ACTA MATHEMATICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

TOMUS XVIII FASCICULI 1–2

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1967

ACTA MATH. HUNG.

ACTA MATHEMATICA
ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK
MATEMATIKAI KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Mathematica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a matematika köréből.

Az Acta Mathematica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Mathematica előfizetési ára kötetenként belföldre 120 forint, külföldre 165 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó"-nál (Budapest, V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest, I., Fő utca 32. Bankszámla 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

Die Acta Mathematica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der mathematischen Wissenschaften in deutscher, englischer, französischer und russischer Sprache.

Die Acta Mathematica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Redaktion und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 165 Forints. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen „*Kultura*" (Budapest, I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandvertretungen und Kommissionären.

ACTA MATHEMATICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

TOMUS XVIII

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

1967

ACTA MATH. HUNG.

INDEX

TOMUS XVIII

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (1—2), 1967, pp. 1—3.

ON THE CARDINALITY OF STRONGLY ALMOST DISJOINT SYSTEMS

By

A. MÁTÉ (Szeged)

(*Presented by* L. KALMÁR)

Let E be an infinite set and denote by $\mathbf{P}(E)$ the set of all subsets of E. For countable E, a subset $\mathbf{S}$ of $\mathbf{P}(E)$ is said to be almost disjoint if the intersection of each two elements of $\mathbf{S}$ is finite. If moreover the following condition (i) holds, then we call $\mathbf{S}$ strongly almost disjoint:

(i) *There is no element X of $\mathbf{S}$ for which there exists a sequence $\{Y_\xi\}_{\xi<\omega}$ of type ω of elements of $\mathbf{S}$ such that $X\cap Y_\vartheta \subset X\cap Y_\lambda$ for every $\vartheta<\lambda<\omega$, where $\subset$ denotes proper inclusion.*

It is a well-known theorem of TARSKI [1] that there exists an almost disjoint subset of power $2^{\aleph_0}$ of $\mathbf{P}(E)$, where E is countably infinite. On the other hand, P. ERDŐS and M. MAKKAI conjectured that a strongly almost disjoint subset of $\mathbf{P}(E)$ for countable E is also countable. In this note we are going to prove this conjecture in a very much generalized form, but first we need another formulation of the problem.

NOTATIONS. $A\subset B$ denotes that A is a proper subset of B. For a set S we denote by $\overline{\overline{S}}$ the power of S. If $\mathbf{S}$ is a set of sets, then $\langle\mathbf{S}\rangle$ denotes the set $\bigcup\limits_{X\in\mathbf{S}} X$.

For a cardinal number m we denote by $2^{\underline{m}}$ the cardinality $\sum\limits_{r<m} 2^r$. If E is a set of power m, it is easy to see that the power of the set of all subsets of power smaller than m of E is $2^{\underline{m}}$. We denote by $\omega(m)$ the initial number of the cardinality m, by m^+ the cardinal number following m immediately. Other notations are the common notations of the set theory.

At first we consider the following:

DEFINITION 1. *Let F be an arbitrary infinite set and let $\mathbf{S}\subseteq\mathbf{P}(F)$. We say that $\mathbf{S}$ satisfies the ascending chain condition for the ordinal number τ, if there exists no sequence $\{X_\xi\}_{\xi<\tau}$ of type τ elements of $\mathbf{S}$ such that $X_\vartheta\subset X_\lambda$ holds for every $\vartheta<\lambda<\tau$. Let us denote by $\mathbf{Ac}(F,\tau)$ the set of all the sets $\mathbf{S}\subseteq\mathbf{P}(F)$ satisfying the ascending chain condition for τ.*

Now we prove:

LEMMA 2. *Let F be a set of power m, where m is an infinite regular cardinal number. Further let $\mathbf{S}\subseteq\mathbf{P}(E)$ such that*

(1) $\mathbf{S}\in\mathbf{Ac}(F,\omega(m))$,

(2) $\overline{\overline{X}}<m$ *for every* $X\in\mathbf{S}$.

Then there exists a subset K of power $<m$ of F such that

(3) $K \nsubseteq X$ *for every* $X \in \mathbf{S}$.

PROOF. Consider the partial ordering of $\mathbf{S}$ with respect to the relation of inclusion. By a theorem of HAUSDORFF [2], there is a maximal ordered subset $\mathbf{P}$ of $\mathbf{S}$. By another theorem of HAUSDORFF [2] $\mathbf{P}$ has a well-ordered subset $\mathbf{Q}$ which is confinal to $\mathbf{P}$. It is obvious that $\langle\mathbf{P}\rangle=\langle\mathbf{Q}\rangle$. It follows from (1) that $\overline{\overline{\mathbf{Q}}}<m$. Since m is regular and $\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{S}$, we obtain from (2) that $\overline{\overline{\langle\mathbf{Q}\rangle}}<m$. As $\langle\mathbf{P}\rangle=\langle\mathbf{Q}\rangle$, we have that $\overline{\overline{\langle\mathbf{P}\rangle}}<m$.

Since $\overline{\overline{F}}=m$, $F-\langle\mathbf{P}\rangle\neq 0$. Let x be an arbitrary element of $F-\langle\mathbf{P}\rangle$. Clearly the power of $\langle\mathbf{P}\rangle\cup\{x\}$ is $<m$. By the maximality of $\mathbf{P}$, there exists no set X in $\mathbf{S}$ for which $\langle\mathbf{P}\rangle\cup\{x\}\subseteq X$ holds. Put $K=\langle\mathbf{P}\rangle\cup\{x\}$. The lemma is proved.

Our main result is the following:

THEOREM 3. *Let E be a set of power m, where m is an infinite regular cardinal number for which $2^{\underline{m}}=m$. Let n be an arbitrary cardinal number for which $0<n\leqq m^+$, moreover let $\mathbf{S}\subseteq\mathbf{P}(E)$ be a set with the following properties:*

(1) $\overline{\overline{\mathbf{S}}}>m$,

(2) *if* $\mathbf{T}$ *is a subset of power* n *of* $\mathbf{S}$, *then* $\overline{\overline{\bigcap_{X\in\mathbf{T}} X}}<m$.

Then

(3) *there exists an element X of $\mathbf{S}$ and a set $\{\mathbf{T}_\xi\}_{\xi<\omega(m)}$ such that $X\in\mathbf{T}_\xi\subseteq\mathbf{S}$, $\mathbf{T}_\xi$ is of power n, moreover*

$$\bigcap_{Y\in\mathbf{T}_\vartheta} Y\subset\bigcap_{Y\in\mathbf{T}_\lambda} Y \quad \textit{for every} \quad \vartheta<\lambda<\omega(m).$$

PROOF. We may suppose that every element of $\mathbf{S}$ is of power m, i. e.

(4) $\overline{\overline{X}}=m$ for every $X\in\mathbf{S}$.

Indeed, the elements of power $<m$ of $\mathbf{S}$ can be omitted, since the set of these elements of $\mathbf{S}$ is of power $\leqq 2^{\underline{m}}=m$.

Now we consider for any element X of $\mathbf{S}$ the set

$$\mathbf{A}_X=\{\bigcap_{Y\in\mathbf{T}} Y : X\in\mathbf{T}\subseteq\mathbf{S}, \overline{\overline{\mathbf{T}}}=n\}$$

and suppose that condition (3) does not hold, i. e. $\mathbf{A}_X\in\mathbf{Ac}(X,\omega(m))$ for every $X\in\mathbf{S}$. Then by Lemma 2 there exists a subset K_X of power $<m$ of X such that

(5) $K_X\nsubseteq H$, if $H\in\mathbf{A}_X$.

Let

(6) $\mathbf{Q}_X=\{Y\in\mathbf{S}: K_X\subseteq Y\}$.

It follows from the definition of $\mathbf{Q}_X$ that

(7) $X\in\mathbf{Q}_X$ for every $X\in\mathbf{S}$.

On the other hand, it is easy to see that among the $\mathbf{Q}_X$'s there are at most as many different ones as there are among the K_X's, where X runs over the elements of $\mathbf{S}$. But because of the conditions $\overline{\overline{K}}_X < m$ and $K_X \subset E$ the number of the different K_X's is $\leqq 2^{\underset{\smile}{m}} = m$, i. e.:

(8) Among the $\mathbf{Q}_X$' s there are at most m different sets.

It is easy to see that

(9) $\overline{\overline{\mathbf{Q}}}_X < n$ for every $X \in \mathbf{S}$.

Suppose, on the contrary, that $\overline{\overline{\mathbf{Q}}}_X \geqq n$ for some $X \in \mathbf{S}$ and let $\mathbf{T}$ be an arbitrary subset of power n of $\mathbf{Q}_X$ for which $X \in \mathbf{T}$ (such a set $\mathbf{T}$ clearly exists because of the assertion (7)). Then it follows from (5) that $K_X \subsetneqq \bigcap_{Y \in \mathbf{T}} Y$ which contradicts (6). This contradiction proves (9).

Since $n \leqq m^+$, it follows from (9) that

(10) $\overline{\overline{\mathbf{Q}}}_X \leqq m$ for every $X \in \mathbf{S}$.

On the other hand it follows from (7), that

(11) $\bigcup_{X \in \mathbf{S}} \mathbf{Q}_X = \mathbf{S},$

since by (6) $\mathbf{Q}_X \subseteqq \mathbf{S}$.

It follows from (8), (10) and (11) that the power of $\mathbf{S}$ is $\leqq m \cdot m = m$ which contradicts the condition (1). This contradiction proves Theorem 3.

We remark only the following consequence of Theorem 3. Let $m = \aleph_0$ and $n = 2$. Then Theorem 3 yields the justification of the conjecture of P. Erdős and M. Makkai mentioned above.

Corollary 4.[1] *Let E be a countably infinite set and let* $\mathbf{S}$ *be a strongly almost disjoint subset of* $\mathbf{P}(E)$. *Then* $\mathbf{S}$ *is countable.*

(Received 29 April 1965)

References

[1] A. Tarski, Sur le décomposition des ensembles en sous-ensembles presque disjoints, *Fund. Math.*, **12** (1928), pp. 186—304 and **14** (1929), pp. 205—215.

[2] F. Hausdorff, Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen, *Math. Annalen,* **65** (1908), pp. 435—505.

[1] G. Fodor, A. Hajnal and the author proved this corollary independently of one another.

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (1—2), 1967, pp. 5—17.

MINKOWSKIAN DISTRIBUTIONS OF CONGRUENT DISCS

By

M. N. BLEICHER and J. M. OSBORN (Madison, Wisconsin, USA)

(*Presented by* L. FEJES TÓTH)

§ 1. Introduction

In this paper a disc will denote a centrally symmetric convex body with interior in a finite dimensional Euclidean space. By a Minkowskian Distribution is meant a collection of discs such that no one contains the center of any other in its interior. This notion was introduced by L. FEJES TÓTH in a series of lectures at the University of Wisconsin in the spring of 1964. It is closely related to the notion of packing, especially as defined by H. ZASSENHAUS and his students [6, 7].

In [3] FEJES TÓTH showed that there exist (uniform) Minkowskian distributions of incongruent discs having arbitrarily high density, but that distributions of homothetic discs in the plane have density not exceeding 4. He then raised the following question. Is there a uniform upper bound for the densities of all Minkowskian distributions of congruent discs? (See also [4].)

As a partial answer to this question FEJES TÓTH proved that if a distribution of congruent discs has high density, then its structure must be very complex. More precisely, he showed that if a Minkowskian distribution has density greater than $4m$ then (i) the discs must occur in more than m distinct orientations; (ii) their centers can not be written as the union of m or fewer lattices; and (iii) the ratio of the area of the body to the area of its in-circle is greater than m. Corresponding results hold in k-dimensional Euclidean space with the 4 replaced by 2^k, $k \geqq 2$.

In this paper we show (§3) that there does not exist an upper bound for the densities of Minkowskian distributions of congruent discs. More specifically, we prove that for each positive integer m there exists a distribution of congruent rectangles with at most m distinct orientations having density greater than $m+3-\log_2 m$. This indicates that the bound (i) above of FEJES TÓTH is good. Generalizing this bound to k-dimensional space (§4), we show that it is best possible when the number of orientations m is no greater than k.

In §5 we construct a class of Minkowskian distributions of congruent rectangles having uniform density 6. Each distribution of this class has the property that the set of all centers of rectangles in the distribution is the union of two lattices of points in the plane, so that the bound (ii) for $m=2$ could not be too high by more than 2. We do not know if it is possible to have a uniform distribution of congruent discs with density greater than 6.

§ 2. Number theoretic preliminaries

In this section we derive a number theoretic result which is necessary for our construction in §3. We begin with

LEMMA 1. *Let $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ be real numbers which are linearly independent over the rationals, let $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ be arbitrary real numbers, and let δ be a positive real number. Then there exists a real number M such that, given any closed interval of length M, there is a real number x in the interval and integers $k_1, k_2, \ldots, k_n$ satisfying the system of inequalities*

$$|\alpha_i x - k_i - \beta_i| < \delta \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

PROOF. By Kronecker's Theorem on simultaneous approximation [5, Theorem 444], given the hypotheses of Lemma 1, there exists some positive number x_0 and integers k_{0i} satisfying (1).

Let $a_j = (a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn})$ for $j=1, 2, \ldots, 2^n$ be an enumeration of the 2^n vectors obtained by taking all possible distinct n-tuples with coordinates ± 1. For each $j=1, 2, \ldots, 2^n$, Kronecker's Theorem asserts the existence of a positive real number x_j and integers k_{ji}, $i=1, 2, \ldots, n$, satisfying the system of inequalities

$$\left| \alpha_i x_j - k_{ji} - a_{ji} \frac{\delta}{2} \right| < \frac{\delta}{2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

We set $M = \max \{x_j : j=1, 2, \ldots, 2^n\}$ and $m = \min \{x_j : j=1, 2, \ldots, 2^n\}$. In order to establish that the conclusion of Lemma 1 holds for this choice of M, it is sufficient to show that, given any real number x_0 which satisfies (1) for some choice of the k_i's, there exists at least one real number in each of the intervals $[x_0+m, x_0+M]$ and $[x_0-M, x_0-m]$ satisfying (1) for appropriately chosen k_i's.

Let s denote the sign function defined on real numbers y by

$$s(y) = \begin{cases} +1 & y \geqq 0 \\ -1 & y < 0. \end{cases}$$

Given the solution x_0 of (1), we pick j such that $a_{ji} = -s(\alpha_i x_0 - k_{0i} - \beta_i)$. It then follows from (2) that $s(\alpha_i x_0 - k_{0i} - \beta_i) = -s(\alpha_i x_j - k_{ji})$ for each $i=1, 2, \ldots, n$. Together with $|\alpha_i x_j - k_{ji}| < \delta$ which also follows from (2) and with $|\alpha_i x_0 - k_{0i} - \beta_i| < \delta$, this implies that

$$|\alpha_i(x_0 + x_j) - (k_{0i} + k_{ji}) - \beta_i| < \delta \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Thus $x_0 + x_j$ is the desired solution of (1) in the interval $[x_0+m, x_0+M]$. By taking the vector $a_l = -a_j$ and applying a similar argument, we obtain the solution $x_0 - x_l$ in the interval $[x_0-M, x_0-m]$. The lemma follows.

THEOREM 1. *Let $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ be real numbers which are linearly independent over the rationals, and let ε be a positive real number. Then there exists a number N such that, given any real numbers $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ and any closed interval of length N, there is a number x in the interval and integers $k_1, k_2, \ldots, k_n$ such that*

$$|\alpha_i x - k_i - \beta_i| < \varepsilon \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

PROOF. Since there are no restrictions on the integers $k_1, k_2, \ldots, k_n$, we may suppose that $0 \leqq \beta_i \leqq 1$ for $i=1, 2, \ldots, n$. Let q be a positive integer such that $1/q < \varepsilon$. Let $P_1, P_2, \ldots, P_r$, where $r=(q+1)^n$, enumerate all integral lattice points $P_j = (p_{j1}, p_{j2}, \ldots, p_{jn})$ with $0 \leqq p_{ji} \leqq q$. For each j, $j=1, 2, \ldots, r$ we apply Lemma 1 with β_i replaced by p_{ji}/q and δ replaced by $1/2q$, and obtain a number M_j such that in every interval of length M_j there is a real number x_j in that interval satisfying

$$|\alpha_i x_j - k_{ji} - p_{ji}/q| < 1/2q \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

for suitably chosen k_{ji}. We set $N = \max\{M_j : j=1, 2, \ldots, r\}$. Let $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ and an interval of length N be given. There is a choice of j such that $|\beta_i - p_{ji}/q| < 1/2q$, $i=1, 2, \ldots, n$. Since $N \geqq M_j$ there is an x_j in the given interval and integers k_{ji} satisfying (3). We thus obtain

$$|\alpha_i x_j - k_{ji} - \beta_i| \leqq |\alpha_i x_j - k_{ji} - p_{ji}/q| + |p_{ji}/q - \beta_i| < 1/2q + 1/2q < \varepsilon.$$

The theorem is proved.

In the next section we use Theorem 1 in the following equivalent form:

THEOREM 1'. *If $\gamma_1^{-1}, \gamma_2^{-1}, \ldots, \gamma_n^{-1}$ are real numbers which are linearly independent over the rationals and $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ are positive real numbers, then there is a number N such that for every choice of numbers $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ and every interval of length N there is a real number x in the interval which satisfies*

$$|x - k_i\gamma_i - \lambda_i| < \varepsilon_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

for suitably chosen integers k_i.

PROOF. Apply Theorem 1 with $\alpha_i = 1/|\gamma_i|$, $\beta_i = \lambda_i/|\gamma_i|$ and $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i/|\gamma_i| : i=1, 2, \ldots, n\}$; then multiply the i^{th} inequality by $|\gamma_i|$.

§ 3. Distributions in the plane with arbitrarily high density

We recall the definition of the density of a collection of measurable sets $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ in the plane: If D_r is the disk of radius r centered at a fixed point P in the plane, and if $A(r) = \sum_{i=1}^{\infty} |D_r \cap K_i|$ where $|D_r \cap K_i|$ denotes the measure of $D_r \cap K_i$, then the density of the distribution $\{K_i\}$ is defined to be $\liminf_{r\to\infty} A(r)/\pi r^2$. It is easy to see that the density does not depend on the choice of the point P. In all of the cases discussed in this paper the „lim inf" in this definition is just the limit, and the sets D_r can be replaced by any other set of similar convex sets with the same center, if πr^2 is replaced by $|D_r|$.

We are now ready to give the construction which yields our results on the existence of distributions of high density. All work in this section will be in the plane. We begin with

LEMMA 2. *Let a positive integer n and positive real numbers $\varepsilon < 1$ and α be given, and let θ_n be an acute angle. For each integer k construct the rectangle of length 2 and width 2ε with center at the point $(2^{n+1}k\varepsilon, \alpha)$ and oriented in such a fashion that its sides of length 2 have slope* $\tan\theta_n$. *Then:*

1. *If* $\sin \theta_n = 2^{-n}$, *these rectangles are tangent by their sides of length* 2.
2. *The vertical cross-section through the center of each rectangle is* $2\varepsilon \sec \theta_n$.
3. *If* $\alpha > \sin \theta_n + \varepsilon$, *then they lie entirely in the upper half plane.*
4. *If this construction is repeated with* α *replaced by* $\alpha + m2^{1-n}$ *for every integer* m, *then the resulting distribution has density* 1.

PROOF. Let $P = (0, \alpha)$ and $Q = (2^{n+1}\varepsilon, \alpha)$ and let R be the foot of the perpendicular from P to the line of slope $\tan \theta_n$ through Q (Figure 1). Denoting the distance from

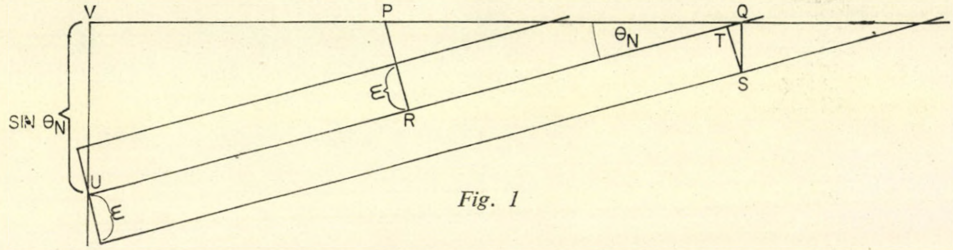


Fig. 1

P to R by PR, and assuming that $\sin \theta_n = 2^{-n}$, we have $PR = PQ \sin \theta_n = 2^{n+1}\varepsilon \cdot 2^{-n} = 2\varepsilon$. Thus the rectangles constructed as in the hypothesis of the lemma with centers at P and Q each have a side on the line of slope $\tan \theta_n$ through the midpoint of the segment PR when $\sin \theta_n = 2^{-n}$, proving the first assertion of the lemma.

Let S be the intersection of the vertical line through Q with one of the longer sides of the rectangle centered at Q, and let T be the foot of the perpendicular from S to the line QR.

Then $\sphericalangle QST = \theta_n$ and the segment ST has length ε, so that the segment QS has length $\varepsilon \sec \theta_n$. This establishes the second assertion.

Suppose now that U is that point on the line QR which is on the same side of Q as R, and which is at a distance 1 from Q. If the perpendicular from U to the line PQ intersects PQ at the point V then the distance $UV = UQ \sin \theta_n = \sin \theta_n$, so that the y-coordinate of U is $\alpha - \sin \theta_n$. But U is the midpoint of one of the shorter sides of the rectangle with center at Q and hence is at a distance ε from the lowest corner of this rectangle. Thus the rectangle will be entirely in the upper half plane if the y-coordinate of U is at least ε, giving $\alpha - \sin \theta_n > \varepsilon$ or $\alpha > \sin \theta_n + \varepsilon$.

To prove the last assertion of Lemma 2 it is sufficient to consider the case with the added hypothesis that $\sin \theta_n = 2^{-n}$, in which case the rectangles are tangent by the first part of the lemma. But then the triangular parts of the rectangles we have constructed which lie below the line $y = \alpha - \cos \theta_n = \alpha - 2^{-n}$ are congruent to the triangular areas between the lines $y = \alpha - 2^{-n}$ and $y = \alpha$ which are not covered by our row of rectangles. Thus this row of rectangles makes the same contribution to the density of the distribution described in the last assertion of the lemma as would be made by a solid strip between the lines $y = \alpha - 2^{-n}$ and $y = \alpha + 2^{-n}$. The validity of the assertion is now clear.

THEOREM 2. *For each pair of positive integers* m *and* t *with* $m \geqq t$, *there exist planar Minkowskian distributions of rectangles oriented in* m *different directions and with densities arbitrarily close to*

$$\Delta(m, t) = m + 6 - t + \frac{t - m - 10}{2^t + 1}. \tag{5}$$

PROOF. Let η and ε be fixed positive real numbers less than 1, and let m and t be fixed positive integers with $m \geqq t$. Near the end of the proof we pick η and ε sufficiently small, the choice of ε being dependent upon the choice of η which is chosen first. Since the conclusion of the theorem is obvious for $m=t=1$, we may suppose that $m \geqq 2$. For each integer n such that $0<n \leqq m$, we define the angle $\theta_n = \arcsin 2^{-n}$ as in Lemma 2, and we define $\bar{\theta}_n$ as that acute angle satisfying the relation $\sin \bar{\theta}_n = 2^{-n}(1+\eta)$. We now select any $m-1$ angles $\theta_1', \theta_2', \ldots, \theta_{m-1}'$ with the properties that $\theta_n \leqq \theta_n' < \bar{\theta}_n$ for $n=1, 2, \ldots, m$ and that $(\tan \theta_1')^{-1}, (\tan \theta_2')^{-1}, \ldots, (\tan \theta_m')^{-1}$ are linearly independent over the rationals.

REMARK. If the real numbers $(\tan \theta_n)^{-1} = \sqrt{4^n - 1}$ for $n=1, 2, \ldots$ are linearly independent over the rationals as we strongly suspect, we could simply choose $\theta_n' = \theta_n$ (and the need for introducing η would evaporate). Otherwise, we can, for example, choose θ_n' as any angle between θ_n and $\bar{\theta}_n$ whose tangent is a rational multiple of π^{-n}.

The idea of the construction is to superimpose m distributions of rectangles. The nth layer is a distribution of rectangles of slope θ_n' of the type given by Lemma 2 except that we space the rectangles farther apart horizontally. The gaps get smaller as n gets larger and in fact are subperiods of preceeding gap. Below we define constants q_n which regulate this horizontal spacing. We also define constants γ_n and ε_n which are related to the vertical spacing of the intersections of the rectangles and the y axis.

For $0<n<m$ we now define q_n, γ_n, and ε_n by

$$q_n = \max\{1, 2^{n-t+1}\}, \quad \gamma_n = q_n(2^t+1)\tan\theta_n', \quad \varepsilon_n = \frac{1}{2}\gamma_n - \sec\theta_n'.$$

By our choice of the θ_n''s it follows that the reciprocals of the γ_n's are linearly independent over the rationals. Further, ε_n is positive, since

$$\varepsilon_n \geqq \tfrac{1}{2} 2^{n-t+1}(2^t+1)\tan\theta_n' - \sec\theta_n' > 2^n \tan\theta_n' - \sec\theta_n' = \sec\theta_n'(2^n \sin\theta_n' - 1) \geqq 0.$$

For each n we apply Theorem 1′ with γ_i and ε_i, $i=1, 2, \ldots, n$, defined as above, and obtain a number M_n such that in any interval of length M_n there is a solution to the simultaneous inequalities (4). Setting $L_n = \sum_{i=1}^{n-1} 2^i M_i$, we see that $L_1 = 0$ and that $L_{n+1} = L_n + 2^n M_n$. If ε is any positive real number and if we replace γ_i and ε_i by $\varepsilon\gamma_i$ and $\varepsilon\varepsilon_i$ respectively, then the new values obtained for M_n and L_n are simply εM_n and εL_n.

Next, set $\delta = \eta + \varepsilon(L_{m-1} + 2^{m-1})$. It should be noted that L_{m-1} depends on the value of η but does not depend on ε, so that the dependence of δ on ε is quite explicitly given in the definition of δ. We shall construct a Minkowskian distribution of rectangles of length 2 and width 2ε having density $\Delta(m, t)(1+\delta)^{-1}$.

We begin by placing rectangles of the desired size with longer sides parallel to the y-axis and with centers at all points of the form $(k\varepsilon, l(1+\delta))$, where l ranges over all integers and where k ranges over those integers not divisible by 2^t+1. Next, we add rectangles of the desired size oriented so that their longer sides have slope $\tan\theta_1'$ and centered at all points of the form $\big(k(2^t+1)\varepsilon, \tfrac{1}{2}(1+\delta)(2l+1)\big)$

where k and l range over all integers. Since $\sin \theta_1' + \varepsilon < \frac{1}{2}(1+\eta)+\varepsilon < \frac{1}{2}(1+\delta)$, it follows from Lemma 2 that none of the rectangles of slope $\tan \theta_1'$ meet any of the lines $y = l(1+\delta)$, and hence none of them contains the center of any of the vertical rectangles.

To compute the density of that portion of the distribution so far constructed, we observe that if the rectangles that we oriented with slope $\tan \theta_1'$ had been oriented vertically instead, and if we had made the distance between centers of rectangles on the same vertical line to be 1 instead of $1+\delta$, then we would have had a covering of the plane of uniform density 4. The distribution thus far constructed has density $4(1+\delta)^{-1}$.

The construction now proceeds by induction. We make the inductive hypothesis that for some integer n satisfying $1 < n < m$ we have constructed a Minkowskian distribution of rectangles of length 2 and width 2ε oriented in n different directions and satisfying the following properties (see Figure 2):

1. The set of centers of the vertically oriented rectangles in the distribution is exactly the set of points of the form $\big(k\varepsilon, l(1+\delta)\big)$ where l ranges over all integers and where k ranges over those integers not divisible by 2^t+1.

2. The set $\{\alpha_j\}$ of all y-coordinates of centers of rectangles in the distribution may be indexed by the integers so as to satisfy $\alpha_{j+1} - \alpha_j > 2^{1-n}(1+\delta-\varepsilon L_{n-1}) > 0$.

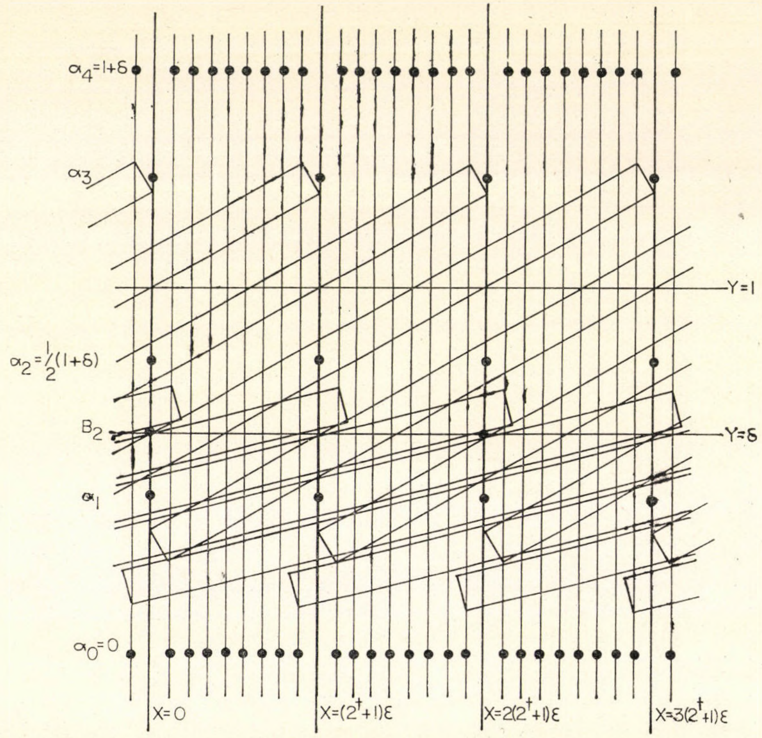


Fig. 2
The case when $t=3$ and $n=3$

3. In any interval $[k(1+\delta), (k+1)(1+\delta)]$ of the real line, there are precisely $2^{n-1}+1$ elements of the set $\{\alpha_j\}$.

4. For each integer j, either α_j is an integral multiple of $1+\delta$ and every rectangle with center on the line $y=\alpha_j$ is vertically oriented, or else there is a positive integer $i<n$ such that every rectangle with its center on $y=\alpha_j$ has slope $\tan\theta_i'$ and such that the x-coordinates of this set of centers are exactly the numbers of the form $x=kq_i(2^t+1)\varepsilon$ where k ranges over all integers.

5. For each integer i, $0<i<n$, all the rectangles of slope $\tan\theta_i'$ which meet a given horizontal strip of the form $\alpha_j<y<\alpha_{j+1}$ have their centers on the same line.

6. The density Δ_n of the distribution is given by

$$\Delta_n=\left\{4+\sum_{i=2}^{n-1}2^{i+1}[q_i(2^t+1)]^{-1}\right\}(1+\delta)^{-1}.$$

We have already constructed a distribution satisfying these properties for $n=2$. We now show that if a distribution is given which satisfies these properties for some n, $1<n<m$, then we may add another orientation class of rectangles to it to obtain a distribution satisfying these properties with n replaced by $n+1$. We begin by proving that there exist points appropriately placed to serve as the centers of the new class of rectangles that we wish to add, but which are not interior to any rectangle previously constructed.

Let j be any fixed integer. By Property 5, all the rectangles of slope $\tan\theta_i'$ which meet the y-axis in the interval $a_{j-1}<y<a_j$ have their centers on the same line, say $y=\mu_i$. If the two longer sides of any rectangle with center on $y=\mu_i$ are extended until they intersect the y-axis, then they will cut off a segment on the y-axis of length $2\varepsilon\sec\theta_i'$ by Lemma 2. A sufficient condition that a point of the y-axis not be contained in any of the rectangles with centers on $y=\mu_i$ is that it not be contained in any of the segments just defined. Since the distance between two adjacent centers on $y=\mu_i$ is exactly $q_i(2^t+1)\varepsilon$ by Property 4, the distance between the centers of the corresponding segments on the y-axis will be $q_i(2^t+1)\varepsilon\cdot\tan\theta_i'=\varepsilon\gamma_i$. Thus, the condition that the point $(0, y)$ not be in any of these segments is that

$$|y-(\mu_i+\tfrac{1}{2}\varepsilon\gamma_i)-k_i\varepsilon\gamma_i|<\varepsilon\varepsilon_i \tag{6}$$

for some integer k_i.

By Theorem 1′ and by our choice of M_n, we can find a value of y simultaneously satisfying all of the inequalities (6) for $i=1,\dots,n-1$ in any interval of length εM_{n-1}. Let $y=\beta_j$ be such a solution in the interval of length εM_{n-1} centered at $\frac{1}{2}(\alpha_j+\alpha_{j-1})$. Property 2 and the definition of L_n yield

$$\beta_j-\alpha_{j-1}\geqq\frac{1}{2}(\alpha_j+\alpha_{j-1})-\frac{\varepsilon}{2}M_{n-1}-\alpha_{j-1}= \tag{7}$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha_j-\alpha_{j-1})-\frac{\varepsilon}{2}M_{n-1}>2^{-n}(1+\delta-\varepsilon L_{n-1})-\frac{\varepsilon}{2}M_{n-1}=$$

$$=2^{-n}(1+\delta-\varepsilon L_{n-1}-\varepsilon 2^{n-1}M_{n-1})=2^{-n}(1+\delta-\varepsilon L_n),$$

and similarly

$$\alpha_j - \beta_j > 2^{-n}(1+\delta-\varepsilon L_n). \tag{8}$$

Thus β_j is between α_{j-1} and α_j, and the point $(0, \beta_j)$ is contained in no rectangle of the distribution. Since q_i divides q_n for $i<n$, the set of y-coordinates of the points of intersection of the rectangles of slope $\tan\theta_i'$ with the line $x=kq_n(2^t+1)\varepsilon$ will not depend on which integer k is used. Hence, none of the points $(kq_n(2^t+1)\varepsilon, \beta_j)$ for $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ are contained in any rectangle of the distribution.

After constructing such a β_j for each integer j, we are now ready to add another orientation class of rectangles of length 2 and width 2ε to our distribution—this time oriented so that their longer sides have slope $\tan\theta_n'$. We construct such a rectangle with center at each of the points $(kq_n(2^t+1)\varepsilon, \beta_j)$ where k and j range independently over the integers. Since $2^{-n}(1+\delta-\varepsilon L_n) = 2^{-n}(1+\eta+\varepsilon L_{m-1}+\varepsilon 2^{m-1} - -\varepsilon L_n) \geqq 2^{-n}(1+\eta)+\varepsilon > \sin\theta_n'+\varepsilon$ for $n \leqq m-1$, we see from (7), (8), and Lemma 2 that these rectangles do not intersect any of the lines $y=\alpha_i$. Thus no new rectangle can contain the center of an old rectangle. We also see that no new rectangle can contain the center of another new rectangle, since the centers of these rectangles are farther apart than those of Lemma 1 and the slope is at least as big. It follows that our augmented distribution is a Minkowskian distribution.

To complete the inductive step of the proof, we must show that Properties 1—6 hold for the augmented distribution with n replaced by $n+1$. This time the set of all y-coordinates of centers of rectangles is the union of the sets $\{\alpha_i\}$ and $\{\beta_i\}$, and Property 2 follows immediately from (7) and (8). Since we have inserted exactly one β between each two consecutive α's, Property 3 is also clear. Properties 4 and 5 follow easily from our construction, while Property 1 is trivial. It remains to verify Property 6. By Property 3 the average spacing of the β_j's is $(1+\delta)2^{1-n}$, while on each line $y=\beta_j$ the horizontal spacing of the centers of the new rectangles is $q_n(2^t+1)\varepsilon$. Comparing this with the vertical spacing of 2^{1-n} and horizontal spacing of 2^{n+1} for the rectangles in Lemma 2 which have density 1, we see that the density of the newly added rectangles is $2^{n+1}[q_n(2^t+1)(1+\delta)]^{-1}$. Thus,

$$\Delta_{n+1} = \Delta_n + 2^{n+1}[q_n(2^t+1)(1+\delta)]^{-1} = \left\{4+\sum_{i=2}^{n} 2^{i+1}[q_i(2^t+1)]^{-1}\right\}(1+\delta)^{-1},$$

to finish the inductive step.

The induction may be continued until $n=m$, at which time the construction terminates. Thus the density of the completed Minkowskian distribution (still for fixed m, t, η, and ε) is just Δ_m. Recalling the definition of q_i, we obtain

$$\Delta_m = \left\{4+\sum_{i=2}^{t-1} 2^{i+1}(2^t+1)^{-1} + \sum_{i=t}^{m-1} 2^t(2^t+1)^{-1}\right\}(1+\delta)^{-1} =$$

$$= \{4+(2^{t+1}-2^3)(2^t+1)^{-1}+(m-t)2^t(2^t+1)^{-1}\}(1+\delta)^{-1} =$$

$$= \{6-10(2^t+1)^{-1}+m-t-(m-t)(2^t+1)^{-1}\}(1+\delta)^{-1} = \Delta(m,t)(1+\delta)^{-1}.$$

Suppose now that for fixed m, t, and η we consider the effect of allowing ε to vary. Since $\delta\to\eta$ as $\varepsilon\to 0$, we may get Minkowskian distributions with densities arbitrarily close to $\Delta(m, t)(1+\eta)^{-1}$ by choosing ε sufficiently small. But η was an arbitrary real number selected at the beginning of the proof. By choosing η sufficiently close to zero and then choosing an appropriate ε, we can clearly obtain a Minkowskian distribution with density as close to $\Delta(m, t)$ as we please. The theorem is established.

COROLLARY. For each positive integer m, there is a Minkowskian distribution of congruent rectangles having precisely m distinct orientations and having density at least $m+3-\log_2 m$.

PROOF. If $m=1$, then $m+3-\log_2 m=4$, and the desired result is known to be best possible. For $m=2$, it is possible, as we shall see in the next section, to get distributions having densities arbitrarily close to 8. By altering the orientations of some of the rectangles in these distributions, we can easily make $m=3$ or 4 without affecting the densities. But since $8>m+3>m+3-\log_2 m$ for $2\leqq m\leqq 4$, the corollary holds when $m\leqq 4$. If $m\geqq 5$, set $t=[\log_2 m]+1$, where $[x]$ denotes the greatest integer in x. We note that $m\geqq t>0$. Since Theorem 2 guarantees the existence of distributions with densities arbitrarily close to $\Delta(m, t)$, it is sufficient to show that $\Delta(m, t)>m+3-\log_2 m$ for the above choice of t. But since $m+[\log_2 m]\geqq 7$ or $[\log_2 m]-8\geqq -(m+1)$ for $m\geqq 5$, we have

$$\Delta(m, t) > m+5-[\log_2 m]+\frac{[\log_2 m]-m-9}{m+1} =$$

$$= m+4-[\log_2 m]+\frac{[\log_2 m]-8}{m+1} \geqq m+3-\log_2 m,$$

as desired.

§ 4. Best possible densities

In the construction given in the last section, it was necessary to sacrifice some density for the first few non-vertical orientation classes of rectangles in order to be sure of being able to fit in later orientation classes. For example, the upper bound of the densities obtained there for distribution with two orientation classes of rectangles was 4, whereas it is already known that this density may already be attained with one orientation class of rectangles. The main result of this section shows that Minkowskian distributions of rectangles with two orientations in fact exist with densities arbitrarily close to 8, so that the upper bound (i) of FEJES TÓTH is best possible in this case. Our result actually deals with the more general question of the best possible bounds for similar discs with no more than k orientations in k-space.

Before establishing our result of this section, we state and prove the k-dimensional analogue of the FEJES TÓTH upper bound (i). The proof is, in all essentials, the same as his proof for the two-dimensional case, but is included for completeness.

THEOREM 3. *In k-dimensional Euclidean space, a Minkowskian distribution of similar discs with at most m distinct orientations can have density at most $m2^k$.*

PROOF. A distribution of the type under consideration can be decomposed into a union of m distributions each one of which is a distribution of homothetic discs. It thus suffices to show that a distribution of homothetic discs has density at most 2^k.

We note that if two homothetic discs are situated such that neither contains the center of the other in its interior, then upon shrinking each by a factor of $1/2$ about its center they become disjoint, except possibly for boundary points. Thus, given a distribution of homothetic discs we can shrink each disc by a factor $1/2$ about its center and obtain a packing, and hence a distribution of density at most 1. But in k-dimensional space shrinking a distribution as above decreases its density by a factor of 2^{-k}; thus the homothetic Minkowskian distribution had density at most 2^k. The theorem follows.

The next theorem shows the preceeding theorem to be best possible for $m \leqq k$.

THEOREM 4. *In k-dimensional Euclidean space, there are, for each $m \leqq k$, Minkowskian distributions of congruent discs in at most m distinct orientations with densities arbitrarily close to $m2^k$.*

PROOF. Let k and m be given with $m \leqq k$. For each positive integer $q > 1$ we shall construct a Minkowskian distribution of rectangular parallelepipeds with density $m2^k \left(\frac{q-1}{q}\right)^{k-1}$. The parallelepipeds which we use have for their bases $(k-1)$-dimensional cubes of side length $2/q$ and have height 2.

For each $i \leqq m$ we place the above parallelepipeds with longer side parallel to the x_i axis and centers at all the points of the form $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ where x_i is integral and where x_j has the form n_j/q for some integer n_j not divisible by q for $j \neq i$.

The density of this distribution is the same as its density in the unit cube, $0 \leqq x_j \leqq 1$, since the distribution is obtained by taking all integral translations of this cube. On a face of this cube which is perpendicular to the x_i axis, $i \leqq m$, there are precisely $(q-1)^{k-1}$ centers of parallelepipeds of the distribution. Since there are m such values of i, and two faces for each value of i, we see that there are $2m(q-1)^{k-1}$ parallelepipeds with centers on the unit cube. Of each of these parallelepipeds, half, having volume $(2/q)^{k-1}$, is contained in the unit cube. Thus the density is $\{2m(q-1)^{k-1}\} \cdot \{(2/q)^{k-1}\} = m2^k \left(\frac{q-1}{q}\right)^{k-1}$. By taking q sufficiently large we obtain densities arbitrarily close to $m2^k$.

§ 5. Uniform distribution

A distribution of sets $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ in the plane is called uniform if, except for a set of measure zero, every point of the plane is in the same number of sets K_i.

FEJES TÓTH has shown that a Minkowskian distribution with uniform density 4 may be constructed in several different ways (see [3] and [4]). Since the constructions given in the two previous sections of this paper yield distributions with non-uniform densities, the question arises of how large a uniform density a Minkowskian distribution may possess. In this section we improve FEJES TÓTH's result by constructing a class of distributions with uniform density 6. These examples also show that a distribution in which the set of centers is the union of two lattices can have uniform density 6.

If n is any fixed positive integer, we shall construct a Minkowskian distribution using rectangles of length $4n/\sqrt{3}$ and width 1. We begin by placing a rectangle of this size, oriented so that the slope of its longer sides is $1/\sqrt{3}$, at each of the points $(2k+1+ln, ln/\sqrt{3})$ for all integers k and l (see Figure 3). Since, for each choice

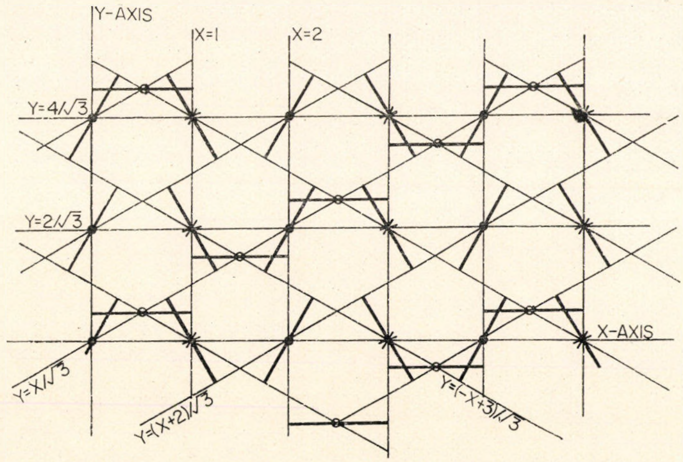


Fig. 3
The case $n=2$

of k and l, the rectangle centered at $(2k+1+ln, ln/\sqrt{3})$ has the midpoints of its two shorter sides located at the points $(2k+1+(l-1)n, (l-1)n/\sqrt{3})$ and $(2k+1+(l+1)n, (l+1)n/\sqrt{3})$, and since this rectangle is tangent to the rectangle centered at $(2k-1+ln, ln/\sqrt{3})$ by its longer side, we see that this set of rectangles forms a set of infinite strips which are tangent to each other along the lines $y=(x+2k)/\sqrt{3}$ where $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Thus, this set of rectangles covers the plane with uniform density 2, and the points of the plane not interior to any of these rectangles is exactly the set of points on the lines $y=(x+2k)/\sqrt{3}$.

Next, we place a rectangle oriented so that the slope of its longer sides is $-1/\sqrt{3}$ at each of the points $(2k+ln, ln/\sqrt{3})$ for all integers k and l. As before, we see that these rectangles cover the plane with uniform density 2, and that the points not interior to any of these rectangles is precisely the set of points on the lines $y=(-x+2k+1)/\sqrt{3}$. Combining these two sets of rectangles we have a distribution with uniform density 4 with the property that the set of all centers forms a lattice.

Our third orientation class of rectangles are to be oriented vertically and to have their centers at the points $(k+\frac{1}{2}, (k+\frac{1}{2}+2ln)/\sqrt{3})$ for all integers k and l. For each k and l, the point $(k+\frac{1}{2}, (k+\frac{1}{2}+2ln)/\sqrt{3})$ is on the lines $y=(x+2ln)/\sqrt{3}$ and $y=(-x+2k+1+2ln)/\sqrt{3}$, so that this point is not interior to any rectangle of either of the first two orientation classes. We also see that the midpoints of the two shorter sides of the rectangle centered at $(k+\frac{1}{2}, (k+\frac{1}{2}+2ln)/\sqrt{3})$ are at the points $(k+\frac{1}{2}, (k+\frac{1}{2}+2(l-1)n)/\sqrt{3})$ and $(k+\frac{1}{2}, (k+\frac{1}{2}+2(l+1)n/\sqrt{3})$, so that this orientation class of rectangles also gives a distribution with uniform density 2. This gives a total uniform density of 6 and completes the construction. Since the centers of the rectangles of the third orientation class form a lattice, the set of all centers is the union of two lattices.

The case $n=1$ has several special properties that seem worth noting. First of all, the three orientation classes are indistinguishible in this case — that is to say, rotation of the plane by 60° around the right point induces an isometry of the distribution (see Figure 4). Secondly, if each center is connected by a segment to those

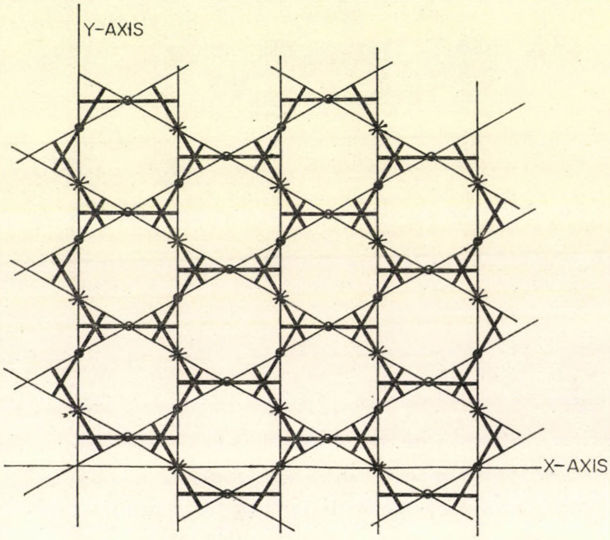


Fig. 4
The case $n=1$

other centers that are a minimal distance away from it, the result is the semi-regular tessellation of the plane using hexagons and triangles (denoted by $\begin{Bmatrix}3\\6\end{Bmatrix}$ in [1] and by (3, 6, 3, 6) in [2]). And thirdly, the lattices of centers of each of the three orientation classes of rectangles may be taken into each other by translation. When $n=2$ the lattice of centers of the vertical rectangles may be taken into either of the others by a rotation but not by a translation. For $n>3$ the lattice of centers of the vertical rectangles is not isometric to the other two lattices.

The distribution of rectangles of length $4n/\sqrt{3}$ and width 1 that we have constructed can be easily modified to give a distribution of uniform density 6 using parallelograms with base $4n/\sqrt{3}$, height 1, and any preassigned base angle $\theta \leqq 90^\circ$. Thinking of our distribution as made up of a set of infinite strips one unit wide, each of which is the union of a row of overlapping rectangles, we see that we may rotate the shorter edges of each parallelogram around their midpoints by an angle of $90^\circ - \theta$ and then extend the length of the edge so that it just touches both sides of the strip to which this parallelogram belongs. Since this change neither alters the uniformity of the density within each strip nor allows the center of any parallelogram of the strip to end up in the interior of any other parallelogram of the strip, the modified distribution will still be a Minkowskian distribution with uniform density 6.

(Received 11 October 1965)

Bibliography

[1] H. S. M. COXETER, *Regular Polytopes* (Macmillan, New York, 1948).
[2] L. FEJES TÓTH, *Regular Figures* (Pergamon, New York, 1964).
[3] L. FEJES TÓTH, Minkowskian Distribution of Discs, *Proc. AMS*, **16** (1965), pp. 999—1004.
[4] L. FEJES TÓTH, Ungelöste Probleme Nr 48, *Elem. der Math.*, **20** (1965).
[5] G. H. HARDY and E. M. WRIGHT, *An Introduction to the theory of Numbers* (Oxford University Press, London, 1938).
[6] M. R. VON WOLFF, A star domain with densest admissible point set not a lattice, *Acta. Math.* **108** (1962), pp. 53—60.
[7] H. ZASSENHAUS, Modern developments in the geometry of numbers, *BAMS*, **67** (1961), pp. 427—439.

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (1—2), 1967, pp. 19—23.

ON A CLASS OF SOLUTIONS OF ALGEBRAIC HOMOGENEOUS LINEAR EQUATIONS

By

Á. PETHŐ (Budapest)

(*Presented by* P. TURÁN)

On solving algebraic homogeneous linear equations by Cramer's rule, solutions can automatically be obtained in which the number of zero elements is maximal in a sense [2]—[3]. In the present communication, these so-called „simple" solutions are defined more simply, in a combinatorial manner, and their properties are formulated more generally. The necessity of introducing simple solutions emerged originally in connection with a chemical problem [2].

§ 1. Definition of simple solutions and several criteria for their existence

Let us consider the set of homogeneous linear equations

$$\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, m. \tag{1}$$

Introducing the column vectors $\mathbf{a}_j = [a_{1j}, \dots, a_{mj}]^*$ $(j = 1, 2, \dots, n)$, instead of (1)

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{a}_j = 0 \tag{2}$$

can be written. Defining the matrix $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]$ and the column vector $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^*$, (1) resp. (2) have the form:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = 0. \tag{3}$$

We will assume $\mathbf{A}$ to have no column and no row consisting of pure zero elements.

DEFINITION 1. In the set of the *solutions* $\mathbf{s} = [s_1, \dots, s_n]^*$ of (3)

(a) the trivial solution should be disregarded, and

(b) two solutions $\mathbf{s}$ and $\lambda\mathbf{s}$, $\lambda \neq 0$ being a real number, should be considered as a single solution.

So the number of the linearly independent solutions of (3) is $n - r$, where $r = \operatorname{rank} \mathbf{A}$.

DEFINITION 2. Let the *non-zero* elements of the solution $\mathbf{s} = [s_1, \dots, s_n]^*$ be $s_{j_1}, \dots, s_{j_q}$, where $C = \{j_1, \dots, j_q\}$ is a combination of the numbers $1, 2, \dots, n$ taken $q \leqq n$ at a time. Then $\mathbf{s}$ is said a *solution over C*.

REMARK. Consider now a solution $\mathbf{s}=[s_1, \dots, s_n]^*$ of the set of equations

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{a}_j = 0, \quad x_{j_{q+1}} = \dots = x_{j_n} = 0$$

where $\{j_{q+1}, \dots, j_n\}$ is the complementary set of C in Definition 2. Let it be agreed that in this case one says, for the sake of shortness, $\mathbf{s}$ to be a solution of the equation

$$\sum_{t=1}^{q} x_{j_t} \mathbf{a}_{j_t} = 0. \tag{4}$$

Consequently, if $\mathbf{s}$ is a solution over $C=\{j_1, \dots, j_q\}$, $\mathbf{s}$ is a solution of (4).

DEFINITION 3. Let $\mathbf{s}$ be a solution over $C=\{j_1, \dots, j_q\}$. $\mathbf{s}$ will be said *simple* if it is the *only* solution of (4). Under consideration of Definition 1, $\mathbf{s}$ is simple if and only if

$$\operatorname{rank}[\mathbf{a}_{j_1}, \dots, \mathbf{a}_{j_q}] = q-1. \tag{5}$$

THEOREM 1. *For the number of the non-zero elements in a simple solution the inequality holds:*

$$2 \leqq q \leqq r+1, \quad r = \operatorname{rank} \mathbf{A}. \tag{6}$$

PROOF. Since the trivial solution of (3) has been disregarded due to Definition 1, no solution with $q=0$ exists. Nor does a solution exist with $q=1$, $\mathbf{A}$ having no column with only zero elements. Thus, for every solution of (3), consequently for the simple ones as well, $2 \leqq q$ holds. — On the other hand, the inequality

$$\operatorname{rank}[\mathbf{a}_{j_1}, \dots, \mathbf{a}_{j_q}] \leqq r$$

is always true, hence, owing to (5):

$$q = \operatorname{rank}[\mathbf{a}_{j_1}, \dots, \mathbf{a}_{j_q}] + 1 \leqq r+1.$$

Q. e. d.

DEFINITION 4. Let $\mathbf{s}^1$ be a solution over C^1 and $\mathbf{s}^2$ be a solution over C^2. The solution $\mathbf{s}^1$ is said *better* than $\mathbf{s}^2$ if C^1 is a proper subset of C^2: $C^1 \subset C^2$.

DEFINITION 5. The solution $\mathbf{s}^1$ is said *just as good as* $\mathbf{s}^2$ if they are solutions over the same C.

THEOREM 2. *A solution is simple if and only if there does not exist any better one.*

PROOF. The condition is trivially necessary on the basis of Definition 3. To show that the condition is sufficient we will prove that, *if a solution is not simple, one can always find a better solution.* Let $\mathbf{s}$ be a not simple solution over $C=\{j_1, \dots, j_q\}$, then according to Definition 3

$$\operatorname{rank}[\mathbf{a}_{j_1}, \dots, \mathbf{a}_{j_q}] \leqq q-2.$$

Setting e. g. x_{j_q} in (4) equal to zero, the new equation

$$\sum_{t=1}^{q-1} x_{j_t} \mathbf{a}_{j_t} = 0 \tag{7}$$

becomes such that unchanged

$$\operatorname{rank}[\mathbf{a}_{j_1}, \ldots, \mathbf{a}_{j_{q-1}}] \leqq q-2.$$

Therefore, (7) will still have a solution $\mathbf{s}'$ over some C', such that $C' \subset C$: so $\mathbf{s}'$ is a better solution. Q. e. d.

COROLLARY. The number of the non-zero elements in a simple solution is at least 2 according to (6). Thus, a solution with 2 non-zero elements — if existing — is certainly simple because of the former theorem.

THEOREM 3. *A solution is simple if and only if there does not exist any other just as good one.*

PROOF. The condition is trivially necessary, on the basis of Definition 3. The sufficiency will be proved in the form that *if a solution is not simple, one can always find another just as good one*. Let $\mathbf{s}$ be a not simple solution over $C=\{j_1, \ldots, j_q\}$, then (4) has also another solution, say $\mathbf{s}'$. Let us now form the solution $\mathbf{s}+\varepsilon\mathbf{s}'$, where $\varepsilon>0$ is a real number. If ε is small enough, the non-zero elements of $\mathbf{s}$ vary hereby only a little, that is, do not become zero. Therefore, $\mathbf{s}+\varepsilon\mathbf{s}'$ will be a solution just as good as $\mathbf{s}$. Q. e. d.

THEOREM 4. *Let a combination $C=\{j_1, \ldots, j_q\}$ be given. A simple solution over C exists if and only if the solution of* (4), *say* $\mathbf{s}$, *is unique, moreover*

$$\prod_{t=1}^{q} s_{j_t} \neq 0. \tag{8}$$

This theorem is a trivial consequence of Definitions 2 and 3.

THEOREM 5. *The statement of the previous theorem holds if and only if*

$$\operatorname{rank}[\mathbf{a}_{j_1}, \ldots, \mathbf{a}_{j_q}] = q-1, \tag{9}$$

$$\operatorname{rank}[\mathbf{a}_{j_1}, \ldots, \mathbf{a}_{j_{t-1}}, \mathbf{a}_{j_{t+1}}, \ldots, \mathbf{a}_{j_q}] = q-1, \qquad t=1,2,\ldots,q. \tag{10}$$

A system of linearly dependent vectors should be called a *simplex* if, by omitting any of them, the remaining vectors become linearly independent. The statement of Theorem 4 holds consequently if and only if $\{\mathbf{a}_{j_1}, \ldots, \mathbf{a}_{j_q}\}$ forms a simplex.

PROOF. At first we show that, if $\{\mathbf{a}_{j_1}, \ldots, \mathbf{a}_{j_q}\}$ forms a simplex, the solution of (4) is unique and (8) is also fulfilled. The solution of (4) is unique, the number of the unknowns, q, being by one greater than $\operatorname{rank}[\mathbf{a}_{j_1}, \ldots, \mathbf{a}_{j_q}]=q-1$ (see (9)). Consider now the (unique) solution of (4): $\mathbf{s}=[s_1, \ldots, s_n]^*$. Were any s_{j_t} $(1 \leqq t \leqq q)$ zero here, (4) without the term corresponding to $\mathbf{a}_{j_t}$ would have no solution (see (10) and Definition 1), notwithstanding that $\mathbf{s}$ was the solution of (4). Thus (8) must be true.

Now we show that, if the solution of (4) is unique and (8) also holds, the vectors $\mathbf{a}_{j_1}, \ldots, \mathbf{a}_{j_q}$ form a simplex. Owing to the uniqueness (9) holds. Here, omitting any vector $\mathbf{a}_{j_t}$ $(1 \leqq t \leqq q)$, the remaining ones become linearly independent; otherwise x_{j_t} would namely be uniquely zero in (4),[1] which contradicts (8). Thus (10) holds, too.

[1] Cf. Appendix.

§ 2. Construction of the simple solutions

In the foregoing it has not yet been mentioned how the simple solutions of (3) can be found. A few theorems with respect to this question will now be proved.

DEFINITION 6. A solution $\mathbf{s}$ of (3) is called a *base solution* if it is a solution of an equation of the form

$$x_{j_1}\mathbf{a}_{j_1}+\ldots+x_{j_r}\mathbf{a}_{j_r}+x_{j_k}\mathbf{a}_{j_k}=0, \tag{11}$$

where $\{\mathbf{a}_{j_1},\ldots,\mathbf{a}_{j_r}\}$ is a basis (i. e. $\operatorname{rank}[\mathbf{a}_{j_1},\ldots,\mathbf{a}_{j_r}]=r$) and $k=r+1,\ldots,n$.

THEOREM 6. (11) *determines one and only one solution* $\mathbf{s}$, *for which also* $s_{j_k}\neq 0$.

PROOF. Let us solve (11). The number of its unknowns being equal to $r+1$ and the rank of its matrix $[\mathbf{a}_{j_1},\ldots,\mathbf{a}_{j_r},\mathbf{a}_{j_k}]$ equal to r, its solution is unique, say $\mathbf{s}$ (by virtue of Definition 1). Here, moreover, $s_{j_k}\neq 0$, otherwise $s_{j_1}=\ldots=s_{j_r}=0$ would have to hold because $\{\mathbf{a}_{j_1},\ldots,\mathbf{a}_{j_r}\}$ is a basis: thus (11) would have no solution though $\mathbf{s}$ was one. Q. e. d.

The base solutions of equation (3) are obtained when solving it by *Cramer's rule*. More exactly there holds the following

THEOREM 7. *Let us solve* (3) *according to Cramer's rule. As known, choosing a basis* $\{\mathbf{a}_{j_1},\ldots,\mathbf{a}_{j_r}\}$, *the general solution becomes*

$$\mathbf{s}=\sum_{k=r+1}^{n}x_{j_k}\mathbf{s}_{j_k}, \tag{12}$$

where the x_{j_k} *are the so-called free variables. Consider now all the general solutions of type* (12) *belonging to the possible bases among* $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n$ *and consider the set of the different* $\mathbf{s}_{j_k}$ *in these solutions. As a trivial consequence of Definition* 6 *we may assert that by these* $\mathbf{s}_{j_k}$ *all the base solutions of* (3) *are represented.*

We can now formulate our following fundamental

THEOREM 8. *The simple solutions are identical with the base solutions.*

PROOF. At first we show that the base solutions are simple ones. Consider a base solution, it is, due to Definition 6, a solution of an equation of type (11). Without loss of generality we may assume (11) to be of the following form:

$$x_1\mathbf{a}_1+\ldots+x_r\mathbf{a}_r+x_k\mathbf{a}_k=0, \tag{13}$$

where $\{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_r\}$ is a basis. Here, according to Theorem 6, x_k cannot be zero; if, however, any of the unknowns $x_1,\ldots,x_r$ is zero, then it must be uniquely zero. Thus, let the unknowns $x_{j_1},\ldots,x_{j_{q-1}}$ $(2\leqq q\leqq r+1)$ be different from zero, then (13) becomes:

$$x_{j_1}\mathbf{a}_{j_1}+\ldots+x_{j_{q-1}}\mathbf{a}_{j_{q-1}}+x_k\mathbf{a}_k=0, \tag{14}$$

where none of the unknowns can be zero any more. Thus, owing to Theorem 4, the solution of (14), i. e. the base solution considered, will be a simple one over $C=\{j_1,\ldots,j_{q-1},k\}$.

We prove now that a simple solution is a base solution. Consider a simple solution $\mathbf{s}$, without loss of generality assuming it to be of the form $[s_1, \dots, s_q, 0, \dots, 0]^*$. It is, because of Definition 3, the unique solution of the equation

$$x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_q \mathbf{a}_q = 0. \tag{15}$$

Here, according to Theorem 5, $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_q\}$ constitutes a simplex, where $q-1 \leqq r$ (see (6)). So we may complete the linearly independent vectors $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{q-1}$ with $r-(q-1) \geqq 0$ vectors: $\mathbf{a}_{j_1}, \dots, \mathbf{a}_{j_{r-q+1}}$, the new vector system $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{q-1}, \mathbf{a}_{j_1}, \dots, \mathbf{a}_{j_{r-q+1}}\}$ becoming hereby a *basis*. Consider now that of the base solutions belonging to this basis which is determined uniquely by the equation (see Definition 6 and Theorem 6):

$$x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_{q-1} \mathbf{a}_{q-1} + x_{j_1} \mathbf{a}_{j_1} + \dots + x_{j_{r-q+1}} \mathbf{a}_{j_{r-q+1}} + x_q \mathbf{a}_q = 0.$$

This solution is asserted to be $\mathbf{s}$. Namely, on account of the construction, $x_{j_1}, \dots, x_{j_{r-q+1}}$ are identically zero,[2] consequently the equation (15) is left over, whose unique solution is indeed the simple solution $\mathbf{s}$. So $\mathbf{s}$ is a base solution.

Appendix

The system of homogeneous linear equations (1) has a solution in which the unknown x_{j_1} $(j_1 = 1, 2, \dots, n)$ is uniquely (identically) zero if and only if the rank of the matrix of (1) is by one greater than that of the matrix in which the j_1-th column is dropped [1]:

$$\operatorname{rank}[\mathbf{a}_{j_2}, \dots, \mathbf{a}_{j_n}] = \operatorname{rank}[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n] - 1 = r - 1.$$

In conclusion, the author wishes to express his indebtedness to Professor P. Turán for his interest in this work.

(Received 13 November 1965)

Literature

[1] Pethő Á., Néhány megjegyzés lineáris algebrai egyenletrendszerek egyértelmű megoldhatóságával kapcsolatban, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, **3** (1958), pp. 101—108.

[2] Á. Pethő, Zur Theorie der Stöchiometrie chemischer Reaktionssysteme, *Wiss. Z. Tech. Hochsch. Chem. Leuna—Merseburg*, **6** (1964), pp. 13—15.

[3] Pethő Á.—Győry K., Homogén lineáris egyenletrendszerek „sok" zérust tartalmazó megoldásairól, *Matematikai Lapok*, **16** (1965), pp. 267—273.

[2] Cf. Appendix.

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (1—2), 1967, pp. 25—66.

TRANSITIV ORIENTIERBARE GRAPHEN

Von

T. GALLAI (Budapest)

(*Vorgelegt von* G. HAJÓS)

1. Einleitung und Resultate

(1. 1) In der vorliegenden Arbeit kommen nur solche endliche Graphen vor, die weder Schlingen, noch mehrfache Kanten enthalten. Wenn man die Kanten eines Graphen G so orientieren kann, daß G mit den Kanten $\overrightarrow{ab}$ und $\overrightarrow{bc}$ stets auch die Kante $\overrightarrow{ac}$ enthält [1] so sagen wir: G läßt sich transitiv richten, oder G ist *transitiv orientierbar* (kurz t-orientierbar). Kürzlich haben A. GHOUILA-HOURI [2], [3] sowie P. C. GILMORE und A. J. HOFFMAN [5] für die t-Orientierbarkeit notwendige und hinreichende Bedingungen angegeben. In unserer Arbeit wollen wir diese Untersuchungen in mehrere Richtungen weiterführen. Den Ausgangspunkt von [2], [3] und [5] bildet die folgende Bemerkung: Ist G t-orientierbar, so folgt aus $ab, ac \in G$ und $bc \in \bar{G}$, [2] daß bei einer jeden t-Orientierung von G entweder $\overrightarrow{ab}$ und $\overrightarrow{ac}$, oder aber $\overrightarrow{ba}$ und $\overrightarrow{ca}$ vorkommen, d.h. die Kanten ab und ac werden *bezüglich des Punktes a in gleicher Weise* orientiert. Wir werden das Bestehen der Behauptungen $ab, ac \in G$ und $bc \in \bar{G}$ — auch für beliebige, nicht unbedingt t-orientierbare Graphen G — mit

$$ab \wedge ac$$

bezeichnen. (Das Zeichen $\wedge$ bezieht sich — wenn anders nicht gesagt wird — immer auf den mit G bezeichneten Graphen, und in die Feststellung $ab \wedge cd$ soll die Behauptung, daß ab und cd verschiedene benachbarte Kanten von G sind, miteinverstanden sein.) Die Relation $\wedge$ gibt Anlaß zur folgenden Klasseneinteilung der Kanten von G: Zwei verschiedene Kanten ab und cd sollen dann und nur dann zur selben Klasse gehören, wenn es eine Folge von Kanten $x_i y_i$ ($i=1, \dots, n$; $n \geqq 2$) mit $x_1 y_1 = ab$, $x_n y_n = cd$, $x_i y_i \wedge x_{i+1} y_{i+1}$ ($i = 1, \dots, n-1$) gibt. Die so definierten Klassen wollen wir als die *Kantenklassen* von G bezeichnen. Für einen t-orientierbaren Graphen G hat diese Klasseneinteilung die folgende Bedeutung: Die Richtung einer Kante bestimmt — für jede t-Orientierung von G — die Richtungen sämtlicher zur selben Kantenklasse gehörigen Kanten. Die erste Gruppe unserer Ergebnisse — die Sätze (1. 2), (1. 5) und (1. 6) — geben die möglichen Strukturen und „Verknüpfungsarten" der Kantenklassen an. Dies mag auch abgesehen von der Frage der t-Orientierbarkeit von gewissem Interesse sein.

[1] Die Knotenpunkte (im folgenden kurz Punkte) werden im allgemeinen mit kleinen lateinischen Buchstaben ($a, b, \dots, x, y, \dots$), die Kanten mit Buchstabenpaaren ($xy = yx$), die gerichteten (orientierten) Kanten mit Pfeilen über den Buchstabenpaaren ($\overrightarrow{xy} = \overleftarrow{yx}$) bezeichnet.

[2] $x \in G$ bzw. $xy \in G$ bedeutet: x ist ein Punkt von G, bzw. x und y sind verschiedene Punkte von G und die Kante xy gehört zu G.

$\bar{G}$ bezeichnet den komplementären Graphen von G, d. h.: $\bar{G}$ besitz dieselben Punkte wie G, und zwei Punkte sind in $\bar{G}$ dann und nur dann verbunden, wenn sie in G nicht verbunden sind.

Eine triviale Eigenschaft der Kantenklassen ist die folgende: Die Kanten einer Klasse, zusammen mit den Endpunkten dieser Kanten, bilden stets einen zusammenhängenden Graphen. Im folgenden Satz sind einige grundlegende Eigenschaften der Kantenklassen zusammengefaßt:

(1. 2) SATZ. 1) *Ist der Graph G nicht zusammenhängend, und sind $G_1, \ldots, G_q$ $(q \geqq 2)$ die Komponenten von G, so geben die Kantenklassen von $G_1, \ldots, G_q$ sämtliche Kantenklassen von G an.*

2) *Ist $\bar{G}$ nicht zusammenhängend (dann ist G zusammenhängend), und sind $\bar{G}_1, \ldots, \bar{G}_q$ $(q \geqq 2)$ die Komponenten von $\bar{G}$, ist ferner $A_i = \mathscr{P}(\bar{G}_i)$ die Menge der Punkte von $\bar{G}_i$ $(i=1, \ldots, q)$,*[3] *so gilt für ein jedes Indexpaar i, j $(1 \leqq i < j \leqq q)$, daß A_i und A_j in G vollständig verbunden*[3] *sind und sämtliche A_iA_j-Kanten*[3] *eine Kantenklasse E_{ij} von G bilden. Die von den E_{ij} verschiedenen Kantenklassen von G fallen mit den Kantenklassen der Graphen $[A_i]_G = G_i$ $(i=1, \ldots, q)$*[3] *zusammen.*

3) *Sind G und $\bar{G}$ beide zusammenhängend und mehrpunktig, so existiert eine eindeutig bestimmte echte Zerlegung $P = \{A_1, \ldots, A_q\}$ von $\mathscr{P}(G)$,*[4] *mit den folgenden Eigenschaften:*

a) *Gibt es für ein Indexpaar i, j $(1 \leqq i < j \leqq q)$ eine zu G gehörige A_iA_j-Kante, so sind A_i und A_j in G vollständig verbunden.*

b) *Sämtliche Kanten von G, die verschiedene A_i Mengen verbinden, bilden eine einzige Kantenklasse E von G. Jeder Punkt von G ist zu wenigstens einer Kante von E inzident.*

c) *Die von E verschiedenen Kantenklassen von G fallen mit den Kantenklassen der Graphen $[A_i]_G = G_i$ $(i=1, \ldots, q)$ zusammen.*

d) *Die Zerlegung P ist keine Verfeinerung*[4] *einer anderen, die Eigenschaften* a), b), c) *besitzenden echten Zerlegung von $\mathscr{P}(G)$.*

Ergänzend bemerken wir, daß im Falle 3) stets $q \geqq 4$ ist (s. (2. 3)).

(1. 3) Betrachtet man nun auch im Falle 1) von (1. 2) die Zerlegung $P = \{A_1, \ldots, A_q\}$ mit $A_i = \mathscr{P}(G_i)$ $(i=1, \ldots, q)$ von $\mathscr{P}(G)$, so gibt (1. 2) für jeden mehrpunktigen Graphen G die eindeutig bestimmte echte Zerlegung $P = \{A_1, \ldots, A_q\}$ von $\mathscr{P}(G)$ an, die wir die *kanonische Zerlegung* von $\mathscr{P}(G)$, oder die zu G gehörige kanonische Zerlegung nennen. Die Mengen $A_1, \ldots, A_q$ heißen die *Punktklassen* der kanonischen Zerlegung. Bei einem einpunktigen Graphen G soll $P = \{A\}$ mit $A = \mathscr{P}(G)$ als die kanonische Zerlegung von $\mathscr{P}(G)$ betrachtet werden (mit der einzigen Punktklasse A).

[3] $\mathscr{P}(G)$ bezeichnet stets die Menge der Punkte des Graphen G. Sind X und Y fremde Punktmengen, und ist $x \in X$, $y \in Y$, so heißt xy eine *XY-Kante* (im Falle $X = \{x\}$ auch eine xY-Kante). Ist ferner $X, Y \subset \mathscr{P}(G)$ und enthält G eine XY-Kante, so sagen wir, daß X und Y (in G) *verbunden* sind. Enthält G sämtliche XY-Kanten, so sind X und Y (in G) *vollständig verbunden*.

Ist $X \subseteqq \mathscr{P}(G)$, so bezeichnet $G - X$ jenen Graphen, der aus G durch Weglassen der Punkte von X ensteht. Im Falle $X = \{x\}$ setzen wir $G - \{x\} = G - x$. Ist $xy \in G$, so bezeichnet $G - xy$ jenen Graphen, der aus G durch Weglassen der Kante xy entsteht.

Ist $X \subseteqq \mathscr{P}(G)$, so bezeichnet $[X]_G$ denjenigen Teilgraphen von G, der durch die Punkte von X *gespannt* wird, d. h. $[X]_G = G - (\mathscr{P}(G) - X)$.

[4] $\{X_1, \ldots, X_n\}$ ist dann eine echte Zerlegung der Menge Y, wenn $n \geqq 2$, $X_i \cap X_j = \emptyset$ $(i \neq j;$ $i, j = 1, \ldots, n)$ und $\bigcup_{i=1}^{n} X_i = Y$ bestehen.

Die echte Zerlegung $\{X_1, \ldots, X_n\}$ von Y ist eine *Verfeinerung* der echten Zerlegung $\{X'_1, \ldots, X'_m\}$ von Y, wenn $X_i \subseteqq X'_{j_i}$ mit $1 \leqq j_i \leqq m$ $(i=1, \ldots, n)$ gilt, und $j_1, \ldots, j_n$ nicht alle verschieden sind.

Diejenigen Kantenklassen von G, deren Kanten verschiedene A_i Mengen verbinden, sollen *äußere*, die übrigen *innere* Kantenklassen von G heißen. Nach (1. 2) ist jede innere Klasse von G entweder äußere oder innere Klasse eines $[A_i]_G$ $(1 \leqq i \leqq q)$. Die Untersuchung der inneren Klassen von G führt so zu den kanonischen Zerlegungen der Graphen $[A_i]_G$ $(i=1, \ldots, q)$. Wir werden die zu diesen Zerlegungen gehörigen Punktklassen die zu G gehörige Punktklassen *zweiter Ordnung* nennen. Und allgemein, bezeichnet A^r eine zu G gehörige Punktklasse *r-ter Ordnung*, so sollen die Punktklassen der zu $[A^r]_G$ gehöringen kanonischen Zerlegung die Punktklassen $(r+1)$-ter Ordnung von G heißen $(r=0, 1, 2, \ldots)$. Hier bedeutet A^0 die Menge $\mathscr{P}(G)$ (die Punktklassen erster Ordnung sind mit den Punktklassen der kanonischen Zerlegung von $\mathscr{P}(G)$ identisch). Offensichtlich gibt es zu jedem nichtleeren (endlichen) Graphen G eine natürliche Zahl k so, daß sämtliche Punktklassen k-ter Ordnung von G einpunktige Mengen sind. Durch einen einfachen Induktionsschluß folgt aus (1. 2), daß eine jede Kantenklasse von G äußere Klasse eines Graphen $[A^r]_G$ $(r \geqq 0)$ ist. Daraus sieht man, daß zwei verschiedene Arten von Kantenklassen existieren: die eine entspricht den äußeren Klassen des Falles 2), die andere der äußeren Klasse des Falles 3) von Satz (1. 2).

Es sei noch eine nennenswerte Folge von (1. 2) erwähnt: Bezeichnet man mit $\mathscr{P}(E)$ die Menge der Punkte, die zu den Kanten einer Kantenklasse E gehören, so besteht für verschiedene Kantenklassen E_1 und E_2 von G stets $\mathscr{P}(E_1) \neq \mathscr{P}(E_2)$.

(1. 4) Man kann für die Punktklassen verschiedener Ordnung auch eine andere, und zwar eine rekursionsfreie Charakterisierung geben. Aus (1. 2) folgt leicht, daß eine jede Punktklasse $X=A^r$ $(r \geqq 0)$ die folgenden Eigenschaften besitzt: 1) $X \neq \emptyset$, 2) für jedes $x \in G-X$ gehört entweder keine xX-Kante zu G, oder gehören alle xX-Kanten zu G. Wir wollen nun eine beliebige Menge $X \subseteq \mathscr{P}(G)$ mit den Eigenschaften 1) und 2) (in G) *geschlossen* nennen. Ferner soll die in G geschlossene Menge X (in G) *stark geschlossen* heißen, wenn für jede *andere* in G geschlossene Menge Y die eine der folgenden Behauptungen besteht: $X \cap Y = \emptyset$, $X \subset Y$, $Y \subset X$. Es sei bemerkt, daß jede einpunktige Menge, sowie $\mathscr{P}(G)$ in G stark geschlossen ist. Eine in G geschlossene (bzw. stark geschlossene) Menge X soll (in G) *quasimaximal* heißen, wenn $X \subset \mathscr{P}(G)$ besteht, und kein in G geschlossenes (bzw. stark geschlossenes) Y mit $X \subset Y \subset \mathscr{P}(G)$ existiert. Der folgende Satz gibt den Grund der Benennung „geschlossen" an:

(1. 5) SATZ. *Ist X eine geschlossene Punktmenge des Graphen G, und gehört eine Kante der Kantenklasse E von G zu $[X]_G$, so gehören alle Kanten von E zu $[X]_G$, ferner ist E auch eine Kantenklasse von $[X]_G$. Umgekehrt, für jede beliebige Kantenklasse E von G ist $\mathscr{P}(E)$ in G geschlossen.*

Der folgende Satz enthält die erwähnte Charakterisierung der Punktklassen A^r:

(1. 6) SATZ. *Ist der Graph G mehrpunktig, so fallen die quasimaximalen stark geschlossenen Punktmengen von G mit den Punktklassen der kanonischen Zerlegung von $\mathscr{P}(G)$ zusammen. Ist G nicht leer, so ist die Gesamtheit der stark geschlossenen Punktmengen von G mit der Gesamtheit der Punktklassen aller Ordnung von G identisch.*

(1. 7) Um die Bedingungen der t-Orientierbarkeit herzuleiten, sowie eine Übersicht über die verschiedenen t-Orientierungen eines Graphen zu erhalten, benötigen wir den Begriff des *Zerlegungsgraphen G^p* eines nichtleeren Graphen G.

Die Definition von G^p lautet: Es ist $\mathcal{P}(G^p)=\{A_1, \ldots, A_q\}$ $(q\geqq 1)$, wobei $\{A_1, \ldots, A_q\}$ die kanonische Zerlegung von $\mathcal{P}(G)$ bezeichnet. Die verschiedenen Punkte A_i und A_j von G^p sind in G^p dann und nur dann durch eine Kante verbunden, wenn G eine A_iA_j-Kante enthält. Bezüglich G^p gilt der folgende Satz:

(1. 8) SATZ. 1) *Die Punktklassen der kanonischen Zerlegung von $\mathcal{P}(G^p)$ sind alle einpunktig.*

2) *Ist G einpunktig, so gilt das gleiche auch für G^p.*

3) *Ist G nicht zusammenhängend, so besteht G^p aus lauter isolierten Punkten.*

4) *Ist $\bar{G}$ nicht zusammenhängend, und besitzt er k Komponenten, so ist G^p ein vollständiger k-Graph.*[5] *Es bildet dann jede Kante von G^p in sich selbst eine Kantenklasse von G^p.*

5) *Sind G und $\bar{G}$ beide zusammenhängend und mehrpunktig, dann ist auch G^p und sein komplementärer Graph zusammenhängend. G^p enthält mindestens 4 Punkte, und sämtliche Kanten von G^p gehören derselben Kantenklasse zu.*

In unseren Untersuchungen spielen auch die „Zerlegungsgraphen höherer Ordnung", d. h. jene Zerlegungsgraphen $G^p_{(r)}$ eine Rolle, die zu den Graphen $G_{(r)}=[A^r]_G$ gehören, wobei A^r eine Punktklasse r-ter Ordnung $(r\geqq 1)$ von G bezeichnet. Wir wollen kurz den Graphen $G^p_{(r)}$ als den zur Punktklasse A^r gehörigen Zerlegungsgraphen bezeichnen. Der Einheitlichkeit halber soll $G^p=G^p_{(0)}$ gesetzt werden.

Bezüglich der t-Orientierbarkeit von Graphen soll zuerst die folgende triviale Behauptung erwähnt werden: Ist G t-orientierbar, so ist für jedes $X\subseteqq\mathcal{P}(G)$ auch $[X]_G$ t-orientierbar.

Der folgende Satz ermöglicht eine Übersicht zu geben über die verschiedenen t-Orientierungen eines Graphen (s. (1. 10)).

(1. 9) SATZ. *Es sei G ein nichtleerer Graph, und betrachte man eine beliebige Punktklasse $(r-1)$-ter Ordnung $(r\geqq 1)$ A^{r-1} von G, die kanonische Zerlegung $P^r=\{A_1^r, \ldots, A_k^r\}$ von A^{r-1}, den Zerlegungsgraphen $G^p_{(r-1)}$ von $[A^{r-1}]_G$, sowie zwei solche Mengen A_i^r und A_j^r von P^r, die in G vollständig verbunden sind.*

1) *Ist G t-orientierbar, so erhalten bei einer jeden t-Orientierung von G sämtliche $A_i^rA_j^r$-Kanten von G bezüglich der Mengen A_i^r und A_j^r die gleiche Richtung.*[6] *Orientiert man dieser Richtung entsprechend die Kante $A_i^rA_j^r$ von $G^p_{(r-1)}$, und führt man diese Orientierung für jede Kante von $G^p_{(r-1)}$ durch, so erhält $G^p_{(r-1)}$ eine t-Orientierung.*[7]

2) *Umgekehrt, nehmen wir jetzt an, daß sämtliche Zerlegungsgraphen $G^p_{(r-1)}$ $(r=1, 2, \ldots)$ von G t-orientierbar sind. Wählt man dann zu jedem $G^p_{(r-1)}$ beliebig eine t-Orientierung,*[7] *und erteilt man sämtlichen $A_i^rA_j^r$-Kanten von G (bezüglich A_i^r und A_j^r) die Richtung der Kante $A_i^rA_j^r$ von $G^p_{(r-1)}$, führt man dies für jede Kante von $G^p_{(r-1)}$ und für jeden Zerlegungsgraph $G^p_{(r-1)}$ von G durch, so erhält man eine t-Orientierung von G.*

[5] Ein vollständiger k-Graph enthält genau k Punkte, und je zwei von diesen sind mit einer Kante verbunden.

[6] d. h. entweder sind alle von A_i^r nach A_j^r gerichtet, oder sind sie alle umgekehrt gerichtet.

[7] Wir wollen auch bei einem Graphen, der aus lauter isolierten Punkten besteht, von einer „t-Orientierung" des Graphen sprechen.

(1. 10) Da jeder vollständige Graph t-orientierbar ist, hängt nach (1.8) und (1. 9) die t-Orientierbarkeit eines Graphen G nur von der t-Orientierbarkeit jener Zerlegungsgraphen $G^p_{(r-1)}$ $(r=1, 2, \ldots)$ von G ab, die zu dem Absatz 5) von (1. 8) gehören. Diese Graphen besitzen — falls sie t-orientierbar sind — genau zwei t-Orientierungen (bei diesen Graphen gehören alle Kanten zur selben Kantenklasse). Diejenigen Zerlegungsgraphen, die vollständige k-Graphen $(k \geqq 2)$ sind, besitzen genau $k!$ verschiedene t-Orientierungen. Man sieht so, wie die Gesamtheit und Zahl der verschiedenen t-Orientierungen eines Graphen von der Zahl und Art seiner Zerlegungsgraphen abhängt.

(1. 11) Zur Erreichung der obigen Resultate, sowie zur Herleitung von gewissen verschärften Bedingungen der t-Orientierbarkeit benötigen wir neben der Relation $\wedge$ noch eine andere, ebenfalls für benachbarte Kanten eines Graphen erklärte Relation. Sind $ab, ac \in G$, so bestehe die Relation

$$ab \sim ac$$

(in G) dann und nur dann, wenn entweder $b=c$ ist, oder ein Weg [8] $W=(x_0 \ldots x_k)$ von $\bar{G}$ mit $k \geqq 1$, $x_0=b$, $x_k=c$ $ax_i \in G$ $(i=1, \ldots, k-1)$ existiert. Besteht $ab \sim ac$ (in$G$), so sagen wir, daß ab und ac (in G) *verknüpft* sind, sowie daß sie (in G) *bei a verknüpft* sind. (Wenn anders nicht gesagt wird, bezieht sich die Relation $\sim$ immer auf den mit G bezeichneten Graphen. Ferner soll in der Feststellung $ab \sim ac$ die Behauptung $ab, ac \in G$ miteinverstanden sein.)

Man sieht leicht, daß die angegebene Definition mit der folgenden äquivalent ist: $ab \sim ac$ besteht dann und nur dann, wenn b und c zur selben Komponente des Graphen $[N(a)]_{\bar{G}}$ gehören, wobei $N(a)$ die Menge der Nachbarpunkte von a in G bezeichnet.[9] Diese zweite Erklärung zeigt unmittelbar, daß die Relation $\sim$ für die mit demselben Punkt a inzidenten Kanten von G eine Äquivalenzrelation ist. Dementsprechend soll $ay_1 \sim ay_2 \sim \ldots \sim ay_n$ bedeuten, daß die Kanten ay_i $(i=1, \ldots, n)$ paarweise verknüpft sind.

Bei der ersten Definition von $ab \sim ac$ gilt im Falle $b \neq c$ $ax_i \wedge ax_{i+1}$ $(i=0, \ldots, k-1)$. Daraus folgt, daß zwei verknüpfte Kanten stets zur selben Kantenklasse von G gehören. Es besteht offensichtlich $ab \wedge ac \Rightarrow ab \sim ac$.

Die Bedeutung der Relation $\sim$ bezüglich der t-Orientierbarkeit besteht darin, daß sämtliche bei einem Punkt a verknüpfte Kanten bei jeder t-Orientierung des Graphen bezüglich a die gleiche Richtung erhalten. (Die Umkehrung dieser Behauptung ist im allgemeinen nicht richtig.)

Wir wollen noch eine einfache, jedoch wichtige Eigenschaft der Relation $\sim$ erwähnen. Gilt $a, b, c \in A \subset \mathscr{P}(G)$, so folgt aus dem Bestehen von $ab \sim ac$ in $[A]_G$ die Richtigkeit von $ab \sim ac$ in G (die Umkehrung ist nicht allgemein richtig).

(1. 12) Um die Verknüpfungen der Kanten von G zum Vorschein kommen zu lassen, führen wir den *Verknüpfungsgraphen* $\tilde{G}$ von G ein. Dazu sollen die

[8] Die Punkte $x_0, \ldots, x_k$ eines Weges $(x_0 \ldots x_k)$ sind stets verschieden. Es werden auch entartete, einpunktige Wege (x) betrachtet. Der Weg $(x_0 \ldots x_k)$ wird nach seinen Endpunkten ein x_0x_k-Weg genannt. Es sei noch bemerkt, daß die Wege als spezielle Graphen aufgefaßt werden (es wird also mit ihnen keine Durchlaufsrichtung verbunden).

[9] Für $x \in G$ soll $N_G(x)$ die Menge der Nachbarpunkte von x in G bezeichnen. Der Index G wird meistens weggelassen. Das Zeichen $N(x)$ bezieht sich — wenn anders nicht gesagt wird — immer auf den mit G bezeichneten Graphen.

Kanten der Graphen nicht als Punktpaare, sondern als selbstständige Elemente betrachtet werden, deren Inzidenzen zu den Punkten durch die Punktpaarbezeichnungen angegeben sind. Wir erklären nun: Die Kanten von $\tilde{G}$ sind identisch mit den Kanten von G. Die Punkte, sowie die Inzidenzen der Punkte und Kanten von $\tilde{G}$ bekommt man folgendermaßen: Für einen jeden nicht isolierten Punkt x von G betrachte man den Graphen $[N(x)]_G$. Zerfällt dieser in die Komponenten $[X_i]_G$ $(i=1, ..., k; k \geqq 1; X_1, ..., X_k$ sind die Mengen der Punkte der einzelnen Komponenten), so „zerspalte" man den Punkt x in die „Teilpunkte" $x^1, ..., x^k$ — diese sollen die Punkte von $\tilde{G}$ sein — und füge in $\tilde{G}$ sämtliche xX_i-Kanten von G zu dem Punkt x^i $(i=1, ..., k)$ hinzu. (In der Zeichnung — s. Fig. 1 und Fig. 2 — werden die Teilpunkte nahe zueinander aufgenommen. Die Kanten von G sind voll ausgezogen, diejenigen von $\tilde{G}$ punktiert, oder gar nicht eingezeichnet.)

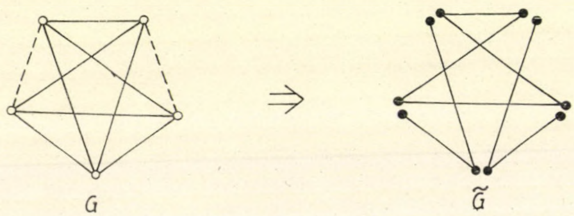


Fig. 1

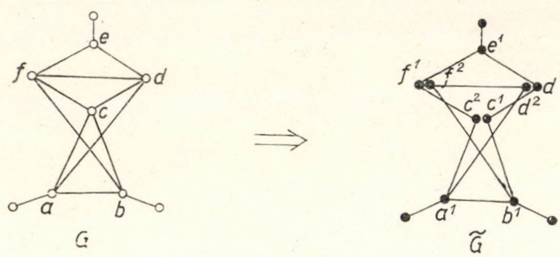


Fig. 2

Aus der Definition folgt unmittelbar: Die Kantenklassen von G fallen mit den Kantenmengen der einzelnen Komponenten von $\tilde{G}$ zusammen.

(1. 13) Um die Bedeutung von $\tilde{G}$ bezüglich der t-Orientierbarkeit von G zu zeigen, sei jetzt angenommen, daß G t-orientierbar ist, und betrachte man eine beliebige t-Orientierung von G. Die Orientierung der Kanten von G macht dabei auch aus $\tilde{G}$ einen gerichteten Graphen. Und zwar erhält $\tilde{G}$ eine besondere Orientierung: Bei jedem beliebigen Punkt x^i von $\tilde{G}$ sind sämtliche zu x^i inzidenten Kanten bezüglich x^i in gleicher Weise gerichtet. x^i ist also entweder eine „Quelle", oder eine „Senke". $\mathscr{P}(\tilde{G})$ zerfällt daher in zwei Gruppen, deren eine die Quellen, die andere die Senken enthält; jede Kante von $\tilde{G}$ verbindet eine Quelle mit eine Senke, und ist von einer Quelle nach einer Senke gerichtet. Der Graph $\tilde{G}$ muß also ein

paarer [10] Graph sein. Nun werden wir auch die Umkehrung dieser Behauptung beweisen (s. (4. 6)). Es gilt nämlich der folgende Satz:

(1. 14) SATZ. *Der Graph G ist dann und nur dann t-orientierbar, wenn der Verknüpfungsgraph $\tilde{G}$ von G ein paarer Graph ist.*

(1. 15) Man kann auch eine andere Formulierung des Satzes (1. 14) angeben. Die Behauptung, daß ein Graph ein paarer Graph ist, und die Aussage, daß jeder Kreis (oder jeder geschlossene Zug) [11] des Graphen gerade ist, d. h. eine gerade Anzahl von Kanten enthält, sind gleichwertig. Ist $\tilde{Z}=\wr x_0^{j_1}x_1^{j_2}\ldots x_n^{j_n}\wr$ ein Zug von $\tilde{G}$, und ist $x_i^{j_i}$ bei der Zerspaltung des Punktes x_i von G zustandegekommen $(i=0,\ldots,n)$, so ist $Z=\wr x_0x_1\ldots x_n\wr$ ein Zug von G. Ist $\tilde{Z}$ geschlossen, so gilt das gleiche auch für Z. Diese offenen und geschlossenen Züge von G haben (im Falle $n\geqq 2$) die nennenswerte Eigenschaft, daß je zwei ihrer (in Z) benachbart liegenden Kanten in G verknüpft sind. Genauer gesagt, es besteht $x_{i-1}x_i\sim x_ix_{i+1}$ $(i=1,\ldots,n-1)$ und wenn $\tilde{Z}$ geschlossen ist, so auch $x_{n-1}x_n\sim x_0x_1$. Wir wollen diese speziellen Züge von G als die *Ketten* bzw. *geschlossenen Ketten* (von G) bezeichnen. Ist $\tilde{Z}$ mit einem Weg bzw. Kreis identifizierbar, so muß das gleiche für das entsprechende Z nicht gelten: Z kann noch „mehrfache" Punkte enthalten (s. den Zug $\wr a^1b^1c^1d^1e^1f^1c^2a^1\wr$ der Fig. 2). Fällt jedoch auch Z mit einem Weg bzw. Kreis von G zusammen, so wollen wir dieses Z eine *Wegkette* bzw. *Kreiskette* (*n-Eckkette*) nennen. Die *Länge* einer Kette (geschlossener Kette) ist gleich der Anzahl ihrer Kanten. Die geschlossene Kette heißt *gerade* oder *ungerade*, je nach dem, ob ihre Länge gerade oder ungerade ist. In Betracht der erwähnten Eigenschaft der paaren Graphen kann man nun mit den so eingeführten Begriffen den Satz (1. 14) folgendermaßen formulieren.

(1. 16) SATZ. *Ein Graph ist dann und nur dann t-orientierbar, wenn er keine ungerade geschlossene Kette enthält.* [12]

Die Bedingungen von (1. 14) und (1. 16) sind dem Wesen nach mit denjenigen äquivalent, die von GHOUILA-HOURI und GILMORE und HOFFMAN für die t-Orientierbarkeit angegeben wurden: man kann mit nicht viel Mühe von (1. 14) bzw. (1. 16) zu den in [3] und [5] formulierten Sätzen gelangen, und umgekehrt. Wir leiten den Satz (1. 16) — unabhängig von den Ergebnissen von [3] und [5] — mit Hilfe von unserem Satz (1. 9) ab. Unser Beweis ist wohl nicht kürzer als diejenigen von [3] und [5], er scheint jedoch einen tieferen Einblick in die Verhältnisse zu bieten.

Die im Satz (1. 16) vorkommenden geschlossenen Ketten sind im allgemeinen noch ziemlich komplizierte Gebilde. Es ist wünschenswert, diese durch einfachere

[10] Ein Graph heißt ein paarer Graph, wenn seine Punkte so in zwei Klassen eingeteilt werden können, daß die Kanten des Graphen stets zu verschiedenen Klassen gehörige Punkte verbinden.

[11] Die Folge von Punkten $Z=\wr x_0\ldots x_n\wr$ ist ein *Zug* des Graphen G, falls $x_ix_{i+1}\in G$ $(i=0,\ldots,n-1)$ und $x_ix_{i+1}\neq x_jx_{j+1}$ für $i\neq j$ besteht. Mit Z ist auch $\wr x_n\ldots x_0\wr$ ein Zug von G. Wir wollen diese Züge als identisch betrachten. Ist $x_0=x_n$ $(n\geqq 3)$, so heißt Z *geschlossen*. Sind die Punkte $x_0,\ldots,x_n$ bzw. im Fall $x_0=x_n$ die Punkte $x_1,\ldots,x_n$ verschieden, so kann man Z mit dem Weg bzw. mit dem Kreis (n-Eck) $(x_0\ldots x_n)$ identifizieren. Die Kreise (Vielecke) werden ähnlich den Wegen als spezielle Graphen betrachtet. Die Länge eines Zuges ist gleich der Anzahl seiner Kanten. Der Zug heißt gerade oder ungerade, je nachdem seine Länge gerade oder ungerade ist.

[12] Den Teil „nur dann" von (1.16) kann man auch ohne Benützung des Verknüpfungsgraphen leicht erhalten. Durchläuft man nämlich in einem t-orientierten Graphen G ein Kette, so findet man, daß die Kanten abwechselnd übereinstimmend und entgegengesetzt zur Durchlaufsrichtung gerichtet sind. Demzufolge kann G keine geschlossene ungerade Kette enthalten.

zu ersetzen. Der erste Schritt in dieser Richtung ist der Beweis des folgenden Satzes (s. Abschnitt 5).

(1. 17) SATZ. *Ein Graph ist dann und nur dann t-orientierbar, wenn er keine ungerade Kreiskette enthält.*

(1. 18) Den Abschluß der Vereinfachungen der „auszuschließenden Gebilde" bedeutet die Bestimmung sämtlicher *irreduziblen* nicht t-orientierbaren Graphen. Diese Graphen G sind durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert: G ist nicht t-orientierbar und für jedes $A\subset\mathscr{P}(G)$ ist $[A]_G$ t-orientierbar. Oder was nach (1. 17) das gleiche bedeutet: G enthält eine ungerade Kreiskette, und für jedes $A\subset\mathscr{P}(G)$ enthält $[A]_G$ keine solche Kette. Wir bestimmen alle diese Graphen (s. die Abschnitte 6 und 7). Sie sind auch zeichnerisch in den Tafeln I und II (S. 64 und 65) dargestellt. Man findet unter ihnen 4 solche Typen, die keine Dreieckskette enthalten, und 15 solche, die Dreieckskétten besitzen. Für die ersteren sind gleich die Verknüpfungsgraphen gezeichnet. Die letzterwähnten sind durch ihre komplementären Graphen (diese sind einfacher als die ursprünglichen) angegeben.

(1. 19) Wir geben noch eine andere Formulierung des Satzes (1. 17), die bei der Bestimmung der irreduziblen Graphen und bei der Untersuchung der Zusammenhänge mit den Intervallgraphen (s. unten) eine Rolle spielt.

Bilden die Kanten des ungeraden Kreises $(a_1 \dots a_{2n+1}a_1)$ von G eine Kreiskette in G, d. h. genügen sie den Bedingungen $a_{i-1}a_i \sim a_ia_{i+1}$ $(i=1, \dots, 2n+1,$ $a_0=a_{2n+1}$, $a_{2n+2}=a_1)$, so existiert zu jedem $i=1, \dots, 2n+1$ ein Weg $W_i=(x_{i0}\dots x_{i\alpha_i})$ von $\bar{G}$ mit $x_{i0}=a_{i-1}$, $x_{i\alpha_i}=a_{i+1}$ und $a_ix_{ij}\in G$ $(j=0, \dots, \alpha_i)$. Wir wollen nun die Eigenschaften des Gebildes, welches durch die Punkte $a_1, \dots, a_{2n+1}$ und die Wege $W_1, \dots, W_{2n+1}$ im Graphen $\bar{G}$ gebildet wird in bezug auf $\bar{G}$ formulieren. Deswegen sagen wir folgende Definition aus:

Die Folge

$$\sigma=\{y_1W_1^*y_2W_2^*y_3\dots y_{2n+1}W_{2n+1}^*y_1\} \qquad (n\geqq 1)$$

soll eine *Astroide*, genauer eine $(2n+1)$-*Astroide* des Graphen G heißen,[13] wenn $y_1, \dots, y_{2n+1}$ verschiedene Punkte von G sind, W_i^* einen y_iy_{i+1}-Weg von G bezeichnet und y_i mit keinem Punkt von W_{i+n}^* in G verbunden ist $(i=1, \dots, 2n+1$; das Zeichen W_j^* ist für $j<1$ und $j>2n+1$ durch die Annahme: $W_\alpha^*=W_\beta^*$ falls $\alpha\equiv\beta \pmod{2n+1}$ erklärt). Die Punkte y_i sollen die *Ecken*, die Wege W_i^* die *Bogen* von σ heißen. (Der Bogen W_{i+n}^* liegt „gegenüber" der Ecke y_i. Es gilt offensichtlich $y_i\notin W_{i+n}^*$, $i=1, \dots, 2n+1$.) Die Summe der Längen der Bogen gibt die *Länge* von σ an.

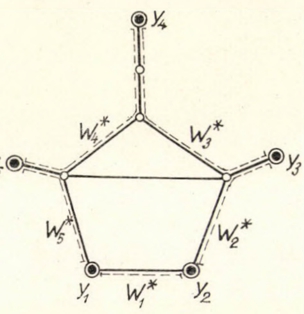


Fig. 3

Nun ist es leicht ersichtlich, daß die Punkte a_i und Wege W_i der vorher erwähnten Kreiskette im Graphen $\bar{G}$ eine $(2n+1)$-Astroide bilden, und zwar die Astroide

$$\sigma'=\{a_1'W_1'a_2'W_2'a_3'\dots a_{2n+1}'W_{2n+1}'a_1'\},$$

[13] Ähnliche Benennung wird für die 3-Astroiden in [7] benützt.

wobei $a_i' = a_{2i-1}$ und $W_i' = W_{2i}$ $(i=1, \ldots, 2n+1)$ gesetzt wurde (a_α und a_β bzw. W_α und W_β bedeuten, falls $\alpha \equiv \beta \pmod{2n+1}$ besteht, denselben Punkt bzw. Weg).[14] Umgekehrt sieht man auch, daß einer jeden Astroide von $\bar{G}$ eine ungerade Kreiskette in G entspricht.

Nun kann man mit Hilfe des Begriffes der Astroide den Satz (1. 17) folgendermaßen formulieren:

(1. 20) *Der Graph G ist dann und nur dann t-orientierbar, wenn $\bar{G}$ keine Astroide enthält.*

(1. 21) Wir wollen bemerken, daß die Bogen W_i^* der Astroide von Fig. 3 besondere Eigenschaften haben: Nur die „benachbarten" von ihnen, W_i^* und W_{i+1}^* $(i=1, \ldots, 2n+1)$ besitzen gemeinsame Punkte, und zwar ist jeder Durchschnitt $W_i^* \cap W_{i+1}^*$ ein Weg (dabei soll auch ein Punkt in sich selbst als ein Weg betrachtet werden). Dies ist natürlich nicht bei jeder Astroide der Fall. Doch kann man sich in (1. 20) auf solche einfache Astroiden beschränken. Es gilt nämlich, daß gewisse *extreme* Astroiden eines Graphen stets die erwähnten Eigenschaften besitzten. Dabei wird die Astroide σ von G dann als extrem bezeichnet, falls die Zahl der Ecken von σ minimal ist, und σ unter den Astroiden mit minimaler Eckenzahl eine minimale Länge besitzt. Eben die Untersuchung dieser extremen Astroiden ist eines der wichtigsten Hilfsmittel der Bestimmung von irreduziblen, nicht t-orientierbaren Graphen.

Die Formulierung (1. 20) führt zu einer *zweiten Art von irreduziblen Graphen.* Diese Graphen enthalten Astroiden, und jeder Teilgraph von ihnen, der durch Weglassen von Punkten entsteht, besitzt keine Astroide. Offensichtlich sind diese Graphen genau die komplementären Graphen der irreduziblen nicht t-orientierbaren Graphen. Diejenigen von diesen, die keine 3-Astroiden enthalten, sind die komplementären Graphen von $\Gamma_1(2n+1)$, $\Gamma_2(2n+1)$, $\Gamma_3(2n+1)$, $\Gamma_4(2n+1)$ (s. S. 64). Jene, die 3-Astroiden besitzen, sind in Tafel II in ihrer ursprünglichen Form dargestellt (S. 65).

Die 3-Astroiden spielen bei der Charakterisierung der Intervallgraphen[15] eine wichtige Rolle. Diesbezüglich enthält [7] den folgenden Satz:

(1. 22) (LEKKERKERKER—BOLAND) *Ein Graph G ist dann und nur dann ein Intervallgraph, wenn* 1) *G mit jedem k-Eck* ($k=4, 5, \ldots$) *auch eine Diagonale des k-Ecks enthält, und* 2) *in G keine 3-Astroide vorkommt.*

In [7] sind auch alle solche Graphen bestimmt, die keine Intervallgraphen sind, aus denen jedoch durch Weglassen je eines beliebigen Punktes schon Intervallgraphen entstehen (irreduzible Nicht-Intervallgraphen). Die fünf angegebenen Typen kommen alle — mit Ausnahme des Fünfecks — unter den Graphen unserer Tafel II (S. 65) vor. Das Fünfeck fällt mit dem komplementären Graphen von $\Gamma_1(5)$ (s. Tafel I) zusammen. Umgekehrt, mit Ausnahme des Typs $\bar{\Gamma}_9$ [9] sind

[14] Die Endpunkte von $W_i = W_{2i}$ sind die Punkte $a_{2i-1} = a_i'$ und $a_{2i+1} = a_{i+1}'$. Sämtliche Punkte des $a_i' = a_{2i-1}$ gegenüberliegenden Bogens $W_{i+n}' = W_{2(i+n)} = W_{2i-1}$ sind in G mit a_{2i-1} verbunden, sie sind also in $\bar{G}$ mit a_i' nicht verbunden.

[15] Ein Graph G heißt ein Intervallgraph, wenn zu jedem Knotenpunkt von G je ein Intervall der Zahlengeraden so zugeordnet werden kann, daß je zwei dieser Intervalle dann und nur dann einen gemeinsamen Punkt besitzen, falls die entsprechenden Knotenpunkte in G durch eine Kante verbunden sind.

die Typen der Tafel II entweder identisch mit den in [7] angegebenen Typen, oder kann man sie aus diesen durch Weglassen von Kanten erhalten.

Der Zusammenhang zwischen t-Orientierbarkeit und Intervallgraphen wurde zuerst durch GILMORE und HOFFMAN entdeckt. Sie bewiesen folgenden Satz [5]:

(1. 23) (GILMORE—HOFFMAN). *Ein Graph G ist dann und nur dann ein Intervallgraph, wenn* 1) *G mit jedem Viereck auch eine Diagonale des Vierecks enthält, und* 2) *$\overline{G}$ t-orientierbar ist.*

Nun läßt sich aus (1. 22) der Satz (1. 23) sehr einfach herleiten. Genügt nämlich der Graph G der Forderung 2) von (1. 23), so kann er keine Astroiden enthalten (s. (1. 20)). Da ein Fünfeck eine 5-Astroide und jedes k-Eck ($k \geqq 6$) eine 3-Astroide enthält, kann G kein solches k-Eck ($k \geqq 5$) enthalten, dessen sämtliche Diagonalen zu $\overline{G}$ gehören. Genügt also G auch noch der Forderung 1) von (1. 23), so ist er nach (1. 22) ein Intervallgraph. (Die Notwendigkeit der in (1. 23) gegebenen Bedingungen ist trivial.)

Es scheint jedoch, daß man (1. 22) aus (1. 23) nicht so einfach bekommen kann. Dazu muß man nämlich folgendes beweisen: Ein Graph G, in dem nur $(2k+1)$-Astroiden mit $k \geqq 2$ vorkommen, enthält ein Viereck, dessen beide Diagonalen zu $\overline{G}$ gehören. Wir kennen keinen unmittelbaren Beweis dieser Behauptung. Ihre Richtigkeit kann eingesehen werden, indem man sie an den angegebenen irreduziblen Graphen, namentlich an den Komplementären Graphen von $\Gamma_1(2n+1)$, $\Gamma_2(2n+1)$, $\Gamma_3(2n+1)$ und $\Gamma_4(2n+1)$ bestätigt. Am einfachsten geschieht dies derart, daß man in jedem $\Gamma_i(2n+1)$ $(i=1, 2, 3, 4)$ zwei solche nicht benachbarte Kanten ab und cd sucht, für welche ac, ad, bc, bd alle zum komplementären Graphen gehören.

2. Die Beweise der Sätze (1.2), (1.5) und (1.6)

Um die angedeuteten Sätze zu beweisen, benötigen wir zahlreiche Hilfssätze.

(2. 1) *Es sei $a, b \in G$, $a \neq b$ und $W=(x_0 \dots x_n)$, $x_0=a$, $x_n=b$ ein kürzester ab-Weg von G. Dann gehören sämtliche Kanten von W zur selben Kantenklasse von G.*

BEWEIS. Es genügt, den Fall $n \geqq 2$ zu betrachten. Dann ist $x_{i-1}x_{i+1} \in \overline{G}$ $(i=1, \dots, n-1)$, denn sonst würde in G ein kürzerer Weg als W existieren. Daher gilt $x_{i-1}x_i \wedge x_i x_{i+1}$ $(i=1, \dots, n-1)$ woraus unsere Behauptung folgt.

(2. 2) *Es seien X und Y solche nichtleere fremde Teilmengen von $\mathscr{P}(G)$, die in G vollständig verbunden sind, und es sollen die Graphen $[X]_{\overline{G}}$ und $[Y]_{\overline{G}}$ beide zusammenhängend sein. Dann gilt für ein jedes $x \in X$ und $y \in Y$, daß alle xY-Kanten bei x, alle yX-Kanten bei y paarweise verknüpft sind. Ferner gehören alle XY-Kanten zur selben Kantenklasse von G.*

BEWEIS. Alle Y-Punkte gehören derselben Komponente des Graphen $[N(x)]_{\overline{G}}$ an. Dies gibt die Richtigkeit der ersten Behauptung. Das Bestehen der Zweiten folgt ähnlich. Ist $x \neq x' \in X$ und $y \neq y' \in Y$, so gelten nach den vorangehenden $xy \sim x'y$ und $x'y \sim x'y'$. Dies bestätigt die dritte Behauptung.

Die folgende Behauptung ist einer der wichtigsten Punkte unserer Beweisführung.

(2. 3) HILFSSATZ. *Es seien G und $\bar{G}$ beide zusammenhängend und mehrpunktig. Dann enthält G mindestens 4 Punkte, und besitzt genau eine solche Kantenklasse E, für die $\mathscr{P}(E)=\mathscr{P}(G)$ gilt. ($\mathscr{P}(E)$ bezeichnet die Menge jener Punkte, die mit Kanten von E inzident sind.)*

BEWEIS. Die Richtigkeit der ersten Behauptung folgt durch eine triviale Diskussion. Zum Beweis des zweiten beachte man, daß $\bar{G}$ kein vollständiger Graph ist, und daher gibt es ein $X\subset\mathscr{P}(G)$ für das $\bar{G}-X$ nicht zusammenhängend ist. Es soll L eine minimale unter diesen trennenden Punktmengen X von $\bar{G}$ bezeichnen, und $\bar{G}_1, \ldots, \bar{G}_q$ $(q\geqq 2)$ sollen die Komponenten von $\bar{G}-L$ sein. Wir setzen $K_i=\mathscr{P}(\bar{G}_i)$ $(i=1, \ldots, q)$. Aus der Minimalität von L folgt (s. [1] Hilfssatz 2), daß ein jedes $x\in L$ in $\bar{G}$ mit allen K_i $(1\leqq i\leqq q)$ verbunden ist. Ferner ist für jedes Indexpaar i, j $(1\leqq i\leqq j\leqq q)$ K_i und K_j in G vollständig verbunden. Nach (2. 2) gehören für ein solches festes i, j Paar, sämtliche K_iK_j-Kanten zur selben Kantenklasse.

Da G zusammenhängend ist, gibt es ein K_i, z. B. K_1, das in G mit L verbunden ist. Es sei $a_1x_1\in G$ mit $a_1\in K_1$, $x_1\in L$, und $x_1b_i\in\bar{G}$ mit $b_i\in K_i$ $(i=2, \ldots, q)$. Aus $a_1b_i\in G$ folgt dann $a_1b_i\wedge a_1x_1$ $(i=2, \ldots, q)$. Es gehören daher alle K_1K_i-Kanten $(i=2, \ldots, q)$ zur selben Kantenklasse E, die auch a_1x_1 enthält. Da a_1x_1 eine beliebige K_1L-Kante von G war, gehören sämtliche K_1L-Kanten von G zu E.

Wir zeigen, daß $\mathscr{P}(E)=\mathscr{P}(G)$ gilt. Dazu braucht man nur noch $L\subset\mathscr{P}(E)$ zu beweisen. Es sei x ein beliebiger Punkt von L, und W ein kürzester a_1x-Weg in G. W muß eine K_1L-, oder eine K_1K_i-Kante $(2\leqq i\leqq q)$ enthalten. Nach (2. 1) gehören alle Kanten von W zur selben Kantenklasse. Es gehört daher die mit x inzidente Kante von W zu E, also gilt $x\in\mathscr{P}(E)$.

Es sei $\bar{K}_1=\mathscr{P}(G)-K_1$. Sämtliche $K_1\bar{K}_1$-Kanten von G gehören zu E. Gibt es daher eine von E verschiedene Kantenklasse E' von G mit $\mathscr{P}(E')=\mathscr{P}(G)=K_1\cup\bar{K}_1$, so muß E' eine Kante von $[K_1]_G$, und auch eine von $[\bar{K}_1]_G$ enthalten. Dies kann jedoch nicht bestehen, da die Kanten von E' einen zusammenhängenden Graphen bilden.

(2. 4) Man findet die Definitionen der geschlossenen, starkgeschlossenen und der quasimaximalen Mengen in (1. 4). Es ist ersichtlich, daß alle diese Eigenschaften bezüglich der Graphen G und $\bar{G}$ gleichzeitig bestehen. Im Abschnitt 2 werden — wenn anders nicht gesagt wird — alle diese Begriffe, und auch der Begriff der Kantenklasse bezüglich des mit G bezeichneten Graphen verstanden.

Der Beweis dafür, daß ein $X\subset\mathscr{P}(G)$ geschlossen ist, wird meist in jener Form durchgeführt, daß wir aus den Annahmen $x\in X$, $y\notin X$, $xy\in G$ folgern, daß alle yX-Kanten zu G gehören.

(2. 5) BEWEIS DES SATZES (1. 5). I) Es sei X geschlossen, $xy\in[X]_G$, $uv\notin[X]_G$ und im Gegensatz zur ersten Behauptung von (1. 5) E eine Kantenklasse mit xy, $uv\in E$. Dann gibt es eine Folge x_iy_i $(i=1, \ldots, n)$ von Kanten (aus G) mit $x_1y_1=xy$, $x_ny_n=uv$ und $x_iy_i\wedge x_{i+1}y_{i+1}$ $(i=1, \ldots, n-1)$. Es sei k $(2\leqq k\leqq n)$ der kleinste Index mit $x_ky_k\notin[X]_G$. Dann ist $x_{k-1}y_{k-1}\in[X]_G$, und man darf $y_{k-1}=x_k$ annehmen. Daraus folgt $y_k\notin X$ und $x_{k-1}y_k\in\bar{G}$, und dies bedeutet einen Widerspruch.

Die Richtigkeit der zweiten Behauptung von (1. 5) folgt einfach daraus, daß die Relation $\wedge$ — auf die Kanten von $[X]_G$ angewendet — in $[X]_G$ und G gleichzeitig besteht.

II) Um die dritte Behauptung von (1. 5) zu beweisen, sei E eine beliebige Kantenklasse. Man darf sich auf $\mathscr{P}(E) \subset \mathscr{P}(G)$ beschränken. Es sei dann $z \in \mathscr{P}(G) - \mathscr{P}(E)$, X die Menge jener Punkte von $\mathscr{P}(E)$, die in G mit z verbunden sind, und $Y = \mathscr{P}(E) - X$. Nehmen wir an, daß $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$ ist. Da die Kanten von E einen zusammenhängenden Graphen bilden, gibt es ein $xy \in E$ mit $x \in X$, $y \in Y$. Es gilt daher $xy \wedge xz$, woraus $xz \in E$ folgt. Dies widerspricht der Definition von $\mathscr{P}(E)$. Damit ist (1. 5) vollständig bewiesen.

(2. 6) *Es seien X und Y fremde geschlossene Mengen. Dann sind X und Y entweder in G oder in $\bar{G}$ vollständig verbunden.*

Beweis. Nehmen wir an, daß G eine XY-Kante enthält: Es sei $xy \in G$, $x \in X$, $y \in Y$. Ferner sei $x' \in X$, $y' \in Y$. Dann ist $xy' \in G$, voraus $x'y' \in G$ folgt.

(2.7) *Sind X_1 und X_2 geschlossen und $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$, so sind auch $X_1 \cap X_2$ und $X_1 \cup X_2$ geschlossen. Gilt ferner noch $X_i' = X_i - (X_1 \cap X_2) \neq \emptyset$ $(i = 1, 2)$, so sind sogar X_1' und X_2' geschlossen.*

Beweis. Die erste Behauptung ist trivial. Um die zweite zu beweisen sei $x \notin X_1'$; $x_1, x_1' \in X_1'$ und $xx_1 \in G$. Wir zeigen, daß dann $xx_1' \in G$ besteht. Im Falle $x \notin X_1$ folgt dies unmittelbar aus der Geschlossenheit von X_1. Es sei nun $x \in X_1 \cap X_2$ und $x_2 \in X_2'$. Dann folgen aus $xx_1 \in G$ und aus der Geschlossenheit von X_1 und X_2 nacheinander die Feststellungen: $x_1x_2 \in G$, $x_2x_1' \in G$, $x_1'x \in G$.

(2. 8) *Es seien G und $\bar{G}$ beide zusammenhängend, X_1 und X_2 geschlossen und $X_1, X_2 \subset \mathscr{P}(G)$. Dann gilt $X_1 \cup X_2 \subset \mathscr{P}(G)$.*

Beweis. Nehmen wir $X_1 \cup X_2 = \mathscr{P}(G)$ an. Es kann dann weder $X_1 \subseteq X_2$, noch $X_2 \subseteq X_1$ gelten, woraus $X_i' = X_i - X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ $(i = 1, 2)$ folgt. Nach (2. 7) und (2. 6) sind dann X_1' und X_2 entweder in G, oder in $\bar{G}$ vollständig verbunden. Im ersten Falle wäre $\bar{G}$, im zweiten G nicht zusammenhängend.

(2. 9) *Es seien G und $\bar{G}$ zusammenhängend und mehrpunktig. Dann fallen die quasimaximalen stark geschlossenen Mengen (kurz: qm. st. g. Mengen) mit den quasimaximalen geschlossenen Mengen (kurz: qm. g. Mengen) zusammen.*

Beweis. Wir zeigen, daß eine jede qm. g. Menge X auch stark geschlossen ist. Gäbe es nämlich ein geschlossenes Y mit $Z = X \cap Y \neq \emptyset$, $X - Z \neq \emptyset$, $Y - Z \neq \emptyset$, so wäre nach (2. 7) und (2. 8) $X \cup Y$ geschlossen, und $X \cup Y \subset \mathscr{P}(G)$, was mit der Quasimaximalität von X in Widerspruch steht.

(2. 10) *Ist G (bzw. $\bar{G}$) nicht zusammenhängend und sind G_i (bzw. $\bar{G}_i$) $(i = 1, \ldots, q$, $q \geqq 2)$ die Komponenten von G (bzw. $\bar{G}$), so fallen die Mengen $A_i = \mathscr{P}(G_i)$ (bzw. $A_i = \mathscr{P}(\bar{G}_i)$) $(i = 1, \ldots, q)$ mit den qm. st. g. Mengen von G zusammen.*

Beweis. Nach der ersten Behauptung von (2. 4) genügt es, jenen Fall zu betrachten, wo G nicht zusammenhängend ist. $A_1, \ldots, A_q$ sind offensichtlich geschlossen. Wir beweisen, daß sie auch stark geschlossen sind. Ist A_i einpunktig, so gilt dies trivial. Es sei A_i mehrpunktig, und nehmen wir an, daß es ein geschlossenes X gibt, für welches keine der Mengen $Y = A_i \cap X$, $A_i - Y$ und $X - Y$ leer ist. Da G_i zusammenhängend ist, gibt es ein $y \in Y$ und ein $a \in A_i - Y$ mit $ay \in G$. Ferner sei $x \in X - Y$.

Es ist dann $x \in A_j$ $(j \neq i)$. X ist geschlossen, und daher ist wegen $ay \in G$ auch $ax \in G$. Dies widerspricht aber der Definition von A_i.

A_i ist eine qm. st. g. Menge. Nehmen wir das Gegenteil an: Es sei X stark geschlossen und $A_i \subset X \subset \mathcal{P}(G)$. Dann muß ein $A_j \subseteqq \mathcal{P}(G) - X$ existieren. Es ist jedoch $Y = A_i \cup A_j$ geschlossen, und es besteht keiner der Fälle $X \cap Y = \emptyset$, $X \subset Y$ und $Y \subset X$. Dies ist ein Widerspruch.

(2. 11) *Es sei G mehrpunktig. Dann bilden die qm. st. g. Mengen von G eine solche echte Zerlegung von $\mathcal{P}(G)$, die sämtliche im Satze* (1. 2) *angeführten Eigenschaften der kanonischen Zerlegung von $\mathcal{P}(G)$ besitzt. Keine andere Zerlegung besitzt alle diese Eigenschaften.*

Beweis. Für jedes $x \in G$ ist $\{x\}$ stark geschlossen und $\{x\} \subset \mathcal{P}(G)$. Es gehört daher jedes x einer qm. st. g. Menge an. Laut der Definition dieser Mengen sind je zwei von ihnen stets fremd, und daher bilden diese tatsächlich eine echte Zerlegung von $\mathcal{P}(G)$.

1) Ist G nicht zusammenhängend, und sind $G_i = [A_i]_G$ $(i = 1, \ldots, q;\ q \geqq 2)$ die Komponenten von G, so sind nach (2. 10) $A_1, \ldots, A_q$ mit den qm. st. g. Mengen identisch. Die Kantenklassen von $G_1, \ldots, G_q$ geben offensichtlich sämtliche Kantenklassen von G an.

2) Ist $\bar{G}$ nicht zusammenhängend, und sind $\bar{G}_i = [A_i]_{\bar{G}}$ $(i = 1, \ldots, q;\ q \geqq 2)$ die Komponenten von $\bar{G}$, so sind nach (2. 10) die $A_1, \ldots, A_q$ ebenfalls mit den qm. st. g. Mengen identisch. Für ein jedes Indexpaar i, j $(1 \leqq i < j \leqq q)$ sind A_i und A_j in G vollständig verbunden, und nach (2. 2) gehören sämtliche A_iA_j-Kanten zur selben Kantenklasse E_{ij}. Wegen der Geschlossenheit von A_i, A_j und $A_i \cup A_j$ enthält laut (1. 5) E_{ij} keine andere Kante. Aus denselben Gründen fallen die von den E_{ij} verschiedenen Kantenklassen von G mit derjenigen der Graphen $[A_i]_G$ $(i = 1, \ldots, q)$ zusammen.

3) Es seien nun G und $\bar{G}$ beide zusammenhängend und $A_1, \ldots, A_q$ $(q \geqq 2)$ die qm. st. g. Mengen von G. Wie schon erwähnt wurde, ist $P = \{A_1, \ldots, A_q\}$ eine echte Zerlegung von $\mathcal{P}(G)$. Nach (2. 6) besitzt P die Eigenschaft a) von (1. 2) 3) Laut (2. 3) gibt es eine Kantenklasse E mit $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(G)$, und für jede andere Klasse E' gilt $\mathcal{P}(E') \subset \mathcal{P}(G)$. Da nach (1. 5) $\mathcal{P}(E')$ geschlossen ist, und nach (2. 9) $A_1, \ldots, A_q$ mit den qm. g. Mengen zusammenfallen, gibt es ein j $(1 \leqq j \leqq q)$ mit $\mathcal{P}(E') \subseteqq A_j$. Daraus und aus (1. 5) folgt, daß P auch die Eigenschaften b) und c) von (1. 2) 3) besitzt. Nehmen wir jetzt an, daß P die Verfeinerung der echten Zerlegung $P' = \{A'_1, \ldots, A'_m\}$ von $\mathcal{P}(G)$ ist, wobei P' die Eigenschaften a), b) und c) von (1. 2) 3) besitzt. Wegen a) sind dann die Mengen A'_i geschlossen. Es gilt ferner $A'_i \subset \mathcal{P}(G)$ $(i = 1, \ldots, m)$, und es gibt ein h und ein j mit $1 \leqq h \leqq m$, $1 \leqq j \leqq q$, $A_j \subset A'_h$. Dies widerspricht aber der Behauptung, daß A_j eine qm. g. Menge ist. P besitzt daher auch die Eigenschaft d) von (1. 2) 3).

Um die Eindeutigkeit der Zerlegung P zu beweisen, nehmen wir an, daß es eine solche von P verschiedene echte Zerlegung $P' = \{A'_1, \ldots, A'_m\}$ von $\mathcal{P}(G)$ gibt, die alle Eigenschaften a), b), c), d) von (1. 2) 3) besitzt. Die Mengen A'_i sind dann geschlossen, und es gilt $A'_i \subset \mathcal{P}(G)$ $(i = 1, \ldots, m)$. Es gibt dann zu jedem A'_i ein A_j mit $A'_i \subseteqq A_j$. Daher ist P' — im Gegensatz zu d) — eine Verfeinerung von P. Damit ist der Beweis von (2. 11) beendet.

(2. 12) *Es sei A eine geschlossene Menge von G und $G' = [A]_G$. Dann ist jedes $X \subseteqq A$ in G und in G' gleichzeitig geschlossen. Ist A in G sogar stark geschlossen, so ist X in G und in G' gleichzeitig stark geschlossen.*

BEWEIS. I) Ist $X \subseteqq A$ in G geschlossen, dann ist es trivialerweise auch in G' geschlossen, unabhängig davon, ob A geschlossen ist oder nicht. Es sei jetzt X in G' geschlossen, $y \in \mathscr{P}(G) - X$, $x \in X$ und $xy \in G$. Ist $y \in A$, so sind y und X in G' — und so auch in G — vollständig verbunden. Ist $y \in \mathscr{P}(G) - A$, so ist wegen der Geschlossenheit von A y mit A — und demnach auch mit X — vollständig verbunden.

II) Es sei jetzt A und $X \subseteqq A$ in G stark geschlossen und $X' \neq X$ eine in G' geschlossene Menge. Nach I) ist X' auch in G geschlossen, und daher gilt eine der Relationen $X \cap X' = \emptyset$, $X \subset X'$, $X' \subset X$. Das bedeutet, daß X auch in G' stark geschlossen ist.

Es seien jetzt A in G und X in G' stark geschlossen und $X' \neq X$ eine beliebige in G geschlossene Menge. Wir zeigen, daß eine der Relationen $X' \cap X = \emptyset$, $X \subset X'$, $X' \subset X$ besteht. Ist $X' \cap X \neq \emptyset$, so muß entweder $A \subset X'$ oder $X' \subseteqq A$ gelten. Im ersten Falle ist $X \subset X'$, im zweiten X' auch in G' geschlossen. Es gilt daher tatsächlich der eine der angedeuteten Relationen.

Durch (2. 11) ist die Richtigkeit von (1. 2) und der ersten Behauptung von (1. 6) vollständig bestätigt. Die zweite Behauptung von (1. 6) folgt mit Hilfe von (2. 11) und (2. 12) durch einen einfachen Induktionsschluß bezüglich der Anzahl der Punkte von G.

3. Die Beweise der Sätze (1.8) und (1.9)

Wir beschäftigen uns erst mit dem Satz (1. 8). Die Behauptungen 2), 3) und 4) von (1. 8) sind trivial. Zum Beweis der Behauptung 1) braucht man dann nach (1. 6) und (2. 9) nur die folgende Aussage zu bestätigen:

(3. 1) *Es seien G und $\bar{G}$ zusammenhängend und mehrpunktig. Dann sind die qm. g. Mengen von G^p einpunktig.*

BEWEIS. Es sei $P = \{A_1, \ldots, A_q\}$ die kanonische Zerlegung von $\mathscr{P}(G)$, und nehmen wir an, daß es in G^p eine mehrpunktige geschlossene Menge X^p mit $X^p \subset \mathscr{P}(G^p)$ gibt. Man darf $X^p = \{A_1, \ldots, A_j\}$ $(2 \leqq j < q)$ setzen. Wir beweisen, daß $A = \bigcup_{i=1}^{j} A_i \subset \subset \mathscr{P}(G)$ in G geschlossen ist. Es sei $x \in \mathscr{P}(G) - A$, und es existiere in G eine xA-Kante xy. Dann gilt $x \in A_k$ $(j < k \leqq q)$, $y \in A_h$ $(1 \leqq h \leqq j)$, und $A_h A_k$ ist eine Kante von G^p. Daraus folgt, daß die Kanten $A_k A_i$ $(i = 1, \ldots, j)$ alle zu G^p gehören, und dies ergibt, daß in G x und A vollständig verbunden sind. Die Geschlossenheit von A steht jedoch zur Quasimaximalität von A_1 in Widerspruch. Damit ist (3. 1) bewiesen.

(3. 2) Endlich beweisen wir die Behauptung 5) von (1. 8). Der Zerlegungsgraph von $\bar{G}$ ist nach (2. 4) und (1. 6) der komplementäre Graph von G^p. Es besteht also $\bar{G}^p = \overline{G^p}$. G und G^p, und ebenso $\bar{G}$ und $\bar{G}^p$ sind offensichtlich gleichzeitig zusammenhängend. Sind also G und $\bar{G}$ beide zusammenhängend und mehrpunktig, so gilt das gleiche auch von G^p und $\bar{G}^p$. In diesem Falle enthält somit laut (2. 3)

G^p mindestens 4 Punkte. Die letzte Behauptung von 5) ergibt sich aus (3. 1) und (1. 2). Damit ist (1. 8) vollständig bewiesen.

(3. 3) Um unsere weiteren Beweise zu verkürzen, führen wir für die Ketten ein besonderes Zeichen ein: Das Bestehen von

$$|x_0 \dots x_n| \subset G$$

soll bedeuten, daß $|x_0 \dots x_n|$ eine Kette von G ist (s. (1. 15)).

Die Kanten einer Kette gehören selbstverständlich zur selben Kantenklasse. Es gilt aber auch das Umgekehrte: Zwei Kanten ab und cd, die zur selben Kantenklasse von G gehören, lassen sich stets durch eine Kette von G verbinden, d. h. es gibt eine Kette $|x_0 \dots x_n| \subset G$ mit $x_0 x_1 = ab$ und $x_{n-1}x_n = cd$. Die in G mit ab und cd bezeichneten Kanten gehören nämlich derselben Komponente des Verknüpfungsgraphen $\tilde{G}$ an (s. (1. 12)). Es gibt daher in $\tilde{G}$ einen Zug (Weg) $\tilde{Z}$, der diese Kanten verbindet, und die zu $\tilde{Z}$ gehörige Kette in G verbindet dann ab und cd.

Es sei noch bemerkt, daß im Falle $x_0, \dots, x_n \in A \subset \mathscr{P}(G)$, aus $|x_0 \dots x_n| \subset [A]_G$ das Bestehen von $|x_0 \dots x_n| \subset G$ folgt. (Das Umgekehrte ist allgemein nicht richtig. S. die letzte Behauptung von (1. 11)).

(3. 4) Zum Beweis von (1. 9) bezeichne $P = \{A_1, \dots, A_q\}$ wieder die zu G gehörige kanonische Zerlegung. Es werden jedoch die Punkte von G^p, neben $A_1, \dots, A_q$, auch mit anderen, jedenfalls aber mit großen Buchstaben bezeichnet. Ferner wird die Relation $\sim$ auch auf die Kanten von G^p angewendet. Die Relation $XY \sim XZ$ soll sich immer auf den Graphen G^p beziehen, und es soll in $XY \sim XZ$ das Gelten von $XY, XZ \in G^p$ miteinverstanden sein.

(3. 5) *Es seien X, Y, Z verschiedene Punkte von G^p und $x \in X, y \in Y$, $z \in Z$. Dann folgt aus $XY \sim XZ$ die Behauptung $xy \sim xz$.*

Beweis. Gilt $XY \sim XZ$, so gibt es in $\bar{G}^p$ einen Weg $(X_0 \dots X_n)$ mit $X_0 = Y$, $X_n = Z$ und $XX_i \in G^p$ $(i = 1, \dots, n-1)$. Es sei $x_0 = y$, $x_n = z$ und $x_i \in X_i$ $(i = 1, \dots, n-1)$. Dann ist $(x_0 \dots x_n)$ ein Weg von $\bar{G}$, und es gelten $xx_i \in G$ $(i = 0, \dots, n)$. Also besteht $xy \sim xz$.

(3. 6) *Es seien G und $\bar{G}$ zusammenhängend und mehrpunktig, $XY \in G^p$, $x \in X$, $y, y' \in Y$ und $xy \not\sim xy'$ ($\not\sim$ bezeichnet die Negation von $\sim$). Dann gibt es ein solches von X und Y verschiedenes $Z \in G^p$, daß für jedes $z \in Z$ $|xyzy'x| \subset G$ besteht.*

Beweis. Es ist $y \neq y'$. Da G^p und $\bar{G}^p$ beide zusammenhängend sind, gibt es ein $X'Y' \in G^p$, das mit Y nicht inzidiert. Nach (1. 8) gehören alle Kanten von G^p zur selben Kantenklasse, und daher gibt es nach (3. 3) eine Kette $|X_0 \dots X_n| \subset G^p$ mit $X_0 X_1 = XY$ und $X_{n-1}X_n = X'Y'$. Gelten $X_0 = Y$, $X_1 = X$, so folgt nach (3. 5) aus $X_0 X_1 \sim X_1 X_2$ für ein $x_2 \in X_2$ die Relation $xy \sim xx_2 \sim xy'$, und dies steht zu $xy \not\sim xy'$ in Widerspruch. Daher gelten $X_0 = X$ und $X_1 = Y$. Daraus folgt $X'Y' \neq X_1 X_2$, und dies ergibt $n > 2$. Man kann demnach $X_1 X_2 \sim X_2 X_3$ feststellen. Laut (3. 5) gilt dann für $z \in X_2$, $x_3 \in X_3$ die Relation $zy \sim zx_3 \sim zy'$. Aus $X_0 X_1 \sim X_1 X_2$ folgen $yx \sim yz$ und $y'x \sim y'z$, und so gilt $|xyzy'x| \subset G$. $Z = X_2$ genügt also unseren Forderungen.

(3. 7) Beweis des Teiles 1) von (1. 9). Man nehme an, daß G t-orientierbar ist und betrachte eine beliebige t-Orientierung von diesem. Dabei wird jeder Teil-

graph $[A^{r-1}]_G$ ein t-orientierter Graph. Daher genügt es nur den Fall $r=1$ zu behandeln. Es ist $P^1=P=\{A_1, \ldots, A_q\}$.

Ist G einpunktig oder nicht zusammenhängend, so ist nichts zu beweisen. Sei also G mehrpunktig und zusammenhängend.

a) Um die erste Behauptung von 1) zu beweisen, sei ein Indexpaar i, j mit $A_iA_j \in G^p$ fest ausgewählt, und man setze $x_i \in A_i$, $x_j, x_j' \in A_j$. Es genügt folgendes zu zeigen:

(1) $\qquad x_ix_j$ und x_ix_j' besitzen bezüglich x_i die gleiche Richtung.

Ist $\bar{G}$ nicht zusammenhängend, so folgt (1) einfach aus (1. 2) 2) und (2. 2) (s. den vierten Absatz von (1. 11)).

Es sei nun auch $\bar{G}$ zusammenhängend. Ist $x_ix_j \sim x_ix_j'$, so ist das Gelten von (1) offensichtlich. Nehmen wir an, daß $x_ix_j \not\sim x_ix_j'$ besteht. Nach (3. 6) gibt es dann ein A_k $(k \neq i, j)$ derart, daß für $x_k \in A_k$ $\varkappa = |x_ix_jx_kx_j'x_i| \subset G$ besteht. Bei einem Durchlauf der Kette $\varkappa$ finden wir jedoch die Richtungen der Kanten abwechselnd übereinstimmend und entgegengesetzt zur Durchlaufsrichtung. Daraus folgt (1).

b) Um die zweite Behauptung von 1) zu beweisen, nehmen wir an, daß durch unsere Orientierungsvorschrift aus den Kanten A_iA_j und A_jA_k von G^p die gerichteten Kanten $\overrightarrow{A_iA_j}$ und $\overrightarrow{A_jA_k}$ entstehen. Es sei $x_i \in A_i$, $x_j \in A_j$, $x_k \in A_k$. In G findet man dann die gerichteten Kanten $\overrightarrow{x_ix_j}$ und $\overrightarrow{x_jx_k}$. Es existiert daher in G auch $\overrightarrow{x_ix_k}$, und daraus folgt nach a), daß G^p die Kante $\overrightarrow{A_iA_k}$ enthält. G^p wurde also tatsächlich transitiv orientiert.

Zum Beweis des Teiles 2) von (1. 9) müssen wir noch die folgende einfache Behauptung bestätigen.

(3. 8) *Es sei G mehrpunktig. Ferner seien sämtliche Graphen G^p, $[A_i]_G$ $(i=1, \ldots, q)$ t-orientierbar, und man wähle für jeden dieser Graphen eine t-Orientierung. Ist dann $A_iA_j \in G^p$, und erteilt man sämtlichen A_iA_j-Kanten von G, bezüglich A_i und A_j, die Richtung von A_iA_j, und führt man dies für jede Kante von G^p durch, so erhält man, zusammen mit den Orientierungen der Graphen $[A_i]_G$, eine t-Orientierung von G.*

Beweis. Nehmen wir an, daß durch die angegebene Orientierungsvorschrift aus den Kanten xy und yz von G die gerichteten Kanten $\vec{xy}$ und $\vec{yz}$ entstehen. Wir beweisen, daß dann auch $\vec{xz}$ in G vorkommt. Wir unterscheiden drei Fälle:

1) Es gilt $x, y, z \in A_i$ $(1 \leqq i \leqq q)$. Dann folgt die Behauptung aus der Transitivität der Orientierung von $[A_i]_G$.

2) Zwei von den x, y, z gehören zu einem A_i, das dritte zu A_j $(i \neq j)$. Da sämtliche A_iA_j-Kanten von G bezüglich A_i und A_j dieselbe Richtung haben, kann $x, z \in A_i$, $y \in A_j$ nicht bestehen. Bei den anderen zwei Möglichkeiten folgt unsere Behauptung aus den Tatsachen, daß A_i und A_j in G vollständig verbunden sind, und alle A_iA_j-Kanten bezüglich A_i und A_j dieselbe Richtung haben.

3) Es ist $x \in A_i$, $y \in A_j$, $z \in A_k$, wobei i, j, k verschieden sind. Dann folgt die Behauptung aus der Transitivität der Orientierung von G^p.

(3.9) Man erhält jetzt den Beweis des Teiles 2) von (1. 9) durch Induktion bezüglich der Anzahl der Punkte von G. Besitzt der Graph nur einen Punkt, so ist die Behauptung trivial. Wir nehmen an, daß die Behauptung für Graphen mit weniger als n $(n>1)$ Punkten richtig ist, und beweisen sie für ein G mit n Punkten. Es sei $P=\{A_1, \ldots, A_q\}$ die kanonische Zerlegung von $\mathscr{P}(G)$. Es ist $q \geqq 2$, also hat jeder Graph $[A_i]_G$ $(i=1, \ldots, q)$ weniger als n Punkte. Diese Graphen genügen sämtlichen Voraussetzungen des Satzes. Infolge der Induktionsannahme erhält durch unsere Orientierungsvorschrift jedes $[A_i]_G$ eine t-Orientierung. Dann ist jedoch nach (3. 8) auch die Orientierung von G transitiv.

4. Beweis des Satzes (1.16)

(4. 1) ERKLÄRUNGEN. Wir wollen für die geschlossenen Ketten ein besonderes Zeichen einführen:

$$\langle x_1 \ldots x_n \rangle \subset G$$

soll bedeuten, daß $\langle x_1 \ldots x_n \rangle$ eine geschlossene Kette des Graphen G ist, d. h. $x_i x_{i+1}$ $(i=1, \ldots, n;\ x_{n+1}=x_1)$ verschiedene Kanten von G sind, und $x_{i-1}x_i \sim x_i x_{i+1}$ $(i=1, \ldots, n;\ x_0=x_n,\ x_{n+1}=x_1)$ bestehen.

Aus $\langle x_1 \ldots x_n \rangle \subset G$ folgt $\langle x_n \ldots x_1 \rangle \subset G$ und $\langle x_i \ldots x_n x_1 \ldots x_{i-1} \rangle \subset G$ $(2 \leqq i \leqq n)$. Wir wollen alle diese Ketten als identisch betrachten.

Ist $\hat{\varkappa}$ eine geschlossene Kette von G, so soll $x \in \hat{\varkappa}$ bzw. $xy \in \hat{\varkappa}$ bedeuten, daß x ein Punkt bzw. xy ein Kante von $\hat{\varkappa}$ ist. Ähnliche Bezeichnungen werden auch für offene Ketten angewendet.

Die Teilketten einer Kette (bzw. geschlossenen Kette) werden ihrer anschaulichen Deutung entsprechend definiert. Eine Teilkette, die nicht alle Kanten der ursprünglichen Kette (bzw. geschlossenen Kette) enthält, heißt *echt*. Daß die Kette $\varkappa_1$ eine Teilkette der Kette $\varkappa$ (bzw. der geschlossenen Kette $\hat{\varkappa}$) ist, wird mit $\varkappa_1 \subseteqq \varkappa$ (bzw. $\varkappa_1 \subset \hat{\varkappa}$) bezeichnet.

Ist $\varkappa = |x_0 \ldots x_n| \subset G$ und gelten $x_0 = x_n$ und $x_{n-1}x_n \sim x_n x_1$, so gilt $\langle x_1 \ldots x_n \rangle \subset G$, und wir sagen, daß $\varkappa$ (in G) *sich schließen läßt*.

Enthält eine Kette (geschlossene Kette) eine *echte* Teilkette, die sich schließen läßt, so sagen wir, daß sie *sich schneidet*. Eine sich schneidende Kette (geschlossene Kette) besitzt einen solchen Punkt, bei dem mehr als zwei Kanten der Kette (geschlossene Kette) paarweise verknüpft sind, und umgekehrt.

Ist eine Kante xx' mit einer Kante der Kette $\varkappa$ (bei dem Punkt x) verknüpft, so sagen wir, daß xx' (bei dem Punkt x) mit $\varkappa$ verknüpft ist. Dies bezeichnen wir mit $xx' \sim \varkappa$. Die gleichen Benennungen und die gleiche Bezeichnung werden auch bezüglich geschlossener Ketten angewendet.

Wir werden statt „$xy \neq xz$ und $xy \sim xz$" öfters kurz $|yxz| \subset G$ schreiben.

Ist $|xyz|$ eine Kette von G, und ist $y'y \in G$, so soll $y'y \nsim |xyz|$ bedeuten, daß $y'y \nsim xy$ gilt (dann gilt auch $y'y \nsim yz$, und die Punkte x, y, z, y' sind verschieden). Sind $|xyz|$ und $|x'yz'|$ Ketten von G, so soll $|xyz| \nsim |x'yz'|$ ausdrücken, daß $xy \nsim x'y$ besteht (dann bestehen auch $xy \nsim yz'$, $yz \nsim x'y$, $yz \nsim yz'$ und die Punkte x, x', y, z, z' sind verschieden).

Aus der Tatsache, daß den „kürzesten" Ketten von G in $\tilde{G}$ Wege entsprechen, folgt unmittelbar die Behauptung:

(4. 2) *Es sollen die verschiedenen Kanten ab und cd zur selben Kantenklasse von G gehören, und es sei $\varkappa$ eine kürzeste Kette (von G), die ab mit cd verbindet. Dann läßt sich $\varkappa$ nicht schließen und es schneidet sich auch nicht.*

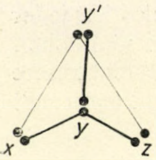


Fig. 4

Die folgenden einfachen Lemmata sind die wichtigsten Hilfsmittel der nachfolgenden Beweise.

(4. 3) LEMMA. *Es sei* $|xyz|\subset G$, $y'y\in G$ *und es bestehe*

$$y'y \not\sim |xyz|.$$

Dann besteht

$$|xy'z|\subset G.$$

(S. Fig. 4.) [16]

BEWEIS. x, y, z und y' sind verschieden. Wegen $xy\sim yz$ gibt es einen Weg $W=(y_0 \dots y_n)$ von $\bar{G}$ mit $y_0=x$, $y_n=z$, $yy_i\in G$ $(i=1, \dots, n-1)$. Alle yy_i $(0\leqq i\leqq n)$ sind bei y paarweise verknüpft, daher folgt aus $y'y\not\sim xy$ die Behauptung $y'y\not\sim yy_i$ $(i=1, \dots, n)$. Demzufolge muß $y'y_i\in G$ $(i=0, \dots, n)$ bestehen, woraus in Betracht auf W $xy'\sim y'z$ folgt.

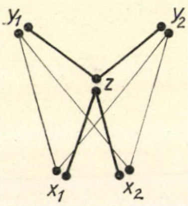


Fig. 5

(4. 4) LEMMA. *Es sei* $|x_1zx_2|\subset G$, $|y_1zy_2|\subset G$ *und*

$$|x_1zx_2|\not\sim |y_1zy_2|.$$

Dann besteht

$$\langle x_1y_1x_2y_2\rangle\subset G.$$

(S. Fig. 5.) [16]

BEWEIS. x_1, y_1, x_2, y_2 und z sind verschiedene Punkte und es gelten

$$x_iz\not\sim |y_1zy_2| \quad \text{und} \quad y_iz\not\sim |x_1zx_2| \quad (i=1, 2).$$

Nach (4. 3) sind dann $|y_1x_iy_2|$ und $|x_1y_ix_2|$ Ketten von G $(i=1, 2)$. Daraus folgt $\langle x_1y_1x_2y_2\rangle\subset G$.

Wir beweisen folgenden Hilfssatz:

(4. 5) HILFSSATZ. *Es sollen mindestens zwei der Kanten* a_1a_2, a_2a_3, a_3a_1 *von* G *zur selben Kantenklasse von* G *gehören, und*

(1) $$a_1a_2\not\sim a_2a_3, \quad a_2a_3\not\sim a_3a_1, \quad a_3a_1\not\sim a_1a_2$$

gelten. Dann gibt es einen Index i $(1\leqq i\leqq 3)$ *und einen von* a_1, a_2, a_3 *verschiedenen Punkt* b *derart, daß*

$$|a_ia_{i+1}ba_{i-1}a_i|\subset G \qquad (a_4=a_1,\ a_0=a_3)$$

besteht.

BEWEIS. Betrachte man die Menge M sämtlicher solchen Ketten von G, die zwei Kanten von a_1a_2, a_2a_3 und a_3a_1 verbinden. M ist nicht leer. Es sei

$$\varkappa=|x_1x_2 \dots x_k|$$

eine kürzeste Kette von M. Man darf annehmen, daß $x_1=a_1$ und $x_2=a_2$ gelten. Wegen (1) ist dann $x_3\neq a_3$, also ist x_3 von a_1, a_2, a_3 verschieden und deshalb $k\geqq 5$. Es gilt $a_3a_2\not\sim |x_1x_2x_3|$, und so folgt nach (4. 3) $|x_1a_3x_3|\subset G$. Es besteht daher $x_3a_3\sim a_1a_3$.

[16] Die nahe zueinander liegenden Punkte bedeuten denselben Punkt. Die Inzidenzen zeigen die festgestellten Verknüpfungen.

Ist $x_3a_3 \sim x_3x_2$, so ist $|a_1a_2x_3a_3a_1| \subset G$, man kann also $i=1$, $b=x_3$ setzen. Wir führen nun unseren Beweis dadurch zu Ende, daß wir aus der Annahme $x_3a_3 \nsim x_3x_2$ einen Widerspruch herleiten. Es sei also $x_3a_3 \nsim x_3x_2$. Dann bestehen $x_4 \neq a_3$ und $a_3x_3 \nsim |x_2x_3x_4|$. Nach (4. 3) ist daher $|x_2a_3x_4| \subset G$, woraus wegen (1) $x_4 \neq a_1$ folgt. x_4 ist also von den Punkten a_1, a_2, a_3, x_3 verschieden. Wegen (1) gilt ferner $|x_1a_3x_3| \nsim |x_2a_3x_4|$, und dies ergibt nach (4. 4)

(2) $$\hat{\varkappa} = \langle x_1x_2x_3x_4 \rangle \subset G.$$

Laut (4. 2) kann sich $\varkappa$ nicht schneiden, und daher kann x_4x_1 keine Kante von $\varkappa$ sein. Wäre nämlich dies der Fall, so wären bei x_1 — da x_4x_1 keine Endkante von $\varkappa$ sein kann — mindestens drei Kanten von $\varkappa$ paarweise verknüpft. Ferner ist in Betracht von (2) $x_4x_1 \sim x_4x_3 \sim x_4x_5$. Ersetzt man daher in $\varkappa$ die Teilkette $|x_1x_2x_3x_4|$ durch die Teilkette $|x_2x_1x_4|$ von $\hat{\varkappa}$, so bekommt man wieder eine Kette $\varkappa' = |x_2x_1x_4x_5 \ldots x_k|$ von G. $\varkappa'$ hat dieselben Endkanten wie $\varkappa$, sie ist jedoch kürzer als $\varkappa$. Dies ist ein Widerspruch.

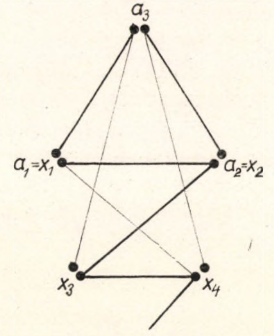


Fig. 6

Bemerkung. Es soll erwähnt sein, daß man im Beweis (3. 7) statt (3. 6) auch (4. 5) anwenden könnte.

(4. 6) *Enthält G keine ungerade geschlossene Kette, und gehören sämtliche Kanten von G zur selben Kantenklasse, so ist G t-orientierbar.*

Beweis. Es soll G den erwähnten Forderungen genügen. Man darf annehmen, daß G Kanten enthält. Dann ist der Verknüpfungsgraph $\tilde{G}$ von G ein zusammenhängender paarer Graph (s. (1. 15)). Demnach zerfällt $\mathscr{P}(\tilde{G})$ in eindeutiger Weise in die Punktklassen A und B derart, daß $\tilde{G}$ nur AB-Kanten enthält. Man orientiere nun sämtliche Kanten von $\tilde{G}$ von A nach B laufend. Es wird dabei aus jedem A-Punkt eine Quelle, aus jedem B-Punkt eine Senke. Für jeden Punkt x^i von $\tilde{G}$ gilt daher, daß alle mit x^i inzidenten Kanten von $\tilde{G}$ bezüglich x^i die gleiche Richtung haben. Durch die durchgeführte Orientierung der Kanten wurde auch aus G ein orientierter Graph, der die folgende Eigenschaft besitzt:

(1) Gilt für die Kanten xy und xz von G $xy \sim xz$, so haben xy und xz bezüglich x die gleiche Richtung.

Wir beweisen, daß G transitiv orientiert ist. Es sollen in G die gerichteten Kanten $\overrightarrow{a_1a_2}$ und $\overrightarrow{a_2a_3}$ vorkommen. Dann muß $a_1a_3 \in G$ gelten. Ist nämlich $a_1a_3 \in \bar{G}$, so gilt $a_1a_2 \sim a_3a_2$, und dies steht mit (1) in Widerspruch. a_1a_3 kann nicht von a_3 nach a_1 gerichtet sein. Ist nämlich dies der Fall, so müssen nach (1) $a_1a_2 \nsim a_2a_3$, $a_2a_3 \nsim a_3a_1$ und $a_3a_1 \nsim a_1a_2$ gelten, und so existiert nach (4. 5) ein a_i, sagen wir a_1, und dazu ein $b \in G$ mit $\varkappa = |a_1a_2ba_3a_1| \subset G$. Nach (1) müssen dann die bei a_2, b bzw. a_3 verknüpften Kanten von $\varkappa$ bezüglich a_2, b bzw. a_3 die gleichen Richtungen haben. Dies kann jedoch bei den angegebenen Richtungen von a_1a_2 und a_1a_3 nicht der Fall sein. G enthält also mit $\overrightarrow{a_1a_2}$ und $\overrightarrow{a_2a_3}$ auch $\overrightarrow{a_1a_3}$. Damit ist der Beweis beendet.

(4. 7) *Enthält G keine ungerade geschlossene Kette, so enthält auch der Zerlegungsgraph G^p von G keine solche.*

BEWEIS. Es sei $\langle X_1 \dots X_{2n+1}\rangle \subset G^p$. Für jedes i $(1 \leqq i \leqq 2n+1)$ sind X_{i-1}, X_i, X_{i+1} verschiedene Punkte von G^p $(X_0 = X_{2n+1}, X_{2n+2} = X_1)$. Es sei $x_i \in X_i$ $(i = 1, \dots, 2n+1)$. Dann gilt nach (3. 5) $\langle x_1 \dots x_{2n+1}\rangle \subset G$. Dies beweist die Behauptung.

(4. 8) Der Beweis des Teiles „dann" von (1. 16) ergibt sich jetzt folgendermaßen: Enthält G keine ungerade geschlossene Kette, so gilt das gleiche auch für jeden $[A]_G$ mit beliebigem $A \subset \mathscr{P}(G)$ (s. (3. 3)), also für jeden Graphen $[A^{r-1}]_G = G_{(r-1)}$ $(r = 2, 3, \dots)$, wobei A^{r-1} eine Punktklasse $(r-1)$-ter Ordnung von G bezeichnet. Nach (4. 7) enthält dann keiner der Zerlegungsgraphen $G^p_{(r-1)}$ $(r = 1, 2, \dots)$ ungerade geschlossene Ketten. Nach (1. 8) und (4. 6) sind somit alle diese Graphen t-orientierbar, und so folgt aus (1. 9), daß auch G t-orientierbar ist.

5. Beweis des Satzes (1.17)

(5. 1) ERKLÄRUNGEN. Bezeichnet R einen Weg, Kreis (Vieleck), eine Kette oder eine geschlossene Kette, so verstehen wir unter einer *Diagonale* von R eine solche Kante, die nicht in R vorkommt, deren Endpunkte jedoch zu R gehören.

Ist $\hat{\varkappa}$ eine geschlossene Kette und ist die Kante xx' bei ihren *beiden* Endpunkten mit $\hat{\varkappa}$ verknüpft, so setzen wir

(1) $$xx' \approx \hat{\varkappa}.$$

($xx' \not\approx \hat{\varkappa}$ soll die Negation von (1) bedeuten.)

In diesem Abschnitt wollen wir unter einer *Schlinge* (von G) eine Kette $|x_0 x_1 \dots x_n| \subset G$ mit $x_0 = x_n$ verstehen. Ist keine echte Teilkette der geschlossenen Kette $\hat{\varkappa} = \langle x_1 \dots x_n\rangle$ eine Schlinge, so sind die Punkte $x_1, \dots, x_n$ verschieden, und umgekehrt. Die schlingenlosen geschlossenen Ketten fallen also mit den Kreisketten zusammen.

In Betracht von (1. 16) genügt es zum Beweis von (1. 17), die Richtigkeit der folgenden Behauptung einzusehen:

(5. 2) SATZ. *Enthält der Graph G eine ungerade geschlossene Kette, so enthält er auch eine ungerade Kreiskette.*

BEWEIS. I) Wir nehmen an, daß G ungerade geschlossene Ketten enthält und bezeichnen mit n ($n \geqq 3$ und ungerade) den kleinsten Wert der Längen dieser Ketten. Es sei M die Menge jener geschlossenen Ketten von G, die die Länge n haben. Wir schicken zwei triviale Behauptungen bezüglich der Ketten $\hat{\varkappa}$ von M voraus.

a) $\hat{\varkappa}$ kann sich nicht schneiden.

b) Ist xx' eine Diagonale von $\hat{\varkappa}$, so gilt $xx' \not\approx \hat{\varkappa}$. Die Eigenschaft a) werden wir in jener Form ausnützen, daß in keinen Punkt von $\hat{\varkappa}$ mehr als zwei Kanten von $\hat{\varkappa}$ paarweise verknüpft sein können.

II) Entgegegen der Behauptung unseres Satzes sei angenommen, daß kein Element von M eine Kreiskette ist, also daß jedes von diesen eine Schlinge enthält. Es bezeichne s ($s \geqq 3$) den kleinsten Wert der Längen dieser Schlingen und

$$\hat{\varkappa} = \langle x_1 \dots x_n\rangle$$

ein solches Element von M, das eine Schlinge $\varkappa$ der Länge s besitzt. Man darf

$$\varkappa = |x_n x_1 \dots x_s| \qquad (x_s = x_n)$$

setzen. Aus $s \geqq 3$ folgt $n \geqq 7$. Wegen der Minimalität von s sind die Punkte x_{n-1}, $x_1, \dots, x_s, x_{s+1}$ verschieden. Nach Ia) gilt für die Teilketten $|x_{n-1}x_n x_1|$ und $|x_{s-1}x_s x_{s+1}|$ von $\hat{\varkappa}$ $|x_{n-1}x_n x_1| \not\sim |x_{s-1}x_s x_{s+1}|$, und so folgt laut (4. 4)

$$\hat{\varkappa}_1 = \langle x_{n-1}x_{s-1}x_1 x_{s+1}\rangle \subset G.$$

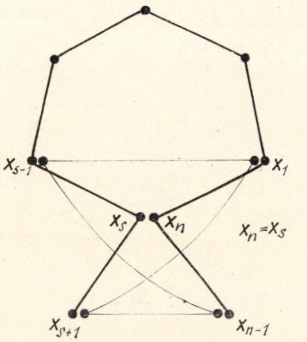


Fig. 7

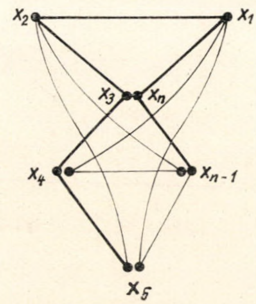


Fig. 8

III) Es sei zuerst $s=3$. Dann ist

$$\hat{\varkappa}_1 = \langle x_{n-1}x_2 x_1 x_4\rangle,$$

und so gelten $x_4 x_1 \sim x_2 x_1 \sim x_n x_1$ und $x_{n-1}x_2 \sim x_1 x_2 \sim x_3 x_2$. Wegen Ia) sind dann $x_4 x_1$, $x_{n-1}x_2 \notin \hat{\varkappa}$, und nach Ib) besteht für $|x_1 x_4 x_{n-1}| \subset \hat{\varkappa}_1$

(1) $$x_3 x_4 \not\sim |x_1 x_4 x_{n-1}|$$

und

(2) $$x_{n-1}x_2 \not\sim x_{n-1}x_n.$$

Daraus folgt $x_5 \neq x_1$ und $x_5 \neq x_{n-1}$. Es besteht jedoch auch $x_5 \neq x_2$. Ist nämlich $x_5 = x_2$, dann ist nach Ia) $x_4 x_5 = x_4 x_2 \not\sim |x_1 x_2 x_3|$, woraus laut (4. 3) $|x_1 x_4 x_3| \subset G$ folgt. Dies steht aber mit (1) in Widerspruch. Da auch $x_5 \neq x_3$ gilt, ist x_5 von den Punkten x_{n-1}, x_1, x_2, x_3 verschieden.

Nun gilt jetzt nach (1) $|x_1 x_4 x_{n-1}| \not\sim |x_3 x_4 x_5|$, und daraus folgt nach (4. 4)

$$\hat{\varkappa}_2 = \langle x_1 x_3 x_{n-1} x_5\rangle = \langle x_1 x_n x_{n-1} x_5\rangle \subset G.$$

Wegen (2) besteht für $|x_2 x_{n-1} x_4| \subset \hat{\varkappa}_1$ und $|x_n x_{n-1} x_5| \subset \hat{\varkappa}_2$

$$|x_2 x_{n-1} x_4| \not\sim |x_n x_{n-1} x_5|,$$

woraus nach (4. 4)

$$\langle x_2 x_n x_4 x_5\rangle = \langle x_2 x_3 x_4 x_5\rangle \subset G$$

folgt. Es besteht also $x_2 x_5 \approx \hat{\varkappa}$, und dies steht entweder zu Ia), oder zu Ib) in Widerspruch.

IV) Im folgenden sei $s \geqq 4$. Dann ist nach I) $x_1 x_{s-1} \not\approx \hat{\varkappa}$. Man darf $x_1 x_{s-1} \nsim \nsim x_{s-1} x_s$ annehmen. Für $|x_{n-1} x_{s-1} x_1| \subset \hat{\varkappa}_1$ gilt dann $|x_{s-2} x_{s-1} x_s| \nsim |x_{n-1} x_{s-1} x_1|$, woraus nach (4. 4)

$$\hat{\varkappa}_3 = \langle x_{s-2} x_{n-1} x_s x_1 \rangle = \langle x_{s-2} x_{n-1} x_n x_1 \rangle \subset G \tag{3}$$

folgt.

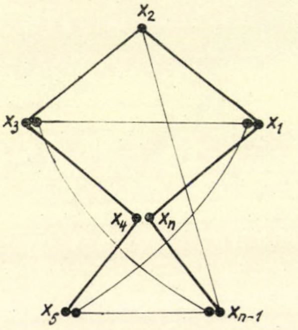


Fig. 9

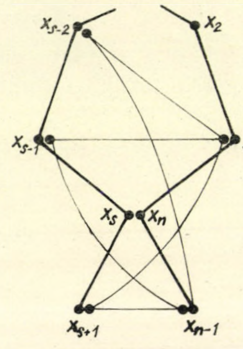


Fig. 10

Ist nun $s=4$, so ist $x_{s-2}=x_2$ und $\hat{\varkappa}_3=\langle x_2 x_{n-1} x_n x_1 \rangle$. Also ist $x_2 x_{n-1} \approx \hat{\varkappa}$, und das bedeutet wegen I) einen Widerspruch.

Schließlich sei $s \geqq 5$ angenommen. Dann ist $x_{s-2} \neq x_2$, und daher bestehen nach I) und (3)

$$x_1 x_{s-2} \notin \hat{\varkappa} \quad \text{und} \quad x_{n-1} x_{s-2} \notin \hat{\varkappa}. \tag{4}$$

Ersetzt man daher in

$$\hat{\varkappa} = \langle x_2 \dots x_{s-2} \dots x_{n-2} x_{n-1} x_n x_1 \rangle$$

die Teilkette $|x_{n-1} x_n x_1|$ durch die Teilkette $|x_{n-1} x_{s-2} x_1|$ von $\hat{\varkappa}_3$, so bekommt man eine geschlossene Kette

$$\hat{\varkappa}_4 = \langle x_2 \dots x_{s-2} \dots x_{n-2} x_{n-1} x_{s-2} x_1 \rangle$$

von G. Es ist $\hat{\varkappa}_4 \in M$, und $\hat{\varkappa}_4$ enthält die Schlinge $\varkappa' = |x_{s-2} x_1 x_2 \dots x_{s-2}|$. Die Länge von $\varkappa'$ ist jedoch um 2 kleiner als diejenige von $\varkappa$. Wir haben so im jeden Falle einen Widerspruch hergeleitet, und dies zeigt die Richtigkeit unseres Satzes.

6. Bestimmung jener irreduziblen Graphen, die keine Dreieckskette enthalten

(6. 1) ERKLÄRUNG. Ist $\varkappa = |x_1 \dots x_m|$ $(m \geqq 3)$ eine Wegkette bzw. $\hat{\varkappa} = \langle y_1 \dots y_n \rangle$ $(n \geqq 3)$ eine Kreiskette des Graphen G (s. (1. 15)), so sollen die Diagonalen $x_{i-1} x_{i+1}$ $(i=2, \dots, n-1)$ bzw. $y_{i-1} y_{i+1}$ $(i=1, \dots, n;\ y_0=y_n,\ y_{n+1}=y_1)$ die *kurzen* Diagonalen von $\varkappa$ bzw. $\hat{\varkappa}$ heißen.

Wir schicken drei einfache Lemmata voraus.

(6. 2) LEMMA. *Es sei* $|x'xx''|\subset G$, *und* $W=(y_0 \dots y_\alpha)$ $(\alpha \geqq 2,\ y_0=x',\ y_\alpha=x'')$ *sei ein kürzester* $x'x''$*-Weg des Graphen* $[N(x)]_G$ *(s. Fußnote 9). Dann gehört jede Diagonale von* W *zu* G, *und im Falle* $\alpha \geqq 3$ *bestehen die Relationen*

$$y_i y_0 \sim y_i y_1 \sim \dots \quad \sim y_i y_{i-2} \qquad (i=3, \dots, \alpha),$$

$$y_i y_{i+2} \sim y_i y_{i+3} \sim \quad \sim y_i y_\alpha \qquad (i=0, \dots, \alpha-3).$$

BEWEIS. Die erste Behauptung folgt aus der Minimaleigenschaft von W, die zweite aus der ersten und aus den Tatsachen $(y_0 \dots y_{i-2}) \subset \bar{G}$, $(y_{i+2} \dots y_\alpha) \subset \bar{G}$.

(6. 3) LEMMA. *Es sei* $\varkappa=|x_1 \dots x_k|$ $(k \geqq 3)$ *eine Wegkette von* G, *und möge keine zu* G *gehörige Diagonale von* $\varkappa$ *bei ihren beiden Endpunkten mit* $\varkappa$ *verknüpft sein. Ferner mögen sämtliche kurzen Diagonalen von* $\varkappa$ *zu* $\bar{G}$ *gehören. Dann gehören alle Diagonalen von* $\varkappa$ *zu* $\bar{G}$.

BEWEIS. Für $k=3$ ist die Behauptung trivial. Nehmen wir an, daß sie für $k=n-1$ $(n \geqq 4)$ richtig ist, und es sei jetzt $k=n$. Die Teilketten $|x_1 \dots x_{n-1}|$ und $|x_2 \dots x_n|$ von $\varkappa$ genügen sämtlichen Bedingungen des Lemmas, und so gehören nach der Induktionsanname außer x_1x_n alle Diagonalen von $\varkappa$ zu $\bar{G}$. Wäre $x_1x_n \in G$, so würden $x_1x_{n-1}, x_2x_n \in \bar{G}$ den Widerspruch $x_1x_n \approx \varkappa$ ergeben. Es ist also auch $x_1x_n \in \bar{G}$.

(6. 4) LEMMA. *Es sei* $\varkappa=|x_1 \dots x_k|$ $(k \geqq 3)$ *eine Wegkette von* G, $x \notin \varkappa$, $xx_2 \in G$ *und für kein* $xx_i \in G$ *soll* $xx_i \sim \varkappa$ *gelten* $(i=2, \dots, k-1)$. *Dann ist* $xx_i \in G$ $(i=1, \dots, k)$,

$$xx_{2i-1} \sim xx_1 \qquad \left(i=2, \dots, \left[\frac{k+1}{2}\right]\right),$$

und falls $k \geqq 4$ *ist, so auch*

$$xx_{2i} \sim xx_2 \qquad \left(i=2, \dots, \left[\frac{k}{2}\right]\right).$$

BEWEIS. Für $|x_1x_2x_3| \subset \varkappa$ gilt $xx_2 \not\sim |x_1x_2x_3|$, woraus nach (4. 3) $|x_1xx_3| \subset G$ folgt. Damit ist der Fall $k=3$ erledigt. Nehmen wir an, daß die Behauptung für $k=n-1$ $(n \geqq 4)$ richtig ist, und sei $k=n$. Die Teilkette $|x_1 \dots x_{n-1}|$ genügt sämtlichen Voraussetzungen des Lemmas, woraus nach der Induktionsannahme $xx_{n-1} \in G$ folgt. Es gilt ferner für $|x_{n-2}x_{n-1}x_n| \subset \varkappa$ die Behauptung $xx_{n-1} \not\sim |x_{n-2}x_{n-1}x_n|$. Nach (4. 3) ist dann $|x_{n-2}xx_n| \subset G$. Dies ergibt, zusammen mit der Induktionsannahme, die Richtigkeit sämtlicher Behauptungen des Lemmas.

(6. 5) VORAUSSETZUNGEN. Im nachstehenden Teil dieses Abschnittes soll G einen solchen Graphen bezeichnen, der eine ungerade Kreiskette enthält, jedoch keine Dreieckskette besitzt. M bezeichne die Menge der ungeraden Kreisketten minimaler Länge von G, und es sei

$$\hat{\varkappa}=\langle a_0 a_1 \dots a_{2n}\rangle \qquad (n \geqq 2)$$

ein Element von M. Wir wollen $\hat{\varkappa}$ im folgenden festhalten.

Erst untersuchen wir die Diagonalen von $\hat{\varkappa}$. Da bis (6. 14) nur Diagonalen von $\hat{\varkappa}$ vorkommen, soll bis dahin der Hinweis auf $\hat{\varkappa}$ unterdrückt werden.

(6. 6) 1) *Keine Diagonale ist bei ihren beiden Endpunkten mit* $\hat{\varkappa}$ *verknüpft.*

2) *Gehört eine kurze Diagonale zu G, so ist sie bei einer ihrer Endpunkte* a_j $(0 \leqq j \leqq 2n)$ *mit* $\hat{\varkappa}$ *verknüpft. Ferner gehören sämtliche Diagonalen, die mit* a_j *inzidieren, zu G und diese sind alle bei* a_j *mit* $\hat{\varkappa}$ *verknüpft.*

Beweis. Die Behauptung 1) ist trivial. Um 2) zu beweisen, nehmen wir an, daß $a_0 a_2 \in G$ ist, und daß $a_0 a_2 \not\sim a_1 a_2$ besteht. Wir beweisen, daß dann $a_0 a_2 \sim a_0 a_1$ gilt. Es sei k der kleinste Index mit $3 \leqq k \leqq 2n$, $a_0 a_k \sim a_{k-1} a_k$. (Wegen $a_0 a_{2n} \sim \sim a_{2n-1} a_{2n}$ existiert ein solches k.) Man kann dann (6. 4) auf die Teilkette $\varkappa = |a_1 \dots a_k|$ von $\hat{\varkappa}$ und auf den Punkt $x = a_0$ anwenden. Demzufolge gilt $a_0 a_i \in G$ $(i = 3, \dots, k)$ und

(1) $$a_0 a_{2i-1} \sim a_0 a_1 \qquad \left(i = 2, \dots, \left[\frac{k+1}{2}\right]\right)$$

und für $k > 3$ auch

(2) $$a_0 a_{2i} \sim a_0 a_2 \qquad \left(i = 2, \dots, \left[\frac{k}{2}\right]\right).$$

Es kann k nicht ungerade sein. Wäre nämlich $k = 2j - 1$, so wäre nach (1) $a_0 a_{2j-1} \sim a_0 a_1$, also entgegen 1) $a_0 a_k \approx \hat{\varkappa}$. Daher besteht $k \geqq 4$. Nach (1) und (2) sind $|a_{k-3} a_0 a_{k-1}|$ und $|a_{k-2} a_0 a_k|$ Ketten von G. Ist $|a_{k-3} a_0 a_{k-1}| \not\sim |a_{k-2} a_0 a_k|$, so besteht nach (4. 4) $\langle a_{k-3} a_{k-2} a_{k-1} a_k \rangle \subset G$, woraus entgegen 1) $a_{k-3} a_k \approx \hat{\varkappa}$ folgt. Somit ist $a_0 a_k \sim a_0 a_{k-1}$, und demzufolge nach (1) und (2) $a_0 a_i \sim a_0 a_1$ $(i = 2, \dots, k)$. Außer dem Falle $k = 2n$ steht jedoch $a_0 a_k \sim a_0 a_1$ zu (1) in Widerspruch. Damit ist (6. 6) vollständig bewiesen.

(6. 7) *Die Anzahl m der zu G gehörigen kurzen Diagonalen kann nur die Werte* 0, 2 *und* 4 *annehmen.*

1) *Im Falle* $m = 0$ *gehören alle Diagonalen zu* $\bar{G}$.

2) *Im Falle* $m = 2$ *gibt es einen einzigen Punkt* a_j $(0 \leqq j \leqq 2n)$ *derart, daß alle mit* a_j *inzidenten Diagonalen zu G gehören, diese alle bei* a_j *mit* $\hat{\varkappa}$ *verknüpft sind, und außer diesen keine Diagonale zu G gehört.*

3) *Im Falle* $m = 4$ *existieren zwei (eindeutig bestimmte, benachbarte) Punkte* a_j *und* a_{j+1} $(0 \leqq j \leqq 2n, a_{2n+1} = a_0)$ *derart, daß alle von* a_j *und* a_{j+1} *auslaufenden Diagonalen zu G gehören, diese bei* a_j *bzw.* a_{j+1} *mit* $\hat{\varkappa}$ *verknüpft sind, und außer diesen keine Diagonale zu G gehört. Ferner gilt für jedes i* $(0 \leqq i \leqq 2n)$, *das von j und* $j+1$ *verschieden ist,* $a_j a_i \not\sim a_{j+1} a_i$.

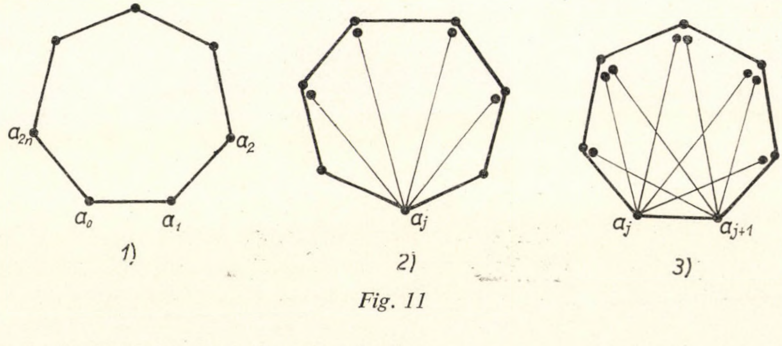


Fig. 11

BEWEIS. I) Ist $m=0$, so bekommt man die Richtigkeit von 1) durch die Anwendung von (6. 3) auf die Teilketten $|a_0 \dots a_{2n-1}|$ und $|a_1 \dots a_{2n}|$ von $\hat{\varkappa}$.

II) Ist $m>0$, so sei $a_0a_2 \in G$. Nach (6. 6) kann man $a_0a_i \sim a_0a_1$ $(i=2, \dots, 2n-1)$ annehmen. Daraus folgt $m \geqq 2$.

a) Ist $m=2$, so gehören außer a_0a_2 und a_0a_{2n-1} sämtliche kurze Diagonalen zu $\bar{G}$, wonach man durch die Anwendung von (6. 3) auf die Teilkette $|a_1 \dots a_{2n}|$ von $\hat{\varkappa}$ bekommt, daß alle nicht mit a_0 inzidenten Diagonalen zu $\bar{G}$ gehören.

b) Es sei nun $m>2$. Dann gibt es eine nicht mit a_0 inzidierende kurze Diagonale xy in G. Diese kann nur entweder bei a_1 oder bei a_{2n} mit $\hat{\varkappa}$ verknüpft sein. Wäre nämlich xy bei a_k $(2 \leqq k \leqq 2n-1)$ mit $\hat{\varkappa}$ verknüpft, so müsste nach (6. 6) 2) $a_ka_0 \approx \hat{\varkappa}$ gelten (in Widerspruch zu (6. 6) 1)). Man darf annehmen, daß xy bei a_1 mit $\hat{\varkappa}$ verknüpft ist. Laut (6. 6) gilt dann $a_1a_i \sim a_1a_0$ $(i=3, \dots, 2n)$. Es besteht ferner $a_1a_i \not\sim a_0a_i$ $(i=2, \dots, 2n)$ denn sonst wäre $\langle a_0a_1a_i \rangle$ eine Dreieckskette von G. In gleicher Weise wie vorher bei a_0 sieht man ein, daß eine mit a_1 nicht inzidierende kurze Diagonale nur entweder bei a_0 oder bei a_2 mit $\hat{\varkappa}$ verknüpft sein kann. Daraus und aus den vorangehenden folgt, daß nur die mit a_0 oder a_1 inzidierenden kurzen Diagonalen zu G gehören. Dies ergibt dann durch die Anwendung von (6. 3) auf die Kette $|a_2 \dots a_{2n}|$, daß alle Diagonalen, die nicht aus a_0 oder a_1 auslaufen, zu $\bar{G}$ gehören. Damit ist (6. 7) bewiesen.

Wir untersuchen jetzt auch solche Kanten, die keine Diagonalen von $\hat{\varkappa}$ sind. Es sollen zwei Hilfssätze vorausgeschickt werden.

(6. 8) *Es sei* $a_0a_i \sim a_0a_1$ $(i=2, \dots, 2n-1)$, $x \notin \hat{\varkappa}$ *und* $xa_2 \sim a_0a_2$. *Dann gelten*

1) $xa_i \sim a_0a_i$ $(i=1, \dots, 2n)$

und

2) $xa_i \sim xa_1$ $\quad (i=1, \dots, 2n)$.

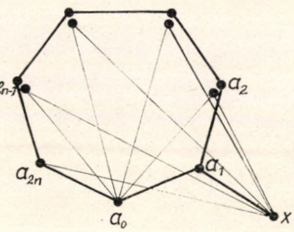


Fig. 12

BEWEIS. Es bestehen $|a_0a_2x| \subset G$ und $a_0a_i \not\sim a_ia_{i+1}$ $(i=2, \dots, 2n-1)$. Nehmen wir an, daß für einen Index h $(2 \leqq h < 2n)$ $|a_0a_hx| \subset G$ gilt. Wegen $a_ha_{h+1} \not\sim |a_0a_hx|$ ergibt (4. 3) $|a_0a_{h+1}x| \subset G$. Also besteht $|a_0a_ix| \subset G$ für jedes $i=2, \dots, 2n$. Aus $a_1a_2 \not\sim |a_0a_2x|$ folgt nach (4. 3) $|a_0a_1x| \subset G$. Damit ist die Behauptung 1) bewiesen.

Nach den vorangehenden kann man auf die Wegkette $|a_1 \dots a_{2n}|$ und auf x das Lemma (6. 4) anwenden. Demzufolge ist

$$(1) \qquad xa_{2i-1} \sim xa_1 \qquad (i=2, \dots, n)$$

und

$$(2) \qquad xa_{2i} \sim xa_2 \qquad (i=2, \dots, n).$$

Es sind also $|a_1xa_3|$ und $|a_2xa_4|$ Ketten von G. Wäre $|a_1xa_3| \not\sim |a_2xa_4|$, so würde daraus nach (4. 4) $\langle a_1a_2a_3a_4 \rangle \subset G$, und daraus $a_1a_4 \approx \hat{\varkappa}$ folgen (in Widerspruch zu (6. 6) 1)). Daher besteht $a_1x \sim a_2x$, was mit (1) und (2) die Relationen von 2) ergibt.

(6. 9) *Es sei* $a_0a_i \sim a_0a_1$ $(i=2, \dots, 2n-1)$, *und* $W=(b_0 \dots b_k)$ $(b_0=a_0,\ b_k=a_2)$ *sei ein kürzester* a_0a_2*-Weg des Graphen* $[N(a_1)]_{\bar{G}}$ *(s. Fußnote 9). Dann gelten*

1) $k \geqq 2$,

2) $a_1b_i \sim a_1a_0$ $(i=1, \dots, k-1)$,

3) $b_i \notin \hat{\varkappa}$ $(i=1, \ldots, k-1)$,

4) *im Falle* $k>2$ *auch*

$$b_h a_i \sim a_0 a_i \quad \textit{und} \quad b_h a_i \sim b_h a_1 \qquad (h=1, \ldots, k-2;\ i=1, \ldots, 2n),$$

5) $b_{k-1} a_i \in \bar{G}$ $(i=2, \ldots, 2n-1)$.

BEWEIS. $k \geqq 2$ folgt aus $a_0 a_2 \in G$, die Behauptung 2) aus $W \subset [N(a_1)]_{\bar{G}}$. $b_1 \notin \hat{\varkappa}$ ergibt sich aus $a_0 b_1 \in \bar{G}$. Ist $k>2$, und gilt für ein h $(1 \leqq h \leqq k-2)$ $b_h \notin \hat{\varkappa}$, so ist nach (6. 2) $b_h a_2 \sim a_0 a_2$, woraus laut (6. 8)

$$\text{(1)} \qquad b_h a_i \sim a_0 a_i \quad \text{und} \quad b_h a_i \sim b_h a_1 \qquad (i=1, \ldots, 2n)$$

folgt. Dies ergibt mit $b_h b_{h+1} \in \bar{G}$ und $b_{h+1} \neq a_0$ zusammen $b_{h+1} \notin \hat{\varkappa}$. Damit ist 3) und in Betracht von (1) auch 4) bewiesen.

Nach den obigen gilt $b_{k-2} a_i \in G$ $(i=2, \ldots, 2n-1)$ und

$$\text{(2)} \qquad b_{k-2} a_i \not\sim a_{i-1} a_i \qquad (i=2, \ldots, 2n-1).$$

Würde es ein i $(2 \leqq i < 2n-1)$ mit $b_{k-1} a_i \in \bar{G}$ und $b_{k-1} a_{i+1} \in G$ geben, so wäre in Betracht von $b_{k-2} b_{k-1} \in \bar{G}$

$$a_i a_{i+1} \sim b_{k-1} a_{i+1} \sim b_{k-2} a_{i+1},$$

was mit (2) in Widerspruch steht. Dies bestätigt zusammen mit $b_{k-1} a_2 \in \bar{G}$ die Behauptung 5).

(6. 10) VORAUSSETZUNG. Im weiteren Teil dieses Abschnittes soll G einen *irreduziblen* Graphen bezeichnen, d.h. neben den Voraussetzungen von (6. 5) soll er auch der folgenden Bedingung genügen: Für jedes $A \subset \mathscr{P}(G)$ enthält $[A]_G$ (oder was dasselbe bedeutet, für jedes x enthält $G-x$) keine ungerade Kreiskette.

(6. 11) ERKLÄRUNGEN. Nach (6. 7) zerfällt die Menge M der kürzesten ungeraden Ketten von G in drei Klassen. Wir wollen diese, entsprechend den Fällen 1), 2) und 3) von (6. 7) mit M_1, M_2 und M_3 bezeichnen.

Bei jedem Element $\hat{\varkappa} = \langle a_0 \ldots a_{2n} \rangle$ von M existiert zu einem jeden a_i $(0 \leqq i \leqq 2n)$ ein $a_{i-1} a_{i+1}$-Weg $W_i = (x_{i0} \ldots x_{i\alpha_i})$, $x_{i0} = a_{i-1}$, $x_{i\alpha_i} = a_{i+1}$; $a_{-1} = a_{2n}$, $a_{2n+1} = a_0$, des Graphen $[N(a_i)]_{\bar{G}}$ (s. die Fußnote 9). Die Punkte a_i, zusammen mit den Wegen W_i bilden in $\bar{G}$ eine Astroide der Länge $\sum_{i=0}^{2n} \alpha_i$ (α_i ist die Länge von W_i, s. (1. 19)). Ist für jedes i $(0 \leqq i \leqq 2n)$ W_i ein kürzester $a_{i-1} a_{i+1}$-Weg von $[N(a_i)]_{\bar{G}}$, so möge diese Astroide eine *zu* $\hat{\varkappa}$ *gehörige minimale Astroide*, die Zahl $s(\hat{\varkappa}) = \sum_{i=0}^{2n} \alpha_i$ die *zu* $\hat{\varkappa}$ *gehörige minimale Astroidenlänge* heißen.

Wir bemerken: Ist $a_{i-1} a_{i+1} \in \bar{G}$, so ist $W_i = (a_{i-1} a_{i+1})$ der kürzeste $a_{i-1} a_{i+1}$ Weg von $[N(a_i)]_{\bar{G}}$. Aus (6. 7) folgt dann unmittelbar:

(6. 12) *Entsprechend den Fällen* $\hat{\varkappa} \in M_1$, $\hat{\varkappa} \in M_2$ *und* $\hat{\varkappa} \in M_3$ *gilt* $s(\hat{\varkappa}) = 2n+1$, $s(\hat{\varkappa}) \geqq 2n+3$ *bzw.* $s(\hat{\varkappa}) \geqq 2n+5$.

Nun wollen wir nacheinander die Fälle $M_1 \neq \emptyset$; $M_1 = \emptyset, M_2 \neq \emptyset$ und $M_1 = \emptyset$, $M_2 = \emptyset$ untersuchen.

(6. 13) *Ist* $M_1 \neq \emptyset$, *so ist* G *mit dem* $(2n+1)$*-Eck* $V = (a_0 \dots a_{2n} a_0)$ *identisch.*

BEWEIS. Es sei $M_1 \neq \emptyset$ und $\hat{\varkappa} \in M_1$. Nach (6. 7) 1) gehören alle Diagonalen von $\hat{\varkappa}$ zu $\bar{G}$. Da offensichtlich $\hat{\varkappa} \subset V$ besteht, muß wegen der Irreduzibilität von G $G = V$ gelten.

Die folgende Behauptung ist trivial:

(6. 14) *Ein* $(2n+1)$*-Eck* $(n \geqq 2)$ *enthält genau eine ungerade Kreiskette (eine* $(2n+1)$*-Eckkette) und ist irreduzibel.*

Wir werden den in (6. 14) beschriebenen Typ von irreduziblen Graphen mit $\Gamma_1(2n+1)$ bezeichnen (s. Tafel I).

(6. 15) VORAUSSETZUNGEN. Von hier an bis (6. 27) sollen G und $\hat{\varkappa}$ außer den in (6. 5) und (6. 10) gestellten Forderungen auch noch den folgenden Bedingungen genügen:

Es sei $M_1 = \emptyset$, $M_2 \neq \emptyset$ und $\hat{\varkappa}$ ein Element von M_2 mit minimalem $s(\hat{\varkappa})$-Wert.

(6. 16) ERKLÄRUNGEN.

$$W_1 = (b_0 \dots b_k); \quad b_0 = a_0, \quad b_k = a_2$$

bzw.

$$W_{2n} = (c_0 \dots c_l); \quad c_0 = a_0, \quad c_l = a_{2n-1}$$

bezeichne einen kürzesten $a_0 a_2$-Weg von $[N(a_1)]_{\bar{G}}$ bzw. einen kürzesten $a_0 a_{2n-1}$-Weg von $[N(a_{2n})]_{\bar{G}}$.

Nach (6. 7) 2) ist $s(\hat{\varkappa}) = 2n - 1 + k + l$.

(6. 17) G *enthält außer* $a_0, \dots, a_{2n}, b_1, \dots, b_{k-1}, c_1, \dots, c_{l-1}$ *keine weiteren Punkte.*

BEWEIS. Bezeichnet G' den Teilgraphen von G, der durch die angeführten Punkte gespannt wird, so sieht man, daß $\hat{\varkappa}$ auch in G' eine geschlossene Kette ist. Hieraus folgt wegen der Irreduzibilität von G $G = G'$.

Aus (6. 9) ergibt sich unmittelbar

(6. 18) *Es gilt* $b_i, c_j \notin \hat{\varkappa}$ $(i = 1, \dots, k-1; j = 1, \dots, l-1)$. *Im Falle* $k > 2$ *besteht auch*

$$b_g a_i \sim a_0 a_i \quad \text{und} \quad b_g a_i \sim b_g a_1 \qquad (g = 1, \dots, k-2;\ i = 1, \dots, 2n),$$

im Falle $l > 2$ *auch*

$$c_h a_i \sim a_0 a_i \quad \text{und} \quad c_h a_i \sim c_h a_{2n} \qquad (h = 1, \dots, l-2;\ i = 1, \dots, 2n).$$

Ferner sind $b_{k-1} a_i$, $c_{l-1} a_i \in \bar{G}$ $(i = 2, \dots, 2n-1)$.

Wir beweisen die folgende Ergänzung zu (6. 18).

(6. 19) *Es bestehen* $b_{k-1} a_{2n} \in \bar{G}$ *und* $c_{l-1} a_1 \in \bar{G}$.

BEWEIS. Wegen Symmetriegründen genügt es $b_{k-1}a_{2n} \in \bar{G}$ zu beweisen. Nehmen wir an, daß $b_{k-1}a_{2n} \in G$ besteht. Da $b_{k-1}a_{2n-1} \in \bar{G}$ ist, gilt $b_{k-1}a_{2n} \sim a_{2n-1}a_{2n}$. Nach (6. 7) 2) ist jedoch $a_1a_{2n} \in \bar{G}$, und so gilt auch $b_{k-1}a_1 \sim b_{k-1}a_{2n}$. Sämtliche Diagonalen des $(2n+1)$-Ecks $(b_{k-1}a_1 \dots a_{2n}b_{k-1})$ gehören also zu $\bar{G}$, woraus $\hat{\varkappa}_1 = \langle b_{k-1}a_1 \dots a_{2n}\rangle \subset G$ und $\hat{\varkappa}_1 \in M_1$ folgt. Dies widerspricht der Voraussetzung $M_1 = \emptyset$.

(6. 20) *Es gilt* $W_1 \cap W_{2n} = (a_0)$.[17]

BEWEIS. Entgegen der Behauptung sei $b_g = c_h$ $(1 \leqq g \leqq k-1,\ 1 \leqq h \leqq l-1)$, und setze man $b_g = c_h = a_0'$. Wegen $a_1a_{2n} \in \bar{G}$ ist $a_0'a_1 \sim a_0'a_{2n}$. Nach (6. 19) gelten $g < k-1$ und $h < l-1$, woraus laut (6. 18) $a_0'a_i \sim a_0'a_1 \sim a_0'a_{2n}$ $(i=1, \dots, 2n)$ folgt. Man sieht daraus, daß $\hat{\varkappa}_1 = \langle a_0'a_1 \dots a_{2n}\rangle \subset G$ und $\hat{\varkappa}_1 \in M_2$ bestehen. Ferner sind

$$W_1' = (b_g \dots b_k) \subset [N(a_1)]_{\bar{G}} \quad \text{und} \quad W_{2n}' = (c_h \dots c_l) \subset [N(a_{2n})]_{\bar{G}}.$$

Dies ergibt $s(\hat{\varkappa}_1) < 2n-1+k+l$, was mit der Minimalität von $s(\hat{\varkappa})$ in Widerspruch steht.

Wir wissen jetzt, daß $\mathscr{P}(G)$ aus den *verschiedenen* Punkten $a_0, \dots, a_{2n}, b_1, \dots, b_{k-1}, c_1, \dots, c_{l-1}$ besteht. Bezüglich der Kanten ergibt (6. 2):

(6. 21) *Außer den Kanten von* W_1 *und* W_{2n} *gehören alle Kanten* b_ib_g *und* c_jc_h *zu* G.

Wir untersuchen jetzt die Kanten b_ic_j.

(6. 22) 1) *Ist* $k \geqq 3$ *und* $1 \leqq g \leqq k-2$, *so gilt*

$$b_gc_i \sim b_ga_1 \qquad (i=1, \dots, l-1).$$

2) *Ist* $l \geqq 3$ *und* $1 \leqq h \leqq l-2$, *so gilt*

$$c_hb_i \sim c_ha_{2n} \qquad (i=1, \dots, k-1).$$

BEWEIS. Wegen Symmetriegründen genügt es 1) zu beweisen. Nehmen wir an, daß es ein h mit $1 \leqq h \leqq l-1$ und $b_gc_h \in \bar{G}$ gibt. Nach (6. 18) bestehen $b_ga_i \sim b_ga_1$ $(i=2, \dots, 2n)$ und $\hat{\varkappa}_1 = \langle b_ga_1 \dots a_{2n}\rangle \subset G$. Es gelten $\hat{\varkappa}_1 \in M_2$ und $W_1' = (b_g \dots b_k) \subset [N(a_1)]_{\bar{G}}$ sowie $W_{2n}' = (b_gc_h \dots c_l) \subset [N(a_{2n})]_{\bar{G}}$. Demzufolge ist $s(\hat{\varkappa}_1) < s(\hat{\varkappa})$, was der Minimaleigenschaft von $s(\hat{\varkappa})$ widerspricht. Daher gilt $b_gc_i \in G$ $(i=1, \dots, l-1)$. Da auch $b_gc_l \in G$ besteht, bekommt man in Betracht von $W_{2n} \subset \bar{G}$

$$b_gc_i \sim b_gc_l = b_ga_{2n-1} \qquad (i=1, \dots, l-1),$$

und dies ergibt zusammen mit $b_ga_1 \sim b_ga_{2n-1}$ die gewünschten Relationen.

(6. 23) *Es gilt* $b_{k-1}c_{l-1} \in \bar{G}$.

BEWEIS. Im Gegensatz zur Behauptung sei $b_{k-1}c_{l-1} \in G$. Nach (6. 18) sind $b_{k-1}a_{2n}, c_{l-1}a_1 \in \bar{G}$, woraus

$$b_{k-1}c_{l-1} \sim a_{2n}c_{l-1} \quad \text{und} \quad b_{k-1}c_{l-1} \sim b_{k-1}a_1$$

folgen. Es besteht also $\hat{\varkappa}_1 = \langle a_0a_1b_{k-1}c_{l-1}a_{2n}\rangle \subset G$. Ist $n > 2$, so steht das zur De-

[17] (x) bedeutet jenen Graphen, der aus dem einzigen Punkt x besteht.

finition von M in Widerspruch. Es sei $n=2$. Von den Diagonalen von $\hat{\varkappa}_1$ können nur a_0b_{k-1} und a_0c_{l-1} zu G gehören, und so gehört $\hat{\varkappa}_1$ wegen $M_1=\emptyset$ zu M_2. In Betracht von

$$W'_1=(b_0\dots b_{k-1})\subset[N(a_1)]_{\bar{G}} \quad \text{und} \quad W'_{2n}=(c_0\dots c_{l-1})\subset[N(a_{2n})]_{\bar{G}}$$

ist jedoch $s(\hat{\varkappa}_1)<s(\hat{\varkappa})$, und dies bedeutet einen Widerspruch.

(6. 24) *Es ist* $k+l\leqq 5$.

BEWEIS. Erstens soll $k\leqq 3$ und $l\leqq 3$ gezeigt werden. Es genügt $k\leqq 3$ zu beweisen. Nehmen wir an, daß $k>3$ ist. Nach (6. 2) ist $a_0b_{k-2}\sim a_0a_2$ ($\sim a_0a_1$). (6. 22) ergibt $b_{k-2}c_1\sim b_{k-2}a_1$. Wegen $a_0c_1\in\bar{G}$ besteht dann $b_{k-2}c_1\sim b_{k-2}a_0$. Dies ist jedoch unmöglich, da dann $\langle a_0a_1b_{k-2}\rangle$ eine zu G gehörige Dreieckskette wäre. Damit sind $k\leqq 3$ und $l\leqq 3$ bewiesen.

Wir zeigen, daß $k=3$ und $l=3$ nicht gleichzeitig bestehen können. Nehmen wir $k=l=3$ an. Aus (6. 2), (6. 18) und (6. 22) folgt $V=(b_1c_2a_0b_2c_1b_1)\subset G$. In Betracht von (6. 23) gehören alle Diagonalen des Fünfecks V zu $\bar{G}$. Es gilt also $\hat{\varkappa}_1=\langle b_1c_2a_0b_2c_1\rangle\subset G$ und $\hat{\varkappa}_1\in M_1$. Dies ist ein Widerspruch.

(6. 25) Wir haben von jeder Kante, die zwei Punkte von $\mathscr{P}(G)$ verbindet, entschieden, ob sie zu G oder zu $\bar{G}$ gehört (s. die Sätze (6. 7), (6. 18), (6. 19), (6. 21), (6. 22) und (6. 23)). Nun läßt sich zeigen, daß jene Graphen, die bei den möglichen Wertpaaren $k=2$, $l=2$ und $k=3$, $l=2$ ($k=2$, $l=3$ ergibt das gleiche wie $k=3$, $l=2$) aus den erhaltenen Punkten und Kanten bestehen, tatsächlich allen gestellten Voraussetzungen (s. (6. 5), (6. 10) und (6. 15)) genügen. Wir wollen die Bestätigung dieser Behauptungen, die in den folgenden zwei Sätzen ohne Hinweise noch einmal formuliert sind, dem Leser überlassen.

(6. 26) *Derjenige Graph, der aus den verschiedenen Punkten* $a_0,\dots,a_{2n}$ $(n\geqq 2)$, b_1, c_1 *und aus den Kanten* a_ia_{i+1} $(i=0,\dots,2n;\ a_{2n+1}=a_0)$, a_0a_i $(i=2,\dots,2n-1)$, a_1b_1, $a_{2n}c_1$ *besteht, enthält die einzige ungerade Kreiskette* $\langle a_0\dots a_{2n}\rangle$ *und ist irreduzibel. Die Kette* $\langle a_0\dots a_{2n}\rangle$ *besitzt die minimale Astroidenlänge* $2n+3$.

(6. 27) *Derjenige Graph, der aus den verschiedenen Punkten* $a_0,\dots,a_{2n}$ $(n\geqq 2)$, b_1, b_2, c_1 *und aus den Kanten* a_ia_{i+1} $(i=0,\dots,2n;\ a_{2n+1}=a_0)$, a_0a_i $(i=2,\dots,2n-1)$, b_1a_i $(i=1,\dots,2n)$, b_1c_1, b_2a_0, b_2a_1, c_1a_{2n} *besteht, enthält insgesamt zwei ungerade Kreisketten* $\langle a_0a_1\dots a_{2n}\rangle$ *und* $\langle b_1a_1\dots a_{2n}\rangle$ *und ist irreduzibel. Die minimale Astroidenlänge der erwähnten Ketten beträgt* $2n+4$.

Der in (6. 26) bzw. (6. 27) beschriebene Typ irreduzibler Graphen soll mit $\Gamma_2(2n+1)$ bzw. $\Gamma_3(2n+1)$ bezeichnet werden. In der Tafel I findet man die Verknüpfungsgraphen $\tilde{\Gamma}_2(2n+1)$ und $\tilde{\Gamma}_3(2n+1)$ dieser Graphen.

(6. 28) VORAUSSETZUNGEN. Bis Ende des Abschnittes sollen G und $\hat{\varkappa}$ außer den in (6. 5) und (6. 10) gestellten Forderungen noch den folgenden Bedingungen genügen: Es sei $M_1=\emptyset$, $M_2=\emptyset$ und $\hat{\varkappa}$ ein Element von $M_3=M$ mit minimalem $s(\hat{\varkappa})$-Wert.

(6. 29) ERKLÄRUNGEN. Es sollen die Relationen

$$a_0a_i\sim a_0a_1 \quad (i=2,\dots,2n-1) \quad \text{und} \quad a_1a_i\sim a_1a_0 \qquad (i=3,\dots,2n)$$

bestehen, und bezeichne W_i einen kürzesten $a_{i-1}a_{i+1}$-Weg des Graphen $[N(a_i)]_G$ $(i=0, \ldots, 2n;\ a_{2n+1}=a_0,\ a_{-1}=a_{2n})$.

Ist die Länge des Weges W_i gleich l_i, so ist nach (6. 7) 3) für $i=3, \ldots, 2n-1$ der Wert $l_i=1$. Daraus folgt $s(\hat{\varkappa})=2n-3+l_{2n}+l_0+l_1+l_2$.

(6. 30) *Es gelten*

(1) $$W_2=(a_1 b_1 a_3) \quad \textit{und} \quad W_{2n}=(a_{2n-1} c_1 a_0),$$
wobei

(2) $$b_1, c_1 \notin \hat{\varkappa};\ b_1 a_0, c_1 a_1 \in G, \quad b_1 a_i \in \overline{G} \quad (i=4, \ldots, 2n),$$
$$c_1 a_j \in \overline{G} \quad (j=2, \ldots, 2n-2)$$
und

(3) $$b_1 c_1 \in \overline{G}$$
bestehen.

Beweis. Wegen Symmetriegründen genügt es, jene Behauptungen zu beweisen, in denen b_1 vorkommt.

Es sei $W_2=(b_0 \ldots b_k)$, $b_0=a_1$, $b_k=a_3$. Nach (6. 9) ist $k \geqq 2$ und $b_1, \ldots, b_k \notin \hat{\varkappa}$. Da $a_0 a_2 \not\sim b_{k-1} a_2$ gilt, ist

(4) $$a_0 b_{k-1} \in G.$$

Wir werden aus der Annahme $k>2$ den Widerspruch herleiten, daß $G'=G-a_1$ die ungerade Kreiskette $\hat{\varkappa}_1=\langle a_0 b_1 a_2 \ldots a_{2n}\rangle$ enthält. Nach (6. 9) ist $a_0 b_1 \in G'$, also liegt das Vieleck $V=(a_0 b_1 a_2 \ldots a_{2n} a_0)$ in G'. Die Verknüpfungen der Kanten von V in G' sichern bei a_i $(i=3, \ldots, 2n-1)$ die Kante $a_{i-1}a_{i+1} \in \overline{G}$ (s. (6. 7) 3)) und bei a_2 der Weg $(b_1 \ldots b_k) \subset \overline{G}$. Da nach (6. 9) $a_1 \notin W_{2n}$ ist, gilt $a_{2n}a_{2n-1} \sim a_{2n}a_0$ auch in G'. Laut (6. 9) gelten $a_0 b_i \in G$ $(i=1, \ldots, k-2)$ und $b_{k-1}a_{2n} \in \overline{G}$. Daraus und aus (4) folgt $W_0'=(a_{2n}b_{k-1}b_{k-2} \ldots b_1) \subset [N(a_0)]_{\overline{G}}$, und dies ergibt wegen $a_1 \notin W_0'$ die Richtigkeit von $a_0 a_{2n} \sim a_0 b_1$ in G'. Wir brauchen noch zu zeigen, daß in G' die Relation $b_1 a_0 \sim b_1 a_2$ besteht. Nach (6. 9) besteht sie in G, d.h. es gibt einen $a_0 a_2$-Weg W' in $[N(b_1)]_G$. Wegen $b_1 a_1 \in \overline{G}$ ist jedoch $a_1 \notin W'$, und demzufolge sichert W' auch in G' das Bestehen von $b_1 a_0 \sim b_1 a_2$. Damit ist $\hat{\varkappa}_1 \subset G'$, und daher auch die Behauptung (1) bewiesen.

Die Behauptungen von (2) folgen unmittelbar aus (1), (4) und (6. 9).

Aus $a_0 b_1 \in G$ und $a_0 c_1 \in \overline{G}$ folgt $b_1 \neq c_1$. Nehmen wir an, daß entgegen (3) $b_1 c_1 \in G$ gilt. Wegen (6. 9) sind $b_1 a_{2n}$, $c_1 a_2 \in \overline{G}$, woraus $c_1 a_{2n} \sim c_1 b_1$ bzw. $b_1 a_2 \sim b_1 c_1$ folgt. Daher ist $\hat{\varkappa}_2=\langle c_1 b_1 a_2 \ldots a_{2n}\rangle \subset G$, und es gehören laut (6. 9) und wegen den obigen sämtliche kurze Diagonalen von $\hat{\varkappa}_2$ zu $\overline{G}$. Dies widerspricht der Voraussetzung $M_1=\emptyset$. Damit ist auch (3) bewiesen.

(6. 31) *G enthält außer $a_0, \ldots, a_{2n}, b_1, c_1$ keine weiteren Punkte.*

Beweis. Bezeichne G' jenen Teilgraphen von G, den die Punkte $a_0, \ldots, a_{2n}$, b_1, c_1 ausspannen. Wir zeigen, daß $G=G'$ ist. Zufolge der Irreduzibilität von G genügt es $\hat{\varkappa} \subset G'$ zu beweisen. Wir müssen zeigen, daß die benachbarten Kanten des Vielecks $(a_0 \ldots a_{2n}a_0)$ auch in G' verknüpft sind. Bei a_i $(i=3, \ldots, 2n-1)$ folgt dies aus $a_{i-1}a_{i+1} \in \overline{G}$, bei a_2 bzw. a_{2n} aus der Existenz des Weges W_2 bzw. W_{2n}, bei a_1 aus $(a_0 c_1 a_2) \subset \overline{G}$ und $a_1 c_1 \in G$, und schließlich bei a_0 aus $(a_1 b_1 a_{2n}) \subset \overline{G}$ und $a_0 b_1 \in G$.

Wir haben von jeder Kante, die zwei Punkte von $\mathcal{P}(G)$ verbindet, entschieden, ob sie zu G oder zu $\bar{G}$ gehört (s. die Sätze (6. 7), (6. 30)). Man kann nun zeigen, daß jener Graph, der aus den erhaltenen Punkten und Kanten besteht, tatsächlich unseren Forderungen von (6. 5), (6. 10) und (6. 28) genügt. Wir wollen die Verifizierung dieser Aussage, die im folgenden Satz noch einmal formuliert wird, unterdrücken.

(6. 32) *Derjenige Graph, der aus den verschiedenen Punkten* $a_0, \ldots, a_{2n}$ $(n \geqq 2)$, b_1, c_1 *und aus den Kanten* $a_i a_{i+1}$ $(i=0, \ldots, 2n;\ a_{2n+1}=a_0)$, $a_0 a_i$ $(i=2, \ldots, 2n-1)$, $a_1 a_j$ $(j=3, \ldots, 2n)$, $b_1 a_0$, $b_1 a_2$ $c_1 a_{2n}$, $c_1 a_1$ *besteht, enthält die einzige ungerade Kreiskette* $\langle a_0 \ldots a_{2n} \rangle$ *und ist irreduzibel. Die minimale Astroidenlänge von* $\langle a_0 \ldots a_{2n} \rangle$ *beträgt* $2n+5$.

Der in (6. 32) beschriebene Typ irreduzibler Graphen soll mit $\Gamma_4(2n+1)$ bezeichnet werden. In der Tafel I findet man den Verknüpfungsgraphen $\tilde{\Gamma}_4(2n+1)$ dieses Graphen.

(6. 33) Zusammenfassend, können wir behaupten, daß insgesamt vier Typen $\Gamma_i(2n+1)$ $(i=1, 2, 3, 4;\ n \geqq 2)$ irreduzibler Graphen existieren, die keine Dreieckskette enthalten. Man kann leicht verifizieren, daß jene minimalen Astroiden, die den ungeraden Kreisketten dieser Graphen entsprechen, extreme Astroiden der komplementären Graphen sind, und die in (1. 21) erwähnten Eigenschaften besitzen.

7. Bestimmung jener irreduziblen Graphen, die 3-Astroiden enthalten

Bei der Untersuchung derjenigen irreduziblen nicht t-orientierbaren Graphen, die Dreiecksketten enthalten, hat es sich herausgestellt, daß man ihre komplementären Graphen einfacher bestimmen und beschreiben kann, als die ursprünglichen Graphen. Diese komplementären Graphen, die wir nun im folgenden aufsuchen wollen, gehören zu der in (1. 21) definierten zweiten Art von irreduziblen Graphen, und zwar bilden sie jene Gruppe dieser Graphen, die 3-Astroiden enthalten.

(7. 1) Erklärungen. Ist W ein Weg und $x, y \in W$, so soll (xWy) jenen Teilweg von W bezeichnen, dessen Endpunkte x und y sind (dabei wollen wir auch einpunktige Teilwege zulassen). Sind W_1 und W_2 Wege und $x, y \in W_1$, $y, z \in W_2$, haben ferner die Teilwege (xW_1y) und (yW_2z) außer y keinen gemeinsamen Punkt, so soll

$$(xW_1y) \cup (yW_2z) = (xW_1yW_2z)$$

gesetzt werden. Ähnliche Verkürzungen werden auch bei anderen Vereinigungen von Wegen bzw. Teilwegen benützt.

Ist W ein Weg von G, und gehört keine Diagonale von W zu G, so soll W *diagonalfrei* in G heißen. Die gleiche Benennung soll auch bezüglich Vielecken angewendet werden.

Den Tatbestand, daß $x \in G$, $W=(x_1 \ldots x_n)$, $n \geqq 2$ ein Weg von G ist, und $xx_i \notin G$ $(i=1, \ldots, n)$ gilt (dann besteht auch $x \notin W$) wollen wir kurz folgendermaßen ausdrücken:

es gilt (in G) $W \div x$.

Das Bestehen von

$$\{x\,Wy\,Uz\,Vx\} \subset G$$

soll bedeuten, daß $\{xWy\,Uz\,Vx\}$ eine 3-Astroide von G ist (s. (1. 19)).

(7. 2) VORAUSSETZUNGEN. Unter irreduziblen Graphen werden wir im folgenden immer die in (1. 21) erklärten irreduziblen Graphen verstehen. Der Graph G soll im ganzen Abschnitt einen irreduziblen Graphen bezeichnen, der eine 3-Astroide enthält, d.h. G enthält eine 3-Astroide und für jedes $x \in G$ enthält $G-x$ keine Astroide.

Es bezeichne

$$\sigma = \{aCbAcBa\}$$

eine „minimale" 3-Astroide von G. Das bedeutet: Es ist $a \neq b \neq c \neq a$, A ist ein kürzester Weg unter jenen bc-Wegen W_a von G, für die $W_a \dotplus a$ in G gilt, B ist ein kürzester Weg unter den ac-Wegen W_b mit $W_b \dotplus b$ und C ist ein kürzester Weg unter den ab-Wegen W_c mit $W_c \dotplus c$.

Es soll im folgenden σ festgehalten und für die Bogen A, B, C von σ

$$A = (a_0 a_1 \ldots a_{\alpha+1}), \quad a_0 = b, \quad a_{\alpha+1} = c,$$

$$B = (b_0 b_1 \ldots b_{\beta+1}), \quad b_0 = c, \quad b_{\beta+1} = a,$$

$$C = (c_0 c_1 \ldots c_{\gamma+1}), \quad c_0 = a, \quad c_{\gamma+1} = b$$

gesetzt werden.

(7. 3) Wir stellen noch einmal fest: Es gelten

(1) $$A \dotplus a, \quad B \dotplus b, \quad C \dotplus c$$

und demzufolge auch

$$\alpha \geqq 1, \quad \beta \geqq 1, \quad \gamma \geqq 1.$$

Aus der Minimaleigenschaft der Wege A, B und C folgt, daß diese in G diagonalfrei sind. Im folgenden werden wir uns auf diese Eigenschaft der Bogen A, B, C durch das Zeichen

$$(7.\,3) \quad \mathrm{D_A},\ \mathrm{D_B},\ \mathrm{D_C}$$

berufen.

In den folgenden Untersuchungen wird außer (1) nur diese Eigenschaft der Bogen A, B, C benützt.[18]

Es sei noch bemerkt, daß wir unsere Behauptungen meistens indirekt beweisen werden, derart, daß wir für ein geeignetes $x \in G$ zeigen, daß $G' = G-x$ eine Astroide enthält. Dabei wird auch die triviale Tatsache in Betracht gezogen, daß wenn in G $W \dotplus y$ gilt und $x \neq y$, $x \notin W$ bestehen, dann $W \dotplus y$ auch in G' gilt.

(7. 4) *G enthält außer den Punkten von A, B, C keinen weiteren Punkt und enthält kein n-Eck ($n \geqq 5$), das in G diagonalfrei ist.*

BEWEIS. Die erste Behauptung ist eine triviale Folge der Irreduzibilität von G. Die zweite ergibt sich aus der Irreduzibilität von G und aus der Tatsache, daß ein Fünfeck eine 5-Astroide, ein n-Eck ($n \geqq 6$) eine 3-Astroide enthält.

[18] Die gleiche Methode ist auch in [7] benützt worden.

(7. 5) *Die Durchschnitte* $A\cap B$, $B\cap C$ *und* $C\cap A$ *sind Wege.*

BEWEIS. Es genügt, die Behauptung bezüglich $A\cap B$ zu beweisen. Gilt $A\cap B=(c)$, so ist nichts zu beweisen. Nehmen wir an, daß $A\cap B$ einen von c verschiedenen Punkt besitzt. Es sei h der größte Index mit $b_h\in A$. In Betracht von $A\dotplus a$ gilt $0<h<\beta$. Ferner sei g der größte Index mit $0\leqq g\leqq h$, $b_g\in A$ und $(cBb_g)=(cAb_g)$. (Wegen $(cBb_0)=(cAb_0)$ existiert ein solches g.)

Ist $g=h$, so gilt $A\cap B=(cBb_g)=(cAb_g)$, und das bestätigt unsere Behauptung. Wir wollen nun zeigen, daß die Annahme $g<h$ zu einem Widerspruch führt. Aus $g<h$ folgt erstens $b_gb_{g+1}\notin A$. Es besteht daher wegen (7. 3) D_A $b_{g+1}\notin A$, also auch $1\leqq g+1<h$, woraus nach (7. 3) D_B $cb_h\in\bar{G}$ folgt. Wir zeigen, daß, im Gegensatz zur Irreduzibilität von G, $G'=G-b_{g+1}$ eine 3-Astroide enthält, es besteht nämlich

$$\{aC'bAcB'a\}\subset G', \tag{1}$$

wobei $B'=(cAb_hBa)$ und $C'=(aBb_hAb)$ gesetzt wurde. In der Tat ist B' ein ca-Weg und C' ein ab-Weg. Wegen $b_{g+1}\notin A$ besteht $A, B', C'\subset G'$. Aus $B\dotplus b$ folgt $bb_h\in\bar{G}$, und dies ergibt im Betracht von (7. 3) D_A $(cAb_h)\dotplus b$. Wegen $B\dotplus b$ erhalten wir daraus $B'\dotplus b$. $cb_h\in\bar{G}$ und (7. 3) D_A, D_B ergeben $C'\dotplus c$. In Betracht von $A\dotplus a$ ist daher (1) bewiesen.

(7. 6) ERKLÄRUNGEN. Nach (7. 5) existieren die eindeutig bestimmten Punkte

$$a'\in B\cap C,\quad b'\in C\cap A,\quad c'\in A\cap B$$

mit den Eigenschaften

$$A\cap B=(cAc')=(cBc'),$$

$$B\cap C=(aBa')=(aCa'),$$

$$C\cap A=(bCb')=(bAb').$$

(7. 7) *Es gelten* $a'\neq b, c$, $b'\neq a, c$. *Im Falle* $a'\neq a$, $b'\neq b$, $a'\neq b'$ *liegen die Punkte* a, a', b', b *in dieser Reihenfolge auf dem Wege* C.

BEWEIS. Die zwei ersten Behauptungen folgen unmittelbar aus (7. 6).

Nehmen wir an, daß die verschiedenen Punkte a, a', b', b in der Reihenfolge a, b', a', b auf C liegen. Wegen $(aBa')=(aCa')$ gilt dann $b'\in B$. Es liegen also die verschiedenen Punkte a, b', a', c in dieser Reihenfolge auf B. Ähnlich bekommt man, daß die verschiedenen Punkte b, a', b', c in dieser Reihenfolge auf A liegen. Dies ist jedoch ein Widerspruch, da jetzt $a', b', c\in A\cap B=(cAc')=(cBc')$ besteht, und die Punkte a', b', c nur in einer Reihenfolge auf dem Wege $A\cap B$ liegen können.

(7. 8) *Die Punkte* a', b', c' *sind entweder verschieden, oder sie fallen in einem Punkt* d *zusammen. Im zweiten Falle ist* $G=(ac_1d)\cup(ba_1d)\cup(cb_1d)$.

BEWEIS. Wir dürfen, falls a', b', c' nicht verschieden sind, $a'=b'=d$ annehmen. Nach (7. 7) ist dann d von a, b und c verschieden. Ferner gilt $d\in A\cap B$, und demzufolge auch $(cAd)=(cBd)$. Daraus und aus $(aBd)\cap(bAd)=(d)$ folgt $d=c'$.

Aus den obigen und aus (7. 3) D_A, D_B, D_C folgt, daß G die Vereinigung der Wege (aCd), (bAd) und (cBd) ist. Wegen $A\dotplus a$, $B\dotplus b$ und $C\dotplus c$ sind die Längen dieser Wege $\geqq 2$. Sie sind sogar genau gleich 2. Besitzt nämlich einer der erwähnten Wege, z.B. (aCd), eine Länge $\geqq 3$, so gilt, im Gegensatz zur Irreduzibilität von G, $\{c_1C'bAcB'c_1\} \subset G-a$, wobei $C'=(c_1Cb)$ und $B'=(cBc_1)$ gesetzt wurde. Damit sind sämtliche Behauptungen von (7. 8) bewiesen.

(7. 9) Man kann einfach verifizieren, daß der sich im zweiten Falle von (7. 8) ergebende Graph eine 3-Astroide der Länge 12 enthält und irreduzibel ist. Dieser Typ irreduzibler Graphen wird mit $\bar{\Gamma}_5[12]$ bezeichnet (s. Tafel II).

(7. 10) Im folgenden wird angenommen, daß $a' \neq b' \neq c' \neq a'$ gilt.

Nach (7. 6) und (7. 7) zerspalten die Punkte a', b', c' die Wege A, B, C insgesamt in sechs Teilwege (unter denen auch einpunktige vorkommen können). Die drei Teilwege $(a'Cb')$, $(b'Ac')$ und $(c'Ba')$ sind mehrpunktig und bilden ein Vieleck. Bezüglich der übrigen gilt

(7. 11) *Die Längen der Wege* (aCa'), (bAb') *und* (cBc') *sind höchstens gleich* 1.

Beweis. Entgegen der Behauptung nehmen wir an, daß z.B. der Weg $(cBc')=$ $=(cAc')$ einen inneren Punkt x besitzt. Wir unterscheiden zwei Fälle.

I) Der Weg $(a'Cb')$ enthält einen inneren Punkt y. Dann folgt aus (7. 3) $\mathrm{D_A}$, $\mathrm{D_B}$ $(c'Ab) \dotplus c$ und $(c'Ba) \dotplus c$, und daher gilt mit $C'=(aBc') \cup (c'Ab)$

$$\{aC'bAcBa\} \subset G-y.$$

II) Es ist $(a'Cb')=(a'b')$. Dann folgt aus (7. 3) $\mathrm{D_A}, \mathrm{D_B}$ $C \dotplus x$, und so gilt mit $A'=(bAx)$, $B'=(xBa)$

$$\{aCbA'xB'a\} \subset G-c.$$

Wir untersuchen erst den Fall, wo $a' \neq a$, $b' \neq b$, $c' \neq c$ besteht (von (7. 12) bis (7. 15)).

(7. 12) *Es sei* $a' \neq a$, $b' \neq b$, $c' \neq c$ *und einer der Punkte* a', b', c', *z.B.* c', *sei mit einem inneren Punkt des „gegenüberliegenden" Teilweges* $(a'Cb')$ *verbunden. Dann erhalten die Wege* $(c'Ab')$ *und* $(c'Ba')$ *keinen inneren Punkt, und* c' *ist mit jedem Punkt von* $(a'Cb')$ *verbunden.*

Beweis. Es gelten $a'=c_1$, $b'=c_\gamma=a_1$, $c'=a_\alpha$, $\gamma \geqq 3$, und es gibt ein j $(1<j<\gamma)$ mit $c_jc' \in G$.

I) Nehmen wir an, daß entgegen unserer Behauptung einer der Werte von α und β, z.B. $\alpha \geqq 3$ ist. Wir zeigen, daß dann $G-a_2$ eine 3-Astroide enthält. Nach (7. 3) $\mathrm{D_C}$, $\mathrm{D_B}$ gelten $(bCc_j) \dotplus a$ und $(c'c) \dotplus a$. Daher besteht mit $A'=(bCc_jc'c)$

$$\{aCbA'cBa\} \subset G-a_2.$$

II) Es ist also $\alpha=2$ und $\beta=2$. Es sei $\gamma \geqq 4$, und nehmen wir an, daß entgegen unserer Behauptung ein i $(1<i<\gamma)$ mit $c_ic' \in \bar{G}$ existiert. Man darf $i<j$ setzen. Wir zeigen, daß dann $G-a$ eine 3-Astroide enthält. Es gelten [19]

$$A \dotplus c_i \quad [(7.\,3)\ \mathrm{D_C},\ c_ic' \in \bar{G},\ C \dotplus c],$$

$$B'=(c_iCc_1Bc) \dotplus b \quad [(7.\,3)\ \mathrm{D_C},\ B \dotplus b].$$

[19] In der eckigen Klammer, die nach einer Relation $W \dotplus x$ steht, sind die Gründe für das Bestehen der Relation kurz angedeutet.

Es besteht so mit $C'=(c_i Cb)$

$$\{c_i C' bAcB' c_i\} \subset G-a.$$

(7. 13) Der Satz (7. 12) bestimmt zusammen mit den vorangehenden Feststellungen für jeden Wert $\gamma \geqq 3$ eindeutig einen Graphen, von dem man leicht bestätigen kann, daß er eine 3-Astroide der Länge $\gamma+7$ enthält und irreduzibel ist. Dieser Typ irreduzibler Graphen wird mit $\bar{\Gamma}_6[\gamma+7]$ bezeichnet (s. Tafel II).

(7. 14) *Es sei $a' \neq a$, $b' \neq b$, $c' \neq c$ und a', b' bzw. c' soll mit keinem inneren Punkt von $(b'Ac')$, $(c'Ba')$ bzw. $(a'Cb')$ verbunden sein. Dann besitzen die drei erwähnten Teilwege insgesamt höchstens einen inneren Punkt.*

Beweis. I) Entgegen unserer Behauptung soll angenommen werden, daß $\alpha \geqq 3$ und $\beta \geqq 3$ bestehen.

Nach (7. 3) D_A, D_B gilt jetzt $C \dotplus c'$. Daher besteht mit $A'=(bAc')$ und $B'= =(c'Ba)$

$$\{aCbA'c'B'a\} \subset G-c.$$

II) Im Gegensatz zu unserer Behauptung sei $\alpha=2, \beta=2$ und $\gamma \geqq 4$. Nach (7. 3) D_C ist dann das $(\gamma+1)$-Eck $(c'c_1 \dots c_\gamma c')$ in G diagonalfrei. Laut (7. 4) bedeutet dies einen Widerspruch.

(7. 15) Entsprechend den Fällen, in denen die in (7. 14) erwähnten Teilwege insgesamt genau einen bzw. keinen inneren Punkt enthalten, gibt es (isomorphe Graphen als nicht verschieden betrachtend) je einen Graph, der die in (7. 14) und in den vorangehenden festgelegten Eigenschaften besitzt. Man kann leicht bestätigen, daß der erste bzw. zweite dieser Graphen eine 3-Astroide der Länge 10 bzw. 9 enthält, und daß beide Graphen irreduzibel sind. Diese Typen irreduzibler Graphen werden mit $\bar{\Gamma}_7$ [10] und $\bar{\Gamma}_8$ [9] bezeichnet (s. Tafel II).

(7. 16) Es soll jetzt jener Fall untersucht werden, bei dem von den Ungleichheiten $a' \neq a$, $b' \neq b$, $c' \neq c$ nur zwei gelten.

(7. 17) *Es sei $a' \neq a$, $b' \neq b$ und $c'=c$. Dann bestehen $\alpha=\beta=\gamma=2$, $a_2 b_1 \in G$, $a'a_2$, $b'b_1 \in \bar{G}$.*

Beweis. I) Aus $c'=c$ und $C \dotplus c$ folgt $\alpha \geqq 2, \beta \geqq 2$. Wir zeigen, daß von jenen Kanten $a_i b_j$, die nicht auf den Wegen A, B, C liegen, nur allein $a_\alpha b_1$ zu G gehören kann.

Wegen (7. 3) (1), (7. 3) D_A, D_B, D_C und aus Symmetriegründen genügt es,

$$a_i b_j \in \bar{G} \qquad (1 \leqq i < \alpha,\ 1 \leqq j < \beta)$$

zu beweisen. Nun sei angenommen, daß ein i und ein j mit $1 \leqq i < \alpha$, $1 \leqq j < \beta$, $a_i b_j \in G$ existiert. Dann gilt

$$A'=(bAa_i b_j Bc) \dotplus a \qquad [A \dotplus a,\ (7.\ 3)\ D_B],$$

und daher besteht $\{aCbA'cBa\} \subset G-a_\alpha$.

II) Es gilt $\gamma=2$. Ist nämlich $\gamma>2$, so besteht wegen I) $A \dotplus c_1 = b_\beta$, und so gilt mit $B'=(cBc_1)$ und $C'=(c_1 Cb)$

$$\{c_1 C' bAcB' c_1\} \subset G-a.$$

III) Es ist $a_\alpha b_1 \in G$ und $\alpha=\beta=2$. Ist nämlich $a_\alpha b_1 \in \bar{G}$, so folgt aus I), II) und (7. 3) D_A, D_B, daß das Vieleck $(b_0 \dots b_\beta a_1 \dots a_{\alpha+1})$, welches mehr als 4 Punkte besitzt, in G diagonalfrei ist. Dies ist nach (7. 4) ein Widerspruch.

Ist $a_\alpha b_1 \in G$, und besteht die eine der Ungleichungen $\alpha>2$ und $\beta>2$, so ist aus den gleichen Gründen wie vorher das n-Eck $(b_1 \dots b_\beta a_1 \dots a_\alpha b_1)$ in G diagonalfrei und es gilt $n \geqq 5$. Dies ist ein Widerspruch.

(7. 18) Man kann einfach verifizieren, daß der durch (7. 17) und durch die vorangehenden Feststellungen bestimmte Graph eine Astroide der Länge 9 enthält und irreduzibel ist. Dieser Typ von irreduziblen Graphen wird mit Γ_9 [9] bezeichnet (s. Tafel II).

Jetzt soll der Fall behandelt werden, wo von den Ungleichheiten $a' \neq a$, $b' \neq b$, $c' \neq c$ genau eine besteht.

(7. 19) *Es sei $a'=a$, $b'=b$ und $c' \neq c$. Dann gelten $\alpha=\beta=2$, $\gamma=1$, $c'c_1 \in G$ und $a_1 b_2 \in \bar{G}$.*

Beweis. I) Aus $A+a$ bzw. $B+b$ folgt $\beta \geqq 2$ bzw. $\alpha \geqq 2$. Es gibt ein c_i $(1 \leqq i \leqq \gamma)$ mit $c'c_i \in G$. Existiert nämlich kein solches i, so besteht nach (7. 3) D_A, D_B $C+c'$, und dann gilt mit $A'=(bAc')$ und $B'=(c'Ba)$ die Behauptung $\{aCbA'c'B'a\} \subset \subset G-c$.

II) Es gilt $\gamma=1$. Nehmen wir an, daß $\gamma>1$ ist, und es sei $c'c_i \in G$ $(1 \leqq i \leqq \gamma)$. Man darf $i>1$ setzen. Dann gilt nach (7. 3) D_C, D_B $A'=(bCc_i c'c)+a$, woraus $\{aCbA'cBa\} \subset G-a_1$ folgt.

III) Es besteht $a_i b_j \in \bar{G}$ $(0<i<\alpha,\ 1<j \leqq \beta)$. Wäre nämlich $a_i b_j \in G$, so hätte man nach (7. 3) D_B, D_A $C'=(aBb_j a_i Ab)+c$, wonach $\{aC'bAcBa\} \subset G-c_1$ gelten würde.

IV) Es gilt $\alpha=\beta=2$. Nehmen wir an, daß z.B. $\alpha>2$ ist. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1) Es ist $a_1 c_1 \in \bar{G}$. Dann gelten

$$C'=(ac_1 ba_1)+c \qquad [C+c,\ (7.\ 3)\ D_A]$$

$$B'=(cc'c_1 a)+a_1 \qquad [(7.\ 3)\ D_A,\ a_1 c_1 \in \bar{G},\ A+a],$$

und daher ist mit $A'=(a_1 Ac)$ $\quad \{aC'a_1 A'cB'a\} \subset G-b_2$.

2) Es gilt $a_1 c_1 \in G$. Dann gelten

$$C'=(ac_1 a_1)+c \qquad [C+c,\ (7.\ 3)\ D_A],$$

$$B+a_1 \qquad [(7.\ 3)\ D_A,\ \mathrm{III}),\ A+a],$$

und so besteht mit $A'=(a_1 Ac)$ $\quad \{aC'a_1 A'cBa\} \subset G-b$. Damit ist (7. 19) vollständig bewiesen.

(7. 20) Entsprechend den Fällen 1) $c_1 a_1, c_1 b_2 \in G$, 2) $c_1 a_1 \in \bar{G}$, $c_1 b_2 \in G$ und 3) $c_1 a_1$, $c_1 b_2 \in \bar{G}$ gibt es (isomorphe Graphen als nicht verschieden betrachtend) je einen Graph, der den in (7. 19) und in den vorangehenden festgelegten Bedingungen genügt. Man kann leicht bestätigen, daß diese Graphen je eine 3-Astroide der Länge 8 enthalten und irreduzibel sind. Diese Typen von Graphen werden der Reihe nach mit $\bar{\Gamma}_{10}$ [8], $\bar{\Gamma}_{11}$ [8] und $\bar{\Gamma}_{12}$ [8] bezeichnet (s. Tafel II).

Endlich müssen wir noch den Fall $a'=a$, $b'=b$, $c'=c$ untersuchen.

(7. 21) ERKLÄRUNGEN. Verbindet eine Kante einen *inneren* Punkt von A mit einem *inneren* Punkt von B, so soll sie eine *AB-Transversale* heißen. Wir sagen auch, daß diese Transversale die Bogen A und B verbindet. Ähnliche Bedeutung kommt den Begriffen der BC- und CA-Transversalen zu.

Wegen (7. 3) (1) und (7. 3) $\mathrm{D_A}$, $\mathrm{D_B}$, $\mathrm{D_C}$ können von den Kanten, die zwei Punkte von $\mathscr{P}(G)$ verbinden und nicht auf den Bogen A, B, C liegen, nur die Transversalen zu G gehören. Der einfachste Fall ist der, wo keine Transversale zu G gehört. Diesbezüglich gilt die folgende triviale Behauptung.

(7. 22) Ein n-Eck ($n \geqq 6$) enthält 3-Astroiden der Länge n und ist irreduzibel. Dieser Typ irreduzibler Graphen wird mit $\bar{\Gamma}_{13}[n]$ bezeichnet (s. Tafel II).

Im folgenden sei angenommen, daß mindestens eine zu G gehörige Transversale existiert.

(7. 23) *Die zu G gehörigen Transversalen können nicht alle dieselben zwei Bogen verbinden.*

BEWEIS. Nehmen wir das Gegenteil an: Es sollen alle zu G gehörigen Transversalen die Form $a_i b_j$ haben. Es bezeichne ferner g den kleinsten Index von den a_i bei diesen Transversalen und h den größten Index von den b_j, den man bei den zu G gehörigen Transversalen der Form $a_g b_j$ finden kann. Dann ist das Vieleck

$$V=(ac_1 \dots c_\gamma ba_1 \dots a_g b_h \dots b_\beta a)$$

in G diagonalfrei, und die Anzahl seiner Punkte ist $\geqq 5$. Nach (7. 4) ist das ein Widerspruch.

Wir schicken jetzt zwei Lemmata voraus:

(7. 24) LEMMA. *Es sei* $\beta \geqq 2$ *und* $a_i b_j \in G$ *mit* $1<j\leqq\beta$ *und* $1\leqq i\leqq\alpha$. *Dann gilt* $\alpha=i=1$.

BEWEIS. Es sei, entgegen unserer Behauptung, $\alpha>1$ angenommen. Ist $i<\alpha$, so gilt wegen (7. 3) $\mathrm{D_B}$, $\mathrm{D_A}$ $C'=(aBb_j a_i Ab)+c$, woraus $\{aC'bAcBa\}\subset G-c_1$ folgt. Ist $i>1$, so gilt nach (7. 3) $\mathrm{D_A}$ und $B+b$ $B'=(cAa_i b_j Ba)+b$, woraus $\{aCbAcB'a\}\subset G-b_1$ folgt.

(7. 25) LEMMA. *Es sei* $\beta\geqq 2$ *und* $a_i b_j \in G$ *mit* $1\leqq j<\beta$ *und* $1\leqq i\leqq\alpha$. *Dann gibt es zu jedem g mit* $1\leqq g<\beta$ *ein h* ($1\leqq h\leqq\gamma$) *derart, daß* $b_g c_h \in G$ *gilt.*

BEWEIS. Entgegen unserer Behauptung sei angenommen, daß ein g mit $1\leqq g<\beta$ existiert, für welches $b_g c_k \in \bar{G}$ ($k=1, \dots, \gamma$) gilt. Dann gelten

$$C+b_g, \qquad [(7.\ 3)\ \mathrm{D_B},\ B+b],$$

$$A'=(bAa_i b_j Bb_g)+a \qquad [A+a,\ (7.\ 3)\ \mathrm{D_B}],$$

und so besteht mit $B'=(b_g Ba)$ $\{aCbA'b_g B'a\}\subset G-c$.

(7. 26) *Es gibt unter den Bogen A, B, C höchstens eine, die mehr als einen inneren Punkt enthält.*

BEWEIS. Entgegen der Behauptung soll angenommen werden, daß $\alpha > 1$ und $\beta > 1$ gelten. Aus dieser Annahme beweisen wir erst folgende Feststellungen: Von den AB-Transversalen kann nur $a_\alpha b_1$ zu G gehören; es gelten $\gamma = 1$ und $c_1 a_\alpha$, $c_1 b_1 \in G$. Es sollen zwei Fälle unterschieden werden:

1) Es gibt ein $a_i b_j \in G$ $(1 \leqq i \leqq \alpha,\ 1 \leqq j \leqq \beta)$. Nach (7. 24) ist dann $i = \alpha, j = 1$, Laut (7. 25) gibt es ein h $(1 \leqq h \leqq \gamma)$ mit $b_1 c_h \in G$. Wegen. (7. 24) ist dann $\gamma = h = 1$, woraus aus Symmetriegründen $a_\alpha c_1 \in G$ folgt.

2) Es gibt kein $a_i b_j \in G$ $(1 \leqq i \leqq \alpha,\ 1 \leqq j \leqq \beta)$. Dann gibt es nach (7. 23) ein $c_g a_k \in G$ $(1 \leqq g \leqq \gamma,\ 1 \leqq k \leqq \alpha)$ und ein $c_u b_v \in G$ $(1 \leqq u \leqq \gamma,\ 1 \leqq v \leqq \beta)$. Nach (7. 25) kann nur $k = \alpha$ und $v = 1$ bestehen und so folgt aus (7. 24) $\gamma = g = u = 1$.

Jetzt zeigen wir, daß auch $a_1 c_1 \in \bar{G}$ gilt. Besteht nämlich $a_1 c_1 \in G$, so existiert nach (7. 25) (sowohl im Fall 1) als auch im Falle 2)) eine Kante $a_1 b_r \in G$ $(1 \leqq r \leqq \beta)$, was mit den obigen in Widerspruch steht.

Nun kann man folgern:

$$C' = (ac_1 ba_1) + c \qquad [C + c,\ (7.\ 3)\ \mathrm{D_A}]$$

$$B' = (cb_1 c_1 a) + a_1 \qquad [(7.\ 3)\ \mathrm{D_A},\ a_1 b_1,\ a_1 c_1 \in \bar{G},\ A + a],$$

und so ist mit $A' = (a_1 A c)$ $\quad \{aC' a_1 A' c B' a\} \subset G - b_\beta$.

(7. 27) Enthält jeder Bogen A, B, C genau einen inneren Punkt, so existieren nach (7. 23) entweder drei oder zwei zu G gehörige Transversalen. Wie man es leicht verifizieren kann, erhält man in beiden Fällen solche Graphen, die je eine 3-Astroide der Länge 6 enthalten und irreduzibel sind. Man kann diese Typen mit jenen von (7. 33) zusammenziehen. Sie werden deshalb mit $\bar{\Gamma}_{15}\,[6]$ bzw. $\bar{\Gamma}_{16}\,[6]$ bezeichnet (s. (7. 33) und Tafel II).

(7. 28) Im folgenden sei angenommen, daß einer der Bogen, z.B. C mehr als einen inneren Punkt enthält. Dann gilt

$$(1) \qquad \alpha = \beta = 1, \qquad \gamma \geqq 2.$$

Nach (7. 23) kann man die Existenz eines i $(1 \leqq i \leqq \gamma)$ mit $a_1 c_i \in G$ voraussetzen. Es soll dann h den größten dieser Indizes i bezeichnen. Also besteht

$$(2) \qquad a_1 c_h \in G \quad \text{und} \quad a_1 c_j \in \bar{G} \qquad (h < j \leqq \gamma), \quad \text{falls} \quad \gamma > h \quad \text{ist.}$$

(7. 29) *Es gilt entweder* $h = \gamma - 1$ *oder* $h = \gamma$.

BEWEIS. Ist nämlich $h \leqq \gamma - 2$, so ist wegen (7. 3) $\mathrm{D_C}$ und (7. 28) (2) das Vieleck $(a_1 c_h \ldots c_\gamma b a_1)$ in G diagonalfrei, und es besitzt mehr als 4 Punkte. Nach (7. 4) ist das ein Widerspruch.

(7. 30) *Ist* $b_1 c_i \in \bar{G}$ $(i = 1, \ldots, \gamma)$, *so gelten* $a_1 b_1 \in G$, $h = 1$ *und* $\gamma = 2$.

BEWEIS. $a_1 b_1 \in G$ folgt unmittelbar aus (7. 23). $h > 1$ steht nach (7. 25) zu $c_h b_1 \in \bar{G}$ in Widerspruch. Laut (7. 28) (1) und (7. 29) besteht also $\gamma = 2$.

(7. 31) Man kann leicht einsehen, daß der durch (7. 30) und durch die vorangehenden Feststellungen bestimmte Graph eine Astroide der Länge 7 enthält und irreduzibel ist. Dieser Typ irreduzibler Graphen wird mit $\bar{\Gamma}_{14}\,[7]$ bezeichnet (s. Tafel II).

(7. 32) Im folgenden sei angenommen, daß ein i $(1 \leqq i \leqq \gamma)$ mit $b_1 c_i \in G$ existiert.

(7. 33) Gehören sämtliche $a_1 c_i$ und $b_1 c_i$ $(1 \leqq i \leqq \gamma)$ zu G, so gibt es den Fällen $a_1 b_1 \in G$ und $a_1 b_1 \in \bar{G}$ entsprechend zu jedem Wert $\gamma \geqq 2$ je einen Graphen. Man kann bestätigen, daß diese Graphen je eine 3-Astroide der Länge $\gamma + 5$ enthalten und irreduzibel sind. Diese Typen irreduzibler Graphen werden mit $\bar{\Gamma}_{15}[\gamma+5]$ und $\bar{\Gamma}_{16}[\gamma+5]$ bezeichnet. (Dem Wert $\gamma = 1$ entsprechen die in (7. 27) erwähnten Typen. Siehe Tafel II).

(7. 34) Im folgenden sei angenommen, daß von den AC- und BC-Transversalen mindestens eine zu $\bar{G}$ gehört. Man darf voraussetzen, daß es ein i $(1 \leqq i \leqq \gamma)$ mit $b_1 c_i \in \bar{G}$ gibt. Ferner möge g den größten dieser Indizes i bezeichnen. Es besteht also

(1) $\quad b_1 c_g \in \bar{G}$ und $b_1 c_j \in G \quad (g < j \leqq \gamma)$, falls $\gamma > g$ ist.

(7. 35) *Es gilt* $\min(g, h) = 1$.

Beweis. Ist nämlich $\min(g, h) > 1$, so folgt aus (7. 25) $b_1 c_g \in G$. Das steht zu (7. 34) (1) in Widerspruch.

Wir werden jetzt die Fälle $g < h$, $g = h$ und $g > h$ einzeln untersuchen.

(7. 36) *Es sei* $g < h$. *Dann gelten* $g = 1, h = \gamma = 2$, $b_1 c_2, a_1 c_2 \in G$, *und im Falle* $a_1 c_1 \in G$ *auch* $a_1 b_1 \in G$.

Beweis. Nach (7. 34) (1) ist $b_1 c_\gamma \in G$, nach (7. 35) $g = 1$.
Entgegen unserer Behauptung nehmen wir an, daß $\gamma > 2$ ist. Dann gelten

$$A' = (bc_\gamma b_1 c) + c_1 \qquad [(7.\,3)\ \mathrm{D_C},\ \gamma > 2,\ b_1 c_1 \in \bar{G},\ C + c],$$

$$B' = (cb_1 ac_1) + b \qquad [B + b,\ (7.\,3)\ \mathrm{D_C}],$$

woraus mit $C' = (c_1 Cb)$ $\{c_1 C' b A' c B' c_1\} \subset G - a_1$ folgt. Es besteht also $\gamma = 2$, und so muß $h = 2$ sein. Daher gilt $a_1 c_2 \in G$.

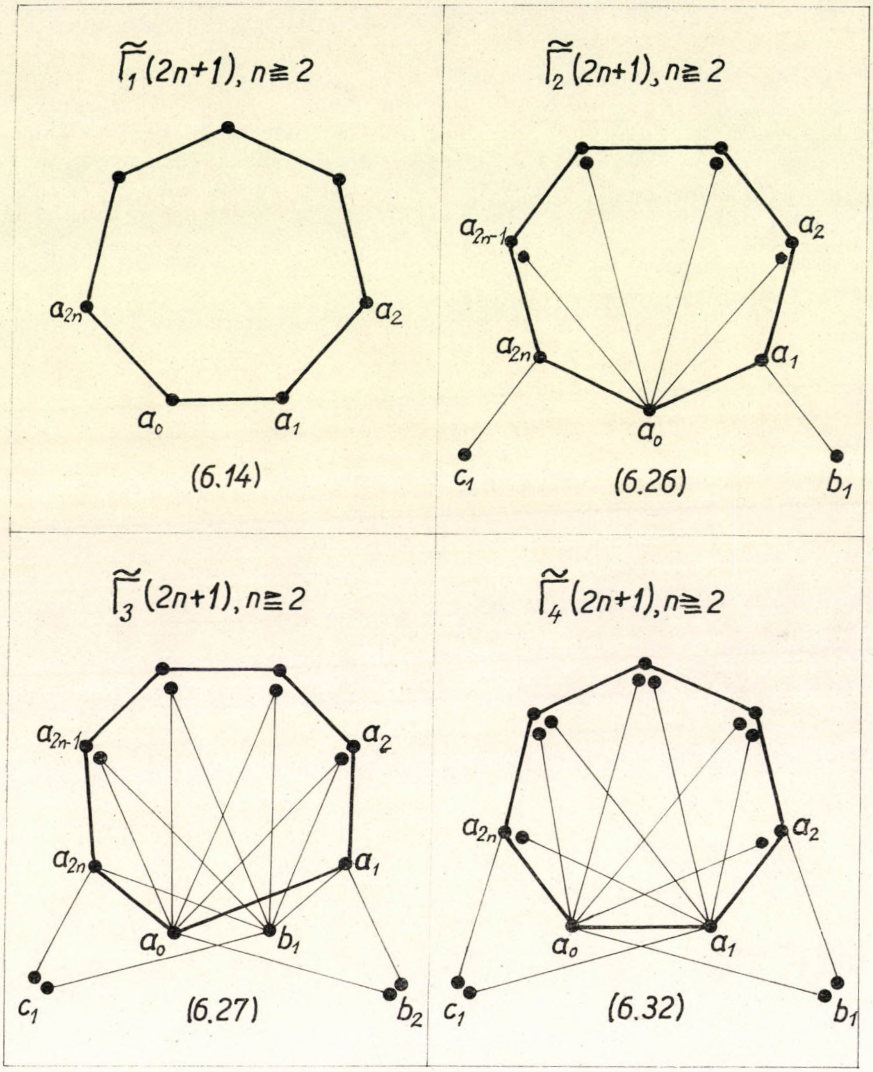
Ist $a_1 c_1 \in G$, so kann $a_1 b_1 \in \bar{G}$ nicht bestehen. Sonst wäre das Fünfeck $(ac_1 a_1 cb_1 a)$ in G diagonalfrei, und das bedeutet nach (7. 4) einen Widerspruch.

(7. 37) Der Voraussetzung $g < h$ können nach (7. 36) drei Graphen genügen. Derjenige unter diesen, bei dem $a_1 c_1, a_1 b_1 \in \bar{G}$ besteht, gehört zum Typ $\bar{\Gamma}_{14}[7]$, und wie man leicht verifizieren kann, enthalten die übrigen zwei (die den Fällen $a_1 c_1 \in G$, $a_1 b_1 \in G$ und $a_1 c_1 \in \bar{G}$, $a_1 b_1 \in G$ entsprechen) je eine 3-Astroide der Länge 7 und sind irreduzibel. Diese Typen irreduzibler Graphen werden mit $\bar{\Gamma}_{17}[7]$ und $\bar{\Gamma}_{18}[7]$ bezeichnet (s. Tafel II).

(7. 38) *Es sei* $g = h$. *Dann gelten* $h = 1, \gamma = 2$, $a_1 c_1, b_1 c_2, a_1 b_1 \in G$ *und* $b_1 c_1$, $a_1 c_2 \in \bar{G}$.

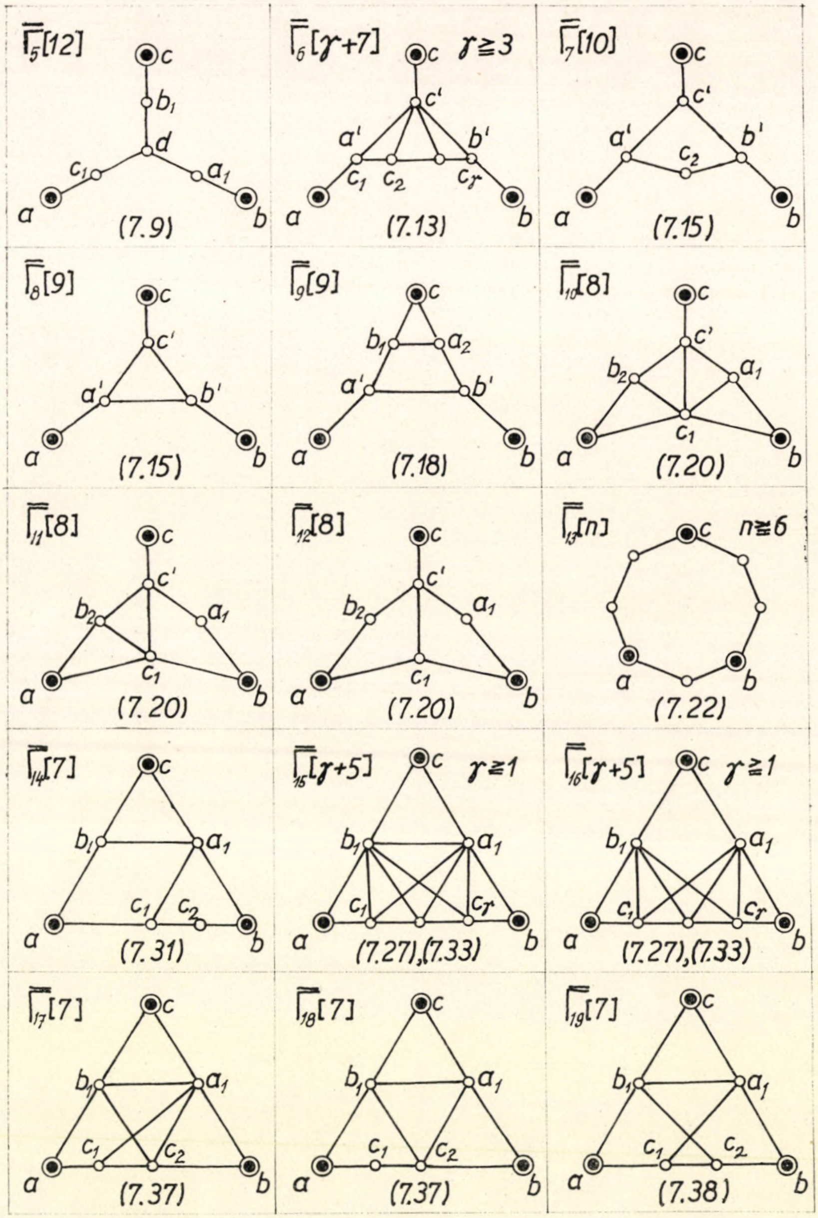
Beweis. Nach (7. 35) ist $g = h = 1$, und so gilt laut (7. 28), (7. 29) und (7. 34) $\gamma = 2$, $a_1 c_1, b_1 c_2 \in G$ und $a_1 c_2, b_1 c_1 \in \bar{G}$.

Wäre $a_1 b_1 \in \bar{G}$, so wäre $(a_1 c_1 a b_1 c a_1)$ diagonalfrei in G. Dies bedeutet einen Widerspruch.



TAFEL I.

Die Verknüpfungsgraphen jener irreduziblen nicht t-orientierbaren Graphen, die keine Dreieckskette enthalten. (Die unter den Figuren stehenden Nummern geben die Erklärungsorte der Figuren an.)



TAFEL II.

Die irreduziblen Graphen, die 3-Astroiden enthalten. (Die unter den Figuren stehenden Nummern geben die Erklärungsorte der Figuren an).

(7. 39) Der Bedingung $g=h$ kann also nur ein wohlbestimmter Graph genügen. Wie man leicht bestätigen kann, enthält er eine 3-Astroide der Länge 7 und ist irreduzibel. Dieser Typ irreduzibler Graphen wird mit $\bar{\Gamma}_{19}$ [7] bezeichnet (s. Tafel II).

(7. 40) *Es sei* $g>h$. *Dann gilt* $h=1, g=\gamma=2, a_1c_1, b_1c_1 \in G, a_1c_2, b_1c_2 \in \bar{G}$.

Beweis. $h=1$ folgt aus (7. 35). Dies ergibt nach (7. 29) $\gamma=g=2$. Laut (7. 28) und (7. 34) ist dann $a_1c_1 \in G$, $a_1c_2, b_1c_2 \in \bar{G}$, und wegen (7. 32) $b_1c_1 \in G$.

Der Bedingung $g>h$ können also zwei Graphen genügen. Bei dem ersten ist $a_1b_1 \in G$. Dieser gehört dem Typ $\bar{\Gamma}_{18}$ [7] zu. Bei dem zweiten ist $a_1b_1 \in \bar{G}$. Dieser ist vom Typ $\bar{\Gamma}_{14}$ [7].

(7. 41) Wir haben nun sämtliche Möglichkeiten untersucht, und haben insgesamt 15 Typen irreduzibler Graphen mit 3-Astroiden gefunden (s. Tafel II).

(Eingegangen am 16. November 1965.)

Literaturverzeichnis

[1] G. A. Dirac, Trennende Knotenpunktmengen und Reduzibilität abstrakter Graphen mit Anwendung auf das Vierfarbenproblem, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **204** (1960), S. 116—131.

[2] A. Ghouila-Houri, Caractérisation des graphes non orientés dont on peut orienter les arêtes de manière à obtenir le graphe d'une relation d'ordre, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **254** (1962), S. 1370—1371.

[3] A. Ghouila-Houri, Flots et tensions dans un graphe, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 3e s. **81** (1964), S. 207—265.

[4] P. C. Gilmore—A. J. Hoffman, Characterizations of Comparability and Interval Graphs. Abstract, *Internat. Congress Mathematicians* (Stockholm, 1962), S. 29.

[5] P. C. Gilmore—A. J. Hoffman, A characterization of comparability graphs and of interval graphs, *Can. J. Math.*, **16** (1964), S. 539—548.

[6] G. Hajós, Über eine Art von Graphen, *Intern. Math. Nachr.*, **11** (1957). Sondernummer 65.

[7] C. G. Lekkerkerker—J. Ch. Boland, Representation of a finite graph by a set of intervals in the real line, *Fund. Math.*, **51** (1962), S. 45—64.

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (1—2), 1967, pp. 67—69.

BOREL—CANTELLI TYPE THEOREMS FOR MIXING SETS

By

R. M. FISCHLER (Toronto, Canada)

(*Presented by* A. RÉNYI)

0. Introduction. In what follows we consider a probability triple $[\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}]$. The notation follows [4].

A sequence of sets $\{B_n\}$ is said ([5]) to be mixing of density α, $0<\alpha<1$, if for all A in $\mathcal{A}$

$$\lim |\mathbf{P}(B_n \cap A) - \alpha\mathbf{P}(A)| = 0. \tag{1}$$

If one does not require that $\mathbf{P}(B_n) \to \alpha$, but only the condition

$$\lim |\mathbf{P}(B_n \cap A) - \mathbf{P}(B_n)\mathbf{P}(A)| = 0 \tag{2}$$

then $\{B_n\}$ is simply said ([7]) to be mixing.

A necessary and sufficient condition for $\{B_n\}$ to be mixing of density α (or mixing) is that (1) (or (2)) hold for $A = B_k$, $k = 1, 2, \ldots$ and for $A = \Omega$. From this condition one sees that independent sequences are mixing.

The purpose of this paper is to consider the weaker condition of mixing, and investigate extensions of the classical Borel—Cantelli lemma to this case.

1. Results. For mixing with density the classical result still holds.

THEOREM 1. *If* $\{B_n\}$ *is mixing* α, *then* $\mathbf{P}(\limsup B_n) = 1$ *and* $\mathbf{P}(\liminf B_n) = 0$.

PROOF. Assume $\mathbf{P}[\limsup B_n] \neq 1$. Then there is a set D of positive probability such that each point in D belongs to a finite number of sets B_i (the sets to which a point belongs will vary). I.e., if $\omega \in D$, then $\omega \in B_i$ for $i \in F(\omega) = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$; $\omega \notin B_i$ for $i \notin F(\omega)$. Now, for each finite subset F_γ of the integers, there is a set $D_\gamma \subset D$ such that $\omega \in D_\gamma$ if and only if $\omega \in B_i$ for (and only for) $i \in F_\gamma$. Note that there are only a countable number of finite subsets of the integers, that the D_γ are disjoint, and hat $D = \bigcup D_\gamma$. Therefore for some F_γ, $\mathbf{P}(D_\gamma) > 0$ (otherwise $\mathbf{P}(D) = \Sigma\mathbf{P}(D_\gamma) = 0$). Then $\omega \in D_\gamma$ implies $\omega \notin B_i$; if $i \notin F_\gamma = \{i_1, \ldots, i_n\}$. Therefore $\mathbf{P}(B_i \cap D_\gamma) = 0$ for $i > i_n$, which contradicts $\lim \mathbf{P}(B_i \cap D_\gamma) = \alpha\mathbf{P}(D_\gamma) > 0$.

To show $\mathbf{P}(\liminf B_n) = 0$, note that $\{B_n^c\}$ is also mixing — with density $(1-\alpha)$ — and that $\liminf B_n = (\limsup B_n^c)^c$.

Another proof of this result is given in [3].

COROLLARY 1. If $\{B_n\}$ is mixing α, then $\mathbf{P}(\bigcup B_n) = 1$.

COROLLARY 2. If $\{B_n\}$ is mixing α, then $\Sigma\mathbf{P}(B_n/B_1, \ldots, B_{n-1})$ diverges w.p.l. This follows directly from Corollary b, p. 398 of [4].

For stable sequences — those for which $\mathbf{P}(B_n \cap A) \to \int_A \alpha d\mathbf{P}$, with α a non-negative random variable bounded by one ([6]) — the corresponding result is

THEOREM 2. *If $\{B_n\}$ is stable with local density α, then* $\mathbf{P}(\limsup B_n) \geqq \mathbf{P}(\alpha > 0)$, *and* $\mathbf{P}(\liminf B_n) \leqq 1 - \mathbf{P}(\alpha < 1)$.

Theorem 1 has the following interesting application. On page 191 of [2], FELLER, in commenting on the law of the iterated logarithm says that $S_n' = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} [X_j - \mathbf{E}(X_j)]$ — with the X_j independent and identically distributed — gets larger (smaller) than any number infinitely often w.p.l. This follows directly from the theorem since for any x we have, with $B_n(x) = \{S_n' \leqq x\}$, that $\{B_n(x)\}$ is mixing (see [5] — the proof follows immediately from the sufficient condition mentioned in the introduction); and so

$$\mathbf{P}[\limsup B_n(x)] = \mathbf{P}[\limsup B_n^c(x)] = 1.$$

We can say something about $\mathbf{P}(\limsup B_n)$ in the more general mixing case (2). We need the following result.

LEMMA 1. *If $\{C_k\} \subset \{B_k\}$, then* $\limsup C_k \subset \limsup B_k$.

PROOF. If a point is in infinitely many C_k, it certainly is in infinitely many B_k.

THEOREM 3. *Let $\{B_n\}$ be mixing* (2); *let $C = \limsup B_n$, then*

(i) *if* $\Sigma \mathbf{P}(B_n) < \infty$, $\mathbf{P}(C) = 0$

(ii) *if* $\Sigma \mathbf{P}(B_n) = \infty$ *and* $\mathbf{P}(B_n) \nrightarrow 0$, $\mathbf{P}(C) = 1$

(iii) *if* $\Sigma \mathbf{P}(B_n) = \infty$ *and* $\mathbf{P}(B_n) \to 0$, *no conclusion can be reached.*

PROOF. (i) is a standard result ([4], p. 228). In case (ii) we extract a subsequence $\{C_n\}$, such that $\mathbf{P}(C_n) \to \alpha$, $\alpha > 0$. Then $\{C_n\}$ is mixing of density α, so that by Theorem 1, $\mathbf{P}(\limsup C_n) = 1$. By the above lemma, $\mathbf{P}(C) = 1$. Under (iii) we can obtain $\mathbf{P}(C)$ arbitrary by suitable choice of $\{B_n\}$. To see this take arbitrary t, $0 < t < 1$; split the unit interval (with Lebesgue measure) into $[0, t]$ and $(t, 1]$; split $[0, t]$ into two equal parts B_1 and B_2, then into four equal parts B_3, B_4, B_5, B_6, etc. The conditions of (iii) are satisfied and $\limsup B_n = [0, t]$, which has probability t.

In the special case of mixing where the $\{B_n\}$ are independent (the classical Borel—Cantelli lemma), $\Sigma \mathbf{P}(B_n) = \infty$ implies that $\mathbf{P}(C) = 1$ even if $\mathbf{P}(B_n) \to 0$.

It appears difficult to state general conditions on a non-independent mixing sequence such that $\Sigma \mathbf{P}(B_n) = \infty$ implies $\mathbf{P}(\limsup B_n) = 1$. However, an example mentioned in [1] indicates that a fast rate (in some sense) of mixing is needed. The class of stochastic processes referred to in [1] are the $*$-mixing sequences $\{X_n\}$; those for which there exists a real valued function f, defined on the integers non-increasing with $f(n) \to 0$, such that if $A \in \mathscr{B}(X_1, \ldots, X_m)$ and $B \in \mathscr{B}(X_{m+n}, \ldots)$ then,

$$|\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| \leqq f(n)\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

We define a sequence of sets to be $*$-mixing if the indicators form a mixing sequence. By taking $A=B_k$ and $B=B_n$, we have by the remark following (2) that $*$-mixing sequences are mixing.

THEOREM ([1]). *If* $\{B_n\}$ *is* $*$*-mixing, then* $\Sigma\mathbf{P}(B_n)=\infty$ *implies* $\mathbf{P}(\limsup B_n)=1$.

2. A different view of the general case. If $\{B_n\}$ is independent then the tail is $0-1$ ([4]; p. 229) by KOLMOGOROV's $0-1$ law. Since for any sequence $\{B_n\}$, $\limsup B_n$ and $\liminf B_n$ are tail events, it is not surprising that under certain conditions (Borel—Cantelli lemma), $\mathbf{P}(\limsup B_n)=1$.

Now SUCHESTON [7] has shown that every mixing sequence contains a further subsequence whose tail is $0-1$. By continuing the process of extracting $0-1$ subsequences, one sees that any mixing sequence can be broken up into countably many disjoint subsequences, each of which has a $0-1$ tail. If the lim sup of any one of these subsequences has probability one, then by Lemma 1, the lim sup of the whole mixing sequence has probability one. The problem is to put some conditions on a mixing sequence such that the structure of at least one of the $0-1$ subsequences (which is also mixing) causes it to behave in the proper manner.

3. Acknowledgement. This work was done at the University of Oregon with support from the National Science Foundation-grant GP—1643. The author would like to express his appreciation to Professor DONALD TRUAX for his assistance and suggestions.

(Received 18 November 1965)

Bibliography

[1] J. BLUM, D. HANSEN, L. KOOPMANS, On the strong law of large numbers for a class of stochastic processes, *Zeit. Wahrschein. ver. Geb.*, **2** (**1**) (1964), pp. 387—393.
[2] W. FELLER, *An introduction to probability and its applications*, vol. 1, 2nd edition, Wiley (1951).
[3] R. FISCHLER, The strong law of large numbers for indicators of mixing sets, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **18** (1967), pp. 71—81.
[4] M. LOÈVE, *Probability theory*, 2nd ed., D. V. Nostrand (1960).
[5] A. RÉNYI, On mixing sequences of sets, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **9** (1958), pp. 215—228.
[6] A. RÉNYI, On stable sequences of events, *Sankhya*, series **A**, vol. **25**, part **3** (1963).
[7] L. SUCHESTON, On mixing and the 0—1 law, *Journal of Math. Analysis and Application*, **6** (1963), pp. 447—456.

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (1—2), 1967, pp. 71—81.

THE STRONG LAW OF LARGE NUMBERS FOR INDICATORS OF MIXING SEQUENCES

By

R. M. FISCHLER (Toronto, Canada)

(*Presented by* A. RÉNYI)

0. Introduction

In the succeeding $[\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}]$ is a probability triple. The conventions and notations follow LOÈVE [6], and unless otherwise noted the standard theorems used may also be found there.

RÉNYI [8] defined a sequence $\{B_n\}$ to be mixing of density α, $0<\alpha<1$ (mixing α), if for all $A\in\mathscr{A}$

$$\lim \mathbf{P}(B_n\cap A)=\alpha\mathbf{P}(A). \tag{1}$$

A necessary and sufficient condition for $\{B_n\}$ to be mixing of density α is that

$$\lim \mathbf{P}(B_n\cap B_k) = \alpha\mathbf{P}(B_k) \quad \text{for} \quad k=0,1,2\,\ldots \quad \text{with} \quad B_0=\Omega, \tag{2}$$

i.e. that (1) holds with $A=B_k$.

Later in [9], RÉNYI extended the concept of mixing and defined stable sequences. A sequence $\{B_n\}$ is said to be stable of local density α, if for all $A\in\mathscr{A}$

$$\lim \mathbf{P}(B_n\cap A) = \int_A \alpha\, d\mathbf{P}. \tag{3}$$

From (2) one sees that if $\{B_n\}$ is an independent sequence such that $\mathbf{P}(B_n)=\alpha$, then $\{B_n\}$ is mixing of density α. Therefore mixing is a generalization of independence as well as a type of asymptotic independence. The question therefore arises as to how far one can extend various results of probability theory with the hypothesis of independence replaced by that of mixing. In this paper we investigate several aspects of the strong law of large numbers for indicators of mixing sequences. Other topics involving mixing will be discussed elsewhere.

In the first section it is shown that in general the strong law need not hold in the mixing case, but that if it does hold then the limiting random variable must be identically the mixing density. Bounds are also given for the infimum and supremum of the averages in the general case.

The concept of Cesàro mixing, which only requires that the averages of the terms in (2) converge, is introduced in section 2. By applying a uniformity condition on the Cesàro convergence a weak law is obtained, and then it is shown that the strong law holds if this uniform convergence is fast enough.

Section 3 characterizes mixing sequences in terms of subsequences obeying the strong law.

The last section deals with various examples.

1. Some general results

We shall say that the strong law (of large numbers) holds for the indicators of $\{B_n\}$ (or for $\{B_n\}$) if

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} I_{B_j} = f \quad \text{exists} \quad \text{w. p. 1.} \tag{4}$$

If $\{B_n\}$ is mixing of density α, then (1) implies that the sets $\{B_n\}$ can not "stay fixed" indefinitely. One might thus suspect that each point in the space should belong to the same percent of sets, i.e. that (4) holds with a constant limit (which would have to be the mixing constant since $\mathbf{P}(B_j) \to \alpha$).

In general, however, mixing sets do not obey the strong law as the following example shows. The idea is to have the sets mix very slowly. We first need

THEOREM 1. *If $\{B_n\}$ is mixing of density α, then* $\mathbf{P}(\limsup B_n) = 1$ *and* $\mathbf{P}(\liminf B_n) = 0$.

This is proved in [3], and an alternate proof is given in section 3.

EXAMPLE 1. Let $\{A_n\}$ be mixing of density α, and let $\{n_k\}$ be such that $n_k/n_{k+1} \to 0$. Define $B_n = A_k$ for $n_k < n \leqq n_{k+1}$. Then by using (2) we see that $\{B_n\}$ is also mixing α. By Theorem 1 we have that for ω outside a set of probability zero there exist $\{s_k\}$, such that $\omega \in A_{s_k}$; and $\{t_k\}$ such that $\omega \notin A_{t_k}$, for all k ($\{s_k\}$ and $\{t_k\}$ depend on ω).

Fix ω and let

$$S(i, k) = \sum_{j=i}^{k} I_{B_j}(\omega); \qquad m_j = n_{s_j}.$$

Then:

$$\frac{1}{m_{k+1}} S(1, m_{k+1}) \geqq \frac{1}{m_{k+1}} S(m_k, m_{k+1}) = \frac{1}{m_{k+1}} (m_{k+1} - m_k) \to 1.$$

Therefore $\limsup \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} I_{B_j} = 1$ w.p.1. Similarly $\liminf \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} I_{B_j} = 0$ w.p.1.

We next show that even if we suppose that the tail-field of $\{B_n\}$ is $0-1$ the strong law need not hold.

EXAMPLE 2. In the above example let $\{A_n\}$ be $0-1$ (which is true for instance if $\{A_n\}$ is independent), then with $\{B_n\}$ as above

$$\mathscr{C}'_k = \mathscr{B}(B_k, B_{k+1}, \ldots) \subset \mathscr{B}(A_k \ldots A_k, A_{k+1}, \ldots, A_{k+1} \ldots) = \mathscr{B}(A_k, A_{k+1}, \ldots) = \mathscr{C}_k.$$

Therefore $\bigcap \mathscr{C}'_k$ is $0-1$, since $\bigcap \mathscr{C}_k$ is $0-1$.

Suppose now that the strong law holds for some mixing sequence $\{B_n\}$. Is it possible that the limit in (4) be other than α? The answer is no and this follows by taking α constant in the following.

THEOREM 2. *If $\{B_n\}$ is stable of local density α, and if* $\lim \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} I_{B_j} = f$ *w.p.l., then $f = \alpha$ w.p.l.*

PROOF. We have for all $B \in \mathscr{A}$

$$\int_B \alpha\, d\mathbf{P} = \lim \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(B_j \cap B) = \lim \int_B \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} I_{B_j}\, d\mathbf{P} = \int_B \lim \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} I_{B_j}\, d\mathbf{P} = \int_B f\, d\mathbf{P}.$$

Therefore for all $B \in \mathscr{A}$, $\int_B f d\,\mathbf{P} = \int_B \alpha d\mathbf{P}$, and by the Radon—Nikodym theorem $f = \alpha$ w.p.1.

COROLLARY 1. If $\{B_n\}$ is mixing of density α, and if $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} I_{B_j} = f$ w.p.1., then $f = \alpha$ w.p.1.

COMMENT. Suppose we take $\{B_n\}$ mixing of density α, and such that $\{I_{B_n}\}$ does not obey the strong law. Write

$$f_n = \frac{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} I_{B_j}}{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(B_j)}, \quad f = 1, \quad \mu_n(A) = \int_A f_n\, d\mathbf{P}, \quad \mu(A) = \mathbf{P}(A).$$

Then computing as above, we have an example of a sequence of probability measures $\{\mu_n\}$ converging to a probability measure μ, with $\mu_n \ll \mu$, and yet the Radon—Nikodym derivatives of μ_n do not approach the Radon—Nikodym derivative of μ.

In the general case of mixing (stable) sequences, we can obtain some information about the limiting behavior of the averages of the indicators as a corollary to the following.

LEMMA 1. *Let $\{f_n\}$ be a sequence of non-negative, uniformly bounded random variables. If* $\lim \int_B f_n d\mathbf{P} = \int_B f d\mathbf{P}$ *for all* $B \in \mathscr{A}$, *then*

$$\mathbf{P}(\liminf f_n \leqq f) = 1; \qquad \mathbf{P}(\limsup f_n \geqq f) = 1.$$

PROOF. Let $A = \{\liminf f_n \leqq f\}$. We have by the Fatou lemma

$$\int_{A^c} f d\mathbf{P} = \lim \int_{A^c} f_n\, d\mathbf{P} \geqq \int_{A^c} \liminf f_n\, d\mathbf{P} \geqq \int_{A^c} f\, d\mathbf{P}.$$

The last inequality is strict unless $\mathbf{P}(A^c) = 0$ which proves the first result. If $f_n \leqq K$ for all n, then by using the functions $g_n = K - f_n$, $g = K - f$, we obtain the second result from the first.

THEOREM 3. *If $\{B_j\}$ is mixing — (stable) of density α, $0 < \alpha < 1$, then*

$$\mathbf{P}\left[\liminf \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} I_{B_j} \leqq \alpha\right] = 1; \quad \mathbf{P}\left[\limsup \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} I_{B_j} \geqq \alpha\right] = 1.$$

PROOF. Let $f_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} I_{B_j}$, $f = \alpha$, in Lemma 1.

2. Cesaro mixing and the weak and strong laws

DEFINITION 1. $\{B_n\}$ is Cesàro mixing of density α if for all B in $\mathscr{A}$

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(B_j \cap B) = \alpha \mathbf{P}(B). \tag{5}$$

This is weaker than the weak mixing condition of RÉNYI [8] (see also [4]; p. 37).
By examining the proof of Theorem 2 we see that the following is true.

THEOREM 4. *If $\{B_j\}$ is Cesàro mixing of density α and if $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} I_{B_j} \to f$ w.p.l., then $f = \alpha$ w.p.l.*

We can express the concept of Cesàro mixing in another way. Let

$$f_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} I_{B_j}, \quad f = \alpha,$$

$$\mu_n(A) = \int_A f_n \, d\mathbf{P} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(B_j \cap A), \quad \mu(A) = \int_A f \, d\mathbf{P} = \alpha \mathbf{P}(A)$$

then

$$\mu_n(A) \to \mu(A) \quad \text{for all} \quad A \in \mathscr{A}$$

is the same as $\{B_n\}$ being Cesàro mixing. The question arises as to what happens if

$$\mu_n(A) \to \mu(A) \quad \text{uniformly over } \mathscr{A}.$$

(We will call this uniform Cesàro mixing). To answer this, and for other results, the following known result is useful.

LEMMA 2. *Let ν be a signed measure on $\mathscr{A}$ with $\nu(A) = \int_A f \, d\mathbf{P}$ and suppose f is measurable with respect to a σ-field $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$, then for any σ-field $\mathscr{D} \supset \mathscr{B}$ we have*

$$2 \sup_{D \in \mathscr{D}} |\nu(D)| = \int_\Omega |f| \, d\mathbf{P} + \left| \int_\Omega f \, d\mathbf{P} \right|.$$

The result follows from the fact the supremum is attained for one of the sets $\{f \geqq 0\}$, $\{f < 0\}$, and from the identity $2 \max[a, b] = |a - b| + (a + b)$.
Using the above notation we have that

$$2 \sup_{A \in \mathscr{A}} |\mu_n(A) - \mu(A)| = \int_\Omega |f_n - f| \, d\mathbf{P} + |\mu_n(\Omega) - \mu(\Omega)|$$

or that

$$2 \sup_{A \in \mathscr{A}} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(B_j \cap A) - \alpha \mathbf{P}(A) \right| = \int_\Omega \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} I_{B_j} - \alpha \right| d\mathbf{P} + \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(B_j) - \alpha \right|. \tag{6}$$

From this we obtain

$$\sup_{A\in\mathcal{A}}\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{P}(B_j\cap A)-\alpha\mathbf{P}(A)\right|\to 0$$

if and only if

$$\int_{\Omega}\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}I_{B_j}-\alpha\right|d\mathbf{P}\to 0,$$

which we state as

THEOREM 5. *Uniform Cesàro convergence of* $\{B_n\}$ (α) *is equivalent to the indicators of* $\{B_n\}$ *converging to* α *in the mean.*

The following quadratic mean law of large numbers for dependent random variables is due to PARZEN ([7], p. 419).

THEOREM. *Let* $\{x_i\}$ *be dependent random variables with mean zero and uniformly bounded variances. Let* $Z_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$; *then* $Z_n\to 0$ *in mean square if and only if* $\mathbf{E}(x_nZ_n)\to 0$.

Note that for bounded random variables on a probability space, L^2 convergence is equivalent to L^1 convergence, which is equivalent to convergence in probability.

We can now state the following weak law of large numbers for indicators of sets.

THEOREM. *If* $\mathbf{P}(B_n)\to\alpha$ *then the following are equivalent:*

(i) $$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}[\mathbf{P}(B_jB_n)-\mathbf{P}(B_j)\mathbf{P}(B_n)]\to 0$$

(ii) $$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{P}(B_jB_n)\to\alpha^2$$

(iii) $$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}I_{B_j}\to\alpha\quad \textit{in probability}\quad (\textit{in } L^1)$$

(iv) $$\sup_{A\in\mathcal{A}}\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{P}(B_j\cap A)-\alpha\mathbf{P}(A)\right|\to 0,\quad \textit{uniform Cesàro mixing}$$

(v) $$\sup_{B_k}\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{P}(B_j\cap B_k)-\alpha\mathbf{P}(B_k)\right|\to 0.$$

PROOF. (i) is PARZEN's condition which is equivalent to (ii) using the hypothesis; (i) being equivalent to (iii) is PARZEN's theorem; (iii) is equivalent to (iv) by Theorem 5; (iv) implies (v) because the supremum is taken over a smaller set; and (v) implies (i) since we are replacing the supremum operation by a special value (the hypothesis is needed again).

Note that (iv) being equivalent to (v) corresponds to the result of RÉNYI stated earlier in (2) (confer also Theorem 6 of [8], for the analogous result for weak mixing). A Hilbert space argument similar to that used for (2) does not appear to be straightforward. We restate this result as

COROLLARY 1. Suppose $\mathbf{P}(B_n)\to\alpha$, then $\{B_n\}$ is uniform Cesàro mixing α (condition (iv)) if and only if (condition (v)) the supremum taken over $\{B_n\}$ goes to zero.

The more general result corresponding to stable sequences may be obtained from Theorem 6 by replacing α with $\int\limits_\Omega \alpha\, d\mathbf{P}$ in the hypothesis and (ii), and by replacing $\alpha\mathbf{P}(A)$ by $\int\limits_A \alpha\, d\mathbf{P}$ in (iv) and (v).

Now consider the condition

$$\sup_A \left| \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(B_j\cap A)-\alpha\mathbf{P}(A)\right| < b_n, \quad \text{where} \quad \Sigma b_n<\infty. \tag{7}$$

If this holds we say we have dominated uniform Cesàro mixing.

We now obtain a strong law.

THEOREM 7. *Dominated uniform Cesàro mixing* (7) *implies the strong law* (4) *with the limiting random variable being the Cesàro mixing constant. Conversely if the strong law* (4) *holds with constant limit then* $\{B_n\}$ *is uniform Cesàro mixing.*

PROOF. A theorem of KOZNIEWSKA [5] states that the strong law holds for $\{X_n\}$ — with uniformly bounded variances — if

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left|\sum_{j=1}^{n-1}\operatorname{cov}(X_j, X_n)\right| < \infty. \tag{8}$$

By the reasoning of Theorem 6 which shows that (iv) implies (i), we see that (8) is satisfied with $X_j=I_{B_j}$ (the term with $j=n$ can be neglected in (i)). By the result of Theorem 4, the limit of the averages of the indicators must be the Cesàro mixing constant.

We can get the strong law directly by noting that (7) implies — using (6) — that

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_\Omega \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I_{B_j}-\alpha\right| d\mathbf{P}$$

which implies

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I_{B_j}-\alpha\right|$$

converges w. p. l., so that

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I_{B_j}-\alpha\right| \to 0$$

w. p. l.

On the other hand, if $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I_{B_j}\to\alpha$ w.p.1., where α is a constant (the strong law) then the weak law (Theorem 6, (iii)) holds. By repeating the argument of Theorem 6, using $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{P}(B_j)\to\alpha$ instead of $\mathbf{P}(B_n)\to\alpha$, we again have the result of Theorem 6 (iv). Therefore the $\{B_j\}$ are uniform Cesàro mixing with density α. (Of course, simply by integrating we have that the strong law implies Cesàro mixing).

In view of the corollary to Theorem 6, and Theorem 7 one might ask if domination of the terms $\sup_k \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(B_j\cap B_k)-\alpha\mathbf{P}(B_k)\right|$ (Theorem 6, (v)) implies the strong law, and whether it implies domination of $\sup_A \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(B_j\cap A)-\alpha\mathbf{P}(A)\right|$ (Theorem 6, (iv)). The answer to the first question is yes. For domination of (v) implies domination of (i), and by duplicating an argument of PARZEN ([7], p. 420), this can be shown to imply the strong law. The answer to the second question is open.

As with Theorem 6 one can obtain the more general result for stable sequences.

3. A characterization of mixing sequences

Despite the lack of a clear relationship between a sequence being mixing, and the indicators of the terms obeying the strong law, we can characterize mixing in terms of subsequences obeying the strong law.

DEFINITION 2. A sequence of events $\{B_n\}$ is called semi-ergodic (α), if each subsequence $\{B'_n\}$ admits a further subsequence $\{B''_n\}$ such that $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I_{B_j}\to\alpha$ w.p.1.

THEOREM 8. *A sequence $\{B_n\}$ is stable with local density α if and only if it is semi-ergodic (α).*

Although it is just a corollary to Theorem 8, we first state and give a separate proof for the case of mixing sequences.

THEOREM 9. *A sequence $\{B_n\}$ is mixing of density α if and only if it is semi-ergodic (α).*

PROOF. Suppose $\{B_n\}$ is mixing α; let $\{B'_n\}$ be any subsequence. This subsequence is also mixing α. A result of SUCHESTON [10] states:

If $\{C_j\}$ is mixing of density α (with respect to a probability measure $\mathbf{P}$) — then for some subsequence $\{C'_j\}$ of $\{C_j\}$ $\mathbf{P}$ is absolutely continuous — on $\mathscr{B}(C'_1, C'_2, \ldots)$ — with respect to $\mathbf{Q}$, the independent α probability measure on $\{C'_j\}$.

From our subsequence $\{B'_n\}$ we can therefore extract $\{B''_n\}$ such that for $\mathbf{Q}$ the independent α probability on $B(B''_1, B''_2, \ldots)$ we have $\mathbf{P}\ll\mathbf{Q}$. Since the set $\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I_{B_j}\not\to\alpha\right\}$ has $\mathbf{Q}$ probability zero, it must also have $\mathbf{P}$ probability zero, so the strong law holds with respect to $\mathbf{P}$.

To prove the converse consider a semi-ergodic (α) sequence $\{B_n\}$, and suppose that it is not mixing of density α. Then there is a set M and a subsequence $\{B'_n\}$ such that $\mathbf{P}(B'_j\cap M)\to a\neq\alpha\mathbf{P}(M)$, and a fortiori

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(B'_j\cap M)\to a.$$

Using the semi-ergodic property we obtain a subsequence $\{B''_n\}$ such that $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I_{B''_j} \to \alpha$ w.p.1. Multiplying both sides of this last expression by I_M, and taking expectations, we obtain $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(B''_j \cap M) \to \alpha \mathbf{P}(M)$. We thus have a contradiction, and the proof is complete.

COROLLARY 1. A sequence $\{B_n\}$ is mixing α if and only if each subsequence admits a further subsequence which is mixing α.

COROLLARY 2. Let $\{X_n\}$ be mixing of density $F(a)$, then there is a subsequence $\{Y_n\}$ contained in $\{X_n\}$, such that for each real number a, $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I_{[Y_j \leqq a]} \to F(a)$ w.p.1.

PROOF. Let $\{a_n\}$ be a dense subset of the reals. By definition $[X_n \leqq a_1]$ is mixing of density $F(a_1)$, and the theorem gives a subsequence $\{X^1_n\}$ such that the averages of the indicators of $[X^1_n \leqq a_1]$ converge to $F(a_1)$ w.p.1. Proceeding by induction we obtain $\{X^j_n\}_{j=1}^{\infty}$ such that $\{X^{j+1}_n\} \subset \{X^j_n\}$, and such that the averages of the indicators of $[X^j_n \leqq a_j]$ converge to $F(a_j)$ w.p.1. We obtain, by diagonalization, a subsequence $\{Y_n\}$ such that the averages of the indicators of $[Y_n \leqq a_j]$ converge w.p.1. to $F(a_j)$ for all j. Since F is a distribution function, this implies the desired result.

We comment that even if a mixing sequence obeys the strong law it is not necessarily true that each subsequence does. Consider the shift T on the product space image of a stationary process. Fix a set A, then $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I_{T^{-j}(A)} \to \alpha$ w.p.1. If we work with a subsequence of $\{T^{-j}A\}$, we are in effect removing coordinates, and this in general causes loss of stationarity, and of the strong law property.

We note that although Cesàro mixing is implied by semi-ergodicity (because Cesàro mixing is implied by mixing), a direct proof is not obvious. (As before one assumes there is an M such that $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(B_j \cap M) \to a \neq \alpha \mathbf{P}(M)$, but we now have difficulty getting a subsequence $\{B'_j\}$ such that $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(B'_j \cap M) \to a$).

We now use Theorem 9 to give a proof of Theorem 1. We need:

LEMMA 3. *If* $\{C_k\} \subset \{B_k\}$ *then* $\limsup C_k \subset \limsup B_k$.

PROOF. If a point is in infinitely many C_k it certainly is in infinitely many B_k.

LEMMA 4. *For any sequence* $\{B_n\}$, $\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I_{B_j} \nrightarrow 0\right\} \subset \limsup B_n$.

PROOF. If $\omega \notin (\limsup B_j)$, then $\omega \in B_{i_1}, \ldots, B_{i_M}$ for some $i_1, \ldots, i_M$, and to no other B_k. Therefore, for $n > i_M$,

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I_{B_j}(\omega) < \frac{M}{n} \to 0.$$

PROOF OF THEOREM 1. Let $\{B_j\}$ be mixing of density α, $0<\alpha<1$. Obtain a subsequence $\{C_k\}$ such that

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I_{C_k} \to \alpha \quad \text{w. p. 1.}$$

By Lemma 4, $\mathbf{P}(\limsup C_k)=1$, and therefore by Lemma 3, $\mathbf{P}(\limsup B_k)=1$.

Using the result; $\liminf B_j \subset \left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I_{B_j} \to 1\right\}$, we can similarly prove $\mathbf{P}(\liminf B_j)=0$, if $\{B_j\}$ is mixing of density α.

We now prove Theorem 8. Suppose $\{B_n\}$ is stable with local density α. If we show that we can extract the desired subsequence from $\{B_n\}$ the same technique will work for any subsequence (which will also be stable with density α).

Let $S_n=\sum_{j=1}^{n}(I_{A_j}-\alpha)$, where the $\{A_j\}$ are to be chosen from $\{B_n\}$ so that $S_n/n\to 0$. Recalling the Borel proof of the strong law [6, p. 19], we see that we need only pick $\{A_j\}$ such that $\mathbf{P}[|S_{n^2}/n^2|>\varepsilon]<b_n$ where $\Sigma b_n<\infty$.

Now $\mathbf{P}(B_jD)\to\int_\Omega \alpha I_D\,d\mathbf{P}$ for all D, i.e. $\mathbf{E}[(I_{B_j}-\alpha)I_D]\to 0$ for all D. By the usual approximation argument (confer [9]).

$$|\mathbf{E}(I_{B_j}-\alpha)f|\to 0 \quad \text{for all } f \text{ in } L^1. \tag{9}$$

Pick A_1 arbitrary. By (9), pick A_2 so that $|\mathbf{E}(I_{A_1}-\alpha)(I_{A_2}-\alpha)|<b_1$ (b_n to be chosen later). If $A_1, A_2, \dots$ have been picked, choose i_n so that $|\mathbf{E}(I_{A_j}-\alpha)(I_{A_n}-\alpha)|<$ $<b_n$ for $j=1,2,\dots\, n-1$. Then

$$\mathbf{P}\left[\left|\frac{S_{n^2}}{n^2}-\alpha\right|>\varepsilon\right] \leqq \frac{1}{\varepsilon^2 n^4}\sum_{j=1}^{n^2}\mathbf{E}(I_{A_j}-\alpha)^2+\frac{1}{\varepsilon^2 n^4}\sum_{k=1}^{n^2}\sum_{j=1}^{k-1}|\mathbf{E}(I_{A_j}-\alpha)(I_{A_k}-\alpha)| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\varepsilon^2 n^2}+\frac{2}{\varepsilon^2 n^4}\sum_{k=1}^{n^2}(k-1)b_k \leqq \frac{3}{\varepsilon}\frac{1}{n^2} \quad \left(\text{if we choose } b_k<\frac{1}{k-1}\right).$$

We have therefore obtained a subsequence which obeys the strong law.

The converse is proved in a manner similar to that of the mixing case.

4. Examples

In this section we give some specific examples in which the indicators of mixing sequences obey the strong law.

1. If $\{B_n\}$ is an independent sequence with $\mathbf{P}(B_n)=\alpha$, we are in the classical case.

2. Let $B_n=T^{-n}(A)$ where T is a strongly mixing ergodic transformation, (see [4], p. 37), then by definition $\{B_n\}$ is mixing of density $\mathbf{P}(A)$. If T is only required to be ergodic then $\{B_j\}$ is Cesàro mixing of density $\mathbf{P}(A)$. In both these cases the averages of the indicators of $\{B_n\}$ converge to $\mathbf{P}(A)$.

3. Consider now the $*$-mixing sequences $\{X_n\}$; those for which there exist a real valued function f, defined on the integers, non-increasing with $f(n)\to 0$ such that if $A\in\mathscr{B}(X_1, \dots X_m)$ and $B\in\mathscr{B}(X_{m+n}, \dots)$ then,

$$|\mathbf{P}(AB)-\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|\leqq f(n)\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

We define a sequence of sets $\{B_n\}$ to be $*$-mixing of density α, if the indicators form a $*$-mixing sequence and $\mathbf{P}(B_n)\to\alpha$. By taking $A=B_k$ and $B=B_n$ in the above we have by (2) that $*$-mixing (α) sequences are mixing (α).

The following result is Theorem 2 of [1] in the special case of indicators of $*$-mixing sequences.

THEOREM. *If $\{B_n\}$ is $*$-mixing of density α then the averages of the indicators of the B_n converge to α w.p.l.*

4. Let $\{B_n\}$ be a sequence of sets, and let $\mathbf{Q}$ be the independent α probability measure on the space $\mathscr{B}(B_1, B_2, \dots)$. (I.e. with respect to $\mathbf{Q}$ the sequence $\{B_n\}$ is independent and $\mathbf{Q}(B_n)=\alpha$ for all n. Such a probability can be constructed by making an identification with the appropriate product space and independent product probability).

Now assume that the probability $\mathbf{P}$ is absolutely continuous with respect to $\mathbf{Q}$ ($\mathbf{P}\ll\mathbf{Q}$) on $\mathscr{B}(B_1, B_2, \dots)$. It has been shown (Theorem 1 of [8]) that mixing with density is invariant under absolute continuity. Thus under the assumption that $\mathbf{P}\ll\mathbf{Q}$ we have that $\{B_n\}$ is mixing of density α, and so we are in the situation of interest. Now under the hypothesis of independence of the $\{B_n\}$ — with $\mathbf{Q}(B_n)=\alpha$ — the set $\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I_{B_j}\not\to\alpha\right\}$ has probability zero, and so one also has that this set has $\mathbf{P}$ measure zero. We can therefore state

THEOREM 10. *If $\mathbf{P}\ll\mathbf{Q}$, the independent α probability on $\{B_n\}$, then $\{B_n\}$ is $\mathbf{P}$ mixing of density α and the strong law holds for the indicators of $\{B_n\}$.*

A sufficient condition that $\mathbf{P}\ll\mathbf{Q}$ on $B(B_1, B_2, \dots)$ is that for some constant K

$$\mathbf{P}(B_1^\nu\cap\dots\cap B_n^\nu)\leqq K\alpha^r(1-\alpha)^s \tag{10}$$

where B_i^ν is B_i or B_i^c and r of the sets are of the form B_i and s are of the form B_i^c. This follows from the discussion on page 343 of [2], (see also the (ε, α) independence condition of [10]).

A computation shows that (10) is implied by

$$|\mathbf{P}(B_j/B_1, \dots, B_{j-1})-\alpha|<b_j \quad \text{w.p.1.,} \quad \Sigma b_j<\infty. \tag{11}$$

By Theorem 10, condition (11) implies the strong law, but domination is much stronger than what is needed. For if we require $\mathbf{P}(B_n)\to\alpha$, then from Theorem E p. 387 of [6], the strong law follows from $|\mathbf{P}(B_j/B_1, \dots, B_{j-1})-\alpha|\to 0$ w.p.1.

Acknowledgement. This work was done at the University of Oregon, as part of the Ph.D. dissertation. I would like to thank Professor DONALD TRUAX for his aid. Theorem 8 and 9 are due to him as is condition (11). Example 1 is due to Mr. J. STAFNEY. Support was received from the National Science Foundation under grant GP—1643.

(Received 18 November 1965)

Bibliography

[1] J. BLUM, D. HANSEN, L. KOOPMANS, On the strong law of large numbers for a class of stochastic processes, *Zeit. Wahrschein. ver. Geb.*, **2** (**1**) (1964).

[2] J. DOOB, *Stochastic processes*, Wiley (1953).

[3] R. FISCHLER, Borel—Cantelli type theorems for mixing sets, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **18** (1967), pp. 67—69.

[4] P. HALMOS, *Lectures on ergodic, theory* Chelsea (1956).

[5] I. KOZNIEWSKA, Sur les lois des grand nombres pour les variables aleatoires, *Colloq. Math.*, **10** (**2**) (1963), p. 296.

[6] M. LOÈVE, *Probability theory*, 2nd ed. D. V. Nostrand (1960).

[7] E. PARZEN, *Modern theory of probability*, Wiley (1951).

[8] A. RÉNYI, On mixing sequences of sets, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **9** (1958), pp. 215—228.

[9] A. RÉNYI, On stable sequences of events, *Sankhya*, series, **A**, vol. **25**, part 3 (1963), p. 293.

[10] L. SUCHESTON, On mixing and the 0—1 law, *Journal of Math. Analysis and Application*, **6** (1963), pp. 447—456; *Bull. Amer. Math. Soc.*, **68** (1962), pp. 330—333. The results are also given in: *Remarks on Kolmogorov autormorphisms*, Ergodic theory, edited by Fred B. Wright, Academic Press (1963).

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (1—2), 1967, pp. 83—96.

ON A CLASS OF ENTIRE FUNCTIONS

By

K. MAHLER (Canberra, Australia)

(*Presented by* P. TURÁN)

In his well-known book „Transzendentnye i algebraitcheskie tchisla", Moskva 1952, pp. 175—181, A. O. GELFOND investigated in detail properties of functions

$$E(z)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{m_\nu-1}A_{\mu\nu}z^\mu e^{\alpha_\nu z}$$

where the α_ν are distinct complex numbers, and the coefficients $A_{\mu\nu}$ are arbitrary complex constants. In the present paper I continue his investigations a little further and prove a general theorem which may have some interest in itself. In order to make the paper self-contained, I have repeated some of Gelfond's proofs.

1. Let $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ be finitely many distinct complex numbers; let $m_0, m_1, \ldots, m_{n-1}$ be an equal number of positive integers; and let

$$Q(\zeta)=\prod_{\nu=0}^{n-1}(\zeta-\alpha_\nu)^{m_\nu},\quad m=\sum_{\nu=0}^{n-1}m_\nu.$$

Let further M and N be two integers satisfying

$$0\leqq M\leqq m_N-1,\quad 0\leqq N\leqq n-1.$$

Denote by I the integral

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{(\zeta-\alpha_N)^M\,d\zeta}{(\zeta-z)Q(\zeta)}$$

where C is a circle in the ζ-plane with centre $\zeta=0$ and of so large a radius that it contains the $n+1$ points $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, z$ in its interior. The integrand of I is a rational function of ζ which has at $\zeta=\infty$ a zero of order

$$m+1-M\geqq m+1-(m_N-1)\geqq 2.$$

The residue at $\zeta=\infty$ is therefore equal to zero, and hence

(1) $$I\equiv 0\quad\text{identically in } z.$$

2. Assume for the moment that z is distinct from $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, and denote by $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}, C_n$ circles of very small radii with centres at $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, z$, respectively. By Cauchy's theorem,

$$I = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\nu} \frac{(\zeta-\alpha_N)^M \, d\zeta}{(\zeta-z)Q(\zeta)}, \quad = \sum_{\nu=0}^{n} I_\nu \quad \text{say.} \tag{2}$$

The integrals I_ν may be written in the form

$$I_\nu = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{C_\nu} \frac{(\zeta-\alpha_\nu)^{m_\nu}(\zeta-\alpha_N)^M}{(\zeta-z)Q(\zeta)} \cdot \frac{d\zeta}{(\zeta-\alpha_\nu)^{m_\nu}} & \text{if } \ 0 \leqq \nu \leqq m-1, \ \nu \neq N, \\ \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{C_N} \frac{(\zeta-\alpha_N)^{m_N}}{(\zeta-z)Q(\zeta)} \cdot \frac{d\zeta}{(\zeta-\alpha_N)^{m_N-M}} & \text{if } \ \nu = N, \\ \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{C_n} \frac{(\zeta-\alpha_N)^M}{Q(\zeta)} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta-z} & \text{if } \ \nu = n, \end{cases}$$

where the first factors of the integrands are regular at the points $\zeta=\alpha_\nu$, $\zeta=\alpha_N$, and $\zeta=z$, respectively. Hence, by the residue theorem, these integrals have the explicit values,

$$I_\nu = \begin{cases} \dfrac{1}{(m_\nu-1)!} \left(\dfrac{d}{d\zeta}\right)^{m_\nu-1} \left\{\dfrac{(\zeta-\alpha_\nu)^{m_\nu}(\zeta-\alpha_N)^M}{(\zeta-z)Q(\zeta)}\right\}_{\zeta=\alpha_\nu} & \text{if } \ 0 \leqq \nu \leqq n-1, \ \nu \neq N, \\ \dfrac{1}{(m_N-M-1)!} \left(\dfrac{d}{d\zeta}\right)^{m_N-M-1} \left\{\dfrac{(\zeta-\alpha_N)^{m_N}}{(\zeta-z)Q(\zeta)}\right\}_{\zeta=\alpha_N} & \text{if } \ \nu = N, \\ \left\{\dfrac{(\zeta-\alpha_N)^M}{Q(\zeta)}\right\}_{\zeta=z} & \text{if } \ \nu = n. \end{cases}$$

Therefore, on putting

$$P_{MN}(z) = -\frac{Q(z) I_N}{M!} = \frac{Q(z)}{M!(m_N-M-1)!} \left(\frac{d}{d\zeta}\right)^{m_N-M-1} \left\{\frac{(\zeta-\alpha_N)^{m_N}}{(z-\zeta)Q(\zeta)}\right\}_{\zeta=\alpha_N}$$

and

$$p_{MN}(z) = \frac{Q(z)}{M!} \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu\neq N}}^{n-1} I_\nu = \frac{Q(z)}{M!} \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu\neq N}}^{n-1} \frac{1}{(m_\nu-1)!} \left(\frac{d}{d\zeta}\right)^{m_\nu-1} \left\{\frac{(\zeta-\alpha_\nu)^{m_\nu}(\zeta-\alpha_N)^M}{(\zeta-z)Q(\zeta)}\right\}_{\zeta=\alpha_\nu},$$

it follows from (1) and (2) that

$$P_{MN}(z) = \frac{(z-\alpha_N)^M}{M!} + p_{MN}(z) \quad \text{identically in } z. \tag{3}$$

From the explicit expressions it is easily seen that $P_{MN}(z)$ and $p_{MN}(z)$ are polynomials in z at most of degree

$$m-1=\sum_{\nu=0}^{n-1} m_\nu - 1,$$

and that

$$P_{MN}(z) \quad \text{is divisible by} \quad \prod_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq N}}^{n-1} (z-\alpha_\nu)^{m_\nu},$$

$$p_{MN}(z) \quad \text{is divisible by} \quad (z-\alpha_N)^{m_N}.$$

Hence, from (3), it follows that

$$(4) \qquad P_{MN}^{(\mu)}(\alpha_\nu) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \mu=M,\ \nu=N, \\ 0 & \text{if} \quad (\mu-M)^2+(\nu-N)^2>0,\ 0\leqq\mu\leqq m_\nu-1,\ 0\leqq\nu\leqq n-1. \end{cases}$$

In the trivial case $n=1$ we also see that $N=0$ and

$$P_{M0}(z)=\frac{(z-\alpha_0)^M}{M!} \quad \text{if} \quad 0\leqq M\leqq m_0-1.$$

3. Since the degree of $P_{MN}(z)$ does not exceed $m-1$, this polynomial can be written as

$$P_{MN}(z)=\sum_{l=0}^{m-1} P_{MN}^{(l)} z^l.$$

Our next aim is to obtain upper bounds for these coefficients. This will be done by first estimating upper bounds for $|P_{MN}(z)|$.

Put, for shortness,

$$a=\max_{0\leqq\nu\leqq n-1}\big(|\alpha_\nu|,1\big), \quad a_1=\min_{0\leqq N\leqq n-1}\prod_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq N}}^{n-1}|\alpha_N-\alpha_\nu|^{m_\nu/m},$$

$$a_2=\min_{\substack{0\leqq\nu\leqq n-1\\ 0\leqq N\leqq n-1\\ \nu\neq N}}\big(|\alpha_N-\alpha_\nu|^{m_N/m},1\big);$$

in the trivial case $n=1$ these constants become,

$$a=\max\,(|\alpha_0|,1), \quad a_1=1, \quad a_2=1.$$

The definitions imply that

$$a\geqq 1\geqq a_2$$

and

$$\prod_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq N}}^{n-1}|\alpha_N-\alpha_\nu|^{m_\nu}\geqq a_1^m, \quad |\alpha_N-\alpha_\nu|^{m_N}\geqq a_2^m \quad \text{if} \quad N\neq\nu.$$

From the expression for $P_{MN}(z)$ in terms of I_N,

$$P_{MN}(z)=\frac{Q(z)}{2\pi i M!}\int\limits_{C_N}\frac{(\zeta-\alpha_N)^M\,d\zeta}{(z-\zeta)Q(\zeta)}.$$

We choose for C_N the circle

$$|\zeta-\alpha_N| = \frac{1}{2}\, a_2^{m/m_N},$$

and assume now that ζ lies on C_N and that

$$|z|=2a.$$

It is obvious that C_N encloses none of the points α_ν where $\nu\neq N$. Nor does it enclose the point z because

$$|\zeta| \leqq |\alpha_N|+\frac{1}{2}\, a_2^{m/m_N} \leqq a+\frac{1}{2}\, a = \frac{3}{2}\, a.$$

It furthermore follows that

$$|z-\zeta| \geqq 2a-\frac{3}{2}\, a = \frac{a}{2} \geqq \frac{1}{2}.$$

Next, if $\nu\neq N$,

$$|\zeta-\alpha_N| = \frac{1}{2}\, a_2^{m/m_N} \leqq \frac{1}{2}\, |\alpha_N-\alpha_\nu|,$$

hence

$$|\zeta-\alpha_\nu| = |(\alpha_N-\alpha_\nu)+(\zeta-\alpha_N)| \geqq \frac{1}{2}\, |\alpha_N-\alpha_\nu|$$

whence

$$\left|\frac{(\zeta-\alpha_N)^{m_N}}{Q(\zeta)}\right| \leqq \prod_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq N}}^{n-1} |\zeta-\alpha_\nu|^{-m_\nu} \leqq \prod_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq N}}^{n-1} \left\{\frac{1}{2}\, |\alpha_N-\alpha_\nu|\right\}^{-m_\nu} \leqq 2^{m-m_N} a_1^{-m}.$$

Further

$$\left|\frac{(\zeta-\alpha_N)^{M-m_N}}{z-\zeta}\right| \leqq 2\cdot\left(\frac{1}{2}\, a_2^{m/m_N}\right)^{M-m_N} = 2^{m_N-M+1}\, a_2^{-m+(mM/m_N)}.$$

It follows therefore that

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_N} \frac{(\zeta-\alpha_N)^M\, d\zeta}{(z-\zeta)Q(\zeta)}\right| \leqq \frac{1}{2\pi}\cdot \pi a_2^{m/m_N}\cdot 2^{m-m_N}\, a_1^{-m}\cdot 2^{m_N-M+1}\, a_2^{-m+(mM/m_N)} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\, a_2^{m/m_N}\right)^M \left(\frac{2}{a_1 a_2}\right)^m.$$

Next, since $|z|=2a$, and $|\alpha_\nu|\leqq a$ for all ν,

$$|Q(z)| \leqq \prod_{\nu=0}^{n-1} (2a+a)^{m_\nu} = (3a)^m.$$

Hence the final result is that

$$|P_{MN}(z)| \leqq \frac{(3a)^m}{M!}\cdot\left(\frac{1}{2}\, a_2^{m/m_N}\right)^M \left(\frac{2}{a_1 a_2}\right)^m,$$

whence, by $M \geqq 0$ and $a_2 \leqq 1$,

$$|P_{MN}(z)| \leqq \left(\frac{6a}{a_1 a_2}\right)^m \quad \text{if} \quad |z| = 2a. \tag{5}$$

4. The Taylor coefficients of $P_{MN}(z)$ are given by

$$P_{MN}^{(l)} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{P_{MN}(z)\,dz}{z^{l+1}} \qquad (0 \leqq l \leqq m-1),$$

where the integration extends, say, over the circle

$$|z| = 2a.$$

The estimate (5) implies therefore that

$$|P_{MN}^{(l)}| \leqq \frac{1}{2\pi}\cdot 4\pi a \cdot \left(\frac{6a}{a_1 a_2}\right)^m \cdot \frac{1}{(2a)^{l+1}}.$$

Since $a \geqq 1$, we find that

$$|P_{MN}^{(l)}| \leqq 2^{-l}\left(\frac{6a}{a_1 a_2}\right)^m \quad \text{for all} \quad M, N, l. \tag{6}$$

It is obvious that this formula remains valid in the trivial case when $n=1$. For then

$$P_{M0}^{(l)} = \frac{\binom{M}{l}(-\alpha_0)^{M-l}}{M!} = \frac{(-\alpha_0)^{M-l}}{M!(M-l)!},$$

so that, by $M \leqq m_0 - 1 < m$,

$$|P_{M0}^{(l)}| \leqq a^{M-l} \leqq 2^{-l}(6a)^m \qquad (0 \leqq l \leqq m-1).$$

5. The inequalities (6) will now be applied to the function

$$E(z) = \sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{m_\nu - 1} A_{\mu\nu} z^\mu e^{\alpha_\nu z}$$

where the numbers m_ν, m, n, and α_ν have the same meaning as before, and where the coefficients $A_{\mu\nu}$ are arbitrary complex numbers not all zero. Let

$$A = \max_{\substack{0 \leqq \mu \leqq m_\nu \\ 0 \leqq \nu \leqq n}} |A_{\mu\nu}| > 0$$

be the maximum of the absolute values of these coefficients.

Evidently,

$$E^{(l)}(0) = \sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{m_\nu-1} A_{\mu\nu} \sum_{\lambda=0}^{l}\binom{l}{\lambda} \alpha_\nu^{l-\lambda}\left(\frac{d}{dz}\right)^\lambda z^\mu \Big|_{z=0} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{m_\nu-1} A_{\mu\nu}\binom{l}{\mu}\alpha_\nu^{l-\mu}\mu! = \sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{m_\nu-1} A_{\mu\nu}\left(\frac{d}{dz}\right)^\mu z^l\Big|_{z=\alpha_\nu}.$$

We multiply this equation by the coefficient $P_{MN}^{(l)}$ of $P_{MN}(z)$ and add over the values of l from 0 to $m-1$. Then

$$\sum_{l=0}^{m-1} P_{MN}^{(l)} E^{(l)}(0) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{m_\nu-1} A_{\mu\nu} \sum_{l=0}^{m-1} P_{MN}^{(l)} \left(\frac{d}{dz}\right)^{\mu} z^l \bigg|_{z=\alpha_\nu} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{m_\nu-1} A_{\mu\nu} P_{MN}^{(\mu)}(\alpha_\nu),$$

so that, by (4),

$$\sum_{l=0}^{m-1} P_{MN}^{(l)} E^{(l)}(0) = A_{MN} \qquad (0 \leqq M \leqq m_N - 1,\ 0 \leqq N \leqq n-1).$$

Here the formula (6) implies that, for all suffixes M and N,

$$\sum_{l=0}^{m-1} |P_{MN}^{(l)}| \leqq \left(\frac{6a}{a_1 a_2}\right)^m \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l} = 2\left(\frac{6a}{a_1 a_2}\right)^m.$$

Hence it follows that

$$\max_{0 \leqq l \leqq m-1} |E^{(l)}(0)| \geqq \frac{1}{2} A \left(\frac{6a}{a_1 a_2}\right)^{-m}. \tag{7}$$

6. Let now $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{s-1}$ be a second set of finitely many distinct complex numbers, and let $r_0, r_1, \ldots, r_{s-1}$ be an equal number of positive integers. Then put

$$E = \max_{\substack{0 \leqq \sigma \leqq s-1 \\ 0 \leqq \varrho \leqq r_\sigma - 1}} |E^{(\varrho)}(\beta_\sigma)|;$$

our aim will be to establish an upper bound for A in terms of E when the integer

$$r = \sum_{\sigma=0}^{s-1} r_\sigma$$

is sufficiently large.

For this purpose we introduce the following three constants in analogy to a, a_1 and a_2,

$$b = \max_{0 \leqq \sigma \leqq s-1} (|\beta_\sigma|, 1), \quad b_1 = \min_{0 \leqq S \leqq s-1} \prod_{\substack{\sigma=0 \\ \sigma \neq S}}^{s-1} |\beta_S - \beta_\sigma|^{r_\sigma / r},$$

$$b_2 = \min_{\substack{0 \leqq \sigma \leqq s-1 \\ 0 \leqq S \leqq s-1 \\ S \neq \sigma}} \left(|\beta_S - \beta_\sigma|^{r_S / r}, 1\right).$$

In the trivial case $s=1$ these constants have the values,

$$b = \max(|\beta_0|, 1), \quad b_1 = 1, \quad b_2 = 1.$$

They always satisfy the inequalities

$$b \geqq 1 \geqq b_2$$

and

$$\prod_{\substack{\sigma=0 \\ \sigma \neq S}}^{s-1} |\beta_S - \beta_\sigma|^{r_\sigma} \geqq b_1^r, \quad |\beta_S - \beta_\sigma|^{r_S} \geqq b_2^r \quad \text{if} \quad S \neq \sigma.$$

7. If R is any positive number, put

$$M(R) = \max_{|\zeta|=R} |E(\zeta)|.$$

Further let

$$m^* = \max_{0 \leqq \nu \leqq n-1} m_\nu$$

denote the largest of the integers m_ν.

Assume that

$$R \geqq 3b \geqq 3. \tag{8}$$

An upper bound for $M(R)$ follows easily from the definition of $E(z)$. Evidently,

$$M(R) \leqq \sum_{\nu=0}^{n-1} A(1+R+\ldots+R^{m^*-1})e^{aR}.$$

Here

$$1+R+\ldots+R^{m^*-1} \leqq R^{m^*} \sum_{l=1}^{\infty} 3^{-l} < R^{m^*}.$$

It follows therefore that, if R satisfies the inequality (8), then

$$M(R) \leqq nAR^{m^*} e^{aR}. \tag{9}$$

8. Denote by z any complex number of absolute value

$$|z| = 2b. \tag{10}$$

This implies, in particular, that z has at least the distance b from each of the numbers $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{s-1}$.

Denote by Γ the circle

$$|\zeta| = R$$

in the ζ-plane, and put

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \prod_{\sigma=0}^{s-1} \left(\frac{z-\beta_\sigma}{\zeta-\beta_\sigma}\right)^{r_\sigma} \frac{E(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

An upper bound for J is obtained in the following way.

If ζ lies on Γ, by (8) and (10),

$$\left|\prod_{\sigma=0}^{s-1} \left(\frac{z-\beta_\sigma}{\zeta-\beta_\sigma}\right)^{r_\sigma}\right| \leqq \prod_{\sigma=0}^{s-1} \left(\frac{2b+b}{R-\frac{1}{3}R}\right)^{r_\sigma} = \left(\frac{9b}{2R}\right)^r, \quad \left|\frac{E(\zeta)}{\zeta-z}\right| \leqq \frac{M(R)}{R-\frac{2}{3}R} = \frac{3M(R)}{R}.$$

Hence

$$|J| \leqq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi R \cdot \left(\frac{9b}{2R}\right)^r \cdot \frac{3M(R)}{R} = 3\left(\frac{9b}{2R}\right)^r M(R),$$

whence, by (9),

$$|J| \leqq 3nA\left(\frac{9b}{2R}\right)^r R^{m^*} e^{aR}. \tag{11}$$

9. The residue theorem allows to express J in yet a second way. For $0 \leqq S \leqq s-1$, denote by Γ_S the circle

$$|\zeta-\beta_S| = \frac{1}{2}\, b_2^{r/rs},$$

and by Γ_s the circle

$$|\zeta-z| = \frac{1}{2}\, b.$$

Evidently all these circles lie outside one another, and hence

$$J = \sum_{S=0}^{s} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_S} \prod_{\sigma=0}^{s-1} \left(\frac{z-\beta_\sigma}{\zeta-\beta_\sigma}\right)^{r_\sigma} \frac{E(\zeta)}{\zeta-z}\, d\zeta, \quad = \sum_{S=0}^{s} J_S \quad \text{say.} \tag{12}$$

First, it is obvious that

$$|J_s| = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_s} \prod_{\sigma=0}^{s-1} \left(\frac{z-\beta_\sigma}{\zeta-\beta_\sigma}\right)^{r_\sigma} \frac{E(\zeta)}{\zeta-z}\, d\zeta = E(z) \tag{13}$$

because the integrand has inside Γ_s only the simple pole $\zeta = z$.

Secondly, let $0 \leqq S \leqq s-1$. By substituting for $E(\zeta)$ its Taylor series in powers of $\zeta-\beta_S$, J_S takes the form

$$J_S = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_S} \prod_{\sigma=0}^{s-1} \left(\frac{z-\beta_\sigma}{\zeta-\beta_\sigma}\right)^{r_\sigma} \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{E^{(\varrho)}(\beta_S)}{\varrho!} (\zeta-\beta_S)^\varrho \frac{d\zeta}{\zeta-z} =$$

$$= \sum_{\varrho=0}^{r_S-1} \sum_{\sigma=0}^{s-1} (z-\beta_\sigma)^{r_\sigma} \cdot \frac{E^{(\varrho)}(\beta_S)}{\varrho!} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_S} \prod_{\substack{\sigma=0\\ \sigma\neq S}}^{s-1} (\zeta-\beta_\sigma)^{-r_\sigma} \cdot (\zeta-\beta_S)^{\varrho-r_S} \frac{d\zeta}{\zeta-z}.$$

For all the integrals with $\varrho \geqq r_S$ vanish because their integrands remain regular inside Γ_S. By means of this representation, an upper bound for I_S may now be obtained by a method similar to that in § 3.

Assume that ζ lies on the circle Γ_S. Then for all $\sigma \neq S$,

$$|\zeta-\beta_S| = \frac{1}{2}\, b_2^{r/rs} \leqq \frac{1}{2}\, |\beta_S-\beta_\sigma|,$$

hence

$$|\zeta-\beta_\sigma| = |(\zeta-\beta_S)+(\beta_S-\beta_\sigma)| \geqq \frac{1}{2}\, |\beta_S-\beta_\sigma|$$

and therefore

$$\left| \prod_{\substack{\sigma=0\\ \sigma\neq S}}^{s-1} (\zeta-\beta_\sigma)^{-r_\sigma} \right| \leqq \prod_{\substack{\sigma=0\\ \sigma\neq S}}^{s-1} \{2^{-1}\, |\beta_S-\beta_\sigma|\}^{-r_\sigma} \leqq 2^{r-r_S} b_1^{-r}.$$

Further, by $b \geqq 1 \geqq b_2$ and by (10),

$$|\zeta| \leqq |(\zeta-\beta_S)+\beta_S| \leqq \frac{1}{2}\, b_2^{r/rs} + b \leqq \frac{3}{2}\, b, \quad \text{hence} \quad |\zeta-z| \geqq |z|-|\zeta| \geqq \frac{1}{2}\, b.$$

It follows then that for all suffixes ϱ with $0 \leqq \varrho \leqq r_S - 1$,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_S} \prod_{\substack{\sigma=0 \\ \sigma \neq S}}^{s-1} (\zeta - \beta_\sigma)^{-r_\sigma} \cdot (\zeta - \beta_S)^{\varrho - r_S} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right| \leqq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi b_2^{r/r_S}}{2} \cdot 2^{r - r_S} b_1^{-r} \left(\frac{1}{2} b_2^{r/r_S} \right)^{\varrho - r_S} \cdot \frac{2}{b} =$$

$$= \frac{1}{b} \cdot 2^{-\varrho} (b_2^{r/r_S})^{\varrho+1} \left(\frac{2}{b_1 b_2} \right)^r.$$

Further, by (10),

$$\left| \prod_{\sigma=0}^{s-1} (z - \beta_\sigma)^{r_\sigma} \right| \leqq \prod_{\sigma=0}^{s-1} (2b + b)^{r_\sigma} = (3b)^r.$$

Thus, by $b_2 \leqq 1 \leqq b$ and by the definition of E, we find that

$$|J_S| \leqq \sum_{\varrho=0}^{r_S - 1} (3b)^r \cdot \frac{E}{\varrho!} \cdot \frac{1}{b} 2^{-\varrho} (b_2^{r/r_S})^{\varrho+1} \left(\frac{2}{b_1 b_2} \right)^r \leqq \left(\sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{2^{-\varrho}}{\varrho!} \right) \cdot \left(\frac{6b}{b_1 b_2} \right)^r E.$$

Here

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{2^{-\varrho}}{\varrho!} = \sqrt{e} < 2,$$

so that

$$|J_S| \leqq 2 \left(\frac{6b}{b_1 b_2} \right)^r E \qquad (S = 0, 1, \ldots, s-1). \tag{14}$$

We finally substitute the explicit value of J_s from (13) and the estimates for J and J_s from (11) and (14) in the identity (12). Since

$$E(z) = J - \sum_{S=0}^{s-1} J_S,$$

we arrive at the result,

$$|E(z)| \leqq 3nA \left(\frac{9b}{2R} \right)^r R^{m^*} e^{aR} + 2s \left(\frac{6b}{b_1 b_2} \right)^r E \quad \text{if} \quad |z| = 2b. \tag{15}$$

10. The derivatives of $E(z)$ at $z=0$ can be written as

$$E^{(l)}(0) = \frac{l!}{2\pi i} \int \frac{E(z)}{z^{l+1}} \, dz,$$

where, similarly as in §4, the integration is over the circle

$$|z| = 2b.$$

It follows that

$$|E^{(l)}(0)| \leqq \frac{l!}{2\pi} \cdot 4\pi b \cdot (2b)^{-l-1} \cdot \max_{|z|=2b} |E(z)|,$$

whence, by (15),

$$|E^{(l)}(0)| \leqq \frac{l!}{(2b)^l} \left\{ 3nA \left(\frac{9b}{2R} \right)^r R^{m^*} e^{aR} + 2s \left(\frac{6b}{b_1 b_2} \right)^r E \right\}. \tag{16}$$

We are interested only in the values of l with

$$0 \leqq l \leqq m-1.$$

Now

$$\frac{l!\,(2b)^{-l}}{(l-1)!\,(2b)^{-(l-1)}} = \frac{l}{2b}\begin{cases} \leqq 1 & \text{if} \quad 0 \leqq l \leqq 2b, \\ > 1 & \text{if} \quad l > 2b. \end{cases}$$

Hence, as l runs over the successive values 0, 1, 2, ..., the quotient

$$\frac{l!}{(2b)^l}$$

first decreases and then starts increasing. This evidently means that

$$\max_{0 \leqq l \leqq m-1} \frac{l!}{(2b)^l} = \max\left(1, \frac{(m-1)!}{(2b)^{m-1}}\right).$$

The inequality (16) implies therefore that

$$(17) \qquad \max_{0 \leqq l \leqq m-1} |E^{(l)}(0)| \leqq \max\left(1, \frac{(m-1)!}{(2b)^{m-1}}\right)\left\{3nA\left(\frac{9b}{2R}\right)^r R^{m^*} e^{aR} + 2s\left(\frac{6b}{b_1 b_2}\right)^r E\right\}.$$

11. In this inequality we choose now

$$R = \frac{m}{a}.$$

This is in agreement with the previous assumption that

$$(8) \qquad R \geqq 3b$$

provided

$$m \geqq 3ab.$$

Instead of this inequality we impose on m the stronger condition

$$(18) \qquad m \geqq 6ab.$$

It is then possible to show that

$$(m-1)! \geqq (2b)^{m-1}.$$

For, since $a \geqq 1$,

$$m \geqq 6b.$$

Consider now the sequence $\{c_k\}$ where

$$c_k = \frac{3^k k!}{k^k} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Then

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{3}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} > 1,$$

because, as is well-known, $\left\{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right\}$ is an increasing sequence of limit $e<3$. Since $c_1=3$, it follows that $c_k \geqq 3$ for all k, and hence that

$$k! \geqq 3k^k 3^{-k},$$

whence

$$(m-1)! = \frac{m!}{m} \geqq \frac{3}{m} m^m 3^{-m} = \left(\frac{m}{3}\right)^{m-1} \geqq (2b)^{m-1},$$

as asserted.

On account of this inequality, the formula (17) takes the form,

$$\max_{0\leqq l\leqq m-1} |E^{(l)}(0)| \leqq \frac{(m-1)!}{(2b)^{m-1}} \left\{3nA\left(\frac{9b}{2R}\right)^r R^{m^*} e^{aR} + 2s\left(\frac{6b}{b_1 b_2}\right)^r E\right\}.$$

We combine this result with the lower bound (7). This gives

$$\frac{1}{2} A\left(\frac{6a}{a_1 a_2}\right)^{-m} \leqq \frac{(m-1)!}{(2b)^{m-1}} \left\{3nA\left(\frac{9b}{2R}\right)^r R^{m^*} e^{aR} + 2s\left(\frac{6b}{b_1 b_2}\right)^r E\right\},$$

or, on replacing R by its value m/a,

$$\frac{1}{2} A\left(\frac{6a}{a_1 a_2}\right)^{-m} \leqq \frac{(m-1)!}{(2b)^{m-1}} \left\{3nA\left(\frac{9ab}{2m}\right)^r \left(\frac{m}{a}\right)^{m^*} e^m + 2s\left(\frac{6b}{b_1 b_2}\right)^r E\right\}. \tag{19}$$

12. In order to apply the last relation, let us assume that

$$\frac{1}{4}\left(\frac{6a}{a_1 a_2}\right)^{-m} \geqq \frac{(m-1)!}{(2b)^{m-1}} \cdot 3n\left(\frac{9ab}{2m}\right)^r \left(\frac{m}{a}\right)^{m^*} e^m; \tag{20}$$

it follows then immediately from (19) that

$$\frac{1}{4} A\left(\frac{6a}{a_1 a_2}\right)^{-m} \leqq \frac{(m-1)!}{(2b)^{m-1}} \cdot 2s\left(\frac{6b}{b_1 b_2}\right)^r E. \tag{21}$$

From these two formulas an important property of $E(z)$ will be deduced.

It is convenient to replace the assumption (20) by a stronger one which has a simpler form. For this purpose we use the well-known inequality

$$(m-1)! \leqq em^{m-\frac{1}{2}} e^{-m}.$$

It shows that (20) is certainly satisfied if

$$\frac{1}{4}\left(\frac{6a}{a_1 a_2}\right)^{-m} \geqq \frac{em^{m-\frac{1}{2}}}{(2b)^{m-1}} \cdot 3n\left(\frac{9ab}{2m}\right)^r \left(\frac{m}{a}\right)^{m^*},$$

or, what is the same, if

$$m^{r-m-m^*} \geqq \frac{24ebn}{\sqrt{m}} \left(\frac{6a}{a_1 a_2}\right)^m (2b)^{-m} \left(\frac{9ab}{2}\right)^r a^{-m^*}. \tag{22}$$

To simplify further, put

$$r = m + m^* + t$$

where t is a positive integer which will be fixed later. Then (22) becomes

$$m^t \geqq \frac{24ebn}{\sqrt{m}} \left(\frac{6a}{a_1 a_2}\right)^m (2b)^{-m} \left(\frac{9ab}{2}\right)^{m+m^*+t} a^{-m^*}$$

or

$$\left(\frac{2m}{9ab}\right)^t \geqq \frac{24ebn}{\sqrt{m}} \left(\frac{27a^2}{2a_1 a_2}\right)^m \left(\frac{9b}{2}\right)^{m^*}. \tag{23}$$

Here, by (18),

$$1 \leqq b \leqq \frac{m}{6},$$

while, trivially,

$$n \leqq m$$

by the definition of m and n in §1. Hence

$$\frac{24ebn}{\sqrt{m}} \leqq \frac{24e \cdot \frac{m}{6} \cdot m}{\sqrt{m}} = 4em^{3/2}.$$

Next, the expression

$$(4em^{3/2})^{1/m}$$

is easily seen to be a decreasing function of m, and m can by (18) not be smaller than 6; further

$$(4e \cdot 6^{3/2})^{1/6} < \frac{7}{3}.$$

It follows that

$$\frac{24ebn}{\sqrt{m}} < \left(\frac{7}{3}\right)^m.$$

Hence the inequality (23) is certainly satisfied if

$$\left(\frac{2m}{9ab}\right)^t \geqq \left(\frac{63a^2}{2a_1 a_2}\right)^m \left(\frac{9b}{2}\right)^{m^*}. \tag{24}$$

We assume from now that this inequality holds. Then the inequality (20) and hence also the inequality (21) are likewise true.

13. The inequality (21) is equivalent to

$$A \leqq 8s \frac{(m-1)!}{(2b)^{m-1}} \left(\frac{6a}{a_1 a_2}\right)^m \left(\frac{6b}{b_1 b_2}\right)^r E.$$

This relation will now be simplified in a similar manner as was (20). Again

$$(m-1)! \leqq em^{m-\frac{1}{2}} e^{-m}$$

and

$$r = m + m^* + t.$$

The inequality for A implies then that

$$A \leqq \frac{8s\cdot 2b\cdot e}{\sqrt{m}}\,\frac{m^m e^{-m}}{(2b)^m}\left(\frac{6a}{a_1 a_2}\right)^m\left(\frac{6b}{b_1 b_2}\right)^{m+m^*+t} E$$

or

$$A \leqq \frac{16ebs}{\sqrt{m}}\left(\frac{18am}{e\cdot a_1 a_2 b_1 b_2}\right)^m\left(\frac{6b}{b_1 b_2}\right)^{m^*+t} E. \tag{25}$$

In order to simplify this formula we use the trivial inequality

$$s \leqq r = m + m^* + t$$

which follows from the definition of r and s in §6. Therefore, by the theorem on the arithmetical and geometrical means,

$$s \leqq 2\sqrt{m}\cdot\sqrt{m^*+t},$$

and so, by $b \leqq \frac{m}{6}$,

$$\frac{16ebs}{\sqrt{m}} \leqq 16e\cdot\frac{m}{6}\cdot\frac{2\sqrt{m}}{\sqrt{m}}\cdot\sqrt{m^*+t}.$$

Here, similarly as above, by $m \geqq 6$,

$$\left(\frac{16em}{3}\right)^{1/m} \leqq \left(\frac{16e\cdot 6}{3}\right)^{1/6} < \frac{7}{3},$$

whence

$$\frac{16em}{3}\left(\frac{18am}{e\cdot a_1 a_2 b_1 b_2}\right)^m \leqq \left(\frac{42am}{e\cdot a_1 a_2 b_1 b_2}\right)^m \leqq \left(\frac{16am}{a_1 a_2 b_1 b_2}\right)^m.$$

Next, both m^* and t are positive integers, thus

$$m^* + t \geqq 2.$$

Since the function $x^{1/x}$ is increasing for $x < e$ and decreasing for $x > e$, it follows that

$$(m^*+t)^{\frac{1}{m^*+t}} \leqq \max(2^{1/2}, 3^{1/3}) < \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

and hence that

$$\sqrt{m^*+t}\left(\frac{6b}{b_1 b_2}\right)^{m^*+t} \leqq \left(\frac{8b}{b_1 b_2}\right)^{m^*+t}.$$

We have then proved that if t satisfies the inequality (24), then A has the upper bound

$$A \leqq \left(\frac{16am}{a_1 a_2 b_1 b_2}\right)^m\left(\frac{8b}{b_1 b_2}\right)^{m^*+t} E \tag{26}$$

in terms of E.

We express this result in the form of a theorem.

THEOREM 1. *Let* $m_0, m_1, \ldots, m_{n-1}, n, r_0, r_1, \ldots, r_{s-1}, s$ *be positive integers, and let*

$$m = \sum_{\nu=0}^{n-1} m_\nu, \quad m^* = \max_{0 \leqq \nu \leqq n-1} m_\nu, \quad r = \sum_{\sigma=0}^{s-1} r_\sigma.$$

Let $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ *and* $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{s-1}$ *be* n *and* s *distinct complex numbers, respectively, and let*

$$a = \max_{0 \leqq \nu \leqq n-1} (|\alpha_\nu|, 1), \qquad b = \max_{0 \leqq \sigma \leqq s-1} (|\beta_\sigma|, 1),$$

$$a_1 = \min_{0 \leqq N \leqq n-1} \prod_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq N}}^{n-1} |\alpha_N - \alpha_\nu|^{m_\nu/m}, \qquad b_1 = \min_{0 \leqq S \leqq s-1} \prod_{\substack{\sigma=0 \\ \sigma \neq S}}^{s-1} |\beta_S - \beta_\sigma|^{r_\sigma/r},$$

$$a_2 = \min_{\substack{0 \leqq \nu \leqq n-1 \\ 0 \leqq N \leqq n-1 \\ N \neq \nu}} (|\alpha_N - \alpha_\nu|^{m_N/m}, 1), \qquad b_2 = \min_{\substack{0 \leqq \sigma \leqq s-1 \\ 0 \leqq S \leqq s-1 \\ S \neq \sigma}} (|\beta_S - \beta_\sigma|^{r_S/r}, 1).$$

Denote by

$$A_{\mu\nu} \qquad \begin{pmatrix} \mu = 0, 1, \ldots, m_\nu - 1 \\ \nu = 0, 1, \ldots, n-1 \end{pmatrix}$$

any set of m *complex numbers. Further put*

$$E(z) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{m_\nu - 1} A_{\mu\nu} z^\mu e^{\alpha_\nu z}$$

and

$$A = \max_{\substack{0 \leqq \mu \leqq m_\nu - 1 \\ 0 \leqq \nu \leqq n-1}} (|A_{\mu\nu}|), \quad E = \max_{\substack{0 \leqq \varrho \leqq r_\sigma - 1 \\ 0 \leqq \sigma \leqq s-1}} (|E^{(\varrho)}(\beta_\sigma)|).$$

Assume, finally, that

$$m \geqq 6ab$$

and that further

$$r = m + m^* + t, \quad \text{where} \quad \left(\frac{2m}{9ab}\right)^t \geqq \left(\frac{63a^2}{2a_1 a_2}\right)^m \left(\frac{9b}{2}\right)^{m^*}.$$

Then

$$A \leqq \left(\frac{16am}{a_1 a_2 b_1 b_2}\right)^m \left(\frac{8b}{b_1 b_2}\right)^{m^*+t} E.$$

COROLLARY. *If* m *and* t *satisfy the hypothesis of the theorem, and if, in addition*

$$E^{(\varrho)}(\beta_\sigma) = 0 \qquad \begin{pmatrix} \varrho = 0, 1, \ldots, r_\sigma - 1 \\ \sigma = 0, 1, \ldots, s-1 \end{pmatrix},$$

then $A = 0$, *and* $E(z)$ *vanishes identically.*

(Received 30 November 1965)

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (1—2), 1967, pp. 97—111.

ON THE CONVERGENCE OF THE INTERPOLATORY QUADRATURE PROCEDURES IN CERTAIN CLASSES OF FUNCTIONS

By

J. SZABADOS (Budapest)

(*Presented by* P. TURÁN)

§ 1. Notations and definitions. Let

$$X = \begin{array}{ccccc} & & x_{00} & & \\ & x_{01} & & x_{11} & \\ x_{02} & & x_{12} & & x_{22} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{array}$$

be an infinite triangular matrix where

$$-1 \leqq x_{in} \leqq +1 \qquad (i=0, 1, \ldots, n;\ n=0, 1, 2, \ldots),$$

$$x_{in} \neq x_{jn} \qquad (i \neq j;\ i, j=0, 1, 2, \ldots, n;\ n=0, 1, 2, \ldots);$$

$$l_{kn}(X, x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_{in}}{x_{kn} - x_{in}} \qquad (0 \leqq k \leqq n,\ n = 0, 1, 2, \ldots)$$

the fundamental polynomials of the Lagrange interpolation belonging to X;

$$A_{kn}(X) = \int_{-1}^{+1} l_{kn}(X, x)\, dx \qquad (0 \leqq k \leqq n,\ n = 0, 1, 2, \ldots)$$

the coefficients of the interpolatory quadrature procedure belonging to X;

$$Q_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} A_{kn}(X) f(x_{kn}) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

the interpolatory quadrature formula of a continuous function $f(x)$ in the interval $[-1, +1]$; finally let us denote

(1.1) $$L_n(X) = \sum_{k=0}^{n} |A_{kn}| \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Now let

$$\omega(f, h) = \sup_{\substack{|x-y| \leqq h \\ -1 \leqq x, y \leqq +1}} |f(x) - f(y)| \qquad (0 \leqq h \leqq 2)$$

be the continuity module of a function $f(x)$ being continuous in $[-1, +1]$. Let

$\omega(h)$ be such a continuity module. Let us denote by $C(\omega)$ the class of continuous functions $f(x)$ for which

$$\omega(f, h) \leqq a(f)\omega(h)$$

where $a(f)$ depends only on $f(x)$. This class is obviously a generalization of the class Lip α $(0<\alpha\leqq 1)$. It was introduced by S. M. LOSINSKY [1].

§ 2. **The problem.** It is well known (see e. g. [2], p. 471) that

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(f, X) = \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx \tag{2. 1}$$

holds for all continuous functions $f(x)$ if and only if the sequence (1. 1) is bounded.

P. ERDŐS and P. TURÁN [3] raised the problem what condition $L_n(X)$ must satisfy for the existence of (2. 1) for all $f(x)\in \text{Lip}\,\alpha$. We shall investigate this question in connection with the more general class $C(\omega)$.

§ 3. **A sufficient condition.** THEOREM 1. *If*

$$\lim_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) L_n(X) = 0 \tag{3. 1}$$

then (2. 1) *holds for all* $f(x)\in C(\omega)$.

PROOF. Let $f(x)\in C(\omega)$ and $p_{n-1}(x)$ be the best-approximating polynomial of $f(x)$ of degree $n-1$, $E_{n-1}(f)=\max\limits_{-1\leqq x\leqq +1} |f(x)-p_{n-1}(x)|$. Using (3. 1), the classical theorem of Jackson and

$$Q_n(p_{n-1}, X) = \int_{-1}^{+1} p_{n-1}(x)\,dx$$

we get

$$\left|Q_n(f, X) - \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx\right| \leqq |Q_n(f)-Q_n(p_{n-1})| + \int_{-1}^{+1} |p_{n-1}(x)-f(x)|\,dx \leqq$$

$$\leqq E_{n-1}(f)\sum_{k=0}^{n} |A_{kn}(X)| + 2E_{n-1}(f) = E_{n-1}(f)[L_n(X)+2] =$$

$$= O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right) L_n(X)\right) \to 0 \quad \text{if} \quad n\to\infty.$$

This proves our theorem.

§ 4. **The necessity of the sufficient condition.** The problem arises: whether the condition (3. 1) is necessary for the convergence or not. I am unable to answer this question for *all* classes $C(\omega)$. I can only prove the following

THEOREM 2. *Let*

$$\lim_{h=+0} \omega(h) \ln h = 0 \tag{4.1}$$

and

$$\lim_{h=+0} \frac{\omega(h^2 \omega(h))}{\omega(h)} = 0. \tag{4.2}$$

Then there is a matrix Y for which

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \omega\left(\frac{1}{n}\right) L_n(Y) > 0 \tag{4.3}$$

and

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(f, Y) = \int_{-1}^{+1} f(x)\, dx \tag{4.4}$$

holds for all $f(x) \in C(\omega)$.

Theorem 2 shows that if $\omega(h)$ satisfies the conditions (4. 1) and (4. 2) then the condition (3. 1) is *not* necessary for the convergence. Since

$$\omega(h) = h^\alpha \qquad (0 < \alpha \leqq 1)$$

is such a continuity module, the following corollary is true:

COROLLARY. *There exists a matrix Y for which*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-\alpha} L_n(Y) > 0$$

and (4. 4) *hold for all $f(x) \in$* Lip α; *i. e. the sufficient condition of the convergence in* Lip α

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\alpha} L_n(X) = 0$$

is generally not necessary.

PROOF OF THEOREM 2. We use the method of ERDŐS and TURÁN as in the proof of Theorem 3 in [4]. Let $t = \{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ be a sequence for which

$$1 \leqq t_n < 3 \qquad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{4.5}$$

and denote the matrix of the elements

$$v_{kn} = \begin{cases} z_{kn} = \cos \dfrac{2k+1}{n+1} \dfrac{\pi}{2} & \text{if } 1 \leqq k \leqq n, \\ \cos \dfrac{t_n}{n+1} \dfrac{\pi}{2} & \text{if } k = 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

by $V(t)$. Then

$$l_{0n}(V(t), x) = \frac{T_{n+1}(x)}{x - z_{0n}} \cdot \frac{v_{0n} - z_{kn}}{T_{n+1}(v_{0n})}; \tag{4.7}$$

$$|A_{0n}(V(t))| = \left| \int_{-1}^{+1} \frac{T_{n+1}(x)}{x - z_{0n}} \cdot \frac{v_{0n} - z_{0n}}{T_{n+1}(v_{0n})}\, dx \right| = \frac{|T'_{n+1}(z_{0n})| \cdot (z_{0n} - v_{0n})}{\sin \frac{\pi}{2} (t_n - 1)} A_{0n}(Z) > 0$$

where $T_{n+1}(x)=\cos(n+1)\arccos x$ is the $(n+1)$th Chebysev's polynomial, z_{kn} its roots and Z the corresponding matrix. Thus $\lim_{t_n\to 3}|A_{0n}(V(t))|=\infty$ and all the more

$$\lim_{t_n\to 3} L_n(V(t)) = \infty \qquad (n=0,1,2,\dots). \tag{4. 8}$$

But obviously $L_n(V(t))\geqq L_n(V(1))=L_n(Z)=2$ $(n=0,1,2,\dots)$ and so there exists a t_n by (4. 8) and by Bolzano's theorem for which

$$L_n(V(t)) = \frac{2\omega(2)}{\omega\left(\frac{1}{n}\right)} \qquad (n=0,1,2,\dots) \tag{4. 9}$$

holds. Now let be $Y=V(t)$ with these values t_n $(n=0,1,2,\dots)$, then (4. 3) holds.

We will use the following properties of Y (see [4], pp. 404 and 406):

$$\sum_{k=2}^{n}|l_{kn}(Y,x)| = O(\ln n), \quad |l_{0n}(Y,x)+l_{1n}(Y,x)| = O(1)$$
$$(-1\leqq x\leqq +1,\ n=2,3,4,\dots).$$

This clearly implies that

$$\sum_{k=2}^{n}|A_{kn}(Y)| = O(\ln n), \quad |A_{0n}(Y)+A_{1n}(Y)| = O(1) \qquad (n=2,3,4,\dots). \tag{4. 10}$$

Now we can see that

$$L_n(Y)\leqq 3|A_{0n}(Y)| \qquad (n=2,3,4,\dots) \tag{4. 11}$$

because in the contrary case we should have

$$c_1\ln n\geqq \sum_{k=2}^{n}|A_{kn}(Y)| = L_n(Y)-\left[|A_{0n}(Y)|+|A_{1n}(Y)|\right]\geqq L_n(Y)-2|A_{0n}(Y)| -$$
$$-|A_{0n}(Y)+A_{1n}(Y)| \geqq \frac{1}{3}L_n(Y)-c_2 = \frac{2\omega(2)}{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}-c_2$$

which contradicts (4. 1).

By (4. 6) we have

$$y_{0n}-y_{1n} = v_{0n}-v_{1n} = \cos\frac{t_n}{n+1}\frac{\pi}{2}-\cos\frac{3}{n+1}\frac{\pi}{2} \leqq \frac{15(3-t_n)}{n^2},$$

and so from (4. 11), (4. 6), (4. 7) and the classical Markov's inequality

$$L_n(Y)\leqq 3|A_{0n}(Y)|\leqq 3\int_{-1}^{+1}\left|\frac{T_{n+1}(x)}{x-z_{0n}}\right|\frac{z_{0n}-y_{0n}}{|T_{n+1}(y_{0n})|}dx\leqq 6\cdot\max_{-1\leqq x\leqq +1}|T'_{n+1}(x)|\cdot$$
$$\cdot\frac{\cos\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}-\cos\frac{t_n}{n+1}\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}(3-t_n)}\leqq 6(n+1)^2\,\frac{\frac{\pi}{n+1}\cdot\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}}{3-t_n}\leqq\frac{450}{n^2(y_{0n}-y_{1n})},$$

i. e.

$$(4.12)\qquad y_{0n}-y_{1n} \leqq \frac{450}{n^2 L_n(Y)} = \frac{225\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\omega(2)\cdot n^2} \qquad (n=2, 3, 4, \ldots).$$

Now let $f(x)\in C(\omega)$, $k=[\sqrt{n}+1]$ and $p_k(x)$ be the best-approximating polynomial of $f(x)$ of degree k. Using the Jackson's, Markov's and Lagrange's theorems, from (4. 10), (4. 12), (4. 1) and (4. 2) we have

$$\left|Q_n(f, Y)-\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx\right| \leqq \left|\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx-\int_{-1}^{+1} p_k(x)\,dx\right| + |Q_n(p_k-f, Y)| \leqq$$

$$\leqq O\left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)+\sum_{j=2}^{n}|p_k(y_{jn})-f(y_{jn})|\cdot|A_{jn}(Y)|+|p_k(y_{1n})-f(y_{1n})|\cdot$$

$$\cdot|A_{0n}(Y)+A_{1n}(Y)|+[|p_k(y_{1n})-p_k(y_{0n})|+|f(y_{0n})-f(y_{1n})|]\cdot|A_{0n}(Y)| \leqq$$

$$\leqq O\left(\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)+O\left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)\sum_{j=2}^{n}|A_{jn}(Y)|+O\left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)\cdot O(1)+$$

$$+[\max_{-1\leqq x\leqq +1}|p_k'(x)|\cdot(y_{0n}-y_{1n})+O(\omega(y_{0n}-y_{1n}))]\cdot L_n(Y) \leqq$$

$$\leqq O\left(\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\ln n\right)+O\left[\frac{k^2\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2}+\omega\left(\frac{225\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\omega(2)n^2}\right)\right]\cdot\frac{2\omega(2)}{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}=$$

$$=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n\right)+O\left(\frac{\omega\left(\frac{1}{n^2}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}\right)\to 0 \quad \text{if} \quad n\to\infty$$

which proves Theorem 2.

§ 5. The necessary condition. If condition (3.1) is not necessary, we can ask: what is the necessary condition of the convergence? I can answer this question only for the class Lip 1: in this case no necessary condition on $L_n(x)$ is needed. Namely the following theorem is true:

THEOREM 3. *Let X be an arbitrary matrix. Then there is a matrix Y for which*

$$(5.1)\qquad L_n(X)=L_n(Y) \qquad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

and

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(f, Y)=\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx$$

for all $f(x)\in \text{Lip } 1$.

PROOF. We sketch the proof which hardly differs from the proof of Theorem 2. Define Y by (4. 6) and by

$$L_n(V(t)) = L_n(X) \qquad (n=0, 1, 2, \ldots),$$

then (5. 1) holds. Later on we write $1/n$ instead of $\omega(1/n)$ and $L_n(Y)$ instead of $\dfrac{2\omega(2)}{\omega(1/n)}$ and the proof runs parallely to the above mentioned one.

§ 6. The sufficient condition cannot be weakened. We have seen that (3. 1) is generally not necessary for the convergence. Nevertheless we prove that this condition cannot be replaced by a weaker one expressed by ω and $L_n(X)$.

THEOREM 4. *If*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \omega\left(\frac{1}{n}\right) L_n(X) > 0 \tag{6. 1}$$

and $C(\omega) \neq \mathrm{Lip}\, 1$ *then there is a matrix* Y *and a function* $f(x) \in C(\omega)$ *for which*

$$L_n(Y) = L_n(X) \qquad (n=0, 1, 2, \ldots) \tag{6. 2}$$

and

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| Q_n(f, Y) - \int_{-1}^{+1} f(x)\, dx \right| > 0. \tag{6. 3}$$

PROOF. We shall follow a similar way as used in [4, Theorem 4], and keep the previous notations. Let $q = \{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ be a sequence of numbers for which

$$q_n \geqq 1 \qquad (n=0, 1, 2, \ldots) \tag{6. 4}$$

and denote the matrix with elements

$$v_{kn} = \begin{cases} \dfrac{z_{kn-1}}{q_n} & \text{if} \quad 0 \leqq k \leqq n-1 \quad \text{and} \quad n \quad \text{even} \\ 0 & \text{if} \qquad k = n \qquad \text{and} \quad n \quad \text{even} \\ \dfrac{z_{kn-2}}{q_n} & \text{if} \quad 0 \leqq k \leqq n-2 \quad \text{and} \quad n \quad \text{odd} \\ \dfrac{\sin \dfrac{\pi}{n-1}}{q_n} & \text{if} \qquad k = n \qquad \text{and} \quad n \quad \text{odd} \\ 0 & \text{if} \quad k = n-1 \quad \text{and} \quad n \quad \text{odd} \end{cases} \tag{6. 5}$$

by $V(q)$. Then

$$\left.\begin{aligned} l_{kn}(V(q),x) &= l_{kn-1}(Z,q_nx)-(-1)^{\frac{n}{2}}T_n(q_nx)l_{kn-1}(Z,0) \quad (0\leqq k\leqq n-1)\\ l_{nn}(V(q),x) &= (-1)^{\frac{n}{2}}T_n(q_nx)\end{aligned}\right\} \quad (n \text{ even})$$

$$\left.\begin{aligned} l_{kn}(V(q),x) &= l_{kn-2}(Z,q_nx)+\frac{T_{n-1}(q_nx)}{(-1)^{\frac{n-1}{2}}v_{nn}}\cdot[xl_{kn-2}(Z,q_nv_{nn})+\\ &\quad +(x-v_{nn})l_{kn-2}(Z,0)] \qquad (0\leqq k\leqq n-2)\\ l_{n-1n}(V(q),x) &= \frac{T_{n-1}(q_nx)}{(-1)^{\frac{n+1}{2}}v_{nn}}(x-v_{nn}),\\ l_{nn}(V(q),x) &= \frac{T_{n-1}(q_nx)\cdot x}{(-1)^{\frac{n+1}{2}}v_{nn}}\end{aligned}\right\} \quad (n \text{ odd}).$$

Using the obvious relation

$$\left|\int_{-1}^{+1}T_n(x)\,dx\right| = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (n=0,1,2,\dots) \tag{6.6}$$

we get by simple calculation

$$|A_{kn}(V(q))| = \tag{6.7}$$

$$=\frac{1}{q_n}\left|(-1)^kA_{kn}(Z)-O\left(\frac{1}{n^3}\right)\frac{\sqrt{1-z_{kn-1}^2}}{z_{kn-1}}+\frac{2\sqrt{1-z_{kn-1}^2}}{nz_{kn-1}}\int_1^{q_n}\frac{T_n(x)x^2}{x^2-z_{kn-1}^2}\,dx\right|$$

$$(0\leqq k\leqq n-1,\ n \text{ even}),$$

$$|A_{nn}(V(q))| = \frac{1}{q_n}\left|-O\left(\frac{1}{n^2}\right)+2\int_1^{q_n}T_n(x)\,dx\right| \qquad (n \text{ even}); \tag{6.8}$$

$$|A_{kn}(V(q))| = \tag{6.9}$$

$$=\frac{1}{q_n}\left|(-1)^kA_{kn-2}(Z)-O\left(\frac{1}{n^3}\right)\frac{\sqrt{1-z_{kn-2}^2}}{z_{kn-2}}+\frac{2\sqrt{1-z_{kn-2}^2}}{(n-1)z_{kn-2}}\int_1^{q_n}\frac{T_n(x)x^2}{x^2-z_{kn-2}^2}\,dx\right|$$

$$(0\leqq k\leqq n-2,\ n \text{ odd}),$$

$$|A_{n-1n}(V(q))| = |A_{nn}(V(q))| = \frac{1}{q_n}\left|-O\left(\frac{1}{n^2}\right)+2\int_1^{q_n}T_{n-1}(x)\,dx\right| \qquad (n \text{ odd}). \tag{6.10}$$

Hence for $q_n=1$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ we have

$$L_n(V(1)) = \sum_{k=0}^{n} |A_{kn}(V(1))| \leqq \sum_{k=0}^{n} A_{kn}(Z)+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{|z_{kn-1}|} =$$

$$= 2+O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \qquad (n \text{ even})$$

(being $A_{kn}(Z)>0$ and $\sum_{k=0}^{n} A_{kn}(Z)=2$, see e. g. [2], p. 472). It is easy to show that it is true for odd n's, too. So for sufficiently large n's

(6. 11) $$L_n(V(1)) \leqq 3 \qquad (n \geqq N).$$

Using the inequality

$$T_n(x) \geqq \frac{x^n}{2} \qquad (x \geqq 1,\ n = 0, 1, 2, \ldots),$$

from (6. 8) and (6. 10) we can see that

$$|A_{nn}(V(q))| \geqq \frac{q_n^{n+1}-1}{(n+1)q_n} - \frac{1}{q_n} O\left(\frac{1}{n^2}\right) \to \infty \quad \text{if} \quad q_n \to \infty \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

and all the more

(6. 12) $$\lim_{q_n \to \infty} L_n(V(q)) = \infty \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

By (6. 1) there is a $c>0$ and a sequence $N \leqq n_1 < n_2 < \ldots$ such that

(6. 13) $$\omega\left(\frac{1}{n_i}\right) L_{n_i}(X) \geqq c \quad \text{and} \quad L_{n_i}(X) \geqq 3 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Each $L_{n_i}(V(q))$ is a continuous function of q_{n_i}, thus, by (6. 11), (6. 12), (6. 13) and the Bolzano's theorem there exists a q_{n_i} for which

(6. 14) $$L_{n_i}(V(q)) = L_{n_i}(X) \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

In the future let us denote q_{n_i} the value for which (6. 14) holds.

Now let us define the matrix Y as follows:

(6. 15) $$y_{kn} = \begin{cases} x_{kn} & \text{if} \quad 0 \leqq k \leqq n \quad \text{and either} \quad n<N \quad \text{or} \quad n \neq n_1, n_2, \ldots \\ v_{kn} & \text{if} \quad 0 \leqq k \leqq n \quad \text{and} \quad n = n_1, n_2, \ldots. \end{cases}$$

Then (6. 14) provides that (6. 2) holds.

If $\overline{\lim_{i \to \infty}}\, q_{n_i} > 1$ then by (6. 5) and (6. 15) there exist subintervals in $[-1, +1]$ for infinitely many n_i's which contain no one of the fundamental points y_{kn_i}. Obviously, then there is a function $f(x) \in C(\omega)$ which satisfies (6. 3).

Consequently, we may suppose that

(6. 16) $$\lim_{i \to \infty} q_{n_i} = 1, \quad q_{n_i} \leqq 2 \qquad (i \geqq i_1).$$

In this case let us denote

$$m_i = \left[\frac{n_i}{6}\right]+1, \quad p_i = \left[\frac{n_i}{2}\right]-1 \qquad (i \geqq i_1).$$

We prove that

$$\frac{\sum_{k=m_i}^{p_i} |A_{kn_i}(Y)|}{L_{n_i}(Y)} \geqq d > 0 \qquad (i \geqq i_1) \tag{6.17}$$

with a suitable d (obviously $d<1$). Using (6. 7), (6. 8), (6. 16) and the inequalities

$$\frac{1}{2} \leqq \sqrt{1-z^2_{kn_i-1}} \leqq 1 \quad (m_i \leqq k \leqq p_i) \quad \text{and} \quad \frac{2}{\pi} x \leqq \sin x \leqq x \quad \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

we have

$$\frac{\sum_{k=m_i}^{p_i} |A_{kn_i}(Y)|}{L_{n_i}(Y)} \geqq$$

$$\geqq \frac{\sum_{k=m_i}^{p_i} \left[\frac{2\sqrt{1-z^2_{kn_i-1}} \int_1^{q_{n_i}} T_{n_i}(x)\,dx}{n_i z_{kn_i-1}(q^2_{n_i} - z^2_{kn_i-1})} - O\left(\frac{1}{n_i^3}\right) \frac{1}{z_{kn_i-1}} \right] - 2}{\sum_{k=0}^{n_i-1} \left[\frac{8 \int_1^{q_{n_i}} T_{n_i}(x)\,dx}{n_i |z_{kn_i-1}| \cdot \sqrt{1-z^2_{kn_i-1}}} + O\left(\frac{1}{n_i^3}\right) \frac{1}{|z_{kn_i-1}|} \right] + 2 + O\left(\frac{1}{n_i^2}\right) + 2\int_1^{q_{n_i}} T_{n_i}(x)\,dx} \geqq$$

$$\geqq \frac{\frac{1}{4}\int_1^{q_{n_i}} T_{n_i}(x)\,dx \cdot \frac{1}{n_i} \sum_{k=m_i}^{p_i} \frac{1}{\cos \frac{2k+1}{n_i} \frac{\pi}{2}} - O\left(\frac{\ln n_i}{n_i^2}\right) - 2}{16\int_1^{q_{n_i}} T_{n_i}(x)\,dx \cdot \frac{1}{n_i} \sum_{k=0}^{n_i-1} \frac{1}{\left|\sin \frac{2k+1}{n_i} \pi\right|} + O\left(\frac{\ln n_i}{n_i^2}\right) + 2 + 2\int_1^{q_{n_i}} T_{n_i}(x)\,dx} =$$

$$= \frac{O(\ln n_i) \int_1^{q_{n_i}} T_{n_i}(x)\,dx - O\left(\frac{\ln n_i}{n_i^2}\right) - 2}{O(\ln n_i) \int_1^{q_{n_i}} T_{n_i}(x)\,dx} \geqq d$$

for *even* n_i's. The proof of (6. 17) for *odd* n_i's is all the same.

Now let us define the continuous broken line $g_{n_i}(x)$ as follows:

$$g_{n_i}(x) = 0 \quad \text{if} \quad x \geqq y_{m_i-1n_i} \quad \text{or} \quad x \leqq y_{p_i+1n_i} \qquad (i \geqq i_1),$$

$$g_{n_i}(y_{kn_i}) = \operatorname{sign} A_{kn_i}(Y) \qquad (m_i \leqq k \leqq p_i,\ i \geqq i_1);$$

$g_{n_i}(x)$ is linear between the neighbouring fundamental points. Clearly

(6. 18) $$|g_{n_i}(x)| \leqq 1 \qquad (|x| \leqq 1,\ i \geqq i_1),$$
$$g_{n_i}(x) \in \mathrm{Lip}\, 1 \subset C(\omega) \qquad (i \geqq i_1).$$

Taking into account (6. 5) and (6. 16) we get for $m_i \leqq k \leqq p_i$

$$y_{k-1n_i} - y_{kn_i} =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{z_{k-1n_i-1} - z_{kn_i-1}}{q_{n_i}} = \dfrac{2}{q_{n_i}} \sin \dfrac{k\pi}{n_i} \sin \dfrac{\pi}{2n_i} \geqq \dfrac{1}{2n_i} & \text{if } n_i \text{ even} \\ \dfrac{z_{k-1n_i-2} - z_{kn_i-2}}{q_{n_i}} = \dfrac{2}{q_{n_i}} \sin \dfrac{k\pi}{n_i-1} \sin \dfrac{\pi}{2(n_i-1)} \geqq \dfrac{1}{2(n_i-1)} & \text{if } n_i \text{ odd} \end{cases}$$

thus

(6. 19) $$|g_{n_i}(x+h) - g_{n_i}(x)| \leqq 4n_i h \qquad (i \geqq i_1,\ -1 \leqq x \leqq x+h \leqq +1).$$

Let $r_1 < r_2 < \dots$ be a subsequence of the sequence $n_{i_1} < n_{i_1+1} < \dots$ such that the following conditions are satisfied:

(6. 20) $$L_{r_1}(Y) \geqq \frac{4}{d} > 4, \quad L_{r_i}(Y) \geqq \frac{4}{d} L_{r_{i-1}}(Y) > 4L_{r_{i-1}}(Y) \qquad (i = 1, 2, \dots)$$

(this is possible because of (6. 14)),

(6. 21) $$r_i \omega\left(\frac{1}{r_i}\right) \leqq \frac{1}{2} r_{i+1} \omega\left(\frac{1}{r_{i+1}}\right) \qquad (i = 1, 2, \dots)$$

(this is possible on account of the relation

$$\lim_{h=+0} \frac{h}{\omega(h)} = 0$$

which is equivalent to the condition of our theorem that $C(\omega) \neq \mathrm{Lip}\, 1$), and finally

(6. 22) $$\left| Q_{r_j}(g_{r_i}, Y) - \int_{-1}^{+1} g_{r_i}(x)\, dx \right| \leqq d \qquad (j > i \geqq 1).$$

(If the last inequality would not be fulfilled for a fixed i and for infinitely many j's, our theorem would be proved with $f(x) = g_{r_i}(x) \in C(\omega)$).

Now put

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_{r_i}(x)}{L_{r_i}(Y)} \qquad (-1 \leqq x \leqq +1).$$

The series on the right hand converges uniformly in $[-1, +1]$ because of (6. 20).

Let j be the smallest index for which

$$r_j h \geqq 1$$

then

(6. 23) $$h n_{j-1} \omega\left(\frac{1}{n_{j-1}}\right) \leqq 2\omega(h)$$

(see e. g. [4]). So from (6. 19), (6. 13), (6. 18), (6. 20) and (6. 23) we get

$$|f(x+h)-f(x)| \leqq \sum_{i=1}^{j-1} \frac{|g_{r_i}(x+h)-g_{r_i}(x)|}{L_{r_i}(Y)} + \sum_{i=j}^{\infty} \frac{|g_{r_i}(x+h)-g_{r_i}(x)|}{L_{r_i}(Y)} \leqq$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{j-1} \frac{4r_i h}{c}\,\omega\left(\frac{1}{r_i}\right) + \sum_{i=j}^{\infty} \frac{2\cdot 4^{j-i}}{L_{r_j}(Y)} \leqq \frac{4}{c}\sum_{i=1}^{j-1} 2^{1+i-j} r_{j-1} h\omega\left(\frac{1}{r_{j-1}}\right) +$$

$$+\frac{2}{c}\sum_{i=j}^{\infty} 4^{j-i}\omega\left(\frac{1}{r_j}\right) \leqq \frac{2}{c}\,\omega(h)\left(\sum_{i=1}^{j-1} 2^{3+i-j} + \sum_{i=j}^{\infty} 4^{j-i}\right) < \frac{20}{c}\,\omega(h),$$

i. e.

$$f(x) \in C(\omega).$$

Taking in account (6. 20), (6. 22) and the relations

$$Q_{r_j}(g_{r_j}, Y) = \sum_{k=0}^{r_j} g_{r_j}(y_{kr_j}) A_{kr_j}(Y) = \sum_{k=m_j}^{p_j} |A_{kr_j}(Y)| \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

$$|Q_{r_j}(g_{r_i}, Y)| = \left|\sum_{k=0}^{r_j} g_{r_i}(y_{kr_j}) A_{kr_j}(Y)\right| \leqq \sum_{k=0}^{r_j} |A_{kr_j}(Y)| = L_{r_j}(Y) \qquad (i, j = 1, 2, \ldots)$$

we have

$$Q_{r_j}(f, Y) - \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Q_{r_j}(g_{r_i}, Y) - \int_{-1}^{+1} g_{r_i}(x)\,dx}{L_{r_i}(Y)} \geqq$$

$$\geqq \frac{Q_{r_j}(g_{r_j}, Y)}{L_{r_j}(Y)} - \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{|Q_{r_j}(g_{r_i}, Y)|}{L_{r_i}(Y)} - \sum_{i=j}^{\infty} \frac{\left|\int_{-1}^{+1} g_{r_i}(x)\,dx\right|}{L_{r_i}(Y)} -$$

$$-\sum_{i=1}^{j-1} \frac{\left|Q_{r_j}(g_{r_i}, Y) - \int_{-1}^{+1} g_{r_i}(x)\,dx\right|}{L_{r_i}(Y)} \geqq d - \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{L_{r_j}(Y)}{L_{r_i}(Y)} -$$

$$-\sum_{i=j}^{\infty} \frac{2}{L_{r_i}(Y)} - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{d}{L_{r_i}(Y)} \geqq d - d\sum_{i=j+1}^{\infty} 4^{j-i} - 2d\sum_{i=j}^{\infty} 4^{-i} - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{d}{4^i} \geqq$$

$$\geqq d - \frac{d}{3} - \frac{d}{4^{j-1}\cdot 3} - \frac{d}{3} \geqq \frac{d}{4} > 0 \qquad (j = 2, 3, \ldots),$$

correspondingly

$$\overline{\lim_{j=\infty}} \left[Q_{r_j}(f, Y) - \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx\right] \geqq \frac{d}{4} > 0,$$

and our theorem is proved.

Theorem 4 excludes the class Lip 1. In connection with this, we prove the following

THEOREM 5. *There exists a matrix Y and a function $f(x)\in \mathrm{Lip}\,1$ for which*

$$L_n(Y)=O(n) \qquad (n=1,2,\dots) \tag{6. 24}$$

and (6. 3) *hold.*

Accordingly, the sufficient condition of the convergence for the class Lip 1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n(Y)}{n}=0 \tag{6. 25}$$

also cannot be weakened.

PROOF. Let us define the matrix Y as follows:

$$y_{kn}=\begin{cases} z_{kn} & \text{if} \quad 0\leqq k\leqq n \quad \text{and} \quad n\neq 4,8,12,\dots,\\ z_{kn-4} & \text{if} \quad 0\leqq k\leqq n-4 \quad \text{and} \quad n=4,8,12,\dots,\\ \sin\dfrac{1}{n-3}\dfrac{\pi}{2} & \text{if} \quad k=n \quad \text{and} \quad n=4,8,12,\dots,\\ -y_{nn} & \text{if} \quad k=n-1 \quad \text{and} \quad n=4,8,12,\dots,\\ \sin\dfrac{3}{n-3}\dfrac{\pi}{2} & \text{if} \quad k=n-2 \quad \text{and} \quad n=4,8,12,\dots,\\ -y_{n-2n} & \text{if} \quad k=n-3 \quad \text{and} \quad n=4,8,12,\dots \end{cases} \tag{6. 26}$$

(the meaning of the z_{kn}'s is as above). Then it is easy to show that

$$l_{kn}(Y,x)=l_{kn-4}(Z,x)-T_{n-3}(x)\left[\frac{(x^2-y_{n-2n}^2)(x+y_{nn})}{(y_{nn}^2-y_{n-2n}^2)2y_{nn}}\,l_{kn-4}(Z,y_{nn})+\right.$$

$$+\frac{(x^2-y_{n-2n}^2)(x-y_{nn})}{(y_{nn}^2-y_{n-2n}^2)2y_{nn}}\,l_{kn-4}(Z,-y_{nn})-\frac{(x^2-y_{nn}^2)(x+y_{n-2n})}{(y_{n-2n}^2-y_{nn}^2)2y_{n-2n}}\,l_{kn-4}(Z,y_{n-2n})-$$

$$\left.-\frac{(x^2-y_{nn}^2)(x-y_{n-2n})}{(y_{n-2n}^2-y_{nn}^2)2y_{n-2n}}\,l_{kn-4}(Z,-y_{n-2n})\right] \qquad (0\leqq k\leqq n-4,\ n=4,8,12,\dots),$$

$$\left.\begin{aligned} l_{n-3n}(Y,x)&=-\frac{T_{n-3}(x)(x^2-y_{nn}^2)(x-y_{n-2n})}{(y_{n-2n}^2-y_{nn}^2)2y_{n-2n}}\\ l_{n-2n}(Y,x)&=-\frac{T_{n-3}(x)(x^2-y_{nn}^2)(x+y_{n-2n})}{(y_{n-2n}^2-y_{nn}^2)2y_{n-2n}}\\ l_{n-1n}(Y,x)&=\frac{T_{n-3}(x)(x^2-y_{n-2n}^2)(x-y_{nn})}{(y_{nn}^2-y_{n-2n}^2)2y_{nn}}\\ l_{nn}(Y,x)&=\frac{T_{n-3}(x)(x^2-y_{n-2n}^2)(x+y_{nn})}{(y_{nn}^2-y_{n-2n}^2)2y_{nn}} \end{aligned}\right\}\ (n=4,8,12,\dots).$$

Hence, using the notations

$$P_n = \frac{\int\limits_{-1}^{+1} T_{n-3}(x)x^3\,dx - y_{nn}y_{n-2n}^2 \int\limits_{-1}^{+1} T_{n-3}(x)x\,dx}{(y_{nn}^2 - y_{n-2n}^2)2y_{nn}},$$

$$Q_n = \frac{\int\limits_{-1}^{+1} T_{n-3}(x)x^3\,dx - y_{n-2n}y_{nn}^2 \int\limits_{-1}^{+1} T_{n-3}(x)x\,dx}{(y_{nn}^2 - y_{n-2n}^2)2y_{n-2n}}$$

we get for $n=4, 8, 12, \ldots$

$$\left.\begin{aligned} A_{kn}(Y) &= A_{kn-4}(Z) - P_n[l_{kn-4}(Z, y_{nn}) + l_{kn-4}(Z, -y_{nn})] - \\ &\qquad - Q_n[l_{kn-4}(Z, y_{n-2n}) + l_{kn-4}(Z, -y_{n-2n})] \\ A_{n-3n}(Y) &= A_{n-2n}(Y) = Q_n, \quad A_{n-1n}(Y) = A_{nn}(Y) = P_n \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqq k \leqq n-4). \tag{6.27}$$

(6. 6), (6. 26) and the relation

$$2xT_n(x) = T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x)$$

gives at once that

$$P_n = O(n), \quad Q_n = O(n). \tag{6.28}$$

By simple calculation we have from (6. 25)

$$\sum_{k=0}^{n-4} |l_{kn-4}(Z, y_{nn}) + l_{kn-4}(Z, -y_{nn})| \leqq \frac{y_{nn}}{n-3} \sum_{k=0}^{n-4} \frac{1}{|y_{kn}^2 - y_{nn}^2|} =$$

$$= \frac{y_{nn}}{n-3} \cdot \left(\frac{1}{y_{nn}^2} + 2 \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-3} \frac{1}{y_{kn}^2 - y_{nn}^2} \right) \leqq$$

$$\leqq \frac{\pi}{2(n-3)^2} \left[(n-3)^2 + 2 \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-3} \frac{1}{\left(\frac{n-2k-4}{n-3}\right)^2 - \frac{1}{(n-3)^2} \cdot \frac{\pi^2}{4}} \right] =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[1 + 2 \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-3} \frac{1}{(n-2k-4)^2 - \frac{\pi^2}{4}} \right] = O(1) \qquad (n = 4, 8, 12, \ldots)$$

and analogously

$$\sum_{k=0}^{n-4} |l_{kn-4}(Z, y_{n-2n}) + l_{kn-4}(Z, -y_{n-2n})| = O(1) \qquad (n = 4, 8, 12, \ldots).$$

Hence, from (6. 27) and (6. 28) we have

$$L_n(Y) \leqq \sum_{k=0}^{n} |A_{kn}(Y)| \leqq \sum_{k=0}^{n-4} A_{kn-4}(Z) + P_n \left[\sum_{k=0}^{n-4} |l_{kn-4}(Z, y_{nn}) + l_{kn-4}(Z, -y_{nn})| + 2 \right] +$$

$$+ Q_n \left[\sum_{k=0}^{n-4} |l_{kn-4}(Z, y_{n-2n}) + l_{kn-4}(Z, -y_{n-2n})| + 2 \right] =$$

$$= 2 + O(n)O(1) + O(n)O(1) = O(n) \qquad (n = 4, 8, 12, \dots),$$

and

$$L_n(Y) = \sum_{k=0}^{n} |A_{kn}(Y)| = \sum_{k=0}^{n} |A_{kn}(Z)| = 2 \qquad (n \neq 4, 8, 12, \dots),$$

so we can see that (6. 24) holds.

It is easy to show that

$$\text{(6. 29)} \qquad \lim_{n \to \infty} y_{nn} P_n = \lim_{n \to \infty} y_{n-2n} Q_n = \frac{1}{4\pi^2}.$$

Now let us choose the function $f(x) = |x| \in \text{Lip } 1$. Then, by (6. 29) we get

$$\text{(6. 30)} \qquad P_n \sum_{k=0}^{n-4} [l_{kn-4}(Z, y_{nn}) + l_{kn-4}(Z, -y_{nn})] \cdot |y_{kn}| =$$

$$= \frac{2P_n y_{nn}}{n-3} \sum_{k=0}^{n-4} \frac{\sqrt{1-y_{kn}^2}\,|y_{kn}|}{y_{kn}^2 - y_{nn}^2} (-1)^{k+1} = \frac{4P_n y_{nn}}{n-3} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-3} (-1)^{k+1} \frac{y_{kn}\sqrt{1-y_{kn}^2}}{y_{kn}^2 - y_{nn}^2} =$$

$$= \frac{2P_n y_{nn}}{n-3} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-3} (-1)^{k+1} \frac{\sin \frac{4k+2}{n-3} \frac{\pi}{2}}{\sin^2 \frac{n-2k-4}{n-3} \frac{\pi}{2} - \sin^2 \frac{1}{n-3} \frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{2P_n y_{nn}}{n-3} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-3} (-1)^{k+1} \frac{\sin \left(\frac{n-2k-3}{n-3} \frac{\pi}{2} + \frac{n-2k-5}{n-3} \frac{\pi}{2} \right)}{\sin \frac{n-2k-3}{n-3} \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{n-2k-5}{n-3} \frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{2P_n y_{nn}}{n-3} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-3} (-1)^{k+1} \left(\text{ctg} \frac{n-2k-5}{n-3} \frac{\pi}{2} + \text{ctg} \frac{n-2k-3}{n-3} \frac{\pi}{2} \right) =$$

$$= \frac{2P_n y_{nn}}{n-3} \left(-\text{ctg} \frac{\pi}{2} + \text{ctg} \frac{1}{n-3} \frac{\pi}{2} \right) \to \frac{1}{\pi^3} \quad \text{if} \quad n \to \infty \qquad (n = 4, 8, 12, \dots).$$

Analogously one can calculate

$$(6.31)\qquad Q_n \sum_{k=0}^{n-4} [l_{kn-4}(Z, y_{n-2n}) + l_{kn-4}(Z, -y_{n-2n})] \cdot |y_{kn}| =$$

$$= \frac{2Q_n y_{n-2n}}{n-3} \cdot \left(\operatorname{ctg} \frac{n-1}{n-3} \frac{\pi}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} + \operatorname{ctg} \frac{n-5}{n-3} \frac{\pi}{2} - \operatorname{ctg} \frac{3}{n-3} \frac{\pi}{2} + 2 \operatorname{ctg} \frac{1}{n-3} \frac{\pi}{2} \right) \to$$

$$\to \frac{1}{2\pi^2} \left(-\frac{2}{3\pi} + \frac{4}{\pi} \right) = \frac{5}{3\pi^3} \quad \text{if} \quad n \to \infty \qquad (n = 4, 8, 12, \ldots).$$

In this way by (6. 27), (6. 29), (6. 30) and (6. 31) we get

$$Q_n(|x|, Y) = \sum_{k=0}^{n} A_{kn}(Y) |y_{kn}| = \sum_{k=0}^{n-4} A_{kn-4}(Z) |y_{kn}| -$$

$$- P_n \sum_{k=0}^{n-4} [l_{kn-4}(Z, y_{nn}) + l_{kn-4}(Z, -y_{nn})] \cdot |y_{kn}| -$$

$$- Q_n \sum_{k=0}^{n-4} [l_{kn-4}(Z, y_{n-2n}) + l_{kn-4}(Z, -y_{n-2n})] + Q_n(|y_{n-3n}| + |y_{n-2n}|) +$$

$$+ P_n(|y_{n-1n}| + |y_{nn}|) \to 1 - \frac{1}{\pi^3} - \frac{5}{3\pi^3} + \frac{1}{2\pi^2} + \frac{1}{2\pi^2} =$$

$$= 1 - \frac{8}{3\pi^3} + \frac{1}{\pi^2} \quad \text{if} \quad n \to \infty \qquad (n = 4, 8, 12, \ldots)$$

and Theorem 5 is proved being

$$\int_{-1}^{+1} |x| \, dx = 1.$$

(Received 20 December 1965)

References

[1] S. M. Losinsky, Пространства $\tilde{C}_\omega$ и $\tilde{C}^*_\omega$ и содимость интерполяционных процессов в них, *ДАН*, **59** (1948), pp. 1389—1392.

[2] I. P. Natanson, *Konstruktív függvénytan* (Budapest, 1952, Hungarian translation).

[3] P. Erdős—P. Turán, On the role of the Lebesgue functions in the theory of the Lagrange interpolation, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), pp. 47—66.

[4] O. Kis—J. Szabados, Замечания о сходимости Лагранжева интерполирования, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **16** (1965), pp. 389—430.

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (1—2), 1967, pp. 113—131.

EXTREMALPUNKTSBEGRIFFE FÜR RICHTUNGSRÄUME UND EINE VERALLGEMEINERUNG DES KREIN—MILMANSCHEN SATZES FÜR TOPOLOGISCHE RICHTUNGSRÄUME

Von

E. DEÁK (Budapest)

(*Vorgelegt von* A. RÉNYI)

Einleitung

Der eigentliche Kern der vorliegenden Arbeit ist die Erkenntnis, daß der Begriff der Konvexität von Teilmengen eines linearen Raumes bzw. eines lokalkonvexen Raumes sowie einige damit verwandte Begriffe und viele Eigenschaften derselben aus der Halbraumstruktur des Raumes (also im Grunde genommen aus dem algebraisch bzw. topologisch dualen Raum) abgeleitet werden können, u. zw. ohne Berücksichtigung der algebraischen Besonderheiten der linearen Struktur, aus der die Halbraumstruktur hervorgegangen ist.

Dies gilt insbesondere für den wohlbekannten Satz von KREIN und MILMAN: *jede konvexe kompakte Teilmenge eines lokalkonvexen Raumes ist die abgeschlossene konvexe Hülle der Menge ihrer Extremalpunkte* [1].

Es wird nun ein Analogon dieses Satzes bewiesen, u. zw. für topologische Richtungsräume. Der Begriff des *Richtungsraumes* (eine Verallgemeinerung des Begriffs des linearen Raumes) bzw. des *topologischen Richtungsraumes* (eine Verallgemeinerung des Begriffs des lokalkonvexen Raumes mit der schwachen Topologie) wurde in [6] bzw. [7] eingeführt. Seine Grundlage ist der Begriff der *Richtungsstruktur* einer Menge bzw. eines topologischen Raumes ([6] bzw. [4]), worin die nötigen Ordnungs- und Inklusionseigenschaften der Familie der Halbräume eines linearen Raumes bzw. eines lokalkonvexen Raumes abstrahiert wurden.

Der Begriff der Richtungsstruktur wurde auch für einen anderen Zweck, u.zw. für die Begründung eines neuen topologischen Dimensionsbegriffs — der *Richtungsdimension* — verwertet. Dies wurde in [3] eingeführt und in [4] eingehend behandelt.

In [6], [7] und dem vorliegenden Artikel spielt der Begriff der *starken Konvexität* (d. h. die Eigenschaft einer Menge, Durchschnitt von Halbräumen zu sein) durchwegs eine grundlegende Rolle. Für lineare Räume wurde dieser Begriff in [5] eingeführt.

Da nun in unseren Ausführungen mehrere bzw. beinahe alle Definitionen und Ergebnisse aus [3], [4] und [5] bzw. [6] und [7] gebraucht werden, wurden dieselben systematisch und ohne besondere Hinweise auf die besagten Arbeiten im § 1 dieses Artikels — der dadurch für sich lesbar ist — zusammengestellt.

Im § 2 wird ein Analogon des Begriffs des inwendigen Punktes ([2] 180) für Richtungsräume eingeführt und untersucht. Die Idee dieser Begriffsbildung fußt auf einer Charakterisierung der Menge der inwendigen Punkte einer konvexen Menge mit mindestens einem inwendigen Punkt, die in [5] gegeben wurde.

Der für unser Hauptziel erforderliche Begriff des Extremalpunktes für Richtungsräume wird im § 3 entwickelt.

Im § 4 wird endlich der besagte „Krein—Milmansche Satz für topologische Richtungsräume" bewiesen (Satz (4. 3)) und gezeigt ((4. 4) und (4. 5)), daß dies nicht nur ein Analogon, sondern tatsächlich eine Verallgemeinerung des klassischen Krein—Milmanschen Satzes ist.

Im § 5 werden offene Fragen aufgeworfen.

Einige Bezeichnungen:

VR: Vektorraum (reeller linearer Raum).

TVR: Topologischer Vektorraum (T_1-Raum).

LKR: Lokalkonvexer Raum.

LKRST: Lokalkonvexer Raum mit der schwachen Topologie.

$[E]$: Konvexe Hülle einer Menge E eines VR-es.

$M(E)$ bzw. $L(E)$: Die kleinste E enthaltende lineare Mannigfaltigkeit bzw. der durch E aufgespannte lineare Teilraum für eine Menge E eines VR-es L.

$L_E^\#$ bzw. L_E': Die Menge aller Linearformen bzw. stetigen Linearformen auf einem VR L, die auf der Menge E nicht konstant sind; $L_L^\#$ bzw. L_L' ist also die Menge aller nichttrivialen (stetigen) Linearformen.

(x, y): Die durch die Punkte x, y eines VR-es bestimmte offene gerade Strecke.

$A \subset B$: A ist echte Teilmenge von B.

$\overline{\overline{A}}$: Die Mächtigkeit der Menge A.

§ 1. Übersicht der bisherigen Begriffsbildungen und Ergebnisse über Richtungsräume und topologische Richtungsräume

A. Richtungsräume und topologische Richtungsräume

DEFINITIONEN. (1. 1) Ein System $\mathscr{R}$ von geordneten Paaren (G, F), die aus Teilmengen einer nichtleeren Menge X gebildet sind, wird eine *Richtung* von X genannt, wenn es folgenden *Richtungsaxiomen* genügt:

(R_1) $(\emptyset, \emptyset)$, $(X, X) \in \mathscr{R}$.

(R_2) Für jedes $(G, F) \in \mathscr{R}$ gilt $G \subseteqq F$, und für zwei verschiedene Paare (G_1, F_1), $(G_2, F_2) \in \mathscr{R}$ besteht eine der Inklusionen $F_1 \subseteqq G_2$, $F_2 \subseteqq G_1$.

(R_3) Mit der Bezeichnung $\mathscr{G}(\mathscr{R})$ für die Familie der ersten Glieder aller Elemente von $\mathscr{R}$ gilt

$$\bigcup \{G | G \in \mathscr{G}^*\} \in \mathscr{G}(\mathscr{R}) \quad (\mathscr{G}^* \subset \mathscr{G}(\mathscr{R}),\ \mathscr{G}^* \neq \emptyset).$$

(R_4) Mit der Bezeichnung $\mathscr{F}(\mathscr{R})$ für die Familie der zweiten Glieder aller Elemente von $\mathscr{R}$ gilt

$$\bigcap \{F | F \in \mathscr{F}^*\} \in \mathscr{F}(\mathscr{R}) \quad (\mathscr{F}^* \subset \mathscr{F}(\mathscr{R}),\ \mathscr{F}^* \neq \emptyset).$$

(R_5) $\quad \bigcup \{F \setminus G | (G, F) \in \mathscr{R}\} = X.$

(1. 2) Ein beliebiges nichtleeres System $\mathfrak{R}$ von Richtungen $\mathscr{R}$ einer nichtleeren Menge X ist eine *Richtungsstruktur* (RS) von X.

(1. 3) Ein geordnetes Paar $(X, \mathfrak{R})$, wobei X eine nichtleere Menge und (für eine nichtleere Indexmenge A)

$$\mathfrak{R} = \{\mathscr{R}_\alpha | \alpha \in A\}$$

eine RS derselben ist, wird *Richtungsraum* (RR) genannt, wenn folgendes *Separierungsaxiom* erfüllt ist:

Jede Menge vom Typ

$$\cap \{F_\alpha \setminus G_\alpha | (G_\alpha, F_\alpha) \in \mathscr{R}_\alpha, \alpha \in A\}$$

besteht aus höchstens einem Element (sie kann auch leer sein).

Die Elemente $x \in X$ eines RR-es $(X, \mathfrak{R})$ sind die *Punkte* des Raumes, X selbst ist die *Grundmenge* desselben.

(1. 4) Mit Bezug auf einen RR $(X, \mathfrak{R})$ werden die Mengen

$$G, X \setminus F \quad \text{bzw.} \quad X \setminus G, F \quad (G \in \mathscr{G}(\mathscr{R}), F \in \mathscr{F}(\mathscr{R}), \mathscr{R} \in \mathfrak{R})$$

als die *offenen* bzw. *abgeschlossenen* $\mathfrak{R}$*-Halbräume* des Raumes bezeichnet, u.zw. sind für jedes $\mathscr{R} \in \mathfrak{R}$

$$G, F \quad \text{bzw.} \quad X \setminus G, X \setminus F \quad (G \in \mathscr{G}(\mathscr{R}), F \in \mathscr{F}(\mathscr{R}))$$

die *unteren* bzw. *oberen* $\mathscr{R}$*-Halbräume* und

$$G, X \setminus F \quad \text{bzw.} \quad X \setminus G, F \quad (G \in \mathscr{G}(\mathscr{R}), F \in \mathscr{F}(\mathscr{R}))$$

die *offenen* bzw. *abgeschlossenen* $\mathscr{R}$*-Halbräume.*

(1. 5) Ein RR $(X, \mathfrak{R})$ wird als *topologischer Richtungsraum* (TRR) bezeichnet, wenn seine Grundmenge X mit derjenigen Topologie versehen ist, die durch die Familie aller offenen $\mathfrak{R}$-Halbräume als Subbasis induziert wird.

(1. 6) (a) Die *algebraische* oder *natürliche* RS *eines* VR-*es* L ist das System

$$\mathfrak{R}^{(a)}(L) = \{\mathscr{R}^f | f \in L_L^\#\},$$

mit den Bezeichnungen

(1. 6. 1) $$\begin{aligned} G_t^f &= \{x \in L | f(x) < t\} \\ F_t^f &= \{x \in L | f(x) \leqq t\} \end{aligned} \qquad (f \in L_L^\#, \ -\infty \leqq t \leqq \infty),$$

(1. 6. 2) $$\mathscr{R}^f = \{(G_t^f, F_t^f) | -\infty \leqq t \leqq \infty\} \qquad (f \in L_L^\#).$$

(b) Die *algebraische* bzw. *topologische* RS *eines* LKR-*es* L ist das System $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$ bzw.

$$\mathfrak{R}^{(t)}(L) = \{\mathscr{R}^f | f \in L_L'\}.$$

(c) *Die natürliche* RS *eines* LKRST L ist die topologische RS derselben.

Erläuterungen und Ergebnisse. (1. 7) Für jede Richtung $\mathscr{R}$ einer nichtleeren Menge X

(a) ist die Relation

$$(G_1, F_1) \prec (G_2, F_2) \Leftrightarrow F_1 \subseteqq G_2 \quad ((G_1, F_1), (G_2, F_2) \in \mathscr{R})$$

eine lineare Ordnung für $\mathscr{R}$;

(b) ist die Familie $\mathscr{G}(\mathscr{R}) \cup \mathscr{F}(\mathscr{R})$ durch die Mengeninklusion linear geordnet und bezugs Vereinigung und Durchschnitt beliebig vieler ihrer Elemente abgeschlossen;

(c) ist jedes $G \in \mathcal{G}(\mathcal{R})$ bzw. $F \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$ das erste bzw. zweite Glied in höchstens zwei verschiedenen Elementen von $\mathcal{R}$; wir bezeichnen dementsprechend für ein $F \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$ mit

$$\text{(1. 7. 1)} \qquad \underline{G}(\mathcal{R};\, F) \quad \text{bzw.} \quad \bar{G}(\mathcal{R};\, F)$$

die kleinere bzw. größere Menge $G \in \mathcal{G}(\mathcal{R})$, die als erstes Glied mit F als zweites Glied ein Element von $\mathcal{R}$ bildet, und in analogem Sinne werden die Symbole

$$\text{(1. 7. 2)} \qquad \underline{F}(\mathcal{R});\, G) \quad \text{bzw.} \quad \bar{F}(\mathcal{R};\, G)$$

gebraucht. (Natürlich kann auch $\underline{G}(\mathcal{R};\, F) = \bar{G}(\mathcal{R};\, F)$ bzw. $\underline{F}(\mathcal{R};\, G) = \bar{F}(\mathcal{R};\, G)$ sein; dies ist z. B. bei den „natürlichen Richtungen" eines VR-es der Fall, und dort kann auch $G_t^f = F_t^f$ nicht vorkommen, wogegen aus

$$\underline{G}(\mathcal{R};\, F) \subset \bar{G}(\mathcal{R};\, F) \quad \text{bzw.} \quad \underline{F}(\mathcal{R};\, G) \subset \bar{F}(\mathcal{R};\, G)$$

nach (R_2)

$$\bar{G}(\mathcal{R};\, F) = F \quad \text{bzw.} \quad \underline{F}(\mathcal{R};\, G) = G$$

folgt.)

(1. 8) In einem TRR $(X, \mathfrak{R})$ ist jeder offene bzw. abgeschlossene $\mathcal{R}$-Halbraum eine offene bzw. abgeschlossene Menge. Umgekehrt kann o.B.d.A. angenommen werden, daß für jeden $\mathfrak{R}$-Halbraum M, der eine offene bzw. abgeschlossene Menge ist, entweder $M \in \mathcal{G}(\mathcal{R})$ bzw. $M \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$ für ein $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$ gilt, oder M das Komplement eines Elements von $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ bzw. $\mathcal{G}(\mathcal{R})$ ist.

(1. 9) Jeder TRR ist ein Tychonoffscher Raum, und jeder nichtleere Tychonoffsche Raum X kann durch eine geeignete RS $\mathfrak{R}$ zu einem RR $(X, \mathfrak{R})$ ergänzt werden.

(1. 10) Der Begriff des RR-es bzw. des TRR-es ist eine Verallgemeinerung desjenigen des VR-es bzw. des LKRST: für einen VR bzw. TVR L sind $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$ bzw. $\mathfrak{R}^{(t)}(L)$ tatsächlich RS-en der Grundmenge des Raumes; ist L ein LKR, so sind $(L, \mathfrak{R}^{(a)}(L))$ und $(L, \mathfrak{R}^{(t)}(L))$ RR-e, und endlich ist die durch $\mathfrak{R}^{(t)}(L)$ im Sinne von (1. 5) induzierte Topologie die schwache Topologie des LKR-es L. Jeder LKRST kann also in einer natürlichen Weise als TRR aufgefaßt werden (daher die Benennung (1. 6), (c)).

B. Die $\mathfrak{R}$-Ebenen eines Richtungsraumes

DEFINITIONEN. (1. 11) Sind $(X, \mathfrak{R})$ ein RR und $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$, so werden die Mengen $F \setminus G$ mit $(G, F) \in \mathcal{R}$ und $G \subset F$ die *$\mathcal{R}$-Ebenen* des Raumes genannt. Eine Menge $S \subseteq X$ ist eine $\mathfrak{R}$-Ebene, wenn sie für ein $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$ eine $\mathcal{R}$-Ebene ist.

(1. 12) Sind $(X, \mathfrak{R})$ ein RR, $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$, $(G, F) \in \mathcal{R}$ und $G \subset F$, so *erzeugt* die $\mathcal{R}$-Ebene $F \setminus G$ den unteren offenen, unteren abgeschlossenen, oberen offenen, bzw. oberen abgeschlossenen $\mathcal{R}$-Halbraum G, F, $X \setminus F$ bzw. $X \setminus G$.

(1. 13) Eine $\mathcal{R}$-Ebene S eines RR-es $(X, \mathfrak{R})$ ist die *obere* bzw. *untere $\mathcal{R}$-Stützebene* einer Menge $E \subseteq X$, wenn $S \cap E = \emptyset$ gilt und E in dem durch S erzeugten unteren abgeschlossenen bzw. oberen abgeschlossenen $\mathcal{R}$-Halbraum enthalten ist. In diesem Fall werden die Elemente von $S \cap E$ die *oberen* bzw. *unteren $\mathcal{R}$-Stützpunkte* von E genannt. Eine Teilmenge bzw. ein Element von X ist eine *$\mathfrak{R}$-Stützebene* bzw.

ein $\mathfrak{R}$-*Stützpunkt* von E, wenn sie eine $\mathscr{R}$-Stützebene bzw. es ein $\mathscr{R}$-Stützpunkt von E für irgendein $\mathscr{R}\in\mathfrak{R}$ ist.

(1. 14) Eine $\mathfrak{R}$-Stützebene einer Menge E eines RR-es $(X, \mathfrak{R})$ wird *echt* genannt, wenn sie E nicht enthält.

(1.15) Für eine beliebige Menge E eines RR-es $(X, \mathfrak{R})$ und für $\mathscr{R}\in\mathfrak{R}$ benutzen wir folgende Bezeichnungen:

$$(1.\,15.\,1)\qquad \begin{aligned} G_E(\mathscr{R}) &= \bigcup\{G\in\mathscr{G}(\mathscr{R})\,|\,G\cap E=\emptyset\},\\ F_E(\mathscr{R}) &= \bigcap\{F\in\mathscr{F}(\mathscr{R})\,|\,F\supseteq E\}\end{aligned}$$

(nach (R_3) bzw. (R_4) ist $G_E(\mathscr{R})\in\mathscr{G}(\mathscr{R})$ bzw. $F_E(\mathscr{R})\in\mathscr{F}(\mathscr{R})$),

$$(1.\,15.\,2)\qquad \begin{aligned} S_E(\mathscr{R}) &= F_E(\mathscr{R})\setminus \underline{G}(\mathscr{R};\, F_E(\mathscr{R})),\\ T_E(\mathscr{R}) &= \overline{F}(\mathscr{R};\, G_E(\mathscr{R}))\setminus G_E(\mathscr{R})\end{aligned}$$

(statt $G_{\{x\}}(\mathscr{R})$ u.s.w. für $x\in X$ wird einfach $G_x(\mathscr{R})$ u.s.w. geschrieben),

$$(1.\,15.\,3)\qquad \mathscr{R}_E = \{(G_x(\mathscr{R}),\, F_x(\mathscr{R}))\,|\,x\in E\}\quad (\mathscr{R}\in\mathfrak{R}),$$

$$(1.\,15.\,4)\qquad \mathfrak{R}_E = \{\mathscr{R}\in\mathfrak{R}\,|\,\overline{\overline{\mathscr{R}}}_E > 1\}.$$

ERLÄUTERUNGEN UND ERGEBNISSE. (1. 16) Die Mengen

$$(1.\,16.\,1)\qquad S_t^f = F_t^f\setminus G_t^f \qquad (f\in L_L^{\#},\ -\infty<t<\infty)$$

eines VR-es L sind die Hyperebenen desselben, und somit ist der Begriff der $\mathfrak{R}$-Ebene (und auch derjenige der $\mathfrak{R}$-Stützebene) eine Verallgemeinerung des entsprechenden „linearen" Begriffs. Das Axiom (R_5) erhält für RR-e die Eigenschaft der Schar der durch eine beliebige Linearform eines VR-es erzeugten Hyperebenen, den Raum gänzlich auszufüllen. Für einen Punkt x eines RR-es $(X, \mathfrak{R})$ und für jedes $\mathscr{R}\in\mathfrak{R}$ ist $S_x(\mathscr{R})=T_x(\mathscr{R})$ die (einzige) x enthaltende $\mathscr{R}$-Ebene.

(1. 17) Das Separierungsaxiom (1. 3) ist eine Verallgemeinerung der Tatsache, daß je zwei verschiedene Punkte eines VR-es bzw. LKR-es durch eine Hyperebene bzw. abgeschlossene Hyperebene getrennt sind. In einem TRR $(X, \mathfrak{R})$ ist jede $\mathfrak{R}$-Ebene eine abgeschlossene Menge, und das Separierungsaxiom hat mit (R_5) zusammengefaßt die T_1-Eigenschaft zur Folge (vgl. (1. 9)).

(1. 18) Eine nichtleere Menge E eines RR-es $(X, \mathfrak{R})$ hat eine obere bzw. untere $\mathscr{R}$-Stützebene für ein $\mathscr{R}\in\mathfrak{R}$ dann und nur dann, wenn $S_E(\mathscr{R})\cap E\neq\emptyset$ bzw. $T_E(\mathscr{R})\cap$ $\cap E\neq\emptyset$ gilt, und in diesem Fall ist $S_E(\mathscr{R})$ bzw. $T_E(\mathscr{R})$ die besagte $\mathscr{R}$-Stützebene.

(1. 19) Für eine kompakte nichtleere Menge E eines TRR-es $(X, \mathfrak{R})$ und für jede Richtung $\mathscr{R}\in\mathfrak{R}$ existiert die obere und die untere $\mathscr{R}$-Stützebene von E (sie können auch zusammenfallen).

(1. 20) Für Menge E eines RR-es $(X, \mathfrak{R})$ gilt

$$\mathscr{R}_E\subseteq\mathscr{R}\quad (\mathscr{R}\in\mathfrak{R}),$$

und $\mathfrak{R}_E$ ist die Menge der Richtungen $\mathscr{R}\in\mathfrak{R}$, für welche E keine nicht-echte

$\mathscr{R}$-Stützebene besitzt (d.h. in keiner $\mathscr{R}$-Ebene enthalten ist). Für eine nichtleere Menge E eines VR-es L gilt daher

$$(1.20.1)\quad M(E) = \bigcap\{S_E(\mathscr{R}^f)|f\in L_L^\#\backslash L_E^\#\} = \bigcap\{S_E(\mathscr{R})|\mathscr{R}\in\mathfrak{R}^{(a)}(L)\backslash\mathfrak{R}_E^{(a)}(L)\},$$

und dies kann den Ausgangspunkt einer Verallgemeinerung des Begriffs der linearen Mannigfaltigkeit bilden (vgl. auch (2. 2), 2°).

C. Konvexitätsbegriffe für Richtungsräume

Definitionen. (1. 21) Die — mit $\mathbf{k}(\mathfrak{R}; E)$ bezeichnete — *stark $\mathfrak{R}$-konvexe Hülle* einer Menge E eines RR-es $(X, \mathfrak{R})$ ist der Durchschnitt aller E enthaltenden $\mathfrak{R}$-Halbräume. E ist *stark $\mathfrak{R}$-konvex*, wenn $\mathbf{k}(\mathfrak{R}; E) = E$ gilt.

(1. 22) Eine Menge E eines RR-es $(X, \mathfrak{R})$ ist *$\mathfrak{R}$-konvex* bzw. *schwach $\mathfrak{R}$-konvex*, wenn sie mit je endlich vielen bzw. zwei ihrer Punkte auch deren stark $\mathfrak{R}$-konvexe Hülle enthält.

(1. 23) Die *(abgeschlossene) $\mathfrak{R}$-konvexe* bzw. *(abgeschlossene) schwach $\mathfrak{R}$-konvexe Hülle* einer Menge E eines (topologischen) RR-es $(X, \mathfrak{R})$ ist der Durchschnitt aller E enthaltenden (abgeschlossenen) $\mathfrak{R}$-konvexen bzw. (abgeschlossenen) schwach $\mathfrak{R}$-konvexen Mengen und wird mit

$$\mathrm{k}(\mathfrak{R}; E)\quad(\mathrm{ak}(\mathfrak{R}; E))\quad \text{bzw.}\quad \mathrm{sk}(\mathfrak{R}; E)\quad(\mathrm{ask}(\mathfrak{R}; E))$$

bezeichnet.

Ergebnisse und Erläuterungen. (1. 24) Die leere Menge, jeder $\mathfrak{R}$-Halbraum und jede $\mathfrak{R}$-Ebene eines RR-es $(X, \mathfrak{R})$ sind stark $\mathfrak{R}$-konvex.

(1. 25) Für eine Menge E eines LKR-es L gilt allgemein

$$\mathbf{k}(\mathfrak{R}^{(a)}(L); E)\subset\mathbf{k}(\mathfrak{R}^{(t)}(L); E);$$

ist aber E von endlicher algebraischer Dimension, so gilt

$$\mathbf{k}(\mathfrak{R}^{(a)}(L); E) = \mathbf{k}(\mathfrak{R}^{(t)}(L); E).$$

(1. 26) Eine Menge eines RR-es $(X, \mathfrak{R})$ ist dann und nur dann (schwach) $\mathfrak{R}$-konvex, wenn sie mit ihrer (schwach) $\mathfrak{R}$-konvexen Hülle zusammenfällt.

(1. 27) Für eine endliche Menge E eines RR-es $(X, \mathfrak{R})$ gilt $\mathrm{k}(\mathfrak{R}; E) = \mathbf{k}(\mathfrak{R}; E)$.

(1. 28) Für eine beliebige Menge E eines VR-es L gilt

$$[E] = \mathrm{k}(\mathfrak{R}^{(a)}(L); E) = \mathrm{sk}(\mathfrak{R}^{(a)}(L); E);$$

ist L ein LKR, so gilt auch

$$[E] = \mathrm{k}(\mathfrak{R}^{(t)}(L); E) = \mathrm{sk}(\mathfrak{R}^{(t)}(L); E).$$

Die Begriffe „$\mathfrak{R}$-Konvexität" und „schwache $\mathfrak{R}$-Konvexität" sind also (nicht äquivalente!) Verallgemeinerungen des gewöhnlichen Begriffs der Konvexität.

§ 2. Das Quasi-$\mathfrak{R}$-Innere einer Menge eines RR-es $(X, \mathfrak{R})$

(2. 1) DEFINITION. Das *Quasi-$\mathfrak{R}$-Innere* einer Menge E eines RR-es $(X, \mathfrak{R})$ ist die Menge

$$(2.\,1.\,1) \qquad Q(\mathfrak{R}; E) = \mathbf{k}(\mathfrak{R}; E) \setminus \bigcup \{S_E(\mathscr{R}) \cup T_E(\mathscr{R}) | \mathscr{R} \in \mathfrak{R}_E\}.$$

Mit Worten: $Q(\mathfrak{R}; E)$ ist die Differenz der stark $\mathfrak{R}$-konvexen Hülle und der Vereinigung aller echten $\mathfrak{R}$-Stützebenen von E.

(2. 2) BEMERKUNGEN. 1° Im Subtrahend der rechten Seite der Gleichung (2. 1. 1) können nicht nur $\mathfrak{R}$-Ebenen, sondern auch leere Mengen $S_E(\mathscr{R})$ oder $T_E(\mathscr{R})$ vorkommen.

2° Eine äquivalente Definition von $Q(\mathfrak{R}; E)$ für den Fall $E \neq \emptyset$ ist

$$(2.\,2.\,1) \qquad Q(\mathfrak{R}; E) =$$
$$= \left(\bigcap \{\underline{G}(\mathscr{R}; F_E(\mathscr{R})) \setminus \overline{F}(\mathscr{R}; G_E(\mathscr{R})) | \mathscr{R} \in \mathfrak{R}_E\}\right) \cap \bigcap \{S_E(\mathscr{R}) | \mathscr{R} \in \mathfrak{R} \setminus \mathfrak{R}_E\}.$$

3° $Q(\mathfrak{R}; E)$ ist in jedem Fall eine stark $\mathfrak{R}$-konvexe Menge; es gilt ferner

$$(2.\,2.\,2) \qquad Q(\mathfrak{R}; E) = Q(\mathfrak{R}; \mathbf{k}(\mathfrak{R}; E)),$$

weil ja die stark $\mathfrak{R}$-konvexen Hüllen gleichwie die echten $\mathfrak{R}$-Stützebenen von E und $\mathbf{k}(\mathfrak{R}; E)$ dieselben sind; endlich gilt für jede stark $\mathfrak{R}$-konvexe Menge E

$$(2.\,2.\,3) \qquad Q(\mathfrak{R}; E) \subseteqq E.$$

4° Im Sinne von (1. 3) und mit der Bezeichnung (1. 15. 4) gilt $\mathfrak{R}_x = \emptyset$ und daher

$$(2.\,2.\,4) \qquad Q(\mathfrak{R}; \{x\}) = \mathbf{k}(\mathfrak{R}; \{x\}) = \{x\} \qquad (x \in X).$$

5° In einem TRR $(X, \mathfrak{R})$ fällt $Q(\mathfrak{R}; E)$ im allgemeinen nicht mit Int E zusammen (auch nicht im Falle $Q(\mathfrak{R}; E) \subseteqq E$), und braucht überhaupt keine offene Menge zu sein.

6° Der Begriff des Quasi-$\mathfrak{R}$-Inneren einer Menge ist kein „Kern-Begriff", u.zw. erfüllt er *keine* der üblichen vier „Kern-Axiome".

Am leichtesten kann gezeigt werden, daß $Q(\mathfrak{R}; E)$ nicht idempotent ist und daß nicht immer $Q(\mathfrak{R}; X) = X$ gilt. Für den RR $(X, \mathfrak{R})$ mit

$$X = \{1, 2, 3, 4\},$$

$\mathfrak{R} = \{\mathscr{R}\}$ und

$$\mathscr{R} = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{1\}), (\{1\}, \{1, 2\}), (\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}), (\{1, 2, 3\}, X), (X, X)\}$$

gilt z. B. $Q(\mathfrak{R}; \{1, 2, 3, 4\}) = \{2, 3\}$ und $Q(\mathfrak{R}; \{2, 3\}) = \emptyset$, also

$$Q(\mathfrak{R}; Q(\mathfrak{R}; X)) \subset Q(\mathfrak{R}; X) \subset X. *$$

Wir geben im weiteren auch für die restlichen beiden Axiome (nämlich Isotonie und Verkleinerndsein) Gegenbeispiele.

* Für einen linearen Raum L gilt $Q(\mathfrak{R}^{(a)}(L); L) = L$. Es sollte noch entschieden werden, ob das Quasi-$\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-Innere einer Menge nicht auch idempotent ist.

7° Für einen VR L gibt es triviale Beispiele für — allerdings nichtkonvexe — Mengen $E\subseteqq L$ mit $Q(\mathfrak{R}^{(a)}(L); E)\subsetneqq E$ (vgl. [5], (1. 6)). Wir geben hier das Beispiel einer $\mathfrak{R}$-*konvexen* Menge eines allgemeinen RR-es $(X, \mathfrak{R})$ mit der entsprechenden schlechten Eigenschaft.

Mit den Bezeichnungen

$$X=\{0, 1, 2, \dots\}, \quad \mathfrak{R}=\{\mathscr{R}_n \mid n=1, 2, \dots\},$$

wobei für jede natürliche Zahl n

$$\mathscr{R}_n=\{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{n\}), (\{n\}, \{0, n\}), (\{0, n\}, X), (X, X)\}$$

sei, ist $(X, \mathfrak{R})$ ein RR. Z.B. gilt das Richtungsaxiom (R_5) wegen

$$X=\{0\}\cup\{n\}\cup(X\setminus\{0, n\}) \qquad (n=1, 2, \dots)$$

(d. h. X ist für jedes n die Vereinigung aller $\mathscr{R}_n$-Ebenen), und das Separierungsaxiom (1. 3) ist erfüllt, weil für jedes Element $x\in X$ die Menge $\{x\}$ eine $\mathfrak{R}$-Ebene ist.

Für die Menge

$$E=\{1, 2, \dots\}$$

gilt nun — da sie in keinem nichttrivialen $\mathfrak{R}$-Halbraum enthalten ist —

$$\mathbf{k}(\mathfrak{R}; E)=X,$$

also ist E keine stark $\mathfrak{R}$-konvexe Menge. Sie ist aber $\mathfrak{R}$-konvex, weil jede endliche Menge $E^*\subset E$ in einer stark $\mathfrak{R}$-konvexen Teilmenge von E — u.zw. in einer $\mathfrak{R}$-Ebene — enthalten ist:

$$E^*\subset X\setminus\{0, n^*\}\subset E \qquad (n^*\in E\setminus E^*),$$

und daher $\mathbf{k}(\mathfrak{R}; E^*)\subseteqq E$ gilt.

Nun ist aber jedes Element der Menge E ein echter $\mathfrak{R}$-Stützpunkt derselben, weil (sogar für jedes n) die Menge $\{n\}$ bzw. $X\setminus\{0, n\}$ die untere bzw. obere $\mathscr{R}_n$-Stützebene von E ist. Es gilt daher

$$Q(\mathfrak{R}; E)=\mathbf{k}(\mathfrak{R}; E)\setminus E=X\setminus E=\{0\}\subsetneqq E$$

w. z. b. w.

8° Für schwach $\mathfrak{R}$-konvexe aber nicht $\mathfrak{R}$-konvexe Mengen mit $Q(\mathfrak{R}; E)\subsetneqq E$ kann ein einfacheres Beispiel gegeben werden, u.zw. im RR $(X, \mathfrak{R})$ mit

$$X=\{0, 1, 2, 3\}, \quad \mathfrak{R}=\{\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2, \mathscr{R}_3\},$$

wobei die nichttrivialen Elemente der Richtungen

$$\begin{aligned} \mathscr{R}_1:&\quad (\emptyset, \{2, 3\}), (\{2, 3\}, \{0, 2, 3\}), (\{0, 2, 3\}, X),\\ \mathscr{R}_2:&\quad (\emptyset, \{1, 3\}), (\{1, 3\}, \{0, 1, 3\}), (\{0, 1, 3\}, X),\\ \mathscr{R}_3:&\quad (\emptyset, \{1, 2\}), (\{1, 2\}, \{0, 1, 2\}), (\{0,1, 2\}, X)\end{aligned}$$

sind. In diesem Raum ist die Menge $E=\{1, 2, 3\}$ schwach $\mathfrak{R}$-konvex (weil jede echte Teilmenge von E stark $\mathfrak{R}$-konvex ist) aber nicht $\mathfrak{R}$-konvex (weil $\mathbf{k}(\mathfrak{R}; E)=X$ ist), und es gilt $Q(\mathfrak{R}; E)=\{0\}$.

9° Obwohl also die Inklusion (2. 2. 3) sogar nicht für jede $\mathfrak{R}$-konvexe Menge E eines beliebigen RR-es $(X, \mathfrak{R})$ besteht, ist $Q(\mathfrak{R}; E)$ doch etwas „Inneres" — aber nicht der Menge E selbst (deshalb wird auch das Wort „quasi" benutzt), sondern der stark $\mathfrak{R}$-konvexen Hülle derselben, womit der Gebrauch des Wortes „Inneres" in der Benennung dieses Begriffs einigermaßen gerechtfertigt werden dürfte. *

10° Wie schon erwähnt, ist $Q(\mathfrak{R}; E)$ auch nicht isoton; für beliebige verschiedene Punkte $x, y \in X$ in einem beliebigen RR $(X, \mathfrak{R})$ gilt z. B.

$$Q(\mathfrak{R}; \{x\}) \nsubseteq Q(\mathfrak{R}; \{x, y\}). \tag{2. 2. 5}$$

Nach dem Separierungsaxiom (1. 3) und mit der Bezeichnung (1. 15. 4) ist nämlich $\mathfrak{R}_{\{x, y\}} \neq \emptyset$ und die Mengen $S_x(\mathscr{R})$, $S_y(\mathscr{R})$ sind für jedes $\mathscr{R} \in \mathfrak{R}_{\{x, y\}}$ echte $\mathscr{R}$-Stützebenen von $\{x, y\}$; es gilt also

$$Q(\mathfrak{R}; \{x, y\}) \cap (S_x(\mathscr{R}) \cup S_y(\mathscr{R})) = \emptyset \qquad (\mathscr{R} \in \mathfrak{R}_{\{x, y\}}),$$

und nach (2. 2. 4) folgt hieraus (2. 2. 5).

11° Es gilt aber für einen beliebigen RR $(X, \mathfrak{R})$

$$Q(\mathfrak{R}; E_1) \subseteq Q(\mathfrak{R}; E_2) \qquad (E_1 \subseteq E_2 \subseteq X,\ \mathfrak{R}_{E_1} = \mathfrak{R}_{E_2} = \mathfrak{R}^*), \tag{2. 2. 6}$$

weil dies im Falle $E_1 = \emptyset$ trivial ist, für $E_1 \neq \emptyset$ aber

$$S_{E_1}(\mathscr{R}) = S_{E_2}(\mathscr{R}) \qquad (\mathscr{R} \in \mathfrak{R} \setminus \mathfrak{R}^*) \tag{2. 2. 7}$$

und wegen

$$G_{E_2}(\mathscr{R}) \subseteq G_{E_1}(\mathscr{R}) \subseteq F_{E_1}(\mathscr{R}) \subseteq F_{E_2}(\mathscr{R}) \qquad (\mathscr{R} \in \mathfrak{R})$$

nach (1. 2) und (1. 7) auch

$$\begin{aligned} \bar{F}(\mathscr{R}; G_{E_2}(\mathscr{R})) &\subseteq \bar{F}(\mathscr{R}; G_{E_1}(\mathscr{R})) \subseteq \\ &\subseteq \underline{G}(\mathscr{R}; F_{E_1}(\mathscr{R})) \subseteq \underline{G}(\mathscr{R}; F_{E_2}(\mathscr{R})) \qquad (\mathscr{R} \in \mathfrak{R}^*) \end{aligned} \tag{2. 2. 8}$$

gilt; endlich folgt (2. 2. 6) aus (2. 2. 7) und (2. 2. 8) auf Grund von (2. 2. 1).

Es sei noch bemerkt, daß die Bedingung $\mathfrak{R}_{E_1} = \mathfrak{R}_{E_2}$ in (2. 2. 6) keine notwendige ist.

12° Ist $(X, \mathfrak{R})$ ein RR, so gilt

$$Q(\mathfrak{R}; E) = Q(\mathfrak{R}; \mathrm{k}(\mathfrak{R}; E)) \qquad (E \subseteq X). \tag{2. 2. 9}$$

Wegen der starken $\mathfrak{R}$-Konvexität jeder $\mathfrak{R}$-Ebene gilt nämlich für jede $\mathfrak{R}$-Ebene S mit $S \supseteq E$ auch $S \supseteq \mathbf{k}(\mathfrak{R}; E)$; mit Hinsicht auf (2. 2. 6) folgt hieraus

$$Q(\mathfrak{R}; E) \subseteq Q(\mathfrak{R}; \mathrm{k}(\mathfrak{R}; E)) \subseteq Q(\mathfrak{R}; \mathbf{k}(\mathfrak{R}; E)) \qquad (E \subseteq X)$$

und wegen (2. 2. 2) endlich (2. 2. 9).

* Auch hier erhebt sich die natürliche Frage, ob wenigstens für VR-e L und für jede konvexe Menge $E \subseteq L$ $Q(\mathfrak{R}^{(a)}(L); E) \subseteq E$ gilt. In [5] wurde diese Frage für konvexe Mengen E mit mindestens einem inwendigen Punkt beantwortet und bewiesen, daß für eine solche Menge $Q(\mathfrak{R}^{(a)}(L); E)$ sogar mit der Menge der inwendigen Punkte von E zusammenfällt; dies ist ein zusätzlicher Grund, in $Q(\mathfrak{R}; E)$ etwas „Inneres" von E zu sehen. (In [5] wurde $Q(\mathfrak{R}^{(a)}(L); E)$ mit $Q(E)$ bezeichnet.)

(2. 3) HILFSSATZ. *Sind S eine $\mathfrak{R}$-Ebene eines RR-es $(X, \mathfrak{R})$ und E eine nichtleere Teilmenge eines von den durch S erzeugten abgeschlossenen $\mathfrak{R}$-Halbräumen, so gilt*

$$S \cap Q(\mathfrak{R}; E) = \emptyset \quad bzw. \quad Q(\mathfrak{R}; E) \subseteq S$$

dann und nur dann, wenn

$$E \setminus S \neq \emptyset \quad bzw. \quad E \subseteq S$$

besteht; einen dritten Fall gibt es daher nicht.

BEWEIS. 1° Es seien $\mathscr{R} \in \mathfrak{R}$, $(G, F) \in \mathscr{R}$, $G \subset F$ und $S = F \setminus G$.

2° $E \setminus S \neq \emptyset$ gilt dann und nur dann, wenn S entweder keinen gemeinsamen Punkt mit der Menge E hat oder eine echte $\mathscr{R}$-Stützebene derselben ist. Im ersten Fall gilt entweder $E \subseteq G$ oder $E \subseteq X \setminus F$, also wegen (2. 2. 2)

$$Q(\mathfrak{R}; E) \subseteq G \quad \text{oder} \quad Q(\mathfrak{R}; E) \subseteq X \setminus F$$

und daher

$$S \cap Q(\mathfrak{R}; E) = \emptyset; \tag{2. 3. 1}$$

im zweiten Fall gilt (2. 3. 1), auf Grund der Definition (2. 1).

3° Aus $E \subseteq S$ (d.h. S ist eine nicht-echte $\mathscr{R}$-Stützebene von E) folgt wieder wegen (2. 2. 2)

$$Q(\mathfrak{R}; E) \subseteq S,$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

(2. 4) SATZ. *Für eine beliebige nichtleere Menge E eines VR-es L ist*

$$Q(\mathfrak{R}^{(a)}(L); E) = \{x \in M(E) \mid \inf_{y \in E} f(y) < f(x) < \sup_{y \in E} f(y)\ (f \in L_E^{\#})\}.$$

Mit Hinsicht auf (1. 20. 1) folgt dies aus (2. 2. 1).

(2. 5) KOROLLAR. *Ist L ein VR, so gilt*

$$Q(\mathfrak{R}^{(a)}(L); \{x, y\}) = (x, y) \qquad (x, y \in L, x \neq y).$$

Dies folgt aus (2. 4) wegen $L_{\{x, y\}}^{\#} = L_e^{\#} = L_{M(\{x, y\})}$, wobei e die durch x und y bestimmte Gerade bedeutet.

(2. 6) HILFSSATZ. *Sind L ein VR, $E \subseteq L$ eine konvexe Menge mit mindestens einem inwendigen Punkt und*

$$x_0 \in Q(\mathfrak{R}^{(a)}(L); E), \quad x_1 \in E \setminus \{x_0\}, \tag{2. 6. 1}$$

so enthält $Q(\mathfrak{R}^{(a)}(L); E)$ eine x_0 enthaltende offene Strecke (x_2, x_1) der durch x_0 und x_1 bestimmten Geraden.

BEWEIS. 1° Wir berufen uns wieder auf die in [5] (Satz (2. 4)) bewiesene Tatsache: hat eine konvexe Menge A eines VR-es L mindestens einen inwendigen Punkt, so fällt die Menge der inwendigen Punkte von A mit $Q(\mathfrak{R}^{(a)}(L); A)$ zusammen.

2° x_0 ist also ein inwendiger Punkt von E, und es gibt daher einen Punkt x_2 mit

$$x_0 \in (x_2, x_1) \subseteq E.$$

3° Es dürfte bekannt sein (jedenfalls ist es mittels einer leichten Rechnung beweisbar), daß jeder Punkt einer offenen Strecke, die einen inwendigen Punkt einer konvexen Menge enthält und Teil dieser Menge ist, selbst zu den inwendigen Punkten der letzteren gehört.

Die Punkte von (x_2, x_1) sind daher inwendige Punkte von E, und es folgt durch wiederholte Anwendung des in 1° zitierten Satzes

$$(x_2, x_1) \subseteqq Q(\mathfrak{R}^{(a)}(L); E),$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

(2. 7) SATZ. *Für eine Menge E endlicher algebraischer Dimension in einem LKR L gilt*

$$Q(\mathfrak{R}^{(t)}(L); E) = Q(\mathfrak{R}^{(a)}(L); E). \tag{2. 7. 1}$$

BEWEIS. 1° Nach (1. 25) und wegen $\mathfrak{R}_E^{(t)}(L) \subseteqq \mathfrak{R}_E^{(a)}(L)$ gilt auf Grund von (2. 2. 1) $Q(\mathfrak{R}^{(a)}(L); E) \subseteqq Q(\mathfrak{R}^{(t)}(L); E)$, es ist also nur noch

$$Q(\mathfrak{R}^{(t)}(L); E) \subseteqq Q(\mathfrak{R}^{(a)}(L); E) \tag{2. 7. 2}$$

zu beweisen.

2° Gilt (2. 7. 2) nicht, so hat die Menge $Q(\mathfrak{R}^{(t)}(L); E)$ nach (1. 25) einen gemeinsamen Punkt mit einer echten $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-Stützebene von E. Es seien also

$$x \in Q(\mathfrak{R}^{(t)}(L); E) \backslash Q(\mathfrak{R}^{(a)}(L); E) \tag{2. 7. 3}$$

und $f \in L_L^\# \backslash L_L'$ eine nichtstetige Linearform, wofür mit den Bezeichnungen (1. 6. 1) und (1. 16. 1) z. B. die Beziehungen

$$E \subseteqq F_{f(x)}^f, \quad E \cap G_{f(x)}^f \neq \emptyset, \quad E \cap S_{f(x)}^f \neq \emptyset \tag{2. 7. 4}$$

und

$$S_{f(x)}^f \cap Q(\mathfrak{R}^{(t)}(L); E) \neq \emptyset \tag{2. 7. 5}$$

bestehen. (Wir behandeln hier $S_{f(x)}^f$ als *obere* $\mathscr{R}^f$-Stützebene von E; für den Fall einer *unteren* $\mathscr{R}^f$-Stützebene $T_{f(x)}^f$ kann der Beweis analog geführt werden.)

3° Nach (1. 25) und wegen der starken $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-Konvexität von $M(E)$ gilt

$$Q(\mathfrak{R}^{(t)}(L); E) \subseteqq \mathbf{k}(\mathfrak{R}^{(t)}(L); E) = \mathbf{k}(\mathfrak{R}^{(a)}(L); E) \subseteqq M(E) \subseteqq L(E). \tag{2. 7. 6}$$

Wegen der Endlich-Dimensionalität von $L(E)$ gibt es ferner eine stetige Linearform $f' \in L_L'$ mit

$$f'(y) = f(y) \qquad (y \in L(E)). \tag{2. 7. 7}$$

4° Auf Grund von (2. 7. 3), (2. 7. 6) und (2. 7. 7) ist nun

$$f'(x) = f(x), \tag{2. 7. 8}$$

und es gilt nach (2. 7. 4)

$$E \subseteqq F_{f(x)}^{f'}, \quad E \cap G_{f(x)}^{f'} \neq \emptyset, \quad E \cap S_{f(x)}^{f'} \neq \emptyset,$$

d. h. auch $S_{f(x)}^{f'}$ ist eine echte (obere) $\mathfrak{R}^{(t)}(L)$-Stützebene (u.zw. eine $\mathscr{R}^{f'}$-Stützebene) von E. Es gilt daher (von (2. 7. 5) abweichend)

$$S_{f(x)}^{f'} \cap Q(\mathfrak{R}^{(t)}(L); E) = \emptyset,$$

woraus wegen (2. 7. 8)

$$x \notin Q(\mathfrak{R}^{(t)}(L); E)$$

folgt. Dies widerspricht aber der Annahme (2. 7. 3), und damit ist der Satz bewiesen.

§ 3. Extremalpunktsbegriffe für Richtungsräume

(3. 1) Definition. Es sei $(X, \mathfrak{R})$ ein RR und $E \subseteq X$. Ein Punkt $x \in E$ ist ein *$\mathfrak{R}$-extremaler* bzw. *schwach $\mathfrak{R}$-extremaler Punkt* von E, wenn

(3. 1. 1) $$x \in Q(\mathfrak{R}; A) \subseteq E$$

für keine Menge

(3. 1. 2) $$A \subseteq \mathbf{k}(\mathfrak{R}; E)$$

mit der Mächtigkeit

(3. 1. 3) $$2 \leq \overline{\overline{A}} < \aleph_0 \quad \text{bzw.} \quad \overline{\overline{A}} = 2$$

besteht.

(3. 2) Bemerkungen. 1° Jeder $\mathfrak{R}$-extremale Punkt einer Menge ist offensichtlich auch ein schwach $\mathfrak{R}$-extremaler Punkt derselben.

2° Würde die Definition des schwach $\mathfrak{R}$-extremalen Punktes ohne (3. 1. 2) formuliert, so wäre sie mit Hinsicht auf (2. 5) im wesentlichen die Übertragung des gewöhnlichen Begriffs des Extremalpunktes auf RR-e.

Die Bedingung (3. 1. 2) ist im allgemeinen nicht unwesentlich. Es seien z.B. $X = \{-1, 0, 1\}$ und $\mathfrak{R} = \{\mathscr{R}\}$ mit

$$\mathscr{R} = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{-1\}), (\{-1\}, \{-1, 0\}), (\{-1, 0\}, X), (X, X)\}.$$

Es ist leicht zu sehen, daß $(X, \mathfrak{R})$ ein RR ist. Nun ist der Punkt 0 dieses Raumes auf Grund von (3. 1. 2) ein $\mathfrak{R}$-extremaler Punkt der Menge $E = \{0\}$; er wäre aber sogar kein schwach $\mathfrak{R}$-extremaler Punkt von E, wenn aus der Definition (3. 1) die Voraussetzung (3. 1. 2) getilgt würde, weil ja für die Menge $A = \{-1, 1\}$ die beiden anderen negativen Voraussetzungen erfüllt sind: $\overline{\overline{A}} = 2$ und $Q(\mathfrak{R}; A) = \{0\}$.

3° *Der Begriff des $\mathfrak{R}$-extremalen Punktes ist mit demjenigen des schwach $\mathfrak{R}$-extremalen Punktes nicht äquivalent.*

Dies kann am einfachsten an Hand des in (2. 2), 8° beschriebenen RR-es $(X, \mathfrak{R})$ gezeigt werden. Der Punkt 0 dieses Raumes ist nämlich ein schwach $\mathfrak{R}$-extremaler Punkt der Menge X (weil ja das Quasi-$\mathfrak{R}$-Innere einer jeden zweipunktigen Teilmenge von X die leere Menge ist), er ist aber wegen $Q(\mathfrak{R}; \{1, 2, 3\}) = \{0\}$ kein $\mathfrak{R}$-extremaler Punkt derselben.

4° Wird die Definition (3. 1) auf den durch einen linearen Raum L erzeugten RR $(L, \mathfrak{R}^{(a)}(L))$ angewandt, so verliert die Bedingung (3. 1. 2) ihre Bedeutung; sind nämlich $x, y, z \in L$, $E \subseteq L$ und

$$x \in (y, z) \subseteq E,$$

so gilt mit der Wahl $y_1 \in (x, y)$, $z_1 \in (x, z)$

$$x \in (y_1, z_1) \subseteqq E, \quad \{y_1, z_1\} \subseteqq E \subseteqq \mathbf{k}(\mathfrak{R}^{(a)}(L); E).$$

Es ergibt sich also: *für einen VR L ist der Begriff des schwach $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-extremalen Punktes mit dem gewöhnlichen Begriff des Extremalpunktes äquivalent*, und für den RR $(L, \mathfrak{R}^{(a)}(L))$ ist die Bemerkung 2° belanglos.

Wir beweisen ferner, daß für $(L, \mathfrak{R}^{(a)}(L))$ auch die Bemerkung 3° ohne Belang ist, d. h. es gilt der folgende

(3. 3) SATZ. *Für einen VR L sind die Begriffe „$\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-extremaler Punkt" und „schwach $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-extremaler Punkt" miteinander und mit dem gewöhnlichen Begriff des Extremalpunktes äquivalent.*

BEWEIS. 1° Gemäß den Bemerkungen (3. 2), 1°, 4° bleibt nur zu beweisen: sind $E \subseteqq L$ und ein Punkt $x_0 \in E$ ein schwach $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-extremaler Punkt der Menge E, so ist er auch ein $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-extremaler Punkt derselben.

2° Gibt es wider diese Behauptung eine Menge

$$A \subseteqq \mathbf{k}(\mathfrak{R}^{(a)}(L); E) \tag{3. 3. 1}$$

mit der Mächtigkeit $2 < \bar{\bar{A}} < \aleph_0$ und mit

$$x_0 \in Q(\mathfrak{R}^{(a)}(L); A) \subseteqq E, \tag{3. 3. 2}$$

so kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$x_0 \notin A \tag{3. 3. 3}$$

angenommen werden.

Mit der Bezeichnung

$$A_0 = A \setminus \{x_0\}$$

gilt nämlich

$$A_0 \subseteqq A \subseteqq \mathbf{k}(\mathfrak{R}^{(a)}(L); E) \tag{2. 3. 4}$$

und — da im Sinne von (2. 3. 2) x_0 kein $\mathfrak{R}$-Stützpunkt von A ist — offensichtlich $\mathbf{k}(\mathfrak{R}^{(a)}(L); A_0) = \mathbf{k}(\mathfrak{R}^{(a)}(L); A)$, und daher wegen (2. 2. 2) und (3. 3. 2)

$$x_0 \in Q(\mathfrak{R}^{(a)}(L); A_0) \subseteqq E; \tag{3. 3. 5}$$

endlich gilt — weil ja x_0 ein schwach $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-extremaler Punkt von E ist —

$$\bar{\bar{A}}_0 > 2, \tag{3. 3. 6}$$

und aus (3. 3. 4), (3. 3. 5) und (3. 3. 6) ergibt sich die Möglichkeit im Falle $x_0 \in A$ in den weiteren Ausführungen A_0 statt A zu nehmen.

3° Nach (2. 1. 1), (1. 27) und (1. 28) gilt

$$Q(\mathfrak{R}^{(a)}(L); A) \subseteqq \mathbf{k}(\mathfrak{R}^{(a)}(L); A) = [A]$$

und daher ist

$$x_0 = \sum_{x \in A} t_x x,$$

wobei für die Zahlen t_x

$$t_x \geqq 0 \quad (x \in A), \quad \sum_{x \in A} t_x = 1$$

gilt, und nach (3. 3. 3) gibt es einen Punkt

(3. 3. 7) $$x_1 \in A$$

mit

(3. 3. 8) $$0 < t_{x_1} < 1.$$

Mit der Bezeichnung

$$y_0 = \sum_{x \in A \setminus \{x_1\}} \frac{t_x}{1 - t_{x_1}} x$$

gilt nun

(3. 3. 9) $$x_0 = t_{x_1} x_1 + (1 - t_{x_1}) y_0,$$

m. a. W.

(3. 3. 10) $$x_0 \in (x_1, y_0) = Q(\mathfrak{R}^{(a)}(L); \{x_1, y_0\}).$$

4° Wegen $y_0 \in [A] = \mathbf{k}(\mathfrak{R}^{(a)}(L); A)$ gilt nach (3. 3. 7) und (3. 3. 1)

(3. 3. 11) $$\{x_1, y_0\} \subseteqq \mathbf{k}(\mathfrak{R}^{(a)}(L); E).$$

Auf Grund von (2. 4) gilt ferner

(3. 3. 12) $$Q(\mathfrak{R}^{(a)}(L); \{x_1, y_0\}) \subseteqq Q(\mathfrak{R}^{(a)}(L); A).$$

Wegen $(x_1, y_0) \subseteqq [A] \subseteqq M(A)$ kann nämlich für keinen Punkt $x \in (x_1, y_0)$ und für keine Funktion $f \in L_A^{\#}$ im Gegensatz zu (3. 3. 12) z. B.

$$f(x) = \max_{y \in A} f(y)$$

sein, weil dies nach (3. 3. 9), (3. 3. 8) und (3. 3. 7)

$$f(x_0) = f(x_1) = f(y_0) = \max_{y \in A} f(y)$$

zur Folge hätte, also (3. 3. 2) widersprechen würde.

5° Aus (3. 3. 10), (3. 3. 12) und (3. 3. 2) folgt endlich

$$x_0 \in Q(\mathfrak{R}^{(a)}(L); \{x_1, y_0\}) \subseteqq E;$$

mit (3. 3. 11) zusammengefaßt besagt dies aber wider unsere Voraussetzung, daß x_0 kein schwach $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-extremaler Punkt von E ist. Der Satz ist somit bewiesen.

Um zu zeigen, daß der auf LKR-e L bezogene gewöhnliche Begriff des Extremalpunktes nicht nur aus der algebraischen, sondern auch aus der topologischen RS von L abgeleitet werden kann (u.zw. als $\mathfrak{R}^{(t)}(L)$-extremaler Punkt gleichwie als schwach $\mathfrak{R}^{(t)}(L)$-extremaler Punkt), beweisen wir noch den

(3. 4) SATZ. *Die auf einen LKR L bezogenen Begriffe des $\mathfrak{R}^{(t)}(L)$-extremalen und des $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-extremalen bzw. des schwach $\mathfrak{R}^{(t)}(L)$-extremalen und des schwach $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-extremalen Punktes sind äquivalent.*

BEWEIS. Wegen (1. 25), (2. 7) und (3. 3) braucht nur bewiesen zu werden, daß für eine Menge $E \subseteqq L$, für eine endliche Menge $A \subseteqq L$ mit $\overline{\overline{A}} > 2$ und für einen Punkt $x_0 \in L$ aus

(3. 4. 1) $$x_0 \in Q(\mathfrak{R}^{(a)}(L); A) \subseteqq E$$

die Existenz einer Menge $B \subset L$ mit $\overline{\overline{B}} = 2$ und mit

(3. 4. 2) $$x_0 \in Q(\mathfrak{R}^{(a)}(L); B) \subseteqq E, \quad B \subseteqq \mathbf{k}(\mathfrak{R}^{(a)}(L); E)$$

folgt. Als endlichdimensionale und — wegen (3. 4. 1) — nichtleere konvexe Menge hat nun $[A]$ inwendige Punkte ([2], S. 180). Wegen $1 < \overline{\overline{A}} < \aleph_0$ gilt ferner $A \backslash Q(\mathfrak{R}^{(a)}(L); A) \neq \emptyset$. Nach (2. 6) und (2. 2. 9) existiert also für einen beliebigen Punkt $x_1 \in A \backslash \{x_0\}$ ein Punkt $x_2 \in L$ mit

$$x_0 \in (x_2, x_1) \subseteqq Q(\mathfrak{R}^{(a)}(L); [A]).$$

Werden endlich zwei Punkte $y_1 \in (x_0, x_1)$, $y_2 \in (x_0, x_2)$ gewählt, so erfüllt die Menge $B = \{y_1, y_2\}$ nach (3. 4. 1) und (2. 5) die Bedingung (3. 4. 2) (und es gilt sogar $B \subseteqq E$).

Die Zusammenfassung der Sätze (3. 4) und (3. 3) ergibt das Endergebnis dieses Paragraphen:

(3. 5) SATZ. *Für einen LKR L sind die Begriffe „$\mathfrak{R}^{(t)}(L)$-extremaler Punkt" und „schwach $\mathfrak{R}^{(t)}(L)$-extremaler Punkt" und vielmehr alle fünf Begriffe des extremalen Punktes äquivalent.*

§ 4. Der Krein-Milmansche Satz für topologische Richtungsräume

(4. 1) SATZ. *Für jede kompakte und stark $\mathfrak{R}$-konvexe Menge E eines TRR-es $(X, \mathfrak{R})$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *Mit der Bezeichnung $\varepsilon(\mathfrak{R}; A)$ für die Menge der $\mathfrak{R}$-Extremalpunkte einer Menge $A \subseteqq X$ gilt*

$$E = \mathbf{k}(\mathfrak{R}; \varepsilon(\mathfrak{R}; E)).$$

(b) *Für jede $\mathfrak{R}$-Stützebene S von E gilt*

$$S \cap \varepsilon(\mathfrak{R}; E) \neq \emptyset.$$

BEWEIS. 1° Für $E = \emptyset$ sind beide Aussagen wahr (vgl. (1. 24)), wir beschränken uns daher auf nichtleere Mengen E.

2° Für eine beliebige Menge $A \subseteqq X$ und eine Richtung $\mathscr{R} \in \mathfrak{R}$ des RR-es $(X, \mathfrak{R})$ seien im Sinne von (1. 7), (b) mit

$$M_A(\mathscr{R}) \quad \text{bzw.} \quad N_A(\mathscr{R})$$

der kleinste A enthaltende bzw. der größte zu A elementenfremde untere $\mathscr{R}$-Halbraum bezeichnet (vgl. die analogen Bezeichnungen in (1. 15. 1)).

3° Gemäß Satz (1. 19) *hat eine nichtleere kompakte Menge E eines TRR-es $(X, \mathfrak{R})$ in jeder Richtung $\mathscr{R} \in \mathfrak{R}$ eine obere und eine untere $\mathscr{R}$-Stützebene.* Ist die Menge E auch noch stark $\mathfrak{R}$-konvex, so ist für jedes $\mathscr{R} \in \mathfrak{R}$ $F_E(\mathscr{R})$ bzw. $G_E(\mathscr{R})$ der durch die obere bzw. untere $\mathscr{R}$-Stützebene von E erzeugte untere abgeschlossene bzw. untere offene $\mathscr{R}$-Halbraum, und es gilt

(4. 1. 1) $$E = \bigcap \{F_E(\mathscr{R}) \backslash G_E(\mathscr{R}) \mid \mathscr{R} \in \mathfrak{R}\}.$$

4° Mit der Abkürzung $\varepsilon = \varepsilon(\mathfrak{R}; E)$ ist

(4. 1. 2) $$\mathbf{k}(\mathfrak{R}; \varepsilon(\mathfrak{R}; E)) = \bigcap \{M_\varepsilon(\mathscr{R}) \backslash N_\varepsilon(\mathscr{R}) \mid \mathscr{R} \in \mathfrak{R}\}.$$

5° Gilt nun die Aussage (b), d.h.

$$\left.\begin{aligned}&\big(F_E(\mathscr{R})\backslash \underline{G}(\mathscr{R};\, F_E(\mathscr{R}))\big)\cap \varepsilon(\mathfrak{R};\, E)\neq\emptyset\\ &\big(\overline{F}(\mathscr{R};\, G_E(\mathscr{R}))\backslash G_E(\mathscr{R})\big)\cap \varepsilon(\mathfrak{R};\, E)\neq\emptyset\end{aligned}\right\}\quad (\mathscr{R}\in\mathfrak{R}),$$

so sind

$$\left.\begin{aligned}M_\varepsilon(\mathscr{R})&=F_\varepsilon(\mathscr{R})=F_E(\mathscr{R})\\ N_\varepsilon(\mathscr{R})&=G_\varepsilon(\mathscr{R})=G_E(\mathscr{R})\end{aligned}\right\}\quad (\mathscr{R}\in\mathfrak{R}),$$

also gilt nach (4. 1. 1) und (4. 1. 2) auch die Aussage (a).

5° Gilt aber (b) nicht für E, d. h. existiert ein $\mathscr{R}\in\mathfrak{R}$ mit z.B.

$$\big(F_E(\mathscr{R})\backslash \underline{G}(\mathscr{R};\, F_E(\mathscr{R}))\big)\cap \varepsilon(\mathfrak{R};\, E)=\emptyset,$$

so ist $\mathbf{k}(\mathfrak{R};\, \varepsilon(\mathfrak{R};\, E))\neq E$, weil ja dann nach (1. 19)

$$M_\varepsilon(\mathscr{R})\subseteqq \underline{G}(\mathscr{R};\, F_E(\mathscr{R}))\subset F_E(\mathscr{R})$$

und

$$\big(F_E(\mathscr{R})\backslash \underline{G}(\mathscr{R};\, F_E(\mathscr{R}))\big)\cap E\neq\emptyset$$

besteht; also gilt auch (a) nicht, und zwar ist wegen der Isotonie von $\mathbf{k}(\mathfrak{R};\, A)$

$$\mathbf{k}(\mathfrak{R};\, \varepsilon(\mathfrak{R};\, E))\subset E.$$

Es genügt nun eine der beiden Aussagen in (4. 1) zu beweisen:

(4. 2) SATZ. *Eine kompakte und stark $\mathfrak{R}$-konvexe Menge E eines TRR-es $(X, \mathfrak{R})$ hat in jeder ihrer $\mathfrak{R}$-Stützebenen einen $\mathfrak{R}$-extremalen Punkt.*

BEWEIS. 1° Wir können uns wieder auf den Fall $E\neq\emptyset$ beschränken. Es seien $\mathscr{R}_0\in\mathfrak{R}$ eine beliebige Richtung, S_0 eine der $\mathscr{R}_0$-Stützebenen von E (eine solche existiert nach dem Satz (1. 19)), und

$$\mathfrak{R}=\{\mathscr{R}_0, \mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2, \ldots\}$$

eine beliebige, mit $\mathscr{R}_0$ beginnende Wohlordnung von $\mathfrak{R}$, wobei jedem $\mathscr{R}\in\mathfrak{R}$ als Index die Ordnungszahl der Menge der vorangehenden Elemente von $\mathfrak{R}$ zugeordnet ist; die Ordnungszahl von $\mathfrak{R}$ sei mit ϱ bezeichnet.

2° Es wird nun mittels transfiniter Induktion für jede Ordnungszahl $0\leqq\alpha\leqq\varrho$ eine Menge $E_\alpha\subseteqq X$ definiert:

(a) Mit den Bezeichnungen

$$D_0=E,\quad E_0=S_0\cap D_0 \tag{4. 2. 1}$$

ist E_0 eine nichtleere und — als Durchschnitt der kompakten Menge D_0 mit der abgeschlossenen Menge S_0 — kompakte Teilmenge von E.

(b) Sind $0<\alpha<\varrho$ und für alle $0\leqq\beta<\alpha$ schon entsprechende nichtleere und kompakte Mengen E_β mit

$$E_{\beta'}\subseteqq E_\beta\qquad (0\leqq\beta<\beta'<\alpha)$$

definiert, so sei erstens

$$D_\alpha=\bigcap_{0\leqq\beta<\alpha} E_\beta \tag{4. 2. 2}$$

(dies ist als Durchschnitt der nichtleeren kompakten Elemente einer monoton abnehmenden transfiniten Mengenfolge eine nichtleere kompakte Menge), zweitens S_α eine der $\mathscr{R}_\alpha$-Stützebenen von D_α (eine solche existiert wieder nach Satz (1. 19)), und drittens

(4. 2. 3) $$E_\alpha = S_\alpha \cap D_\alpha;$$

also ist auch E_α nichtleer und kompakt.

(c) Es sei endlich

(4. 2. 4) $$E_\varrho = \bigcap_{0 \leqq \alpha < \varrho} E_\alpha.$$

Auch diese Menge ist (als Durchschnitt einer monoton abnehmenden transfiniten Folge nichtleerer und kompakter Mengen) nichtleer und kompakt.

3° Wegen

(4. 2. 5) $$E_\varrho \subseteqq \bigcap_{0 \leqq \alpha < \varrho} S_\alpha$$

und nach dem Separierungsaxiom (1. 3) besteht die Menge E_ϱ aus einem einzigen Element; es sei also

(4. 2. 6) $$E_\varrho = \{x_0\}.$$

Wegen $x_0 \in E_0$ genügt es nun zu beweisen, daß x_0 ein $\mathfrak{R}$-extremaler Punkt von E ist.

4° Ist wider diese Behauptung x_0 kein $\mathfrak{R}$-extremaler Punkt von E, existiert also (gemäß der Definition (3. 1)) eine Menge

(4. 2. 7) $$A \subseteqq D_0$$

mit der Mächtigkeit

(4. 2. 8) $$2 \leqq \bar{\bar{A}} \qquad (< \aleph_0)$$

und mit

(4. 2. 9) $$x_0 \in Q(\mathfrak{R}; A) \subseteqq E,$$

so ist wegen (4. 2. 5), (4. 2. 6) und (4. 2. 9)

(4. 2. 10) $$S_\alpha \cap Q(\mathfrak{R}; A) \neq \emptyset \qquad (0 \leqq \alpha < \varrho),$$

und es folgt hieraus mittels transfiniter Induktion

(4. 2. 11) $$A \subseteqq E_\alpha \qquad (0 \leqq \alpha < \varrho).$$

Für $\alpha = 0$ kann dies so bewiesen werden: nach (4. 2. 7), (4. 2. 1) und der Definition von S_0 ist A in dem einen, von der $\mathscr{R}_0$-Ebene S_0 erzeugten abgeschlossenen $\mathscr{R}_0$-Halbraum enthalten, also ist Hilfssatz (2. 3) auf A und S_0 (in der Rolle von E bzw. S) anwendbar; dies ergibt $A \subseteqq S_0$ auf Grund von (4. 2. 10), also gilt nach (4. 2. 1) und (4. 2. 7) $A \subseteqq E_0$, w.z.b.w.

Ist aber $0 < \alpha < \varrho$ und gilt

$$A \subseteqq E_\beta \qquad (0 \leqq \beta < \alpha),$$

so gilt nach (4. 2. 2) auch $A \subseteqq D_\alpha$. Mit Hinsicht auf die Definition von S_α kann jetzt Hilfssatz (2. 3) auf A und S_α (in der Rolle von E bzw. S) angewandt werden, also gilt auf Grund von (4. 2. 10) $A \subseteqq S_\alpha$ und endlich nach (4. 2. 3) $A \subseteqq E_\alpha$, w.z.b.w.

5° Aus (4. 2. 11) folgt nun nach (4. 2. 4)

$$A \subseteq E_\varrho,$$

und daher wegen (4. 2. 6) $\bar{\bar{A}} \leqq 1$, und dies widerspricht der Annahme (4. 2. 8).

Somit ist also der Satz bewiesen, und nach (4. 1) gilt auch der folgende

(4. 3) SATZ. *Jede kompakte und stark $\mathfrak{R}$-konvexe Menge $E \subseteq X$ eines TRR-es $(X, \mathfrak{R})$ ist die stark $\mathfrak{R}$-konvexe Hülle der Menge der $\mathfrak{R}$-extremalen Punkte von E.*

Dies ist offensichtlich ein Analogon des Satzes von KREIN und MILMAN. Um aber die genaue Beziehung dieser beiden Sätze feststellen zu können, berufen wir uns auf folgenden

(4. 4) SATZ. *Der Krein—Milmansche Satz ist mit der folgenden Aussage äquivalent:*

Jede kompakte bzw. schwach kompakte und stark $\mathfrak{R}^{(t)}(L)$-konvexe Menge E eines LKRST bzw. eines LKR-es L ist die stark $\mathfrak{R}^{(t)}(L)$-konvexe Hülle der Menge der Extremalpunkte von E.

BEWEIS. Es genügt, an einige bekannte Tatsachen zu erinnern, und dieselben mittels der RS-Terminologie zu formulieren.

1° Jede kompakte Menge eines LKR-es ist schwach kompakt.

2° Eine konvexe Menge E eines LKR-es L ist dann und nur dann abgeschlossen, wenn sie schwach abgeschlossen ist ([2], S. 246). Die Menge $\mathrm{ak}(\mathfrak{R}^{(t)}(L);\, E)$ ist demnach durch die topologische RS von L — d.h. durch die natürliche RS des entsprechenden LKRST — völlig bestimmt.

3° Jede abgeschlossene, konvexe Menge eines LKR-es L ist der Durchschnitt der sie enthaltenden abgeschlossenen Halbräume ([2], S. 246) und daher stark $\mathfrak{R}^{(t)}(L)$-konvex (wobei wieder zu beachten ist, daß $\mathfrak{R}^{(t)}(L)$ zugleich die natürliche RS des mit der schwachen Topologie versehenen Raumes L ist). M.a.W.: für abgeschlossene — und um so mehr für kompakte — Mengen eines LKR-es L ist die (gewöhnliche) Konvexität mit der starken $\mathfrak{R}^{(t)}(L)$-Konvexität äquivalent.

4° Auf Grund dieser Bemerkungen und mit Hinsicht auf Satz (3. 5) ist nun die besagte Äquivalenz offensichtlich.

(4. 5) Wird nun aber jeder LKRST L als TRR betrachtet (d.h. die Grundmenge L des Raumes mit der natürlichen RS $\mathfrak{R}^{(t)}(L)$ desselben gepaart), und Satz (4. 3) auf diese TRR-e angewandt, so ergibt sich hieraus die Aussage in (4. 4).

Satz (4.3) *ist also nicht nur ein Analogon, sondern — trotz mehreren äußerlichen Abweichungen in der Formulierung — seinem Inhalt nach auch eine Verallgemeinerung des Satzes von* KREIN *und* MILMAN.

§ 5. Probleme

Auf Grund von (1. 9) ist in einem TRR jede kompakte Menge abgeschlossen, und Satz (4. 3) kann daher auch so formuliert werden: für jede kompakte und stark $\mathfrak{R}$-konvexe Menge E eines TRR-es $(X, \mathfrak{R})$ gilt

$$E = \mathrm{ak}(\mathfrak{R};\, \varepsilon(\mathfrak{R};\, E))$$

d.h. E ist die abgeschlossene stark $\mathfrak{R}$-konvexe Hülle der Menge der $\mathfrak{R}$-Extremalpunkte von E.

Es erhebt sich die natürliche Frage, ob der Satz von KREIN und MILMAN nicht auch in einer unmittelbar analogen Formulierung auf TRR-e übertragen werden kann; d.h. ob jede kompakte und (schwach) $\mathfrak{R}$-konvexe Menge eines TRR-es $(X, \mathfrak{R})$ die abgeschlossene (schwach) $\mathfrak{R}$-konvexe Hülle der Menge ihrer (schwach) $\mathfrak{R}$-extremalen Punkte ist?

Man sollte noch allgemeiner fragen: wie kann die Klasse derjenigen RR-e charakterisiert werden, für welche das „$\mathfrak{R}$-Analogon" gewisser, die Konvexität in linearen Räumen betreffender Beziehungen (z.B. Äquivalenz der schwachen $\mathfrak{R}$-Konvexität mit der $\mathfrak{R}$-Konvexität, u.s.w.) besteht?

Diese Fragen bleiben dahingestellt.

(Eingegangen am 3. Januar 1966.)

Literaturverzeichnis

[1] M. KREIN—D. MILMAN, On extreme points of regularly convex sets, *Studia Math.*, **9** (1940), S. 133—138.

[2] G. KÖTHE, *Topologische lineare Räume* (Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1960).

[3] E. DEÁK, Ein neuer topologischer Dimensionsbegriff, *Revue Roum. Math. Pures Appl.*, **10** (1965), S. 31—42.

[4] E. DEÁK, Eine vollständige Charakterisierung der Teilräume eines euklidischen Raumes mittels der Richtungsdimension, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, **9**, series A, (1964), S. 437—465.

[5] E. DEÁK, Über die inwendigen Punkte konvexer Mengen, *Revue Roum. Math. Pures Appl.*, **11** (1966), S. 1225—1231.

[6] E. DEÁK, Eine Verallgemeinerung des Begriffs des linearen Raumes und der Konvexität, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sectio Math.*, **9** (1966), S. 45—59.

[7] E. DEÁK, Topologische Richtungsräume – eine Verallgemeinerung des Begriffs des lokalkonvexen Raumes mit der schwachen Topologie, *Studia Sci. Math. Hung.*, **1** (1966), S. 297—308.

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (1—2), 1967, pp. 133—149.

О СРАВНИТЕЛЬНОЙ ТЕОРИИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

И. КАТАИ (Будапешт)

(*Представлено* П. Тураном)

§ **1.** Одна из важных областей аналитической теории чисел — изучение Ω-свойств различных число-теоретических функций. Первый значительный шаг был достигнут с помощью следующей теоремы Ландау.

Если коэффициенты a_n ряда Дирихле $\sum \frac{a_n}{n^s} = F(s)$ неотрицательны при $n > n_0$ и абсцисса сходимости ряда — конечная величина α, то α — особая точка функции $F(s)$. Из этой теоремы легко следует, что

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\left(\psi(x)-x\right)\cdot x^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} > 0, \quad \underline{\lim_{x\to\infty}}\left(\psi(x)-x\right)\cdot x^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} < 0,$$

при любом $\varepsilon > 0$. Также имеют место и неравенства

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} M(x)\cdot x^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} > 0, \quad \underline{\lim_{x\to\infty}} M(x)\cdot x^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} < 0.$$

Другими словами, можно найти такие значения

$$0 < x_1' < x_1'' < x_2' < x_2'' < \ldots < x_n' < x_n'' < \ldots, \quad x_n' \to \infty,$$

для которых $M(x_\nu') > x_\nu'^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$ и $M(x_\nu'') < -x_\nu''^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$. Но о том, что значения x_n', x_n'' как густо могут быть расположены на числовой прямой, теорема Ландау ничего не говорит.

Недавно Ш. Кнаповски и П. Туран разработали метод для изучения свойств типа Ω некоторых число- теоретических функций в таком более конкретном смысле. Их достижения достигнуты с помощью глубоких результатов Турана в области диофантовой аппроксимации.

В этой работе мы докажем подобные теоремы с применением идей К. А. Родосского.

§ **2. Обозначения.**

1) $\mu(n)$ — функция Мебиуса,

2) $M(x) = \sum_{n\leqq x} \mu(n)$,

3) $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ — дзета-функция Римана,

4) χ — характер по модулю k,

5) $L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$ — функция Дирихле,

6) $f(s) = -\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \left(\bar{\chi}(l_1) - \bar{\chi}(l_2)\right) \cdot \frac{L'}{L}(s,\chi)$,

7) $\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{при} \quad n = p^t, \quad p \quad \text{простое} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$ — функция Мангольда,

8) $\psi(x) = \sum_{n \leqq x} \Lambda(n), \quad \psi(x,k,l) = \sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv l (\mathrm{mod}\, k)}} \Lambda(n)$,

9) $\varrho_k(n) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad n = 1 \\ 1 & \text{при} \quad n > 1, \quad p^k \nmid n \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$

10) $R_k(x) = \sum_{n \leqq x} \varrho_k(n); \quad P_k(x) = R_k(x) - \frac{x}{\zeta(k)}$,

11) $S(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} e^{-(\beta/n)^2}$,

12) $\Delta(x) = \Delta(x,k,l_1,l_2) = \psi(x,k,l_1) - \psi(x,k,l_2)$,

13) $S(r,k,l) = \sum_{\substack{n \equiv l(k) \\ n=1}}^{\infty} \Lambda(n) e^{-nr}$,

14) $\sigma(r,k,l_1,l_2) = S(r,k,l_1) - S(r,k,l_2)$,

15) $c, c_0, c_1, \ldots$ численные положительные константы,

16) $d, d_0, d_1, \ldots, K, K_0, K_1, \ldots$ положительные константы,

17) $\varepsilon, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots$ любые малые положительные фиксированные числа,

18) $\log_1 x = \log x, \quad \log_{\nu+1} = \log_\nu(\log x), \qquad \nu = 1, 2, \ldots$,

19) $e_1(x) = e^x, \quad e_{\nu+1}(x)\, e_\nu(e_1(x)), \qquad \nu = 1, 2, \ldots$,

20) $\varrho_0 = \frac{1}{2} + i\gamma_0$, где $\gamma_0 = 14,13\ldots$, $\zeta(\varrho_0) = 0$,

21) $\Gamma(s)$ — функция Эйлера.

§ **3. Леммы.** К. А. Родосский в своей работе [1] доказал, что абсолютное значение функции $\psi(x)-x$ не может быть слищком большим везде, в довольно длинном интервале. Интересно, что подобным образом может быть доказано, что функции $\psi(x)-x$, $M(x)$, $\psi(x,k,l_1)-\psi(x,k,l_2)$, $S(\beta)$, ... принимают относительно большие положительные и по абсолютной величине большие отрицательные значения в некотором довольно длинном интервале. В дальнейшем нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1 [1]. *При* $0<\alpha\leqq 1$ *и* $u\to\infty$

$$\frac{1}{2u}\int_1^\infty x^{\alpha-1}\log x\cdot e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right)dx=2\sqrt{\pi u}\,e_1(\alpha^2 u)+O(1). \tag{3.1}$$

Лемма 2 [1]. *Пусть*

$$0<\alpha<\theta,\quad \log y=2u\left(\theta-\sqrt{\theta^2-\alpha^2}\right)>1,\quad \log z=2u\left(\theta+\sqrt{\theta^2-\alpha^2}\right).$$

Тогда имеют место неравенства:

$$\frac{1}{2u}\int_1^y x^{\theta-1}\log x\cdot e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right)dx<\theta(\theta^2-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}e_1(\alpha^2 u), \tag{3.2}$$

$$\frac{1}{2u}\int_z^\infty x^{\theta-1}\log x\cdot e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right)dx<2\theta(\theta^2-\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}e_1(\alpha^2 u), \tag{3.3}$$

$$\int_1^y x^{\theta-1}e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right)dx<(\theta^2-\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}e_1(\alpha^2 u). \tag{3.4}$$

Доказательство этих лемм см. в вышеупомянутой работе Родосского.

Лемма 3 [2]. *Пусть* $F(w)=\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n^w}$ *абсолютно сходится на прямой* $\operatorname{Re} w=\sigma_0$. *Тогда имеет место тождество*

$$\sum_{n=1}^\infty a_n e^{-\frac{\log^2 n}{4u}}=\frac{i\sqrt{u}}{\sqrt{\pi}}\int_{(\sigma_0)}F(w)e^{w^2 u}dw.$$

Лемма 4. *Пусть интеграл*

$$h(s)=\int_1^\infty \frac{dA(x)}{x^s} \tag{3.5}$$

абсолютно и равномерно сходится в полуплоскости $\sigma>\sigma_1(>0)$. *Тогда имеет место тождество*

$$\int_1^\infty e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right)dA(x)=\frac{i\sqrt{u}}{\sqrt{\pi}}\int_{(\sigma)}h(\omega)e^{\omega^2 u}d\omega. \tag{3.6}$$

Доказательство проводится таким же образом, как доказательство Леммы 3.

Лемма 5. *Если* $l_1 \not\equiv l_2 \pmod k$, $(l_1 l_2, k)=1$, *то функция*

$$f(s) = -\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \left(\bar{\chi}(l_1) - \bar{\chi}(l_2)\right) \frac{L'}{L}(s, \chi)$$

имеет особую точку в полуплоскости $\sigma \geqq \frac{1}{2}$.

Доказательство. Имеет место соотношение

$$\sum_{\substack{\varrho=\varrho_\chi \\ 0<\gamma_\varrho<T}} x^\varrho = \begin{cases} -\chi(x)\dfrac{T}{2\pi}\log p + O(\log T), & \text{если } x=p^m,\ p \text{ простое, } m \text{ натуральное,} \\ O(\log T) \text{ иначе,} \end{cases} \tag{3. 7}$$

при $T \to \infty$, где $\varrho = \beta_\varrho + i\gamma_\varrho$ принимает значения, для которых $L(\varrho, \chi)=0$, $\beta_\varrho > 0$. Пусть p простое, $p \equiv l_1 \pmod k$. Из (3. 7) следует, что

$$\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \left(\bar{\chi}(l_1) - \bar{\chi}(l_2)\right) \sum_{\substack{\varrho=\varrho_\chi \\ 0<\gamma_\varrho<T}} x^\varrho = -\frac{T}{2\pi}\log p + O(\log T),$$

при $T \to \infty$. С другой стороны, левая часть равенства имеет вид $\dfrac{1}{2\pi} \oint\limits_{K_\varepsilon} f(s) x^s\, ds$, при достаточно малом $\varepsilon > 0$, где K_ε обозначает контур прямоугольника с вершинами $2+i\varepsilon$, $2+i(T-\varepsilon)$, $\varepsilon+i(T-\varepsilon)$, $\varepsilon+i\varepsilon$. Таким образом, значение интеграла не равняется нулю при достаточно большом T, и из этого следует, что функция $f(s)$ имеет особую точку в полуплоскости $\sigma > 0$. Отсюда с применением функциональных уравнений для функции $L(s, \chi)$ получаем, что существует особая точка и в полуплоскости $\sigma \geqq \frac{1}{2}$.

§ 4. Оценка типа Ω для функции $M(x)$. Ш. Кнаповски доказал с применением метода Турана следующую теорему [3]. Предпологая, что в прямоугольнике $0<\sigma<1$, $|t| \leqq \omega$ все нули функции $\zeta(\sigma+it)$ лежат на линии $\sigma=\frac{1}{2}$, имеем

$$\max_{1 \leqq x \leqq T} M(x) \geqq T^{\frac{1}{2}} e_1 \left(\frac{-15 \log T \cdot \log_3 T}{\log_2 T} \right),$$

$$\min_{1 \leqq x \leqq T} M(x) \leqq -T^{\frac{1}{2}} e_1 \left(-15 \frac{\log T \cdot \log_3 T}{\log_2 T} \right), \quad \text{при} \quad c_1 \leqq T \leqq e_1(\omega^{10}).$$

Имеет место следующее безусловное утверждение.

Теорема 1. *При* $T > c_1$ *имеют место неравенства*

$$\max_{T \leqq x \leqq T^\varkappa} x^{-\frac{1}{2}} M(x) \geqq \delta, \tag{4. 1}$$

$$\min_{T \leqq x \leqq T^\varkappa} x^{-\frac{1}{2}} M(x) \leqq -\delta, \tag{4. 2}$$

где $\varkappa = (2+\sqrt{3})^2$, δ, c_1 *численно определяемые положительные константы.*

Доказательство. Пусть $\tau \geqq 0$,

$$I(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) e_1\left(-i\tau \log n - \frac{\log^2 n}{4u}\right). \tag{4.3}$$

Так как в полуплоскости $\sigma > 1$ имеет место тождество $\dfrac{1}{\zeta(s)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mu(n)}{n^s}$, то с применением Леммы 3 с $a_n = \mu(n) e_1(-i\tau \log n)$ получаем формулу

$$I(\tau) = \frac{2\sqrt{u\pi}}{2\pi i} \int_{(2)} \frac{1}{\zeta(w+i\tau)} e^{w^2 u}\, dw. \tag{4.4}$$

С другой стороны, с помощью абелевского суммирования правой части формулы (4. 3) следует, что

$$I(\tau) = \int_1^{\infty} \frac{M(x)}{x} e_1\left(-i\tau \log x - \frac{\log^2 x}{4u}\right)\left(i\tau + \frac{\log x}{2u}\right) dx. \tag{4.5}$$

Пусть y, z величины, для которых $1 \leqq y \leqq z$. Допустим, что имеет место с $\delta > 0$ одно из неравенств

$$\max_{y \leqq x \leqq z} \left(M(x) - \delta x^{\frac{1}{2}}\right) \leqq 0, \tag{4.6}$$

$$\min_{y \leqq x \leqq z} \left(M(x) + \delta x^{\frac{1}{2}}\right) \geqq 0. \tag{4.7}$$

Тогда одна из функций $M(x) \pm \delta x^{\frac{1}{2}}$ не меняет знака на интервале $y \leqq x \leqq z$, и так

$$\left| \int_y^z \frac{M(x)}{x}\left(i\tau + \frac{\log x}{2u}\right) e_1\left(-i\tau \log x - \frac{\log^2 x}{4u}\right) dx \right| \leqq \tag{4.8}$$

$$\leqq \left| \int_y^z \frac{M(x) \pm x^{\frac{1}{2}}\delta}{x}\left(\tau + \frac{\log x}{2u}\right) e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right) dx \right| + \delta \int_y^z x^{-\frac{1}{2}} e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right)\left(\tau + \frac{\log x}{2u}\right) dx,$$

где в интеграле выбирается знак $+$ или $-$ соответственно тому, что имеет место неравенство (4. 7) или (4. 6).

Выберем величины y, z, u следующим образом:

$$\log y = 2u\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \log z = 2u\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \tag{4.9}$$

и пусть $u > u_0 (> 1)$. Тогда на интервале $[y, z]$ выполняется неравенство $\dfrac{\log x}{2u} \geqq 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} (> 0)$, и так $\tau + \dfrac{\log x}{2u} \leqq c_2(\tau + 1)\dfrac{\log x}{2u}$. Таким образом, левая часть неравенства (4. 8) не превосходит величины

$$c_2(\tau+1)\left|\int_y^z \frac{M(x)}{x}\frac{\log x}{2u}e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right)dx\right|+2\delta c_2(\tau+1)\int_y^z x^{-\frac{1}{2}}\frac{\log x}{2u}\,e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right)dx.$$

(4. 10)

Так как $|M(x)|\leqq x$, применяя лемму 2 с $\alpha=\frac{1}{2}$, $\theta=1$ (величины y, z были выбраны соответственно этому) получаем неравенства

$$\left|\int_z^\infty \frac{M(x)}{x}\left(\tau i+\frac{\log x}{2u}\right)e_1\left(-i\tau\log x-\frac{\log^2 x}{4u}\right)dx\right|\leqq\frac{4(\tau+1)}{\sqrt{3}}e^{\frac{u}{4}},$$

$$\left|\int_1^y \frac{M(x)}{x}\left(\tau i+\frac{\log x}{2u}\right)e_1\left(-i\tau\log x-\frac{\log^2 x}{4u}\right)dx\right|<\tau\int_1^y e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right)dx+$$

$$+\frac{1}{2u}\int_1^y \log x\cdot e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right)dx<\frac{2\tau+4}{\sqrt{3}}e^{\frac{u}{4}}$$

и из них следует формула

$$I(\tau)=\int_y^z \frac{M(x)}{x}\left(i\tau+\frac{\log x}{2u}\right)e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right)dx+O\left((\tau+1)e^{\frac{u}{4}}\right). \tag{4. 11}$$

С помощью леммы 1 получаем, что второй член в формуле (4. 10) не превосходит величины $c_3(\tau+1)\sqrt{u}\,\delta e^{\frac{u}{4}}$. Таким образом, с применением (4. 8), (4. 10), (4. 11) получаем, что

$$|I(\tau)|\leqq c_1(\tau+1)\,|I(0)|+c_3\sqrt{u}(\tau+1)\,\delta\, e^{\frac{u}{4}}+O\left((\tau+1)e^{\frac{u}{4}}\right). \tag{4. 12}$$

С другой стороны мы докажем, что неравенство (4. 12) не имеет место при подходящих постоянных δ, τ. Рассмотрим ломаную Γ, состоящую из частей $\Gamma_1(2-i\infty, 2-i5)$, $\Gamma_2(2-i5, -i5)$, $\Gamma_3(-i5, i5)$, $\Gamma_4(i5, 2+i5)$, $\Gamma_5(2+i5, 2+i\infty)$. Из (4. 10) следует при $\tau=0$

$$I(0)=\frac{2\sqrt{u\pi}}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\zeta(w)}e^{w^2u}dw, \tag{4. 13}$$

так как абсолютные значения ординат критических нулей дзета-функции Римана превосходят 14, то интеграл (4. 13) является величиной $O(1)$ при

$u \to \infty$. Пусть $\tau = \gamma_0$ $(=14, 13\ldots)$. Хорошо известно, что $\zeta'(\frac{1}{2}+i\gamma_0) \neq 0$ и $\zeta(s) \neq 0$ в прямоугольнике $0<\sigma<1$, $0<t<20$, если $s \neq \frac{1}{2}+i\gamma_0$. Таким образом,

$$I(\gamma_0) = \frac{2\sqrt{u\pi}}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{1}{\zeta(w+i\gamma_0)} e^{w^2 u}\, dw + \frac{2\sqrt{u\pi}}{\zeta'(\varrho_0)} e^{\frac{u}{4}}. \tag{4.14}$$

Так как функция $\dfrac{1}{\zeta(w+i\gamma_0)}$ регулярная и ограничена на ломаной Γ, то

$$I(\gamma_0) = \frac{2\sqrt{u\pi}}{\zeta'(\varrho_0)} \cdot e^{\frac{u}{4}} + O(1).$$

Отсюда можно видеть, что (4. 12) не выполняется, если u достаточно большое и $\delta > 0$ достаточно малое число, т. е. не имеют места (4. 6) и (4. 7). Таким образом,

$$\max_{y \leqq x \leqq z} M(x) x^{-\frac{1}{2}} \geqq \delta, \quad \min_{y \leqq x \leqq z} M(x) \cdot x^{-\frac{1}{2}} \leqq -\delta.$$

Из (4. 8) следует, что $z = y^{\varkappa}$, $\varkappa = (2+\sqrt{3})^2$. Пишем $T = y$ и получаем теорему.

§ 5. О числах, не имеющих делителей степени k. Элементарно можно доказать, что $P_k(x) = O\left(x^{\frac{1}{k}}\right)$. С другой стороны, с помощью вышецитированной теоремы Ландау можно доказать, что

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{P_k(x)}{x^{\frac{1}{2k}-\varepsilon}} = \infty, \quad \underline{\lim_{x\to\infty}} \frac{P_k(x)}{x^{\frac{1}{2k}-\varepsilon}} = -\infty.$$

С применением рассуждений, похожих на доказательство теоремы параграфа 4, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *При подходящих постоянных* $\delta_k > 0$, $d_1 = d_1(k) > 0$ *для* $T > d_1$ *имеем*

$$\max_{T \leqq x \leqq T^{\varkappa}} P_k(x) \cdot x^{-\frac{1}{2k}} \geqq \delta_k, \tag{5.1}$$

$$\min_{T \leqq x \leqq T^{\varkappa}} P_k(x) \cdot x^{-\frac{1}{2k}} \leqq -\delta_k, \tag{5.2}$$

где $\varkappa = (2+\sqrt{3})^2$. *(Зависимость постоянных* δ_k, d_1 *от* k *определяемая.)*

Доказательство не будем подробно описывать, только обратим внимание на разницу.

Известно, что

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(ks)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho_k(n)}{n^s}, \quad \text{при} \quad \sigma > 1. \tag{5.3}$$

Так как $\sum_{n\leqq x}\frac{1}{\zeta(k)}=\frac{x}{\zeta(k)}+O(1)$, то достаточно доказать неравенства (5. 1), (5. 2) для

$$L_k(x)=\sum_{n\leqq x}\left(\varrho_k(n)-\frac{1}{\zeta(k)}\right) \tag{5. 4}$$

вместо функции $P_k(x)$.

Из (5. 3) и из определения функции $\zeta(s)$ следует, что для $\sigma>1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varrho_k(n)-\dfrac{1}{\zeta(k)}}{n^s}=\zeta(s)\left(\frac{1}{\zeta(ks)}-\frac{1}{\zeta(k)}\right). \tag{5. 5}$$

Эта функция регулярна в точке $s=1$ и аналитично продолжаема на всей плоскости. С помощью леммы 3 получаем тождество

$$\int_1^{\infty}\frac{L_k(x)}{x}\left(i\tau+\frac{\log x}{2u}\right)e_1\left(-i\tau\log x-\frac{\log^2 x}{4u}\right)dx= \tag{5. 6}$$

$$=\frac{2\sqrt{u\pi}}{2\pi i}\int_{(2)}\zeta(w+i\tau)\left(\frac{1}{\zeta(k(w+i\tau))}-\frac{1}{\zeta(k)}\right)e^{w^2u}dw.$$

Выберем $\tau=\frac{\gamma_0}{k}$ и левую часть (5. 5) переносим на ломаную Γ, состоящую из частей

$$\Gamma_1(2-\infty i,2-20i),\ \Gamma_2\left(2-20i,\frac{2}{k}-\frac{20}{k}i\right),\ \Gamma_3\left(\frac{2}{k}-\frac{20}{k}\,i,\ -\frac{20}{k}i\right),\Gamma_4\left(-\frac{20}{k}\,i,\frac{20}{k}\,i\right),$$

$$\Gamma_5\left(\frac{20}{k}\,i,\ \frac{2}{k}+\frac{20}{k}i\right),\ \Gamma_6\left(\frac{2}{k}+\frac{20}{k}\,i,2+20i\right),\ \Gamma_7(2+20i,2+\infty i).$$

Таким же образом, как в предыдущем параграфе, можно видеть, что

$$\int_1^{\infty}\frac{L_k(x)}{x}\left(i\frac{\gamma_0}{k}+\frac{\log x}{2u}\right)e_1\left(-\frac{i\gamma_0}{k}\log x-\frac{\log^2 x}{4u}\right)dx=$$

$$=2\sqrt{u\pi}\,\frac{\zeta\left(\dfrac{\frac{1}{2}+i\gamma_0}{k}\right)}{k\zeta'(\varrho_0)}\,e_1\left(\frac{u}{4k^2}\right)+O(1).$$

Так как $0<\frac{\gamma_0}{k}<\gamma_0$, $(k\geqq 2)$, то $\zeta\left(\frac{\frac{1}{2}+i\gamma_0}{k}\right)\neq 0$. С другой стороны хорошо видно, что

$$\frac{1}{2u}\int_1^\infty \frac{L_k(x)}{x}\log x\cdot e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right)dx = O(1).$$

Дальнейшая часть доказательства совсем аналогична с доказательством теоремы 1.

§ 6. Сравнение простых чисел в различных арифметических прогрессиях. Ш. Кнаповски и П. Туран в работе [4] доказали следующее утверждение.

Если ни одна из функций $L(s, x)$ с характерами по модулю k не обращается в нуль в области

$$0<\sigma<1, \quad |t|\leqq A(k)(\leqq 1),$$

то при $l_1\neq l_2$ функция $\Delta(x)\big(=\psi(x,k,l_1)-\psi(x,k,l_2)\big)$ меняет знак в интервале $\omega\leqq x\leqq e^{2\sqrt{\omega}}$, где

$$\omega \geqq \max\{e_1(k^{c_2}), \quad e_1\big(2(A(k))^{-3}\big)\},$$

а c_2 — достаточно большая численная постоянная.

Обозначим через $\varrho=\beta_\varrho+i\gamma_\varrho$ особые точки в критической зоне функции $f(s)$, и пусть

$$b_\varrho = \operatorname*{Rez}_{w=\varrho} f(w). \tag{6.1}$$

Из определения функции $f(s)$ (см. Обозначения 6) следует, что ее особые точки однократные.

Пусть

$$\theta_1 = \operatorname*{supr}_{\varrho} \beta_\varrho. \tag{6.2}$$

Из леммы 4 следует, что $\theta_1\geqq\frac{1}{2}$.

Теперь мы докажем следующее утверждение.

Теорема 3. *Если функция $f(s)$ в сегменте $0<s<1$ регулярная, $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$, любые малые фиксированные числа, то*

$$\max_{T^{1-\varepsilon_2}\leqq x\leqq T} \Delta(x)\cdot x^{-\theta_1+\varepsilon_1} \geqq 1, \tag{6.3}$$

$$\min_{T^{1-\varepsilon_2}\leqq x\leqq T} \Delta(x)\cdot x^{-\theta_1+\varepsilon_1} \leqq -1 \tag{6.4}$$

при $T>T_0(\varepsilon_1,\varepsilon_2,f)$.

К сожалению, T_0 не является эффективным.

Доказательство. Мы докажем сначала, что при произвольном $\varepsilon_4>0$ находится некоторая особая точка $\varrho_1=\beta_1+i\gamma_1$ функции $f(s)$ в полосе $\theta_1-\varepsilon_4\leqq\beta_1\leqq\theta_1$, для которой $f(s)$ регулярна в $\sigma>\beta_1$, $0\leqq|t-\gamma_1|\leqq 4$. Это очевидно в случае $\theta_1=\frac{1}{2}$.

Рассмотрим случай $\theta_1 > \frac{1}{2}$. Обозначим через $N_\chi(a, b)$ число корней функции $L(s, \chi)$ в области $\sigma \geqq a$, $|t| \leqq b$. Пусть далее $N_f(a, b)$ число особых точек функции $f(s)$ в области $\sigma \geqq a$, $|t| \leqq b$. Тогда

$$N_f(a, b) \leqq \sum_{\chi (\mathrm{mod}\, k)} N_\chi(a, b). \tag{6. 5}$$

Пусть $\theta_1 - \varepsilon_2 > \frac{1}{2}$. Известно [2], что при постоянной $a > \frac{1}{2}$ с подходящим фиксированным $\varepsilon_3 > 0$ выполняется неравенство $N_\chi(a, b) < b^{1-\varepsilon_3}$, если b достаточно большое. Выбирая $a = \theta_1 - \varepsilon_2$, с помощью (6. 5) получаем утверждение.

С применением леммы 3 получаем, что

$$I(\gamma_1) \overset{\mathrm{def}}{=} \int_1^\infty \frac{\Delta(x)}{x} \left(i\gamma_1 + \frac{\log x}{2u} \right) e_1 \left(-i\gamma_1 \log x - \frac{\log^2 x}{4u} \right) dx = \tag{6. 6}$$

$$= \frac{2\sqrt{u\pi}}{2\pi i} \int_{(2)} f(w + i\gamma_1) e^{w^2 u} \, dw,$$

$$I(0) \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2u} \int_1^\infty \frac{\Delta(x)}{x} \log x \cdot e_1 \left(-\frac{\log^2 x}{4u} \right) dx = \frac{2\sqrt{u\pi}}{2\pi i} \int_{(2)} f(w) e^{w^2 u} \, dw. \tag{6. 7}$$

Переносим контур интегрирования в правой части (6. 6) на ломаную Γ, состоящую из частей

$$\Gamma_1(2 - i\infty, 2 - iA_1), \quad \Gamma_2(2 - iA_1, A_3 - iA_1), \quad \Gamma_3(A_3 - iA_1, A_3 + iA_2),$$

$$\Gamma_4(A_3 + iA_2, 2 + iA_2), \quad \Gamma_5(2 + iA_2, 2 + i\infty),$$

где $2 \leqq A_1 \leqq 4$, $2 \leqq A_2 \leqq 4$, $\frac{1}{8} \leqq A_3 \leqq \frac{1}{4}$, и функция $f(s + i\gamma_1)$ регулярная на линиях $t = A_2$, $t = -A_1$, $\sigma = A_3$. Очевидно, что такие значения A_1, A_2, A_3 существуют. Таким образом,

$$\frac{2\sqrt{u\pi}}{2\pi i} \int_\Gamma f(w + i\gamma_1) e^{w^2 u} \, dw = O\left(e_1 \left(\frac{u}{16} \right) \right),$$

при постоянных значениях $\varepsilon_2, \varepsilon_4$. Так как полюсы функции $f(s)$ однократные, то

$$I(\gamma_1) = 2\sqrt{u\pi} \sum_\varrho{}' b_\varrho e^{(\varrho - i\gamma_1)^2 u} + O\left(e_1 \left(\frac{u}{16} \right) \right), \tag{6. 8}$$

где штрих означает, что мы суммируем только на значения ϱ, которые лежат направо от Γ. Так как $b_\varrho e^{(\varrho - i\gamma_1)^2 u} = o(b_{\varrho_1} e^{\beta_1^2 u})$ при $u \to \infty$, $\varrho \neq \varrho_1$, то

$$I(\gamma_1) = 2\sqrt{u\pi}\, b_{\varrho_1} e^{\beta_1^2 u} (1 + o(1)) \quad \text{при} \quad u \to \infty. \tag{6. 9}$$

Из-за предположения теоремы функция $f(s)$ регулярна в некоторой области $0 < \sigma < 1$, $|t| \leqq A$, $(A > 0)$. Переносим контур интегрирования на ломаную Γ^*, состоящую из частей $\Gamma_1^*(2 - i\infty, 2 - i10)$, $\Gamma_2^*(2 - i10,\ \theta_1 - iC)$, $\Gamma_3^*(\theta_1 - iC,\ \frac{1}{4} - iC)$,

$\Gamma_4^*(\frac{1}{4}-iC, \frac{1}{4}+iC)$, $\Gamma_5^*(\frac{1}{4}+iC, \theta_1+iC)$, $\Gamma_6^*(\theta_1+iC, 2+i\theta_1)$, $\Gamma_7^*(2+i\cdot 10, 2+i\infty)$, где $C=\frac{A}{2}$. Предположим, что ε_4 настолько малое, что $2\sqrt{2\varepsilon_4}\leqq C$. Тогда на ломаной Γ^* $\sigma^2-t^2\leqq\theta_1^2-C^2<\beta_1^2-\varepsilon_5$, где $\varepsilon_5>0$ подходящая постоянная. Далее функция $f(s)$ регулярна направо от Γ^*, и так

$$I(0)=O\big(\sqrt{u}\,e_1((\beta^2-\varepsilon_6)u)\big)=o\big(e_1(\beta^2u)\big),\qquad u\to\infty. \tag{6.10}$$

Стандартным способом можно доказать, что

$$|\Delta(x)|\leqq K_1x^\theta,\quad \theta=\begin{cases}\theta_1+\varepsilon & \text{при}\quad \theta_1<1,\\ \theta_1 & \text{при}\quad \theta_1=1,\end{cases} \tag{6.11}$$

где $\varepsilon>0$ произвольная постоянная, $K_1=K_1(\varepsilon)$. Пусть

$$\log y=2u\big(\theta-\sqrt{\theta^2-\beta_1^2}\big),\quad \log z=2u\big(\theta+\sqrt{\theta^2-\beta_1^2}\big).$$

Предпологая, что имеет место одно из неравенств

$$\max_{y\leqq x\leqq z}\big(\Delta(x)-\delta x^{\beta_1}\big)\leqq 0, \tag{6.12}$$

$$\min_{y\leqq x\leqq z}\big(\Delta(x)+\delta x^{\beta_1}\big)\geqq 0,\qquad \delta>0, \tag{6.13}$$

то — как в параграфе 4 — получим

$$|I(\gamma_1)|\leqq d_2(|\gamma_1|+1)\left\{|I(0)|+\delta\int_1^\infty x^{\beta_1-1}\frac{\log x}{u}e_1\left(-\frac{\log^2x}{4u}\right)dx+\right.$$
$$\left.+\int_1^y+\int_z^\infty x^{\theta-1}\frac{\log x}{2u}e_1\left(-\frac{\log^2x}{4u}\right)dx\right\}.$$

С применением лемм 1, 2 и оценок (6. 9), (6. 10) получаем неравенство

$$\sqrt{u\pi}\,|b_{\varrho_1}|e_1(\beta_1^2u)\leqq d_2(|\gamma_1|+1)\big\{O(e_1(\beta_1^2u))+6\delta\sqrt{u\pi}\,e_1(\beta_1^2u)\big\},$$

но это не имеет места для $u>u_0$ $(\varepsilon, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_4)$. Если ε, ε_4 настолько малые, что выполняются неравенства

$$\frac{\theta-\sqrt{\theta^2-\beta_1^2}}{\theta+\sqrt{\theta^2-\beta_1^2}}\leqq 1-\varepsilon_1,\ \varepsilon_4<\varepsilon_2,$$

то получим теорему.

Подобное утверждение имеет место и для функции $M(x)$.

Теорема 4. *Пусть* $\theta_2=\sup\limits_{\zeta(\varrho)=0}\mathrm{Re}\,\varrho$, $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$ *любые малые постоянные. Существует такая постоянная* $T_0=T_0(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, *что при* $T>T_0$

$$\max_{T^{1-\varepsilon_1}\leqq x\leqq T} M(x)\cdot x^{-\theta_2+\varepsilon_2}\geqq 1,\qquad \min_{T^{1-\varepsilon_1}\leqq x\leqq T} M(x)\cdot x^{-\theta_2+\varepsilon_2}\leqq -1.$$

Эта теорема не доказывается в этой работе.

§ 7. Формула Рамануджана $S(\beta)$. Ряд

$$S(\beta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}e^{-(\beta/n)^2} \tag{7.1}$$

В. Сташ в работе [6] называет рядом Рамануджана. Пусть $[a, b]$ — заданный сегмент на положительной части числовой оси. Определяется постоянная K следующим образом

$$K=\max_{\beta\in[a,b]}\left|\sqrt{\pi}\,S\left(\frac{\pi}{\beta}\right)-\beta S(\beta)\right|.$$

Сташ доказал следующую теорему. Если все критические нули дзета-функции Римана простые и расположены на $\sigma=\frac{1}{2}$, то при $T>\max\left(c_1, e_2(K^{-1})\right)$ имеет место неравенство

$$\max_{T^{1-o(1)}\leqq\beta\leqq T}|S(\beta)|>T^{-\frac{1}{2}-o(1)},$$

где c_1 обозначает числовую постоянную.

Доказательство основывается на методе Турана, с помощью которого оценивается снизу модуль суммы степеней комплексных чисел. Мы докажем следующую безусловную теорему.

Теорема 5. *При* $T>\beta_0$

$$\max_{T\leqq x\leqq T^{\varkappa}}\beta^{\frac{1}{2}}S(\beta)>\delta, \tag{7.2}$$

$$\min_{T\leqq x\leqq T^{\varkappa}}\beta^{\frac{1}{2}}S(\beta)<-\delta, \tag{7.3}$$

где $\delta>0$, $\beta_0>0$ *обозначают числовые постоянные,* $\varkappa=(2+\sqrt{3})^2$.

Доказательство. Из определения функции $S(\beta)$ получим тождество

$$\beta S(\beta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\frac{1}{2}+\varepsilon_1)}\beta^{2s}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-s)}{\zeta(2s)}\,ds \qquad (\varepsilon_1>0), \tag{7.4}$$

отсюда с помощью обратной формулы вытекает тождество

$$\int\limits_0^{\infty}\beta^{-\frac{1}{2}-s}S\left(\sqrt{\beta}\right)d\beta=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-s)}{\zeta(2s)} \tag{7.5}$$

при $\sigma>\dfrac{1}{4}$. Так как $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\mu(n)}{n}=0$, то

$$S(\beta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}\left(e_1\left(-\left(\frac{\beta}{n}\right)^2\right)-1\right)=O(\beta^2)$$

при $0<\beta\leqq 1$, и так функция

$$\varphi(s)\overset{\text{def}}{=}\int\limits_0^1\beta^{-s}\frac{S\left(\sqrt{\beta}\right)}{\sqrt{\beta}}\,d\beta$$

регулярна на полуплоскости $\sigma < \frac{3}{2}$, и тут $\varphi(s) = O\left(\frac{1}{\frac{3}{2}-\sigma}\right)$. Введем обозначения:

(7.6)
$$\psi(s) = \int_1^\infty \beta^{-s} \frac{S(\sqrt{\beta})}{\sqrt{\beta}} d\beta,$$

(7.7)
$$\psi(s+i\tau) = \int_1^\infty \beta^{-s-i\tau} \frac{S(\sqrt{\beta})}{\sqrt{\beta}} d\beta,$$

где $\tau \geqq 0$. Применяя лемму 4 с

$$dA(x) = x^{-i\tau} \frac{S(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx,$$

получаем тождество

(7.8)
$$I(\tau) \overset{\text{def}}{=} \int_1^\infty e_1\left(-i\tau \log x - \frac{\log^2 x}{4u}\right) \frac{S(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \frac{i\sqrt{u}}{\sqrt{\pi}} \int_{\left(\frac{3}{4}\right)} \psi(w+i\tau) e^{w^2 u} dw.$$

Пусть $\tau = \frac{\gamma_0}{2}$ (определение γ_0 см. в параграфе 2, 20), и переносим контур интегрирования правой части этого тождества на ломаную Γ, состоящую из частей

$$\Gamma_1(\tfrac{3}{4}-\infty i, \tfrac{3}{4}-4i), \quad \Gamma_2(\tfrac{3}{4}-4i, \tfrac{1}{4}-3i), \quad \Gamma_3(\tfrac{1}{4}-3i, \, -3i), \quad \Gamma_4(-3i, \, 3i),$$

$$\Gamma_5(3i, \, \tfrac{1}{4}+3i), \quad \Gamma_6(\tfrac{1}{4}+3i, \tfrac{3}{4}+4i), \quad \Gamma_7(\tfrac{3}{4}+4i, \tfrac{3}{4}+i\infty).$$

Таким образом получаем формулы

(7.9)
$$I\left(\frac{\gamma_0}{2}\right) = 2\sqrt{u\pi}\, \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4} - i\frac{\gamma_0}{2}\right)}{\zeta'(\frac{1}{2}+i\gamma_0)} \cdot e^{\frac{u}{16}} + O(1),$$

(7.10)
$$I(0) = O(1).$$

Применяя обозначения

$$\log y = 2u\left(\theta - \sqrt{\theta^2 - \alpha^2}\right), \quad \log z = 2u\left(\theta + \sqrt{\theta^2-\alpha^2}\right), \quad \theta = \tfrac{1}{2}, \quad \alpha = \tfrac{1}{4},$$

допустим, что имеет место одно из неравенств

$$\max_{y \leqq x \leqq z}\left(S(\sqrt{x}) - \delta x^{-\frac{1}{4}}\right) \leqq 0, \quad \min_{y \leqq x \leqq z}\left(S(\sqrt{x}) + \delta x^{-\frac{1}{4}}\right) \geqq 0$$

с постоянной $\delta>0$. Из этого предположения — как в параграфе 4 — можно вывести неравенство

$$(7.11)\quad \left|I\left(\frac{\gamma_0}{2}\right)\right| \leqq |I(0)|+2\delta\int_y^z x^{-\frac{3}{4}}e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right)dx+2\int_1^y \frac{|S(\sqrt{x})|}{\sqrt{x}}\,e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right)dx+$$

$$+2\int_z^\infty \frac{|S(\sqrt{x})|}{\sqrt{x}}\,e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right)dx.$$

Оцениваем интегралы в правой части формулы (7. 11). Так как $\dfrac{\log z}{2u}\leqq\dfrac{1}{2}$ и из (7. 4) $S(\beta)=O(1)$, то с помощью леммы 2 получаем неравенства

$$2\int_z^\infty \frac{|S(\sqrt{x})|}{\sqrt{x}}\,e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right)dx<\frac{c_1}{2u}\int_z^\infty e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right)\log x\cdot x^{-\frac{1}{2}}dx<c_2e_1\left(\frac{u}{16}\right),$$

$$2\int_1^y \frac{|S(\sqrt{x})|}{\sqrt{x}}\,e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right)dx<c_3e_1\left(\frac{u}{16}\right).$$

Далее из-за $\dfrac{\log y}{2u}>c_4\ (>0)$ с помощью леммы 1 вытекает неравенство

$$\int_y^z x^{-\frac{3}{4}}e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right)dx<\frac{1}{c_4}\int_y^z\frac{\log x}{2u}\,x^{-\frac{3}{4}}e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right)dx\leqq c_5\sqrt{u\pi}\,e_1\left(\frac{u}{16}\right)+O(1).$$

Таким образом,

$$(7.12)\qquad \left|I\left(\frac{\gamma_0}{2}\right)\right| \leqq |I(0)|+c_6e_1\left(\frac{u}{16}\right)+c_5\sqrt{u\pi}\,\delta e_1\left(\frac{u}{16}\right),$$

если u достаточно большое. Но оценки (7. 9), (7. 10) справедливы, и так неравенство (7. 12) не может выполняться, если u достаточно большое и $\delta>0$ достаточно малое фиксированное число.

Таким образом,

$$\max_{y\leqq x\leqq z}\left(S(\sqrt{x})-\delta x^{-\frac{1}{4}}\right)\geqq 0,\qquad \min_{y\leqq x\leqq z}\left(S(\sqrt{x})+\delta x^{-\frac{1}{4}}\right)\leqq 0,$$

и из этого следует теорема.

Подобным же образом можно доказать следующую теорему.

Теорема 6. *Пусть $\varepsilon_1>0, \varepsilon_2>0$ любые фиксированные числа. Тогда существует такая величина $T_0=T_0(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, что при $T>T_0$ имеют место неравенства*

$$\max_{T^{1-\varepsilon_2}\leq\beta\leq T} S(\beta)\cdot\beta^{1-\theta_2+\varepsilon_1}>1,\qquad \min_{T^{1-\varepsilon_2}\leq\beta\leq T} S(\beta)\cdot\beta^{1-\theta_2+\varepsilon_1}<-1,$$

где $\theta_2 \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{supr}_{\zeta(\varrho)=0} \operatorname{Re}\varrho$. ($T_0$ не-эффективная!)

§ 8. Сравнение в абелевом смысле. Ш. Кнаповски и П. Туран в работе [5] доказали следующее утверждение. Если $0<v<c_7$, $l_1\not\equiv l_2 \pmod 8$, $(l_1 l_2, 2)=1$, то

$$\max_{v\leq r\leq v^{1/3}} \sigma(r,8,l_1,l_2)>\frac{1}{\sqrt{v}}e_1\left(-22\cdot\frac{\log\frac{1}{r}\cdot\log_3\frac{1}{r}}{\log_2\frac{1}{r}}\right),$$

$$\min_{v\leq r\leq v^{1/3}} \sigma(r,8,l_1,l_2)<\frac{1}{\sqrt{v}}e_1\left(-22\cdot\frac{\log\frac{1}{r}\cdot\log_3\frac{1}{r}}{\log_2\frac{1}{r}}\right).$$

(Определение функции $\sigma(r)$ см. в Обозначениях.) С помощью нашего метода могут быть доказаны следующие теоремы.

Теорема 7. *Если $0<v<c_8$, $l_1\not\equiv l_2 \pmod 8$, $(l_1 l_2, 2)=1$, то*

$$\max_{v\leq r\leq v^{1/\varkappa}} \sigma(r,8,l_1,l_2)\cdot\sqrt{r}>\delta,\qquad \min_{v\leq r\leq v^{1/\varkappa}} \sigma(r,8,l_1,l_2)\cdot\sqrt{r}<-\delta,$$

где $\delta>0$, $c_8>0$ нумерические постоянные, $\varkappa=(2+\sqrt{3})^2$.

Теорема 8. *Если $l_1\not\equiv l_2 \pmod k$, $(l_1 l_2, k)=1$, и функция*

$$f(s)=-\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\chi}\left(\bar\chi(l_1)-\bar\chi(l_2)\right)\frac{L'}{L}(s,\chi)$$

регулярна в сегменте $0<s<1$, то существуют такие постоянные $d_1=d_1(f)$, $\delta=\delta(f)$, что при $0<v<d_1$ имеют место неравенства

$$\max_{v\leq r\leq v^{1/\varkappa}} \sigma(r,k,l_1,l_2)\sqrt{r}>d,\qquad \min_{v\leq r\leq v^{1/\varkappa}} \sigma(r,k,l_1,l_2)\sqrt{r}<-\delta,$$

где $l=(2+\sqrt{3})^2$. (Зависимость функции d_1 от k неэффективна!)

Теорема 9. *Пусть функция $f(s)$ регулярна в сегменте $0<s<1$, $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$ любые малые фиксированные числа, $l_1\not\equiv l_2 \pmod k$, $(l_1 l_2, k)=1$. Тогда существует такое число $d_2=d_2(f,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, что при $v<d_2$ имеют место неравенства*

$$\max_{v\leq r\leq v^{1-\varepsilon_1}} \sigma(r,k,l_1,l_2)r^{\theta_1-\varepsilon_2}>1,\qquad \min_{v\leq r\leq v^{1-\varepsilon_1}} \sigma(r,k,l_1,l_2)\cdot r^{\theta_1-\varepsilon_2}<-1.$$

(Определение θ_1 см. в параграфе 6, (6. 2)).

Мы докажем только теорему 9. Доказательства теорем 7 и 8 проводятся аналогичным образом.

С помощью формулы Меллина имеем, что

$$\sigma(r)(=\sigma(r,k,l_1,l_2)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} \frac{\Gamma(s)}{r^s} f(s)\,ds,$$

отсюда

$$\int_0^\infty r^{s-1}\sigma(r)\,dr = \Gamma(s)f(s).$$

Так как $|\sigma(r)| = O(e^{-r})$ при $r \geqq 1$, то функция

$$h(s) \overset{\text{def}}{=} \int_1^\infty r^{s-1}\sigma(r)\,dr$$

целая и она ограничена в любой полуплоскости $\sigma > c$. Заменив $r = \dfrac{1}{x}$, получим

$$\int_0^1 r^{s-1}\sigma(r)\,dr = \int_1^\infty \sigma\left(\frac{1}{x}\right) x^{-s+1}\,dx,$$

и так

$$\int_1^\infty \sigma\left(\frac{1}{x}\right) x^{-s+1}\,dx = \Gamma(s)f(s) - h(s).$$

Применяя лемму 6, с

$$dA(x) = \sigma\left(\frac{1}{x}\right) xe_1(-i\gamma_1 \log x)\,dx \quad \text{и} \quad dA(x) = \sigma\left(\frac{1}{x}\right) x\,dx$$

(где γ_1 – как в параграфе 6) получаем тождества

$$I(0) \overset{\text{def}}{=} \int_1^\infty \sigma\left(\frac{1}{x}\right) xe_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right) dx = \frac{2\sqrt{u\pi}}{2\pi i}\int_{(2)} \{\Gamma(w)f(w) - h(w)\} e^{w^2 u}\,dw,$$

$$I(\gamma_1) \overset{\text{def}}{=} \int_1^\infty \sigma\left(\frac{1}{x}\right) xe_1\left(-i\gamma_1 \log x - \frac{\log^2 x}{4u}\right) dx = \frac{2\sqrt{u\pi}}{2\pi i}\int_{(2)} \{\Gamma(w+i\gamma_1)f(w+i\gamma_1) -$$

$$- h(w+i\gamma_1)\} e^{w^2 u}\,dw.$$

Доказательство можно продолжать стандартным методом.

Так как в случае $k=8$ полюсы, расположенные в близи реальной оси функции $f(s)$ известны, то константы δ, c_8 являются эффективными.

Этот метод позволяет нам доказать между прочим следующую теорему.

Теорема 10. *При* $0 < v < c_9$,

$$\max_{v \leqq r \leqq v^{1/\varkappa}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) e^{-nr} \right\} \sqrt{r} > \delta, \qquad \min_{v \leqq r \leqq v^{1/\varkappa}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) e^{-nr} \right\} \sqrt{r} < -\delta,$$

где $\varkappa = (2+\sqrt{3})^2$, $\delta > 0$, $c_9 > 0$ *эффективные постоянные.*

(Поступила 4. 1. 1966.)

Литература

[1] К. А. Родосский, О правильности в распределении простых чисел, *Успехи Мат. Наук*, **17** (1962), стр. 189—191.
[2] K. Prachar, *Primzahlverteilung* (Berlin, Springer Verlag, 1957).
[3] S. Knapowski, On oscillations of certain means formed from the Möbius series I, *Acta Arithm.*, **8** (1963), стр. 311—320.
[4] S. Knapowski—P. Turán, Comparative prime-number theory. IV—VI, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **14** (1963), стр. 37—78.
[5] S. Knapowski—P. Turán, Comparative prime-number theory. VII—VIII, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **14** (1963), стр. 241—268.
[6] W. Staś, Über eine Reihe von Ramanujan, *Acta Arithm.*, **8** (1963), стр. 261—271.

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (1—2), 1967, pp. 151—163.

ON SOME PROBLEMS OF A STATISTICAL GROUP-THEORY. II

By

P. ERDŐS and P. TURÁN (Budapest), members of the Academy

1. In the first paper of this series[1] we showed that for almost all elements P of the symmetric group S_n of n letters (i.e. apart from at most $o(n!)$ P's) the order $\mathbf{O}(P)$ of P satisfies the inequality

$$(1.1) \qquad \left| \log \mathbf{O}(P) - \frac{1}{2}\log^2 n \right| < \omega(n) \log^{\frac{3}{2}} n$$

if only $\omega(n) \to \infty$ with n. Hence $\log \mathbf{O}(P)$ is for almost all P's much less than its maximum, which is as LANDAU[2] proved, $\sim \sqrt{n \log n}$. Though several questions in the first paper were left to later papers of this series and we intend indeed to return to them in paper III, in this paper we launch another trend which seems to us equally interesting in itself and perhaps even more inherent to the algebraic aspects. This refers to the arithmetical structure of the order $\mathbf{O}(P)$. We assert the following theorems.[3]

THEOREM I. *If $\omega(n) \to \infty$ with n arbitrarily slowly then for almost all P's the order $\mathbf{O}(P)$ is divisible by all prime-powers not exceeding*[4]

$$(1.2) \qquad A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\log n}{\log_2 n}\left\{1 + 3\frac{\log_3 n}{\log_2 n} - \frac{\omega(n)}{\log_2 n}\right\}.$$

As an immediate corollary of this theorem we remark that "almost no" P's have a square-free order $\mathbf{O}(P)$ and for arbitrarily large integer b the order $\mathbf{O}(P)$ is for almost all P's divisible by b.

How far is this Theorem I best-possible? We shall prove that replacing in (1.2) the term $\left(-\frac{\omega(n)}{\log_2 n}\right)$ by $\left(+\frac{\omega(n)}{\log_2 n}\right)$ then only $o(n!)$ P's have this property. However we shall state this in a slightly stronger form as

[1] *Zeitschr. für Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete*, **4** (1965), pp. 175—186.

[2] *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, 1909, Bd. I. p. 222.

[3] The starting point of these investigations was the question of A. SCHINZEL, whether or not for almost all P's $\mathbf{O}(P)$ is even.

[4] Throughout this paper $\log_\nu n$ means ν-times iterated logarithms.

THEOREM II. *If $\omega(n) \to \infty$ arbitrarily slowly with n then for almost all P's the order $\mathbf{O}(P)$ is not divisible by some prime not exceeding*

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\log n}{\log_2 n}\left\{1+3\frac{\log_3 n}{\log_2 n}+\frac{\omega(n)}{\log_2 n}\right\}. \tag{1. 3}$$

For the sake of orientation we remark that for primes $> c \log n$ much more is true. We formulate the

THEOREM III. *If α is fixed positive number and p_0 is any prime of form $(\alpha+o(1))\log n$ we have for the number $b(n)$ of P's with the property $\mathbf{O}(P)$ being not divisible by p_0 the relation*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b(n)}{n!} = e^{-\frac{1}{\alpha}} \tag{1. 4}$$

holds.

In particular if $\omega(n) \to \infty$ arbitrarily slowly with n and $p_0 > \omega(n)\log n$, then for almost all P's $\mathbf{O}(P)$ is not divisible by p_0.

2. What are the corresponding theorems for "large" prime-factors of $\mathbf{O}(P)$? As to this we assert the

THEOREM IV. *If $\varepsilon(n)$ is positive and tends with $1/n$ to zero arbitrarily slowly, then for almost all P's $\mathbf{O}(P)$ is not divisible by any prime*

$$> ne^{-\varepsilon(n)\sqrt{\log n}}. \tag{2. 1}$$

Again we shall prove that this theorem is essentially best possible by showing that replacing in (2. 1) $\varepsilon(n)$ by $1/\varepsilon(n)$ the situation completely changes. We assert this fact as

THEOREM V. *If $\omega(n)$ tends to infinity with n whatever slowly then for almost all P's $\mathbf{O}(P)$ has a prime-factor*

$$> ne^{-\omega(n)\sqrt{\log n}} \tag{2. 2}$$

From theorems IV and V one has the following somewhat surprising

COROLLARY. *If $\omega(n)$ tends to ∞ with n arbitrarily slowly then for almost all P's the maximal prime-factor of $\mathbf{O}(P)$ is between $ne^{-\omega(n)\sqrt{\log n}}$ and $ne^{-\frac{1}{\omega(n)}\sqrt{\log n}}$.*

Further we proved that for an arbitrarily small $\varepsilon > 0$ for almost all P's the number of prime-factors of $\mathbf{O}(P)$ (counting with or without multiplicity) is between $(1 \pm \varepsilon)\log n \cdot \log_2 n$. Since the proof does not differ essentially from that of Theorem II, we shall not go into details.

As one can easily see from our subsequent proofs we laid no particular stress to squeeze out sharpest possible laws. E.g. our proof for Theorem V would result also that for almost all P's $\mathbf{O}(P)$ has not only one but several prime-factors satisfying (2. 2). We could show that the number of P's whose group-order $\mathbf{O}(P)$ is divisible by all prime-powers not exceeding

$$\frac{\log n}{\log_2 n}\left\{1+3\frac{\log_3 n}{\log_2 n}-\frac{c}{\log_2 n}\right\} \qquad (c \text{ real})$$

divided by $n!$ has a distribution function $f_1(c)$ and the same holds for the number of P's whose order is not divisible by any prime greater than

$$ne^{-e^c\sqrt{\log n}} \qquad (c \text{ real}).$$

Our theorems refer to the group S_n; obviously the same holds for the alternating group A_n of n letters too.

We call the attention also to Theorem VI in **8**.

As the first of us remarked that by the same method as used in the proof of Theorem II, combined with the sharpened form of the prime number theorem for arithmetical progressions he can prove the following theorem. Let $\omega(n) \to \infty$ arbitrarily slowly then for almost all integers $m \leq n$ the Euler-function $\varphi(m)$ is divisible by all primes not exceeding

$$\frac{\log_2 n}{\log_3 n}\left\{1+3\frac{\log_4 n}{\log_3 n}-\frac{\omega(n)}{\log_3 n}\right\}$$

and $\varphi(m)$ has $(1+o(1))\frac{1}{2}(\log\log n)^2$ prime factors.

3. Next we turn to the proof of our theorems. We represent P uniquely as union of disjoint cycles; let P consist of m_1 cycles of length n_1, m_2 cycles of length n_2, ... so that

$$n_1<n_2<\ldots<n_k, \qquad k=k(P) \tag{3. 1}$$

$$n=m_1n_1+m_2n_2+\ldots+m_kn_k. \tag{3. 2}$$

The number of those P's with prescıibed k, m_ν's and n_ν's is, as remarked by Cauchy[5]

$$\frac{n!}{m_1!\,m_2!\ldots m_k!\,n_1^{m_1}n_2^{m_2}\ldots n_k^{m_k}}. \tag{3. 3}$$

It is well-known that

$$\mathbf{O}(P)=[n_1, n_2, \ldots, n_k]. \tag{3. 4}$$

Let p^α be an arbitrary prime-power $\leq n$ and $f(n, p^\alpha)$ be the number of P's such that $\mathbf{O}(P)$ is *not* divisible by p^α. Then Theorem I will be any easy consequence of the

LEMMA I. *For $f(n, p^\alpha)$ we have the nice exact formula*

$$\frac{f(n,p^\alpha)}{n!}=\left(1-\frac{1}{p^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{2p^\alpha}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\left[\frac{n}{p^\alpha}\right]p^\alpha}\right). \tag{3. 5}$$

For the proof we remark first that the left-side of (3. 5) is owing to (3. 3) nothing else than the coefficient of z^n in

$$\prod_\nu{}'\left\{1+\frac{1}{1!}\frac{z^\nu}{\nu}+\frac{1}{2!}\left(\frac{z^\nu}{\nu}\right)^2+\ldots\right\}$$

[5] See e. g. J. RIORDAN's book *An introduction to combinatorial analysis*, New York, 1958.

where the prime means that the product is to be extended to all ν's divisible by the $(\alpha-1)$th power of p at most. But this can be written for $|z|<1$ as

$$\prod_{\nu}{}' \exp\frac{z^\nu}{\nu} = \exp\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{z^\nu}{\nu} - \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{z^{\nu p^\alpha}}{\nu p^\alpha}\right\} = \frac{(1-z^{p^\alpha})^{\frac{1}{p^\alpha}}}{1-z} = \left(\frac{1+z+z^2+\ldots+z^{p^\alpha-1}}{(1-z)^{p^\alpha-1}}\right)^{\frac{1}{p^\alpha}} =$$

$$= (1+z+z^2+z^3+\ldots+z^{p^\alpha-1})(1-z^{p^\alpha})^{-\frac{p^\alpha-1}{p^\alpha}} =$$

$$= (1+z+z^2+\ldots+z^{p^\alpha-1})\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{2p^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{3p^\alpha}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{mp^\alpha}\right)z^{mp^\alpha}\right],$$

which proves the lemma at once.

For later use we remark that if p, q are different primes and $g(n, p, q)$ is the number of P's such that $\mathbf{O}(P)$ is divisible neither by p nor by q then the same reasoning gives that $\frac{1}{n!}g(n, p, q)$ equals the coefficient of z^n in the MacLaurin series of

$$\frac{(1-z^p)^{\frac{1}{p}}(1-z^q)^{\frac{1}{q}}}{(1-z)(1-z^{pq})^{\frac{1}{pq}}} \overset{\text{def}}{=} G_{p,q}(z). \tag{3.6}$$

4. For the proof of Theorem I we estimate $\frac{1}{n!}f(n, p^\alpha)$ from above using Lemma I. This gives for $p^\alpha \leqq n$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}f(n, p^\alpha) &< \exp\left\{-\frac{1}{p^\alpha}\sum_{1\leqq\nu\leqq\left[\frac{n}{p^\alpha}\right]}\frac{1}{\nu}\right\} < \\ &< \exp\left\{-\frac{\log\left[\frac{n}{p^\alpha}\right]}{p^\alpha}\right\} < 3\exp\left\{-\frac{\log\frac{n}{p^\alpha}}{p^\alpha}\right\}.\end{aligned} \tag{4.1}$$

Hence the number of P's whose order is not divisible by a prime-power p^α not exceeding A (in (1.2)) we get the upper bound [6]

$$S \overset{\text{def}}{=} 3\sum_{p^\alpha\leqq A}\exp\left\{-\frac{\log\frac{n}{p^\alpha}}{p^\alpha}\right\} < c_1\sum_{p^\alpha\leqq A}\exp\left\{-\frac{\log n}{p^\alpha}\right\} < c_2\int_2^A\frac{1}{\log x}\exp\left\{-\frac{\log n}{x}\right\}dx.$$

Since

$$A < \frac{\log n}{\log_2 n}\cdot\frac{1}{1-3\frac{\log_3 n}{\log_2 n}+\frac{\omega(n)}{2\log_2 n}} \overset{\text{def}}{=} A_1$$

[6] $c_1, c_2, \ldots$ denote positive numerical constants.

we have

$$S < c_2 \int_2^{A_1} \frac{1}{\log x} \exp\left\{-\frac{\log n}{x}\right\} dx. \tag{4. 2}$$

The integral over $\left(2, \frac{\log n}{\log_2 n}\right)$ is evidently

$$< c_3 \frac{\log n}{\log_2 n} \cdot \frac{1}{\log n} = \frac{c_3}{\log_2 n}. \tag{4. 3}$$

For the remaining integral S' we get substituting

$$x = \frac{\log n}{\log_2 n - y}$$

$$S' = c_2 \int_0^{3\log_3 n - \frac{1}{2}\omega(n)} \frac{e^y\, dy}{\left(1 - \frac{\log(\log_2 n - y)}{\log_2 n}\right)\left(1 - \frac{y}{\log_2 n}\right)^2} \cdot \frac{1}{(\log_2 n)^3} <$$

$$< \frac{c_3}{(\log_2 n)^3} \int_0^{3\log_3 n - \frac{1}{2}\omega(n)} e^y\, dy < c_3 e^{-\frac{1}{2}\omega(n)} \to 0$$

if $n \to \infty$, which together with (4. 3) and (4. 2) proves the theorem.

The proof of Theorem III follows also easily from Lemma I. This gives namely

$$\frac{1}{n!} f(n, p_0) = \prod_{1 \leqq \nu \leqq \left[\frac{n}{p_0}\right]} \left(1 - \frac{1}{\nu p_0}\right) = \exp\left\{-\frac{1}{p_0} \sum_{1 \leqq \nu \leqq \left[\frac{n}{p_0}\right]} \frac{1}{\nu} + O\left(\frac{1}{p_0^2}\right)\right\} =$$

$$= (1 + o(1)) \exp\left(-\frac{\log n}{p_0}\right)$$

which already proves Theorem III.[7]

5. For the proof of Theorem II we shall need as to the coefficient of z^n in (3. 6) the

LEMMA II. *If*

$$\log^{\frac{3}{4}} n \leqq p < q \leqq 10 \frac{\log n}{\log_2 n} \tag{5. 1}$$

and n is sufficiently large then

$$\frac{1}{n!} g(n, p, q) = n^{-\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \left\{1 + O\left(\log^{-\frac{1}{2}} n\right)\right\}.$$

[7] The ordo-sign refers throughout this paper to $n \to \infty$.

If p and q were fixed and $n \to \infty$, the relation

$$\text{coeffs } z^n \text{ in } G_{p,q}(z) \sim \frac{p^{\frac{1}{p}} q^{\frac{1}{q}}}{(pq)^{\frac{1}{pq}}} \cdot \frac{n^{-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\frac{1}{pq}}}{\Gamma\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\right)}$$

would follow from known result of Darboux; [8] but here p and q vary with n as restricted by (5. 1). A sketch of the rather technical proof we shall postpone to an Appendix. A more direct (real-variable or algebraic) approach to the determination of this coefficient would be desirable. [9]

6. The proof of Theorem II (and also Theorem V) will be based on an idea which was introduced into arithmetics in 1934 by one of us;[10] this is on the way to become a part of the folklore in this subject. Let (with B in (1. 3))

$$\frac{1}{2}\frac{\log n}{\log_2 n} \leqq p_1 < p_2 < \dots < p_l \leqq B \tag{6. 1}$$

be all primes in this interval; if n is sufficiently large, we have

$$\frac{1}{10}\frac{\log n}{(\log_2 n)^2} < l < 3\frac{\log n}{(\log_2 n)^2}. \tag{6. 2}$$

We introduce the function $h(P)$ of P as the number of the p_j's from (6. 1) which do *not* divide $\mathbf{O}(P)$. For this $h(P)$ we shall prove two simple lemmata.

LEMMA III. *Putting* $S_1 = \frac{1}{n!}\sum_P h(P)$ *we have*

$$S_1 = \sum_{\nu=1}^{l} \exp\left\{-\frac{\log n}{p_\nu}\right\} + O(1).$$

For the proof we remark first that with notation of Lemma I we have

$$S_1 = \frac{1}{n!}\sum_{\nu=1}^{l} f(n, p_\nu). \tag{6. 3}$$

Applying Lemma I this gives

$$S_1 = \sum_{\nu=1}^{l}\left(1-\frac{1}{p_\nu}\right)\left(1-\frac{1}{2p_\nu}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\left[\frac{n}{p_\nu}\right]p_\nu}\right).$$

[8] G. DARBOUX, Memoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres etc., *Journ. de math. pures et appl.*, Ser. **III**. Tome **IV** (1878).

[9] The same holds for the functions $(1-z)^{pq}(1-z^{pq})(1-z^p)^{-q}(1-z^q)^{-p}$ which — and their obvious generalization — reminds one to the cyclotomic polynomials.

[10] P. TURÁN, On a theorem of Hardy and Ramanujan, *Journ. London Math. Soc.*, **9** (**4**) (1934), pp. 274—276 and Über einige Verallgemeinerungen eines Satzes von Hardy und Ramanujan, *ibid.*, **11** (1936), pp. 125—133. See also the beautiful booklet of M. KAC, Statistical independence in probability, analysis and number theory, *Carus Math. Monographs*, No. **12**.

Using (6. 1) (and (1. 3)) the product is

$$\exp\left\{-\frac{1}{p_\nu}\log\frac{n}{p_\nu}+O\left(\frac{1}{p_\nu}\right)\right\}=\exp\left\{-\frac{\log n}{p_\nu}+O\left(\frac{\log p_\nu}{p_\nu}\right)\right\}=$$

$$=\left\{1+O\left(\frac{(\log_2 n)^2}{\log n}\right)\right\}\exp\left\{-\frac{\log n}{p_\nu}\right\}$$

and thus, using (6. 2)

$$S_1=\sum_{\nu=1}^{l}\exp\left\{-\frac{\log n}{p_\nu}\right\}+O(1)$$

as stated.

Further we need the

LEMMA IV. *Putting* $S_2=\frac{1}{n!}\sum_P h(P)^2$ *we have*

$$S_2<\left\{\sum_{\nu=1}^{l}\exp\left(-\frac{\log n}{p_\nu}\right)\right\}^2\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{\log n}}\right)\right)+\sum_{\nu=1}^{l}\exp\left(-\frac{\log n}{p_\nu}\right)+O(1).$$

For the proof we write (p_j's in (6. 1))

$$S_2=\frac{1}{n!}\sum_P\Big(\sum_{p_\mu\nmid O(P)}1\Big)\Big(\sum_{p_\nu\nmid O(P)}1\Big).$$

The contribution of the pairs with $\mu=\nu$ is obviously S_1; hence

$$S_2=S_1+2\sum_{1\le\mu<\nu\le l}\left(\frac{1}{n!}\sum_{\substack{p_\mu\nmid O(P)\\ p_\nu\nmid O(P)}}1\right)=S_1+2\sum_{1\le\mu<\nu\le l}\frac{1}{n!}g(n,p_\mu,p_\nu) \tag{6. 4}$$

with the notation of (3. 6). Using the remark (3. 6) and Lemma II we get

$$S_2=S_1+2\left(\sum_{1\le\mu<\nu\le l}n^{-\frac{1}{p_\mu}-\frac{1}{p_\nu}}\right)\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{\log n}}\right)\right).$$

Using also Lemma III we get

$$S_2<\sum_{\mu=1}^{l}\exp\left(-\frac{\log n}{p_\mu}\right)+O(1)+\left(1+\frac{O(1)}{\sqrt{\log n}}\right)\left(\sum_{\mu=1}^{l}\exp\left(-\frac{\log n}{p_\mu}\right)\right)^2$$

as stated.

7. Lemma III and IV give quickly the proof of Theorem II. We form the expression

$$Z\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{n!}\sum_P\left(h(P)-\sum_{\mu=1}^{l}\exp\left(-\frac{\log n}{p_\mu}\right)\right)^2. \tag{7. 1}$$

Lemma III and IV give at once

$$Z=O\left(\frac{1}{\sqrt{\log n}}\right)\left(\sum_{\mu=1}^{l}\exp\left(-\frac{\log n}{p_\mu}\right)\right)^2+O(1)\left\{1+\sum_{\mu=1}^{l}\exp\left(-\frac{\log n}{p_\mu}\right)\right\}. \tag{7. 2}$$

Let U be the set of P's with

$$h(P)=0$$

and $|U|$ their number; (7. 1) and (7. 2) give a fortiori

$$\frac{|U|}{n!} < O(1)\left\{\frac{1}{\sqrt{\log n}}+\left(\sum_{\mu=1}^{l}\exp\left(-\frac{\log n}{p_\mu}\right)\right)^{-1}+\left(\sum_{\mu=1}^{l}\exp\left(-\frac{\log n}{p_\mu}\right)\right)^{-2}\right\}. \tag{7.3}$$

If we succeed in proving

$$V \overset{\text{def}}{=} \sum_{\mu=1}^{l}\exp\left(-\frac{\log n}{p_\mu}\right)\to\infty$$

with n we are ready. But

$$V > \sum_{\left|p-\frac{\log n}{\log_2 n}\left(1+3\frac{\log_3 n}{\log_2 n}\right)\right| \leqq \omega(n)\frac{\log n}{(\log_2 n)^2}} \exp\left(-\frac{\log n}{p}\right)$$

which is analogously as in **4.**

$$> \frac{c_4}{(\log_2 n)^3}\int_{3\log_3 n-\frac{1}{2}\omega(n)}^{3\log_3 n+\frac{1}{2}\omega(n)} \frac{e^y\,dy}{\left(1-\frac{y}{\log_2 n}\right)^2\left(1-\frac{\log(\log_2 n-y)}{\log_2 n}\right)} >$$

$$> \frac{c_5}{(\log_2 n)^3}\int_{3\log_3 n-\frac{1}{2}\omega(n)}^{3\log_3 n+\frac{1}{2}\omega(n)} e^y\,dy\to\infty$$

indeed.

8. The proof of Theorem IV, once having Lemma I is again easy. This gives namely if $\bar{f}(n,p)$ stands for the number of those P's, whose order $\mathbf{O}(P)$ is divisible by p the exact formula

$$\frac{\bar{f}(n,p)}{n!} = 1-\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{2p}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\left[\frac{n}{p}\right]p}\right) < 1-\exp\left(-\frac{1}{p}\log\frac{n}{p}+O\left(\frac{1}{p}\right)\right)$$

i. e., if $p>\sqrt{n}$ say,

$$\frac{\bar{f}(n,p)}{n!} < \frac{\log\frac{n}{p}}{p}+O\left(\frac{1}{p}\right). \tag{8.1}$$

Hence for the proof of our Theorem IV we have only to show that

$$\sum_{n\exp\left(-\varepsilon(n)\sqrt{\log n}\right)\leqq p\leqq n}\left\{\frac{1}{p}\log\frac{n}{p}+O\left(\frac{1}{p}\right)\right\}\to 0.$$

For the second sum this is well-known; for the first it follows easily since it cannot exceed

$$\varepsilon(n)\sqrt{\log n} \sum_{n\exp(-\varepsilon(n)\sqrt{\log n}) \leqq p \leqq n} \frac{1}{p}$$

which tends to 0 indeed.

9. The proof of Theorem V will be easy after having the Theorem VI, which is of independent interest. This is the following.

THEOREM VI. *Let*

$$1 \leqq a_1 < a_2 < \ldots < a_s \leqq n \tag{9. 1}$$

be a sequence of integers. Then the number of P's having no cycles with the length a_1 or a_2 ... or a_s, cannot exceed the quantity

$$\frac{n!}{\sum_{\nu=1}^{s} \frac{1}{a_\nu}}.$$

Hence if $\sum_{\nu=1}^{s} a_\nu^{-1}$ tends with n to ∞, then almost all P's have at least one cycle the length of which is among the numbers in (9. 1).

The proof of Theorem VI will be based again on the dispersion-idea. Let $L(P)$ be the number of the a_ν's from (9. 1) with the property that P has a cycle with length a_ν. Then we assert the

LEMMA V. *Denoting the expression*

$$\frac{1}{n!} \sum_{P} L(P)$$

by H_1 we have

$$H_1 = \sum_{\nu=1}^{s} \frac{1}{a_\nu}.$$

For the proof we start from the fact that

$$H_1 = \sum_{\nu=1}^{s} \left(\frac{1}{n!} \sum_{P}{}' 1 \right) \tag{9. 2}$$

where the summation within the bracket refers to all P's containing a cycle with the length a_ν (ν fixed). But what is the value of this sum? The elements of this cycle can be selected in $\binom{n}{a_\nu}$ ways; after selection each can be written down on $a_\nu!$ ways. Since a cyclic permutation gives the same cycle, our selection gives rise to

$$\binom{n}{a_\nu} a_\nu! \frac{1}{a_\nu} = \frac{n!}{a_\nu (n-a_\nu)!}$$

different cycles of length a_ν. Each can be completed to a P by permuting the remaining $(n-a_\nu)$ elements. Hence the value of the inner bracket is for fixed ν $1/a_\nu$, which proves the lemma.

We need further the

LEMMA VI. *Denoting the expression*

$$\frac{1}{n!}\sum_P L(P)^2$$

by H_2 we have

$$H_2 \leqq \sum_{\nu=1}^{s}\frac{1}{a_\nu}+\left(\sum_{\nu=1}^{s}\frac{1}{a_\nu}\right)^2.$$

For the proof we start from the fact that

$$H_2=\frac{1}{n!}\sum_P\Big(\sum_{a_\mu \text{ in } P}1\Big)\Big(\sum_{a_\nu \text{ in } P}1\Big)=H_1+2\sum_{\substack{1\leqq\mu<\nu\leqq S\\ a_\mu+a_\nu\leqq n}}\left(\frac{1}{n!}\sum_P{}''1\right) \tag{9. 3}$$

where the $\sum''$ is to be extended to all P's having two cycles with the length a_μ and a_ν respectively. What is the value of the inner sum in (9. 3)? The cycle of length a_μ can be filled as before in $\dfrac{n!}{a_\mu(n-a_\mu)!}$ ways; the cycle of length a_ν afterwards in

$$\frac{(n-a_\mu)!}{a_\nu(n-a_\mu-a_\nu)!}$$

ways. Each can be completed to a P in $(n-a_\mu-a_\nu)!$ ways. Hence the value of the expression in the bracket in (9. 3) is $1/a_\mu a_\nu$. Hence

$$H_2=\sum_{\nu=1}^{s}\frac{1}{a_\nu}+2\sum_{\substack{1\leqq\mu<\nu\leqq s\\ a_\mu+a_\nu\leqq n}}\frac{1}{a_\mu a_\nu}<\sum_{\nu=1}^{s}\frac{1}{a_\nu}+\left(\sum_{\nu=1}^{s}\frac{1}{a_\nu}\right)^2 \tag{9. 4}$$

indeed.

In order to prove Theorem V we consider the expression

$$Z_1 \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n!}\sum_P\left(L(P)-\sum_{\nu=1}^{s}\frac{1}{a_\nu}\right)^2. \tag{9. 5}$$

From Lemma V and VI we get

$$Z_1<\sum_{\nu=1}^{s}\frac{1}{a_\nu}. \tag{9. 6}$$

Denoting by U_1 the set of P's with $L(P)=0$ and by $|U_1|$ the number of P's in U_1 (9. 5) and (9. 6) give

$$\frac{|U_1|}{n!}<\left(\sum_{\nu=1}^{s}\frac{1}{a_\nu}\right)^{-1}$$

i.e. Theorem VI is proved already.

10. In order to deduce Theorem V from Theorem VI we define the a_ν's as all multiples of all primes in the interval

$$I: \quad n\exp\left(-\omega(n)\sqrt{\log n}\right) \leqq p \leqq n \tag{10.1}$$

which do not exceed n. The sum of their reciprocals is

$$\sum_{p\subset I}\frac{1}{p}\sum_{\nu\leqq\frac{n}{p}}\frac{1}{\nu} = \sum_{p\subset I}\frac{1}{p}\log\frac{n}{p}+O(1)\sum_{p\subset I}\frac{1}{p} = \sum_{p\subset I}\frac{1}{p}\log\frac{n}{p}+O(1). \tag{10.2}$$

The remaining sum is

$$> \sum_{p\subset I_1}\frac{1}{p}\log\frac{n}{p}$$

where I_1 stands for the interval

$$n\exp\left\{-\omega(n)\sqrt{\log n}\right\} \leqq p \leqq n\exp\left\{-\frac{\omega(n)}{2}\sqrt{\log n}\right\};$$

hence this sum is

$$> \frac{\omega(n)}{2}\sqrt{\log n}\sum_{p\subset I_1}\frac{1}{p} > \frac{\omega(n)}{2}\sqrt{\log n}\cdot\frac{\omega(n)}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\log n}} = \frac{\omega(n)^2}{6}.$$

Hence with exception of at most

$$\frac{6}{\omega(n)!^2}\,n!$$

P's the other ones are such that $\mathbf{O}(P)$ is divisible by a prime p in I. Q.e.d.

Appendix

We sketch the proof of Lemma II. We have for $n\geqq 10$ obviously

$$\frac{1}{n!}g(n,p,q) = \sum_{\nu=0}^{pq-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{(D_\nu)}G_{pq}(z)z^{-n-1}\,dz, \tag{1}$$

where D_ν means the following path of integration. We cut off the plane along the segment

$$z = re^{\frac{2\pi i\nu}{pq}}, \qquad r\geqq 1$$

then D_ν comes from infinity along the ray

$$\operatorname{arc} z = \frac{2\pi\nu}{pq}-0$$

encircles the point $z=e^{\frac{2\pi i\nu}{pq}}$ in negative sense with a "small" circle and then goes to infinity along the ray

$$\operatorname{arc} z = \frac{2\pi\nu}{pq}+0.$$

The contribution of the "small" circles goes obviously to 0 and hence

$$\frac{1}{n!}\,g(n,p,q) = \sum_{\nu=0}^{pq-1} I_\nu, \tag{2}$$

where

$$I_\nu = \lim_{\varepsilon\to+0}\left\{e^{-\frac{2\pi\nu n i}{pq}}\int_1^\infty \frac{G_{pq}\left(r\exp i\left(\frac{2\pi\nu}{pq}+\varepsilon\right)\right)-G_{pq}\left(r\exp i\left(\frac{2\pi\nu}{pq}-\varepsilon\right)\right)}{r^{n+1}}\,dr.\right. \tag{3}$$

We consider first the I_ν's with

$$1\leqq \nu \leqq pq-1.$$

We have (roughly)

$$|G_{pq}(z)| < \frac{10pq}{(r^{pq}-1)^{\frac{1}{pq}}} < \frac{10pq}{(r-1)^{\frac{1}{pq}}}$$

and hence

$$\sum_{\nu=1}^{pq-1}|I_\nu| < 10(pq)^2\int_1^\infty \frac{dr}{r^{n+1}(r-1)^{\frac{1}{pq}}} = 10(pq)^2\int_0^1 t^{-\frac{1}{pq}}(1-t)^{n-1+\frac{1}{pq}}\,dt$$

on putting $r=\dfrac{1}{1-t}$. Using the well-known formula

$$\int_0^1 t^\alpha(1-t)^\beta\,dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} \qquad (\alpha>-1,\ \beta>-1) \tag{4}$$

we get for $n>n_0$

$$\sum_{\nu=1}^{pq-1}|I_\nu| < 20(pq)^2\,\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{pq}\right)}{\Gamma(n+1)} < (pq)^3 n^{\frac{1}{pq}-1}$$

and hence

$$\left|g(n,p,q)\frac{1}{n!}-I_0\right| < (pq)^3 n^{\frac{1}{pq}-1}. \tag{5}$$

As to I_0, putting

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)=\lambda$$

and

$$g(r) = \left(\frac{r^p-1}{r-1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{r^q-1}{r-1}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{r-1}{r^{pq}-1}\right)^{\frac{1}{pq}}$$

we get

$$I_0 = \frac{\sin \pi\lambda}{\pi} \int_1^\infty \frac{g(r)\,dr}{r^{n+1}(r-1)^\lambda}.$$

The contribution of $r > 1 + 100\,\frac{\log n}{n}$ is $O(n^{-50})$ quite roughly; replacing on the remaining interval $g(r)$ by

$$\frac{p^{\frac{1}{p}} q^{\frac{1}{q}}}{(pq)^{\frac{1}{pq}}}$$

gives an error of $O(n^{-1}\log^2 n)$. Completing again the integration range to $(1, \infty)$ we get

$$(6) \qquad I_0 = \frac{\sin \pi\lambda}{\pi} \frac{p^{\frac{1}{p}} q^{\frac{1}{q}}}{(pq)^{\frac{1}{pq}}} \{1 + O(n^{-1}\log^2 n)\} \int_1^\infty \frac{dr}{r^{n+1}(r-1)^\lambda} + O(n^{-50}).$$

Substituting again r by $\frac{1}{1-t}$ and applying (4) we get for the main term in (6)

$$\{1 + O(n^{-1}\log^2 n)\} \frac{p^{\frac{1}{p}} q^{\frac{1}{q}}}{(pq)^{\frac{1}{pq}}} \cdot \frac{\sin \pi\lambda \cdot \Gamma(1-\lambda)\Gamma(n+\lambda)}{\pi\Gamma(n+1)} =$$

$$= \{1 + O(n^{-1}\log^2 n)\} \frac{p^{\frac{1}{p}} q^{\frac{1}{q}}}{(pq)^{\frac{1}{pq}}} \frac{\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(n+1)} = \{1 + O(n^{-1}\log^2 n)\} \frac{p^{\frac{1}{p}} q^{\frac{1}{q}}}{(pq)^{\frac{1}{pq}}} \cdot$$

$$\cdot \frac{n^{-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\frac{1}{pq}}}{\Gamma(\lambda)}.$$

But in our case

$$\frac{p^{\frac{1}{p}} q^{\frac{1}{q}}}{(pq)^{\frac{1}{pq}}} \cdot \frac{n^{\frac{1}{pq}}}{\Gamma(\lambda)} = 1 + O(\log^{-\frac{1}{2}} n)$$

the proof of Lemma II is complete.

(Received 15 January 1966)

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (1—2), 1967, pp. 165—169.

ON EQUIVALENT POWER SERIES

By

J. CLUNIE (London)

(*Presented by* P. TURÁN)

1. Let $f_1(\omega)=\sum_0^\infty a_n\omega^n$ be regular in $|\omega|<1$. Suppose that $\omega=\dfrac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z}$, where $0<|\zeta|<1$, is a bilinear mapping of the unit disc onto itself. Put $f_2(z)=f_1\left(\dfrac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z}\right)=$ $=\sum_0^\infty b_nz^n$ $(|z|<1)$. Then we call the power series $\sum_0^\infty a_n\omega^n$ and $\sum_0^\infty b_nz^n$ equivalent under the transformation $\omega=\dfrac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z}$. To the point ω_1 on $|\omega|=1$ corresponds the point z_1 on $|z|=1$ under the transformation, where $\omega_1=\dfrac{z_1-\zeta}{1-\bar{\zeta}z_1}$. The problem of the relative behaviour of $\sum_0^\infty a_n\omega_1^n$ and $\sum_0^\infty b_nz_1^n$ at once suggests itself. The first contribution to the problem was made by TURÁN [4] who showed that to any ζ $(0<|\zeta|<1)$ corresponds equivalent power series $\sum_0^\infty a_n\omega^n$ and $\sum_0^\infty b_nz^n$ under $\omega=\dfrac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z}$ such that $\sum_0^\infty a_n$ converges and $\sum_0^\infty b_n\left(\dfrac{1+\zeta}{1+\bar{\zeta}}\right)^n$ diverges. In a series of papers ALPÁR made further important contributions to the problem [1, 2].

If $\sum_0^\infty a_n\omega^n$ and $\sum_0^\infty b_nz^n$ are equivalent under $\omega=\dfrac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z}$ and $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ are the sequences of partial sums of $\sum_0^\infty a_n$ and $\sum_0^\infty b_n\left(\dfrac{1+\zeta}{1+\bar{\zeta}}\right)^n$ respectively then TURÁN showed that $\{B_n\}$ is the transformation of $\{A_n\}$ by a matrix whose elements depend only on the transformation $\omega=\dfrac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z}$. He then showed that if $0<|\zeta|<1$ the matrix is not permanent and so one could find a convergent sequence $\{A_n\}$ which was transformed into a divergent sequence $\{B_n\}$. Hence his result indicated earlier followed at once. However, from an existence proof of this kind one obtains no information about $f_1(\omega)=\sum_0^\infty a_n\omega^n$ apart from the fact that it is regular in $|\omega|<1$. TURÁN raised the question as to whether or not such an $f_1(\omega)$ could be continuous in $|\omega|\leqq 1$. In this paper I shall answer this question by proving the following

THEOREM. *Let ζ $(0<|\zeta|<1)$ be given. There exists a function* $f_1(\omega)=\sum_0^\infty a_n\omega^n$ *which is continuous in* $|\omega|\leqq 1$ *with* $\sum_0^\infty a_n$ *convergent and if* $f_2(z)=f_1\left(\frac{z-\zeta}{1-\bar\zeta z}\right)=\sum_0^\infty b_n z^n$ *then* $\sum_0^\infty b_n\left(\frac{1+\zeta}{1+\bar\zeta}\right)^n$ *is divergent.*

TURÁN's result can be expressed as follows: periphery-convergence is not a conformal invariant. The above theorem brings this out even more strikingly.

2. The proof of the theorem requires a number of lemmas.

LEMMA 1. *Let ζ $(0<|\zeta|<1)$ be given and put* $\varphi=\arg\left(\frac{1+\zeta}{1+\bar\zeta}\right)$. *Then there is a constant K, depending only on ζ, such that*

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=1}\lambda^m\left(\frac{1-\bar\zeta e^{i\varphi}\lambda}{\lambda e^{i\varphi}-\zeta}\right)^{j+1}d\lambda\right|\leqq K\cdot\frac{j+1}{m} \tag{1}$$

for all integers $j\geqq 0$ and all integers $m>0$.

Given $\varepsilon>0$ there is a $j_0(\varepsilon)$ such that

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=1}\lambda^m\left(\frac{1-\bar\zeta e^{i\varphi}\lambda}{\lambda e^{i\varphi}-\zeta}\right)^{j+1}d\lambda\right|<\varepsilon \tag{2}$$

for all integers m and all integers $j>j_0(\varepsilon)$.

If we set $\lambda=e^{it}$, where $0\leqq t\leqq 2\pi$, then $\frac{1-\bar\zeta\, e^{i\varphi}\lambda}{\lambda e^{i\varphi}-\zeta}=e^{i\psi(t)}$ where $\psi(t)$ is differentiable in $0\leqq t\leqq 2\pi$ with a derivative which is bounded in modulus by a constant depending only on ζ. Hence if we make the substitution $\lambda=e^{it}$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$ in the integral of (1) and integrate by parts we obtain the inequality (1) itself.

Inequality (2) can be proved by means of a result of VAN DER CORPUT. The proof is almost identical to one of BAJŠANSKI [3, pp. 143—4] and will be omitted.

LEMMA 2. *Suppose that $f(\omega)$ is regular in $|\omega|<R$ $(R>1)$ and that $f(1)=0$. Let ζ $(0<|\zeta|<1)$ be given and put* $\varphi=\arg\left(\frac{1+\zeta}{1+\bar\zeta}\right)$. *Then, provided n is a sufficiently large positive integer, depending on $f(\omega)$ and ζ, the partial sums of the Maclaurin series of* $\left(\frac{\omega+\zeta}{1+\bar\zeta\omega}\right)^n f\left(e^{-i\varphi}\frac{\omega+\zeta}{1+\bar\zeta\omega}\right)$ *at $\omega=1$ are bounded in modulus by a constant depending only on ζ.*

Let α_j be the jth partial sum of the Maclaurin series of $\left(\frac{\omega+\zeta}{1+\bar\zeta\omega}\right)^n f\left(e^{-i\varphi}\frac{\omega+\zeta}{1+\bar\zeta\omega}\right)$ at $\omega=1$. Then

$$\alpha_j=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\left(\frac{\omega+\zeta}{1+\bar\zeta\omega}\right)^n\frac{f\left(e^{-i\varphi}\frac{\omega+\zeta}{1+\bar\zeta\omega}\right)}{(1-\omega)\omega^{j+1}}\,d\omega, \tag{3}$$

where γ is a simple closed contour containing $\omega=0$ and lying in $|\omega|<1$. Putting $\lambda=e^{-i\varphi}\dfrac{\omega+\zeta}{1+\bar{\zeta}\omega}$ we find that

$$\omega=\frac{\lambda e^{i\varphi}-\zeta}{1-\bar{\zeta}e^{i\varphi}\lambda},\quad 1-\omega=e^{i\varphi}(1+\bar{\zeta})\cdot\frac{1-\lambda}{1-\bar{\zeta}e^{i\varphi}\lambda},\quad d\omega=\frac{e^{i\varphi}(1-|\zeta|^2)}{(1-\bar{\zeta}e^{i\varphi}\lambda)^2}\,d\lambda.$$

Hence we can write (3) as

$$\alpha_j=e^{in\varphi}\frac{(1-|\zeta|^2)}{1+\bar{\zeta}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'}\frac{\lambda^n f(\lambda)}{(1-\lambda)(1-\bar{\zeta}e^{i\varphi}\lambda)}\cdot\left(\frac{1-\bar{\zeta}e^{i\varphi}\lambda}{\lambda e^{i\varphi}-\zeta}\right)^{j+1}d\lambda, \tag{4}$$

where γ' is any simple closed contour in $|\lambda|<1$ containing $\lambda=\zeta e^{-i\varphi}$.

Since $f(\lambda)$ is regular in $|\lambda|<R$ with $R>1$ and $f(1)=0$ it follows that

$$\frac{f(\lambda)}{(1-\lambda)(1-\bar{\zeta}e^{i\varphi}\lambda)}=\sum_0^\infty\beta_k\lambda^k\quad\left(|\lambda|<\min\left(R,\frac{1}{|\zeta|}\right)\right),$$

and so there is a constant H, depending on $f(\lambda)$ and ζ, such that

$$\sum_{k=0}^\infty|\beta_k|<H. \tag{5}$$

From (4) it follows that

$$|\alpha_j|\leqq\frac{1-|\zeta|^2}{|1+\bar{\zeta}|}\cdot\sum_{k=0}^\infty|\beta_k|\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1}\lambda^{n+k}\left(\frac{1-\bar{\zeta}e^{i\varphi}\lambda}{\lambda e^{i\varphi}-\zeta}\right)^{j+1}d\lambda\right|.$$

Consider Lemma 1 with $m=n+k$ and take ε of (2) to be $1/H$, where H is the bound appearing in (5). Let $j_0\left(\frac{1}{H}\right)=j_0$ in Lemma 1. Choose $n>KH(j_0+1)$, where K is the constant in (1). Then from (1) and (2) of Lemma 1 it follows that

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\gamma|=1}\lambda^{n+k}\left(\frac{1-\bar{\zeta}e^{i\varphi}\lambda}{\lambda e^{i\varphi}-\zeta}\right)^{j+1}d\lambda\right|<\frac{1}{H}$$

for all $j\geqq0$ and $k\geqq0$. Therefore for $j\geqq0$,

$$|\alpha_j|\leqq\frac{1-|\zeta|^2}{|1+\bar{\zeta}|}\left(\sum_{k=0}^\infty|\beta_k|\right)\cdot\frac{1}{H}<\frac{1-|\zeta|^2}{|1+\bar{\zeta}|},$$

from (5). This proves Lemma 2.

For each integer $n\geqq1$ the nth Fejér polynomial is defined by

$$f_n(z)=\frac{z}{n}+\frac{z^2}{n-1}+\ldots+\frac{z^n}{1}-\frac{z^{n+1}}{1}-\frac{z^{n+2}}{2}-\ldots-\frac{z^{2n}}{n}.$$

These polynomials have the properties quoted in the next lemma.

LEMMA 3. (i) *There is an absolute constant M such that* $|f_n(z)| \leqq M$ $(n \geqq 1;\ |z| \leqq 1)$;
(ii) $f_n(1) = 0$ $(n \geqq 1)$;
(iii) *all the partial sums of $f_n(z)$ at $z=1$ are non-negative for $n \geqq 1$*;
(iv) *the nth partial sum of $f_n(z)$ at $z=1$ exceeds* $\log n$.

3. We are now in a position to give the construction of $f_1(\omega)$, $f_2(z)$ of the theorem and prove that the functions constructed possess all the relevant properties. Choose integers $k_n > 0$ so that the partial sums of the Maclaurin series of

$$\left(\frac{\omega+\zeta}{1+\bar{\zeta}\omega}\right)^{k_n} f_{2^{n^3}}\left(e^{-i\varphi}\,\frac{\omega+\zeta}{1+\bar{\zeta}\omega}\right)$$

at $\omega=1$ are uniformly bounded for $n \geqq 1$, where ζ $(0<|\zeta|<1)$ is fixed and $\varphi = \arg\left(\frac{1+\zeta}{1+\bar{\zeta}}\right)$. From Lemmas 2 and 3 it follows that the k_n can be so chosen. Define

$$f_1(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-ik_n\varphi}}{n^2}\left(\frac{\omega+\zeta}{1+\bar{\zeta}\omega}\right)^{k_n} f_{2^{n^3}}\left(e^{-i\varphi}\,\frac{\omega+\zeta}{1-\bar{\zeta}\omega}\right). \tag{6}$$

We first of all show that the Maclaurin series of $f_1(\omega)$ converges at $\omega=1$. If σ_k denotes the kth partial sum of this series and $\sigma_k^{(n)}$ denotes the kth partial sum of the corresponding series for

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{e^{-ik_j\varphi}}{j^2}\left(\frac{\omega+\zeta}{1+\bar{\zeta}\omega}\right)^{k_j} f_{2^{j^3}}\left(e^{-i\varphi}\,\frac{\omega+\zeta}{1+\bar{\zeta}\omega}\right)$$

then $\sigma_k = \sigma_k^{(n)} + (\sigma_k - \sigma_k^{(n)})$ and so

$$|\sigma_k - \sigma_l| \leqq |\sigma_k^{(n)} - \sigma_l^{(n)}| + |\sigma_k - \sigma_k^{(n)}| + |\sigma_l - \sigma_l^{(n)}|. \tag{7}$$

From the uniform boundedness of the partial sums of the corresponding series of the terms on the right of (6) without the factors $\frac{1}{n^2}$ and the fact that $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} < \infty$ we see that given $\varepsilon > 0$ we can choose $n_0(\varepsilon)$ so that each of the final two terms on the right of (7) is less than ε for all k and l and $n > n_0(\varepsilon)$. If we fix $n = n_1 > n_0(\varepsilon)$ then the first term on the right of (7) is the modulus of the difference of the partial sums of the Maclaurin series at $\omega=1$ of a function regular in $|\omega| < R$ with $R > 1$. Consequently there is an $N_0(\varepsilon)$ such that this term is less than ε for $k, l > N_0(\varepsilon)$. Therefore $|\sigma_k - \sigma_l| < 3\varepsilon$ $(k, l > N_0(\varepsilon))$ and so the sequence $\{\sigma_k\}$ satisfies Cauchy's criterion for convergence.

If we apply the transformation $\omega = \frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}z}$ to $f_1(\omega)$ we obtain

$$f_2(z) = f_1\left(\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-ikn\varphi}}{n^2}\, z^{k_n} f_{2^{n^3}}(e^{-i\varphi}z).$$

To $\omega=1$ corresponds $z = \frac{1+\zeta}{1+\bar{\zeta}} = e^{i\varphi}$. Consequently we must investigate the convergence of the Maclaurin series at $z=1$ of

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{kn}}{n^2} \cdot f_{2^{n^3}}(z). \tag{8}$$

The $(k_n+2^{n^3})$th partial sum of the corresponding series for $\frac{z^{k_n}}{n^2} f_{2^{n^3}}(z)$ is positive and exceeds $\frac{\log 2^{n^3}}{n^2} = n \log 2$, from (iv) of Lemma 3. The $(k_n+2^{n^3})$th partial sums of the corresponding series of the other terms on the right of (8) are all non-negative by (iii) of Lemma 3. Hence the Maclaurin series of (8) at $z=1$ does not converge, but is in fact unboundedly divergent.

From (i) of Lemma 3 it follows that $f_1(\omega)$ is the sum of a uniformly convergent series of continuous functions in $|\omega| \leqq 1$ and so $f_1(\omega)$ is also continuous in $|\omega| \leqq 1$. This completes the proof of the theorem.

In conclusion I should like to thank Dr. P. VERMES for introducing me to the problem dealt with in this paper. I should also like to express my indebtedness to Professor P. TURÁN for many valuable suggestions. The paper incorporates these suggestions and as a consequence it is very much better than it would otherwise have been.

(Received 31 January 1966)

References

[1] L. ALPÁR, Remarque sur la sommabilité des séries de Taylor sur leurs cercles de convergence, I., II., III., *Publ. Math. Inst. Hungarian Acad. Sci.*, **3** (1958), pp. 1—12; **3** (1958), pp. 141—158; **5** (1960), pp. 97—152.

[2] L. ALPÁR, Sur certaines transformées des séries de puissance absolument convergentes sur la frontiere de leur cercle convergence, *Publ. Math. Inst. Hungarian Acad. Sci.*, **7** (1962), pp. 287—315.

[3] B. BAJŠANSKI, Sur une classe générale de procédés de sommations du type d'Euler—Borel, *Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci.*, **10** (1956), pp. 131—153.

[4] P. TURÁN, A remark concerning the behaviour of a power-series on the periphery of its convergence circle, *Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci.*, **12** (1958), pp. 19—26.

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (1—2), 1967, pp. 171—173.

REMARKS ON THE PRECEDING PAPER OF J. CLUNIE ENTITLED „ON EQUIVALENT POWER SERIES"

By

P. TURÁN (Budapest), member of the Academy

1. The paper of Mr. CLUNIE is an essential contribution to the investigations dealing generally speaking with the relationship of periphery-convergence behaviour of series representing in the domain „conformally equivalent" functions. In the simplest case when the domain is the unit circle it means a comparison of the convergence-behaviour of the series

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1.1}$$

and

$$f_2(z) = f_1\left(\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z} e^{-i\varphi}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\zeta) z^n \tag{1.2}$$

for $z=1$; here ζ is any fixed number with $0<|\zeta|<1$ and

$$\varphi = \operatorname{arc}\frac{1-\zeta}{1-\bar{\zeta}}.$$

He showed — far beyond my older remark[1] according which periphery-convergence is not a conformal invariant — that this phenomenon can occur even in the case when $f_1(z)$ is in addition *continuous* in $|z|\leqq 1$. His ingenious proof mutatis mutandis exhibits for each fixed $0<|\zeta|<1$ also a function

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{1.3}$$

regular for $|z|<1$ and continuous for $|z|\leqq 1$ such that for a suitable countable set $z_1, z_2, \ldots$ on $|z|=1$ all series $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_j^n$ $(j=1,2,\ldots)$ converge and putting

$$f_0\left(\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(\zeta) z^n \tag{1.4}$$

[1] *Publ. de l'Institut Math. Acad. Serbe des Sci.*, **12** (1958), pp. 19—26. I take the opportunity to correct a slip of this paper; what actually was proved in **4** was the fact that from the convergence of $\sum a_n$ the Abel-summability of $\sum b_n(\zeta)$ follows.

all series

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n(\zeta)\left(\frac{z_j+\zeta}{1+\bar{\zeta}z_j}\right)^n$$

diverge.

I.e. conformal mapping can destroy periphery-convergence not only in a single point, but in a countable set, even if the function is regular in $|z|<1$ and continuous for $|z|\leqq 1$.

2. But CLUNIE's example has another interesting consequence in the theory of Fourier-series too (of which *consequence* I was aware when writing my note [1] in 1957, without having such an example up to now). Let $g(x)$ be continuous for all real x, periodical with the period 2π and

$$(2.\ 1) \qquad g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx).$$

The series, as well-known, can diverge. As J. PÁL and H. BOHR [2] discovered, one can find an $x=h(t)$ function which is continuous, monotonically increasing in $0\leqq t\leqq 2\pi$, satisfies also

$$h(0)=0, \quad h(2\pi)=2\pi$$

so that the Fourier-series of $g(h(t))$ converges uniformly in $0\leqq t\leqq 2\pi$. Hence a suitable „monotonic reshuffling" of the values of $g(x)$ can "smooth out" its singularities which could produce divergence of its Fourier-series.

This fact created the impression that any „*smooth* and monotonic reshuffling" of the values of $g(x)$, though cannot *improve* the convergence behaviour, perhaps cannot make it worse. The mentioned consequence asserts that *it can* and even in the case of reshufflings as smooth as „analytical". This shows anyway that the local convergence of the series (2. 1) at $x=0$ say is a very delicate (local) property of $g(x)$, which can be spoiled by „very mild monotonic reshufflings" of values of $g(x)$ near $x=0$. More exactly we assert the following

COROLLARY TO CLUNIE'S THEOREM. There exists an everywhere continuous $g_0(x)$ with period 2π further a $h_0(t)$ strictly monotonically increasing in $(-\pi,\pi)$ and *analytical in a neighbourhood of $t=0$* with

$$(2.\ 2) \qquad h_0(-\pi) = -\pi, \quad h_0(0)=0, \quad h_0(\pi)=\pi$$

so that the Fourier-series of $g_0(x)$ (in x) converges for $x=0$ but that of $g_0(h_0(t))$ (in t) diverges for $t=0$.

For the proof let

$$(2.\ 3) \qquad w = \frac{2z-1}{2-z};$$

[2] J. PÁL, Sur des transformations de fonctions qui font converger leurs séries de Fourier, *Comptes Rendus Paris*, **158** (1914), p. 101. He proved the uniform convergence only for $\delta\leqq x\leqq 2\pi-\delta$; the final form was proved by H. BOHR in his paper „Über einen Satz von J. Pál", *Acta Sci. Math. Szeged*, **7** (1935), pp. 129—135.

putting $z=e^{it}$, $w=e^{ix}$, $-\pi \leqq t<\pi$, $-\pi \leqq x<\pi$ we get

$$e^{ix} = \frac{2e^{it}-1}{2-e^{it}}$$

i. e.

$$\sin x = \frac{3\sin t}{5-4\cos t}. \tag{2. 4}$$

$x=x(t)$ increases monotonically in $[-\pi, \pi)$ and

$$x(-\pi) = -\pi, \quad x(0)=0, \quad x(\pi)=\pi;$$

from (2. 4) $x(t)$ is analytical in a neighbourhood of $t=0$. Let $\zeta=\frac{1}{2}$ say and write the corresponding Clunie-functions from (1. 1)

$$f_1(z) = f_1(e^{it}) = u(t)+iv(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{nit} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n - i\beta_n)e^{nit} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt) + i \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta_n \cos nt + \alpha_n \sin nt)$$

and from (1. 2)

$$f_1(e^{ix}) = f_1(w) = f_2(z) = f_2(e^{it}) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\frac{1}{2}\right) e^{nit} = \sum_{n=0}^{\infty} (\gamma_n - i\delta_n)e^{nit} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\gamma_n \cos nt + \delta_n \sin nt) + i \sum_{n=0}^{\infty} (-\delta_n \cos nt + \gamma_n \sin nt) = u(x)+iv(x) =$$

$$= u\big(x(t)\big) + iv\big(x(t)\big).$$

Since the power-series of $f_2(z)$ diverges for $z=1$, at least one of the Fourier-series of $u\big(x(t)\big)$ and $v\big(x(t)\big)$ diverges for $t=0$; we may suppose that of $u\big(x(t)\big)$ does it. Since both of the Fourier-series of $u(t)$ and $v(t)$ converge for $t=0$, the functions

$$u(t) \quad \text{and} \quad u\big(x(t)\big)$$

furnish an example for the asserted phenomenon.

(Received 31 January 1966)

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (1—2), 1967, pp. 175—179.

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА ПОДОБЛАСТЕЙ

О. КИШ (Будапешт)

(*Представлено* А. Рени)

В работе [1] И. Петерсен исследовал возможность осуществления и быстроту сходимости метода подобластей, примененного к решению краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. В статье [2] Э. Б. Карпиловская обобщила результаты этой работы на случай обыкновенных линейных интегро-дифференциальных уравнений. Если на отрезке $[-1, 1]$ требуется решить уравнение типа Фредгольма

$$(1) \qquad L(y, x) \equiv y^{(m)}(x) - \lambda \left[\sum_{i=0}^{m-2} f_i(x) y^{(i)}(x) + \int_{-1}^{1} \sum_{i=0}^{m} h_i(x, t) y^{(i)}(t)\, dt\right] = f(x)$$

при условиях

$$(2) \qquad M_j(y) \equiv \sum_{i=0}^{m-1} \left[\sum_{k=1}^{l} a_{i,j,k} y^{(i)}(t_k) + \int_{-1}^{1} b_{i,j}(x) y^{(i)}(x)\, dx\right] = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

то согласно методу подобластей приближенное решение задачи ищется в виде многочлена

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i p_i(x),$$

где $p_i(x)$ многочлены степени $i-1+m$, удовлетворяющие условиям

$$p_i^{(m)}(x) = x^{i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$M_j(p_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m),$$

а числа c_i определяются из системы линейных уравнений

$$(3) \qquad \int_{x_{j-1}}^{x_j} [L(y_n, x) - f(x)]\, dx = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

где
$$1 \geqq x_0 > x_1 > \ldots > x_n \geqq -1.$$

Пусть выполняются следующие условия:

Условие А. r неотрицательное целое число, на отрезке $[-1, 1]$ $f^{(r)}(x)$ и $f_i^{(r)}(x)$ $(i=0, 1, \ldots, m-2)$ существуют, непрерывны и удовлетворяют условию Липшица с показателем α $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$, функции $h_i(x, t)$ $(i=0, 1, \ldots, m)$ при $-1 \leqq x \leqq 1$, $-1 \leqq t \leqq 1$ имеют непрерывные частные производные по аргументу x до порядка r включительно, причем r-тые производные удовлетворяют условию Липшица с показателем α равномерно относительно аргумента t.

Условие B. $-1 \leqq t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqq 1$, числа $a_{i,j,k}$ и суммируемые на отрезке $[-1, 1]$ функции $b_{i,j}(x)$ таковы, что среди решений дифференциального уравнения $y^{(m)}(x) = 0$ лишь тривиальное удовлетворяет условиям (2).

Условие C. λ не является собственным значением однородного уравнения $L(y, x) = 0$ при условиях (2).

В [2] доказано, что если выполняются условия A—C, $r \geqq 1$, β положительное число, на $[-1, 1]$ имеет место неравенство $|f_{m-2}(x)| \leqq \beta\sqrt{1-x^2}$ и в качестве точек x_j взяты узлы Чебышева

$$x_j = \cos\frac{2j+1}{n+1}\frac{\pi}{2} \qquad (j = 0, 1, \ldots, n) \tag{4}$$

или узлы Гаусса (т. е. корни многочлена Лежандра степени $n+1$), причем в случае $r=1$ и узлов Гаусса $\alpha > \frac{1}{2}$, то система линейных уравнений (3) однозначно разрешима при всех достаточно больших n и полученные методом подобластей приближенные решения $y_n(x)$ равномерно сходятся вместе со своими производными до порядка $m-1$ включительно к точному решению $y(x)$ задачи (1)—(2) и к его соответствующим производным со скоростью

$$\max_{-1 \leqq x \leqq 1} |y^{(i)}(x) - y_n^{(i)}(x)| = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-1}}\right) \qquad (i = 0, 1, \ldots, m-1) \tag{5}$$

в случае узлов Чебышева, и

$$\max_{-1 \leqq x \leqq 1} |y^{(i)}(x) - y_n^{(i)}(x)| = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha-1,5}}\right) \qquad (i = 0, 1, \ldots, m-1)$$

в случае узлов Гаусса. Кроме того

$$\max_{-1 \leqq x \leqq 1} \sqrt{1-x^2}\, |y^{(m)}(x) - y_n^{(m)}(x)| = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-1}}\right)$$

в случае узлов Чебышева и

$$\max_{-1 \leqq x \leqq 1} \sqrt{1-x^2}\, |y^{(m)}(x) - y_n^{(m)}(x)| = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha-1,5}}\right)$$

в случае узлов Гаусса.

В статье [3], заменив узлы Чебышева на точки

$$x_j = \cos\frac{j\pi}{n} \qquad (j = 0, 1, \ldots, n), \tag{6}$$

было показано, что условия теоремы И. Петерсена, являющейся следствием результата Э. Б. Карпиловской, могут быть ослаблены, а оценка порядка сходимости может быть улучшена. Оказывается, что также обстоит дело с выше цитированным результатом Э. Б. Карпиловской, так как имеет место следующая

Теорема. *Если выполняются условия* A—C, $\alpha > 0$ *при* $r=0$ *и в качестве точек* x_j *взяты узлы* (6), *то система линейных уравнений* (3) *однозначно разрешима при всех достаточно больших* n *и полученные методом подобластей приближенные решения* $y_n(x)$ *равномерно сходятся вместе со своими производными до порядка* m *включительно к решению* $y(x)$ *задачи* (1)—(2) *и его соответствующим производным со скоростью*

$$\max_{-1 \leqq x \leqq 1} |y^{(i)}(x) - y_n^{(i)}(x)| = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right) \qquad (i = 0, 1, \ldots, m). \tag{7}$$

Доказательство теоремы. Ввиду условия B, для дифференциального уравнения $y^{(m)}(x) = 0$ при условиях (2) существует функция Грина $g(x, t)$. В работе [4] она была представлена в виде

$$g(x, t) = \frac{1}{(m-1)!}(x-t)^{m-1} e(x-t) + \sum_{p=0}^{m-1} \frac{1}{p!}(x+1)^p e_p(t), \tag{8}$$

где

$$e(s) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad s \geqq 0, \\ 0, & \text{если} \quad s < 0, \end{cases}$$

а функции $e_p(t)$ кусочно-непрерывны на отрезке $[-1, 1]$.

Ввиду условия C задача (1)—(2) имеет решение $y(x)$ для любой непрерывной функции $f(x)$. Пусть

$$z(x) = y^{(m)}(x). \tag{9}$$

Тогда

$$y(x) = \int_{-1}^{1} g(x, t) z(t)\, dt. \tag{10}$$

Подставив (9) и (10) в уравнение (1), запишем его в виде

$$z(x) - \lambda \left[\sum_{i=0}^{m-2} f_i(x) \int_{-1}^{1} \frac{\partial^i g(x, t)}{\partial x^i} z(t)\, dt + \int_{-1}^{1} h_m(x, t) z(t)\, dt + \right.$$

$$\left. + \int_{-1}^{1} \sum_{i=0}^{m-1} h_i(x, s) \int_{-1}^{1} \frac{\partial^i g(s, t)}{\partial s^i} z(t)\, dt\, ds \right] = f(x)$$

или

$$z(x) - \lambda \int_{-1}^{1} k(x, t) z(t)\, dt = f(x), \tag{11}$$

где

$$k(x, t) = \sum_{i=0}^{m-2} f_i(x) \frac{\partial^i g(x, t)}{\partial x^i} + h_m(x, t) + \int_{-1}^{1} \sum_{i=0}^{m-1} h_i(x, s) \frac{\partial^i g(s, t)}{\partial s^i}\, ds. \tag{12}$$

Так как интегральное уравнение Фредгольма второго рода (11) имеет решение для любой непрерывной функции $f(x)$, *то* λ *не является собственным значением уравнения* (11). Из (8), (12) и условия А следует, что *ядро* $k(x, t)$ *по переменному* x *удовлетворяет условию Липшица с показателем* α, *если* $r=0$, *и показателем* 1, *если* $r \geqq 1$, *равномерно относительно аргумента* t. Ввиду (1) и условия А *функция*,

$$\int_{-1}^{1} k(x, t) z(t)\, dt = \sum_{i=0}^{m-2} f_i(x) y^{(i)}(x) + \int_{-1}^{1} \sum_{i=0}^{m} h_i(x, t) y^{(i)}(t)\, dt$$

имеет r*-тую производную, удовлетворяющую условию Липшица с показателем* α.

Уравнение (11) можно решать методом подобластей: приближенное решение ищется в виде многочлена $z_n(x)$ степени не выше $n-1$, удовлетворяющего условиям

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} \left[z_n(x) - \lambda \int_{-1}^{1} k(x, t) z_n(t)\, dt - f(x) \right] dx = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{13}$$

В работе [3] было доказано, что если выполняются только что подчеркнутые условия, $\alpha > 0$ при $r=0$ и имеет место (6), то система линейных уравнений (13) однозначно разрешима при всех достаточно больших n и полученные методом подобластей приближенные решения $z_n(x)$ равномерно сходятся к решению $z(x)$ уравнения (11) со скоростью

$$\max_{-1 \leqq x \leqq 1} |z(x) - z_n(x)| = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}} \right). \tag{14}$$

Для достаточно больших n положим

$$y_n(x) = \int_{-1}^{1} g(x, t) z_n(t)\, dt. \tag{15}$$

Если

$$z_n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^{i-1},$$

то очевидно

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i p_i(x).$$

Из (15) получаем:

$$y_n^{(m)}(x) = z_n(x). \tag{16}$$

Ввиду (12), (13), (15) и (16), имеет место (3), т. е. $y_n(x)$ есть полученное методом подобластей приближенное решение задачи (1)—(2). Таким образом, решение этой задачи существует при всех достаточно больших n.

Если n достаточно велико, то уравнения (3) разрешимы при любых непрерывных функциях $f(x)$ и, следовательно, при любых свободных членах. Поэтому их решение единственно, т. е. задача (1)—(2) имеет лишь одно решение.

Если $i=m$, то оценки (7) совпадают с оценками (14). Из (10), (15) и (14) следует (7) при $i=0, 1, \dots, m-1$. Ввиду (7), полученные методом подобластей приближенные решения $y_n(x)$ вместе со своими производными до порядка m включительно равномерно сходятся к решению $y(x)$ задачи (1)—(2) и его соответствующим производным.

(Поступила 2. 2. 1966.)

Литература

[1] И. Петерсен, О сходимости приближенных методов интерполяционного типа для обыкновенных дифференциальных уравнений, *Изв. АН ЭССР, сер. физ.-мат. и техн. наук,* **10** (1961), стр. 3—12.

[2] Э. Б. Карпиловская, О сходимости метода подобластей для обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений, *Журнал выч. мат. и мат. физ.*, **5** (1965), стр. 124—132.

[3] К. Фанта и О. Киш, О сходимости интерполяционных методов решения граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, *Труды мат. инст. АН Венгрии*, **9** (1964), стр. 89—112.

[4] О. Киш, О сходимости метода совпадения, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **17** (1966), стр. 433—442.

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (1—2), 1967, pp. 181—188.

ON THE NUMBER OF CIRCLES DETERMINED BY n POINTS

By

P. D. T. A. ELLIOTT (Nottingham, England)

(*Presented by* P. ERDŐS)

Let S be a set of n points in, for example, the real projective plane, and not all lying on a straight line. Then it was conjectured by SYLVESTER in 1893, and proved by GALLAI in 1933, that S determines at least one line containing exactly two points. At that time much interest in such questions was aroused by ERDŐS, and others, and many further proofs were given. Various extensions of the basic result were conjectured, principally by ERDŐS, and later proved. In particular it was shown that in the above circumstances S determined at least n distinct lines, and later, that if no $n-1$ points of S lay on the same line and n was sufficiently large, then S determined at least $2n-4$ straight lines, and so on.

Further, it was suggested that if the points of S did not lie all on a circle or a line then for some suitable constant $c>0$, S determines at least cn^2 distinct circles. In the following note we prove this amongst similar and connected results. Much use is made of ideas and results in the paper of L. M. KELLY and W. O. J. MOSER [1], and so we now summarise them here. Their paper also contains an extensive bibliography.

Let us call a line determined by S which contains exactly two points an *ordinary* line, as in [1]. Then KELLY and MOSER showed that to each point P_i of S one could attach a positive integer I_i called the *index*, and that the number m of ordinary lines satisfied

$$6m \geqq \sum_{i=1}^{n} I_i \tag{1}$$

unless S determined only one line. Furthermore they showed that either P_i lay on exactly two ordinary lines or that $I_i \geqq 3$ (their Theorem 3. 3). From this and (1) we deduce as they did that

$$m \geqq 3n/7. \tag{2}$$

It has been conjectured that if $n>7$ then $m \geqq n/2$. If true this would be best possible as Professor ERDŐS informs me that TH. MOTZKIN has an example of a set containing $2n$ points but determining only n ordinary lines.

Let t_i denote the number of connecting lines determined by S which contain exactly i points of S, and let

$$t = \sum_{i=2}^{n} t_i.$$

Let v_i denote the number of points of S which are incident with exactly i connecting lines. All these definitions are for $i=2, \ldots, n$. Then counting the points covered by lines counted in t_i for $i=2, \ldots, n$ we obtain their result (4. 61), namely

$$\sum_{i=2}^{n} it_i = \sum_{i=2}^{n} iv_i. \tag{3}$$

The most important result that they prove in the section of their paper under consideration is that

$$m = t_2 \geqq 3 + t_4 + 2t_5 + 3t_6 + \ldots \tag{4}$$

and hence that

$$3t - 3 \geqq \sum_{i=2}^{n} iv_i. \tag{5}$$

From this they deduced the following

LEMMA 1. *If at most $n-k$ points of S are collinear and*

$$2n \geqq 3(3k-2)^2 + 3k - 1$$

then

$$t \geqq kn - \tfrac{1}{2}(k-1)(3k+2).$$

In the case $k=2$ we see that $t \geqq 2n-4$ if $n > 27$, and for such values of n this result is easily seen to be best possible. By modifying their proof in individual cases they could show that if $7 \leqq n \leqq 9$, $t \geqq 2n-5$, and if $n=10$ then $t \geqq 2n-4$. They conjectured that this final inequality held if $10 < n < 27$. We shall prove this as Theorem 3.

THEOREM 1. *Let S be a set of n points in the Euclidean plane not all on a circle or a straight line. Then if $n > 3$, S determines at least $2n(n-1)/63$ circles containing exactly three points.*

THEOREM 2. *Under the hypotheses of Theorem 1 with $n > 393$ S determines at least $\binom{n-1}{2}$ distinct circles.*

For convenience we prove these together. The second theorem, conjectured by ERDŐS, is clearly best possible for the range of n given. It would be interesting to reduce the bound on n here. However it was pointed out by SEGRE that by projecting a cube onto a plane in an obvious way we can see that the result is false for $n=8$. The status of Theorem 1 is not so clear. In view of MOTZKIN's example mentioned earlier, it will turn out that the constant $2/63$ could at most be improved to $1/18$ using the proof given. However, it is entirely conceivable that the result of Theorem 1 holds with an estimate cn^2 where c is much larger than $2/63$ or even $1/18$. Possibly the correct bound is $n^2/6 + O(n)$. The proof of the first of these theorems is founded upon the following lemma.

LEMMA 2. *Let P_i be any point of a set S satisfying the hypotheses of Theorem 1. Then S determines at least*

$$2(n-1)/21$$

circles containing exactly three points P_j, one of which is P_i.

PROOF. In what follows we use $\bar{A}$ to denote the inverse of a set A. Inverting the system with respect to P_i we see that $S \sim P_i$ becomes a set of $n-1$ points not lying on a straight line. The desired will follow if we can show $\overline{S \sim P_i}$ generates at least $2(n-1)/21$ ordinary lines not meeting P_i.

There are two cases.

Case 1. Suppose that P_i lies on at most $(n-1)/3$ of the ordinary lines generated by $\overline{S \sim P_i}$. Then since by (2) the number of these is at least $3(n-1)/7$ the result is immediate.

Case 2. If P_i does not satisfy the requirement of case one then by counting the points of $S \sim P_i$ on lines through P_i it is clear that P_i cannot lie on more than $(n-1)/3$ of the ordinary lines determined by $\overline{S \sim P_i} \cup P_i$. Since by (2) the number of such ordinary lines also exceeds $3(n-1)/7$ the proof of the lemma is completed.

PROOF OF THEOREM 1. The proof is immediate from applying Lemma 2 with $i=1, \ldots, n$ and noting that each circle is counted in this manner at most three times.

PROOF OF THEOREM 2. We see from (4) that

$$t_3 + 2t_2 \geqq 3 + t_2 + t_3 + t_4 + 2t_5 + \ldots \geqq 3 + t. \tag{6}$$

We now reconsider the argument of Theorem 1. Let P_i be a particular point of S and let the maximum number of points of S which lie on a circle or line be $n-r$. Then $\overline{S \sim P_i}$ has at most $n-r-1$ points lying on any connecting line. Hence applying Lemma 1 to $\overline{S \sim P_i}$ and using (6) we see that providing $k \leqq r+1$ and

$$2(n-1) \geqq 3(3k-2)^2 + 3k - 1 \tag{7}$$

$\overline{S \sim P_i}$ determines at least

$$\tfrac{1}{2}\{3 + k(n-1) - \tfrac{1}{2}(k-1)(3k+2)\}$$

distinct lines each containing at most three points. Moreover the number of these passing through P_i certainly cannot exceed $(n-1)/2$. Those of our lines which do not contain P_i now invert into circles generated by S and on which lie P_i and at most three other points each. It is therefore clear that if we carry out this process for $i=1, \ldots, n$ we obtain as a lower bound for the number of circles generated by S

$$\frac{n}{8}\left\{3 + (k-1)(n-1) - \frac{1}{2}(k-1)(3k+2)\right\},$$

since any given circle of our construction is counted no more than four times. Using $k=6$ with $n \geqq 394$ we see that (7) is satisfied, and the theorem therefore holds for those S with $r > 5$.

Thus we may assume that $1 \leqq r \leqq 5$. We treat these cases by an *ad hoc* argument. Suppose for example we can find a circle Γ containing $n-r$ points with $2 \leqq r \leqq 5$. Let Q_1, Q_2 be points of S not on Γ.

Counting circles determined by the points Q_i and *pairs* of points of S on Γ we see that generates at least

$$2\binom{n-r}{2} - \frac{1}{2}(n-r) \tag{9}$$

circles. For, each point Q_i gives rise to $\binom{n-r}{2}$ circles in this manner, and any circle is counted twice only if it contains four or more points including Q_1, Q_2. Inverting the system of such exceptional circles with respect to Q_1 we obtain a system of lines, each containing at least three points, one of which is Q_2. Clearly, the number of such lines, and therefore the number of circles counted twice, cannot exceed $(n-r)/2$. For $2 \leqq r \leqq 5$ and $n \geqq 394$ the above estimate (9) easily exceeds $\binom{n-1}{2}$. A similar proof suffices if Γ is replaced by a line.

We are thus left with the two cases when $n-1$ points of S lie on a circle, or on a line. The number of circles determined by S is then $\binom{n-1}{2}+1$ and $\binom{n-1}{2}$, respectively, the last case being the extremal. This completes the proof of Theorem 2.

It is clear that if at most $n-k$ points of S lie on a circle, or a line, the number of circles determined by S exceeds $c_1 k n^2$, provided only that $k^2 < c_2 n$. It is natural to ask whether the condition $k > c_3 n$ guarantees that S generates at least $c_4 n^3$ circles. There is an analogous question for the number of lines determined by S. Indeed both results would follow from the following conjecture of ERDŐS.

CONJECTURE. *There exists a constant $c>0$, independent of n, k so that if there are given n points in the plane, no $n-k$ of them on a straight line, then the points determine more than ckn lines.*

Here, as always, we use $c, c_1, c_2, \ldots$ to denote positive constants. In connection with these problems the following result is perhaps of interest.

Let S, T be two sets of points, not all the points of S lying on a line. Let $\bar{\bar{S}}$ denote the cardinality of S, and $\bar{\bar{T}}$ that of T, and further let $\bar{\bar{S}}^{\frac{1}{2}} > c_5 \bar{\bar{T}} > c_6$. Then S generates at least $\bar{\bar{S}} - \bar{\bar{T}}$ lines not meeting T.

The number of lines here is best possible, but it would be interesting to know if the condition on T could be eased to $\bar{\bar{T}} < \bar{\bar{S}}$. We only sketch a proof. Let the maximum number of points of S on a straight line be $\bar{\bar{S}}-k$, with $2\bar{\bar{T}} < k < c_7 \bar{\bar{S}}^{\frac{1}{2}}$. Then by Lemma 1, S generates at least $k\bar{\bar{S}} - c_8 k^2$ lines, of which at most $\bar{\bar{S}} \cdot \bar{\bar{T}} < \frac{1}{2} k \bar{\bar{S}}$ meet T. If c_6 is sufficiently large, but fixed, the desired result is immediate. We may therefore suppose that $k \leqq 2\bar{\bar{T}}$.

Let $2 \leqq k \leqq 2\bar{\bar{T}}$ hold. Then we can find $\bar{\bar{S}}-k$ collinear points in S, and two further points P_1, P_2 not on the line they determine. Consider the lines determined by points on our line and P_1 say. There are $\bar{\bar{S}}-k$ of these, and at most $\bar{\bar{T}}$ meet T. Hence considering lines through P_1 and P_2 in turn we see that if c_6 is suitably large the number of lines determined by S which are of the desired type is at least

$$2(\bar{\bar{S}}-k-\bar{\bar{T}}) \geqq 2(\bar{\bar{S}}-3\bar{\bar{T}}) > \bar{\bar{S}}-\bar{\bar{T}}.$$

Finally, if $k=1$ we have the extremal case, and the result is clear.

The case $\bar{\bar{T}}=1$ is interesting for the following application.

Let S be a set of n points not all lying on a circle or a straight line. Let P be any point of S. Then S determines at least $n-2$ distinct circles containing P.

This result follows easily on inverting with respect to P, and it is in a certain sense best possible. Since we need the result on which it is founded later on, we give a short inductive proof of

LEMMA 3. *Let S be a set of $n>2$ points not all on a line. Let P be a point not in S. Then S determines at least $n-1$ distinct lines not meeting P.*

PROOF. The proposition is trivial if $n=3$. Suppose that it holds for all sets of $n-1$ points. If now S' is a set of n points we can find, as in Lemma 2, an ordinary line determined by points Q_1, Q_2 of S', and not meeting P. Clearly not both of $S' \sim Q_1$ and $S' \sim Q_2$ can lie on a straight line. Suppose, for example, that $S' \sim Q_1$ is not contained in a line. Then we may apply the inductive hypothesis to it and obtain at least $n-2$ lines which are distinct from our ordinary line. Similarly with $S' \sim Q_2$ in the alternative case. This completes the proof.

With simple changes the same proof shows that if $n \geqq 4$, then we can replace $n-1$ by n unless S contains $n-1$ points on a line.

THEOREM 3. *Let S be a set of n points, no $n-1$ of which lie on a straight line. Then S determines at least $2n-4$ distinct lines if $n \geqq 10$.*

For the proof we need two lemmas.

LEMMA 4. *Let S determine a line containing exactly $n-r$ points of S. Then S determines at least*

$$r(n-r)-\tfrac{1}{2}r(r-1)+1$$

distinct lines.

PROOF. This is Lemma 4. 1 of [1].

We define a *δ-configuration* to be two ordinary lines with a point of S in common. We then need the following

LEMMA 5. *If $S = n>10$, and not all the points of S lie on a straight line, then either S determines a δ-configuration, or $t \geqq 2n-4$.*

PROOF. If for S $t_2>n/2$, it is clear that S must determine a δ-configuration. Hence we may assume that $2t_2 \leqq n$. Recalling that any point P_i not lying on two ordinary lines has index $I_i \geqq 3$, we see that if S does not generate a δ-configuration we must have, by (1), that $2t_2 \geqq n$. Hence $2t_2=n$, and every point may be assumed to lie on precisely one ordinary line from now on. Moreover we need only consider cases when n is even. We proceed much as KELLY and MOSER did in their proof of our Lemma 1 so we only sketch the details which differ.

Case 1.

$$\sum_{i=1}^{5} v_i \leqq 2.$$

Then by (5)

$$3t \geqq 3+4+6(n-2)$$

so that

$$t \geqq 2n-1.$$

Case 2.

$$\sum_{i=1}^{5} v_i \geqq 3.$$

Thus we can find three points P_1, P_2, P_3 each incident on at most 5 connecting lines, one of which is an ordinary line. Since we may assume that S does not generate a δ-configuration, at least two of the lines P_iP_j $i \neq j$ cannot be ordinary. Suppose P_1P_2 is not ordinary. Then all points of S not on the line P_1P_2 must lie on the intersections of connecting lines joined to P_1 or P_2, and we see that the number of points of S on P_1P_2 is at least $n-11$.

Let l be the set of points of S on the line determined by P_1 and P_2.

Suppose first that $n \geqq 20$ holds. If now $\overline{\overline{l}} \leqq n-10$, we maintain that each point P of l, is incident on at least 4 lines determined by S, besides l. For, any line meeting P cannot contain more than 4 further points of S, as this would imply that either P_1 or P_2 was incident on 6 or more lines, contrary to assumption. Thus the number of lines meeting P besides l and one ordinary one, is at least

$$\tfrac{1}{4}(n-\overline{\overline{l}}-1)>2.$$

It follows from this result that the points of l, between them, lie on at least

$$1+4\overline{\overline{l}} \geqq 1+4(n-11)>2n-4$$

lines determined by S.

If, on the contrary, $\overline{\overline{l}} > n-10$, then Lemma 4 shows immediately that the result stated in the present lemma is correct.

The case $n=18$ can be dealt with on similar lines. The number of lines determined by S is always at least $2n-4$, save possibly if $\overline{\overline{l}} = n-11$. In such a case, the 7 points of l are incident on at least 5 lines, whilst the 11 points of $S \sim l$ are incident on at least 7 lines. Applying the inequality (5) we see that

$$3t \geqq 3+\sum_{i=2}^{n} v_i \geqq 3+11\cdot 7+7\cdot 5.$$

From this, the desired result $t \geqq 2n-4$ follows.

The case $n=16$ needs also only minor alterations. If $\overline{\overline{l}} \geqq n-9$, we can apply Lemma 4 to obtain a sufficiently good lower bound for t. Thus we need only consider the possibilities $\overline{\overline{l}}=6$ and $\overline{\overline{l}}=5$. If $\overline{\overline{l}}=6$, we can apply the inequality (5) once again, to show that

$$3t \geqq 3+10\cdot 6+6\cdot 5 = 93 > 3(2n-4).$$

A similar application to the case $\overline{\overline{l}}=5$, shows that $3t \geqq 3+5n = 83$. Thus $t>27$, as desired.

We are left to consider the cases $n=12$, 14. We do not carry out the details as they are simpler. Corresponding to the proposition in Case 1 we take the respective propositions $\sum_{i=1}^{4} v_i \leqq 1$, and $\sum_{i=1}^{4} v_i = 0$.

This completes the proof of the lemma.

PROOF OF THEOREM 3. The proof is by induction on all sets S of desired type with $\overline{\overline{S}}=n$, and we know from the work of KELLY and MOSER that the proposition stated in the enunciation of the theorem holds if $n=10$. Assume therefore that we have proved the result for sets of cardinality up to $n-1$. If now $\overline{\overline{S}}=n$ Lemma 4 shows that either $t \geqq 2n-4$ holds for S, or that S determines a δ-configuration with common point P say. If no $n-2$ points of S lie on a line we apply our inductive hypothesis to $S \sim P$ in the latter case. Then $S \sim P$ generates at least $2(n-1)-4$ lines not in our δ-configuration, and our proposition is proved. We are thus left with the situation when S determines a line containing exactly $n-2$ of its points. For such a set the desired result is obvious. This completes the proof of Theorem 3.

We have shown that if $n>1$ is odd, then S determines a δ-configuration unless all of its points lie on a straight line. The true condition here is probably $n \geqq 6$, and it is desirable to have a proof of this. Indeed more has been conjectured by ERDŐS, who suggests that save for certain trivial cases S determines a triangle, all of whose sides are ordinary lines.

Finally we consider the following problem, often set in books of children's puzzles.

THEOREM 4. *Let S be a set of $n \geqq 3$ points, not all on a line. Then S determines at least* $\binom{n-1}{2}$ *distinct triangles.*

It is clear that this result follows from Theorem 1 if n is sufficiently large, but we give here a proof depending only upon Lemmas 1 and 3, and which works for all $n>2$. In an obvious sense this result is best possible.

PROOF. If $n-1$ points of S lie on a straight line the result is evident. Assume therefore that this is not the case. Let P be a point of S and let $n \geqq 7$ hold.

Case 1. *The number of connecting lines incident with P exceeds $n/2$.* Then forming triangles from points on these lines and P, we see that the number of triangles generated by S, and containing P, exceeds

$$\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right) \geqq \frac{3}{2}n-4.$$

Indeed, if P lies on r connecting lines we still have the second of these inequalities provided only that $r \geqq \frac{n}{2}-1$. For if $r<\frac{n}{2}$ then at least one of the connecting lines contains two or more points besides P.

Case 2. *The number of connecting lines incident with P does not exceed $(n-2)/2$.* Then applying Theorem 3 (we recall the note immediately before statement of Theorem 1), we see that the number of lines determined by S and not meeting P is at least

$$2n-5-\left(\frac{1}{2}n-1\right) = \frac{3}{2}n-4.$$

Forming triangles with pairs of points on these lines and P we see that P always lies on at least $(3n-8)/2$ distinct triangles generated by S. Doing this for each point P of S we see, since each triangle is counted at most three times, that S determines at least

$$\frac{n}{3}\left(\frac{3n}{2}-4\right) > \binom{n-1}{2}$$

distinct triangles. We are thus left with the cases $2 < n \leqq 6$. From the footnote to Lemma 3 we see that any point P of S is the vertex of at least $n-1$ distinct triangles, unless exactly $n-2$ points of S lie on a line. Thus the number of triangles generated by S is at least

$$\frac{n}{3}(n-1) \geqq \binom{n-1}{2}.$$

If, on the other hand, S does contain $n-2$ points on one line, and so, precisely $n-2$ points on a line, the result is almost self evident. Indeed, if $n > 3$ it is easily checked that the inequality of the theorem is sharp.

I should like to thank Professor ERDŐS for informing me of the examples of MOTZKIN and SEGRE, and Dr. BOLLOBÁS for pointing out an improvement of detail in Theorem 2.

(Received 8 February 1966)

Reference

[1] L. M. KELLY and W. O. J. MOSER, On the number of ordinary lines determined by n points, *Canad. J. Math.*, **10** (1958), pp. 210—219.

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (1—2), 1967, pp. 189—190.

EXAMPLES OF GENERALIZED SHEFFER FUNCTIONS

By

A. ABIAN and S. LaMACCHIA (Columbus, Ohio, USA)

(*Presented by* P. TURÁN)

In what follows we represent by a natural number n the n-element set $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ and by n^k the k-fold cartesian product of n for $k=1, 2, 3, \ldots$.

By an *n-Sheffer function* $s_n(x, y)$ we mean a function from n^2 into n such that every function from n^k into n is obtained by means of superpositions of $s_n(x, y)$ where none of constants $0, 1, \ldots, n-1$ appears in any superposition. Thus, for n-valued logic $s_n(x, y)$ can serve as a primitive binary connective in the same sense that the usual Sheffer Stroke is a primitive binary connective for 2-valued logic.

It is known [1] that for $n \geqq 3$ there are many permutations on the set $\{0,1 \ldots, n-1\}$ each of which together with the cyclic permutation

(1) $$S=(0, 1, \ldots, n-1)$$

generate the symmetric group S_n. We denote such a permutation by $g_n(x)$ and we call $g_n(x)$ an *S-cogenerating permutation.*

Below all arithmetic operations are performed mod n and the result is reduced to be $\geqq 0$ and $\leqq n-1$.

THEOREM 1. *For every $n \geqq 3$ and every S-cogenerating permutation $g_n(x)$ each of the $n-1$ functions $p_n^m(x, y)$ from n^2 onto n is an n-Sheffer function where $0 \leqq m \leqq n-2$ and*

(2) $$p_n^m(x, x+k) = x+k+1, \qquad 0 \leqq k \leqq m$$

(3) $$p_n^m(x, x+m+1) = g_n(x)$$

and otherwise

(4) $$p_n^m(x, y) = 0.$$

PROOF. Consider the superposition $p_n^m(x, x)$ of $p_n^m(x, y)$. In view of (2) we have

(5) $$p_n^m(x, x) = x+1.$$

Thus, as (5) shows, under each $p_n^m(x, x)$ the set $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ is transformed onto itself in the same way that it is transformed by the permutation S given in (1). We denote this by

(6) $$p_n^m(x, x) = S.$$

Next, consider the superposition $T_n^m(x, x)$ of $p_n^m(x, y)$ given by

(7) $$T_n^m(x, x) = \underbrace{p_n^m(x, \ldots, p_n^m(x, p_n^m(x, p_n^m}_{p_n^m \text{ iterated } (m+2) \text{ times}}(x, x))), \ldots).$$

But then, clearly, in view of (2) and (3) we obtain from (6)

$$T_n^m(x, x) = g_n(x). \tag{8}$$

Hence, as (8) shows under each superposition $T_n^m(x, x)$ of $p_n^m(x, y)$ given by (7), the set $\{0, 1, ..., n-1\}$ is transformed onto itself in the same way that it is transformed by the S-cogenerating permutation $g_n(x)$.

Thus, each $p_n^m(x, y)$ as given by (2), (3) and (4) is a binary function from n^2 onto n whose superpositions as (6) and (8) show generate the symmetric group S_n. However, these conditions, according to [2] are sufficient to ensure that each $p_n^m(x, y)$ is an n-Sheffer function, as desired.

THEOREM 2. *For every $n \geqq 3$ and every S-cogenerating permutation $g_n(x)$ each of the $n-1$ functions $q_n^m(x, y)$ from n^2 onto n is an n-Sheffer function where $0 \leqq m \leqq \leqq n-2$ and*

$$q_n^m(x+k, x) = x+k+1, \qquad 0 \leqq k \leqq n \tag{2'}$$

$$q_n^m(x+m+1, x) = g_n(x) \tag{3'}$$

and otherwise

$$q_n^m(x, y) = 0.$$

PROOF. Precisely as the proof of Theorem 1 except for (7) which must be replaced by

$$T_n^m(x, x) = \underbrace{q_n^m(\dots q_n^m(q_n^m(q_n^m}_{q_n^m \text{ iterated } (m+2) \text{ times}}(x, x), x), x), \dots, x).$$

THEOREM 3. *For every $n \geqq 3$ and every S-cogenerating permutation there are at least*

$$2 \cdot \frac{n^{n(n-1)}-1}{n^n-1}$$

n-Sheffer functions.

PROOF. Let us observe that in the proof of Theorem 1 no essential use was made of (4). On the other hand, (2) and (3) fix the values of each $p_n^m(x, y)$ only at $n^2 - n(n-m-2)$ ordered pairs (x, y). Thus, for every m with $0 \leqq m \leqq n-2$ there are $n^{n(n-m-2)}$ functions from n^2 onto n each of which satisfy (2) and (3) and each of which is an n-Sheffer function. Consequently, Theorem 1 yields the existence (and explicit expressions) of

$$n^{n(n-2)} + n^{n(n-3)} + \dots + 1 = \frac{n^{n(n-1)}-1}{n^n-1}$$

n-Sheffer functions. Similarly, Theorem 2 yields the same number of n-Sheffer functions. However, as (2), (3) and (2'), (3') show each n-Sheffer function yielded by Theorem 1 is different from that yielded by Theorem 2. Thus the theorem is proved.

(Received 21 February 1966)

References

[1] S. PICCARD, *Sur les bases du groupe symétrique* (Library Vuibert, Paris, 1964), pp. 12—18.

[2] A. SALOMAA, On the composition of functions of several variables ranging over a finite set, *Annales Universitatis Tukuensis*, Ser. A. I **41** (1960), p. 48.

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (1—2), 1967, pp. 191—206.

A NEW PROOF AND GENERALIZATIONS OF A THEOREM OF ERDŐS AND PÓSA ON GRAPHS WITHOUT $k+1$ INDEPENDENT CIRCUITS

By

M. SIMONOVITS (Budapest)

(*Presented by* P. ERDŐS)

Introduction

Let $L_1, \ldots, L_m$ be the subgraphs of a graph G. They are called independent, if no two of them have common vertices. Consider certain subgraphs and certain vertices of G. The vertices are said to form a representing set for the considered subgraphs if each of the considered subgraphs contains at least one of the considered vertices. If it is unambiguous, which subgraphs are represented, it will be said shortly: the considered vertices form a representing set.

DIRAC and GALLAI posed the following problem:

Consider those graphs, which do not have $k+1$ independent circuits. If there is an integer r, such that each considered graph contains a representing set for its circuits consisting of less than r points, denote by $r(k)$ the smallest of these integers. If there exists no integer with such a property, let $r(k)=\infty$. Now, the problem is the following: Whether $r(k)<\infty$ or not, and if it is, what is the order of its magnitude?

P. ERDŐS and L. PÓSA proved the following [1]:

THEOREM 1. *There are absolute constants c_1 and c_2 such that*

$$c_1 k \log k < r(k) < c_2 k \log k.$$

This theorem will be proved by a new method.

ERDŐS and PÓSA, proving the lower bound in Theorem 1, proved only the existence of a graph, which does not contain $k+1$ independent circuits, and in which there is no representing set (for the circuits) of less than $c_1 k \log k$ vertices. In our proof an explicit graph will be given which does not have $k+1$ independent circuits, but each representing set of which consists of at least $\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)k \log k$ vertices.

On the other hand, ERDŐS and PÓSA, proving the upper bound in Theorem 1, used two theorems, one of which is due to GALLAI [2] and seems to be a rather difficult theorem. This side of the inequality will be proved by a rather simple and elementary argument. However this is not only a simple proof of Theorem 1, but a method, which is also applicable with some modification in some other cases. To show this a theorem, analogous to Theorem 1 will be proved by this method.

Further I prove a generalization of Theorem 1, and in a special case of Theorem 1 I give a better upper bound than in the general case. (The constants in the general case are much better, than the constants of ERDŐS and PÓSA.)

It is an interesting result of this paper that the graph, which attains the lower bound in Theorem 1, has $n=2^{l+1}\cdot l$ vertices each of which has valence 3, and the shortest circuit is longer than $2l=2\overset{2}{\log}\, n-O(\log\log n)$.

To understand, why this graph is interesting, we must know that ERDŐS proved in [3]: If G is a graph of n vertices, each vertex of which is of valence $\geqq 3$, then G contains a circuit shorter, than $2 \overset{2}{\log} n$. On the other hand ERDŐS proved the existence of a graph of n vertices, each of which is of valence $\geqq k$, in which the circuits are longer than $c \log n$ (where c is a constant depending only on k). Our graph will be an example (moreover, an almost best possible example) of such a graph if $k=3$.

Finally our graph will also prove the lower bound in the mentioned theorem, which is very similar to Theorem 1.

Definition, fundamental notions

We consider non-oriented graphs allowing loops and multiple edges:

A *graph* consists of two sets. The elements of the first set are called the *vertices*, or the points, the elements of the second set are called the *edges* of the graph, and two (not necessary different) vertices of the graph belong to each edge: these vertices are called the *endpoints* of the edge. An edge is called a *loop*, if its endpoints are not distinct. A set of edges form a multiple edge, if each of them has the same endpoints.

The graphs will be denoted by $G, H, K, T, \ldots,$ the vertices by $a, b, c, \ldots,$ and the edges by $\alpha, \beta, \gamma, \ldots,$ or by (a, b), (a, a).

If a subset of the vertices and a subset of the edges of a graph G form a graph G_1, we say, G is a *subgraph* of G. The necessary and sufficient condition for this is, that if an edge occurs in the considered subset of edges, then its endpoints must be contained in the considered subset of vertices. G_1 is a *spanned subgraph* of G if it can be obtained by omitting certain vertices and those edges from G, at least one endpoint of which is among the omitted vertices.

Suppose $a_1, \ldots, a_n$ $(n \geqq 2)$ are vertices and $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ the edges of G, where the endpoints of the edge α_i are a_i and a_{i+1}. The a_i's are not necessarily distinct vertices and the α_i's are not necessarily distinct edges, but $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$. The subgraph of G determined by them is called a *line*, and if its vertices are all different, it is called a *path*. a_1, a_n are called its endpoints. If $a_1, \ldots, a_{n-1}$ are all distinct, but $a_n = a_1$, the line is called a *circuit*. The *length* of a line is the number of its edges, here for e.g. $n-1$. Thus a loop is a circuit of length 1.

The *valence* of a vertex is the number of those edges, at least one endpoint of which is the vertex, counted the loops twice. A vertex of valence $\geqq 3$ is called a *branchpoint*.

In our problems (and generally, in the problems of topological type) the vertices of valence 2 have no importance. Because of these the following definitions are useful:

A path $(a_1, \ldots, a_m)$ is called a *topological edge* if $a_2, \ldots, a_{m-1}$ are of valence 2, but a_1, a_m are not. If $(a_1, \ldots, a_s)$ is a line, for which $a_1 \neq a_s$ or $a_1 = a_s$ but which contains at least two branchpoints, it is the union of topological edges, every two of which have no common vertices except their endpoints. The *topological length* of such a line is the number of its topological edges. If $a_1 = a_s$ and $(a_1, \ldots, a_s)$ has only one branchpoint, it will be called a line of topological length 1; if $(a_1, \ldots, a_s)$ has no branchpoint, it will be called a line of topological length 0. (In the first case, i. e., if the line contains just one branchpoint, it is also a topological edge.) Generally the topological length will be used, and the previous notion will be used only in those cases, when all the vertices of G are branchpoints. In this case the length and the topological length are equal.

To abbreviate the word "topological", instead of topological edges or topological length only t-edge or t-length will be written.

A graph is *connected* if each pair of its vertices can be joined by a path. If a graph is not connected, it is the union of distinct maximal connected subgraphs, called its *components*. $\bigcup_1^n G_i$ denotes a graph, which consists of n independent subgraphs, the ith of which is G_i.

A graph is finite if the sets of its vertices and edges are finite. For the sake of simplicity we always consider finite graphs but all the results of the paper, except those, in which the number of the vertices of the graph is explicitly stated, are also true for infinite graphs.

A graph having no circuits is called a *forest*, a connected forest is called a *tree*. A forest has less edges, than vertices, or in other words, if a graph has at least as many edges, as vertices, it contains a circuit.

A graph having only branchpoints and without short circuits

Here we shall deal with a problem, which is connected with Theorem 1, as will be seen later. The problem is the following:

What can be said about the length of the shortest circuit of a graph of n vertices, if all the vertices are branchpoints? Or:

What can be said about the shortest t-length of the circuits of a graph G, if G has n branchpoints, and the other vertices are of valence 2?

(The equivalence of these problems is easily seen.)

ERDŐS proved [3] that the t-length of the topologically shortest circuit of such a graph is $\leqq 2[\overset{2}{\log} n]$. (In the following $\log x$ always denotes $\overset{2}{\log} x$.)

A slight sharpening of this result is

LEMMA 1. *If G is a graph of $n \geqq 2$ vertices, each vertex of which is of valence $\geqq 2$, and p is a fixed branchpoint of G, then G contains a circuit C, the sum of whose* t*-length and* t*-distance from p is* $\leqq 2[\log n]$.

(If G_1, G_2 are the subgraphs of a graph G, their distance (or their t-distance) is the length (or t-length) of the shortest (or topologically shortest) path, joining them.)

The proof of this lemma is essentially the same as in [3]. However it will be proved here, as it is a fairly simple, but very important result for this paper.

PROOF. The proof is indirect. Suppose, G is a graph satisfying the conditions of our lemma, and p is a branchpoint of G such that there is no circuit in G whose sum of its t-length and t-distance from p is $\leqq 2[\log n]$.

a) First consider those points, which can be joined to p by a path of t-length $\leqq [\log n]$. If there is a vertex among these, which can be joined to p by two different paths of t-length $\leqq [\log n]$, then there are two arcs of these paths having in common their endpoints, but no other vertices, and they form a circuit, for which the sum of its t-length, and t-distance from p is $\leqq 2[\log n]$. This is a contradiction.

b) Suppose, all the branchpoints considered by us can be joined to p by one and only one path of t-length $\leqq [\log n]$.

Let L be a path of G of t-length i ($i < [\log n]$) one endpoint of which is p. Denote by q the other endpoint of L. We prove that L is contained in at least two different paths, one endpoint of which is p, and the t-length of which is $i+1$. As q is a branchpoint, either there is a circuit having the only branchpoint q, or there are three branchpoints of G: a, b, c, which are connected to q by t-edges. In the first case the sum of the t-length and the t-distance of our circuit from p is $\leqq [\log n]$ — this is a contradiction. In the second case we must prove that at most one of the vertices a, b, c can be contained in L. This means, we can continue L at least in two ways by adding to it one of the t-edges (a, q), (b, q), (c, q) whose first endpoint is not contained in L. Indirectly, suppose, a, b, are points of L. (Here we did not suppose that a, b, c were different.) Thus q is joined to p by two different paths of t-length $i+1$ — this is also a contradiction.

So we may suppose, an arbitrary path of t-length $i < [\log n]$ is contained in at least two paths of t-length $i+1$ (where one endpoint of the paths is p), further, all the considered branchpoints of G are connected with p by just one path of t-length $\leqq [\log n]$. Thus the number of the considered branchpoints is more than

$$3+3\cdot 2+\ldots+3\cdot 2^{[\log n]-1} = 3\cdot 2^{[\log n]}-3 \geqq n \quad \text{if} \quad n \geqq 2$$

and this contradiction proves the lemma.

Lemma 1 is asymptotically exact. We have mentioned that ERDŐS proved the existence of a graph of n vertices, all the vertices of which are of valence $\geqq k$, but the shortest circuit of which is longer, than $c_k \log n$, where c_k is a constant depending only on k. Now for $n = 2l\cdot 2^l$ we give a graph, which has n vertices of valence 3, and the shortest circuit of which is of length $2l+1$. As

$$2l+1 = 2\log n - 2\log l - 1 = 2\log n - 2\log\log n + O(1)$$

our graph shows that Lemma 1 gives almost the best possible result, for some special n, in connection with the posed problem.

The construction of $G(l)$

Let l be a positive integer, $n = l\cdot 2^{l+1}$. The vertices of our graph $G(l)$ will be the numbers: $1, \ldots, n$.

The edges of $G(l)$ are of two type: "short" edges and "long" edges.

A) The "short" edges are: $(1, 2)$, $(2, 3)$, ..., $(n-1, n)$, $(n, 1)$. They form a circuit C in $G(l)$. The length of an edge is defined as the length of the shorter arc of those two arcs of C which are determined by the endpoints of the edge (we use this concept only in connection with $G(l)$). Thus the length of the edge (x, y) is $\min\{|x-y|, (x+n-y), (y+n-x)\}$. For e.g. the length of the "short" edges is 1.

b) The "long" edges:

First we divide the vertices of $G(l)$ into l classes: $C_0, C_1, \ldots, C_{l-1}$. Let $x \in C_s$ if and only if $x \equiv s \pmod l$.

For a fixed s ($s=0, 1, \ldots, l-1$) we divide C by the vertices of form $k \cdot l \cdot 2^{s+2}$ into 2^{l-s-1} paths.* The length of each of these paths is $l \cdot 2^{s+2}$. Now let $x \in C_s$ be arbitrary. There is just one $y \in C_s$ which is on the same path as x and whose distance from x on C is $l \cdot 2^{s+1}$ (i.e., for which the length of (x, y) is $l \cdot 2^{s+1}$). We join x by a "long" edge to y. We do this for $s=0, 1, \ldots, l-1$ i.e. we join each vertex of C to just one other of its vertex.

(Describing $G(l)$ by formulas, we can say, we join two vertices x, y of $G(l)$ if and only if

(i) $x \equiv y \pmod{l}$

and if $x \equiv y \equiv s \pmod{l}$, then

(ii) $|x-y| = l \cdot 2^{s+1}$

and

(iii) $\left[\frac{x}{l \cdot 2^{s+2}}\right] = \left[\frac{y}{l \cdot 2^{s+2}}\right]$.)

Thus we get a graph, the most important properties of which are:

(1) Each vertex of $G(l)$ is joined to two points by a "short" edge and to one point by a "long" edge.

(2) Each "long" edge of $G(l)$ has length $2l, 4l, \ldots, 2^{l-1} \cdot l$ or $2^l \cdot l$.

(3) If two "long" edges of $G(l)$ have the same length, their endpoints are in the same class (i.e. they are congruent $\pmod{l}$).

We will now prove (using only these properties of $G(l)$), that its circuits are longer than $2l+1$.

LEMMA 2. *If x and y are two vertices of $G(l)$ and $x-y \equiv s \pmod{2l}$ or $x-y \equiv -s \pmod{2l}$ where $0<s<l$ and L is a path joining x and y, then L is longer than s; further if $x \equiv y \pmod{l}$, and L is a path joining them, then either L is a "long" edge, or a path of length $\geqq l$.*

(We need only the case $x \equiv y \pmod{l}$, but it is easier to prove this stronger assertion.)

PROOF. We build up our graph starting from the circuit C, adding the edges one by one, and prove the lemma by induction on the number of the "long" edges, added already to C. For C the lemma is trivial. Suppose, we have added some "long" edges to C, the assertion of the lemma is still true, and we want to add a new edge to the graph. Denote by G_1 the graph, for which we know, the assertion of the lemma is true. Denote by α the "long" edge, which will be added to G_1, and by G_2 the graph, which is then obtained. Let x and y be two vertices of the circuit C, L a path joining them. If α is not contained in L, L is a path of G_1 too, so we can apply the lemma to it. Thus we may suppose, L contains α. Denote by a and b the endpoints of α so that starting from x on L in the direction of y, a will be nearer to x than b. The length of L is the sum of the lengths of (x, a), α and (b, y), where possibly $x=a$ or $y=b$, or $x=a$ and $y=b$.

a) If $x=a$ and $y=b$ the lemma is trivially true: $x \equiv y(l)$ and they are joined by an edge.

* For $s=l-1$ our "path" is not a path, but this is not important here.

b) Suppose, $x \neq a$ but $y = b$. As $a \equiv b \equiv y\ (2l)$ and (a, x) is a path of G_1 we can apply the lemma for (a, x). Clearly a and x can not be joined by a "long" edge, as a is a vertex of valence 3. Thus if $x - y \equiv \pm s(2l)$, (a, x) and consequently L are longer than $s-1$. If $x \equiv y(l)$, (a, x) is longer than $l-1$ and thus L is longer than l.

c) Let x, a, b, y be all different vertices. If $x - a \equiv \pm s_1, y - b \equiv \pm s_2$ then $x - y \equiv \pm s_1 \pm s_2$. The length of (a, x) is $\geqq s_1$ the length of (b, y) is $\geqq s_2$. Thus the length of L is $\geqq s_1 + s_2 + 1$, which proves the lemma.

d) Finally, if x, y, a, b are different points, and $x \equiv a(l)$ or $y \equiv b(l)$, as x and a or y and b can not be joined by a "long" edge, the length of (x, a) or of (y, b) is $\geqq l$, qu.e.d.

Now we prove, that $G(l)$ has no circuits of length $\leqq 2l+1$.

a) Suppose, C_1 is a circuit of $G(l)$. If it has two "long" edges of the same length, denote their vertices by x_1, x_2, y_1, y_2 in order of lying on C_1: starting from x_1 in the first edge first we reach x_2, then y_1, and at last y_2. According to (3) $x_1 \equiv y_1 \equiv \equiv x_2 \equiv y_2(l)$, thus the pathes (x_2, y_1), (y_2, x_1) are of length $\geqq l$, C_1 is longer than $2l+1$.

b) If no two "long" edges of C_1 have the same length, suppose, α_1 is the longer of them, and $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$ are the other "long" edges of C_1. The sum of the lengths of $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ and of the number of the "short" edges must be $\geqq$ than the length of α_1. If the length of α_1 is $2^u \cdot l$ then the sum of the lengths of $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$ is

$$\leqq l(2^{u-1} + 2^{u-2} + \ldots + 2) = 2^u \cdot l - 2l$$

thus C_1 must have at least $2l$ short edges, the length of it is $\geqq 2l+1$.

c) If C_1 has no "long" edges, its length is n. Thus we have proved, all the circuits of $G(l)$ are longer than $2l+1$.

A new proof of the theorem of Erdős and Pósa

Now we prove:

THEOREM 1. *Denote by $r(k)$ the smallest integer (depending only on k), for which: If a graph G does not have $k+1$ independent circuits, G contains a representing set for all its circuits consisting of $\leqq r(k)$ vertices. Such an $r(k)$ exists and*

a) $r(k) < (4 + o(1))k \log k$.

b) $r(k) > (\frac{1}{2} + o(1))k \log k$.

The proof of the upper bound. Let G be a graph, not having $k+1$ independent circuits. Consider all those subgraphs of G, which have only vertices of valence 2 or 3 in the subgraph. (The valence of a vertex of a subgraph G_1 of G in the subgraph means the valence of it when we consider G_1 not as a subgraph of a graph, but as a graph.) Denote by H a maximal subgraph of the considered subgraphs where the maximality of H means that if $H_1 \supset H$ and H_1 is one of the considered subgraphs, then $H_1 = H$. We may suppose G contains a circuit, so the class of considered graphs is not empty, and is also finite so that H exists.

We assert, the branchpoints of H (the vertices of H, which are of valence $\geqq 3$ in H) and at most $2k$ other vertices of G form a representing set for all the circuits of G. To prove this divide those circuits of G which contain no branchpoints of H into two classes.

a) $C_1, \ldots, C_s$ are those circuits, which have just one common vertex with H.

b) $K_1, \ldots, K_r$ are those circuits, which are subgraphs of H.

We will prove that we may represent the circuits $C_1, \ldots, C_s$ and $K_1, \ldots, K_r$ by at most $2k$ vertices of G. Thus, if we prove, all those circuits of G, which are not represented by the branchpoints of H, occur among the circuits $C_1, \ldots, C_s; K_1, \ldots, K_r$ then we have proved our assertion.

Suppose C_1 is a circuit of G, which contains no branchpoint of H, and which is not a subgraph of H. H and C_1 must have a common vertex, because, if they had no common vertices, $H \cup C_1 = H_1$ would disprove the maximality of H. C_1 contains an edge (a, b) not contained in H_1. Let (a, c) be the shortest arc of C_1 joining a and H, which does not contain b, and (b, d) the shortest arc of C_1 joining b and H, which does not contain a. Here we allow $a = c$ and $b = d$. We assert $c = d$, i.e. H and C_1 have only one common vertex. Suppose $c \neq d$. As c and d are of valence 2 in G, joining the arc $(cabd)$ to H, we get a graph H_1, each vertex of which is of valence 2 or 3 and which contains H, disproving its maximality. This contradiction proves that C_1 has only one common vertex with H, i.e. all the circuits of G, which are not represented by the branchpoint of H, are $C_1, \ldots, C_s$ and $K_1, \ldots, K_r$.

Now we prove that we may represent $C_1, \ldots, C_s$ and $K_1, \ldots, K_r$ by $\leqq 2k$ vertices of G.

a) Denote by a_i the common vertex of H and C_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$. If $a_i \neq a_j$, then C_i and C_j are independent. We prove this indirectly: suppose q is a common vertex of them. We can join a_i and q by an arc of C_i; q, and a_j by an aic of C_j. The union of these two arcs generally will not be a path, buth will contain a path, which joins a_i and a_j and is a subgraph of $C_i \cup C_j$: the common vertices of (a_i, q, a_j) and H are just a_i and a_j. $H_1 = H \cup (a_i, q, a_j)$ is a graph satisfying our conditions and containing H, thus disproving its maximality. This contradiction shows C_i and C_j are independent. Thus $a_1, \ldots, a_s$ are less, than $k+1$ points, and they represent $C_1, \ldots, C_s$.

b) $K_1, \ldots, K_r$ are the subgraphs of H. They must be independent: if q were a common point of K_i and K_j, it would be a branchpoint of H, contained by K_i and K_j. Thus $r \leqq k$, and we can represent these circuits by $\leqq k$ points.

Thus we have reduced our problem to a much simpler problem: We must prove, if H is a graph, each vertex of which has valence 2 or 3, and H does not contain $k+1$ independent circuits, it has $n < (4 + o(1))k \log k$ branchpoints. $4x \log x$ and $\frac{1}{4} \frac{x}{\log x}$ are asymptotically inverse functions to each other, in the sense, if $n \approx k \log k$, then $k \approx \frac{n}{\log n}$, and if $k \approx \frac{n}{\log n}$ then $n \approx k \log k$. Therefore it is enough to show, if H is a graph of $n \geqq 2$ branchpoints, the other vertices of which have valence 2 then H contains at least

$$\left[\frac{1}{4} \frac{n}{\log n}\right]$$

independent circuits.

We prove this by mathematical induction:

a) $\left[\frac{1}{4}\frac{n}{\log n}\right]$ is strictly increasing for $n \geqq 2$. If a graph has only vertices of valence $\geqq 2$, it contains a circuit. So, our assertion is trivial, if

$$\left[\frac{1}{4}\frac{n}{\log n}\right] \leqq 1.$$

b) Suppose we know, the assertion is true, if $n < n_0$, and H is a graph having n_0 branchpoints. Denote by C the topologically shortest circuit of H. Its t-length is $\leqq 2 \log n_0$.

(i) Let the t-length of C be greater than 4. Each branchpoint of C (in H) is joined to another branchpoint of H. A branchpoint of H lying outside of C can not be joined to more than one branchpoint of C, because, if $c_1 \in C$ and $c_2 \in C$ were joined to a, $(a \notin C)$, the arc (c_1, c_2) of C, which is longer than 3, would be replaced by (c_1, a, c_2) the t-length of which is 2, and thus we could construct a circuit, topologically shorter than C. Omit the vertices and edges of C, and also those t-edges, which start from C. (To omit a t-edge means, omit their edges and vertices, except its endpoints.) The so obtained graph has the same properties as H, except the number of its branchpoints is less than n_0. However, if the t-length of C is r, this subgraph has at least $n_0 - 2r = n_1$ branchpoints. If $n_0 < 8 \log n_0$, we apply a), if $n_0 > 8 \log n_0$ we can apply our inductional hypothesis: it contains at least

$$\left[\frac{1}{4}\frac{n_1}{\log n_1}\right] \geqq \left[\frac{1}{4}\frac{n_0 - 4\log n_0}{\log (n_0 - 4\log n_0)}\right] \geqq \left[\frac{1}{4}\frac{n_0 - 4\log n_0}{\log n_0}\right] = \left[\frac{1}{4}\frac{n_0}{\log n_0}\right] - 1$$

independent circuits, which together with C form a set of $\geqq \left[\frac{1}{4}\frac{n_0}{\log n_0}\right]$ independent circuits.

(ii) If $r \leqq 4$, the only problem is, that after omitting of the topological edges starting from C we get a graph, which has perhaps one or two vertices of valence 1. In this case we can omit $\leqq 3$ branchpoints of this graph so that we get a graph each vertex of which has valence 2 or 3. Thus we get a subgraph of H, which has $\geqq n_0 - 7$ branchpoints. From there the argument of (i) is valid.

Thus we have proved the upper bound.

The proof of the lower bound. Consider first a graph of $n = 4s$ vertices, each vertex of which has valence 3. It has $6s$ edges. Omit s of its vertices and the edges, starting from them: the so obtained subgraph has $3s$ vertices and at least $3s$ edges and thus the remaining graph contains a circuit. This means we can not represent all the circuits of the original graph by $n/4$ points.

As a special case we see that, a representing set for the circuits of $G(l)$ consists of more than $l \cdot 2^{l-1}$ points, but as all the circuits of $G(l)$ are longer than $2l$, it does not have $2l$ independent circuits. Thus for $k = 2, 4, 8, \ldots, 2^l$ we obtain: $r(k) \geqq$ $\geqq l \cdot 2^{l-1} = \frac{1}{2} k \log k$. Now we will prove it for an arbitrary k. (Here we remark that if we wanted to prove only $r(k) \geqq \frac{1}{4} k \log k$, we need go no further for: if $2^i \leqq k \leqq 2^{i+1}$, $r(k) \geqq i \cdot 2^{i-1}$.) If k is an arbitrary positive integer, let $k = 2^{l_1} + \ldots + 2^{l_j}$ where $0 \leqq l_1, \leqq \ldots \leqq l_j$. Let G_k be the disjoint union of $G(l_1), \ldots, G(l_j)$, where $G(1)$

is by definition a loop. Let $k_i = 2^{l_i}$. Trivially G_k contains at most $k_1 + \ldots + k_j = k$ independent circuits and a representing set for its circuits has more than $\frac{1}{2}(k_1 \log k_1 + k_2 \log k_2 + \ldots + k_j \log k_j)$ points.

As $x \log x$ is convex in $[1, \infty]$,

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{j} k_i \log k_i \geqq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{j} \frac{k}{j} \log \frac{k}{j} \geqq \frac{1}{2} k \log \frac{k}{\log k} = \frac{1}{2} k \log k - \frac{1}{2} k \log \log k,$$

$$r(k) \geqq \left(\frac{1}{2} + o(1)\right) k \log k$$

Qu. e. d.

Theorems about graphs which do not have $k+1$ independent circuits

1) In the proof of Theorem 1 the determination of the upper bound was reduced to the following problem: How many branchpoints may belong to a graph, each vertex of which has valence 2 or 3, if the graph contains maximally k independent circuits? This problem, it seems, differs in character from the original one. We will prove that this is not true, because this problem is almost equivalent with the following special case of the original problem:

Denote by $R(k)$ the smallest positive integer, for which: If H is a graph, each vertex of which has valence 2 or 3 and H does not contain $k+1$ independent circuits, then it is possible to represent all the circuits of H by less than $R(k)$ vertices.

To show the connection between these two problems first we prove:

THEOREM 2. *If H is a graph, not having $k+1$ independent circuits, having n vertices of valence 3 and the other vertices of H have valence 2, then there exists a representing set for the circuits of H, having $\leqq \left[\frac{n}{4}\right] + k$ vertices.*

From this the connection of the two problems is clear:

We have seen that the minimal representing set contains more than $\left[\frac{n}{4}\right]$ vertices, if each vertex of H has valence 3, and n denotes the number of the vertices. It is also true, when a graph has n vertices of valence 3 and some other vertices of valence 2, i.e. it is true in our case too. Thus the minimal representing set contains at least $\left[\frac{n}{4}\right]$ vertices, and Theorem 2 asserts, it contains at most $\left[\frac{n}{4}\right] + k$. Thus if $\frac{n}{k}$ is sufficiently large, knowing the number of the vertices of a minimal representing set in H, we know n rather closely and conversely, knowing n we have rather good bounds for the number of the vertices of a minimal representing set.

Thus essentially in our proof of Theorem 1 we first reduced the proof to show

$$\left(\frac{1}{2} + o(1)\right) k \log k \leqq R(k) \leqq (1 + o(1)) k \log k.$$

PROOF OF THEOREM 2 (by mathematical induction). Write $t=n+k$.

a) If $t=1$, then $n=0$ and $k=1$ (because $k\geqq 1$), H is the union of independent circuits and the theorem is trivial.

b) Suppose, the theorem is true for $1, 2, \ldots, t-1$.

Here, before we prove the theorem for t, we remark that the first three cases of b) are trivial, while the last case, (iv) is the "essential" one: this is the one which causes that the factor $\frac{1}{4}$ which, as we have seen, in a certain sense is the best possible.

(i) If H contains a circuit C which has no branchpoints, $H=H_1\cup C$, where H_1 does not contain k independent circuits. Thus we can represent its circuits by $\left[\frac{n}{4}\right]+k-1$ points, and C by 1 point.

(ii) If H contains a circuit of t-length 1, let C be this circuit, and a the branchpoint contained in it. There is a branchpoint b in H, which is connected to a by a t-edge. This (a, b) t-edge is contained in no circuits and thus we may omit it. A representing set in the obtained subgraph is also a representing set in H. As C contains no branchpoints in this subgraph, we can apply (i), H contains a representing set for its circuits, consisting of $\left[\frac{n-2}{4}\right]+k$ vertices.

(iii) If H contains a circuit C of t-length 2, let a, b be its branchpoints. Denote by c the vertex of H, which is connected to b by a (third) t-edge. (Possibly $a=c$.) Omitting this t-edge from H, we get a subgraph H_1, which has $n-2$ branchpoints. Thus we can represent its ciıcuits by $\left[\frac{n-2}{4}\right]+k$ points. Suppose C is represented by x. It is easy to see that if we represent the circuits of a graph, there exists a minimal representing set, for which: if a circuit contains branchpoints, it is represented by a branchpoint. So we may suppose, C is represented in H_1 by a. As a represents all those circuits, which contain the omitted t-edge, this set represents all the circuits in H.

(iv) If all the circuits of H are topologically longer than 2, then let a be an arbitrary branchpoint of H. Omit it, and the t-edges, one endpoint of which is a. The subgraph H_1 of H, which is obtained, has $n-4$ branchpoints. Thus we can represent its circuits by $\left[\frac{n-4}{4}\right]+k$ points. The circuits of H, which are not represented by these points, are not contained in H_1. They were spoiled by the omitting of a, so a representes all these circuits. Qu.e.d.

We have mentioned that we reduced the proof of the upper bound in Theorem 1 to the proof of

$$R(k)\leqq(1+o(1))k\log k.$$

But we have proved this inequality for we know that $n\leqq(4+o(1))k\log k$, so that by Theorem 2: $R(k)\leqq(1+o(1))k\log k$. (This result can be proved also in other ways, for e.g.: Knowing only, that H contains a circuit of t-length $\leqq 2\log n$ we pick out a minimal circuit of H, and omit every second point of it. It is easy to see that the subgraph which is obtained, does not contain k independent circuits. From this follows: $R(k)\leqq R(k-1)+\log n$ and by a short computation the required result is obtained. This result and Theorem 2 prove again that the number of branch-points of that very H, which was used in the proof of the upper bound, is $\leqq(4+o(1))k \log k$.)

2) A generalization of Theorem 1 is:

THEOREM 3. *If G is a graph not having $k+1$ independent circuits, $H_1, \ldots, H_m$ are arbitrary connected subgraphs and no $h+1$ of these subgraphs are independent, then G contains a representing set for these subgraphs, which consist of $\leqq(4+o(1))k \cdot \log k+h$ vertices.*

(If $H_1, \ldots, H_m$ are the circuits of G, we have Theorem 1.)

The essence of this theorem is that, if some points represent all the circuits of G, they represent all those subgraphs of G which contain circuits, and those subgraphs, which are not represented by them, can be represented by $\leqq h$ other points. So, instead of proving Theorem 3, we will prove only:

THEOREM 4. *$H_1, \ldots, H_m$ are arbitrary connected subgraphs of a graph G, and no $h+1$ of them are independent, and $x_1, \ldots, x_u$ form a representing set for all the circuits of G, then G contains $\leqq h$ other points so, that these points and $x_1, \ldots, x_u$ together represent all the subgraphs $H_1, \ldots, H_m$.*

(As in Theorem 3 $u<(4+o(1))k \log k$, Theorem 3 is really a consequence of Theorem 4.)

To prove Theorem 4, we need the

LEMMA 3. *Let T be a forest, $H_1, \ldots, H_s$ certain connected subgraphs of it (shortly: subtrees) such that no $h+1$ of $H_1, \ldots, H_s$ are independent. These subtrees can be represented by $\leqq h$ points of T.*

PROOF. By mathematical induction.

A) First we suppose that $h \geqq 2$ and T is a tree (i.e. is connected). Let $H_{\nu_1}, \ldots, H_{\nu_h}$ be independent subtrees of T. Form the sum of the $\binom{h}{2}$ distances of them. We may suppose that this sum is maximal for $H_1, \ldots, H_h$. After fixing this system of independent subtrees we define the direct paths. L is called a direct path if its endpoints are the vertices of two different subtrees among $H_1, \ldots, H_h$ and the other vertices of L are contained in none of $H_1, \ldots, H_h$. We remark now that an arbitrary path of T is characterised by its endpoints. Thus we may denote a path, which joins a and b by (a, b). Further, if we speak about a subtree of T, it will be always one of $H_1, \ldots, H_s$.

First we look for a vertex such that amongst the set of those subtrees of T, which are not represented by it, there are no h independent subtrees.

a) Each H_i $i=1, \ldots, h$ contains an endpoint of a direct path: H_i is joined by a path to a H_j. Suppose that, travelling this path, the vertex where we leave H_i is a and the vertex where we first arrive in a (fixed) subtree is b, then (a, b) is a direct path.

b) There is a H_i $i \leqq h$, which contains the endpoint of only one direct path. We prove this indirectly: an elementary argument shows that if each H_i $(i \leqq k)$ contains at least the endpoints of two direct paths, then some of these direct paths together with some other paths contained by the fixed subtrees (and joining their endpoints) form a circuit, but this can not be true. Without loss of generality we assume that H_1 contains only the endpoint of one direct path. Denote the endpoints of this path by a, b. If $a \in H_1$, it is the point we sought: amongst those subtrees which are not represented by a, there are no h independent subtrees.

To prove this, consider a subtree H_p which does not contain a. Observe that if L_1 is a path joining H_1 and H_j $(j=2, \ldots, h)$, it must contain a direct path, starting from H_1. This direct path must be just (a, b), so that the path L_1 contains a. Because of this, H_p can not have a common vertex with H_1: if H_p and H_1 had a common vertex, H_p could not be joined to the other H_j subtrees by a path, except when this path contained (a, b). Thus its distances from $H_2, \ldots, H_h$ would be greater than the distances of H_1 from $H_2, \ldots, H_h$. This would contradict the maximality of the sum of the distances between $H_1, \ldots, H_h$.

Thus we have proved, if H_p does not contain a, it has no common vertex with H_1, so among those subtrees of T which are not represented by a, there are no h independent ones.

B) Still we did not use the lemma is true for $h-1$, but now we will: Let T be a forest and suppose that the lemma is true for $h-1$. We show, it is true for h also. (If we knew the lemma for the trees (for h), we were ready.) T is the disjoint union of the trees $T_1, \ldots, T_v$. If T_i contains maximally h_i independent subtrees (of $H_1, \ldots, H_s$) we can represent these subtrees by h_i vertices of T_i. These $h_1, \ldots, h_v$ vertices together represent all the given subtrees. Thus they are represented by $\sum h_i = h$ vertices of T which is wanted to prove.

So we may suppose, T is a tree. We have seen in a), it contains a vertex a, so, that there are no h independent subtrees among those, which are not represented by it. We omit a, so we get a subgraph T^* of T, which is a forest, and the given subtrees in T^* we can represent by $h-1$ vertices of it, these $h-1$ vertices and a together will represent all the given subtrees of T. Thus the lemma is also true for h.

C) To complete the proof of the lemma, it must be proved for the case $h=1$: If some subtrees of a tree are given, each two of them having a common vertex, then they have a vertex which is common to all of them. (This assertion may be proved directly. However we will prove it in a shorter way, using the results in A).)

(i) First we prove the lemma for $h=2$. It is enough to prove it if T is a tree. We select as we did it in A), two subtrees, H_1, H_2 whose distance is maximal. They are joined by a direct path (a, b). As we know already, those subtrees which have a common vertex with H_1, are represented by a, $(a \in H_1)$, those subtrees which have no common vertices with H_1 must have a common vertex with H_2, thus they are represented by b.

(ii) Now we prove the lemma for $h=1$. Let q be a point of T and p a point which is not contained in T. We join p and q, thus obtaining a graph T^*, which contains T as a subgraph. Denote by H_{s+1} the subgraph of T^* consisting of the only point p. According to (i) we can represent $H_1, \ldots, H_s, H_{s+1}$ by 2 vertices of T^*, and trivially one of these is p. The other is a vertex of T and represents $H_1, \ldots, H_s$ (as p does not represent them). Qu.e.d.

The proof of Theorem 4. Theorem 4 asserts: if $H_1, \ldots, H_m$ are arbitrary connected subgraphs of G, no $h+1$ of them being independent, and some points of G represent all the circuits of G then these points and some others (but $\leqq h$) points will represent the considered subgraphs. To prove this, omit first $x_1, \ldots, x_u$ (the representing set for the circuits), thus getting a forest F. It is possible, that F contains no one of $H_1, ..., H_m$, but if it contains any of the H_i, we can represent them by $\leqq h$ vertices of F and trivially, if H_i is not represented by these $\leqq h$ vertices, it is not a subgraph of F and is represented by one of the vertices $x_1, ..., x_u$. Thus $x_1, ..., x_u$, and the other points (the number of which is $\leqq h$) represent all the considered subgraphs of G. Qu.e.d.

A theorem, similar to Theorem 1

Consider a graph which consists of two independent circuits and a path, which joins them but has no common vertices with them except its endpoints. The form of this graph is similar to a dumb-bell, so it will be called a dumb-bell.

In the following theorem the dumb-bell will play the same role as the circuit in Theorem 1.

Denote by $s(k)$ the smallest integer for which:

If a graph G does not contain $k+1$ independent dumb-bells then we can represent all its dumb-bells by $\leqq s(k)$ vertices. (Or $s(k)=\infty$, if there is no such finite integer.)

THEOREM 5.

$$(1+o(1))k \log k < s(k) < (4000+o(1))k \log k.$$

The proof of this theorem is very similar to the proof of Theorem 1. Because of this it will not be proved here in all its details.

The proof of the upper bound. We will choose a subgraph H in G, the branchpoints of which will represent all the dumb-bells of G, and show that if H has many branchpoints and not too many components then it contains sufficiently many independent dumb-bells. Concretely, if H has less than $k+1$ components, and just n branchpoints, it contains at least $\left\{\frac{1}{4000} \cdot \frac{n-80k}{\log(n-80k)}\right\}$ independent dumb-bells where $\{x\}=\min\{n: n \text{ integer}, n \geqq x\}$. From this the upper bound for $s(k)$ is obtained just as in the Theorem 1.

Now we begin the proof.

a) We may suppose that G contains k independent dumb-bells, for e.g.: $D_1, ..., D_k$. Now we fix these dumb-bells and look for a maximal subgraph of G, each vertex of which has valence 2, 3, 4 or 5, and which contains $D_1, ..., D_k$ and has less than $k+1$ components. The maximality of it implies that its branchpoints will represent all the dumb-bells of G.

b) We will use the following lemma. (It is useful in representing-problems.)

LEMMA 4. *If G is a (connected) graph having m vertices of valence 1, n vertices of valence $\geqq 3$, no vertices of valence 0, and some vertices of valence 2, then it contains a (connected) subgraph, each vertex of which has valence $\geqq 2$, and the number of the branchpoints (in the subgraph) is $\geqq n-m$.*

The lemma can be proved by a trivial mathematical induction.

c) Now we show that a connected graph contains a small enough dumb-bell. Let H_0 be a connected graph, each vertex of which has valence 2, 3, 4 or 5. Denote by C_0 its topologically shortest circuit. Its t-length is $\leqq 2 \log n$. Omit the vertices and the edges of C_0 and those t-edges, at least one endpoint of which is contained in C_0. Thus we get a graph H_1 which has at least $n-8\log n$ branchpoints, as we omitted $\leqq 2\log n$ branchpoints of C_0 and $\leqq(5-2)\cdot 2\log n$ branchpoints, were connected to C_0 by a t-edge. The number of the vertices of valence 1 in H_1 is at most $\frac{5-2}{2}\cdot 2\log n = 3\log n$. According to Lemma 4 H_1 contains a subgraph H_2 each vertex of which has valence 2, 3, 4 or 5. The number of its branchpoints is $\geqq n-11\log n$. If $n\geqq 80$, H_2 would not be empty. Let p be a vertex of H_2 whose distance from C_0 in H_0 is minimal. It is easy to see that the t-distance of p from C_0 is 2. Apply Lemma 1: there is a circuit C_1 in H_2 for which the sum of its t-length and t-distance from p (in H_2) is $\leqq 2\log n$. The sum of its t-distance from p and its t-length in H_0 may be $>2\log n$, but $\leqq(11+2)\log n = 13\log n$.

The two circuits C_0, C_1 and the shortest path of H_0 joining them form a dumb-bell which has $\leqq(13+2)\log n+2$ branchpoints.

Thus we obtain, that if $n\geqq 80$, then H_0 contains a dumb-bell the number of whose branchpoints is $\leqq 16\log n$.

(In the following part instead of the number of branchpoints of a dumb-bell we will use the abbreviation: the t-length of the dumb-bell.)

d) Let H_0 now be a connected graph of $n\geqq 80$ branchpoints, each vertex of which has valence 2, 3, 4 or 5. We assert that it contains at least

$$\left\{\frac{1}{4000}\cdot\frac{n}{\log n}\right\}$$

independent dumb-bells. We prove this by mathematical induction. For $n\leqq 4000$ the assertion is trivial, as H_0 contains at least one dumb-bell. Assume it is true for $80, 81, \dots, n-1$. We prove it now for n.

Denote by D_0 the topologically shortest dumb-bell of H_0. It is topologically shorter than $16\log n$. Omit the vertices of D_0 and the t-edges starting from them. The first problem is, how many components has the subgraph H_3 which is obtained. Suppose U_1 and U_2 are two different components of H_3, L_1 and L_2 are two minimal paths, joining U_1 and U_2 to D_0. They must both consist of a t-edge, one endpoint of which is contained in D_0. As U_1, U_2 are different components of H_3, they can not be joined by a path in H_3. Thus L_1, L_2 have no common vertex, except (possibly) their endpoints in D_0. As from each branchpoint of D „leave" at most 3 t-edges to the components of H_3, it has $\leqq 3\cdot 16\log n$ components. Possibly, H_3 will contain vertices of valence 1, but no more than $48\log n$. With the help of Lemma 4 we choose a subgraph of H_3 which has more than $n-64\log n$ branchpoints and less than $48\log n$ components. Denote it by H_4 and its components having more than 80 branchpoints, by $K_1, \dots, K_t$. They contain together

$$\geqq n-64\log n-80\cdot 48\log n\geqq n-4000\log n$$

branchpoints. If K_i contains n_i branchpoints and m_i independent dumb-bells, then

$$m_i\geqq\left\{\frac{1}{4000}\cdot\frac{n_i}{\log n_i}\right\},\quad m=\sum_1^t m_i\geqq\sum_1^t\left\{\frac{1}{4000}\cdot\frac{n_i}{\log n_i}\right\}\geqq$$

$$\geqq\sum\left\{\frac{n_i}{4000\log n}\right\}\geqq\left\{\frac{\sum n_i}{4000\log n}\right\}\geqq\left\{\frac{n-4000\log n}{4000\log n}\right\}=\left\{\frac{n}{4000\log n}\right\}-1.$$

The dumb-bells in $K_1, \ldots, K_t$ and D_0 together are $\geqq \left\{\frac{n}{4000 \log n}\right\}$ independent dumb-bells.

e) As H has $\leqq k$ components, similarly as above, we can prove it contains at least

$$\left\{\frac{1}{4000} \cdot \frac{n-80k}{\log (n-80k)}\right\}$$

independent dumb-bells. From this it follows that H has $\leqq (4000+o(1))k \log k$ branchpoints and G contains a representing set for its dumb-bells, consisting of less than $(4000+o(1))k \log k$ vertices.

The proof of the lower bound. Consider $G(l)$. Taking $\varepsilon > 0$, we prove that if $l > l_0(\varepsilon)$, a representing set for the dumb-bells of $G(l)$ consists of $\geqq (\frac{1}{4}-\varepsilon)n$ points. As $G(l)$ does not contain 2^l independent circuits, it does not contain 2^{l-1} independent dumb-bells. Thus for $k = 2^{l-1}$ we shall have a graph such that each of its representing sets for the dumb-bells consists of more than

$$\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right) l \cdot 2^{l+1} = k \log k + o(k \log k)$$

points. If we proved thus the lower bound for $k = 1, 2, \ldots, 2^j$ we can prove it for an arbitrary value of k similarly, as we did it in the proof of the Theorem 1.

Thus we prove now, $(\frac{1}{4}-\varepsilon)n$ points are not enough to represent all the dumb-bells of $G(l)$ if l is sufficiently large.

Omitting $(\frac{1}{4}-\varepsilon)n$ vertices of $G(l)$, we get a subgraph of it, which has $(\frac{3}{4}+\varepsilon)n$ vertices, and minimally $(\frac{3}{4}+3\varepsilon)n$ edges. Thus at least one component of this subgraph contains r vertices and more than $(1+\varepsilon c)r$ ($c > 0$ is a constant) edges. As it contains a circuit whose length is $> 2l$, this component contains at least $2l$ vertices and thus at least $2\varepsilon lc$ branchpoints. If $2c\varepsilon l > 80$, this component contains a dumb-bell, and this proves that $(\frac{1}{4}-\varepsilon)n$ points can not represent all the dumb-bells of $G(l)$. Qu.e.d.

We conclude by posing some

UNSOLVED PROBLEMS. (i) A more general problem that may be posed in connection with our theorems, is the following: Consider a graph A, and all the graphs homeomorphic to it. Does there exist an $r = r(k, A)$ such that if a graph G does not contain $k+1$ independent subgraphs homeomorphic with A, then there is a representing set for all the subgraphs of G, homeomorphic with A, and consisting of $\leqq r(k, A)$ points? If there are such integers, what can be said about the smallest one if we know only the number of the branchpoints of A?

(ii) The same problem, as in (i), but for the case, when A is a tree.

(iii) Suppose G does not contain $k+1$ independent circuits of topological length $\geqq u$. What can be said about the minimal representing set for those circuits of G, the t-lengths of which are $\geqq u$?

(Received 25 February 1966)

Added in proof (28 March 1967). H.-J. Voß (Ilmenau, East-Germany) has proved Theorem 1 showing that

$$\left(\frac{1}{8}+o(1)\right) k\log k \leqq r(k) \leqq \bigl(2+o(1)\bigr)\, k\log k.$$

He solved also some other problems connected with ours. The method used by him and our method has many similar features. These results will be published later. They were performed by Mr. H. SACHS in Moscow (Aug. 1966 International Congr. of Math., Section 13) and by Mr. Voß in Tihany, Sept. 1966, Graph Colloquium (Hungary).

References

[1] P. ERDŐS and L. PÓSA, On the independent circuits contained in a graph, *Canad. J. Math.*, **17**, pp. 347—352.

[2] T. GALLAI, Maximum-minimum Sätze und verallgemeinerte Faktoren von Graphen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **12** (1961), pp. 131—173.

[3] P. ERDŐS and L. PÓSA, On the maximal mumbe of disjoint circuits of a graph, *Publ. Math. Debrecen*, **9** (1962), pp. 3—12.

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungoricae
Tomus 18 (1—2), 1967, pp. 207—215.

DIE METHODE DES BEWEGLICHEN n-BEINES IN DER FINSLER-GEOMETRIE

Von

O. VARGA (Budapest), Mitglied der Akademie

Einleitung

Die Methode des beweglichen Drei- bzw. n-Beines ist von der klassischen euklidischen Differentialgeometrie wohlbekannt. Durch Auswahl eines geeigneten n-Beines, wird die Existenz von Kurven und Flächen auf die Untersuchung von Differentialgleichungssystemen und ihren Integrabilitätsbedingungen zurückgeführt. Anderseits hat E. CARTAN,[1] gestützt auf die Gruppentheorie von Sophus Lie, die Methode des beweglichen n-Beines so erweitert, daß sich jetzt mit ihrer Hilfe die Struktur von differentialgeometrischen Räumen definieren läßt. Diese Methoden haben in dem letzten Jahrzehnt koordinateninvariante globale Erweiterungen erfahren, für die, die Untersuchungen von CH. EHRESMANN[2] führend waren und die sich der Theorie der gefaserten Räume bedienen. Dieselbe ist im wesentlichen eine koordinateninvariante Fassung der Methode des beweglichen Bezugssystems.

In einer Reihe von Arbeiten[3] habe ich, in der Finslergeometrie, Hyperflächen mit Hilfe dieser Methode untersucht. Außerdem konnte ich durch eine Erweiterung dieser Methode, die von F. SCHUR und E. CARTAN herrührende Charakterisierung der Räume konstanter Krümmung geben. Die Paragraphen 3, 4 der vorliegenden Arbeit stellen eine, in einigen Punkten ergänzte, einheitliche Zusammenfassung der vorerwähnten Arbeiten dar, während der, die Invarianten der Flächentheorie behandelnde Teil (§ 2) neu ist.

1. Das bewegliche n-Bein

Im Finslerschen Raum, der eine differenzierbare Mannigfaltigkeit von genügend hoher Klasse sei, bilde $(x^i, \dot{x}^i)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ ein lokales Koordinatensystem. Wir betrachten eine Hyperfläche. Sie ist eine Teilmannigfaltigkeit des F_n, für die $(u^\alpha, \dot{u}^\alpha)$ $(\alpha=1, \ldots, n-1)$ ein lokales Koordinatensystem bildet. Diese lokalen Koordinaten hängen mit den räumlichen Koordinaten vermöge

$$x^i = x^i(u^1, \ldots, u^{n-1}) \tag{1}$$

$$\dot{x}^i = x^i_\alpha(u)\dot{u}^\alpha \tag{1a}$$

[1] Siehe [1].
[2] Siehe [4].
[3] Siehe Literaturnachweis [6]—[9].

zusammen, wobei

$$x^i_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \tag{2}$$

gesetzt wurde. Es bezeichne $\mathscr{L}(x, dx)$ die Grundfunktion des F_n, so daß für das Bogenelement des Raumes

$$ds = \mathscr{L}(x, dx) \tag{3}$$

gilt. Die Übertragung im F_n wird durch die Pfaffschen Formen

$$\omega^i_j = C_{jk}(x, \dot{x})\, d\dot{x}^k + \Gamma^i_{jk}(x, \dot{x})\, dx^k \tag{4}$$

bestimmt.[4] Bekanntlich ist durch diese Übertragung das invariante Differential, und durch Nullsetzen desselben eine Parallelübertragung bestimmt. Für das invariante Differential eines Vektorfeldes mit den Koordinaten $\xi^i\ (x, \dot{x})$ hat man, wie im Riemann-Raum, die Ausdrücke

$$D\xi^i = d\xi^i + \omega^i_k \xi^k. \tag{5}$$

Die Metrik des F_n induziert auf der Hyperfläche F_{n-1} eine Metrik, deren Grundfunktion durch

$$L(u, du) \overset{\text{def}}{=} \mathscr{L}(x(u), x_\alpha(u) du^\alpha) \tag{6}$$

bestimmt ist. Aus dem metrischen Fundamentaltensor g_{ik} des F_n [5] läßt sich der metrische Fundamentaltensor

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{ik} x^i_\alpha x^k_\beta \tag{7}$$

der Hyperfläche F_{n-1} herleiten. Dieser Tensor ist positiv definit und besitzt demnach einen reziproken $\gamma^{\alpha\beta}$.

Wir betrachten nun die Gleichungen des beweglichen n-Beines der Hyperfläche. Als n-Bein bezüglich eines Linienelementes $(u, \dot{u})$ nehmen wir die Vektoren x^i_α und den Normalvektor n^i. Letzterer ändert sich natürlich mit der Richtung $\dot{u}^\alpha$. Die Gleichungen des beweglichen n-Beines sind nichts anders als die absoluten Differentiale der Feldvektoren x^i_α und n^i. Man hat somit

$$Dx^i_\alpha = \omega^\varrho_\alpha x^i_\varrho + \theta_\alpha n^i \tag{8}$$

$$Dn^i = -\theta^\varrho x^i_\varrho + \omega n^i. \tag{8a}$$

Die Pfaffschen Formen ω^ϱ_α, θ_α, θ^ϱ und ω sind gemäß ihrer geometrischen Bedeutung unabhängig von dem verwendeten räumlichen Koordinatensystem, was man auch rechnerisch unmittelbar einsieht. Wie in der Riemann-Geometrie folgt aus der Orthogonalität des Vektors n^i zu den Vektoren x^i_α

$$\omega = 0$$

und

$$\theta^\varrho = \gamma^{\varrho\alpha}\theta_\alpha. \tag{9}$$

[4] Die Größen C^i_{jk}, Γ^i_{jk} sind aus der Grundfunktion $L(x, dx)$ des Raumes eindeutig bestimmbar. Auf die bekannten Zusammenhänge bzw. Formeln verweisen wir auf E. CARTAN [3] und H. RUND [5].

[5] Siehe wegen der Bestimmung dieses Tensors [3] und [5].

Wie die Formeln (4) und (5) zeigen ist Dx^i_α eine Form in dx^i und $d\dot{x}^i$. Da die Funktionen (1), (1a), die den Zusammenhang der räumlichen und Hyperflächenkoordinaten vermitteln, differenzierbar sind, folgt, daß ω^ϱ_α und θ_α Pfaffsche Formen in den du^α und $d\dot{u}^\alpha$ sind. Man hat also

$$\omega^\varrho_\alpha = K^\varrho_{\alpha\beta} du^\beta + \theta^\varrho_{\alpha\beta} d\dot{u}^\beta \tag{10}$$

$$\theta_\alpha = \overset{(1)}{\theta}_{\alpha\beta} du^\beta + \frac{1}{L} \overset{(2)}{\theta}_{\alpha\beta} d\dot{u}^\beta. \tag{10a}$$

Da die $d\dot{u}^\alpha$ nicht koordinateninvariant sind, ersetzen wir sie durch die absoluten Differentiale $\overset{(1)}{D} l^\alpha$ des Einheitsvektors

$$l^\alpha = \frac{\dot{u}^\alpha}{L} \tag{11}$$

der Hyperfläche, in Richtung der $\dot{u}^\alpha$. Der Operator $\overset{(1)}{D}$, ist das absolute Differential von E. CARTAN, bezüglich der F_{n-1}. Unter Einführung dieser Differentiale, hat man für die oben betrachteten Pfaffschen Formen die Ausdrücke

$$\omega^\varrho_\alpha = K^{*\varrho}_{\alpha\beta} du^\beta + L\theta^\varrho_{\alpha\beta} \overset{(1)}{D} l^\beta \tag{12}$$

$$\theta_\alpha = \overset{(1)}{\theta^*_{\alpha\beta}} du^\beta + \overset{(2)}{\theta^*_{\alpha\beta}} \overset{(1)}{D} l^\beta; \qquad \overset{(2)}{\theta^*_{\alpha\beta}} = \overset{(2)}{\theta}_{\alpha\beta}. \tag{12a}$$

Die Koeffizienten dieser Pfaffschen Formen sind eindeutig bestimmbar durch die Übertragungsparameter C^i_{jk}, Γ^i_{jk} und die ersten bzw. zweiten Ableitungen x^i_α bzw. $x^i_{\alpha\beta}$ der Funktionen (1).[6] Wir wollen die analytische bzw. geometrische Bedeutung der Koeffizienten der Pfaffschen Formen erläutern.

Man stellt leicht fest, daß die $K^{*\alpha}_{\beta\gamma}$ und $\theta^{*\alpha}_{\beta\gamma}$ — die letzteren sind die Torsionskoeffizienten des F_{n-1} — die Komponenten des induzierten Zusammenhanges der Hyperfläche sind. Dieser Zusammenhang gehört zu einem absoluten Differential $\overset{(2)}{D}$, das man geometrisch folgendermaßen deuten kann: Ist irgend ein Vektorfeld ξ auf der Hyperfläche F_{n-1} vorgegeben, dann bildet ihr absolutes Differential ein neues Feld $D\xi$ das im allgemeinen kein Feld der F_{n-1} ist. Projiziert man das Feld $D\xi$ auf F_{n-1} so erhält man ein neues Feld $\bar{\xi}$. Benützt man, den durch

$$\overset{(2)}{D}\xi^\varrho = d\xi^\varrho + \omega^\varrho_\beta \xi^\beta = d\xi^\varrho + (K^{*\varrho}_{\beta\gamma} + A^\varrho_{\beta\gamma} \overset{(1)}{D} l^\gamma)\xi^\beta = d\xi^\varrho + (K^\varrho_{\beta\gamma} du^\gamma + \theta^\varrho_{\beta\gamma} d\dot{u}^\gamma)\xi^\beta, \tag{13}$$

$$A^\varrho_{\beta\gamma} = \theta^\varrho_{\beta\gamma},$$

definieren Operator $\overset{(2)}{D}$, so gilt

$$\bar{\xi}^\alpha = \overset{(2)}{D}\xi^\alpha. \tag{14}$$

Die durch die ω^ϱ_β bestimmte Übertragung ist euklidisch, d. h. es gilt [7]

$$\overset{(2)}{D}\gamma_{\alpha\beta} = 0. \tag{15}$$

[6] Siehe [6]. Die folgenden Ausführungen sind in dieser Arbeit zu finden.

[7] Das invariante Differential von Tensoren wurde auf die übliche Weise aus dem der Vektoren gebildet. Siehe E. CARTAN [3], S. 17 und 48.

Diese Übertragung fällt aber im allgemeinen nicht mit der E. Cartanschen des F_{n-1} zusammen. Betreffs der Deutung des Tensors $\overset{(1)}{\theta}{}^{*}_{\alpha\beta}$ wollen wir zunächst die Normalkrümmung bzgl. einer Richtung $(u, \dot{u})$ des F_{n-1} bestimmen. Wie in der euklidischen Geometrie geht man von einer Kurve

$$(16) \qquad \begin{aligned} u^\alpha &= u^\alpha(s) \\ x^i &= x^i\big(u(s)\big) \end{aligned}$$

der F_{n-1} aus. Die Normalkrümmung N der Richtung $(u, \dot{u})$ findet man dann aus

$$N = \frac{D^2 x^i}{ds^2} n_i .$$

Die Ausrechnung ergibt unter Benutzung von (8), (12) und (12a):

$$(17) \qquad N(u, \dot{u}; \dot{u}) = \frac{\overset{(1)}{\theta}{}^{*}_{\alpha\beta}(u, \dot{u})\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta}{\gamma_{\alpha\beta}(u, \dot{u})\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta}.$$

Diese Formel würde aber die Normalkrümmung für eine solche Richtung $(u, \dot{u})$ bestimmen, deren Bezugslinienelement selbst $(u, \dot{u})$ ist, also mit dieser Richtung zusammenfällt. Obige Formel führt uns aber sofort zur allgemeinen Definition der Normalkrümmung einer Richtung (u, v) bezüglich des Linienelementes $(u, \dot{u})$ in der Gestalt

$$(18) \qquad N(u, \dot{u}, v) = \frac{\overset{(1)}{\theta}{}^{*}_{\alpha\beta}(u, \dot{u}) v^\alpha v^\beta}{\gamma_{\alpha\beta}(u, \dot{u}) v^\alpha v^\beta}.$$

Man kann demnach, entsprechend den Verhältnissen der euklidischen Geometrie, $\overset{(1)}{\theta}{}^{*}_{\alpha\beta}$ als den zweiten Fundamentaltensor der Hyperfläche betrachten.

Es bleibt noch die Betrachtung des Tensors $\overset{(2)}{\theta}{}^{*}_{\alpha\beta}$ übrig. Berechnet man Dx^i_α auf grund von (5) in der Form

$$Dx^i_\alpha = dx^i_\alpha + \omega^i_k x^k_\alpha,$$

und vergleicht dies mit dem Ausdruck (8) für Dx^i_α, und zieht schließlich die Darstellungen (12) bzw. (12a) für die in den Ausdrücken eingehenden Pfaffschen Formen ein, so erhält man

$$(19) \qquad \overset{(2)}{\theta}{}^{*}_{\alpha\beta} = A_{ijk} x^i_\alpha x^j_\beta n^k.$$

Von (19) ausgehend kann man eine koordinateninvariante Deutung für den Tensor $\overset{(2)}{\theta}{}^{*}_{\alpha\beta}$ geben. Der euklidische Tangentialraum des Linienelementes $\big(x(u), x_\alpha(u)\dot{u}^\alpha\big)$ kann als direkte Summe des Tangentialraumes T des F_{n-1} — in $(u, \dot{u})$ — und des (eindimensionalen) Normalraumes N dargestellt werden. Daraus folgt, daß der Torsionstensor A^i_{jk} des Finslerraumes die direkte Summe von vier, aus je drei Vektorräumen gebildeten Tensorprodukten sind. Letztere werden aus den, mit entsprechender Vielfachheit genommenen Räumen T und N gebildet. Aus (19) folgt nun unmittelbar; der Tensor $\overset{(2)}{\theta}{}^{*}_{\alpha\beta}$ ist diejenige Komponente des Torsionstensors des Finslerraumes der dem Raum $T \otimes T \otimes N$ angehört.

2. Über die Invarianten einer Hyperfläche

Als erste Anwendung wollen wir nun nach der Bestimmung sämtlicher Differentialinvarianten der Hyperfläche F_{n-1} fragen. Eine solche Invariante ist dabei durch folgende Definition festgelegt.

DEFINITION. Ist eine Hyperfläche F_{n-1} im Finslerschen F_n gegeben, so verstehen wir unter einer Differentialinvarianten k-ter Ordnung eine Funktion der absoluten Ableitungen der x^i_α bis zur $k-1$-ter Ordnung, die sowohl gegenüber Transformationen der lokalen räumlichen, als der Hyperflächen koordinateninvariant ist.

Zur Bestimmung dieser Invarianten, kann man entweder so vorgehen, daß man die Ableitungen $Dx^i_\alpha, D^2x^i_\alpha, \ldots, D^kx^i_\alpha$ nach den Vektoren x^i_α, n^i des begleitenden n-Beines zerlegt. Die Koeffizienten dieser Zerlegungen sind schon invariant gegenüber Transformation der räumlichen Koordinaten. Aus diesen Funktionen müssen dann Invarianten gegenüber Transformationen der u^α gebildet werden. Man kann die letztere Schwierigkeit aber umgehen. Die Gleichungen (8) stellen nämlich ein Differentialgleichungssystem für die, die Hyperfläche bestimmenden Funktionen $x^i(u)$ dar. Die Integrabilitätsbedingungen dieser Gleichungen erhält man aber durch Bildung der äußeren invarianten Ableitungen der Formen Dx^i_α. Diese äußeren Ableitungen sind aber bekanntlich parameterinvariant. Zerlegt man also, die äußeren absoluten Ableitungen $D\wedge Dx^i_\alpha$, $D\wedge D\wedge Dx^i_\alpha$ usw. nach den Vektoren des begleitenden n-Beines, so ergeben die Koeffizienten schon die gesuchten Invarianten. Beachtet man, daß für eine vektorielle äußere Form ω^i beliebigen Grades

$$D\wedge\omega^i = d\wedge\omega^i + \omega^i_k\wedge\omega^k$$

gilt, so kann man unter Beachtung der Gleichungen (8) auf Grund einer Rechnung die wir hier übergehen zu folgenden Ergebniss kommen.

SATZ 1. *Jede Differentialinvariante der Hyperfläche der Darstellung* (1) *ist Funktion des metrischen Fundamentaltensors* $\gamma_{\alpha\beta}$, *der Tensoren* $\overset{(1)}{\theta}{}^*_{\alpha\beta}$, $\overset{(2)}{\theta}{}^*_{\alpha\beta}$, *der Krümmungstensoren der* F_{n-1}, *sowie der kovarianten Ableitungen bzw. der Ableitungen hinsichtlich der* $\dot{u}^\alpha$ *bis zu einer gewissen Differentiationsordnung.*

Der Satz enthält bei geeigneter Formulierung, auch die Bestimmung einer Hyperfläche durch die Fundamentaltensoren derselben, und stellt also eine Verallgemeinerung eines Bonnetschen Ergebnisses fest.

3. Über gewisse spezielle Hyperflächen

Das Verschwinden von gewissen Invarianten in den Gleichungen des beweglichen Bezugssystems, bzw. besondere Formen dieser Invarianten, werden spezielle Flächenklassen charakterisieren.

Wir beginnen zunächst mit dem Falle daß der zweite Fundamentaltensor

$$\overset{(1)}{\theta}{}^*_{\alpha\beta} = 0 \tag{20}$$

ist. Es sei

$$u^\alpha = u^\alpha(s)$$
$$x^i = x^i(u(s))$$

irgend eine Kurve der Hyperfläche, so ergibt sich aus (8), (12), (19) sowie der bekannten Eigenschaft

$$A_{ijk}\dot{x}^k = 0$$

des Torsionstensors, daß

$$\frac{D^2 x^i}{ds^2} = \frac{Dx'^i}{ds} = \frac{\omega^\varrho_\alpha}{ds} u'^\alpha x^i_\varrho + \theta_\alpha u'^\alpha n^i$$

besteht. Aus dieser Relation folgt wegen (20)

$$\frac{D^2 x^i}{ds^2} = \frac{\overset{(2)}{D^2} u^\alpha}{ds^2} x^i_\alpha. \tag{21}$$

Die induzierte Übertragung $\overset{(2)}{D}$ der Hyperfläche ist aber i.a. von der inneren $\overset{(1)}{D}$ derselben, verschieden. Man kann aber nachweisen, daß für Hyperflächen mit (20) die beiden Operatoren zusammenfallen. Es besteht nämlich zwischen den Parametern $K^{*\varrho}_{\alpha\beta}$ der induzierten, und den Parametern $\Gamma^{*\varrho}_{\alpha\beta}$ der inneren Übertragung der Zusammenhang

$$\Gamma^*_{\alpha\varrho\beta} = K^*_{\alpha\varrho\beta} + N(A_{\alpha\beta\sigma}\overset{(2)}{\theta}{}^{*\sigma}_{\varrho} - A_{\beta\varrho\sigma}\overset{(2)}{\theta}{}^{*\sigma}_{\alpha}) + (\overset{(1)}{\theta}{}^*_{\mu\alpha} l^\mu \overset{(2)}{\theta}{}^*_{\varrho\beta} - \overset{(1)}{\theta}{}^*_{\mu\varrho} l^\mu \overset{(2)}{\theta}{}^*_{\alpha\beta}). \tag{22}$$

Da also auf Grund von (20)

$$\frac{D^2 x^i}{ds^2} = \frac{\overset{(1)}{D^2} u^\alpha}{ds^2} x^i_\alpha$$

gilt, folgt, daß jede Kurve für die, die eine Seite dieser Gleichung verschwindet, auch die andere zu Null wird. Daß bedeutet aber, jede Flächengeodetische ist auch Raumgeodetische, und eine berührende Raumgeodetische ist Flächengeodetisch. Man hat also

SATZ 2. *Die durch das Verschwinden von $\overset{(1)}{\theta}{}^*_{\alpha\beta}$ gekennzeichneten Flächen sind totalgeodetisch, für sie fällt die innere und induzierte Übertragung zusammen.*

Diejenigen Flächen die den Sphären entsprechen, sind offensichtlich durch

$$\overset{(1)}{\theta}{}^*_{\alpha\beta} = c \cdot \gamma_{\alpha\beta} \qquad (c = \text{konst.}) \tag{23}$$

charakterisiert. Wegen (18) sind sie von konstanter Normalkrümmung. Das innere, von BERWALD eingeführte Krümmungsmaß dieser Hyperflächen, ist aber i. a. nicht konstant. Eine Ausnahme bildet der Fall, in dem der Raum ein Minkowskischer ist.[8] Betrachten wir den Fall für den

$$\overset{(2)}{\theta}{}^*_{\alpha\beta} = 0 \tag{24}$$

ist. Aus (22) folgt:

[8] Siehe O. VARGA [7].

SATZ 3. *Bei Hyperflächen, für die der Tensor* $\overset{(2)}{\theta}{}^{*}_{\alpha\beta}$ *verschwindet ist der induzierte und innere Zusammenhang identisch.*

Wegen Satz 2, ist aber die Behauptung von Satz 3 nicht umkehrbar.

Das alleinige Verschwinden von $K^{*\alpha}_{\varrho\beta}$ scheint ohne geometrische Bedeutung zu sein, gilt aber

(25) $$K^{*\varrho}_{\alpha\beta}=0,$$

(26) $$\overset{(2)}{\theta}{}^{*}_{\alpha\beta}=0,$$

so folgt aus (22) unmittelbar, daß auch die $\Gamma^{*}_{\alpha\varrho\beta}$ verschwinden. Letzteres bedeutet, daß die Hyperfläche eine Minkowskische Metrik besitzt. Es gibt also eine Koordinatensystem, für das

(27) $$ds=L(du).$$

Aus (22) entnimmt man aber, daß auch das Verschwinden von $\overset{(1)}{\Theta}{}^{*}_{\alpha\beta}$ und $K^{*\varrho}_{\alpha\beta}$ zu denselben Resultat führt. Man hat also

SATZ 4. *Jede Hyperfläche für die neben den Übertragungsparametern* $K^{*\varrho}_{\alpha\beta}$ *entweder der Tensor* $\overset{(1)}{\theta}{}^{*}_{\alpha\beta}$, *oder der Tensor* $\overset{(2)}{\theta}{}^{*}_{\alpha\beta}$ *verschwindet, besitzt eine Minkowskische Metrik.*

Die bisherigen Resultate geben keine notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß die Hyperfläche eine Minkowskische ist. Aus den Gleichungen (8) des beweglichen n-Beines kann man aber sofort zur Formel

(28) $$x^{i}_{\alpha\beta}u'^{\alpha}u'^{\beta}+2G^{i} = 2G^{\sigma}x^{i}_{\sigma}+Nn^{i}$$

gelangen. Da aber

(29) $$G_{\alpha}\equiv 0$$

notwendig und hinreichend dafür ist, daß die Hyperfläche eine Minkowskische ist, folgt [9]

SATZ 5. *Die notwendige und hinreichende Bedingung, daß eine Hyperfläche eine Minkowskische Metrik besitzt besteht darin, daß der Vektor*

$$x^{i}_{\alpha\beta}\dot{u}^{\alpha}\dot{u}^{\beta}+2G^{i}$$

zur gegebenen Hyperfläche senkrecht ist.

4. Über die Charakterisiering der Räume konstanter Krümmung

F. SCHUR und E. CARTAN haben die Räume konstanter Krümmung unter den Riemannschen, durch die unbeschränkte Existenz von totalgeodetischen Flächen charakterisiert. Dieser Satz ist auch in der Finslerschen Geometrie gültig[10] falls

[9] Siehe O. VARGA [8].
[10] Siehe O. VARGA [9].

man als Krümmungsmaß, den zur Zweistellung $\dot{x}, \eta$ gehörenden, von BERWALD definierten Skalar

$$R(x, \dot{x}, \dot{x}, \eta) = \frac{R_{ijkh}\dot{x}^i \eta^k \dot{x}^j \eta^h}{(g_{ik}g_{jh} - g_{ih}g_{jk})\dot{x}^i \eta^k \dot{x}^j \eta^h} \tag{30}$$

benützt.

Der Beweis stützt sich im wesentlichen wieder auf die Gleichungen (8), des beweglichen Bezugssystems. Wir betrachten aber neben dem Vektorfeld x^i_α der Fläche

$$x^i = x^i(u) \tag{31}$$

noch das Richtungsfeld

$$\dot{x}^i = x^i_\alpha(u)\dot{u}^\alpha. \tag{32}$$

Da die Fläche totalgeodetisch ist, folgt aus Gleichung (8) und (20), bei Beachtung von $A_{ijk}\dot{x}^k = 0$, zunächst

$$D\dot{x}^i = \overset{(2)}{D}\dot{u}^\alpha \cdot x^i_\alpha,$$

und dann wegen (22)

$$D\dot{x}^i = \overset{(1)}{D}\dot{u}^\alpha \cdot x^i_\alpha. \tag{33}$$

Aus der letzten Relation folgt aber unmittelbar, daß mit $x^i(u)$ auch

$$x^i = c^i_k x^k(u) + c^i$$

eine Parameterdarstellung einer totalgeodetischen Fläche ist. Die hier auftretenden Konstanten c^i_k und c^i sind willkürlich. Dadurch erscheint in unserem Problem die allgemeine lineare Gruppe. Man kann so, von einem beliebigen Flächenelement das durch eine beliebige Richtung geht, zu einem zweiten willkürlich vorgegebenen Flächenelement, mit einer beliebigen vorgegebenen Richtung in derselben, durch ein Transformation der Gruppe übergehen. Dies bedeutet aber die unbeschränkte Integrabilität der Gleichungen (32). Ihr Resultat zeigt, daß der Raum von konstanter Krümmung ist. Umgekehrt, kann nachgewiesen werden,[11] daß in einem Raum von konstanter Krümmung unbeschränkt totalgeodetische Fläche existieren. Somit gilt

SATZ 6. *Die Finslerräume konstanter Krümmung sind durch die unbeschränkte Existenz von totalgeodetischen Flächen charakterisiert.*

(Eingegangen am 21. März 1966.)

[11] Siehe O. VARGA [9].

Literatur

[1] E. CARTAN, *La méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus et les espaces généralisées,* Actualités sci. et ind. 194 (Exposés de géométrie V.) (Paris, 1935), 65 p.
[2] E. CARTAN, *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile* (Paris, 1937).
[3] E. CARTAN, *Les espaces de Finsler,* Actualités sci. et ind. 79, (Hermann, Paris), 1934.
[4] CH. EHRESMANN, *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable* (Bruxelles, 1950).
[5] H. RUND, *The Differential Geometry of Finsler Spaces* (Berlin, 1959).
[6] O. VARGA, Über den inneren und induzierten Zusammenhang für Hyperflächen in Finslerschen Räumen, *Publ. Math. Debrecen,* **8** (1961), S. 208—217.
[7] O. VARGA, Über Hyperflächen konstanter Normalkrümmung in Minkowskischen Räumen, *Tensor,* **13** (1963), S. 246—250.
[8] O. VARGA, Hyperflächen mit Minkowskischer Maßbestimmung in Finslerräumen, *Publ. Math. Debrecen,* **11** (1964), S. 301—309.
[9] O. VARGA, Über eine Charakterisierung der Finslerschen Räume konstanter Krümmung, *Monatsh. f. Math.,* **65** (1961), S. 277—286.

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (1—2), 1967, pp. 217—229.

A GENERALIZATION OF A PROBLEM OF STEINHAUS

By

J. KOMLÓS (Budapest)

(*Presented by* A. RÉNYI)

§ 1.

H. STEINHAUS [1] raised the following problem: "Does there exist a family F of measurable functions such that

a) $|f(t)|=1$ for $f(t)\in F$

b) for each sequence $\{f_n(t)\}$, where $f_n(t)\in F$ the sequence

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_k(t)$$

is divergent for almost all t?"

D. G. AUSTIN proved that if $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ is a sequence of random variables with possible values 0 and 1, then there exists an increasing sequence of integers $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ and a random variable η such that

$$\mathbf{P}\left(\frac{\xi_{n_1}+\xi_{n_2}+\dots+\xi_{n_k}}{k}\to\eta\right)=1$$

that is for the subsequence $\xi_{n_1}, \xi_{n_2}, \dots, \xi_{n_k}, \dots$ the strong law of large numbers holds.

A. RÉNYI proved that the same holds for any sequence of uniformly bounded random variables (oral communication).

P. RÉVÉSZ [2] showed that the condition

$$\mathbf{M}(\xi_n^2)\leqq K \qquad (n=1,2,\dots)$$

for some $K>0$, guarantees the existence of a subsequence for which the strong law of large numbers is valid. (He proved the following sharper theorem:

If

$$\mathbf{M}(\xi_n^2)\leqq K \qquad (n=1,2,\dots),$$

then there exists a subsequence $\xi_{n_1}, \xi_{n_2}, \dots, \xi_{n_k}, \dots$ and a random variable η such that

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i(\xi_{n_i}-\eta)$$

is convergent with probability 1, provided that $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ is an arbitrary sequence of real numbers for which

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2<+\infty.)$$

He asked: whether we can replace the condition $\mathbf{M}(\xi_n^2) \leqq K$ by the condition

$$\mathbf{M}(|\xi_n|^{1+\varepsilon}) \leqq K \qquad (n=1, 2, \dots)$$

with some ε $(0 \leqq \varepsilon < 1)$.

In this paper we prove that this conjecture holds with $\varepsilon = 0$, that is the following theorem is true:

THEOREM 1. *If $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ is a sequence of random variables for which*

$$\liminf_{n=+\infty} \mathbf{M}(|\xi_n|) < +\infty,$$

then there exists an increasing sequence $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ of integers and an integrable random variable η, for which

$$\mathbf{P}\left(\frac{\xi_{n_1} + \xi_{n_2} + \dots + \xi_{n_k}}{k} \to \eta\right) = 1.$$

Moreover we prove the following

THEOREM 1a. *If $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ is a sequence of random variables for which*

$$\liminf_{n=+\infty} \mathbf{M}(|\xi_n|) < +\infty,$$

then there exists a subsequence $\{\eta_n\}$ of the sequence $\{\xi_n\}$ and an integrable random variable η such that for an arbitrary subsequence $\{\tilde{\eta}_n\}$ of the sequence $\{\eta_n\}$ holds:

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n=+\infty} \frac{\tilde{\eta}_1 + \tilde{\eta}_2 + \dots + \tilde{\eta}_n}{n} = \eta\right) = 1.$$

The theorem is the best possible in the following sense:

THEOREM 2. *If $\{a_n\}$ is an arbitrary sequence of positive numbers for which*

$$\lim_{n=+\infty} a_n = +\infty,$$

then there exists a sequence of random variables

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots \quad \textit{with} \quad \mathbf{M}(|\xi_n|) = a_n,$$

such that for any subsequence of this sequence the strong law of large numbers is not valid.

Moreover there exists a sequence $\{\eta_n\}$ of independent identically distributed random variables (with $\mathbf{M}(|\eta_n|) = 1$) such that for the sequence $\xi_n = a_n \cdot \eta_n$ (and for any of its subsequences) the strong law of large numbers is not valid.

Clearly Theorem 1 implies the undermentioned corollary (which is also a consequence of the individual ergodic theorem of Birkhoff):

COROLLARY. *If $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ are equivalent (symmetrically dependent) random variables with finite expectation, then there exists an integrable random variable η such that*

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n=+\infty} \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} = \eta\right) = 1.$$

(We say that $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ are equivalent or symmetrically dependent if the joint distribution function of the variables $\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_k}$ ($i_t \neq i_s$ if $t \neq s$) depends only on k and it does not depend on the choice of the indices $i_1, i_2, \ldots, i_k$ that is

$$\mathbf{P}(\xi_{i_1} < x_1; \xi_{i_2} < x_2; \ldots; \xi_{i_k} < x_k) = F_k(x_1, x_2, \ldots, x_k).$$

§ 2.

In course of the proof of Theorem 1 we are making use of the following *Theorem* 0 [3].

If for a sequence $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ of random variables the following two conditions are fulfilled:

a)
$$\mathbf{P}\big(\mathbf{M}(\xi_n | \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}) \to 0\big) = 1.$$

where $\mathbf{M}(\xi_n | \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})$ denotes the conditional expectation of ξ_n with respect to the random variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$;

b)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{M}(\xi_k^2)}{k^2} < +\infty,$$

then for the sequence $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ the strong law of large numbers holds that is

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n=+\infty} \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} = 0\right) = 1.$$

First of all we introduce some notations and prove some lemmas.

Let H denote the Hilbert space of all random variables ξ defined on the underlying probability space $[\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}]$ for which $\mathbf{M}(\xi^2)$ is finite, the inner product (ξ, η) is defined by $(\xi, \eta) = \mathbf{M}(\xi\eta)$. We say that the sequence $\{\xi_n\}$ of square integrable random variables converges to η weakly (in the Hilbert space H) and denote

$$\xi_n \underset{n}{\rightharpoonup} \eta$$

if

$$\lim_{n=+\infty} \mathbf{M}(\xi_n \beta) = \mathbf{M}(\eta\beta)$$

for any element β of H.

(We use

$$\lim_{n} \text{ or } \underset{n}{\rightharpoonup} \text{ resp. } \liminf_{n}$$

instead of the symbols

$$\lim_{n=+\infty} \quad \text{resp.} \quad \liminf_{n=+\infty}.)$$

All over the paper $F_a(x)$ and $G_a(x)$ denote the following function (for $a > 0$):

$$F_a(x) = \begin{cases} x, & \text{if } |x| \leqq a \\ 0, & \text{if } |x| > a, \end{cases}$$

$$G_a(x) = \frac{k}{a} \quad \text{if} \quad \frac{k}{a} \leqq x < \frac{k+1}{a} \quad \text{for } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

LEMMA 1. *If* $\xi_n \underset{n}{\rightharpoonup} \eta$ *then*

$$\mathbf{M}(|\eta|) \leqq \liminf_n \mathbf{M}(|\xi_n|).$$

PROOF. Let β denote the function

$$\beta(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \eta \geqq 0 \\ -1 & \text{if} \quad \eta < 0. \end{cases}$$

So

$$\mathbf{M}(\xi_n \beta) \underset{n}{\to} \mathbf{M}(\eta\beta) = \mathbf{M}(|\eta|).$$

But

$$|\mathbf{M}(\xi_n \beta)| \leqq \mathbf{M}(|\xi_n|)$$

so we have

$$\mathbf{M}(|\eta|) \leqq \liminf_n \mathbf{M}(|\xi_n|)$$

qu. e. d.

LEMMA 2. *If for a sequence* $\{\xi_n\}$

$$\mathbf{M}(|\xi_n|) \leqq K \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

holds with some $K > 0$ *and the sequence* $\{F_k(\xi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ *is weakly convergent for* $k = 1, 2, \dots$ *that is*

$$F_k(\xi_n) \underset{n}{\rightharpoonup} \eta_k \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

then there exists an integrable random variable η *such that*

$$\mathbf{P}(\lim_k \eta_k = \eta) = 1,$$

and

$$\mathbf{M}(|\eta_k - \eta|) \underset{k}{\to} 0.$$

PROOF. Putting $\eta_0 \equiv 0$ and

$$\bar{\eta}_n = \eta_n - \eta_{n-1}$$

we have

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{n} \bar{\eta}_k \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

So we have to prove that the series $\sum_{k=1}^{\infty} \bar{\eta}_k$ is convergent with probability 1, and also in the norm of the Banach space L_1. Instead of this fact we prove that the series $\sum_{k=1}^{\infty} |\bar{\eta}_k|$ is convergent with probability 1. Putting $F_0(\xi) \equiv 0$,

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{\infty} \big(F_k(\xi_n) - F_{k-1}(\xi_n)\big)$$

and since in a fixed element ω of the space Ω at most one $\big(F_k(\xi_n) - F_{k-1}(\xi_n)\big)$ is different from 0 (n is fixed),

$$|\xi_n| = \sum_{k=1}^{\infty} |F_k(\xi_n) - F_{k-1}(\xi_n)|$$

and so

$$\mathbf{M}(|\xi_n|) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{M}(|F_k(\xi_n) - F_{k-1}(\xi_n)|).$$

Clearly

$$(F_k(\xi_n) - F_{k-1}(\xi_n)) \underset{n}{\rightharpoonup} \bar{\eta}_k,$$

and by Lemma 1 we have

$$\mathbf{M}(|\bar{\eta}_k|) \leqq \liminf_n \mathbf{M}(|F_k(\xi_n) - F_{k-1}(\xi_n)|)$$

that is

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{M}(|\bar{\eta}_k|) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \liminf_n \mathbf{M}(|F_k(\xi_n) - F_{k-1}(\xi_n)|).$$

Clearly for all integer N there exists an integer $m = m(N)$ such that

$$\sum_{k=1}^{N} \liminf_n \mathbf{M}(|F_k(\xi_n) - F_{k-1}(\xi_n)|) \leqq \sum_{k=1}^{N} \mathbf{M}(|F_k(\xi_m) - F_{k-1}(\xi_m)|) + 1.$$

So we have

$$\sum_{k=1}^{N} \liminf_n \mathbf{M}(|F_k(\xi_n) - F_{k-1}(\xi_n)|) \leqq \mathbf{M}(|\xi_m|) + 1 \leqq K + 1$$

for all integer N, that is the series $\sum_{k=1}^{\infty} \liminf_n \mathbf{M}(|F_k(\xi_n) - F_{k-1}(\xi_n)|)$ is convergent and therefore the series

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{M}(|\bar{\eta}_k|)$$

is also convergent, and by the Beppo—Levy theorem the series $\sum_{k=1}^{\infty} |\bar{\eta}_k|$ is convergent with probability 1 and this proves Lemma 2.

§ 3.

PROOF OF THEOREM 1. 1) Let $\{\xi_n'\}$ be a subsequence of $\{\xi_n\}$ for which

$$\mathbf{M}(|\xi_n'|) < K \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

for some $K > 0$.

Clearly $\{F_k(\xi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ is weakly compact in the space H for $k = 1, 2, \ldots$ (because they are bounded).

Let us choose a subsequence $\{\xi_{n,1}'\}$ from the sequence $\{\xi_n'\}$ such that

$$F_1(\xi_{n,1}') \underset{n}{\rightharpoonup} \beta_1$$

where β_1 is a random variable.

Let $\{\xi_{n,2}'\}$ be a subsequence of the sequence $\{\xi_{n,1}'\}$ such that

$$F_2(\xi_{n,2}') \underset{n}{\rightharpoonup} \beta_2,$$

where β_2 is a random variable etc. let $\{\xi'_{n,k}\}$ be a subsequence of the sequence $\{\xi'_{n,k-1}\}$ such that

$$F_k(\xi'_{n,k}) \underset{n}{\to} \beta_k$$

where β_k is a random variable etc.

Let us put $\bar{\xi}_n = \xi'_{n,n}$ $(n=1, 2, \dots)$. Clearly

$$F_k(\bar{\xi}_n) \underset{n}{\to} \beta_k \quad \text{for} \quad k=1, 2, \dots .$$

2) The sequence of real numbers

$$\mathbf{P}(k-1 \leqq |\bar{\xi}_n| < k) \qquad (n=1, 2, \dots, \; k=1, 2, \dots)$$

is bounded, so we can choose from the sequence $\{\bar{\xi}_n\}$ a subsequence $\{\xi_{n,1}\}$ for which

$$\mathbf{P}(0 \leqq |\xi_{n,1}| < 1) \underset{n}{\to} p_1$$

and

$$\frac{p_1}{2} \leqq \mathbf{P}(0 \leqq |\xi_{n,1}| < 1) < p_1 + \frac{1}{1^3} \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

for some $0 \leqq p_1 \leqq 1$.

Let us choose from the sequence $\{\xi_{n,1}\}$ a subsequence $\{\xi_{n,2}\}$ for which

$$\mathbf{P}(1 \leqq |\xi_{n,2}| < 2) \underset{n}{\to} p_2$$

and

$$\frac{p_2}{2} \leqq \mathbf{P}(1 \leqq |\xi_{n,2}| < 2) < p_2 + \frac{1}{2^3} \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

for some $0 \leqq p_2 \leqq 1$ etc. Let $\{\xi_{n,k}\}$ be a subsequence of the sequence $\{\xi_{n,k-1}\}$ for which

$$\mathbf{P}(k-1 \leqq |\xi_{n,k}| < k) \underset{n}{\to} p_k$$

and

$$\frac{p_k}{2} \leqq \mathbf{P}(k-1 \leqq |\xi_{n,k}| < k) < p_k + \frac{1}{k^3} \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

for some $0 \leqq p_k \leqq 1$ etc.

Let us put

$$\zeta_n = \xi_{n,n^2} \quad (n=1, 2, \dots).$$

So for ζ_n (and clearly for any of its subsequences too) it holds that:

$$\mathbf{P}(k-1 \leqq |\zeta_n| < k) \underset{n}{\to} p_k \qquad (k = 1, 2, \dots) \tag{1}$$

and

$$\frac{p_k}{2} \leqq \mathbf{P}(k-1 \leqq |\zeta_n| < k) < p_k + \frac{1}{k^3} \tag{2}$$

for $n=1, 2, \dots$ and $k=1, 2, \dots, n^2$.

The relation
$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(k-1 \leqq |\zeta_n| < k) = 1$$
and (2) imply that
$$\sum_{k=1}^{n^2} p_k \leqq \sum_{k=1}^{n^2} 2 \cdot \mathbf{P}(k-1 \leqq |\zeta_n| < k) \leqq 2$$
for all n that is

(3) $$\sum_{k=1}^{\infty} p_k \leqq 2.$$

Similarly because of
$$\sum_{k=1}^{\infty} (k-1)\mathbf{P}(k-1 \leqq |\zeta_n| < k) \leqq \mathbf{M}(|\zeta_n|) < K$$
hence
$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}k(k-1 \leqq |\zeta_n| < k) < K+1.$$
(2) implies that
$$\sum_{k=1}^{n^2} k \cdot p_k \leqq \sum_{k=1}^{n^2} 2 \cdot k \cdot \mathbf{P}(k-1 \leqq |\zeta_n| < k) < 2K+2$$
for all n, so we have

(4) $$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k \leqq 2K+2.$$

3) If $\{\eta_n\}$ is an arbitrary subsequence of $\{\zeta_n\}$ and
$$\bar{\eta}_n = F_n(\eta_n),$$
then we prove that

(5) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{M}(\bar{\eta}_n^2)}{n^2} < +\infty$$

and

(6) $$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\eta_n \neq \bar{\eta}_n) < +\infty.$$

Proof of (5): (Applying (2) and (4))
$$\mathbf{M}(\bar{\eta}_n^2) < \sum_{k=1}^{n} k^2 \mathbf{P}(k-1 \leqq |\eta_n| < k) < \sum_{k=1}^{n} k^2 \left(p_k + \frac{1}{k^3}\right).$$
Hence
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{M}(\bar{\eta}_n^2)}{n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k^2 \left(p_k + \frac{1}{k^3}\right)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(k^2 \left(p_k + \frac{1}{k^3}\right) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) \leqq$$
$$\leqq \sum_{k=1}^{\infty} k \left(p_k + \frac{1}{k^3}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < (2K+2)+2 = 2K+4.$$

Qu. e. d.

Proof of (6): (Applying (2) and (4))

$$\mathbf{P}(\eta_n \neq \eta_n) = \mathbf{P}(|\bar{\eta}_n| > n) \leqq \sum_{k=n}^{\infty} \mathbf{P}(k-1 \leqq |\eta_n| < k) = \sum_{k=n}^{n^2} \mathbf{P}(k-1 \leqq |\eta_n| < k) +$$

$$+ \sum_{k=n^2+1}^{\infty} \mathbf{P}(k-1 \leqq |\eta_n| < k) < \sum_{k=n}^{n^2} \left(p_k + \frac{1}{k^3}\right) + \mathbf{P}(|\eta_n| \geqq n^2) <$$

$$< \sum_{k=n}^{\infty} p_k + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^3} + \frac{\mathbf{M}(|\eta_n|)}{n^2} < \sum_{k=n}^{\infty} p_k + \frac{1}{n^2} + \frac{K}{n^2} = \sum_{k=n}^{\infty} p_k + \frac{K+1}{n^2}.$$

Hence

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\eta_n \neq \bar{\eta}_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} p_k + \frac{K+1}{n^2} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K+1}{n^2} <$$

$$< (2K+2) + (2K+2) = 4K+4.$$

Qu. e. d.

The relation (6) and the Borel—Cantelli lemma imply that in almost all ω of the probability space

$$\eta_n = \bar{\eta}_n \quad \text{for} \quad n > n_0(\omega)$$

therefore the relations

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \bar{\eta}_k \underset{n}{\to} \eta\right) = 1$$

and

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \eta_k \underset{n}{\to} \eta\right) = 1$$

are equivalent.

4) Let us put

$$\gamma_n = \bar{\eta}_n - \beta_n = F_n(\eta_n) - \beta_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

(β_k was defined in 1) by the relation

$$F_k(\bar{\xi}_n) \underset{n}{\to} \beta_k.)$$

We prove that

$$\mathbf{P}\left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n}{n} \underset{n}{\to} 0\right) = 1 \tag{7}$$

if $\{\eta_n\}$ is a suitable subsequence of $\{\zeta_n\}$. This fact proves our theorem 1 because lemma 2 implies that

$$\mathbf{P}(\beta_n \underset{n}{\to} \eta) = 1$$

for some integrable random variable η and so

$$\mathbf{P}\left(\frac{\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n}{n} \underset{n}{\to} \eta\right) = 1.$$

Hence (7) implies that

$$\mathbf{P}\left(\frac{\bar{\eta}_1 + \bar{\eta}_2 + \ldots + \bar{\eta}_n}{n} \underset{n}{\to} \eta\right) = 1$$

and (6) implies that

$$\mathbf{P}\left(\frac{\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_n}{n}\underset{n}{\rightarrow}\eta\right)=1;$$

but $\{\eta_n\}$ is a subsequence of the original sequence $\{\xi_n\}$ and so our theorem will be proved.

5) Now we are going to choose the subsequence $\{\eta_n\}$ from the sequence $\{\zeta_n\}$.

Let us put

$$\eta_1=\zeta_1, \quad \gamma_1=F_1(\eta_1)-\beta_1$$

and

$$\eta_1'=G_{\frac{1}{2}}(\gamma_1).$$

η_1' takes only finitely many values, so the smallest σ-algebra with respect to which η_1' is measurable, contains only finitely many sets.

Let $A_{1,1}$; $A_{1,2}$; ...; A_{1,N_1} denote these sets having positive probability (the finitely many sets having probability 0, we can disregard) and $\alpha_{1,1}$; $\alpha_{1,2}$; ...; α_{1,N_1} their characteristic functions.

Put

$$\varepsilon_1=\min_{1\leqq k\leqq N_1}\mathbf{P}(A_{1,k}).$$

The sequence

$$F_2(\zeta_m)-\beta_2$$

tends to 0 weakly (if m tends to $+\infty$).

Let m_2 be such a large natural number that

$$\left|\mathbf{M}(\alpha_{1,k}(F_2(\zeta_m)-\beta_2))\right|\leqq\frac{\varepsilon_1}{2}$$

hold for $k=1,2,\ldots,N_1$ and $m\geqq m_2$.

Let us put

$$\eta_2=\zeta_{m_2}.$$

Put $\gamma_2=F_2(\eta_2)-\beta_2$ and $\eta_2'=G_{\varepsilon_1/4}(\gamma_2)$. η_1' and η_2' take on only finitely many values, so the smallest σ-algebra with respect to which η_1' and η_2' are measurable, contains only finitely many sets. Let $A_{2,1}$; $A_{2,2}$;...; A_{2,N_2} denote these sets (with positive probability) and $\alpha_{2,1}$; $\alpha_{2,2}$; ...; α_{2,N_2} their characteristic functions.

Let us put

$$\varepsilon_2=\min_{1\leqq k\leqq N_2}\mathbf{P}(A_{2,k}).$$

The sequence

$$F_3(\zeta_m)-\beta_3$$

tends to 0 weakly.

Let $m_3>m_2$ be such a large natural number, that

$$\left|\mathbf{M}\left(\alpha_{2,k}(F_3(\zeta_m)-\beta_3)\right)\right|\leqq\frac{\varepsilon_2}{3}$$

hold for $k=1,2,\ldots,N_2$ and $m\geqq m_3$. Let us put $\eta_3=\zeta_{m_3}$. Put $\gamma_3=F_3(\eta_3)-\beta_3$ and

$$\eta_3'=G_{\varepsilon_2/8}(\gamma_3) \text{ etc.}$$

Let $m_n > m_{n-1}$ be such a large index that

$$(8) \qquad \left|\mathbf{M}\left(\alpha_{n-1,k}(F_n(\zeta_m)-\beta_n)\right)\right| \leqq \frac{\varepsilon_{n-1}}{n}$$

hold for $k=1, 2, \ldots, N_{n-1}$ and $m \geqq m_n$, where $\alpha_{n-1,k}$ $(k=1, 2, \ldots, N_{n-1})$ denote the indicator functions of the sets $A_{n-1,k}$ (with positive probability) contained by the smallest σ-algebra with respect to which η'_1; $\eta'_2 \ldots \ldots, \eta'_{n-1}$ are measurable and

$$\varepsilon_{n-1} = \min_{1 \leqq k \leqq N_{n-1}} \mathbf{P}(A_{n-1,k}).$$

Let us put

$$\eta_n = \zeta_{m_n}, \quad \gamma_n = F_n(\eta_n) - \beta_n$$

and

$$\eta'_n = G_{\frac{\varepsilon_{n-1}}{2^n}}(\gamma_n)$$

etc.

6) We prove that this sequence $\{\gamma_n\}$ obeys the strong law of large numbers (with limit 0).

The definition of η'_n implies, that in all element ω of the probability space Ω

$$0 \leqq \gamma_n - \eta'_n \leqq \frac{1}{2^n}$$

holds. Hence

$$0 \leqq \frac{\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_n}{n} - \frac{\eta'_1+\eta'_2+\ldots+\eta'_n}{n} =$$

$$= \frac{(\gamma_1-\eta'_1)+(\gamma_2-\eta'_2)+\ldots+(\gamma_n-\eta'_n)}{n} \leqq \frac{1}{n}$$

that is for $\{\gamma_n\}$ the strong law of large numbers holds if and only if it holds for the sequence $\{\eta'_n\}$.

We show that for the sequence $\{\eta'_n\}$ the conditions of Theorem 0 hold.

By (5) we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{M}(\bar{\eta}_n^2)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{M}(F_n^2(\eta_n))}{n^2} < +\infty$$

and it is easy to see that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{M}(\gamma_n^2)}{n^2} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot\mathbf{M}(\bar{\eta}_n^2)}{n^2} < +\infty.$$

Clearly

$$\mathbf{M}(\eta_n'^2) \leqq 2\cdot\mathbf{M}(\gamma_n^2)+1$$

that is

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{M}(\eta_n'^2)}{n^2} < +\infty.$$

So we have to prove only the fulfilment of the first condition of Theorem 0 for the sequence $\{\eta'_n\}$ that is

$$\mathbf{P}(\mathbf{M}(\eta'_n|\eta'_1, \eta'_2, \ldots, \eta'_{n-1}) \underset{n}{\to} 0) = 1.$$

Using (8) we obtain

$$|\mathbf{M}(\eta_n'|\eta_1',\eta_2',\dots,\eta_{n-1}')|\leqq \max_{1\leqq k\leqq N_{n-1}}|\mathbf{M}(\eta_n'|A_{n-1,k})|=\max_{1\leqq k\leqq N_{n-1}}\left|\frac{\mathbf{M}(\eta_n'\alpha_{n-1,k})}{\mathbf{M}(\alpha_{n-1,k})}\right|\leqq$$

$$\leqq\frac{\max\limits_{1\leqq k\leqq N_{n-1}}|\mathbf{M}(\eta_n'\alpha_{n-1,k})|}{\varepsilon_{n-1}}\leqq\frac{\max\limits_{1\leqq k\leqq N_{n-1}}|\mathbf{M}(\gamma_n\alpha_{n-1,k})|}{\varepsilon_{n-1}}+\frac{\max\limits_{1\leqq k\leqq N_{n-1}}|\mathbf{M}((\eta_n'-\gamma_n)\alpha_{n-1,k})|}{\varepsilon_{n-1}}\leqq$$

$$\leqq\frac{\varepsilon_{n-1}}{n\varepsilon_{n-1}}+\frac{\mathbf{M}(|\eta_n'-\gamma_n|)}{\varepsilon_{n-1}}\leqq\frac{1}{n}+\frac{\varepsilon_{n-1}}{2^n\varepsilon_{n-1}}<\frac{2}{n}$$

in almost all element ω of the probability space.

Then

$$\mathbf{P}(\mathbf{M}(\eta_n'|\eta_1',\eta_2',\dots,\eta_{n-1}')\underset{n}{\rightarrow}0)=1$$

and this fact proves our theorem 1. Qu. e. d.

§ 4.

Proof of Theorem 1a. In the proof of Theorem 1 we choosed m_n so large that

$$|\mathbf{M}(\alpha_{n-1,k}(F_n(\zeta_m)-\beta_n))|\leqq\frac{\varepsilon_{n-1}}{n}$$

hold for all $m\geqq m_n$ where $\alpha_{n-1,k}$ $(k=1,2,\dots,N_{n-1})$ denote the indicator functions of the sets $A_{n-1,k}$ with positive probability contained by the smallest σ-algebra with respect to which $\eta_i'=G_{\frac{\varepsilon_{i-1}}{2^i}}(F_i(\eta_i)-\beta_i)$ are measurable for $i=1,2,\dots,n-1$;

$$\varepsilon_{n-1}=\min_{1\leqq k\leqq N_{n-1}}\mathbf{P}(A_{n-1,k}).$$

Now let us put $\eta_1=\zeta_1$, $\varphi_1=\frac{1}{2}$ and let us suppose that $\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_{n-1}$ and the numbers $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_{n-1}$ are choosed and choose the variable η_n, and the number φ_n.

Let k be an integer with $1\leqq k\leqq n$ and $1\leqq i_1<i_2<\dots<i_k=n$ integers. Let us put $\eta_t'=G_{\frac{\varphi_{i_t}}{2^{i_t}}}(F_t(\eta_{i_t})-\beta_t)$ $(t=1,2,\dots,k-1)$. The smallest σ-algebra with respect to which $\eta_1',\eta_2',\dots,\eta_{k-1}'$ $(\eta_0\equiv 0)$ are measurable, contains only finitely many sets. Let us choose the integers $i_1,i_2,\dots,i_{k-1}$ in all possible ways and denote the obtained sets (which have positive probability) by $A_{k-1,1}'$; $A_{k-1,2}'$; ...; $A_{k-1,M_{k-1}}'$ and their indicator functions by

$$\alpha_{k-1,1}';\alpha_{k-1,2}';\dots;\alpha_{k-1,M_{k-1}}'.$$

Let us put

$$\varphi_{n,k}=\min_{1\leqq t\leqq M_{k-1}}\mathbf{P}(A_{k-1,t}')$$

and

$$\varphi_n=\min_{1\leqq k\leqq n}\varphi_{n,k}.$$

Let $m_{n,k}$ be such a large index that

$$|\mathbf{M}(\alpha'_{k-1,t}(F_k(\zeta_m)-\beta_k))| \leqq \frac{\varphi_n}{k} \qquad (t=1,2,\dots,M_{k-1})$$

hold for all $m \geqq m_{n,k}$ and put $m'_n = \max\limits_{1\leqq k\leqq n} m_{n,k}$. Let us put $\eta_n = \zeta_{m'_n}$. The proof of Theorem 1 shows that $\{\eta_n\}$ is such a sequence that if $\eta_{i_1}, \eta_{i_2}, \dots, \eta_{i_k}, \dots$ is a subsequence of $\{\eta_n\}$ then for the sequence $\{\eta'_{i_k}\}$ both conditions of Theorem 0 hold, and this fact proves Theorem 1a.

§ 5.

An example proving Theorem 2 is given by P. Révész.

Proof of Theorem 2. Let $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ be a sequence of mutually independent random variables with common distribution function:

$$\mathbf{P}(\xi_1=0)=p_0, \quad \mathbf{P}(\xi_1=\pm k)=p_k \qquad (k=1,2,\dots)$$

where

$$p_0+2\cdot\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$$

and

$$\mathbf{M}(|\xi_1|) = 2\cdot\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot p_k = 1.$$

The numbers p_k $(k=1,2,\dots)$ will be chosen later. We have to choose these numbers such that for the sequence $\{\eta_n = a_n\cdot\xi_n\}$ and for its any subsequence would not hold the strong law of large numbers. The variables η_n's have symmetric distribution, so the possible limit is 0. We choose the number p_k such that

$$\mathbf{P}\left(\frac{\eta_n}{n} = \frac{a_n\cdot\xi_n}{n} \underset{n}{\to} 0\right) = 0$$

so clearly

$$\mathbf{P}\left(\frac{\eta_{i_n}}{n} \underset{n}{\to} 0\right) = 0$$

for any sequence $0<i_1<i_2<\dots<i_n<\dots$ of natural numbers which implies

$$\mathbf{P}\left(\frac{\eta_{i_1}+\eta_{i_2}+\dots+\eta_{i_n}}{n} \underset{n}{\to} 0\right) = 0$$

for any sequence $\{i_n\}$ of indices.

Since $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots$ are mutually independent, the relation

$$\mathbf{P}\left(\frac{\eta_n}{n} \underset{n}{\to} 0\right) = 0$$

holds if

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{\eta_n}{n}\right| \geqq 1\right) = +\infty.$$

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{\eta_n}{n}\right| \geqq 1\right) = \mathbf{P}\left(\frac{a_n|\xi_n|}{n} \geqq 1\right) = \mathbf{P}\left(|\xi_n| \geqq \frac{n}{a_n}\right) = 2 \cdot \sum_{k \geqq \frac{n}{a_n}} p_k.$$

Hence

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{\eta_n}{n}\right| \geqq 1\right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k \geqq \frac{n}{a_n}} p_k\right) = 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty}\left(p_k \cdot \sum_{\frac{n}{a_n} \leqq k} 1\right)$$

(in the last inner sum n is going).

Since $a_n \underset{n}{\to} +\infty$, for the function

$$f(k) = \sum_{\frac{n}{a_n} \leqq k} 1$$

we have

$$\frac{f(k)}{k} \underset{k}{\to} +\infty.$$

Let us put $g(k) = \dfrac{f(k)}{k}$, then $g(k) \underset{k}{\to} +\infty$ and

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{\eta_n}{n}\right| \geqq 1\right) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} p_k \cdot k \cdot g(k).$$

So we have to choose the numbers p_k such a way that

$$p_0 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$$

$$2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k = 1$$

and

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k \cdot g(k) = +\infty$$

hold where $g(k)$ is a function with $g(k) \underset{k}{\to} +\infty$.

The construction of a sequence $\{p_k\}$ with these properties is so easy that we can omit it.

(Received 22 March 1966)

References

[1] *The New Scottish Book* (Wroclaw, 1946—1958), Problem 126.
[2] P. Révész, On a problem of Steinhaus, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **16** (1965), pp. 310—318.
[3] M. Loève, *Probability theory* (New York, 1955) p. 387.

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (1—2), 1967, pp. 231—234.

A DIRECT LIMIT REPRESENTATION FOR ABELIAN GROUPS WITH AN APPLICATION TO TENSOR SEQUENCES

By

T. J. HEAD (College, Alaska)

(*Presented by* L. RÉDEI)

Each group may be regarded as a direct limit of its finitely generated subgroups. We develop in §1 a slightly different direct limit representation valid for all *abelian* groups. The advantage of this alternate representation lies in the fact that some properties of abelian groups are preserved under direct limits but are not inherited by arbitrary finitely generated subgroups. We will be concerned with the following such property which an abelian group G may have: for a particular subgroup A of a particular group B, the canonical homomorphism $G\otimes A \to G\otimes B$ is a monomorphism. In §2 we apply the direct limit representation of §1 to discuss the exactness of tensor sequences. Since §1 and §2 allow a quick description of those classes of abelian torsion groups which are closed under direct sums and direct limits, we insert this description as §3. In §4 we discuss some details of the splitting question for tensor sequences.

We use $Z(n)$ to denote the group of integers modulo n and $Z(p^\infty)$ to denote the p-primary component of the group of rationals modulo 1. Otherwise our general reference for terms and notations is [1].

1. A direct limit representation. Let S_α $(\alpha\in A)$ be the family of those subgroups of G which are isomorphic to the direct sum of a finitely generated free abelian group and a finite number of indecomposable primary groups each isomorphic to a direct summand of G. This family is directed by set inclusion. It is a consequence of our first theorem that G is isomorphic to the direct limit of this directed system of groups S_α $(\alpha\in A)$.

THEOREM 1. *Each finitely generated subgroup A of each abelian group G is contained in a subgroup S of G which is the direct sum of a finitely generated free abelian group and a finite number of indecomposable primary groups where each of the indecomposable primary groups is isomorphic to a summand of G.*

PROOF. *Case I:* Let G be a p-primary group. Then A is finite and we may use finite induction on the order of A. The theorem is trivial for $A=0$. Suppose g is an element of order p in A. (i) If g is in the maximal divisible subgroup D of G, let H $(\cong Z(p^\infty))$ be a divisible hull of $\{g\}$ in D. Then $A+H = A_1\oplus H\subset P\oplus H=G$ for some summands A_1 of A and P of G for which $P\supset A_1$. (ii) If g is of finite height n in G, let $h\in G$ be such that $g=p^n h$ and let $H=\{h\}$. Then $A+H = A_1\oplus H\subset \subset P\oplus H = G$ for some summands A_1 of A and P of G for which $P\supset A_1$. (iii) If g is of infinite height but is not an element of D then the basic subgroup of G must be unbounded. These conditions imply the existence of an integer n and an element

$h \in G$ for which: G has a summand of the form $Z(p^{n+1})$, $g = p^n h$, and $p^n x = 0$ for all $x \in A$. Thus $H \equiv \{h\}$ is pure in $A + H$ and $A + H = A_1 \oplus H$ for some subgroup A_1. Since $A_1 \cap \{g\} = 0$, there is a subgroup P of G which is maximal subject to the conditions: $P \cap \{g\} = 0$ and $P \supset A_1$. Since $\{g\}$ is a subgroup of the group of elements of infinite height in G, by [3, theorem 5] or [5] we have: P is pure in G. Also, since $P \cap \{g\} = 0$, we have $P \cap H = 0$.

In any case we have $A + H = A_1 \oplus H$ where H is isomorphic to an indecomposable summand of G, $A_1 \subset P$ for a pure subgroup P of G for which $P \cap H = 0$, and (since in each case, $A \cap H \neq 0$) order $A_1 <$ order A. By the purity of P, any indecomposable summand of P is an indecomposable summand of G. Thus by finite induction the proof of Case I is complete.

Case II: Let G be *any* abelian group. $A = T \oplus F$ where T is torsion and F is a finitely generated free abelian group. Each indecomposable summand of each maximal primary summand of G is a summand of G. Hence an embedding of A as desired can be constructed by treating each primary component of T as in Case I.

If desired, for each prime p for which the basic subgroup of the maximal p-primary subgroup is unbounded, any group of type $Z(p^\infty)$ arising in the theorem may be replaced by a sufficiently large group of the form $Z(p^n)$ where G has a summand of this form.

2. An application to tensor sequences. Let G be an abelian group and let A be a subgroup of an abelian group B. When is the canonical homomorphism $G \otimes A \to G \otimes B$ a monomorphism? If it is a monomorphism then the same must be true for any summand S of G, ie. $S \otimes A \to S \otimes B$ must be monic. On the other hand, if $S \otimes A \to S \otimes B$ is monic for every indecomposable primary summand S of G then the same must be true of G by the direct limit representation of §1. In brief, §1 gives us the information: $G \otimes A \to G \otimes B$ is monic if and only if $S \otimes A \to S \otimes B$ is monic for each indecomposable primary summand S of G.

The functor $Z(n) \otimes M$ is naturally equivalent to the functor M/nM and the homomorphism $A/nA \to B/nB$ induced by $A \subset B$ is monic if and only if $A \cap nB = nA$. Thus $Z(p^n) \otimes A \to Z(p^n) \otimes B$ is monic if and only if $A \cap p^n B = p^n A$.

We wish to show that $Z(p^\infty) \otimes A \to Z(p^\infty) \otimes B$ is monic if and only if A is p-subpure in B according to:

Definition. A subgroup A of an abelian group B is *p-subpure* if $a = p^n b$ $(a \in A,\ b \in B)$ implies that there is a positive integer k for which $p^k a = p^{n+k} x$ for some $x \in A$.

It is convenient to pass over to the torsion functor. Recall that for any abelian group V and any exact sequence $0 \to W \to X \to Y \to 0$ we have an exact sequence $0 \to \operatorname{Tor}(V, W) \to \operatorname{Tor}(V, X) \to \operatorname{Tor}(V, Y) \to V \otimes W \to V \otimes X \to V \otimes Y \to 0$. Thus $Z(p^\infty) \otimes A \to Z(p^\infty) \otimes B$ is monic if and only if $\operatorname{Tor}(Z(p^\infty), B) \to \operatorname{Tor}(Z(p^\infty), B/A)$ is epic. However, the functor $\operatorname{Tor}(Z(p^\infty), M)$ is naturally equivalent to the functor $P(M)$ where $P(M)$ is the maximal p-primary subgroup of M and where $P(M \xrightarrow{\alpha} N) = \alpha | P(M)$. The following computations will verify that $P(B) \to P(B/A)$ is epic if and only if A is p-subpure in B. First, suppose that A is p-subpure in B and let $b + A$ be any element of $P(B/A)$. Then $p^n b \in A$ for some n and there must exist a k and an $x \in A$ for which $p^k(p^n b) = p^{n+k} x$. For this x we have $b + A = (b - x) + A$ and $b - x \in P(B)$. Thus $P(B) \to P(B/A)$ is epic. Secondly, suppose that $P(B) \to P(B/A)$ is epic and let

$b \in B$ be such that $p^n b \in A$ for some n. Then $b+A=b'+A$ for some $b' \in B$ for which $p^k b'=0$ for some k. For this b' we have $b-b' \in A$ and $p^{k+n}(b-b')=p^k(p^n b)$. Thus A is p-subpure in B. We have now completed the proof of:

THEOREM 2. *For an abelian group G and a subgroup A of an abelian group B, the canonical homomorphism $G \otimes A \to G \otimes B$ is a monomorphism if and only if for each summand of G of the form $Z(p^n)$ we have $A \cap p^n B = p^n A$ and for each summand of G of the form $Z(p^\infty)$ we have A p-subpure in B.*

The use of Theorem 1 in the proof of Theorem 2 can be avoided by applying the known special cases of Theorem 2, in which either G is torsion-free or A is pure in B, to two canonical short exact sequences.

EXAMPLES. Let $A=\{p\} \subset Z(p^2)=B$. Then $A \cap p^n B = p^n A$ holds if and only if $n \neq 1$. Thus $G \otimes A \to G \otimes B$ is monic if and only if G possesses no summand of the form $Z(p)$.

Now let k be an integer for which $1<k$. Let $A=\{(1,p)\} \subset Z(p^{k-1}) \oplus Z(p^{k+1})$. Then $A \cap p^n B = p^n A$ holds if and only if $n \neq k$. Thus $G \otimes A \to G \otimes B$ is monic if and only if G possesses no summand of the form $Z(p^k)$.

It is easy to verify that a subgroup A of an abelian group B is p-subpure if $A \cap p^n B = p^n A$ holds for infinitely many n.

3. Classes of torsion groups closed under direct sums and direct limits. We say that a class of abelian groups is *closed under direct sums and direct limits* if each group isomorphic to a group in the class is again in the class, if the direct sum of any two groups in the class is again in the class, and if the direct limit of every directed system of groups in the class is again in the class. For each subset S of the set of all groups $Z(p^\alpha)$(p a prime, $\alpha=\infty, 1, 2, 3, \dots$) satisfying the condition that $Z(p^\infty) \in S$ if $Z(p^n) \in S$ for infinitely many n, let $\bar{S}$ be the class of all those abelian torsion groups for which each indecomposable primary summand of G is isomorphic to a member of S. As a simple consequence of §1 and §2 we have:

THEOREM 3. *The classes of abelian torsion groups closed under direct sums and direct limits are precisely the classes $\bar{S}$.*

PROOF. Suppose that D is a direct limit of members of a class $\bar{S}$ and that D possesses a summand isomorphic, for a positive integer k, to a group $Z(p^k) \notin S$. For the appropriate choice of $A \subset B$, from among the examples presented in §2, we obtain the contradiction: $G \otimes A \to G \otimes B$ is monic for all $G \in \bar{S}$ and yet $D \otimes A \to D \otimes B$ is not monic. A group of type $Z(p^\infty)$ can only appear as a summand of a direct limit D of groups in $\bar{S}$ if either $Z(p^\infty) \in S$ or $Z(p^n) \in S$ for infinitely many n and in either case we have $Z(p^\infty) \in S$. Thus each $\bar{S}$ is closed under direct limits and remaining closure requirements are trivial.

A direct summand of a group G may be represented as a direct limit of a sequence of copies of G. Consequently, by Theorem 1, any class of abelian torsion groups which is closed under direct sums and direct limits must be of the form $\bar{S}$.

Notice that if $0 \to A \to B \to C \to 0$ is exact and *pure* then, for any $\bar{S}$, B is in $\bar{S}$ if and only if both A and C are in $\bar{S}$.

4. Splitting of tensor sequences. Since we have considered in detail in §2 the question of when, for $A \subset B$, $G \otimes A$ may be considered to be embedded in $G \otimes B$

we will give here what information we have about when $G\otimes A$ is pure in $G\otimes B$ and when it is summand of $G\otimes B$. We have results only for G a torsion group and we can say only very little that does not appear in [2]. The questions are reducible to the indecomposable primary case.

LEMMA. *If* $0\to A\to B\to C\to 0$ *is exact then*

$$(*)\qquad 0\to Z(n)\otimes A\to Z(n)\otimes B\to Z(n)\otimes C\to 0$$

is exact and splits if and only if it is exact and pure and if and only if $\operatorname{im}(\alpha)\cap dB = d\operatorname{im}(\alpha)$ *for each divisor* d *of* n.

PROOF. The following seven assertions are equivalent. (1) (*) is exact and splits. (2) (*) is exact and pure. (3) For all G, $0\to G\otimes Z(n)\otimes A\to G\otimes Z(n)\otimes B\to G\otimes Z(n)\otimes C\to 0$ is exact. (4) For all G, $0\to G/nG\otimes A\to G/nG\otimes B\to G/nG\otimes C\to 0$ is exact. (5) For all H for which $nH=0$, $0\to H\otimes A\to H\otimes B\to H\otimes C\to 0$ is exact. (6) For all divisors d of n, $0\to Z(d)\otimes A\to Z(d)\otimes B\to Z(d)\otimes C\to 0$ is exact. (7) For all divisors d of n, $\operatorname{im}(\alpha)\cap dB = d\operatorname{im}(\alpha)$.

Of course if $0\to A\to B\to C\to 0$ is exact then $0\to Z(p^\infty)\otimes A\to Z(p^\infty)\otimes B\to Z(p^\infty)\otimes C\to 0$ is exact and splits if and only if $\operatorname{im}(\alpha)$ is p-subpure in B.

THEOREM 4. *For an abelian torsion group* T *and an exact sequence* $0\to A\xrightarrow{\alpha} B\to C\to 0$, *the sequence*

$$(**)\qquad 0\to T\otimes A\to T\otimes B\to T\otimes C\to 0$$

is exact and splits if and only if it is exact and pure and if and only if for each p-primary component P *of* T: (i) *if* P *has an unbounded basic subgroup then* $\operatorname{im}(\alpha)\cap p^nB = p^n\operatorname{im}(\alpha)$ *for all positive integers* n *(ie.* $\operatorname{im}(\alpha)$ *is a p-pure subgroup of* B *in the sense of* [2]) *and* (ii) *if* n *is the largest positive integer for which* P *contains a cyclic summand of order* p^n *then* $\operatorname{im}(\alpha)\cap p^kB = p^k\operatorname{im}(\alpha)$ *for* $k=1,2,\dots,n$ *(ie.* $0\to A\to B\to C\to 0$ *is* p^n*-pure in the sense of* [4]) *and if* P *is not reduced then* $\operatorname{im}(\alpha)$ *is p-subpure in* B.

PROOF. (Cyclicly.) The splitting of (**) implies the purity of (**). The purity of (**) implies the purity of the corresponding sequences in which T is replaced by any of its summands. The lemma then implies the final condition. (**) splits if and only if the corresponding sequences in which T is replaced by each of its primary components all split. If (i) holds for P then $0\to P\otimes A\to P\otimes B\to P\otimes C\to 0$ splits by the results of [2]. If (ii) holds for P then the same sequence splits by the lemma.

(Received 1 April 1966)

Bibliography

[1] L. FUCHS, *Abelian groups* (Publ. House of the Hungarian Acad. of Science, Budapest, 1958).
[2] L. FUCHS, Notes on abelian groups. II, *Acta. Math. Acad. Sci. Hung.*, **11** (1960), pp. 117—125.
[3] J. M. IRWIN and E. A. WALKER, On N-high subgroups of abelian groups, *Pacific Jnl. of Math.*, **11** (4) (1961), pp. 1363—74.
[4] J. M. IRWIN, C. L. WALKER, and E. A. WALKER, *On p^α-pure sequences of abelian groups*, pages 69—119 of *Topics in abelian groups* (Scott, Foresman and Company, 1963).
[5] S. KHABBAZ, On a theorem of Charles and Erdélyi, *Bull. Soc. Math. France*, **89** (1961), pp. 103—4.

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (1—2), 1967, pp. 235—241.

ÜBER DIE STARKE MULTIPLIKATION VON GEORDNETEN GRAPHEN

Von

L. LOVÁSZ (Budapest)

(*Vorgelegt von* P. ERDŐS)

1.

In den letzten Jahren behandelten mehrere Autoren die direkte Multiplikation von Graphen und untersuchten die Eigenschaften dieser Operation auf Grund verschiedener Definitionen ([1], [2] und [3]). Im Artikel [2] von G. SABIDUSSI wurde bezugs der sog. Descartesschen Multiplikation bewiesen, daß jeder gewissen Endlichkeitsbedingungen genügende Graph eindeutig als Produkt irreduzibler Faktoren darstellbar ist. Der Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist der — ebenfalls in [2] eingeführte — Begriff der *starken Multiplikation*, u.zw. wird das starke Produkt solcher endlichen Graphen untersucht, deren Punkte linear geordnet sind. Es wird gezeigt, dass die geordneten Graphen „im wesentlichen" eindeutig als Produkt irreduzibler Faktoren darstellbar sind (Satz (3. 5)).

Unter einem geordneten Graphen A (im weiteren kurz Graph genannt) verstehen wir eine reflexive und symmetrische Relation, die auf einer endlichen Folge

$$S(A)=(a_1, a_2, \dots, a_\alpha) \qquad (\alpha \geqq 1)$$

von verschiedenen — als Punkte bezeichneten — Elementen definiert ist. Das Bestehen der Relation für die Punkte a_i, a_j wird durch das Symbol $a_i \sim a_j$ und durch den Satz „a_i und a_j sind in A mit einer Kante verbunden" ausgedrückt.

Als der durch die Punkte

$$a_{i_1}, \dots, a_{i_m} \qquad (i_1 < i_2 < \dots < i_m, \; m \geqq 1)$$

eines Graphen A gespannte Teilgraph wird derjenige Graph A' bezeichnet, dessen Punktfolge $S(A')=(a_{i_1}, \dots, a_{i_m})$ ist, wobei zwei dieser Punkte dann und nur dann verbunden sind, wenn sie in A verbunden sind.

Jede zu einem Graphen gehörende Relation wird mit demselben Zeichen geschrieben. Es ist jedoch kein Mißverständnis zu befürchten; ist nämlich $a_i \sim a_j$ für zwei Punkte eines in unseren Ausführungen vorkommenden Graphen, so gilt auch für jeden anderen diese Punkte enthaltenden Graphen immer dasselbe. Diesen Umstand ausnützend werden wir ferner den durch die Punkte $a_{i_1}, \dots, a_{i_m}$ gespannten Teilgraphen eines Graphen A ohne Hinweis auf A mit $[a_{i_1}, \dots, a_{i_m}]$ bezeichnen.

$\mathcal{N}(A)$ bedeute die Anzahl der Punkte des Graphen A. Die Graphen A und B werden isomorph genannt (und dies wird mit $A \cong B$ bezeichnet), wenn $\mathcal{N}(A)=\mathcal{N}(B)$ und — mit der Bezeichnung

$$S(A)=(a_1, \dots, a_\alpha), \qquad S(B)=(b_1, \dots, b_\beta)$$

für jedes Paar i, j

$$a_i \sim a_j \Leftrightarrow b_i \sim b_j$$

besteht.

Ein Graph A wird als *kantenlos* bzw. *vollständig* bezeichnet, wenn $a_i \sim a_j$ nur für $i=j$ bzw. für jedes mögliche Paar i, j besteht.

Das starke Produkt (im weiteren kurz das Produkt) der Graphen A und B wird nun folgendermaßen definiert. Es seien $S(A)=(a_1, \dots, a_\alpha)$ und $S(B)=(b_1, \dots b_\beta)$. Die Punkte von $A\times B$ sind dann die geordneten Paare a_ib_j ($i=1, \dots, \alpha$; $j=1, \dots, \beta$), u.zw. werden dieselben lexikographisch angeordnet, d.h.

$$S(A\times B)=(a_1b_1, \dots, a_1b_\beta, \dots, a_\alpha b_1, \dots, a_\alpha b_\beta).$$

Ferner seien $a_{i_1}b_{j_1}$ und $a_{i_2}b_{j_2}$ dann und nur dann in $A\times B$ verbunden, wenn $a_{i_1}\sim a_{i_2}$ für A und $b_{j_1}\sim b_{j_2}$ für B gilt.

Es ist leicht einzusehen, daß aus $A\cong B$ die Relationen $A\times C\cong B\times C$ und $C\times A\cong C\times B$ folgen (die umgekehrte Implikation wird später bewiesen), und daß $(A\times B)\times C\cong A\times(B\times C)$ gilt, (d.h. die Multiplikation ist assoziativ). Das Produkt kantenloser bzw. vollständiger Graphen ist offensichtlich kantenlos bzw. vollständig; wird ferner die Reihenfolge zweier kantenlosen oder zweier vollständigen Faktoren eines Produkts umgekehrt, so ist der neue Produktgraph zum ursprünglichen isomorph.

$A|B$ bedeute, daß ein C mit $C\times A\cong B$ existiert. Offensichtlich hat $A|B$ und $B|C$ $A|C$ zur Folge. $A\times B\cong B$ bzw. $B\times A\cong B$ gilt wegen $\mathcal{N}(A\times B)=\mathcal{N}(A)\mathcal{N}(B)$ dann und nur dann, wenn $\mathcal{N}(A)=1$ ist.

Ein Graph A wird irreduzibel genannt, wenn $\mathcal{N}(A)>1$ ist und $B\times C\cong A$ nur bei $\mathcal{N}(B)=1$ oder $\mathcal{N}(C)=1$ bestehen kann.

Als *Primzerlegung* (kurz Zerlegung) eines Graphen A wird jede Folge $A_1, \dots, A_k$ irreduzibler Graphen mit

$$A_1\times A_2\times\dots\times A_k\cong A$$

bezeichnet.

Ist $\mathcal{N}(A)>1$, so existiert natürlich eine Zerlegung von A. Zwei Zerlegungen $A_1, \dots, A_k$ und $A_1', \dots, A_l'$ eines Graphen A nennen wir isomorph, wenn $k=l$ und $A_i\cong A_i'$ ($i=1, \dots, k$) sind. Nichtisomorphe Zerlegungen von A werden als verschieden betrachtet.

2.

Vorangehend seien einige einfache Hilfssätze angeführt. Aus den Definitionen folgt unmittelbar:

(2. 1) *Sind* $A\times B\cong T$ *und* $S(A)=(a_1, \dots, a_\alpha)$, $S(B)=(b_1, \dots, b_\beta)$, $S(T)=(t_1, \dots, t_\tau)$, *so gilt* $\alpha\beta=\tau$; *für* $i=g\beta+r$ $(0\leqq g\leqq\alpha-1, 0<r\leqq\beta)$ *ist ferner der i-te Punkt von* $A\times B$ $a_{g+1}b_r$ *und es gelten*

(1) $$[t_\beta, t_{2\beta}, \dots, t_{\alpha\beta}]\cong A,$$

(2) $$[t_{g\beta+1}, \dots, t_{g\beta+\beta}]\cong B,$$

wobei (2) *zur folgenden doppelten Behauptung äquivalent ist: für jedes Paar* r, s *mit* $0<r, s\leqq\beta$ *gilt*

(3) $$t_r\sim t_s \Leftrightarrow b_r\sim b_s,$$

und für je drei Werte i, j, λ *mit* $0\leqq g\beta<i, j\leqq(g+1)\beta\leqq\alpha\beta$ *und* $0<i+\lambda\beta, j+\lambda\beta\leqq\alpha\beta$ *gilt*

(4) $$t_i\sim t_j \Leftrightarrow t_{i+\lambda\beta}\sim t_{j+\lambda\beta}.$$

Wir definieren das Symbol b_p für jedes p mit folgender Vereinbarung: für $p \equiv n \pmod{\beta}$ gelte $b_p = b_n$. *Für* $0 < i, j \leqq \tau$ *gilt dann*

$$(5) \qquad t_i \sim t_j \Rightarrow b_i \sim b_j.$$

Sind $0 < r, s, \varrho \leqq \beta$ *und* $0 \leqq g, h < \alpha$, *so gilt*

$$(6) \qquad t_{g\beta+r} \sim t_{h\beta+s} \Rightarrow t_{g\beta+\varrho} \sim t_{h\beta+\varrho}.$$

(2. 2) *Sind B ein kantenloser Graph und* $S(B) = (b_1, \ldots, b_\beta)$, $S(T) = (t_1, \ldots, t_\tau)$, *so sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

1) $B|T$;

2) $\beta|\tau$, *ferner folgt aus* $t_i \sim t_j$ $i \equiv j \pmod{\beta}$ *und* $t_{i+1} \sim t_{j+1}$ *bzw.* $t_{i-1} \sim t_{j-1}$ *für* $\beta \nmid i$ *bzw.* $\beta \nmid i-1$.

BEWEIS. I. Angenommen es gilt $B|T$, so gilt auch $\beta|\tau$. Aus $t_i \sim t_j$ folgt nun $i \equiv j \pmod{\beta}$ auf Grund von (2. 1) (5) und der Kantenlosigkeit von B; die beiden letzten Aussagen in 2) folgen endlich aus (2. 1) (6) durch Einführung von $i = g\beta + r$, $j = h\beta + r$ $(0 < r \leqq \beta)$.

II. Angenommen die Behauptungen von 2) sind wahr, seien jetzt $\alpha\beta = \tau$, $T^* = [t_\beta, \ldots, t_{\alpha\beta}]$, $T^* \times B = T'$. Wir beweisen, daß $T' \cong T$ ist. Es gilt natürlich $\mathcal{N}(T') = \alpha\beta = \tau$. Es sei nun $t_i' \sim t_j'$ mit den Bezeichnungen $S(T') = (t_1', \ldots, t_\tau')$ und

$$i = g\beta + r, \quad j = h\beta + s \qquad (0 < i, j \leqq \tau, \ 0 < r, s \leqq \beta)$$

vorausgesetzt. Es gilt dann $t_{(g+1)\beta} b_r \sim t_{(h+1)\beta} b_s$, also $t_{(g+1)\beta} \sim t_{(h+1)\beta}$ und $b_r \sim b_s$. B ist kantenlos, daher ist $r = s$, und aus $t_{(g+1)\beta} \sim t_{(h+1)\beta}$ folgt deshalb aus 2), mittels Induktion $t_{g\beta+r} \sim t_{h\beta+r}$ d.h. $t_i \sim t_j$. Umgekehrt folgt aus $t_i \sim t_j$ wieder $r = s$ wegen $i \equiv j \pmod{\beta}$, und durch Induktion kann abermals $t_{(g+1)\beta} \sim t_{(h+1)\beta}$ und daher $t_{(g+1)\beta} b_r \sim t_{(h+1)\beta} b_r$, also $t_i' \sim t_j'$ gefolgert werden.

(2. 3) *Für einen vollständigen Graphen B und für* $S(B) = (b_1, \ldots, b_\beta)$, $S(T) = (t_1, \ldots, t_\tau)$ *sind die folgenden zwei Aussagen äquivalent:*

1) $B|T$;

2) $\beta|\tau$, *ferner folgt aus* $t_i \sim t_j$ $(0 < i, j \leqq \tau)$ *im Falle* $\beta \nmid j$ *bzw.* $\beta \nmid j-1$ $t_i \sim t_{j+1}$ *bzw.* $t_i \sim t_{j-1}$.

BEWEIS. I. Es sei zuerst $B|T$ vorausgesetzt. Es ist dann $\beta|\tau$. A sei ein Graph mit $A \times B \cong T$ und $S(A) = (a_1, \ldots, a_\alpha)$. Endlich nehmen wir

$$t_i \sim t_j \qquad (0 < i, j \leqq \tau, \ i = g\beta + r, \ j = h\beta + s)$$

an. Es gilt dann $a_{g+1} \sim a_{h+1}$. Für $\beta \nmid j$ gilt $s < \beta$, für $\beta \nmid j-1$ aber $s > 1$, und wegen der Vollständigkeit von B gilt sowohl $b_r \sim b_{s+1}$, als auch $b_r \sim b_{s-1}$. Auf Grund von $a_{g+1} \sim a_{h+1}$ hat dies endlich die Behauptungen von 2) zur Folge.

II. Es seien nun die Behauptungen von 2) als gültig angenommen, und es seien $\alpha\beta = \tau$, $T^* = [t_\alpha, \ldots, t_{\alpha\beta}]$, $T' = T^* \times B$. Wir beweisen: $T' \cong T$. Offensichtlich gilt $\mathcal{N}(T') = \alpha\beta = \tau$. Es seien $S(T') = (t_1', \ldots, t_\tau')$ und

$$i = g\beta + r, \quad j = h\beta + s \qquad (0 < i, j \leqq \tau, \ 0 < r, s \leqq \beta).$$

Wegen der Vollständigkeit von B gilt $t_i' \sim t_j'$ d.h. $t_{(g+1)\beta} b_r \sim t_{(h+1)\beta} b_s$ dann und nur dann, wenn $t_{(g+1)\beta} \sim t_{(h+1)\beta}$ besteht. Dies ist aber nach der zweiten und dritten Behauptung von 2) mit $t_{g\beta+r} \sim t_{h\beta+s}$ äquivalent, und es gilt daher $t_i \sim t_j$.

3.

(3. 1) SATZ. *Aus* $A\times B\cong A'\times C$, $A\cong A'$ *und aus* $B\times A\cong C\times A'$, $A\cong A'$ *folgt gleicherweise* $B\cong C$.

BEWEIS. In beiden Fällen ist $\mathcal{N}(B)=\mathcal{N}(C)$ evident. Es seien $A\times B=T$, $A'\times C=$ $=T'$, $S(T)=(t_1,\dots,t_\tau)$, $S(T')=(t_1',\dots,t_\tau')$, $\mathcal{N}(B)=\mathcal{N}(C)=\beta$. Wegen $T\cong T'$ gilt dann $[t_1,\dots,t_\beta]\cong[t_1',\dots,t_\beta']$ und auf Grund von (2. 1) $B\cong[t_1,\dots,t_\beta]$, $C\cong$ $\cong[t_1',\dots,t_\beta']$; wird ähnlicherweise $B\times A=T^*$, $C\times A'=T^{**}$, $S(T^*)=(t_1^*,\dots,t_\tau^*)$, $S(T^{**})=(t_1^{**},\dots,t_\tau^{**})$, $\mathcal{N}(A)=\mathcal{N}(A')=\alpha$, $\mathcal{N}(B)=\mathcal{N}(C)=\beta$ angenommen, so folgt

$$B\cong[t_\alpha^*,\dots,t_{\beta\alpha}^*]\cong[t_\alpha^{**},\dots,t_{\beta\alpha}^{**}]\cong C.$$

(3. 2) *Aus* $B|T$, $D|T$ *und* $\mathcal{N}(B)|\mathcal{N}(D)$ *folgt* $B|D$.

BEWEIS. Sind $\mathcal{N}(B)=\beta$, $\mathcal{N}(D)=\delta$, $\delta=\lambda\beta$ und A ein Graph mit $A\times B\cong T$, so gilt mit den Bezeichnungen $S(A)=(a_1,\dots,a_\alpha)$, $S(T)=(t_1,\dots,t_\tau)$ nach (2. 1) $A'\times B\cong[t_1,\dots,t_\delta]\cong D$ für $A'=[a_1,\dots,a_\lambda]$.

(3. 3) SATZ. *Bei den Voraussetzungen* $B|T$, $D|T$, $\mathcal{N}(B)=\beta\leqq\mathcal{N}(D)=\delta$ *und* $(\beta,\delta)=n$ *existieren drei Graphen* F, B' *und* D' *derart, daß* $B\cong B'\times F$, $D\cong D'\times F$, $\mathcal{N}(F)=n$ *gilt und* B' *entweder vollständig oder kantenlos ist.*

BEWEIS. Es seien $S(B)=(b_1,\dots,b_\beta)$, $S(D)=(d_1,\dots,d_\delta)$, $S(T)=(t_1,\dots,t_\tau)$, $\beta'=\dfrac{\beta}{n}$ und $\delta'=\dfrac{\delta}{n}$. Wir können voraussetzen, daß $\tau\geqq 2\delta$ ist. Es genügt nun zu zeigen, daß dann die Graphen $F=[t_1,\dots,t_n]$, $B'=[t_n,\dots,t_{\beta'n}]$ den Bedingungen des Satzes genügen; ist nämlich $F|B$ und daher $F|T$ schon bewiesen, so folgt auch $F|D$ auf Grund von (3. 2).

1° Zunächst wird gezeigt, daß aus $b_i\sim b_j$ für jedes λ (auf Grund der Vereinbarung $b_i=b_{i+\beta}$) $b_{i+\lambda n}\sim b_{j+\lambda n}$ folgt.

Es seien für diesen Zweck $i=g\beta+r$, $j=h\beta+s$ $(0<r,s\leqq\beta)$ und x,y nichtnegative ganze Zahlen mit $y\delta-x\beta=n$. Es gilt dann wegen (2. 1) $t_r\sim t_s$, $t_{r+\delta}\sim t_{s+\delta}$, daher auch $b_{r+\delta}\sim b_{s+\delta}$ und endlich $b_{i+\delta}\sim b_{j+\delta}$. Dies hat $b_{i+y\delta}\sim b_{j+y\delta}$ und damit $b_{i+n}\sim b_{j+n}$ zur Folge, woraus die Behauptung durch Induktion gewohnen werden kann.

2° Der Teilgraph $[b_{(i-1)n+1},\dots,b_{in}]$ sei für $1\leqq i\leqq\beta'$ mit B_i bezeichnet. Es ist dann $F\cong B_1$. Wegen der in 1° bewiesenen Tatsache sind aber $B_1\cong B_2\cong\dots\cong B_{\beta'}$. Sind in B keine zwei — zu verschiedenen Teilgraphen B_i gehörenden — Punkte durch eine Kante verbunden, so ist B' der kantenlose Graph mit β' Punkten und es gilt $B'\times F\cong B$.

Es kann also in der Folge angenommen werden, daß unter den B_i zwei verschiedene, etwa B_z und B_u mit $z<u$ existieren, zwischen denen mindestens eine Kante verläuft (es muß dann $\beta<\delta$ sein). Die Endpunkte einer solchen Kante können in der Form $b_{zn-\varepsilon}$, $b_{zn+\xi}$ — mit $0\leqq\varepsilon<n$ und $0<\xi\leqq\beta-zn$ — angegeben werden.

3° Ist C ein Graph mit $C\times D\cong T$ und $S(C)=(c_1,\dots,c_\gamma)$, so existiert ein $0<y<\gamma$ mit $c_y\sim c_{y+1}$.

Es sei nämlich y die kleinste positive Lösung der Kongruenz $\delta y\equiv zn \pmod{\beta}$. (Diese Kongruenz hat wegen $(\beta,\delta)=n|zn$ gewiss eine Lösung.) Für dieses y ist

$y \leqq \frac{\beta}{n}$; da hierbei Gleichheit wegen $\beta > zn$ nicht bestehen kann, gilt $y < \frac{\beta}{n} = \frac{[\beta, \delta]}{\delta} \leqq$ $\leqq \frac{\tau}{\delta} = \gamma$. Es sei $\frac{\delta y - zn}{\beta} = x$. Es folgt nun $t_{zn+\beta x-\varepsilon} \sim t_{zn+\beta x+\xi}$, also $c_y d_{\delta-\varepsilon} \sim c_{y+1} d_\xi$ und $c_y \sim c_{y+1}$, weil ja wegen $\beta < \delta$ $0 < \delta - \varepsilon \leqq \delta$, $0 < \xi < \delta$ und $0 < zu + \beta x + \xi = y\delta + \xi <$ $< (\gamma - 1)\delta + \delta = \tau$ besteht.

4° Für beliebige i, j, λ, μ gilt $b_i \sim b_j$ dann und nur dann, wenn $b_{i+\lambda n} \sim b_{j+\mu n}$ besteht.

Es genügt offensichtlich den zweiten Teil dieser Behauptung zu beweisen. Ferner kann $0 < i, j \leqq \beta$ angenommen werden; $b_{i+\beta} \sim b_j$ gilt nämlich wegen $b_{i+\beta} = b_i$ dann und nur dann, wenn $b_i \sim b_j$ gilt.

Es seien also $0 < i, j \leqq \beta$ und $b_i \sim b_j$. Es gilt dann $t_i \sim t_j$ und wegen $\beta < \delta$ $d_i \sim d_j$ und daher $c_y d_i \sim c_{y+1} d_j$, wobei y die in der Behauptung von 3° definierte Zahl bedeutet. Nach (2. 1) gilt $t_{(y-1)\delta+i} \sim t_{y\delta+j}$, also wegen (2. 1) (5) $b_{(y-1)\delta+i} \sim b_{y\delta+j}$ und endlich wegen $n|\delta$ nach 1° $b_i \sim b_{\delta+j}$. Durch wiederholte Anwendung der letzten Beziehung ergibt sich $b_i \sim b_{x\delta+j}$. Hierin sei x gemäß der Bedingung $\delta x \equiv n \pmod{\beta}$ gewählt; es folgt dann $b_i \sim b_{n+j}$, und durch Iteration dieser Beziehung ergibt sich endlich die Behauptung 4°.

5° Um den Beweis des Satzes (3. 3) zu vollenden, bemerken wir, daß $b_n \sim b_n$ und daher auf Grund des Hilfssatzes in 4° $b_{\lambda n} \sim b_{\mu n}$ für jedes Paar λ, μ gilt, also B' ein vollständiger Graph ist. Es seien nun $B' \times F = B^*$ und $S(B^*) = (b_1^*, \ldots, b_\beta^*)$. Wir beweisen: $B \cong B^*$. Tatsächlich gilt erstens $\mathcal{N}(B^*) = n\beta' = \beta = \mathcal{N}(B)$. Ist nun $b_i^* \sim b_j^*$ für ein Paar $0 < i, j \leqq \beta$ mit $i = gn + r$ und $j = hn + s$, so gilt wegen (2. 1) $b_r \sim b_s$ und daher auf Grund des Hilfssatzes in 4° $b_{r+ng} \sim b_{s+nh}$, $b_i \sim b_j$. Gilt umgekehrt $b_i \sim b_j$, so gilt auf Grund desselben Hilfssatzes $b_r \sim b_s$ und daher wegen $b_{(g+1)n} \sim b_{(h+1)n}$ auch $b_{(g+1)n} b_r \sim b_{(h+1)n} b_s$, $b_i^* \sim b_j^*$. Hiermit ist $B \cong B^*$ und damit auch der Satz (3. 3) bewiesen.

(3. 4) SATZ. *Bei den Voraussetzungen* $\mathcal{N}(B) = \beta$, $\mathcal{N}(D) = \delta$, $(\beta, \delta) = 1$, $1 < \beta < \delta$, $B|T$ *und* $D|T$ *sind* B *und* D *entweder beide kantenlos oder beide vollständig, und es gilt* $B \times D | T$.

BEWEIS. Es sei $S(D) = (d_1, \ldots, d_\delta)$, $S(T) = (t_1, \ldots, t_\tau)$. Der Fall $\delta = \tau$ kann offenbar nicht vorkommen. Es ist also $\tau \geqq 2\delta$. Nach (3. 3) ist der Graph B entweder vollständig oder kantenlos; er sei zuerst als kantenlos betrachtet.

I. Wir zeigen, daß dann auch D kantenlos ist. Im entgegengesetzen Fall gibt es nämlich einen größten Index j, für den ein Index i mit

$$d_i \sim d_j \qquad (0 < i < j \leqq \delta)$$

existiert. Es gilt dann $t_i \sim t_j$. Wegen (2. 1) gilt $t_{i+\delta} \sim t_{j+\delta}$. Es gilt $t_{i+1} \sim t_{j+1}$; im Falle $\beta \nmid j$ ist dies evident; ist aber $\beta | j$ und daher $\beta \nmid j + \delta$, so gilt $j + \delta < \tau$ und nach (2. 2) $t_{i+\delta+1} \sim t_{j+\delta+1}$, woraus auf Grund von (2. 1) gleichfalls $t_{i+1} \sim t_{j+1}$ folgt. Wegen der Maximalität von j kann aber $t_{i+1} \sim t_{j+1}$ nur bei $j = \delta$ bestehen. Es folgt daraus nach (2. 1) (6) $t_1 \sim t_{\delta+1}$, und es muß daher im Widerspruch zu einer der Voraussetzungen des Satzes $\beta | \delta$ sein.

II. $B \times D$ ist also kantenlos, und für den Beweis von $B \times D | T$ kann daher der Hilfssatz (2. 2) verwendet werden. Offensichtlich ist $\beta\delta | \tau$, weil ja wegen $(\beta, \delta) = 1$ $[\beta, \delta] = \beta\delta$ besteht. Nehmen wir $t_i \sim t_j$ $(0 < i, j \leqq \tau)$ an. Wegen $B|T$ und $D|T$ sind dann $\beta|j-i$, $\delta|j-i$ und daher $\beta\delta|j-i$. Ist nun $\beta\delta\nmid i$, so gilt entweder $\beta\nmid i$ oder $\delta\nmid i$, und wegen $B|T$ oder $D|T$ folgt hieraus $t_{i+1}\sim t_{j+1}$. Ist aber $\beta\delta\nmid i-1$, so besteht eine der Beziehungen $\beta\nmid i-1$, $\delta\nmid i-1$, und es gilt darum $t_{i-1}\sim t_{j-1}$. Nach (2. 2) folgt daraus $B\times D|T$.

Es sei jetzt B vollständig.

III. Zunächst beweisen wir, daß auch D vollständig ist. Hierfür genügt es einzusehen, daß $d_i\sim d_j$ $(0<i, j\leqq\delta)$ im Falle $j<\delta$ bzw. $j>1$ $d_i\sim d_{j+1}$ bzw. $d_i\sim d_{j-1}$ nach sich zieht.

Es sei also $d_i\sim d_j$ angenommen. Nach (2. 1) gilt dann $t_i\sim t_j$, $t_{i+\delta}\sim t_{j+\delta}$. Wegen $\beta\nmid\delta$ besteht eine der Beziehungen $\beta\nmid j$ und $\beta\nmid j+\delta$ sowie eine der Beziehungen $\beta\nmid j+\delta-1$ und $\beta\nmid j-1$.

Auf Grund der Hilfssätze (2. 3) und (2. 1) gelten im Falle $j<\delta$ die Implikationen

aus $\beta\nmid j$ folgt $t_i\sim t_{j+1}$,

aus $\beta\nmid j+\delta$ folgt $t_{i+\delta}\sim t_{j+\delta+1}$,

also gilt $d_i\sim d_{j+1}$; im Falle $j>1$ kann ähnlicherweise

aus $\beta\nmid j-1$ folgt $t_i\sim t_{j-1}$,

aus $\beta\nmid j+\delta-1$ folgt $t_{i+\delta}\sim t_{j+\delta-1}$

behauptet werden, und dies zieht $d_i\sim d_{j-1}$ nach sich.

IV. Da $B\times D$ vollständig ist, kann zum Beweis von $B\times D|T$ der Hilfssatz (2. 3) verwendet werden. Wegen $(\beta, \delta)=1$ ist $\beta\delta|\tau$. Es sei nun i, j ein Paar mit $0<i, j\leqq\tau$ und $t_i\sim t_j$. Ist $\beta\delta\nmid j$, so besteht eine der Beziehungen $\beta\nmid j$ und $\delta\nmid j$, und es gilt daher $t_i\sim t_{j+1}$. Ist aber $\beta\delta\nmid j-1$, so gilt entweder $\beta\nmid j-1$ oder $\delta\nmid j-1$ und damit auch $t_i\sim t_{j-1}$.

Werden in einem Produkt $A_1\times A_2\times\ldots\times A_k$ $(k>1)$ zwei benachbarte kantenlose oder zwei benachbarte vollständige Faktoren vertauscht, so ist das so erzeugte Produkt zum ursprünglichen isomorph. Einen solchen Umtausch werden wir als *unwesentlich* bezeichnen.

(3. 5) SATZ. *Kann ein Graph auf zwei verschiedene Weisen als Produkt von irreduziblen Faktoren dargestellt werden, so gibt es eine Überführung der einen Zerlegung in eine zur anderen isomorphe Zerlegung mittels unwesentlichen Vertauschungen. M.a.W.: Die Darstellung eines Graphen als Produkt irreduzibler Faktoren ist bis auf die Reihenfolge der benachbarten kantenlosen bzw. der benachbarten vollständigen Faktoren eindeutig.*

BEWEIS. Auf einen einpunktigen irreduziblen Graphen bezogen können wir den Satz für wahr nehmen. Wir führen nun den Beweis mittels Induktion nach der Anzahl der Punkte. Es sei

$$T\cong A_1\times A_2\times\ldots\times A_k\cong B_1\times B_2\times\ldots\times B_l \qquad (k\geqq 2, l\geqq 2),$$

wobei die Faktoren A_i und B_i irreduzibel sind, und wir nehmen an, daß der Satz für jeden Graphen, der weniger als $\mathcal{N}(T)$ Punkte hat, schon bewiesen ist.

1° Ist $A_k\cong B_l$, so ist nach (3. 1) $A_1\times A_2\times\ldots\times A_{k-1}\cong B_1\times B_2\times\ldots\times B_{l-1}$; nach unserer Induktionsannahme gilt der Satz für die Zerlegungen $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$ und $B_1, B_2, \ldots, B_{l-1}$, also auch für die zur Frage stehenden Zerlegungen.

2° Es sei nun $A_k\not\cong B_l$ vorausgesetzt. Wir haben die Bezeichnungen so gewählt, daß $\mathcal{N}(A_k)\leqq\mathcal{N}(B_l)$ sei. Nach (3. 3) gilt jetzt $(\mathcal{N}(A_k), \mathcal{N}(B_l))=1$ und A_k ist vollständig oder kantenlos; nach (3. 4) sind also A_k und B_l entweder beide vollständig oder beide kantenlos, und es gibt einen Graphen C mit $C \times B_l \times A_k \cong T$. Hieraus folgt aber auf Grund von (3. 1) $C \times B_l \cong A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{k-1}$. Nach der Induktionsannahme existiert ein A_i mit $A_i \cong B_l$ derart, daß die Graphen $A_i, \ldots, A_{k-1}$ sämtlich vollständig bzw. sämtlich kantenlos sind. Dasselbe gilt auch für die Graphen $A_i, \ldots, A_k$, da A_k und $B_l \cong A_i$ gleichzeitig vollständig oder kantenlos sind. Wird das Element A_i in der Zerlegung $A_1, A_2, \ldots, A_k$ nach und nach mit den Graphen $A_{i+1}, \ldots, A_k$ vertauscht, so sind dies lauter unwesentliche Vertauschungen, und man gelangt endlich zu einer Zerlegung von T, deren letzter Faktor $\cong B_l$ ist. Für diese Zerlegung und für die Zerlegung $B_1, B_2, \ldots, B_l$ gilt die Behauptung gemäß 1°, und so gilt dieselbe auch für die ursprünglich betrachteten Zerlegungen, w.z.b.w.

(Eingegangen am 6. April 1966.)

Literatur

[1] K. Culik, Zur Theorie der Graphen, *Casopis Pro Pestování Matematiky*, **83** (1958), S. 133—155.
[2] G. Sabidussi, Graph multiplication, *Math. Zeitschr.*, **72** (1960), S. 446—457.
[3] H. Sachs, Simultane Überlagerungen gegebener Graphen, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.*, **9. A** (1964), S. 415—427.

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (1—2), 1967, pp. 243—251.

KREISPACKUNGEN UND KREISÜBERDECKUNGEN AUF FLÄCHEN KONSTANTER KRÜMMUNG

Von

J. MOLNÁR (Budapest)

(*Vorgelegt von* L. FEJES TÓTH)

In einer gemeinsamen Arbeit mit FEJES TÓTH [2] haben wir uns mit folgender Frage beschäftigt:

Setzen wir voraus, daß wir über einen unerschöpflichen Vorrat von allerlei Kreisen verfügen, deren Radien in einem vorgegebenen Intervall (r, R) liegen. Wie soll man die Kreise wählen und anordnen um die Ebene möglichst dicht auszufüllen, bzw. möglichst dünn zu überdecken?

In vorliegender Arbeit beschäftigen wir uns mit einer Verallgemeinerung dieser Frage, indem wir unserer Betrachtungen eine Fläche konstanter Krümmung $\varkappa$ zu Grunde legen. Für $\varkappa > 0$ handelt es sich um die Sphäre, für $\varkappa = 0$ um die euklidische Ebene, und für $\varkappa < 0$ um die hyperbolische Ebene. Wir bezeichnen die Fläche mit $\mathscr{F}$.

Zunächst führen wir einige Begriffe ein.

Wir richten unsere Aufmerksamkeit auf zwei besondere Kreisanordnungen und zwar auf solche, wo jeder Punkt der Fläche zu höchstens einem bzw. wenigstens einem Kreis gehört, wobei die Kreise im ersten Fall als offene und im zweiten als abgeschlossene Scheiben angesehen werden (Abb. 1, 2). Wir sagen daß die Kreise

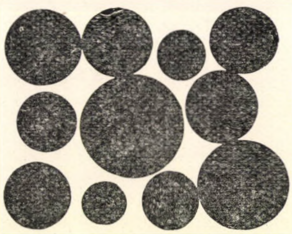


Abb. 1

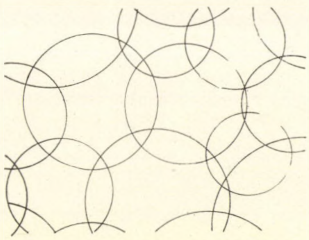


Abb. 2

im ersten Fall eine *Packung*, im zweiten eine *Überdeckung* bilden. Wir sprechen von einer *gesättigten Packung* bzw. einer *knappen Überdeckung*, wenn in der Packung kein Kreismangel bzw. in der Überdeckung kein Kreisüberfluß auftritt, d.h. wenn zu der Packung $\{K_i\}$ kein neuer Kreis vom Inhalt $> \inf K_i$ hinzugefügt, und von der Überdeckung kein Kreis fortgelassen werden kann.[1] Folglich besitzen in der Packung die Kreismittelpunkte keinen Häufungspunkt. Dasselbe werden wir auch bei der Überdeckung voraussetzen.

[1] Wir bezeichnen ein Gebiet und sein Flächeninhalt mit demselben Symbol.

Es seien K_1, K_2, K_3 drei Kreise vom Radius r_1, r_2, r_3, Δ das von ihren Mittelpunkten bestimmte Dreieck und $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die Winkel von Δ. Wir erklären $s(r, R)$ durch

$$s(r, R) = \sup \frac{\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \alpha_3 K_3}{2\pi\Delta},$$

erstreckt über alle Kreistripel mit folgenden Eigenschaften: 1) $r_i \in (r, R)$ $(i = 1, 2, 3)$, 2) die Kreise greifen nicht übereinander, 3) wenigstens ein Kreis berührt die beiden anderen, 4) kein Kreis schneidet die gegenüberliegende Seite von Δ.

In ähnlicher Weise erklären wir $S(r, R)$ durch

$$S(r, R) = \inf \frac{\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \alpha_3 K_3}{2\pi\Delta},$$

erstreckt über alle Kreistripel mit der Eigenschaft, daß $r_i \in (r, R)$ $(i = 1, 2, 3)$ und daß die Kreise einen gemeinsamen Randpunkt, aber keinen gemeinsamen inneren Punkt aufweisen.

Obwohl die numerische Berechnung von $s(r, R)$ und $S(r, R)$ schwierig ist, läßt sie sich für beliebige konkrete Werte von r, R und $\varkappa$ mit beliebiger Genauigkeit durchführen. Näheres darüber folgt später.

Wir spannen auf die Mittelpunkte $O_1, O_2, \ldots$ der Kreise $K_1, K_2, \ldots$ ein Dreiecksnetz so auf, daß die Dreiecke ein Mosaik bilden, daß sie also die Fläche $\mathcal{F}$ schlicht und lückenlos bedecken. Unter der Kreisdichte bezüglich des Dreiecks $\Delta_{ijk} = O_i O_j O_k$ des Mosaiks verstehen wir den Quotienten

$$\frac{\alpha_i K_i + \alpha_j K_j + \alpha_k K_k}{2\pi\Delta_{ijk}},$$

wo $\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k$ die Winkel von $O_i O_j O_k$ bedeuten.

Unsere Hauptergebnisse sind in folgenden Sätzen enthalten.

SATZ 1. *Zu jeder vorgegebenen gesättigten Packung der Fläche $\mathcal{F}$ durch wenigstens drei Kreise, deren Radien in einem vorgegebenen Intervall (r, R) liegen, läßt sich ein auf die Kreismittelpunkte aufgespannten Dreiecksmosaik konstruieren, so daß die Kreisdichte bezüglich jedes Dreiecks $\leqq s(r, R)$ ist.*

SATZ 2. *Zu jeder vorgegebenen knappen Überdeckung der Fläche $\mathcal{F}$ durch Kreise, deren Radien in einem vorgegebenen Intervall (r, R) $(R < \pi/2)$ liegen, läßt sich ein auf die Kreismittelpunkte aufgespannten Dreiecksmosaik konstruieren, so daß die Kreisdichte bezüglich jedes Dreiecks $\geqq S(r, R)$ ist.*

BEWEIS. Wir bezeichnen das betrachtete Kreissystem mit $\{K_i\}$. Ein Kreis C der im Fall der Packung drei Kreise von aussen berührt und kein gemeinsamen inneren Punkt mit den Kreisen $\{K_i\}$ hat wird *Stützkreis* genannt. Im Fall der Überdeckung wird ein Kreis C Stützkreis genannt wenn dieser drei Kreise von innen berührt und nicht im Innern eines Kreises K_i liegt. Die Existenz solcher Stützkreise leuchtet ein. Wir verbinden in zyklischer Reihenfolge die Mittelpunkte der einen Stützkreis berührenden Kreise K_i. Es entsteht ein Vieleck. Wir werden zeigen, daß die Gesamtheit der so konstruierten Vielecke die Fläche $\mathcal{F}$ schlicht und lückenlos überdeckt. Zerlegen wir die eventuell auftretenden mehr als dreieckigen Vielecke durch einander nicht kreuzende Diagonale in Dreiecke, so entsteht das gewünschte Dreiecksnetz.

Wir führen die (algebraische) Distanz $d(P, K) = OP - r$ eines Punktes P von einem Kreis K vom Mittelpunkt O und Radius r ein. Wir greifen einen Kreis K_i heraus (Abb. 3, 4) und fassen die Gesamtheit S_i derjenigen Punkte P ins Auge,

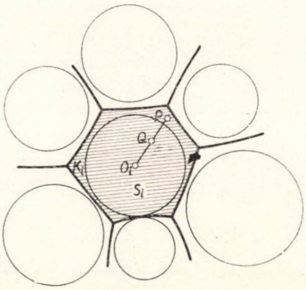


Abb. 3

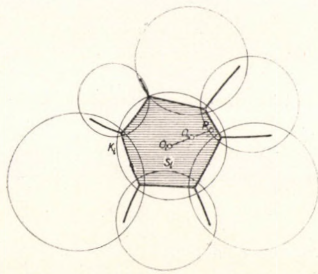


Abb. 4

deren Distanz von K_i kleiner ist als die Distanz von allen übrigen Kreisen K_j, d.h. $d(P, K_i) < d(P, K_j)$, $(i \neq j)$. Offenbar gehört O_i samt einer Umgebung zu S_i, weil sonst K_i ganz in einem Kreis K_j liegen würde. Ersetzen wir einen von O_i verschiedenen Punkt P von S_i durch einen Punkt Q der Strecke O_iP, so nimmt $d(P, K_i)$ um PQ ab: dagegen nimmt $d(P, K_j)$ für jeden Index $j \neq i$ entweder zu oder höchstens um PQ ab. Folglich gilt $d(Q, K_i) < d(Q, K_j)$, also gehört auch Q zu S_i. Dies bedeutet, daß S_i in Bezug auf O_i ein sternkonvexes Gebiet, kurz ein Sterngebiet ist.

Es leuchtet ein, daß die Sterngebiete $S_1, S_2, \ldots$ ein Mosaik M bilden. Wir konstruieren ein duales Mosaik M', in dem wir jede Kante k_{ij} von M, die die Flächen S_i und S_j trennt, durch eine Kante k'_{ij} ersetzen, die aus dem Streckenzug $O_iC_{ij}O_j$

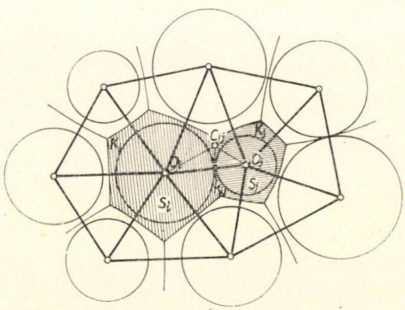


Abb. 5

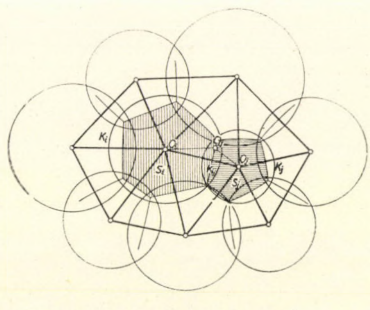


Abb. 6

besteht, wo C_{ij} ein beliebiger Punkt von k_{ij} ist. Man kann leicht beweisen, daß die Kanten k'_{ij} durch die Strecken $k''_{ij} = O_iO_j$ ersetzt werden können, daß also diese Strecken die Kanten eines zu M' topologisch gleichwertigen Mosaiks M'' sind (Abb. 5, 6).

Zerlegen wir die mehr als dreiseitigen Flächen von M'' durch einander nicht kreuzende Diagonalen in Dreiecke, so haben wir das gewünschte Mosaik vor uns. Wir haben noch zu zeigen, daß in jedem Dreieck $\Delta_{ijk} = O_i O_j O_k$ dieses Mosaiks die Kreisdichte $\leqq s(r, R)$ bzw. $\geqq S(r, R)$ ist.

Fall der Packung. Es sei E ein Eckpunkt des Mosaiks M, die der Fläche $O_i O_j O_k$ entspricht. Ferner sei C der entsprechende Stützkreis, d.h. der um E geschlagener Kreis vom Radius $\varrho = d(E, K_i) = d(E, K_j) = d(E, K_k)$. Der Stützkreis C berührt K_i, K_j, K_k kann aber in keinen Kreis der Packung hineingreifen. Deshalb ist $\varrho <$ inf r_i. Hieraus folgt leicht, daß keiner der Kreise K_i, K_j, K_k die gegenüberliegende Seite von Δ schneiden kann. Um dies einzusehen betrachten wir die Tangente t an den Berührungspunkt B von C und K_i (Abb. 7). Die Tangente t zerlegt die Fläche $\mathcal{F}$ in zwei C bzw. K_i enthaltenden Halbflächen $\mathcal{F}_c$ bzw. $\mathcal{F}_{K_i}$. Es sei E' das Spiegelbild von E bezüglich t. Wegen $d(O_j, E) < d(O_j, E')$, $d(O_k, E) < d(O_k, E')$ und $\varrho < \inf r_i$ sind O_i und O_k innere Punkte der Halbfläche $\mathcal{F}_c$. Deshalb hat die Strecke $O_j O_k$ $(O_j O_k \leqq \pi/2)$ keinen gemeinsamen Punkt mit K_i.

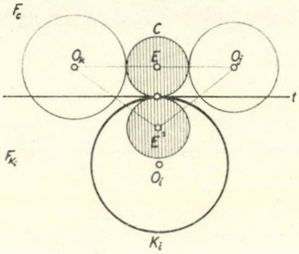


Abb. 7

Wir zeigen jetzt, daß wir uns auf solche Kreise K_i, K_j, K_k beschränken können, von denen ein Kreis beide andere berührt und kein Kreis die gegenüberliegende Seite von Δ schneidet. Durch konzentrische Vergrößerung der Kreise so, daß die Radien im Intervall (r, R) bleiben, läßt sich immer erreichen, daß entweder 1) ein Kreis einen anderen berührt, oder 2) die drei Kreise vom Radius R sind, oder 3) ein Kreis die gegenüberliegende Seite von Δ berührt.

Wir wenden uns zunächst dem ersten Fall zu und setzen voraus, daß K_i und K_j einander berühren. Ist $K_k < \max(K_i, K_j)$ so entsteht durch konzentrische Vergrößerung von K_k entweder die gewünschte Kreislagerung oder es wird $K_k = \max(K_i, K_j)$. Folglich können wir uns auf den Fall $K_k \geqq \max(K_i, K_j)$ beschränken.

Zunächst beweisen wir den

HILFSSATZ. *Es seien auf der Fläche $\mathcal{F}$ drei Kreise K_1, K_2, K_3 vom Radius r_1, r_2, r_3 $(r_1 \leqq r_2 = r_3)$, Δ das von ihren Mittelpunkten bestimmte Dreieck und $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ $(\alpha_1 \leqq \pi)$ die Winkel von Δ. Verschieben wir K_3 in der Richtung $O_3 O_1$ oder in der Richtung $O_3 O_2$, so nimmt die Dichte*

$$\frac{\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \alpha_3 K_3}{2\pi\Delta}$$

zu.

Der Beweis leuchtet ein, da

$$\frac{\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \alpha_3 K_3}{2\pi\Delta} = \frac{K_1}{2\pi}\left(\varkappa + \frac{\pi}{\Delta}\right) + \frac{K_3 - K_1}{2\pi}\left(\varkappa + \frac{\pi - \alpha_1}{\Delta}\right)$$

ist. Aus dieser Gleichung sieht man auch, daß im Fall $r_1 = r_2 = r_3$ die Bedingung $\alpha_1 \leqq \pi$ überflüssig ist.

Es sei $K_k \geqq \max(K_i, K_j)$ und setzen wir voraus, daß $\alpha_i \leqq \pi$ ist. Wir verschieben den Kreis K_k in der Richtung O_kO_i bis entweder die gewünschte Lage oder eine „Seitenberührung" eintritt. Wie ändert sich inzwischen die Kreisdichte?

Es bedeute K_k^* einen mit K_i kongruenten und mit K_k konzentrischen Kreis. Da

$$\frac{\alpha_i K_i + \alpha_j K_j + \alpha_k K_k}{2\pi\Delta} = \frac{\alpha_i K_i + \alpha_j K_j + \alpha_k K_k^*}{2\pi\Delta} + \frac{K_k - K_k^*}{2\pi}\frac{\alpha_k}{\Delta}$$

ist, nimmt die Kreisdichte wegen unseres Hilfssatzes sicher zu wenn α_k zunimmt.

Bei der obigen Operation kann aber α_k abnehmen und zwar auf der Sphäre wenn O_iO_k und O_jO_k größer als $\pi/2$ sind. Dieser Fall läßt sich folgendermaßen erledigen. Wir verschieben die Kreise K_i, K_j gegen K_k so, daß inzwischen α_j und α_k konstant bleiben. Offenbar ist die Dichte δ der Kreise K_i, K_j, K_k $(K_i \leqq K_j \leqq K_k)$

$$\delta = \frac{\alpha_i K_i + \alpha_j K_j + \alpha_k K_k}{2\pi\Delta} = \frac{K_i}{2\pi}\frac{\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k}{\Delta} + \frac{\alpha_j(K_j - K_i) + \alpha_k(K_k - K_i)}{2\pi}\frac{1}{\Delta} =$$

$$= \frac{K_i}{2\pi}\left(\varkappa + \frac{\pi}{\Delta}\right) + \frac{\alpha_j(K_j - K_i) + \alpha_k(K_k - K_i)}{2\pi}\frac{1}{\Delta}.$$

Da $\alpha_j(K_j - K_i) + \alpha_i(K_k - K_i)$ konstant ist, so ist δ eine abnehmende Funktion von Δ.

Wir behaupten, daß durch solche Verschiebungen von K_i und K_j, wobei α_j und α_k konstant bleiben, Δ abnimmt. Bezeichnen wir mit $\bar{O}_i$ und $\bar{O}_j$ die Kreismittelpunkte der Kreise K_i, K_j in der neuen Lage (Abb. 8, 9). Im Falle $O_kO_i > O_k\bar{O}_i$

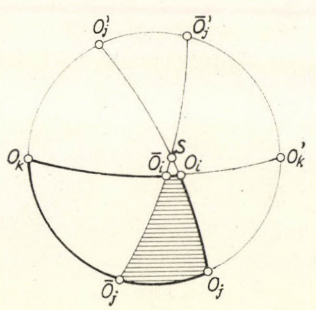


Abb. 8

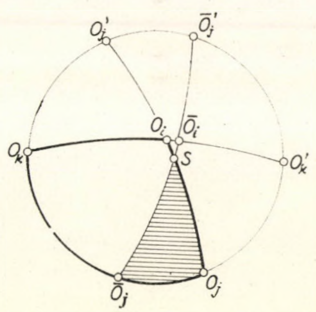


Abb. 9

ist offenbar $\Delta_{ijk} < \bar{O}_i\bar{O}_jO_k$ (Abb. 8). Im Falle $O_kO_i < O_k\bar{O}_i$ bezeichnen wir mit S den Schnittpunkt der Bogen O_iO_j und $\bar{O}_i\bar{O}_j$ und mit O_i', O_j' und O_k' die Gegenpunkte von O_i, $\bar{O}_j$ und O_k. Da $O_j\bar{O}_j'S = O_i\bar{O}_iS$ und $O_i\bar{O}_iS < O_j'\bar{O}_jS$ ist, haben wir $\Delta_{ijk} < \bar{O}_i\bar{O}_jO_k$.

Jetzt wenden wir uns dem Fall $\alpha_i > \pi$ zu. Dieser Fall tritt nur auf der Sphäre auf. Wir beweisen, daß in diesem Fall das gesättigte Kreissystem nur aus den drei Kreisen K_i, K_j, K_k besteht. Bezeichnen wir mit $\bar{\Delta}_{ijk}$ das Komplement von Δ_{ijk} bezüglich der Kugelfläche. Ein weiterer Kreis K des Systems kann offensichtlich nur in $\bar{\Delta}_{ijk}$ liegen. Andererseits aber enthält Δ_{ijk} das Spiegelbild K^* von K bezüglich des Hauptkreises $O_jO'_k$. Da K keinen gemeinsamen Punkt mit K_i, K_j, K_k hat gehört auch K zu dem Kreissystem, was wegen der Gesättigtkeit von $\{K_i\}$ unmöglich ist. Folglich besteht das gesättigte Kreissystem aus drei Kreisen.

Auf der Sphäre betrachten wir drei nicht übereinandergreifende Kreise K_1, K_2, K_3 die ein gesättigtes Kreissystem bilden. Offensichtlich können diese Kreise immer in die gewünschte Lage gebracht werden, so daß sich inzwischen die Dichte des Kreissystems nicht ändert.

Der zweite Fall (der Fall der kongruenten Kreise vom Radius R) läßt sich mit Hilfe unseres Hilfssatzes leicht erledigen.

Wir haben noch den dritten Fall (den Fall einer Seitenberührung) zu untersuchen.

Berührt K_k die Strecke O_iO_j, so spiegeln wir K_k an O_iO_j, wodurch den Kreis K'_k vom Mittelpunkt O'_k erhalten (Abb. 10). Da die Dichte von K_i, K_j, K_k, K'_k im Viereck $O_iO_kO_jO'_k$ mit der Dichte δ von K_i, K_j, K_k in $O_iO_jO_k$ übereinstimmt, ist die Dichte in einem der Dreiecke $O_iO_kO'_k$, $O_jO_kO'_k$ nicht kleiner als δ.

Betrachten wir z.B. die Kreise K_i, K_k, K'_k. Im Falle $K_i \leqq K_k$ können wir durch Vergrößerung von K_i erreichen, daß entweder K_i, K_j, K'_k einander berühren oder daß $K_i = K_k$ wird. Deshalb können wir voraussetzen, daß $K_i \geqq K_k$ ist. Auf der Sphäre setzen wir außerdem voraus, daß $O_iO_k = O_iO'_k \leqq \frac{\pi}{2}$ ist. Dann nimmt die Dichte der Kreise im Dreieck $O_iO_kO'_k$ durch Verschiebung des Kreises K_i in der Richtung O_iO_j zu und so können wir die gewünschte Lage erreichen. Auf der Sphäre kann aber $O_iO_k = O_iO'_k > \frac{\pi}{2}$ sein. In diesem Fall nimmt $O_iO_kO'_k$ durch die Verschiebung

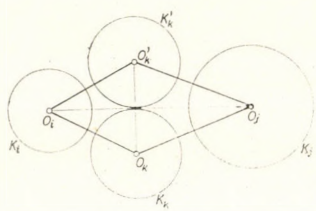


Abb. 10

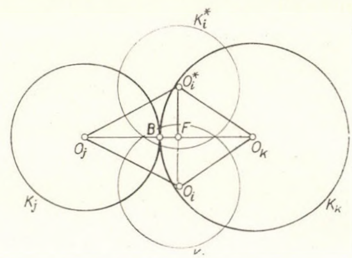


Abb. 11

des Kreises K_k bzw. K'_k in der Richtung O_kO_i bzw. O'_kO_i offensichtlich ab, weshalb die Kreisdichte im Dreieck $O_iO_kO'_k$ nach unserem Hilfssatz zunimmt. Durch solche Verschiebungen kann man offenbar die gewünschte Lage erreichen.

Damit ist Satz 1 bewiesen.

Fall der Überdeckung. Wir betrachten die zum Dreieck $O_iO_jO_k$ gehörige Kreise K_i, K_j, K_k. Durch konzentrische Verkleinerung der Kreise nimmt die Kreisdichte im $O_iO_jO_k$ offensichtlich ab. Wir verkleinern konzentrisch die Kreise K_i, K_j, K_k so, daß die Radien nicht kleiner als r seien und die drei Kreise einen gemeinsamen Punkt haben. Dadurch lassen sich die Kreise entweder in die gewünschten Lage bringen, wobei die drei Kreise einen gemeinsamen Randpunkt haben, oder es treten folgende Fälle ein: 1. die drei Kreise kongruent sind und haben gemeinsame innere Punkte, 2. zwei Kreise berühren sich von außen und der Berührungspunkt ist ein inneren Punkt des dritten Kreises.

Der Fall 1 läßt sich leicht erledigen. Es seien nämlich $O_iO_jO_k$ die Mittelpunkte der kongruenten Kreise K_i, K_j, K_k. Durch Verschiebung etwa des Kreises K_i in der Richtung O_kO_i nimmt die Kreisdichte nach unserem Hilfssatz ab. Wir verschieben K_i bis wir die gewünschte Lage erreichen, d.h. K_i, K_j, K_k einen gemeinsamen Randpunkt haben.

Fall 2. Es sei B der Berührungspunkt von K_j und K_k (Abb. 11). Offenbar können wir uns auf den Fall $K_i \leqq K_j \leqq K_k$ beschränken. Es sei K_i^* das Spiegelbild von K_i bezüglich der Gerade O_jO_k. Aus $K_i^* \leqq K_j \leqq K_k$ folgt leicht, daß der Schnittpunkt F der Strecke $O_i^*O_i$ mit der Gerade O_kO_j auf der Strecke O_kO_j liegt. Folglich ist das Viereck $O_jO_iO_kO_k^*$ konvex. Die Dichte der Kreise K_i, K_i^*, K_j, K_k bezüglich $O_jO_iO_kO_k^*$ ist gleich der Dichte von K_i, K_j, K_k bezüglich $O_iO_jO_k$. Deshalb genügt es die Dichte der Kreise K_i, K_i^*, K_j bezüglich $O_iO_i^*O_j$, bzw. die Dichte der Kreise K_i, K_i^*, K_k bezüglich $O_iO_i^*O_k$ zu betrachten.

Durch Verkleinerung der Kreise K_j bzw. K_k können wir erreichen, daß entweder 1. die Kreise K_i, K_i^*, K_j bzw. K_i, K_i^*, K_k in die gewünschte Lage kommen oder 2. die Kreise K_i, K_i^*, K_j bzw. K_i, K_i^*, K_k kongruent seien und gemeinsame innere Punkte besitzen.

Damit ist Satz 2 bewiesen.

Auf der Sphäre S läßt sich die Dichte eines aus abzählbar vielen Kreisen bestehenden Kreissystems $\{K_i\}$ durch den Quotienten $\dfrac{\sum K_i}{S}$ definiert.

In der euklidische Ebene wird die obere und untere Dichte des Kreissystems $\{K_i\}$ durch die Grenzwerte

$$\delta = \overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{\sum K_i \cap K(R)}{K(R)} \quad \text{und} \quad \Delta = \underline{\lim_{R\to\infty}} \frac{\sum K_i \cap K(R)}{K(R)}$$

definiert, wo $K(R)$ ein um einen festen Ursprungspunkt geschlagener Kreis vom Radius R ist.[2]

Da es sich bei Packungen um obere und bei Überdeckungen um untere Dichtenabschätzungen handelt, betrachten wir bei Packungen die obere und bei Überdeckungen die untere Dichte.

Aus den Sätzen 1 und 2 ergeben sich leicht die folgende Sätze: [3]

SATZ 3. *Bedeutet d die Dichte einer Packung der Sphäre oder der euklidischen Ebene durch wenigstens drei Kreise, deren Radien in einem vorgegebenen Intervall (r, R) liegen, so gilt*

$$d \leqq s(r, R).$$

SATZ 4. *Bedeutet D die Dichte einer Überdeckung der Sphäre oder der euklidischen Ebene durch Kreise, deren Radien in einem vorgegebenen Intervall (r, R) liegen, so gilt*

$$D \geqq S(r, R).$$

[2] Diese Dichten hängen nicht von der Wahl des Ursprungspunktes ab (S.z.B. FEJES TÓTH [1]).
[3] Vgl. FEJES TÓTH—MOLNÁR [2].

Die konstruktive Bestimmung der Funktionen $s(r, R)$ und $S(r, R)$, die auch noch den Parameter $\varkappa$ enthalten, scheint recht schwierig zu sein. Zahlreiche mit großer Genauigkeit durchgeführte Rechnungen lassen aber vermuten, daß

$$s(r, R) = \begin{cases} \max\{d(r, r, r),\ d(r, r, R)\}, & \varkappa > 0, \\ \max\{d(R, R, R),\ d(r, r, R),\ d(r, R, R)\}, & \varkappa < 0, \end{cases}$$

und

$$S(r, R) = \begin{cases} \min\{D(r, r, r),\ D(r, r, R),\ D(r, R, R)\}, & \varkappa > 0, \\ \min\{D(R, R, R),\ D(r, R, R)\}, & \varkappa < 0 \end{cases}$$

ist, wobei $d(p, q, q)$ und $D(p, q, q)$ folgende Bedeutungen haben:

d. $d(p, q, q)$ ist die Dichte von drei einander gegenseitig berührenden Kreisen mit den Radien p, q, q in dem durch ihre Mittelpunkte bestimmten Dreieck.

D. Wir betrachten drei Kreise mit den Radien p, q, q, die in einer achsensymmetrischen Lage sind, keine gemeinsame innere Punkte, aber einen gemeinsamen Randpunkt haben. Das Kreistripel hat noch einen Freiheitsgrad. $D(p, q, q)$ ist das Minimum der Dichten dieser Kreistripeln in dem durch die Kreismittelpunkte bestimmten Dreieck.

Wir geben noch einige Kreispackungen und Kreisüberdeckungen an deren Dichten sehr nahe an die obigen Dichtenschranken eranrückten bzw. mit diesen Schranken übereinstimmen.

Fall der Packung. Wir betrachten auf der Sphäre ein halbreguläres Mosaik $(4, 4, n)$ mit $n > 6$. Die Inkreisradien der Vierecke bzw. n-Ecke seien r und R (Abb. 12). Dann ist die Dichte der Flächeninkreise $s(r, R)$.

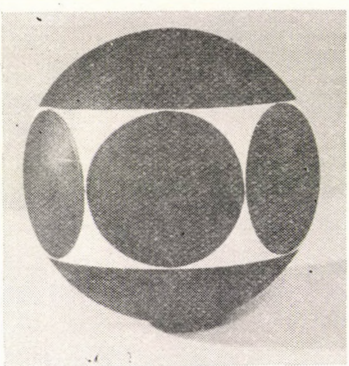


Abb. 12

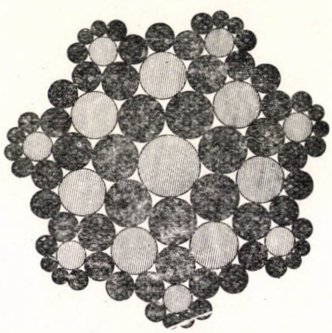


Abb. 13

Wir bezeichnen jetzt mit r und R die Flächeninkreisradien des hyperbolischen Mosaiks $(6, 6, n)$ mit $n > 6$. Flächeninkreise des Mosaiks bilden eine Packung deren Dichte sehr nahe bei $s(r, R)$ liegt. Z. B. ist die Dichte im Falle des Mosaiks $(6, 6, 7)$ $0{,}910\ldots$ während $s(r, R)$ den Wert $0{,}913\ldots$ hat (Abb. 13). Hier ist $r = 0{,}286\ldots$ und $R = 0{,}335\ldots$.

Fall der Überdeckung. Wir schlagen um die Ecken bzw. Flächenmittelpunkte des Mosaiks $\{p, q\}$ mit $3 \leqq p \leqq q$ Kreise vom Radius R bzw. r so, daß die Kreise die Fläche $\mathcal{F}$ überdecken. Numerische Rechnungen lassen vermuten, daß für $p=3$ und 4 die Kreisdichte für gewisse Werte von r und R mit $S(r, R)$ gleich wird (Abb. 14, 15).

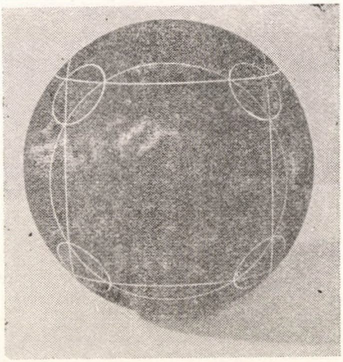


Abb. 14

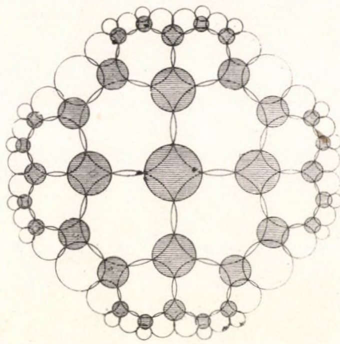


Abb. 15

Für die mühsame Rechnungen möchte ich Frau J. László meinen aufrichtigen Dank aussprechen.

(Eingegangen am 9. April 1966.)

Literaturverzeichnis

[1] L. Fejes Tóth, *Reguläre Figuren* (Budapest, 1965).
[2] L. Fejes Tóth—J. Molnár, Unterdeckung und Überdeckung der Ebene durch Kreise, *Math. Nachrichten,* **18** (1957), S. 235—43.
[3] A. Florian, Ausfüllung der Ebene durch Kreise, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **2**/9 (1960), S. 1—13.
[4] J. Molnár, On the λ-sistem of circles, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (im Druck).

INDEX

Printed in Hungary

Technikai szerkesztő: Szabados József

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója – Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor
A kézirat nyomdába érkezett: 1966. XI. 22. – Terjedelem: 22,25 (A/5) ív, – 33 ábra

66-6440 Szegedi Nyomda

The Acta Mathematica publish papers on mathematics in English, German, French and Russian.

The Acta Mathematica appear in parts of various size, making up volumes.

Manuscripts should be sent to:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Mathematica is 165 forints a volume. Orders may be placed with „*Kultura*" Foreign Trade Company for Books and Newpapers (Budapest, I., Fő utca 32. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Mathematica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des mémoires du domaine des sciences mathématiques.

Les Acta Mathematica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

Toute correspodance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonement est de 165 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux „*Kultura*" (Budapest, I., Fő utca 32. Compte-courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

„*Acta Mathematica*" публикует трактаты из области математических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

„*Acta Mathematica*" выходит отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена „*Acta Mathematica*" — 165 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет „*Kultura*" (*Budapest, I., Fő utca 32.* Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

31. V. 1967 Index: 26 014

ACTA MATHEMATICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

TOMUS XVIII FASCICULI 3—4

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1967

ACTA MATH. HUNG.

ACTA MATHEMATICA
ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK
MATEMATIKAI KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Mathematica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a matematika köréből.

Az Acta Mathematica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Mathematica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó" nál (Budapest, V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05 111 46), a külföld számára pedig a „Kultúra" Könyv és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest, I., Fő utca 32. Bankszámla 43 790-057-181) vagy annak külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

Die Acta Mathematica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der mathematischen Wissenschaften in deutscher, englischer, französischer und russischer Sprache.

Die Acta Mathematica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Redaktion und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 165 Forints. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Au enhandels-Unternehmen „*Kultura*" (Budapest, I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandvertretungen und Kommission ren.

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (3—4), (1967), pp. 255—259.

BEITRAG ZUR KOMBINATORISCHEN INZIDENZGEOMETRIE

E. JUCOVIČ (Košice, Tschechoslowakei)

(*Vorgelegt von* G. HAJÓS)

Im vorliegenden Aufsatz werden einige Sätze aus dem Problemkreis erörtert, den ERDŐS in [1], [2] behandelt. Es sind n Punkte im euklidischen zwei- oder dreidimensionalen Raum gegeben und wir untersuchen Fragen über die extremale Anzahl der durch diese n Punkte bestimmten Geraden, Kreise und Ebenen. Um sich kürzer ausdrücken zu können, wollen wir eine Gerade (Kreis, Ebene) als Gerade (Kreis, Ebene) m-ter *Ordnung* bezeichnen, wenn sie (der Kreis, die Ebene) mit genau m der gegebenen Punkte inzidiert. Einen Kreis und eine Gerade m-ter Ordnung mit $m \geqq 3$ wollen wir *K-Linie* nennen.

SATZ 1. *Über die Anzahl $\varphi(n)$ der Ebenen, die durch $n > 3$ Punkte $A_1, \ldots, A_n$ in E^3 bestimmt und parallel mit derselben Gerade $p \nparallel A_i A_j$ sind, gilt*

$$\varphi(n) \leqq \frac{1}{3}\left\{\binom{n}{2} - \left[\frac{3n}{7}\right]\right\}. \tag{1}$$

Bei $n=7$ kann Gleichheit eintreten.

SATZ 2. *Liegen $n \geqq 6$ Punkte $A_1, \ldots, A_n$ des E^3 auf der Oberfläche eines Elipsoides und nicht in derselben Ebene, dann ist die Anzahl $\varphi'(n)$ der durch diese n Punkte bestimmten Ebenen*

$$\varphi'(n) \geqq 11 + 2k + 5 \cdot \left[\frac{n-6}{3}\right], \tag{2}$$

wo $k = 0, 1, 2$ *und* $n \equiv k \bmod 3$ *ist. Bei $n = 6$ kann das Gleichheitszeichen gelten.*

SATZ 3. *Über die Anzahl $f(n) > 1$ bzw. $g(n) > 1$ der durch $n \geqq 6$ Punkte in der Ebene bestimmten Kreise bzw. K-Linien gilt*

$$f(n) \geqq 8 + 2k + 5 \cdot \left[\frac{n-6}{3}\right], \tag{3}$$

$$g(n) \geqq 11 + 2k + 5 \cdot \left[\frac{n-6}{3}\right]. \tag{4}$$

wo $k = 0, 1, 2$ *und* $n \equiv k \bmod 3$ *ist. Bei $n = 6$ kann in beiden Fällen Gleichheit eintreten.*

BEWEIS DES SATZES 1. Zuerst müssen wir einen Hilfssatz beweisen, der auch an sich selbst von Interesse ist (s. KÁRTESZI [3]).

LEMMA 1. *Über die Anzahl $F(m,n)$ der Geraden m-ter Ordnung, $n>m>2$, die durch n Punkte der Ebene bestimmt sind, gilt*

$$F(m,n) \leqq \frac{2}{m\cdot(m-1)}\cdot\left\{\binom{n}{2}-\left[\frac{3n}{7}\right]\right\}. \tag{5}$$

Trivialerweise gilt die Ungleichung, wenn die Punkte auf derselben Geraden liegen. KELLY—MOSER [4] haben gezeigt, daß die Anzahl der durch n nicht auf derselben Geraden liegende Punkte der Ebene bestimmten Geraden 2. Ordnung nie kleiner als $\left[\frac{3n}{7}\right]$ ist; bei $n=7$ kann die Anzahl der Geraden 2. Ordnung $\left[\frac{3n}{7}\right]$ sein. — Auf jeder Geraden m-ter Ordnung ($m>2$) gibt es $\binom{m}{2}$ verschiedene Punktpaare. Über die $\binom{n}{2}$ Punktpaare, die aus n Punkten der Ebene gebildet werden können, gilt dann

$$\binom{n}{2} = \left[\frac{3n}{7}\right]+F(m,n)\cdot\binom{m}{2}+u, \tag{6}$$

wo u die Anzahl weiterer Geraden 2. Ordnung und Punktpaare auf Geraden k-ter Ordnung, $k\neq 2$, m, bedeutet. Da u eine nichtnegative Zahl ist, folgt aus (6)

$$\binom{n}{2} \geqq \left[\frac{3n}{7}\right]+F(m,n)\cdot\binom{m}{2} \tag{7}$$

wo Gleichheit nur dann gelten kann, wenn die Anzahl der Geraden 2. Ordnung genau $\left[\frac{3n}{7}\right]$ ist und keine Geraden k-ter Ordnung, $k\neq 2$, m, vorkommen. Aus (7) folgt (5) und damit ist Lemma 1 bewiesen.

Aus (5) folgt für $m=3$

$$F(3,n) \leqq \frac{1}{3}\left\{\binom{n}{2}-\left[\frac{3n}{7}\right]\right\} \tag{8}$$

und aus dem Beweis des Lemma 1

$$F(3,n)+F(4,n)+\ldots \leqq \frac{1}{3}\left\{\binom{n}{2}-\left[\frac{3n}{7}\right]\right\}. \tag{9}$$

Jetzt können wir zum Beweis des Satzes 1 übergehen. Nehmen wir an, daß die Anzahl der durch die Punkte $A_1, \ldots, A_n$ bestimmten Ebenen, die parallel mit einer Geraden $p \nparallel A_iA_j$ sind, größer als $\frac{1}{3}\left\{\binom{n}{2}-\left[\frac{3n}{7}\right]\right\}$ ist. Projizieren wir die Punkte $A_1, \ldots, A_n$ zusammen mit den durch sie bestimmten Ebenen parallel in der Richtung p auf eine Ebene $\alpha \nparallel p$. Projektionen aller mit p parallelen Ebenen sind Geraden wenigstens 3. Ordnung, deren Anzahl nach (9) aber nicht größer als $\frac{1}{3}\left\{\binom{n}{2}-\left[\frac{3n}{7}\right]\right\}$ ist. Dieser Widerspruch beweist den ersten Teil des Satzes. Gleichheit in (1) wird z.B. für Punkte mit folgenden Koordinaten erzielt: $[-1, 0, 0]$, $[1, 0, 0]$, $[0, 2, 0]$, $[0, 0, 1]$, $[\frac{1}{2}, 1, 2]$, $[-\frac{1}{2}, 1, 3]$, $[0, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}]$.

BEMERKUNG 1. Lemma 1 bietet für $m=3$ eine genaue obere Schranke zu einem Problem, das SYLVESTER untersucht hat. (Sieh auch ERDŐS [1].) Gleichheit in (8) wird für die Eckpunkte, Seitenmittelpunkte und Schwerpunkt des Dreiecks erzielt.

BEMERKUNG 2. Mit ähnlichen Erwägungen, wie bei Lemma 1, kann bewiesen werden: Über die Anzahl $f(m, n)$ der Kreise m-ter Ordnung, $m>3$, die durch n Punkte der Ebene bestimmt sind, gilt

$$f(m, n) \leqq \frac{1}{\binom{m}{3}} \cdot \left\{\binom{n}{3} - \left[\frac{n+2}{3}\right]\right\}.$$

BEWEIS DER SÄTZE 2 UND 3. Diese Sätze haben viel gemeinsames, deshalb beweisen wir sie zusammen. Zuerst

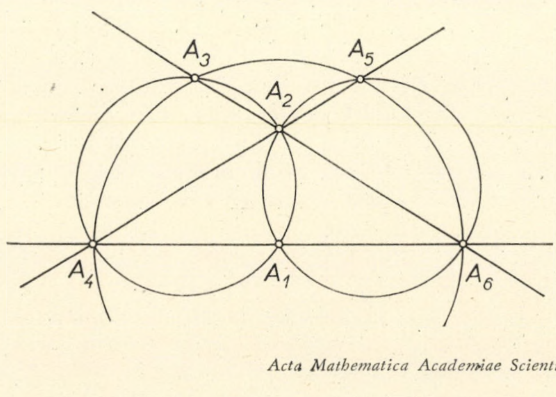
LEMMA 2. *Liegen 6 Punkte $A_1, \ldots, A_6$ der Ebene auf keinem Kreis und keiner Gerade, dann ist die Anzahl f bzw. g der Kreise bzw. K-Linien die durch diese Punkte bestimmt sind, nicht kleiner als* 8 *bzw.* 11.

In Betracht müssen folgende Möglichkeiten gezogen werden:

a) Liegen 5 der Punkte auf einer Geraden bzw. auf einem Kreis, so ist $f=10$ bzw. $f=9$; $g=11$.

b) Die Punkte $A_1, \ldots, A_4$ liegen auf einer Geraden. Dann kann nur eine Gerade 3. Ordnung existieren, auf der die Punkte A_5, A_6 liegen. Die Maximalanzahl der Kreise 4. Ordnung ist 2 (soviel disjunkte Punktpaare kann man nämlich aus den Punkten $A_1, \ldots, A_4$ bilden). Doch können diese Punkte nicht zugleich eine Gerade 3. Ordnung und zwei Kreise 4. Ordnung bestimmen. Deshalb ist $f \geqq \binom{6}{3} - \binom{4}{3} - 2\binom{4}{3} + 2 = 10$; $g \geqq 11$.

c) Keine vier Punkte sollen auf derselben Gerade und keine fünf Punkte auf demselben Kreis liegen. Aus Lemma 1 folgt, daß die gegebenen 6 Punkte höchstens 4 Geraden 3. Ordnung bestimmen; es ist trivial, daß sie nicht mehr als drei Kreise 4. Ordnung bestimmen. Wir werden mit Hilfe einfacher Betrachtungen zeigen, daß es keine Lagerung der Punkte $A_1, \ldots, A_6$ gibt, bei der zugleich drei Kreise 4. Ordnung und vier Geraden 3. Ordnung vorkommen.



Es sollen die Punkte $A_1, \ldots, A_6$ drei Kreise 4. Ordnung k_1, k_2, k_3 bestimmen. Dann sind die gegebenen Punkte so in drei disjunkte Paare, z. B. A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6, verteilt, daß immer zwei der Kreise k_1, k_2, k_3 ein Punktpaar gemeinsam haben. Dabei schneiden sich die Geraden A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6 im (eigentlichen oder uneigentlichen) Potenzmittelpunkt P der Kreise k_1, k_2, k_3. Keine durch die Punkte $A_1, \ldots, A_6$ bestimmte Gerade 3. Ordnung kann beide Punkte eines der erwähnten Punktpaare enthalten; es ist notwendig, daß sie aus einem jeden der Punktpaare immer einen Punkt enthält. Aus den Punkten A_3, A_4, A_5, A_6 kommen die Geraden $A_3A_5, A_4A_6, A_3A_6, A_4A_5$ in Betracht, die sich in zwei Diagonalpunkten des vollständigen Vierecks $A_3A_4A_5A_6$ schneiden. Diese Diagonalpunkte können aber nicht mit den Punkten A_1, A_2 identisch sein, denn sonst würden alle drei Diagonalpunkte des vollständigen Vierecks $A_3A_4A_5A_6$ auf einer Geraden liegen. (Der Potenzmittelpunkt P ist der dritte Diagonalpunkt.) Auf andere Art können Geraden 3. Ordnung nicht gebildet werden; es gibt also nicht vier Geraden 3. Ordnung, die durch die Punkte $A_1, \ldots, A_6$ bestimmt würden, falls durch diese Punkte drei Kreise 4. Ordnung bestimmt sind.

f und g sind dann minimal, wenn die gegebenen Punkte drei Kreise 4. Ordnung und drei Geraden 3. Ordnung bestimmen. Eine solche Lagerung existiert, sie ist auf der Abbildung gezeichnet. Hiermit ist Lemma 2 bewiesen.

LEMMA 3. *Liegen $n > 3$ Punkte $A_1, \ldots, A_n$ der Ebene nicht auf demselben Kreis oder derselben Geraden, dann inzidiert mit einem jeden dieser Punkte wenigstens ein Kreis 3. Ordnung.*

Trivialerweise ist die Behauptung richtig, wenn $(n-1)$ der gegebenen n Punkte auf einer Geraden oder einem Kreis liegen. Es sollen also weiter keine $(n-1)$ Punkte auf derselben Gerade oder demselben Kreis liegen. MOTZKIN [5] hat gezeigt: Wenn keine $(n-1)$ der gegebenen n Punkte in der Ebene auf derselben Gerade liegen, dann können nicht alle Geraden 2. Ordnung mit demselben Punkt inzidieren, die durch diese n Punkte definiert sind. — Wir wählen einen beliebigen Punkt, z. B. A_1, zum Mittelpunkt einer Inversion. Zu den durch $A_1, \ldots, A_n$ definierten Kreisen sind Geraden zugeordnet, wenn die Kreise mit den Punkt A_1 inzidieren. Keine $(n-2)$ der Punkte $A'_2, \ldots, A'_n$ (die zu den Punkten $A_2, \ldots, A_n$ zugeordnet sind) liegen auf einer Geraden, denn sonst würden $(n-1)$ Punkte auf einem Kreis oder auf einer Geraden liegen. Die Punkte $A'_2, \ldots, A'_n$ erfüllen die Voraussetzung des Satzes von Motzkin, deshalb inzidieren nicht alle Geraden 2. Ordnung mit demselben Punkt. Es gibt also wenigstens eine solche Gerade 2. Ordnung, die nicht durch A_1 geht; diese Gerade ist bei der betrachteten Inversion zu einem Kreis 3. Ordnung zugeordnet, der mit A_1 und zwei weiteren Punkten aus $A_2, \ldots, A_n$ inzidiert.

Aus Lemma 3 folgt, daß zwischen n Punkten ein bzw. zwei solche Punkte existieren, durch die wenigstens zwei Kreise 3. Ordnung gehen, je nachdem $n \equiv 2 \bmod 3$ bzw. $n \equiv 1 \bmod 3$ ist. Das bedeutet aber, daß die Minimalanzahl $f(n) > 1$ der durch n Punkte definierten Kreise $f(n) \geqq f(n-1)+2$ für $n \equiv 1, 2 \bmod 3$ und $f(n) \geqq f(n-1)+1$ für $n \equiv 0 \bmod 3$ ist. Ähnliches gilt über die Minimalanzahl $g(n)$ der K-Linien. Wenn sich also die Anzahl der gegebenen Punkte um 3 vergrößert, wird die Anzahl der durch diese Punkte definierten Kreise und K-Linien wenigstens um 5 größer. Daraus und aus Lemma 2 folgt der Satz 3.

Wir beenden nun den Beweis des Satzes 2. Nehmen wir an, daß es eine Lagerung von $n \geqq 6$ Punkten $A_1, \ldots, A_n$ auf der Oberfläche des Elipsoides und nicht in einer

Ebene gibt, durch welche $d < 11 + 2k + 5 \cdot \left[\frac{n-6}{3}\right]$ Ebenen bestimmt sind. Die Punkte $A_1', \ldots, A_n'$ einer Kugelfläche G, die zu den Punkten $A_1, \ldots, A_n$ bei einer linearen Transformation des Elipsoides auf die Kugel zugeordnet sind, bestimmen ebenfalls d Ebenen. Wir projizieren dann die Punkte $A_1', \ldots, A_n'$ stereografisch so aus einem Projektionsmittelpunkt $M \not\equiv A_i'$, daß keine zwei Projektionen der Punkte A_i' zusammenfallen. (Das ist immer möglich.) Auf Grund der Eigenschaften der stereografischen Projektion ist die Anzahl der K-Linien in der Projektionsebene, die durch die Projektionen der A_i' bestimmt sind, der Anzahl d der durch die Punkte A_i' bestimmten Kreise auf der Kugelfläche G gleich; das ist aber im Widerspruch mit Satz 3. — Eine Lagerung von sechs Punkten auf der Oberfläche des Elipsoides, die genau 11 Ebenen bestimmen, wird erhalten, wenn man die auf der Abbildung befindlichen Punkte auf die zum Elipsoid affine Kugel entsprechend zentral projiziert. Damit ist der Beweis des 2. Satzes beendet.

BEMERKUNG 3. Das Problem die Minimalanzahl $f(n)$ der Kreise zu bestimmen, die durch n nicht auf einem Kreis oder auf einer Geraden liegende Punkte der Ebene bestimmt sind, hat ERDŐS [1], [2] gestellt. Trivialerweise ist $f(4)=3, f(5)=5$. — Zugleich ist es sichtbar, daß dieses Problem nicht äquivalent ist mit dem kombinatorischen Problem: Gegeben sind n Elemente $a_1, \ldots, a_n$; was ist die Minimalanzahl k solcher Klassen $K_1, \ldots, K_k$, deren Elemente die a_i sind, und wobei ein jedes Dreitupel (a_p, a_q, a_r) genau in einer Klasse K_j enthalten ist?

(Eingegangen am 25. November 1965.)

Bemerkung bei der Korrektur. Auf S. 181—188 dieses Bandes der *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* behandelt P. D. T. A. ELLIOTT verwandte Fragen und beweist u. a., daß für $n > 393$ $f(n) \geqq \binom{n-1}{2}$ gilt.

Literaturverzeichnis

[1] P. ERDŐS, Some unsolved problems, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, **6** (1961), S. 221–254.
[2] P. ERDŐS, Néhány geometriai problémáról, *Matematikai Lapok*, **8** (1957), S. 86–92.
[3] F. KÁRTESZI, Intorno a punti allineati di certi reticoli circolari, *Rend. Sem. Matem. Messina*, **9** (1964–1965), S. 1–12.
[4] L. M. KELLY–W. O. J. MOSER, On the number of ordinary lines determined by n points, *Canad. Journal of Math*, **10** (1958), S. 210–219.
[5] T. MOTZKIN, The lines and planes connecting the points of a finite set, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **70** (1951), S. 451–464.

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (3—4), (1967), pp. 261—272.

LÖSUNG EINES PROBLEMS BEZÜGLICH EINER CHARAKTERISIERUNG DES JACOBSONSCHEN RADIKALS

Von

F. SZÁSZ (Budapest)

(*Vorgelegt von* L. RÉDEI)

§ 1. Einleitung

Der Begriff des Radikals, als eines Ideals, welches das Maß der Singularität eines Ringes in irgendeinem Sinne kennzeichnet, spielt in der Ringtheorie bekanntlich eine wichtige Rolle. Das Radikal wurde zuerst für Algebren endlichen Ranges über dem Grundkörper definiert. Später wurden verschiedene Definitionen für das Radikal eines beliebigen (assoziativen) Ringes ohne Endlichkeitsbedingungen empfohlen, und es wurde auch eine allgemeine Radikaltheorie aufgebaut. Unter den verschiedenen Typen der Radikale zeigte sich das Jacobsonsche Radikal am meisten nutzbar (JACOBSON [6]).

Im Buch [4] (Seite 486, Theorem 22. 15. 3) von E. HILLE ist bewiesen[1] (1948), daß der Frattinische Untermodul[2] Φ_r eines Ringes A, als eines A-Rechtsmoduls A, ein zweiseitiges Ideal von A ist, für das $AJ \subseteq \Phi_r$ gilt, wobei J das Jacobsonsche Radikal von A bezeichnet. Es gilt freilich auch $JA \subseteq \Phi_l$. Da offenbar $\Phi_r \subseteq J$ und $\Phi_l \subseteq J$ bestehen, ergibt sich im speziellen Fall, wenn A ein Linkseinselement hat (vgl. FUCHS [1]), bzw. $x \in Ax$ für jedes $x \in A$ oder $AJ = J$ gilt, $\Phi_r = J$. Neulich hat A. KERTÉSZ [7] dieses Resultat von Hille's Buch folgendermaßen verschärft: Das Jacobsonsche Radikal J von A ist die Menge derjenigen Elemente x von A, für die yx für jedes $y \in A$ aus jedem Erzeugendensystem von A, als von einem A-Rechtsmodul A, weggelassen werden kann. Mit diesem Resultat von KERTÉSZ [7] ist die folgende Behauptung äquivalent: Das Jacobsonsche Radikal J eines Ringes A ist maximal in der Menge derjenigen Ideale K von A, für die $AK \subseteq \Phi_r$ gilt.

Ein Rechtsideal R eines Ringes A nennen wir *quasimodular* in A, wenn es zu jedem Element $x \in A$ mit $x \notin R$ ein Element $y (\in A, \notin R)$ mit $yx \notin R$ gibt. Offenbar ist jedes modulare Rechtsideal auch quasimodular in A. Aus der erwähnten Kertészschen Charakterisierung $J = \{x;\ x \in A,\ Ax \subseteq \Phi_r\}$ folgt unmittelbar auch eine andere Kennzeichnung von KERTÉSZ [8] des Jacobsonschen Radikals J, nach der J mit dem Durchschnitt D aller quasimodularen maximalen Rechtsideale R des Ringes

[1] Mit anderen Bezeichnungen und Benennungen.

[2] Die Frattinische Untergruppe Φ einer Operatorengruppe G mit dem Operatorenbereich Ω ist die Menge derjenigen Elemente $g \in G$, für die $g\alpha$ für jedes $\alpha \in \Omega$ aus jedem Erzeugenden system von G weggelassen werden kann. Damit ist äquivalent (vgl. z. B. M. HALL [3]), daß Φ der Durchschnitt aller maximalen zuläßigen Untergruppen von G bzw. $\Phi = G$ ist, je nachdem, ob G eine maximale zulässige Untergruppe besitzt, oder nicht. Ähnlich werden die (rechtsseitigen bzw. linksseitigen) Frattinischen Untermoduln Φ_r und Φ_l eines als A-Rechtsmodul bzw. A-Linksmodul betrachteten Ringes A, definiert.

A übereinstimmt.[3] Die quasimodularen maximalen Rechtsideale spielen hiernach von dem Gesichtspunkt einer Charakterisierung des Jacobsonschen Radikals aus eine wichtige Rolle.

Im Buch [8] von A. KERTÉSZ ist folgendes Problem (in anderer Abfassung) aufgeworfen:

Gibt es einen Ring A, der ein quasimodulares maximales Rechtsideal R besitzt, das in A nicht modular ist?

Einen (assoziativen) Ring A nennen wir *Ω-Ring*, wenn A ein solches quasimodulare maximale Rechstideal R besitzt, das in A nicht modular ist. Die quasimodularen maximalen, aber nicht modularen Rechtsideale eines Ω-Ringes werden *ausgezeichnet* genannt. Ein Ω-Ring A wird bezüglich eines ausgezeichneten Rechtsideales R *reduziert* genannt, wenn A kein von Null verschiedenes, in R liegendes zweiseitiges Ideal besitzt.

Das Hauptziel dieser Arbeit ist der Beweis der Existenz von Ω-Ringen, woraus die Lösung des erwähnten Problems von A. KERTÉSZ folgt (vgl. § 2). Aus diesem Existenzbeweis für Ω-Ringe ergibt sich auch die Tatsache, daß die in [8] gegebene Charakterisierung für J, und zwar der Beweis von $D=J$, eine nicht nur formal, sondern auch inhaltlich neue Kennzeichnung für J bedeutet. Weiterhin werden wir auch die wichtigsten Eigenschaften der Ω-Ringe und der reduzierten Ω-Ringe bestätigen (vgl. § 3 und 4) und auch einige offene Fragen bezüglich der Ω-Ringe erwähnen. Zum Abschluß folgen einige weitere Bemerkungen bezüglich des Jacobsonschen Radikals (vgl. § 5).

Hinsichtlich der nötigen Grundbegriffe verweisen wir (außer den Fußnoten) auf die Handbücher [2], [3], [6] und [9].

§ 2. Die Existenz der Ω-Ringe

In diesem § beweisen wir durch eine explizite Konstruktion die Existenz von Ω-Ringen, d. h. wir geben eine Lösung des im § 1 erwähnten Problems von A. KERTÉSZ an. Insbesondere folgt aus der Existenz der Ω-Ringe, daß die in [8] gegebene Charakterisierung für das Jacobsonsche Radikal auch inhaltlich (nicht nur gestaltlich) neu ist.

Es gilt der folgende

SATZ 2. 1. *Für jede unendliche Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ gibt es einen Ω-Ring A mit einem ausgezeichneten Rechtsideal R, derart, daß A eine Algebra mit* Rang $A=$ Rang $R=\mathfrak{m}$ *über einem Primkörper ist.*

[3] Im (bald erscheinenden) Buch [8] von A. KERTÉSZ wird $D=J$ in einem solchen Satz bestätigt, der das Jacobsonsche Radikal durch eine Folge miteinander äquivalenter Bedingungen kennzeichnet, und dessen Beweis zyklisch ist. Es kann aber $D=J$ auch direkt bewiesen werden. Da $D\subseteq J$ gilt, genügt es zeigen, daß $D\neq J$ unmöglich ist. Gibt es nämlich ein Element $j\in J$ mit $j\notin D$, so existieren ein quasimodulares maximales Rechtsideal R und ein Element $a\in A$ mit $aj\notin R$, $a\notin R$. Wegen der Maximalität von R in A gibt es ein Element $b\in A$ mit $a+R=ajb+R$, woraus durch ein leichtes Rechnen $a\in R$, also ein Widerspruch zu $a\notin R$ folgt, denn jb ist wegen $j\in J$ quasiregular. Gilt nämlich $jb+c-jbc=o$ mit einem $c\in A$, so ergibt sich $a=a-a(jb+c-jbc)=a(1-jb)-a(1-jb)c\in R$. Aus diesem Widerspruch erhält man $D=J$.

BEWEIS. Es seien $p=o$ oder p gleich einer Primzahl, K_p ein Primkörper, $\mathfrak{m}$ eine unendliche Mächtigkeit, Γ eine Index-Menge der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$, $\delta_{\alpha\beta}$ das Kroneckersche Delta-Symbol,[4] A eine Algebra über K_p mit den Basiselementen $a_\alpha, r_{\beta\gamma}, s_{\varepsilon\eta\vartheta}$ $(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \eta, \vartheta \in \Gamma)$ und R die über K_p mit sämtlichen $r_{\beta\gamma}, s_{\varepsilon\eta\vartheta}$ erzeugte Teilalgebra von A. Definieren wir die Multiplikation der Elemente der Basis durch die folgende Tabelle:

	a_ε	$r_{\varepsilon\eta}$	$s_{\varepsilon\eta\vartheta}$
a_α	a_ε	$\delta_{\alpha\varepsilon}\cdot a_\eta$	$\delta_{\alpha\varepsilon}\cdot a_\vartheta$
$r_{\alpha\beta}$	$s_{\alpha\beta\varepsilon}$	$\delta_{\beta\varepsilon}\cdot r_{\alpha\eta}$	$\delta_{\beta\varepsilon}\cdot s_{\alpha\eta\vartheta}$
$s_{\alpha\beta\gamma}$	$s_{\alpha\beta\varepsilon}$	$\delta_{\gamma\varepsilon}\cdot s_{\alpha\beta\eta}$	$\delta_{\gamma\varepsilon}\cdot s_{\alpha\beta\vartheta}$

Diese Algebra ist offenbar monomial (im Sinne von RÉDEI [9]). Jedes Element von A läßt sich in der Gestalt

$$(*) \qquad a = \sum_i{}^{*} \pi_i a_{\alpha_i} + \sum_{i,j}{}^{*} \varrho_{ij} r_{\alpha_i\beta_j} + \sum_{i,j,k}{}^{*} \sigma_{ijk} s_{\alpha_i\beta_j\gamma_k}$$

darstellen, wobei $\pi_i, \varrho_{ij}, \sigma_{ijk} \in K_p$ und alle drei Summen $\sum^*$ endlich sind. Es gilt ferner $a \in R$ dann und nur dann, wenn in $(*)$ $\pi_i = o$ für jedes i besteht.

Auf Grund der Multiplikationstabelle kann bewiesen werden, daß die Multiplikation in A assoziativ ist.

Es ist leicht einzusehen, daß die Teilalgebra R ein Rechtsideal, und zwar ein maximales Rechtsideal des (ohne den Operatorbereich K_p angesehenen) Ringes A ist.

Aus der Multiplikationstabelle folgt nämlich unmittelbar, daß R ein Rechtsideal in A ist. Gilt nun $a \notin R$ für ein $a \in A$, so existiert in $(*)$ ein $\pi_i \in K_p$ mit $\pi_i \neq 0$, woraus sich $a(\pi_i^{-1}\varrho r_{\alpha_i\beta}) = \varrho a_\beta + r'$ $(r' \in R)$ für jedes $\beta \in \Gamma$ und $\varrho \in K_p$, folglich $aR + R = A$ ergibt. Also R ist wirklich ein maximales Rechtsideal in A.

Es wird jetzt gezeigt, daß R in A nicht modular ist.

Es sei nämlich a ein beliebiges Element von A. Ist $a \in R$, so ergibt sich wegen $(1-a)a_\alpha = a_\alpha - aa_\alpha \notin R$ gewiß $(1-a)A \nsubseteq R$. Ist aber $a \notin R$, so gibt es in $(*)$ ein i mit $\pi_i \neq o$, woraus man $(1-a)(-\pi_i^{-1} r_{\alpha_i\beta}) = a_\beta + r'' \notin R$ $(r'' \in R)$, folglich $(1-a)A \nsubseteq R$ erhält. R ist also gewiss nicht modular in A.

Wir beweisen, daß R in A ein quasimodulares Rechtsideal ist.

Es sei nämlich a ein Element von A mit $a \notin R$. Nehmen wir an, daß $a_\alpha a = r^* \in R$ für einen Index $\alpha \in \Gamma$ gilt. Dann hat a offenbar eine Gestalt $a = \sum_i \pi_i a + r$ mit endlicher Summe $\sum$ und $r \in R$. Da $a_\alpha r = -\sum_i \pi_i a_{\alpha_i} + r^*$ ist, hat r die Form

$$r = \sum_i{}^{*} \sigma_i r_{\alpha\alpha_i} + \sum_{i,j}{}^{*} \tau_{ij} s_{\alpha\beta_j\alpha_i} + r_\alpha$$

[4] Es gilt also $\delta_{\alpha\beta} = 1$ für $\alpha = \beta$ und $\delta_{\alpha\beta} = o$ für $\alpha \neq \beta$.

mit $\sigma_i, \tau_{ij} \in K_p$ und mit endlichen Summen $\sum^*$, weiterhin mit $r_\alpha \in R$ und $a_\alpha r_\alpha \in R$. Folglich gilt für r_α eine Darstellung:

$$(**) \qquad r_\alpha = \sum_{i,j}^* \pi_{ij}(r_{\alpha\gamma_i} - s_{\alpha\beta_j\gamma_i}) + \sum_{i,j}^* \sigma'_{ij} r_{\beta_i\gamma_j} + \sum_{i,j,k}^* \tau'_{ijk} s_{\varepsilon_i\eta_j\vartheta_k},$$

wobei $\pi_{ij}, \sigma'_{ij}, \tau'_{ijk} \in K_p$, $\beta_i \neq \alpha$, $\varepsilon_i \neq \alpha$, und alle drei Summen $\sum^*$ endlich sind. Wegen der Endlichkeit dieser Summen und wegen $|\Gamma| = \mathfrak{m}$ gibt es einen Index $\varepsilon \in \Gamma$ mit $\varepsilon \neq \alpha$ und derart, daß ε von sämtlichen in $(**)$ links stehenden Indizen β_i und ε_i verschieden ist. Dann erhält man wegen $a_\varepsilon r_\alpha = a_\varepsilon r = o$

$$a_\varepsilon \cdot a = \sum_i^* \pi_i a_{\alpha_i} \notin R,$$

woraus folgt, daß R quasimodular in A ist.

Es gilt offenbar $\operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang} R = \mathfrak{m}$ (über K_p).

Somit ist der Satz bewiesen.

§ 3. Untersuchung der Ω-Ringe

In diesem und den folgenden § werden wir die Ω-Ringe (welche die Lösungen des im § 1 erwähnten Problems von A. KERTÉSZ sind), im allgemeinen untersuchen und auch einige weitere offene Fragen bezüglich der Ω-Ringe erwähnen.[5]

SATZ 3. 1. *Ein ausgezeichnetes Rechtsideal R eines Ω-Ringes A ist kein Ideal von A, und daher ist jeder Ω-Ring nichtkommutativ.*

BEWEIS. Ist R ein Ideal im Ω-Ring A, so hat der Faktorring A/R kein nichttriviales Rechtsideal, und somit ist A/R entweder ein Schiefkörper oder ein Zeroring von Primzahlordnung. Ist A/R ein Schiefkörper, so ist R modular in A, und ist A/R ein Zeroring, so ist R gewiß nicht quasimodular in A. Da aber R ein ausgezeichnetes Rechtsideal ist, ist R gewiß kein Ideal in A. Freilich ist dann A kein kommutativer Ring, w.z.b.w.

SATZ 3. 2. *Ein Ω-Ring A ist kein halbpimärer Ring und somit ist A kein Artinscher Ring.*

BEWEIS. Nach dem Satz von KERTÉSZ [8] gilt $J \subseteq R$ für das Radikal J und für jedes ausgezeichnete Rechtsideal R von A, denn J ist der Durchschnitt aller ausgezeichneten Rechtsideale. Dann ist A/J ebenfalls ein Ω-Ring. Ist nun A/J ein Artinscher Ring, so besitzt A/J ein Einselement, woraus der Widerspruch folgt, daß R modular in A ist. Also ist A/J für einen Ω-Ring A kein Artinscher Ring.

SATZ 3. 3. *Jeder Ω-Ring A besitzt ein homomorphes Bild, der ein halbeinfacher und bezüglich eines ausgezeichneten Rechtsideales R reduzierter Ω-Ring ist.*

[5] Die Klasse der nicht Ω-Ringe ist eine gewissermaßen ähnliche Verallgemeinerung der kommutativen Ringe und der Artinschen Ringe, wie auch die Klasse der FC-Gruppen (d. h. Gruppen mit endlichen Klassen von konjugierten Elementen) eine Verallgemeinerung der kommutativen Gruppen und der endlichen Gruppen ist.

BEWEIS. Es sei K die Summe derjenigen Ideale I von A, die im Rechtsideal R enthalten sind. Dann ist K ein solches Ideal von A, daß A/K ein bezüglich R reduzierter Ω-Ring ist. Da nach KERTÉSZ [8] $J \subseteq R$ besteht und J ein Ideal von A ist, ist A/K halbeinfach.

LEMMA 3. 4. *Läßt sich ein Rechtsideal der Gestalt* $R=(1-x)A=\{a-xa;\ a\in A\}$ *durch ein idempotentes Element* e *erzeugen, d.h. gilt* $R=eA$, *so enthält* A *ein Linkseinselement.*

BEWEIS. Wegen $(1-x)A=eA$ erhält man $(1-e)(1-x)A=o$, folglich $y=(e+x-ex)y$ für jedes $y\in A$, woraus sich ergibt, daß $f=e+x-ex$ ein Linkseinselement von A ist.

SATZ 3. 5. *In einem bezüglich* R *reduzierten* Ω-*Ring* A *ist* $(1-x)A$ *für jedes* $x\in A$ *kein minimales Rechtsideal.*

BEWEIS. Wegen der Reduziertheit ist A halbeinfach (vgl. dem Beweis von Satz 3. 4). Ist nun $(1-x)A$ für ein $x\in A$ ein minimales Rechtsideal, so gibt es ein $e\in A$ mit $e^2=e\neq o$ und $(1-x)A=eA$, woraus sich nach dem Lemma 3. 4 die Existenz eines Linkseinselementes, folglich die Modularität von R in A ergibt. Das ist aber ein Widerspruch, denn R ist in A ausgezeichnet. Also ist $(1-x)A$ kein minimales Rechtsideal.

SATZ 3. 6. *Besitzt ein beliebiger* Ω-*Ring* A *ein idempotentes Element* $e\neq o$, *so gibt es schon in jedem ausgezeichneten Rechtsideal* R_α *ein idempotentes Element* $f_\alpha\neq o$.

BEWEIS. Es gilt $A=R_\alpha+(1-e)A$ für jedes R_α, denn R_α ist maximal und nicht modular in A. Es gibt also Elemente $r_\alpha\in R_\alpha$ und $a_\alpha\in A$ mit $e=r_\alpha+(1-e)a_\alpha$ woraus man $e=er_\alpha$, $e=er_\alpha e$, $(r_\alpha e)^2=r_\alpha e\neq o$ und $f_\alpha=r_\alpha e\in R_\alpha$ erhält, w.z.b.w.

SATZ 3. 7. *In jedem* Ω-*Ring* A *gelten sowohl* $aR_\alpha+R_\alpha=A$ *als auch* $(1-a)R_\alpha+$ $+R_\alpha=A$ *für jedes ausgezeichnete Rechtsideal* R_α *und für jedes* $a\in A$ *mit* $a\notin R_\alpha$.

Es gilt $aR_\alpha+(1-a)R_\alpha=A$ *für jeden* Ω-*Ring* A, *für jedes ausgezeichnete Rechtsideal* R_α *und für jedes* $a\in A$ *mit* $a\notin R_\alpha$.

BEWEIS. Die Menge S_α derjenigen Elemente $x\in A$, für die $xA\subseteq R_\alpha$ gilt, bildet ein Rechtsideal von A mit $R_\alpha\subseteq S_\alpha\subseteq A$. Da aber R_α quasimodular in A ist, ist $S_\alpha\neq A$, woraus wegen der Maximalität von R_α in A gewiß $S_\alpha=R_\alpha$ folgt.

Also erhält man $aA+R_\alpha=A$ für jedes $a\in A$ mit $a\notin R_\alpha$. Folglich gibt es Elemente $b_\alpha\in A$ und $r_\alpha\in R_\alpha$ mit $a=ab_\alpha+r_\alpha$, woraus sich $a(1-b_\alpha)A=r_\alpha A\subseteq R_\alpha$ ergibt. Da R_α maximal und nicht modular in A ist, gewinnen wir $A=R_\alpha+(1-b_\alpha)A$, und daher auch $aA\subseteq aR_\alpha+R_\alpha$ und $aR_\alpha+R_\alpha\subseteq aA+R_\alpha\subseteq aR_\alpha+R_\alpha$ d.h. $A=aR_\alpha+R_\alpha$. Ist nun $(1-a)R_\alpha\subseteq R_\alpha$, so erhält man $ar_\alpha\in R_\alpha$ für jedes $r_\alpha\in R_\alpha$, was nach dem obigen nur im Falle $a\in R_\alpha$ möglich ist. Also besteht $(1-a)R_\alpha+R_\alpha=A$ für jedes $a\notin R_\alpha$ $(a\in A)$ w.z.b.w.

Das Rechtsideal $S=aR_\alpha+(1-a)R_\alpha$ enthält sowohl R_α als auch aR_α, und somit gilt nach dem ersten Teil von Satz 3. 7 gewiß $S=A$, w.z.b.w.

DEFINITION 3. 8. Es sei A ein Ω-Ring und R_α ein (festes) ausgezeichnetes Rechtsideal von A. Dann sei $R_\alpha^{(x)}=\{y;\ y\in A,\ xy\in R_\alpha\}$.

Offenbar ist $R_\alpha^{(x)}$ ein „Rechtsidealquotient" in A, und zwar selbst ein Rechtsideal von A.

SATZ 3. 9. *$R_\alpha^{(x)}=A$ gilt dann, und nur dann, wenn $x\in R_\alpha$ ist. Für $x\notin R_\alpha$ bestehen sowohl $R_\alpha^{(x)}\not\subseteq R_\alpha$ als auch $R_\alpha\not\subseteq R_\alpha^{(x)}$, und $D_\alpha=\bigcap_{x\in A} R_\alpha^{(x)}$ ist ein solches zweiseitige Ideal von A, für das A/D_α ein halbeinfacher, bezüglich R_α reduzierter Ω-Ring ist.*

BEWEIS. Im Falle $R_\alpha^{(x)}=A$ besteht $xA\subseteq R_\alpha$, folglich $x\in R_\alpha$, denn im Falle $x\notin R_\alpha$ gilt nach dem Satz 3. 7 schon $xR_\alpha+R_\alpha=A$. Umgekehrt erhält man offenbar $xA\subseteq R_\alpha$ für jedes $x\in R_\alpha$, folglich ist dann $R_\alpha^{(x)}=A$. Also ergibt sich $R_\alpha^{(x)}\neq A$ für $x\notin R_\alpha$. Wenn wir zeigen, daß für $x\notin R_\alpha$ $R_\alpha^{(x)}\not\subseteq R_\alpha$ ist, so folgt daraus auch $R_\alpha^{(x)}\not\supseteq R_\alpha$. Wie wir bei dem Beweis des Satzes 3. 7 schon gesehen haben, gibt es zu jedem R_α und jedem $a\in A$ mit $a\notin R_\alpha$ ein Element b_α mit $a-ab_\alpha\in R_\alpha$. Da aber R_α nicht modular in A ist, existiert ein $y_\alpha\in A$ mit $y_\alpha-ay_\alpha\notin R_\alpha$. Wegen $a(y_\alpha-b_\alpha y_\alpha)\in R_\alpha$ gilt $y_\alpha-b_\alpha y_\alpha\in R_\alpha^{(a)}$, also auch $R_\alpha^{(a)}\not\subseteq R_\alpha$. Es sei nun d ein beliebiges Element von $D_\alpha=\bigcap_{x\in A} R_\alpha^{(x)}$. Dann gilt $xd\in R_\alpha$ für jedes $x\in A$, also $Ad\subseteq R_\alpha$. Da R_α quasimodular in A ist, erhält man $d\in R_\alpha$, folglich $D_\alpha\subseteq R_\alpha$. Wegen der Definition von D_α folgt aus $Ay\subseteq R_\alpha$ trivial $y\in D_\alpha$, und wegen $A^2D_\alpha\subseteq AD_\alpha\subseteq R_\alpha$ auch $AD_\alpha\subseteq D_\alpha$. Somit ist D_α ein Ideal von A, das in R_α liegt. Ist nun I ein Ideal von A mit $I\not\subseteq D_\alpha$, so gibt es ein Element $f\in I$ mit $f\notin D_\alpha$, und somit ein $x\in A$ mit $f\notin R_\alpha^{(x)}$. Dann besteht $xf\notin R_\alpha$, was wegen $xf\in I$ bedeutet, daß $I\not\subseteq R_\alpha$ ist. Also gilt entweder $I\subseteq D_\alpha$ oder $I\not\subseteq R_\alpha$ für jedes zweiseitige Ideal I von A. Hiernach ist A/D_α wirklich ein bezüglich R_α reduzierter und somit halbeinfacher Ω-Ring, w.z.b.w.

SATZ 3. 10. *Sind A ein Ω-Ring mit einem ausgezeichneten Rechtsideal $R_\alpha, D_\alpha=\bigcap_{x\in A} R_\alpha^{(x)}$ und R_1 ein Rechtsideal von A mit $R_1\not\subseteq D_\alpha$, so gibt es ein $a\in A$ mit $a\notin R_\alpha$ derart, daß $aR_1+R_\alpha=A$ gilt.*

BEWEIS. Wegen $R_1\not\subseteq D_\alpha$ existiert ein $r_1\in R_1$ mit $r_1\notin D_\alpha$, folglich ein $a\in A$ mit $r_1\notin R_\alpha^{(a)}$, woraus sich $ar_1\notin R_\alpha$ ergibt. Da $aR_1\not\subseteq R_\alpha$ besteht, erhält man wegen der Maximalität von R_α in A die Gleichung $aR_1+R_\alpha=A$, w.z.b.w.

SATZ 3. 11. *Ist A ein bezüglich eines ausgezeichneten Rechtsideales R_α reduzierter Ω-Ring, so ist $(o)_l$ das einzige in R_α liegende Linksideal von A.*

BEWEIS. Ist L ein Linksideal von A mit $L\subseteq R_\alpha$, so gilt wegen $LA\subseteq R_\alpha$ und der Reduziertheit von A bezüglich R_α $LA=o$, denn LA ist ein Ideal in R_α. Da aber A wegen der Reduziertheit halbeinfach ist, ergibt sich $L=o$, w.z.b.w.

SATZ 3. 12. *Sowohl der Rechtsannullator A_r als auch der Linksannulator A_l eines ausgezeichneten Rechtsideales R_α eines bezüglich R_α reduzierten Ω-Ringes A stimmen mit (o) überein.*

BEWEIS. Ist $x\in A_r$, so gilt $R_\alpha x=o$, folglich $Ax=o$, denn man nach Satz 3. 7 $yR_\alpha+R_\alpha=A$ für jedes $y\notin R_\alpha$ $(y\in A)$ erhält. Wegen der Halbeinfachheit von A folgt aus $Ax=o$ trivial $x=o$. Ist nun $z\in A_l$ so gilt $zR_\alpha=o$, folglich $z\in R_\alpha$ nach dem Satz 3. 7, denn im Falle $z\notin R_\alpha$ würde $zR_\alpha\not\subseteq R_\alpha$ und somit $zR_\alpha\neq o$ bestehen. Also gilt $A_l\subseteq R_\alpha$, und da A ein Linksideal von A in R_α ist, folgt wegen der Reduziertheit von A bezüglich R_α $A_l=o$, w.z.b.w.

SATZ 3. 13. *Es sei A ein bezüglich eines ausgezeichneten Rechtsideales R_α reduzierter Ω-Ring. Dann gilt $R_\alpha e \neq R_\alpha$ für jedes idempotente Element e von A. Weiterhin folgt $x=o$ sowohl aus $R_\alpha^k x=o$ als auch aus $xR_\alpha^k=o$ für jeden Exponenten k.*

BEWEIS. Ist $R_\alpha e=R_\alpha$ für ein idempotentes Element $e\in A$, so ergibt sich wegen $aR_\alpha+R_\alpha=A$ für jedes $a\notin R_\alpha$ $(a\in A)$ gewiß $Ae=A$. Also ist e ein Rechtseinselement von A, und da A halbeinfach ist, ist e ein zweiseitiges Einselement in A. Da aber R_α nicht modular in A ist, hat A kein Linkseinselement. Es gilt also $R_\alpha e\neq R_\alpha$. Ist nun $xR_\alpha^k=o$ $(R_\alpha^k x=o)$, so ergibt sich $xR_\alpha^{k-1}\subseteqq A_l$ $(R_\alpha^{k-1}x\subseteqq A_r)$ und wegen $A_l=o$ $(A_r=o)$ (vgl. Satz 3. 13) $xR_\alpha^{k-1}=o$ $(R_\alpha^{k-1}x=o)$. Nach endlich vielen Schritten erhält man $xR_\alpha=o$ $(R_\alpha x=o)$, folglich $x=o$ nach dem Satz 3. 13, w.z.b.w.

SATZ 3. 14. *Es seien A ein bezüglich eines ausgezeichneten Rechtsideales R_α reduzierter Ω-Ring und R_1 ein Rechtsideal von A mit $R_1\subseteqq\!\!\!\!/\; R_\alpha$, weiterhin $D'_\alpha=\bigcap_{x\in R_1} R_\alpha^{(x)}=\{y;\ R_1 y\subseteqq R_\alpha\}$. Dann gilt $D'_\alpha=o$. Ist nun $I_\alpha^{(x)}=\{y;\ R_\alpha y\subseteqq R_\alpha^{(x)}\}$, so ergibt sich $I_\alpha^{(x)}=o$. Ferner ist (o) das einzige in $R_\alpha^{(x)}$ liegende zweiseitige Ideal von A.*

BEWEIS. Wegen $R_1+R_\alpha=A$ und wegen $R_1D'_\alpha\subseteqq R_\alpha$ erhält man $AD'_\alpha\subseteqq R_\alpha$, folglich $D'_\alpha=o$, weil A, D'_α ein zweiseitiges in R_α liegendes Ideal von A, A reduziert und halbeinfach ist. Wegen $R_\alpha I_\alpha^{(x)}\subseteqq R_\alpha^{(x)}$ und $R_\alpha^{(x)}+R_\alpha=A$ (vgl. Satz 3. 10) gilt $AI_\alpha^{(x)}\subseteqq R_\alpha^{(x)}$, folglich $xAI_\alpha^{(x)}\subseteqq R_\alpha$, und wegen $xR_\alpha+R_\alpha=A$ (für jedes $x\in A$, $x\notin R_\alpha$) ergibt sich $AI_\alpha^{(x)}\subseteqq R_\alpha$. Da aber $AI_\alpha^{(x)}$ ein Ideal des halbeinfachen reduzierten Ω-Ringes A ist, erhält man A, $I_\alpha^{(x)}=o$ und somit $I_\alpha^{(x)}=o$. Es sei I ein Ideal von A in $R_\alpha^{(x)}$. Wegen $AI\subseteqq R_\alpha^{(x)}$ gilt dann $xAI\subseteqq R_\alpha$, folglich wegen $xR_\alpha+R_\alpha=A$ (vgl. Satz 3. 7) auch $AI\subseteqq R_\alpha$, woraus sich $AI=o$ und $I=o$ ergibt.

SATZ 3. 15. *Es seien A ein bezüglich eines ausgezeichneten Rechtsideales R_α reduzierter Ω-Ring, x ein Element von A mit $x\notin R_\alpha$ und R_1 ein Rechtsideal von A mit $R_1\subseteqq\!\!\!\!/\; R_\alpha^{(x)}$. Dann gelten $(xR_1)^k+R_\alpha=xR_1^k+R_\alpha=(1-x)R_\alpha^k+R_\alpha=A$ für jeden Exponenten k. Im Falle $o\neq R_1^k\subseteqq R_\alpha$ besteht auch $(1-x)R_1^k+R_\alpha=A$. Ist $K_\alpha^{(x,k)}=\{y;\ y\in A,\ R_1^k y\subseteqq R_\alpha^{(x)}\}$, so gilt $K_\alpha^{(x,k)}=o$ für jeden Exponenten k.*

BEWEIS. Nehmen wir an, daß $(xR_1)^{k+1}\subseteqq R_\alpha$ und $(xR_1)^k\subseteqq\!\!\!\!/\; R_\alpha$ ist. Dann gilt wegen $R_1\subseteqq\!\!\!\!/\; R_\alpha^{(x)}$ offenbar $xR_1\subseteqq\!\!\!\!/\; R_\alpha$ und somit wegen der Maximalität von R_α in A auch $xR_1+R_\alpha=A$. Daher gilt $k\geqq 1$. Nach der Voraussetzung besteht $(xR_1)^k+R_\alpha=A$, und wegen $(xR_1)^{k+1}\subseteqq R_\alpha$ auch $AxR_1\subseteqq R_\alpha$. Da A reduziert und halbeinfach ist, ergibt sich $AxR_1=o$ und $xR_1=o$, obwohl nach der Voraussetzung $(xR_1)^k\subseteqq\!\!\!\!/\; R_\alpha$ und $k\geqq 1$ bestehen. Also gilt $(xR_1)^k+R_\alpha=A$ für jedes $k\geqq 1$. Wegen $(xR_1)^k\subseteqq xR_1^k$ erhält man auch $xR_1^k+R_\alpha=A$ für jedes $k\geqq 1$. — Wegen $R_1\subseteqq\!\!\!\!/\; R_\alpha^{(x)}$ besteht $xR_1^k\subseteqq\!\!\!\!/\; R_\alpha$. Folglich gibt es ein $r_1\in R_1^k$ mit $xr_1\notin R_\alpha$. Ist nun $(1-x)R_1^k\subseteqq R_\alpha$, so erhält man im Falle der Voraussetzung $R_1^k\subseteqq R_\alpha$ auch $xR_1^k\subseteqq R_\alpha$, was der Bedingung $xr_1\notin R_\alpha$ widerspricht. Also folgt aus $R_1^k\subseteqq R_\alpha$ und $R_1\subseteqq\!\!\!\!/\; R_\alpha^{(x)}$ die Gleichung $(1-x)R_1^k+R_\alpha=A$. — Wegen $R_1^kK_\alpha^{(x,k)}\subseteqq R_\alpha^{(x)}$ gilt $xR_1^kK_\alpha^{(x,k)}\subseteqq R_\alpha$, und wegen $xR_1^k+R_\alpha=A$ auch A. $K_\alpha^{(x,k)}\subseteqq R_\alpha$, woraus $K_\alpha^{(x,k)}=o$ folgt, denn A, $K_\alpha^{(x,k)}$ ist ein Ideal von A in R_α, und A ist reduziert und halbeinfach.

BEMERKUNG 3. 16. Die Voraussetzungen des Satzes 3. 16 bezüglich R_1 gelten freilich auch für R_α selbst. Also gelten auch $(xR_\alpha)^k+R_\alpha=xR_\alpha^k+R_\alpha=(1-x)R_\alpha^k+R_\alpha=A$ für jedes $k\geqq 1$. Mit Hilfe einer vollständigen Induktion nach k kann auch $(Ax)^k\subseteqq\!\!\!\!/\; R_\alpha$ für jeden bezüglich eines ausgezeichneten Rechtsideales R_α reduzierten Ω-Ring A und für jedes $k\geqq 1$ bewiesen werden.

§ 4. Fortsetzung der Untersuchung der Ω-Ringe

Wir betrachten hier weitere Eigenschaften der Ω-Ringe. Es gilt der folgende

SATZ 4. 1. *Das Zentrum Z jedes bezüglich eines ausgezeichneten Rechtsideales R_α reduzierten Ω-Ringes A ist $\{o\}$.*

BEWEIS. Ist z ein Element des Zentrums Z von A, so gilt wegen $zR_\alpha = R_\alpha z \subseteq R_\alpha$ und nach dem Satz 3. 7 offenbar $z \in R_\alpha$, denn im Falle $z \notin R_\alpha$ würde $zR_\alpha \subsetneqq R_\alpha$ bestehen. Wegen $Z \subseteq R_\alpha$ ist dann $I = ZA = AZ$ ein in R_α liegendes Ideal von A, woraus $ZA = o$ und $Z = \{o\}$ folgt, weil A reduziert und halbeinfach ist.

SATZ 4. 2. *Die additive Gruppe A^+ eines bezüglich eines ausgezeichneten Rechtsideales R_α reduzierten Ω-Ringes A ist entweder eine elementare p-Gruppe (d.h. es gilt $pA = o$), oder A^+ ist torsionsfrei mit $A^+ = nA^+ + R_\alpha$ für jede von Null verschiedene ganze rationale Zahl n, weiterhin ist R_α^+ eine reine (servante) Untergruppe der Gruppe A^+.*

BEWEIS. Es sei $A[p]$ für jede Primzahl p die Menge aller Elemente x der Ordnung p, d.h. mit $px = o$. Ist A^+ nicht torsionsfrei, so existiert ein p mit $A[p] \neq o$. Da $A[p]$ ein Ideal von A, A reduziert und R_α maximal in A ist, gilt $A = A[p] + R_\alpha$. Hiernach ist $pA = pR_\alpha \subseteq R_\alpha$. Da aber A bezüglich R_α reduziert und pA ein Ideal von A in R_α ist, gilt $pA = o$. Ist aber A^+ torsionsfrei, so gilt $nA \neq o$ für jede von Null verschiedene ganze rationale Zahl n, woraus wegen $nA \nsubseteq R_\alpha$ trivial $A = nA + R_\alpha$ folgt. — Im Falle $pA = o$ ist R_α^+ ein direkter Summand, also auch eine reine Untergruppe von A^+. Im torsionsfreien Falle besteht $a \notin R_\alpha$ aber $na \in R_\alpha$ für eine von Null verschiedene ganze rationale Zahl n. Dann gilt aber $aR_\alpha + R_\alpha = A$, woraus $nA \subseteq R_\alpha$ folgt, was der Reduziertheit von A bezüglich R_α widerspricht, denn nA ist ein Ideal von A in R_α. Also ist R_α^+ im beiden Fällen eine reine Untergruppe in A^+.

BEMERKUNG 4. 3. Ist A ein Ω-Ring, der bezüglich eines ausgezeichneten Rechtsideals R_α reduziert ist, so ist A^+ nach dem Satz 4. 2 dann und nur dann teilbar (divisible), wenn R_α^+ teilbar ist.

SATZ 4. 4. *Es seien R_α ein ausgezeichnetes Rechtsideal eines Ω-Ringes A, der bezüglich R_α nicht notwendig reduziert ist, und x ein solches Element von A, für welches $x \notin R_\alpha$ und $xR_\alpha^{(x)} = R_\alpha$ bestehen. Dann ist x ein Linksteiler jedes Elements $a \in A$, aber kein Linkseinselement von A, und es gilt $xR = xA = A$. Weiterhin ist der Unterring $\{x\}$ unendlich, es gilt $f(x)R_\alpha + R_\alpha = A$ für jedes Element $o \neq f(x) \in \{x\}$, und es gibt ein Element y von A mit $y \notin R_\alpha$ und mit $(y - f(x))R_\alpha + R_\alpha = A$ für jedes $f(x) \in \{x\}$.*

BEWEIS. Wegen $R_\alpha^{(x)} \nsubseteq R_\alpha$ und der Maximalität von R_α in A ist $R_\alpha^{(x)} + R_\alpha = A$, woraus man wegen $xR_\alpha^{(x)} \subseteq R_\alpha$ offenbar $R_\alpha + xR_\alpha = xA$ erhält. Da aber $R_\alpha + xR_\alpha = A$ für jedes $x \notin R_\alpha$ gilt, ergibt sich $xA = A$. Folglich gibt es eine Lösung a jeder Gleichung $xa = b$ $(a, b \in A)$, wenn $xR_\alpha^{(x)} = R_\alpha$ ist. Es sei c ein Element von A mit $xc = x$. Dann ergibt sich $A = R_\alpha + (1 - c)A$, denn R_α ist maximal und nicht modular in A. Wegen $x(1 - c) = o$ gilt hiernach $xA = xR_\alpha = A$. x ist also ein Linksteiler jedes Elementes a von A, aber kein Linkseinselement von A, denn R_α ist nicht modular in A. Es gilt dann $x^n R_\alpha = A$ für jede natürliche Zahl n. Gibt es nun Exponenten m und n mit $m \neq n$ und $x^m = x^n$, so existiert ein idempotentes Element $e = x^k$ in der Menge aller

Potenzen von x (vgl. z.B. RÉDEI's Buch [9]), und dann ist e ein Linkseinselement von $A=x^kA=eA$, was unmöglich ist, denn R_α ist in A nicht modular. Im Falle $m\neq n$ gilt also $x^m\neq x^n$, und somit ist der Unterring $\{x\}$ unendlich. Nehmen wir jetzt an, daß $f(x)\in R_\alpha$ für ein $f(x)\in\{x\}$ mit $f(x)\neq o$ gilt. So besteht

$$(*)\qquad k_0x^i+k_1x^{i+1}+\ldots+k_nx^{i+n}\in R_\alpha$$

wobei $k_j\in I$, und I der Ring der ganzen rationalen Zahlen ist. Im Falle $pA=o$ für eine Primzahl p läßt sich offenbar $k_0\equiv 1 \pmod p$ annehmen, woraus

$$(1+g(x))x^i\in R_\alpha \qquad (g(x)\in\{x\})$$

folgt. Dann ist aber R_α wegen $x^iA=A$ und $(1+g(x))A\subseteq R_\alpha$ modular in A, was unmöglich ist. Im Falle $pA=o$ gilt daher $f(x)R_\alpha+R_\alpha=A$ für jedes $f(x)$ $(\in\{x\},\ \neq o)$. Ist aber A^+ torsionsfrei, so ergibt sich nach dem Satz 4. 2 $A=nA+R_\alpha$ für jede ganze Zahl $n\neq o$. Da sich k_0 in $(*)$ offenbar als von Null verschieden annehmen läßt, gilt auch $A=k_0A+R_\alpha$ und somit $x^j=k_0y_j+r_j$ mit $y_j\in A$ und $r_j\in R_\alpha$ $(j=1,2,\ldots,n)$, folglich

$$k_0(1+y)x^i\in R_\alpha \qquad (y\in A).$$

Da aber R_α^+ nach dem Satz 4. 2 eine reine Untergruppe in A^+ ist, ergibt sich wegen $k_0\neq o$ auch

$$(1+y)x^i\in R_\alpha,$$

was wegen $x^iA=A$ und $(1+y)A\subseteq R_\alpha$ genau die Modularität des Rechtsideales R_α in A bedeutet. Letzteres ist aber unmöglich, und dieser Widerspruch beweist $f(x)R_\alpha+R_\alpha=A$ auch im torsionsfreien Falle $(f(x)\in\{x\}, f(x)\neq o,\ xR_\alpha^{(x)}=R_\alpha)$. Nehmen wir an, daß es zu jedem $y\in A$ ein Element $f(x)\in\{x\}$ mit $y-f(x)\in R_\alpha$ gibt. Aus dieser Voraussetzung werden wir einen Widerspruch ableiten. Im Falle $y-f(x)\in R_\alpha$ ergibt sich nämlich $y=f(x)+r$ mit $r\in R_\alpha$. Da wegen $xR_\alpha=A$ ein Element $r^*\in R_\alpha$ mit $xr^*=x$ existiert, erhält man nach der Voraussetzung für ein beliebiges $y\in A$ die Beziehung $y(1-r^*)x=(f(x)+r)(1-r^*)x=r(1-r^*)x$, folglich $A(1-r^*)A=A(1-r^*)xA\subseteq R_\alpha$. Aus $A(1-r^*)A\subseteq R_\alpha$ ergibt sich wegen der Quasimodularität von R_α in A gewiß $(1-r^*)A\subseteq R_\alpha$, denn es gilt $Az\nsubseteq R_\alpha$ für jedes $z\neq R_\alpha$ $(z\in A)$. Da aber R_α nicht modular in A ist, gilt $(1-r^*)A\nsubseteq R_\alpha$, und somit ist $(1-r^*)A\subseteq$ $\subseteq R_\alpha$ ein Widerspruch. Also gibt es ein $y\in A$ mit $(y-f(x))R_\alpha+R_\alpha=A$ für jedes $f(x)\in\{x\}$ w.z.b.w.

Am Ende dieses Paragraphen möchten wir einige Probleme aufwerfen.

PROBLEM 1. Gibt es einen Ω-Ring A, der sich als Ring, durch ein ausgezeichnetes Rechtsideal R und durch endlich viele Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$ erzeugen läßt?

PROBLEM 2. Gibt es einem Ω-Ring A mit einem ausgezeichneten Rechtsideal R und einer endlichen Teilmenge $a_1, a_2, \ldots, a_n$ von A, derart, daß für jedes $x\in A$ mit $x\notin R$ eine der Relationen $a_ix\notin R$ $(i=1,2,\ldots,n)$ gilt? (Dasselbe Problem auch für $n=2$.)

PROBLEM 3. Gibt es einen Ω-Ring, der ein MHR-Ring ist, d.h. in dem die Minimalbedingung für Hauptrechtsideale gilt? (vgl. Verfasser [11]).

PROBLEM 4. Man untersuche in einem Ω-Ring den Zusammenhang zwischen der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ der Menge aller modularen maximalen Rechtsideale und der Mächtigkeit $\mathfrak{n}$ der Menge aller ausgezeichneten Rechtsideale!

§ 5. Weitere Bemerkungen über das Jacobsonsche Radikal

Die Resultate dieses Paragraphen sind Folgerungen des Satzes von KERTÉSZ [7]. Ein Teil der hier erwähnten Sätze ist nicht ganz neu, aber wir betrachten in diesem § auch solche, schon bekannte Ergebnisse, die sich mit der Hilfe des Frattinischen Untermoduls Φ_r eines Ringes (vgl. Fußnote 3) eleganter beweisen lassen. Es gilt der folgende

SATZ 5. 1. *Es sei A ein assoziativer Ring. Gilt $\Phi_r \subseteqq R \subseteqq J$ für ein Rechtsideal R, für den Frattinischen Untermodul Φ_r des als A-Rechtsmodul aufgefassten Ringes A und für das Jacobsonsche Radikal J, so ist R ein zweiseitiges Ideal von A.*

BEWEIS. Nach HILLE [4] bzw. KERTÉSZ [7] gilt $AJ \subseteqq \Phi_r$, folglich auch $AR \subseteqq \subseteqq \Phi_r \subseteqq R$, w.z.b.w.

SATZ 5. 2. *Sind für die natürlichen Zahlen m, n ($\geqq 1$) die Mengen I_m, K_n, $L_{m,n}$ in einem Ring A folgendermaßen definiert:*

$$I_m = \{x;\ x \in A,\ A^m x \subseteqq \Phi_r\},$$

$$K_n = \{y;\ y \in A,\ yA^n \subseteqq \Phi_l\},$$

$$L_{m,n} = \{z;\ z \in A,\ A^m z A^n \subseteqq M\}$$

wobei $M = \Phi_r$ oder Φ_l bzw. $\Phi_r \cap \Phi_l$, so gilt

$$J = I_m = K_n = L_{m,n}$$

für das Jacobsonsche Radikal J von A.

BEWEIS. Wegen der Ähnlichkeit der Beweisteile, werden wir nur $J = L_{m,n}$ beweisen. Nach HILLE [4] bzw. KERTÉSZ [7] gilt offenbar $J \subseteqq L_{m,n}$. Ist nun $z \in L_{m,n}$, und ist z.B. $M = \Phi_r \cap \Phi_l$, so bestehen sowohl $A^m z A^n \subseteqq \Phi_r$ als auch $A^m z A^n \subseteqq \Phi_l$, woraus man nach [7] $A^{m-1} z A^n \subseteqq J$ bzw. $A^m z A^{n-1} \subseteqq J$ erhält. Da aber A/J halbeinfach ist, hat A/J keinen von Null verschiedenen linksseitigen oder rechtsseitigen Annullator, deshalb ergibt sich $A^{m-1} z A^{n-1} \subseteqq J$ und nach endlich vielen ähnlichen Schritten $Az \subseteqq J$ bzw. $zA \subseteqq J$, woraus $z \in J$ und somit $L_{m,n} \subseteqq J$ folgt. Es ist also $J = L_{m,n}$.

SATZ 5. 3. *Ein Ring A ist dann und nur dann ein Radikalring im Sinne von Jacobson, wenn der Faktorring A/Φ_r von A nach dem Frattinischen Untermodul Φ_r des als A-Rechtsmodul betrachteten Ringes A, ein Zeroring[6] ist. Gilt in einem Ring A die Bedingung $\Phi_r = o$, so enthält das Jacobsonsche Radikal J von A nur die Rechts-*

[6] Ein Ring A, in dem das Produkt xy für jedes $x, y \in A$ Null ist, heißt Zeroring.

annullatoren von A. Ist A ein von Null verschiedener einfacher Radikalring[7] *mit $A^2=A$, so besitzt A kein maximales echtes Rechtsideal, also gilt $\Phi_r=A$.*

BEWEIS. Ist $J=A$, so erhält man wegen $AJ\subseteqq\Phi_r$ die Inklusion $A^2\subseteqq\Phi_r$, und somit ist dann A/Φ_r ein Zeroring. Ist umgekehrt A/Φ_r ein Zeroring, so gilt $A^2\subseteqq\Phi_r$, woraus sich nach KERTÉSZ [7] gewiß $A=J$ ergibt. — Besteht nun $\Phi_r=o$, so enthält J wegen $AJ\subseteqq\Phi_r$ nur die Rechtsannullatoren von A. — Hat A ein maximales echtes Rechtsideal, so gilt $\Phi_r\neq A$. Ist nun A insbesondere ein einfacher Radikalring, so ergibt sich $\Phi_r=o$, denn Φ_r ist ein Ideal mit $\Phi_r\neq A$. Da $A^2\subseteqq\Phi_r$ nach dem obigen für jeden Radikalring gilt, erhält man $A^2=o$, was wegen $A^2=A$ den Widerspruch $A=o$ bedeutet. Also hat jeder von Null verschiedene einfache Radikalring A mit $A^2=A$ kein maximales echtes Rechtsideal, w.z.b.w.

SATZ 5. 4. *Gilt $J^2\neq o$ für das Jacobsonsche Radikal J eines beliebigen Ringes A, so besitzen der rechtsseitige Frattinische Untermodul Φ_r und der linksseitige Frattinische Untermodul Φ_l des A-Rechtsmoduls bzw. A-Linksmoduls A einen von Null verschiedenen Durchschnitt.*

BEWEIS. Nehmen wir an, daß $\Phi_r\cap\Phi_l=o$ ist. Dann erhält man wegen $AJ\subseteqq\Phi_r$ und $JA\subseteqq\Phi_l$ offenbar $J^2\subseteqq\Phi_r$ und $J^2\subseteqq\Phi_l$, folglich $J^2\subseteqq\Phi_r\cap\Phi_l=o$. Es ergibt sich also im Falle $J^2\neq o$ notwendigerweise $\Phi_r\cap\Phi_l\neq o$.

BEMERKUNGEN 5. 5. In jedem kommutativen Ring A mit $\Phi_r\neq o$ ist trivial $\Phi_r\cap\Phi_l=\Phi_r=\Phi_l\neq o$. Jeder Matrizenring über einem Schiefkörper, der offenbar halbeinfach ist, ist ein Ring, für den $J^2=J=o$ und $\Phi_r=\Phi_l=\Phi_r\cap\Phi_l=o$ bestehen.

Es gibt aber auch nichthalbeinfache Ringe, und zwar schon solche mit sechszehn Elementen, für die $o\neq\Phi_r\neq\Phi_l\neq o$, $\Phi_r\cap\Phi_l=o$ und $J=\Phi_r+\Phi_l$ mit $J^2=o$ gelten. Ein solcher Ring ist z.B. die Algebra $A=\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$ mit $2A=o$ (d.h. $x+x=o$ für jedes $x\in A$) und mit der Multiplikationstabelle

	a_1	a_2	b_1	b_2
a_1	a_1	o	o	o
a_2	o	a_2	o	b_2
b_1	b_1	o	o	o
b_2	o	o	o	o

In diesem Ring A gelten wegen $\Phi_r=\{b_2\}$ und $\Phi_l=\{b_1\}$ die Beziehungen $\Phi_r\cap\Phi_l=o$ und $J^2=o$ für das Radikal $J=\Phi_r+\Phi_l$.

Es sei B die durch a_1 und b_1 erzeugte Teilalgebra der obigen Algebra $A=\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$. Im Ring $B=\{a_1, b_1\}$ gilt $B^2(=B)\nsubseteqq R$ für jedes maximale Rechtsideal R des Ringes B, denn a_1 ist ein Linkseinselement von B. Da aber $b_1\notin\{a_1\}$ und $xb_1=o\in\{a_1\}$ für jedes $x\in B$ bestehen, ist das maximale Rechtsideal $\{a_1\}$ von B nicht quasimodular in B.

[7] Die Existenz der einfachen Radikalringe A mit $A^2=A\neq o$ wurde in SASIADA [10] gezeigt.

Die Eigenschaft $B^2+R=B$ ist also für ein maximales Rechtsideal R eines Ringes B von der Quasimodularität von R in B verschieden.

Ist A zum Schluß ein einfacher Radikalring, so bestehen wegen $J=\Phi_r=\Phi_l=A$ die Ungleichungen $J^2\neq o$ und $\Phi_r\cap\Phi_l\neq o$ (vgl. SASIADA [10]).

(Eingegangen am 22. April 1966.)

Literaturverzeichnis

[1] L. FUCHS, A remark on the Jacobson radical, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **14** (1952), S. 167—168.
[2] L. FUCHS, *Abelian Groups* (Budapest, 1958, Akadémiai Kiadó).
[3] M. HALL, *The Theory of Groups* (New York, 1959, Macmillan).
[4] E. HILLE, *Functional Analysis and Semi Groups* (Providence, 1948, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. 31).
[5] N. JACOBSON, The radical and semi-simplicity for arbitrary rings, *Amer. Jour. Math.*, **67** (1945), S. 300—320.
[6] N. JACOBSON, *Structure of Rings* (Providence, 1956, Amer, Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. 37).
[7] A. KERTÉSZ, A characterization of the Jacobson radical, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **14**:**4** (1963), S. 595—597.
[8] A. KERTÉSZ, *Über Artinsche Ringe* (Budapest, 1966, Akadémiai Kiadó) (im Erscheinen).
[9] L. RÉDEI, *Algebra, I* (Leipzig, 1959, Akademische Verlagsgesellschaft).
[10] E. SASIADA, Solution of the problem of existence of simple radical rings, *Bull. Acad. Polon. Sci. Classe III*, **9** (1961), S. 257.
[11] F. SZÁSZ, Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale. I, *Publ. Math. Debrecen*, **7** (1960), S. 54—64; II, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **12** (1961), S. 417—439; III, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **14** (1963), S. 447—461.

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (3—4), 1967, pp, 273—277.

BEMERKUNGEN ZUR APPROXIMATION IM STARKEN SINNE

Von

L. LEINDLER (Szeged)

(*Vorgelegt von* K. TANDORI)

1. Bezeichne $f(x)$ eine 2π-periodische, stetige Funktion, $s_n(x)$ die n-te Partialsumme ihrer Fourierreihe, $\tilde{f}(x)$ bzw. $\tilde{s}_n(x)$ die konjugierten Funktionen von $f(x)$, bzw. $s_n(x)$.

In [2] haben wir u.a. bewiesen:

Ist $f(x)$ überall r-mal differenzierbar und $f^{(r)}(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0<\alpha\leqq 1)$, so gilt im Falle $(r+\alpha)p<1$ und beliebiges p $(\gamma>0)$ die Beziehung

$$\sigma_n^\gamma|f,p;x| = \left\{\frac{1}{A_n^{(\gamma)}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(\gamma-1)} |s_\nu(x)-f(x)|^p\right\}^{1/p} = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right)$$

gleichmäßig.

In dieser Note werden wir zuerst beweisen, daß dieser Satz nicht mehr verschärft werden kann. Es gilt nämlich der folgende

SATZ I. *Ist $f(x)$ überall r-mal differenzierbar, $f^{(r)}(x)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0<\alpha\leqq 1)$ und $\gamma>0$, so gelten für $(r+\alpha)p=1$ nur die Abschätzungen*

$$\sigma_n^\gamma|f,p;x| = O\left(\frac{(\log n)^{1/p}}{n^{r+\alpha}}\right) \tag{1}$$

und

$$\sigma_n^\gamma|\tilde{f},p;x| = O\left(\frac{(\log n)^{1/p}}{n^{r+\alpha}}\right). \tag{2}$$

Es gibt nämlich solche Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$, deren r-ten Ableitungen existieren und zur Klasse Lip α *gehören, für welche aber*

$$\sigma_n^\gamma|f_1,p;0| \geqq d\frac{(\log n)^{1/p}}{n^{r+\alpha}}, \quad \text{bzw.} \quad \sigma_n^\gamma|\tilde{f}_2,p;0| \geqq d\frac{(\log n)^{1/p}}{n^{r+\alpha}}, \tag{3}$$

wobei $d=d(p,\gamma)>0$ von n unabhängige Konstante ist.

Im folgenden werden wir eine weitere Folgerung eines Satzes des Verfassers [2] angeben.

Bezeichne $E_n(f)$ den im Sinne der Metrik des Raumes $C(0, 2\pi)$ erreichbaren besten Annäherungsgrad von $f(x)$ mit trigonometrischen Polynomen n-ter Ordnung. Sei $\|\alpha_{nk}\|$ eine positive Dreiecksmatrix und bezeichne

$$T_n(x) = T_n(f,p,\|\alpha\|;x) = \left\{\frac{1}{A_n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_{nk}|s_k(x)-f(x)|^p\right\}^{1/p}$$

die starken Mittel bezüglich der durch $\left\|\frac{\alpha_{nk}}{A_n}\right\|$ bestimmten Summationsmethode, wobei $p>0$ ist und

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{nk}.$$

bedeutet. Wir setzen

$$A_n(m, l) = \sum_{k=l+1}^{m} \alpha_{nk}.$$

In [2] war bewiesen:

Existiert eine Indexfolge $\{N_m\}$ $(0=N_0<\ldots<N_m<\ldots)$ *und eine Zahl* $q'>1$ *derart, daß für* $N_{m_0-1}<n\leqq N_{m_0}$ *die Ungleichung*

$$\text{(4)}\qquad \left\{\sum_{k=N_{m-2}+1}^{N_m} (\alpha_{nk})^{q'}\right\}^{1/q'} \leqq KN_m^{-1/p'}\cdot A_n(N_m, N_{m-2})\ (n=1,2,\ldots;\ m=2,\ldots,m_0)$$

mit $p'=\dfrac{q'}{q'-1}$ *erfüllt sei, so gelten für alle* $p>0$ *die Ungleichungen*

$$\frac{1}{A_n(N_m, N_{m-2})}\sum_{k=N_{m-2}+1}^{N_m} \alpha_{nk}|s_k(x)-f(x)|^p \leqq K_1\big(E_{N_{m-2}}(f)\big)^p$$

$$(n=1,2,\ldots;\ m=2,\ldots,m_0)$$

und

$$\text{(5)}\qquad T_n(x) \leqq \left\{\frac{K_2}{A_n}\sum_{m=2}^{m_0} A_n(N_m, N_{m-2})\big(E_{N_{m-2}}(f)\big)^p\right\}^{1/p},$$

wobei K, K_1 *und* K_2 *positive, nur von* $\|\alpha_{nk}\|$ *und* p *abhängige Konstanten sind.*

Daraus ergibt sich der

SATZ II. *Sei* $f(x)$ *überall* r*-mal differenzierbar und* $f^{(r)}(x)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0<\alpha\leqq 1)$. *Ist* $\lambda(x)$ $(x\geqq 0,\ \lambda(0)=0)$ *eine differenzierbare Funktion, deren* $\lambda'(x)$ *Ableitung positiv und monoton ist, ferner für die*

$$\text{(6)}\qquad K_3\frac{\lambda'(2^m)}{2^{m(p(r+\alpha)-1)}} \leqq \frac{\lambda'(2^{m+1})}{2^{(m+1)(p(r+\alpha)-1)}} \leqq K_4\frac{\lambda'(2^m)}{2^{m(p(r+\alpha)-1)}}$$

mit $K_4\geqq K_3>1$ *und* $p>0$ *erfüllt ist, so gilt*

$$\text{(7)}\qquad T_n(\lambda, f; x) = \left\{\frac{1}{\lambda(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\big(\lambda(k+1)-\lambda(k)\big)|s_k(x)-f(x)|^p\right\}^{1/p} = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right)$$

gleichmäßig.

Im Spezialfall $\lambda(x)=x^\beta$ $(\beta>(r+\alpha)p)$ war diese Behauptung schon in [2] bewiesen.

2. BEWEIS DES SATZES I. In [2] (S. 260) war schon bewiesen, daß für $2^{m_n-1}<$ $<n\leqq 2^{m_n}$

$$\sigma_n^\gamma|f, p; x| \leqq O(1)\left\{\frac{1}{A_n^{(\gamma)}}\sum_{m=2}^{m_n}\left(\sum_{k=2^{m-2}+1}^{2^m} A_{n-k}^{(\gamma-1)}\right)\big(E_{2^{m-2}}(f)\big)^p\right\}^{1/p}$$

gilt. Unter den Bedingungen des Satzes I $\left((r+\alpha)p=1 \text{ und } E_n(f)=O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right)\right)$ ergibt sich daraus, daß

$$\sigma_n^\gamma|f,p;x| \leqq O(1)\left\{\frac{1}{A_n^{(\gamma)}}\sum_{m=2}^{m_n-2} 2^m n^{\gamma-1} 2^{-m}\right\}^{1/p} + O(1)\left\{\frac{1}{A_n^{(\gamma)}}\sum_{m=m_n-1}^{m_n} 2^{m_\gamma}\cdot 2^{-m}\right\}^{1/p} \leqq$$

$$\leqq O(1)\left\{\frac{\log n}{n}\right\}^{1/p} + O(1)\left\{\frac{1}{n}\right\}^{1/p} = O\left(\frac{(\log n)^{1/p}}{n^{r+\alpha}}\right).$$

Die Abschätzung (2) für die konjugierte Funktion ergibt sich ähnlicherweise, da auch $E_n(\tilde{f}) = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right)$ gilt.

Damit haben wir die Abschätzungen (1) und (2) bewiesen.

Wir behaupten, daß für eine ungerade Zahl r die Funktionen

$$f_1(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}}{2^{\nu\alpha}}\sum_{l=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu}\left(\frac{\cos(5\cdot 2^\nu - l)x}{(5\cdot 2^\nu - l)^r l} - \frac{\cos(5\cdot 2^\nu + l)x}{(5\cdot 2^\nu + l)^r l}\right)$$

und

$$f_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^{r+1+\alpha}},$$

bzw. für gerade r die Funktionen

$$f_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^{r+1+\alpha}}$$

und

$$f_2(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}}{2^{\nu\alpha}}\sum_{l=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu}\left(\frac{\sin(5\cdot 2^\nu - l)x}{(5\cdot 2^\nu - l)^r l} - \frac{\sin(5\cdot 2^\nu + l)x}{(5\cdot 2^\nu + l)^r l}\right)$$

erfüllen die Ungleichungen (3) und $f_i^{(r)}(x)$ $(i=1,2)$ gehören zur Klasse $\mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0<\alpha\leqq 1)$. Die Relationen $f_i^{(r)}(x)\in\mathrm{Lip}\,\alpha$ wurden schon bewiesen (s. in [1] den Beweis des Satzes I und in [2] den des Satzes IV).

Nehmen wir an, daß r ungerade ist. Sei μ die größte natürliche Zahl, für die $6\cdot 2^\mu \leqq n$ erfüllt ist. Dann gilt

(8) $$\sigma_n^\gamma|f_1,p;0| \geqq \left\{\frac{1}{A_n^{(\gamma)}}\sum_{\nu=1}^{\mu-1}\sum_{k=5\cdot 2^\nu+2^{\nu-1}}^{6\cdot 2^\nu-1} A_{n-k}^{(\gamma-1)}|s_k(0)-f(0)|^p\right\}^{1/p} \geqq$$

$$\geqq d_1(p,\gamma)\left\{\frac{1}{n^\gamma}\sum_{\nu=1}^{\mu-1}\sum_{k=11\cdot 2^{\nu-1}+1}^{6\cdot 2^\nu-1} n^{\gamma-1}|s_k(0)-f(0)|^p\right\}^{1/p}.$$

Ist $11\cdot 2^{\nu-1}<k<6\cdot 2^\nu$, so besteht nach der Definition von $f_1(x)$

(9) $$|s_k(0)-f(0)| = \left|\sum_{i=k+1}^{6\cdot 2^\nu}\frac{(-1)^{\nu+2}}{2^{\nu\alpha}}\frac{1}{i^r(i-5\cdot 2^\nu)} + \sum_{\mu=\nu+1}^{\infty}\frac{(-1)^{\mu+1}}{2^{\mu\alpha}}R_\mu\right|,$$

wobei

$$R_\mu = \sum_{l=2^{\mu-1}+1}^{2^\mu}\left(\frac{1}{(5\cdot 2^\mu - l)^r l} - \frac{1}{(5\cdot 2^\mu + l)^r l}\right)$$

ist. Durch einfache Rechnung ergibt sich:

$$R_{\mu+1} = \sum_{l=2^\mu+1}^{2^{\mu+1}} \frac{1}{l} \left(\frac{1}{(5\cdot 2^{\mu+1}-l)^r} - \frac{1}{(5\cdot 2^{\mu+1}+l)^r} \right) \leqq$$

$$\leqq 2 \sum_{k=2^{\mu-1}+1}^{2^\mu} \frac{1}{2k-2} \left(\frac{1}{2^r(5\cdot 2^\mu-k)^r} - \frac{1}{2^r(5\cdot 2^\mu+k)^r} \right) \leqq R_\mu$$

$(\mu \geqq 2)$, d.h. die Folge $\{R_\mu\}$ ist monoton abnehmend. Danach haben die erste und die zweite Summe unter (9) gleiches Vorzeichen, woraus die Abschätzung

$$|s_k(0)-f(0)|^p \geqq \left(\sum_{i=k+1}^{6\cdot 2^\nu} \frac{1}{2^{\nu\alpha}} \frac{1}{i^r(i-5\cdot 2^\nu)} \right)^p$$

offenbar folgt. Somit erhält man wegen $(r+\alpha)p=1$

$$\sum_{k=11\cdot 2^{\nu-1}+1}^{6\cdot 2^\nu-1} |s_k(0)-f(0)|^p \geqq \sum_{k=22\cdot 2^{\nu-2}+1}^{23\cdot 2^{\nu-2}} \left(\frac{1}{2^{\nu\alpha}} \sum_{i=k+1}^{6\cdot 2^\nu} \frac{1}{i^r(i-5\cdot 2^\nu)} \right)^p \geqq$$

$$\geqq d(p) 2^\nu \left(\frac{1}{2^{\nu\alpha}} 2^{\nu-2} \frac{1}{2^{\nu r} 2^\nu} \right)^p \geqq d_1(p) > 0.$$

Daraus und aus (8) ergibt sich für genügend große n

$$\sigma_n^\gamma |f_1, p; 0| \geqq d_1(p,\gamma) \left\{ \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{\mu-1} d_1(p) \right\}^{1/p} = d_2(p,\gamma) \frac{(\log n)^{1/p}}{n^{r+\alpha}}.$$

Die Behauptung (3) bezüglich $\tilde{f}_2(x)$ kann leichter bewiesen werden, nämlich gilt mit $2^{\mu+1} \leqq n < 2^{\mu+2}$

$$\sigma_n^\gamma |\tilde{f}_2, p; 0| \geqq \left\{ \frac{1}{A_n^{(\gamma)}} \sum_{k=1}^{2^\mu} A_{n-k}^{(\gamma-1)} \left(\sum_{\nu=k+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{r+1+\alpha}} \right)^p \right\}^{1/p} \geqq$$

$$\geqq d_3(p,\gamma) \left\{ \frac{1}{n^\gamma} \sum_{k=1}^{2^\mu} n^{\gamma-1} \frac{1}{k} \right\}^{1/p} \geqq d_4(p,\gamma) \frac{(\log n)^{1/p}}{n^{r+\alpha}},$$

also ist auch die zweite Ungleichung (3) erfüllt.

Die Behauptung für eine gerade Zahl r kann man genau so wie die vorangehenden beweisen.

3. Beweis des Satzes II. Sei $\alpha_{nk} = \lambda(k+1) - \lambda(k)$ $(k<n)$ und $N_m = 2^m$. Dann ist die Ungleichung (4) für jedes $q'>1$ erfüllt, nämlich gilt im Falle $2^{m_0-1} < n \leqq 2^{m_0}$ und $2 \leqq m \leqq m_0$

$$\left\{ \sum_{k=2^{m-2}+1}^{2^m} (\lambda(k+1)-\lambda(k))^{q'} \right\}^{\frac{1}{q'}} \leqq K_5 2^{m\frac{1}{q'}} \lambda'(2^m) =$$

$$= K_5 2^{m\left(1-\frac{1}{p'}\right)} \lambda'(2^m) = K_5 2^{-m\frac{1}{p'}} 2^m \lambda'(2^m) \leqq$$

$$\leqq K_6 2^{-m\frac{1}{p'}} \sum_{k=2^{m-2}+1}^{2^m} (\lambda(k+1)-\lambda(k)) \equiv K_6 2^{-m\frac{1}{p'}} A_n(2^m, 2^{m-2}).$$

Wir können also den zitierten Satz anwenden, und dann kann man die Beziehung (7) aus (5) leicht herleiten. Aus (5) und (6) folgt nach dem bekannten Satz von JACKSON

$$T_n(\lambda, f; x) \leqq \left\{ \frac{K_2}{\lambda(n+1)} \sum_{m=2}^{m_0} A_n(2^m, 2^{m-2})\left(E_{2^{m-2}}(f)\right)^p \right\}^{1/p} \leqq$$

$$\leqq K_7 \left\{ \frac{1}{\lambda(n+1)} \sum_{m=2}^{m_0} 2^m \lambda'(2^m) \cdot \frac{1}{2^{m(r+\alpha)p}} \right\}^{1/p} \leqq$$

$$\leqq K_8 \left\{ \frac{1}{\lambda(n+1)} 2^{m_0} \lambda'(2^{m_0}) \frac{1}{2^{m_0(r+\alpha)p}} \right\}^{1/p} = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}} \right).$$

Damit haben wir den Satz II bewiesen.

(Eingegangen am 9. Mai 1966.)

Schriftenverzeichnis

[1] G. ALEXITS—L. LEINDLER, Über die Approximation im starken Sinne, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **16** (1965), S. 27—32.

[2] L. LEINDLER, Über die Approximation im starken Sinne, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **16** (1965), S. 255—262.

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (3—4), 1967, pp. 279—281.

REMARK ON POWER-SUMS OF COMPLEX NUMBERS

By

J. ŁAWRYNOWICZ (Łódź, Poland)

(*Presented by* P. TURÁN)

1. The problem of finding the infimum M_n of

$$(1)\qquad \max_{\nu=1,2,\dots,n} |z_1^\nu+\dots+z_{n-1}^\nu+1| \qquad (z_1,\dots,z_{n-1} \text{ complex})$$

due to P. TURÁN [3] is still open. The best known general estimate $M_n>\frac{1}{3}$ ($n=2,3,\dots$) was obtained by F. V. ATKINSON [1]. The exact value of M_n is known only in the case $n=2$. It is easy to show that $M_2=(1/\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)\approx 0{,}8740320$. The extremal points $z_1^*=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\exp\frac{2}{3}\pi\varepsilon i$, where $\varepsilon=1$ or -1, are the only solutions.

2. In this note I solve the problem in the case $n=3$. In [2] I have proved that for any integer $n>1$ there exists an extremal system of points $z_1^*,\dots,z_{n-1}^*$ situated in the closed unit disc and the corresponding non-trivial system of real numbers $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ such that

$$(2)\qquad \lambda_1\bar\sigma_1+\lambda_2\bar\sigma_2 z_\mu^*+\dots+\lambda_n\bar\sigma_n z_\mu^{*n-1}=0 \qquad (\mu=1,\dots,n-1)$$

where

$$(3)\qquad M_n\sigma_\nu=z_1^{*\nu}+\dots+z_{n-1}^{*\nu}+1 \qquad (\nu=1,\dots,n).$$

In the same paper I have proved that the obtained system can be replaced in the case $n=3$ by the system of equations

$$(4)\qquad 2\lambda_2^{15}-48\lambda_2^{13}-48\lambda_2^{12}+272\lambda_2^{11}+597\lambda_2^{10}+475\lambda_2^9+184\lambda_2^8-242\lambda_2^7-$$
$$-296\lambda_2^6+49\lambda_2^5-35\lambda_2^4-62\lambda_2^3-22\lambda_2^2-16\lambda_2-8=0,$$

$$(5)\quad M_3=\{(1/6\lambda_2)[8\lambda_2^3+7\lambda_2+2+\gamma(-8\lambda_2^6+112\lambda_2^4+32\lambda_2^3-23\lambda_2^2+28\lambda_2+4)^{\frac{1}{2}}]\}^{\frac{1}{2}}$$
$$(M_3\leqq 1,\ \gamma=1 \ \text{ or } \ -1),$$

$$(6)\qquad \tau_1^2-(M_3^2-\lambda_2^2-1)\tau_1+\lambda_2^2=0,\quad M_3\sigma_3=-(\tau_1^3+3\tau_1-2)/(3\lambda_2+2),$$
$$M_3\sigma_2=-(\bar\tau_1/\lambda_2)M_3\sigma_3,$$

$$(7)\quad \tau_2=(1/\tau_1)[1-(1+\lambda_2)M_3\sigma_3]-1,\quad \lambda_1^2=|\tau_2|^2,\quad M_3\sigma_1=(1/\lambda_1)\bar\tau_2 M_3\sigma_3,$$

$$(8)\quad z_\nu^{*2}-(M_3\sigma_1-1)z_\nu^*+\frac{1}{2}(M_3\sigma_1-1)^2-\frac{1}{2}(M_3\sigma_2-1)=0 \quad (|z_\nu^*|\leqq 1,\ \nu=1,2).$$

3. In this note, using the result mentioned above, I show that*

$$M_3 \approx 0{,}8247830. \tag{9}$$

The only extremal systems of points z_1^*, z_2^* ($\mathrm{Re}\, z_1^* \leqq \mathrm{Re}\, z_2^*$) satisfying (4), (5), (6), (7), (8) are

$$z_1^* \approx -0{,}583346 + 0{,}091465\varepsilon i, \quad z_2^* \approx 0{,}089975 - 0{,}742306\varepsilon i \quad (\varepsilon = 1 \text{ or } -1). \tag{10}$$

4. In order to show (9) we solve (4) and obtain

$$\begin{aligned}
\lambda_{21,2} &\approx -0{,}46323644 \pm 0{,}18099268i, & \lambda_{211} &\approx -3{,}2763689,\\
\lambda_{23,4} &\approx -0{,}24697560 \pm 1{,}0594488i, & \lambda_{212} &\approx -2{,}0190629,\\
\lambda_{25,6} &\approx 0{,}028829335 \pm 0{,}46800456i, & \lambda_{213} &\approx -1{,}4409083,\\
\lambda_{27,8} &\approx 0{,}43435734 \pm 0{,}42238274i, & \lambda_{214} &\approx -1{,}4168133,\\
\lambda_{29,10} &\approx 3{,}9152484 \pm 0{,}15008257i, & \lambda_{215} &\approx 0{,}81670731.
\end{aligned}$$

If $\lambda_2 \leqq \lambda_{214}$ or $\lambda_2 \geqq \lambda_{215}$, then

$$\frac{1}{6}(8\lambda_2^2 + 7 + 2/\lambda_2) > \frac{1}{6}(8 \cdot 0{,}8^2 + 7 - 2/1{,}4) > 1.$$

Consequently, we must choose $\gamma = 1$ in (5) for $\lambda_2 = \lambda_{2\nu}$ ($\nu = 11, \dots, 14$) and $\gamma = -1$ in (5) for $\lambda_2 = \lambda_{215}$. But if $\lambda_{211} \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_{212}$, then we have

$$\begin{aligned}
M_3 > 6^{-\frac{1}{2}}\{8 \cdot 2{,}0^2 + 7 - 2/2{,}0 -\\
-(-8 \cdot 2{,}0^4 + 112 \cdot 3{,}3^2 - 32 \cdot 2{,}0 - 23 - 28/3{,}3 + 4/2{,}0^2)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}} > 1.
\end{aligned}$$

Analogously, if $\lambda_{213} \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_{214}$, then we have

$$\begin{aligned}
M_3 > 6^{-\frac{1}{2}}\{8 \cdot 1{,}4^2 + 7 - 2/1{,}4 -\\
-(-8 \cdot 1{,}4^4 + 112 \cdot 1{,}5^2 - 32 \cdot 1{,}4 - 23 - 28/1{,}5 + 4/1{,}4^2)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}} > 1.
\end{aligned}$$

Thus $\lambda_2 = \lambda_{215}$, and (5) with $\gamma = -1$ gives (9).

5. In order to show (10) we apply (6), (7), (8), and obtain

$$\begin{aligned}
&\tau_1 \approx -0{,}4933719 - 0{,}6508418\varepsilon i \qquad (\varepsilon = 1 \quad \text{or} \quad -1),\\
&M_3\sigma_3 \approx 0{,}6681257 + 0{,}4836065\varepsilon i, \qquad M_3\sigma_2 \approx 0{,}7890045 - 0{,}2402895\varepsilon i,\\
&\tau_2 \approx 0{,}0154086 + 0{,}4412519\varepsilon i, \qquad \lambda_1 \approx 0{,}4415209\varepsilon' \qquad (\varepsilon' = 1 \quad \text{or} \quad -1),\\
&M_3\sigma_1 \approx 0{,}5066287\varepsilon' - 0{,}6508413\varepsilon\varepsilon' i.
\end{aligned}$$

We may assume, without loss of generality, that $\mathrm{Re}\, z_1^* < \mathrm{Re}\, z_2^*$. Then (8) yields (10) in the case if $\varepsilon' = 1$, and

$$z_1^* \approx -0{,}987952 - 0{,}463336\varepsilon i, \qquad z_2^* \approx -0{,}518677 + 1{,}114177\varepsilon i$$

* Some calculations were made in the Imperial College of London Computer Centre. I would like to express here my thanks to Mr. J. L. MARAIS.

in the case if $\varepsilon' = -1$. It is easily seen that the last systems of extremal points do not satisfy the conditions $|z_1^*| \leqq 1$ and $|z_2^*| \leqq 1$.

6. From (2) and (3) it is possible theoretically to calculate M_n also for any $n > 3$, but it is much more complicated.

(Received 24 May 1966)

References

[1] Written communicatian to Prof. P. TURÁN. The best published value, $\frac{1}{6}$ is contained in his paper „On power-sums of complex numbers", *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **12** (1961), pp. 185–188.

[2] J. ŁAWRYNOWICZ, Calculation of a minimum maximorum of complex numbers, *Bull. Soc. Sci. et Lettr. de* Łódź, **XI**–(**2**) (1960), pp. 1–9.

[3] P. TURÁN, *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen* (Akad. Kiadó, Budapest 1953), pp. 22–37.

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (3—4), 1967, pp. 283—295.

RESTES DES FORMULES DE QUADRATURE DE GAUSS ET DE TURÁN

Par

D. V. IONESCU (Cluj, Roumanie)

(*Présenté par* P. TURÁN)

P. TURÁN [3] a donné une belle extension de la formule de quadrature de Gauss en démontrant qu'on peut déterminer les noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et les coefficients $C_1, C_2, \ldots, C_n$; $C_1', C_2', \ldots, C_n'$; $C_1'', C_2'', \ldots, C_n''$ de telle manière que la formule

$$\begin{aligned}(1)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = {} & C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \ldots + C_n f(x_n) + \\ & + C_1' f'(x_1) + C_2' f'(x_2) + \ldots + C_n' f'(x_n) + \\ & + C_1'' f''(x_1) + C_2'' f''(x_2) + \ldots + C_n'' f''(x_n)\end{aligned}$$

soit vérifiée par un polynome quelconque du $(4n-1)$-ième degré.

Cette question est liée à un problème de minimum.

D. JACKSON [2] a démontré qu'on peut déterminer un polynome

$$(2)\qquad \omega_n(x) = x^n + \lambda_1 x^{n-1} + \lambda_2 x^{n-2} + \ldots + \lambda_n$$

qui rend minimum l'intégrale

$$(3)\qquad \int_a^b \omega^4(x)\,dx.$$

Le polynome $\omega_n(x)$ est déterminé d'une manière unique par les équations

$$(4)\qquad \int_a^b x^h \omega_n^3(x)\,dx = 0$$

où $h = 0, 1, \ldots, n-1$ et l'on prouve que les zéros du polynome $\omega_n(x)$ sont réels, distincts et compris entre a et b.

Dans la formule (1) les noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les zéros du polynome $\omega_n(x)$ et les coefficients $C_1, C_2, \ldots, C_n$; $C_1', C_2', \ldots, C_n'$; $C_1'', C_2'', \ldots, C_n''$ se calculent sans difficulté.

Dans ce travail nous considérons la formule de quadrature de P. Turán avec le reste, c'est-à-dire la formule

$$\begin{aligned}(5)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = {} & C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \ldots + C_n f(x_n) + \\ & + C_1' f'(x_1) + C_2' f'(x_2) + \ldots + C_n' f'(x_n) + \\ & + C_1'' f''(x_1) + C_2'' f''(x_2) + \ldots + C_n'' f''(x_n) + R,\end{aligned}$$

et en supposant que $f \in C^{4n}[a, b]$, nous allons déterminer le reste R, en le mettant sous la forme d'une intégrale définie.

Nous montrerons que le reste R s'obtiendra, d'une manière très simple, comme la représentation de la différence divisée d'une fonction par une intégrale définie.

Le problème du reste de la formule (5) étant une extension du problème du reste de la formule de quadrature de Gauss, dans le second paragraphe de ce travail nous donnons une méthode pour établir le reste de la formule de Gauss comme la représentation de la différence divisée d'une fonction par une intégrale définie. Ensuite dans le troisième paragraphe nous donnons une extension de cette méthode pour obtenir le reste de la formule de Turán.

Mais ce travail débute par quelques considérations sur la représentation des différences divisées d'une fonction par une intégrale définie, qui seront utiles pour exprimer les restes des formules de quadrature de Gauss et de Turán.

§ 1. La représentation des différences divisées par des intégrales définies

La représentation des différences divisées par des intégrales définies, dans le cas des noeuds simples et aussi dans le cas des noeuds multiples, a été donnée pour la première fois, par L. TCHAKALOFF [4], et a été retrouvée par moi-même dans le travail [1]. Nous exposons dans ce paragraphe cette représentation dans les cas des différences divisées

$$[a, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n, b; f] \tag{6}$$

et

$$[a, x_1, x_1, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n, x_n, x_n, b; f] \tag{7}$$

nécessaires pour établir les restes des formules de quadrature de Gauss et de Turán. Nous supposons que les noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont choisis de manière que $a < x_1 < < x_2 < \ldots < x_n < b$.

1. Pour une fonction $f \in C^{2n+1}[a, b]$, on peut représenter la difference divisée (6), par une intégrale définie, de la manière suivante:

Associons aux intervalles $[a, x_1,], [x_1, x_2], \ldots, [x_n, b]$ les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ $\ldots, \varphi_{n+1}$ solutions des équations différentielles

$$\varphi_1^{(2n+1)} = 0, \quad \varphi_2^{(2n+1)} = 0, \ldots, \quad \varphi_{n+1}^{(2n+1)} = 0, \tag{8}$$

On a alors

$$\int_a^{x_1} \varphi_1^{(2n+1)} f\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \varphi_2^{(2n+1)} f\,dx = \ldots = \int_{x_n}^{b} \varphi_{n+1}^{(2n+1)} f\,dx = 0.$$

En appliquant à chaque intégrale la formule généralisée d'intégration par parties, on obtient

$$[\varphi_1^{(2n)} f - \varphi_1^{(2n-1)} f' + \ldots + (-1)^{2n} \varphi_1 f^{(2n)}]_a^{x_1} = \int_a^{x_1} \varphi_1 f^{(2n+1)}\,dx, \tag{9}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Introduisons des conditions aux limites

(10)
$$\begin{array}{llll}
\varphi_1(a) = 0, & \varphi_1'(a) = 0, & \dots, & \varphi_1^{(2n-2)}(a) = 0, \quad \varphi_1^{(2n-1)}(a) = 0, \\
\varphi_2(x_1) = \varphi_1(x_1), & \varphi_2'(x_1) = \varphi_1'(x_1), & \dots, & \varphi_2^{(2n-2)}(x_1) = \varphi_1^{(2n-2)}(x_1), \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\varphi_{n+1}(x_n) = \varphi_n(x_n), & \varphi_{n+1}'(x_n) = \varphi_n'(x_n), & \dots, & \varphi_{n+1}^{(2n-2)}(x_n) = \varphi_n^{(2n-2)}(x_n), \\
\varphi_{n+1}(b) = 0, & \varphi_{n+1}'(b) = 0, & \dots, & \varphi_{n+1}^{(2n-2)}(b) = 0, \quad \varphi_{n+1}^{(2n-1)}(b) = 0
\end{array}$$

et supposons que le système d'équations (8) ait une solution avec les conditions (10). Dans ce cas, en ajoutant membre à membre les équations (9), on obtient

(11)
$$\begin{aligned}
-\varphi_1^{(2n)}(a)f(a) + [\varphi_1^{(2n)}(x_1) - \varphi_2^{(2n)}(x_1)]f(x_1) + \dots + [\varphi_n^{(2n)}(x_n) - \varphi_{n+1}^{(2n)}(x_n)]f(x_n) + \\
+ \varphi_{n+1}^{(2n)}(b)f(b) + [\varphi_2^{(2n-1)}(x_1) - \varphi_1^{(2n-1)}(x_1)]f'(x_1) + \dots + \\
+ [\varphi_{n+1}^{(2n-1)}(x_n) - \varphi_n^{(2n-1)}(x_n)]f'(x_n) = \int_a^b \varphi f^{(2n+1)}\,dx
\end{aligned}$$

où la fonction φ coïncide avec les fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}$ sur les intervalles $[a, x_1], \dots, [x_n, b]$.

Nous allons démontrer que la formule (11) conduit à la représentation de la différence divisée (6) par une intégrale définie.

2. Il est évident que les fonctions

(12)
$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \lambda_0 \frac{(x-a)^{2n}}{(2n)!}, \\
\varphi_2 &= \lambda_0 \frac{(x-a)^{2n}}{(2n)!} + \lambda_1 \frac{(x-x_1)^{2n}}{(2n)!} + \mu_1 \frac{(x-x_1)^{2n-1}}{(2n-1)!}, \\
&\dots \\
\varphi_{n+1} &= \lambda_0 \frac{(x-a)^{2n}}{(2n)!} + \lambda_1 \frac{(x-x_1)^{2n}}{(2n)!} + \mu_1 \frac{(x-x_1)^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots + \\
&\quad + \lambda_n \frac{(x-x_n)^{2n}}{(2n)!} + \mu_n \frac{(x-x_n)^{2n-1}}{(2n-1!}
\end{aligned}$$

satisfont aux équations différentielles (8) et aux conditions aux limites relatives aux noeuds $x_1, x_2, \dots, x_n$ quelles que soient les constantes $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ et $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$.

En écrivant que les conditions aux limites au point b sont également satisfaites, nous avons le système de $2n$ équations

(13)
$$\begin{aligned}
&\lambda_0(b-a) + \lambda_1(b-x_1) + \dots + \lambda_n(b_n-x_n) + [\mu_1 + \dots + \mu_n] = 0, \\
&\lambda_0(b-a)^2 + \lambda_1(b-x_1)^2 + \dots + \lambda_n(b_n-x_n)^2 + 2[\mu_1(b-x_1) + \dots + \\
&\qquad\qquad + \mu_n(b-x_n)] = 0, \\
&\dots \\
&\lambda_0(b-a)^{2n} + \lambda_1(b-x_1)^{2n} + \dots + \lambda_n(b_n-x_n)^{2n} + 2n[\mu_1(b-x_1)^{2n-1} + \dots + \\
&\qquad\qquad + \mu_n(b-x_n)^{2n-1}] = 0
\end{aligned}$$

pour déterminer les $2n+1$ inconnues $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ et $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$.

En introduisant encore une inconnue auxiliaire λ_{n+1} par l'équation

$$\lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_n+\lambda_{n+1}=0,$$

on démontre facilement que le système (13) se réduit au système de $2n+1$ équations

$$(14)\qquad \begin{aligned}
&\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n + \lambda_{n+1} = 0,\\
&\lambda_0 a + \lambda_1 x_1 - \mu_1 + \ldots + \lambda_n x_n - \mu_n + \lambda_{n+1} b = 0,\\
&\lambda_0 a^2 + \lambda_1 x_1^2 - 2\mu_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n^2 - 2\mu_n x_n + \lambda_{n+1} b^2 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\lambda_0 a^{2n} + \lambda_1 x_1^{2n} - 2n\mu_1 x_1^{2n-1} + \ldots + \lambda_n x_n^{2n} - 2n\mu_n x_n^{2n-1} + \lambda_{n+1} b^{2n} = 0.
\end{aligned}$$

La matrice des coefficients de ce système en $\lambda_0, \lambda_1, -\mu_1, \ldots, \lambda_n, -\mu_n, \lambda_{n+1}$ est du rang $2n+1$. En désignant par $D_0, D_1, D_1', \ldots, D_n, D_n', D_{n+1}$ les déterminants des matrices qu'on obtient de la matrice du système (14) en supprimant la première colonne, la seconde colonne, ..., la dernière colonne, nous avons

$$(15)\qquad \frac{\lambda_0}{D_0}=\frac{\lambda_1}{-D_1}=\frac{-\mu_1}{D_1'}=\frac{\lambda_2}{-D_2}=\frac{-\mu_2}{D_2'}=\ldots=\frac{\lambda_n}{-D_n}=\frac{-\mu_n}{D_n'}=\frac{\lambda_{n+1}}{D_{n+1}}=H,$$

où H est encore une constante quelconque.

Les constantes $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ étant déterminées, les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+1}$ sont parfaitement déterminées et, par suite, la formule (11) est valable. Il nous reste à lui donner sa forme définitive.

Nous avons

$$(16)\qquad \begin{aligned}
&\varphi_1^{(2n)} = \lambda_0, && \varphi_1^{(2n-1)} = \lambda_0(x-a),\\
&\varphi_2^{(2n)} = \lambda_0+\lambda_1, && \varphi_2^{(2n-1)} = \lambda_0(x-a)+\lambda_1(x-x_1)+\mu_1,\\
&\ldots\ldots\ldots && \ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_{n+1}^{(2n)} = \lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_n, && \varphi_{n+1}^{(2n-1)} = \lambda_0(x-a)+\lambda_1(x-x_1)+\mu_1+\\
& && \qquad +\ldots+\lambda_n(x-x_n)+\mu_n
\end{aligned}$$

et la formule (11) devient

$$(17)\qquad -\lambda_0 f(a)-\lambda_1 f(x_1)-\ldots-\lambda_n f(x_n)-\lambda_{n+1} f(b)+\mu_1 f'(x_1)+\ldots+\mu_n f'(x_n)= \\ =\int_a^b \varphi f^{(2n+1)}\,dx.$$

En remplaçant les constantes $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}, \mu_1, \ldots, \mu_n$ de la formule (17) par leur expressions déduites des formules (15), on voit que la formule (17) se réduit à

$$(18)\qquad H\cdot\begin{vmatrix}
1 & 1 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 1\\
a & x_1 & 1 & \ldots & x_n & 1 & b\\
a^2 & x_1^2 & 2x_1 & \ldots & x_n^2 & 2x_n & b^2\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots\\
a^{2n} & x_1^{2n} & 2nx_1^{2n-1} & \ldots & x_n^{2n} & 2nx_n^{2n-1} & b^{2n}\\
f(a) & f(x_1) & f'(x_1) & \ldots & f(x_n) & f'(x_n) & f(b)
\end{vmatrix}.$$

On sait que la différence divisée (6) est définie par la formule

$$[a, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n, b; f] = V^{-1} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \ldots & a^{2n} & f(a) \\ 1 & x_1 & x_1^2 \ldots & x_1^{2n} & f(x_1) \\ 0 & 1 & 2x_1 \ldots & 2nx_1^{2n-1} & f'(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & b & b^2 \ldots & b^{2n} & f(b) \end{vmatrix}$$

où

$$V = V(a, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n, b) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \ldots & a^{2n} & a^{2n+1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 \ldots & x_1^{2n} & x_1^{2n+1} \\ 0 & 1 & 2x_1 \ldots & 2nx_1^{2n-1} & (2n+1)x_1^{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & b & b^2 \ldots & b^{2n} & b^{2n+1} \end{vmatrix}.$$

Alors, en choisissant

(19) $$H = 1/V(a, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n, b),$$

le premier membre de la formule (18) se réduit à la différence divisée (6) et, par suite, nous avons le

THÉORÈME 1. *Lorsque* $f \in C^{2n+1}[a, b]$, *on a la représentation*

(20) $$[a, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n, b; f] = \int_a^b \varphi f^{(2n+1)}\, dx,$$

où la fonction φ *est déterminée par les équations différentielles* (8), *par les conditions aux limites* (10) *et par la formule* (19).

3. Nous avons obtenu plusieurs théorèmes concernant la formule (17) et la fonction φ.

THÉORÈME 2. *On a*

(21) $$\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_r \neq 0$$

pour $r = 0, 1, \ldots, n$.

Pour $r=0$ le théorème est évident, parce que, d'après les formules (15) et (19), nous avons

$$\lambda_0 = HD_0 = \frac{V(x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n, b)}{V(a, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n, b)} \neq 0.$$

Le théorème est encore évident pour $r=n$ parce que, d'après la première équation (14) et les formules (15), (19), nous avons

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = -\lambda_{n+1} = -HD_{n+1} = -\frac{V(a, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n)}{V(a, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n, b)} \neq 0.$$

Il nous reste à démontrer le théorème pour $r=1, 2, \ldots, n-1$. Dans ce but introduisons le polynome d'interpolation $h(x; r)=h(x)$ déterminé par les conditions

$$h(a)=1,\ h(x_1)=1,\ \ldots,\ h(x_r)=1,\ h(x_{r+1})=0,\ \ldots,\ h(x_n)=0,$$

$$h'(x_1)=0,\ \ldots,\ h'(x_r)=0,\ h'(x_{r+1})=0,\ \ldots,\ h'(x_n)=0.$$

On voit facilement par le théorème de Rolle que la dérivée $h'(x)$ a $n-1$ zéros réels et distincts dans les intervalles $(a, x_1), \ldots, (x_{r-1}, x_r), (x_{r+1}, x_{r+2}), \ldots, (x_{n-1}, x_n)$ et qu'elle a aussi les zéros $x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n$. Donc $h'(x)$ a $2n-1$ zéros réels et distincts. En tenant compte du fait que $h(a)=1$, $h(x_n)=0$, on conclue que *le polynome $h(x)$ est effectivement du degré $2n$*. Il résulte de ce fait que $h(b)\neq 0$. En remplaçant dans la formule (17) la fonction f par le polynome h, nous déduisons que

$$\lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_r=-\lambda_{n+1}h(b)\neq 0$$

et, par suite, le théorème 2 est démontré.

THÉORÈME 3. *La dérivée $\varphi^{(2n-2)}$ a $2(n-1)$ zéros au plus sur l'intervalle (a, b).*

En effet, d'après les formules (12) et les conditions aux limites (10) au point b, les dérivées $\varphi_1^{(2n-2)}$, $\varphi_{n+1}^{(2n-2)}$ n'ont pas de zéros sur les intervalles $(a, x_1]$, $[x_n, b)$. D'autre part les dérivées $\varphi_2^{(2n-2)}, \ldots, \varphi_n^{(2n-2)}$ sont des polynomes du second degré dont les coefficients de x^2 sont $\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1), \ldots, \frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_n)$ et, d'après le théorème 2, ils sont différents de zéro. Il en résulte que $\varphi^{(2n-2)}$ a 2 zéros au plus sur l'intervalle $(x_1, x_2], \ldots, \varphi_n^{(2n-2)}$ a 2 zéros au plus sur l'intervalle (x_{n-1}, x_n) et, par suite, la dérivée $\varphi^{(2n-2)}$ a $2(n-1)$ zéros au plus sur l'intervalle (a, b).

THÉORÈME 4. *La fonction φ ne s'annule pas sur l'intervalle (a, b).*

Pour démontrer ce théorème, supposons le contraire, ce qui veut dire que φ s'annule en un point ζ au moins de l'intervalle (a, b). La fonction φ ainsi que ses dérivées $\varphi', \ldots, \varphi^{(2n-2)}$ étant continues sur l'intervalle $[a, b]$ (cf. (10)), nous pouvons appliquer successivement le théorème de Rolle. Nous en tirons alors que φ' a deux zéros sur l'intervalle $(a, b), \ldots$ et que $\varphi^{(2n-2)}$ a $2n-1$ zéros sur l'intervalle (a, b). Mais cela est impossible parce qu'on est en contradiction avec le théorème 3. Donc la fonction φ ne s'annule pas sur l'intervalle (a, b).

THÉORÈME 5. *On a*

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx=\frac{1}{(2n+1)!} \tag{22}$$

et, par suite, la fonction φ est positive sur l'intervalle (a, b).

En effet en remplacant dans la formule (20) la fonction f par x^{2n+1}, le premier membre de la formule est égal à 1, tandis que le second membre est égal à $(2n+1)!\int_a^b \varphi\,dx$. Nous obtenons ainsi la formule (22), et en tenant compte du théorème 4, nous déduisons que la fonction φ est positive sur l'intervalle (a, b).

4. Une démonstration analogue conduit à la représentation

$$[a, x_1, x_1, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n, x_n, x_n, b; f] = \int_a^b \varphi f^{(4n+1)}\, dx \tag{23}$$

lorsque $f \in C^{4n+1}[a, b]$.

On démontre aussi que la fonction φ est positive sur l'intervalle (a, b) et qu'on a

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = \frac{1}{(4n+1)!}. \tag{24}$$

§ 2. Le reste de la formule de quadrature de Gauss

5. On sait qu'on peut déterminer les noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et les coefficients $C_1, C_2, \ldots, C_n$ de telle manière que la formule

$$\int_a^b f\, dx = C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \ldots + C_n f(x_n) \tag{25}$$

soit vérifiée par un polynome quelconque du $(2n-1)$-ème degré.

Les noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les zéros du polynome de Legendre, associé à l'intervalle $[a, b]$ et l'on a les identités

$$\begin{aligned}
C_1 + C_2 + \ldots + C_n &= \int_a^b dx, \\
C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots + C_n x_n &= \int_a^b x\, dx, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
C_1 x_1^{2n-1} + C_2 x_2^{2n-1} + \ldots + C_n x_n^{2n-1} &= \int_a^b x^{2n-1}\, dx.
\end{aligned} \tag{26}$$

6. Considérons la formule (20) du § 1 et remplaçons f par la fonction $g \in C^{2n+1}[a, b]$

$$[a, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n, b; g] = \int_a^b \varphi g^{(2n+1)}\, dx \tag{27}$$

et écrivons-la sous la forme

$$A_0 g(a) + A_1 g(x_1) + \ldots + A_n g(x_n) + A_{n+1} g(b) + A_1' g'(x_1) + \ldots + A' g'(x_n) = \int_a^b \varphi g^{(2n+1)}\, dx, \tag{28}$$

où les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont donnés notamment par les formules, avec $V = V(a, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n, b)$,

$$(29)\qquad A_1 = V^{-1}\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \ldots & a^{2n} \\ 0 & 1 & 2x_1 & \ldots & 2nx_1^{2n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{2n} \\ 0 & 1 & 2x_2 & \ldots & 2nx_2^{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & b & b^2 & \ldots & b^{2n} \end{vmatrix}.$$

. . . .

Nous avons le

THÉORÈME I. *Si dans la formule* (28) *les noeuds* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *sont les zéros du polynome de Legendre associé à l'intervalle* $[a, b]$ *les coefficients* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *sont nuls.*

Il suffit de faire démonstration pour le coefficient A_1.

Nous pouvons écrile le coefficient A_1, donné par la formule (29), sous la forme

$$A_1 = K_1\begin{vmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ -a & 1 & \ldots & 1 & x_2 & \ldots & x_n & b \\ -a^2 & 2x_1 & \ldots & 2x_n & x_2^2 & \ldots & x_n^2 & b^2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ -a^{2n} & 2nx_1^{2n-1} & \ldots & 2nx_n^{2n-1} & x_2^{2n} & \ldots & x_n^{2n} & b^{2n} \end{vmatrix}$$

où K_1 est un certain coefficient.

On peut encore écrire A_1 sous la forme

$$A_1 = (2n)!\, K_1\begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \int_a^b dx & 1 & \ldots & 1 & x_2 & \ldots & x_n & b \\ \int_a^b x\,dx & x_1 & \ldots & x_n & \frac{x_2^2}{2} & \ldots & \frac{x_n^2}{2} & \frac{b^2}{2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \int_a^b x^{2n-1}dx & x_1^{2n-1} & \ldots & x_n^{2n-1} & \frac{x_2^{2n}}{2n} & \ldots & \frac{x_n^{2n}}{2n} & \frac{b^{2n}}{2n} \end{vmatrix}$$

et il résulte immédiatement, d'après les identités (26), que $A_1 = 0$. Le théorème I est ainsi démontré.

7. Cela étant, remplaçons dans la formule (28) les noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par les zéros du polynome du Legendre associé à l'intervalle $[a, b]$ et calculons tous les coefficients A_i, A'_i. Nous avons, d'après le théorème 1,

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_n = 0.$$

En écrivant que la formule (28) est vérifiée par $g=1$, nous avons

$$A_0 + A_{n+1} = 0 \qquad (A_{n+1} \neq 0) \tag{30}$$

et, par suite, nous pouvons écrire la formule (28) sous la forme

$$A_{n+1}[g(b)-g(a)] + A'_1 g'(x_1) + A'_2 g'(x_2) + \ldots + A'_n g'(x_n) = \int_a^b \varphi(x) g^{(2n+1)}(x)\, dx \tag{31}$$

où les coefficients A_{n+1}, A'_1, A'_2, ..., A'_n et la fonction $\varphi(x)$ correspond à la formule (27) relative aux zéros $x_1, x_2, \ldots, x_n$ du polynome de Legendre associé à l'intervalle $[a, b]$.

En posant

$$g'(x) = f(x) \tag{32}$$

nous déduisons la formule de quadrature de Gauss

$$\int_a^b f(x)\, dx = B_1 f(x_1) + B_2 f(x_2) + \ldots + B_n f(x_n) + R, \tag{33}$$

avec les coefficients

$$B_1 = -\frac{A'_1}{A_{n+1}}, \quad B_2 = -\frac{A'_2}{A_{n+1}}, \ldots, \quad B_n = -\frac{A'_n}{A_{n+1}} \tag{34}$$

et avec le reste

$$R = \frac{1}{A_{n+1}} \int_a^b \varphi(x) f^{(2n)}(x)\, dx. \tag{35}$$

Ainsi nous avons obtenu le

THÉORÈME II. *La formule de quadrature de Gauss* (33) *se déduit de la formule* (27) *ou* (28), *en posant* $g'(x)=f(x)$ *et en remplacant les noeuds* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *par les zéros du polynome de Legendre associé à l'intervalle* $[a, b]$. *Son reste est donné par la formule* (35).

Il est remarquable qu'en introduisant le polynome

$$\omega_n(x) = (x-x_1)(x-x_2) \ldots (x-x_n) \tag{36}$$

et en remplacant dans la formule (33) la fonction f par $\omega_n^2(x)$ nous avons, d'après la formule (22),

$$\frac{1}{A_{n+1}} = (2n+1)\int_a^b \omega_n^2(x)\,dx$$

et l'intégrale du second membre a une interprétation intéressante.

Si l'on envisage l'intégrale définie

$$\int_a^b \pi_n^2(x)\,dx$$

où $\pi_n(x) = x^n + \lambda_1 x^{n-1} + \ldots + \lambda_n$ est un polynome qui dépend des paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, son minimum est atteint lorsque $\pi_n(x)$ est le polynome de Legendre associé à l'intervalle $[a, b]$.

§ 3. Le reste de la formule de quadrature de Turán

8. Turán a démontré qu'on peut déterminer les noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et les coefficients $C_1, \ldots, C_n; C_1', \ldots, C_n'; C_1'', \ldots, C_n''$ de telle manière que la formule

$$\begin{aligned}(37)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = {} & C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \ldots + C_n f(x_n) + \\ & + C_1' f'(x_1) + C_2' f'(x_2) + \ldots + C_n' f'(x_n) + \\ & + C_1'' f''(x_1) + C_2'' f''(x_2) + \ldots + C_n'' f''(x_n)\end{aligned}$$

soit vérifiée par un polynome quelconque du $(4n-1)$-ème degré.

Les noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les zéros du polynome $\omega_n(x)$ qui rend minimum l'intégrale définie (3), et l'on a les identités

$$(38)\qquad \int_a^b dx = C_1 + C_2 + \ldots + C_n,$$

$$\int_a^b x\,dx = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots + C_n x_n + C_1'(x_1)' + C_2'(x_2)' + \ldots + C_n'(x_n)',$$

$$\begin{aligned}\int_a^b x^2\,dx = {} & C_1 x_1^2 + C_2 x_2^2 + \ldots + C_n x_n^2 + C_1'(x_1^2)' + C_2'(x_2^2)' + \ldots + C_n'(x_n^2)' + \\ & + C_1''(x_1^2)'' + C_2''(x_2^2)'' + \ldots + C_n''(x_n^2)'',\end{aligned}$$

. . . .

$$\begin{aligned}\int_a^b x^{4n-1}\,dx = {} & C_1 x_1^{4n-1} + C_2 x_2^{4n-1} + \ldots + C_n x_n^{4n-1} + C_1'(x_1^{4n-1})' + C_2'(x_2^{4n-1})' + \\ & + \ldots + C_n'(x_n^{4n-1})' + C_1''(x_1^{4n-1})'' + C_2''(x_2^{4n-1})'' + \ldots + C_n''(x_n^{4n-1})''.\end{aligned}$$

9. Considérons la formule (23) du § 1, pour la fonction $g \in C^{4n+1}[a, b]$,

$$[a, x_1, x_1, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n, x_n, x_n, b; g] = \int_a^b \varphi g^{(4n+1)}\,dx \tag{39}$$

et écrivons-la sous la forme

$$\begin{aligned} &A_0 g(a) + A_1 g(x_1) + A_2 g(x_2) + \ldots + A_n g(x_n) + A_{n+1} + g(b) + \\ &\quad + A_1' g'(x_1) + A_2' g'(x_2) + \ldots + A_n' g'(x_n) + \\ &\quad + A_1'' g''(x_1) + A_2'' g''(x_2) + \ldots + A_n'' g''(x_n) + \\ &\quad + A_1''' g'''(x_1) + A_2''' g'''(x_2) + \ldots + A_n''' g'''(x_n) = \int_a^b \varphi g^{(4n+1)}\,dx \end{aligned} \tag{40}$$

où les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_{n+1}$; $A_1', \ldots, A_n'$; $A_1'', \ldots, A_n''$; $A_1''', \ldots, A_n'''$ sont tous bien déterminés. En particulier les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont donnés par les formules

$$A_1 = V^{-1}(a, x_1, x_1, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n, x_n, x_n, b) \cdot \tag{41}$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \ldots & a^{4n} \\ 0 & (x_1)' & (x_1^2)' & (x_1^3)' & \ldots & (x_1^{4n})' \\ 0 & 0 & (x_1^2)'' & (x_1^3)'' & \ldots & (x_1^{4n})'' \\ 0 & 0 & 0 & (x_1^3)''' & \ldots & (x_1^{4n})''' \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \ldots & x_2^{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & b^2 & b^3 & \ldots & b^{4n} \end{vmatrix} \cdot$$

THÉORÈME III. *Si dans la formule* (40) *on remplace les noeuds* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *par les zéros du polynome* $\omega_n(x)$ *qui rend minimum l'intégrale* (3) *et qui est déterminée d'une manière unique par les équations* (4), *alors les coefficients* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *sont nuls.*

Il suffit de faire la démonstration pour le coefficient A_1. D'après la formule (41), nous pouvons écrire le coefficient A_1 sous la forme

$$A_1 = K \begin{vmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ -a & (x_1)' & \ldots & (x_n)' & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & x_2 & \ldots & x_n & b \\ -a^2 & (x_1^2)' & \ldots & (x_n^2)' & (x_1^2)'' & \ldots & (x_n^2)'' & 0 & \ldots & 0 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 & b^2 \\ -a^3 & (x_1^3)' & \ldots & (x_n^3)' & (x_1^3)'' & \ldots & (x_n^3)'' & (x_1^3)''' & \ldots & (x_n^3)''' & x_2^3 & \ldots & x_n^3 & b^3 \\ -a^4 & (x_1^4)' & \ldots & (x_n^4)' & (x_1^4)'' & \ldots & (x_n^4)'' & (x_1^4)''' & \ldots & (x_n^4)''' & x_2^4 & \ldots & x_n^4 & b^4 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a^{4n} & (x_1^{4n})' & \ldots & (x_n^{4n})' & (x_1^{4n})'' & \ldots & (x_n^{4n})'' & (x_1^{4n})''' & \ldots & (x_n^{4n})''' & x_2^{4n} & \ldots & x_n^{4n} & b^{4n} \end{vmatrix}$$

où K est une certaine constante. On peut encore écrire ce coefficient sous la forme

$$A_1 = (4n)!\,K \cdot \begin{vmatrix}
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\
\int_a^b dx & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & x_2 & \dots & x_n & b \\
\int_a^b x\,dx & x_1 & \dots & x_n & (x_1)' & \dots & (x_n)' & 0 & \dots & 0 & \frac{x_2^2}{2} & \dots & \frac{x_n^2}{2} & \frac{b^2}{2} \\
\int_a^b x^2\,dx & x_1^2 & \dots & x_n^2 & (x_1^2)' & \dots & (x_n^2)' & (x_1^2)'' & \dots & (x_n^2)'' & \frac{x_2^3}{3} & \dots & \frac{x_n^3}{3} & \frac{b^3}{3} \\
\int_a^b x^3\,dx & x_1^3 & \dots & x_n^3 & (x_1^3)' & \dots & (x_n^3)' & (x_1^3)'' & \dots & (x_n^3)'' & \frac{x_2^4}{4} & \dots & \frac{x_n^4}{4} & \frac{b^4}{4} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\int_a^b x^{4n-1}\,dx & x_1^{4n-1} & \dots & x_n^{4n-1} & (x_1^{4n-1})' & \dots & (x_n^{4n-1})' & (x_1^{4n-1})'' & \dots & (x_n^{4n-1})'' & \frac{x_2^{4n}}{4n} & \dots & \frac{x_n^{4n}}{4n} & \frac{b^{4n}}{4n}
\end{vmatrix}$$

et l'on voit immédiatement, d'après les identités (38), que $A_1 = 0$.

Le théorème III est démontré.

10. Cela étant, remplaçons dans la formule (40) les noeuds $x_1, x_2, \dots, x_n$ par les zéros du polynome $\omega_n(x)$ qui rend minimum l'intégrale (3), et calculons tous les coefficients A_i, A_i', A_i'', A_i'''. Nous avons, d'après le théorème III,

$$A_1 = A_2 = \dots = A_n = 0$$

et la formule (40) étant vérifiée par $g(x) = 1$, nous avons de plus

$$A_0 + A_{n+1} = 0 \qquad (A_{n+1} \neq 0).$$

La formule (40), dans laquelle nous posons $g'(x) = f(x)$, devient la formule de Turán, avec son reste

$$\begin{aligned}
(42) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = {} & C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \dots + C_n f(x_n) + \\
& + C_1' f'(x_1) + C_2' f'(x_2) + \dots + C_n' f'(x_n) + \\
& + C_1'' f''(x_1) + C_2'' f''(x_2) + \dots + C_n'' f''(x_n) + R
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
(43) \qquad & C_1 = -\frac{A_1'}{A_{n+1}}, \quad C_2 = -\frac{A_2'}{A_{n+1}}, \quad \dots, \quad C_n = -\frac{A_n'}{A_{n+1}}, \\
& C_1' = -\frac{A_1''}{A_{n+1}}, \quad C_2' = -\frac{A_2''}{A_{n+1}}, \quad \dots, \quad C_n = -\frac{A_n''}{A_{n+1}}, \\
& C_1'' = -\frac{A_1'''}{A_{n+1}}, \quad C_2'' = -\frac{A_2'''}{A_{n+1}}, \quad \dots, \quad C_n'' = -\frac{A_n'''}{A_{n+1}}
\end{aligned}$$

et

$$R = \frac{1}{A_{n+1}} \int_a^b \varphi(x) f^{(4n)}(x)\, dx. \tag{44}$$

Ainsi nous avons le

THÉORÈME IV. *La formule de quadrature de Turán* (42) *se déduit de la formule* (39) *ou* (40) *en posant* $g'(x)=f(x)$ *et en remplaçant les noeuds* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *par les zéros du polynome* $\omega_n(x)$ *qui rend minimum l'intégrale définie* (3). *Son reste est donné par la formule* (44).

Il est intéressant de donner la signification du coefficient $1/A_{n+1}$ de l'intégrale intervenant dans la formule (44) donnant le reste de la formule de Turán. On peut écrire

$$\omega_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

et en posant dans la formule (42) $f=\omega_n^4(x)$, nous aurons, d'après la formule (24),

$$\frac{1}{A_{n+1}} = (4n+1) \int_a^b \omega_n^4(x)\, dx. \tag{45}$$

Ainsi le facteur $1/A_{n+1}$ diffère par le facteur $4n+1$ du minimum de l'intégrale (3) donné par le polynome dont les coefficients sont déterminés d'une manière unique par les équations (4).

11. Il va de soi que les considérations précédentes s'appliquent pour déterminer les restes de toutes les formules de Turán:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{2K} C_i^{(h)} f^{(h)}(x_i) + R,$$

où $K=2, 3, \ldots$.

Nous étudierons dans un autre travail, certaines extensions de la formule de Turán.

Les résultats de ce travail ont été communiqués au „Colloque sur la théorie des fonctions convexes avec des applications au calcul numérique", organisé par l'Institut de Calcul de l'Acad. de la R. S. România, Cluj 1—5 Juillet 1965.

(Reçu le 21 juin 1966.)

Bibliographie

[1] D. V. IONESCU, *Quadraturi numerice*, (Bucuresti Editura Technica, 1957).

[2] D. JACKSON, On functions of closest approximation, *Transaction of the American Math. Society*, **22** (1921), p. 117—128.

[3] P. TURÁN, On the theory of the mechanical quadrature, *Acta Sci. Math. Szeged*, **XII** (1950), p. 30—37.

[4] L. TCHAKALOFF, Über eine Darstellung des Newtonschen Differenzenquotienten und ihre Anwendung, Congrès International des Mathématiciens, Oslo (1936).

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (3—4), 1967, pp. 297—304.

THE SUM OF THE SQUARES OF THE COEFFICIENTS OF THE CYCLOTOMIC POLYNOMIAL

By

L. CARLITZ (Durham, USA)

(*Presented by* P. TURÁN)

1. Let

$$F_n(x) = \prod_{rs=n} (x^r - 1)^{\mu(s)},$$

where $\mu(s)$ is the Möbius function, denote the cyclotomic polynomial. When $n=pq$, where p, q are distinct primes, BANG [1] and MIGOTTI [3] proved that the coefficients of $F_{pq}(x)$ are ± 1 or 0. BANG proved also that for $n=pqr$, a product of three distinct primes, $p<q<r$, the coefficients of $F_{pqr}(x)$ are numerically $\leqq p-1$. SCHUR proved the existence of cyclotomic polynomials with arbitrarily large coefficients. EMMA LEHMER [4] proved the stronger result that as n runs through all products of three distinct odd primes, the cyclotomic polynomials $F_n(x)$ contain arbitrarily large coefficients. SCHUR's proof is included in this paper.

Let $\theta_0(pq)$ denote the number of terms in $F_{pq}(x)$ with positive coefficients, $\theta_1(pq)$ the number of terms with negative coefficients and

$$\theta(pq) = \theta_0(pq) + \theta_1(pq)$$

the total number of nonzero terms. Since $F_{pq}(1)=1$ it follows that $\theta_0(pq) = 1 + \theta_1(pq)$, so that

$$\theta(pq) = 2\theta_0(pq) - 1. \tag{1. 1}$$

The writer has proved [2] that if $q>p$ and u is defined by means of

$$qu \equiv -1 \pmod p \qquad (0<u<p),$$

then

$$\theta_0(pq) = \frac{(p-u)(uq+1)}{p}. \tag{1. 2}$$

It follows from (1. 2) that, if p and u are fixed, then

$$\lim_{\substack{q=\infty \\ qu\equiv -1 \pmod p \\ q \text{ prime}}} \frac{1}{q}\, \theta_0(pq) = \frac{(p-u)u}{p}. \tag{1. 3}$$

Therefore, by (1. 1), we have

$$\lim_{\substack{q=\infty \\ qu\equiv -1 \pmod p \\ q \text{ prime}}} \frac{1}{q}\, \theta(pq) = \frac{2(p-u)u}{p}. \tag{1. 4}$$

In the general case we put

$$(1.5) \qquad F_n(x) = \sum_{s=0}^{\Phi(n)} c_{ns} x^s$$

and define

$$(1.6) \qquad S(n) = \sum_{s=0}^{\Phi(n)} c_{ns}^2.$$

If

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}, \quad n_1 = p_1 p_2 \dots p_k,$$

where the p_j are distinct primes, then

$$F_n(x) = F_{n_1}(x^{n/n_1}).$$

Thus there is no loss in generality in assuming that n is squarefree. We shall show that if n and t are fixed, then

$$(1.7) \qquad \lim_{\substack{q=\infty \\ q \equiv t \pmod{n} \\ q \text{ prime}}} \frac{1}{q} S(nq) = A(n, t),$$

where $A(n, t)$ is a positive constant depending on n and t. Since $S(pq) = \theta(pq)$, it is evident that (1. 6) is in agreement with (1. 4).

2. The proof of (1. 7) depends on the following representation of $S(n)$:

$$(2.1) \qquad nS(n) = \sum_{\alpha^n=1} \alpha^{-\Phi(n)} (F_n(\alpha))^2,$$

where the summation on the right is over all nth roots of 1.

To prove (2. 1) we observe that $F_n(x)$ is a reciprocal polynomial:

$$(2.2) \qquad F_n(x) = x^{\Phi(n)} F_n(x^{-1}).$$

Thus by (1. 5) and (2. 2)

$$\sum_{\alpha^n=1} \alpha^{-\Phi(n)} (F_n(\alpha))^2 = \sum_{\alpha^n=1} F_n(\alpha) F_n(\alpha^{-1}) =$$

$$= \sum_{\alpha^n=1} \sum_{r=0}^{\Phi(n)} c_{nr} \alpha^r \sum_{s=0}^{\Phi(n)} c_{ns} \alpha^{-s} = \sum_{r,s=0}^{\Phi(n)} c_{nr} c_{ns} \sum_{\alpha^n=1} \alpha^{r-s}.$$

Since, for $0 \leq r \leq \Phi(n)$, $0 \leq s \leq \Phi(n)$,

$$\sum_{\alpha^n=1} \alpha^{r-s} = \begin{cases} n & (r = s) \\ 0 & (r \neq s), \end{cases}$$

we immediately get (2. 1).

It may be of interest to remark that, analogous to (2. 1), we have

$$(2.3) \qquad S(n) = \int_0^1 \prod_{ab=n} (\sin \pi a x)^{2\mu(b)} \, dx.$$

Indeed we have

$$\prod_{ab=n} (\sin \pi a x)^{\mu(b)} = \prod_{ab=n} (e^{\pi a x i} - e^{-\pi a x i})^{\mu(b)} = e^{-\pi x i \Phi(n)} F_n(e^{2\pi x i}),$$

so that

$$\int_0^1 \prod_{ab=n} (\sin \pi a x)^{2\mu(b)}\, dx = \int_0^1 e^{-2\pi x i \Phi(n)} F_n^2(e^{2\pi a x i})\, dx =$$

$$= \int_0^1 F_n(e^{2\pi x i}) F_n(e^{-2\pi x i})\, dx = \int_0^1 \sum_{r,s=0}^{\Phi(n)} c_{nr} c_{ns} e^{2\pi x i(r-s)}\, dx = \sum_{r=0}^{\Phi(n)} c_{nr}^2 = S(n).$$

Thus, for example, it follows from (1. 1) and (1. 2) that

$$\int_0^1 \left(\frac{\sin pqx \sin x}{\sin px \sin qx}\right)^2 dx = \frac{2(p-u)(uq+1)}{p} - 1.$$

3. To illustrate the use of (2. 1) we take $n=pq$. Then

$$pqS(pq) = \sum_{\alpha^{pq}=1} \alpha^{-\Phi(pq)} F_{pq}^2(\alpha). \tag{3. 1}$$

Let ξ denote any primitive pth root of 1 and η any primitive qth root of 1. Then (3. 1) becomes

$$pqS(pq) = \sum_{\xi} \xi^{-\Phi(pq)} F_{pq}^2(\xi) + \sum_{\eta} \eta^{-\Phi(pq)} F_{pq}^2(\eta) + F_{pq}(1).$$

Since

$$\left.\frac{x^{pq}-1}{x^p-1}\right|_{x=\xi} = q, \quad \left.\frac{x^{pq}-1}{x^q-1}\right|_{x=\eta} = p,$$

we get

$$pqS(pq) = q^2 \sum_{\xi} \xi^{q-1} \left(\frac{\xi-1}{\xi^q-1}\right)^2 + p^2 \sum_{\eta} \eta^{p-1} \left(\frac{\eta-1}{\eta^p-1}\right)^2 + 1. \tag{3. 2}$$

Define p', q' by means of

$$\begin{cases} qq' \equiv 1 \pmod{p} & (1 \leqq q' < p), \\ pp' \equiv 1 \pmod{p} & (1 \leqq p' < q). \end{cases} \tag{3. 3}$$

Then

$$\sum_{\xi} \xi^{q-1} \left(\frac{\xi-1}{\xi^q-1}\right)^2 = \sum_{\xi} \xi^{1-q'} \left(\frac{\xi^{q'}-1}{\xi-1}\right)^2 = pq' - q'^2$$

and similarly

$$\sum_{\eta} \eta^{p-1} \left(\frac{\eta-1}{\eta^p-1}\right)^2 = qp' - p'^2.$$

Substituting in (3. 2) we get

$$pq\, S(pq) = q^2(pq' - q'^2) + p^2(qp' - p'^2) + 1,$$

so that

$$S(pq) = pp' + qq' - \frac{p^2p'^2 + q^2q'^2 - 1}{pq}. \tag{3. 4}$$

To show that (3. 4) is in agreement with (1. 2) we recall that $qu \equiv -1 \pmod p$, $0 < u < p$. Hence by the second half of (3. 3) we have

$$pp' = 1 + qu.$$

This implies

$$p(q - p') + 1 = q(p - u),$$

so that $q' = p - u$. Thus (3. 4) becomes

$$S(pq) = 1 + qu + q(p - u) - \frac{(1+qu)^2 + q^2(p-u)^2 - 1}{pq} = \frac{2(p-u)(qu+1)}{p} - 1,$$

which is correct.

4. We shall now prove (1. 7). In (2. 1) replace n by nq so that

$$nqS(nq) = \sum_{\alpha^{nq}=1} \alpha^{-\Phi(nq)}(F_{nq}(\alpha))^2, \tag{4. 1}$$

the summation now extending over all nq-th roots of 1.

By the notation $\sum\limits_{\alpha(m)}$ we shall understand a summation over all primitive m-th roots of 1. Thus (4. 1) becomes

$$nqS(nq) = \sum_{\substack{d|nq \\ d<nq}} \sum_{\alpha(d)} \alpha^{-\Phi(nq)}(F_{nq}(\alpha))^2. \tag{4. 2}$$

For $d = nq$ we have $F_{nq}(\alpha) = 0$ and therefore

$$\sum_{\alpha(nq)} \alpha^{-\Phi(nq)}(F_{nq}(\alpha))^2 = 0.$$

We consider first the terms in the right member of (4. 2) for which $q \nmid d$. Put $nq = dm$, so that $q|m$. Then

$$F_{nq}(x) = \prod_{rs=m} (x^{dr} - 1)^{\mu(s)} \cdot \prod_{\substack{rs=nq \\ d \nmid r}} (x^r - 1)^{\mu(s)},$$

so that, for $\alpha = \alpha(d)$,

$$F_{nq}(\alpha) = F_m(1)G_{nq,d}(\alpha), \tag{4. 3}$$

where

$$G_{nq,d}(x) = \prod_{\substack{rs=nq \\ d \nmid r}} (x^r - 1)^{\mu(s)}. \tag{4. 4}$$

We consider separately the cases $m = q$, $m > q$. For $m = q$, $F_q(1) = q$ and (4. 3) becomes

$$F_{nq}(\alpha) = qG_{nq,n}(\alpha) \qquad (\alpha = \alpha(n)); \tag{4. 5}$$

for $q|m$, $m>q$, $F_m(1)=1$ and we get

$$F_{nq}(\alpha)=G_{nq,d}(\alpha) \qquad (\alpha=\alpha(d)). \tag{4. 6}$$

Now, by (4. 4), when $q\nmid d$,

$$G_{nq,d}(x) = \prod_{\substack{rs=n \\ d\nmid r}} (x^{qr}-1)^{\mu(s)} \cdot \prod_{\substack{rs=n \\ d\nmid r}} (x^r-1)^{\mu(qs)} = \prod_{\substack{rs=n \\ d\nmid r}} \left(\frac{x^{qr}-1}{x^r-1}\right)^{\mu(s)},$$

so that

$$G_{nq,d}(\alpha) = \prod_{\substack{rs=n \\ d\nmid r}} \left(\frac{\alpha^{qr}-1}{\alpha^r-1}\right)^{\mu(s)}. \tag{4. 7}$$

We now introduce the hypothesis

$$q\equiv t \pmod n, \tag{4. 8}$$

where t and n are fixed while $q\to\infty$. Thus (4. 7) becomes

$$G_{nq,d}(\alpha) = \prod_{\substack{rs=n \\ d\nmid r}} \left(\frac{\alpha^{tr}-1}{\alpha^r-1}\right)^{\mu(s)}, \tag{4. 9}$$

which is independent of q. It follows that

$$\sum_{\alpha(d)} \alpha^{-\Phi(nq)}(F_n(\alpha))^2 = O(1) \qquad (q\nmid d\neq n). \tag{4. 10}$$

Combining (4. 5), (4. 6) and (4. 10) we get

$$\sum_{d|n}\sum_{\alpha(d)} \alpha^{-\Phi(nq)}(F_{nq}(\alpha))^2 = q^2\sum_{\alpha(n)} \alpha^{-\Phi(nq)} G^2_{nq,n}(\alpha)+O(1). \tag{4. 11}$$

Now by (4. 7) and (4. 8), for $\alpha=\alpha(n)$,

$$G_{nq,n}(\alpha) = \prod_{\substack{rs=n \\ r<n}} \left(\frac{\alpha^{tr}-1}{\alpha^r-1}\right)^{\mu(s)},$$

$$\alpha^{-\Phi(nq)}G_{nq,n}(\alpha) = \alpha^{-(t-1)\Phi(n)} \prod_{\substack{rs=n \\ r<n}} \left(\frac{\alpha^{tr}-1}{\alpha^r-1}\right)^{\mu(s)} = \prod_{\substack{rs=n \\ r<n}} \left(\frac{\alpha^{-tr}-1}{\alpha^{-r}-1}\right)^{\mu(s)},$$

so that

$$\alpha^{-\Phi(nq)}G^2_{nq,n}(\alpha) = \prod_{\substack{rs=n \\ r<n}} \left|\frac{\alpha^{tr}-1}{\alpha^r-1}\right|^{2\mu(s)} > 0.$$

Therefore if we put

$$A_0(n,t) = \sum_{\alpha(n)}\prod_{\substack{rs=n \\ r<n}} \left|\frac{\alpha^{tr}-1}{\alpha^r-1}\right|^{2\mu(s)}, \tag{4. 12}$$

it follows from (4. 11) that

$$\sum_{d|n}\sum_{\alpha(d)} \alpha^{-\Phi(nq)}(F_{nq}(\alpha))^2 = q^2A_0(n,t)+O(1). \tag{4. 13}$$

5. It remains to consider the terms in the right member of (4. 2) for which $q|d$. We have

$$F_{nq}(\alpha)=\frac{F_n(\alpha^q)}{F_n(\alpha)}. \tag{5. 1}$$

Put $d=mq$, $\alpha=\beta\xi$, $\beta=\beta(m)$, $\xi=\xi(q)$; then (5. 1) becomes, using (4. 8),

$$F_{nq}(\alpha)=\frac{F_n(\beta^t)}{F_n(\beta\xi)}. \tag{5. 2}$$

In what follows we may assume that $m<n$.

Now, by the Lagrange interpolation formula,

$$\frac{1}{F_n(x)}=\sum_{\gamma(n)}\frac{1}{x-\gamma}\frac{1}{F_n'(\gamma)},$$

where γ runs through the primitive n-th roots of 1. It follows that

$$\sum_{\xi(q)}\frac{1}{|F_n(\beta\xi)|^2}=\sum_{\gamma(n)}\sum_{\delta(n)}\frac{1}{F_n'(\gamma)F_n'(\delta^{-1})}\sum_{\xi(q)}\frac{1}{(\beta\xi-\gamma)(\beta^{-1}\xi^{-1}-\delta^{-1})}. \tag{5. 3}$$

Since

$$\frac{x}{(x-a)(x-b)}=\frac{a}{a-b}\frac{1}{x-a}-\frac{b}{a-b}\frac{1}{x-b}\qquad (a\neq b),$$

we have

$$\frac{1}{(\beta\xi-\gamma)(\beta^{-1}\xi^{-1}-\delta^{-1})}=-\frac{\beta\xi\delta}{(\beta\xi-\gamma)(\beta\xi-\delta)}=$$

$$=-\frac{\gamma\delta}{\gamma-\delta}\frac{1}{\beta\xi-\gamma}+\frac{\delta^2}{\gamma-\delta}\frac{1}{\beta\xi-\delta}\qquad (\gamma\neq\delta).$$

Also, since

$$\sum_{\xi(q)}\frac{1}{x-\xi}=\frac{(q-1)x^{q-2}+(q-2)x^{q-3}+\dots+1}{x^{q-1}+x^{q-2}+\dots+1},$$

it follows by means of (4. 8) that

$$\sum_{\xi(q)}\frac{1}{\beta\xi-\gamma}=O(q). \tag{5. 4}$$

Thus (5. 3) reduces to

$$\sum_{\xi(q)}\frac{1}{|F_n(\beta\xi)|^2}=\sum_{\gamma(n)}\frac{1}{|F_n'(\gamma)|^2}\sum_{\xi(q)}\frac{1}{|\beta\xi-\gamma|^2}+O(q).$$

Since

$$\frac{1}{|\beta\xi-\gamma|^2}=-\frac{\beta\gamma\xi}{(\beta\xi-\gamma)^2}=-\frac{\gamma}{\beta\xi-\gamma}-\frac{\gamma^2}{(\beta\xi-\gamma)^2},$$

we get, using (5. 4),

$$\sum_{\xi(q)}\frac{1}{|F_n(\beta\xi)|^2}=-\sum_{\gamma(n)}\frac{1}{|F_n'(\gamma)|^2}\sum_{\xi(q)}\frac{(\beta^{-1}\gamma)^2}{(\xi-\beta^{-1}\gamma)^2}+O(q). \tag{5. 5}$$

Again making use of (4. 8) we find that

$$\sum_{\xi(q)} \frac{(\beta^{-1}\gamma)^2}{(\xi-\beta^{-1}\gamma)^2} = \frac{q^2}{|\beta^t-\gamma^t|^2}+O(q).$$

Since $m<n$ it is clear that $\beta\neq\gamma$.

Therefore (5. 5) becomes

$$\sum_{\xi(q)} \frac{1}{|F_n(\beta\xi)|^2} = q^2 \sum_{\gamma(n)} \frac{1}{|\beta^t-\gamma^t|^2}\, \frac{1}{|F_n'(\gamma)|^2}+O(q). \tag{5. 7}$$

It follows from (5. 2) and (5. 7) that

$$\sum_{\substack{m|n\\ m<n}} \sum_{\alpha(mq)} |F_{nq}(\alpha)|^2 = q^2 \sum_{\gamma(n)} \sum_{\substack{\beta^n=1\\ \beta\neq\gamma^t}} \left| \frac{F_n(\beta)}{(\beta-\gamma^t)F_n'(\gamma)} \right|^2 + O(q),$$

where the inner summation is over all n-th roots of 1 except γ^t.

We now put

$$A_1(n,t) = \sum_{\gamma(n)} \sum_{\substack{\beta^n=1\\ \beta\neq\gamma^t}} \left| \frac{F_n(\beta)}{(\beta-\gamma^t)F_n'(\gamma)} \right|^2, \tag{5. 8}$$

so that

$$\sum_{\substack{m|n\\ m<n}} \sum_{\alpha(mq)} |F_{nq}(\alpha)|^2 = q^2 A_1(n,t)+O(q). \tag{5. 9}$$

Substituting from (4. 13) and (5. 9) in (4. 2) we get

$$S(nq) = qA(n,t)+O(1) \qquad (q\equiv t \pmod n), \tag{5. 10}$$

where

$$A(n,t) = \frac{1}{n}\{A_0(n,t)+A_1(n,t)\}. \tag{5. 11}$$

Since

$$F_n'(\alpha) = n\alpha^{-1} \prod_{\substack{rs=n\\ r<n}} (\alpha^r-1)^{\mu(s)}, \quad F_n'(\alpha^t) = n\alpha^{-t} \prod_{\substack{rs=n\\ r<n}} (\alpha^{tr}-1)^{\mu(s)},$$

it is clear that

$$\frac{F_n'(\alpha^t)}{F_n'(\alpha)} = \alpha^{1-t} \prod_{\substack{rs<n\\ r<n}} \left(\frac{\alpha^{tr}-1}{\alpha^r-1}\right)^{\mu(s)};$$

we may therefore replace (4. 12) by

$$A_0(n,t) = \sum_{\alpha(n)} \left| \frac{F_n'(\alpha^t)}{F_n'(\alpha)} \right|^2. \tag{5. 12}$$

It then follows from (5. 8), (5. 11) and (5. 12) that

$$A(n,t) = \frac{1}{n} \sum_{\beta^n=1} \sum_{\gamma(n)} \left| \frac{F_n(\beta)}{(\beta-\gamma^t)F_n'(\gamma)} \right|^2, \tag{5. 13}$$

where it is understood that

$$\left.\frac{F_n(\beta)}{\beta-\gamma^t}\right|_{\beta=\gamma^t} = F_n'(\gamma^t).$$

We may now state the following

THEOREM. *Let n be square free and $(t, n)=1$; let $q\equiv t \pmod n$, q prime. Then $S(n, q)$, the sum of the squares of the coefficients of the cyclotomic polynomial $F_{nq}(x)$, satisfies*

$$S(nq)=qA(n, t)+O(1) \qquad (q\to\infty), \tag{5. 14}$$

where n and t are fixed and q is restricted to the residue class $t \pmod n$. The coefficient $A(n, t)$ is determined by (5. 13); *in particular*

$$A(n, t)=A(n, n-t). \tag{5. 15}$$

If n is prime (4. 12) reduces to

$$A_0(n, t) = \sum_{\alpha(n)}\left|\frac{\alpha-1}{\alpha^t-1}\right|^2 = \sum_{\alpha(n)}\left|\frac{\alpha^u-1}{\alpha-1}\right|^2 =$$

$$= \sum_{\alpha^n-1}(\alpha^{u-1}+\dots+1)(\alpha^{-u+1}+\dots+1)-u^2 = u(n-u),$$

where $tu\equiv -1 \pmod n$, $1\leqq u<n$. As for (5. 8), we have

$$A_1(n, t) = \sum_{\gamma(n)}\left|\frac{F_n(1)}{(1-\gamma^t)F_n'(\gamma)}\right|^2 = n^2\sum_{\gamma(n)}\frac{1}{|(1-\gamma^t)F_n'(\gamma)|^2}.$$

Since

$$F_n'(\gamma) = \frac{n\gamma^{n-1}}{\gamma-1},$$

this reduces to

$$A_1(n, t) = \sum_{\gamma(n)}\left|\frac{\gamma-1}{\gamma^t-1}\right|^2 = u(n-u).$$

Thus

$$S(nq) = \frac{2u(n-u)}{n}q+O(1)$$

n agreement with (1. 4).

(Received 27 June 1966)

References

[1] A. S. BANG, Om Ligningen $\Phi_n(x)=0$, *Nyt Tidsskrift Mathematisk*, **6** (1895), pp. 6–12.
[2] L. CARLITZ, The number of terms in the cyclotomic polynomial $F_{pq}(x)$, *American Mathematical Monthly*, **73** (1966), pp. 979—981.
[3] A. MIGOTTI, Zur Theorie der Kreisteilungsgleichung, *S.—B. der Math. Naturwiss. Classe der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Wien*, (2), **87** (1883), pp. 7–14.
[4] EMMA LEHMER, On the magnitude of the coeffcients of the cyclotomic polynomial, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **42** (1936), pp. 389–392.

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (3—4), 1967, pp. 305—308.

PARTIAL HOMOMORPHIC IMAGES OF CERTAIN GROUPOIDS

By

M. PETRICH (University Park, Pennsylvania, USA)

(*Presented by* L. RÉDEI)

CLIFFORD [1] proved that any regular $\mathcal{D}$-class of an arbitrary semigroup is a partial homomorphic image of a Brandt groupoid. We show (Theorem 1) that given a group G and a regular $\mathcal{D}$-class D of any semigroup, D is a partial homomorphic image of a Brandt groupoid B with the structure group G. We then define a „rectangular groupoid" and show (Theorem 2) that every $\mathcal{D}$-class is a partial isomorphic image of a rectangular groupoid. We also deduce some consequences of these results.

To avoid repetition, we use the terminology and notation of [2] and adopt the definitions and conventions introduced in [1] (in these references, the reader will also find motivation for the study and properties of the concepts used in this paper). In particular, if S and S^* are semigroups with zero 0 and 0^*, respectively, then a mapping $\theta: S \to S^*$ is said to be a *partial homomorphism (isomorphism* if it is $1-1$) if (i) $0\theta = 0^*$, (ii) $(ab)\theta = (a\theta)(b\theta)$ for all $a, b \in S$ such that $ab \neq 0$. The restriction of θ to $S \setminus 0$ is a partial homomorphism of the groupoid $S \setminus 0$ into S^*. We do not even require that S^* have a zero, for a zero element can always be adjoined to S^* (to satisfy (i)).

1. Recall that if B is a Brandt groupoid, and if we adjoin an element zero to B and declare undefined products in B as being equal to zero, we obtain a completely 0-simple inverse semigroup $B^\circ = \mathcal{M}^\circ(G; I, I; \Delta)$; we say that G is the *structure group* of B.

THEOREM 1. *Let G be a group, S a semigroup, and D a regular $\mathcal{D}$-class of S. Then D is a partial homomorphic image of a Brandt groupoid with the structure group G.*

PROOF. Let G, S, and D be as in the statement of the theorem. Also let $\{R_i | i \in I\}$, $\{L_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ be the set of all $\mathcal{R}$ and $\mathcal{L}$-classes of S contained in D (we say, simply, that these are $\mathcal{R}$ and $\mathcal{L}$-classes of D, respectively). We suppose (as we may) that $I \cap \Lambda = \{1\}$ and that $H_{11} = R_1 \cap L_1$ is a group. For every $i \in I \setminus 1$ (arbitrarily) choose $r_i \in H_{i1}$, and for every $\lambda \in \Lambda \setminus 1$ choose $q_\lambda \in H_{1\lambda}$; let $r_1 = q_1 = e_{11}$. Then as in (8) of [1], we have that every element of D can be uniquely expressed as

$$r_i a q_\lambda, \tag{1}$$

where $a \in H_{11}$, $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$.

Let K be the union of all $\mathcal{H}$-classes of D which contain an idempotent. Let B be the set of all triples $(g; x, y)$, where $g \in G$, $x, y \in K$, and x, y are represented as in (1), under the following multiplication:

$$(g; r_i a q_\lambda, r_j b q_\mu)(h; r_k c q_\nu, r_l d q_\tau) = (gh; r_i a q_\lambda, r_l d q_\tau)$$

if $r_jbq_\mu = r_kcq_\nu$, undefined otherwise. It is straightforward to verify that B is a Brandt groupoid. Let $\theta\colon B \to D$ be the function defined by:

$$(q;\, r_iaq_\lambda,\, r_jbq_\mu)\theta = r_iab^{-1}(q_\mu r_j)^{-1}q_\mu$$

(recall that $a, b \in H_{11}$ which is a group; further, since $H_{j\mu}$ is a group, we have $q_\mu r_j \in H_{11}$). We obtain

$$(g;\, r_iaq_\lambda,\, r_jbq_\mu)\theta(h;\, r_jbq_\mu,\, r_kcq_\nu)\theta = [r_iab^{-1}(q_\mu r_j)^{-1}q_\mu][r_jbc^{-1}(q_\nu r_k)^{-1}q_\nu] =$$

$$= r_iac^{-1}(q_\nu r_k)^{-1}q_\nu = (gh;\, r_iaq_\lambda,\, r_kcq_\nu)\theta$$

and θ is a partial homomorphism. For any $r_iaq_\lambda \in D$, there exist $j \in I$, $\mu \in \Lambda$ such that $H_{i\mu}$ and $H_{j\lambda}$ are groups. Then

$$r_iaq_\lambda = (1;\, r_iaq_\mu,\, r_j(q_\lambda r_j)^{-1}q_\lambda)\theta$$

and θ maps B onto D (1 is the identity of G).

COROLLARY. *For any group G and any regular 0-bisimple semigroup S, S is a partial homomorphic image of a Brandt semigroup with the structure group G.*

2. Let E be a completely 0-simple semigroup over a one element group, let $E^* = E \setminus 0$ with the induced multiplication of E, and let G be a group. We write $E = \mathcal{M}^\circ(1;\, I,\, \Lambda;\, P)$ and identify $(g,\, (1;\, i,\, \lambda))$ with $(g;\, i,\, \lambda)$. In $G \times E^*$ define multiplication by:

$$(g;\, i,\, \lambda)(h;\, j,\, \mu) = \begin{cases} (gh;\, i,\, \mu) & \text{if } p_{\lambda j} = 1 \\ \text{undefined otherwise.} \end{cases}$$

We call $G \times E^*$ a *rectangular groupoid*. Note that if 0 is added to $G \times E^*$ and undefined products are declared to be 0, the system $(G \times E^*)^\circ$ arising in this way is a completely 0-simple semigroup; we call $(G \times E^*)^\circ$ a *rectangular* 0-*group*. (Theorem 1 of [3] gives several necessary and sufficient conditions in order that a completely 0-simple semigroup be a rectangular 0-group.) Further, if E is an inverse semigroup, $G \times E^*$ is a Brandt groupoid and conversely. We regard the $\mathcal{R}$ and $\mathcal{L}$-classes and the structure group of $(G \times E^*)^\circ$ as being $\mathcal{R}$ and $\mathcal{L}$-classes and the structure group of $G \times E^*$, respectively (except, of course, the class 0 of $(G \times E^*)^\circ$).

THEOREM 2 (cf. Theorem 6, [4]). *Every regular $\mathcal{D}$-class D of any semigroup is a partial isomorphic image of a rectangular groupoid having the same structure group, the same number of $\mathcal{R}$-classes, and the same number of $\mathcal{L}$-classes as D.*

PROOF. As before, let I and Λ be index sets of $\mathcal{R}$ and $\mathcal{L}$-classes of D, respectively. For all $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$, let

$$p_{\lambda i} = \begin{cases} 1 & \text{if } H_{i\lambda} \text{ is a group} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2}$$

Then the matrix $P = (p_{\lambda i})$ is regular since D is a regular $\mathcal{D}$-class. Well-order both I and Λ and for all $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$, let

$$t_{\lambda i} = \begin{cases} 0 & \text{if there exist } j < i,\ \mu < \lambda \text{ such that } p_{\lambda i}p_{\lambda j}p_{\mu i}p_{\mu j} = 1 \\ p_{\lambda i} & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3}$$

Let $T=(t_{\lambda i})$ and for $i\in I$, let $P_i=\{\lambda\in\Lambda|p_{\lambda i}=1\}$. Since P is a regular matrix, P_i is not empty and by well-ordering of Λ, P_i has a smallest element λ_i. Then $p_{\lambda_i i}=1$ and $p_{\lambda i}=0$ if $\lambda<\lambda_i$ by minimality of λ_i. But then (2) implies that $t_{\lambda_i i}=p_{\lambda_i i}=1$. Consequently every column of T has a non-zero entry; one shows similarly that every row of T has a non-zero entry. Thus T is a regular matrix.

We suppose (as we may) that $I\cap\Lambda=\{1\}$ and that $t_{11}=1$. By (3) and (2), it follows that H_{11} is a group. For all $i\in I$, $\lambda\in\Lambda$, let

$$u_{\lambda i}=\begin{cases}0 & \text{if} \quad \lambda=1, i\neq 1 \quad \text{and} \quad t_{\mu i}=1 \quad \text{for some} \quad \mu\neq 1\\ 0 & \text{if} \quad i=1, \lambda\neq 1 \quad \text{and} \quad t_{\lambda j}=1 \quad \text{for some} \quad j\neq 1\\ t_{\lambda i} & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{4}$$

Then $U=(u_{\lambda i})$ is a regular matrix since $t_{11}=1$. By $e_{i\lambda}$ denote the identity of H_i if $H_{i\lambda}$ is a group. For $u_{i1}=1$, let $r_i=e_{i1}$ and for $u_{1\lambda}=1$ let $q_\lambda=e_{1\lambda}$ (all $i\in I$, $\lambda\in\Lambda$). Then $e_{11}e_{i1}=e_{1\lambda}e_{11}=e_{11}$ and thus $q_1r_i=q_\lambda r_1=e_{11}$, where $u_{i1}=u_{1\lambda}=1$.

Suppose now that $u_{1i}=0$ (then necessarily $i\neq 1$). Let r_i be any element of H_{i1}. For every $\lambda\in\Lambda$ such that $u_{\lambda i}=1$, let q_λ be the (unique) inverse of r_i in $H_{1\lambda}$ (recall that $u_{\lambda i}=1$ implies that $H_{i\lambda}$ is a group). Since $u_{1i}=0$ and U is a regular matrix, there is at least one $\lambda\in\Lambda$ such that $u_{\lambda i}=1$. We have $q_\lambda r_i=e_{11}$.

Let q_λ be one of the elements just constructed. For every $j\in I$ such that $u_{\lambda j}=1$, let $r_{j(\lambda)}$ be the inverse of q_λ in H_{j1}. For $j=i$ (see above), we have $r_{i(\lambda)}=r_i$ since both $r_{i(\lambda)}$ and r_i are inverses of q_λ in H_{1i}. Further, if q_μ is another element constructed in the previous paragraph ($q_\lambda\neq q_\mu$) and $u_{\lambda j}=u_{\mu j}=1$, then by the definition of q_λ and q_μ, also $u_{\lambda i}=u_{\mu i}=1$. Then by (3) and (4), either $\lambda=\mu$ or $i=j$. The hypothesis $q_\lambda\neq q_\mu$ implies that $\lambda\neq\mu$ since both q_λ and q_μ are inverses of r_i. Consequently $i=j$ and every $r_{j(\lambda)}$ is the inverse of a unique q_λ. Hence we may write r_j instead of $r_{j(\lambda)}$. We have again $q_\lambda r_j=e_{11}$.

Now starting with r_j just constructed, we define q_μ, the inverse of r_j in $H_{1\mu}$, and as before see that the new q_μ either coincides with the previously constructed one or is an inverse of a unique r_j and that $q_\mu r_j=e_{11}$. We continue this process indefinitely unless it stops after a finite number of steps.

We next define a relation ϱ on the set of all non-zero entries of the matrix U as follows. If $u_{i\lambda}=u_{j\mu}=1$, $(\lambda, i)\,\varrho(\mu, j)$ if there exists in U a polygonal line with a finite number of vertices, connecting (λ, i) and (μ, j), whose sides agree with segments of rows or columns of U and whose vertices are non-zero entries of U. Then ϱ is an equivalence; we call its classes the *cycles* of U. By (4), if a cycle C contains an entry of the form (λ, i) with $\lambda\neq 1$, $i\neq 1$, then C contains no element of the form $(\lambda, 1)$ or $(1, i)$. Consequently one cycle consists of all (λ, i) such that $u_{\lambda i}=1$ and either $i=1$ or $\lambda=1$; this cycle contains $(1, 1)$ and we have defined above r_i and q_λ for it. Every one of the remaining cycles C contains an element (λ, i) with $u_{\lambda i}=1$ and $u_{1i}=u_{\lambda 1}=0$. We have defined above r_i and q_λ also for such cycles. In all cases, the r_i and q_λ have been defined so that

$$q_\lambda r_i=e_{11}, \tag{5}$$

whenever $u_{\lambda i}=1$.

Finally let $F=\mathcal{M}^\circ(1; I, \Lambda; U)$ (1 stands for a one element group), $M=H_{11}\times F^*$, and let the function $\theta\colon M\to D$ be defined by:

$$(a; i, \lambda)\theta=r_iaq_\lambda.$$

(As before, we identify $(a, (1; i, \lambda))$ with $(a; i, \lambda)$.) M is clearly a rectangular groupoid satisfying the conditions of the theorem. Since every element of D can be uniquely written as $r_i a q_\lambda$ with r_i, q_λ defined above and $a \in H_{11}$, θ is $1-1$ and maps M onto D. If $(a; i, \lambda)(b; j, \mu) \neq 0$ (in M°), then $u_{\lambda j} = 1$ and (5) yields

$$(a; i, \lambda)\theta(b; j, \mu)\theta = (r_i a q_\lambda)(r_j b q_\mu) = r_i a(q_\lambda r_j) b q_\mu = r_i ab q_\mu =$$
$$= (ab; i, \mu)\theta = [(a; i, \lambda)(b; j, \mu)]\theta$$

and θ is a partial homomorphism. Therefore θ is a partial isomorphism of the rectangular groupoid M onto D.

COROLLARY. *A semigroup with zero is a partial isomorphic image of a rectangular* 0*-group if and only if it is regular and* 0*-bisimple.*

PROOF. This follows from the theorem and the fact that a partial homomorphism preserves Green's equivalences (in this case $\mathcal{D}$) and regularity.

(Received 4 July 1966)

References

[1] A. H. CLIFFORD, Partial homomorphic images of Brandt groupoids, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16** (1965), pp. 538–544.

[2] A. H. CLIFFORD and G. B. PRESTON, *The algebraic theory of semigroups*, Vol. I, Math. Surveys No. 7 (Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1961).

[3] G. LALLEMENT and M. PETRICH, Some results concerning completely 0-simple semigroups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **70** (1964), pp. 777–778.

[4] D. D. MILLER and A. H. CLIFFORD, Regular $\mathcal{D}$-classes in semigroups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **82** (1956), pp. 270–280.

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (3—4), 1967, pp. 309—320.

ON SOME PROBLEMS OF A STATISTICAL GROUP-THEORY. III

By

P. ERDŐS and P. TURÁN (Budapest), members of the Academy

1. Let S_n be the symmetric group of n letters, P a generic element of it and $\mathbf{O}(P)$ its order (as group-element). As E. LANDAU proved* denoting by $G(n)$ the maximum of $\mathbf{O}(P)$ for $P \in S_n$ the relation

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log G(n)}{\sqrt{n \log n}} = 1$$

holds. In our first paper in this series** we proved that for almost all P's (i.e. with exception of $o(n!)$ P's) the much stronger inequality

$$|\log \mathbf{O}(P) - \tfrac{1}{2}\log^2 n| < \omega(n) \log^{\frac{3}{2}} n$$

holds if only $\omega(n)$ tends to infinity with n arbitrarily slowly and we expressed the conjecture that $\log \mathbf{O}(P)$ shows a Gaussian distribution. In this paper we are going to prove essentially this conjecture. This proof rests heavily on the inequality (14. 4) of P. I, which we are going to expose detailed in **2**; otherwise this paper can be read independently of P. I (and also from P. II).

More exactly, we are going to prove the following

THEOREM. *Denoting by $K(n, x)$ the number of P's in S_n satisfying the inequality*

$$\log \mathbf{O}(P) \leqq \tfrac{1}{2}\log^2 n + x \log^{\frac{3}{2}} n$$

the relation

$$\lim_{n\to\infty} \frac{K(n, x)}{n!} = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{3}{2}\lambda^2}\, d\lambda \tag{1. 1}$$

*holds, uniformly for $-x_0 \leqq x \leqq x_0$, x_0 being an arbitrarily large positive number.****

* See his *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, (1909), Bd. I. p. 222.

** *Zeitschr. f. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete*, **4** (1965), pp. 175—186. Quoted later as P. I.

*** As A. RÉNYI remarked the relation (1. 1) can be written in the more elegant form

$$\text{Prob}\left(\frac{\log \mathbf{O}(P) - \frac{1}{2}\log^2 n}{\frac{1}{\sqrt{3}} \log^{\frac{3}{2}} n} < y \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv.$$

Our proof is a direct one and rather long; but a *first* proof can be as long as it wants to be. It would be however of interest to deduce it from the general principles of probability theory. Obviously our proofs could be modified so that they could replace (1. 1) by an *explicit* inequality, even with a main-term plus an explicit error-term. As to this we shall not enter into details.

2. The different cycle-lengths in the canonical cycle-decomposition of P will be denoted by

$$(1\leqq)n_1<n_2<\dots<n_k \qquad k=k(P) \tag{2. 1}$$

and their multiplicity by $m_1, m_2, \dots, m_k$ ($\geqq 1$), respectively, so that

$$m_1 n_1+\dots+m_k n_k=n. \tag{2. 2}$$

Then the crucial inequality (14. 4) from P. I asserts that for all but $o(n!)$ P's the inequality

$$\exp\left(-3\log n(\log\log n)^4\right)\leqq \frac{\mathbf{O}(P)}{n_1 n_2\dots n_k}\leqq 1 \tag{2. 3}$$

holds.

Also here we shall use the fact, known to Cauchy, that fixing the n_ν and m_ν numbers with (2. 2) as above, the number of P's in S_n having m_ν cycles of length n_ν ($\nu=1, 2, \dots, k$) in the canonical cycle-decomposition is

$$\frac{n!}{m_1!\, m_2!\,\dots\, m_k!\, n_1^{m_1} n_2^{m_2}\dots n_k^{m_k}} \tag{2. 4}$$

and also an easy consequence of it, namely that

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m_\nu}\sum_{n_\nu}\frac{1}{m_1!\, m_2!\,\dots\, m_k!\, n_1^{m_1}\dots n_k^{m_k}}=1, \tag{2. 5}$$

where the summation is extended to all systems satisfying (2. 1)—(2. 2).

In what follows c will denote positive constant, not necessarily the same in different occurences, which may depend at most on t_0 (in (4. 6)). If for $|z|<1$

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z^\nu,$$

$$g(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}b_\nu z^\nu, \qquad b_\nu\geqq 0$$

we shall use the notation

$$f(z)\ll g(z) \tag{2. 6}$$

if and only if

$$|a_n|\leqq b_n \qquad (n=0, 1, 2, \dots). \tag{2. 7}$$

Some positive numerical constants will be denoted by $d_1, d_2, \dots$. Sometimes we use the O-sign which refers to $n\to\infty$, depending perhaps on t_0.

3. We shall need two simple lemmata.

LEMMA I. *We have*

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{\log m}{m} z^m - \frac{1}{2} \log^2 \frac{1}{1-z} \ll c \log \frac{1}{1-z}.$$

For the simple proof we remark only that $m \geqq 2$

$$\text{coeffs of } z^m \text{ in } \log^2 \frac{1}{1-z} = \sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{1}{\nu(m-\nu)} = \frac{2}{m} \sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{1}{\nu} = 2 \frac{\log m}{m} + O\left(\frac{1}{m}\right).$$

LEMMA II. *We have*

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{\log^2 m}{m} z^m - \frac{1}{3} \log^3 \frac{1}{1-z} \ll c \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\log m \log \log m}{m} z^m.$$

Among the several possibilities to prove it, possibly the shortest one is based on complex integration (and part of which can be used later too). Obviously

$$J_m \overset{\text{def}}{=} \text{coeffs of } z^m \text{ in } \log^3 \frac{1}{1-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(l)} z^{-m-1} \log^3 \frac{1}{1-z}\, dz \tag{3. 1}$$

where l encircles the origin in $|z| < 1$. Let L be the loop along the segment $1 \leqq z < \infty$. Trivial estimations lead to

$$J_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} z^{-m-1} \log^3 \frac{1}{1-z}\, dz. \tag{3. 2}$$

On the upper part of the cut

$$\log \frac{1}{1-z} \to \log \frac{1}{r-1} + i\pi, \tag{3. 3}$$

on the lower one

$$\log \frac{1}{1-z} \to \log \frac{1}{r-1} - i\pi \tag{3. 4}$$

with the positive value of the logarithm. Routine-estimation gives then

$$J_m = |J_m| = \int_1^{\infty} \frac{3 \log^2 \frac{1}{r-1} - \pi^2}{r^{m+1}}\, dr = -\frac{\pi^2}{m} + 3 \int_0^{\infty} (1+x)^{-m-1} \log^2 \frac{1}{x}\, dx. \tag{3. 5}$$

As to the remaining integral this is

$$> \int_0^{10m^{-1}\log m} (1+x)^{-m-1} \log^2 \frac{1}{x}\, dx > \frac{1}{m} \log^2 \left(\frac{m}{10 \log m} \right) \cdot$$

$$\cdot \left\{ 1 - \left(1 + \frac{10 \log m}{m} \right)^{-m} \right\} > \frac{\log^2 m}{m} - c\, \frac{\log m \log \log m}{m}$$

and — apart from $O\left(\frac{\log m \log\log m}{m}\right)$ — the same upper bound can analogously be obtained. These prove the lemma.

4. Now we can turn to the proof of our theorem.

First step. Let x be real and

$$F_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m_\nu}' \sum_{n_\nu}' \frac{1}{m_1!\, m_2! \dots m_k!\; n_1^{m_1} n_2^{m_2} \dots n_k^{m_k}} \tag{4. 1}$$

where the summation is extended to all (m_ν, n_ν)-systems with

$$(1 \leqq) n_1 < n_2 < \dots < n_k, \tag{4. 2}$$

$$m_\nu \geqq 1, \tag{4. 3}$$

$$\sum_{\nu=1}^{k} m_\nu n_\nu = n, \tag{4. 4}$$

$$n_1 n_2 \dots n_k \leqq \exp\{\tfrac{1}{2}\log^2 n + x \log^{\frac{3}{2}} n\}. \tag{4. 5}$$

This is an increasing function with $F_n(-\infty)=0$ and owing to (2. 5) also $F_n(+\infty)=1$. Let us consider the characteristic function

$$\varphi_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF_n(x) \qquad (-t_0 \leqq t \leqq t_0). \tag{4. 6}$$

This gives for all real t's at once

$$|\varphi_n(t)| \leqq 1. \tag{4. 7}$$

To get an alternative form of $\varphi_n(t)$ we use the form (4. 1) of $F_n(x)$. This gives

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m_\nu} \sum_{n_\nu} \frac{1}{m_1!\, m_2! \dots m_k!} \cdot \frac{1}{n_1^{m_1} n_2^{m_2} \dots n_k^{m_k}} \cdot \exp\left\{ it\, \frac{\sum_{\nu=1}^{k} \log n_\nu - \frac{1}{2}\log^2 n}{\log^{\frac{3}{2}} n} \right\},$$

where the summation is extended to all (m_ν, n_ν)-systems with (4. 2)—(4. 3)—(4. 4). Hence putting

$$\frac{t}{\log^{\frac{3}{2}} n} = \tau, \tag{4. 8}$$

$$\varphi_n^*(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m_\nu}' \sum_{n_\nu} \frac{(n_1 n_2 \dots n_k)^{i\tau}}{m_1! \dots m_k!\; n_1^{m_1} n_2^{m_2} \dots n_k^{m_k}}, \tag{4. 9}$$

we have

$$\varphi_n(t) = \exp\left(-\frac{it}{2}\sqrt{\log n}\right) \varphi_n^*(\tau). \tag{4. 10}$$

5. Next we try to find a suitable representation for $\varphi_n^*(\tau)$.

Second step. We form for $|z|<1$ the generating function

$$D(z,\tau)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n^*(\tau)z^n. \tag{5.1}$$

Putting $n=m_1 n_1+\ldots+m_k n_k$ in the expression of $\varphi_n^*(\tau)$ in (4. 9) we obtain

$$D(z,\tau)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n_1 n_2\ldots n_k}(n_1 n_2\ldots n_k)^{i\tau}\sum_{m_1,\ldots,m_k}\frac{1}{m_1!}\left(\frac{z^{n_1}}{n_1}\right)^{m_1}\cdots\frac{1}{m_k!}\left(\frac{z^{n_k}}{n_k}\right)^{m_k}=$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n_1,\ldots,n_k}(n_1 n_2\ldots n_k)^{i\tau}\left(e^{\frac{z^{n_1}}{n_1}}-1\right)\left(e^{\frac{z^{n_2}}{n_2}}-1\right)\ldots\left(e^{\frac{z^{n_k}}{n_k}}-1\right)=\prod_{l=1}^{\infty}\left\{1+l^{i\tau}\left(e^{\frac{z^l}{l}}-1\right)\right\}.$$

The l^{th} factor can be written as

$$\left\{1+(l^{i\tau}-1)\left(1-e^{-\frac{z^l}{l}}\right)\right\}e^{\frac{1}{l}z^l};$$

since for $|z|<1$

$$\prod_{l=1}^{\infty}\exp\left(\frac{z^l}{l}\right)=\frac{1}{1-z},$$

we get here

$$D(z,\tau)=\frac{1}{1-z}\prod_{l=2}^{\infty}\left\{1+(l^{i\tau}-1)\left(1-e^{-\frac{1}{l}z^l}\right)\right\}.$$

Since the factors belonging to $l\geqq n+1$ obviously do not contribute to the coefficient of z^n in $D(z,\tau)$ we obtain the required representation of $\varphi_n(t)$,

$$\varphi_n(t)=\exp\left\{-\frac{it}{2}\sqrt{\log n}\right\}\cdot\text{coeffs of } z^n \text{ in }\frac{1}{1-z}\prod_{l=2}^{\infty}\left\{1+(l^{i\tau}-1)\left(1-e^{-\frac{1}{l}z^l}\right)\right\}= \tag{5.2}$$

$$=\exp\left\{-\frac{it}{2}\sqrt{\log n}\right\}\cdot\text{coeffs of } z^n \text{ in }\frac{1}{1-z}\prod_{l=2}^{n}\left\{1+(l^{i\tau}-1)\left(1-e^{-\frac{1}{l}z^l}\right)\right\}.$$

6. Next we simplify the expression

$$D_n(z,\tau)\overset{\text{def}}{=}\sum_{l=2}^{n}\log\left\{1+(l^{i\tau}-1)\left(1-e^{-\frac{1}{l}z^l}\right)\right\}. \tag{6.1}$$

Third step. Obviously $D_n(z,\tau)$ can be written as the sum of the following four functions

$$h_1(z)=\sum_{l=2}^{n}\left\{i\tau\frac{\log l}{l}-\frac{\tau^2}{2}\frac{\log^2 l}{l}\right\}z^l, \tag{6.2}$$

$$h_2(z)=\sum_{l=2}^{n}\left(\frac{l^{i\tau}-1}{l}-i\tau\frac{\log l}{l}+\frac{\tau^2}{2}\frac{\log^2 l}{l}\right)z^l, \tag{6.3}$$

$$h_3(z)=\sum_{l=2}^{n}(l^{i\tau}-1)\left(1-e^{-\frac{1}{l}z^l}-\frac{z^l}{l}\right), \tag{6.4}$$

$$h_4(z)=\sum_{l=2}^{n}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}(l^{i\tau}-1)^j\left(1-e^{-\frac{1}{l}z^l}\right)^j. \tag{6.5}$$

Owing to (4. 8) we get

$$h_4(z) \ll \sum_{l=2}^{n} \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{2t_0}{\sqrt{\log n}}\right)^j \left(e^{\frac{1}{l}z^l}-1\right)^j \ll \sum_{l=2}^{n} \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{2t_0}{\sqrt{\log n}}\right)^j \left(\frac{z^l}{l-z^l}\right)^j =$$

$$= \frac{(2t_0)^2}{\log n} \sum_{l=2}^{n} \frac{z^{2l}}{l-z^l} \cdot \frac{1}{l-\left(1+\frac{2t_0}{\sqrt{\log n}}\right)z^l} \ll \frac{(2t_0)^2}{\log n} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{z^{2l}}{l^2} \frac{1}{\left\{1-\left(1+\frac{2t_0}{\sqrt{\log n}}\right)\frac{z^l}{l}\right\}^2} =$$

$$= \frac{(2t_0)^2}{\log n} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) \left(\frac{1+\frac{2t_0}{\sqrt{\log n}}}{l}\right)^{m+2} \cdot z^{l(m+2)}$$

so that for $n > \exp(10^4 t_0^2)$ and $\nu \geqq 4$

$$|\text{coeffs of } z^\nu \text{ in } h_4(z)| \leqq \frac{(2t_0)^2}{\log n} \sum_{\substack{(m+2)l=\nu \\ l\geqq 2,\, m\geqq 0}} (m+1) \left(\frac{1,02}{l}\right)^{\frac{\nu}{l}} < \tag{6. 5}$$

$$< \frac{(2t_0)^2}{\log n} \sum_{\substack{l\mid\nu \\ 2\leqq l\leqq \frac{\nu}{2}}} \frac{\nu}{l} \left(\frac{1,02}{l}\right)^{\frac{\nu}{l}} \overset{\text{def}}{=} Z_1 .$$

Since the possible divisors of ν between $\nu/4$ and $\nu/2$ are $\nu/3$ and $\nu/2$, we get for $\nu > c$

$$Z_1 < \frac{(2t_0)^2}{\log n} \left\{2\left(\frac{2,04}{\nu}\right)^2 + 3\left(\frac{3,06}{\nu}\right)^3 + \right. \tag{6. 6}$$

$$\left. + \sum_{2\leqq l\leqq \frac{\nu}{10\log \nu}} \frac{\nu}{l}\left(\frac{1,02}{l}\right)^{\frac{\nu}{l}} + \sum_{\frac{\nu}{10\log\nu}<l\leqq\frac{\nu}{4}} \frac{\nu}{l}\left(\frac{1,02}{l}\right)^{\frac{\nu}{l}}\right\} < \frac{c}{\nu^2 \log n}.$$

This holds for $\nu < c$, too. As to $h_3(z)$ we have

$$h_3(z) \ll \sum_{l=2}^{n} \frac{2t_0}{\sqrt{\log n}} \left(e^{\frac{1}{l}z^l} - 1 - \frac{z^l}{l}\right) \ll \sum_{l=2}^{n} \frac{2t_0}{\sqrt{\log n}} \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{z^l}{l}\right)^m$$

and hence for $\nu \geqq 4$

$$|\text{coeffs of } z^\nu \text{ in } h_3(z)| \leqq \frac{2t_0}{\sqrt{\log n}} \sum_{\substack{m\mid\nu \\ 2\leqq m\leqq\frac{\nu}{2}}} \left(\frac{m}{\nu}\right)^m < \frac{c}{\nu^2\sqrt{\log n}} \tag{6. 7}$$

as before. As to $h_2(z)$ we have owing to (4. 8)

$$h_2(z) \ll c \sum_{l=2}^{n} \left(\frac{2t_0}{\sqrt{\log n}}\right)^3 \frac{z^l}{l}$$

i.e. for $\nu \geqq 2$

$$|\text{coeffs of } z^\nu \text{ in } h_2(z)| < \frac{c}{\nu \log^{\frac{3}{2}} n}. \tag{6. 8}$$

Collecting all these, (6. 1) gives

$$D_n(z, \tau) = i\tau \sum_{l=2}^{n} \frac{\log l}{l} z^l - \frac{\tau^2}{2} \sum_{l=2}^{n} \frac{\log^2 l}{l} z^l + \sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu^{(1)} z^\nu \tag{6. 9}$$

with

$$|a_\nu^{(1)}| < c\left(\frac{1}{\nu^2 \sqrt{\log n}} + \frac{1}{\nu \log^{\frac{3}{2}} n}\right). \tag{6. 10}$$

Remarking that

$$\text{coeffs of } z^n \text{ in } \frac{1}{1-z} \exp\{D_n(z, \tau)\} =$$

$$= \text{coeffs } z^n \text{ in } \frac{1}{1-z} \exp\left\{i\tau \sum_{l=2}^{\infty} \frac{\log l}{l} z^l - \frac{\tau^2}{2} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{\log^2 l}{l} z^l + \sum_{l=2}^{\infty} a_\nu^{(1)} z^\nu\right\}$$

the representation (5. 2) assumes the form

$$\varphi_n(t) = \exp\left\{-\frac{it}{2} \sqrt{\log n}\right\} \cdot \tag{6. 11}$$

$$\cdot \text{coeffs of } z^n \text{ in } \frac{1}{1-z} \exp\left\{i\tau \sum_{l=2}^{\infty} \frac{\log l}{l} z^l - \frac{\tau^2}{2} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{\log^2 l}{l} z^l\right\} \exp\left\{\sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu^{(1)} z^\nu\right\}.$$

7. Next we want to have in the „essential" factor of (6. 11) elementary functions only. This is performed by the

Fourth step. Here we shall use Lemmata I and II. Using (4. 8) this gives at once the modified representation of

$$\varphi_n(t) = \exp\left\{-\frac{it}{2} \sqrt{\log n}\right\} \cdot \tag{7. 1}$$

$$\cdot \text{coeffs of } z^n \text{ in } \frac{1}{1-z} \exp\left\{\frac{it}{2 \log^{\frac{3}{2}} n} \log^2 \frac{1}{1-z} - \frac{t^2}{6 \log^3 n} \log^3 \frac{1}{1-z}\right\} \exp\left\{\sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu^{(2)} z^\nu\right\}$$

where again for $\nu \geqq 2$

$$|a_\nu^{(2)}| \leqq c\left(\frac{1}{\nu^2 \sqrt{\log n}} + \frac{1}{\nu \log^{\frac{3}{2}} n} + \frac{\log \nu \log \log \nu}{\nu \log^3 n}\right). \tag{7. 2}$$

8. If we want to hope that the factor $\exp\left\{\sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu^{(2)} z^\nu\right\}$ will not matter in (7. 1) we have to know that putting

$$\exp\left\{\sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu^{(2)} z^\nu\right\} \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu^{(3)} z^\nu \tag{8. 1}$$

the $a_\nu^{(3)}$-coefficients are sufficiently small. This is done by the

Fifth step. By (7. 2) we have — meaning the majoration only for $\nu \leqq n$ —

$$(8.2) \qquad 1+\sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu^{(3)} z^\nu \ll \exp c\left\{\log^{-\frac{3}{2}} n \log\frac{1}{1-z}+\log^{-\frac{1}{2}} n \sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{z^{\mu+1}}{\mu(\mu+1)}\right\} =$$

$$=\left(\frac{1}{1-z}\right)^{c\log^{-\frac{3}{2}} n}\cdot\exp\{c\log^{-\frac{1}{2}} n((1-z)\log(1-z)+z)\} \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$=\left\{1+\sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu^{(4)} z^\mu\right\}\left\{1+\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{(5)} z^\nu\right\}.$$

Obviously we have — with $c\log^{-\frac{3}{2}} n=\eta_0$ — for $\mu \leqq n$

$$(8.3) \qquad |a_\mu^{(4)}| = \frac{\eta_0}{\mu}\left(1+\frac{\eta_0}{1}\right)\left(1+\frac{\eta_0}{2}\right)\dots\left(1+\frac{\eta_0}{\mu-1}\right) < \eta_0\mu^{2\eta_0-1} < \frac{c}{\mu\log^{\frac{3}{2}} n}.$$

As to the $a_\nu^{(5)}$-coefficients we have — with $c\log^{-\frac{1}{2}} n=\eta_1$ — for $\nu \geqq 2$

$$a_\nu^{(5)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1-\frac{1}{\nu}} z^{-\nu-1}\exp\eta_1\{(1-z)\log(1-z)+z\}\,dz =$$

$$=\frac{\eta_1}{2\pi i\nu}\int\limits_{|z|=1-\frac{1}{\nu}} z^{-\nu}\log\frac{1}{1-z}\exp\eta_1\{(1-z)\log(1-z)+z\}\,dz =$$

$$=\frac{\eta_1}{2\pi i\nu(\nu-1)}\int\limits_{|z|=1-\frac{1}{\nu}} z^{-\nu+1}\left\{\frac{1}{1-z}+\eta_1\log^2\frac{1}{1-z}\right\}\exp\eta_1\{(1-z)\log(1-z)+z\}\,dz$$

and hence

$$|a_\nu^{(5)}| < \frac{c}{\nu^2\sqrt{\log n}}\int\limits_{|z|=1-\frac{1}{\nu}}\frac{|dz|}{|1-z|} < \frac{c\log(\nu+1)}{\nu^2\sqrt{\log n}}.$$

From this and (8. 3) we get for $1 \leqq \nu \leqq n$

$$|a_\nu^{(3)}| = \left|a_\nu^{(4)}+a_\nu^{(5)}+\sum_{j=1}^{\nu-1} a_j^{(4)} a_{\nu-j}^{(5)}\right| <$$

$$< c\left\{\frac{1}{\nu\log^{\frac{3}{2}} n}+\frac{1}{\nu^2\sqrt{\log n}}+\frac{1}{\log^2 n}\sum_{j=1}^{\nu-1}\frac{\log(j+1)}{j^2(\nu-j)}\right\} =$$

$$= c\left\{\frac{1}{\nu\log^{\frac{3}{2}} n}+\frac{1}{\nu^2\sqrt{\log n}}+\frac{1}{\log^2 n}\left(\sum_{j\leqq\frac{\nu}{2}}+\sum_{\frac{\nu}{2}<j\leqq\nu-1}\right)\right\} < c\left(\frac{1}{\nu\log^{\frac{3}{2}} n}+\frac{1}{\nu^2\sqrt{\log n}}\right).$$

Hence the representation (7. 1)—(7. 2) takes the form

$$\varphi_n(t) = \exp\left\{-\frac{it}{2}\sqrt{\log n}\right\} \text{coeffs } z^n \text{ in } h(z)\left\{1+\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{(3)} z^\nu\right\} \tag{8. 4}$$

with

$$h(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{1-z} \exp\left\{\frac{it}{2\log^{\frac{3}{2}} n}\log^2\frac{1}{1-z} - \frac{t^2}{6\log^3 n}\log^3\frac{1}{1-z}\right\} \tag{8. 5}$$

where for $1 \leqq \nu \leqq n$

$$|a_\nu^{(3)}| < c\left(\frac{1}{\nu\log^{\frac{3}{2}} n} + \frac{1}{\nu^2\sqrt{\log n}}\right). \tag{8. 6}$$

9. Now we turn to the study of the coefficients e_m of the Mac—Laurin series of $h(z)$ for $m \leqq n$. This will be based on the integral-representation

$$e_m = \frac{1}{2\pi i}\int_{(L_1)} z^{-m-1} h(z)\,dz \tag{9. 1}$$

where L_1 means the following path. Cutting the plane along the segment $1+\frac{1}{m} \leqq$ $\leqq z < \infty$ it comes from $z=2$ till $z=1+\frac{1}{m}$ along the lower part of the cut, then encircles $z=1$ by the circle $|z-1| = \frac{1}{m}$ clockwise, it goes from $z=1+\frac{1}{m}$ to $z=2$ along the upper part of the cut and is finished by the arc of the circle $|z|=2$ in the cut-plane. The contribution of the circle $|z|=2$ is evidently absolutely

$$< c \cdot 2^{-m}. \tag{9. 2}$$

We shall investigate separately the contributions of the segments and the circle $|z-1| = \frac{1}{m}$, respectively.

Sixth step. Using (3. 3) and (3. 4) $h(z)$ is on the upper slit

$$= \exp\left\{\frac{it}{2}\frac{\left(\log\frac{1}{r-1}+i\pi\right)^2}{\log^{\frac{3}{2}} n} - \frac{t^2}{6\log^3 n}\left(\log\frac{1}{r-1}+i\pi\right)^3\right\} \tag{9. 3}$$

on the lower one

$$= \exp\left\{\frac{it}{2}\cdot\frac{\left(\log\frac{1}{r-1}-i\pi\right)^2}{\log^{\frac{3}{2}} n} - \frac{t^2}{6\log^3 n}\left(\log\frac{1}{r-1}-i\pi\right)^3\right\}. \tag{9. 4}$$

We write the expression in (9. 3) as

$$\exp\left\{\frac{it}{2}\frac{\log^2\frac{1}{r-1}}{\log^{\frac{3}{2}} n}-\frac{t^2}{6}\frac{\log^3\frac{1}{r-1}}{\log^3 n}-\frac{\pi^2 it}{2\log^{\frac{3}{2}} n}+\frac{\pi^2 t^2\log\frac{1}{r-1}}{2\log^3 n}\right\}\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{-\frac{\pi t\log\frac{1}{r-1}}{2\log^{\frac{3}{2}} n}-\frac{i\pi t^2\log^2\frac{1}{r-1}}{2\log^3 n}+\frac{t^2\pi^3 i}{6\log^3 n}\right\}$$

and (9. 4) in the form

$$\exp\left\{\frac{it}{2}\cdot\frac{\log^2\frac{1}{r-1}}{\log^{\frac{3}{2}} n}-\frac{t^2}{6}\frac{\log^3\frac{1}{r-1}}{\log^3 n}-\frac{\pi^2 it}{2\log^{\frac{3}{2}} n}+\frac{\pi^2 t^2\log\frac{1}{r-1}}{2\log^3 n}\right\}\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{\pi t\log\frac{1}{r-1}}{2\log^{\frac{3}{2}} n}+\frac{i\pi t^2\log^2\frac{1}{r-1}}{2\log^3 n}-\frac{t^2\pi^3 i}{6\log^3 n}\right\}.$$

The difference of these is for $1+\frac{1}{m}\leqq r\leqq 2$, $m\leqq n$ absolutely

$$<\frac{c}{\sqrt{\log n}}$$

and thus the contribution of the segment integrals is absolutely

$$(9.5)\qquad <\frac{c}{\sqrt{\log n}}\int_{1+\frac{1}{m}}^{2}\frac{dr}{(r-1)r^{m+1}}.$$

As to this last integral, we have

$$\int_{1+2\frac{\log m}{m}}^{2}\frac{dr}{r^{m+1}(r-1)}<\frac{c}{m^2}\int_{1+\frac{1}{m}}^{2}\frac{dr}{r-1}<c\,\frac{\log m}{m^2}$$

and further

$$\int_{1+\frac{1}{m}}^{1+2\frac{\log m}{m}}\frac{dr}{r^{m+1}(r-1)}<\int_{1+\frac{1}{m}}^{1+2\frac{\log m}{m}}\frac{dr}{r-1}<c\log\log m,$$

hence the contribution of the segments is absolutely

$$(9.6)\qquad <c\,\frac{\log\log n}{\sqrt{\log n}}.$$

10. *Seventh step.* We consider the integral on $|z-1| = \dfrac{1}{m}$. This is

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\exp\left\{\dfrac{it}{2\log^{\frac{3}{2}} n}(\log m + i(\pi-\varphi))^2 - \dfrac{t^2}{6\log^3 n}(\log m + i(\pi-\varphi))^3\right.}{\left(1+\dfrac{1}{m}e^{i\varphi}\right)^{m+1}}\, d\varphi$$

and hence for $m \leqq n$

$$= \frac{1}{2\pi}\exp\left\{\frac{it\log^2 m}{\log^{\frac{3}{2}} n} - \frac{t^2\log^3 m}{6\log^3 n}\right\}\cdot \int_0^{2\pi}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{\log n}}\right)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(1+O\left(\frac{1}{m}\right)\right)\exp(-e^{i\varphi})\, d\varphi.$$

Since

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(-e^{i\varphi})\, d\varphi = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\frac{(-1)^\nu}{\nu!}\int_0^{2\pi} e^{\nu i\varphi}\, d\varphi = 1$$

we get for this integral the value

$$\exp\left\{\frac{it\log^2 m}{2\log^{\frac{3}{2}} n} - \frac{t^2\log^3 m}{6\log^3 n}\right\} + O\left\{\frac{1}{\sqrt{\log n}}\right\} + O\left(\frac{1}{m}\right). \tag{10. 1}$$

This and (9. 6) give for $m \leqq n$

$$e_m = \exp\left\{\frac{it\log^2 m}{2\log^{\frac{3}{2}} n} - \frac{t^2\log^3 m}{6\log^3 n}\right\} + O\left(\frac{1}{m}\right) + O\left(\frac{\log\log n}{\sqrt{\log n}}\right). \tag{10. 2}$$

What we actually need is the case $m=n$

$$e_n = \exp\left\{\frac{it\sqrt{\log n}}{2} - \frac{t^2}{6}\right\} + O\left(\frac{\log\log n}{\sqrt{\log n}}\right) \tag{10. 3}$$

and for $m \leqq n$ the inequality

$$|e_m| < c. \tag{10. 4}$$

11. The next (short) *eigtht step* is the determination of $\varphi_n(t)$ based on the representation (8. 4) and on the inequalities (8. 6), (10. 3) and (10. 4). (8. 4) gives

$$\varphi_n(t) = \left\{e_n + \sum_{m=1}^{n-1} e_{n-m}a_m^{(3)} + a_n^{(3)}\right\}\exp\left\{\frac{-it\sqrt{\log n}}{2}\right\}$$

i.e. for $-t_0 \leqq t \leqq t_0$

$$\left|\varphi_n(t) - e^{-\frac{1}{6}t^2}\right| < \frac{c\log\log n}{\sqrt{\log n}}. \tag{10. 5}$$

The *ninth step* is the application of a classical theorem of the calculus of probability. This gives for the distribution-function $F_n(x)$ in (4. 1) the relation

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{3}{2}\lambda^2}\, d\lambda \overset{\text{def}}{=} F(x). \tag{10. 6}$$

The last *tenth step* will be the application of our theorem exposed in (2. 3). We have to compare the distribution $K(n, x)$ in our theorem with $F_n(x)$ and $F(x)$ in (10. 6), respectively. (2. 3) gives at once for all n's and real x's

$$K(n, x) \geqq n!\, F_n(x)$$

i.e. for $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{K(n, x)}{n!} \geqq F(x). \tag{10. 7}$$

On the other hand, fixing x and an arbitrarily small $\varepsilon>0$ we have for $n>n_0(\varepsilon, x)$ the inequality

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\log^2 n + x\log^{\frac{3}{2}} n + 3\log n\,(\log\log n)^4\right\} < \exp\left\{\frac{1}{2}\log^2 n + (x+\varepsilon)\log^{\frac{3}{2}} n\right\}$$

i.e. using again (2. 3)

$$n!\big(1 - F_n(x+\varepsilon)\big) < \varepsilon\, n! + \big(n! - K(n, x)\big).$$

Hence for $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{K(n, x)}{n!} \leqq \varepsilon + F(x+\varepsilon). \tag{10. 8}$$

Since ε was arbitrarily small positive, the theorem is proved.

(Received 8 July 1966)

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (3—4), 1967, pp. 321—328.

OPERATIONS WITH STRUCTURES

By

L. LOVÁSZ (Budapest)

(*Presented by* A. RÉNYI)

Introduction

We deal in this paper with (relational) structures $\langle H, R_1, \dots, R_l \rangle$ with finitely many finitary relations over a set H. H is not necessarily non-empty. We shall consider only the case when $l=1$, i.e. structures of form $\langle H, R \rangle$ but our results extend without difficulty for the general case.

Our main concern will be in the direct product of finite structures (i.e. $\langle H, R \rangle$ with finite domain H). In [1] the question was discussed under what conditions it is true that any two direct factorizations of a structure have a common refinement. It was mentioned that if the structures A, B have this "refinement-property" then e.g. $A^2 \cong B^2$ implies $A \cong B$. We shall prove a general theorem from which it follows that for finite A, B the last implication always holds. On the other hand, it is easy to see that not all finite structures have the refinement-property (or the unique prime factorization-property).

The same is true with an arbitrary natural number n instead of 2. Further, if A, B, C are finite structures, and the relation of C is not irreflexiv (i.e. there is an element c in C such that $R(c, \dots, c)$ holds, where R is the relation of C), then $AC \cong BC$ implies $A \cong B$. Our general result states that under certain conditions, a "polynomial" formed from structures assumes every value only once (up to isomorphism).

In § 1 we define the necessary notions, among them the (cardinal) sum and the (direct) product of two structures and a new operation on structures which will be called exponentiation. This operation has a remarkable resemblance to ordinary exponentiation in the domain of the natural numbers, when we bring it into contact with the sum and the product operation on structures. The relevant identities will be proved in § 2. In § § 1—2 we do not suppose that the structures are finite.

In § 3 we prove our main theorem from which the result mentioned above (concerning "polynomials" of structures) will follow easily. We mention that the operation of exponentiation is not indispensable in our arguments in § 3, i.e. the necessary notions derived from it could be introduced more directly. This will be pointed out on the due place. However, the "exponentiation" seems to us to be very natural in the present context and to be interesting also for its own sake.

§ 1. If N is a set we denote its cardinality by $|N|$. Let φ, ψ be mappings. By $\mathrm{Dom}\,\varphi$, $\mathrm{Rng}\,\varphi$ we denote the definition domain and the range of φ, respectively. The result of application of φ on $a \in \mathrm{Dom}\,\varphi$ is denoted by $a\varphi$. The product $\varphi\psi$ is defined if and only if $\mathrm{Rng}\,\varphi \subseteq \mathrm{Dom}\,\psi$. In this case $\mathrm{Dom}\,(\varphi\psi) = \mathrm{Dom}\,\varphi$ and $\varphi\psi$ is determined by the equation $a(\varphi\psi) = (a\varphi)\psi$ $(a \in \mathrm{Dom}\,\varphi = \mathrm{Dom}\,\varphi\psi)$. If φ is one-to-one then φ^{-1} is defined by $(a\varphi^{-1})\varphi = a$ $(a \in \mathrm{Rng}\,\varphi)$. We have in this case $\mathrm{Dom}\,\varphi^{-1} = \mathrm{Rng}\,\varphi$, $\mathrm{Rng}\,\varphi^{-1} = \mathrm{Dom}\,\varphi$. If $M \subseteq \mathrm{Dom}\,\varphi$ then $M\varphi = \{x\varphi : x \in M\}$.

Let k be a natural number, $k \geqq 1$. By a *k-dimensional structure* we mean a pair $\langle S, R\rangle$, where S is a set and $R \subseteqq S^k$. S is the *domain* and R is the *relation* of $A = \langle S, R\rangle$. S and R are also denoted by $S(A)$ and $R(A)$ in dependence of A. The elements of A are the elements of $S(A)$. Obviously, for $k=2$, the 2-dimensional structures are the directed graphs without parallel edges. On the other hand, if $\mathscr{S}$ is an algebraic structure with domain S and finitary operations $m_1, \ldots, m_l$ then we can correspond to $\mathscr{S}$ the $k+l$ dimensional structure $\langle S, R\rangle$ where k is the maximum of the numbers k_i of places of m_i $(i=1, \ldots, l)$ and R is defined as the set of the $k+l$ tuples $\langle x_1, \ldots, x_k, m_1(x_1, \ldots, x_{k_1}), \ldots, m_l(x_1, \ldots, x_{k_l})\rangle$. What is important for us is that this correspondence is a one-to-one and is preserved under isomorphism and direct product. Hence our results in § 4 extend also to finite algebraic structures.

In what follows we consider structures of a fixed dimension k. By A, B, C, D, E, F, G (possibly with indices) we always mean structures.

If $S(A) = \emptyset$, $R(A) = \emptyset$ then we denote A by O. $A_p^{(k)}$ is the structure with the domain consisting of the natural numbers $1, 2, \ldots, p$ and with the identity relation; i.e. $(x_1, \ldots, x_k) \in R(A_p^{(k)})$ if and only if $x_1 = \ldots = x_k$.

We denote the set of elements x of the structure such that $(x, \ldots, x) \in R(A)$ by $Q(A)$.

Let M, N be sets, $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ mappings of M into N (i.e. Dom $\varphi_i = M$, Rng $\varphi_i \subseteqq N$). $[\varphi_1, \ldots, \varphi_k]$ denotes that mapping of M^k into N^k for which the image of $(x_1, \ldots, x_k) \in M^k$ is $(x_1\varphi_1, \ldots, x_k\varphi_k) \in N^k$.

If A is a structure and for the mapping φ we have Dom $\varphi = S(A)$ then $B = A\varphi$ denotes the structure defined as follows. $S(A\varphi) = S(A)\varphi = \text{Rng}\, \varphi$, $R(A\varphi) = \{(x_1, \ldots, x_k)[\varphi, \ldots, \varphi] \colon (x_1, \ldots, x_k) \in R(A)\}$. In this case we call φ a *homomorphism of A onto B*. If, in addition, φ is one-to-one, then φ is *isomorphism of A onto B*, and we write $A \cong B$. $H(A, B)$ will denote the set of all homomorphisms of A onto B.

Let $e = (x_1, \ldots, x_k)$, $f = (y_1, \ldots, y_k)$. Then $e \cdot f$ denotes $((x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k))$. Similarly, if $\langle x_1, x_2, \ldots\rangle, \langle y_1, y_2, \ldots\rangle$ are vectors of the same (finite or infinite) length then $\langle x_1, x_2, \ldots, \ldots\rangle \cdot \langle y_1, y_2, \ldots\rangle = \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\rangle$.

Let A and B be structures. If $A' \cong A$ and $B' \cong B$, furthermore A' and B' have no element in common then the structure C defined by $S(C) = S(A') \cup S(B')$ and $R(C) = R(A') \cup R(B')$ is called a *(cardinal) sum* of A and B. Obviously, all cardinal sums of A and B are isomorphic. Therefore we may denote an arbitrary one of them by $A+B$ and this indeterminacy will not cause any difficulty. Certainly, in case $S(A) \cap S(B) = \emptyset$ we define $A+B$ by putting $A' = A$, $B' = B$ in the above construction. AB is the *direct product* of A and B, i.e. $S(AB) = S(A) \cdot S(B)$ (where for any sets M, N $M \cdot N$ means the cartesian product of M and N) and if $e \in S(A)^k$, $f \in S(B)^k$ then $e \cdot f \in R(A \cdot B)$ if and only if $e \in R(A)$ and $f \in R(B)$.

To define the exponentiation, we mean by A^B the structure for which $S(A^B) = S(A)^{S(B)}$ (i.e. the set of all mappings of $S(B)$ into $S(A)$) and if $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in S(A^B)$ then $(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) \in R(A^B)$ is equivalent to $R(B)[\varphi_1, \ldots, \varphi_k] \subseteqq R(A)$.

We remark that the following are identically true:

$$A+O \cong O+A \cong A, \quad A_p^{(k)} \cdot A \cong A \cdot A_p^{(k)} \cong A \cdot p = \underbrace{A}_{1} + \ldots + \underbrace{A}_{p},$$

$$A_1^{(k)} \cdot A \cong A \cdot A_1^{(k)} \cong A,$$

$$O \cdot A \cong A \cdot O \cong O, \quad A^{A_p^{(k)}} \cong A^p,$$

$$A^{A_1^{(k)}} \cong A, \quad (A_p^{(k)})^{A_q^{(k)}} \cong A_{p^q}^{(k)},$$

$$(A_1^{(k)})^A \cong A_1^{(k)},$$

$$A^0 \cong A_1^{(k)}.$$

Concerning the product of structures we mention that every element of $S(AB)^k$ can be written in the form ef with $e \in S(A)^k$, $f \in S(B)^k$ in a unique way. B is called a *substructure* of A and we write $B \subseteq A$ if $S(B) \subseteq S(A)$ and $R(B) \subseteq R(A)$. This notion is more general then the usual notion of substructure, namely, in the case of the latter we require $R(B) = R(A) \cap S(B)^k$.

In § 3 the expression $Q(A^B)$ will play a central role. It is seen that $Q(A^B)$ consists of all $\varphi \in S(A)^{S(B)}$ for which $B\varphi \subseteq A$. Therefore we might call the elements of $Q(A^B)$ *homomorphisms of B into A*. $F(B, A)$ will denote the elements of $Q(A^B)$ which are one-to-one mappings. Similarly, the elements of $F(B, A)$ can be called isomorphisms of B into A.

Finally, we call a structure *connected* if it cannot be split up into a sum of two structures neither of which is 0. In case $k=2$ this is the notion of the graph-theoretic connectedness. If φ is a mapping of $S(A)$ and A is connected, then obviously so is $A\varphi$.

§ **2.** We enumerate the basic identities for the addition, the multiplication and the exponentiation of structures.

(2. 1) The following are identically true:

(2. 1. 1)	$A+B \cong B+A$	(2. 1. 2)	$(A+B)+C \cong A+(B+C)$
(2. 1. 3)	$AB \cong BA$	(2. 1. 4)	$(AB)C \cong A(BC)$
(2. 1. 5)	$A(B+C) \cong AB+AC$	(2. 1. 6)	$A^{B+C} \cong A^B \cdot A^C$
(2. 1. 7)	$(AB)^C \cong A^C B^C$	(2. 1. 8)	$A^{BC} \cong (A^B)^C$.

The relations including only the addition and multiplication are well known, so we confine ourselves to the proof of (2. 1. 6)—(2. 1. 8).

Proof of (2. 1. 6). We may suppose that B and C have no element in common. If $\varphi \in S(A^{B+C})$ then we can associate with φ the pair (σ, τ) in a one-to-one way such that $\sigma \in S(A^B)$, $\tau \in S(A^C)$ and $x\varphi = x\sigma$ if $x \in S(B)$ and $x\varphi = x\tau$ if $x \in S(C)$. Obviously, the pairs (σ, τ) associated to all $\varphi \in S(A^{B+C})$ exhaust the set $S(A^B \cdot A^C)$. With this correspondence, the mapping ψ defined by $\varphi\psi = (\sigma, \tau)$ is an isomorphism of A^{B+C} onto $A^B \cdot A^C$. To show this, let $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in S(A^{B+C})$, $\varphi_i\psi = (\sigma_i, \tau_i)$ $(i=1, \ldots, k)$. In this case

$$R(B+C)[\varphi_1, \ldots, \varphi_k] =$$

$$= R(B)[\varphi_1, \ldots, \varphi_k] \cup R(C)[\varphi_1, \ldots, \varphi_k] = R(B)[\sigma_1, \ldots, \sigma_k] \cup R(C)[\tau_1, \ldots, \tau_k].$$

Therefore $R(B+C)[\varphi_1, \ldots, \varphi_k] \subseteq R(A)$ if and only if $R(B)[\sigma_1, \ldots, \sigma_k] \subseteq R(A)$ and $R(C)[\tau_1, \ldots, \tau_k] \subseteq R(A)$. Hence we have $(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) \in R(A^{B+C})$ if and only if $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k) \in R(A^B)$ and $(\tau_1, \ldots, \tau_k) \in R(A^C)$, i.e. if $((\sigma_1, \tau_1), \ldots, (\sigma_k, \tau_k)) = (\varphi_1, \ldots, \ldots, \varphi_k)[\psi, \ldots, \psi] \in R(A^C \cdot B^C)$. Q.e.d.

(2. 1. 7) If $\varphi \in S(AB)^{S(C)}$ then we can associate with φ in a one-to-one way the pair (σ, τ) $(\sigma \in S(A^C), \tau \in S(B^C))$ such that for every $y \in S(C)$ $y \cdot \varphi = (y\sigma, y\tau)$. The mapping ψ defined by $\varphi\psi = (\sigma, \tau)$ is one-to-one and maps $S((AB)^C)$ onto $S(A^C B^C)$. We show that ψ is an isomorphism. Let $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in S((AB)^C)$ and $\varphi_i\psi = (\sigma_i, \tau_i)$ $(i = 1, \ldots, k)$. If e is any element of $S(C)^k$ then

$$e[\varphi_1, \ldots, \varphi_k] = e[\sigma_1, \ldots, \sigma_k] \cdot e[\tau_1, \ldots, \tau_k]. \tag{1}$$

$(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) \in R((AB)^C)$ if and only if the expression on left hand side of (1) is an element of $R(AB)$ for any $e \in R(C)$, i.e., by (1), if for any $e \in R(C)$ we have $e[\sigma_1, \ldots, \ldots, \sigma_k] \in R(A)$ and $e[\tau_1, \ldots, \tau_k] \in R(B)$. The last condition is equivalent to saying that $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k) \in R(A^C)$ and $(\tau_1, \ldots, \tau_k) \in R(B^C)$, or in other words that $(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) \cdot \cdot [\psi, \ldots, \psi] = ((\sigma_1, \tau_1), \ldots, (\sigma_k, \tau_k)) \in R(A^C B^C)$. Our proof is complete.

(2. 1. 8) First we prove that for any $\xi \in S(A^{BC})$ there is exactly one $\varphi \in S((A^B)^C)$ and conversely, for any $\varphi \in S((A^B)^C)$ there is exactly one $\xi \in S(A^{BC})$ such that

$$(x, y)\xi = x(y\varphi) \tag{2}$$

is true for any $x \in S(B)$ and $y \in S(C)$. The unicity in both directions and the existence of the appropriate ξ for given φ are obvious. It remains to show that for any appropriate ξ there exists a φ. Let $y \in S(C)$. Let τ_y be the mapping of $S(B)$ into $S(A)$ satisfying $x\tau_y = (x, y)\xi$ for any $x \in S(B)$. Then the mapping φ defined by $y\varphi = \tau_y$ is the required one.

We prove that the mapping ψ, defined by $\xi = \varphi\psi$, where $\varphi \in S((A^B)^C)$ $\xi \in S(A^{BC})$ and (2) holds, is an isomorphism. Indeed

$$(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) \in R((A^B)^C)$$

if and only if for any $e \in R(C)$

$$e[\varphi_1, \ldots, \varphi_k] \in R(A^B).$$

This is equivalent to that for every $e \in R(C), f \in R(B)$

$$f[e[\varphi_1, \ldots, \varphi_k]] \in R(A). \tag{3}$$

Applying (2) for the components of the vector standing on the left hand side of the last formula, we obtain

$$f[e[\varphi_1, \ldots, \varphi_k]] = (f \cdot e)[\varphi_1\psi, \ldots, \varphi_k\psi].$$

This means that the assertion that (3) holds for every $e \in R(C), f \in R(B)$ is the same as

$$(\varphi_1\psi, \ldots, \varphi_k\psi) = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)[\psi, \ldots, \psi] \in R(A^{BC})$$

what was to be proved.

We have finished the verification of (2. 1).

We close this section with three simple remarks.

(2. 2) If D is connected and $S(A)$, $S(B)$ are disjoint then we have $Q((A+B)^D) = Q(A^D) \cup Q(B^D)$. The $\supset$ inclusion is obvious. Conversely, if $\varphi \in Q((A+B)^D)$ then $D\varphi$ is a connected substructure of $A+B$, therefore $D\varphi \subseteq A$ or $D\varphi \subseteq B$.

(2. 3) $Q(AB) = Q(A)Q(B)$.

(2. 4) If $Q(A)$ is non empty, then so is $Q(A^B)$. Indeed, if $x \in Q(A)$ then the mapping of $S(B)$ which maps every element of B into x is an element of $Q(A^B)$.

§ 3. In this section we deal with finite structures. The operations $A\varphi$, $A+B$, $A \cdot B$, A^B applied to finite A, B give again finite structures. Furthermore, the following are obviously true:

(3. 1) A finite structure has finitely many different substructures.

(3. 2) Every finite structure can be written uniquely as the sum of connected substructures.

(3. 3) If both of two structures are isomorphic to a substructure of the other, then the two structures are isomorphic to each other.

(3. 4) If φ is a mapping of $S(D)$ then $|S(D\varphi)| \leqq |S(D)|$ and here equality holds if and only if φ is one-to-one.

(3. 5) If $\varphi \in H(G, G)$ i.e. φ is a homomorphism of G onto itself, then φ is an isomorphism of G onto G, i.e. an automorphism of G.

Our main aim is to prove the following theorem.

(3. 6) THEOREM. *With every finite structure A we can associate an infinite vector $\langle A \rangle$ of type ω whose components are natural numbers and the following are satisfied:*

(i) $\langle A+B \rangle = \langle A \rangle + \langle B \rangle$,

(ii) $\langle AB \rangle = \langle A \rangle \cdot \langle B \rangle$,

(iii) *If $Q(A)$ is non-empty, then all components of $\langle A \rangle$ are non-zero.*

(iv) $\langle A \rangle = \langle B \rangle$ *if and only if* $A \cong B$.

Let us select a series $D_1, D_2, \dots$ of connected finite structures such that for $i \neq j$ D_i is not isomorphic to D_j but every connected finite structure is isomorphic to one of $D_1, D_2, \dots$. Then we can make the following addition to (3. 6):

For the i-th component of $\langle A \rangle$ we can take $|Q(A^{D_i})|$.

PROOF. The statements (i), (ii), (iii) assert that

$$|Q((A+B)^{D_i})| = |Q(A^{D_i})| + |Q(B^{D_i})|;$$

$$|Q((AB)^{D_i})| = |Q(A^{D_i})|\,|Q(B^{D_i})|;$$

and if $|Q(A)| > 0$ then $|Q(A^{D_i})| > 0$. These follow from (2. 2), (2. 1. 7), (2. 3), (2. 4) directly.

We remark that (ii) could be shown more directly, without the notion of exponentiation but using the alternative characterization of $Q(A^D)$ given at the end of § 1 as a definition.

Obviously, $A \cong B$ implies $\langle A \rangle = \langle B \rangle$. Therefore it suffices to prove the following:

If for every connected D

$$|Q(A^D)| = |Q(B^D)|, \tag{4}$$

then $A \cong B$.

Suppose that for every connected D (4) holds. Let C be an arbitrary structure. By (3. 2) we have $C = C_1 + \dots + C_r$ where $C_1, \dots, C_r$ are connected. Using (2. 1. 6) and (2. 3)

$$|Q(A^C)| = |Q(A^{C_1})| \dots |Q(A^{C_r})| = |Q(B^{C_1})| \dots |Q(B^{C_r})| = |Q(B^C)|,$$

i.e. (4) holds for arbitrary (not necessarily connected) structures. Therefore it is sufficient to show that

If for every D

(5) $$|Q(A^D)| = |Q(B^D)|$$

then $A \cong B$.

Suppose that (5) holds for every D. By (3. 3) it is sufficient to prove that A and B are isomorphic to a substructure of the other, i.e. that $|F(A, B)| > 0$ and $|F(B, A)| > 0$.

This will follow from $|F(A, B)| = |F(A, A)|$ and $|F(B, A)| = |F(B, B)|$. More generally we shall show that $|F(D, A)| = |F(D, B)|$ for every D.

Let $G_1, G_2, G_3, \ldots$ be a sequence of finite structures such that no two of them are isomorphic, and every finite structure is isomorphic to a G_i.

I. First we deduce the following formula

(6) $$|Q(A^D)| = \sum_i \frac{|H(D, G_i)|}{|H(G_i, G_i)|} |F(G_i, A)|.$$

By (3. 1), the sum on the right hand side of the formula contains only finitely many members different from 0. If φ is a mapping of $S(D)$, then $D\varphi$ is isomorphic to exactly one G_i. Let Q_i be the subset of $Q(A^D)$ consisting of those φ for which $D\varphi \cong G_i$. Then obviously $|Q(A^D)| = \sum_i |Q_i|$. Hence (6) will follow from

(7) $$|Q_i| = \frac{|H(D, G_i)|}{|H(G_i, G_i)|} |F(G_i, A)|.$$

For any $\varphi \in Q_i$ we consider the set X_φ of all pairs (ξ, ψ) such that $\xi \in H(D, G_i)$, $\psi \in F(G_i, A)$ and $\varphi = \xi\psi$. We show that (a) for any φ there are exactly $|H(G_i, G_i)|$ elements in X_φ and (b) for different mappings φ_1, φ_2 $X_{\varphi_1} \cap X_{\varphi_2} = \emptyset$, and finally, (c) every pair (ξ, ψ) with $\xi \in H(D, G_i)$ and $\psi \in F(G_i, A)$ is an element of an X_φ for some $\varphi \in Q_i$. (b) and (c) are trivial. We deal with (a). For $\varphi \in Q_i$ X_φ is non-empty since by $D\varphi \cong G_i$ there is an isomorphism ψ with $D\varphi = G_i\psi$, consequently $\psi \in F(G_i, A)$, and if we put $\xi = \varphi \cdot \psi^{-1} \in H(D, G_i)$ then $\varphi = \xi\psi$.

On the other hand, let $\varphi = \xi\psi$, $\xi \in H(D, G_i)$, $\psi \in F(G_i, A)$. If $\alpha \in H(G_i, G_i)$ then by (3. 5) we can write $\varphi = (\xi\alpha)(\alpha^{-1}\psi)$ and here we have $\xi\alpha \in H(D, G_i)$, $\alpha^{-1}\psi \in F(G_i, A)$. Consequently, with $(\xi, \psi) \in X_\varphi$ we have also $(\xi\alpha, \alpha^{-1}\psi) \in X_\varphi$ for all $\alpha \in H(G_i, G_i)$.

For different $\alpha_1, \alpha_2 \in H(G_i, G_i)$ $\xi\alpha_1 \neq \xi\alpha_2$ is clearly true, using $\mathrm{Rng}\, \xi = G_i$. Therefore the set $X'_\varphi = \{(\xi\alpha, \alpha^{-1}\psi) : \alpha \in H(G_i, G_i)\}$ is a subset of X_φ and has the cardinality $|H(G_i, G_i)|$. To complete our proof it is sufficient to show $X_\varphi \subseteq X'_\varphi$. Let $\varphi = \xi\psi = \xi'\psi'$ where $\xi' \in H(D, G_i)$ and $\psi' \in F(G_i, A)$. Then $\alpha = \psi\psi'^{-1}$ is defined and $\alpha \in H(G_i, G_i)$, furthermore $\xi' = \xi\alpha$ and $\psi' = \alpha^{-1}\psi$. Therefore we have really $X_\varphi \subseteq X'_\varphi$ and thus $X_\varphi = X'_\varphi$. We have completed the proof of the assertion (a).

To sum up our considerations, (a), (b), (c) show that the sets X_φ for different $\varphi \in Q_i$ form a partition of a set with the cardinality $|H(D, G_i)|\,|F(G_i, A)|$ into disjoint subsets, furthermore all X_φ have the same cardinality $|H(G_i, G_i)|$. This gives (7), and as mentioned above, also (6).

Suppose now that $|Q(A^D)| = |Q(B^D)|$ for every D.

II. We prove by induction on $|S(D)|$ that $|F(D, A)| = |F(D, B)|$. For $|S(D)| = 0$ this is obvious, for $|S(D)| = 1$ we have $|F(D, A)| = |Q(A^D)| = |Q(B^D)| = |F(D, B)|$.

Suppose that our assertion is true for any D' such that $|S(D')|<|S(D)|$. By (3. 4), (6) can be written in the form

$$|Q(A^D)| = |F(D, A)| + \sum_{\substack{i \\ |S(G_i)|<|S(D)|}} \frac{|H(D, G_i)|}{|H(G_i, G_i)|} |F(G_i, A)|.$$

Therefore

$$|F(D, A)| - |F(D, B)| = \sum_{\substack{i \\ |S(G_i)|<|S(D)|}} \frac{|H(D, G_i)|}{|H(G_i, G_i)|} (|F(G_i, B)| - |F(G_i, A)|)$$

and by the induction hypothesis the right hand side is equal to 0, thus $|F(D, A)| = |F(D, B)|$.

By the remarks given above we have finished the proof of (3. 6).

§ 4. We prove the result mentioned in the introduction.

(4. 1) THEOREM. *If $C_0, \dots, C_n$ are finite structures and $|Q(C_1+\dots+C_n)|>0$ then for the "polynomial" $f(A)=C_0+C_1A+\dots+C_nA^n$ we have that $f(A)\cong f(B)$ implies $A\cong B$ (A, B are finite structures).*

Taking $C_0=\dots=C_{n-1}=0$, $C_n=A_1^{(k)}$ we get

(4. 2) If A and B are finite structures and $A^n\cong B^n$ then $A\cong B$.

Taking $n=1$, $C_0=0$ we obtain

(4. 3) If A, B, C are finite structures and $Q(C)$ is non-empty then $AC\cong BC$ implies $A\cong B$.

PROOF OF (4. 1). Let $f(A)\cong f(B)$. We have by (3. 6) $\langle f(A)\rangle=\langle f(B)\rangle$. We introduce the notations $\langle A\rangle=\langle a_1, \dots\rangle, \langle B\rangle=\langle b_1, \dots\rangle, \langle C_i\rangle=\langle c_{i1}, \dots\rangle$. Then by (3. 6)

$$c_{0j}+c_{1j}a_j+\dots+c_{nj}a_j^n = c_{0j}+c_{1j}b_j+\dots+c_{nj}b_j^n \tag{9}$$

for every $j=1, 2, \dots$. There is an i ($i=1, \dots, n$) such that $|Q(C_i)|>0$. This implies $c_{ij}>0$ for every $j=1, 2, \dots$ by (3. 6). Therefore the function $c_{0j}+c_{1j}t+\dots+c_{nj}t^n$ is strictly monotonic and thus (9) gives that $a_j=b_j$ for every $j=1, 2, \dots$.

This means $\langle A\rangle=\langle B\rangle$ and by (3. 6) $A\cong B$, q.e.d.

We note that the condition $|Q(C_1+\dots+C_n)|>0$ cannot be left out from (4. 1). Let namely $k=2$, $S(C)=\{x, y\}$, $R(C)=\{(x, y), (y, x)\}$, $f(A)=CA$. In this case $C\cdot A_2^{(2)}\cong C\cdot C$ but $C\not\cong A_2^{(2)}$. However, I do not know whether this condition can be weakened.

Since the identical mapping of $S(D)$ is always an element of $\varphi(D^D)$ therefore if $AD\cong BD$ then we have $A^DD^D\cong B^DD^D$ and (4. 3) $A^D\cong B^D$. Therefore we can infer from the last example that $(A_2^{(k)})^C\cong C^C$ i.e. the exponentiation does not have an inverse in general.

Finally, we note that the structure $A_2^{(k)}\cdot C\cong C\cdot C$ defined above has two irreducible direct factorizations which are essentially different. The unique prime-factorization property appears not even in case $|Q(A)|>0$ (see [2], [3]).

(Received 8 July 1966)

References

[1] C. C. CHANG, B. JÓNSSON, A TARSKI, Refinement properties for relational structures, *Fund. Math.*, **55** (1964), pp. 249–281.
[2[B. JÓNSSON, Unique factorization problem for finite relational structures, *Colloquium Math.*, **14** (1966), pp. 1—32.
[3] F. B. THOMPSON, Some contributions to abstract algebra and metamathematics, Doctoral dissertation, Berkeley 1951.

Acta Mathematica Acaoemiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (3—4), 1967, pp. 329—333.

NOTE ON A SUBDIRECT REPRESENTATION OF UNIVERSAL ALGEBRAS

By

G. H. WENZEL (University Park, Pennsylvania, USA)

(*Presented by* L. RÉDEI)

§ 1. Introduction and preliminaries

In 1952 L. FUCHS [4] obtained an external characterization of subdirect products with two factors in case of groups, rings and Boolean algebras using W-homomorphisms (first introduced by J. H. M. WEDDERBURN [7] in 1941). I. FLEISCHER [3] showed in 1955 that a universal algebra of any type internally represented as subdirect product of two factor algebras (see G. BIRKHOFF [2]) can be constructed using Fuchs' method if and only if the relevant congruence relations are permutable. In this note we shall introduce the concept of "absolute permutability of congruence relations" which, if substituted for the pairwise permutability in Fleischer's result, yields a characterization of those families of congruences on an algebra which permit Fuchs' construction regardless of the number of factors, and which, if substituted for the pairwise permutability in Birkhoff's characterization of direct products with two factors (see [1]), yields the corresponding internal characterization of direct products with an arbitrary number of factors. A short analysis of the meaning of absolute permutability will show that only an unsatisfactorily small class of subdirect representations can be obtained from W-homomorphisms if more than two factors are involved. This essentially limits the value of W-homomorphisms for the purpose of an external characterization of subdirect product representations. An obvious specialization to groups and rings is given. Before proceeding to the preliminaries I want to express my thanks to Professor G. GRÄTZER for helpful suggestions.

We assume familiarity with such elementary concepts of the theory of universal algebras as homomorphism, direct and subdirect product and the lattice of congruence relations (see e.g. [5], Chapters 0, 3). A (universal) algebra with operations $F=\{f_0, ..., f_\gamma, ...\}_{\gamma<\alpha}$ on the set A is denoted by $\mathfrak{A}=\langle A; F\rangle$, its congruence lattice by $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$, the universal relation by ι, the identity relation by ω, the elements in a direct product $\Pi(\mathfrak{A}_i; i\in I)$ by $\langle a_i\rangle_i$. Mappings stand usually behind the elements; only operations make an exception. We make free use of the following generalization of the Chinese Remainder Theorem (see [8], p. 279/280) due to G. GRÄTZER (see [5], Chapter V, exercises): We say that an algebra $\mathfrak{A}$ satisfies C. R. T. $(\theta_1, ..., \theta_n)$ where $\theta_1, ..., \theta_n$ are a finite number of congruences on $\mathfrak{A}$ if for any choice of elements $a_1, ..., a_n$ in A the relations $a_i\equiv a_j \pmod{\theta_i\cup\theta_j}$, $i, j\in I$, imply the solvability of the system of congruences $a_i\equiv x \pmod{\theta_i}$, $i\in I$. C. R. T. $(\theta_1, ..., \theta_n)$ is satisfied in $\mathfrak{A}$ if and only if $\{\theta_1, ..., \theta_n\}$ are pairwise permutable and $\mathfrak{C}([\theta_1, ..., \theta_n])$ is distributive where $\mathfrak{C}([\theta_1, ..., \theta_n])$ denotes the sublattice of $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$ generated by $\theta_1, ..., \theta_n$.

§ 2. Results

DEFINITION 1. The algebras $\mathfrak{A}_i$, $i\in I$, are called *W-homomorphic* under $\{\varphi_i\}$, $i\in I$, if there is an algebra $\mathfrak{B}$ such that $\varphi_i\colon \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{B}$ is an epimorphism for each $i\in I$.

Using this terminology we get immediately

THEOREM 1. *Let $\mathfrak{A}_i$, $i\in I$, be W-homomorphic under $\{\varphi_i\}$, $i\in I$. Then $\mathfrak{A}=\langle A; F\rangle$ with $A=\{\langle a_i\rangle_i;\ a_i\varphi_i=a_j\varphi_j,\ i,j\in I\}$ is a subdirect product of the algebras $\mathfrak{A}_i$.*

PROOF. a) Let $\langle a_i^m\rangle_i$, $0\leqq m\leqq n_\gamma-1$, be in A and let $f_\gamma\in F$ be an n_γ-ary operation. Then

$$f_\gamma(\langle a_i^0\rangle_i, \dots, \langle a_i^{n_\gamma-1}\rangle_i) = \langle f_\gamma(a_i^0, \dots, a_i^{n_\gamma-1})\rangle_i,$$

and

$$f_\gamma(a_i^0, \dots, a_i^{n_\gamma-1})\varphi_i = f_\gamma(a_i^0\varphi_i, \dots, a_i^{n_\gamma-1}\varphi_i) =$$

$$= f_\gamma(a_j^0\varphi_j, \dots, a_j^{n_\gamma-1}\varphi_j) = f_\gamma(a_j^0, \dots, a_j^{n_\gamma-1})\varphi_j$$

for any choice of $i, j\in I$.

Thus, $\mathfrak{A}$ is a subalgebra of $\Pi(\mathfrak{A}_i,\ i\in I)$.

b) Let $i_0\in I$ and $a_{i_0}\in A_{i_0}$. Using the axiom of choice we choose a specified $(a_{i_0}\varphi_{i_0})\varphi_j^{-1}$ in each A_j and take $a_{i_0}=(a_{i_0}\varphi_{i_0})\varphi_{i_0}^{-1}$.

Then $\langle(a_{i_0}\varphi_{i_0})\varphi_i^{-1}\rangle_i$ is an element of A with the i_0-th component a_{i_0}.

This shows that $\mathfrak{A}$ is a subdirect product of the algebras $\mathfrak{A}_i$, $i\in I$, q.e.d.

DEFINITION 2. $\mathfrak{A}$ is said to be the *internal subdirect product* of the $\mathfrak{A}/\theta_i$, $i\in I$, if it is isomorphic to a subdirect product of the $\mathfrak{A}/\theta_i$ under the canonical isomorphism $a\to\langle[a]\theta_i\rangle_i$. In this case we identify a and $\langle[a]\theta_i\rangle_i$.

DEFINITION 3. A subdirect product representation is said to be *W-constructable* if it can be constructed by the method of Theorem 1.

DEFINITION 4. Given a set of congruences $\{\theta_i\}$, $i\in I$, on $\mathfrak{A}$. $\{\theta_i\}$ is said to be *absolutely permutable* if, given any family $\{a_i\}$, $i\in I$, of elements in A, the relations $a_i\equiv a_j \pmod{\bigcup(\theta_i,\ i\in I)}$, $i,j\in I$, imply the existence of an element $c\in A$ such that $c\equiv a_i \pmod{\theta_i}$, $i\in I$.

DEFINITION 5. Let $\mathfrak{A}$ be a subdirect product of the algebras $\mathfrak{A}_i$, $i\in I$, and let $P(\{\bar a_i\})$ be a property which is either true or false for each family $\{\bar a_i\}$, $i\in I$, in A. Then $\mathfrak{A}$ is called a *P-diagonal subdirect product* if $\bar a_\gamma=\langle a_i^\gamma\rangle_i\in A$, $\gamma\in I$, and $P(\{\bar a_\gamma\})$ implies that $\langle a_i^i\rangle_i\in A$.

Since pairwise and absolute permutability are clearly equivalent in case of two factors, the following theorem is the announced extension of Fleischer's result. We agree to denote by $\underset{\sim}{\theta}(\{a_i\})$ the property that $a_i\equiv a_j \pmod{\theta}$ for $i,j\in I$, $a_i\in A$, and a congruence θ on $\mathfrak{A}$.

THEOREM 2. *Let $\{\theta_i\}$, $i\in I$, be a given family of congruences on $\mathfrak{A}$ and $\theta=\bigcup(\theta_i,\ i\in I)$. Then the following statements are equivalent:*

1) *$\mathfrak{A}$ is the internal subdirect product of the $\mathfrak{A}/\theta_i$, $i\in I$, and as such W-constructable.*

2) (i) $\bigcap(\theta_i,\ i\in I)=\omega$, (ii) *$\{\theta_i\}$, $i\in I$, is absolutely permutable.*

3) *$\mathfrak{A}$ is the internal subdirect product of the $\mathfrak{A}/\theta_i$, $i\in I$, and as such θ-diagonal.*

PROOF. 1)$\Rightarrow$2): Assume that there is an algebra $\mathfrak{B}$ and a set of epimorphisms φ_i: $\mathfrak{A}/\theta_i \to \mathfrak{B}$ such that $A = \{\langle [a_i]\theta_i \rangle_i;\ [a_i]\theta_i \varphi_i = [a_j]\theta_j \varphi_j$ for all $i, j \in I\}$ (we identify a and $\langle [a]\theta_i \rangle_i$). If Π_i: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/\theta_i$ are the natural projections, then we denote $\tau_i = \Pi_i \varphi_i$, $i \in I$, and agree that $\hat{\tau}_i$, $i \in I$, stands for the congruence relation on $\mathfrak{A}$ induced by τ_i. Thus, $\langle [a]\theta_i \rangle_i \equiv \langle [b]\theta_i \rangle_i \pmod{\hat{\tau}_{i_0}}$ if and only if $[a]\theta_{i_0}\varphi_{i_0} = [b]\theta_{i_0}\varphi_{i_0}$ for all $i_0 \in I$. Since, by assumption, $[a]\theta_i \varphi_i = [a]\theta_j \varphi_j$ for all $i, j \in I$, the relation $\langle [a]\theta_i \rangle_i \equiv \langle [b]\theta_i \rangle_i \pmod{\hat{\tau}_{i_0}}$ for a specific i_0 is equivalent to the relation $\langle [a]\theta_i \rangle_i = \langle [b]\theta_i \rangle_i \pmod{\hat{\tau}_j}$ for arbitrary $j \in I$. Hence, $\hat{\tau}_i = \hat{\tau}_j$ for any choice of $i, j \in I$, i.e. $\bigcup(\hat{\tau}_i;\ i \in I) = \hat{\tau}_{i_0}$ for any fixed $i_0 \in I$.

Since $\hat{\tau}_i \geqq \theta_i$ for all $i \in I$, we immediately get $\hat{\tau}_{i_0} \geqq \bigcup(\theta_i;\ i \in I) = \theta$ and, as a matter of fact, even $\hat{\tau}_{i_0} = \theta$ (as easily computed). Thus, we can assume that $\mathfrak{B}$ is replaced by $\mathfrak{A}/\theta$ since $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}/\hat{\tau}_{i_0}$. Now let $\{a_i\}$, $i \in I$, be a given family of elements in A and assume that $[a_i]\theta = [a_j]\theta$ for all $i, j \in I$. Then $\langle [a_i]\theta_i \rangle_i$ satisfies $[a_i]\theta_i \varphi_i = [a_j]\theta_j \varphi_j$ for all $i, j \in I$, and the assumed W-constructability guarantees the existence of an element $c \in A$ such that $\langle [a_i]\theta_i \rangle_i = \langle [c]\theta_i \rangle_i$, i.e. $c \equiv a_i \pmod{\theta_i}$. Thus, $\{\theta_i\}$ is absolutely permutable and (ii) holds. (i) is clear.

2)$\Rightarrow$3): (i) implies that $\mathfrak{A}$ is the internal subdirect product. Now let $a^\gamma = \langle [a^\gamma]\theta_i \rangle_i \in A$, $\gamma \in I$, and assume that $a^\gamma \equiv a^\delta \pmod{\theta}$, $\gamma, \delta \in I$. Then the absolute permutability implies the existence of an element $c \in A$ such that $c \equiv a^\gamma \pmod{\theta_\gamma}$, i.e. $\langle [c]\theta_i \rangle_i = \langle [a^i]\theta_i \rangle_i \in A$. Hence, the subdirect product is $\underset{\sim}{\theta}$-diagonal.

3)$\Rightarrow$1): Let Π_i: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/\theta_i$ and φ_i: $\mathfrak{A}/\theta_i \to \mathfrak{A}/\theta$ be the natural projections. Then

$$A = \{\langle [a]\theta_i \rangle_i\} \subseteqq D = \{\langle [a_i]\theta_i \rangle_i;\ [a_i]\theta_i \varphi_i = [a_j]\theta_j \varphi_j\}$$

is immediately seen. Conversely, $\langle [a_i]\theta_i \rangle_i \in D$ implies $[a_i]\theta = [a_j]\theta$ for all $i, j \in I$. Then, by $\underset{\sim}{\theta}$-diagonality, there is an element $c \in A$ such that $a_i \equiv c \pmod{\theta}$, i.e. $\langle [a_i]\theta_i \rangle_i = \langle [c]\underset{\sim}{\theta}_i \rangle_i = c \in A$. Hence, $A = D$, q.e.d.

We get as an immediate corollary an existension of Birkhoff's characterization of direct products in terms of absolute permutability.

COROLLARY. Let $\{\theta_i\}$, $i \in I$, $|I| \geqq 2$, be congruences on the universal algebra $\mathfrak{A}$. Then $\mathfrak{A}$ is a direct product of the factor algebras $\mathfrak{A}/\theta_i$ under the canonical isomorphism $a \to \langle [a]\theta_i \rangle_i$ if and only if

$$\text{(i)}\quad \bigcup(\theta_i,\ i \in I) = \iota, \qquad \text{(ii)}\quad \bigcap(\theta_i;\ i \in I) = \omega, \qquad \text{(iii)}\quad \{\theta_i\},\ i \in I,$$

is absolutely permutable.

PROOF. 1) Assume $\mathfrak{A} \cong \Pi(\mathfrak{A}/\theta_i;\ i \in I)$. Then (i), (ii) are immediate, and $\Pi\mathfrak{A}/\theta_i$ is $\underset{\sim}{\iota}$-diagonal. Thus, (iii) follows from Theorem 2.

2) Assuming (i), (ii), (iii), we conclude from Theorem 2 that the internal subdirect product of the factor algebras $\mathfrak{A}/\theta_i$ is $\underset{\sim}{\iota}$-diagonal, i.e. it is the direct product, q.e.d.

An analysis of the concept of absolute permutability in the finite case yields the following result.

THEOREM 3. *Let $\theta_1, \ldots, \theta_n$ be congruences on $\mathfrak{A}$ yielding an internal subdirect representation of $\mathfrak{A}$. Then $\mathfrak{A}$ is W-constructable if and only if* (i) *$\theta_1, \ldots, \theta_n$ are pairwise permutable,* (ii) *$\mathfrak{C}([\theta_1, \ldots, \theta_n])$ is distributive,* (iii) *$\theta_{i_0} \cup \theta_{j_0} = \bigcup(\theta_i;\ i = 1, \ldots, n)$ for all different pairs $\theta_{i_0}, \theta_{j_0}$ in $\{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$.*

This theorem, particularly (iii), shows the decisive restrictedness of the class of W-constructable subdirect representations.

The theorem follows trivially from the following lemma.

LEMMA. *Let $\theta_1, \dots, \theta_n$ be different congruences on $\mathfrak{A}$. Then $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ is absolutely permutable if and only if the following three conditions hold:*

(i) $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ *is pairwise permutable.*

(ii) $\mathfrak{C}([\theta_1, \dots, \theta_n])$ *is distributive.*

(iii) $\theta_{i_0} \cup \theta_{j_0} = \cup(\theta_i;\ i=1, \dots, n)$ *for all pairs* $1 \leqq i_0 \neq j_0 \leqq n$.

PROOF. 1) First assume that $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ are absolutely permutable. Let $a_1, \dots, a_n$ be any elements in A such that $a_i \equiv a_j \pmod{\theta_i \cup \theta_j}$, $i, j \in I$, then surely $a_i \equiv a_j \pmod{\cup(\theta_i;\ i=1, \dots n)}$. Hence, there is an element $c \in A$ such that $c \equiv a_i$ $\pmod{\theta_i}$. Thus, C. R. T. $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ is satisfied in $\mathfrak{A}$ which implies 1) and 2) (see §1).

In order to prove 3), take any congruence block modulo $\theta = \cup(\theta_i;\ i=1, 2, \dots, n)$, say $B(\theta)$. We obviously can assume $n \geqq 3$. Assume that there are 2 different blocks $B_1(\theta_{i_0} \cup \theta_{j_0})$ and $B_2(\theta_{i_0} \cup \theta_{j_0})$ modulo $\theta_{i_0} \cup \theta_{j_0}$ contained in $B(\theta)$. Then choose any $\theta_{k_0} \neq \theta_{i_0}, \theta_{j_0}$ and a block $B(\theta_{k_0})$ modulo θ_{k_0} in $B(\theta)$. Let $a_{i_0} \in B(\theta_{i_0}) \subseteqq B(\theta)$, $a_{k_0} \in B(\theta_{k_0})$ and conclude that every simultaneous solution x of $a_{i_0} \equiv x \pmod{\theta_{i_0}}$ and $a_{k_0} \equiv x$ $\pmod{\theta_{k_0}}$ is contained in some block $B(\theta_{i_0} \cap \theta_{k_0}) \subseteqq B(\theta_{i_0})$ modulo $\theta_{i_0} \cap \theta_{k_0}$. Only one of the blocks $B_1(\theta_{i_0} \cup \theta_{j_0})$ and $B_2(\theta_{i_0} \cup \theta_{j_0})$ can contain $B(\theta_{i_0})$. Thus, we assume w.l.o.g. that $B_2(\theta_{i_0} \cup \theta_{j_0}) \cap B(\theta_{i_0} \cap \theta_{k_0}) = \emptyset$. If we now choose any element $a_{j_0} \in B(\theta_{j_0}) \subseteqq B_2(\theta_{i_0} \cup \theta_{j_0})$, then the simultaneous solvability of

$$a_{i_0} \equiv x \pmod{\theta_{i_0}},\ a_{j_0} \equiv x \pmod{\theta_{j_0}},\ a_{k_0} \equiv x \pmod{\theta_{k_0}}, \dots$$

would imply that

$$x \in B(\theta_{i_0} \cap \theta_{k_0}) \cap B(\theta_{j_0}) \subseteqq B(\theta_{i_0} \cap \theta_{k_0}) \cap B_2(\theta_{i_0} \cup \theta_{j_0}) = \emptyset.$$

This contradiction shows that there is no block modulo θ which contains more than one block modulo $\theta_{i_0} \cup \theta_{j_0}$. Thus, the blocks of θ and $\theta_{i_0} \cup \theta_{j_0}$ coincide, proving (iii) $\theta = \theta_{i_0} \cup \theta_{j_0}$.

2) Assuming (i), (ii), (iii), we first observe that C.R.T. $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ is satisfied in $\mathfrak{A}$. Let $a_1, \dots, a_n$ be n elements in A which are pairwise congruent modulo θ. Then, by (iii), $a_i \equiv a_j \pmod{\theta_i \cup \theta_j}$ for all $1 \leqq i, j \leqq n$ and hence, by C.R.T. $(\theta_1, \dots, \theta_n)$, there is an element $c \in A$ such that $c \equiv a_i \pmod{\theta_i}$ for all $i \in I$, q.e.d.

REMARK. We note that conditions (i) and (iii) in Theorem 3 and the above lemma can obviously be combined to the postulate: (i, iii): $\theta_i \circ \theta_j = \theta_k \circ \theta_l$ if $1 \leqq i \neq j$, $k \neq l \leqq n$.

§ 3. Applications and remarks

1) The universal algebras $\mathfrak{A}$ in which all finite subdirect representations $\mathfrak{A} \cong \Pi(\mathfrak{A}/\theta_i;\ i \in I)$ can be W-constructed are precisely those in which every finite set of congruences with identity intersection generates a distributive congruence lattice whose join is obtained by joining any two of them.

2) A finite subdirect representation of a group (ring) $\mathfrak{G}$ with the factors $\mathfrak{G}/N_i$ where the N_i are normal subgroups (ideals), $1 \leqq i \leqq n$, can be W-constructed if and only if 1) $N_i \cdot N_j = N_1 \cdot N_2 \dots N_n$ for any $N_i \neq N_j$ and 2) $\mathfrak{C}([N_1, \dots, N_n])$ is distributive.

3) The system of congruences $a_i \equiv x \pmod{N_i}$ is solvable for any given $a_1, \dots, a_n \in N_1 \dots N_n$ where the N_i are as in 2) if and only if $\mathfrak{C}([N_1, \dots, N_n])$ is distributive and $N_i \cdot N_j = N_1 \dots N_n$ for any $N_i \neq N_j$. (3) follows from the fact that the solvability of $a_i \equiv x \pmod{N_i}$ for arbitrary $a_i \in N_1 \dots N_n$ is obviously equivalent to the solvability of $b_i \equiv x \pmod{N_i}$ for any family $\{b_i\}$ in a fixed coset of $N_1 \dots N_n$).

4) J. Hashimoto [6] introduced the concept of "complete permutability" of congruences in order to characterize L-restricted direct products. It should be noted that absolute permutability implies complete permutability which in turn implies pairwise permutability.

(Received 15 July 1966)

References

[1] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, AMS Coll. Publ. vol. **25**, (N. Y., 1948).

[2] G. Birkhoff, Subdirect unions in universal algebras, *Bull, Amer. Math. Soc.*, **50** (1944), pp. 764–768.

[3] I. Fleischer, A note on subdirect products, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), pp. 463–465.

[4] L. Fuchs, On subdirect unions. I. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **3** (1952), pp. 103–120.

[5] G. Grätzer, *Universal algebra*, © 1966, to appear in D. V. Nostrand Co., Princeton, New Jersey.

[6] J. Hashimoto, Direct, subdirect decompositions and congruence relations, *Osaka Math. J.*, (1957), pp. 87–112.

[7] J. H. M. Wedderburn, Homomorphisms of groups, *Annals of Math.*, **42** (1971), pp. 486–487.

[8] O. Zariski–P. Samuel, Commutative algebra I, D. V. Nostrand Co., Princeton, (New Jersey, 1958).

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (3—4), 1967, pp. 335—338.

OPERATIONAL REPRESENTATION FOR THE LAGUERRE POLYNOMIALS

By

M. K. DAS (Calcutta, India)

(*Presented by* P. TURÁN)

1. In 1960, CARLITZ [1] gave the following operational formula involving Laguerre polynomials:

$$\prod_{j=1}^{n}(xD-x+\alpha+j)=n!\sum_{p=0}^{n}\frac{x^p}{p!}L_{n-p}^{(\alpha+p)}(x)D^p \tag{1.1}$$

where

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{n!}x^{-\alpha}e^x D^n(x^{\alpha+n}e^{-x}). \tag{1.2}$$

Later, CHATTERJEA [2] developed certain operational formulas involving Laguerre and Bessel polynomials in order to derive already known formulas or to obtain new ones. For the Laguerre polynomials, we may note the following formulas of CHATTERJEA:

$$\Omega_n Y=\sum_{p=0}^{n}\frac{x^p}{p!}L_{n-p}^{(\alpha+p)}(x)D^pY, \tag{1.3}$$

where

$$\Omega_n=\sum_{p=0}^{n}\binom{\alpha+n}{n-p}\frac{x^p}{p!}(D-1)^p;$$

$$\frac{x^n}{n!}\left[D+\frac{\alpha+n-x}{x}\right]^nY=\sum_{p=0}^{n}\frac{x^p}{p!}L_{n-p}^{(\alpha+p)}(x)D^pY. \tag{1.4}$$

Recently AL-SALAM [3] has given the following operational formula for the Laguerre polynomials:

$$[x(1+xD)]^n\big(x^\alpha e^{-x}f(x)\big)=x^{\alpha+n}e^{-x}n!\sum_{p=0}^{n}\frac{x^p}{p!}L_{n-p}^{(\alpha+p)}(x)D^pf(x), \tag{1.5}$$

wherefrom he has obtained the following operational representation of the Laguerre polynomials:

$$[x(1+xD)]^n(x^\alpha e^{-x})=x^{\alpha+n}e^{-x}n!\,L_n^{(\alpha)}(x). \tag{1.6}$$

In [3, p. 127], AL-SALAM has mentioned the following operational formula of A. M. CHAK:

$$L_n^{(\alpha)}(x)=x^{-\alpha-n-1}e^x(x^2D)^n(x^{\alpha+1}e^{-x}). \tag{1.7}$$

The object of this note is to give simple proofs of the formulas due to CARLITZ, AL-SALAM and CHAK. Also we shall show that the formulas of AL-SALAM and CHAK are special cases of the following formula:

$$[x(\delta-k+1)]^n(x^{\alpha+k}e^{-x}Y) = n!\, x^{\alpha+k+n}e^{-x}\sum_{p=0}^{n}\frac{x^p}{p!}L_{n-p}^{(\alpha+p)}(x)D^pY \tag{1.8}$$

(where $\delta\equiv xD$), which we propose to prove in the present note. We shall also point out several consequences of (1. 8).

2. For our purpose, we shall require the following well-known properties of the operator δ:

$$F(\delta)[x^\alpha f(x)] = x^\alpha F(\delta+\alpha)f(x) \tag{2.1}$$

$$F(\delta)[e^{g(x)}f(x)] = e^{g(x)}F(\delta+xg')f(x) \tag{2.2}$$

$$x^{n\alpha}F(\delta)F(\delta+\alpha)\dots F(\delta+(n-1)\alpha)=[x^\alpha F(\delta)]^n. \tag{2.3}$$

Now we observe

$$x^{-\alpha}e^xD^n(x^{\alpha+n}e^{-x}Y) = x^{-n-\alpha}e^x\delta(\delta-1)\dots(\delta-n+1)(x^{\alpha+n}e^{-x}Y) =$$

$$= e^x(\delta+\alpha+n)(\delta+\alpha+n-1)\dots(\delta+\alpha+1)(e^{-x}Y) =$$

$$= (\delta-x+\alpha+n)(\delta-x+\alpha+n-1)\dots(\delta-x+\alpha+1)Y = \prod_{j=1}^{n}(\delta-x+\alpha+j)Y.$$

Thus we have proved that

$$D^n(x^{\alpha+n}e^{-x}Y) = x^\alpha e^{-x}\prod_{j=1}^{n}(\delta-x+\alpha+j)Y \tag{2.4}$$

which was proved by CARLITZ with the help of induction. Next CARLITZ proved by Leibniz theorem

$$D^n(x^{\alpha+n}e^{-x}Y) = n!\, x^\alpha e^{-x}\sum_{p=0}^{n}\frac{x^p}{p!}L_{n-p}^{(\alpha+p)}(x)D^pY. \tag{2.5}$$

Thus (1. 1) follows immediately from (2. 4) and (2. 5).

To derive AL-SALAM's formula (1. 5), we first note

$$\prod_{j=1}^{n}(xD-x+\alpha+j)f(x) = e^x\prod_{j=1}^{n}(xD+\alpha+j)e^{-x}f(x) = \tag{2.6}$$

$$= x^{-\alpha}e^x\prod_{j=1}^{n}(\delta+j)x^\alpha e^{-x}f(x) = x^{-\alpha}e^xx^{-n}[x(\delta+1)]^n\big(x^\alpha e^{-x}f(x)\big)$$

(where $\delta\equiv xD$). Thus AL-SALAM's formula (1. 5) follows from (1. 1) and (2. 6).

Now we shall furnish an easy proof of CHAK's formula (1. 7). The method of proof is as follows:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!}e^x x^{-\alpha-n}(x^n D^n)(x^{\alpha+n}e^{-x}) = \frac{1}{n!}e^x x^{-\alpha-n}\delta(\delta-1)\dots(\delta-n+1)(x^{\alpha+n}e^{-x}) =$$

$$= \frac{1}{n!}e^x x^{-\alpha-1}(\delta+n-1)(\delta+n-2)\dots\delta(x^{\alpha+1}e^{-x}) =$$

$$= \frac{1}{n!}e^x x^{-\alpha-1}\delta(\delta+1)\dots(\delta+n-1)(x^{\alpha+1}e^{-x}) = \frac{1}{n!}e^x x^{-\alpha-1}x^{-n}(x\delta)^n(x^{\alpha+1}e^{-x})$$

which is CHAK's formula (1. 7). It may be noted that $1/n!$ is omitted in (1. 7).

Finally we shall generalise the formulas of AL-SALAM and CHAK. First we observe that

$$x^{-\alpha}e^x D^n(x^{\alpha+n}e^{-x}Y) = x^{-\alpha-n}e^x\delta(\delta-1)\dots(\delta-n+1)\cdot x^{n-k}(x^{\alpha+k}e^{-x}Y) =$$

$$= x^{-\alpha-k}e^x(\delta+n-k)(\delta+n-k-1)\dots(\delta-k+1)(x^{\alpha+k}e^{-x}Y) =$$

$$= x^{-\alpha-k}e^x(\delta-k+1)(\delta-k+2)\dots(\delta-k+n)(x^{\alpha+k}e^{-x}Y) =$$

$$= x^{-\alpha-k}e^x x^{-n}[x(\delta-k+1)]^n(x^{\alpha+k}e^{-x}Y).$$

Thus we have proved

$$D^n(x^{\alpha+n}e^{-x}Y) = x^{-k-n}[x(\delta-k+1)]^n(x^{\alpha+k}e^{-x}Y). \tag{2. 7}$$

It follows therefore from (2. 7) and (2. 5)

$$[x(\delta-k+1)]^n(x^{\alpha+k}e^{-x}Y) = n!\, x^{\alpha+k+n}e^{-x}\sum_{p=0}^{n}\frac{x^p}{p!}L_{n-p}^{(\alpha+p)}(x)D^pY, \tag{2. 8}$$

which is the main result (1. 8) of this note.

We shall now consider several consequences of this main result. If we put $k=1$ in (2. 8) we obtain

$$(x\delta)^n(x^{\alpha+1}e^{-x}Y) = n!\, x^{\alpha+n+1}e^{-x}\sum_{p=0}^{n}\frac{x^p}{p!}L_{n-p}^{(\alpha+p)}(x)D^pY, \tag{2. 9}$$

which can also be considered as a generalisation of CHAK's result (1. 7). Again, if we use $k=0$ in (2. 8) we derive

$$[x(\delta+1)]^n(x^{\alpha}e^{-x}Y) = n!\, x^{\alpha+n}e^{-x}\sum_{p=0}^{n}\frac{x^p}{p!}L_{n-p}^{(\alpha+p)}(x)D^pY, \tag{2. 10}$$

which is AL-SALAM's result (1. 5). Thus (2. 8) can be considered as a generalization of AL-SALAM's result.

Using $k=2$ in (2. 8) we obtain

$$[x(\delta-1)]^n(x^{\alpha+2}e^{-x}Y) = n!\, x^{\alpha+n+2}e^{-x}\sum_{p=0}^{n}\frac{x^p}{p!}L_{n-p}^{(\alpha+p)}(x)D^pY \tag{2. 11}$$

which may be compared with (2. 10).

In (2. 11), if we take $Y=1$, we have

$$[x(xD-1)]^n(x^{\alpha+2}e^{-x}) = x^{\alpha+n+2}e^{-x}(n!)L_n^{(\alpha)}(x), \tag{2. 12}$$

which may well be compared with (1. 6).

Putting $\Phi^n = [x(xD-1)]^n$, we can write (2. 12) in the form

$$\Phi^n(x^{\alpha+2}e^{-x}) = x^{\alpha+n+2}e^{-x}n!\,L_n^{(\alpha)}(x). \tag{2. 13}$$

By a simple change of variable we also note from (2. 13) that

$$\Phi^n(x^{\alpha+2}e^{-\lambda x}) = x^{\alpha+n+2}e^{-\lambda x}n!\,L_n^{(\alpha)}(\lambda x). \tag{2. 14}$$

Further we notice from (2. 13) that

$$\Phi^m\big(x^{\alpha+n+2}e^{-x}L_n^{(\alpha)}(x)\big) = \tag{2. 15}$$

$$= \frac{1}{n!}\Phi^{n+m}(x^{\alpha+2}e^{-x}) = \frac{(n+m)!}{n!}x^{\alpha+n+m+2}e^{-x}L_{n+m}^{(\alpha)}(x).$$

Returning to the formula (2. 8), we notice that

$$[x(\delta-k+1)]^n(x^{\alpha+k}e^{-x}) = x^{\alpha+n+k}e^{-x}n!\,L_n^{(\alpha)}(x). \tag{2. 16}$$

Writing Ψ^n for $[x(\delta-k+1)]^n$, we observe in the same manner the following result:

$$\Psi^n(x^{\alpha+k}e^{-\lambda x}) = x^{\alpha+n+k}e^{-\lambda x}n!\,L_n^{(\alpha)}(\lambda x), \tag{2. 17}$$

$$\Psi^m\big(x^{\alpha+n+k}e^{-x}L_n^{(\alpha)}(x)\big) = \frac{(n+m)!}{n!}x^{\alpha+n+m+k}e^{-x}L_{n+m}^{(\alpha)}(x). \tag{2. 18}$$

Lastly it is interesting to note from (2. 11) that

$$\Phi^m\big(x^{\alpha+n+2}e^{-x}L_n^{(\alpha)}(x)\big) = m!\,x^{\alpha+n+m+2}e^{-x}\sum_{p=0}^{m}\frac{x^p}{p!}L_{m-p}^{(\alpha+n+p)}(x)\,D^pL_n^{(\alpha)}(x). \tag{2. 19}$$

Now we know that

$$D^pL_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^pL_{n-p}^{(\alpha+p)}(x). \tag{2. 20}$$

Thus it follows from (2. 15), (2. 19) and (2. 20) that

$$\binom{n+m}{m}L_{n+m}^{(\alpha)}(x) = \sum_{p=0}^{\min(n,m)}\frac{(-x)^p}{p!}L_{m-p}^{(\alpha+n+p)}(x)\,L_{n-p}^{(\alpha+p)}(x) \tag{2. 21}$$

which is a well-known formula for the Laguerre polynomials.

I am grateful to Dr. S. K. CHATTERJEA for his guidance and help during the preparation of this note.

(Received 30 July 1966)

References

[1] L. CARLITZ, A note on the Laguerre polynomials, *Michigan Math. Journal*, **7** (1960), pp. 219–223.

[2] S. K. CHATTERJEA, Some problems connected with special functions, Thesis approved for Ph. D. degree, Jadavpur Univ. (India, 1964), pp. 1–310.

[3] W. A. AL-SALAM, Operational representations for the Laguerre and other polynomials, *Duke Math. Journal*, **31** (1964), pp. 127–142.

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (3—4), 1967, pp. 339—340.

CORRECTION TO MY PAPER ON THE COLOURING OF INFINITE GRAPHS AND THE THEOREM OF KURATOWSKI

By

J. MYCIELSKI (Wrocław, Poland)

(*Presented by* G. HAJÓS)

N. G. DE BRUIJN has pointed out in [1] that condition (iv) in § 2 of [4] is too weak and this invalidates a theorem which claims that (iv) is equivalent to some other conditions (i), (ii) and (iii) stated there. These conditions are stipulations on a graph G; e.g. (ii) is the requirement that every finite subgraph [1] of G be homeomorphically imbeddable in the plane. The following corrected form of (iv) is equivalent to the other conditions.

(iv) There exists two functions I and E defined on the set of all circuits [2] of G whose values are subgraphs of G such that

(1) $I(C) \cap E(C) = C$ and $I(C) \cup E(C) = G$;

(2) if P_1, P_2 and P_3 are three pathes [3] of G with disjoint interiors but common ends then the three circuits $P_1 \cup P_2$, $P_1 \cup P_3$ and $P_2 \cup P_3$ can be ordered in a sequence C_0, C_1, C_2 such that

$$I(C_0) = I(C_1) \cup I(C_2) \quad \text{and} \quad I(C_1) \cap I(C_2) = C_1 \cap C_2.$$

The idea of this condition is that $I(C)$ and $E(C)$ in a sense replace the domain bounded by C and the exterior of this domain which would exist if G was imbedded in the plane. Now the proof of the equivalence of the conditions (i), ..., (iv) outlined in [4] becomes valid (after an obvious modification of the step (iii) $\to$ (iv)).

Several other combinatorial conditions for planar graphs are known (see e.g. [6], where other references are given), but (iv) differs from the others which in general do not seem to be applicable to the infinite graphs possibly of high power.

For additional facts and references concerning the subject of § 1 of [4] see [2], [3] and [5].

(Received 12 August 1966)

[1] i.e. a collection of simplices of G which is a closed complex.

[2] i.e. subgraphs topologically equivalent to the circumference of a circle.

[3] i.e. subgraphs topologically equivalent to a closed interval on the real line.

References

[1] N. G. DE BRUIJN, A 546 (review of [4]), *Math. Rev.*, **24** (1962), pp. 103–104.
[2] J. D. HALPERN, The independence of the axiom of choice from the Boolean prime ideal theorem, *Fund. Math.*, **55** (1964), pp. 57–66.
[3] A. LEVY, Remarks on a paper by J. Mycielski, *Acta. Math. Acad. Sci. Hung.*, **14** (1963), pp. 125–130.
[4] J. MYCIELSKI, Some remarks and problems on the colouring of infinite graphs and the theorem of Kuratowski, *ibidem*, **12** (1961), pp. 125–129.
[5] J. MYCIELSKI, Two remarks on Tychonoff's product theorem, *Bull. Acad. Polon. Sci. Série sci. math. astr. et phys.*, **8** (1964), pp. 439–441.
[6] Z. SKUPIEŃ, Locally Hamiltonian and planar graphs, *Fund. Math.* **58** (1966), pp. 193–200.

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (3—4), 1967, pp. 341—358.

ZUR GEOMETRIE DER KREISLAGERUNGEN

Von

A. FLORIAN (Wien)

(*Vorgelegt von* L. FEJES TÓTH)

Meinem verehrten Freund, Professor L. Fejes Tóth, gewidmet

In der euklidischen Ebene sei eine Menge offener Kreise K_i (mit Radien r_i) so verteilt, daß kein Paar übereinandergreift. Die Größe

$$p = \inf \frac{r_i}{r_j} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots)$$

heißt die *Homogenität* des Kreissystems ($0 \leqq p \leqq 1$). L. FEJES TÓTH und J. MOLNÁR befaßten sich mit der Frage, w'e gut s'ch d'e Ebene durch ein System mit gegebener Homogenität p ausfüllen läßt. Ihr Ergebnis war folgendes (vgl. [1]; bezüglich des Begriffes ,,Dichte" einer Menge von Scheiben vgl. etwa [2], S. 154):

Betrachten wir ein Kreistripel, dessen Mittelpunktsdreieck den Inhalt Δ besitzt und aus den Kreisen Sektoren mit den Inhalten S_i ($i = 1, 2, 3$) ausschneidet. Dann gilt für das Supremum $d(p)$ der (oberen) Dichten aller Kreislagerungen mit gegebener Homogenität p

$$d(p) \leqq \sup \frac{S_1 + S_2 + S_3}{\Delta} = s(p), \tag{1}$$

wobei sich das Supremum über alle Kreistripel mit folgenden Eigenschaften erstreckt:

1. Die Kreise greifen nicht übereinander,
2. die Homogenität ist $\geqq p$ (>0, wenn $p = 0$),
3. kein Kreis schneidet die Verbindungsstrecke der beiden anderen Mittelpunkte und
4. mindestens ein Kreis berührt die beiden anderen.

Die in dieser Arbeit ausgesprochene Vermutung, daß

$$s(p) = \frac{\pi p^2 + 2(1-p^2) \arcsin \dfrac{p}{1+p}}{2p\sqrt{2p+1}} \tag{2}$$

ist, habe ich vor einiger Zeit bewiesen [3]. In (2) bedeutet die rechte Seite die Größe $\dfrac{S_1 + S_2 + S_3}{\Delta}$ für drei sich gegenseitig berührende Kreise mit den Radien $p, p, 1$ (Fig. 1a) und für drei Kreise mit den Radien $p, 1, 1$, wobei der kleine Kreis die beiden größeren und die Verbindungsstrecke ihrer Mittelpunkte berührt (Fig. 1b). (1) und (2) ergeben den

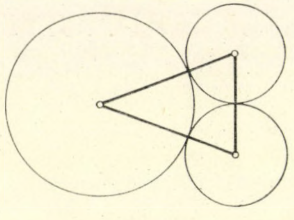


Fig. 1a

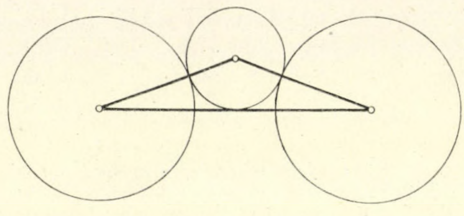


Fig. 1b

SATZ 1. *Das Supremum $d(p)$ der Dichten aller Kreislagerungen der Homogenität p genügt der Ungleichung*

$$d(p) \leqq \frac{\pi p^2 + 2(1-p^2)\arcsin\frac{p}{1+p}}{2p\sqrt{2p+1}}.$$

Für $p=1$ und (in der Grenze) für $p=0$ besteht Gleichheit.

J. MOLNÁR bzw. J. MOLNÁR und A. HEPPES [4, 5] gaben durch Konstruktion interessanter, ausgezeichneter Kreislagerungen eine untere Abschätzung für $d(p)$ an. Damit wurde diese Funktion zwischen zwei sehr engen Schranken eingeschlossen. Bisher konnte nicht nachgewiesen werden, daß für eine dieser Lagerungen (den bekannten Fall $p=1$ ausgeschlossen), die Dichte $d(p)$ erreicht wird. In einer späteren Arbeit [6] zeigte ich in teilweiser Verschärfung von Satz 1, daß

$$(3) \qquad d(p) = \frac{\pi}{\sqrt{12}} \quad \text{für} \quad 1 \geqq p \geqq p_0 = 0{,}90\ldots$$

gilt, d.h. daß man nicht zu verschiedene Kreise nicht dichter lagern kann als gleich große. Das entsprechende p-Intervall wurde seither von K. BÖRÖCZKY vergrößert.

In letzter Zeit verallgemeinerte J. MOLNÁR die Ungleichung (1) und eine analoge untere Abschätzung der Überdeckungsdichte auf Flächen konstanter Krümmung [7].

Kürzlich trug J. MOLNÁR eine auch anschaulich interpretierbare Erweiterung der Untersuchungen über Kreislagerungen vor. * Es sei λ eine feste Zahl $\geqq 1$ und es bezeichnen K und λK zwei konzentrische Kreise mit den Radien r und λr. Ein System von Kreisen K_i der euklidischen Ebene heißt ein *λ-Kreissystem*, wenn K_i und λK_j für alle Paare $i \neq j$ nicht übereinandergreifen; hingegen können λK_i und λK_j gemeinsame innere Punkte aufweisen. Falls $\lambda_1 \leqq \lambda_2$ ist, ist jedes λ_2-Kreissystem auch ein λ_1-System. Die Menge der 1-Kreissysteme ist identisch mit der Menge aller Kreislagerungen. Man kann daher die λ-Kreissysteme als Kreislagerungen auffassen, die in einem bestimmten Sinn „geräumig" sind, wobei λ ein Maß für die Geräumigkeit der Lagerung ist. J. MOLNÁR gab mit einem davon wesentlich verschiedenen Geräumigkeitsbegriff Abschätzungen für die Lagerungsdichte an [8].

Zwei Kreise K_i, K_j eines λ-Kreissystems nennt man *benachbart*, wenn entweder λK_i und K_j oder K_i und λK_j sich von außen berühren.

Es ergibt sich nun das folgende HAUPTPROBLEM: Wie gut läßt sich die Ebene durch ein λ-Kreissystem der Homogenität p ausfüllen?

* Geometriekolloquium in Tihany im September 1965.

Es bezeichne $d(p, \lambda)$ das Supremum der (oberen) Dichten aller λ-Kreissysteme der Homogenität p. $d(p, \lambda)$ ist bei festem λ eine nicht wachsende Funktion von p und bei festem p eine monoton abnehmende Funktion von λ; in unserer früheren Bezeichnung ist $d(p, 1) = d(p)$. $\mathfrak{T}$ sei die Menge aller Kreistripel K_i $(i = 1, 2, 3)$ mit folgenden Eigenschaften (Fig. 2):

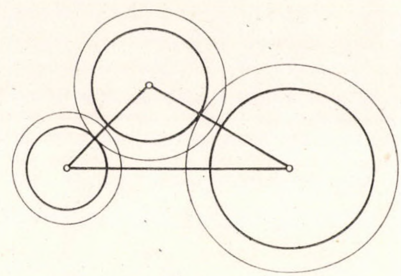


Fig. 2

1. Die Kreise bilden ein λ-System,
2. die Homogenität ist $\geqq p$ (>0, wenn $p = 0$),
3. kein Kreis $\frac{\lambda+1}{2} K_i$ schneidet die Verbindungsstrecke der beiden anderen Mittelpunkte und
4. mindestens ein Kreis (K_2) ist zu den beiden anderen benachbart.

Molnár bewies den folgenden, (1) als Sonderfall enthaltenden

Satz 2. *$d(p, \lambda)$ genügt für alle $0 \leqq p \leqq 1$, $\lambda \geqq 1$ der Ungleichung*

$$d(p, \lambda) \leqq \sup \frac{S_1 + S_2 + S_3}{\Delta} = s(p, \lambda) \tag{4}$$

(mit der gleichen Bezeichnung wie früher), wobei das Supremum über die Menge $\mathfrak{T}$ zu erstrecken ist.

Wir führen nun die folgende Bezeichnung ein: $r_1 \leqq r_2 \leqq r_3$ seien die Radien dreier paarweise benachbarter Kreise eines λ-Systems. Die Funktion $\sigma(r_1, r_2, r_3; \lambda)$ sei definiert durch

$$\sigma(r_1, r_2, r_3; \lambda) = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{\Delta}$$

für dieses System. Dann ist nach (2)

$$s(p, 1) = s(p) = \sigma(p, p, 1; 1) \qquad (0 \leqq p \leqq 1). \tag{5}$$

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist der Beweis von

Satz 3. *Für alle $0 \leqq p \leqq 1$ und alle $\lambda \geqq 1$ gilt*

$$s(p, \lambda) = \mathrm{Max}\{\sigma(p, p, 1; \lambda), \sigma(p, 1, 1; \lambda), \sigma(1, 1, 1; \lambda) = M(p, \lambda). \tag{6}$$

Dies entspricht einer von J. Molnár auf Grund numerischer Rechnungen ausgesprochenen Vermutung. Die zwei ersten Funktionen rechts, die den Konfigurationen 3a, b entsprechen, sind für $p = 0$ durch ihre Grenzwerte für $p \to 0$ zu ersetzen.

Andererseits ist sehr leicht zu sehen, daß für alle $0 \leqq p \leqq 1$ und alle $\lambda \geqq 1$

$$d(p, \lambda) \geqq \sigma(1, 1, 1; \lambda) \tag{7}$$

ist. Aus (4), (6) und (7) ergibt sich der folgende

HAUPTSATZ. *Für das Supremum $d(p, \lambda)$ der Dichten aller λ-Kreissysteme der Homogenität p gilt*

$$\sigma(1,1,1;\lambda) \leqq d(p,\lambda) \leqq \operatorname{Max}\{\sigma(p,p,1;\lambda),\ \sigma(p,1,1;\lambda),\ \sigma(1,1,1;\lambda)\}. \tag{8}$$

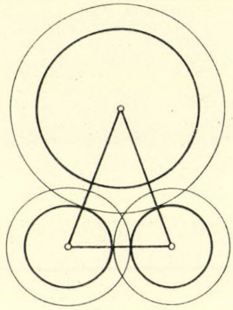


Fig. 3a

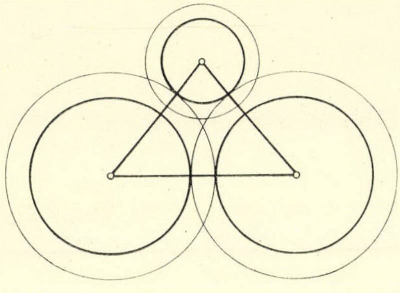


Fig. 3b

Bei der Diskussion von (8) wird sich herausstellen, daß in sehr vielen Fällen z.T. beiderseits, z.T. in der rechten Ungleichung Gleichheit erreicht wird.

Aus

$$\sigma(p,p,1;\lambda) = \frac{2}{\lambda+1}\,\frac{\pi p^2 + 2(1-p^2)\arcsin\dfrac{(\lambda+1)p}{2(\lambda+p)}}{p\sqrt{(2\lambda+\lambda p+3p)(2\lambda-\lambda p+p)}} \tag{9}$$

und

$$\sigma(p,1,1;\lambda) = \frac{2}{\lambda+1}\,\frac{\pi - 2(1-p^2)\arcsin\dfrac{\lambda+1}{2(\lambda+p)}}{\sqrt{(3\lambda+1+2p)(\lambda-1+2p)}} \tag{9}$$

folgt

$$\lim_{p\to 0}\sigma(p,p,1;\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \lim_{p\to 0}\sigma(p,1,1;\lambda) = \frac{2}{\lambda+1}\cdot\frac{\pi - 2\arcsin\dfrac{\lambda+1}{2\lambda}}{\sqrt{(3\lambda+1)(\lambda-1)}};$$

daraus und aus unserem Lemma 4 ergibt sich

$$\sigma(p,p,1;\lambda) \leqq \operatorname{Max}\left\{\frac{1}{\lambda^2},\ \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{(\lambda+1)^2}\right\},$$

$$\sigma(p,1,1;\lambda) \leqq \operatorname{Max}\left\{\frac{2}{\lambda+1}\,\frac{\pi-2\arcsin\dfrac{\lambda+1}{2\lambda}}{\sqrt{(3\lambda+1)(\lambda-1)}},\ \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{(\lambda+1)^2}\right\}.$$

Da

$$\frac{1}{\lambda^2} \leqq \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{(\lambda+1)^2}$$

für alle

$$\lambda \geqq \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi}{\sqrt{3}} - 1}} = 1{,}106\ldots$$

gilt, ist

$$s(p, \lambda) = \mathrm{Max}\{\sigma(p, 1, 1; \lambda), \ \sigma(1, 1, 1; \lambda)\} \tag{6'}$$

für $\lambda \geqq \lambda_1$, $0 \leqq p \leqq 1$. Da weiter für alle $\lambda > 1$

$$\frac{1}{\lambda^2} < \frac{2}{\lambda+1} \frac{\pi - 2 \arcsin \frac{\lambda+1}{2\lambda}}{\sqrt{(3\lambda+1)(\lambda-1)}}$$

und für $\lambda \geqq \lambda_2 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} = 1{,}3660\ldots$

$$\frac{2}{\lambda+1} \frac{\pi - 2 \arcsin \frac{\lambda+1}{2\lambda}}{\sqrt{(3\lambda+1)(\lambda-1)}} \leqq \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{1}{(\lambda+1)^2}$$

gilt, ist

$$s(p, \lambda) = \sigma(1, 1, 1; \lambda) \tag{6''}$$

für $\lambda \geqq \lambda_2$, $0 \leqq p \leqq 1$. Dies war von FEJES TÓTH vermutet worden und wurde von K. BÖRÖCZKY auf ganz anderem Wege als hier bewiesen. Unser Beweis von Satz 3 benützt dieses Teilresultat nicht und folgt im wesentlichen dem Gedankengang in [3].

Aus (8) und (6″) ergibt sich für alle $\lambda \geqq \lambda_2$, $0 \leqq p \leqq 1$

$$d(p, \lambda) = \sigma(1, 1, 1; \lambda), \tag{10}$$

womit für diese Paare p, λ die Frage nach der dichtesten Anordnung vollständig beantwortet ist. Man erhält eine solche, indem man von der dichtesten Lagerung der Einheitskreise $\{K_i\}$ ausgehend K_1 durch $\dfrac{2p}{\lambda+1} K_1$ und alle übrigen K_i durch $\dfrac{2}{\lambda+1} K_i$ ersetzt.

Aus Lemma 4 folgert man für jedes $\lambda > 1$ die Existenz einer kleinsten Zahl $p_0(\lambda) < 1$, sodaß für alle p mit $p_0 \leqq p \leqq 1$ $s(p, \lambda) = \sigma(1, 1, 1; \lambda) = d(p, \lambda)$ ist. Man kann also auch für jedes $\lambda > 1$ mit nicht zu verschieden großen Kreisen die Ebene nicht dichter unterdecken als mit gleich großen. Z.B. findet man $p_0(1, 2) \approx 0{,}11$.

Es ist bemerkenswert, daß — von diesen Fällen abgesehen — für gewisse Wertepaare $p \in (0, 1)$, $\lambda \in (1, \lambda_2)$ in der zweiten Ungleichung (8), jedoch nicht in der ersten, Gleichheit besteht; dabei wird die maximale Dichte durch Kreissysteme erreicht, in denen jeweils nur Kreise von zwei Größen auftreten, deren Mittelpunkte zu bekannten Symmetriegruppen gehörige Punktsysteme bilden.

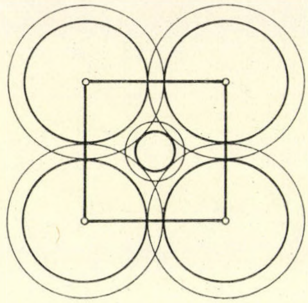


Fig. 4

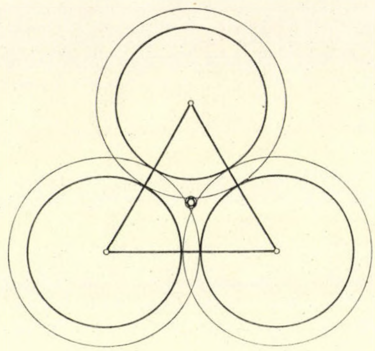


Fig. 5

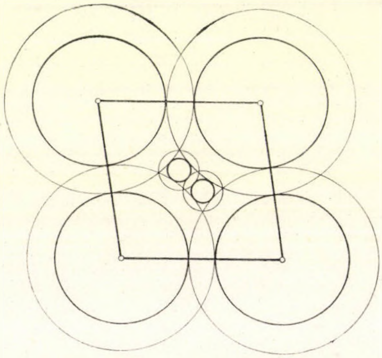


Fig. 6

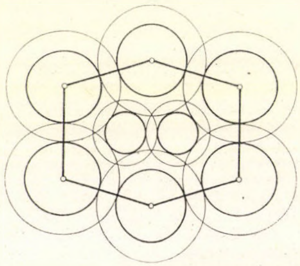


Fig. 7

Man betrachte ein System von Einheitskreisen, deren Mittelpunkte ein quadratisches Gitter mit dem Zelleninhalt $(\lambda+1)^2$ bilden (Fig. 4). Den Radius p der kleinen Kreise, deren Zentren die Flächenmittelpunkte sind, wähle man so, daß jeder zu vier großen Kreisen benachbart ist. Dies trifft genau dann zu, wenn

$$(11) \qquad \lambda = 1-2p+\sqrt{2}(1-p) = \lambda(p)$$

ist. Wegen $\lambda > 1$ ist $p < \sqrt{2}-1 = 0{,}41421\ldots$ zu wählen. Die Dichte $\sigma(p, 1, 1; \lambda(p))$ ist genau dann größer als $\sigma(1, 1, 1; \lambda(p))$, wenn $p > \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}-1} = 0{,}39331\ldots$ ist. Die numerische Rechnung zeigt, daß für

$$(12) \qquad 0{,}39331\ldots < p < 0{,}412034\ldots$$

$$\sigma(p, 1, 1; \lambda(p)) > \sigma(p, p, 1; \lambda(p)),$$

also

$$M(p, \lambda(p)) = \sigma(p, 1, 1; \lambda(p))$$

ist. Damit ist für Werte p, λ, die durch (11) verbunden sind, im Intervall (12) je ein dichtestes λ-System gefunden; in der Ungleichung (8) besteht rechts Gleichheit, links jedoch nicht. Hingegen gibt es für kleinere Werte p und nach (11) zugehörige λ dichtere λ-Systeme.

Ein weiteres Beispiel zeigt Fig. 5, in der die Mittelpunkte von Einheitskreisen die Ecken eines regulären Dreieckgitters mit der Kantenlänge $\lambda+1$ bilden. Um den Mittelpunkt eines jeden Dreiecks lege man einen Kreis von solchem Radius p, daß er zu den drei umgebenden Kreisen benachbart ist. Dazu muß notwendig

$$\lambda = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)(1-p\sqrt{3}) = \lambda(p) \tag{13}$$

sein. Wegen $\lambda > 1$ ist notwendig

$$0 < p < \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 0{,}15470\ldots, \tag{14}$$

während für die Dichte $\sigma(p, 1, 1; \lambda(p))$ der Lagerung stets

$$\sigma(p, 1, 1; \lambda(p)) > \sigma(1, 1, 1; \lambda(p))$$

gilt. Die numerische Rechnung zeigt, daß für

$$0 < p < 0{,}15058\ldots \tag{15}$$

$$\sigma(p, 1, 1; \lambda(p)) > \sigma(p, p, 1; \lambda(p)),$$

also

$$M(p, \lambda(p)) = \sigma(p, 1, 1; \lambda(p))$$

ist. Damit ist für Wertepaare p, λ, die durch (13) verbunden sind, im Intervall (15) je ein dichtestes λ-System gefunden, und in der Ungleichung (8) besteht rechts Gleichheit.

In den beiden bisherigen Beispielen läßt sich die Ebene in ein Mosaik kongruenter Dreiecke zerlegen, in denen das Kreissystem die Dichte $\sigma(p, 1, 1; \lambda)$ besitzt. Im folgenden geben wir zwei Beispiele von Kreissystemen, bei denen die Ebene jeweils in ein Mosaik von Dreiecken zweier Typen zerlegbar ist. Ihnen entsprechen die Kreisdichten $\sigma(p, 1, 1; \lambda)$ und $\sigma(p, p, 1; \lambda)$. Durch geeignete Wahl von p und λ erreicht man, daß

$$\sigma(p, 1, 1; \lambda) = \sigma(p, p, 1; \lambda) \tag{16}$$

wird.

Fig. 6 zeigt einen Teil eines aus kongruenten Rhomben von der Seitenlänge $\lambda+1$ bestehenden Mosaiks, dessen Ecken Zentren von Einheitskreisen sind. In die große Diagonale des Rhombus legt man symmetrisch zwei kleine Kreise vom Radius p. Wählt man diesen und den Rhombuswinkel passend, so ist jeder kleine Kreis zum anderen und zu drei großen Kreisen benachbart. Eine einfache Rechnung ergibt als Bedingung den Zusammenhang

$$\lambda = -\frac{p^2+5p-2}{2(p+1)} + \frac{(1-p)\sqrt{p^2+8}}{2(p+1)}. \tag{17}$$

λ ist >1 genau dann, wenn $p < \dfrac{\sqrt{17}-3}{4} = 0{,}28077\ldots$. Die numerische Rechnung zeigt, daß (16) bei Berücksichtigung von (17) erfüllt ist für

$$p=0{,}27849\ldots, \quad \lambda=1{,}00919\ldots.$$

Das System hat die Dichte $\sigma(p, 1, 1; \lambda) = 0{,}92094\ldots > \sigma(1, 1, 1; \lambda) = 0{,}89861\ldots$.

Ein weiteres Mosaik läßt sich aus kongruenten, zentralsymmetrischen Sechsecken von der Seitenlänge $\lambda+1$ aufbauen. Um jeden Eckpunkt legen wir einen Einheitskreis und in jedes Sechseck in symmetrischer Weise zwei Kreise vom Radius p (Fig. 7). Wählt man p und die Winkel geeignet, so ist jeder kleine Kreis zum anderen und zu vier großen Kreisen benachbart. Ist 2β der Winkel an der Spitze des Mittelpunktdreiecks der Konfiguration p, 1, 1, so findet man mit $\sin\beta=\sqrt{x}$

$$p = (4x-1)\sqrt{\frac{1-x}{x}}, \quad \lambda = \frac{1-2p\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}.$$

Die numerische Rechnung ergibt, daß damit (16) für

$$p=0{,}63707\ldots, \quad \lambda=1{,}00421\ldots$$

erfüllt ist. Das entsprechende System hat die Dichte $\sigma(p, 1, 1; \lambda) = 0{,}90633\ldots > \sigma(1, 1, 1; \lambda) = 0{,}90309\ldots$.

In diesen beiden Beispielen besteht in (8) rechts wieder Gleichheit, links jedoch nicht.

Die beiden Funktionen $\sigma(p, p, 1; \lambda)$ und $\sigma(p, 1, 1; \lambda)$ haben für alle λ in $p=1$ gleiche Ableitung. Eine genauere numerische Untersuchung ergibt folgendes Resultat, dessen exakter Beweis die Mühe nicht lohnen würde: Für $\lambda>\lambda_0=1{,}0098\ldots$ ist in $0<p<1$ durchwegs

$$\sigma(p, 1, 1; \lambda) > \sigma(p, p, 1; \lambda),$$

also

$$M(p, \lambda) = \operatorname{Max}\{\sigma(p, 1, 1; \lambda), \ \sigma(1, 1, 1; \lambda)\}.$$

Hingegen existieren für jedes λ mit $1<\lambda<\lambda_0$ zwei Zahlen $0<p_1(\lambda)<p_2(\lambda)<1$, sodaß

$$\sigma(p_i, 1, 1; \lambda) = \sigma(p_i, p_i, 1; \lambda) \qquad (i=1, 2)$$

und

$$\sigma(p, 1, 1; \lambda)>\sigma(p, p, 1; \lambda) \quad (0<p<p_1, p_2<p<1),$$

$$\sigma(p, 1, 1; \lambda)<\sigma(p, p, 1; \lambda) \quad (p_1<p<p_2)$$

ist, während

$$p_1(\lambda_0) = p_2(\lambda_0)=0{,}180\ldots$$

ist. $p_1(\lambda)$ und $p_2(\lambda)$ sind monoton, und es ist

$$\lim_{\lambda\to1} p_1(\lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda\to1} p_2(\lambda) = 1.$$

Beweis von (8). Wir können uns auf $\lambda>1$ beschränken, da der Beweis für $\lambda=1$ bereits in [3] erbracht wurde. Ferner können wir $p>0$ voraussetzen; denn es ist dann nach dem vorhin Gesagten

$$s(0, \lambda) = \sup_{p>0} s(p, \lambda) = \operatorname{Max}\{\lim_{p\to0}\sigma(p, p, 1; \lambda), \lim_{p\to0}\sigma(p, 1, 1; \lambda), \sigma(1, 1, 1; \lambda)\}.$$

Es handelt sich also um die Bestimmung von sup δ, wobei $\delta = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{\Delta}$ die Dichte der drei Kreise im Dreieck ihrer Mittelpunkte bedeutet und das Supremum über die in Satz 2 definierte Menge $\mathfrak{T}$ von Kreistripeln zu erstrecken ist.

Der Beweis von (8) beruht auf einigen Hilfssätzen, von denen sich die beiden ersten auf Kreistripel aus $\mathfrak{T}$ beziehen. Der Mittelpunkt von K_i sei O_i, und wir setzen noch $\lambda K_i = K_i'$, $\frac{\lambda+1}{2} K_i = K_i''$ $(i = 1, 2, 3)$.

Lemma 1. *Wenn K_1'' die Strecke $O_2 O_3$ berührt, so können K_2'' und K_3'' die Strecken $O_3 O_1$ bzw. $O_1 O_2$ nicht berühren oder schneiden.*

Beweis. Sei $O_1 O_2 = a$; dann ist

$$r_1 + \lambda r_2 \leqq a, \quad r_2 + \lambda r_1 \leqq a,$$

somit

$$\frac{\lambda+1}{2}(r_1 + r_2) \leqq a.$$

Daher haben K_1'' und K_2'' und ebenso die beiden anderen Paare keinen gemeinsamen inneren Punkt. Daraus folgt die Behauptung.

Lemma 2. *Wenn K_j und K_k benachbart sind, kann K_i'' die Strecke $O_j O_k$ nicht berühren oder schneiden.*

Beweis. Sei etwa $r_1 \geqq r_2 \geqq r_3$. Würde K_1'' die Strecke $O_2 O_3$ berühren oder schneiden, so läge der Fußpunkt der Höhe aus O_1 auf der Strecke $O_2 O_3$, und die Höhe wäre $\leqq \frac{\lambda+1}{2} r_1$. Daraus folgte

$$O_2 O_3 \geqq \sqrt{(\lambda r_1 + r_2)^2 - \left(\frac{\lambda+1}{2} r_1\right)^2} + \sqrt{(\lambda r_1 + r_3)^2 - \left(\frac{\lambda+1}{2} r_1\right)^2} > \lambda r_2 + r_3;$$

denn

$$f_1(r_3) = \sqrt{(\lambda r_1 + r_2)^2 - \left(\frac{\lambda+1}{2} r_1\right)^2} + \sqrt{(\lambda r_1 + r_3)^2 - \left(\frac{\lambda+1}{2} r_1\right)^2} - r_3$$

ist eine monoton wachsende Funktion von r_3, also

$$f_1(r_3) > \sqrt{(\lambda r_1 + r_2)^2 - \left(\frac{\lambda+1}{2} r_1\right)^2} + \sqrt{\lambda^2 - \left(\frac{\lambda+1}{2}\right)^2}\, r_1 = f_2(r_2) + \lambda r_2.$$

Wegen

$$f_2''(r_2) = -\left(\frac{\lambda+1}{2} r_1\right)^2 \left[(\lambda r_1 + r_2)^2 - \left(\frac{\lambda+1}{2}\right)^2 r_1^2\right]^{\frac{3}{2}} < 0$$

ist $f_2(r_2)$ konkav; da $f_2(0) = 2\sqrt{\lambda^2 - \left(\frac{\lambda+1}{2}\right)^2}\, r_1 > 0$ und

$$f_2(r_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}(\lambda+1) r_1 + \sqrt{\lambda^2 - \left(\frac{\lambda+1}{2}\right)^2}\, r_1 - \lambda r_1 > \left[\sqrt{\lambda^2 - \left(\frac{\lambda+1}{2}\right)^2} - \frac{\lambda-1}{2}\right] r_1 > 0$$

ist, folgt

$$f_2(r_2) > 0 \qquad (0 \leqq r_2 \leqq r_1),$$

also

$$f_1(r_3) > \lambda r_2,$$

wie behauptet. Dann könnten aber K_2 und K_3 nicht benachbart sein. Ähnlich erledigt man die beiden anderen Fälle.

Für $p > 0$ läßt sich in (4) das Supremum durch das Maximum ersetzen. Wir wenden uns nun der Bestimmung des Maximums von δ zu, wobei

$$\delta = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{\varDelta} \tag{18}$$

die Dichte dreier Kreise im Dreieck ihrer Mittelpunkte bedeutet und das Maximum über alle Kreistripel der Menge $\mathfrak{T}$ zu nehmen ist. Der erste Schritt ist

LEMMA 3. *Es seien $\lambda > 1$ und $p > 0$ fest. Die drei Kreise K_i $(i = 1, 2, 3)$ sollen so variiert werden, daß sie stets ein λ-System mit einer Homogenität $\geqq p$ bilden, daß K_2 zu K_1 und K_3 benachbart ist und K_2'' die Strecke O_1O_3 nicht schneidet. Das Maximum von δ wird von einem Kreistripel erreicht, bei dem entweder auch K_1 und K_3 benachbart sind oder K_2'' die Strecke O_1O_3 berührt.*

BEWEIS. Nach Lemma 2 kann es nicht eintreten, daß K_1'' die Strecke O_2O_3 oder K_3'' die Strecke O_1O_2 berührt oder schneidet. Hält man zunächst die r_i fest und bezeichnet die Winkel des Dreiecks $O_1O_2O_3$ mit α_i, so gilt nach Lemma 2

$$\alpha_2' \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_2'', \tag{19}$$

wobei α_2' jener Lage entspricht, in der K_1 und K_3 benachbart sind, und α_2'' der Berührung von K_2'' und O_1O_3.

Setzt man ferner

$$0 < \frac{r_1}{r_3} = p_1 \leqq 1, \quad 0 < \frac{r_2}{r_3} = p_2, \quad q_i = \lambda_i p_i \tag{20}$$

mit

$$\lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = 1, \quad \mu = \lambda \qquad (p_2 \leqq p_1),$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \lambda, \quad \mu = \lambda \qquad (p_1 \leqq p_2 \leqq 1),$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda_2 = 1, \quad \mu = \frac{1}{\lambda} \qquad (1 \leqq p_2),$$

so ist

$$\frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin \alpha_1} = \frac{q_1 + q_2}{p_2 + \mu}. \tag{21}$$

Daraus folgt

$$\begin{cases} \dfrac{d\alpha_1}{d\alpha_2} = (p_2 + \mu)\,\dfrac{(q_1 + q_2)x - (p_2 + \mu)}{A}, \\[2ex] \dfrac{d^2\alpha_1}{d\alpha_2^2} = -(p_2 + \mu)(q_1 + q_2)[(q_1 + q_2)^2 - (p_2 + \mu)^2]\,\dfrac{\sin \alpha_2}{A^2} \end{cases} \tag{22}$$

mit

$$x = \cos \alpha_2,$$

$$A = (q_1+q_2)^2+(p_2+\mu)^2-2(p_2+\mu)(q_1+q_2)x>0.$$

Weiter ist

(23) $$\delta = c\,\frac{(p_1^2-1)\alpha_1+(p_2^2-1)\alpha_2+\pi}{\sin\alpha_2} = cf_1(\alpha_2),$$

wobei c eine positive Konstante bedeutet, und für $\alpha_2 \neq \frac{\pi}{2}$

(24) $$f_1'(\alpha_2) = \frac{\cos\alpha_2}{\sin^2\alpha_2} f_2(\alpha_2)$$

mit

(25) $$f_2(\alpha_2) = \operatorname{tg}\alpha_2\left[(p_1^2-1)\frac{d\alpha_1}{d\alpha_2}+(p_2^2-1)\right]-[(p_1^2-1)\alpha_1+(p_2^2-1)\alpha_2+\pi].$$

Damit findet man

(26) $$f_2'(\alpha_2) = \frac{1-x^2}{x^2A^2}\varphi(x)$$

mit

(27) $$\varphi(x) = -2(p_2+\mu)^2(q_1+q_2)^2(1+p_1^2-2p_2^2)x^2+$$
$$+4(p_2+\mu)(q_1+q_2)[(p_1^2-p_2^2)(p_2+\mu)^2+(1-p_2^2)(q_1+q_2)^2]x-$$
$$-[(q_1+q_2)^2+(p_2+\mu)^2][(p_1^2-p_2^2)(p_2+\mu)^2+(1-p_2^2)(q_1+q_2)^2]$$

und der Diskriminante

(28) $$D=2(1-p_1^2)(p_2+\mu)^2(q_1+q_2)^2[(p_2+\mu)^2-(q_1+q_2)^2]\cdot$$
$$\cdot[(p_1^2-p_2^2)(p_2+\mu)^2+(1-p_2^2)(q_1+q_2)^2].$$

Fall a) $p_2^2<p_1$, also $p_2<1$. Dann ist nach (20) für $p_2\leqq p_1$

$$B \equiv (p_1^2-p_2^2)(p_2+\mu)^2+(1-p_2^2)(q_1+q_2)^2 =$$
$$= \lambda^2(2p_1^2-p_2^2-p_1^2p_2^2)+2p_2\lambda(p_1-p_2^2+p_1^2-p_1p_2^2)+p_2^2(1+p_1^2-2p_2^2) > 0$$

und für $p_2>p_1$

$$B = \lambda^2(p_1^2-p_2^4)+2p_2\lambda(p_1-p_2^2+p_1^2-p_1p_2^2)+(p_1^2-p_2^4) > 0.$$

Für $p_2\leqq p_1$ ist

$$p_2+\mu-(q_1+q_2)=\lambda(1-p_1)\geqq 0$$

und für $p_2>p_1$ ist

$$p_2+\mu-(q_1+q_2) = (p_2-p_1)+\lambda(1-p_2)>0,$$

somit stets

(29) $$D\geqq 0.$$

Daher kann $\varphi(x)$ sein Vorzeichen nicht wechseln und ist wegen $\varphi(0)<0$ stets $\leqq 0$, also nach (26) auch

$$f_2'(\alpha_2) \leqq 0 \tag{30}$$

für $\alpha_2 \neq \frac{\pi}{2}$.

Fall b) $p_2^2 = p_1$, also $p_2 \leqq 1$. Es ist wieder $D \geqq 0$ und $\varphi(x)$ stets $\leqq 0$, sodaß wieder (30) gilt. Für $p_1 = p_2 = 1$ ist $\varphi(x) \equiv 0$, und $f_1(\alpha_2) = \frac{\pi}{\sin \alpha_2}$ erreicht sein Maximum für $\alpha_2 = \alpha_2'$ oder $\alpha_2 = \alpha_2''$.

Es sei nun $\alpha_2 \in I_1 = \left[\alpha_2', \frac{\pi}{2}\right)$ und zunächst $p_2 < p_1$; wir beweisen

$$f_2(\alpha_2) < 0. \tag{31}$$

Wegen

$$\frac{d^2\alpha_1}{d\alpha_2^2} \geqq 0$$

ist

$$\frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} \geqq \left.\frac{d\alpha_1}{d\alpha_2}\right|_{\alpha_2 = \alpha_2'} = \frac{(\lambda^2-1)p_1^2 + 2\lambda p_1 p_2 - 2\lambda p_2 - 2\lambda p_1 - 2\lambda^2}{2(\lambda + p_1)^2}$$

und

$$(p_1^2 - 1)\frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} + (p_2^2 - 1) \leqq \frac{1}{2(\lambda+p_1)^2}[\lambda^2(p_1^4 - 3p_1^2 + 2p_2^2) +$$

$$+ 2\lambda(-p_1^3 + p_1^3 p_2 - p_1^2 p_2 - p_1 p_2 - p_1 + p_2 + 2p_1 p_2^2) + p_1^2(2p_2^2 - p_1^2 - 1)] < 0,$$

also (31) nach (25) richtig.

Für $p_2 \geqq p_1 > 0$ gilt

$$f_2(\alpha_2') < 0. \tag{32}$$

Zum Beweis nehmen wir $p_2 < 1$ an; für $p_2 \geqq 1$ verläuft er ganz analog. Setzt man

$$f_2(\alpha_2') = \psi(p_1, p_2), \tag{33}$$

so findet man

$$\psi(0, p_2) = \frac{\sqrt{\lambda^2-1}}{2\lambda^2} p_2 \sqrt{(2\lambda + p_2)^2 - \lambda^2 p_2^2} + \tag{34}$$

$$+ \left[\arc\cos \frac{(\lambda^2-1)p_2 - 2\lambda}{2\lambda^2} - (p_2^2 - 1)\arc\cos\frac{(\lambda^2+1)p_2 + 2\lambda}{2\lambda(p_2+\lambda)} - \pi\right]$$

mit

$$\psi(0, 0) = 0, \tag{35}$$

$$\frac{\partial \psi(0, p_2)}{\partial p_2} = 2p_2 \psi_1(p_2), \tag{36}$$

$$\psi_1(p_2) = \frac{\sqrt{\lambda^2-1}}{2\lambda^2}\frac{1}{p_2+\lambda}\sqrt{(2\lambda+p_2)^2 - \lambda^2 p_2^2} - \arc\cos\frac{(\lambda^2+1)p_2+2\lambda}{2\lambda(p_2+\lambda)}.$$

Wegen

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial p_2} = \frac{(\lambda^2-1)^{\frac{3}{2}}}{2\lambda(p_2+\lambda)^2} \frac{p_2+2\lambda}{\sqrt{(2\lambda+p_2)^2-\lambda^2 p_2^2}} > 0$$

und

$$\psi_1(1) < 0$$

ist

$$\psi_1(p_2) < 0,$$

somit nach (35) und (36)

$$\psi(0, p_2) < 0. \tag{37}$$

Nach einiger Rechnung findet man

$$\frac{\partial \psi}{\partial p_1} = \frac{p_2(\lambda+1)(p_2\lambda - p_2 - 2\lambda)}{8\cos^2\alpha_2' \sin\alpha_2'(p_1+\lambda p_2)^4(p_1+\lambda)^3(p_2+\lambda)^3} P(p_1, p_2, \lambda) - 2p_1\alpha_1', \tag{38}$$

wobei α_1' jenen Wert von α_1 bezeichnet, der $\alpha_2 = \alpha_2'$ entspricht, und $P(p_1, p_2, \lambda)$ ein- der Länge wegen nicht angeschriebenes-Polynom in den drei Variablen bedeutet. Durch geeignetes Zusammenfassen der Glieder kann man leicht zeigen, daß

$$P(p_1, p_2, \lambda) > 0$$

für $0 < p_1 \leqq p_2 < 1$, $\lambda > 1$ ist. Somit ist

$$\frac{\partial \psi}{\partial p_1} < 0$$

und wegen (37)

$$\psi(p_1, p_2) < 0,$$

womit (32) bewiesen ist.

Aus (30) und (32) folgt wieder die Ungleichung (31), die somit in den Fällen a) und b) in I_1 gilt. Wegen (24) ist daher $f_1'(\alpha_2)$ dort gleichfalls <0.

Für $\alpha_2 \in I_2 = \left(\frac{\pi}{2}, \alpha_2''\right]$ ist wegen (30) $f_2(\alpha_2)$ entweder stets >0 oder stets <0 oder mit wachsendem α_2 zuerst >0, dann <0. Aus (24) folgt für $f_1'(\alpha_2)$ das entgegengesetzte Vorzeichen, woraus man mit Rücksicht auf das Verhalten in I_1 und die Stetigkeit schließt: $f_1'(\alpha_2)$ ist in $[\alpha_2', \alpha_2'']$ entweder stets >0 oder stets <0 oder zuerst <0, dann >0, weshalb $f_1(\alpha_2)$ in den Fällen a), b) sein Maximum am Rande dieses Intervalles annimmt.

Fall c) $p_2^2 > p_1$, also $p_2 > p_1$. Für $p_2 \leqq 1$ ist $B < 0$ und $p_2 + \mu - (q_1 + q_2) > 0$, also

$$D < 0.$$

Für $p_2 > 1$ ist

$$B = \frac{1}{\lambda^2}[p_2^2\lambda^2(p_1^2 - 2p_2^2 + 1) + 2\lambda p_2(p_1^2 - p_2^2 + p_1 - p_1 p_2^2) + (2p_1^2 - p_2^2 - p_1^2 p_2^2)] < 0$$

und

$$p_2 + \mu - (q_1 + q_2) = \frac{1}{\lambda}(1 - p_1) \geqq 0,$$

also

$$D \leqq 0.$$

Nun ist nach (27)

$$\varphi'(x) = 4(p_2+\mu)(q_1+q_2)\cdot[-(p_2+\mu)(q_1+q_2)(1+p_1^2-2p_2^2)x+B],$$

somit in I_1 für $1+p_1^2-2p_2^2 \geqq 0$

$$\varphi'(x) < 0, \tag{39}$$

während für $1+p_1^2-2p_2^2<0$ $\varphi''(x)>0$ ist. Mit $x'=\cos\alpha_2'$ ist daher in diesem Fall $\varphi'(x) \leqq \varphi'(x')$. Für $p_1 < p_2 \leqq 1$ ist

$$\varphi'(x') = (\lambda^2+1)\left(p_1^2-\frac{p_2^2}{2}-\frac{p_1^2p_2^2}{2}\right)+$$
$$+\lambda(p_1-2p_1p_2^2+p_1^3-p_2+p_1p_2+p_1^2p_2-p_1^3p_2) < 0$$

und für $p_2>1$

$$\varphi'(x') = \lambda^2\left(\frac{1+p_1^2}{2}-p_2^2\right)+$$
$$+\lambda(p_1-p_2+p_1p_2+p_1^2p_2-2p_1p_2^2+p_1^3-p_1^3p_2)+\left(\frac{3p_1^2-1}{2}-p_1^2p_2^2\right) < 0,$$

also (39) auch in diesem Fall richtig. Daher ist $\varphi(x)$ entweder stets >0 oder stets <0 oder mit wachsendem x zuerst >0, dann <0. Wegen (26) ist $f_2'(\alpha_2)$ entweder stets >0 oder stets <0 oder mit wachsendem α_2 zuerst <0, dann >0. Aus (32) folgt, daß $f_2(\alpha_2)$ in I_1 entweder stets <0 oder zuerst <0, dann >0 ist. (24) zeigt, daß $f_1'(\alpha_2)$ gleiches Vorzeichen hat, sodaß $f_1(\alpha_2)$ in $\left[\alpha_1, \frac{\pi}{2}\right]$ sein Maximum am Rande des Intervalles annimmt.

Sei nun $\alpha_2=\frac{\pi}{2}$ und es bezeichne F den Fußpunkt der Normalen aus O_2 auf O_1O_3; dann ist

$$O_1F > \frac{\lambda+1}{2}r_1, \quad O_3F > \frac{\lambda+1}{2}r_3. \tag{40}$$

Zum Beweis nehmen wir $p_1 \leqq p_2 < 1$ an. Dann ist

$$O_1F = \frac{(\lambda r_2+r_1)^2}{\sqrt{(\lambda r_2+r_1)^2+(r_2+\lambda r_3)^2}},$$

und wir zeigen

$$\frac{(\lambda p_2+p_1)^2}{\sqrt{(\lambda p_2+p_1)^2+(p_2+\lambda)^2}} > \frac{\lambda+1}{2}p_1. \tag{41}$$

Bei festem p_1 wächst die linke Seite monoton mit p_2 und ist wegen $p_2>\sqrt{p_1}$ daher größer als

$$\frac{\lambda+\sqrt{p_1}}{\sqrt{p_1+1}}p_1 > \mathrm{Min}\left(\lambda, \frac{\lambda+1}{\sqrt{2}}\right)p_1 > \frac{\lambda+1}{2}p_1.$$

$O_3F > \frac{\lambda+1}{2} \cdot r_3$ ist gleichwertig mit

$$\frac{(p_2+\lambda)^2}{\sqrt{(\lambda p_2+p_1)^2+(p_2+\lambda)^2}} > \frac{\lambda+1}{2}.$$

Die linke Seite nimmt bei fixem p_2 mit wachsendem p_1 ab, ist also größer als

$$\frac{\lambda+p_2}{\sqrt{1+p_2^2}} > \mathrm{Min}\left(\lambda, \frac{\lambda+1}{\sqrt{2}}\right) > \frac{\lambda+1}{2}.$$

Analog zeigt man (40), wenn $p_2 \geqq 1$ ist.

Nimmt α_2 bei festen r_i zu, so nehmen α_1 und α_3 ab, daher nehmen O_1F und O_3F zu, sodaß für $\alpha_2 \geqq \frac{\pi}{2}$ stets (40) richtig ist. Spiegelt man K_2 an der Geraden O_1O_3, so geht K_2 in den zu K_1 und K_3 benachbarten Kreis K_2^* über, und (40) bedeutet, daß die Kreise K_1'' und K_3'' die Strecke $O_2O_2^*$ nicht treffen. Da K_2'' O_1O_3 nicht schneidet, greift K_2' nicht in K_2^* hinein und $K_2^{*\prime}$ nicht in K_2. Bezeichnen δ_1, δ_3 die Dichten der aus $\mathfrak{T}$ stammenden Kreistripel K_1, K_2, K_2^* bzw. K_3, K_2, K_2^* in den Dreiecken $O_1O_2O_2^*$ bzw. $O_3O_2O_2^*$ (Inhalte Δ_1 bzw. Δ_3), so ist wegen $\Delta_1+\Delta_3=2\Delta$

$$\delta = \frac{\Delta_1\delta_1+\Delta_3\delta_3}{2\Delta} \leqq \mathrm{Max}\,(\delta_1, \delta_3).$$

Ist δ die maximale Dichte in der Menge $\mathfrak{T}$, so ist notwendig

$$\delta = \mathrm{Max}\,(\delta_1, \delta_3),$$

also

$$\delta_1 = \delta_3 = \delta.$$

Im Fall c) ist aber $r_2 > r_1$; ist δ_1 die maximale Dichte, so müssen nach dem Ergebnis in a) für $p_2 < p_1 = 1$ K_2 und K_2^* benachbart sein, da nach (40) K_1'' $O_2O_2^*$ nicht berührt. Dies tritt aber nur dann ein, wenn K_2'' O_1O_3 berührt. Daher kann δ sein Maximum nur dann erreichen, wenn entweder K_1 und K_3 benachbart sind oder K_2'' die Strecke O_1O_3 berührt. Damit ist Lemma 3 auch im Fall c) bewiesen.

Nun beweisen wir zwei Eigenschaften der in (9) gegebenen Funktionen.

LEMMA 4. *Es sei $\lambda > 1$ fest und es bezeichne $\bar{\lambda}$ die positive Wurzel von $\pi\lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0$ $(\bar{\lambda} = 1{,}17\ldots)$. $\sigma(p, p, 1; \lambda)$ ist für $\lambda \geqq \bar{\lambda}$ in $(0, 1]$ monoton wachsend, für $1 < \lambda < \bar{\lambda}$ mit wachsendem p zuerst abnehmend, dann wachsend. $\sigma(p, 1, 1; \lambda)$ nimmt für jedes $\lambda > 1$ mit wachsendem p zuerst ab, dann zu.*

Daraus ergibt sich, daß beide Funktionen in jedem Intervall $[p_1, p_2] \subset (0, 1]$ ihr Maximum am Rande annehmen.

BEWEIS. Führt man in (9) die neue Variable q durch

$$\frac{(\lambda+1)p}{2(\lambda+p)} = \frac{q}{1+q} \qquad (0 < q \leqq 1) \tag{42}$$

ein, so wird

(43) $$\sigma(p, p, 1; \lambda) = \lambda^{-2}(\lambda+1)^{-2} f_1(q)$$
mit

(44) $$f_1(q) = q^{-1}(2q+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left\{2\pi\lambda^2 q^2 + (\lambda+1)(1-q)[(\lambda+1)+q(3\lambda-1)] \arcsin \frac{q}{1+q}\right\}$$
und

(45) $$f_1'(q) = q^{-2}(2q+1)^{-\frac{3}{2}} \cdot [(3\lambda-1)q^3 + (5\lambda-3)q^2 + (\lambda+1)(3q+1)] f_2(q)$$
mit

(46) $$f_2(q) = \frac{2\pi\lambda^2 q^2 (q+1)}{(3\lambda-1)q^3 + (5\lambda-3)q^2 + (\lambda+1)(3q+1)} - (\lambda+1) \arcsin \frac{q}{1+q} +$$
$$+ (\lambda+1)\sqrt{2q+1}\, \frac{q}{1+q} \frac{-q^2(3\lambda-1) + 2q(\lambda-1) + (\lambda+1)}{(3\lambda-1)q^3 + (5\lambda-3)q^2 + (\lambda+1)(3q+1)}.$$

Man findet mit $\sqrt{2q+1} = x$

(47) $$f_2'(q) = \frac{q}{4}(q+1)^{-1}[(3\lambda-1)q^3 + (5\lambda-3)q^2 + (\lambda+1)(3q+1)]^{-2} \cdot$$
$$\cdot [h_1(x) + h_2(x)],$$

wobei
$$h_1(x) = \pi\lambda^2[(\lambda-1)x^8 + (4\lambda+8)x^6 + (6\lambda+6)x^4 + 4\lambda x^2 + (\lambda+3)] -$$
$$-2(\lambda+1)[(9\lambda^2 - 9\lambda + 2)x^7 + (-7\lambda^2 + 29\lambda - 8)x^5 + (7\lambda^2 + \lambda - 10)x^3 -$$
$$-(9\lambda^2 + 37\lambda - 64)x],$$

(48) $$h_2(x) = -128(\lambda^2 - 1)\frac{x}{x^2+1}$$

ist. Verfolgt man die Vorzeichen von $h_1^{(n)}(1)$ und $h_1^{(n)}(\sqrt{3})$, die natürlich von λ abhängen, von $n=8$ bis $n=3$, so ergibt sich die Existenz einer Zahl $\lambda_3 > 1$, sodaß im Intervall $[1, \sqrt{3}]$ mit wachsendem x $h_1'''(x)$ zuerst >0, dann <0 für $1<\lambda<\lambda_3$, während $h_1'''(x)$ stets <0 für $\lambda > \lambda_3$ ist. Wegen $h_1''(1) > 0$ ist $h_1''(x)$ entweder stets >0 oder zuerst >0, dann <0. Aus $h_2''(x) > 0$ in $(1, \sqrt{3})$ schließt man, daß im ersten Fall mit
$$g(x) = h_1(x) + h_2(x)$$
$g''(x) > 0$ in $(1, \sqrt{3})$ ist. Im zweiten Fall gibt es genau ein ξ mit $1 < \xi < \sqrt{3}$, sodaß $h_1''(\xi) = 0$ und
$$h_1''(x) > 0 \quad \text{für} \quad 1 < x < \xi$$
und
$$h_1''(x) < 0 \quad \text{für} \quad \xi < x < \sqrt{3}$$
gilt. Somit ist $g''(x) > 0$ in $[1, \xi]$. Wegen $h_1'''(x) < 0$ in $[\xi, \sqrt{3}]$ und $h_2'''(x) < 0$ in $[1, \sqrt{3}]$ gilt $g'''(x) < 0$ in $[\xi, \sqrt{3}]$, weshalb $g''(x)$ entweder stets >0 oder zuerst >0, dann <0 in $[1, \sqrt{3}]$ ist. Dies trifft auch für $g'(x)$ zu, da $g'(1) > 0$ ist. Nimmt man noch $g(\sqrt{3}) > 0$ und
$$g(1) = 16(\lambda+1)(\pi\lambda^2 - 2\lambda - 2)$$

hinzu, so folgt, daß $g(x)>0$ in $[1, \sqrt{3}]$ für $\lambda \geqq \bar{\lambda}$ und $g(x)$ zuerst <0, dann >0 für $1<\lambda<\bar{\lambda}$ ist. $f_2'(q)$ hat nach (47) gleiches Vorzeichen; daraus folgert man mit $f_2(0)=0$, $f_2(1)>0$, daß $f_2(q)$ für $\lambda \geqq \bar{\lambda}$ stets >0 in $(0, 1)$ und für $1<\lambda<\bar{\lambda}$ $f_2(q)$ zuerst <0, dann >0 ist. Nach (45) hat $f_1'(q)$ gleiches Vorzeichen, woraus mittels (43) der erste Teil von Lemma 4 hervorgeht.

Zum Beweis des zweiten Teiles berücksichtigt man

$$\sigma(p, 1, 1; \lambda) = \frac{1}{\lambda^2}\sigma\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p}, 1; \frac{1}{\lambda}\right); \tag{49}$$

daher genügt es, $\sigma(p, p, 1; \lambda)$ für $p \geqq 1, \lambda<1$ zu untersuchen. Dies führt über (42) bis (47) wieder auf $g(x)$, wobei jetzt $\sqrt{3} \leqq x < \sqrt{\frac{3+\lambda}{1-\lambda}}$ ist. Setzt man

$$g(x)(x^2+1) = \bar{g}(x),$$

so findet man, indem man das Vorzeichen von $\bar{g}^{(n)}(x)$ von $n=10$ bis $n=0$ an den Grenzen des Intervalles $\left[\sqrt{3}, \sqrt{\frac{3+\lambda}{1-\lambda}}\right]$ untersucht, daß $g(x)$ entweder durchwegs >0 ist oder genau einmal das Vorzeichen wechselt. Da wegen (47) $f_2'(q)$ das gleiche Vorzeichen besitzt und $f_2(1)<0, f_2\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)>0$ ist, geht $f_2(q)$ von negativen zu positiven Werten über. Da bei (45) der Ausdruck in der eckigen Klammer >0 ist, hat $f_1'(q)$ gleiches Vorzeichen, was zusammen mit (42) und (49) die Richtigkeit der Behauptung beweist.

Lemma 3 reduziert die weitere Untersuchung des Maximums von δ auf die in Lemma 5 bzw. 6 enthaltenen Fälle.

LEMMA 5. *Es seien* $0<p<1, \lambda \geqq 1, p$ *und* λ *fest.* K_1, K_2, K_3 *seien drei gegenseitig benachbarte Kreise eines* λ*-Systems mit den Radien* $r_1 \leqq r_2 \leqq r_3$, *die wir so variieren, daß die Homogenität des Systems* $\frac{r_1}{r_3} = p' \geqq p$ *bleibt. Dann gilt*

$$\operatorname{Max} \delta = M(p, \lambda),$$

wobei im Falle des Maximums notwendig eine der drei Konfigurationen $(p, p, 1)$, $(p, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$ *eintritt.*

BEWEIS. $r_1<r_3$ seien zunächst fest, r_2 variabel. Dann erreicht $\delta(r_2)$ sein Maximum für $r_2=r_1$ oder $r_2=r_3$. Der Beweis dafür verläuft Schritt für Schritt völlig analog dem des Satzes 3 in [3], kann jedoch wegen der viel umfangreicheren (elementaren) Rechnungen hier nicht wiedergegeben werden. Die diesen Konfigurationen entsprechenden Werte von δ sind $\sigma(p', p', 1; \lambda)$ bzw. $\sigma(p', 1, 1; \lambda)$. Da diese beiden Funktionen nach Lemma 4 im Intervall $p \leqq p' \leqq 1$ ihr Maximum jeweils in einem Randpunkt annehmen, folgt

$$\operatorname{Max} \delta = \operatorname{Max}\{\sigma(p, p, 1; \lambda), \sigma(p, 1, 1; \lambda), \sigma(1, 1, 1; \lambda)\},$$

wie behauptet.

Auf den zweiten Teil der in Lemma 3 enthaltenen Alternative bezieht sich

LEMMA 6. *Für jene Kreistripel aus $\mathfrak{T}$, bei denen K_2'' die Strecke $O_1 O_3$ berührt, gilt*

$$\operatorname{Max} \delta = M(p, \lambda).$$

Der Beweis ergibt sich aus der Überlegung im Fall c) bei Lemma 3. Es ist mit dieser Bezeichnung mit Rücksicht auf Lemma 5

$$\delta \leqq \operatorname{Max}(\delta_1, \delta_3) \leqq M(p, \lambda),$$

wobei in

$$\delta \leqq M(p, \lambda)$$

Gleichheit genau dann eintritt, wenn $\delta_1 = \delta_3 = M(p, \lambda)$ ist.

Die Hilfssätze 1 bis 6 ergeben unmittelbar die Richtigkeit des Satzes 3 und damit des Hauptsatzes.

Prof. J. MOLNÁR bin ich für mehrere Diskussionen zu Dank verpflichtet. Prof. H. FLORIAN, dem Leiter des Rechenzentrums Graz, und Dr. K. HELLMICH danke ich besonders für die Durchführung zahlreicher numerischer Rechnungen.

(Eingegangen am 5. August 1966.)

Literaturverzeichnis

[1] L. FEJES TÓTH und J. MOLNÁR, Unterdeckung und Überdeckung der Ebene durch Kreise, *Mathem. Nachrichten*, **18** (1958), S. 235–243.

[2] L. FEJES TÓTH, *Reguläre Figuren* (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1965).

[3] A. FLORIAN, Ausfüllung der Ebene durch Kreise, *Rendic. Circ. Mat. Palermo*, **IX** (1960), S. 1–13.

[4] J. MOLNÁR, Unterdeckung und Überdeckung der Ebene durch Kreise, *Ann. Univ. Sci. Budap.*, II (1959), S. 33–40.

[5] J. MOLNÁR und A. HEPPES, Újabb eredmények a diszkrét geometriában I, *Mat. Lapok*, **XI/4** (1960), S. 330–355.

[6] A. FLORIAN, Dichteste Packung inkongruenter Kreise, *Mh. für Mathematik*, **67** (1963), S. 229–242.

[7] J. MOLNÁR, Kreispackungen und Kreisüberdeckungen auf Flächen konstanter Krümmung, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **18** (1967), S. 243–251.

[8] J. MOLNÁR, Kreislagerungen auf Flächen konstanter Krümmung, *Math. Annalen*, **158** (1965), S. 365–376.

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (3—4), 1967, pp. 359—377.

ON DECOMPOSITION OF GRAPHS

By

P. ERDŐS, member of the Academy and A. HAJNAL (Budapest)

§ 1. Introduction. Notations

We are going to use the notations introduced in our paper [1]*, § 2. A graph $\mathcal{G}$ is an ordered pair $\langle g, G\rangle$ where the elements of the sets g and G are the vertices and the edges of $\mathcal{G}$ respectively. We assume that the reader is familiar to the usual terminilogy of graph-theory. The aim of this paper is to consider two kinds of decompositions of graphs called vertex- and edge-decompositions respectively.

DEFINITION 1. 1. Let $\mathcal{G}=\langle g, G\rangle$ be a graph and let $\mathcal{G}_\xi=\langle g_\xi, G_\xi\rangle$, $\xi<\zeta$ be a sequence of type ζ of graphs.

The sequence $\mathcal{G}_\xi$, $\xi<\zeta$ is said to be a *vertex decomposition* of $\mathcal{G}$ if the g_ξ are disjoint, $\bigcup_{\xi<\zeta} g_\xi=g$ and $\mathcal{G}_\xi$ is the subgraph $\mathcal{G}(g_\xi)$ of $\mathcal{G}$ spanned by g_ξ in $\mathcal{G}$.

The sequence $\mathcal{G}_\xi$, $\xi<\zeta$ is said to be an *edge-decomposition* of $\mathcal{G}$ if $g_\xi=g$ for every $\xi<\zeta$, the G_ξ are disjoint and $\bigcup_{\xi<\zeta} G_\xi=G$.

The cardinal number $|\zeta|$ will be said the *type of the decomposition*, and the graphs $\mathcal{G}_\xi$ will be called the *members of the decomposition* in both cases.

We mention that the expression decomposition is usually used for the edge decompositions, in some cases vertex decompositions are called colourings.

Our problems will be of the following type. Let $\mathcal{G}$ be a graph and Φ a property of the graph usually expressing that $\mathcal{G}$ is "small" in a certain sense. Let further Φ' be a stronger property usually expressing that the graph having property Φ' is even "smaller". We investigate the problem if then $\mathcal{G}$ necessarily has vertex- or -edge-decompositions of relatively small types where the members of the decomposition all have property Φ'.

We will investigate these problems in details, when Φ and Φ' are properties expressing that $\mathcal{G}$ does not contain complete α-graphs. We also have results when the properties in question are that $\mathcal{G}$ does not contain rectangles or is a tree. We are going to discuss the different problems in different sections and we give a short summary of the results there. We have very little information on edge-decomposition problems. We discuss some obviously not final results for them since we think that some of the open problems are fundamental. Though we have been motivated mostly by infinite graphs when starting this paper almost all the problems are relevant for finite graphs, and there remain some interesting unsolved problems for finite graphs too.

* These are mostly the usual notations of set theory. We mention that ordinals are introduced so that every ordinal is the set of smaller ordinals. In some parts of the paper we consider finite problems and we use negative integers as well. In these parts we naturally do not assume that an integer is the set of smaller integers.

§ 2. The decomposition problems for graphs characterized by complete subgraphs. Further notations and definitions. Preliminaries

DEFINITION 2. 1. Let $\beta(\mathcal{G})$ denote the least cardinal number for which the graph $\mathcal{G}$ does not contain a complete β-graph $[\beta]$.

We have obviously $\beta(\mathcal{G}) \geqq 2$ if $g \neq 0$ and $\beta([\beta]) = \beta^+$. $\beta(\mathcal{G}) = 2$ iff $g \neq 0$ and $\mathcal{G}$ has no edges. These graphs will be called *independent graphs*.

We remind the reader that by [1] 2. 1 $\alpha(\mathcal{G})$ denotes the cardinal $|g|$.

We are going to consider the following problems involving four cardinals $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Is it true that every graph $\mathcal{G}$ with $\alpha(\mathcal{G}) = \alpha$, $\beta(\mathcal{G}) \leqq \beta$ has a vertex-decomposition or an edge-decomposition $\mathcal{G}_\xi$, $\xi < \gamma$ of type γ such that $\beta(\mathcal{G}_\xi) \leqq \delta$ holds for all members $\mathcal{G}_\xi$, $\xi < \gamma$ respectively?

To have a brief notation we introduce the symbols

$$[\alpha, \beta] \to [\gamma, \delta], \ (\alpha, \beta) \to (\gamma, \delta).$$

DEFINITION 2. 2. $[\alpha, \beta] \to [\gamma, \delta]$, $(\alpha, \beta) \to (\gamma, \delta)$ denote that the answer to the above problem is yes in case of vertex-decomposition or edge-decomposition respectively. As usual $[\alpha, \beta] \nrightarrow [\gamma, \delta]$, $(\alpha, \beta) \nrightarrow (\gamma, \delta)$ denote the negations of the respective statements.

Both symbols are obviously decreasing in the cardinals standing on the left and increasing in the cardinals standing on the right.

We always assume $\beta, \delta \geqq 2$.

The following statements are trivial.

2. 3 a) For every α, β

$$[\alpha, \beta] \to [1, \delta] \quad \text{and} \quad (\alpha, \beta) \to (1, \delta)$$

iff $\delta \geqq \beta$.

b) For every α, β $[\alpha, \beta] \to [\alpha, 2]$ and if $\alpha \geqq \omega$, then $(\alpha, \beta) \to (\alpha, 3)$.

Hence the relavant cases are only $\alpha > \gamma \geqq 2$, $\delta < \beta$. Note that $[\alpha, \beta] \to [\gamma, 2]$ means that each graph $\mathcal{G}$ with $\alpha(\mathcal{G}) = \alpha$, $\beta(\mathcal{G}) \leqq \beta$ has chromatic number at most γ, hence in case of vertex-decompositions the case $\delta = 2$ is very important. On the other hand, we trivially have $(\alpha, \beta) \nrightarrow (\gamma, 2)$ if $\alpha > 1$, $\beta \geqq 2$ and γ is arbitrary. Hence for edge-decompositions the simplest relevant case is $\delta \geqq 3$.

There is an obvious connection between the decomposition problems and the Ramsey problems treated in the partition symbol $\alpha \to (\beta_\xi)^r_\gamma$ defined in [2] and rather completely discussed in [3].

Using our present terminology we redefine the special cases $r = 1, 2$ of the symbol. The rather trivial case $r = 1$ is connected with vertex-decompositions, the case $r = 2$ is connected with edge-decompositions.

DEFINITION 2. 4. The symbols $\alpha \to (\beta_\xi)^r_\gamma$ $(r = 1, 2)$ denote that the following statements are true.

The complete α-graph $[\alpha]$ has no vertex-decomposition or edge-decomposition $\mathcal{G}_\xi$, $\xi < \gamma$ of type γ satisfying $\beta(\mathcal{G}_\xi) \leqq \beta_\xi$ for $\xi < \gamma$ for $r = 1$ or $r = 2$ respectively.

$\alpha \nrightarrow (\beta_\xi)^r_\gamma$ denotes the negation of the respective statements.

If all the β_ξ are equal to β we use the notation $\alpha\to(\beta)^r_\gamma$. If $\sum_{j<i}\gamma_j=\gamma$ and γ_j β_ξ equal to β_j we use the notation

$$\alpha\to\big((\beta_0)_{\gamma_0},\ldots,(\beta_{i-1})_{\gamma_{i-1}}\big)^r_\gamma$$

or

$$\alpha\to\big((\beta_0)_{\gamma_0},\ldots,(\beta_{i-1})_{\gamma_{i-1}}\big)^r.$$

In case some γ_j is 1 we omit it. As a corollary of the results of [2] (see Theorem 39) corresponding to every sequence $(\beta_\xi)_{\xi<\gamma}$ for every r $(r=1, 2)$ and for every γ there is an α for which $\alpha\to(\beta_\xi)^r_\gamma$ holds.

Let $\alpha(\beta_\xi,\gamma,r)$ denote the least α of this kind. This function is said to be the generalized Ramsey function. We will use for it the same obvious abbreviations as for the corresponding symbols.

As an immediate consequence of the definitions we have

2. 5. Assume $\alpha<\beta$, γ, $\delta\geqq 2$. Then

$$[\alpha,\beta]\to[\gamma,\delta]\quad\text{and}\quad(\alpha,\beta)\to(\gamma,\delta)$$

hold iff $\alpha<\alpha(\delta,\gamma,r)$ for $r=1$ and $r=2$ respectively.

The if part holds for every β in both cases.

2. 5 shows that we get new problems only in case $\alpha\geqq\beta$.

As an easy consequence of theorems of [2] and [3] we have

2. 6. A) $\alpha\to(\beta)^1_\gamma$ holds iff $\beta<\alpha$ and $\gamma<\alpha$ or $\beta=\alpha$ and $\gamma<\mathrm{cf}(\alpha)$ provided $\beta>1$, $\alpha\geqq\omega$.

B) $2^\alpha\not\to(3)^2_\alpha$ for every α.

As a corollary of 2. 5 and 2. 6 we obtain

2. 7.
$$[\alpha,\beta]\to[\mathrm{cf}(\alpha),\alpha]$$
$$(2^\gamma,\beta)\to(\gamma,3)$$

hold for every β and for every infinite α.

Hence in case of edge-decompositions we have a best possible positive result if $\alpha\leqq 2^\gamma$.

The following lemma establishes a connection between the two types of decompositions.

LEMMA 1. *Let $\mathcal{G}$ be a graph which has a vertex-decomposition $\mathcal{G}_\xi$, $\xi<\gamma$ of type γ satisfying $\beta(\mathcal{G}_\xi)\leqq\delta$ for every $\xi<\gamma$. Assume further that $\gamma\not\to(\delta)^2_{\gamma'}$ holds for some γ'. Then $\mathcal{G}$ has an edge-decomposition $\mathcal{G}'_\eta$, $\eta<\gamma'+1$ of type $\gamma'+1$, such that $\beta(\mathcal{G}'_\eta)\leqq\delta$ for every $\eta<\gamma'+1$.*

PROOF. By the assumption the complete γ-graph $[\gamma]$ with the set of vertices γ has an edge decomposition $\mathcal{G}''_\eta$, $\eta<\gamma'$ satisfying $\beta(\mathcal{G}''_\eta)\leqq\delta$. For an arbitrary $x\in g$ let $\xi(x)$ be the unique ordinal ξ for which $x\in g_\xi$.

We define the edge-decomposition $\mathcal{G}'_\eta$, $\eta<\gamma'+1$ of $\mathcal{G}$ as follows. Let $\{x,y\}\in G$ be arbitrary

if $\xi(x)\neq\xi(y)$, $\{x,y\}\in G'_\eta$ iff $\{\xi(x),\xi(y)\}\in G''_\eta$ for some $\eta<\gamma'$,

if $\xi(x)=\xi(y)$, $\{x,y\}\in G'_{\gamma'}$.

$\mathcal{G}''_\eta$, $\eta<\gamma'+1$ is obviously an edge-decomposition of type $\gamma'+1$ of $\mathcal{G}$. It is obvious that $\beta(\mathcal{G}''_{\gamma'})\leqq\delta$ because of $\beta(\mathcal{G}_\xi)\leqq\delta$ for $\xi<\gamma$. On the other hand $\beta(\mathcal{G}'_\eta)\leqq\delta$ since $\beta(\mathcal{G}''_\eta)\leqq\delta$ for $\eta<\gamma'$.

COROLLARY 1. Assume $[\alpha,\beta]\to[\gamma,\delta]$, $\gamma\leqq 2^{\gamma'}$, $\delta\geqq 3$. Then $(\alpha,\beta)\to(\gamma'+1,\delta)$.

PROOF. By Lemma 1 and by 2. 6. B).

2. 8. Assume that $[\alpha, \beta]\nrightarrow[\gamma, \delta]$ holds for every $\gamma<\alpha$, $\alpha\geqq\omega$. Then there is a graph $\mathcal{G}$, with $\alpha,(\mathcal{G})=\alpha$, $\beta(\mathcal{G})\leqq\beta$ such that no vertex-decomposition $\mathcal{G}_\xi$, $\xi<\gamma$ of type $\gamma<\alpha$ of $\mathcal{G}$ satisfies $\beta(\mathcal{G}_\xi)\leqq\delta$ for every $\xi<\gamma$.

PROOF. For every $\gamma<\alpha$ let $\mathcal{G}_\gamma$ be a graph satisfying the requirements of $[\alpha, \beta]\nrightarrow[\gamma, \delta]$. We may assume that the sequence g_γ, $\gamma<\alpha$ is disjointed. Put $\mathcal{G}=\langle g, G\rangle$ $g=\bigcup_{\gamma<\alpha} g_\gamma$, $G=\bigcup_{\gamma<\alpha} G_\gamma$. $\mathcal{G}$ obviously satisfies the requirements of 2. 8.

§ 3. The vertex decomposition problem for graphscharacterized by complete subgraphs

As we have already mentioned $[\alpha, \beta]\rightarrow[\gamma, 2]$ means that if $\alpha(\mathcal{G})=\alpha$ and $\beta(\mathcal{G})\leqq\beta$ then $\mathcal{G}$ has chromatic number $\leqq\gamma$. It was proved by P. ERDŐS and R. RADO that for every infinite α

$$[\alpha, 3]\nrightarrow[\gamma, 2] \quad \text{holds for every} \quad \gamma<\alpha$$

in other words by 2. 8 this means that for every infinite α there exists a graph of power α not containing triangles and having chromatic number α (see [4]). Using a well-known compactness argument this also implies that for every finite γ there exists an $\alpha_\gamma<\omega$ for which $[\alpha_\gamma, 3]\nrightarrow[\gamma, 2]$ holds.

This result was obtained by several other people (for references see [1]) and a very good estimation for α_γ is given by ERDŐS [5].

We are going to prove the following generalizations of this theorem.

THEOREM 1. *For every infinite cardinal α and for every integer $\delta\geqq2$*

$$[\alpha, \delta+1]\nrightarrow[\gamma, \delta] \quad \textit{holds for every} \quad \gamma<\alpha.$$

THEOREM 2. *For every infinite cardinals α, δ $[\alpha^\delta, \delta^+]\nrightarrow[\gamma, \delta]$ holds for every $\gamma<\alpha$.*

As a corollary we obtain

THEOREM 3. *Assume G. C. H. (generalized continuum hypothesis). Let α be infinite, $\alpha\geqq\beta$, $\alpha>\gamma$, $\beta>\delta\geqq2$ then $[\alpha, \beta]\nrightarrow[\gamma, \delta]$.*

In view of the preliminaries collected in § 2 this is a best possible negative result which settles all the problems concerning the vertex-decomposition symbol. From Theorem 3 and 2. 8 we obtain

COROLLARY 2. Assume G. C. H., $\alpha\geqq\omega$, $\alpha\geqq\beta$, $\beta>\delta\geqq2$. Then there exists a graph $\mathcal{G}$ with $\alpha(\mathcal{G})=\alpha$, $\beta(\mathcal{G})=\beta$ such that for every $\gamma<\alpha$ and for every vertex-decomposition $\mathcal{G}_\xi$, $\xi<\gamma$ of type γ of $\mathcal{G}$ we have $\beta(\mathcal{G}_\xi)>\delta$ for some $\xi<\delta$.

In case α is a limit cardinal Corollary 2 is a slightly stronger statement than Theorem 3.

We postpone the proofs of Theorems 1 and 2. First we prove Theorem 3 using these theorems.

PROOF OF THEOREM 3. Considering that $\beta>\delta$ by the monotonicity of our symbol it is sufficient to prove that

$$[\alpha, \delta^+]\nrightarrow[\gamma, \delta]$$

holds for $\alpha\geqq\delta^+$, $\alpha>\gamma$.

If α is regular, then $\alpha^\delta = \alpha$ by G. C. H. and the statement follows from Theorems 1 and 2 for finite and infinite α respectively. If α is singular then $\alpha > \delta^+$, hence there is a regular α' satisfying $\max(\gamma, \delta^+) \leqq \alpha' < \alpha$. $[\alpha', \delta^+] \nrightarrow [\gamma, \delta]$ holds for this α', hence by the monotonicity we have $[\alpha, \delta^+] \nrightarrow [\gamma, \delta]$. Note that the special case $\alpha = \omega$ of Theorem 3 implies

COROLLARY 3. For every finite γ and δ, $\gamma \geqq 2$, $\delta \geqq 2$ there is an $\alpha_{\gamma,\delta} < \omega$ such that

$$[\alpha_{\gamma,\delta}, \delta^+] \nrightarrow [\gamma, \delta].$$

This has been proved previously by P. ERDŐS and A. ROGERS in [6], where a good estimation for $\alpha_{\gamma,\delta}$ is given. We return to the discussion of this result in § 4, where we consider further refinements of the vertex-decomposition problem.

For the proof of Theorems 1, 2 we need some definitions and lemmas.

DEFINITION 3. 1. Let $\alpha, \delta > 0$. We define the usual lexicographical ordering of the set ${}^\delta\alpha$ as follows. Let $f \neq h \in {}^\delta\alpha$, $f \prec_{\alpha,\delta} h$ iff $f_\xi < h_\xi$ for the least ξ for which $f_\xi \neq h_\xi$.

We denote $\text{typ}\, {}^\delta\alpha(\prec_{\alpha,\delta})$ briefly by $\text{typ}\, {}^\delta\alpha$.* In case $\delta = 0$ we put $\text{typ}\, {}^\delta\alpha = 1$.

LEMMA 2. *Assume δ is finite, $\delta \geqq 1$, $\alpha \geqq \omega$, α is regular. Then $\prec_{\alpha,\delta}$ is a well ordering of ${}^\delta\alpha$.*

(A) *Let $\prec_{\alpha,\delta}$ be briefly denoted by $\prec$. Assume $g \subseteqq {}^\delta\alpha$, $\text{typ}\, g(\prec) = \text{typ}\, {}^\delta\alpha$. Let further $g = \bigcup_{\xi<\gamma} g_\xi$ for some cardinal $\gamma < \alpha$. Then there is a $\xi < \gamma$ such that* $\text{typ}\, g_\xi(\prec) = \text{typ}\, {}^\delta\alpha$.

(B) *Let $g \subseteqq {}^\delta\alpha$, $\text{typ}\, g(\prec) = \text{typ}^\delta\, \alpha$. For an arbitrary $\xi < \alpha$ let $a_\xi = \{f \in g \cap {}^\delta\alpha : f_0 = \xi\}$. Then the set*

$$\{\xi < \alpha : \text{typ}\, a_\xi(\prec) = \text{typ}\, {}^{\delta-1}\alpha\}$$

has power α.

Lemma 2 is well-known and we omit the proof.

We need

LEMMA 3. *Let $1 \leqq \delta < \omega$, $1 \leqq l$, $\alpha \geqq \omega$, α regular. Assume $g \subseteqq {}^\delta\alpha$, $\text{typ}\, g(\prec_{\alpha,\delta}) = \text{typ}\, {}^\delta\alpha$. Let $a_k = \langle i(k), j(k)\rangle$, $k < l\cdot\delta$ be an enumeration of all the pairs $\langle i, j\rangle$, $i < l$, $j < \delta$ such that*

(1) $\qquad a_k = \langle i, j\rangle,\quad a_{k'} = \langle i', j'\rangle,\quad j < j'$ *implies* $k < k'$ *for every* $i, i' < l$.

Then there exists an increasing sequence ξ_k, $k < l\cdot\delta$ of ordinals $< \alpha$ and a sequence f^i, $i < l$ of elements of g such that

$$f^i_j = \xi_k \quad \textit{if} \quad \langle i, j\rangle = a_k.$$

PROOF. For every $k < l\cdot\delta$ consider the sequence $\langle i(k), j\rangle = a_{k(j,k)}$, $j \leqq j(k)$. Then $k(j, k)$, $j \leqq j(k)$ is an increasing sequence of integers $\leqq k$, $k(j(k), k) = k$.

We define the sequence ξ_k, $k < l\cdot\delta$ of ordinals less than α by induction on k

* Note that in case δ is finite ${}^\delta\alpha$ equals to the ordinary ordinal power α^δ, a notation we can not use since we denoted by α^δ the ordinal power and if $\alpha \geqq \omega$ this equals to α and not to $\text{typ}\, {}^\delta\alpha$.

as follows. Assume that for some $k<l\cdot\delta$ $\xi_{k'}$ is defined for every $k'<k$ in such a way that for the set

$$A_{k'}=\{f\in{}^{\delta}\alpha\cap g: f_j=\xi_{k(j,k')}\quad\text{for}\quad j\leqq j(k')\}$$

$$\operatorname{typ} A_{k'}(\prec_{\alpha,\delta})=\operatorname{typ}{}^{\delta-j(k')-1}\alpha \tag{2}$$

holds. Put $k(j(k)-1,\,k)=k'$ if $j(k)>0$. In case $j(k)=0$ put $j(k')=-1$, $A_{k'}=g$. Then $k(j,k)=k(j,k')$ for $j\leqq j(k)-1=j(k')$.

The set $A_{k'}$ has a natural isomorphism on a subset $B_{k'}\subseteqq{}^{\delta-j(k')-1}\alpha$, with respect to the orderings $\prec_{\alpha,\delta}$ and $\prec_{\alpha,\delta-j(k')-1}$.

It follows from Lemma 2/B that there are α ξ for which

$$\operatorname{typ}\{f\in B_{k'}: f_0=\xi\}\ (\prec_{\alpha,\delta-j(k')-1})=\operatorname{typ}{}^{\delta-j(k')-2}\alpha.$$

Put $\xi=\xi_k$ for the least ξ of this type satisfying $\xi>\xi_{k-1}$. Then

$$A_k=\{f\in{}^{\delta}\alpha\cap g: f_j=\xi_{k(j,k)}\quad\text{for}\quad j\leqq j(k)\}=$$

$$=\{f\in{}^{\delta}\alpha\cap g: f_j=\xi_{k(j,k)}=\xi_{k(j,k')}\quad\text{for}\quad j\leqq j(k)-1\quad\text{and}\quad f_{k(j,k)}=f_k=\xi_k\}.$$

Hence $\operatorname{typ} A_k(\prec_{\alpha,\delta})=\operatorname{typ}{}^{\delta-j(k')-2}\alpha=\operatorname{typ}{}^{\delta-j(k)-1}\alpha$. Thus the increasing sequence ξ_k, $k<l$, δ of ordinals is defined and satisfies (2) for every $k<l\cdot\delta$. For every $i<l$ there is a $k<l\cdot\delta$ such that $a_k=\langle i,\,\delta-1\rangle$.

By (1) $\operatorname{typ} A_k(\prec_{\alpha,\delta})=\operatorname{typ}{}^{0}\alpha=1$.

Let f^i be the unique element of A_k. Then by (1) $f^i_j=\xi_{k(j,k)}$ for $j\leqq j(k)=\delta-1$. This means that ξ_k and f^i satisfy the requirements of Lemma 3.

PROOF OF THEOREM 1. By monotonicity we may assume that $\alpha=\gamma^+$ and so α is regular. We are going to define a graph $\mathscr{G}=\langle g,G\rangle$. g will be a subset of ${}^{\delta+1}\alpha$.

(1) Put $g=\{f\in{}^{\delta+1}\alpha: f_0<\ldots<f_\delta\}$.

Let $f,h\in g$, $f\neq h$.

(2) Put $\{f,h\}\in G$ if there exists a j, $2\leqq j\leqq\delta$ such that $f_{j-1}<h_0<f_j<h_1$.

We prove that the graph $\mathscr{G}$ defined by (1) and (2) satisfies the requirements. It is obvious that $\alpha(\mathscr{G})=\alpha$.

First we prove

$$[\delta+1]\nsubseteq\mathscr{G}. \tag{3}$$

Let $f^0,\ldots,f^\delta$ be $\delta+1$ different elements of $\mathscr{G}$. We have to prove that there are two f^i not connected in $\mathscr{G}$. We may choose the notation so that $f^0_0\leqq f^i_0$ for $i\leqq\delta$. Assume that f^0 is adjacent to each f^i for $1\leqq i\leqq\delta$. Then by (1) and (2) for every i, $1\leqq i\leqq\delta$ there is a j_i, $1\leqq j_i\leqq\delta$ such that

$$f^0_{j_i-1}<f^i_0<f^0_{j_i}<f^i_1. \tag{4}$$

It follows that there are $i\neq i'$, $1\leqq i,i'\leqq\delta$ satisfying (4) with $j_i=j_{i'}$. It follows that $f^i_0<f^{i'}_1$ and $f^{i'}_0<f^i_1$, hence by (1) $f^i_0<f^{i'}_j$ for $1\leqq j\leqq\delta$ and $f^{i'}_0<f^i_j$ for $1\leqq j\leqq\delta$. Hence by (2) $\{f^i,f^{i'}\}\notin G$. This proves (3).

Now we prove

(5) Let $\mathscr{G}_\xi$, $\xi<\gamma$ be a vertex-decomposition of type γ of $\mathscr{G}$. Then $\beta(\mathscr{G}_\xi)=\delta+1$ for some $\xi<\gamma$ i.e. $[\delta]\subseteqq\mathscr{G}_\xi$ for some $\xi<\gamma$.

Let $\prec_{\alpha,\delta+1}$ be briefly denoted by $\prec$.

It is well known that for the set g defined in (1) we have $\operatorname{typ} g(\prec) = \operatorname{typ}^{\delta+1}\alpha$. It follows from Lemma 2/A that there is a $\xi < \gamma$ that

$$\operatorname{typ} g_\xi(\prec) = \operatorname{typ}^{\delta+1}\alpha.$$

Hence by the definition of the vertex-decomposition it is sufficient to prove

(6) If $g' \subseteqq g$, $\operatorname{typ} g'(\prec) = \operatorname{typ}^{\delta+1}\alpha$ then $\mathscr{G}(g') \supseteqq [\delta]$.

To prove (6) we have to define a sequence $f^0, \dots, f^{\delta-1}$ of elements of g' so that every pair of them is connected in $\mathscr{G}$. Considering (1) and (2) it is sufficient to define the f^i-s for $i < \delta$ so that $f^i \in g'$ and the ordinal numbers f^i_j, $i < \delta$, $j < \delta + 1$ satisfy the following conditions

(7) $f^i_0 < \dots < f^i_\delta$ for $i < \delta$.

(8) For every $i < i' < \delta$ $f^i_{i'-i} < f^{i'}_0 < f^i_{i'-i+1} < f^{i'}_1$.

Let $a_k = \langle i(k), j(k) \rangle$, $k < \delta \cdot (\delta + 1)$ be the following enumeration of the pairs $\langle i, j \rangle$, $i < \delta$, $j < \delta + 1$. If $a_k = \langle i, j \rangle$, $a_{k'} = \langle i', j' \rangle$ then $k < k'$ iff either $i + j < i' + j'$ or $i + j = i' + j'$ and $i < i'$. It is easy to see that

(9) any of the following conditions a)—d) imply $k < k'$

a) $i = i'$ and $j < j'$

b) $i < i'$ and $j = i' - i, j' = 0$

c) $i < i'$ and $j = i' - i + 1, j' = 1$

d) $i > i'$ and $j = 0, j' = i - i' + 1$.

It follows from Lemma 3 that there is an increasing sequence ξ_k, $k < \delta \cdot (\delta + 1)$ of ordinals and a sequence f^i, $i < \delta$ of elements of g' satisfying $f^i_j = \xi_k$ for $a_k = \langle i, j \rangle$, $k < \delta \cdot \delta + 1$. Considering that the enumeration a_k satisfies (9) the ordinal numbers f^i_j satisfy (7) and (8). This proves (6). By (3) and (5) $\mathscr{G}$ satisfies the requirements of Theorem 1.*

For the proof of Theorem 2 we need further preliminaries.

LEMMA 4. *Let $\delta \geqq \omega$. Let $\succ_{\alpha,\delta}$ denote the converse of the lexicografical ordering $\prec_{\alpha,\delta}$ defined in* 3. 1. *Let $g \subseteqq {}^\delta\alpha$ and assume that g is well-ordered by $\succ_{\alpha,\delta}$. Then $|g| \leqq \delta$.*

PROOF in outline: If this is not true, then there exists a $g \subseteqq {}^\delta\alpha$ such that $\operatorname{typ} g(\succ_{\alpha,\delta}) = \delta^+$.

It is easy to see by induction on $\xi < \delta$, that for every $\xi < \delta$ there is an $f^\xi \in {}^\xi\alpha$ such that the set

$$A_\xi = \{f \in g : f \restriction \xi \neq f^\xi\}$$

has power $\leqq \delta$. Then $f^\eta = f^\xi \restriction \eta$ for every $\eta < \xi < \delta$. The set $g - \bigcup_{\xi < \delta} A_\xi$ has power δ^+, because $|g| = \delta^+$ but for each element f of it $f \restriction \xi = f^\xi$ for every $\xi < \delta$. This is a contradiction.

DEFINITION 3. 2. Let A be a set ordered by the relation $\prec$. We say that $\prec$ is a δ-well ordering of A if every subset $B \subseteqq A$ well-ordered by the converse ordering $\succ$ has power $< \delta$. ω-well-ordered sets are the ordinary well-ordered sets. Our previous lemma states that ${}^\delta\alpha$ is δ^+-well-ordered by $\prec_{\alpha,\delta}$ for every infinite δ.

The next lemma contains the essential idea of the proof of Theorem 2.

* The proof of Theorem 1 makes use of an idea of E. SPECKER [7] used for the proof of $\operatorname{typ}^3 \omega \nrightarrow (\operatorname{typ}^3 \omega, 3)^2$. The same idea is used in [4].

LEMMA 5. *Let $\alpha, \delta \geqq \omega$. Then ${}^{\delta}\alpha$ is not the union of less than α sets δ-well-ordered by $\prec_{\alpha,\delta}$.*

PROOF. Let g_ξ, $\xi<\gamma$ be a disjointed sequence of subsets of ${}^{\delta}\alpha$, δ-well-ordered by $\prec_{\alpha,\delta}$. We have to prove that

$${}^{\delta}\alpha \subsetneqq \bigcup_{\xi<\gamma} g_\xi .$$

First we prove

(1) Let $g \subseteqq {}^{\delta}\alpha$ be δ-well-ordered by $\prec_{\alpha,\delta}$. Then for every $f\in g$ there is an $\eta<\delta$ such that for every $h\in g$ $h\restriction\eta = g\restriction\eta$ implies that $h(\eta)\leqq f(\eta)$.

In fact if such an η does not exist then for every $\eta<\delta$ there is an $h^\eta\in g$ such that $h^\eta\restriction\eta = f\restriction\eta$ and $h^\eta(\eta)>f(\eta)$. But then $h^\eta \succ_{\alpha,\delta} h^{\eta'}$ for every $\eta<\eta'<\delta$ and $\{h^\eta\}_{\eta<\delta}$ is a subset of g of power δ well-ordered by $\succ_{\alpha,\delta}$, a contradiction.

It follows immediately from (1) that the following assertion holds.

(2) Let $g\subseteqq {}^{\delta}\alpha$ be δ-well-ordered by $\prec_{\alpha,\delta}$. For every $f\in g$ let $\eta(f)$ be an ordinal $<\delta$ satisfying (1). Let $f, h\in g$ be such that $\eta(f)=\eta(h)=\eta$ and $f\restriction\eta = h\restriction\eta$. Then $f(\eta)=h(\eta)$.

(3) Put $g=\bigcup_{\xi<\gamma} g_\xi$. For every $f\in g$ put $\xi(f)=\xi$ for the unique ξ for which $f\in g_\xi$ and let $\eta(f)$ be an ordinal $<\delta$ satisfying (1) with $g_{\xi(f)}$ instead of g.

(4) Put $a_\eta=\{f\in g\colon \eta(f)=\eta\}$ for $\eta<\delta$. We have

$$g=\bigcup_{\eta<\delta} a_\eta . \tag{5}$$

We define a function $f\in {}^{\delta}\alpha - g$ by defining f_η, $\eta<\delta$ by transfinite induction on η as follows. Suppose that for some $\eta<\delta$ $f_{\eta'}$ is defined for every $\eta'<\eta$, hence $f\restriction\eta$ is defined. It follows from (2) and (4) that for each $\xi<\gamma$ there is an ordinal number $\varrho(\xi,\eta)$ such that for every $h\in g_\xi\cap a_\eta$ $h\restriction\eta=f\restriction\eta$ implies $h(\eta)=\varrho(\xi,\eta)$. Considering that $\gamma<\alpha$ there is an ordinal number $f_\eta<\alpha$ such that $f_\eta\neq\varrho(\xi,\eta)$ for every $\xi<\gamma$. This defines the function f and it is obvious that $f\in{}^{\delta}\alpha$. Assume $f\in g$. Then by (3) $f\in g_\xi$ for $\xi=\xi(f)$. Let $\eta(f)=\eta$. Considering that $f\restriction\eta=f\restriction\eta$, $f_\eta=\varrho(\xi,\eta)$ a contradiction, since $f\in g_\xi\cap a_\eta$. This proves Lemma 5.

PROOF OF THEOREM 2. We define a graph $\mathscr{G}=\langle g, G\rangle$. Let $g={}^{\delta}\alpha$. Then $\alpha(\mathscr{G})=\alpha^\delta$. Let f be a one-to-one mapping of α^δ onto g. Let $\{f_\varrho, f_\sigma\}$ $\varrho<\sigma<\alpha^\delta$ be arbitrary. Put $\{f_\varrho, f_\sigma\}\in G$ iff $f_\varrho \succ_{\alpha,\delta} f_\sigma$.*

First we prove a lemma.

(1) *Let $a\subseteqq{}^{\delta}\alpha$ and let $\beta\geqq\omega$ be arbitrary. Then $[\beta]\subseteqq\mathscr{G}(a)$ iff a is not β-well-ordered by $\prec_{\alpha,\delta}$.*

The only if part is trivial from the definition of $\mathscr{G}$. Assume a is not β-well-ordered by $\prec_{\alpha,\delta}$. Then by 3. 2 it contains a subset $b\subseteqq a$ such that $|b|=\beta$ and typ $b\,(\succ_{\alpha,\delta})=\beta$, i.e. b is well-ordered by $\succ_{\alpha,\delta}$. It is well known that then b contains a subset $c\subseteqq b$, $|c|=\beta$ such that for each f_ϱ, $f_\sigma\in c$ $f_\varrho\succ_{\alpha,\delta} f_\sigma$ iff $\varrho>\sigma$.

For the convenience of the reader we mention that this can be easily proved using a theorem of [3] which in terms of the partition symbol defined in 2. 4 states

* The idea of graph definitions of this type goes back to SIERPIŃSKI. We call it a Sierpińskisation of the complete graph.

that $\beta \to (\beta, \omega)^2$ holds for every $\beta \geqq \omega$. The proof is simply a Sierpinskisation of the complete graph with set of vertices b, using the two different well-orderings.

It is obvious that the complete graph with vertices c is a subgraph of $\mathcal{G}$. This proves (1).

By lemma 4 and (1) we have $[\delta^+] \nsubseteq \mathcal{G}$, hence $\beta(\mathcal{G}) = \delta^+$. On the other hand if $\gamma < \alpha$ and $\mathcal{G}_\xi$, $\xi < \gamma$ is a vertex-decomposition of type γ of $\mathcal{G}$ then by Lemma 5, there is a $\xi < \gamma$ such that g_ξ is not δ-well-ordered. Then, by (1) $[\delta] \subseteq \mathcal{G}(g_\xi)$, hence $\beta(\mathcal{G}_\xi) \geqq \delta^+$. This proves the theorem.

We wish to discuss two possible strengthenings of the theorems of this section. It is possible that under the conditions of Theorem 3 there always exists a graph $\mathcal{G}$, with $\alpha(\mathcal{G}) = \alpha$, $\beta(\mathcal{G}) = \beta$ such that for every vertex-decomposition $\mathcal{G}_\xi$, $\xi < \gamma$ of type γ of $\mathcal{G}$ we have $\beta(\mathcal{G}_\xi) = \beta$ for some $\xi < \gamma$. As a corollary of Theorem 3 this is trivial if β is not a limit cardinal, and it is easy to see that if β is a limit cardinal then a further condition $\beta < \alpha$ or $\gamma < \mathrm{cf}(\alpha)$ is necessary. In case $\beta = \omega$ we can prove the following

THEOREM 4. *Let $\alpha \geqq \omega$ be regular. Then there exists a graph $\mathcal{G}$ with $\alpha(\mathcal{G}) = \alpha$, $\beta(\mathcal{G}) = \omega$ such that, for every $\gamma < \alpha$ and for every vertex-decomposition $\mathcal{G}_\xi$, $\xi < \gamma$ of it, $\beta(\mathcal{G}_\xi) = \omega$ for some $\xi < \gamma$.*

We postpone the proof.

We do not know whether this result can be generalized for limit cardinals $\beta > \omega$. The simplest unsolved problem is

PROBLEM 1. Assume G.C.H. Does there exist a graph $\mathcal{G}$ with $\alpha(\mathcal{G}) = \omega_{\omega+1}$, $\beta(\mathcal{G}) = \omega_\omega$ such that for every vertex-decomposition $\mathcal{G}_\xi$, $\xi < \omega_\omega$ of type ω_ω of $\mathcal{G}$, $\beta(\mathcal{G}_\xi) = \omega_\omega$ holds for some $\xi < \omega_\omega$?

The second generalization of Theorem 3 would be that under the conditions of Theorem 3 and the additional condition $\alpha > \beta$ or $\mathrm{cf}(\alpha) > \gamma$ the following assertion is true. There exists a graph $\mathcal{G}$ with $\alpha(\mathcal{G}) = \alpha$, $\beta(\mathcal{G}) = \beta$ such that for every vertex-decomposition $\mathcal{G}_\xi$, $\xi < \gamma$ of type γ, there is a $\xi < \gamma$ for which $\mathcal{G}_\xi$ contains a subgraph isomorphic to $\mathcal{G}$.

We did not investigate this problem very closely, but we mention that e.g. the graph constructed for the proof of Theorem 1 has this stronger property in case α is regular.

Now we give the

PROOF OF THEOREM 4. Let $g = {}^2\alpha$. Assume $f, h \in g$ and $f(0) \leqq h(0)$. Put $\{f, h\} \in G$ iff $f(0) < g(0)$ and $f(1) > g(1)$. Obviously $\alpha(\mathcal{G}) = \alpha$.

We prove

$$(1) \qquad \beta(\mathcal{G}) = \omega.$$

It is obvious that $\beta(\mathcal{G}) \geqq i$ for every $i < \omega$. If $\beta(\mathcal{G}) > \omega$ then $[\omega] \subseteq \mathcal{G}$, i.e. $\mathcal{S}_2[g'] \subseteq \mathcal{G}$ for some $g' \subseteq g$, $|g'| = \omega$. We may choose the notations so that $g' = \{f^i\}_{i<\omega}$ where $f^i \neq f^j$ and $f^i(0) \leqq f^j(0)$ for every $i < j < \omega$. Then by the definition of $\mathcal{G}$ $f^i(0) < f^j(0)$ and $f^i(1) > f^j(1)$ for every $i < j < \omega$. This is a contradiction, hence (1) is proved.

Let now $\mathcal{G}_\xi$, $\xi < \gamma$ be an arbitrary vertex-decomposition of type $\gamma < \alpha$ of $\mathcal{G}$. Then by Lemma 2/A there is a $\xi < \gamma$ such that

$$\mathrm{typ}\, g_\xi (\prec_{\alpha,2}) = \mathrm{typ}\, {}^2\alpha.$$

It follows from Lemma 3 that for every $i<\omega$ there exists a sequence $\{f^j\}_{j<i}$ of elements of g_ξ satisfying the conditions

$$f^0(0)<\ldots<f^{i-1}(0)<f^{i-1}(1)<\ldots<f^0(1).$$

Hence by the definition of $\mathcal{G}$ $[i]\subseteq\mathcal{G}_\xi$ for every $i<\omega$, hence $\beta(\mathcal{G}_\xi)=\omega$. This proves Theorem 4.

§ 4. Further refinements of the vertex-decomposition problem

As a corollary of a theorem of [6] which also follows from our Theorem 2 we know that for every integer β, $\gamma\geqq 2$ there exists a finite graph $\mathcal{G}$ with $\beta(\mathcal{G})=\beta+1$ such that in every vertex-decomposition $\mathcal{G}_\xi$, $\xi<\gamma$ of type γ of $\mathcal{G}$ there is a member $\mathcal{G}_\xi$ with $\beta(\mathcal{G}_\xi)=\beta+1$. L. LOVÁSZ pointed out to us that possibly this theorem can be improved so that one can find such a graph $\mathcal{G}$ which satisfies even further conditions expressing that $\mathcal{G}$ does not contain "greater" graphs, other than the complete β-graph $[\beta]$. He gave in the special case $\beta=3$, $\gamma=2$ a tricky construction of a graph $\mathcal{G}$ which does not contain a quadrilateral with a diagonal (hence does not contain a $[4]$-graph) but has no vertex-decomposition of type two where the members do not contain triangles.

It turned out that using the methods of our paper [1] one can easily prove a very general result in this direction. This will be given in Theorem 5. An interesting feature of this theorem is that unlike the previous results it does not generalize for infinite graphs. In Theorem 6 we prove that if a graph $\mathcal{G}$ with $\beta(\mathcal{G})=\beta+1$, $2\leqq\beta<\omega$ does not contain a subgraph of $\beta+1$-vertices and $\binom{\beta+1}{2}-1$ edges (i.e. a complete $\beta+1$-graph minus one edge) then it has a vertex-decomposition $\mathcal{G}_\xi$, $\xi<\omega$ of type ω such that $\beta(\mathcal{G}_\xi)\leqq\beta$ for every $\xi<\omega$.

Before stating the theorems, for the convenience of the reader we recall some definitions given in [1].

DEFINITION 4. 1. A pair $\mathcal{H}=\langle h, H\rangle$ is said to be a *set-system* if $\cup H\subseteq h$. $\mathcal{H}$ is said to be *uniform* if $|A|=|B|$ for every pair $A, B\in H$. If $\mathcal{H}$ is uniform then the cardinal of the elements of H will be denoted by $\varkappa(H)$. A graph $\mathcal{G}$ is a uniform set-system with $\varkappa(H)=2$. The *chromatic number of a set-system* $\mathcal{H}$ denoted by Chr $(\mathcal{H})$ is the least cardinal γ for which there is a decomposition h_ξ, $\xi<\gamma$ of type γ of h such that no h_ξ contains an element of H as a subset.

Let s be an integer, and let $\mathcal{H}$ be a uniform set-system with $\varkappa(\mathcal{H})=k$, $2\leqq k<\omega$. $\mathcal{H}$ is said to be s-circuitless if for every $1\leqq t\leqq s$, $H'\subseteq H$, $|H'|=t$ we have $|\cup H'|\geqq 1+(k-1)t$. A graph $\mathcal{G}$ as a set system is s-circuitless iff it does not contain circuits of length $\leqq s$.

We need the following

DEFINITION 4. 2. Let $\mathcal{G}$ be a graph with $\beta(\mathcal{G})=\beta+1$, $2\leqq\beta<\omega$. Let $\mathcal{G}_{[\beta]}$ denote the set system $\langle g, \mathcal{G}_{[\beta]}\rangle$ where

$$G_{[\beta]}=\{g'\subseteq g\colon |g'|=\beta \quad\text{and}\quad \mathcal{S}_2[g']\subseteq G\}$$

i.e. the system of complete β-subgraphs of $\mathcal{G}$. Let s be an integer. The graph $\mathcal{G}$ is said to be β, s circuitless if $\mathcal{G}_{[\beta]}$ is s-circuitless.

We need the following

LEMMA 6. *Let $2 \leqq \beta < \omega$. Let $\mathscr{H} = \langle h, H \rangle$ be a uniform s-circuitless set system with $\varkappa(H) = \beta$, $s > \beta$. Let $\mathscr{G}_{\mathscr{H}}$ be the graph $\langle g_{\mathscr{H}}, G_{\mathscr{H}} \rangle$ defined by the following stipulations:*

$$g_{\mathscr{H}} = h, \quad G_{\mathscr{H}} = \bigcup_{A \in H} \mathscr{S}_2[A].$$

Then $\mathscr{G}_{\mathscr{H}[\beta]} = \mathscr{H}$, $\beta(\mathscr{G}_{\mathscr{H}}) = \beta + 1$ and $\mathscr{G}_{\mathscr{H}}$ is β, s-circuitless.

PROOF. Let $g' \subseteqq h$, $|g'|$, $2 \leqq t \leqq \beta + 1$. We prove by induction on t that $\mathscr{S}_2[g'] \subseteqq \subseteqq G_{\mathscr{H}}$ implies that there is an $A \in \mathscr{H}$ for which $g' \subseteqq A$. For $t = 2$ this is trivial by the assumption. Assume $2 < t \leqq \beta + 1$ and that the statement is true for $t - 1$. Let $g' \subseteqq h$, $|g'| = t$, $\mathscr{S}_2[g'] \subseteqq G_{\mathscr{H}}$. Assume that $g' \subseteqq\hspace{-0.9em}/\hspace{0.5em} A$ for any $A \in \mathscr{H}$. The by the induction hypothesis there is an $H' = \{A_0, \dots, A_{t-1}\} \subseteqq H$, $|H'| = t$ so that the A_i-s contain the different subsets of $t - 1$ elements of the set g'. Then

$$|\cup H'| \leqq t + t(\beta - t + 1) = t(\beta - t + 2) \leqq t \cdot (\beta - 1)$$

since $t \geqq 3$.

Considering that $\mathscr{H}$ is s-circuitless for $s \geqq \beta + 1$ this is a contradiction, hence $g' \subseteqq A$ for some $A \in H$. In case $\beta + 1 = t$ this is impossible, hence $[\beta + 1] \notin \mathscr{G}_{\mathscr{H}}$. In case $t = \beta$ the statement just proved implies that $\mathscr{G}_{\mathscr{H}[\beta]} = \mathscr{H}$. Hence by the assumption and by definition 4. 2 $\mathscr{G}_{\mathscr{H}}$ is β, s-circuitless.

THEOREM 5. *Let β, γ, s be integers, $\beta, \gamma \geqq 2$. There is a finite graph $\mathscr{G}$ with $\beta(\mathscr{G}) = \beta + 1$ such that $\mathscr{G}$ is β, s-circuitless and every vertex-decomposition $\mathscr{G}_\xi$, $\xi < \gamma$ of type γ of $\mathscr{G}$ contains a member $\mathscr{G}_\xi$ with $\beta(\mathscr{G}_\xi) = \beta + 1$.*

PROOF. By Corollary 13. 4 of [1] there exists a uniform set-system $\mathscr{H} = \langle h, H \rangle$ with $\varkappa(H) = \beta$, Chr $(\mathscr{H}) \geqq \gamma + 1$ which is s' circuitless for $s' = \max(s, \beta + 1)$. Then by Lemma 6 the graph $\mathscr{G}_{\mathscr{H}}$ satisfies $\beta(\mathscr{G}_{\mathscr{H}}) = \beta + 1$ and is β, s-circuitless.

Let $\mathscr{G}_\xi$, $\xi < \gamma$ be an arbitrary vertex-decomposition of type γ of $\mathscr{G}_{\mathscr{H}}$. Then g_ξ, $\xi < \gamma$ is a decomposition of h . Considering Chr $(\mathscr{H}) \geqq \gamma + 1$ there is an $A \in H$ and a $\xi < \gamma$ such that $A \subseteqq g_\xi$ but then by the definition of $\mathscr{G}_{\mathscr{H}}$ $\mathscr{S}_2[A] \subseteqq \mathscr{G}_{\mathscr{H}}(g_\xi)$, hence $[\beta] \in \mathscr{G}_\xi$, $\beta(\mathscr{G}_\xi) = \beta + 1$.

Note that the proof of Theorem 13. 4 of [1] makes use of the so called probabilistic method.*

THEOREM 6. *Let $\mathscr{G}$ be a graph with $\beta(\mathscr{G}) = \beta + 1$, $2 \leqq \beta < \omega$. Assume that $\mathscr{G}$ does not contain a subgraph $\mathscr{G}' = \langle g', G' \rangle$ such that $|g'| = \beta + 1$, $G' = \mathscr{S}_2[g'] - \{x\}$ for some $x \in \mathscr{S}_2[g']$. Then there is a vertex-decomposition $\mathscr{G}_\xi$, $\xi < \omega$ of type ω of $\mathscr{G}$ such that*

$$\beta(\mathscr{G}_\xi) \leqq \beta \quad \text{for every} \quad \xi < \omega.$$

PROOF. Let $\mathscr{G}_{[\beta]} = \langle g, G_{[\beta]} \rangle$ be the uniform set-system defined in 4.2. Then it satisfies the requirements of Theorem 12. 1 of [1] with $\beta = \omega$ and therefore has

* After having prepared this manuscript the authors learned that L. LOVÁSZ obtained a constructive proof of Theorem 13. 4 of [1] and so a proof of Theorem 5. We will point out that this gives a constructive proof of the theorem of P. ERDŐS [5] concerning the existence of graphs containing no short circuits and having large chromatic number. His proof is to appear in the next volume of *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*

chromatic number $\leqq \omega$. This means that there is a decomposition g_ξ, $\xi < \omega$ of type ω of g such that $A \not\subseteq g_\xi$ for any $A \in G_{[\beta]}$. Considering the definition 4. 2 of $G_{[\beta]}$ this means that $\mathcal{G}_\xi = \mathcal{G}(g_\xi)$ satisfies the requirements of the theorem.

We mention that Theorem 6 is trivial for $\beta = 2$ even with 2 instead of ω. This is no longer true for $\beta > 2$. The reason for this is that a β, 2-circuitless graph satisfies the conditions of Theorem 6 for $\beta \geqq 3$ but not for $\beta = 2$ since each graph is 2, 2-circuitless.

It is known that there are 2, 3-circuitless graphs of arbitrarily high chromatic numbers but by 5. 6 of [1] a 2, 4-circuitless graph has chromatic number $\leqq \omega$.

§ 5. The edge-decomposition symbol

In view of the preliminaries collected in § 2 a best possible negative result similar to Theorem 3 would be that under the conditions

$$\alpha > 2^\gamma, \quad \alpha \geqq \omega \cdot \beta, \quad \beta > \delta \geqq 3, \quad \gamma \geqq 2, \quad (\alpha, \beta) \nrightarrow (\gamma, \delta) \tag{1}$$

hold. In fact the condition $\alpha > 2^\gamma$ is necessary by 2. 7, the case $\alpha < \beta$ is covered by 2. 5, by the discussion of the Ramsey function while the other conditions except $\alpha \geqq \omega$ exclude trivial and irrelevant cases. The case $\alpha < \omega$ will be discussed separately.

We do not know any theorem which would disprove (1), but we have only partial results. The only genuine result relevant to the problem we have is the following

THEOREM 7. *Let* $\alpha = (2^{(2^\gamma)^+})^+$, $\gamma \geqq \omega$. *Then* $(\alpha, \omega) \nrightarrow (\gamma, \delta)$ *holds for every* $\delta < \omega$.

COROLLARY 4. Assume G.C.H. Then $(\omega_{\varrho+4}, \omega) \nrightarrow (\omega_\varrho, \delta)$ holds for every ϱ and for every $\delta < \omega$.

The simplest unsolved problem is

PROBLEM 2. Assume G.C.H. Is $(\omega_i, \omega) \rightarrow (\omega, \delta)$ true for $i = 2$ or $i = 3$ and for some $\delta < \omega$?

The only other information we have is a further corollary of the results concerning the partition symbol 2. 4.

THEOREM 8. A) *Let* $\alpha = (2^\gamma)^+$, $\gamma \geqq \omega$. *Then*

$$(\alpha, \alpha) \nrightarrow (\gamma, \gamma^+).$$

B) *Assume G.C.H,* $\alpha \geqq \omega$ *then* $(\alpha^+, \alpha^+) \nrightarrow (\gamma, \alpha)$ *for* $\gamma < \mathrm{cf}(\alpha)$.

COROLLARY 5. Assume G.C.H. Then

$$(\omega_{\xi \dotplus 1}, \omega_{\xi \dotplus 1}) \nrightarrow (\gamma, \omega_\xi) \quad \text{for} \quad \gamma < \mathrm{cf}(\omega_\xi).$$

All other instances of (1) remain unsolved. We will point out only one special case which seems intrigueing.

PROBLEM 3. Does $(\alpha, \omega_1) \rightarrow (\gamma, \omega)$ hold for any pair $\alpha > 2^\gamma$, $\gamma \geqq \omega$?

PROOF OF THEOREM 7. The graph we construct will be a subgraph of the graph constructed for the proof of Theorem 4. Put $\beta = (2^\gamma)^+$ (then $\alpha = (2^\beta)^+$) and $g = \{f \in {}^2\alpha : f_0 < \beta\}$. Assume $f, h \in g, f_0 \leqq g_0$.

(1) Put $\{f, h\} \in G$ iff $f_0 < g_0$ and $f_1 > g_1$. Then as in the proof of Theorem 4 we have

$$\alpha(\mathscr{G}) = \alpha, \quad \beta(\mathscr{G}) = \omega.$$

Let $\mathscr{G}_\xi$, $\xi < \gamma$ be an arbitrary edge-decomposition of type γ of $\mathscr{G}$. We prove

(2) There is a $\xi < \gamma$ such that $\beta(\mathscr{G}_\xi) = \omega$.

This is a slightly stronger statement than that of Theorem 7. (To prove the theorem it would be sufficient to show that for every $\delta < \omega$ there is a ξ depending on δ such that $\beta(\mathscr{G}_\xi) > \delta$.) Let $\nu < \mu < \alpha$. We define an edge-decomposition $\mathscr{G}_\xi(\nu, \mu)$, $\xi < \gamma$ of type γ of the complete graph with set of vertices β as follows.

(3) Let $\eta < \zeta < \beta$ be arbitrary. Let f, h be the elements of g satisfying

$$f_0 = \eta, \quad f_1 = \mu, \quad h_0 = \zeta, \quad h_1 = \nu.$$

Then by (1) $\{f, h\} \in G$, hence $\{f, h\} \in G_\xi$ for some $\xi < \gamma$.

Put $\{\eta, \zeta\} \in G_\xi(\nu, \mu)$ for this ξ. By Theorem 4 of [2] we have $(2^\gamma)^+ \to (\gamma^+)^2_\gamma$ for every $\gamma \geqq \omega$. This means that by 2.4 corresponding to every $\nu < \mu < \alpha$ there exists a $\xi(\nu, \mu) < \gamma$ and a set $B(\nu, \mu) \subseteqq \beta$ such that

(4) $$\mathscr{S}_2[B(\nu, \mu)] \subseteqq G_{\xi(\nu,\mu)}(\nu, \mu)$$

and

(5) $$|B(\nu, \mu)| = \gamma.^*$$

(6) Let A be the set of those functions a with $\mathscr{D}(a) = 2$, for which $a_0 \in \beta$, $a_1 \in \mathscr{S}_\gamma[\beta]$.

Considering that $((2^\gamma)^+)^\gamma = (2^\gamma)^+$, we have

(7) $$|A| = \beta.$$

We define an edge-decomposition $\mathscr{G}^0_a$, $a \in A$ of type β of the complete graph with set of vertices α as follows.

(8) Let $\nu < \mu < \alpha$. Then by (4) and (6) $a_0 = \xi(\nu, \mu)$, $a_1 = B(\nu, \mu)$ for some $a \in A$. Put then $\{\nu, \mu\} \in \mathscr{G}^0_a$.

By (7) this edge-decomposition has type β. Considering again Theorem 4 of [2] it follows that there exists an $a \in A$ and a subset $C \subseteqq \alpha$, such that

(9) $|C| = \beta^+$ and $\mathscr{S}_2[C] \subseteqq G^0_a$.

Put $a_0 = \xi$, $a_1 = B$, $D = \{f \in g : f_0 \in B \text{ and } f_1 \in C\}$. We have by (8) and (9) $\xi(\nu, \mu) = \xi$, $B(\nu, \mu) = B$ for every $\nu < \mu$, $\nu, \mu \in C$. If $f, h \in D, f_0 \leqq h_0$ and $\{f, h\} \in G$ then by (1) $f_0 < h_0, f_1 > h_1, f_0, h_0 \in B, f_1, h_1 \in C$. Hence $B(h_1, f_1) = B$, $\xi(h_1, f_1) = \xi$, hence by (4) $\{f_0, h_0\} \in G_\xi(h_1, f_1)$ and that means by (3)

$$\{f, h\} \in G_\xi.$$

It follows that

(10) $$\mathscr{G}(D) \subseteqq \mathscr{G}_\xi.$$

Using (5) and (9) it follows that for every $i < \omega$ there are sequences of ordinals

$$f_0^0 < \ldots < f_0^{i-1} < \beta, \qquad f_0^j \in B \quad \text{for} \quad j < i$$

$$\alpha > f_1^0 > \ldots > f_1^{i-1}, \qquad f_1^j \in B \quad \text{for} \quad j < i.$$

* The theorem gives a $B(\nu, \mu)$ with $|B(\nu, \mu)| = \gamma^+$ but we choose $B(\nu, \mu)$ as a set of power γ for the sake of argument given for the proof of (7).

Let $f^j, j<i$ be the corresponding sequence of elements of g and let $g'=\{f^j\}_{j<i}$. Then $|g'|=i$, by (1) $\mathcal{S}_2[g']\subseteq G$, by the definition of D we have $g'\subseteq D$, hence by (10) $\mathcal{S}_2[g']\subseteq G_\xi$. That means $[i]\subseteq \mathcal{G}_\xi$ for every $i<\omega$ and thus $\beta(\mathcal{G}_\xi)=\omega$. This proves (2).

REMARKS. The set D obtained in the proof is such that $|B|=\gamma$, $|C|=\beta^+$. Using the G.C.H. we obtain e.g. in the simplest case $\gamma=\omega$ that $|B|=\omega$, $|C|=\omega_3$. If the hypothesis is assumed this can be improved so that $|B|=\omega_1$ since in the proof of (7) we can use that $((2^\omega)^+)^{\omega_1}=\omega_2=(2^\omega)^+$.

We mention that even assuming the G.C.H. we cannot decide the following

PROBLEM 4. Let $\mathcal{G}'$ be the subgraph of $\mathcal{G}$ defined in the proof of Theorem 7 spanned by the set $g'=\{f\in {}^2\alpha: f_0<(2^\omega)^+, f_1<(2^\omega)^+\}$.

Does then $\mathcal{G}'$ have an edge-decomposition $\mathcal{G}_\xi$, $\xi<\omega$ of type ω with members $\beta(\mathcal{G}_\xi)<\omega$ for $\xi<\omega$?

To prove Theorem 8 we need

LEMMA 7. *Let $\alpha, \beta, \beta', \gamma, \delta$ be cardinals such that*

a) $$\alpha \nrightarrow (\beta, \beta')^2$$

and

b) $$\alpha \rightarrow (\beta', (\delta)_\gamma)^2_{\gamma+1}$$

hold. Then $(\alpha, \beta)\nrightarrow(\gamma, \delta)$.

PROOF. By a) the complete graph with set of vertices α has an edge decomposition $\mathcal{G}^0, \mathcal{G}^1$ of type 2 such that $\beta(\mathcal{G}^0)\leqq\beta$, $\beta(\mathcal{G}^1)\leqq\beta'$. The graph $\mathcal{G}^0$ satisfies the requirements of our theorem. In fact if $\mathcal{G}_\xi$, $\xi<\gamma$ is an arbitrary edge-decomposition of type γ of $\mathcal{G}^0$, then $\mathcal{G}^1, \mathcal{G}_\xi$, $\xi<\gamma$ is an edge-decomposition of type $\gamma+1$ of the complete graph with the set of vertices α. Then by b) considering that $\beta(\mathcal{G}^1)\leqq\beta'$ there is a $\xi<\gamma$ such that $\beta(\mathcal{G}_\xi)>\delta$.

PROOF OF THEOREM 8. By Theorem 7 of [2] and by Theorem 1 of [3] we have

$$(2^\gamma)^+\rightarrow((2^\gamma)^+, (\gamma^+)_\gamma)^2_{\gamma+1} \quad \text{for} \quad \gamma\geqq\omega, \qquad \alpha^+\nrightarrow(\alpha^+, \alpha^+)^2 \quad \text{for} \quad \alpha\geqq\omega$$

and $\alpha^+\rightarrow(\alpha)^2_\gamma$ if the G.C.H. holds and $\gamma<\operatorname{cf}(\alpha)$, $\alpha\geqq\omega$. Hence the theorem follows from Lemma 7 in both cases.

NOTE. If we assume G.C.H., then by the results of [3] $\alpha^+\nrightarrow(\omega_1, \beta')^2$ holds iff $\beta'=\alpha^+$ and $\operatorname{cf}(\alpha)=\omega$. On the other hand, $\alpha^+\rightarrow(\alpha^+, (3)_\omega)^2$ holds if $\operatorname{cf}(\alpha)=\omega$. Hence no information concerning Problem 3 can be obtained using the above method.

§ 6. The edge-decomposition symbol for finite graphs

Let now $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ be finite, and assume $\alpha\geqq\beta>\delta\geqq 3$. It is obvious from the definition 2.4 of the Ramsey function that if $\beta>\alpha((\delta)_\gamma, \gamma, 2)$ then $(\alpha, \beta)\nrightarrow(\gamma, \delta)$ holds.

It is not known whether $(\alpha, \beta)\rightarrow(\gamma, \delta)$ holds for any $\beta\leqq\alpha((\delta)_\gamma, \gamma, 2)$. Probably for every integer $\gamma\geqq 2$ and $\delta\geqq 3$ there is an $\alpha_{\gamma,\delta}$ such that $(\alpha_{\gamma,\delta}, \delta+1)\rightarrow(\gamma, \delta)$ holds.

The special case $\gamma=2$, $\delta=3$ was suggested by the authors as a problem to several people. It is known that $\alpha((3)_2, 2, 2)=6$ and in fact it was prowed by several people* that there is an α such that $(\alpha, 6)\nrightarrow(3, 2)$ holds.

L. Pósa proved the existence of an α for which

$$(\alpha, 5)\nrightarrow(3, 2)$$

holds, but the problem whether $(\alpha, 4)\rightarrow(3, 2)$ holds for every α, is still unsolved.

We outline Pósa's proof.

By Corollary 3 there exists a graph $\mathcal{G}'=\langle g', G'\rangle$ such that $\beta(\mathcal{G}')=4$ and ϱ' has no vertex-decomposition $\mathcal{G}_0', \mathcal{G}_1'$ such that $\beta(\mathcal{G}_i')\leqq 3$ for $i<2$. Let g consist of g' and of one new vertex x, and let $G=G' \bigcup\limits_{y\in g'} \{x, y\}$, i.e. the new vertex is connected to each of the old ones.

Then $\beta(\mathcal{G})=5$ and $\mathcal{G}$ has no edge-decomposition $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1$ of type two with $\beta(\mathcal{G}_i)\leqq 3$ for $i<2$ for if not, then put $g_i'=\{y\in g' : \{x, y\}\in G_i\}$ for $i<2$.

Then $\mathcal{G}'(g_0')\leqq\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}'(g_1')\subseteqq\mathcal{G}_0$, hence $\mathcal{G}'(g_0')$, $\mathcal{G}'(g_1')$ is a vertex-decomposition of $\mathcal{G}'$ with $\beta(\mathcal{G}'(g_i'))\leqq 3$ for $i<2$, a contradiction.

§ 7. A special edge decomposition problem

We say that a graph $\mathcal{G}$ is a tree if it does not contain circuits. The problem arises what graphs have an edge-decomposition of type γ where all the members are trees. In Theorem 9 we give a necessary and sufficient condition for $\gamma\geqq\omega$. Nash Williams gave in [8] a necessary and sufficient condition in case $\gamma<\omega$. The condition is that every finite subgraph of i elements has at most $(i-1)\cdot\gamma$ edges. The necessity of this condition is obvious. Our Theorem 11 gives a more difficult necessary condition. It states that the union of γ trees and even more general graphs have colouring number $\leqq 2\gamma$.

In Theorem 10 we state a corollary of our previous results, that a graph not containing a quadrilateral has an edge-decomposition into ω trees.

To state our theorems we need some concepts defined in [1].

Definition 6. 1. *Let $\mathcal{G}$ be a graph, and let $\prec$ be an ordering of g. For any arbitrary $g'\subseteqq g$, $V(x, g')=\{y : \{x, y\}\in G$ and $y\in g'\}$ $\tau(x, g')=|V(x, g')|$. For $x\in g$ $g|\prec x$ is the set $\{y\in g : y\prec x\}$.*

The colouring number of $\mathcal{G}$ is the least cardinal γ for which g has a well-ordering $\prec$ such that $\tau(x, g|\prec x)<\gamma$ for every $x\in g$. The colouring number of $\mathcal{G}$ is denoted by Col ($\mathcal{G}$).

We prove

Theorem 9. *Let $\gamma\geqq\omega$. The graph $\mathcal{G}$ has an edge-decomposition onto the union of γ trees if and only if* Col $(\mathcal{G})\leqq\gamma^+$.

As a corollary of this and a result of 1 we prove

Theorem 10. *A graph $\mathcal{G}$ not containing quadrilaterals has an edge-decomposition of type ω where all the members are trees.*

* G. L. Cherlin, R. L. Graham, Van Lint.

We need the following

LEMMA 8. *Let $\mathcal{G}$ be a graph and let $\mathcal{G}_\xi$, $\xi<\gamma$ be an edge-decomposition of type γ of $\mathcal{G}$ such that* $\mathrm{Col}(\mathcal{G}_\xi)\leqq\gamma^+$ *for every $\xi<\gamma$. Then* $\mathrm{Col}(\mathcal{G})\leqq\gamma^+$.

PROOF. By the assumption for every $\xi<\gamma$ there is a well-ordering $\prec_\xi$ of g such that $|V(x, g|\prec_\xi x)|\leqq\gamma$. Put

$$f(x)=\bigcup_{\xi<\gamma} V(x, g|\prec_\xi x).$$

Then $f(x)$ is a set mapping of order $\leqq\gamma^+$. It is obvious that $\{x, y\}\in G$, iff $y\in f(x)$ or $x\in f(y)$. Hence the statement follows from Theorems 6. 3 of [1].

PROOF OF THEOREM 9. Let $\mathcal{G}$ be a graph and assume that $\mathrm{Col}(\mathcal{G})\leqq\gamma^+$. Let $\prec$ be a well-ordering of g such that

$$\tau(x, g|\prec x)\leqq\gamma \quad \text{for every} \quad x\in g.$$

It is obvious that one can define the graphs $\mathcal{G}_\xi$, $\xi<\gamma$ on such a way that if $y\neq z$, and $y, z\in V(x, g|\prec x)$ then $\{y, x\}$, $\{z, x\}$ belong to different $\mathcal{G}_\xi$-s. Hence $\mathcal{G}$ is the union of γ trees.

On the other hand, assume now that $\mathcal{G}_\xi$, $\xi<\gamma$ is an edge-decomposition of type γ of $\mathcal{G}$ where all the $\mathcal{G}_\xi$-s are trees. Then $\mathrm{Col}(\mathcal{G}_\xi)=2$ for every $\xi<\gamma$. Hence the statement follows from Lemma 8.

PROOF OF THEOREM 10. Let $\mathcal{G}$ be a graph not containing quadrilaterals (or more generally $[i, \omega_1]$-complete even graphs) for some $i<\omega$. Then by Corollary 5. 6 of [1] $\mathrm{Col}(\mathcal{G})\leqq\omega$, hence the statement follows from Theorem 9.

Assume now $\gamma<\omega$. Using an argument similar to the one used in the proof of Lemma 8 and using Theorem 6.5 of [1] it would be easy to obtain that if $\mathcal{G}$ has an edge-decomposition to γ trees then it has colouring number $\leqq 2\gamma+1$. However this is not a best possible result. We will prove the following stronger

THEOREM 11. *Let $\gamma<\omega$. Assume that $\mathcal{G}$. has an edge-decomposition $\mathcal{G}_\xi$, $\xi<\gamma$ where the $\mathcal{G}_\xi$-s are trees. Then*

$$\mathrm{Col}(\mathcal{G})\leqq 2\gamma.$$

This is best possible since by a well-known result (see e.g. [9], p. 185) the complete 2γ-graph $[2\gamma]$ has an edge-decomposition to γ trees.

Theorem 11 can be proved with a similar argument to the one used for the proof of Theorem 9. 1 of [1] saying that for every $2\leqq\beta<\omega$ a graph all whose finite subgraphs have colouring number β has colouring number $\leqq 2\beta-2$. We mentioned in [1] that the same argument should be used to the proof of Theorem 6. 5 of [1].

For the convenience of the reader we outline here the proof of a more general theorem, which implies theorems 9.1 and 6.5 of [1] and Theorem 11 as well.

THEOREM 12. *Let $\mathcal{G}$ be a graph and $\varrho\in{}^g\omega$, $\varrho(x)>0$ for $x\in g$. For an arbitrary $A\in\mathcal{S}_\omega(g)$ put*

$$v(A, \mathcal{G})=2|G(A)| \quad \textit{and} \quad \varrho(A, \mathcal{G})=\sum_{x\in A}\varrho(x).$$

We briefly write $v(A, \mathcal{G})=v(A)$, $\varrho(A, \mathcal{G})=\varrho(A)$.

Assume that $v(A) < \varrho(A)$ *for every* $A \in \mathcal{S}_\omega(g)$, $A \neq 0$. *Then* g *has a well ordering* $\prec$ *such that*

$$\tau(x, g|\prec x) < \varrho(x) \quad \textit{for every} \quad x \in g.$$

COROLLARY 6. Let $\mathcal{G}$ be a graph, $1 \leqq \gamma < \omega$. Assume that every finite subgraph of $i > 0$ vertices has less than $i \cdot \gamma$ edges. Then $\mathcal{G}$ has colouring number $\leqq 2\gamma$.

Corollary 6 follows from the case $\varrho(x) = 2\gamma$ of Theorem 12 and obviously implies Theorem 11.

PROOF OF THEOREM 12 (in outline). If $\mathcal{G}$ is finite, the assumption implies that there is an $x \in g$ such that $\tau(x, g) < \varrho(x)$ since $v(g) = \sum_{x \in g} \tau(x, g) < \sum_{x \in g} \varrho(x) = \varrho(g)$. Hence the result follows by induction on $\alpha(\mathcal{G})$.

Assume $\alpha(\mathcal{G}) \geqq \omega$. Let $A \subseteq g$. We shall briefly say that A is closed if for every $B \in \mathcal{S}_\omega(g \sim A)$

$$\sum_{x \in B} \tau(x, A \cup B) < \varrho(B). \tag{1}$$

The following assertions are evident:

(2) If A is not closed then there are $A' \in \mathcal{S}_\omega(A)$, $B \in \mathcal{S}_\omega(g \sim A)$ such that

$$\sum_{x \in B} \tau(x, A' \cup B) \geqq \varrho(B).$$

(3) If for every $A' \in \mathcal{S}_\omega(A)$ there is an $A'' \subseteq A$ such that $A' \subseteq A''$ and A'' is closed then A is closed.

(4) If $\{A_\xi\}_{\xi < \eta}$ is an increasing sequence of closed sets then $\bigcup_{\xi < \eta} A_\xi$ is closed.

We prove

(5) If $A \subseteq g$ then there is an $A' \subseteq g$, $A \subseteq A'$ such that A' is closed

a) $|A'| < \omega$ if $|A| < \omega$

b) $|A'| = |A|$ if $|A| \geqq \omega$.

First we prove (5) a).* Assume that the assertion fails for some finite A. We define by induction on i an increasing sequence A_i of finite subsets of g as follows. Put $A_0 = A$. Assume $i > 0$ and that A_j is defined for every $j < i$ such that A_j is finite. Then $A \subseteq \bigcup_{j<i} A_j$ is finite, hence it is not closed by the indirect assumption. Let then A_i be a finite subset of $g \sim \bigcup_{j<i} A_j$ such that

$$\sum_{x \in A_i} \tau(x, \bigcup_{j<i} A_j) \geqq \varrho(A_i). \tag{6}$$

Thus the sequence A_i is defined and (6) holds for every $i < \omega$. By the assumption $\tau(A_i) < \varrho(A_i)$, $\tau(x, \bigcup_{j<i} A_j) \neq 0$ holds for at least one $x \in A_i$. It follows by induction on i that

$$v(\bigcup_{j \leqq i} A_j) \geqq \sum_{j=1}^{i} \varrho(A_i) + i \quad \text{for} \quad i \geqq 1.$$

This is a contradiction since the right hand side is at least $\varrho(\bigcup_{j \leqq i} A_j)$ if $i \geqq \varrho(A_0)$.

* The proof is similar to the proof of Lemma 9. 4 of [1].

Thus (5) a) is proved. Let A' denote a set satisfying (5) a) for every $A\in\mathcal{S}_\omega(g)$. To prove (5) b) let $A\subseteq g$, $(A)\geqq\omega$. Put $A_0=A$, $A_{i+1}=\bigcup_{B\in\mathcal{S}_\omega(A_i)} B'$, $A'=\bigcup_{i<\omega} A_i$. Then obviously $|A'|=|A|$ and by (3) A' is closed. This proves (5) b).

Put $\alpha(\mathcal{G})=\alpha\geqq\omega$ and assume that the theorem is true for every graph $\mathcal{G}'$ with $\alpha(\mathcal{G}')<\alpha$.

Using (5) it is easy to define by transfinite induction an increasing sequence A_ξ, $\xi<\alpha$ of type α of subsets of g such that

(7) $g=\bigcup_{\xi<\alpha} A_\xi$, A_ξ is closed and $|A_\xi|<\alpha$ for every $\xi<\alpha$.

Put $B_\xi=\bigcup_{\eta<\xi} A_\eta$ for $\xi<\alpha$, $B_0=0$, $C_\xi=A_\xi-B_\xi$. By the assumption the empty set is closed, hence by (4) B_ξ is closed for every $\xi<\alpha$.

Put $\tau_1(x)=\tau(x, B_\xi)$ for every $x\in C_\xi$, $\xi<\alpha$.

Put $\mathcal{G}_\xi=\mathcal{G}(C_\xi)$ for $\xi<\alpha$. Then $\alpha(\mathcal{G}_\xi)<\alpha$ by (7) and $\tau_1(x)<\varrho(x)$ for every $x\in C_\xi$ since B_ξ is closed. Hence

$$\varrho(x, \xi)=\varrho(x)-\tau_1(x)>0 \quad \text{for every} \quad C_\xi.$$

We will apply the induction hypothesis for the graphs $\mathcal{G}_\xi$ and the functions $\varrho(x, \xi)$. Let $B\in\mathcal{S}_\omega(C_\xi)$. Put briefly

$$v_\xi(B) = v(B, \mathcal{G}_\xi), \quad \varrho_\xi(B) = \varrho(B, \mathcal{G}_\xi) = \sum_{x\in B} \varrho(x, \xi).$$

Then $v_\xi(B) = \sum_{x\in B} \tau(x, B)$. Hence

$$v_\xi(B)+ \sum_{x\in B} \tau_1(x) = \sum_{x\in B} \tau(x, B\cup B_\xi) < \varrho(B) = \sum_{x\in B} \varrho(x)$$

since B_ξ is closed and $B\subseteq C_\xi$. Hence

$$v_\xi(B) < \sum_{x\in B} \varrho(x)-\tau_1(x) = \varrho_\xi(B).$$

It follows that $\mathcal{G}_\xi$ satisfies the conditions of the theorem. It follows from the induction hypothesis that there is a well-ordering $\prec_\xi$ of C_ξ such that $\tau(x, C_\xi|\prec_\xi x)<\varrho(x)-\tau_1(x)$ for every $x\in C_\xi$. We define a well-ordering $\prec$ of g by the stipulation $x\prec y$ if $x\in C_\xi$, $y\in C_\eta$ and either $\xi<\eta$ or $\xi=\eta$ and $x\prec_\xi y$.

By (7) $\prec$ is obviously a well-ordering of g and

$$\tau(x, g|\prec x)=\tau_1(x)+\tau(x, C_\xi|\prec_\xi x)$$

for every $x\in C_\xi$, $\xi<\alpha$. Hence $\tau(x, g|\prec x)<\varrho(x)$ for every $x\in g$.

(Received 14 September 1966)

References

[1] P. ERDŐS and A. HAJNAL, On chromatic number of graphs and set-systems, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **17** (1966), pp. 61–99.

[2] P. ERDŐS and R. RADO, A partition calculus in set theory, *Bulletin of Am. Math. Soc.*, **62** (1956), pp. 427–489.

[3] P. ERDŐS, A. HAJNAL and R. RADO, Partition relations for cardinal numbers, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **16** (1965), pp. 93–196.

[4] P. ERDŐS and R. RADO, A construction of graphs without triangles having pre-assigned order and chromatic number, *The Journal of the London Math. Soc.*, **35** (1960), pp. 445–448.

[5] P. ERDŐS, Graph theory and probability, *Canad. J. Math.*, **11** (1959), pp. 34–38.

[6] P. ERDŐS and A. ROGERS, The construction of certain graphs, *Canadian Math. Journal*, **14** (1962), pp. 702–707.

[7] E. SPECKER, Teilmengen von Mengen mit Relationen, *Commentarii Math. Helvetici*, **31** (1957), pp. 302–334.

[8] NASH WILLIAMS, Decomposition of finite graphs into forests, *Journal of the London Math. Soc.*, **39** (1964), p. 12.

[9] C. BERGE, *Théorie des graphes et ses applications* (Dunod, Paris, 1958).

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (3—4), 1967, 379—391.

ON INVESTIGATIONS IN THE COMPARATIVE PRIME NUMBER THEORY

By

I. KÁTAI (Budapest)

(*Presented by* P. TURÁN)

1. Introduction. In the analytical number theory an important direction of the investigations is the omega-estimations of number-theoretical functions. The first, significant steg was the famous Landau's theorem concerning the Dirichlet-series with positive coefficients (E. LANDAU [1]). This theorem asserts that if the Dirichlet-series $F(s)=\sum \frac{a_n}{n^s}$ has nonnegative coefficients, further its convergence-abscissa is α, then α is a singular point of $F(s)$. From this theorem easily follows that e.g. $\overline{\lim}\, M(x)\cdot x^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}>0$, $\underline{\lim}\, M(x)\cdot x^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}<0$, $M(x)=\sum_{n\leq x}\mu(n)$. In other words there exists a sequence $0<x_1'<x_1''<\ldots<x_n'<x_n''<\ldots$, $x_n'\to\infty$ such that $M(x_\nu')>x_\nu'^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$, $M(x_\nu'')<-x_\nu''^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$. But the question concerning the density of the values is not answered by this theorem.

Recently S. KNAPOWSKI and P. TURÁN [1], [2], [3] elaborated a method which gives omega-estimations of many number theoretic functions, in more effective form. Their proofs were based on the very deep results of Prof. TURÁN in the theory of diophantine approximation. S. KNAPOWSKI has dealt with similar questions in the papers [1], [2], [3], and W. STAS in [1], [2], [3].

In this paper we shall deal with similar questions. The author in [1] obtained some new effective results for number-theoretic functions without any conjectures. In the proofs of these theorems an idea of RODOSSKY [1] is important. These results were published partially in author's paper [4]. The aim of this paper is to obtain a more general theorem. Our earlier theorems will be direct consequences of this theorem.

Throughout this paper $c, c_1, c_2, \ldots$ will denote explicitely calculable numerical constants not necessarily the same at every occurence. Further we use the notation $e_1(x)=e^x$.

Acknowledgement. I am very indebted to Prof. P. TURÁN and Mr. J. MOGYORÓDI for their important remarks.

2. A theorem on Dirichlet integrals. Let

(2. 1) $$f(s)=\int_1^\infty \frac{dA(x)}{x^s} \qquad (s=\sigma+it)$$

and let the integral be absolutely convergent on the halfplane $\sigma>\sigma_1$. Let us suppose that $A(x)$ is real and that

(2. 2) $$|A(x)|\leq c_1 x^{\vartheta_1} \quad \text{if} \quad x\geq 1,$$

where c_1 is a constant. Let, further $f(s)$ be analitically continuable on the halfplane $\sigma > \theta_2 - \delta_1$, where $\delta_1 > 0$ is a suitable constant, $0 < \theta_2 < \theta_1$. Let

$$\varrho = \theta_2 + i\gamma \qquad (\gamma \neq 0) \tag{2.3}$$

a pole of multiplicity k of $f(s)$.

Let the Laurent-expansion over $s = \varrho$ of $f(s)$ be of the form

$$f(s) = P((s-\varrho)^{-1}) + g(s), \tag{2.4}$$

where

$$P(x) = b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_k x^k \qquad (b_k \neq 0), \tag{2.5}$$

is a polynomial of degree k, and $g(s)$ is a function, which is regular in the neighbourhood of $s = \varrho$.

Let $D(\varepsilon)$ denote the set of $s = \sigma + it$, which satisfy the inequalities $\sigma^2 - t^2 > (\theta_2 - \varepsilon)^2$, $\theta_2 - \varepsilon \leqq \sigma \leqq \sigma_1 + \varepsilon$ i.e. in notation

$$D(\varepsilon) = \{s;\ \sigma^2 - t^2 > (\theta_2 - \varepsilon)^2,\ \theta_2 - \varepsilon \leqq \sigma \leqq \sigma_1 + \varepsilon\}. \tag{2.6}$$

Now we define the curves $C_1(\varepsilon)$, $C_2(\varepsilon)$ as

$$C_1(\varepsilon) = \left\{s;\ \sigma^2 - t^2 = \left(\theta_2 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2,\ \theta_2 - \frac{\varepsilon}{2} \leqq \sigma \leqq \sigma_1 + \varepsilon\right\}, \tag{2.7}$$

$$C_2(\varepsilon) = \left\{s;\ \sigma = \sigma_1 + \varepsilon,\ t^2 > (\sigma_1 + \varepsilon)^2 - \left(\theta_2 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2\right\}. \tag{2.8}$$

Let us suppose that for a suitable $\varepsilon > 0$ $f(s)$ is regular in the domain $s \in D(\varepsilon)$, and $f(s + i\gamma)$ is also regular in $s \in D(\varepsilon)$, except for the point $s = \theta_2$.

Let us fix this value of ε.

The function $f(s)$ and $f(s + i\gamma)$ are bounded on $C_1(\varepsilon) \cup C_2(\varepsilon)$. The boundedness on $C_1(\varepsilon)$ follows from the finiteness of the length of $C_1(\varepsilon)$, and from $C_1(\varepsilon) \subset D(\varepsilon)$. The boundedness on $C_2(\varepsilon)$ follows from the absolute convergence of (2. 1) on $\sigma > \sigma_1$.

Let

$$M_1 = \max_{s \in C_1 \cup C_2} |f(s)|, \quad M_2 = \max_{s \in C_1 \cup C_2} |f(s + i\gamma)|. \tag{2.9—2.10}$$

From these conditions we obtain the following

THEOREM. *For $T > c_2$ we have*

$$\max_{T \leqq x \leqq T^{\varkappa}} \frac{A(x)}{x^{\theta_2} (\log x)^{k-1}} > \delta, \tag{2.11}$$

$$\min_{T \leqq x \leqq T^{\varkappa}} \frac{A(x)}{x^{\theta_2} (\log x)^{k-1}} < -\delta, \tag{2.12}$$

where

$$\varkappa = \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} + \sqrt{\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^2 - 1}\right)^2, \tag{2.13}$$

and $\delta > 0$, $c_2 > 0$ are suitable constants. They are numerically calculable functions of $\theta_1, \theta_2, \varepsilon, M_1, M_2, \gamma$ and of the coefficients of $P(x)$.

3. Lemmas. For the proof of Theorem we need the following lemmas.

LEMMA 1. *Let τ be a real number and*

$$I(\tau) = \int_1^\infty e_1\left(-i\tau \log x - \frac{\log^2 x}{4u}\right) dA(x). \tag{3.1}$$

Then the relation

$$I(\tau) = -\frac{i\sqrt{u}}{\sqrt{\pi}} \int_{\sigma_1+\varepsilon-i\infty}^{\sigma_1+\varepsilon+i\infty} f(w+i\tau)e_1(w^2 u)\, dw \tag{3.2}$$

holds by means of (2. 1).

For the proof see K. PRACHAR [1], p. 381. In the PRACHAR's book is proved only the case $A(x) = \sum_{n \leqq x} a_n$, but it is easily seen, that in the general case it is also true.

LEMMA 2. *If $0 < \beta \leqq 1$ and $u \to \infty$, then*

$$\frac{1}{2u}\int_1^\infty x^{\beta-1} \log x \cdot e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right) dx = 2\sqrt{\pi u}\,\beta e_1(\beta^2 u) + O(1). \tag{3.3}$$

LEMMA 3. *If $0 < \alpha < \theta$, $\log y = 2u(\theta - \sqrt{\theta^2 - \alpha^2})$, $\log z = 2u(\theta + \sqrt{\theta^2 - \alpha^2})$, then we get*

$$\frac{1}{2u}\int_1^y x^{\theta-1} \log x \cdot e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right) dx < \theta(\theta^2-\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} e_1(\alpha^2 u), \tag{3.4}$$

$$\frac{1}{2u}\int_z^\infty x^{\theta-1} \log x \cdot e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right) dx < 2\theta(\theta^2-\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} e_1(\alpha^2 u), \tag{3.5}$$

$$\frac{1}{2u}\int_1^y x^{\theta-1} e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right) dx < (\theta^2-\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} e_1(\alpha^2 u). \tag{3.6}$$

For the proofs of Lemmas 2 and 3 see K. A. RODOSSKY [1].

4. Proof of the Theorem. First we prove that

$$I(0) = O\left(M_1\sqrt{u}\, e_1\left(\left(\theta_2 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 u\right)\right), \tag{4.1}$$

$$I(\gamma) = 2\sqrt{u\pi}\, \operatorname*{Res}_{w=\theta_2} f(w+i\gamma_0)e_1(w^2 u) + O\left(M_2\sqrt{u}\, e_1\left(\left(\theta_2 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 u\right)\right). \tag{4.2}$$

Applying the representation (3. 2) at $\tau = 0$, and transforming the way of integration to $C_1 \cup C_2$ (the value of integral is not changing), so

$$|I(0)| \leqq \sqrt{\frac{u}{\pi}} M_1 \int_{C_1} e_1((\sigma^2 - t^2)u)\, |dw| + 2\sqrt{\frac{u}{\pi}} M_1 \int_{C_2} e_1((\sigma^2 - t^2)u)\, dt.$$

By (2. 7) and (2. 8) the first term is $O\left(M_1\sqrt{u}e_1\left(\left(\theta_2-\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 u\right)\right)$, and the second is $O\left(\frac{M_1}{\sqrt{u}}e_1\left(\left(\theta_2-\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 u\right)\right)$. From this (4. 1) follows. The proof of (4. 2) is similar. Transforming the way of integral in the relation (3. 2) at $\tau=\gamma$ to $C_1\cup C_2$, we go through a pole $w=\theta_2$. The module of the integral (3. 2) on $C_1\cup C_2$ is $O\left(M_2\sqrt{u}e_1\left(\left(\theta_2-\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 u\right)\right)$, and the residue at the point $w=\theta_2$ is the first term of right hand side of (4. 2).

We take into consideration the residue. By easy calculation

$$e_1(w^2u) = e_1(\theta_2^2u)\sum_{n=0}^{\infty} c_n(u)(w-\theta_2)^n,$$

where

$$c_n(u) = \sum_{\substack{2j+m=n\\ j\geqq 0}} \frac{(2\theta_2)^m u^{(m+n)/2}}{m!\,j!}$$

is a polynomial in u of degree n.

Considering (2. 4), (2. 5) we have

$$2\sqrt{u\pi}\operatorname*{Rez}_{w=\theta_2} e_1(w^2u)f(w+i\gamma) = 2\sqrt{u\pi}e_1(\theta^2u)\sum_{j=1}^{k} b_jc_{j-1}(u) = \sqrt{u}e_1(\theta_2^2u)Q_{k-1}(u),$$

where $Q_{k-1}(u)$ is a polynomial of degree $(k-1)$, with main coefficient $2\sqrt{\pi}\frac{(2\theta_2)^{k-1}}{(k-1)!}$. So

(4. 3) $$|I(\gamma)| > c_3u^{k-\frac{1}{2}}e_1(\theta_2^2u),$$

if $u>c_4$. The choice of c_3 depends only on $\theta_1, \theta_2, \varepsilon, c_1, M_2$.

5. After these preliminaries we begin the proof. Let us introduce the following notations:

(5. 1) $$\log y = 2u\left(\theta_1-\sqrt{\theta_1^2-\theta_2^2}\right);$$

(5. 2) $$\log z = 2u\left(\theta_1+\sqrt{\theta_1^2-\theta_2^2}\right).$$

Let u so large that $\log y>1$. Let $\delta>0$ be a constant, which we choose later, and let

(5. 3) $$B_\pm(x)=A(x)\pm\delta(\log x)^{k-1}\cdot x^{\theta_2}.$$

Suppose now that at least one of the following inequalities

(5. 4)—(5. 5) $$\min_{y\leqq x\leqq z} B_+(x)\geqq 0,\quad \max_{y\leqq x\leqq z} B_-(x)\leqq 0$$

is satisfied. We will show that this assumption contradicts (4. 1) and (4. 4). Hence our theorem follows immediately.

From (3. 1) by partial integration

$$I(\tau)=\int_1^\infty \frac{A(x)}{x}\left(i\tau+\frac{\log x}{2u}\right)e_1\left(-i\tau\log x-\frac{\log^2 x}{4u}\right)dx. \tag{5. 6}$$

Let $K_1(\tau)$, $K_2(\tau)$, $K_3(\tau)$ the parts of (5. 6) on the intervals $[1, y]$, $[y, z]$, $[z, \infty)$.

Applying (5. 4) or (5. 5) we have

$$|K_2(\tau)| \leqq \left|\int_y^z \frac{B_\pm(x)}{x}\left|i\tau+\frac{\log x}{2u}\right|e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right)dx\right|+ \tag{5. 7}$$

$$+\delta\int_y^z x^{\theta_2-1}(\log x)^{k-1}\left|i\tau+\frac{\log x}{2u}\right|e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right)dx=R_1+R_2.$$

From (4. 3) it follows that

$$R_1\leqq\left|\int_y^z \frac{A(x)}{x}\left|i\tau+\frac{\log x}{2u}\right|e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right)dx\right|+R_2. \tag{5. 8}$$

Using the inequality

$$\left|i\tau+\frac{\log x}{2u}\right|\leqq|\tau|+\frac{\log x}{2u}\leqq\left(|\tau|\cdot\frac{2u}{\log y}+1\right)\frac{\log x}{2u}<c_6(|\tau|+1),$$

we obtain from (5. 8) that

$$R_1\leqq c_6(|\tau|+1)K_2(0)+R_2. \tag{5. 9}$$

Further by (2. 2) and (3. 4), (3. 6) it follows

$$R_2\leqq\delta c_6(|\tau|+1)(\log z)^{k-1}\cdot\frac{1}{2u}\int_y^z x^{\theta_2-1}\cdot\log x\cdot e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right)dx< \tag{5. 10}$$

$$<\delta c_7(|\tau|+1)u^{k-\frac{1}{2}}e_1(\theta_2^2 u).$$

From (5. 7), (5. 8), (5. 9), (5. 10) we obtain that

$$|K_2(\tau)|\leqq c_6(|\tau|+1)K_2(0)+2\delta c_7(|\tau|+1)u^{k-\frac{1}{2}}e_1(\theta_2^2 u). \tag{5. 11}$$

Further, from (2. 2), (3. 4), (3. 6) it follows

$$|K_1(\tau)|\leqq\int_1^y\frac{|A(x)|}{x}\left|i\tau+\frac{\log x}{2u}\right|e_1\left(-\frac{\log^2 x}{4u}\right)dx\leqq \tag{5. 12}$$

$$\leqq c_1(|\tau|+2\theta_1)(\theta_1^2-\theta_2^2)^{-\frac{1}{2}}e_1(\theta_2^2 u)\leqq c_8(|\tau|+1)e_1(\theta_2^2 u),$$

and similarly, from (2. 2) and (3. 5) we get

$$|K_3(\tau)|\leqq c_9(|\tau|+1)e_1(\theta_2^2 u). \tag{5. 13}$$

Now taking into account that $I(\tau)=K_1(\tau)+K_2(\tau)+K_3(\tau)$, from the inequalities (5. 7)—(5. 13) it follows that

(5. 14) $$|I(\tau)|\leqq c_{10}(|\tau|+1)\,\{|I(0)|+\delta u^{k-\frac{1}{2}}e_1(\theta_2^2 u)+e_1(\theta_2^2 u)\}.$$

Now choose $\tau=\gamma$ and compare (5. 14) with (4. 1) and (4. 3). So, from (5. 14) the inequality

$$c_3 u^{k-\frac{1}{2}}e_1(\theta_2^2 u)\leqq c_{10}(|\gamma|+1)\left\{O\left(M_1\sqrt{u}\,e_1\left(\left(\theta_2-\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 u\right)+\delta u^{k-\frac{1}{2}}e_1(\theta_2^2 u)+e_1(\theta_2^2 u)\right\}$$

follows for $u>c_4$. But this is not true, if $\delta<c_3$ and $u>c_{11}$. So the inequalities (5. 4), (5. 5) cannot be satisfied if $\delta<c_3$, $u>c_{11}$. Let us now take $y=T$, so $z=T^{\varkappa}$ (see (2. 13)) and the Theorem is proved.

6. Number-theoretical applications. We mention now some corollaries of our theorem.

6. 1. *On the Moebius-function. Let*

$$M(x)=\sum_{n\leqq x}\mu(n),$$

where $\mu(n)$ is the Moebius function. Apply the Theorem with $\theta_1=1$, $\theta_2=\frac{1}{2}$, $f(s)=\dfrac{1}{\zeta(s)}$, $M(x)=A(x)$, $\varrho=\varrho_0$, $\varrho_0=\frac{1}{2}+i\gamma_0$, $\gamma_0=14, 13\ldots$ where ϱ_0 is a simple root of $\zeta(s)$. It is well known that in the domain $0<\sigma<1$, $0<t<20$ the function $\zeta(\sigma+it)$ has no other root. Thus the conditions of our Theorem are satisfied and the following assertion holds.

THEOREM 1. *If $T>c_1$, then*

$$\max_{T\leqq x\leqq T^{\varkappa}} x^{-\frac{1}{2}}M(x)\geqq\delta,\qquad \min_{T\leqq x\leqq T^{\varkappa}} x^{-\frac{1}{2}}M(x)\leqq-\delta,$$

where $\varkappa=(2+\sqrt{3})^2$, and $c_1>0$, $\delta>0$ are explicitely calculable numerical constants.

This theorem can be found in the author's paper [4], too. With similar questions deals Mr. KNAPOWSKI in his papers [1], [2], [3], and the author in [3], [4].

6. 2. *On the k-free numbers.* Let

$$\varrho_k(n)=\begin{cases}1, & \text{if } n \text{ is } k\text{-free}\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}$$

$$P_k(x)=R_k(x)-\frac{[x]}{\zeta(k)}=\sum_{n\leqq x}\varrho_k(n)-\frac{[x]}{\zeta(k)}.$$

It is well known that $P_k(x)=O(x^{1/k})$. Applying the Theorem with

$$\theta_1=\frac{1}{k},\quad \theta_2=\frac{1}{2k},\quad f(s)=\frac{\zeta(s)}{\zeta(ks)}-\frac{\zeta(s)}{\zeta(k)}=\sum\frac{\varrho_k(n)-\dfrac{1}{\zeta(k)}}{n^s},$$

$$A(x)=P_k(x),\quad \varrho=\frac{\varrho_0}{k}$$

we obtain the following

THEOREM 2. *If $T > d_k$, then*

$$\max_{T \leqq x \leqq T^{\varkappa}} P_k(x) \cdot x^{-\frac{1}{2k}} \geqq \delta_k, \quad \min_{T \leqq x \leqq T^{\varkappa}} P_k(x) \cdot x^{-\frac{1}{2k}} \leqq -\delta_k$$

where $\varkappa = (2+\sqrt{3})^2$, and $\delta_k > 0$, $d_k > 0$ are constants, which are explicitely calculable functions of k.

This theorem can be found in author's paper [4].

6. 3. Prof. GELFOND raised the problem to extend our investigations for

$$M(x, k, l) = \sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)}} \mu(n),$$

and for

$$M(x, \chi, k) = \sum_{n \leqq x} \mu(n) \chi(n),$$

if χ is a real character $\mathrm{mod}\, k$. It seems to be difficult to answer these questions, because we do not know much on the real root of $L(s, \chi)$ in the critical strip. We hope to return to these questions later.

We are dealing with the case $k = 4$ only.

THEOREM 3. *If $T > c_1$ then*

$$\max_{T \leqq x \leqq T^{\varkappa}} x^{-\frac{1}{2}} M(x, 4, l) \geqq \delta, \quad \min_{T \leqq x \leqq T^{\varkappa}} x^{-\frac{1}{2}} M(x, 4, l) \leqq -\delta, \tag{6. 3. 1}$$

$$\max_{T \leqq x \leqq T^{\varkappa}} x^{-\frac{1}{2}} M(x, \chi) \geqq \delta, \quad \min_{T \leqq x \leqq T^{\varkappa}} x^{-\frac{1}{2}} M(x, \chi) \leqq -\delta, \tag{6. 3. 2}$$

where $\varkappa = (2+\sqrt{3})^2$, $l \equiv 1$ or 3 $\mathrm{mod}\, 4$, and χ is the non-principal character $\mathrm{mod}\, 4$, *c_1 and δ are calculable numerical constants.*

For the proof of the inequalities (6. 3. 1) we apply the Theorem with

$$f(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{L(s, \chi_0)} + \frac{\chi(l)}{L(s, \chi)}\right), \quad \theta_1 = 1, \quad \theta_2 = \frac{1}{2}, \quad \varrho = \varrho_1 = \frac{1}{2} + i \cdot \gamma_1,$$

$\gamma_1 = 6{,}020\ldots$ where ϱ_1 is a simple root of $L(s, \chi)$. It is known, that in the domain $0 < \sigma < 1$, $0 \leqq t \leqq 10$ the function has no other root, and in this domain $L(s, \chi_0)$ is non-vanishing. (See KNAPOWSKI—TURÁN [3], p. 254).

For the proof of (6. 3. 2) let

$$f(s) = \frac{1}{L(s, \chi)}, \quad \theta_1 = 1, \quad \theta_2 = \frac{1}{2}, \quad \varrho = \varrho_1.$$

6. 4. An other interesting question is the oscillatorious behavior of

$$M_0(x) = \sum_{n \leqq x} \frac{\mu(n)}{n}.$$

From the prime number theorem it follows $M_0(x) = o(1)$, if $x \to \infty$, and from the quoted theorem of Landau we obtain $M_0(x) = \Omega_{\pm}(x^{-\frac{1}{2}})$. We prove the following

THEOREM 4. *If* $T > c_1$ *then*

$$\max_{T \leqq x \leqq T^{\varkappa}} M_0(x) \cdot x^{\frac{1}{2}} \geqq \delta, \quad \min_{T \leqq x \leqq T^{\varkappa}} M_0(x) \cdot x^{\frac{1}{2}} \leqq -\delta,$$

where $\varkappa = (2+\sqrt{3})^2$, $c_1 > 0$, $\delta > 0$ *are explicitely calculable absolute constants.*

PROOF. Let

$$f(s) = \int_1^\infty x^{-s}\, dx M_0(x) = \int_1^\infty \frac{M_0(x)}{x^s}\, dx = \frac{1}{(s-1)} \cdot \frac{1}{\zeta(s)}; \quad A(x) = xM_0(x),$$

$\vartheta_1 = 1$, $\vartheta_2 = \frac{1}{2}$, $\varrho = \varrho_0$. The conditions of our Theorem are satisfied.

6. 5. *On a formula of Ramanujan.* Let

$$S(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} e_1\left(-\left(\frac{\beta}{n}\right)^2\right),$$

be the so-called Ramanujan-formula. HARDY and LITTLEWOOD [1] proved that the estimation $S(\beta) = O(\beta^{-\frac{1}{2}+\varepsilon})$ is equivalent with the Riemann-conjecture. W. STAS [1], [2], [3] considered the Ω-properties of this sum assuming the Riemann-hypothesis and other conjectures. The author dealt with similar questions in [2], [6]. We prove

THEOREM 5. *If* $T > c_1$ *then*

$$\max_{T \leqq \beta \leqq T^{\varkappa}} \beta^{\frac{1}{2}} S(\beta) > \delta, \quad \min_{T \leqq \beta \leqq T^{\varkappa}} \beta^{\frac{1}{2}} S(\beta) < -\delta,$$

where $\varkappa = (2+\sqrt{3})^2$, $\delta > 0$, $c_1 > 0$ *are explicitely calculable numerical constants.*

PROOF. It is known that

$$\beta S(\beta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\frac{1}{2}+\varepsilon_1)} \beta^{2s} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-s)}{\zeta(2s)}\, ds \qquad (\varepsilon_1 > 0).$$

From this and by the Mellin-formula we obtain

$$\int_0^\infty \beta^{-s} \frac{S(\sqrt{\beta})}{\sqrt{\beta}}\, d\beta = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-s)}{\zeta(2s)}.$$

Using the prime-number theorem in the form $\sum \frac{\mu(n)}{n} = 0$, we have

$$S(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \left\{ e_1\left(-\left(\frac{\beta}{n}\right)^2\right) - 1 \right\} = O(\beta^2) \quad \text{if} \quad 0 \leqq \beta \leqq 1.$$

Thus the function $\varphi(s)$ defined by

$$\varphi(s) = \int_0^1 \beta^{-s} \frac{S(\sqrt{\beta})}{\sqrt{\beta}}\, d\beta$$

is regular and $\varphi(s)=O\left(\frac{1}{|\sigma-\frac{3}{2}|}\right)$ on the halfplane $\sigma<\frac{3}{2}$. By partial integration

$$h(s)\overset{\text{def}}{=}\int_1^\infty \beta^{-s}\,d\big(\beta^{\frac{1}{2}}S(\sqrt{\beta})\big) = s\left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-s)}{\zeta(2s)}-\varphi(s)\right)+S(1).$$

Let us now apply our Theorem, choosing $f(s)=h(s)$, $\theta_2=\frac{1}{4}$, $\theta_1=\frac{1}{2}$, $\varrho=\frac{\varrho_0}{2}$. Hence the theorem follows.

6. 6. *On a theorem of M. Riesz.* Let

$$\mathcal{T}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}x^k}{(k-1)!\,\zeta(2k)}.$$

M. Riesz proved [1] that the estimation $\mathcal{T}(x)=O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ and the Riemann-conjecture are equivalent.

Using similar arguments as in § 6. 5, we can prove the following

THEOREM 6. *If $T>c_1$ then*

$$\max_{T\leqq x\leqq T^{\varkappa}}\mathcal{T}(x)\cdot x^{-\frac{1}{2}}>\delta,\qquad \min_{T\leqq x\leqq T^{\varkappa}}\mathcal{T}(x)\cdot x^{-\frac{1}{2}}<-\delta$$

where $\varkappa=(2+\sqrt{3})^2$, $c_1>0$, $\delta>0$ are explicitely calculable numerical constants.

6. 7 *Ω estimations for the Moebius-function in Abel-sense.* Let

$$m(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)e_1\left(-\frac{n}{x}\right).$$

The following theorem holds.

THEOREM 7. *If $T>c_1$ then*

$$\max_{T\leqq x\leqq T^{\varkappa}} m(x)\cdot x^{-\frac{1}{2}}>\delta,\qquad \min_{T\leqq x\leqq T^{\varkappa}} m(x)\cdot x^{-\frac{1}{2}}<-\delta$$

where $\varkappa=(2+\sqrt{3})^2$, $c_1>0$, $\delta>0$ are calculable absolute constants.

PROOF. Let

$$f(s) = \int_1^\infty x^{-s}\,dm(x).$$

Hence by partial integration

$$f(s) = m(1)+s\int_1^\infty m(x)x^{-s-1}\,dx = m(1)+s\int_0^1 m\left(\frac{1}{y}\right)y^{s-1}\,dy =$$

$$= m(1)+s\int_0^\infty m\left(\frac{1}{y}\right)y^{s-1}\,dy-\varphi(s),$$

where $\varphi(s) = \int_1^\infty m\left(\frac{1}{y}\right) y^{s-1}\, dy$ is an integral function. Using the relation

$$\int_0^\infty y^{s-1} \sum_{n=1}^\infty \mu(n) e_1(-ny)\, dy = \frac{\Gamma(s)}{\zeta(s)}$$

we may apply our Theorem choosing

$$A(x) = m(x), \quad f(s) = s\frac{\Gamma(s)}{\zeta(s)} + m(1) - \varphi(s), \quad \theta_1 = 1, \quad \theta_2 = \frac{1}{2}, \quad \varrho = \varrho_0.$$

6. 8. *On the k-free numbers in Abel-sense.* Let

$$\tau_k(x) = \sum_{n=1}^\infty \left(\varrho_k(n) - \frac{1}{\zeta(k)}\right) e_1\left(-\frac{n}{x}\right).$$

(The definition of $\varrho_k(n)$ see in § 6. 2.)
With similar arguments can be seen the following

THEOREM 8. *If* $T > d_k$ *then*

$$\max_{T \leqq x \leqq T^\varkappa} \tau_k(x) x^{-\frac{1}{2k}} > \delta_k, \quad \min_{T \leqq x \leqq T^\varkappa} \tau_k(x) \cdot x^{-\frac{1}{2k}} < -\delta_k$$

where $\varkappa = (2+\sqrt{3})^2$, $\delta_k > 0$, $d_k > 0$ *are constants, being explicitely calculable functions of* k.

6. 9. *On prime-numbers in different arithmetical progressions.* Let us denote

$$\psi(x, k, l) = \sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv l \pmod k}} \Lambda(n), \quad \psi(x) = \sum_{n \leqq x} \Lambda(n),$$

$$\pi(x, k, l) = \sum_{\substack{p \leqq x \\ p \equiv l \pmod k}} 1, \qquad \pi(x) = \sum_{p \leqq x} 1,$$

where p denotes prime-numbers, $\Lambda(n)$ the Mangoldt's function. S. KNAPOWSKI and P. TURÁN treated sistematically the oscillation of $\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2)$ and of $\pi(x, k, l_1) - \pi(x, k, l_2)$ in the series of their papers entitled „Comparative prime-number theory".
We can prove the following

THEOREM 9. *For* $T > c_1$ *and for all pairs* $l_1, l_2, l_1 \not\equiv l_2 \pmod 8$, $(l_1 l_2, k) = 1$ *we have*

$$\max_{T \leqq x \leqq T^\varkappa} \{\psi(x, 8, l_1) - \psi(x, 8, l_2)\} x^{-\frac{1}{2}} > \delta,$$

and if $l_1 \not\equiv 1$, $l_2 \not\equiv 1$ *then*

$$\max_{T \leqq x \leqq T^\varkappa} \{\pi(x, 8, l_1) - \pi(x, 8, l_2)\} x^{-\frac{1}{2}} \log x > \delta,$$

where $\varkappa = (2+\sqrt{3})^2$, $\delta > 0$, $c_1 > 0$ *are explicitely calculable constants.*

The corresponding results concerning this and the following theorem of S. Knapowski and P. Turán are better in almost every respect (see [2], p. 31, (1. 2); [3], p. 253, (1. 9)). Let

$$\sigma(x, k, l) = \sum_{n \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)} \Lambda(n) e_1 \left(-\frac{n}{x}\right).$$

Theorem 10. *For all* $T > c_1$ *and for all pairs* l_1, l_2; $l_1 \not\equiv l_2 \pmod 8$, $(l_1, k) = (l_2, k) = 1$ *we have*

$$\max_{T \leqq x \leqq T^{\varkappa}} \{\sigma(x, 8, l_1) - \sigma(x, 8, l_2)\} x^{-\frac{1}{2}} > \delta,$$

where $\varkappa = (2+\sqrt{3})^2$, $\delta > 0$, $c_1 > 0$ *are calculable constants.*

7. Applications to ineffective theorems. In what follows we quote some Ω-theorems, which correspond to the analog theorem of the preceding paragraph.

Let θ be the upper limit of the real part of the roots of $\zeta(s)$, i.e. in notation

$$\theta = \sup_{\zeta(\varrho)=0} {}_{\varrho} \operatorname{Re} \varrho.$$

The following theorem holds.

Theorem 11. *For arbitrary* $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ *we have*

$$\max_{T \leqq x \leqq T^{1+\varepsilon_2}} M(x) \cdot x^{-\theta+\varepsilon_1} > 1, \qquad \min_{T \leqq x \leqq T^{1+\varepsilon_2}} M(x) \cdot x^{-\theta+\varepsilon_2} < -1,$$

where $T > d$. *(d is a suitable constant. We cannot calculate d.)*

Proof. a) If $\theta = \frac{1}{2}$, then using the estimation

$$|M(x)| < d_1(\varepsilon_3) x^{\frac{1}{2}+\varepsilon_3}$$

(see E. C. Titchmarsh [1]) we apply the Theorem with $\varrho = \varrho_0 = \frac{1}{2} + i\gamma_0$, $k = 1$, $\theta_1 = \frac{1}{2} + \varepsilon_3$, $\theta_2 = \frac{1}{2}$. Thus

$$\varkappa = \frac{\theta_1}{\theta_2} + \sqrt{\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^2 - 1} < 1 + 2\varepsilon_3 + \sqrt{2\varepsilon_3 + 4\varepsilon_3^2} < 1 + \varepsilon_2$$

if ε_3 is small enough, and so the theorem is proved.

b) The proof of the case $\theta > \frac{1}{2}$ is similar.

Let $N(\sigma, T)$ represent the number of zeros $\varrho = \beta + i\gamma$ of the ζ-function that satisfy $\sigma \leqq \beta$ and $0 \leqq \gamma \leqq T$. According to a theorem of A. Selberg (E. C. Titchmarsh [1], p. 204) we have

$$N(\sigma, T) = O(T^r \log T)$$

uniformly for $\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 1$, where $r = 1 - \frac{1}{4}(\sigma - \frac{1}{2})$. Applying this with $\sigma = \theta - \varepsilon_2$ we can guarantee the existence of such a ζ-root $\varrho_1 = \beta_1 + i\gamma_1$, for which in the domain $|t - \gamma_1| < 2$, $\sigma > \beta_1$, the ζ-function does not vanish. Since $\zeta(s) \neq 0$ in $0 < s < 1$, we can guarantee the conditions of the Theorem.

We can deduce similarly the following theorems.

THEOREM 12. *For arbitrary but fixed* $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$

$$\max_{T \leqq x \leqq T^{1+\varepsilon_2}} m(x) \cdot x^{-\theta+\varepsilon_1} > 1, \qquad \min_{T \leqq x \leqq T^{1+\varepsilon_2}} m(x) \cdot x^{-\theta+\varepsilon_1} < -1,$$

$$\max_{T \leqq \beta \leqq T^{1+\varepsilon_2}} S(\beta) \cdot \beta^{1-\theta+\varepsilon_1} > 1, \qquad \min_{T \leqq x \leqq T^{1+\varepsilon_2}} m(x) \cdot x^{-\theta+\varepsilon_1} < -1,$$

$$\max_{T \leqq x \leqq T^{1+\varepsilon_2}} M_0(x) \cdot x^{1-\theta+\varepsilon_1} > 1, \qquad \min_{T \leqq x \leqq T^{1+\varepsilon_2}} M_0(x) x^{1-\theta+\varepsilon_1} < -1,$$

$$\max_{T \leqq x \leqq T^{1+\varepsilon_2}} \mathscr{T}(x) > 1, \qquad \min_{T \leqq x \leqq T^{1+\varepsilon_2}} \mathscr{T}(x) < -1,$$

if T *is large enough.*

Finally we draw up a conditional result as a consequence of our Theorem. Let $l_1 \not\equiv l_2 \pmod k$; l_1, l_2 be coprime to k, and

$$f(s) = -\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} (\bar{\chi}(l_1) - \bar{\chi}(l_2)) \frac{L'}{L}(s, \chi),$$

where the χ-'s denote multiplicative characters $\bmod k$.

Let us denote by θ^* the upper limit of real parts of the poles of $f(s)$. We proved in [4], that $\theta^* \geqq \frac{1}{2}$. (This assertion implicitely has been stated and was proved in KNAPOWSKI—TURÁN's paper [3] p. 243 earlier.) Now suppose, that $f(s)$ is regular in $0 < s < 1$. (This condition was quoted by KNAPOWSKI and TURÁN as Haselgrove's-condition. See their paper [2], p. 51.)

THEOREM 13. *If* $f(s)$ *is regular in the interval* $0 < s < 1$ *then for arbitrary but fixed* $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$

$$\max_{T \leqq x \leqq T^{1+\varepsilon_2}} (\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2)) x^{-\theta^*+\varepsilon_1} > 1,$$

$$\max_{T \leqq x \leqq T^{1+\varepsilon_2}} (\sigma(x, k, l_1) - \sigma(x, k, l_2)) x^{-\theta^*+\varepsilon_1} > 1,$$

when T *is large enough.*

8. The number of sign-changes. Let us denote by $N(A, T)$ the number of sign-changes of $A(x)$ in the interval $1 \leqq x \leqq T$. From our Theorem follows immediately that for $T > c_1$

$$N(A, T) > \frac{\log \log T - c_2}{\log \varkappa}$$

holds where

$$\varkappa = \frac{\theta_1}{\theta_2} + \sqrt{\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^2 - 1}.$$

Thus the following inequalities hold.

If $T > c_1$ then

$$N(M, T) > \varphi(T), \quad N(M_0, T) > \varphi(T), \quad N(S, T) > \varphi(T), \quad N(\mathscr{T}, T) > \varphi(T)$$

where $\varphi(T) = \dfrac{\log \log T - c_2}{2 \log (2 + \sqrt{3})}$. (See Theorems 1, 4, 5, 6.)

Similarly from the Theorems 11, 12 it follows that

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{N(M,T)}{\log\log T} = \infty, \quad \varlimsup \frac{N(M_0,T)}{\log\log T} = \infty,$$

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{N(m,T)}{\log\log T} = \infty, \quad \varlimsup \frac{N(\mathcal{T},T)}{\log\log T} = \infty,$$

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{N(S,T)}{\log\log T} = \infty.$$

(Received 5 October 1966)

References

E. Landau [1] Über einen Satz von Tschebyshef, *Math. Ann*, **51, 1** (1905), pp. 527–550.

G. H. Hardy and J. E. Littlewood [1] Contributions to the theory of Riemann zeta-function and the theory of the distribution of primes, *Acta Math.*, **41** (1918), pp. 119—196.

M. Riesz [1] On the Riemann hypothesis, *Acta Math.*, **40** (1916), pp. 185—190.

K. Prachar [1] *Primzahlverteilung* (Berlin, Springer Verlag, 1957).

E. C. Titchmarsh [1] *The theory of the Riemann zeta function* (Oxford, Univ. Press, 1951).

S. Knapowski and P. Turán [1] Comparative prime-number theory. I—II—III, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **13** (1962), pp. 299—314, 315—342, 343—364.

[2] Comparative prime number theory. IV—V—VI, *ibid.*, **14** (1963), pp. 31—42, 43—63, 64—78.

[3] Comparative prime number theory. VII—VIII, *ibid.*, **14** (1963), pp. 241—250, 251—268.

S. Knapowski [1] On oscillations of certain means formed from the Möbius series I, *Acta Arithm.*, **8** (1963), pp. 311—320.

[2] Mean-value estimations for the Möbius function II, *Acta Arithm*, **7** (1962), pp. 337—343.

[3] On oscillations of certain means formed from the Möbius series II, *Acta Arithm.*, **10** (1965), pp. 377—386.

W. Staś [1] Zur Theorie der Möbiusschen μ-Funktion, *Acta Arithm.*, 7 (1962), pp. 409—416.

[2] Über eine Reihe von Ramanujan, *Acta Arithm.*, **8** (1963), pp. 216—231.

[3] Some remarks on a series of Ramanujan, *Acta Arithm.*, **10** (1963), 359—368.

I. Kátai [1] *Vizsgálatok az összehasonlító prímszámelmélet köréből* (dissertation of candidate) Budapest, 1965.

[2] A Möbius-féle μ-függvényről, *MTA III. Oszt. Közl.*, **15** (1965), pp. 9—13.

[3] A Möbius-függvény számtani közepének Ω-becslése, *ibid.*, pp. 15—18.

[4] О сравнительной теории простых чисел, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **18** (1967), pp. 133—149.

[5] Ω-теоремы для распределения простых чисел, *Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Math.*, **9** (1966), pp. 87—93.

[6] Об оценке типа Ω для функции Рамануджана, *ibid.*, **9** (1966), pp. 95—102.

K. A. Rodossky [1] О правильности в распределении простых чисел, *Uspechi Mat. Nauk*, **17** (1962), pp. 189—191.

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (3—4), 1967, pp. 393—399.

RATIONAL APPROXIMATION TO x^α

By

G. FREUD and J. SZABADOS (Budapest)

(*Presented by* P. ERDŐS)

§ 1. Introduction

In his paper [1] D. J. NEWMAN proved the following famous theorem: There exist rational functions $R_N(x)$* for which

$$\big||x|-R_N(x)\big| \leqq 3e^{-\sqrt{N}} \qquad (|x| \leqq 1, N=4, 5, \ldots). \tag{1. 1}$$

Starting from this result, he showed the existence of rational functions $R_N(x)$ for which

$$\big|\sqrt{x}-R_N(x)\big| = O\big(e^{-c\sqrt{N}}\big) \qquad (0 \leqq x \leqq 1,\ N=4, 5, \ldots) \tag{1. 2}$$

with an absolute positive constant c. He stated that this might be the order of approximation for x^α ($\alpha>0$ rational), too, i. e.

$$|x^\alpha - R_N(x;\alpha)| = O\big(e^{-c(\alpha)\sqrt{N}}\big) \qquad (0 \leqq x \leqq 1,\ N \geqq N_0(\alpha)) \tag{1. 3}$$

where $c(\alpha)>0$ depends only on α. We are not aware of any proof of this statement, and the method used to show (1. 2) breaks down in the case (1. 3).

In this paper we deal with this problem (§ 3), starting from a general localization theorem (§ 2). We intend to give an extension of the obtained result (§ 4). As to the methods we use see [2] and [3].

In our theorems we consider the intervals $[0, 1]$ and $[0, +\infty)$, but it will be easy to turn to the intervals $[-1, +1]$ and $(-\infty, +\infty)$.

§ 2. A general localization theorem

THEOREM 1. *Let $f(x)$ be a continuous function in* $[0, 1]$ *and*

$$|f(x)| \leqq M \qquad (0 \leqq x \leqq 1). \tag{2. 1}$$

Further let

$$0=\xi_n^{\{0\}}<\xi_n^{\{1\}}<\ldots<\xi_n^{\{s(n)\}}=1, \quad \delta_n=\min_{1\leqq k\leqq s(n)}\big(\xi_n^{\{k\}}-\xi_n^{\{k-1\}}\big) \qquad (n=2, 4, 6, \ldots) \tag{2. 2}$$

where $s(n)$ $(n=2, 4, 6, \ldots)$ are some kind of integers. If we have such polynomials $p_n^{\{k\}}(x)$ of degree n at most that

$$\sup_{1\leqq k\leqq s(n)}\ \sup_{\xi_n^{\{k-1\}}\leqq x\leqq \xi_n^{\{k\}}} |f(x)-p_n^{\{k\}}(x)| = \varepsilon_n \quad (n=2, 4, 6, \ldots); \quad \lim_{n\to+\infty}\varepsilon_n=0 \tag{2. 3}$$

* By $R_N(x)$, $R_N(x)$, $R_N(x;\alpha)$, and so on we denote rational functions of degree N at most.

then there exist rational functions $R_N(x)$ *for which*

$$|f(x)-R_N(x)|\leqq 7\varepsilon_n \qquad (0\leqq x\leqq 1,\ N\geqq N_0)$$

where n is the greatest even number satisfying the inequality

$$(2.4)\qquad s(n)(3n+m-1)\leqq N \quad \textit{where} \quad m=\left[\log^2\frac{57M^2n^2s(n)}{\delta_n\varepsilon_n^3}\right]+1.$$

REMARK. Analogous localization theorems can be found in [2] and [4].

PROOF. Adding an appropriate linear function to $p_n^{\{k\}}(x)$ we obtain polynomials $P_n^{\{k\}}(x)$ (cf. [2]), for which

$$(2.5)\qquad \sup_{1\leqq k\leqq s(n)}\ \sup_{\xi_n^{\{k-1\}}\leqq x\leqq \xi_n^{\{k\}}}|f(x)-P_n^{\{k\}}(x)|\leqq 4\varepsilon_n \qquad (n=2,4,6,\ldots)$$

and

$$(2.6)\qquad P_n^{\{k\}}(\xi_n^{\{k-1\}})=f(\xi_n^{\{k-1\}}),\quad P_n^{\{k\}}(\xi_n^{\{k\}})=f(\xi_n^{\{k\}}) \qquad (k=1,\ldots,s(n)).$$

Let

$$(2.7)\qquad X^{\{k\}}=\frac{2}{\xi_n^{\{k\}}-\xi_n^{\{k-1\}}}\left(x-\frac{\xi_n^{\{k\}}+\xi_n^{\{k-1\}}}{2}\right);$$

$T_n(x)$ be the Chebyshev-polynomial of degree n,

$$(2.8)\qquad r_n^{\{k\}}(x)=\frac{2(M+\varepsilon_n)P_n^{\{k\}}(x)}{2M+\varepsilon_n+\varepsilon_nT_n(X^{\{k\}})} \qquad (k=1,\ldots,s(n)).$$

Then by (2. 5) and (2. 1)

$$(2.9)\qquad |f(x)-r_n^{\{k\}}(x)|\leqq 4\varepsilon_n+\varepsilon_n\frac{|P_n^{\{k\}}(x)|\cdot[1-T_n(X^{\{k\}})]}{2M+\varepsilon_n+\varepsilon_nT_n(X^{\{k\}})}\leqq$$

$$\leqq 4\varepsilon_n+\varepsilon_n\frac{4M}{2M}=6\varepsilon_n \qquad (\xi_n^{\{k-1\}}\leqq x\leqq \xi_n^{\{k\}});$$

by (2. 6)—(2. 8)

$$(2.10)\qquad r_n^{\{k\}}(\xi_n^{\{k-1\}})=f(\xi_n^{\{k-1\}}),\quad r_n^{\{k\}}(\xi_n^{\{k\}})=f(\xi_n^{\{k\}}) \qquad (k=1,\ldots,s(n)),$$

We have from (2. 1), (2. 2) and by the Markov's inequality

$$(2.11)\qquad \left|\frac{dP_n^{\{k\}}(x)}{dx}[2M+\varepsilon_n+\varepsilon_nT_n(X^{\{k\}})]-P_n^{\{k\}}(x)\varepsilon_n\frac{dT_n(X^{\{k\}})}{dx}\right|\leqq$$

$$\leqq\frac{2n^2\,2M}{\xi_n^{\{k\}}-\xi_n^{\{k-1\}}}(2M+2\varepsilon_n)+2M\varepsilon_n\frac{2n^2}{\xi_n^{\{k\}}-\xi_n^{\{k-1\}}}\leqq\frac{9Mn^2}{\delta_n} \qquad (\xi_n^{\{k-1\}}\leqq x\leqq \xi_n^{\{k\}})$$

where inside the module sign stands a polynomial $\psi_{2n}^{\{k\}}(x)$ of degree $2n$ at most. By an inequality of Bernstein we have

$$|\psi_{2n}^{\{k\}}(x)|\leqq\frac{9Mn^2}{\delta_n}T_{2n}(X^{\{k\}}) \qquad (x\in[0,1]-[\xi_n^{\{k-1\}},\xi_n^{\{k\}}]).$$

Hence

$$(2.12)\qquad \left|\frac{dr_n^{\{k\}}(x)}{dx}\right| = 2(M+\varepsilon_n)\frac{|\psi_{2n}^{\{k\}}(x)|}{|2M+\varepsilon_n+\varepsilon_n T_n(X^{\{k\}})|^2} \leqq$$

$$\leqq \frac{19M^2n^2}{\delta_n\varepsilon_n^2}\max_{|x|\geqq 1}\frac{T_{2n}(x)}{T_n(x)^2} \leqq \frac{19M^2n^2}{\delta_n\varepsilon_n^2}$$

for $x\notin[\xi_n^{\{k-1\}}, \xi_n^{\{k\}}]$, and — as a consequence of (2. 11)–(2. 12) holds for all $0\leqq x\leqq 1$, too.

Now let

$$(2.13)\qquad \varphi(x) = \frac{r_n^{\{1\}}(x)+r_n^{\{s(n)\}}(x)}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{s(n)}|x-\xi_n^{\{k\}}|\,\frac{r_n^{\{k\}}(x)-r_n^{\{k-1\}}(x)}{x-\xi_n^{\{k\}}}$$

then

$$(2.14)\qquad \varphi(x)\equiv r_n^{\{k\}}(x)\quad\text{for}\quad x\in[\xi_n^{\{k-1\}}, \xi_n^{\{k\}}]\qquad (k=1,\dots,s(n)),$$

so that

$$(2.15)\qquad |f(x)-\varphi(x)|\leqq 6\varepsilon_n\qquad (0\leqq x\leqq 1).$$

Let $Q_m(x)$ be the rational function of NEWMAN (cf. [1] and (1. 1)). Then by (2. 4) the rational function

$$(2.16)\qquad R_N(x) = \frac{r_n^{\{1\}}(x)+r_n^{\{s(n)\}}(x)}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{s(n)}Q_m(x-\xi_n^{\{k\}})\,\frac{r_n^{\{k\}}(x)-r_n^{\{k-1\}}(x)}{x-\xi_n^{\{k\}}}$$

is of degree

$$2n+[s(n)-1](m+2n)\leqq s(n)(3n+m-1)\leqq N$$

at most. Finally, we have from (2. 15), (2. 13), (2. 16), (1. 1), (2. 10) and (2. 12)

$$|f(x)-R_N(x)| \leqq |f(x)-\varphi(x)|+|\varphi(x)-R_N(x)| \leqq$$

$$6\varepsilon_n+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{s(n)}\left||x-\xi_n^{\{k\}}|-Q_m(x-\xi_n^{\{k\}})\right|\cdot\left|\frac{r_n^{\{k\}}(x)-r_n^{\{k-1\}}(x)}{x-\xi_n^{\{k\}}}\right| \leqq$$

$$\leqq 6\varepsilon_n+\frac{3e^{-\sqrt{m}}}{2}\sum_{k=2}^{s(n)}\left[\left|\frac{r_n^{\{k\}}(x)-r_n^{\{k\}}(\xi_n^{\{k\}})}{x-\xi_n^{\{k\}}}\right|+\left|\frac{r_n^{\{k-1\}}(x)-r_n^{\{k-1\}}(\xi_n^{\{k\}})}{x-\xi_n^{\{k\}}}\right|\right] \leqq$$

$$\leqq 6\varepsilon_n+3\frac{\delta_n\varepsilon_n^3}{57M^2n^2s(n)}s(n)\max_{1\leqq k\leqq s(n)}\max_{0\leqq x\leqq 1}\left|\frac{dr_n^{\{k\}}(x)}{dx}\right| \leqq$$

$$\leqq 6\varepsilon_n+\frac{\delta_n\varepsilon_n^3}{19M^2n^2}\cdot\frac{19M^2n^2}{\delta_n\varepsilon_n^2} = 7\varepsilon_n\qquad (0\leqq x\leqq 1)$$

which proves Theorem 1.

§ 3. Approximation to x^α $(0 \leqq x \leqq 1)$

THEOREM 2. *Let $\alpha > 0$ be an arbitrary real number. Then there exist rational functions $R_N(x; \alpha)$ for which*

$$|x^\alpha - R_N(x;\alpha)| \leqq 19 e^{-0{,}78\alpha \sqrt[3]{\frac{N}{(1+3\alpha)^2}}} \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

for sufficiently large N's, i. e. for $N \geqq N_0(\alpha)$.

REMARKS. 1. If we replace x by x^2, α by $\alpha/2$, N by $N/2$ in Theorem 2 then we get rational functions $\bar{R}_N(x; \alpha)$ for which

$$\big||x|^\alpha - \bar{R}_N(x;\alpha)\big| \leqq 19 e^{-0{,}55\alpha \sqrt[3]{\frac{N}{(2+3\alpha)^2}}} \qquad (-1 \leqq x \leqq +1,\ N \geqq 2N_0(\alpha)).$$

2. Theorem 2 shows the advantage of the rational approximation, because the order of magnitude of the polynomial approximation is only $O(N^{-\alpha})$ or $O(N^{-2\alpha})$ in $[-1, 1]$ or $[0,1]$, respectively. Though we are unable to replace $\sqrt[3]{N}$ by $\sqrt{N}$, our result has the advantage that it applies to arbitrary real $\alpha \geqq 0$ (not only rational).

PROOF. Using the binomial series we get

$$(3.1) \qquad \left|(1+x)^\alpha - \sum_{i=0}^{n} \binom{\alpha}{i} x^i\right| \leqq \left|\binom{\alpha}{n+1}\right| (1+x)^{\alpha-n-1} x^{n+1} \leqq x^n \qquad (x \geqq 0,\ n \geqq \alpha).$$

Let

$$(3.2) \qquad \xi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad \left(\text{so that } \frac{1}{\xi} - 1 = \xi\right);$$

$$\xi_n^{\{k\}} = \xi^{n-k+1} \qquad \left(k = 1, \ldots, s(n);\ s(n) = \left[\frac{n}{\alpha}\right] + 1\right),$$

then

$$\delta_n = \min_{1 \leqq k \leqq s(n)} (\xi_n^{\{k\}} - \xi_n^{\{k-1\}}) = \xi^{s(n)}.$$

Replacing x by $\dfrac{x - \xi^{n-k+2}}{\xi^{n-k+2}}$ $(k = 2, \ldots, s(n))$ in (3. 1) we have

$$|x^\alpha - p_n^{\{k\}}(x)| \leqq \left(\frac{\xi^{n-k+1} - \xi^{n-k+2}}{\xi^{n-k+2}}\right)^n = \left(\frac{1}{\xi} - 1\right)^n = \xi^n$$

$$(\xi_n^{\{k-1\}} \leqq x \leqq \xi_n^{\{k\}},\ k = 2, \ldots, s(n))$$

where

$$p_n^{\{k\}}(x) = \xi^{n-k+2} \sum_{i=0}^{n} \binom{\alpha}{i} \left(\frac{x - \xi^{n-k+2}}{\xi^{n-k+2}}\right)^i \qquad (k = 2, \ldots, s(n)).$$

Further let

$$p_n^{\{1\}}(x) = \xi^{(\alpha-1)s(n)} x$$

then by (3. 2)

$$|x^\alpha - p_n^{\{1\}}(x)| = |x^\alpha - \xi^{(\alpha-1)s(n)}x| \leqq \xi^{\alpha s(n)}\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}|1-\alpha| \leqq \xi^n$$

$$(0 = \xi_n^{\{0\}} \leqq x \leqq \xi_n^{\{1\}} = \xi^n).$$

Thus we may apply Theorem 1 with

$$f(x) = x^\alpha, \quad M = 1, \quad s(n) = \left[\frac{n}{\alpha}\right] + 1, \quad \delta_n = \xi^{\left[\frac{n}{\alpha}\right]+1}, \quad \varepsilon_n = \xi^n$$

and we obtain from condition (2. 4)

$$\left(\left[\frac{n}{\alpha}\right]+1\right)\left[3n + \log^2 \frac{57n^2\left(\left[\frac{n}{\alpha}\right]+1\right)}{\xi^{\left[\frac{n}{\alpha}\right]+1+3n}}\right] \leqq N$$

i.e. for sufficiently large n's we have

$$n \leqq -\frac{0{,}78\alpha}{\log \xi}\sqrt[3]{\frac{N}{(1+3\alpha)^2}}$$

correspondingly

$$|x^\alpha - R_N(x;\alpha)| \leqq 7\xi^{2\left[-\frac{0{,}78\alpha}{2\log\xi}\sqrt[3]{\frac{N}{(1+3\alpha)^2}}\right]} < \frac{7}{\xi^2}e^{-0{,}78\alpha\sqrt[3]{\frac{N}{(1+3\alpha)^2}}} < 19e^{-0{,}78\alpha\sqrt[3]{\frac{N}{(1+3\alpha)^2}}}$$

$$(0 \leqq x \leqq 1),$$

qu. e. d.

§ 4. Approximation to $x^{p/q}$ $(0 \leqq x < +\infty)$

THEOREM 3. *Let p, $q \geqq 1$ be integers. Then there exist rational functions $R_N(x; p/q)$ for which*

$$\left|x^{\frac{p}{q}} - R_N\left(x; \frac{p}{q}\right)\right| \leqq 19(1+x)x^{\left[\frac{p}{q}\right]}e^{-\frac{0{,}42}{q}\sqrt[3]{\frac{N-\left[\frac{p}{q}\right]-1}{q}}} \qquad (0 \leqq x < +\infty, \ N \geqq N_0(\alpha)).$$

REMARKS. 1. As in case of Theorem 2, if we replace x by x^2, q by $2q$, N by $N/2$ in Theorem 3, then we get rational functions $\bar{R}_N(x; p/q)$ for which

$$\left||x|^{\frac{p}{q}} - \bar{R}_N\left(x; \frac{p}{q}\right)\right| \leqq 19(1+x^2)x^{2\left[\frac{p}{2q}\right]}e^{-\frac{0{,}13}{q}\sqrt[3]{\frac{N-\left[\frac{p}{q}\right]-1}{q}}}$$

$$(-\infty < x < +\infty, \ N \geqq 2N_0(\alpha)).$$

2. Theorem 3 solves the problem of rational approximation to x^α on an infinite interval — if α is rational. Passing over to irrational α's we are unable to obtain a reasonable estimation. Further we do not know whether the weightfunction $(1+x)x^{[p/q]}$ is the best possible.

PROOF. We use the idea of [3]. Theorem 2 insures the existence of rational functions $R_n(x;\, 1/q)$ for which

$$(4.1)\qquad \left|x^{\frac{1}{q}} - R_n\left(x;\, \frac{1}{q}\right)\right| \leqq 19e^{-\frac{0{,}78}{q}\sqrt[3]{\frac{nq^2}{(q+3)^2}}} \leqq 19e^{-\frac{0{,}42}{q}\sqrt[3]{n}} \qquad (0 \leqq x \leqq 1,\ n \geqq n_0).$$

First of all let $p \leqq q$. Then being

$$0 \leqq \frac{x^p}{(1+x)^q} \leqq 1 \quad \text{if} \quad 0 \leqq x < +\infty,$$

we may replace x by $\dfrac{x^p}{(1+x)^q}$ in (4. 1). Thus we have

$$(4.2)\qquad \left|x^{\frac{p}{q}} - (1+x)\, R_n\left(\frac{x^p}{(1+x)^q};\, \frac{1}{q}\right)\right| \leqq 19(1+x)e^{-\frac{0{,}42}{q}\sqrt[3]{n}} \qquad (0 \leqq x < +\infty).$$

The rational function

$$R_m(x) = (1+x)\, R_n\left(\frac{x^p}{(1+x)^q};\, \frac{1}{q}\right)$$

is of degree $m = nq+1$. Therefore by (4. 2) we get

$$(4.3)\qquad \left|x^{\frac{p}{q}} - R_m(x)\right| \leqq 19(1+x)e^{-\frac{0{,}42}{q}\sqrt[3]{\frac{m-1}{q}}} \qquad (0 \leqq x < +\infty,\ p \leqq q).$$

Finally, we get rid of the restriction $p \leqq q$. Let

$$\frac{p}{q} = \left[\frac{p}{q}\right] + \left\{\frac{p}{q}\right\}$$

where $[p/q]$ is integer and $0 \leqq \{p/q\} = q'/q < 1$. Then applying (4. 3), we obtain

$$\left|x^{\frac{p'}{q}} - R_m(x)\right| \leqq 19(1+x)e^{-\frac{0{,}42}{q}\sqrt[3]{\frac{m-1}{q}}} \qquad (0 \leqq x < +\infty).$$

Multiplying by $x^{[p/q]}$, we have

$$(4.4)\qquad \left|x^{\frac{p}{q}} - R_N\left(x;\, \frac{p}{q}\right)\right| \leqq 19(1+x)x^{\left[\frac{p}{q}\right]} e^{-\frac{0{,}42}{q}\sqrt[3]{\frac{m-1}{q}}} \qquad (0 \leqq x < +\infty)$$

where the rational function

$$R_N\left(x;\, \frac{p}{q}\right) = x^{\left[\frac{p}{q}\right]} R_m(x)$$

is of degree $N = [p/q] + m$. The substitution $m = N - [p/q]$ in (4. 4) gives Theorem 3.

(Received 12 October 1966)

References

[1] D. J. NEWMAN, Rational approximation to $|x|$, *Michigan Math. Journal*, **11(1)** (1964), pp. 11—14.
[2] G. FREUD, Über die Approximation reeller Funktionen durch rationale gebrochene Funktionen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **17** (1966), pp. 313—324.
[3] G. FREUD, A remark concerning the rational approximation to $|x|$, *Studia Math.*, **2** (1967), pp. 115—117.
[4] J. SZABADOS, Generalization of two theorems of G. Freud concerning the rational approximation, *Studia Sci. Math.*, **2** (1967), pp. 73—80.

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (3—4), 1967, pp. 401—404.

ENDOMORPHISM RINGS OF ABELIAN GROUPS GENERATED BY AUTOMORPHISM GROUPS

By

R. W. STRINGALL (Davis, California, USA)

(*Presented by* L. RÉDEI)

In this note, necessary and sufficient conditions are given for the endomorphism ring of an Abelian p-group G to be generated by the group of automorphisms of G. These conditions are then applied to give a partial answer to L. FUCHS' question: For which Abelian groups does the automorphism group generate the endomorphism ring? In particular, it is shown that if $E(G)$ denotes the endomorphism ring of the Abelian p-group G without elements of infinite height and if $H(G)=\{\alpha\in E(G)$: $x\in G$, $px=0$ and height $x<\infty$ imply height $\alpha(x)>$height $x\}$, then $E(G)$ is generated by its units if and only if the quotient ring $\dfrac{E(G)}{H(G)}$ is generated by its units and every isomorphism $\alpha\in E(G)$ is a sum of units. Furthermore, it is shown that the condition on the isomorphisms $\alpha\in E(G)$ can be removed in case G has a standard basic subgroup or in case $H(G)$ is the Jacobson radical of $E(G)$.

In what follows, "group" means Abelian group. If p is a prime number and G a p-group, let $G[p]$, $E(G)$ and $A(G)$ denote the socle of G, the endomorphism ring of G and the automorphism group of G, respectively. For an element $x\in G$, let $h_G(x)$ denote the p-height in G of the element x and let G' denote the subgroup of elements of infinite height. The notation is that of [1] and [4].

For the p-group G, let

$$H(G)=\{\alpha\in E(G)\colon x\in G,\ px=0 \text{ and } h_G(x)<\infty \text{ imply } h_G(\alpha(x))>h_G(x)\}.$$

It is known that $H(G)$ is a two-sided ideal in $E(G)$ which always contains the Jacobson radical, denoted by $J(E(G))$, of $E(G)$. (See [5], lemmas 14. 2 and 14. 4.)

LEMMA 1. *Let α be any automorphism of the p-group G without elements of infinite height. If $\beta\in H(G)$, then $\alpha-\beta$ is one-to-one.*

PROOF. Suppose $0\neq x\in G[p]$ and $(\alpha-\beta)(x)=0$. Then, by definition,

$$h_G(x)<h_G(\beta(x))=h_G(\alpha(x))\leqq h_G(\alpha^{-1}(\alpha(x)))=h_G(x)$$

a contradiction. Thus, $\ker(\alpha-\beta)\cap G[p]=0$. This is enough to insure that $\alpha-\beta$ is one-to-one.

The following corollary to lemma 1 will be used at a later point.

COROLLARY 1. *If G is a p-group without proper isomorphic subgroups and if $G'=0$, then $H(G)$ is the Jacobson radical, $J(E(G))$, of $E(G)$.*

PROOF. If $\alpha\in H(G)$, then $1-\alpha$ is an isomorphism by lemma 1. Since G has no proper isomorphic subgroups, $1-\alpha$ is an automorphism of G. Therefore, each

$\alpha \in H(G)$ is quasi-regular (see [3], page 7). Since $H(G)$ is an ideal, it follows that $H(G) \subseteqq J(E(G))$ ([3], theorem 1, page 9). Finally, $J(E(G)) \subseteqq H(G)$ by 14. 2 of [5].

THEOREM 1. *If G is any p-group without elements of infinite height, then the following conditions are necessary and sufficient for E(G) to be generated by A(G):*

(i) *The quotient ring* $\frac{E(G)}{H(G)}$ *is generated by its units,*

(ii) *Every isomorphism of G into G is a sum of automorphisms of G.*

PROOF. The necessity of the conditions is obvious. To show the suffiency, suppose $\frac{E(G)}{H(G)}$ is generated by its units and that every isomorphism of G into G is a sum of automorphisms. Let π be the natural map:

$$\pi: \quad E(G) \rightarrow \frac{E(G)}{H(G)}.$$

If $\alpha \in E(G)$ and if $\pi(\alpha)$ is a unit, then there exists an endomorphism β of G such that $1-\alpha\beta \in H(G)$. By lemma 1, $1-(1-\beta\alpha) = \beta\alpha$ is one-to-one. It follows that α is an isomorphism. Now suppose β is an arbitrary endomorphism of G. Let $\beta_1, \ldots, \beta_n$ be elements in $E(G)$ such that $\pi(\beta_1), \ldots, \pi(\beta_n)$ are units in $\frac{E(G)}{H(G)}$ and such that $(\beta_1+\ldots+\beta_n)-\beta = \gamma \in H(G)$. Such elements exist since $\frac{E(G)}{H(G)}$ is generated by its units. By lemma 1, $1-\gamma$ is an isomorphism. Thus,

$$\beta = \beta_1+\ldots+\beta_n-\gamma = \beta_1+\ldots+\beta_n-1+(1-\gamma)$$

is a sum of isomorphisms. By (ii), each of these isomorphisms is a sum of automorphisms of G.

It should be noted that the quotient rings $\frac{E(G)}{H(G)}$ are not altogether unknown. In fact, as will be shown, there exists a useful partial description of them in R. S. PIERCE's work [5] (see theorem 14. 3 and lemma 14. 4).

The result of the foregoing theorem can be sharpened in the case where G has a standard basic subgroup.

THEOREM 2. *Let p be any prime other than 2. If G is a p-group with standard basic subgroup and* $G'=0$, *then the following conditions are equivalent:*

(i) *The endomorphism ring of G is generated by the automorphism group of G,*

(ii) *Every isomorphism of G into G is a sum of automorphisms of G.*

PROOF. Clearly (i) implies (ii). By theorem 14. 3 of [5], $\frac{E(G)}{H(G)}$ is isomorphic to a subring R of the ring direct product $\Pi_{\aleph_0} Z_p$ (Z_p the ring of integers modulo p). Obviously, R has an identity e. Suppose π is any idempotent in R. Then $\pi = (e+\pi)-e$. Since $p \neq 2$, there exist integers a and b such that $2a+pb = 1$. It follows that

$$(e-a\pi)(e+\pi) = e-2a\pi+\pi = e-(2a+pb)\pi+\pi = e.$$

Hence, both $e+\pi$ and e are units. Thus, any idempotent in R is a sum of units in R. Suppose r is any element in R. It is clear that r can be written as a linear combination of orthogonal idempotents in $\Pi_{\aleph_0} Z_p$, say $r=a_1\pi_1+a_2\pi_2+\ldots+a_n\pi_n$. Furthermore, it can be assumed that $\sum_{i=1}^{n}\pi_i=e$ and that the coefficients $a_1, \ldots, a_n$ are distinct modulo the prime p. For each $i=1, \ldots, n$, the existence of a polynomial $f_i(x)$ with integer coefficients such that $f_i(a_j)=0$ (modulo p) if and only if $j\neq i$ is easy to verify. Consider

$$(f_i(r))^{p-1}=[f_1(a_1)\pi_1+\ldots+f_i(a_i)\pi_i+\ldots+f_n(a_n)\pi_n]^{p-1}=$$
$$=[f_i(a_i)\pi_i]^{p-1}=(f_i(a_i))^{p-1}\pi_i=\pi_i.$$

This follows since $(f_i(a_i))^{p-1}=1$ (modulo p) by Fermat's theorem. Consequently, each $\pi_i\in R$ and r is a sum of idempotents in R. Since each idempotent is a sum of units, it follows that each element of R and, hence, of $\frac{E(G)}{H(G)}$ is a sum of units. Therefore, if every isomorphism of G is a sum of automorphisms of G, then an application of theorem 1 shows that every endomorphism is a sum of automorphisms.

It was shown by R. S. PIERCE that the restriction on p is necessary (see [5], theorem 14. 9).

Recently, much attention has been given to p-groups without proper isomorphic subgroups. In this connection both of the foregoing results can be sharpened since condition (ii) of each of them is automatically satisfied.

COROLLARY 2. *Let G be a p-group without proper isomorphic subgroups and $G'=0$. A necessary and sufficient condition for $E(G)$ to be additively generated by $A(G)$ is that $\frac{E(G)}{H(G)}$ be generated by its units. In particular, if G has a standard basic subgroup and if $p\neq 2$, then $E(G)$ is generated by $A(G)$.*

Corollaries 1 and 2 suggest a further application of theorems 1 and 2.

LEMMA 2. *If R is any ring with identity, then R is generated by its units if and only if $\frac{R}{J(R)}$ is generated by its units.*

PROOF. Clearly, if R is generated by its units, then so is $\frac{R}{J(R)}$. On the other hand, suppose $\frac{R}{J(R)}$ is generated by its units. Let f be the natural map $f\colon R\to\frac{R}{J(R)}$ and suppose $r\in R$. Since $\frac{R}{J(R)}$ is generated by its units, there exist $r_1, \ldots, r_n$ in R and $s\in J(R)$ such that $f(r_1), \ldots, f(r_n)$ are units and $r=r_1+\ldots+r_n-s$. To complete the proof it will be enough to show that for $r\in R, f(r)$ is a unit only if r is a unit in R. Suppose $f(r)$ is a unit in $f(R)$. Since $f(r)$ is a unit, there exists an element $s\in R$ such that $f(rs)=1=f(sr)$. Consequently, $1-rs$ and $1-sr$ are in $J(R)$. It follows that rs and sr are units and, consequently, r is a unit in R.

COROLLARY 3. *Let G be any p-group for which $H(G)$ is the Jacobson radical, $J(E(G))$, of $E(G)$. Then:*

(i) *The ring $E(G)$ is generated by its units if and only if $\frac{E(G)}{H(G)}$ is generated by its units,*

(ii) *If $p \neq 2$ and if G has a standard basic subgroup, then $E(G)$ is generated by its units.*

PROOF. The proof of (i) is clear. The proof of (ii) follows from the proof of theorem 2, lemma 2 and 14. 3 of [5].

REMARK. Corollary 3 has application in case G is a torsion complete group (see [4], problem 58) since in this case $J(E(G)) = H(G)$. Moreover, R. S. PIERCE has given necessary and sufficient conditions for $H(G) = J(E(G))$ (see [5], lemma 14. 5).

(Received 28 October 1966)

References

[1] L. FUCHS, *Abelian Groups* (Budapest, 1958).
[2] L. FUCHS, *Recent Results and Problems on Abelian Groups*, Topics in Abelian Groups (Chicago, 1963).
[3] N. JACOBSON, *Structure of Rings* (Providence, 1956).
[4] I. KAPLANSKY, *Infinite Abelian Groups* (Ann Arbor, 1954).
[5] R. S. PIERCE, *Homomorphisms of primary Abelian groups*, Topics in Abelian Groups (Chicago, 1963).
[6] R. W. STRINGALL, Endomorphism rings of primary Abelian groups, to appear in the *Pacific Journal of Mathematics*.

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (3—4), 1967, pp. 405—410.

ON THE λ-SYSTEM OF CIRCLES [1]

By

J. MOLNÁR (Budapest)

(*Presented by* L. FEJES TÓTH)

In a joint paper with FEJES TÓTH [3] we dealt with the following question: Suppose that we have at our disposal an inexhaustible stockpile of all kinds of circles, the radii of which lie in a given interval (a, b). How must the circles be chosen and arranged in order to fill the plane as densely [2] as possible?

In the present paper we deal with a generalisation of this question.

Let be given in the Eucledean plane a numerable set $\{C_i\}$ of circles with the radii r_i. We name

$$q = \inf \frac{r_i}{r_j} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots)$$

the *homogeneity* of the set. In the case $q = 0$ the set is quite *inhomogeneous*, i.e. the radii of the circles either have no upper bound or no positive lower bound. Conversely, the other extrem possibility $q = 1$ means that the set is quite *homogeneous*, i.e. the circles are congruent.

Let us consider a set $\{C_i\}$ of circles with the following property: If r_i denote the radius of the circle C_i then the concentric λ-times circle λC_i with the radius λr_i has no common inner point with C_j $(j \neq i,\ i = 1, 2, \ldots)$ (Fig. 1). We name such a system of circles a *λ-system of circles.*

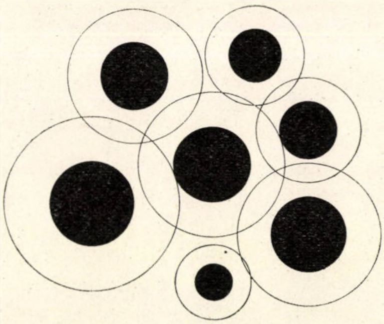


Fig. 1

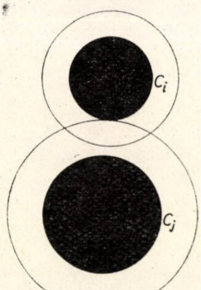


Fig. 2

We say, that the two circles C_i and C_j of the λ-system of circles *are neighbouring*, if at least one of them touches the λ-times circle of the other (Fig. 2).

[1] Comunication made at the Colloquium on Geometry in Tihany (Hungary) in September 1965.

[2] Concerning the notion of density of a system of convex domains see for instance FEJES TÓTH [1].

Let $\{C_i\}$ be a λ-system of circles with the homogeneity q. Let C_1, C_2, C_3 be three circles of radii r_1, r_2, r_3, Δ the triangle determined by the centres of these circles and $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ the angles of Δ.[3] We introduce the function

$$s(q, \lambda) = \sup \frac{\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_3 C_3}{2\pi\Delta},$$

where the supremum extends over all triplets of circles satisfying the conditions that: 1) $\frac{r_i}{r_j} \geqq q$ $(i, j = 1, 2, 3)$, 2) at least one circle is neighbouring with both others, 3) no $\frac{1+\lambda}{2}$-times circle intersects the opposite side of Δ.

Our main result is the following

THEOREM. *The density of a λ-system of circles of homogeneity q is* $\leqq s(q, \lambda)$.

PROOF. Without loss of generality we may suppose that the λ-system of circles is *saturated*, i.e. to the set of circles no circle of radius $\inf r_i$ can be added.

We shall span a tessellation with triangular faces over the centres $O_1, O_2, \dots$ of the circles $C_1, C_2, \dots$ and we shall show that in each triangle $\Delta_{ijk} = O_i O_j O_k$ the density δ of the circles C_i, C_j, C_k belonging to the triangle Δ_{ijk} and defined by

$$\delta = \frac{\alpha_i C_i + \alpha_j C_j + \alpha_k C_k}{2\pi\Delta}$$

s $\leqq s(q, \lambda)$, where α_i, α_j, α_k denote the angles of Δ_{ijk} at O_i, O_j and O_k.

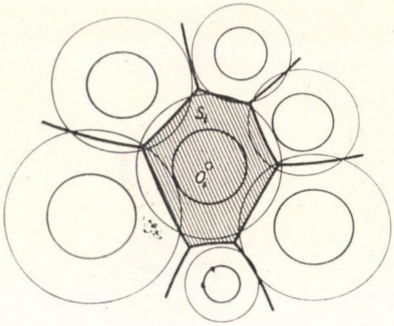


Fig. 3

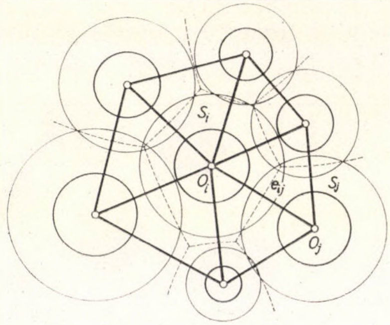


Fig. 4

For this purpose we introduce the notion of the algebraic *distance* $d(P, \lambda C_i) = O_i P - \lambda r_i$ of a point P from a circle λC_i of radius λr_i centred at O_i.[4] We associate with any circle C_i the set S_i of points P lying „nearer" to λC_i than to any othre circle λC_j, i.e. $d(P, \lambda C_i) < d(P, \lambda C_j)$, $i \neq j$ (Fig. 3).

[3] We denote a domain and its area by the same symbol.
[4] See FEJES TÓTH—MOLNÁR [3].

It is easy to show that S_i is a star region with respect to the pole O_i and the star regions $S_1, S_2, \ldots$ constitute a tessellation T. It is also easy to show that with the help of this tessellation we can construct a dual tessellation T^* in which each edge e_{ij} of T separating the faces S_i and S_j is replaced by the segment O_iO_j (Fig. 4). The faces of the tessellation T^* are polygons.

By inserting non-intersecting diagonals in the polygons of T^* which are not triangles we obtain the desired tessellation with triangular faces. We have only to show that in each of the triangles $\Delta_{ijk}=O_iO_jO_k$ of the resulting tessellation the density of the circles is $\leqq s(q, \lambda)$.

Let V be the vertex of the tessellation T corresponding to the triangle $\Delta_{ijk}= =O_iO_jO_k$. Further let C be the corresponding support circle, i.e. the circle of radius $\varrho=d(V, \lambda C_i)=d(V, \lambda C_j)=d(V, \lambda C_k)$, and centred at V. The support circle C obviously touches the circles $\lambda C_i, \lambda C_j, \lambda C_k$.

We begin by showing that none of the circles $\frac{1+\lambda}{2}C_i$, $\frac{1+\lambda}{2}C_j$, $\frac{1+\lambda}{2}C_k$ can intersect the opposite side of Δ_{ijk}. This statement is obsvious in the case the support circle C touches the circles λC_i, λC_j, λC_k from inside.

In the case that C touches λC_i, λC_j, λC_k from outside we remark that ϱ is $<\inf r_i$. Namely $\varrho\geqq\inf r_i$ contains the contradiction that the λ-system is not saturated why in this case the circle of radius $\frac{\varrho}{\lambda}$ centred at V can be added to the λ-system.

From the inequality $\varrho<\inf r_i$ it follows very easily that none of the circles $\frac{1+\lambda}{2}C_i$, $\frac{1+\lambda}{2}C_j$ and $\frac{1+\lambda}{2}C_k$ can intersect the opposite side of Δ_{ijk}. To prove this statement we consider the tangent t at the tangent point of C and λC_i (Fig. 5).

Let t^* be the straight line lying between C and C_i, parallel to t and tangent to the circle $\frac{1+\lambda}{2}C_i$. Let C_i^* and O_i^* be the images of C_i and O_i by reflection in t^*. t^* divides the plane in two halfplanes H, H^* containing the circles C_i, C_i^* respectively.

Since $O_jO_i^*<O_jO_i$, $O_kO_i^*<O_kO_i$ and $\varrho<\inf r_i$ therefore O_j and O_k are interior points of the halfplane H^*. Thus the segment O_jO_k has no common interior point with the circle $\frac{1+\lambda}{2}C_i$.

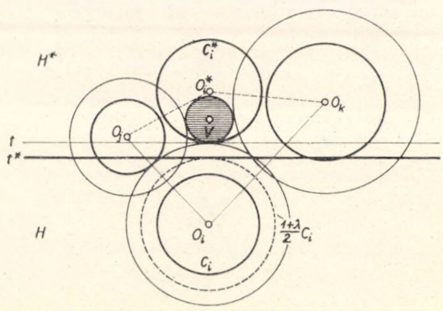


Fig. 5

We show now that we can restrict ourselves to those triplets C_i, C_j, C_k of circles one of which is neighbouring the others two. By a concentric dilatation of the circles C_i, C_j, C_k during which the radii remain in the interval (a, b) we can always achieve that either 1) one circle is neighbouring with another one or 2) the circles are congruent, or 3) one $\frac{1+\lambda}{2}$-times circle touches the opposite side of Δ_{ijk}.

We proceed with the first case and we suppose that C_i and C_j are neighbouring. If $C_k<\max(C_i, C_j)$ than by a concentric dilatation of C_k we obtain either the desired circle arrangement in which one of the circles is neighbouring the two other or $C_k = \max(C_i, C_j)$.

Thus we may suppose that $C_k \geqq \max(C_i, C_j)$. Displace C_k in the direction $\overrightarrow{O_k O_i}$ until the wanted arrangement or the „side-touching" takes place. By this displacement α_i and $\alpha_i + \alpha_k$ remain invariant, thus $\alpha_i C_i + \alpha_j C_j + \alpha_k C_k$ increases. Since during this process Δ_{ijk} decreases, the density δ increases.

In the same way, by displacement of the congruent circles C_i, C_j, C_k it is very easy to show that the second case can also be reduced to the third one.

Thus we have only to consider the case of side-touching. Let C_k touch the side $O_i O_j$. Let C'_k and O'_k be the images of C_k and O_k by reflection in $O_i O_j$ and consider the density of the circles C_i, C_j, C_k, C'_k in the quadrangle $O_i O_k O_j O'_k$. Since this density equals the density δ of C_i, C_j, C_k in $O_i O_j O_k$, the density in one of the triangles $O_i O_k O'_k$ and $O_j O_k O'_k$ is at least δ. Let this triangle be $\Delta_{ijk} = O_i O_j O'_k$ with the angles $\alpha_i, \alpha_k, \alpha'_k$. If $C_i < C_k$ then by a concentric dilatation of the circle C_i we can either achieve the desired situation, or $C_i \geqq C_k \equiv C'_k$. In this last case we displace C_i in the direction $\overrightarrow{O_i O_j}$ until the desired situation takes place. During this displacement the angle α_i increases and α_k and α'_k decreases, therefore $\alpha_i C_i + \alpha_k C_k + \alpha'_k C'_k$ does not decrease. Since furthermore $\Delta_{ikk'}$ decreases, the density δ increases.

This concludes the proof that $\delta \leqq s(q, \lambda)$. In order to deduce the inequality $d \leqq s(q, \lambda)$ let us remark that, in view of $\sup r_i < \infty$ the circumradii of the triangle Δ_{ijk} also have a finite upper bound τ. Therefore, on account of $\alpha_i C_i + \alpha_j C_j + \alpha_k C_k = \delta \Delta_{ijk}$

$$\frac{1}{\pi R^2} \sum_R C_i \leqq \frac{s}{\pi R^2} \sum_{R+2\tau} \Delta_{ijk} \leqq \frac{\pi (R+2\pi)^2}{\pi R^2} s(q, \lambda) = \left(1 + \frac{2\pi}{R}\right)^2 s(q, \lambda).$$

Passing to the limiting case $R \to \infty$ we obtain $d \leqq s(q, \lambda)$. This completes the proof of our theorem.

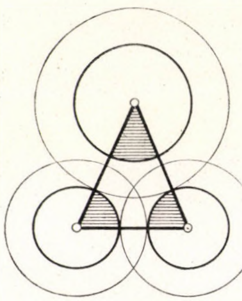


Fig. 6

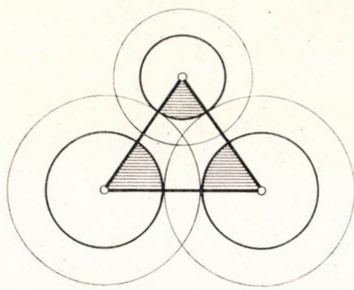


Fig. 7

We denote by $s(q, q, 1; \lambda)$ and $s(q, 1, 1; \lambda)$ the densities of the circles in the case where two small and one large circles, or one small and two large circles are neighbouring, respectively (Fig. 6, 7).

In 1960 A. FLORIAN [4] proved that $s(q, 1) = s(q, q, 1; 1)$.

K. BÖRÖCZKY first[5] proved the following conjecture of FEJES TÓTH

$$s(q, \lambda) = s(1, 1, 1; \lambda) \quad \text{if} \quad \lambda \geqq \lambda_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \sim 1{,}365.$$

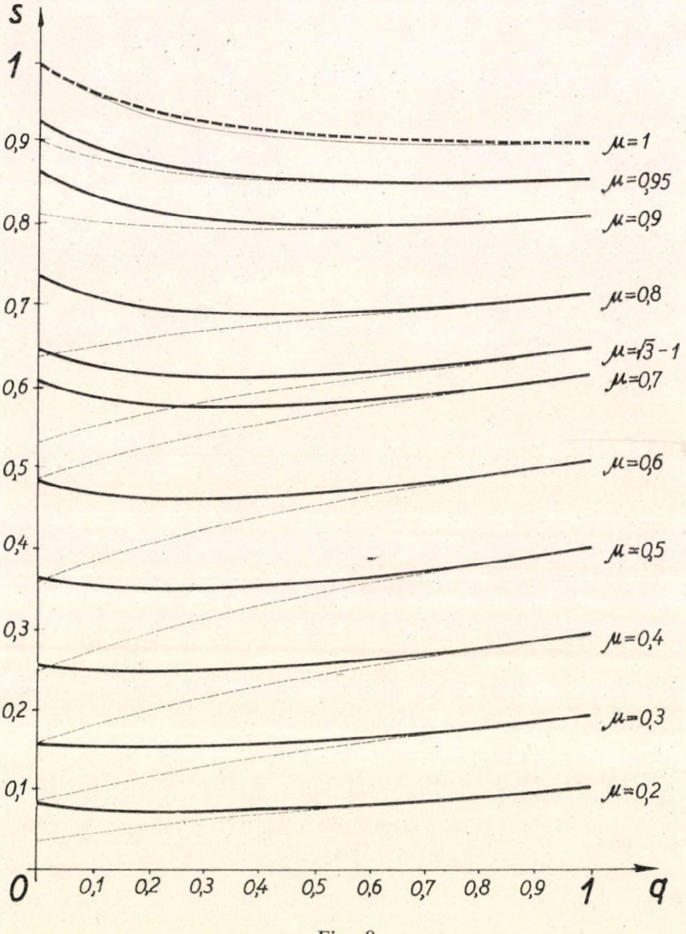


Fig. 8

Numerous computations[6] have suggested that

$$s(q, \lambda) = \operatorname{Max}\{s(q, 1, 1; \lambda),\ s(1, 1, 1; \lambda)\} \quad \text{if} \quad \lambda_0 \leqq \lambda \leqq \lambda_1 \sim 1{,}009$$

[5] A communication made in the Math. Research Institute in May 1965. FLORIAN [5] has given another proof.

[6] From the results of computations which fortify our conjecture we let know only a diagramm of the functions $s(q, 1, 1; \mu)$ and $s(q, q, 1; \mu)$ respectively (in Fig. 8 continuous lines and broken lines respectively), where $\mu = 1/\lambda$.

and

$$s(q, \lambda) = \mathrm{Max}\{s(q, q, 1; \lambda), s(1, 1, 1; \lambda)\} \quad \text{if} \quad \lambda_1 \leqq \lambda < 1.$$

These upper bounds seem to be precise for many values of $q \neq 1$ (Fig. 9, 10).

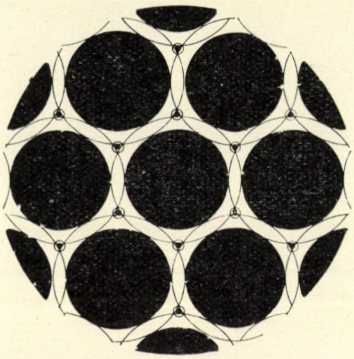


Fig. 9

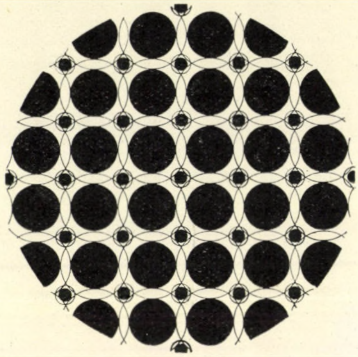


Fig. 10

At the end I wish to express my sincere gratitude to Mrs. SUSAN LÁSZLÓ for the computations.

(Received 9 November 1966)

References

[1] L. FEJES TÓTH, *Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum* (Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1953).

[2] L. FEJES TÓTH, *Regular figures* (Oxford—New York—London—Paris, 1964).

[3] L. FEJES TÓTH and J. MOLNÁR, Unterdeckung und Überdeckung der Ebene durch Kreise, *Math. Nachr.*, **18** (1958), pp. 235—243.

[4] A. FLORIAN, Ausfüllung der Ebene durch Kreise, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **9** (1960), pp. 1–13.

[5] A. FLORIAN, Zur Geometrie der Kreislagerungen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **18** (1967), pp. 341—358.

[6] J. MOLNÁR, Kreispackungen und Kreisüberdeckungen auf Flächen konstanter Krümmung, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **18** (1967), pp. 243–251.

Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (3—4), 1967, pp. 411—467.

DAS ASYMPTOTISCHE VERHALTEN VON SUMMEN ÜBER MULTIPLIKATIVE FUNKTIONEN. II *

Von

E. WIRSING (Marburg-Lahn, Deutschland)

(*Vorgelegt von* A. Rényi)

Inhalt

1. 1. Einleitung

In I konnten wir das asymptotische Verhalten der Summe $\sum\limits_{n\leqq x}\lambda(n)$ für nichtnegative multiplikative Funktionen λ im wesentlichen unter der Voraussetzung

$$\sum_{p\leqq x}\lambda(p)\log p\sim\tau x \qquad (p \text{ prim}) \tag{1. 1}$$

bestimmen:

$$\sum_{n\leqq x}\lambda(n)\sim\frac{e^{-c\tau}}{\Gamma(\tau)}\frac{x}{\log x}\prod_{p\leqq x}\left(1+\frac{\lambda(p)}{p}+\frac{\lambda(p^2)}{p^2}+\dots\right) \tag{1. 2}$$

(c ist die Euler-Konstante). Speziellere Sätze vom gleichen Typ gibt Delange [3]. Das gleiche Ergebnis (1. 2) soll hier unter der bedeutend schwächeren Voraussetzung

$$\sum_{p\leqq x}\lambda(p)\frac{\log p}{p}\sim\tau\log x \tag{1. 3}$$

allerdings mit der zusätzlichen Forderung $\lambda(p)=O(1)$ und nur für $\tau>0$ gezeigt werden (Satz 1. 1). Auch die Bedingungen über $\lambda(p^\nu)$ $(\nu\geqq 2)$ sind schwächer als in I, wir wollen sie aber in der Einleitung vernachläßigen. Dasselbe Resultat für komplexwertige Funktionen λ erhalten wir nur, wenn λ von $|\lambda|$ nicht erheblich abweicht, nämlich wenn $\sum\frac{1}{p}\big(|\lambda(p)|-\operatorname{Re}\lambda(p)\big)$ konvergiert (Satz 1. 1. 1). Der Spe-

* Als Teil I soll die unter dem gleichen Titel erschienene Arbeit [11] gelten.

zialfall $\tau=1$, $|\lambda|\leqq 1$, $\sum \frac{1}{p}(1-\lambda(p))$ konvergent wurde von DELANGE [4] bewiesen, einfacher von RÉNYI [8].

Ein interessantes Gegenstück geben ERDŐS und RÉNYI [7]: Konvergieren $\sum \frac{1}{p}(1-\lambda(p))$, $\sum \frac{1}{p^2}\lambda(p)^2$ und $\sum_p \sum_{\nu\geqq 2} \frac{1}{p^\nu}\lambda(p^\nu)$ und ist für jedes $\varepsilon>0$

$$\varliminf_{x\to\infty} \sum_{x<p\leqq(1+\varepsilon)x} \lambda(p)\frac{\log p}{p}>0,$$

so gilt (1. 2) (mit $\tau=1$). Hier wird λ also nach unten eingeschränkt.

Ist λ^* eine weitere multiplikative Funktion, $|\lambda^*|\leqq\lambda$, so konnten wir in I mit den Voraussetzungen (1. 1) und

$$\sum_{p\leqq x}\lambda^*(p)\log p\sim\tau^* x \tag{1. 4}$$

die Summe $\sum_{n\leqq x}\lambda^*(n)$ bis auf $o\left(\sum_{n\leqq x}\lambda(n)\right)$ bestimmen und insbesondere

$$\sum_{n\leqq x}\lambda^*(n)=o\left(\sum_{n\leqq x}\lambda(n)\right)$$

zeigen, falls $\sum_p \frac{1}{p}(\lambda(p)-\operatorname{Re}\lambda^*(p))$ divergiert. Für den Fall $\lambda=1$ siehe DELANGE [3]. In der vorliegenden Arbeit erhalten wir entsprechende Ergebnisse ohne (1. 4), zum Teil mit (1. 1), zum Teil schon mit (1. 3), falls der Wertevorrat von λ^* geeignet eingeschränkt ist. Insbesondere beweisen wir (Satz 1. 2. 2): Gelten (1. 3), $\lambda(p)=O(1)$, $|\lambda^*|\leqq\lambda$ und ist λ^* reellwertig, so existiert der Mittelwert von λ^* bezüglich λ:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{n\leqq x}\lambda^*(n)\right)\left(\sum_{n\leqq x}\lambda(n)\right)^{-1} \tag{1. 5}$$

und hat den Wert

$$\lim_{x\to\infty}\prod_{p\leqq x}\left(1+\frac{\lambda^*(p)}{p}+\frac{\lambda^*(p^2)}{p^2}+\dots\right)\left(1+\frac{\lambda(p)}{p}+\frac{\lambda(p^2)}{p^2}+\dots\right)^{-1}. \tag{1. 6}$$

Nimmt man speziell für λ die Konstante 1 und gestattet λ^* nur Werte ± 1, so ist dies die Lösung eines bekannten Problems von WINTNER [9] (dort mit einem vermeintlichen Beweis), siehe ERDŐS [6].

Bei komplexwertigen Funktionen λ^* ist der Sachverhalt komplizierter. Das Beispiel $\lambda(n)=1$, $\lambda^*(n)=n^i$ zeigt, daß aus der Existenz von (1. 6) die von (1. 5) nicht foltg, wenn man nur (1. 1), $\lambda(p)=O(1)$ und $|\lambda^*|\leqq\lambda$ voraussetzt. Es ist dann nämlich $\sum_{n\leqq x}\lambda^*(n)\sim x^{1+i}(1+i)^{-1}$ während (1. 6) den Wert 0 hat. Wird aber $|\lambda^*|\leqq\lambda$ zu folgender Forderung verschärft:

$$\lambda^*(n)=\varepsilon(n)\lambda(n),\quad |\varepsilon(n)|\leqq 1.$$

Es gibt eine Zahl $e^{i\varphi}$ vom Betrage 1, die kein Häufungspunkt der Folge $(\varepsilon(p))$ ist, so folgt (Satz 1. 2. 1):

$$\left(\sum_{n\leqq x}\lambda^*(n)\right)\left(\sum_{n\leqq x}\lambda(n)\right)^{-1}\to 0 \text{ bzw.} \sim \prod_{p\leqq x}\left(1+\frac{\lambda^*(p)}{p}+\dots\right)\left(1+\frac{\lambda(p)}{p}+\dots\right)^{-1}, \tag{1. 7}$$

je nachdem das Produkt gegen 0 strebt oder nicht.

Ersetzt man (1. 1) durch die schwächere Bedingung (1. 3), so wird dieser Satz falsch, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$\lambda(p):=\begin{cases} 2 & \text{für} \quad p\in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (e^{2n\pi}, e^{(2n+1)\pi}),\\ 0 & \text{sonst,}\end{cases}$$

$$\lambda(p^\nu):=0 \quad \text{für} \quad \nu \geqq 2,$$

$$\lambda^*(n):=n^i\lambda(n).$$

Man kann hier $\lambda^*(p)=\varepsilon(p)\lambda(p)$ mit

$$\varepsilon(p):=\begin{cases} p^i & \text{für} \quad p\in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (e^{2n\pi}, e^{(2n+1)\pi}),\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

setzen. Diese $\varepsilon(p)$ liegen alle in der oberen Hälfte des Einheitskreises. Trotzdem gilt (1. 7) nicht, vielmehr strebt die rechte Seite gegen 0, während die linke $\sim x^i(1+i)^{-1}$ ist ($\sum\limits_{n\leqq x}\lambda(n)$ läßt sich mit Satz 1. 1, $\sum\limits_{n\leqq x}\lambda^*(n)$ daraus durch partielle Summation bestimmen).

Wir können jedoch (1. 7) schon mit (1. 3) zeigen, wenn wir nicht den Wertebereich von λ^*/λ sondern den von λ^* selbst einschränken. Eine geeignete Bedingung ist (Satz 1. 2):

$$\lambda^*(p)\in\mathfrak{G} \quad \text{für alle } p,$$

$$\mathfrak{G}:=\{\varrho e^{i\varphi};\, 0\leqq\varphi<2\pi,\ 0\leqq\varrho\leqq r(\varphi)\}$$

ist konvex,

$$\bar r(\mathfrak{G}):=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} r(\varphi)\,d\varphi<\tau. \tag{1.8}$$

$\lambda^*(p)$ soll also nur Werte aus einem konvexen Bereich $\mathfrak{G}$ mit „mittlerem Radius" $\bar r<\tau$ annehmen. Für die Anwendung läßt dieser Satz noch Wünsche offen, da $\lambda^*(n)=\lambda(n)\chi(n)$ mit einem Restcharacter $\mathfrak{X}$ die Voraussetzung im Allgemeinen nicht erfüllt.*

Daß die Forderung $\lambda(p)=O(1)$ zumindest in Satz 1. 1 nicht einfach fehlen darf, zeigt folgendes Gegenbeispiel: Man bezeichne mit p_k die kleinste auf e^k folgende Primzahl. Dann konvergiert $\prod\limits_k p_k e^{-k}$. Man wähle k_0 so groß, daß $\prod\limits_{k\geqq k_0} p_k e^{-k}\leqq e^{\frac12}$ wird und setze

$$\lambda(p_k):=\frac{p_k}{\log p_k} \quad \text{für } k\geqq k_0$$

$$\lambda(p):=0 \qquad \text{für alle übrigen } p,$$

$$\lambda(p^\nu):=0 \qquad \text{für } \nu\geqq 2.$$

* Siehe den Zusatz zu Satz 1. 2.

Dann ist offenbar

$$\sum_{p\leq x} \lambda(p)\frac{\log p}{p} = \log x + O(1).$$

Damit gäbe Satz 1. 1

(1. 9) $$\sum_{n\leq x} \lambda(n) \sim \text{const.}$$

Da aber $\lambda(n)$ nur für quadratfreie Produkte aus Primzahlen p_k von Null verschieden ist, und nach Konstruktion jede solche Zahl n in einem Intervall $(e^m, e^{m+\frac{1}{2}})$ liegt, kann (1. 9) nicht gelten.

In diesem Beispiel ist die Forderung $\lambda(p)=O(1)$ unnötig heftig verletzt. Wir werden zeigen (Satz 6. 1), daß Satz 1. 1 stets falsch wird, wenn man $\lambda(p)=O(1)$ durch $\lambda(p)\leq G(p)$ mit einer positiven wachsenden Funktion G ersetzt, für die

$$\int_3^\infty \frac{dx}{G^2(x)x\log x}$$

konvergiert, also z.B. schon für $G(x)=(\log\log x)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ mit $\varepsilon>0$.

Einige Zwischenergebnisse sind als Sätze bezeichnet, weil sie nach Meinung des Verfassers auch für sich interessant sind. Es handelt sich erstens (Abschnitt 2) um die Werteverteilung gewisser Faltprodukte von Funktionen einer reellen Variablen. Auf einer derartigen Abschätzung beruhte schon der Beweis des Primzahlsatzes mit Restglied in [12]. Daher stellt [12] methodisch den Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit dar. Zweitens handelt es sich um Taubersätze (Abschnitt 3), in denen Funktionalgleichungen vom Typ

$$xf(x) = \int_0^x f(x-y)\,g(y)\,dy + \text{Restglied}$$

behandelt werden.

1. 2. Formulierung der Sätze über multiplikative Funktionen

SATZ 1. 1. *Die Funktion λ sei multiplikativ, ihre Werte seien nichtnegativ. Es gelte*

(1. 3) $$\sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p}\lambda(p) \sim \tau\log x$$

mit einer Konstanten $\tau>0$,

(1. 10) $$\lambda(p)\leq G \quad \textit{für alle Primzahlen} \quad p$$

mit einer weiteren Konstanten $G>0$,

(1. 11) $$\sum_{\substack{p,\,\nu\\ \nu\geq 2}}\frac{1}{p^\nu}\lambda(p^\nu)<\infty,$$

außerdem, falls $\tau \leqq 1$ *ist,*

$$\sum_{\substack{p,\,\nu \\ \nu \geqq 2,\, p^\nu \leqq x}} \lambda(p^\nu) = O\left(\frac{x}{\log x}\right). \tag{1.12}$$

Dann gilt

$$\sum_{n \leqq x} \lambda(n) \sim \frac{e^{-c\tau}}{\Gamma(\tau)} \frac{x}{\log x} \prod_{p \leqq x} \left(1 + \frac{\lambda(p)}{p} + \frac{\lambda(p^2)}{p^2} + \dots\right). \tag{1.2}$$

SATZ 1. 1. 1. *Ist* λ *multiplikativ und erfüllt* (1. 3) *mit* $\tau > 0$, *gelten* (1. 10) *und* (1. 11) *für* $|\lambda|$ *statt* λ, *ebenso* (1. 12), *falls* $\tau \leqq 1$ *ist, und ist noch*

$$\sum_p \frac{1}{p}\left(|\lambda(p)| - \operatorname{Re} \lambda(p)\right) < \infty, \tag{1.13}$$

so gilt (1. 2).

SATZ 1. 2. *Die Funktion* λ *erfülle die Bedingungen von Satz* 1. 1. *Auch* λ^* *sei multiplikativ und es gelte stets* $|\lambda^*(n)| \leqq \lambda(n)$. *Gibt es dann in der Zahlenebene einen konvexen Bereich* $\mathfrak{G}$ *mit* $0 \in \mathfrak{G}$, *so daß*

$$\lambda^*(p) \in \tau\mathfrak{G} \quad \text{für alle} \quad p \tag{1.14}$$

$$\tilde{r}(\mathfrak{G}) < 1\,^* \tag{1.15}$$

ist, so gilt

$$\sum_{n \leqq x} \lambda^*(n) = \frac{e^{-c\tau}}{\Gamma(\tau)} \frac{x}{\log x} \prod_{p \leqq x} \left(1 + \frac{\lambda^*(p)}{p} + \frac{\lambda^*(p^2)}{p^2} + \dots\right) + o\Big(\sum_{n \leqq x} \lambda(n)\Big). \tag{1.16}$$

Zusatz bei der Korrektur. Satz 1. 2. läßt sich allgemeiner für alle kompakten, bezüglich 0 sternförmigen Bereiche $\mathfrak{G}$ mit $\tilde{r}(\mathfrak{G}) < 1$ beweisen. Beweis in einer weiteren Arbeit.

BEMERKUNG. Je nachdem

$$\sum \frac{1}{p}\left(\lambda(p) - \operatorname{Re} \lambda^*(p)\right) < \infty$$

ist und

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{p^\nu} \lambda^*(p^\nu) \neq 0 \quad \text{für alle} \quad p$$

gilt oder eine dieser Bedingungen verletzt ist, wird

$$\prod_p \left| \frac{1 + \frac{1}{p}\lambda^*(p) + \frac{1}{p^2}\lambda^*(p^2) + \dots}{1 + \frac{1}{p}\lambda(p) + \frac{1}{p^2}\lambda(p^2) + \dots} \right| \neq 0$$

* Definition von $\tilde{r}$ siehe (1. 8).

oder $=0$ (s. Abschnitt 5). Im ersten Fall wird also

$$\sum_{n \leq x} \lambda^*(n) \sim \prod_{p \leq x} \left(\frac{1 + \frac{1}{p} \lambda^*(p) + \frac{1}{p^2} \lambda^*(p^2) + \dots}{1 + \frac{1}{p} \lambda(p) + \frac{1}{p^2} \lambda(p^2) + \dots} \right) \sum_{n \leq x} \lambda(n),$$

im zweiten Fall

$$\sum_{n \leq x} \lambda^*(n) = o\Big(\sum_{n \leq x} \lambda(n)\Big).$$

SATZ 1. 2. 1. *Die Funktion* λ *erfülle die Bedingungen von Satz* 1. 1, *statt* (1. 3) *schärfer*

(1. 1) $$\sum_{p \leq x} \lambda(p) \log p \sim \tau x.$$

Auch λ^* *sei multiplikativ,* $|\lambda^*| \leq \lambda$ *und es gebe einen konvexen Bereich* $\mathfrak{G}$ *mit* $0 \in \mathfrak{G}$, *so daß* (1. 15) *und*

(1. 17) $$\lambda^*(p) \in \lambda(p)\mathfrak{G} \quad \textit{für alle} \quad p$$

gelten. Dann gilt (1. 16).

Wegen $|\lambda^*| \leq \lambda$ genügt es hier, für $\mathfrak{G}$ Teilmengen des Einheitskreises einzusetzen. Dann hat (1. 15) die folgende einfache Bedeutung: Es gibt eine Zahl $e^{i\varphi}$, die kein Randpunkt von $\mathfrak{G}$ ist.

Ein bemerkenswerter Spezialfall ergibt sich aus Satz 1. 2, wenn auch λ^* reell angenommen wird. Nimmt man nämlich für $\mathfrak{G}$ das Intervall $\left[-\frac{G}{\tau}, +\frac{G}{\tau}\right]$, so sind (1. 14) und (1. 15) von selbst erfüllt. Da das Produkt

$$\prod_p \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} p^{-\nu} \lambda^*(p^\nu) \right) \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} p^{-\nu} \lambda(p^\nu) \right)^{-1}$$

eigentlich oder uneigentlich (gegen 0) konvergiert, erhält man:

SATZ 1. 2. 2. *Erfüllt* λ *die Voraussetzungen von Satz* 1. 1, *ist* λ^* *reellwertig,* $|\lambda^*| \leq \lambda$, λ^* *multiplikativ, so existiert der Mittelwert von* λ^* *bezüglich* λ *und hat den Wert*

$$\lim_{x \to \infty} \Big(\sum_{n \leq x} \lambda^*(n)\Big) \Big(\sum_{n \leq x} \lambda(n)\Big)^{-1} = \prod_p \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p^\nu} \lambda^*(p^\nu) \right) \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p^\nu} \lambda(p^\nu) \right)^{-1}.$$

1. 2. 1. Zu allen diesen Sätzen (1. 1—1. 2. 2) ist zu bemerken, daß die Voraussetzung (1. 12) nicht in allen Fällen mit $\tau = 1$ benötigt wird, z. B. nicht, wenn

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \lambda(p) = \log\log x + O(1)$$

ist, also insbesondere in dem wichtigen Spezialfall $\lambda(p) = 1$ für alle p.

1. 3. Anwendungen

Wir behandeln zunächst drei schon in I besprochene Anwendungsbeispiele, bei denen sich sowohl die Verbesserung gegenüber I zeigt, als auch, daß eine weitere Verbesserung wünschenswert wäre.

1. 31. Anzahlfunktion einer multiplikativen Zahlenmenge. Es sei $\mathfrak{T}$ eine Menge von Primzahlen mit

$$\sum_{p \leqq x,\, p \in \mathfrak{T}} \frac{\log p}{p} \sim \tau \log x, \quad \tau > 0, \tag{1.18}$$

und $\mathfrak{M}$ die Menge der natürlichen Zahlen, deren Primteiler alle zu $\mathfrak{T}$ gehören. Dann gilt nach Satz 1. 1

$$M(x) := \sum_{\substack{n \leqq x \\ n \in \mathfrak{M}}} 1 \sim \frac{e^{-c\tau}}{\Gamma(\tau)} \frac{x}{\log x} \prod_{\substack{p \leqq x \\ p \in \mathfrak{T}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}$$

$$\sim \frac{e^{c(1-\tau)}}{\Gamma(\tau)} x \prod_{\substack{p \leqq x \\ p \notin \mathfrak{T}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Man hat dazu nur

$$\lambda(u) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad n \in \mathfrak{M} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

zu betrachten.

1. 32. Verteilung von $\omega(n)$ mod m auf $\mathfrak{M}$. Es bezeichne $\omega(n)$ die Primteileranzahl, m un r seien beliebige natürliche Zahlen, $\mathfrak{M}$ die Menge aus 1. 3. 1. Unter der Voraussetzung (1. 18) gilt dann

$$\sum_{\substack{n \leqq x,\, n \in \mathfrak{M} \\ \omega(n) \equiv r \bmod m}} 1 \sim \frac{1}{m} M(x).$$

Zum Beweis betrachte man $\lambda^*(n) := \varepsilon^{\omega(n)} \lambda(n)$ mit den m-ten Einheitswurzeln ε. Außer für $\varepsilon = 1$ gibt Satz 1. 2

$$\sum_{n \leqq x,\, n \in \mathfrak{M}} \varepsilon^{\omega(n)} = o(M(x)).$$

1. 33. Verteilung einer multiplikativen Zahlenmenge nach Restklassen (Vergl. I 2. 4. 6). Die Bedeutung von $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{M}$ sei wieder dieselbe, wir müssen aber statt (1. 18) jetzt

$$\sum_{p \leqq x,\, p \in \mathfrak{T}} \log p \sim \tau x, \quad \tau > 0$$

voraussetzen. Kein $p \in \mathfrak{T}$ teile m. Es sei R die Menge der (primen) Restklassen $\hat{r}$ mod m, für die

$$\sum_{p \in \mathfrak{T},\, p \equiv r \bmod m} \frac{1}{p} = \infty$$

ist. Dann behaupten wir: $\mathfrak{M}$ ist genau dann auf die primen Restklassen mod m gleichverteilt, wenn R die Gruppe aller primen Restklassen mod m erzeugt.

Zum Beweis betrachte man $\lambda_\chi^*(n):=\chi(n)\lambda(n)$ für jeden Restcharakter χ mod m. Wenn R die Gruppe der primen Restklassen mod m erzeugt, gibt es bekanntlich zu jedem Nichthauptcharakter χ eine Restklasse $\hat{r}\in R$ mit $\chi(r)\neq 1$. Für jeden Nichthauptcharakter folgt also

$$\sum_p \frac{1}{p}\left(\lambda(p)-\operatorname{Re}\lambda_\chi^*(n)\right) \geqq \left(1-\operatorname{Re}\chi(r)\right)\sum_{p\in r}\frac{1}{p}=\infty.$$

Damit gibt Satz 1. 2. 1

$$\sum_{\substack{n\leqq x\\ n\in\mathfrak{M}}}\chi(n)=o\left(M(x)\right) \tag{1.19}$$

für alle χ außer dem Hauptcharakter. In bekannter Weise folgt

$$\sum_{\substack{n\leqq x,\ n\in\mathfrak{M}\\ n\equiv r \bmod m}} 1\sim\frac{1}{\varphi(m)}M(x)\quad\text{für}\quad (r,m)=1. \tag{1.20}$$

Gilt umgekehrt (1. 20) für alle r mit $(r, m)=1$, so auch (1. 19) für jeden Nichthauptcharakter χ. Würde nun R nicht die volle Gruppe der primen Restklassen erzeugen, so gäbe es einen Nichthauptcharakter χ_1 mit $\chi_1(\hat{r})=1$ für alle $\hat{r}\in R$. Dann wäre

$$\sum_{p\in\mathfrak{T}}\frac{1}{p}\left(1-\chi_1(p)\right)$$

konvergent und nach Satz 1. 2. 1 wäre in diesem Falle

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{M(x)}\sum_{\substack{n\leqq x\\ n\in\mathfrak{M}}}\chi_1(n)=\prod_{p\in\mathfrak{T}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{\chi_1(p)}{p}\right)^{-1}\neq 0$$

im Gegensatz zu (1. 19).

1. 34. Unvollständige Summen. Nach DE BRUIJN und VAN LINT [2] II läßt sich, hauptsächlich mit den Voraussetzungen

$$M(x):=\sum_{n\leqq x}\lambda(n)\sim x\log^{\tau-1}x\cdot L(\log x), \tag{1.21}$$

L langsam oszillierend,

und

$$\sum_{x<p\leqq x^u}\frac{1}{p}\lambda(p)\to\tau\log u\quad\text{für}\quad x\to\infty\quad\text{und jedes}\quad u>1 \tag{1.22}$$

das asymptotische Verhalten der „unvollständigen Summe"

$$M(x,y):=\sum_{\substack{n\leqq x\\ p|n\searrow p\leqq y}}\lambda(n)$$

bestimmen, nämlich

$$(1.23)\qquad M(x,y)\sim\eta(u)u^{1-\tau}M(x)\quad\text{mit}\quad u=\frac{\log x}{\log y}\quad\text{für}\quad x\to\infty$$

gleichmäßig in $u_1\leqq u\leqq u_2$, $0<u_1<u_2$ beliebig, wobei η die stetige durch

$$\begin{cases}\eta(u)=u^{\tau-1} & \text{für}\quad 0<u\leqq 1\\ u\eta'(u)=(\tau-1)\eta(u)-\tau\eta(u-1) & \text{für}\quad u>1\end{cases}$$

definierte Funktion ist.

Nun folgt (1. 21) aus Satz 1. 1, (1. 22) ist gleichwertig mit (1. 3)* und die von de Bruijn und van Lint benötigten Voraussetzungen über $\lambda(p^\nu)$ $(\nu\geqq 2)$ sind schwächer als (1. 11) und (1. 12). Wir können also feststellen:

Unter den Voraussetzungen von Satz 1. 1 gilt (1. 23).

1. 4. Erweiterungen

1. 41. Die jeweiligen Bedingungén über die Werte $\lambda(p)$, $\lambda^*(p)$ brauchen nicht durchweg erfüllt zu sein, vielmehr kann man Ausnahmen etwa für die Primzahlen aus einer Menge $\mathfrak{T}$ zulassen.

Man stellt dann λ als Faltprodukt aus zwei neuen Funktionen λ_0 und λ_1 dar, wobei $\lambda(p)=\lambda_0(p)+\lambda_1(p)$ für alle p, $\lambda_0(p)=0$ für $p\in\mathfrak{T}$ und $\lambda_1(p)=0$ für $p\notin\mathfrak{T}$ ist, und schließt ähnlich wie in Abschnitt 5.

Das geht z.B., wenn $\lambda(p)$ $\big($also $\lambda_1(p)\big)$ auf $\mathfrak{T}$ beschränkt und $\sum\limits_{p\in\mathfrak{T}}\frac{1}{p}$ konvergent ist.

Auf diese Weise bekommt man als Verallgemeinerung eines Ergebnisses von Delange [5]:

Ist $|\lambda^*|\leqq 1$, gibt es einen Randpunkt z des Einheitskreises und ein $\varepsilon>0$, so daß $\sum\limits_{\substack{p\\ |\lambda^*(p)-z|<\varepsilon}}\frac{1}{p}$ konvergiert, so ist

$$\sum_{n\leqq x}\lambda^*(n)=x\prod_{p\leqq x}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{\lambda^*(p)}{p}+\frac{\lambda^*(p^2)}{p^2}+\dots\right)+o(x).$$

1. 42. Der Beweis von Satz 3. 1 zeigt, daß man (3. 1) abschwächen darf, indem man den Faktor τ vor dem Integral durch eine Konstante τ_1 ersetzt, die nur

$$\tau_1<\tau\gamma_1(\mathfrak{G})^{-\frac{1}{2}}$$

erfüllen muß. Umgekehrt kann man, wenn τ beim Integral stehenbleibt, den Exponenten in der Restgliedern von (3. 1) und (3. 2) zu

$$\tau_2>\tau\gamma_1(\mathfrak{G})^{\frac{1}{2}}$$

verkleinern und erhält dann auch (3. 7) mit τ_2 statt τ.

* Aus (1. 3) folgt (1. 22) leicht durch partielle Integration. Wird umgekehrt (1. 22) angenommen, so folgt für beliebiges $\varepsilon>0$, genügend großes ξ und $\xi':=(1+\varepsilon)\xi$

$$\tau(1-\varepsilon)(\xi'-\xi)\leqq\sum_{\xi<\log p\leqq\xi'}\lambda(p)\frac{\log p}{p}\leqq\tau(1+\varepsilon)(\xi'-\xi).$$

Ist z.B. $|\lambda^*| \leqq 1$, $\lambda^*(p) \in \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}$ konvex, $0 \in \mathfrak{G}$, $\tilde{r}(\mathfrak{G}) < 1$, und weiß man noch

$$\sum_{n \leqq x} \frac{\lambda^*(n)}{n} = O(\log^{\tau_2} x)$$

mit $\tau_2 > \gamma_1(\mathfrak{G})^{\frac{1}{2}}$, so liefert diese Erweiterung von Satz 3. 1

$$\sum_{n \leqq x} \lambda^*(n) = O(x \log^{\tau_2 - 1} x)$$

während Satz 3. 1 selbst nur $o(x)$ gibt.

In diesem Zusammenhang wären allerdings bessere Abschätzungen von $\gamma_1(\mathfrak{G})$ erwünscht. Die in Abschnitt 2 dafür erhaltenen Schranken liegen recht dicht bei 1.

1. 43. Die beiden Voraussetzungen (3. 32) und (3. 33) von Satz 3. 3 werden nur von Funktionen g erfüllt, die „fast" reell und positiv sind. In unseren Anwendungen gelten sie zwar, wir wollen aber doch noch einen Satz formulieren, bei dem g mehr Freiheit hat:

SATZ 3. 4. *Die Funktionen f und g mögen die Voraussetzungen von Satz* 3. 3 *erfüllen außer* (3. 33). *Es gebe eine Konstante a und einen bezüglich* 0 *sternförmigen Bereich $\mathfrak{G}$ mit $\tilde{r}(\mathfrak{G}) < 1$, so daß gilt*

$$g(x) \in \mathfrak{G} + a \quad \textit{für alle} \quad x > 0,$$

$$\int_{x_1}^{x_2} |g(y) - a| \, dy \leqq x_2 - x_1 + o(x_2)$$

$$(x_2 \to \infty, \quad \textit{gleichmäßig für} \quad x_1 < x_2).$$

Dann ist $f(x) \sim \tau x^{\tau - 1} L(x)$.

Zum Beweis führe man wie beim Beweis von Satz 3. 3 die Funktion $f_1(x) := f(x) - \tau x^{\tau-1} L(x)$ ein, sowie $g_1(x) := g(x) - a$. Dann folgen leicht alle Voraussetzungen von Satz 3. 1 für f_1 und g_1.

1. 44. Die Methoden, die in der vorliegenden Arbeit auf $\sum_{p \leqq x} \frac{\log p}{p} \lambda(p)$ und $\sum_{n \leqq x} \lambda(n)$ angewandt werden, lassen sich auch verwenden, allgemeinere Funktionen $k(\xi) \sim \tau \xi$ ($\xi = \log x$) und $F(\xi)$ zu untersuchen, die durch

$$\int_0^\infty e^{-\xi(s+1)} \, dF(\xi) = \exp\left(\int_0^\infty e^{-\xi s} \frac{1}{\xi} \, dk(\xi)\right)$$

verknüpft sind. Um ein zu Satz 1. 1 analoges Ergebnis zu bekommen, muß sich k in der Form

$$k(\xi) = h(\xi) + O(1), \quad h(\xi) = \tau \int_0^\xi g(\eta) \, d\eta$$

mit $0 \leqq g(\eta) \leqq G$ darstellen lassen. Ohne auf den Beweis einzugehen, der dem von Satz 1. 1 weitgehend analog ist, formulieren wir einen Satz für den Fall $h = k$.

SATZ 1.3. *Die Funktion g sei auf* $(0, \infty)$ *meßbar, nichtnegativ, beschränkt, und es existiere*

$$\int_0^1 \frac{1}{\eta} g(\eta)\, d\eta.$$

Es gelte

$$\int_0^\xi g(\eta)\, d\eta \sim \xi \qquad (\xi \to \infty)$$

und

$$\int_0^\infty e^{-\xi(s+1)}\, dF(\xi) = \exp\Big(\tau \int_0^\infty e^{-\xi s} \frac{1}{\xi} g(\xi)\, d\xi\Big)$$

für $s > 0$ *mit einer Konstanten* $\tau > 0$. *Dann ist für* $\xi \to \infty$

$$F(\xi) \sim \frac{1}{\Gamma(\tau)\xi} \exp\Big(\xi - c\tau + \tau \int_0^\xi \frac{1}{\eta} g(\eta)\, d\eta\Big).$$

1.5. Probleme

1.51. Das wichtigste Problem in unserem Zusammenhang ist wohl, funktionentheoretische Beweise der Sätze aus 1.2 zu finden. Von solchen Beweisen kann man hoffen, daß sie weniger Technik erfordern als die hier gegebenen, und daß sie auch bei den folgenden Problemen helfen würden.

1.52. Bleibt Satz 1.1 richtig, wenn man statt (1.10)

$$\lambda(p) \leqq G(p)$$

fordert mit einer positiven wachsenden Funktion $G(x)$, für die

$$\int_{x_0}^\infty \frac{dx}{G^2(x)x \log x} \quad \text{divergiert?}$$

Heuristische Überlegungen sprechen dafür (s. Satz 6.1).

1.53. Die Voraussetzungen über λ^* in Satz 1.2 sollten sich so abschwächen lassen, daß $\lambda^*(n) = \chi(n)\lambda(n)$ für jeden Restcharakter χ erfaßt wird.*

1.54. Gilt stets

$$\sum_{n \leqq x} \lambda(n) = o\left(\frac{x}{\log x} \sum_{n \leqq x} \frac{\lambda(n)}{n}\right)$$

wenn (z. B.) λ exponentiell multiplikativ, $0 \leqq \lambda(p) \leqq G$ und $\tau = 0$, also

$$\sum_{p \leqq x} \frac{\log p}{p} \lambda(p) = o(\log x)$$

ist?

* Eine Lösung von Problem 1.53 gibt der Zusatz bei der Korrektur zu Satz 1.2.

1. 55. Gilt für multiplikative Funktionen λ^* mit $|\lambda^*|\leqq 1$ stets die folgende Alternative: „Es ist $\sum_{n\leqq x}\lambda^*(n)=o(x)$ oder es gibt Konstante a und b, b reell, und eine langsam oszillierende Funktion L mit $|L|=1$, so daß

$$\sum_{n\leqq x}\lambda^*(n)\sim ax^{1+ib}L(x)$$

ist"?

1. 6. Vorbemerkungen zu den Beweisen

1. 61. Die Sätze werden zunächst wie bei ERDŐS und RÉNYI [7] für „exponentiell multiplikative" Funktionen λ bzw. λ^* bewiesen, das sind solche, für die stets $\lambda(p^\nu)=$ $=\frac{1}{\nu!}\lambda(p)^\nu$ und daher $\sum_n\lambda(n)n^{-s}=\exp\left(\sum_p\lambda(p)p^{-s}\right)$ gilt. Wir sparen dadurch im Hauptteil des Beweises Restglieder ein und kommen bei der nachträglichen Verallgemeinerung mit schwächeren Bedingungen über $\lambda(p^\nu)$ $(\nu\geqq 2)$ aus.

Ausgangspunkt zum Beweis von Satz 1. 1 ist die Relation

$$\sum_{n\leqq x}\lambda(n)\log n=\sum_{np\leqq x}\lambda(n)\lambda(p)\log p,$$

aus der wir

$$\xi f(\xi)=\int_0^\xi f(\xi-\eta)\,dk(\eta)+\text{Restglied}$$

mit

$$f(\xi)=e^{-\xi}\sum_{n\leqq x}\lambda(n)\quad(\xi=\log x)$$

und

$$k(\xi)=\sum_{p\leqq x}\frac{\log p}{p}\lambda(p)\sim\tau\xi$$

erhalten. Die Sprungfunktion k wird durch eine stückweise lineare Funktion h approximiert und $h'=\tau g$ gesetzt. Das gibt

$$\xi f(\xi)=\tau\int_0^\xi f(\xi-\eta)\,g(\eta)\,d\eta+\text{Rest}\tag{1.24}$$

mit

$$\int_0^\xi g(\eta)\,d\eta\sim\xi.\tag{1.25}$$

Aus $\lambda(p)=O(1)$ wird dabei $g(\xi)=O(1)$.

Aus diesen Beziehungen läßt noch nicht viel über f entnehmen. Man hat aber noch

$$\int_0^\xi f(\eta)\,d\eta=-f(\xi)+\sum_{n\leqq x}\frac{\lambda(n)}{n}\quad(\xi=\log x)$$

und das asymptotische Verhalten von $\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \lambda(n)$ ist uns aus I bekannt (s.a. DE BRUIJN und VAN LINT [2] I):

$$\sum_{n \leq x} \frac{\lambda(n)}{n} \sim \log^\tau x L(\log x)$$

mit einer angebbaren langsam oszillierenden Funktion L.

Die Hauptschwierigkeit des Beweises besteht darin, einen Taubersatz zu beweisen (Satz 3. 3), dessen wesentliche Voraussetzungen (1. 24), (1. 25), $g(\xi) = O(1)$ und

$$\int_0^\xi f(\eta)\, d\eta \sim \xi^\tau L(\xi) \tag{1.26}$$

sind und dessen Behauptung $f(\xi) \sim \tau \xi^{\tau-1} L(\xi)$ lautet.

Für Satz 1. 2 geht man formal genauso vor. Unter ziemlich allgemeinen Bedingungen ist aus I

$$\sum_{n \leq x} \frac{\lambda^*(n)}{n} = o\left(\sum_{n \leq x} \frac{\lambda(n)}{n}\right)$$

bekannt, das gibt statt (1. 26)

$$\int_0^\xi f^*(\eta)\, d\eta = o(\xi^\tau L(\xi)).$$

Ein anderer Taubersatz (Satz 3. 1) liefert damit

$$f^*(\xi) = o(\xi^{\tau-1} L(\xi)).$$

1. 62. Der Beweis von Satz 3. 1 würde sich vereinfachen, wenn wir zusätzlich

$$f(\xi) = o(\xi^{\tau-1} L(\xi)) \tag{1.27}$$

voraussetzen würden. Statt „vollständige Induktion im Kontinuum" anzuwenden, könnten wir

$$K := \overline{\lim_{\substack{\xi \to \infty \\ (1+\varepsilon)\xi \leq \xi' \leq (1+\varepsilon)^2 \xi}}} \left(\int_\xi^{\xi'} |f^2(\eta)|\, d\eta\right) \left(\int_\xi^{\xi'} \eta^{2\tau-2} L^2(\eta)\, d\eta\right)^{-1}$$

betrachten und würden $K \leq \gamma K$ mit $\gamma < 1$, also $K = 0$ zeigen. Bei den Anwendungen steht (1. 27) tatsächlich zur Verfügung: Für exponentiell multiplikatives λ mit $\lambda(p) \leq G$ hat man nämlich

$$\sum_{n \leq x} \lambda(n) \log n = \sum_{n \leq x} \lambda(n) \sum_{p \leq \frac{x}{n}} \lambda(p) \log p \leq G \sum_{n \leq x} \lambda(n) \sum_{p \leq \frac{x}{n}} \log p = O\left(x \sum_{n \leq x} \frac{\lambda(n)}{n}\right),$$

$$\xi f(\xi) = O\left(\sum_{n \leq x} \frac{\lambda(n)}{n}\right), \qquad f(\xi) = O(\xi^{\tau-1} L(\xi)).$$

Im Hinblick auf spätere Verbesserungen ist es aber gerechtfertigt, die Voraussetzung $\lambda(p) \leqq G$ möglichst wenig zu verwenden. Außerdem entfiele bei diesem Verfahren die Möglichkeit, wie in 1. 42 skizziert, Restglieder zu gewinnen.

1. 63. Interessiert man sich nur für reellwertige Funktionen (also für Satz 1. 1 und Satz 1. 2. 2) so kann man Abschnitt 2. 3 übergehen und statt 2. 8 den leichter beweisbaren Satz 2. 5 zum Beweis von Satz 3. 1 verwenden.

1. 7. Bezeichnungen

Die Abschnitte der Arbeit sind numeriert und dezimal unterteilt. Formeln und Sätze erhalten als Kennzeichen den ganzen Teil der Abschnitt-Nummer, danach einen Punkt und eine weitere ganze oder dezimal gebrochene Zahl. Zitate mit vorgestelltem I, z.B. I (35), verweisen auf [11].

Multiplikativ heißt eine Funktion λ auf der Menge der natürlichen Zahlen, wenn $\lambda(1)=1$ ist und wenn aus $(n_1, n_2)=1$ folgt $\lambda(n_1 n_2)=\lambda(n_1)\lambda(n_2)$,

exponentiell multiplikativ: s. 1. 61.

$A:=$ oder $=:A$ bedeutet, daß A durch diese Gleichung erst definiert wird.

$f(x) \sim g(x)$ bedeutet $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to 1$.

$\sum\limits_n, \sum\limits_p$ bezeichnet Summation über alle natürlichen Zahlen bzw. Primzahlen,

C:	Euler—Mascheroni-Konstante,
D_{ij}:	siehe (2. 1),
$f(x), f(\xi)$:	Funktion eines reellen Argumentes, speziell s. 4,
$g(x), g(\xi)$:	Funktion eines reellen Argumentes, speziell s. 4. 5,
G:	positive Konstante, obere Schranke für $\lambda(p)$ bzw. $\|\lambda^*(p)\|$ oder $g(x)$,
$\mathfrak{G}$:	konvexer oder bez. 0 sternförmiger Bereich der komplexen Ebene,
$\gamma(\mathfrak{G})$:	s. Hilfssatz 2. 6,
$\gamma_1(\mathfrak{G})$:	s. Satz 2. 8,
$I_1, \ldots, I_4$:	s. 3. 3,
J_ν:	s. zwischen (3. 20) und (3. 21),
$k(\xi)$:	s. 4,
$l(x)$:	s. 4,
$L(x), L(\xi)$:	langsam oszillierende Funktion, s. (3. 6), speziell s. 4,
$\lambda(n), \lambda^*(n)$:	multiplikative Funktionen, meistens $\lambda \geqq 0$, $\|\lambda^*\| \leqq \lambda$,
$M(x)$:	s. 4,
$m(x)$:	s. 4,
m, n:	natürliche Zahlen,
p:	Primzahlen,
$\Pi(x)$:	s. 5,
τ:	positive Konstante, Mittelwert von $\lambda(p)$,
x, y:	reelle Variable,
ξ, η:	reelle Variable, $\xi=\log x$, $\eta=\log y$,
x_1, x_2:	s. Hilfssatz 3. 2,
x_3, x_4:	s. 3. 3.

2. Abschätzung von Faltprodukten

2. 1. Wir betrachten reel- oder komplexwertige Funktionen $f_i \in L(-\infty, +\infty)$ und Faltprodukte vom Typ

$$D_{ij}(r) := \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(y-x)\overline{f_j(y)}\, dy. \tag{2. 1}$$

Offenbar ist stets

$$D_{ij}(-x) = \overline{D_{ji}(x)}.$$

Unser erstes Ziel ist eine Funktionalungleichung.

SATZ 2. 1. *Die Funktionen f_1, f_2, f_3 seien durch*

$$D_{ii}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_i(y)|^2 dx = 1 \tag{2. 2}$$

normiert. Dann gilt für beliebige reelle Zahlen u_i mit

$$u_1+u_2+u_3=0$$

$$2\,\mathrm{Re}\,(D_{12}(u_3)D_{23}(u_1)D_{31}(u_2)) - |D_{12}(u_3)|^2 - |D_{23}(u_1)|^2 - |D_{31}(u_2)|^2 + 1 \geqq 0. \tag{2. 3}$$

Äquivalent mit (2. 3) *sind*

$$|\overline{D_{12}(u_3)} - D_{23}(u_1)D_{31}(u_2)|^2 \leqq (1-|D_{23}(u_1)|^2)(1-|D_{31}(u_2)|^2) \tag{2. 4}$$

und die durch zyklische Vertauschung der Indices daraus erhaltenen Ungleichungen.

BEWEIS. Wir wählen a_1, a_2, a_3 so daß

$$a_1-a_2 = u_3, \quad a_2-a_3 = u_1, \quad a_3-a_1 = u_2$$

wird. Es seien $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ komplexe Variable. Dann ist für beliebige Werte dieser Variablen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{i=1}^{3} \varkappa_i f(x-a_i) \right|^2 dx \geqq 0,$$

also

$$\sum_{i,j=1,2,3} \varkappa_i \bar{\varkappa}_j D_{ij}(a_i-a_j) \geqq 0.$$

Wegen $\overline{D_{ij}(a_i-a_j)} = D_{ji}(a_j-a_i)$ ist dies eine Hermitesche Form. Da die Form keine negativen Werte annimmt, ist auch ihre Determinante nichtnegativ:

$$\begin{vmatrix} 1 & D_{12}(u_3) & \overline{D_{31}(u_2)} \\ \overline{D_{12}(u_3)} & 1 & D_{23}(u_1) \\ D_{31}(u_2) & \overline{D_{23}(u_1)} & 1 \end{vmatrix} \geqq 0.$$

Das ist genau (2. 3).

Wegen (2. 1) und (2. 2) ist $|D_{ij}(x)| \leqq 1$. Man kann daher $|D_{ij}(x)|$, im Falle reeller Funktionen f_i, f_j auch $D_{ij}(x)$ selbst, als Cosinus eines Winkels auffassen.

SATZ 2. 2. *Unter den Voraussetzungen von Satz* 2. 1 *seien* α_i *durch* $\cos\alpha_1 = |D_{23}(u_1)|$, $\cos\alpha_2 = |D_{31}(u_2)|$, $\cos\alpha_3 = |D_{12}(u_3)|$, $\alpha_i \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *definiert. Dann gilt*

$$\alpha_1 \leqq \alpha_2 + \alpha_3, \quad \alpha_2 \leqq \alpha_3 + \alpha_1, \quad \alpha_3 \leqq \alpha_1 + \alpha_2.$$

(Im Falle reeller Funktionen entsprechend: $\cos\alpha_1 = D_{23}(u_1), \ldots, \alpha_i \in [0, \pi]$. *Man erhält dann zusätzlich* $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leqq 2\pi$.*)*

BEWEIS. Von (2. 4) ausgehend finden wir

$$|\cos\alpha_3 - \cos\alpha_1 \cos\alpha_2| \leqq |\overline{D_{12}(u_3)} - D_{23}(u_1) D_{31}(u_2)| \leqq$$

$$\leqq (1 - |D_{23}(u_1)|^2)^{\frac{1}{2}} (1 - |D_{31}(u_2)|^2)^{\frac{1}{2}} = \sin\alpha_1 \sin\alpha_2,$$

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \leqq \cos\alpha_3 \leqq \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \sin\alpha_1 \sin\alpha_2,$$

$$\cos(\alpha_1 + \alpha_2) \leqq \cos\alpha_3 \leqq \cos(\alpha_1 - \alpha_2),$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 \geqq \alpha_3 \geqq |\alpha_1 - \alpha_2|.$$

Das ist die Behauptung.

2. 2. Mit den Ergebnissen von 2. 1 kommen wir nun zu Aussagen über die Werteverteilung von $D_{ij}(x)$.

Es bedeute μ das Lebesguesche Maß.

SATZ 2. 3. *Es seien wieder* $D_{11}(0) = D_{22}(0) = 1$, *ferner* $u_1 < u_2$, $v > 0$, n *eine natürliche Zahl und*

$$|D_{11}(v)| = \cos\alpha, \qquad 0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2},$$

$$A := \left\{x;\ u_1 \leqq x \leqq u_2,\ |D_{12}(x)| > \cos\frac{\alpha}{2n}\right\}.$$

Dann ist

$$\mu A \leqq \frac{u_2 - u_1 + v}{n+1}.$$

BEWEIS. Zunächst stellen wir fest, daß die Funktionen $D_{ij}(x)$ stetig sind. Das ist aus der Definition sofort zu sehen, wenn f_i, f_j Treppenfunktionen mit nur endlich vielen Sprungstellen sind. Sind f_i, f_j beliebige L^2-Funktionen, so gibt es Folgen von solchen Treppenfunktionen $f_i^{(n)}, f_j^{(n)}$, die im Sinne der L^2-Norm gegen f_i, f_j konvergieren. Das Faltprodukt von $f_i^{(n)}$ und $f_j^{(n)}$ konvergiert dann gleichmäßig gegen D_{ij}. Die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge von stetigen Funktionen ist aber selbst stetig.

Da $D_{11}(0) = 1$, $|D_{11}(v)| = \cos\alpha$ und $D_{11}(x)$ stetig ist, gibt es Zahlen $v_\nu \in [0, v]$ mit

$$|D_{11}(v_\nu)| = \cos\frac{\nu\alpha}{n} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n)$$

Setzt man

$$|D_{12}(x)| = \cos\beta, \quad D_{12}(x + v_\nu) = \cos\gamma_\nu,$$

so liefert Satz 2. 2 mit $f_3=f_1$, $u_1=-x-v$, $u_2=v_\nu$, $u_3=x$:

$$\left|\gamma_\nu-\frac{\nu}{n}\alpha\right|\leqq\beta.$$

Läßt man nun x durch A laufen, so ist $\beta<\dfrac{\alpha}{2n}$. Die Werte von γ_ν liegen im Intervall $I_\nu=\left(\dfrac{2\nu-1}{2n}\alpha,\ \dfrac{2\nu+1}{2n}\alpha\right)$. Die Intervalle I_ν $(\nu=0,1,\dots,n)$ sind disjunkt, folglich sind auch die Punktmengen $A+v_\nu$ disjunkt. Da sie alle das Maß μA haben und in $[u_1,u_2+v]$ liegen, folgt die Behauptung:

$$(n+1)\,\mu A\leqq u_2-u_1+v.$$

HILFSSATZ 2. 4. *Ist* $D_{11}(0)=1$, $f_1(x)=0$ *für* $x\notin[0,a]$, $b>0$, $0<\eta\leqq 1$ *und gilt*

$$\left|\int_{x'}^{x''}f_1(x)\,dx\right|\leqq\eta\frac{b}{\sqrt{a}}\quad \textit{für alle}\quad x',x''\in[0,a]$$

so ist

$$\frac{1}{b}\left|\int_0^b D_{11}(x)\,dx\right|\leqq\eta.$$

BEWEIS.

$$\left|\int_0^b D_{11}(x)\,dx\right|=\left|\int_0^b\int_0^a f_1(y-x)f_1(y)\,dy\,dx\right|\leqq$$

$$\leqq\int_0^a\left|\int_0^b f_1(y-x)\,dx\right||f_1(y)|\,dy\leqq\eta\frac{b}{\sqrt{a}}\int_0^a|f_1(y)|\,dy\leqq$$

$$\leqq\eta b\left(\int_0^a|f_1(y)|^2\,dy\right)^{1/2}=\eta b.$$

Der folgende Satz betrifft speziell reellwertige Funktionen f_i. Abgesehen von der besseren Konstanten ist er in Satz 2. 8 enthalten und wird daher später nicht benötigt. Wir bringen ihn hier trotzdem, weil er einfacher als Satz 2. 8 zu formulieren und zu beweisen ist, und weil ein Teil des Beweises in den Beweis von Satz 2. 8 übernommen werden kann.

SATZ 2. 5. *Sind* $a>0$ *und* $b>0$, f_1 *und* f_2 *reellwertige auf* $[0,a]$ *bzw.* $[0,a+b]$ *definierte Funktionen,*

$$\int_0^a f_1^2(x)\,dx=\int_0^{a+b}f_2^2(x)\,dx=0,$$

gilt $\left|\int_{x'}^{x''}f_1(x)\,dx\right|\leqq\dfrac{b}{2\sqrt{a}}$ *für alle* $x',x''\in[0,a]$, *ist ferner g eine auf* $[0,b]$ *definierte meßbare und beschränkte Funktion:*

$$|g(x)|\leqq G,\quad G\geqq 1,$$

und gilt noch

$$\int_0^b |g(x)|\,dx \leqq b, \tag{2.5}$$

so ist

$$\int_0^b \left| g(x) \int_0^a f_1(y) f_2(y+x)\,dy \right| dx \leqq \left(1 - \frac{1}{200G^2}\right) b.$$

BEWEIS. Setzen wir $f_1(x), f_2(x) = 0$ außerhalb der Intervalle $[0, a]$ bzw. $[0, a+b]$, so haben wir die Voraussetzung $D_{11}(0) = D_{22}(0) = 1$ und das Integral, das wir abzuschätzen wünschen, ist

$$\int_0^b |g(x) D_{12}(x)|\,dx.$$

Hilfssatz 2. 4 gibt uns zunächst

$$\frac{1}{b}\left|\int_0^b D_{11}(x)\,dx\right| \leqq \frac{1}{2}.$$

Da D_{11} eine stetige reellwertige Funktion ist, muß es ein $v \in [0, b]$ mit $|D_{11}(v)| \leqq \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$ geben. Setzen wir also

$$A = \left\{x;\ 0 \leqq x \leqq b,\ |D_{12}(x)| > \cos\frac{\pi}{6n}\right\},$$

so gibt Satz 2. 3

$$\mu A \leqq \frac{b+v}{n+1} \leqq \frac{2b}{n+1}.$$

Das Komplement von A bezüglich $[0, b]$ sei B. Damit wird

$$\int_0^b |g(x) D_{11}(x)|\,dx \leqq \int_A |g(x)|\,dx + \cos\frac{\pi}{6n}\int_B |g(x)|\,dx =$$

$$= \cos\frac{\pi}{6n}\int_0^b |g(x)|\,dx + \left(1-\cos\frac{\pi}{6n}\right)\int_A |g(x)|\,dx \leqq \cos\frac{\pi}{6n}\, b + \left(1-\cos\frac{\pi}{6n}\right)\frac{2b}{n+1}\,G.$$

Mit $n = [3G]$ (das ist $\geqq 3$) wird das

$$\leqq \cos\frac{\pi}{6n}\, b + \left(1-\cos\frac{\pi}{6n}\right)\frac{2b}{3} = b\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{6n}\right) \leqq$$

$$\leqq b\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{18G}\right).$$

Daraus folgt in einer elementaren Rechnung die Behauptung

$$\int_0^b |g(x) D_{12}(x)|\, dx \leqq b\left(1 - \frac{1}{200G^2}\right).$$

2. 3. Satz 2. 5 soll für komplexwertige Funktionen f_i verallgemeinert werden. Das erfordert einige Vorarbeit.

Wir betrachten kompakte, bezüglich 0 sternförmige Bereiche $\mathfrak{G}$ der komplexen Ebene. Jeder derartige Bereich läßt sich darstellen als

$$\mathfrak{G} = \{\varrho e^{i\varphi};\ 0 \leqq \varphi < 2\pi,\ 0 \leqq \varrho \leqq r(\varphi)\}$$

mit einer nach oben halbstetigen $\left(\text{d.h. } \overline{\lim}_{\psi \to \varphi} r(\psi) \leqq r(\varphi)\right)$ 2π-periodischen Funktion $r(\varphi)$. Für eine solche Funktion existiert

$$\bar{r}(\mathfrak{G}) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r(\varphi)\, d\varphi,$$

was man als „mittleren Radius von $\mathfrak{G}$" bezeichnen kann.

HILFSSATZ 2. 6. *Ist $\mathfrak{G}$ kompakt, bezüglich 0 sternförmig und $\bar{r}(\mathfrak{G}) < 1$, so gibt es eine Konstante $\gamma(\mathfrak{G}) < 1$ mit folgender Eigenschaft:*

Für jede meßbare Funktion g auf $[0, 1]$, *die*

$$g(x) \in \mathfrak{G} \quad \textit{für alle} \quad x \in [0, 1]$$

und

$$\int_0^1 |g(x)|\, dx \leqq 1$$

erfüllt, ist

$$\left|\int_0^1 e^{2\pi i x} g(x)\, dx\right| \leqq \gamma(\mathfrak{G}).$$

BEMERKUNG. Daß für jede in Frage kommende Funktion g

$$\left|\int_0^1 e^{2\pi i x} g(x)\, dx\right| < 1$$

ist, sieht man leicht so: Wäre

$$\left|\int_0^1 e^{2\pi i x} g(x)\, dx\right| = 1,$$

so wäre

$$\int_0^1 |g(x)|\, dx = 1$$

und $\arg e^{2\pi i x} g(x)$ fast überall gleich einer Konstanten ψ, also für fast alle x: $\arg g(x) = \psi - 2\pi x$, $|g(x)| \leqq r(\psi - 2\pi x)$. Daraus ergäbe sich der Widerspruch

$$1 = \int |g(x)| dx \leqq \int r(\psi - 2\pi x)\, dx = \bar{r}(\mathfrak{G}) < 1.$$

Da aber die Menge der Funktionen g nicht kompakt ist (im Sinne der L- oder L^2-Norm), kann man hieraus den Hilfssatz nicht unmittelbar folgern.

Beweis des Hilfssatzes. Da $\mathfrak{G}$ kompakt vorausgesetzt ist, ist r beschränkt, etwa

$$r(\varphi) \leqq G \quad \text{für} \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

und damit auch

$$|g(x)| \leqq G \quad \text{in} \quad [0, 1]. \tag{2.6}$$

Setzen wir

$$r_\delta(\varphi) := \sup_{\psi \in [\varphi-\delta,\, \varphi+\delta]} r(\psi),$$

so wird die Halbstetigkeit durch

$$\lim_{\delta \to 0} r_\delta(\varphi) = r(\varphi) \quad (\varphi \in [0,2\pi])$$

ausgedrückt. Nach Lebesgue folgt daraus die Konvergenz dem Maße nach. Es ist also

$$\mu\{\varphi; r_\delta(\varphi) > r(\varphi) + \varepsilon\} \leqq \frac{2\pi\varepsilon}{G}$$

für beliebiges $\varepsilon > 0$ und geeignetes $\delta > 0$. Mit (2. 6) folgt

$$\int\limits_{\substack{0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \\ r_\delta > r + \varepsilon}} \left| g\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)\right| d\varphi \leqq 2\pi\varepsilon. \tag{2.7}$$

Wir verwenden dies mit

$$\varepsilon := \frac{1}{3}\left(1 - \tilde{r}(\mathfrak{G})\right)$$

und dem entsprechenden δ um die Behauptung mit

$$\gamma(\mathfrak{G}) := 1 - \varepsilon(1 - \cos\delta)$$

zu zeigen. Es werde noch

$$\tilde{g} := \int_0^1 |g(x)|\, dx$$

gesetzt. Dann ist

$$\begin{aligned} \int\limits_{\substack{0 \leqq x \leqq 1 \\ |g(x)| > r(2\pi x) + \varepsilon}} |g(x)|\, dx &> \int\limits_{\substack{0 \leqq x \leqq 1 \\ |g(x)| > r(2\pi x) + \varepsilon}} \left(|g(x)| - r(2\pi x) - \varepsilon\right) dx \geqq \\ &\geqq \int_0^1 \left(|g(x)| - r(2\pi x) - \varepsilon\right) dx = \tilde{g} - \tilde{r} - \varepsilon. \end{aligned} \tag{2.8}$$

An Stellen x mit $|g(x)| > r_\delta(2\pi x)$ folgt aus $g(x) \in \mathfrak{G}$

$$\arg g(x) \notin [2\pi x - \delta, 2\pi x + \delta],$$

also

$$\operatorname{Re} e^{-2\pi i x} g(x) = |g(x)| \cos\left(\arg g(x) - 2\pi x\right) \leqq |g(x)| \cos\delta.$$

Damit wird nun

$$\int_0^1 \left(|g(x)| - \operatorname{Re} e^{-2\pi i x} g(x)\right) dx \geqq$$

$$\geqq \int\limits_{\substack{0 \leqq x \leqq 1 \\ r_\delta(2\pi x) \leqq r(2\pi x) + \varepsilon < |g(x)|}} \left(|g(x)| - \operatorname{Re} e^{-2\pi i x} g(x)\right) dx \geqq$$

$$\geqq (1 - \cos\delta) \int\limits_{\substack{0 \leqq x \leqq 1 \\ r_\delta(2\pi x) \leqq r(2\pi x) + \varepsilon < |g(x)|}} |g(x)|\, dx \geqq$$

$$\geqq (1 - \cos\delta) \left(\int\limits_{|g(x)| > r(2\pi x) + \varepsilon} |g(x)|\, dx - \int\limits_{r_\delta(2\pi x) > r(2\pi x) + \varepsilon} |g(x)|\, dx \right).$$

Mit (2. 7) und (2. 8) gibt das

$$\tilde{g} - \operatorname{Re} \int_0^1 e^{-2\pi i x} g(x)\, dx \geqq (1 - \cos\delta)(\tilde{g} - \tilde{r} - 2\varepsilon),$$

$$\operatorname{Re} \int_0^1 e^{-2\pi i x} g(x)\, dx \leqq \tilde{g} \cos\delta + (\tilde{r} + 2\varepsilon)(1 - \cos\delta) =$$

$$= \tilde{g} \cos\delta + (1 - \varepsilon)(1 - \cos\delta) \leqq \cos\delta + (1 - \varepsilon)(1 - \cos\delta) = \gamma.$$

Wendet man dies auf $g^*(x)\colon = g(x+y)$ an (g sei mit der Periode 1 periodisch), so erhält man für beliebiges y

$$\operatorname{Re} e^{2\pi i y} \int_0^1 e^{-2\pi i x} g(x)\, dx = \operatorname{Re} \int_0^1 e^{-2\pi i u} g^*(u)\, du \leqq \gamma,$$

also

$$\left| \int_0^1 e^{-2\pi i x} g(x)\, dx \right| \leqq \gamma.$$

HILFSSATZ 2. 7. *Für $\mathfrak{G}$ und g mögen die Voraussetzungen von Hilfssatz* 2. 6 *gelten. ψ sei eine stetige reellwertige Funktion auf* [0, 1] *und es gelte mit gewissen $\delta > 0$ und $\varepsilon > 0$*

(2. 9) $\quad \mu\{x;\, \psi(x) \in [y, y+\delta) \bmod 1\} \leqq (1+\varepsilon)\delta$ *für alle* $y \in [0, 1]$.

Dann ist

$$\left| \int_0^1 e^{2\pi i \psi(x)} g(x)\, dx \right| \leqq \gamma(\mathfrak{G}) + 8\delta + \varepsilon.$$

BEWEIS. Der Satz wird durch Approximation von ψ mit einer Treppenfunktion und durch „rearrangement" auf Hilfssatz 2. 6 zurückgeführt.

Wir nehmen $\delta < \dfrac{1}{8}$, $\varepsilon < 1$ an, da der Hilfssatz sonst trivial ist.

Wir bestimmen die natürliche Zahl k durch

$$\frac{1}{k} < \delta \leqq \frac{1}{k-1} \tag{2.10}$$

und setzen

$$\varepsilon' := \delta - \frac{1}{k}, \qquad \delta' := (1+\varepsilon)\delta. \tag{2.11}$$

Die stetige Funktion ψ approximieren wir mod 1 durch eine Treppenfunktion ψ_0 so, daß

$$|\psi(x) - \psi_0(x)| \leqq \tfrac{1}{2}\varepsilon' \bmod 1 \quad \text{für alle} \quad x \in [0, 1]$$

und

$$0 \leqq \psi_0(x) < 1$$

wird. Für

$$\frac{i-1}{k} \leqq \psi_0(x) < \frac{i}{k} \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

folgt dann

$$\frac{i-1}{k} - \frac{\varepsilon'}{2} \leqq \psi(x) < \frac{i}{k} + \frac{\varepsilon'}{2} \quad \bmod 1.$$

Wegen $\frac{1}{k} + \varepsilon' = \delta$ liefert (2. 9) für $i = 1, 2, \ldots, k$;

$$\mu\left\{x;\ 0 \leqq x \leqq 1,\ \frac{i-1}{k} \leqq \psi_0(x) < \frac{i}{k}\right\} \leqq \delta',$$

Indem man ψ_0 auch auf $(1, k\,\delta']$ als Treppenfunktion geeignet definiert, erreicht man

$$\mu\left\{x;\ 0 \leqq x \leqq k\delta',\ \frac{i-1}{k} \leqq \psi_0(x) < \frac{i}{k}\right\} = \delta' \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, k.$$

Auf $(1, k\delta']$ setzen wir $g(x) = 0$. Wegen $|e^{iu} - e^{iv}| \leqq |u - v|$ ist dann

$$\begin{aligned} &\left|\int_0^1 e^{2\pi i\psi(x)} g(x)\, dx - \int_0^{k\delta'} e^{2\pi i\psi_0(x)} g(x)\, dx\right| \leqq \\ &\leqq 2\pi \int_0^1 \langle \psi(x) - \psi_0(x)\rangle\, |g(x)|\, dx \leqq \varepsilon' \pi, \end{aligned} \tag{2.12}$$

worin $\langle\ \rangle$ den Abstand von der nächsten ganzen Zahl meint. Wir ordnen nun die Konstanzintervalle von ψ_0 so um, daß die dabei aus ψ_0 entstehende Funktion ψ_1 nicht fallend ist. Die dabei aus g herforgehende Funktion heiße g_1. Dabei bleibt

$$\int_0^{k\delta'} e^{2\pi i\psi_1(x)} g_1(x)\, dx = \int_0^{k\delta'} e^{2\pi i\psi_0(x)} g(x)\, dx \tag{2.13}$$

und

$$\int_0^{k\delta'} |g_1(x)|\,dx = \int_0^1 |g(x)|\,dx \leqq 1,$$

$$(2.14) \qquad \int_0^1 |g_1(k\delta' y)|\,dy \leqq \frac{1}{k\delta'} < 1.$$

Ebenso ist auch

$$\mu\left\{x;\ \frac{i-1}{k} \leqq \psi_1(x) < \frac{i}{k}\right\} = \mu\left\{x;\ \frac{i-1}{k} \leqq \psi_0(x) < \frac{i}{k}\right\} = \delta'.$$

Da ψ_1 monoton ist, bedeutet das

$$\frac{i-1}{k} \leqq \psi_1(x) < \frac{i}{k} \quad \text{für} \quad (i-1)\delta' < x < i\delta', \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

woraus

$$\left|\psi_1(x) - \frac{x}{k\delta'}\right| \leqq \frac{1}{k} \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq k\delta'$$

folgt. Damit wird weiter

$$(2.15) \qquad \begin{aligned} &\left|\int_0^{k\delta'} e^{2\pi i \psi_1(x)} g_1(x)\,dx - \int_0^{k\delta'} e^{\frac{2\pi i x}{k\delta'}} g_1(x)\,dx\right| \leqq \\ &\leqq 2\pi \int_0^{k\delta'} \left|\psi_1(x) - \frac{x}{k\delta'}\right| |g_1(x)|\,dx \leqq \frac{2\pi}{k}. \end{aligned}$$

Auf $\int_0^1 e^{2\pi i y}\, g_1(k\delta' y)\,dy$ läßt sich wegen (2. 14) Hilfssatz 2. 6 anwenden. Das liefert

$$(2.16) \qquad \left|\int_0^{k\delta'} e^{\frac{2\pi i x}{k\delta'}} g_1(x)\,dx\right| \leqq k\delta' \gamma(\mathfrak{G}).$$

Aus (2. 12), (2. 13), (2. 15) und (2. 16) folgt nun

$$\left|\int_0^1 e^{2\pi i \psi(x)} g(x)\,dx\right| \leqq \pi\varepsilon' + \frac{2\pi}{k} + k\delta' \gamma(\mathfrak{G}).$$

Wegen (2. 10) und (2. 11) ist das

$$\leqq \pi\varepsilon' + 2\pi(\delta - \varepsilon') + (1+\varepsilon)(1+\delta)\gamma(\mathfrak{G}) \leqq \gamma(\mathfrak{G}) + \delta(2\pi + 1 + \varepsilon) + \varepsilon \leqq \gamma(\mathfrak{G}) + 8\delta + \varepsilon.$$

SATZ 2. 8. *Sind f_1, f_2 komplexwertige L^2-Funktionen auf* $[0, a]$ *bzw.* $[0, a+b]$ *mit* $a > 0, b > 0$, *normiert durch*

$$\int_0^a |f_1(x)|^2\,dx = \int_0^{a+b} |f_2(x)|^2\,dx = 1,$$

ist $\mathfrak{G}$ *ein kompakter bezüglich* 0 *sternförmiger Bereich mit*

$$\tilde{r}(\mathfrak{G}) < 1,$$

ist g eine meßbare Funktion auf $[0, b]$ *mit*

$$g(x) \in \mathfrak{G} \quad \textit{für alle} \quad x \in [0, b]$$

und gilt

$$(2.17) \qquad \left|\int_{x'}^{x''} f_1(x)\,dx\right| \leqq \frac{b}{40a^{1/2}}(1-\gamma(\mathfrak{G})) \quad \textit{für alle} \quad x', x'' \in [0, a],$$

so ist

$$\left|\int_0^b g(y) \int_0^a f_1(x) f_2(x+y)\,dx\,dy\right| \leqq \gamma_1(\mathfrak{G}) \operatorname{Max}\left(b, \int_0^b |g(y)|\,dy\right)$$

mit $\gamma_1(\mathfrak{G}) < 1$, *nämlich*

$$\gamma_1(\mathfrak{G}) := \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cos\frac{1-\gamma}{120G}, \quad \gamma := \gamma(\mathfrak{G}), \quad G := \operatorname{Max}(1, \sup_{z \in \mathfrak{G}} |z|).$$

BEWEIS. Ist der Satz für

$$(2.18) \qquad \int_0^b |g(y)|\,dy \leqq b$$

richtig, so auch für

$$(2.19) \qquad \int_0^b |g(y)|\,dy > b.$$

Im Falle (2. 19) ist der Satz dann nämlich auf

$$g^*(x) := g(x)\, b \left(\int_0^b |g(y)|\,dy\right)^{-1}$$

anwendbar, weil $g^*(x) \in \mathfrak{G}$ für alle $x \in [0, b]$ und

$$\int_0^b |g^*(x)|\,dx = b$$

ist. Das liefert

$$\left|\int_0^b g^*(y) \int_0^a f_1(x) f_2(x+y)\,dx\,dy\right| \leqq \gamma_1 b,$$

also

$$\left|\int_0^b g(y) \int_0^\alpha f_1(x) f_2(x+y)\,dx\,dy\right| \leqq \gamma_1 \int_0^b |g(y)|\,dy.$$

Im folgenden sei daher (2. 18) vorausgesetzt.

Wie beim Beweis von Satz 2. 5 setzen wir $a'\colon =a+b$, $f_1(x)=0$ in $[a, a']$ und bilden D_{ij} mit a' statt a, überdies mit $\bar{f}_2$ statt f_2. Dann ist also

$$D_{12}(x) = \int_0^a f_1(y) f_2(x+y)\, dy \quad \text{für} \quad x \in [0, b],$$

$$D_{11}(0) = D_{22}(0) = 1.$$

Wir setzen noch

$$\delta : = \frac{1}{20}(1-\gamma(\mathfrak{G}))$$

und unterscheiden nun drei Fälle:

a) Es gibt ein $u_0 \in [0, b]$ mit $|D_{11}(u_0)| \leqq \cos \delta$.

b) Für alle $u \in [0, b]$ ist $|D_{11}(u)| > \cos \delta$ und es gibt ein $y_0 \in [0, b]$ mit $|D_{12}(y_0)| \leqq \leqq \cos 2\delta$.

c) Für alle $y \in [0, b]$ ist $|D_{11}(y)| > \cos \delta$ und $|D_{12}(y)| > \cos 2\delta$.

Zu a). Für natürliches n gibt Satz 2. 3

$$\mu\left\{y;\ y \in [0, b],\ |D_{12}(y)| > \cos \frac{\delta}{2n}\right\} \leqq \frac{2b}{n+1}.$$

Wie beim Beweis von Satz 2. 5 (mit δ statt $\pi/3$) folgt daraus

$$\left|\int_0^b g(y) D_{12}(y)\, dy\right| \leqq b\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cos\frac{\delta}{6G}\right) = b\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cos\frac{1-\gamma}{120G}\right).$$

Zu b). Jedes $y \in [0, b]$ läßt sich darstellen als $y = y_0 \pm u$ mit $u \in [0, b]$. Satz 2. 2 gibt für beide Vorzeichen

$$|D_{12}(y)| \leqq \cos(2\delta-\delta) = \cos\delta \qquad (y \in [0, b]).$$

Es folgt sofort

$$\left|\int_0^b g(y) D_{12}(y)\, dy\right| \leqq \cos\delta \int_0^b |g(y)|\, dy \leqq b\cos\delta < b\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cos\frac{\delta}{G}\right).$$

Zu c). Dem folgenden liegt die Idee zugrunde, daß wegen $|D_{11}(y)| \approx 1$, $|D_{12}(y)| \approx 1$ und Satz 2. 1 sich D_{12} etwa wie

$$D_{12}(y) \approx e^{iy\,\text{const.}}$$

verhalten muß. Aus 2. 17 schließt man mit Hilfssatz 2. 4, daß die Konstante im Exponenten nicht 0 sein kann, daß sich die Werte von $D_{12}(y)$ also längs des Einheitskreises annähernd gleichmäßig verteilen. Damit liefert dann Hilfssatz 2. 7 das gewünschte Ergebnis.

Es sei also

$$|D_{11}(y)| > \cos\delta, \quad |D_{12}(y)| > \cos 2\delta \quad \text{in} \quad [0, b].$$

In $[0, 2b]$ und damit in $[0, (1+4\delta)b]$ gilt dann nach Satz 2. 2 noch

$$|D_{12}(y)| \geqq \cos(2\delta+\delta) = \cos 3\delta.$$

Mit (2. 17) gibt Hilfssatz 2. 4 für $\eta=\frac{1}{2}$, δb statt b:

$$\frac{1}{\delta b}\left|\int_0^{\delta b} D_{11}(y)\,dy\right| \leqq \frac{1}{2}.$$

Da D_{11} stetig, $|D_{11}|>\cos\delta>\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ist und der Mittelwert einer Funktion stets in der konvexen Hülle des Wertebereiches liegt, hat das von $\arg D_{11}(y)$ für $y\in[0,\delta b]$ durchlaufene Intervall mindestens die Länge $\pi/2$. Für beliebiges $\vartheta\in[0,2\pi]$ gibt es also $u_1,\dots,u_4\in[0,\delta b]$ mit

$$\arg\left(\prod_{i=1}^{4} D_{11}(u_i)\right)=\vartheta.$$

Wir betrachten die beiden Mengen

$$M(\varphi):=\{y;\ y\in[0,b],\ \arg D_{12}(y)\in[\varphi,\varphi+2\pi\delta)\}$$

$$N(\psi):=\{y;\ y\in[0,(1+4\delta)b],\ \arg D_{12}(y)\in[\psi,\psi+2\pi\delta+32\delta^2)\}.$$

Um $\mu M(\varphi)$ abzuschätzen, zeigen wir $\mu M(\varphi)\leqq\mu N(\psi)$ für beliebiges φ und ψ. Dazu wählen wir $u_1,\dots,u_4\in[0,\delta b]$ so, daß

$$\arg\prod_{i=1}^{4} D_{11}(u_i)=\psi-\varphi+16\delta^2$$

wird. Für beliebiges $y>0$ und $u\in[0,\delta b]$ mit $y+u\leqq(1+4\delta)b$ bekommt man aus Satz 2. 1

$$|D_{12}(y+u)-D_{12}(y)D_{11}(u)|\leqq(1-|D_{12}(y)|^2)^{\frac{1}{2}}(1-|D_{11}(u)|^2)^{\frac{1}{2}}\leqq$$

$$\leqq\sin 3\delta\,\sin\delta\leqq 3\delta^2,$$

und weiter wegen $|D_{12}(y+u)|\geqq\cos 3\delta\geqq 1-5\delta^2$

$$\left|\arg\frac{D_{12}(y)D_{11}(u)}{D_{12}(y+u)}\right|\leqq\left|\log\frac{D_{12}(y)D_{11}(u)}{D_{12}(y+u)}\right|=$$

$$=\left|\log\left(1-\frac{D_{12}(y+u)-D_{12}(y)D_{11}(u)}{D_{12}(y+u)}\right)\right|\leqq$$

$$\leqq\log\left(1-\left|\frac{D_{12}(y+u)-D_{12}(y)D_{11}(u)}{D_{12}(y+u)}\right|\right)^{-1}\leqq\log\left(1-\frac{3\delta^2}{1-5\delta^2}\right)^{-1}\leqq 4\delta^2,$$

wie man wegen $\delta\leqq\frac{1}{20}$ leicht nachrechnet.

Für $y\in[0,b]$ sind $y+u_1,\ y+u_1+u_2,\dots,y+u_1+\dots+u_4\in[0,(1+4\delta)b]$. Man kann die Abschätzung daher viermal anwenden und erhält

$$|\arg D_{12}(y+u_1+\dots+u_4)-\arg D_{12}(y)+\varphi-\psi-16\delta^2|=$$

$$=\left|\arg\frac{D_{12}(y+u_1+\dots+u_4)}{D_{12}(y)D_{11}(u_1)\dots D_{11}(u_4)}\right|\leqq 16\delta^2.$$

Für $y \in M(\varphi)$ ist also $y+u_1+\ldots+u_4 \in N(\psi)$, folglich

$$\mu M(\varphi) \leqq \mu N(\psi).$$

Mittelt man nun über ψ, so ergibt sich

$$\mu M(\varphi) \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mu N(\psi)\, d\psi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \int\limits_{\substack{0 \leqq y \leqq (1+4\delta)b \\ 0 \leqq \arg D_{12}(y)-\psi \leqq 2\pi\delta+32\delta^2}} dy\, d\psi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{(1+4\delta)b} (2\pi\delta+32\delta^2)\, dy = \left(\delta+\frac{16}{\pi}\delta^2\right)(1+4\delta)b = (1+\varepsilon_0)\delta b,$$

mit

$$\varepsilon_0 = 4\delta+\frac{16}{\pi}\delta+\frac{64}{\pi}\delta^2 \leqq \left(4+\frac{16}{\pi}+\frac{3{,}2}{\pi}\right)\delta < 10{,}2\delta.$$

Die Funktionen $\psi(t) := \frac{1}{2\pi}\arg D_{12}(tb)$ und $g_0(t) := g(tb)$ auf $[0, 1]$ erfüllen nun die Voraussetzungen von Hilfssatz 2. 7. Daraus ergibt sich

$$\text{(2.20)} \qquad \left|\int_0^b e^{i\arg D_{12}(y)} g(y)\, dy\right| = b\left|\int_0^1 e^{2\pi i\psi(t)} g_0(t)\, dt\right| \leqq b\big(\gamma(\mathfrak{G})+\varepsilon_0+8\delta\big).$$

Nun ist

$$|D_{12}(y)-e^{i\arg D_{12}(y)}| = 1-|D_{12}(y)| < 1-\cos 2\delta \leqq 2\delta^2 \quad (y\in[0, b]),$$

also

$$\left|\int_0^b g(y)\big(D_{12}(y)-e^{i\arg D_{12}(y)}\big)\, dy\right| \leqq 2\delta^2 b.$$

Dies und (2. 20) geben endlich

$$\left|\int_0^b g(y) D_{12}(y)\, dy\right| \leqq b(\gamma+\varepsilon_0+8\delta+2\delta^2) \leqq$$

$$\leqq b\big(\gamma+\delta(10{,}2+8+0{,}1)\big) \leqq b(\gamma+19\delta) = b\left(1-\frac{1-\gamma}{20}\right),$$

und das ist

$$\leqq \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cos\frac{1-\gamma}{120G}\right)b = \gamma_1(\mathfrak{G})b.$$

3. Taubersätze

3. 1. SATZ 3. 1. *Für die reell- oder komplexwertigen Funktionen f und g gelte mit einer Konstanten $\tau > 0$ für $x \to \infty$*

$$x\,|f(x)| \leqq \tau \left| \int_0^x f(x-y)g(y)\,dy \right| + o\big(x^\tau L(x)\big) \tag{3. 1}$$

und

$$\int_0^x f(y)\,dy = o\big(x^\tau L(x)\big). \tag{3. 2}$$

Die Funktion f sei auf jedem Intervall $[0, x]$ L^2-integrierbar. Die Funktion g sei L-meßbar und es sei

$$g(x) \in \mathfrak{G} \quad \text{für alle} \quad x \geqq 0, \tag{3. 3}$$

worin $\mathfrak{G}$ einen kompakten bezüglich 0 sternförmigen Bereich mit

$$\tilde{r}(\mathfrak{G}) < 1 \tag{3. 4}$$

bedeutet.

Falls $0 < \tau < 1$ ist, sei

$$\int_{x_1}^{x_2} |g(y)|\,dy \leqq x_2 - x_1 + o(x_2) \quad (x_2 \to \infty, \quad \text{gleichmäßig für} \quad x_1 \leqq x_2), \tag{3. 5. 1}$$

*falls $\tau \geqq 1$ ist, gelte die schwächere Annahme**

$$\int_0^x |g(y)|\,dy \leqq x + o(x) \quad (x \to \infty). \tag{3. 5. 2}$$

Die Vergleichsfunktion L sei überall positiv, meßbar und langsam oszillierend, d.h.

$$\frac{L(ux)}{L(x)} \to 1 \quad \text{für} \quad x \to \infty \quad \text{und} \quad u > 0 \tag{3. 6}$$
$$(\text{gleichmäßig für} \quad u \in [u_1, u_2], \quad 0 < u_1 < u_2)^{**}.$$

Dann gilt für $x \to \infty$

$$f(x) = o\big(x^{\tau-1} L(x)\big). \tag{3. 7}$$

ZUSATZ 3. 1. 1. Die Behauptung gilt auch, wenn man (3. 3) abschwächt zu $g = g_1 + g_2$ mit $g_1(x) \in \mathfrak{G}$,

$$g_2 \quad \text{beschränkt und} \quad \int_0^x |g_2(y)|\,dy = O(x). \tag{3. 3. 1}$$

* In unseren Anwendungen ist stets (3. 5. 1) gegeben. Die Tatsache, daß (3. 5. 2) bei $\tau \geqq 1$ genügt, ist aber an sich interessant.

** Die Gleichmäßigkeit ist beweisbar, s. V. AARDENNE-EHRENFEST, DE BRUIJN, KOREVAAR [1].

Der Beweis beruht wesentlich auf dem folgenden

HILFSSATZ 3. 2. *Unter den Voraussetzungen von Satz* 3. 1 *sei*

$$\gamma_2(\mathfrak{G}) := \gamma_1(\mathfrak{G})^{1/2}(2-\gamma_1(\mathfrak{G}))^{1/2}.$$

Es sei A genügend groß $(\geqq A_0(L))$, ε positiv und genügend klein $(\leqq \varepsilon_0(\tau, \mathfrak{G}))$, K_0 eine beliebige positive Konstante und B genügend groß $(\geqq B_0(f, g, L, \varepsilon, A, K_0))$. Mit einer Konstanten $K \geqq K_0$ gelte

$$\int_{x_1}^{x_2} |f(x)|^2\, dx \leqq K^2 \int_{x_1}^{x_2} x^{2\tau-2} L^2(x)\, dx \tag{3. 8}$$

für alle x_1, x_2 mit

$$x_1 \geqq A, \quad (1+\varepsilon)x_1 \leqq x_2 \leqq B.$$

Dann gilt für alle x_1, x_2 mit

$$x_1 \geqq B, \; x_2 \geqq (1+\varepsilon)x_1$$

sogar

$$\int_{x_1}^{x_2} |f(x)|^2\, dx \leqq \gamma_2(\mathfrak{G}) K^2 \int_{x_1}^{x_2} x^{2\tau-2} L^2(x)\, dx. \tag{3. 9}$$

BEMERKUNG. Die Festsetzung von γ_2 ist ziemlich willkürlich. Es soll nur

$$\gamma_1 < \gamma_2 < 1$$

gesichert werden, und für $\tau \geqq 1$, wenn der Beweis mit (3. 5. 2) geführt wird,

$$\gamma_1(2-\gamma_1) < \gamma_2 < 1.$$

3. 2. Den Hilfssatz setzen wir zunächst voraus und beenden von da aus den Beweis von Satz 3. 1.

Wegen (3. 6) kann A_0 so groß genommen werden, daß

$$\frac{1}{2} \leqq \frac{L(x')}{L(x)} \leqq 2 \quad \text{für} \quad A_0 \leqq x \leqq x' \leqq 2x \tag{3. 10}$$

gilt. Sind nun $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ und K_0 beliebig gewählt, so hat $\int_{x_1}^{x_2} x^{2\tau-2} L^2(x)\, dx$ für $x_1 \geqq A_0(1+\varepsilon)x_1 \leqq x_2 \leqq B_0$ eine positive untere Schranke. Da anderseits $\int_{x_1}^{x_2} |f(x)|^2 dx \leqq \int_{A_0}^{B_0}$ ist, kann man (3. 8) für $x_1 \geqq A_0$, $(1+\varepsilon)x_1 \leqq x_2 \leqq B_0$ mit einem genügend großen $K \geqq K_0$ befriedigen. Der Hilfssatz liefert dann (3. 8) mit $K_1 := \gamma_2^{\frac{1}{2}} K$ statt K für $x_1 \geqq A_1 := B_0(\ldots, A_0, K_0)$, $x_2 \geqq (1+\varepsilon)x_1$. Mit genügend großem B, nämlich $B_1 := B_0(\ldots, A_1, K_1)$ läßt sich der Hilfssatz erneut anwenden usw. Auf diese Weise bekommt man

$$\int_{x_1}^{x_2} |f(x)|^2\, dx \leqq \gamma_2^r K^2 \int_{x_1}^{x_2} x^{2\tau-2} L^2(x)\, dx$$

für

$$x_1 \geqq A_r, \quad x_2 \geqq (1+\varepsilon)x_1, \quad r = 1, 2, \ldots .$$

Wegen $\gamma_2 < 1$ haben wir das Zwischenergebnis:

Zu beliebigen $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ und $K > 0$ gibt es ein C, so daß (3. 8) für $x_1 \geqq C$, $x_2 \geqq \geqq (1+\varepsilon)x_1$ gilt.

Wir nehmen $C \geqq A_0$, $x \geqq (1+\varepsilon)^2 C$ an und wollen $\int_0^x |f(y)| dy$ abschätzen. Das Intervall $[C, x]$ läßt sich durch geeignete x_r, $x_0 = C$, $x_n = x$ so zerlegen, daß

$$(1+\varepsilon) \leqq \frac{x_\nu}{x_{\nu-1}} \leqq (1+\varepsilon)^2 \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots, n$$

ist. Mit (3. 8) erhält man

$$\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} |f(y)|\, dy \leqq \Big(\Delta x \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} |f(y)|^2\, dy\Big)^{1/2} \leqq$$

$$\leqq K\Big(\Delta x \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} y^{2\tau-2} L^2(y)\, dy\Big)^{1/2} \leqq K\Delta x \sup_{x_{\nu-1} \leqq y \leqq x_\nu} y^{\tau-1} L(y) \leqq$$

$$\leqq K \frac{\sup y^{\tau-1} L(y)}{\inf y^{\tau-1} L(y)} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} y^{\tau-1} L(y)\, dy.$$

Wegen $\dfrac{x_\nu}{x_{\nu-1}} \leqq (1+\varepsilon)^2 \leqq 2$ und (3. 10) ist das

$$\leqq 2^{|\tau-1|+1} K \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} y^{\tau-1} L(y)\, dy.$$

Insgesamt wird

$$\int_0^x |f(y)|\, dy \leqq \int_0^c |f(y)|\, dy + 2^{|\tau-1|+1} K \int_0^x y^{\tau-1} L(y)\, dy \tag{3. 11}$$

für $x \geqq (1+\varepsilon)^2 C$, $C \geqq A_0$.

Da Formel (3. 11) auch beim Beweis von Hilfssatz 3. 2 verwendet werden soll, sei gleich darauf hingewiesen, daß der Hilfssatz nicht als Voraussetzung eingeht. Es ist lediglich (3. 8) für $x_1 > C$, $(1+\varepsilon)x_1 \leqq x_2 \leqq x$ angenommen worden.

Da L langsam oszilliert, gilt

$$\int_c^x y^{\tau-1} L(y)\, dy \sim \frac{x^\tau}{\tau} L(x) \quad \text{für} \quad x \to \infty. \tag{3. 12}$$

Man sieht dies z.B. so: Für $\varepsilon > 0$ ist

$$(1+\varepsilon)^{-1} L(x) \leqq L(y) \leqq (1+\varepsilon) L(x), \quad \text{wenn} \quad y \in \left[\frac{x}{2}, x\right], \quad y \geqq x_0(\varepsilon),$$

demnach auch für $r=1, 2, \ldots$

$$(1+\varepsilon)^{-r}L(x) \leqq L(y) \leqq (1+\varepsilon)^{\nu}L(x) \quad \text{wenn} \quad y \in \left[\frac{x}{2^r}, \frac{x}{2^{r-1}}\right], \quad y \geqq x_0(\varepsilon).$$

Integration über y und Summation über r liefern (3. 12).*

Das oben formulierte Zwischenergebnis, zusammen mit (3. 11) und (3. 12) hat zur Folge

$$\int_0^x |f(y)|\, dy = o\big(x^{\tau}L(x)\big).$$

Da g wegen (3. 3) beschränkt ist, erhalten wir nun aus (3. 1) sofort die Behauptung (3. 7) des Satzes.

3. 3. Beweis von Hilfssatz 3. 2. Es genügt (3. 9) unter der Voraussetzung

$$(3.\ 13) \qquad (1+\varepsilon)x_1 \leqq x_2 \leqq (1+\varepsilon)^2 x_1, \quad B \leqq x_2 \leqq (1+\varepsilon)B$$

zu zeigen. Für solche x_1, x_2 folgt dann erst recht (3. 8). Da jedes Intervall $[x_1, x_2]$ mit $x_2 \geqq (1+\varepsilon)x_1$ sich in Teilintervalle vom Typ $[x', x'']$ mit $(1+\varepsilon)x' \leqq x'' \leqq (1+\varepsilon)^2 x'$ zerlegen läßt, folgt (3. 8) für alle x_1, x_2 mit

$$x_1 \geqq A, \quad x_2 \geqq (1+\varepsilon)x_1, \quad x_2 \leqq (1+\varepsilon)B.$$

Iteration dieses Schlußes zeigt, daß (3. 8) für alle x_1, x_2 mit

$$x_1 \geqq A, \quad x_2 \geqq (1+\varepsilon)x_1$$

gilt. Gleichzeitig folgt (3. 9) für

$$(1+\varepsilon)x_1 \leqq x_2 \leqq (1+\varepsilon)^2 x_1$$

und beliebiges $x_2 \geqq B$, also für beliebige x_1, x_2 mit

$$x_1 \geqq B, \quad x_2 \geqq (1+\varepsilon)x_1.$$

Beim Beweis wird zu beachten sein, daß die Bedingungen, denen A, ε, B jeweils genügen müssen, nur die in der Formulierung des Hilfssatzes angegebenen Parameter enthalten. Dadurch wird sicher gestellt, daß alle Bedingungen sich gleichzeitig erfüllen lassen.

Eine weitere Größe δ, die im Beweis auftritt, ist klein $\big(\leqq \delta_0(\mathfrak{G})\big)$ zu wählen. Die einzige Bedingung über A ist mit (3. 10) bereits angegeben.

Der Beweis wird zunächst mit (3. 5. 1) geführt, auch für $\tau \geqq 1$. Daß bei $\tau \geqq 1$ schon (3. 5. 2) genügt, wird anschließend gezeigt.

Wir nehmen also (3. 13) an und setzen noch

$$x_3 := \Delta x = x_2 - x_1, \quad x_4 := \big(1-\sqrt{\varepsilon}\big)x_2.$$

* Es ist wohl interessant, zu bemerken, daß umgekehrt (3. 12) die Funktion L als langsam oszillierend charakterisiert. Darauf beruht (unausgesprochen) der Beweis von I Hilfssatz 4.

Für $x \in [x_1, x_2]$ bezeichne $I_\varrho(x)$ $(\varrho = 1, \ldots, 4)$ der Reihe nach

$$\int\limits_0^{x-x_1}, \int\limits_{x-x_1}^{x_3}, \int\limits_{x_3}^{x_4}, \int\limits_{x_4}^{x} \tau f(x-y) g(y)\, dy.$$

Dann ist nach (3. 1)

$$x|f(x)| \leqq |I_1(x)| + \ldots + |I_4(x)| + R(x)$$

mit $R(x) = o(x^\tau L(x))$,

$$\begin{aligned}(1+\varepsilon)^{-2} B \Big(\int\limits_{x_1}^{x_2} |f(x)|^2\, dx\Big)^{1/2} &\leqq \Big(\int\limits_{x_1}^{x_2} x^2 |f(x)|^2\, dx\Big)^{1/2} \leqq \\ &\leqq \Big(\int\limits_{x_1}^{x_2} |I_1|^2\, dx\Big)^{1/2} + \Big(\int\limits_{x_1}^{x_2} |I_3|^2\, dx\Big)^{1/2} + \Big(\int\limits_{x_1}^{x_2} |I_2 + I_4 + R|^2\, dx\Big)^{1/2}.\end{aligned} \tag{3. 14}$$

Der Sinn der Aufspaltung ist folgender: I_3 liefert das Hauptglied, das mit den Ergebnissen aus 2. abgeschätzt werden kann. I_1 enthält die Werte von f bei Argumenten in $[B, (1+\varepsilon)B]$, wo (3. 8) noch nicht vorausgesetzt werden darf. I_4 enthält f bei kleinen Argumenten, für welche (3. 2) noch nicht genügend wirksam ist, um die Abschätzung wie bei I_3 durchzuführen. Die Abspaltung von I_2 macht die Integrationsgrenze bei I_3 von x unabhängig und erleichtert so dessen Abschätzung.

Wir behandeln zuerst I_1, I_2, I_4 und R.

Die positive Größe δ wird später festgelegt, und zwar, wie schon gesagt, durch eine Bedingung $\delta \leqq \delta_0(\mathfrak{G})$.

Mit

$$\Delta x \leqq (1-(1+\varepsilon)^{-2}) x_2 \leqq (1+\varepsilon-(1+\varepsilon)^{-1}) B < 2\varepsilon B$$

und $|g| \leqq G$ erhält man

$$|I_1(x)|^2 \leqq \tau^2 G^2 \Big(\int\limits_{x_1}^{x} |f(y)|\, dy\Big)^2 \leqq \tau^2 G^2 \Delta x \int\limits_{x_1}^{x} |f(y)|^2\, dy,$$

$$\begin{aligned}\Big(\int\limits_{x_1}^{x_2} |I_1(x)|^2\, dx\Big)^{1/2} &\leqq \tau G\, \Delta x \Big(\int\limits_{x_1}^{x_2} |f(y)|^2\, dy\Big)^{1/2} \leqq \\ &\leqq \delta B \Big(\int\limits_{x_1}^{x_2} |f(y)|^2\, dy\Big)^{1/2} \quad (\varepsilon \text{ genügend klein}).\end{aligned} \tag{3. 15}$$

Für I_2 erhält man zunächst ähnlich

$$|I_2(x)|^2 \leqq \tau^2 G^2 \Delta x \int\limits_{x_1-\Delta x}^{x_1} |f(y)|^2\, dx.$$

Wegen $x_1 \leqq B$,

$$\frac{x_1}{x_1 - \Delta x} \geqq \frac{x_1 + \Delta x}{x_1} \geqq 1+\varepsilon$$

und

$$x_1 - \Delta x = 2x_1 - x_2 \geqq \left(\frac{2}{(1+\varepsilon)^2} - 1\right) x_2 \geqq$$

$$\geqq \left(\frac{2}{(1+\varepsilon)^2} - 1\right) B > (1-4\varepsilon) B \geqq A \quad (\varepsilon \text{ klein, } B \text{ groß})$$

sind hier (3. 8) und (3. 10) anwendbar:

$$|I_2(x)| \leqq \tau G K \Big(\Delta x \int\limits_{x_1-\Delta x}^{x_1} y^{2\tau-2} L^2(y)\, dy\Big)^{1/2} \leqq$$

$$\leqq 2\tau G K L(B) \Delta x \operatorname{Max}\left((x_1-\Delta x)^{\tau-1}, B^{\tau-1}\right).$$

Wegen $\Delta x < 2\varepsilon B$ gibt das bei genügend kleinem ε

$$|I_2(x)| \leqq \delta K B^\tau L(B). \tag{3. 16}$$

Zur Abschätzung von I_4 ziehen wir (3. 11) mit A statt C und (3. 12) heran. Wegen

$$x - x_4 \leqq x_2 - x_4 = \sqrt{\varepsilon}\, x_2 \leqq 2\sqrt{\varepsilon}\, B$$

ist

$$|I_4(x)| \leqq \tau G \int\limits_0^{x-x_4} |f(y)|\, dy \leqq \tau G \int\limits_0^{\sqrt{\varepsilon} B} |f(y)|\, dy \leqq$$

$$\leqq \tau G \int\limits_0^{A} |f(y)|\, dy + \tau G 2^{|\tau-1|+1} K \int\limits_A^{\sqrt{\varepsilon} B} y^{\tau-1} L(y)\, dy \leqq$$

$$\leqq 2 \cdot 2^{|\tau-1|+1} G K (\sqrt{\varepsilon}\, B)^\tau L(\sqrt{\varepsilon}\, B) \quad (K \geqq K_0,\ B \text{ groß})$$

$$\leqq \delta K B^\tau L(B) \quad (\varepsilon \text{ klein},\ B \text{ groß}). \tag{3. 17}$$

Schließlich ist auch

$$R(x) = o(x^\tau L(x)) \leqq \delta K B^\tau L(B) \quad (B \text{ groß}). \tag{3. 18}$$

Setzt man (3. 15)—(3. 18) in (3. 14) ein, so ergibt sich, wenn man ε so klein wählt, daß $(1+\varepsilon)^{-2} > 1-\delta$ wird,

$$(1-2\delta) B \Big(\int\limits_{x_1}^{x_2} |f(x)|^2\, dx\Big)^{1/2} \leqq \Big(\int\limits_{x_1}^{x_2} |I_3(x)|^2\, dx\Big)^{1/2} + 3\delta K B^\tau L(B) (\Delta x)^{1/2}. \tag{3.19}$$

Nun zur Abschätzung von $\int |I_3|^2 dx$. Es ist

$$\begin{aligned}\int\limits_{x_1}^{x_2} |I_3(x)|^2\, dx &= \tau^2 \int\limits_{x_1}^{x_2} \Big(\int\limits_{x_3}^{x_4} f(x-y) g(y)\, dy\Big) \Big(\int\limits_{x_3}^{x_4} \overline{f(x-z)} g(\bar z)\, dz\Big) dx = \\ &= \tau^2 \int\limits_{z=x_3}^{x_4} \overline{g(z)} \int\limits_{y=x_3}^{x_4} g(y) \int\limits_{x=x_1}^{x_2} f(x-y) \overline{f(x-z)}\, dx\, dy\, dz.\end{aligned} \tag{3. 20}$$

Das Intervall $[x_3, x_4]$ zerlegen wir durch

$$y_\nu := x_3 + \frac{\nu}{n}(x_4 - x_3) \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n)$$

und bilden

$$J_\nu(z) := \int_{y_{\nu-1}}^{y_\nu} g(y) \int_{x_1}^{x_2} f(x-y)\overline{f(x-z)}\, dx\, dy \quad (z \in [x_3, x_4]).$$

Dabei soll n gemäß

$$\frac{1}{150\varepsilon^2}(1-\gamma(\mathfrak{G})) \leqq n \leqq \frac{1}{120\varepsilon^2}(1-\gamma(\mathfrak{G}))$$

gewählt werden. Für genüged kleines ε ist das möglich. Für kleines ε haben wir ferner $\frac{1}{3}\Delta x \leqq \varepsilon(x_4-x_3) \leqq \Delta x$. Dann ist

$$\text{(3.21)} \qquad \frac{40\varepsilon}{1-\gamma}\Delta x \leqq \Delta y \leqq \frac{150\varepsilon}{1-\gamma}\Delta x \quad (\Delta y = y_\nu - y_{\nu-1}, \gamma = \gamma(\mathfrak{G})).$$

Für genügend große B gilt nach (3. 5. 1)

$$\int_{y_{\nu-1}}^{y_\nu} |g(y)|\, dy \leqq \Delta y + \varepsilon^3 y_\nu \leqq \Delta y + \varepsilon^3 x_1 \quad (\nu = 1, 2, \dots, n).$$

Wegen $\varepsilon^2 x_1 \leqq \varepsilon \Delta x \leqq \Delta y$ folgt daraus

$$\text{(3.22)} \qquad \int_{y_{\nu-1}}^{y_\nu} |g(y)|\, dy \leqq (1+\varepsilon)\,\Delta y.$$

In J_ν ist

$$x-y \leqq x_2 - x_3 = x_1 \leqq B,$$

$$x-y \geqq x_1 - x_4 \geqq \left(\frac{1}{(1+\varepsilon)^2} - 1 + \sqrt{\varepsilon}\right) x_2 \geqq \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}\, x_2 \geqq \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}\, B \quad (\varepsilon \text{ klein}),$$

also

$$\text{(3.23)} \qquad x-y \in \left[\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}\, B, B\right] \quad \text{für} \quad x \in [x_1, x_2], \quad y \in [x_3, x_4].$$

Ebenso ist

$$x-z \in \left[\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}\, B, B\right].$$

Weiter sei B so groß, daß

$$\text{(3.24)} \qquad (1+\varepsilon)^{-1} \leqq \frac{L(u)}{L(B)} \leqq 1+\varepsilon \quad \text{für} \quad u \in \left[\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}\, B, B\right]$$

gilt. Für großes B liefern (3. 2) und (3. 24)

$$\text{(3.25)} \quad \left|\int_0^u f(y)\, dy\right| \leqq \frac{1}{5}\varepsilon^2 K_0 u^\tau L(u) \leqq \frac{1}{4}\varepsilon^2 K u^\tau L(B) \quad \text{für} \quad u \in \left[\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}\, B, B\right].$$

Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle.

Fall I: Es sei

$$\Big(\int_{x_1-z}^{x_2-z} |f(x)|^2\, dx\Big)^{1/2} \geqq \frac{1}{2} K (x_2-z)^{\tau-1} L(B)\, (\Delta x)^{1/2}.$$

Wegen (3. 25) folgt dann für $x', x'' \in [x_1 - z, x_2 - z]$

$$\left|\int_{x'}^{x''} f(y)\,dy\right| \leqq \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 K(x_2-z)^\tau L(B) \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2}\varepsilon K\frac{\Delta x}{x_1}(x_2-z)^\tau L(B) \leqq \frac{1}{2}\varepsilon K(x_2-z)^{\tau-1}L(B)\,\Delta x \leqq \tag{3.26}$$

$$\leqq \varepsilon\Big(\Delta x \int_{x_1-z}^{x_2-z} |f(x)|^2\,dx\Big)^{1/2}.$$

Nach Normierung und einfachen Substitutionen läßt sich jetzt Satz 2.8 mit $a=\Delta x$, $b=\Delta y$ anwenden. Dabei geben (3. 26) und die linke Seite von (3. 21) die Voraussetzung (2. 17). Man erhält

$$|J_\nu| \leqq \gamma_1(\mathfrak{G})\,\mathrm{Max}\Big(\Delta y, \int_{y_{\nu-1}}^{y_\nu} |g(y)|\,dy\Big)\Big(\int_{x_1-y_\nu}^{x_2-y_{\nu-1}} |f(u)|^2\,du \int_{x_1-z}^{x_2-z} |f(v)|^2\,dv\Big)^{1/2} \leqq$$

$$\leqq \gamma_1(\mathfrak{G})(1+\varepsilon)\,\Delta y\Big(\int_{x_1-y_\nu}^{x_2-y_{\nu-1}} |f(u)|^2\,du \int_{x_1-z}^{x_2-z} |f(v)|^2\,dv\Big)^{1/2}.$$

In diesen Integralen ist nach (3. 23)

$$u, v \in \left[\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}\,B, B\right] \subseteqq [A, B],$$

daher ist (3. 8) anwendbar. Mit (3. 24) gibt das

$$|J_\nu| \leqq (1+\varepsilon)^3\gamma_1 K^2 \Delta y\, L^2(B)\Big(\int_{x_1-y_\nu}^{x_2-y_{\nu-1}} u^{2\tau-2}\,du \int_{x_1-z}^{x_2-z} v^{2\tau-2}\,dv\Big)^{1/2} =$$

$$= (1+\varepsilon)^3\gamma_1 K^2\,\Delta y(\Delta x)^{1/2}(\Delta x+\Delta y)^{1/2}(u_0 v_0)^{\tau-1}L^2(B)$$

mit $\gamma_1 = \gamma_1(\mathfrak{G})$, $u_0 \in [x_1 - y_\nu, x_2 - y_{\nu-1}]$, $v_0 \in [x_1 - z, x_2 - z]$. Darin ist nach (3. 21)

$$\Delta x + \Delta y \leqq \Delta x\left(1+\frac{150\varepsilon}{1-\gamma}\right).$$

Weiter geben $\Delta x \leqq 2\varepsilon B$ und (3. 23)

$$\frac{u_0}{B-y_\nu} \leqq \frac{x_2-y_{\nu-1}}{x_1-y_\nu} \leqq 1+\frac{\Delta x+\Delta y}{x_1-x_4} \leqq 1+\frac{4\Delta x}{\sqrt{\varepsilon}\,B} \leqq 1+8\sqrt{\varepsilon}\,, \tag{3.27}$$

ebenso

$$\frac{B-y_\nu}{u_0}, \frac{v_0}{B-z}, \frac{B-z}{v_0} \leqq 1+\frac{\Delta x}{x_1-x_4} \leqq 1+4\sqrt{\varepsilon}\,, \tag{3.27}$$

womit wir für genügend kleines ε

$$|J_\nu| \leqq (1+\varepsilon)^3 \left(1+\frac{150\varepsilon}{1-\gamma}\right)^{1/2} (1+8\sqrt{\varepsilon})^{2|\tau-1|} \gamma_1 K^2 (B-y_\nu)^{\tau-1} (B-z)^{\tau-1} L^2(B)\,\Delta x\,\Delta y,$$

$$|J_\nu| \leqq (1+\delta)\gamma_1 K^2 (B-y_\nu)^{\tau-1} (B-z)^{\tau-1} L^2(B)\,\Delta x\,\Delta y \tag{3.28}$$

erhalten.

Im Falle II:

$$\Big(\int\limits_{x_1-z}^{x_2-z} |f(x)|^2\,dx\Big)^{1/2} < \frac{1}{2} K(x_2-z)^{\tau-1} L(B)\,(\Delta x)^{1/2}$$

genügt die Cauchy—Schwarzsche Ungleichung statt der Anwendung von Satz 2. 8:

$$|J_\nu| \leqq \int\limits_{y_{\nu-1}}^{y_\nu} |g(y)| \Big(\int\limits_{x_1-y}^{x_2-y} |f(u)|^2\,du \int\limits_{x_1-z}^{x_2-z} |f(v)|^2\,dv\Big)^{1/2} dy \leqq$$

$$\leqq \int\limits_{y_{\nu-1}}^{y_\nu} |g(y)|\,dy \Big(\int\limits_{x_1-y_\nu}^{x_2-y_{\nu-1}} |f(u)|^2\,du \int\limits_{x_1-z}^{x_2-z} |f(v)|^2\,dv\Big)^{1/2} \leqq$$

$$\leqq (1+\varepsilon)\Delta y \Big(\int\limits_{x_1-y_\nu}^{x_2-y_{\nu-1}} |f(u)|^2\,du\Big)^{1/2} \frac{1}{2} K(x_2-z)^{\tau-1} L(B)\,(\Delta x)^{1/2}.$$

Wie im Falle I gibt das weiter

$$|J_\nu| \leqq (1+\delta)\cdot\tfrac{1}{2} K^2 (B-y_\nu)^{\tau-1} (B-z)^{\tau-1} L^2(B) \Delta x \Delta y.$$

und damit (3. 28) auch im Falle II.

Nun ist über ν zu summieren. Wir verwenden (3. 27) (mit u_1 statt u_0):

$$\int\limits_{y_{\nu-1}}^{y_\nu} (B-y)^{\tau-1}\,dy = u_1^{\tau-1}\Delta y \geqq (1+8\sqrt{\varepsilon})^{-|\tau-1|} (B-y_\nu)^{\tau-1} \Delta y$$

$$(u_1 \in [B-y_\nu,\, B-y_{\nu-1}]),$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} (B-y_\nu)^{\tau-1} \Delta y \leqq (1+\delta) \int\limits_{x_3}^{x_4} (B-y)^{\tau-1}\,dy < (1+\delta)\frac{1}{\tau} B^\tau,$$

$$\Big|\int\limits_{x_3}^{x_4} g(y) \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x-y)\overline{f(x-z)}\,dx\,dy\Big| \leqq \sum_{r=1}^{n} |J_\nu(z)| \leqq$$

$$\leqq (1+\delta)^2 \gamma_1 K^2 \frac{1}{\tau} B^\tau (B-z)^{\tau-1} L^2(B)\,\Delta x.$$

Um jetzt in (3. 20) auch die Integration nach z durchzuführen zerlegt man $[x_3, x_4]$ wieder durch die J_ν. Dabei wird

$$\int_{y_{\nu-1}}^{y_\nu} |g(z)|\,(B-z)^{\tau-1}\,dz = \int_{y_{\nu-1}}^{y_\nu} |g(z)|\,dz \leqq (1+\varepsilon)\,\Delta y\,(B-z'_\nu)^{\tau-1} \leqq$$

$$\leqq (1+\varepsilon)\left(1+4\sqrt{\varepsilon}\right)^{|\tau-1|} \int_{y_{\nu-1}}^{y_\nu} (B-z)^{\tau-1}\,dz\,(B-z'_\nu)^{\tau-1}, \quad z'_\nu \in [y_{\nu-1}, y_\nu],$$

$$\int_{x_3}^{x_4} |g(z)|\,(B-z)^{\tau-1}\,dz \leqq (1+\delta)\int_{x_3}^{x_4}(B-z)^{\tau-1}\,dz \leqq (1+\delta)\frac{1}{\tau}B^\tau.$$

Damit haben wir endlich

$$\int_{x_1}^{x_2} |I_3(x)|^2\,dx \leqq (1+\delta)^3\gamma_1 K^2 B^{2\tau} L^2(B)\,\Delta x. \tag{3.29}$$

Setzt man (3. 29) bei (3. 19) ein und berücksichtigt noch

$$\int_{x_1}^{x_2} x^{2\tau-2} L^2(x)\,dx \geqq (1-\delta) B^{2\tau-2} L^2(B)\,\Delta x,$$

so erhält man wegen $\gamma_1 < \gamma_2$ für genügend kleines δ die Behauptung (3. 9). Damit sind Hilfssatz 3. 2 und Satz 3. 1 bewiesen unter der Voraussetzung (3. 5. 1).

3. 4. Beweis von Satz 3. 1 mit (3. 5. 2) für $\tau \geqq 1$. Es handelt sich darum, Hilfssatz 3. 2 mit dieser abgeschwächten Voraussetzung zu beweisen. Wir folgen den obigen Beweis im wesentlichen bis Formel (3.28). Da aber (3.22) ohne (3. 5. 1) nicht zu bekommen ist, kann nach der Anwendung von Satz 2. 8 der Faktor Max $\left(\Delta y, \int_{y_{\nu-1}}^{y_\nu} |g(y)|dy\right)$ nicht durch $(1+\varepsilon)\Delta y$ ersetzt werden. Wir haben also nur

$$|I_\nu| \leqq (1+\delta)\gamma_1 K^2 (B-y_\nu)^{\tau-1}(B-z)^{\tau-1} L^2(B)\Delta x \text{ Max } (\Delta y, G_\nu)$$

mit

$$G_\nu := \int_{y_{\nu-1}}^{y_\nu} |g(y)|\,dy$$

statt (3. 28). Diese Schranke ist auch im Fall II richtig. Sie ist aber in beiden Fällen unnötig schlecht, wenn $G_\nu \leqq \gamma_1 \Delta y$ ist, wie die triviale Abschätzung nach demMuster von Fall II zeigt:

$$\begin{aligned} |I_\nu| &\leqq G_\nu\left(\int_{x_1-y_\nu}^{x_2-y_{\nu-1}} |f(u)|^2\,du \int_{x_1-z}^{x_2-z} |f(v)|^2\,dv\right)^{1/2} \leqq \\ &\leqq (1+\delta)K^2(B-y_\nu)^{\tau-1}(B-z)^{\tau-1}L^2(B)\,\Delta x\, G_\nu. \end{aligned} \tag{3.28.1}$$

Wird

$$F(u):=\begin{cases} u & \text{für} \quad 0 \leqq u \leqq \gamma_1 \Delta y, \\ \gamma_1 \Delta y & \text{für} \quad \gamma_1 \Delta y \leqq u \leqq \Delta y, \\ \gamma_1 u & \text{für} \quad \Delta y \leqq u \end{cases}$$

gesetzt, so ist also

$$|I_\nu| \leqq (1+\delta) K^2 (B-y_\nu)^{\tau-1} (B-z)^{\tau-1} L^2(B) \Delta x F(G_\nu).$$

Ist B und damit $y_0 = x_3$ genügend groß, so gibt (3. 5. 2)

$$\sum_{\nu=1}^{\mu} G_\nu \leqq \int_0^{y_n} |g(y)|\, dy \leqq (1+\varepsilon) y_\mu \quad \text{für} \quad \mu = 1, 2, \ldots, n.$$

Um jetz

$$H_\mu := \sum_{\nu=1}^{\mu} F(G_\nu)$$

abzuschätzen, zerlegen wir die Summe folgendermaßen:

$$\sum_{\nu=1}^{\mu} F(G_\nu) = \gamma_1 \sum_{\nu=1}^{\mu} G_\nu + \sum_{G_\nu \leqq \gamma_1 \Delta y} (1-\gamma_1) G_\nu + \sum_{\gamma_1 \Delta y < G_\nu \leqq \Delta y} \gamma_1 (\Delta y - G_\nu).$$

Jeder Summand der zweiten oder dritten Summe rechts ist $\leqq \gamma_1(1-\gamma_1)\Delta y$. Damit wird

$$H_\mu \leqq \gamma_1 \sum_1^{\mu} G_\nu + \mu \gamma_1 (1-\gamma_1) \Delta y \leqq \gamma_1 (1+\varepsilon) y_\mu + \gamma_1 (1-\gamma_1) y_\mu,$$
$$H_\mu \leqq \gamma_1 (2-\gamma_1+\varepsilon) y_\mu.$$

Dies läßt sich durch partielle Summation zur Abschätzung von $\sum |J_\nu|$ verwenden. Dabei ist $\tau \geqq 1$ zu beachten:

$$\sum_{\nu=1}^{n} (B-y_\nu)^{\tau-1} F(G_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \big((B-y_\nu)^{\tau-1} - (B-y_{\nu+1})^{\tau-1}\big) H_\nu + (B-y_n)^{\tau-1} H_n \leqq$$

$$\leqq \gamma_1 (2-\gamma_1+\varepsilon) \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} \big((B-y_\nu)^{\tau-1} - (B-y_{\nu+1})^{\tau-1}\big) y_\nu + (B-y_n)^{\tau-1} y_n \right) =$$

$$= \gamma_1 (2-\gamma_1+\varepsilon) \left((B-y_1)^{\tau-1} y_0 + \sum_{\nu=1}^{n} (B-y_\nu)^{\tau-1} \Delta y \right) \leqq$$

$$\leqq \gamma_1 (2-\gamma_1+\varepsilon) \left(B^{\tau-1} \Delta x + \int_{x_3}^{x_4} (B-y)^{\tau-1}\, dy \right) \leqq$$

$$\leqq \gamma_1 (2-\gamma_1+\varepsilon) \left(2\varepsilon B^\tau + \frac{1}{\tau} B^\tau \right) \leqq (1+\delta) \gamma_1 (2-\gamma_1) \frac{1}{\tau} B^\tau.$$

Analog läßt sich (3. 5. 2) durch partielle Integration ausnützen, um

$$\int_{x_3}^{x_4} |g(z)|\,(B-z)^{\tau-1}\,dz \leqq (1+\varepsilon)\frac{1}{\tau}B^{\tau}$$

zu zeigen. Im übrigen geht der Beweis wie bei der Annahme (3. 5. 1) zu Ende.

3. 5. Beweis von Zusatz 3. 1. 1. Ein Unterschied ergibt sich nur bei der Abschätzung der $I_\nu(z)$. Man zerlegt: $I_\nu = I_{\nu 1} + I_{\nu 2}$, wobei $I_{\nu 1}$ mit g_1 und $I_{\nu 2}$ mit g_2 gebildet ist. Die Abschätzung von $I_{\nu 1}$ ist die alte, $I_{\nu 2}$ wird trivial abgeschätzt, etwa wie I_ν beim Beweis von (3. 28. 1). Statt G_ν treten dabei

$$G_{\nu 2} := \int_{y_{\nu-1}}^{y_\nu} |g_2(y)|\,dy$$

auf. Für genügend großes B ist aber nach (3. 3. 1)

$$G_{\nu 2} \leqq \int_0^{x_4} |g_2(y)|\,dy \leqq \varepsilon^3 x_4 \leqq \varepsilon^2 \Delta x \leqq \varepsilon \Delta y.$$

3. 6. Asymptotik mit Hauptglied. SATZ 3. 3. *Für die reell- oder komplexwertigen Funktionen f und g gelte mit einer Konstanten $\tau > 0$*

$$xf(x) = \tau \int_0^x f(x-y)g(y)\,dy + o\big(x^{\tau}|L(x)|\big); \tag{3.30}$$

$$x^{-\tau}\int_0^x f(y)\,dy \sim L(x), \qquad L(x) \text{ oszilliert langsam}, \tag{3.31}$$

$$\int_0^x g(y)\,dy \sim x, \tag{3.32}$$

$$\int_0^x |g(y)|\,dy \sim x. \tag{3.33}$$

Dabei sei f auf jedem endlichen Intervall L^2-integrierbar, und g sei beschränkt und L-meßbar. Dann ist

$$f(x) \sim \tau x^{\tau-1}L(x) \quad \textit{für} \quad x \to \infty.$$

BEWEIS. Es soll Satz 3. 1 mit Zusatz 3. 1. 1 auf

$$f_1(x) := f(x) - \tau x^{\tau-1}L(x)$$

angewendet werden. Da g beschränkt ist (etwa $|g| \leqq G$) und mit L auch $|L|$ langsam oszilliert, ist nach (3. 12)

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\varepsilon x} \tau y^{\tau-1}L(y)g(x-y)\,dy\right| &\leqq G\int_0^{\varepsilon x} \tau y^{\tau-1}|L(y)|\,dy \sim \\ &\sim G(\varepsilon x)^{\tau}|L(\varepsilon x)| \sim G(\varepsilon x)^{\tau}|L(x)|.\end{aligned} \tag{3.34}$$

Anderseits wird, da $L(y)/L(x)$ in $[\varepsilon x, x]$ gleichmäßig gegen 1 strebt,

$$(3.35)\qquad \int_{\varepsilon x}^{x} \tau y^{\tau-1} L(y) g(x-y)\, dy = L(x) \int_{\varepsilon x}^{x} \tau y^{\tau-1} g(x-y)\, dy + o(x^{\tau}|L(x)|).$$

Für das Integral rechterhand bekommt man mit partieller Integration aus (3. 32)

$$\int_{\varepsilon x}^{x} \tau y^{\tau-1} g(x-y)\, dy \sim (1-\varepsilon^{\tau}) x^{\tau}$$

Mit (3. 34) und (3. 35) gibt das

$$(3.36)\qquad \int_{0}^{x} \tau y^{\tau-1} L(y) g(x-y)\, dy \sim x^{\tau} L(x).$$

Nimmt man für g speziell die Konstante 1, so folgt wieder (3. 12), jetzt aber auch für komplexwertiges L.

Mit (3. 36) und (3. 12) folgen aus (3. 30) und (3. 31) sofort die Voraussetzungen (3. 1) und (3. 2) von Satz 3. 1 für f_1 statt f und $|L|$ statt L. Statt (3. 1) erscheint sogar die schärfere Aussage

$$x f_1(x) = \tau \int_{0}^{x} f_1(x-y) g(y)\, dy + o(x^{\tau}|L(x)|).$$

Für g verwenden wir die Zerlegung $g = g_1 + g_2$ mit

$$g_1 := |g|, \quad g_2 := g - |g|.$$

Aus (3. 32) entnehmen wir

$$\int_{0}^{x} \operatorname{Re} g(y)\, dy \sim x.$$

Mit der Ungleichung

$$(3.37)\qquad |z-r|^2 \leqq 2r(r - \operatorname{Re} z) \quad \text{für} \quad |z| \leqq r$$

folgt daraus (3. 3. 1):

$$\int_{0}^{x} |g_2(y)|\, dy \leqq \int_{0}^{x} |2g(y)|^{1/2} (|g(y)| - \operatorname{Re} g(y))^{1/2}\, dy \leqq$$

$$\leqq \Big(\int_{0}^{x} 2|g(y)|\, dy\Big)^{1/2} \Big(\int_{0}^{x} (|g(y)| - \operatorname{Re} g(y))\, dy\Big)^{1/2} = O(x^{1/2}) o(x^{1/2}) = o(x).$$

Aus Satz 3. 1 und dem Zusatz erhält man also $f_1(x) = o(x^{\tau-1}|L(x)|)$, d.h.

$$f(x) = \tau x^{\tau-1} L(x) + o(x^{\tau-1}|L(x)|).$$

4. Beweise der Sätze aus 1. 2 für exponentiell multiplikative Funktionen

Bei dieser speziellen Klasse von multiplikativen Funktionen, für die stets

(4. 1) $$\lambda(p^\nu) = \frac{1}{\nu!}\lambda(p)^\nu$$

ist, anders ausgedrückt

(4. 2) $$\sum_n \frac{\lambda(n)}{n^s} = e^{\sum\limits_p \frac{1}{p^s}\lambda(p)},$$

verläuft der weitere Beweis am natürlichsten. Unmittelbar aus (4. 1) oder durch Differentiation und Koeffizientenvergleich aus (4. 2) findet man nämlich

(4. 3) $$\lambda(n)\log n = \sum_{p/n} \lambda\left(\frac{n}{p}\right)\lambda(p)\log p.$$

Bei allen anderen multiplikativen Funktionen enthält die entsprechende Formel störende weitere Glieder (s. I (35)).

Wir übernehmen aus I die Bezeichnungen

$$M(x) := \sum_{n\leqq x}\lambda(n), \quad m(x) := \sum_{n\leqq x}\frac{1}{n}\lambda(n), \quad l(x) := \sum_{n\leqq x}\lambda(n)\log n$$

und setzen noch

$$k(\xi) := \sum_{\log p\leqq\xi}\frac{\log p}{p}\lambda(p), \quad f(\xi) := e^{-\xi}M(e^\xi), \quad L(\xi) := \xi^{-\tau}m(e^\xi).$$

Die mit λ^*, λ_1 usw. entsprechend gebildeten Summen mögen $M^*(x)$, $M_1(x)$ usw. heißen. Ferner sei stets

$$\xi: = \log x, \quad \eta: = \log y.$$

4. 1. Hilfssätze über $\sum \frac{1}{n}\lambda(n)$. HILFSSATZ 4. 1. *Ist λ exponentiell multiplikativ, $\lambda\geqq 0$ und*

(4. 4) $$k(\xi)\sim\tau\xi \quad \textit{mit} \quad \tau>0,$$

so oszilliert $L(\xi)=\xi^{-\tau}m(e^\xi)$ langsam und es gilt

(4. 5) $$m(x)\sim\frac{1}{\Gamma(1+\tau)}e^{-c\tau+\sum\limits_{p\leqq x}\frac{1}{p}\lambda(p)}.$$

Das sind im wesentlichen I Hilfssatz 4 und I Hilfssatz 6. Die in I verwendete Voraussetzung I (3) über die $\lambda(p^\nu)$ $(\nu\geqq 2)$ ist bei exponentiell multiplikativen Funktionen entbehrlich: Aus (4. 3) erhält man

$$\sum_{m\leqq x}\frac{\lambda(m)}{m}\log m = \sum_{n\cdot p\leqq x}\frac{\lambda(n)}{n}\frac{\lambda(p)}{y}\log p,$$

weiter mit (4. 4)

$$\int_1^x \log y \, dm(y) = \sum_{n \leqq x} \frac{\lambda(n)}{n} \left(\tau \log \frac{x}{n} + o(\log x) \right) =$$

$$= \tau \int_1^x \log \frac{x}{y} \, dm(y) + o(m(x) \log x),$$

und nach partieller Integration

$$m(x) \log x \sim (1+\tau) \int_1^x m(y) d \log y.$$

Das ist I (41). Im übrigen kann der Beweis aus I genommen werden.

HILFSSATZ 4. 2. *Sind λ und λ^* exponentiell multiplikativ, ist $|\lambda^*| \leqq \lambda$, gelten* (4. 4) *und*

$$\sum_p \frac{1}{p} (\lambda(p) - \operatorname{Re} \lambda^*(p)) < \infty, \tag{4. 6}$$

so ist $L^*(\xi) = \xi^{-\tau} m^*(e^\xi)$ langsam oszillierend und es gilt

$$m^*(x) \sim \frac{1}{\Gamma(1+\tau)} e^{-c\tau + \sum_{p \leqq x} \frac{1}{p} \lambda^*(p)}, \tag{4. 7}$$

sowie

$$\frac{|L^*(\xi)|}{L(\xi)} \to e^{-\sum_p \frac{1}{p} (\lambda(p) - \operatorname{Re} \lambda^*(p))} \neq 0. \tag{4. 8}$$

Die im Vergleich zu Hilfssatz 4. 1 notwendigen Aenderungen im Beweis sind in I 2. 5. 1 angegeben. Für exponentiell multiplikative Funktionen fällt I (23) mit (4. 6) zusammen.

Aus (4. 5) und (4. 7) folgt (4. 8).

HILFSSATZ 4. 3. *Sind λ und λ^* exponentiell multiplikativ, ist $|\lambda^*| \leqq \lambda$, gelten* (4. 4) *und*

$$\sum_p \frac{1}{p} (\lambda(p) - \operatorname{Re} \lambda^*(p)) = \infty, \tag{4. 9}$$

so ist

$$m^*(x) = o(m(x)).$$

Das ist ein Spezialfall von I Hilfssatz 7. Die Bedingung I (43) ist wegen Hilfssatz 4. 1 erfüllt:

$$m(cx) \sim m(x) \quad (x \to \infty, \ c > 0). \tag{4. 10}$$

4. 2. Wir benötigen ferner die einfachen Abschätzungen

$$M(x) = o(xm(x)), \tag{4. 11}$$

$$l(x) = M(x) \log x + o(xm(x)), \tag{4. 12}$$

die z.B. unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 4. 1 gelten.

BEWEIS. Aus

$$M(x) = \sum_{n \leqq x} \lambda(n) \leqq x \sum_{n \leqq x} \frac{\lambda(n)}{n} = xm(x)$$

folgt zuerst für beliebiges $\varepsilon > 0$

$$M(\varepsilon x) \leqq \varepsilon x\, m(\varepsilon x) \leqq \varepsilon x\, m(x).$$

Mit (4. 10) sieht man anderseits

$$M(x) - M(\varepsilon x) \leqq x \sum_{\varepsilon x < n \leqq x} \frac{1}{n} \lambda(n) = x\big(m(x) - m(\varepsilon x)\big) = o\big(xm(x)\big).$$

Das beweist (4. 11). Damit wird weiter

$$l(x) = \int_1^x \log y\, d\, M(y) = M(x) \log x - \int_1^x \frac{M(y)}{y}\, dy =$$

$$= M(x) \log x + \int_1^x o\big(m(x)\big)\, dy = M(x) \log x + o\big(xm(x)\big).$$

Ist $|\lambda^*| \leqq \lambda$, so folgt auch

(4. 13) $$M^*(x) = o\big(x\, m(x)\big),$$

(4. 14) $$l^*(x) = M^*(x) \log x + o\big(x\, m(x)\big),$$

denn offenbar ist $|M^*(x)| \leqq M(x)$ und

$$|M^*(x) \log x - l^*(x)| = \left| \sum_{n \leqq x} \lambda^*(n) \log \frac{x}{n} \right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{n \leqq x} \lambda(n) \log \frac{x}{n} = M(x) \log x - l(x).$$

4. 3. Die asymptotische Faltungsgleichung. Wir setzen in diesem Abschnitt λ und λ^* exponentiell multiplikativ, $|\lambda^*(p)| \leqq \lambda(p) \leqq G$ und (4. 4) voraus.

Aus (4. 3) folgt

$$\sum_{m \leqq x} \lambda(m) \log m = \sum_{np \leqq x} \lambda(n) \lambda(p) \log p = \sum_{p \leqq x} M\left(\frac{x}{p}\right) \lambda(p) \log p =$$

$$= \int_1^x M\left(\frac{x}{y}\right) y d \sum_{p \leqq y} \frac{\log p}{p} \lambda(p).$$

Führt man hier e^ξ und e^η statt x und y ein und dividiert durch $x = e^\xi$, so erhält man rechterhand

$$\int_1^x M\left(\frac{x}{y}\right) \frac{y}{x} d \sum_{p \leqq y} \frac{\log p}{p} \lambda(p) = \int_0^\xi f(\xi - \eta)\, dk(y).$$

Wegen (4. 12) hat man linkerhand

$$\frac{1}{x}\,l(x)=\xi f(\xi)+o\big(m(e^{\xi})\big)=\xi f(\xi)+o\big(\xi^{\tau}L(\xi)\big).$$

Zusammengibt das

$$\xi f(\xi)=\int\limits_0^{\xi} f(\xi-\eta)\,dk(y)+o\big(\xi^{\tau}L(\xi)\big).^{*} \tag{4. 15}$$

Ebenso, mit (4. 14) statt (4. 12), folgt

$$\xi f^{*}(\xi)=\int\limits_0^{\xi} f^{*}(\xi-\eta)\,dk^{*}(\eta)+o\big(\xi^{\tau}L(\xi)\big). \tag{4. 16}$$

Daß die Stieltjes-Integrale nicht existieren, wenn $k(\eta)$ und $f(\xi-\eta)$ gemeinsame Unstetigkeitsstellen haben, ist unerheblich, da dies nur für $\xi=\log n$, $n=1, 2, \dots$ vorkommen kann.

4. 4. Nun soll $k(\xi)$ durch eine stückweise lineare Funktion $h(\xi)$ ersetzt werden. Dazu wählen wir

$$\xi_0=0<\xi_1<\xi_2<\dots$$

so, daß gilt

$$\xi_\nu\to\infty,\quad \xi_\nu-\xi_{\nu-1}\to 0,\quad \xi_\nu(\xi_\nu-\xi_{\nu-1})\to\infty, \tag{4. 17}$$

und definieren $h(\xi)$ durch lineare Interpolation von $k(\xi)$ in den Intervallen $[\xi_{\nu-1}, \xi_\nu]$.

Aus der Selberg-Formel

$$\sum_{p\le x}\log^2 p+\sum_{pq\le x}\log p\log q=2x\log x+O(x)$$

folgt bekanntlich leicht

$$\sum_{x_1<p\le x_2}\log p\le 2(x_2-x_1)+O\left(\frac{x_2}{\log x_2}\right),$$

was hier wegen $\lambda(p)\le G$ und (4. 17)

$$\sum_{\xi_{\nu-1}<\log p\le\xi_\nu}\frac{\log p}{p}\,\lambda(p)\le 2Ge^{-\xi_{\nu-1}}(e^{\xi_\nu}-e^{\xi_{\nu-1}})+O\left(\frac{1}{\xi_\nu}\right)\le$$

$$\le\big(2G+o(1)\big)(\xi_\nu-\xi_{\nu-1})\qquad(\nu\to\infty)$$

liefert. Damit ist einerseits

$$0\le h'(\xi)\le 2G+o(1)\qquad(\xi\to\infty,\ \xi\ne\xi_\nu) \tag{4. 18}$$

* Zusatz nach Fertigstellung des Manuskripts. Das Restglied läßt sich vermeiden, wenn man $k_1(\xi):=k(\xi)-e^{-\xi}$ verwendet. Man erhält dann statt (4. 15) die Identität

$$\xi f(\xi)=\int\limits_0^{\xi} f(\xi-\eta)\,dk_1(\eta).$$

gezeigt, anderseits ist

$$|k(\xi)-h(\xi)| \leqq \sum_{\xi_{\nu-1}<\log p\leqq\xi_\nu} \frac{\log p}{p}\lambda(p) = O(\xi_\nu-\xi_{\nu-1}) \quad \text{für} \quad \xi\in[\xi_{\nu-1}, \xi_\nu],$$

$$k(\xi) = h(\xi)+o(1) \quad (\xi\to\infty). \tag{4. 19}$$

Es ist nun

$$H := \int_0^{\xi} f(\xi-\eta)\, d\big(k(\eta)-h(\eta)\big)$$

abzuschätzen. Wegen $f(0-)=k(0)=h(0)=0$ ist auch

$$H := \int_0^{\xi} \big(k(\xi-\eta)-h(\xi-\eta)\big)\, df(\eta).$$

Setzen wir

$$k(\xi)-h(\xi) =: r(e^{\xi}),$$

so ist wegen (4. 19)

$$|r(x)|\leqq\varepsilon \quad \text{für} \quad x\geqq x_0(\varepsilon)$$

und im übrigen etwa $|r(x)|\leqq R$. Beachtet man

$$\int_{-1}^{x} \frac{1}{y}\, d\,M(y) = m(x),$$

$$\int_1^x \frac{1}{y^2}M(y)\,dy = -\int_1^x M(y)\,d\frac{1}{y} = \int_1^x \frac{1}{y}\,d\,M(y)-\frac{1}{x}M(x) = m(x)+o\big(m(x)\big), \tag{4. 20}$$

so findet man

$$|H| = \left|\int_1^x r\left(\frac{x}{y}\right) d\frac{M(y)}{y}\right| = \left|\int_1^x r\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{1}{y}\,dM(y)-\frac{M(y)}{y^2}\,dy\right)\right| \leqq$$

$$\leqq \varepsilon\int_1^x \left(\frac{1}{y}\,dM(y)+\frac{M(y)}{y^2}\,dy\right)+R\int_{\frac{x}{x_0}}^x\left(\frac{1}{y}\,dM(y)+\frac{M(y)}{y^2}\,dy\right) =$$

$$= 2\varepsilon m(x)+o\big(m(x)\big)+2R\left(m(x)-m\left(\frac{x}{x_0}\right)\right).$$

Nimmt man noch (4. 10) dazu, so folgt

$$H=o\big(m(x)\big). \tag{4. 21}$$

4. 5. Beweis von Satz 1. 1 für exponentiell multiplikatives λ. Aus (4. 15) wird mit (4. 21).

$$\xi f(\xi) = \int_0^{\xi} f(\xi-\eta)h'(\eta)\,d\eta + o\big(\xi^{\tau}L(\xi)\big).$$

Indem wir

$$g(\xi)=\frac{1}{\tau}h'(\xi)$$

setzen, geben wir der Funktionalgleichung die Gestalt (3. 30):

$$\xi f(\xi)=\tau\int_0^\xi f(\xi-\eta)g(\eta)\,d\eta+o\big(\xi^\tau L(\xi)\big).$$

Schreiben wir (4. 20) in der Form

$$\int_0^\xi f(\eta)\,d\eta\sim m(e^\xi)=\xi^\tau L(\xi),$$

worin $L(\xi)$ nach Hilfssatz 4. 1 langsam oszilliert, so haben wir (3. 31). Wegen $g\geqq 0$ fallen (3. 32) und (3. 33) zusammen und folgen aus (4. 19) und (4. 4):

$$\int_0^\xi g(\eta)\,d\eta=\frac{1}{\tau}h(\xi)=\frac{1}{\tau}k(\xi)+o(1)\sim\xi.$$

Nun folgt nach Satz 3. 3

$$f(\xi)\sim\tau\xi^{\tau-1}L(\xi),$$

das ist

$$M(x)\sim\frac{\tau x}{\xi}m(x).$$

Zusammen mit (4. 5) gibt das die Behauptung von Satz 1. 1.

4. 6. Beweis der Sätze 1. 2 und 1. 2. 1 für exponentiell multiplikative Funktionen. Wie $k(\xi)$ in 4. 4 werde nun auch $k^*(\xi)$ in den Intervallen $[\xi_{\nu-1},\xi_\nu]$ linear interpoliert. Dies so gebildete Funktion heiße $h^*(\xi)$. Wie in 4. 4 folgt $k^*=h^*+o(1)$, $H^*=o\big(m(x)\big)$ und mit

$$g^*(\xi):=\frac{1}{\tau}h^*(\xi)$$

wird

$$\xi f^*(\xi)=\tau\int_0^\xi f^*(\xi-\eta)g^*(\eta)\,d\eta+o\big(\xi^\tau L(\xi)\big). \tag{4.22}$$

Für $\xi\in(\xi_{\nu-1},\xi_\nu)$ ist

$$|h^*(\xi)|\,(\xi_\nu-\xi_{\nu-1})=\left|\sum_{\xi_{\nu-1}<\log p\leqq\xi_\nu}\frac{\log p}{p}\lambda^*(p)\right|\leqq$$

$$\leqq\sum_{\xi_{\nu-1}<\log p\leqq\xi}\frac{\log p}{p}\lambda(p)=h'(\xi)(\xi_\nu-\xi_{\nu-1})$$

also

$$|g^*(\xi)|\leqq g(\xi). \tag{4.23}$$

Im Gegensatz zu 4. 4, wo die Selberg-Formel genügte, um $g(\xi)$ abzuschätzen, würde im folgenden der Faktor 2 stören.* Zum Beweis von Satz 1. 2 verwenden wir statt dessen den Primzahlsatz in der Form

$$\sum_{\log p \leqq \xi} \frac{\log p}{p} = \xi - C + O\left(\frac{1}{\xi}\right).$$

Das gibt mit (4. 17)

$$\sum_{\xi_{\nu-1} < \log p \leqq \xi_\nu} \frac{\log p}{p} = \xi_\nu - \xi_{\nu-1} + O\left(\frac{1}{\xi_\nu}\right) = (\xi_\nu - \xi_{\nu-1})(1+o(1)) \leqq (\xi_\nu - \xi_{\nu-1})(1+\varepsilon),$$

für beliebiges $\varepsilon > 0$ und genügend großes ν.

Aus $\lambda^*(p) \in \tau\mathfrak{G}$ folgt auf Grund der Konvexität von $\mathfrak{G}$

$$\sum \frac{\log p}{p} \lambda^*(p) \in \left(\tau \sum \frac{\log p}{p}\right) \mathfrak{G},$$

$$g^*(\xi) = \frac{1}{\tau(\xi_\nu - \xi_{\nu-1})} \sum_{\xi_{\nu-1} < \log p \leqq \xi_\nu} \frac{\log p}{p} \lambda^*(p),$$

$$g^*(\xi) \in (1+\varepsilon)\mathfrak{G} \quad \text{für genügend großes} \quad \xi.$$

Dieselbe Relation können wir aus den Voraussetzungen von Satz 1. 2. 1 bekommen. Die ξ_ν müssen dafür nur so gewählt werden, daß $\xi_\nu - \xi_{\nu-1}$ genügend langsam gegen 0 strebt. Dafür sei zunächst (ε_k) eine beliebige monotone Nullfolge $(\varepsilon_k > 0)$. Wegen (1. 1) lassen sich $\zeta_k \geqq \varepsilon_k^{-2}$ finden, so daß

$$\sum_{\xi < \log p \leqq \xi + \varepsilon_k} \frac{\log p}{p} \lambda(p) \leqq \varepsilon_k (1+\varepsilon) \quad \text{für} \quad \xi \geqq \zeta_k$$

gilt. Bilden wir dann die ξ_ν gemäß

$$\xi_{\nu+1} = \xi_\nu + \varepsilon_k \quad \text{für} \quad \xi_\nu \in [\zeta_k, \zeta_{k+1}),$$

so folgt

$$\sum_{\xi_{\nu-1} < \log p \leqq \xi_\nu} \frac{\log p}{p} \lambda(p) \leqq (\xi_\nu - \xi_{\nu-1})(1+\varepsilon) \quad \text{für} \quad \xi_{\nu-1} \geqq \zeta_1.$$

Mit $\lambda^*(p) \in \lambda(p)\mathfrak{G}$ liefert nun die Konvexität von $\mathfrak{G}$

$$\sum \frac{\log p}{p} \lambda^*(p) \in \left(\sum \frac{\log p}{p} \lambda(p)\right) \mathfrak{G}$$

und es folgt wieder

(4. 24) $$g^*(\xi) \in (1+\varepsilon)\mathfrak{G} \quad \text{für genügend großes} \quad \xi.$$

* Ist g reellwertig, $\mathfrak{G} = \left[-\frac{1}{\tau} G, +\frac{1}{\tau} G\right]$, so ist $\tilde{r}(2\mathfrak{G}) = \tilde{r}(\mathfrak{G}) = 0$. Zum Beweis von Satz 1. 2. 2 wird der Primzahlsatz daher nicht benötigt. Wir bemerken dies, weil der Primzahlsatz (nämlich $\sum_{n \leqq x} \mu(n) = o(x)$) in Satz 1. 2. 2 enthalten ist.

Von hier an fallen die Beweise von Satz 1. 2 und Satz 1. 2. 1 wieder zusammen. Wegen $\tilde{r}(\mathfrak{G})<1$ läßt sich ε so klein wählen, daß auch noch

$$\tilde{r}((1+\varepsilon)\mathfrak{G}) < 1 \tag{4.25}$$

ist.

Analog (4. 20) ist

$$\begin{aligned}\int_0^{\xi} f^*(\eta)\,d\eta = \int_0^x \frac{1}{y^2} M^*(y)\,dy = m^*(x) - \frac{1}{x} M^*(x) = \\ = m^*(x) + o(m(x)).\end{aligned} \tag{4.26}$$

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden.

4. 61. Es gelte (4. 9). Wir wenden Satz 3. 1 auf f^* und g^* an. Mit (4. 22) ist (3. 1) gezeigt. Aus (4. 26) folgt (3. 2) mit Hilfssatz 4. 3. Daß $L(\xi)$ langsam oszilliert, sagt Hilfssatz 4. 1. Für (3. 3) und (3. 4) haben wir (4. 24) und (4. 25) gezeigt. Daß (3. 3) nur für genügend große ξ gilt, spielt nach dem Zusatz keine Rolle. Aus 4. 5 übernehmen wir

$$\int_0^{\xi} g(\eta)\,d\eta = \xi + o(\xi) \tag{4.27}$$

und schließen mit (4. 23) auf

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} |g^*(\eta)|\,d\eta \leqq \int_{\xi_1}^{\xi_2} g(\eta)\,d\eta = \xi_2 - \xi_1 + o(\xi_2).$$

also auf (3. 5. 1).

Damit ist Satz 3. 1 anwendbar und gibt

$$f^*(\xi) = o(\xi^{\tau}(\xi)),$$

das heißt

$$M^*(x) = o\left(\frac{x}{\xi} m(x)\right).$$

Da nach Satz 1. 1 aber $M(x) \sim \dfrac{\tau x}{\xi} m(x)$ ist, folgt

$$M^*(x) = o(M(x)).$$

Das ist die Behauptung von Satz 1. 2 bzw. Satz 1. 2. 1 wenn (4. 9) angenommen wird.

4. 62. Es gelte (4 6). Dann wird Satz 3. 3 auf f^* und g^* angewendet. Nach Hilfssatz 4. 2 ist

$$L(\xi) = O(|L^*(\xi)|)$$

und L^* oszilliert langsam. Damit folgt (3. 30) aus (4. 22) sowie (3. 31) aus (4. 26). Zu zeigen bleiben (3. 32) und (3. 33) mit g^* statt g.

Aus (4. 6) folgt leicht, z.B. mit partieller Integration, $\operatorname{Re} k^*(\xi) = k(\xi) + o(\xi)$, also

$$\int_0^\xi (g(\eta) - \operatorname{Re} g^*(\eta))\, d\eta = \frac{1}{\tau}\left(h(\xi) - \operatorname{Re} h^*(\xi)\right) =$$

$$= \frac{1}{\tau}\left(k(\xi) - \operatorname{Re} k^*(\xi)\right) + o(1) = o(\xi).$$

Mit (4. 27) und (3. 37) folgt weiter

$$\int_0^\xi \big||g^*(\eta)| - g^*(\eta)\big|\, dy \leqq \int_0^\xi |g(\eta) - g^*(\eta)|\, d\eta \leqq$$

$$\leqq \left(2\int_0^\xi g(\eta)\, d\eta \int_0^\xi (g(\eta) - \operatorname{Re} g^*(\eta))\, d\eta\right)^{1/2} = o(\xi),$$

also

$$\int_0^\xi g^*(\eta)\, d\eta = \int_0^\xi g(\eta)\, d\eta + o(\xi) \sim \xi,$$

$$\int_0^\xi |g^*(\eta)|\, d\eta = \int_0^\xi g^*(\eta)\, d\eta + o(\xi) \sim \xi.$$

Das sind (3. 32) und (3. 33).

Satz 3. 3 behauptet jetzt

$$f^*(\xi) \sim \tau \xi^{\tau - 1} L^*(\xi).$$

Das gibt mit Satz 1. 1 und Hilfssatz 4. 2 endlich die Behauptung von Satz 1. 2 bzw. Satz 1. 2. 1 für den Fall (4. 6):

$$\frac{M^*(x)}{M(x)} = \frac{f^*(\xi)}{f(\xi)} \sim \frac{L^*(\xi)}{L(\xi)} \to e^{-\sum_p \frac{1}{p}(\lambda(p) - \operatorname{Re} \lambda^*(p))}.$$

4. 7. Beweis von Satz 1. 1. 1 für exponentiell multiplikatives λ. Wir zeigen den Satz mit der Bezeichnung λ^* statt λ und setzen $\lambda := |\lambda^*|$. Aus (1. 13) wird dabei (4. 6). Das gibt wieder

$$\int_0^\xi (g(\eta) - \operatorname{Re} g^*(\eta))\, d\eta = o(\xi).$$

Aus (1. 3) mit λ^* statt λ folgt $\int_0^\xi g^*(\eta)\, d\eta \sim \xi$ also auch

$$\int_0^\xi \operatorname{Re} g^*(\eta)\, d\eta \sim \xi, \quad \int_0^\xi g(\eta)\, d\eta \sim \xi.$$

Wegen $\operatorname{Re} g^* \leqq |g^*| \leqq g$ enthält das (3. 33) für g^*. Weiter schließen wir wie in 4. 62 und erhalten mit Satz 3. 3 und Hilfssatz 4. 2

$$f^*(\xi) \sim \tau \xi^{\tau-1} L^*(\xi) = \frac{\tau}{\xi} m^*(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\tau)\xi} e^{-C\tau + \sum_{p \leqq x} \frac{1}{p} \lambda^*(p)}.$$

Das ist die Behauptung.

5. Vervollständigung der Beweise zu den Sätzen aus 1. 2

Wie in I sei

$$\Pi(x) := \prod_{p \leqq x} \left(1 + \frac{1}{p} \lambda(p) + \frac{1}{p^2} \lambda(p^2) + \ldots\right),$$

entsprechend Π^*, Π_1 usw. Aus λ bilden wir zwei weitere multiplikative Funktionen λ_0 und λ_1 durch

$$\sum_n \frac{\lambda_0(n)}{n^s} = e^{\sum_p \lambda(p) p^{-s}},$$

$$\sum_n \frac{\lambda_1(n)}{n^s} = e^{-\sum_p \lambda(p) p^{-s}} \sum_m \frac{\lambda(m)}{m^s}.$$

Dann ist also

$$\lambda_0(p^\nu) = \frac{1}{\nu!} \lambda(p)^\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

speziell $\lambda_0(p) = \lambda(p)$ und

$$\lambda_1(p^\nu) = \sum_{\substack{\mu, \varkappa \\ \mu + \varkappa = \nu}} \frac{(-1)^\mu}{\mu!} \lambda(p)^\mu \lambda(p^\varkappa) \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

speziell $\lambda_1(p) = 0$. λ_0 ist exponentiell multiplikativ, und λ ist das Faltprodukt von λ_0 und λ_1:

(5. 1)
$$\lambda(n) = \sum_{de = n} \lambda_0(d) \lambda_1(e).$$

Entsprechend seien λ_0^* und λ_1^* der Funktion λ^* zugeordnet.

HILFSSATZ 5. 1. *Ist die multiplikative Funktion λ nichtnegativ und gelten* (1. 11) *und*

(5. 2)
$$\sum_p \frac{1}{p^2} \lambda(p)^2 < \infty,$$

so konvergieren

$$\Pi_1(\infty) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^2} \lambda_1(p^2) + \ldots\right)$$

und

$$m_1(\infty) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n} \lambda_1(n)$$

absolut und es ist $m_1(\infty) = \Pi_1(\infty)$.

Ist $|\lambda^*|\leqq\lambda$, *so gilt das entsprechende für* $m_1^*(\infty)$ *und* $\Pi_1^*(\infty)$.

BEWEIS. Es konvergiert sogar

$$\Pi\left(1+\frac{|\lambda_1(p^2)|}{p}+\frac{|\lambda_1(p^3)|}{p^3}+\dots\right)$$

wie man aus

$$\sum_{\substack{p,\,\nu\\ \nu\geqq 2}}\frac{|\lambda_1(p^\nu)|}{p^\nu}\leqq\sum_{\substack{p,\,\nu,\,\mu\\ \nu+\mu\geqq 2}}\frac{1}{\nu!}\,\frac{\lambda(p)^\nu\lambda(p^\mu)}{p^{\nu+\mu}}=$$

$$=\sum_p\left(\left(e^{\frac{1}{p}\lambda(p)}-1\right)\frac{\lambda(p)}{p}+e^{\frac{1}{p}\lambda(p)}-1-\frac{\lambda(p)}{p}+e^{\frac{1}{p}\lambda(p)}\sum_{\mu\geqq 2}\frac{\lambda(p^\mu)}{p^\mu}\right)=$$

$$=\sum_p\left(O\left(\frac{\lambda(p)^2}{p^2}\right)+O(1)\sum_{\mu\geqq 2}\frac{\lambda(p^\mu)}{p^\mu}\right)<\infty$$

sieht. In bekannter Weise folgt daraus die absolute Konvergenz von $m_1(\infty)$ sowie $m_1(\infty)=\Pi_1(\infty)$. Für λ^* kann man genauso schließen, wenn man

$$|\lambda_1^*(p^\nu)|=\left|\sum_{\mu+\varkappa=\nu}\frac{(-1)^\mu}{\mu!}\lambda^*(p)^\mu\lambda^*(p^\varkappa)\right|\leqq\sum_{\mu+\varkappa=\nu}\frac{1}{\mu!}\lambda(p)^\mu\lambda(p^\varkappa)$$

benützt.

HILFSSATZ 5. 2. *Gelten für* λ *die Voraussetzungen von Satz* 1. 1 *und ist* $\tau>1$, *so gibt es eine Konstante* K, *mit der*

$$\text{(5. 3)}\qquad \frac{M_0(y)}{y}\leqq K\frac{M_0(x)}{x}\quad \textit{für}\quad y\leqq x,\quad x\geqq x_0$$

gilt.

BEWEIS. Auf λ_0 läßt sicht nach 4 der Satz 1. 1 bereits anwenden. Es ist also

$$\frac{M_0(x)}{x}\sim\tau\xi^{\tau-1}L_0(\xi)$$

mit langsam oszillierendem L_0. Wegen $\tau>1$ ist

$$\left(\frac{\xi}{2}\right)^{\tau-1}L_0\left(\frac{\xi}{2}\right)<\xi^{\tau-1}L_0(\xi)\quad\text{für}\quad \xi\geqq\xi_0$$

und

$$\eta^{\tau-1}L_0(\eta)\leqq 2\xi^{\tau-1}L_0(\xi)\quad\text{für}\quad \frac{\xi}{2}\leqq\eta\leqq\xi,\quad \xi\geqq\xi_0$$

Durch Iteration der beiden Relationen folgt

$$\eta^{\tau-1}L_0(\eta)\leqq 2\xi^{\tau-1}L_0(\xi)\quad\text{für}\quad \xi_0\leqq\eta\leqq\xi.$$

Damit wird auch

$$\frac{M_0(y)}{y}\leqq K\frac{M_0(x)}{x}\quad\text{für}\quad x_0\leqq y\leqq x.$$

Eventuell mit einer größeren Konstanten gilt dies dann auch für $y\leqq x_0\leqq x$.

HILFSSATZ 5. 3. *Für die multiplikative Funktion λ gelte: $\lambda \geqq 0$, (1. 1), (1. 17) und (1. 12). Dann ist*

$$\sum_{n \leqq x} |\lambda_1(n)| = O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Ist $|\lambda^*| \leqq \lambda$, so gilt auch

$$\sum_{n \leqq x} |\lambda_1^*(n)| = O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

BEWEIS. Wegen $|\lambda(p)| \leqq G$ gilt (1. 12) auch, wenn man die Summationsbedingung $\nu \leqq 2$ fortläßt. Damit wird zunächst

$$\sum_{p^\nu \leqq x} |\lambda_1(p^\nu)| \log p^\nu \leqq \sum_{\substack{p^{\nu+\mu} \leqq x \\ \nu+\mu \geqq 2}} \frac{1}{\nu!} \lambda(p)^\nu \lambda(p^\mu) \log x \leqq$$

$$\leqq \sum_{p^\mu \leqq x} \lambda(p^\mu) e^G \log x = o(x).$$

Daraus folgt mit Hilfssatz (5. 1) ((5. 2) gilt wegen (1. 10)):

$$\sum_{n \leqq x} |\lambda_1(n)| \log n = \sum_{\substack{p^\nu \cdot m \leqq x \\ p \nmid m}} |\lambda_1(m)|\, |\lambda_1(p^\nu)| \log p^\nu \leqq$$

$$\leqq \sum_{m \leqq x} |\lambda_1(m)| \sum_{p^\nu \leqq \frac{x}{m}} |\lambda_1(p^\nu)| \log p^\nu = O\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\lambda_1(m)|}{m} x\right) = O(x).$$

Partielle Summation liefert nun die Behauptung.

Für λ^* kann genau so geschlossen werden, da auch $\sum \frac{1}{n} |\lambda_1^*(n)|$ konvergiert.

Da offenbar

$$\Pi(x) = \Pi_0(x)\Pi_1(x), \quad \Pi_0(x) = e^{\sum_{p \leqq x} \frac{1}{p} \lambda(p)}$$

ist, folgt aus Hilfssatz 5. 1 insbesondere

$$\Pi(x) \sim \Pi_0(x) m_1(\infty) \qquad (x \to \infty)$$

und entsprechend

$$\Pi^*(x) = \Pi_0^*(x)\, m_1^*(\infty) + o\big(|\Pi_0^*(x)|\big) = \Pi_0^*(x) m_1^*(\infty) + o\big(\Pi(x)\big).$$

Für λ_0 und λ_0^* statt λ und λ^* sind in 4 die Sätze 1 schon bewiesen. Um sie auch für λ und λ^* zu beweisen, brauchen wir nur noch

$$(5.\ 4) \qquad M(x) \sim M_0(x) m_1(\infty), \quad M^*(x) = M_0^*(x) m_1^*(\infty) + o\big(M(x)\big)$$

zu zeigen; dann folgt offenbar

$$M(x) \sim M_0(x) m_1(\infty) \sim \frac{e^{-c\tau}}{\Gamma(\tau)} \frac{x}{\xi} \Pi_0(x) m_1(\infty) \sim \frac{e^{-c\tau}}{\Gamma(\tau)} \frac{x}{\xi} \pi(x),$$

und

$$M^*(x) = M_0^*(x)m_1^*(\infty) + o(M(x)) = \frac{e^{-c\tau}}{\Gamma(\tau)} \frac{x}{\xi} \pi_0^*(x) m_1^*(\infty) + o(M(x)) =$$

$$= \frac{e^{-c\tau}}{\Gamma(\tau)} \frac{x}{\xi} (\Pi^*(x) + o(\Pi(x)) + o(M(x)) = \frac{e^{-c\tau}}{\Gamma(\tau)} \frac{x}{\xi} \Pi^*(x) + o(M(x)),$$

also die Behauptungen der Sätze 1. 1; 1. 2; 1. 2. 1.

Für Satz 1. 1. 1 kann man genauso schließen, nur ist es zweckmäßig, wieder die Bezeichnung von λ zu λ^* zu ändern und $|\lambda^*| = \lambda$ zu setzen.

Zum Beweis von (5. 4) gehen wir von (5. 1) aus:

$$M(x) = \sum_{n \leq x} \lambda(n) = \sum_{m, n \leq x} \lambda_0(m) \lambda_1(n) = \sum_{n \leq x} \lambda_1(n) M_0\left(\frac{x}{n}\right).$$

Nehmen wir zunächst $\tau > 1$ an. Satz 1. 1, auf λ_0 angewendet, gibt

$$M_0\left(\frac{x}{n}\right) \sim \frac{1}{n} M_0(x) \quad \text{für} \quad x \to \infty, \quad n \text{ fest}.$$

Für beliebiges festes a folgt damit

$$\sum_{n \leq a} \lambda_1(n) M_0\left(\frac{x}{n}\right) = M_0(x) \sum_{n \leq a} \frac{\lambda_1(n)}{n} + o(M_0(x)),$$

$$\left| M_0(x) m_1(\infty) - \sum_{n \leq a} \lambda_1(n) M_0\left(\frac{x}{n}\right) \right| = M_0(x) \left| \sum_{n > a} \frac{\lambda_1(n)}{n} \right| + o(M_0(x)).$$

Mit Hilfssatz 5. 2 erhalten wir anderseits für $x \geq x_0$

$$\left| \sum_{a < n \leq x} \lambda_1(n) M_0\left(\frac{x}{n}\right) \right| \leq K \sum_{n > a} \frac{1}{n} |\lambda_1(n)| M_0(x).$$

Wählt man a zu gegebenem $\varepsilon > 0$ genügend groß, so folgt mit Hilfssatz 5. 1

$$|M_0(x) m_1(\infty) - M(x)| \leq (K-1) \sum_{n > a} \frac{1}{n} |\lambda_1(n)| M_0(x) + o(M_0(x)) \leq$$

$$\leq \varepsilon M_0(x) + o(M_0(x)) \quad (x \to \infty),$$

also ist $M(x) = M_0(x) m_1(\infty) + o(M_0(x))$. Da $m_1(\infty) \neq 0$ ist, darf man das Restglied auch als $o(M(x))$ schreiben.

Für λ^* verläuft die Rechnung analog.

Die Annahme $\tau > 1$ wurde nur für Hilfssatz 5. 2 gebraucht. Also gelten die Sätze auch für $\tau = 1$ noch ohne die Voraussetzung (1. 12), falls (5. 3) gilt. Das ist z.B. der Fall, wenn $\lambda(p) = 1$ für alle p ist, allgemeiner, wenn

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \lambda(p) = \log \log x + O(1)$$

gilt.

Nun sei $0<\tau\leqq 1$. Außer (1. 11) wird dann (1. 12) vorausgesetzt. Wegen Hilfssatz 5. 3 ist

$$M_1(x) \leqq \frac{Kx}{\log x}. \tag{5.6}$$

Mit $0<\varepsilon<1$ und noch zu wählendem a betrachten wir die Zerlegung

$$M(x) = \sum_{mn\leqq x} \lambda_0(m)\lambda_1(n) = \sum_{n\leqq a} \lambda_1(m) M_0\left(\frac{x}{n}\right) +$$

$$+ \sum_{a<n\leqq x^{1-\varepsilon}} \lambda_1(n) M_0\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{n\leqq x^{\varepsilon}} \lambda_0(n)\left(M_1\left(\frac{x}{n}\right) - M_1(x^{1-\varepsilon})\right).$$

Davon ist wieder für genügend großes a

$$\left|\sum_{n\leqq a} \lambda_1(n) M_0\left(\frac{x}{u}\right) - M_0(x) m_1(\infty)\right| \leqq \varepsilon M_0(x) + o\big(M_0(x)\big). \tag{5.7}$$

Zweitens folgt mit Hilfe von Satz 1. 1, auf λ_0 angewandt, für genügend großes x

$$\begin{aligned}\sum_{a<n\leqq x^{1-\varepsilon}} |\lambda_1(n)|\, M_0\left(\frac{x}{n}\right) &\leqq 2 \sum_{a<n\leqq x^{1-\varepsilon}} \frac{|\lambda_1(n)|}{n} \left(\frac{\log \frac{x}{n}}{\log x}\right)^{\tau-1} M_0(x) \leqq \\ &\leqq 2\varepsilon^{\tau-1} M_0(x) \sum_{n>a} \frac{|\lambda_1(n)|}{n} \leqq 2\varepsilon^{\tau} M_0(x).\end{aligned} \tag{5.8}$$

Formel (5. 6), Hilfssatz 4. 1 und nochmals Satz 1. 1 geben drittens

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n\leqq x^{\varepsilon}} \lambda_0(n)\left(M_1\left(\frac{x}{n}\right) - M_1(x^{1-\varepsilon})\right)\right| &\leqq 2K \sum_{n\leqq x^{\varepsilon}} \lambda_0(n) \frac{x}{n \log \frac{x}{n}} \leqq \\ &\leqq \frac{3Kx}{\log x} m_0(x^{\varepsilon}) \leqq \frac{4Kx}{\log x} \varepsilon^{\tau} m_0(x) \sim (x \text{ groß}) \\ &\sim \frac{4K}{\tau} \varepsilon^{\tau} M_0(x) \quad (x\to\infty).\end{aligned} \tag{5.9}$$

Aus (5. 7), (5. 8) und (5. 9) insgesamt folgt

$$M(x) = M_0(x) m_1(\infty) + o\big(M_0(x)\big) = M_0(x) m_1(\infty) + o\big(M(x)\big).$$

Für λ^* geht die Rechnung wieder ganz entsprechend.

6. Ein negatives Resultat

Es soll noch gezeigt werden, daß die Bedingung $\lambda(p) \leqq G$ in Satz 1. 1 nicht beliebig abgeschwächt werden kann. Schon, wenn man die immer noch recht scharfe Forderung $\lambda(p) = O((\log\log p)^{\vartheta})$ mit einer Konstanten $\vartheta > \frac{1}{2}$ an ihre Stelle setzt, wird der Satz falsch.

SATZ 6. 1. *Ist die Funktion G positivwertig, nicht fallend und erfüllt*

$$\int_2^\infty \frac{dx}{G^2(x)x\log x} < \infty, \tag{6. 1}$$

so gibt es eine exponentiell multiplikative Funktion λ, für die

$$\sum_{p\leqq x} \frac{\log p}{p} \lambda(p) = \log x + O(1), \quad 0 \leqq \lambda(p) \leqq G(p) \tag{6. 2}$$

gilt, ohne daß $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} M(x)$ *existiert.*

BEMERKUNG. Aus (6. 2) folgt durch partielle Integration

$$\sum_{p\leqq x} \frac{1}{p} \lambda(p) = \log\log x + \text{const} + O(1).$$

Wäre Satz 1. 1 anwendbar, so würde also aus (1. 2) die Existenz von $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} M(x)$ folgen.

BEWEIS. Wir werden λ so konstruieren, daß die erzeugende Funktion

$$F(s) := \sum_n \frac{\lambda(n)}{n^s} = e^{\sum\limits_p \lambda(p)p^{-s}}$$

der Ungleichung

$$|F(1+\alpha+2\pi i)| > \frac{\text{const}}{\alpha} \quad \text{für} \quad 0 < \alpha \leqq \alpha_0$$

genügt. Das widerspricht einer Beziehung $M(x) \sim Cx$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man G in $(e^{k-\frac{1}{2}}, e^{k+\frac{1}{2}}]$ konstant annehmen ($k = 1, 2, \ldots$), denn (6. 1) bleibt bestehen, wenn man G durch G_1:

$$G_1(x) = G(e^{k-\frac{1}{2}}) \quad \text{für} \quad e^{k-\frac{1}{2}} < x \leqq e^{k+\frac{1}{2}}$$

ersetzt. Es sei also

$$G(x) = g_k \quad \text{in} \quad (e^{k-\frac{1}{2}}, e^{k+\frac{1}{2}}].$$

Dann ist (6. 1) äquivalent mit

$$\sum_1^\infty \frac{1}{kg_k^2} < \infty. \tag{6. 3}$$

Ferner dürfen wir

$$g_k = O(\log k) \tag{6. 4}$$

annehmen, weil, wenn (6. 3) gilt, auch die mit $g_{1k}:=\operatorname{Min}(g_k, \log k)$ $(k \geqq 2)$ gebildete Reihe konvergiert. Da die g_k nicht fallen, folgt aus (6. 3) $g_k > 1$ für $k \geqq k_0$. Wir setzen

$$u_k := \frac{1}{2g_k} \quad \text{für} \quad k \geqq k_0,$$

$$I_k := (e^{k-u_k}, e^{k+u_k}],$$

$$\lambda(p) := \begin{cases} g_k & \text{für} \quad p \in I_k \quad (k \geqq k_0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist eine exponentiell multiplikative Funktion λ vollständig definiert.

Zieht man den Primzahlsatz in der Form

$$\sum_{p \leqq x} \frac{\log p}{p} = \log x - C + O\left(\frac{1}{\log^2 x}\right)$$

heran, so folgt

$$\sum_{p \in I_k} \lambda(p) \frac{\log p}{p} = g_k \left(\log \frac{k+u_k}{k-u_k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) =$$

$$= g_k \left(2u_k + O\left(\frac{u_k^3}{k^3}\right) + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) = 1 + O\left(\frac{\log k}{k^2}\right),$$

also (6. 2).

Mit einigen Zwischenrechnungen findet man für $\alpha > 0$

$$\sum_{p \in I_k} \lambda(p) p^{-1-\alpha-2\pi i} = g_k \left(\int_{e^{k-u_k}}^{e^{k+u_k}} y^{-\alpha-2\pi i} \frac{1}{\log y} \, d \log y + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) =$$

$$= g_k \int_{-u_k}^{+u_k} e^{-(\alpha+2\pi i)(k+\eta)} \frac{d\eta}{k+\eta} + O\left(\frac{g_k}{k^2}\right) = \frac{1}{k} e^{-\alpha k} + O\left(\frac{1}{k g_k^2}\right) + O\left(\frac{g_k}{k^2}\right),$$

mit Restgliedern, die bezüglich α gleichmäßig sind. Wegen (6. 3) und (6. 4) gibt das

$$\sum_p \lambda(p) p^{-1-\alpha-2\pi i} = -\log(1-e^{-\alpha}) + O(1) = \log \frac{1}{\alpha} + O(1) \quad (\alpha \to 0+).$$

Damit wird nun

$$F(1+\alpha+2\pi i) = \frac{1}{\alpha} e^{O(1)},$$

$$|F(1+\alpha+2\pi i)| \geqq \frac{\text{const}}{\alpha} \quad \text{für} \quad 0 < \alpha \leqq \alpha_0. \tag{6. 5}$$

Nehmen wir jetzt entgegen der Behauptung des Satzes

$$M(x) = Cx + R(x), \quad R(x) = o(x)$$

an, so folgt für

$$F(1+\alpha+2\pi i)=\int_1^\infty y^{-1-\alpha-2\pi i}\,d\,M(y)=$$

$$=C\frac{1+\alpha+2\pi i}{\alpha+2\pi i}+(1+\alpha+2\pi i)\int_1^\infty R(y)y^{-2-\alpha-2\pi i}\,dy=$$

$$=O+(1+\alpha+2\pi i)\int_{x_0}^\infty R(y)y^{-2-\alpha-2\pi i}\,dy$$

mit beliebigem x_0. Nimmt man x_0 genügend groß, so ist $|R(y)|\leqq \varepsilon y$ für $y\geqq x_0$, also hat man

$$\left|\int_{x_0}^\infty R(y)y^{-2-\alpha-2\pi i}\,dy\right|\leqq \varepsilon\int_{x_0}^\infty y^{-1-\alpha}\,dy\leqq \varepsilon\int_1^\infty y^{-1-\alpha}\,dy=\frac{\varepsilon}{\alpha}.$$

Es wäre also $F(1+\alpha+2\pi i)=o\left(\frac{1}{\alpha}\right)$. Der Widerspruch zu (6. 5) beweist Satz 6. 1.

(Eingegangen am 10. Juni 1966; in veränderter Form am 6. April 1967.)

Literatur

[1] T. VAN AARDENNE—EHRENFEST, N. G. DE BRUIJN und J. KOREVAAR, A note on slowly oscillating functions, *Nieuw Arch. Wisk.*, **23** (1949), S. 77—66.

[2] N. G. DE BRUIJN und J. H. VAN LINT, Incomplete sums of multiplicative functions I, II, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser.* **A**, **67** *Indag. Math.*, **26** (1964), 339—358.

[3] H. DELANGE, Une thèorème sur les fonctions arithmétiques multiplicatives et ses applications, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **(3) 78** (1961), S. 1—29.

[4] H. DELANGE, Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, **(3) 78** (1961), S. 273—304.

[5] H. DELANGE, On a class of multiplicative arithmetical functions, *Scripta Math.*, **26** (1963), S. 121—141.

[6] P. ERDŐS, Some unsolved problems, *Michigan Math. J.*, **4** (1957), 291—300.

[7] P. ERDŐS and A. RÉNYI, On the mean value of nonnegative multiplicative number theoretical functions, *Michigan Math. J.*, **12** (1965), S. 321—338.

[8] A. RÉNYI, A new proof of a theorem of Delange, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, **12** (1965), S. 323—329.

[9] A. WINTNER, *The theory of measure in arithmetical semigroups* (Baltimore, 1944).

[10] E. WIRSING, Über die Zahlen, deren Primteiler einer gegebenen Menge angehören, *Arch. Math.*, **7** (1966), S. 263—272.

[11] E. WIRSING, Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplikative Funktionen, *Math. Ann.*, **143** (1961), S. 75—102.

[12] E. WIRSING, Elementare Beweise des Primzahlsatzes II, *J. reine angew. Math.*, **214/215** (1964), S. 1—18.

INDEX

Printed in Hungary

Technikai szerkesztő: Szabados József

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója – Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor
A kézirat nyomdába érkezett: 1967. VI. 16. – Terjedelem: 18,75 (A/5) ív – 20 ábra

67-5669 – Szegedi Nyomda

The Acta Mathematica publish papers on mathematics in English, German, French and Russian.

The Acta Mathematica appear in parts of various size, making up volumes.

Manuscripts should be sent to:

Acta Mathenatica, Budapest 502, Postafiók 24.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Mathematica is 165 forints a volume. Orders may be placed with „*Kultura*" Foreign Trade Company for Books and Newpapers (Budapest, I., Fő utca32. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Mathematica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des mémoires du domaine des sciences mathématiques.

Les Acta Mathematica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

Toute correspodance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonement est de 165 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux „*Kultura*" (Budapest, I., Fő utca 32. Compte-courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

„*Acta Mathematica*" публикует трактаты из области математических наук на русском, немецком, английском и французском азыках.

„*Acta Mathematica*" выходит отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предрназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена „*Acta Mathematica*" — 165 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внещней торговле книг и газет „*Kultura*" (*Budapest, I., Fő utca 32.* Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

All the reviews of the Hungarian Academy of Sciences may be obtained among others from the folloving bookshops:

ALBANIA

Ndermarja Shtetnore e Botimeve
Tirana

AUSTRALIA

A. Keesing
Box 4886, GPO
Sidney

AUSTRIA

Globus Buchvertrieb
Salzgries 16
Wien. I

BELGIUM

Qffice International de Libirairie
30, Avenue Marnix
Bruxelles 5
Du Monde Entier
5, Place St. Jean
Bruxelles

BULGARIA

Raznoiznos
1 Tzar Assen
Sofia

CANADA

Pannonia Books
2 Spadina Road
Toronto 4, Ont.

CHINA

Waiwen Shudian
Peking
P.O.B. Nr. 88.

CHECHOSLOVAKIA

Artia A. G.
Ve Smeckách 30
Praha II.
Postova Novinova Sluzba
Dovoz tisku
Vinohradska 46
Praha 2
Postova Novinova Sluzba
Dovoz tlace
Leningradska 14
Bratislava

DENMARK

Ejnar Munksgaard
Nörregade 6
Kopenhagen

FINLAND

Akateeminen Kirjakauppa
Keskuskatu 2
Helsinki

FRANCE

Office International de Documentation et Libraire
48, rue Gay Lussac
Paris 5

GERMAN DEMOCRATIC REPUBLIC

Deutsche Buch-export und Import
Leninstraße 16.
Leipzig C. I.
Zeitungsvertriebsamt
Clara Zetkin Straße 62.
Berlin N. W.

GERMAN FEDERAL REPUBLIC

Kunst und Wissen
Erich Bieber
Postfach 46.
7 Stuttgart S.

GREAT BRITAIN

Collet's' Subscription Dept.
44—45 Museum Streetf
London W.C.I.
Robert Maxwell and Co. Ltd.
Waynflete Bldg. The Plain
Oxford

HOLLAND

Swetz and Zeitlinger
Keizersgracht 471—487
Amsterdam C.
Martinus Nijhof
Lange Voorhout 9
The Hague

INDIA

Current Technical Literature
Co. Private Ltd.
Head Pffice:
India House OPP.
GPO Post Box 1374f
Bombay I.

ITALY

Santo Vanasia
71 Via M. Macchi
Milano
Libreria Commissionaria Sansoni
Via La Marmora 45
Firenze

JAPAN

Nauka Ltd.
2 Kanada-Zimbocho 2-chome
Chiyoda-ku
Tokyo
Maruzen and Co. Ltd.
P.O. Box 605
Tokyo
Far Eastern Booksellers
Kanada P.O. Box 72
Tokyo

KOREAf

Chulpanmul
Korejskoje Obschestvo po Exportui
Importu Proizvedenij Pechati
Phenjan

NORWAY

Johan Grundt Tanum
Karl Johansgatan 43
Oslo

POLAND

Export und Import Unternehmen
RUCH
ul. Wilcza 46.
Warszawa

ROUMANIA

Cartimex
Str. Aristide Briand 14—18.
Bucuresti

SOVIET UNION

Mezhdunarodnaja Kniga
Moscow
G—200

SWEDEN

Almquist and Wiksell
Gamla Brogatan 26
Stockholm

USA

Stechert Hafner Inc.
31 East 10th Street
New York 3 N. Y.
Walter J. Johnson
111 Fifth Avenue
New York 3 N. Y.

VIETNAM

Xunhasaba
Service d'Export et d'Import des Livres et Périodiques
19. Tran Quoc Toan
Hanoi

YUGOSLAVIA

Forum
Vojvode Misiva broj 1.
Novi Sad
Jugoslovenska Kniga
Terazije 27.
Beograd

XI. 30. 1967. Index: 26 01 4