\Bigg] &+ \qquad ([\ ]=0 \text{ if } \alpha n > t) \\
+\frac{p}{1+\alpha p}\Bigg[\left(t-\frac{n+1}{p}\right) &+ \\
+\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(n-2-k)p^{k-1}(t-\alpha(n+1))^{k-1}}{(k-1)!}e^{-p(t-\alpha(n+1))}\Bigg] &\qquad ([\ ]=0 \text{ if } \alpha(n+1) > t).
\end{aligned}
$$

It is surprising that, while in the case of a stationary process the computation of the mean value is more simple than in the case of a non-stationary process, the distribution function itself is more complicated.

Let $\Omega^*(t, z)$ denote the distribution function of the duration of the happenings taking place in an interval of length t. Then we have

(92) $\Omega^*(t, z) =$

$$
=\begin{cases} \dfrac{1}{1+\alpha p}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left\{H_n(z)+p\int_0^z[1-H_n(x)]H(z-x)\,dx\right\}e^{-p(t-z)}\frac{[p(t-z)]^n}{n!} & \text{if } 0\leqq z\leqq t, \\ 1 & \text{if } z\geqq t. \end{cases}
$$

PROOF. If the process of happenings has already been going on for an endless time and the distribution function of the duration is to be examined, then we distinguish two cases: In the starting point of the interval there is a happening or an intermission. The probability of a happening going on at the starting point of this interval is $F^* = \lim_{u\to\infty} F(u) = \dfrac{\alpha p}{1+\alpha p}$ and the probability of an intermission going on at the starting point of this interval is $1-F^* = \dfrac{1}{1+\alpha p}$.

The distribution function of the duration of an intermission is $G_1(x) = 1 - e^{-px}$ and its mean value is $1/p$. Hence the probability of the event that an intermission just going on should terminate within a time not exceeding x, is equal to

$$
(93)\qquad \int_0^x \frac{1-G_1(\zeta)}{1/p}\,d\zeta = 1 - e^{-px} = G_1(x),
$$

i. e., this is the same as the distribution function of the first intermission in a process starting at the moment $u=0$. Hence under this condition the distribution function of the duration in question is $\Omega(t, z)$.

The probability of the event that a happening just going on should terminate within a time not exceeding x, is equal to

$$\int_0^x \frac{1-H(\zeta)}{\alpha}\,d\zeta. \tag{94}$$

If this happening terminated we have the same situation as in the starting point of a process which started at the moment $u=0$. Hence if there is a happening in the starting point of the time interval of the length t and if the duration of this happening is exactly x, then the probability in question is $\Omega(t-x, z-x)$.

Finally we have

$$\Omega^*(t,z)=\frac{1}{1+\alpha p}\,\Omega(t,z)+\frac{\alpha p}{1+\alpha p}\int_0^z \frac{1-H(x)}{\alpha}\,\Omega(t-x, z-x)\,dx. \tag{95}$$

Using the expression (65) of $\Omega(t,z)$, we have the result (92).

REMARK. The average duration of the happenings taking place in an interval of the length t is

$$\tau^*(t)=\int_0^t [1-\Omega^*(t,z)]\,dz. \tag{96}$$

The Laplace transform of this is

$$\int_0^\infty e^{-st}\tau^*(t)\,dt= \tag{97}$$

$$=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{1+\alpha p}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{[\psi(s)]^n}{s}+p\,\frac{1-\psi(s)}{s}\,\frac{[\psi(s)]^n}{s}\right]\frac{p^n}{(p+s)^{n+1}}=\frac{1}{s^2}\,\frac{\alpha p}{1+\alpha p}$$

whence

$$\tau^*(t)=\frac{\alpha p}{1+\alpha p}\,t. \tag{98}$$

This formula is identical with the result obtained earlier.

EXAMPLE. Let the duration of the happenings be constant, $\xi=\alpha$. Then $H_n(x)=\begin{cases}0 & \text{if } x<n\alpha\\ 1 & \text{if } x\geqq n\alpha\end{cases}$ and putting $k=\left[\dfrac{z}{\alpha}\right]$ we obtain

$$\Omega^*(t,z)=\sum_{n=0}^{k-1} e^{-p(t-z)}\,\frac{[p(t-z)]^n}{n!}+\frac{1+p(z-k\alpha)}{1+p\alpha}\,e^{-p(t-z)}\,\frac{[p(t-z)]^k}{k!}. \tag{99}$$

II. COINCIDENCE PHENOMENA

§ 1. Formulation of the problem

Let us consider a system consisting of s processes of the type discussed in part I, going on simultaneously. It may then happen that in a given moment happenings are taking place in $0, 1, 2, \ldots, s$ of these processes. We shall say that the system (the totality of s processes) is at the moment u in the condition E_j, if at this moment happenings are taking place simultaneously in j processes.

By definition we shall say that a coincidence exists at the moment u, if at least $k (k = 1, 2, \ldots, s)$ simultaneous happenings are taking place, i. e. if the system is in the condition E_j, where $j \geqq k$. At a given moment a coincidence begins if a transition $E_{k-1} \rightarrow E_k$ presents itself.

The question is to determine the mean value $m_{sk}(t)$ of the number of coincidences beginning in the interval $(0, t)$ and their average duration $\tau_{sk}(t)$.

§ 2. Determination of the mean value

Now also, the mean values can be determined by introducing the following probabilities. Let $F_k(u)$ be the probability of the system being at the moment u in one of the conditions $E_k, E_{k+1}, \ldots E_s$. In this case it is easy to see that the probability of the system, which at the moment u was in the condition E_{k-1}, being at the moment $u + \Delta u$ in the condition E_k, can, in accordance with the method employed above, be written as follows: $f_k(u) \Delta u + o(\Delta u)$, or, in short, the conditional probability of the system which at the moment u was in the condition E_{k-1}, getting in the interval $(u, u + du)$ into the condition E_k is $f_k(u) du$. Thus, we may write that

$$m_{sk}(t) = \int_0^t f_k(u) du \tag{100}$$

and

$$\tau_{sk}(t) = \int_0^t F_k(u) du. \tag{101}$$

The proof is similar to the proofs of (13) and (14) given above.

Now

$$f_k(u) du = \binom{s}{k-1} [F(u)]^{k-1} [1 - F(u)]^{s-k+1} (s - k + 1) p du. \tag{102}$$

The reason for this is that the probability of the transition $E_{k-1} \rightarrow E_k$ in the interval $(u, u + du)$ is equal to the probability of the following event: that at the moment u happenings should be going on in $k-1$ processes, and no happenings should be going on in $s - k + 1$ processes, which probability can be obtained from BERNOULLI's formula relating to probabilities comprising repetitions, and that in one of the $s-k+1$ free processes there should begin between the moments u and $u+du$ an event, the probability of which is $(s-k+1)pdu$ which event is at the same time also the starting point of a happening, that is,

$$f_k(u) = ps\binom{s-1}{k-1}[F(u)]^{k-1}[1-F(u)]^{s-k+1}. \tag{103}$$

We would remark that the probability of an event beginning between the moments u and $u+\varDelta u$ in one of the $s-k+1$ free processes is $\binom{s-k+1}{1}(p\varDelta u)(1-p\varDelta u)^{s-k}+o(\varDelta u)=(s-k+1)p\varDelta u+o(\varDelta u)$ and the probability of more than one event beginning is $o(\varDelta u)$. Hence we may, for the sake of brevity, say that the probability of a happening starting in the time interval $(u, u+du)$ is $(s-k+1)pdu$.

The probability of a coincidence at the moment u is equal to the probability of happenings going on in k or more processes, that is,

$$F_k(u) = \sum_{j=k}^{s}\binom{s}{j}[F(u)]^{j}[1-F(u)]^{s-j}. \tag{104}$$

§ 3. Stationary systems of processes

In the preceding two sections systems of processes beginning at the moment $u=0$ have been examined in the interval $(0,t)$. Now let us suppose that the processes have been going on for an endless time, and the phenomenon is being examined in some time interval of the length t. In this case the mean values and probability distributions are independent of the starting point of the interval, and depend only on its length: such systems of processes are called *stationary*.

In this case the values of $f_k(u)$ and $F_k(u)$ will be constant, viz.

$$f_k^* = ps\binom{s-1}{k-1}[F^*]^{k-1}[1-F^*]^{s-k+1} \tag{105}$$

and

$$F_k^* = \sum_{j=k}^{s}\binom{s}{j}[F^*]^{j}[1-F^*]^{s-j}. \tag{106}$$

The mean values will be

$$m_{sk}^*(t) = ps\binom{s-1}{k-1}\left(\frac{\alpha p}{1+\alpha p}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{1+\alpha p}\right)^{s-k+1}t \tag{107}$$

and

$$\tau_{sk}^*(t) = \sum_{j=k}^{s}\binom{s}{j}\left(\frac{\alpha p}{1+\alpha p}\right)^{j}\left(\frac{1}{1+\alpha p}\right)^{s-j}t. \tag{108}$$

If we denote the density of the happenings starting in one process by

$$\bar{n} = \frac{p}{1+\alpha p}, \tag{109}$$

we shall arrive at the equation

$$m_{sk}^{*}(t) = s\binom{s-1}{k-1}(\alpha\bar{n})^{k-1}(1-\alpha\bar{n})^{s-k}\bar{n}t \tag{110}$$

which formula, in the case of the coincidence countings of experimental physics supplies the average number of the so-called chance-coincidences.

The results obtained here can be utilized in practice in connection with the simultaneous operation of a plurality of machines, in connection with the dimensioning of telephone centrals and for solving the problems occurring in the particle countings of experimental physics.

Finally, I would express my best thanks to Prof. A. Rényi for his numerous valuable remarks in preparing this paper.

INSTITUTE FOR APPLIED MATHEMATICS
OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

(Received 30 September 1951)

Bibliography

[1] G. Doetsch, *Handbuch der Laplace-Transformation,* Bd. 1 (Basel, 1950).

[2] R. Fortet, *Probabilité de perte d'un appel telephonique* (XIII. Le calcul des probabilités et ses applications, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris 1944), pp. 105—113.

[3] A. Khintchine, *Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Ergebnisse der Mathematik, Bd. 2, Berlin, 1933), p. 19.

[4] S. Malmquist, A statistical problem connected with the counting of radioactive particles, *Annals of Mathematical Statistics,* **18** (1947), pp. 255—264.

[5] R. E. A. C. Paley and N. Wiener, *Fourier transforms in the complex domain* (New-York, 1934).

[6] A. Rényi, On some problems concerning Poisson processes, *Publicationes Mathematicae,* **2** (1951), pp. 66—73.

[7] V. Volterra, *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-differentielles* (Paris, 1915).

ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЯВЛЕНИЙ НАСТУПЛЕНИЯ И КОИНЦИДЕНЦИИ В СЛУЧАЕ ПРОИСШЕСТВИЙ, С ЛЮБЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ

Л. ТАКАЧ (Будапешт)

(Р е з ю м е)

Рассмотрим стохастический процесс типа Пуассона. Пусть p плотность числа событий. Определим следующим образом новый процесс: предположим, что каждое событие является исходным пунктом некоторого происшествия, если событие наступает в такой момент, когда нет происшествия. Продолжительность происшествий: ξ является случайной величиной с функцией распределения $H(x)$.

Пусть $W(t, n)$ вероятность того, что число происшествий, начинающихся в период $(0, t)$ будет $\leqq n$. Пусть $m(t)$ обозначает математическое ожидание происшествий, начинающихся в период $(0, t)$ а $\tau(t)$ математическое ожидание продолжнтельности этих происшествий в период $(0, t)$.

Пусть $F(u)$ вероятность того, что в момент u как раз протекает происшествие; тогда вероятность того, что в период $(u, u+\Delta u)$ как раз начнётся происшествие есть $f(u)\,\Delta u+o(\Delta u)$, где

$$f(u)=p[1-F(u)].$$

$f(u)$ ограниченна, непрерывна и удовлетворяет интегральному уравнению второго рода Волтерры:

$$f(u)=p-p\int_0^u f(x)\,[1-H(u-x)]\,dx.$$

Из этого уравнения $f(u)$ может быть определена при помощи преобразовании Лапласа.

При помощи $f(u)$, $m(t)$ и $\tau(t)$ могут быть выражены следующим образом:

$$m(t)=\int_0^t f(u)\,du \quad \text{и} \quad \tau(t)=\int_0^t F(u)\,du=t-\frac{m(t)}{p}.$$

Относительно асимптотического поведения $f(u)$ справедлива следующая теорема:

Если среднее продолжительности происшествий

$$\alpha=\int_0^\infty [1-H(x)]\,dx$$

конечно, то

$$\lim_{u\to\infty} f(u)=\frac{p}{1+\alpha p}.$$

Это доказывается при помощи теоремы Paley—Wiener-a.

$W(t, n)$ может быть вычислено также с помощью преобразовании Лапласа.

Если вышеуказанный процесс протекает уже бесконечно долго и вышеуказанные значения вычисляются в некотором интервале времени длины t, то обозначив соответствующие значения звёздочной, имеем

$$m^*(t)=\frac{pt}{1+\alpha p} \quad \text{и} \quad \tau^*(t)=\frac{\alpha pt}{1+\alpha p}.$$

Дальше рассмотренны и решенны проблемы коинциденции в случае если происходит одновременно s процессов вышерассмотренного типа.

RESTGLIED EINES TAUBERSCHEN SATZES. I

Von

GÉZA FREUD

(*Vorgelegt von* P. TURÁN)

I. Einleitung

Es sei

(1) $$f(t) \geqq 0$$

und

(2) $$F(s) = \int_{t=0}^{\infty} f(t) e^{-st} \, d\tau.$$

$\tau(t)$ ist eine im Intervall $0 \leqq t < \infty$ definierte, monoton nicht abnehmende Funktion, und das rechtsstehende Stieltjes'sche Integral sei konvergent für $s > 0$. Die wichtigsten Spezialfälle von (2) sind die Laplace-Transformation $(\tau(t) = t)$, die allgemeine Dirichletsche Reihe, und als Sonderfall des letzteren die Potenzreihe

(2a) $$F_1(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-ns}.$$

Wir wollen zeigen:

SATZ. *Vorausgesetzt, daß α eine positive Zahl ist, und*

(3) $$F(s) = S \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha}} [1 + r(s)]$$

mit

(4) $$|r(s)| < c_0 s^{\varepsilon}$$

für reelle $s > 0$ gilt (c_0 und ε sind von s unabhängige positive Zahlen), dann ist die Abschätzung

(5) $$\int_{t=0}^{x} f(t) \, d\tau = S x^{\alpha} [1 + \varrho(x)]$$

mit

(6) $$|\varrho(x)| < \frac{c_1}{\log x} \quad \textit{für } x > 2$$

gültig.

Hier bedeutet c_1 (und im folgenden $c_2, c_3, \ldots, c_{27}$) positive Zahlen, die höchstens von α, ε und c_0 abhängen. (Es ist bemerkenswert, daß c_1 in Formel (6) von $\tau(t)$ unabhängig ist.)

Im Spezialfalle der Potenzreihe (2a) kann die Bedingung (1) (die jetzt $a_n \geqq 0$) ist durch die schwächere

(1a) $$a_n \geqq -Kn^{\alpha-1}$$

ersetzt werden. Man muß einfach zu (2a) die Formel

$$\sum_{n=0}^{\infty} Kn^{\alpha-1} e^{-ns} = K\frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha}\left[1+O\left(\frac{1}{s}\right)\right] \quad \text{für } s>0$$

addieren. Somit werden die Bedingungen (1) und (3) mit $S' = S + \frac{K}{\alpha}$ befriedigt. Allgemeiner, gilt für $\tau(t)$ die Beziehung

(b) $$\int_{t=0}^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-st}\, d\tau = \frac{A}{s^\alpha}\left[1+O\left(\frac{1}{s^\varkappa}\right)\right], \ \varkappa>0, \quad \text{für } s>0,$$

dann kann man die Bedingung (1) durch die schwächere

(1b) $$f(t) > -Kt^{\alpha-1}$$

ersetzen. c_1 wird dann eine Funktion von $\alpha, \varepsilon, \varkappa, c_0, A$ und K sein.

Diesen Satz habe ich (allerdings für den Sonderfall $\alpha=1$) schon in 1945 bewiesen, und den Beweis Herrn Professor P. TURÁN am 2. Mai 1945 brieflich mitgeteilt. Die hier veröffentlichte Form des Beweises entstand durch mehrfaches Umarbeiten. Professor TURÁN machte mich gefälligst auf ähnliche Resultate von J. KOREVAAR aufmerksam. KOREVAAR schreibt in einem Briefe, datiert 19. IV. 1951., an P. ERDŐS, daß er bei demselben Problem im Falle einer Potenzreihe (also (2a)) die schwächere Abschätzung

(7) $$|\varrho(x)| < c_1' \frac{\log\log x}{\log x}$$

bewiesen hat. Andererseits ist es ihm gelungen, ein Beispiel zu geben, aus welchem ersichtlich ist, daß die von mir angegebene *Abschätzung* (6) *nicht* einmal für den Fall der Potenzreihe und $\varepsilon=1$ *verbessert werden kann,* sogar wenn man statt (1a) $a_n = O(n^{\alpha-1})$ verlangt.

Professor TURÁN hat mich zu Dank verpflichtet, daß er mir KOREVAARS Brief zur Verfügung stellte, und mich zur Anfertigung dieser Arbeit anregte.

Der Gedankengang des Beweises folgt der Schlußweise von J. KARAMATA [4]. Außer des Karamataschen Lemmas werden ausschließlich Sätze über Approximation durch Polynome, und ein Satz von BERNSTEIN über die Abschätzung der Koeffizienten eines Polynoms benutzt.

In Kapitel V werden einige einfache Verallgemeinerungen angegeben. In einer folgenden Mitteilung werde ich beweisen, daß für die k-ten Cesàroschen Mittel von $\sum a_n$ bzw. $\int_{t=0}^{x} f(t)\, d\tau$ das bessere Restglied $|\varrho(x)| < \frac{c}{(\log x)^{k+1}}$ gültig ist.

II. Approximation einer stückweise stetigen Funktion durch Polynome

Wir wollen eine bekannte Polynomkonstruktion von MARKOFF [6] verwenden. Es seien $t_0(x), t_1(x), \ldots, t_n(x), \ldots$ im Intervall $(0, 1)$ mit der Gewichtsfunktion $(\log 1/x)^{\alpha-1}$ orthogonale Polynome, und $x_{1n} < x_{2n} < \ldots < x_{nn}$ seien die Wurzeln von $t_n(x)$.

Wir bilden das Polynom $P_n(x)$ vom höchstens $2n-2$-ten Grade, definiert durch

$$(8)\qquad \begin{gathered} P_n(x_{1n}) = P_n(x_{2n}) = \ldots = P_n(x_{\nu n}) = P_n(x_{\nu+1,n}) = 1, \\ P_n(x_{\nu+2,n}) = \ldots = P_n(x_{nn}) = 0, \\ P_n'(x_{1n}) = P_n'(x_{2n}) = \ldots = P_n'(x_{\nu n}) = 0, \\ P_n'(x_{\nu+2,n}) = \ldots = P_n'(x_{nn}) = 0. \end{gathered}$$

MARKOFF, und von ihm unabhängig STIELTJES haben bewiesen, daß

$$(9)\qquad P_n(x) \geqq \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq x_{\nu+1}, \\ 0 & \text{für} \quad x_{\nu+1} \leqq x \leqq 1. \end{cases}$$

Ähnlicherweise sei $p_n(x)$ das Polynom vom höchstens $2n-2$-ten Grade, definiert durch

$$(10)\qquad \begin{gathered} p_n(x_{1n}) = p_n(x_{2n}) = \ldots = p_n(x_{\nu-1,n}) = 1, \\ p_n(x_{\nu n}) = p_n(x_{\nu+1,n}) = \ldots = p_n(x_{nn}) = 0, \\ p_n'(x_{1n}) = p_n'(x_{2n}) = \ldots = p_n'(x_{\nu-1,n}) = 0, \\ p_n'(x_{\nu+1,n}) = \ldots = p_n'(x_{nn}) = 0; \end{gathered}$$

dann wird

$$(11)\qquad p_n(x) \leqq \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq x_\nu, \\ 0 & \text{für} \quad x_\nu \leqq x \leqq 1. \end{cases}$$

Das Polynom $P_n(x)-p_n(x)$ vom höchstens $2n-2$-ten Grade nimmt an den Stellen $x_{\nu n}$ und $x_{\nu+1,n}$ den Wert $+1$ an, und verschwindet an allen anderen Stellen x_{kn}. Also wird

$$(12)\qquad \int_0^1 (\log 1/x)^{\alpha-1} [P_n(x)-p_n(x)]\, dx = \lambda_{\nu n} + \lambda_{\nu+1,n}.$$

Hier bedeutet $\lambda_{\nu n}$ die zur Stelle $x_{\nu n}$ gehörige Cotes'sche Zahl der mechanischen Quadratur über den Grundpunkten $x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{nn}$, im Intervall $(0, 1)$, mit der Gewichtsfunktion $(\log 1/x)^{\alpha-1}$. Wir wollen ν von n abhängig so bestimmen, daß

$$(13)\qquad x_{\nu n} \leqq \xi < x_{\nu+1,n}$$

wird; ξ ist von n unabhängig, und $0 < \xi < 1$.

Wie leicht beweisbar, gilt dann

$$(14)\qquad 0 < \lambda_{\nu n} < \frac{c_2}{n} \quad \text{und} \quad 0 < \lambda_{\nu+1,n} < \frac{c_2}{n},$$

wobei c_2 noch von ξ abhängt. Der Beweis von (14) wird im Anhange nachgeholt.

Es sei ferner

$$(15)\qquad f_\xi(x)=\begin{cases}1 & \text{für}\quad 0\leqq x<\xi,\\ 0 & \text{für}\quad \xi\leqq x\leqq 1.\end{cases}$$

Dann folgt aus (9), (11), (12), (13) und (15)

$$(16)\qquad p_{n\xi}(x)\leqq f(x)\leqq P_{n\xi}(x),$$

sowie

$$(17)\qquad \int_0^1 (\log 1/x)^{\alpha-1}[P_{n\xi}(x)-p_{n\xi}(x)]\,dx<\frac{c_3}{n}.$$

Hier sind $P_{n\xi}(x)$ und $p_{n\xi}(x)$ Polynome vom höchstens $2n-2$-ten Grade, die mittels (8), (10) und (13) definiert sind. Die Ungleichung (17) gilt dann mit $c_3=2c_2$, die eine Funktion von ξ ist.

Es sei nun $g(x)$ eine im Intervalle (0, 1) stückweise stetige Funktion, die endlich-viele Sprungstellen hat, und in jedem Stetigkeitsteilintervall der Lipschitz'schen Bedingung

$$(18)\qquad |g(x_1)-g(x_2)|<c_4|x_1-x_2|$$

genügt.

Ist x_1 (oder x_2) eine Sprungstelle von $g(x)$, so soll $g(x_1)$ den Grenzwert von $g(x)$ an der Stelle x_1 bei Annäherung von derselben Seite wie x_2 bedeuten. Es kann

$$(19)\qquad g(x)=h(x)+H(x)$$

gesetzt werden, wo $H(x)$ eine lineare Kombination der Sprungfunktionen (15) ist:

$$(20)\qquad H(x)=\sum_{\xi_k}[g(\xi_k-0)-g(\xi_k+0)]f_{\xi_k}(x),$$

und $h(x)$ im ganzen abgeschlossenen Intervall (0, 1) der Lipschitz'schen Bedingung

$$(21)\qquad |h(x_1)-h(x_2)|<c_5|x_1-x_2|$$

genügt. Wir definieren zwei Polynome $\vartheta_n(x)$ und $\theta_n(x)$ durch

$$(22)\qquad \begin{aligned}\vartheta_n(x)&=\sum_{\xi_k}[g(\xi_k-0)-g(\xi_k+0)]\,p^*_{n\xi_k}(x),\\ \theta_n(x)&=\sum_{\xi_k}[g(\xi_k-0)-g(\xi_k+0)]\,P^*_{n\xi_k}(x),\end{aligned}$$

wobei

$$(23)\qquad \begin{aligned}p^*_{n\xi_k}(x)&=\begin{cases}p_{n\xi_k}(x) & \text{für}\quad g(\xi_k-0)-g(\xi_k+0)>0,\\ P_{n\xi_k}(x) & \text{für}\quad g(\xi_k-0)-g(\xi_k+0)<0,\end{cases}\\ P^*_{n\xi_k}(x)&=\begin{cases}P_{n\xi_k}(x) & \text{für}\quad g(\xi_k-0)-g(\xi_k+0)>0,\\ p_{n\xi_k}(x) & \text{für}\quad g(\xi_k-0)-g(\xi_k+0)<0.\end{cases}\end{aligned}$$

Diese sind höchstens vom $2n-2$-ten Grade, und wegen (16), (17), (20) und (22) genügen sie den Ungleichungen

(24) $$\vartheta_n(x) \leqq H(x) \leqq \theta_n(x)$$

und

(25) $$\int_0^1 (\log 1/x)^{\alpha-1}[\theta_n(x)-\vartheta_n(x)]\,dx < \frac{c_6}{n}.$$

$c_6 = \sum_{\xi_k} |g(\xi_k-0)-g(\xi_k+0)|c_3(\xi_k)$ hängt nur von α und $g(x)$ ab. (Die für unseren Zweck nötige spezielle Wahl von $g(x)$ siehe weiter unten in Gleichung (31).)

Aus (21) folgt [3], daß es ein Polynom vom höchstens n-ten Grade $\chi_n(x)$ gibt, für das im ganzen Intervall (0, 1)

(26) $$|h(x)-\chi_n(x)| < \frac{c_7}{n}$$

gilt. c_7 hängt von c_5 in (21) und dem Maximum von $|h(x)|$ in (0, 1) ab. Es sei nun

(27) $$\varphi_n(x) = -\frac{c_7}{n} + \chi_n(x) + \vartheta_n(x),$$

(28) $$\Phi_n(x) = \frac{c_7}{n} + \chi_n(x) + \theta_n(x).$$

Dann sind $\varphi_n(x)$ und $\Phi_n(x)$ Polynome vom höchstens $2n-2$-ten Grade, und es gilt nach (19), (24), (25), (26), (27) und (28)

(29) $$\varphi_n(x) \leqq g(x) \leqq \Phi_n(x),$$

sowie

(30) $$\int_0^1 (\log 1/x)^{\alpha-1}[\Phi_n(x)-\varphi_n(x)]\,dx < \frac{c_8}{n}$$

mit

$$c_8 = 2c_7\int_0^1 (\log 1/x)^{\alpha-1}\,dx + c_6.$$

Im weiteren sei

(31) $$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leqq x \leqq e^{-1}, \\ 1/x & \text{für } e^{-1} < x \leqq 1; \end{cases}$$

somit werden (wie anfangs behauptet) $c_2, c_3, \ldots, c_8$ nur von α abhängig sein. Aus (29), (30), (31) folgt

(32) $$\begin{aligned} \int_0^\infty t^{\alpha-1}\Phi_n(e^{-t})e^{-t}\,dt = \int_0^1 (\log 1/x)^{\alpha-1}\Phi_n(x)\,dx < \int_{e^{-1}}^1 (\log 1/x)^{\alpha-1}\frac{dx}{x} + \\ + \int_0^1 (\log 1/x)^{\alpha-1}[\Phi_n(x)-\varphi_n(x)]\,dx < \frac{1}{\alpha} + \frac{c_8}{n}, \end{aligned}$$

und ähnlicherweise

$$\int_0^\infty t^{\alpha-1}\varphi_n(e^{-t})e^{-t}\,dt > \frac{1}{\alpha}-\frac{c_8}{n}. \tag{33}$$

III. Abschätzung der Koeffizienten der Näherungspolynome

BERNSTEIN hat bewiesen [1], daß wenn das Polynom

$$\pi_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\nu}\alpha_k x^k \tag{34}$$

im Intervall (0, 1) der Ungleichung

$$|\pi_\nu(x)|\leqq M \tag{35}$$

genügt, dann wird

$$|\alpha_k|\leqq|\gamma_k|M \qquad (k=0,1,2,\dots,\nu), \tag{36}$$

wo

$$T_{2\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\nu}\gamma_k x^{2k}=\frac{1}{2}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^{2\nu}+(x-\sqrt{x^2-1})^{2\nu}\right] \tag{37}$$

das Tschebyscheffsche Polynom 2ν-ten Grades ist. Da die Vorzeichen dieses Polynoms (z. B. nach der Regel von DESCARTES) alternieren, wird

$$\sum_{k=0}^{\nu}|\gamma_k|=(-1)^\nu T_{2\nu}(\sqrt{-1})=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)^{2\nu}+\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^{2\nu}. \tag{38}$$

Aus (36) und (38) folgt

$$\sum_{k=0}^{\nu}|\alpha_k|< M(\sqrt{2}+1)^{2\nu}. \tag{39}$$

Betrachten wir nun die im vorigen Kapitel konstruierten Polynome $\varphi_n(x)$ und $\Phi_n(x)$. Das Polynom $\Psi_n(x)=\Phi_n(x)-\varphi_n(x)$ $2n-2$-ten Grades ist im Intervalle (0, 1) positiv; sein Maximum sei $\eta_n=\Psi_n(X_n)$. Dann wird nach dem Satz von MARKOFF $|\Psi_n'(x)|\leqq 2(2n)^2\eta_n$ in (0, 1), und somit gibt es ein Intervall von der Länge $\frac{1}{16n^2}$ (entweder links oder rechts von X_n), das in (0, 1) fällt, und in dem $\Psi_n(x)\geqq\frac{1}{2}\eta_n$ gilt. Somit wird nach (30)

$$\frac{c_8}{n}>\int_0^1(\log 1/x)^{\alpha-1}\Psi_n(x)\,dx>\frac{1}{2}\eta_n A_n, \tag{40}$$

wo

$$A_n=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{16n^2}}(\log 1/x)^{\alpha-1}\,dx>c_9\frac{(\log n)^{\alpha-1}}{n^2} & \text{für } \alpha\leqq 1,\\[2ex] \displaystyle\int_{1-\frac{1}{16n^2}}^{1}(\log 1/x)^{\alpha-1}\,dx>c_{10}\frac{1}{n^{2\alpha}} & \text{für } \alpha>1.\end{cases} \tag{41}$$

Aus (40) und (41) folgt, daß im Intervall (0, 1) die Ungleichung

$$|\Psi_n(x)| \leqq \eta_n < c_{11} n^{c_{12}} \tag{42}$$

besteht. So wird wegen $\varphi_n(x) \leqq 1$

$$0 \leqq \Phi_n(x) = \Psi_n(x) + \varphi_n(x) < c_{13} n^{c_{12}}, \tag{43}$$

und ähnlicherweise

$$|\varphi_n(x)| < c_{14} n^{c_{12}}. \tag{44}$$

Setzen wir

$$\Phi_n(x) = \sum_{k=0}^{2n-2} B_k x^k, \qquad \varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{2n-2} b_k x^k, \tag{45}$$

dann wird aus (43), (44), (39)

$$\sum_{k=0}^{2n-2} |B_k| < c_{15} e^{c_{16} n}, \qquad \sum_{k=0}^{2n-2} |b_k| < c_{15} e^{c_{16} n}, \tag{46}$$

und somit

$$\sum_{k=0}^{2n-2} \frac{k^\varepsilon |B_k|}{(k+1)^\alpha} < c_{17} e^{c_{18} n}, \qquad \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{k^\varepsilon |b_k|}{(k+1)^\alpha} < c_{17} e^{c_{18} n}. \tag{47}$$

IV. Anwendung der Karamataschen Methode

Wir ersetzen in (2) und (3) s durch $(k+1)s$:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty f(t)(e^{-st})^k e^{-st}\, d\tau = S \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(k+1)^\alpha s^\alpha} [1 + r(ks)] = \\ &= S \frac{\alpha}{s^\alpha} \int_0^\infty t^{\alpha-1} (e^{-t})^k e^{-t}\, dt + S \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^\alpha} \frac{r(ks)}{(k+1)^\alpha}. \end{aligned} \tag{48}$$

Wir multiplizieren (48) mit B_k und summieren über k von 0 bis $2n-2$:

$$\int_0^\infty f(t)\Phi_n(e^{-st}) e^{-st}\, d\tau = S \frac{\alpha}{s^\alpha} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \Phi_n(e^{-t}) dt + S \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^\alpha} \sum_{k=0}^{2n-2} B_k \frac{r(ks)}{(k+1)^\alpha}. \tag{49}$$

Somit erhalten wir unter Verwendung von (32), (4) und (47):

$$\begin{aligned} &\int_0^{1/s} f(t)\, d\tau \leqq \int_0^\infty f(t)\Phi_n(e^{-st}) e^{-st}\, d\tau < \frac{S}{s^\alpha} \Bigg[\alpha \int_0^1 t^{\alpha-1}\, dt + \frac{\alpha c_8}{n} + \\ &+ c_0 s^\varepsilon \Gamma(\alpha) \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{k^\varepsilon |B_k|}{(k+1)^\alpha} \Bigg] < \frac{S}{s^\alpha} \left(1 + \frac{c_{19}}{n} + c_{20} s^\varepsilon e^{c_{18} n} \right). \end{aligned} \tag{50}$$

Endlich sei

$$s = \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad n = \left[\frac{\varepsilon}{2 c_{18}} \log x \right] + 1; \tag{51}$$

so folgt

$$\frac{c_{19}}{n}+c_{20}S^{\varepsilon}e^{c_{18}n}<\frac{2c_{18}c_{19}}{\varepsilon\log x}+c_{20}x^{-\frac{\varepsilon}{2}}<\frac{c_{21}}{\log x} \tag{52}$$

für $x \geqq 2$. Wegen (50), (51) und (52) gilt somit

$$\int_0^x f(t)\,d\tau < Sx^{\alpha}\left(1+\frac{c_{21}}{\log x}\right). \tag{53}$$

Ähnlich, statt Φ_n mit φ_n gerechnet:

$$\int_0^x f(t)\,d\tau > Sx^{\alpha}\left(1-\frac{c_{21}}{\log x}\right). \tag{54}$$

Aus (53) und (54) folgt (5) und (6) mit $c_1=c_{21}$, was zu beweisen war.

V. Anhang. Verallgemeinerungen

Die Ungleichung $\lambda_{\nu n}<\frac{c_2}{n}$. Wir folgen einem Gedanken von ERDŐS—TURÁN [2]. $\lambda_{\nu n}$ ist das Minimum des Integrals

$$\int_0^1 (\log 1/x)^{\alpha-1}[\pi_n(x)]^2\,dx, \tag{55}$$

wenn wir für $\pi_n(x)$ Polynome von höchstens $n-1$-tem Grade mit $\pi_n(x_{\nu n})=1$ zulassen. Wir wählen als Konkurrenzpolynom

$$\pi_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(n-1)^2}\zeta_n(x)\dfrac{x}{x_{\nu n}} & \text{für } \alpha\geqq 1,\\[2ex] \dfrac{1}{(n-1)^2}\zeta_n(x)\dfrac{1-x}{1-x_{\nu n}} & \text{für } \alpha<1\end{cases} \tag{56}$$

mit

$$\zeta_n(\cos\theta)=\left(\frac{\sin(n-1)\dfrac{\theta-\theta_{\nu n}}{2}}{\sin\dfrac{\theta-\theta_{\nu n}}{2}}\right)^2;\quad x=\cos\theta,\quad x_{\nu n}=\cos\theta_{\nu n}. \tag{57}$$

$\zeta_n(\cos\theta)$ ist (von einer Konstanten abgesehen) der Fejérsche Kern der Fourier-Reihe; es ist positiv, nimmt sein Maximum $(n-1)^2$ an der Stelle $\theta=\theta_{\nu n}$ an, und ist überall kleiner als $c_{22}(\theta-\theta_{\nu n})^{-2}$. Wegen $x_{\nu n}\leqq\xi<x_{\nu+1\,n}$ gilt (s. STIELTJES [7]) $\lim\limits_{n=\infty} x_{\nu n}=\lim\limits_{n=\infty} x_{\nu+1,n}=\xi$, so daß $\frac{1}{x_{\nu n}}$ bzw. $\frac{1}{1-x_{\nu n}}$ unter einer festen Schranke c_{23} bleibt. (Im Falle einer allgemeinen stückweise stetigen Funktion mit endlichvielen Sprungstellen wird diese Schranke von der Lage der Sprungstellen abhängen.)

Ferner bezeichnen wir mit c_{24} das Maximum von $x^2(\log 1/x)^{\alpha-1}$ bzw. $(1-x)^2(\log 1/x)^{\alpha-1}$ im Intervalle $(0,1)$, je nachdem $\alpha\geqq 1$ oder $\alpha<1$ ist. Somit wird, (56) in (55) gesetzt,

(58)
$$\lambda_{\nu n} < \int_0^1 (\log 1/x)^{\alpha-1} [\pi_n(x)]^2 \, dx < c_{23}^2 c_{24} \int_0^1 \frac{1}{(n-1)^4} [\zeta_n(x)]^2 \, dx <$$
$$< c_{25} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(n-1)^4} [\zeta_n(\cos\theta)]^2 \, d\theta < c_{26} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Min}\left(1, \frac{1}{(n-1)^4 (\theta-\theta_{\nu n})^4}\right) d\theta < \frac{c_{27}}{n}.$$

Eine änliche Abschätzung gilt auch für $\lambda_{\nu+1, n}$.

Verallgemeinerungen. Die eine Verallgemeinerungsmöglichkeit ist, statt (5) für

$$\int_{t=0}^{x} t^\beta f(t) \, d\tau, \quad \beta > 0$$

eine Asymptotik zu suchen. Das wird erreicht, indem wir statt (31)

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leqq x < e^{-1}, \\ \dfrac{(\log 1/x)^\beta}{x} & \text{für} \quad e^{-1} \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

wählen. Unser Beweis kann Schritt für Schritt übernommen werden, und wir erhalten

(5c)
$$\int_{t=0}^{x} t^\beta f(t) \, d\tau = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} S x^{\alpha+\beta} [1 + \varrho^*(x)]$$

mit

(6c)
$$|\varrho^*(x)| < \frac{c_1^*}{\log x} \quad \text{für} \quad x > 2,$$

wo c_1^* nur von α, ε, c_0 und β abhängt.

Eine weitere Verallgemeinerung erhalten wir, wenn wir statt (4)

(4d)
$$|r(s)| < R(s) \quad \text{für reelle} \quad s > 0$$

voraussetzen. Dabei sei $R(s)$ eine monoton wachsende Funktion mit $R(0) = 0$ und

(59)
$$R(ks) < e^{c_{28} k} R(s) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Wie leicht ersichtlich, kann (47) durch

(47d)
$$\left| \sum_{k=0}^{2n-2} B_k \frac{r(ks)}{(k+1)^\alpha} \right| < c_{29} e^{c_{30} n} R(s)$$

ersetzt werden. Somit erhalten wir aus der rechten Seite von (52)

(52d)
$$\varrho^{**}\left(\frac{1}{s}\right) < \frac{c_{31}}{n} + c_{29} e^{c_{30} n} R(s).$$

Es sei nun

(5d)
$$s = \frac{1}{x}, \quad n = \left[\frac{1}{2c_{30}} \log \frac{1}{R(1/x)}\right] + 1,$$

dann wird offenbar für ein bestimmtes x_0 und $x > x_0$

$$\int_{t=0}^{x} t^\beta f(t)\, d\tau = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} S x^{\alpha+\beta}[1+\varrho^{**}(x)] \tag{5d}$$

mit

$$|\varrho^{**}(x)| < \frac{c_1^{**}}{\log \dfrac{1}{R(1/x)}}. \tag{5d}$$

(*Eingegangen am 21. Oktober 1951.*)

Literaturverzeichnis

[1] S. N. Bernstein, Sur la meilleure approximation de $|x|$ par des polynomes de degrés donnés dans un segment finit, *Acta Math.*, **37** (19), S. 3—6.

[2] P. Erdős—P. Turán, On interpolation, II. *Annals of Math.*, **39** (1938), S. 703—724.

[3] Dunham Jackson, *The theory of approximation,* Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. 11.

[4] J. Karamata, Über die Hardy-Littlewoodsche Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes, *Math. Zeitschr.*, **32** (1930), S. 519—520.

[5] K. Knopp, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen,* 3. Aufl., S. 519—524.

[6] А. А. МАРКОВ, Доказательство некоторых неравенств П. Л. Чебышева, Избранные Труды (Москва, 1948), стр. 20—21.

[7] Th. J. Stieltjes, Quelques recherches sur la théorie des quadratur dites mécaniques, Oeuvres Complètes, (Groningen, 1914), Bd. 1, S. 377—394.

[8] P. Szász, *A differenciál- és integrálszámitás elemei,* II. Aufl. (Budapest, 1951), §§. 411—414.

ОБ ОСТАТОЧНОМ ЧЛЕНЕ НЕКОТОРОЙ ТЕОРЕМЫ ТИПА ТАУБЕРА, I

Г. ФРАЙД (Будапешт)

(Р е з ю м е)

Пусть $\tau(t)$ монотонно возрастающая функция $(0 \leqq t < \infty)$ и $f(t) \geqq 0$, если $t \geqq 0$, и пусть интеграл Лебега—Стилтьеса

$$F(s) = \int_{t=0}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, d\tau$$

сходится при любом $s > 0$. Пусть

$$F(s) = S\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^\alpha}[1+r(s)], \qquad |r(s)| < R(s),$$

где $R(s)$ монотонно возрастает, $R(0)=0$ и $R(ks) < \exp(c_{28}k)\,.\,R(s)$, где c_{28} не зависит от k и s. Доказывается, что в этом случае

$$\int_{t=1}^{x} t^\beta f(t)\, d\tau = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} S x^{\alpha+\beta}[1+\varrho^{**}(x)],$$

где

$$|\varrho^{**}(x)| < \frac{c_1^{**}}{\log \dfrac{1}{R(1/x)}}, \text{ если } x > x_0.$$

x_0 и c_1^{**} зависят лишь от α, β и $R(s)$.

ON ABELIAN GROUPS WITH COMMUTATIVE ENDOMORPHISM RING

By

T. SZELE (Debrecen) and J. SZENDREI (Szeged)

(*Presented by* L. RÉDEI)

§ 1. Introduction

As is well known, the endomorphism ring of an abelian group is in general neither commutative nor without zero divisors. This gives rise to the problem of describing all abelian groups with commutative endomorphism ring and those with endomorphism ring containing no zero-divisors. In a previous paper one of us has considered the latter problem [3][1] and has succeeded in showing that there exists no such group among the mixed groups, while $C(p)$ and $C(p^\infty)$ are the only torsion groups of this property.[2] The present paper is devoted — leaving again the torsion free groups out of consideration — to abelian groups with commutative endomorphism ring. This problem will be solved completely for torsion groups; viz. we shall prove that the endomorphism ring of a torsion group is commutative if and only if the group is isomorphic with a subgroup of the group C of all rotations of finite order of the circle (Theorem 1). Moreover, we can characterize two sufficiently large classes of mixed groups with commutative endomorphism ring (Theorems 2 and 3), but we shall show that these two classes do not exhaust all mixed groups of this property. In describing the structure of the groups belonging to one of these classes we shall need a generalization of the direct sum which has plaid an important role in the theory of rings.

Lemma 1 (§ 3) gives an almost trivial necessary condition for the commutativity of the endomorphism ring of an abelian group. As easily one can show that this condition is necessary, it seems as difficult to prove in general that it also suffices. The results below lead us to conjecture that the condition mentioned above is always sufficient.

[1] The numbers in brackets refer to the Bibliography at the end of this paper.

[2] For the notations and terminology see § 2

We shall see that a torsion group with commutative endomorphism ring is always countable, but there exist mixed as well as torsion free groups of the power of the continuum with the same property. On the other hand, certain facts led us to the conjecture that the endomorphism ring of an abelian group of a cardinal number greater than the power of the continuum is never commutative. If this conjecture will prove to be true, then from the results of the present paper it is easy to conclude that every abelian group with commutative endomorphism ring is isomorphic with a rotation group of the circle.

§ 2. Preliminaries

In what follows by a *group* we shall mean always an additively written abelian group with more than one element. Groups will be denoted by Latin capitals and their elements by $x, a, b, \ldots, g$; the other small Latin letters are reserved for rational integers (in particular p, q for prime numbers). We shall denote the endomorphisms of a group by small Greek letters. A subgroup generated by certain elements $a, b, \ldots$ of a group is denoted by $\{a, b, \ldots\}$. A group, every element of which is of finite order, is called a *torsion group*. In case every non-zero element of the group is of infinite order, the group is called *torsion free*. A group which is neither a torsion group nor torsion free, is said to be a *mixed group*. All elements of finite order of a mixed group form a subgroup which we call the *torsion subgroup* of the group.

Let p be an arbitrary prime number. If the group G contains an element of order p, then p is called an *actual prime* for G. The set of all actual primes for G will be called the *actual prime system* of G. If $pG = G$ for a prime p, then G is called *closed for p*. (Here pG denotes of course the set of all elements pg with $g \in G$.) If H is a subgroup of G and is closed for any actual prime for G, then we say that H is an *actually closed subgroup* of G. If $a \in G$ and the equation $p^n x = a$ is solvable in G for every natural number n, then a is said to be an element of *infinite height for the prime p in G*. Clearly, any element of order p^k is an element of infinite height for every prime different from p. The element a of G will be said to be *of actually infinite height in G*, in case a is of infinite height for each actual prime p for G. If G contains no element $\neq 0$ of actually infinite height, we call G a group without elements of actually infinite height.

For an endomorphism $g \to \varepsilon g$ of G we denote by εG the set of all elements of the form εg $(g \in G)$ and call it an *endomorphic image* of G. The set K of all $x \in G$, for which $\varepsilon x = 0$, is called as usual the *kernel* of the endomorphism ε. If H is a subgroup of G and $\varepsilon H \subseteq H$ for every endomorphism ε of G, then H is a *fully invariant* subgroup in G.

We denote by R the additive group of all rational numbers, by $C(p^k)$ the cyclic group of order p^k for an arbitrary natural number k, and by $C(p^\infty)$

the additive group of all rational numbers mod 1 whose denominators are powers of p. The additive group of all rational numbers mod 1 will be denoted by C. It is clear that C is isomorphic with the group of all rotations of finite order of the circle, and it is the smallest group containing each $C(p^k)\,(p=2,3,5,\ldots;\,k=1,2,\ldots,\infty)$ as its subgroup.

In what follows we shall need a generalization of the concept of the direct sum which coincides with the well-known concept of direct sum in case of a finite number of direct summands. Some denominations relating to this concept are taken from one of JACOBSON's fundamentally important investigations on ring theory [2].

We shall say that the group G is *a direct sum* of its subgroups B_λ if the following requirements are fulfilled (where λ runs over an arbitrary — finite or infinite — set of indices, ordered or not):

There exist endomorphisms ε_λ of G such that

1) $\varepsilon_\lambda G = B_\lambda$;

2) $\varepsilon_\lambda\varepsilon_\mu = \begin{cases} \varepsilon_\lambda & \text{if } \lambda=\mu; \\ 0 & \text{if } \lambda\neq\mu; \end{cases}$

3) $g\in G$ *and* $\varepsilon_\lambda g = 0$ *for every* λ *imply* $g=0$.

Among all direct sums of the groups B_λ there exists a "greatest" one, G_c, satisfying the additional requirement:

4) *For any choice of a representative system of elements $b_\lambda\in B_\lambda$ there exists an element g of G_c such that $\varepsilon_\lambda g = b_\lambda$ holds for each λ.*

Obviously, the group G_c having the properties 1)—4) is uniquely determined (up to an isomorphism) by the groups B_λ; we call it the *complete direct sum* of the B_λ's, in notation:

(1) $$G_c = \sum_\lambda B_\lambda.$$

This group may also be described as the set of all possible "vectors" $\langle\ldots,b_\lambda,\ldots\rangle$ which contain a "component" b_λ from each group B_λ and which are added component-wise. It is easy to see that any direct sum of the groups B_λ is a subgroup of (1).

On the other hand, among all possible direct sums of the groups B_λ there exists always a "smallest" one, denoted by G_d, which is a subgroup of any direct sum. This may be characterized as the direct sum satisfying

4*) *For any element $g\in G_d$, there are only a finite number of λ's with $\varepsilon_\lambda g\neq 0$.*

This group G_d, determined uniquely by the groups B_λ as the group satisfying 1), 2), 3), and 4*), is called the *discrete direct sum* of the B_λ's and will be denoted by

(2) $$G_d = \sum_\lambda{}^{*} B_\lambda.$$

G_d may also be described as the set of all vectors $\langle \ldots, b_\lambda, \ldots \rangle$ having only a finite number of components different from zero. The concept of direct sum used so far in the group theory was this discrete direct sum.

In terms of the complete and discrete direct sums the direct sums of the B_λ's may be characterized as the groups G for which $G_d \subseteq G \subseteq G_c$. For a finite number of groups B_λ always $G_d = G_c$ holds, consequently, in this case there exists only one direct sum. Therefore the concept of the direct summand in the generalized sense is the same as that in the old sense: a certain subgroup H_1 of the group H is a *direct summand* of H if there exists a group $H_2 \subseteq H$ such that $H = H_1 + H_2$.

The definition clearly implies that the complete direct sum of an enumerable infinite set of finite or countable groups has always the power of the continuum.

Let us mention an important example. It is well known that a torsion group T may be represented as the discrete direct sum of its uniquely determined primary components T_p, where T_p is a p-group (i. e. a group containing only elements of p-power order):

(3) $$T = \sum{}^* T_p.$$

Therefore the complete direct sum

(4) $$\bar{T} = \sum T_p$$

is uniquely determined by T; it may be called the *complete p-direct sum over T*. In accordance with this, the groups between T and $\bar{T}$ (T and $\bar{T}$ included), in other words, the direct sums of the groups T_p, may be called the *p-direct sums over T*. It is obvious that, if the actual prime system of T contains an infinity of primes, then all of these, except T, are mixed groups and their torsion subgroup is just T.

In case $T = C$ we have obviously

(5) $$C = \sum_p{}^* C(p^\infty).$$

where the summation is extended over all distinct prime numbers p. It is not difficult to see that the group

(6) $$\bar{C} = \sum_p C(p^\infty)$$

is isomorphic with the additive group of all real numbers mod 1 (i. e. with the group of all rotations of the circle). In what follows we shall not make use of this fact.

§ 3. Lemmas

We start with some lemmas.

LEMMA 1. *If the ring of endomorphisms of a group is commutative, then every endomorphic image of the group is fully invariant.*

Indeed, if $H = \varepsilon G$ is a certain endomorphic image of G and η denotes an arbitrary endomorphism of G, then by $\eta\varepsilon = \varepsilon\eta$ we have $\eta H = \eta\varepsilon G = \varepsilon\eta G \subseteq \varepsilon G = H$.

LEMMA 2. *If a group contains an element of order p, then it contains also a direct summand of the form $C(p^m)$ where m is a natural number or ∞.*

For the proof we refer to [4].

LEMMA 3. *If a torsion free group H is closed for the prime p, then $H \sim C(p^\infty)$.*

Let $a \neq 0$ be an element of H. From $pH = H$ we conclude that there exist elements $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ in H such that

$$pa_1 = a,\ pa_2 = a_1,\ \ldots,\ pa_{n+1} = a_n, \ldots .$$

Therefore $H/\{a\}$ contains a subgroup $C(p^\infty)$, and since this is a direct summand of every group containing it,[5] we obtain

$$H \sim H/\{a\} = C(p^\infty) + H^* \sim C(p^\infty),$$

as desired.

LEMMA 4. *Let A be the set of all elements of actually infinite height of the mixed group G. If G contains only a finite number of elements of order p for any actual prime p, then A is an actually closed subgroup of G.*

It is obvious that A is a subgroup. We have to verify that for any actual prime p_0, $p_0 A = A$ holds, i. e. for an arbitrary $a \in A$ among the solutions of the equation $p_0 x = a$ in G there exist an element $x = g$ of infinite height for each actual prime p.

First let $p = p_0$ and $d_1, \ldots, d_r$ be the set of all elements of order p_0 in G. Since $a \in A$, the equation $p_0 x = a$ has necessarily a solution $x = x_0$ in G. Thus all the solutions of this equation are

$$x_0 + d_0,\ x_0 + d_1,\ \ldots,\ x_0 + d_r \qquad (d_0 = 0). \tag{7}$$

Let k now be an arbitrary natural integer. Since $a \in A$, the equation $p_0^k x = a$ is also solvable in G and for each solution x we have $p_0^k x = p_0 x_0$, i. e. $p_0(p_0^{k-1}x - x_0) = 0$. Hence any solution of the equation $p_0^k x = a$ satisfies the equation

$$p_0^{k-1} x = x_0 + d_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, r) \tag{8}$$

for some i. In other words, among the indices $0, 1, \ldots, r$ there is an i such that (8) has a solution for an infinity of k's. But then the element $g = x_0 + d^i$

[3] See [1], p. 766.

in (7) is evidently a solution of the equation $p_0 x = 0$ and is of infinite height for p_0.

Secondly let p be an actual prime for G such that $p \neq p_0$. We show that the previous solution $x = g$ of the equation $p_0 x = a$ is an element of infinite height for p too. Since $a \in A$, for each natural number n there exists an element $x_1 \in G$ such that

$$p^n x_1 = a = p_0 g. \tag{9}$$

If u, v are integers with $p_0 u + p^n v = 1$, then by (9) we get

$$g = (p_0 u + p^n v) g = u p^n x_1 + v p^n g = p^n (u x_1 + v g).$$

Thus we have shown that g is an element of infinite height for p. This completes the proof of Lemma 4.

§ 4. Torsion groups

We recall that a group G is called locally cyclic if any two elements of it are contained in some cyclic subgroup of G.[4]

The torsion groups with commutative ring of endomorphisms are characterized in several ways by

THEOREM 1. *For a torsion group T the following statements are equivalent:*

a$_1$) *The ring of endomorphisms of T is commutative.*

b$_1$) *Every endomorphic image of T is fully invariant.*

c$_1$) *T is the discrete direct sum of groups $C(p_k^{m_k})$ $(m_k = 1, 2, \ldots, \infty)$ belonging to different prime numbers p_k.*

d$_1$) *T is a subgroup of the group C.*

e$_1$) *T is locally cyclic.*

f$_1$) *Any finite subgroup of T is a cyclic group.*

g$_1$) *For an arbitrary natural number r the equation $rx = 0$ has at most r solutions $x \in T$.*

h$_1$) *Every subgroup of T is fully invariant.*

REMARKS. According to Theorem 1 a torsion group with commutative endomorphism ring is always countable. Theorem 1 shows in particular that the necessary condition expressed in Lemma 1 is at the same time sufficient for torsion groups in order to have commutative endomorphism ring. Certain statements of Theorem 1 (for example, the equivalence of d$_1$) and e$_1$)) are well-known facts. However, we preferred to enumerate in the theorem all these interesting properties of the group C, because so the proof will be very short.

[4] Obviously this condition is equivalent to the fact that any finite system of elements of G is contained in a cyclic subgroup of G.

PROOF OF THEOREM 1.

a_1) *implies* b_1). See Lemma 1.

b_1) *implies* c_1). T is a discrete direct sum of p-groups. If one of these primary components of T were not of type $C(p^m)$, then by repeated application of Lemma 2 we would conclude that T might be represented in the form

$$T = C(p^m) + C(p^n) + T' \qquad (1 \leqq m \leqq \infty; 1 \leqq n \leqq \infty).$$

But this would imply that T has an endomorphism such that one of the subgroups $C(p^m)$, $C(p^n)$ is mapped onto a subgroup $\neq 0$ of the other. This would contradict b_1), since every direct summand is an endomorphic image.

c_1) *implies* d_1). See (5).

d_1) *implies* e_1). This is clear if one takes into account the representation of C as the additive group of all rational numbers mod 1.

e_1) *implies* f_1). This is obvious. See [4].

f_1) *implies* g_1). If the equation $rx = 0$ had $r+1$ solutions in T, then these would generate a finite subgroup which is not cyclic.

g_1) *implies* h_1). Obviously it is sufficient to show that, if g_1) holds for T, then any cyclic subgroup of T is fully invariant. Let $a \in T$, and let ε be an arbitrary endomorphism of T. If the order of a is r, then $r \cdot \varepsilon a = 0$. On the other hand, by hypothesis, the solutions of the equation $rx = 0$ are exhausted by the elements of the cyclic group $\{a\}$. Hence $\varepsilon a \in \{a\}$.

h_1) *implies* a_1). For let $a \in T$, further ε, η denote two arbitrary endomorphisms of T. Then by h_1) $\varepsilon a = ma$, $\eta a = na$, hence $\varepsilon \eta a = nma = mna = \eta \varepsilon a$ Therefore $\varepsilon \eta = \eta \varepsilon$.

§ 5. Mixed groups

LEMMA 5. *Let G be a mixed group with the torsion subgroup T. Then each of the following three statements is a consequence of its predecessor:*

a) *The ring of endomorphisms of G is commutative.*

b) *Every endomorphic image of G is fully invariant.*

c) *T is a locally cyclic group without subgroups of type $C(p^\infty)$* [5] *and the factor group G/T is closed for any prime p which is actual for G.*

PROOF. By Lemma 1, a) implies b). Consequently it is sufficient to show that b) implies c).

First of all we note that by b) there exists no endomorphism ε of G in case $G = D + E$, $D \neq 0$, $E \neq 0$, for which $0 \neq \varepsilon E \subseteq D$ holds.

At first we shall show that if b) holds for G, then T is locally cyclic. Indeed, if T were not locally cyclic, then by Theorem 1 there would exist a prime number p such that T contains more than one subgroup of type $C(p)$.

[5] This requirement can obviously be expressed also in the following manner: T is a locally cyclic group without elements of actually infinite height.

Then, by applying Lemma 2, we get

$$G = C(p^m) + C(p^n) + G' \qquad (1 \leqq m \leqq \infty; 1 \leqq n \leqq \infty),$$

which is impossible according to our previous remark.

Now we are going to prove that G/T is closed for any actual prime number p. For let p be an arbitrary actual prime for G. Then, by Lemma 2,

$$G = C(p^m) + G_0 \qquad (1 \leqq m \leqq \infty). \tag{10}$$

If here $pG_0 = G_0$, then by $C(p^m) \subseteq T$ we have

$$G_0 \cong G/C(p^m) \sim G/T,$$

consequently $p(G/T) = G/T$. In the contrary case, i. e. if $pG_0 \neq G_0$, then the factor group G_0/pG_0 is an elementary p-group and hence

$$G_0 \sim G_0/pG_0 = \sum\nolimits^* C(p) \sim C(p).$$

Therefore G has an endomorphism ε such that, in view of (10), $0 \neq \varepsilon G_0 \subseteq C(p^m)$ holds, in contradiction to b).

Finally we show that the locally cyclic group T contains no subgroup of type $C(p^\infty)$,[5] i. e.

$$T = \sum\nolimits^* C(p_k^{m_k}) \qquad (1 \leqq m_k < \infty; p_i \neq p_j \text{ for } i \neq j). \tag{11}$$

In fact, assuming $C(p^\infty) \subseteq T$ we get

$$G = C(p^\infty) + G_1, \tag{12}$$

$C(p^\infty)$ being a direct summand of every group containing it.[3] Then

$$G_1 \cong G/C(p^\infty) \sim G/T.$$

Further on account of what has been said above we have $p(G/T) = G/T$; therefore if we apply Lemma 3 to the group $H = G/T$, we get $G/T \sim C(p^\infty)$. Hence

$$G_1 \sim C(p^\infty)$$

which leads by (12) again to a contradiction.

From Lemma 5 thus having been proved we easily obtain the following theorems, of which Theorem 2 throws light on all mixed groups with commutative endomorphism ring and without elements of actually infinite height, while Theorem 3 characterizes the mixed groups with commutative endomorphism ring in which T is a direct summand.

THEOREM 2. *For a mixed group G without elements of actually infinite height the following statements are equivalent:*

a$_2$) *The ring of endomorphisms of G is commutative.*

b$_2$) *Every endomorphic image of G is fully invariant.*

c$_2$) *The torsion subgroup T of G is locally cyclic and contains no subgroup of type $C(p^\infty)$; further G is a p-direct sum over T such that G/T is closed for each actual prime.*

REMARKS. First of all we note that there exist in fact groups G described in c_2) of Theorem 2 and we can get an oversight on them. Indeed, the complete p-direct sum over the group (11), i. e. the group

$$\bar{T} = \sum C(p_k^{m_k}) \qquad (1 \leq m_k < \infty; p_i \neq p_j \text{ for } i \neq j) \tag{13}$$

has the property that $\bar{T}/T$ is closed for any prime number p. To prove this we must show that if the "vector" $c = \langle \ldots, c_k, \ldots \rangle$ $(c_k \in C(p_k^{m_k}))$ is an arbitrary element of the group (13) and p is an arbitrary prime number, then there exists an $x \in \bar{T}$ such that $c - px \in T$. This is obvious, since one may plainly construct a "vector" x with $c - px = 0$ or $c - px \in C(p_j^{m_j})$, according as $p \neq p_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ or $p = p_j$. Hence the group (13) corresponding to any prescribed group (11) has always commutative endomorphism ring, and according to Theorem 2 all mixed groups of this property without elements of actually infinite height are exhausted by those groups G for which $T \subset G \subseteq \bar{T}$ and $p_k(G/T) = G/T$ for every k. For a given T the determination of all G's of this kind is naturally equivalent to giving all those subgroups of the factorgroup $\bar{T}/T$ which are closed for every p_k. Since the group $\bar{T}/T$ is torsion free, this process becomes easier by taking into account that if S is an arbitrary subgroup of $\bar{T}/T$ and if we adjoin to S all those elements e of $\bar{T}/T$ for which $re \in S$ with some natural number r divisible only by primes in (11), then we get a subgroup S_0 of $\bar{T}/T$ such that $p_k S_0 = S_0$ for every k.

The results below will show that in a group G characterized by Theorem 2 the torsion subgroup T is never a direct summand.

Theorem 2 implies the existence of mixed groups of the power of the continuum with commutative ring of endomorphisms. We have to point out the fact that the necessary condition of Lemma 1 also suffices for mixed groups without elements of actually infinite height in order to have commutative endomorphism ring.

PROOF OF THEOREM 2.

In view of Lemma 5 it is sufficient to show that, if G is a mixed group without elements of actually infinite height, then c) of Lemma 5 implies c_2); further if G is an arbitrary mixed group, then c_2) implies a_2) besides the fact that G is a group without elements of actually infinite height.

Now we consider the first assertion. According to c), T is a group of the form (11). First of all we show that in (11) there is an infinity of primes p_k. In the contrary case, by a repeated application of Lemma 2, we would have $G = T + U$, and here, by c) and $U \simeq G/T$, the torsion free group U would be an actually closed subgroup of G. This is, however, impossible, since by hypothesis G contains no element $\neq 0$ of actually infinite height. (In the same way we can prove on basis of Theorem 2 that T is never a direct summand of the groups G described by Theorem 2.)

Now let p_k be an arbitrary actual prime number for G. Then by Lemma 2

$$G = C(p_k^{m_k}) + G_k \qquad (1 \leqq m_k < \infty) \tag{14}$$

where $C(p_k^{m_k})$ is the same direct summand as that occurring in (11). As a matter of fact, since the group $C(p_k^{m_k})$ in (11) includes all those elements of G whose order is some power of p_k, obviously G has no other direct summand of type $C(p_k^n)$. Thus in the representation (14) of G the direct summand $C(p_k^{m_k})$ is uniquely determined. On the other hand we show that also *G_k is uniquely determined as the set of all elements of infinite height for p_k in G.* A part of this assertion, viz. that $g \in G$ and $g \notin G_k$ imply that g is not of infinite height for p_k, is obvious. Consequently, it is enough to show that if $g_k \in G_k$, then the equation $p_k x = g_k$ has always a solution $x \in G_k$. Since by c) G/T is closed for p_k, there exists an $x \in G$ such that $p_k x - g_k = d \in T$. Let $C(p_k^{m_k}) = \{c_k\}$ and let the elements x and d be represented in the form according to (14)

$$x = ic_k + g'_k, \quad d = jc_k + g''_k \qquad (g'_k, g''_k \in G_k).$$

Here g''_k being an element of finite order in G_k, the order of g''_k is not divisible by p_k. Therefore $g''_k = p_k g'''_k \quad (g'''_k \in G_k)$. Hence the equation $p_k x - g_k = d$ can be written in the form

$$p_k(ic_k + g'_k) - g_k = jc_k + p_k g'''_k,$$

whence we get $p_k(g'_k - g'''_k) = g_k$ on account of the direct representation in (14). Consequently the element $g'_k - g'''_k$ is, indeed, a solution in G_k of the equation $p_k x = g_k$.

By the uniqueness, thus proved, of both terms on the right hand of (14), we conclude that each element g of G may be written in exactly one way as the sum of an element $\varepsilon_k g$ in $C(p_k^{m_k})$ and of an element in G_k. It is clear that the mapping $g \to \varepsilon_k g$ is an endomorphism of G. The endomorphisms thus defined possess obviously the following properties:

1) $\varepsilon_k G = C(p_k^{m_k})$;

2) $\varepsilon_i \varepsilon_k = \begin{cases} \varepsilon_k & \text{if } i = k; \\ 0 & \text{if } i \neq k; \end{cases}$

3) If $g \in G$ and $\varepsilon_k g = 0$ for every k, then $g = 0$.

Indeed, 3) is a consequence of the fact that if $\varepsilon_k g = 0$ for every k, then $g \in G_k$ for every k, i. e. g is an element of infinite height for each p_k, so that, by hypothesis, $g = 0$. Thus we have shown that G is a p-direct sum over T in the sense of § 2.

In order to complete the proof of Theorem 2 we have only to show that if c_2) holds for the mixed group G, then G contains no element of actually infinite height and the endomorphism ring of G is commutative. The previous part follows from that by (13)

$$p_1^{m_1}\overline{T} \cap p_2^{m_2}\overline{T} \cap \cdots \cap p_k^{m_k}\overline{T} \cap \cdots = 0,$$

and hence a fortiori for $G \subseteq \bar{T}$

$$p_1^{m_1} G \cap \cdots \cap p_k^{m_k} G \cap \cdots = 0.$$

Now let ε and η be any two endomorphisms of G and let us consider the endomorphism $\delta = \varepsilon\eta - \eta\varepsilon$. Since any endomorphism of G induces an endomorphism in T and since, by c_2) and Theorem 1, the endomorphism ring of T is commutative, we obtain $\delta T = 0$. Therefore T is contained in the kernel K of the endomorphism δ. But then, by $G/T \sim G/K \simeq \delta G$ and by the fact that $p_k(G/T) = G/T$ for every k, δG is an actually closed subgroup of G. Hence $\delta G = 0$. Thus we have shown that $\delta = \varepsilon\eta - \eta\varepsilon = 0$, and this completes the proof of Theorem 2.

THEOREM 3. *Suppose the mixed group G can be represented as $G = T + U$, where T is the torsion subgroup of G. Then the endomorphism ring of G is commutative if and only if T is a locally cyclic group containing no subgroup of type $C(p^\infty)$ and U is an actually closed subgroup of G with commutative endomorphism ring.*

REMARKS. It is clear that in the groups described by Theorem 3 the set of all elements of actually infinite height is just the subgroup U. Hence Theorem 2 and Theorem 3 exhaust two classes of mixed groups which have no groups in common, since Theorem 2 concerns groups without elements of actually infinite height.

It is easy to give examples for groups satisfying the conditions of Theorem 2. An instance for a group of this kind is the direct sum of a group T of the form (11) and the group $U = R$. We shall show in § 6 that also among the groups described by Theorem 3 exist groups of the power of the continuum.

We may expect to obtain further informations of the structure of the groups given by Theorem 3 only in case one would succeed in getting some further details of the structure of torsion free groups with commutative endomorphism ring. Only in this case one can answer the question whether or not the groups satisfying the conditions of Theorem 3 are all the mixed groups whose torsion group is a direct summand and which satisfy the necessary condition of Lemma 1.

PROOF OF THEOREM 3.

The necessity of the conditions of Theorem 3 follows obviously from Lemma 5, as well as from the fact that if $G = T + U$, then $U \simeq G/T$ and the commutativity of the endomorphism ring of G implies the same for U.

In order to prove the sufficiency of the conditions, let us consider a group $G = T + U$ satisfying the hypotheses of Theorem 3. It is obvious that both T and U are fully invariant subgroups of G (the latter being the set of all elements of actually infinite height of G). Consequently any endomorphism of G induces an endomorphism both in T and U. On the other hand, as the endomorphism ring both of T (see Theorem 1) and of U is commutative, T and U are contained in the kernel of the endomorphism $\varepsilon\eta-\eta\varepsilon$ for any two endomorphism ε, η of G. Then the kernel of $\varepsilon\eta-\eta\varepsilon$ contains also $T+U=G$, i. e. $\varepsilon\eta-\eta\varepsilon=0$.

Now the question arises as to whether the groups given by Theorems 2 and 3 exhaust all mixed groups with commutative endomorphism ring. We have to answer this question in the negative. More exactly:

If the actual prime system of the mixed group G with commutative endomorphism ring contains all the prime numbers, then G is covered by Theorem 2. If the actual prime system of G consists only of a finite number of primes, then G is covered by Theorem 3. In all other cases — i. e. when the actual prime system of G contains infinitely many prime numbers, but not all of them — there is a group G with commutative endomorphism ring which is not covered neither by Theorem 2, nor by Theorem 3.

In order to prove this, let G be a mixed group with commutative endomorphism ring, and first let us consider the case when the actual prime system of G consists of all primes. Then by Lemmas 5 and 4 all elements of actually infinite height of G form a torsion free subgroup A closed for every prime. Therefore, according to a well-known theorem [3] A is a direct summand of G:

$$G=G_0+A \tag{15}$$

where G_0 is already a group without elements of actually infinite height, i. e. G_0 is covered by Theorem 2. But by Theorem 2, G_0/T is a torsion free group closed for every prime and thus, it is a discrete direct sum of rational groups R. Hence $G_0 \sim G_0/T \sim R$. On the other hand, $A \neq 0$ would imply $R \subseteq A$. Thus, by (15) one might find an endomorphism ε of G such that $0 \neq \varepsilon(G_0) \subseteq A$ contradicting Lemma 1. Therefore only $A=0$ is possible, completing the proof that in this case G is covered by Theorem 2.

Let us proceed to the case if the actual prime system of G contains but a finite number of primes. Then by Lemma 5, T is a finite cyclic group and a repeated application of Lemma 2 leads to the representation $G=T+U$ which shows that now G is covered by Theorem 3.

Finally let us consider the case when the actual prime system of G contains an infinity of prime numbers $p_1, p_2, \ldots,$ but not all of them. Let q be a prime not actual for G and denote by R_q the additive group of all rational numbers whose denominator is relatively prime to q. Then

$$G=R_q+\sum_k C(p_k) \tag{16}$$

is a mixed group covered neither by Theorem 2, nor by Theorem 3, considering that the set of elements of actually infinite height of it is R_q, further neither $R_q=0$ nor $G=R_q+T$ holds. That the endomorphism ring of the group (16) is commutative, we shall show below. (See Theorem 5.)

It is worth while having a look at the consequences of our results in the most general case. We get a necessary condition as well as a sufficient one for the endomorphism ring of a mixed group G to be commutative. The previous condition is contained in Theorem 4 and is an immediate consequence of Lemmas 4 and 5 as well as of the first part of the proof of Theorem 2.

THEOREM 4. *If the endomorphism ring of a mixed group G is commutative, then the torsion subgroup T of G is a group of type* (11), *G/T is closed for every actual prime number, the elements of actually infinite height of G form an actually closed torsion free subgroup A of G and G/A is a group without elements of actually infinite height with commutative endomorphism ring (consequently, it is a group of the type given by Theorem* 2).

The following example shows that the conditions of Theorem 4 are not always sufficient for ensuring the commutativity of the endomorphism ring:

$$G = R + \sum_p C(p).$$

The complete direct sum on the right side is to be extended over all distinct prime numbers p. By $\sum_p C(p) \sim R$, G does not fulfils the requirement of Lemma 1, so that the endomorphism ring of G is not commutative.

A sufficient condition is given by the following

THEOREM 5. *If a mixed group G satisfying the conditions of Theorem* 4 *has the property that there exists a prime number q such that $q(G/A) = G/A$, further A contains no element $(\neq 0)$ of infinite height for q,*[6] *and the endomorphism ring of A is commutative, then the endomorphism ring of G is commutative.*

PROOF. Obviously T and A are fully invariant subgroups of G. Hence any endomorphism of G induces an endomorphism both in T and in A. But the endomorphism ring of T and that of A are commutative, so that T and A are both contained in the kernel K of the endomorphism $\delta = \varepsilon\eta - \eta\varepsilon$ for any two endomorphisms ε and η. Therefore

$$G/T \sim G/K \cong \delta G \tag{17}$$

and

$$G/A \sim G/K \cong \delta G. \tag{18}$$

Since G/T is closed for every actual prime, (17) means that δG is an actually closed subgroup of G, i. e. $\delta G \subseteq A$. On the other hand, from $q(G/A) = G/A$ and from (18) we may conclude that $q(\delta G) = \delta G$. However, the only subgroup of A closed for q is 0, hence $\delta G = 0$ and $\delta = \varepsilon\eta - \eta\varepsilon = 0$.

The group G in (16) satisfies obviously the conditions of Theorem 5, so that its endomorphism ring is commutative.

[6] Consequently q cannot be an actual prime for G.

§ 6. Final remarks and some conjectures

In order to construct groups of the power of the continuum with commutative endomorphism ring we need the following

THEOREM 6. *If $H_1, H_2, \ldots$ are countably many groups such that*

(I) *The endomorphism ring of H_n is commutative* $(n = 1, 2, \ldots)$,

(II) *H_n is a fully invariant subgroup of the complete direct sum $G = \sum H_n$,*

(III) *The only homomorphic image of $\sum H_n / \sum^* H_n$ in G is* 0,

then the endomorphism ring of $G = \sum H_n$ is commutative.

PROOF. *Let* ε, η be arbitrary endomorphisms of G. By (II) and (I), each H_n, and hence also $\sum^* H_n$ is contained in the kernel of the endomorphism $\delta = \varepsilon\eta - \eta\varepsilon$. Therefore

$$\sum H_n / \sum^* H_n \sim \delta G \subseteq G.$$

By (III) we have $\delta G = 0$, consequently $\varepsilon\eta - \eta\varepsilon = 0$.

Using Theorem 6 one can easily construct a torsion free group of the power of the continuum with commutative endomorphism ring. In order to do this, let $p_1, p_2, \ldots$ be an infinity of distinct prime numbers and denote again by R_{p_n} the additive group of all rational numbers whose denominator is relatively prime to p_n. Then the complete direct sum $G = \sum R_{p_n}$ is a group having the required property. (II) is fulfilled, since R_{p_n} contains all the elements of G which are of infinite height for each prime $\neq p_n$. (III) also holds, for $G / \sum^* R_{p_n}$ is now a group closed for every prime number p_n, while the only subgroup of G with the same property is obviously 0.

If q is a prime number different from each prime number p_n, then

$$C(q) + \sum_n R_{p_n}$$

is obviously a group satisfying the conditions of Theorem 3. Thus we have shown that among the groups covered by Theorem 3 there exist groups of the power of the continuum.

In conclusion we formulate some conjectures.

CONJECTURE 1. *If every endomorphic image of a group is fully invariant, then the endomorphism ring of the group is commutative.*

CONJECTURE 2. *Every group with commutative endomorphism ring is at most of the power of the continuum.*

If Conjecture 2 will prove to be true, then on basis of Lemma 5 it is easy to show that even the following conjecture will hold:

CONJECTURE 3. *Any group with commutative endomorphism ring is isomorphic with a subgroup of the group of all rotations of the circle.*

(Received 13 December 1951)

Bibliography

[1] R. BAER, The subgroup of the elements of finite order of an abelian group, *Ann. of Math.*, Princeton, (2), **37** (1936), pp. 766—781.

[2] N. JACOBSON, The radical and semi-simplicity for arbitrary rings, *Amer. J. Math.*, **67** (1945), pp. 300—320.

[3] T. SZELE, Über die Abelschen Gruppen mit nullteilerfreiem Endomorphismenring, *Publ. Math.* (Debrecen), **1** (1949), pp. 89—91.

[4] T. SZELE, Sur la décomposition des groupes abéliens, *Comptes Rendus* (Paris), **229** (1949), pp. 1052—1053.

О ГРУППАХ АБЕЛЯ, КОЛЬЦО ЭНДОМОРФИЗМА КОТОРЫХ КОММУТАТИВНО

Т. СЕЛЕ (Дебрецен) и Я. СЕНДРЕИ (Сегед)

(Резюме)

В настоящей работе авторы изучают такие группы Абеля, кольцо эндоморфизма которых коммутативно. Доказывают, что торзиогруппа тогда и только тогда обладает этим свойством, если локально цикличка, т. е. изоморфна какой-нибудь подгруппе группы, состоящей из вращений окружности конечной степени. После этого они переходят к исследованию смешанных групп, обладающих указаным свойством. Среди этих групп удаётся описать группы, которые могут быть представленны в виде прямой суммы группы с торзией и группы без торзии и группы, несодержащей такого отличного от нуля элемента, который бесконечно высок относительно любого такого простого числа, который является порядком какого-либо элемента группы. Во втором случае используют некоторое обобщение понятия прямой суммы. Из результатов следует, что существует смешанная группа, мощность которой есть мощность континуума, обладающая вышеуказанным свойствам.

Авторам удаётся построить и группу без торзии, мощность которой есть мощность континуума, обладающую этим свойством. В заключеним они выдвигают гипотезу, согласно которой мощность группы, обладающей вышеуказанным свойствам, не может быть более мощности континуума. Эта гипотеза может быть сформулигованиа и так: любая группа, обладающая этим свойствам, изоморфна какой то подгруппе группы, состоящей из всех вращений окружности.

CONTRIBUTIONS TO THE REDUCTION THEORY OF THE DECISION PROBLEM

Fifth paper
Ackermann prefix with three universal quantifiers

By

JÁNOS SURÁNYI (Budapest)

(*Presented by* L. KALMÁR)

1. In the second paper under the above main title,[1] I proved a theorem on the reduction of the decision problem of the first order predicate calculus, which is a common improvement of two reduction theorems, due to GÖDEL[2] and PEPIS,[3] respectively. Indeed, by the reduction theorems of GÖDEL and PEPIS, the decision problem is equivalent to the satisfiability question for first order formulas with a prefix[4] of the form

$$(x_1)(x_2)(x_3)(Ey_1)\ldots(Ey_n) \tag{1}$$

and to the same question for first order formulas with a prefix of the form

$$(x_1)\ldots(x_m)(Ey) \tag{2}$$

(or, if we will, of the form

$$(x_1)(x_2)(Ey)(x_3)\ldots(x_m)) \tag{2'}$$

respectively, whereas in the paper quoted above, I have proved that we can take $n=1$ in (1) and $m=3$ in (2) (or in (2')), i. e. that the decision problem is equivalent to the satisfiability question for first order formulas with a prefix of the form

$$(x_1)(x_2)(x_3)(Ey) \tag{3}$$

[1] JÁNOS SURÁNYI, Contributions to the reduction theory of the decision problem, second paper, Three universal, one existential quantifiers, *Acta Math. Hung.*, **1** (1950), pp. 261—270. We shall quote this paper as "second paper".

[2] K. GÖDEL, Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls, *Monatshefte für Math. und Phys.*, **40** (1933), pp. 433—443.

[3] J. PEPIS, Ein Verfahren der mathematischen Logik, *Journal of Symbolic Logic,* **3** (1938), pp. 61—76 and Untersuchungen über das Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, *Fundamenta Math.*, **30** (1938), pp. 257—348.

[4] A formula whose prefix is mentioned in this paper is always meant to be prenex.

(or, if we will, of the form

(3′) $$(x_1)(x_2)(Ey)(x_3))$$

containing but four quantifiers in all. Hence the question arises whether or not other theorems concerning the reduction of the decision problem can be improved in like manner, i. e., by specifying the number of the quantifiers.

In the present paper I shall answer affirmatively this question concerning the reduction theorem of ACKERMANN,[5] stating that the decision problem is equivalent to the satisfiability question for first order formulas with a prefix of the form

(4) $$(Ex_1)(y_1)(Ex_2)(y_2)\ldots(y_n).$$

Indeed, I shall prove that we can take $n=3$ in (4). The method to be applied permits to specify the number of binary relations too, so that the number of unary predicates will remain as the only parameter of the formulas. Moreover I shall prove the

THEOREM.[6] *To any given first order formula it is possible to construct an equivalent*[7] *binary first order formula having a prefix of the form*

(5) $$(Ex_1)(y_1)(Ex_2)(y_2)(y_3)$$

and also another one having a prefix of the form

(5′) $$(y_1)(Ex_1)(Ex_2)(y_2)(y_3)$$

and containing at most seven binary predicates.

Combined with the theorem of CHURCH[8] stating the recursive unsolvability of the decision problem, this theorem shows that the satisfiability question for binary formulas with a prefix of the form (5) (or (5′)) cannot be solved by any (general) recursive process. This may be considered as an improvement of a theorem of TURING[9] stating the recursive unsolvability of the satisfiability question for binary formulas with a prefix of the form

$$(Ex_1)(y_1)(Ex_2)(y_2)\ldots(y_6).$$

[5] WILHELM ACKERMANH, Beiträge zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, *Math. Annalen,* **112** (1936), pp. 419—432.

[6] This result, with a sketch of its proof, is contained in the following paper: JÁNOS SURÁNYI, Reduction of the decision problem to formulas containing a bounded number of quantifiers only, *Proc. of the X^{th} International Congr. of Philosophy* (Amsterdam 1948), fasc. II., pp. 759—762.

[7] Two first order formulas are called equivalent if the satisfiability of one of them implies that of the other, and conversely.

[8] ALONZO CHURCH, A note on the Entscheidungsproblem, *Journal of Symbolic Logic,* **1** (1936), pp. 40—41, 101—102. See also footnote[8] in the second paper.

[9] A. M. TURING, On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, *Proceedings London Math. Society,* **42** (1937), pp. 230 - 265, especially pp. 259—263.

2. The main idea of the proof is the same as that of the proof of ACKERMANN's theorem, viz. the well-known fact[10] that if a given first order formula **A** can be satisfied at all, it can be satisfied on the set of all positive integers. Moreover, for the descriptive functions corresponding to the existential quantifiers in **A** we can choose arbitrary arithmetic functions subject to the sole conditions that each positive integer has to be assumed at most by one of these functions and at most for one sequence of arguments, each of which is less than the value itself. Suppose that **A** has a prefix of the form (3) (which we can do, by the theorem of the second paper, without loss of generality). In this case we shall need a single, ternary descriptive function, for which we shall take the function $\omega(x_1, x_2, x_3)+1$, where $\omega(i, j, k)$ denotes the ordinal number of the triad[11] (i, j, k) in the Cauchy enumeration of all triads (defined exactly later on):

$$(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1), (1, 1, 3), (1, 2, 2),$$
$$(1, 3, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (3, 1, 1), (1, 1, 4), \ldots$$

We construct a formula **B**, symbolizing the fact that **A** can be satisfied in the indicated way, and therefore equivalent to **A**. Of course, **B** has to contain a definition of the arithmetical function $\omega(i, j, k)$, or, instead of this a definition of its "inverses", i. e., of the solutions $i=\chi_1(n), j=\chi_2(n), k=\chi_3(n)$ of the equation $\omega(i, j, k)=n$. We choose the second possibility, because the recursive definition of χ_1, χ_2 and χ_3 can be symbolized by means of three universal quantifiers, while that of ω would require six. The only existential quantifiers which enter in **B** are those expressing the existence of 1 and, to each integer, that of its successor, both playing a special role in the recursive definitions. From **B**, we go over to a formula **C** with a prefix of the form (5′) by interchanging the quantifier expressing the existence of 1 with the first universal quantifier. The independence from the variable of that universal quantifier of the individual whose existence is thus postulated, will be secured by an extra unicity postulate.[12]

3. The enumerating function $\omega(i, j, k)$ as well as its inverses $\chi_1(n)$, $\chi_2(n)$, $\chi_3(n)$ will be defined recursively by the equations

$$\omega(1, 1, 1)=1,$$
$$\omega(1, 1, k+1)=\omega(k, 1, 1)+1,$$
$$\omega(i+1, 1, k)=\omega(i, k+1, 1)+1,$$
$$\omega(i, j+1, k)=\omega(i, j, k+1)+1,$$

[10] Cf. TH. SKOLEM, Über einige Grundlagenfragen der Mathematik, *Skrifter utgitt av det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo,* Mat-naturw. Klasse, **1929**, no 4, pp. 1—49, especially pp. 23—29 and D. HILBERT and P. BERNAYS, *Grundlagen der Mathematik,* vol. 2 (Berlin 1939), p. 174, rule 3*.

[11] Triad means ordered triad; i, j, k, n denote throughout positive integers.

[12] This idea was used at the first time by LÁSZLÓ KALMÁR and JÁNOS SURÁNYI, On the reduction of the decision preblem, second paper, Gödel prefix, a single binary predicate, *Journal of Symbolic Logic,* **12** (1947), pp. 65—73.

and

$$\chi_1(1)=\chi_2(1)=\chi_3(1)=1, \tag{6}$$

$$\chi_1(n+1)=\begin{cases} 1 \quad \text{for} \quad \chi_2(n)=\chi_3(n)=1, & (7)\\ \chi_1(n)+1 \quad \text{for} \quad \chi_2(n)\neq 1, \chi_3(n)=1, & (8)\\ \chi_1(n) \quad \text{for} \quad \chi_3(n)\neq 1, & (9)\end{cases}$$

$$\chi_2(n+1)=\begin{cases} 1 \quad \text{for} \quad \chi_3(n)=1, & (10)\\ \chi_2(n)+1 \quad \text{for} \quad \chi_3(n)\neq 1, & (11)\end{cases}$$

$$\chi_3(n+1)=\begin{cases} \chi_1(n)+1 \quad \text{for} \quad \chi_2(n)=\chi_3(n)=1, & (12)\\ \chi_2(n)-1 \quad \text{for} \quad \chi_2(n)\neq 1, \chi_3(n)=1, & (13)\\ \chi_3(n)-1 \quad \text{for} \quad \chi_3(n)\neq 1. & (14)\end{cases}$$

We shall verify that they are formulated correctly by proving the

LEMMA 1. *We have*[13]

$$\omega(i,j,k)=n$$

if and only if $i=\chi_1(n), j=\chi_2(n), k=\chi_3(n)$.

PROOF. We have

$$\omega(\chi_1(1),\chi_2(1),\chi_3(1))=\omega(1,1,1)=1.$$

Suppose $\omega(\chi_1(n),\chi_2(n),\chi_3(n))=n$ for some n; then (i) in case $\chi_2(n)=\chi_3(n)=1$ we have

$$\omega(\chi_1(n+1),\chi_2(n+1),\chi_3(n+1))=\omega(1,1,\chi_1(n)+1)=$$
$$=\omega(\chi_1(n),1,1)+1=\omega(\chi_1(n),\chi_2(n),\chi_3(n))+1=n+1;$$

(ii) in case $\chi_2(n)\neq 1, \chi_3(n)=1$ we have

$$\omega(\chi_1(n+1),\chi_2(n+1),\chi_3(n+1))=\omega(\chi_1(n)+1,1,\chi_2(n)-1)=$$
$$=\omega(\chi_1(n),\chi_2(n),1)+1=\omega(\chi_1(n),\chi_2(n),\chi_3(n))+1=n+1;$$

and (iii) in case $\chi_3(n)\neq 1$ we have

$$\omega(\chi_1(n+1),\chi_2(n+1),\chi_3(n+1))=\omega(\chi_1(n),\chi_2(n)+1,\chi_3(n)-1)=$$
$$=\omega(\chi_1(n),\chi_2(n),\chi_3(n))+1=n+1.$$

Therefore $\omega(\chi_1(n),\chi_2(n),\chi_3(n))=n$ holds for $n=1,2,\ldots$

We have obviously $\omega(i,j,k)>0$ for all positive integers i,j,k. Therefore, by the definition of ω, $\omega(i,j,k)>1$ except $i=j=k=1$; i. e. $\omega(i,j,k)=1$ implies $i=1=\chi_1(1)$, $j=1=\chi_2(1)$ and $k=1=\chi_3(1)$. Suppose that $\omega(i,j,k)=n$ implies $i=\chi_1(n)$, $j=\chi_2(n)$, $k=\chi_3(n)$ for some n, further assume $\omega(i,j,k)=$ $=n+1$. As $i=j=k=1$ is impossible, we have either $i=j=1$, $k\neq 1$, or $i\neq 1$, $j=1$, or else $j\neq 1$. In the first case we have

$$n+1=\omega(i,j,k)=\omega(1,1,k)=\omega(k-1,1,1)+1,$$

hence

$$\omega(k-1,1,1)=n, \quad k-1=\chi_1(n), \quad 1=\chi_2(n)=\chi_3(n),$$

[13] Lemma 1 shows that the function $\omega(i,j,k)=n$ furnishes a one-to-one correspondence between the triads (i,j,k) and the positive integers n.

and therefore

$$i=1=\chi_1(n+1),\ \ j=1=\chi_2(n+1),\ \ k=\chi_1(n)+1=\chi_3(n+1).$$

In the second case we have

$$n+1=\omega(i,j,k)=\omega(i,1,k)=\omega(i-1,k+1,1)+1,$$

hence

$$\omega(i-1,k+1,1)=n,\ \ i-1=\chi_1(n),\ \ k+1=\chi_2(n),\ \ 1=\chi_3(n),$$

consequently $\chi_2(n)\neq 1$ and

$$i=\chi_1(n)+1=\chi_1(n+1),\ j=1=\chi_2(n+1),\ k=\chi_2(n)-1=\chi_3(n+1).$$

In the third case we have

$$n+1=\omega(i,j,k)=\omega(i,j-1,k+1)+1,$$

hence

$$\omega(i,j-1,k+1)=n,\ \ i=\chi_1(n),\ \ j-1=\chi_2(n),\ \ k+1=\chi_3(n).$$

Thus $\chi_3(n)\neq 1$ and

$$i=\chi_1(n)=\chi_1(n+1),\ j=\chi_2(n)+1=\chi_2(n+1),\ k=\chi_3(n)-1=\chi_3(n+1).$$

Therefore $\omega(i,j,k)=n$ implies $i=\chi_1(n)$, $j=\chi_2(n)$, $k=\chi_3(n)$ for $n=1,2,\ldots$

4. In order to prove our theorem, by the theorem of the second paper it suffices to construct to any binary first order formula **A** with a prefix of the form (3) an equivalent binary first order formula **B** having a prefix of the form (5). Let

$$\mathbf{A}=(x_1)(x_2)(x_3)(Ex_4)\,\mathbf{M}$$

where the matrix

$$\mathbf{M}=\mathbf{M}(F_1,\ldots,F_l;\,x_1,x_2,x_3,x_4)$$

is a truth function of the $16\,l$ arguments [14]

$$F_\lambda(x_\mu,x_\nu),\quad \lambda=1,\ldots,l;\quad \mu,\nu=1,2,3,4.$$

Suppose first that **A** can be satisfied. Then (compare [10]) it is possible to define predicates $\Phi_1,\ldots,\Phi_l$ over the set J of the positive integers such that

$$\mathbf{M}(\Phi_1,\ldots,\Phi_l;\,x_1,x_2,x_3;\,\omega(x_1,x_2,x_3)+1)$$

is true for arbitrary positive integers x_1,x_2,x_3; i. e.

$$\mathbf{M}(\Phi_1,\ldots,\Phi_l;\ \chi_1(x),\chi_2(x),\chi_3(x),x+1) \tag{15}$$

holds for arbitrary $x\in J$. For the sake of uniform notation, let $\chi_4(x)=x+1$ and let

$$\Psi_{\lambda\mu\nu}(x)=\Phi_\lambda(\chi_\mu(x),\chi_\nu(x))\quad\text{for}\quad \lambda=1,\ldots,l;\ \mu,\nu=1,2,3,4.$$

[14] We may suppose without loss of generality, that **A** does not contain unary predicate variables. Indeed, if we attach to each unary predicate variable F occurring in **A** a binary one, say, F^*, different from the binary predicate variables occurring originally in **A** and from the binary predicate variables attached to the other unary ones occurring in **A**, and replacing each part of the form $F(x)$ of **A** by $F^*(x,x)$, then we get a formula which is plainly equivalent to **A**.

Let us now denote by $\mathbf{M}^*(G_{111}, G_{112}, \ldots, G_{l44}; x)$ the matrix resulting from $\mathbf{M}(F_1, \ldots, F_l; x_1, x_2, x_3, x_4)$ by replacing $F_\lambda(x_\mu, x_\nu)$ by $G_{\lambda\mu\nu}(x)$ for $\lambda = 1, \ldots, l$; $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$. Then we can write (15) in the form

$$\mathbf{M}^*(\Psi_{111}, \Psi_{112}, \ldots, \Psi_{l44}; x). \tag{16}$$

Define the binary predicate $\mathrm{X}_\mu(x, y)$ to hold if and only if $y = \chi_\mu(x)$ ($\mu = 1, 2, 3, 4$); in particular we have

$$\mathrm{X}_4(x, x+1) \tag{17}$$

for arbitrary $x \in J$. We have [15]

$$\mathrm{X}_1(1, 1)\mathrm{X}_2(1, 1)\mathrm{X}_3(1, 1) \tag{18}$$

by (6); further, for arbitrary $x, y, z \in J$,

$$\mathrm{X}_1(x, y)\mathrm{X}_2(x, 1)\mathrm{X}_3(x, 1)\mathrm{X}_4(y, z) \rightarrow \mathrm{X}_1(x+1, 1)\mathrm{X}_2(x+1, 1)\mathrm{X}_3(x+1, z) \tag{19}$$

by (7), (10) and (12);

$$\mathrm{X}_1(x, y)\overline{\mathrm{X}}_2(x, 1)\mathrm{X}_3(x, 1)\mathrm{X}_4(y, z) \rightarrow \mathrm{X}_1(x+1, z)\mathrm{X}_2(x+1, 1) \tag{20}$$

by (8) and (10);

$$\mathrm{X}_2(x, y)\mathrm{X}_3(x, 1)\mathrm{X}_4(z, y) \rightarrow \overline{\mathrm{X}}_2(x, 1)\mathrm{X}_3(x+1, z) \tag{21}$$

by $\chi_2(x) = y = z+1 \neq 1$ and (13);

$$\mathrm{X}_1(x, y)\overline{\mathrm{X}}_3(x, 1) \rightarrow \mathrm{X}_1(x+1, y) \tag{22}$$

by (9);

$$\mathrm{X}_2(x, y)\overline{\mathrm{X}}_3(x, 1)\mathrm{X}_4(y, z) \rightarrow \mathrm{X}_2(x+1, z) \tag{23}$$

by (11); finally

$$\mathrm{X}_3(x, y)\mathrm{X}_4(z, y) \rightarrow \overline{\mathrm{X}}_3(x, 1)\mathrm{X}_3(x+1, z) \tag{24}$$

by $\chi_3(x) = y = z+1 \neq 1$ and (14). By (18)—(24), the recursion equations (6)—(14) defining χ_1, χ_2 and χ_3 have been completely formalized. We could formalize the construction of the predicates $\Psi_{\lambda\mu\nu}$ out of the original predicates Φ_λ simply by the formulas

$$\mathrm{X}_\mu(x, y)\mathrm{X}_\nu(x, z) \rightarrow (\Psi_{\lambda\mu\nu}(x) \sim \Phi_\lambda(y, z))$$
$$(\lambda = 1, \ldots, l; \mu, \nu = 1, 2, 3, 4).$$

however, in order to dispense with the binary predicates[16] Φ_λ in the new formula, we can replace Φ_λ by $\Psi_{\lambda 12}$ say. For this purpose (to avoide the increase of the number of the universal quantifiers) we need predicates $\Lambda_\mu(x, y)$ defined to hold if and only if $\chi_\mu(x) = \chi_1(y)$ ($\mu = 1, 2, 3, 4$). Of course, we can replace $\Lambda_4(x, y)$ by $\mathrm{X}_1(y, x+1)$; however, for the sake of uniformity we shall retain $\Lambda_4(x, y)$ as an alternative notation. By means of these predicates,

[15] For simplicity we omit conjunction signs (except at the end of a line when dividing formulas).

[16] Of course, the number l of the Φ_λ's is not fixed.

the construction of the predicates Ψ can be formalized as follows:

(25) $$\Lambda_\mu(x, y)\,\mathrm{X}_\nu(x, z)\,\mathrm{X}_2(y, z) \to (\Psi_{\lambda\mu\nu}(x) \sim \Psi_{\lambda 12}(y))$$

for $\lambda = 1, \ldots, l$; $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$. The connection between the predicates Λ and the predicates X can be expressed thus:

(26) $$\mathrm{X}_\mu(x, z)\,\mathrm{X}_1(y, z) \to \Lambda_\mu(x, y) \quad \text{for} \quad \mu = 1, 2, 3.$$

By (6), (7), (8) and (9) we have $\chi_1(2) = 1 < 2$ and $\chi_1(n+1) \leqq \chi_1(n) + 1$ for $n = 2, 3, \ldots$; hence by induction, $\chi_1(n) < n$ except $n = 1$. Consequently, $\mathrm{X}_1(y, y)$ holds for $y = 1$ only, and therefore, for arbitrary $y, z \in J$ we have

(27) $$Y_1(y, y) \to (\mathrm{X}_1(z, y) \sim \mathrm{X}_1(z, 1))\,(\mathrm{X}_2(z, y) \sim \mathrm{X}_2(z, 1))\,(\mathrm{X}_3(z, y) \sim \mathrm{X}_3(z, 1)).$$

Now let us form the conjunction of (16)—(26) on the one hand and that of (16)—(27) on the other hand. Let us replace 1 and $x+1$ by individual variables u and v, further the predicates $\Psi_{111}, \Psi_{112}, \ldots, \Psi_{l44}, \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3, \mathrm{X}_4, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$, by predicate variables $G_{111}, G_{112}, \ldots, G_{l44}, H_1, H_2, H_3, H_4, L_1, L_2, L_3$ respectively, Thus we get the matrices[17]

(28) $$\begin{aligned}\mathbf{N} = {} & \mathbf{N}(G_{111}, G_{112}, \ldots, G_{l44}, H_1, H_2, H_3, H_4, L_1, L_2, L_3, x, y, z, u, v) = \\ = {} & \mathbf{M}^*(G_{111}, G_{112}, \ldots, G_{l44}; x)\, H_4(x, v) H_1(u, u) H_2(u, u) H_3(u, u)\ \& \\ \& {} & \{H_1(x, y)\, H_2(x, u)\, H_3(x, u)\, H_4(y, z) \to H_1(v, u)\, H_2(v, u)\, H_3(v, z)\}\ \& \\ \& {} & \{H_1(x, y)\, \bar{H}_2(x, u)\, H_3(x, u) H_4(y, z) \to H_1(v, z) H_2(v, u)\}\ \& \\ \& {} & \{H_2(x, y)\, H_3(x, u)\, H_4(z, y) \to \bar{H}_2(x, u) H_3(v, x)\}\, \{H_1(z, y)\, \bar{H}_3(x, u) \to \\ \to {} & H_1(v, y)\}\, \{H_2(x, y)\, \bar{H}_3(x, u)\, H_4(y, z) \to H_2(v, z)\}\, \{H_3(x, y) H_4(z, y) \to \\ \to {} & \bar{H}_3(x, u)\, H_3(v, z)\} \prod_{\lambda=1}^{l} \prod_{\mu=1}^{3} \prod_{\nu=1}^{4} \{L_\mu(x, y) H_\nu(x, z) H_2(y, z) \to \\ \to {} & [G_{\lambda\mu\nu}(x) \sim G_{\lambda 12}(y)]\} \prod_{\lambda=1}^{l} \prod_{\nu=1}^{4} \{H_1(y, v) H_\nu(x, z)\, H_2(y, z) \to \\ \to {} & [G_{\lambda 4\nu}(x) \sim G_{\lambda 12}(y)]\} \prod_{\lambda=1}^{3} \{H_\mu(x, z) H_1(y, z) \to L_\mu(x, y)\}\end{aligned}$$

and

(29) $$\begin{aligned}\mathbf{N}' = {} & \mathbf{N}'(G_{111}, G_{112}, \ldots, G_{l44}, H_1, H_2, H_3, H_4\, L_1, L_2, L_3; x, y, z, u, v) = \\ = {} & \mathbf{N}(G_{111}, G_{112}, \ldots, G_{l44}, H_1, H_2, H_3, H_4, L_1, L_2, L_3; x, y, z, u. v)\ \& \\ \& {} & \{H_1(y, y) \to \prod_{\mu=1}^{3} (H_\mu(z, y) \sim H_\mu(z, u))\}.\end{aligned}$$

From what we have proved it follows

$$\mathbf{N}'(\Psi_{111}, \Psi_{112}, \ldots, \Psi_{l44}, \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3, \mathrm{X}_4, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3; x, y, z, 1, x+1)$$

for arbitrary $x, y, z \in J$; hence[18]

$$(Eu)(x)(Ev)(y)(z)\, \mathbf{N}'(\Psi_{111}, \Psi_{112}, \ldots, \Psi_{l44}, \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3, \mathrm{X}_4, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3; x, y, z, u, v)$$

[17] We abbreviate conjunction of many terms by the sign Π as they were products.

[18] The range of the quantifiers is the set J.

which implies

$$(Eu)(x)(Ev)(y)(z)\,\mathbf{N}(\Psi_{111},\,\Psi_{112},\ldots,\,\Psi_{l44},\;\mathsf{X}_1,\mathsf{X}_2,\mathsf{X}_3,\mathsf{X}_4,\Lambda_1,\Lambda_2,\Lambda_3;x,y,z,u,v)$$

on the one hand, and (by the identity $(Eu)(x)F(u,x)\rightarrow(x)(Eu)F(u,x)$)

$$(x)(Eu)(Ev)(y)(z)\,\mathbf{N}'(\Psi_{111},\,\Psi_{112},\ldots,\,\Psi_{l44},\mathsf{X}_1,\mathsf{X}_2,\mathsf{X}_3,\mathsf{X}_4,\Lambda_1,\Lambda_2,\Lambda_3;x,y,z,u,v)$$

on the other hand. Hence we see that the formulae

$$\mathbf{B}=(Eu)(x)(Ev)(y)(z)\,\mathbf{N}(G_{111},G_{112},\ldots,G_{l44},H_1,H_2,H_3,H_4,L_1,L_2,L_3;x,y,z,u,v)$$

and

$$\mathbf{C}=(x)(Eu)(Ev)(y)(z)\,\mathbf{N}'(G_{111},G_{112},\ldots,G_{l44},H_1,H_2,H_3,H_4,L_1,L_2,L_2,x,y,z,u,v)$$

can be satisfied if **A** can. Obviously they are of the form (5) and (5′), respectively. To complete the proof of our theorem, we have still to show the converse: if **B** or **C** can be satisfied, the same holds for **A** too.

5. First we prove that the satisfiability of **C** implies the same property of **B.** Suppose that **C** is satisfied on a (non-empty) set J' by some predicates $\Psi_{111},\Psi_{112},\ldots,\Psi_{l44}$, $\mathsf{X}_1,\mathsf{X}_2\,\mathsf{X}_3,\mathsf{X}_4,\Lambda_1,\Lambda_2,\Lambda_3$ defined over J'. Then for suitable descriptive functions φ and ψ we have

(30) $\mathbf{N}'(\Psi_{111},\Psi_{112},\ldots,\Psi_{l44},\mathsf{X}_1,\mathsf{X}_2,\mathsf{X}_3,\mathsf{X}_4,\Lambda_1,\Lambda_2,\Lambda_3;x,y,z,\varphi(x),\psi(x))$

for arbitrary $x,y,z\in J'$.

From the last conjunction term of $\mathbf{N}'$ (see (29)) we conclude

$$\mathsf{X}_1(y,y)\rightarrow\prod_{\mu=1}^{3}(\mathsf{X}_\mu(z,y)\sim\mathsf{X}_\mu(z,\varphi(x))) \tag{31}$$

for arbitrary $x,y,z\in J$, while the conjunction term $H_1(u,u)H_2(u,u)H_3(u,u)$ of **N** (see (28)) gives

$$\mathsf{X}_1(\varphi(x),\varphi(x))\,\mathsf{X}_2(\varphi(x),\varphi(x))\,\mathsf{X}_3(\varphi(x),\varphi(x)) \tag{32}$$

for arbitrary $x\in J'$. Let α be a fixed element of J' and let $\varphi=\varphi(\alpha)$. By (32), with $x=\alpha$, we obtain

$$\mathsf{X}_1(\varphi,\varphi)\mathsf{X}_2(\varphi,\varphi)\mathsf{X}_3(\varphi,\varphi), \tag{33}$$

and hence, by (31) with $y=\varphi$ we get

$$\mathsf{X}_\mu(z,\varphi)\sim\mathsf{X}_\mu(z,\varphi(x))$$

for $\mu=1,2,3$ and arbitrary $x,z\in J$. Therefore, in any true proposition we can replace $\varphi(x)$ by φ in the second argument of $\mathsf{X}_1,\mathsf{X}_2$ and X_3.

In particular, we can infer from (30) and (33)

(34) $\mathbf{N}(\Psi_{111},\Psi_{112},\ldots,\Psi_{l44},\mathsf{X}_1,\mathsf{X}_2,\mathsf{X}_3,\mathsf{X}_4,\Lambda_1,\Lambda_2,\Lambda_3;x,y,z,\varphi,\psi(\alpha))$

for arbitrary $x,y,z\in J'$; indeed, a glance at (28) shows that all occurrences of u in **N**, except in $H_1(u,u)\,H_2(u,u)\,H_3(u,u)$, are those as second arguments of H_1,H_2 or H_3. From (34) it follows

$$(Eu)(x)(Ev)(y)(z)\,\mathbf{N}(\Psi_{111},\,\Psi_{112},\ldots,\,\Psi_{l44},\mathsf{X}_1,\mathsf{X}_2,\mathsf{X}_3,\mathsf{X}_4,\Lambda_1,\Lambda_2,\Lambda_3;x,y,z,u,v),$$

the range of the quantifiers being J'; hence **B** can be satisfied.

6. Now we prove that the satisfiability of **B** implies that of **A.** Suppose that **B** can be satisfied; then (compare [10]) it is possible to define predicates $\Psi_{111}, \Psi_{112}, \ldots, \Psi_{l44}, X_1, X_2, X_3, X_4, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ over the set J of positive integers such that

$$\mathbf{N}(\Psi_{111}, \Psi_{112}, \ldots, \Psi_{l44}, X_1, X_2, X_3, X_4, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, x, y, z, 1, x+1)$$

holds for arbitrary positive integers x, y, z. Consequently, using again for $X_1(y, x+1)$ also the notation $\Lambda_4(x, y)$, we have (16)—(26) for any $x, y, z \in J$.

Next we prove

LEMMA 2. *We have*

(35) $$X_\mu(n, \chi_\mu(n))$$

for $\mu = 1, 2, 3, 4$ *and* $n = 1, 2, \ldots$

PROOF. For $\mu = 4$, (35) is the same as (17). For $\mu = 1, 2, 3$, we use induction. By (18) and (6), we have $X_1(1, \chi_1(1)), X_2(1, \chi_2(1))$ and $X_3(1, \chi_3(1))$. Suppose that $X_1(n, \chi_1(n))$, $X_2(n, \chi_2(n))$, $X_3(n, \chi_3(n))$ hold for some n. For $\chi_2(n) = \chi_3(n) = 1$, we have $X_2(n, 1)$ and $X_3(n, 1)$, hence, by (19) with $x = n$, $y = \chi_1(n)$, $z = \chi_1(n) + 1$ and (17) with $x = \chi_1(n)$, we infer $X_1(n+1, 1)\,\&$ $\&\,X_2(n+1, 1)\,X_3(n+1, \chi_1(n)+1)$, i. e., on account of (7), (10) and (12), $X_1(n+1, \chi_1(n+1))\,X_2(n+1, \chi_2(n+1))\,X_3(n+1, \chi_3(n+1))$. For $\chi_2(n) \neq 1, \chi_3(n) = 1$, we have $X_3(n, 1)$, hence, by (21) with $x = n$, $y = \chi_2(n)$, $z = \chi_2(n) - 1$ and (17) with $x = \chi_2(n) - 1$, on the one hand $\overline{X}_2(n, 1)$, on the other hand $X_3(n+1, \chi_2(n) - 1)$, i. e. on account of (13), $X_3(n+1, \chi_3(n+1))$. Now $\overline{X}_2(n, 1)$ gives by (20) with $x = n$, $y = \chi_1(n)$, $z = \chi_1(n) + 1$ and (17) with $x = \chi_1(n)$, $X_1(n+1, \chi_1(n)+1)\,X_2(n+1, 1)$, i. e., owing to (8) and (10), $X_1(n+1, \chi_1(n+1))\,\&$ $\&\,X_2(n+1, \chi_2(n+1))$. Finally, for $\chi_3(n) \neq 1$, we obtain by (24), with $x = n, y = \chi_3(n)$, $z = \chi_3(n) - 1$ and (17), with $x = \chi_3(n) - 1$, on the one hand $\overline{X}_3(n, 1)$, on the other hand $X_3(n+1, \chi_3(n) - 1)$, i. e. on account of (14), $X_3(n+1, \chi_3(n+1))$. Now, $\overline{X}_3(n, 1)$ gives by (22), with $x = n, y = \chi_1(n)$, $X_1(n+1, \chi_1(n))$, i. e. in virtue of (9), $X_1(n+1, \chi_1(n+1))$ and by (23) with $x = n, y = \chi_2(n), z = \chi_2(n) + 1$ and (17), with $x = \chi_2(n)$, $X_2(n+1, \chi_2(n)+1)$, i. e. on account of (11), $X_2(n+1, \chi_2(n+1))$. Thus we infer $X_1(n+1, \chi_1(n+1))\,\&$ $\&\,X_2(n+1, \chi_2(n+1))\,X_3(n+1, \chi_3(n+1))$ in all cases and lemma 2 holds.

Now let x_1, x_2, x_3 be arbitrary positive integers and let $x = \omega(x_1, x_2, x_3)$, $x_4 = x + 1$. Then we have $x_\mu = \chi_\mu(x)$ for $\mu = 1, 2, 3, 4$ by lemma 1 and by the definition of χ_4; hence, by lemma 2,

(36) $$X_\mu(x, x_\mu) \quad \text{for} \quad \mu = 1, 2, 3, 4.$$

Let

$$p_{\mu\nu} = \omega(x_\mu, x_\nu, 1) \quad \text{for} \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4.$$

From (36) with $\mu = 1$, and $\mu = 2$, replacing x by $p_{\mu\nu}$, i. e., x_1, x_2, x_3 by x_μ, x_ν and 1 respectively, we infer

(37) $$X_1(p_{\mu\nu}, x_\mu), \quad X_2(p_{\mu\nu}, x_\nu).$$

Again, from (26) with $y = p_{\mu\nu}, z = x_\mu$, (36) and (37) we get

(38) $$\Lambda_\mu(x, p_{\mu\nu})$$

for $\nu = 1, 2, 3, 4$; $\mu = 1, 2, 3$, and remembering that $\Lambda_4(x, y)$ is an alternative notation for $\mathsf{X}_1(y, x+1)$, i. e. for $\mathsf{X}_1(y, x_4)$, by (37) for $\mu = 4$ too. Finally from (25) with $y = p_{\mu\nu}, z = x_\nu$, (38), (36) with ν instead of μ and (37) we deduce $\Psi_{\lambda\mu\nu}(x) \sim \Psi_{\lambda 12}(p_{\mu\nu})$, for $\lambda = 1, \ldots, l$; $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$; hence, defining the functions $\Phi_\lambda(x_\mu, x_\nu)$ equal to $\Psi_{\lambda 12}(p_{\mu\nu}) = \Psi_{\lambda 12}(\omega(x_\mu, x_\nu, 1))$, we have by (16) and by the definition of $\mathbf{M}^*$, $\mathbf{M}(\Phi_1, \ldots, \Phi_l; x_1, x_2, x_3, x_4)$. That is, we have

$$(x_1)(x_2)(x_3)(Ex_4)\ \mathbf{M}(\Phi_1, \ldots, \Phi_l;\ x_1, x_2, x_3, x_4)$$

with J as the range of the quantifiers, in other words, the predicates $\Phi_1, \ldots, \Phi_l$ satisfy **A** on J. Hence **B** and **C** are equivalent to **A** and therefore our theorem holds.

(Received 15 December 1951)

ВКЛАДЫ В ТЕОРИЮ ПРИВЕДЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ РАЗРЕШИМОСТИ

Пятая статья

Прэфикс Аккермана с тремя общими кванторами

Я. ШУРАНИ (Будапешт)

(Резюме)

Теорема, которая доказывается в настоящей работе, является обострением известной теоремы Аккермана, это обострение схоже с данным во втором сообщение в связи с другими редукционными теоремами.

Теорема. Любая формула логического исчисления с точки зрения удовлетворяемости эквивалентна замкнутой формуле прэнекской формы типа

(I) $$(Eu)(x)(Ev)(y)(z)\,\mathbf{N}$$

и типа

(II) $$(x)(Eu)(Ev)(y)(z)\,\mathbf{N}',$$

где **N** и **N'** содержат функции лишь одного переменного, за исключением не более 7-ми функций двух переменных.

Доказательство, как и оригинальное доказательство Аккермана, исходит из того, что если какая-либо формула удовлетворяется, то удовлетворяется и на множестве натуральных чисел, как области индивидуумов. При этом переменные, связанные экзистенциальным квантором, могут быть заменены такими произвольными арифметическими функциями, которые зависят от переменных общих кванторов, опережающий экзистенциальный квантор, каждое целое значение принимает лишь один из них и лишь один раз и значение их везде больше, чем наибольший из перемеиных, встречающихся в аргументе. Используя результат второго сообщпния можно предположить, что данная формула **A**, имеет вид $(x_1)(x_2)(x_3)(Ex_4)\,\mathbf{M}(F_1, \ldots, F_l, x_1, x_2, x_3, x_4)$, где в **M** встречются лишь функции $F_1, \ldots, F_l$, каждая из которых есть функция двух переменных. (Функции одного переменного могут быть заменены функциями двух переменных типа $F(x, x)$.) По указанной теореме, если она удовлетворяется, то удовлетворяется и на множестве натуральных чисел, в качестве x_4 можно взять значение $\omega(x_1, x_2, x_3)+1$, где $\omega(i, j, k)$ порядковый номер упорядоченной тройки (i, j, k) в исчислении $(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1), (1, 1, 3), \ldots$ Пусть $\chi_1(n), \chi_2(n), \chi_3(n)$ функции, однозначно определённые уравнением $\omega(\chi_1(n), \chi_2(n), \chi_3(n)) = n$ и $\chi_4(n) = n+1$. Введя функции $\psi_{\lambda\mu\nu}(x) = F_\lambda(\chi_\mu(x), \chi_\nu(x))$, если $x = \omega(x_1, x_2, x_3)$, и, обозначив выражение, получаемое из **M** при замещение функции $F_\lambda(x_\mu, x_\nu)$ функцией $\psi_{\lambda\mu\nu}(x)$ символом $\mathbf{M}^*(\psi_{111}, \psi_{121}, \ldots, \psi_{l44}, x)$, удовлетворяемость **A** означает то, что построенное из него значение $\mathbf{M}^*$ для любого значения x будет „правильным“.

Введём логические функции $X_\mu(x, y)$, соответствующие связи $y = \chi_\mu(x)$. Чтобы получить формулу, эквивалентную предыдущей, к $\mathbf{M}^*$ нужно приписать в качестве коньюнкционного члена формулу (17), выражаюшую роль $x+1$, выражения (18) — (24), формулизирующие рекурсивные определения фуикций $\chi_\mu(x)$, $(\mu = 1, 2, 3)$, и характеристику $\psi_{\lambda\mu\nu}$. Если при этом хотим пзбежать и введения большого числа функц й двух переменных и увеличения числа кванторов, то введём и функции $H_\mu(x, y)$, соответствующие связи $\chi_\mu(x) = \chi_1(y)$. Тогда формула (25) характеризует связь функций $\psi_{\lambda\mu\nu}$, (26) роль функций H_μ. Введя при помощи из конъюнкции переменные связанные экзистенциальным квантором, на место 1 и $x+1$ получим выражение **N**. Если к этому, в качестве конъюнкционного члена припишем еще выражение (27), формализирующее однозначность „1“ получим **N'**. Формулы (I) и (II), полученные при их помощи конечно удовлетворяются, если удоблетворяется **A**, но, наоборот, из удорлетворяемости (II), следует удовлетворяемость (I), а отсюда удовлетворяемость **A**.

Les Acta Mathematica paraissent en russe, français, anglais et allemand et publient des mémoires du domaine des sciences mathématiques.

Les Acta Mathematica sont publiés en cahiers qui seront réunis en volumes de 300 à 350 pages. Il paraît, en général, un volume par an.

Les manuscrits, autant que possible écrits à la machine, doivent être envoyés à l'adresse suivante:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'entreprise de commerce extérieur des livres et journaux „Kultúra" (Budapest, VIII., Rákóczi-út 5. Compte courant No. 45-790-057-50-032 ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

The Acta Mathematica publish papers on mathematics in Russian, French, English and German.

The Acta Mathematica appear in parts of various size, making up volumes of 300 to 350 pages. On the average, one volume is published annually.

Manuscripts should, if possible, be typewritten and addressed to:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

Correspondence with the editors or publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Mathematica is 110 forints a volume. Orders may be placed with „Kultúra" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest, VIII., Rákóczi-út 5. Account No. 45-790-057-50-032) or with representatives abroad.

Die Acta Mathematica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der mathematischen Wissenschaften in russischer, französicher, englischer und deutscher Sprache.

Die Acta Mathematica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band von 20 Bogen. Im allgemeinen erscheint jährlich ein Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind, möglichst mit Maschine geschrieben, an folgende Adresse zu senden:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Redaktion und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu senden.

Abonnementspreis pro Band 110 Forints. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen „Kultúra" (Budapest, VIII., Rákóczi-út 5. Bankkonto Nr. 45-790-057-50-032) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

58 forint

INDEX

Technikai szerkesztő: Fuchs László
Akadémiai Kiadó (Budapest V, Alkotmány-u. 21.) Felelős: Mestyán János

Csongrádmegyei Nyomdaipari Vállalat, Szeged 51387 Felelős vezető: Vincze György