ACTA
MATHEMATICA
ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

G. ALEXITS, P. ERDŐS, L. FEJES TÓTH, L. KALMÁR, L. RÉDEI,
A. RÉNYI, B. SZ.-NAGY, P. TURÁN, O. VARGA

REDIGIT

G. HAJÓS

TOMUS XV FASCICULI 1–2

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1964

ACTA MATH. HUNG.

ACTA MATHEMATICA
ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK
MATEMATIKAI KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST, V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Mathematica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a matematika köréből.

Az Acta Mathematica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Mathematica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó"-nál (Budapest, V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest, I., Fő utca 32. Bankszámla 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

Die Acta Mathematica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der mathematischen Wissenschaften in deutscher, englischer, französischer und russischer Sprache.

Die Acta Mathematica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Redaktion und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forints. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen „*Kultura*" (Budapest, I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandvertretungen und Kommissionären.

ACTA MATHEMATICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

TOMUS XV

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1964

INDEX

Tomus XV

Szegedi Nyomda Vállalat 64-1152

ACTA MATHEMATICA
ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE
Том. XV — Вып. 1—2

РЕЗЮМЕ

О НЕСКОЛЬКИХ ПРИНЦИПИАЛЬНЫХ ВОПРОСАХ ЗАДАЧ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ, ОТНОСИТЕЛЬНО СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. I

Т. Фрей (Будапешт) и Дь. Й. Обадович (Мишкольц)

При численном решении задач нахождения собственного значения, связанных с линейными дифференциальными уравнениями, большое значение имеют т. н. теоремы разграничения. В этой работе авторы обобщают важнейшие результаты теории (в том числе и теоремы разграничения) на случай систем дифференциальных уравнений. Далее, описывается хорошо применимый на практике метод пертурбации для нахождения собственного значения систем. Эта проблема возникла в связи с определением критического значения собственной частоты лопостей турбин.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ТЕРНАРНЫХ КВАЗИГРУПП

М. Хоссу (Мишкольц) и Ф. Радо (Клуж, Румыния)

Для того, чтобы все главные изотопы с общей единицей e бинарной, соответственно тернарной лупы совпадали с первоначальной лупой, необходимо и достаточно выполнение уравнения (2), соответственно (3) [1, 2]. Операциями лупы, представляющими собой решения уравнения (2), являются групповые операции с единицей e [2]. Тернарные операции квазигруппы, удовлетворяющие уравнению (3), могут быть написаны в виде (6)—(7) с помощью групповых операций $\circ, \nabla, *$, единицей которых является именно e. Между заданными на некотором вещественном интервале, непрерывно дифференцируемыми, локальными, тернарными операциями лупы самые общие решения уравнения (3) записываются в виде (30), где φ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, отображающая данный интервал на интервал вещественной числовой прямой, содержащий единичную точку; φ_{-1} — функция, обратная к φ; и k — произвольная постоянная, отличная от —1. Эта теорема играет важную роль при обобщении на пространственные сетки условия замыкания Реидемеистера.

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ С ДАННОЙ ГРУППОЙ АВТОМОРФИЗМОВ И СТРУКТУРОЙ КОНГРУЭНЦИЙ

Е. Т. Шмидт (Будапешт)

В работе изучается связь между группами автоморфизмов и структурами конгруэнций универсальных алгебр. Доказывается следующая теорема: Для любой группы G и компактно порожденной структуры V найдется универсальная алгебра с группой автоморфизмов, изоморфной G, и структурой конгруэнций, изоморфной V.

О СВОБОДНОЙ ПОДВИЖНОСТИ ПЛОСКОСТИ

С. Бремер (Потсдам, ГДР)

Пусть группа $\mathfrak{G}$ аффинных, оставляющих некоторую фиксированную точку O неподвижной, преобразований аффинной плоскости, определенной с помощью упорядоченного коммутативного поля K, удовлетворяет следующим условиям:

I. $\mathfrak{G}$ является транзитивной во множестве прямых, проходящих через точку O;

II. некоторая точка $P\neq 0$ отображается элементами группы $\mathfrak{G}$ на не более чем конечное множество точек прямой OP.

Автор, обобщая результаты Г. Ленца [4] и Р. Бэра [1], на основе условий (частью геометрических, частью алгебраических), заданных для коммутативности подгруппы, состоящей из всех сохраняющих ориентацию преобразований группы $\mathfrak{G}$, показывает, что $\mathfrak{G}$ является

(1) полной группой симметрий с вращением или группой растяжений с вращением, однократно транзитивной на множестве лучей, исходящих из точки O, если K — евклидовое поле,

(2) полной группой симметрий с вращением, если K — пифагоровое поле и $\mathfrak{G}$ содержит элемент, переводящий некоторую прямую, но не все прямые, в себя.

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ВВЕДЕНИЕ УГЛОВЫХ ЧИСЕЛ В КОМПЛЕКСНОЙ ЧИСЛОВОЙ ПЛОСКОСТИ

С. Бремер (Потсдам, ГДР)

Пусть K^* — комплексное расширение упорядоченного коммутативного поля K. Под лучем, исходящим из начала O, подразумевается совокупность чисел $rz\in K^*$ $(z\neq 0, r\geqq 0)$. Автор предлагает простое доказательство для того, что любая мультипликативная группа $Z\subset K^*$, имеющая точно один общий элемент $z\neq 0$ с каждым лучем, исходящим из O, есть изоморфный образ некоторой группы W, подобной полю K. Из доказательства теоремы, с помощью чисто алгебраических средств, просто получается введение угловых чисел в комплексной числовой плоскости (принадлежащей полю K^*).

О ПРИБЛИЖЕНИИ СРЕДНИМИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ ПРИ СТРУКТУРНЫХ УСЛОВИЯХ

Л. Леиндлер (Сегед)

В работе доказываются несколько теорем, вытекающие из условий относительно наилучшего приближения или свойств непрерывности функции $f(x)$. Между прочим доказываются следующие теоремы:

Теорема I. Если

$$\Sigma k^{2\alpha-1}E_k^2<\infty \qquad (0<\alpha<1),$$

то для $(C, 1)$-средних разложения

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n(x)$$

оценка

$$(*) \qquad |\sigma_n(x)-f(x)|=o_x\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

справедлива почти всюду в основном промежутке.

Пусть $\Phi(x)$ $(x \geqq 0)$ — положительная, монотонно возрастающая функция, и пусть $\omega(f, \delta)$ обозначает модуль непрерывности функции $f(x)$.

Теорема V. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция с периодом 2π. Если

$$\int_1^\infty \frac{x^{2\alpha-1}}{\Phi(x)}\,dx<\infty \quad (0<\alpha<1) \qquad \text{и} \qquad \omega(f,\delta)=O\left(\frac{1}{\sqrt{\Phi\left(\frac{1}{\delta}\right)}}\right)$$

то для $(C, 1)$-средних разложения

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad \left(\begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \begin{matrix} \cos nx \\ \sin nx \end{matrix}\, dx\right)$$

оценка $(*)$ справедлива почти всюду в интервале $(-\pi, \pi)$.

Аналогичные теоремы имеют место для средних Ла Валле Пуссена при любом положительном α.

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ МИНИМУМА. II

Е. Макаи (Будапешт)

П. Туран показал, что если $1=|z_0| \geqq |z_1| \geqq \ldots \geqq |z_n|$ и $b_0, b_1, \ldots, b_n$ — произвольные комплексные числа, то выполняется неравенство (1). Проблема о том, является ли константа $8e$ фигурирующая в знаменателе, наилучшей, неразрешена. В настоящей работе доказывается, что заменяя константу $8e$ числом, меньшим $4e$, неравенство уже справедливо не во всех случаях. Одним из средств доказательства является последовательность неравенств (3) между значениями производных полиномов Эрмита, принятыми в нулях соответствующего полинома.

КОНФОРМНАЯ И ПРОЕКТИВНАЯ ДЕФОРМАЦИИ КРИВИЗНЫ В ТОЧЕЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А. Моор (Сегед)

Пусть задано некоторое n-мерное риманово пространство посредством основного метрического тензора $g_{ik}(x)$. Это пространство рассматривается в дальнейшем как основное пространство. Конформное преобразование (1. 2) порождает новое риманово пространство с основным метрическим тензором $\tilde{g}_{ik}(x)$. Если с помощью преобразования (1. 4) превратить параметры смещения основного пространства в новые, то получается проективное преобразование основного пространства. В работе исследуется, при каких специальных условиях может тензор кривизны пространства, полученного упомянутыми преобразованиями, иметь вид (1. 8) (a) и (b), соответственно (1. 9). Эти типы можно рассматривать как обобщения риманового пространства со скалярной кривизной, ибо для этих типов, в частном случае $\gamma_{ik}=g_{ik}$, тензор кривизны принимает форму тензора кривизны, характеризующего риманово пространство со скалярной кривизной.

ОБ ОСОБЫХ ТОЧКАХ ФУНКЦИЙ КЛАССА C_∞

Е. Загорская (Лодзь, Польша)

В работе исследуются классификация особых точек функций класса C_∞ двух вещественных переменных, как и строение множеств этих особых точек различных типов и, наконец, доказывается следующая теорема (теорема 5): Пусть C — произвольное замкнутое, нигде не плотное множество в плоскости. Тогда можно задать такую функцию $f(x, y)$ класса C_∞, что ряд Тейлора функции относительно любой точки (x_0, y_0) сходится абсолютно в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), но этот ряд представляет функцию $f(x, y)$ в некоторой окрестности точки разложения в том и только в том случае, если $(x_0, y_0) \notin C$.

О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

В. Парри (Нью Хавен, США)

В § 1, обобщая результаты Биссингера [2], Эверетта [3] и Реньи [1], автор задает необходимое и достаточное условие относительно функции f для того, чтобы любое вещественное число x $(0 \leqq x < 1)$ представлялось в виде f-разложения. В § 2 автор исследует преобразования $T(x) = (\beta x + \alpha)$, где $\beta > 1$, $0 \leqq \alpha < 1$ и (a) обозначает дробную часть числа a. Автор называет преобразование T сильно эргодическим, если соотношение $T^{-1}E \subset E$ влечет $\mu(E) = 0$ или $\mu(E) = 1$. Доказывается, что если преобразование $T(x) = (\beta x + \alpha)$ является сильно эргодическим, то существует мера, инвариантная относительно $T(x)$ и эквивалентная мере Лебега; эта мера задается в явном виде.

О ФОРМУЛЕ РОХЛИНА ДЛЯ ЭНТРОПИИ

В. Парри (Нью Хавен, США)

Целью работы является вычисление энтропии эргодического, стационарного, безатомного, стохастического процесса с конечным числом состояний.

Арифметические преобразования, исследованные от Реньи [1], могут быть рассмотрены как стохастические процессы, и в этом случае формула, заданная в статье для энтропии процесса, совпадает с формулой Рохлина (см. [2]). В качестве применения автор доказывает, что энтропия преобразования β (см. [1]) равняется $\log \beta$. Это вычисление исправляет одну неточность вычисления Рохлина, признанную Рохлином в письме к автору.

РАСПОЛОЖЕНИЯ КРУГОВ НА ПОВЕРХНОСТЯХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

М. Имре (Будапешт)

Работа содержит следующий результат относительно расположения конгруэнтных кругов на поверхности постоянной кривизны, т. е. в зависимости от знака кривизны на сфере, в евклидовой плоскости или в гиперболической плоскости:

Рассмотрим область V, происходящую путем объединения n граней правильной мозаики, в каждой вершине которой встречаются три ребра. С n конгруэнтными кругами радиуса ϱ можно покрывать часть области V, не больше чем площадь, покрытая кругами радиуса ϱ, написанными вокруг центров первоначальных граней мозаики. В случае $r \leqq \varrho \leqq R$, где r и R означают радиусы соответственно вписанных и описанных кругов граней мозаики, упомянутая верхняя граница достигается только при правильном расположении кругов.

ОБ ОПЕРАТОР-ЭНДОМОРФИЗМАХ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ПОЛУГРУПП

О. Штейнфельд (Будапешт)

Известно, что теорему Веддербурна—Артина о строении полупростых колец можно доказать путем задания полного кольца оператор-эндоморфизмов вполне приводимых операторных модулей. Применением по существу этого же метода мы определяем полное полукольцо оператор-эндоморфизмов операторного полумодуля, являющегося прямой суммой конечного числа операторных полумодулей, операторно-изоморфных друг другу.

Этот результат можно использовать для доказательства теорем о строении полуколец и колец, которые могут быть написаны в виде прямой суммы конечного числа своих операторно-изоморфных левых идеалов.

Наконец, мы обобщаем теорему, полученную нами ранее о строении „полупростых" семиколец, на семикольца S, являющиеся сильными прямыми суммами конечного числа своих операторно-изоморфных левых идеалов, и тем самым доказываем, что оператор-эндоморфизмы аддитивной, вообще некоммутативной, полугруппы S^+ составляют семикольцо, изоморфное S.

О СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЯХ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ, ПРЕДСТАВЛЕННОЙ РЯДОМ ДИРИХЛЕ

П. К. Камтан (Пилани, Индия)

Доказывается, что если $\log|a_{n-1}/a_n|/(\lambda_n-\lambda_{n-1})$ является неубывающей функцией от n (хотя бы начиная с некоторого целого числа n_0), то для целой функции, представленной с помощью ряда Дирихле

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}$$

$$\left(s=\sigma+it,\quad 0=\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_n;\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{n}{\lambda_n}<\infty\right)$$

выполняются равенства

$$\lim_{\sigma\to\infty}\begin{matrix}\sup\\ \inf\end{matrix}\frac{\log\log A(\sigma)}{\sigma}=\begin{cases}\varrho\\ \lambda\end{cases};$$

$$\lim_{\sigma\to\infty}\begin{matrix}\sup\\ \inf\end{matrix}\left\{\frac{A(\sigma)}{m_k(\sigma)}\right\}^{1/\sigma}=\begin{cases}e^{\varrho}\\ e^{\lambda}\end{cases},$$

где ϱ и λ означают порядки функции $f(s)$, определенные обычным образом, причем

$$A(\sigma)\overset{\text{def}}{=}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(s)|^2\,dt,$$

$$m_k(\sigma)\overset{\text{def}}{=}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2Te^{k\sigma}}\int_{0}^{\sigma}\int_{-T}^{T}|f(x+it)|^2 e^{kx}\,dx\,dt,$$

где $0<k<\infty$.

ОЦЕНКА ГРАДИЕНТОВ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $\Delta u-au_t'=f$. I*

Г. Адлер (Будапешт)

В статье получаются *нумерические* оценки градиентов решений упомянутого в заглавии неоднородного уравнения теплопроводности. Коэффициенты, фигурирующие в оценках, зависят только от совсем простых геометрических данных области, и они вычислены в явном виде.

§ 1 содержит определения. В § 2 мы получаем некоторое разложение решений рассмотренного общего управления (1) на функции, удовлетворяющие более простым урав-

---

* Первоначальная работа, состоящая из шести параграфов, разделена на две части из-за технических причин. Часть II опубликуется в последующем выпуске настоящего журнала. Две части вместе составляют единую работу. Так, например, в введении упоминаются и параграфы части II, и некоторые определения из § I используются только в части II. Оглавление будет помещено в части II.

нениям (а именно, уравнениям (2), (3) и (4)) и более простым условиям. Оценкой каждой функции, появляющейся в этом разложении, мы занимаемся отдельно в дальнейших параграфах. (В настоящей части I работы изучается только уравнение Лапласа $\Delta u=0$. Остальные уравнения будут изучены в части II, печатающейся в следующем выпуске этого же журнала).

В § 3 градиент решения уравнения $\Delta u=0$ оценивается с помощью граничных значений. В оценках появляются максимумы модулей касательных производных, определенных подходящим образом, первого и второго порядков граничных значений функции u; при этом, максимумы модулей производных второго порядка можно заменить коэффициентами и показателями Гельдера производных первого порядка или выбранными подходящим образом интегральными средними производных второго порядка. Следовательно, оценки справедливы и в тех случаях, когда на границе области функция u не дифференцируема два раза или ее производные второго порядка являются неограниченными.

О ЧИСЛЕ БАЗИСНЫХ ПОДГРУПП ПРИМАРНЫХ ГРУПП

С. Каббаз (Нью Хавен, США) и Е. А. Уалкер (Нью Мексико, США)

Следующая теорема дает полное решение проблемы 8 из книги [1].

Пусть G — коммутативная группа типа p; B — некоторая базисная подгруппа группа G и $b(G)$ — мощность множества различных базисных подгрупп группы G. Тогда имеем:

(a) Если G имеет ограниченный порядок или делима, то $b(G)=1$.

(b) Если $G=S_1\oplus\ldots\oplus S_m\oplus T_1\oplus\ldots\oplus T_k$, где S_i является квазициклической и T_i — циклической группой порядка p^{n_i}, то $b(G)=\prod\limits_{i=1}^{k}p^{mn_i}$.

(c) Во всех остальных случаях $b(G)=|G|^{|B|}$.

СВОЙСТВА ОТ „Ext" И КВАЗИРАСПАДЕНИЯ КОММУТАТИВНЫХ ГРУПП

К. П. Уалкер (Нью Мексико, США)

В первой части работы рассматриваются экзактные последовательности $0\to A\to G\to\to B\to 0$ коммутативных групп, представляющие элементы конечного порядка от Ext (B, A). Между прочим доказывается: Если $A[n]=0$ или $B[n]=0$, то упомянутая экзактная последовательность представляет некоторый элемент из $\operatorname{Ext}(B, A)[n]$ точно тогда, если порожденная экзактная последовательность $0\to A\to A+nG\to nB\to 0$ распадается.

По главному результату второй части, коммутативная группа G тогда и только тогда квазиизоморфна некоторой распадающейся коммутативной группе, если экзактная последовательность $0\to G_t\to G\to G/G_t\to 0$ представляет элемент конечного порядка из Ext $(G/G_t, G_t)$. При этом через G_t обозначена подгруппа кручения группы G, и G, H называются квазиизоморфными, если для некоторых положительных целых m, n и подгрупп S, T выполняются соотношения $mG\subset S\subset G$, $nH\subset T\subset H$, $S\cong T$.

ЗАКРЕПЛЯЮЩАЯ СИСТЕМА И ВНУТРЕННЕЕ ОСВЕЩЕНИЕ

Б. Грюнбаум (Иерусалим, Израиль)

В работе доказывается, что на границе любого выпуклого тела K евклидового пространства E^n можно выбрать

1. множество A, состоящее из не более чем $2n$ точек и такое, что сдвинутое в любом заданном направлении на достаточно малое расстояние тело K всегда содержит некоторую точку $a\in A$ в качестве внутренней точки;

2. (Сольтан [5]) множество A, состоящее из не более чем $n+1$ точек и такое, что для любой точки x границы тела K найдется точка $a \in A$ следующего свойства: внутренность тела K содержит хотя бы одну точку из отрезка $[a, x]$.

ПРИМЕР РЯДА ФУРЬЕ СУММИРУЕМОЙ С КВАДРАТОМ ФУНКЦИИ, КОТОРЫЙ ПРИ НЕКОТОРОМ УПОРЯДОЧЕНИИ ЧЛЕНОВ ВСЮДУ РАСХОДИТСЯ

К. Тандори (Сегед)

Автор доказывает следующее утверждение, являющееся уточнением одной теоремы А. Н. Колмогорова (*Math. Zeitschrift*, **26** (1927), стр. 432—441).

Существует функция, суммируемая с квадратом и такая, что некоторая перестановка своего ряда Фурье всюду расходится.

ОБ ОТДЕЛЕНИИ С ПОМОЩЬЮ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Л. А. Рубель (Урбана, Иллинои, США)

В работе рассматривается следующая проблема. Пусть f — супергармоническая, а h — субгармоническая функция, определенные в n-мерном пространстве E_n, и пусть $f \leqq h$ всюду в E_n. Существует ли гармоническая функция g, для которой $f \leqq g \leqq h$ всюду в E_n?

В случае $n=1$ ответ тривиально положителен. Автор показывает, что в случае $n \geqq 2$ можно построить контрпримеры.

О ПОЛУКОЛЬЦАХ И ПОЛУПОЛЯХ. III

Г. И. Веинерт (Потсдам, ГДР)

В настоящей третьей части нашей работы (ср. [6], [7]) сначала мы рассмотрим упорядоченные полукольца (§ 8). При этом полукольцо $\mathfrak{R}$ называется упорядоченным, если для его элементов задано некоторое отношение порядка, удовлетворяющее (сильным) законам монотонности сложения и умножения. Последний их этих законов требует, чтобы для всякого $c \neq 0$ и всех пар $a<b$ мы имели либо $ac<bc$ и $ca<cb$, либо $ac>bc$ и $ca>cb$, что порождает разбиение всех элементов ($\neq 0$) из $\mathfrak{R}$ на положительные и отрицательные. Упорядоченное полукольцо всегда регулярно относительно обоих операций и является аддитивно коммутативным.

Далее, всякое упорядочение полукольца $\mathfrak{R}$ может быть расширено единственным способом на любое полукольцо правых отношений полукольца $\mathfrak{R}$ (теорема 1). Для полуколец разностей $\mathfrak{D}(\mathfrak{R}, \mathfrak{m})$, однако, это утверждение справедливо тогда и только тогда, если $\mathfrak{R}$ удовлетворяет следующему условию (теорема 2):

Соотношения $x<y$, $d<c$ влекут за собой $xc+yd<xd+yc$ и $cx+dy<dx+cy$ (x, y, c, d — элементы из $\mathfrak{R}$, один из них — элемент из $\mathfrak{m}$).

Мы говорим, что полукольцо $\mathfrak{R}$ обладает свойством $(*)$ (соотв. $(**)$), если хотя бы одно (соотв. точно одно) из уравнений $a+x_1=b$, $b+x_2=a$ имеет при $a \neq b$ одно решение в $\mathfrak{R}$. В этом случае имеем при коммутативном и регулярном сложении: Полукольцо $\mathfrak{R}$ с свойством $(*)$ может быть упорядочено точно тогда, если $\mathfrak{R}$ либо не имеет нулевого элемента, либо нулевой элемент не содержится в положительном ядре полукольца $\mathfrak{R}$ (теорема 3). Мультипликативно регулярные полукольца с свойством $(**)$, и только они, являются областями положительности упорядоченных колец (теорема 4).

Наконец, представляется удобным называть упорядоченное полукольцо $\mathfrak{N}$ архимедовски упорядоченным, если для любых элементов a_1, a_2, b_1 и b_2 из $\mathfrak{N}$, удовлетворяющих $b_1 > b_2$, найдется натуральное число n, выполняющее неравенство $nb_1 + a_2 > nb_2 + a_1$. А именно это требование влечет за собой требование, которое обычно служит определением архимедовски упорядоченного кольца (но обратное включение не имеет места) и переносится в отличие от последнего на всякое упорядоченное кольцо разностей полукольца $\mathfrak{N}$.

В § 9 трактуются полуполя с регулярным сложением. Так из вышеприведенных немедленно получается, что из двух собственных полуполей $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{H}$ с тем же кольцом разностей $\mathfrak{D}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{H})$ только $\mathfrak{H}$ может обладать свойством $(*)$ (теорема 1), откуда получается почти принудительное решение проблемы Редеи, выясненной уже в [7], § 6. Пусть, далее, $\mathfrak{H}$ обозначает некоторое собственное полуполе, элементы которого являются алгебраическими над $\mathbf{P}$, и которое вложимо в некоторое коммутативное поле; в этом случае $\mathfrak{H}$ вложимо уже в полуполе $\boldsymbol{\Theta}$ положительных вещественных чисел точно тогда, если существует собственное полуполе $\mathfrak{H}^*$—удовлетворяющее условиям $\mathfrak{H} \subseteqq \mathfrak{H}^*$ и $(*)$ (теорема 2).

В дальнейшем мы вводим для мультипликативно коммутативных систем понятие простого расширения-полуполя $\mathfrak{H} = \mathfrak{h}(\alpha)$ полуполя $\mathfrak{h}$ как полуполе отношений $\mathfrak{Q}(\mathfrak{N})$ полукольца $\mathfrak{N} = \mathfrak{h}[\alpha]$ всех рациональных целых функций от α с коэффициентами из $\mathfrak{h}$. Такое полуполе-расширение $\mathfrak{h}(\alpha)$ собственного полуполя $\mathfrak{h}$ является уже полем точно в том случае, если α является алгебраическим над $\mathfrak{h}$, т. е. алгебраическим над $\mathfrak{r} = \mathfrak{D}(\mathfrak{h})$ и, более того, представляет собой корень некоторого многочлена с коэффициентами из $\mathfrak{h}$ (теорема 3). Следующие две теоремы дают полный обзор всех простых расширений заданного собственного полуполя $\mathfrak{h}$.

Существует определенное с точностью до изоморфизма однозначно расширение $\mathfrak{H} = \mathfrak{h}(\alpha)$ полуполя $\mathfrak{h}$ с одним трансцендентным над $\mathfrak{h}$ элементом α. При этом кольцо разностей $\mathfrak{R} = \mathfrak{D}(\mathfrak{H})$ не является полем, но $\mathfrak{H}$ вложимо в некоторое поле точно в том случае, если то же обстоятельство имеет место для $\mathfrak{h}$ (теорема 4).

Для любого простого идеала $\mathfrak{a}$ от $\mathfrak{r}[x]$ с $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{r} = (0)$ найдется определенное с точностью до изоморфизма однозначно расширение $\mathfrak{H} = \mathfrak{h}(\alpha)$ от $\mathfrak{h}$ с элементом α, являющимся корнем всех многочленов $f(x) \in \mathfrak{a}$. Здесь $\mathfrak{H}$ всегда вложимо в некоторое поле (теорема 5, случай 1).

Для любого идеала $\mathfrak{a}$ от $\mathfrak{r}[x]$ с $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{r} = (0)$, который не является простым идеалом. но выполняет условие

$$p(x) g(x) \in \mathfrak{a} \quad \text{влечет} \quad g(x) \in \mathfrak{a}$$

при любых $p(x) \in \mathfrak{h}[x]$ и $g(x) \in \mathfrak{r}[x]$, найдется определенное с точностью до изоморфизма однозначно расширение $\mathfrak{H} = \mathfrak{h}(\alpha)$ от $\mathfrak{h}$ с элементом α, являющимся корнем всех многочленов $f(x) \in \mathfrak{a}$. Здесь, однако, кольцо разностей $\mathfrak{N} = \mathfrak{D}(\mathfrak{H})$ всегда содержит делителей нуля, так что для $\mathfrak{H}$ не найдется никакое надполе (теорема 5, случай 2).

Если при этом, в частности, кольцо разностей $\mathfrak{D}(\mathfrak{h})$ полуполя $\mathfrak{h}$ представляет собой некоторое поле $\mathfrak{k}$, то случай 1 и 2 могут быть охарактеризованы и следующими утверждениями относительно минимального многочлена $f(x) \in \mathfrak{k}[x]$ от α: 1. $f(x)$ неприводим. 2. $f(x)$ не является неприводимым, но для некоторого делителя $\mathfrak{t}(x) \in \mathfrak{k}[x]$ многочлена $f(x)$ не найдется многочлен $\varphi(x) \in \mathfrak{k}[x]$, выполняющий $\mathfrak{t}(x)\varphi(x) \in \mathfrak{h}[x]$. (Пример на случай 2 см. на стр. 187.)

В связи с проблемой, выдвинутой теоремой 2, мы получаем наконец следующий результат, который без ограничения общности может быть сформулирован для полуполей поля $\mathbf{Z}$ комплексных чисел: Если $\mathfrak{h}$ обозначает область положительности вещественного поля $\mathfrak{k}$ (например, полуполе $\mathbf{H}$ положительных рациональных чисел), то всякое простое расширение-полуполе $\mathfrak{H} = \mathfrak{h}(\alpha) \subseteqq \mathbf{Z}$ либо представляет уже собой некоторое поле, либо изоморфно вложимо в полуполе $\boldsymbol{\Theta}$ положительных вещественных чисел. При этом первый случай имеет место тогда и только тогда, если α является корнем некоторого многочлена $F(x) \in \mathfrak{k}[x]$, не имеющего положительных вещественных корней (теорема 8). Этот результат тесно связан с предыдущей теоремой 7, представляющей собой уточнениене которой части одной теоремы П. Турана (ср. [5], лемма I): Если $F(x)$ — многочлен с вещественными коэффициентами, не обладающий вещественными корнями $\alpha \geqq 0$, то найдется многочлен $\Phi(x)$ даже с рациональными коэффициентами так, что все коэффициенты многочлена $F(x)\Phi(x)$ положительны.

БУЛЕВЫЕ ФУНКЦИИ НА ДИСТРИБУТИВНЫХ СТРУКТУРАХ

Г. Грецер (Бударешт)

О СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЯХ И ЭНТРОПИЯХ ПОЛНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

З. Дароци (Дебрецен)

Пусть $P=(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ $\left(p_i \geqq 0,\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1\right)$ — полное распределение вероятностей. Пусть Ω — множество всех функций $f(x)$, непрерывных и строго монотонных в интервале $(0, 1]$ и таких, что функция $f^*(x)$, равняющаяся $xf(x)$ при $x \in (0, 1]$ и 0 при $x=0$, непрерывна в $[0, 1]$. В работе доказывается следующая теорема.

Теорема. Если $f, h \in \Omega$, то равенство

$$M_f[P]=M_h[P]$$

выполняется для любого полного распределения вероятностей $P=(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ тогда и только тогда, если $h(x)$ имеет вид

$$h(x) = Af(x)+B \qquad (A \neq 0),$$

где

$$M_f[P]=f^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i f(p_i)\right]$$

обозначает среднее значение распределения вероятностей P относительно функции f.

На основе этой теоремы шенноновская энтропия и энтропия порядка α распределения P, так же как соответсвующие мультипликативные средние, принадлежащие P, могут буть охарактеризованы при более естественных условиях, чем это сделано в работе Я. Ацела и. З. Дароци (см. том **14** (1963), стр. 95—121 настоящего журнала).

О КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Л. Веидингер (Будапешт)

Пусть дана квазилинейная система дифференциальных уравнений

$$\mathbf{u}_t = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}^i(\mathbf{x}, t, \mathbf{u})\mathbf{u}_{x^i} + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}), \tag{1}$$

где $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{b}=\mathbf{b}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u})$ — векторы с l компонентами, $\mathbf{A}^i=\mathbf{A}^i(\mathbf{x}, t, \mathbf{u})$ — матрицы порядка l, $\mathbf{x}$ — вектор с n компонентами. Ищется решение задачи Коши $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)=\mathbf{u}^0(\mathbf{x})$. Мы будем предполагать, что система гиперболична в области $0 \leqq t \leqq T; |\mathbf{u}-\mathbf{u}^0(\mathbf{x})|<K$; т. е. в этой области все линейные комбинации матриц $\mathbf{A}$ с действительными коэффициентами имеют только действительные собственные значения.

Систему (1) заменяем системой конечно-разностных уравнений

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t+h) = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}(\mathbf{x}, t))\mathbf{v}(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t)+h\mathbf{b}(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)), \tag{2}$$

где $\mathbf{r}_j$ — заданные векторы, а $\mathbf{C}^j = \mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{u})$ матрицы порядка l, удовлетворяющие соотношениям

$$\sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}) = \mathbf{I}; \qquad \sum_{j=1}^{m} r_j^i \mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}) = \mathbf{A}^i(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}).$$

Пусть $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_1(\mathbf{x}, t)$ любая функция, которая удовлетворяет условию Липшица по $\mathbf{x}$, и удовлетворяет неравенству $|\mathbf{z}_1(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}^0(\mathbf{x})| < K$ при $0 \leqq t \leqq T'$, где $T' \leqq T$. Система (2) называется устойчивой, если для любой функции $\mathbf{z}_2 = \mathbf{z}_2(\mathbf{x}, t)$ выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{z}_1(\mathbf{x}, t)) \mathbf{z}_2(\mathbf{x} + h\mathbf{r}_j, t) \right\|_\tau \leqq (1 + c_1 h) \| \mathbf{z}_2(\mathbf{x}, t) \|_\tau ,$$

где символ $\| \ \|_\tau$ обозначает L_2-норму на гиперплоскости $t = \tau$ $(0 \leqq \tau \leqq T')$, и постоянная c_1 не зависит от h, τ и $\mathbf{z}_2$.

Классические критерии устойчивости линейных разностных уравнений остаются верными и в квазилинейном случае.

В работе доказана следующая теорема:

Пусть решение $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ системы (1) имеет непрерывные частные производные до порядка $N_2 + 1 = 2\left[\frac{n}{2}\right] + 3$ в полосе $0 \leqq t \leqq T_0$. Предположим, что система (2) устойчивая, а коэффициенты $\mathbf{C}^j$ и $\mathbf{b}$ имеют непрерывные частные производные по x^i и u^k до порядка N_2 в области $0 \leqq t \leqq T$; $|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0(x)| < K$. Тогда

$$\max_{x;\ 0 \leqq t \leqq T_1} |\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)| < c_2 h,$$

где c_2 и T_1 определяются лишь верхними границами модулей $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{C}^j$, $\mathbf{b}$ и их частных производных.

С помощью этой теоремы можно получить оценку максимальной погрешности для широких классов конечно-разностных схем.

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ Е. В. БЕТ

М. Маккаи (Будапешт)

В статье доказывается следующая теорема.

Пусть L — функциональное (логика) первого порядка с равенством; пусть символы предикатов в L суть знак равенства $=$, символы P_λ для $\lambda < \varrho$ (ϱ — произвольное порядковое число) и P, отличный от предыдущих символ предиката с n переменными. Пусть Σ — система аксиом (любое множество замкнутых формул) в L. Тогда, предполагая справедливость обощенной гипотезы континуума, следующие два условия эквивалентны:

а) Если $\mathfrak{A} = \langle A, R_\lambda \rangle_{\lambda < \varrho}$ — произвольная бесконечная система отношений, в которой R_λ соответствует символу P_λ при каждом λ, то мощность множества всех определяемых на A отношений R, соответствующих символу P, для которых $(\mathfrak{A}, R) = \langle A, R_\lambda, R \rangle_{\lambda < \varrho}$ служит моделью системы Σ, не превосходит мощность множества A.

б) Существует конечное число формул $F_k(v_0, \ldots, v_{n+m_k-1})$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ в L, не содержащих P, для которых дизъюнкция

$$\bigvee_{k=1}^{N} (\exists v_n) \ldots (\exists v_{n+m_k-1}) (v_0) \ldots (v_{n-1}) (P(v_0, \ldots, v_{n-1}) \equiv F_k(v_0, \ldots, v_{n+m_k-1}))$$

является следствием системы Σ.

ЗАПОЛНЕНИЕ ШАРАМИ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

К. Бэрэцки (Будапешт) и А. Флориан (Вена)

В первой части работы авторы дают оценку для плотности заполнения шарами одинаковых радиусов в пространстве постоянной кривизны. Доказывается, что плотность в любой клетке Дирихле не превосходит плотности, имеющейся в тетраэдре, определенном центрами четырех попарно касающихся шаров. Во второй части работы показано, что в гиперболическом пространстве упомянутая оценка плотности является монотонно возрастающей функцией от радиуса шаров, и тем самым решается вопрос о плотнейшем заполнении шарами гиперболического пространства.

О НЕСКОЛЬКИХ ПРИНЦИПИАЛЬНЫХ ВОПРОСАХ ЗАДАЧ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ОТНОСИТЕЛЬНО СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. I

От

Т. ФРЕЙ (Будапешт) и Й. Дь. ОБАДОВИЧ (Мишкольц)

(*Представлено* Л. Калмаром)

1. § Введение

Для определения критических чисел собственных колебаний лопаток турбины (см. [1]) требуется определение первых нескольких собственных значений в задаче о собственном значении:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[f_{11}(t)\frac{d^2u}{dt^2}+f_{12}(t)\frac{d^2v}{dt^2}\right]+\frac{d}{dt}\left[f_{13}(t)\frac{du}{dt}\right]+[f_{14}(t)-\omega^2]u=0$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[f_{12}(t)\frac{d^2u}{dt^2}+f_{22}(t)\frac{d^2v}{dt^2}\right]+\frac{d}{dt}\left[f_{13}(t)\frac{dv}{dt}\right]-\omega^2v=0$$

$$u(0)=u'(0)=u''(1)=u'''(1)=v(0)=v'(0)=v''(1)=v'''(1)=0.$$

Применение любого численного метода, обеспечивающее угодную точность, становится значительно легче в том случае, когда мы можем соответственно ограничить определяемые собственные значения некоторым простым способом. Хорошо известны те, так называемые теоремы об ограничении области значений, при помощи которых определяемая проблема легко разрешается в случае самосопряженных, вполне определенных задач о собственных значениях, а также в случае задач о собственных значениях, зависящих от единственной неизвестной функции. Однако теоремы об ограничении области значений могут быть применены для вышеупомянутой системы уравнений только в том случае, если мы преобразуем системы уравнений в единственное дифференциальное уравнение высшего порядка. Этот способ не может быть применен ни с практической, ни с теоретической точки зрения. С практической точки зрения не применяется, потому что, с одной стороны, редукционный алгоритм является вообще сложным и, с другой стороны, хотя редукция удается, имея ввиду применения теорем об ограничении области значений, все таки мы дойдем в большинстве случаев только до очень труднообращаемого уравнения. Зато с теоретической точки зрения затрудняется тем, что для приведенного способа появляются производные высшего порядка функциональных коэффициентов и собственных функций, наличия которых не безусловно гарантируемы.

Поэтому целесообразно подробно выработанные теории о собственных значенях в связи с одним уравнением обобщить на задаче о собственных значенях, относящейся к системам уравнений. В дальнейшем мы останавливаемся в первую очередь на этом вопросе. Наконец покажем и новый практичный численный метод.

2. § Названия и обозначения

Рассмотренные задачи о собственных значениях генерируются самосопряженными дифференциальными формами.

Пусть самосопряженные дифференциальные формы имеют виды:

$$(1)\qquad \boldsymbol{M}[\mathbf{y}] = \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^{\nu}[\boldsymbol{F}_{\nu}(x)\mathbf{y}^{(\nu)}(x)]^{(\nu)}$$

и

$$(2)\qquad \boldsymbol{N}[\mathbf{y}] = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu}[\boldsymbol{G}_{\nu}(x)\mathbf{y}^{(\nu)}(x)]^{(\nu)},$$

где $\mathbf{y}(x)$ есть $2m > 2n$ раз непрерывно дифференцируемый по его аргументу столбчатый вектор. Матрицы $\boldsymbol{F}_{\nu}(x)$ и $\boldsymbol{G}_{\nu}(x)$ ν раз непрерывно дифференцируемые по их аргументам симметричные матрицы и $\boldsymbol{F}_{m}$ и $\boldsymbol{G}_{n}$ суть не особенные в рассмотренной области. Следовательно, система дифференциальных уравнений в задаче о собственном значении записывается по формуле

$$(3)\qquad \boldsymbol{M}[\mathbf{y}] = \lambda \boldsymbol{N}[\mathbf{y}]$$

присоединим к нему систему, и однородных краевых условий

$$(4)\qquad \boldsymbol{U}_{\mu}[\mathbf{y}] = \sum_{\nu=0}^{2m-1} [\boldsymbol{A}_{\nu\mu}\mathbf{y}^{(\nu)}(a) + \boldsymbol{B}_{\nu\mu}\mathbf{y}^{(\nu)}(b)] = \mathbf{0}, (\mu = 1, 2, \ldots, 2m).$$

Пусть уравнения вида (4) будут линейно независимы.

Дифференцируемые $2m$ раз векторы, которые удовлетворяют краевому условию (4), называются векторами сравнений.

Задачи о собственных значениях (3) и (4) — самосопряженные, если для любых двух векторов сравнений $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x)$ и $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x)$ осуществляется следующая пара отношения:

$$(5)\qquad \left.\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{v})_M &= (\mathbf{v}, \mathbf{u})_M \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v})_N &= (\mathbf{v}, \mathbf{u})_N \end{aligned}\right\}$$

где внутренние произведения определяются следующим образом:

$$(6), (7)\qquad (\mathbf{u}, \mathbf{v})_M = \int_a^b \mathbf{u}^* \boldsymbol{M}[\mathbf{v}]\,dx; \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v})_N = \int_a^b \mathbf{u}^* \boldsymbol{N}[\mathbf{v}]\,dx.$$

При помощи подстановки (1) и (2), выполнением угодной серии почленных интегрирований по частям, посредством использования того, что матрицы, входящие в $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$, являются симметричными, можем видеть, что исполнение (5) зависит только от выбора системы краевых условий, и это легко проверяется с использованием (4).

Действительно, с использованием следующих превращений

$$\int_a^b \mathbf{u}^*[\boldsymbol{F}_\nu(x)\mathbf{v}^{(\nu)}]^{(\nu)}dx = \Big|\mathbf{u}^*[\boldsymbol{F}_\nu\mathbf{v}^{(\nu)}]^{(\nu-1)} - \mathbf{u}'^*[\boldsymbol{F}_\nu\mathbf{v}^{(\nu)}]^{(\nu-2)} + \tag{8}$$
$$+ - \dots + (-1)^{(\nu-1)}\mathbf{u}^{(\nu-1)*}[\boldsymbol{F}_\nu\mathbf{v}^{(\nu)}]'\Big|_a^b + (-1)^\nu \int_a^b \mathbf{u}^{(\nu)*}\boldsymbol{F}_\nu\mathbf{v}^{(\nu)}\,dx$$

и (так как $\boldsymbol{F}$ является симметричным), напр. $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_M - (\mathbf{v}, \mathbf{u})_M$ может быть записано в следующем виде:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_M - (\mathbf{v}, \mathbf{u})_M = \Bigg[\sum_{\nu=0}^{m}\sum_{\mu=0}^{\nu-1}(-1)^{\nu+\varrho}\{\mathbf{u}^{(\mu)*}[\boldsymbol{F}_\nu(x)\mathbf{v}^{(\nu)}]^{(\nu-1-\mu)} - \tag{9}$$
$$- \mathbf{v}^{(\mu)*}[\boldsymbol{F}_\nu(x)\mathbf{u}^{(\nu)}]^{(\nu-1-\mu)}\}\Bigg]_a^b,$$

где правая часть называется краевой частью *Дирихле*, и эти краевые части являются компаративными функциями и их производными значениями, находящимися в точках a или b. Так как компаративные функции удовлетворяют (4), исчезновение выражения (9) можно проверять с использованием (4).

Задачи о собственном значении (3), (4) — *определенные*, если каждые из них собственных значений имеет одинаковый знак; — *полуопределенные*, если, помимо прежних и 0 является собственным значением; — *вполне определенные*, если отношения

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u})_M > 0; \quad (\mathbf{u}, \mathbf{u})_N > 0 \tag{10}$$

исполняются для любой компаративной функции $\mathbf{u}$; или *определенные в* N, если выполняется $(\mathbf{u}, \mathbf{u})_N > 0$.

Очевидно, что вполне определенные задачи о собственных значениях являются одновременно определенными задачами, потому что и собственные функции $\mathbf{y}$ представляют собой компаративные функции, а на основании (3) выражения

$$(\mathbf{y}, \mathbf{y})_M = \lambda(\mathbf{y}, \mathbf{y})_N \quad \text{то есть} \quad \lambda = \frac{(\mathbf{y}, \mathbf{y})_M}{(\mathbf{y}, \mathbf{y})_N} > 0,$$

справедливо. Полная определенность, конечно, является не необходимым условием для определенности, так как не только собственные функции представляют собой компаративные функции.

3. § Несколько характерных свойств собственных значений или собственных функций

Свойства задач, содержащих функцию с одним неизвестным о собственных значениях легко обобщаемы на задаче о собственных значениях (3)—(4). Так напр., любые собственные функции $\mathbf{y}_i$ и $\mathbf{y}_k$, соответствующие паре собственного значения $\lambda_i \neq \lambda_k$ по $\boldsymbol{M}$- и $\boldsymbol{N}$-ортогональны, то есть

$$(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_k)_M = (\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_k)_N = 0. \tag{11}$$

Этот факт простое следствие самосопряженности, метод доказательства аналогичной теоремы, имеющий действие на проблему с одним неизвестным, можно применять и здесь шаг за шагом. Значит, можно утверждать, что задачи о собственных значениях (3)—(4) имеют только действительные собственные значения и также действительные собственные функции, если квадратичная форма $(\mathbf{u}, \mathbf{u})_N$ — положительно определена на множестве компаративных функций.

Впрочем, на этом множестве определенность или неопределенность формы $(\mathbf{u}, \mathbf{u})_N$ зависит от выбора системы краевого условия (4), ведь мы предположили для N, что матрицы коэффициентов, входящих в N, являются неотрицательными полуопределенными матрицами.

Квадратичная форма — с непрерывным интегрированием по частям ее членов — может быть приведена к виду (9).

Действительно, с использованием отношений (8), и переставя **u** в **v**, получим:

$$(12) \qquad (\mathbf{u}, \mathbf{u})_M = \int_a^b \sum_{\nu=0}^{m} \mathbf{u}^{(\nu)*} \boldsymbol{F}_\nu \mathbf{u}^{(\nu)} dx + \left[\sum_{\nu=0}^{m} \sum_{\mu=0}^{\nu} (-1)^{\nu+\mu} \mathbf{u}^{(\mu)*} (\boldsymbol{F}_\nu \mathbf{u}^{(\nu)})^{(\nu-1-\mu)} \right]_a^b$$

или

$$(13) \qquad (\mathbf{u}, \mathbf{u})_N = \int_a^b \sum_{\nu=0}^{n} \mathbf{u}^{(\nu)*} \boldsymbol{G} \mathbf{u}^{(\nu)} dx + \left[\sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{\nu} (-1)^{\nu+\mu} \mathbf{u}^{(\mu)*} (\boldsymbol{G}_\nu \mathbf{u}^{(\nu)})^{(\nu-1-\mu)} \right]_a^b .$$

В последующем у нас будет необходимость в использовании так называемой функциональной матрицы *Грина*, выполняющей роль функции *Грина*. Решение простой линейной неоднородной (наполовину однородной) задачи n-ного порядка, определенной известным методом [1], [2], [3] подобно функции *Грина*, теперь с целью решения вектора или матричной краевой задачи

$$(14) \qquad \boldsymbol{L}[\mathbf{y}] = \mathbf{r}(x)$$

$$(15) \qquad \boldsymbol{U}_\mu[\mathbf{y}] = \mathbf{0} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n),$$

и

$$(16) \qquad \boldsymbol{L}[\boldsymbol{Y}] = \boldsymbol{R}(x)$$

$$(17) \qquad \boldsymbol{U}_\mu[\boldsymbol{Y}] = \boldsymbol{O}, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n),$$

мы создаем матрицу-*Грина*, обобщающую понятие функции *Грина*.

Детальная форма операторов-матриц $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{U}_\mu$ в отношении (14) и (15), а также в отношении (16) и (17) тождественна (по форме выражения), но только вместо **y** стоит Y.

$$(18) \qquad \boldsymbol{L}[\mathbf{y}] = \sum_{\nu=0}^{n} \boldsymbol{P}_\nu(x) \mathbf{y}^{(\nu)}(x)$$

$$(19) \qquad \boldsymbol{U}_\mu[\mathbf{y}] = \sum_{\nu=0}^{n-1} [\boldsymbol{A}_{\nu\mu} \mathbf{y}^{(\nu)}(a) + \boldsymbol{B}_{\nu\mu} \mathbf{y}^{(\nu)}(b)] \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n).$$

Пусть функциональные матрицы $\boldsymbol{P}_\nu(x)$ — непрерывны в $[a, b]$, и пусть $\boldsymbol{P}_n(x)$ — неособенна в $[a, b]$. Пусть столбчатый вектор возмущения $\mathbf{r}(x)$, или матрица возмущения $\boldsymbol{R}(x)$ — непрерывны, но впрочем любые; $\boldsymbol{A}_{\nu\mu}$ и $\boldsymbol{B}_{\nu\mu}$ являются заданными действительными, постоянными матрицами.

Мы ищем решения краевых задач (14), (15) и (16), (17) в следующих видах:

$$\mathbf{y}(x) = \int_a^b \boldsymbol{G}(x, \xi)\mathbf{r}(\xi)\, d\xi \tag{20}$$

и

$$\boldsymbol{Y}(x) = \int_a^b \boldsymbol{G}(x, \xi)\boldsymbol{R}(\xi)\, d\xi. \tag{21}$$

$\boldsymbol{G}(x, \xi)$ называется *функциональной матрицей Грина* и определяется следующим образом:

1. Пусть $\boldsymbol{G}(x, \xi)$ в каждой из треугольных областей $0 \leqq x \leqq \xi \leqq b$ и $a \leqq \xi \leqq x \leqq b$ — непрерывная функция от x и ξ, и дифференцируема по частям по x в обеих областях. Пусть эти производные

$$\frac{\partial^\nu \boldsymbol{G}(x, \xi)}{\partial x^\nu} = \boldsymbol{G}^{(\nu)}(x, \xi), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{22}$$

— непрерывные функции от x и ξ в обеих областях.

2. Пусть производные $\boldsymbol{G}^{(\nu)}(x, \xi)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-2)$—непрерывны при ξ, фиксированный в $[a, b]$, на месте $x = \xi$, но пусть производная $(n—1)$-ого порядка $\boldsymbol{G}^{(n-1)}(x, \xi)$ делает скачок величины $\boldsymbol{P}_n^{-1}(\xi)$ на месте $x = \xi$, то есть

$$\lim_{\varepsilon \to 0} [\boldsymbol{G}^{(n-1)}(\xi + \varepsilon, \xi) - \boldsymbol{G}^{(n-1)}(\xi - \varepsilon, \xi)] = \boldsymbol{P}_n^{-1}(\xi). \tag{23}$$

3. Пусть $\boldsymbol{\alpha}$ некоторый, любой заданный, $(\neq \mathbf{0})$ постоянный вектор. Пусть $\boldsymbol{G}(x, \xi)$ — как функция от x при ξ, фиксированной в промежутке $a < \xi < b$, удовлетворяет — в случае каждого $x \neq \xi$ — системам однородных дифференциальных уравнений $\boldsymbol{L}[\boldsymbol{Y}] = \boldsymbol{O}$, соответствующим (16), или, пусть $\boldsymbol{G}(x, \xi)\boldsymbol{\alpha}$ удовлетворяет системам однородных дифференциальных уравнений $\boldsymbol{L}[\mathbf{y}] = \mathbf{0}$, принадлежащим к (14), то есть

$$\boldsymbol{L}[\boldsymbol{G}\boldsymbol{\alpha}] = \mathbf{0} \quad \text{или} \quad \boldsymbol{L}[\boldsymbol{G}] = \boldsymbol{O}. \tag{24}$$

4. Пусть $\boldsymbol{G}(x, \xi)\boldsymbol{\alpha}$ или $\boldsymbol{G}(x, \xi)$ — как функция от x — удовлетворяет краевым условиям, то есть

$$\boldsymbol{U}_\mu[\boldsymbol{G}\boldsymbol{\alpha}] = \mathbf{0} \quad \text{или} \quad \boldsymbol{U}_\mu[\boldsymbol{G}] = \boldsymbol{O}. \tag{25}$$

В последующем мы не занимаемся параллельно краевыми задачами (14), (15) и (16), (17), а только или первыми, или вторыми так как теоремы для них тождественны.

Предположим, что краевые задачи (16), (17) имеют функциональную матрицу *Грина*, удовлетворяющую условиям 1—4 тогда покажем, что матрица $\boldsymbol{F}(x)$, определенная при помощи

$$\text{(26)} \qquad \boldsymbol{F}(x)=\int\limits_a^b \boldsymbol{G}(x,\xi)\boldsymbol{R}(\xi)\,d\xi$$

удовлетворяет и системе дифференциальных уравнений, и краевым условиям. Образуем производные (26):

$$\boldsymbol{F}'(x)=\int\limits_a^b \boldsymbol{G}'(x,\xi)\boldsymbol{R}(\xi)\,d\xi$$

$$\boldsymbol{F}''(x)=\int\limits_a^b \boldsymbol{G}''(x,\xi)\boldsymbol{R}(\xi)\,d\xi$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\boldsymbol{F}^{(n-1)}(x)=\int\limits_a^b \boldsymbol{G}^{(n-1)}(x,\xi)\boldsymbol{R}(\xi)\,d\xi=\int\limits_a^x \dots+\int\limits_x^b \dots.$$

При создании следующей производной надо иметь в виду, что $\boldsymbol{G}^{(n-1)}$ делает скачок при $x=\xi$, и, следовательно,

$$\boldsymbol{F}^{(n)}(x)=\int\limits_a^x \boldsymbol{G}^{(n)}(x,\xi)\boldsymbol{R}(\xi)\,d\xi+[\boldsymbol{G}^{(n-1)}(x,\xi)\boldsymbol{R}(\xi)]_{\xi=x-0}+$$

$$+\int\limits_x^b \boldsymbol{G}^{(n)}(x,\xi)\boldsymbol{R}(\xi)\,d\xi-[\boldsymbol{G}^{(n-1)}(x,\xi)\boldsymbol{R}(\xi)]_{\xi=x+0}.$$

Используя (23)

$$\boldsymbol{F}^{(n)}(x)=\int\limits_a^b \boldsymbol{G}^{(n)}(x,\xi)\boldsymbol{R}(\xi)\,d\xi+\boldsymbol{P}_n^{-1}\boldsymbol{R}(x).$$

На этом основании:

$$\boldsymbol{L}[\boldsymbol{F}]=\sum_{\nu=0}^{n}\boldsymbol{P}_\nu\boldsymbol{F}^{(\nu)}=\int\limits_a^b\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\boldsymbol{P}_\nu(x)\boldsymbol{G}^{(\nu)}(x,\xi)\right\}\boldsymbol{R}(\xi)\,d\xi+\boldsymbol{R}(x).$$

Правый интеграл, имея в виду (24), исчезнет, значит $\boldsymbol{L}[\boldsymbol{F}]=\boldsymbol{R}(x)$; и так как матрица $\boldsymbol{F}(x)$ вместе с $\boldsymbol{G}(x,\xi)$ удовлетворяет всем краевым условиям, поэтому она является в самом деле решением краевых задач (16), (17).

В последующем мы будем исследовать условия, относящиеся к единственности и существованию матрицы *Грина*, и задаем метод для построения матрицы.

В последующем большую роль играет независимость отдельных функциональных матриц.

Таким образом, решения $\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \dots, \boldsymbol{Y}_n$ системы однородных линейных дифференциальных уравнений n-ого порядка

$$\text{(27)} \qquad \boldsymbol{L}[\boldsymbol{Y}]=\boldsymbol{O}$$

называются линейно-независимыми справа, если в интервале $[a, b]$ тождество

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{Y}_i \boldsymbol{A}_i \equiv \boldsymbol{O} \tag{28}$$

удовлетворяется только системой $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_2 = \ldots = \boldsymbol{A}_n = \boldsymbol{O}$. Это линейно-независимое справа решение n-числа называется фундаментальной системой уравнения (27).

Примечание. По нашему предположению, матрицы $\boldsymbol{Y}_i$ — непрерывно дифференцируемы $(n-1)$-раз, даже n-раз, поэтому вместе с (28) и равенства

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{Y}_i^{(\nu)} \boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{O} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

могут быть записаны в виде:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}_1 & \ldots & \boldsymbol{Y}_n \\ \boldsymbol{Y}_1 & \ldots & \boldsymbol{Y}'_n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \boldsymbol{Y}_1^{(n-1)} & \ldots & \boldsymbol{Y}_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{O}$$

значит, для того, чтобы (28) осуществлялось только выражением $\boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{O}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, необходимо и достаточно чтобы условие $\det(\boldsymbol{D}) \neq 0$ осуществилось.

Далее, можно проверить, обычным способом, (см. [5]), что $\det(\boldsymbol{D}) \not\equiv 0$ следует из условия $\det(\boldsymbol{D}) \neq 0$, если $x \in [a, b]$.

Но это последнее условие — гарантируемо нижеследующей системой начального условия:

$$\boldsymbol{Y}_1(a) = \boldsymbol{E}; \quad \boldsymbol{Y}'_1(a) = \ldots = \boldsymbol{Y}_1^{(n-1)}(a) = \boldsymbol{O}$$

$$\boldsymbol{Y}_2(a) = \boldsymbol{O}; \quad \boldsymbol{Y}'_2(a) = \boldsymbol{E}; \quad \boldsymbol{Y}''_2(a) = \ldots = \boldsymbol{Y}_2^{(n-1)}(a) = \boldsymbol{O}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\boldsymbol{Y}_n(a) = \ldots = \boldsymbol{Y}_n^{(n-2)}(a) = \boldsymbol{O}; \quad \boldsymbol{Y}_n^{(n-1)}(a) = \boldsymbol{E}.$$

В этом случае условие $\det(\boldsymbol{D}) = 1 \neq 0$ осуществляется, то есть решения суть линейно-независимы справа.

Теорема. Пусть принадлежащее к (16) уравнение

$$\boldsymbol{L}[\boldsymbol{Y}] = \boldsymbol{O} \tag{29}$$

одно из фундаментальных систем системы однородных линейных дифференциальных уравнений n-ого порядка:

$$\boldsymbol{Y}_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Пусть для (29) краевое условие, состоящее из линейно-независимых друг от друга однородных линейных уравнений, определенное на местах $x=a$ и $x=b$, имеет вид (17).

В том случае, если $\det(\boldsymbol{D})\neq 0$, то существует однозначная определенная функциональная матрица *Грина* $\boldsymbol{G}(x, \xi)$, удовлетворящая условиям 1—4 и в случае любой правой стороны решение (21) является единственным решением для краевой задачи.

Доказательство. Общее решение матричного дифференциального уравнения можно задать в следующем виде:

$$\boldsymbol{Y}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{Y}_i(x)\boldsymbol{C}_i$$

где $\boldsymbol{C}_i$ — любая постоянная матрица. Имея в виду (24), $\boldsymbol{G}(x, \xi)$ тоже представляется в обеих областях ($x\leqq\xi$ и $x\geqq\xi$) из $\boldsymbol{Y}_i$ но по разному, только зависящими от ξ матрицами коэффициентов $\boldsymbol{C}_i$ и $\overline{\boldsymbol{C}}_i$;

$$(30)\qquad \left.\begin{aligned} \boldsymbol{G}(x, \xi) &= \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{Y}_i(x)\boldsymbol{C}_i=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{Y}_i(x)(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i), \quad x\leqq\xi \\ \boldsymbol{G}(x, \xi) &= \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{Y}_i(x)\overline{\boldsymbol{C}}_i=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{Y}_i(x)(\boldsymbol{A}_i-\boldsymbol{B}_i), \quad x\geqq\xi \end{aligned}\right\}$$

где $\boldsymbol{C}_i=\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i$, $\overline{\boldsymbol{C}}_i=\boldsymbol{A}_i-\boldsymbol{B}_i$; $\boldsymbol{A}_i$ и $\boldsymbol{B}_i$ естественно могут зависеть от ξ переменной, но только не от x (30) надо удовлетворять (29) и (17). Для определения $\boldsymbol{B}_i$ при $x=\xi$, используя условия (2), относящиеся к матрице *Грина*, получим систему уравнений:

$$(31)\qquad \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{Y}_i^{(n)}(\xi)\boldsymbol{B}_i(\xi)=\boldsymbol{O}\qquad (\nu=0, 1, \ldots, n-2),$$

$$(32)\qquad \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{Y}_i^{(n-1)}(\xi)\boldsymbol{B}_i(\xi)=-\frac{1}{2}\boldsymbol{P}_n^{-1},$$

которая записывается в следующем виде:

$$(33)\qquad \begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}_1 & \boldsymbol{Y}_2 & \ldots & \boldsymbol{Y}_n \\ \boldsymbol{Y}_1' & \boldsymbol{Y}_2' & \ldots & \boldsymbol{Y}_n' \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \boldsymbol{Y}_1^{(n-1)} & \boldsymbol{Y}_2^{(n-1)} & \ldots & \boldsymbol{Y}_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \boldsymbol{B}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} \\ \vdots \\ \vdots \\ -\frac{1}{2}\boldsymbol{P}_n^{-1} \end{bmatrix}.$$

Эта (33) система может быть определена для $\boldsymbol{B}_i(\xi)$ если гиперматрица, составленная от $\boldsymbol{Y}_i^{(\nu)}$, невырожденная, то есть $\det(\boldsymbol{D})\neq 0$, что в самом деле существует, потому что мы предположили, что $\{\boldsymbol{Y}_i\}$ создает фундаментальную систему.

Определив $\boldsymbol{B}_i$, $\boldsymbol{A}_i(\xi)$ вычисляется использованием краевых условий. То есть, имея в виду (30), записывается по (25), что

$$\boldsymbol{U}_\mu\left[\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{Y}_i(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i)\right]=\boldsymbol{O}\qquad (\mu=1, 2, \ldots, n).$$

Из знаков $\pm$ в случае $x=a$, нам надо использовать знак $+$, и в случае $x=b$ знак —. Так как $\boldsymbol{U}_\mu$ есть матрица линейных операторов, поэтому для $\boldsymbol{A}_i(\xi)$ с n неизвестными, получим n уравнений в следующем виде:

$$(34)\qquad \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{U}_\mu[\boldsymbol{Y}_i]\boldsymbol{A}_i(\xi) = \mp \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{U}_\mu[\boldsymbol{Y}_i]\boldsymbol{B}_i \qquad (\mu=1, 2, \ldots, n).$$

Правая сторона системы уравнений (34) однозначно определена по предыдущему, и обозначим ее через $\boldsymbol{M}_\mu$. Тогда (34) записывается в виде

$$(35)\qquad \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_1[\boldsymbol{Y}_1]\ldots\boldsymbol{U}_1[\boldsymbol{Y}_n] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{U}_n[\boldsymbol{Y}_1]\ldots\boldsymbol{U}_n[\boldsymbol{Y}_n] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \boldsymbol{M}_n \end{bmatrix}.$$

Если (35) гиперматрицу в следующем означим через $\boldsymbol{V}$;

$$(36)\qquad \boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_1[\boldsymbol{Y}_1]\ldots\ldots\boldsymbol{U}_1[\boldsymbol{Y}_n] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{U}_n[\boldsymbol{Y}_1]\ldots\ldots\boldsymbol{U}_n[\boldsymbol{Y}_n] \end{bmatrix}$$

невырожденная, то есть $\det \boldsymbol{V}\neq 0$, тогда $\boldsymbol{A}_i(\xi)$ может быть однозначно вычислено из (35), и в этом случае существует одна и только одна функциональная матрица *Грина*.

Если $\det \boldsymbol{V}=0$, то $\boldsymbol{A}_i$ совсем не — или неоднозначно вычисляемо из (35); как мы будем видеть в следующем, это явится условием существования собственных значений в случае задач о собственных значениях.

Предположим в следующем, что $\det \boldsymbol{V}\neq 0$. Тогда, по (30) матрица *Грина* записывается в виде

$$(37)\qquad \boldsymbol{G}(x,\xi) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{Y}_i(x)\boldsymbol{A}_i}_{\boldsymbol{G}_1(x,\xi)} \pm \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{Y}_i(x)\boldsymbol{B}_i}_{\boldsymbol{G}_2(x,\xi)} \qquad \begin{cases} +, & \text{если } x\leqq\xi \\ -, & \text{если } x\geqq\xi. \end{cases}$$

Первая часть: $\boldsymbol{G}_1(x,\xi)$ непрерывно дифференцируема n раз по x, вторая часть: $\boldsymbol{G}_2(x,\xi)$ точно также непрерывно дифференцируема $(n-1)$-раз, но ее производные равны нулю до порядка $(n-2)$ включительно на месте $x=\xi$; производная $(n-1)$-ого порядка, хотя она является тоже постоянной на месте $x=\xi$, но уже не равна нулю, и переходя от знака $+$ на знак $-$, сумма (37) делает скачок.

$\boldsymbol{G}_2(x,\xi)$ всегда производима, так как матрица системы уравнения (33) невырожденная. Но $\boldsymbol{G}_1(x,\xi)$ можно производить только в случае $\det \boldsymbol{V}\neq 0$, ведь вычитывая $\boldsymbol{A}_i$ из (35), $\det \boldsymbol{V}$ стоит в знаменателе, то есть вид матрицы $\boldsymbol{G}_1$:

$$(38)\qquad \boldsymbol{G}_1(x,\xi) = \frac{\boldsymbol{H}(x,\xi)}{\det \boldsymbol{V}}$$

здесь числитель:

$$H(x, \xi) = [Y_1 Y_2 \dots Y_n] \cdot \operatorname{adj} V \cdot \begin{bmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix} \tag{39}$$

точно также всегда существует, и так как он является линейной комбинацией $Y_i(x)$ в случае постоянного ξ, таким образом он является решением для (29), то есть $L[H] = O$. G_2 — независима от краевых условий, но и G_1 и H зависят от этих.

Замечаем далее, что выше определенная и сконструированная матрица *Грина* — *„поперечно-симметрична"*.

Некоторая функциональная матрица двух переменных $K(x, y)$ называется „поперечно симметричной", если при перестановке двух независимых переменных функциональная матрица эквивалентна в транспонировке:

$$K^*(x, y) = K(y, x).$$

Теорема. Пусть (14)-(15) — самосопряженные граничные задачи парного порядка $n = 2m$, тогда функциональная матрица *Грина*, принадлежащая к ним, „поперечно-симметрична" [1].

Доказательство. Если $\mathbf{r}(x)$ и $\mathbf{s}(x)$ заданные, непрерывные в интервале $a \leqq x \leqq b$, но, впрочем, любые и $\mathbf{u}(x)$ и $\mathbf{v}(x)$ являются решениями для краевых задач

$$L[\mathbf{u}] = \mathbf{r}(x), \quad U_\mu[\mathbf{u}] = \mathbf{0}$$

или

$$L[\mathbf{v}] = \mathbf{s}(x), \quad U_\mu[\mathbf{v}] = \mathbf{0} \tag{40}$$

то по форме решения (20)

$$\mathbf{u}(x) = \int_a^b G(x, \xi) \mathbf{r}(\xi) \, d\xi \tag{41}$$

или

$$\mathbf{v}(x) = \int_a^b G(x, \xi) \mathbf{s}(\xi) \, d\xi.$$

Из-за самосопряженности

$$\int_a^b (\mathbf{u}^* L[\mathbf{v}] - \mathbf{v}^* L[\mathbf{u}]) \, dx = 0. \tag{42}$$

Подставим выражения $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $L[\mathbf{u}]$, $L[\mathbf{v}]$ в (42) из (40), (41); получим

$$\int_a^b \int_a^b [\mathbf{r}^*(\xi) G^*(x, \xi) \mathbf{s}(x) - \mathbf{s}^*(\xi) G^*(x, \xi) \mathbf{r}(x)] \, d\xi \, dx = 0. \tag{43}$$

Во втором члене, изменяя порядок интегрирования, — что осуществляется и заменой x и ξ, оставляя порядок интегрирования неизменным, и потом, используя зависимость $\mathbf{s}^*\boldsymbol{G}^*\mathbf{r}=\mathbf{r}^*\boldsymbol{G}\mathbf{s}$, получим уравнение

$$\int_a^b\int_a^b \mathbf{r}^*(\xi)[\boldsymbol{G}^*(x, \xi)-\boldsymbol{G}(\xi, x)]\mathbf{s}(x)\,d\xi\,dx=0.$$

Это уравнение требует исчезновение следующих факторов; так как векторы $\mathbf{r}(x)$ и $\mathbf{s}(x)$ любые

$$\gamma(x,\xi)=\boldsymbol{G}^*(x, \xi)-\boldsymbol{G}(\xi,x).$$

То есть предположим, что $\gamma(x, \xi)\neq \boldsymbol{O}$ на некотором (x_0, ξ_0) месте области $a<x, \xi<b$ и пусть, напр. $\gamma_{ij}>0$.

Из-за непрерывности $\boldsymbol{G}(x, \xi)$ имеется такая квадратичная область $|x-x_0|\leqq\delta$, $|\xi-\xi_0|\leqq\delta$, где γ_{ij} является еще положительной. $\mathbf{s}(x)$ можно выбирать по желанию, и поэтому, за исключением единственного компонента его, пусть все другие компоненты равны 0 в области $|x-x_0|\leqq\delta$. А этот единственный пусть будет $s_j>0$. Точно также среди компонент $\mathbf{r}(x)$, за исключением $r_\iota>0$, все другие равны 0 в области $|\xi-\xi_0|\leqq\delta$. Вне области все компоненты $\mathbf{r}$ и $\mathbf{s}$ пусть будут тождественны нулю. Тогда функция $\mathbf{r}^*\gamma\mathbf{s}=r_i\gamma_{ij}s_j$ внутри квадратичной области >0, а на границе области $\geqq 0$. Таким образом, двойной интеграл на данной области не может быть равен нулю. Из разногласия следует справедливость матрицы $\gamma\equiv\boldsymbol{O}$, то есть

$$\boldsymbol{G}^*(x, \xi)=\boldsymbol{G}(\xi, x). \tag{44}$$

Рассмотрим теперь задачу о собственном значении

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}[\boldsymbol{Y}]&\equiv\boldsymbol{M}[\boldsymbol{Y}]-\lambda\boldsymbol{N}[\boldsymbol{Y}]=\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{U}_\mu[\boldsymbol{Y}]&=\boldsymbol{U}_\mu[\boldsymbol{Y};\ \lambda]=\boldsymbol{O}, \end{aligned} \tag{45}$$

которая удовлетворяет условиям параграфа 1, а также сообщенным выше условиям параграфа 3.

Различие заключается всего в появлении параметра λ. Тогда функциональная матрица *Грина* зависит от λ тоже, то есть:

$$\boldsymbol{G}(x, \xi)=\boldsymbol{G}(x, \xi, \lambda).$$

Функциональная матрица *Грина* $\boldsymbol{G}(x, \xi, \lambda)$, соответственно употребленному при дифференциальных уравнениях названию, называется *матричной резольвентой Грина*. λ считается тут таким параметром, который, за исключением собственных значений, может принять любое значение. Итак, решение неоднородной краевой задачи

$$\left\{\begin{aligned} \boldsymbol{L}[\boldsymbol{Y}]&\equiv\boldsymbol{M}[\boldsymbol{Y}]-\lambda\boldsymbol{N}[\boldsymbol{Y}]=\boldsymbol{R}(x)\\ \boldsymbol{U}_\mu[\boldsymbol{Y}, \lambda]&=\boldsymbol{O} \end{aligned}\right. \tag{46}$$

имеет вид

$$\boldsymbol{Y}(x)=\int_a^b \boldsymbol{G}(x, \xi, \lambda)\boldsymbol{R}(\xi)\,d\xi. \tag{47}$$

Таким образом, в фундаментальной системе задачи о собственном значении (45), относящейся к системам дифференциальных уравнений $\boldsymbol{M}[\boldsymbol{Y}]-\lambda\boldsymbol{N}[\boldsymbol{Y}]=\boldsymbol{O}$ матрицы $\boldsymbol{Y}_i(x)$ зависят от λ тоже, то есть $\boldsymbol{Y}_i(x)=\boldsymbol{Y}_i(x,\lambda)$. Необходимо, чтобы их линейная комбинация представляла собственную функциональную матрицу $\boldsymbol{Y}$:

$$\boldsymbol{Y}=\sum_{i=1}^{2m}\boldsymbol{Y}_i(x)\boldsymbol{C}_i.$$

Так как $\boldsymbol{Y}$ должен удовлетворять краевым условиям, поэтому необходимо выбрать $\boldsymbol{C}_i$ так, чтобы была обеспечена справедливость:

$$(48)\qquad \sum_{i=1}^{2m}\boldsymbol{U}_\mu[\boldsymbol{Y}_i,\lambda]\boldsymbol{C}_i=\boldsymbol{O}\qquad(\mu=1,2,\ldots,2m).$$

Она имеет нетривиальное решение только в случае

$$(49)\qquad \Delta(\lambda)=\det(\boldsymbol{U}_\mu[\boldsymbol{Y}_i,\lambda])=\det\boldsymbol{V}(\lambda)=0.$$

Итак, уравнение (49) есть достаточное и необходимое условие наличия величины $\boldsymbol{C}_i\neq\boldsymbol{O}$ и вместе с тем наличия собственных функциональных матриц, то есть представляет уравнение условия собственных значений λ.

Из наших условий следует, что фундаментальная система $\boldsymbol{Y}_i(x,\lambda)$ состоит из аналитических функций относительно λ. Теперь система уравнений (48), как мы уже знаем, не может иметь систему решений больше кратности корней уравнения $\Delta(\lambda)=0$, относительно упомянутого собственного значения. Следовательно, система уравнений (48) не может иметь линейно независимый собственный вектор больше прежних, но одно нетривиальное решение имеется и таким образом, непременно имеется и один собственный вектор. Однократные корни уравнения $\Delta(\lambda)=0$, следовательно, являются однократными собственными значениями, и его многократные корни суть минимально однократные собственные значения и максимально — многократность корня равна многократности собственных значений. Рассмотрим теперь, как поступает матричная резольвента на каком-то однократном месте собственного значения λ, которая является однократными нулевыми местами функции $\Delta(\lambda)$.

Следовательно, пусть собственное значение $\lambda=\lambda_i$ однократное нулевое место детерминанта собственного значения $\Delta(\lambda)$, то есть

$$\Delta(\lambda_i)=0\quad\text{но}\quad\Delta'(\lambda_i)\neq0.$$

В этом случае $\Delta(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)\cdot\Delta_i(\lambda)$ где $\Delta_i(\lambda)$ является аналитической функцией для λ в окружности λ_i и $\Delta_i(\lambda_i)\neq0$.

Форма матричной резольвенты *Грина*, имея в виду (37) и (38) для формы (16) и (17):

$$(50a)\qquad \boldsymbol{G}(x,\xi,\lambda)=\boldsymbol{G}_1(x,\xi,\lambda)+\boldsymbol{G}_2(x,\xi,\lambda)=\frac{\boldsymbol{H}(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}+\boldsymbol{G}_2(x,\xi,\lambda).$$

Форма, соответствующая формам (14) и (15), получается из (50*a*) при помощи умножения на любой $\boldsymbol{\alpha}$ вектор, независящий от x. (Это можно сделать, потому что и произведение дает тождественно равные столбчатые векторы).

(50b)
$$\boldsymbol{G}(x, \xi, \lambda)\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{H}(x, \xi, \lambda)\boldsymbol{\alpha}}{\Delta(\lambda)} + \boldsymbol{G}_2(x, \xi, \lambda)\boldsymbol{\alpha}.$$

И $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{G}_2$ суть полные функции от λ, поэтому $\boldsymbol{G}(x, \xi, \lambda)$ мероморфна в λ, имеет полюс только на местах собственного значения $\lambda = \lambda_i$ — впрочем — регулярна.

Умножим уравнения (50*a*) и (50*b*) на $(\lambda - \lambda_i)$, тогда будем иметь:

(51a)
$$\boldsymbol{G}(x, \xi, \lambda)(\lambda - \lambda_i) = \frac{\boldsymbol{H}(x, \xi, \lambda)}{\Delta_i(\lambda)} + (\lambda - \lambda_i)\boldsymbol{G}_2(x, \xi, \lambda)$$

или

(51b)
$$\boldsymbol{G}(x, \xi, \lambda)\boldsymbol{\alpha}(\lambda - \lambda_i) = \frac{\boldsymbol{H}(x, \xi, \lambda)\boldsymbol{\alpha}}{\Delta_i(\lambda)} + (\lambda - \lambda_i)\boldsymbol{G}_2(x, \xi, \lambda)\boldsymbol{\alpha}.$$

Левое выражение не определено для случая $\lambda = \lambda_i$, так как тогда не существует матрица *Грина*, но правое выражение имеет хорошо определенное граничное значение в случае $\lambda \to \lambda_i$.

Именно, частное $\dfrac{\boldsymbol{H}}{\Delta_i(\lambda)}$ остается регулярным, а второй член стремится к нулю. Таким образом граничное значение $\boldsymbol{G}(x, \xi, \lambda)(\lambda - \lambda_i)$ находящийся на левой стороне, и граничное значение $\boldsymbol{G}(x, \xi, \lambda)\boldsymbol{\alpha}(\lambda - \lambda_i)$ известны, если $\lambda \to \lambda_i$, именно равны

(52)
$$\frac{\boldsymbol{H}(x, \xi, \lambda_i)}{\Delta_i(\lambda_i)} \quad \text{или} \quad \frac{\boldsymbol{H}(x, \xi, \lambda_i)\boldsymbol{\alpha}}{\Delta_i(\lambda_i)}.$$

Даже, взяв величину подстановки равной граничному значению, мы получим регулярную и в $\lambda = \lambda_i$ функцию на левой стороне (51).

Докажем, что (52) является собственной функцией, принадлежащей к λ_i. Именно, $\boldsymbol{H}(x, \xi, \lambda_i)$ — определено по (39), непрерывно дифференцируема $2m$ раз и состоит из линейной комбинации фундаментальной системы. $\boldsymbol{G}(x, \xi, \lambda)$ и $\boldsymbol{G}(x, \xi, \lambda)\boldsymbol{\alpha}$ удовлетворяют краевым условиям (17) или (15) на каждый $\lambda \neq \lambda_i$.

Следовательно

$$U_\mu[\boldsymbol{G}(x, \xi, \lambda)(\lambda - \lambda_i)] = \boldsymbol{O}, \quad \lambda \neq \lambda_i$$

и

$$U_\mu[\boldsymbol{G}(x, \xi, \lambda)\boldsymbol{\alpha}(\lambda - \lambda_i)] = \boldsymbol{0}, \quad \lambda \neq \lambda_i$$

и таким образом это действительно и на граничное значение

$$U_\mu[\lim_{\lambda \to \lambda_i} \boldsymbol{G}(x, \xi, \lambda)(\lambda - \lambda_i)] = \boldsymbol{O}$$

и

$$U_\mu[\lim_{\lambda \to \lambda_i} \boldsymbol{G}(x, \xi, \lambda)\boldsymbol{\alpha}(\lambda - \lambda_i)] = \boldsymbol{0}$$

то есть и $\boldsymbol{H}(x, \xi, \lambda_i)$ и точно также $\boldsymbol{H}(x, \xi, \lambda_i)\boldsymbol{\alpha}$ удовлетворяют краевым условиям (17) и (15). Значит, $\boldsymbol{H}(x, \xi, \lambda_i)$ является некоторой собственной функцией, принадлежащей к λ_i при постоянной ξ, или $\boldsymbol{H}(x, \xi, \lambda_i)\boldsymbol{\alpha}$ есть собственный вектор, принадлежащий к λ_i.

Так как λ_i-однократное собственное значение, поэтому две собственных функции или собственных вектора, которые линейно независимы друг от друга не могут существовать и, таким образом, если мы обозначаем некоторую собственную функцию, принадлежащую к λ_i, через $\boldsymbol{Y}_i$, или обозначаем собственный вектор через $\mathbf{y}_i$, то соотношения

(53a) $$\boldsymbol{H}(x, \xi, \lambda_i) = \boldsymbol{Y}_i(x)\boldsymbol{C}^*(\xi)$$

или

(53b) $$\boldsymbol{H}(x, \xi, \lambda_i)\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{y}_i\boldsymbol{C}(\xi, \boldsymbol{\alpha})$$

справедливы.

$\boldsymbol{G}(x, \xi, \lambda)$ и вместе с ней $\boldsymbol{G}(x, \xi, \lambda)(\lambda-\lambda_i)$ — поперечно симметричны на $\lambda \neq \lambda_i$, из этого следует, что вместе с тем $\boldsymbol{H}(x, \xi, \lambda_i)$ есть тоже поперечно симметрично, то есть

$$\boldsymbol{H}^*(x, \xi, \lambda_i) = \boldsymbol{H}(\xi, x, \lambda_i).$$

Из этого и (53) немедленно следует, что

(54a) $$\boldsymbol{H}(x, \xi, \lambda_i) = \boldsymbol{Y}_i(x)\boldsymbol{S}\boldsymbol{Y}_i^*(\xi)$$

или

(54b) $$\boldsymbol{H}(x, \xi, \lambda_i)\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{y}_i(x)\boldsymbol{S}\mathbf{y}_i^*(\xi)\boldsymbol{\alpha},$$

где симметричная матрица $\boldsymbol{S}$ уже не зависит ни от x, ни от ξ.

Учтя это, можно записать для любой λ

(55a) $$\boldsymbol{H}(x, \xi, \lambda) = \boldsymbol{Y}_i(x)\boldsymbol{S}\boldsymbol{Y}_i^*(\xi) + (\lambda-\lambda_i)\boldsymbol{H}_i$$

или

(55b) $$\boldsymbol{H}(x, \xi, \lambda)\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{y}_i(x)\boldsymbol{S}\mathbf{y}_i^*(\xi)\boldsymbol{\alpha} + (\lambda-\lambda_i)\boldsymbol{H}_i\boldsymbol{\alpha},$$

где $\boldsymbol{H}_i$ — целая функция собственного значения λ. И с введением $\boldsymbol{S}_i = \dfrac{\boldsymbol{S}}{\Delta_i(\lambda_i)}$, получим:

(56a) $$\boldsymbol{G}(x, \xi, \lambda) = \frac{\boldsymbol{Y}_i(x)\boldsymbol{S}_i\boldsymbol{Y}_i^*(\xi)}{\lambda-\lambda_i} + \overline{\boldsymbol{G}}_i(x, \xi, \lambda)$$

или

(56b) $$\boldsymbol{G}(x, \xi, \lambda)\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{y}_i(x)\boldsymbol{S}_i\mathbf{y}_i^*(\xi)\boldsymbol{\alpha}}{\lambda-\lambda_i} + \overline{\boldsymbol{G}}_i(x, \xi, \lambda)\boldsymbol{\alpha},$$

где $\overline{\boldsymbol{G}}_i$ – мероморфна в λ, и является регулярной функцией от λ на месте $\lambda = \lambda_i$.

$\boldsymbol{G}(x, \xi, \lambda)$ создается вполне аналогическим методом, относительно следующих однократных значений λ_i $(i = 2, 3, \ldots)$ и таким образом в общем виде:

(57a) $$\boldsymbol{G}(x, \xi, \lambda) = \sum_{\nu=1}^{s} \frac{\boldsymbol{Y}_\nu(x)\boldsymbol{S}_\nu\boldsymbol{Y}_\nu^*(\xi)}{\lambda-\lambda_\nu} + \overline{\boldsymbol{G}}_s(x, \xi, \lambda)$$

или

(57b) $$\boldsymbol{G}(x, \xi, \lambda)\boldsymbol{\alpha} = \sum_{\nu=1}^{s} \frac{\mathbf{y}_\nu(x)\boldsymbol{S}_\nu\mathbf{y}_\nu^*(\xi)\boldsymbol{\alpha}}{\lambda-\lambda_\nu} + \overline{\boldsymbol{G}}_s(x, \xi, \lambda)\boldsymbol{\alpha},$$

где $\overline{G}_s$ — мероморфна в λ, на местах λ_i $(i=1, 2, \ldots, s)$ она является регулярной, и на дальнейших местах собственных значений имеет полюс.

Прежние исследования легко обобщаемы и на случай, когда $\Delta(\lambda)$ имеет, напр., на месте $\lambda=\lambda_i$ $k>1$-кратное нулевое место и λ_i является вместе с тем k-кратным собственным значением. Это значит, что $\boldsymbol{V}(\lambda)$ имеет на месте λ_i—равное k отсутствие ранга; вследствие этого с одной стороны на основании системы уравнений (48) могут быть сконструированы k линейно независимых собственных функций и их на основании способа *Шмидта* (в обобщенном смысле) — ортогонализируем, с другой стороны, собственное значение λ_i является не меньше $(k—1)$-кратным корнем каждого минора порядка, на единицу меньшего, чем порядок матрицы $\boldsymbol{V}(\lambda)$, следовательно, то же справедливо и на матрицу $\boldsymbol{H}(x, \xi, \lambda)=\operatorname{adj} \boldsymbol{V}(\lambda)$. Соответственно этому, записанный выше ход мыслей можно повторять, отличие состоит только в том, что $\boldsymbol{H}(x, y, \lambda_i)$ выражается только (N-ортогонализованной) системой собственных функций $\boldsymbol{Y}_{i_1}, \boldsymbol{Y}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{Y}_{i_n}$, принадлежащей к λ_i, то есть имеет вид

$$\boldsymbol{H}(x, \xi, \lambda_i)=\sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{Y}_{ij}(x)\boldsymbol{S}_j\boldsymbol{Y}_{ij}^*(\xi) \tag{57c}$$

и соответственно этому образуется соответствующее (54 с) разложение матрицы *Грина*.

Зато, если мы рассмотрим окружность такого λ_j места, которая является $L>1$-кратным нулевым местом для $\Delta(\lambda)$, но для задачи только $0<l<L$-кратное собственное значение то есть, если отличие ранга матрицы $\boldsymbol{V}(\lambda_j)$ равно только $l<L$, то λ_j является вообще нулевым местом с меньшей многократностью чем $(L-1)$ для $\operatorname{adj} \boldsymbol{V}=\boldsymbol{H}$, и, таким образом, мы дойдем от уравнения (50) до уравнения (51), умножив (50) в случае надобности на некоторую высшую, чем 1-степень фактора $(\lambda-\lambda_j)$.

В этом случае, вопреки неизменности сущности хода мысли, в разложении (57) типа в знаменателе соответствующих членов находятся выражения $(\lambda-\lambda_j)$, степени также выше 1.

Наконец, вспоминаем, что если единственный любой собственный вектор собственной задачи, рассмотренный нами под (3), (4), — известен, то собственное значение λ_i, соответствующее $\mathbf{y}_i$, легко вычисляется. Значит, из уравнения

$$\boldsymbol{M}[\mathbf{y}_i]=\lambda_i\boldsymbol{N}[\mathbf{y}_i]$$

после умножения слева на $\mathbf{y}_i^*$ и после интегрирования следует отношение

$$(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_i)_M=\lambda_i(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_i)_N, \quad \text{то есть} \quad \lambda_i=\frac{(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_i)_M}{(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_i)_N}. \tag{58}$$

Частное, находящееся на правой стороне отношения (58), конечно, произвольно и определено в интервале (a, b), на вектор, дифференцируемый непрерывно $2m$ раз: если частное рассматривается на множестве компаративных векторов, то оно называется отношением *Релея* собственной задачи

$$R[\mathbf{u}]=\frac{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_M}{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_N}. \tag{59}$$

4§. Об экстремальных свойствах собственных значений и их применениях

Теорема. Пусть собственная задача

$$\boldsymbol{M}[\mathbf{y}] - \lambda \boldsymbol{N}[\mathbf{y}] = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{U}_\mu[\mathbf{y}] = \mathbf{0}$$

самосопряженная и вполне определенная. Если в отношении *Релея*, вектор $\mathbf{u}(x)$ пробегает множество векторов сравнений, то $R[\mathbf{u}]$ — принимает свой минимум и минимизирующий вектор является первым собственным вектором собственной задачи, что называется $\mathbf{y}_1$: а минимум величины $R[\mathbf{u}]$ является первым собственным значением λ_1 задачи, то есть всегда справедливо, что $R[\mathbf{u}] \geqq \lambda_1$ [1].

Доказательство. Пусть сначала компаративный вектор $\mathbf{u}$ после выбора будет фиксированным. Тогда величина $R[\mathbf{u}]$, составленная с этим $\mathbf{u}$ вектором, некоторое фиксированное число.

Подставим $\mathbf{u}$ в систему дифференциальных уравнений вместо $\mathbf{y}$; R вместо λ и образуем некоторую вспомогательную функцию $\boldsymbol{\eta}(x)$, (столбчатый вектор) с следующим соотношением:

$$\boldsymbol{M}[\mathbf{u}] - R\boldsymbol{N}[\mathbf{u}] = \boldsymbol{\eta}(x). \tag{60}$$

Если выбранный компаративный вектор $\mathbf{u}$ совпадает с некоторым собственным вектором $\mathbf{y}_i$, то $R = \lambda_i$ и $\boldsymbol{\eta}(x) \equiv \mathbf{0}$. Обратно, если $\boldsymbol{\eta}(x) \equiv \mathbf{0}$, то $\mathbf{u}$ есть один из решений системы дифференциальных уравнений $\boldsymbol{M}[\mathbf{u}] - R\boldsymbol{N}[\mathbf{u}] = \mathbf{0}$ то есть $\mathbf{u}$ является собственным вектором, а R — принадлежащее к ним собственное значение. В этом случае, безусловно правда, что $R[\mathbf{u}] \geqq \lambda_1$.

Пусть мы исключим теперь случай $\boldsymbol{\eta}(x) \equiv \mathbf{0}$. Выбирая и фиксируя $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\eta}(x)$ будет фиксированная непрерывная функция.

Таким образом, мы можем рассматривать неоднородную краевую задачу

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}[\mathbf{v}] - \lambda \boldsymbol{N}[\mathbf{v}] &= \boldsymbol{\eta}(x) \\ \boldsymbol{U}_\mu[\mathbf{v}] &= \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{61}$$

где λ есть параметр, отличающийся от нуля. Его решение $\mathbf{v}$ зависит и от параметра λ: $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, \lambda)$, который однозначно определен, и $\boldsymbol{G}(x, \xi, \lambda)$ при помощи матричной резольвенты *Грина* можно задать для каждого λ, которые не являются собственными значениями

$$\mathbf{v}(x, \lambda) = \int_a^b \boldsymbol{G}(x, \xi, \lambda)\, \boldsymbol{\eta}(\xi)\, d\xi. \tag{62}$$

Матричная резольвента *Грина* является мероморфной в λ функциональной матрицей, на местах собственных значений $\lambda = \lambda_i$ имеет полюс, впрочем регулярна. Поэтому вектор $\mathbf{v}(x, \lambda)$ тоже непрерывный и регулярный вектор в λ, в крайнем случае только в местах $\lambda = \lambda_i$ не таков. Образуем дальнейшую вспомогательную функцию

(63) $$h(\lambda) = \int_a^b \mathbf{v}^*(x, \lambda)\eta(x)\,dx.$$

(63) представляется на основании (61) и (62) в формах

(64) $$h(\lambda) = \int_a^b \{\mathbf{v}^*(x, \lambda)\boldsymbol{M}[\mathbf{v}(x, \lambda)] - \lambda\mathbf{v}^*(x, \lambda)\boldsymbol{N}[\mathbf{v}(x,\lambda)]\}\,dx$$

и

(64a) $$h(\lambda) = (\mathbf{v}, \mathbf{v})_M - \lambda(\mathbf{v}, \mathbf{v})_N.$$

Вместе с $\mathbf{v}(x, \lambda)$ $h(\lambda)$ тоже непрерывна и регулярна в λ, за исключением мест собственных значений $\lambda = \lambda_i$.

Рассмотрим функцию $h(\lambda)$ на местах $\lambda = 0$ и $\lambda = R$. Так как мы предположили, что собственная задача есть вполне определенная, поэтому $\lambda = 0$ — не собственное значение. Соответственно этому, по (61) $\mathbf{v}(x, 0)$ есть решение краевой задачи

$$\boldsymbol{M}[\mathbf{v}] = \boldsymbol{\eta}(x) \quad \text{и} \quad \boldsymbol{U}_\mu[\mathbf{v}] = \mathbf{0}$$

и таким образом:

(65) $$h(0) = (\mathbf{v}, \mathbf{v})_M > 0.$$

Если $\lambda = R$, то на основании (61) и (60) можно записывать

$$\mathbf{v}(x, R) = \mathbf{u}(x)$$

и соответственно этому

$$h(R) = (\mathbf{u}, \mathbf{u})_M - R(\mathbf{u}, \mathbf{u})_N.$$

Тогда на основании определения R, правая часть равна нулю, то есть

(66) $$h(R) = 0.$$

Если докажем и то, что $\dfrac{dh(\lambda)}{d\lambda}$ везде где $h(\lambda)$ определена, положительна, то из этих $h(0) > 0$ и $h(R) = 0$ условий уже следует, что между 0 и R имеется хотя бы одно собственное значение.

Образуем разность функции $h(\lambda)$ с помощью значений функции, вычисленных на местах λ и λ_0.

$$h(\lambda) - h(\lambda_0) = \int_a^b \{\mathbf{v}^*(x, \lambda)\,\boldsymbol{\eta}(x) - \mathbf{v}^*(x, \lambda_0)\,\boldsymbol{\eta}(x)\}\,dx.$$

Подставляя выражение $\boldsymbol{\eta}(x) = \boldsymbol{M}[\mathbf{v}(x, \lambda_0)] - \lambda_0\boldsymbol{N}[\mathbf{v}(x, \lambda_0)]$ в первый член подинтегральной функции вместо $\boldsymbol{\eta}(x)$, и во второй член выражение $\boldsymbol{\eta}(x) = \boldsymbol{M}[\mathbf{v}(x, \lambda)] - \lambda\boldsymbol{N}[\mathbf{v}(x, \lambda)]$. Это можно сделать, так как функция $\boldsymbol{\eta}(x)$ по определению (61) одна и та же для обеих $\mathbf{v}$.

После подстановки и упорядочения, используя обозначения $\mathbf{v}(x, \lambda) = \mathbf{v}$ и $\mathbf{v}(x, \lambda_0) = \mathbf{v}_0$, имея в виду самосопряженности

(67) $$h(\lambda) - h(\lambda_0) = (\mathbf{v}, \mathbf{v}_0)_M - (\mathbf{v}_0, \mathbf{v})_M - \lambda_0(\mathbf{v}, \mathbf{v}_0)_N + \lambda(\mathbf{v}_0, \mathbf{v})_N = (\lambda - \lambda_0)\,(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)_N.$$

Из этого получается

$$\frac{dh}{d\lambda}=\lim_{\lambda_0\to\lambda}\frac{h(\lambda)-h(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}=(\mathbf{v},\mathbf{v})_N>0, \tag{68}$$

то есть, производная для h — везде положительна.

Теорема. Самосопраженная и вполне определенная задача о собственном значении, рассмотренная в предыдущей теореме, имеет счетное бесконечное (действительное положительное) число собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots .$ $(s+1)$, λ_{s+1} есть минимум отношения *Релея*, если поставим условие, чтобы область определения была множеством N-ортогональных компаративных векторов на первые s собственные векторы.

Многократные собственные значения вычисляются соответственно своим многократностям [1].

Доказательство. Выберем сначала из компаративных векторов $\mathbf{u}$ те, которые N ортогональны на первый собственный вектор $\mathbf{y}_1$, то есть

$$(\mathbf{u},\mathbf{y}_1)_N=0. \tag{69}$$

Таков $\mathbf{u}(x)$, который не может быть принадлежащим к λ_1 собственным векторам и можно представить, напр., в следующем виде

$$\mathbf{u}(x)=\mathbf{w}(x)-\mathbf{y}_1(x)\frac{(\mathbf{w}(\xi),\mathbf{y}_1(\xi))_N}{(\mathbf{y}_1(\xi),\mathbf{y}_1(\xi))_N},$$

где $\mathbf{w}(x)$ какой-то, не параллельный с собственным вектором $\mathbf{y}_1$ компаративный вектор.

Пусть $\mathbf{u}(x)$ снова, после выбора фиксирован, тогда отношение *Релея* $R[\mathbf{u}]$ — постоянное число.

Образуем вспомогательную функцию $\boldsymbol{\eta}(x)$ соответственно (60)

$$\boldsymbol{M}[\mathbf{u}]-R\boldsymbol{N}[\mathbf{u}]=\boldsymbol{\eta}(x). \tag{70}$$

Если $\boldsymbol{\eta}(x)\equiv\mathbf{0}$, то $\mathbf{u}(x)$ является собственным вектором, но так как он не может быть первым, то он должен быть или вторым или некоторым высшим собственным вектором, значит неравенство $R\geqq\lambda_2$ действительно, справедливо. Следовательно, достаточно исследовать случай $\boldsymbol{\eta}(x)\not\equiv\mathbf{0}$. Аналогично (61)-ому образуем краевую задачу

$$\begin{cases}\boldsymbol{M}[\mathbf{v}]-\lambda\boldsymbol{N}[\mathbf{v}]=\boldsymbol{\eta}(x)\\ \boldsymbol{U}_\mu[\mathbf{v}]=\mathbf{0},\end{cases}$$

где вид решения $\mathbf{v}(x,\lambda)$ представленный матричной резольвентой *Грина*;

$$\mathbf{v}(x,\lambda)=\int_a^b\boldsymbol{G}(x,\xi,\lambda)\,\boldsymbol{\eta}(\xi)\,d\xi. \tag{71}$$

(74) имеет полюс на месте $\lambda=\lambda_1$, поэтому сделаем разложение*

$$\boldsymbol{G}(x,\xi,\lambda)=\frac{1}{\lambda-\lambda_1}\mathbf{y}_1(x)\boldsymbol{S}_1\mathbf{y}_1^*(\xi)+\overline{\boldsymbol{G}}_1(x,\xi,\lambda), \tag{72}$$

где $\boldsymbol{G}_1(x,\xi,\lambda)$ уже регулярна на месте $\lambda=\lambda_1$. Подставляя (72) в (71), интеграл первого члена исчезнет из-за ортогональности $\mathbf{u}$ на $N[\mathbf{y}_1]$, и из-за самосопряженности. Следовательно $(\mathbf{u},\mathbf{y}_1)_N=(\mathbf{y}_1,\mathbf{u})_N=0$

$$(\mathbf{u},\mathbf{y}_1)_N=\frac{1}{\lambda_1}(\mathbf{u},\mathbf{y}_1)_M=\frac{1}{\lambda_1}(\mathbf{y}_1,\mathbf{u})_M=0,$$

и таким образом

$$(\mathbf{y}_1,\mathbf{u})_M=(\mathbf{y}_1,\mathbf{u})_N=0.$$

Значит, на основании (70)

$$\int_a^b \mathbf{y}_1^*(\xi)\,\boldsymbol{\eta}(\xi)\,d\xi=0,$$

то есть

$$\mathbf{v}(x,\lambda)=\int_a^b \overline{\boldsymbol{G}}_1(x,\xi,\lambda)\,\boldsymbol{\eta}(\xi)\,d\xi. \tag{73}$$

Вектор (73) на месте $\lambda=\lambda_1$ регулярен; и сингулярен только на высшие собственные значения λ_i. Следующий ход доказательства производится по ходу мысли предыдущей теоремы. Образуем вспомогательную функцию

$$h(\lambda)=\int_a^b \mathbf{v}^*(x,\lambda)\,\boldsymbol{\eta}(x)\,dx,$$

которая принимает значение 0 на месте R, то есть $h(R)=0$. Зато на месте λ_1, в том случае, если мы употребляем обозначение $\mathbf{v}_1$ вместо $\mathbf{v}(x,\lambda_1)$:

$$h(\lambda_1)=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1)_M-\lambda_1(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1)_N=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1)_N\{R[\mathbf{v}_1]-\lambda_1\},$$

то есть $h(\lambda_1)>0$. Далее, производная функции $h(\lambda)$ положительна по релации (68), итак, между λ_1 и R надо иметь некоторое дальнейшее собственное значение, то есть

$$R\geqq\lambda_2$$

и, таким образом, существование некоторого второго собственного значения одновременно доказано.

---

* Если L_1 является многократным собственным значением, и может быть, отсутствие ранга $\Delta(\lambda)$ было бы больше этого, то вместо первого члена введется

$$\frac{1}{(\lambda-\lambda_1)^k}\sum \mathbf{y}_{1i}\boldsymbol{S}_{1i}\mathbf{y}_{1i}^*,$$

но вход мысли остается неизменным.

Вообще, если компаративный вектор **u** удовлетворяет следующей системе вспомогательного условия, состоящей из s условий

$$(\mathbf{u}, \mathbf{y}_i)_N = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s), \tag{74}$$

то $R[\mathbf{u}] \geqq \lambda_{s+1}$. Если $\mathbf{u} = \mathbf{y}_{s+1}$, то $R[\mathbf{y}_{s+1}] = \lambda_{s+1}$.

Впрочем, мы можем производить собственные значения независимо друг от друга с угодным вариационным способом (минимакспринцип *Куранта* [1]-[2]). То есть, если мы выбираем интегрируемые, заданные в интервале $[a, b]$ линейно независимы друг от друга s векторов $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_s$ и среди **u** компаративных векторов рассмотрим те, которые в обычном смысле являются ортогональными на выбранные s векторы, то есть

$$\int_a^b \mathbf{u}^* \mathbf{w}_\sigma \, dx = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, s), \tag{75}$$

тогда минимум, или нижняя грань отношения *Релея*, образованные выбранными **u** компаративными векторам, зависит от выбора векторов $\mathbf{w}_\sigma$:

$$\operatorname*{Inf}_{\mathbf{u}} R[\mathbf{u}] = m(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_s). \tag{76}$$

Теорема. Пусть задача о собственном значении, рассмотренная выше, снова самосопряжена и вполне определена; пусть $m(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_s)$ означает нижнюю грань отношения *Релея*, определенную в (76). Если $\mathbf{w}_\sigma$ пробегает свою область определения, то $(s+1)$-ое собственное значение

$$\lambda_{s+1} = \max_{\mathbf{w}_\sigma} m(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_s). \tag{77}$$

Доказательство. Покажем сначала, что существует такой допустимый компаративный вектор, который может быть линейно составлен из первых $(s+1)$ собственных векторов $\mathbf{y}_\sigma$

$$\mathbf{u} = \sum_{\sigma=1}^{s+1} a_\sigma \mathbf{y}_\sigma. \tag{78}$$

На основе ортогональности

$$\int_a^b \mathbf{u}^* \mathbf{w}_\varrho \, dx = \sum_{\sigma=1}^{s+1} a_\sigma \int_a^b \mathbf{y}_\sigma^* \mathbf{w}_\varrho \, dx = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, s).$$

Следовательно, мы имеем однородные линейные условия для $(s+1)$ константы a_σ $(s+1)$ числа, то есть они всегда удовлетворяемы такими значениями a_σ, которые не равны нулю одновременно.

Используя (78)

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u})_M = \int_a^b \sum_{\sigma=1}^{s+1} a_\sigma \mathbf{y}_\sigma^* \sum_{\tau=1}^{s+1} a_\tau \boldsymbol{M}[\mathbf{y}_\tau] \, dx = \int_a^b \sum_{\sigma=1}^{s+1} a_\sigma \mathbf{y}_\sigma^* \sum_{\tau=1}^{s+1} a_\tau \lambda_\tau \boldsymbol{N}[\mathbf{y}_\tau] \, dx.$$

Из-за общей ортогональности собственных векторов, интегралы произведений, соответствующие только $\sigma = \tau$, отличаются от нуля.

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u})_M = \sum_{\sigma=1}^{s+1} \lambda_\sigma a_\sigma^2 (\mathbf{y}_\sigma, \mathbf{y}_\sigma)_N$$

и соответственно этому

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u})_N = \sum_{\sigma=1}^{s+1} a_\sigma^2 (\mathbf{y}_\sigma, \mathbf{y}_\sigma)_N.$$

Из-за полной определенности правые выражения — положительны, итак из-за $\lambda_\sigma \leqq \lambda_{s+1}$ следующая оценка справедлива

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u})_M \leqq \lambda_{s+1} (\mathbf{u}, \mathbf{u})_N$$

откуда

$$R[\mathbf{u}] \leqq \lambda_{s+1}.$$

С этим утверждение $m(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_s) \leqq \lambda_{s+1}$ доказано. Следует еще вариация системы $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_s\} = \mathbf{w}_\sigma$. Выбирем особым образом $\mathbf{w}_\sigma$; соответственно отношению

$$\mathbf{w}_\sigma = \boldsymbol{N}[\mathbf{y}_\sigma],$$

тогда мы дойдем до проблемы минимума, относящейся к высшим собственным значениям в предыдущей теореме, и таким образом, $m = \lambda_{s+1}$. То есть λ_{s+1} есть максимум нижней грани m и этот максимум получается вариацией $\mathbf{w}$.

5. § Уточнение теорем

Мы можем утверждать, даже уточнить в некоторой степени свойства минимума собственных значений без использования матрицы *Грина* и, продвигаясь по этому пути, мы можем показать и некоторое интересное свойство матрицы *Грина*.

Рассмотрим снова самосопряженную задачу о собственном значении, находящуюся в (3), (4) но являющуюся теперь определенной в N.

Теорема. Если так называемое отношение *Релея*

$$R[\mathbf{u}] = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_M}{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_N} = \frac{\int_a^b \mathbf{u}^* \boldsymbol{M}[\mathbf{u}]\, dx}{\int_a^b \mathbf{u}^* N[\mathbf{u}]\, dx} \tag{79}$$

имеет нижнюю грань на множестве компаративных векторов, то его нижняя грань: λ_0 представляет некоторое собственное значение задачи (3), (4).

Доказательство. Рассмотрим модули непрерывности

$$\omega(\delta; \boldsymbol{F}^{(\nu)}) = \sup_{a \leqq x \leqq \vartheta} \left\{ \sup_{0 < \vartheta \leqq \delta} \| \boldsymbol{F}^{(\nu)}(x + \vartheta) - \boldsymbol{F}^{(\nu)}(x) \| \right\} \quad \text{или} \quad \omega(\delta; \boldsymbol{G}^{(\nu)})$$

или их верхнюю огибающую:

$$\omega(\delta)=\sup\{\omega(\delta;\boldsymbol{F}^{(\nu)});\omega(\delta;\boldsymbol{G}^{(\nu)})\}$$

относящиеся к матрицам

$$\boldsymbol{F}^{(\nu)}(x) \qquad (\nu=1, 2, \ldots, m), \qquad \boldsymbol{G}^{(\nu)}(x) \qquad (\nu=1, 2, \ldots, m).$$

Обозначаем нижнюю грань отношения *Релея* $R[\mathbf{u}]$ через λ_1, пока $\mathbf{u}$ пробежит такое подмножество K^*, ка котором соотношение

$$\omega(\delta:\mathbf{v}^{(2m)})=\sup_{0<\vartheta\leqq\delta}\left\{\sup_{a\leqq x\leqq b-\vartheta}\|\mathbf{v}(x+\vartheta)-\mathbf{v}(x)\|\right\}\leqq\omega(\delta)$$

справедливо в случае $\mathbf{v}_1\in K^*$.

Благодаря компактности K^* имеется $\mathbf{v}_1\in K^*$ при котором

$$R[\mathbf{v}_1]=\lambda_1$$

справедливо. Можно отметить, что в соотношении (3), после дифференцирований сразу же видно, что с соответственным постоянным c соотношение

$$\omega(\delta;\boldsymbol{\eta}_1)=\omega(\delta;\boldsymbol{M}[\mathbf{v}_1]-\lambda_1\boldsymbol{N}[\mathbf{v}_1])\leqq C\omega(\delta) \tag{80}$$

справедливо, ведь, в разложении $\boldsymbol{\eta}$ неравенство (80)-ого типа справедливо для каждого члена. Так как в случае произвольно выбранного $c\neq 0$, вспоследствии линейности уравнений

$$R[c\mathbf{v}_1]=R[\mathbf{v}_1] \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\eta}(c\mathbf{v}_1)=c\,\boldsymbol{\eta}(\mathbf{v}_1) \tag{81}$$

справедливы, поэтому $\mathbf{v}_1$ может быть выбран так, как имеется в (80) и выбор $c=1$.

Теперь мы докажем, что $\mathbf{v}_1$ собственная функция с собственным значением λ_1.

Пусть, например, $\mathbf{v}\in K^*$ любая. Тогда при произвольно выбранной α

$$\mathbf{w}(\alpha)=(\mathbf{v}_1+\alpha\mathbf{v})\cdot\frac{1}{1+|\alpha|}\in K^* \tag{82}$$

справедлива и, таким образом,

$$R[\mathbf{w}]\geqq\lambda_1=R[\mathbf{v}_1],$$

то есть

$$(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1)_N[(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1)_M+2\alpha(\mathbf{v},\mathbf{v}_1)_M+\alpha^2(\mathbf{v},\mathbf{v})_M]\geqq(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1)_M[(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1)_N+2\alpha(\mathbf{v},\mathbf{v}_1)_N+\alpha^2(\mathbf{v},\mathbf{v})_N]$$

необходимо выполняется.

Поэтому коэффициенту члена 1-ой степени в α надо исчезнуть, следовательно,

$$(\mathbf{v},\mathbf{v}_1)_M-\lambda_1(\mathbf{v},\mathbf{v}_1)_N=\int_a^b\mathbf{v}^*\{\boldsymbol{M}[\mathbf{v}_1]-\lambda_1\boldsymbol{N}[\mathbf{v}_1]\}\,dx=0 \tag{83}$$

должен быть выполнен при любом $\mathbf{v}\in K^*$ и это возможно только в том случае если вектор $\boldsymbol{\eta}_1$, модуль непрерывности которого по (80) имеет верхнюю грань, то есть

$$\boldsymbol{M}[\mathbf{v}_1]-\lambda_1 \boldsymbol{N}[\mathbf{v}_1]=\boldsymbol{\eta}_1=\mathbf{0}.$$

Значит, $\mathbf{v}_1$ есть, в самом деле, собственный вектор.

Оправдаем ещё соотношение $\lambda_0=\lambda_1$, при помощи которого утверждение нашей теоремы оправдывается вполне. Если бы $\lambda_0<\lambda_1$, то существовал бы такой компаративный вектор $\mathbf{u}\in K$, для которого

$$\lambda_0<R[\mathbf{u}]<\lambda_1$$

бы было справедливо.

Фиксируя это $\mathbf{u}$, и определяя модуль непрерывности его, $\omega(\delta,\mathbf{u})$, нижняя грань отношения *Релея* $R[\mathbf{u}]$ может быть определена на подмножестве K^{**} компаративных векторов, где неравенство

$$\omega(\delta;\mathbf{v})\leqq\omega(\delta\mathbf{v});$$

справедливо в случае $\mathbf{v}\in K^{**}$.

Повторяя выше примененный способ, можно видеть, что существует такой $\mathbf{v}_2\in K^{**}$, где R принимает эту λ_2 нижнюю грань, далее $\lambda_0\leqq\lambda_2<\lambda_1$ справедлив, наконец, λ_2 есть собственное значение и $\mathbf{v}_2$ — собственный вектор.

Таким образом, $\mathbf{v}_2$ удовлетворяет уравнению

$$\boldsymbol{M}[\mathbf{v}_2]=\lambda_2 \boldsymbol{N}[\mathbf{v}_2]=\mathbf{0}. \tag{84}$$

Выполнив дифференцирования в уравнении, сразу же можем убедиться, что существует такая C_1 константа, с помощью которой

$$\omega(\delta;\mathbf{v}_2^{(2n)})\leqq C_1\,\omega(\delta)$$

справедлив, такое соотношение справедливо на каждый член разложений, по крайней мере, только для члена

$$\boldsymbol{F}_m(x)\cdot\mathbf{v}_2^{(2m)} \tag{85}$$

не следует это из условий.

Так как на правой стороне (84) стоит 0, поэтому эта оценка будет дана и для (85) после перестановки уравнения отсюда, благодаря дифференцируемости $\boldsymbol{F}_m(x)$, дана и для $\mathbf{v}_2^{(2m)}$.

Используя снова метод, примененный в случае (81), $\mathbf{v}_2$ может быть выбран так, чтобы $C_1=1$, то есть $\mathbf{v}_2\in K^*$ тоже справедлив. Однако, это противоречит условию $\lambda_2<\lambda_1$ то есть $\lambda_2=\lambda_1$, следовательно $\lambda_0=\lambda_1$ тоже справедлив, что мы и хотели утверждать.

Простым повторением хода мыслей, можно доказать и обобщение теоремы.

Теорема. В случае выполнения условий, находящихся в предыдущей теореме, рассмотренная задача о собственном значении имеет бесконечно много собственных значений, образующих возрастающий выше всех пределов порядок

$$\lambda_0\leqq\lambda_1\leqq\lambda_2\leqq\ldots\leqq\lambda_n\leqq\ldots$$

с принадлежащими к ним $\boldsymbol{N}$-ортонормализованными собственными векторами $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

Эти собственные значения и собственные векторы являются последовательными решениями порядка нижней экстремальной задачи.

$$\lambda_i = \inf_{K^{(i)}} R[\mathbf{v}] = R[\mathbf{v}_i],$$

где $K^{(i)}$ обозначает такое подмножество компаративных векторов, для которого

$$(\mathbf{v}, \mathbf{v}_0)_N = (\mathbf{v}, \mathbf{v}_1)_N = \ldots = (\mathbf{v}, \mathbf{v}_{i-1})_N = 0 \tag{87}$$

выполняется.

В 4. § для разложения по собственным векторам матричной функции *Грина* еще не разрешен вопрос о том, что может-ли матрица *Грина* иметь полюс порядка выше первого. Как это нетрудно видеть, что матричная функция *Грина*, принадлежащая к рассмотренной задаче о собственном значении (3)—(4) имеет однократный полюс и при любом (значит многократном) собственном значении λ_i. Действительно, пусть, напр., λ_i — некоторое собственное значение в задаче и пусть $\mathbf{v}_i$—принадлежащий ему собственный вектор, точнее один из них.

Рассмотрим теперь отношение

$$\boldsymbol{M}[\mathbf{v}_i] - \lambda \boldsymbol{N}[\mathbf{v}_i] = \boldsymbol{\eta}_i(\lambda)$$

при любой величине $\lambda_{i-1} < \lambda < \lambda_i$ (соответственно $\lambda_i < \lambda < \lambda_{i+1}$). В этом случае

$$\boldsymbol{\eta}_i(x) = \boldsymbol{M}[\mathbf{v}_i] - \lambda_i \boldsymbol{N}[\mathbf{v}_i] - (\lambda - \lambda_i)\boldsymbol{N}[\mathbf{v}_i] = -(\lambda - \lambda_i)\boldsymbol{N}[\mathbf{v}_i]$$

и

$$\boldsymbol{\vartheta}_i(x) = \int_a^b \boldsymbol{G}(x;\xi;\lambda)\,\boldsymbol{\eta}_i(\lambda)\,d\xi = -(\lambda - \lambda_i)\int_a^b \boldsymbol{G}(x;\xi;\lambda)\cdot \boldsymbol{N}[\mathbf{v}_i]\,d\xi.$$

В этом отношении $\mathbf{v}_i(x)$ и $\boldsymbol{N}[\mathbf{v}_i]$ суть фиксированы и из этого немедленно можно видеть, что в случае $\lambda \to \lambda_i$ $\boldsymbol{G}(x;\xi;\lambda)$ стремится к бесконечности так, как и $\dfrac{1}{|\lambda - \lambda_i|}$.

Следовательно, матричная функция *Грина* может быть представлена таким образом, если $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots \leqq \lambda_n \leqq \ldots$ обозначает исчисленный многократностью порядок собственных значений; и

$$\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n, \ldots$$

обозначает принадлежащую систему ортонормализованного собственного вектора:

$$\boldsymbol{G}(x;\xi;\lambda) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\boldsymbol{Y}(x)\boldsymbol{S}_\nu \boldsymbol{Y}_\nu^*(\xi)}{\lambda - \lambda_\nu} + \overline{\boldsymbol{G}}_n(x;\xi;\lambda), \tag{88}$$

если только $\lambda \neq \lambda_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, где матрица $\overline{\boldsymbol{G}}_n$ регулярна на местах $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, предполагая что $\lambda_n < \lambda_{n+1}$ справедливо.

6. § Теорема сравнения

Теорема. Рассмотрим два самосопряженных собственных значения (3)-(4) вида:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}[\mathbf{y}] &= \lambda \boldsymbol{N}[\mathbf{y}] \\ \boldsymbol{M}^*[\mathbf{y}] &= \lambda^* \boldsymbol{N}^*[\mathbf{y}]. \end{aligned} \tag{89}$$

Пусть краевое условие тождественно для обеих задач:

$$\boldsymbol{U}_\mu[\mathbf{y}] = \mathbf{0}.$$

Далее пусть следующие условия выполняются для каждых компаративных векторов $\mathbf{u}$.

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u})_{M^*} \geqq (\mathbf{u}, \mathbf{u})_M \quad \text{и} \quad (\mathbf{u}, \mathbf{u})_N \geqq (\mathbf{u}, \mathbf{u})_{N^*} > 0. \tag{90}$$

Тогда на собственные значения λ_s и λ_s^* двух проблем справедлив, что $\lambda_s \leqq \lambda_s^*$ $(s = 1, 2, \ldots)$. Это, так называемая, теорема сравнения является непосредственным следствием принципа максимума-минимума. Таким образом, из-за условия (80) справедлив, что

$$R[\mathbf{u}] \leqq R^*[\mathbf{u}]$$

и откуда неравенство существует на каждую нижнюю и верхнюю грани, то есть

$$\lambda_s \leqq \lambda_s^*$$

справедлив для каждого s.

Отметим, что обеспечение отношений (80) введением обозначений

$$\boldsymbol{M}^* - \boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}^{**}; \quad \boldsymbol{N} - \boldsymbol{N}^* = \boldsymbol{N}^{**}$$

в сущности эквивалентно с полной определенностью квадратичных форм

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u})_{M^{**}} \quad \text{и} \quad (\mathbf{u}, \mathbf{u})_{N^{**}}.$$

С этим мы получили удобный способ для ограничения собственных значений.

7. § О численном приближении собственных значений

Пусть λ_0 обозначает один из удобных приближений некоторого собственного значения λ_i в задаче о собственном значении типа (3)-(4). Дополним систему уравнения (4) некоторым более новым, независимым от других неоднородным условным уравнением например, уравнением

$$s(\mathbf{y}) = \sum_{\nu=0}^{2m-1} (\mathbf{c}_\nu^* \mathbf{y}^{(\nu)}(a) + \mathbf{d}_\nu^* \mathbf{y}^{(\nu)}(b)) = 1$$

и обозначаем через $\boldsymbol{V}_{2m}(\mathbf{y})$ уравнение, получаемое от $\boldsymbol{U}_{2m}[\mathbf{y}]$ таким образом, что мы переменили последние рядовые векторы матриц $\boldsymbol{A}_{2m,\nu}$ или $\boldsymbol{B}_{2m,\nu}$ на векторы $\mathbf{c}_\nu^*$ или $\mathbf{d}_\nu^*$.

Таким образом, мы придем к неоднородной системе уравнений типа

$$\boldsymbol{M}[\mathbf{y}] - \lambda_0 \boldsymbol{N}[\mathbf{y}] = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{U}_\mu[\mathbf{y}] = \mathbf{0} \qquad (\mu = 1, 2, \dots 2m-1),$$

$$\boldsymbol{V}_{2m}[\mathbf{y}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

которая имеет однозначное определенное решение $\mathbf{y}_0$. $\mathbf{y}_0$ естественно не удовлетворяет оставленному условному уравнению

$$\sum_{\nu=1}^{2m-1} \left(\mathbf{a}^*_{2m,\,\nu}\mathbf{y}_0^{(\nu)}(a) + \mathbf{b}^*_{2m,\,\nu}\mathbf{y}_0^{(\nu)}(b)\right) = 0$$

так как λ_0 — не собственное значение. Естественно, $\mathbf{y}_0$ есть аналитическая функция параметра λ, предполагая, что она не собственное значение для измененной задачи, то есть в этом случае

$$\mathbf{y}(\lambda_0 + \Delta\lambda) = \mathbf{y}_0(\lambda_0) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (\Delta\lambda)^\nu \mathbf{y}_\nu(\lambda_0)$$

справедливо на достаточно малые величины $\Delta\lambda$.

Если бы мы связали задачу о начальных значениях с системой дифференциальных уравнений (3), то решение было бы при всяких условиях аналитической функцией для λ.

Однако, вследствие системы краевых условий изменение λ влечет за собой и изменение начальных значений тоже, чтобы краевые условия выполнялись и дальше.

Соответствующая линейная система уравнения инвертируема однозначно и $\mathbf{y}$ остается, таким образом, аналитической функцией собственного значения λ в интервале между λ_0 и λ_i тогда и только тогда, когда величина детерминанта (36) принадлежащего к измененным уравнениям отличается от 0 для значений λ в интервале (λ_0, λ_i). Следовательно, условием применения метода является то, что $\mathbf{c}^*_\nu$ и $\mathbf{d}^*_\nu$ должны быть выбраны так, чтобы они не были в этом интервале собственными значениями измененной задачи. Тогда векторы $\mathbf{y}_\nu$ удовлетворяют следующим системам задач:

$$\boldsymbol{M}[\mathbf{y}_\nu] - \lambda_0 \boldsymbol{N}[\mathbf{y}_\nu] = \boldsymbol{N}[\mathbf{y}_{\nu-1}] \qquad (\nu = 1, 2, \dots)$$

$$\boldsymbol{U}_\mu[\mathbf{y}_\nu] = \mathbf{0} \qquad (\mu = 1, 2, \dots, 2m-1)$$

$$\boldsymbol{V}_{2m}[\mathbf{y}_\nu] = \mathbf{0}.$$

В этом случае $\lambda_0 + \Delta\lambda = \lambda_i$ справедлив тогда, когда $\Delta\lambda$ удовлетворяет уравнению $\sum_{\nu=1}^{\infty}(\Delta\lambda)^\nu \boldsymbol{U}_{2m}(\mathbf{y}_\nu) = -\boldsymbol{U}_{2m}(\mathbf{y}_0)$. Тогда одновременно и

$$\mathbf{y}_i(x) = \mathbf{y}_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (\Delta\lambda)^\nu \mathbf{y}_\nu$$

справедливо.

Этот метод возмущения хорошо применим для численных приближений.

Точность метода наглядно демонстрирует следующий пример: Рассмотрим задачу о собственном значении:

$$y'' + \lambda y = 0$$
$$y(0) = y(1) = 0$$

который имеет собственные значения: $\lambda_k = k^2\pi^2$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Пусть, напр., $\lambda_0 = 9 \sim \pi^2 = \lambda_1$, и пусть однородное начальное условие $y'(0) = 1$ заменит второе краевое условие.

В этом случае y_0 является решением задачи

$$y'' + 9y = 0; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 1$$

то есть

$$y_0 = \frac{1}{3}\sin 3x.$$

Следовательно, y_1 удовлетворяет задаче

$$y_1'' + 9y_1 = -\frac{1}{3}\sin 3x; \quad y_1(0) = y_1'(0) = 0.$$

И таким образом

$$y_1 = -\frac{1}{18}\sin 3x + \frac{1}{18}x\cos 3x.$$

Значит, в первом приближении

$$\Delta\lambda \cong \frac{y_0(1)}{y_1(1)} = \frac{\frac{1}{3}\sin 3}{\frac{1}{18}\sin 3 - - \frac{1}{18}\cos 3} = \frac{6\,\mathrm{tg}\,3}{\mathrm{tg}\,3 - 1} = \frac{6\,\mathrm{tg}(\pi-3)}{\mathrm{tg}(\pi-3)+1} \sim 0{,}74$$

и, таким образом, 9,74 получается как более новое приближение π^2. И с учетом члена второй степени величина π^2 получается уже и на три верные значащие цифры.

Вычислительный Центр
Венгерской Академии Наук,
Будапешт

Политехнический Институт
Тяжелой Промышленности
Кафедра по Математике
Мишкольц

(Поступило 17. VIII. 1962.)

ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Collatz, *Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen* (Leipzig, 1949).
[2] Courant—Hilbert, *Methoden der Mathematischen Physik,* том. 1, изд. 2 (Berlin, 1931).
[3] E. Kamke, *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen* (Leipzig, 1951).
[4] F. R. Gantmacher, Теория матриц (Москва, 1954).
[5] I. G. Petrovszkij, *Előadások a közönséges differenciálegyenletek elméletéről* (Bp. Akadémiai Kiadó, 1951).
[6] G. W. Jarrett—P. C. Warner—P. A. Lester, The Vibration of Rotating, Tapered—Twisted Beams, *Journal of Applied Mechanics,* 1953.

ON SOME QUESTIONS OF PRINCIPLE OF EIGENVALUE-PROBLEMS CONNECTED WITH SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

By

T. Frey (Budapest) and J. Gy. Obádovics (Miskolc)

(Summary)

In the course of the numerical solution of Eigenvalue-problems connected with linear differential equations, the so-called encompassing theorems are of great importance. We generalize in this paper the most important results of the theory, especially the encompassing-theorems, to the case of systems of differential equations. We expound further a method of perturbation which can be well applied also in the practice for the solution of Eigenvalue-problems connected with the systems. The problem arose in connection with the fixation of the number of critical self-oscillation of turbine shovels.

ÜBER EINE KLASSE VON TERNÄREN QUASIGRUPPEN

Von

F. RADÓ (Cluj, Rumänien) und M. HOSSZÚ (Miskolc)

(*Vorgelegt von* G. Hajós)

1. In der Arbeit [2] wurde die folgende Frage gestellt: welche (binäre und ternäre) Loops haben die Eigenschaft, daß alle ihre Loop-Haut-Isotope, die dasselbe neutrale Element besitzen, zusammenfallen? Es wurde dort bewiesen, daß unter den binären Loops nur die Gruppen diese Eigenschaft besitzen. Bezüglich der entsprechenden Frage für ternäre Loops wurden zwei gleichwertige gewebegeometrische Bedingungen gefunden, von denen eine — eine Verallgemeinerung der Reidemeisterschen Schließungsbedingung — für die Theorie der räumlichen Gewebe von Wichtigkeit erscheint.

Wir führen in dieser Arbeit den ternären Fall auf die Untersuchung von binären Systemen zurück und geben die Lösung im reellen Falle unter Benutzung der Differenzierbarkeit an. Es wird gezeigt, daß in diesem Falle die ins Auge gefaßte Eigenschaft den ternären Gruppen und nur diesen zukommt. Wenn man aber auch die lokalen Loops in die Untersuchung heranzieht, dann bestehen die Lösungen der gestellten Frage aus den Loop-Isotopen der lokalen Quasigruppen mit der Operation

$$t=\frac{x+y+z}{ax+by+cz}, \tag{1}$$

wo a, b, c beliebige Konstanten bezeichnen.

2. Die Menge Q der Elemente $x, y, \ldots$ wird *binäre* bzw. *ternäre Quasigruppe* Q° genannt, falls eine binäre $(x, y)\to x\bigcirc y$, bzw. eine ternäre Operation $(x, y, z)\to x\bigcirc y\bigcirc z$ für die Elemente von Q erklärt ist, welche in jeder ihrer Veränderlichen, bei Konstanthaltung der anderen Veränderlichen, Q ein-eindeutig auf sich selbst abbildet. Wenn keine Gefahr für Mißverständnis besteht, werden wir das Operationszeichen $\bigcirc$ weglassen. Eine Quasigruppe heißt *Loop*, wenn es ein neutrales Element $e\in Q$ mit der Eigenschaft

$$xe=ex=x \quad \text{für jedes} \quad x\in Q$$

bzw.

$$xee=exe=eex=x \quad \text{für jedes} \quad x\in Q$$

gibt. Als *Gruppen* bezeichnet man die assoziativen Quasigruppen, also diejenigen, für welche

$$(xy)z=x(yz), \qquad x, y, z\in Q$$

bzw.

$$(xyz)uv=x(yzu)v=xy(zuv), \qquad x, y, z, u, v\in Q$$

gilt.

Den Isotopiebegriff definieren wir im ternären Falle; durch Spezialisierung gewinnt man ihn für den binären Fall. Die Quasigruppe R ist ein *Isotop* der Quasigruppe Q, wenn es solche ein-eindeutige Abbildungen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ von Q auf R gibt, daß

$$\alpha x\,\beta y\,\gamma z = \delta(xyz), \qquad x, y, z \in Q.$$

Ist $R = Q$ und $\delta x = x$ die identische abbildung, dann haben wir eine *Hauptisotopie.* Es ist leicht zu sehen, daß die Isotopie eine reflexive, symmetrische und transitive Relation ist.

Bei Untersuchungen von Eigenschaften, die bei Isomorphismen invariant sind (z. B. Assoziativität, Existenz des neutralen Elements, usw.), können wir uns auf Hauptisotope beschränken, denn es gilt: *Jedes Isotop ist einem Hauptisotop isomorph* [2].

Es sei Q eine Loop mit dem neutralen Element e. Es wurde in [2] gezeigt, daß alle Hauptisotope von Q, die das neutrale Element e besitzen, genau dann zusammenfallen, wenn

$$xy = (xb)(ay), \qquad x, y, a \in Q, \qquad ab = e \tag{2}$$

bzw.

$$xyz = (xbc)(ayc)(abz), \qquad x, y, z, a, b \in Q, \qquad abc = e \tag{3}$$

gilt. So ist das in der Einleitung geschilderte Problem mit der Lösung der Funktionalgleichungen (2) und (3) äquivalent.

In den Funktionalgleichungen (2) und (3) ist e ein festes Element von Q, von dem man nicht anzunehmen braucht, daß es ein neutrales Element ist, da dies eine Folge der Funktionalgleichungen ist. Setzt man $x = a$ in (2) ein, so sieht man, daß $ay = e(ay)$, also ist e linksseitiges neutrales Element, und ebenso zeigt die Einsetzung $y = b$, daß e auch rechtsseitiges neutrales Element ist. Im Falle der Gleichung (3) setzt man $y = b$, $z = c$, dann $x = a$, $z = c$ und schließlich $x = a$, $y = b$ ein, und erhält, daß e neutrales Element ist.

Die Lösungen der Gleichung (2) *sind die assoziativen Quasigruppen, die e als neutrales Element besitzen* [2].

3. Wir betrachten jetzt die Funktionalgleichung (3) und zeigen, daß die Operation xyz sich mittels drei binärer Gruppenoperationen aufbauen läßt. Wir erklären drei binäre Operationen auf Q durch

$$x \bigcirc y \overset{\text{def}}{=} xey, \qquad x \triangledown y \overset{\text{def}}{=} xye, \qquad x \ast y \overset{\text{def}}{=} exy. \tag{4}$$

Setzen wir $y = b = e$ in (3) ein:

$$x \bigcirc z = (x \bigcirc c) \bigcirc (a \bigcirc z), \qquad x, z, a \in Q, \tag{5}$$

$$a \bigcirc c = e.$$

Es folgt aus dem vorher zitierten Satz, daß Q° und entsprechend $Q^{\triangledown}$, Q^{*} binäre Gruppen, mit dem neutralen Element e, sind.

Es sei jetzt $b = y$, $c = e$ in (3); $aye = e$ bestimmt a als Funktion von $y: a = a(y)$; wir erhalten also

$$xyz = (x \triangledown y) \bigcirc (a(y)yz), \qquad x, y, z \in Q.$$

Wenn man hier $x=e$ setzt, so wird wegen (4)

$$y \ast z = y \bigcirc (a(y)yz),$$

also

$$(a(y)yz) = y^{-1} \bigcirc (y \ast z),$$

wo der Exponent -1 das inverse Element bezüglich der fraglichen Gruppe bezeichnet. Man erhält so

$$(6) \qquad xyz = (x \triangledown y) \bigcirc y^{-1} \bigcirc (y \ast z), \qquad x, y, z \in Q$$

und analog

$$(7) \qquad \begin{aligned} xyz &= (x \triangledown y) \ast x^{-1} \ast (x \bigcirc z) = \\ &= (x \bigcirc z) \triangledown z^{-1} \triangledown (y \ast z). \end{aligned}$$

Wir haben also die der Gleichung (3) genügende ternäre Operation $(x, y, z) \rightarrow xyz$ mittels der binären Operationen $\bigcirc$, $\triangledown$, $\ast$ aufgebaut.

Wir können auch umgekehrt zeigen, daß das Bestehen von (6) und (7) mit irgendwelchen Gruppen Q°, $Q^{\triangledown}$, $Q^{\ast}$, die alle e als neutrales Element haben, die Gleichung (3) nach sich zicht. Dafür schreiben wir

$$\begin{aligned} u &= xbc = (x \bigcirc c) \triangledown c^{-1} \triangledown (b \ast c), \\ v &= ayc = (a \bigcirc c) \triangledown c^{-1} \triangledown (y \ast c) = (a \triangledown y) \ast a^{-1} \ast (a \bigcirc c), \\ w &= abz = (a \triangledown b) \ast a^{-1} \ast (a \bigcirc z). \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} u \triangledown v &= (x \bigcirc c) \triangledown c^{-1} \triangledown (b \ast c) \triangledown (a \bigcirc c) \triangledown c^{-1} \triangledown (y \ast c) = \\ &= (x \bigcirc c) \triangledown c^{-1} \triangledown (y \ast c) = xyc, \\ v \ast w &= (a \triangledown y) \ast a^{-1} \ast (a \bigcirc c) \ast (a \triangledown b) \ast a^{-1} \ast (a \bigcirc z) = \\ &= (a \triangledown y) \ast a^{-1} \ast (a \bigcirc z) = ayz, \end{aligned}$$

weil wegen $abc=e$

$$(a \bigcirc c) \triangledown c^{-1} \triangledown (b \ast c) = (a \triangledown b) \ast a^{-1} \ast (a \bigcirc c) = e,$$

oder

$$(b \ast c) \triangledown (a \bigcirc c) \triangledown c^{-1} = a^{-1} \ast (a \bigcirc c) \ast (a \triangledown b) = e.$$

Man erhält

$$\begin{aligned} uvw &= (u \triangledown v) \bigcirc v^{-1} \bigcirc (v \ast w) = \\ &= (xyc) \bigcirc \left[(a \triangledown y) \bigcirc y^{-1} \bigcirc (y \ast c)\right]^{-1} \bigcirc (ayz) = \\ &= (x \triangledown y) \bigcirc y^{-1} \bigcirc (y \ast c) \bigcirc (y \ast c)^{-1} \bigcirc y \bigcirc (a \triangledown y)^{-1} \bigcirc \\ &\bigcirc (a \triangledown y) \bigcirc y^{-1} \bigcirc (y \ast z) = (x \triangledown y) \bigcirc y^{-1} \bigcirc (y \ast z) = xyz, \end{aligned}$$

also (6) und (7) ziehen (3) nach sich. Damit ist der folgende Satz bewiesen:

SATZ 1. *Damit die auf der Menge Q definierte Quasigruppenoperation* $(x, y, z) \rightarrow xyz$ *die Beziehung* (3) *befriedige, ist es notwendig und hinreichend, daß diese Operation von der Gestalt* (6) *und* (7) *sei, wo* $\bigcirc$, $\triangledown$, $\ast$ *solche binäre Gruppenoperationen auf Q bezeichnen, die das neutrale Element e besitzen.*

4. Wir wollen uns jetzt auf stetige Operationen beschränken, die auf einem reellen Intervall definiert sind. In diesem Falle können wir den Loop-Begriff etwas verallgemeinern, in dem wir *lokale Loops* betrachten, bei denen die Operationen nur in einer Umgebung von e definiert sind; es wird verlangt, daß diese Operationen in jeder ihrer Veränderlichen, bei Konstanthaltung der anderen Veränderlichen, eine Umgebung von e in eine Umgebung von e abbilden. Isotopie wird bei lokalen Loops lokal aufgefaßt, d. h. die Isotopierelation soll in einer Umgebung von e gelten. *Satz* 1 *gilt auch für lokale Loops*, denn der Beweis verläuft ungeändert. Die (lokalen) Gruppen Q°, Q^∇, Q^* sind (lokal) isomorph mit der (lokalen) reellen additiven Gruppe:

$$(8) \qquad \begin{cases} x \bigcirc y = f_{-1}\,[f(x)+f(y)], \\ x \nabla y = g_{-1}[g(x)+g(y)], \\ x \ast y = h_{-1}[h(x)+h(y)]; \end{cases}$$

wo f, g, h das Intervall Q auf die reelle Zahlengerade ein-eindeutig abbilden und der Index -1 die inverse Funktion bezeichnet. Es bestehen gemäß (6) und (7) die folgenden Beziehungen zwischen f, g, h:

$$(9) \qquad \begin{aligned} xyz &= f_{-1}\{f(g_{-1}[g(x)+g(y)])-f(y)+f(h_{-1}[h(y)+h(z)])\} = \\ &= g_{-1}\{g(f_{-1}[f(x)+f(z)])-g(z)+g(h_{-1}[h(y)+h(z)])\} = \\ &= h_{-1}\{h(g_{-1}[g(x)+g(y)])-h(x)+h(f_{-1}[f(x)+f(z)])\}. \end{aligned}$$

Wir suchen die Lösungen abgesehen von Isomorphismen. Darum können wir für eine Operation, z. B. $x \ast y$, die Addition nehmen; dann ist $h(x)=x$, $e=0$, $f(0)=$ $=g(0)=0$. Wir erhalten das folgende Funktionalgleichungssystem:

$$(10) \qquad \begin{aligned} &f_{-1}\{f(g_{-1}[g(x)+g(y)])-f(y)+f(y+z)\} = \\ &= g_{-1}\{g(f_{-1}[f(x)+f(z)])-g(z)+g(y+z)\} = \\ &= g_{-1}[g(x)+g(y)]-x+f_{-1}[f(x)+f(z)]. \end{aligned}$$

Wir wollen jetzt annehmen, daß die Funktionen f, g, h in (8) und (9), bzw. f, g in (10) stetig differenzierbar sind. Die aus (10_2) gewonnene Gleichung

$$g(y+z)-g(z) = g\{g_{-1}[g(x)+g(y)]-x+f_{-1}[f(x)+f(z)]\}-g\{f_{-1}[f(x)+f(z)]\}$$

ergibt

$$\begin{aligned} g'(z) &= \lim_{y\to 0} \frac{g(z+y)-g(z)}{y} = \\ &= \lim_{y\to 0} \left[\frac{g\{g_{-1}[g(x)+g(y)]-x+f_{-1}[f(x)+f(z)]\}-g\{f_{-1}[f(x)+f(z)]\}}{g_{-1}[g(x)+g(y)]-x} \cdot \right. \\ &\qquad \left. \cdot \frac{g_{-1}[g(x)+g(y)]-g_{-1}[g(x)]}{g(y)} \cdot \frac{g(y)}{y} \right] = \\ &= g'\{f_{-1}[f(x)+f(z)]\} \cdot g'_{-1}[g(x)] \cdot g'(0), \end{aligned}$$

welches, unter Benutzung von $g'_{-1}[g(x)]=1/g'(x)$ und x für $f(x)$, z für $f(z)$ eingesetzt, die Form

$$(11) \qquad g'(0)g'[f_{-1}(x+z)] = g'[f_{-1}(x)]g'[f_{-1}(z)]$$

annimmt. Da $g'(0)=0$ zu $g(x)=\text{Konst.}$ führt, ist $g'(0)\neq 0$. Die stetigen Lösungen von (11) sind

$$g'[f_{-1}(t)]=c_1 a^t. \tag{12}$$

Da die Rolle von f und g in (8), (9) symmetrisch ist, haben wir analog zu (12)

$$f'[g_{-1}(t)]=c_2 b^t. \tag{13}$$

Aus (12) und (13) folgt

$$\frac{g'(t)}{f'(t)}=\frac{c_1}{c_2}\cdot\frac{a^{f(t)}}{b^{g(t)}}, \tag{14}$$

$$a^{f(t)}=c_3 b^{g(t)}+c_4 \tag{15}$$

(a, b und die c_i bezeichnen Konstanten).

Wir differenzieren (10_1) nach x und setzen $x=0$:

$$f'_{-1}[f(y+z)]f'(y)g'_{-1}[g(y)]\,g'(0) = g'_{-1}[g(y+z)]g'(z)f'_{-1}[f(z)]f'(0)$$

oder

$$\frac{g'(y+z)}{f'(y+z)}=\frac{g'(y)}{f'(y)}\cdot\frac{g'(z)}{f'(z)}\cdot\frac{f'(0)}{g'(0)}.$$

Da $g'(0)\neq 0$, $f'(0)\neq 0$, erhalten wir aus dieser Funktionalgleichung die Beziehung

$$\frac{g'(t)}{f'(t)}=c_5 c^t,$$

die zusammen mit (14)

$$a^{f(t)}=c_6 c^t b^{g(t)}$$

ergibt. $c_6=1$, was durch Einsetzen von $t=0$ erscheint. Wir ziehen noch (15) in Betracht:

$$a^{f(t)}=c_3 b^{g(t)}+c_4=c^t b^{g(t)};$$

also, wenn $c\neq 1$

$$b^{g(t)}=\frac{c_4}{c^t-c_3},\qquad a^{f(t)}=\frac{c_4 c^t}{c^t-c_3},$$

oder, da $f(0)=g(0)=0$,

$$f(t)=\overset{a}{\log}\frac{1+kc^{-t}}{1+k},\qquad g(t)=\overset{b}{\log}\frac{c^t+k}{1+k}\qquad (k\neq 0,\ -1), \tag{16}$$

bzw., wenn $c=1$,

$$a^{f(t)}=b^{g(t)},\qquad f(t)=c_7 g(t); \tag{17}$$

in diesem Falle ist

$$g_{-1}[g(x)+g(y)]=f_{-1}[f(x)+f(y)]=x\bigcirc y=x\bigtriangledown y, \tag{18}$$

also vereinfacht sich (10) zu

$$f_{-1}[f(x)+f(y+z)]=f_{-1}[f(x)+f(y)]-x+f_{-1}[f(x)+f(z)].$$

Indem wir

$$\varphi_x(t) \overset{\text{def}}{=} f_{-1}[x+f(t)]-f_{-1}(x)$$

einführen, wird die obige Gleichung (für x schreiben wir $f_{-1}(x)$):

$$\varphi_x(y+z) = \varphi_x(y)+\varphi_x(z),$$

also $\varphi_x(t)=\lambda(x)t$, oder

$$f_{-1}(x+y) = f_{-1}(x)+\lambda(x)f_{-1}(y).$$

Man findet leicht die Lösungen dieser Funktionalgleichung:

$$f(t) = \begin{cases} \overset{\underset{\smile}{c}}{\log}(c_8 t+1), \text{ oder} \\ c_9 t. \end{cases} \tag{19}$$

5. Im Besitz der Lösungen (16) bzw. (19) der Gleichungen (10), wollen wir jetzt die Operationen $x \bigcirc y$, $x \bigtriangledown y$, $x \ast y$ aufschreiben.

Wir befassen uns zuerst mit dem Falle (19). Wenn $f(t)=g(t)=\overset{\underset{\smile}{c}}{\log}(c_8 t+1)$, dann

$$c_8(x \bigcirc y)+1 = (c_8 x+1)(c_8 y+1),$$

$$x \bigcirc y = x \bigtriangledown y = c_8 xy+x+y, \quad x \ast y = x+y. \tag{20}$$

Wenn $f(t)=g(t)=c_9 t$ gilt, dann

$$x \bigcirc y = x \bigtriangledown y = x \ast y = x+y. \tag{21}$$

Im Falle (16) betrachten wir, anstatt der durch die obigen Funktionen $f(t)$, $g(t)$, $h(t)=t$ und durch die Formel (8) und (6) bestimmten ternären Quasigruppe Q, dasjene isomorphe Bild von Q, welches mittels der Abbildung $t \to \overset{\underset{\smile}{c}}{\log}\, t$ entsteht. Dann sind

$$f(t) = \overset{\underset{\smile}{a}}{\log}\frac{1+kt^{-1}}{1+k}, \quad g(t) = \overset{\underset{\smile}{b}}{\log}\frac{t+k}{1+k}, \quad h(t) = \overset{\underset{\smile}{c}}{\log}\, t \qquad (k \neq 0, -1) \tag{22}$$

und man erhält

$$\frac{1}{1+k}\left(1+\frac{k}{x \bigcirc y}\right) = \frac{1}{(1+k)^2}\left(1+\frac{k}{x}\right)\left(1+\frac{k}{y}\right)$$

also

$$x \bigcirc y = \frac{(1+k)xy}{x+k-(x-1)y}; \tag{23}$$

weiter

$$\frac{1}{1+k}(x \bigtriangledown y+k) = \frac{1}{(1+k)^2}(x+k)(y+k),$$

$$x \bigtriangledown y = \frac{(x+k)y+k(x-1)}{1+k} \tag{24}$$

und

$$x \ast y = xy. \tag{25}$$

6. Wir schreiben schließlich die Operation $xyz = F(x, y, z)$ auf. Wenn (20) gilt,

$$F(x, y, z) = c_8 x(y+z) + x + y + z$$

oder

$$c_8 F(x, y, z) + 1 = (c_8 x + 1)(c_8 y + 1 + c_8 z + 1 - 1).$$

Dies geht durch den Isomorphismus $c_8 x + 1 \rightarrow x$ in

$$F(x, y, z) = x(y+z-1) \tag{26}$$

über. Wenn (21) gilt,

$$F(x, y, z) = x + y + z. \tag{27}$$

Wenn die Gruppenoperationen $x \bigcirc y$, $x \triangledown y$, $x \ast y$ durch (23), (24), (25) bestimmt sind, dann wird

$$F(x, y, z) = (x \triangledown y) \ast x^{-1} \ast (x \bigcirc z) = \frac{(x+k)y + k(x-1)}{1+k} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{(1+k)xz}{x+k-(x-1)z}$$

oder

$$F(x, y, z) = \frac{y + k\,\dfrac{x-1}{x+k}}{\dfrac{1}{z} - \dfrac{x-1}{x+k}} \qquad (k \neq -1, 0). \tag{28}$$

Die sämtlichen stetig differenzierbaren Lösungen der Funktionalgleichung (3) entstehen aus (26), (27), (28) durch Isomorphismus. Wenn also φ eine willkürliche, umkehrbare, stetig differenzierbare Funktion bezeichnet, die das Intervall Q auf die Zahlengerade abbildet, so haben die Lösungen von (3) die Formen

$$\tag{29} \begin{cases} F(x, y, z) = \varphi_{-1}[\varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z)], \\ F(x, y, z) = \varphi_{-1}\{\varphi(x)[\varphi(y) + \varphi(z) - 1]\}, \\ F(x, y, z) = \varphi_{-1}\left[\dfrac{\varphi(y) + k\,\dfrac{\varphi(x)-1}{\varphi(x)+k}}{\dfrac{1}{\varphi(z)} - \dfrac{\varphi(x)-1}{\varphi(x)+k}}\right] \qquad (k \neq 0, -1). \end{cases}$$

Man rechnet einfach nach, daß die Funktionen (29) die Gleichung (3) befriedigen. Ferner, wenn man die Gruppenoperationen $x \bigcirc y = F(x, e, y)$, $x \triangledown y = F(x, y, e)$, $x \ast y = F(e, x, y)$ aufbaut, bestehen die Darstellungen (6) und (7) ebenfalls. Im Falle (29_1) ist $e = \varphi_{-1}(0)$, in den Fällen (29_2) und (29_3) ist $e = \varphi_{-1}(1)$.

Da die Veränderlichen x, y, z in (3) eine symmetrische Rolle haben, muß die aus (28) durch Vertauschung von y und z entstehende Funktion ebenfalls eine Lösung von (3) sein. Diese Lösung ist in (29_3) enthalten; man bekommt sie, wenn man $\varphi(x) = 1/x$ wählt und $1/k$ statt k setzt. Vertauscht man x und z in (28), so bekommt man diese Funktion aus (29_3) bei $\varphi(x) = (k+1)x - k$, wenn man nachträglich $-k(k+1)$ statt k schreibt. Die Funktionen (29_3) können also in derselben Form aufgeschrieben werden mit irgendwelcher Permutation der Veränderlichen. Bei den Permutationen gehen die Ausnahmefälle $k = 0$, $k = -1$, $k = \infty$ ineinander über.

Setzt man in (29_3) $k=0$, $\varphi(x)=1/x$, so entsteht $F(x, y, z) = y(x+z-1)$, was ebenfalls eine Lösung von (3) ist und sich von (26) nur durch eine Permutation der Veränderlichen unterscheidet. Wir können deswegen den Ausnahmefall $k=0$ beseitigen und (29_2) streichen. Auch $k = \infty$ kann erlaubt werden, dann ist $F(x, y, z) = = \varphi_{-1}\{\varphi(z)[\varphi(x)+\varphi(y)-1]\}$.

Die Formel (29_1) enthält die ternären kommutativen Gruppen.

SATZ 2. *Jede reelle, stetig differenzierbare auf einem Intervall erklärte lokale ternäre Loop Q, deren alle Loop—Haupt-Isotope mit demselben neutralen Element zusammenfallen, ist entweder eine ternäre kommutative Gruppe, oder ihre Operation ist von der Form*

$$xyz = \varphi_{-1}\left[\frac{\varphi(y)+k\,\dfrac{\varphi(x)-1}{\varphi(x)+k}}{\dfrac{1}{\varphi(z)}-\dfrac{\varphi(x)-1}{\varphi(x)+k}}\right], \tag{30}$$

wo φ eine willkürliche, umkehrbare, stetig differenzierbare Abbildung von Q auf ein den Einheitspunkt enthaltendes Intervall der Zahlgeraden bezeichnet und k eine reelle von -1 verschiedene Konstante ist, oder aber ist sie von der Form (30) *mit irgendwelcher Vertauschung der Veränderlichen auf der rechten Seite. Eine Vertauschung der Veränderlichen ergibt i. a. keine neue Funktionen, ausgenommen $k=0$.*

Man sieht, daß die Funktionen (30) gerade die Operationen der Loop-Isotope der durch (1) definierten Quasigruppen darstellen.

MATHEMATISCHER LEHRSTUHL,
TECHNISCHE UNIVERSITÄT,
MISKOLC
RECHENINSTITUT DER AKADEMIE
DER RUMÄNISCHEN VOLKSREPUBLIK,
CLUJ, RUMÄNIEN

(Eingegangen am 10. September 1962; in veränderter Form 9. April 1963.)

Literaturverzeichnis

[1] J. ACZÉL, G. PICKERT, F. RADÓ, Nomogramme, Gewebe und Quasigruppen, *Mathematica*, **2 (25)** (1960), S. 5—24.

[2] F. RADÓ, Eine Bedingung für die Regularität der Gewebe, *Mathematica*, **2 (25)** (1960), S. 325—334.

UNIVERSALE ALGEBREN MIT GEGEBENEN AUTOMORPHISMENGRUPPEN UND KONGRUENZVERBÄNDEN

Von

E. T. SCHMIDT (Budapest)

(*Vorgelegt von* L. Rédei)

§ 1. Einleitung

Eine universale Algebra oder kürzer Algebra ist ein Paar (A, F), wo A eine Menge und F die Gesamtheit der in A definierten Operationen mit endlich vielen Veränderlichen ist. Bezeichne $G(A, F)$ die (volle) Automorphismengruppe von (A, F). G. Birkhoff [1] hat gezeigt, daß sich zu jeder Gruppe G eine Algebra (A, F) finden läßt so, daß $G \cong G(A, F)$. Die Kongruenzverbände der Algebren charakterisierend, haben G. Grätzer und Verf. [3] bewiesen, daß zu jedem kompakt erzeugten Verband[1] V eine Algebra (A, F) existiert, so daß der Kongruenzverband $\Theta(A, F)$ dieser Algebra mit V isomorph ist. (Daß die Kongruenzverbände stets kompakt erzeugt sind, haben G. Birkhoff und O. Frink [2] schon früher bewiesen.) In dieser Arbeit wird die Beziehung zwischen der Automorphismengruppe und dem Kongruenzverband einer Algebra untersucht. Wir werden zeigen, daß die Automorphismengruppe von dem Kongruenzverband völlig unabhängig ist, genauer: es besteht der

Satz. *Zu einer beliebigen Gruppe G und einem beliebigen kompakt erzeugten Verband V existiert eine Algebra* (A, F), *so daß die Automorphismengruppe von* (A, F) *mit G und der Kongruenzverband von* (A, F) *mit V isomorph ist.*

In § 2 dieser Arbeit werden einige Hilfssätze, z. B. über freie Algebren bewiesen. In § 3 wird eine einfache Algebra[2] mit gegebener Automorphismengruppe konstruiert. In § 4 findet sich der Beweis des Satzes, schließlich werden in § 5 einige Folgerungen bewiesen.

§ 2. Hilfssätze

(A, F) ist eine universale partielle Algebra — oder kürzer partielle Algebra — wenn die Operationen $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F$ nicht unbedingt überall in A definiert sind. Es sei (A, F) eine partielle Algebra und $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F$. Bezeichne $D_\varphi(A, F)$ die Menge der n-Tupeln $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(a_i \in A)$, für welche $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ definiert ist. Wir nehmen zu jedem n-Tupel $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \notin D_\varphi(A, F)$ ein neues Element $X_{u_1, u_2, \ldots, u_n}$, so daß aus $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \neq (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ stets $X_{u_1, u_2, \ldots, u_n} \neq X_{v_1, v_2, \ldots, v_n}$ folgt.

---

[1] Das Element a eines vollständigen Verbandes heißt kompakt, wenn aus $a \leqq \bigvee(x_\lambda; \lambda \in \Lambda)$ stets $a \leqq \bigvee(x_\lambda; \lambda \in \Lambda')$ für eine endliche Teilmenge Λ' von Λ folgt. Der vollständige Verband heißt kompakt erzeugt, wenn jedes Element die Vereinigung kompakter Elemente ist.

[2] Die Algebra (A, F) heißt einfach, wenn sie nur die trivialen Kongruenzrelationen besitzt, also $\Theta(A, F)$ aus höchstens zwei Elementen besteht.

Bezeichne A_φ die Menge A zusammen mit den neuen Elementen $X_{u_1, u_2, \dots, u_n}$. Wir definieren Operationen in A_φ, und so entsteht eine neue partielle Algebra (A_φ, F):

1. Für $\psi \in F, \psi \neq \varphi$ sei $\psi(a_1, a_2, \dots, a_m)$ dann und nur dann definiert, wenn $(a_1, \dots, a_m) \in D_\psi(A, F)$;

2. $\varphi(a_1, a_2, \dots, a_n)$ habe dieselbe Bedeutung, wie in (A, F), wenn $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \in D_\varphi(A, F)$. Wenn alle $a_i \in A$, aber $(a_1, a_2, \dots, a_n) \notin D_\varphi(A, F)$, so sei $\varphi(a_1, a_2, \dots, a_n) = = X_{a_1, a_2, \dots, a_n}$; für andere n-Tupeln ist φ nicht definiert.

Konstruieren wir (A_φ, F) für alle $\varphi \in F$, so daß $A_\varphi \wedge A_\psi = A$ für $\varphi \neq \psi$ $(\varphi, \psi \in F)$. Es sei $(A^0, F) = (A, F)$, $(A^1, F) = \bigvee_{\varphi \in F} (A_\varphi, F)$, $(A^2, F) = \bigvee_{\varphi \in F} (A^1_\varphi, F)$ und so weiter, und $(\bar{A}, F) = \bigvee_{i=0}^{\infty} (A^i, F)$.

Es sei (A, F) eine (partielle) Teilalgebra von (A', F') d. h. $A \subseteqq A'$, $F \subseteqq F'$. Die Kongruenzrelation $\Theta \in \Theta(A, F)$ läßt sich auf (A', F') erweitern, wenn ein $\bar{\Theta} \in \Theta(A', F')$ existiert, so daß $x \equiv y(\Theta)$ $(x, y \in A)$ dann und nur dann, wenn $x \equiv y(\bar{\Theta})$. Wir nennen $\bar{\Theta}$ die Erweiterung von Θ. Es gilt der

HILFSSATZ 1. *$(\bar{A}, F)$ ist die durch (A, F) erzeugte freie Algebra.*[3] *Jede Kongruenzrelation von (A, F) besitzt eine Erweiterung in $(\bar{A}, F)$.*

BEWEIS. Siehe [3], Sätze 5 und 11.

HILFSSATZ 2. *Jeder Automorphismus von (A, F) läßt sich eindeutig zu einem Automorphismus von $(\bar{A}, F)$ erweitern.*[4]

BEWEIS. Ist $\alpha(x)$ ein Automorphismus von (A, F), so erweitern wir $\alpha(x)$ auf (A^1, F) folgendermaßen: es sei

$$\alpha(\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \varphi(\alpha(x_1), \alpha(x_2), \dots, \alpha(x_n)).$$

Somit ist $\alpha(x)$ offensichtlich ein Automorphismus auf (A^1, F). Ebenso können wir α auf (A^2, F) erweitern usw., d. h. α ist auf $(\bar{A}, F)$ erweitbar. Die Eindeutigkeit ist offensichtlich. Q. e. d.

Zum Hilfssatz 3 brauchen wir einige weiteren Begriffe.

Sind x, y Elemente einer partiellen Algebra (A, F), so existiert eine kleinste Kongruenzrelation $\Theta_{x,y}$ mit $x \equiv y(\Theta_{x,y})$.

Es sei (A, F) eine partielle Algebra, die nur die folgenden partiellen Operationen besitzt:

(a) $\omega^\nu(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $(\nu \in \Omega_1, n = n(\nu))$ sind beliebige Operationen, und

(b) partielle Operationen: $\varphi_i^\mu(x, y)$ $(i = 1, 2, 3,\ \mu \in \Omega_2)$ mit $D_{\varphi_1^\mu}(A, F) = \{(a^\mu, \bar{a}^\mu)\}$, $D_{\varphi_2^\mu}(A, F) = \emptyset$, $D_{\varphi_3^\mu}(A, F) = \{(b^\mu, \bar{b}^\mu)\}$, wo $a^\mu, b^\mu, \bar{a}^\mu, \bar{b}^\mu$ gewisse Elemente von A und Ω_2 eine beliebige Indexmenge sind.

Die Kongruenzrelation Θ von (A, F) heisse *zuläßig*, wenn für alle $\mu \in \Omega_2$ aus $a^\mu \equiv b^\mu(\Theta)$ und $\bar{a}^\mu \equiv \bar{b}^\mu(\Theta)$ stets $\varphi_1^\mu(a^\mu, \bar{a}^\mu) \equiv \varphi_3^\mu(b^\mu, \bar{b}^\mu)(\Theta)$ folgt.

---

[3] D. h. wenn (B, E) durch $(A', F) \subseteqq (B, E)$ erzeugt ist, so daß $x \to x'$ ein Isomorphismus zwischen (A, F) und (A', F) ist, dann ist dieser Isomorphismus zu einem Homomorphismus von $(\bar{A}, F)$ auf (B, E) erweitbar.

[4] D. h. zu jedem $\alpha \in G(A, F)$ gibt es ein $\bar{\alpha} \in G(\bar{A}, F)$, so daß $\alpha(x) = \bar{\alpha}(x)$, wenn $x \in A$.

HILFSSATZ 3. *Es sei in* (A, F), *für beliebige* $x, y \in A$ $(x \neq y)$ *und* $\alpha \in G(A, F)$, $\Theta_{x,y} = \Theta_{x,\alpha(y)}$ *vorausgesetzt, daß* $x \neq \alpha(y)$. *Es seien* $\varphi_1^\mu(a^\mu, \bar{a}^\mu)$, $\varphi_3^\mu(b^\mu, \bar{b}^\mu)$ *Fixelemente*[5] *für jeden Automorphismus von* (A, F). *Die partielle Algebra* (A, F) *läßt sich zu einer Algebra* $({}^1A, F)$ *derart erweitern, daß eine Kongruenzrelation* Θ *von* (A, F) *auf* $({}^1A, F)$ *dann und nur dann erweitbar ist, wenn* Θ *zuläßig ist. Gilt ferner* $u, v \in {}^1A$, *so existiert eine kleinste kompakte Kongruenzrelation* $\Theta(u, v) \in \Theta(A, F)$ *so, daß* $u \equiv v(\overline{\Theta(u, v)})$.[6] *Jeder Automorphismus von* (A, F) *ist auf* $({}^1A, F)$ *erweitbar.*

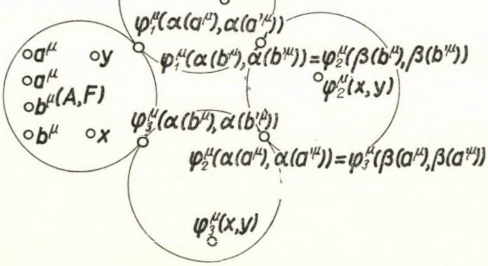
BEWEIS. (A^μ, F) sei eine Erweiterung von (A, F): $(A^\mu, F) = \bigvee_{i=1}^{3} (A_{\varphi_i^\mu}, F)$ so, daß

$$\begin{aligned}
\varphi_1^\mu(a^\mu, \bar{a}^\mu) &= \varphi_1^\mu(\alpha(a^\mu), \alpha(\bar{a}^\mu)),\\
\varphi_1^\mu(\alpha(b^\mu), \alpha(\bar{b}^\mu)) &= \varphi_2^\mu(\beta(b^\mu), \beta(\bar{b}^\mu)),\\
\varphi_2^\mu(\alpha(a^\mu), \alpha(\bar{a}^\mu)) &= \varphi_3^\mu(\beta(a^\mu), \beta(\bar{a}^\mu)),\\
\varphi_3^\mu(\alpha(b^\mu), \alpha(\bar{b}^\mu)) &= \varphi_3^\mu(b^\mu, \bar{b}^\mu),
\end{aligned}$$

für beliebige $\alpha, \beta \in G(A, F)$ (s. Abb.).

Wir definieren $({}^1A, F) = (\overline{\bigvee A^\mu}, F)$, wo $A^{\mu_1} \wedge A^{\mu_2} = A\,(\mu_1 \neq \mu_2)$. Es sei Θ eine beliebige Kongruenzrelation mit $a^\mu \equiv b^\mu(\Theta)$, $\bar{a}^\mu \equiv \bar{b}^\mu(\Theta)$ $(\mu \in \Omega_2)$ und bezeichne $\overline{\Theta}$ die Erweiterung von Θ auf $({}^1A, F)$. So besteht $\varphi_i^\mu(a^\mu, \bar{a}^\mu) \equiv \varphi_i^\mu(b^\mu, \bar{b}^\mu)(\overline{\Theta})$ $(i = 1, 2, 3)$ und da $\varphi_1^\mu(b^\mu, \bar{b}^\mu) = \varphi_2^\mu(b^\mu, \bar{b}^\mu)$, $\varphi_2^\mu(a^\mu, \bar{a}^\mu) = \varphi_3^\mu(a^\mu, \bar{a}^\mu)$, erhalten wir $\varphi_1^\mu(a^\mu, \bar{a}^\mu) \equiv \varphi_3^\mu(b^\mu, \bar{b}^\mu)(\Theta)$. Das bedeutet, daß Θ zuläßig ist.

Es sei Θ eine zuläßige Kongruenzrelation von (A, F). Wir zeigen, daß Θ auf $({}^1A, F)$ erweitbar ist. Da $({}^1A, F) = (\overline{\bigvee A^\mu}, F)$ und $A^{\mu_1} \wedge A^{\mu_2} = A$ $(\mu_1 \neq \mu_2)$, genügt es nach Hilfssatz 1 zu zeigen, daß Θ auf jedes (A^μ, F) erweitbar ist. Definieren wir die Relation Θ^* auf (A^μ, F) folgendermaßen:



I. $u \equiv v(\Theta^*)$, $u, v \in A$ bedeute $u \equiv v(\Theta)$;

II. $u \equiv v(\Theta^*)$, $u, v \in \varphi_i^\mu(A, A)$,[7] d. h. $u = \varphi_i^\mu(x, \bar{x})$, $v = \varphi_i^\mu(y, \bar{y})$, $(x, \bar{x}, y, \bar{y} \in A)$ bedeute, daß Elemente $x = z_0, z_1, \dots, z_k = y$ und $\bar{x} = \bar{z}_0, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k = \bar{y}$ existieren, so daß $z_{i-1} \equiv z_i(\Theta)$ und $\bar{z}_{i-1} \equiv \bar{z}_i(\Theta)$ gleichzeitig, oder $z_{i-1} = \alpha(x)$, $z_i = \beta(y)$, $\bar{z}_{i-1} = \alpha(\bar{x})$, $\bar{z}_i = \beta(\bar{y})$ für gewisse Automorphismen α, β.

Für andere Paare u, v ist $u \equiv v(\Theta^*)$ nicht definiert. Θ^* ist eine symmetrische und reflexive Relation mit der Substitutionseigenschaft. $\overline{\Theta}$ bezeichne die transitive Erweiterung von Θ^*. $\overline{\Theta}$ ist offensichtlich eine Kongruenzrelation in (A^μ, F) und

---

[5] x heißt Fixelement bezüglich α, wenn $\alpha(x) = x$.

[6] $\overline{\Theta(u, v)}$ ist die Erweiterung von $\Theta(u, v) \in \Theta(A, F)$ auf $({}^1A, F)$.

[7] $\varphi_i^\mu(A, A)$ bedeutet die Menge aller Elemente $\varphi_i^\mu(x, y)$ $(x, y \in A)$.

— wie man leicht einsehen kann — stimmt $\bar{\Theta}$ mit Θ^* auf A überein, d. h. Θ ist erweitbar.

Die zweite Behauptung, d. h. daß zu beliebigen $u, v \in ({}^1A, F)$ eine kleinste zuläßige kompakte Kongruenzrelation $\Theta(u, v) \in \Theta(A, F)$ existiert so, daß $u \equiv \equiv v(\overline{\Theta(u, v)})$, läßt sich ebenso beweisen, wie Satz 7 in [3]. Nach Hilfssatz 2 genügt es zu zeigen, daß jeder Automorphismus $\alpha(x)$ von (A, F) auf (A^μ, F) erweitbar ist.

Die Erweiterung von α sei folgendermaßen definiert: $\alpha(\varphi_i^\mu(x, \bar{x})) = \varphi_i^\mu(\alpha(x), \alpha(\bar{x}))$. Da aber $\varphi_i^\mu(a^\mu, \bar{a}^\mu)$, $\varphi_i^\mu(b^\mu, \bar{b}^\mu)$ Fixelemente sind, ist α offensichtlich ein Automorphismus.

HILFSSATZ 4. *Es sei in (A, F) die folgende Bedingung erfüllt:*

$(\ast)$ Für beliebige $x, y \in A$, $x \neq y$ und $\alpha \in G(A, F)$ sei $\Theta_{x,y} = \Theta_{x,\alpha(y)}$, vorausgesetzt, daß $\alpha(y) \neq x$.

Dann ist $(\ast)$ auch in $({}^1A, F)$ erfüllt: $\overline{\Theta(x, y)} = \overline{\Theta(x, \alpha(y))}\,(x \neq y,\ x \neq \alpha(y))$.[8]

BEWEIS. Wir geben den Beweis in zwei Schritten. Erstens werden wir zeigen, daß falls $(\ast)$ in (A, F) erfüllt ist, so ist es auch in $(\bigvee\limits_\mu A^\mu, F)$ erfüllt. Zum Beweis müssen wir fünf Fälle diskutieren; da sich diese ähnlich beweisen lassen, werden wir nur einen Fall besprechen.

Es sei $u = \varphi_1^\mu(x, \bar{x})$ und $v = \varphi_2^\mu(y, \bar{y})$. So ist $\Theta_{uv} = \Theta_{x,b^\mu} \cup \Theta_{\bar{x},\bar{b}^\mu} \cup \Theta_{y,b^\mu} \cup \Theta_{\bar{y},\bar{b}^\mu}$ (siehe [3] Lemma 3). Nach der Voraussetzung ist $\Theta_{y,b^\mu} = \Theta_{\alpha(y),b^\mu}$, $\Theta_{\bar{y},\bar{b}^\mu} = \Theta_{\alpha(\bar{y}),\bar{b}^\mu}$ und $\alpha(v) = \varphi_2^\mu(\alpha(y), \alpha(\bar{y}))$, d. h. $\Theta_{u,v} = \Theta_{u,\alpha(v)}$.

Es sei nun $(\ast)$ in $(B, F) = (\bigvee\limits_\mu A^\mu, F)$ erfüllt. Wir müssen zeigen, daß $(\ast)$ auch in $(\bar{B}, F)$ gilt. Offensichtlich genügt es zu zeigen, daß $(\ast)$ in (B_φ, F) $(\varphi \in F)$ erfüllt ist. Ist $u, v \in B$, so ist die Behauptung trivial. Es sei $u \in B$ und $v \notin B$, d. h. $v = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ für gewisse $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$. $\Theta_{u,v}$ ist mit $\Theta_{u,a} \cup \bigvee\limits_{i=1}^n \Theta_{a_i, v_i}$ identisch, wo $a = \varphi(a_1, \dots, a_n) \in B$, $a_i \in B$ ([3], Satz 4). Nach der Voraussetzung gilt $\Theta_{a_i,v_i} = \Theta_{a_i,\alpha(v_i)}$, d. h. $\Theta_{u,v} = \Theta_{u,a} \cup \bigvee\limits_{i=1}^n \Theta_{a_i,\alpha(v_i)} = \Theta_{u,\alpha(v)}$. Ebenso geht der Beweis, wenn $u, v \notin B$.

HILFSSATZ 5. *Es sei V ein kompakt erzeugter Verband. Dann existiert ein Halbverband H mit Nullelement, so daß der Idealverband $I(H)$ von H mit V isomorph ist.*

BEWEIS. Siehe z. B. [3].

BEMERKUNG. *H* besteht aus den kompakten Elementen von V.

§ 3. Eine einfache Algebra mit gegebener Automorphismengruppe

HILFSSATZ 6. *Zu einer beliebigen Gruppe G existiert eine einfache Algebra (C, F_1), so daß $G(C, F_1) \cong G$.*

BEWEIS. Wir schicken einen Spezialfall voraus, nämlich wenn G aus einem Element besteht.

---

[8] $\overline{\Theta(x, y)}$ ist die Erweiterung von $\Theta(x, y)$ auf $({}^1A, F)$.

Ist $G=\{e\}$, so sei (C, F_1) der $\cap$-Halbverband mit zwei Elementen, also $C=\{0, 1\}$, $F_1=\{\cap\}$.

So können wir voraussetzen, daß G mindestens zwei verschiedene Elemente enthält. Wir definieren die Algebra (C, F_1) folgendermaßen: C bestehe aus G und[9] zwei neuen Elementen 0 und 1, also sei $C=\{G, 0, 1\}$. Die Elemente von F_1 seien:

1. jedem $a\in G(\subset C)$ ordnen wir eine Operation $f_a(x)$ zu, so daß $f_a(x)=x\cdot a$ für $x\in G$ („·" ist die Gruppenoperation in G) und $f_a(0)=0, f_a(1)=1$;

2. $x\cap y$ $(x, y\in C)$ ist eine kommutative, assoziative und idempotente Operation, so daß $a\cap b=0$ wenn $a\neq b$ und $a, b\in G$; $c\cap 0=0$, $c\cap 1=c$ für beliebiges $c\in C$; (diese Verknüpfung definiert eine Ordnungsrelation in C; $x\geqq y$ dann und nur dann, wenn $x\cap y=y$);

3. $\varphi(x)$: $\varphi(1)=\varphi(a)=1$ wenn $a\neq 0$ und $\varphi(0)=0$.

Wir werden zeigen, daß $G(C, F_1)\cong G$. Die Abbildung $\alpha_a(x)$ sei für alle $a\in G$ folgendermaßen definiert: $\alpha_a(x)=a\cdot x$ wenn $x\in G$ und $\alpha_a(0)=0$, $\alpha_a(1)=1$. $\alpha_a(x)$ ist ein Automorphismus, nämlich $f_a(\alpha_b(x))=\alpha_b(f_a(x))$, $\alpha_b(x\cap y)=\alpha_b(x)\cap\alpha_b(y)$ und $\alpha_b(\varphi(x))=\varphi(\alpha_b(x))$.

Es sei $\alpha(x)$ ein beliebiger Automorphismus von (C, F_1). Zuerst werden wir zeigen, daß 0 und 1 Fixelemente sind, d. h. $\alpha(0)=0$, $\alpha(1)=1$. Wenn $\alpha(0)\neq 0$, so folgt aus $x\cap 0=0$ die Relation $\alpha(x)\cap\alpha(0)=\alpha(0)$, d. h. $\alpha(x)>\alpha(0)$, also $\alpha(x)=1$ für jedes $x\neq 0$. Da G mindestens zwei Elemente $x, y\neq 0$ enthält, folgt $\alpha(x)=\alpha(y)=1$, also $x=y$. Dieser Widerspruch zeigt, daß $\alpha(0)=0$. Anderseits, wegen $1\cap x=x$ $(x\in G)$ erhalten wir $\alpha(1)\cap\alpha(x)=\alpha(x)$, d. h. $\alpha(1)>\alpha(x)$ für jedes $x\in G$, also $\alpha(1)=1$.

Jetzt beweisen wir, daß sich jeder Automorphismus $\alpha(x)$ von (C, F_1) in der Form $\alpha_a(x)$ schreiben läßt. Es bezeichne e das Einselement von G und $a=\alpha(e)$, so ist

$$\alpha(x)=\alpha(f_x(e))=f_x(\alpha(e))=f_x(a)=a\cdot x=\alpha_a(x).$$

Zum Schluß müssen wir beweisen, daß die Abbildung $a\to\alpha_a$ $(a\in G)$ ein Isomorphismus zwischen G und $G(C, F_1)$ ist. Nun ist $\alpha_a\alpha_b(x)=\alpha_a(b\cdot x)=a\cdot(b\cdot x)$ und $\alpha_{ab}(x)=(a\cdot b)x$, also $\alpha_{ab}=\alpha_a\alpha_b$. Ferner folgt aus $a\neq b$, stets $\alpha_a(e)\neq\alpha_b(e)$ d. h. $a\to\alpha_a$ ist ein Isomorphismus.

Daß (C, F_1) einfach ist, zeigt eine triviale Rechnung. Q. e. d.

§ 4. Beweis des Satzes

Es sei V ein kompakt erzeugter Verband und G eine Gruppe. (C, F_1) sei wie in § 3 definiert. H ist der Halbverband der kompakten Elemente von V, also $I(H)\cong V$. Wir konstruieren erstens eine partielle Algebra (B, E'), so daß $\Theta(B, E')\cong V$ und $G(B, E')\cong G$.

Jedem $h\in H$, $h\neq o$ (wo o das Nullelement von H bezeichnet) ordnen wir eine Algebra zu, welche mit (C, F_1) isomorph ist und welche mit (C_h, F_1) bezeichnet wird. Die Elemente von (C_h, F_1) sind c_h $(c\in C)$. Wir werden voraussetzen, daß $C_h\bigwedge C_k=0$, wenn $h\neq k$ $(h, k\in H, h, k\neq o)$. 0 ist das Nullelement von C_h.

Betrachten wir die Vereinigungsmenge dieser Algebren (C_h, F_1); also sei $B=\bigvee\limits_h C_h$, Es bestehe E' außer den $F_1=\{f_a, \cap, \varphi(x)\}$[10] noch aus

---

[9] Im folgenden werden wir die Menge G als eine Teilmenge von C auffassen.

[10] Die Operationen f_a, $\varphi(x)$ sind trivialerweise auf B erweitbar, und es sei $c_h\cap c'_k=0$ wenn $h\neq k$; so ist auch $\cap$ auf B erweitert.

1. $\varphi_{hk}(x, y)$: $D_{\varphi_{hk}}(B, E') = \{(0, 0), (1_h, 1_k)\}$, undzwar $\varphi_{hk}(0, 0) = 0$, $\varphi_{hk}(1_h, 1_k) = 1_{h \vee k}$ $(h \neq k)$;

2. $\delta_h(x)$: $\delta_h(c_k) = c_k$ wenn $h \leqq k$, sonst ist $\delta_h(c_k) = 0$.

Es sei $E' = \{f_a, \cap, \varphi(x), \varphi_{hk}(x, y), \delta_h(x)\}$.

Wir behaupten, daß $\Theta(B, E') \cong I(H)$ $(\cong V)$ und $G(B, E') \cong G$. Da (C, F_1) einfach ist, ist jede Kongruenzrelation Θ in (B, E') durch $I(\Theta) = \{o, h;\, h \in H, 1_h \equiv 0(\Theta)\}$ eindeutig bestimmt. Zuerst beweisen wir, daß $I(\Theta)$ ein Ideal in H ist: Ist $h, k \in I(\Theta)$, so gilt $1_h \equiv 0(\Theta)$ und $1_k \equiv 0(\Theta)$, d. h. $1_{h \vee k} = \varphi_{hk}(1_h, 1_k) \equiv \varphi_{hk}(0, 0) = 0(\Theta)$; das bedeutet: $h \bigvee k \in I(\Theta)$. Anderseits folgt aus $h \leqq k$, $k \in I(\Theta)$ ersichtlich $1_k \equiv 0(\Theta)$, und so $1_h = \delta_h(1_k) \equiv \delta_h(0) = 0(\Theta)$, d. h. $h \in I(\Theta)$. Somit ist $I(\Theta)$ ein Ideal von H.

Nun sei $I \in I(H)$ und wir zeigen die Existenz eines $\Theta \in \Theta(B, E')$ mit $I(\Theta) = I$. Zur Definition von Θ genügt es anzugeben, wann $1_h \equiv 0(\Theta)$ gilt. Es sei $1_h \equiv 0(\Theta)$ dann und nur dann, wenn $h \in H$. Man kann leicht zeigen, daß $I = I(\Theta)$.

Folglich ist $\Theta \to I(\Theta)$ eine ein-eindeutige ordnungserhaltende Abbildung zwischen $\Theta(B, E')$ und $I(H)$, sie ist also ein Isomorphismus.

Es sei $\alpha(x)$ ein Automorphismus von (B, E'). Zuerst zeigen wir, daß $\alpha(c_h) \in C_h$ und $\alpha(1_h) = 1_h$, $\alpha(0) = 0$. Da $\alpha(x)$ ein Automorphismus ist, gilt $\delta_h(\alpha(c_{h \vee k})) = \alpha(\delta_h(c_{h \vee k})) = \alpha(c_h)$, d. h. $\alpha(c_h) \in C_h$. Damit haben wir gezeigt, daß α auf jedem (C_h, F_1) einen Automorphismus $\alpha^h(x)$ induziert, folglich müssen $\alpha(1_h) = \alpha^h(1_h) = 1_h$ und $\alpha(0) = \alpha^h(0) = 0$ bestehen. Wenn wir einsehen können, daß diese α^h demselben α_a entsprechen, so sind wir mit dem Beweis von $G(B, E') \cong G$ fertig. Es sei $h, k \in H$, $h, k \neq o$ mit $\alpha(c_h) = c'_h$ $(c, c' \in C)$. $\delta_h(\alpha(c_{h \vee k})) = \alpha(\delta(c_{h \vee k})) = \alpha(c_h) = c'_h$, d. h. $\delta_h(\alpha(c_{h \vee k})) = c'_h$, also $\alpha(c_{h \vee k}) = c'_{h \vee k}$. Daraus folgt $\delta_k(\alpha(c_{h \vee k})) = \alpha(\delta_k(c_{h \vee k}))$ und so $c'_k = \alpha(c_k)$. Q. e. d.

Wir wenden Hilfssatz 3 auf (B, E') an. Wir verändern (B, E'). Die neue partielle Algebra (B, E) habe dieselben Operationen wie (B, E'), nur definieren wir statt $\varphi_{hk}(x, y)$ die partiellen Operationen $\overset{i}{\varphi}_{hk}(x, y)$ $(i = 1, 2, 3)$. Es sei:

$$D_{\varphi^1_{hk}}(B, E) = \{(1_h, 1_k)\},$$

$$D_{\varphi^2_{hk}}(B, E) = \emptyset,$$

$$D_{\varphi^3_{hk}}(B, E) = \{(0, 0)\},$$

und $\varphi^1_{hk}(1_h, 1_k) = 1_{h \vee k}$, $\varphi^3_{hk}(0, 0) = 0$.

Alle von $\varphi_{hk}(x, y)$ verschiedenen, partiellen Operationen von (B, E') waren Operationen. Offensichtlich hat (B, E) mehr Kongruenzrelationen, als (B, E'), aber die zulässigen Kongruenzrelationen von (B, E) sind den Kongruenzrelationen von (B, E') gleich.

Um Hilfssatz 3 anzuwenden, müssen wir noch zeigen, daß $\Theta_{x,y} = \Theta_{x, \alpha(y)}$ $(x \neq y, x \neq \alpha(y), \alpha \in G(B, E))$. Wenn $x = c_h$, $y = c'_h$, so ist die Behauptung klar, da (C_h, F_1) einfach ist. Es sei $x = c_h$, $y = c'_k$, wo $h \neq k$. Aus $c_h \equiv c'_k(\Theta)$ folgt dann $c_h = c_h \cap c_h \equiv c_h \cap c'_k = 0(\Theta)$ und $c'_k \equiv 0(\Theta)$. Dann ist aber $\alpha(c'_k) \equiv 0(\Theta)$, also $c_h \equiv \alpha(c'_k)(\Theta)$ und $x \equiv \alpha(y)(\Theta)$. Mittels α^{-1} ergibt sich $x \equiv y(\Theta)$ aus $x \equiv \alpha(y)(\Theta)$, also ist $\Theta_{x,y} = \Theta_{x, \alpha(y)}$. Somit können wir den Hilfssatz 3 anwenden, wir können also die Algebra $({}^1B, E)$ konstruieren.

Nun definieren wir zu jedem $u, v \in {}^1B$ drei neue partielle Operationen $\lambda^i_{uv}(x, \bar{x})$ $(i = 1, 2, 3)$ so, daß

$$D_{\lambda^1_{u,v}}({}^1B, E) = \{(u, u)\},$$

$$D_{\lambda^2_{u,v}}({}^1B, E) = \bigcirc,$$

$$D_{\lambda^3_{u,v}}({}^1B, E) = \{(v, v)\},$$

und $\lambda^1_{u,v}(u, u) = a(u, v) = 1_h$ und $\lambda^3_{uv}(v, v) = 0$, wo $a(u, v)$ bezeichnet das Element von B, so daß $\Theta_{a(u,v)0} = \Theta_{u,v}$ (Hilfssatz 3). (Es ist klar, dass jede kompakte Kongruensrelation von (B, E) sich in das Form $\Theta_{1_h,0}$ schreiben läßt. Also wir können $a(u, v)$: 1_h annehmen).

Es sei $({}^1B, E^1)$ die $({}^1B, E)$ zusammen mit diesen partiellen Operationen $\lambda^i_{u,v}$. Wir behaupten, daß eine Kongruenzrelation Θ von $({}^1B, E^1)$ dann und nur dann zulässig ist, wenn sie die Erweiterung einer in (B, E) zulässigen Kongruenzrelation ist. Es sei Φ eine zuläßige Kongruenzrelation von $({}^1B, E^1)$, und es sei Θ die Kongruenzrelation von (B, E), welche durch Φ induziert ist. Es sei $u \equiv v(\Phi)$, $u, v \in {}^1B$. Φ ist zulässig, so $a(u, v) \equiv 0(\Phi)$, also $a(u, v) \equiv 0(\Theta)$. Wir erhalten, daß in (B, E) die Relation $\Theta_{a(u,v),0} \leqq \Theta$ gilt. Es gilt

$$u \equiv v(\overline{\Theta}_{a(u,v),0}),$$

folglich $u \equiv v(\overleftarrow{\Theta})$, und so $\overleftarrow{\Theta} = \Phi$. Ist anderseits $\Phi = \overleftarrow{\Theta}$ mit gewissen $\Theta \in \Theta(B, E)$ und $u \equiv v(\Phi)$, so besteht $\Theta_{a(u,v),0} \leqq \Theta$ gemäß der Definition von $a(u, v)$. Es folgt $a(u, v) \equiv 0(\Phi)$, d. h. Φ ist zuläßig.

Nun konstruieren wir aus $({}^1B, E^1)$ die Algebra $({}^2B, E^1)$ mit derselben Methode, wie $({}^1B, E)$ aus (B, E) konstruiert wurde, usw. So erhalten wir die Kette $({}^0B, E^0) = (B, E) \subseteqq ({}^1B, E^1) \subset ({}^2B, E^2) \subset \dots$. Es sei

$$(A, F) = \bigvee_{i=0}^{\infty} ({}^iB, E^i).$$

(A, F) ist offensichtlich eine Algebra. Jede zulässige Kongruenzrelation von (B, E) kann auf (A, F) erweitert werden und (A, F) hat keine anderen Kongruenzrelationen; ist nämlich $\Phi \in \Theta(A, F)$, so induziert diese eine Kongruenzrelation Φ_n auf $({}^nB, E^n)$ $(n = 0, 1, \dots)$. Aber Φ_n ist zu $({}^{n+1}B, E^{n+1})$ erweitbar, also ist Φ eine Erweiterung einer zuläßigen Kongruenzrelation von (B, E). Folglich ist $\Theta(A, F)$ mit dem Verband aller zulässigen Kongruenzrelationen von (B, E), d. h. mit $V \cong I(H)$ isomorph.

Schließlich zeigen wir, daß $G(A, F) \cong G$.

Es sei $\alpha(x) \in G(B, E')$. Trivialerweise gilt auch $\alpha(x) \in G(B, E)$. Nun sind 1_h, 0 alle Fixelemente von $\alpha(x)$, und so ist $\alpha(x)$ nach Hilfssatz 4 auf $({}^1B, E)$ erweitbar. Dann ist aber $\alpha(x)$ auch ein Automorphismus von $({}^1B, E)$. Es gilt nämlich

$$\alpha\big(\lambda^1_{u,v}(u, u)\big) = \lambda^1_{u,v}\big(\alpha(u), \alpha(u)\big),$$

$$\alpha\big(\lambda^3_{u,v}(v, v)\big) = \lambda^3_{u,v}\big(\alpha(v), \alpha(v)\big),$$

so ist wiederum nach Hilfssatz 4 α auf $({}^2B, E^2)$ erweitbar usw., also ist gleichzeitig auf (A, F) erweitbar. Da $(A, F) = \bigvee_{i-1}^{\infty} ({}^iB, E^i)$, ist es klar, daß jeder Automorphismus von (A, F) durch einen Automorphismus von (B, E) induziert ist, also hat (A, F) keinen anderen Automorphismus, als (B, E); d. h. $G(A, F) \cong G$. Damit haben wir unseren Satz bewiesen.

§ 5. Folgerungen und Probleme

Ein Meromorphismus von (A, F) ist ein Isomorphismus von (A, F) in sich, d. h.: der Endomorphismus $\alpha(x)$ ist ein Meromorphismus, wenn aus $\alpha(x)=\alpha(y)$ $(x, y \in A)$ die Gleichheit $x=y$ folgt. Die Menge $M(A, F)$ aller Meromorphismen von (A, F) ist eine Halbgruppe mit Einselement, und es gilt die folgende Behauptung:

In der Halbgruppe $M(A, F)$ gilt die rechte Kürzungsregel (aus $\beta\alpha=\gamma\alpha$ folgt $\beta=\gamma$ ($\beta\alpha$ bedeutet der Automorphismus, so daß $\beta(\alpha(x))=\beta\alpha(x)$)). Umgekehrt, wenn M eine Halbgruppe mit Einselement ist, in welcher die rechte Kürzungsregel gilt, so existiert eine Algebra (A, F) mit $M \cong M(A, F)$. Ähnlich, wie beim Beweis des Satzes — die Konstruktion soll folgendermaßen ergänzt werden: wenn $x \in (B, E)$ und $x=1_h$, so gibt es eine Operation $\omega_x(y)$ mit $\omega_x(y)=x$ — ergibt sich die

FOLGERUNG 1. Es sei V ein kompakt erzeugter Verband und M eine Halbgruppe mit Einselement, in der die rechte Kürzungsregel gültig ist; so gibt es eine Algebra (A, F) mit $\Theta(A, F) \cong V$ und $M(A, F) \cong M$.

BEMERKUNG. In diesem Fall ist jeder Endomorphismus von (A, F) ein Meromorphismus.

PROBLEM. Es sei V ein endlicher Verband, so daß $V \cong \Theta(B, E)$ für eine Algebra (B, E) gilt. Ferner sei G eine endliche Gruppe. Existiert eine endliche Algebra (A, F) mit $\Theta(A, F) \cong V$ und $G(A, F) \cong G$?

In [3] haben wir den Typ n einer Algebra (A, F) eingeführt. Es sei Θ, $\Phi \in \Theta(A, F)$ und $x, y \in A$. Es ist bekannt, daß $x \equiv y$ $(\Theta \cup \Phi)$ dann und nur dann, wenn eine endliche Folge $x=z_0, z_1, \ldots, z_{m+1}=y$ $(z_i \in A)$ existiert, so daß $z_i \equiv z_{i-1}(\Theta)$ oder $z_i \equiv z_{i-1}(\Phi)$ $(i=1, 2, \ldots, m+1)$. Wir sagen, daß (A, F) vom Typ n ist, wenn für alle x, y, Θ, Φ $(x \equiv y(\Theta \cup \Phi))$ die Folge $\{z_i\}$ so gewählt werden kann, daß $m=n$. Es gilt:

FOLGERUNG 2. Es sei V ein kompakt erzeugter Verband und G eine Gruppe. Es gibt eine Algebra (A, F) vom Typ 3, so daß $\Theta(A, F) \cong V$ und $G(A, F) \cong G$.

Der Beweis ist eine Kombination der Beweise des Satzes und des Satzes 14 in [3].

Es gilt schließlich

FOLGERUNG 3. Es sei V ein modularer kompakt erzeugter Verband und G eine Gruppe. Es gibt eine Algebra (A, F) vom Typ 2 mit den Eigenschaften $\Theta(A, F) \cong V$ und $G(A, F) \cong G$.

MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT
DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN,
BUDAPEST

(Eingegangen am 8. Oktober 1962; in veränderter Form 26. November 1963.)

Literaturverzeichnis

[1] G. Birkhoff, *Revista de la Union Math.* Argentína, II (1946) No. **4**, S. 155–157.

[2] G. Birkhoff and O. Frink, Representations of lattices by sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **64** (1948), S. 299–316.

[3] G. Grätzer and E. T. Schmidt, Characterisations of congruence lattices of abstract algebras, *Acta Sci. Math. Szeged*, **24** (1963), S. 34–59.

ZUR FREIEN BEWEGLICHKEIT IN DER EBENE

Von

S. BREHMER (Potsdam, DDR)

(*Vorgelegt von* G. HAJÓS)

Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ von affinen Transformationen einer geordneten affinen Ebene besitzt die Eigenschaft der ein- bzw. zweidimensionalen freien Beweglichkeit, wenn sie einfach transitiv auf einer Menge von Strahlen bzw. Fahnen[1] ist, d. h. wenn jeder Strahl bzw. jede Fahne dieser Menge durch genau eine Transformation aus $\mathfrak{G}$ in ein vorgegebenes Gebilde der gleichen Art aus dieser Menge übergeführt wird.

In dieser Note beschränken wir uns auf Gruppen von Transformationen, die den Anfangspunkt O des Strahles bzw. des Randstrahles der Fahne fest lassen. BAER [1] hat gezeigt, daß eine solche Gruppe mit zweidimensionaler freier Beweglichkeit im Falle eines *euklidischen* Koordinatenkörpers (d. h. wenn jedes positive Element ein Quadrat ist) eine volle Drehspiegelgruppe ist. Wir werden zeigen, daß schon ein *pythagoreischer* Koordinatenkörper (d. h. ein Körper K, in dem $1+a^2$ für alle $a \in K$ ein Quadrat ist) hinreichend ist. LENZ [4] betrachtet in Verallgemeinerung von Untersuchungen von PICKERT [5] Gruppen in der *reellen* affinen Ebene, die den folgenden, etwas abgeschwächten Axiomen der freien Beweglichkeit genügen:

(I) $\mathfrak{G}$ ist transitiv auf der Menge der Geraden durch den festen Punkt O.

(II) Ein Punkt $P \neq O$ kann durch Transformationen aus $\mathfrak{G}$ in höchstens endlich viele Punkte der Geraden OP übergeführt werden.

Er zeigt, daß eine solche Gruppe entweder eine volle Drehspiegelgruppe oder eine auf der Menge der von O ausgehenden Strahlen einfach transitive Gruppe von Drehstreckungen ist. Wir geben hierfür einen Beweis, der keine Stetigkeitseigenschaften voraussetzt und für jeden *euklidischen* Körper gilt.

Im folgenden sei K stets ein *geordneter, kommutativer* Körper und $\mathfrak{G}$ eine Gruppe von affinen Transformationen der affinen Ebene über dem Körper K mit den Eigenschaften (I), (II).

Den Kernpunkt unserer Untersuchung bildet die Frage, unter welchen Bedingungen die Untergruppe $\mathfrak{G}^+$ der orientierungserhaltenden Transformationen aus $\mathfrak{G}$ abelsch ist. Es gilt nämlich der

SATZ 1. *Ist die Untergruppe $\mathfrak{G}^+$ der orientierungserhaltenden Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}$ abelsch, so liegt einer der beiden folgenden Fälle vor:*

1. *$\mathfrak{G}$ ist eine volle Drehspiegelgruppe und K ist ein pythagoreischer Körper.*
2. *$\mathfrak{G}$ ist eine auf der Menge der von O ausgehenden Strahlen einfach transitive Gruppe von Drehstreckungen.*

In beiden Fällen können nach [2] Winkelzahlen eingeführt werden. Im ersten Fall ist $\mathfrak{G}$ (bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems) eine Gruppe, die aus

---

[1] Eine Fahne ist ein Strahl mit einer der zugehörigen Halbebenen.

sämtlichen Transformationen der Form

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\varepsilon\sin\alpha \\ \sin\alpha & \varepsilon\cos\alpha \end{pmatrix} \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

besteht. Im zweiten Fall wird $\mathfrak{G}$ von sämtlichen Transformationen der Form

$$\begin{pmatrix} c(\alpha) & -s(\alpha) \\ s(\alpha) & c(\alpha) \end{pmatrix}$$

gebildet, wobei $c(\alpha)$ und $s(\alpha)$ Lösungsfunktionen der durch die Additionstheoreme der Winkelfunktionen definierten Funktionalgleichungen sind. Ist K pythagoreisch und $f(\alpha) = \sqrt{c^2(\alpha)+s^2(\alpha)}$, so können wir

$$\cos\alpha = \frac{c(\alpha)}{f(\alpha)}, \quad \sin\alpha = \frac{s(\alpha)}{f(\alpha)}$$

setzen, so daß die Darstellung die Form

$$f(\alpha)\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

annimmt. Hierbei genügt $f(\alpha)$ der Funktionalgleichung $f(\alpha+\beta) = f(\alpha)\cdot f(\beta)$, und $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ sind die gewöhnlichen Winkelfunktionen.

Die Kommutativität von $\mathfrak{G}^+$ kann durch verschiedene Kriterien geometrischer oder algebraischer Natur gesichert werden.

SATZ 2. *Die Untergruppe $\mathfrak{G}^+$ ist abelsch, wenn der Körper K euklidisch ist.*

Damit ist das Ergebnis von LENZ verallgemeinert.

SATZ 3. *Die Untergruppe $\mathfrak{G}^+$ ist abelsch, wenn K pythagoreisch ist und ein $G \in \mathfrak{G}$ existiert, das eine Gerade, aber nicht alle Geraden fest läßt.*

Die zweite Bedingung dieses Satzes sowie (I), (II) sind sicher erfüllt, wenn $\mathfrak{G}$ eine Gruppe mit zweidimensionaler freier Beweglichkeit ist. In diesem Falle ist also $\mathfrak{G}^+$ abelsch, und da eine Drehstreckung alle Geraden oder keine Gerade fest läßt, ist $\mathfrak{G}$ eine volle Drehspiegelgruppe. Damit ist das Ergebnis von BAER verallgemeinert.

Schließlich beweisen wir den

SATZ 4. *Die Untergruppe $\mathfrak{G}^+$ ist abelsch, wenn kein Winkel mit dem Scheitelpunkt O durch eine Transformation aus $\mathfrak{G}$ auf sein Inneres abgebildet wird.*

Hier wird die Bedingung für den Körper K durch eine stärkere Forderung an die Gruppe $\mathfrak{G}$ ersetzt. Man vergleiche HILBERT [3], Anhang 2, Axiom III 7.

1. Ebene lineare Transformationen

Jede lineare Transformation A eines zweidimensionalen Vektorraumes über dem Körper K genügt ihrer charakteristischen Gleichung:

$$A^2 - \mathrm{sp}(A)A + |A|E = 0. \tag{1}$$

Eine Umformung ergibt

$$(2)\qquad \left(A-\frac{1}{2}\operatorname{sp}(A)E\right)^2=\left(\frac{1}{4}\operatorname{sp}^2(A)-|A|\right)E.$$

Wir setzen $x(A)=\frac{1}{2}\operatorname{sp}(A)$, $Q(A)=A-x(A)E$ und

$$(3)\qquad \Delta(A)=x^2(A)-|A|,$$

so daß (2) die Form

$$(4)\qquad Q^2(A)=\Delta(A)E$$

annimmt. Die Zerlegung von A in der Form $A=x(A)E+Q(A)$ in ein Vielfaches der identischen Transformation E und einen spurfreien Bestandteil $Q(A)$ ist eindeutig. Ersetzen wir A in (1) durch $Q(A)$, so erhalten wir $Q^2(A)+|Q(A)|E=0$, und der Vergleich mit (4) liefert

$$(5)\qquad |Q(A)|=-\Delta(A).$$

Die Transformation A besitzt genau dann zwei verschiedene bzw. zusammenfallende Eigenwerte in K, wenn $\Delta(A)$, die Diskriminante des charakteristischen Polynoms von A, ein positives Quadrat bzw. Null ist. Für alle $r\in K$ ist $\Delta(A-rE)=$ $=x^2(A-rE)-|A-rE|=\big(x(A)-r\big)^2-\big(r^2-2x(A)r+|A|\big)=x^2(A)-|A|$,

$$(6)\qquad \Delta(A-rE)=\Delta(A).$$

Eine besondere Rolle spielen bei unseren Betrachtungen die Lösungen der Gleichung $X^2=E$ bzw. $X^2=-E$. Jede von E bzw. $-E$ verschiedene Lösung der ersten Gleichung hat die Eigenwerte $+1$ und -1; wir nennen diese Transformationen *Geradenspiegelungen.* Die Lösungen der zweiten Gleichung nennen wir *Vierteldrehungen.* Geradenspiegelungen und Vierteldrehungen sind spurfrei. Ihre Determinanten sind -1 bzw. $+1$. Die Diskriminanten haben die entgegengesetzten Werte.

Zur Vorbereitung unserer Kommutativitätsuntersuchungen beweisen wir einen Hilfssatz und leiten einige Hilfsformeln her.

LEMMA 1. *Zwei lineare Transformationen A_1, A_2 sind vertauschbar genau dann, wenn ihre spurfreien Bestandteile Q_1, Q_2 linear abhängig sind.*

BEWEIS. Sind Q_1, Q_2 linear abhängig, so sind A_1, A_2 vertauschbar. Seien umgekehrt A_1, A_2 vertauschbar. Wegen $A_1A_2-A_2A_1=Q_1Q_2-Q_2Q_1$ sind auch Q_1, Q_2 vertauschbar. Wir können uns auf den Fall $Q_1\neq 0$ beschränken. Dann gibt es einen Vektor $\mathfrak{a}$, der nicht Eigenvektor von Q_1 ist. Sei $Q_2\mathfrak{a}=r\mathfrak{a}+sQ_1\mathfrak{a}$, also $(Q_2-sQ_1-rE)\mathfrak{a}=\mathfrak{o}$. Unter Berücksichtigung der Vertauschbarkeit ist ebenso $(Q_2-sQ_1-rE)Q_1\mathfrak{a}=\mathfrak{o}$ und damit $Q_2-sQ_1-rE=0$. Da Q_1, Q_2 spurfrei sind, muß $r=0$ sein. Damit ist Lemma 1 bewiesen.

Es seien nun A_1, A_2 zwei *nicht vertauschbare,* reguläre Transformationen. Wir führen die Kommutatoren $C=A_1^{-1}A_2^{-1}A_1A_2$, $D=A_1A_2-A_2A_1$ ein. Es gibt einen Vektor $\mathfrak{a}\neq\mathfrak{o}$, der nicht Eigenvektor von Q_1 oder Q_2 ist, und wir können den Ansatz

$$(7)\qquad D\mathfrak{a}=a_i\mathfrak{a}+b_iQ_i\mathfrak{a}\qquad (i=1,2)$$

machen. Wegen (4) ist $DQ_1 = Q_1Q_2Q_1 - Q_2Q_1^2 = Q_1Q_2Q_1 - Q_1^2Q_2 = -Q_1D$ und ebenso $DQ_2 = -Q_2D$. Unter Verwendung von (4) und (5) ergibt sich aus (7) durch Multiplikation mit $-Q_i$:

$$(8) \qquad DQ_i\mathfrak{a} = b_i|Q_i|\mathfrak{a} - a_iQ_i\mathfrak{a}.$$

Aus (7) und (8) entnehmen wir $|D| = -a_i^2 - b_i^2|Q_i|$. Für die Diskriminante von C ergibt sich unter Berücksichtigung von (6) und $C-E = A_1^{-1}A_2^{-1}D$ die Darstellung $\Delta(C) = \Delta(C-E) = x^2(C-E) - |A_1^{-1}A_2^{-1}D|$,

$$(9) \qquad \Delta(C) = \big(x(C)-1\big)^2 + |A_1|^{-1}|A_2|^{-1}(a_i^2 + b_i^2|Q_i|).$$

Wir bemerken noch, daß nicht $a_1 = a_2 = 0$ sein kann. Dies bedeutet nämlich

$$D\mathfrak{a} = b_1Q_1\mathfrak{a} = b_2Q_2\mathfrak{a},$$

$$-D^2\mathfrak{a} = b_1Q_1D\mathfrak{a} = b_2Q_2D\mathfrak{a}.$$

Im Widerspruch zu unserer Voraussetzung folgt hieraus $b_1Q_1 = b_2Q_2$, denn wegen $D \neq 0$ ist $b_i \neq 0$, so daß $D\mathfrak{a}$ kein Vielfaches von $\mathfrak{a}$ ist.

2. Gruppen $\mathfrak{G}$ mit abelscher Untergruppe $\mathfrak{G}^+$

Die Eigenschaften (I), (II) besagen in analytischer Formulierung:

(I) Zu $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$ gibt es ein $G \in \mathfrak{G}$ und ein $r \in K$ mit $G\mathfrak{a} = r\mathfrak{b}$.

(II) Jeder Eigenwert von $G \in \mathfrak{G}$ ist $+1$ oder -1.

Ferner ist $\mathfrak{G}^+ = \{G \in \mathfrak{G}: |G| > 0\}$.

LEMMA 2. *Ist* $\mathfrak{G}$ *abelsch, so liegt Fall* 2 *von Satz* 1 *vor.*

BEWEIS. Alle $G \in \mathfrak{G}$ haben nach Lemma 1 die Gestalt $G = xE + sQ$ mit festem Q, wobei Q wegen (I) keinen Eigenwert besitzen kann. Zu $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ bestimmen wir ein $G = xE + sQ \in \mathfrak{G}$ mit $(xE + sQ)\mathfrak{a} = rQ\mathfrak{a}$. Koeffizientenvergleich liefert $x = 0$, $s = r$. Aus $G = sQ$, $G^2 = s^2\Delta(G)E$ und (II) folgt $s^2\Delta(G) = \pm 1$. Das obere Vorzeichen scheidet aus, denn jede Geradenspiegelung besitzt zwei Eigenwerte. Somit ist $G = sQ = I$ eine Vierteldrehung. Alle $G \in \mathfrak{G}$ können in der Form $G = xE + yI$ dargestellt werden, und die Abbildung $G \to x + yi$ ist ein Isomorphismus von $\mathfrak{G}$ in die multiplikative Gruppe des komplexen Erweiterungskörpers von K. Alle $G \in \mathfrak{G}$ sind Drehstreckungen.

Mit $G \in \mathfrak{G}$ ist auch $I^2G = -G \in \mathfrak{G}$. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ ist daher nicht nur auf der Menge der Geraden, sondern auch auf der Menge der von O ausgehenden Strahlen transitiv. Gäbe es zwei verschiedene $G \in \mathfrak{G}$, die einen Strahl in denselben Strahl überführen, etwa G_1 und G_2, so hätte $G_2^{-1}G_1$ im Widerspruch zu (II) einen von 1 verschiedenen positiven Eigenwert. Damit ist Lemma 2 bewiesen.

LEMMA 3. *Ist* $\mathfrak{G}^+$ *abelsch und* $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{G}^+$, *so liegt Fall* 1 *von Satz* 1 *vor.*

BEWEIS. Alle $G \in \mathfrak{G}^+$ sind Linearkombinationen von E und einer festen spurfreien Transformation Q_0. Wegen Lemma 2 gibt es ein $G = xE + Q$, das nicht mit Q_0 vertauschbar ist. Aus $G^2 = (x^2 + \Delta)E + 2xQ \in \mathfrak{G}^+$ folgt daher $x = 0$. Aus

$G^2=Q^2=\Delta E$ und $\Delta = -|G|>0$ folgt $|G| = -1$, d. h. G ist eine Geradenspiegelung.

Sei S eine Geradenspiegelung, $S\mathfrak{a}=\mathfrak{a}\neq\mathfrak{o}$, $\mathfrak{b}\neq\mathfrak{o}$ beliebig. Es gibt ein $G\in\mathfrak{G}$ mit $G\mathfrak{a}=r\mathfrak{b}$. Die Transformation GSG^{-1} ist eine Geradenspiegelung, die $\mathfrak{b}$ fest läßt. Es gibt eine Spiegelung an jeder Geraden.

Ferner hat $\mathfrak{G}^+$ neben (II) auch die Eigenschaft (I). Sind nämlich $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\neq\mathfrak{o}$ vorgegeben, ist S die Spiegelung an $\mathfrak{a}$ und gilt $G\mathfrak{a}=r\mathfrak{b}$, so ist auch $GS\mathfrak{a}=r\mathfrak{b}$. Entweder G oder GS liegt in $\mathfrak{G}^+$.

Somit kann Lemma 2 auf $\mathfrak{G}^+$ angewendet werden. Da alle mit I vertauschbaren Transformationen positive Determinante haben, sind alle $G\notin\mathfrak{G}^+$ Geradenspiegelungen. Mit S ist auch SG für alle $G\in\mathfrak{G}^+$ eine Geradenspiegelung. Somit ist $|G| = -|SG|=1$; alle $G\in\mathfrak{G}^+$ sind Drehungen, und $\mathfrak{G}$ ist eine volle Drehspiegelgruppe. Sei $a\in K$ beliebig. Zu $\mathfrak{a}\neq\mathfrak{o}$ gibt es ein $G=xE+yI\in\mathfrak{G}^+$ mit $(xE+yI)\mathfrak{a}= r(\mathfrak{a}+aI\mathfrak{a})$. Wegen $x=r, y=ra$ folgt $1=|G|=x^2+y^2=r^2(1+a^2)$. Für alle $a\in K$ ist $1+a^2$ ein Quadrat, K ist pythagoreisch. Damit ist Lemma 3 und zusammen mit Lemma 2 auch Satz 1 bewiesen.

3. Kriterien für die Kommutativität von $\mathfrak{G}^+$

LEMMA 4. *Ist $\Delta(G)$ für $G\in\mathfrak{G}$ ein positives Quadrat, so ist G eine Geradenspielung.*

BEWEIS. G besitzt zwei verschiedene Eigenwerte in K, wegen (II) also die Eigenwerte $+1$ und -1.

LEMMA 5. *Sei K pythagoreisch. Gibt es in $\mathfrak{G}$ eine Geradenspiegelung S, so ist $\mathfrak{G}^+$ abelsch.*

BEWEIS. Für alle $G\in\mathfrak{G}$ ist $\Delta(SG) = x^2(SG)-|SG| = x^2(SG)+|G|$. Ist $|G|$ ein Quadrat, so ist $\Delta(SG)$ ein positives Quadrat, also SG eine Geradenspiegelung. Sei $G\in\mathfrak{G}^+$ beliebig. Wegen $|G|^2 = -|SG^2| = 1$ ist $|G|=1$ und SG eine Geradenspiegelung. Für zwei beliebige Transformationen $G_1, G_2\in\mathfrak{G}^+$ ist mit $SG_i=S_i$, $G_i=SS_i$:

$$G_1^{-1}G_2^{-1}G_1G_2=S_1SS_2SSS_1SS_2=(S_1SS_2)^2=E,$$

d. h. $\mathfrak{G}^+$ ist abelsch. Wir bemerken, daß schon damit (und zwar ohne die relativ komplizierte Formel (9)) das oben zitierte Ergebnis von BAER verallgemeinert worden ist.

LEMMA 6. *Sei K pythagoreisch. Gibt es eine von $\pm E$ verschiedene Transformation in $\mathfrak{G}$, für die der Betrag der Diskriminante ein Quadrat ist, so ist $\mathfrak{G}^+$ abelsch.*

BEWEIS. Ist die Diskriminante ein positives Quadrat, so handelt es sich um eine Geradenspiegelung, und $\mathfrak{G}^+$ ist nach Lemma 5 abelsch. Ist aber $|Q_1| = -\Delta(G_1)$ für ein $G_1\in\mathfrak{G}$ ein Quadrat, so ist $|G_1| = x^2(G_1)+|Q_1|$ ein positives Quadrat. Nehmen wir an, $\mathfrak{G}^+$ wäre nicht abelsch. Dann gibt es ein $G_0 = x_0E+Q_0\in\mathfrak{G}^+$, das nicht mit $G_1\in\mathfrak{G}^+$ vertauschbar ist. Wir setzen $G_2=G_0^2=(x_0^2+\Delta_0)E+2x_0Q_0$, wenn $x_0\neq 0$ und $G_2=G_0$, wenn G_0 spurfrei, also Vierteldrehung ist. In beiden Fällen ist $|G_2|$ ein Quadrat und G_2 nicht mit G_1 vertauschbar. Nach (9) ist mit $C=G$, $A_i=G_i$:

$$\Delta(G) = \left(x(G)-1\right)^2+|G_1|^{-1}|G_2|^{-1}(a_i^2+b_i^2|Q_i|).$$

Da $|G_1|$, $|G_2|$ und $|Q_1|$ Quadrate sind, ist $\Delta(G)$ ein Quadrat. Das ist nach Lemma 4 wegen $G \in \mathfrak{G}^+$ nur für $\Delta(G)=0$ möglich. Es folgt $a_1^2+b_1^2|Q_1| = a_2^2+b_2^2|Q_2|=0$. Wegen $|Q_1| \geqq 0$ ist $a_1=0$ und damit, wie am Schluß des 1. Abschnittes bemerkt, $a_2 \neq 0$. Somit ist $\Delta(G_2) = -|Q_2| = a_2^2 : b_2^2$ ein positives Quadrat. Das ist ein Widerspruch zu Lemma 4, $\mathfrak{G}^+$ ist abelsch.

Der Beweis der Sätze 2 und 3 ist nun ganz leicht. Ist K euklidisch, so ist der Betrag eines jeden Körperelementes ein Quadrat. Läßt eine Transformation aus $\mathfrak{G}$ eine Gerade fest, so besitzt sie einen Eigenwert in K, und ihre Diskriminante ist ein Quadrat. In beiden Fällen ist $\mathfrak{G}^+$ nach Lemma 6 abelsch.

Zum Beweis von Satz 4 zeigen wir zuerst, daß keine Transformation in $\mathfrak{G}^+$ eine positive Diskriminante besitzen kann. Nehmen wir an, es wäre $\Delta = \Delta(G) > 0$ für $G \in \mathfrak{G}^+$. Wegen (3) ist G nicht spurfrei. Wir wählen einen Vektor $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$, der nicht Eigenvektor von $Q = Q(G)$ ist, und setzen $x = x(G)$, $\mathfrak{b} = \operatorname{sgn} xQ\mathfrak{a}$. Dann ist

$$G^2\mathfrak{a} = (x^2+\Delta)\mathfrak{a} + 2|x|\mathfrak{b},$$

$$G^2\mathfrak{b} = 2|x|\mathfrak{a} + (x^2+\Delta)\mathfrak{b}.$$

Alle Koeffizienten in dieser Darstellung sind positiv, d. h. $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ wird auf sein Inneres abgebildet. Das widerspricht unserer Voraussetzung.

Sei nun $G_1, G_2 \in \mathfrak{G}^+$. Nehmen wir an, diese Transformationen wären nicht vertauschbar. Wie eben bewiesen, ist die Diskriminante der Transformation $G = G_1^{-1}G_2^{-1}G_1G_2$ nicht positiv, nach (9) aber wegen $|Q_i| = -\Delta(G_i) \geqq 0$ auch nicht negativ. Somit verschwindet sie, was nur für $a_1 = a_2 = 0$ möglich ist. Damit sind wir wiederum zu einem Widerspruch gelangt, und Satz 4 ist bewiesen.

Abschließend bemerken wir, daß die Kriterien für die Kommutativität von $\mathfrak{G}^+$ noch in mehrfacher Weise variiert werden können. So kann man z. B. in Satz 3 an Stelle der zweiten Bedingung die Existenz eines Gruppenelementes der endlichen Ordnung $n \geqq 3$, z. B. einer Vierteldrehung, fordern. Die Voraussetzung von Satz 4 kann ersetzt werden durch die Forderung, daß ein beliebiger von O ausgehender Strahl durch wiederholte Anwendung eines Gruppenelementes, dessen Ordnung nicht kleiner als 3 ist, in jede Halbebene, die O als Randpunkt enthält, abgebildet werden kann.

PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE POTSDAM,
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

(Eingegangen am 15. November 1962.)

Literaturverzeichnis

[1] R. Baer, Free mobility and orthogonality, *Trans. Amer. math. Soc.*, **68** (1950), S. 439–460.
[2] S. Brehmer, Eine elementare Konstruktion für Winkelzahlen in der komplexen Zahlenebene, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **15** (1964), S. 53–55.
[3] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie* (Stuttgart, 1958).
[4] H. Lenz, Über ebene Drehungen, *Arch. d. Math.*, **VIII** (1958), S. 477–480.
[5] G. Pickert, Elementare Behandlung des Helmholtzschen Raumproblems, *Math. Ann.*, **120** (1948), S. 492–501.

EINE ELEMENTARE KONSTRUKTION VON WINKELZAHLEN IN DER KOMPLEXEN ZAHLENEBENE

Von

S. BREHMER (Potsdam, DDR)

(*Vorgelegt von* G. HAJÓS)

Die Einführung von Winkelzahlen und trigonometrischen Funktionen in der komplexen Zahlenebene erfolgt meist mit Hilfe der Kreisbogenmessung, der Integralrechnung, der Reihenlehre oder mit anderen Hilfsmitteln der Analysis (vgl. z. B. [1], [4]), obwohl die Konstruktion rein algebraisch durchgeführt werden kann (vgl. [3] S. 126 bzw. S. 342). Der Grund hierfür liegt wohl in der relativen Kompliziertheit der bisher bekannten Verfahren. Es handelt sich im wesentlichen um den Nachweis, daß die Gruppe $E = \{z : |z| = 1\}$ der Drehungen homomorphes Bild einer zur additiven Gruppe der reellen Zahlen ähnlichen Gruppe ist. Für diesen Satz, den wir im Hinblick auf geometrische Anwendungen (vgl. [2]) etwas allgemeiner formulieren, geben wir einen vereinfachten Beweis.

Wir betrachten den komplexen Erweiterungskörper K^* eines geordneten, kommutativen Körpers K. Unter einem von O ausgehenden Strahl verstehen wir wie üblich die Menge aller Elemente $rz \in K^*$ mit festem $z \neq 0$ und $r \geqq 0$.

SATZ. *Jede multiplikative Gruppe* $Z \subset K^*$, *die mit jedem von* O *ausgehenden Strahl genau ein Element* $z \neq 0$ *gemein hat, ist homomorphes Bild einer zu* K *ähnlichen Gruppe* W.

Eine Gruppe der geforderten Art existiert nicht immer. So gibt es in Z ein Element der Form $z_0 = r(1+i)$. Da Z und K nur die Elemente ± 1 gemein haben können, ist $z_0^8 = (2r^2 i)^4 = (2r^2)^4$ gleich 1 und damit 2 in K ein Quadrat. Ferner zeigt sich, daß stets $z_0^2 = i \in Z$ ist.

Wenn der Körper K pythagoreisch ist, kann jedem $z = x + iy \in Z$ ein Betrag $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ zugeordnet werden. Die Abbildung $z \to \frac{z}{|z|}$ ist ein Isomorphismus von Z auf den Einheitskreis E. Für $Z = E$ vereinfacht sich der nachfolgende Beweis noch ein wenig, da überall $z^{-1} = \bar{z}$, $x^2 + y^2 = 1$ gesetzt werden kann.

Analog zur Einteilung der komplexen Zahlenebene in vier Quadranten zerlegen wir Z in vier Klassen Z_j $(j = 0, 1, 2, 3)$:

$$\begin{aligned} Z_0 &= \{z = x + iy \in Z:\ x > 0,\ y \geqq 0\}, \\ iZ_0 = Z_1 &= \{z = x + iy \in Z:\ x \leqq 0,\ y > 0\}, \\ iZ_1 = Z_2 &= \{z = x + iy \in Z:\ x < 0,\ y \leqq 0\}, \\ iZ_2 = Z_3 &= \{z = x + iy \in Z:\ x \geqq 0,\ y < 0\}. \end{aligned}$$

Die Elemente der Menge $W = \Gamma \times Z_0 = \{(m, z):\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;\ z \in Z_0\}$ nennen wir *Winkelzahlen.* Man stelle sich unter der Winkelzahl (m, z) eine Drehung um m rechte Winkel und den spitzen, nicht negativen Restwinkel $\operatorname{Arg} z$ vor. Wir bezeichnen Winkelzahlen auch mit kleinen griechischen Buchstaben. Insbesondere sei $(1, 1)=\pi/2$.

Nach Definition ist $\bar{i}^j Z_j = Z_0$. Daher bildet die Funktion

$$g\colon \quad (m, z) \to g(m, z) = (m+j, \bar{i}^j z) \qquad (z \in Z_j)$$

die Mengen $\Gamma \times Z_j$ eineindeutig auf W ab. Sie bringt die Drehung um m rechte Winkel und $\operatorname{Arg} z$ $(z \in Z_j)$ gewissermaßen auf die Normalform, aus der die Gesamtzahl der Rechtwinkeldrehungen und der spitze Restwinkel abgelesen werden können.

Lemma 1. *Aus* $z_1, z_2 \in Z_0$ *folgt* $z_1 z_2 \in Z_0 \cup Z_1$. *Aus* $1 \neq z \in Z_0$ *folgt* $iz^{-1} \in Z_0$.

Beweis. Für $z_1 = z_2 = 1$ ist die erste Behauptung richtig. Andernfalls ist $\operatorname{Im} z_1 z_2 = x_1 y_2 + x_2 y_1 > 0$, woraus die erste Behauptung folgt. Die zweite ergibt sich aus $iz^{-1} = (x^2+y^2)^{-1}(y+ix)$.

Lemma 2. *Bezüglich der Verknüpfung*

$$(m, z) + (m', z') = g(m+m', zz')$$

bildet W *eine abelsche Gruppe.*

Beweis. Die Kommutativität dieser Addition ist klar. Für $z, z', z'' \in Z_0$ ist

$$\begin{aligned}(\alpha+\alpha')+\alpha'' &= \big((m, z)+(m', z')\big)+(m'', z'')\\ &= g(m+m', zz')+(m'', z'').\end{aligned}$$

Nach Lemma 1 ist $zz' \in Z_0 \cup Z_1$. Liegt das Produkt in Z_0, so erhalten wir

$$(\alpha+\alpha')+\alpha'' = g(m+m'+m'', zz'z'').$$

Ist $zz' \in Z_1$, so ist $\bar{i}zz' \in Z_0$, $(\bar{i}zz')z'' \in Z_0 \cup Z_1$, $zz'z'' \in Z_1 \cup Z_2$ und damit wiederum

$$\begin{aligned}(\alpha+\alpha')+\alpha'' &= (m+m'+1, \bar{i}zz')+(m'', z'')\\ &= g(m+m'+m''+1, \bar{i}zz'z'')\\ &= g(m+m'+m'', zz'z'').\end{aligned}$$

Dasselbe Ergebnis erhalten wir auch für $\alpha+(\alpha'+\alpha'') = (\alpha'+\alpha'')+\alpha$; die Addition ist assoziativ.

Das Element $(0, 1)=0$ ist Nullelement von W. Nach Lemma 1 ist $1 \neq iz^{-1} \in Z_0$ und folglich

$$\begin{aligned}(m, z)+(-m-1, iz^{-1}) &= g(-1, i) = (0, 1) \qquad \text{für} \quad z \neq 1,\\ (m, 1)+(-m, 1) &= (0, 1).\end{aligned}$$

Zu jedem $\alpha \in W$ existiert ein $\beta \in W$ mit $\alpha+\beta = 0$; W ist abelsche Gruppe.

Lemma 3. *Die Menge* $P=\{(m, z) \in W\colon m \geqq 0\} \setminus \{0\}$ *bildet einen Positivbereich in* W.

Beweis. Mit $(m, z), (m', z')$ ist offenbar auch $(m, z)+(m', z') = g(m+m', zz')$ in P. Ist $0 \neq (m, z) \notin P$, so ist $m<0$, also

$$-(m, z) = \begin{cases}(-m, 1) \in P & \text{für } z = 1,\\ (-m-1, iz^{-1}) \in P & \text{für } z \neq 1.\end{cases}$$

Damit ist Lemma 3 bewiesen. Setzt man $\alpha < \beta$ für $\beta - \alpha \in P$, so wird W geordnete abelsche Gruppe.

Wir betrachten die Abbildung

$$\tan\colon \alpha = (0, x+iy) \to \tan \alpha = \frac{y}{x}.$$

Da zu jedem $t \geqq 0$ genau ein $\alpha = (0, z)$ mit $z = r(1+ti) \in Z_0$, also $\tan \alpha = t$ existiert, bildet tan das Intervall $[0, \pi/2) \subset W$ eineindeutig auf das Intervall $[0, \infty) \subset K$ ab. Sei $0 \leqq \alpha' < \alpha < \pi/2$. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 > \alpha' - \alpha &= (0, z') - (0, z) = (0, z') + (-1, iz^{-1}) \\ &= g(-1, iz^{-1}z'), \end{aligned}$$

wobei $(iz^{-1})z' \in Z_0 \cup Z_1$ ist. Wäre $iz^{-1}z' \in Z_1$ so folgte $0 > \alpha' - \alpha = (0, z^{-1}z') \geqq 0$. Daher ist $iz^{-1}z' \in Z_0$ und

$$0 < \operatorname{Re} iz^{-1}z' = (x^2+y^2)^{-1}(x'y - xy'),$$

woraus $\tan \alpha' < \tan \alpha$ folgt. Die Abbildung ist somit ähnlich. W ist die Vereinigung von abzählbar vielen zu $[0, \pi/2)$ ähnlichen Intervallen. Daher sind auch W und K ähnlich. Schließlich wird W durch

$$\alpha = (m, z_0) \to z(\alpha) = i^m z_0$$

homomorph auf Z abgebildet. Damit ist unser Satz bewiesen.

Die Funktionen $c(\alpha) = \operatorname{Re} z(\alpha)$, $s(\alpha) = \operatorname{Im} z(\alpha)$ genügen den Additionstheoremen der Winkelfunktionen, aber nur im Falle $Z = E$ ist $c^2(\alpha) + s^2(\alpha) = 1$ für alle α. Ist K pythagoreisch, so können durch

$$\cos \alpha = \frac{c(\alpha)}{|z(\alpha)|}, \quad \sin \alpha = \frac{s(\alpha)}{|z(\alpha)|}$$

die gewöhnlichen Winkelfunktionen eingeführt werden. Die Funktion $f(\alpha) = |z(\alpha)|$ genügt der Funktionalgleichung $f(\alpha+\beta) = f(\alpha)f(\beta)$. Die einzige *stetige* Lösung im Bereich der reellen Zahlen ist bekanntlich $f(\alpha) \equiv 1$.

PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE,
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

(Eingegangen am 15. November 1962.)

Literaturverzeichnis

[1] F. BEHREND, A contribution to the theory of magnitudes and the foundations of analysis, *Math. Z.*, **63** (1956), S. 345–362.
[2] S. BREHMER, Zur freien Beweglichkeit in der Ebene, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **15** (1964), S. 47–52.
[3] H. LENZ, *Grundlagen der Elementarmathematik* (Berlin, 1961).
[4] H. ZASSENHAUS, What is an angle? *Amer. Math. Monthly*, **61** (1954), S. 369–378.

ÜBER APPROXIMATION MIT ORTHOGONALREIHENMITTELN UNTER STRUKTURELLEN BEDINGUNGEN

Von

L. LEINDLER (Szeged)

(*Vorgelegt von* G. ALEXITS)

In dieser Abhandlung beweisen wir Sätze, welche sich aus Bedingungen über den besten Annäherungsgrad bzw. aus den Stetigkeitsverhältnissen der entwickelten Funktion $f(x)$ ergeben, wenn es sich um die Annäherung mit den $(C, 1)$- bzw. de la Vallée-Poussinschen Mitteln ihrer Orthogonalentwicklung handelt. Wir verschärfen u. a. den folgenden Satz von G. ALEXITS und D. KRÁLIK [2] (Satz II):

Erfüllt der Stetigkeitsmodul $\omega(f; \delta)$ der stetigen Funktion $f(x)$ in $[-1, +1]$ die Beding ung

$$\omega(f; \delta) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\Phi(1/\delta)}}\right)$$

mit positivem, monoton gegen $+\infty$ strebendem $\Phi(x)$, welches der Bedingung

$$\int_1^\infty \frac{\lambda'(x)\lambda(x)}{\Phi(x)}\, dx < \infty$$

genügt, wobei $\lambda(x)$ eine positive, von unten konkave, monoton gegen $+\infty$ strebende Funktion ist, für welche $x^\gamma/\lambda(x)$ mit festem $0<\gamma<1$ bei genügend großen x monoton nicht abnimmt, gilt ferner für die Gewichtsfunktion $\varrho(x)$ die Ungleichung

$$0 < \varrho_0 \leqq \varrho(x) \leqq \frac{\text{konst}}{\sqrt{1-x^2}}$$

in einem völlig im Inneren von $(-1, +1)$ liegenden Teilintervall $[\alpha, \beta] \subset (-1, +1)$, so gilt für die $(C, 1)$-Mittel $\sigma_n(x)$ der mit den Funktionen des durch die Gewichtsfunktion $\varrho(x)$ eindeutig bestimmten Orthonormalpolynomsystems $\{p_n(x)\}$ gebildeten Reihe

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x) \qquad \left(c_n = \int_{-1}^{+1} f(t) p_n(t) \varrho(t)\, dt\right)$$

in (α, β) fast überall die Beziehung

$$|\sigma_n(x) - f(x)| = o_x\left(\frac{1}{\lambda(n)}\right).$$

Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ ein bezüglich der Verteilungsfunktion $\mu(x)$[1] im Intervall (a, b) orthonormiertes Funktionensystem. Bezeichne E_n den mit Linear-

---

[1] Die Derivierte $\mu'(x)$ verschwinde höchstens auf einer Nullmenge.

formen $\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x)$ erreichbaren besten Annäherungsgrad einer gegebenen Funktion $f(x)$. Nach einem bekannten Satz von J. P. GRAM [3] (s. noch G. ALEXITS [1], S. 14) ist

$$E_n = \left\{ \int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x) \right)^2 d\mu(x) \right\}^{1/2}$$

mit

$$c_k = \int_a^b f(x) \varphi_k(x) \, d\mu(x).$$

Sei $\Phi(x)$ eine für $x \geqq 0$ definierte, positive, monoton wachsende Funktion. Wir bezeichnen mit $R^{\mu}_{\Phi}(\{\varphi_n\})$ die Klasse aller Funktionen $f(x) \in L^2_{\mu}$, für welche

$$E_n^2 = O\left(\frac{1}{\Phi(n)} \right) \tag{1}$$

ist.

In dieser Arbeit beweisen wir die folgenden Sätze:

SATZ I. *Ist*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2\alpha-1} E_k^2 < \infty \qquad (0 < \alpha < 1), \tag{2}$$

so gilt für die $(C, 1)$*-Mittel* $\sigma_n(x)$ *der Entwicklung*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{3}$$

in (a, b) *fast überall die Beziehung*

$$|\sigma_n(x) - f(x)| = o_x\left(\frac{1}{n^{\alpha}} \right). \tag{4}$$

SATZ II. *Ist*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2\gamma-1} E_k^2 < \infty \qquad (0 < \gamma < \infty), \tag{5}$$

so gilt für die de la Vallée-Poussinschen Mittel $V_n(x)$ [2] *der Entwicklung* (3) *in* (a, b) *fast überall die Beziehung*

$$|V_n(x) - f(x)| = o_x\left(\frac{1}{n^{\gamma}} \right). \tag{6}$$

Aus diesen Sätzen ergeben sich unmittelbar:

FOLGERUNG I. *Genügt* $\Phi(x)$ *der Bedingung*

$$\int_1^{\infty} \frac{x^{2\alpha-1}}{\Phi(x)} \, dx \qquad (0 < \alpha < 1) \tag{7}$$

---

[2] Es ist $V_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} s_k(x)$, wobei $s_k(x)$ die k-te Partialsumme der Reihe (3) bezeichnet.

und gilt $f(x) \in R_{\Phi}^{\mu}(\{\varphi_n\})$, *dann ist die Beziehung* (4) *für die* $(C, 1)$-*Mittel* $\sigma_n(x)$ *der Reihe* (3) *in* (a, b) *fast überall erfüllt.*

Folgerung II. *Genügt* $\Phi(x)$ *der Bedingung*

$$\int_{1}^{\infty} \frac{x^{2\gamma-1}}{\Phi(x)}\,dx \qquad (0<\gamma<\infty) \tag{8}$$

und gilt $f(x) \in R_{\Phi}^{\mu}(\{\varphi_n\})$, *dann ist die Beziehung* (6) *für die de la Vallée-Poussinschen Mittel* $V_n(x)$ *in* (a, b) *fast überall der Reihe* (3) *erfüllt.*

Durch Anwendung zweier bekannten Sätze von Jackson [4] ergeben sich aus den Folgerungen I und II die folgenden Sätze:

Satz III. *Ist* $\{p_n(x)\}$ *ein beliebiges, zur Verteilung* $d\mu(x)$ *gehörendes Orthonormalpolynomsystem und* $f(x)$ *eine stetige Funktion mit dem Stetigkeitsmodul*

$$\omega(f;\delta) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\Phi(1/\delta)}}\right), \tag{9}$$

so folgt die Beziehung (4) *in* (a, b) *fast überall aus der Bedingung* (7) *für die* $(C, 1)$-*Mittel* $\sigma_n(x)$ *der Entwicklung*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n p_n(x) \qquad \left(\gamma_n = \int_a^b f(x) p_n(x)\,d\mu(x)\right) \tag{10}$$

Es ist klar, daß der Satz III eine wesentliche Verschärfung des zitierten Satzes von G. Alexits und D. Králik im Spezialfall $\lambda(x) = x^{\alpha}$ ist.

Satz IV. *Haben* $\{p_n(x)\}$ *und* $f(x)$ *dieselbe Bedeutung wie im Satz III und gilt die Bedingung* (8), *so besteht die Beziehung* (6) *in* (a, b) *fast überall für die de la Vallée-Poussinschen Mittel* $V_n(x)$ *der Entwicklung* (10).

Satz V. *Sei* $f(x)$ *eine* 2π-*periodische, stetige Funktion. Gelten die Bedingungen* (7) *und* (9), *dann besteht die Beziehung* (4) *in* $(-\pi, \pi)$ *fast überall für die* $(C, 1)$-*Mittel* $\sigma_n(x)$ *der Entwicklung*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad \left(\begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \begin{matrix} \cos nx \\ \sin nx \end{matrix}\, dx\right). \tag{11}$$

Satz VI. *Sei* $f(x)$ *eine* 2π-*periodische, stetige Funktion. Gelten die Bedingungen* (8) *und* (9), *so besteht die Beziehung* (6) *in* $(-\pi, \pi)$ *fast überall für die de la Vallée Poussinschen Mittel* $V_n(x)$ *der Entwicklung* (11).

Beweis von Satz I. Zuerst beweisen wir, daß die Beziehung (4) unter der Bedingung

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 n^{2\alpha} < \infty \qquad (0<\alpha<1) \tag{12}$$

in (a, b) fast überall gilt.

Im Spezialfall $\mu(x)=x$ hat der Verfasser [5] (Satz III) schon früher sogar ein weitergehendes Ergebnis bewiesen. Wir werden aber der Vollständigkeit halber den Beweis unserer Behauptung kurz durchführen.

Nach (12) gelten die Abschätzungen

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2^{2m\alpha} \int_a^b (s_{2^m}(x)-f(x))^2 \, d\mu(x) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} 2^{2m\alpha} \sum_{\nu=m}^{\infty} \sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} c_k^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} c_k^2 \sum_{m=0}^{\nu} 2^{2m\alpha} = O(1) \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 n^{2\alpha} < \infty,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2^{2m\alpha} \int_a^b (s_{2^m}(x)-\sigma_{2^m}(x))^2 \, d\mu(x) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} 2^{2m\alpha} \sum_{\nu=0}^{m-1} \sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} \frac{k^2 c_k^2}{2^{2m}} = O(1) \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{2\nu} \sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} c_k^2 \sum_{m=\nu+1}^{\infty} 2^{2m(\alpha-1)} =$$

$$= O(1) \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{2\nu\alpha} \sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}}{}' c_k^2 < \infty$$

und ferner

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{2\alpha+1} \int_a^b (\sigma_n(x)-\sigma_{n-1}(x))^2 \, d\mu(x) =$$

$$= O(1) \sum_{n=2}^{\infty} n^{2\alpha-3} \sum_{k=1}^{n} k^2 c_k^2 = O(1) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 c_k^2 \sum_{n=k}^{\infty} n^{2\alpha-3} < \infty.$$

Aus diesen ergeben sich durch Anwendung des Satzes von B. Levi in (a, b) fast überall die folgenden Abschätzungen:

$$|s_{2^m}(x)-f(x)| = o_x(2^{-m\alpha}), \tag{13}$$

$$|s_{2^m}(x)-\sigma_{2^m}(x)| = o_x(2^{-m\alpha}) \tag{14}$$

und

$$B_m^2(x) = \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} k^{2\alpha+1}(\sigma_k(x)-\sigma_{k-1}(x))^2 = o_x(1). \tag{15}$$

Es sei $2^m < n < 2^{m+1}$. Dann ist nach (15)

$$|\sigma_n(x)-\sigma_{2^m}(x)| = \left| \sum_{k=2^m+1}^{n} k^{\alpha+\frac{1}{2}} (\sigma_k(x)-\sigma_{k-1}(x)) \frac{1}{k^{\alpha+\frac{1}{2}}} \right| \leqq \tag{16}$$

$$\leqq B_m(x) \left\{ \sum_{k=2^m+1}^{n} \frac{1}{k^{2\alpha+1}} \right\}^{1/2} = o_x(n^{-\alpha})$$

in (a, b) fast überall.

Aus (13), (14) und (16) ergibt sich, daß die Beziehung (4) in (a, b) fast überall gilt.

Wir beweisen, daß die Relation (12) aus der Bedingung (2) folgt. Es gilt nämlich

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 n^{2\alpha} = O(1) \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \sum_{k=1}^{n} k^{2\alpha-1} = O(1) \sum_{k=1}^{\infty} k^{2\alpha-1} \sum_{n=k}^{\infty} c_n^2 = O(1) \sum_{k=1}^{\infty} k^{2\alpha-1} E_k^2.$$

Damit haben wir den Satz I bewiesen.

BEWEIS von Satz II. Man könnte zuerst auch hier beweisen, daß die Beziehung (6) unter der Bedingung

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 n^{2\gamma} < \infty \qquad (0 < \gamma < \infty)$$

in (a, b) fast überall gilt. Der Verfasser [6] hat im Spezialfall $\mu(x) = x$ sogar ein allgemeineres Ergebnis bewiesen. Im Falle eines allgemeinen $\mu(x)$ verläuft der Beweis dieser Behauptung und des Satzes II ganz analog dem des Satzes I.

BEWEIS der Folgerung I. Nach unseren Voraussetzungen gilt für jedes N

$$\sum_{k=2}^{N} k^{2\alpha-1} E_k^2 \leqq K \sum_{k=2}^{N} k^{2\alpha-1} \frac{1}{\Phi(k)},$$

wobei K eine positive Konstante ist. Daraus und aus der Bedingung (7) folgt, daß die Bedingung (2) für jedes $f(x) \in R_\Phi^\mu(\{\varphi_n\})$ erfüllt ist, somit ergibt sich die Behauptung der Folgerung I durch Anwendung des Satzes I.

BEWEIS der Folgerung II. Die Folgerung II kann dem vorhergehenden analog bewiesen werden.

BEWEIS von Satz III. Zum Beweis benötigen wir den folgenden bekannten Satz von D. JACKSON [4] (s. noch [1], S. 268.)

Es sei $\{p_n(x)\}$ *das zur beliebigen Verteilung* $d\mu(x)$ *gehörende Orthonormalpolynomsystem und* $g(x)$ *eine in* $[a, b]$ *stetige Funktion mit dem Stetigkeitsmodul* $\omega(g; \delta)$. *Es gibt eine Folge* $\{s_n(g; x)\}$ *von Linearformen*

$$s_n(g; x) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} p_k(x),$$

für welche

$$\sup_{a \leqq x \leqq b} |g(x) - s_n(g; x)| = O\left(\omega\left(g; \frac{1}{n}\right)\right)$$

gilt.

Nach diesem Satz gilt als dann $E_n^2 = O(\omega^2(g; 1/n))$. Daraus und aus der Bedingung (9) folgt $f(x) \in R_\Phi^\mu(\{p_n\})$. Daher ergibt sich die Behauptung des Satzes III durch Anwendung der Folgerung I.

BEWEIS von Satz IV. Der Beweis verläuft analog dem Beweis des Satzes III.

BEWEIS von Satz V. Der Beweis dieses Satzes ist ganz analog dem Beweis des Satzes III, nur brauchen wir jetzt den folgenden Satz von D. JACKSON [4] (s. noch [1], S. 266) anzuwenden:

Ist $f(x)$ eine 2π-periodische, stetige Funktion mit dem Stetigkeitsmodul $\omega(f;\delta)$, so gibt es ein trigonometrisches Polynom $T_n(x)$ höchtens n-ter Ordnung mit der Approximationseigenschaft

$$\max_{-\pi\leqq x\leqq\pi}|f(x)-T_n(x)| = O\left(\omega\left(f;\frac{1}{n}\right)\right).$$

BEWEIS von Satz VI. Der Beweis des Satzes VI verläuft ganz ähnlich dem Beweis des vorangehenden.

BOLYAI INSTITUT,
JÓZSEF ATTILA UNIVERSITÄT,
SZEGED

(Eingegangen 18. November 1962.)

Literaturverzeichnis

[1] G. ALEXITS, *Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen* (Budapest, 1960).
[2] G. ALEXITS—D. KRÁLIK, Über Approximationen mit den arithmetischen Mitteln allgemeiner Orthogonalreihen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **11** (1960), S. 387—399.
[3] J. P. GRAM, Über die Entwicklung reeller Funktionen in Reihen mittels der Methode der kleinsten Quadrate, *Journal f. reine u. angew. Math.*, **94** (1883), S. 41—73.
[4] D. JACKSON, *Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung*, Dissertation (Göttingen, 1911).
[5] L. LEINDLER, Über die Rieszschen Mittel allgemeiner Orthogonalreihen, *Acta Sci. Math. Szeged*, **24** (1963), S. 129—138.
[6] L. LEINDLER, Über die Approximation mit den de la Vallée-Poussinschen Mitteln allgemeiner Orthogonalreihen, *Publ. Math. Debrecen*, **11** (1964).

ON A MINIMUM PROBLEM. II

By

E. MAKAI (Budapest)

(*Presented by* P. TURÁN)

1.

P. TURÁN has proved the following theorem [7] and based on it a series of applications in Number Theory. If $z_0 = 1, z_1, z_2, \ldots, z_n$ are complex numbers with $|z_j| \leqq |z_k|$ for $j < k$, m is an arbitrary positive integer and $b_0, b_1, \ldots, b_n$ are arbitrary complex numbers then the inequality

$$\max_{\nu = m, m+1, \ldots, m+n} \left| \sum_{j=0}^{n} b_j z_j^{\nu} \right| \geqq \left(\frac{n}{24e^2(m+2n)} \right)^{n+1} \min_{l = 0, 1, \ldots, n} \left| \sum_{j=0}^{l} b_j \right|$$

holds.

This inequality was improved by VERA T. SÓS and P. TURÁN [5] whose proof yields, utilizing also a remark of S. UCHIYAMA [8], the inequality

$$(1) \qquad \max_{\nu = m, m+1, \ldots, m+n} \left| \sum_{j=0}^{n} b_j z_j^{\nu} \right| \geqq \left(\frac{n}{8e(m+n)} \right)^{n+1} \min_{l = 0, 1, \ldots, n} \left| \sum_{j=0}^{l} b_j \right| .$$

I improved (1) (see [4]) by replacing in (1) the exponent $n+1$ by n, a possibility suggested by the solution of an analogous problem by I. DANCS [1]; this gives in m the correct order of magnitude.

Certain further possibilities of applications suggested to replace in (1) the constant $8e$ by the least possible one. Let A be the limes inferior of those constants which can replace $8e$ in (1). P. ERDŐS found the first lower bound for A (see [5]), namely

$$A > 1.32.$$

Subsequently S. UCHIYAMA [8] and the present author [3] improved this, proving by different principles the inequalities

$$A \geqq e, \qquad A \geqq \frac{2e}{\log 2},$$

respectively. The object of the present note is to show that

$$(2) \qquad A \geqq 4e.$$

2.

A theorem of SONIN ([6], p. 164) states that if in $a < x < b$ $\varphi(x)$ is an increasing (decreasing) differentiable function and $\varphi(x) \neq 0$ in (a, b) then for any function $y = y(x)$ satisfying the differential equation

$$y'' + \varphi(x) y = 0$$

the quantity $\dfrac{y'^2 + \varphi(x) y^2}{\varphi(x)}$ decreases (increases) in the interval $a < x < b$.

We state now a somewhat similar assertion, namely *that if* $\varphi(x)$ *and* y *are defined as above** then $y'^2+\varphi(x)y^2$ *increases or decreases in* $a<x<b$ *according to whether* $\varphi(x)$ *increases or decreases in the same interval.*

Indeed

$$(y'^2+\varphi(x)y^2)' = 2y'[y''+\varphi(x)y]+\varphi'(x)y^2 = \varphi'(x)y^2$$

hence the statement follows.

Applied to various concrete differential equations, e. g. to the differential equation

$$y''+(2\nu+1-x^2)y = 0$$

a solution of which is $e^{-x^2/2}H_\nu(x)$, where

$$H_\nu(x) = (-1)^\nu e^{x^2}\left(\frac{d}{dx}\right)^\nu e^{-x^2}$$

is the νth Hermite polynomial, Sonin's theorem and the above assertion yield results of similar kind. From Sonin's theorem it follows that the successive relative maxima of

$$e^{-x^2/2}|H_\nu(x)|$$

form an increasing sequence for $x\geqq 0$ ([6], p. 175).

On the other hand, using the above assertion one obtains that if $x_0, x_1, \dots, x_r$ are the non-negative roots of $H_\nu(x)$ in increasing order then

$$e^{-x_0^2/2}|H'_\nu(x_0)|>e^{-x_1^2/2}|H'_\nu(x_1)|>\dots>e^{-x_r^2/2}H'_\nu(x_r)|. \tag{3}$$

3.

If $z_0, z_1, \dots, z_n$ are arbitrary complex numbers differing from each other and from 0, and

$$b_j = \frac{1}{z_j^m}\prod_{k=0}^{j-1}\frac{-1-z_k}{z_j-z_k}\cdot\prod_{k=j+1}^{n}\frac{z_k+1}{z_k-z_j} = \frac{1}{z_j^m}\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\frac{z_k+1}{z_k-z_j}$$

then

$$\begin{aligned} b_0z_0^m+b_1z_1^m+\dots+b_nz_n^m &= (-1)^m\\ b_0z_0^{m+1}+b_1z_1^{m+1}+\dots+b_nz_n^{m+1} &= (-1)^{m+1}\\ &\cdots\cdots\\ b_0z_0^{m+n}+b_1z_1^{m+n}+\dots+b_nz_n^{m+n} &= (-1)^{m+n}. \end{aligned} \tag{4}$$

Indeed if we denote by

$$V(z_0, z_1, \dots, z_n) = \prod_{q>p}(z_q-z_p)$$

the Vandermonde determinant of the quantities $z_0, z_1, \dots, z_n$ and solve the system (4) of $n+1$ linear equations in the unknowns b_j, we have

$$b_j = \frac{1}{z_j^m}\frac{V(z_0, \dots, z_{j-1}, -1, z_{j+1}, \dots, z_n)}{V(z_0, \dots, z_{j-1}, z_j, z_{j+1}, \dots, z_n)} =$$

$$= \frac{1}{z_j^m}\frac{-1-z_0}{z_j-z_0}\frac{-1-z_1}{z_j-z_1}\cdots\frac{-1-z_{j-1}}{z_j-z_{j-1}}\frac{z_{j+1}+1}{z_{j+1}-z_j}\frac{z_{j+2}+1}{z_{j+2}-z_j}\cdots\frac{z_n+1}{z_n-z_j}.$$

---

* The restriction $\varphi(x)\neq 0$ can be now omitted.

Putting now $z_j = 1-\frac{x_j^2}{2m}$ $(j=0, 1, \dots, n)$ where $x_{-n}, x_{-n+1}, \dots, x_0, \dots, x_n$ are the roots of the Hermite polynomial of the odd degree $2n+1$ arranged in increasing order, so that

$$H_{2n+1}(x) = 2^{2n+1} \prod_{j=-n}^{n} (x-x_j),$$

we have for sufficiently great m's, which ensure that $z_j > 0$ $(j=0, 1, \dots, n)$,

$$b_0 = \prod_{j=1}^{n} \frac{2-\frac{x_j^2}{2m}}{\frac{-x_j^2}{2m}}$$

and for $j=1, 2, \dots, n$

$$b_j = \left(1-\frac{x_j^2}{2m}\right)^{-m} \frac{2\cdot\left(2-\frac{x_1^2}{2m}\right)\dots\left(2-\frac{x_{j-1}^2}{2m}\right)}{\frac{x_j^2}{2m}\left(\frac{x_j^2}{2m}-\frac{x_1^2}{2m}\right)\dots\left(\frac{x_j^2}{2m}-\frac{x_{j-1}^2}{2m}\right)}\cdot$$

$$\cdot\frac{\left(2-\frac{x_{j+1}^2}{2m}\right)\dots\left(2-\frac{x_n^2}{2m}\right)}{\left(\frac{x_j^2}{2m}-\frac{x_{j+1}^2}{2m}\right)\dots\left(\frac{x_j^2}{2m}-\frac{x_n^2}{2m}\right)}.$$

Since $x_{-j} = -x_j$, $x_0=0$, we have if m tends to infinity

$$b_0 \sim \beta_0 = \frac{(4m)^n}{\prod\limits_{\substack{j=-n \\ j\neq 0}}^{n} x_j} = \frac{(4m)^n\cdot 2^{2n+1}}{H'_{2n+1}(0)} = \frac{(4m)^n\cdot 2^{2n+1}}{(-1)^n \frac{(2n+2)!}{(n+1)!}} \tag{5}$$

([6], formula 5.5.53) and for $j=1, 2, \dots n$

$$b_j \sim \beta_j = e^{x_j^2/2} \frac{(4m)^n}{\frac{(x_j-x_0)(x_j-x_{-j})}{2}(x_j^2-x_1^2)\dots(x_j^2-x_{j-1}^2)\cdot(x_{j+1}^2-x_j^2)\dots(x_n^2-x_j^2)} =$$

$$= e^{x_j^2/2} \frac{(4m)^n\cdot 2}{\prod\limits_{\substack{p=-n \\ p\neq j}}^{n} (x_j-x_p)} = e^{x_j^2/2}\frac{(4m)^n\cdot 2^{2n+2}}{H'_{2n+1}(x_j)}.$$

From these asymptotical formulas the rest follows simply.

We observe that the signs in the sequence $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ alternate and from (3)

$$|\beta_0| < \left|\frac{\beta_1}{2}\right| < \left|\frac{\beta_2}{2}\right| < \dots < \left|\frac{\beta_n}{2}\right|.$$

Hence we have $|\beta_0+\beta_1+\ldots+\beta_l| < |\beta_0+\beta_1+\ldots+\beta_{l+1}|$ $(0 \leqq l \leqq n-1)$ and by (5)

$$\min_{l=0,1,\ldots,n} |\beta_0+\beta_1+\ldots+\beta_l| = |\beta_0| = (4m)^n \cdot 2^{2n+1} \frac{(n+1)!}{(2n+2)!}$$

or from (4) if $\nu = m, m+1, \ldots, m+n$

$$\left|\sum_{j=0}^{n} b_j z_j^{\nu}\right| = 1 = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+1}(4m)^n(n+1)!} \min_{l=0,1,\ldots,n} |\beta_0+\beta_1+\ldots+\beta_l| \sim$$

$$\sim \frac{(2n+2)!}{2^{2n+1}(4m)^n(n+1)!} \min_{l=0,1,\ldots,n} |b_0+b_1+\ldots+b_l| \quad \text{if} \quad m \to \infty$$

$$\sim 2\sqrt{2}(n+1)\left(\frac{n}{4em}\right)^n \min_{l=0,1,\ldots,n} |b_0+b_1+\ldots+b_l| \quad \text{if} \quad m, n \to \infty$$

which shows the validity of (2).

MATHEMATICAL INSTITUTE,
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES
BUDAPEST

(*Received 4 December 1962*)

References

[1] I. DANCS, On an extremal problem, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **9** (1958), pp. 309–313.
[2] E. MAKAI, An estimation in the theory of Diophantine Approximations, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **9** (1958), pp. 299–307.
[3] E. MAKAI, The first main theorem of P. Turán, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **10** (1959), pp. 405–411.
[4] E. MAKAI, On a minimum problem, *Ann. Univ. Sci. Budapest*, Sectio Mathematica, **3–4** (1960–61), pp. 177–182.
[5] VERA T. SÓS–P. TURÁN, On some new theorems in the theory of Diophantine Approximations, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), pp. 241–255.
[6] G. SZEGŐ, *Orthogonal polynomials*, 2nd ed. (New York, 1959).
[7] P. TURÁN, *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen* (Budapest, 1953).
[8] S. UCHIYAMA, A note on the second main theorem of P. Turán, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **9** (1958), pp. 379–380.

ÜBER KONFORME UND PROJEKTIVE VERÄNDERUNG DER KRÜMMUNG IN PUNKTRÄUMEN

Von

A. MOÓR (Szeged)

(*Vorgelegt von* O. VARGA)

§ 1. Einleitung

Zu Grunde gelegt sei ein n-dimensionaler Riemannscher Raum $\mathfrak{R}_n$ mit dem metrischen Grundtensor $g_{ik}(x)$; diesen Raum werden wir im folgenden als Basisraum bezeichnen. Die Funktionen $g_{ik}(x)$ sollen den für die Riemannschen Räume gewöhnlichen Bedingungen genügen. Die Parallelübertragung der Vektoren ist im Raume $\mathfrak{R}_n$ durch die aus dem metrischen Grundtensor $g_{ik}(x)$ ableitbaren Christoffelschen Symbole

$$(1.\ 1) \qquad \Gamma_i{}^j{}_k \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} g^{rj} (\partial_k g_{ir} + \partial_i g_{kr} - \partial_r g_{ik})$$

bestimmt.

Führen wir nun im Raume $\mathfrak{R}_n$ die *konforme Veränderung*

$$(1.\ 2) \qquad \tilde{g}_{ik} = e^{2\sigma} g_{ik}, \quad bzw. \quad \tilde{g}^{ik} = e^{-2\sigma} g^{ik}, \qquad \sigma = \sigma(x)$$

des metrischen Grundtensors ein, so geht $\mathfrak{R}_n$ in einen Raum $\tilde{\mathfrak{R}}_n$ über, wo die Parallelübertragung der Vektoren auf Grund von (1. 1) und (1. 2) durch die symmetrischen Übertragungsparameter

$$(1.\ 3) \qquad \tilde{\Gamma}_i{}^j{}_k = \Gamma_i{}^j{}_k + 2\delta^j_{(i}\sigma_{k)} - g_{ik}\sigma^j, \qquad \sigma_i \overset{\text{def}}{=} \partial_i \sigma$$

festgelegt ist. Nach einer *projektiven Veränderung*

$$(1.\ 4) \qquad \hat{\Gamma}_i{}^j{}_k = \Gamma_i{}^j{}_k + 2\delta^j_{(i}\psi_{k)}$$

der Übertragungsparameter entsteht ein neuer Raum, den wir im folgenden mit $\hat{\mathfrak{R}}_n$ bezeichnen wollen. In (1. 4) sind die ψ_k die Komponenten eines beliebigen kontravarianten Vektors, und $\hat{\Gamma}_i{}^j{}_k$ ist selbstverständlich in den Indizes i, k symmetrisch.

Führen wir nun die konforme und die projektive Veränderung (1. 2) und (1. 4) nacheinander aus, so entsteht ein Raum $\mathfrak{R}_n^+$ in dem die Übertragungsparameter

$$(1.\ 5) \qquad G_i{}^j{}_k = \Gamma_i{}^j{}_k + 2\delta^j_{(i}(\sigma_{k)} + \psi_{k)}) - g_{ik}\sigma^j, \qquad \sigma^j \overset{\text{def}}{=} g^{jt}\sigma_t$$

sind. Diese Veränderung wollen wir im folgenden eine *konform-projektive Veränderung* nennen und der Raum $\mathfrak{R}_n^+$ soll als konform-projektiver Raum bezeichnet werden.

Die Räume $\tilde{\mathfrak{R}}_n, \hat{\mathfrak{R}}_n$ und $\mathfrak{R}_n^+$ sind Spezialfälle der von uns früher eingeführten sog. $\mathfrak{R}_n^*$-Räume.[1] Ein $\mathfrak{R}_n^*$-Raum ist dadurch bestimmt, daß in ihm die Metrik

---

[1] A. MOÓR, Erweiterung des Begriffs der Räume skalarer und konstanter Krümmung, *Acta Sci. Math. Szeged,* **21** (1960), S. 53–77.

durch einen metrischen Grundtensor $g_{ik}(x)$ und die Übertragung durch die affinen Übertragungsparameter

$$L_i{}^j{}_k = \Gamma_i{}^j{}_k + \Lambda_i{}^j{}_k \tag{1. 6}$$

festgelegt sind, wo $\Lambda_i{}^j{}_k$ ein gemischter Tensor dritter Stufe ist. Ein $\mathfrak{R}_n^*$-Raum ist ein Raum von skalarer Krümmung erster, zweiter, bzw. dritter Gattung, falls sein Krümmungstensor die Form

$$R^*_{ijkl} = 2R^* \gamma_{i[k} \gamma_{|j|l]}, \tag{1. 7}$$

$$\begin{cases} \text{(a)} \quad R^*_{ijkl} = 2R^* \gamma_{i[k} g_{|j|l]}, \\ \text{(b)} \quad R^*_{ijkl} = 2R^* g_{i[k} \gamma_{|j|l]}, \end{cases} \tag{1. 8}$$

$$R^*_{ijkl} = 2R^* g_{i[k} g_{|j|l]} \tag{1. 9}$$

hat, wo $\gamma_{ik}(x)$ von den Grundgrößen g_{ik} und $\Lambda_i{}^j{}_k$ gebildet ist, und R^* einen Skalar bedeutet.

Wir werden in § 2 die Formeln der Krümmungstensoren der Räume $\tilde{\mathfrak{R}}_n$, $\hat{\mathfrak{R}}_n$ und $\mathfrak{R}_n^+$ angeben, und in § 3 untersuchen wir, unter welchen Bedingungen der Krümmungstensor der einzelnen Räume $\tilde{\mathfrak{R}}_n$, $\hat{\mathfrak{R}}_n$ und $\mathfrak{R}_n^+$ vom Typus (1. 7), (1. 8), bzw. (1. 9) ist. (Wir werden wegen des ähnlichen Charakters beide der Typen (1. 8) (a) und (1. 8) (b) Räume skalarer Krümmung zweiter Gattung nennen.) Mit anderen Worten: wir werden in § 3 das Problem untersuchen, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit die Räume $\tilde{\mathfrak{R}}_n$, $\hat{\mathfrak{R}}_n$ bzw. $\mathfrak{R}_n^+$ einen $\mathfrak{R}_n^*$-Raum von skalarer Krümmung bestimmen. Es wird sich zeigen, daß dies nur bei gewissen Typen des Basisraumes $\mathfrak{R}_n$ möglich ist.

Wie schon bemerkt wurde, ist $g_{ik}(x)$ in den allgemeinsten $\mathfrak{R}_n^*$-Räumen der metrische Grundtensor. Das Herauf-, bzw. Herunterziehen der Indizes wird im folgenden immer mit g^{ik} bzw. g_{ik} durchgeführt.

§ 2. Krümmungstensoren

Der Krümmungstensor eines $\mathfrak{R}_n^*$-Raumes, in dem also die Vektorenübertragung durch die Übertragungsparameter (1. 6) bestimmt ist, ist durch die Formel

$$R^{*}_i{}^j{}_{kl} = R_i{}^j{}_{kl} + 2\nabla_{[l} \Lambda_{|i|}{}^j{}_{k]} + 2\Lambda_i{}^t{}_{[k} \Lambda_{|t|}{}^j{}_{l]} \tag{2. 1}$$

festgelegt[2], wo ∇_l *die kovariante Ableitung des Basisraumes* $\mathfrak{R}_n$ — d. h. gebildet mit (1. 1) — bedeutet, und $R_i{}^j{}_{kl}$ sein Krümmungstensor ist.

Die durch (1. 3)—(1. 5) bestimmten Übertragungen sind Spezialfälle der Übertragung (1. 6); eine Vergleichung dieser Fromeln mit (1. 6) gibt unmittelbar den Tensor $\Lambda_i{}^j{}_k$, und nach (2. 1) bekommen wir dann die bekannten Formeln (vgl. z. B.: J. A. SCHOUTEN, *Ricci-Calculus*, second edition (Springer Verlag, 1954),

---

[2] Vgl. die in der Fußnote [1] zitierte Arbeit, Formeln (1.6) und (1.7).

Kap. VI, Formeln (1. 3) und (5. 6)):

$$\tilde{R}_i{}^j{}_{kl} = R_i{}^j{}_{kl} + 2(\delta^j_{[k}\sigma_{l]i} - g_{i[k}\sigma^j{}_{l]}), \tag{2. 2}$$

$$\sigma_{il} \equiv \sigma_{li} \overset{\text{def}}{=} \nabla_l \sigma_i - \sigma_i \sigma_l + \frac{1}{2} g_{il} \sigma_t \sigma^t, \qquad \sigma_i \overset{\text{def}}{=} \partial_i \sigma, \tag{2. 2a}$$

$$\hat{R}_i{}^j{}_{kl} = R_i{}^j{}_{kl} + 2(\delta^j_i \psi_{[kl]} + \delta^j_{[k}\psi_{|i|l]}), \tag{2. 3}$$

$$\psi_{kl} \overset{\text{def}}{=} \nabla_l \psi_k - \psi_k \psi_l \tag{2. 3a}$$

$$R_i^{+}{}^j{}_{kl} = R_i{}^j{}_{kl} + 2\{\delta^j_i \psi_{[kl]} + \delta^j_{[k}\psi_{|i|l]} + \tag{2. 4}$$
$$+ \delta^j_{[k}\sigma_{l]i} - g_{i[k}\sigma^j{}_{l]} + \delta^j_{[k} g_{l]i} \sigma_t \psi^t - \delta^j_{[k}(\sigma_{l]}\psi_i + \psi_{l]}\sigma_i)\}.$$

Bemerkung. Die Formeln (2. 2) und (2. 3) sind in der Theorie der konformen, bzw. projektiven Räume wohlbekannt. Die Übertragung (1. 5) ist ein Spezialfall einer von V. Hlavatý untersuchten Übertragung.[3]

§ 3. $\mathfrak{R}^*_n$-Räume von skalarer Krümmung

Die von uns in § 1 eingeführten Räume $\tilde{\mathfrak{R}}_n$, $\hat{\mathfrak{R}}_n$ bzw. $\mathfrak{R}^+_n$ sind alle $\mathfrak{R}^*_n$-Räume, d. h. solche metrische Räume, in denen die Metrik durch einen metrischen Grundtensor $g_{ik}(x)$ bestimmt wird, die Übertragungstheorie aber durch die Übertragungsparameter von der Form (1. 6) festgelegt ist. Im folgenden werden wir immer voraussetzen, daß der Krümmungstensor der Räume $\tilde{\mathfrak{R}}_n$, $\hat{\mathfrak{R}}_n$ bzw. $\mathfrak{R}^+_n$ immer eine der Formen (1. 7)—(1. 9) hat. Es gilt folgender

Satz I. *Nach einer konformen Veränderung* (1. 2) *des metrischen Grundtensors* g_{ik} *kann der Krümmungstensor* (2. 2) *nicht die Form* (1. 8) (a), *bzw.* (b) *haben. Hat der Krümmungstensor* (2. 2) *die Form* (1. 9), *und ist* $n > 2$, *so besteht für den Riemannschen Krümmungstensor* R_{ijkl} *von* $\mathfrak{R}_n$ *die Relation:*

$$R_{ijkl} = 2R g_{i[k} g_{l]j} - \frac{2}{n-2}(g_{j[k} R_{|i|l]} - g_{i[k} R_{|j|l]}), \tag{3. 1}$$

wo R ein Skalar ist, und

$$R_{il} \equiv R_{li} \overset{\text{def}}{=} R_i{}^t{}_{lt}. \tag{3. 1a}$$

Beweis. Nehmen wir an, daß — im Widerspruch zu dem Satz — $\tilde{R}_{ijkl}$ die Form (1. 8) (a) hat. Auf Grund dieser Gleichung wird wegen (2. 2)

$$R_{ijkl} + 2(g_{j[k}\sigma_{l]i} - g_{i[k}\sigma_{l]j}) = 2R^* \gamma_{i[k} g_{l]j}, \qquad R^* \neq 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist aber in i, j schiefsymmetrisch, da der Riemannsche Krümmungstensor der Relation $R_{(ij)kl} = 0$ genügt. Der symmetrische Teil der rechten Seite muß also verschwinden, d. h. es ist:

$$\gamma_{i[k} g_{l]j} + \gamma_{j[k} g_{l]i} = 0. \tag{3. 2}$$

---

[3] Vgl. V. Hlavatý, The holonomy Group I. The curvature tensor, *Journ. of Math. and Mech.* **8** (1959), S. 285—308, insb. § 6.

Eine Überschiebung mit g^{lj} gibt die Formel:

$$\gamma_{ik} = \frac{1}{n} \gamma^{t}{}_{t} g_{ik}; \tag{3. 3}$$

der Typus (1. 8) (a) geht somit in (1. 9) über, $\tilde{R}_{ijkl}$ hat also nicht die Form (1. 8) (a).

In ganz analoger Weise bekommt man wieder die Formel (3. 3), wenn man voraussetzt, daß $\tilde{R}_{ijkl}$ die Form (1. 8) (b) hat. Statt (3. 2) bekommt man jetzt:

$$g_{i[k} \gamma_{|j|l]} + g_{j[k} \gamma_{|i|i]} = 0.$$

Eine Überschiebung mit g^{ik} führt wieder zur Formel (3. 3), somit geht (1. 8) (b) in (1. 9) über, $\tilde{R}_{ijkl}$ hat also nicht die Form (1. 8) (b).

Nehmen wir jetzt an, daß $\tilde{R}_{ijkl}$ die Form (1. 9) hat. Aus den Formeln (2. 2) und (1. 9) folgt wegen $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$:

$$R_{ijkl} + 2(g_{j[k} \sigma_{l]i} - g_{i[k} \sigma_{l]j}) = 2R^{*} g_{i[k} g_{l]j}. \tag{3. 4}$$

Eine Überschiebung mit g^{jl} gibt nach (3. 1a):

$$\sigma_{ik} = \frac{1}{n-2} (R_{ik} - \sigma^{t}{}_{t} g_{ik} - R^{*}(n-1) g_{ik}).$$

Substituieren wir nun diese Formel von σ_{ik} in die Gleichung (3. 4), so bekommen wir unmittelbar die Relation (3. 1) mit

$$R = -\frac{2}{n-2} \sigma^{t}{}_{t} - \frac{n}{n-2} R^{*}.$$

Der Beweis des Satzes I ist damit beendet.

Wir gehen jetzt zur Untersuchung des durch (2. 3) bestimmten Krümmungstensors $\hat{R}_{ijkl}$ über. Es gilt der folgende

SATZ II. *Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß der durch* (2. 3) *bestimmte Krümmungstensor* $\hat{R}_{ijkl}$ *die Form* (1. 9) *habe sind die folgenden:*

1. *Für den Vektor* ψ_i *gilt*

$$\psi_{ik} = \frac{1}{n} \psi^{t}{}_{t} g_{ik} \qquad (\psi_{ik} \overset{\text{def}}{=\!=} \nabla_k \psi_i - \psi_i \psi_k). \tag{3. 5}$$

2. *Der Basisraum* $\mathfrak{R}_n$ *ist ein Raum von skalarer Krümmung.*

BEWEIS. Es kann leicht verifiziert werden, daß die Bedingungen hinreichend sind. Aus (3. 5) und (2. 3) folgt nämlich

$$\hat{R}_{ijkl} = R_{ijkl} - \frac{2}{n} \psi^{t}{}_{t} g_{i[k} g_{l]j}.$$

Hat nun R_{ijkl} die Form:

$$R_{ijkl} = 2R g_{i[k} g_{l]j},$$

so folgt für $\hat{R}_{ijkl}$ unmittelbar eine Formel von der Form (1. 9).

Wir zeigen jetzt, daß die Bedingungen notwendig sind. Der Tensor $\hat{R}_{ijkl}$ habe also die Form (1. 9). Daraus folgt, daß $\hat{R}_{ijkl}$ in den Indizes i, j schiefsymmetrisch ist. Da R_{ijkl} in i, j immer schiefsymmetrisch ist, folgt aus (2. 3) nach einer Verjüngung hinsichtlich i, j die Formel:

$$2(n+1)\psi_{[kl]} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \psi_{[kl]} = 0$$

und aus (2. 3) wird somit:

$$\hat{R}_{ijkl} = R_{ijkl} + 2g_{j[k}\psi_{|i|l]}. \tag{3. 6}$$

Der in i, j symmetrische Teil von $\hat{R}_{ijkl}$ muß aber verschwinden, da wir für den Tensor $\hat{R}_{ijkl}$ die Form (1. 9) vorausgesetzt haben. Es wird somit:

$$g_{j[k}\psi_{|i|l]} + g_{i[k}\psi_{|j|l]} = 0.$$

Eine Überschiebung mit g^{jk} gibt nun unmittelbar die zu beweisende Formel (3. 5).

Substituieren wir ψ_{il} aus (3. 5) in die Formel (3. 6), beachten wir dann, daß $\hat{R}_{ijkl}$ die Form (1. 9) hat, so bekommt man für den Riemannschen Krümmungstensor R_{ijkl} die Form:

$$R_{ijkl} = 2Rg_{i[k}g_{l]j}, \qquad \left(R \overset{\text{def}}{=} R^* + \frac{1}{n}\psi^t{}_t\right).$$

Das bedeutet aber, daß $\mathfrak{R}_n$ ein Raum von skalarer Krümmung ist.

BEMERKUNG. Bei dem Beweis der Relationen $\psi_{[kl]} = 0$ und (3. 5) haben wir nur die schiefe Symmetrie von $\hat{R}_{ijkl}$ in i, j benützt. Es gilt also:

Ist $\hat{R}_{(ij)kl} = 0$, *so ist für* ψ_{ik} *die Formel* (3. 5) *gültig.*

Die Umkehrung der Bemerkung ist nach (2. 3) und (2. 3a) trivial. Aus (3. 5) folgt auch, daß $\psi_{[kl]} = 0$ ist. Nach (2. 3a) ist also jetzt ψ_k ein Gradientvektor.

Im folgenden wollen wir diejenigen Fall untersuchen, in dem $\hat{\mathfrak{R}}_n$ ein Raum von skalarer Krümmung zweiter Gattung darstellt. Es gilt der folgende

SATZ III. *Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß im Fall* $n > 2$ *der Krümmungstensor* $\hat{R}_{ijkl}$ *die Form* (1. 8) (a) *habe, sind die folgenden:*

1. ψ_k *ist ein Gradientvektor.*
2. *Der Basisraum* $\mathfrak{R}_n$ *ist ein Raum von skalarer Krümmung.*

BEWEIS. Die Bedingungen sind offenbar hinreichend. Nach (2. 3) wird nämlich wegen der beiden Bedingungen der Tensor $\hat{R}_{ijkl}$ die Form

$$\hat{R}_{ijkl} = 2Rg_{i[k}g_{l]j} + 2g_{j[k}\psi_{l]i}$$

haben. Nach der Bezeichnung

$$\gamma_{ik} \overset{\text{def}}{=} Rg_{ik} - \psi_{ki}$$

wird

$$\hat{R}_{ijkl} = \gamma_{i[k}g_{l]j}$$

sein, d. h. $\hat{R}_{ijkl}$ hat die Form (1. 8) (a) mit $R^* = 1$.

Nehmen wir jetzt an, daß der durch (2. 3) bestimmte Tensor: $\hat{R}_{ijkl}$ die Form (1. 8) (a) hat. Es wird somit

$$R_{ijkl}+2g_{ij}\psi_{[kl]}+2g_{j[k}\psi_{|i|l]}=2R^*\gamma_{i[k}g_{l]j} \tag{3. 7}$$

bestehen. Eine Überschiebung mit g^{ij} gibt wegen $R_i{}^i{}_{kl}=0$:

$$\psi_{[kl]}=-\frac{1}{n+1}R^*\gamma_{[kl]} \tag{3. 8}$$

und die Formel (3. 7) geht somit in

$$R_{ijkl}+2g_{j[k}\psi_{|i|l]}=2R^*\left(\gamma_{i[k}g_{l]j}+\frac{1}{n+1}\gamma_{[kl]}g_{ij}\right) \tag{3. 9}$$

über. Eine Überschiebung mit g^{jl} gibt:

$$\psi_{ik}=\frac{1}{n-1}R_{ik}-R^*\gamma_{ik}+\frac{2}{n^2-1}R^*\gamma_{[ik]}.$$

Substituieren wir jetzt diese Formel von ψ_{ik} in (3. 9), so wird wegen $R_{il}=R_{li}$:

$$R_{ijkl}+\frac{2}{n-1}g_{j[k}R_{l]i}+\frac{2}{n^2-1}R^*(g_{jk}\gamma_{[il]}-g_{jl}\gamma_{[ik]})=\frac{2}{n+1}R^*g_{ij}\gamma_{[kl]}. \tag{3. 10}$$

Der in i, j symmetrische Teil beider Seiten gibt die Relation:

$$\frac{1}{n-1}(g_{j[k}R_{l]i}+g_{i[k}R_{l]j})+\frac{1}{n^2-1}R^*(g_{jk}\gamma_{[il]}+g_{ik}\gamma_{[jl]}-g_{jl}\gamma_{[ik]}-g_{il}\gamma_{[jk]})=$$

$$=\frac{2}{n+1}R^*g_{ij}\gamma_{[kl]}.$$

Eine Überschiebung mit g^{jk} führt zur Formel:

$$R_{il}=\frac{1}{n}R^t{}_tg_{il}+\frac{2(n-2)}{n(n+1)}R^*\gamma_{[il]}. \tag{3. 11}$$

Da aber die Tensoren R_{il} und g_{il} in i, l symmetrisch sind, kann auf Grund von (3. 11) nur $\gamma_{[il]}=0$ bestehen. γ_{il} ist also ein symmetrischer Tensor. Beachten wir die Symmetrie von γ_{ik} in den Formeln (3. 11) und (3. 10), so wird nach diesen Relationen:

$$R_{ijkl}=\frac{2}{n(n-1)}R^t{}_tg_{i[k}g_{l]j}.$$

Der Basisraum $\mathfrak{R}_n$ ist also ein Riemannscher Raum von skalarer Krümmung und nach (3. 8) wird noch wegen $\gamma_{[kl]}=0$ die Relation $\psi_{[kl]}=0$ bestehen. Auf Grund der Definitionsgleichung (2. 3a) bedeutet aber die Symmetrie von ψ_{kl}, daß $\partial_{[k}\psi_{l]}=0$ ist, d. h. ψ_k ist ein Gradientvektor. Damit haben wir den Satz III vollständig bewiesen.

BEMERKUNG. Vergleichen wir die Sätze II und III, so sehen wir, daß in dem Satz III für den Vektor ψ_k eine schwächere Bedingung auftritt. Aus (3. 5) folgt zwar wegen der Symmetrie von g_{ik}, daß $\psi_{[ik]}=0$, d. h. ψ_i ein Gradientvektor ist; wenn aber ψ_i ein Gradientvektor ist, kann noch nicht auf die Gültigkeit von (3. 5) gefolgert werden.

Für den Fall, in dem der Krümmungstensor (2. 3) die Form (1. 8) (b) hat, besteht der folgende

SATZ IV. *Ist* $n>2$, *und hat der Krümmungstensor* $\hat{R}_{ijkl}$ *die Form* (1. 8) (b), *so ist* ψ_k *ein Gradientvektor,* γ_{ik} *ist symmetrisch und der Krümmungstensor* R_{ijkl} *des Basisraumes* $\mathfrak{R}_n$ *hat die Form:*

$$R_{ijkl} = 2R^*(g_{i[k}\gamma_{|j|l]} - g_{j[k}\gamma_{|i|l]}) + \frac{2}{n}\left(\frac{1}{n-1}R^t{}_t - 2R^*\gamma^t{}_t\right) g_{i[k}g_{l]j}. \tag{3. 12}$$

BEWEIS. Da nach unserer Annahme der Tensor (2. 3) die Form (1. 8) (b) hat, besteht für R_{ijkl} die Formel:

$$R_{ijkl} + 2g_{ij}\psi_{[kl]} + 2g_{j[k}\psi_{|i|l]} = 2R^* g_{i[k}\gamma_{|j|l]}. \tag{3. 13}$$

Eine Überschiebung mit g^{ij} gibt wegen $R_i{}^i{}_{kl}=0$:

$$\psi_{[kl]} = \frac{1}{n+1} R^*\gamma_{[kl]}. \tag{3. 14}$$

Eine Überschiebung von (3. 13) mit g^{ik} gibt wegen $R_{ijkl}=R_{jilk}$ nach (3. 1a):

$$R_{jl} + 2\psi_{[jl]} + \psi_{jl} - g_{jl}\psi^t{}_t = R^*(n-1)\gamma_{jl}. \tag{3. 15}$$

Bilden wir den schiefsymmetrischen Teil beider Seiten, und substituieren wir für $\psi_{[jl]}$ den Wert von (3. 14), so wird wegen $R_{[jl]}=0$:

$$\frac{3}{n+1} R^*\gamma_{[jl]} = R^*(n-1)\gamma_{[jl]}.$$

Da $n>2$ ist, folgt hieraus

$$R^*\gamma_{[jl]}=0$$

und daher aus (3. 14)

$$\psi_{[kl]}=0.$$

Aus der Definitionsgleichung (2. 3a) folgt somit

$$\partial_{[k}\psi_{l]}=0,$$

d. h. ψ_l ist ein Gradientvektor und γ_{jl} ein symmetrischer Tensor.

Die Gleichung (3. 13) geht jetzt in

$$R_{ijkl} + 2g_{j[k}\psi_{|i|l]} = 2R^* g_{i[k}\gamma_{|j|l]} \tag{3. 16}$$

über. Aus (3. 15) wird wegen $\psi_{[kl]}=0$:

$$\psi_{jl} = -R_{jl} + g_{jl}\psi^t{}_t + R^*(n-1)\gamma_{jl}. \tag{3. 17}$$

Eine Überschiebung mit g^{jl} gibt für $\psi^t{}_t$ den Wert:

$$\psi^t{}_t = \frac{1}{n-1} R^t{}_t - R^*\gamma^t{}_t. \tag{3. 18}$$

Jetzt bilden wir den in i, j symmetrischen Teil der beiden Seiten von (3. 16). Es wird:

$$g_{j[k}\psi_{l]i}+g_{i[k}\psi_{l]j} = R^*(g_{i[k}\gamma_{l]j}+g_{j[k}\gamma_{l]i}).$$

Eine Überschiebung mit g^{ik} gibt unter Beachtung der Formel (3. 18):

$$\psi_{jl} = R^*\gamma_{jl}+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n-1}R^t{}_t-2R^*\gamma^t{}_t\right)g_{jl}.$$

Setzen wir das in (3. 16) ein, so ergibt sich die Formel (3. 12), w. z. b. w.

BEMERKUNG. Im zweidimensionalen Falle kann (3. 12) mit geeigneten γ_{ik} immer erfüllt werden, da beide Seiten von (3. 12) in i, j und k, l schiefsymmetrisch sind. Für $n=2$ bestimmt dann (3. 12) nur eine einzige wesentliche Gleichung; z. B. für $i=1, j=2, k=1, l=2$.

Zuletzt untersuchen wir den durch (2. 4) bestimmte Krümmungstensor $\overset{+}{R}_{ijkl}$. Wir beweisen den folgenden

SATZ V. *Ist* $n > 2$, *und hat der Krümmungstensor* $\overset{+}{R}_{ijkl}$ *die Form* (1. 9), *so ist* ψ_k *ein Gradientvektor und* R_{ijkl} *hat die Form:*

$$R_{ijkl} = \frac{2}{n-2}(g_{i[k}R_{l]j}-g_{j[k}R_{l]i})+\frac{2}{(n-1)(n-2)}R^t{}_t g_{j[k}g_{l]i}. \tag{3. 19}$$

BEWEIS. Da $\overset{+}{R}_{ijkl}$ die Form (1. 9) haben soll, muß er in i, j schiefsymmetrisch sein. Es muß also $\overset{+}{R}_i{}^i{}_{kl}=0$ bestehen. Auf Grund von (2. 4) bekommt man somit wegen $\sigma_{[kl]}=0$ und $R_i{}^i{}_{kl}=0$ nach einer Verjügung hinsichtlich i, j:

$$\psi_{[kl]}=0,$$

d. h. nach (2. 3a) $\partial_{[l}\psi_{k]}=0$. ψ_k ist also ein Gradientvektor, und nach den Formeln (2. 4) und (1. 9) wird für $R_i{}^j{}_{kl}$ die Relation

$$R_i{}^j{}_{kl}+2\delta^j_{[k}(\psi_{l]i}+\sigma_{l]i}+g_{l]i}\sigma_t\psi^t-\sigma_{l]}\psi_i-\psi_{l]}\sigma_i)-2g_{i[k}\sigma^j{}_{l]} = 2R^*\delta^j_{[l}g_{k]i} \tag{3. 20}$$

bestehen.

Nach einer Verjügung hinsichtlich j, l bekommt man:

$$\psi_{ik}+\sigma_{ik}+g_{ik}\sigma_t\psi^t-2\sigma_{(i}\psi_{k)} = \frac{1}{n-1}(R_{ik}-g_{ik}\sigma^t{}_t+\sigma_{ik})-R^*g_{ik}. \tag{3. 21}$$

Mit Hilfe dieser Relation kann man aus der Gleichung (3. 20) den Tensor ψ_{ik} eliminieren, da in (3. 20) der Klammerausdruck gerade die linke Seite von (3. 21) ist. Es wird:

$$R_i{}^j{}_{kl}+\frac{2}{n-1}\delta^j_{[k}(R_{l]i}-g_{l]i}\sigma^t{}_t+\sigma_{l]i})-2g_{i[k}\sigma^j{}_{l]} = 0. \tag{3. 22}$$

Ziehen wir nun den Index j herunter, und bilden dann den in i, j symmetrischen Teil beider Seiten, so erhalten wir

$$\frac{1}{n-1}\{g_{j[k}(R_{l]i}+\sigma_{l]i})+g_{i[k}(R_{l]j}+\sigma_{l]j})\}-g_{i[k}\sigma_{l]j}-g_{j[k}\sigma_{l]i} = 0.$$

Nach einer Überschiebung mit g^{jk} bekommen wir für σ_{il} den Ausdruck:

$$\sigma_{il} = \frac{1}{n-2} R_{il} + \frac{1}{n} \left(\sigma^t{}_t - \frac{1}{n-2} R^t{}_t \right) g_{il}.$$

Substituieren wir diesen Wert von $\sigma_{\iota l}$ in die Gleichung (3. 22) und ziehen dann den Index j herunter, so erhalten wir unmittelbar die Formel (3. 19), w. z. b. w.

BOLYAI INSTITUT,
JÓZSEF ATTILA UNIVERSITÄT,
SZEGED

(Eingegangen am 6. Dezember 1962.)

ÜBER DIE SINGULÄREN PUNKTE EINER FUNKTION DER KLASSE C_∞

Von

HELENE ZAHORSKA (Łódź, Polen)

(*Vorgelegt von* B. SZ.-NAGY)

Z. ZAHORSKI [2] hat die vollständige Charakterisierung der Menge der singulären Punkte einer Funktion der Klasse D_∞ samt der Klassifizierung dieser Punkte angegeben. Die Charakterisierung betrifft beide der dort unterschiedenen Mengen der Punkte von zwei Arten. Im Falle einer Funktion einer veränderlichen fällt offenbar die Klasse D_∞ (d. h. die Klasse der Funktionen, die in jedem Punkt die Ableitungen jeder Ordnung besitzen) mit der Klasse C_∞ (die Klasse der Funktionen, die überall stetige Ableitungen jeder Ordnung besitzen) zusammen. Das in der erwähnten Arbeit angenommene Prinzip der Klassifizierung der singulären Punkte bietet die Taylorsche Reihe oder, was für die Funktionen einer Veränderlichen damit äquivalent ist, die Frage ob die betrachtete Funktion einer reellen Veränderlichen analytisch ist:

Ein Punkt x_0 wird regulärer Punkt der Funktion $f(x)$ genannt, wenn die Funktion $f(x)$ in gewisser Umgebung dieses Punktes analytisch ist. Punkte, die nichtregulär sind, werden singuläre Punkte genannt.

Es ist klar, daß die Umgebung von x_0 auch zweidimensional sein kann — eine Funktion, die in einer eindimensionalen Umgebung von x_0 analytisch ist, kann als eine stetige und sogar analytische Funktion auf einen komplexen Bereich fortgesetzt werden.

Analoge Probleme für Funktionen mehrerer Veränderlichen sind viel komplizierter und mannigfaltiger. Ein Problem muß hier vor allem richtig gewählt werden.

Es gibt folgende Unterschiede zwischen den beiden Gebieten.

1. Wie es bekannt ist, braucht eine Funktion der Klasse D_∞ zweier Veränderlichen nicht einmal stetig zu sein.

2. Die Taylorsche Reihe einer Funktion zweier Veränderlichen ist eine Doppelreihe und kann in vielen Weisen summiert werden. Der Termin ,,Konvergenz einer Reihe" hat im Falle der bedingten Konvergenz verschiedene Bedeutungen bei verschieden Summierungsmethoden. Zwei Summierungsmethoden scheinen von besonderem Interesse zu sein.

Eine dieser Methoden stützt sich auf den Übergang zu einer einfachen Reihe von homogenen Polynomen, der seinen Ursprung in den aus der elementaren Analysis bekannten Beweisen der Taylorschen Formel hat. Die zweite Methode besteht in der Forderung der absoluten Konvergenz in einer Umgebung des Punktes (x_0, y_0), diese Forderung kann im Falle einer Funktion zweier reellen Veränderlichen auf eine 4-dimensionale Umgebung ausgedehnt werden.

Ich wähle daher ein engeres Problem. Ich setze voraus, daß die zu untersuchenden Funktionen zweier Veränderlichen der Klasse C_∞ angehören und fordere die absolute Konvergenz der ihnen entsprechenden Taylorschen Reihen in einer vierdimensionalen Umgebung eines regulären Punktes (m. a. W. die Funktionen sollen in dieser Umgebung analytisch sein). Die in der zitierten Arbeit [2] enthaltene Charakterisierung wurde eigentlich bei gleichen Voraussetzungen gewonnen, das dort betrachtete Problem ist aber einem allgemeineren Problem äquivalent. Im Falle einer Funktion zweier veränderlichen gibt es viele allgemeinere Probleme, die hier nicht erörtert werden und die komplizierter als das betrachtete Problem sind. Das soeben gestellte engere Problem ist auch schwieriger als das entsprechende Problem für eine Funktion einer Veränderlichen.

Die notwendigen Bedingungen

Definition 1. Ein Punkt (x_0, y_0) heißt regulärer Punkt einer Funktion zweier Veränderlichen $f(x, y)$, wenn es ein $r = r(x_0, y_0) > 0$ gibt, derart, daß für jedes $|h| < r$ und jedes $|k| < r$ die Taylorsche Doppelreihe:

$$T(x_0, y_0, h, k) = = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(m)} f(x_0, y_0)$$

(als eine Potenzreihe der Veränderlichen h und k) absolut konvergiert und wenn für ein gewisses $0 < \delta = \delta(x_0, y_0) \leqq r$ und alle $|h| < \delta$ und $|k| < \delta$, $T(x_0, y_0, h, k) = = f(x_0 + h, y_0 + k)$ gilt. Ein Punkt, der nicht regulär ist, heißt singulärer Punkt der Funktion f.

Definition 2. Ein singulärer Punkt (x_0, y_0) der Funktion f heißt Cauchyscher singulärer Punkt (C-Punkt oder Punkt des Typus C), wenn für ein gewisses $r(x_0, y_0) > 0$ und alle $|h| < r$ und $|k| < r$ die Doppelreihe $T(x_0, y_0, h, k)$ absolut konvergiert. Aus den Definitionen folgt es, daß in einem C-singulären Punkt die Taylorsche Reihe, wenn sie auch absolut konvergiert, die Funktion f in keiner Umgebung von (x_0, y_0) darstellt, mit anderen Worten, es gibt beliebig kleine h' und k' (für jedes $\delta > 0$ gibt es solche $|h'| < \delta$ und $|k'| < \delta$) daß es $T(x_0, y_0, h', k') \neq \neq f(x_0 + h', y_0 + k')$ gilt.

Nach Salzman und Zeller [1] heißen solche Punkte Fehlkonvergenzpunkte.

Definition 3. Ein singulärer Punkt der Funktion f, der kein C-singulärer Punkt ist, heißt singulärer Punkt von du Bois Reymond (abgekürzt B-Punkt oder Punkt des Typus B).

Aus den Definitionen 1, 2, 3 folgt es, daß für einen B-Punkt die in der Definition 1 erwähnte Zahl $r > 0$ nicht existiert, d. h. in keiner Umgebung von (x_0, y_0) konvergiert die Reihe $T(x_0, y_0, h, k)$ absolut. Salzman und Zeller [1] nennen solche Punkte für die Funktionen einer Veränderlichen Divergenzpunkte.

Aus den elementaren Eigenschaften der analytischen Funktionen ergibt es sich, daß alle Punkte einer gewissen (2-dimensionalen) Umgebung eines regulären Punktes selbst regulär sind — denn, wenn die Funktion in dem Punkt (x_0, y_0) analytisch ist, so ist sie auch analytisch in allen Punkten einer 4-dimensionalen Umgebung von (x_0, y_0). Daher haben wir:

Satz 1. *Die Menge aller regulären Punkte ist offen, die Menge aller singulären Punkte ist abgeschlossen.*

Dies ist die erste notwendige Bedingung für die betrachteten Punktmengen.

SATZ 2. *Die Menge B aller B-Punkte (für eine gegebene Funktion f) ist eine G_δ-Menge.*

BEWEIS. Es ist bekannt, daß die Existenz der in den Definitionen 1, 2 genannten Zahl $r>0$ der Ungleichung

$$\varphi(x_0, y_0) = \limsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{\frac{1}{m!}\left[\left|\frac{\partial}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial}{\partial y}\right|\right]^{(m)} f(x_0, y_0)} < \infty$$

äquivalent ist, die, da alle partiellen Ableitungen endlich sind, der Ungleichung equivalent ist

$$\Phi(x_0, y_0) = \sup_m \sqrt[m]{\frac{1}{m!}\left[\left|\frac{\partial}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial}{\partial y}\right|\right]^{(m)} f(x_0, y_0)} < \infty.$$

Nach Berücksichtigung der letzten Ungleichung erhalten wir $B=\{\Phi(x, y)=\infty\}$. Bei der Bezeichnung $\Phi_m(x, y)= \max\limits_{1\leqq k\leqq m} \sqrt[k]{\frac{1}{k!}\left[\left|\frac{\partial}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial}{\partial y}\right|\right]^{(k)} f(x, y)}$ gelten die folgenden Beziehungen $\Phi(x, y)= \lim\limits_{m\to\infty} \Phi_m(x, y)$, $\Phi_{m+1}(x, y) \geqq \Phi_m(x, y)$. Da die Funktionen $\Phi_m(x, y)$ stetig sind, gehört die Funktion $\Phi(x, y)$ der I Klasse von Baire an. Daraus folgt $B=\{\Phi(x, y) \geqq \infty\} \in G_\delta$. Was zu beweisen war.

SATZ 3. *Die Menge C aller C-Punkte ist eine F_σ-Menge der ersten Kategorie.*

BEWEIS. Da die Menge aller singulären Punkte abgeschlossen ist, sind alle Punkte der Menge $\bar{B}$ singulär, daraus folgt $\bar{B}-B\subset C$. Die Menge $B\in G_\delta$ ist dicht in $\bar{B}$, sie ist also residual in $\bar{B}$ und folglich $\bar{B}-B$ ist eine Menge der I Kategorie in Bezug auf $\bar{B}$, um so mehr in Bezug auf die ganze Ebene. Diese Menge ist offenbar eine F_σ-Menge.

Es gibt $C = C\bar{B}+(C-\bar{B}) = (\bar{B}-B)+(C-\bar{B}) = (\bar{B}-B)+(B+C-\bar{B})$; die Menge $B+C-\bar{B} = \overline{B+C}-\bar{B}$ gehört offenbar der Klasse F_σ an. Ich werde beweisen, daß sie eine nirgends dichte Menge ist. In der Tat, in der offenen, ebenen Menge Q, die das Complement der Menge $\bar{B}$ zur x, y- Ebene ist, gilt überall $\Phi(x, y) < +\infty$. Da $\Phi(x, y)$ eine Funktion der I-ten Klasse von Baire ist, hat sie in der betrachteten Menge eine dichte Menge von Stetigkeitspunkten. Die Funktion Φ ist beschränkt in einer gewissen Umgebung eines Stetigkeitspunktes (in dem sie einen endlichen Wert annimmt), $\Phi(x, y)<M$, daher erfüllen die Reste der Taylorschen Formel für $0<\delta<\frac{1}{2M}$ und $|h|<\delta$, $|k|<\delta$ die Ungleichung $|R_m|<\frac{1}{2^m}$ und $\lim\limits_{m\to\infty} R_m=0$; die absolut Konvergente Taylorsche Reihe (die absolute Konvergenz dieser Reihe erhalten wir leicht mit Hilfe der Majorisierung ihrer Glieder durch die Zahlen $1/2^m$) stellt in solcher Umgebung die Funktion $f(x+h, y+k)$ dar. Ein Stetigkeitspunkt der Funktion Φ ist danach in der Menge Q ein regulärer Punkt der Funktion f. Die Menge aller regulären Punkte R ist daher dicht und offen in der offenen Menge $Q = E_2-\bar{B}$ (wo E_2 die x, y- Ebene bedeutet). Die Menge aller singulären Punkte in $E_2-\bar{B}$, oder mit anderen Worten $B+C-\bar{B}$ ist nirgends dicht, und folglich eine Menge der ersten Kategorie. Die Menge $C = (\bar{B}-B)+(C-\bar{B})$ als die Summe zweier F_σ Mengen der I-ten Kategorie ist selbst eine F_σ Menge der ersten Kategorie, was zu beweisen war.

SCHLUSSFOLGERUNG. Wenn $B=0$, so ist C abgeschlossen und nirgends dicht. In der Tat, dann haben wir $C = B+C$, die Menge ist also geschlossen. Wäre die Menge C dicht in einem Kreis, so müßte sie diesen Kreis enthalten, sie wäre also eine Menge der II-ten Kategorie, was dem Satz 3 widerspricht,

LEMMA 1. *Die Bedingungen:*

(∗) A ist eine G_δ-Menge und es gibt eine abgeschlossene nirgends dichte Menge Q derart, daß

$$B = \bar{A} - A + Q(E_2 - \bar{A})$$

(∗ ∗) B ist eine F_σ-Menge der ersten Kategorie und es gibt solche abgeschlossene Menge T, daß

$$A = \bar{B} - B + T(E_2 - \bar{B})$$

(∗ ∗ ∗) A ist eine G_δ-Menge, B ist eine F_σ-Menge der I-ten Kategorie, $A.\,B=0$, $A+B = \overline{A+B}$

sind alle drei einander äquivalent (jede mit jeder).

BEWEIS. Analog wie in der Arbeit [2].

SATZ 4. *Die notwendigen Bedingungen für die Mengen B und C sind: $B \in G_\delta$, $C \in F_\sigma$ der ersten Kategorie; $B.\,C=0$, $B+C = \overline{B+C}$ (haben wir also die Bedingung (∗ ∗ ∗) mit geänderten Bezeichnungen and auch die äquivalenten Bedingungen (∗ ∗) oder (∗)).*

Die hinreichenden Bedingungen. Der Spezialfall $B=0$

SATZ 5. *Für jede ebene abgeschlossene und nirgends dichte Menge C gibt es eine in der ganzen Ebene bestimmte Funktion $f(x, y)$ der Klasse C_∞ derart, daß jeder Punkt $(x, y) \in C$ ihr Fehlkonvergenzpunkt ist und jeder Punkt $(x, y) \notin C$ ihr regulärer Punkt ist.*

BEWEIS. Ist C keine leere Menge, so konstruieren wir die Funktion $f(x, y)$ in folgender Weise. Das Quadrat $-2^{m-1} \leqq x \leqq 2^{m-1}$, $-2^{m-1} \leqq y \leqq 2^{m-1}$ wird durch die den Koordinatenachen parallelen Geraden (in gleichen Abständen) so geteilt, daß jede Seite in 32^m Strecken mit der Länge $\frac{1}{16}$ m geteilt wird. Die in dieser Weise gewonnenen Quadrate (deren es $(32\cdot32)^m = 1024^m$ gibt) nenne ich die Maschen des m-ten Netzes. In jeder Masche des m-ten Netzes, die einen Punkt der Menge C enthält, wähle ich einen Punkt $(x_{j,m}, y_{j,m}) \in C, j=1, 2, \ldots, k_m$, $k_m \leqq 1024^m$. Sollte es keine, solche Maschen geben, so setze ich $k_m=0$, mit k_m bezeichne ich die Anzahl der Maschen des m-ten Netzes, die die Punkte der Menge C enthalten.

Ich bezeichne

$$(1) \qquad f_m(x, y) = \sum_{j=1}^{k_m} \frac{1}{4096^m[(x-x_{j,m})^4 + (y-y_{j,m})^4]} \quad \text{für} \quad k_m > 0$$

und $f_m(x, y) \equiv 0$ für $k_m=0$.

Es ist leicht einzusehen, daß wenn C keine leere Menge ist, so können alle k_m nicht gleich null sein, nämlich die k_m mit $m \geqq m_0$ sind positiv.

Ich werde beweisen, daß die Funktion

$$(2) \qquad f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad (x,y) \in C, \\ e^{-\sum\limits_{m=1}^{\infty} f_m(x,y)} & \text{für} \quad (x,y) \notin C, \end{cases}$$

alle Forderungen der Behauptung 5 erfüllt.

Vor allem werde ich beweisen, daß diese Funktion in einem offenen Complement der Menge C zur Ebene regulär ist. Da, nach der Definition, eine Funktion in einem regulären Punkt auf eine vierdimensionale Umgebung dieses Punktes fortgesetzt werden kann, ist es notwendig und hinreichend zu beweisen, daß es solche vierdimensionale offene Menge G gibt, die ein zweidimensionales Complement der Menge C enthält, daß $f(\xi, \eta)$ in G analytisch ist.

Die Menge G ist durch die folgenden Bedingungen für die komplexen Koordinaten $\xi = x+iu, \eta = y+iv$ (x, y, u, v — reell) ihrer Punkte definiert.

$$(3) \qquad (x,y) \notin C, \quad |u| < \frac{\operatorname{dist}(x,y;C)}{15}, \quad |v| < \frac{\operatorname{dist}(x,y;C)}{15}.$$

Die auf diese Weise definierte Menge G ist offen.

In der Tat, wenn $(\xi_0, \eta_0) \in G$, so ergibt es sich aus der ersten der Bedingungen (3) $\operatorname{dist}(x_0, y_0; C) > 0$.

Bezeichnen wir

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{dist}(x_0,y_0;C)}{15} - \max(|u_0|, |v_0|)\right] > 0.$$

Die Funktion $\operatorname{dist}(x, y; C)$ ist bekanntlich eine stetige Funktion, folglich kann man eine ebene Umgebung $|x-x_0| < \delta, |y-y_0| < \delta$ derart finden, daß $|\operatorname{dist}(x,y;C) - \operatorname{dist}(x_0,y_0;C)| < \varepsilon$.

Daraus folgt es vor allem, daß

$$(4) \qquad \operatorname{dist}(x_0,y_0;C) - \varepsilon < \operatorname{dist}(x,y;C) < \operatorname{dist}(x_0,y;C) + \varepsilon$$

und somit

$$0 < \frac{29}{30}\operatorname{dist}(x_0,y_0;C) = \operatorname{dist}(x_0,y_0;C) - \frac{1}{30}\operatorname{dist}(x_0,y_0;C) < \\ < \operatorname{dist}(x,y;C).$$

Daher ist also für jeden Punkt (x, y) aus der Betrachteten Umgebung die erste der Bedingungen (3), $(x,y) \notin C$, erfüllt. Betrachten wir das KartesischeProdukt dieser Umgebung durch die ebene Umgebung $|u-u_0| < \varepsilon, |v-v_0| < \varepsilon$ des Punktes (u_0, v_0). Dieses Produkt ist eine vierdimensionale Umgebung des Punktes (ξ_0, η_0). Ich werde beweisen, daß diese Umgebung ein Teil der Menge G ist, m. a. w. jeder ihrer Punkte erfüllt die Bedingungen (3), deren erste bereits bewiesen wurde.

In der betrachteten Umgebung haben wir nämlich $u_0 - \varepsilon < u < u_0 + \varepsilon, v_0 - \varepsilon < < v < v_0 + \varepsilon$ daraus folgt $|u| < |u_0| + \varepsilon$ und $|v| < |v_0| + \varepsilon$. Nachdem wir den Wert von ε substituieren erhalten wir:

$$|u_0| + \frac{\operatorname{dist}(x_0, y_0; C)}{15} - \max(|u_0|, |v_0|) \leqq \frac{\operatorname{dist}(x_0, y_0; C)}{15}$$

oder

$$|u_0| + 2\varepsilon \leqq \frac{\operatorname{dist}(x_0, y_0; C)}{15}$$

daher

$$|u_0| + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{15} < \frac{\operatorname{dist}(x_0, y_0; C)}{15},$$

$$|u_0| + \varepsilon < \frac{\operatorname{dist}(x_0, y_0; C) - \varepsilon}{15} < \frac{\operatorname{dist}(x, y; C)}{15}$$

nach (4), daraus

$$|u| < |u_0| + \varepsilon < \frac{\operatorname{dist}(x, y; C)}{15}$$

oder

$$|u| < \frac{\operatorname{dist}(x, y; C)}{15}.$$

Es kann analog bewiesen werden, daß $|v| < \frac{\operatorname{dist}(x, y; C)}{15}$, also sind alle Bedingungen (3) erfüllt, die die Menge G bestimmen (die notwendig und hinreichend sind damit ein Punkt $(x+iu, y+iv)$ zu G gehört), daraus schließen wir, daß $(x+iu, y+iv) \in \in G$. Die Menge G enthält also samt jedem ihrer Punkte (ξ_0, η_0) alle Punkte gewisser vierdimensionalen Umgebung dieses Punktes; m. a. W. G ist eine offene vierdimensionale Menge. Aus der ersten der Bedingungen (3) geht es leicht hervor, daß die Menge G (für $u=v=0$, weil $\operatorname{dist}(x, y; C) > 0$) eine offene ebene Menge enthält, die das Complement der Menge C zur xy-Ebene ist.

Nun beweise ich, daß die Funktion $\sum_{m=1}^{\infty} f_m(\xi, \eta)$ in G analytisch ist und, folglich ist auch die Funktion $f(\xi, \eta)$ in dieser Menge analytisch.

Die folgende Bemerkung betrifft die Terminologie. Die Menge G, ähnlich wie das Complement der Menge C, braucht kein Bereich zu sein. Ist sie die Summe punktfremder Bereiche, so behaupte ich nicht, daß $f(\xi, \eta)$ in jedem dieser Bereiche dieselbe analytische Funktion darstellt, oder auch verschiedene durch analytische Fortsetzung erzeugte Zweige derselben Funktion. Übrigens ist das in dieser Arbeit gar nicht nötig und der hier eingeführte Termin „analytische Funktion" ruft kein Mißverständnis hervor.

Daraus folgt, daß sie in G eine Funktion der Klasse C_∞ ist insbesondere in dem Complement der Menge C zur xy-Ebene und daß jeder Punkt dieses Complementes ein regulärer Punkt der Funktion f ist. Die einzelnen Glieder der Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} f_m(\xi, \eta)$ sind offenbar analytische (rationale) Funktionen zweier Veränderlichen. Aus der fast gleichmäßigen Konvergenz dieser Reihe in G folgt, daß auch die Summe analytisch ist. Nun bleibt es zu beweisen, daß $\sum_{m=1}^{\infty} f_m(\xi, \eta)$ nach eventuellem Streichen einer endlichen Anzahl von Gliedern die in der betrachteten Menge von (ξ, η) nicht abhängt, in jeder in G enthaltenen, beschränkten abgeschlossenen Menge gleichmäßig konvergiert. Solche Menge hat einen positiven Abstand von dem Rand der Menge G, ein Teil dieses Randes stellt die Menge C dar. Die Entfernung eines beliebigen Punktes (ξ, η) der betrachteten abgeschlossenen Menge von einem beliebigen Punkt (x_0, y_0) der Menge C ist nicht kleiner als $l>0$. Einen Punkt (x, y) nenne ich die Projektion auf die x, y-Ebene des Punktes (ξ, η), $\xi = x+iu$, $\eta = y+iv$. Nun werde ich beweisen, daß die Projektion des Punktes (ξ, η) um mehr als $\frac{15}{\sqrt{15^2+2}}\, l>0$ von einem beliebigen Punkt der Menge C entfernt ist. Diese Eigenschaft folgt aus der Definition der Menge G.

In der Tat, der Abstand eines beliebigen Punktes einer offenen Menge von dem Rand ist positiv, der Abstand dagegen der Projektion eines Punktes von dem Rand kann (im allgemeinen) auch gleich null sein.

Es folgt nämlich aus den Bedingungen (3), daß wenn $|\xi-x_0|^2+|\eta-y_0|^2= =(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+u^2+v^2 \geqq l^2$ für einen beliebigen Punkt $(x_0, y_0)\in C$, dann ist $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+\frac{2}{15^2}\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]>l^2$, denn $u^2<\frac{\operatorname{dist}^2(x, y; C)}{15^2}\leqq$ $\leqq\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{15^2}$, ähnlich für v^2. Daraus folgt, daß $\frac{15^2+2}{15^2}\left[(x-x_0)^2+\right.$ $\left.+(y-y_0)^2\right]>l^2$, $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2>\frac{l^2\cdot 15^2}{15^2+2}$ was zu beweisen war. Nach den obigen Betrachtungen, hat die Projektion einer in G enthaltenen (z. B. abgeschlossenen und beschränkten) Menge die einen positiven Abstand von C hat, auch einen positiven Abstand von C. Solche Menge (z. B. eine abgeschlossene, beschränkte und in G enthaltene Menge) ist also ein Teil der Menge A_δ aller jener Punkte der Menge G, deren Projektionen nicht weniger als $\delta>0$ von C entfernt sind, d. h. $\operatorname{dist}(x, y; C)\geqq\delta$ und beliebige u, v (in G, d. h. u, v sollen die Bedingungen (3) erfüllen). Es genügt die gleichmäßige Konvergenz in den oben definierten Mengen A_δ für jedes $\delta>0$ zu beweisen. Ich werde etwas mehr beweisen, nämlich, daß in solchen Mengen die Konvergenz der betrachteten Reihe normal ist, d. h. das Kriterium von Weierstrass erfüllt ist, — die Reihe hat eine konvergente Majorante mit positiven konstanten Gliedern. Zu diesem Zweck werde ich die absoluten Werte der Nenner $(\xi-x_{j,m})^4+(\eta-y_{j,m})^4$ der in der Reihe auftretenden rationalen Funktionen von unten abschätzen. Ich führe die folgenden Bezeichnungen ein.

$$\xi = x+iu, \quad \eta = y+iv, \quad a = \xi-x_{j,m}, \quad b = \eta-y_{j,m},$$

$$a = x-x_{j,m}+iu, \quad b = y-y_{j,m}+iv, \quad \operatorname{tg}\theta_1 = \frac{u}{x-x_{j,m}}, \quad \operatorname{tg}\theta_2 = \frac{v}{y-y_{j,m}},$$

wo die letzten zwei Formeln die Tangente der Argumente der komplexen Zahlen a und b angeben.

Ferner, um die Bezeichnungen zu vereinfachen werde ich vorläufig $x_{j,m}$ mit x_0 und $y_{j,m}$ mit y_0 bezeichnen.

Ich betrachte die folgenden Fälle:

$$1) \qquad |x-x_0| \leqq \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{5}{15^2}}\,|y-y_0| = \frac{\sqrt{11}}{3\sqrt{5}}\,|y-y_0|,$$

daraus

$$(x-x_0)^2 \leqq \frac{11}{45}(y-y_0)^2 \leqq \frac{1}{4}(y-y_0)^2.$$

Nach einfachen rechnerischen Umformungen erhalten wir

$$(x-x_0)^2 \leqq \frac{1}{4}\left(1-\frac{5}{15^2}\right)(y-y_0)^2 = \frac{1}{4}(y-y_0)^2 - \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{15^2}(y-y_0)^2,$$

$$(x-x_0)^2 + \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{15^2}(y-y_0)^2 \leqq \frac{1}{4}(y-y_0)^2,$$

$$(x-x_0)^2 + \frac{1}{15^2}\left[(y-y_0)^2 + \frac{1}{4}(y-y_0)^2\right] \leqq \frac{1}{4}(y-y_0)^2$$

und um so mehr $(x-x_0)^2 + \frac{1}{15^2}[(y-y_0)^2+(x-x_0)^2] \leqq \frac{1}{4}(y-y_0)^2$ und wegen $(x_0, y_0) \in C$ gilt $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \geqq \operatorname{dist}(x, y; C)$. Die letzte Ungleichung liefert $(x-x_0)^2 + \frac{1}{15^2}\operatorname{dist}^2(x, y; C) \leqq \frac{1}{4}(y-y_0)^2$ und wegen der Bedingungen (3) die ein Punkt $(\xi, \eta) \in G$ erfüllt, haben wir $(x-x_0)^2 + u^2 < \frac{1}{4}(y-y_0)^2 \leqq$ $\leqq \frac{1}{4}[(y-y_0)^2+v^2]$ oder $|a|^2 \leqq \frac{1}{4}|b|^2$ und daher $|a| \leqq \frac{1}{2}|b|$, $|a|^4 \leqq \frac{1}{16}|b|^4$. In diesem Fall haben wir also $|a^4+b^4| \geqq |b^4| - |a^4| \geqq |b|^4 - \frac{1}{16}|b|^4 = \frac{15}{16}|b|^4$,

$$\frac{1}{|a^4+b^4|} \leqq \frac{16}{15|b|^4} = \frac{16}{15\max(|a|^4, |b|^4)}. \tag{5}$$

2) $|y-y_0| \leqq \frac{\sqrt{11}}{3\sqrt{5}}|x-x_0|$. Man kann in diesem Falle analog beweisen, daß

$$|a^4+b^4| \geqq \frac{15}{16}|a|^4, \qquad \frac{1}{|a^4+b^4|} \leqq \frac{16}{15\max(|a|^4, |b|^4)}. \tag{6}$$

3) Die übrigen Fälle d. h.

$$\frac{\sqrt{11}}{3\sqrt{5}} < \frac{|x-x_0|}{|y-y_0|} < \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{11}}.$$

In diesem Fall haben wir $|x-x_0|>0$, $|y-y_0|>0$,

$$\frac{11}{45}<\frac{(x-x_0)^2}{(y-y_0)^2}<\frac{45}{11},\quad \frac{11}{45}(y-y_0)^2<(x-x_0)^2<\frac{45}{11}(y-y_0)^2,$$

$$\operatorname{dist}^2(x,y;C)\leqq(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\frac{56}{11}(y-y_0)^2,$$

$$v^2<\frac{1}{15^2}\operatorname{dist}^2(x,y;C)<\frac{56}{15^2\cdot 11}(y-y_0)^2,$$

gemäß der Bedingung (3), daher

$$\operatorname{tg}^2\theta_2=\frac{v^2}{(y-y_0)^2}<\frac{56}{15^2\cdot 11},\quad |\operatorname{tg}\theta_2|<\frac{2}{15}\sqrt{\frac{14}{11}}.$$

In ähnlicher Weise kann man beweisen, daß $|\operatorname{tg}\theta_1|<\frac{2}{15}\sqrt{\frac{14}{11}}$. Es ergibt sich aus den gewonnenen Ungleichungen, daß die Argumente der Zahlen a und b sich wenig von 0 oder π unterscheiden und da im ersten Quadrant $\alpha<\operatorname{tg}\alpha$, somit

$$|\theta_1|<|\operatorname{tg}\theta_1|<\frac{2}{15}\sqrt{\frac{14}{11}}<\frac{\pi}{16}\quad\text{oder}\quad|\pi-\theta_1|<\frac{2}{15}\sqrt{\frac{14}{11}},\quad\text{denn}\quad|\operatorname{tg}(\pi-\theta_1)|=|\operatorname{tg}\theta_1|.$$

Indem wir mit 4 multiplizieren erhalten wir:

$$|4\theta_1|<\frac{8}{15}\sqrt{\frac{14}{11}}<\frac{\pi}{4}\quad\text{oder}\quad|4\pi-4\theta_1|<\frac{8}{15}\sqrt{\frac{14}{11}}<\frac{\pi}{4}$$

dasselbe gilt für θ_2 und das heißt, daß die Argumente der Zahlen a^4 und b^4 im ersten oder im vierten Quadrant liegen und zwar zwischen den Werten $-\pi/4$ und $\pi/4$. Daraus schließen wir, daß die Vektoren a^4 und b^4 einen scharfen oder einen rechten Winkel bilden und daher

$$|a^4+b^4|>\max(|a^4|,|b^4|),$$

$$\frac{1}{|a^4+b^4|}<\frac{1}{\max(|a|^4,|b|^4)}. \tag{7}$$

Aus (5), (6), (7) folgt, daß es in G immer

$$\frac{1}{|a^4+b^4|}<\frac{16}{15\max(|a|^4,|b|^4)}\leqq\frac{16}{15\max((x-x_0)^4,(y-y_0)^4)}, \tag{8}$$

denn

$$|x-x_0|=|\operatorname{Re}a|\leqq|a|,\quad|y-y_0|=|\operatorname{Re}b|\leqq|b|,\quad(x-x_0)^4\leqq|a|^4,\quad(y-y_0)^4\leqq|b|^4.$$

Wegen

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqq 2\max[(x-x_0)^2,(y-y_0)^2],$$

$$[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^2\leqq 4\max[(x-x_0)^4,(y-y_0)^4],$$

erhalten wir aus (8)

$$(9)\qquad \left|\frac{1}{(\xi-x_{j,m})^4+(\eta-y_{j,m})^4}\right| \leqq \frac{64}{15[(x-x_{j,m})^2+(y-y_{j,m})^2]^2}$$

für alle $(\xi, \eta) \in G$, $\xi = x+iu$, $\eta = y+iv$. Diese Ungleichung, die auch davon zeugt, daß alle Nenner der betrachteten Funktionen in G verschieden von Null sind, läßt die Funktion $f_m(\xi, \eta)$ von oben abschätzen. Die Abschätzung führe ich innerhalb der Menge A_δ durch, die aus allen jenen Punkten (ξ, η), $\xi = x+iu$, $\eta = y+iv$ der Menge G besteht, für die der Abstand eines Punktes (x, y) von C nicht kleiner als $\delta > 0$ ist. Daher betrachte ich nur solche m, für die der doppelte Durchmesser (die Diagonale) einer Masche des m-ten Netzes kleiner als $\delta/2$ ist.

Den doppelten Durchmesser dieser Masche bezeichne ich mit Δ, also

$$(10)\qquad \Delta = 2\cdot\frac{1}{16^m}\cdot\sqrt{2} < \frac{\delta}{2}.$$

Diese Bedingung ist erfüllt für $m \geqq m_0$, wo m_0 nur von δ und folglich von der ganzen A_δ abhängt, d. h. für alle Punkte dieser Menge dasselbe ist.

Der Beweis gleichmäßiger Konvergenz in der Menge A_δ wird also durch Weglassen von $m_0 - 1$ Gliedern deren jedes aus einer endlichen und konstanten Anzahl von endlichen nach (9) Summanden besteht nicht gestört. Um $f_m(\xi, \eta)$ auf Grund von (9) von oben abzuschätzen, nehme ich die Anzahl der Maschen des m-ten Netzes, die die Punkte der Menge C enthalten größer an, als sie tatsächlich ist, nämlich daß sie die ganze Ebene außer eines offenen Kreises mit dem Mittelpunkt in (x, y) und mit dem Radius δ überdecken, wobei Teile mancher von ihnen (deren die mit dem Complement dieses Kreises gemeinsame Punkte haben) sich innerhalb des Kreises befinden. Die den Kreis betreffende Bedingung geht aus der Tatsache hervor, daß $(x_{j,m}, y_{j,m})$ auf C liegen, während der Abstand des Punktes (x, y) von dem nächsten Punkt der Menge C nicht kleiner als δ ist. Das Complement dieses Kreises zerlege ich in konzentrische Ringe mit dem Mittelpunkt in (x, y) und mit den Radien $\delta + \Delta k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, wo $\Delta = 2\sqrt{2}\frac{1}{16^m}$. Die Abstände des Punktes (x, y) von Punkten $(x_{j,m}, y_{j,m})$, die innerhalb des Ringes mit den Radien $\delta + k\Delta$, $\delta + (k+1)\Delta$ liegen, gleich $\sqrt{(x-x_{j,m})^2+(y-y_{j,m})^2}$ sind nicht kleiner als $\delta + k\Delta$, also nach (9) sind die entsprechenden Glieder der Funktion $f_m(\xi, \eta)$ nicht größer als $\frac{64}{15\cdot 4096^m(\delta+k\Delta)^4}$.

Indem wir diese Glieder addieren, multiplizieren wir die rechte Seite dieser Ungleichung durch die Anzahl dieser Glieder, die nicht größer als die Anzahl der in dem Ringe enthaltenen Maschen ist, die dem durch die Maschen überdeckten Flächeninhalt geteilt durch den Inhalt einer Masche gleich ist. (Gemäß der Konstruktion können die Maschen keine gemeinsame innere Punkte besitzen). Der durch die Maschen überdeckte Flächeninhalt ist nicht größer als der Flächeninhalt eines nach beiden Richtungen um die Diagonale einer Masche gedehnten Ringes mit den Radien $\delta + k\Delta - \frac{\Delta}{2}$, $\delta + (k+1)\Delta + \frac{\Delta}{2}$, $\frac{\Delta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{16^m}$.

Dabei ziehen wir in Betracht, daß der Abstand von dem Ringe der Punkte eventuell herausragender Maschen nicht größer als ihre Diagonale sein kann, da die Maschen einen gemeinsamen Punkt $(x_{j,m}, y_{j,m})$ mit dem abgeschlossenen Ring haben.

Der Flächeninhalt dieses Ringes ist bekanntlich $2\Delta \cdot 2\pi[\delta+(k+\frac{1}{2})\Delta]$. Daraus schließen wir, daß die Summe der Glieder, die die Punkte $(x_{j,m}, y_{j,m})$, in dem Ring haben, bei festem m und veränderlichem j, dem absoluten Wert nach die Zahl $\dfrac{16^{2m} \cdot 4\pi\Delta(\delta+k\Delta+\Delta/2)\cdot 64}{15\cdot 4096^m(\delta+k\Delta)^4}$ nicht übersteigt. Also für alle Summanden in allen unendlich vielen Ringen, d. h. für die Funktion $f_m(\xi, \eta)$ haben wir:

$$(11) \qquad |f_m(\xi,\eta)| \leqq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{64\cdot 16^{2m}}{15\cdot 4096^m(\delta+k\Delta)^4}\cdot 4\pi\Delta\left(\delta+k\Delta+\frac{1}{2}\Delta\right) =$$

$$= \frac{64}{15}\cdot\frac{4\pi}{16^m}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\Delta\cdot\frac{1}{(\delta+k\Delta)^3}+\frac{1}{2}\Delta^2\frac{1}{(\delta+k\Delta)^4}\right].$$

Die Reihe auf der rechten Seite kann mit Hilfe eines uneigentlichen Integrals abgeschätzt werden (von oben und von unten); wegen der Monotonität der Funktionen $\frac{1}{t^3}$ und $\frac{1}{t^4}$ ist sie nämlich nicht größer als $\displaystyle\int_{\delta-\Delta}^{\infty}\frac{1}{t^3}\,dt+\frac{1}{2}\Delta\int_{\delta-\Delta}^{\infty}\frac{1}{t^4}\,dt.$

Da die Funktionen unter den Integralzeichen positiv sind, werden die beiden Integrale vergrößert indem die unteren Integrationsgrenzen verkleinert werden. Es folgt nämlich aus (10), daß $\delta-\Delta>\delta/2$ und danach erhalten wir aus (11)

$$(12) \qquad |f_m(\xi,\eta)| < \frac{256\pi}{15\cdot 16^m}\left(\int_{\frac{\delta}{2}}^{\infty}\frac{dt}{t^3}+\frac{1}{2}\Delta\int_{\frac{\delta}{2}}^{\infty}\frac{dt}{t^4}\right) = \frac{1}{\delta^2}\,\frac{2\pi}{15\cdot 16^{m-2}}+\frac{1}{\delta^3}\,\frac{8\pi\sqrt{2}}{45\cdot 16^{2m-2}}.$$

Wegen der Konvergenz der geometrischen Reihen $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{2\pi}{15\cdot 16^{m-2}\delta^2}+\frac{8\pi\sqrt{2}}{45\cdot 256^{m-1}\delta^3}\right)$ mit Quotienten $\frac{1}{16}<1$ und $\frac{1}{256}<1$, hat $\sum_{m=m_0}^{\infty} f_m(\xi,\eta)$ in A_δ eine Konvergente Majorante mit Konstanten Gliedern (die zwar von der Menge A_δ; nämlich von δ, nicht jedoch von einzelnen Punkten (ξ, η) der Menge A_δ abhängen).

Diese Reihe konvergiert also gleichmäßig in der Menge A_δ (bei beliebigem $\delta>0$), was, da m_0 von (ξ,η) nicht abhängt, auch von $\sum_{m=1}^{\infty} f_m(\xi,\eta)$ gesagt werden kann. (Gemeinsames m_0 für alle (ξ,η) in A_δ.) Damit ist der Beweis beendet. Wie es leicht einzusehen ist, gilt $G=\bigcup_{p=1}^{\infty} A_{\frac{1}{p}}$. Die betrachtete Reihe konvergiert also fast gleichmäßig in G, woraus folgt, daß ihre Summe eine analytische Funktion ist; das gleiche gilt von $f(\xi,\eta)$ in G. Deshalb ist $f(x,y)$ für reelle (x,y) im Complement von C regulär und alle ihre Ableitungen in G sind stetig (eine Funktion der Klasse C_∞), was auch in dem Complement der Menge C zur reellen Ebene der Fall ist. Das schließt den Beweis der ersten Hälfte des Satzes.

Es bleibt zu beweisen, daß alle Ableitungen auch in C existieren und dort stetig sind, und auch daß jeder Punkt der Menge C ein Fehlkonvergenzpunkt ist. Ich werde beweisen, daß in jedem Punkt der Menge C alle Ableitungen gleich null sind. Die Taylorsche Reihe mit dem Zentrum in einem Punkt aus C, da aus lauter Nullen besteht, konvergiert also absolut im ganzen vierdimensionalen Raum und ihre Summe ist überall gleich Null sie stellt jedoch in keiner Umgebung eines beliebigen Punktes p der Menge C die Funktion $f(x, y)$ dar,* weil es, da C nirgends dicht ist, in jeder solchen Umgebung Punkte des Complements von C gibt, in denen $\sum\limits_{m=1}^{\infty} f_m(x, y)$ endlich ist, und folglich, nach der Definition der Funktion f für $(x, y) \notin C$,

$$f(x, y) = e^{-\sum\limits_{m=1}^{\infty} f_m(x, y)} \neq 0.$$

Um die Stetigkeit der Ableitungen in diesem Falle festzustellen, muß man beweisen, daß sie gegen Null streben, wenn (x, y) gegen einen Punkt der Menge C strebt, was wieder nur für $(x, y) \notin C$ nachgewiesen zu werden braucht, weil $0 \to 0$. Den Beweis dieser Tatsache sowie, daß die Ableitungen auf C gleich null sind, führe ich induktiv (in bezug auf die Ordnung der Ableitung) durch.

Um das Theorem unmittelbar auf Grund der Definition der Ableitung zu beweisen, muß ich die Ableitungen in dem Complement von C abschätzen. Diese Ableitungen werde ich mit Hilfe der Integralformel von Cauchy und der Formel für die Ableitung der zusammengesetzten Funktion abschätzen, indem ich die Beträge der Glieder der Funktionen $f_m(\xi, \eta)$ mit Hilfe der Formel (9) von oben und ihre reellen Teile von unten abschätzen werde. Indem ich $F(x, y) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} f_m(x, y)$ bezeichne, schätze ich die Ableitung $\dfrac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} e^{-F(x,y)}$ in dem Punkt $(x, y) \notin C$ ab. Leichte induktive Betrachtungen ergeben für diese Ableitung den Ausdruck $e^{-F(x,y)} W_{k,l}$, wo $W_{k,l}$ ein Polynom in partiellen Ableitungen, deren Ordnungen $\leqq k+l$ (genauer die Ordnung der Ableitung nach $x \leqq k$ und die Ordnung der Ableitung nach $y \leqq l$) und dessen Grad $\leqq k+l$ ist. Die Koeffizienten dieses Polynoms sind ganze Zahlen, die durch k, l und die Exponenten der entsprechenden Potenzen der Ableitungen eindeutig bestimmt sind, das Polynom selber (u. a. die Anzahl seiner Glieder) ist vollständig durch k und l bestimmt.

Nehmne wir an, daß die Ableitung $\dfrac{\partial^{k+l} f(x, y)}{\partial x^k \partial y^l}$ in jedem Punkt der Mengeg Cleich Null ist. Ich werde beweisen, daß in diesem Punkt auch die Ableitung $\dfrac{\partial^{k+l+1} f(x, y)}{\partial x^{k+1} \partial y^l}$ existiert und gleich Null ist. Zu diesem Zweck betrachte ich im Einklang mit der Definition der Ableitung den Differentialquotienten

$$\frac{\dfrac{\partial^{k+l} f(x+h, y)}{\partial x^k \partial y^l} - \dfrac{\partial^{k+l} f(x, y)}{\partial x^k \partial y^l}}{h} = \frac{1}{h} \frac{\partial^{k+l} f(x+h, y)}{\partial x^k \partial y^l}, \quad \text{wenn} \quad (x+h, y) \in C,$$

---

* Das bedeutet, daß es in dieser Umgebung Punkte gibt in denen die Reihe die Funktion $f(x, y)$ nicht darstellt, daß also ihre Summe von $f(x, y)$ verschieden ist.

so ist der Zähler des letzten Bruches gemäß der induktiven Voraussetzung gleich Null, sein Grenzwert also bei $h \to 0$ $(x+h, y) \in C$ ist auch Null. Um zu beweisen, daß $\frac{\partial^{k+l+1} f(x, y)}{\partial x^{k+1} \partial y^{l}} = 0$ genügt es zu beweisen, daß dieser Grenzwert bei $h \to 0$ und $(x+h, y) \notin C$ gleich Null ist. Aber $f(x+h, y) = e^{-F(x+h, y)}$ und $\frac{\partial^{k+l} f(x+h, y)}{\partial x^{k} \partial y^{l}} = $ $= e^{-F(x+h, y)} W_{k,l}$. Da die konstanten Koeffizienten hier ohne Bedeutung sind, genügt es bei festen k, l zu beweisen, daß für die einzelnen Glieder des Polynoms $W_{k,l}$ also für den Ausdruck $\prod_{p,q} \left(\frac{\partial^{p+q} F(x+h, y)}{\partial x^{p} \partial y^{q}} \right)^{m_{p,q}}$ $; p \leqq k, q \leqq l, \sum_{p,q} m_{p,q} \leqq k+l,$ die Beziehung

$$(13) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \prod_{p,q} \left(\frac{\partial^{p+q} F(x+h, y)}{\partial x^{p} \partial y^{q}} \right)^{m_{p,q}} e^{-F(x+h, y)} = 0 \quad \text{wenn} \quad (x+h, y) \notin C$$

gilt. Der Abstand der Punkte $(x, y) \in C$ und $(x+h, y) \notin C$ ist $|h|$ bezeichnen wir also $L = \operatorname{dist}(x+h, y; C)$, so haben wir $0 < L \leqq |h|$ also $\frac{1}{L} \geqq \left| \frac{1}{h} \right|$ und nach der Formel von Cauchy

$$(14) \qquad \frac{\partial^{p+q} F(x+h, y)}{\partial x^{p} \partial y^{q}} = -\frac{p!\, q!}{4\pi^{2}} \int_{K_1} \int_{K_2} \frac{F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{(\xi - x - h)^{p+1} (\eta - y)^{q+1}}$$

wo die Integrationsvariabeln ξ und η sich längs der geschlossenen Kurven K_1 in der komplexen Ebene $\xi = \bar{x} + iu$ und K_2 in der komplexen Ebene $\eta = \bar{y} + iv$ verändern. Indem ich als diese Kurven zwei Kreise mit gleichen Radien ϱ wähle (die so klein sind, daß das Kartesische Produkt der Inneren dieser Kreise und sein Rand innerhalb der Menge G liegt, was genauer festgestellt werden wird) erhalte ich aus (14) die Abschätzung

$$(15) \qquad \left| \frac{\partial^{p+q} F(x+h, y)}{\partial x^{p}\, \partial y^{q}} \right| \leqq \frac{p!\, q!\, M(x+h, y, \varrho)}{4\pi^{2} \varrho^{p+1} \varrho^{q+1}} \cdot 2\pi\varrho \cdot 2\pi\varrho =$$

$$= p!\, q!\, \frac{M(x+h, y, \varrho)}{\varrho^{p+q}}$$

wo $M(x+h, y, \varrho)$ max $|F(\xi, \eta)|$ auf dem Kartesischen Produkt der Integrationskurven bedeutet. Indem ich $\left| \frac{1}{h} \right|$ durch $\frac{1}{L}$ ersetze und von (15) Gebrauch mache, vergrößere ich den Betrag der linken Seite von (13) und nachdem ich den konstanten Koeffizienten weglasse, bleibt es zu beweisen, daß

$$(16) \qquad \lim_{L \to 0} \frac{1}{L} \frac{M(x+h, y, \varrho)^{\sum\limits_{p,q} m_{p,q}}}{\varrho^{\sum\limits_{p,q} (p+q) m_{p,q}}} e^{-F(x+h, y)} = 0,$$

(wegen $0 < L \leqq |h|$ haben wir $L \to 0$ bei $h \to 0$). Ziehen wir in Betracht, daß bei $h \to 0$, M groß, während ϱ klein ist, und daß $\sum\limits_{p,q} m_{p,q} \leqq k+l$, so wegen (16) genügt es zu beweisen, daß

$$\lim_{L \to 0} \frac{1}{L} \frac{M(x+h, y, \varrho)^{k+l}}{\varrho^{(k+l)^2}} e^{-F(x+h,y)} = 0. \tag{17}$$

Da dieselben Ausführungen auch für die Ableitung $\dfrac{\partial^{k+l+1} f(x, y)}{\partial x^k \partial y^{l+1}}$ wiederholt werden können, schließen wir, daß wenn alle partielle Ableitungen der Ordnung $k+l$ in jedem Punkt der Menge C gleich null sind, so sind auch alle partielle Ableitungen der Ordnung $k+l+1$ in jedem Punkt der Menge C gleich null (da (x, y) ein beliebiger Punkt der Menge C ist). Da aber nach der Definition der Funktion $f(x, y)$ die einzige Ableitung der nullten Ordnung d. h. die Funktion $f(x, y)$, in jedem Punkt $(x, y) \in C$ gleich Null ist, folgt es durch die Induktion aus (17), daß alle Ableitungen jeder Ordnung in jedem Punkt der Menge C gleich null sind. Um ihre Stetigkeit in jedem Punkt der Menge C zu beweisen, muß man feststellen, daß es bei allen ganzzahligen und nichtnegativen k und l und $(x_1, y_1) \notin C$, $(x, y) \in C$ $\lim\limits_{(x_1, y_1) \to (x, y)} \dfrac{\partial^{k+l} f(x_1, y_1)}{\partial x^k \partial y l} = 0$ gilt (bei $(x_1, y_1) \in C$ ist das ersichtlich, wegen $0 \to 0$).

Da in diesem Fall $f(x_1, y_1) = e^{-F(x_1, y_1)}$ schließen wir mit Hilfe der Formel für die Ableitung der zusammengesetzten Funktion und der Formel von Cauchy, daß es in diesem Fall eine mit (17) analoge Bedingung die allerdings den Faktor $1/L$ nicht enthält (deren linke Seite also durch $L \to 0$ Multipliziert wurde und in der statt $(x+h, y) \notin C$, $(x_1, y_1) \notin C$ auftritt), festzustellen genügt. Da das Produkt zweier gegen Null strebenden Funktionen selbst gegen Null strebt, genügt es eine mit (17) analoge Gleichung mit dem Faktor $1/L$ festzustellen, die jedoch allgemeiner als (17) ist, weil sie (x_1, y_1) statt $(x+h, y)$ enthält, dann $L = \operatorname{dist}(x_1, y_1; C)$. (Dann machen wir von dem Satz Gebrauch, daß der Grenzwert eines Produktes gleich dem Produkt der Grenzwerte seiner Faktoren ist, vorausgesetzt, das Produkt ist wohlbestimmt.) Nun werde ich in der verallgemeinerten Formel (17) ϱ durch L ausdrücken. Ich behaupte, daß man $\varrho = \dfrac{L}{60}$ annehmen kann. Zur Begründung dieser Behauptung haben wir zu beweisen, daß jeder Punkt $\xi = x_1 + r_1 e^{i\varphi_1}$, $\eta = y_1 + r_2 e^{i\varphi_2}$, $r_1 \leqq \varrho$, $r_2 \leqq \varrho$, $0 \leqq \varphi_1 \leqq 2\pi$, $0 \leqq \varphi_2 \leqq 2\pi$ einer abgeschlossenen bizylindrischen Umgebung des Punktes (x_1, y_1) in G liegt, also die Bedingungen (3) erfüllt. Wir haben nämlich $\xi = x_1 + r_1 \cos \varphi_1 + i r_1 \sin \varphi_1$, $\eta = y_1 + r_2 \cos \varphi_2 + i r_2 \sin \varphi_2$. Der Abstand des Punktes $(x_1 + r_1 \cos \varphi_1, y_1 + r_2 \cos \varphi_2)$ von (x_1, y_1) ist gleich $\sqrt{r_1^2 \cos^2 \varphi_1 + r_2^2 \cos^2 \varphi_2} \leqq \sqrt{\varrho^2 + \varrho^2} = \varrho\sqrt{2} < \dfrac{1{,}5}{60} L = \dfrac{L}{40}$ und so liegt der Punkt $(x_1 + r_1 \cos \varphi_1, y_1 + r_2 \cos \varphi_2)$ innerhalb des Kreises mit dem Zentrum in (x_1, y_1) und mit dem Radius L, in dem es keine Punkte der Menge C gibt, also $(x_1 + r_1 \cos \varphi_1, y_1 + r_2 \cos \varphi_2) \notin C$ (die erste der Bedingungen (3)). Ziehen wir nun in Betracht, daß der Abstand von (x_1, y_1) des nächsten für $(x_1 + r_1 \cos \varphi_1, y_1 + r_2 \cos \varphi_2)$ Punktes der Menge C nicht kleiner als L ist, so erhalten wir nach der Dreiecksungleichung $\operatorname{dist}(x_1 + r_1 \cos \varphi_1, y_1 + r_2 \cos \varphi_2; C) > L - \dfrac{L}{40} = \dfrac{39}{40} L$,

$\frac{1}{15}$ dist $(x_1+r_1\cos\varphi_1, y_1+r_2\cos\varphi_2; C) > \frac{39}{40\cdot 15}L = \frac{13}{200}L$. Da $|r_1\sin\varphi_1| \leqq \varrho$, $|r_2\sin\varphi_2| \leqq \varrho = \frac{L}{60} < \frac{13}{200}$ L haben wir

$$|r_1\sin\varphi_1| < \frac{1}{15}\operatorname{dist}(x_1+r_1\cos\varphi_1, y_1+r_2\cos\varphi_2; C),$$

$$|r_2\sin\varphi_2| < \frac{1}{15}\operatorname{dist}(x_1+r_1\cos\varphi_1, y_1+r_2\cos\varphi_2; C),$$

also sind die übrigen der Bedingungen (3) erfüllt und weil $r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2$ beliebig sind, gehört jeder Punkt der betrachteten Umgebung der Menge G an, was zu beweisen war. Nachdem die erwähnten Änderungen der Beziehung (17) ausgeführt sind $\varrho = \frac{1}{60}L$ und $k+l=n$ gesetzt und der konstante Faktor $60^{(k+l)^2}$ gestrichen ist, brauche ich nur um zu beweisen, daß alle partielle Ableitungen in jedem Punkt der Menge C existieren, stetig und gleich null sind, die Beziehung

$$\lim_{L\to 0}\frac{M\left(x_1, y_1, \frac{L}{60}\right)^n}{L^{n^2+1}}e^{-F(x_1,y_1)} = 0 \text{ für alle } n=0, 1, 2, \dots \tag{18}$$

festzustellen.

Nun werde ich mit Hilfe der Formel (9) den Ausdruck $M(x_1, y_1, \varrho) = = \max\limits_{\varphi_1,\varphi_2}|F(x_1+\varrho e^{i\varphi_1}, y_1+\varrho e^{i\varphi_2})|$, $\varrho = \frac{L}{60}$ durch die Summe der Beträge der einzelnen Glieder der Reihe für die Funktion F von oben abschätzen. Wegen $x_1+\varrho e^{i\varphi_1} = x_1+\varrho\cos\varphi_1+i\varrho\sin\varphi_1$, $y_1+\varrho e^{i\varphi_2} = y_1+\varrho\cos\varphi_2+i\varrho\sin\varphi_2$ ergibt es sich aus (9)

$$\frac{1}{|(x_1+\varrho e^{i\varphi_1}-x_{j,m})^4+(y_1+\varrho e^{i\varphi_2}-y_{j,m})^4|} \leqq \tag{19}$$

$$\leqq \frac{64}{15[(x_1+\varrho\cos\varphi_1-x_{j,m})^2+(y_1+\varrho\cos\varphi_2-y_{j,m})^2]^2}.$$

In dem letzten Ausdruck tritt der Abstand der Punkte $(x_1+\varrho\cos\varphi_1, y_1+\varrho\cos\varphi_2) \notin \notin C$ und $(x_{j,m}, y_{j,m}) \in C$ auf. Es folgt aus der Dreiecksungleichung, daß wenn wir zu diesem Abstand den Abstand der Punkte $(x_1+\varrho\cos\varphi_1, y_1+\varrho\cos\varphi_2)$ und (x_1, y_1) addieren, erhalten wir eine Zahl die nicht kleiner als der Abstand zwischen den Punkten $(x_{j,m}, y_{j,m})$ und (x_1, y_1) ist. Um so mehr bleibt diese Ungleichung gültig, wenn wir zum ersten Abstand $\varrho\sqrt{2}$ oder $\frac{1{,}5}{60}L = \frac{L}{40}$ addieren. Da L der Abstand des Punktes (x_1, y_1) von dem nächsten Punkt der Menge C ist, so ist der Abstand der Punkte $(x_{j,m}, y_{j,m}) \in C$ und (x_1, y_1) nicht kleiner als L und die Ungleichung bleibt aufrecht, nachdem wir zum ersten Abstand $\frac{1}{40}$ dist $(x_1, y_1; x_{j,m}, y_{j,m})$

statt $\frac{1}{40}L$ addieren. Übertragen wir $\frac{1}{40}\operatorname{dist}(x, y_1; x_{j,m}, y_{j,m})$ auf die andere Seite, so erhalten wir $\sqrt{(x_1+\varrho\cos\varphi_1-x_{j,m})^2+(y_1+\varrho\cos\varphi_2-y_{j,m})^2}\geqq$ $\geqq\frac{39}{40}\sqrt{(x_1-x_{j,m})^2+(y_1-y_{j,m})^2}$. Indem ich die vierte Potenz dieses Ausdrucks in (19) substituiere, erhalte ich, da dies bei jedem φ_1, φ_2 gilt, die Ungleichung (20)

$$(20)\qquad \max_{\varphi_1,\varphi_2}\left|\frac{1}{(x_1+\varrho e^{i\varphi_1}-x_{j,m})^4+(y_1+\varrho e^{i\varphi_2}-y_{j,m})^4}\right|\leqq$$

$$\leqq\frac{64\cdot 40^4}{15\cdot 39^4((x_1-x_{j,m})^2+(y_1-y_{j,m})^2)^2}\,.$$

Indem wir $\sum\max\geqq\max\sum$ berücksichtigen, erhalten wir aus (20):

$$(21)\qquad M\left(x_1, y_1, \frac{L}{60}\right)\leqq\frac{64\cdot 40^4}{15\cdot 39^4}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k_m}\frac{1}{4096^m((x_1-x_{j,m})^2+(y_1-y_{j,m})^2)^2}=$$

$$=\frac{64\cdot 40^4}{15\cdot 39^4}\Psi(x_1, y_1).$$

Da nun

$$\frac{1}{(x_1-x_{j,m})^4+(y_1-y_{j,m})^4}\geqq\frac{1}{((x_1-x_{j,m})^2+(y_1-y_{j,m})^2)^2},$$

erhalte ich die Abschätzung von unten für reelles positives $F(x_1, y_1)$:

$$(22)\qquad F(x_1, y_1)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k_m}\frac{1}{4096^m[(x_1-x_{j,m})^4+(y_1-y_{j,m})^4]}\geqq$$

$$\geqq\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k_m}\frac{1}{4096^m[(x_1-x_{j,m})^2+(y_1-y_{j,m})^2]^2}=\Psi(x_1, y_1).$$

Nun auf Grund von (18), (21) und (22), nachdem ich den konstanten Faktor $\frac{64^n\cdot 40^{4n}}{15^n\cdot 39^{4n}}$ weglasse, bleibt es zu beweisen, daß

$$(23)\qquad \lim_{L\to 0}\frac{\Psi(x_1, y_1)^n}{L^{n^2+1}}e^{-\Psi(x_1,y_1)}=0$$

für jedes n und $(x_1, y_1)\notin C$, $(x_1, y_1)\to(x, y)\in C$, wo $L=\operatorname{dist}(x_1, y_1; C)$. Um dies zu beweisen schätze ich $\Psi(x_1, y_1)$ von unten bei entsprechend kleinen Werten von L ab, oder, was, wie es sich ferner herausstellen wird, äquivalent ist, bei entsprechend großen m. Nehmen wir an, daß $L<\frac{1}{16^m}$ ist und, daß nicht nur das Quadrat sondern die ganze Ebene durch die Maschen des quadratischen Netzes mit der Seite $\frac{1}{16^m}$ und mit punktfremden Inneren überdeckt ist. Dann liegt der Punkt (x_1, y_1) in einer Masche des Netzes und der Kreis mit dem Mittelpunkt in (x_1, y_1) und mit dem Radius L liegt in dem Quadrat, das aus dieser Masche und aus 8 nächstliegenden Maschen zusammengesetzt ist. Auf dem Rand dieses Kreises liegt wenigstens ein Punkt der Menge C, so aus der diesen Punkt enthaltenden Masche (einer der 9 erwähnten Maschen) wird ein Punkt $(x_{j,m}, y_{j,m}) \in C$ gewählt, vorausgesetzt diese Masche liegt in einem Quadrat mit den Koordinatenachsen parallelen Seiten, dessen Seite 2^m ist und dessen Mittelpunkt mit dem Ursprung zusammenfällt. Der Abstand dieses Punktes von (x_1, y_1) ist nicht größer als die Diagonale eines aus 4 Maschen bestehenden Quadrats d. h. $\sqrt{(x_1-x_{j,m})^2+(y_1-y_{j,m})^2} \leqq \frac{2\sqrt{2}}{16^m}$. Daher erfüllt das entsprechende Glied der die Funktion $\Psi(x_1, y_1)$ definierenden Reihe die Ungleichung $\frac{1}{4096^m[(x_1-x_{j,m})^2+(y_1-y_{j,m})^2]^2} \geqq \frac{16^{4m}}{4096^m \cdot 2^4 \cdot 2^2} = \frac{2^{16m}}{2^{12m} \cdot 2^6} = 2^{4m-6}$, und da alle Glieder dieser Reihe nicht negativ sind, so gilt $\Psi(x_1, y_1) \geqq 2^{4m-6}$.

Diese Ungleichung bleibt auch dann aufrecht, wenn m den möglich größten Wert annimmt, d. h. daß $\frac{1}{16^{m+1}} \leqq L < \frac{1}{16^m}$, jedes $0 < L < \frac{1}{16}$ liegt dann genau in einem derartigen Intervall. Also für alle L aus diesem Intervall gilt:

$$L\Psi(x_1, y_1) \geqq 2^{4m-6} \cdot \frac{1}{16^{m+1}} = 2^{-10} > 0. \tag{24}$$

Es ist klar, daß für alle $m \geqq m_0$ die Ungleichung (24) erfüllt ist, also die Summe aller unendlich vielen benachbarten Intervalle der veränderlichen L, die diesen Werten von m entsprechen ist gleich der offenen Strecke $0 < L < \frac{1}{16^{m_0}}$. Die Zahl m_0 kann nämlich mit Hilfe eines fixierten Punktes $(x, y) \in C$, gegen den der Veränderliche Punkt $(x_1, y_1) \notin C$ strebt und des Abstandes d der Punkte (x_1, y_1) und (x, y) bestimmt werden. Es ist bekannt, daß beim Anwenden der Ungleichung (23) zum Beweis, daß die Ableitungen in C gleich Null sind $(x_1, y_1) \to (x, y)$ und dasselbe ist der Fall im Beweis der Stetigkeit dieser Ableitungen in $(x, y) \in C$. Ziehen wir in Betracht, daß der Kreis mit dem Radius d und mit dem Mittelpunkt in (x, y) auf seinem Rand den Punkt (x_1, y_1) hat, und der Kreis mit dem Mittelpunkt in (x, y) und mit dem Radius $d+L$ enthält nach der Dreiecksungleichung den Kreis mit dem Mittelpunkt in (x_1, y_1) und mit dem Radius L, wie auch den auf seinem Rand liegenden Punkt der Menge C, der einer Masche des m-ten Netzes angehören soll, von der Punkt $(x_{j,m}, y_{j,m}) \in C$ zu wählen ist. Der Kreis mit dem Mittelpunkt in (x, y) und mit dem Radius $d+L-\sqrt{2}\cdot 16^{-m}$ diese Masche enthält. Diese Masche soll dem entsprechendem Quadrat mit der Seite 2^m angehören, also schließen wir, daß eine hinreichende Bedingung dafür ist, daß das Quadrat den Kreis mit dem Zentrum in (x, y) und dem Radius $d+L+\sqrt{2}\cdot 16^{-m}$ überdecken soll, d. h. daß $\max(|x|, |y|) + {} + d + L + \sqrt{2}\cdot 16^{-m} < 2^{m-1}$. Beschränken wir uns auf $d \leqq 1$, $L \leqq 1$ (es gilt übrigens immer $d \geqq L = \operatorname{dist}(x_1, y_1; C)$) was wegen $d \to 0$ berechtigt ist, so erhalten wir, daß die Ungleichung (24) für jedes $m \geqq m_0$ derart, daß $2^{m-1} \geqq 2^{m_0-1} \geqq 3 + \max(|x|, |y|)$, erfüllt ist, man kann also annehmen $m_0 = E[\log_2(6 + 2\max(|x|, |y|))] + 1$. Dann gilt die Ungleichung (24) für jedes L aus dem Intervall $0 < L < \frac{1}{16^{m_0}}$. Aus der

Ungleichung (24) folgt

$$\Psi(x_1, y_1) \geqq \frac{2^{-10}}{L} \quad \text{für} \quad L < \frac{1}{16^{m_0}}, \quad \lim_{L\to 0} \Psi(x_1, y_1) = +\infty. \tag{25}$$

Daher auf Grund des bekannten Satzes aus der elementaren Analysis über den Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} t^n e^{-t} = 0$ für jedes n, haben wir

$$\lim_{L\to 0} \Psi(x_1, y_1)^n e^{-\frac{1}{2}\Psi(x_1, y_1)} = 2^n \lim_{L\to 0} \left(\frac{1}{2}\Psi(x_1, y_1)\right)^n e^{-\frac{1}{2}\Psi(x_1, y_1)} = 2^n \cdot 0 = 0. \tag{26}$$

Andererseits folgt aus (25)

$$0 < \frac{1}{L^{n^2+1}} e^{-\frac{1}{2}\Psi(x_1, y_1)} \leqq \frac{1}{L^{n^2+1}} e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{2^{-10}}{L}} = 2^{11n^2+11} \left(\frac{2^{-11}}{L}\right)^{n^2+1} e^{-\frac{2^{-11}}{L}}$$

und daher auf Grund desselben elementaren Satzes $\left(\text{mit } n^2+1 \text{ statt } n \text{ und } t = \frac{2^{-11}}{L}\right)$ und des Satzes über drei Funktionen erhalten wir

$$\lim_{L\to 0} \frac{1}{L^{n^2+1}} e^{-\frac{1}{2}\Psi(x_1, y_1)} = 0. \tag{27}$$

Indem wir die Grenzwerte (26) und (27) multiplizieren und den Satz über den Grenzwert des Produktes anwenden, erhalten wir die Gleichung (23), damit ist also die Gleichung (23) und also Satz 5 für $C \neq 0$ bewiesen.

Ist C eine leere Menge, so ist $F(x, y) \equiv 0$, weil $k_m = 0$ für jedes m und $f(x, y) = e^{-F(x,y)} \equiv 1$, und daher ist $f(x, y)$ eine analytische Funktion in dem ganzen vierdimensionalen Raum, speziell auf der reellen Ebene x, y, sie erfüllt also auch die Behauptung des Satzes 5.

(Eingegangen am 20. Januar 1963.)

Bibliographie

[1] H. Salzman, K. Zeller, Singularitäten unendlich oft differenzierbaren Funktionen, *Math. Zeitschrift*, **62** (4) (1955), S. 354–367.

[2] Z. Zahorski, Sur l'ensemble des points singuliers d'une fonction d'une variable reelle admettant les derivées de tous les ordres, *Fund. Math.*, **34** (1947), S. 183–245.

REPRESENTATIONS FOR REAL NUMBERS

By

W. PARRY (New Haven, USA)

(*Presented by* A. RÉNYI)

§ 0. Introduction

Representations for real numbers by f-expansions have been studied in [1], [2], [3].

Let $\mathfrak{T}$ be the class of functions $f(x)$ of the following type: $f(x)$ is a strictly increasing function whose domain is of the form $\bigcup_{i=0}^{k} [a_i, b_i)$ $\big(k \geqq 1, [a_i, b_i) \subset [i, i+1)\big)$ where $\bigcup_{i=0}^{k} [a_i - i, b_i - i) = [0, 1)$, and whose range is $[0, 1)$.

If $f \in \mathfrak{T}$, we can define a probability system (X, β, l, T) where $X = [0, 1)$, β is the Borel field, l is Lebesgue measure and

$$T(x) = f^{-1}(x) \bmod 1 \quad (= (f^{-1} x)).$$

The system (X, β, l, T) is called the *representation process* generated by f. We say that the process is *valid* or that *f-expansions* are *valid* when every $x \in [0, 1)$ has a representation

$$x = \bar{f}(x_0 + \bar{f}(x_1 + \dots))$$

where $\bar{f}$ is the unique monotonic extension of f to the domain $[0, \infty)$ and range $[0, 1]$ and

$$x_n = [f^{-1} T^n(x)], \qquad n = 0, 1, 2, \dots .$$

(A valid representation process can be regarded as a non-atomic stochastic process with a finite number of states.)

EVERETT's paper [2] is concerned with generalised decimal expansions and the functions $f(x)$ considered are strictly increasing and have domain $[0, k)$ (where $k \geqq 2$ is an integer.) BISSINGER's paper [3] is concerned with generalised continued fraction expansions and the functions $f(x)$ considered are strictly decreasing and have domain $[1, \infty)$.

RÉNYI [1], extended the results of [2], [3], by considering functions $f(x)$ which have a domain $[0, t)$ $(1 < t \leqq \infty)$ when f is increasing and a domain $[1, t)$ $(2 < t \leqq \infty)$ when f is decreasing. In neither case is there a restriction to integers t.

To avoid repetition we restrict our attention to increasing functions, but it is clear that the class $\mathfrak{T}$ is wider than the class of *increasing* functions studied in [1], [2].

RÉNYI, EVERETT and BISSINGER give sufficient „metric" conditions for f-expansions to be valid. For example [1], [2]:

If f satisfies

$$(0.1) \qquad \frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1} < 1 \quad \text{for} \quad 1 \leqq t_1 < t_2$$

then f-expansions are valid.

The purpose of this paper is to give necessary and sufficient conditions for the validity of f-expansions. One condition is similar to — and is in fact implied by — topological transitivity. This leads to the conclusion that metric conditions are unlikely to be necessary for validity. In fact we outline a method whereby functions $f(x)$ with valid f-expansions, can be constructed, for which $f'(x)=\infty$ at some point x. We also show, as a consequence of our topological conditions, that (0. 1) is a sufficient condition, even for the class $\mathfrak{T}$ of functions f, when f is replaced by $\bar{f}$ in (0. 1). These results appear in § 1.

In § 2 we investigate strongly* ergodic transformations T of the form

$$(0.2) \qquad Tx = (\beta x + \alpha) \qquad (\beta \geqq 1, 0 \leqq \alpha < 1).$$

Each of the strongly ergodic *linear* mod 1 transformations (0. 2) possesses a finite invariant measure equivalent to Lebesgue measure and we give an explicit formula for this measure. This enables one to compute the frequency with which digits occur in f-expansions $\left(f(x) = \frac{x-\alpha}{\beta},\ \alpha \leqq x < \alpha + \beta\right)$. We note, however, that β, α have to be chosen so that $T(x)$ is strongly ergodic for there are cases where T is ergodic, not strongly ergodic, and T possesses no finite invariant measure equivalent to Lebesgue measure. The formula we give extends a formula [4], [5] for the measure invariant under

$$T(x) = (\beta x) \qquad (\beta > 1).$$

§ 1. f-expansions

THEOREM 1. *If* $f \in \mathfrak{T}$, *then f-expansions are valid if and only if* $x \neq y$ *implies*

$$x_0, x_1, \ldots \neq y_0, y_1, \ldots.$$

PROOF. Let $\varrho_n(x) = \bar{f}(x_0 + \bar{f}(x_1 + \ldots + \bar{f}(x_n)))$. Then $\varrho_n(x)$ is non-decreasing as n increases for every $x \in [0, 1)$ and $\varrho_n(x)$ is non-decreasing as x increases for every $n = 0, 1, 2, \ldots$, and since

$$x = f(x_0 + f(x_1 + \ldots + f(x_n + T^{n+1}(x))))$$

we have

$$\varrho_n(x) \leqq x \quad \text{for} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

i. e.

$$\varrho(x) = \lim_{n \to \infty} \varrho_n(x) \leqq x.$$

---

* T is strongly ergodic means that $T^{-1}E \subset E$ implies $l(E)=0$ or $l(E)=1$.

Let $y=\varrho(x)\leqq x<1$, then

$$x\geqq y=f(x_0+\bar{f}(x_1+\bar{f}(x_2+\dots))+\delta_1) \text{ for some } \delta_1\geqq 0,$$

i. e.

$$f^{-1}x\geqq f^{-1}y\geqq x_0+\bar{f}(x_1+\bar{f}(x_2+\dots))$$

i. e.

$$T(x)\geqq T(y)\geqq\bar{f}(x_1+\bar{f}(x_2+\dots)) \text{ and } y_0=x_0.$$

Again

$$T(x)\geqq T(y)\geqq f(x_1+\bar{f}(x_2+\dots)+\delta_2) \text{ for some } \delta_2\geqq 0,$$

and

$$f^{-1}T(x)\geqq f^{-1}(Ty)\geqq x_1+\bar{f}(x_2+\dots)$$

i. e.

$$T^2(x)\geqq T^2(y)\geqq\bar{f}(x_2+\bar{f}(x_3+\dots)) \text{ and } y_1=x_1.$$

Proceeding in this way we get

$$x_i=y_i \qquad i=0,1,\dots.$$

If $x\neq y$ implies $x_0,x_1,\dots\neq y_0,y_1,\dots$ then $\varrho(x)=x$ i. e.

$$x=\bar{f}(x_0+\bar{f}(x_1+\dots)).$$

The negative orbit of x under T is defined as

$$O_T^-(x)=\{y\colon T^n(y)=x \text{ for some } n\geqq 0\}.$$

If there is no doubt as to which transformation T we refer to we write simply $O^-(x)$ for $O_T^-(x)$. T is said to be topologically transitive if for some $x\in[0,1)$, $O^-(x)$ is dense in $[0,1)$.

THEOREM 2. *A necessary and sufficient condition for f-expansions to be valid is that* $\bigcup_{i=0}^{k} O^-(a_i)$ *be dense in* $[0,1)$, *where* $[a_i,a_{i+1})$ $(0=a_0<a_1<a_2<\dots<a_{k+1}=1)$ *are defined by*

(1. 1) $$x_0=i \textit{ for } x\in[a_i,a_{i+1}).$$

PROOF. If f-expansions are valid then for every $x,y\in[0,1)$ $(x<y)$,

$$x=\bar{f}(x_0+\bar{f}(x_1+\dots))$$
$$y=\bar{f}(y_0+\bar{f}(y_1+\dots)).$$

Since $x<y$ there is a first integer n for which $x_n\neq y_n$, and for this n, $x_n<y_n$. Suppose

$$x_n=i<j=y_n,$$

then

$$(T^n(x))_0=x_n<y_n=(T^n(y))_0$$

so that $T^n(x)\in[a_i,a_{i+1})$ and $T^n(y)\in[a_j,a_{j+1})$ but $T^k(x)$, $T^k(y)$ belong to the same intervals $[a_{m_k},a_{m_k+1})$ for $k<n$.

T is one-one and continuous on each $[a_{m_k}, a_{m_k+1})$; therefore there exist $z_1, \ldots, z_n$ such that

$$T^{n-k}(x) < z_k < T^{n-k}(y)$$

$$T(z_1) = a_j$$

and

$$T(z_k) = z_{k-1}, \qquad k = 2, 3, \ldots, n.$$

Consequently $x < z_n < y$ and $T^n(z_n) = a_j$. Since $x, y(x < y)$ are arbitrary points of $[0, 1)$, we have $O^-(a_0) \cup \ldots \cup O^-(a_k)$ is dense in $[0, 1)$. The argument is reversible and consequently if $O^-(a_0) \cup \ldots \cup O^-(a_k)$ is dense in $[0, 1)$ then f-expansions are valid.

COROLLARY. If f has domain $[a, b)$, then a necessary and sufficient condition for the validity of f-expansions is that $O^-(0)$ is dense in $[0, 1)$. (Consequently it is necessary that T be topologically transitive.)

PROOF. The set of points $a_1, a_2, \ldots, a_k$ are precisely the points of $T^{-1}(0)$.

THEOREM 3. *A sufficient condition for the validity of f-expansions is that T is topologically transitive.*

PROOF. Suppose that $O^-(x)$ is dense in $[0, 1)$. We will first show that the sequence of x is unique i. e.

$$C(x) = \{y : y_0 y_1 \ldots = x_0 x_1 \ldots\}$$

consists of only the point x. Suppose otherwise that $C(x)$ is an interval.

If

$$T^{-n}C(x) \cap C(x) = \emptyset \text{ for } n = 1, 2, \ldots$$

then

$$T^{-m}C(x) \cap T^{-n}C(x) = \emptyset \text{ for } m \neq n.$$

Consequently $O^-(x) \cap C(x)$ consists of only one point x, and $O^-(x)$ is not dense in $C(x)$.

If n is the least positive integer for which

$$T^{-n}C(x) \cap C(x) \neq \emptyset$$

then there exists a point $y \in T^{-n}C(x) \cap C(x)$

i. e.

$$T^n(y) \in C(x) \text{ and } y \in C(x)$$

and therefore

$$y_0 y_1 \ldots = y_n y_{n+1} \ldots = x_0 x_1 \ldots,$$

i. e.

$$x_0 x_1 \ldots = x_0 \ldots x_{n-1} x_0 \ldots x_{n-1} \ldots .$$

This means that

$$T^{-n}C(x) \supset C(x) \supset T^n C(x),$$

and

$$T^{-k}C(x) \cap C(x) = \emptyset = T^k C(x) \cap C(x) \text{ for } 0 < k < n.$$

Since T^n is one-one, continuous and strictly increasing mapping of $C(x)$ onto $T^n C(x)$, it is clear that $O^-(x)$ cannot be dense in $C(x)$. Consequently $C(x)$ is not an interval i. e. $C(x) = (x)$. If a point y has a unique sequence and if $T(z) = y$ then z has a unique sequence. Hence every point in $O^-(x)$ has a unique sequence and $O^-(x)$ is dense in $[0, 1)$. Let u, v $(u<v)$ be arbitrary points in $[0, 1)$ and choose points $z, t, \in O^-(x)$ such that

$$u<z<t<v$$

then

$$u_0u_1 \ldots \leqq z_0, z_1, \ldots < t_0, t_1, \ldots \leqq v_0, v_1 \ldots$$

i. e. $$u_0u_1 \ldots < v_0v_1 \ldots .$$

We have shown that each point $u \in [0, 1)$ has a unique sequence and by Theorem 1 this completes the proof.

THEOREM 4. ([1], [2].) *If* $\frac{\bar{f}(t_1)-\bar{f}(t_2)}{t_1-t_2}<1$ *for* $0<t_2<t_1$ *then f-expansions are valid.*

PROOF. It is not difficult to show that the above condition is equivalent the following:

For every $\delta>0$ there exists $\varepsilon>0$ such that $\frac{\bar{f}(t_1)-\bar{f}(t_2)}{t_1-t_2}<1-\varepsilon$ whenever $t_1-t_2>\delta$. Let $\bigcup_{i=0}^{k} [b_i, c_i)$ be the domain of f, where $[b_i, c_i) \subset [i, i+1)$, then the sequence of points $0=a_0<\ldots<a_i<\ldots<a_k<a_{k+1}=1$ defined in Theorem 2 is preciselythe sequence

$$0=f(b_0)<f(b_1)<\ldots<f(b_k)<1.$$

Let x, y be arbitrary points such that

$$a_i \leqq x<y<a_{i+1}$$

then

$$b_i \leqq f^{-1}x<f^{-1}y<b_{i+1}$$

and hence

$$\frac{y-x}{f^{-1}y-f^{-1}x}=\frac{y-x}{T(y)-T(x)}<1-\varepsilon(\delta)$$

if $T(y)-T(x)>\delta$.

Let us suppose that for every n, $T^n(y)$, $T^n(x)$ belong to the same interval $[a_{k_n}, a_{k_n+1})$, then

$$T^n(y)-T^n(x)>T^{n-1}(y)-T^{n-1}(x)>\ldots>\delta$$

and

$$\frac{T^{n-1}(y)-T^{n-1}(x)}{T^n(y)-T^n(x)}<1-\varepsilon(\delta) \text{ for } n=1, 2, \ldots.$$

Consequently $\frac{T^n(y)-T^n(x)}{y-x}>\frac{1}{(1-\varepsilon(\delta))^n}$, $n=1, 2, \ldots$. This is clearly impossible; therefore $T^n(y)$, $T^n(x)$ eventually belong to different intervals $[a_{k_n}, a_{k_n+1})$, and the sequences for y, x are different. By Theorem 1 this completes the proof.

COROLLARY. If $f(x)$ has domain $\bigcup_{i=0}^{k} [b_i, c_i)$, $[b_i, c_i) \subset [i, i+1)$, and f is linear on each $[b_i, c_i)$ with slope greater than one, then f-expansions are valid.

Remark. It is possible to construct strictly increasing functions f with valid f-expansion such that, for some $x, f'(x)=\infty$. The method is as follows:

Let $g(x)=x/2$ for $0 \leqq x < 2$. Certainly g-expansions are valid and $O_s^-(0)$ is dense, where $S(x)=\big(g^{-1}x\big)=\big(2x\big)$. We construct a function $f(x)$ with domain $[0, 2)$ such that

$$T(x)=\big(f^{-1}(x)\big)$$

is homeomorphic to $S(x)$ i. e. $T(x)=\Phi S \Phi^{-1}(x)$ for some homeomorphism Φ of $[0, 1)$ onto itself with zero as fixed point. It is clear that in this case $O_T^-(0)$ is dense in $[0, 1)$ since $O_S^-(0)$ is dense in $[0, 1)$, and therefore f-expansions are valid.

Let Φ be a homeomorphism of $[0, 1)$ onto itself such that $\Phi(0)=0$, Φ is a homeomorphism of $[0, 1/2)$ onto itself, and Φ is the identity on $[1/2, 1)$. Choose Φ so that $\Phi'(1/4)=\infty$. Define

$$\begin{aligned} f(x) &= \Phi\left(\frac{1}{2}\Phi^{-1}(x)\right) \quad \text{for } 0 \leqq x < 1 \\ &= \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(y-1)+1}{2}\right) \quad \text{for } 1 \leqq x < 2 \end{aligned}$$

then f is a strictly increasing continuous function with domain $[0, 2)$ and range $[0, 1)$ with valid f expansions since

$$\begin{aligned} T(x) = \big(f^{-1}(x)\big) &= \Phi\big(2\Phi^{-1}(x)\big) \quad \text{for } 0 \leqq x < \tfrac{1}{2} \\ &= \Phi\big(2\Phi^{-1}(x)-1\big) \quad \text{for } \tfrac{1}{2} \leqq x < 1 \\ &= \Phi\, S\, \Phi^{-1}(x). \end{aligned}$$

Let $x > 1/2$, then

$$\frac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}} = \frac{\Phi\big(\frac{1}{2}(x)\big)-\Phi(\frac{1}{4})}{x-\frac{1}{2}}$$

i. e.

$$f'(\tfrac{1}{2}) = \lim_{x \downarrow 1/2} \frac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,\Phi^0\left(\frac{1}{4}\right) = \infty.$$

§ 2. Linear mod 1 transformations

In this section we consider the linear mod 1 transformations

$$T(x) = \big(\beta x + \alpha\big) \quad (\beta \geqq 1, 0 \leqq \alpha < 1)$$

Evidently $T(x) = \big(f^{-1}x\big)$ where $f(x) = \dfrac{x-\alpha}{\beta}$ for $\alpha \leqq x < \alpha+\beta$. If $\beta=1$ then f-expansions are valid if and only if α is irrational, and $T(x)$ can be regarded as a rotation on the circle through an irrational multiple of 2π. If $\alpha=0$, $\beta>1$ then $T(x)= =\big(\beta x\big)$. Both of these transformations have been studied extensively elsewhere [6], [1], [4], [5]. From hereon we assume $\beta>1$ and $0 \leqq \alpha < 1$. The following is an example of a linear mod 1 transformation which is ergodic, not strongly ergodic, and for which there exists no finite invariant measure equivalent to Lebesgue measure.

EXAMPLE.

$$T(x) = (\beta x + \alpha)$$

where β is the positive solution of $\beta^2 = \beta + 1$ and $\alpha = \frac{3-\beta}{2}$. It is not difficult to show that

$$T^{-1}\left[\frac{\beta-1}{2}, \frac{3-\beta}{2}\right) = \left[\frac{1}{\beta^2}, \frac{1}{\beta}\right)$$

and

$$\frac{\beta-1}{2} < \frac{1}{\beta^2} < \frac{1}{\beta} < \frac{3-\beta}{2}.$$

Therefore T preserves no finite measure equivalent to Lebesgue measure, and T is not strongly ergodic. However it is not difficult to show that T *is* ergodic.

We omit the elementary proof of the following theorem:

THEOREM 5. *If* $f \in \mathfrak{T}$ *and* $T(x) = (f^{-1}x)$ *then* $\nu(E) = \int_E h(x)\, dl$ *is invariant under* T *if and only if*

$$h(x) = \sum_n h(\bar{f}(x+n))\bar{f}'(x+n) \text{ a. e.}$$

THEOREM 6. *If* T *is a linear* mod 1 *transformation* $(Tx = (\beta x + \alpha), \beta > 1, 0 \leqq \alpha < 1)$ *then* $\nu(E) = \int_E h(x) dl$ *is a finite signed measure invariant under* T, *where*

$$h(x) = \sum_{x < T^n(1)} \frac{1}{\beta^n} - \sum_{x < T^n(0)} \frac{1}{\beta^n}.$$

If T *is strongly ergodic, then* $h(x) \geqq 0$ *a. e. and* ν *is a finite positive measure invariant under* T.

PROOF. In the theorem we defined $T(1) = (\beta + \alpha)$ and $T^n(1) = T(T^{n-1}(1))$.

Let $\delta_0 = [\beta + \alpha]$ and let $\delta_1, \delta_2, \ldots$ be the sequence of $T(1)$. Let $\gamma_0, \gamma_1, \ldots$ be the sequence of 0. Every $x \in [0, 1)$ has a representation

$$x = \bar{f}(x_0 + \bar{f}(x_1 + \ldots)) \text{ where } f(x) = \frac{x-\alpha}{\beta}$$

for $\alpha \leqq x \leqq \beta + \alpha$ i. e.

$$x = \frac{x_0 - \alpha}{\beta} + \frac{x_1 - \alpha}{\beta^2} + \ldots.$$

Consequently

$$0 = \frac{\gamma_0 - \alpha}{\beta} + \frac{\gamma_1 - \alpha}{\beta^2} + \ldots \tag{2. 1}$$

and

$$\beta + \alpha = \delta_0 + \frac{\delta_1 - \alpha}{\beta} + \frac{\delta_2 - \alpha}{\beta^2} + \ldots$$

i. e.

$$1 = \frac{\delta_0 - \alpha}{\beta} + \frac{\delta_1 - \alpha}{\beta^2} + \ldots. \tag{2. 2}$$

We have to show that $h(x)$ satisfies

$$h(x) = \sum_{0 \leqq \frac{x+n-\alpha}{\beta} < 1} h\left(\frac{x+n-\alpha}{\beta}\right)\frac{1}{\beta}.$$

Let

$$\begin{aligned} a_n(x) &= 1 \text{ if } x < T^n(1) \\ &= 0 \text{ otherwise} \\ b_n(x) &= 1 \text{ if } x < T^n(0) \\ &= 0 \text{ otherwise,} \\ a_{m,n}(x) &= 1 \text{ if } \frac{x+m-\alpha}{\beta} < T^n(1) \\ &= 0 \text{ otherwise} \\ b_{m,n}(x) &= 1 \text{ if } \frac{x+m-\alpha}{\beta} < T^n(0) \\ &= 0 \text{ otherwise.} \end{aligned}$$

$$\sum_{0 \leqq \frac{x+m-\alpha}{\beta} < 1} h\left(\frac{x+m-\alpha}{\beta}\right) = \sum_{0 \leqq \frac{x+m-\alpha}{\beta} < 1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{m,n}(x) - b_{m,n}(x)}{\beta^n}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta^n}\left(\sum_{0 \leqq \frac{x+m-\alpha}{\beta} < 1} \big(a_{m,n}(x) - b_{m,n}(x)\big)\right).$$

Now $\bar{\theta}_n(x) \equiv \sum_{0 \leqq \frac{x+m-\alpha}{\beta} < 1} a_{m,n}(x)$ is the number of m for which

$$0 \leqq \frac{x+m-\alpha}{\beta} < T^n(1)$$

or

$$\alpha - x \leqq m < [T^n(1)+\alpha] + T^{n+1}(1) - x = \delta_n + T^{n+1}(1) - x.$$

Similarly $\underline{\theta}_n(x) \equiv \sum_{0 \leqq \frac{x+m-\alpha}{\beta} < 1} b_{m,n}(x)$ is the number of m for which

$$\alpha - x \leqq m < \gamma_n + T^{n+1}(0) - x.$$

Evidently

$$\begin{aligned}\bar{\theta}_n(x) &= \delta_n+1 \text{ if } x<T^{n+1}(1) \text{ and } x\geqq\alpha \\ &= \delta_n \quad\text{ if } x\geqq T^{n+1}(1) \text{ and } x\geqq\alpha \\ &= \delta_n \quad\text{ if } x<T^{n+1}(1) \text{ and } x<\alpha \\ &= \delta_n-1 \text{ if } x\geqq T^{n+1}(1) \text{ and } x<\alpha\end{aligned}$$

i. e.

$$\begin{aligned}\bar{\theta}_n(x) &= \delta_n+a_{n+1}(x) \text{ if } x\geqq\alpha \\ &= \delta_n+a_{n+1}(x)-1 \text{ if } x<\alpha.\end{aligned}$$

Similarly

$$\begin{aligned}\underline{\theta}_n(x) &= \gamma_n+b_{n+1}(x) \text{ if } x\geqq\alpha \\ &= \gamma_n+b_{n+1}(x)-1 \text{ if } x<\alpha.\end{aligned}$$

Therefore

$$\bar{\theta}_n(x)-\underline{\theta}_n(x) = \delta_n-\gamma_n+a_n(x)-b_n(x).$$

From (2. 1), (2. 2) we have

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqq\frac{x+m-\alpha}{\beta}<1} h\left(\frac{x+m-\alpha}{\beta}\right)\frac{1}{\beta} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\beta^{n+1}}(\delta_n-\gamma_n+a_{n+1}(x)-b_{n+1}(x)) \\ &= \frac{1}{\beta}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_{n+1}(x)-b_{n+1}(x))}{\beta^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n(x)-b_n(x)}{\beta^n} \\ &= h(x), \text{ since } a_0(x)=1,\ b_0(x)=0.\end{aligned}$$

Note that $h(x)$ is a Saltus function [7] and therefore continuous from the right. Moreover $h(0)$ is positive, and therefore $h(x)$ is positive in some interval about zero.

Let A denote the operator on $L_1(l)$ defined by

$$Ag(x) = \sum_{0\leqq\frac{x+m-\alpha}{\beta}<1} g\left(\frac{x+m-\alpha}{\beta}\right)\frac{1}{\beta}.$$

It is not difficult to show that

$$\int Ag(x)\,dl=\int g(x)\,dl \text{ for all } g\in L_1(l).$$

Let

$$h(x) = h^+(x)-h^-(x)$$

where

$$h^+(x) = h(x) \text{ if } h(x) > 0$$

$$= 0 \text{ otherwise}$$

and

$$h^-(x) = -h(x) \text{ if } h(x) < 0$$

$$= 0 \text{ otherwise.}$$

Write

$$g^+(x) = Ah^+(x) \geqq h(x)$$

$$g^-(x) = Ah^-(x) \geqq -h(x),$$

then

$$g^+(x) \geqq h^+(x)$$

and

$$g^-(x) \geqq h^-(x).$$

But

$$\int g^+(x)\,dl = \int h^+(x)\,dl$$

and

$$\int g^-(x)\,dl = \int h^-(x)\,dl$$

and therefore

$$g^+(x) = h^+(x) \text{ a. e.}$$

i. e.

$$Ah^+(x) = h^+(x) \text{ a. e.}$$

Let $E = \{x : h^+(x) = 0\}$, and suppose T is strongly ergodic, then

$$\int_E h^+(x)\,dl = \int_{T^{-1}E} h^+(x)\,dl = 0.$$

i. e.

$$l(T^{-1}E - E) = 0, \text{ and since } l(E) < 1$$

and $T^{-1}E \subset E$ a. e. we have $l(E) = 0$. Consequently $h^+(x) > 0$ a. e. and $\nu(E) = = \int_E h(x)\,dl$ is a finite positive measure invariant under T.

We can apply Birkhoff's ergodic theorem to the strongly ergodic transformations $T(x) = (\beta x + \alpha)$ to compute the frequency with which digits occur in f-expansions where

$$f(x) = \frac{x - \alpha}{\beta} \qquad (\alpha < x \leqq \beta + \alpha).$$

Let $\theta_i(x)$ be the frequency with which the digit i occurs in the expansion

$$x = \frac{x_0 - \alpha}{\beta} + \frac{x_1 - \alpha}{\beta^2} + \dots .$$

Then

$$\begin{aligned}\theta_{\iota}(x) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\chi_{I_\iota}(x)+\ldots+\chi_{I_i}(T^{n-1}(x))}{n} \qquad \text{(a. e.)}\\ &= \frac{\nu(I_i)}{\nu[0,1)}\\ &= \int_{I_i} h(x)\,dl \Big/ \int_0^1 h(x)\,dl \qquad \text{a. e.}\end{aligned}$$

where $I_0, I_1, \ldots, I_k$, are the intervals $\left[0, \frac{1-\alpha}{\beta}\right), \left[\frac{1-\alpha}{\beta}, \frac{2-\alpha}{\beta}\right), \ldots, \left[\frac{k-\alpha}{\beta}, 1\right)$

and

$$\begin{aligned} k &= [\beta+\alpha] \text{ if } [\beta+\alpha]<\beta+\alpha\\ &= [\beta+\alpha]-1 \text{ otherwise.}\end{aligned}$$

It should be noted that $h(x)$ is a step function when and only when $T^n(1)$ and $T^n(0)$ are periodic. In this case $h(x)$, and the frequencies $\theta_i(x)$, are easily computed.

REMARK. 1. In the example cited let A, B, C, D, E be the intervals

$$\left[0,\frac{1}{2\beta^2}\right), \left[\frac{1}{2\beta^2}, \frac{\beta-1}{2}\right), \left[\frac{\beta-1}{2}, \frac{3-\beta}{2}\right), \left[\frac{3-\beta}{2}, \frac{\beta}{2}\right) \left[\frac{\beta}{2}, 1\right)$$

respectively. It is easy to compute $h(x)$ in this case.

$$\begin{aligned} h(x) &= 1 \text{ on } A \text{ and } E\\ &= 1/\beta \text{ on } B \text{ and } D\\ &= 0 \text{ on } C.\end{aligned}$$

2. We have not been able to answer the following questions.
   a) Does $h(x)$ ever assume negative values?
   b) Are linear mod 1 transformation always ergodic?
   c) If there exists a finite invariant measure equivalent to Lebesgue measure is T strongly ergodic?

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
YALE UNIVERSITY,
NEW HAVEN, USA

(Received 23 January 1963)

References

[1] A. RÉNYI, Representations for real numbers and their ergodic properties, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **8** (1957), pp. 477—493.

[2] C. I. EVERETT, Representations for real numbers, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), pp. 861—869.

[3] B. H. BISSINGER, A generalisation of continued fractions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50** (1944), pp. 868—876.

[4] A. O. GELFOND, On a general property of number systems (Russian), *Izv. Akad. Nauk. SSSR.*, **23** (1959), pp. 809—814.

[5] W. PARRY, On the β-expansions of real numbers, *Acta. Math. Acad. Sci. Hung.*, **11** (1960), pp. 401—416.

[6] H. WEYL, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod 1, *Math. Ann.*, **77** (1916), pp. 313—352.

[7] F. RIESZ et B. SZ.-NAGY, *Leçons d'analyse fonctionnelle* (Budapest, 1952).

ON ROHLIN'S FORMULA FOR ENTROPY

By

W. PARRY (New Haven, USA)

(*Presented by* A. RÉNYI)

The object of this paper is to give a formula for the entropy of an ergodic, stationary non-atomic stochastic process with a finite number of states.

The number theoretic transformations studied by RÉNYI [1] can be regarded as stochastic processes and our formula coincides with ROHLIN's [2] for these cases. As an application we prove that the entropy of a β-transformation [1] is $\log \beta$. This computation corrects an arithmetical error of ROHLIN's, which has been acknowledged in private correspondence.

DEFINITIONS. 1. Let (Y, β, ν, U) be an ergodic system i. e. (Y, β, ν) is a probability space and U is a measurable ergodic transformation of Y onto itself. Suppose further that there exists an invariant probability q equivalent to ν $(q \sim \nu)$ i. e. $q(E) = qU^{-1}(E)$ and $q(E)=0$ when and only when $\nu(E)=0$, for all $E \in \beta$.

If $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \dots, \mathscr{A}_n$ is a finite sequence of measurable partitions of Y, $\bigvee_{i=1}^{n} \mathscr{A}_i$ denotes the partition consisting of elements $\bigcap_{i=1}^{n} A_{m_i}$, $A_{m_i} \in \mathscr{A}_i$. If $\mathscr{A}$ is a finite measurable partition of Y then so are $\mathscr{A}^n = U^{-n}\mathscr{A}$ $(n=0, 1, \dots)$ and $\mathscr{A}_n = \bigvee_{i=0}^{n} \mathscr{A}^i$. The entropy of U with respect to $\mathscr{A}$ is defined as

$$h(\mathscr{A}, U) = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \sum_{A \in \mathscr{A}_n} q(A) \log q(A).$$

(By convention we put $q(A)\log q(A) = 0$ when $q(A)=0$.)

2. A non-atomic stochastic process with a finite number of states (n. p. f) is a system (X, α, μ, T) where

(i) $X \subset \{x = x_0, x_1, \dots : x_i \in (0, 1, \dots, k)\}$

(ii) α is the σ-algebra generated by cylinders $C_n(x)$, where

$$C_n(x) = \{y = y_0 y_1 \dots : y_0 y_1 \dots y_n = x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

(iii) T is the shift transformation,
$T(x_0, x_1, \dots) = x_1, x_2, \dots$ and maps X onto itself.

(iv) T is strongly non-singular i. e.
$\mu T(E) = 0$ when (and only when) $\mu(E) = 0$.
(This condition implies: $\mu(E)=0$ when and only when $\mu T^{-1}(E) = 0$.)

(v) μ is non-atomic i. e. $\mu(x) = 0$ for all $x \in X$.

1. Factor endomorphisms as stochastic processes

Our first result is only a reformulation of a known result [3] but it provides the proper context for studying the entropy of an n. p. f.

THEOREM 1. *If* (Y, β, ν, U) *is a probability system such that* U^n *is ergodic for* $n=1, 2, \dots$ *and if* $\mathscr{A}$ *is a* non-trivial finite measurable partition of* Y *then* (Y, β, ν, U) *is homomorphic under a map* Φ *to an n. p. f.* (X, α, μ, T) *such that* $\Phi(\mathscr{A})$ *is a finite measurable partition of* X. *If there exists an invariant probability* $q \sim \nu$ *then there exists an invariant probability* $p \sim \mu$ *and*

$$h(\mathscr{A}, U) = h(\Phi(\mathscr{A}), T).$$

PROOF. (The n. p. f. we shall define is essentially the factor endomorphism defined by ROHLIN [3], with respect to $\bigvee_{i=0}^{\infty} T^{-i}\mathscr{A}$). Consider the partition of X, consisting of elements $\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}A_{x_n}$, $A_{x_n} \in \mathscr{A}$ i. e. consider the partition $\bigvee_{i=0}^{\infty} T^{-i}\mathscr{A}$. Evidently $y \in \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}A_{x_n}$ if and only if $T^n(y) \in A_{x_n}$ for $n=0, 1, \dots$. Define $\Phi(y) = x_0, x_1, x_2, \dots$ for all $y \in \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}A_{x_n}$, let $X = \Phi(Y)$, and let α be the σ-algebra generated by cylinders of X. It is clear that the shift transformation T maps X onto itself and $\Phi(Uy) = T\Phi(y)$.

It is also clear that Φ is a measurable mapping of (Y, β) onto (X, α). Define $\mu(E) = \nu\Phi^{-1}(E)$ for $E \in \alpha$, then (X, α, μ, T) satisfies the conditions for an n. p. f. as long as $\mu(x)=0$ for all $x \in X$. The proof of this depends on the fact that $\nu(A_{x_0} \cap U^{-1}A_{x_1} \cap U^{-2}A_{x_2} \dots)=0$ for all choices of $A_{x_i} \in \mathscr{A}$, which follows easily from the ergodicity of the transformations U^n, $n=1, 2, \dots$ and the non-trivial nature of the partition $\mathscr{A}$. Let $\mathscr{A} = (A_0, A_1, \dots, A_k)$ so that $k \geqq 1$, then $\Phi(A_i) = \{x \in X: x_0 = i\}$. $\Phi(\mathscr{A})$ is therefore a measurable partition of X, which we call the *natural* partition of X.

If $q \sim \nu$ and q is invariant then $p(E) = q\Phi^{-1}(E)$ is invariant and $p \sim \mu$. Moreover

$$\begin{aligned} h(\mathscr{A}, U) &= \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \sum_{A \in \mathscr{A}_n} q(A) \log q(A) \\ &= \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \sum_{\Phi(A) \in \Phi(\mathscr{A}_n)} p\Phi(A) \log p\Phi(A) \\ &= \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \sum_{B \in (\Phi(\mathscr{A}))_n} p(B) \log p(B) = h(\Phi(\mathscr{A}), T). \end{aligned}$$

---

* By non-trivial we mean that $0 < \mu(A) < 1$ for all $A \in \mathscr{A}$.

2. The entropy formula

Throughout this section (X, α, μ, T) is an ergodic n. p. f. and p is an invariant probability equivalent to μ.

As defined X is a set of one-way infinite sequences of integers, $x_0, x_1, x_2, \ldots$. In general therefore, T will not be one-one and the set function $pT(E)$ defined on α will not be a measure. However, if A_i is an element of the natural partition $\mathscr{A}$ of X then

$pT(E)$ is a measure when restricted to $A_i \cap \alpha$, and $pT(E)=0$ when $E=0$. In other words, $\dfrac{dpT}{dp}$ is well defined on A_i.

Let us define

$$\frac{dpT}{dp} = \sum_{A \in \mathscr{A}} \chi_A(x) \frac{dpT}{dp},$$

where $\chi_A(x)$ is the characteristic function of A. Let

$$I(\mathscr{A}_n) = \sum_{A \in \mathscr{A}_n} -\chi_A \log p(A),$$

let

$$I(\mathscr{A} \mid \bigvee_{i=1}^{n} T^{-i}\mathscr{A}) = \sum_{A \in \mathscr{A}} -\chi_A \log p(A \mid \bigvee_{i=1}^{\infty} T^{-i}\mathscr{A})$$

and let

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} I(\mathscr{A} \mid \bigvee_{i=1}^{n} T^{-i}\mathscr{A}) \qquad [\mathrm{p}] \text{ c. f. } [4].$$

We shall need the following theorem.

McMillan's Theorem [4].

$$h(\mathscr{A}, T) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} I(\mathscr{A}_n) \qquad [\mathrm{p}]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g(T^i x) \qquad [\mathrm{p}].$$

Theorem 2.

$$g(x)=\log\frac{dpT}{dp} \quad \textit{and} \quad h(\mathscr{A}, T)=\int \log\left(\frac{dpT}{dp}\right) dp.$$

Proof. It is not difficult to show that

$$\sum_{A \in \mathscr{A}} \chi_A(x) p(A \mid \bigvee_{i=1}^{n} T^{-i}\mathscr{A}) = \frac{pC_n(x)}{pC_{n-1}(Tx)},$$

and hence that

$$\log p(A \mid \bigvee_{i=1}^{n} T^{-i}\mathscr{A}) = \log \frac{pC_n(x)}{pC_{n-1}(Tx)}$$

for $x \in A$ i. e.

$$\sum_{A \in \mathscr{A}} -\chi_A(x) \log p(A \mid \bigvee_{i=1}^{n} T^{-i}\mathscr{A}) = \sum_{A \in \mathscr{A}} -\chi_A(x) \log \frac{pC_n(x)}{pC_{n-1}(Tx)}$$

$$= -\log \frac{pC_n(x)}{pC_{n-1}(Tx)}.$$

Consequently

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} I(\mathscr{A} \mid \mathscr{A}_n) = -\lim_{n\to\infty} \log \frac{pC_n(x)}{pC_{n-1}(Tx)}.$$

But

$$TC_n(x) = C_{n-1}(Tx) \cap T(A) \quad \text{if} \quad x \in A \in \mathscr{A},$$

and therefore

$$\lim_{n\to\infty} \frac{pTC_n(x)}{pC_{n-1}(Tx)} = \lim_{n\to\infty} \frac{pC_{n-1}(Tx) \cap T(A)}{pC_{n-1}(Tx)}$$

$= 1\ [p]$ (by the Martingale theorem [5]).

Hence

$$g(x) = -\lim_{n\to\infty} \log \frac{pC_n(x)}{pTC_n(x)} = \lim_{n\to\infty} \log \frac{pTC_n(x)}{pC_n(x)}.$$

Let us confine our attention to points x in a fixed but arbitrary element A of $\mathscr{A}$. Note that $\frac{pTC_n(x)}{pC_n(x)} = E\left(\frac{dpT}{dp} \mid \mathscr{A}_n\right)$, and therefore by the Martingale theorem,

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} \log \left(\frac{pTC_n(x)}{pC_n(x)}\right) = \log \left(\frac{dpT}{dp}\right) \qquad [p],$$

since the σ-algebra generated by $\{\mathscr{A}_n\}$ $n=0, 1, \ldots$ is α. The proof is now completed by applying McMillan's theorem and the ergodic theorem to the function $g(x)$.

COROLLARY 1.

$$g(x) = \log \left(\frac{h(Tx)}{h(x)} \frac{d\mu T}{d\mu}\right)$$

and

$$h(\mathscr{A}, T) = \int \log \left(\frac{h(Tx)}{h(x)} \frac{d\mu T}{d\mu}\right) h(x)\, d\mu$$

where $h(x) = \frac{dp}{d\mu}$.

COROLLARY 2. If $\log h(x) \in L_1(p)$ then

$$h(\mathscr{A}, T) = \int \log \left(\frac{d\mu T}{d\mu}\right) \cdot h(x)\, d\mu,$$

and this happens in particular when there exists a constant $\infty > K > 0$ such that $\frac{1}{K} < h(x) < K$.

COROLLARY 3. If $\log\left(\frac{d\mu T}{d\mu}\right) \in L_1(p)$ then

$$h(\mathscr{A}, T) = \int \log\left(\frac{d\mu T}{d\mu}\right) h(x)\, d\mu.$$

PROOF. Let $k(x) = \frac{d\mu T}{d\mu}$, then

$$\begin{aligned} h(\mathscr{A}, T) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g(T^i x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \frac{h(T^{i+1}x)}{h(T^i x)} k(T^i x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} (\log h(T^n x) - \log h(x)) \\ &+ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log k(T^i x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log k(T^i x) = \int (\log k(x))\, dp. \\ &= \int \log\left(\frac{d\mu T}{d\mu}\right) h(x)\, d\mu. \end{aligned}$$

COROLLARY 4. ([3].) If an ergodic probability system has entropy zero, then each of its factor endomorphisms (with respect to a non-atomic partition $\bigvee_{i=0}^{\infty} T^{-i}\mathscr{A}$) is an automorphism.

PROOF. This means that the n. p. f. defined in Theorem 1 with respect to a partition, is almost everywhere a one-one process. To see this we need only note that since $pT^{-1}E = pE$, we have $p(E) \leqq pT(E)$ for all $E \in \alpha$. Consequently $\frac{dpT}{dp} = 1[p]$, if T is one-one, and $\frac{dpT}{dp} > 1$ on a set of positive measure, if T is not one-one almost everywhere. However, by Theorem 2, if $h(\mathscr{A}, T) = 0$ we can conclude that T is one-one almost everywhere.

Applications

Throughout this section (Y, β, ν, U) is an ergodic probability system defined in the following way:

$Y = [0, 1)$.
β is the Borel field of subsets of Y.
ν is Lebesgue measure.

$U(x) = (f^{-1}x)$, where f is a strictly increasing function with range $[0, 1)$ and domain

$$\bigcup_{i=0}^{k} [a_i, b_i), \text{ where } [a_i, b_i) \subset [i, i+1) \text{ and } \bigcup_{i=0}^{k} [a_i - i, b_i - i) = [0, 1).$$

We assume also that every x has a valid representation $x = \bar{f}(x_0 + \bar{f}(x_1 + \ldots))$ where $\bar{f}$ is the unique monotonic extension of f to the domain $[0, \infty)$, and $x_n = [f^{-1} U^n x]$. We consider only those cases where there exists an invariant probability q equivalent to ν, satisfying either

$$\text{(a)} \qquad \log\left(\frac{dq}{d\nu}\right) \in L_1(q)$$

or

$$\text{(b)} \qquad \log\left(\frac{d\nu U}{d\nu}\right) \in L_1(q).$$

This class of probability systems includes those studied by RÉNYI [1], and also includes the following cases:

I $U(x) = (x + \alpha)$, α irrational, $0 < \alpha < 1$

II $U(x) = (\beta x + \alpha)$, $\beta > 1, 0 < \alpha < 1$.

III $U(x) = (\beta x)$ $\beta > 1$.

Concerning II we have to assume β, α are chosen so that $U(x)$ is strongly ergodic,* for it is possible to show that this is not always the case.

In each case there is an invariant probability q equivalent to ν. (We omit the proof for Case II. Case I is obvious. For Case III c. f. [1].)

THEOREM 3. ([2].) *If $\mathcal{A}$ is the partition of X consisting of elements A_i, where $A_i = \{x: x_0 = i\}$ then $h(\mathcal{A}, U) = \int_0^1 \log(\Phi'(x)) h(x) d\nu$ where $h(x) = \frac{dq}{d\nu}$ and $\Phi(x) = f^{-1}(x)$.*

PROOF. The system (Y, β, ν, U) can be regarded as an n. p. f. and Theorem 2 and its corollaries can be applied. We need only remark that $\frac{d\nu U}{d\nu} = \Phi'(x)$.

---

* $U(x)$ is strongly ergodic means $U^{-1}(E) \subset E$ only when $\nu(E) = 0$ or $\nu(E) = 1$. Strong ergodicity is equivalent to ergodicity when $U(x)$ is one-one.

I. If $U(x) = \big(x+\alpha\big)$, α irrational
$h(\mathscr{A}, U) = 0$ $\big($since $\Phi'(x)=1.\big)$

II. If $U(x) = \big(\beta x+\alpha\big)$ $(\beta>1, 0<\alpha<1)$
and U is strongly ergodic then $h(\mathscr{A}, U)=\log\beta$.
$\Big($It is clear that $\log\dfrac{dvU}{dv} = \log\beta\in L_1(q)\Big)$

III. If $U(x) = \big(\beta x\big)$, $\beta>1$, $h(\mathscr{A}, U)=\log\beta$.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
YALE UNIVERSITY,
NEW HAVEN, USA

(Received 23 January 1963)

References

[1] A. RÉNYI, Representations for real numbers and their ergodic properties, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **8** (1957), pp. 477–493.

[2] V. A. ROHLIN, Exact Endomorphisms of a Lebesgue space (In Russian), *Izv. Akad. Nauk. SSSR.*, Ser. Mat., **24** (1960).

[3] V. A. ROHLIN, New Progress in the theory of transformations with invariant measure (In Russian), *Uspehi Mat. Nauk.*, **15** No. **4** (1960), *Russian Mathematical Surveys*, 15 No. **4** (1960), pp. 1–22.

[4] A. IONESCU–TULCEA, Contributions to information theory for abstract alphabets, *Arkiv för Matematik*, 4 (**2**–**3**) (1961), pp. 235–247.

[5] J. L. DOOB, *Stochastic Processes*, John Wiley (New York, 1953).

KREISLAGERUNGEN AUF FLÄCHEN KONSTANTER KRÜMMUNG

Von

MARGIT IMRE (Veszprém)

(*Vorgelegt von* L. FEJES TÓTH)

In der euklidischen Ebene ist die Dichte[1] einer aus kongruenten Kreisen bestehenden Packung bzw. Überdeckung bekanntlich

$$d \leqq \frac{\pi}{\sqrt{12}} \quad \text{bzw.} \quad D \geqq \frac{2\pi}{\sqrt{27}}.$$

Diese beiden Ungleichungen lassen sich im folgenden allgemeineren, von L. FEJES TÓTH herrührenden Satz vereinigen.[2] Es sei $\{K_i\}$ ein System kongruenter Kreise mit der vorgegebenen Dichte $\delta \left(\frac{\pi}{\sqrt{12}} \leqq \delta \leqq \frac{2\pi}{\sqrt{27}} \right)$. Das Deckungsmaß von $\{K_i\}$ bezüglich der euklidischen Ebene erreicht sein Maximum, wenn die Kreismittelpunkte die Ecken eines regulären Dreiecksmosaiks sind. Das Deckungsmaß eines Kreissystems bezüglich eines Gebietes G ist durch $\frac{\{K_i\} \cap G}{G}$ und das Deckungsmaß von $\{K_i\}$ bezüglich der euklidischen Ebene durch $\lim\limits_{R \to \infty} \frac{\{K_i\} \cap K(R)}{K(R)}$ definiert, wo $K(R)$ einen um einen beliebig vorgegebenen Punkt geschlagenen Kreis vom Radius R bedeutet.

Ein analoger Satz gilt auch auf der Kugelfläche.[3] Auf der Einheitskugel sei ein System von $n \geqq 3$ Kreisen vom Radius ϱ vorgegeben. Um das Deckungsmaß dieses Kreissystems bezüglich der Kugelfläche abzuschätzen, schlagen wir um die Ecken eines gleichseitigen sphärischen Dreiecks vom Flächeninhalt $\frac{2\pi}{n-2}$ Kreise vom Radius ϱ. Dann kann das Deckungsmaß des Kreissystems nicht das Deckungsmaß dieser drei Kreise bezüglich des Dreiecks übertreffen. Abgesehen von dem trivialen Fall, daß die Kreise nicht übereinandergreifen oder die Kugel vollständig überdecken, läßt sich diese Schranke nur in demjenigen Fall erreichen, wenn die Kreismittelpunkte die Ecken eines regulären Dreiecksmosaiks sind.

---

[1] Die Dichte eines in der Ebene ausgestreuten Bereichsystems B_i läßt sich durch $\lim\limits_{R \to \infty} \frac{\Sigma B_i(R)}{K(R)}$ definieren, wo $K(R)$ einen um einen beliebig gewählten Punkt Q geschlagenen Kreis vom Radius R bedeutet, und $B_i(R) = B_i \cap K(R)$ ist. Wir bezeichnen einen Bereich und seinen Flächeninhalt mit demselben Symbol.

[2] L. FEJES TÓTH: *Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum, III,* § 8.

[3] S. das in [2] zitierte Buch, V, § 8.

Da die Definition der Dichte und des Deckungsmaßes bezüglich der ganzen hyperbolischen Ebene mit gewissen Schwierigkeiten verbunden ist,[4] lassen sich diese Sätze nicht unmittelbar in die hyperbolische Ebene übertragen. Deshalb scheint der folgende Satz, der sich auf beliebige Flächen konstanter Krümmung[5] bezieht, von gewisser Bedeutung zu sein.

Es sei V die Vereinigung n verschiedener Flächen eines regelmäßigen sphärischen, euklidischen oder hyperbolischen Dreikantmosaiks, r und R der In- und Umkreisradius einer Mosaikfläche. Wir betrachten n Kreise vom Radius ϱ, wo $r \leqq \varrho \leqq R$ ist. Dann erreicht das Deckungsmaß der Kreise bezüglich V seinen größtmöglichen Wert, wenn die Kreise mit den ausgewählten Mosaikflächen konzentrisch sind.

Unser Satz ist eine Folgerung des folgenden allgemeineren Satzes (s. Fußnote 2):

Es sei V die Vereinigung n verschiedener Flächen eines regulären Dreikantmosaiks und $P_1, \ldots, P_n$ n Punkte auf einer Fläche konstanter Krümmung, $d(P) = \min(PP_1, \ldots, PP_n)$ der Abstand eines variablen Punktes P vom nächstgelegenen Punkt, df das Flächenelement im Punkt P und schließlich $a(x)$ eine für $x \geqq 0$ erklärte nicht zunehmende Funktion, so gilt

$$\int_V a(d(P))\,df \leqq n \int_\tau a(OP)\,df, \tag{1}$$

wo τ eine Mosaikfläche und O ihren Mittelpunkt bedeutet. Genügt $a(x)$ der zusätzlichen Bedingung $a(r-0) > a(R+0)$, so gilt in (1) Gleichheit nur dann, wenn $P_1, \ldots, P_n$ die Mittelpunkte der ausgewählten Mosaikflächen sind.

Im Falle der Funktion

$$a(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leqq x \leqq \varrho \\ 0 & \text{für } x > \varrho \end{cases}$$

ergibt die linke bzw. die rechte Seite von (1) den Inhalt desjenigen Teiles von V, der durch die um die Punkte $P_1, \ldots, P_n$ bzw. um die Flächenmittelpunkte des Mosaiks mit dem Radius ϱ geschlagenen Kreise überdeckt wird. So ergibt (1) in diesem speziellen Fall eben den zu beweisenden Satz.

Der Beweis von (1) beruht auf folgenden Hilfssätzen.

HILFSSATZ 1. *Ist s ein Segment des Kreises K mit dem Mittelpunkt O, so ist die Funktion*

$$\omega(s) = \int_s a(OP)\,df \qquad \left(s \leqq \frac{K}{2}\right)$$

konvex.

Wir legen unseren Betrachtungen ein „rechtwinkliges Koordinatensystem" mit den Achsen x und y und dem Ursprungspunkt O zu Grunde. Der Fußpunkt des aus dem Punkt P auf die x-Achse gefällten Lotes sei F. Die „Koordinaten" des Punktes P seien $OF = x$, $FP = y$. Wir bezeichnen mit ϱ den Radius von K und mit $s(\xi)$ das durch die Gerade $x = \xi (= \text{konst.})$ abgeschnittene Segment von K, und setzen $\Delta(x_1, x_2) = s(x_1) - s(x_2)$.

---

[4] L. FEJES TÓTH: Kreisausfüllungen der hyperbolischen Ebene, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **4** (1953), S. 103—110.

[5] Wir verstehen unter einer Fläche konstanter Krümmung $\varkappa$ die Kugel, die euklidische oder die hyperbolische Ebene, je nachdem $\varkappa \gtreqqless 0$ ist.

Es sei $s(b_1) < s(a_1) < s(b_2) < s(a_2)$ und $\Delta(a_1, b_1) = \Delta(a_2, b_2)$. Der Beweis des Hilfssatzes 1 beruht auf der Tatsache, daß sich eine flächentreue Abbildung von $\Delta(a_1, b_1)$ auf $\Delta(a_2, b_2)$ so angeben läßt, daß für die einander zugeordneten Punkte P_1, P_2, $OP_1 \geqq OP_2$ gilt.

Sind a und b die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks und β der gegenüber b liegende Winkel, so ist der Flächeninhalt des Dreiecks

$$t = \frac{1}{\varkappa}\left[\beta - \arcsin\left(\sin\beta \cos\sqrt{\varkappa}a\right)\right].$$

Bilden wir bei einem festen Wert von β das Differential

$$dt = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \frac{\sin\beta \sin\sqrt{\varkappa}a}{\sqrt{1-\sin^2\beta\cos^2\sqrt{\varkappa}a}}\,da = \frac{\sin\sqrt{\varkappa}b}{\sqrt{\varkappa}}\,da,$$

so erhalten wir den Flächeninhalt eines „Streifens" der Länge b und der „infinitesimalen" Breite da.[6]

Der „oberhalb" der x-Achse liegende Teil von $\Delta(x, x+dx)$ sei mit σ bezeichnet. σ ist ein Streifen der Breite dx und der Länge $y(x)$, wo $y(x)$ durch die Gleichung $\cos\sqrt{\varkappa}\varrho = \cos\sqrt{\varkappa}x \cos\sqrt{\varkappa}y$ des Kreises K bestimmt ist. Mithin ist

$$\sigma = \frac{\sin\sqrt{\varkappa}y}{\sqrt{\varkappa}}\,dx.$$

Eine, durch den Punkt $P(x, \eta)$ hindurchgehende Kurve zerlegt σ in zwei Teile, von denen der „untere" ein Streifen σ', von der Länge η und der Breite dx ist (Abb. 1). Ist das Inhaltsverhältnis $\sigma'/\sigma = \lambda$ $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$ vorgegeben, so muß η der Gleichung

$$\sin\sqrt{\varkappa}\eta = \lambda \sin\sqrt{\varkappa}y$$

genügen. Diese Gleichung definiert eine Funktion $\eta = \eta(\lambda, x)$. Jetzt läßt sich die gewünschte Abbildung folgendermaßen angeben: Dem Punkt $P_1(x_1, \eta(\lambda, x_1))$ $(a_1 \leqq x_1 \leqq b_1;\ 0 \leqq \lambda \leqq 1)$ ordnen wir denjenigen Punkt $P_2(x_2, \eta(\lambda, x_2))$ $(a_2 \leqq x_2 \leqq b_2)$ zu, für den $\Delta(a_1, x_1) = \Delta(a_2, x_2)$ gilt (Abb. 2). Diese Abbildung ist offensichtlich flächentreu. Für einen Punkt $P(x, \eta(\lambda, x))$ gilt

$$\cos\sqrt{\varkappa}OP = \sqrt{(1-\lambda^2)\cos^2\sqrt{\varkappa}x + \lambda^2\cos^2\sqrt{\varkappa}\varrho}.$$

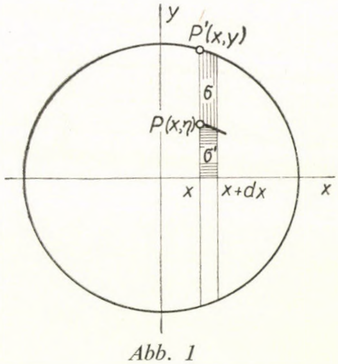


Abb. 1

Hieraus ist es klar, daß OP eine nicht abnehmende Funktion von x ist. So folgt aus $x_1 > x_2$, $OP_1 \geqq OP_2$. Mithin gilt

$$\omega(s(a_1)) - \omega(s(b_1)) = \int\limits_{\Delta(a_1, b_1)} a(OP)\,df \leqq \int\limits_{\Delta(a_2, b_2)} a(OP)\,df = \omega(s(a_2)) - \omega(s(b_2)),$$

woraus sich $\omega'(s(a_1)) \leqq \omega'(s(a_2))$ ergibt.

---

[6] Aus den angegeben Formeln erhalten wir die in der euklidischen Ebene gültigen Formeln durch den Grenzübergang $\varkappa \to 0$.

HILFSSATZ 2. *Es seien A und B zwei, vom Mittelpunkt O verschiedene Punkte des Kreises K und A', B' die Schnittpunkte der Halbgeraden OA, OB mit dem Rand von K. Bezeichnen wir das von den Strecken $A'A$, AB, BB' und dem Kreisbogen $B'A'$ begrenzte Teilgebiet von K mit t, so gilt*

$$\int_t a(OP)\,df \geqq \omega(t).$$

Ist d der Abstand des Punktes O von t, und gilt $a(d+0) > a(R-0)$, wo R den Radius des Kreises K bedeutet, so steht Gleichheit nur, wenn das Gebiet t ein Kreissegment ist. Der Beweis dieses Hilfssatzes folgt ebenso wie in der euklidischen Ebene (s. das in Fußnote 2 zitierte Buch).

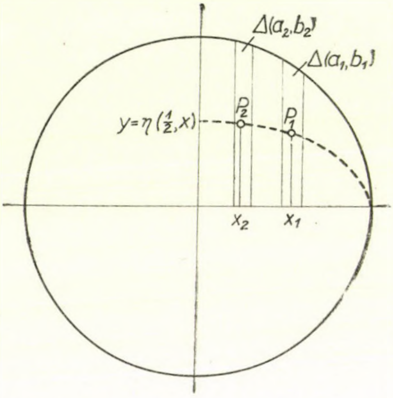


Abb. 2

HILFSSATZ 3. *Wir betrachten ein aus p-Ecken bestehendes regelmäßiges Dreikantmosaik. V sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet, das aus n Flächen des Mosaiks besteht. Wir zerlegen V in n Teilvielecke so, daß in jeder inneren Ecke wenigstens drei Kanten zusammentreffen und die am Rande von V liegenden Ecken der Teilvielecke mit den Ecken des ursprünglichen Mosaiks übereinstimmen. Dann ist die durchschnittliche Eckenzahl $\bar{p}$ der Teilvielecke*

$$\bar{p} \leqq p.$$

Wir bezeichnen die Gesamtkantenzahl und die Gesamteckenzahl der Zerlegung mit k bzw. e, die Anzahl der am Rande von V liegenden 2- bzw. 3-kantigen Ecken mit a bzw. b und die Eckenzahl der einzelnen Teilvielecke mit $p_1, \dots, p_n$. So gilt nach dem Eulerschen Polyedersatz

$$e-k = 1-n = \text{konst.}$$

Anderseits haben wir

$$2k \geqq 3e-a.$$

Aus diesen beiden Relationen geht es klar hervor, daß e und k für keine Zerlegung größer sein kann, als für die reguläre Zerlegung. So ist tatsächlich

$$p_1 + \dots + p_n = 2k-(a+b) \leqq pn.$$

Wenden wir uns jetzt dem Beweis der Ungleichung (1) zu!

Zunächst ergänzen wir das Gebiet V mit weiteren Flächen des Mosaiks zu einem einfach-zusammenhängenden Gebiet V^*, das die Punkte $P_1, \dots, P_n$ überdeckt. Jetzt fügen wir zu V^* noch weitere Mosaikflächen hinzu, die zusammen mit V^* das äußere Parallelgebiet von V^* vom Abstand R überdecken. Das so erhaltene Gebiet bezeichnen wir mit $\bar{V}$ (Abb. 3). Die Anzahl der in $\bar{V}-V$ enthaltenen Mosaikflächen sei k. Wir nehmen noch zu den Punkten $P_1, \dots, P_n$ die Mittelpunkte $P_{n+1}, \dots, P_{n+k}$ dieser k Flächen hinzu. Wir zeigen zunächst die Ungleichung

$$(2) \qquad \int_{\bar{V}} a(d(P))\,df \leqq (n+k)\int_{\tau} a(OP)\,df, \qquad d(P) = \min(PP_1, \dots, PP_{n+k})$$

die ein Sonderfall der zu beweisenden Ungleichung (1) ist. Diese Ungleichung läßt sich ähnlich beweisen, wie der in Fußnote 2 angeführte Satz.

Bezeichnen wir die durch die Punkte $P_1, \ldots, P_{n+k}$ bestimmten Dirichletschen Zellen innerhalb $\bar{V}$ mit $T_1, \ldots, T_{n+k}$, so gilt offenbar

$$\int_{\bar{V}} a(d(P))\,df = \sum_{i=1}^{n+k} \int_{T_i} a(PP_i)\,df.$$

Um die rechtsstehenden Integrale abzuschätzen, schlagen wir um jeden Punkt P_i einen Kreis K mit dem Radius R, und bezeichnen den außerhalb K liegenden Teil von T_i mit T_i' und den außerhalb T_i liegenden Teil von K mit K_i'. Schreiben wir der Kürze halber $\int a(PP_i)df = \int$, so haben wir

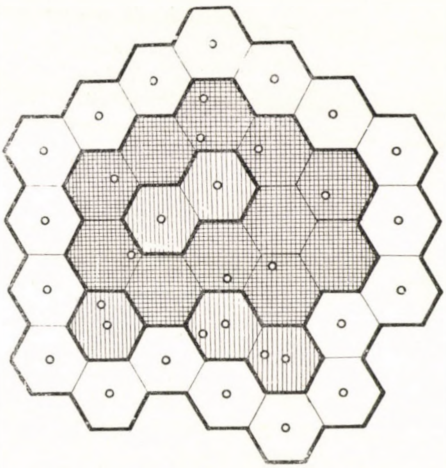


Abb. 3

$$\int_{T_i} = \int_{K} + \int_{T_i'} - \int_{K_i'}.$$

Die aus P_i ausgehenden und durch die Eckpunkte $Q_{i1}, \ldots, Q_{ip_i}$ von T_i hindurchgehenden Halbgeraden zerlegen K_i' in die Teilgebiete $t_{i1}, \ldots, t_{ip_i}$ (von denen einige lehr sein können). Wegen Hilfssatz 2 gilt

$$\int_{K_i'} = \sum_{j=1}^{pi} \int_{t_{ij}} \geqq \sum_{j=1}^{pi} \omega(t_{ij})$$

und folglich

$$\int_{T_i} \leqq \int_{K} + \int_{T_i'} - \sum_{j=1}^{pi} \omega(t_{ij}).$$

$p_1 + \ldots + p_n = N$ sei die Gesamteckenzahl der Dirichletschen Zellen. N ist zugleich die Gesamtzahl der Gebiete t_{ij}, die wir im folgenden mit $t_1, \ldots, t_N$ bezeichnen. Dann gilt

$$\int_{\bar{V}} a(d(P))\,df = \sum_{i=1}^{n+k} \int_{T_i} \leqq (n+k) \int_{K} + \sum_{i=1}^{n+k} \int_{T_i'} - \sum_{i=1}^{N} \omega(t_i).$$

Wegen der Konvexität der Funktion $\omega(x)$ läßt sich die Jensensche Ungleichung anwenden. Setzen wir also $\sum_{i=1}^{n+k} T_i' = T'$, so folgt wegen $\bar{V} = (n+k)K + T' - \sum_{i=1}^{N} t_i$ die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{N} \omega(t_i) \geqq N\omega\left(\frac{t_1 + \ldots + t_N}{N}\right) = N\omega\left(\frac{(n+k)K - \bar{V} + T'}{N}\right).$$

Offensichtlich enthält das innere Parallelgebiet von $\bar V$ vom Radius R von den Punkten P_i nur die Mittelpunkte der in $\bar V - V$ liegenden Mosaikflächen. Deshalb stimmen die am Rande von $\bar V$ liegenden Ecken der Dirichletschen Zellen $T_1, \ldots, T_{n+k}$ mit den am Rande von $\bar V$ liegenden Ecken der ursprünglichen Mosaikflächen überein. So ist nach Hilfssatz 3 $N \leqq p(n+k)$. Wegen $\omega(0)=0$ und der Konvexität von $\omega(x)$ ist $x\omega(1/x)$ eine abnehmende Funktion von x und so gilt

$$\sum_{i=1}^{N} \omega(t_i) \geqq p(n+k)\omega\left(\frac{(n+k)K - \bar V + T'}{p(n+k)}\right).$$

Bezeichnen wir dasjenige Teilgebiet von K das das Segment vom Flächeninhalt $\frac{(n+k)K-\bar V}{p(n+k)}$ zu einem Segment vom Flächeninhalt $\frac{(n+k)K-\bar V+T'}{p(n+k)}$ ergänzt mit s, so erhalten wir

$$\omega\left(\frac{(n+k)K - \bar V + T'}{p(n+k)}\right) = \omega\left(\frac{(n+k)K - \bar V}{p(n+k)}\right) + \int_S .$$

Folglich gilt

$$\int_{\bar V} a\big(d(P)\big)\,df \leqq (n+k)\left[\int_K - p\omega\left(\frac{(n+k)K - \bar V}{p(n+k)}\right)\right] + \sum_{i=1}^{n+k} \int_{T'_i} - p(n+k)\int_S .$$

Da aber wegen der Monotonie von $a(x)$

$$\sum_{i=1}^{n+k} \int_{T'_i} - p(n+k)\int_s \leqq T'a(R) - p(n+k)s \cdot a(R) = 0 \tag{3}$$

ausfällt, und der in den eckigen Klammern stehende Ausdruck mit $\int_\tau a(OP)df$ gleich ist, ist der Beweis der Ungleichung (2) erbracht.

Aus dem obigen Beweis — mit Rücksicht auf die zum Hilfssatz 2 beigefügte Bemerkung — geht es klar hervor, daß für eine Funktion $a(x)$, die der Ungleichung $a(r-0) > a(R-0)$ genügt, in (2) Gleichheit nur dann zutrifft, wenn die um die Punkte P_i mit dem Radius r geschlagenen Kreise in den entsprechenden Dirichletschen Zellen enthalten sind. Ist aber $a(r-0) = a(R-0) > a(R+0)$, dann gilt in (2) das Gleichheitszeichen wegen (3) nur dann, wenn $T'=0$ ist.

Im ersten Fall haben wir

$$T_i \geqq D(\varphi_1) + \ldots + D(\varphi_{p_i}),$$

wo $\varphi_1, \ldots, \varphi_{p_i}$ die durch die Halbgeraden $OQ_1, \ldots, OQ_{p_i}$ definierten Winkel sind und

$$D(x) = \frac{1}{\varkappa}\left[x - 2\arcsin\left(\cos\sqrt{\varkappa}\, r \sin\frac{x}{2}\right)\right]$$

den Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Höhe r bedeutet, dessen Schenkeln einen Winkel x einschließen. Da die Funktion $D(x)$ im Intervall $(0, \pi)$

konvex und daher $xD(1/x)$ monoton abnehmend ist, gilt nach der Jensenschen Ungleichung mit Rücksicht auf $N \leqq p(n+k)$

$$\sum_{i=1}^{n+k} T_i \geqq ND\left(\frac{2\pi(n+k)}{N}\right) \geqq p(n+k)D\left(\frac{2\pi}{p}\right) = \bar{V}.$$

Im zweiten Fall läßt es sich ganz ähnlich zeigen, daß aus $T'=0$ die Abschätzung $\sum_{i=1}^{n+k} T_i \leqq \bar{V}$ folgt.

Da andererseits $\sum_{i=1}^{n+k} T_i = \bar{V}$, ist die durch die Dirichletschen Zellen $T_1, \ldots, T_{n+k}$ bestimmte Zerlegung von $\bar{V}$ im Falle der Gleichheit in (2) zwangsläufig regelmäßig.

Der Beweis der Ungleichung (1) erfolgt in indirekter Weise. Wir nehmen an, daß für gewisse Punkte $P_1, \ldots, P_n$

$$\int_V a(d(P))\,df > n \int_\tau a(OP)\,df.$$

Wegen

$$\int_{\bar{V}} a(d(P))\,df = \int_V a(d(P))\,df + \int_{\bar{V}-V} a(d(P))\,df$$

und

$$\int_{\bar{V}-V} a(d(P))\,df \geqq k \int_\tau a(OP)\,df$$

wäre dann

$$\int_{\bar{V}} a(d(P))\,df > (n+k) \int_\tau a(OP)\,df,$$

was der Ungleichung (2) widerspricht.

Zum Schluß sage ich aufrichtigen Dank Herrn Professor L. FEJES TÓTH, der meine Aufmerksamkeit auf diese Probleme aufgerufen und meine Untersuchungen durch wertvolle Bemerkungen unterstützt hat, und Herrn Professor G. HAJÓS, der durch seine Bemerkungen beim Durchlesen des Manuskriptes mir eine wertvolle Hilfe erwies.

UNIVERSITÄT FÜR CHEMISCHE INDUSTRIE,
MATHEMATISCHER LEHRSTUHL,
VESZPRÉM

(Eingegangen am 1. Februar 1963.)

ÜBER DIE OPERATORENDOMORPHISMEN GEWISSER OPERATORHALBGRUPPEN

Von

O. STEINFELD (Budapest)

(*Vorgelegt von* L. RÉDEI)

§ 1.

Es ist bekannt, daß der Wedderburn—Artinsche Struktursatz der halbeinfachen Ringe mit Hilfe des vollen Operatorendomorphismenrings eines vollständig reduziblen Operatormoduls bewiesen werden kann. (S. VAN DER WAERDEN [6].) Man kann diese Beweismethode für gewisse Operatorhalbmoduln[1] anwenden.

In § 2 bestimmen wir den vollen Operatorendomorphismenhalbring eines Operatorhalbmoduls, der die direkte Summe endlich vieler operatorisomorpher Operatorhalbmoduln ist. (S. Satz 2. 2.) Einige Eigenschaften der Operatorendomorphismen eines einfachen Operatorhalbmoduls sind in Satz 2.4 angegeben.

In § 3 werden die vorigen Ergebnisse für Operatormoduln und Halbringe mit Einselement, welche die direkte Summe endlich vieler operatorisomorphen Linksideale sind, angewendet. Dadurch kann man dem Wedderburn—Artinschen Struktursatz ähnliche „Struktursätze" bekommen. (S. N. JACOBSON [3] Ch. II. § 7 und Satz 3. 4.)

In unserer Arbeit [4] haben wir einen Struktursatz der „halbeinfachen" Semiringe bewiesen. Wir verallgemeinern jetzt diesen Satz für die Semiringe S mit Null- und Einselement, welche die direkte Summe endlich vieler operatorisomorphen Linksideale sind, wodurch sich ergibt, daß die Operatorendomorphismen der additiven Halbgruppe S^+ einen mit S isomorphen Semiring bilden. (S. Satz 4.1.)

§ 2.

Der Vollständigkeit halber wiederholen wir alle für uns notwendigen Begriffe im Zusammenhang mit den Semiringen und Operatorhalbgruppen.

Unter einem *Semiring* verstehen wir eine (nichtleere) Menge $S = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$, in der eine Addition und eine Multiplikation mit den folgenden Eigenschaften definiert sind: (i) S^+ ist eine additive Halbgruppe, (ii) $S^\times$ ist eine multiplikative Halbgruppe, (iii) die Distributivitätsregeln $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta+\alpha\gamma$ und $(\alpha+\beta)\gamma = = \alpha\gamma+\beta\gamma$ sind auch gültig.

Das Element 0 von S heißt *Nullelement*, wenn

$$0+\xi = \xi+0 = \xi \text{ und } 0\xi = \xi 0 = 0$$

für jedes $\xi(\in S)$ gelten. Das Einselement und die multiplikativ idempotenten Elemente von S definiert man wie gewöhnlich.

Wir nennen eine additive Teilhalbgruppe $\mathfrak{l}$ von S *Linksideal*, wenn $\xi\lambda \in \mathfrak{l}$ $(\xi \in S, \lambda \in \mathfrak{l})$ gilt. Analogerweise sind die *Rechtsideale* und die (zweiseitigen) *Ideale* von S definiert.

---

[1] Die nützlichen Definitionen werden zum größten Teil in § 2 angegeben.

Von hier an setzen wir voraus, daß S ein *Semiring mit Nullelement* ist.

Eine kommutative additive Halbgruppe mit Nullelement wird *Halbmodul* genannt. Ist die additive Halbgruppe eines Semiringes mit Nullelement ein Halbmodul, so heißt er ein *Halbring.*

Ist S ein Semiring mit Nullelement, so bildet die Menge aller h-reihigen quadratischen Matrizen über S bezüglich der gewöhnlichen Addition und Multiplikation einen Semiring mit Nullelement, den wir den *vollen Matrizensemiring vom Range* h^2 *über* S nennen und durch S_h bezeichnen werden. Ist S insbesondere ein Halbring, so heißt S_h der *volle Matrizenhalbring vom Range* h^2 *über* S.

Es seien $M=\{\alpha, \beta, \ldots\}$ eine additive Halbgruppe mit dem Nullelement ω und $S=\{a, b, \ldots\}$ ein Semiring mit Nullelement 0. Ist ein Operatorprodukt $a\alpha \in M$ für jedes $a, b, \ldots \in S$ und $\alpha, \beta, \ldots \in M$ mit den Eigenschaften

$$0\alpha=\omega \text{ und } a\omega=\omega, \tag{2. 1}$$

$$a(\alpha+\beta) = a\alpha+a\beta, \tag{2. 2}$$

$$(ab)\alpha=a(b\alpha), \tag{2. 3}$$

$$(a+b)\alpha = a\alpha+b\alpha \tag{2. 4}$$

definiert, so heißt M eine (linksseitige) *Operatorhalbgruppe* oder *S-Halbgruppe.*

Ist M kommutativ, so sprechen wir über einen *S-Halbmodul.*

Ein S-Halbmodul M ist die direkte Summe seiner S-Teilhalbmoduln $M_1, \ldots, M_k$, wenn sich die Elemente von M eindeutig in der Form

$$\mu = \mu_1+\ldots+\mu_k \qquad (\mu_i \in M_i) \tag{2. 5}$$

schreiben lassen und die Komponenten $\mu_1, \ldots, \mu_k$ unabhängig voneinander alle Elemente von $M_1, \ldots, M_k$ durchlaufen.

Da wir die Linksideale eines Halbringes S als (linksseitige) S-Teilhalbmoduln betrachten können, können wir über die *direkte Summe endlich vieler Linksideale* von S sprechen.

Sind M und M' zwei S-Halbmoduln, und gibt es eine eindeutige Abbildung

$$\theta\colon \mu \to \mu\theta \qquad (\mu \in M;\ \mu\theta \in M')$$

von M in M' mit den Eigenschaften

$$(\mu+\nu)\theta = \mu\theta+\nu\theta \qquad (\mu, \nu \in M) \tag{2. 6}$$

und

$$(a\mu)\theta=a(\mu\theta) \qquad (a \in S;\ \mu \in M), \tag{2. 7}$$

so ist θ ein *Operatorhomomorphismus* (*S-Homomorphismus*). Ist die Abbildung eineindeutig und stimmt die Menge der Bildelemente mit M' überein, so sagen wir, daß M und M' als S-Halbmoduln *operatorisomorph* (*S-isomorph*) sind.

Die Menge der Elemente von M, die durch eine S-homomorphe Abbildung θ auf das Nullelement von M' abgebildet sind, heißt der *Kern der Abbildung* θ.

Ist der Kern einer Abbildung Ω der ganze Halbmodul M, so wird Ω *Nullhomomorphismus* genannt.

Es seien M und N zwei S-Halbmoduln. Betrachten wir die Menge $\mathrm{Hom}(M, N)$ aller S-homomorphen Abbildungen von M in N. Man kann in der Menge $\mathrm{Hom}(M, N)$ durch

$$\mu(\theta_1+\theta_2) = \mu\theta_1+\mu\theta_2 \qquad (\mu \in M;\, \theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Hom}(M, N)) \tag{2. 8}$$

eine Addition definieren. Dadurch wird $\mathrm{Hom}(M, N)$ ein Halbmodul, welchen wir den *S-Homomorphismenhalbmodul* von M in N nennen.

Eine S-homomorphe Abbildung von M in sich wird *Operatorendomorphismus (S-Endomorphismus)* genannt. Definiert man in dem S-Homomorphismenhalbmodul $\mathrm{Hom}(M, N)$ durch

$$\mu(\theta_1\theta_2)=(\mu\theta_1)\theta_2 \qquad (\mu \in M;\, \theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Hom}(M, N)) \tag{2. 9}$$

eine Multiplikation, so wird er ein Halbring, der der *volle Operatorendomorphismenhalbring (S-Endomorphismenhalbring) von M* heißt und durch $E(M)$ bezeichnet wird.

SATZ 2. 1. *Es sei M ein S-Halbmodul, der die direkte Summe seiner S-Teilhalbmoduln $M_1, \ldots, M_k$ ist. Der volle S-Endomorphismenhalbring $E(M)$ ist mit dem Halbring aller quadratischen Matrizen (θ_{ij}) $(i, j=1, \ldots, k)$ isomorph, wo θ_{ij} die Elemente von* $\mathrm{Hom}(M_i, M_j)$ *durchlaufen.*

BEWEIS. Wird für θ_{ij} $(\in \mathrm{Hom}(M_i, M_j))$

$$\mu_l\theta_{ij}=\omega \qquad (\mu_l \in M_l;\, i\neq l) \tag{2. 10}$$

vorausgesetzt, so läßt sich natürlich $\mathrm{Hom}(M_i, M_j)$ in $E(M)$ einbetten.

Wenn $\theta \in E(M)$ und $\mu_i \in M_i$ ist, gilt nach (2. 5)

$$\mu_i\theta = \mu_{i1}+\ldots+\mu_{ik} \qquad (\mu_{ij} \in M_j). \tag{2. 11}$$

Es sei $\mu_{ij}=\mu_i\theta_{ij}$, so wird $\theta_{ij} \in \mathrm{Hom}(M_i, M_j)$ und (θ_{ij}) $(i, j=1, \ldots, k)$ eine Matrix vom gewünschten Typ.

Umgekehrt, durch eine Matrix (θ_{ij}) $(\theta_{ij} \in \mathrm{Hom}(M_i, M_j);\, i, j=1, \ldots, k)$ kann man einen S-Endomorphismus folgenderweise definieren: für das Element $\mu = \mu_1+\ldots+\mu_k$ sei

$$\mu\theta = \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{k}\mu_i\theta_{ij}\right). \tag{2. 12}$$

Es ist leicht einzusehen, daß die Abbildung

$$\theta \to (\theta_{ij}) \tag{2. 13}$$

in der Tat ein Isomorphismus ist.

Jetzt betrachten wir einen wichtigen speziellen Fall des Satzes 2. 1.

SATZ 2. 2. *Es sei M ein S-Halbmodul, der die direkte Summe seiner S-isomorphen S-Teilhalbmoduln $M_1, \ldots, M_k$ ist. Der volle S-Endomorphismenhalbring $E(M)$ ist der volle Matrizenhalbring vom Range k^2 über $E(M_1)$. Es besteht weiterhin $E(M_1) \cong E(M_i)$ $(1 \leqq i \leqq k)$.*

Beweis. Da $M_1, \dots, M_k$ S-isomorph sind, kann man k feste S-Isomorphismen

$$\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$$

wählen, welche $M_1, \dots, M_k$ auf M_1 abbilden. Nach Satz 2. 1 genügt es zu zeigen, daß die Abbildung

$$(\theta_{ij}) \to (\Gamma_i^{-1}\theta_{ij}\Gamma_j) \qquad (i, j = 1, \dots, k) \tag{2. 14}$$

einen Isomorphismus auf den vollen Matrizenhalbring vom Range k^2 über $E(M_1)$ liefert.

Die Homomorphieeigenschaft gilt bezüglich der Addition trivialerweise. Da für die Matrizen (θ_{ij}) und (Φ_{ij})

$$(\theta_{ij})(\Phi_{ij}) = \left(\sum_{h=1}^{k} \theta_{ih}\Phi_{hj}\right) \to \left(\Gamma_i^{-1}\left(\sum_{h=1}^{k} \theta_{ih}\Phi_{hj}\right)\Gamma_j\right) =$$

$$= \left(\sum \Gamma_i^{-1}\theta_{ih}\Gamma_h\Gamma_h^{-1}\Phi_{hj}\Gamma_j\right) = (\Gamma_i^{-1}\theta_{ij}\Gamma_j)(\Gamma_i^{-1}\Phi_{ij}\Gamma_j)$$

richtig ist, ist (2. 14) auch bezüglich der Multiplikation eine homomorphe Abbildung.

Jetzt zeigen wir, daß jede Matrix $(\theta^{(i,j)})$ $(\theta^{(i,j)} \in E(M_1);\ i, j = 1, \dots, k)$ des vollen Matrizenhalbringes über $E(M_1)$ als Bildelement in (2. 14) vorkommt. Es ist leicht einzusehen, daß $\Gamma_i\theta^{(i,j)}\Gamma_j^{-1} \in \mathrm{Hom}\,(M_i, M_j)$ und die Matrix $(\Gamma_i\theta^{(i,j)}\Gamma_j^{-1})$ das Urbild von $(\theta^{(i,j)})$ ist.

Sind zuletzt die Bildelemente $(\Gamma_i^{-1}\theta_{ij}\Gamma_j), (\Gamma_i^{-1}\Phi_{ij}\Gamma_j)$ gleich, so bestehen $\Gamma_i^{-1}\theta_{ij}\Gamma_j = \Gamma_i^{-1}\Phi_{ij}\Gamma_j$ $(i, j = 1, \dots, k)$, woraus

$$\theta_{ij} = \Gamma_i\Gamma_i^{-1}\theta_{ij}\Gamma_j\Gamma_j^{-1} = \Gamma_i\Gamma_i^{-1}\Phi_{ij}\Gamma_j\Gamma_j^{-1} = \Phi_{ij}$$

und zugleich $(\theta_{ij}) = (\Phi_{ij})$ folgt.

Endlich sei $\theta_{ii} \in E(M_i)$. Es ist leicht einzusehen, daß die Abbildung

$$\theta_{ii} \to \Gamma_i^{-1}\theta_{ii}\Gamma_i$$

einen Isomorphismus von $E(M_i)$ auf $E(M_1)$ liefert.

Damit ist der Beweis von Satz 2. 2 beendet.

Aus Satz 2. 1 folgt unmittelbar

Satz 2.3. *Es sei der S-Halbmodul M die direkte Summe solcher S-Teilhalbmoduln $M_1, \dots, M_k$, daß zwischen M_i und M_j $(i \neq j)$ die einzige S-homomorphe Abbildung der Nullhomomorphismus ist. Der volle S-Endomorphismenhalbring $E(M)$ ist die direkte Summe von Idealen $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_k$ mit den Eigenschaften*

$$\mathfrak{a}_i \cong E(M_i) \quad \text{und} \quad \mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_j = \Omega \quad (i \neq j) \qquad (1 \leqq i,\ j \leqq k). \tag{2. 15}$$

Wir sagen, daß der Semiring S *multiplikativ linksregulär* ist, wenn in S bezüglich der Multiplikation die linksseitige Kürzungsregel für jedes von Null verschiedenes Element gilt.

Unter einem *Divisionssemiring* (*Divisionshalbring*) verstehen wir einen Semiring (Halbring), in dem die von Null verschiedenen Elemente eine (multiplikative) Gruppe bilden.

Ein S-Halbmodul M heißt *einfach*, wenn seine sämtlichen S-Teilhalbmoduln ω und M sind.

Eine S-isomorphe Abbildung eines S-Halbmoduls *auf* sich wird *S-Automorphismus* genannt.

SATZ 2. 4. *Der volle S-Endomorphismenhalbring $E(M)$ eines einfachen S-Halbmoduls M ist multiplikativ linksregulär.*[2] *Jedes Element $(\neq \Omega)$ von $E(M)$ bildet M auf sich ab und hat das Nullelement ω von M als Kern.*

Dann und nur dann ist jedes Element $(\neq \Omega)$ von $E(M)$ ein S-Automorphismus von M, wenn $E(M)$ ein Divisionshalbring ist.

BEWEIS. Es sei $\theta(\in E(M))$ vom Nullendomorphismus Ω verschieden. Da wegen (2. 7) aus $\mu\theta = \omega$ $(\mu \in M)$ für alle $a(\in S)$

$$(a\mu)\theta = a(\mu\theta) = \omega$$

folgt, bilden die Elemente $\mu(\in M)$ mit $\mu\theta = \omega$ einen S-Teilhalbmodul von M. Wegen der Einfachheit von M hat $\theta(\neq \Omega)$ den Kern ω. Da die Menge $M\theta$ der Bildelemente $\mu\theta$ $(\mu \in M)$ von $\theta(\neq \Omega)$ einen S-Teilhalbmodul $(\neq \omega)$ von M bildet, muß $M\theta = M$ bestehen.

Wenn für die von Ω verschiedenen Elemente θ, Φ_1, $\Phi_2(\in E(M))$ $\theta\Phi_1 = \theta\Phi_2$ gilt, d. h. $\mu\theta\Phi_1 = \mu\theta\Phi_2$ für jedes Element $\mu \in M$. Da $\mu\theta$ sämtliche Elemente von M durchläuft, muß $\Phi_1 = \Phi_2$ bestehen.[3]

Die letzte Behauptung ist trivial.

Damit ist der Beweis beendet.

§ 3.

Es bezeichne R einen (assoziativen) Ring. Man kann die Sätze 2. 1, 2. 2 und 2. 3 statt S-Halbmoduln durch ähnliche Methode bezüglich R-Moduln beweisen. Wir erwähnen nur das Analogon von Satz 2. 2.

SATZ 3. 1. *Es sei M ein R-Modul, der die direkte Summe seiner R-isomorphen R-Teilmoduln $M_1, \dots, M_k$ ist. Der volle R-Endomorphismenring $E(M)$ ist den vollen Matrizenring vom Range k^2 über $E(M_1)$ isomorph. Es besteht weiterhin $E(M_1) \cong \cong E(M_i)$ $(1 \leqq i \leqq k)$.*

Da der volle R-Endomorphismenring eines einfachen R-Moduls ein Schiefkörper ist, bekommt man den wohlbekannten

SATZ 3. 2. (S. z. B. VAN DER WAERDEN [6] § 119.) *Der volle R-Endomorphismenring eines vollständig reduziblen R-Moduls ist einem Ring isomorph, der eine ringtheoretische direkte Summe von endlich vielen vollen Matrizenringen über einem Schiefkörper ist.*

---

[2] Wir haben in [5] bewiesen, daß die Charakteristik eines multiplikativ linksregulären Semiringes 0, 1 oder eine Primzahl ist.

[3] Herr DR. G. GRÄTZER machte mich darauf aufmerksam, daß diejenigen Endomorphismen einer allgemeinen algebraischen Struktur S, die S auf sich abbilden, eine linksreguläre Halbgruppe bilden. (S. [2] § 6.)

Es ist bekannt, daß der volle R-Endomorphismenring eines Ringes R mit Einselement — als einen R-Modul aufgefaßt — mit R isomorph ist.

Ähnlicherweise beweist man den

HILFSSATZ 3. 3. Besitzt ein Halbring S ein Einselement, so ist der volle S-Endomorphismenhalbring $E(S^+)$ des linksseitigen S-Halbmoduls S^+ mit S isomorph.

Aus Satz 2. 2 und Hilfssatz 3. 3 ergibt sich:

SATZ 3. 4. *Ist der Halbring S mit Einselement die direkte Summe seiner Linksideale $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_k$, die als S-Halbmoduln S-isomorph sind, so ist S mit dem vollen Matrizenhalbring vom Range k^2 über $E(\mathfrak{l}_1^+)$ isomorph.*

Ähnlicherweise lassen sich die „Struktursätze" über einen Ring mit Einselement, der die direkte Summe endlich vieler operatorisomorphen Linksideale ist, bzw. über die vollständig reduziblen Ringe mit Einselement beweisen. (S. N. JACOBSON [3] II. Ch. § 7 bzw. VAN DER WAERDEN [6] §§ 119, 120.)

§ 4.

Definiert man die Summe der Endomorphismen Γ, Δ einer additiven nichtkommutativen Halbgruppe H durch

$$\alpha(\Gamma+\Delta) = \alpha\Gamma+\alpha\Delta \qquad (\alpha \in H),$$

so wird $\Gamma+\Delta$ im allgemeinen kein Endomorphismus von H sein.[4] Dem entsprechend läßt sich die Methode des vorigen Paragraphen für Semiringe im allgemeinen nicht anwenden.

Ein Semiring S mit Nullelement heißt die *starke direkte Summe*

$$S = S_1 \dot{+} \ldots \dot{+} S_k$$

der Teilsemiringe $S_1, \ldots, S_k$ mit Nullelement, wenn jedes Element σ von S in der Form

$$\sigma = \sigma_1 + \ldots + \sigma_k \tag{4. 1}$$

darstellbar ist, wo die σ_i unabhängig voneinander alle Elemente von S_i $(i=1, \ldots, k)$ durchlaufen, und in (4. 1) die Komponenten $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ durch σ eindeutig bestimmt und untereinander vertauschbar sind.

SATZ 4. 1. *Ist der Semiring S mit Null- und Einselement die starke direkte Summe seiner Linksideale $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_k$, die als S-Halbgruppen S-isomorph sind, so bilden die S-Endomorphismen von S^+ einen mit S isomorphen Semiring.*

Ferner ist S mit dem vollen Matrizensemiring vom Range k^2 über einem geeigneten Semiring mit Einselement isomorph.

Zum Beweis benützen wir einige Hilfssätze.

---

[4] Wegen $\alpha(\Gamma+\Delta) = \alpha\Gamma+\alpha\Delta$ und der Bedingung (2. 6) müßte

$$(\alpha+\beta)(\Gamma+\Delta) = \alpha\Gamma+\alpha\Delta+\beta\Gamma+\beta\Delta = \alpha\Gamma+\beta\Gamma+\alpha\Delta+\beta\Delta$$

bestehen, was im allgemeinen ungültig ist.

In seiner Arbeit [1] hat O. FRINK bewiesen, daß die Summe von zwei Endomorphismen einer s. g. symmetrischen additiven algebraischen Struktur ein Endomorphismus ist.

HILFSSATZ 4. 2. (S. STEINFELD [4] Hilfssatz 1.) Wenn der Semiring S mit Null- und Einselement die starke direkte Summe von Linksidealen $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_k$ ist, und das Einselement ε in der Form

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_k \qquad (\varepsilon_i \in \mathfrak{l}_i) \tag{4. 2}$$

darstellbar ist, so gilt

$$\varepsilon_i \varepsilon_j = \begin{cases} \varepsilon_i \text{ für } i=j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases} \tag{4. 3}$$

und

$$\mathfrak{l}_i = S\varepsilon_i. \tag{4. 4}$$

HILFSSATZ 4. 3. (Vgl. N. JACOBSON [3] Ch. II. § 7 Prop. 4.) Die Linksideale $S\varepsilon_i$, $S\varepsilon_j$ $(\varepsilon_i^2 = \varepsilon_i, \varepsilon_j^2 = \varepsilon_j)$ eines Semiringes S mit Nullelement sind dann und nur dann als S-Halbgruppen S-isomorph, wenn in S Elemente δ_{ij}, δ_{ji} mit den Eigenschaften

$$\varepsilon_i \delta_{ij} \varepsilon_j = \delta_{ij}, \quad \varepsilon_j \delta_{ji} \varepsilon_i = \delta_{ji} \tag{4. 5}$$

und

$$\delta_{ij} \delta_{ji} = \varepsilon_i, \quad \delta_{ji} \delta_{ij} = \varepsilon_j \tag{4. 6}$$

existieren.

Über den Beweis siehe l. c. in [3].

HILFSSATZ 4. 4. (Vgl. N. JACOBSON [3] Ch. II. § 7 Prop. 3.) Es sei $S\varepsilon (\varepsilon^2 = \varepsilon)$ ein Linksideal eines Semiringes S mit Nullelement. Die S-Endomorphismen der additiven S-Halbgruppe $S\varepsilon$ bilden einen mit $\varepsilon S \varepsilon$ isomorphen Semiring.

BEWEIS. Ist Γ ein S-Endomorphismus von $S\varepsilon$, welches das Element ε in $\gamma\varepsilon (\in S\varepsilon)$ überführt, so führt Γ ein beliebiges Element $\alpha\varepsilon (\in S\varepsilon)$ in

$$(\alpha\varepsilon)\Gamma = \alpha\varepsilon(\varepsilon\Gamma) = \alpha\varepsilon\gamma\varepsilon = \alpha\varepsilon \cdot \varepsilon\gamma\varepsilon \tag{4. 7}$$

über. Daraus folgt insbesondere

$$\varepsilon\Gamma = \gamma\varepsilon = \varepsilon\gamma\varepsilon. \tag{4. 8}$$

Anderseits: Für ein beliebiges $\varepsilon\delta\varepsilon \, (\in \varepsilon S \varepsilon)$ ist die Abbildung

$$\Delta: \alpha\varepsilon \to \alpha\varepsilon \cdot \varepsilon\delta\varepsilon \qquad (\alpha\varepsilon \in S\varepsilon) \tag{4. 9}$$

offensichtlich ein S-Endomorphismus von $S\varepsilon$. Man kann die Menge $E(S\varepsilon)$ aller S-Endomorphismen von $S\varepsilon$ durch

$$\Gamma \to \varepsilon\Gamma = \varepsilon\gamma\varepsilon \qquad (\Gamma \in E(S\varepsilon)) \tag{4. 10}$$

ein-eindeutig auf $\varepsilon S \varepsilon$ abbilden.

Definiert man in $E(S\varepsilon)$ die Addition und die Multiplikation gewöhnlicherweise, so liefert (4. 10) eine isomorphe Abbildung von $E(S\varepsilon)$ auf $\varepsilon S \varepsilon$.

BEWEIS des Satzes 4. 1. Zuerst zeigen wir die zweite Behauptung. Nach Hilfssatz 4. 2 gilt

$$S = S\varepsilon_1 \dotplus \ldots \dotplus S\varepsilon_k, \tag{4. 11}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_k \qquad (\varepsilon_i^2 = \varepsilon_i; \; \varepsilon_i \varepsilon_j = 0 \; (i \neq j); \; i, j = 1, \ldots, k), \tag{4. 12}$$

wo ε das Einselement und $S\varepsilon_1, \dots, S\varepsilon_k$ die S-isomorphen Linksideale von S bezeichnen. Nach Hilfssatz 4. 3 kann man voraussetzen, daß solche Elementepaare δ_{i1} und δ_{1i} $(i=1, \dots, k)$ ausgewählt sind, die den Bedingungen

$$\varepsilon_i \delta_{i1} \varepsilon_1 = \delta_{i1}, \quad \varepsilon_1 \delta_{1i} \varepsilon_i = \delta_{1i} \qquad (i=1, \dots, k), \tag{4. 13}$$

$$\delta_{i1} \delta_{1i} = \varepsilon_i, \quad \delta_{1i} \delta_{i1} = \varepsilon_1 \qquad (i=1, \dots, k) \tag{4. 14}$$

genügen.

Betrachten wir die Abbildung

$$\alpha \to (\delta_{1i} \alpha \delta_{j1}) \qquad (\alpha \in S;\ i, j=1, \dots, k), \tag{4. 15}$$

wo die rechte Seite eine k-reihige quadratische Matrix mit Elementen $\delta_{1i}\alpha\delta_{j1}$ im Semiring $\varepsilon_1 S \varepsilon_1$ bezeichnet. (Nach Hilfssatz 4. 4 kann man $\varepsilon_1 S \varepsilon_1 = E(S\varepsilon_1^+)$ voraussetzen.) Durch (4. 15) wird S in den vollen Matrizensemiring $(\varepsilon S \varepsilon_1)_k$ vom Range k^2 über $\varepsilon_1 S \varepsilon_1$ abgebildet, und die Homomorphieeigenschaft gilt bezüglich der Addition trivialerweise. Da infolge (4. 12), (4. 14) und (4. 15) für die Elemente $\alpha, \beta (\in S)$

$$\alpha\beta \to (\delta_{1i}\alpha\beta\delta_{j1}) = (\delta_{1i}\alpha\varepsilon\beta\delta_{j1}) = \left(\sum_{r=1}^{k} \delta_{1i}\alpha\varepsilon_r\beta\delta_{j1} \right) =$$

$$= \left(\sum_{r=1}^{k} \delta_{1i}\alpha\delta_{r1}\delta_{1r}\beta\delta_{j1} \right) = (\delta_{1i}\alpha\delta_{j1})(\delta_{1i}\beta\delta_{j1})$$

richtig ist, ist (4. 15) auch bezüglich der Multiplikation eine homomorphe Abbildung.

Wir zeigen jetzt, daß jede Matrix $(\varrho^{(i,j)})$ $(\varrho^{(i,j)} \in \varepsilon_1 S \varepsilon_1;\ i, j = 1, \dots, k)$ von $(\varepsilon_1 S \varepsilon_1)_k$ als Bildelement in (4. 15) vorkommt. Wegen (4. 11), (4. 14_2), (4. 15) und der Orthogonalität der idempotenten Elemente $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ hat $(\varrho^{(i,j)})$ in (4. 15) das Urbild $\sum_{i,j=1}^{k} \delta_{i1}\varrho^{(i,j)}\delta_{1j}$.

Sind zuletzt die Bildelemente $(\delta_{1i}\alpha\delta_{j1}), (\delta_{1i}\beta\delta_{j1})$ $(\alpha, \beta \in S)$ gleich, so bestehen $\delta_{1i}\alpha\delta_{j1} = \delta_{1i}\beta\delta_{j1}$ $(i, j=1, \dots, k)$, woraus wegen (4. 14_1)

$$\varepsilon_i\alpha\varepsilon_j = \varepsilon_i\beta\varepsilon_j \qquad (i, j = 1, \dots, k) \tag{4. 16}$$

folgt. Da wegen (4. 16) und (4. 12)

$$\alpha = \varepsilon\alpha\varepsilon = \sum_{i,j=1}^{k} \varepsilon_i\alpha\varepsilon_j = \sum_{i,j=1}^{k} \varepsilon_i\beta\varepsilon_j = \varepsilon\beta\varepsilon = \beta$$

gilt, ist auch die Ein-eindeutigkeit der Abbildung (4. 15) bewiesen.

Da die erste Behauptung des Satzes unmittelbar aus Hilfssatz 4. 4 folgt, ist der Beweis von Satz 4. 1 beendet.

Aus Satz 1 von unserer Arbeit [4] und Hilfssatz 4. 4 bekommt man

SATZ 4. 5. *Ist der Semiring S mit Null- und Einselement die starke direkte Summe endlich vieler minimaler Linksideale, so bilden die S-Endomorphismen von S^+ einen mit S, — d. h. mit der starken direkten Summe von endlich vielen Semiringen, deren* *jeder einem vollen Matrizensemiring über einem Divisionssemiring isomorph ist und die einander paarweise annullieren, — isomorphen Semiring.*

MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT
DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN,
BUDAPEST

(Eingegangen am 5. Februar 1963.)

Literaturverzeichnis

[1] O. FRINK, Symmetric and self-distributive systems, *Amer. Math. Monthly*, **62** (1955), S. 697–707.
[2] G. GRÄTZER, Some results on universal algebras (vervielfältigte Arbeit), Budapest, 1962.
[3] N. JACOBSON, Structure of rings, *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.*, **37** (1956).
[4] O. STEINFELD, Über die Struktursätze der Semiringe, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **10** (1959), S. 149–155.
[5] O. STEINFELD, Über Semiringe mit multiplikativer Kürzungsregel, *Acta Sci. Math. Szeged*, **24** (1963), S. 190–195.
[6] B. L. VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra II* (Berlin, 1940).

ON THE MEAN VALUES OF AN ENTIRE FUNCTION REPRESENTED BY DIRICHLET SERIES

By

P. K. KAMTHAN (Pilani, India)

(*Presented by* P. TURÁN)

1. Introduction. Let the function defined by $f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}$ $(s=\sigma+it;$ $0=\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_n\to\infty;\ \overline{\lim}_{n\leftarrow\infty} n/\lambda_n<\infty)$ represent an entire function. Suppose further that $M(\sigma)$ and $\mu(\sigma)$ represent respectively the maximum modulus of $f(s)$ in the strip $-\infty<t<\infty$ and the maximum term of $f(s)$. If $\log|a_{n-1}/a_n|/(\lambda_n-\lambda_{n-1})\leqq$ $\leqq\sigma<\log|a_n/a_{n+1}|/(\lambda_{n+1}-\lambda_n)$, then $\mu(\sigma)=|a_n|e^{\sigma\lambda_n}$ and $\lambda_n=\lambda_{\nu(\sigma)}$. Again, if $f(s)$ is of order (R) ϱ and lower order λ, then it is known that

$$\overline{\underline{\lim}}_{\sigma\to\infty}\frac{\log\log M(\sigma)}{\sigma}=\overline{\underline{\lim}}_{\sigma\to\infty}\frac{\log\log\mu(\sigma)}{\sigma}=\begin{cases}\varrho\\ \lambda\end{cases}. \tag{1. 1}$$

Further, suppose $S(R)$ denotes the horizontal strip of width $2R$. Define:

$$M_s(\sigma)=\max_{|t-t_0|\leqq R}|f(\sigma+it)|\qquad (t_0\geqq 0,\text{ but fixed}).$$

Then MANDELBROJT [2] and RAHMAN [3] have proved respectively:

$$\overline{\underline{\lim}}_{\sigma\to\infty}\frac{\log\log M_s(\sigma)}{\sigma}=\begin{cases}\varrho\\ \lambda\end{cases}\qquad (0\leqq\lambda\leqq\infty,\ 0\leqq\varrho\leqq\infty). \tag{1. 2}$$

Define:

$$A(\sigma)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(s)|^2\,dt. \tag{1. 3}$$

Then ([4], p. 303) for all $\sigma<\infty$

$$A(\sigma)=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 e^{2\sigma\lambda_n}. \tag{1. 4}$$

Also let, for any k $(0<k<\infty)$,

$$m_k(\sigma)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2Te^{k\sigma}}\int_0^{\sigma}\int_{-T}^{T}|f(x+it)|^2 e^{kx}\,dx\,dt. \tag{1. 5}$$

Our aim in this paper is to establish certain results which furnish the values of ϱ and λ obtainable from the means defined by (1. 3) and (1. 5).

2. THEOREM 1. *For an entire function* $f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}$ *where* $\log|a_{n-1}/a_n|/$ $/(\lambda_n-\lambda_{n-1})$ *is a non-decreasing function of n for* $n>n_0$ *(at least), we have*

$$\varlimsup_{\sigma\to\infty} \frac{\log\log A(\sigma)}{\sigma} = \begin{cases}\varrho \\ \lambda\end{cases}. \tag{2. 1}$$

Also making use of Theorem 1, we have

THEOREM 2.

$$\varlimsup_{\sigma\to\infty} \left\{\frac{A(\sigma)}{m_k(\sigma)}\right\}^{\frac{1}{\sigma}} = \begin{cases}e^{\varrho} \\ e^{\lambda}\end{cases}. \tag{2. 2}$$

3. PROOF OF THEOREM 1. Let $t_0=0$. Then from (1. 3) we have

$$A(\sigma)\leqq M_s(\sigma).$$

Therefore

$$\varlimsup_{\sigma\to\infty} \frac{\log\log A(\sigma)}{\sigma} \leqq \varlimsup_{\sigma\to\infty} \frac{\log\log M_s(\sigma)}{\sigma} = \begin{cases}\varrho \\ \lambda\end{cases}; \tag{3. 1}$$

by virtue of (1. 2). Again from (1. 4)

$$A(\sigma)>|a_n|^2 e^{2\sigma\lambda_n}.$$

Further, if $\log|a_{n-1}/a_n|/(\lambda_n-\lambda_{n-1}) \leqq \sigma < \log|a_n/a_{n+1}|/(\lambda_{n+1}-\lambda_n)$, then

$$\mu(\sigma)=|a_n|e^{\sigma\lambda_n}.$$

Hence

$$A(\sigma)>[\mu(\sigma)]^2.$$

So that

$$\varlimsup_{\sigma\to\infty} \frac{\log\log A(\sigma)}{\sigma} \geqq \varlimsup_{\sigma\to\infty} \frac{\log\log \mu(\sigma)}{\sigma} = \begin{cases}\varrho \\ \lambda\end{cases}; \tag{3. 2}$$

by virtue of (1. 1); and the result now follows from (3. 1) and (3. 2).

4. To prove Theorem 2, we require the following lemmas:

LEMMA 1. *If the conditions of Theorem* 1 *are satisfied, then*

$$\varlimsup_{\sigma\to\infty} \frac{\log\log M_k(\sigma)}{\sigma} = \begin{cases}\varrho \\ \lambda\end{cases}.$$

PROOF. From (1. 3) and (1. 5), we have

$$m_k(\sigma)=\frac{1}{e^{k\sigma}}\int_0^{\sigma} A(x)e^{kx}\,dx \leqq (1+o(1))k^{-1}A(\sigma) \qquad \text{(for large } \sigma\text{)}$$

since from (1. 4) it follows that $A(\sigma)$ is an increasing function of σ. Hence

$$\varlimsup_{\sigma\to\infty} \frac{\log\log m_k(\sigma)}{\sigma} \leqq \varlimsup_{\sigma\to\infty} \frac{\log\log A(\sigma)}{\sigma} = \begin{cases}\varrho \\ \lambda\end{cases}; \tag{4. 1}$$

from Theorem 1. Again, for $\eta > 0$

$$m_k(\sigma+\eta) = \frac{1}{e^{(\sigma+\eta)k}} \int_0^{\sigma+\eta} A(x)e^{kx}\,dx \geqq k^{-1}A(\sigma)(1-e^{-k\eta}),$$

and so

$$\varliminf_{\sigma\to\infty} \frac{\log\log m_k(\sigma)}{\sigma} \geqq \begin{cases} \varrho \\ \lambda \end{cases}; \tag{4. 2}$$

and the lemma follows from (4. 1) and (4. 2).

LEMMA 2. $\log A(\sigma)$ *is a convex function of* σ.

PROOF. We have

$$\frac{d^2}{d\sigma^2}(\log A(\sigma)) = \frac{A''(\sigma)A(\sigma)-(A'(\sigma))^2}{(A(\sigma))^2},$$

and by Schwartz's inequality ([1], p. 21)

$$(A'(\sigma))^2 = (\sum |a_n| 2\lambda_n e^{2\sigma\lambda_n})^2 \leqq (\sum |a_n| e^{2\sigma\lambda_n})(\sum |a_n| 4\lambda_n^2 e^{2\sigma\lambda_n}) = A(\sigma)A''(\sigma),$$

and so the lemma follows.

LEMMA 3. *For any finite positive* k, $e^{k\sigma}A(\sigma)$ *is a convex function of* $e^{k\sigma}m_k(\sigma)$.

PROOF. We have

$$\frac{d(e^{k\sigma}A(\sigma))}{d(e^{k\sigma}m_k(\sigma))} = \frac{(d/d\sigma)(e^{k\sigma}A(\sigma))}{(d/d\sigma)(e^{k\sigma}m_k(\sigma))} = \frac{ke^{k\sigma}A(\sigma)+e^{k\sigma}A'(\sigma)}{e^{k\sigma}A(\sigma)} = k + \frac{A'(\sigma)}{A(\sigma)},$$

and this increases with σ, since by lemma 2, $\log A(\sigma)$ is a convex function of σ.

LEMMA 4. *This is:*

$$\lim_{\sigma\to\infty} \frac{\log m_k(\sigma)}{\sigma} = \infty.$$

PROOF. We have

$$m_k(\sigma) = \frac{1}{e^{k\sigma}} \int_0^{\sigma} A(x)e^{kx}\,dx > \frac{1}{e^{k\sigma}} \int_{\sigma-2}^{\sigma} A(x)e^{kx}\,dx > \left(\frac{1-e^{-2k}}{k}\right) A(\sigma-2).$$

Therefore for sufficiently large σ

$$\frac{\log m_k(\sigma)}{\sigma} > \frac{\log A(\sigma-2)}{(1+o(1))(\sigma-2)} + o(1),$$

and since $\log A(\sigma)/\sigma \to \infty$ as $\sigma\to\infty$, the lemma follows.

5. PROOF OF THEOREM 2. Let the upper limit in (2. 2) be N_k. Suppose $N_k < \infty$. Further it follows from the definitions of $A(\sigma)$ and $m_k(\sigma)$ that

$$\log(e^{k\sigma}m_k(\sigma)) = \log(e^{k\sigma_0}m_k(\sigma_0)) + \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{A(x)}{m_k(x)}\,dx.$$

So, if ε is an arbitrarily small positive number, we find that

$$\log\left(e^{k\sigma} m_k(\sigma)\right) < O(1) + \int_{\sigma_0}^{\sigma} (N_k+\varepsilon)^x \, dx = O(1) + \frac{(N_k+\varepsilon)^\sigma}{\log(N_k+\varepsilon)} .$$

Therefore using lemma 4, we find that

$$\left(1+o(1)\right) \log m_k(\sigma) < \left(1+o(1)\right) \frac{(N_k+\varepsilon)^\sigma}{\log(N_k+\varepsilon)} ,$$

or, $N_k \geqq e^\sigma$ which obviously holds if $N_k = \infty$.

Again from lemma 3, it follows that $A(\sigma)/m_k(\sigma)$ is an increasing function of σ and therefore for $0 < N_k < \infty$, $\eta > 0$

$$\log\left(e^{(\sigma+\eta)k} m_k(\sigma+\eta)\right) > \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} \frac{A(x)}{m_k(x)} \, dx > \frac{\eta A(\sigma)}{m_k(\sigma)} > \eta (N_k - \varepsilon)^\sigma ,$$

for a sequence of values of $\sigma \to \infty$. Consequently, making use of lemma 4 again, we find that

$$e^\varrho \geqq N_k ,$$

which holds if $N_k = 0$. If $N_k = \infty$, it then follows that $\varrho = \infty$. This proves that $N_k = e^\varrho$. The proof that η_k, the lower limit in (2. 2), is equal to e^λ is similar and is omitted.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
BIRLA COLLEGE, PILANI, RAJ., INDIA

(Received 11 February 1963)

References

[1] E. F. BECKENBACK and R. BELLMAN, *Inequalities* (Springer-Ver., Berlin, 1961).
[2] S. MANDELBROJT, Series lacunaires, *Actua. Scient. Industrielles*, **305** (Paris, Harmann, 1936).
[3] Q. I. RAHMAN, On entire functions defined by Dirichlet series, *Proc. Amer. Math. Soc*, **10** (1959), pp. 213–215.
[4] E. C. TITCHMARSH, *Theorey of Functions* (Oxford, 1952).

MAJORATION DU GRADIENT DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION $\varDelta u - au'_t = f$. I*

Par

G. ADLER (Budapest)

(*Présenté par* A. RÉNYI)

Introduction

Le problème de la majoration du gradient des solutions des équations aux dérivées partielles se pose, grosso modo, ainsi: on doit établir une borne supérieure du module du gradient de la solution, en fonction des conditions initiales et aux limites d'un part, des données géométriques du domaine d'autre part, sans recourir au calcul explicite de la solution elle-même. Cette majoration *a priori* est de grande importance tant du point de vue théorique, que pratique.

Par exemple, dans un corps solide soumis à une variation thermique, les tensions qui se développent, sont fonctions du gradient de la température. Ainsi, pour pouvoir établir que ces tensions ne surpassent pas certaines valeurs critiques dans un corps de forme donnée, sous l'influence des effets thermiques bien définis, il est nécessaire de connaître le maximum du module du gradient thermique.

On connaît la difficulté du problème de la majoration du gradient: les résultats jusqu'ici obtenus, malgré leur grande importance, n'ont permis de démontrer que l'existence des constantes figurant dans les majorations (voir p. e. [7] et la bibliographie y citée).

L'auteur a déjà précédemment réussi à donner des majorationes relativement simples, pour les fonctions harmoniques; ces majorations contiennent seulement les caractéristiques géométriques les plus simples du domaine, sous une forme explicite (voir [2]); ces résultats sont reproduits dans le § 3 du travail présent. Les résultats des §§ 4 resp. 5 et 6 ont été déjà publiés sans démonstration dans les notes [3] resp. [4]. — L'auteur a aussi réussi, en s'appuyant sur ces résultats concernant les fonctions harmoniques, à déterminer explicitement les constantes qui figurent dans une majoration de M. C. MIRANDA, relative aux fonctions biharmoniques (voir [6] et [5]).

Dans ce travail nous nous occuperons de l'équation inhomogène de la chaleur. Il contient aussi, comme cas particuliers, les recherches relatives à l'équation homogène de la chaleur, à l'équation de Poisson et — comme nous l'avons déjà mentionné — celles relatives à l'équation de Laplace.

Nous attirons l'attention sur le fait que dans ce travail on ne fait d'usage que de considérations élémentaires géométriques, de formules de l'analyse élémentaire et des principes du maximum.

---

* L'article originel, composé de six paragraphes, a été divisé en deux parties en raisons techniques. La partie II sera publiée dans le fascicule suivant du périodique présent. Ces deux parties forment un article complet. Ainsi p. e. l'Introduction s'occupe aussi des paragraphes de la partie II, et certaines définitions figurant dans le § 1 ne seront utilisées que dans la partie II. La table des matières sera contenue dans la partie II.

La méthode appliquée semble être aussi extensible aux équations elliptiques et paraboliques plus générales.

La table des matières indique le plan du travail que nous présentons.

Nous aurons besoin de certaines majorations relatives à des fonctions auxiliaires, que nous définirons. Ces majorations peuvent être obtenues à partir des formes explicites de ces fonctions. Les vérifications ne sont pas toujours très simples; mais en considérant que ces vérifications n'ont pas d'intérêt par rapport au problème principal, ces fonctions auxiliaires et les majorations relatives seront données aux commencements des paragraphes correspondants, sans leurs démonstrations, sous forme de tableaux. Ces fonctions auxiliaires seront définies par les équations différentielles et par les conditions initiales et aux limites, imposées à ces fonctions. On supposera toujours que ces fonctions sont bornées: dans le cas où les conditions précédentes ne définissent pas la fonction en question sans équivoque, cette condition supplémentaire (c'est-à-dire que les fonctiones sont bornées) garantie l'unicité.

Nous avons énoncé les THÉORÈMES 13 et 14 sous la forme la plus générale possible. Par un choix particulier des fonctions majorantes qui figurent dans ces théorèmes, on peut obtenir des majorations simples, contenant les données géométriques du domaine sous une forme explicite. Le COROLLAIRE du § 6 donne un exemple: on y voit la manière d'appliquer ces théorèmes très généreaux dans un cas particulier.

§ 1. Définitions

Soient Ω un domaine de l'espace $(x_1, \dots, x_n)$ à n dimensions $(n=2, 3, \dots)$ (on entend par domaine un ensemble connexe ouvert), et Σ sa frontière. On désignera par ν la normale intérieure de Σ.

Si Ω est borné, alors désignons son diamètre par d. (Donc, par définition, où d figure, il est supposé que $d<\infty$.) Si le domaine n'est pas borné, alors l'ensemble composé des points de la frontière Σ et des points à l'infini (au sens projectif) du domaine fermé $\Omega+\Sigma$ sera nommé *frontière totale* du domaine Ω, et désigné par $\bar{\Sigma}$. Pour un Ω borné, par définition, $\bar{\Sigma}\equiv\Sigma$.

P signifie le point variable de l'espace.

Soit

$$L=\max_{P,Q\in\Sigma} l(P, Q),$$

où $l(P, Q)$ est la distance minimum des points P et Q, mesurée sur la surface Σ.

Nous dirons que le domaine Ω est de classe $\mathfrak{A}(\varrho)$, si l'on peut trouver un nombre $\varrho>0$ tel qu'il existe pour chaque point P de Σ une hypersphère d'appui de rayon ϱ, dont P est situé sur la frontière et dont l'intérieur ne contient aucun point de Ω.

Supposons qu'il existe en chaque point P de Σ un hyperplan tangent Θ_P de la surface Σ. Choisissons un système cartésien $(\xi_1^P, \dots, \xi_n^P)$[1] ayant pour origine le point P, dont les axes $\xi_1^P, \dots, \xi_{n-1}^P$ sont situés dans l'hyperplan Θ_P et dont l'axe positif ξ_n^P possède la direction de la normale intérieure de Σ. Désignons par $\sigma_P(\varrho)$ le voisinage du point P sur la surface Σ obtenu par l'intersection de Σ avec le cylindre $\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i^2=\varrho^2,\ -\infty<\xi_n<+\infty\right\}$.

---

[1] On supprimera l'indice supérieur P, si cela ne peut pas donner lieu à équivoque.

Nous dirons que le domaine Ω est de classe $\mathfrak{B}(\varrho)$, s'il existe en chaque point de sa frontière Σ un hyperplan tangent à Σ, de plus, s'il existe pour chaque point P de Σ

1° une hypersphère Γ_i de rayon ϱ dont P est situé sur la frontière et dont l'intérieur se situe dans Ω;

2° une hypersphère Γ_e de rayon ϱ dont P est situé sur la frontière, laquelle contient au moins un point n'appartenant pas à Ω et ne contient dans son intérieur aucun point du voisinage $\sigma_P(\varrho)$ de P.

Représentons l'extérieur de l'hypersphère $x_1^2+\ldots+x^2, = 1$ par la représentation

$$\tilde{x}_i = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2}}\right)\frac{x_i}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2}} \qquad (i=1, \ldots, n)$$

sur l'anneau sphérique limité par les hypersphères $x_1^2+\ldots+x_n^2 = \frac{1}{4}$ et $x_1^2+\ldots$ $\ldots+x_n^2 = 1$. Dans cette représentation aux points à l'infini (au sens projectif) de l'espace correspondent les points de l'hypersphère de rayon $\frac{1}{2}$, tandis que l'hypersphère de rayon 1 correspond à elle-même. Nous faisons correspondre à la fonction $f(P)$ définie à l'extérieur de l'hypersphère de rayon 1 la fonction $\tilde{f}$, définie dans l'anneau sphérique, par la relation

$$\tilde{f}(\tilde{P}) = f(P),$$

où $\tilde{P}$ est l'image de P. Nous dirons que la fonction $f(P)$ est continue au point à l'infini P_∞ si la fonction image l'est au point $\tilde{P}_\infty$ correspondant à P_∞.

On peut vérifier aisément que si $\Omega\in\mathfrak{B}(\varrho)$, alors une droite, parallèle à la normale au point P de Σ, ne peut contenir tout au plus qu'un seul point du voisinage $\sigma_P(\varrho)$ de P. Soit

$$\xi_n = \varphi_P(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \qquad \left(\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2 \leqq \varrho^2\right)$$

l'équation de $\sigma_P(\varrho)$, dans le système de coordonnées appartenant au point P. En vertu de notre assertion ci-dessus, φ_P est une fonction univalente.

La fonction $F(R)$ $(R\in\Sigma)$ définie sur la surface Σ, où

$$R = (\xi_1^P, \ldots, \xi_{n-1}^P, \xi_n^P = \varphi_P(\xi_1^P, \ldots, \xi_{n-1}^P))$$

est le point variable de Σ, sera représentée dans le voisinage $\sigma_P(\varrho)$ sous la forme[2]

$$F(R) = F_P(\xi_1^P, \ldots, \xi_{n-1}^P).$$

Nous dirons que la fonction F, définie sur la surface Σ, appartient à la classe $\mathcal{H}_\varrho(\alpha, K)$, s'il existe deux constantes $K>0$, $0<\alpha\leqq 1$, indépendantes de P, telles que

$$|F_P(\xi_1', \ldots, \xi_{n-1}') - F_P(\xi_1'', \ldots, \xi_{n-1}'')| \leqq K\left[\sum_{i=1}^{n-1} (\xi_i' - \xi_i'')^2\right]^{\alpha/2},$$

où

$$\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i'^2 \leqq \varrho^2, \qquad \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i''^2 \leqq \varrho^2.$$

---

[2] Ci cela ne donne pas lieu a équivoque, l'indice P sera supprimé partout.

Nous introduirons les notations suivantes pour la fonction $F(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, t)$ définie sur la partie $\Sigma_T \equiv \Sigma \times (0 \leqq t \leqq T)$ de la frontière du domaine $\Omega \times (0 < t < T)$ de l'espace $(x_1, \dots, x_n, t)$:

$$\mu_1(F, T) = \sup_{(P, t) \in \Sigma_T} F(P, t),$$

$$\mu_2(F, t) = \inf_{(P, t) \in \Sigma_T} F(P, t),$$

$$M_0(F) = \mu_1(F, T) - \mu_2(F, T),$$

$$M_1(F) = \sup_{\substack{(P, t) \in \Sigma_T \\ 1 \leqq i \leqq n-1}} \left| \frac{\partial F_P(0, \dots, 0, t)}{\partial \xi_i^P} \right|,$$

$$M_2(F) = \sup_{\substack{(P, t) \in \Sigma_T \\ 1 \leqq i, j \leqq n-1 \\ \sum_{l=1}^{n-1} (\xi_l^P)^2 \leqq \varrho}} \left| \frac{\partial^2 F_P(\xi_1^P, \dots, \xi_{n-1}^P, t)}{\partial \xi_i^P \, \partial \xi_j^P} \right|,$$

$$M_2^*(F) = \sup_{\substack{(P, t) \in \Sigma_T \\ 1 \leqq i, j \leqq n-1 \\ \sum_{l=1}^{n-1} (\xi_l^P)^2 \leqq \varrho}} \sqrt{\int_0^\varrho \left(\frac{\partial^2 F_P(\alpha_1 \eta, \dots, \alpha_{n-1} \eta, t)}{\partial \xi_i^P \, \partial \xi_j^P} \right)^2 d\eta},$$

où

$$\alpha_k = \frac{\xi_k^P}{\varrho} \qquad (k = 1, \dots, n-1),$$

$$M_t(F) = \sup_{(P, t) \in \Sigma_T} \left| \frac{\partial F(P, t)}{\partial t} \right|.$$

Nous utiliserons aussi ces notations dans le cas spécial où F ne dépend pas de la variable t, c'est-à-dire quand il s'agit d'une fonction $F(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ définie sur la surface Σ du domaine Ω.

Dans notre article nous nous occuperons de l'équation

$$(1) \qquad \Delta u - a \frac{\partial u}{\partial t} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} - a \frac{\partial u}{\partial t} = f(x_1, \dots, x_n, t)$$

$$(a > 0 \text{ constante}) \qquad (n = 1, 2, \dots),$$

où $f(x_1, \dots, x_n, t)$ est une fonction définie sur l'ensemble $\Omega \times (0 \leqq t \leqq T)$, y admettant des dérivées par rapport aux coordonnées spatiales $x_1, \dots, x_n$. (On ne posera aucune condition de régularité pour la dépendance de f de t.) L'équation (1) contient comme cas spéciaux les équations suivantes, lesquelles serons traitées séparément:

$$\Delta u = 0, \tag{2}$$

$$\Delta u - a \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{3}$$

$$\Delta u = f(x_1, \ldots, x_n). \tag{4}$$

Soient $G_0(t)$ respectivement $G_1(t)$ des majorantes intégrables arbitraires de la fonction $\sup\limits_{P \in \Omega} |f(P, t)|$ respectivement de la fonction $\sup\limits_{P \in \Omega} |\operatorname{grad}_P f(P, t)|$ et soient

$$\sup_{0 \leqq t \leqq T} G_0(t) = N_0,$$

$$\sup_{0 \leqq t \leqq T} G_1(t) = N_1.$$

Dans le cas spécial où f ne dépend pas de la variable t, les définitions de N_0 et de N_1 serons, en conformité avec les définitions ci-dessus, les suivantes:

$$\sup_{P \in \Omega} |f(P)| = N_0,$$

$$\sup_{P \in \Omega} |\operatorname{grad} f(P)| = N_1.$$

Enfin soient[3] $H(t)$ respectivement $K(t)$ des majorantes arbitraires, non-croissantes, admettant des dérivées continues, de la fonction

$$\left| \int_0^t \frac{\partial^2 W_d(0, t-\tau)}{\partial x \partial t} G_0(\tau)\, d\tau \right|,$$

respectivement de la fonction

$$\left| \int_0^t \frac{\partial^2 W_{\varrho,d}(\varrho, t-\tau)}{\partial r \partial t} G_0(\tau)\, d\tau \right|,$$

et posons

$$A_d(t) = Z_d(0, t),$$

$$B_d(t) = -\frac{\partial Y_d(0, t)}{\partial t}.$$

§ 2. Décomposition des solutions de l'équation $\Delta u - a u_t' = f$

Soit $u(P, t)$ la solution de l'équation (1) sur l'ensemble $\Omega \times (0 < t \leqq T)$ avec les conditions initiales et les conditions aux limites suivantes:

$$u(P, 0) = u_0(P) \qquad P \in \Omega + \Sigma,$$

$$u(P, t) = \psi(P, t) \qquad (P, t) \in \Sigma \times (0 \leqq t \leqq T),$$

---

[3] Les fonctions qui figurent dans les définitions suivantes se trouvent dans la section 1 du § 6.

où $u_0(P)$ et $\psi(P, t)$ sont des fonctions continues lesquelles se rattachent d'une manière continue sur la partie $\Sigma \times (t=0)$ de la frontière de l'ensemble $\Omega \times (0 < t < T)$. La fonction $u(P, t)$ peut être décomposée de la façon suivante:

$$u(P, t) = H(P) + U_1(P) + U_2(P) + V(P, t),$$

où H, U_1, U_2 et V satisfont aux équations et aux conditions suivantes:

$$\begin{cases} \Delta H(P) = 0 & P \in \Omega, \\ H(P) = u_0(P) & P \in \Sigma; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta U_1(P, t) - a \dfrac{\partial U_1(P, t)}{\partial t} = 0 & (P, t) \in \Omega \times (0 < t \leqq T), \\ U_1(P, 0) = u_0(P) - H(P) & P \in \Omega + \Sigma, \\ U_1(P, t) = 0 & (P, t) \in \Sigma \times (0 \leqq t \leqq T); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta U_2(P, t) - a \dfrac{\partial U_2(P, t)}{\partial t} = 0 & (P, t) \in \Omega \times (0 < t \leqq T), \\ U_2(P, 0) = 0 & P \in \Omega + \Sigma, \\ U_2(P, t) = \psi(P, t) - u_0(P) & (P, t) \in \Sigma \times (0 \leqq t \leqq T); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta V(P, t) - a \dfrac{\partial V(P, t)}{\partial t} = f(P, t) & (P, t) \in \Omega \times (0 < t \leqq T), \\ V(P, 0) = 0 & P \in \Omega + \Sigma, \\ V(P, t) = 0 & (P, t) \in \Sigma \times (0 \leqq t \leqq T). \end{cases}$$

Ici les valeurs initiales et les valeurs aux limites relatives aux fonctions U_1, U_2 et V sont des fonctions continues qui se rattachent d'une manière continue sur la partie $\Sigma \times (t=0)$ de la frontière de l'ensemble $\Omega \times (0 < t < T)$. Si la condition de continuité relative à la fonction u est remplacée par une condition de régularité plus forte, la même condition de régularité sera aussi satisfaite pour les fonctions H, U_1, U_2 et V.

Naturellement cette décomposition exige la réalisation des certaines conditions d'existence relatives aux équations (2) et (3). Nous ne nous sommes servis de cette décomposition que pour pouvoir en déduir les majorations concernant le cas général sous une forme plus claire. Les majorations peuvent aussi être obtenues dans le cas où l'existence de la décomposition n'est pas assurée. En effet, notre méthode consiste en la construction des certaines fonctions majorantes. Étant donné que la construction des majorantes des fonctions composantes est indépendante de l'existence de ces dernières (au sens que la construction ne se base que sur les valeurs initiales et aux limites, sans tenant compte de l'existence de la solution même, définie par ces valeurs), la majorante de la fonction non-décomposée peut être obtenue, grosso modo, comme la somme des majorantes des composantes éventuellement non-existantes.

Ainsi, le problème de la majoration du gradient concernant l'équation (1) se réduit aux problèmes partiels relatifs aux 4 cas suivants:

1. l'équation (2) avec une condition aux limites inhomogène,

2. l'équation (3) avec une condition initiale inhomogène et une condition aux limites homogène,

3. l'équation (3) avec une condition initiale homogène et une condition aux limites inhomogène,

4. l'équation (1) avec une condition initiale homogène et une condition aux limites homogène; spécialement l'équation (4) avec une condition aux limites homogène.

§ 3. Majoration du gradient relative à l'équation $\Delta u = 0$

1. Fonctions auxiliaires. Dans ce paragraphe G_n et H_n^α $(n=2, 3, \ldots; \alpha>0)$ signifieront des solutions de l'équation $\Delta u=0$, c'est-à-dire des fonctions harmoniques, où l'indice n désigne la dimension du domaine de définition.

Dans ce qui suit (r, φ), (r, φ, ϑ) et $(r, \varphi, \vartheta, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-3})$ $(n \geqq 4)$ signifieront respectivement des coordonnées polaires, sphériques et des coordonnées sphériques à n-dimensions. Ces dernières sont liées aux coordonnées cartésiennes par les formules suivantes:

$$\begin{array}{ll}
x_n = r\cos\vartheta & (0 \leqq \vartheta \leqq \pi) \\
x_{n-1} = r\sin\vartheta\cos\vartheta_1 & (0 \leqq \vartheta_1 \leqq \pi) \\
x_{n-2} = r\sin\vartheta\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 & (0 \leqq \vartheta_2 \leqq \pi) \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
x_2 = r\sin\vartheta\sin\vartheta_1\ldots\sin\vartheta_{n-3}\cos\varphi & (0 \leqq \vartheta_{n-3} \leqq \pi) \\
x_1 = r\sin\vartheta\sin\vartheta_1\ldots\sin\vartheta_{n-3}\sin\varphi & (0 \leqq \varphi \leqq 2\pi).
\end{array}$$

Dans cette section 1 ω signifiera un nombre arbitraire satisfaisant à la condition $0<\omega<\pi$. Dans la section 2 nous introduirons des restrictions ultérieures pour ω.

Les valeurs aux limites des fonctions G_n et H_n^α sont les suivantes:

$$G_2(\varrho, \varphi) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leqq |\varphi| < \omega, \\ 0, & \text{si } \omega < |\varphi| \leqq \pi. \end{cases}$$

$$G_3(\varrho, \varphi, \vartheta) = \left.\begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leqq \vartheta < \omega \\ 0, & \text{si } \omega < \vartheta \leqq \pi \end{cases}\right\} 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi.$$

$$G_n(\varrho, \varphi, \vartheta, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-3}) = \left.\begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leqq \vartheta < \omega \\ 0, & \text{si } \omega < \vartheta \leqq \pi \end{cases}\right\} \begin{array}{l} 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \\ 0 \leqq \vartheta_i \leqq \pi \end{array} \qquad (i=1, \ldots, n-3).$$

$$H_2^\alpha(\varrho, \varphi) = \begin{cases} (\sin\varphi)^{1+\alpha}, & \text{si } 0 \leqq |\varphi| < \omega \\ 0, & \text{si } \omega < |\varphi| \leqq \pi. \end{cases}$$

$$H_3^\alpha(\varrho, \varphi, \vartheta) = \left.\begin{cases} (\sin\vartheta)^{1+\alpha}, & \text{si } 0 \leqq \vartheta < \omega \\ 0, & \text{si } \omega < \vartheta \leqq \pi \end{cases}\right\} 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi.$$

$$H_n^\alpha(\varrho, \varphi, \vartheta, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-3}) = \left.\begin{cases} (\sin\vartheta)^{1+\alpha}, & \text{si } 0 \leqq \vartheta < \omega \\ 0, & \text{si } \omega < \vartheta \leqq \pi \end{cases}\right\} \begin{array}{l} 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \\ 0 \leqq \vartheta_i \leqq \pi \end{array} \qquad (i=1, \ldots, n-3).$$

Pour ces fonctions G_n et H_n^α les inégalités suivantes sont valables:

$$0<\frac{\partial G_2(\varrho,0)}{\partial r}<\frac{A(2)}{\varrho\omega},$$

$$0<\frac{\partial G_n(r=\varrho,\vartheta=0)}{\partial r}<\frac{A(n)}{\varrho\omega}\qquad(n\geqq 3),$$

$$0<-\frac{\partial H_2^\alpha(\varrho,0)}{\partial r}<B(2)\frac{\omega^\alpha}{\varrho\alpha},$$

$$0<-\frac{\partial H_n^\alpha(r=\varrho,\vartheta=0)}{\partial r}<B(n)\frac{\omega^\alpha}{\varrho\alpha}\qquad(n\geqq 3),$$

où

$$A(2)=\frac{2}{\pi},\quad A(3)=\frac{\pi}{2},$$

$$A(n)=\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)C(n-3)\left(2^n+1+\frac{n-3}{2}\pi\right)\pi^{2-\frac{n}{2}}\qquad(n\geqq 4),$$

$$B(2)=\frac{2}{\pi},\quad B(n)=2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)C(n-3)\pi^{1-\frac{n}{2}}\qquad(n\geqq 3),$$

$$C(0)=1,$$

$$C(n)=\int_0^\pi \sin^n x\,dx\int_0^\pi \sin^{n-1}x\,dx\ldots\int_0^\pi \sin x\,dx\qquad(n\geqq 1).$$

2. Théorèmes. THÉORÈME 1. *Supposons que*

1° $\Omega\in\mathfrak{B}(\varrho)$;

2° *la fonction* $H(P)$

  (i) *satisfasse à l'équation* (2) *dans* Ω,

  (ii) *admette des premières dérivées continues dans* $\Omega+\bar{\Sigma}$, *et*

  (iii) *pour ses valeurs aux limites* $H(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})$ *l'on ait*

$$\frac{\partial H(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})}{\partial\xi_i}\in\mathcal{H}_\varrho(\alpha,K)\qquad(i=1,\ldots,n-1);$$

3° *au cas d'un* Ω *non borné résulte*

$$\max_{P\in\bar{\Sigma}}|\operatorname{grad}H(P)|=\max_{P\in\Sigma}|\operatorname{grad}H(P)|.$$

Alors

$$\max_{P\in\Omega+\bar{\Sigma}}|\operatorname{grad}H(P)|<D_0(\omega)\frac{1}{\varrho}M_0(H)+D_1(\omega)M_1(H)+D_2(\omega)\omega^\alpha\varrho^\alpha\frac{K}{\alpha};$$

spécialement, si la fonction aux limites $H(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ *admet des secondes dérivées, alors*

$$\max_{P\in\Omega+\bar{\Sigma}} |\operatorname{grad} H(P)| < D_0(\omega)\frac{1}{\varrho}M_0(H)+D_1(\omega)M_1(H)+D_2(\omega)\omega\varrho M_2(H);$$

si Ω *est borné, alors*

$$\max_{P\in\Omega+\Sigma} |\operatorname{grad} H(P)| < \left[\sqrt{n-1}\,D_0(\omega)\frac{L}{\varrho}+D_1(\omega)\right]M_1(H)+D_2(\omega)\omega^\alpha\varrho^\alpha\frac{K}{\alpha},$$

où

$$D_0(\omega)=\frac{A(n)}{\omega[1-2B(n)\omega]},$$

$$D_1(\omega)=\frac{\sqrt{n-1}}{1-2B(n)\omega},$$

$$D_2(\omega)=\frac{B(n)\sqrt{n-1}}{1-2B(n)\omega},$$

$$0<\omega<\min\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2B(n)}\right).$$

DÉMONSTRATION. Dans les conditions imposées $|\operatorname{grad} H|$ prend le maximum de ses valeurs prises dans $\Omega+\bar{\Sigma}$ sur la frontière totale $\bar{\Sigma}$, ainsi, en vertu de la condition 3°, il le prend sur Σ. Soit $P_0\in\Sigma$ un point pour lequel

$$|\operatorname{grad} H(P_0)| = \max_{P\in\Omega+\bar{\Sigma}} |\operatorname{grad} H(P)| = M.$$

On peut supposer, sans restriction de la généralité, que

$$\frac{\partial H(P_0)}{\partial \nu}\leqq 0 \tag{5}$$

(dans le cas contraire on considère la fonction $-H$), et que

$$\min_{P\in\Omega+\bar{\Sigma}} H(P)=0.$$

Considérons l'hyperplan tangent Θ_{P_0} de la surface Σ et les hypersphères Γ_i, Γ_e de rayon ϱ, qui figurent dans la définition de la classe $\mathfrak{B}(\varrho)$, appartenant au point P_0 de Σ. Nous allons définir une solution $h(P)$ de l'équation (2) dans Γ_i, pour laquelle à chaque point intérieur P de Γ_i

$$h(P)<H(P)$$

est valable, tandis qu'au point P_0

$$h(P_0)=H(P_0)$$

résulte.

Dans ce but considérons le système de coordonnées $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ appartenant au point P_0. (Nous rappelons que l'axe positif ξ_n coïncide avec la normale intérieure de Σ au point P_0.) Nous introduisons dans Γ_i les coordonnées sphériques $(r, \varphi, \vartheta, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-3})$ par la transformation

$$\begin{aligned} -\xi_n + \varrho &= r \cos \vartheta \\ \xi_{n-1} &= r \sin \vartheta \cos \vartheta_1 \\ \xi_{n-2} &= r \sin \vartheta \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \xi_2 &= r \sin \vartheta \sin \vartheta_1 \ldots \sin \vartheta_{n-3} \cos \varphi \\ \xi_1 &= r \sin \vartheta \sin \vartheta_1 \ldots \sin \vartheta_{n-3} \sin \varphi . \end{aligned}$$

Au cas de $n=2$ respectivement $n=3$ nous introduisons les coordonnées polaires (r, φ) et les coordonnées sphériques (r, φ, ϑ) par les transformations

$$\begin{aligned} -\xi_2 + \varrho &= r \cos \varphi \\ \xi_1 &= r \sin \varphi , \end{aligned}$$

respectivement

$$\begin{aligned} -\xi_3 + \varrho &= r \cos \vartheta \\ \xi_2 &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \xi_1 &= r \sin \vartheta \sin \varphi . \end{aligned}$$

De cette manière les fonctions définies sur Σ (il ne s'agit toujours que du voisinage $\sigma_{P_0}(\varrho)$) peuvent être aussi données par les coordonnées polaires respectivement par les coordonnées sphériques. Par la suite nous utiliserons également les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires respectivement sphériques; quelquefois nous ferons aussi figurer tous les deux types dans une seule formule, si cela nous facilite l'écriture.

On obtient à l'aide d'un développement en série de Taylor, en utilisant le reste de Lagrange, comme suit:

$$\begin{aligned} H(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) &= H(0, \ldots, 0) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial H(\xi_1^*, \ldots, \xi_{n-1}^*)}{\partial \xi_i} \xi_i \qquad \left(\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2 \leqq \varrho^2 \right), \end{aligned} \tag{6}$$

où $0 \leqq \xi_i^* < \xi_i$. En considérant que $\dfrac{\partial H}{\partial \xi_i} \in \mathcal{H}_\varrho(\alpha, K)$,

$$\left| \frac{\partial H(\xi_1^*, \ldots, \xi_{n-1}^*)}{\partial \xi_i} - \frac{\partial H(0, \ldots, 0)}{\partial \xi_i} \right| \leqq K \left[\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^{*2} \right]^{\frac{\alpha}{2}} \leqq K \left[\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2 \right]^{\frac{\alpha}{2}}.$$

En vertu de ceci il découle de (6):

$$H(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \geqq H(0, \dots, 0) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial H(0, \dots, 0)}{\partial \xi_i} \xi_i -$$

$$(7) \qquad -K\left[\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2\right]^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{i=1}^{n-1} |\xi_i| \geqq H(0, \dots, 0) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial H(0, \dots, 0)}{\partial \xi_i} \xi_i -$$

$$-K\sqrt{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2\right]^{\frac{1+\alpha}{2}} = H(0, \dots, 0) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial H(0, \dots, 0)}{\partial \xi_i} \xi_i -$$

$$-K\sqrt{n-1}\,(\varrho \sin \vartheta)^{1+\alpha} \equiv \tilde{H}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}).$$

Ici, au cas de $n=2$, $|\varphi|$ figure au lieu de ϑ. Dans ce qui suit, pour plus de brièveté, nous n'écrirons pas séparément les formules pour les cas $n=2$ et $n=3$. Au cas de $n=2$ on lira $|\varphi|$ au lieu de ϑ.

Soit $P'(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n') = P'(\varrho, \varphi, \vartheta, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-3})$ $\left(\vartheta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ le point de la surface de Γ_i pour lequel on a $\overline{PP'} \perp \Theta_{P_0}$, et où P est un point variable de Σ. En considérant que $\sigma_{P_0}(\varrho)$ est situé entre les hypersphères Γ_i et Γ_e, on a l'inégalité suivante pour la distance $\overline{PP'}$:

$$\overline{PP'} \leqq 2\varrho(1-\cos\vartheta).$$

(On a besoin de l'existence de la sphère Γ_e pour pouvoir établir cette inégalité.) Ainsi, tenant compte du fait que M signifie le maximum de $|\text{grad}\, H|$, l'inégalité suivante est valable:

$$|H(P) - H(P')| \leqq 2\varrho(1-\cos\vartheta)M \leqq 2\varrho M \sin^2\vartheta \qquad \left(0 \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2}\right).$$

De là et de (7) résulte:

$$H(P') = H(P) - [H(P) - H(P')] \geqq H(P) - 2\varrho M \sin^2\vartheta \geqq \tilde{H}(P) - 2\varrho M \sin^2\vartheta.$$

C'est ce qui nous amène à définir la fonction minorante $h(P)$ (qui est harmonique et bornée dans Γ_i) par les valeurs aux limites suivantes:

$$h(\varrho, \varphi, \vartheta, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-3}) = \begin{cases} \tilde{H} - 2\varrho M \sin^2\vartheta, & \text{si } \vartheta < \omega \left(\leqq \frac{\pi}{2}\right) \\ 0, & \text{si } \omega < \vartheta \leqq \pi \end{cases}$$

$$(0 \leqq \varphi \leqq 2\pi, \quad 0 < \vartheta_i \leqq \pi, \quad i = 1, \dots, n-3).$$

En vertu du principe du maximum relatif aux fonctions harmoniques et par suite du choix des valeurs aux limites, on a pour un point intérieur arbitraire P de Γ_i:

$$H(P) > h(P),$$

tandis qu'au point P_0

$$H(P_0) = h(P_0).$$

Il en résulte que

$$\frac{\partial H(P_0)}{\partial \nu} \geqq \frac{\partial h(P_0)}{\partial \nu},$$

d'où on obtient, en raison de la condition (5), l'inégalité

$$\left|\frac{\partial H(P_0)}{\partial \nu}\right| \leqq \left|\frac{\partial h(P_0)}{\partial \nu}\right|. \tag{8}$$

Soit H_n^0 une fonction harmonique et bornée dans la sphère Γ_i, définie par la condition aux limites suivante:

$$H_n^0(\varrho, \varphi, \vartheta, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-3}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial H(0, \dots, 0)}{\partial \xi_i} \xi_i, & \text{si } \vartheta < \omega \left(\leqq \frac{\pi}{2}\right) \\ 0, & \text{si } \omega < \vartheta \leqq \pi \end{cases}$$

$$(0 \leqq \varphi \leqq 2\pi, \quad 0 \leqq \vartheta_i \leqq \pi, \quad i = 1, \dots, n-3).$$

Par antisymétrie on a

$$\frac{\partial H_n^0(r = \varrho, \vartheta = 0)}{\partial r} = 0. \tag{9}$$

La fonction h peut être exprimée, par les fonctions G_n et H_n^α (introduites dans la section 1) et par la fonction H_n^0 précédemment définie, comme suit:

$$h = H(0, \dots, 0) G_n + H_n^0 - K\sqrt{n-1}\, \varrho^{1+\alpha} H_n^\alpha - 2\varrho M H_n^1.$$

On en tire, en vertu de (8) et de (9):

$$\left|\frac{\partial H(P_0)}{\partial \nu}\right| \leqq |H(0, \dots, 0)| \left|\frac{\partial G_n(P_0)}{\partial \nu}\right| +$$

$$+ K\sqrt{n-1}\, \varrho^{1+\alpha} \left|\frac{\partial H_n^\alpha(P_0)}{\partial \nu}\right| + 2\varrho M \left|\frac{\partial H_n^1(P_0)}{\partial \nu}\right| <$$

(en utilisant les résultats contenus dans la section 1)

$$< M_0(H) \frac{A(n)}{\varrho\omega} + K\sqrt{n-1}\, \varrho^{1+\alpha} B(n) \frac{\omega^\alpha}{\varrho\alpha} +$$

$$+ 2\varrho M B(n) \frac{\omega}{\varrho} = M_0(H) \frac{A(n)}{\varrho\omega} + K\sqrt{n-1}\, B(n) \frac{\varrho^\alpha \omega^\alpha}{\alpha} + 2B(n)\omega M.$$

On peut écrire l'inégalité suivante pour M:

$$M = \max_{P \in \Omega + \overline{\Sigma}} |\operatorname{grad} H(P)| = |\operatorname{grad} H(P_0)| \leqq$$

$$\leqq \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial H(P_0)}{\partial \xi_i}\right)^2} + \left|\frac{\partial H(P_0)}{\partial \nu}\right| \leqq \sqrt{n-1}\, M_1(H) + \left|\frac{\partial H(P_0)}{\partial \nu}\right| <$$

$$< \sqrt{n-1}\, M_1(H) + M_0(H) \frac{A(n)}{\varrho\omega} + K\sqrt{n-1}\, B(n) \frac{\varrho^\alpha \omega^\alpha}{\alpha} + 2B(n)\omega M.$$

Soit ω tellement petit que la condition

$$2B(n)\omega < 1, \quad \omega < \frac{1}{2B(n)}$$

soit satisfaite à côté de la condition déjà introduite $\omega \leqq \pi/2$. Alors on obtient, de l'inégalité ci-dessus, pour M:

$$M < \frac{A(n)}{\varrho\omega[1-2B(n)\omega]} M_0(H) + \frac{\sqrt{n-1}}{1-2B(n)\omega} M_1(H) +$$

$$+ \frac{B(n)\sqrt{n-1}\,\varrho^\alpha\omega^\alpha}{1-2B(n)\omega}\,\frac{K}{\alpha} \qquad \left(0 < \omega < \min\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2B(n)}\right)\right).$$

Si la fonction $H(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ admet des secondes dérivées, alors on peut choisir

$$K = M_2(H), \quad \alpha = 1,$$

d'où on obtient la forme spéciale de l'inégalité.

Dans le cas où Ω est borné, on a

$$M_0(H) \leqq L\sqrt{n-1}\, M_1(H),$$

et ainsi la quantité $M_0(H)$ peut être éliminée de la majoration de M:

$$M < \sqrt{n-1}\left(\frac{A(n)L}{\varrho\omega[1-2B(n)\omega]} + \frac{1}{1-2B(n)\omega}\right)\cdot M_1(H) + \sqrt{n-1}\,\frac{B(n)\varrho^\alpha\omega^\alpha}{1-2B(n)\omega}\,\frac{K}{\alpha}.$$

C. q. f. d.

REMARQUE. Dans les inégalités démontrées, les termes contenant les quantités K/α et $M_2(H)$ ne peuvent pas être supprimés, c'est-à-dire $M_1(H)$ en elle-même ne suffit pas pour majorer $|\text{grad}\, H|$. En effet, considérons par exemple la suite des fonctions $h_k(\xi_1, \xi_2)$ $(k=1, 2, \ldots)$, harmoniques dans le demi-plan $\xi_2 > 0$, convergeant uniformément vers 0 pour $\xi_2 \to \infty$, dont la k-ième est définie par les valeurs

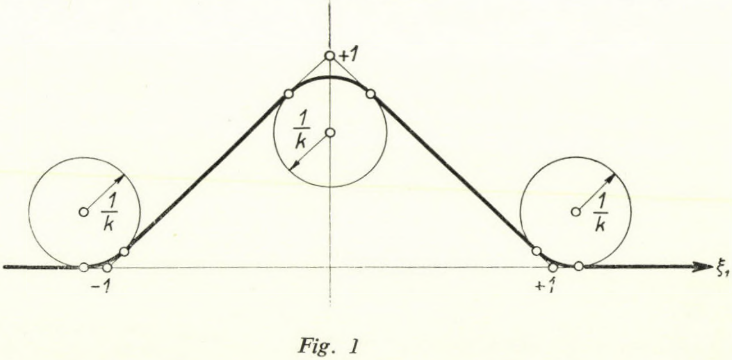


Fig. 1

aux limites données sur la figure 1 (trait fort). Dans cette suite les valeurs $\left|\frac{\partial h_k(\xi_1,0)}{\partial\xi_1}\right|$ sont bornées:

$$\left|\frac{\partial h_k(\xi_1,0)}{\partial\xi_1}\right| \leqq 1.$$

Si pour $k\to\infty$ max |grad h_k| était borné, alors le gradient de la fonction limite $h(\xi_1,\xi_2)$, également harmonique dans le demi-plan $\xi_2>0$ et définie par les valeurs aux limites

$$h(\xi_1,0)=\begin{cases}0, & \text{si } |\xi_1|\geqq 1,\\ 1-|\xi_1|, & \text{si } |\xi_1|\leqq 1,\end{cases}$$

serait aussi borné. Or grad h n'est pas borné dans le voisinage du point (0, 0).

THÉORÈME 2. *Au lieu de la condition* 2° (iii) *du théorème* 1, *en conservant toutes les autres conditions, nous posons la condition suivante:*

2° (iii*) *la fonction* $H(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})$ *admet des secondes dérivées continues. Alors*

$$\max_{P\in\Omega+\bar\Sigma}|\operatorname{grad} H(P)| < D_0(\omega)\frac{1}{\varrho}M_0(H)+$$
$$+D_1(\omega)M_1(H)+2\sqrt{\frac{n-1}{3}}\,D_2(\omega)\omega^{1/2}\varrho^{1/2}M_2^*(H),$$

et au cas d'un domaine Ω *borné*

$$\max_{P\in\Omega+\Sigma}|\operatorname{grad} H(P)| < \left[\sqrt{n-1}\,D_0(\omega)\frac{L}{\varrho}+D_1(\omega)\right]\cdot M_1(H)+$$
$$+2\sqrt{\frac{n-1}{3}}\,D_2(\omega)\omega^{1/2}\varrho^{1/2}M_2^*(H),$$

où $D_0(\omega)$, $D_1(\omega)$ *et* $D_2(\omega)$ *sont les constantes qui figurent dans le théorème* 1.

DÉMONSTRATION. Dans le développement en série de Taylor (6) considérons un terme de plus, et au lieu du reste de Lagrange faisons figurer le reste intégrale:

$$H(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}) = H(0,\ldots,0)+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial H(0,\ldots,0)}{\partial\xi_i}\xi_i+$$
$$+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\left[\int_0^x\frac{\partial^2 H(\alpha_1\eta,\ldots,\alpha_{n-1}\eta)}{\partial\xi_i\partial\xi_j}(x-\eta)\,d\eta\,\frac{\xi_i\xi_j}{x^2}\right]\qquad (x\leqq\varrho),$$

où

$$x=\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i^2},\quad \alpha_i=\frac{\xi_i}{x}\qquad (i=1,\ldots,n-1).$$

Nous majorons le reste à l'aide de l'inégalité de Schwarz:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\left[\int_0^x \frac{\partial^2 H(\alpha_1\eta, \ldots, \alpha_{n-1}\eta)}{\partial\xi_i\partial\xi_j}(x-\eta)\,d\eta\,\frac{\xi_i\xi_j}{x^2}\right] \leqq$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\left[\sqrt{\int_0^x\left(\frac{\partial^2 H}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\right)^2 d\eta \int_0^x (x-\eta)\,d\eta}\;\frac{\xi_i\xi_j}{x^2}\right] \leqq$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\left[\sqrt{\int_0^\varrho\left(\frac{\partial^2 H}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\right)^2 d\eta\,\frac{x^3}{3}}\;\frac{\xi_i\xi_j}{x^2}\right] \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\sqrt{3}}\,x^{-1/2} M_2^*(H) \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}(\xi_i\xi_j) \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\sqrt{3}}\,x^{-1/2} M_2^*(H)(n-1)\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i^2 = \frac{n-1}{\sqrt{3}}\,M_2^*(H)\,x^{3/2}.$$

Dans ce cas, au lieu de la fonction minorante $\tilde{H}(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ qui figure dans la formule (7), on doit choisir la fonction

$$\tilde{H}^*(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = H(0, \ldots, 0) + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial H(0, \ldots, 0)}{\partial\xi_i}\,\xi_i - \frac{n-1}{\sqrt{3}}\,M_2^*(H)(\varrho\sin\vartheta)^{3/2}.$$

La comparaison avec la formule (7) montre que l'inégalité du théorème 2 découle de celle du théorème 1 par la substitution

$$K = \sqrt{\frac{n-1}{3}}\,M_2^*(H), \qquad \alpha = \frac{1}{2}.$$

C. q. f. d.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUE
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE HONGRIE,
BUDAPEST

(Reçu le 19 fevriér 1963.)

Bibliographie

[1] G. ADLER, A hővezetés differenciálegyenletének maximum-elvéről. II, *MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményei*, **1** (1956) p. 429—435.

[2] G. ADLER, Maggiorazione del gradiente delle funzioni armoniche mediante i loro valorial contorno, *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei*, *Memorie*, Serie VIII, **6** (1961), p. 185—201.

[3] G. ADLER, Maggiorazione del gradiente delle funzioni del calore, *Rendiconti della Accademia Nazionale dei Lincei*, Serie VIII, **30** (1961), p. 357—361.

[4] G. Adler, Maggiorazione del gradiente delle soluzioni delle equazioni $\Delta u = f$ e $\Delta u - a u'_t = g$, *Rendiconti della Accademia Nazionale dei Lincei*, Serie VIII, **30** (1961), p. 673–676.

[5] G. Adler, Maggiorazione del gradiente delle funzioni biarmoniche di due variabili, *Rendiconti dell'Accademia di Sci. Fis. e Mat. della Soc. Naz. di Sci., Lettere ed Arti in Napoli*, Serie 4, **28** (1961), p. 225–239.

[6] C. Miranda, Formule di maggiorazione e teorema di esistenza per le funzioni biarmoniche in due variabili. *Giornale di Matematiche di Battaglini*, **78** (1948–49), p.97–118.

[7] C. Miranda, *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico* (Springer, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1955).

THE NUMBER OF BASIC SUBGROUPS OF PRIMARY GROUPS[1]

By

S. KHABBAZ (New Haven, USA) and E. A. WALKER (New Mexico, USA)

(*Presented by* L. RÉDEI)

This paper gives the solution to L. FUCHS' PROBLEM 8, which states: „Determine the cardinality of the set of different basic subgroups in a p-group." (See [1], pg. 110.) The solution is effected using standard techniques and results of Abelian group theory. All groups considered here are Abelian, and the notation is generally that used in [1]. The generalized continuum hypothesis is assumed.

The following theorem gives the solution to PROBLEM 8, and the rest of the paper is devoted to its proof.

THEOREM. *Let G be a p-primary group, let B be a basic subgroup of G, and let $b(G)$ denote the cardinality of the set of different basic subgroups of G. The following hold.*

(a) *If G is of bounded order or is divisible, then $b(G)=1$.*

(b) *If $G=S_1\oplus\ldots\oplus S_m\oplus T_1\oplus\ldots\oplus T_k$, where $S_i\cong C(p^\infty)$ and T_i is cyclic of order p^{n_i}, then $b(G)=\prod_{i=1}^{k} p^{mn_i}$.*

(c) *In all other cases, $b(G)=|G|^{|B|}$.*

PROOF. The proof of (a) is in [1], Theorem 31. 1, pg. 104. To prove (b), suppose $G=S_1\oplus\ldots\oplus S_m\oplus T_1\oplus\ldots\oplus T_k$, where $S_i\cong C(p^\infty)$ and T_i is cyclic of order p^{n_i}. Let $S=S_1\oplus\ldots\oplus S_m$ and $T=T_1\oplus\ldots\oplus T_k$. Suppose B is basic in G. Since $B\cap S=0$, any two basic subgroups of a group are isomorphic, B and T are basic in G, and T is finite, it follows that the projection f_T of B into T is an isomorphism of B onto T. Let f_S be the projection of B into S. Define $f_B\colon T\to S$ by $f_B(t)=f_S(f_T^{-1}(t))$. Note that $B=\{f_B(t)+t\colon t\in T\}$. Let f be any homomorphism from T into S. Then $B_f=\{f(t)+t\colon t\in T\}$ is basic in G since $G=S\oplus B_f$. Observe that if f is any homomorphism from T into S, and B is any basic subgroup of G, then $f_{B_f}=f$ and $B_{f_B}=B$. Thus there is a one-one correspondence between basic subgroups of G and homomorphisms from T into S. Let t_i generate T_i. Any homomorphism from T into S is determined by its effect on the t_i's, and any mapping of the t_i's into S such that t_i goes onto an element whose order is not greater than that of t_i is induced by a homomorphism from T into S. Since S has p^{mn_i} elements of order not greater than p^{n_i}, it follows that there are $\prod_{i=1}^{k} p^{mn_i}$ homomorphisms from T into S, and hence that $b(G)=\prod_{i=1}^{k} p^{mn_i}$.[2]

---

[1] This research was carried out with support from NSF grants G-1775 and G-17978.

[2] Professor JAMES PEAKE has given an independent proof (unpublished) of this case by an entirely different method.

The proof of (c) will be given by considering several cases and subcases. Suppose G satisfies the hypothesis of (c).

Case 1. G is reduced.

First note that G is unbounded and any basic subgroup of G is unbounded and hence infinite. Let B be a basic subgroup of G and assume that $|B| < |G|$. Since G is reduced, G has an element x of order p and finite height. The socle $G[p] = \{g : g \in G, pg = 0\}$ has cardinality $|G|$. If $|G|$ elements of $G[p]$ have infinite height, then each one of these plus x has finite height and order p, so that G has $|G|$ elements of order p and finite height, and hence $|G|$ cyclic summands. Each such summand is contained in a basic subgroup. Since each basic subgroup of G has cardinality less than $|G|$, there are at least $|G|$ basic subgroups of G. But $|B|^{\chi_0} \geqq |G|$ (See [1], Theorem 30. 1, pg. 102), and $|B| < |G|$, so that $|G| \leqq |G|^{|B|} \leqq (|B|^{\chi_0})^{|B|} = |B|^{\chi_0 |B|} = |B|^{|B|} = 2^{|B|} \leqq |G|$. Thus $|G| = |G|^{|B|}$, so that the number of subsets of G of cardinal $|B|$ is $|G|$. Thus G has at most $|G| = |G|^{|B|}$ basic subgroups, and hence exactly $|G|^{|B|}$ basic subgroups.

Now assume that $|B| = |G|$. Since a basic subgroup of B is basic in G, it suffices to show that the number of basic subgroups of B is $|G|^{|B|} = |B|^{|B|} = 2^{|B|}$. Now $B = \sum_{i=1}^{\infty} B_i$, where Σ denotes direct sum, and where each B_i is a direct sum of cyclic groups of order p^i. We have that $|B| = \sum_i |B_i|$. First, suppose that $|B_i| < |B|$ for each i. Let $B_i = \sum_{\alpha \in I_i} C_{i\alpha}$, where $C_{i\alpha}$ is cyclic of order p^i. Clearly an infinite number of the B_i's are different from zero. Let $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ be a strictly increasing sequence of positive integers such that each $B_{n_i} \neq 0$. Now consider a sequence $\{C_{n_i \alpha_i}\}_{i=1}^{\infty}$, where of course α_i is in I_{n_i}. Let $S = \sum_{i=1}^{\infty} C_{n_i \alpha_i}$, $A_{n_i} = \sum_{\alpha \neq \alpha_i} C_{n_i \alpha}$, $A = \sum_{j \notin \{n_i\}_i} B_j$. Then $B = S \oplus \sum_{i=1}^{\infty} A_{n_i} \oplus A$. Now S has a basic subgroup T such that T contains no $C_{n_i \alpha_i}$. (See [1], pg. 103, Lemma 31.1.) It follows that $T \oplus \sum_{i=1}^{\infty} A_{n_i} \oplus A$ is a basic subgroup of B (and hence of G), which contains no $C_{n_i \alpha_i}$, but which contains every other $C_{n\alpha}$. Thus distinct sequences $\{C_{n_i \alpha_i}\}_{i=1}^{\infty}$ yield distinct basic subgroups of G. But since each $|B_i| < |B|$, and $|B| = \Sigma |B_i|$, it follows that there are at least $\prod_{i=1}^{\infty} |B_i| = 2^{|B|} = |G|^{|B|}$ basic subgroups of G, and hence G has exactly $|G|^{|B|}$ basic subgroups.

Now suppose that $|B_k| = |B|$ for some k. Then $B_k = \sum_{\alpha \in I} C_{k\alpha}$, where $C_{k\alpha}$ is cyclic of order p^k, and $|I| = |B| = |G|$. Let $B_{k+m_1}, B_{k+m_2}, \ldots, B_{k+m_r}, \ldots$ be the sequence of non-zero B_i's, with $m_1 < m_2 < \ldots < m_r < \ldots$. Let c_{k+m_i} be a generator of a non-zero cyclic summand of B_{k+m_i}, and let C_{k+m_i} be the group it generates. The order of c_{k+m_i} is p^{k+m_i}. Let $c_{k\alpha}$ be a generator of $C_{k\alpha}$. Write $B_{k+m_i} = B'_{k+m_i} \oplus C_{k+m_i}$. Let $J \subset I$. Let $B_J = B_1 \oplus \ldots \oplus B_{k-1} \oplus \left(\sum_{\alpha \in J} \langle c_{k\alpha} - p^{m_1} c_{k+m_1} \rangle \right) \oplus \sum_{r=1}^{\infty} \langle c_{k+m_r} - p^{m_{r+1} - m_r} c_{k+m_{r+1}} \rangle \oplus \sum_{i=1}^{\infty} B'_{k+m_i} \oplus \sum_{\alpha \notin J} C_{k\alpha}$. The group B_J is a basic subgroup of B, and hence of G. This is easily checked. Its proof is almost exactly like the proof of Lemma 31.1, pg. 103

in [1]. Suppose J and J' are distinct subsets of I. Then there is an α in J, α not in J', say, and this $B_{J'}$ contains $c_{k\alpha}$ while B_J does not. This implies that $B_J \neq B_{J'}$. There are $2^{|I|} = 2^{|B|} = |G|^{|B|}$ subsets J of I, and so G has at least $|G|^{|B|}$ basic subgroups. But G has only this many subsets of cardinal $|B|$, so $b(G) = |G|^{|B|}$.

Case 2. G is not reduced.

Write $G = D \oplus R$, where D is divisible and R is reduced. With the hypothesis of (c) we have that $D \neq 0 \neq R$ and that either D or R has infinite rank, where the rank $r(H)$ of a p-group H is the dimension of its socle. This implies in particular that $|G| = r(D) + |R|$. Note also that any basic subgroup of R is a basic subgroup of G. We consider two principal subcases.

2. 1. $|G| = r(D)$.

Let B be basic in G, $B = \sum\limits_{\alpha \in I} \langle b_\alpha \rangle$, $D[p] = \sum\limits_{\beta \in J} \langle d_\beta \rangle$. Note that $|J| = r(D) = |G|$. Now $\{d_\beta\}_{\beta \in J}$ has $|G|^{|I|}$ subsets of cardinal $|I|$. Let $S = \{s_\alpha\}_{\alpha \in I}$ be such a subset. Let $B_S = \sum\limits_{\alpha \in I} \langle b_\alpha + s_\alpha \rangle$. It is routine to check that B_S is a basic subgroup of G. Let $S' = \{s'_\alpha\}_{\alpha \in I}$ be any subset of $\{d_\beta\}_{\beta \in J}$ of cardinal $|I|$, $S \neq S'$. Then some $s'_\alpha \neq s_\alpha$, so that $b_\alpha + s_\alpha \neq b_\alpha + s'$. Now $b_\alpha + s_\alpha$ is in B_S but not in $B_{S'}$. Hence $B_S \neq B_{S'}$. Thus there are at least $|G|^{|I|}$ basic subgroups of G. If $|I|$ is finite, then $|B|$ is finite, and G has only $|G|$ finite subsets, and hence $|G| \geqq b(G) \geqq |G|^{|I|} = |G| = |G|^{|B|}$. If I is infinite, then $|I| = |B|$, and so in either case, $b(G) = |G|^{|B|}$.

2. 2. $|G| > r(D)$.

In this case $|G| = |R|$. Suppose first that R is unbounded. Then $b(G) \geqq b(R) = |R|^{|B|} = |G|^{|B|}$, and hence $b(G) = |G|^{|B|}$. Now suppose that R is bounded. It is fairly clear that the basic subgroups of G are just the complementary summands of D. Let $\{r_\alpha\}_{\alpha \in I}$ be a basis of the socle of R, and let d be an element of order p in D. Consider the sets of the form $\{e_\alpha + r_\alpha\}_{\alpha \in I}$, where e_α is either d or 0. There are $2^{|I|}$ such sets, each such set is a basis of a complementary summand of $D[p]$ in $G[p]$. Distinct such sets generate distinct such complementary summands. Each such set is contained in a complementary summand of D since D is an absolute summand. It follows that there are at least $2^{|I|} = 2^{|R|} = 2^{|G|} = |G|^{|G|} = |G|^{|R|} = |G|^{|B|}$ basic subgroups of G, and hence there are exactly $|G|^{|B|}$ basic subgroups of G.

This concludes the proof.

YALE UNIVERSITY
NEW HAVEN, CONN., USA

NEW MEXICO STATE UNIVERSITY
UNIVERSITY PARK, NEW MEXICO, USA

(Received 22 February 1963)

Reference

[1] L. Fuchs, *Abelian Groups* (Budapest, 1958).

PROPERTIES OF EXT AND QUASI-SPLITTING OF ABELIAN GROUPS

By

CAROL PEERCY WALKER[1] (New Mexico, USA)

(*Presented by* L. RÉDEI)

The first part of this paper is an investigation of short exact sequences of Abelian groups

$$0 \to A \to G \to B \to 0$$

which represent elements of finite order in $\operatorname{Ext}(B, A)$. Generalizations of some theorems of R. BAER in [1] are obtained. It is then shown that a group G is quasi-isomorphic to a group which splits over its torsion subgroup if and only if the sequence

$$0 \to G_t \to G \to G/G_t \to 0$$

represents an element of finite order in $\operatorname{Ext}(G/G_t, G_t)$, where G_t denotes the torsion subgroup of G. This leads to an answer to the question, posed by L. FUCHS at the New Mexico State University Conference on Abelian Groups: If a group G is quasi-isomorphic to a group which splits over its torsion subgroup, does G necessarily split over its torsion subgroup?[2]

The following notations and conventions will be used. The word group will mean Abelian group. If G is a group, G_t will denote the torsion subgroup of G, G_p the p-primary component of G_t, and $G[n]$ the subgroup of elements x of G such that $nx=0$. The identity homomorphism of G will be denoted by i_G. If G_t is a summand of G, then G is called a splitting group.

THEOREM 1. *An exact sequence*

$$0 \to A \to G \xrightarrow{t} B \to 0 \tag{1}$$

represents an element of finite order in $\operatorname{Ext}(B, A)$, *if and only if for some integer* n *the sequence*

$$0 \to A/(A[n]) \to (A+nG)/(A[n]) \xrightarrow{t'} nB \to 0 \tag{2}$$

is splitting exact, where $t'(x+A[n]) = t(x)$.

PROOF. The endomorphism $B \xrightarrow{n} B$ of B induced by multiplication by n induces the endomorphism $\operatorname{Ext}(B, A) \xrightarrow{n} \operatorname{Ext}(B, A)$ of $\operatorname{Ext}(B, A)$ which is multiplication by n [1]. Under this latter map, the element represented by (1) maps onto the element of $\operatorname{Ext}(B, A)$ represented by the sequence

$$0 \to A \xrightarrow{j} H \xrightarrow{s} B \to 0, \tag{3}$$

---

[1] The work done on this paper was partially supported by NSF Grant G-17978.

[2] This question has been answered in the affirmative for groups G of finite torsion free rank by TI YEN (unpublished).

where $H=\{(x, b): x \in G, b \in B, t(x)=nb\}$, with $j(a)=(a, 0)$ for a in A and $s(x, b)=b$ for (x, b) in H. Since (1) represents an element of order n in Ext (B, A), (3) is splitting exact, and there is a homomorphism $f: B \to H$ such that $sf=i_B$. Define $h: H \to G$ by $h(x, b)=x$. If b is in $B[n]$, then $f(b)=(x, b)$, with $nx=0$ and $t(x)=nb=0$. Thus $x=h(f(b))$ is in $A[n]$. Hence there is a homomorphism $g: nB \to G/(A[n])$ such that $g(nb) = h(f(b))+A[n]$. If (x, b) is in H then $t(x)=nb$ is in nB, and so x is in $A+nG$. Thus g maps nB into $(A+nG)/(A[n])$. Now for b in B, $t'(g(nb)) = t'(h(f(b))+ +A[n]) = t(h(f(b))) = nb$, so that $t'g=i_{nB}$. This implies that the sequence (2) is splitting exact.

Suppose there exists an integer n such that (2) is splitting exact. Multiplying the element of Ext (B, A) represented by (1) by n^2 yields the element of Ext (B, A) represented by

$$(4) \qquad 0 \to A \xrightarrow{k} K \xrightarrow{u} B \to 0$$

where $K=\{(x, b): x \in G, b \in B, t(x)=n^2b\}$, with k and u the obvious maps. Since (2) is splitting exact there is a homomorphism $v: nB \to (A+nG)/A[n]$ such that $t'v=i_{nB}$. Let $n': (A+nG)/A[n] \to G$ be the homomorphism $n'(x+A[n])=nx$. Then $tn'(x+A[n])= =n(t'(x+A[n]))$ for all x in $A+nG$, hence for b in B, $tn'v(nb)=n(t'v(nb))=n(nb)= =n^2b$. This yields a homomorphism $w: B \to K$ defined by $w(b)=(n'v(nb), b)$. Moreover, $uw(b)=b$ for all b in B, that is, $uw=i_B$. Therefore (4) is splitting exact, and thus (1) represents an element of Ext $(B, A)[n^2]$.

THEOREM 2. *Let*

$$(1) \qquad 0 \to A \to G \xrightarrow{t} B \to 0$$

be an exact sequence. If the sequence

$$(2) \qquad 0 \to A \to A+nG \xrightarrow{t} nB \to 0$$

is splitting exact, then (1) *represents an element of* Ext $(B, A)[n]$.

PROOF. Multiplying the element represented by (1) by n yields the element represented by the sequence

$$(3) \qquad 0 \to A \xrightarrow{j} H \xrightarrow{s} B \to 0,$$

where $H=\{(x, b): x \in G, b \in B, t(x)=nb\}$ and j and s are the usual maps (see the proof of Theorem 1). Since (2) splits, there is a map $f: nB \to A+nG$ such that $tf=i_{nB}$. Define $g: B \to H$ by $g(b)=(f(n, b), b)$. Then $s(g(b))=s(f(nb), b)=b$ for all b in B. The existence of this homomorphism implies that (3) is splitting exact, and hence (1) represents an element of Ext $(B, A)[n]$.

If either A or B is torsion free, sequences representing elements of finite order in Ext (B, A) are characterized in

THEOREM 3. *If either* $A[n]=0$ *or* $B[n]=0$, *an exact sequence*

$$(1) \qquad 0 \to A \to G \to B \to 0$$

represents an element of Ext (B, A) $[n]$ *if and only if the sequence*

$$(2) \qquad 0 \to A \to A+nG \to nB \to 0$$

is splitting exact.

PROOF. Suppose that (1) represents an element of $\mathrm{Ext}(B, A)[n]$. If $A[n]=0$, the fact that (2) splits follows immediately from Theorem 1. If $B[n]=0$, the implication follows from Theorem 3. 2 (a) in [1]. The converse is contained in Theorem 2.

Part (b) of Theorem 3. 2 in [1] asserts the following. If p is a prime and $B[p]=0$, then $\mathrm{Ext}(B, A)[p] \cong \mathrm{Hom}(B, A/pA)/(\mathrm{Hom}(B, A))^*$, where $\mathrm{Hom}(B, A)^*$ is the image of the map $\mathrm{Hom}(B, A) \to \mathrm{Hom}(B, A/pA)$. This is used in the proof of

THEOREM 4. *If* $A[p]=0$, *then*

$$\mathrm{Pext}(B, A)[p] \cong \mathrm{Hom}(B/B_p, A/pA)/\mathrm{Hom}(B, A)^*,$$

where $\mathrm{Hom}(B, A)^*$ *is the image of the composition*

$$\mathrm{Hom}(B, A) \cong \mathrm{Hom}(B/B_p, A) \to \mathrm{Hom}(B/B_p, A/pA).$$

PROOF. Let $p^{\omega}G = \bigcap_n p^nG$ for any group G. Then A is called *p^{ω}-pure* in G if A is a subgroup of G such that $A \cap p^nG = p^nA$ for all positive integers n. The p^{ω}-pure exact sequence

$$0 \to B_p \to B \to B/B_p \to 0$$

induces the exact sequence [2]

$$0 = \mathrm{Hom}(B_p, A) \to p^{\omega}\,\mathrm{Ext}(B/B_p, A) \to p^{\omega}\,\mathrm{Ext}(B, A) \to p^{\omega}\,\mathrm{Ext}(B_p, A) \to 0.$$

The exact sequence

$$0 = \mathrm{Pext}(B_p, A_t) \to \mathrm{Pext}(B_p, A) \to \mathrm{Pext}(B_p, A/A_t) = 0$$

implies that $\mathrm{Pext}(B_p, A)=0$. Since $\mathrm{Ext}(B_p, A) = q\,\mathrm{Ext}(B_p, A)$ for all primes $q \neq p$ (Theorem 4.5 in [3]), it follows that $p^{\omega}\,\mathrm{Ext}(B_p, A) = \mathrm{Pext}(B_p, A) = 0$. Also, $\mathrm{Ext}(B/B_p, A) = p\,\mathrm{Ext}(B/B_p, A)$. Thus

$$p^{\omega}\,\mathrm{Ext}(B, A) \cong p^{\omega}\,\mathrm{Ext}(B/B_p, A) = \mathrm{Ext}(B/B_p, A).$$

It is easily seen that $\mathrm{Pext}(B, A)[p] = p^{\omega}\,\mathrm{Ext}(B, A)[p] \cong \mathrm{Ext}(B/B_p, A)[p]$, which by Theorem 3.2 (b) of [1], is isomorphic to $\mathrm{Hom}(B/B_p, A/pA)/\mathrm{Hom}(B, A)^*$.

DEFINITION. Two groups G and H are *quasi-isomorphic* if for some positive integers m and n, there are subgroups S and T of G and H respectively, with $mG \subset S \subset G$, $nH \subset T \subset H$, and $S \cong T$.

THEOREM 5. *A group G is quasi-isomorphic to a group that splits over its torsion subgroup if and only if the sequence*

$$0 \to G_t \to G \to G/G_t \to 0 \tag{1}$$

represents an element of finite order in $\mathrm{Ext}(G/G_t, G_t)$.

PROOF. If (1) represents an element of finite order in $\mathrm{Ext}(G/G_t, G_t)$, then

$$0 \to G_t \to G_t + nG \to (nG + G_t)/G_t \to 0$$

is split exact for some n by Theorem 3, and G is quasi-isomorphic to the splitting group $G_t + nG$.

Suppose G is quasi-isomorphic to a group $H=T\oplus A$, with T torsion and A torsion-free. Then there are subgroups $mG\subset M\subset G$ and $nH\subset N\subset H$ for some integers m and n with $M\cong N$. Let f be this isomorphism between M and N. Let $S=f^{-1}(nH)$. Now $nH=nT\oplus nA$, and since f is an isomorphism, $S=S_t\oplus B$, with $S_t\cong nT$ and $B\cong nA$. Now $n(M/S)\cong n(N/nH)=0$, so $nM\subset S$ and $nmG\subset nM\subset S$. Thus G_t+ $+nmG\subset G_t+S = G_t\oplus B$, and $G_t+nmG = G_t\oplus\big((G_t+nmG)\cap B\big)$. Hence the sequence

$$0\to G_t\to G_t+nmG\to(G_t+nmG)/G_t\to 0$$

is splitting exact. By Theorem 3, this implies that the sequence

$$0\to G_t\to G\to G/G_t\to 0$$

represents an element of Ext $(G/G_t, G_t)[nm]$.

THEOREM 6. *There exists a group G such that G is quasi-isomorphic to a splitting group and G does not split.*

PROOF. Let T be a p-group, and let P be the direct product of countably many copies of the additive group of integers. By Theorem 4.1 of [1], Ext $(P, T)_p=0$ if and only if T is the direct sum of a divisible group and a bounded group. Hence if T is any unbounded reduced p-group, there is an extension

$$0\to T\to G\to P\to 0$$

which represents an element of order p in Ext (P, T). Then G does not split, but is quasi-isomorphic to the splitting group $T+pG$.

Finally, some conditions under which G quasi-isomorphic to a splitting group implies G splits are given in

THEOREM 7. *If G/G_t is countable or $G/(pG+G_t)$ is finite for each prime p, then G is quasi-isomorphic to a splitting group if and only if G splits.*

PROOF. By Theorem 3.3 of [1], either of these conditions implies that Ext $(G/G_t, G_t)$ is torsion free. Hence by Theorem 5, the assertion follows.

NEW MEXICO STATE UNIVERSITY,
UNIVERSITY PARK, NEW MEXICO, USA

(Received 6 March 1963)

References

[1] R. BAER, Die Torsionsuntergruppe einer Abelschen Gruppe, *Math. Ann.*, **135** (1958), pp. 219–234.

[2] J. IRWIN, C. WALKER, and E. WALKER, On p^α-Pure Sequences of Abelian Groups, *Topics in Abelian Groups*, Scott, Joresman and Company. Chicago (1963), pp. 69–121.

[3] R. NUNKE, Modules of Extensions over Dedekind Rings, *Ill. J. of Math.*, vol. 3, No. 2 (1959), pp. 222–241.

FIXING SYSTEMS AND INNER ILLUMINATION*

By

B. GRÜNBAUM (Jerusalem, Israel)

(*Presented by* L. FEJES TÓTH)

The notion of "fixing systems for convex bodies" introduced by FEJES TÓTH [4] may be formulated as follows. Let K be a convex body in Euclidean n-space E^n (i. e., a compact convex set with non-empty interior); a set $A \subset bd\ K$ is called a fixing system for K provided there exists an $\varepsilon > 0$ such that for every non-zero $x \in E^n$ with length $|x| < \varepsilon$, $A \cap \text{int}(x+K) \neq \emptyset$. (Although formally stronger, the following definition is easily shown to be equivalent to the above: If a set $A \subset bd\ K$ is not a fixing system for K, there exists a non-zero $x \in E^n$ such that $A \cap \text{int}(\lambda x + K) = \emptyset$ for all $\lambda > 0$.)

A set $A \subset bd\ K$ was called by SOLTAN [5] an inner illuminating system of K provided for every $x \in bd\ K$ there exists an $a \in A$ such that the segment $[a, x]$ meets int K.

We shall prove the following theorems.

THEOREM 1. *For every convex body $K \subset E^n$ there exists a fixing system A consisting of at most $2n$ points.*

THEOREM 2 (SOLTAN [5]). *For every convex body $K \subset E^n$ there exists an inner illuminating system containing at most $n+1$ points.*

REMARK 1. Obviously, every fixing system of the n-dimensional cube contains at least $2n$ points. It may be shown that this property characterizes non-singular affine images of the n-cube.

REMARK 2. For smooth convex bodies $K \subset E^n$ every fixing system for K contains a subset with at most $2n$ points which is also a fixing system for K. (This is well known, in a variety of different formulations; see [2], Section 9.1, and the references given there to papers of STEINITZ, ROBINSON, and others.)

REMARK 3. It is obvious that every smooth $K \subset E^n$, and even every K with a pair of smooth antipodal points, has an inner illuminating system consisting of two points.

The proofs of both theorems are based on the existence of a (unique) ellipsoid B of maximal volume contained in a given convex body K (see [3], [7]). We shall use the following lemma (which is probably known, although the author is not aware of any published proof for $n > 2$; for $n = 2$ it is implied by the results of BEHREND [1]).

---

* This research was supported in part by Grant AF-EOAR-63-63.

LEMMA. *If $K \subset E^n$ is a convex body and B is the ellipsoid of maximal volume contained in K, then $C = B \cap bd\, K$ is a global set (i. e. C is not contained in any closed halfspace whose bounding hyperplane passes through the center of B).*

PROOF OF THE LEMMA. Without loss of generality we may assume that B is the unit ball $B = \{x \mid |x| \leqq 1\}$. Suppose that the open half-space $\{x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \mid \xi_n > 0\}$ does not contain any point of C. Consider the ellipsoids $E(\lambda)\colon \alpha^{-2} \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2 + \beta^{-2}(\xi_n - \lambda)^2 \leqq 1$ having on their boundary the point $(0, 0, \ldots, 0, -1)$ and the set $\{x \mid |x| = 1, \xi_n = 1/n\}$. Then $B = E(0)$, and the volume of B is smaller than the volume of $E(\lambda)$ for $\lambda \neq 0$. The set $\{x \in B \mid \xi_n \geqq 1/n\}$ is at a positive distance from $bd\, K$. It follows that $E(\lambda) \subset K$ for sufficiently small $\lambda > 0$, contradicting the maximality of B.

PROOF OF THEOREM 1. Let B be the ellipsoid of maximal volume contained in K. Since $C = B \cap bd\, K$ is a global set, C is a fixing system for B. In view of Remark 2, C contains a set A with at most $2n$ elements which is a fixing system for B. Since a fixing system for B is obviously a fixing system for $K \supset B$, this ends the proof of Theorem 1.

PROOF OF THEOREM 2. Let B and C be as in the proof of Theorem 1. Since C is global, the center O of B is contained in the convex hull of C. Carathéodory's theorem implies that O is in the convex hull of some k-pointed set $D \subset C$, where $k \leqq n+1$. Then D is an inner illuminating system for K. Indeed, the only points of $bd\, K$ not illuminated by a fixed $d \in D$ are those which belong to the hyperplane T_d tangent to B (and K) at d. Since obviously $\bigcap_{d \in D} T_d = \emptyset$, every point of $bd\, K$ is illuminated by at least one of the points $d \in D$.

REMARK 4. In the proof of Theorem 2 we could have used, instead of the ellipsoid B, any inscribed (Euclidean) ball of maximal volume (although for these the intersection with $bd\, K$ is not necessarily global).

REMARK 5. The "primitive polyhedra" in E^3, discussed in [4] in connection with fixing systems for smooth convex bodies in E^3, were considered also by STEINITZ [6]. For any $K \subset E^n$, the proof of Theorem 1 shows that if the set A is chosen to contain a minimal number of points, then the hyperplanes tangent to B (and K) at points of A form a primitive polyhedron in E^n. It follows from the Lemma that every primitive polyhedron $P \subset E^n$ has an inscribed ellipsoid (i. e. an ellipsoid contained in P and touching each $(n-1)$-face of P).

REMARK 6. A fixing (inner illuminating) system for a convex body K is called primitive if none of its proper subsets is a fixing (inner illuminating) system for K. FEJES TÓTH [4] posed the problem of determining the maximal number of points in a primitive fixing system for some convex body in E^n. He mentions that this number is 6 for $n = 2$, and conjectures that for $n = 3$ the maximum is 14. The existence of a maximum for every fixed n is rather plausible; however, no proof of this assertion seems to be known, even for $n = 3$. The situation is similar regarding the maximal number of points in primitive inner illuminating systems of convex bodies $K \subset E^n$. Here the maximum is easily shown to be 4 for $n = 2$. For $n \geqq 3$ even a proof for the existence of the maximum is lacking although the example of the n-cube suggest the maximum to be 2^n.

Added in proof (8 April 1964): The maximal number of points in a primitive fixing system is at least $2(2^n-1)$. Examples to this effect were found by G. HAJÓS, and by L. W. DANZER (for Danzer's example see his review of [4] in *Math. Reviews*, **26** (1963), pp. 569—570).

HEBREW UNIVERSITY,
JERUSALEM, ISRAEL

(Received 6 March 1963)

References

[1] F. BEHREND, Über die kleinste umbeschriebene und die größte einbeschriebene Ellipse eines konvexen Bereichs, *Math. Ann.*, **115** (1938), pp. 379—411.

[2] L. DANZER, B. GRÜNBAUM and V. KLEE, Helly's theorem and its relatives, *Proc. Symp. Pure Math.*, 7 (1963), pp. 101—180.

[3] L. DANZER, D. LAUGWITZ and H. LENZ, Über das Löwnersche Ellipsoid und sein Analogon unter den einem Eikörper einbeschriebenen Ellipsoiden, *Arch. Math.*, **8** (1957), pp. 214—219.

[4] L. FEJES TÓTH, On primitive polyhedra, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **13** (1962), pp. 379—382.

[5] P. S. SOLTAN, Illumination from within of the boundary of a convex body, *Math. Sbornik, (N. S.)* **57** (99) (1962), pp. 443—448 (Russian).

[6] E. STEINITZ, Über diejenigen konvexen Polyeder mit n Grenzflächen, welche nicht durch $n-4$ ebene Schnitte aus einem Tetraeder abgeleitet werden können, *Arch. f. Math. u. Phys.*, (III) **14** (1909), pp. 1—48.

[7] V. L. ZAGUSKIN, On circumscribed and inscribed ellipsoids of extremal volume, *Uspekhi Mat. Nauk*, **13** (1958), No. 6 (84), pp. 89—93 (Russian).

BEISPIEL DER FOURIERREIHE EINER QUADRATISCH-INTEGRIERBAREN FUNKTION, DIE IN GEWISSER ANORDNUNG IHRER GLIEDER ÜBERALL DIVERGIERT

Von

K. TANDORI (Szeged)

(*Vorgelegt von* G. ALEXITS)

Einleitung

A. N. KOLMOGOROFF[1] hat als erster bemerkt, daß eine Fourierreihe einer quadratisch-integrierbaren Funktion existiert, die in gewißer Anordnung ihrer Glieder fast überall divergiert; den Beweis hat er aber nicht publiziert. Später hat Z. ZAHORSKI[2] die Skizze eines Beweises dieser Behauptung veröffentlicht. Neuerdings haben A. M. OLEVSKIJ[3] und P. L. ULJANOV[4] allgemeinere Sätze bekommen, die diese Behauptung enthalten.

In dieser Arbeit werden wir mit direkter Konstruktion einer Fourierreihe mit den erwähnten Eigenschaften angeben. Wir werden den folgenden Satz beweisen, der sogar mehr behauptet:

SATZ. *Es gibt eine Fourierreihe einer quadratisch-integrierbaren Funktion, die in gewisser Anordnung ihrer Glieder überall divergiert.*[5]

§ 1. Hilfssätze

Es sei

$$K_m(x) = \frac{1}{2(m+1)} \left(\frac{\sin (m+1) \dfrac{x}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{k}{m+1} \right) \cos kx$$

die m-te Fejérsche Kernfunktion. Durch einfache Rechnung ergeben sich die fol-

---

[1] A. N. KOLMOGOROFF und D. MENCHOFF, Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales, *Math. Zeitschrift*, **26** (1927), S. 432–441.

[2] Z. ZAHORSKI, Une série de Fourier permuté d'une fonction de classe L divergente presque partout, *Comptes Rendus de l'Acad. Sci. Paris*, **251** (1960), S. 501–503.

[3] А. М. Олевский, Расходящиеся ряды из L^2 по полным системам, *Доклады Акад. Наук СССР*, **138** (1961), S. 545–548.

[4] П. Л. Улянов, Расходящиеся ряды по система Хаара и по базисам, *Доклады Акад. Наук СССР*, **138** (1961), S. 556–559.

[5] Unter Erscheinung dieser Arbeit hat Л. В. Тайков mit weniger elementaren Hilfsmitteln auch ein stärkeres Resultat erreicht. (Л. В. Тайков, О расходимости рядов Фурье по переставленной тригонометрической системе, *Успехи мат. наик СССР*, **18,** 5 (113) (1963), S. 191 – 198.)

genden Abschätzungen

$$K_m(x) \geqq 2(m+1)/\pi^2 \qquad \big(|x| \leqq \pi/2(m+1)\big), \tag{1}$$

$$K_m(x) \leqq m+\tfrac{1}{2}, \quad K_m(x) \leqq \pi^2/2(m+1)x^2 \qquad \big(|x| \leqq \pi/2\big) \tag{2}$$

und

$$\int_0^{2\pi} K_m^2(x)\,dx < \pi m. \tag{3}$$

Die m-te Partialsumme der Fourierreihe einer integrierbaren Funktion $f(x)$ werden wir mit $s_m(f; x)$ bezeichnet.

HILFSSATZ I. *Es sei n eine positive, ganze Zahl und $N = q2^8n$, wo q eine positive ganze Zahl ist. Dann gibt es ein trigonometrisches Polynom*

$$Q(x) = Q(N, n; x) = \sum_{k=N+1}^{a(N,n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

mit folgenden Eigenschaften:

$$\int_0^{2\pi} Q^2(x)\,dx \leqq 8\pi n, \quad |Q(x)| \leqq 4\pi^2/nx^2 \quad (|x| \leqq \pi/2) \quad \textit{und} \quad |Q(x)| \leqq 8n,$$

ferner, gibt es eine Zerlegung

$$[-\pi/2^7 n, \pi/2^7 n] = \bigcup_{l=1}^{8} E_l$$

des Intervalls $[-\pi/2^7n, \pi/2^7n]$ in einfache, paarweise disjunkte Mengen[6] *E_l derart, daß es für jedes l einen Index $\nu = \nu(l)$ $\big(N < \nu \leqq a(n, N)\big)$ gibt, so daß*

$$s_\nu(Q; x) \geqq An \qquad (x \in E_l)$$

mit einer positiven, absoluten Konstante $A(\leqq 1)$ besteht.

BEWEIS des Hilfssatzes I. Es sei $m(\leqq 15n)$ eine beliebige, positive Zahl. Dann gilt

$$|s|\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+m}\right) \leqq \frac{1}{2^4(N+m)} \qquad (0 \leqq |s| \leqq N/2^8 n).$$

Daraus folgt, daß

$$\cos(N+m)x \geqq 1/2 \qquad \left(x \in \left[s\frac{2\pi}{N} - \frac{\pi}{8N}, s\frac{2\pi}{N} + \frac{\pi}{8N}\right];\ 0 \leqq |s| \leqq N/2^8 n\right) \tag{4}$$

besteht. Wir wählen positive, als 1 nicht größere Zahlen $c_1, \ldots, c_8$ derart, daß

$$(c_1 + \ldots + c_l)(n - \tfrac{1}{2}) \leqq c_{l+1} n/\pi^2 \qquad (l = 1, \ldots, 7) \tag{5}$$

gilt, und betrachten das trigonometrische Polynom

$$Q(x) = \sum_{l=1}^{8} c_l \cos\big(N + (2l-1)n\big)\left(x - (l-1)\frac{\pi}{4N} - \frac{\pi}{8N}\right) K_{n-1}(x).$$

---

[6] Eine Menge heißt einfach, wenn sie als die Vereinigung endlichvieler Intervalle entsteht.

Auf Grund von (1), (2), (3), (4) und (5) ergibt sich durch einfache Rechnung, daß $Q(x)$ alle Behauptungen des Hilfssatzes I erfüllt.

HILFSSATZ II. *Es seien M eine positive ganze Zahl, $a(\geqq 4)$, $\varepsilon(<\pi/a)$ und η positive Zahlen. Dann gibt es ein trigonometrisches Polynom*

$$P(x) = P(M, a, \varepsilon, \eta; x) = \sum_{k=M+1}^{b(M, a, \varepsilon, \eta)} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

mit folgenden Eigenschaften: Es gelten die Ungleichungen

$$\int_0^{2\pi} P^2(x)\,dx \leqq 2^{10}\pi/a \quad \textit{und} \quad |P(x)| \leqq \eta \qquad (\pi/a \leqq |x| \leqq \pi/4),$$

ferner gibt es eine Zerlegung

$$\left[-\frac{\pi}{a}+\varepsilon, \frac{\pi}{a}-\varepsilon\right] = \bigcup_{l=1}^{\lambda} F_l$$

des Intervalls $\left[-\frac{\pi}{a}+\varepsilon, \frac{\pi}{a}-\varepsilon\right]$ in endlich viele, einfache, paarweise disjunkte Mengen F_l derart, daß es für jedes l einen Index $\mu=\mu(l)$ $\bigl(M<\mu\leqq b(M, a, \varepsilon, \eta)\bigr)$ gibt, so daß

$$s_\mu(P; x) \geqq B \quad (x \in F_l) \tag{6}$$

mit einer positiven, absoluten Konstante B besteht.

BEWEIS des Hilfssatzes II. Wir wenden den Hilfssatz I im Falle $n=\mu$ und $N=N_i$ $(i=1, 2, \dots)$ an, wo μ eine im folgenden zu bestimmende positive ganze Zahl ist; $N_i=q_i 2^8\mu$ besteht für jedes i mit positiven, ganzen q_i und es gilt $a(N_i, \mu)\leqq$ $\leqq N_{i+1}$ wo $a(N, n)$ die im Hilfssatz I erwähnte Funktion bedeutet. Mit festem, (m folgenden zu bestimmendem, positivem ganzem k und mit beliebigem s $s=0, 1, \dots, k-1$) definieren wir das trigonometrische Polynom

$$\tilde{P}_s(x) = \mu^{-1} \sum_{r=\varrho_1+1}^{\varrho_2} Q_s^{(r)}(x)$$

$$\left(Q_s^{(r)}(x) = Q\left(N_{s(\varrho_2-\varrho_1)+r-\varrho_1}, \mu; x - rk\frac{\pi}{2^6\mu} - \frac{\pi}{2^7\mu} - \frac{s\pi}{2^6\mu}\right)\right),$$

wo ϱ_1 und ϱ_2 so bestimmt sind, daß die Ungleichungen

$$-\frac{\pi}{a}+\frac{\varepsilon}{2} < (\varrho_1+1)k\frac{\pi}{2^6\mu} \leqq -\frac{\pi}{a}+\varepsilon \quad \text{und} \quad \frac{\pi}{a}-\varepsilon \leqq (\varrho_2+1)k\frac{\pi}{2^6\mu} < \frac{\pi}{a}-\frac{\varepsilon}{2}$$

bestehen. Für jedes k existieren derartige Zahlen ϱ_1 und ϱ_2, wenn nur μ genügend groß ist. Durch einfache Rechnung ergibt sich

$$\varrho_2 - \varrho_1 \leqq 2^7\mu/ak,$$

woraus wir auf Grund der Definition von $\tilde{P}_s(x)$

$$\int_0^{2\pi} \tilde{P}_s^2(x)\,dx \leqq 2^{10}\pi/ak \tag{7}$$

erhalten.

Es sei $0 \leqq s_0 \leqq k-1$ und $\varrho_1 < r_0 \leqq \varrho_2$. Dann erhalten wir auf Grund des Hilfssatzes I, daß das Intervall

$$I_{r_0, s_0} = \left[r_0 k \frac{\pi}{2^6 \mu} + s_0 \frac{\pi}{2^6 \mu}, r_0 k \frac{\pi}{2^6 \mu} + (s_0+1) \frac{\pi}{2^6 \mu}\right]$$

eine Zerlegung

$$I_{r_0, s_0} = \bigcup_{l=1}^{8} E_l^{(r_0, s_0)}$$

in einfache, paarweise disjunkte Mengen $E_l^{(r_0, s_0)}$ hat, derart, daß es für jedes l einen Index $v = v(l)$ $(N_{s(\varrho_2-\varrho_1)+r_0-\varrho_1} < v \leqq a(N_{s(\varrho_2-\varrho_1)+r_0-\varrho_1}, \mu))$ gibt, so daß

$$|s_v(Q_{s_0}^{(r_0)}; x)| \geqq A\mu \qquad (x \in E_l^{(r_0, s_0)})$$

besteht, wo A die im Hilfssatz I erwähnte Konstante bedeutet. Für $x \in E_l^{(r_0, s_0)}$, mit einem Index $\bar{v} = \bar{v}(x)$ $\big(N_{s_0(\varrho_2-\varrho_1)+r_0-\varrho_1} < \bar{v} \leqq a(N_{s_0(\varrho_2-\varrho_1)+r_0-\varrho_1}, \mu)\big)$ ergibt sich durch einfache Rechnung

$$s_{\bar{v}}(\tilde{P}_{s_0}; x) \geqq s_{\bar{v}}(\mu^{-1} Q_{s_0}^{(r_0)}; x) - \mu^{-1} \sum_{r=\varrho_1+1}^{r_0-1} |Q_{s_0}^{(r)}(x)| \geqq \tag{8}$$

$$\geqq A - 4\pi^2 \mu^{-2} \sum_{l=1}^{\infty} \left((kl-1)\frac{\pi}{2^6 \mu}\right)^{-2} \geqq A - 2^{17} k^{-2} \sum_{l=1}^{\infty} l^{-2} \geqq A/2,$$

wenn $k \geqq [\sqrt{2^{19}/A}]$[7] besteht.

Es sei $\pi/a \leqq |x| \leqq \pi/4$. Auf Grund des Hilfssatzes I ergibt sich

$$|\tilde{P}_{s_0}(x)| \leqq 4\pi^2 \mu^{-2} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{2} + kl \frac{\pi}{2^6 \mu}\right)^{-2} \leqq \frac{2^9 \pi}{\mu \varepsilon k} + \frac{2^4 \pi^2}{\mu^2 \varepsilon^2} < \eta/k, \tag{9}$$

wenn μ genügend groß ist. Es besteht weiterhin für jedes x

$$|\tilde{P}_{s_0}(x)| \leqq 2^4 + \frac{2^3 \pi^2}{\mu^2} \sum_{l=1}^{\infty} \left((kl-1)\frac{\pi}{2^6 \mu}\right)^{-2} \leqq 2^{19}. \tag{10}$$

Es seien $\gamma_0, \ldots, \gamma_{k-1}$ positive, kleinere Zahlen als 1, für die

$$(\gamma_0 + \ldots + \gamma_{s-1}) 2^{19} < \gamma_s A/4 \qquad (s = 1, \ldots, k-1) \tag{11}$$

besteht. Wir setzen

$$P(x) = \sum_{s=0}^{k-1} \gamma_s \tilde{P}_s(x).$$

---

[7] $[\alpha]$ bezeichnet den ganzen Teil von α.

Aus (8), (10), und (11) folgt mit einem Index $\mu=\mu(x)\ \bigl(N_1<\mu\leqq a(N_{k(\varrho_2-\varrho_1)},\mu)\bigr)$

$$s_\mu(P;x)\geqq\gamma_{s_0}s_\mu(\tilde{P}_{s_0};x)-\sum_{s=0}^{s_0-1}\gamma_s|\tilde{P}_s(x)|\geqq \tag{12}$$

$$\geqq 2^{-1}\gamma_{s_0}A-2^{19}\sum_{s=0}^{s_0-1}\gamma_s\geqq\gamma_{s_0}A/4 \qquad (x\in E_l^{(r_0,s_0)}).$$

Da

$$\bigcup_{s=0}^{k-1}\ \bigcup_{r=\varrho_1+1}^{\varrho_2}\ \bigcup_{l=1}^{8}E_l^{(r,s)}\supseteqq\left[-\frac{\pi}{a}+\varepsilon,\frac{\pi}{a}-\varepsilon\right]$$

gilt, erhalten wir aus (12), daß (6) mit einer positiven, absoluten Konstante B besteht. Auf Grund von (7) und (9) erfüllt $P(x)$ alle Behauptungen des Hilfssatzes II.

HILFSSATZ III. *Es seien $\bar{M}$ und $\bar{m}$ positive ganze Zahlen und $\bar{\varepsilon}$ eine positive Zahl. Dann gibt es ein trigonometrisches Polynom*

$$\bar{P}_{\bar{m}}(x)=\bar{P}_{\bar{m}}(\bar{M},\bar{\varepsilon};x)=\sum_{k=\bar{M}+1}^{\bar{c}(\bar{M},\bar{m},\bar{\varepsilon})}(\bar{\alpha}_k^{(\bar{m})}\cos kx+\bar{\beta}_k^{(\bar{m})}\sin kx) \tag{13}$$

mit

$$\int_0^{2\pi}\bar{P}_{\bar{m}}^2(x)\,dx\leqq 2^{10}\bar{m}. \tag{14}$$

Weiterhin gibt es eine Anordnung

$$\sum_{j=\bar{M}+1}^{\bar{c}(\bar{M},\bar{m},\bar{\varepsilon})}\bigl(\bar{\alpha}_{k(j)}^{(\bar{m})}\cos k(j)x+\bar{\beta}_{k(j)}^{(\bar{m})}\sin k(j)x\bigr)$$

der Summe (13) *und paarweise disjunkte, einfache Mengen $\bar{F}_l^{(\bar{m})}$ $(l=1,\dots,\bar{\lambda}^{(m)})$ derart, daß für jedes l Indizes $\bar{\mu}_1^{(\bar{m})}=\bar{\mu}_1^{(\bar{m})}(l)$, $\bar{\mu}_2^{(\bar{m})}=\bar{\mu}_2^{(\bar{m})}(l)$ $\bigl(\bar{M}<\bar{\mu}_1<\bar{\mu}_2\leqq\bar{c}(\bar{M},\bar{m},\bar{\varepsilon})\bigr)$ gibt, so daß*

$$\sum_{j=\bar{\mu}_1^{(\bar{m})}}^{\bar{\mu}_2^{(\bar{m})}}\bigl(\bar{\alpha}_{k(j)}^{(\bar{m})}\cos k(j)x+\bar{\beta}_{k(j)}^{(\bar{m})}\sin k(j)x\bigr)\geqq C\bar{m} \qquad (x\in\bar{F}_l^{(\bar{m})}) \tag{15}$$

mit $C=\min(A,B)$ *besteht, wo A bzw. B die im Hilfssatz I bzw. II erwähnte Konstante bedeutet. Dabei gilt*

$$\operatorname{mes}\left(2\pi-\bigcup_{l=1}^{\bar{\lambda}(\bar{m})}\bar{F}_l^{(\bar{m})}\right)<\bar{\varepsilon}.^{8} \tag{16}$$

BEWEIS des Hilfssatzes III. Wir wenden den Hilfssatz I im Falle $n=1$ und $N_i=q_i2^8$ $(i=1,\dots,2^7)$ an, wo die q_i positive ganze Zahlen sind, für welche $M\leqq N_1$, $a(N_i,1)\leqq N_{i+1}$ $(i=1,\dots,2^7)$ besteht, wo $a(N,n)$ die im Hilfssatz I erwähnte Funktion bedeutet. Die so erhaltenen Funktionen bezeichnen wir mit $Q_i(x)$. Wir setzen

$$\bar{P}_1(x)=\sum_{i=1}^{2^7}Q_i\left(x-(i-1)\frac{\pi}{2^6}-\frac{\pi}{2^7}\right)=\sum_{k=\bar{M}+1}^{\bar{c}(\bar{M},1,\bar{\varepsilon})}(\bar{\alpha}_k^{(1)}\cos kx+\bar{\beta}_k^{(1)}\sin kx).$$

---

[8] $m(H)$ bezeichnet das Lebesguesche Maß der Menge H.

Auf Grund des Hilfssatzes I ist es offensichtlich, daß (14) für $\bar{P}_1(x)$ im Falle $\bar{m}=1$ erfüllt wird, und paarweise disjunkte, einfache Mengen $\bar{F}_l^{(1)}$ $(l=1, \ldots, \bar{\lambda}^{(1)})$ existieren derart, daß zu jedem l Indizes $\bar{\mu}_1^{(1)}=\bar{\mu}_1^{(1)}(l), \bar{\mu}_2^{(1)}=\bar{\mu}_2^{(1)}(l)$ $\left(\bar{M}<\bar{\mu}_1^{(1)}<\bar{\mu}_2^{(1)}\leqq \leqq \bar{c}\left(\bar{M}, 1, \bar{\varepsilon}\right)\right)$ gibt, so daß

$$\sum_{j=\bar{\mu}_1^{(1)}}^{\bar{\mu}_2^{(1)}} (\bar{\alpha}_k^{(1)} \cos kx + \bar{\beta}_k^{(1)} \sin kx) \geqq A$$

besteht (wo A die im Hilfssatz I erwähnte Konstante bedeutet) und

$$\bigcup_{l=1}^{\bar{\lambda}^{(1)}} \bar{F}_l^{(1)} = [0, 2\pi)$$

ist.

Es sei $\bar{m}_0$ eine beliebige positive ganze Zahl. Nehmen wir an, daß der Hilfssatz III im Falle $\bar{m}=\bar{m}_0$ schon bewiesen ist. D. h. es gibt ein trigonometrisches Polynom

$$\bar{P}_{\bar{m}_0}(x) = \sum_{k=\bar{M}+1}^{\bar{c}(\bar{M}, \bar{m}_0, \bar{\varepsilon})} (\bar{\alpha}_k^{(\bar{m}_0)} \cos kx + \bar{\beta}_k^{(\bar{m}_0)} \sin kx), \tag{17}$$

für welches (14) im Falle $\bar{m}=\bar{m}_0$ erfüllt wird. Es gibt eine Anordnung der Summe (17)

$$\sum_{j=\bar{M}+1}^{\bar{c}(\bar{M}, \bar{m}_0, \bar{\varepsilon})} (\bar{\alpha}_{k(j)}^{(\bar{m}_0)} \cos k(j)x + \bar{\beta}_{k(j)}^{(\bar{m}_0)} \sin k(j)x)$$

und paarweise disjunkte Mengen $\bar{F}_l^{(\bar{m}_0)}$ $(l=1, \ldots, \bar{\lambda}^{(\bar{m}_0)})$ derart, daß für jedes l Indizes $\bar{\mu}_1^{(\bar{m}_0)}=\bar{\mu}_1^{(\bar{m}_0)}(l), \bar{\mu}_2^{(\bar{m}_0)}=\bar{\mu}_2^{(\bar{m}_0)}(l)$ $(\bar{M}<\bar{\mu}_1^{(\bar{m}_0)}<\bar{\mu}_2^{(\bar{m}_0)}\leqq \bar{c}(\bar{M}, \bar{m}_0, \bar{\varepsilon})$ existieren derart, daß

$$\sum_{j=\bar{\mu}_1^{(\bar{m}_0)}}^{\bar{\mu}_2^{(\bar{m}_0)}} (\bar{\alpha}_{k(j)}^{(\bar{m}_0)} \cos k(j)x + \bar{\beta}_{k(j)}^{(\bar{m}_0)} \sin k(j)x) \geqq Cm_0 \qquad (x \in \bar{F}_l^{(\bar{m}_0)}) \tag{18}$$

besteht und

$$\operatorname{mes}\left(2\pi - \bigcup_{l=1}^{\bar{\lambda}^{(\bar{m}_0)}} \bar{F}_l^{(\bar{m}_0)}\right) < \bar{\varepsilon} \tag{19}$$

gilt.

Es seien

$$\bar{F}_l^{(\bar{m}_0)} = \bigcup_{i=1}^{r_l} I_i^{(l)}$$

und $a_i^{(l)}=2\pi\left(\operatorname{mes}(I_i^{(l)})\right)^{-1}$, ferner $\bar{\bar{\varepsilon}}$ eine positive Zahl, für die $\bar{\bar{\varepsilon}}<\pi/a_i^{(l)}$ $(l=1, \ldots, \bar{\lambda}^{(\bar{m}_0)};\ i=1, \ldots, r_l)$ und

$$\operatorname{mes}\left(2\pi - \bigcup_{l=1}^{\bar{\lambda}^{(\bar{m}_0)}} \bar{F}_l^{(\bar{m}_0)}\right) - \bar{\bar{\varepsilon}}R < \bar{\varepsilon} \tag{20}$$

$(R = r_1 + \ldots + r_{\bar{\lambda}(\overline{m}_0)})$ besteht. Auf Grund von (19) existiert ein solches $\bar{\bar{\varepsilon}}$. Wir wenden den Hilfssatz II im Falle $M = M_i^{(l)}, a = a_i^{(l)}, \varepsilon = \bar{\bar{\varepsilon}}$ und $\eta = B(2R)^{-1}$ an, wo $\bar{c}(\overline{M}, \overline{m}_0, \bar{\varepsilon}) \leqq M_1^{(1)}, b\big(M_i^{(l)}, a_i^{(l)}, \bar{\bar{\varepsilon}}, B(2R)^{-1}\big) \leqq M_{i+1}^{(l)}$ und $b\big(M_{r_l}^{(l)}, a_{r_l}^{(l)}, \bar{\bar{\varepsilon}}, B(2R)^{-1}\big) \leqq \leqq M_1^{(l+1)}$ bestehen. Die so erhaltenen Polynome bezeichnen wir der Reihe nach mit $P_i^{(l)}(x)$.

Wir setzen die Summe

$$(21) \qquad \bar{P}_{\overline{m}_0+1}(x) = \sum_{l=1}^{\bar{\lambda}^{(\overline{m}_0)}} \left(\sum_{j=\bar{\mu}_2^{(\overline{m}_0)}(l-1)+1}^{\bar{\mu}_2^{(\overline{m}_0)}(l)} (\bar{\alpha}_{k(j)}^{(\overline{m}_0)} \cos k(j)x + \bar{\beta}_{k(j)}^{(\overline{m}_0)} \sin k(j)x + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{r_l} P_i^{(l)}(x - \alpha_i^{(l)}) \right),$$

wo $\bar{\mu}_2^{(\overline{m}_0)}(0) = \overline{M}$ ist und $\alpha_i^{(l)}$ den Mittelpunkt des Intervalls $I_i^{(l)}$ bezeichnet.

Auf Grund der Induktionsannahme und des Hilfssatzes II gilt (14) für $\bar{P}_{\overline{m}_0+1}(x)$ im Falle $\overline{m} = \overline{m}_0 + 1$. $\bar{P}_{\overline{m}_0+1}(x)$ ist in gewisser Anordnung ein trigonometrisches Polynom vom Typ

$$\sum_{k=\overline{M}+1}^{\bar{c}(\overline{M}, \overline{m}_0+1, \bar{\varepsilon})} (\bar{\alpha}_k^{(\overline{m}_0+1)} \cos kx + \bar{\beta}_k^{(\overline{m}_0+1)} \sin kx).$$

Aus (18), (21) und aus dem Hilfssatz II folgt, daß paarweise disjunkte, einfache Mengen $\bar{F}_l^{(\overline{m}_0+1)}$ $(l = 1, \ldots, \bar{\lambda}^{(\overline{m}_0+1)})$ existieren derart, daß (15) im Falle $\overline{m} = \overline{m}_0 + 1$ erfüllt wird. Aus (20) folgt, daß (16) auch für diese Mengen besteht.

HILFSSATZ IV. *Es seien* $\overline{N}$ *und* $\bar{n}$ $(\geqq 2)$ *positive ganze Zahlen. Dann gibt es ein trigonometrisches Polynom*

$$(22) \qquad R(x) = R(\overline{N}, \bar{n}; x) = \sum_{k=\overline{N}+1}^{d(\overline{N}, \bar{n})} (c_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

mit folgenden Eigenschaften: Es gilt

$$(23) \qquad \int_0^{2\pi} R^2(x)\, dx \leqq 2^{11}/\bar{n}^2,$$

ferner gibt es eine Anordnung

$$\sum_{j=\overline{N}+1}^{d(\overline{N}, \bar{n})} (c_{k(j)} \cos k(j)x + d_{k(j)} \sin k(j)x)$$

der Summe (22) *derart, daß für jedes* x *Indizes* $\nu_1 = \nu_1(x), \nu_2 = \nu_2(x)$ $\big(\overline{N} < \nu_1 < \nu_2 \leqq \leqq d(\overline{N}, \bar{n})\big)$ *existieren, so daß*

$$\sum_{j=\nu_1}^{\nu_2} \big(c_{k(j)} \cos k(j)x + d_{k(j)} \sin k(j)x\big) \geqq C/2$$

besteht, wo C *die im Hilfssatz III erwähnte Konstante bedeutet.*

Beweis des Hilfssatzes IV. Wir wenden den Hilfssatz III im Falle $\overline{M}=\overline{N}$, $\overline{m}=\bar{n}^2$ und $\bar{\varepsilon}<\bar{n}^{-2}$ an. Mit den Bezeichnungen des Hilfssatzes III gilt dann

$$\text{(24)} \qquad \operatorname{mes}\left(2\pi - \bigcup_{l=1}^{\bar{\lambda}(\bar{n}^2)} \bar{F}_l^{(\bar{n}^2)}\right) < 1/\bar{n}^2.$$

Offensichtlich gilt die Darstellung

$$2\pi - \bigcup_{l=1}^{\bar{\lambda}(\bar{n}^2)} \bar{F}_l^{(\bar{n}^2)} = \bigcup_{s=1}^{\sigma} J_s,$$

wo die Intervalle J_s abgeschlossen und paarweise disjunkt sind. Es sei $J_s=[\alpha_s, \beta_s]$ und ε_0 eine positive Zahl derart, daß die Intervallen $\bar{J}_s = [\alpha_s-\varepsilon_0, \beta_s+\varepsilon_0]$ noch paarweise disjunkt sind und

$$\sum_{s=1}^{\sigma} \operatorname{mes}(\bar{J}_s) < 1/\bar{n}^2$$

besteht. (Wegen (24) existiert ein solches ε_0.) Wir wenden den Hilfssatz II im Falle $M=M_s$, $a_s=2\pi(\operatorname{mes}(\bar{J}_s))^{-1}$, $\bar{\varepsilon}=\varepsilon_0$ und $\eta=B/2\sigma$ an, wo $\bar{c}(\overline{N}, \bar{n}^2, \bar{\varepsilon}) \leqq M_1$, $b(M_s, a_s, \varepsilon_0, B/2\sigma) \leqq M_{s+1}$ bestehen, wo $b(M, a, \varepsilon, \eta)$ die im Hilfssatz II erwähnte Funktion bezeichnet. Wir setzen das trigonometrische Polynom

$$R(x) = \bar{n}^{-2}\bar{P}(\overline{N}, \bar{n}^2, \bar{\varepsilon}; x) + \sum_{s=1}^{\sigma} P(M_s, a_s, \varepsilon_0, B/2\sigma; x-q_s),$$

wo q_s den Mittelpunkt des Intervalls $\bar{J}_s$ bezeichnet. Auf Grund der Hilfssätze II und III befriedigt $R(x)$ alle Behauptungen des Hilfssatzes IV. Damit haben wir den Hilfssatz IV vollständig bewiesen.

§ 2. Beweis des Satzes

Auf Grund des Hilfssatzes IV kann unserer Satz leicht bewiesen werden. Wir wenden den Hilfssatz IV im Falle $N=\overline{N}_i$ und $\bar{n} = i+1$ an, wo $d(\overline{N}_i, i+1) \leqq \overline{N}_{i+1}$ besteht, und betrachten die trigonometrische Reihe

$$\text{(25)} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} R(\overline{N}_i, i+1; x).$$

Auf Grund der Definition von $R(\overline{N}_i, i+1; x)$ ist offensichtlich

$$\int_0^{2\pi} R(\overline{N}_i, i+1; x) R(\overline{N}_j, j+1; x)\, dx = 0 \qquad (i \neq j).$$

Aus (23) folgt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} R^2(\overline{N}_i, i+1; x)\, dx \leqq 2^{11} \sum_{i=1}^{\infty} (i+1)^{-2} < \infty.$$

Daraus ergibt sich auf Grund des Satzes von Riesz—Fischer, daß die Reihe (25) die Fourierreihe einer quadratisch-integrierbaren Funktion ist. Auf Grund des Hilfssatzes IV hat diese Reihe offensichtlich eine derartige Anordnung ihrer Glieder, bei welcher sie überall divergiert. Damit haben wir unseren Satz vollständig bewiesen.

BOLYAI INSTITUT,
JÓZSEF ATTILA UNIVERSITÄT,
SZEGED

(Eingegangen 12. März 1963.)

ON SEPARATION BY HARMONIC FUNCTIONS

By

L. A. RUBEL (Urbana, Illinois, USA)

(*Presented by* B. SZ.-NAGY)

I have posed the following question to many mathematicians, among them some experts in potential theory, and invariably received the wrong answer. So although the solution is quite simple, I feel there is some point in publishing it.

QUESTION. For which values of n is the following statement true? If f is a superharmonic function on Euclidean space E^n, h a subharmonic function there, and $f \leqq h$ everywhere, then there exists a harmonic function g such that $f \leqq g \leqq h$ everywhere.

The answer is that the statement holds only for $n=1$, where it becomes the familiar assertion that a concave function f that lies below a convex function h may be separated from h by a linear function g. To show this, suppose first that $n \geqq 3$. Let μ be the uniform distribution of unit mass on the unit sphere $|z|=1$, and for any $\tau \in E_n$, let μ_τ be the translate of μ by τ. Let f be the Newtonian potential of μ, defined by

$$f(z) = U^{\mu}(z) = \int |z-w|^{2-n}\, d\mu(w).$$

It is an elementary fact that f is continuous and superharmonic. Indeed, $f(z)=|z|^{2-n}$ for z outside the unit sphere, and $f(z)=1$ inside the unit sphere. Now let h be defined by

$$h(z) = \frac{3}{2} - U^{\mu_\tau}(z) = \frac{3}{2} - f_\tau(z),$$

where f_τ is the translate of f by τ $\big($i. e. $f_\tau(z) = f(z-\tau)\big)$ and where τ is chosen so large that $f \leqq h$ everywhere. This is possible since $h(z)-f(z) = \frac{3}{2} - \big(f(z)+f_\tau(z)\big)$ and

(i) $\lim\limits_{\tau\to\infty} f_\tau(z)=0$ uniformly on compact sets,

(ii) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$,

(iii) $\sup f(z)=\sup f_\tau(z)=1$.

Suppose now that there were a harmonic function g such that $f \leqq g \leqq h$ everywhere. Since $0 \leqq f$ and $h \leqq \frac{3}{2}$, it would follow that g is a bounded harmonic function, and consequently g is a constant. But this is impossible since $\sup f=1$ and $\inf h=\frac{1}{2}$.

For the case $n=2$, let f and h be similarly defined, with U denoting now the logarithmic potential

$$U^{\mu}(z) = \int \log \frac{1}{|z-w|}\, d\mu(w).$$

If now the required g were to exist, it would follow, on taking k as a harmonic conjugate of g, that $G(z)=\exp\big(g(z)+ik(z)\big)$ would be an entire function of polynomial growth, since $|G(z)| = \exp g(z) \leqq \exp h(z)$, and $h(z)$ is bounded by $2\log|z|$ when z is large. By Liouville's theorem, G is then a polynomial, and since $g(z) \geqq f(z) > -\infty$ everywhere, G has no zeros, and is consequently a constant. This leads to a contradiction, as in the case $n \geqq 3$.

UNIVERSITY OF ILLINOIS
URBANA, USA

(Received 22 March 1963)

ÜBER HALBRINGE UND HALBKÖRPER. III

Von

H. J. WEINERT (Potsdam, DDR)

(*Vorgelegt von* L. RÉDEI)

Einleitung

Den vorliegenden dritten Teil unserer Arbeit (vgl. [6], [7]) beginnen wir mit einer Untersuchung geordneter Halbringe. Dabei handelt es sich um eine Erweiterung der entsprechenden Begriffsbildung des angeordneten Ringes, die mit Hilfe der (strengen) Monotoniegesetze eingeführt wird (vgl. § 8). Insbesondere folgt dann, daß ein geordneter Halbring regulär bezüglich beider Operationen und additiv kommutativ ist.

Weiterhin kann eine Ordnung eines Halbringes $\mathfrak{R}$ stets und zwar auf genau eine Weise zu einer Ordnung jedes Rechtsquotientenhalbringes von $\mathfrak{R}$ fortgesetzt werden (§ 8, Satz 1). Für Differenzenhalbringe von $\mathfrak{R}$ gilt diese Aussage jedoch dann und nur dann, wenn $\mathfrak{R}$ einer Bedingung genügt, die einer bekannten Regel über die Produktbildung von Ungleichungen entspricht (§ 8, Satz 2). Sie ist übrigens eine Verschärfung der Bedingung aus Zusatz 3 von § 6 für die Übertragung der multiplikativen Regularität bei der Differenzenhalbringbildung und ist wie diese stets erfüllt, wenn $\mathfrak{R}$ die Eigenschaft $(*)$ hat.[1]

Für Halbringe mit dieser Eigenschaft $(*)$ läßt sich auch ein hinreichendes und notwendiges Kriterium dafür angeben, ob sie überhaupt geordnet werden können, was auf eine Verallgemeinerung eines Satzes von JOHNSON ([2]) hinausläuft (§ 8, Satz 3). Weiter ist gemäß Satz 4 von § 8 die ordnungsabhängige Eigenschaft $(**)$[1] gerade kennzeichnend für diejenigen Halbringe, die Positivbereiche angeordneter Ringe sind; sie können übrigens nur auf eine Weise positiv-geordnet werden, wobei diese Ordnung mit der „additiven Teilbarkeitsrelation" übereinstimmt. Auf die Beziehungen gerade dieser Begriffsbildungen zum Aufbau der Arithmetik wird hier nur hingewiesen (vgl. LUGOWSKI [3]). Doch geben wir abschließend noch eine zweckmäßige Fassung des Begriffes der „archimedischen Ordnung" für Halbringe.

In dem nachfolgenden Paragraphen 9 wenden wir uns der Untersuchung von Halbkörpern mit regulärer Addition zu und beginnen mit zwei Sätzen, die sich aus den Betrachtungen über geordnete Halbringe ergeben. So erhalten wir aus Satz 4 von § 8 eine Aussage über Halbkörper mit gleichem Differenzenring (Satz 1), die eine nahezu zwangsläufige Lösung eines von RÉDEI gestellten Problems über Differenzenringe von Halbkörpern (vgl. [4], § 48, S. 167 und [7], § 6) erlaubt. Auf ähnliche Art ergibt sich eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein echter algebraischer Halbkörper $\mathfrak{H}$, zu dem überhaupt ein Oberkörper existiert,

---

[1] Ein additiv kommutativer Halbring $\mathfrak{R}$ erfüllt die Eigenschaft $(*)$ (bzw. $(**)$), wenn wenigstens (bzw. genau) eine der Gleichungen $a+x_1 = b$, $b+x_2 = a$ für je zwei Elemente $a \neq b$ aus $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}$ lösbar ist.

bereits isomorph in den Halbkörper $\mathbf{\Theta}$ der positiver reellen Zahlen eingebettet werden kann (vgl. Satz 2 und die nachfolgenden Bemerkungen).

Als nächstes definieren wir in naheliegender Weise den Begriff der einfachen Halbkörpererweiterung $\mathfrak{H}=\mathfrak{h}(\alpha)$ eines Halbkörpers $\mathfrak{h}$ für multiplikativ kommutative Halbkörper. Eine solche Halbkörpererweiterung $\mathfrak{h}(\alpha)$ eines echten Halbkörpers $\mathfrak{h}$ ist genau dann bereits ein Körper, wenn α algebraisch über $\mathfrak{h}$, d. h. algebraisch über $\mathfrak{r}=\mathfrak{D}(\mathfrak{h})$ und sogar Nullstelle eines Polynoms mit Koeffizienten aus $\mathfrak{h}$ ist (Satz 3). Die folgenden beiden Sätze enthalten eine vollständige Übersicht über sämtliche einfachen Erweiterungen eines vorgegebenen echten Halbkörpers $\mathfrak{h}$, die wir hier nur kurz zusammenfassen:

Es gibt eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Erweiterung $\mathfrak{H}=\mathfrak{h}(\alpha)$ von $\mathfrak{h}$ mit einem über $\mathfrak{h}$ transzendenten Element α. Dabei ist der Differenzenring $\mathfrak{R}=\mathfrak{D}(\mathfrak{H})$ kein Körper, doch kann $\mathfrak{H}$ genau dann in einen Körper eingebettet werden, wenn dies für $\mathfrak{h}$ zutrifft (Satz 4).

Zu jedem Primideal $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{r}[x]$ mit $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{r}=(o)$ existiert eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Erweiterung $\mathfrak{H}=\mathfrak{h}(\alpha)$ von $\mathfrak{h}$ mit einem Element α, welches Nullstelle aller Polynome $f(x)\in\mathfrak{a}$ ist. Hier ist $\mathfrak{H}$ stets in einen Körper einbettbar (Satz 5, Fall 1).

Zu jedem Ideal $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{r}[x]$ mit $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{r}=(o)$, welches nicht Primideal ist, aber

$$\text{aus } p(x)g(x)\in\mathfrak{a} \text{ folgt } g(x)\in\mathfrak{a}$$

für alle $p(x)\in\mathfrak{h}[x]$ und $g(x)\in\mathfrak{r}[x]$ erfüllt, existiert eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Erweiterung $\mathfrak{H}=\mathfrak{h}(\alpha)$ von $\mathfrak{h}$ mit einem Element α, welches Nullstelle aller Polynome $f(x)\in\mathfrak{a}$ ist. Hier enthält jedoch der Differenzenring $\mathfrak{R}=\mathfrak{D}(\mathfrak{H})$ stets Nullteiler, so daß es zu $\mathfrak{H}$ keinen Oberkörper gibt (Satz 5, Fall 2).

Wenn dabei insbesondere der Differenzenring $\mathfrak{D}(\mathfrak{h})$ des Halbkörpers $\mathfrak{h}$ ein Körper ist, lassen sich die beiden Fälle 1 und 2 durch Aussagen über das Minimalpolynom von α charakterisieren, was auch die Angabe von Beispielen für Fall 2 erleichtert.

Danach greifen wir die schon durch Satz 2 angeschnittene Einbettungsfrage für einfache Halbkörpererweiterungen wieder auf und erhalten schließlich folgendes Resultat, welches ohne Beschränkung der Allgemeinheit für Unterhalbkörper des Körpers **Z** der komplexen Zahlen formuliert werden kann: Ist $\mathfrak{h}$ Positivbereich eines reellen Körpers (insbesondere also etwa der Halbkörper **H** der positiven rationalen Zahlen), so ist jede einfache Halbkörpererweiterung $\mathfrak{H}=\mathfrak{h}(\alpha)\subseteqq\mathbf{Z}$ entweder selbst bereits ein Körper oder isomorph in den Halbkörper $\mathbf{\Theta}$ der positiven reellen Zahlen einbettbar (vgl. Satz 8). Dieses Ergebnis steht dabei in einem engen Zusammenhang mit dem vorausgehenden Satz 7, der eine Verschärfung einer Teilaussage eines Satzes von P. TURÁN (vgl. [5], Lemma I) darstellt: Ist $F(x)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten, welches keine reellen Nullstellen $\alpha\geqq 0$ besitzt, so existiert sogar mit rationalen Koeffizienten ein Polynom $\Phi(x)$ derart, daß $F(x)\Phi(x)$ nur positive Koeffizienten hat.

§ 8. Geordnete Halbringe

Schon das Anliegen, den gesamten Aufbau der Arithmetik allgemeinen algebraischen Strukturaussagen unterzuordnen, macht eine Ausdehnung des Begriffes der „Anordnung" auf Halbringe erforderlich. Da dies ersichtlich nicht wie bei

Ringen durch Auszeichnung eines Unterhalbringes als „Positivbereich" vorgenommen werden kann, definieren wir:

Ein Halbring $\mathfrak{H}$ heißt *geordnet*, wenn für seine Elemente eine zweistellige Relation $a<b$ erklärt ist, die irreflexiv, transitiv und konnex ist und für die gilt:

Monotoniegesetz der Addition:

Aus $a<b$ folgt $a+c<b+c$ und $c+a<c+b$ für alle $c \in \mathfrak{N}$.

Monotoniegesetz der Multiplikation:

Für jedes $c \neq o$ aus $\mathfrak{N}$[2] folgt für alle Paare a, b mit $a<b$

(1) entweder $ac<bc$ und $ca<cb$

(2) oder $ac>bc$ und $ca>cb$.

Wie man leicht zeigt, ergibt sich aus den Monotoniegesetzen die Regularität von Addition und Multiplikation, womit nach dem Kriterium aus § 2 ein geordneter Halbring auch stets additiv kommutativ ist. Weiterhin erfolgt durch das Monotoniegesetz der Multiplikation eine Einteilung aller von o verschiedenen Elemente $c \in \mathfrak{N}$ in positive (Fall (1)) und negative (Fall (2)).[3] Summe und Produkt positiver Elemente sind wieder positiv, desgleichen das Produkt zweier negativer Elemente, während das Produkt eines positiven und eines negativen Elementes sowie die Summe zweier negativer Elemente negativ sind. Für einen geordneten Halbring $\mathfrak{N} \neq \{o\}$ ist also der Positivbereich $\mathfrak{P}$ nicht leer und selbst ein geordneter Halbring (mit der induzierten Ordnungsrelation); allgemein heiße ein geordneter Halbring ohne negative Elemente positiv-geordnet. Es gibt jedoch Halbringe, die (im Gegensatz zu den Verhältnissen bei angeordneten Ringen[4] auf verschiedene Weise so geordnet werden können, daß dabei die gleichen Elemente positiv werden.

Weiterhin ergeben sich für einen geordneten Halbring $\mathfrak{N}$ folgende Zusammenhänge zwischen der Addition und Ordnungsrelation:

Gilt für ein festes positives Element $c \in \mathfrak{N}$

$$c<c+c \qquad (\text{bzw. } c>c+c),$$[5]

so gilt für jedes Element $a \in \mathfrak{N}$ und jedes positive Element $x \in \mathfrak{N}$

$$a<a+x \qquad (\text{bzw. } a>a+x).$$

Aus $a \geqq a+x$ folgte nämlich $ca \geqq ca+cx$, was mit $c+c>c$, also $cx+cx>cx$ den Widerspruch

$$ca+cx \geqq ca+cx+cx>ca+cx$$

---

[2] Aus dem Monotoniegesetz der Addition folgt bereits additive Regularität und damit die annullierende Eigenschaft des eventuell in $\mathfrak{N}$ vorhandenen Nullelementes o.

[3] Wir bemerken nur, daß man (auch im kommutativen Falle) nicht von $a_0c<b_0c$ für ein festes Paar $a_0<b_0$ auf $ac<bc$ für alle Paare $a<b$ schließen kann, also eine diesbezügliche Anschwächung des Monotoniegesetzes der Multiplikation nicht möglich ist. Dagegen ist $ac<bc$ für alle $a<b$ (c „rechts-positiv") mit $ca>cb$ für alle $a<b$ (c „links-negativ") unverträglich.

[4] Ein angeordneter Ring ist geordnet im eben definierten Sinne und seine Positivmenge ein positiv-geordneter Halbring. Auf eine genauere Klärung dieser Zusammenhänge kommen wir im Anschluß an die Übertragung der Ordnung bei der Differenzenhalbringbildung zu sprechen.

[5] Die Möglichkeit $c=c+c$ entfällt, da dann nach den Überlegungen aus § 1 $c=o$ wäre.

ergibt; entsprechend schließt man im zweiten Falle mit $c > c+c$. Um zu den gewohnten Verhältnissen zu gelangen, wird man im zweiten Falle zur dualen Ordnungsrelation übergehen, so daß wir o. B. d. A. feststellen können:

Die Addition eines positiven Elementes vergrößert.

Durch ähnliche Schlüsse erhält man dann:

Die Addition eines negativen Elementes verkleinert.

Ist x positiv und y negativ, so gilt $y < x$ bzw. $y < o < x$.

Von zwei zueinander entgegengesetzten Elementen ist eins positiv und eins negativ.

Es sei noch erwähnt, daß sich der Halbring **N** der natürlichen Zahlen als der kleinste geordnete Halbring mit Einselement und der Halbkörper **H** der positiven rationalen Zahlen als der kleinste geordnete Halbkörper algebraisch charakterisieren lassen.

Wir untersuchen nun die Übertragung der Ordnungsrelation von $\mathfrak{N}$ bei der Quotienten- und Differenzenhalbringbildung (vgl. § 5 und § 6).

SATZ 1. *Ist* $\mathfrak{N}$ *ein geordneter Halbring und* $\mathfrak{S}=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n})$ *ein Rechtsquotientenhalbring von* $\mathfrak{N}$, *so läßt sich die Ordnung von* $\mathfrak{N}$ *auf genau eine Weise zu einer Ordnung von* $\mathfrak{S}$ *fortsetzen.*

BEWEIS. Wegen $a\alpha^{-1}=a\alpha(\alpha^2)^{-1}$ erzeugt auch die Menge $\bar{\mathfrak{n}}$ der positiven Elemente von $\mathfrak{n}$ den gleichen Quotientenhalbring $\mathfrak{S}=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \bar{\mathfrak{n}})$, so daß wir von vornherein alle Elemente von $\mathfrak{n}$ als positiv annehmen können. Liegt nun für $\mathfrak{S}$ bereits eine Fortsetzung der Ordnung von $\mathfrak{N}$ vor, so ist

$$a\alpha^{-1} < b\beta^{-1}$$

gleichwertig damit, daß für Elemente $\lambda \in \mathfrak{n}$ und $l \in \mathfrak{N}$ mit $\alpha\lambda = \beta l$[6] stets

$$a\lambda < bl$$

gilt. Umgekehrt definieren wir mit Hilfe der Ordnung von $\mathfrak{N}$ eine Relation in $\mathfrak{S}$ durch

$a\alpha^{-1} < b\beta^{-1}$ genau dann, wenn Elemente $\lambda \in \mathfrak{n}$, $l \in \mathfrak{N}$ existieren, die $\alpha\lambda = \beta l$ und $a\lambda < bl$ erfüllen

und zeigen, daß diese Definition sowohl von der Wahl von λ und l als auch von der Schreibweise von $a\alpha^{-1}$ und $b\beta^{-1}$ unabhängig ist. Gilt nämlich $a\alpha^{-1} = a'\alpha'^{-1}$, $b\beta^{-1} = b'\beta'^{-1}$, $\alpha\lambda = \beta l$, $a\lambda < bl$ und $\alpha'\lambda' = \beta' l'$, so folgt daraus $a'\lambda' < b'l'$. Dazu lösen wir $\alpha\lambda\mu = \alpha'\lambda' m$ gemäß $Q_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n})$, erhalten daraus

$$\beta l\mu = \alpha\lambda\mu = \alpha'\lambda' m = \beta' l' m$$

und weiter gemäß § 4 (Regel Z!)

$$a'\lambda' m = a\lambda\mu < bl\mu = b'l'm,$$

was bereits $a'\lambda' < b'l'$ ergibt, da in $\alpha\lambda\mu = \alpha'\lambda' m$ mit allen anderen Elementen auch m positiv ist.

---

[6] Die Existenz von Elementen $\lambda \in \mathfrak{n}$ und $l \in \mathfrak{N}$ mit $\alpha\lambda = \beta l$ ist gewährleistet, da $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{n}$ die Bedingung $Q_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n})$ erfüllen, vgl. § 4.

Die Aussage der Trichotomie überträgt sich nun ersichtlich von $a\lambda$ und bl auf $a\alpha^{-1}$ und $b\beta^{-1}$. Der Nachweis, daß es sich bei der so definierten Relation für $\mathfrak{S}$ um eine Fortsetzung der vorgegebenen von $\mathfrak{N}$ handelt, die Transitivität und das Monotoniegesetz der Addition ergeben sich nun am einfachsten daraus, daß endlich viele Elemente von $\mathfrak{S}$ mit „gleichem Nenner" geschrieben werden können und

$$a\alpha^{-1} < b\alpha^{-1} \text{ mit } a < b$$

gleichbedeutend ist. Für das Monotoniegesetz der Multiplikation von rechts beachtet man, daß in

$$\left.\begin{aligned} a\alpha^{-1}c\gamma^{-1} &= at(\gamma\tau)^{-1} \\ b\alpha^{-1}c\gamma^{-1} &= bt(\gamma\tau)^{-1} \end{aligned}\right. \quad \text{mit} \quad c\tau = \alpha t$$

mit c auch t positiv oder negativ ist,[7] so daß aus $a < b$ im ersten Falle $at < bt$, im zweiten Falle $at > bt$ folgt. Das Monotoniegesetz von links ergibt sich gemäß

$$\begin{aligned} c\gamma^{-1}a\alpha^{-1} &= cs\varkappa(\alpha\sigma\varkappa)^{-1} \quad \text{mit} \quad a\sigma\varkappa = \gamma s\varkappa \\ c\gamma^{-1}b\alpha^{-1} &= crk(\alpha\varrho k)^{-1} \quad \text{mit} \quad b\varrho k = \gamma rk \end{aligned}$$

und $\sigma\varkappa = \varrho k$ daraus, daß $a < b$ zunächst $s\varkappa < rk$, also für positives bzw. negatives c auch $cs\varkappa < crk$ bzw. $cs\varkappa > crk$ nach sich zieht.

SATZ 2. *Ist $\mathfrak{N}$ ein geordneter Halbring und $\mathfrak{T} = \mathfrak{D}(\mathfrak{N}, \mathfrak{m})$ ein Differenzenhalbring von $\mathfrak{N}$, so läßt sich die Ordnung von $\mathfrak{N}$ dann und nur dann zu einer Ordnung von $\mathfrak{T}$ fortsetzen, wenn für beliebige Elemente x, y und c aus $\mathfrak{N}$, γ aus $\mathfrak{m}$ gilt:*

$$\begin{aligned} F(\mathfrak{N}, \mathfrak{m}) \qquad & \textit{Aus } x < y \textit{ und } \gamma < c \textit{ folgt } && xc + y\gamma < x\gamma + yc, \\ & && \textit{sowie } cx + \gamma y < \gamma x + cy, \\ & \textit{aus } x < y \textit{ und } \gamma > c \textit{ folgt } && xc + y\gamma > x\gamma + yc, \\ & && \textit{sowie } cx + \gamma y > \gamma x + cy. \end{aligned}$$

In diesem Falle ist die Fortsetzung der Ordnung auf genau eine Weise möglich.

BEWEIS. Es liege zunächst wieder für $\mathfrak{T}$ eine Fortsetzung der Ordnung von $\mathfrak{N}$ vor. Dann ist das Element $d = c - \gamma \in \mathfrak{T}$ wegen $c = d + \gamma$ positiv bzw. negativ, je nachdem $\gamma < c$ oder $\gamma > c$ gilt. Im ersten Falle schließt man aus $x < y$ zum Beispiel auf $xd < yd$ und erhält aus

$$xd + x\gamma + y\gamma < yd + x\gamma + y\gamma$$

wie behauptet

$$xc + y\gamma < x\gamma + yc,$$

und im zweiten Falle entsprechend. Die angegebene Bedingung $F(\mathfrak{N}, \mathfrak{m})$ ist also notwendig. Weiterhin gilt

$$a - \alpha < b - \beta \text{ genau für } a + \beta < b + \alpha.$$

Wir zeigen nun, daß auch umgekehrt auf diese Weise mit Hilfe der Ordnung von $\mathfrak{N}$ eine Fortsetzung dieser Ordnung für $\mathfrak{T} = \mathfrak{D}(\mathfrak{N}, \mathfrak{m})$ definiert wird, wenn nur $F(\mathfrak{N}, \mathfrak{m})$

---

[7] Auf Grund der additiven Regularität von $\mathfrak{N}$ ist nach Zusatz 1 von § 3 das Element $o\gamma^{-1}$ das Nullelement von $\mathfrak{S}$.

gilt. Dabei beschränken wir uns auf das Monotoniegesetz der Multiplikation, da sich alles andere durch direkten Ansatz nachprüfen läßt. Ist $a-\alpha<b-\beta$, also $a+\beta<b+\alpha$ und $\gamma<c$ (bzw. $\gamma>c$), so gilt eben auf Grund von $F(\mathfrak{R}, \mathfrak{m})$

$$(a+\beta)c+(b+\alpha)\gamma<(a+\beta)\gamma+(b+\alpha)c$$

und damit

$$(a-\alpha)(c-\gamma) = (ac+\alpha\gamma)-(a\gamma+\alpha c) < (bc+\beta\gamma)-(b\gamma+\beta c) = (b-\beta)(c-\gamma)$$

(bzw. beides mit der umgekehrten Ordnungsbeziehung), und entsprechend unter Vertauschung aller Faktoren für das Monotoniegesetz von links.

Insbesondere existiert zu einem geordneten Halbring $\mathfrak{R}$, dessen Addition ja kommutativ und regulär ist, stets ein Differenzenring $\mathfrak{D}(\mathfrak{R})=\mathfrak{D}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$, und die Bedingung unseres Satzes reduziert sich auf:

$$\text{Aus } x<y \text{ und } u<v \text{ folgt } xv+yu<xu+yv.$$

Als Beispiel eines Halbringes, dessen Ordnung nicht fortsetzbar ist, kann der bereits in § 6 betrachtete Unterhalbring $\mathfrak{R} = \{ax+b\}$ mit $a\geqq 0, b>0$ des Ringes $\mathfrak{T}= =\Gamma[x]/(x^2)$ dienen. Durch die Festsetzung

$$ax+b<cx+d \text{ genau dann, wenn entweder } b<d \text{ oder } b=d, a<c$$

wird nämlich $\mathfrak{R}$ zu einem (sogar positiv-) geordneten Halbring, während sein Differenzenring $\mathfrak{D}(\mathfrak{R})=\mathfrak{T}$ Nullteiler enthält und damit auf keine Weise geordnet werden kann.

Übrigens gelten die Bedingungen $F(\mathfrak{R}, \mathfrak{m})$ für $\mathfrak{R}$ und $F(\mathfrak{S}, \mathfrak{m}\mathfrak{n}^{-1})$ für einen Rechtsquotientenhalbring $\mathfrak{S}=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{R}, \mathfrak{n})$ von $\mathfrak{R}$ gleichzeitig oder nicht; nach den Überlegungen des vorangegangenen Paragraphen folgt dies auch schon daraus, daß sich bei der Quotientenbildung gemäß Satz 1 die Ordnung stets fortsetzen läßt.

Wie man sich weiterhin leicht überlegt, ist für die Bedingung $F(\mathfrak{R}, \mathfrak{m})$ und damit für die Fortsetzbarkeit der Ordnungsbeziehung die Eigenschaft $(*)^8$ von $\mathfrak{R}$ stets hinreichend, aber nicht notwendig. Dies ist auch insofern bemerkenswert, als $(*)$ von der Ordnung unabhängig ist und damit jede Ordnung eines (natürlich additiv und multiplikativ regulären sowie additiv kommutativen) Halbringes $\mathfrak{R}$ mit $(*)$ fortsetzbar ist. Für einen solchen Halbring $\mathfrak{R}$ läßt sich nun auch in Verallgemeinerung eines Satzes von JOHNSON[9] die Frage beantworten, ob er überhaupt geordnet und damit in einen angeordneten Ring eingebettet werden kann. Dazu betrachten wir den „positiven Kern" $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{R}$, d. h. den von allen Produkten

$$x^2yz^2y\ldots$$

von paarweise gleichen Faktoren aus $\mathfrak{R}$ erzeugten Unterhalbring. Ersichtlich muß bei jeder möglichen Ordnung von $\mathfrak{R}$ jedes Element aus $\mathfrak{K}$ positiv werden, erst recht also $\mathfrak{K}\not\ni o$ gelten. Diese (für Halbringe ohne Nullelement natürlich stets erfüllte) Bedingung ist aber auch hinreichend dafür, daß $\mathfrak{R}$ geordnet werden kann. Gehen

---

[8] Vgl. § 1 bzw. Fußnote 1.

[9] Ein Ring $\mathfrak{R}$ ist genau dann anordnungsfähig, wenn er „formal reell" ist, d. h. wenn sein „positiver Kern" (vgl. Text) nicht das Nullelement enthält; R. E. JOHNSON [2].

wir nämlich zum Differenzenring $\mathfrak{D}(\mathfrak{N})$ über, so fällt dessen positiver Kern mit $\mathfrak{K}$ zusammen, da ja für jedes Element $a-b\in\mathfrak{D}(\mathfrak{N})$ wegen $(\ast)$ stets $a-b\in\mathfrak{N}$ oder $-(a-b)\in\mathfrak{N}$ gilt. Damit lehrt aber der Satz von JOHNSON, daß $\mathfrak{D}(\mathfrak{N})$ und somit $\mathfrak{N}$ geordnet werden kann. Da für einen Halbring mit $(\ast)$ die multiplikative Regularität aus der Nullteilerfreiheit folgt (vgl. § 1), können wir zusammenfassen:

SATZ 3. *Damit ein Halbring $\mathfrak{N}$ mit kommutativer, regulärer Addition geordnet werden kann, ist notwendig und, falls $\mathfrak{N}$ die Eigenschaft $(\ast)$ erfüllt, auch hinreichend, daß $\mathfrak{N}$ entweder kein Nullelement hat oder sein positiver Kern $\mathfrak{K}$ das Nullelement von $\mathfrak{N}$ nicht enthält.*

Noch weitergehende Aussagen können wir für solche (additiv kommutativen) Halbringe machen, für die folgende Verschärfung der Eigenschaft $(\ast)$ gilt:
$(\ast\ast)$ Zu je zwei Elementen $a\neq b$ aus $\mathfrak{N}$ ist genau eine der Gleichungen

$$a+x_1 = b, \quad b+x_2 = a$$

mit einem $x_i\in\mathfrak{N}$ lösbar.

SATZ 4. *Es sei $\mathfrak{N}$ ein additiv und multiplikativ regulärer Halbring mit kommutativer Addition, der kein Nullelement hat und $(\ast\ast)$ erfüllt. Dann kann $\mathfrak{N}$ auf eine und nur eine Weise so geordnet werden, daß alle Elemente von $\mathfrak{N}$ positiv werden, nämlich gemäß der „natürlichen Ordnung"*[10]

$$a<b \text{ genau dann, wenn } a+x=b \text{ mit } x\in\mathfrak{N}.$$

Weiterhin ist $\mathfrak{N}$ Positivmenge eines angeordneten Rings, nämlich von $\mathfrak{D}(\mathfrak{N})$, dessen Ordnung Fortsetzung der eben beschriebenen Ordnung von $\mathfrak{N}$ ist, und umgekehrt ist jede Positivmenge eines angeordneten Ringes ein Halbring mit den oben aufgezählten Eigenschaften.

Zunächst sei daran erinnert, daß die Kommutativität der Addition von $\mathfrak{N}$ bereits aus der additiven und multiplikativen Regularität folgt (vgl. § 2). Weiter kann $\mathfrak{N}$ wegen $(\ast\ast)$ höchstens auf die angegebene Weise positiv geordnet werden. Zum Beweis, daß dies auch stets möglich ist, holen wir sogleich etwas weiter aus und betrachten die „additive Teilbarkeitsrelation" in einem beliebigen Halbring $\mathfrak{N}$ mit kommutativer und regulärer Addition; zur Vermeidung von Fallunterscheidungen adjungieren wir erforderlichen Falles ein annullierendes Nullelement zu $\mathfrak{N}$. Ist dann $\mathfrak{r}\subseteq\mathfrak{N}$ die Menge der Elemente, welche in $\mathfrak{N}$ ein Entgegengesetztes haben, so wird durch

$$a\sim b \text{ genau dann, wenn } a+r=b \text{ mit } r\in\mathfrak{r}$$

eine Äquivalenzrelation erklärt. Durch

$$a\lesssim b \text{ genau dann, wenn } a+x=b \text{ mit } x\in\mathfrak{N}$$

erhält man dann eine reflexive, transitive und in bezug auf diese Äquivalenzrelation antisymmetrische Relation „$\lesssim$", die der multiplikativen Teilbarkeitsbeziehung

---

[10] Eine entsprechende Bezeichnung für Halbgruppen findet sich in CLIFFORD [1].

(etwa in Halbgruppen) entspricht. Es gilt dann

$$a+c \lesssim b+c \quad \text{und} \quad \begin{Bmatrix} ac \lesssim bc \\ ca \lesssim cb \end{Bmatrix} \quad \text{für} \quad a \lesssim b$$

sowie

$$a+c < b+c \quad \text{und} \quad \begin{Bmatrix} ac < bc \\ ca < cb \end{Bmatrix} \quad \text{für} \quad a < b,$$

wenn man für die letztere Aussage noch $c \neq o$ und Nullteilerfreiheit voraussetzt. Insbesondere ist die Relation „$\lesssim$" genau dann linear, wenn $\mathfrak{N}$ die Eigenschaft ($\ast$) erfüllt, und für $\mathfrak{r} = \{o\}$ wird sie zu einer Elementaussage „$\leqq$"; trifft beides, also ($\ast\ast$) zu, so ist diese „additive Teilbarkeitsrelation" gerade die in solchen (multiplikativ regulären) Halbringen eindeutig bestimmte Ordnungsrelation, bei der alle (von o verschiedenen) Elemente positiv sind.

Die restlichen Behauptungen unseres Satzes ergeben sich nun daraus, daß $\mathfrak{D}(\mathfrak{N})$ (welches nach den Voraussetzungen über $\mathfrak{N}$ stets existiert und in Fortsetzung der Ordnung von $\mathfrak{N}$ geordnet werden kann) wegen ($\ast\ast$) gerade aus $\mathfrak{N}$, der Menge $-\mathfrak{N}$ der Entgegengesetzten aller Elemente aus $\mathfrak{N}$ und einem Nullelement o besteht und damit genau die Elemente von $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{D}(\mathfrak{N})$ positiv sind; die Umkehrung versteht sich von selbst.

Wir bemerken noch, daß man hier den Übergang zum Differenzenring vollständig durch Hinzunahme eines Nullelementes sowie einer zu $\mathfrak{N}$ additiv isomorphen und disjunkten Menge $-\mathfrak{N}$ mit Hilfe der üblichen Regeln für das Rechnen mit „positiven und negativen Zahlen" beschreiben kann,[11] ein Sachverhalt, der wie überhaupt gerade die Halbringe mit der Eigenschaft ($\ast\ast$) beim Aufbau der Arithmetik (insbesondere vom Standpunkt der Schule) eine wichtige Rolle spielt. Auch die Konstruktion der stetigen Hülle läßt sich für solche Halbringe und besonders Halbkörper relativ leicht (und unter Vermeidung der bei Ringen auftretenden Fallunterscheidungen) durchführen und auf $\mathfrak{D}(\mathfrak{N})$ übertragen.[12] Wir wollen hier aber nur noch die ja damit in Zusammenhang stehende Frage erörtern, auf welche Weise die Begriffsbildung „archimedisch geordnet" für Halbringe zu fassen ist.

Dabei wird man natürlich verlangen, daß mit einem Halbring $\mathfrak{N}$ auch sein Differenzenring $\mathfrak{D}(\mathfrak{N})$ archimedisch geordnet ist (in dem für Ringe üblichen Sinne), wenn sich die Ordnung von $\mathfrak{N}$ überhaupt zu einer Ordnung von $\mathfrak{D}(\mathfrak{N})$ fortsetzen läßt. Die naheliegende, aus der Ringtheorie übernommene Formulierung

A') Zu jedem $a \in \mathfrak{N}$ und jedem positiven $b \in \mathfrak{N}$ existiert eine natürliche Zahl n derart, daß $nb > a$ gilt

erfüllt dies jedoch nicht immer. So wird z. B. der Polynomring $\mathbf{\Gamma}[x]$ durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} \Sigma a_\mu x^\mu < \Sigma b_\mu x^\mu \ \text{ genau dann, wenn } & a_0 < b_0 \\ \text{oder } & a_0 = b_0,\, a_1 < b_1 \\ \text{oder } & a_0 = b_0,\, a_1 = b_1,\, a_2 < b_2 \ \text{ usf.} \end{aligned}$$

nichtarchimedisch geordnet, und $\mathbf{\Gamma}[x]$ ist Differenzenring seines Unterhalbringes

---

[11] Es ist sogar möglich, $\mathfrak{D}(\mathfrak{N})$ auf diese Weise zu konstruieren — doch erfordert dies einen nicht unerheblichen Aufwand beim Nachweis der Ringaxiome.

[12] Vgl. dazu LUGOWSKI [3].

$\mathfrak{R}$, der aus allen Polynomen mit positivem Absolutglied besteht und der A′ erfüllt.

Wir nennen daher einen geordneten Halbring $\mathfrak{R}$ *archimedisch geordnet*, wenn er sogar

A) *Zu beliebigen Elementen* a_1, a_2, b_1 *und* b_2 *aus* $\mathfrak{R}$ *mit* $b_1 > b_2$ *existiert eine natürliche Zahl* n *derart, daß* $nb_1 + a_2 > nb_2 + a_1$ *gilt*

erfüllt, da sich diese Eigenschaft mit der Ordnung von $\mathfrak{R}$ auf jeden Differenzenring $\mathfrak{D}(\mathfrak{R}, \mathfrak{m})$ überträgt (man braucht ja nur die vier Elemente von $\mathfrak{D}(\mathfrak{R}, \mathfrak{m})$ mit „gleichem Subtrahenden" zu schreiben) und aus A ersichtlich A′ folgt. Das Umgekehrte ist — wie aus unserem Beispiel hervorgeht — nicht der Fall, doch gilt es immer, wenn es in $\mathfrak{R}$ zu je zwei Elementen r und s mit $r < s$ ein Element x gibt, welches $r + x = s$ erfüllt, also etwa für Halbringe mit $(\ast\ast)$ und erst recht für Ringe. Insbesondere ist also ein geordneter Halbring $\mathfrak{R}$ genau dann in einen archimedisch angeordneten Ring einbettbar und damit ähnlich-isomorph zu einem Unterhalbring des Körpers der reellen Zahlen, wenn er A und die Bedingung F aus Satz 2 erfüllt.

§ 9. Einfache Erweiterungen von Halbkörpern

In diesem Paragraphen betrachten wir nur Halbkörper $\mathfrak{H}$ mit regulärer Addition. Nach dem Kriterium aus § 2 ist dann die Addition in $\mathfrak{H}$ auch kommutativ, und es existiert der Differenzenring $\mathfrak{D}(\mathfrak{H})$ (vgl. Zusatz 4 von § 6). Auch folgt aus der Regularität der Addition, daß $\mathfrak{H}$ kein additiv idempotenter Halbkörper ist, also jedes Element $(\neq o)$ eines echten Halbkörpers $\mathfrak{H}$ dieser Art nach § 1 die additive Ordnung ∞ hat. Da unser Interesse hier natürlich in erster Linie echten Halbkörpern gilt, können wir damit $\mathfrak{H}$ stets als Oberhalbkörper des Halbkörpers **H** der positiven rationalen Zahlen auffassen.

Ist nun $\mathfrak{H}$ ein echter Halbkörper[13] mit der Eigenschaft $(\ast)$, so erfüllt $\mathfrak{H}$ sogar die stärkere Bedingung $(\ast\ast)$ und ist nach Satz 4 aus § 8 und Zusatz 4 von § 6 bezüglich seiner natürlichen Ordnung Positivbereich seines Differenzenhalbkörpers $\mathfrak{D}(\mathfrak{H})$. Daraus ergibt sich sofort:

SATZ 1. *Von zwei echten Halbkörpern* $\mathfrak{h}$ *und* $\mathfrak{H}$ *mit* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{H}$ *und* $\mathfrak{D}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{H})$ *kann höchstens* $\mathfrak{H}$ *die Eigenschaft* $(\ast)$ *haben.*

Wir geben zunächst eine Anwendung dieses Satzes auf das am Ende von § 6 gelöste Problem von RÉDEI. In dem Zahlkörper $\mathbf{P}(\sqrt{2})$ liegen die (übrigens isomorphen) Halbkörper $\mathbf{H}(\sqrt{2})$ und $\mathbf{H}(-\sqrt{2})$, die von $\sqrt{2}$ bzw. $-\sqrt{2}$ erzeugt werden,[14] sowie der Halbkörper $\mathfrak{h} = \mathbf{H}(-\sqrt{2}) \cap \mathbf{H}(\sqrt{2})$:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{P}(\sqrt{2}) \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\
\mathbf{H}(-\sqrt{2}) \arrow[dr, no head] & & \mathbf{H}(\sqrt{2}) = \mathbf{P}(\sqrt{2}) \cap \mathbf{\Theta} \arrow[dl, no head] \\
& \mathfrak{h} = \mathbf{H}(-\sqrt{2}) \cap \mathbf{H}(\sqrt{2}) = \mathbf{H}(-\sqrt{2}) \cap \mathbf{\Theta}. &
\end{tikzcd}$$

---

[13] Bei der Betrachtung echter Halbkörper können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß kein Nullelement existiert (vgl. § 1).

[14] Eine allgemeine Definition solcher „einfacher Halbkörpererweiterungen" geben wir weiter unten.

Dabei enthält $\mathfrak{D}(\mathfrak{h})$ neben $\mathbf{P}$ etwa alle Potenzen von $2-\sqrt{2} = 2(2+\sqrt{2})^{-1}$, also gilt $\mathfrak{D}(\mathfrak{h}) = \mathbf{P}(\sqrt{2})$ und damit erst recht $\mathfrak{D}(\mathbf{H}(\sqrt{2})) = \mathbf{P}(\sqrt{2})$. Daraus folgt nach Satz 1, daß höchstens $\mathbf{H}(\sqrt{2})$, nicht aber $\mathfrak{h}$ die Eigenschaft $(\ast)$ haben kann, obwohl der Differenzenring $\mathfrak{D}(\mathfrak{h})$ ein Körper ist. (Übrigens ist $\mathbf{H}(\sqrt{2})$ entsprechend den im Schema rechts angegebenen Gleichheiten tatsächlich der Positivbereich von $\mathbf{P}(\sqrt{2})$ und $\mathfrak{h} = \mathbf{H}(-\sqrt{2}) \cap \mathbf{H}(\sqrt{2})$ der am Ende von § 6 angegebene Halbkörper $\mathfrak{H}$ — was aber für die jetzt gegebene Lösung des Rédeischen Problems gar nicht mehr festgestellt zu werden braucht.)

Satz 2. *Es sei $\mathfrak{H}$ ein echter Halbkörper, der in einen kommutativen Körper eingebettet werden kann*[15] *und dessen Elemente algebraisch über* $\mathbf{P}$ *sind. Dann läßt sich $\mathfrak{H}$ genau dann sogar in den Halbkörper* $\mathbf{\Theta}$ *der positiven reellen Zahlen (isomorph) einbetten, wenn ein echter Halbkörper $\mathfrak{H}^*$ mit $\mathfrak{H}^* \supseteqq \mathfrak{H}$ und der Eigenschaft $(\ast)$ existiert.*

Beweis. Die Notwendigkeit der angegebenen Bedingung gilt wegen $\mathfrak{H} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \bar{\mathfrak{H}} \subseteqq \mathbf{\Theta}$ ganz allgemein. Für die Umkehrung beachten wir, daß $\mathfrak{K}^* = \mathfrak{D}(\mathfrak{H}^*)$ ein Körper ist, der den kommutativen Körper $\mathfrak{K} = \mathfrak{Q}(\mathfrak{D}(\mathfrak{H}))$ enthält; dann liefert aber der Durchschnitt $\mathfrak{H}^* \cap \mathfrak{K}$ einen Halbkörper $\mathfrak{H}'$ mit $(\ast)$ und $\mathfrak{H}' \supseteqq \mathfrak{H}$, dessen Elemente ersichtlich algebraisch über $\mathbf{P}$ sind. Es genügt also zu zeigen, daß ein echter kommutativer Halbkörper $\mathfrak{H}^*$ mit $(\ast)$, dessen Elemente algebraisch über $\mathbf{P}$ sind, in $\mathbf{\Theta}$ eingebettet werden kann. Dazu bilden wir den Körper $\mathfrak{K}^* = \mathfrak{D}(\mathfrak{H}^*)$, der nach unserer Bemerkung vor Satz 1 mit $\mathfrak{H}^*$ als Positivbereich angeordnet werden kann. Da $\mathfrak{K}^*$ algebraisch ist, ist diese Anordnung archimedisch, mithin kann $\mathfrak{K}^*$ ähnlich isomorph in den Körper $\mathbf{\Lambda}$ der reellen Zahlen, sein Positivbereich $\mathfrak{H}^*$ also ähnlich isomorph in $\mathbf{\Theta}$ eingebettet werden.

Wir bemerken sogleich, daß die Aussage unseres Satzes viel allgemeiner auch für solche Halbkörper $\mathfrak{H}$ gilt, deren Elemente algebraisch über einem reellen Körper $\mathfrak{k} \subseteqq \mathfrak{K} = \mathfrak{Q}(\mathfrak{D}(\mathfrak{H}))$ sind, falls es einen echten Halbkörper $\mathfrak{H}^* \supseteqq \mathfrak{H}$ mit der Eigenschaft $(\ast)$ gibt, der noch $\mathfrak{h} = \mathfrak{H}^* \cap \mathfrak{k} \subseteqq \mathbf{\Theta}$ erfüllt. Der Beweis verläuft dann ebenso, wobei die letzte Bedingung gerade gewährleistet, daß die durch $\mathfrak{H}^*$ bestimmte Anordnung von $\mathfrak{K}^* = \mathfrak{D}(\mathfrak{H}^*)$ für den reellen Unterkörper $\mathfrak{k}$ die übliche ist und der verwendete Satz über archimedisch angeordnete Körper anwendbar wird.

Ohne diese Einschränkung gilt die Verallgemeinerung unseres Satzes jedoch nicht mehr, wie das folgende Beispiel zeigt, welches (sogar reelle) echte Halbkörper $\mathfrak{H}$ mit $(\ast)$ angibt, die nicht in $\mathbf{\Theta}$ eingebettet werden können. Es sei α eine (reelle oder nichtreelle) transzendente Zahl, und $\mathfrak{N}$ der Halbring aller Elemente

$$a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_n\alpha^n \quad \text{mit} \quad a_i \in \mathbf{P},\ a_n > 0.$$

Mit $\mathfrak{N}$ erfüllt dann (vgl. § 5) auch der Halbkörper $\mathfrak{H} = \mathfrak{Q}(\mathfrak{N})$ die Eigenschaft $(\ast)$. Würde nun ein Isomorphismus $\mathfrak{H} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \bar{\mathfrak{H}} \subseteqq \mathbf{\Theta}$ existieren, so ließe sich dieser zu einem Isomorphismus der Differenzenkörper $\mathfrak{D}(\mathfrak{H}) \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{H}}) \subseteqq \mathbf{\Lambda}$ fortsetzen; ordnet man beide Körper mit $\mathfrak{H}$ bzw. $\bar{\mathfrak{H}}$ als Positivbereichen, so liegt sogar ein ähnlicher Isomorphismus vor. $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{H}})$ wäre wegen $\bar{\mathfrak{H}} \subseteqq \mathbf{\Theta}$ archimedisch, $\mathfrak{D}(\mathfrak{H})$ wird aber durch $\mathfrak{H}$ ersichtlich nichtarchimedisch angeordnet.

---

[15] Nach den Überlegungen in § 6 ist dafür notwendig und hinreichend, daß $\mathfrak{H}$ selbst kommutativ ist und die Bedingung aus Zusatz 3 von § 6 erfüllt.

Andererseits entsteht über Satz 2 hinausgehend das Problem, ob vielleicht jeder in einen Körper einbettbare echte Halbkörper $\mathfrak{H}$, dessen Elemente algebraisch über $\mathbf{P}$ (bzw. über einem geeigneten reellen Körper $\mathfrak{f}$) sind, in $\mathbf{\Theta}$ eingebettet werden kann. Wir werden diese Frage im folgenden für alle (echten und überhaupt in einen Körper einbettbaren) Halbkörper $\mathfrak{H}$ bejahend beantworten, die einfache Erweiterungen von Positivbereichen reeller Körper sind. Zuvor wenden wir uns einem allgemeinen Studium einfacher Halbkörpererweiterungen zu und definieren für multiplikativ kommutative Strukturen:

Es sei $\mathfrak{h}$ ein Halbkörper mit regulärer Addition und α ein Element eines Oberhalbringes $\mathfrak{O}$ von $\mathfrak{h}$. Dann bildet die Menge der ganzrationalen Ausdrücke

$$a_0+a_1\alpha+\ldots+a_n\alpha^n \quad \text{mit} \quad a_i \in \mathfrak{h}_0$$

einen Halbring $\mathfrak{N}=\mathfrak{h}[\alpha]$.[16] Existiert zu $\mathfrak{N}$ der Quotientenhalbkörper $\mathfrak{H}=\mathfrak{Q}(\mathfrak{N})$, so nennen wir $\mathfrak{H}=\mathfrak{h}(\alpha)$ *die einfache Halbkörpererweiterung von* $\mathfrak{h}$ *mit* α. Bei geeigneter Wahl von $\mathfrak{O}$ ist also $\mathfrak{H}$ der kleinste $\mathfrak{h}$ und α umfassende Unterhalbkörper von $\mathfrak{O}$. Insbesondere heißt dabei α *algebraisch über* $\mathfrak{h}$, wenn α Nullstelle eines Polynoms $f(x)\in\mathfrak{r}[x]$ mit $\mathfrak{r}=\mathfrak{D}(\mathfrak{h})$ ist, sonst *transzendent über* $\mathfrak{h}$. (Man beachte, daß dabei auch Nullstellen linearer Polynome echte Erweiterungen eines Halbkörpers ergeben können.)

Ein Beispiel mag zunächst zeigen, daß bei der Untersuchung solcher einfacher Halbkörpererweiterungen auch Fälle zu berücksichtigen sind, die kein Analogon zu entsprechenden Aussagen der Körpertheorie haben. Dazu wählen wir $\mathfrak{h}=\mathbf{H}$ und betrachten das Polynom

$$z^2-2z+1\in\mathbf{P}[z].$$

Es hat in dem Ring $\mathfrak{N}=\mathbf{P}[x]/(x^2)=\{ax+b\}$ die Nullstelle $\alpha=x+1$, und der Halbring $\mathfrak{N}=\mathbf{H}[\alpha]$ besteht gerade aus allen Elementen $ax+b$ mit $a\geqq 0$, $b>0$; für $a=m/n$, $b=k/n$ mit ganzen Zahlen $m\geqq 0$, $k>0$ und $n>0$ gilt nämlich

$$\frac{m}{n}x+\frac{k}{n}=\frac{(k-1)}{n}+\frac{1}{n}\alpha^m\in\mathbf{H}[\alpha].$$

Der Unterhalbring $\mathbf{N}[\alpha]\subseteqq\mathbf{H}[\alpha]$ ist dabei ein von uns schon mehrfach betrachteter multiplikativ regulärer Halbring (vgl. §§ 6, 7, 8, wo er mit $\mathfrak{N}$ bezeichnet wurde), und der gesuchte Halbkörper

$$\mathfrak{H}=\mathbf{H}(\alpha)=\mathfrak{Q}(\mathbf{H}[\alpha])=\mathfrak{Q}(\mathbf{N}[\alpha])$$

existiert gerade als der uns auch schon bekannte Quotientenhalbkörper $\mathfrak{S}$ von $\mathbf{N}[\alpha]$. Nach den Überlegungen aus § 8 kann mit $\mathbf{N}[\alpha]$ auch $\mathfrak{H}=\mathbf{H}(\alpha)$ geordnet werden, während sein Differenzenring $\mathfrak{R}=\mathfrak{D}(\mathfrak{H})$ aber Nullteiler enthält. Es gibt mithin schon von $\mathbf{H}$ (sogar geordnete) einfache Halbkörpererweiterungen, die nicht in

---

[16] Wir verabreden, auch den Halbring $\mathfrak{N}=\mathfrak{h}[\alpha]$, sofern er nicht schon Ring ist, ebenso wie alle echten Halbkörper ohne Nullelement aufzufassen. Dagegen ist es bequemer, bei der Bildung ganzrationaler Ausdrücke wie etwa der von $\mathfrak{N}=\mathfrak{h}[\alpha]$ ein (allein für diesen Zweck adjungiert zu denkendes) Nullelement o als Koeffizient zur Verfügung zu stellen.

einen Körper einbettbar sind. Übrigens sei noch bemerkt, daß jedes Element $\frac{ax+b}{cx+d}$ von $\mathfrak{H}=\mathfrak{h}(\alpha)=\mathfrak{Q}(\mathfrak{R})$ als „Minimalpolynom" das reduzible Polynom

$$d^2z^2-2bdz+b^2 = (dz-b)^2\in\mathbf{P}[z]$$

besitzt, welches in $\mathfrak{H}$ unendlich viele Nullstellen hat.

Wir kommen nun zu allgemeinen Aussagen über einfache Halbkörpererweiterungen:

SATZ 3. *Eine einfache Halbkörpererweiterung $\mathfrak{H}=\mathfrak{h}(\alpha)$ eines echten Halbkörpers $\mathfrak{h}$ ist genau dann bereits ein Körper, wenn das Element α algebraisch über $\mathfrak{h}$ und sogar Nullstelle eines Polynoms $p(x)\in\mathfrak{h}[x]$ ist. Weiterhin tritt dieser Fall genau dann ein, wenn $\mathfrak{R}=\mathfrak{h}[\alpha]$ bereits ein Ring ist.*[17]

BEWEIS. Falls $\mathfrak{H}$ ein Körper ist, enthält er auch das Entgegengesetzte $-e$ des Einselementes e von $\mathfrak{h}$. Aus

$$-e = \frac{p_1(\alpha)}{p_2(\alpha)} \quad \text{mit} \quad p_i(x)\in\mathfrak{h}[x]$$

folgt aber $p_1(\alpha)+p_2(\alpha) = o$, also ist $p(x) = p_1(x)+p_2(x)\in\mathfrak{h}[x]$ ein Polynom mit der verlangten Eigenschaft. Umgekehrt kann in $p(\alpha) = c_0+c_1\alpha+\ldots+c_r\alpha^r = o$ mit $c_i\in\mathfrak{h}_0$ stets $c_0\neq o$ vorausgesetzt werden, woraus sich $-c_0\in\mathfrak{h}[\alpha]=\mathfrak{R}$, also $-e = -c_0\cdot c_0^{-1}\in\mathfrak{R}$ ergibt. Damit ist $\mathfrak{R}=\mathfrak{h}[\alpha]$ ein Ring, woraus wiederum die Körpereigenschaft von $\mathfrak{H}=\mathfrak{h}(\alpha)=\mathfrak{Q}(\mathfrak{R})$ folgt.

SATZ 4. *Es sei $\mathfrak{h}$ ein echter Halbkörper und $\mathfrak{H}=\mathfrak{h}(\alpha)$ eine einfache Erweiterung von $\mathfrak{h}$ mit einem über $\mathfrak{h}$ transzendenten Element α.*

Dann ist $\mathfrak{H}=\mathfrak{h}(\alpha)$ stets ein echter Halbkörper ohne die Eigenschaft $(\ast)$, da sein Differenzenring $\mathfrak{R}=\mathfrak{D}(\mathfrak{H})$ kein Körper ist. Ferner ist $\mathfrak{H}$ genau dann in einen Körper einbettbar, wenn dies für $\mathfrak{h}$ zutrifft.

Umgekehrt existiert zu jedem echten Halbkörper $\mathfrak{h}$ eine solche Erweiterung $\mathfrak{h}(\alpha)$ mit einem über $\mathfrak{h}$ transzendenten Element α, wobei $\mathfrak{h}(\alpha)$ allein durch $\mathfrak{h}$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

BEWEIS. Für die erste Behauptung genügt es zu zeigen, daß $\mathfrak{R}=\mathfrak{D}(\mathfrak{H})$ kein Körper ist. Dazu führen wir die Annahme, daß $e-\alpha\in\mathfrak{D}(\mathfrak{H})$ in $\mathfrak{D}(\mathfrak{H})$ ein Inverses hat, zum Widerspruch. Aus

$$\frac{e}{e-\alpha} = \frac{(a_0-c_0)+(a_1-c_1)\alpha+\ldots+(a_n-c_n)\alpha^n}{b_0+b_1\alpha+\ldots+b_m\alpha^m}\in\mathfrak{D}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{D}\big(\mathfrak{Q}(\mathfrak{h}[\alpha])\big)$$

---

[17] Für Halbkörper $\mathfrak{h}$, deren Differenzenring $\mathfrak{k}=\mathfrak{D}(\mathfrak{h})$ bereits Körper ist, gilt dann sogar $\mathfrak{R}=\mathfrak{h}[\alpha]=\mathfrak{H}=\mathfrak{h}(\alpha)$, so daß also alle Elemente des Körpers $\mathfrak{H}$ schon als ganzrationale Ausdrücke in α mit Koeffizienten aus $\mathfrak{h}_0$ gewonnen werden können. Beispiele dieser Art sind etwa $\mathbf{H}[-a]=\mathbf{H}(-a)=\mathbf{P}$ mit $a\in\mathbf{H}$ oder $\mathbf{H}[i]=\mathbf{H}(i)=\mathbf{P}(i)$ mit $i^2=-1$.

mit Koeffizienten a_i, b_i und c_i aus $\mathfrak{h}_0$ folgte nämlich

$$\begin{aligned} a_0-c_0 &= b_0 \\ (a_1-c_1)-(a_0-c_0) &= b_1 \\ (a_2-c_2)-(a_1-c_1) &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots&\dots\dots \\ \left.\begin{aligned} (a_n-c_n)-(a_{n-1}-c_{n-1}) &= b_{m-1} \\ -(a_n-c_n) &= b_m \end{aligned}\right\} &\quad \text{mit} \quad n=m-1 \end{aligned}$$

und daraus $b_0+b_1+\ldots+b_m = o$, womit Elemente des echten Halbkörpers $\mathfrak{h}$ Entgegengesetzte hätten.

Die zweite Behauptung reduziert sich darauf, daß mit $\mathfrak{h}$ auch $\mathfrak{H}$ die Übertragungsbedingung aus Zusatz 3 von § 6 für die multiplikative Regularität erfüllt. Ersichtlich kann man sich dabei sogar auf die Elemente aus $\mathfrak{R}=\mathfrak{h}[\alpha]\subset\mathfrak{H}$ beschränken, was übrigens auch aus Satz 3 von § 7 hervorgeht. Es sei also

$$A=a_0+a_1\alpha+\ldots\neq B=b_0+b_1\alpha+\ldots$$

$$C=c_0+c_1\alpha+\ldots\neq D=d_0+d_1\alpha+\ldots$$

wobei wir $a_0=b_0, \ldots, a_{s-1}=b_{s-1}, a_s\neq b_s$ und $c_0=d_0, \ldots, c_{t-1}=d_{t-1}, c_t\neq d_t$ annehmen. Würde nun

$$AC+BD = AD+BC$$

gelten, so erhält man aus dem Koeffizientenvergleich der Glieder mit α^{s+t}

$$a_sc_t+b_sd_t = a_sd_t+b_sc_t,$$

während doch aus $a_s\neq b_s$ und $c_t\neq d_t$ nach Voraussetzung über $\mathfrak{h}$ das Gegenteil folgt.

Für die Existenzbehauptung gewinnen wir den Halbring $\mathfrak{R}=\mathfrak{h}[\alpha]$ am einfachsten als Unterhalbring des Polynomringes $\mathfrak{r}[\alpha]$ mit $\mathfrak{r}=\mathfrak{D}(\mathfrak{h})$. Wir haben die multiplikative Regularität von $\mathfrak{R}=\mathfrak{h}[\alpha]$ zu zeigen. Dazu setzen wir

$$(a_s\alpha^s+a_{s+1}\alpha^{s+1}+\ldots)(b_0+b_1\alpha+\ldots) = (a_s\alpha^s+a_{s+1}\alpha^{s+1}+\ldots)(c_0+c_1\alpha+\ldots)$$

mit $a_s\neq 0, b_0=c_0, \ldots, b_{t-1}=c_{t-1}$ und $b_t\neq c_t$ an, woraus sich für die Koeffizienten von α^{s+t} bereits

$$a_sb_t=a_sc_t$$

ergibt, im Widerspruch zur multiplikativen Regularität von $\mathfrak{h}$. Die Eindeutigkeit von $\mathfrak{H}=\mathfrak{h}(\alpha)$ folgt aus der Eindeutigkeit der durch Differenzen- bzw. Quotientenbildung entstehenden Strukturen und der von $\mathfrak{r}[\alpha]$.

SATZ 5. *Es sei $\mathfrak{h}$ ein echter Halbkörper und $\mathfrak{H}=\mathfrak{h}(\alpha)$ eine einfache Erweiterung von $\mathfrak{h}$ mit einem über $\mathfrak{h}$ algebraischen Element α.*

Dann gibt es in $\mathfrak{r}[x]$ mit $\mathfrak{r}=\mathfrak{D}(\mathfrak{h})$ ein eindeutig bestimmtes Ideal $\mathfrak{a}$, welches gerade aus allen Polynomen $f(x)\in\mathfrak{r}[x]$ mit $f(\alpha)=o$ besteht; es gilt dann $\mathfrak{r}\cap\mathfrak{a}=(o)$ und für den Halbring $\mathfrak{R}=\mathfrak{h}[\alpha]$

$$\mathfrak{T}=\mathfrak{D}(\mathfrak{R})=\mathfrak{r}[\alpha]\rightleftarrows\mathfrak{r}[x]/\mathfrak{a}.$$

Weiterhin läßt sich der Differenzenring von $\mathfrak{H}=\mathfrak{h}(\alpha)$ *dann auch als Quotientenring von* $\mathfrak{T}$ *gemäß*[18]

$$\mathfrak{R}=\mathfrak{D}(\mathfrak{H})=\mathfrak{Q}(\mathfrak{T},\mathfrak{N})$$

gewinnen, und es tritt genau einer der beiden folgenden Fälle ein:

1. *Das Ideal* $\mathfrak{a}$ *von* $\mathfrak{r}[x]$ *ist Primideal. Dann ist der Halbkörper* $\mathfrak{H}=\mathfrak{h}(\alpha)$ *in den Körper* $\mathfrak{K}=\mathfrak{Q}(\mathfrak{R})=\mathfrak{Q}(\mathfrak{T})$ *einbettbar. Doch kann schon* $\mathfrak{H}$ *selbst*[19] *oder wenigstens* $\mathfrak{R}=\mathfrak{D}(\mathfrak{H})$ *ein Körper sein, wobei letzteres jedenfalls dann eintritt, wenn* $\mathfrak{D}(\mathfrak{h})$ *Körper ist (aber nicht umgekehrt).*

2. *Das Ideal* $\mathfrak{a}$ *von* $\mathfrak{r}[x]$ *ist zwar kein Primideal, jedoch gilt für alle Elemente* $p(x)\in\mathfrak{h}[x]$ *und* $g(x)\in\mathfrak{r}[x]$*:*

$$\textit{Aus } p(x)\cdot g(x)\in\mathfrak{a} \textit{ folgt } g(x)\in\mathfrak{a}.^{20}$$

Dann sind $\mathfrak{T}=\mathfrak{D}(\mathfrak{N})$ *und* $\mathfrak{R}=\mathfrak{D}(\mathfrak{H})$ *multiplikativ nicht regulär, so daß der Halbkörper* $\mathfrak{H}=\mathfrak{h}(\alpha)$ *nicht in einen Körper eingebettet werden kann.*

Umgekehrt existiert zu jedem Ideal $\mathfrak{a}$ *von* $\mathfrak{r}[x]$ *mit* $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{r}=(o)$ *der unter* 1 *bzw.* 2 *festgelegten Art eine unserem Satz entsprechende einfache Halbkörpererweiterung* $\mathfrak{H}=\mathfrak{h}(\alpha)$, *wobei* α *Nullstelle aller Polynome aus* $\mathfrak{a}$ *ist.*

Schließlich ist $\mathfrak{H}=\mathfrak{h}(\alpha)$ *durch* $\mathfrak{h}$ *und* $\mathfrak{a}$ *bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Beweis. Wir beginnen mit einem Schema (vgl. Satz 3 von § 7) der bei unseren Überlegungen auftretenden Strukturen, wobei die Existenz von $\mathfrak{H}=\mathfrak{h}(\alpha)$[21] die von $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{T}$ nach sich zieht:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& & \mathfrak{Q}(\mathfrak{T})=\mathfrak{Q}(\mathfrak{N})=\mathfrak{K} \\
& \mathfrak{Q}(\mathfrak{T},\mathfrak{N})=\mathfrak{R}=\mathfrak{D}(\mathfrak{H}) \arrow[ur, dash, dashed] \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathfrak{r}[\alpha]=\mathfrak{T}=\mathfrak{D}(\mathfrak{N}) \arrow[dr, dash] & & \mathfrak{H}=\mathfrak{h}(\alpha)=\mathfrak{Q}(\mathfrak{N}) \arrow[dl, dash] \\
& \mathfrak{N}=\mathfrak{h}[\alpha]. &
\end{tikzcd}$$

Weiterhin wird der Polynomring $\mathfrak{r}[x]$ vermöge

$$f(x)=\sum a_i x^i \to f(\alpha)=\sum a_i \alpha^i$$

ersichtlich homomorph auf $\mathfrak{r}[\alpha]$ abgebildet, wobei der Kern $\mathfrak{a}$ gerade aus allen Polynomen $f(x)\in\mathfrak{r}[x]$ mit $f(\alpha)=o$ besteht. Auch ist sofort klar, daß der Körper $\mathfrak{K}=\mathfrak{Q}(\mathfrak{T})=\mathfrak{Q}(\mathfrak{N})$ genau dann existiert, wenn $\mathfrak{r}[\alpha]$ nullteilerfrei, mithin $\mathfrak{a}$ ein Primideal ist. Ist $\mathfrak{a}$ kein Primideal, so ist die multiplikative Regularität von $\mathfrak{N}=\mathfrak{h}[\alpha]$ gerade gleichwertig mit der unter 2 formulierten Eigenschaft von $\mathfrak{a}$. Zum Beweis

---

[18] Falls $\mathfrak{N}=\mathfrak{h}[\alpha]$ bereits Ring und damit $\mathfrak{H}=\mathfrak{h}(\alpha)$ schon Körper ist (vgl. Satz 3), wird diese Feststellung natürlich gegenstandslos.

[19] Unter Verwendung von Satz 3 ist also $\mathfrak{H}=\mathfrak{h}(\alpha)$ genau dann Körper, wenn $\mathfrak{a}$ Primideal ist und $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{h}[x]\neq\emptyset$ gilt.

[20] Man beachte, daß diese Bedingung $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{h}[x]=\emptyset$ impliziert.

[21] Es sei daran erinnert, daß wir nur additiv reguläre Halbkörper betrachten.

dieser Behauptung verwenden wir, daß der Homomorphismus $\mathfrak{r}[x] \xrightarrow{\sim} \mathfrak{r}[\alpha]$ einen Homomorphismus der Unterstrukturen $\mathfrak{h}[x] \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}[\alpha]$ induziert. Daher ist

$$\text{aus } p(\alpha)p_1(\alpha) = p(\alpha)p_2(\alpha) \text{ folgt } p_1(\alpha) = p_2(\alpha)$$

in $\mathfrak{h}[\alpha]$ gleichwertig mit

$$\text{aus } p(x)p_1(x) - p(x)p_2(x) \in \mathfrak{a} \text{ folgt } p_1(x) - p_2(x) \in \mathfrak{a}$$

in $\mathfrak{h}[x]$ bzw. $\mathfrak{r}[x]$. Da aber jedes Element $g(x) \in \mathfrak{r}[x]$ in der Form $g(x) = p_1(x) - p_2(x)$ mit $p_i(x) \in \mathfrak{h}[x]$ geschrieben werden kann und umgekehrt, besagt letzteres gerade, daß für alle $p(x) \in \mathfrak{h}[x]$ und $g(x) \in \mathfrak{r}[x]$ gilt:

$$\text{aus } p(x)g(x) \in \mathfrak{a} \text{ folgt } g(x) \in \mathfrak{a}.$$

Gehen wir umgekehrt von einem den Voraussetzungen unseres Satzes genügenden Ideal $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{r}[x]$ aus, so gewinnen wir $\mathfrak{r}[\alpha] = \mathfrak{r}[x]/\mathfrak{a}$ als Restklassenring, den wir wegen $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{r} = (o)$ als Oberring von $\mathfrak{r}$ auffassen können und der von $\mathfrak{r}$ und der x enthaltenden Restklasse α erzeugt wird, wobei $f(\alpha) = o$ gerade für jedes $f(x) \in \mathfrak{a}$ gilt. In $\mathfrak{r}[\alpha]$ liegt $\mathfrak{R} = \mathfrak{h}[\alpha]$ als Unterhalbring, dessen multiplikative Regularität in beiden Fällen nach obigem aus den Voraussetzungen über $\mathfrak{a}$ folgt. Die Konstruktion des Quotientenhalbkörpers liefert die Existenz der einfachen Halbkörpererweiterung $\mathfrak{H} = \mathfrak{h}(\alpha)$. Schließlich folgt aus der eindeutigen Bestimmtheit der Differenzen- und Quotientenstrukturen auch die Eindeutigkeitsaussage.

Es bleiben noch die Bemerkungen zum Fall 1 zu zeigen. Ist der Differenzenring $\mathfrak{D}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{k}$ des Halbkörpers $\mathfrak{h}$ bereits Körper, so enthält schon $\mathfrak{T} = \mathfrak{D}(\mathfrak{R})$ den Körper $\mathfrak{k}$ und das über $\mathfrak{k}$ algebraische Element α, woraus sich $\mathfrak{T}$, erst recht also $\mathfrak{R}$ als Körper ergibt. Andererseits kann nach dem Kriterium von Satz 3 sogar $\mathfrak{H}$ Körper sein, ohne daß dies für $\mathfrak{D}(\mathfrak{h})$ zutrifft.

Wir nehmen nun allgemein an, daß der Differenzenring $\mathfrak{D}(\mathfrak{h})$ von $\mathfrak{h}$ bereits ein Körper $\mathfrak{k}$ ist. Dann ist $\mathfrak{k}[x]$ Hauptidealring, womit es ein (bis auf Faktoren aus $\mathfrak{k}$) eindeutig bestimmtes Minimalpolynom $f(x) \in \mathfrak{k}[x]$ mit $(f(x)) = \mathfrak{a}$, also $f(\alpha) = o$ gibt, und wir können die beiden Fälle unseres Satzes wie folgt kennzeichnen:[22]

1. *Das Minimalpolynom $f(x) \in \mathfrak{k}[x]$ von α ist irreduzibel.*

2. *Das Minimalpolynom $f(x) \in \mathfrak{k}[x]$ von α ist nicht irreduzibel, erfüllt aber die Bedingung, daß es zu keinem Teiler $t(x) \in \mathfrak{k}[x]$ von $f(x)$ ein Polynom $\varphi(x) \in \mathfrak{k}[x]$ mit $t(x)\varphi(x) \in \mathfrak{h}[x]$ gibt.*

In der Tat ist $\mathfrak{a} = (f(x))$ genau dann ein Ideal, welches nicht prim ist und

$$\text{aus } p(x) \in \mathfrak{h}[x],\ g(x) \in \mathfrak{k}[x] \text{ und } p(x)g(x) \in \mathfrak{a} \text{ folgt } g(x) \in \mathfrak{a}$$

erfüllt, wenn $f(x)$ der soeben unter 2 angegebenen Bedingung genügt. Man braucht dazu nur

$$p(x)g(x) = f(x)h(x)$$

---

[22] Übrigens entsprechen für die einfachen Erweiterungen $\mathfrak{H} = \mathfrak{h}(\alpha)$ eines solchen Halbkörpers $\mathfrak{h}$ die drei Fälle

b) α transzendent über $\mathfrak{h}$,

c) α algebraisch über $\mathfrak{h}$, wobei α Nullstelle eines irreduziblen Polynoms $f(x) \in \mathfrak{k}[x]$ ist,

a) α algebraisch über $\mathfrak{h}$, ohne daß es ein irreduzibles Polynom $f(x) \in \mathfrak{k}[x]$ mit $f(\alpha) = 0$ gibt, nach unseren Sätzen 4 und 5 genau den Fällen *b), c)* und *a)* im Zusatz 4 von § 6 über die Struktur von $\mathfrak{R} = \mathfrak{D}(\mathfrak{H})$ in der angegebenen Reihenfolge.

in irreduzible Faktoren zu zerlegen und festzustellen, daß daraus $g(x) \in \mathfrak{a} = (f(x))$ genau dann folgt, wenn kein Teiler von $f(x)$ ein Teiler von $p(x)$ ist. Freilich würde es genügen, die Bedingung unter 2 nur für die irreduziblen Teiler von $f(x)$ zu fordern.

Auch sieht man sofort, daß unser bereits vor Satz 3 angegebenes Beispiel mit

$$f(z) = (z-1)^2 \in \mathfrak{k}[z],$$

$\mathfrak{h} = \mathbf{H}$ und $\mathfrak{k} = \mathbf{P}$ dieser Bedingung genügt, da jedes Vielfache $(z-1)\varphi(z) \in \mathbf{P}[z]$ von $(z-1)$ wegen der positiven reellen Nullstelle 1 nach der DESCARTESschen Zeichenregel positive und negative Koeffizienten besitzen muß. Weitere Beispiele dieser Art lassen sich nun leicht bilden.

Wir wenden uns nun wieder der im Anschluß an Satz 2 aufgeworfenen Einbettungsfrage für einfache Halbkörpererweiterungen zu, wobei wir $\mathfrak{h}$ als Positivbereich eines beliebigen reellen Körpers $\mathfrak{k}$, also $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} \cap \mathbf{\Theta}$ annehmen. Da wir von $\mathfrak{H} = \mathfrak{h}(\alpha)$ die Einbettbarkeit in einen Körper voraussetzen, bedeutet es nach Satz 5 und den eben gemachten Ergänzungen keine Einschränkung der Allgemeinheit, nur noch Unterhalbkörper $\mathfrak{H} = \mathfrak{h}(\alpha)$ des Körpers $\mathbf{Z}$ der komplexen Zahlen zu betrachten.

SATZ 6. *Es sei* $\mathfrak{k}$ *ein Unterkörper des Körpers* $\mathbf{\Delta}$ *der reellen Zahlen,* $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} \cap \mathbf{\Theta}$ *und* $\alpha \in \mathbf{Z}$ *Nullstelle eines Polynoms* $f(x) = x^2 + px + q \in \mathfrak{k}[x]$ *ohne reelle Nullstellen. Dann ist* $\mathfrak{H} = \mathfrak{h}(\alpha)$ *ein Körper, also* $\mathfrak{H} = \mathfrak{k}(\alpha)$.

BEWEIS. Ersichtlich gibt es zu der nichtreellen komplexen Zahl α eine Potenz α^n $(n = 1, 2, \ldots)$ mit nicht positivem Realteil. Dann ist $\alpha^n \in \mathfrak{h}(\alpha)$ Nullstelle eines Polynoms $x^2 + \tilde{p}x + \tilde{q} \in \mathfrak{k}[x]$ mit $\tilde{p} \geqq 0$ und $\tilde{q} > 0$, woraus nach Satz 3 folgt, daß schon der Unterhalbkörper $\mathfrak{h}(\alpha^n)$ von $\mathfrak{H} = \mathfrak{h}(\alpha)$, erst recht also dieser Halbkörper selbst bereits ein Körper ist.

Umgekehrt lehrt dieser Satz für $\mathfrak{k} = \mathbf{\Delta}$, $\mathfrak{h} = \mathbf{\Theta}$ zusammen mit Satz 3, daß jede nichtreelle komplexe Zahl α auch Nullstelle eines Polynoms $p(x) \in \mathbf{\Theta}[x]$, also eines Polynoms mit nichtnegativen Koeffizienten ist. Für das zugehörige Minimalpolynom $f(x) \in \mathbf{\Delta}[x]$ von α folgt daraus $p(x) = f(x)\varphi(x)$ in $\mathbf{\Delta}[x]$, so daß es zu jedem irreduziblen quadratischen Polynom $f(x) \in \mathbf{\Delta}[x]$ einen Polynommultiplikator $\varphi(x) \in \mathbf{\Delta}[x]$ derart gibt, daß $f(x)\varphi(x)$ keine negativen Koeffizienten hat. Diese Aussage überträgt sich nun sofort auf jedes Polynom $F(x) \in \mathbf{\Delta}[x]$ ohne positive reelle Nullstellen (vgl. den Anfang des folgenden Beweises), womit wir erneut einen Satz von P. TURÁN erhalten, den wir in einer anderen Richtung verschärfen:[23]

SATZ 7. *Es sei* $F(x) \in \mathbf{\Delta}[x]$ *ein Polynom, welches keine positiven reellen Nullstellen besitzt. Dann gibt es schon in* $\mathbf{P}[x]$ *einen Multiplikator* $\Phi(x) \in \mathbf{P}[x]$ *derart, daß* $F(x)\Phi(x)$ *keine negativen, ja (abgesehen vom Absolutglied bei* $F(0) = 0$*) sogar nur positive Koeffizienten hat.*

BEWEIS. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $F(0) \neq 0$. In $\mathbf{\Delta}[x]$ gilt dann die Zerlegung

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu = (x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_s) f_1(x)\ldots f_r(x),$$

---

[23] Vgl. [5], Lemma I. Dort wird unter Verwendung genauerer Annahmen über die Nullstellen von $F(x)$ sogar eine Abschätzung des Grades von $\Phi(x) \in \mathbf{\Delta}[x]$ vorgenommen, während es uns gerade darauf ankommen wird, daß es sogar ein $\Phi(x)$ mit rationalen Koeffizienten gibt. Übrigens könnte dabei $\mathbf{P}$ sogar noch durch einen in $\mathbf{P}$ dichten Unterring ersetzt werden.

wobei die α_i die negativen reellen Nullstellen von $F(x)$ und die $f_j(x)$ quadratische irreduzible Polynome sind. Zu jedem $f_j(x)$ existiert dann ein $\varphi_j(x) \in \mathbf{\Delta}[x]$ mit der oben beschriebenen Eigenschaft. Also hat

$$F(x)\varphi_1(x)\dots\varphi_r(x) = \sum_{\nu=0}^{t} c_\nu x^\nu \in \mathbf{\Delta}[x]$$

keine negativen Koeffizienten, wobei insbesondere $c_0 \neq 0$ und $c_t \neq 0$ erreicht werden kann. Multiplizieren wir dieses Polynom noch mit $\varphi_0(x) = 1 + x + \dots + x^t$, so hat

$$F(x)\varphi_1(x)\dots\varphi_r(x)\varphi_0(x) = F(x)\Phi(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu \sum_{\mu=0}^{m} b_\mu x^\mu$$

nur positive Koeffizienten. Unser Beweis ist vollendet, wenn wir zeigen können, daß in den Relationen

$$\sum_{\nu+\lambda=\lambda} a_\nu b_\mu > 0 \qquad (\lambda = 0, 1, \dots, n \cdot m),$$

die reellen Zahlen b_μ durch rationale Zahlen b'_μ ersetzbar sind. Dazu sei

$$\sum_{\nu+\mu=\lambda} a_\nu b_\mu \geqq \varepsilon > 0 \text{ für alle } \lambda$$

und $A = \text{Maximum}\,\big(|a_0|, \dots, |a_n|\big)$. Da $\mathbf{P}$ dicht in $\mathbf{\Delta}$ liegt, gibt es zu jedem $b_\mu \in \mathbf{\Delta}$ ein $b'_\mu \in \mathbf{P}$ mit

$$|\delta_\mu| = |b'_\mu - b_\mu| < \frac{\varepsilon}{2(n+1)A}.$$

Aus

$$\Big|\sum_{\nu+\mu=\lambda} a_\nu \delta_\mu\Big| \leqq \sum_{\nu+\mu=\lambda} |a_\nu|\,|\delta_\mu| < A(n+1)\frac{\varepsilon}{2(n+1)A} = \frac{\varepsilon}{2}$$

folgt aber wie behauptet für alle

$$\sum_{\nu+\mu=\lambda} a_\nu b'_\mu = \sum_{\nu+\mu=\lambda} a_\nu b_\mu + \sum_{\nu+\mu=\lambda} a_\nu \delta_\mu > \frac{\varepsilon}{2} > 0.$$

Aus diesem Satz erhalten wir nun unmittelbar das von uns angestrebte Resultat über Halbkörper in **Z**:

SATZ 8. *Es sei* $\mathfrak{h}$ *Positivbereich eines reellen Körpers* $\mathfrak{k}$. *Dann ist jede im Körper* **Z** *der komplexen Zahlen enthaltene einfache Halbkörpererweiterung* $\mathfrak{H} = \mathfrak{h}(\alpha)$ *von* $\mathfrak{h}$ *entweder bereits ein Körper oder isomorph in den Halbkörper* $\mathbf{\Theta}$ *der positiven reellen Zahlen einbettbar. Dabei tritt der erste Fall genau dann ein, wenn* α *Nullstelle eines Polynoms* $F(x) \in \mathfrak{k}[x]$ *ohne positive reelle Nullstellen ist.*

BEWEIS. Ist α Nullstelle eines solchen Polynoms $F(x) \in \mathfrak{k}[x]$, so gibt es nach Satz 7 ein Polynom $\Phi(x) \in \mathbf{P}[x]$ mit

$$p(x) = F(x)\,\Phi(x) \in (\mathfrak{k} \cap \mathbf{\Theta})[x] = \mathfrak{h}[x].$$

Wegen $p(\alpha) = 0$ folgt daraus die Körpereigenschaft von $\mathfrak{H} = \mathfrak{h}(\alpha)$ nach Satz 3. Andernfalls ist α entweder transzendent über $\mathfrak{k}$ oder Nullstelle eines irreduziblen Polynoms

$f(x) \in \mathfrak{k}[x]$ mit einer positiven reellen Nullstelle $\bar{\alpha}$. Dann gilt aber ersichtlich

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{h}(\alpha) \overset{\sim}{\leftrightarrow} \mathfrak{h}(\bar{\alpha}) = \bar{\mathfrak{H}} \subseteqq \mathbf{\Theta},$$

wobei $\bar{\alpha}$ entweder eine über $\mathfrak{k}$ transzendente positive reelle Zahl oder die genannte positive reelle Nullstelle von $f(x)$ ist.

Wie wir noch bemerken wollen, erfüllt der echte Halbkörper $\mathfrak{H} = \mathfrak{h}(\alpha)$ in dem Fall, daß das Minimalpolynom $f(x) \in \mathfrak{k}[x]$ von α mehrere positive reelle Nullstellen besitzt, nicht die Eigenschaft $(*)$, obwohl sein Differenzenring $\mathfrak{R} = \mathfrak{D}(\mathfrak{H})$ gemäß Satz 5 ein Körper ist. Der Beweis ergibt sich aus den entsprechenden Überlegungen am Ende von § 6. Es wäre interessant zu klären, ob auch die Umkehrung gilt, ob also ein Halbkörper $\mathfrak{H} = \mathfrak{h}(\alpha)$ mit einem Minimalpolynom $f(x) \in \mathfrak{k}[x]$, welches genau eine positive reelle Nullstelle hat, die Eigenschaft $(*)$ besitzt.

PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE POTSDAM,
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

(Eingegangen am 25. März 1963.)

Literaturverzeichnis

[1] A. H. CLIFFORD, Naturally totally ordered commutative semigroups, *Amer. J. of Math.*, **76** (1954), S. 631–646.
[2] R. E. JOHNSON, On ordered domains of integrity, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), S. 414–416.
[3] H. LUGOWSKI, Über die Vervollständigung geordneter Halbringe, *Publ. Math. Debrecen*, **9** (1962), S. 213–222.
[4] L. RÉDEI, *Algebra*, I. Teil. deutsche Ausg. (Leipzig, 1959).
[5] P. TURÁN, On an improvement of some new one-sided theorems of the theory of diophantine approximations, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **11** (1960), S. 299–316.
[6] H. J. WEINERT, Über Halbringe und Halbkörper. I, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **13** (1962), S. 365–378.
[7] H. J. WEINERT, Über Halbringe und Halbkörper. II, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **14** (1963), S. 209–227.

BOOLEAN FUNCTIONS ON DISTRIBUTIVE LATTICES

By

G. GRÄTZER (Budapest)

(*Presented by* L. RÉDEI)

A function $f=f(x_1, \ldots, x_n)$ is usually called a Boolean function if it is defined on a Boolean algebra B and it is built up from the three operations of B and the substitution of a variable by an element of B is also allowed.[1] It is obvious that the following property holds true for a Boolean function:

(SP) Θ is a congruence relation of B, $a_i \equiv b_i(\Theta)$ $i=1, 2, \ldots, n$ then

$$f(a_1, \ldots, a_n) \equiv f(b_1, \ldots, b_n)(\Theta).$$

In the paper [1] I proved that the property (SP) characterizes the Boolean functions.

This gives the idea of defining the notion of Boolean function on a general distributive lattice L by property (SP). It is my aim in this paper to study Boolean functions on a distributive lattice.

§ 1. Characteristic functions

Let $f=f(x_1, \ldots, x_n)$ be a Boolean function on a distributive lattice L with 0 and 1. We associate with f a function $\varphi=\varphi(x)$ from[2] $\mathbf{2}^n$ into L; every element of $\mathbf{2}^n$ can be represented by an n-tuple $(i_1, \ldots, i_n)$ where $i_j=0$ or 1, put

$$\varphi\big((i_1, \ldots, i_n)\big)=f(i_1, \ldots, i_n).$$

We call φ the characteristic function of f.

THEOREM. *The characteristic function* φ *of* f *determines* f *uniquely. A function* $\varphi: \mathbf{2}^n \to L$ *is a characteristic function if and only if*

(1) $a<b$ $(a, b \in \mathbf{2}^n)$ *implies that* $[\varphi(b), \varphi(a) \cup \varphi(b)]$ *is a Boolean interval*[3] *of* L.

Special cases. If $n=1$, $\mathbf{2}^1=\{0, 1\}$ therefore φ picks out two elements of L: $\varphi(0)$ and $\varphi(1)$. And the theorem asserts that there exists a Boolean function f with $f(0)=\varphi(0)$ and $f(1)=\varphi(1)$ if and only if $[\varphi(1), \varphi(0) \cup \varphi(1)]$ is a Boolean interval. This is obviously satisfied if $\varphi(0) \leqq \varphi(1)$ in which case $f(x)=(\varphi(0) \cup x) \cap \varphi(1)$.

---

[1] Examples of Boolean functions are: $f(x)=x'$, $f(x)=a$ $(a \in B)$, $f(x, y)=(a \cup x) \cap (b \cup y)$ $(a, b \in B)$ and so on. Sometimes in the definition of Boolean functions it is not allowed to substitute variables by elements of B.

[2] $\mathbf{2}$ denotes the Boolean algebra of two elements, thus $\mathbf{2}^n$ is the Boolean algebra of 2^n elements.

[3] I. e. every element of the interval has a complement in the interval.

If $n=2$, $\mathbf{2}^2=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ and we have five conditions:[4]

$$\left.\begin{array}{l}[\varphi(0,1),\ \varphi(0,0)\cup\varphi(0,1)]\\ [\varphi(1,0),\ \varphi(0,0)\cup\varphi(1,0)]\\ [\varphi(1,1),\ \varphi(0,0)\cup\varphi(1,1)]\\ [\varphi(1,1),\ \varphi(0,1)\cup\varphi(1,1)]\\ [\varphi(1,1),\ \varphi(1,0)\cup\varphi(1,1)]\end{array}\right\}\text{ are Boolean intervals.}$$

These five conditions are independent of each other.

Let L be the chain of three elements $L=\{0,a,1\}$. Five functions mapping $\mathbf{2}^2$ to L are defined by the following table

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
(0,0)	1	1	1	0	0
(0,1)	0	1	0	1	0
(1,0)	1	0	0	0	1
(1,1)	1	1	0	0	0

It is easy to see that φ_i does not satisfy the i-th condition but it satisfies the other four.

The general case. The number of conditions in the Theorem is 3^n-2^n. That all these conditions are independent can be proved as in the case $n=2$. But the number of conditions can be reduced to 2^n-1 as follows. If φ maps $\mathbf{2}^n$ into L we define

$$\psi(a) = \cup\bigl(\varphi(b);\, b\leqq a,\quad a,b\in\mathbf{2}^n\bigr).$$

Then condition (1) is equivalent to

(2) $[\varphi(a),\psi(a)]$ is a Boolean interval $\bigl(a\in\mathbf{2}^n,\ a\neq(0,\dots,0)\bigr)$.

These 2^n-1 conditions are again independent.

The Theorem has several applications.

COROLLARY 1. A Boolean function f is a lattice polynomial if and only if it is monotone.

We will prove a stronger statement:

COROLLARY 2. A Boolean function f is a lattice polynomial if and only if its characteristic function φ is monotone.

Since the necessity of the condition is obvious it remained to prove the sufficiency. Suppose φ is monotone. We define

$$f(x_1,\dots,x_n) = \cup\ \bigl(\varphi(i_1,\dots,i_n)\cap x^{i_1}\cap\dots\cap x^{i_n};\ (i_1,\dots,i_n)\in\mathbf{2}^n\bigr)$$

where $x_j^{i_j}=x_j$ if $i_j=1$ and $x_j^{i_j}=1$ if $i_j=0$. Since the polynomial $g(x_1,\dots,x_n)=$

---

[4] We write $\varphi(i_1,i_2)$ instead of $\varphi((i_1,i_2))$.

$=\varphi(i_1, \ldots, i_n) \cap x_1^{i_1} \cap \ldots \cap x_n^{i_n}$ has the property that $g(j_1, \ldots, j_n)=0$ if $(i_1, \ldots, i_n) \lneqq \lneqq (j_1, \ldots, j_n)$ $((j_1, \ldots, j_n) \in \mathbf{2}^n)$ therefore the characteristic function of f is φ and using the unicity statement we are through.

Corollary 3. Every Boolean function on L is a lattice polynomial if and only if L contains no proper Boolean interval.

If $[a, b]$ is a proper Boolean interval then $\varphi(0)=b$, $\varphi(1)=a$ is a characteristic function of a Boolean function which is not a lattice polynomial. Conversely, if f is a Boolean function which is not a lattice polynomial and φ is its characteristic function then by Corollary 2 φ is not monotone, i. e. there exist $a, b \in \mathbf{2}^n$ such that $\varphi(a) \lneqq \varphi(b)$. Then $\varphi(b) \neq \varphi(a) \cup \varphi(b)$ and by the Theorem $[\varphi(b), \varphi(a) \cup \varphi(b)]$ is a proper Boolean interval.

Corollary 4. If every Boolean function of L is a lattice polynomial then L is dense in itself. In case L is a chain or a complete countable lattice then this condition is also sufficient.

A lattice is called dense in itself if it contains no pair of elements a, b such that $a < b$ and $a < x < b$ for no x. If $a < b$ and $a < x < b$ for no x then $[a, b]$ is a Boolean interval, thus the first statement is trivial. If L is a chain then every Boolean interval $[a, b]$ $(a \neq b)$ is of this type, hence the second statement for chains. If L is a countable lattice which is dense in itself and complete then a proper Boolean interval $[a, b]$ of L is not

(i) finite, because L is dense in itself;

(ii) infinite, because $[a, b]$ were a countable and complete Boolean algebra, which is absurd; hence L contains no proper Boolean interval which implies by Corollary 3 that every Boolean function on L is a lattice polynomial.

* * *

It is known that a distributive lattice L can be extended to a Boolean algebra B such that the 0 and 1 of L are the same as that of B, and L generates B. The question is the following: is it possible to extend the Boolean functions of L to B?

Corollary 5. Let B be an arbitrary Boolean algebra which contains L as a sublattice; the 0 and 1 of L and B be the same. Then every Boolean function of L can be uniquely extended to B.

Let $f(x_1, \ldots, x_n)$ be an Boolean function on L and φ the characteristic function of f. Since φ maps $\mathbf{2}^n$ into L it can also be considered as a function which maps $\mathbf{2}^n$ into B. Therefore it defines uniquely a Boolean function f_1 on B. We prove the following:

$(\ast)$ L is closed under f_1, i. e. $a_1, \ldots, a_n \in L$ implies $f(a_1, \ldots, a_n) \in L$.

Suppose we proved $(\ast)$. Then the restriction of f_1 to L exists, let it be denoted by $f_1|L$. The functions f and $f_1|L$ have the same characteristic functions, thus $f=f_1|L$, i. e. f_1 is the extension of f, proving Corollary 5.

It remained to prove $(\ast)$. First we prove it for $n=1$. We show that $f(a)=f_1(a)$ for every $a \in L$. Indeed, by II of § 2 $f(a)$ is the relative complement of a in $[a \cap \varphi(1), a \cup \varphi(0)]$. Since the same is true of $f_1(a)$ and the characteristic function of both is φ, we get $f(a)=f_1(a)$ i. e. $f_1(a) \in L$, as required. Now consider the general case: $f=f(x_1, \ldots, x_n)$. If $(\ast)$ were not true there would exist $a_1, \ldots, a_n \in L$ with $f_1(a_1, \ldots, a_n) \notin L$. Consider the Boolean function $f(x, a_2, \ldots, a_n)$; its extension to B

is $f_1(x)$. Since $(\ast)$ is true for $n=1$ we get $f(x, a_2, \ldots, a_n)=f_1(x)|L$, i. e. $f(a_1, \ldots, a_n)= =f_1(a_1)\in L$, qu. e. d.

COROLLARY 6. L is closed under every Boolean function of B if and only if $L=B$.

The proof is obvious.

* * *

COROLLARY 7. Let L be infinite and F the set of all Boolean functions. Then[5] $\overline{\overline{F}}=\overline{\overline{L}}$.

By the Theorem

$$\overline{\overline{L}} \leqq \overline{\overline{F}} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\overline{L}}^{2n} = \overline{\overline{L}},$$

hence the statement.

REMARK. Corollaries $1-7$ are valid only for distributive lattices with 0 and 1. E. g. if L is the lattice of all finite subsets of an infinite set H, then $\overline{\overline{F}}=2^{\overline{\overline{H}}}>\overline{\overline{H}}=\overline{\overline{L}}$, therefore Corollary 7 does not hold. It is easy to see that this serves as a counter-example for the extensions of Corollaries 1, 2 and 5 as well.

* * *

Very few automorphisms and dual-automorphisms are Boolean functions as it can be seen from

COROLLARY 8. Let $f(x)$ be a Boolean function on L. The correspondence $x \to f(x)$ is an automorphism if and only if $f(x)=x$. It is a dual-automorphism if and only if L is a Boolean algebra and $f(x)=x'$.

Of course, the number of endomorphisms is not so few.

COROLLARY 9. The correspondence $x \to f(x)$ is an endomorphism if and only if f is a lattice polynomial.

Finally, I mention a few problems.

Let $S(L)$ denote the set of all Boolean functions on L, the variables are $x_1, x_2, \ldots$. If $f, g \in S(L)$ then $f \cup g$ and $f \cap g$ are also elements of $S(L)$. Therefore, $S(L)$ is a (distributive) lattice. Let $S_i(L)$ denote that sublattice of $S(L)$ which consists of functions depending on $x_1, \ldots, x_i$ only.

PROBLEM 1. A distributive lattice L is given. Find all distributive lattices L_1 with $S(L) \cong S(L_1)$.

E. g. if L_1 is the dual of L then $S(L) \cong S(L_1)$.

PROBLEM 2. The same as Problem 1 with S_i rather than S.

PROBLEM 3. Does $S_1(L_1) \cong S_1(L_2)$ imply $S_i(L_1) \cong S_i(L_2)$?

PROBLEM 4. Characterize those distributive lattices which are isomorphic to an $S(L)$ $(S_i(L))$?

---

[5] If H is a set, $\overline{\overline{H}}$ denotes the cardinality of H.

§ 2. Proof of the Theorem. The case $n=1$

Let φ map $\mathbf{2}$ into the distributive lattice L with 0 and 1.

We will prove that the following conditions on φ are equivalent:

I. A Boolean function f exists with $f(0)=\varphi(0)$ and $f(1)=\varphi(1)$;

II. A function f on L exists which satisfies

$$a \cup f(a) = a \cup \varphi(0),$$

$$a \cap f(a) = a \cap \varphi(1)$$

for every $a \in L$;

III. $[\varphi(1), \varphi(0) \cup \varphi(1)]$ is a Boolean interval.

I implies II. Since f is a Boolean function we have[6]

$$f(a) \equiv f(0) (\Theta_{a0}).$$

According to a theorem[7] of [2] this implies

$$[a \cup (f(a) \cap f(0))] \cap (f(a) \cup f(0)) = f(a) \cup f(0).$$

Thus

$$a \cup (f(a) \cap f(0) \geqq f(a) \cup f(0),$$

which implies

$$(a \cup f(a)) \cap (a \cup f(0)) \geqq (a \cup f(a)) \cup (a \cup f(0)),$$

and this is equivalent to the first equality of II. The other one follows in the same way, using the dual of the above equalities and inequalities.

II implies III. Choose a in $[\varphi(1), \varphi(0) \cup \varphi(1)]$ then $f(a)$ is its complement.

III implies I. Let

$$f_1(x) = (\varphi(1) \cup x) \cap (\varphi(0) \cup \varphi(1)),$$

$$f_2(x) = (\varphi(0) \cup x) \cap (\varphi(0) \cup \varphi(1)).$$

$f_1(x)$ is a Boolean function on L and it maps L onto $B=[\varphi(1), \varphi(0) \cup \varphi(1)]$. Since B is a Boolean algebra $f_3(x)=x'$ is a Boolean function of B. We define

$$f(x) = f_3(f_1(x)) \cap f_2(x).$$

Then $f(x)$ is a Boolean function and

$$f(0) = f_3(f_1(0)) \cap f_2(0) = f_3(\varphi(1)) \cap \varphi(0) = (\varphi(0) \cup \varphi(1)) \cap \varphi(0) = \varphi(0),$$

and similarly

$$f(1) = \varphi(1).$$

Thus the equivalence of I–III is proved.

The unicity of f follows from II since $f(a)$ as the complement of a in $[a \cap \varphi(1), a \cup \varphi(0)]$ must be unique.

Hence the Theorem is proved for $n=1$.

---

[6] If $a, b \in L$, Θ_{ab} denotes the smallest congruence relation of L under which $a \equiv b$ holds.

[7] This theorem states that $x \equiv y$ (Θ_{ab}) in a distributive lattice if and only if $[(a \cup b) \cup (x \cup y)] \cap (x \cup y) = x \cup y$ and $[(a \cup b) \cup (x \cap y)] \cap (x \cup y) = x \cup y$. This is applied with $b=0$, $x=f(a)$, $y=f(0)$.

§ 3. Proof of the Theorem. The general case

Let $(i_1, \dots, i_n) \leqq (j_1, \dots, j_n)$ and define $x_l = i_l$ if $i_l = j_l$ and $x_l = x$ otherwise. Then $f(x_1, \dots, x_n)$ becomes a Boolean function of one variable and III of § 2 gives the necessity of (1).

Sufficiency. Since the case $n=2$ is typical we will prove the sufficiency only for $n=2$.

Suppose that the elements $\varphi(0, 0)$, $\varphi(0, 1)$, $\varphi(1, 0)$ and $\varphi(1, 1)$ are given and condition (1) is satisfied. Therefore Boolean functions $f_1(x)$ and $f_2(x)$ exist with

$$f_1(0) = \varphi(0, 0), \quad f_1(1) = \varphi(0, 1),$$

$$f_2(0) = \varphi(1, 0), \quad f_2(1) = \varphi(1, 1)$$

$\big(f_1(x)$ corresponds to $f(0, x)$ and $f_2(x)$ to $f(1, x)\big)$. First we prove that

$$[f_2(x), f_2(x) \cup f_1(x)]$$

is a Boolean interval for every $x \in L$. Put

$$g(x) = [x \cup f_2(x)] \cap [f_2(x) \cup f_1(x)].$$

Then $\alpha : a \to a \cap x$ is an isomorphism between $[f_2(x), g(x)]$ and $[x \cap f_2(x), g(x)]$. Obviously, α maps $[f_2(x), g(x)]$ onto $[x \cap f_2(x), g(x)]$. To prove that α is one-to-one we have to show that $f_2(x) \cup (x \cap g(x)) = g(x)$. Indeed, $f_2(x) \cup (x \cap g(x)) = = f_2(x) \cup [x \cap (x \cup f_2(x)) \cap (f_2(x) \cup f_1(x))] = f_2(x) \cup [x \cap (f_2(x) \cup f_1(x))] = = (f_2(x) \cup x) \cap (f_2(x) \cup f_1(x)) = g(x)$. However, by II of § 2 $x \cap f_2(x) = x \cap f_2(1) = = x \cap \varphi(1, 1)$ and $x \cap g(x) = x \cap (\varphi(1, 0) \cup \varphi(1, 1))$. The interval $[\varphi(1, 1), \varphi(1, 0) \cup \cup \varphi(1, 1)]$ is Boolean, therefore so is its homomorphic image $[x \cap \varphi(1, 1), x \cap \cap (\varphi(1, 0) \cup \varphi(1, 1))] = [x \cap f_2(x), x \cap g(x)]$. We conclude that $[f_2(x), g(x)]$ is Boolean. Similarly, $[g(x), f_2(x) \cup f_1(x)]$ is also a Boolean interval. Thus $[f_2(x), f_2(x) \cup \cup f_1(x)]$ is a Boolean interval if and only if $g(x)$ has a complement in $[f_2(x), f_2(x) \cup \cup f_1(x)]$.

In order to prove this let the function $\chi : \mathbf{2} \to L$ be defined by

$$\chi(0) = \varphi(0, 0) \cup \varphi(1, 0),$$

$$\chi(1) = \varphi(1, 1).$$

Then it is easy to see that χ is a characteristic function which thus defines a Boolean function $h(x)$.

Now compute

$$g(0) \cup h(0) = [(0 \cup f_2(0)) \cap (f_2(0) \cup f_1(0))] \cup h(0) =$$

$$= [\varphi(1, 0) \cap (\varphi(1, 0) \cup \varphi(0, 0))] \cup (\varphi(1, 0) \cup \varphi(0, 0)) =$$

$$= \varphi(1, 0) \cup \varphi(0, 0) = f_1(0) \cup f_2(0),$$

$$g(1) \cup h(1) = (\varphi(0, 1) \cup \varphi(1, 1)) \cup \varphi(1, 1) = f_1(1) \cup f_2(1),$$

therefore by the unicity statement for $n=1$ we get

$$g(x)\cup h(x) = f_1(x)\cup f_2(x).$$

Similarly,

$$g(x)\cap h(x) = f_2(x),$$

i. e. $h(x)$ is the complement of $g(x)$ in $[f_2(x), f_1(x)\cup f_2(x)]$.

Now we are ready to define $f(y, x)$.

Let χ_x be the function $\mathbf{2}\to L$ defined by $\chi_x(0)=f_1(x)$, $\chi_x(1)=f_2(x)$. We just proved that χ_x is a characteristic function. Let $f(y, x)$ be the function defined by χ_x. We know that $f(0, x)$ and $f(1, x)$ are Boolean functions in x and $f(y, x)$ is a Boolean function in y if x is fixed. Hence it remained to show that (SP) holds for the second variable, i. e. $b\equiv c$ implies that $f(a, b)\equiv f(a, c)$. Indeed,

$$f(a, b) = f(a, b)\cap(a\cup f(a, b)) = \text{(by II of § 2)} = f(a, b)\cap(a\cup f(0, b)) \equiv$$

$$\equiv f(a, b)\cap(a\cup f(a, c)) = f(a, b)\cap(a\cup f(a, c)) = (f(a, b)\cap a)\cup(f(a, b)\cap f(a, c)) =$$

$$= (a\cap f(1, b))\cup(f(a, b)\cap f(a, c)) \equiv (a\cap f(1, c))\cup(f(a, b)\cap f(a, c)) =$$

$$=(a\cap f(a, c))\cup(f(a, b)\cap f(a, c)) = (a\cup f(a, b))\cap f(a, c) =$$

$$= (a\cup f(0, b))\cap f(a, c) \equiv (a\cup f(0, c))\cap f(a, c) = (a\cup f(a, c))\cap f(a, c) = f(a, c).$$

This completes the proof of the sufficiency.

The unicity statement is obvious from the construction.

MATHEMATICAL INSTITUTE
OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES,
BUDAPEST

(Received 27 March 1963)

References

[1] G. GRÄTZER, On Boolean functions (Notes on lattice theory II), *Revue de Math. Pures et Appliquées*, **7** (1962), pp. 693—697.

[2] G. GRÄTZER and E. T. SCHMIDT, Ideals and congruence relations in lattices, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **9** (1958), pp. 137—175.

ÜBER MITTELWERTE UND ENTROPIEN VOLLSTÄNDIGER WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNGEN

Von

Z. DARÓCZY (Debrecen)

(*Vorgelegt von* A. RÉNYI)

§ 1. Einleitung

Es sei

$$P=\begin{pmatrix}A_1\,A_2\ldots A_n\\ p_1\,p_2\ldots p_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_i\\ p_i\end{pmatrix}_1^n$$

eine vollständige Wahrscheinlichkeitsverteilung, bestehend aus den Elementarereignissen A_i mit den Wahrscheinlichkeiten $w(A_i)=p_i$ $\left(1\leqq i\leqq n,\ p_i\geqq 0,\ \sum_{i=1}^{n}p_i=1\right)$, und es bezeichne T die Menge der vollständigen endlichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Die Größe

$$M_f[P]=f^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n}p_if(p_i)\right] \tag{1}$$

wird der Mittelwert der Wahrscheinlichkeitsverteilung $P\in T$ bezüglich der in (0, 1] stetigen und strend monotonen Funktionen f genannt. Dabei wird für $p_if(p_i)$ im Falle $p_i=0$ Null eingesetzt (vgl. [2], Definition 2). J. ACZÉL und Verf. haben in [2] den folgenden Satz bewiesen: *Ist*

$$f_i^*(x)=\begin{cases}xf_i(x) & \text{für}\quad x\in(0,1]\\ 0 & \text{für}\quad x=0\end{cases}\qquad (i=1,2)$$

in [0, 1] *im engen Sinne konvex, so ist für beliebiges* $P\in T$ *zum Bestehen von*

$$M_{f_1}[P]=M_{f_2}[P]$$

notwendig und hinreichend, daß es Konstante $A>0$ *und B gebe derart, daß*

$$f_2(x)=Af_1(x)+B.$$

(S. [2], Satz 1.) Wir bemerken, daß $f_i(x)$ wegen der Konvexität von $f_i^*(x)$ in (0, 1] streng monoton wachsend ist (s. [2], § 1).

Auf Grund dieses Satzes haben wir in [2] die Shannonsche und Rényische Entropie von P axiomatisch charakterisiert (s. [2], Korollar 2). In dieser Arbeit werden wir zeigen, daß Satz 1 von [2] auch dann gilt, wenn die Konvexität von f_i^* durch die als natürlicher erscheinende Bedingung der Stetigkeit von f_i^* im abgeschlossenen Intervall [0, 1] ersetzt wird. Auf Grund dieses Satzes und weiterer Ergebnisse von [2] gewinnen wir eine neue Charakterisierung der Entropien positiver Ordnung (Rényische Entropie) und der Shannonschen Entropie, da die Konvexität von f_i^* in [2] nur zu dem Beweis des Satzes 1 benutzt war.

§ 2. Ein Satz über die Mittelwerte

In diesem Paragraphen werden wir uns mit den Mittelwerten einer vollständigen Wahrscheinlichkeitsverteilung beschäftigen. Es bezeichne *Ω die Menge aller im halboffenen Intervall* (0, 1] *definierten stetigen und streng monotonen Funktionen f, für die die Funktion*

$$f^*(x)=\begin{cases} xf(x) & \text{für} \quad x\in(0,1] \\ 0 & \text{für} \quad x=0 \end{cases} \tag{2}$$

im abgeschlossenen Intervall [0, 1] *stetig ist.* Es gilt der folgende

SATZ 1. *Ist $f, h\in\Omega$, so gilt für beliebige $P\in T$ die Gleichung*

$$M_f[P]=M_h[P] \tag{3}$$

dann und nur dann, falls h die Gestalt

$$h(x) = Af(x)+B \tag{4}$$

hat, wo $A\neq 0$ und B konstante Werte sind.

BEWEIS. Der erste Teil des Beweises verläuft genau so wie bei dem von J. ACZÉL und dem Verfasser bewiesenen Satz 1 von [2]. Der Vollständigkeit halber gehen wir auch darauf ein. (3) gilt offenbar immer, wenn (4) besteht. Andererseits sei $G(x)=h[f^{-1}(x)]$. Dann folgt aus (3)

$$G\left[\sum_{i=1}^{n} p_i f(p_i)\right] = \sum_{i=1}^{n} p_i G[f(p_i)]. \tag{5}$$

Offenbar ist $G(x)$ eine stetige und nichtkonstante Funktion. Wir zeigen, daß $G(x) = Ax+B$, was eben die zu beweisende Behauptung ist. Wir führen den ausführlichen Beweis in mehreren Schritten durch.

1. *Ist G eine Lösung von (5), so ist auch*

$$H(x) = G(x)-(Ax+B) \tag{6}$$

für beliebige Konstanten A und B eine Lösung:

$$H\left[\sum_{i=1}^{n} p_i f(p_i)\right] = \sum_{i=1}^{n} p_i H[f(p_i)]. \tag{7}$$

In der Tat gilt

$$\begin{aligned} H\left[\sum p_i f(p_i)\right] &= G\left[\sum p_i f(p_i)\right]-\left(A\sum p_i f(p_i)+B\right) = \\ &= \sum p_i\, G[f(p_i)]-\sum p_i(Af(p_i)+B) = \sum p_i\, H[f(p_i)], \end{aligned}$$

und gerade dies wollten wir beweisen.

Offenbar ist auch H eine stetige Funktion. Da in (6) A und B beliebige Konstanten sind, kann der Wert von H in beliebigen zwei verschiedenen Punkten beliebig gewählt werden. Wir wählen A und B so, daß

$$H\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]=H\left[f\left(\frac{1}{4}\right)\right]=0 \tag{8}$$

sein soll. (Eine solche Wahl ist immer möglich, da die Determinante $f\left(\frac{1}{4}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)$ des Gleichungssystems

$$\begin{cases} Af\left(\frac{1}{4}\right)+B = G\left[f\left(\frac{1}{4}\right)\right] \\ Af\left(\frac{1}{2}\right)+B = G\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right] \end{cases}$$

wegen der strengen Monotonität von f von Null verschieden ist.)

2. *Für diese Funktion H gilt die Jensensche Funktionalgleichung*

$$H\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{H(u)+H(v)}{2}$$

für gewisse u, v.

Wir schreiben (7) mit $n+1$ statt n und mit $p_{n+1}=\frac{1}{2}$, $p_i=x_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, dann gilt wegen (8)

$$H\left[\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)+\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i H[f(x_i)] \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{2}, x_i \geqq 0\right). \tag{9}$$

Wir bezeichnen $\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)=c$ und verwenden (7) mit $2n$ statt n und mit

$$p_i=x_i,\ p_{n+i}=y_i \quad (i=1, 2, \ldots, n), \qquad \sum x_i=\sum y_i=\frac{1}{2},$$

so wird wegen (9)

$$H\left[\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) + \sum_{i=1}^{n} y_i f(y_i)\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i H[f(x_i)] + \tag{10}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} y_i H[f(y_i)] = H\left[\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)+c\right]+H\left[\sum_{i=1}^{n} y_i f(y_i)+c\right].$$

Aus (10) folgt speziell bei $x_i=y_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$

$$H\left[2\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)\right] = 2H\left[\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)+c\right]$$

und deshalb geht (10) in

$$H\left[\frac{2\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)+2\sum_{i=1}^{n} y_i f(y_i)}{2}\right] = \frac{H\left[2\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)\right]+H\left[2\sum_{i=1}^{n} y_i f(y_i)\right]}{2} \tag{11}$$

über. Mit

$$u = 2 \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i), \quad v = 2 \sum_{i=1}^{n} y_i f(y_i) \tag{12}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{2}, \quad x_i \geqq 0, \quad y_i \geqq 0 \right)$$

wird aus (11)

$$H\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{H(u)+H(v)}{2}, \tag{13}$$

und das war die Behauptung 2.

Von hier weicht unser Gedankengang von dem in [2] gegebenen ab.

3. *$H[f(x)]=0$ für alle $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$.*

Um dies zu beweisen, untersuchen wir, welche Werte die durch (12) definierten u, v annehmen können. Es ist

$$u = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 2 \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) = 2 \sum_{i=1}^{n} f^*(x_i) \tag{14}$$

eine — wegen $f \in \Omega$ — stetige Funktion von n Veränderlichen im Gebiete

$$\mathfrak{N} = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\middle|\, x_i \geqq 0 \;\; \& \;\; \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{2} \right\}.$$

Aus (14) erhalten wir mit $x_i = \frac{1}{2n}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$F\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}, \ldots, \frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2n}\right)$$

und — wegen $f \in \Omega$ — mit $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_i = 0$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$

$$F\left(\frac{1}{2}, 0, \ldots, 0\right) = f\left(\frac{1}{2}\right),$$

d. h. wegen der Stetigkeit von F nehmen die $u = F(x_1, \ldots, x_n)$ (und auch die $v = F(y_1, \ldots, y_n)$) in (12) bei fixem n alle Werte zwischen $f\left(\frac{1}{2n}\right)$ und $f\left(\frac{1}{2}\right)$ in $\mathfrak{N}$ an. Nehmen wir nun ein beliebiges $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, so gibt es eine natürliche Zahl n derart, daß $x > \frac{1}{2n}$. Bei diesem n nehmen also u und v in (12) alle Werte zwischen $f\left(\frac{1}{2n}\right)$ und $f\left(\frac{1}{2}\right)$ an, und für diese u, v gilt die Jensensche Funktionalgleichung (13), deren allgemeine stetige Lösung (S. z. B. [1], Nr. 2.1.3, 2.1.4) die lineare Funktion ist. Da aber H laut (8) in zwei — wegen der Monotonie von f — verschiedenen und in $\left[f\left(\frac{1}{2n}\right), f\left(\frac{1}{2}\right)\right]$ liegenden Punkten verschwindet, ist H in diesem ganzen Intervall identisch gleich 0, insbesondere auch $H[f(x)]=0$ und das war die Behauptung 3.

4. $H[f(x)]=0$ *für alle* $x\in\left(\frac{1}{2}, 1\right]$.

Es sei x_0 ein beliebiger Wert aus dem Intervall $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Wegen (7) $\left(n=3;\right.$ $\left.p_1=x_0, p_2=p_3=\frac{1-x_0}{2}<\frac{1}{2}\right)$ und 3 gilt dann

$$H\left[x_0 f(x_0)+(1-x_0)f\left(\frac{1-x_0}{2}\right)\right] = x_0 H[f(x_0)]. \tag{15}$$

Offenbar gibt es wegen der Stetigkeit und strengen Monotonität von f einen eindeutig bestimmten Wert x_1, für welchen

$$f(x_1) = x_0 f(x_0)+(1-x_0)f\left(\frac{1-x_0}{2}\right)$$

und

$$\frac{1-x_0}{2}<x_1<x_0$$

ist. Wenn $x_1\leqq\frac{1}{2}$ ist, so erhalten wir aus (15) — wegen 3 — $H[f(x_0)]=0$, und das ist die Behauptung 4. Wenn $x_1>\frac{1}{2}$ ist, so gilt wegen (7) und 3

$$H\left[x_1 f(x_1)+(1-x_1)f\left(\frac{1-x_1}{2}\right)\right] = x_1 H[f(x_1)].$$

Es sei jetzt

$$f(x_2) = x_1 f(x_1)+(1-x_1)f\left(\frac{1-x_1}{2}\right).$$

Dann ist $\frac{1-x_1}{2}<x_2<x_1<x_0$ und wenn $x_2\leqq\frac{1}{2}$ ist, so gilt wieder — wegen $H[f(x_m)]=x_{m-1}H[f(x_{m-1})]$ $(m=1, 2)$ — $H[f(x_0)]=0$. Wenn $x_2>\frac{1}{2}$ ist, so definieren wir die Werte $x_3, x_4, \ldots$ durch die rekursive Formel

$$f(x_n) = x_{n-1}f(x_{n-1})+(1-x_{n-1})f\left(\frac{1-x_{n-1}}{2}\right) \qquad (n=1, 2, \ldots). \tag{16}$$

Wir werden zeigen, daß es eine natürliche Zahl n gibt, für welche $x_n\leqq\frac{1}{2}$ ist, woraus — wegen $H[f(x_k)]=x_{k-1}H[f(x_{k-1})]$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ — $H[f(x_0)]=0$ folgt.

Nehmen wir nämlich an, daß es keine solche Zahl n gibt, d. h. für alle $\frac{1}{2} < x_{n-1} \leqq x_0$ aus (16) $\frac{1}{2} < x_n < x_{n-1}$ folgt. Dann ist die Folge $\{x_n\}$ monoton abnehmend und von unten beschränkt, so daß der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$ existiert, für welchen $x^* \geqq \frac{1}{2}$ gilt. Indem wir in der Gleichung (16) den Grenzübergang $n\to\infty$ durchführen, erhalten wir wegen der Stetigkeit von f

$$f(x^*) = x^* f(x^*) + (1-x^*) f\left(\frac{1-x^*}{2}\right),$$

woraus

$$f(x^*) = f\left(\frac{1-x^*}{2}\right),$$

und wegen der strengen Monotonität von f $x^* = \frac{1-x^*}{2}$ folgt, d. h. es ist $x^* = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$, was offenbar ein Widerspruch ist. Damit haben wir unsere Behauptung für beliebige Werte $\frac{1}{2} < x_0 < 1$ bewiesen. Gleichzeitig gilt wegen der Stetigkeit $H[f(1)] = 0$, und damit haben wir die Behauptung 4 vollständig bewiesen.

Unter 3 und 4 haben wir bewiesen, daß für festgewählte Werte von A und von B $H(x) \equiv 0$ ist, und so folgt aus (6) $G(x) = Ax + B$, womit wir unseren Satz restlos bewiesen haben.

§ 3. Charakterisierung der Entropien und Mittelwerte

C. E. SHANNON [4] hat den Begriff der zu $P \in T$ gehörigen Informationsmaßes (Entropie) durch die Formel

$$I_1[P] = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i \tag{17}$$

eingeführt. A. RÉNYI [3] hat als weiteres Informationsmaß von $P \in T$ die Entropien α-ter Ordnung ($\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$)

$$I_\alpha[P] = (1-\alpha)^{-1} \log_2 \left(\sum_{i=1}^{n} p_i^\alpha\right) \tag{18}$$

vorgeschlagen, die im Falle $\alpha \to 1$ in (17) übergeht. J. ACZÉL und Verf. haben in [2] zur Charakterisierung von $I[P]$ die folgenden Postulate verwendet.

POSTULAT 1. Es existiert eine in $(0, 1]$ streng monotone und stetige Funktion $y = g(x)$ derart, daß für $P = \begin{pmatrix} A_i \\ p_i \end{pmatrix}_1^n \in T$

$$I[P] = g^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{n} p_i g(-\log_2 p_i)\right\}$$

gilt.

POSTULAT 2. Ist $P = \begin{pmatrix} A_i \\ p_i \end{pmatrix}_1^n$ und $Q = \begin{pmatrix} B_k \\ q_k \end{pmatrix}_1^m \in T$, so ist

$$I[P * Q] = I[P] + I[Q],$$

wo

$$P * Q = \begin{pmatrix} A_i B_k \\ p_i q_k \end{pmatrix}_1^{nm}$$

ist. (Es genügt Postulat 2 für Verteilungen mit positiven Wahrscheinlichkeiten vorauszusetzen.)

In [2] haben wir den Begriff der Menge K durch folgende Definition eingeführt (vgl. [2], Definition 1): K ist die Menge aller im halboffenen Intervall (0, 1] definierten Funktionen f, für die die Funktion

$$f^*(x) = \begin{cases} xf(x) & \text{für} \quad x \in (0,1] \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

im abgeschlossenen Intervall [0, 1] im engen Sinne konvex ist. Wir haben in [2] den folgenden Satz bewiesen:

Ist $I[P]$ *für jedes* $P \in T$ *definiert und genügt sie den Postulaten* 1, 2, *wo* $g(-\log_2 x) \in K$ *ist, so gilt* $I[P] = I_1[P]$ *oder* $I[P] = I_\alpha[P]$ $(\alpha > 0, \alpha \neq 1)$. (S. [2], Korollar 2.)

Wie man aus dem Beweise dieser Ergebnisse (S. [2], Sätze 1, 2 und Korollär 1, 2) gleich sieht, haben wir die Eigenschaft $g(-\log_2 x) \in K$ nur zu dem Beweis des Satzes 1 ausgenützt, und auf Grund des Satzes 1 haben wir bewiesen, daß $g(-\log_2 x) = a \log_2 x + b$ oder $ax^{\alpha-1} + b$ ist (ohne der Einschränkung $\alpha > 0$, folgt die Eigenschaft $\alpha > 0$ aus der Konvexität von $xg(-\log_2 x)$). Aber $\alpha > 0$ folgt auch aus dei Stetigkeit von $xg(-\log_2 x)$ bei $x = 0$, d. h. wir haben den folgenden

SATZ 2. *Genügt* $I[P]$ *den Postulaten* 1—2, *wo* $g(-\log_2 x) \in \Omega$ *ist, so gilt* $I[P] = I_1[P]$ *oder* $I[P] = I_\alpha[P]$ $(\alpha > 0, \alpha \neq 1)$.

Aus unserem Satze 1 folgt auch die entsprechend modifizierte Form des Korollars 1 von [2]:

KOROLLAR. *Ist* $f \in \Omega$, *so sind*

$$M_1[P] = \prod_{i=1}^{n} p_i^{p_i}$$

und

$$M_\alpha[P] = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \qquad (\alpha > 0, \ \alpha \neq 1)$$

die allgemeinsten Mittelverte von der Gestalt (1) *die multiplikativ sind:*

$$M[P * Q] = M[P]\, M[Q].$$

MATHEMATISCHES INSTITUT
KOSSUTH LAJOS UNIVERSITÄT,
DEBRECEN

(Eingegangen am 17. April 1963.)

Literatur

[1] J. ACZÉL, *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen* (Basel—Stuttgart und Berlin, 1961).

[2] J. ACZÉL—Z. DARÓCZY, Charakterisierung der Entropien positiver Ordnung und der Shannonschen Entropie, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **14** (1963), S. 95—121.

[3] A. RÉNYI, Az információelmélet néhány alapvető kérdése, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.*, **10** (1960), S. 251—282.

[4] C. E. SHANNON, A mathematical theory of communication, *Bell System Technical Journal*, **27** (1948), S. 379—423 and 623—653.

ON FINITE-DIFFERENCE APPROXIMATIONS TO SOLUTIONS OF QUASILINEAR HYPERBOLIC SYSTEMS

By

L. VEIDINGER (Budapest)

(*Presented by* B. SZ.-NAGY)

1. Introduction

In this paper we shall discuss the stability and convergence of certain finite-difference approximations to solutions of quasilinear hyperbolic systems. In Section 3 we define the concept of stability for explicit, two-level quasilinear finite-difference equations. It will be shown that the well-known stability criteria for linear finite-difference equations remain valid in the quasilinear case. In Section 5 we shall prove that if the approximating two-level difference equation is stable, and certain regularity assumptions are satisfied, then the pointwise error is of order $O(h)$ in a suitable neighbourhood of the initial hyperplane; h is the steplength in the time-direction. With the help of this theorem pointwise error bounds can be obtained for many important finite-difference schemes.

2. The initial value problem for quasilinear hyperbolic systems

We shall deal with first order systems of partial differential equations of the form

$$\mathbf{u}_t = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}^i(\mathbf{x}, t, \mathbf{u})\mathbf{u}_{x^i} + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}), \tag{2. 1}$$

where $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ is a vector of l unknown functions, and the $\mathbf{A}^i$ are real $l \times l$ matrices. The components x^i of the vector $\mathbf{x}$ are the space variables, the scalar t is the time variable. The initial value problem is to find a solution of this equation with prescribed values at $t=0$:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}). \tag{2. 2}$$

We require that the initial values $\mathbf{u}^0$ vanish outside a finite subset of the hyperplane $t=0$, and that $\mathbf{b}$ vanish outside a finite set in the slab $0 \leqq t \leqq T$.

The system (2. 1) is called hyperbolic in the domain[1] $0 \leqq t \leqq T$; $|\mathbf{u} - \mathbf{u}^0(\mathbf{x})| < K$ if in this domain all linear combinations of the matrices $\mathbf{A}^i$ with real coefficients have only real eigenvalues. PETROWSKI and LERAY have proved that if (2. 1) is hyperbolic and $\mathbf{A}^i(\mathbf{x}, t, \mathbf{u})$, $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u})$, $\mathbf{u}^0(\mathbf{x})$ are sufficiently smooth, then the initial value problem (2. 1), (2. 2) has a unique solution $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ in the slab $0 \leqq t \leqq T_0$, provided T_0 is small enough (see [1] and [2]). The solution $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ vanishes outside a closed finite region in the slab $0 \leqq t \leqq T_0$.

---

[1] If $\mathbf{a}$ is a vector, then we denote by $|\mathbf{a}|$ the absolute value of the largest component of $\mathbf{a}$.

3. The stability of finite-difference approximations to solutions of quasilinear hyperbolic systems

We approximate the solutions of the equations (2. 1) by solutions of explicit two-level difference equations, i. e. equations of the form

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t+h) = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}(\mathbf{x}, t))\mathbf{v}(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t) + h\mathbf{b}(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)), \tag{3. 1}$$

where the $\mathbf{C}^j = \mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{u})$ are $l \times l$ matrices, the $\mathbf{r}_j$ are arbitrary vectors with n components $\overset{i}{r}_j$, and h is the time increment, that is the steplength in the t-direction. The initial condition for the finite-difference equation (3. 1) is the same as for the differential equation (2. 1):

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}). \tag{3. 2}$$

We assume that in the domain $0 \leqq t \leqq T$; $|\mathbf{u} - \mathbf{u}^0(\mathbf{x})| < K$ of the $\mathbf{x}, t, \mathbf{u}$-space the matrices $\mathbf{C}^j$ satisfy the so-called consistency conditions:

$$\sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}) = \mathbf{I} \tag{3. 3a}$$

and

$$\sum_{j=1}^{m} \overset{i}{r}_j \mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}) = \overset{i}{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}), \tag{3. 3b}$$

where $\mathbf{I}$ is the unit matrix.

If $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{x}, t)$ is a square integrable vector-function, vanishing outside a closed finite region in the slab $0 \leqq t \leqq T$, then the L_2-norm of $\mathbf{z}$ on the hyperplane $t = \tau$ is defined as

$$\|\mathbf{z}(\mathbf{x}, t)\|_\tau = \|\mathbf{z}(\mathbf{x}, t)\|_{t=\tau} = \left[\int |\mathbf{z}(\mathbf{x}, \tau)|^2 \, d\mathbf{x}\right]^{\frac{1}{2}},$$

where the integral is extended over the whole hyperplane.

Let $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_1(\mathbf{x}, t)$ be any vector-function, which is uniformly Lipschitz-continuous in the vector $\mathbf{x}$, and satisfies the inequality $|\mathbf{z}_1(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}^0(\mathbf{x})| < K$ for $0 \leqq t \leqq T' \leqq T$. The finite-difference equation (3. 1) will be called stable, if for $0 \leqq \tau \leqq T'$ and every square integrable vector-function $\mathbf{z}_2(\mathbf{x}, t)$ the inequality

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{z}_1(\mathbf{x}, t))\mathbf{z}_2(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t) \right\|_\tau \leqq (1 + c_1 h)\|\mathbf{z}_2(\mathbf{x}, t)\|_\tau \tag{3. 4}$$

holds[2]; c_1 is a positive constant independent of τ, h and the choice of the function $\mathbf{z}_2(\mathbf{x}, t)$ (but it may depend on the Lipschitz-constant of $\mathbf{z}_1$).

The well-known stability criteria for linear finite-difference equations are valid also in the quasilinear case. Thus we have:

---

[2] In certain cases we have instead of (3. 4) a similar inequality with a norm $\| \ \|^1$, which is equivalent to the L_2-norm (see [3] and [4]). The considerations of sections 4 and 5 remain valid, if we use everywhere the norm $\| \ \|^1$ instead of the norm $\| \ \|$.

FRIEDRICHS' CONDITION: *If in the difference equation* (3. 1) *the matrices* $\mathbf{C}^j$ *are symmetric, and satisfy a Lipschitz-condition with respect to* $\mathbf{x}$ *and* $\mathbf{u}$ *in the domain* $0 \leqq t \leqq T$; $|\mathbf{u} - \mathbf{u}^0(\mathbf{x})| < K$, *then the corresponding difference scheme is stable if, in addition, the* $\mathbf{C}^j$ *are non-negative.*

The proof of this theorem, which we give here for the sake of completeness, is almost the same as in the linear case (see, for example, [5], p. 292).

Let us put

$$\mathbf{z}_3(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{z}_1(\mathbf{x}, t))\mathbf{z}_2(\mathbf{x} + h\mathbf{r}_j, t),$$

then

$$\|\mathbf{z}_3(\mathbf{x}, t)\|_\tau^2 = \int \sum_{j=1}^{m} \mathbf{z}_3^*(\mathbf{x}, \tau)\mathbf{C}^j(\mathbf{x}, \tau, \mathbf{z}_1(\mathbf{x}, \tau))\mathbf{z}_2(\mathbf{x} + h\mathbf{r}_j, \tau)\, d\mathbf{x},$$

where $\mathbf{z}_3^*$ is the transpose of the vector $\mathbf{z}_3$. Since $\mathbf{C}^j$ was assumed to be non-negative, we can apply Schwarz's inequality to the integrand

$$\mathbf{z}_3^* \mathbf{C}^j z_2 \leqq \sqrt{\mathbf{z}_3^* \mathbf{C}^j \mathbf{z}_3}\sqrt{\mathbf{z}_2^* \mathbf{C}^j \mathbf{z}_2},$$

and, by the theorem on the geometric and the arithmetic mean, this is less than $\frac{1}{2}\mathbf{z}_3^*\mathbf{C}^j\mathbf{z}_3 + \frac{1}{2}\mathbf{z}_2^*\mathbf{C}^j\mathbf{z}_2$. Therefore

$$\|\mathbf{z}_3(\mathbf{x}, t)\|_\tau^2 \leqq \frac{1}{2}\int \sum_{j=1}^{m} \mathbf{z}_3^*(\mathbf{x}, \tau)\mathbf{C}^j(\mathbf{x}, \tau, \mathbf{z}_1(\mathbf{x}, \tau))\mathbf{z}_3(\mathbf{x}, \tau)\, d\mathbf{x} +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \int \mathbf{z}_2^*(\mathbf{x} + h\mathbf{r}_j, \tau)\mathbf{C}^j(\mathbf{x}, \tau, \mathbf{z}_1(\mathbf{x}, \tau))\mathbf{z}_2(\mathbf{x} + h\mathbf{r}_j, \tau)\, d\mathbf{x}.$$

Because of the consistency condition (3. 3a) the first term for $0 \leqq \tau \leqq T'$ can be written as

$$\frac{1}{2}\int \sum_{j=1}^{m} \mathbf{z}_3^*(\mathbf{x}, \tau)\mathbf{C}^j(\mathbf{x}, \tau, \mathbf{z}_1(\mathbf{x}, \tau))\mathbf{z}_3(\mathbf{x}, \tau)\, d\mathbf{x} = \frac{1}{2}\|\mathbf{z}_3(\mathbf{x}, t)\|_\tau^2.$$

In the second term we introduce the new variable $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + h\mathbf{r}_j$ then

(3. 5)
$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \int \mathbf{z}_2^*(\mathbf{x} + h\mathbf{r}_j, \tau)\mathbf{C}^j(\mathbf{x}, \tau, \mathbf{z}_1(\mathbf{x}, \tau))\mathbf{z}_2(\mathbf{x} + h\mathbf{r}_j, \tau)\, d\mathbf{x} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \int \mathbf{z}_2^*(\bar{\mathbf{x}}, \tau)\mathbf{C}^j(\bar{\mathbf{x}} - h\mathbf{r}_j, \tau, \mathbf{z}_1(\bar{\mathbf{x}} - h\mathbf{r}_j, \tau))\mathbf{z}_2(\bar{\mathbf{x}}, \tau)\, d\bar{\mathbf{x}}.$$

Since the matrices $\mathbf{C}^j$ satisfy a Lipschitz-condition with respect to $\mathbf{x}$ and $\mathbf{u}$, and $\mathbf{z}_1$ satisfies a Lipschitz-condition with respect to $\mathbf{x}$, we have for $0 \leqq \tau \leqq T'$

$$\mathbf{C}^j(\bar{\mathbf{x}} - h\mathbf{r}_j, \tau, \mathbf{z}_1(\bar{\mathbf{x}} - h\mathbf{r}_j, \tau)) - \mathbf{C}^j(\bar{\mathbf{x}}, \tau, \mathbf{z}_1(\bar{\mathbf{x}}, \tau)) = \mathbf{O}(h).$$

Inserting this into (3. 5) and using the consistency condition (3. 3a) we find that

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\int \mathbf{z}_2^*(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j,\tau)\mathbf{C}^j\big(\mathbf{x},\tau,\mathbf{z}_1(\mathbf{x},\tau)\big)\mathbf{z}_2(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j,\tau)\,d\mathbf{x} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\|\mathbf{z}_2(\mathbf{x},t)\|_\tau^2 + O\big(h\,\|\mathbf{z}_2(\mathbf{x},t)\|_\tau^2\big).$$

Thus

$$\|\mathbf{z}_3(\mathbf{x},t)\|_\tau^2 \leqq \frac{1}{2}\,\|\mathbf{z}_3(\mathbf{x},t)\|_\tau^2 + \frac{1}{2}\,\|\mathbf{z}_2(\mathbf{x},t)\|_\tau^2 + O\big(h\,\|\mathbf{z}_2(\mathbf{x},t)\|_\tau^2\big)$$

for $0 \leqq \tau \leqq T'$, whence the inequality (3. 4) immediately follows; Friedrichs' condition is indeed sufficient for stability.

Note that if the matrices $\mathbf{C}^j$ are symmetric, then because of the consistency condition (3. 3b) the matrices $\mathbf{A}^i$ are also symmetric. Thus Friedrichs' condition can be applied only to symmetric hyperbolic systems.

As in the linear case, a necessary condition for the stability of the finite-difference scheme is (see [5], p. 276):

Von Neumann's condition: *The eigenvalues of the matrix* $\mathbf{G} = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}_j e^{i\mathbf{q}^*\mathbf{r}_j}$ *do not exceed* 1 *in absolute value for any choice of the real vector* $\mathbf{q}$.

Lax has proved (see [3], p. 506) that a mildly strengthened form of this condition is sufficient in case of symmetric linear systems in one space variable. Similarly to Friedrichs' theorem, the theorem of Lax can also be generalized to the quasilinear case.

4. The basic lemmas

Lemma 1. *Let* $m(\tau)$ *be the solution of the difference equation problem*

$$m(\tau+h) = m(\tau) + h\big(\omega_h + \alpha m(\tau)\big); \quad m(0) = 0, \tag{4. 1}$$

where α *is a positive constant, and* ω_h *is a quantity, independent of* τ, *then for* $\tau \leqq \beta$ *we have* $|m(\tau)| \leqq \gamma\tau\,|\omega_h|$, *where* γ *depends only on* α *and* β.

Proof. The solution of (4. 1) is

$$m(\tau) = \frac{\omega_h}{\alpha}\big[(1+\alpha h)^{\frac{\tau}{h}} - 1\big].$$

Thus

$$|m(\tau)| \leqq \frac{|\omega_h|}{\alpha}(e^{\alpha\tau} - 1),$$

whence by the condition $\tau \leqq \beta$ we get $|m(\tau)| \leqq \gamma\tau\,|\omega_h|$.

Lemma 2. *If the vector-function* $\mathbf{z}(\mathbf{x}, t)$ *has continuous first partial derivatives with respect to the space variables on the hyperplane* $t = \tau$, *then*

$$\|\mathbf{z}(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j,t) - \mathbf{z}(\mathbf{x},t)\|_\tau \leqq h\sum_{i=1}^{n} |r_j^i|\,\|\mathbf{z}_{x^i}(\mathbf{x},t)\|_\tau.$$

PROOF. We have

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t) = \mathbf{z}(\mathbf{x}, t)+h\int\limits_0^1 \sum_{i=1}^n r_j^i \mathbf{z}_{x^i}(\mathbf{x}+\sigma h\mathbf{r}_j, t)\, d\sigma,$$

whence by the obvious identity $\| \mathbf{z}_{x^i}(\mathbf{x}+\sigma h\mathbf{r}_j, t)\|_\tau = \| \mathbf{z}_{x^i}(\mathbf{x}, t)\|_\tau$ it follows that

$$\|\mathbf{z}(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t)-\mathbf{z}(\mathbf{x}, t)\|_\tau \leqq h\int\limits_0^1 \sum_{i=1}^n |r_j^i|\, \|\mathbf{z}_{x^i}(\mathbf{x}+\sigma h\mathbf{r}_j, t)\|_\tau\, d\sigma = h\sum_{i=1}^n |r_j^i|\, \|\mathbf{z}_{x^i}(\mathbf{x}, t)\|_\tau.$$

LEMMA 3 (SOBOLEV'S INEQUALITY). *If the vector-function* $\mathbf{z}(\mathbf{x}, t)$ *possesses on the hyperplane* $t=\tau$ *continuous partial derivatives up to order* $r = \left[\frac{n}{2}\right]+1$ *with respect to the space variables, then*

$$\max_{\mathbf{x}} |\mathbf{z}(\mathbf{x}, \tau)| \leqq c_2 \sum_{s=0}^{r} \sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_s=1}^{n} \left\| \frac{\partial^s \mathbf{z}(\mathbf{x}, t)}{\partial x^{\alpha_1}\dots\partial x^{\alpha_s}} \right\|_\tau$$

where c_2 *is a constant independent of* τ *and the function* $\mathbf{z}(\mathbf{x}, t)$.

For a proof, see [6], p. 64.

LEMMA 4. *Let* $\mathbf{w}=\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ *be the solution of the finite-difference equation*

$$\text{(4. 1)} \qquad \mathbf{w}(\mathbf{x}, t+h) = \sum_{j=1}^m \overline{\mathbf{C}}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{w}(\mathbf{x}, t))\mathbf{w}(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t)+h\overline{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, t, \mathbf{w}(\mathbf{x}, t), h)$$

with the initial condition $\mathbf{w}(\mathbf{x}, 0)=\mathbf{0}$. *Suppose that the finite-difference equation* (4. 1) *is stable, and the matrices* $\overline{\mathbf{C}}^j=\overline{\mathbf{C}}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{u})$ *satisfy the condition* $\sum_{j=1}^m \overline{\mathbf{C}}^j=\mathbf{I}$ *in the domain* $0\leqq t\leqq T_1$; $|\mathbf{u}|<L$ *of the* $\mathbf{x}, t, \mathbf{u}$*-space. Suppose also that in the domain* $0\leqq t\leqq T_1$; $|\mathbf{u}|<L$ *the matrices* $\overline{\mathbf{C}}^j$ *and the vector* $\overline{\mathbf{b}}=\overline{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, h)$ *have continuous partial derivatives up to order* $N_2 = 2\left[\frac{n}{2}\right]+2$ *with respect to the* x^i *and* u^k. *Denote by* $\mathbf{w}_N$ *the vector whose components are all derivatives of order* N *of* $\mathbf{w}$ *with respect to the space variables. Then there exists a positive* T_2, *independent of* h, *such that*

$$\text{(4. 2)} \qquad \max_{\mathbf{x}} |\mathbf{w}_N(\mathbf{x}, t)| < L$$

for $N=0, 1, \dots, N_1 = \left[\frac{n}{2}\right]+1$ *and* $0\leqq t\leqq T_2$.

PROOF:[3] Assume that the inequality (4. 2) holds for $N=0, 1, \dots, N_1$ and $0\leqq t\leqq t_1$, where $0\leqq t_1\leqq T_1$. Then from the stability of the difference equation

---

[3] The fundamental idea of this proof goes back to PETROWSKI and LADYŽENSKAYA (see [1] and [7]).

(4. 1) and the boundedness of the vector $\bar{\mathbf{b}}$ it follows that

$$\|\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)\|_{\tau+h} \leqq \|\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)\|_{\tau} + O(\|\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)\|_{\tau} h + h)$$

for $0 \leqq \tau \leqq t_1$, and, since $\mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$, by Lemma 1 we have

$$\|\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)\|_{\tau} = O(\tau)$$

for $0 \leqq \tau \leqq t_1 + h$.

We now differentiate (4. 1) to get

$$\mathbf{w}_{x^i}(\mathbf{x}, t+h) = \sum_{j=1}^{m} \bar{\mathbf{C}}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{w}(\mathbf{x}, t))\mathbf{w}_{x^i}(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} [\bar{\mathbf{C}}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{w}(\mathbf{x}, t))]_{x^i} \mathbf{w}(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t) + h[\bar{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, t, \mathbf{w}(\mathbf{x}, t), h)]_{x^i}.$$

These equations, with $i = 1, 2, \dots, n$, constitute the system

$$\mathbf{w}_1(\mathbf{x}, t+h) = \sum_{j=1}^{m} \bar{\mathbf{C}}_1^j \mathbf{w}_1(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t) + \sum_{j=1}^{m} \bar{\mathbf{D}}_{1,0}^j \mathbf{w}(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t) + h\bar{\mathbf{b}}_1,$$

where $\mathbf{w}_1$ is the ln-dimensional vector, whose components are the first partial derivatives of the components of $\mathbf{w}$ with respect to the space variables. The vector $\bar{\mathbf{b}}_1$ is similarly formed from $\bar{\mathbf{b}}$:

$$\bar{\mathbf{b}}_1 = \begin{bmatrix} [\bar{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, t, \mathbf{w}(\mathbf{x}, t), h)]_{x^1} \\ \vdots \\ [\bar{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, t, \mathbf{w}(\mathbf{x}, t), h)]_{x^n} \end{bmatrix}.$$

The matrices $\bar{\mathbf{C}}_1^j$ and $\bar{\mathbf{D}}_{1,0}^j$ are formed from the matrices $\bar{\mathbf{C}}^j$. They may be represented schematically as

$$\text{(4. 3)} \qquad \bar{\mathbf{C}}_1^j = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)) & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{\mathbf{C}}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)) \end{bmatrix}$$

and

$$\bar{\mathbf{D}}_{1,0}^j = \begin{bmatrix} [\bar{\mathbf{C}}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{w}(\mathbf{x}, t))]_{x^1} \\ \vdots \\ [\bar{\mathbf{C}}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{w}(\mathbf{x}, t))]_{x^n} \end{bmatrix}$$

($\bar{\mathbf{D}}_{1,0}^j$ is a rectangular matrix).

From the stability of the difference equation (4. 1) it follows that

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \bar{\mathbf{C}}_1^j \mathbf{w}_1(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t) \right\|_{\tau} \leqq \|\mathbf{w}_1(\mathbf{x}, t)\|_{\tau} + O(\|\mathbf{w}_1(\mathbf{x}, t)\|_{\tau} h)$$

for $0 \leqq \tau \leqq t_1$. Since

$$[\bar{\mathbf{C}}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{w}(\mathbf{x}, t))]_{x^i} = \bar{\mathbf{C}}_{x^i}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)) + \sum_{k=1}^{l} \bar{\mathbf{C}}_{u^k}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)) w_{x^i}^k(\mathbf{x}, t)$$

and for $0 \leqq t \leqq t_1$ the inequalities $|\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)| < L$; $|\mathbf{w}_1(\mathbf{x}, t)| < L$ hold, we have

$$\left|\overline{\mathbf{D}}^j_{1,0}\right| < c_3, \tag{4. 4}$$

where c_3 depends only on L and the bounds for the matrices $\overline{\mathbf{C}}^j_{x^i}$ and $\overline{\mathbf{C}}^j_{u^k}$. On the other hand, from the consistency condition $\sum_{j=1}^{m} \overline{\mathbf{C}}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}) = \mathbf{I}$ it follows that

$$\sum_{j=1}^{m} \overline{\mathbf{D}}^j_{1,0} = \mathbf{0}. \tag{4. 5}$$

Using (4. 4), (4. 5) and Lemma 2 we obtain

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \overline{\mathbf{D}}^j_{1,0} \mathbf{w}(\mathbf{x} + h\mathbf{r}_j, t) \right\|_\tau = \left\| \sum_{j=1}^{m} \overline{\mathbf{D}}^j_{1,0} \left[\mathbf{w}(\mathbf{x} + h\mathbf{r}_j, t) - \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)\right] \right\|_\tau = O\left(\|\mathbf{w}_1(\mathbf{x}, t)\|_\tau h\right)$$

for $0 \leqq \tau \leqq t_1$. Finally, we have

$$\|h\overline{\mathbf{b}}_1\|_\tau = O(h)$$

for $0 \leqq \tau \leqq t_1$.

From the above inequalities it follows that

$$\|\mathbf{w}_1(\mathbf{x}, t)\|_{\tau + h} \leqq \|\mathbf{w}_1(\mathbf{x}, t)\|_\tau + O\left(\|\mathbf{w}_1(\mathbf{x}, t)\|_\tau h + h\right)$$

for $0 \leqq \tau \leqq t_1$ and, since $\mathbf{w}_1(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$, by Lemma 1 we get

$$\|\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)\|_\tau = O(\tau)$$

for $0 \leqq \tau \leqq t_1 + h$.

The above process can be repeated. Taking all derivatives of order N of (4. 1) with respect to the space variables we obtain the system

$$\mathbf{w}_N(\mathbf{x}, t + h) = \sum_{j=1}^{m} \overline{\mathbf{C}}^j_N \mathbf{w}_N(\mathbf{x} + h\mathbf{r}_j, t) + \sum_{M=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{m} \overline{\mathbf{D}}^j_{N,M} \mathbf{w}_M(\mathbf{x} + h\mathbf{r}_j, t) + h\overline{\mathbf{b}}_N, \tag{4. 6}$$

where $\mathbf{w}_N$ is the $l \cdot n^N$-vector whose components are all derivatives of order N of $\mathbf{w}$ with respect to the space variables. (The same derivatives taken in different orders are considered as different components.) The matrices $\overline{\mathbf{C}}^j_N$ are of the same form as (4. 3). The elements of the matrices $\overline{\mathbf{D}}^j_{N,M}$ and of the vector $\overline{\mathbf{b}}_N$ are polynomials in the components of the vectors $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_N$ with coefficients which are continuous functions of $\mathbf{x}$, t and $\mathbf{w}$, provided $N \leqq N_2$.

Similarly to (4. 5) we have

$$\sum_{j=1}^{m} \overline{\mathbf{D}}^j_{N,M} = \mathbf{0}$$

for fixed M. Thus the system (4. 6) can be written in the form

$$\mathbf{w}_N(\mathbf{x}, t + h) = \sum_{j=1}^{m} \overline{\mathbf{C}}^j_N \mathbf{w}_N(\mathbf{x} + h\mathbf{r}_j, t) +$$

$$+ \sum_{M=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{m} \overline{\mathbf{D}}^j_{N,M} [\mathbf{w}_M(\mathbf{x} + h\mathbf{r}_j, t) - \mathbf{w}_M(\mathbf{x}, t)] + h\overline{\mathbf{b}}_N .$$

Assume that $N \leqq N_2$ and

$$\|\mathbf{w}_M(\mathbf{x}, t)\|_\tau = O(\tau) \tag{4.7}$$

for $M=0, 1, \dots, N-1$ and $0 \leqq \tau \leqq t_1 + h$.

Because of the stability of the system (4. 1) we have

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \overline{\mathbf{C}}_N^j \mathbf{w}_N(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t) \right\|_\tau \leqq \|\mathbf{w}_N(\mathbf{x}, t)\|_\tau + O\big(\|\mathbf{w}_N(\mathbf{x}, t)\|_\tau h\big)$$

for $0 \leqq \tau \leqq t_1$.

Since $|\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)| < L$, $|\mathbf{w}_1(\mathbf{x}, t)| < L, \dots, |\mathbf{w}_{N_1}(\mathbf{x}, t)| < L$ for $0 \leqq t \leqq t_1$, we have

$$\mathbf{w}_M(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t) - \mathbf{w}_M(\mathbf{x}, t) = O(h) \tag{4.8}$$

for $M=0, 1, \dots, N_1 - 1$. On the other hand, since $2N_1 + 1 > N_2$ the elements of the matrices $\overline{\mathbf{D}}_{N,M}^j$ are linear functions of the components of $\mathbf{w}_{N_1+1}, \dots, \mathbf{w}_N$. Therefore

$$\max_{M=0,1,\dots,N-1} \left|\overline{\mathbf{D}}_{N,M}^j\right| = O\left(\sum_{M=N_1+1}^{N} |\mathbf{w}_M(\mathbf{x}, t)| + 1\right), \tag{4.9}$$

whence, using Lemma 2, (4. 7) and (4. 8) we obtain

$$\left\| \sum_{M=0}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{m} \overline{\mathbf{D}}_{N,M}^j [\mathbf{w}_M(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t) - \mathbf{w}_M(\mathbf{x}, t)] \right\|_\tau =$$

$$= O\left(\sum_{M=N_1+1}^{N} \|\mathbf{w}_M(\mathbf{x}, t)\|_\tau h + h\right) = O\big(\|\mathbf{w}_N(\mathbf{x}, t)\|_\tau h + h\big)$$

for $0 \leqq \tau \leqq t_1$.

If $M \geqq N_1$, then because of the inequality $2N_1 + 1 > N_2$ the elements of the matrices $\overline{\mathbf{D}}_{N,M}^j$ depend only on the components of $\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{N_1}$, and consequently they are bounded. From Lemma 2 we get

$$\|\mathbf{w}_M(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t) - \mathbf{w}_M(\mathbf{x}, t)\|_\tau = O\big(\|\mathbf{w}_{M+1}(\mathbf{x}, t)\|_\tau h\big).$$

Thus

$$\left\| \sum_{M=N_1}^{N-1} \sum_{j=1}^{m} \overline{\mathbf{D}}_{N,M}^j [\mathbf{w}_M(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t) - \mathbf{w}_M(\mathbf{x}, t)] \right\|_\tau =$$

$$= O\left(\sum_{M=N_1+1}^{N} \|\mathbf{w}_M(\mathbf{x}, t)\|_\tau h\right) = O\big(\|\mathbf{w}_N(\mathbf{x}, t)\|_\tau h + h\big)$$

for $0 \leqq \tau \leqq t_1$.

Similarly to (4. 9) we have

$$|\overline{\mathbf{b}}_N| = O\left(\sum_{M=N_1+1}^{N} |\mathbf{w}_M(\mathbf{x}, t)| + 1\right),$$

whence

$$\|h\overline{\mathbf{b}}_N\| = O\left(\sum_{M=N_1+1}^{N} \|\mathbf{w}_M(\mathbf{x}, t)\|_\tau h + h\right) = O\big(\|\mathbf{w}_N(\mathbf{x}, t)\|_\tau h + h\big)$$

for $0 \leqq \tau \leqq t_1$.

From the above inequalities it follows that

$$\|\mathbf{w}_N(\mathbf{x},\ t)\|_{\tau+h} \leqq \|\mathbf{w}_N(\mathbf{x}, t)\|_\tau + O\big(\|\mathbf{w}_N(\mathbf{x}, t)\|_\tau h + h\big)$$

for $0 \leqq \tau \leqq t_1$, and consequently, by Lemma 1

$$\|\mathbf{w}_N(\mathbf{x}, t)\|_\tau = O(\tau)$$

for $N=0, 1, \ldots, N_2$ and $0 \leqq \tau \leqq t_1 + h$.

Since $N_2 = N_1 + \left[\frac{n}{2}\right] + 1$, from the last inequality and Lemma 3 it follows that for $N=0, 1, \ldots, N_1$ and $0 \leqq t \leqq t_1 + h$

$$\max_{\mathbf{x}} |\mathbf{w}_N(\mathbf{x}, t)| \leqq c_4 t,$$

where c_4 is independent of h and t_1. Thus if $T_2 < L/c_4$ and $t_1 + h \leqq T_2$, then the inequality (4. 2) holds for $N=0, 1, \ldots, N_1$ and $0 \leqq t \leqq t_1 + h$, which proves the lemma.

5. Error bounds in finite-difference approximations to solutions of quasilinear hyperbolic systems

In this section we shall prove the following

THEOREM. *Suppose that the solution* $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ *of the initial value problem* (2. 1), (2. 2) *has continuous partial derivatives up to order* $N_2 + 1 = 2\left[\frac{n}{2}\right] + 3$ *in the slab* $0 \leqq t \leqq T_0$. *Suppose further that the difference equation* (3. 1) *is stable and consistent with* (2. 1) *in the domain* $0 \leqq t \leqq T$; $|\mathbf{u} - \mathbf{u}^0(\mathbf{x})| < K$ *and that* $\mathbf{C}^j$ *and* $\mathbf{b}$ *have in this domain continuous partial derivatives up to order* N_2 *with respect to the* x^i *and* u^k. *Let* $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ *be the solution of the initial value problem* (3. 1), (3. 2). *Then*

$$\max_{\mathbf{x};\ 0 \leqq t \leqq T_3} |\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)| < c_5 h, \tag{5. 1}$$

where T_3 *and* c_5 *depend only on the bounds for* $\mathbf{C}^j$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ *and for their derivatives.*

PROOF. From the consistency conditions (3. 3a)—(3. 3b) it follows that

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t+h) = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))\mathbf{u}(\mathbf{x} + h\mathbf{r}_j, t) + h\mathbf{b}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) - h^2\mathbf{y}, \tag{5. 2}$$

where

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{m} C^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x} + h\mathbf{r}_j, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - h \sum_{i=1}^{n} \overset{i}{r}_j \mathbf{u}_{x^i}(\mathbf{x}, t)}{h^2} -$$

$$- \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t+h) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - h\mathbf{u}_t(\mathbf{x}, t)}{h^2}.$$

Subtracting (5. 2) from (3. 1) we get

$$(5.\ 3)\qquad \mathbf{w}(\mathbf{x}, t+h) = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}(\mathbf{x}, t))\mathbf{w}(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t)+$$
$$+\sum_{j=1}^{m}\left[\mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}(\mathbf{x}, t))-\mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))\right]\mathbf{u}(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t)+$$
$$+h\left[\mathbf{b}(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}(\mathbf{x}, t))-\mathbf{b}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))\right]+h^2\mathbf{y},$$

where $\mathbf{w} = \mathbf{v}-\mathbf{u}$.

From the consistency condition (3. 3a) we obtain $\sum_{j=1}^{m}\left[\mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}(\mathbf{x}, t))-\right.$ $\left.-\mathbf{C}^j(x, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))\right] = \mathbf{0}$. Therefore (5. 3) may be written as

$$(5.\ 4)\qquad \mathbf{w}(\mathbf{x}, t+h) = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}(\mathbf{x}, t))\mathbf{w}(\mathbf{x}+\mathbf{h}\,\mathbf{r}_j, t)+$$
$$+\sum_{j=1}^{m}\left[\mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}(\mathbf{x}, t))-\mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))\right]\left[\mathbf{u}(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t)-\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\right]+$$
$$+h\left[b(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}(\mathbf{x}, t))-\mathbf{b}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))\right]+h^2\mathbf{y}.$$

Let

$$\bar{\mathbf{C}}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}) = \mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)+\mathbf{u})$$

and

$$\bar{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, h) = \sum_{j=1}^{m}\left[\mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)+\mathbf{u})-\mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))\right]\frac{\mathbf{u}(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t)-\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{h}+$$
$$+\mathbf{b}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)+\mathbf{u})-\mathbf{b}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))+h\mathbf{y}.$$

If T_1 is chosen so small that $\max\limits_{\mathbf{x};\, 0\leqq t\leqq T_1} |\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)-\mathbf{u}^0(\mathbf{x})|<\frac{K}{2}$ then from our assumptions on the differentiability of $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{u})$ and $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u})$ it follows that $\bar{\mathbf{C}}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{u})$ and $\bar{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, h)$ have in the domain $0\leqq t\leqq T_1$; $|\mathbf{u}|<\frac{K}{2}$ continuous partial derivatives up to order N_2 with respect to the x^i und u^k. On the other hand, from the stability of the system (3. 1) immediately follows the stability of the system (5. 4). Thus Lemma 4 can be applied to the system (5. 4) and yields

$$\max_{\mathbf{x};\, 0\leqq t\leqq T_2} |\mathbf{w}_N(\mathbf{x}, t)|<\frac{K}{2}$$

for $N=0, 1, \ldots, N_1$. Hence it follows that for $N=0, 1, \ldots, N_1$

$$(5.\ 5)\qquad \max_{\mathbf{x};\, 0\leqq t\leqq T_3} |\mathbf{v}_N(\mathbf{x}, t)-\overset{0}{\mathbf{u}}_N(\mathbf{x})|<K$$

where $0<T_3\leqq T_2$, and $\mathbf{v}_N$ is the vector whose components are all derivatives of order N of $\mathbf{v}$ with respect to the space variables.

Since for $0\leqq t\leqq T_3$ the inequalities $|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)-\mathbf{u}^0(\mathbf{x})|<K$; $|\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)-\mathbf{u}^0(\mathbf{x})|<K$ hold, we have $\mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}(\mathbf{x}, t))-\mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = O(|\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)|)$ and $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}(\mathbf{x}, t))-$

$-\mathbf{b}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = O(|\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)|)$. Because of the Lipschitz-continuity of $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ we have $\mathbf{u}(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t)-\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = O(h)$. By Taylor's theorem $h^2\mathbf{y}=O(h^2)$. Using these inequalities and the stability of the finite-difference equation (5. 4) we obtain

$$\|\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)\|_{\tau+h} \leqq \|\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)\|_{\tau}+O(\|\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)\|_{\tau}h+h^2)$$

for $0 \leqq \tau \leqq T_3$, and, since $\mathbf{w}(\mathbf{x}, 0)=\mathbf{0}$, by Lemma 1

$$\|\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)\|_{\tau}=O(h) \tag{5. 6}$$

for $0 \leqq \tau \leqq T_3$.

Differentiating (5. 4) with respect to the space variables we obtain the system

$$\mathbf{w}_1(\mathbf{x}, t+h) = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}_1^j \mathbf{w}_1(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t) + \sum_{j=1}^{m} \mathbf{D}_{1,0}^j \mathbf{w}(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t)+$$

$$+\sum_{j=1}^{m} \mathbf{E}_{1,0}^j[\mathbf{u}(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t)-\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] + \sum_{j=1}^{m} \mathbf{E}_{1,1}^j[\mathbf{u}_1(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t)-\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t)]+h\mathbf{d}_1+h^2\mathbf{y}_1,$$

where

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{x^1} \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{x^n} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{x^1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{x^n} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} [\mathbf{b}(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}(\mathbf{x}, t))-\mathbf{b}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))]_{x^1} \\ \vdots \\ [\mathbf{b}(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}(\mathbf{x}, t))-\mathbf{b}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))]_{x^n} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{x^1} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{x^n} \end{bmatrix};$$

and the matrices $\mathbf{C}_1^j, \mathbf{D}_{1,0}^j, \mathbf{E}_{1,0}^j, \mathbf{E}_{1,1}^j$ may be represented schematically as

$$\mathbf{C}_1^j = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_{1,0}^j = \begin{bmatrix} [\mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}(\mathbf{x}, t))]_{x^1} \\ \vdots \\ [\mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}(\mathbf{x}, t))]_{x^n} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{E}_{1,0}^j = \begin{bmatrix} [\mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}(\mathbf{x}, t))-\mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))]_{x^1} \\ \vdots \\ [\mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}(\mathbf{x}, t))-\mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))]_{x^n} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{E}_{1,1}^j = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}(\mathbf{x}, t))-\mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}(\mathbf{x}, t))-\mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \end{bmatrix}$$

($\mathbf{D}_{1,0}^j$ and $\mathbf{E}_{1,0}^j$ are rectangular matrices).

From the stability of the system (5. 4) it follows that

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}_1^j \mathbf{w}_1(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t) \right\|_{\tau} \leqq \|\mathbf{w}_1(\mathbf{x}, t)\|_{\tau}+O(\|\mathbf{w}_1(\mathbf{x}, t)\|_{\tau}h).$$

Since

$$[\mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}(\mathbf{x}, t))]_{x^i} = \mathbf{C}^j_{x^i}(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) + \sum_{k=1}^{l} \mathbf{C}^j_{u^k}(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) v^k_{x^i}(\mathbf{x}, t),$$

and the functions $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t)$ satisfy the inequalities

$$\max_{\mathbf{x};\, 0 \leqq t \leqq T_3} |\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}^0(\mathbf{x})| < K; \quad \max_{\mathbf{x};\, 0 \leqq t \leqq T_3} |\mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}_1^0(\mathbf{x})| < K,$$

therefore

$$|\mathbf{D}^j_{1,0}| < c_6, \tag{5. 7}$$

where c_6 depends only on K, and the bounds for $\mathbf{C}^j_{x^i}$ and $\mathbf{C}^j_{u^k}$. On the other hand, from the consistency condition (3. 3a) we get

$$\sum_{j=1}^{m} \mathbf{D}^j_{1,0} = \mathbf{0}. \tag{5. 8}$$

Using (5. 7), (5. 8) and Lemma 2 we obtain

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \mathbf{D}^j_{1,0} \mathbf{w}(\mathbf{x} + h\mathbf{r}_j, t) \right\|_\tau = \left\| \sum_{j=1}^{m} \mathbf{D}^j_{1,0} [\mathbf{w}(\mathbf{x} + h\mathbf{r}_j, t) - \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)] \right\|_\tau = O(\|\mathbf{w}_1(\mathbf{x}, t)\|_\tau h)$$

or $0 \leqq \tau \leqq T_3$.

Now

$$[\mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) - \mathbf{C}^j(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))]_{x^i} = \mathbf{C}^j_{x^i}(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) - \mathbf{C}^j_{x^i}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{l} \mathbf{C}^j_{u^k}(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) v^k_{x^i}(\mathbf{x}, t) - \sum_{k=1}^{l} \mathbf{C}^j_{u^k}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) u^k_{x^i}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{C}^j_{x^i}(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) -$$

$$- \mathbf{C}^j_{x^i}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) + \sum_{k=1}^{l} [\mathbf{C}^j_{u^k}(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) - \mathbf{C}^j_{u^k}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))] v^k_{x^i}(\mathbf{x}, t) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{l} \mathbf{C}^j_{u^k}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) w^k_{x^i}(\mathbf{x}, t).$$

Hence by the inequalities $\max_{\mathbf{x};\, 0 \leqq t \leqq T_3} |\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}^0(\mathbf{x})| < K$; $\max_{\mathbf{x};\, 0 \leqq t \leqq T_3} |\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}^0(\mathbf{x})| < K$; $\max_{\mathbf{x};\, 0 \leqq t \leqq T_3} |\mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}^0(\mathbf{x})| < K$ it follows that for $0 \leqq t \leqq T_3$

$$\mathbf{E}^j_{1,0} = O(|\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)| + |\mathbf{w}_1(\mathbf{x}, t)|).$$

In the same manner we get

$$\mathbf{d}_1 = O(|\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)| + |\mathbf{w}_1(\mathbf{x}, t)|).$$

Clearly

$$\mathbf{E}^j_{1,1} = O(|\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)|).$$

From the last three inequalities, (5. 6) and Lemma 2 it follows that

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \mathbf{E}^j_{1,0} [\mathbf{u}(\mathbf{x} + h\mathbf{r}_j, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] + \sum_{j=1}^{m} \mathbf{E}^j_{1,1} [\mathbf{u}_1(\mathbf{x} + h\mathbf{r}_j, t) - \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t)] + h\mathbf{d}_1 \right\|_\tau =$$

$$= O(\|\mathbf{w}_1(\mathbf{x}, t)\|_\tau h + h^2)$$

for $0 \leqq \tau \leqq T_3$.

By Taylor's theorem

$$|h^2 \mathbf{y}_1| = O(h^2).$$

From the above inequalities it follows that

$$\|\mathbf{w}_1(\mathbf{x}, t)\|_{\tau+h} \leqq \|\mathbf{w}_1(\mathbf{x}, t)\|_\tau + O\big(\|\mathbf{w}_1(\mathbf{x}, t)\|_\tau h + h^2\big)$$

for $0 \leqq \tau \leqq T_3$, and, since $\mathbf{w}_1(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$, by Lemma 1

$$\|\mathbf{w}_1(\mathbf{x}, t)\|_\tau = O(h)$$

for $0 \leqq \tau \leqq T_3$.

Taking all derivatives of order $N (N \leqq N_1)$ of (5. 4) with respect to the space variables we obtain the system

$$\mathbf{w}_N(\mathbf{x}, t+h) = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}_N^j \mathbf{w}_N(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t) + \sum_{M=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{m} \mathbf{D}_{N,M}^j \mathbf{w}_M(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t) +$$

$$+ \sum_{M=0}^{N} \sum_{j=1}^{m} \mathbf{E}_{N,M}^j [\mathbf{u}_M(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t) - \mathbf{u}_M(\mathbf{x}, t)] + h\mathbf{d}_N + h^2 \mathbf{y}_N,$$

where $\mathbf{w}_N$ is the vector whose components are all derivatives of order N of $\mathbf{w}$ with respect to the space variables; the vectors $\mathbf{y}_N, \mathbf{v}_M$ and $\mathbf{u}_M$ are defined similarly. The matrices $\mathbf{C}_N^j$ are of the same form as in the case $N=1$. An arbitrary element of the matrix $\mathbf{D}_{N,M}^j$ is a function $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N)$ of the vectors $\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N$ and the scalar t. The function φ is a polynomial in the components $v_1^1, \ldots, v_1^{s_1}, \ldots \ldots, v_N^1, \ldots, v_N^{s_N}$ of the vectors $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N$ with coefficients which are Lipschitz-continuous functions of $\mathbf{x}$, t and $\mathbf{v}$. The elements of the matrices $\mathbf{E}_{N,M}^j$ and the vector $\mathbf{d}_N$ are of the form $\varphi(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N) - \varphi(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_N)$.

Assume that

$$\|\mathbf{w}_M(\mathbf{x}, t)\|_\tau = O(h) \tag{5. 9}$$

for $M = 0, 1, \ldots, N-1$ and $0 \leqq \tau \leqq T_3$.

From the stability of the system (5. 4) it follows that

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \mathbf{C}_N^j \mathbf{w}_N(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t) \right\|_\tau \leqq \|\mathbf{w}_N(\mathbf{x}, t)\|_\tau + O\big(\|\mathbf{w}_N(\mathbf{x}, t)\|_\tau h\big).$$

Because of the inequalities (5. 5) we have

$$\left|\mathbf{D}_{N,M}^j\right| < c_7, \tag{5. 10}$$

where c_7 depends only on K, and the bounds for the partial derivatives of the matrices $\mathbf{C}^j$. Similarly to (5. 8) we have

$$\sum_{j=1}^{m} \mathbf{D}_{N,M}^j = \mathbf{0} \tag{5. 11}$$

for fixed M. Using (5. 9), (5. 10), (5. 11) and Lemma 2 we obtain

$$\left\| \sum_{M=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{m} \mathbf{D}_{N,M}^{j} \mathbf{w}_M(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t) \right\|_\tau = \left\| \sum_{M=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{m} \mathbf{D}_{N,M}^{j} [\mathbf{w}_M(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t) - \mathbf{w}_M(\mathbf{x}, t)] \right\|_\tau =$$

$$= O\big(\|\mathbf{w}_N(\mathbf{x}, t)\|_\tau h + h^2\big)$$

for $0 \leqq \tau \leqq T_3$.

From the inequalities (5. 5), the corresponding inequalities for the functions $\mathbf{u}_N(\mathbf{x}, t)$ and the Lipschitz-continuity of the function φ we find that

$$\varphi(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}, \overset{1}{v}_1, \dots, \overset{s_1}{v}_1, \dots, \overset{1}{v}_N, \dots, \overset{s_N}{v}_N) - \varphi(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \overset{1}{u}_1, \dots, \overset{s_1}{u}_1, \dots, \overset{1}{u}_N, \dots, \overset{s_N}{u}_N) =$$

$$= \varphi(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}, \overset{1}{v}_1, \dots, \overset{s_1}{v}_1, \dots, \overset{1}{v}_N, \dots, \overset{s_N}{v}_N) - \varphi(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \overset{1}{v}_1, \dots, \overset{s_1}{v}_1, \dots, \overset{1}{v}_N, \dots, \overset{s_N}{v}_N) +$$

$$+ \varphi(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \overset{1}{v}_1, \dots, \overset{s_1}{v}_1, \dots, \overset{1}{v}_N, \dots, \overset{s_N}{v}_N) - \varphi(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \overset{1}{u}_1, \dots, \overset{s_1}{v}_1, \dots, \overset{1}{v}_N, \dots, \overset{s_N}{v}_N) + \dots$$

$$\dots + \varphi(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \overset{1}{u}_1, \dots, \overset{s_1}{u}_1, \dots; \overset{1}{u}_N, \dots, \overset{s_N}{v}_N) - \varphi(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \overset{1}{u}_1, \dots, \overset{s_1}{u}_1, \dots, \overset{1}{u}_N, \dots, \overset{s_N}{u}_N) =$$

$$= O\left(\sum_{M=0}^{N} |\mathbf{w}_M(\mathbf{x}, t)| \right),$$

whence

$$\max_{M=0,1,\dots,N} |\mathbf{E}_{N,M}^{j}| = O\left(\sum_{M=0}^{N} |\mathbf{w}_M(\mathbf{x}, t)| \right).$$

Thus, using (5. 9), we obtain for $0 \leqq \tau \leqq T_3$

$$\left\| \sum_{M=0}^{N} \sum_{j=1}^{m} \mathbf{E}_{N,M}^{j} [\mathbf{u}_M(\mathbf{x}+h\mathbf{r}_j, t) - \mathbf{u}_M(\mathbf{x}, t)] \right\|_\tau = O\big(\|\mathbf{w}_N(\mathbf{x}, t)\|_\tau h + h^2\big).$$

In the same manner we get

$$\|h\mathbf{d}_N\|_\tau = O\big(\|\mathbf{w}_N(\mathbf{x}, t)\|_\tau h + h^2\big).$$

By Taylor's theorem

$$|h^2 \mathbf{y}_N| = O(h^2).$$

From the above inequalities it follows that for

$$\|\mathbf{w}_N(\mathbf{x}, t)\|_{\tau+h} \leqq \|\mathbf{w}_N(\mathbf{x}, t)\|_\tau + O\big(\|\mathbf{w}_N(\mathbf{x}, t)\|_\tau h + h^2\big),$$

and, consequently, by Lemma 1

$$\|\mathbf{w}_N(\mathbf{x}, t)\|_\tau = O(h)$$

for $N=0, 1, \dots, N_1$ and $0 \leqq \tau \leqq T_3$. Hence, by Lemma 3, the inequality (5. 1) immediately follows, and the proof of the theorem is complete.

An example of the use of our theorem is supplied by the finite-difference scheme with the $2n$ displacement vectors $r_{\pm i} = \pm \frac{\delta_i}{h} e_i$ (e_i is the unit vector in the x_i direction), and with coefficients

$$\mathbf{C}_{\pm i} = \frac{1}{2n} \mathbf{I} \pm \frac{h}{2\delta_i} \mathbf{A}^i$$

(see, for example, [8], p. 192). If the matrices $\mathbf{A}^i$ are symmetric, and h is chosen so small that $\frac{\delta_i}{hn}$ exceeds the absolutely largest eigenvalue of $\mathbf{A}^i$, then the matrices are symmetric and non-negative, and, by Friedrichs's theorem, the difference scheme is stable. Applying our theorem shows that the pointwise error of the approximation is of order $O(h)$ if $\mathbf{A}^i$, $\mathbf{b}$, and $\mathbf{u}^0$ are sufficiently smooth. For linear systems, an error bound of a similar kind has been found by WEINBERGER (see [9]).

COMPUTING CENTRE
OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES,
BUDAPEST

(Received 22 April 1963)

References

[1] I. PETROWSKY, Über das Cauchysche Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen, *Reçueil Mathématique*, **2** (**44**) (1937), pp. 815–868.
[2] J. LERAY, *Lectures on hyperbolic equations with variable coefficients* (Institute for Advanced Study, Princeton, 1952).
[3] P. D. LAX, On the stability of difference approximations to solutions of hyperbolic equations with variable coefficients, *Comm. Pure Appl. Math.*, **14** (1961), pp. 497–520.
[4] H. O. KREISS, Über die Stabilitätsdefinition für Differenzengleichungen die partielle Differentialgleichungen approximieren, *BIT*, **2** (1962), pp. 153–181.
[5] P. D. LAX, and R. D. RICHTMYER, Survey of stability of linear finite-difference equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **9** (1956), pp. 267–293.
[6] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике (Изд. Л. Г. У., Ленинград, 1950).
[7] О. А. Далыженская, Решение задачи Коши для гиперболических систем методом конечных разностей, Учёные записки ЛГУ, **144**, pp. 192—264.
[8] P. D. LAX, Differential equations, difference equations and matrix theory, *Comm. Pure Appl. Math.*, **11** (1958), pp. 175–194.
[9] H. WEINBERGER, Error bounds in finite-difference approximation to solutions of symmetric hyperbolic systems, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, **7** (1959), pp. 49–75.

ON A GENERALIZATION OF A THEOREM OF E. W. BETH

By

M. MAKKAI (Budapest)

(*Presented by* A. RÉNYI)

Introduction

In [1] E. W. BETH proved a theorem which says, roughly speaking, that if Σ is a first order axiom system, and Σ defines a predicate P uniquely in terms of other predicates, then there exists also an explicit definition of P by the remaining predicates, i. e. we have a formula $F(v_0, \ldots, v_{n-1})$ which does not contain P and for which the formula

$$(v_0)\ldots(v_{n-1})\big(P(v_0, \ldots, v_{n-1}) \equiv F(v_0, \ldots, v_{n-1})\big)$$

is a consequence of Σ.

Suppose now, instead, that there exists a formula $F(v_0, \ldots, v_{n-1}, v_n, \ldots, v_{m-1})$ not containing P, such that

$$(1) \qquad (\exists v_n)\ldots(\exists v_{m-1})(v_0)\ldots(v_{n-1})\big(P(v_0, \ldots, v_{n-1}) \equiv F(v_0, \ldots, v_{n-1}, \ldots, v_{m-1})\big)$$

is a consequence of Σ. In other words, it follows from Σ that the predicate P must coincide with a predicate of the form $\lambda v_0 \ldots v_{n-1} F(v_0, \ldots, v_{n-1}, a_n, \ldots, a_{m-1})$ where $a_n, \ldots, a_{m-1}$ are elements of the domain of the individuums. With respect to the power of the set of the possible predicates P we can trivially assert the following. If we consider an infinite relational system $\mathfrak{A}$, in which each predicate occuring in Σ has a definite specialization, with the exception of P, then the set of all predicates P, which make $\mathfrak{A}$ a model of Σ, has the power of $\mathfrak{A}$ at most. The same conclusion holds, if we have a finite disjunction of formulas of the form (1), which is a consequence of Σ. Our aim is to prove the converse of this statement by assuming the generalized continuum hypothesis (*GCH*). So we have the following theorem. Let L be a first order logic with equality with the predicate symbols $=$, P_λ $(\lambda < \varrho)$ and the distinct n-ary predicate symbol P. Let Σ be an axiom system in L. Then under the *GCH* the following two conditions (a) and (b) are equivalent:

(a) If $\mathfrak{A} = \langle A, R_\lambda \rangle_{\lambda < \varrho}$ is a relational system in which R_λ corresponds to P_λ, then the set of the possible n-ary relations R on A, corresponding to P, such that $(\mathfrak{A}, R) = \langle A, R_\lambda, R \rangle_{\lambda < \varrho}$ is a model of Σ, has the power of A at most.

(b) We have finitely many formulas $F_k(v_0, \ldots, v_{n-1}, \ldots, v_{n+m_k-1})$ $(k = 1, \ldots, N)$ not containing P, such that the disjunction

$$\bigvee_{k=1}^{N} (\exists v_n)\ldots(\exists v_{n+m_k-1})(v_0)\ldots(v_{n-1})\big(P(v_0, \ldots, v_{n-1}) \equiv F_k(v_0, \ldots, v_{n+m_k-1})\big)$$

is a consequence of Σ. Our theorem and the theorem of Beth, mentioned above have an obvious correspondence; indeed we show that the latter is a consequence of the former one by assuming *GCH*.

The proof is based on the notion of replete relational systems, introduced by KEISLER [2]. We remark, that the GCH is not needed in its full strength; it suffices to assume that there exists an infinite cardinal number α, not smaller than the rank of the corresponding similarity type, such that $\alpha^+ = \varkappa(2^\alpha)$. Instead we may assume that there exists a strongly inaccessible cardinal greater than the rank.

In § 1 we collect some necessary notions and notations.

In § 2 we prove some lemmas, necessary for proving the theorem.

In § 3 we formulate and prove the theorem and show how to deduce Beth's theorem from that.

We use some notations of KEISLER [3] and apply a similar technique in the proof of Lemma 5 as the one used in the proof of Theorem 2. 2 in [3].

I want to express my gratitude to G. GRÄTZER for his valuable remarks in connection with the paper.

§ 1. Preliminaries

We shall distinguish between sets and classes as usual.

We consider each ordinal number as coinciding with the set of all smaller ordinal numbers. We use the letters $\alpha, \beta, \nu, \varrho, \xi, \zeta, \eta$ to denote ordinal numbers and i, k, m, n, N to denote natural numbers (finite ordinal numbers). For the sum and product of two ordinal numbers ξ, ζ the notations $\xi+\zeta, \xi\cdot\zeta$ will be used. We shall apply the fact, that for any ξ and ζ $(\zeta \neq 0)$ there are unique ν and ϱ with $\xi = \zeta\nu+\varrho$ and $\varrho<\zeta$.

The cardinal numbers will be identified with the corresponding initial ordinal numbers. For the cardinal number α let α^+ mean the smallest cardinal number greater than α.

If X, Y are sets, we denote the cardinality of X by $\varkappa(X)$, the set of all functions of X into Y by Y^X and we write $X \subset Y$ to denote that X is a subset of Y. If X is a class, the class of all elements belonging to some member of X is denoted by $\bigcup X$. The notations $\{x: ...x...\}$ and $\{x_1, x_2, ...\}$ stand for the class of all x, satisfying the condition $...x...$ and for the class consisting of $x_1, x_2, ...$, respectively.

The domain of a function f is denoted by Df. Let $\langle x_\lambda \rangle_{\lambda<\alpha}$ denote a function whose domain is α and whose value for λ is x_λ. If A is a non-empty set by an *n-ary relation on A* we mean an element of 2^{A^n}. Let φ be a function, $x \in D\varphi$, $y = \langle y_0, ..., y_{n-1}\rangle \in (D\varphi)^n$, $A \subset D\varphi$ and let R be an n-ary relation on $D\varphi$. We write $\varphi(x)$ for the value of φ for the argument x, $\varphi(y)$ for $\langle \varphi(y_0), ..., \varphi(y_{n-1})\rangle$, $\varphi(A)$ for $\{\varphi(x): x \in A\}$ and $\varphi(R)$ for the n-ary relation Q on $\varphi(D\varphi)$ defined by: $Q(z)=1$ if and only if there exists a $y \in (D\varphi)^n$ with $R(y)=1$ and $z=\varphi(y)$.

By a *similarity type*, or briefly a *type*, we mean a function μ such that $D\mu$ is an ordinal number and $\mu(D\mu) \subset \omega$. A system $\mathfrak{A} = \langle A, R_\lambda \rangle_{\lambda<\varrho}$ is said to be a *relational system of type* μ if A is a non-empty set, $\varrho = D\mu$, and for each $\lambda<\varrho$ if $\mu(\lambda) \geqq 1$ R_λ is a $\mu(\lambda)$-ary relation on A and if $\mu(\lambda)=0$ R_λ is an element of A. Throughout this paper μ is a fixed type, $\varrho = D\mu$ and $\mathfrak{A} = \langle A, R_\lambda \rangle_{\lambda<\varrho}$ is a relational system of type μ. The class of all relational systems of type μ is denoted by $\mathfrak{S}(\mu)$. If ξ is an ordinal number, we denote by $\mu \oplus \xi$ the particular type μ' such that $D\mu' = \varrho+\xi$, $\mu'(\lambda) = \mu(\lambda)$ for $\lambda<\varrho$ and $\mu'(\lambda)=0$ for $\varrho \leqq \lambda < \varrho+\xi$. If n is a natural number, we denote by $\mu \circ n$ the type μ' such that $D\mu' = \varrho+1$, $\mu'(\lambda)=\mu(\lambda)$ for $\lambda<\varrho$ and $\mu'(\varrho)=n$.

If $n \geqq 1$ and R is an n-ary relation on A, we write $(\mathfrak{A}, R)$ for the relational system $\langle A, R_\lambda \rangle_{\lambda < \varrho + 1} \in \mathfrak{S}(\mu \circ n)$ with $R_\varrho = R$. If $a = \langle a_\lambda \rangle_{\lambda < \xi} \in A^\xi$ we write $(\mathfrak{A}, a)$ for the relational system $\langle A, R_\lambda \rangle_{\lambda < \varrho + \xi}$ such that for each $\zeta < \xi$ $R_{\varrho + \zeta} = a_\zeta$. We shall write $(\mathfrak{A}, a, b)$ instead of $((\mathfrak{A}, a), b)$. If A is finite or infinite, we call $\mathfrak{A}$ finite resp. infinite.

A first order logic $L(\mu)$ with identity is associated with the type μ. We assume that the reader is familiar with the syntactical notions related to the first order functional calculus. $L(\mu)$ has the identity symbol $=$, the (individual) variables $v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots$ $(n < \omega)$ and for each $\lambda < \varrho$ if $\mu(\lambda) \geqq 1$ a $\mu(\lambda)$-placed predicate symbol P_λ, and if $\mu(\lambda) = 0$ a symbol c_λ for an individual constant. We shall use the symbols $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, (v), (\exists v)$ where v is a variable in the usual way to denote propositional connectives and quantifiers. $\bigvee_{i=1}^{m} F_i$ and $\bigwedge_{i=1}^{m} F_i$ stand for $F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_m$ and $F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_m$, resp. The set of all formulas of $L(\mu)$ and of those having no free variables but $v_0, \ldots, v_{n-1}$ will be denoted respectively by $\mathfrak{F}(\mu)$ and by $\mathfrak{F}_n(\mu)$. The sentences of $L(\mu)$ are the elements of $\mathfrak{F}_0(\mu)$. We use the notation $F(v_0, \ldots, v_{n-1})$ to denote a formula belonging to $\mathfrak{F}_n(\mu)$ for an arbitrary type μ. If $v = \langle v_0, \ldots, v_{n-1} \rangle$ we write $F(v)$. The use of the notation $F(v) \in \mathfrak{F}_n(\mu)$ will always imply $v = \langle v_0, \ldots, v_{n-1} \rangle$.

We assume that the notion of a sequence $a \in A^n$ *satisfying* a formula $F(v)$ of $\mathfrak{F}_n(\mu)$ in $\mathfrak{A}$ and particularly the notion of a sentence of $L(\mu)$ *holding* in $\mathfrak{A}$ is known; as usual 0 and 1 represent the truth-values false and true, resp. Let be $\Sigma \subset \mathfrak{F}_0(\mu)$; we call $\mathfrak{A}$ a *model* of Σ, if each formula of Σ holds in $\mathfrak{A}$. The class of all models of the type μ of Σ is denoted by $\mathfrak{M}_\mu(\Sigma)$. If $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathfrak{S}(\mu)$ for an arbitrary type μ, then $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ denotes that $\mathfrak{A}$ is *elementarily equivalent* to $\mathfrak{B}$, i. e. for each $F \in \mathfrak{F}_0(\mu)$ if $\mathfrak{A}$ is a model of F, then so is $\mathfrak{B}$.

If φ is a one-to-one function, $A = D\varphi$, then we have obviously $\langle A, R_\lambda \rangle_{\lambda < \varrho} \equiv \equiv \langle \varphi(A), \varphi(R_\lambda) \rangle_{\lambda < \varrho}$. If in addition $\varphi(A) = A$ and for each $\lambda < \varrho$ $\varphi(R_\lambda) = R_\lambda$ then φ is called an automorphism of $\mathfrak{A}$.

Let be $F(v) \in \mathfrak{F}_n(\mu)$ and $x \in A^n$, we write $\mathfrak{A} \vdash F(x)$ if x satisfies $F(v)$ in $\mathfrak{A}$. If $F \in \mathfrak{F}_0(\mu)$ then $\mathfrak{A} \vdash F$ means that F holds in $\mathfrak{A}$. If $\Sigma \subset \mathfrak{F}_0(\mu)$, $F \in \mathfrak{F}_0(\mu)$ then $\Sigma \vdash F$ means that F is a consequence of Σ, i. e. $\mathfrak{A} \vdash F$ for each $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\mu(\Sigma)$.

Let be $\Gamma \subset \mathfrak{F}_n(\mu)$. Γ is called *(simultaneously) satisfiable in* $\mathfrak{A}$ if there exists an $x \in A^n$ such that x *(simultaneously) satisfies* Γ *in* $\mathfrak{A}$, i. e. $\mathfrak{A} \vdash F(x)$ for every $F(v) \in \Gamma$.

We shall use the compactness theorem which says that if $\mathfrak{M}_\mu(\Sigma) = 0$ then there exists a finite subset Σ' of Σ such that $\mathfrak{M}_\mu(\Sigma') = 0$.

§ 2. Some lemmas

We use the notion of the repleteness introduced by KEISLER [2].

DEFINITION. The infinite relational system $\mathfrak{A} \in \mathfrak{S}(\mu)$ is called replete, if for arbitrary $\xi < \varkappa(A)$, $a \in A^\xi$, $\Gamma \subset \mathfrak{F}_1(\mu \oplus \xi)$, if every finite subset of Γ is satisfiable in $(\mathfrak{A}, a)$ then Γ is itself (simultaneously) satisfiable in $(\mathfrak{A}, a)$.*

The following lemma is contained in [2] and [3].

LEMMA 1. *Let* $\mathfrak{B}$ *be an infinite relational system,* $\mathfrak{B} \in \mathfrak{S}(\mu)$. *If* α, β *are infinite cardinal numbers and either* $\alpha = \beta^+ = \varkappa(2^\beta)$, $\beta \geqq \varrho$ *or* α *is a strongly inaccessible car-*

---

* In [2] the term "$\varkappa(A)$-replete" is used for the same notion.

dinal greater than ϱ, *then there exists a replete relational system* $\mathfrak{A}\in\mathfrak{S}(\mu)$ *such that* $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$ *and* $\varkappa(A)=\alpha$.

The following two lemmas are well-known elementary consequences of the definition of repleteness.

LEMMA 2. *For each natural number n, if* $\mathfrak{A}$ *is replete,* $\xi<\varkappa(A)$, $a\in A^{\xi}$, $\Gamma\subset\mathfrak{F}_n(\mu\oplus\xi)$ *and every finite subset of* Γ *is satisfiable in* $(\mathfrak{A}, a)$ *then* Γ *is satisfiable in* $(\mathfrak{A}, a)$.

PROOF. The proof proceeds by induction on n; for $n=1$ the statement is the definition of repleteness. Assume that the assertion is true for $n-1$ in place of n and let the hypotheses of the lemma hold for n. Put

$$\Gamma' = \{(\exists v_{n-1})\bigwedge_{i=1}^{m} F_i(v_0, \dots, v_{n-1}) : m<\omega,\ F_i(v)\in\Gamma \text{ for } i=1, \dots, m\}.$$

Then $\Gamma'\subset\mathfrak{F}_{n-1}(\mu\oplus\xi)$ and every finite subset of Γ' is satisfiable in $(\mathfrak{A}, a)$; consequently by the induction hypothesis we have an $x'=\langle x_0, \dots, x_{n-2}\rangle\in A^{n-1}$ such that x' satisfies Γ' in $(\mathfrak{A}, a)$. In each formula of Γ we replace the variable v_i by a new constant $c_{\varrho+\xi+i}$. We thus obtain the set $\Gamma''\subset\mathfrak{F}_1(\mu\oplus\xi+n-1)$ and every finite subset of Γ'' is satisfiable in $(\mathfrak{A}, a, x')$. By the repleteness of $\mathfrak{A}$ then we have an $x_{n-1}\in A$, satisfying Γ'' in $(\mathfrak{A}, a, x')$ and this in turn says that $x=\langle x_0, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}\rangle$ satisfies Γ in $(\mathfrak{A}, a)$.

LEMMA 3. *Let* $\mathfrak{A}$ *be replete,* $\xi<\varkappa(A)$, $a, b\in A^{\xi}$, $1\leqq n\leqq\omega$, $x\in A^n$ *and* $(\mathfrak{A}, a)\equiv(\mathfrak{A}, b)$; *then there exists a* $y\in A^n$ *such that* $(\mathfrak{A}, a, x)\equiv(\mathfrak{A}, b, y)$.

PROOF. Let be $\Gamma=\{F(v): F(v)\in\mathfrak{F}_n(\mu\oplus\xi), (\mathfrak{A}, a)\vdash F(x)\}$. We have to prove that there exists a $y\in A^n$ with $(\mathfrak{A}, b)\vdash F(y)$ for each $F(v)\in\Gamma$. By Lemma 2 it suffices to show that every finite subset of Γ is satisfiable in $(\mathfrak{A}, b)$. Let be $F_1(v), \dots, F_m(v)\in\Gamma$. Then $\bigwedge_{i=1}^{m} F_i(v)\in\Gamma$ and we obviously have $(\mathfrak{A}, a)\vdash(\exists v_0)\dots(\exists v_{n-1})\bigwedge_{i=1}^{m} F_i(v)$. Since $(\mathfrak{A}, a)\equiv(\mathfrak{A}, b)$ we get $(\mathfrak{A}, b)\vdash(\exists v_0)\dots(\exists v_{n-1})\bigwedge_{i=1}^{m} F_i(v)$ what says that $F_1(v), \dots, F_m(v)$ are simultaneously satisfiable in $(\mathfrak{A}, b)$, qu. e. d.

Now put $P=P_{\varrho}$.

LEMMA 4. *Let* $(\mathfrak{A}, R)\in\mathfrak{S}(\mu\circ n)$ *be replete,* $\xi<\varkappa(A)$, $a\in A^{\xi}$ *and suppose that* $x, y\in A^n$ *and* $(\mathfrak{A}, a, x)\equiv(\mathfrak{A}, a, y)$ *imply* $R(x)=R(y)$. *Then there exists a formula* $F(v)\in\mathfrak{F}_n(\mu\oplus\xi)$ *such that*

$$(\mathfrak{A}, R, a)\vdash(v_0)\dots(v_{n-1})\big(P(v)\leftrightarrow F(v)\big). \tag{2}$$

PROOF. If $F(v)\in\mathfrak{F}_n(\mu\circ n\oplus\xi)$ let be $A_F=\{x: x\in A^n, (\mathfrak{A}, R, a)\vdash F(x)\}$ and let Γ be the set of the formulas $F(v)\in\mathfrak{F}_n(\mu\oplus\xi)$, for which $A_F\supset A_P$. We have to show that there exists an $F(v)\in\Gamma$ for which $A_F\subset A_P$ too. Let us suppose that there is no such $F(v)$, consequently $A_F\cap\bar{A}_P\neq 0$ for every $F(v)\in\Gamma$. ($\bar{A}_P$ is the complement of A_P in A^n.) Since Γ is closed under finite conjuctions, this implies by Lemma 2 that $\bigcap_{F(v)\in\Gamma} A_F\cap\bar{A}_P\neq 0$ (The role of Γ in Lemma 2 is played here by $\Gamma\cup\{\neg P(v)\}$).

However, we show $A_P = \bigcap_{F(v)\in\Gamma} A_F$, what will be a contradiction. We need only to prove $\bigcap_{F(v)\in\Gamma} A_F \subset A_P$. Let y be an arbitrary element in $\bigcap_{F(v)\in\Gamma} A_F$, and let Γ' be the set of the formulas $G(v)\in\mathfrak{F}_n(\mu\oplus\xi)$ for which $y\in A_G$. If $G(v)\in\Gamma'$ is arbitrary, then there exists an x with $x\in A_P\cap A_G$; indeed, otherwise we should get $\neg G(v)\in\Gamma$ by the definition of Γ, hence $y\in\bar{A}_G$ what contradicts $y\in A_G$. Consequently, by Lemma 2, there exists an $x\in A_P\cap\bigcap_{G\in\Gamma'} A_G$. (The role of Γ in Lemma 2 is played here by $\Gamma'\cup\{P(v)\}$). But this means exactly that $(\mathfrak{A}, a, x)\equiv(\mathfrak{A}, a, y)$ and $R(x)=1$. By the hypothesis of the Lemma this implies $R(y)=1$ i. e. $y\in A_P$, qu. e. d.

LEMMA 5. *Let* $(\mathfrak{A}, R)\in\mathfrak{S}(\mu\circ n)$ *be replete,* $\varkappa(A)=\alpha$ *and suppose that there is no* $F(v)\in\mathfrak{F}_n(\mu\oplus\alpha)$ *such that*

$$(\mathfrak{A}, a)\vdash(v_0)\dots(v_{n-1})\big(P(v)\leftrightarrow F(v)\big)$$

for some $a\in\cap A^\alpha$. *Let further the* Q_λ $(\lambda<\alpha)$ *be n-ary relations on* A. *Then there exists an automorphism* φ *of* $\mathfrak{A}$ *such that for each* $\lambda<\alpha$ $\varphi(R)\neq Q_\lambda$.

PROOF. Let $\langle a_\xi\rangle_{\xi<\alpha}$ resp. $\langle z_\xi\rangle_{\xi<\alpha}$ be a one-to-one function on α onto A and A^n resp. Let M be the set of all sets ψ satisfying the following conditions:

(i) there exist an ordinal number $\beta\leqq\alpha$ and functions f, g defined on β and with a range included in α such that

$$\psi=\langle(\xi, a_{f(\xi)}, a_{g(\xi)})\rangle_{\xi<\beta};$$

(ii) let be $a=\langle a_{f(\xi)}\rangle_{\xi<\beta}$, $b=\langle a_{g(\xi)}\rangle_{\xi<\beta}$; then we have

$$(\mathfrak{A}, a)\equiv(\mathfrak{A}, b);$$

(iii) (a) if $\xi=(n+2)\eta<\beta$ then $\xi+n-1<\beta$ and if $x=\langle a_{f(\xi+i)}\rangle_{i<n}$, $y=$ $=\langle a_{g(\xi+i)}\rangle_{i<n}$ then $R(x)\neq Q_\eta(y)$
(b) if $\xi=(n+2)\eta+n<\beta$ then $f(\xi)$ is the smallest ordinal number v such that $v\neq f(\zeta)$ for each $\zeta<\xi$;
(c) if $\xi=(n+2)\eta+n+1<\beta$ then $g(\xi)$ is the smallest ordinal number v such that $v\neq g(\zeta)$ for each $\zeta<\xi$.

By the maximal principle, M includes a maximal chain S with respect to set inclusion. Let $\psi=\cup S$. We assert $\psi\in M$. Conditions (i) and (iii) hold automatically for ψ, (ii) follows easily since $(\mathfrak{A}, a)\equiv(\mathfrak{A}, b)$ if and only if for every finite subset V of β $(\mathfrak{A}, \langle a_{f(\xi)}\rangle_{\xi\in V})\equiv(\mathfrak{A}, \langle a_{g(\xi)}\rangle_{\xi\in V})$. Further we refer the notations of conditions (i), (ii), (iii) to this special ψ. We prove $\beta=\alpha$. The method of the proof will consist in showing that from $\beta<\alpha$ it follows that there exists a $\psi'\in M$ such that ψ is properly included in ψ'. This contradicts the maximality of S. Accordingly, suppose that $\beta<\alpha$.

a) Let $\beta=(n+2)\eta$. By the hypothesis of Lemma 5 and by Lemma 4 there exist $x_1, x_2\in A^n$ such that

$$(\mathfrak{A}, a', x_1)\equiv(\mathfrak{A}, a', x_2), \tag{3}$$

$$R(x_1)=1, \tag{4}$$

$$R(x_2)=0. \tag{5}$$

First suppose that there exists no $z \in A^n$ such that

$$Q_\eta(z) = 1 \tag{6}$$

and

$$(\mathfrak{A}, a', x_1) \equiv (\mathfrak{A}, b', z). \tag{7}$$

By Lemma 3 we have an $y \in A^n$ with

$$(\mathfrak{A}, a', x_1) \equiv (\mathfrak{A}, b', y). \tag{8}$$

Let y be, in addition, of the smallest index possible in the well-ordering $(z_\xi)_{\xi<\alpha}$. We define the functions f', g' on $\beta+n$ such that f', g' are extensions of f resp. g and

$$x_1 = \langle a_{f'(\beta+i)} \rangle_{i<n}, \tag{9}$$

$$y = \langle a_{g'(\beta+i)} \rangle_{i<n}. \tag{10}$$

Let

$$\psi' = \langle (\xi, a_{f'(\xi)}, a_{g'(\xi)}) \rangle_{\xi<\beta+n}. \tag{11}$$

We have by $\psi \in M$, (8), (9), (10), (11) and our supposition that $\psi' \in M$; for ψ' and $\xi = \beta$ the condition (iii) (a) holds. In addition ψ is properly included in ψ'. Secondly suppose that there exists a $z \in A^n$ with (6) and (7). Let z be, in addition, of the smallest index possible in the wellordering $(z_\xi)_{\xi<\alpha}$. We define the functions f', g' on $\beta+n$ such that f', g' are extensions respectively of f and g and

$$x_2 = \langle a_{f'(\beta+i)} \rangle_{i<n}, \tag{12}$$

$$z = \langle a_{g'(\beta+i)} \rangle_{i<n}. \tag{13}$$

Let be

$$\psi' = \langle (\xi, a_{f'(\xi)}, a_{g'(\xi)} \rangle_{\xi<\beta+n}. \tag{14}$$

By (3) and (7) we have

$$(\mathfrak{A}, a', x_2) \equiv (\mathfrak{A}, b', z) \tag{15}$$

and by $\psi \in M$, (15), (12), (13), (14), (5), (6) it follows that $\psi' \in M$; for ψ' and $\xi = \beta$ the condition (iii) (a) holds. Again, ψ is properly included in ψ'.

b) Let be $\beta = (n+2)\eta + n$. We define the function f' on $\beta+1$ such that f' is an extension of f and $f'(\beta)$ is the smallest ordinal number $\nu < \alpha$ with $\nu \neq f(\xi)$ for $\xi < \beta$. By Lemma 3 there exists an element $b' \in A$ such that

$$(\mathfrak{A}, a, a_{f'(\beta)}) \equiv (\mathfrak{A}, b, b'). \tag{16}$$

Let b' be, in addition, of the smallest index possible in the well-ordering $\langle a_\xi \rangle_{\xi<\alpha}$ and let g' be the function defined on $\beta+1$ such that g' is an extension of g and $g'(\beta) = b'$. Let $\psi' = \langle \xi, a_{f'(\xi)}, a_{g'(\xi)} \rangle_{\xi<\beta+1}$. By (16) we easily conclude that $\psi' \in M$; for ψ' and $\xi = \beta$ the condition (iii) (b) holds. Again we have that ψ is properly included in ψ'.

c) Let be $\beta = (n+2)\eta + n + 1$. We proceed similarly as in case b), by referring now to the condition (iii) (c).

According to what we have said above, $\beta = \alpha$ is proved.

For arbitrary $\nu < \alpha$ there exists $\xi < \alpha$ such that $f(\xi) = \nu$; indeed, we have such a ξ with $\xi \leqq (n+2)\nu + n$. This can be proved by a trivial transfinite induction on ν. For if we have this for all μ with $\mu < \nu$ then either $f(\xi) = \nu$ with a $\xi < (n+2)\nu + n$ or the smallest index λ, for which there is no $\xi < (n+2)\nu + n$ with $f(\xi) = \lambda$ is $\lambda = \nu$ and so by the condition (iii) (b) we have $f\big((n+2)\nu + n\big) = \nu$. It can be proved similarly that $g(\xi)$ takes each value less than α for $\xi < \alpha$.

Let $\xi_1, \xi_2 < \alpha$. We assert that $f(\xi_1) = f(\xi_2)$ if and only if $g(\xi_1) = g(\xi_2)$. This follows from condition (ii). Indeed, consider the formula $c_{\varrho+\xi_1} = c_{\varrho+\xi_2}$. By condition (ii) this holds in $(\mathfrak{A}, a)$ if and only if it holds in $(\mathfrak{A}, b)$. But that is exactly our statement.

To sum up, we have shown that there is a (unique) one-to-one mapping φ of A onto A satisfying

$$(17) \qquad \varphi(a_{f(\xi)}) = a_{g(\xi)} \quad \text{for} \quad \xi < \alpha.$$

We show that φ is an automorphism of $\mathfrak{A}$. We have to show that for $\lambda < \varrho$ and $x \in A^{\mu(\lambda)}$ $R_\lambda(x) = R_\lambda(\varphi(x))$. But that is a direct consequence of the condition (ii), considering the formula $P_\lambda(c_{\varrho+\xi_1}, c_{\varrho+\xi_2}, \ldots, c_{\varrho+\xi_{\mu(\lambda)-1}})$ if $x = \langle a_{\xi_i} \rangle_{i<\mu(\lambda)}$.

To complete the proof of Lemma 5, we have to prove that $\varphi(R) \neq Q_\eta$ for each $\eta < \alpha$. But that is a direct consequence of the condition (iii) (a) for ψ, since taking $\xi = (n+2)\eta$ we have $R(x) \neq Q_\eta(\varphi(x))$.

Finally we state the following rather trivial lemma.

LEMMA 6. *Let* $\mathfrak{A}$ *be finite,* $(\mathfrak{A}, R) \in \mathfrak{S}(\mu \circ n)$. *We can find a formula* $F(v_0, \ldots, v_{n-1}, v_n, \ldots, v_{n+m-1}) = F(v')$ *such that* $F(v')$ *contains only the identity symbol* $=$, *but no other predicate-symbol and*

$$(18) \qquad (\mathfrak{A}, R) \vdash (\exists v_n) \ldots (\exists v_{n+m-1})(v_0) \ldots (v_{n-1})\big(P(v) \leftrightarrow F(v')\big).$$

Let be $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}\}$. If $a = \langle a_{i_k} \rangle_{k<n} \in A^n$ let be

$$F_a(v_0, \ldots, v_{n-1}, \ldots, v_{n+m-1}) = (v_0 = v_{i_0} \wedge v_1 = v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{n-1} = v_{i_{n-1}}).$$

Let be $F(v_0, \ldots, v_{n-1}, \ldots, v_{n+m-1}) = \bigvee\limits_{a \in A^n,\, R(a)=1} F_a(v')$. Then we can easily see that (18) holds.

§ 3. Proof and application of the theorem

Let us formulate the theorem using the notations of § 1.

THEOREM. *Let* $\Sigma \subset \mathfrak{F}_0(\mu \circ n)$. *Under the generalized continuum hypothesis the following two conditions* (a) *and* (b) *on* Σ *are equivalent.*

(a) *For each infinite relational system* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{S}(\mu)$ *if* $\mathfrak{R}$ *is the set of all distinct n-ary relations R on A for which* $(\mathfrak{A}, R) \in \mathfrak{M}_{\mu \circ n}(\Sigma)$, *the cardinality of* $\mathfrak{R}$ *is not greater than* $\varkappa(A)$.

(b) *There exists a natural number* $N \geqq 1$ *and formulas* $F_k(v) \in \mathfrak{F}_{n+m_k}(\mu)$ *for* $k = 1, 2, \ldots, N$ *such that*

$$\Sigma \vdash \bigvee_{k=1}^{N} (\exists v_n) \ldots (\exists v_{n+m_k-1})(v_0) \ldots (v_{n-1})\big(P_\varrho(v_0, \ldots, v_{n-1}) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow F_k(v_0, \ldots, v_{n-1}, \ldots, v_{n+m_k-1})\big).$$

PROOF. The implication (b) → (a) is trivial since for an infinite set A $\varkappa(A^n)=\varkappa(A)$ and $\varkappa(\varkappa(A)\cdot N)=\varkappa(A)$.

Now we turn to the proof of the implication (a) → (b) of the theorem. Suppose that the condition (a) of the theorem holds. Let $(\mathfrak{A}, R)\in\mathfrak{S}(\mu\circ n)$ be replete, α and a as in Lemma 5 and let $\langle Q_\lambda\rangle_{\lambda<\alpha}$ be a sequence containing all the n-ary relations Q such that $(\mathfrak{A}, Q)\in\mathfrak{M}_{\mu\circ n}(\Sigma)$. We show that there exists a formula $F(v_0, \dots, v_{n-1}, \dots, v_{n+m-1}) = F(v')$ of $\mathfrak{F}(\mu)$ such that

$$(\mathfrak{A}, R)\vdash(\exists v_n)\dots(\exists v_{n+m-1})(v_0)\dots(v_{n-1})\big(P(v)\leftrightarrow F(v')\big). \tag{19}$$

Let us suppose the contrary. In this case there exists no $F(v)\in\mathfrak{F}_n(\mu\oplus\alpha)$ such that

$$(\mathfrak{A}, a)\vdash(v_0)\dots(v_{n-1})\big(P(v)\leftrightarrow F(v)\big)$$

consequently Lemma 5 implies the existence of the automorphism φ of $\mathfrak{A}$ with $\varphi(R)\neq Q_\lambda$ for each $\lambda<\alpha$. Now we have $(\mathfrak{A}, \varphi(R))\equiv(\mathfrak{A}, R)\in\mathfrak{M}(\Sigma)$ and by the definition $\varphi(R)=Q_\lambda$ for some $\lambda<\alpha$ — a contradiction.

Now let $\mathfrak{B}\in\mathfrak{M}_{\mu\circ n}(\Sigma)$ be an arbitrary model of Σ. We prove the existence of a formula $F(v_0, \dots, v_{n-1}, \dots, v_{n+m-1})\in\mathfrak{F}(\mu)$ such that

$$\mathfrak{B}\vdash(\exists v_n)\dots(\exists v_{n+m-1})(v_0)\dots(v_{n-1})\big(P(v)\leftrightarrow F(v')\big). \tag{20}$$

If $\mathfrak{B}$ is finite, the assertion is true by Lemma 6. If $\mathfrak{B}$ is infinite, by Lemma 1 we have a replete model $(\mathfrak{A}, R)$ such that

$$(\mathfrak{A}, R)\equiv\mathfrak{B}. \tag{21}$$

Hence $(\mathfrak{A}, R)\in\mathfrak{M}_{\mu\circ n}(\Sigma)$ and we have a formula $F(v')\in\mathfrak{F}(\mu)$ satisfying (11). By (21) this implies (20).

Now let

$$\Sigma'=\{\neg(\exists v_n)\dots(\exists v_{n+m-1})(v_0)\dots(v_{n-1})\big(P(v)\leftrightarrow F(v')\big):\ F(v')\in\mathfrak{F}_{n+m}(\mu),\ m<\omega\}.$$

We have proved that $\mathfrak{M}_{\mu\circ n}(\Sigma\cup\Sigma')=0$ consequently by the compactness theorem we have a finite subset Σ'' of Σ' such that $\mathfrak{M}_{\mu\circ n}(\Sigma\cup\Sigma'')=0$. It is easily seen that this is exactly the assertion of (b) of the theorem — qu. e. d.

Next we show that the theorem of Beth, mentioned in the introduction, follows immediately from our theorem, by assuming the generalized continuum hypothesis.

THEOREM OF BETH. *If* $\Sigma\subset\mathfrak{F}_0(\mu\circ n)$ *and for every* $\mathfrak{A}\in\mathfrak{S}(\mu)$ *there is at most one n-ary relation* R *on* A *such that* $(\mathfrak{A}, R)\in\mathfrak{M}_{\mu\circ n}(\Sigma)$ *then there exists a formula* $F(v)\in\mathfrak{F}_n(\mu)$ *such that*

$$\Sigma\vdash(v_0)\dots(v_{n-1})\big(P(v)\leftrightarrow F(v)\big). \tag{22}$$

PROOF. By hypothesis the condition (a) of our theorem holds, consequently we have formulas $F_i(v_0, \dots, v_{n+m_i-1})\in\mathfrak{F}(\mu)$ for $i=1, \dots, N$ such that

$$\Sigma\vdash\bigvee_{i=1}^{N}(\exists v_n)\dots(\exists v_{n+m_i-1})(v_0)\dots(v_{n-1})\big(P(v)\leftrightarrow F_i(v^{(i)})\big). \tag{23}$$

We introduce a new n-placed predicate symbol Q, not occuring among P_ξ for $\xi<\varrho+1$. Let $\Sigma'\subset\mathfrak{F}_0(\mu)$ be the set arising from Σ by replacing the symbol P by Q in every formula of Σ everywhere. It is obvious, that our hypothesis can be expressed in the form $\Sigma \cup \Sigma' \vdash (v_0)\dots(v_{n-1})\big(P(v) \leftrightarrow Q(v)\big)$. By the compactness theorem we have then a finite subset V of Σ such that if V' arises from V as Σ' from Σ

$$V \cup V' \vdash (v_0)\dots(v_{n-1})\big(P(v) \leftrightarrow Q(v)\big). \tag{24}$$

Let G be the conjunction of the sentences of V. To avoid collisions, we replace each bound variable in G by others such that if $m = \max\limits_i (m_i)$ the bound variables of G do not occur among the bound variables of F_i for each i and $v_n, \dots, v_{n+m-1}$. After this, for each $i = 1, \dots, N$ we replace in G each part of the form $P(t_0, \dots, t_{n-1})$ by $F_i(t_0, \dots, t_{n-1}, v_n, \dots, v_{n+m-1})$; the formula so obtained is denoted by G_i. From (24) we easily deduce

$$\Sigma \vdash (v_n)\dots(v_{n+m_i-1})\big[G_i(v_n, \dots, v_{n+m_i-1}) \rightarrow (v_0)\dots(v_{n-1})\big(P(v) \leftrightarrow F_i(v^{(i)})\big)\big]. \tag{25}$$

Let

$$F(v) = \bigvee_{i=1}^{N} (\exists v_n)\dots(\exists v_{n+m_i-1})\big(F_i(v^{(i)}) \wedge G_i(v_n, \dots, v_{n+m_i-1})\big).$$

Then $F(v) \in \mathfrak{F}_n(\mu)$ and from (23) and (25) we easily conclude (22) — qu. e. d.

MATHEMATICAL INSTITUTE,
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES,
BUDAPEST

(Received 29 April 1963)

References

[1] E. W. Beth, On Padoa's method in the theory of definition, *Indag. Math.*, **15** (1953), pp. 330–339.
[2] H. J. Keisler, Replete relational systems, *Notices Amer. Math. Soc.*, **8** (1961), p. 63.
[3] H. J. Keisler, Ultraproducts and elementary classes, *Indag. Math.*, **23** (1961), pp. 477–495.

ÜBER DIE DICHTESTE KUGELPACKUNG IM HYPERBOLISCHEN RAUM

Von

K. BÖRÖCZKY (Budapest) und A. FLORIAN (Wien)

(*Vorgelegt von* L. FEJES TÓTH)

§ 1. Einführung

Das Problem der dichtesten Packung gleich großer Kugeln ist bekanntlich für den n-dimensionalen Euklidischen Raum bei $n \geqq 3$ noch ungelöst. Die beste bekannte obere Abschätzung für die Dichte d einer solchen Lagerung stammt von ROGERS [13]: Man lege um jeden Eckpunkt eines regulären Simplexes von der Kantenlänge $2r$ eine Kugel vom Radius r; bezeichnet d_n die Dichte der Kugeln im Simplex, so gilt

$$d \leqq d_n.$$

Für einen beliebigen Raum konstanter Krümmung wurde diese Abschätzung im Falle $n=2$ von FEJES TÓTH [5] bewiesen und im Falle $n \geqq 3$ als Vermutung ausgesprochen [7]. Auf die interessanten Folgerungen dieser Vermutung, insbesondere im Falle $n=3$, haben unabhängig von einander FEJES TÓTH [6] und COXETER [2] hingewiesen.

Im § 2 beweisen wir die Richtigkeit der obigen Vermutung für $n=3$, indem wir zeigen, daß die Kugeldichte in jeder Dirichletschen Zelle $\leqq d_3$ ist. Hieraus folgt u. a., daß die 120 Zelleninkugeln des sphärischen Mosaiks $\{5, 3, 3\}$ eine dichteste Lagerung bilden. Noch interessanter ist aber der Fall des hyperbolischen Raumes. Hier ist nämlich $d_3 = d(r)$ — wie im § 3 gezeigt wird — eine zunehmende Funktion von r, so daß $d \leqq \lim\limits_{r \to \infty} d(r) = 0{,}853\ldots$ gilt. Die rechts stehende Dichtenschranke wird aber durch die Horosphärenpackung, die aus den Zelleninkugeln des Mosaiks $\{6, 3, 3\}$ besteht, tatsächlich erreicht. Damit ist das Problem, der wievielte Teil des hyperbolischen Raumes sich durch kongruente Kugeln mit endlichem oder unendlichem Radius ausfüllen läßt, vollständig gelöst.

Zur Abschätzung des Volumens der Dirichletschen Zelle einer Kugel ersetzen wir die Dirichletsche Zelle durch ihren Durchschnitt mit einer geeigneten konzentrischen Kugel. Dieser Kunstgriff rührt von FEJES TÓTH [4] her. Mit Hilfe einer Modifizierung des ursprünglichen Beweises von FEJES TÓTH erhielt MOLNÁR [11], [12] verschiedene bemerkenswerte Dichtenabschätzungen in der nicht-Euklidischen Ebene. Die Ungleichung $d \leqq d_3$ im nicht-Euklidischen Raum stammt vom ersten Verfasser, der zu diesen Untersuchungen durch Professor MOLNÁR angeregt wurde. Den Beweis der Monotonie der Funktion $d(r)$ hat der zweite Verfasser erbracht, nachdem ihn auf dieses Problem Professor FEJES TÓTH aufmerksam gemacht hatte. Die unten benutzte Darstellung von $d(r)$ verdanken wir ebenfalls Herrn Professor FEJES TÓTH.

§ 2. Die tetraedrische Dichtenschranke

Wir legen unseren Betrachtungen einen dreidimensionalen Raum konstanter Krümmung zugrunde. Ist in einem solchen Raum eine Packung gleich großer Kugeln vorgegeben, so besteht die zu einer Kugel gehörige Dirichletsche Zelle aus sämtlichen Punkten, deren Abstand von dem Mittelpunkt dieser Kugel kleiner ist als von den übrigen Kugelmittelpunkten. $d(r)$ bedeute die Dichte von vier, einander gegenseitig berührenden Kugeln vom Radius r in dem durch ihre Mittelpunkte bestimmten Tetraeder. Wir beweisen hier den

SATZ 1. *Die Dichte einer jeden Packung von Kugeln vom Radius r ist in jeder Dirichletschen Zelle höchstens $d(r)$.*

Der Beweis beruht auf dem Begriff der Grenzdichte einer Kugel in einem Tetraeder, das in ein Dreieck entartet. Es sei $ABCD$ ein Tetraeder, K eine Kugel mit dem Mittelpunkt A und $\delta(A, BCD)$ die Dichte von K im Tetraeder. Wir betrachten den Grenzwert $\delta(A, B, E)$ von $\delta(A, BCD)$ für den Fall, daß C und D gegen einen gemeinsamen Punkt E streben. Wir führen die Bezeichnung $R_a(X)$ für den Rotationskörper ein, der aus dem Gebiet X durch eine Drehung um die Achse a entsteht. Dann ist $\delta(A, B, E)$ die Dichte von K in $R_{AB}(ABE)$.

HILFSSATZ 1. *Bewegt sich E auf der Strecke CD und ist $\delta(A, B, E)$ eine monotone Funktion von E, so liegt $\delta(A, BCD)$ zwischen $\delta(A, B, C)$ und $\delta(A, B, D)$.*

Wir fassen die Grenzdichte $\delta(A, B, E)$ als eine Funktion des Volumens v des Tetraeders $ABCD$ auf: $\delta(A, B, E) = f(v)$. Dann haben wir nur zu bemerken, daß

$$\delta(A, BCD) = \frac{1}{V} \int_0^V f(v)\, dv,$$

wo V das Volumen des Tetraeders $ABCD$ bedeutet.

Hieraus folgt unmittelbar der

HILFSSATZ 2. *Bewegt sich E auf der Strecke CD und ist $\delta(A, B, E)$ eine monotone Funktion von E, so liegt in einer jeden Lage von E die Dichte $\delta(A, BCD)$ zwischen $\delta(A, BCE)$ und $\delta(A, BED)$.*

Die folgenden beiden Hilfssätze beziehen sich auf ein sogenanntes *orthogonales Tetraeder $ABCD$*, in dem AB senkrecht zu BCD und DC senkrecht zu CBA ist. Im sphärischen Raum setzen wir noch voraus, daß $ABCD$ in dem um A geschlagenen Halbraum enthalten ist. Wir sprechen dann von einem *gewöhnlichen* orthogonalen Tetraeder.

HILFSSATZ 3. *Es sei $ABCD$ ein gewöhnliches orthogonales Tetraeder und K eine um A geschlagene Kugel, die die Ebene BCD nicht trifft. Dann gilt*

$$\delta(A, BCE) > \delta(A, BCD) > \delta(A, BED),$$

wo E ein innerer Punkt der Strecke CD ist.

Es seien E_1 und E_2 zwei innere Punkte der Strecke CD, so daß $CE_1 < CE_2$. Wegen $\sphericalangle ACD = \pi/2$ ist dann auch $AE_1 < AE_2$. Mit Rücksicht auf Hilfssatz 2 haben wir nur zu zeigen, daß $\delta(A, B, E_1) > \delta(A, B, E_2)$. Um dies einzusehen, betrachten wir die Dichte Δ von K in der mit K konzentrischen Kugel vom Radius AE_1 (Fig. 1). Offensichtlich ist $\delta(A, B, E_1) > \Delta$. Andererseits ist die Dichte von K in $R_{AB}(AE_1E_2)$ kleiner als Δ, also auch kleiner als $\delta(A, B, E_1)$. Damit ist die Behauptung, wegen $R_{AB}(ABE_2) = R_{AB}(ABE_1) + R_{AB}(AE_1E_2)$, bewiesen.

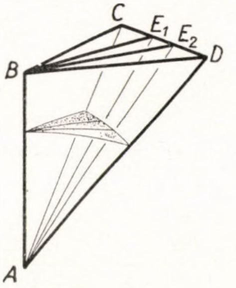


Fig. 1a

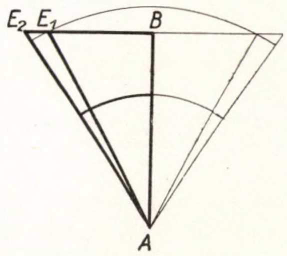


Fig. 1b

Hilfssatz 4. *Es sei* $ABCD$ *ein gewöhnliches orthogonales Tetraeder und* K *eine um* A *geschlagene Kugel, die die Ebene* BCD *nicht trifft. Dann gilt*

$$\delta(A, DCE) < \delta(A, DCB) < \delta(A, DEB),$$

wo E *ein innerer Punkt der Strecke* BC *ist.*

Es sei vor allem bemerkt, daß $\sphericalangle AED$ stumpf ist, weil ja seine orthogonale Projektion auf die Ebene ABC ebenfalls stumpf ist. Es seien E_1 und E_2 zwei innere Punkte der Strecke BC, so daß $CE_1 < CE_2$. Dann ist $\sphericalangle ADE_1 > \sphericalangle ADE_2$. Die senkrechte Projektion von AD auf BCD ist nämlich BD und es gilt $\sphericalangle BDE_1 > \sphericalangle BDE_2$. Andererseits haben wir $\sphericalangle DAE_2 > \sphericalangle DAE_1$, weil die Projektion von DA auf ABC AC ist und $\sphericalangle CDE_2 > \sphericalangle CDE_1$. Bringen wir also die Dreiecke ADE_1 und ADE_2 durch eine Drehung um AD in eine Ebene, so werden die Seiten AE_1 und DE_2 einander in einem Punkt S schneiden (Fig. 2).

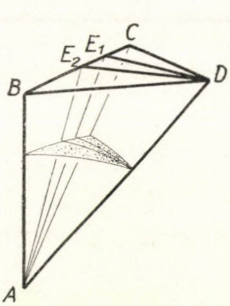


Fig. 2a

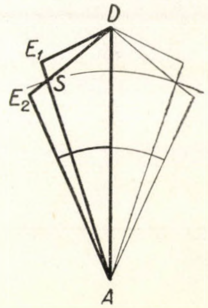


Fig. 2b

Nach Hilfssatz 2 haben wir nur zu zeigen, daß $\delta(A, D, E_1) < \delta(A, D, E_2)$. Um dies einzusehen, betrachten wir die Dichte Δ von K in der mit K konzentrischen

Kugel vom Radius AS. Offensichtlich ist $\delta(A, D, S) < \Delta$. Andererseits ist die Dichte von K in $R_{AD}(ASE_2)$ größer als Δ, also auch größer als $\delta(A, D, S)$. Hieraus folgt wegen $R_{AD}(ADE_2) = R_{AD}(ADS) + R_{AD}(ASE_2)$, daß

$$\delta(A, D, E_2) > \delta(A, D, S),$$

woraus sich wegen $\delta(A, D, S) > \delta(A, D, E_1)$ die gewünschte Ungleichung ergibt.

Wenden wir uns jetzt dem Beweis des Satzes 1 zu.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir uns auf eine gesättigte Kugelpackung $\{K\}$ beschränken. Dann ist die zu der Kugel K gehörige Dirichletsche Zelle Z ein konvexes Polyeder. Die Ecken, Kantengeraden und Flächenebenen dieses Polyeders genügen gewissen Bedingungen. Wir betrachten eine Kugel K aus der Packung mit dem Mittelpunkt A und drei weitere Kugeln K_1, K_2, K_3, vom Radius r, die sowohl einander wie K berühren. Wir betrachten ferner den Abstand r_0 von A von dem Potenzpunkt von K, K_1, K_2, K_3, den Abstand r_1 von A von der Potenzlinie von K, K_1, K_2 und den Abstand $r_2 = r$ von A von der Potenzebene von K und K_1. Eine beliebige Ecke von Z ist stets ein Potenzpunkt von K und von drei weiteren Kugeln von $\{K\}$. Deshalb ist der Abstand einer Ecke von Z von A sicher $\geqq r_0$. In ähnlicher Weise ist jede Kantengerade von Z die Potenzlinie von K und zwei weiteren Kugeln von $\{K\}$. Folglich ist der Abstand einer Kantengerade von Z von dem Punkt $A \geqq r_1$. Aus ähnlichen Gründen ist der Abstand einer Flächenebene von Z von $A \geqq r$.

Wir betrachten die mit K konzentrischen Kugeln K_0 und K_1 vom Radius r_0 bzw. r_1.

Um die Dichte von K in Z abzuschätzen, ersetzen wir Z durch den Durchschnitt ZK_0. Ist ZK_0 kein Polyeder, so verstümmeln wir ihn so, daß ein konvexes Polyeder $\bar{Z}$ entsteht, das folgenden Bedingungen genügt: Sämtliche Ecken von $\bar{Z}$ liegen auf K_0, die Kantengeraden von $\bar{Z}$ haben keinen gemeinsamen inneren Punkt mit K_1 und schließlich, $\bar{Z}$ enthält die Kugel K.

Es sei p eine Fläche von $\bar{Z}$ und P die Pyramide mit der Grundfläche p und der Spitze A. Es genügt, die Dichte von K in P zu untersuchen.

Der Fußpunkt der von A auf die Flächenebene von p gefällten Lote sei B. Da p ein Sehnenvieleck ist, ist B der Umkreismittelpunkt von p.

a) Wir setzen zunächst voraus, daß B innerhalb p liegt. C sei ein Seitenmittelpunkt von p und D ein Endpunkt dieser Seite. $ABCD$ ist ein *orthogonales* Tetraeder. Da im sphärischen Raum die Lösung des Problems der dichtesten Kugelpackung für $r \geqq \pi/4$ bekannt ist, können wir uns auf den Fall $r < \pi/4$ beschränken und zufolge dessen voraussetzen, daß $ABCD$ ein gewöhnliches orthogonales Tetraeder ist. Da sich P in solche orthogonale Tetraeder zerlegen läßt, genügt es, die Dichte von K in $ABCD$ abzuschätzen. Wir variieren B und C so, daß $AB \geqq r$ und $AC \geqq r_1$, und behaupten, daß dabei die Dichte von K in $ABCD$ im Falle $AB = r$ und $AC = r_1$ ihren größtmöglichen Wert erreicht.

Ist $AB > r$, so drehen wir die Ebene BCD um CD, so daß ihr Abstand von A stetig abnimmt bis sie K im Punkt B' berührt. Das Tetraeder $AB'CD$ ist ebenfalls orthogonal. Die Gerade AB schneide die Ebene $B'CD$ im Punkt E (Fig. 3). Offensichtlieh ist $\delta(A, BCD) < \delta(A, ECD)$. Da ferner E auf der Strecke CB' liegt, gilt nach Hilfssatz 4 $\delta(A, ECD) < \delta(A, B'CD)$. Deshalb erreicht die Dichte $\delta(A, BCD)$ ihren größtmöglichen Wert im Falle $AB = r$.

Es sei nun $AB=r$, aber $AC>r_1$. Wir drehen jetzt die Gerade DC in der Ebene BCD um D, so daß ihr Abstand von A stetig abnehmend den Wert r_1 erreicht. C' sei der Fußpunkt der von A (oder von B) auf DC gefällten Lote in der neuen Lage von DC. Auch das Tetraeder $ABC'D$ ist orthogonal. E sei der Schnittpunkt der Strecken BC und $C'D$ (Fig. 4). Nach Hilfssatz 4 haben wir $\delta(A, BCD) < \delta(A, BED)$. Weiterhin gilt nach Hilfssatz 3 $\delta(A, BED) < \delta(A, BC'D) = d(r)$ (Fig. 5). Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

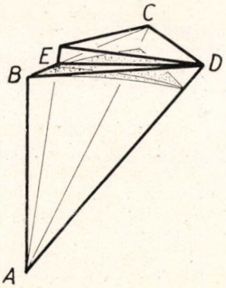


Fig. 3

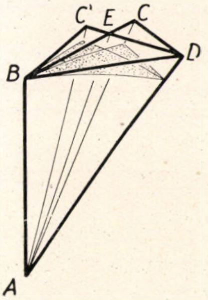


Fig. 4

b) Jetzt liege B außerhalb p. Dann gibt es eine Seite CD von p, die p von B trennt. Der Mittelpunkt dieser Seite sei E. Wir ergänzen P durch das Tetraeder $ABCD$ und zerlegen die entstehende Pyramide $\bar{P}$ in ähnlicher Weise wie oben in (gewöhnliche) orthogonale Tetraeder, deren Ecken A, B, die Ecken von p und die von E verschiedenen Seitenmittelpunkte von p sind (Fig. 6). Da diese Seitenmittelpunkte einen größeren Abstand von A haben als E, ist nach den in a) angewandten Überlegungen die Dichte von K in diesen Tetraedern kleiner als $\delta(A, BEC) =$

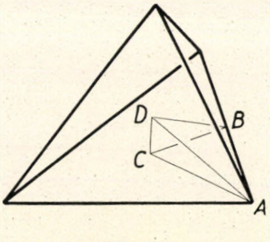


Fig. 5

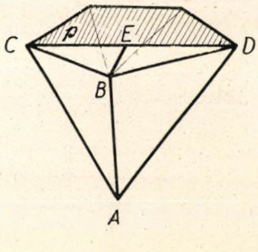


Fig 6

$= \delta(A, BED)$. Deshalb ist die Dichte von K auch in $\bar{P}$ kleiner als $\delta(A, BCD)$. Hieraus folgt, daß die Dichte in P gleichfalls kleiner als $\delta(A, BCD)$ ist. Andererseits ist, wegen $AE \geqq r_1$ und $AB > r$, $\delta(A, BEC) < d(r)$.

Die obigen Überlegungen lassen sich ohne wesentliche Änderungen auf Horosphärenpackungen übertragen. Statt $d(r)$ betrachten wir hier den Grenzwert $d = \lim_{r\to\infty} d(r)$, der mit der Dichte von vier einander gegenseitig berührenden Horosphären in dem durch ihre Mittelpunkte bestimmten asymptotischen Tetraeder übereinstimmt. Der einzige Unterschied ist, daß die Dirichletsche Zelle einer Horosphäre H in einer gesättigten Horosphärenpackung kein gewöhnliches Polyeder, sondern ein durch unendlich viele Ebenen begrenzter konvexer Körper ist. Wir betrachten den Durchschnitt dieses Körpers mit der entsprechend definierten, zu H konzentrischen Horosphäre, verstümmeln ihn so, daß wiederum ein durch Ebenen begrenzter Körper entsteht, zerlegen diesen Körper in Pyramiden und zeigen, daß die Dichte von H in jeder Pyramide $\leqq d$ ist. Wir erhalten so den

SATZ 2. *Die Dichte einer Horosphärenpackung ist in jeder Dirichletschen Zelle höchstens d.*

§ 3. Monotonie der Dichtenschranke

Es soll nun gezeigt werden, daß die vorhin gefundene Dichtenschranke $d(r)$ mit r monoton wächst. Daraus ergibt sich in Verbindung mit den Sätzen 1 und 2 in § 2

SATZ 3. *Die Dichte einer jeden Packung kongruenter Kugeln (mit endlichem oder unendlichem Radius) im dreidimensionalen hyperbolischen Raum mit der konstanten Krümmung $c=-1$ ist höchstens gleich*

$$\lim_{r\to\infty} d(r) = \left(1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}-\dots\right)^{-1} = 0{,}853\dots. \tag{1}$$

(Wegen dieser Reihe s. [1]). Gleichheit kann darin höchstens für eine Horosphärenpackung eintreten und wird, wie in § 1 ausgeführt wurde, auch erreicht.

Wir betrachten vier sich gegenseitig berührende Kugeln mit dem endlichen Radius r und das reguläre Tetraeder ihrer Mittelpunkte mit der Kantenlänge $2r$. Der Radius der Inkugel des Tetraeders sei ϱ, der Radius des Inkreises einer Seitenfläche x, der Winkel zwischen zwei Flächen des Tetraeders 2α. Man entnimmt leicht aus rechtwinkligen Dreiecken die Relationen

$$\cos\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{ch}\varrho,\quad \operatorname{sh}\varrho=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{th}x,\quad \operatorname{sh}x=\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{th}r,$$

aus denen

$$\operatorname{sh}^2\varrho=\frac{\operatorname{th}^2 r}{6+2\operatorname{th}^2 r},\quad \sin^2\alpha=\frac{1}{3+\operatorname{th}^2 r} \tag{2}$$

folgt. Das Gesamtvolumen der vom Tetraeder ausgeschnittenen vier Kugelsektoren ist

$$\frac{6\alpha-\pi}{\pi}G(r),$$

wobei

$$G(r)=\pi(\operatorname{sh}2r-2r) \tag{3}$$

das Volumen der Kugel mit dem Radius r bedeutet.

Die Dichte $d(r)$ der vier Kugeln im Tetraeder ist

$$d(r)=\frac{(6\alpha-\pi)G(r)}{\pi T(\varrho)}, \tag{4}$$

wobei $T(\varrho)$ das Volumen des Tetraeders bezeichnet. Die Darstellung (s. [8])

$$\frac{1}{12}\,T(\varrho)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{3-\sin^2\varphi}}\operatorname{ar\,th}\left(\operatorname{th}\varrho\,\frac{\sqrt{3-\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}\right)d\varphi-\frac{\pi}{3}\,\varrho$$

läßt sich in

$$T(\varrho)=12\sqrt{2}\int\limits_0^{\varrho}\frac{\operatorname{sh}x}{\sqrt{1-2\operatorname{sh}^2x}}\operatorname{ar\,th}\frac{\sqrt{6}\operatorname{sh}x}{\sqrt{1-2\operatorname{sh}^2x}}\,dx=12\sqrt{2}I(\varrho) \tag{5}$$

überführen, indem man

$$T(\varrho)=\int\limits_0^{\varrho}\frac{dT}{d\varrho}\,d\varrho$$

setzt.

Es handelt sich also um den Beweis, daß die Funktion

$$f(r)=12\sqrt{2}d(r) \tag{6}$$

unter Berücksichtigung von (2), (3), (4) und (5) für $r>0$ monoton wächst. Die dabei verwendete Methode ist ähnlich der in [9], [10].

Setzt man zur Abkürzung

$$\operatorname{th}r=t\qquad(0<t<1), \tag{7}$$

so findet man

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{d\varrho}{dr}=\frac{\sqrt{3}(1-t^2)}{\sqrt{2+t^2}(3+t^2)},\quad\frac{d\alpha}{dr}=-\frac{t(1-t^2)}{\sqrt{2+t^2}\,(3+t^2)},\\&\qquad\qquad\frac{dI}{dr}=-\frac{r}{\sqrt{2}}\frac{d\alpha}{dr}\end{aligned}\right. \tag{8}$$

und

$$I^2f'(r)=\frac{24t^2}{1-t^2}g(r)f_1(r) \tag{9}$$

mit

$$g(r)=I-\frac{r}{4\sqrt{2}}\frac{(1-t^2)^2}{t\sqrt{2+t^2}(3+t^2)}(\operatorname{sh}2r-2r) \tag{10}$$

und

$$f_1(r)=-\frac{(1-t^2)^2\,(\operatorname{sh}2r-2r)I}{4t\sqrt{2+t^2}(3+t^2)g(r)}+\alpha-\frac{\pi}{6}. \tag{11}$$

Da wegen $\operatorname{sh}2r>2r$ und $r>t$

$$g'(r)=\frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{(1-t^2)^2\,(\operatorname{sh}2r-2r)}{t^2(2+t^2)^{3/2}(3+t^2)^2}\cdot[r(6+30t^2+12t^4)-t(6+5t^2+t^4)]>0$$

und $g(0)=0$ ist, folgt

$$g(r)>0 \tag{12}$$

für alle $r>0$.

Aus (2), (5), (10) und (11) ergibt sich

$$\lim_{r\to\infty} f_1(r)=0. \tag{13}$$

Weiter findet man, wenn man (8) verwendet,

$$\frac{1}{I} f_1'(r) = \frac{3}{16\sqrt{2}} \frac{(1-t^2)^2(1+5t^2+2t^4)}{t^2(2+t^2)^{3/2}(3+t^2)^2(g(r))^2} f_2(r) g_1(r) \tag{14}$$

mit

$$f_2(r) = 8\sqrt{2}\, I + \sqrt{2+t^2}(1-t^2)(\operatorname{sh} 2r-2r)\cdot\frac{8t^2 r-(1-t^2)(\operatorname{sh} 2r-2r)}{3(1+5t^2+2t^4)g_1(r)} \tag{15}$$

und

$$g_1(r) = \operatorname{sh} 2r - 2r - \frac{4}{3} \frac{6t^3+5t^5+t^7}{(1-t^2)(1+5t^2+2t^4)}. \tag{16}$$

Wegen

$$g_1'(r) = -\frac{4t^2}{3(1+5t^2+2t^4)^2}\cdot(15+34t^2+32t^4+13t^6+2t^8)<0$$

und $g_1(0)=0$ ist

$$g_1(r)<0 \tag{17}$$

für alle $r>0$. Aus (15) und (16) folgt, wenn man in (15) den Nenner auf der rechten Seite mit N bezeichnet,

$$f_2'(r)N^2 = \frac{2t(1-t^2)^3}{\sqrt{2+t^2}(3+t^2)}(\operatorname{sh} 2r-2r)^2\cdot(21+50t^2+31t^4+6t^6) f_3(r) \tag{18}$$

mit

$$f_3(r) = \frac{63t+108t^3+59t^5+10t^7}{(1-t^2)(21+50t^2+31t^4+6t^6)} - 3r. \tag{19}$$

Schließlich hat man

$$(1-t^2)(21+50t^2+31t^4+6t^6)^2 f_3'(r) =$$

$$=4t^4\cdot(1953+4470t^2+4112t^4+1928t^6+455t^8+42t^{10})>0,$$

woraus sich wegen $f_3(0)=0$ ergibt

$$f_3(r)>0,$$

sodaß man nach (18) schließt

$$f_2'(r)>0. \tag{20}$$

(15) und (16) zeigen, daß $f_2(0)=0$ und wegen (20)

$$f_2(r)>0$$

ist. Daraus und aus (14) und (17) erkennt man

$$f_1'(r) < 0,$$

woraus man mit (13) auf

$$f_1(r) > 0$$

schließt; berücksichtigt man noch (9) und (12), so ergibt sich endlich

$$f'(r) > 0.$$

Damit ist der Beweis der Behauptung vollständig.

GEOMETRISCHER LEHRSTUHL,
EÖTVÖS LORÁND UNIVERSITÄT,
BUDAPEST

TECHNISCHE HOCHSCHULE,
WIEN

(Eingegangen am 2. September 1963.)

Literaturverzeichnis

[1] H. S. M. COXETER, The functions of Schläfli and Lobatschefsky, *Quart. J. Math.*, **6** (1935), S. 13–29.

[2] H. S. M. COXETER, Arrangements of equal spheres in non-Euclidean spaces, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **5** (1954), S. 263–274.

[3] H. DAVENPORT und G. HAJÓS, Aufgabe 35, *Matematikai Lapok* **2**, **68** (1951).

[4] L. FEJES TÓTH, Über die dichteste Kugellagerung, *Math. Zeitschrift*, **48** (1943), S. 676–684.

[5] L. FEJES TÓTH, Kreisausfüllungen der hyperbolischen Ebene, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **4** (1953), S. 103–110.

[6] L. FEJES TÓTH, On close-packings of spheres in spaces of constant curvature, *Publ. Math.*, **3** (1953), S. 158–167.

[7] L. FEJES TÓTH, Kugelunterdeckungen und Kugelüberdeckungen in Räumen konstanter Krümmung, *Arch. Math.*, **10** (1959), S. 307–313.

[8] L. FEJES TÓTH, On the volume of a polyhedron in non-Euclidean spaces, *Publ. Math.*, **4** (1956), S. 256–261.

[9] A. FLORIAN, Ausfüllung der Ebene durch Kreise, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **(2) 9** (1960), S. 1–13.

[10] A. FLORIAN, Überdeckung der Ebene durch Kreise, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **31** (1961), S. 77–86.

[11] J. MOLNÁR, Alcune generalizzazioni del teorema di Segre–Mahler, *Accad. Naz. dei Lincei*, **30/5** (1961), S. 701–705.

[12] J. MOLNÁR, Körelhelyezések állandó görbületű felületeken, *MTA Mat. Fiz. Oszt. Közl.*, **12** (1962), S. 223–263.

[13] C. A. ROGERS, The packing of equal spheres, *Proc. London Math. Soc.*, **8** (1958), S. 609–620.

Printed in Hungary

Technikai szerkesztő: Szabados József

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor
A kézirat nyomdába érkezett: 1963. XII. 13. – Terjedelem: 21,5 (A/5) ív, – 13 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat, Szeged 63-4362

The Acta Mathematica publish papers on mathematics in English, German, French and Russian.

The Acta Mathematica appear in parts of various size, making up volumes.

Manuscripts should be addressed to:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Mathematica is 110 forints a volume. Orders may be placed with „*Kultura*" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest, I., Fő utca 32. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Mathematica paraissent en franaçis, allemand, anglais et russe et publient des mémoires du domaine des sciences mathématiques.

Les Acta Mathematica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes.

On est d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

Toute correspodance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux „*Kultura*" (Budapest, I., Fő utca 32. Compte-courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

„*Acta Mathematica*" публикует трактаты из области математических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

„*Acta Mathematica*" выходит отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена „*Acta Mathematica*" — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет „*Kultura*" (*Budapest, I., Fő utca 32.* Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

64,– forint

INDEX

Index: 26.014

ACTA MATHEMATICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

TOMUS XV FASCICULI 3–4

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1964

ACTA MATH. HUNG.

ACTA MATHEMATICA
ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK
MATEMATIKAI KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Mathematica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a matematika köréből.

Az Acta Mathematica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok rövid tartalmi kivonattal együtt a következő címre küldendők:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Mathematica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó"-nál (Budapest, V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest, I., Fő utca 32. Bankszámla 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

Die Acta Mathematica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der mathematischen Wissenschaften in deutscher, englischer, französischer und russischer Sprache.

Die Acta Mathematica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind mit kurzer Zusammenfassung an folgende Adresse zu senden

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Redaktion und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forints. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen „*Kultura*" (Budapest, I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandvertretungen und Kommissionären.

ACTA MATHEMATICA
ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE
Том. XV—Вып. 3—4

РЕЗЮМЕ

ОБ ЭЛЭМЕНТАРНОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

К. Фладт (Кальв, Германия)

В работе дается классификация конических сечений в гиперболической геометрии, и путем выбора подходящей системы координат, устанавливается простое аналитическое описание этих конических сечений.

ОЦЕНКА ГРАДИЕНТОВ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $\Delta u - au'_t = f$. II

Г. Адлер (Будапешт)

Настоящая часть II представляет собой непосредственное продолжение части I работы. В § 4 содержатся оценки для однородного уравнения теплопроводности $\Delta u - au'_t = 0$, а именно отдельно: в пункте А) для случая однородного краевого и неоднородного начального условий, а в пункте В) для случая неоднородного краевого и однородного начального условий. В пункте А) задаются и асимптотические оценки; а именно показывается, что при $t \to +\infty$ функция $|\operatorname{grad} u|$ стремится к нулю экспоненциально. Результаты пункта В) аналогичны результатам из § 3. Существенная разница по сравнению с оценкой для уравнения $\Delta u = 0$ состоит в том, что в соответствии с природой вещи кроме касательных первых и вторых производных краевых значений здесь в оценках фигурирует и первая производная по времени.

Наконец, в §§ 5 и 6 исследуются уравнения $\Delta u = f$ и $\Delta u - au'_t = f$ при однородных краевых, соотв. при однородных краевых и начальных условиях. В § 6 задаются и асимптотические оценки для случая $t \to +\infty$.

О ЧИСЛЕ ДЕЛИТЕЛЕЙ „СДВИНУТЫХ” ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ-БЛИЗНЕЦОВ

М. Б. Барбан (Ташкент, СССР)

Пусть через $N\{\}$ обозначается число целых чисел, меньших числа n и удовлетворяющих условию, стоящему в фигурных скобках. Доказывается, что если $\nu(m)$ — число различных простых делителей целого числа m, а p' менший из двух простых чисел-близнецов то для любого фиксированного числа $\varepsilon > 0$ имеем

$$\frac{\ln^2 n}{n} N\{|\nu(p'+1) - \ln \ln n| \geqq (\ln \ln n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\} \to 0$$

при $n \to \infty$.

ОДНА ТЕОРЕМА О СТРОЕНИИ ИДЕМПОТЕНТНЫХ ПОЛУПОЛЕЙ

Г. И. Вейнерт (Потсдам, ГДР)

Полуполе (соотв. полумодуль) $\mathfrak{H}$ называется прямоугольным, если имеет место $x+y+x=x$ для всех x и y из $\mathfrak{H}$. Это равносильно услоеиям $x+y\neq y+x$ при $x\neq y$ и $x+x=x$ для всех x. В работе [6] показано, что всякое прямоугольное полуполе представимо в виде прямой композиции $\mathfrak{H}=(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ двух полуполей $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$, мультипликативно являющихся произвольными группами, и в которых сложение удовлетворяет следующим требованиям:

A_l) $\qquad a+b=a$ для всех a и b из $\mathfrak{H}_1$,

A_r) $\qquad a+b=b$ для всех a и b из $\mathfrak{H}_2$.

Кроме того, любое конечное полуполе с некоммутативным сложением является прямоугольным.

В настоящей работе проверяются следующие предложения относительно произвольных полуполей $\mathfrak{H}$ с некоммутативным, идемпотентным сложением, причем без ограничения общности рассматриваются только полуполя без нулевого элемента.

1. Максимальные прямоугольные подполумодули $G_e, G_a, \ldots$ полуполя $\mathfrak{H}$ попарно (аддитивно) изоморфны и составляют совместимое разбиение полуполя $\mathfrak{H}$ на классы, причем соответствующая фактор-система $\mathfrak{G}=\{e, a, \ldots\}$ является полуполем с коммутативным, идемпотентным сложением. Поэтому имеем:

$$\mathfrak{H}=\bigcup_{a\in\mathfrak{G}} G_a \quad \text{и} \quad \begin{array}{l} G_a+G_b=G_{a+b}, \\ G_a\cdot G_b=G_{a\cdot b}. \end{array}$$

Модуль $G_e=G$, содержащий единицу ε полуполя $\mathfrak{H}$, представляет собой максимальное прямоугольное подполуполе полуполя $\mathfrak{H}$.

2. Полуполе $\mathfrak{G}$ тоже не имеет нулевого элемента, итак оно является структурно упорядоченной группой (ср. [6]); каждый элемент $a\neq e$ из $\mathfrak{G}$ обладает мультипликативным порядком ∞.

3. Мультипликативно $\mathfrak{H}$ представляет собой шрейеровское групповое расширение G с $\mathfrak{G}$:

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{G}\circ G=\{(a, \alpha)\},$$

где появляющие (групповые) автоморфизмы $\alpha\to\alpha^b$ являются даже автоморфизмами полуполей, составляющимися из групповых автоморфизмов прямых компонентов от $G=(G_1, G_2)$ (см. выше). Элементы из G написываются в виде $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$, где $\alpha_i\in G_i$, и выполняются равенства

$$(\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)=\alpha_1+\beta_2,$$

$$(\alpha_1+\alpha_2)\cdot(\beta_1+\beta_2)=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2.$$

Таким образом, для действий арифметики в $\mathfrak{H}=\mathfrak{G}\circ G$ получаем:

$$\begin{aligned}(a, \alpha_1+\alpha_2)\cdot(b, \beta_1+\beta_2)&=\big(ab, a^b(\alpha_1+\alpha_2)^b(\beta_1+\beta_2)\big)=\\ &=\big(ab, a^b(\alpha_1^b\beta_1+\alpha_2^b\beta_2)\big),\end{aligned}$$

$$(a, \alpha_1+\alpha_2)+(b, \beta_1+\beta_2)=(a+b, \gamma_1+\gamma_2),$$

где величины $\gamma_i=\gamma_i(a, b, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)\in G_i$ могут зависеть в самом деле от всех аргументов. Однако, $\gamma_1=\alpha_1$ для $a+b=a$ и $\gamma_2=\beta_2$ для $a+b=b$.

4. Если сложение в $\mathfrak{H}$ вообще удовлетворяет условию

$$(a, \alpha_1+\alpha_2)+(b, \beta_1+\beta_2)=(a+b, \alpha_1+\beta_2),$$

то соответствующим образом и умножение

$$(a, \alpha_1+\alpha_2)\cdot(b, \beta_1+\beta_2)=(ab, \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)$$

должно быть исполнено по компонентам, так что шрейеровское расширение $\mathfrak{H}=\mathfrak{E}\circ G$ станет прямым произведением $\mathfrak{G}\otimes G$. Обратно, для прямоугольного полуполя G и полуполя $\mathfrak{G}$ с коммутативным, идемпотентным сложением упомянутым способом всегда получается полуполе $\mathfrak{H}$, удовлетворяющее нашим предложениям 1 и 3. В общем случае, однако, для заданных G и $\mathfrak{G}$ существуют и другие, не изоморфные $\mathfrak{H}$, полуполя $\mathfrak{H}'$ этого рода, что видно из широкого класса примеров, приведенного в предложении 5.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЫ Г. ГРЕЦЕРА О ПОЛУГРУППАХ ЭНДОМОРФИЗМОВ

М. Маккаи (Будапешт)

Пусть $\mathfrak{A}$ — универсальная (абстрактная) алгебра, пусть $\mathfrak{E}(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ и $\mathfrak{H}(\mathfrak{A})$ — полугруппы, состоящие из всех эндоморфизмов, мономорфизмов и эпиморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$, соответственно. В работе дается теоретико-полугрупповая характеристика троек

$$(\mathfrak{E}(\mathfrak{A}), \mathfrak{M}(\mathfrak{A}), \mathfrak{H}(\mathfrak{A})). \tag{1}$$

Теорема. Пусть $E=(E;\cdot)$ — некоторая полугруппа, M и N — подмножества E. Тройка (E, M, N) изоморфна некоторой тройке вида (1) тогда и только тогда, если она удовлетворяет следующим условиям:

С 1. E обладает единичным элементом (обозначаемым через 1).

С 2. (α) $\alpha_1\in M$ и $\alpha_2\in M$ влекут $\alpha_1\cdot\alpha_2\in M$.
(β) $x, y\in E, \alpha\in M$ и $x\alpha=y\alpha$ влекут $x=y$.
(γ) $x\in E-M$ и $y\in E$ влекут $x\cdot y\in E-M$.
(δ) $1\in M$.

С 3. (α) $\alpha_1\in N$ и $\alpha_2\in N$ влекут $\alpha_1\cdot\alpha_2\in N$.
(β) $x, y\in E, \alpha\in N$ и $\alpha x=\alpha y$ влекут $x=y$.
(γ) $x\in E-N$ и $y\in E$ влекут $y\cdot x\in E-N$.
(δ) $1\in N$.

С 4. Если $\mu\in M, \nu\in N, x\in E, y\in E$ и $x\mu=\nu y$, то существует элемент $z\in E$ такой, что $x=\nu z$.

Условия С 1, С 2, С 3 заимствованы из работы Грецера [1], условие С 4 установлено Э. Фридом и автором.

ПОЛУГРУППЫ БЕЗ ПОДПОЛУГРУППЫ ФРАТТИНИ

Г. И. Вейнерт (Потсдам, ГДР)

Пусть $F(H)$ — множество всех элементов полугруппы H, которые можно отбрасывать из любой системы образующих полугруппы H. В случае $F(H)\neq\varnothing$, $F(H)$ называется подполугруппой Фраттини полугруппы H. Наоборот, $F(H)=\varnothing$ имеет место во всяком случае тогда, если полугруппа H расчленяема, т. е. если каждое непустое подмножество полугруппы H является подполугруппой. Л. Редеи поставил вопрос: справедливо ли обратное утверждение, а именно, является ли всякая полугруппа H, обладающая свойством $F(H)=\varnothing$, расчленяемой ([7], стр. 90)? Для полугрупп порядка $O(H)\leqq 3$ это оказывается верным, однако для любого порядка $O(H)\geqq 4$ существуют нерасчленяемые полугруппы H, выполняющие равенство $F(H)=\varnothing$. Так Ш. Лайош [5] предлагает пример полугруппы порядка 4, обладающей упомянутыми свойствами и допускающей продолжение до полугруппы заданного порядка $O(H)>4$ с теми же свойствами.

В настоящей работе мы показываем, что кроме расчленяемых существуют многочисленные другие классы полугрупп без подполугруппы Фраттини, и обращаем наше внимание к общим высказываниям о строении таких полугрупп. Так, например, имеем $F(H)=\varnothing$ для всякой прямоугольной полугруппы H (теорема 1). Далее, произвольная тривиальная цепочка $H=\cup H_i$ полугрупп[1] удовлетворяет соотношению $F(H)=\varnothing$ тогда и только тогда, если $F(H_i)=\varnothing$ для всех H_i, причем H является расчленяемой в том и только в том случае, когда каждая H_i обладает этим свойством (теорема 2). Расчленяемые полугруппы и полугруппы, построенные Лайошом, являются частными случаями полугрупп, фигурирующих в приведенных теоремах. Всякая идемпотентная полугруппа H свойства $F(H)=\varnothing$ представляет собой (не обязательно тривиальную) цепочку прямоугольных полугрупп, но обратное предложение не имеет места (теорема 3). В связи с этим мы даем некоторую теорему о строении цепочек прямоугольных полугрупп (теорема 4). Согласно одному следствию, всякая коммутативная идемпотентная полугруппа H свойства $F(H)=\varnothing$ является расчленяемой.

Мало того, что существуют идемпотентные полугруппы без подполугруппы Фраттини, но произвольная группа G может быть вложена в полугруппу такого рода разными способами. Так, например, прямое произведение $H=G\times L$ такой группы G и некоторой прямоугольной полугруппы $L\neq\{e\}$ доставляет такую полугруппу, обладающую свойством $F(H)=\varnothing$ (теорема 5). Это даже верно для любой идемпотентной полугруппы L свойства $F(L)=\varnothing$, если в $L=\cup L_i$ (ср. теорему 3) полугруппа $L_{\min I}$ не сводится к одному элементу (теорема 6). Наконец, всякая вполне простая в смысле Риза полугруппа H либо является группой, либо выполняет равенство $F(H)=\varnothing$ (теорема 7).

Вообще можно высказать, что все идеалы полугруппы без подполугруппы Фраттини являются полупростыми и составляют цепочку (лемма 2, теорема 8). Далее, полугруппа H обладает свойством $F(H)=\varnothing$ тогда и только тогда, если она представима в виде цепочки $H=\cup H_i$ подполугрупп H_i и если для всех $k\in I$ выполняется $F(\bigcup\limits_{i\leqq k} H_i)=\varnothing$; в частности, в этом случае найдется единственное наиболее мелкое разложение такого рода, причем полугруппы H_i характеризуются как максимальные простые подполугруппы H, или как множества, состоящие из образующих элементов принадлежащих по одному главному идеалу полугруппы H (теорема 9). Наконец, полугруппы H_i являются даже вполне простыми (ср. теорему 7) тогда и только тогда, если H представляет собой полугруппу с относительными обратными (теорема 10). Последнее обстоятельство имеет место для полугруппы H без подполугруппы Фраттини во всяком случае тогда, если каждый элемент из H имеет конечный порядок (теорема 11), или когда H является коммутативной (теорема 12); проблема о том, вытекает ли это уже из $F(H)=\varnothing$, остается открытой. Из теоремы 12 следует тоже, что любая конечная коммутативная полугруппа H свойства $F(H)=\varnothing$ расчленяема, но существуют коммутативные полугруппы, для которых это не имеет места (ср. вышеупомянутое следствие).

Отметим еще, что в течение работы, с помощью теорем 3, 4, 7, 11, 9, 10 и одного следствия, мы построим все нерасчленяемые полугруппы H порядка 4, обладающие свойством $F(H)=\varnothing$. Таких полугрупп всего пять (три из них идемпотентны).

---

[1] H называется цепочкой полугрупп H_i, если H_i – попарно пенересекающиеся подполугруппы в H, где i пробегает некоторое упорядоченное множество индексов I, и выполняются соотношения $H=\cup H_i$, $H_iH_j\subseteqq H_{\max(i,j)}$. Цепочка называется тривиальной, если даже $h_ih_j=h_jh_i=h_j$ для любых $h_i\in H_i$, $h_j\in H_j$ $(i<j)$.

ОБ ОДНОМ ВИДЕ РАСПРОСТРАНЕННЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ЭРМИТА—ФЕЙЕРА

Л. Ц. Хсу (Чангчун, Китай)

Через $\lambda_n (n=1, 2, \ldots)$ обозначается последовательность положительиных чисел, для которой $\lambda_n \to \infty$. Для вещественной функции $f(t)$, заданной на интервале $(-\infty, \infty)$, автор вводит распространенные интерполяционные многочлены Эрмита—Фейера следующим образом:

$$F_n\left(f(\lambda_n t); \frac{x}{\lambda_n}\right) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{a_\nu^{(n)} x}{\lambda_n}\right) \left[\frac{T_n\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)}{\frac{x}{\lambda_n} - a_\nu^{(n)}}\right]^2 f(\lambda_n a_\nu^{(n)}),$$

где

$$a_\nu^{(n)} = \cos\left(\frac{2\nu - 1}{2n}\pi\right) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots)$$

– корни многочленов Чебышева $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

В работе доказываются некоторые теоремы сходимости при специальных выборах последовательности λ_n. Так, например (теорема 1), если m – фиксированное положительное целое число, далее,

$$\exp^m(|x|) \overset{\text{def}}{=} \exp(\exp^{m-1}(|x|)), \quad \exp^1(|x|) \overset{\text{def}}{=} e^{|x|},$$

$$\lambda_n \overset{\text{def}}{=} \log^{m+1}(n) \overset{\text{def}}{=} \log(\log^m(n)), \quad \log^1(n) \overset{\text{def}}{=} \log n,$$

и $f(x)$ – непрерывная в $(-\infty, \infty)$ функция, для которой

$$f(x) = O(\exp^m(|x|)) \qquad (|x| \to \infty),$$

то

$$\lim_{n \to \infty} F_n\left(f(t \log^{m+1}(n)); \frac{x}{\log^{m+1}(n)}\right) = f(x) \qquad (-\infty < x < \infty).$$

Сходимость равномерна в любом конечном отрезке $[-A, A]$.

ТЕОРЕМЫ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ

Дь. Катона (Будапешт)

Рассмотрим множество, состоящее из $2m$ элементов, и некоторую систему его подмножеств, содержащих попарно два общих элемента. Спрашивается, которая из таких систем имеет максимальную мощность. П. Эрдёш, Р. Радо и Чао Ко выдвинули гипотезу [1], что экстремальная система состоит из всех множеств, составляемых из $m+1$, $m+2, \ldots, 2m-1, 2m$ элементов данного множества $2m$ элементов. В статье эта гипотеза доказывается в несколько более общем виде.

НЕСИММЕТРИЧЕСКОЕ БЛУЖДАНИЕ В ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

И. Реиманн (Будапешт)

В настоящей работе мы занимаемся тем случаем блуждания по точкам решетки n-мерного евклидового пространства, когда блуждающая частица из точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ пространства может дойти одним шагом до любой точки $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, для которой

$y_i=x_i+1$ или x_i или же x_i-1. Поэтому число достигаемых из любой точки пространства одним шагом точек равняется 3^n.

Сначала с помощью теории матриц определяем N-шаговые переходные вероятности блуждания по интервалу решетки n-мерного пространства, ограниченному поглощающими стенами, потом переходим к случаю неограниченного блуждания.

Для простоты формулы записываются для случаев $n=2$ и $n=3$.

ОДНА ТЕОРЕМА ОДНОЗНАЧНОСТИ В ТЕОРИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Я. Ацел (Дебрецен)

Теорема однозначности сформулируется так: Если f непрерывна в интервале $\mathfrak{J}$, F непрерывна на множестве $\mathcal{B}$ на значение $F(x, y)$ на $\mathcal{B}$ лежит внутри открытого интервала (x, y), если, далее, из $H(s, v, x, y,)=H(t, v, x, y)$ или из $H(u, s, x, y,) =H(u, t, x, y)$ вытекает $s=t$, то f однозначно определена в $\mathfrak{J}$ таким путем, что в $\mathcal{B}$ она удовлетворяет функциональному уравнению

$$f\big(F(x, y)\big)=H\big(f(x), f(y), x, y\big)$$

и начальным условиям $f(a)=c$, $f(b)=d$, если только $\mathcal{B}$ содержит декартовый квадрат отрезка интервала $\mathfrak{J}$ от a до одного из концов, и для любой x, лежащей в дополнительном отрезке, найдется y, лежащая в первоначальном отрезке и такая, что точка $\{x', y\}$ лежит в $\mathcal{B}$ при любой x', лежащей между x и a.

Эта теорема, между прочим, делает возможным более простые доказательства, уточнения и распространения результатов из работ [2], [3], [4], [5] и [6]. Иногда достаточно частный случай, когда $\mathcal{B}$ является декартовым квадратом интервала $\mathfrak{J}$.

ОБ ОДНОМ ПРОЦЕССЕ ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ, СВЯЗАННОМ С СИСТЕМОЙ ТИПА $GI/M/1$ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Н. У. Прабху (Недлендс, Западная Австралия)

В работе предлагается следующее новое определение времени ожидания $Y(t)$ в одноканальной системе массового обслуживания: во время t, $Y(t)=0$, если счетчик является незанятым; иначе $Y(t)$ равняется времени, уже проведенному обслуженным потребителем в системе. Для системы массового обслуживания с произвольным распределением времени между прибытий и отрицательно-экспоненциальным распределением времени обслуживания получается распределение $Y(t)$. Кроме того, выведены явные результаты относительно бойких и небойких периодов, длины очередей и определенного конвенционально времени ожидания.

ОБ ОДНОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ПРОБЛЕМЕ П. ЕРДЁША И А. ХАЙНАЛА

В. М. Шмидт (Вена, Австрия)

Пусть F — некоторая система подмножеств множества M. Система F обладает ,,свойством B'', если множество M можно разбить на два непересекающихся класса, ни один из которых не содержит подмножеств, принадлежащих системе F. В качестве усиления одного результата П. Эрдёша автор доказывает следующую теорему.

Пусть F состоит из f множеств и пусть каждое из этих множеств состоит из $n\geqq 2$ элементов. Если

$$f\leqq 2^n(1+4n^{-1})^{-1},$$

то F обладает ,,свойством B''.

О ПОСТРОЕНИИ ПАРЦИАЛЬНЫХ АВТОМАТОВ

Т. Фрей (Будапешт)

В работе обобщается на парциально определенные автоматы прием автора, приводящий к построению приведенного минимального автомата, если известно отображение, осуществленное автоматом. В случае парциально определенного отображения подобный прием приводит к минимальному, и вместе с тем приведенному, автомату; однако вопрос о том, однозначны ли понятия приведенности и минимальности (подробно изложенные в статье) и в случае парциальных автоматов, остается пока открытым даже для конечных автоматов.

О ПОСТРОЕНИИ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

Т. Фрей (Будапешт)

В работе показывается такой способ синтеза конечных автоматов, который обеспечивает непосредственную реализацию действий, используемых при охарактеризовании осуществленных конечными автоматами отображений (дизъюнкция, умножение, итерация, образование комплемента, расширение, сокращение и т. д.). Идея синтеза основывается на дополнительном алгоритме, при помощи которого счетная машина с программным управлением может симулировать составный автомат, если только она знакома с программами, симулирующими частичные автоматы. Подробно разбирается вопрос об условиях, обеспечивающих минимальность составного автомата в случае минимальности частичных автоматов.

О ПРЕДЕЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ МАКСИМУМА СЛУЧАЙНОГО ЧИСЛА НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

О. Барндорфф-Нильсен (Стэнфорд, Калифорния, США)

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин с одним и тем же распределением, а $N_1, N_2, \ldots, N_n, \ldots$ — последовательность случайных величин с положительными целыми значениями на поле вероятностей $(\Omega, A, \mathbf{P})$. Предполагается, что

$$\frac{N_n}{n} \to N$$

по вероятностной мере, где случайная величина N обладает свойством $\mathbf{P}\{N \leqq 0\} = 0$. Рассмотрим случайную величину $Z_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Автор доказывает следующую теорему.

Если $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — нумерические последовательности, причем $a_n > 0$ для всех n, а $\Lambda(X)$ — невырожденная функция распределения и C_Λ — множество точек непрерывности функции $\Lambda(X)$, то следующие три утверждения эквивалентны:

$$\text{(I)} \qquad \mathbf{P}\{Z_n \leqq a_n x + b_n\} \to \Lambda(x) \qquad (x \in C_\Lambda);$$

$$\text{(II)} \qquad \mathbf{P}\{Z_{N_n} \leqq a_{N_n} x + b_{N_n}\} \to \Lambda(x) \qquad (x \in C_\Lambda);$$

$$\text{(III)} \qquad \mathbf{P}\{Z_{N_n} \leqq a_n x + b_n\} \to \int\limits_0^{+\infty} [\Lambda(x)]^s \, d\mathbf{P}\{N \leqq s\} \qquad (x \in C_\Lambda)$$

при $n \to +\infty$.

Теорема означает, что если известно предельное распределение последовательности случайных величин $\{Z_n\}$, то можно определить и предельное распределение последовательности случайных величин со случайными индексами $\{Z_{N_n}\}$, предполагая, что последовательность $\{N_n\}$ удовлетворяет упомянутому условию.

НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Ф. Харари (Энн Арбор, США)

В статье резюмируются и дополняются результаты, достигнутые в работах, включенных в библиографию, и относящиеся к нарисуемости в плоскости, к разбиению на нарисуемые в плоскости подграфы, к реализации на ориентируемой поверхности и к реализации на плоскости с минимальным числом пересечений графов. Указываются и нерешенные проблемы.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Б. Андрашфаи (Будапешт)

Графы, фигурирующие в настоящей работе, конечны и не содержат петель и многократных ребер.

Рассмотрим графы с n вершинами, в которых максимальное число независимых (т. е. попарно несоединенных ребрами) вершин равно τ, и которые не содержат кругов с нечетным числом ребер, и длины, меньше $2k+1$ ($k \geqq 2$). Ищется точная верхняя граница минимального значения степени таких графов. В случае $\frac{\tau}{n} \geqq \frac{1}{2}$ проблема решается просто (см. (2.6)). Основным результатом работы является решение, полученное для случая $\frac{k}{2k+1} \leqq \frac{\tau}{n} < \frac{1}{2}$(см. (2.7)). Если n, τ и k удовлетворяют даже известным теоретико-числовым условиям, то установленная граница степеней точна, и в этом случае, при четных значениях k, определяются все графы, выполняющие приведенные выше условия и имеющие минимальную степень, равную данной границе.

О ПОЛУПОЛЯХ, СОДЕРЖАЩИХСЯ В АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОЛЯХ ЧИСЕЛ

Г. Кох (Берлин)

Пусть $\mathbf{P}$ — поле рациональных чисел, K — расширение конечной степени поля $\mathbf{P}$, R — поле вещественных чисел и $\mathfrak{R}$ — множество изоморфизмов, отображающих поле K в поле R.

Теорема 1. Пусть для некоторого элемента b из K и некоторого подмножества $\mathfrak{S}$ множества $\mathfrak{R}$ имеем

$$\varphi(b) > 0 \qquad (\varphi \in \mathfrak{S}),$$

пусть, далее, для некоторого примитивного элемента a относительного поля $K|\mathbf{P}$ выполняется

$$\varphi(a) < 0 \qquad (\varphi \in \mathfrak{R} - \mathfrak{S}).$$

Тогда существует рациональная функция $r(x)$ с неотрицательными рациональными коэффициэнтами, для которой

$$b = r(a).$$

Теорема 2. Если H — полуполе из K с нулевым элементом, не лежащее в никаком истинном подполе поля K, то существует такое подмножество $\mathfrak{S}$ множества $\mathfrak{R}$, что H состоит из всех $b \in K$, удовлетворяющих условию

$$\varphi(b) \geqq 0 \qquad (\varphi \in \mathfrak{S}).$$

Теорема 3. Полуполя, лежащие в K, являются простыми (т. е. они содержат примитивные элементы).

Часть теоремы 2, относящаяся к тотально мнимым числовым полям или числовым полям второй степени, принадлежит Г. И. Веинерту [5], [6].

ОБ ОДНОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ПРОБЛЕМЕ. II

П. Эрдёш (Будапешт)

В работе исследуется проблема о нахождении, при данном n, наименьшего числа $m(n)$, для которого существуют множества $A_1, \ldots, A_{m(n)}$, каждое из n элементов и такие, что выбирая из них произвольно по одному элементу, полученное множество всегда содержит хотя бы одно из множеств $A_1, \ldots, A_{m(n)}$. Главным результатом работы является доказательство оценки $m(n) < n^2 2^{n+1}$.

ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ И МОНОТОННОСТИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

К. М. Дас (Нью-Дельхи, Индия)

В первой части работы исследуются решения нелинейных дифференциальных уравнений вида (1). Если функции $F_1(u, x)$ и $F_2(v, x)$, фигурирующие в уравнениях (5) и (6), удовлетворяют известным условиям, то имеют место некоторые соотношения качественного типа между решениями этих двух уравнений. Можно исследовать также решения уравнения (1) в случае монотонности $F(y, x)$ как функции от x. Полученные результаты обобщают теоремы Э. Макаи и И. Бихари о сравнении и монотонности для линейных, соотв. для специальных нелинейных дифференциальных уравнений.

Мур и Нехари обнаружили связь между экстремальной функцией функционала (4) и решением дифференциального уравнения (3), выделенным с помощью граничных условий $y(a) = y'(b) = 0$. Во второй части настоящей работы рассматриваются решения уравнения (3), выполняющие начальные условия известного типа, и доказывается одна теорема монотонности для функционала (4).

ELEMENTARE BESTIMMUNG DER KEGELSCHNITTE IN DER HYPERBOLISCHEN GEOMETRIE

Von

K. FLADT (Calw, Deutschland)

(*Vorgelegt von* G. HAJÓS)

1. Sind

$$(1)\qquad f(x|x)\equiv\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}x_ix_k,\quad g(x|x)\equiv\sum_{i,k=1}^{3} b_{ik}x_ix_k \qquad (a_{ki}=a_{ik},\ b_{ki}=b_{ik})$$

zwei nicht zerfallende Kegelschnitte, so kann man ihre Schnittpunkte auf folgende Weise finden.

Jeder Schnittpunkt von $f=0$ und $g=0$ liegt auch auf jedem Kegelschnitt des sog. *Kegelschnittbüschels*

$$(2)\qquad f-\lambda g=0.$$

Die Bedingung, daß ein Kegelschnitt des Büschels zerfällt, ist das Verschwinden der Determinante Δ der Form $f-\lambda g\equiv\sum_{i,k}^{1\text{ bis }3}(a_{ik}-\lambda b_{ik})x_ix_k$ nämlich

$$(3)\qquad \Delta(\lambda)\equiv\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda b_{11} & a_{12}-\lambda b_{12} & a_{13}-\lambda b_{13}\\ a_{21}-\lambda b_{21} & a_{22}-\lambda b_{22} & a_{23}-\lambda b_{23}\\ a_{31}-\lambda b_{31} & a_{32}-\lambda b_{32} & a_{33}-\lambda b_{33}\end{vmatrix}=0.$$

Für das Folgende genügt nun die Annahme des sog. *allgemeinen Falles*, daß die Gleichung 3. Grades $\Delta(\lambda)=0$ drei verschiedene Wurzeln $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ hat. Dann zerfällt $f-\lambda g=0$ in drei von einander verschiedene Geradenpaare.

$$(4)\qquad f-\lambda_1 g=(P_1x)(Q_1x)=0,$$
$$f-\lambda_2 g=(P_2x)(Q_2x)=0,\quad f-\lambda_3 g=(P_3x)(Q_3x)=0,$$

die auch keine Gerade gemeinsam haben können, denn aus $(P_1x)=(P_2x)$ würde $(\lambda_1-\lambda_2)g=(P_1x)\{(Q_2x)-(Q_1x)\}=0$ folgen, d. h. $g=0$ zerfiele.

Nun ist weiter

$$(5)\qquad f-\lambda_3 g\equiv\frac{\lambda_3-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}(f-\lambda_1 g)+\frac{\lambda_1-\lambda_3}{\lambda_1-\lambda_2}(f-\lambda_2 g)$$

und damit nach (4)

$$(6)\qquad (P_3x)(Q_3x)=\frac{\lambda_3-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}(P_1x)(Q_1x)+\frac{\lambda_1-\lambda_3}{\lambda_1-\lambda_2}(P_2x)(Q_2x).$$

Aus $(P_1x)(Q_1x)=0$ und $(P_2x)(Q_2x)=0$ folgt nun einerseits $f=0, g=0$, d. h. die 4 Schnittpunkte von P_1, Q_1; P_2, Q_2 sind die Schnittpunkte von $f=0$ und $g=0$, und andererseits $(P_3x)(Q_3x)=0$, d. h. $(P_3x)=0$ und $(Q_3x)=0$ gehen durch diese 4 Schnittpunkte. Also bilden (Fig. 1) die Geradenpaare $P_1, Q_1; P_2, Q_2; P_3, Q_3$ die 6 Seiten des vollständigen Vierecks der vier Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte.

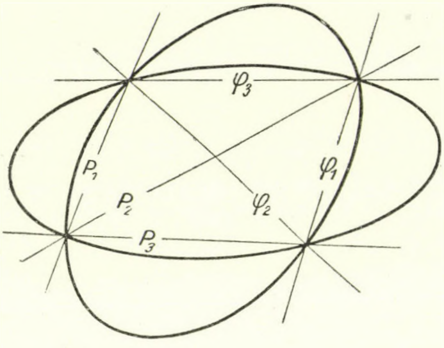


Fig. 1

Nun können bei reellen Koeffizienten a_{ik} und b_{ik} zwei der Schnittpunkte oder je zwei der Schnittpunkte konjugiert imaginär sein. Da die Verbindungsgerade zweier konjugiert imaginärer Punkte aber reell ist, so ist unter allen Umständen **ein** Paar der Geraden P_i, Q_i *reell*, das wir P, Q nennen und dessen *reeller* λ-Wert jetzt λ heiße. Aus (5) folgt nun für dieses Paar umgekehrt

$$f(x|x) \equiv (Px)(Qx)+\lambda g(x|x) = 0. \tag{7}$$

Daraus ergibt sich der für den ganzen folgenden Abschnitt grundlegende

SATZ 1. *Ist $g(x|x)=0$ irgendein Kegelschnitt, so läßt sich die Gleichung* **jedes** *andern Kegelschnitts $f(x|x)=0$ in Bezug auf $g(x|x)=0$ auf die Form* (7) *mit reellen λ, P, Q bringen.*

Dabei braucht man sich um die beiden anderen möglichen Geradenpaare, in die $f-\lambda g = 0$ zerfällt, nicht zu kümmern. Nur kann natürlich der Fall eintreten, daß $P=Q$ ist, (7) also die Gestalt

$$f(x|x) \equiv (Px)^2+\lambda g(x|x) \tag{8}$$

annimmt.

2. Wählt man insbesondere $g(x|x) \equiv (x|x) = k(x_1^2+x_2^2)+x_3^2 = 0$ als den *absoluten Kegelschnitt* (AK) der hyperbolischen Geometrie, so zeigt sich, daß jeder andere Kegelschnitt $f(x|x)=0$ der hyperbolischen Ebene die Gleichungsformen

$$f(x|x) \equiv (Px)(Qx)+\lambda(x|x) = 0, \tag{9}$$

$$f(x|x) = (Px)^2+\lambda(x|x) = 0 \tag{10}$$

erhalten kann.

Nun wird man die hyperbolischen Kegelschnitte wie die euklidischen nach ihrem Verhalten zum *absoluten Gebilde* der Ebene, also in der hyperbolischen Ebene nach ihrem Verhalten zum AK einteilen. Für diese Untersuchungen eignen sich die Gleichungen (9) und (10) besonders gut, liefern sie doch unmittelbar die *absoluten Punkte* $\left\{\begin{matrix}(x|x)=0\\(Px)=0\end{matrix}\right\}$ und $\left\{\begin{matrix}(x|x)=0\\(Qx)=0\end{matrix}\right\}$ des Kegelschnitts $f(x|x)=0$. Außerdem hängen alle vorkommenden Rechnungen von der Lösung von Gleichungen **höchstens** 2. *Grades* ab und führen die meisten geometrischen Aufgaben über Kegelschnitte von selbst auf Gleichungen der Form (9) und (10).

3. Wir wollen nun zunächst die *Arten der hyperbolischen Kegelschnitte* aus der Art der Geraden $(Px)=0$ und $(Qx)=0$ im Falle (9) und (10) bestimmen, wobei wir diesen Geraden mittels einer hyperbolischen Bewegung eine möglichst geschickte Lage zum Koordinatensystem geben. Wir beginnen mit der Gleichung (10). Die Gerade $(Px)=0$ kann den AK $\left\{\begin{matrix}\text{meiden}\\ \text{berühren}\\ \text{schneiden}\end{matrix}\right\}$. Wir wählen sie dann

im 1. Fall als Polare $x_3=0$ des Nullpunkts $0|0|1$,

im 2. Fall als absolute Tangente $\sqrt{-k}x_1-x_3 = 0$ im Punkt $1|0|\sqrt{-k}$,

im 3. Fall als Koordinatenachse $x_2=0$.

Wir haben dann:

1. Fall:

$$(x|x)-\varrho x_3^2 = 0 \tag{11}$$

stellt den *Kreis* um den Ursprung $(0|0|1)$ mit Radius σ dar, wo $C\sigma=\frac{1}{\sqrt{\varrho}}$ ist. Da $(x|x)=\varrho x_3^2$ ist, so ist der Kreis $\left\{\begin{matrix}\text{außerabsolut}\\ \text{absolut} \equiv \text{dem AK}\\ \text{innerabsolut}\end{matrix}\right\}$ für $\varrho \lesseqgtr 0$. Ist $\varrho>0$, so ist er $\left\{\begin{matrix}\text{einteilig}\\ \text{Punktkreis}\\ \text{nullteilig}\end{matrix}\right\}$ für $\varrho \lesseqgtr 1$.

2. Fall: Jetzt lautet die Gleichung, wenn die Kurve durch $(0|0|1)$ geht

$$(x|x)-(\sqrt{-k}x_1-x_3)^2 = 0 \tag{12}$$

und ist ein *Grenzkreis* $(a|b)(x|x)-(a|b)(a|x)^2 = 0$, $(a|a)=0$ mit $a = 1|0|\sqrt{-k}$, $b=1|0|0$.

3. Fall:

$$(x|x)-\varrho x_2^2 = 0 \tag{13}$$

stellt die *Abstandslinie* zu $x_2=0$ im Abstand dar, wo $S\sigma=\frac{1}{\sqrt{\sigma}}$ ist. Sie ist $\left\{\begin{matrix}\text{außerabsolut}\\ \text{absolut}\\ \text{innerabsolut}\end{matrix}\right\}$ für $\varrho \lesseqgtr 0$.

4. Wir kommen zur Gleichung (9). Hier sind zunächst drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der Schnittpunkt von $(Px)=0$ und $(Qx)=0$ $\left\{\begin{matrix}\text{innerabsolut}\\ \text{absolut}\\ \text{außerabsolut}\end{matrix}\right\}$ ist.

Im 1. Fall treffen die beiden Geraden den AK in den Ecken eines vollständigen Vierecks, dessen andere Gegenseitenpaare nicht schneidend sind, und können durch ein solches Seitenpaar ersetzt werden (Fig. 2).

Im zweiten Fall können beide Geraden innerabsolut oder die eine innerabsolut, die andere absolut sein. Im 1. Unterfall können die Geraden durch die Tangente in ihrem absoluten Schnittpunkte und die Verbindungsgerade ihrer beiden übrigen absoluten Punkte ersetzt werden (Fig. 3a und b).

Im 3. Fall bleiben dann nur noch die drei Unterfälle übrig, daß die eine Gerade außerabsolut, die andere $\left\{\begin{matrix}\text{außerabsolut}\\ \text{absolut}\\ \text{innerabsolut}\end{matrix}\right\}$ ist (Fig. 4a bis c).

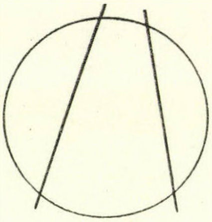


Fig. 2
1. Fall

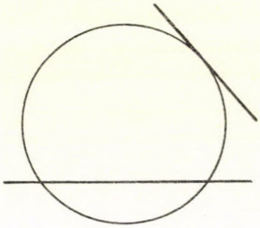


Fig. 3a
2. Fall
1. Unterfall

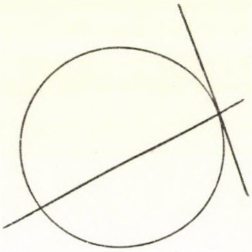


Fig. 3b
2. Fall
2. Unterfall

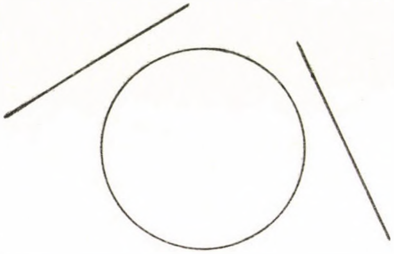


Fig. 4a
3. Fall
1. Unterfall

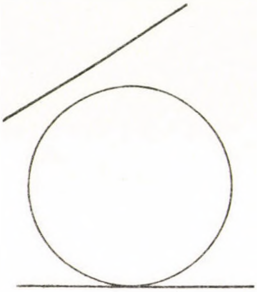


Fig. 4b
3. Fall
2. Unterfall

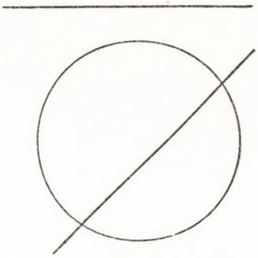


Fig. 4c
3. Fall
3. Unterfall

5. Für die rechnerische Behandlung nehmen wir die Fälle so zusammen:

(1.) 1. Fall und 3. Fall, 1. Unterfall,
(2.) 3. Fall, 3. Unterfall,
(3.) 2. Fall, 1. Unterfall und 3. Fall, 2. Unterfall,
(4.) 2. Fall, 2. Unterfall.

(1.) Durch eine Bewegung gehen $(Px)=0$ und $(Qx)=0$ in zwei zur Achse $x_2=0$ senkrechte und zur Achse $x_1=0$ symmetrische Geraden $x_1 \mp cx_3 = 0$ über, so daß (10) die Form

$$x_1^2 - c^2 x_3^2 + \lambda(x|x) = 0 \tag{15a}$$

annimmt und die beiden Fälle eintreten, je nachdem $1+kc^2 \gtrless 0$ ist.

(2.) Durch eine Bewegung gehen $(Px)=0$ und $(Qx)=0$ in zwei zur Achse $x_2=0$ senkrechte Geraden $x_1 - cx_3 = 0$ und $x_1 - c'x_3 = 0$ über, so daß $1+kc^2>0$, $1+kc'^2<0$ ist und (10) die Form

$$(x_1 - cx_3)(x - c'x_3) + \lambda(x|x) = 0 \tag{16a}$$

annimmt.

(3.) Durch eine Bewegung geht die eine Gerade in die absolute Tangente $\sqrt{-k}\,x_1 - x_3 = 0$, die andere in die Gerade $x_1 - cx_3 = 0$ über, so daß (10) die Form

$$(x_1 - cx_3)(\sqrt{-k}\,x_1 - x_3) + \lambda\sqrt{-k}\,(x|x) = 0 \tag{17a}$$

annimmt und die beiden Fälle eintreten, je nachdem $1+kc^2 \gtrless 0$ ist. (17a) geht aus (16a) mit $c' = \dfrac{1}{\sqrt{-k}}$ hervor.

(4.) Hier wählen wir die eine Gerade als Koordinatenachse $x_2=0$, die andere als absolute Tangente $\sqrt{-k}\,x_1 - x_3 = 0$ und erhalten für (10) die Form

$$x_2(\sqrt{-k}\,x_1 - x_3) + \lambda(x|x) = 0. \tag{18a}$$

Wir werden sehen, daß die 4 Gleichungen (15a) bis (18a) der Reihe nach die *Mittelpunktskegelschnitte*, die *Semihyperbeln*, die *Parabeln* und die sog. *oskulierende Parabel* darstellen.

6. (1.) Im Falle $1+kc^2<0$ kann man zeigen, daß (15a) genau vier verschiedene Kegelschnitte darstellen kann. Man kann (15a) umformen in

$$x_2^2 + \frac{1+kc^2}{k}\,x_3^2 - \frac{1+k\lambda}{k}\,(x|x) = 0. \tag{15a$'$}$$

Hier ist $\dfrac{kc^2+1}{k} > 0$ und daher folgt wegen

$$(x|x) = \frac{k}{1+\lambda k}\left(x_2^2 + \frac{kc^2+1}{k}\,x_3^2\right),$$

also $(x|x) \lesseqgtr 0$, je nachdem $\dfrac{1}{\dfrac{1}{k}+\lambda} \lesseqgtr 0$, d. h. $\lambda \lesseqgtr -\dfrac{1}{k}$ ist. Im $\left\{\begin{matrix}1.\\2.\end{matrix}\right\}$ Falle sind alle Punkte der Kurve $\begin{Bmatrix}\text{außer-}\\ \text{inner-}\end{Bmatrix}$ absolut. Schreibt man (15a) in der Form

$$\left(\frac{1}{k\lambda}+1\right)x_1^2+x_2^2-\frac{1}{k}\left(\frac{c^2}{\lambda}-1\right)x_3^2=0 \tag{15a$''$}$$

und ist $\frac{1}{\lambda k}+1>0$ und $\frac{c^2}{\lambda}-1>0$, d. h. $-\frac{1}{k}<\lambda<c^2$, so hat man eine innerabsolute Ellipse ohne reelle Punkte, d. h. eine *nullteilige Ellipse*. Beschränkt man den Begriff der innerabsoluten Ellipse auf die einteiligen, so ist für sie $-\frac{1}{k}<c^2<\lambda$, für die außerabsolute aber $\lambda<-\frac{1}{k}<c^2$. Wir werden aber in Nr. 7 sehen, daß es zweierlei außerabsolute Ellipsen gibt und dann erst das Ergebnis zusammenfassen.

7. Um (15a) im Falle $1+kc^2>0$, (16a) bis (18a) untersuchen zu können, muß man aber nicht nur die Art der absoluten Punkte, die der Schnittpunkte der Kurven mit dem AK, sondern auch die Art der absoluten Tangenten, d. h. der gemeinsamen Tangenten der Kurven mit dem AK kennen. Wir brauchen also die *Klassengleichung* der Kurve (15a). Sie lautet

$$\text{(15b)}\quad\left\{\begin{array}{l} k\lambda(\lambda-c^2)X_1^2+(1+k\lambda)(\lambda-c^2)X_2^2+k\lambda(1+k\lambda)X_3^2=0\\ \text{oder}\\ \lambda(1+kc^2)X_1^2+c^2(1+k\lambda)X_2^2-\lambda(1+k\lambda)(X|X)=0,\end{array}\right.$$

wo $(X|X)\equiv X_1^2+X_2^2+kX_3^2$ ist und damit sind die absoluten Tangenten

$$\varrho X_1=\delta c\sqrt{-k-\frac{1}{\lambda}},\quad \varrho X_2=\sqrt{1+kc^2},\quad \varrho X_3=\varepsilon\sqrt{-\frac{1}{k}\left(1-\frac{c^2}{\lambda}\right)}, \tag{19b}$$

wenn $1+kc^2>0$,

$$\varrho X_1=\delta c\sqrt{k+\frac{1}{\lambda}},\quad \varrho X_2=\sqrt{-(1+kc^2)},\quad \varrho X_3=\varepsilon\sqrt{-\frac{1}{k}\left(\frac{c^2}{\lambda}-1\right)}, \tag{20b}$$

wenn $1+kc^2<0$ ist.

Mittels (20b) zeigen wir, daß es zweierlei außerabsolute Ellipsen gibt. Die Tangenten (20b) sind nämlich *reell* für $k+\frac{1}{\lambda}>0$, $\frac{c^2}{\lambda}-1>0$, d. h. $0<\lambda<-\frac{1}{k}<c^2$. Sie sind *imaginär*

für $k+\frac{1}{\lambda}<0$, $\frac{c^2}{\lambda}-1>0$, d. h. $\lambda<0<-\frac{1}{k}<c^2$ oder $-\frac{1}{k}<\lambda<c^2$,

für $k+\frac{1}{\lambda}<0$, $\frac{c^2}{\lambda}-1<0$, d. h. $-\frac{1}{k}<c^2<\lambda$, und

für $k+\frac{1}{\lambda}>0$, $\frac{c^2}{\lambda}-1<0$, d. h. $c^2<\lambda<-\frac{1}{k}$,

was der Bedingung $1+kc^2<0$ widerspricht. Damit hat man den

SATZ 2. *Die Kurve* (15a) $x_1^2 - c^2 x_3^2 + \lambda(x|x) = 0$ *stellt eine*

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{innerabsolute Ellipse oder Ellipse i. e. S.} \\ \textit{nullteilige} \\ \textit{außerabsolute ausschließende} \\ \textit{außerabsolute umschließende} \end{array}\right\}$$

Ellipse dar, wenn

$$\left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{k} < c^2 < \lambda \\[2ex] -\frac{1}{k} < \lambda < c^2 \\[2ex] 0 < \lambda < -\frac{1}{k} < c^2 \\[2ex] \lambda < 0 < -\frac{1}{k} < c^2 \end{array}\right\}$$

ist.

8. Aus (19b) aber folgt, daß alle 4 absoluten Tangenten für $c^2 < -\frac{1}{k} < \lambda$ *reell*, für $c^2 < \lambda < -\frac{1}{k}$ oder $\lambda < c^2 < -\frac{1}{k}$ aber imaginär sind, wenn $1 + kc^2 > 0$ ist. Man hat den

SATZ 3. *Die Kurve* (15a) $x_1^2 - c^2 x_3^2 + \lambda(x|x) = 0$ *stellt für* $1 + kc^2 > 0$, $c^2 < -\frac{1}{k} < \lambda$ *eine konkave Hyperbel mit* 4 *reellen absoluten Punkten und* 4 *reellen absoluten Tangenten dar, für* $1 + kc^2 > 0$, $c^2 < \lambda c - \frac{1}{k}$ *oder* $\lambda < c^2 < -\frac{1}{k}$ *eine konvexe Hyperbel mit* 4 *reellen absoluten Punkten und* 4 *imaginären absoluten Tangenten.*

9. Wir gehen weiter zur Kurve mit der Gleichung

$$(16a) \qquad (x_1 - cx_3)(x_1 - c'x_3) + \lambda(x|x) = 0 \left\{\begin{array}{l} 1 + kc^2 > 0, \\ 1 + kc'^2 < 0. \end{array}\right.$$

Ihre Schnittpunkte mit der Achse $x_2 = 0$ sind

$$\varrho x_1 = c + c' \pm W, \quad \varrho x_2 = 0, \quad \varrho x_3 = 2(1 + k\lambda),$$

wo

$$W^2 = (c + c')^2 - 4(1 + k\lambda)(cc' + \lambda) =$$

$$= \left(2\sqrt{-k}\,\lambda - \frac{1 + kcc'}{\sqrt{-k}}\right)^2 + \frac{(1 + kc^2)(k + kc'^2)}{k}, \text{ also } > 0.$$

Die beiden Punkte sind also *reell*. Weiter ist für sie

$$\begin{aligned}\varrho^2(kx_1^2+x_3^2) = \varrho^2(x|x) &= k(c+c'\pm W)^2+4(1+k\lambda)^2 = \\ &= k(c+c')^2+4(1+k\lambda)^2+kW^2\pm 2k(c+c')W = \\ = 2\{k(c+c')^2-2k(1+k\lambda)(cc'+\lambda)&+2(1+k\lambda)^2\pm k(c+c')W\} = \\ &= 2(A\pm k(c+c')W).\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}&\{A+k(c+c')W\}\{A-k(c+c')W\} = \\ &= A^2-k^2(c+c')^2W^2 = 4(1+k\lambda)^2(1+kc^2)(1+kc'^2)<0\end{aligned}$$

also haben $A+k(c+c')W$ und $A-k(C+c')W$ verschiedene Vorzeichen. Der eine Schnittpunkt der Kurve mit der Achse $x_2=0$ ist außerabsolut, der andere innerabsolut. Durch eine Bewegung legen wir den letzteren in den Ursprung, d. h. wir wählen in (16a) $\lambda = -cc'$. Dann lautet die Kurvengleichung

$$(x_1-cx_3)(x_1-c'x_3)-cc'(x|x) = 0\begin{cases}1+kc^2>0,\\ 1+kc'^2<0,\end{cases} \tag{16a'}$$

oder auch

$$(1-kcc')x_1^2-kcc'x_2^2-(c+c')x_1x_3 = 0.$$

(16a') hat die Klassengleichung

$$4kcc'(c+c')X_1X_3+(c+c')^2X_2^2+4kcc'(1-kcc')X_3^2 = 0 \tag{16b}$$

oder

$$\{(c+c')X_1-2kcc'X_3\}^2+k(c-c')^2X_3^2-(c+c')(X|X) = 0$$

und die 4 absoluten Tangenten

$$\varrho X_1 = 2kcc'+\delta\sqrt{-k}(c-c'),\quad \varrho X_2 = \pm 2\sqrt{-k}\sqrt{cc'(1+\delta\sqrt{-k}c)(1-\delta\sqrt{-k}c')},$$

$$\varrho X_3 = c+c'.$$

$$\text{Für}\quad \delta = +1\quad \text{sei}\quad cc'(1+\sqrt{-k}c)(1-\sqrt{-k}c') = A,$$

$$\text{für}\quad \delta = -1\quad \text{sei}\quad cc'(1-\sqrt{-k}c)(1+\sqrt{-k}c') = B.$$

Dann ist $AB = c^2c'^2(1+kc^2)(1+kc'^2)<0$, d. h. A und B haben verschiedene Vorzeichen.

SATZ 4. *Die Kurve* (16a) *hat zwei reelle und zwei imaginäre absolute Tangenten, wie sie zwei reelle und zwei imaginäre absolute Punkte besitzt. Sie heißt Semihyperbel.*

10. Wir kommen zur Gleichung

$$(x_1-cx_3)(\sqrt{-k}x_1-x_3)+\lambda\sqrt{-k}(x|x) = 0. \tag{17a}$$

(17a) geht aus (16a) mit $c' = \dfrac{1}{\sqrt{-k}}$ hervor.

Wir entnehmen also aus 9 als 2. Schnittpunkt der Kurve mit der Achse $x_2=0$ den Punkt $c+\sqrt{-k}\lambda|o|1+k\lambda$. Er ist $\left\{\begin{matrix}\text{inner-}\\ \text{außer-}\end{matrix}\right\}$ absolut für $(1+\sqrt{-k}c)\cdot(1-\sqrt{-k}c+2k\lambda)\gtrless 0$. Ist er *innerabsolut*, so legen wir ihn in den Ursprung und erhalten als Gleichung mit $\lambda\sqrt{-k}=-c$

$$(x_1-cx_3)\left(\sqrt{-k}\,x_1-x_3\right)-c(x|x)=0 \tag{17a$_1$}$$

oder

$$\left(1+\sqrt{-k}\,c\right)\left(\sqrt{-k}\,x_1-x_3\right)x_1-kcx_2^2=0.$$

Ist er *außerabsolut*, so lautet seine absolute Polare

$$k\left(c+\sqrt{-k}\,\lambda\right)x_1+1+k\lambda=0,$$

und diese geht durch den Ursprung, wenn $\lambda=-\frac{1}{k}$ ist. Die Kurvengleichung wird dann

$$\sqrt{-k}\,(x_1-cx_3)\left(\sqrt{-k}\,x_1-x_3\right)+(x|x)=0 \tag{17a$_2$}$$

oder

$$\left(1+c\sqrt{-k}\right)\left(\sqrt{-k}\,x_1-x_3\right)x_3-kx_2^2=0.$$

$(17a_1)$ und $(17a_2)$ besitzen folgende Klassengleichungen:

$$4kc\left(X_1+\sqrt{-k}\,X_3\right)X_3+\left(\sqrt{-k}\,c+1\right)X_2^2=0 \tag{17b$_1$}$$

oder

$$\left(X_1+\sqrt{-k}\,X_3\right)\left\{\left(1+\sqrt{-k}\,c\right)X_1-\left(3kc+\sqrt{-k}\right)X_3\right\}-\left(1+\sqrt{-k}\,c\right)(X|X)=0$$

und

$$4X_1\left(X_1+\sqrt{-k}\,X_3\right)+\left(1+c\sqrt{-k}\right)X_2^2=0 \tag{17b$_2$}$$

oder

$$\left(X_1+\sqrt{-k}\,X_3\right)\left\{\left(3-c\sqrt{-k}\right)X_1+\sqrt{-k}\left(1+c\sqrt{-k}\right)X_3\right\}\left(1+c\sqrt{-k}\right)X_2^2=0$$

und außer $\sqrt{-k}\,x_1-x_3=0$ die absoluten Tangenten

$$\varrho X_1=3kc+\sqrt{-k},\quad \varrho X_2=\pm 2\sqrt{-k}\sqrt{2\sqrt{-k}\,c\left(1-\sqrt{-k}\,c\right)},\quad \varrho X_3=1+\sqrt{-k}\,c$$

bzw.

$$\varrho X_1=\sqrt{-k}\left(1+c\sqrt{-k}\right),\quad \varrho X_2=\pm 2\sqrt{-k}\sqrt{2\left(1-\sqrt{-k}\,c\right)},\quad \varrho X_3=c\sqrt{-k}-3.$$

Diejenigen von $(17b_1)$ sind

reell, wenn $0<c<\frac{1}{\sqrt{-k}}$, $1+kc^2>0$ ist,

imaginär, wenn $c<0$, $1+kc^2\lesseqgtr 0$ oder $c>\frac{1}{\sqrt{-k}}$, $1+kc^2<0$ ist.

Diejenigen von ($17b_2$) sind

$$\textit{reell}, \quad \text{wenn} \quad c<\frac{1}{\sqrt{-k}}, \quad 1+kc^2>0 \quad \text{oder} \quad c<0, \quad 1+kc^2 \lesseqgtr 0$$

$$\textit{imaginär}, \quad \text{wenn} \quad c>\frac{1}{\sqrt{-k}}, \quad 1+kc^2<0 \quad \text{ist.}$$

Die Kurven heißen *Parabeln*. Man hat die Sätze

SATZ 5. *Die Parabeln* (17a) *haben außer dem Punkt* $1|0|\sqrt{-k}$ *und der Tangente* $\sqrt{-k}x_1-x_3=0$, *die doppelt zählen, noch*

2 reelle absolute Punkte und 2 reelle absolute Tangenten

$$\textit{für} \quad 1+kc^2>0, \quad 0<c<\frac{1}{\sqrt{-k}},$$

2 reelle absolute Punkte und 2 imaginäre absolute Tangenten

$$\textit{für} \quad 1+kc^2>0, \quad c<0,$$

2 imaginäre absolute Punkte und 2 imaginäre absolute Tangenten

$$\textit{für} \quad 1+kc^2<0, \quad c>\frac{1}{\sqrt{-k}} \quad \textit{oder auch} \quad c\to\infty.$$

Sie heißen *konkave hyperbolische Parabeln*, *konvexe hyperbolische Parabeln*, *elliptische Parabeln*.

SATZ 6. *Die Parabeln* ($17a_2$) *haben außer dem Punkt* $1|0|\sqrt{-k}$ *und der Tangente* $\sqrt{-k}x_1-x_3=0$, *die doppelt zählen, noch*

2 reelle absolute Punkte und 2 reelle absolute Tangenten

$$\textit{für} \quad 1+kc^2>0, \quad c<\frac{1}{\sqrt{-k}},$$

2 imaginäre absolute Punkte und 2 reelle absolute Tangenten

$$\textit{für} \quad 1+kc^2>0, \quad c>\frac{1}{\sqrt{-k}},$$

2 imaginäre absolute Punkte und 2 imaginäre absolute Tangenten

$$\textit{für} \quad 1+kc^2<0, \quad c<0.$$

Sie heißen *zweiteilige Parabeln*, *außerabsolute*, *ausschließende Parabeln*, *außerabsolute*, *umschließende Parabeln*.

11. Wir kommen zur letzten Gleichung

$$(\sqrt{-k}x_1-x_3)x_2+\lambda(x|x)=0. \tag{18a}$$

(18a) hat die Klassengleichung

(18b) $$(X_1+\sqrt{-k}\,X_3)(X_1+\sqrt{-k}\,X_3+4\sqrt{-k}\,\lambda X_2)-4k\lambda^2(X|X)=0$$

und außer $\sqrt{-k}\,x_1-x_3=0$ die absolute Tangente

$$\varrho X_1=-\sqrt{-k}(1+16k\lambda^2),\quad \varrho X_2=8k\lambda,\quad \varrho X_3=1+16k\lambda.$$

Die Kurve heißt *oskulierende Parabel*, da sie den AK in $1|0|\sqrt{-k}$ dreifach berührt. Dies zeigt man so:

Der AK $(x|x)=0$ hat die Parameterdarstellung

(✳) $$\varrho x_1=\lambda^2-\mu^2,\quad \varrho x_2=2\lambda\mu,\quad \varrho x_3=\sqrt{-k}(\lambda^2+\mu^2).$$

Mit (✳) wird (18a) zu $-4\sqrt{-k}\lambda\mu^3=0$, d. h. $\lambda=0$ oder $\mu^3=0$ $-1|0|\sqrt{-k}$ ist einfach zählender, $1|0|\sqrt{-k}$ dreifach zählender Schnittpunkt.

Es ist eine nützliche Übung, die hyperbolischen Kegelschnitte im euklidischen Modell zu zeichnen, in dem der AK wie in den Fig. 2 bis 4 durch einen Kreis dargestellt wird.

(Eingegangen am 25. Oktober 1962.)

MAJORATION DU GRADIENT DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION $\Delta u - au'_t = f$. II*

Par

G. ADLER (Budapest)

(*Présenté par* A. RÉNYI)

§ 4. Majoration du gradient relative à l'équation $\Delta u - au'_t = 0$

1. Fonctions auxiliaires. Dans ce paragraphe U_n, V_n^α et Z_n $(n=2, 3, \ldots; \alpha>0)$ signifierons des solutions de l'équation (3), où l'indice n désigne la dimension du domaine de définition. (r, φ), (r, φ, ϑ) et $(r, \varphi, \vartheta, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-3})$ $(n \geqq 4)$ signifient les coordonnées introduites dans la section 1 du § 3.

Dans cette section 1, ω signifie un nombre arbitraire satisfaisant à la condition $0<\omega<\pi$. Dans la section 2 B) nous introduirons pour ω une restriction ultérieure.

Les valeurs initiales et les valeurs aux limites des fonctions U_n, V_n^α et Z_n sont les suivantes:

$$U_2(r, \varphi, t) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad t=0, \quad 0 \leqq r < \varrho, \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi, \\ 1, & \text{si} \quad 0 \leqq |\varphi| < \omega \\ 0, & \text{si} \quad \omega < |\varphi| \leqq \pi \end{cases} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \; r=\varrho, \quad t>0;$$

$$U_n(r, \varphi, \vartheta, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-3}, t) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{si} \quad t=0, \quad 0 \leqq r < \varrho, \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \\ & \qquad 0 \leqq \vartheta \leqq \pi, \quad 0 \leqq \vartheta_i \leqq \pi \qquad (i=1, \ldots, n-3), \\ 1, & \text{si} \quad 0 \leqq \vartheta < \omega \\ 0, & \text{si} \quad \omega < \vartheta \leqq \pi \end{cases} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} t>0, \quad r=\varrho, \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \\ 0 \leqq \vartheta_i \leqq \pi \qquad (i=1, \ldots, n-3); \end{matrix}$$

$$V_2^\alpha(r, \varphi, t) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad t=0, \quad 0 \leqq r < \varrho, \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi, \\ (\sin \varphi)^{1+\alpha}, & \text{si} \quad 0 \leqq |\varphi| < \omega \\ 0, & \text{si} \quad \omega < |\varphi| \leqq \pi \end{cases} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \; t>0, \quad r=\varrho;$$

$$V_n^\alpha(r, \varphi, \vartheta, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-3}, t) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{si} \quad t=0, \quad 0 \leqq r < \varrho, \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi, \\ & \qquad 0 \leqq \vartheta \leqq \pi, \quad 0 \leqq \vartheta_i \leqq \pi \qquad (i=1, \ldots, n-3), \\ (\sin \vartheta)^{1+\alpha}, & \text{si} \quad 0 \leqq \vartheta < \omega \\ 0, & \text{si} \quad \omega < \vartheta \leqq \pi \end{cases} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} t>0, \quad r=\varrho, \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi, \\ 0 \leqq \vartheta_i \leqq \pi \qquad (i=1, \ldots, n-3); \end{matrix}$$

---

* Ce travail constitue la deuxième partie d'un article divisé, pour raisons techniques, en deux parties. La numération des paragraphes et des formules continue celle de la partie I (voir: périodique présent, **15** (1964), p. 137–152).

$$Z_2(r,\varphi,t)=\begin{cases}0, & \text{si} \quad t=0, \quad 0\leqq r<\varrho, \quad 0\leqq\varphi\leqq 2\pi,\\ t, & \text{si} \quad 0\leqq|\varphi|<\omega \\ 0, & \text{si} \quad \omega<|\varphi|\leqq\pi\end{cases}\Bigg\} \quad t>0, \quad r=\varrho;$$

$$Z_n(r,\varphi,\vartheta,\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{n-3},t)=$$

$$=\begin{cases}0, & \text{si} \quad t=0, \quad 0\leqq r<\varrho, \quad 0\leqq\varphi\leqq 2\pi,\\ & \qquad 0\leqq\vartheta\leqq\pi, \quad 0\leqq\vartheta_i\leqq\pi \qquad (i=1,\ldots,n-3),\\ t, & \text{si} \quad 0\leqq\vartheta<\omega \Big\} \quad t>0, \quad r=\varrho, \quad 0\leqq\varphi\leqq 2\pi,\\ 0, & \text{si} \quad \omega<\vartheta\leqq\pi \Big\} \qquad 0\leqq\vartheta_i\leqq\pi \qquad (i=1,\ldots,n-3).\end{cases}$$

Les définitions ci-dessus s'étendent pour $n=3$ en supprimant partout les variables ϑ_i.

Pour ces fonctions U_n, V_n^α et Z_n les majorations suivantes sont valables:

$$0<\frac{\partial U_n(r=\varrho,\vartheta=0,t>0)}{\partial r}<\frac{A(n)}{\varrho\omega}+D(n)\sqrt{\frac{a}{t}} \qquad (n=3,4,\ldots),$$

$$0<-\frac{\partial V_n^\alpha(r=\varrho,\vartheta=0,t>0)}{\partial r}<B(n)\frac{\omega^\alpha}{\varrho\alpha} \qquad (n=3,4,\ldots),$$

$$0<\frac{\partial Z_n(r=\varrho,\vartheta=0,t>0)}{\partial r}<\frac{A(n)}{\varrho\omega}t+2D(n)\sqrt{a}\sqrt{t} \qquad (n=3,4,\ldots).$$

Ces majorations s'étendent pour $n=2$ en remplaçant ϑ par φ. Les constantes $A(n)$ et $B(n)$ sont identiques avec les constantes définies dans la section 1 du § 3. $D(n)$ est également une constante qui ne dépend que du nombre de dimensions, dont la valeur pour $n=2$ et $n=3$ est relativement facile à déterminer:

$$D(2)=D(3)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

2. Théorèmes

A) Condition aux limites homogène, condition initiale inhomogène

THÉORÈME 3. *Supposons que*

1° *le domaine* Ω *soit convexe;*

2° *la fonction* $u(P,t)$

  (i) *satisfasse à l'équation* (3) *dans* $\Omega\times(0<t<\infty)$,

  (ii) *admette des premières dérivées continues dans* $(\Omega+\bar{\Sigma})\times(0\leqq t<\infty)$,

  (iii) $u(P,t)=0$ *pour* $(P,t)\in\bar{\Sigma}\times(0\leqq t<\infty)$,

  (iv) $|\mathrm{grad}_P\, u(P,0)|\leqq M$ *pour* $P\in\Omega+\bar{\Sigma}$,
  $|\mathrm{grad}_P\, u(P,t)|\leqq M$ *pour* $(P,t)\in(\bar{\Sigma}-\Sigma)\times(0\leqq t<\infty)$.

Alors pour chaque point $(P,t)\in(\Omega+\Sigma)\times(0\leqq t<\infty)$ *on a*

$$|\mathrm{grad}_P\, u(P,t)|\leqq M. \tag{10}$$

DÉMONSTRATION. En vertu du principe du maximum valable pour le gradient des solutions de l'équation (3) (voir [1]) il suffit de vérifier l'assertion (10) pour les points $P \in \Sigma$.

Soit $P_0 \in \Sigma$ un point arbitraire de la frontière Σ. Soit Φ la frontière de l'ensemble des points des demi-droites issues du point P_0 et ayant au moins un point commun avec le domaine Ω. (Φ est la frontière de l'angle dièdre le plus étroit, contenant Ω, dont P_0 est le sommet.) Φ est une configuration à $(n-1)$-dimensions. On distingue deux cas:

α) Φ est un hyperplan à $(n-1)$-dimensions, c'est-à-dire il est le plan tangent de la surface Σ au point P_0,

β) Φ est une nappe à $(n-1)$-dimensions d'un cône, ayant P_0 pour sommet.

Le cas *β)* est facile à traiter. Dans ce cas il existe n directions $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, issues de P_0 et situées dans Φ (donc tangentes à Σ), lesquelles déterminent l'espace à n-dimensions. Ainsi, dans ce cas, en conséquence de la condition 2° (iii),

$$\frac{\partial u(P_0, t)}{\partial \gamma_i} = 0 \qquad (t \geqq 0) \qquad (i = 1, \dots, n),$$

donc

$$|\mathrm{grad}\, u(P_0, t)| = 0 \qquad (t \geqq 0).$$

Dans le cas *α)*, sans restriction de la généralité, soit le point P_0 l'origine des coordonnées, et Φ le plan $x_1 = 0$. Supposons Ω situé dans le demi-espace $x_1 > 0$. En vertu des conditions 2° (iii) et 2° (iv)

$$Mx_1 \geqq |u(P, 0)| \qquad P \in \Omega + \bar{\Sigma},$$

$$Mx_1 \geqq |u(P, t)| \qquad P \in \bar{\Sigma},\ t > 0.$$

Étant donné que la fonction Mx_1 satisfait aussi à l'équation (3), en raison du principe du maximum relatif à l'équation en question, il résulte:

$$\text{11)} \qquad Mx_1 \geqq |u(P, t)| \qquad (P, t) \in \Omega \times (0 < t < \infty).$$

En vertu de la condition 2° (iii), comme le plan $x_1 = 0$ est tangent à Σ au point $P_0(0, \dots, 0)$, on a

$$\frac{\partial u(P_0, t)}{\partial x_i} = 0 \qquad (t \geqq 0) \qquad (i = 2, \dots, n),$$

et ainsi

$$|\mathrm{grad}_P\, u(P_0, t)| = \left| \frac{\partial u(P_0, t)}{\partial x_1} \right| \qquad (t \geqq 0).$$

D'où, compte tenu de la condition $u(P_0, t) = 0$ et de l'inégalité (11), on obtient

$$|\mathrm{grad}_P\, u(P_0, t)| \leqq |\mathrm{grad}\,(Mx_1)| = M.$$

C. q. f. d.

Le théorème suivant, pour $n = 1$, serait identique au Théorème 3, par conséquent nous ferons abstraction de ce cas spécial dans le théorème suivant.

THÉORÈME 4. *Supposons que* (en nous limitant aux cas $n \geqq 2$)

1° *le domaine* Ω *soit borné, et* $\Omega \in \mathfrak{A}(\varrho)$;

2° *soit satisfaite la condition* 2° *du Théorème* 3.

Alors

$$|\mathrm{grad}_P\, u(P, t)| \leqq C_n(\varrho, d) M \qquad (P, t) \in (\Omega + \Sigma) \times (0 \leqq t < \infty),$$

où

$$C_n(\varrho, d) = \begin{cases} \dfrac{d/\varrho}{\log(1 + d/\varrho)} & (n = 2), \\ \dfrac{(n-2)\, d/\varrho}{1 - (1 + d/\varrho)^{2-n}} & (n \geqq 3). \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. En vertu de ce qui a été dit au début de la démonstration du Théorème 3, il est suffisant de vérifier notre assertion pour les points $P \in \Sigma$.

Soit P_0 un point arbitraire de la frontière Σ. Désignons par Φ la frontière de l'ensemble des points des demi-droites, partant du point P_0, lesquelles contiennent des points du domaine Ω dans un voisinage arbitrairement petit de P_0. On peut distinguer de nouveau les cas *α)* et *β)* qui figurent dans la démonstration du Théorème 3; le cas *β)* peut se traiter selon les raisonnements de ce théorème.

Dans le cas *α)* considérons l'hypersphère d'appui de rayon ϱ, appartenant au point P_0 (voir la définition de la classe $\mathfrak{A}(\varrho)$), dont le centre, sans restriction de la généralité, est l'origine. L'anneau sphérique Ψ, limité par cette sphère d'appui et par la sphère de rayon $\varrho + d$ qui lui est concentrique, contient le domaine Ω dans son intérieur. Soit $\tilde{u}(P, t)$ la solution de l'équation (3) dans Ψ satisfaisant aux conditions initiales et aux conditions aux limites suivantes:

$$\tilde{u}(x_1, \ldots, x_n, 0) = \left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} - \varrho\right] M \qquad \varrho \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \leqq \varrho + d;$$

$$\tilde{u}(x_1, \ldots, x_n, t) = 0 \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} = \varrho, \quad t > 0;$$

$$\tilde{u}(x_1, \ldots, x_n, t) = dM \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} = \varrho + d, \quad t > 0.$$

Avec ce choix des conditions initiales et des conditions aux limites, en vertu des conditions 2° (iii) et 2° (iv), de plus, en appliquant le principe du maximum, on a

$$\tilde{u}(P, t) \geqq |u(P, t)| \qquad (P, t) \in (\Omega + \Sigma) \times (0 \leqq t < \infty). \tag{12}$$

En conséquence de la condition 2° (iii) il résulte pour une direction arbitraire e tangentielle à Σ au point P_0:

$$\frac{\partial u(P_0, t)}{\partial e} = 0 \qquad (t \geqq 0).$$

De là, d'après $u(P_0, t) = 0$, on obtient

$$|\mathrm{grad}_P\, u(P_0, t)| \leqq \frac{\partial \tilde{u}(P_0, t)}{\partial \nu} \qquad (t \geqq 0)$$

de (12). Étant donné que pour $t \to \infty$ $\tilde{u}$ approche d'une manière monotone croissante la fonction harmonique

$$H(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \dfrac{dM}{\log(1+d/\varrho)} [\log(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} - \log \varrho] & (n=2), \\[2ex] \dfrac{dM}{\left(\dfrac{1}{\varrho + d}\right)^{n-2} - \left(\dfrac{1}{\varrho}\right)^{n-2}} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1-\frac{n}{2}} - \varrho^{2-n}\right] & (n \geqq 3), \end{cases}$$

enfin on obtient

$$|\mathrm{grad}_P\, u(P_0, t)| \leqq \frac{\partial H(P_0)}{\partial \nu} \equiv C_n(\varrho, d).$$

C. q. f. d.

THÉORÈME 5. *Supposons que*

1° *le domaine* Ω *soit borné et convexe,*

2° *la condition* 2° *du Théorème* 3 *soit satisfaite.*

Alors pour chaque point $(P, t) \in (\Omega + \Sigma) \times (0 \leqq t < \infty)$ *on a*

$$|\mathrm{grad}_P\, u(P, t)| < M \left(\frac{4}{\pi} + \frac{16}{ad^2}\, t\right) e^{-\frac{\pi^2}{ad^2} t}.$$

DÉMONSTRATION. Soit $P_0 \in \Sigma$ un point arbitraire de la frontière. On peut distinguer de nouveau les cas *α)* et *β)* figurant dans la démonstration du Théorème 3. Au cas *β)* on a à présent aussi

$$\mathrm{grad}_P\, u(P_0, t) = 0 \qquad (t \geqq 0).$$

Au cas *α)*, sans restriction de la généralité, soient plan $x_1 = 0$ le plan tangent de la surface Σ au point P_0, l'axe positif x_1 la normale intérieure de Σ. Supposons le domaine fermé $\Omega + \Sigma$ situé dans la bande infinie limitée par les plans $x_1 = 0$ et $x_1 = d$. Soit $\tilde{u}(P, t)$ la solution de l'équation (3) dans cette bande, avec les conditions initiales et aux limites suivantes:

$$\tilde{u}(x_1, \ldots, x_n, 0) = \begin{cases} M x_1 & \left(0 \leqq x_1 \leqq \dfrac{d}{2}\right), \\[2ex] M(d - x_1) & \left(\dfrac{d}{2} \leqq x_1 \leqq d\right), \end{cases}$$

$$\tilde{u}(0, x_2, \ldots, x_n, t) = \tilde{u}(d, x_2, \ldots, x_n, t) = 0 \qquad (0 \leqq t < \infty).$$

Conformément à la démonstration du Théorème 4 (voir (12)) on obtient

$$\tilde{u}(P, t) \geqq |u(P, t)| \qquad (P, t) \in (\Omega + \Sigma) \times (0 \leqq t < \infty),$$

et il en découle, avec une estimation simple, en utilisant la forme explicite de $\tilde{u}$:

$$(13) \qquad |\mathrm{grad}_P\, u(P_0, t)| \leqq \frac{\partial \tilde{u}(P_0, t)}{\partial x_1} < \frac{4}{\pi} e^{-\frac{\pi^2}{ad^2} t} M \qquad (t \geqq 0).$$

L'inégalité (13) est valable pour le cas α), ainsi que pour le cas β), donc elle est également valable pour chaque point $P_0 \in \Sigma$. Soit γ une direction arbitraire fixée. En vertu de (13)

$$\left|\frac{\partial u(P_0, t)}{\partial \gamma}\right| \leqq |\text{grad}_P \, u(P_0, t)| < \frac{4}{\pi} e^{-\frac{\pi^2}{ad^2}t} M \qquad (t \geqq 0)$$

pour chaque point $P_0 \in \Sigma$. Considérons la fonction

$$u^*(P, t) \equiv \frac{\partial u(P, t)}{\partial \gamma}.$$

Cette fonction satisfait à l'équation (3), et pour ces valeurs initiales et aux limites es inégalités suivantes sont valables:

$$|u^*(P, 0)| \leqq M \qquad P \in \Omega + \Sigma,$$

$$|u^*(P, t)| < \frac{4}{\pi} e^{-\frac{\pi^2}{ad^2}t} M \qquad (P, t) \in \Sigma \times (0 \leqq t < \infty).$$

Supposons, sans restriction de la généralité, que le domaine Ω soit situé dans l'intérieur de la bande infinie $0 \leqq x_1 \leqq d$. Soit $\tilde{\tilde{u}}(P, t)$ la solution de l'équation (3) dans cette bande avec les conditions initiales et les conditions aux limites suivantes:

$$\tilde{\tilde{u}}(x_1, \ldots, x_n, 0) = \frac{4}{\pi} M \qquad (0 \leqq x_1 \leqq d),$$

$$\tilde{\tilde{u}}(0, x_2, \ldots, x_n, t) = \tilde{\tilde{u}}(d, x_2, \ldots, x_n, t) = \frac{4}{\pi} M e^{-\frac{\pi^2}{ad^2}t} \qquad (t \geqq 0).$$

Il vient du principe du maximum et de la nature monotone décroissante des valeurs aux limites de $\tilde{\tilde{u}}$, que

(14) $$\tilde{\tilde{u}}(P, t) > |u^*(P, t)| \qquad (P, t) \in \Sigma \times (0 \leqq t < \infty),$$

de plus, en vertu de $\frac{4}{\pi} > 1$,

(15) $$\tilde{\tilde{u}}(P, 0) > |u^*(P, 0)| \qquad P \in \Omega + \Sigma.$$

Il découle de (14) et de (15), encore en vertu du principe du maximum, que

$$\tilde{\tilde{u}}(P, t) > |u^*(P, t)| \qquad (P, t) \in (\Omega + \Sigma) \times (0 \leqq t < \infty).$$

On obtient aisément de la forme explicite de $\tilde{\tilde{u}}$ l'inégalité

$$\tilde{\tilde{u}}(P, t) \leqq M \left(\frac{4}{\pi} + \frac{16}{ad^2} t\right) e^{-\frac{\pi^2}{ad^2}t}.$$

En résumant nos résultats, nous obtenons:

$$\left|\frac{\partial u(P,t)}{\partial \gamma}\right| = |u^*(P,t)| < \tilde{\tilde{u}}(P,t) \leqq M\left(\frac{4}{\pi}+\frac{16}{ad^2}t\right)e^{-\frac{\pi^2}{ad^2}t}$$

$$(P,t)\in(\Omega+\Sigma)\times(0\leqq t<\infty).$$

Étant donné que γ est une direction arbitraires, il en résulte le théorème.

C. q. f. d.

Le théorème suivant ne concerne que le cas $n=3$. Au cas $n=1$ ce théorème était identique au Théorème 5. Dans les autres cas les calculs relatifs aux fonctions auxiliaires deviennent extraordinairement difficiles, ainsi nous ne nous en occuperons pas.

THÉORÈME 6. *Supposons* (en nous limitant au cas $n=3$) *que les conditions du Théorème* 4 *soient satisfaites.*

Alors pour chaque point $(P,t)\in(\Omega+\Sigma)\times(0\leqq t<\infty)$ *on a*

$$|\text{grad}_P\, u(P,t)| < M\left(1+\frac{d}{2\varrho}\right)\left(\frac{4}{\pi}+\frac{16}{ad^2}t\right)e^{-\frac{\pi^2}{ad^2}t}.$$

DÉMONSTRATION. Soit $P_0\in\Sigma$ un point arbitraire de la frontière Σ. On peut distinguer de nouveau les cas *α)* et *β)* figurant dans la démonstration du Théorème 4. Dans le cas *β)*, en vertu des résultats obtenus, on a

$$\text{grad}_P\, u(P_0,t)=0 \qquad (t\geqq 0).$$

Dans le cas *α)*, considérons l'anneau sphérique Ψ appartenant au point P_0, défini dans la démonstration du Théorème 4, dont le centre est de nouveau, sans restriction de la généralité, l'origine. Le domaine Ω est situé dans l'intérieur de cet anneau sphérique. Soit $\tilde{u}(P,t)$ la solution de l'équation (3) dans Ψ avec les conditions initiales et les conditions aux limites suivantes:

$$\tilde{u}(x_1,x_2,x_3,0)=\begin{cases}\left[\left(\sum\limits_{i=1}^{3}x_i^2\right)^{1/2}-\varrho\right]M & \varrho\leqq\left(\sum\limits_{i=1}^{3}x_i^2\right)^{1/2}\leqq\varrho+\dfrac{d}{2},\\[2ex] \left[\varrho+d-\left(\sum\limits_{i=1}^{3}x_i^2\right)^{1/2}\right]M & \varrho+\dfrac{d}{2}\leqq\left(\sum\limits_{i=1}^{3}x_i^2\right)^{1/2}\leqq\varrho+d,\end{cases}$$

$$\tilde{u}(x_1,x_2,x_3,t)=0\quad\left\{\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{3}x_i^2\right)^{1/2}&=\varrho\\ \left(\sum_{i=1}^{3}x_i^2\right)^{1/2}&=\varrho+d\end{aligned}\right\}\qquad(t\geqq 0).$$

De la forme explicite de cette fonction $\tilde{u}$, d'après le modèle des considérations relatives à la fonction $\tilde{u}$ de la démonstration du Théorème 5, on obtient:

$$|\text{grad}_P\, u(P_0,t)| \leqq \frac{\partial\tilde{u}(P_0,t)}{\partial\nu} < \frac{4}{\pi}\left(1+\frac{d}{2\varrho}\right)e^{-\frac{\pi^2}{ad^2}t}M \qquad (t\geqq 0).$$

Cette inégalité analogue à (13) est valable pour chaque point $P_0 \in \Sigma$. À partir de ce point on peut répéter la démonstration du Théorème 5 avec la seule différence que la quantité M y figurant doit être remplacée par $\left(1+\frac{d}{2\varrho}\right)M$. C. q. f. d.

B) Condition aux limites inhomogène, condition initiale homogène

THÉORÈME 7. *Supposons que*

1° $\Omega \in \mathfrak{B}(\varrho)$;

2° *la fonction* $u(P, t)$

(i) *satisfasse à l'équation* (3) *dans* $\Omega \times (0 < t \leqq T)$,

(ii) *admette des premières dérivées continues dans* $(\Omega + \bar{\Sigma}) \times (0 \leqq t \leqq T)$,

(iii) $u(P, t) = 0$ *pour* $(P, t) \in \Omega \times (t = 0)$,

(iv) *pour ses valeurs aux limites* $u(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, t)$ *l'on ait*

$$\frac{\partial u}{\partial \xi_i} \in \mathcal{H}_\varrho(\alpha, K) \qquad (0 \leqq t \leqq T) \qquad (i = 1, \ldots, n-1);$$

3° *au cas d'un Ω non borné résulte*

$$\max_{\substack{P \in \bar{\Sigma} \\ 0 \leqq t \leqq T}} |\mathrm{grad}_P\, u(P, t)| = \max_{\substack{P \in \Sigma \\ 0 \leqq t \leqq T}} |\mathrm{grad}_P\, u(P, t)|.$$

(*On suppose que* $\max\limits_{\substack{P \in \bar{\Sigma} \\ 0 \leqq t \leqq T}} |\ldots|$ *soit atteint à un point fini de* Σ.)

Alors

$$\max_{\substack{P \in \Omega + \bar{\Sigma} \\ 0 \leqq t \leqq T}} |\mathrm{grad}_P\, u(P, t)| < D(\omega, T)\, M_t(u) + D_1(\omega)\, M_1(u) + D_2(\omega)\, \omega^\alpha \varrho^\alpha \frac{K}{\alpha};$$

spécialement, si la fonction aux limites $u(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, t)$ admet des secondes dérivées continues selon les coordonnées spatiales $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$, alors

$$\max_{\substack{P \in \Omega + \bar{\Sigma} \\ 0 \leqq t \leqq T}} |\mathrm{grad}_P\, u(P, t)| < D(\omega, T)\, M_t(u) + D_1(\omega)\, M_1(u) + D_2(\omega)\, \omega \varrho M_2(u),$$

où

$$D(\omega, t) = 2D_0(\omega)\, \frac{1}{\varrho}\, t + \frac{4D(n)\sqrt{a}}{1 - 2B(n)\,\omega} \sqrt{t},$$

tandis que les autres quantités sont identiques à celles définies dans le Théorème 1 *et dans la section* 1 *du présent paragraphe.*

DÉMONSTRATION. En vertu du principe du maximum relatif au gradient des solutions de l'équation (3) (voir [1][1]) $|\mathrm{grad}_P\, u(P, t)|$ prend le maximum de ses valeurs

---

[1] Il est facile de vérifier que le théorème cité peut être étendu aussi pour un domaine Ω non-borné, si $\mathrm{grad}_P u(P, t)$ est continu sur l'ensemble $(\Omega + \bar{\Sigma}) \times (0 \leqq t \leqq T)$.

prises dans le domaine fermé $(\Omega+\bar{\Sigma})\times(0\leqq t\leqq T)$ sur la frontière totale $\bar{\Sigma}$, donc, en vertu de la condition 3°, il le prend sur Σ. Soit $(P_0, t_0)\in\Sigma\times(0<t\leqq T)$ un point tel que

$$|\operatorname{grad}_P u(P_0, t_0)| = \max_{\substack{P\in\Omega+\bar{\Sigma}\\ 0\leqq t\leqq T}} |\operatorname{grad} u(P, t)| = M.$$

On peut supposer, sans restriction de la généralité, que

$$\frac{\partial u(P_0, t)}{\partial \nu} \leqq 0 \tag{16}$$

(dans le cas contraire on peut considérer la fonction $-u(P, t)$).

Considérons l'hyperplan tangent Θ_{P_0} de la surface Σ et les hypersphères Γ_i, Γ_e de rayon ϱ appartenant au point P_0 de Σ, qui figurent dans la définition de la classe $\mathfrak{B}(\varrho)$. Nous allons définir une solution $z(P, t)$ de l'équation (3) dans Γ_i, pour laquelle

$$z(P, t_0) < u(P, t_0)$$

résulte en chaque point P intérieur à Γ_i, tandis qu'au point P_0:

$$z(P_0, t_0) = u(P_0, t_0).$$

Dans ce but considérons le système de coordonnées $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ appartenant au point P_0. (Nous rappelons que l'axe positif ξ_n coïncide avec la normale de Σ au point P_0.) Dans la sphère Γ_i nous introduisons, par la transformation utilisée dans la section 1 du § 3, respectivement les coordonnées (r, φ), (r, φ, ϑ) et $(r, \varphi, \vartheta, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-3})$. De cette manière les fonctions définies sur la surface Σ (il s'agit toujours du voisinage $\sigma_{P_0}(\varrho)$) peuvent être aussi données par les coordonnées polaires respectivement sphériques. Dans ce qui suit, nous utiliserons ensemble les deux systèmes de coordonnées (cartésiennes resp. polaires ou sphériques), comme nous l'avons fait dans la démonstration du Théorème 1; nous ferons figurer le cas échéant tous les deux dans une seule formule, si cela nous facilite l'écriture.

En considérant la variable t comme paramètre, avec un développement en série de Taylor, en utilisant le reste de Lagrange, on obtient

$$u(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, t) = u(0, \ldots, 0, t) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial u(\xi_1^*, \ldots, \xi_{n-1}^*, t)}{\partial \xi_i}\xi_i \qquad \left(\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2 \leqq \varrho^2\right), \tag{17}$$

où $\xi_i^* \in (0, \xi_i)$.

Étant donnée que $\frac{\partial u}{\partial \xi_i} \in \mathcal{H}_\varrho(\alpha, K)$, on a

$$\left|\frac{\partial u(\xi_1^*, \ldots, \xi_{n-1}^*, t)}{\partial \xi_i} - \frac{\partial u(0, \ldots, 0, t)}{\partial \xi_i}\right| \leqq K\left[\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^{*2}\right]^{\frac{\alpha}{2}} \leqq K\left[\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2\right]^{\frac{\alpha}{2}}.$$

En utilisant cette inégalité, avec les transformations utilisées dans la série des formules (7) du § 3, il découle de (17):

$$(18)\qquad \begin{aligned} u(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, t) &\geqq u(0, \ldots, 0, t) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial u(0, \ldots, 0, t)}{\partial \xi_i} \xi_i - K\sqrt{n-1}\,(\varrho \sin \vartheta)^{1+\alpha} \equiv \tilde{u}(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, t). \end{aligned}$$

Au cas de $n=2$, $|\varphi|$ figure ici au lieu de ϑ. Dans ce qui suit, pour plus de brièveté, nous n'écrirons pas les formules séparément pour les cas $n=2$ et $n=3$. Au cas de $n=2$ c'est toujours $|\varphi|$ qui figure au lieu de ϑ.

Soit $P'(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n') = P'(r, \varphi, \vartheta, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-3})$ $\left(\vartheta < \frac{\pi}{2}\right)$ le point de la surface de Γ_i pour lequel $\overline{PP'} \perp \Theta_{P_0}$, où P est un point variable de la surface Σ. On a l'inégalité suivante pour la distance $\overline{PP'}$:

$$\overline{PP'} \leqq 2\varrho(1-\cos\vartheta) \qquad \left(\vartheta \leqq \frac{\pi}{2}\right).$$

(On a besoin de l'existence de la sphère Γ_e pour pouvoir établir cette inégalité.) Ainsi, en considérant que M signifie le maximum de $|\text{grad}_P\, u|$, l'inégalité suivante est valable:

$$|u(P, t) - u(P', t)| \leqq 2\varrho(1-\cos\vartheta)\, M \leqq 2\varrho M \sin^2\vartheta \qquad \left(\vartheta \leqq \omega \leqq \frac{\pi}{2}\right).$$

De là et de (18) il résulte:

$$\begin{aligned} u(P', t) &= u(P, t) - [u(P, t) - u(P', t)] \geqq \\ &\geqq u(P, t) - 2\varrho M \sin^2\vartheta \geqq \tilde{u} - 2\varrho M \sin^2\vartheta \equiv \tilde{\tilde{u}}. \end{aligned}$$

(Nous accentuons que le domaine de définition de la fonction $\tilde{\tilde{u}}$ est la partie $0 \leqq \vartheta \leqq \omega$ de la surface de Γ_i.)

Soit t^* la racine de l'équation suivante:

$$u(P_0, t_0) - 2M_t(u)(t_0 - t^*) = \mu_2(u, t_0),$$

c'est-à-dire

$$(19)\qquad t^* = t_0 - \frac{u(P_0, t_0) - \mu_2(u, t_0)}{2M_t(u)}.$$

Nous montrons que $0 \leqq t^* < T$. Il vient de la définition de $\mu_2(u, t_0)$ que $t^* \leqq t_0 \leqq T$. L'assertion plus forte $t^* < t_0$ découle du fait que si $u(P_0, t_0) = \mu_2(u, t_0)$ était valable, alors en vertu du Théorème 1 de l'ouvrage [1] on aurait $\frac{\partial u(P_0, t_0)}{\partial \nu} > 0$, ce qui contredit la condition (16). Il résulte de la définition de $M_t(u)$ que

$$|u(P_0, t_0) - \mu_2(u, t_0)| \leqq 2t_0 M_t(u),$$

c'est pourquoi:

$$t^* \geqq t_0 - \frac{2t_0 M_t(u)}{2M_t(u)} = 0.$$

Soit V_n^0 la solution de l'équation (3) dans la sphère Γ_i avec les conditions initiales et les conditions aux limites suivantes:

$$V_n^0(r, \varphi, \vartheta, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-3}, 0) = 0 \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqq r < \varrho, & 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \\ 0 \leqq \vartheta \leqq \pi, & 0 \leqq \vartheta_i \leqq \pi \end{pmatrix},$$

$$V_n^0(\varrho, \varphi, \vartheta, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-3}, t) =$$

$$= \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial u(0, \ldots, 0, t)}{\partial \xi_i} \xi_i, & \text{si} \quad 0 \leqq \vartheta < \omega \\ 0, & \text{si} \quad \omega < \vartheta \leqq \pi \end{Bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \\ 0 \leqq \vartheta_i \leqq \pi \\ t > 0 \end{pmatrix}.$$

La fonction minorante $z(P, t)$ à construire, à l'aide des fonctions auxiliaires introduites dans la section 1 et ci-dessus, peut s'écrire sous la forme suivante:

$$z(P, t) = Z_n(P, t - t^*) \cdot 2M_t(u) + \mu_2(u, t_0) +$$
$$+ V_n^0(P, t - t^*) - K\sqrt{n-1}\, \varrho^{1+\alpha} V_n^\alpha(P, t - t^*) - 2\varrho M V_n^1(P, t - t^*).$$

Il découle de la définition de Z_n, V_n^0, V_n^α et de t^* que $z(P, t)$ satisfait à la condition initiale resp. à la condition aux limites suivantes pour $t = t^*$ respectivement pour $r = \varrho$:

$$z(r, \varphi, \vartheta, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-3}, t^*) = \mu_2(u, t_0) \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqq r < \varrho, & 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \\ 0 \leqq \vartheta \leqq \pi, & 0 \leqq \vartheta_i \leqq \pi \end{pmatrix}$$

$$z(\varrho, \varphi, \vartheta, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-3}, t) =$$

$$= \begin{Bmatrix} 2M_t(u)(t - t^*) + \mu_2(u, t_0) - u(P_0, t) + \tilde{\tilde{u}}(P, t), & \text{si} \quad 0 \leqq \vartheta < \omega \\ \mu_2(u, t_0), & \text{si} \quad \omega < \vartheta \leqq \pi \end{Bmatrix}$$

$$(0 \leqq \varphi \leqq 2\pi, \ 0 \leqq \vartheta_i \leqq \pi, \ t^* < t \leqq t_0).$$

On peut voir d'ici que dans la sphère Γ_i

1) les valeurs initiales de z sont inférieures aux valeurs de u prises pour $t = t^*$,

2) les valeurs aux limites de z (pour $t^* < t \leqq t_0$) ne sont pas supérieures aux valeurs de u prises sur la surface de la sphère Γ_i.

La proposition 1) est évidente. L'assertion 2) est aussi évidente pour $\omega < \vartheta \leqq \pi$. Considérons l'assertion 2) pour $0 \leqq \vartheta < \omega$. Vu que la fonction

$$f(t) = 2M_t(u)(t - t^*) + \mu_2(u, t_0)$$

croît plus rapidement que la fonction $|u(P_0, t)|$ (parce que $f'(t) = 2M_t(u)$), de plus, en considérant que

$$f(t_0) - u(P_0, t_0) = 0,$$

il vient

$$2M_t(u)(t - t^*) + \mu_2(u, t_0) - u(P_0, t) \leqq 0 \qquad (t^* \leqq t \leqq t_0).$$

Ainsi

$$z(\varrho, \varphi, \vartheta, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-3}, t) \leqq \tilde{\tilde{u}}(P, t) \leqq u(P, t) \qquad (0 \leqq \vartheta < \omega).$$

(Ici $P = (\varrho, \varphi, \vartheta, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-3})$.)

Par là nous avons vérifié l'assertion 1), ainsi que 2). Il découle de 1) et de 2), en vertu du principe du maximum, que pour un point intérieur arbitraire P de Γ_i on a

$$u(P, t) > z(P, t) \qquad (t^* \leqq t \leqq t_0),$$

tandis qu'au point P_0 et au moment $t = t_0$

$$u(P_0, t_0) = z(P_0, t_0).$$

Il en résulte que

$$\frac{\partial u(P_0, t_0)}{\partial \nu} \geqq \frac{\partial z(P_0, t_0)}{\partial \nu},$$

d'où, en raison de la condition (16), on obtient l'inégalité

$$\left|\frac{\partial u(P_0, t_0)}{\partial \nu}\right| \leqq \left|\frac{\partial z(P_0, t_0)}{\partial \nu}\right|. \tag{20}$$

Par antisymétrie:

$$\frac{\partial V_n^0(r = \varrho, \vartheta = 0, t)}{\partial r} = 0 \qquad (t^* \leqq t \leqq t_0).$$

Ainsi, en vertu de (20), en utilisant les inégalités données dans la partie I, on obtient:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial u(P_0, t_0)}{\partial \nu}\right| &\leqq 2M_t(u)\left|\frac{\partial Z_n(P_0, t_0 - t^*)}{\partial \nu}\right| + \\ &+ K\sqrt{n-1}\,\varrho^{1+\alpha}\left|\frac{\partial V_n^\alpha(P_0, t_0 - t^*)}{\partial \nu}\right| + 2\varrho M\left|\frac{\partial V_n^1(P_0, t_0 - t^*)}{\partial \nu}\right| < \\ &< 2M_t(u)\left[A(n)\frac{1}{\varrho\omega}(t_0 - t^*) + 2D(n)\sqrt{a}\sqrt{t_0 - t^*}\right] + \\ &+ K\sqrt{n-1}\,\varrho^{1+\alpha}B(n)\frac{\omega^\alpha}{\varrho\alpha} + 2\varrho MB(n)\frac{\omega}{\varrho} = \\ &= 2M_t(u)\left[A(n)\frac{1}{\varrho\omega}(t_0 - t^*) + 2D(n)\sqrt{a}\sqrt{t_0 - t^*}\right] + \\ &+ K\sqrt{n-1}\,\varrho^\alpha B(n)\frac{\omega^\alpha}{\alpha} + 2MB(n)\omega.\end{aligned}$$

L'inégalité suivante est valable pour M:

$$\begin{aligned}M = |\mathrm{grad}_P\, u(P_0, t_0)| \leqq \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\partial u(P_0, t_0)}{\partial \xi_i}\right)^2} + \left|\frac{\partial u(P_0, t_0)}{\partial \nu}\right| < \sqrt{n-1}\,M_1(u) + \\ + 2M_t(u)\left[A(n)\frac{1}{\varrho\omega}(t_0 - t^*) + 2D(n)\sqrt{a}\sqrt{t_0 - t^*}\right] + K\sqrt{n-1}\,B(n)\frac{\varrho^\alpha\omega^\alpha}{\alpha} + 2MB(n)\omega.\end{aligned}$$

Supposons ω si petit que la condition

$$2B(n)\omega < 1, \quad \omega < \frac{1}{2B(n)}$$

soit satisfaite à côté de la condition première $\omega \leqq \pi/2$. Alors on obtient de l'inégalité ci-dessus pour M, en remplaçant $t_0 - t^*$ par la valeur supérieure T, l'inégalité suivante :

$$M < \frac{2\left[A(n)\frac{T}{\varrho\omega} + 2D(n)\sqrt{a}\sqrt{T}\right]}{1-2B(n)\omega} M_t(u) +$$

$$+ \frac{\sqrt{n-1}}{1-2B(n)\omega} M_1(u) + \frac{B(n)\sqrt{n-1}\,\varrho^\alpha\omega^\alpha}{1-2B(n)\omega}\,\frac{K}{\alpha}.$$

Si la fonction aux limites $u(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, t)$ admet des secondes dérivées continues selon les coordonnées spatiales, alors on peut choisir pour les valeurs K et α:

$$K = M_2(u), \quad \alpha = 1,$$

et on obtient la forme spéciale de l'inégalité. C. q. f. d.

REMARQUE 1. Dans les inégalités ci-dessus démontrées les termes contenant les quantités K/α et $M_2(u)$ ne peuvent pas être supprimés, c'est-à-dire que la seule quantité $M_1(u)$ est insuffisante pour majorer $|\text{grad}\, u|$. En effet, considérons la suite des fonctions $u_k(\xi_1, \xi_2, t)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ satisfaisant à l'équation (3) dans le demi-plan $\xi_2 > 0$ avec les valeurs initiales et les valeurs aux limites suivantes:

$$u_k(\xi_1, \xi_2, 0) = 0,$$

$$u_k(\xi_1, 0, t) = \frac{\varphi_k(\xi_1)}{1+\dfrac{1}{t}} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

où $\varphi_k(\xi_1)$ est la fonction donnée sur la figure 1 (trait fort).* Pour ces fonctions les quantités $M_t(u_k)$ et $M_1(u_k)$ sont uniformément bornées en k:

$$M_t(u_k) = \max_{\substack{-\infty < x < \infty \\ 0 \leqq t \leqq T}} \frac{\varphi_k(x)}{(1+t)^2} < 1,$$

$$M_1(u_k) = 1.$$

Si pour $k \to \infty$

$$\max_{\substack{-\infty < \xi_1 < \infty \\ \xi_2 > 0 \\ 0 \leqq t \leqq T}} |\text{grad}\, u_k(\xi_1, \xi_2, t)|$$

était borné, alors le gradient de la fonction limite $u(\xi_1, \xi_2, t)$, laquelle vérifie

---

* Partie I, page 149.

également l'équation (3) dans le demi-plan $\xi_2 > 0$, et qui est définie par les valeurs initiales et aux limites suivantes:

$$u(\xi_1, \xi_2, 0) = 0,$$

$$u(\xi_1, 0, t) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad |\xi_1| \geqq 1, \\ \dfrac{1-|\xi_1|}{1+\dfrac{1}{t}}, & \text{si} \quad |\xi_1| \leqq 1, \end{cases}$$

serait également borné. Or, |grad u| dans le voisinage du point (0, 0) n'est pas borné.

Remarque 2. Dans les inégalités démontrées la fonction $D(\omega, t)$ ne peut pas être remplacée par une constante indépendante de t. En effet, soit par exemple $u(r, \varphi, t)$ la solution de l'équation (3) dans le cercle $r < 1$, avec la condition initiale et la condition aux limites suivantes:

$$u(r, \varphi, 0) = 0,$$

$$u(1, \varphi, t) = t.$$

Pour cette fonction, les quantités $M_t(u)$, $M_1(u)$ et $M_2(u)$ sont indépendantes de T:

$$M_t(u) = 1, \quad M_1(u) = M_2(u) = 0.$$

Malgré ce fait, |grad u| ne reste pas sous une borne indépendante du temps, car

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\partial u(1, \varphi, t)}{\partial r} = \infty.$$

Il vaut la peine de formuler séparément le Théorème 7 pour le cas $n = 1$. Le cas $n = 1$ peut être déduit du cas $n > 1$ par l'extension de la fonction $u(x_1, t)$ pour l'espace entier $(x_1, \ldots, x_n)$ de la manière qu'elle ne dépende pas des coordonnées $x_2, \ldots, x_n$:

$$u(x_1, \ldots, x_n, t) \equiv u(x_1, t).$$

Dans ce cas naturellement $M_1(u) = M_2(u) = M_2^*(u) = K = 0$. Mais en utilisant le caractère spécial du cas $n = 1$, on peut obtenir le théorème suivant plus fort (nous écrirons x au lieu de x_1):

Théorème 7a. *Supposons la fonction* $u(x, t)$

(i) *satisfaisant à l'équation* (3) *dans* $(0 < x < l) \times (0 < t \leqq T)$,
(ii) *admettant des premières dérivées continues dans* $(0 \leqq x \leqq l) \times (0 \leqq t \leqq T)$, *et*
(iii) *satisfaisant à la condition initiale:*

$$u(x, 0) = 0 \qquad (0 < x < l).$$

Alors

$$\max_{\substack{0 \leqq x \leqq l \\ 0 \leqq t \leqq T}} \left| \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right| < 2 \left\{ \frac{T}{l} + \frac{2al}{\pi^2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left(1 - e^{-\frac{k^2 \pi^2}{al^2} T} \right) \right] \right\} M_t(u).$$

Nous passons sur la démonstration de ce théorème spécial.

THÉORÈME 8. *Posons, au lieu de la condition* 2° (iv) *du Théorème* 7, *en conservant toutes les autres conditions, la condition suivante:*

2° (iv*) *la fonction aux limites* $u(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, t)$ *admet des secondes dérivées continues selon les coordonnées spatiales* $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$.

Alors

$$\max_{\substack{P \in \Omega + \overline{\Sigma} \\ 0 \leqq t \leqq T}} |\mathrm{grad}_P\, u(P, t)| < D(\omega, T)\, M_t(u) + $$

$$+ D_1(\omega) M_1(u) + 2D_2(\omega) \sqrt{\frac{n-1}{3}}\, \omega^{1/2} \varrho^{1/2} M_2^*(u).$$

($D(\omega, T)$, $D_1(\omega)$ *et* $D_2(\omega)$ *sont les quantités figurant dans le Théorème* 7.)

DÉMONSTRATION. La démonstration de ce théorème découle de celle du Théorème 7 avec les mêmes modifications, avec lesquelles la démonstration du Théorème 2 peut être obtenue de celle du Théorème 1.

§ 5. Majoration du gradient relative à l'équation $\Delta u = f$

1. Fonction auxiliaire. Soit $V_{\varrho,d}(r)$ $(r^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2)$ la solution de l'équation

$$\Delta V_{\varrho,d} = 1$$

dans l'anneau hypersphérique $\varrho < r < \varrho + d$ avec la condition aux limites suivante:

$$V_{\varrho,d}(\varrho) = V_{\varrho,d}(\varrho + d) = 0.$$

Alors

$$E_n(\varrho, d) \equiv -\frac{\partial V_{\varrho,d}(\varrho)}{\partial r} = \begin{cases} \dfrac{\varrho}{2}\left(-1 + \dfrac{\left(1+\dfrac{d}{\varrho}\right)^2 - 1}{2\log\left(1+\dfrac{d}{\varrho}\right)}\right) & (n=2) \\[3ex] \dfrac{\varrho}{n}\left(-1 + \dfrac{n-2}{2}\,\dfrac{\left(1+\dfrac{d}{\varrho}\right)^2 - 1}{1-\left(1+\dfrac{d}{\varrho}\right)^{2-n}}\right) & (n \geqq 3). \end{cases}$$

2. Lemme. LEMME 1. *Supposons que*

1° *la fonction* $u(P)$
  (i) *satisfasse à l'équation* (4) *dans* Ω,
  (ii) *soit continue dans* $\Omega + \Sigma$;

2° (i) $m_1 \leqq u(P) \leqq m_2 \qquad P \in \Sigma$,
  (ii) $-\mu_1^2 \leqq f(P) \leqq \mu_2^2 \qquad P \in \Omega$.

Alors

$$m_1 - \mu_2^2 \frac{d^2}{8} \leqq u(P) \leqq m_2 + \mu_1^2 \frac{d^2}{8} \qquad P \in \Omega.$$

DÉMONSTRATION. On peut supposer, sans restriction de la généralité, que le domaine Ω est situé dans la bande $-\frac{d}{2} < x_1 < \frac{d}{2}$. Considérons la fonction

$$v = u - m_2 - \frac{\mu_1^2}{2}\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 - x_1^2\right].$$

Cette fonction satisfait dans Ω à l'équation

$$\Delta v = f + \mu_1^2.$$

Étant donné que

$$v(P) \leqq 0 \qquad P \in \Sigma,$$

et

$$f(P) + \mu_1^2 \geqq 0 \qquad P \in \Omega,$$

il découle du principe du maximum que

$$v(P) \leqq 0 \qquad P \in \Omega,$$

c'est-à-dire

$$u(P) \leqq m_2 + \frac{\mu_1^2}{2}\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 - x_1^2\right] \leqq m_2 + \mu_1^2 \frac{d^2}{8} \qquad P \in \Omega.$$

L'estimation inférieure de $u(P)$ peut être démontrée analoguement, à l'aide de la fonction

$$v = u + m_1 + \frac{\mu_2^2}{2}\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 - x_1^2\right].$$

C. q. f. d.

3. Théorèmes. THÉORÈME 9. *Supposons que*

1° *le domaine Ω soit convexe;*

2° *la fonction $u(P)$*

(i) *satisfasse à l'équation* (4) *dans Ω,*

(ii) *admette des dérivées continues dans $\Omega + \Sigma$,*

(iii) $u(P) = 0$ *sur* Σ.

Alors

$$|\text{grad}\, u(P)| \leqq N_0 \frac{d}{2} + N_1 \frac{d^2}{8} \qquad P \in \Omega + \Sigma.$$

DÉMONSTRATION. Soit $P_0 \in \Sigma$ un point arbitraire de la frontière Σ. Soient Φ l'ensemble figurant dans la démonstration du Théorème 3, $\alpha)$ et $\beta)$ les cas qui y sont distingués. Dans le cas $\beta)$, sur le modèle de la démonstration du Théorème 3, on a

$$|\text{grad}\, u(P_0)| = 0.$$

Dans le cas $\alpha)$, sans restriction de la généralité, soient P_0 l'origine et Φ le plan $x_1 = 0$. Supposons Ω situé dans le demi-espace $x_1 > 0$ (c'est-à-dire dans la bande $0 < x_1 < d$).

Considérons la fonction

$$v = u \mp \frac{N_0}{2}\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(x_1 - \frac{d}{2}\right)^2\right].$$

Cette fonction satisfait dans Ω à l'équation

$$\Delta v = f \pm N_0 .$$

Étant donné que

$$f(P) \pm N_0 \begin{smallmatrix}\geqq\\ \leqq\end{smallmatrix} 0 \qquad P \in \Omega,$$

et en vertu de la condition 2° (iii) on a

$$v(P) \begin{smallmatrix}\leqq\\ \geqq\end{smallmatrix} 0 \qquad P \in \Sigma,$$

c'est pourquoi

$$v(P) \begin{smallmatrix}\leqq\\ \geqq\end{smallmatrix} 0 \qquad P \in \Omega,$$

c'est-à-dire

$$|u(P)| \leqq \frac{N_0}{2}\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(x_1 - \frac{d}{2}\right)^2\right] \qquad P \in \Omega. \tag{21}$$

En conséquence de la condition 2° (iii), comme le plan $x_1 = 0$ est tangent à la surface Σ au point $P_0(0, \ldots, 0)$, on a

$$\frac{\partial u(P_0)}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 2, \ldots, n),$$

ainsi

$$|\text{grad}\, u(P_0)| = \left|\frac{\partial u(P_0)}{\partial x_1}\right| .$$

De là, compte tenu de la condition $u(P_0) = 0$ et de (21), résulte:

$$|\text{grad}\, u(P_0)| \leqq \left|\left[\text{grad}\left\{\frac{N_0}{2}\left(\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(x_1 - \frac{d}{2}\right)^2\right)\right\}\right]_{x_1=0}\right| = N_0 \frac{d}{2} . \tag{22}$$

L'inégalité (22) est valable pour chaque point $P_0 \in \Sigma$.

Posons

$$\max_{P \in \Omega + \Sigma} |\text{grad}\, u(P)| = |\text{grad}\, u(P^*)|.$$

Soit la direction de grad $u(P^*)$, sans restriction de la généralité, la direction de l'axe x_1. Considérons la fonction $w = \frac{\partial u}{\partial x_1}$. Cette fonction satisfait à l'équation

$$\Delta w = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \tag{23}$$

et en vertu de (22)

$$|w(P)| \leqq N_0 \frac{d}{2} \qquad P \in \Sigma. \tag{24}$$

Il résulte de (23) et de (24), en raison du Lemme 1,

$$|w(P)| \leqq N_0 \frac{d}{2} + N_1 \frac{d^2}{8}.$$

C. q. f. d.

THÉORÈME 10. *Supposons que*

1° $\Omega \in \mathfrak{A}(\varrho)$;[2]

2° *la condition 2° du Théorème 9 soit satisfaite.*

Alors

$$|\operatorname{grad} u(P)| \leqq N_0 E_n(\varrho, d) + N_1 \frac{d^2}{8} \qquad P \in \Omega + \Sigma.$$

DÉMONSTRATION. Soit $P_0 \in \Sigma$ un point arbitraire de la frontière. Désignons par Φ l'ensemble figurant dans la démonstration du Théorème 4, et par *α)* et *β)* les cas qui y sont distingués; dans le cas *β)* on a ici aussi:

$$|\operatorname{grad} u(P_0)| = 0.$$

Dans le cas *α)* considérons l'hypersphère d'appui de rayon ϱ appartenant au point P_0 dont le centre, sans restriction de la généralité, soit l'origine. Le domaine Ω est contenu dans l'anneau sphérique limité par cette hypersphère et par l'hypersphère de rayon $\varrho + d$ lui étant concentrique.

Considérons la fonction

$$v = u \pm N_0 V_{\varrho, d},$$

où $V_{\varrho, d}$ est la fonction auxiliaire définie dans la section 1. Cette fonction satisfait dans Ω à l'équation

$$\Delta v = f \pm N_0.$$

Étant donné que

$$f(P) \pm N_0 \overset{\geqq}{\leqq} 0 \qquad P \in \Omega,$$

et en vertu de la condition 2° (iii)

$$v(P) \overset{\leqq}{\geqq} 0 \qquad P \in \Sigma,$$

c'est pourquoi, en conséquence du principe du maximum,

$$v(P) \overset{\leqq}{\geqq} 0 \qquad P \in \Omega,$$

c'est-à-dire

$$|u(P)| \leqq N_0 \, |V_{\varrho, d}(P)| \qquad P \in \Omega. \tag{25}$$

Il vient de la condition 2° (iii) que les dérivées tangentielles de $u(P)$ au point P_0 s'annulent, ainsi

$$|\operatorname{grad} u(P_0)| = \left| \frac{\partial u(P_0)}{\partial v} \right|.$$

---

[2] Pour $\varrho \to \infty$ le Théorème 10 fournit, comme cas limite, le Théorème 9.

Il en résulte, en vertu de la condition $u(P_0) = V_{\varrho, d}(P_0) = 0$ et de l'inégalité (25), que

$$|\text{grad}\, u(P_0)| \leqq N_0 \left| \frac{\partial V_{\varrho,d}(P_0)}{\partial r} \right| = N_0 E_n(\varrho, d). \tag{26}$$

Cette inégalité est valable pour chaque point $P_0 \in \Sigma$.

La démonstration peut s'effectuer conformément, mot à mot, à la démonstration du Théorème 9. C. f. q. d.

§ 6. Majoration du gradient relative à l'équation $\Delta u - au_t' = f$

1. Fonctions auxiliaires. Définition de la fonction $W_d(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 W_d}{\partial x^2} - a\frac{\partial W_d}{\partial t} = 1 \qquad (0 < x < d,\ t > 0),$$

$$W_d(x, 0) = 0 \qquad (0 \leqq x \leqq d),$$

$$W_d(0, t) = W_d(d, t) = 0 \qquad (t \geqq 0).$$

Définition de la fonction $W_{\varrho, d}(r, t)$:

$$\Delta W_{\varrho,d} - a\frac{\partial W_{\varrho,d}}{\partial t} = 1 \qquad (\varrho < r < \varrho + d,\ t > 0),$$

$$W_{\varrho,d}(r, 0) = 0 \qquad (\varrho \leqq r \leqq \varrho + d),$$

$$W_{\varrho,d}(\varrho, t) = W_{\varrho,d}(\varrho + d, t) = 0 \qquad (t \geqq 0).$$

Définition de la fonction $Z_d(r, t)$:

$$\Delta Z_d - a\frac{\partial Z_d}{\partial t} = 0 \qquad \left(0 \leqq r < \frac{d}{2},\ t > 0\right),$$

$$Z_d(r, 0) = 0 \qquad \left(0 \leqq r < \frac{d}{2}\right),$$

$$Z_d\left(\frac{d}{2}, t\right) = 1 \qquad (t > 0).$$

Définition de la fonction $Y_d(r, t)$:

$$\Delta Y_d - a\frac{\partial Y_d}{\partial t} = 1 \qquad \left(0 \leqq r < \frac{d}{2},\ t > 0\right),$$

$$Y_d(r, 0) = 0 \qquad \left(0 \leqq r \leqq \frac{d}{2}\right),$$

$$Y_d\left(\frac{d}{2}, t\right) = 0 \qquad (t \geqq 0).$$

2. Lemmes. LEMME 2. *Supposons que*

1° *la fonction* $u(P, t)$
  (i) *satisfasse à l'équation* (1) *dans* $\Omega\times(0<t\leqq T)$,
  (ii) *soit continue dans* $(\Omega+\Sigma)\times(0\leqq t\leqq T)$;

2° (i) $m_1\leqq u(P, t)\leqq m_2 \qquad (P, t)\in[\Omega\times(t=0)]+[\Sigma\times(0\leqq t\leqq T)]$,
  (ii) $-\mu_1^2\leqq f(P, t)\leqq \mu_2^2 \qquad (P, t)\in\Omega\times(0<t\leqq T)$.

Alors

$$m_1-\mu_2^2\frac{d^2}{8}\leqq u(P, t)\leqq m_2+\mu_1^2\frac{d^2}{8} \qquad (P, t)\in\Omega\times(0<t\leqq T).$$

DÉMONSTRATION. La démonstration peut être effectuée de la même manière que la démonstration du Lemme 1, à l'aide des fonctions auxiliaires

$$v=u-m_2-\frac{\mu_1^2}{2}\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2-x_1^2\right], \qquad v=u+m_1+\frac{\mu_2^2}{2}\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2-x_1^2\right].$$

LEMME 3. *Supposons que*

1° $\varphi(t)$ *soit une fonction, définie dans l'intervalle* $0\leqq t<\infty$, *monotone décroissante et dérivable, satisfaisant à la condition*

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=0;$$

2° $\psi(t)$ *soit une fonction bornée, définie dans l'intervalle* $0\leqq t<\infty$, *intégrable dans l'intervalle* $0\leqq t\leqq T$ *pour chaque* $T<\infty$, *jouissant d'une limite finie pour* $t\to\infty$.
Alors

$$\lim_{t\to\infty}\left[\varphi(0)\psi(t)+\int_0^t\varphi'(\tau)\psi(t-\tau)\,d\tau\right]=0.$$

DÉMONSTRATION. Soit $\varepsilon>0$ un nombre arbitrairement petit. Soient

$$\lim_{t\to\infty}\psi(t)=\lambda, \qquad |\psi(t)|\leqq q.$$

Désignons par $t_0>0$ un nombre si grand que les conditions suivantes soient satisfaites:

$$|\varphi(t)|<\varepsilon, \; |\psi(t)-\lambda|<\varepsilon, \text{ si } t>t_0.$$

On peut effectuer les conversions et estimations suivantes pour $t>2t_0$ (compte tenu de $\varphi'(x)\leqq 0$):

$$F(t)\equiv\varphi(0)\psi(t)+\int_0^t\varphi'(\tau)\psi(t-\tau)\,d\tau=$$

$$=\varphi(0)\psi(t)+\int_0^{t-t_0}\varphi'(\tau)\psi(t-\tau)\,d\tau+\int_{t-t_0}^t\varphi'(\tau)\psi(t-\tau)\,d\tau\overset{\leqq}{\geqq}$$

$$\overset{\leqq}{\geqq}\varphi(0)(\lambda\pm\varepsilon)+\int_0^{t-t_0}\varphi'(\tau)(\lambda\mp\varepsilon)\,d\tau\mp\int_{t-t_0}^t\varphi'(\tau)q\,d\tau=$$

$$=\pm2\varphi(0)\varepsilon+\varphi(t-t_0)(\lambda\mp\varepsilon)\mp q[\varphi(t)-\varphi(t-t_0)]\overset{\leqq}{\geqq}\pm2\varphi(0)\varepsilon\pm\varepsilon(|\lambda|+\varepsilon)\pm2q\varepsilon.$$

Étant donné que $\varepsilon > 0$ est un nombre positif arbitrairement petit, on conclut qu'en choisissant t assez grand $|F(t)|$ peut être rendu arbitrairement petit. C. q. f. d.

3. Théorèmes. THÉORÈME 11. *Supposons que*

1° *le domaine Ω soit borné et convexe;*

2° *la fonction $u(P, t)$*

(i) *satisfasse à l'équation* (1) *dans* $\Omega \times (0 < t \leqq T)$,

(ii) *admette des dérivées continues dans* $(\Omega + \Sigma) \times (0 \leqq t \leqq T)$,

(iii)

$$u(P, 0) = 0 \qquad P \in \Omega + \Sigma,$$
$$u(P, t) = 0 \qquad (P, t) \in \Sigma \times (0 \leqq t \leqq T).$$

Alors

$$|\mathrm{grad}_P\, u(P, t)| \leqq N_0 \frac{d}{2} + N_1 \frac{d^2}{8} \qquad (P, t) \in (\Omega + \Sigma) \times (0 \leqq t \leqq T).$$

DÉMONSTRATION. La démonstration, à l'aide du Lemme 2, est analogue à la démonstration du Théorème 9.

THÉORÈME 12. *Supposons que*

1° *Ω soit borné et que $\Omega \in \mathfrak{A}(\varrho)$;*[3]

2° *la condition* 2° *du Théorème* 11 *soit satisfaite.*

Alors

$$|\mathrm{grad}_P\, u(P, t)| \leqq N_0 E_n(\varrho, d) + N_1 \frac{d^2}{8} \qquad (P, t) \in (\Omega + \Sigma) \times (0 \leqq t \leqq T).$$

DÉMONSTRATION. La démonstration est analogue à la démonstration du Théorème 10.

Les Théorèmes 13 et 14 ci-dessous concernent l'allure asymptotique du gradient des solutions de l'équation (1) pour $t \to \infty$.

THÉORÈME 13. *Supposons que les conditions du Théorème* 11 *soient satisfaites. Alors*

$$|\mathrm{grad}_P\, u(P, T)| \leqq \int_0^T A_d(T - \tau) H'(\tau)\, d\tau + H(0) + \int_0^T B_d(T - \tau) G_1(\tau)\, d\tau \qquad (P \in \Omega).$$

DÉMONSTRATION. Soit $P_0 \in \Sigma$ un point arbitraire de la frontière Σ. Soit de plus Φ l'ensemble figurant dans la démonstration du Théorème 3, *α)* et *β)* les cas qui y sont distingués. Dans le cas *β)* on a de nouveau

$$|\mathrm{grad}_P\, u(P_0, t)| = 0.$$

Dans le cas *α)*, sans restriction de la généralité, soient le point P_0 l'origine, Φ le plan $x_1 = 0$. Φ soit contenu dans le demi-espace $x_1 > 0$ (c'est-à-dire dans la bande $0 < x_1 < d$).

Soit $\varphi(x_1, t)$ la solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - a \frac{\partial \varphi}{\partial t} = G_0(t)$$

---

[3] Ce Théorème fournit pour $\varrho \to \infty$, comme cas limite, le Théorème 11.

dans le domaine $(0 < x_1 < d)\times(t > 0)$, avec la condition initiale et la condition au limites suivantes:

$$\varphi(x_1, 0) = 0 \qquad (0 \leqq x_1 \leqq d),$$
$$\varphi(0, t) = \varphi(d, t) = 0 \qquad (t > 0).$$

La fonction $\varphi(x_1, t)$ peut s'écrire à l'aide de la fonction auxiliaire W_d sous la forme

$$\varphi(x_1, t) = \int_0^t \frac{\partial W_d(x_1, t-\tau)}{\partial t} G_0(\tau)\, d\tau.$$

Considérons la fonction

$$v = u \pm \varphi.$$

Cette fonction satisfait dans $\Omega\times(t>0)$ à l'équation

$$\Delta v = f \pm G_0.$$

Étant donné que

$$f(P, t) \pm G_0(t) \gtreqless 0 \qquad (P, t) \in \Omega\times(t>0),$$

et de plus, en vertu de la condition 2° (iii),

$$v(P, t) \lesseqgtr 0 \qquad (P, t) \in [\Omega\times(t=0)] + [\Sigma\times(t \geqq 0)],$$

il résulte du principe du maximum:

$$v(P, t) \lesseqgtr 0 \qquad (P, t) \in \Omega\times(t>0),$$

c'est-à-dire

(27) $$|u(P, t)| \leqq |\varphi(P, t)| \qquad (P, t) \in \Omega\times(t>0).$$

Étant donné que, selon les conditions aux limites,

$$u(P_0, t) = \varphi(P_0, t) = 0 \qquad (t \geqq 0),$$

et que les dérivées de la fonction u tangentielles à Σ s'annullent, on obtient de (27):

(28) $$|\mathrm{grad}_P\, u(P_0, t)| \leqq \left| \frac{\partial \varphi(0, t)}{\partial x_1} \right| \qquad (t \geqq 0).$$

Cette inégalité est valable pour chaque point $P_0 \in \Sigma$.

Soit P^* un point défini par la relation

$$\max_{P \in \Omega+\Sigma} |\mathrm{grad}_P\, u(P, T)| = |\mathrm{grad}_P\, u(P^*, T)|.$$

Soit, sans restriction de la généralité, la direction de $\mathrm{grad}_P\, u(P^*, T)$ celle de l'axe x_1. Considérons la fonction $w = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}$. Cette fonction satisfait à l'équation

$$\Delta w - a \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x_1},$$

et

(29) $$w(P, 0) = 0 \qquad P \in \Omega + \Sigma,$$

de plus, en vertu de l'inégalité (28), on a

$$|w(P, t)| \leqq H(t) \qquad (P, t) \in \Sigma \times (t \geqq 0). \tag{30}$$

Supposons, sans restriction de la généralité, que Ω soit contenu dans l'hypersphère $0 \leqq r = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2} < d/2$. Soit $\psi(r, t)$ la solution de l'équation

$$\Delta\psi - a\frac{\partial\psi}{\partial t} = G_1(t)$$

dans cette hypersphère satisfaisant aux conditions suivantes:

$$\psi(r, 0) = -H(0) \qquad \left(0 \leqq r \leqq \frac{d}{2}\right),$$

$$\psi\left(\frac{d}{2}, t\right) = -H(t) \qquad (0 \leqq t \leqq T). \tag{31}$$

Cette fonction peut s'écrire, à l'aide des fonctions auxiliaires Z_d et Y_d sous la forme:

$$\psi(r, t) = \int_0^t G_1(\tau)\frac{\partial Y_d(r, t-\tau)}{\partial t}\,d\tau - \int_0^t H'(\tau)\cdot Z_d(r, t-\tau)\,d\tau - H(0).$$

Considérons la fonction

$$z = w \pm \psi.$$

Cette fonction satisfait dans Ω à l'équation

$$\Delta z - a\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \pm G_1.$$

Étant donné que

$$\frac{\partial f(P, t)}{\partial x_1} \pm G_1(t) \gtreqqless 0 \qquad (P, t) \in \Omega \times (0 \leqq t \leqq T),$$

de plus, en vertu des inégalités (29), (30) et (31),

$$z(P, 0) \lesseqqgtr 0 \qquad P \in \Omega,$$

$$z(P, t) \lesseqqgtr 0 \qquad (P, t) \in \Sigma \times (0 \leqq t \leqq T),$$

il s'en suit

$$z(P, t) = w(P, t) \pm \psi(P, t) \lesseqqgtr 0 \qquad (P, t) \in \Omega \times (0 \leqq t \leqq T),$$

c'est-à-dire

$$|w(P, t)| = \left|\frac{\partial u(P, t)}{\partial x_1}\right| \leqq |\psi(P, t)| = -\psi(P, t) <$$

$$< -\int_0^t G_1(\tau)\frac{\partial Y_d(0, t-\tau)}{\partial t}\,d\tau + \int_0^t H'(\tau) Z_d(0, t-\tau)\,d\tau + H(0)$$

$$(P, t) \in \Omega \times (0 \leqq t \leqq T). \qquad \text{C. q. f. d.}$$

THÉORÈME 14. *Supposons que les conditions du Théorème 12 soient satisfaites. Alors*

$$|\operatorname{grad}_P u(P,T)| \leqq \int_0^T A_d(T-\tau)K'(\tau)\,d\tau + K(0) + \int_0^T B_d(T-\tau)G_1(\tau)\,d\tau \qquad P\in\Omega.$$

DÉMONSTRATION. La démonstration est tout à fait analogue à la démonstration du Théorème 13.

COROLLAIRE. *Supposons que, en choisissant $T=\infty$, ou bien les conditions du Théorème 11, ou bien celles du Théorème 12 soient satisfaites, et de plus, que*

$$\lim_{t\to\infty} G_0(t) = \lim_{t\to\infty} G_1(t) = 0.$$

Alors

$$\lim_{t\to\infty} \max_{P\in\Omega+\Sigma} |\operatorname{grad}_P u(P,t)| = 0.$$

DÉMONSTRATION. On obtient avec une intégration par partie:

$$\int_0^t \frac{\partial^2 W_d(0,t-\tau)}{\partial x\,\partial t} G_0(\tau)\,d\tau = -\int_0^t \frac{\partial^2 W_d(0,t-\tau)}{\partial x\,\partial \tau}\cdot$$

$$\cdot G_0(\tau)\,d\tau = G_0(0)\frac{\partial W_d(0,t)}{\partial x} + \int_0^t G_0'(\tau)\frac{\partial W_d(0,t-\tau)}{\partial x}\,d\tau.$$

Or, $\dfrac{\partial W_d(0,t)}{\partial x}$ satisfait aux conditions imposées sur la fonction $\psi(t)$ dans le Lemme 3 (on peut vérifier cette assertion ou bien par la forme explicite de W_d, ou bien en discutant l'équation différentielle qui la définit), tandis que $G_0(t)$ peut être choisie, par l'hypothèse du théorème, de telle façon qu'elle satisfasse aux conditions imposées sur la fonction $\varphi(t)$ dans le même lemme. Ainsi, selon le Lemme 3, l'expression ci-dessus tend vers 0 pour $t\to\infty$. Il s'en résulte que la fonction majorante $H(t)$ peut être choisie de telle manière que

$$\lim_{t\to\infty} H(t) = 0.$$

On peut vérifier mot à mot analoguement aux raisonnements ci-dessus que dans le cas d'un domaine de classe $\mathfrak{A}(\varrho)$ la fonction majorante $K(t)$ peut être choisie également de la même manière que

$$\lim_{t\to\infty} K(t) = 0.$$

Examinons maintenant l'allure des bornes supérieures, fournies par les Théorèmes 13 et 14, pour $t\to\infty$. Pour simplicité, les fonctions $H(t)$ et $K(t)$ seront désignées par la seule fonction $F(t)$. En vertu de nos résultats antérieurs $F(t)$ tend vers 0 pour $t\to\infty$, c'est pourquoi elle peut être choisie aussi de telle manière qu'elle satisfasse aux conditions imposées sur la fonction $\varphi(t)$ dans le Lemme 3. Il est évident que

(32) $$\lim_{t\to\infty} A_d(t) = 1,$$

et ainsi $A_d(t)$ satisfait aux conditions imposées sur la fonction $\psi(t)$ dans le Lemme 3. On en obtient, compte tenu de (32) et en vertu du Lemme 3:

$$(33)\qquad \lim_{t\to\infty}\Big[F(0)+\int_0^t A_d(t-\tau)F'(\tau)\,d\tau\Big] = \lim_{t\to\infty}\Big[F(0)A_d(t)+\int_0^t A_d(t-\tau)F'(\tau)\,d\tau\Big] = 0.$$

Enfin, $G_1(t)$ peut être choisie de telle manière qu'elle satisfasse aux conditions imposées sur la fonction $\varphi(t)$ dans le Lemme 3, tandis que la fonction $Y_d(0, t)$ définissant la fonction $B_d(t)$ satisfait aux conditions imposées sur la fonction ψ dans le même lemme. Ainsi, en utilisant la définition de $B_d(t)$, par une intégration par partie, en vertu de Lemme 3, on obtient:

$$(34)\qquad \lim_{t\to\infty}\Big[\int_0^t B_d(t-\tau)G_1(\tau)\,d\tau\Big] = \lim_{t\to\infty}\Big[-\int_0^t \frac{\partial Y_d(0, t-\tau)}{\partial t}\,G_1(\tau)\,d\tau\Big] =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\Big[-G_1(0)Y_d(0, t)-\int_0^t Y_d(0, t-\tau)G_1'(\tau)\,d\tau\Big] = 0.$$

Avec l'addition des inégalités (33) et (34) on obtient le résultat définitif que les bornes supérieures fournies par les Théorèmes 13 et 14 tendent vers 0 pour $T\to\infty$.

C. q. f. d.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUE
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE HONGRIE,
BUDAPEST

(Reçu le 19 fevriér 1963.)

TABLE DES MATIÈRES*

---

* L'introduction, les §§ 1—3 et la Bibliographie se trouvent dans le fascicule précédent.

О ЧИСЛЕ ДЕЛИТЕЛЕЙ „СДВИНУТЫХ“ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ-БЛИЗНЕЦОВ

От

М. Б. БАРБАН (Ташкент, СССР)

(*Представлено П. Тураном*)

В работах [1] и [2] автор использовал идеи Ю. В. Линника [3] по оценке дисперсии для доказательства аналога закона больших чисел для широкого класса аддитивных арифметических функций, заданных на множестве ,,сдвинутых" простых чисел.

В настоящей заметке мы хотим показать, что метод, применявшийся автором в [1] и [2], позволяет проникать и в арифметические свойства других сложных подмножеств натурального ряда.

Мы сформулируем лишь простейший частный случай. Читатель, знакомый с работами [1] и [2], легко найдет возможные обобщения.

Условимся об обозначениях.

Пусть $N\{\ \}$ означает число чисел, не превосходящих n и удовлетворяющих условиям, которые указаны в скобках. Далее, $\nu(m)$ — число различных простых делителей m, через p, q будут обозначаться простые числа, через p', q' — простые числа-близнецы.

Теорема. *Для любого фиксированного числа* $\varepsilon > 0$ *имеет место*

$$\frac{\ln^2 n}{n} N\left\{|\nu(p'+1) - \ln\ln n| \geqq (\ln\ln n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right\} \to 0.$$

Доказательство. Очевидно, достаточно для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ доказать следующую оценку дисперсии

$$D = \sum_{p' \leqq n} \{\nu(p'+1) - \ln\ln n\}^2 = O\left(\frac{n}{\ln^2 n}\{\ln\ln n\}^{1+\varepsilon}\right),$$

так как тогда теорема тривиальным образом следует из неравенства Чебышева.

Пусть

$$\nu(m) = \sum_{p|m} 1 = \sum_{\substack{p|m \\ p \leqq n^{1/4}}} 1 + \sum_{\substack{p|m \\ p > n^{1/4}}} 1 = \nu_1(m) + \nu_2(m).$$

Тогда, очевидно, $\nu_2(m) \leqq 4$ при $m \leqq n$, и, пользуясь неравенством $(a+b)^2 \leqq \leqq 2a^2 + 2b^2$, получаем

$$D \leqq 2 \sum_{p' \leqq n} \{\nu_1(p'+1) - \ln\ln n\}^2 + O\left(\frac{n}{\ln^2 n}\right),$$

согласно известным оценкам числа простых чисел-близнецов.

В последней оценке заменим суммирование по p' суммированием по ,,объемлющему'' множеству с похожими арифметическими свойствами. В качестве такового выберем числа m, для которых в последовательности $m(m+2)$ нет простых делителей, меньших r (величину r определим в конце работы). В дальнейшем числа этой последовательности будем обозначать через γ. Числа $p'>r$ удовлетворяют этому условию, поэтому

$$D \leqq 2 \sum_{\gamma \leqq n} \{\nu_1(\gamma+1) - \ln\ln n\}^2 + O(r \ln^2 n) + O\left(\frac{n}{\ln^2 n}\right), \tag{1}$$

причем мы воспользовались очевидной оценкой $\nu(m) \ll \ln m$.

Прежде чем перейти к дальнейшим расчетам, определим количество $N^r_{k,n}$ чисел $\gamma \leqq n$, принадлежащих прогрессии модуля k с начальным членом 1.

Согласно фундаментальной лемме 1 работы [4], имеем при $k \leqq n^{1/2}$

$$N^r_{k,n} = \frac{n}{k} \prod_{\substack{2<p\leqq r \\ (p,k)=1}} \left(1-\frac{2}{p}\right)\left[1+O\left(e^{-c\frac{\ln n}{\ln r}}\right)\right]. \tag{2}$$

Теперь можно перейти к оценке суммы в (1).

Возведем в квадрат и начнем с оценки суммы квадратов.

$$\sum_{\gamma\leqq n} \nu_1^2(\gamma+1) = \sum_{\gamma \leqq n} \Big(\sum_{\substack{p/\gamma+1 \\ p \leqq n^{1/4}}} 1\Big)^2 = \sum_{\substack{p_1, p_2 \leqq n^{1/4} \\ p_1 \neq p_2}} \sum_{\substack{\gamma+1 \equiv 0(p_1 p_2) \\ \gamma \leqq n}} 1 + \sum_{p \leqq n^{1/4}} \sum_{\substack{\gamma+1\equiv 0(p) \\ \gamma \leqq n}} 1.$$

Воспользовавшись (2), получаем

$$\sum_{\gamma\leqq n} \nu_1^2(\gamma+1) = n \prod_{2<p\leqq r}\left(1-\frac{2}{p}\right) \sum_{\substack{2<p_1, p_2 \leqq n^{1/4} \\ p_1 \neq p_2}} \frac{1}{(p_1-2)(p_2-2)} + \tag{3}$$

$$+ O\left(\frac{n}{\ln^2 r}\{\ln\ln n\}^2 e^{-c\frac{\ln n}{\ln r}}\right) + O\left(\frac{n}{\ln^2 r}\ln\ln n\right).$$

Но легко видеть, что

$$\sum_{\substack{2<p_1, p_2 \leqq n^{1/4} \\ p_1 \neq p_2}} \frac{1}{(p_1-2)(p_2-2)} \leqq \left(\sum_{2<p_1<n^{1/4}} \frac{1}{p-2}\right)^2,$$

и, учитывая, что

$$\sum_{2<p<n^{1/4}} \frac{1}{p-2} = \sum_{p<n^{1/4}} \frac{1}{p} + O(1) = \ln\ln n + O(1),$$

переписываем (3) в следующем виде:

$$\sum_{\gamma\leqq n} \nu_1^2(\gamma+1) \leqq n \sum_{2<p\leqq r}\left(1-\frac{2}{p}\right)\{\ln\ln n\}^2 + O\left(\frac{n}{\ln^2 r}\{\ln\ln n\}^2 e^{-c\frac{\ln n}{\ln r}}\right) + \tag{4}$$

$$+ O\left(\frac{n}{\ln^2 r}\ln\ln n\right).$$

Аналогично рассчитываем сумму первых степеней

$$\sum_{\gamma \leqq n} \nu_1(\gamma+1) = n \prod_{2<p<r} \left(1-\frac{2}{p}\right) \ln\ln n + O\left(\frac{n}{\ln^2 r} \ln\ln n e^{-c\frac{\ln n}{\ln r}}\right). \tag{5}$$

И, наконец, (2) при $k=1$ дает

$$\sum_{\gamma \leqq n} \{\ln\ln n\}^2 = n \sum_{2<p<r} \left(1-\frac{2}{p}\right) \{\ln\ln n\}^2 + O\left(\frac{n}{\ln^2 r} \{\ln\ln n\}^2 e^{-c\frac{\ln n}{\ln r}}\right). \tag{6}$$

Подставляя (4), (5) и (6) в (1), получаем

$$D \ll \frac{n}{\ln^2 r} \{\ln\ln n\}^2 e^{-c\frac{\ln n}{\ln r}} + \frac{n}{\ln^2 r} \ln\ln n + r \ln^2 n + \frac{n}{\ln^2 n}.$$

Выберем теперь $r = e^{\frac{c \ln n}{2 \ln\ln\ln n}}$. Тогда

$$D \ll \frac{n}{\ln^2 n} \ln\ln n \{\ln\ln\ln n\}^2$$

чего с избытком хватает для доказательства теоремы.

В заключение мы хотели бы отметить, что более точный результат для $\nu(p'+1)$ (закон больших чисел в полной формулировке) получается с помощью метода работы [2], однако мы пользовались методом [1], ибо он легче поддается обобщению.

(Поступило 30. IV. 1963.)

Литература

[1] М. Б. Барбан, Нормальный порядок аддитивных, арифметических функций на множестве „сдвинутых" простых чисел, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **12** (1961), стр. 409–415.

[2] М. Б. Барбан, Аналог закона больших чисел для аддитивных арифметических функций, заданных на множестве „сдвинутых" простых чисел, ДАН УзССР, **12**, **8—12** (1961).

[3] Ю. В. Линник, *Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах* (Ленинград, 1961).

[4] М. Б. Барбан, Об одной теореме И. П. Кубилюса, *Известия АН УзССР*, серия физ.-мат. наук, **5**, **3—9** (1961).

ON THE NUMBER OF PRIM-FACTORS OF INTEGERS BETWEEN TWO TWIN-PRIMES

By

M. B. BARBAN (Tashkend, Soviet Union)

(Summary)

Let ε be arbitrarily small but fixed positive number, further p' and $q'=p'+2$ stand for twin-primes and $\nu(m)$ for the number of different prime-factors of m. If $N(n)$ denotes the number of p'-s not exceeding n with the property

$$|\nu(p'+1)-\ln\ln n| \geqq (\ln\ln n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

then the relation

$$N(n)=O\left(\frac{n}{\ln^2 n}\right)$$

holds for $n\to\infty$.

EIN STRUKTURSATZ FÜR IDEMPOTENTE HALBKÖRPER

Von

H. J. WEINERT (Potsdam, DDR)

(*Vorgelegt von* L. RÉDEI)

In einer früheren Arbeit (vgl. [6], § 3, Satz 3) haben wir gezeigt, daß jeder endliche Halbkörper $\mathfrak{H}$ mit nichtkommutativer, idempotenter Addition[1] entweder eine beliebige multiplikative Gruppe $\mathfrak{H}_1$ mit der Additionsvorschrift

$$\mathrm{A}_1) \qquad a+b=a \text{ für alle } a \text{ und } b \text{ aus } \mathfrak{H}_1$$

oder eine solche Gruppe $\mathfrak{H}_2$ mit der Additionsvorschrift

$$\mathrm{A}_r) \qquad a+b=b \text{ für alle } a \text{ und } b \text{ aus } \mathfrak{H}_2$$

ist oder als direkte Komposition $\mathfrak{H}=(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ zweier Halbkörper der eben beschriebenen Art gewonnen werden kann. Darüber hinaus hatten wir bemerkt, daß diese Aussage unabhängig von der Endlichkeit von $\mathfrak{H}$ genau dann zutrifft, wenn die rein additive Bedingung

$$x+y+x=x \text{ für alle } x \text{ und } y \text{ aus } \mathfrak{H}$$

erfüllt ist. Wir wollen einen Halbmodul bzw. einen Halbkörper mit dieser Eigenschaft *rektangulär* nennen (vgl. [2], [3]); übrigens ist ein Halbmodul genau dann rektangulär, wenn er idempotent und antikommutativ ($x+y\neq y+x$ für $x\neq y$) ist (vgl. [3], [4]).

Darauf aufbauend wollen wir nun beliebige Halbkörper mit nichtkommutativer, idempotenter Addition untersuchen. Im wesentlichen wird sich dabei herausstellen, daß jeder solche Halbkörper $\mathfrak{H}$ multiplikativ als SCHREIERsche Erweiterung eines rektangulären (also additiv antikommutativen) Halbkörpers G mit einem additiv kommutativen und idempotenten Halbkörper $\mathfrak{G}$ dargestellt werden kann, wobei auch die Addition innerhalb der damit vorliegenden Klasseneinteilung verläuft, und umgekehrt zu vorgegebenen Halbkörpern G und $\mathfrak{G}$ dieser Art wenigstens ein solcher Halbkörper $\mathfrak{H}$ existiert. Zur besseren Übersicht gliedern wir unsere Ergebnisse jedoch in Teilbehauptungen; zum Beweis der ersten verwenden wir folgende Aussagen von CLIFFORD [1] und McLEAN [4] in einer für unsere Zwecke angepaßten Formulierung:

---

[1] Für das Folgende ist es unwesentlich, daß ein endlicher Halbkörper mit nichtkommutativer Addition stets additiv idempotent ist, während es umgekehrt nur fünf endliche Halbkörper mit idempotenter und kommutativer Addition gibt. Letztere bestehen nur aus zwei Elementen o (additives Nullelement) und e (multiplikatives Einselement), und vier von ihnen sind überhaupt die einzigen Halbkörper mit nicht annullierendem Nullelement (vgl. [6]). Daher bedeutet es auch keine Einschränkung der Allgemeinheit, in dieser Arbeit nur Halbkörper ohne Nullelement zu untersuchen.

Es sei $\mathfrak{H}$ ein nichtkommutativer, idempotenter Halbmodul. Dann liefert die Relation

$$xRy \text{ genau dann, wenn } x+y+x = x \text{ und } y+x+y = y$$

eine Klasseneinteilung von $\mathfrak{H}$, deren Klassen gerade die maximalen rektangulären Unterhalbmoduln von $\mathfrak{H}$ sind. Diese Klasseneinteilung ist kompatibel, die entsprechende Faktorstruktur[2] ist ein durch $\mathfrak{H}$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmter kommutativer idempotenter Halbmodul $\mathfrak{G}$. Verwenden wir die Elemente $a, b, \ldots$ von $\mathfrak{G}$ zur Indizierung der Klassen $G_a, G_b, \ldots$, so gilt also

$$\mathfrak{H} = \bigcup_{a \in \mathfrak{G}} G_a \quad \text{mit} \quad G_a + G_b \subseteqq G_{a+b}.$$

1. *Es sei $\mathfrak{H}$ ein additiv nichtkommutativer, idempotenter Halbkörper ohne Nullelement. Dann ist die eben genannte Klasseneinteilung des Halbmoduls $\mathfrak{H}^+$ in maximale rektanguläre Unterhalbmoduln auch kompatibel bezüglich der Multiplikation, wodurch die zugehörige Faktorstruktur $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{H}$ zu einem durch $\mathfrak{H}$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten Halbkörper mit kommutativer, idempotenter Addition wird.*[3] *Weiter sind alle maximalen rektangulären Unterhalbmoduln G_a $(a \in \mathfrak{G})$ von $\mathfrak{H}^+$ paarweise isomorph, und der das Einselement ε von $\mathfrak{H}$ enthaltende Unterhalbmodul $G = G_e$ (e Einselement von $\mathfrak{G}$) ist zugleich Unterhalbkörper von $\mathfrak{H}$ und damit Normalteiler der multiplikativen Gruppe $\mathfrak{H}^\bullet$ von $\mathfrak{H}$. Insbesondere ist G als maximaler rektangulärer Unterhalbkörper von $\mathfrak{H}$ eindeutig festgelegt und es gilt:*

$$\mathfrak{H} = \bigcup_{a \in \mathfrak{G}} G_a \quad \textit{mit} \quad G_a + G_b = G_{a+b} \quad \textit{und} \quad G_a \cdot G_b = G_{a \cdot b}.$$

Beweis. Auf Grund der Gruppeneigenschaft von $\mathfrak{H}^\bullet$ vermittelt die Zuordnung

$$x \to hx \text{ für jedes Element } h \in \mathfrak{H}$$

eine eineindeutige Abbildung von $\mathfrak{H}$ auf sich selbst, die wegen

$$h(x+y) = hx + hy$$

relationstreu bezüglich der Addition ist. Das Bild hG_a eines maximalen rektangulären Unterhalbmoduls G_a von $\mathfrak{H}^+$ ist daher ein rektangulärer Unterhalbmodul, also in einem maximalen rektangulären Unterhalbmodul G_b enthalten: $hG_a \subseteqq G_b$. Dabei gilt sogar $hG_a = G_b$, denn aus $hG_a \subset G_b$ folgte

$$G_a = h^{-1} h G_a \subset h^{-1} G_b,$$

so daß der maximale rektanguläre Unterhalbmodul G_a in dem rektangulären Unterhalbmodul $h^{-1}G_b$ echt enthalten wäre. Weiterhin gibt es zu vorgegebenen G_a und G_b mit $h_a \in G_a$ und $h_b \in G_b$ ein Element $h \in \mathfrak{H}$ mit $hh_a = h_b$, also $hG_a = G_b$, womit also je zwei maximale rektanguläre Unterhalbmoduln von $\mathfrak{H}^+$ additiv isomorph sind.

---

[2] Vgl. [5], § 30.

[3] Der Halbkörper $\mathfrak{G}$ kann auch dadurch gekennzeichnet werden, daß er additiv kommutatives, homomorphes Bild von $\mathfrak{H}$ ist und auf jedes additiv kommutative, homomorphe Bild von $\mathfrak{H}$ homomorph abgebildet werden kann.

Entsprechendes gilt natürlich auch für die Abbildungen $x \to xh$. Damit folgt aus $h_a h_b = h_c$ mit festen Elementen $h_a \in G_a$, $h_b \in G_b$ und $h_c \in G_c$ zunächst

$$h_a G_b = G_c, \quad \text{also} \quad h_a h_b \in G_c \quad \text{für alle} \quad h_b \in G_b$$

und damit

$$G_a h_b = G_c \quad \text{für alle} \quad h_b \in G_b,$$

also $G_a G_b = G_c$. Insbesondere sei G derjenige maximale rektanguläre Unterhalbmodul von $\mathfrak{H}^+$, der das Einselement ε von $\mathfrak{H}$ enthält. Dann folgt aus $\varepsilon\varepsilon = \varepsilon$ auch $GG = G$. Wir zeigen, daß auch die Inversenbildung aus G nicht herausführt und betrachten ein beliebiges Element α von G. Aus

$$\alpha + \varepsilon + \alpha = \alpha \quad \text{und} \quad \varepsilon + \alpha + \varepsilon = \varepsilon$$

folgt dann

$$\varepsilon + \alpha^{-1} + \varepsilon = \varepsilon \quad \text{und} \quad \alpha^{-1} + \varepsilon + \alpha^{-1} = \alpha^{-1},$$

was bereits $\alpha^{-1} \in G$ lehrt. G ist also auch Unterhalbkörper von $\mathfrak{H}$ und wird bei der homomorphen Abbildung von $\mathfrak{H}$ auf seine maximalen rektangulären Unterhalbmoduln (die Kompatibilität dieser Klasseneinteilung bezüglich der Multiplikation folgt aus $G_a G_b = G_c$) ersichtlich auf das Einselement e von $\mathfrak{G}$ abgebildet, so daß $G = G_e$ gilt. Schließlich folgt aus $h_a + h_b = h_c$ mit festen Elementen $h_a \in G_a$, $h_b \in G_b$ und $h_c \in G_c$ durch Multiplikation mit $G = G_e$ sofort $G_a + G_b = G_c$ in Verschärfung der bereits bekannten Aussage $G_a + G_b \subseteqq G_c$.

2. *Der additiv kommutative und idempotente Halbkörper $\mathfrak{G}$ hat ebenfalls kein Nullelement und jedes Element $a \neq e$ von $\mathfrak{G}$ hat (wie in jedem Halbkörper dieser Art) die multiplikative Ordnung ∞.*

Beweis. Als homomorphes Bild von $\mathfrak{H}$ bilden alle Elemente von $\mathfrak{G}$ eine multiplikative Gruppe, womit $\mathfrak{G}$ nach Überlegungen aus § 2 von [6] kein Nullelement haben kann. Sei weiter $a \neq e$ aus $\mathfrak{G}$ ein Element endlicher Ordnung mit $a^t = e$. Dann folgt für $a + e = b$ wegen

$$b^t = a^t + a^{t-1} + \ldots + a + e$$

$$b^{t-1} = a^{t-1} + \ldots + a + e$$

$b^t = b^{t-1}$, also $a + e = e$. Entsprechend gilt aber auch $a^{t-1} + e = e$, woraus sich aber $e + a = a$ im Widerspruch zu $a \neq e$ ergibt.

Für das Folgende bemerken wir noch, daß der rektanguläre Halbkörper G entsprechend dem eingangs zitierten Satz die direkte Komposition $G = (G_1, G_2)$ zweier Halbkörper G_1 und G_2 mit trivialer Links- bzw. Rechtsaddition ist, was ganz allgemein gilt, wenn wir für G_1 oder G_2 auch Halbkörper mit nur einem Element zulassen. Die Elemente von G schreiben wir dann auch in der Form $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ mit $\alpha_i \in G_i$, wobei also gilt:

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) = \alpha_1 + \beta_2$$

$$\alpha \cdot \beta = (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot (\beta_1 + \beta_2) = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 .$$

Dabei können (vgl. [6]) die Elemente der Form

$$\alpha + \varepsilon = (\alpha_1 + \alpha_2) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \alpha_1 + \varepsilon_2 \in G$$

mit den Elementen $\alpha_1 \in G_1$ und entsprechend die Elemente der Form

$$\varepsilon + \alpha = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + (\alpha_1 + \alpha_2) = \varepsilon_1 + \alpha_2 \in G$$

mit den Elementen $\alpha_2 \in G_2$ identifiziert werden.

3. *Gemäß* 1 *können wir den Halbkörper* $\mathfrak{H}$ *multiplikativ als* SCHREIER*sche Gruppenerweiterung*[4] *von* $G = G_e$ *mit* $\mathfrak{G}$

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{G} \circ G = \{(a, \alpha), \ldots\} \qquad a \in \mathfrak{G}, \qquad \alpha \in G$$

und dem Funktionenpaar a^b, α^b *auffassen. Dann erfüllen die auftretenden (Gruppen-) Automorphismen* $\alpha \to \alpha^b$ *von* G *neben* $(\alpha\beta)^b = \alpha^b\beta^b$ *auch* $(\alpha + \beta)^b = \alpha^b + \beta^b$, *sind also sogar Halbkörperautomorphismen von* $G = (G_1, G_2)$. *Alle Automorphismen dieser Art entstehen, indem man auf die Komponenten* α_i *in* $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \in (G_1, G_2)$ *je einen beliebigen Gruppenautomorphismus von* G_i *anwendet. Damit gilt für die Multiplikation in* $\mathfrak{H}$

$$\begin{aligned}(a, \alpha_1 + \alpha_2)(b, \beta_1 + \beta_2) &= \big(ab, a^b(\alpha_1 + \alpha_2)^b(\beta_1 + \beta_2)\big)\\ &= \big(ab, a^b(\alpha_1^b\beta_1 + \alpha_2^b\beta_2)\big).\end{aligned}$$

Für die Addition läßt sich dagegen allgemein nur

$$(a, \alpha_1 + \alpha_2) + (b, \beta_1 + \beta_2) = (a + b, \gamma_1 + \gamma_2)$$

feststellen, wobei die $\gamma_i = \gamma_i(a, b, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in G_i$ *in der Tat von allen angegebenen Argumenten abhängen können. Jedoch gilt* $\gamma_1 = \alpha_1$ *für* $a + b = a$ *und* $\gamma_2 = \beta_2$ *für* $a + b = b$, *insbesondere also*

$$(a, \alpha_1 + \alpha_2) + (a, \beta_1 + \beta_2) = (a, \alpha_1 + \beta_2).$$

BEWEIS. Bekanntlich können in $\mathfrak{G} \circ G$ die Elemente (e, α) mit den Elementen $\alpha \in G$ identifiziert werden. Damit gilt

$$(e, \alpha_1 + \alpha_2) + (e, \beta_1 + \beta_2) = (e, \alpha_1 + \beta_2).$$

Daraus folgt durch Multiplikation mit (a, ε) von links wegen

$$(a, \varepsilon)(e, \alpha) = (ae, a^e\varepsilon^e\alpha) = (a, \alpha)$$

bereits

$$(a, \alpha_1 + \alpha_2) + (a, \beta_1 + \beta_2) = (a, \alpha_1 + \beta_2).$$

Weiterhin ist

$$(a, \alpha_1 + \alpha_2) + (b, \beta_1 + \beta_2) = (a + b, \gamma_1 + \gamma_2)$$

nur eine Umschreibung von $G_a + G_b = G_{a+b}$. Für $a + b = a$ folgt dann daraus $\gamma_1 = \alpha_1$ gemäß

$$(a, \gamma_1 + \gamma_2) = (a, \alpha_1 + \alpha_2) + (a, \gamma_1 + \gamma_2) = (a, \alpha_1 + \gamma_2)$$

und entsprechend $\gamma_2 = \beta_2$ für $a + b = b$. Zum Beweis der Behauptung über die Automorphismen $\alpha \to \alpha^b$ berechnen wir nun

$$[(e, \alpha) + (e, \beta)](b, \varepsilon) = (e, \alpha + \beta)(b, \varepsilon) = \big(b, (\alpha + \beta)^b\big)$$

$$(e, \alpha)(b, \varepsilon) + (e, \beta)(b, \varepsilon) = (b, \alpha^b) + (b, \beta^b) = (b, \alpha^b + \beta^b),$$

---

[4] In der Bezeichnung richten wir uns dabei nach [5], § 50.

was bereits $(\alpha+\beta)^b = \alpha^b+\beta^b$ zeigt. Wegen $\varepsilon^b=\varepsilon$ folgt daraus

$$(\alpha+\varepsilon)^b=\alpha^b+\varepsilon^b=\alpha^b+\varepsilon,$$

so daß nach der vorangestellten Bemerkung $\alpha_1^b \in G_1$ (und entsprechend $\alpha_2^b \in G_2$) gilt, womit sich also ein Halbkörperautomorphismus $\alpha_1+\alpha_2 \to (\alpha_1+\alpha_2)^b = \alpha_1^b+\alpha_2^b$ in der Tat aus je einem Gruppenautomorphismus von G_1 und G_2 zusammensetzt. Schließlich ist jeder Gruppenautomorphismus $\alpha_1 \to \alpha_1^b$ von G_1 auf Grund der Additionsvorschrift von G_1 wegen

$$(\alpha_1+\beta_1)^b = \alpha_1^b = \alpha_1^b+\beta_1^b$$

auch Halbkörperautomorphismus von G_1 und entsprechend für G_2, womit unsere Behauptungen vollständig bewiesen sind.

4. *Gilt für einen additiv nichtkommutativen, idempotenten Halbkörper $\mathfrak{H}$ ganz allgemein die Additionsvorschrift*

$$(a, \alpha_1+\alpha_2)+(b, \beta_1+\beta_2) = (a+b, \alpha_1+\beta_2),$$

dann ist auch die Multiplikation entsprechend

$$(a, \alpha_1+\alpha_2)\cdot(b, \beta_1+\beta_2) = (ab, \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)$$

einfach komponentenweise vorzunehmen, so daß die Schreier*sche Erweiterung $\mathfrak{H}=\mathfrak{S}\circ G$ zum direkten Produkt $\mathfrak{S}\otimes G$ wird.*

Umgekehrt entsteht durch diese Additions- und Multiplikationsvorschrift zu einem rektangulären Halbkörper G und einem Halbkörper $\mathfrak{S}$ mit kommutativer, idempotenter Addition stets ein solcher Halbkörper $\mathfrak{H}$, der im Sinne unserer Aussagen 1 *und* 3 Schreier*sche Erweiterung von G mit $\mathfrak{S}$ ist. Doch gibt es im allgemeinen noch weitere, zu $\mathfrak{H}$ nicht isomorphe Halbkörper $\mathfrak{H}'$, für die dies ebenfalls zutrifft.*

Beweis. Für das Erste berechnen wir mit komponentenweiser Addition

$$(c, \gamma)[(a, \varepsilon)+(b, \varepsilon)] = (c, \gamma)(a+b, \varepsilon) = \big(c(a+b), c^{a+b}\gamma^{a+b}\big)$$

$$(c, \gamma)(a, \varepsilon)+(c, \gamma)(b, \varepsilon) = (ca, c^a\gamma^a)+(cb, c^b\gamma^b) = (ca+cb, c^a\gamma^a+c^b\gamma^b),$$

was mit $\gamma=\varepsilon$ zunächst

$$c^{a+b} = c^a+c^b,$$

also wegen der Kommutativität von $\mathfrak{S}$ und der Antikommutativität von G $c^a=c^b$ für alle a, b und c aus $\mathfrak{S}$ und damit $c^a=c^e=\varepsilon$ ergibt. Entsprechend erhalten wir mit $c=e$ über

$$\gamma^{a+b} = \gamma^a+\gamma^b$$

auch $\gamma^a=\gamma^b$ für alle a und b aus $\mathfrak{S}$ und jedes $\gamma\in G$, also $\gamma^a=\gamma^e=\gamma$. Damit gilt wie behauptet

$$(a, \alpha)(b, \beta)=(ab, \alpha\beta).$$

Umgekehrt liefert natürlich $\mathfrak{S}\otimes G$ mit komponentenweiser Addition zu vorgegebenen Halbkörpern $\mathfrak{S}$ und G einen additiv nichtkommutativen, idempotenten Halbkörper $\mathfrak{H}$. Dabei ist $G=\{(e, \alpha)\}\subseteq\mathfrak{H}$ ein rektangulärer Unterhalbkörper von

$\mathfrak{H}$, und sogar der maximale rektanguläre Unterhalbkörper von $\mathfrak{H}$. Aus $(b, \beta) R(e, \varepsilon)$, also

$$(b, \beta)+(e, \varepsilon)+(b, \beta)=(e+b, \beta)=(b, \beta)$$
$$(e, \varepsilon)+(b, \beta)+(e, \varepsilon)=(e+b, \varepsilon)=(e, \varepsilon)$$

folgt nämlich $b = e+b = e$.

Die letzte Behauptung wird sich aus dem nachfolgenden Beispiel 5 ergeben. Vorbereitend dazu stellen wir fest (vgl. [6], § 3, Satz 1), daß jeder Halbkörper $\mathfrak{G}$ mit kommutativer, idempotenter Addition eine verbandsmäßig geordnete Gruppe mit

$$a \leqq b \quad \text{genau dann, wenn} \quad a+b=b$$

und $a+b = \sup(a, b)$ ist. Gilt dabei stets $a \leqq b$ oder $b \leqq a$ für jedes Paar von Elementen aus $\mathfrak{G}$, wollen wir $\mathfrak{G}$ einen geordneten Halbkörper mit kommutativer, idempotenter Addition nennen.[5] Ein solcher Halbkörper entsteht z. B. (vgl. [6], § 1) aus einer unendlichen zyklischen Gruppe $\mathfrak{G}=\{a^i\}$ durch die Additionsvorschrift

$$a^i+a^j=a^{\max(i, j)}.$$

5. *Es sei $\mathfrak{G}$ ein geordneter Halbkörper mit kommutativer, idempotenter Addition, G ein beliebiger rektangulärer Halbkörper. Dann entsteht ein Halbkörper $\mathfrak{H}'$ mit nichtkommutativer, idempotenter Addition, indem in einer* SCHREIER*schen Erweiterung $\mathfrak{H}' = \mathfrak{G} \circ G$ (mit der in 3 angegebenen Automorphismenbedingung) eine Addition eingeführt wird gemäß*

$$(a, \alpha)+(b, \beta)=(a+b, \delta) \quad \text{mit} \quad \begin{cases}\delta=\alpha & \text{für} \quad a>b \\ \delta=\alpha+\beta & \text{für} \quad a=b \\ \delta=\beta & \text{für} \quad a<b .\end{cases}$$

Keiner dieser Halbkörper $\mathfrak{H}'$ ist isomorph zu dem in 4 aus $\mathfrak{G}$ und G konstruierten Halbkörper $\mathfrak{H} = \mathfrak{G} \otimes G$ mit komponentenweiser Addition.

BEWEIS. Man prüft leicht nach, daß die eingeführte Addition assoziativ ist. Der Nachweis von

$$[(a, \alpha)+(b, \beta)](c, \gamma)=(a, \alpha)(c, \gamma)+(b, \beta)(c, \gamma)$$

ergibt sich gemäß

$$\left.\begin{array}{r}(a+b, \delta)(c, \gamma)= \\ (a c, a^c \alpha^c \gamma)+(b c, b^c \beta^c \gamma)=\end{array}\right\} \begin{cases}=(a c, a^c \alpha^c \gamma) & \text{für} \quad a>b \\ =(a c, a^c(\alpha+\beta)^c \gamma) & \text{für} \quad a=b \\ =(b c, b^c \beta^c \gamma) & \text{für} \quad a<b\end{cases}$$

unter Verwendung von $(\alpha+\beta)^c = \alpha^c+\beta^c$ und $ac>bc$ für $a>b$. Entsprechend rechnet man die zweite Relation des distributiven Gesetzes nach. $\mathfrak{H}'$ ist also ein

---

[5] Diese Begriffsbildung ist allgemeiner als die des „geordneten Halbringes" aus [7], § 8; zwar gilt stets

$$\text{aus } a<b \text{ folgt } ac<bc \text{ und } ca<cb,$$

doch an Stelle des strengen Monotoniegesetzes der Addition nur

$$\text{aus } a \leqq b \text{ folgt } a+c \leqq b+c.$$

Halbkörper der gewünschten Art, und man zeigt wie oben, daß $G=\{(e,\alpha)\}\subseteqq\mathfrak{H}'$ sogar maximaler rektangulärer Unterhalbkörper von $\mathfrak{H}'$ ist. Dabei sind $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{H}$ schon additiv nicht isomorph. So haben etwa in $\mathfrak{H}$ mit festen $a<b$ aus $\mathfrak{G}$ und festem $\alpha\in G$ die Summen

$$(a,\alpha)+(b,\beta)+(a,\alpha) = (b,\alpha)$$

den gleichen Wert für jedes $\beta\in G$, während in $\mathfrak{H}'$ diese Summen

$$(a,\alpha)+(b,\beta)+(a,\alpha) = (b,\beta)$$

alle Elemente von $G_b=\{(b,\beta)\}$ durchlaufen.

PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE POTSDAM,
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

(Eingegangen am 8. Mai 1963.)

Literaturverzeichnis

[1] A. H. CLIFFORD, Semigroups admitting relative inverses, *Ann. of Math.*, **42** (1941), S. 1037—1049.

[2] A. H. CLIFFORD, Bands of semigroups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5** (1954), S. 499—504.

[3] N. KIMURA, The structure of idempotent semigroups (I), *Pacific J.*, **8** (1958), S. 257—275.

[4] D. MCLEAN, Idempotent semigroups, *Am. Math. Monthly*, **61** (1954), S. 110—113.

[5] L. RÉDEI, *Algebra* I, deutsche Ausg. (Leipzig, 1959).

[6] H. J. WEINERT, Über Halbringe und Halbkörper. I, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **13** (1962), S. 365—378.

[7] H. J. WEINERT, Über Halbringe und Halbkörper. III, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **15** (1964), S. 177—194.

SOLUTION OF A PROBLEM OF G. GRÄTZER CONCERNING ENDOMORPHISM SEMIGROUPS

By

M. MAKKAI (Budapest)

(*Presented by* A. RÉNYI)

In this paper a solution of a problem of G. GRÄTZER [1] (Problem 17) is given. To formulate the problem let $\mathfrak{A}$ be a universal algebra (briefly: algebra) and let $\mathfrak{E}(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{H}(\mathfrak{A})$ be the semigroups of the endomorphisms, monomorphisms, and epimorphisms of $\mathfrak{A}$, respectively. The problem is to characterize the triplets $(\mathfrak{E}(\mathfrak{A}), \mathfrak{M}(\mathfrak{A}), \mathfrak{H}(\mathfrak{A}))$ in terms of the theory of semigroups. G. GRÄTZER gives in [1] certain conditions necessary for a given triplet (E, M, H) of semigroups to be isomorphic with some triplet $(\mathfrak{E}(\mathfrak{A}), \mathfrak{M}(\mathfrak{A}), \mathfrak{H}(\mathfrak{A}))$ (see § 1, Theorem, conditions C1—C3, in this paper). E. FRIED and (later) the author found a further necessary condition, independent of the former ones (condition C4). Conditions C1—C4 are jointly sufficient; consequently, these give the solution of the problem.

In § 1 we fix some necessary notions, formulate the theorem, prove the necessity-statement of it and outline the construction, serving to prove the sufficiency-statement.

In § 2 we describe the latter construction in detail and give, as corollaries of the theorem, solutions of Problem 16 in [1] concerning the characterization of the couples $(\mathfrak{E}(\mathfrak{A}), \mathfrak{M}(\mathfrak{A}))$ and the corresponding problem for epimorphisms.

I must express my gratitude to MR. GEORGE GRÄTZER for his valuable remarks in connection with this paper.

§ 1

By an *algebra* $\mathfrak{A} = (A; F)$ we mean a couple, composed by a (non-empty) set A and a system F of finitary operations on this set A. If $F = \{f_1, f_2, \dots\}$ then we also write $(A; f_1, f_2, \dots)$ for $(A; F)$.

A mapping ε of the set A into itself, which satisfies the substitution property for each operation f of F,[1] is called an *endomorphism* of $(A; F)$. ε is a *monomorphism* or *epimorphism* of $(A; F)$ if in addition ε is, respectively, one-to-one or onto. The sets of endomorphisms, monomorphisms and epimorphisms of the algebra $\mathfrak{A}$ are denoted by $E(\mathfrak{A})$, $M(\mathfrak{A})$ and $H(\mathfrak{A})$ respectively. $E(\mathfrak{A})$ forms under the usual product-operation of mappings a semigroup, denoted by $\mathfrak{E}(\mathfrak{A})$.

Now we formulate the theorem.

THEOREM. *If* $(E; \cdot)$ *is a semigroup,* M *and* H *are subsets of* E*, then the following two conditions* (a) *and* (b) *are equivalent:*

---

[1] I. e. if the rank of f is n, and $x_1, \dots, x_n$ are arbitrary elements of A, then we have $f(x_1, \dots, x_n)\varepsilon = f(x_1\varepsilon, \dots, x_n\varepsilon)$; we write $x\varepsilon$ for the image of x under the mapping ε.

(a) *There exists an algebra* $\mathfrak{A}$ *and an isomorphism* φ *of* $\mathfrak{E}(\mathfrak{A})$ *onto* $(E; \cdot)$, *such that the image of* $M(\mathfrak{A})$ *and* $H(\mathfrak{A})$ *under* φ *is* M *and* H, *respectively.*

(b) *The following conditions are jointly satisfied:*

C1 $(E; \cdot)$ *has a unit element*, 1.

C2 (α) $\alpha_1 \in M, \alpha_2 \in M$ *imply* $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \in M$;
(β) $x, y \in E, \alpha \in M$ *and* $x\alpha = y\alpha$ *imply* $x = y$;
(γ) $x \in E - M$ *and* $y \in E$ *imply* $x \cdot y \in E - M$;
(δ) $1 \in M$.

C3 (α) $\alpha_1 \in H$ *and* $\alpha_2 \in H$ *imply* $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \in H$;
(β) $x \in E, y \in E, \alpha \in H$ *and* $\alpha x = \alpha y$ *imply* $x = y$;
(γ) $x \in E - H$ *and* $y \in E$ *imply* $y \cdot x \in E - H$;
(δ) $1 \in H$.

C4 *If* $\mu \in M, \nu \in H, x \in E, y \in E$ *and* $x\mu = \nu y$ *then there exists an element* z *in* E *such that* $x = \nu z$.

First we prove that condition (a) implies condition (b). Let $\mathfrak{A} = (A; F)$ be an algebra, $(C; \cdot)$ the semigroup of all the mappings of A into itself, with the usual product operation $\cdot$. Let be $(E; \cdot) = \mathfrak{E}(\mathfrak{A})$, $M = M(\mathfrak{A})$, $H = H(\mathfrak{A})$. The identity-mapping 1 of A is in $E(\mathfrak{A})$, so Cl holds.

Now we give the following characterization of M and H: $\alpha \in M$ or $\alpha \in H$ if and only if $\alpha \in E$ and, respectively, α has a right inverse or left inverse in $(C; \cdot)$.[2] Indeed, let first be $\mu \in M$ and define the mapping $\varepsilon \in C$ as follows: if $a, b \in A$ and $a = b\mu$, let be $a\varepsilon = b$; if $a \in A$ and there is no $b \in A$, such that $a = b\mu$, then let be $a\varepsilon = a$. The definition is unambigous, for we have at most one $b \in A$ with $a = b\mu$. It is obvious, that $\mu\varepsilon = 1$. Secondly, let $\nu \in H$ and define the mapping $\varepsilon \in C$ as follows: if $a \in A$, then on account of the assumption there exists a $b \in A$, such that $a = b\nu$; we define $a\varepsilon$ as such a one b. (We use the axiom of choice.) We have now $\varepsilon\nu = 1$. On the other hand, suppose $\mu \in E$, $\varepsilon \in C$ and $\mu\varepsilon = 1$. If $a, b \in A$ and $a\mu = b\mu$, then $(a\mu)\varepsilon = (b\mu)\varepsilon$ i. e. $a = b$. Consequently, we have $\mu \in M$. Secondly, suppose $\nu \in E, \varepsilon \in C$ and $\varepsilon\nu = 1$. If $a \in A$ then $(a\varepsilon)\nu = 1$, hence $\nu \in H$ — qu. e. d.

From this characterization we deduce the properties C2 $(\alpha) - (\delta)$, C3 $(\alpha) - (\delta)$. On account of the symmetry of the characterizations and of the conditions, it suffices to treat the case of the monomorphisms.

ad C2 (α). If $\alpha_1, \alpha_2 \in M$, then for some $\gamma_1, \gamma_2 \in C$ we have $\alpha_1\gamma_1 = 1$ and $\alpha_2\gamma_2 = 1$; hence $(\alpha_1\alpha_2)(\gamma_2\gamma_1) = \alpha_1(\alpha_2\gamma_2)\gamma_1 = \alpha_1\gamma_1 = 1$, and, since $\alpha_1\alpha_2 \in E$, we have $\alpha_1\alpha_2 \in M$.

ad C2 (β). If $x, y \in E, \alpha \in M, x\alpha = y\alpha$ then for some $\gamma \in C$ $\alpha\gamma = 1$; $(x\alpha)\gamma = (y\alpha)\gamma$ hence $x = y$.

ad C2 (γ). We prove the equivalent statement, that $x, y \in E$ and $x \cdot y \in M$ imply $x \in M$. Indeed, if $x \cdot y \in M$, then for some $\gamma \in C$ $(x \cdot y)\gamma = 1$ i. e. $x(y\gamma) = 1$, hence $x \in M$.

ad C2 (δ). The identity mapping is inverse of itself. To prove C4 first we show the following two symmetric assertions:

(i) If $\mu \in M, \gamma \in C$ and $\gamma\mu \in E$ then $\gamma \in E$

(ii) If $\nu \in H, \gamma \in C$ and $\nu\gamma \in E$ then $\gamma \in E$.

---

[2] x is a right inverse or left inverse of α in $(C; \cdot)$ if $\alpha x = 1$ or $x\alpha = 1$, respectively. Of course, this statement is well known, see e. g. [2], p. 121.

ad (i). We must show, that for γ and $f \in F$ the substitution principle holds. Indeed, we have an element $\mu' \in C$ such that $\mu\mu' = 1$; hence

$$f(x_1, \dots, x_n)\gamma = f(x_1, \dots, x_n)(\gamma\mu)\mu' = f(x_1(\gamma\mu), \dots, x_n(\gamma\mu))\mu' =$$
$$= f(x_1\gamma, \dots, x_n\gamma)\mu\mu' = f(x_1\gamma, \dots, x_n\gamma)$$

qu. e. d.

ad (ii). We now have a $\nu' \in C$ with $\nu'\nu = 1$; hence

$$f(x_1, \dots, x_n)\gamma = f(x_1\nu'\nu, \dots, x_n\nu'\nu)\gamma = f(x_1\nu', \dots, x_n\nu')\nu\gamma =$$
$$= f(x_1\nu'\nu\gamma, \dots, x_n\nu'\nu\gamma) = f(x_1\gamma, \dots, x_n\gamma)$$

qu. e. d.

To come to C4, suppose $\mu \in M$, $\nu \in H$, $x \in E$, $y \in E$ and $x\mu = \nu y$. Then we have $\mu' \in C$ with $\mu\mu' = 1$; hence $x(\mu\mu') = x = \nu(y\mu')$; since $\nu(y\mu') \in E$, we get by (ii) $y\mu' = z \in E$; on the other hand $x = \nu z$ q. e. d. Thus the proof that (a) implies (b) is completed; we have proceeded slightly indirectly, to make clear the grounds of the symmetries.

Now we outline the proof of the second part of the theorem. We set out from the following remark of G. BIRKHOFF and G. GRÄTZER. Let $(E; \cdot)$ be a semigroup with a unit. Let the system F consist of the operations μ_α, where $\alpha \in E$, and μ_α is defined by $\mu_\alpha(x) = \alpha \cdot x$ for every $x \in E$. In this case $\mathfrak{E}((E; F)) \cong (E; \cdot)$ by the isomorphism $\varepsilon_\alpha \leftrightarrow \alpha$, where ε_α is defined by $x\varepsilon_\alpha = x \cdot \alpha$ for every $x \in E$. $M((E; F))$ and $H((E; F))$ will consist of those ε_α, for which α is right regular[3] or has a left inverse in $(E; \cdot)$, respectively. Now if we have the subsets M, H, satisfying the conditions C1—C4, then by C2 (β) $M \subset M((E; F))$ and by C3 (γ) $H \supset H((E; F))$. Consequently, our task is, roughly speaking, to extend $(E; \cdot)$ to a semigroup, in which every element of H has a left inverse and no element of $E - M$ is right regular. We first construct the extension $(G; \cdot)$ of $(E; \cdot)$ serving only the first purpose. We use for this only condition C3 (β). That is the content of Lemma 1. Naturally, $\mathfrak{E}((G; F')) \cong (G; \cdot)$ (if F' is defined analogously to F); hence we must eliminate the endomorphisms ε_α with $\alpha \in G - E$. This is done by introducing a new operation φ and extending G to N; the substitution principle holds for φ only for ε_α with $\alpha \in E$. This construction is contained in Lemma 2. By C3 (α), (γ) and (δ) no new epimorphism occurs and by C4 every element of M remains right regular. Finally, to eliminate the superfluous monomorphisms we duplicate the elements of M (and for preserving the epimorphisms certain other elements of N too). If $\alpha \in E - M$ and $\bar{1}$ is the element in the new algebra $(A; F)$, obtained by duplication of 1 then for the endomorphism ε_α of $(A; F)$ we have $1\varepsilon_\alpha = \bar{1}\varepsilon_\alpha = \alpha$ hence ε_α is not a monomorphism; on the other hand, if $\alpha \in M$ then $1\varepsilon_\alpha = \alpha$, $\bar{1}\varepsilon_\alpha = \bar{\alpha}$ and $\alpha \neq \bar{\alpha}$. We must introduce a further operation to assure that we get no new endomorphism. The detailed investigation shows that in this way we get the desired result.

§ 2

LEMMA 1. *Let* $(E; \cdot)$ *be a semigroup, with the unit element* 1, R *a subset of* E *and suppose that if* $r \in R$ *then* r *has no left inverse in* $(E; \cdot)$ *and* r *is left regular in* $(E; \cdot)$. *Then there exists a semigroup* $(G; \cdot)$, *satisfying the following conditions:*

---

[3] $\alpha \in E$ is called right regular (left regular) in $(E; \cdot)$ if $x\alpha = yx$ $(\alpha x = \alpha y)$ implies $x = y$.

a) $(E; \cdot)$ *is a subsemigroup of* $(G; \cdot)$; 1 *is a unit element of* $(G; \cdot)$.

b) *There exists a one-to-one mapping of the set* R *into the set* $G-E$, *such that if the image of the element* r *of* R *is denoted by* r^{-1}, *we have*

$$r^{-1} \cdot r = 1$$

and each element x *of* G *can be written in a unique way in the following form*

$$x = \alpha_0 r_1^{-1} \alpha_1 r_2^{-1} \alpha_2 \ldots r_n^{-1} \alpha_n, \tag{1}$$

where $n \geqq 0$, $\alpha_i \in E$ $(i=0, 1, \ldots, n)$, $r_i \in R$ $(i=1, \ldots, n)$ *and for* $i=1, \ldots, n$ *there is no* β *in* E *with* $\alpha_i = r_i \beta$.

These properties determine $(G; \cdot)$ *uniquely up to isomorphism.*

PROOF. We write $r \nmid \alpha$ for abbreviating the statement, that there is no β with $\alpha = r\beta$. We define the set G as follows.

Let G have as elements all the systems

$$(\alpha_0, r_1, \alpha_1, \ldots, r_n, \alpha_n) \tag{2}$$

where $n \geqq 0$, $\alpha_i \in E$ $(i=0, 1, \ldots, n)$, $r_i \in R$ $(i=1, \ldots, n)$ and for $i=1, \ldots, n$ $r_i \nmid \alpha_i$. The equality of the elements of G is defined as componentwise equality. The element in (2) will correspond to the element in (1); we define the operation $\cdot$ on G accordingly as follows.

If $\alpha \in E$, $r \in R$ then either $r \nmid \alpha$ or there is a β in E, such that $\alpha = r\beta$; in the latter case this β is unique, on account of left regularity of r. Therefore the following assertion is obvious. If $x \in G$, x is the element in (2), $\beta \in E$, then we can determine a unique non-negative integer k and a unique sequence $(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ of $k+1$ members, such that the following hold: $0 \leqq k \leqq n$, $\gamma_i \in E$ for $i=0, \ldots, k$; $\gamma_0 = \beta$, and $\alpha_{n-i}\gamma_i = r_{n-i}\gamma_{i+1}$ for $i=0, \ldots, k-1$ and *either* $k=n$, *or*, in case $k \neq n$ $r_{n-k} \nmid \alpha_{n-k}\gamma_k$. In this case we call the sequence $(\gamma_0, \ldots, \gamma_k)$ the *sequence associated with* x *and* β.

Now we define the operation $\cdot$ as follows. If $x, y \in G$ and

$$x = (\alpha_0, r_1, \alpha_1, \ldots, r_m, \alpha_m) \tag{3}$$

$$y = (\beta_0, s_1, \beta_1, \ldots, s_n, \beta_n) \tag{4}$$

and the sequence associated with x and β_0 is $(\gamma_0, \ldots, \gamma_k)$ then let us write

$$x \cdot y = (\alpha_0, r_1, \alpha_1, \ldots, r_{n-k}, \alpha_{n-k} \cdot \gamma_k, s_1, b_1, \ldots, s_n, b_n)$$

(naturally, if $k=n$, the first component of $x \cdot y$ is $\alpha_0 \gamma_n$). It is obvious that for $x, y \in G$ we always have $x \cdot y \in G$.

We prove that the operation $\cdot$ on G is associative. To this end, consider $x, y, z \in G$, let (3) and (4) hold and let be

$$z = (\delta_0, t_1, \delta_1, \ldots, t_p, \delta_p). \tag{5}$$

Let further be $(\gamma_0, \ldots, \gamma_k)$ and $(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l)$ the sequences associated respectively with x and β_0 or with y and δ_0; hence the following hold:

$$0 \leqq k \leqq m, \quad 0 \leqq l \leqq n, \quad \gamma_i \in E \quad (i=0, 1, \ldots, k) \quad \varepsilon_i \in E \quad (i=0, 1, \ldots, l)$$

$$\gamma_0 = \beta_0, \; \varepsilon_0 = \delta_0 \tag{6}$$

$$\alpha_{m-i}\gamma_i = r_{m-i}\gamma_{i+1} \qquad (i=0, \ldots, k-1) \tag{7}$$

$$\beta_{n-i}\varepsilon_i = s_{n-i}\varepsilon_{i+1} \qquad (i=0, \ldots, l-1) \tag{8}$$

$$\textit{either } k=m \textit{ or } r_{m-k} \nmid \alpha_{m-k}\gamma_k \tag{9}$$

$$\textit{either } l=n \textit{ or } s_{n-l} \nmid \beta_{n-l}\varepsilon_l. \tag{10}$$

By definition we have

$$x \cdot y = (\alpha_0, r_1, \alpha_1, \ldots, r_{m-k}, \alpha_{m-k}\gamma_k, s_1, \beta_1, \ldots, s_n, \beta_n) \tag{11}$$

$$y \cdot z = (\beta_0, s_1, \beta_1, \ldots, s_{n-l}, \beta_{n-l}\varepsilon_l, z_1, \delta_1, \ldots, z_p, \delta_p). \tag{12}$$

First suppose $n-l>0$. In this case it follows from (6), (8), (10), that the sequence associated with $x \cdot y$ and δ_0 is $(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l)$. On the other hand the first component of $y \cdot z$ is β_0 and we infer, that the sequence associated with x and β_0 is $(\gamma_0, \ldots, \gamma_k)$. Consequently, we get from (11) and (12)

$$(x \cdot y)z = x \cdot (y \cdot z) =$$
$$= (\alpha_0, r_1, \alpha_1, \ldots, r_{m-k}, \alpha_{m-k}\gamma_k, s_1, \beta_1, \ldots, s_{n-l}, \beta_{n-l}\varepsilon_l, z_1, \delta_1, \ldots, z_p, \delta_p).$$

Next, suppose $n-l = 0$, $l=n$. Now

$$y \cdot z = (\beta_0\varepsilon_n, z_1, \delta_1, \ldots, z_p, \delta_p). \tag{13}$$

Multiplying the equations (6) and (7) by ε_n, we get on account of the associativity of $\cdot$ in $(E; \cdot)$

$$\gamma_0\delta_0 = \beta_0\delta_0 \tag{14}$$

$$\alpha_{m-i}(\gamma_i\varepsilon_n) = r_{m-i}(\gamma_{i+1}\varepsilon_n) \qquad (i=0, \ldots, k-1). \tag{15}$$

Determine the integer k' and the elements $\gamma'_k, \gamma'_{k+1}, \ldots, \gamma'_{k'}$ of E, such that $k' \geqq k$,

$$\gamma'_k = \gamma_k\varepsilon_n, \tag{16}$$

$$\alpha_{m-j}\gamma'_j = r_{m-j}\gamma'_{j+1} \qquad (j=k, \ldots, k'-1) \tag{17}$$

and

$$\textit{either} \quad k'=m \quad \textit{or} \quad r_{m-k'} \nmid \alpha_{m-k'}\gamma'_{k'}. \tag{18}$$

It follows from (14), (15), (16), (17), (18) that the sequence associated with x and $\beta_0\varepsilon_n$ is

$$(\gamma_0\varepsilon_n, \gamma_1\varepsilon_n, \ldots, \gamma_k\varepsilon_n, \gamma'_{k+1}, \ldots, \gamma'_{k'})$$

and so we have according to (13)

$$x \cdot (yz) = (\alpha_0, r_1, \alpha_1, \ldots, r_{m-k'}, \alpha_{m-k'}\gamma'_{k'}, t_1, \delta_1, \ldots, t_p, \delta_p). \tag{19}$$

By the associativity in $(E;\cdot)$

$$(\alpha_{m-k}\gamma_k)\varepsilon_n = \alpha_{m-k}(\gamma_k\varepsilon_n). \tag{20}$$

It follows from (6), (8), (11), (16), (17), (18), (20) that the sequence associated with $x\cdot y$ and δ_0 is

$$(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n, \gamma'_{k+1}, \ldots, \gamma'_{k'})$$

and so we have according to (11)

$$(x\cdot y)z = (\alpha_0, r_1, \alpha_1, \ldots, r_{m-k'}, \alpha_{m-k'}\cdot\gamma'_{k'}, t_1, \delta_1, \ldots, t_p, \delta_p). \tag{21}$$

(19) and (21) give $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ — qu. e. d.

If $a\in E$ then $(a)\in G$ by the definition of G. From the definition of the multiplication we see that for $\alpha_1, \alpha_2 \in E$

$$(\alpha_1)\cdot(\alpha_2)=(\alpha_1\cdot\alpha_2)$$

where on the right side the operation in $(E;\cdot)$ is to be taken. Thus the mapping $a\to(a)$ is an isomorphism of $(E;\cdot)$ to the corresponding subsemigroup of $(G;\cdot)$; and by identifying (a) with a for each $a\in E$ we get that $(E;\cdot)$ is a subsemigroup of $(G;\cdot)$. It is obvious that 1 will be the unit element in $(G;\cdot)$ too.

If $r\in R$, then $r\nmid 1$; for if $1=r\beta$ $(\beta\in E)$ then $r\cdot 1=1\cdot r=(r\beta)\cdot r=r(\beta r)$ and since r is left regular, $1=\beta r$ contradicting the condition that r has no left inverse in $(E;\cdot)$. Accordingly, if $r\in R$, $(1, r, 1)\in G$. We put $r^{-1}=(1, r, 1)$. By the definition of the multiplication it follows at once that

$$r^{-1}\cdot r = 1. \tag{22}$$

If $x\in G$

$$x=(\alpha_0, r_1, \alpha_1, \ldots, r_n, \alpha_n) \tag{23}$$

and $n\geqq 1$ and

$$x'=(\alpha_0, r_1, \alpha_1, \ldots, r_{n-1}, \alpha_{n-1})$$

then $x'\in G$ and $x=x'\cdot r_n^{-1}\cdot\alpha_n$; this follows at once from the definition of the multiplication.

By induction on n we have on account of this that in case of (23)

$$x = \alpha_0 r_1^{-1}\alpha_1 \ldots r_n^{-1}\alpha_n. \tag{24}$$

By (22), (24) we also have proved the assertion (b) of Lemma 1. We call the representation (24) of the element x in (23) the canonical representation of x. In case of two semigroups, satisfying the conditions in (a) and (b) we can give trivially an isomorphism of the one to the other, on account of the canonical representation.

LEMMA 2. *Let $(E;\cdot)$, $(G;\cdot)$ and R satisfy the assertion of Lemma* 1. *In this case there exists an algebra $(N;\cdot,\varphi)$ where $\cdot$ is a binary, φ is a unary operation such that the following holds:*

a) *$(N;\cdot)$ is a semigroup, $(G;\cdot)$ is a subsemigroup of $(N;\cdot)$,* 1 *is a unit element in $(N;\cdot)$.*

b) *Let K be the set of elements of G, which have the form $1\cdot r_1^{-1}\alpha_1\ldots r_n^{-1}\alpha_n$ in the canonical representation ($n=0$ is permitted). If $x\in N$, then of the following conditions exactly one holds:*

(i) $x \in G$;

(ii) *there exists one couple* (g_1, g_2) *with* $g_1 \in G, g_2 \in K$ *and* $x = \varphi(g_1) \cdot g_2$.

c) *If* $g_1 \in G, g_2 \in K$

$$g_1 \cdot \varphi(g_2) = \varphi(g_1 \cdot g_2)$$

$$\varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2) = \varphi(g_1 \cdot g_2)$$

$$\varphi(\varphi(g_1) \cdot g_2) = g_1 \cdot g_2 .$$

d) *If* $x \in N$, $\alpha \in E$ *then* $\varphi(x) \cdot \alpha = \varphi(x \cdot \alpha)$.

The algebra $(N; \cdot, f)$, *satisfying these conditions, is unique up to isomorphism.*

PROOF. We define N as the set of the elements of G and of the couples (g_1, g_2) where $g_1 \in E, g_2 \in K$. The equality of elements of N is componentwise equality. We introduce a few notations, for abbreviating the formulas. For $x \in N$ we put $\|x\| = x$ if $x \in G$ and $\|x\| = g_1 g_2$ if $x = (g_1, g_2)$. If $g \in G$ and the canonical representation of g is $g = \alpha_0 r_1^{-1} \alpha_1 \dots r_n^{-1} \alpha_n$ then we write $(g)_0$ for α_0 and $[g]$ for $r_1^{-1} \alpha_1 \dots r_n^{-1} \alpha_n$ (resp. for 1 if $n = 0$). In the following g, g_1, g_2, g_3 denote always elements of G.

It is obvious that

$$(g)_0 \in E, \tag{25}$$

$$[g] \in K, \tag{26}$$

$$g = (g)_0 [g]. \tag{27}$$

Further we have

$$(g_1)_0 ([g_1] g_2)_0 = (g_1 g_2)_0 \tag{28}$$

$$[[g_1] g_2] = [g_1 g_2]. \tag{29}$$

To show (28) and (29), let $[g_1] g_2 = \alpha_0 r_1^{-1} \alpha_1 \dots r_n^{-1} \alpha_n$ in the canonical representation. Now $g_1 g_2 = (g_1)_0 [g_1] g_2 = ((g_1)_0 \alpha_0) r_1^{-1} \alpha_1 \dots r_n^{-1} \alpha_n$ and this is the (unique) canonical representation of $g_1 g_2$; consequently $(g_1 g_2)_0 = (g_1)_0 \alpha_0 = (g_1)_0 ([g_1] g_2)_0$ and $[g_1 g_2] = r_1^{-1} \alpha_1 \dots r_n^{-1} \alpha_n = [[g_1] g_2]$.

Now we define the operation $\cdot$ on the elements of N as follows

(i) Let $g_1 \cdot g_2$ be the same elements, as $g_1 g_2$ in $(G; \cdot)$.

(ii) $(g_1, g_2) \cdot g_3 = (g_1 (g_2 g_3)_0, [g_2 g_3])$.

(iii) For arbitrary $x \in N$

$$x \cdot (g_1, g_2) = (\|x\| g_1, g_2).$$

It is obvious that for $x, y \in N$ $x \cdot y$ is always defined uniquely and $x \cdot y \in N$.

The definition of the operation φ is as follows

(i) $\varphi(g) = (g, 1)$,

(ii) $\varphi((g_1, g_2)) = g_1 \cdot g_2$.

We prove the associativity of the operation $\cdot$. For arbitrary $x, y, z \in N$ we have to prove $x(yz) = (xy)z$. To this end, we distinguish the following cases:

(i) Let $z = (g_1, g_2)$. Now we have by computation $x(yz) = (xy)z = (\|x\| \, \|y\| g_1, g_2)$.

(ii) Let $z = g \in G$ and $y = (g_1, g_2)$. Now we have

$$x(yz) = (xy)z = (\|x\| g_1 (g_2 g)_0, [g_2 g]).$$

(iii) Let $z=g\in G$ and $y=g_1\in G$ and $x=(g_2, g_3)$. We get

$$x(yz)=(g_2\cdot(g_3g_1g)_0, [g_3g_1g]),$$
$$(xy)z=(g_2\cdot(g_3g_1)_0\cdot([g_3g_1]g)_0, [[g_3g_1]g])$$

from (28) and (29) (with g_3g_1 and g instead of g_1 and g_2) we obtain $x(yz)=(xy)z$.

(iv) Let $z, y, x\in G$. Then $x(yz)=(xy)z$ holds by the associativity in $(G; \cdot)$.

It is obviously true, that 1 is a unit in $(N; \cdot)$. So we have proved the assertion of a) of the lemma.

By the definition of the operation $\cdot$ and φ we obtain at once for $g_1\in G, g_2\in K$ that $\varphi(g_1)\cdot g_2=(g_1, g_2)$; so we have proved part b) of the lemma. c) follows by easy computation. To prove d) let first $x=g\in G$ and $\alpha\in E$. $\varphi(g)\cdot\alpha=(g, 1)\cdot\alpha= =(g\cdot(1\cdot\alpha)_0, [1\cdot\alpha])=(g\alpha, 1)=\varphi(g\alpha)$. Next let be $x=(g_1, g_2)$, $\alpha\in E$. In this case

$$\varphi((g_1, g_2))\cdot\alpha=g_1g_2\alpha$$

and

$$\varphi((g_1, g_2)\alpha)=\varphi((g_1(g_2\alpha)_0, [g_2\alpha]))=g_1(g_2\alpha)_0[g_2\alpha]=g_1g_2\alpha.$$

The unicity statement of the lemma is easily proved by considering the unique representation of the elements of N, given in b), but we do not need it in the following. Thus the proof of Lemma 2 is completed.

Suppose now that the semigroup $(E; \cdot)$ and the subsets M, H satisfy the conditions C1—C4. Let R be the set of those elements of H, which have no left inverse in E. On account of C3 (β) and Lemma 1 we have a corresponding semigroup $(G; \cdot)$ and by Lemma 2 an algebra $(N; \cdot, \varphi)$ with certain properties. Now we define the algebra $(A; F)$ satisfying the condition a) of the Theorem. Let S be the set of elements s of G with $(s)_0\in M$. We associate in a one-to-one way with every element s of S an abstract element $\bar{s}$, not contained in N. Let the set of these $\bar{s}$ be $\bar{S}$. Now let be $A = N\cup\bar{S}$.

To define F, let be for $x\in A$ $|x|=x$ if $x\in N$ and $|x|=s$ if $x=\bar{s}$. If $h\in N$ let be f_h the one-place operation on A defined by $f_h(x)=h\cdot|x|$ for $x\in A$. We denote by φ a one-place operation on A, which is an extension of φ defined on N and satisfies $\varphi(x)=\varphi(|x|)$ for all $x\in A$. We define the one-place operation ψ on A as follows:

$$\psi(x) = \bar{x} \quad \text{if} \quad x\in S,$$
$$\psi(x) = x \quad \text{if} \quad x\in A-S=(N-S)\cup\bar{S}.$$

It is obvious that for $x\in A$ $|\psi(x)|=|x|$. Now we define F, as containing the operations φ and ψ and f_h for every $h\in N$.

We prove that $(A; F)$ satisfies the requirements of a) of the Theorem.

LEMMA 3. a) *The endomorphisms of $(A; F)$ are exactly the mappings ε_α where $\alpha\in E$ and ε_α is defined by*

$$x\varepsilon_\alpha = x\cdot\alpha \quad \textit{if} \quad x\in N,$$
$$x\varepsilon_\alpha = \psi(s\cdot\alpha) \quad \textit{if} \quad x = \bar{} \in \bar{S}.$$

b) *If $\alpha_1, \alpha_2\in E$ and $\alpha_1\neq\alpha_2$ then $\varepsilon_{\alpha_1}\neq\varepsilon_{\alpha_2}$.*
c) *If $\alpha_1, \alpha_2\in E$ then $\varepsilon_{\alpha_1}\cdot\varepsilon_{\alpha_2}=\varepsilon_{\alpha_1\cdot\alpha_2}$.*
d) *ε_α is a monomorphism of $(A; F)$ if and only if $\alpha\in M$.*
e) *ε_α is an epimorphism of $(A; F)$ if and only if $\alpha\in M$.*

Proof of a). Let be $\alpha \in E$. We prove the substitution property for ε_α and the operations of F.

Let be $h \in N$ and $x \in N$. $f_h(x\varepsilon_\alpha) = h\cdot(x\alpha) = (hx)\alpha = f_h(x)\varepsilon_\alpha$. Now let be $x = \bar{s}$. $f_h(\bar{s}\varepsilon_\alpha) = h\,|\bar{s}\varepsilon_\alpha| = h\,|\psi(s\alpha)| = h(s\alpha)$ and $f_h(\bar{s})\varepsilon_\alpha = (hs)\alpha$.

To treat the case of φ, let first be $x \in N$. Then $\varphi(x)\varepsilon_\alpha = \varphi(x)\alpha = \varphi(x\alpha) = \varphi(x\varepsilon_\alpha)$ by Lemma 2 d). Now let be $x = s \in \bar{S}$. $\varphi(\bar{s})\varepsilon_\alpha = \varphi(s)\varepsilon_\alpha = \varphi(s)\cdot\alpha = \varphi(s\alpha)$ and $\varphi(\bar{s}\varepsilon_\alpha) = \varphi(\psi(s\alpha)) = \varphi(|\psi(s\alpha)|) = \varphi(s\alpha)$.

To settle the case of ψ, we prove first that if $h \in N - S$ and $\alpha \in E$ then $h\alpha \in N - S$. Let first be $h = g \in G$. In this case we have $(g)_0 \notin M$; on the other hand $(g\alpha)_0 = (g)_0([g]\alpha)_0$ by (28). Hence by condition C2 (γ) $(g\alpha)_0 \notin M$ and $g\alpha \in N - S$. Let secondly be $h = \varphi(g_1)\cdot g_2$ with $g_1 \in G, g_2 \in K$. Now $h\alpha = \varphi(g_1(g_2\alpha)_0)[g_2\alpha]$ by Lemma 2 d) and by the unicity stated in part b) of Lemma 2 we have $h\alpha \in N - G \subset N - S$.

To come to the substitution principle connected with ψ and ε_α we distinguish the three cases (i) $x \in N - S$, (ii) $x \in S$, (iii) $x \in \bar{S}$.

(i) $\psi(x\varepsilon_\alpha) = \psi(x\alpha) = x\alpha$ on account of $x\alpha \notin S$; and $\psi(x)\varepsilon_\alpha = x\varepsilon_\alpha = x\alpha$.

(ii) $\psi(x)\varepsilon_\alpha = \bar{x}\varepsilon_\alpha = \psi(x\alpha) = \psi(x\varepsilon_\alpha)$.

(iii) $x = \bar{s}$, $\psi(x)\varepsilon_\alpha = \bar{s}\varepsilon_\alpha = \psi(s\alpha)$ and $\psi(x\varepsilon_\alpha) = \psi(\psi(s\alpha)) = \psi(s\alpha)$.

So we have proved that ε_α for $\alpha \in E$ is an endomorphism of $(A; F)$.

Now we prove that each endomorphism of $(A; F)$ is an ε_α for an $\alpha \in E$. Let ε be an endomorphism of $(A; F)$, let be $\alpha = 1\varepsilon$. We prove that $\alpha \in E$ and $\varepsilon = \varepsilon_\alpha$. First we show that $\alpha \in N$. In the contrary case we should have $\alpha = \bar{s}$ for an $s \in S$ and $s = f_1(\bar{s}) = f_1(1\varepsilon) = f_1(1)\varepsilon = 1\varepsilon = \bar{s}$ what is a contradiction. Now we show that if $h \in N$

$$h\varepsilon = h\cdot\alpha. \tag{30}$$

Indeed we have

$$h\varepsilon = f_h(1)\varepsilon = f_h(1\varepsilon) = f_h(\alpha) = h\alpha.$$

Now we suppose $\alpha \notin E$. There are two possible cases: (i) $\alpha \in G - E$, (ii) $\alpha \in N - G$. In (i) $[\alpha] \neq 1$ and on account of Lemma 2 d) $\varphi(1)\varepsilon = \varphi(1)\cdot\alpha = \varphi(1)(\alpha)_0[\alpha] = \varphi(1\cdot(\alpha)_0)[\alpha] = \varphi((\alpha)_0)[\alpha] \neq \varphi(\alpha) = \varphi(1\varepsilon)$ using the unicity assertion in Lemma 2 b) and this contradicts that ε is an endomorphism. In (ii) we have by Lemma 2 b) $\alpha = \varphi(g_1)\cdot g_2$ with $g_1 \in G, g_2 \in K$ and by Lemma 2 c) $\varphi(\alpha) = g_1\cdot g_2 \neq \alpha$; hence $\varphi(1)\varepsilon = \varphi(1)\cdot\alpha = \alpha \neq \varphi(\alpha) = \varphi(1\varepsilon)$ using again Lemma 2c), what is a contradiction. Consequently $\alpha \in E$. By virtue of (30), we only have to add $\bar{s}\varepsilon_\alpha = \psi(s\alpha)$ for proving $\varepsilon = \varepsilon_\alpha$.

We have completed the proof of part a) of Lemma 3.

Proof of b). This follows at once from $1\varepsilon_\alpha = \alpha$. Indeed, if $\alpha_1 \neq \alpha_2$, then $1\varepsilon_{\alpha_1} \neq 1\varepsilon_{\alpha_2}$ and $\varepsilon_{\alpha_1}, \varepsilon_{\alpha_2}$ are not the same mapping.

Proof of c). We have to show that if $x \in A, \alpha_1, \alpha_2 \in E$ then

$$(x\varepsilon_{\alpha_1})\varepsilon_{\alpha_2} = x\varepsilon_{\alpha_1\cdot\varepsilon_\alpha}. \tag{31}$$

If $x \in N$ then $(x\varepsilon_{\alpha_1})\varepsilon_{\alpha_2} = (x\cdot\alpha_1)\cdot\alpha_2$ and $x\cdot\varepsilon_{\alpha_1\cdot\alpha_2} = x\cdot(\alpha_1\cdot\alpha_2)$ and (31) holds. If $x = \bar{s} = \psi(s)$ $(s \in S)$, then

$$(x\varepsilon_{\alpha_1})\varepsilon_{\alpha_2} = (\psi(s)\varepsilon_{\alpha_1})\varepsilon_{\alpha_2} = (\psi(s\varepsilon_{\alpha_1}))\varepsilon_{\alpha_2} =$$
$$= (\psi(s\alpha_1))\varepsilon_{\alpha_2} = \psi(s\alpha_1\varepsilon_{\alpha_2}) = \psi(s\alpha_1\alpha_2)$$

and $x\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2} = \psi(s)\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2} = \psi(s\alpha_1\alpha_2)$ and (31) again holds.

Proof of d). Let be $\alpha \in M$; we prove that ε_α is a monomorphism of $(A; F)$. Let be $x, y \in A$ and

$$x\varepsilon_\alpha = y\varepsilon_\alpha. \tag{32}$$

We have to show $x = y$.

(i) Let first be $x, y \in G$ and

$$x = \alpha_0 r_1^{-1} \alpha_1 r_2^{-1} \alpha_2 \dots r_n^{-1} \alpha_n \tag{33}$$

in the canonical representation. We assert that the canonical representation of $x\varepsilon_\alpha$ is $x\varepsilon_\alpha = x\alpha = \alpha_0 r_1^{-1}\alpha_1 \dots r_n^{-1}(\alpha_n\alpha)$. To prove this, we can assume that $n \geqq 1$; we have to show that $r_n \nmid \alpha_n\alpha$. Obviously we can formulate condition C4 that $r \in H$, $\mu \in M$, $\beta \in E$ and $r \nmid b$ imply $r \nmid \beta\mu$. Since we have $r_n \nmid \alpha_n$, hence it follows that $r_n \nmid \alpha_n\alpha$; our assertion is proved. Now, if $y \in G$, and its canonical representation is $y = \beta_0 s_1^{-1}\beta_1 \dots \dots s_m^{-1}\beta_m$ then that of $y\varepsilon_\alpha$ is $y\varepsilon_\alpha = y\alpha = \beta_0 s_1^{-1}\beta_1 \dots s_m^{-1}(\beta_m\alpha)$ and from (32) and (33) we obtain $m = n$, $\beta_i = \alpha_i$ $(i = 0, \dots, n-1)$ and $\beta_n\alpha = \alpha_n\alpha$. But the last equation implies by C2 (β) $\beta_n = \alpha_n$. Hence we have indeed $x = y$.

(ii) Now let be $x, y \in H - G$. First we assert, that $g \in K$ and $g \neq 1$ imply $g \cdot \alpha \in K$ and $g \cdot \alpha \neq 1$. This follows at once from that if g has the canonical representation $g = 1 \cdot r_1^{-1}\alpha_1 \dots r_n^{-1}\alpha_n$ with $n \geqq 1$, then $g \cdot \alpha = 1 \cdot r_1^{-1}\alpha_1 \dots r_n^{-1}(\alpha_n\alpha)$ in the canonical representation. Now by hypothesis we have $x = \varphi(g_1) \cdot g_2$, $y = \varphi(g_3) g_4$ with $g_1, g_3 \in G$, $g_2, g_4 \in K$. Hence $x\varepsilon_\alpha = x\alpha = \varphi(g_1)(g_2\alpha)$, $y\varepsilon_\alpha = y\alpha = \varphi(g_3)(g_4\alpha)$. For a moment we suppose $g_2 \neq 1$, $g_4 \neq 1$; in this case $g_2\alpha \in K$, $g_4\alpha \in K$ and by the unicity stated in Lemma 2b) (32) implies $x = y$ indeed. If $g_2 = 1$ then $x\varepsilon_\alpha = \varphi(g_1\alpha)$ and on account of (32) we must have $g_4 = 1$. (In the contrary case we should have $g_4\alpha \in K$ and $g_4\alpha \neq 1$, and (32) would contradict the unicity under Lemma 2b)). Hence $y\varepsilon_\alpha = \varphi(g_3\alpha)$ and (32) implies $g_1\alpha = g_3\alpha$, consequently by C2 (β) $g_1 = g_3$ and $x = y$.

(iii) Let be $x = \bar{s}$, $s \in S$, $s = \alpha_0 r_1^{-1}\alpha_1 \dots r_n^{-1}\alpha_n$ in the canonical representation. By the definition of S $\alpha_0 \in M$. We assert that $s\alpha \in S$. Indeed the canonical representation of $s\alpha$ is $s\alpha = \alpha_0 r_1^{-1}\alpha_1 \dots r_n^{-1}(\alpha_n\alpha)$ and if $n \geqq 1$ then $(s\alpha)_0 = \alpha_0 \in M$ and on the other hand if $n = 0$, $(s\alpha)_0 = \alpha_0\alpha \in M$ by condition C2 (α). We have now $x\varepsilon_\alpha = \psi(s\alpha) = \overline{s\alpha} \notin N$. Hence (32) implies $y \in \overline{S}$ (since $y \in N$ implies $y\varepsilon_\alpha \in N$). If $y = \bar{s}_1$ then $y\varepsilon_\alpha = \overline{s_1\alpha}$ and from (32) $\overline{s\alpha} = \overline{s_1\alpha}$, $s\alpha = s_1\alpha$ and finally by condition C2 (β) $s = s_1$, $x = y$.

(iv) If $x \in G$ then $x\varepsilon_\alpha \in G$ and if $x \in N - G$ then $x\varepsilon_\alpha \in N - G$ so that (32) and $x \in G$ or $x \in N - G$ imply $y \in G$ or $y \in N - G$, respectively.

The cases (i), (ii), (iii), (iv) exhaust all the possibilities, hence we have proved that for $\alpha \in M$ ε_α is a monomorphism.

Let $\alpha \in E - M$; we show that ε_α is not a monomorphism. By condition C2 (δ) $1 \in M \subset S$, so $\bar{1}$ is defined. Now $1 \neq \bar{1}$ and $1\varepsilon_\alpha = \alpha$, $\bar{1}\varepsilon_\alpha = \psi(\alpha) = \alpha$; hence $1\varepsilon_\alpha = \bar{1}\varepsilon_\alpha$, hence we see that ε_α is not one-to-one.

Proof of e). Let $\alpha \in H$; we show that ε_α is an epimorphism of $(A; F)$. Let x an arbitrary element of A; we have to show the existence of an element y of A with $x = y\varepsilon_\alpha$. α has a left inverse in $(G; \cdot)$ in all cases, since if in E it has no one, then $\alpha \in R$ and by Lemma 1 $\alpha^{-1} \in G$ is a left inverse of α in G. Denote a left inverse of α by α'. Now, if $x \in N$, let $y = x\alpha'$ and if $x = \bar{s}$ let $y = \psi(s\alpha')$. In the first case we have obviously $x = y\varepsilon_\alpha$ and in the second case $y\varepsilon_\alpha = \psi(s\alpha')\varepsilon_\alpha = \psi(s\alpha'\alpha) = \psi(s) = x$. Consequently ε_α is an epimorphism.

Let $\alpha \in E - H$ we show that ε_α is not an epimorphism, in particular, that there is no y in A with $1 = y\varepsilon_\alpha$. It is easy to see, by Lemma 2, that if $y \in N - G$, then $y\varepsilon_\alpha \neq 1$. Now suppose that there exists an element g in G with $1 = g\varepsilon_\alpha$.

Consider the set of elements g of G, for which there exists an element a' in $E - H$ with $g\alpha' = 1$. Let g_0 be the element of this set, which has a minimal number of factors in the canonical representation $g_0 = \alpha_0 r_1^{-1} \alpha_1 \dots r_n^{-1} \alpha_n$. Let $\alpha' \in E - H$ and $g_0 \alpha' = 1$. We see that $n \neq 0$; in the contrary case we would have $\alpha_0 \alpha' = 1$ and by C3 (γ) $1 \notin H$ contrary to C3 (δ). Consequently $n \geqq 1$. By the unicity of the canonical representation it is impossible that $r_n \nmid \alpha_n \alpha'$, consequently there exists an element $\beta \in E$ with $\alpha_n \alpha' = r_n \beta$. We assert that $\beta \in E - H$. Assume $\beta \in H$. It follows from $r_n \in R \subset H$ and C3 (α), that $r_n \beta \in H$ and from C3 (γ) that $\alpha' \in H$ what is not true. We have indeed $\beta \in E - H$. But $s_0 1 = g_0 \alpha' = \alpha_0 r_1^{-1} \alpha_1 \dots r_{n-1}^{-1} \alpha_{n-1} \cdot \beta$ and this contradicts the minimality of n. So we have shown that if $g \in G$ and $\alpha \in E - H$, then $g\varepsilon_\alpha = g\alpha \neq 1$. It remains to prove that $\bar{s} u_\alpha \neq 1$ for $s \in S$. But $\bar{s}\varepsilon_\alpha = \psi(s\alpha)$ and $|\psi(s\alpha)| = s\alpha$; so that $\bar{s}\varepsilon_\alpha = 1$ implies $s\alpha = |1| = 1$ what is impossible as we have seen.

We have completed the proof of part e) of Lemma 3 and so the proof of the whole lemma 3.

Lemma 3 obviously implies that the mapping $\varepsilon_\alpha \to \alpha$ is an isomorphism of $\mathfrak{E}((A; F))$ to $(E; \cdot)$ with the required properties in a) of the Theorem. So we have completed the proof of the Theorem.

COROLLARY 1. If the semigroup $(E; \cdot)$ and the subset $M \subset E$ satisfy conditions C1, C2 (α)—(δ), then there exists an algebra $(A; F)$ and an isomorphism φ of $\mathfrak{E}((A, F))$ to $(E; \cdot)$ such that the image of $M((A; F))$ by φ is M.

COROLLARY 2. If the semigroup $(E; \cdot)$ and the subset $H \subset E$ satisfy the conditions C1, C3 (α)—(δ), then there exists an algebra $(A; F)$ and an isomorphism φ of $\mathfrak{E}((A; F))$ to $(E; \cdot)$ such that the image of $H((A; F))$ by φ is H. To prove Corollary 1, it suffices to show the following. Let $(E; \cdot)$ M be as in the hypothesis of Corollary 1, and let H the set of elements of E, having at least one left inverse in E. Then $(E; \cdot)$, M, H satisfy the conditions C1, C2 (α)—(δ), C3 (α)—(δ), C4. The proof of this assertion proceeds exactly as the corresponding parts of the proof of the necessity of C1—C4. The proof of Corollary 2 is analogous. Corollary 1 forms the solution of Problem 16 in [1].

MATHEMATICAL INSTITUTE
OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES,
BUDAPEST

(Received 17 May 1963)

References

[1] G. GRÄTZER, Some results on universal algebras, mimeographed note, 1962.
[2] G. BIRKHOFF and S. MACLANE, *A survey of modern algebra* (Revised edition, 1953, Macmillen Co.)

HALBGRUPPEN OHNE FRATTINISCHE UNTERHALBGRUPPE

Von

H. J. WEINERT (Potsdam, DDR)

(*Vorgelegt von* L. RÉDEI)

Einleitung

Es sei H eine Halbgruppe und $F(H)$ die Menge derjenigen Elemente von H, die in jedem Erzeugendensystem S von H (soweit sie überhaupt auftreten) weggelassen werden können. Ist $F(H)\neq\emptyset$, so ist $F(H)$ Unterhalbgruppe von H, die sogenannte *Frattinische Unterhalbgruppe* von H. Dagegen tritt der Fall $F(H)=\emptyset$ jedenfalls stets dann ein, wenn die Halbgruppe H *zergliederbar* ist, d. h. wenn jede Teilmenge von H Unterhalbgruppe ist. L. RÉDEI ([7], S. 90) stellte das Problem, ob auch umgekehrt jede Halbgruppe H mit $F(H)=\emptyset$ zergliederbar ist. Für Halbgruppen mit einer Ordnung $\mathcal{O}(H)\leqq 3$ trifft dies zu, dagegen existieren zu jeder Ordnung $\mathfrak{n}\geqq 4$ nichtzergliederbare Halbgruppen mit $\mathcal{O}(H)=\mathfrak{n}$ und $F(H)=\emptyset$. So gibt S. LAJOS [5] eine solche Halbgruppe $\mathcal{F}_4$ der Ordnung 4 an, die er auf einfache Weise zu einer ebensolchen Halbgruppe $\mathcal{F}_\mathfrak{n}$ mit einer vorgegebenen Ordnung $\mathfrak{n}>4$ erweitert.

In der vorliegenden Arbeit zeigen wir zunächst, daß es sogar zahlreiche Klassen nicht zergliederbarer Halbgruppen H ohne Frattinische Unterhalbgruppe gibt. So ist $F(H)=\emptyset$ für jede rektanguläre*)[1] Halbgruppe H, und jede triviale Kette *) $H=\bigcup H_i$ von Halbgruppen H_i erfüllt $F(H)=\emptyset$ genau dann, wenn $F(H_i)=\emptyset$ für alle H_i gilt. Die zergliederbaren Halbgruppen und die von LAJOS angegebenen sind Spezialfälle der mit diesen Sätzen erfaßten Halbgruppen (vgl. § 1). Im folgenden Paragraphen wird gezeigt, daß jede idempotente Halbgruppe H mit $F(H)=\emptyset$ notwendig eine Kette *) rektangulärer Halbgruppen ist, und ein allgemeiner Struktursatz für solche Ketten aufgestellt. Mit seiner Hilfe können weitere Klassen von Halbgruppen ohne Frattinische Unterhalbgruppe und insbesondere alle idempotenten Halbgruppen der Ordnung 4 dieser Art angegeben werden, von denen es außer den 17 zergliederbaren 3 weitere gibt. Nach einem Korollar ist jede kommutative idempotente Halbgruppe H mit $F(H)=\emptyset$ zergliederbar.

Es gibt aber nicht nur idempotente Halbgruppen ohne Frattinische Unterhalbgruppe, vielmehr kann sogar jede Gruppe G auf mannigfache Weise in eine solche Halbgruppe eingebettet werden. So liefert etwa das direkte Produkt $H=G\times L$ einer Gruppe G mit einer (nicht nur aus einem Element bestehenden) rektangulären Halbgruppe L eine solche Halbgruppe H mit $F(H)=\emptyset$. Allgemeiner gilt dies sogar für jede idempotente Halbgruppe L mit $F(L)=\emptyset$, die eine dafür ersichtlich notwendige Bedingung erfüllt (vgl. § 3). Auf diese Weise entstehen Halbgruppen mit relativen Inversen *), die nach CLIFFORD [1] Halbverbände *) vollständig einfacher *)

---

[1] Die mit einem Stern versehenen Begriffsbildungen werden im laufenden Text nochmals erläutert bzw. eingeführt.

Halbgruppen sind. Letztere lassen sich als gewisse schlichte Produkte einer Gruppe und einer rektangulären Halbgruppe gewinnen, und wir zeigen, daß jede vollständig einfache Halbgruppe H (soweit es sich nicht um eine Gruppe handelt) ebenfalls $F(H) = \emptyset$ erfüllt. Auf diese Weise entstehen insbesondere noch 2 Halbgruppen der Ordnung 4 ohne Frattinische Unterhalbgruppe.

Schließlich wenden wir uns in § 4 allgemeinen Struktursätzen für Halbgruppen ohne Frattinische Unterhalbgruppe zu. Jede Halbgruppe H mit $F(H) = \emptyset$ läßt sich als Kette $H = \cup H_i$ geeigneter Unterhalbgruppen darstellen, und es kann eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür angegeben werden, daß eine solche Kette $H = \cup H_i$ von Halbgruppen $F(H) = \emptyset$ erfüllt. Aus idealtheoretischen Überlegungen gewinnt man eine nicht mehr zu verfeinernde Kette dieser Art; sie ist eindeutig bestimmt, wobei die Unterhalbgruppen H_i jeweils aus den erzeugenden Elementen aller Hauptideale von H bestehen und maximale einfache Unterhalbgruppen von H sind. Für eine Halbgruppe H mit relativen Inversen sind diese H_i dann sogar vollständig einfache Halbgruppen, also Gruppen oder Halbgruppen mit $F(H_i) = \emptyset$. Weiterhin sind alle Halbgruppen H mit $F(H) = \emptyset$ in der Tat Halbgruppen mit relativen Inversen, sofern sie kommutativ sind oder jedes Element endliche Ordnung hat; jedoch konnte nicht geklärt werden, ob dies ganz allgemein zutrifft. Insbesondere ergibt sich aus diesen Struktureinsichten leicht, daß zu den in § 2 und § 3 aufgezählten Halbgruppen der Ordnung 4 ohne Frattinische Unterhalbgruppe keine weiteren hinzukommen, womit also insgesamt 22 Halgbruppen dieser Art existieren.

§ 1

Wir geben zunächst gewisse Klassen von Halbgruppen an, für die $F(H) = \emptyset$ gilt. Dazu sei $H_r = \{a, b, \ldots\}$ eine beliebige r-Halbgruppe, d. h. eine Halbgruppe, in der gemäß der Multiplikationsvorschrift

$$a \cdot b = a \qquad \text{für alle } a \text{ und } b \text{ aus } H_r$$

jedes Element Rechtseinselement ist, und entsprechend $H_l = \{\alpha, \beta, \ldots\}$ mit

$$\alpha \cdot \beta = \beta \qquad \text{für alle } \alpha \text{ und } \beta \text{ aus } H_l$$

eine beliebige l-Halbgruppe. Beide sind durch ihre Ordnung $\mathfrak{n}_r$ bzw. $\mathfrak{n}_l$ bis auf Isomorphie eindeutig gekennzeichnet.

SATZ 1. *Das direkte Produkt $H = H_r \times H_l$ einer r-Halbgruppe H_r der Ordnung $\mathfrak{n}_r$ und einer l-Halbgruppe H_l der Ordnung $\mathfrak{n}_l$ ist eine Halbgruppe der Ordnung $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_r \mathfrak{n}_l$ mit $F(H) = \emptyset$. Dabei ist H genau dann zergliederbar, wenn ein Faktor nur aus einem Element besteht, d. h. H selbst r- oder l-Halbgruppe ist.*

BEWEIS. Wir geben zu jedem Element $a\alpha \in H$ ein Erzeugendensystem S von H an, in dem $a\alpha$ nicht gestrichen werden kann. Dazu enthalte S außer dem Element $a\alpha$ die Elemente $x\xi$, wobei x alle von a verschiedenen Elemente von H_r, ξ alle von α verschiedenen Elemente von H_l durchläuft. Wegen $a\alpha \cdot x\xi = a\xi$ und $x\xi \cdot a\alpha = x\alpha$ ist S Erzeugendensystem von H, was für $S \setminus \{a\alpha\}$ ersichtlich nicht zutrifft.

Enthalten weiterhin H_r und H_l wenigstens je zwei Elemente, etwa a und b bzw. α und β, so ist die Untermenge $\{a\alpha, b\beta\}$ von H wegen $a\alpha \cdot b\beta = a\beta$ keine Unterhalbgruppe von H, mithin H nicht zergliederbar. Gilt umgekehrt etwa $H_r=\{a\}$, so ist H vermöge $a\xi \rightarrow \xi$ isomorph zu H_l und damit zergliederbar.

BEMERKUNG 1. Die in Satz 1 auftretenden Halbgruppen $H = H_r \times H_l$ sind gerade alle *rektangulären* Halbgruppen, die durch

$$aba=a \quad \text{für alle } a \text{ und } b \text{ aus } H$$

oder durch Idempotenz und

$$abc=ac \quad \text{für alle } a, b \text{ und } c \text{ aus } H$$

definiert werden (vgl. [2], [4], [6]). Unser Satz besagt also, daß für alle rektangulären Halbgruppen H stets $F(H)=\emptyset$ gilt.

BEMERKUNG 2. Die von LAJOS in [5] angegebene nichtzergliederbare Halbgruppe $\mathscr{F}_4$ der Ordnung 4 mit $F(\mathscr{F}_4)=\emptyset$ ist die durch $\mathfrak{n}_r=\mathfrak{n}_l=2$ festgelegte rektanguläre Halbgruppe.

In Anlehnung an CLIFFORD [2] führen wir nun folgende Begriffsbildungen ein: Eine Halbgruppe H ist ein *Halbverband von Unterhalbgruppen* H_i, wenn $H=\bigcup H_i$ die Vereinigung der paarweise disjunkten Unterhalbgruppen H_i ist, wobei i einen Halbverband I durchläuft und für die Multiplikation

$$H_i H_j \subseteqq H_k \quad \text{mit} \quad k=\sup(i,j)=i\cup j \tag{1}$$

gilt. Ist dabei I insbesondere eine geordnete Menge, so nennen wir $H=\bigcup H_i$ eine *Kette von Unterhalbgruppen*; gilt dann an Stelle von (1) sogar

$$h_i \cdot h_j = h_j \cdot h_i = h_j \quad \text{für alle} \quad h_i \in H_i,\, h_j \in H_j \text{ mit } i<j, \tag{2}$$

so sprechen wir von einer *trivialen Kette von Unterhalbgruppen*. Es ist klar, daß zu jeder geordneten Menge I und vorgegebenen (als paarweise disjunkt anzusehenden) Halbgruppen H_i mit $i\in I$ eine Halbgruppe $H=\bigcup H_i$ als triviale Kette der Unterhalbgruppen H_i existiert.

SATZ 2. *Es sei $H=\bigcup H_i$ eine triviale Kette von Unterhalbgruppen H_i mit $i\in I$. Dann gilt $F(H)=\emptyset$ genau dann, wenn für jedes $i\in I$ auch $F(H_i)=\emptyset$ erfüllt ist. Weiterhin ist H genau dann zergliederbar, wenn dies für alle H_i zutrifft.*

BEWEIS. Auf Grund der Multiplikationsvorschrift (2) ist jedes Erzeugendensystem S von H die Vereinigung von Erzeugendensystemen S_i der auftretenden H_i, woraus sich bereits die erste Behauptung ergibt. Ist weiterhin jedes H_i zergliederbar, so ist auch jede Teilmenge von H wieder vermöge (2) Unterhalbgruppe von H. Würde umgekehrt ein H_i eine Untermenge enthalten, die nicht Halbgruppe wäre, so wäre diese ja auch eine solche Untermenge von H.

BEMERKUNG 1. Gemäß [7], Satz 50, sind alle zergliederbaren Halbgruppen gerade die trivialen Ketten beliebiger r- bzw. l-Halbgruppen.

BEMERKUNG 2. Die von LAJOS in [5] angegebene nichtzergliederbare Halbgruppe $\mathscr{F}_\mathfrak{n}$ der Ordnung $\mathfrak{n}$ mit $F(\mathscr{F}_\mathfrak{n})=\emptyset$ entspricht dem Spezialfall $I=\{1, 2, \ldots \mathfrak{n}-3\}$ (bzw. $I=\{1, 2, \ldots, \mathfrak{n}\}$ falls $\mathfrak{n}$ transfinit) mit $H_1=\mathscr{F}_4$, während alle übrigen H_i nur aus einem Element bestehen. Ersichtlich lassen sich auf Grund unserer beiden Sätze für jede Ordnung $n \geqq 5$ bereits mehrere nichtzergliederbare Halbgruppen H mit $F(H)=\emptyset$ angeben.

KOROLLAR 1. *Eine Halbgruppe H mit $F(H)=\emptyset$ enthält genau dann ein Einselement e, wenn sie als triviale Kette der Form $H=\{e\}\cup(H\setminus\{e\})$ geschrieben werden kann; es gilt dann $F(H\setminus\{e\})=\emptyset$ und kein Element $h\neq e$ aus H besitzt ein Inverses.*

Der Beweis folgt sofort aus Satz 2 und der Feststellung, daß das Einselement $e\in H$ in jedem Erzeugendensystem von H entbehrlich wäre, wenn $e = h\cdot h^{-1}$ oder $e = h^{-1}\cdot h$ mit $h\neq e$, also $h^{-1}\neq e$ gelten würde. Analog ergibt sich das

KOROLLAR 2. *Eine Halbgruppe H mit $F(H)=\emptyset$ enthält genau dann ein Nullelement o, wenn sie als triviale Kette der Form $H = (H\setminus\{o\})\cup\{o\}$ geschrieben werden kann; es gilt dann $F(H\setminus\{o\})=\emptyset$ und H hat keine Nullteiler.*

Prinzipiell kann man sich zur Bestimmung aller Halbgruppen ohne Frattinische Unterhalbgruppe nun auf diejenigen beschränken, die nicht mehr entsprechend Satz 2 in triviale Ketten ebensolcher Halbgruppen zerlegt werden können, insbesondere also auf solche ohne Eins- bzw. Nullelement. Wie wir sehen werden, gibt es außer den rektangulären zahlreiche weitere Halbgruppen dieser Art. Allerdings werden wir im folgenden doch meist von beliebigen Halbgruppen H mit $F(H)=\emptyset$ ausgehen, da unsere Strukturaussagen ohnehin auf Zerlegungen von H in (im allgemeinen nichttriviale) Ketten von Unterhalbgruppen hinauslaufen.

§ 2

Als nächstes fragen wir nach weiteren idempotenten Halbgruppen ohne Frattinische Unterhalbgruppe. Dazu verwenden wir, daß jede idempotente Halbgruppe H (vgl. [6], [1]) ein Verband rektangulärer Halbgruppen ist und zeigen:

SATZ 3. *Jede idempotente Halbgruppe H mit $F(H)=\emptyset$ ist notwendig eine Kette rektangulärer Halbgruppen. Dabei treten in der Tat auch nichttriviale Ketten auf, doch erfüllt nicht jede Kette $H=\bigcup H_i$ rektangulärer Halbgruppen H_i auch $F(H)=\emptyset$.*

KOROLLAR. *Jede kommutative idempotente Halbgruppe H mit $F(H)=\emptyset$ ist zergliederbar.*

BEWEIS. Wir nehmen an, es wäre $H=\bigcup H_i$ mit $i\in I$ nur ein Verband rektangulärer Halbgruppen, wobei etwa die Elemente i und j aus I unvergleichbar seien, so daß also $i< i\cup j$ und $j< i\cup j$ gilt. Weiter sei S ein beliebiges Erzeugendensystem von H. Dann lassen sich aus den Elementen von S zunächst alle Elemente von H_i und H_j gewinnen, ohne daß dazu die in S (eventuell) vorhandenen Elemente von $H_{i\cup j}$ auf Grund von (1) verwendet werden können. Damit sind aber alle Produkte $h_i\cdot h_j\in H_{i\cup j}$ der Elemente $h_i\in H_i$ und $h_j\in H_j$ in S, also in jedem Erzeugendensystem von H entbehrlich, was im Widerspruch zu $F(H)=\emptyset$ steht.

Aus der damit nachgewiesenen ersten Behauptung und der Feststellung, daß eine idempotente Halbgruppe H nur dann kommutativ ist, wenn jede rektanguläre Unterhalbgruppe nur aus einem Element besteht, folgt auch schon das Korollar. Zum Beweis der übrigen Behauptungen kennzeichnen wir zunächst die Struktur der Ketten rektangulärer Halbgruppen.

SATZ 4. *Zu einer geordneten Indexmenge I seien rektanguläre Halbgruppen H_i mit $i \in I$ vorgegeben, wobei wir jedes $H_i = H_{r,i} \times H_{l,i}$ als direktes Produkt einer r-Halbgruppe $H_{r,i} = \{a_i, b_i, \ldots\}$ mit einer l-Halbgruppe $H_{l,i} = \{\alpha_i, \beta_i, \ldots\}$ schreiben. Dann erhält man alle entsprechenden Ketten*

$$H = \bigcup_{i \in I} H_i \quad \text{mit} \quad H_i \cdot H_j \subseteqq H_{\max(i,j)} \tag{3}$$

auf Grund folgender Multiplikationsvorschrift: Es ist

$$a_i\alpha_i \cdot b_j\beta_j = f_{i,j}(a_i, \alpha_i, b_j) \cdot \varphi_{i,j}(\alpha_i, b_j, \beta_j), \tag{4}$$

wobei für die rechts stehenden Ausdrücke

$$f_{i,j}(a_i, \alpha_i, b_j) = a_i \quad \textit{und} \quad \varphi_{i,j}(\alpha_i, b_j, \beta_j) \in H_{l,i} \quad \textit{für} \quad i \geqq j \tag{5}$$

sowie

$$f_{i,j}(a_i, \alpha_i, b_j) \in H_{r,j} \quad \textit{und} \quad \varphi_{i,j}(\alpha_i, b_j, \beta_j) = \beta_j \quad \textit{für} \quad i \leqq j \tag{6}$$

gilt, und diese Funktionen nachstehenden Gleichungen genügen müssen:

$$f_{j,k}(f_{i,j}(a_i, \alpha_i, b_j), \beta_j, c_k) = f_{i,k}(a_i, \alpha_i, f_{j,k}(b_j, \beta_j, c_k)) \quad \textit{für} \quad i \leqq j < k \tag{7}$$

$$\varphi_{i,k}(\varphi_{i,j}(\alpha_i, b_j, \beta_j), c_k, \gamma_k) = \varphi_{i,j}(\alpha_i, b_j, \varphi_{j,k}(\beta_j, c_k, \gamma_k)) \quad \textit{für} \quad i > j \geqq k \tag{8}$$

$$f_{i,k}(a_i, \varphi_{i,j}(\alpha_i, b_j, \beta_j), c_k) = f_{i,k}(a_i, \alpha_i, f_{j,k}(b_j, \beta_j, c_k)) \quad \textit{für} \quad i \geqq j < k \quad \textit{und} \quad i < k \tag{9}$$

$$\varphi_{i,k}(\varphi_{i,j}(\alpha_i, b_j, \beta_j), c_k, \gamma_k) = \varphi_{i,k}(\alpha_i, f_{j,k}(b_j, \beta_j, c_k), \gamma_k) \quad \textit{für} \quad i > j \leqq k \quad \textit{und} \quad i > k. \tag{10}$$

BEWEIS. Es sei $i \geqq j$ und $t_i\alpha_i \cdot b_j\beta_j = c_i\gamma_i$ für ein festes $t_i \in H_{r,i}$. Dann folgt für jedes $a_i \in H_{r,i}$ aus

$$a_i\alpha_i \cdot b_j\beta_j = a_i\alpha_i t_i\alpha_i b_j\beta_j = a_i\alpha_i c_i\gamma_i = a_i\gamma_i,$$

daß $f_{i,j}(a_i, \alpha_i, b_j) = a_i$ gilt und $\gamma_i = \varphi_{i,j}(\alpha_i, b_j, \beta) \in H_{l,i}$ in der Tat nicht von a_i abhängt; analog zeigt man (6). Weiterhin erkennt man durch explizites Ausschreiben, daß folgende Beziehungen mit dem assoziativen Gesetz für $a_i\alpha_i \cdot b_j\beta_j \cdot c_k\gamma_k$ gleichwertig sind:

$$f_{\max(i,j),k}(f_{i,j}(a_i, \alpha_i, b_j), \varphi_{i,j}(\alpha_i, b_j, \beta_j), c_k) = f_{i,\max(j,k)}(a_i, \alpha_i, f_{j,k}(b_j, \beta_j, c_k)),$$

$$\varphi_{\max(i,j),k}(\varphi_{i,j}(\alpha_i, b_j, \beta_j), c_k, \gamma_k) = \varphi_{i,\max(j,k)}(\alpha_i, f_{j,k}(b_j, \beta_j, c_k), \varphi_{j,k}(\beta_j, c_k, \gamma_k)).$$

Diskutiert man dies unter Beachtung von (5) und (6) für alle möglichen Größenbeziehungen von i, j und k durch, so ergeben sich neben trivialen Identitäten gerade die behaupteten Relationen (7)—(10).

Natürlich sind die durch diese Funktionensysteme festgelegten Halbgruppen in voller Allgemeinheit kaum zu übersehen. Doch kann man durch spezielle Wahl leicht Beispiele angeben, auf welche Weise wir jetzt auch die noch offenen Behauptungen von Satz 3 beweisen:

a) Es seien für eine geordnete Indexmenge I rektanguläre Halbgruppen H_i mit $i \in I$ und für jedes Indexpaar $i < j$ eine homomorphe Abbildung von H_i auf H_j gegeben, die wir durch $a_i\alpha_i \to a_j\alpha_j$ kennzeichnen. Mit

$$f_{i,j}(a_i, \alpha_i, b_j) = a_j \quad \text{für} \quad i < j$$

$$\varphi_{i,j}(\alpha_i, b_j, \beta_j) = \beta_i \quad \text{für} \quad i > j$$

sind dann (7)—(10) ersichtlich erfüllt, und $H = \cup H_i$ wird zu einer nichttrivialen[2] Kette. Trotzdem gilt $F(H) = \emptyset$, wozu wir ein beliebiges Element $a_k\alpha_k \in H_k \subseteqq H$ betrachten. Für den Sonderfall $k = \min I$ kann man mit einem Erzeugendensystem S_k von H_k, in dem $a_k\alpha_k$ unentbehrlich ist, sofort ein ebensolches Erzeugendensystem $S = \{S_k, H \setminus H_k\}$ von H angeben. Sonst leistet dies $S = \{a_k\alpha_k, H \setminus H_k\}$ wegen

$$b_j\beta_j a_k\alpha_k b_j\beta_j = b_k\beta_k \quad \text{für} \quad j < k.$$

BEMERKUNG. Sind insbesondere alle rektangulären Halbgruppen H_i sogar paarweise isomorph, so ist H gerade das direkte Produkt einer von ihnen mit der als Halbgruppe aufgefaßten geordneten Indexmenge I. Wählt man beide von der Ordnung 2, also die rektanguläre Halbgruppe als r- bzw. l-Halbgruppe, so entstehen zwei invers-isomorphe Halbgruppen der Ordnung 4 ohne Frattinische Unterhalbgruppe.

b) Jetzt seien die H_i mit $i \in I$ beliebige rektanguläre Halbgruppen, wobei wenigstens ein H_k mit $k \neq \min I$ nicht nur aus einem Element bestehe. Wir wählen aus jedem $H_{r,j}$ und jedem $H_{l,i}$ je ein festes Element d_j bzw. δ_i aus und setzen

$$f_{i,j}(a_i, \alpha_i, b_j) = d_j \quad \text{für} \quad i < j$$

$$\varphi_{i,j}(\alpha_i, b_j, \beta_j) = \delta_i \quad \text{für} \quad i > j,$$

womit (7)—(10) ebenfalls erfüllt sind und $H = \cup H_i$ zu einer Kette rektangulärer Halbgruppen wird. Hier gilt jedoch $F(H) \neq \emptyset$, da etwa für die oben genannte Halbgruppe H_k das Element $d_k\delta_k \in H_k$ wegen

$$b_j\beta_j a_k\alpha_k b_j\beta_j = d_k\delta_k \quad \text{für} \quad j < k$$

in jedem Erzeugendensystem von H entbehrlich ist.

Damit ist Satz 3 in allen Teilen beweisen. In Ergänzung zu Satz 4 stellen wir noch fest, daß sich aus (7) bzw. (9) für $i = j < k$

$$f_{i,k}(a_i, \beta_i, c_k) = f_{i,k}(a_i, \alpha_i, f_{i,k}(b_i, \beta_i, c_k)) \tag{11}$$

ergibt und entsprechend aus (8) bzw. (10) für $i > j = k$

$$\varphi_{i,k}(\alpha_i, b_k, \gamma_k) = \varphi_{i,k}(\varphi_{i,k}(\alpha_i, b_k, \beta_k), c_k, \gamma_k). \tag{12}$$

Dies sind dann auch die einzigen Bedingungen für diese Funktionen, soweit sie die Multiplikation von Elementen aus je zwei Halbgruppen H_i und H_k betreffen.

Als weitere Anwendung von Satz 4 zeigen wir abschließend noch die folgende Aussage über Halbgruppen 4. Ordnung:

Außer den 17 *zergliederbaren gibt es nur* 3 *idempotente Halbgruppen H der Ordnung* 4 *mit* $F(H) = \emptyset$, *nämlich die rektanguläre und die beiden direkten Produkte einer r- bzw. l-Halbgruppe der Ordnung* 2 *mit der kommutativen zergliederbaren Halbgruppe der Ordnung* 2 (vgl. obige Bemerkung zu a)).

---

[2] Der Fall, daß alle H_i mit $i \neq \min I$ nur aus einem Element bestehen, ist in diesem Zusammenhang natürlich auszunehmen.

Wir beginnen mit Ketten $H = H_1 \cup H_2$, wo beide H_i die Ordnung 2 haben und r-Halbgruppen sind. Dann gilt für die Strukturtafel von H jedenfalls

	a_1	b_1	a_2	b_2
a_1	a_1	a_1		
b_1	b_1	b_1		
a_2	a_2	a_2	a_2	a_2
b_2	b_2	b_2	b_2	b_2.

Die allein zu bestimmende Funktion

$$x_1 \cdot x_2 = f_{1,2}(x_1, \xi_1, x_2) = f(x_1, x_2)$$

erfüllt dann nach (11)

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, f(y_1, x_2)).$$

Hängt dabei $f(x_1, x_2)$ tatsächlich von x_1 ab, so jedenfalls nicht von x_2, womit nur die Möglichkeiten $f(x_1, x_2) = f(x_1)$ oder $f(x_1, x_2) = f(x_2)$ oder $f(x_1, x_2) = \text{const.}$ verbleiben. Damit erhalten wir:[3]

1) $f(a_1) = a_2, f(b_1) = b_2$; dies ist gerade der oben unter a) behandelte Fall, der eines der beiden direkten Produkte mit $F(H) = \emptyset$ liefert.

2) $f(a_2) = a_2, f(b_2) = b_2$; die entstehende Halbgruppe ist zergliederbar.

3) $f(x_1, x_2) = a_2$; hier gilt $F(H) \neq \emptyset$ wegen $F(H) \ni a_2$ (vgl. oben Beispiel b)).

Noch leichter ergibt sich, daß man bei Ersetzung von H_1 durch eine l-Halbgruppe entweder eine zergliederbare Halbgruppe H oder einen weiteren Spezialfall von b) erhält. Mit den zu allen diesen Fällen invers-isomorphen sind dann aber schon alle Möglichkeiten erschöpft, $H = H_1 \cup H_2$ mit $\mathcal{O}(H_1) = \mathcal{O}(H_2) = 2$ anzusetzen.

Weiter ist klar, daß eine Kette $H = H_1 \cup H_2$ mit $\mathcal{O}(H_2) = 1$ trivial ist, womit nach Satz 2 auch $F(H_1) = \emptyset$ gelten, also H_1 und daher H zergliederbar sein muß. Damit bleiben die Ketten $H = H_1 \cup H_2 \cup H_3$ mit $\mathcal{O}(H_1) = \mathcal{O}(H_2) = 1$ und $\mathcal{O}(H_3) = 2$ und $H = H_1 \cup H_2$ mit $\mathcal{O}(H_1) = 1$, $\mathcal{O}(H_2) = 3$ zu untersuchen. Im ersten Falle erhalten wir für die Strukturtafel von H zunächst

	a_1	a_2	a_3	b_3
a_1	a_1	a_2		
a_2	a_2	a_2		
a_3	a_3	a_3	a_3	a_3
b_3	b_3	b_3	b_3	b_3,

wobei wir H_3 ohne Beschränkung der Allgemeinheit als r-Halbgruppe angenommen haben.

---

[3] In den folgenden Fällen 1) und 3) können noch a_2 und b_2 vertauscht werden, was aber ersichtlich zu isomorphen Halbgruppen führt. Dagegen ist bei 2) $f(a_2) = b_2$ wegen $f(a_2) = f(f(a_2)) = f(b_2)$ unmöglich.

Für die zu bestimmenden Funktionen

$$\begin{aligned} a_1 \cdot x_3 &= f_{1,3}(a_1, \alpha_1, x_3) = f_{1,3}(x_3) \\ a_2 \cdot x_3 &= f_{2,3}(a_2, \alpha_2, x_3) = f_{2,3}(x_3) \end{aligned}$$

gilt dann nach (7), (9) und (11)

$$f_{2,3}(x_3) = f_{1,3}(f_{2,3}(x_3)) = f_{2,3}(f_{1,3}(x_3)) = f_{2,3}(f_{2,3}(x_3)).$$

Aus $f_{2,3}(a_3) = b_3$ folgt damit $f_{1,3}(b_3) = f_{2,3}(b_3) = b_3$, während $f_{1,3}(a_3)$ beide Werte annehmen kann; in beiden Fällen gilt aber $F(H) \ni b_3$. Entsprechendes trifft für $f_{2,3}(b_3) = a_3$ zu. Damit bleibt nur $f_{2,3}(a_3) = a_3$ und $f_{2,3}(b_3) = b_3$, woraus $f_{1,3}(a_3) = a_3$ und $f_{1,3}(b_3) = b_3$ folgt, was eine zergliederbare Halbgruppe H ergibt.

Ähnlich führt der Fall $H = H_1 \cup H_2$ mit $\mathcal{O}(H_2) = 3$ nur zu zergliederbaren Halbgruppen oder solchen mit $F(H) \neq \emptyset$, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

§ 3

Alle bisher betrachteten Halbgruppen ohne Frattinische Unterhalbgruppe waren idempotent. Wir geben nun einige Klassen von solchen Halbgruppen an, die eine beliebig vorgegebene Gruppe G als Unterstruktur enthalten.

SATZ 5. *Es sei G eine Gruppe, L eine nicht nur aus einem Element bestehende rektanguläre Halbgruppe und $H = G \times L$ das direkte Produkt von G und L. Dann gilt $F(H) = \emptyset$.*

Den Beweis führen wir später unter allgemeineren Voraussetzungen, vgl. Satz 7.

SATZ 6. *Es sei G eine Gruppe, L eine idempotente Halbgruppe mit $F(L) = \emptyset$ und $H = G \times L$. Dann gilt $F(H) = \emptyset$ genau dann, wenn in der Kette $L = \bigcup L_i$ rektangulärer Halbgruppen L_i mit $i \in I$ die Halbgruppe $L_{\min I}$ (falls* min *I überhaupt existiert) nicht nur aus einem Element besteht.*

BEWEIS. Es sei zunächst $i_0 = \min I$. Würde dann L_{i_0} nur aus einem Element h_{i_0} bestehen, so folgte $Eh_{i_0} \in F(H)$ (E Einselement von G). Andernfalls können wir auf $G \times L_{i_0}$ Satz 5 anwenden, wonach es zu jedem Element $Ah_{i_0} \in G \times L_{i_0}$ ein Erzeugendensystem S_{i_0} gibt, in dem Ah_{i_0} unentbehrlich ist. Dann gilt aber das gleiche für das Erzeugendensystem $S = \{S_{i_0}, H \setminus G \times L_{\,0}\}$ von H.

Es sei nun $Aa_i\alpha_i \in H$ ein Element mit $i \neq \min I$ und S_L ein Erzeugendensystem von L, in dem $a_i\alpha_i$ unentbehrlich ist, wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$S_L = \{\bigcup_{j<i} L_j, a_i\alpha_i, b_i\beta_i, \ldots, \bigcup_{k>i} L_k\}$$

annehmen können. Dann ist

$$S = \{G \cdot (S_L \setminus \{a_i\alpha_i\}), Aa_i\alpha_i\}$$

ein Erzeugendensystem von H: Jedes Element $x_i\xi_i \in L_i$ mit $x_i\xi_i \neq a_i\alpha_i$ entsteht nämlich als Produkt mit wenigstens einem von $a_i\alpha_i$ verschiedenen Faktor aus S_L, womit auch alle $Xx_i\xi_i$ als Produkte von Elementen aus S bildbar sind. Problematisch sind nur die Elemente der Form $Xa_i\alpha_i$ mit beliebigem $X \in G$. Falls aber L_i nicht nur aus einem Element besteht, existiert wenigstens eines der Elemente $a_i\beta_i$ oder $b_i\alpha_i$ mit $\beta_i \neq \alpha_i$ bzw. $b_i \neq a_i$ in L_i. Dann gilt aber

$$Xa_i\alpha_i = XA^{-1}a_i\beta_i Aa_i\alpha_i$$

bzw.

$$Xa_i\alpha_i = Aa_i\alpha_i A^{-1}Xb_i\alpha_i.$$

Besteht dagegen L_i nur aus dem einen Element $a_i\alpha_i$, so gilt in L $b_j\beta_j a_i\alpha_i = a_i\alpha_i$ für jedes $b_j\beta_j \in L_j$ mit $j < i$, woraus

$$Xa_i\alpha_i = XA^{-1}b_j\beta_j Aa_i\alpha_i$$

folgt. Damit ist S in der Tat Erzeugendensystem von H, was für $S \setminus \{Aa_i\alpha_i\}$ jedoch nicht mehr zutrifft.

BEMERKUNG. Die in diesen Sätzen auftretenden Halbgruppen H haben folgende Eigenschaft: Zu jedem Element $h \in H$ gibt es ein relatives Einselement $e \in H$ und ein relatives Inverses $h' \in H$ mit

$$eh = he = h \quad \text{und} \quad hh' = h'h = e.$$

Solche *Halbgruppen mit relativen Inversen* sind nach CLIFFORD [1] die Vereinigungsmenge disjunkter Gruppen und lassen sich als Halbverband vollständig einfacher Halbgruppen ohne Nullelement darstellen. Dabei heißt eine *einfache* Halbgruppe (d. h. eine mit nur trivialen zweiseitigen Idealen) nach REES [8] bzw. [9] *vollständig einfach*, wenn sie ein primitives Idempotent e enthält (d. h. aus $f^2 = ef = fe = f$ folgt $e = f$). Gemäß [8] (vgl. auch [1], [2] sowie [10]) ist jede vollständig einfache Halbgruppe ohne Nullelement das schlichte Produkt einer Gruppe $G = \{A, \ldots\}$ und einer rektangulären Halbgruppe $L = \{a\alpha, \ldots\}$ mit der Multiplikationsvorschrift

$$Aa\alpha \cdot Bb\beta = AP_{\alpha,b}Ba\beta, \tag{13}$$

wobei die $P_{\alpha,b}$ fest gewählte Elemente aus G sind, und umgekehrt. Insbesondere können dabei für ein festes α_0 und ein festes b_0 alle Elemente $P_{\alpha_0,b}$ und P_{α,b_0} als das Einselement E von G gewählt werden.

SATZ 7. *Jede vollständig einfache Halbgruppe H, die nicht nur aus einem Element besteht, ist entweder eine Gruppe oder erfüllt $F(H) = \emptyset$.*

BEWEIS. Es genügt zu zeigen, daß jede vollständig einfache Halbgruppe $H = G \cdot L$, in der $L = L_r \times L_l$ nicht nur aus einem Element besteht, $F(H) = \emptyset$ erfüllt. Dazu sei $Aa\alpha$ ein beliebiges Element aus H, und $S \subseteq H$ enthalte außer $Aa\alpha$ die Elemente $Xx\xi$, wobei X alle Elemente von G, x alle von a verschiedenen Elemente von L_r, ξ alle von α verschiedenen Elemente von L_l durchläuft. Auf Grund von (13) gilt aber

$$Xa\xi = Aa\alpha \cdot P_{\alpha,x}^{-1} A^{-1} Xx\xi,$$

$$Xx\alpha = XA^{-1} P_{\xi,a}^{-1} x\xi \cdot Aa\alpha,$$

$$Xa\alpha = Xa\xi \cdot P_{\xi,x}^{-1} x\alpha,$$

womit sich S als Erzeugendensystem von H erweist, in dem $Aa\alpha$ ersichtlich nicht gestrichen werden kann.

BEMERKUNG. Die vollständig einfachen Halbgruppen $H = G \cdot L$ niedrigster Ordnung, die weder Gruppen noch idempotent (d. h. rektangulär) sind, erhält man mit $\mathcal{O}(G) = \mathcal{O}(L) = 2$, also mit der zyklischen Gruppe G und der r-Halbgruppe L_r bzw. l-Halbgruppe L_l der Ordnung 2. Wie man leicht nachprüft, kommen dabei nur die direkten Produkte $G \times L_r$ bzw. $G \times L_l$ in Frage, die zwei weitere (inversisomorphe) Halbgruppen der Ordnung 4 ohne Frattinische Unterhalbgruppe darstellen.

§ 4

Wir wenden uns nun allgemeinen Strukturaussagen über Halbgruppen H ohne Frattinische Unterhalbgruppe zu und beginnen mit Aussagen über die (zweiseitigen) Ideale von H. Unter dem von einem Element $a \in H$ erzeugten Hauptideal (a) verstehen wir dabei die Menge aller Elemente a, xa, ay und xay mit beliebigen $x \in H, y \in H$.

LEMMA 1. *Für die Hauptideale $(a), (b)$ und (ab) einer Halbgruppe H mit $F(H) = \emptyset$ gilt wenigstens eine der Gleichungen*

$$(a) = (ab), \quad (b) = (ab).$$

BEWEIS. Aus $(a) \supset (ab)$ und $(b) \supset (ab)$ folgte, daß ab in jedem Erzeugendensystem S von H entbehrlich wäre. Ist nämlich $S = \{ab, x, y, \ldots, x', y', \ldots\}$, so gilt $a = xy \ldots$ und $b = x'y' \ldots$, ohne daß unter den verwendeten Faktoren aus S das Element ab auftreten kann. Dann gilt aber $ab = xy \ldots x'y' \ldots$, womit ab in S überflüssig ist.

LEMMA 2. *Jedes (zweiseitige) Ideal $\mathfrak{a}$ einer Halbgruppe H mit $F(H) = \emptyset$ ist halb-prim, d. h.*

$$\textit{aus} \quad a^2 \in \mathfrak{a} \quad \textit{folgt} \quad a \in \mathfrak{a}.^4$$

Dies ergibt sich sofort aus Lemma 1 wegen

$$a \in (a) = (a^2) \subseteqq \mathfrak{a}.$$

LEMMA 3. *Für Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{ab}$ einer Halbgruppe H mit $F(H) = \emptyset$ gilt ganz allgemein wenigstens eine der Gleichungen*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{ab}, \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{ab}.$$

BEWEIS. Aus $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{ab}$ und $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{ab}$ folgte die Existenz von Elementen $a \in \mathfrak{a}$ mit $a \notin \mathfrak{ab}$ und $b \in \mathfrak{b}$ mit $b \notin \mathfrak{ab}$, während doch nach Lemma 1

$$a \in (a) = (ab) \subseteqq \mathfrak{ab}$$

oder

$$b \in (b) = (ab) \subseteqq \mathfrak{ab}$$

erfüllt sein muß.

---

[4] Gemäß CROISOT [3] bzw. CLIFFORD [2] ist damit H ein Halbverband einfacher Halbgruppen; wir werden diese Aussage in Satz 9 verschärfen.

SATZ 8. *Alle Ideale einer Halbgruppe H mit $F(H)=\emptyset$ bilden eine Kette. Wir schreiben sie in der Form $\mathfrak{a}_i$, wobei i eine geordnete Menge I^* durchläuft, und $\mathfrak{a}_i \supset \mathfrak{a}_j$ für $i<j$ gelten soll. Dabei ist ein Ideal $\mathfrak{a}_i$ genau dann Hauptideal, wenn es die Vereinigungsmenge aller echt kleineren Ideale echt enthält, also*

$$(14) \qquad \mathfrak{a}_i \supset \bigcup \mathfrak{a}_j = \mathfrak{c} \quad \text{mit} \quad j \in I^*, j>i$$

gilt, was wiederum mit der Existenz (eines, also) des maximalen Unterideals $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{a}_i$ gleichwertig ist. Schließlich lassen sich alle Elemente von $\mathfrak{a}_i=(a_i)$ in der Form xa_iy mit $x\in H$, $y\in H$ schreiben, d. h. es gilt $(a_i)=Ha_iH$.

BEWEIS. Die erste Behauptung folgt sofort aus Lemma 3 wegen $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}\mathfrak{b}\subseteqq\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{b}=\mathfrak{a}\mathfrak{b}\subseteqq\mathfrak{a}$. Ist weiter $\mathfrak{a}_i=(a_i)$ ein Hauptideal, so gilt $a_i\notin\mathfrak{a}_j$ für alle $j>i$, also $a_i\notin\bigcup\mathfrak{a}_j=\mathfrak{c}$ und damit (14). Ersichtlich ist dann $\mathfrak{c}$ maximales Unterideal von $\mathfrak{a}_i$, woraus wiederum die Hauptidealeigenschaft von $\mathfrak{a}_i$ folgt: Ist nämlich $a_i\in\mathfrak{a}_i$ ein Element mit $a_i\notin\mathfrak{c}$, so ergibt sich aus Lemma 3

$$\mathfrak{a}_i \supseteqq (a_i) \supset \mathfrak{c},$$

was schon $\mathfrak{a}_i=(a_i)$ zeigt. Schließlich gilt

$$\mathfrak{a}_i=(a_i)\supseteqq Ha_iH \ni a_i^3,$$

woraus nach Lemma 2[5] $Ha_iH\ni a_i$, also auch $Ha_iH\supseteqq(a_i)=\mathfrak{a}_i$ folgt.

SATZ 9. *Eine Halbgruppe H erfüllt genau dann $F(H)=\emptyset$, wenn sie als Kette von Unterhalbgruppen*

$$(15) \qquad H=\bigcup_{i\in I} H_i, \quad H_iH_j\subseteqq H_{\max(i,j)}$$

dargestellt werden kann und dabei für jedes $k\in I$ gilt:

$$(16) \qquad F(U_k)=\emptyset \quad \text{mit} \quad U_k=\bigcup_{\substack{i\in I\\ i\leqq k}} H_i.$$

Insbesondere gibt es dann genau eine nicht mehr weiter zu verfeinernde Zerlegung von H als Kette von Unterhalbgruppen H_i. Sie ist durch jede der folgenden Aussagen festgelegt:

(17) *Die Unterhalbgruppen H_i sind gerade die Mengen der erzeugenden Elemente der Hauptideale $\mathfrak{a}_i$ von H, wobei also $i\in I\subseteqq I^*$ gilt (vgl. Satz 8).*

(18) *Die Unterhalbgruppen H_i sind gerade die maximalen einfachen Unterhalbgruppen von H.*

BEWEIS. Ist H eine Halbgruppe mit $F(H)=\emptyset$, so definieren wir unter Verwendung von Satz 8 zu jedem $i\in I^*$ die Menge $H_i\subseteqq H$ gemäß

$$H_i=\mathfrak{a}_i\setminus\bigcup\mathfrak{a}_j \quad \text{mit} \quad j\in I^*, j>i.$$

Es ist dann $H_i=\emptyset$ falls $\mathfrak{a}_i$ kein Hauptideal ist, andernfalls besteht H_i gerade aus allen erzeugenden Elementen des Hauptideals $\mathfrak{a}_i$. Ist $I\subseteqq I^*$ die Menge der Indices, die zu den Hauptidealen von H gehören, so gilt

$$H=\bigcup_{i\in I} H_i \quad \text{mit} \quad H_i\neq\emptyset,$$

---

[5] Ein halb-primes Ideal $\mathfrak{a}$ erfüllt für jede natürliche Zahl n: Aus $a^n\in\mathfrak{a}$ folgt $a\in\mathfrak{a}$.

aber auch $H_i H_j \subseteqq H_{\max(i,j)}$, was insbesondere die Unterhalbgruppeneigenschaft der H_i zeigt: Aus $(a_i) = \mathfrak{a}_i$ und $(a_j) = \mathfrak{a}_j$ folgt nämlich $(a_i a_j) = \mathfrak{a}_k$ mit $\mathfrak{a}_k \subseteqq \mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{a}_k \subseteqq \mathfrak{a}_j$, wobei nach Lemma 1 wenigstens einmal Gleichheit eintreten muß, was $k = \max(i,j)$ lehrt.

Als nächstes zeigen wir sogleich, daß für jede solche Zerlegung (15) einer Halbgruppe H mit $F(H) = \emptyset$ auch (16) erfüllt ist. In der Tat besteht wegen der Multiplikationsvorschrift jedes Erzeugendensystem S von H aus einem Erzeugendensystem S_{U_k} von U_k und (falls $k \neq \max I$) weiteren Elementen aus $H \setminus U_k$. Wäre nur ein Element $x \in U_k$ in jedem S_{U_k} entbehrlich, so auch in jedem S im Widerspruch zu $F(H) = \emptyset$.

Ist umgekehrt H eine Halbgruppe mit einer Zerlegung (15), die auch (16) erfüllt, so gilt $F(H) = \emptyset$. Jedes Element $x \in H$ liegt ja in wenigstens einem U_k, womit es auch ein Erzeugendensystem S_{U_k} von U_k gibt, in dem x unentbehrlich ist; das gleiche gilt dann aber auch für das Erzeugendensystem $S = \{S_{U_k}, H \setminus U_k\}$ von H.

Nunmehr betrachten wir nur noch Halbgruppen H mit $F(H) = \emptyset$ und zeigen, daß die am Anfang des Beweises konstruierte Zerlegung (15) mit der Eigenschaft (17) nicht weiter verfeinert werden kann. In der Tat, ließe sich ein H_k aufspalten gemäß

$$H_k = H_k^{(1)} \cup H_k^{(2)} \quad \text{mit} \quad H_k^{(i)} \cdot H_k^{(j)} = H_k^{(\max(i,j))},$$

so würde für Elemente $a_k^{(i)} \in H_k^{(i)}$ ersichtlich $(a_k^{(1)}) \supset (a_k^{(2)})$ gelten, im Widerspruch zur Wahl von H_k. Umgekehrt sei eine Zerlegung (15) vorgelegt, die nicht mehr verfeinert werden kann. Wir bilden dann für jedes $i \in I$ die Ideale

$$\mathfrak{a}_i = \bigcup_{\substack{k \in I \\ k \geqq i}} H_k .$$

Wegen $\mathfrak{a}_i \supset \mathfrak{a}_j$ für $i < j$ erhalten wir mit $I \subseteqq I^*$ eine Teilkette der Kette aller Ideale von H, wobei ersichtlich

$$H_i = \mathfrak{a}_i \setminus \mathfrak{c} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{c} = \bigcup_{\substack{k \in I \\ k > i}} \mathfrak{a}_k \subset \mathfrak{a}_i$$

gilt. Jedenfalls ist jedes der auftretenden Ideale $\mathfrak{a}_i$ mit $i \in I$ Hauptideal; sonst folgte nämlich für ein Element $x \in \mathfrak{a}_i$ mit $x \notin \mathfrak{c}$

$$\mathfrak{a}_i \supset (x) \supset \mathfrak{c},$$

was eine Aufspaltung von H_i in $\mathfrak{a}_i \setminus (x)$ und $(x) \setminus \mathfrak{c}$ ermöglichte. Andererseits müssen aber aus dem gleichen Grunde alle Hauptideale in unserer Teilkette auftreten, womit gezeigt ist, daß eine nicht mehr zu verfeinernde Zerlegung (15) auch (17) erfüllt.

Schließlich ergibt sich (18) aus der letzten Behauptung von Satz 8, wonach

$$(x) = (y) \quad \text{genau dann, wenn} \quad HxH = HyH$$

gilt, was gerade der in Croisot [3], Lemma 3 angegebenen Relation $\mathcal{R}$ entspricht, welche die Einteilung von H in maximale einfache Unterhalbgruppen bewirkt.

Eine weitere Verschärfung dieses Satzes erhält man für solche Halbgruppen, die Halbgruppen mit relativen Inversen sind, was für sehr viele (vgl. die nachfolgenden Sätze), vielleicht sogar für alle (vgl. Problem) Halbgruppen H mit $F(H) = \emptyset$ zutrifft:

SATZ 10. *Es sei H eine Halbgruppe mit relativen Inversen und $F(H)=\emptyset$ sowie $H=\bigcup H_i$ die nicht mehr zu verfeinernde Zerlegung von H als Kette von Unterhalbgruppen gemäß Satz 9. Dann sind die auftretenden Unterhalbgruppen H_i sogar vollständig einfach, also Gruppen oder selbst Halbgruppen mit $F(H_i)=\emptyset$.*

BEWEIS.[6] Nach CLIFFORD [1], Lemma 2. 7 ist eine einfache Halbgruppe H_i genau dann vollständig einfach, wenn sie Halbgruppe mit relativen Inversen ist. Wir haben also nur noch das letztere zu zeigen. Jedenfalls gibt es zu jedem Element $a_i \in H_i$ ein idempotentes Element $e_j \in H_j \subseteqq H$ mit $e_j a_i = a_i e_j = a_i$, woraus $j \leqq i$ folgt. Weiterhin existiert ein $a'_k \in H_k \subseteqq H$ mit $a'_k a_i = a_i a'_k = e_j$, was $k \leqq j$ und $i \leqq j$, mithin $k \leqq i = j$ zeigt. Schließlich gibt es auch in H_i ein relatives Inverses zu a_i, nämlich $a''_i = a'_k e_i$ $(= e_i a'_k)$ wegen

$$a'_k a_i = a'_k e_i a_i = a''_i a_i = a_i a'_k e_i = a_i a''_i = e_i .$$

Wir ergänzen die beiden letzten Sätze noch durch folgendes

KOROLLAR. *Tritt in einer Zerlegung $H=\bigcup H_i$ mit $i \in I$ einer Halbgruppe H mit $F(H)=\emptyset$ in eine Kette von Unterhalbgruppen eine nicht nur aus einem Element bestehende Gruppe H_k auf, so existiert auch noch eine Unterhalbgruppe H_j mit $j<k$, die nicht idempotent ist.*

BEWEIS. Aus $k = \min I$ folgte für das Einselement e_k von H_k sofort $e_k \in F(H)$. Das gleiche würde aber auch eintreten, wenn für jedes $a_j \in H_j$ mit $j<k$ stets

$$a_j e_k = e_k a_j = e_k$$

erfüllt wäre. Es gibt also wenigstens ein Element $a_j \in H_j$ mit $j<k$, welches etwa $a_j e_k = a_k \neq e_k$ erfüllt. Daraus folgt

$$a_j^2 e_k = a_j a_k = a_j e_k a_k = a_k^2,$$

und aus $a_k^2 \neq a_k$ ergibt sich $a_j^2 \neq a_j$.

Schließlich können wir zwei hinreichende Bedingungen dafür angeben, daß die von uns betrachteten Halbgruppen relative Inverse besitzen.

SATZ 11. *Es sei H eine Halbgruppe mit $F(H)=\emptyset$, in der jedes Element endliche Ordnung hat. Dann ist H eine Halbgruppe mit relativen Inversen.*

BEWEIS. Wir beachten, daß unter den endlich vielen Potenzen jedes Elementes $a \in H$ (genau) ein idempotentes Element a^m auftritt. Da das Ideal $\mathfrak{a} = Ha^m H$ halbprim ist und a^{m+2}, auch a enthält, gibt es Elemente x und y aus H mit $a = xa^m y$ Nun sei x^n idempotent; dann folgt aus

$$a = xa^m y = x^2 a^m ya^{m-1} y = \ldots = x^n a^m z \quad \text{mit} \quad z \in H$$

zunächst $x^n a = a$, und damit $a = a^m z$. Dann gilt aber

$$a^{m+1} = a^m a = a^m a^m z = a^m z = a,$$

---

[6] Der Beweis ergibt auch aus einem Vergleich der Zerlegung von H als Halbverband vollständig einfacher Unterhalbgruppen nach CLIFFORD [1], Theorem 2 und unserer Zerlegung von H. In beiden Fällen besteht jedes H_i gerade aus den erzeugenden Elementen je eines Hauptideals von H.

was zeigt, daß alle Potenzen eines beliebigen Elementes $a \in H$ eine zyklische Gruppe bilden, also H eine Halbgruppe mit relativen Inversen ist.

SATZ 12. *Es sei H eine kommutative Halbgruppe mit $F(H)=\emptyset$. Dann ist H eine Halbgruppe mit relativen Inversen und die vollständig einfachen Bestandteile H_i der Zerlegung von H sind (kommutative) Gruppen.*

BEWEIS. Auf Grund der Kommutativität besagt nun Lemma 2, daß sogar jedes Ideal von H halb-prim ist, woraus nach CROISOT [3], Korollar 1 zu Theorem 1, bzw. CLIFFORD [2], Theorem 6, bereits die erste Behauptung folgt. Die zweite Behauptung ergibt sich aus der Struktur vollständig einfacher Halbgruppen (vgl. § 3).

Zusammen mit dem voranstehenden Korollar lehrt dieser Satz, daß eine nichtidempotente kommutative Halbgruppe H mit $F(H)=\emptyset$ unendlich viele vollständig einfache Bestandteile H_i enthalten muß, und wir erhalten in Ergänzung zu dem Korollar zu Satz 3:

KOROLLAR. *Jede endliche kommutative Halbgruppe H mit $F(H)=\emptyset$ ist zergliederbar.*

In der Tat gibt es Satz 12 entsprechende Halbgruppen, die nicht idempotent sind. Wir brauchen nur von einer beliebigen kommutativen Gruppe G auszugehen und gemäß Satz 6 das direkte Produkt $G \times L$ mit einer den Voraussetzungen dieses Satzes genügenden kommutativen Halbgruppe L zu bilden. Wählen wir für $L=I$ die (als Halbgruppe aufgefaßte) geordnete Menge der ganzen Zahlen und etwa $G=\langle a\rangle$ als zyklische Gruppe, so erhalten wir eine Halbgruppe

$$H = G \times I = \bigcup_{i \in I} G_i = \bigcup_{i \in I} \langle a_i \rangle$$

als Kette isomorpher zyklischer Gruppen mit der Multiplikationsvorschrift

$$a_i^n a_j^m = a_j^m a_i^n = a_i^{n+m} \quad \text{für} \quad i > j.$$

PROBLEM. Gibt es Halbgruppen H mit $F(H)=\emptyset$, die nicht Halbgruppen mit relativen Inversen sind? Nach den Sätzen 11 und 12 müßte eine solche Halbgruppe jedenfalls nichtkommutativ sein und Elemente unendlicher Ordnung enthalten.

Schließlich stellen wir noch fest, daß jede nicht idempotente Halbgruppe H der Ordnung 4 mit $F(H)=\emptyset$ vollständig einfach ist, mithin eine der beiden am Ende von § 3 genannten Halbgruppen. Jedenfalls folgt aus den Sätzen 11, 9 und 10, daß H als endliche Halbgruppe ohne Frattinische Unterhalbgruppe eine Kette $H=\bigcup H_i$ vollständig einfacher Halbgruppen H_i ist. Falls dabei mehr als ein H_i auftreten sollte, müßte aus Ordnungsgründen ein H_k eine (nicht nur aus einem Element bestehende) Gruppe sein, was wegen des Korollars nach Satz 10 sofort zum Widerspruch führt.

PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE POTSDAM,
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

(Eingegangen am 31. Mai 1963.)

Literaturverzeichnis

[1] A. H. CLIFFORD, Semigroups admitting relative inverses, *Ann. of Math.*, **42** (1941), S. 1037–1049.

[2] A. H. CLIFFORD, Bands of semigroups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5** (1954), S. 499–504.

[3] M. R. CROISOT, Demi-groupes inversifs et demi-groupes réunions de demi-groupes simples, *Ann. École Norm.*, (3) **70** (1953), S. 361–379.

[4] N. KIMURA, The structure of idempotent semigroups (I), *Pacific J.*, **8** (1958), S. 257–275.

[5] S. LAJOS, Rédei László egy félcsoport-elméleti problémájáról (On a problem of L. Rédei), *Mat. Lapok*, **10** (1959), S. 274–277.

[6] D. MCLEAN, Idempotent semigroups, *Am. Math. Monthly*, **61** (1954), S. 110–113.

[7] L. RÉDEI, *Algebra I*, deutsche Ausg. (Leipzig, 1959).

[8] D. REES, On semi-groups, *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, **36** (1940), S. 387–400.

[9] D. REES, Note on semi-groups, *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, **37** (1941), S. 434–435.

[10] A. SUSCHKEWITSCH, Über die endlichen Gruppen ohne das Gesetz der eindeutigen Umkehrbarkeit, *Math. Ann.*, **99** (1928), S. 30–50.

ON A KIND OF EXTENDED FEJÉR–HERMITE INTERPOLATION POLYNOMIALS

By

L. C. HSU (Changchun, China)

(Presented by P. TURÁN)

In this paper we shall prove that a continuous function of the real variable x, with any order of growth as $|x| \to \infty$, can be approximated almost uniformly by a kind of extended FEJÉR–HERMITE interpolation polynomials defined on $(-\infty, \infty)$.

Let $F_n(f(t); x) \equiv H_{2n-1}(f; x)$ denote the ordinary FEJÉR–HERMITE interpolation polynomial for $f(t)$, of degree at most $(2n-1)$ in x. Let λ_n $(n=1, 2, \ldots)$ be a sequence of positive numbers with $\lambda_n \uparrow \infty$. Then, for any real function $f(t)$ defined on $(-\infty, \infty)$, we may introduce a class of extended FEJÉR–HERMITE polynomials of the form

$$F_n\left(f(\lambda_n t); \frac{x}{\lambda_n}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{a_\nu^{(n)} x}{\lambda_n}\right) \left[\frac{T_n(x/\lambda_n)}{(x/\lambda_n) - a_\nu^{(n)}}\right]^2 f(\lambda_n \cdot a_\nu^{(n)}),$$

where $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ is the CHEBYSHEV polynomial with its zeros

$$a_\nu^{(n)} = \cos\left(\frac{2\nu-1}{2n}\pi\right) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

For brevity we denote

$$\exp^1(|x|) = e^{|x|}, \quad \exp^{m+1}(|x|) = \exp\left(\exp^m(|x|)\right);$$

$$\log^1(n) = \log n, \quad \log^{m+1}(n) = \log\left(\log^m(n)\right).$$

THEOREM 1. *For any continuous function $f(x)$ defined on $(-\infty, \infty)$ and satisfying the order condition $f(x) = O(\exp^m(|x|))$ $(|x| \to \infty)$, we have*

$$\lim_{n\to\infty} F_n\left(f(t \cdot \log^{m+1}(n)); \frac{x}{\log^{m+1}(n)}\right) = f(x) \quad (-\infty < x < \infty). \tag{1}$$

Moreover, the limit relation (1) *holds almost uniformly in* $(-\infty, \infty)$.

PROOF. It requires to show that (1) holds uniformly for all the values of x in every finite interval $[-A, A]$ $(A > 0)$.

Given any $\varepsilon > 0$, by uniform continuity of $f(x)$ on $[-A, A]$, we may find a $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ such that $|f(x) - f(x')| < \frac{1}{2}\varepsilon$ whenever $|x - x'| < \delta$, $|x| \leqq A$, $|x'| \leqq A$. Now denote $\lambda_n = \log^{m+1}(n)$. Clearly there is an $N = N(A, m) > 0$ such that, for $n > N$

$$|x/\lambda_n| < 1 \qquad (-A \leqq x \leqq A).$$

We have to estimate the deviation

$$\Delta_n = |F_n(f(\lambda_n \cdot t);\, \lambda_n^{-1} x) - f(x)| \qquad (|x| \leqq A).$$

Let us denote for brevity

$$S_\nu(x, \lambda_n) = \left(1 - \frac{a_\nu^{(n)} x}{\lambda_n}\right)\left[\frac{T_n(x/\lambda_n)}{(x/\lambda_n) - a_\nu^{(n)}}\right]^2,$$

and notice that

$$\frac{1}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n} S_\nu(x, \lambda_n) \equiv 1.$$

Evidently we have

$$\Delta_n \leqq \frac{1}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n} |f(\lambda_n \cdot a_\nu^{(n)}) - f(x)|\, S_\nu(x, \lambda_n). \tag{2}$$

Now let us decompose the summation of the right-hand side of (2) into two parts, $\sum\limits_\nu{}'$ and $\sum\limits_\nu{}''$. Here the first one $\sum\limits_\nu{}'$ sums over all those terms with indices ν satisfying the condition $|\lambda_n a_\nu^{(n)} - x| < \delta$, and the second one $\sum\limits_\nu{}''$ over all the remaining terms with $|\lambda_n a_\nu^{(n)} - x| \geqq \delta$. Moreover, let us notice that the order condition for $f(x)$ implies the existence of a positive constant K, independent of x $(-A \leqq x \leqq A)$, such that for all sufficiently large n,

$$|f(\lambda_n \cdot a_\nu^{(n)}) - f(x)| < K \cdot \exp^m(\lambda_n).$$

Thus for all large n, say $n > N_1 > N$, we may assert that the right-hand side of (2) does not exceed the following

$$\frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{n^2} \sum_\nu{}' S_\nu(x, \lambda_n) + K \cdot \exp^m(\lambda_n) \frac{1}{n^2} \sum_\nu{}'' S_\nu(x, \lambda_n) \leqq$$

$$\leqq \frac{\varepsilon}{2} + K \cdot \exp^m(\lambda_n) \cdot \frac{1}{n^2} \sum_\nu{}'' \left(1 - \frac{a_\nu^{(n)} x}{\lambda_n}\right) \frac{|T_n(x/\lambda_n)|^2}{(\delta/\lambda_n)^2} \leqq$$

$$\leqq \frac{\varepsilon}{2} + K \cdot \exp^m(\lambda_n) \cdot \left(\frac{\lambda_n}{\delta}\right)^2 \cdot \frac{2}{n^2} \sum_\nu{}'' 1 \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2K}{n} \cdot \left(\frac{\lambda_n}{\delta}\right)^2 \exp^m(\lambda_n).$$

Recalling $\lambda_n = \log^{m+1}(n)$, we see that

$$\frac{1}{n}\left(\frac{\lambda_n}{\delta}\right)^2 \exp^m(\lambda_n) = \frac{(\log^{m+1}(n))^2 \cdot \log n}{n \cdot \delta^2} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Consequently, there exists an $N^* = N^*(\varepsilon, A, m) > N_1$, independent of x in $[-A, A]$, such that for $n > N^*$ we have

$$\Delta_n \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2K}{n}\left(\frac{\lambda_n}{\delta}\right)^2 \exp^m(\lambda_n) < \varepsilon.$$

This is what we want to prove.

Similarly, we can prove the following

THEOREM 2. *Suppose that* $0<\theta<\frac{1}{m+2}$. *Then for every continuous function* $f(x)$ *satisfying the condition* $f(x)=O(|x|^m)$ $(|x|\to\infty)$, *the sequence of polynomials* $\{F_n(f(n^\theta t);n^{-\theta}x)\}$ *converges to* $f(x)$ *almost uniformly in* $(-\infty,\infty)$.

In fact, for the present case we have, with $\lambda_n=n^\theta$,

$$K\cdot|\lambda_n|^m\cdot\frac{1}{n^2}\sum_v{}'' S_v(x,\lambda_n)\leqq$$

$$\leqq\frac{2K}{n}\cdot|\lambda_n|^m\cdot\left(\frac{\lambda_n}{\delta}\right)^2=\frac{2K\cdot|\lambda_n|^{m+2}}{n\cdot\delta^2}=\frac{2K}{\delta^2}n^{(m+2)\theta-1}=o(1)\qquad(n\to\infty).$$

As it may be seen, the essential interest of Theorem 1 lies in the fact that the order condition $f(x)=O(\exp^m(|x|))$ $(|x|\to\infty)$ is capable of describing any type of growth, as $|x|\to\infty$, of the function $f(x)$ inasmuch as the number m can be assigned arbitrarily. However, still more interesting is the question whether there can be constructed such a sequence of polynomial operators $\{\Phi_n\}$ that $\Phi_n(f;x)$ converges to $f(x)$ almost uniformly in $(-\infty,\infty)$, where the order of growth of $f(x)$ is completely arbitrary. Obviously the following theorem just answers the question in the affirmative.

THEOREM 3. *Let* $\{\Phi_k\}$ *be a sequence of interpolation polynomial operators defined by*

$$\Phi_k(f;x)\equiv F_{n_k}(f(e^k\cdot t);e^{-k}x)\qquad(k=1,2,\ldots)\tag{3}$$

where $n_k=[\exp^{k+2}(k)]$, $[\alpha]$ *denoting the integral part of* α. *Then for every continuous function* $f(x)$ *with whatever order of growth as* $|x|\to\infty$, *the sequence* $\{\Phi_k(f;x)\}$ *converges to* $f(x)$ *almost uniformly in* $(-\infty,\infty)$.

PROOF. The proof of this result is similar in principle to that of Theorem 1, in which one may write $\lambda_{n_k}=e^k$ for the sake of comparison.

For any $m>0$ and any continuous function $f(x)$ with $f(x)=O(\exp^m(|x|))$ $(|x|\to\infty)$, we have to show that $\Phi_k(f;x)$ does always approach $f(x)$ (as $k\to\infty$) uniformly on every finite interval $[-A,A]$.

First, we may find an $N=N(A,m)>m$ such that, for all $k>N$,

$$|x/e^k|<1\qquad(-A\leqq x\leqq A)$$

$$|f(e^k\cdot a_v^{(n_k)})-f(x)|<K\cdot\exp^m(e^k)<K\cdot\exp^k(e^k),$$

where K is a positive constant independent of x $(-A\leqq x\leqq A)$.

Having defined δ, Δ_{n_k}, $\sum\limits_v{}'$ and $\sum\limits_v{}''$ in the same way as in the proof of Theorem 1, we need to estimate the following (cf. the latter part of the proof of Theorem 1)

$$K\cdot\exp^k(e^k)\cdot\left(\frac{1}{n_k}\right)^2\sum_v{}'' S_v(x,\lambda_{n_k}).$$

Clearly this is bounded by the quantity

$$2K\cdot\left(\frac{1}{n_k}\right)\left(\frac{e^k}{\delta}\right)^2 \exp^k(e^k) = \frac{2K\cdot e^{2k}\cdot\exp^{k+1}(k)}{\delta^2\cdot[\exp^{k+2}(k)]}$$

which goes to zero as $k \to \infty$.

Hence by exactly the same argument as employed in the proof of Theorem 1, we can find an $N^* = N^*(\varepsilon, A, m) > N$, such that for all x in $[-A, A]$ we have

$$\Delta_{n_k} = |\Phi_k(f; x) - f(x)| < \varepsilon$$

whenever $k > N^*$. Our theorem is thus proved.

It is easily observed from the foregoing proof that (3) can be replaced by

$$(3)' \qquad \Phi_k(f; x) \equiv F_{n_k}(f(2^k t); 2^{-k} x) \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

where $n_k = \exp_2^{k+2}(k)$, with $\exp_2^1(x) = 2^x$, $\exp_2^{m+1}(x) = \exp_2^1(\exp_2^m(x))$.

Certainly there are infinitely many ways for the construction of the operators Φ_k with required properties as asserted by Theorem 3. As regards some theoretic implications of Theorems 2 and 3, they may be well viewed from a comparison with those known convergence theorems for the LEVITAN polynomials [1], generalized LANDAU polynomials [2], [4], and CHLODOVSKY's modified BERNSTEIN polynomials [3], etc. Actually, as is known, convergence properties of these mentioned polynomials have so far been proved only for certain classes of functions with restrictive orders of growth along the real axis. The results of this paper may have, therefore, hinted that FEJÉR's interpolation polynomials may be the most suitable ones that can be so conveniently modified as to approximate non-bounded continuous functions defined on $(-\infty, \infty)$.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
JILIN UNIVERSITY,
CHANGCHUN, CHINA

(Received 27 June 1963)

References

[1] N. I. AHIESER, *Vorlesungen über Approximationtheorie* (Akademie Verlag, 1953) (original Russian edition, 1947), § 75.

[2] L. C. HSU, Approximation of non-bounded continuous functions by certain sequences of linear positive operators or polynomials, *Studia Math.*, **21** (1961), No. 1, pp. 37–43.

[3] G. G. LORENTZ, *Bernstein Polynomials* (Toronto, 1953), Chap. 2, § 3.

[4] J. RADECKI, On modified Landau polynomials, *Studia Math.*, **21** (1962), No. 3, pp. 283–290.

INTERSECTION THEOREMS FOR SYSTEMS OF FINITE SETS

By

GY. KATONA (Budapest)

(*Presented by* A. RÉNYI)

Let $k \leqq m$, and M be a finite set of cardinal number m. Determine the largest number n such that there exists a system of n sets a_ν satisfying the conditions

$$a_\nu \subset M, \quad a_\mu \neq a_\nu, \quad |a_\mu a_\nu| \geqq k \quad (\mu < \nu < n),$$

where $|a|$ is the cardinal number of a.

If $m+k$ is even, then the system consisting of the sets a such that

$$a \subset M \quad \text{and} \quad |a| \geqq \tfrac{1}{2}(m+k)$$

has the required properties. P. ERDŐS, CHAO KO and R. RADO have guessed, that this system contains the maximum possible number of sets [1].

In this note I prove this conjecture, and determine the extremal system also in the case when $m+k$ is odd. For the proof I use a theorem (Theorem 2) which is also interesting in itself.

Notations:

The letters a, b, c, d, e denote finite sets of non-negative integers, all other lower-case letters denote non-negative integers. If $k \leqq l$, then $[k, l)$ denotes the set

$$\{k, k+1, \dots, l-1\} = \{t : k \leqq t < l\}.$$

The obliteration operator $\widehat{\ }$ serves to remove from any system of elements the element above which it is placed. Thus $[k, l) = \{k, k+1, \dots, \hat{l}\}$. The cardinal number of the set a is denoted by $|a|$; inclusion, union, difference and intersection of sets are denoted by $a \subset b$, $a+b$, $a-b$, ab.

If $k \leqq l \leqq m$, $S(k, l, m)$ denotes the set of all systems $\{a_0, a_1, \dots, \hat{a}_n\}$ such that

$$a_\nu \subset [0, m), \quad |a_\nu| = l \quad (\nu < n),$$
$$a_\mu \neq a_\nu, \quad |a_\mu a_\nu| \geqq k \quad (\mu < \nu < n).$$

Put $A = \{a_0, \dots, \hat{a}_n\}$, where $|a_\nu| = l$ $(\nu < n)$. A^g or $\{a_0, \dots, \hat{a}_n\}^g$ denotes the system of sets b_ν such that $|b_\nu| = g$, $b_\mu \neq b_\nu$ $(\mu < \nu < |A^g|)$, and for some μ $b_\nu \subset a_\mu$.

Let us consider $A = \{a_0, \dots, \hat{a}_n\}$, where a_ν are arbitrary sets. Denote by A_l the subsystem of sets a_ν satisfying the conditions $a_\nu \in A$ and $|a_\nu| = l$.

THEOREM 1. *If* $1 \leqq g \leqq l$, $1 \leqq k \leqq l$ *and* $g+k < l$, *further* $\varepsilon > 0$, *then there exists a system* $A = \{a_0, \dots, \hat{a}_n\} \in S(k, l, m)$ *for which*

$$\frac{|A^g|}{n} < \varepsilon.$$

PROOF. Let $m \geqq k$ be a non-negative integer. If $a_0, a_1, \ldots, a_n$ are distinct sets such that

$$[0, k) \subset a \subset [0, m) \quad \text{and} \quad |a| = l,$$

then $A = \{a_0, \ldots, \hat{a}_n\} \in S(k, l, m)$ and $n = \binom{m-k}{l-k}$. Clearly $|A^g| \leqq \binom{m}{g}$ $\Bigl($in fact it is easy to see that $|A^g| = \binom{m}{g}$$\Bigr)$, and

$$\frac{\binom{m}{g}}{\binom{m-k}{l-k}}$$

can be arbitrarily small, if m is sufficiently large, because $g < l-k$.

THEOREM 2. *If* $1 \leqq g \leqq l$, $1 \leqq k \leqq l$ *and* $g + k \geqq l$, *further* $A = \{a_0, \ldots, \hat{a}_n\} \in S(k, l, m)$ *then*

$$n \frac{\binom{2l-k}{g}}{\binom{2l-k}{l}} \leqq |A^g|. \tag{1}$$

REMARK. From $g \geqq l-k$ and $l \geqq g$ it easily follows that

$$\frac{\binom{2l-k}{g}}{\binom{2l-k}{l}} \geqq 1 \tag{2}$$

and equality holds if and only if $g+k = l$ or $g = l$.

PROOF of Theorem 2. If $g = l$, the theorem is trivial (moreover always equality holds). In what follows we consider the case $g < l$.

We distinguish three cases.

Case 1: $2l - k \geqq m$.

By counting in two different ways the number of pairs (a_ν, c) where $c \in A^g$ and $c \subset a_\nu$, we obtain

$$n \binom{l}{g} \leqq |A^g| \binom{m-g}{l-g}. \tag{3}$$

We have to prove that

$$\frac{\binom{l}{g}}{\binom{m-g}{l-g}} \geqq \frac{\binom{2l-k}{g}}{\binom{2l-k}{l}}.$$

This is trivial, if $2l-k \geqq m$, moreover equality holds only in case $2l-k = m$. Hence we obtain that equality holds in (3) only if $m = 2l-k$ and every c is included in $\binom{m-g}{l-g}$ distinct sets a_ν, that is A is the system of all subsets of $[0, m)$. Thus equality in Case 1 can hold only in this way.

Case 2: $g=1$.

Since $g+k \geqq l$, we have $k \geqq l-1$. There are two cases: $k=l$ and $k = l-1$. If $k=l$, then $n=1$ and we can choose $m=k$. Here $2l-k = k = m$, therefore we have Case 1. Assume next $k = l-1$. If we have a system $A = \{a_0, \dots, \hat{a}_n\} \in S(l-1, l, m)$ such that every set of $l-1$ is included at most in two a_ν, then consider the set a_0a_1. Clearly $|(a_0a_1)a_\nu| < l-1$, on the other hand $|(a_0a_1)a_\nu| < l-2$ is impossible, because in this case we should have

$$|a_0a_\nu| \leqq |(a_0a_1)a_\nu| + 1 < (l-2)+1 = l-1.$$

Thus $|a_0a_1a_\nu| = l-2$.

We have $a_0 - a_1 \subset a_\nu$ for every ν, because of $|a_0a_1| = l-1$ and $|(a_0a_1)a_\nu| = l-2$. Similarly $a_1 - a_0 \subset a_\nu$. Here a_0a_1, $a_0 - a_1$, $a_1 - a_0$ are disjoint sets, therefore

$$a_\nu = (a_0 - a_1) + (a_1 - a_0) + a_0a_1 - \lambda_\nu, \tag{4}$$

where λ_ν is an element of a_0a_1. From this results $n \leqq l+1$, and every element is contained at most in l sets a_ν. Thus $n\frac{l}{l} \leqq |A^1|$, since every a_ν has exactly l elements.

If the system A is such that there is a set c satisfying $|c| = l-1$, which is included at least in 3 sets a_ν (for example a_0, a_1 and a_2) then for arbitrary $\nu < n$ $c \subset a_\nu$. Namely, $|ca_\nu| < l-2$ can not be true, because in this case $|a_0a_\nu| < l-1$, similarly $|ca_\nu| = l-2$ can not hold, since its consequence would be $a_\nu \supset a_0 - c$, $a_\nu \supset a_1 - c$ and $a_\nu \supset a_2 - c$ because of $|a_0a_\nu| = |a_1a_\nu| = |a_2a_\nu| = l-1$, that is $|a_\nu| \geqq l+1$, which is impossible. This completes the proof in Case 2, since here $|A^1| = n+l-1 > n$.

In Case 2 equality can hold if and only if every set of $l-1$ is included at most by two a_ν, and A consists of all sets a_ν satisfying (4). This falls under Case 1, where equality holds.

Case 3: $2l-k < m$ and $g > 1$.

We use induction over m, and we apply Cases 1 and 2.

Here $1 < g < l \leqq m$, thus $m \geqq 3$. First we consider $m=3$. Here $l=3$, thus $n=1$, $g=2$, $k=1$ or 2 ($k=3$ is impossible, since we should then have $2l-k = m$, and this is Case 1). Since $|A^2|=3$ and $\frac{\binom{5}{2}}{\binom{5}{3}} = 1$, $\frac{\binom{4}{2}}{\binom{4}{3}} = \frac{3}{2}$, in both cases strict inequality holds.

Suppose that $m>3$ and for $m-1$ Theorem 2 is true. We prove the theorem for m. Denote by s_ν the sum of the elements of a_ν. We can clearly assume that our system is such that $|A^g|$ is minimal and amongst all such systems $\sum_{\nu=0}^{n-1} s_\nu$ is minimal. Denote now by A the system $A = \{a_\nu : \nu < n\}$.

We separate in Case 3 two subcases.

Case 3a. Suppose that whenever

$$m-1 \in a_\nu \in A \quad \text{and} \quad \lambda \in [0, m) - a_\nu$$

then

$$a_\nu - \{m-1\} + \{\lambda\} \in A.$$

We may assume that for some $n_0 \leqq n$, $m-1 \in a_\nu$ $(\nu < n_0)$ and $m-1 \notin a_\nu$ $(n_0 \leqq \nu < n)$. If $n=1$, this is Case 1, because we can choose $m=l$ and thus $2l-k \geqq m$ holds. Let be $n>1$. If $n_0=0$, then the theorem holds by our induction hypothesis. Suppose that $n_0 \geqq 2$. Let be $\mu < \nu < n_0$. Then $|a_\mu + a_\nu| \leqq 2l-k < m$, and there exists an element $\lambda \in [0, m) - a_\mu - a_\nu$. Put $b_\mu = a_\mu - \{m-1\}$ $(\mu < n_0)$. Here $b_\mu + \{\lambda\} \in A$, $|b_\mu b_\nu| = |(b_\mu + \{\lambda\}) b_\nu| = |(b_\mu + \{\lambda\}) a_\nu| \geqq k$, and therefore $l-1 \geqq k$ and $B = \{b_0, \ldots, \hat{b}_{n_0}\} \in S(k, l-1, m-1)$. If $n_0=1$, since $n>1$, then $m-1 \notin a_1$ and $|a_0 a_1| \leqq l-1$. Thus also $l-1 \geqq k$ and $B = \{b_0\} \in S(k, l-1, m-1)$. We can use our induction hypothesis, if $n_0 \geqq 1$ and $g-1>1$, since both $g-1+k \geqq l-1$ (because of $g+k \geqq l$) and $g-1 < l-1$ (because of $g<l$) hold, and $l-1 \geqq k \geqq 1$. Therefore we have in this case

$$n_0 \frac{\binom{2(l-1)-k}{g-1}}{\binom{2(l-1)-k}{l-1}} \leqq |B^{g-1}| = p. \tag{5}$$

We can not use the induction hypothesis, when $g-1 = 1$ that is $g=2$. However, (5) holds, because we can apply Theorem 2 for k, $l-1$ and $g-1 = 1$ (Case 2).

On the other hand $C = \{a_{n_0}, \ldots, \hat{a}_n\} \in S(k, l, m-1)$. We can use the induction hypothesis, if $l \leqq m-1$:

$$(n-n_0) \frac{\binom{2l-k}{g}}{\binom{2l-k}{l}} \leqq |C^g| = r. \tag{6}$$

If $l=m$, then this is Case 1, because $2l-k \geqq m$. Trivially

$$\frac{\binom{2l-k}{g}}{\binom{2l-k}{l}} \leqq \frac{\binom{2(l-1)-k}{g-1}}{\binom{2(l-1)-k}{l-1}} \tag{7}$$

since $l>g$ and $g+k-l \geqq 0$.

Adding (5) and (6), applying (7) we get

$$n \frac{\binom{2l-k}{g}}{\binom{2l-k}{l}} \leqq p+r. \tag{8}$$

Denote by d_ν $(\nu < p)$ elements of B^{g-1}, and by c_ν $(\nu < r)$ elements of C^g. Let $e_\nu = d_\nu + \{m-1\}$ $(\nu < p)$. Then obviously $|e_\nu| = g$, $e_\mu \neq e_\nu$ $(\mu < \nu < n)$. Moreover for every $\nu < p$ there exists an index $\mu < n_0$ such that $d_\nu \subset b_\mu$. Hence $e_\nu \subset a_\mu$, since $e_\nu = d_\nu + \{m-1\}$ and $a_\mu = b_\mu + \{m-1\}$. Thus $e_\nu \in A^g$, moreover trivially $e_\mu \neq c_\nu$ $(\mu < p, \nu < r)$, since $m-1 \in e_\mu$ and $m-1 \notin c_\nu$. Consequently $c_0, c_1, \ldots, c_r, e_0, \ldots, e_p$ are distinct elements of A^g, that is

$$p + r \leqq |A^g|,$$

which completes the proof of 3a.

It remains to prove that in Case 3a equality can not hold. If $m = 3$, this is true. Suppose now that $m > 3$, and use induction over m. Apply the same steps, as in the proof of the inequality. In those cases, where then induction could be used, it can be used here too, that is if $m > 2l - k$, then $m - 1 > 2(l-1) - k$. Thus it follows by induction hypothesis that in (5) (and in the theorem) strict inequality holds. Those cases where induction could not be used are settled by Cases 1 and 2. Thus in Case 3a strict inequality always holds.

Case 3b. Suppose that there are $a \in A$ and $\lambda \in [0, m) - a$ such that $m - 1 \in a$ and $a - \{m-1\} + \{\lambda\} \notin A$. Then $\lambda < m - 1$.

We may assume that the sets are labelled in such a way, that the following relations hold:

$$\begin{array}{llll} m-1 \in a_\nu, & \lambda \notin a_\nu, & b_\nu = a_\nu - \{m-1\} + \{\lambda\} \notin A & (\nu < n_0), \\ m-1 \in a_\nu, & \lambda \notin a_\nu, & c_\nu = a_\nu - \{m-1\} + \{\lambda\} \in A & (n_0 \leqq \nu < n_1), \\ m-1 \in a_\nu, & \lambda \in a_\nu & (n_1 \leqq \nu < n_2), & \\ m-1 \notin a_\nu & & (n_2 \leqq \nu < n). & \end{array}$$

Here $1 \leqq n_0 \leqq n_1 \leqq n_2 \leqq n$. Put $b_\nu = a_\nu$ $(n_0 \leqq \nu < n)$. We have now to prove that

$$B = \{b_0, \ldots, \hat{b}_n\} \in S(k, l, m).$$

Let be $\mu < \nu < n$. We must prove that

$$b_\mu \neq b_\nu \quad \text{and} \quad |b_\mu b_\nu| \geqq k.$$

For $\mu < \nu < n_0$ or $n_0 \leqq \mu < \nu$ these are obvious. Now let be $\mu < n_0 \leqq \nu$. Then $b_\mu \in A$, $b_\nu = a_\nu \in A$, and hence $b_\mu \neq b_\nu$.

If $n_0 \leqq \nu < n_1$, then $c_\nu \in A$; and there are k distinct common elements of a_μ and c_ν. λ and $m-1$ are not among these, therefore they are common elements also of b_μ and $b_\nu = a_\nu$.

If $n_1 \leqq \nu < n_2$, then $|a_\mu a_\nu| \geqq k$, but $\lambda \notin a_\mu a_\nu$. If instead of a_μ we take b_μ, then out of the common elements at most one is lost: $|b_\mu a_\nu| = |b_\mu b_\nu| \geqq k-1$, but λ, which is common element, does not belong to these $k-1$ elements. Thus $|b_\mu b_\nu| \geqq k$.

Finally, if $n_2 \leqq \nu < n$, then a_μ and a_ν have k common elements. $m-1$ does not belong to them, since $m-1 \notin a_\nu$. Therefore the same k elements are also common elements of b_μ and b_ν. Thus $B \in S(k, l, m)$ is proved.

Now we must show, that $|A^g| \geqq |B^g|$. Let c be such a set that $|c| = g$, $c \in B^g$ but $c \notin A^g$. Then $c \subset b_\nu$ for some $\nu < n$, because of $c \in B^g$. Obviously $\nu < n_0$, because if $n_0 \leqq \nu < n$, then $b_\nu = a_\nu$ and $c \in A^g$.

$\lambda \in c$, because $c \subset b_\nu$ for some $\nu < n_0$, and $c \not\subset a_\nu = b_\nu + \{m-1\} - \{\lambda\}$.

On the other hand $m-1 \notin c$, because of $m-1 \notin b_\nu$ $(\nu < n_0)$.

Let be $d = c-\{\lambda\}+\{m-1\}$. Here $d\subset a_\nu$, that is $d\in A^g$, since $c\subset b_\nu$ and $b_\nu = a_\nu-\{\lambda\}+\{m-1\}$. However, $d\notin B^g$. If $d\subset b_\nu$ would hold for some $\nu<n$, then obviously $n_0\leqq \nu<n_2$ because in the cases $\nu<n_0$ and $n_2\leqq\nu<n$, $m-1\notin b_\nu$ holds. If $n_0\leqq\nu<n_1$, then $c\subset c_\nu = a_\nu-\{m-1\}+\{\lambda\}$ holds (for such ν, for which $d\subset b_\nu$) and since $c_\nu\in A$, follows $c\in A^g$, which contradicts our supposition. However, if $d\subset b_\nu$ holds for $n_1\leqq\nu<n_2$, then $c\subset a_\nu$ because of $\lambda\in b_\nu=a_\nu$, $m-1\in b_\nu = a_\nu$, and this also is a contradiction.

Hereby we associated a set d to every set c, which is an element of B^g, but is not one of A^g (to distinct sets c correspond distinct sets d) in such a way, that set d is an element of A^g, but is not one of B^g. From this follows

$$|A^g|\geqq|B^g|. \tag{9}$$

Since for fixed n we supposed A to be the system, for which $|A^g|$ is minimal, in (9) only equality can hold. However we have

$$f(b_0,\dots,\hat{b}_n)-f(a_0,\dots,\hat{a}_n) = n_0[-(m-1)+\lambda]<0,$$

which contradicts the maximum property of A. This shows that Case 3b can not occur.

Remarks.

1. In this proof I used the sequence of ideas contained in the proof of Erdős—Chao Ko—Rado's Theorem 1 ([1]).

2. We showed also, that equality can hold in Case 1, and here only if $m = 2l-k$, and A contains every subset of cardinal number l, or in the trivial case $g=l$.

The following are all consequences of Theorem 2.

3. Theorem 1 of Erdős—Chao Ko—Rado [1]. *If* $1\leqq l\leqq\frac{1}{2}m$ *and*

$$A=\{a_0,\dots,\hat{a}_n\}\in S(1,l,m),\ \textit{then}\ n\leqq\binom{m-1}{l-1}.$$

Proof. Let $b_\nu = [0,m)-a_\nu$ and $B=\{b_0,\dots,\hat{b}_n\}$. Then $|b_\nu| = m-l\geqq l$, $|b_\mu b_\nu| = |[0,m)-(a_\mu+a_\nu)|\geqq m-2l+1$, because $|a_\mu+a_\nu|\leqq 2l-1$ $(\mu<\nu<n)$. We use now Theorem 2 for $m-2l+1$, $m-l$ and l in place of k, l and g. We can apply the theorem, since $1\leqq l\leqq m-l$, $1\leqq m-2l+1\leqq m-l$, and $l+(m-2l+1)\geqq m-l$. Thus

$$n\frac{\binom{m-1}{l}}{\binom{m-1}{m-l}}\leqq|B^l|. \tag{10}$$

Let be $c\in B^l$. Then there exists a number $\mu<n$ such that $c\subset b_\mu$. For this $c\big([0,m)-b_\mu\big)=ca_\mu=\emptyset$. Thus $c\notin A$. Consequently

$$|B^l|+|A| = |B^l|+n\leqq\binom{m}{l}.$$

From this, applying (10),

$$n\leqq\binom{m-1}{l-1}.$$

REMARKS.

1. [1] contains this theorem in a more general form which follows from the form proved here by a simple step, shown in [1].

2. If $2l-k\geqq m$, $|a_\nu|=l$ $(\nu<n)$, and $\{a_0, \dots, \hat{a}_n\}\in S(k, l, m)$, then trivially $n\leqq\binom{m}{l}$, and this estimate is the best possible. If $2l-k<m$, then according to Theorems 1 and 2 of ERDŐS—CHAO KO—RADO [1], the estimate $n\leqq\binom{m-k}{l-k}$ holds in most cases. The estimate is however not true for every case: In [1] an interesting example is cited. Further simple example:

2a. Let $k = l-1$, $|a_\nu|=l$. Then either $n\leqq l+1$ or $n>l+1$.

Consider in the latter case the subsets of a_0 having $l-1$ elements. The number of these is l, and one of these is included in a_ν $(1\leqq\nu<n)$. Thus there exists a set $c\subset a_0$ such that $|c| = l-1$, and there exist two sets, for example a_1 and a_2 for which $c\subset a_1$, $c\subset a_2$. We showed if there is a set c for which $|c| = l-1$ and which is included at least in 3 sets a_ν, then for every $\nu<n$ $c\subset a_\nu$. As a consequence $n\leqq m-l+1$, because there can exist at most as many sets a_ν as the number of distinct elements which are not contained in set c. That is $n\leqq\max(l+1, m-l+1)$, and there is always a system satisfying the equality.

2b. Let $m = 2l-k+1$, $|a_\nu|=l$ $(\nu<n)$ and $k>1$. Use Theorem 2 for $g = l-k+1$:

$$n\frac{l}{l-k+1}\leqq|\{a_0, \dots, \hat{a}_n\}^{l-k+1}| = p. \tag{11}$$

If $c\in\{a_0, \dots, \hat{a}_n\}^{l-k+1}$ then $|[0, m)-c| = l$. Moreover, since $c\subset a_\nu$ for some $\nu<n$, $|a_\nu([0, m)-c)| = |a_\nu-c| = k-1$. Thus $[0, m)-c\notin A$ and the elements of A and the complementary sets of the elements of A^{l-k+1} are distinct, therefore

$$n+p\leqq\binom{2l-k+1}{l}.$$

Hence applying (11)

$$n\leqq\binom{2l-k}{l}=\binom{m-1}{l}.$$

Here equality holds if and only if A is the system of all subsets of $[0, m-1)$ having l elements. Namely, according to Remark 2 of Theorem 2 equality in (11) can hold only if the number of elements is $2l-k$ and A is as specified. In this case equality is trivial.

THEOREM 4. *Let* $2\leqq k\leqq m$. *If* $A=\{a_0, \dots, \hat{a}_n\}$ *is a system such that* $a_\mu\neq a_\nu$, $|a_\mu a_\nu|\geqq k$, $a_\nu\subset[0, m)$ $(\mu<\nu<n)$, *then either*

$$k+m = 2v \qquad n\leqq\sum_{i=v}^{m}\binom{m}{i}, \tag{a}$$

or

$$k+m = 2v-1 \qquad n\leqq\binom{m-1}{v-1}+\sum_{i=v}^{m}\binom{m}{i}. \tag{b}$$

Moreover there exists a unique maximal system of sets a such that $a \subset [0, m)$ *and* $|a| \geqq v$ *in case* (a), *and in case* (b) *a system of sets of the same property and additionally of all the sets satisfying the conditions*

$$a \subset [0, m-1) \quad \textit{and} \quad |a| = v-1.$$

PROOF. 1. If $1 \leqq k \leqq l \leqq m$ and $A = \{a_0, \ldots, \hat{a}_n\} \in S(k, l, m)$, then $n \leqq \binom{m}{l-k}$. From Theorem 2 for $l-k = g$ follows $n \leqq |A^{l-k}|$. However, $|A^{l-k}| \leqq \binom{m}{l-k}$, that is $n \leqq \binom{m}{l-k}$.

If in addition $l-k < \frac{1}{2}(m-1)$ then $n \leqq \binom{m}{l-k} < \binom{m}{l-k+1}$.

2. If $l < \frac{1}{2}(m+k-1)$ and A is an arbitrary system satisfying the conditions of Theorem 4, then

$$|A_l| + |A_{m-l+k-1}| \leqq \binom{m}{m-l+k-1} = \binom{m}{l-k+1}, \tag{12}$$

and equality can hold only if $|A_l| = 0$ and $A_{m-l+k-1}$ consists of all the sets a such that $|a| = m-l+k-1$.

Proof of (12): If $l < \frac{1}{2}(m+k-1)$, then $l-k < \frac{1}{2}(m-1)$ thus by 1:

$$|A_l| < \binom{m}{l-k+1}.$$

If $|A_l| = 0$, (12) is true. If $0 < |A_l| < \binom{m}{l-k+1}$, we shall show, that

$$|A_{m-l+k-1}| < \binom{m}{m-l+k-1} - |A_l|.$$

Let $c \in (A_l)^{l-k+1}$. Then there exists a number ν such that $c \subset a_\nu$, $|a_\nu| = l$ and $a_\nu \in A$, thus $|a_\nu([0, m)-c)| = |a_\nu - c| = k-1 < k$, and hence $[0, m)-c \notin A$. Since $|[0, m)-c| = m-l+k-1$, there are $|(A_l)^{l-k+1}|$ sets of cardinal number $m-l+k-1$, which can not be elements of A and $A_{m-l+k-1}$ respectively. We have

$$|A_{m-l+k-1}| \leqq \binom{m}{m-l+k-1} - |(A_l)^{l-k+1}|.$$

To complete our proof we must show, that $|(A_l)^{l-k+1}| > |A_l|$. This trivially follows from Theorem 2. We can use the theorem because of $k \geqq 2$, $(l-k+1)+k \geqq l$ and $l > l-k+1$ and thus the coefficient (2) is larger than 1. Equality can hold only in the case $|A_l| = 0$.

3. $|A_\mu| = 0$ $(\mu < k)$, thus we have to determine the maximum of $|A| = |A_k| + \ldots$ $\ldots + |A_m|$. By 2 the pairs $|A_k| + |A_{m-1}|$, $|A_{k+1}| + |A_{m-2}|, \ldots$ are maximal, if the first term is 0. The last pair is $|A_{\frac{1}{2}(m+k-2)}| + |A_{\frac{1}{2}(m+k)}|$ and here also $l = \frac{1}{2}(m+k-2) < \frac{1}{2}(m+k-1)$. The maximum of $|A_m|$ is 1. This completes the proof in the case (a).

Similarly in case (b) for the maximal system $|A_\mu| = 0$ $\left(\mu < \frac{1}{2}(m+k-1)\right)$ and $|A_m| = 1$. Only the term $|A_{\frac{1}{2}(m+k-1)}|$ remains. In the Remark 2b we have shown that

$|A_{\frac{1}{2}(m+k-1)}| \leqq \binom{m-1}{\frac{1}{2}(m+k-1)} = \binom{m-1}{v-1}$, and equality can hold only if $A_{\frac{1}{2}(m+k-1)}$ is the system of all the sets satisfying the conditions

$$a \subset [0, m) \quad |a| = \tfrac{1}{2}(m+k-1).$$

This system trivially satisfies the conditions. Therefore this is the maximal system as stated.

MATHEMATICAL INSTITUTE,
EÖTVÖS LORÁND UNIVERSITY,
BUDAPEST

(Received 1 August 1963)

Bibliography

[1] P. Erdős, Chao Ko (Szechuan), R. Rado (Reading), Intersection theorems for systems of finite sets, *The Quarterly Journal of Mathematics*, **12** (48), (1961, Oxford).

UNSYMMETRICAL RANDOM WALK ON THE PLANE AND IN THE SPACE WITH ABSORBING BARRIERS

By

J. REIMANN (Budapest)

(*Presented by* A. RÉNYI)

In a former paper [8] we dealt with the usual case of the n-dimensional unsymmetrical random walk with absorbing barriers, i. e. a particle moving within a fixed domain, in one step from any point into any of the $2n$ neighbouring points.

E. HENZE considered in his paper [5] the case of the unbounded random walk on the plane.

In this paper we generalize the random walk for the case when the particle is able to pass in one step from the point $(x_1, x_2, ..., x_n)$ into any of the points $(y_1, y_2, ..., y_n)$ for which $y_i = x_i+1$, or x_i, or x_i-1 $(i=1, 2, ..., n)$. Thus the member of the points which may be reached in one step in the n-dimensional space is 3^n. In the following we shall call the points which may be reached in one step neighbouring points.

This increase of the number of neighbouring points is important e. g. from the point of view of the solution of Poissons-differential equation with the lattice-method, where it greatly increases the goodness of the approximation for a given lattice density.

In the mentioned paper we examined the random walk with absorbing barriers, using a matrix method which doesn't seem applicable to the discussion of the more general random walk outlined above. We succeeded however to treat the problem by a suitable extension of our method — if making some restrictions concerning the probabilities of steps made in diagonal (skew) directions.

In the following we shall consider in details the two- and three-dimensional case.

1. Random walk on the plane with absorbing barriers

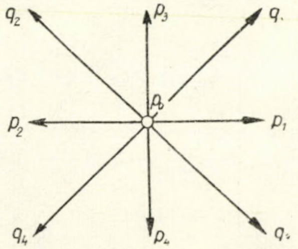
Let the domain of the random walk be a lattice-point rectangle consisting of n_1-columns and n_2-rows surrounded by an absorbing lattice-point border.

The endpoints of the absorbing barriers are:

$$(0, 0),\quad (n_1+1, 0),\quad (n_1+1, n_2+1),\quad (0, n_2+1). \tag{I}$$

The probabilities of moving in different directions are shown in the following figure:

(II)



Let us remark that the probability of the particle remaining in its place is p_0 which may be 0 too.

Here of course: $\sum_{i=0}^{4} p_i + \sum_{i=1}^{4} q_i = 1$. The matrix-method used by us makes it possible that p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 be on condition $\sum_{0}^{4} p_i \leqq 1$ quite arbitrary, but for q_1, q_2, q_3, q_4 we make the following restriction:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{q_3}{q_4} = \frac{p_1}{p_2} \quad \text{i. e.:}$$

$$\text{(III)} \qquad q_1 = \alpha_1 p_1, \quad q_2 = \alpha_1 p_2, \quad q_3 = \alpha_2 p_1, \quad q_4 = \alpha_2 p_2.$$

In case $p_0 = 0, p_i = q_j = (1/8)$ the random walk will be called symmetrical; in case $p_0 = 0, p_i = p, q_j = q$, quasi-symmetrical.

In the treatment of the random walk as a homogeneous Markov chaint he determination of the N-step transition probabilities plays a central role, by means of which numerous questions may be answered. It is well known that the N-step transition probabilities are given by the N-th power of the matrix of the one-step transition probabilities.

Let us denote the matrix of the one-step transition probabilities on domain (I) by **P**. It is well known that by simultaneous change of rows and columns **P** may be brought to the following form:

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \hline \mathbf{Q} & \mathbf{\Pi} \end{array}\right]$$

where the order of the unit-matrix **E** equals the number of the absorbing points bordering the domain (I), and the matrix **Π** is the one-step transition matrix of the random walk in the inner points.

It is easy to see, that

$$\mathbf{P}^N = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \hline \mathbf{Q}_N & \mathbf{\Pi}^N \end{array}\right].$$

The N-step transition probabilities of the random walk in the inner points are given by the elements of the matrix $\mathbf{\Pi}^N$. Further on we shall make use of these only, but we remark that for the calculation of some absorption problems also the matrix **Q** can be used.

In order to be able to find the elements of the matrix $\mathbf{\Pi}^N$ we need the canonical representation of **Π**, for thus the problem is reduced to the determination of the powers of the diagonal-matrix consisting of the latent roots of the matrix **Π**.

The matrix **Π** may be partitioned in the following way:

$$\text{(1)} \qquad \mathbf{\Pi} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \underbrace{1} & \underbrace{2} & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & n_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{O} \ldots \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{A} & \mathbf{B} \ldots \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \ldots \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \ldots \mathbf{C} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \end{array}$$

where the blocks **A**, **B** and **C** may be written with the help of the matrix

$$(2) \qquad \mathbf{J}_{n_1}(\alpha, \beta) = \left[\begin{array}{ccc} 0 & \alpha & 0 \ldots 0 \\ \beta & 0 & \alpha \ldots 0 \\ 0 & \beta & 0 \ldots 0 \\ . & . & \ldots \alpha \\ . & . & \beta \ldots 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \underset{\smile}{1} \\ \underset{\smile}{2} \\ . \\ . \\ \underset{\smile}{n_1} \end{array}$$

in the form:

$$(3) \qquad \begin{aligned} \mathbf{A} &= p_0 \mathbf{E}_{n_1} + \mathbf{J}_{n_1}(p_1, p_2) \\ \mathbf{B} &= p_3 \mathbf{E}_{n_1} + \mathbf{J}_{n_1}(q_1, q_2) = p_3 \mathbf{E}_{n_1} + \alpha_1 \mathbf{J}_{n_1}(p_1, p_2) \\ \mathbf{C} &= p_4 \mathbf{E}_{n_1} + \mathbf{J}_{n_1}(q_3, q_4) = p_4 \mathbf{E}_{n_1} + \alpha_2 \mathbf{J}_{n_1}(p_1, p_2). \end{aligned}$$

In this way the matrix $\mathbf{\Pi}$ may be written as the sum of direct-products:

$$(3^*) \qquad \mathbf{\Pi} = \{p_0 \mathbf{E}_{n_1} \cdot\times \mathbf{E}_{n_2}\} + \{\mathbf{J}_{n_1}(p_1, p_2) \cdot\times (\mathbf{E}_{n_2} + \mathbf{J}_{n_2}(\alpha_1, \alpha_2))\} + \{\mathbf{E}_{n_1} \cdot\times \mathbf{J}_{n_2}(p_3, p_4)\}.$$

The canonical form of the hypermatrix $\mathbf{\Pi}$ can be obtained regarding the fact that the matrix $\mathbf{J}(\alpha, \beta)$ of (2) may be symmetrized by a similar transformation carried out with the diagonal matrix

$$(4) \qquad \mathbf{D}_{n_1}(\alpha, \beta) = \left\langle 1, \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2, \ldots, \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^{n_1 - 1} \right\rangle$$

and by its reciprocal $\mathbf{D}_{n_1}^{-1}(\alpha, \beta)$.

Introducing the notation $\mathbf{K} = \mathbf{J}(1, 1)$ it is easy to see that

$$(5) \qquad \mathbf{J}(\alpha, \beta) = \sqrt{\alpha\beta}\, \mathbf{D}(\alpha, \beta) \mathbf{K} \mathbf{D}^{-1}(\alpha, \beta).$$

Consequently the matrices (3) may be written with the notation $p^{(1)} = \sqrt{p_1 p_2}$ and taking into consideration that

$$\mathbf{D}(p_1, p_2) = \mathbf{D}(q_1, q_2) = \mathbf{D}(q_3, q_4) = \mathbf{D}$$

in the following form:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= p_0 \mathbf{E} + p^{(1)} \mathbf{D} \mathbf{K} \mathbf{D}^{-1} \\ \mathbf{B} &= p_3 \mathbf{E} + \alpha_1 p^{(1)} \mathbf{D} \mathbf{K} \mathbf{D}^{-1} \\ \mathbf{C} &= p_4 \mathbf{E} + \alpha_2 p^{(1)} \mathbf{D} \mathbf{K} \mathbf{D}^{-1}. \end{aligned}$$

Substituting these relations into the blocks of the hypermatrix $\mathbf{\Pi}$ and multiplying $\mathbf{\Pi}$ with the diagonal-hypermatrix

$$\mathbf{D}_{n_1} \cdot\times \mathbf{E}_{n_2} = \langle \overset{1}{\underset{\smile}{\mathbf{D}}}, \overset{2}{\underset{\smile}{\mathbf{D}}}, \overset{\ldots}{\ldots}, \overset{n_2}{\underset{\smile}{\mathbf{D}}} \rangle$$

from the right and with the diagonal-hypermatrix $\mathbf{D}_{n_1}^{-1} \cdot\times \mathbf{E}_{n_2}$ from the left, we obtain the following relation:

$$(6) \qquad \begin{aligned} (\mathbf{D}_{n_1}^{-1} \cdot\times \mathbf{E}_{n_2}) \mathbf{\Pi} (\mathbf{D}_{n_1} \cdot\times \mathbf{E}_{n_2}) &= \{\mathbf{E}_{n_1} \cdot\times (p_0 \mathbf{E}_{n_2} + \mathbf{J}_{n_2}(p_3, p_4))\} + \\ &+ \{p^{(1)} \mathbf{K}_{n_1} \cdot\times (\mathbf{E}_{n_2} + \mathbf{J}_{n_2}(\alpha_1, \alpha_2))\}. \end{aligned}$$

As it is known the latent roots of the matrix $\mathbf{K}_{n_1}$ are equal to the roots of the Chebyshev-polynomial of second kind:

$$\lambda_k^{(n_1)} = 2\cos\frac{k\pi}{n_1+1} \qquad (k=1, 2, \ldots, n_1)$$

and its latent vectors are of the form

$$\mathbf{U}_k^{(n_1)*} = \sqrt{\frac{2}{n_1+1}}\left[\sin\frac{k\pi}{n_1+1},\ \sin\frac{2k\pi}{n_1+1},\ \ldots,\ \sin\frac{n_1 k\pi}{n_1+1}\right]$$

that is

$$\mathbf{K}_{n_1} = \sum_{k=1}^{n_1} \lambda_k^{(n_1)} \mathbf{U}_k^{(n_1)} \mathbf{U}_k^{(n_1)*} = \mathbf{U}_{n_1} \mathbf{\Lambda}_{n_1} \mathbf{U}_{n_1}^*.$$

After substituting this relation into (5) and making use of the rule concerning the multiplication of direct-products[1] we obtain:

$$(\mathbf{D}_{n_1}^{-1}\cdot\times\mathbf{E}_{n_2})\mathbf{\Pi}(\mathbf{D}_{n_1}\cdot\times\mathbf{E}_{n_2}) = (\mathbf{U}_{n_1}\cdot\times\mathbf{E}_{n_1})\{[\mathbf{E}_{n_1}\cdot\times(p_0\mathbf{E}_{n_2}+\mathbf{J}_{n_2}(p_3, p_4))]+$$
$$+[p^{(1)}\mathbf{\Lambda}_{n_1}\cdot\times(\mathbf{E}_{n_2}+\mathbf{J}_{n_2}(\alpha_1, \alpha_2))]\}(\mathbf{U}_{n_1}^*\cdot\times\mathbf{E}_{n_2}).$$

From this we get:

$$(\mathbf{U}_{n_1}^*\cdot\times\mathbf{E}_{n_2})(\mathbf{D}_{n_1}^{-1}\cdot\times\mathbf{E}_{n_2})\mathbf{\Pi}(\mathbf{D}_{n_1}\cdot\times\mathbf{E}_{n_2})(\mathbf{U}_{n_1}\cdot\times\mathbf{E}_{n_2}) = \tag{9}$$
$$= \mathbf{E}_{n_1}\cdot\times[p_0\mathbf{E}_{n_2}+\mathbf{J}_{n_2}(p_3, p_4)]+p^{(1)}\mathbf{\Lambda}_{n_1}\cdot\times[\mathbf{E}_{n_2}+\mathbf{J}_{n_2}(\alpha_1, \alpha_2)].$$

It is known that multiplying matrix (9) with a properly chosen permutation-matrix[2] $\mathbf{P}$ of order $n_1 \times n_2$, from the right and with its transposed $\mathbf{P}^*$ from the left — the order of the factors in the direct-multiplication changes: this means that in (9) elements different from zero are only contained in the diagonal blocks, so:

$$\mathbf{P}^*(\mathbf{U}_{n_1}^*\cdot\times\mathbf{E}_{n_2})(\mathbf{D}_{n_1}^{-1}\cdot\times\mathbf{E}_{n_2})\mathbf{\Pi}(\mathbf{D}_{n_1}\cdot\times\mathbf{E}_{n_2})(\mathbf{U}_{n_1}^*\cdot\times\mathbf{E}_{n_2})\mathbf{P} = \tag{10}$$
$$= [p_0\mathbf{E}_{n_2}+\mathbf{J}_{n_2}(p_3, p_4)]\cdot\times\mathbf{E}_{n_1}+[\mathbf{E}_{n_2}+\mathbf{J}_{n_2}(\alpha_1, \alpha_2)]\cdot\times p^{(1)}\mathbf{\Lambda}_{n_1}.$$

The blocks of the hyper-diagonal matrix on the right may be written now in the following form:

$$\langle(p_0+p^{(1)}\lambda_k^{(n_1)})\mathbf{E}_{n_2}+\mathbf{J}_{n_2}(p_3+\alpha_1 p^{(1)}\lambda_k^{(n_1)}, p_4+\alpha_2 p^{(1)}\lambda_k^{(n_1)})\rangle \qquad (k=1, 2, \ldots, n_1). \tag{11}$$

Let us introduce the notation

$$p_3^{(2)}(k_1) = p_3+p^{(1)}\alpha_1\lambda_{k_1}^{(n_1)}, \quad p_4^{(2)}(k_1) = p_4+p^{(1)}\alpha_2\lambda_{k_1}^{(n_1)} \tag{12}$$

and

$$p^{(2)}(k_1) = \sqrt{p_3^{(2)}(k_1)p_4^{(2)}(k_1)} \qquad (k_1=1, 2, \ldots, n_1) \tag{13}$$

then the blocks (11) symmetrized with the aid of relation (5), may be factorized in the following way:

$$\langle\mathbf{D}_{n_2}(p_3^{(2)}(k_1), p_4^{(2)}(k_1))\{(p_0+p^{(1)}\lambda_{k_1}^{(n_1)})\mathbf{E}_{n_2}+p^{(2)}(k_1)\mathbf{K}_{n_2}\}\mathbf{D}_{n_2}^{-1}(p_3^{(2)}(k_1), p_4^{(2)}(k_1))\rangle.$$

---

[1] See e. g. [3].

[2] By a permutation matrix we mean a matrix in each row and in each column of which there is one 1, and all the other elements are 0.

The relation (10) may be written in the form:

$$\mathbf{P}^*(\mathbf{U}_{n_1}^* \cdot \times \mathbf{E}_{n_2})(\mathbf{D}_{n_1}^{-1} \cdot \times \mathbf{E}_{n_2})\mathbf{\Pi}(\mathbf{D}_{n_1} \cdot \times \mathbf{E}_{n_2})(\mathbf{U}_{n_1}^* \cdot \times \mathbf{E}_{n_2})\mathbf{P} =$$
$$= \langle \mathbf{D}_{n_2}(p_3^{(2)}(k_1), p_4^{(2)}(k_1))\rangle(\mathbf{U}_{n_2} \cdot \times \mathbf{E}_{n_1})\{p_0 \mathbf{E}_{n_2} \cdot \times \mathbf{E}_{n_1} + p^{(1)} \mathbf{E}_{n_2} \cdot \times \mathbf{\Lambda}_{n_1} +$$
$$+ \mathbf{\Lambda}_{n_2} \cdot \times \langle p^{(2)}(k_1)\rangle\}(\mathbf{U}_{n_2}^* \cdot \times \mathbf{E}_{n_1})\langle \mathbf{D}_{n_2}^{-1}(p_3^{(2)}(k_1), p_4^{(2)}(k_1))\rangle.$$

Hence:

$$\mathbf{P}(\mathbf{U}_{n_2} \cdot \times \mathbf{E}_{n_1})\langle \mathbf{D}_{n_2}^{-1}(p_3^{(2)}(k_1), p_4^{(2)}(k_1))\rangle \mathbf{P}^*(\mathbf{U}_{n_1}^* \cdot \times \mathbf{E}_{n_2})(\mathbf{D}_{n_1}^{-1} \cdot \times \mathbf{E}_{n_2})\mathbf{\Pi} \cdot$$
$$\cdot (\mathbf{D}_{n_1} \cdot \times \mathbf{E}_{n_2})(\mathbf{U}_{n_1} \cdot \times \mathbf{E}_{n_2})\mathbf{P}\langle \mathbf{D}_{n_2}(p_3^{(2)}(k_1), p_4^{(2)}(k_1))\rangle(\mathbf{U}_{n_2}^* \cdot \times \mathbf{E}_{n_1})\mathbf{P}^* =$$
$$= \mathbf{P}\{p_0 \mathbf{E}_{n_2} \cdot \times \mathbf{E}_{n_1} + p^{(1)} \mathbf{E}_{n_2} \cdot \times \mathbf{\Lambda}_{n_1} + \mathbf{\Lambda}_{n_2} \cdot \times \langle p^{(2)}(k_1)\rangle\}\mathbf{P}^*.$$

Taking now into consideration the multiplication rule of direct-products as well as the fact that the orthogonal transformation with the permutation matrix **P** changes the order of the factors of the direct-product, we get:

$$\mathbf{P}\langle \mathbf{U}_{n_2}^* \mathbf{D}_{n_2}^{-1}(p_3^{(2)}(k), p_4^{(2)}(k))\rangle \mathbf{P}^*(\mathbf{U}_{n_1}^* \cdot \mathbf{D}_{n_1}^{-1} \cdot \times \mathbf{E}_{n_2})\mathbf{\Pi}(\mathbf{D}_{n_1} \mathbf{U}_{n_1} \cdot \times \mathbf{E}_{n_2}) \cdot \tag{14}$$
$$\cdot \mathbf{P}\langle \mathbf{D}_{n_2}(p_3^{(2)}(k_1), p_4(k_1)\mathbf{U}_{n_2}\rangle \mathbf{P}^* = \langle p_0 \mathbf{E}_{n_1 n_2} + p^{(1)} \mathbf{\Lambda}_{n_1} \cdot \times \mathbf{E}_{n_2} + \langle p^{(2)}(k_1)\rangle \cdot \times \mathbf{\Lambda}_{n_2}\rangle$$

where the elements of the hyper-diagonal matrix on the right are the latent roots of the matrix **Π**.

Due to the latter relation the right-hand latent vector of the matrix **Π** belonging to the latent value $p_0 + p^{(1)}\lambda_{k_1}^{(n_1)} + p^{(2)}(k_1)\lambda_{k_2}^{(n_2)}$ is the direct-product of the k_1-th column $(\underline{S}_{k_1})$ of the block $\mathbf{D}(p_1, p_2)\mathbf{U}_{n_2}$ and of the k_2-th column $(\underline{t}_{k_2}^{(k_1)})$ of the block $\mathbf{D}(p_3^{(2)}(k_1), p_4^{(2)}(k_1))\mathbf{U}_{n_2}$ the left hand latent vector of the matrix **Π** belonging to the same latent root is the direct-product of the k_1-th row $(S_{k_1}^{-1})$[3] of the block $\mathbf{U}_{n_1}\mathbf{D}_{n_1}^{-1}(p_1, p_2)$ and of the k_2-th row $(\underline{t}_{k_2}^{(k_1)-1})$ of the block

$$\mathbf{U}_{n_2}^* \mathbf{D}_{n_2}^{-1}(p_3^{(2)}(k_1), p_4^{(2)}(k_1)), \qquad (k = 1, 2, \ldots, n_1;\ k_2 = 1, 2, \ldots, n_2).$$

Let

$$\underline{V}_{k_1 k_2} = \underline{S}_{k_1} \cdot \times \underline{t}_{k_2}^{(k_1)} \tag{15}$$

denote the right-hand latent vector and $\underline{V}_{k_1 k_2}^{-1}$ the left hand latent vector belonging to the index $k_1 k_2$ the general element of these we denote by the pair of indices x, y and ξ, η resp. $(x, \xi = 1, 2, \ldots, n_1;\ y, \eta = 1, 2, \ldots, n_2)$.

In this case:

$$S_{xk_1} = \sqrt{\frac{2}{n_1+1}}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{x-1}{2}} \sin\frac{xk_1\pi}{n_1+1}, \quad t_{yk_2}^{(k_1)} = \sqrt{\frac{2}{n_2+1}}\left(\frac{p_3^{(2)}(k_1)}{p_4^{(2)}(k_1)}\right)^{\frac{y-1}{2}} \sin\frac{yk_2\pi}{n_2+1}$$

(16)

$$S_{k,\xi}^{(-1)} = \sqrt{\frac{2}{n_1+1}}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{-\frac{\xi-1}{2}} \sin\frac{\xi k_1\pi}{n_1+1}, \quad t_{k\eta}^{(k_1)-1} = \sqrt{\frac{2}{n_2+1}}\left(\frac{p_3^{(2)}(k_1)}{p_4^{(2)}(k_1)}\right)^{-\frac{\eta-1}{2}} \sin\frac{\eta k_2\pi}{n_2+1}.$$

---

[3] Let us remark that (−1) figuring in the exponent shows that the right- and left-hand latent vectors form a reciprocal vector-system and the exponent (−1) represents at the same time the row-vector character of the vector.

Taking into consideration the theorem of the canonical-representation of the matrix functions[4]

$$\mathbf{\Pi}^{N} = \sum_{k_1=1}^{n_1} \sum_{k_2=1}^{n_2} \underline{V}_{k_1 k_2} \left(p_0 + p^{(1)} \lambda_{k_1}^{(n_1)} + p^{(2)}(k_1) \lambda_{k_2}^{(n_2)}\right)^{N} \underline{V}_{k_1 k_2}^{(-1)}. \tag{17}$$

Hence considering the latent roots and the components of the latent vectors, we get the following theorem:

THEOREM 1. *The probability that the particle moving according to the conditions* (II) *and* (III) *on the rectangle* (I) *of $n_1 \times n_2$ lattice-points, bordered by an absorbing barrier reaches from the lattice point (ξ, η) in N-steps the lattice point (x, y) is:*

$$\begin{aligned} P_{(\xi,\eta)\to(x,y)}^{N} = {} & \frac{2^{N+2}}{(n_1+1)(n_2+1)} \sum_{k_1=1}^{n_1} \sum_{k_2=1}^{n_2} \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{x-\xi}{2}} \left(\frac{p_3 + 2\alpha_1 \sqrt{p_1 p_2} \cos \frac{k_1 \pi}{n_1+1}}{p_4 + 2\alpha_2 \sqrt{p_1 p_2} \cos \frac{k_1 \pi}{n_1-1}}\right)^{\frac{y-\eta}{2}} \times \\ & \times \left\{ \frac{p_0}{2} + \sqrt{p_1 p_2} \cos \frac{k_1 \pi}{n_1+1} + \right. \\ & \left. + \sqrt{\left(p_3 + 2\alpha_1 \sqrt{p_1 p_2} \cos \frac{k_1 \pi}{n_1+1}\right)\left(p_4 + 2\alpha_2 \sqrt{p_1 p_2} \cos \frac{k_1 \pi}{n_1+1}\right)} \cos \frac{k_2 \pi}{n_2+1} \right\}^{N} \times \\ & \times \sin \frac{x k_1 \pi}{n_1+1} \sin \frac{\xi k_1 \pi}{n_1+1} \sin \frac{y k_2 \pi}{n_2+1} \sin \frac{\eta k_2 \pi}{n_2+1}. \end{aligned} \tag{18}$$

Let us now examine some special cases of the Theorem 1. In case of a quasi-symmetrical random walk, when $p_i = p$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, $q_j = q$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $q = \alpha p$ where $4p + 4\alpha p = 1$ formula (18) takes on the following form:

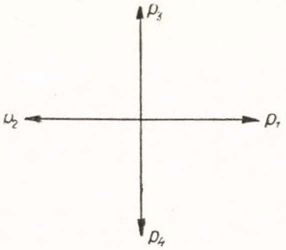
$$\begin{aligned} P_{(\xi,\eta)\to(x,y)}^{(N)} = {} & \frac{2^2}{(n_1+1)(n_2+1)} p^{N} \cdot \\ & \cdot \sum_{k_1} \sum_{k_2} \left[\frac{\cos \frac{k_1 \pi}{n_1+1} + \cos \frac{k_2 \pi}{n_2+1} + 2\alpha \cos \frac{k_1 \pi}{n_1+1} \cos \frac{k_2 \pi}{n_2+1}}{2(1+\alpha)} \right]^{N} \cdot \\ & \cdot \sin \frac{x k_1 \pi}{n_1+1} \sin \frac{\xi k_1 \pi}{n_1+1} \sin \frac{y k_2 \pi}{n_2+1} \sin \frac{\eta k_2 \pi}{n_2+1}. \end{aligned} \tag{19}$$

By substituting $\alpha = 1, p = \frac{1}{8}$ into formula (19) we obtain the N-step transition probabilities for the symmetrical random walk. By substituting $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ into

---

[4] See: [2].

(18) we get the N-step transition probabilities of the usual random walk, is indicated in the following:



Furtheron we call such a random walk *orthogonal.*

$$P^N_{(\xi,\eta)\to(x,y)} = \frac{2^{N+2}}{(n_1+1)(n_2+1)} \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{x-\xi}{2}} \left(\frac{p_3}{p_4}\right)^{\frac{y-\eta}{2}} \cdot \tag{20}$$

$$\cdot \sum_{k_1} \sum_{k_2} \left(\sqrt{p_1 p_2} \cos \frac{k_1 \pi}{n_1+1} + \sqrt{p_3 p_4} \cos \frac{k_1 \pi}{n_2+1} \right)^N \cdot$$

$$\cdot \sin \frac{x k_1 \pi}{n_1+1} \sin \frac{\xi k_1 \pi}{n_1+1} \sin \frac{y k_2 \pi}{n_2+1} \sin \frac{\eta k_2 \pi}{n_2+1} .$$

This latter result is in accordance with formula (3. 1) of the paper [8]. From (19) we get by substitution of $\alpha=0$ formula (3. 6) of paper [8], which is otherwise in agreement with CH. JORDAN's result.

We remark that in case of an orthogonal random walk, the structure of the matrix $\mathbf{\Pi}$ is simpler, accordingly a more simple matrix-technique may be applied for its discussion. In this case the matrix $\mathbf{\Pi}$ can be written as the sum of direct-products of matrices in the following way: $\mathbf{\Pi} = \mathbf{A}_{n_2} \cdot \times \mathbf{E}_{n_1} + \mathbf{E}_{n_2} \cdot \times \mathbf{B}_{n_1}$ where $\mathbf{E}$ denotes a unitmatrix of according order and

$$\mathbf{A}_{n_2} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \underbrace{1} & \underbrace{2} & \cdots\cdots & & \underbrace{n_2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & p_1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ p_2 & 0 & p_1 \ldots 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \ldots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdots \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots p_2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \mathbf{B}_{n_1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \underbrace{1} & \underbrace{2} & \cdots\cdots & & \underbrace{n_1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & p_3 & 0 \ldots 0 & 0 \\ p_4 & 0 & p_3 \ldots 0 & 0 \\ 0 & p_4 & 0 \ldots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdots \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots p_4 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

On the basis of a theorem of EGERVÁRY—STEPHANOS in the theory of hypermatrices

$$\mathbf{\Pi}^N = \sum_i \sum_j (\mathbf{U}_i \cdot \times \mathbf{V}_j)(a_i + b_j)^N (\mathbf{U}_i^* \cdot \times \mathbf{V}_j^{\prime *}) \tag{21}$$

where the numbers a_i and b_j resp. are the latent roots of the matrices $\mathbf{A}_{n_2}$ and $\mathbf{B}_{n_1}$ resp., the vectors $\mathbf{U}_i$ and $\mathbf{U}_i^*$ are the latent vectors of the matrix $\mathbf{A}_{n_2}$ while the vectors $\mathbf{V}_i$ and $\mathbf{V}_i^*$ are the latent vectors of the matrix $\mathbf{B}_{n_1}$.

2. Absorption problems

We are going to examine two absorption problems:

a) The probability-distribution of the number of steps before the absorption and its expectation;

b) The probability of the particle being absorbed in a fixed absorbing point.

In order to answer both problems, we start from theorem 1. Let us determine first the probability $Q_N^{(\xi,\eta)}$, that the particle is still alive after N-steps.

This is obviously identical to the probability that the particle made N-steps into inner points. As we have mutually exclusive events, the elements of the corresponding row of matrix $\mathbf{\Pi}^N$ have to be summed up, i. e.

$$Q_N^{(\xi,\eta)}=[\mathbf{\Pi}^N]\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}.$$

The required probability $Q_N^{(\xi,\eta)}$ is given by the $(\xi m+\eta)$-th element of the $n_1\times n_2$-dimensional vector received in this way. (This probability depends of course on the starting point of the particle.)

In order to get an explicit formula for $Q_N^{(\xi,\eta)}$, we have but to sum up in formula (16) according to x and y.

Making use of the following relation, which can be easily verified

$$\sum\alpha^\mu\sin\frac{\mu k\pi}{m}=\frac{\sin\dfrac{k\pi}{m}}{\alpha+\dfrac{1}{\alpha}-2\cos\dfrac{k\pi}{m}}[1+(-1)^{k-1}\alpha^{n_1}]$$

we obtain the following theorem:

THEOREM 2. *The probability that a particle starting from a lattice-point* (ξ,η) *of the domain* (I) *and moving according to conditions* (II) *and* (III), *is still alive after N-steps:*

$$Q_N^{(x,\eta)}=\frac{2^{N+2}}{(n_1+1)(n_2+1)}\sum_{k^1}\sum_{k2}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\xi}{2}}\left(\frac{p_3^{(2)}(k_1)}{p_4^{(2)}(k_1)}\right)^{\frac{\eta}{2}}\cdot \tag{22}$$

$$\cdot\frac{\left[1+(-1)^{k_1-1}\left(\dfrac{p_4^{(2)}(k_1)}{p_3^{(2)}(k_1)}\right)^{\frac{n_1}{2}}\right]\left[1+(-1)^{k_2-1}\left(\dfrac{p_4^{(2)}(k_1)}{p_3^{(2)}(k_1)}\right)^{\frac{\eta_2}{2}}\right]}{\left(\sqrt{\dfrac{p_1}{p_2}}+\sqrt{\dfrac{p_2}{p_1}}-2\cos\dfrac{k_1\pi}{n_1+1}\right)\left(\sqrt{\dfrac{p_3^{(2)}(k_1)}{p_4^{(2)}(k_1)}}+\sqrt{\dfrac{p_4^{(2)}(k_1)}{p_3^{(2)}(k_1)}}-2\cos\dfrac{k_2\pi}{n_2+1}\right)}\cdot$$

$$\cdot\left(p^{(1)}\cos\frac{k_1\pi}{n_1+1}+p^{(2)}(k_1)\cos\frac{k_2\pi}{n_2+1}\right)^N\sin\frac{\xi k_1\pi}{n_1+1}\sin\frac{k_1\pi}{n_1+1}\sin\frac{\eta k_2\pi}{n_2+1}\sin\frac{k_2\pi}{n_2+1}.$$

This formula shows full analogy with the result referring to the orthogonal random walk, which is formula (3. 10) of paper [8].

In case of a quasi-symmetrical random walk [5]

$$Q_N^{(x,\eta)} = \frac{2^2}{(n_1+1)(n_2+1)} \sum_{k_1}' \sum_{k_2}' \left[\frac{\cos \frac{k_1\pi}{n_1+1} + \cos \frac{k_2\pi}{n_2+1} + 2\alpha \cos \frac{k_1\pi}{n_1+1} \cos \frac{k_2\pi}{n_2+1}}{2(1+\alpha)} \right]^N .$$

$$\cdot \sin \frac{\xi k_1 \pi}{n_1+1} \operatorname{ctg} \frac{k_1\pi}{2(n_1+1)} \sin \frac{\eta k_2 \pi}{n_2+1} \operatorname{ctg} \frac{k_2\pi}{2(n_2+1)} \tag{23}$$

where we have to carry out the summarizing for uneven k_1 and k_2. Let the random variable ζ denote the number of steps made by the particle before absorption.

Obviously $P(\zeta < N) = 1 - Q_N$. The probability that the particle will be absorbed exactly in N-steps is

$$P(\zeta = N) = Q_{N-1} - Q_N . \tag{24}$$

This gives the probability distribution of the number of steps before absorption.

The expected value of the random variable ζ is:

$$M(\zeta) = \sum_{N=0}^{\infty} N P(\zeta = N). \tag{25}$$

THEOREM 3. *The expected value of the number of steps before absorption in case of a quasisymmetrical random walk is:*

$$M(\zeta) = \frac{2^3(1+\alpha)}{(n_1+1)(n_2+1)} \cdot \tag{26}$$

$$\cdot \sum_{k_1}' \sum_{k_2}' \frac{\sin \frac{\xi k_1 \pi}{n_1+1} \operatorname{ctg} \frac{k_1\pi}{2(n_1+1)} \sin \frac{\eta k_2\pi}{n_2+1} \operatorname{ctg} \frac{k_2\pi}{2(n_2+1)}}{\sin^2 \frac{k_1\pi}{2(n_1+1)} \left(1 + 2\alpha \cos^2 \frac{k_2\pi}{2(n_2+1)}\right) + \sin^2 \frac{k_2\pi}{2(n_2+1)} \left(1 + 2\alpha \cos^2 \frac{k_2\pi}{2(n_1+1)}\right)} .$$

By substituting $\alpha = 0$ into formula (25) we obtain the result referring to the orthogonal random walk, and in case $\alpha = 1$ the formula referring to the symmetrical random walk. In answering the question b) let us determine the probability that the particle starting from point (ξ, η) will be absorbed in N-steps at the boundary point $(0, y)$,

It is easy to see, that

$$P_{(\xi,\eta)\to(0,y)}^{(N)} = p_2 P_{(\xi,\eta)\to(1,y)}^{(N-1)} + q_2 P_{(\xi,\eta)\to(1,y+1)}^{(N-1)} + q_4 P_{(\xi,\eta)\to(1,y-1)}^{(N-1)} \tag{27}$$

(in case $y = 1$ and $y = n_1$ we have only two-terms and in case $y = 0$ and $y = n_1 + 1$ only one term).

---

[5] The case $\alpha = 0$ of formula (23) may be found in paper [8]. This is the generalization for the two-dimensional case of the formula referring to the one-dimensional random walk with absorbing barriers figuring in the book [7] by LOÈVE.

With the notation introduced in (21), (26) takes on the following form:

$$P^{N}_{(\xi,\eta)\to(0,y)} = \frac{2^{N+2}}{(n_1+1)(n_2+1)} \sum_{k_1} \sum_{k_2} p_2^2 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\xi-1}{2}} \left(\frac{p_4^{(2)}(k_1)}{p_3^{(2)}(k_1)}\right)^{\frac{y-\eta+1}{2}}$$

$$\left[\alpha_1 + \frac{p_3^{(2)}(k_1)}{p_4^{(2)}(k_1)} + \alpha_2 \frac{p_3^{(2)}(k_1)}{p_4^{(2)}(k_1)}\right] \left(p^{(1)} \cos\frac{k_1\pi}{n_1+1} + p^{(2)}(k_1) \cos\frac{k_2\pi}{n_2+1}\right)^{N-1} \cdot \tag{28}$$

$$\cdot \sin\frac{\xi k_1\pi}{n_1+1} \sin\frac{k_1\pi}{n_1+1} \sin\frac{\eta k_2\pi}{n_2+1} \cdot \left(\sin\frac{yk_2\pi}{n_2+1} + \alpha_1 \sin\frac{(y+1)k_2\pi}{n_2+1} + \alpha_2 \sin\frac{(y-1)k_2\pi}{n_2+1}\right).$$

In the case of a quasisymmetrical random walk the corresponding formula is the following

$$P^{(N)}_{(\xi,\eta)\to(0,y)} = \frac{2^{1-N}(1+\alpha)^{-N}}{(n_1+1)(n_2+1)} \cdot \tag{29}$$

$$\cdot \sum_{k_1} \sum_{k_2} \left(\cos\frac{k_1\pi}{n_1+1} + \cos\frac{k_2\pi}{n_2+1} + 2\alpha \cos\frac{k_1\pi}{n_1+1} \cos\frac{k_2\pi}{n_2+1}\right)^{N-1} \cdot$$

$$\cdot \sin\frac{\xi k_1\pi}{n_1+1} \sin\frac{k_1\pi}{n_1+1} \sin\frac{\eta k_2\pi}{n_2+1} \sin\frac{yk_2\pi}{n_2+1} \left(1 + 2\alpha \cos\frac{k_2\pi}{n_2+1}\right).$$

In answering the question concerning the probability that the particle will finish its life in the absorption point $(0, y)$ after an indefinite number of steps we have to sum up in formula (28) from $N=1$ to $N=\infty$ which causes no difficulty, as we have a simple geometrical series.

In this way we obtain the following theorem:

THEOREM 4. *The probability that the particle starting from point* (ξ, η) *and satisfying the conditions* (II) *and* (III) *will finish its life after an indefinite number of steps in the absorbing point* $(0, y)$ *is:*

$$U_{(\xi,\eta)\to(0,y)} = \frac{2^{N+2}}{(n_1+1)(n_2+1)} \cdot \tag{30}$$

$$\cdot \sum_{k_1} \sum_{k_2} p_2^2 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\xi-1}{2}} \left(\frac{p_4^{(2)}(k_1)}{p_3^{(2)}(k_1)}\right)^{\frac{y-\eta+1}{2}} \left(\alpha_1 + \sqrt{\frac{p_3^{(2)}(k_1)}{p_4^{(2)}(k_1)}} + \alpha_2 \frac{p_3^{(2)}(k_1)}{p_4^{(2)}(k_1)}\right) \cdot$$

$$\cdot \sin\frac{\xi k_1\pi}{n_1+1} \sin\frac{k_1\pi}{n_1+1} \sin\frac{\eta k_2\pi}{n_2+1} \cdot$$

$$\cdot \left(\sin\frac{yk_2\pi}{n_2+1} + \alpha_1 \sin\frac{(y+1)k_2\pi}{n_2+1} + \alpha_2 \sin\frac{(y-1)k_2\pi}{n_2+1}\right).$$

Here we mention two special cases. If after substitution $\alpha_1=\alpha_2=0$ summing up in formula (27) according to N and then summarizing according to k_1 and introducing the notation

$$\frac{1}{\sqrt{p_3 p_4}} - 2\sqrt{\frac{p_1 p_2}{p_3 p_4}} \cos\frac{k_1\pi}{n_1+1} = 2\,\mathrm{ch}\,\vartheta_{k_2}$$

then denoting by $U_{(\xi,\eta)\to(0,y)}$ the probability that the particle starting from the point (ξ,η) finishes its life in the absorbing point $(0,y)$ we obtain the following result:

$$U_{(\xi,\eta)\to(0,y)}=\frac{2}{n_2+1}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{y-1}{2}}\left(\frac{p_3}{p_4}\right)^{\frac{\xi-\eta}{2}}\frac{p_2}{\sqrt{p_3p_4}}\cdot \tag{31}$$

$$\cdot\sum_{k_2=1}^{n_2}\sin\frac{\eta k_2\pi}{n_2+1}\sin\frac{yk_2\pi}{n_2+1}\,\frac{\operatorname{sh}(n_2+1-y)\vartheta_{k_2}}{\operatorname{sh}(n_2+1)\vartheta_{k_2}}.$$

This result agrees with formula (3. 15) of paper [8]. By the substitution $p_1=p_2=$ $=p_3=p_4=\frac{1}{4}$ we obtain the result of MC. CREA and WHIPPLE concerning this absorption problem. The same result may be obtained obviously by starting from formula (29) as well.

3. Unbounded random walk on the plane

From our results it is easy to obtain the formulas referring to the unbounded case. Let us start from formula (16) and regard it as an integral approaching sum.

In case the domain is a rectangle consisting of $2a\times 2b$ lattice-points, i. e. $n_1=2a$, $n_2=2b$, and the particle starts from the point $(\xi,\eta)=(a,b)$ then with the notation $x=a+X$, $y=b+Y$

$$\sin\frac{ak_1\pi}{2a}\sin\frac{(a+X)k_1\pi}{2a}=\begin{cases}\cos\dfrac{Xk_1\pi}{2a} & \text{if } k \text{ is odd}\\[2ex] 0 & \text{if } k \text{ is even}\end{cases}$$

$$\sin\frac{bk_2\pi}{2b}\sin\frac{(b+Y)k_2\pi}{2b}=\begin{cases}\cos\dfrac{Yk_2\pi}{2b} & \text{if } k_2 \text{ is odd}\\[2ex] 0 & \text{if } k_2 \text{ is even.}\end{cases}$$

Let us now introduce the notation $\frac{k_1\pi}{2a}=u_1$, $\frac{k_2\pi}{2b}=v_1$, $\frac{\pi}{a}=\Delta u$, $\frac{\pi}{b}=\Delta v$. Considering that $X=x-\xi$, $Y=y-\eta$, it may easily be seen from formula (18) that we obtain by a limiting process the following result

THEOREM 5. *The probability that a particle starting from the point* (ξ,η) *and carrying out an unbounded random walk (corresponding to condition* (II)) *will reach in N-steps the point* (x,y) *is:*

$$P^{(N)}_{(\xi,\eta)\to(x,y)}=\frac{2^N}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{x-\xi}{2}}\left(\frac{p_3+2\alpha_1\sqrt{p_1p_2}\cos u}{p_4+2\alpha_2\sqrt{p_1p_2}\cos u}\right)^{\frac{y-\eta}{2}}\cdot \tag{32}$$

$$\cdot\left\{\sqrt{p_1p_2}\cos u+\sqrt{(p_3+2\alpha_1\sqrt{p_1p_2}\cos u)(p_4+2\alpha_2\sqrt{p_1p_2}\cos u)}\cos v\right\}\cdot$$

$$\cdot\cos u(x-\xi)\cos v(y-\eta)\,du\,dv.$$

Let us remark, that from formula (32) we get with the choice $\alpha_1=\alpha_2=0$ as a special-case the result of HENZE.[6]

---

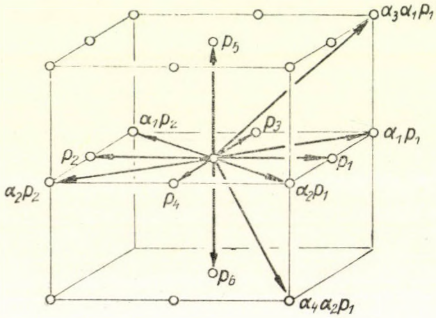
[6] See: [5] pp. 3.

4. Random walk in the space with absorbing barriers

Analogously to the matrix technique applied to the discussion of the random walk in the plane, the random walk in the space with absorbing barriers may be treated as well.

If the particle is at a given moment in the point (x_1, x_2, x_3) then it is able to pass in one step into any such (y_1, y_2, y_3) point for which $y_i = x_i$ or $x_i - 1$ or $x_i + 1$ $(i = 1, 2, 3)$ i. e. into neighbouring points, the distances of which from the point (x_1, x_2, x_3) are $0, 1, \sqrt{2}$ or $\sqrt{3}$ lattice-units.

The one-step transition probabilities are illustrated by the following figure:



where

$$P\{(x_1, x_2, x_3) \to (y_1, y_2, x_3+1)\} = \alpha_3 P\{(x_1, x_2, x_3) \to (y_1, y_2, x_3)\}$$

$$P\{(x_1, x_2, x_3) \to (y_1, y_2, x_3+1)\} = \alpha_4 P\{(x_1, x_2, x_3) \to (y_1, y_2, x_3)\}$$

(IV) if $(y_1 y_2) \neq (x_1, x_2)$ and

$$P\{(x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_2, x_3+1)\} = p_5$$

$$P\{(x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_2, x_3+1)\} = p_6.$$

Let the domain of the random walk be a rectangle consisting of $n_1 \times n_2 \times n_3$ lattice-points. (Without the absorbing barriers.)

Let $\mathbf{\Pi}_2$ denote the matrix of the one-step transition probabilities in the interior of the two-dimansional domain cosisting of $n_1 \times n_2$ lattice-points, and let us introduce in the relation (3*) the notation

$$\mathbf{\Pi} = p_0 \mathbf{E}_{n_1 n_2} + \mathbf{\Pi}_{n_1 n_2}$$

where

$$\mathbf{\Pi}_{n_1 n_2} = \mathbf{J}_{n_1}(p_1, p_2) \cdot \times \{\mathbf{E}_{n_2} + \mathbf{J}_{n_2}(\alpha_1, \alpha_2)\} + \{\mathbf{E}_{n_1} \cdot \times \mathbf{J}(p_3, p_4)\}.$$

In an analogous way the matrix of the one-step transition probabilities of the 3-dimensional random walk can be written in the following way:

$$\mathbf{\Pi}_3 = p_0 \mathbf{E}_{n_1 n_2 n_3} + \mathbf{\Pi}_{n_1 n_2 n_3}$$

where

$$\mathbf{\Pi}_{n_1 n_2 n_3} = \mathbf{\Pi}_{n_1 n_2} \cdot \times (\mathbf{E}_{n_3} + \mathbf{J}_{n_3}(\alpha_3, \alpha_4)) + \mathbf{E}_{n_1 n_2} \cdot \times \mathbf{J}_{n_3}(p_5, p_6). \tag{33}$$

As we saw in the discussion of the two-dimensional case:

$$\mathbf{\Pi}_{n_1n_2} = \mathbf{V}_{n_1n_2}\mathbf{\Lambda}_{n_1n_2}\mathbf{V}_{n_1n_2}^{-1}$$

where

$$\mathbf{\Lambda}_{n_1n_2} = \langle \lambda_{k_1\lambda_2}^{(n_1n_2)} \rangle$$

and on the basis of (33) and (34)

$$(\mathbf{V}_{n_1n_2}^{-1}\cdot\times\mathbf{E}_{n_3})\mathbf{\Pi}_{n_1n_2n_3}(\mathbf{V}_{n_1n_2}\cdot\times\mathbf{E}_{n_3}) =$$

$$= \{\mathbf{\Lambda}_{n_1n_2}\cdot\times(\mathbf{E}_{n_3}+\mathbf{J}_{n_3}(\alpha_3, \alpha_4))\} + \{\mathbf{E}_{n_1n_2}\cdot\times\mathbf{J}_{n_3}(p_5, p_6)\}.$$

Now multiplying with the properly chosen permutation-matrix **P** of order $n_1\times n_2\times n_3$ from the right and with its transpose $\mathbf{P}^*$ from the left resp. we get:

$$\mathbf{P}^*(\mathbf{V}_{n_1n_2}^{-1}\cdot\times\mathbf{E}_{n_3})\mathbf{\Pi}_{n_1n_2n_3}(\mathbf{V}_{n_1n_2}\cdot\times\mathbf{E}_{n_3})\mathbf{P} =$$

$$= \langle\{\mathbf{E}_{n_3}+\mathbf{J}_{n_3}(\alpha_3, \alpha_4)\}\cdot\times\mathbf{\Lambda}_{n_1n_2}+\mathbf{J}_{n_3}(p_5, p_6)\cdot\times\mathbf{E}_{n_1n_2}\rangle.$$

In this way we obtained a hyper-diagonal matrix of order $n_1\times n_2\times n_3$ of which only $(n_1\times n)$ diagonal blocks of order n_3 contain elements differing from zero, and these blocks are the following:

$$\langle\lambda_{k_1k_2}^{(n_1,n_2)}\mathbf{E}_{n_3}+\mathbf{J}_{n_3}(p_5+\alpha_3\lambda_{k_1k_2}^{(n_1,n_2)}, p_6+\alpha_4\lambda_{k_1k_2}^{(n_2,n_2)})\rangle. \tag{35}$$

Introducing the notations

$$\begin{aligned} p_5^{(3)}(k_1, k_2) &= p_5+\alpha_3\lambda_{k_1k_2}^{(n_1,n_2)} \\ p_6^{(3)}(k_1, k_2) &= p_6+\alpha_4\lambda_{k_1,k_2}^{(n_1,n_2)} \\ p^{(3)}(k_1, k_2) &= \sqrt{p_5^{(3)}(k_1, k_2)p_6^{(3)}(k_1, k_2)}. \end{aligned} \tag{36}$$

By a reasoning analogous to the two-dimensional case

$$\mathbf{J}_{n_3}[p_5^{(3)}(k_1, k_2), p_6^{(3)}(k_1, k_2)] = p^{(3)}(k_1, k_2)\mathbf{D}[p_5^{(3)}(k_1, k_2), p_6^{(3)}(k_1, k_2)]\mathbf{K}_{n_3}\cdot$$

$$\cdot\mathbf{D}^{-1}[p_5^{(3)}(k_1, k_2), p_6^{(3)}(k_1, k_2)].$$

Thus (35) may be written in the form:

$$\langle\mathbf{D}(p_5^{(3)}(k_1, k_2), p_6^{(3)}(k_1, k_2))[\lambda_{k_1k_2}^{(n_1,n_2)}\mathbf{E}_{n_3}+p^{(3)}(k_1, k_2)\mathbf{K}_{n_3}]\cdot \tag{37}$$

$$\cdot\mathbf{D}^{-1}(p_5^{(3)}(k_1, k_2), p_6^{(3)}(k_1, k_2))\rangle.$$

Taking into consideration the spectral-representation of the matrix $\mathbf{K}_{n_3}$ we may write:

$$\mathbf{P}^*(\mathbf{V}_{n_1n_2}^{-1}\cdot\times\mathbf{E}_{n_3})\mathbf{\Pi}_{n_1n_2n_3}(\mathbf{V}_{n_1n_2}\cdot\times\mathbf{E}_{n_3})\mathbf{P} =$$

$$= \langle\mathbf{D}(p_5^{(3)}(k_1, k_2), p_6^{(3)}(k_1, k_2))\rangle(\mathbf{U}_{n_3}\cdot\times\mathbf{E}_{n_1n_2})\{\mathbf{E}_{n_3}\cdot\times\mathbf{\Lambda}_{n_1n_2}+\mathbf{\Lambda}_{n_3}\cdot\times\langle p^{(3)}(k_1, k_2)\rangle\}$$

$$\mathbf{U}_{n_3}^*\cdot\times\mathbf{E}_{n_1n_2})\langle\mathbf{D}^{-1}(p_5^{(3)}(k_1, k_2), p_6^{(3)}(k_1, k_2))\rangle.$$

Hence

$$\mathbf{P}(\mathbf{U}_{n_3}^{*}\cdot\times\mathbf{E}_{n_1n_2})\langle\mathbf{D}^{-1}(p_5^{(3)}(k_1,k_2),p_6^{(3)}(k_1,k_2))\rangle\mathbf{P}^{*}(\mathbf{V}_{n_1n_2}^{-1}\cdot\times\mathbf{E}_{n_3})\mathbf{\Pi}_{n_1n_2n_3}$$

$$(\mathbf{V}_{n_1n_2}\cdot\times\mathbf{E}_{n_3})\mathbf{P}\langle\mathbf{D}(p_5^{(3)}(k_1,k_2),p_6^{(3)}(k_1,k_2))\rangle(\mathbf{U}_{n_3}\cdot\times\mathbf{E}_{n_1n_2})\mathbf{P}^{*}.$$

Then analogously to the two-dimensional case

$$\mathbf{P}\langle\mathbf{U}_{n_3}^{*}\mathbf{D}^{-1}(p_5^{(3)}(k_1,k_2),p_6^{(3)}(k_1,k_2))\rangle\mathbf{P}(\mathbf{V}_{n_1n_2}^{-1}\cdot\times\mathbf{E}_{n_3})\mathbf{\Pi}_{n_1n_2n_3}\cdot$$

$$\cdot(\mathbf{V}_{n_1n_2}\cdot\times\mathbf{E}_{n_3})\mathbf{P}\langle\mathbf{D}(p_5^{(3)}(k_1,k_2),p_6^{(3)}(k_1,k_2))\mathbf{U}_{n_3}\rangle\mathbf{P}^{*}=$$

$$=\langle\mathbf{\Lambda}_{n_1n_2}\cdot\times\mathbf{E}_{n_3}+\langle p^{(3)}(k_1,k_2)\rangle\cdot\times\mathbf{\Lambda}_{n_3}\rangle.$$

Hence the right-side latent vector belonging to the latent root $p_0+p^{(1)}\lambda_{k_1}^{(n_1)}+$ $+p^{(2)}(k_1)\lambda_{k_2}^{(n_2)}+p^{(3)}(k_1k_2)\lambda_{k_3}^{(n_3)}$ of the matrix $\mathbf{\Pi}_3$ is the direct-product of the right-side latent vector $\underline{V}_{k_1k_2}$ of the matrix corresponding to the two-dimensional random walk and of the column-vector $\underline{W}_{k_3}^{(k_1k_2)}$ of the block $\mathbf{D}(p_5^{(3)}(k_1,k_2)p_6^{(3)}(k_1,k_2))\mathbf{U}_{n_3}$ whereas the left-side latent vector is the direct-product of the left-side characteristic vector $\underline{V}_{k_1k_2}^{(-1)}$ of the matrix corresponding to the two-dimensional random walk and of the row-vector $\underline{W}_{k_3}^{(k_1,k_2)(-1)}$ of the block $\mathbf{U}_{n_3}\mathbf{D}^{-1}(p_5^{(3)}(k_1,k_2),p_6^{(3)}(k_1k_2))$.

That is:

$$\underline{V}_{k_1k_2k_3}=\underline{\mathbf{V}}_{k_1k_2}\cdot\times\underline{\mathbf{W}}_{k_3}^{(k_1k_2)}$$

and

$$\underline{V}_{k_1k_2k_3}^{(-1)}=\underline{\mathbf{V}}_{k_1k_2}^{(-1)}\cdot\times\underline{\mathbf{W}}_{k_3}^{(k_1k_2)(-1)}.$$

Let us denote the general element of these vector with the index-triples (x_1,x_2,x_3) and (ξ_1,ξ_2,ξ_3) resp. $(x_i,\xi_i=1,2,\dots,n_i;\ i=1,2,3)$.

In this case, as

$$\underline{V}_{k_1k_2}=\frac{2}{\sqrt{n_1n_2}}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{x_1-1}{2}}\left(\frac{p_3^{(2)}(k_1)}{p_4^{(2)}(k_1)}\right)^{\frac{x_2-1}{2}}\sin\frac{x_1k_1\pi}{n_1}\sin\frac{x_2k_2\pi}{n_2}\tag{38}$$

and

$$W_{k_3}^{(k_1k_2)}=\sqrt{\frac{2}{n_3}}\left(\frac{p_5^{(3)}(k_1k_2)}{p_6^{(3)}(k_1k_2)}\right)^{\frac{x_3-1}{2}}\sin\frac{x_3k_3\pi}{n_3}\tag{38}$$

on the basis of the canonical-representation of the matrix-functions

$$\mathbf{\Pi}_3^N=\sum_{k_1=1}^{n_1-1}\sum_{k_2=1}^{n_2-1}\sum_{k_3=1}^{n_3-1}\underline{V}_{k_1k_2k_3}(p_0+p^{(1)}\lambda_{k_1}^{(n_1)}+p^{(2)}(k_1)\lambda_{k_2}^{(n_2)}+ \tag{39}$$

$$+p^{(3)}(k_1k_2)\lambda_{k_3}^{(n_3)})\underline{\mathbf{V}}_{k_1k_2k_3}^{(-1)}.$$

Substituting the formulas (18) and (19) into (39), we get the following theorem:

THEOREM 6. *The probability that the particle moving according to the conditions* (IV) *on the rectangle consisting of $n_1\times n_2\times n_3$ interior lattice-points, starting from* *the point* (ξ_1, ξ_2, ξ_3) *will reach in N-steps the point* (x_1, x_2, x_3), *is:*

$$(40) \qquad P^N_{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \to (x_1, x_2, x_3)} =$$

$$= \frac{2^{N+3}}{n_1 n_2 n_3} \sum_{k_1=1}^{n_1-1} \sum_{k_2=1}^{n_2-1} \sum_{k_3=1}^{n_3-1} \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{x_1-\xi_1}{2}} \left(\frac{p_3^{(2)}(k_1)}{p_4^{(2)}(k_1)}\right)^{\frac{x_2-\xi_2}{2}} \left(\frac{p_5^{(3)}(k_1 k_2)}{p_6^{(3)}(k_1 k_2)}\right)^{\frac{x_3-\xi_3}{2}} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{p_0}{2} + p^{(1)} \cos\frac{k_1 \pi}{n_1} + p^{(2)}(k_1) \cos\frac{k_2 \pi}{n_2} + p^{(3)}(k_1 k_2) \cos\frac{k_3 \pi}{n_3}\right]^N \cdot$$

$$\cdot \sin\frac{\xi_1 k_1 \pi}{n_1} \sin\frac{x_1 k_1 \pi}{n_1} \sin\frac{\xi_2 k_2 \pi}{n_2} \sin\frac{x_2 k_2 \pi}{n_2} \sin\frac{\xi_3 k_3 \pi}{n_3} \sin\frac{x_3 k_3 \pi}{n_3}$$

where $p^{(1)} = \sqrt{p_1 p_2}$, *and the meaning of* $p^{(2)}(k_1)$ *and* $p^{(3)}(k_1, k_2)$ *can be seen from the relations* (13) *and* (36) *resp.*

Starting from the relation (40), the absorption problems examined in the discussion of the two-dimensional case may be answered in a fully analoguous way.

5. Unbounded random walk in the space

Starting from formula (40), the N-step transition probabilities referring to the unbounded random walk in the space may be obtained in a way analogous the treatment to the case of the random walk in the plane.

Introducing the notation:

$$\frac{k_1 \pi}{2n_1} = t_1, \quad \frac{k_2 \pi}{2n_2} = t_2, \quad \frac{k_3 \pi}{2n_3} = t_3, \quad \frac{\pi}{n_1} = \Delta t_1, \quad \frac{\pi}{n_2} = \Delta t_2, \quad \frac{\pi}{n_3} = \Delta t,$$

the following theoren is stated:

THEROEM 7. *The probability that the particle starting form the point* (ξ_1, ξ_2, ξ_3) *and moving corresponding to the conditions* (IV) *unboundedly will reach in N-steps the point* (x_1, x_2, x_3), *is:*

$$(41) \qquad P^{(N)}_{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \to (x_1, x_2, x_3)} =$$

$$= \frac{2^N}{(2\pi)^3} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{x_1-\xi_1}{2}} \left(\frac{p_3^{(2)}(k_1)}{p_4^{(2)}(k_1)}\right)^{\frac{x_2-\xi_2}{2}} \left(\frac{p_5^{(3)}(k_1 k_2)}{p_6^{(3)}(k_1 k_2)}\right)^{\frac{x_3-\xi_3}{2}} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{p_0}{2} + p^{(1)} \cos t_1 + p^{(2)}(k_1) \cos t_2 + p^{(3)}(k_1 k_2) \cos t_3\right)^N \cdot$$

$$\cdot \cos t_1 (x_1 - \xi_1) \cos t_2 (x_2 - \xi_2) \cos t_3 (x_3 - \xi_3) \, dt_1 \, dt_2 \, dt_3 .$$

(Received 9 August 1963)

References

[1] W. H. Mc. Crea—F. J. W. Whipple, Random Paths in Two- and Three Dimensions, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, **60** (1940), pp. 281—298.

[2] J. Egerváry, Matrixfüggvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról, *MTA III. Oszt. Közleményei*, 3 (1953), pp. 417—458.

[3] J. Egerváry, On hypermatrices whose blocks are commutable in pairs and their application in lattice-dynamics, *Acta Sci Math. Szeged*, **15** (1954), pp. 211—222.

[4] E. Egerváry, Über eine Methode zur numerischen Lösung der Poissonchen Differenzengleichung für beliebige Gebiete, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **11** (1960), pp. 341—361.

[5] E. Henze, Zur Theorie der diskreten unsymmetrischen Irrfahre, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **41** (1961), pp. 1—9.

[6] K. Jordan, *Fejezetek a klasszikus valószínűségszámításból* (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1956).

[7] M. Loeve, *Probability Theorie*, Van Nostrand and Comp. Inc. (New York, 1955).

[8] J. Reimann, Bolyongási problémák tárgyalása matrixelméleti módszerrel, *MTA III. Oszt. Közleményei*, **10** (1960), pp. 283—318.

[9] J. Reimann, Matrixtheoretical treatment of random walk problems, *II. Magyar Matematikai Kongresszus*, Budapest, 1960. Abstracts of lectures II. 22—25.

[10] J. Reimann, Zweidimensionale Irrfahrt auf einem Gitterpunktsrechteck mit reflektierenden Wänden, *Monatsberichte der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, **5 (8/9)** (1963).

[11] P. Rózsa, A matrixelmélet néhány új tételéről és azok alkalmazásairól a differencia- és differenciálegyenletek megoldására. Budapest, 1956.

EIN EINDEUTIGKEITSSATZ IN DER THEORIE DER FUNKTIONALGLEICHUNGEN UND EINIGE IHRER ANWENDUNGEN

Von

J. ACZÉL (Debrecen)

(*Vorgelegt von* A. RÉNYI)

1. Wie bekannt (vgl. [1]), wurden in der Theorie der Funktionalgleichungen bis jetzt sehr wenig Existenz- und Unitätssätze (im allgemeinen strukturelle, qualitative Sätze) gefunden. Auch deswegen mögen die folgenden Sätze von Interesse sein, die wir aber hauptsächlich wegen ihren mannigfaltigen Anwendungen vorführen:

SATZ 1. *Sind in* $\langle A, B\rangle$ *f und F stetige Funktionen, liegt* $F(x, y)$ *für* $x \neq y$ *im Innern des offenen Intervalles von x und y, ist* $H(u, v, x, y)$ *in u oder in v streng monoton und gilt in* $\langle A, B\rangle$

$$f(F(x, y))=H(f(x), f(y), x, y), \tag{1}$$

so folgt aus dem Zusammenfallen von zwei Lösungen f_1 *und* f_2 *von* (1) *in zwei Punkten ihr identisches Übereinstimmen im ganzen (geschlossenen, halboffenen oder offenen, endlichen oder unendlichen) Intervall* $\langle A, B\rangle$.

BEWEIS. Es sei unter den Voraussetzungen des Satzes 1

$$f_1(a)=f_2(a), \quad f_1(b)=f_2(b). \tag{2}$$

Wir führen den Beweis in drei Schritten:

1. *In* $[a, b]$ *ist* $f_1(x)\equiv f_2(x)$. Gäbe es nämlich ein $x_1 \in (a, b)$ derart, daß $f_1(x_1)\neq$ $\neq f_2(x_1)$, so würde wegen der Stetigkeit von f_1 und f_2 die Menge

$$\mathbf{M}_1=\{x \in [a, x_1), f_1(x)=f_2(x)\}$$

eine obere Grenze C und die Menge

$$\mathbf{M}_2=\{x \in (x_1, b], f_1(x)=f_2(x)\}$$

eine untere Grenze D haben die zu $\mathbf{M}_1$ bzw. $\mathbf{M}_2$ gehören, daher

$$f_1(C)=f_2(C), \quad f_1(D)=f_2(D) \tag{3}$$

und

$$f_1(x)\neq f_2(x) \quad \text{falls} \quad x \in (C, D). \tag{4}$$

Aus (1) und (3) folgt aber

$$f_1(F(C, D))=H(f_1(C), f_1(D), C, D)=H(f_2(C), f_2(D), C, D)=f_2(F(C, D))$$

im Gegensatz zu (4), da laut Voraussetzung $F(C, D) \in (C, D)$ ist. Damit ist die Behauptung 1 bewiesen.

2. *In* $[b, B\rangle$ *ist* $f_1(x) \equiv f_2(x)$. Wäre nämlich $E < B$ die größte Zahl derart, daß

$$f_1(x) = f_2(x) \quad \text{für alle} \quad x \in [a, E] \tag{5}$$

(eine solche endliche oder unendliche Größe E gibt es wegen der Stetigkeit von f_1 und f_2), so würde es eine Folge $e_n \searrow E$ geben, so daß

$$f_1(e_n) \neq f_2(e_n) \quad \text{für alle} \quad n. \tag{6}$$

Jetzt wählen wir — unter Voraussetzung, daß $H(u, v, x, y)$ etwa in u streng monoton ist — ein e_m so nahe zu E, daß

$$F(e_m, a) \in [a, E] \tag{7}$$

ist (es gibt ein solches e_m, denn wäre $F(e_n, a) > E$ für alle n so würde im Grenzwert $F(E, a) \geqq E$ im Gegensatz zur Voraussetzung $f(E, a) \in (a, E)$ sein). Laut (1), (5) und (7) gilt

$$H(f_1(e_m), f_1(a), e_m, a) = f_1(F(e_m, a)) = f_2(F(e_m, a)) = H(f_2(e_m), f_1(a), e_m, a)$$

woraus laut Voraussetzung

$$f_1(e_m) = f_2(e_m)$$

folgt im Gegensatz zu (6). Damit ist auch die Behauptung 2 bewiesen.

3. *In* $\langle A, a]$ *ist* $f_1(x) \equiv f_2(x)$. Das beweist man ebenso, und das beendet den Beweis von Satz 1.

BEMERKUNGEN. a) Zum Beweis von 1 haben wir die Stetigkeit von F und die strenge Monotonie von $H(u, v, x, y)$ in u oder v nicht gebraucht.

b) Die Forderung der strengen Monotonie von $H(u, v, x, y)$ etwa in u kann durch die Voraussetzung

$$H(u_1, v, x, y) = H(u_2, v, x, y) \Rightarrow u_1 = u_2$$

ersetzt werden.

c) Ähnliche aber in gewisser Hinsicht schwächere Sätze als Satz 1 und als der folgende Satz haben wir in [2] schon verwendet.

Etwas verwickelter, aber auch allgemeiner und für die Anwendungen ebenso wichtig wie Satz 1 ist der folgende

SATZ 2. *Ist f in $\langle A, B\rangle$, F im Bereich* **B** *stetig und gelten für* $\{x, y\} \in \mathbf{B}$

$$F(x, y) \in (x, y) \qquad (x \neq y, (x, y) = (y, x)) \tag{8}$$

$$H(u_1, v, x, y) = H(u_2, v, x, y) \Rightarrow u_1 = u_2 \tag{9a}$$

oder

$$H(u, v_1, x, y) = H(u, v_2, x, y) \Rightarrow v_1 = v_2 \tag{9b}$$

$$f(F(x, y)) = H(f(x), f(y), x, y), \tag{1}$$

so folgt aus

$$f_1(a) = f_2(a), \quad f_1(b) = f_2(b) \tag{2}$$

für zwei Lösungen von (1) *ihr identisches Übereinstimmen*

$$f_1(x) \equiv f_2(x) \tag{10}$$

für alle $x \in \langle A, B \rangle$, *falls der Bereich* **B** *das kartesische Quadrat* $[a, B\rangle \times [a, B\rangle$ *(oder* $\langle A, b] \times \langle A, B]$*) enthält und es für jedes* $x \in \langle A, a)$ *ein* $y \in [a, B\rangle$ *(bzw. für jedes* $x \in (b, B\rangle$ *ein* $y \in \langle A, b]$*) gibt derart, daß* $\{x', y\} \in \mathbf{B}$ *für alle* $x' \in [x, a)$ *(bzw.* $x' \in (b, x]$*).*

Beweis. Falls z. B. $[a, B\rangle \times [a, B\rangle \subseteqq \mathbf{B}$, dann bleiben die Schritte 1, 2 des Beweises von Satz 1 ungeändert gültig und somit ist (10) für alle $x \in [a, B\rangle$ schon bewiesen.

Wir beweisen, daß (10) auch für alle $x \in \langle A, a)$ gilt. Wäre nämlich $c > A$ die kleinste Zahl derart, daß

$$f_1(x) = f_2(x) \quad \text{für alle} \quad x \in [c, B\rangle, \tag{11}$$

so würde es ein $c_n \nearrow c$ geben, so daß

$$f_1(c_n) \neq f_2(c_n) \quad \text{für alle} \quad n. \tag{12}$$

Nun gibt es laut Voraussetzung ein $d \in (a, B\rangle$ derart, daß

$$\{x, d\} \in \mathbf{B} \quad \text{für alle} \quad x \in [c_1, a). \tag{13}$$

Wir wählen — falls z. B. (9a) besteht — ein c_m so nahe zu c, daß

$$F(c_m, d) \in [c, d) \tag{14}$$

ist (was wegen der Stetigkeit von F möglich ist). Laut (1), (11), (13) und (14) gilt

$$H\big(f_1(c_m), f_1(d), c_m, d\big) = f_1\big(F(c_m, d)\big) = f_2\big(F(c_m, d)\big) = H\big(f_2(c_m), f_1(d), c_m, d\big)$$

also wegen (9a)

$$f_1(c_m) = f_2(c_m)$$

im Gegensatz zu (12). Damit ist der Satz 2 vollständig bewiesen (der Beweis ist auch bei $\langle A, b] \times \langle A, b] \subseteqq \mathbf{B}$ und auch bei der Voraussetzung von (9b) ganz analog).

Der Satz 2 enthält offenbar den Satz 1 als Spezialfall.

Wir werden im folgenden solche Bereiche mit **B** *bezeichnen, die die am Ende von Satz* 2 *vorgeführte Eigenschaft haben.*

Die Sätze 1, 2 zeigen, daß unter den in ihnen angegebenen Bedingungen *durch* (1) *und durch* $f(a) = c, f(b) = d$ *die stetige Funktion* f *in* $\langle A, B\rangle$ *vollständig bestimmt ist.*

2. Nun gehen wir zu einigen Anwendungen über:

A) *Jensensche Funktionalgleichung*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}. \tag{15}$$

Hier ist

$$F(x, y) = \frac{x+y}{2}, \quad H(u, v, x, y) = \frac{u+v}{2}$$

und die Voraussetzungen der Sätze 1, 2 sind erfüllt.

$$f(x) = \alpha x + \beta \tag{16}$$

ist eine Lösung von (15), die beliebigen zwei Punkten angepasst werden kann (d. h. wie auch $a \neq b$, c und d gegeben sind, gibt es eine lineare Funktion (16) so, daß $f(a)=c$, $f(b)=d$, was durch geeignete Wahl von α und β erreicht werden kann). So haben wir das

KOROLLAR 1. *Die allgemeinste stetige Lösung der auf kartesischen Quadraten von geschlossenen, halboffenen, endlichen oder unendlichen Intervallen oder allgemeiner auf Bereichen* **B** *gültigen Funktionalgleichung* (15) *ist auf den bezüglichen Intervallen immer von der Gestalt* (16), *d. h. linear.*

(Für Spezialfälle s. etwa [5] § 3. 8 und [1] § 2. 1. 4).

B) *Kraftfelder in denen Schwerpunkte definiert werden können:*

In [3] wurde in einem Kraftdichtefeld mit den Komponenten f^i über den Schwerpunkt zweier Punkte mit Einheitsmassen vorausgesetzt, daß er ins Innere der Verbindungsstrecke der beiden Punkte fällt und die Kraft, die zu der auf ihm gelegte Masse 2 durch das Kraftdichtefeld geordnet wird, gleich der Summe der zu den zwei Punkten mit Einheitsmassen zugeordneten Kräften ist. Es wurde ausgenützt, daß die zu den Punkten einer Geraden geordneten Kraftdichtekomponenten entweder konstant, oder streng monoton sind.

Dies folgt (vgl. auch [1] § 2. 3. 3) sofort aus Satz 1, falls $f^i(x)$ von x und die Lage

$$s=F(x, y)$$

des Schwerpunktes der Punkten x, y von x und y stetig abhängen. (Auf der Gerade wurde eine lineare — oder nur monotone — Koordinate eingeführt.) Dann bedeuten nämlich unsere Voraussetzungen, daß

$$f^i(F(x, y)) = \frac{f^i(x)+f^i(y)}{2} \tag{17}$$

mit F stetig, $F(x, y) \in (x, y)$ besteht. (17) ist offenbar eine Verallgemeinerung von (15). Auch bei (17) sind die Bedingungen des Satzes 1 erfüllt. Wäre f^i nicht streng monoton, so würde es zwei Stellen a, b geben derart, daß

$$f^i(a) = f^i(b) = c$$

ist. Die konstante Funktion

$$f_0^i(x) \equiv c$$

erfüllt aber (17), so daß laut Satz 1 $f^i(x) \equiv f_0^i(x)$ d. h. $f^i(x) \equiv c$ ist, was behauptet war. Somit haben wir das

KOROLLAR 2. *Ist* (17) *mit stetigem* $F(x, y) \in (x, y,\ x \neq y)$ *für alle* $x, y \in \langle A, B \rangle$ *von einer stetigen Funktion* f^i *befriedigt, so ist* f_i *in* $\langle A, B \rangle$ *entweder konstant, oder streng monoton.*

Dasselbe gilt auch, wenn an der rechten Seite von (17) $H[f^i(x), f^i(y)]$ *steht mit* $H(u, v)$ *streng monoton in* u *oder* v *und* $H(u, u) \equiv u$, *und auch wenn* (17) *bzw. diese Verallgemeinerung nur in einem Bereich* **B** *gelten.*

C) *Gleichheit von quasilinearen Mittelwerten und Entropien:*

In (17) bedeutet der obere Index i, daß dieselbe Gleichung für alle Komponenten f^i gilt. Also besteht mit $f^i = f$, $f^j = g$ (für alle i, j)

$$F(x, y) = f^{-1}\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right) = g^{-1}\left(\frac{g(x)+g(y)}{2}\right).$$

Allgemeiner wurde untersucht (vgl. etwa [5] § 3. 2) wann zwei sogenannte quasilineare Mittelwerte der Gestalt

$$F(x, y) = g^{-1}\left(\frac{pg(x)+qg(y)}{p+q}\right) \tag{18}$$

($p > 0, q > 0$ konstant, g stetig und streng monoton) gleich sind, d. h. wann

$$g^{-1}\left(\frac{pg(x)+qg(y)}{p+q}\right) = f^{-1}\left(\frac{pf(x)+qf(y)}{p+q}\right) \tag{19}$$

ist. Da sich (19) mit (18) in die Gestalt

$$f(F(x, y)) = \frac{pf(x)+qf(y)}{p+q} \tag{20}$$

schreiben läßt, was eine Gleichung der Gestalt (1) ist, da

$$f(x) = \alpha g(x) + \beta \tag{21}$$

(20) erfüllt und mit geeignet gewählten α, β zwei beliebig vorgeschriebenen Punkten angepasst werden kann, und da die Bedingungen der Sätze 1, 2 erfüllt sind, ist (21) die allgemeine stetige (und mit $\alpha \neq 0$ streng monotone) Lösung von (20) mit (18), d. h. von (19).

In der Informationstheorie kommen Mittelwerte von anderer Gestalt als (18), nämlich

$$F(x, y) = g^{-1}\left(\frac{xg(x)+yg(y)}{x+y}\right) \tag{22}$$

für

$$x > 0, \quad y > 0 \quad x + y \leqq 1 \tag{23}$$

vor. Ihr Gleichheitsproblem

$$g^{-1}\left(\frac{xg(x)+yg(y)}{x+y}\right) = f^{-1}\left(\frac{xf(x)+yf(y)}{x+y}\right) \tag{24}$$

ist für die Charakterisierung der wichtigsten Informationsmasse grundlegend (vgl. etwa [4]). Nun geht (24) mit (22) in

$$f(F(x, y)) = \frac{xf(x)+yf(y)}{x+y} \tag{25}$$

d. h. in eine Gleichung der Gestalt (1) über. Auch die Gleichung (25) wird durch (21) erfüllt und die Bedingungen des Satzes 2 sind erfüllt (hier ist **B** der durch (23) beschriebene Bereich). Deshalb ist (21) auch die allgemeine stetige und mit $\alpha \neq 0$ streng monotone Lösung der für (23) vorausgesetzten Gleichung (24).

Wie erwähnt, kann das informationstheoretische Problem auf (24) zurückgeführt werden. In der Informationstheorie handelt es sich aber eigentlich nicht um Mittelwerte (22), sondern um Entropien der Gestalt

$$g^{-1}\left(\frac{pg(-\log_2 p)+qg(-\log_2 q)}{p+q}\right) \qquad (p>0, q>0, p+q\leqq 1) \tag{26}$$

(vgl. etwa [2]). Mit $p=2^{-x}$, $q=2^{-y}$ geht das in

$$F(x,y) = g^{-1}\left(\frac{2^{-x}g(x)+2^{-y}g(y)}{2^{-x}+2^{-y}}\right) \tag{27}$$

$$2^{-x}+2^{-y}\leqq 1 \tag{28}$$

über. Das Gleichheitsproblem ist wieder durch

$$g^{-1}\left(\frac{2^{-x}g(x)+2^{-y}g(y)}{2^{-x}+2^{-y}}\right) = f^{-1}\left(\frac{2^{-x}f(x)+2^{-y}f(y)}{2^{-x}+2^{-y}}\right) \tag{29}$$

d. h. mit (27) durch

$$f(F(x,y)) = \frac{2^{-x}f(x)+2^{-y}f(y)}{2^{-x}+2^{-y}} \tag{30}$$

beschrieben und (30) ist wieder eine Gleichung der Gestalt (1). Auch (30) wird durch (21) erfüllt und die Bedingungen des Satzes 2 sind auch für den durch (28) beschriebenen Bereich erfüllt, also ist (21) auch die allgemeine stetige und streng monotone ($\alpha\neq 0$) Lösung der für (28) vorausgesetzten Funktionalgleichung (29). — Wir haben also das

KOROLLAR 3. (21) *mit* $\alpha\neq 0$ *ist in* $\langle A, B\rangle$ *die allgemeinste stetige und streng monotone Lösung der in* $\langle A, B\rangle\times\langle A, B\rangle$ *oder allgemeiner in einem Bereich* **B** *vorausgesetzten Funktionalgleichung* (19), *sowie in* (0, 1] *auch der für* (23) *vorausgesetzten Funktionalgleichung* (24) *und in* $[0, \infty)$ *auch der für* (28) *gültigen Gleichung* (29).

Kurz gesagt: Zwei stetige und streng monotone Funktionen erzeugen dieselben Mittelwerte (18), (22), *oder dieselben Entropien* (26), (27) *dann und nur dann, wenn sie voneinander linear abhängen.*

Wie wir schon in **1** bemerkten (Bemerkung c)), haben wir auch in [2] zu den Sätzen 1, 2 ähnliche Lemmas und Sätze bewiesen. Diese konnten aber nur zum Beweis des identischen Verschwindens der Lösungen von Gleichungen wie etwa (15), (17), (20), (25), (30) verwendet werden. Da diese Gleichungen linear sind, kann die Frage der Unität ihrer Lösungen leicht auf die ihres Verschwindens zurückgeführt werden. — Bei dem folgenden Problem kann das nicht gemacht und deshalb die Methode von [2] nicht verwendet werden. Dies zeigt, daß im Falle nichtlinearer Gleichungen die hier vorgeführte Methode mehr leistet, und auch sonst (auch in den linearen Fällen) führt sie einfacher zum Ziel.

D) *Die beiden Autodistributivitätsgleichungen*

$$\begin{cases} F(F(x,y),z) = F(F(x,z),F(y,z)) \\ F(x,F(y,z)) = F(F(x,y),F(x,z)) \end{cases} \tag{31}$$

wurden in [6] bei in beiden Veränderlichen streng monotonen (wachsenden) und stetigen F folgenderweise auf die Bisymmetriegleichung

$$F\big(F(s,t),\ F(u,v)\big)=F\big(F(s,u),\ F(t,v)\big) \tag{32}$$

zurückgeführt (vgl. auch [1] § 6. 5. 2):

Aus (31) folgt sofort (z. B. mit $y=z$ in der ersten Gleichung) die Reflexivität

$$F(z,z)=z. \tag{33}$$

Wir definieren $f(v)$ durch

$$F\big(F(s,t),\ F(u,v)\big)=F\big(F(s,u),\ F[t,f(v)]\big). \tag{34}$$

Diese Definition ist — wenigstens falls v zwischen t und u fällt — berechtigt, eindeutig, f ist stetig und

$$f(t)=t, \quad f(u)=u \tag{35}$$

wegen (33). Man sieht aus (31) und (34) auch leicht, daß

$$f\big(F(x,y)\big)=F\big(f(x),f(y)\big) \tag{36}$$

besteht (in $[t,u]$). Da aus (33) und aus dem streng monotonen Wachsen von F

$$F(x,y)\in(x,y)$$

folgt, kann der Satz 1 angewandt werden. (35) besagt, daß $f(x)$ mit

$$f_0(x)=x$$

in zwei Punkten zusammenfällt, so daß laut Satz 1

$$f(x)\equiv x$$

ist und somit geht (34) in (32) über, w. z. b. w.

Allgemeiner folgt aus den Sätzen 1, 2 das

KOROLLAR 4. *Gilt die Funktionalgleichung* (36) *für* $x, y\in\langle A,B\rangle$ *oder allgemeiner in einem Bereich* **B**, *sind* f *und* F *stetig,* F *streng monoton wachsend in beiden Veränderlichen, gilt* (33) *für alle* $z\in\langle A,B\rangle$ *und besteht* (35) *für ein Paar* $\{t,u\}\in\mathbf{B}$, *so ist* $f(x)\equiv x$ *in* $\langle A,B\rangle$.

(36) enthält offenbar (15) als Spezialfall.

Weitere Anwendungen unserer Sätze können leicht gefunden werden.

MATHEMATISCHES INSTITUT,
KOSSUTH LAJOS UNIVERSITÄT,
DEBRECEN

(Eingegangen am 27. August 1963.)

Literaturhinweise

[1] J. Aczél, *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen* (Basel–Stuttgart, 1961).

[2] J. Aczél, Zur gemeinsamen Charakterisierung der Entropien α-ter Ordnung und der Shannonschen Entropien bei nicht unbedingt vollständigen Verteilungen, *Z. Wahrscheinlichkeitsrechnung verw. Gebiete*, **3** (1964), S. 177–183.

[3] J. Aczél–I. Fenyő, On fields of forces in which centres of gravity can be defined, *Hungarica Acta Math.*, **1** (1948), S. 53–60.

[4] Z. Daróczy, Über die gemeinsame Charakterisierung der zu den nicht vollständigen Verteilungen gehörigen Entropien von Shannon und von Rényi, *Z. Wahrscheinlichkeitsrechnung verw. Gebiete*, **1** (1963), S. 381–388.

[5] G. H. Hardy–T. E. Littlewood–G. Pólya, *Inequalities* (Cambridge, 1934, 1952).

[6] M. Hosszú, Nonsymmetric means, *Publ. Math. Debrecen*, **6** (1959), S. 1–9.

A WAITING TIME PROCESS IN THE QUEUE $GI/M/1$

By

N. U. PRABHU (Nedlands, Western Australia)

(*Presented by* A. RÉNYI)

1. Introduction

The waiting time in a queueing system is usually defined as the time a customer would have to wait for the commencement of his service. From the point of view of a potential customer, this definition serves as an adequate description of the system, and leads to useful results in several particular cases. In this paper we propose to define the waiting time as the time the customer at the counter has already spent in the system. We shall show that in the acse $GI/M/1$ this definition leads to explicit results concerning the busy and idle periods, queue length and the conventionally defined waiting time.

The system studied is the one in which (a) the inter-arrival times have the distribution $dB(t)$, (b) the service time distribution is the negative exponential $\lambda e^{-\lambda t}dt$ $(0<t<\infty)$, and (c) there is only one counter, and the queue-discipline is "first come, first served". Let $0<\mu=\int_0^\infty t dB(t)<\infty$; then $0<\varrho_2=(\lambda\mu)^{-1}<\infty$, where ϱ_2 is the relative traffic intensity of the system. Among the previous papers on this subject might be mentioned those by SMITH [7], CONOLLY ([2], [3]), and TAKÁCS [9].

If in the queueing system described above, we interchange the inter-arrival and service time distributions we obtain the system $M/G/1$, i. e. the system in which the customers arrive in a Poisson process with mean λt, and the service time distribution is $dB(t)$. This latter system may be called the dual of the first system; between these two systems there exist interesting duality relationships, as we shall discover in this paper. For ready reference we note here some results concerning $M/G/1$. Let $X(t)$ be the accumulated 'service potential' (or, the 'work load' submitted to the server) in a time interval $(0, t)$; $X(t)$ is a random variable with the distribution function (d. f.)

$$K(x,t)=\Pr\{X(t)\leqq x\}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}B_n(x)\qquad(0\leqq x<\infty),\tag{1}$$

where $B_n(t)$ is the n-fold convolution of $B(t)$ with itself $(n\geqq 1)$, and $B_0(t)=0$ if $t<0$, and $=1$ if $t\geqq 0$. For the first passage time (busy period) $T(x)=\inf\{t|x+X(t)-t\leqq 0\}$ $(x>0)$ we have

$$G(x,t)=\Pr\{T(x)\leqq t\}=\int_{\tau=x}^{t}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\lambda\tau}\frac{(\lambda\tau)^{n-1}}{n!}\lambda x\, dB_n(\tau-x),\tag{2}$$

and

$$E\{e^{-\theta T(x)}\}=\int_0^\infty e^{-\theta t}\,d_tG(x,t)=e^{-x\eta(\theta)}\tag{3}$$

where $\eta(\theta)$ satisfies the functional equation $\eta(\theta) = \theta+\lambda-\lambda\psi(\eta)$, $\psi(\theta)$ being the Laplace transform (L. T.) of $dB(t)$ (PRABHU [4], [5]). For the (conventionally defined) waiting time $W(t)$ we have the relation

$$W(t) = \max\{\sup_{0\leqq\tau\leqq t}[X(\tau)-\tau],\ W(0)+X(t)-t\}, \tag{4}$$

a result essentially due to REICH [6]. The forward Kolmogorov equation of the Markov process $W(t)$ was derived by TAKÁCS [8], and was solved by PRABHU [5] explicity to obtain the transition d. f. as follows:

$$F(x;\, y, t) = \Pr\{W(t)\leqq y\,|\,W(0) = x\} \tag{5}$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{n!}\int_{v=0}^{t-x}\lambda(t-v)\,dB_n(v) & (y=0) \\[2ex] \displaystyle K(t+y-x, t)-\int_{\tau=0}^{t-x}F(x;\, 0, t-\tau)\,dK(\tau+y, \tau) & (y\geqq 0), \end{cases}$$

where

$$dK(t+y, t) = d_x K(x, t)|_{x=t+y} \tag{6}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\,d_t B_n(t+y).$$

We note the important relation

$$F(x;\, 0, t)\,dt = e^{-\lambda t}\,dt+\int_{n=x+}^{t} d_t G(u, t)\,du \qquad (t\geqq x) \tag{7}$$

and the L. T.

$$F^*(x;\, 0, \theta) = \int_0^\infty e^{-\theta t}F(x;\, 0, t)\,dt = e^{-x\eta(\theta)}/\eta(\theta), \tag{8}$$

the latter result being due to BENES [1]. Finally we remark that

$$\lim_{t\to\infty} F(x;\, 0, t) = \begin{cases} 1-\varrho_2^{-1} & \text{if } \varrho_2>1 \\ 0 & \text{if } \varrho_2\leqq 1, \end{cases} \tag{9}$$

(TAKÁCS [8]), and more generally,

$$\lim_{t\to\infty} F(x;\, y, t) = \begin{cases} 1-(1-\varrho_2^{-1})\displaystyle\int_0^\infty dK(t+y, t) & \text{if } \varrho_2>1 \\[2ex] 0 & \text{if } \varrho_2\leqq 1, \end{cases} \tag{10}$$

(PRABHU [5]). Here the relative traffic intensity of the system is $\lambda\mu=\varrho_2^{-1}$.

2. The waiting time process $Y(t)$

The proposed definition of the waiting time $Y(t)$ in the system $GI/M/1$ is as follows. If at time t the counter is unoccupied, we put $Y(t)=0$; otherwise, we define $Y(t)$ as the time which has elapsed since the arrival of the customer being served at time t. If, at any instant, $Y(t)>0$, it increases at a unit rate as long as the customer at the counter continues to be served, but when his service is completed, $Y(t)$ decreases by an amount u, where u is the interval of time between his arrival and that of the customer who had followed him. More specifically, if $t=t_n$ is the epoch of departure of the nth customer, we have the relations

$$Y(t_n+0) = \begin{cases} Y(t_n-0)-u_{n+1} & \text{if} \quad Y(t_n-0)>u_{n+1} \\ 0 & \text{if} \quad 0<Y(t_n-0)\leqq u_{n+1}, \end{cases} \tag{11}$$

where u_{n+1} = interval of time between the nth and $(n+1)$st arrivals. Thus, the process $Y(t)$ has discontinuities at the points t_n $(n=1, 2, \ldots)$; we define $Y(t_n) = Y(t_n-0)$, so that $Y(t)$ is continuous to the left at t_n. Moreover, if at any instant $Y(t)=0$, it continues to be zero till the next arrival. A typical realization of $Y(t)$ is shown in figure 1.

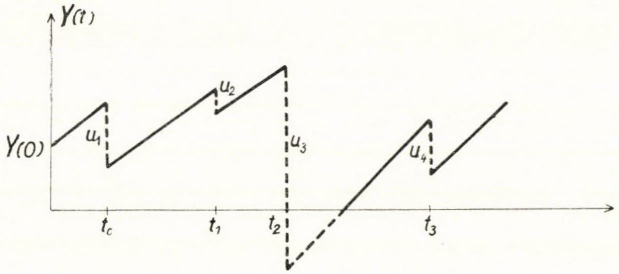


Fig. 1

It is clear that at points t such that $Y(t)>0$ the process is Markovian, but it looses the Markov property at points t such that $Y(t)=0$ (except in the special case $M/M/1$). We do not therefore seek to establish any integro-differential equation for its transition d. f.; our methods are based on renewal theory, and yield explicit results. We first consider the Markovian part of the process $Y(t)$. Let $Y(0) = y \geqq 0$, and put

$$S(y) = \inf\{t>0 | Y(t)=0\}, \tag{12}$$

$$H(y, t) = \Pr\{S(y)\leqq t\}. \tag{13}$$

We may write

$$\begin{aligned} S(y) &= \inf\{t>0 | y+t-X(t)<0\} \\ &= \inf\{t>0 | X(t)-t>y\}, \end{aligned} \tag{14}$$

where $X(t)$ is the total decrease in $Y(t)$ in the time interval $(0, t)$, and has the distribution (1). Hence, using (4), we obtain

$$\Pr\{S(y)>t\} = \Pr\{\sup_{0\leqq\tau\leqq t}[X(\tau)-\tau]\leqq y\}$$

$$= \Pr\{W(t)\leqq y\,|\,W(0)=0\} = F(0; y, t),$$

so that

$$H(y, t) = 1-F(0; y, t). \tag{15}$$

Clearly, $S(y)$ is the first passage time from y to 0 of the process $Y(t)$. The zero-avoiding transition probabilities of $Y(t)$ are therefore given by

$$\begin{aligned} &\Pr\{Y(t)\geqq x;\ S(y)>t\,|\,Y(0)=y\} \\ &= \Pr\{\inf_{0\leqq\tau\leqq t}[y+\tau-X(\tau)]\geqq 0;\ y+t-X(t)\geqq x\} \\ &= \Pr\{\sup_{0\leqq\tau\leqq t}[X(\tau)-\tau]\leqq y;\ x+X(t)-t\leqq y\} \\ &= F(x; y, t) \qquad (x>0,\ y\geqq 0). \end{aligned} \tag{16}$$

In order to study the transitions of $Y(t)$ in the general case we consider a renewal process in the next section.

3. The renewal process $\{Z_n'\}$

Let Z be the time interval between the commencement of two successive busy periods (the busy cycle). We have

(17)
$$\Pr\{Z\leqq z\} = \int_{\tau=0}^{z}\int_{x=0}^{\tau} -d_x \Pr\{Y(\tau)\leqq x,\ S(0)>\tau\,|\,Y(0)=0\}\,\lambda d\tau\,\{B(x+z-\tau)-B(x)\},$$

since, at the commencement of a busy period, $Y(0)=0$, and if at its termination $Y(\tau)=x>0$, there must be a departure at time τ and the next arrival must occur at time t where $x<t\leqq x+z-\tau$. Now from (7) we have

$$-d_xF(x; 0, t)\,dt = d_tG(x, t)\,dx. \tag{18}$$

Using (16) and (18) in (17) we obtain

$$\begin{aligned} \Pr\{Z\leqq z\} &= \int_{\tau=0}^{z}\int_{x=0}^{\tau} -\lambda d_xF(x; 0, \tau)\,d\tau\{B(x+z-\tau)-B(x)\} \\ &= \int_{x=0}^{z}\int_{\tau=x}^{z} \lambda d_\tau G(x, \tau)\{B(x+z-\tau)-B(x)\}\,dx. \end{aligned} \tag{19}$$

The L. T. of Z is given by

$$(20)\qquad \varphi(\theta) = E\{l^{-\theta Z}\} = \int_{z=0}^{\infty}\int_{x=0}^{z}\int_{\tau=x}^{z} \lambda\, dx\, e^{-\theta z}\, d_\tau G(x, \tau)\, d_z B(x+z-\tau)$$

$$= \int_{x=0}^{\infty}\int_{\tau=x}^{\infty}\int_{u=x}^{\infty} \lambda\, dx\, d_\tau\, G(x, \tau)\, e^{-\theta(u+\tau-x)}\, dB(u)$$

$$= \int_{u=0}^{\infty} \lambda\, dB(u) \int_{x=0}^{u} e^{-\theta(u-x)-x\eta(\theta)}\, dx \text{ from (3)}$$

$$= \frac{\psi(\theta)-\psi(\eta)}{1-\psi(\eta)}.$$

From (20) we find that

$$(21)\qquad \Pr\{Z<\infty\} = \lim_{\theta\to 0+} \varphi(\theta) = \begin{cases} \varrho_2^{-1} & \text{if } \varrho_2>1 \\ 1 & \text{if } \varrho_2\leqq 1; \end{cases}$$

if $\varrho_2 \leqq 1$ we have

$$(22)\qquad E(Z) = -\varphi'(0) = \begin{cases} (\varrho_2\eta_0)^{-1} & \text{if } \varrho_2<1 \\ \infty & \text{if } \varrho_2=1, \end{cases}$$

where η_0 is the largest positive root of the equation $x = \lambda-\lambda\psi(x)$.

We now consider the renewal process $\{Z'_n\}$, where $Z'_n = Z_1+Z_2+\ldots+Z_n$ $(n=1, 2, \ldots)$, each Z_n having the d. f. (19). Let $N(t)$ be the number of replacements in this process, so that $N(t)=\max\{n|Z'_n\leqq t\}$; also, let $U(t)=E\{N(t)\}$. From renewal theory we have

$$(23)\qquad U^*(\theta) = \int_0^{\infty} e^{-\theta t}\, dU(t) = \{1-\varphi(\theta)\}^{-1}\varphi(\theta)$$

$$= \frac{\psi(\theta)-\psi(\eta)}{1-\psi(\theta)}.$$

Inverting this L. T., we find that

$$(24)\qquad U(t) = \int_0^t dV(\tau)\{B(t-\tau)-G(t-\tau)\},$$

where

$$(25)\qquad V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(t), \quad G(t) = \int_0^t dB(x)G(x, t).$$

Further, using (22) we obtain

$$(26)\qquad \lim_{t\to\infty} U(t) = \lim_{\theta\to 0+} U^*(\theta) = \begin{cases} \infty & \text{if } \varrho_2\leqq 1 \\ (\varrho_2-1)^{-1} & \text{if } \varrho_2>1. \end{cases}$$

4. The transition d. f. of $Y(t)$

In section 2, the transitions of $Y(t)$ through non-zero values were investigated; we shall now consider the transitions not necessarily avoiding zero. We assume that the process starts with a busy period at $t=0$, and let

$$M(x, t) = \Pr\{Y(t) \geqq x\} \qquad (x \geqq 0). \tag{27}$$

The transition d. f. of $Y(t)$ is then $1-M(x, t)$. To obtain (27), we observe that if $Y(t) \geqq x > 0$, a busy period is in progress, which is either the initial one itself, or the $(n+1)$ st $(n=1, 2, \ldots)$ commencing at time τ. Hence, using (16) we find that

$$\begin{aligned} M(x, t) &= \Pr\{Y(t) \geqq x;\ S(0) > t \mid Y(0) = 0\} + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t d_\tau \Pr\{Z_n' \leqq \tau\} \Pr\{Y(t-\tau) \geqq x;\ S(0) > t-\tau \mid Y(0) = 0\} \\ &= F(x; 0, t) + \int_{0+}^{t-x} dU(\tau) F(x; 0, t-\tau). \end{aligned} \tag{28}$$

Since a d. f. is continuous to the right, we also obtain

$$\begin{aligned} \Pr\{Y(t) = 0 \mid Y(0) = 0\} &= \lim_{x \to 0+} [1 - M(x, t)] \\ &= 1 - F(0; 0, t) - \int_{0+}^{t} dU(\tau) F(0; 0, t-\tau). \end{aligned} \tag{29}$$

The limiting distribution of $Y(t)$ as $t \to \infty$ can be obtained from the above results. We shall show that for $x \geqq 0$,

$$\lim_{t \to \infty} M(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{if } \varrho_2 \geqq 1 \\ \varrho_2 e^{-\eta_0 x} & \text{if } \varrho_2 < 1. \end{cases} \tag{30}$$

If $\varrho_2 > 1$, we write

$$\int_0^{t-x} dU(\tau) F(x; 0, t-\tau) = \int_0^T + \int_T^{t-x} \qquad (0 < T < t), \tag{31}$$

and let first t, and then $T \to \infty$. Then in view of (9) and (26) we have

$$\begin{aligned} &\int_T^{t-x} \leqq \int_T^{t-x} dU(\tau) \to 0 \\ &\int_0^T \to (1 - \varrho_2^{-1}) \int_0^T dU(\tau) \to \varrho_2^{-1}, \end{aligned} \tag{32}$$

so that $1 - M(x, t) \to (1 - \varrho_2^{-1}) + \varrho_2^{-1} = 1$. If $\varrho_2 < 1$, we have from (8),

$$\int_0^{\infty} F(x; 0, t)\, dt = \lim_{\theta \to 0+} F^*(x; 0, \theta) = e^{-\eta_0 x} / \eta_0, \tag{33}$$

whence,

$$\int_0^t dU(\tau)F(x;0,t-\tau)\to\frac{1}{E(Z)}\int_0^\infty F(x;0,t)\,dt=(\varrho_2\eta_0)\cdot\frac{e^{-\eta_0 x}}{\eta_0}=\varrho_2 e^{-\eta_0 x}, \tag{34}$$

and $M(x,t)\to\varrho_2 e^{-\eta_0 x}$. The case $\varrho_2=1$ can be considered as the limiting case of (32) and (34), since $\eta_0\to 0$ as $\varrho_2\to 1$. We have therefore proved (30) completely; thus if $\varrho_2\geqq 1$, the waiting time $Y(t)$ increases indefinitely as $t\to\infty$, while if $\varrho_2<1$, $Y(t)$ has the limiting d. f. $1-\varrho_2 e^{-\eta_0 x}$ $(x\geqq 0)$.

5. The busy and idle periods

It is obvious that the first return time $S(y)$ defined by (12) is the busy period initiated by a waiting time $Y(0)=y\geqq 0$; from (5) and (15), its d. f. is seen to be

$$\Pr\{S(y)\leqq t\}=\begin{cases}1-K(t+y,t)+\displaystyle\int_0^t F(0;0,t-\tau)\,dK(\tau+y,\tau)\,d\tau & \text{if}\quad y>0,\\[2ex] 1-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{n!}\int_{v=0}^{t}\lambda(t-v)\,dB_n(v) & \text{if}\quad y=0.\end{cases} \tag{35}$$

Further, from (9) and (10) we find that

$$\Pr\{S(y)<\infty\}=\begin{cases}1 & (y\geqq 0,\ \varrho_2\leqq 1)\\ (1-\varrho_2^{-1})\displaystyle\int_0^\infty d_t K(t+y,t) & (y>0,\ \varrho_2>1)\\ \varrho_2^{-1} & (y=0,\ \varrho_2>1);\end{cases} \tag{36}$$

thus the busy period is of finite duration if and only if $\varrho_2\leqq 1$. The special case $y=0$ has been discussed by CONNOLLY [8], and TAKÁCS [9], but the explicit results (35) and (36) hold for $y\geqq 0$.

Next, let $I(t)$ be the idle period which commences at time t and assume that the process starts with a busy period at $t=0$. The probability that $I(t)$ commences at t and lasts at least until time u is, apart from the factor λdt, given by

$$\begin{aligned}\Pr\{I(t)>u\}&=\int_{x=0+}^{t}-d_x\Pr\{Y(t)\geqq x\}[1-B(x+\omega)]\\ &=\int_{0+}^{t}-d_x M(x,t)[1-B(x+u)],\end{aligned} \tag{37}$$

since if a departure occurs at t and the next arrival occurs only after time $Y(t)+u$, then the idle period will extend at least up to time u. Using (30) and proceeding as in (31)–(34) we find that

$$(38)\qquad \lim_{t\to\infty} \Pr\{I(t)>u\} = \begin{cases} 0 & \text{if } \varrho_2 \geqq 1 \\ \int\limits_0^\infty \varrho_2 \eta_0 e^{-\eta_0 x}[1-B(x+u)]\,dx & \text{if } \varrho_2 < 1. \end{cases}$$

Thus if $\varrho_2 \geqq 1$, idle periods are unlikely to occur (in fact we have already seen in section 4 that the server is always busy), while if $\varrho_2 < 1$, they will occur according to the limiting distribution indicated above.

6. The queue lenght and the waiting time

Let $Q(t)$ be the queue length (i. e. the number of customers in the system) at time t, and

$$(39)\qquad P_j(t) = \Pr\{Q(t)=j\}$$

where we assume once again that the process starts with a busy period at $t=0$. Clearly, $Q(t)$ is the number of customers who have arrived during the time $Y(t)$, so that

$$(40)\qquad \begin{aligned} \Pr\{Q(t)=j \mid Y(t)=x\} &= B_{j-1}(x)-B_j(x) = C_{j-1}(x) \text{ (say) } (j\geqq 1) \\ \Pr\{Q(t)=0\} &= \Pr\{Y(t)=0\}. \end{aligned}$$

Therefore

$$(41)\qquad \begin{aligned} P_j(t) &= \int\limits_{x=0}^{t} -d_x \Pr\{Y(t)\geqq x\}\, C_{j-1}(x) \\ &= \int\limits_0^{t} -d_x F(x;0,t)\,C_{j-1}(x) + \int\limits_0^t dU(\tau) \int\limits_0^{t-\tau} (-d_x) F(x;0,t-\tau)\, C_{j-1}(x) \\ &\qquad\qquad (j\geqq 1), \end{aligned}$$

and

$$(42)\qquad P_0(t) = 1 - F(0;0,t) - \int\limits_0^t dU(\tau)\, F(0;0,t-\tau).$$

Similarly, we find that the zero-avoiding transition probabilities

$$(43)\qquad {}^0P_j(t) = \Pr\{Q(t)=j;\ Q(\tau)>0\ (0\leqq\tau\leqq t)\}\quad (j\geqq 1)$$

are given by

$$(44)\qquad \begin{aligned} {}^0P_j(t) &= \int\limits_{y=0+}^{\infty} -d_x \Pr\{Y(t)\geqq x;\ S(0)>t \mid Y(0)=0\}\, C_{j-1}(x) \\ &= \int\limits_{n=0+}^{t} -d_x F(x;0,t)\, C_{j-1}(x). \end{aligned}$$

From (41) and (44) it follows that

$$P_j(t) = {}^0P_j(t) + \int_{\tau=0+}^{t} dU(\tau)\,{}^0P_j(t-\tau) \qquad (j \geqq 1), \tag{45}$$

a result which could have been obtained directly, as in (28).

The d. f. of the conventionally defined waiting time $W'(t)$ can now be obtained from the above results concerning $Q(t)$. Thus in the case where the process starts with a busy period at $t=0$, so that $W'(0)=0$, we have

$$\begin{aligned} F(0;0,t) &= P_{10}(t) \\ F(0;z,t) &= F(0;0,t) + \Pr\{0 < W'(t) \leqq z\} \\ &= P_{10}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} P_{1j}(t) \int_{0}^{z} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{j-1}}{j!} \lambda\, dx. \end{aligned} \tag{46}$$

Further, we remark that the limiting distributions of $Q(t)$ and $W(t)$ as $t \to \infty$ can be obtained directly from (41)—(42) and (46)—(47).

MICHIGAN STATE UNIVERSITY,
EAST LANSING
AND THE UNIVERSITY OF WESTERN AUSTRALIA,
NEDLANDS, WESTERN AUSTRALIA

(Received 24 September 1963)

References

[1] V. E. Benes, On queues with Poisson arrivals, *Ann. Math. Stat.*, **28** (1957), pp. 670—677.

[2] B. W. Conolly, A difference equation technique applied to the simple queue with arbitrary arrival interval distribution, *J. Roy. Stat. Soc.*, London, **B 21** (1958), pp. 168—175.

[3] B. W. Conolly, The busy period in relation to the queueing process *GI/M/1*, *Biometrika*, **46** (1959), pp. 246—251.

[4] N. U. Prabhu, Some results for the queue with Poisson arrivals, *J. Roy. Stat. Soc.*, **22** (1960), pp. 104—107.

[5] N. U. Prabhu, Application of storage theory to queues with Poisson arrivals, *Ann. Math. Stat.*, **31** (1960), pp. 475—482.

[6] Edgar Reich, On the integro-differential equation of Takács I., *Ann. Math. Stat.*, **29** (1958), pp. 563—570.

[7] W. L. Smith, On the distribution of queueing times, *Proc. Cam. Phil. Soc.*, **49** (1953), pp. 449—461.

[8] L. Takács, Investigation of waiting time problems by reduction to Markov processes, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), pp. 101—129.

[9] L. Takács, Transient behaviour of single-server queueing processes with recurrent input and exponentially distributed service times, *Oper. Res.*, **8**, (1960), pp. 231—245.

EIN KOMBINATORISCHES PROBLEM VON P. ERDŐS UND A. HAJNAL

Von

W. M. SCHMIDT (Wien)

(*Vorgelegt von* P. Turán)

Gegeben sei eine Menge M und eine Familie F von Teilmengen. Man sagt, *F habe Eigenschaft B*, wenn es eine Einteilung von M in zwei fremde Klassen K_1, K_2 gibt, sodaß keine Menge der Familie in eine der Klassen K_1, K_2 enthalten ist.

Satz. *Jede Menge aus F habe $n \geqq 2$ Elemente, die Zahl der Mengen aus F sei f, und es gelte*

$$f \leqq 2^n (1+4n^{-1})^{-1}. \tag{1}$$

Dann hat F Eigenschaft B.

Mit $f \leqq 2^{n-1}$ an Stelle von (1) wäre das Ergebnis ziemlich trivial. Von Erdős [1] wurde der Satz mit $f \leqq (1-\varepsilon)2^n \log 2$, $n > n_0(\varepsilon)$, gezeigt.

Sei $N \in F$, $x \in N$. Wir setzen $z_N(x)$ für die Zahl der $L \in F$, sodaß $N \cap L = x$. Da die Summe $\sum z_N(x)$, erstreckt über $x \in N$, höchstens gleich f ist, können wir jedem $N \in F$ ein x_N mit $z_N(x_N) \leqq fn^{-1}$ zuordnen.

Ist $N \in F$ und $\mathfrak{z}$ eine Zerlegung von M in 2 fremde Klassen K_1, K_2, so sei $a_i(N, \mathfrak{z})$ die Zahl der $x \in N$, die in K_i liegen ($i=1, 2$). Offenbar ist $a_1(N, \mathfrak{z}) + a_2(N, \mathfrak{z}) = n$. $b_i(\mathfrak{z})$ sei die Zahl der $N \in F$ mit $a_i(N, \mathfrak{z}) = n$ ($i=1, 2$).

Hilfssatz. *Es gebe eine Zerlegung $\mathfrak{z}$, sodaß*

(a) $b_1(\mathfrak{z}) + b_2(\mathfrak{z}) < 2$,

(b) *es gibt kein Tripel N, L, i, wo $N \in F$, $L \in F$, $i=1$ oder 2, sodaß $N \cap L = x_N$, $a_i(N, \mathfrak{z}) = n$, $a_i(L, \mathfrak{z}) = 1$.*

Dann hat F Eigenschaft B.

Beweis. Ist $b_1(\mathfrak{z}) + b_2(\mathfrak{z}) = 0$, so sind wir fertig. Also sei $b_1(\mathfrak{z}) + b_2(\mathfrak{z}) = 1$, o. B. d. A. $b_1(\mathfrak{z}) = 1$. Es sei etwa $N \in F$, $a_1(N, \mathfrak{z}) = n$. Die Zerlegung $\mathfrak{z}^*$ bestehe aus den Klassen K_1^*, K_2^*, wobei K_1^* aus K_1 durch Entfernung des Elementes x_N entsteht.

Offenbar ist $a_1(N, \mathfrak{z}^*) < n$, daher $b_1(\mathfrak{z}^*) = 0$. Wäre $b_2(\mathfrak{z}^*) > 0$, etwa $a_2(L, \mathfrak{z}^*) = n$, so müßte $N \cap L = x_N$, $a_1(L, \mathfrak{z}) = 1$ sein, im Widerspruch (b). Also hat F Eigenschaft B.

Beweis des Satzes. M habe etwa m Elemente. Hat F nicht Eigenschaft B, dann darf keine der 2^m Zerlegungen $\mathfrak{z}$ die Voraussetzungen des Hilfssatzes erfüllen.

Man erhält

$$2^m \leqq \sum_{\mathfrak{z}} \sum_{i=1}^{2} \left(b_i(\mathfrak{z})/2 + \sum_{\substack{N \in F \\ a_i(N,\mathfrak{z}) = n}} \sum_{\substack{L \in F \\ N \cap L = x_N \\ a_i(L,\mathfrak{z}) = 1}} 1 \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{N \in F} \sum_{\substack{\mathfrak{z} \\ a_i(N,\mathfrak{z}) = n}} 1/2 + \sum_{N \in F} \sum_{\substack{L \in F \\ N \cap L = x_N}} \sum_{\substack{\mathfrak{z} \\ a_i(N,\mathfrak{z}) = n \\ a_i(L,\mathfrak{z}) = 1}} 1 \right) \leqq$$

$$\leqq 2\left(f 2^{m-n}/2 + f(fn^{-1}) 2^{m-2n+1}\right) = 2^m (f 2^{-n})(1 + fn^{-1}\, 2^{2-n}).$$

Ist nun $f \leqq 2^n (1 + 4n^{-1})^{-1}$, so ist $fn^{-1}\, 2^{2-n} < 4n^{-1}$, daher $(f 2^{-n}) \cdot$ $\cdot (1 + fn^{-1} 2^{2-n}) < 1$, und F hat Eigenschaft B.

MATHEMATISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT,
WIEN

(Eingegangen 24. September 1963.)

Literatur

[1] P. Erdős, On a combinatorial problem, *Nordisk Mat. Tid.*, **11** (1963), S. 5—10.

ÜBER DIE KONSTRUKTION NICHTVOLLSTÄNDIGER AUTOMATEN

Von

T. FREY (Budapest)

(*Vorgelegt von* L. KALMÁR)

1. Die Reduktion nichtvollständiger Automaten — besser gesagt, die Angabe desjenigen Sechstupels (s. z. B. [1], [2], [3], [4] usw.) das die nicht vollständig angegebene Abbildung auf einfachster Weise, mit möglichst wenigen inneren Zuständen realisiert — ist eine sehr schwere Aufgabe, welche im allgemeinen algorithmisch bisher noch nicht gelöst worden ist. In einer meiner Arbeiten (s. [5]) habe ich jedoch einen Algorithmus für die Konstruktion eines reduzierten, die vollständig angegebene Abbildung realisierenden Mooreschen Sechstupels beschrieben; man kann diesen Algorithmus — wie es hier gezeigt wird — derart modifizieren, daß er auch im Falle einer nicht vollständig angegebenen Abbildung zu dem reduzierten Sechstupel führe.

2. Wir geben erst die Bezeichnungen und einige passende Begriffe an. Bezeichne $X(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ bzw. $Y(y_1, y_2, \ldots, y_M)$ das endliche Eingange- bzw. Ausgangsalphabet des Automaten, und $F(X)$ die freie Halbgruppe über X. Die nichtvollständig angegebene Automatenabbildung, welche also nur über eine echte — aber mit dem Wort pq auch p enthaltende — Teilmenge $F^* \subset F(X)$ definiert ist, bezeichnen wir mit φ, den letzten Buchstaben des abgebildeten Wortes $p \in F^*$ dagegen mit $L[\varphi(p)]$.

Betrachten wir nun zwei beliebige Mooresche Sechstupel-Anfangsautomaten mit dem Eingangsalphabet X und Ausgangsalphabet Y, $A(X; \mathscr{A}, a_0, Y, \vartheta_1, \lambda_1)$ und $B(X; \mathscr{B}, b_0, Y, \vartheta_2, \lambda_2)$, wo ϑ die Zustands, λ dagegen die Ausgangsfunktion bezeichnet, ϑ bildet also die Menge $F(X) \times \mathscr{A}$ in $\mathscr{A}$ (bzw. $F(X) \times \mathscr{B}$ in $\mathscr{B}$), λ dagegen in $F(Y)$ ab.

Wir nennen den Zustand $a \in \mathscr{A}$ F^*-erreichbar, falls es ein Wort $p \in F^*$ gibt, daß $\vartheta_1(a_0; p) = a$ gelte. Wir nennen zwei Zustände $a \in \mathscr{A}$ und $b \in \mathscr{B}$ (bzw. $b \in \mathscr{A}$) miteinander F^*-äquivalent, falls sie durch die Abbildung nicht entscheidbar sind, also

a) beide — und zwar durch denselben Endbuchstabe — F^*-erreichbar sind, d. h. es gibt ein $p \in F^*$ und ein $q \in F^*$, daß

$$\vartheta_1(a_0, p) = a; \quad \vartheta_2(b_0; q) = b$$

und

$$L[\lambda(a_0; p)] = L[\lambda(a_0; q)]$$

(durch letztere Forderung ist der Mooresche Charakter, d. h. die Mooresche Eigenschaft der λ-Funktion gesichert), ferner wenn

b) für jedes Wort r, für welches ein a erreichendes Wort p_1 mit $p_1 r \in F^*$ und ein b erreichendes Wort q_1 mit $q_1 r \in F^*$ gibt, auch

$$\lambda_1(a; r) = \lambda_2(b; r)$$

gültig ist.

Wir nennen außerdem a und b schlechthin F^*-äquivalent, falls mindestens eines der beiden nicht F^*-erreichbar ist.

Wir weisen schon hier darauf, daß die F^*-äquivalenz der Zustände nicht transitiv ist. Um das einzusehen, betrachten wir z. B. die Zustände c_1, c_2, c_3. Es sei außerdem vorausgesetzt, daß c_1 nur durch solche Wörter von F^* erreichbar ist, welche mit x_3 nicht in F^* fortsetzbar sind; eben so in c_2 bzw. in c_3 die zu ihnen führenden Wörter in F^* mit x_1 bzw. x_3 nicht fortsetzbar sind. Es sei außerdem $\lambda(c_1, x_1) = y_1 \neq y_2 = \lambda(c_3, x_1)$; aber $\lambda(c_1, x_2) = \lambda(c_2, x_2)$ und $\lambda(c_2, x_3) = \lambda(c_3, x_3)$. Falls nun übrigens die λ — und ϑ — Funktionen entsprechend definiert sind, so kann c_2 mit c_1 und auch mit c_3 F^*-äquivalent sein, c_1 und c_3 sind aber sicher nicht F^*-äquivalent, falls es ein in c_1 und ein in c_3 führendes Wort von F^* existiert, welches auch mit x_1 in F^* fortsetzbar ist.

Wir nennen den Automaten A und B miteinander F^*-äquivalent, falls für ein beliebiges $r \in F^*$

$$\lambda_1(a_0, r) = \lambda_2(b_0, r)$$

gilt. Die F^*-Äquivalenz der Automaten ist natürlich transitiv.

SATZ 1. *Die Automaten A und B sind dann und nur dann miteinander F^*-äquivalent, falls es zu jedem erreichbaren Zustand $a \in \mathscr{A}$ mindestens ein echter F^*-äquivalenter Zustand $b \in \mathscr{B}$ gibt und umgekehrt, und zwar a_0 mit b_0 F^*-äquivalent ist.*

BEWEIS. Es sei zuerst vorausgesetzt, daß A und B äquivalent sind und betrachten wir einen F^*-erreichbaren Zustand $a \in \mathscr{A}$; $s \in F^*$ sei ein mögliches Wort, mit Hilfe dessen a erreichbar ist:

$$\vartheta_1(a_0; s) = a.$$

Der Zustand

$$b = \vartheta_2(b_0; s)$$

ist mit a F^*-äquivalent: weil er erstens F^*-erreichbar ist, ferner weil

$$L[\lambda_1(a_0; s)] = L[\lambda_2(b_0; s)]$$

gilt, da der F^*-Äquivalenz von A und B gemäß auch $\lambda_1(a_0; s) = \lambda_2(b_0; s)$ gültig ist, zuletzt weil auch für ein beliebiges r mit $sr \in F^*$

$$\lambda_1(a; r) = \lambda_2(b; r)$$

da hier $\lambda_1(a_0; r \cdot s) = \lambda_2(b_0; r \cdot s)$ auch gilt. Ebenso kann man einsehen, daß zu jedem $b \in \mathscr{B}$ ein äquivalenter Zustand $a \in \mathscr{A}$ angegeben werden kann.

Es sei jetzt aber vorausgesetzt, daß man zu jedem F^*-erreichbaren Zustand $a \in \mathscr{A}$ einen echten F^*-äquivalenten Zustand $b \in \mathscr{B}$ angeben kann und umgekehrt; speziell, daß a_0 mit b_0 F^*-äquivalent ist. Die F^*-Äquivalenz der Anfangszustände ist aber der Definition gemäß mit der F^*-Äquivalenz der Sechstupeln identisch. Damit haben wir unseren Satz bewiesen.

Wir nennen die Abbildung Ψ von $\mathscr{A}$ in $\mathscr{B}$ einen F^*-Homomorphismus von A in B falls für jeden (z. B. durch das Wort $p \in F^*$) erreichbaren Zustand a, und für jedes Wort r, für welches auch $pr \in F^*$ gültig ist, die Relationen

$$\Psi[\vartheta_1(a; r)] = \vartheta_2[\Psi(a), r] \tag{1}$$

$$\lambda_1(a; r) = \lambda_2[\Psi(a), r] \tag{2}$$

und

$$\Psi(a_0) = b_0 \tag{3}$$

gelten. Falls die Abbildung Ψ umkehrbar eindeutig ist, nennen wir die Relation zwischen A und B einen F^*-Isomorphismus.

Eine triviale Folge dieser Definitionen ist

SATZ 2. *Falls es eine F^*-homomorphe Abbildung des Sechstupels A in B existiert, so ist A mit B F^*-äquivalent.*

BEWEIS. Wählt man speziell a in (2) mit a_0 gleich, so bekommt man die Äquivalenz von A mit B.

Wir nennen das Sechstupel A *F^*-reduziert*, falls es keine miteinander F^*-äquivalente Zustände besitzt.

3. Wir beweisen nun erst den wichtigen Satz in Bezug auf die Existenz eines reduzierten Automaten im Falle einer nichtvollständig angegebenen Abbildung.

SATZ 3. *In der Menge M_A aller dem Sechstupel A $(X; \mathscr{A}, a_0; Y, \vartheta_a, \lambda_a)$ F^*-äquivalenten Automaten existiert auch ein reduziertes Sechstupel U.*

BEWEIS. Die durch A generierte Abbildung ist für jedes Wort der Menge F^* bekannt. Wir teilen daher die Wörter von F^* in einander fremde Untermengen $F^*_{y_i}$ $(i = 1, 2, ..., M)$ undzwar folgendermaßen: für $p \in F^*$ gilt dann und nur dann $p \in F^*_{y_i}$, falls $L[\lambda_a(a_0; p)] = y_i$ (s. z. B. [5]). Wir nennen die auf diese Weise generierten höchstens M Teilmengen von F^* Klassen der ersten Kategorie. Eine jede solche Klasse teilen wir weiter in — schon nicht notwendig einander fremde — Teilmengen, undzwar folgendermaßen; zwei Wörter, p und q gehören dann und nur dann zu derselben Klasse der zweiten Kategorie, falls

a) sie zu derselben Klasse der ersten Kategorie gehören und b) für beliebigem $i = 1, 2, ..., M$ auch die Wörter px_i und qx_i entweder zur selben Klasse der ersten Kategorie gehören, oder mindestens eines der beiden gar nicht zur Menge F^* gehört.

So bekommen wir höchstens $M \cdot M^N$ Klassen der zweiten Kategorie; diese Klassen sind einander natürlich nicht notwendig fremd. Für p, q und $r \in F^*_{y_j}$ ist es z. B. möglich, daß $L[\lambda_a(a_0; px_i)] \neq L[\lambda_a(a_0; rx_i)]$ mit $px_i \in F^*$ und $rx_i \in F^*$, ferner $qx_i \notin F^*$; p und q und ebenso q und r kann also zur selben Klasse der zweiten Kategorie gehören, p und r aber sicher nicht.

Wir setzen die obige Einteilung unbegrenzt fort. Im $(s+1)$-ten Schritt gelangen wir zu den einander nicht notwendig fremden Klassen der $(s+1)$-ten Kategorie; zwei Wörter, p und $q \in F^*$ gehören dann und nur dann zu derselben Klasse der $(s+1)$-ten Kategorie, falls

a) sie zu derselben Klasse der s-ten Kategorie gehören, und

b) bei beliebigem x_i $(i = 1, 2, ..., M)$ die Wörter px_i und qx_i entweder zur selben Klasse der s-ten Kategorie gehören, oder mindestens eines der beiden nicht in F^* enthalten ist.

Der Schnitt der Klassen einer jeden Kategorie wird auch die Menge F^* in einander nicht notwendig fremde Teilmengen F_i^* $(i=1, 2, \ldots)$ aufteilen, wo also die Wörter dann und nur dann zu einer Teilmenge gehören, falls sie in derselben Klasse erster, zweiter, usw. Kategorie sind.

Betrachten wir nun zwei beliebige Wörter $p \in F_i$ und $q \in F_i^*$. Wir zeigen erst, daß für beliebiges j die Wörter px_j und qx_j — falls zu F^*, dann — zur selben Teilmenge $F_{k(i;\,j)}^*$ gehören. Wäre nämlich das nicht gültig, so könnte man ein Index s so angeben, daß px_j und qx_j schon nicht in derselben Klasse der s-ten Kategorie sind. Dann gehören aber p und q sicher nicht zur selben Klasse der $(s+1)$-ten Kategorie, in Gegensatz zu unserer Voraussetzung, $p \in F_i^*$ und $q \in F_i^*$.

Es ist auch leicht einzusehen, daß zu beliebigem F_i^* ein und nur ein Index $j(i)$ derart angegeben werden kann, daß $F_i^* \cap F_{y_j} = F_i^*$, da die Klassen der ersten Kategorie einander fremd waren.

Betrachten wir nun das Sechstupel $U(X, \mathfrak{U}, u_0, Y, \vartheta_u, \lambda_u)$ wo u_0 ein ideales Element ist. Lassen wir ferner zu jedem F_i^* einen und nur einen Zustand u_i entsprechen $(i=1, 2, \ldots)$, zuletzt ϑ_u und λ_u soll folgendermaßen definiert werden:

$$\vartheta_u(u_i, x_j) = u_k, \quad \text{da} \quad px_j \in F_{k(i;\,j)}^*, \quad \text{falls} \quad p \in F_i^* \quad \text{und} \quad px_j \in F^*; \tag{4}$$

$$\lambda_u(u_i, x_j) = \lambda_u^*[\vartheta_u(u_i, x_j)] = \lambda_u^*(u_k) = y_s, \quad \text{falls} \quad F_{y_s}^* \cap F_k^* = F_k^*. \tag{5}$$

Wir bemerken nun erst, daß ϑ_u durch (4) vielleicht nicht überall in $\mathfrak{U} \times X$ definiert ist, da vielleicht kein $p \in F_i^*$ existiert, für welches $px_j \in F^*$ gelte. In solchen Fällen kann man $\vartheta_u(u_i, x_j)$ beliebig definieren. So bleiben aber nicht nur vollständig freie, sondern auch halbfreie Wahlmöglichkeiten für den Durchgang. Es sei denn vorausgesetzt, daß das Wort

$$p = x_{i(1)} \ldots x_{i(n-1)} x_{i(n)} = q \cdot x_{i(n)} \in F^*$$

zu mehreren Klassen der s-ten Kategorie gehört. Dann kann aber auch q zu mehreren — jedoch vielleicht weniger — Klassen der $(s+1)$-ten Kategorie gehören, da für $qx_{i(n)}$ schon die Vorschrift an Strenge einbüßt. Die Vervielfachung der Wörter rückt also zu immer kürzeren Wörtern zurück, aber die Stärke dieser Vervielfachung nimmt im allgemeinen mit der Erhöhung der Kategorie ab. Das bedeutet aber, daß wir im allgemeinen eine Menge möglichen Sechstupeln mit derselben Zustandsmenge haben, die mit einader F^*-äquivalent (aber im allgemeinen nicht F^*-isomorph abbildbar) sind.

Wir zeigen nun, daß das oben angegebene Sechstupel U mit A F^*-äquivalent ist. Betrachten wir dazu ein beliebiges Wort $p = x_{i(1)} x_{i(2)} x_{i(3)} \ldots x_{i(n)} \in F^*$ mit der Abbildung $\varphi(p) = \lambda_a(a_0; p) = y_{i(1)} y_{i(2)} \ldots y_{i(n)}$. Es gilt nun

$$u_p^{(1)} = \vartheta_u(u_0; x_{i(1)}) = u_{i(1)}, \quad \text{falls} \quad x_{i(1)} \in F_{i(1)}^*$$

und

$$y^{(1)} = \lambda^*(u_{i(1)}) = y_{i(1)}$$

da der Konstruktion gemäß $F_{i(1)}^* \subset F_{y(1)}^*$ sein muß. Ebenso

$$u_p^{(2)} = \vartheta_u(u_{i(1)}; x_{i(2)}) = u_{i(2)}, \quad \text{falls} \quad x_{i(1)} x_{i(2)} \in F_{i(2)}^*$$

und

$$y^{(2)} = \lambda^*(u_{i(2)}) = y_{i(2)},$$

da der Konstruktion gemäß $F^*_{i(2)} \subset F^*_{y_{i(2)}}$ sein muß. Durch vollständige Induktion erhält man, daß

$$u_p^{(k)} = \vartheta_u(u_{i(k-1)}; x_{i(k)}) = u_{i(k)}, \quad \text{falls} \quad x_{i(1)} \dots x_{i(k)} \in F^*_{i(k)},$$

und

$$y^{(k)} = \lambda^*(u_{i(k)}) = y_{i(k)}$$

für $k = K+1$ gilt, falls die Gültigkeit für $k = 1, 2, \dots, K$ besteht, da der Konstruktion gemäß dann $F^*_{i(k)} \subset F^*_{y_{i(k)}}$ sein muß. Es sei noch bemerkt, daß für die Wörter $p \in F^*$, die nur zu einer Teilmenge F^*_i gehören, $\vartheta_u(u_0; p) = u_i$ gültig ist, wie es die obigen Überlengungen zeigen. Für die Wörter p aber, die zu mehreren Teilmengen $F^*_{i(1)}, F^*_{i(2)}, \dots$ gehören, wird der Wert von $\vartheta_u(u_0, p)$ durch die Wahl der zuerst frei, bzw. halbfrei gebliebenen Durchgänge zwischen den möglichen Zuständen $u_{i(1)}, u_{i(2)}, \dots$ bestimmt.

Wir beweisen nun zuletzt, daß das Sechstupel U (besser gesagt, die Menge der oben definierten und wie es schon gezeigt wurde, mit A F^*-äquivalenten aber einander nicht F^*-isomorphen Sechstupeln) F^* reduziert ist. Wäre es nämlich nicht so, dann könnte man zwei F^*-äquivalente Zustände, Z. B. u_i und $u_j \neq u_i$ angeben. Wäre es aber so, dann würde die Menge der Wörter von F^*, die von u_0 tatsächlich in u_i führen; F_i^{**} mit demselben F_j^{**} in derselben Klasse der ersten Kategorie liegen (s. Forderung a) gegenüber der F^*-Äquivalenz); F_i^{**} ist vielleicht nur eine Teilmenge von F_i^*, da durch die Wahl der zuerst frei gebliebenen Durchgänge einige Wörter von F_i^* vielleicht den Zustand nicht in u_i führen). Ebenso kann man einsehen (s. Forderung b) gegenüber der F^*-Äquivalenz), daß die Wörter von F_i^{**} und F_j^{**} in dieselbe Klasse der zweiten, dritten, ... usw. Kategorie gehören; dieselbe Tatsache muß für die von F_i^* bzw. F_j^* weggelassenen Wörter auch gültig sein, da diese mit den genannten sicher in derselben Klasse der ersten Kategorie liegen, folglich auch in denselben Klassen der zweiten, der dritten, usw. Kategorie. Das bedeutet aber, daß F_i^* und F_j^* identisch sein müssen, also u_i und u_j denselben Zustand bezeichnen, in Gegensatz zu unserer Voraussetzung $u_i \neq u_j$. Damit ist unser Satz völlig bewiesen.

Es ist auch (gleich) einzusehen, daß die Konstruktion der Teilmengen F_k^* auch in endlich vielen Schritten beendet werden kann. Folgendes Korollar is nämlich eine triviale Folge der Konstruktionsmethode:

KOROLLAR. Es sei vorausgesetzt, daß alle (endlich viele) Klassen der s-ten Kategorie mit denen der $(s+1)$-ten Kategorie identisch sind. Dann gilt dasselbe für die Klassen der $(s+k)$-ten Kategorie $(k = 1, 2, \dots,)$ auch, folglich die Klassen der s-ten Kategorie bestimmen schon die Aufteilung der Menge F^* in die Teilmengen F_i^* gleich.

4. Wir beweisen jetzt noch, daß das schon angegebene F^*-reduzierte Sechstupel (bzw. die Sechstupelmenge) mit möglichst wenigsten inneren Zuständen die in Bezug auf F^* angegebene Abbildung realisiert. Genauer gesagt, es gilt auch

SATZ 4. *Jeder Automat der Menge M_A aller dem Sechstupel A F^*-äquivalenten Sechstupeln ist auf ein entsprechendes Sechstupel der Menge der im Zusammenhang mit Satz 3 konstruierten F^*-reduzierten Sechstupeln F^*-homomorph abbildbar.*

Beweis. Betrachten wir ein beliebiges Sechstupel der Menge M_A, z. B. $B(X, \mathscr{B}, b_0, Y, \vartheta_b, \lambda_b)$. Wir werden ferner die Menge F^* in eine geordnete Folge des Typs ω ordnen, und zwar mit Hilfe einer Ordnung des Alphabets X, folgendermaßen:

$p_k = q_1 x_i \in F^*$ wird dann und nur dann vor $p_l = q_2 x_j \in F^*$ (mit $q_1, q_2 \in F(X)$) stehen, falls

a) p_k ein kürzeres Wort ist, als p_l, oder
b) falls sie von gleicher Länge sind, aber q_1 vor q_2 steht, oder
c) falls sie von gleicher Länge sind, und wenn $q_1 = q_2$, so x_i vor x_j steht.

Somit kann F^* als eine geordnete Folge $\{p_1, p_2, \dots\}$ angegeben werden. Betrachten wir nun ein beliebiges Sechstupel $U_\nu(X, \mathfrak{U}, u_0, Y, \vartheta_\nu, \lambda_\nu)$ der Menge der in Zusammenhang mit Satz 3 konstruierten Sechstupeln ($\mathfrak{U}$ braucht hier kein Index zu haben, da die Menge der Zustände für alle $\mathfrak{U}$ dieselbe ist). Definieren wir nun die Abbildung Ψ_ν von $\mathscr{B}$ in $\mathfrak{U}$ folgendermaßen: es sei

$$\Psi_\nu[\vartheta_b(b_0; p_i)] = \vartheta_\nu(u_0; p_i) \qquad (i = 1, 2, \dots), \tag{6}$$

für alle nicht F^*-erreichbaren Zustände $b \in \mathscr{B}$ sei aber $\Psi_\nu(b) = u_0$.

Nun — da B mit U, wie in Satz 3 gezeigt wurde, F^*-äquivalent ist — die Abbildung (6) gibt einen F^*-Homomorphismus von $\mathscr{B}$ in $\mathfrak{U}_\nu$, falls sie eindeutig ist, d. h. falls kein Indexpaar i, j so angegeben werden kann, daß

$$\vartheta_b(b_0; p_i) = \vartheta_b(b_0; p_j) \quad \text{jedoch} \quad \vartheta_\nu(u_0; p_i) \neq \vartheta_\nu(u_0; p_j)$$

gültig wäre. Es kann aber gleich eingesehen werden, daß ein solches ν bestimmt existiert. Aus $\vartheta_b(b_0; p_i) = \vartheta_b(b_0; p_j)$ folgt nämlich gleich, daß p_i und p_j zur selben Klasse einer jeden Kategorie, folglich zur selben Untermenge $F^*_{k(i,j)}$, gehören; (s. Beweis des Satzes 3). Dann können wir aber die frei, bzw. halbfrei gebliebenen Durchgangssätze in der Konstruktion von U_ν — d. h. ν selbst — so wählen, daß für jedes Indexpaar, für welches $\vartheta_b(b_0; p_i) = \vartheta_b(b_0; p_j)$ gültig ist, auch $\vartheta_\nu(u_0; p_i) = \vartheta_\nu(u_0; p_j)$ gültig sei. Dann gibt aber (6) eine F^*-homomorphe Abbildung von B in das Sechstupel U_ν mit diesem ν. Es läßt sich auch leicht zeigen, daß diese F^*-homomorphe Abbildung nicht in, sondern auf $\mathfrak{U}_\nu$ $\mathscr{B}$ abbildet, da für U_ν jeder Zustand F^*-erreichbar ist, folglich mit mindestens einem Worte erreicht wird. Damit ist unser Satz völlig bewiesen.

5. Mit Hilfe der oben angegebenen Methode können wir also auch zu einer beliebigen, nichtvollständig angegebenen Abbildung ein reduziertes, möglichst einfaches Mooresches Sechstupel konstruieren. Falls die Abbildung auch mit endlichen Automaten realisierbar ist, so bekommen wir mit Hilfe unserer Methode die Realisierung (durch Mooresche Automaten) mit minimalen Zuständen, ferner unserem Korollar gemäß läßt sich auch die Konstruktion der Teilmengen in endlich vielen Schritten beenden.

Es bleibt jedoch die Frage offen, ob es auch im Falle der Mealyschen Automaten für eine nichtvollständige Abbildung ein „günstigstes" Sechstupel existiert, und wenn ja, wie man es konstruieren kann. In einer nächsten Arbeit beabsichtige ich diese Frage in Angriff zu nehmen.

Eine weitere Frage ist: was für ein Zusammenhang zwischen einem beliebigen F^*-reduzierten Sechstupel der Menge M_A und dem von uns angegebenen Sechstupel U besteht. Die Beantwortung dieser Frage scheint mir von großer Schwierigkeit zu sein.

RECHENTECHNISCHES ZENTRUM
DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN,
BUDAPEST

(Eingegangen am 10. Oktober 1963.)

Literaturverzeichnis

[1] В. М. Глушков, Абстрактная теория автоматов, *Успехи мат. наук,* **16** (1961), S. 1–62.

[2] В. М. Глушков, Некоторые проблемы синтеза цифровых автоматов, *Выч. Мат. и Мат. Физика,* 3 (1961), S. 371–411.

[3] S. GINSBURG, On the lengths of the smallest uniform experiment, *Jour. Ass. Comp. Mach.*, **5** (1958), S. 266–280.

[4] M. C. PAULL–S. M. UNGER, Minimizing the number of states in incompletely specified sequ. Switching functions, *IRE Transaction El. Comp. EC*–8, (1959), S. 356–367.

[5] T. FREY, Über den Kalmarschen Begriff der Rechenautomaten, erscheint in Proceedings of the Colloquium „Foundations of Mathematics, Mathematical Mashines and their Applications" (Budapest, the Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences).

ÜBER DIE KONSTRUKTION ENDLICHER AUTOMATEN

Von

T. FREY (Budapest)

(*Vorgelegt von* L. KALMÁR)

1. Die Methode von MCNAUGHTON und YAMADA (s. [1] bzw. eine von GLUSCHKOFF in geringem Masse modifizierte Version in [2]) mit deren Hilfe ein Viertupel konstruiert werden kann, das die angegebene reguläre Ausdrücke (s. z. B. [3], bzw. [1] und [2]) durch entsprechende Teilmengen der inneren Zustände realisiert, scheint nicht genug natürlich zu sein, und weist einige Nachteile auf: der Algorithmus ist nicht leicht; im Falle einer Veränderung der angegebenen regulären Ausdrücke muß man den Algorithmus wiederholt verfolgen; falls wir einige Teile der regulären Ausdrücke irgendwie durch Viertupeln schon realisiert haben, so können wir diese nur dann bei der Konstruktion des Viertupels, das den ganzen Ausdruck realisiert, benützen, wenn sie eine — der Methode entsprechende — Form haben (falls sie z. B. schon reduziert sind, kann man im allgemeinen nichts tun); zuletzt, aber nicht zumindest muß man den regulären Ausdruck in eine kanonische Form unwandeln, was nicht immer algorithmisch lösbar ist (so treteten z. B. auch in praktisch wichtigen Fällen, wie Komplementbildung, Erweiterung, Kürzung von regulären Ausdrücken große Schwierigkeiten auf).

Falls man aber bedenkt, wie man bei Rechenautomaten mit Hilfe von regulären Teilausdrücken, bzw. den letzteren entsprechenden Viertupeln realisierenden Programme ein solches Programm am leichtesten aufbaut, das die ganzen regulären Ausdrücke bzw. die ihnen entsprechenden Viertupeln realisiert, so bekommt man einen solchen Algorithmus, der einen natürlichen Weg verfolgt, und ohne die oben aufgezählten Nachteile das Viertupel angibt.

Es ist interessant, daß jedoch die Grundprinzipien dieses Algorithmus nicht weit von denen von MCNAUGHTON und YAMADA liegen.

2. Im weiteren werden wir voraussetzen, daß wir die Viertupeln $A^{(i)}(X, \mathscr{A}; a_0^{(i)}; \vartheta^{(i)})$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ über das endliche Eingangsalphabet $X\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, mit endlichen Zustandsmengen $\mathscr{A}^{(i)}$, mit Anfangszuständen $a_0^{(i)}$, und mit den Durchgangsfunktionen $\vartheta^{(i)}$ schon konstruiert haben, um die reguläre Ausdrücke $P^{(i)}$ durch die Zustandteilmengen $\mathscr{A}_1^{(i)} \subset \mathscr{A}^{(i)}$ zu realisieren.

Die Fragen, welche wir lösen wollen, lauten folgenderweise:

a) Wie kann man mit Hilfe der $A^{(i)}$ möglichst einfach ein solches Viertupel konstruieren, welches einige angegebene, aus den $P^{(i)}$-s gebildeten regulären Ausdrücke realisiert?

b) Besitzt das auf diese Weise konstruierte Viertupel möglichst wenige innere Zustände, d. h. ist es reduziert, falls die $A^{(i)}$-s reduziert sind?

Es soll zuerst bemerkt werden, daß die Reduzierbarkeit nur im Zusammenhang mit der Aufgabe prüfbar ist; wir können nämlich das Viertupel, als einen Mooreschen Automaten betrachten, wo die einzelnen, zu je einem Ausdruck gehörenden Zustandsmengen mit einen entsprechenden Kennzeichen bezeichnet sind, und auch durch ein leeres Kennzeichen die frei bleibenden Zustände. Das bedeutet aber, daß das Ausgangsalphabet — und so auch die Reduzierbarkeit — von der Aufgabe, d. h. der Anzahl der bezeichneten Teilmengen in großem Masse abhängt.

Erst betrachten wir Komplement, Summe und Schnitt, zuletzt gemeinsamen Auftritt von regulären Ausdrücken zu welchen man das gleiche Viertupel benützen kann.

Ganz trivial ist der Satz in Bezug auf das Komplement.

Satz 1. *Das Komplement eines regulären Ausdrucks (wir bezeichnen es mit* $\overline{P}^{(i)}$*) ist mit Hilfe desjenigen Viertupels* $A^{(i)}$ *realisierbar, welches den regulären Ausdruck* $P^{(i)}$ *darstellt, und zwar durch die Komplementzustandsmenge* $\mathscr{A}^{(i)} - \mathscr{A}_1^{(i)}$.

Ist $A^{(i)}$ *in Zusammenhang mit* $P^{(i)}$ *reduziert, so ist es auch in Zusammenhang mit* $\overline{P}^{(i)}$ *reduziert.*

Beweis. Für $p \in F(X)$ (wo bei $F(X)$ die freie Halbgruppe über X bezeichnet) ist der Definition von $A^{(i)}$ gemäß

$$\vartheta^{(i)}(a_0^{(i)}, p) = \begin{cases} a_p^{(i)} \in \mathscr{A}_1^{(i)}, & \text{falls} \quad p \in P^{(i)}, \quad \text{bzw.} \quad p \notin \overline{P}^{(i)}, \\ a_p^{(i)} \in \mathscr{A}^{(i)} - \mathscr{A}_1^{(i)}, & \text{falls} \quad p \notin P^{(i)}, \quad \text{bzw.} \quad p \in \overline{P}^{(i)}, \end{cases}$$

womit der erste Teil des Satzes schon bewiesen ist. Wäre ferner $A^{(i)}$ in Zusammenhang mit $\overline{P}^{(i)}$ reduzierbar, so gäbe es mindestens zwei äquivalente Zustände $a_\nu^{(i)} \neq a_\mu^{(i)}$. Das würde aber bedeuten, daß für ein beliebiges Wort $q \in F(X)$ entweder $\vartheta^{(i)}(a_\nu^{(i)}, q) \in \mathscr{A}^{(i)} - \mathscr{A}_1^{(i)}$ und gleichzeitig $\vartheta^{(i)}(a_\mu^{(i)}, q) \in \mathscr{A}^{(i)} - \mathscr{A}_1^{(i)}$, oder aber $\vartheta^{(i)}(a_\nu^{(i)}, q) \in \mathscr{A}_1^{(i)}$ und gleichzeitig $\vartheta^{(i)}(a_\mu^{(i)}, q) \in \mathscr{A}_1^{(i)}$ gälte. So wäre aber $a_\nu^{(i)}$ und $a_\mu^{(i)}$ auch in Zusammenhang mit $P^{(i)}$ äquivalent, folglich $A^{(i)}$ auch in diesem Zusammenhang reduzierbar, in Gegensatz zu unserer Voraussetzung.

3. Im Hinblick auf Summe, Schnitt und gemeinsamer Auftritt der regulären Ausdrücken setzen wir voraus, daß wir Programme für einen Digitalautomaten haben, die das Viertupel $A^{(i)}$ simulieren; wir können aber dann leicht ein Hilfsprogramm aufbauen, mit Hilfe welches man alle Programme parallel laufen lassen kann. Dann braucht man nach der Eingabe eines Wortes $p \in F(X)$ nur prüfen, ob der Endzustandskomponent $a^{(i)}$ zu $\mathscr{A}_1^{(i)}$ oder zu $\mathscr{A}^{(i)} - \mathscr{A}_1^{(i)}$ gehört; daraus folgt aber gleich, ob $p \in P^{(i)}$, $p \in \bigvee_{j=1}^{k} P^{(j)}$, bzw. ob $p \in \bigwedge_{j=1}^{k} P^{(j)}$ der Fall ist, oder nicht.

In der Viertupel-Sprache bedeuten die obigen Überlegungen, daß wir die sog. direkte Summe der $A^{(i)}$-s, d. h. das Viertupel $C(X, \mathscr{C}, c_0; \vartheta_c)$ betrachten sollen, mit

$$\mathscr{C} = \mathscr{A}^{(1)} \times \mathscr{A}^{(2)} \times \ldots \times \mathscr{A}^{(k)}; \quad c_0 = (a_0^{(1)}; a_0^{(2)}; \ldots; a_0^{(k)}) \tag{1}$$

und

$$\vartheta_c(c, x_j) = \vartheta_c((a^{(1)}; a^{(2)}; \ldots; a^{(k)}), x_j) = \tag{2}$$
$$= (\vartheta^{(1)}(a^{(1)}, x_j); \vartheta^{(2)}(a^{(2)}, x_j); \ldots; \vartheta^{(k)}(a^{(k)}, x_j)).$$

SATZ 2. *Das Viertupel C, definiert durch* (1)—(2), *realisiert den regulären Ausdruck* $\bigvee_{j=1}^{k} P^{(j)}$, *und zwar durch die Zustandsmenge*

$$\mathscr{A}_1^{(1)} \times \mathscr{A}^{(2)} \times \ldots \times \mathscr{A}^{(k)} \cup \mathscr{A}^{(1)} \times \mathscr{A}_1^{(2)} \times \ldots \times \mathscr{A}^{(k)} \cup \ldots \cup \mathscr{A}^{(1)} \times \mathscr{A}^{(2)} \times \ldots \mathscr{A}_1^{(k)}. \tag{3}$$

SATZ 3. *Das Viertupel C, definiert wie oben, realisiert den regulären Ausdruck* $\bigwedge_{j=1}^{k} P^{(j)}$, *und zwar durch die Zustandsmenge*

$$\mathscr{A}_1^{(1)} \times \mathscr{A}_1^{(2)} \times \ldots \times \mathscr{A}_1^{(k)}. \tag{4}$$

SATZ 4. *Das Viertupel C, definiert wie oben, realisiert die reguläre Ausdrücke* $P^{(i)}$ $(i=1, 2, \ldots, k)$, *und zwar durch die Zustandsmenge*

$$\mathscr{A}^{(1)} \times \mathscr{A}^{(2)} \times \ldots \times \mathscr{A}_1^{(i)} \times \ldots \times \mathscr{A}^{(k)}. \tag{5}$$

BEWEIS. Betrachten wir ein beliebiges Wort $p = x_{l(1)} x_{l(2)} \ldots x_{l(n)} \in F(X)$. Durch Induktion folgt nun aus (2), daß

$$\vartheta_c(c_0, p) = (\vartheta^{(1)}(a_0^{(1)}, p); \vartheta^{(2)}(a_0^{(2)}, p); \ldots; \vartheta^{(k)}(a_0^{(k)}, p)). \tag{6}$$

Falls also $p \in P^{(i)}$ (bzw. $p \notin P^{(i)}$), dann gilt

$$\vartheta_c(c_0, p) \in (\text{bzw} \notin)\, \mathscr{A}^{(1)} \times \mathscr{A}^{(2)} \times \ldots \times \mathscr{A}_1^{(i)} \times \ldots \times \mathscr{A}^{(k)}. \tag{7}$$

$(i=1, 2, \ldots, k)$, folglich aber auch

$$\vartheta_c(c_0, p) \in \mathscr{A}_1^{(1)} \times \mathscr{A}^{(2)} \times \ldots \times \mathscr{A}^{(k)} \cup \mathscr{A}^{(1)} \times \mathscr{A}_1^{(2)} \times \ldots \times \mathscr{A}^{(k)} \cup$$
$$\cup \ldots \cup \mathscr{A}^{(1)} \times \mathscr{A}^{(2)} \times \ldots \times \mathscr{A}_1^{(k)},$$

bzw. falls $p \notin P^{(i)}$ für jeden i, und somit

$$\vartheta_c(c_0, p) \in (\mathscr{A}^{(1)} - \mathscr{A}_1^{(1)}) \times (\mathscr{A}^{(2)} - \mathscr{A}_1^{(2)}) \times \ldots \times (\mathscr{A}^{(k)} - \mathscr{A}_1^{(k)})$$

womit Satz 2 bzw. Satz 4 schon bewiesen ist. Falls zuletzt $p \in P^{(1)} \wedge P^{(2)} \wedge \ldots \wedge P^{(k)}$, so gilt (7) für alle i, und eben deswegen auch

$$\vartheta_c(c_0, \mathscr{A} p) \in {}_1^{(1)} \times \mathscr{A}_1^{(2)} \times \ldots \times \mathscr{A}_1^{(k)}.$$

Falls aber für mindestens ein i, z. B. für $i_1, i_2, \ldots, i_s (s \geqq 1)$ (7) nicht erfüllt, für die anderen i-s jedoch erfüllt wird, so gilt

$$\vartheta_c(c_0, p) \in \mathscr{A}_1^{(1)} \times \ldots \times (\mathscr{A}^{(i_1)} - \mathscr{A}_1^{(i_1)}) \times \ldots \times (\mathscr{A}^{(i_s)} - \mathscr{A}_1^{(i_s)}) \times \ldots \times \mathscr{A}_1^{(k)}$$

folglich

$$\vartheta_c(c_0, p) \notin \mathscr{A}_1^{(1)} \times \mathscr{A}_1^{(2)} \times \ldots \times \mathscr{A}_1^{(k)},$$

womit auch Satz 3 bewiesen ist.

Um über die Reduziertheit von C im Falle reduzierter $A^{(i)}$-s etwas zu sagen, es ist klar, daß C nur im Zusammenhang mit *allen* möglichen regulären Ausdrücken, die in den Sätzen 2—4 aufgezählt sind, reduziert sein kann; falls also wir nur weniger durch C realisieren wollen, als möglich wäre, so ist im allgemeinen C nicht reduziert. Genauer gesagt, es gilt der folgende Satz:

SATZ 5. *Das Viertupel C, definiert wie oben, ist in Zusammenhang mit den regulären Ausdrücken*

$$\bigwedge_{j=1}^{k} \tilde{P}^{(j)}$$

reduziert ($\tilde{P}^{(j)}$ kann hier sowohl $P^{(j)}$ als auch $\overline{P}^{(j)}$ bezeichnen), falls alle $A^{(i)}$ reduziert sind.

BEWEIS. Betrachten wir erst den einfachsten Fall $k=2$. C wäre dann und nur dann reduzierbar, wenn man mindestens zwei äquivalente Zustände, z. B. c_i und $c_j \neq c_i$ angeben könnte. $c_i(a_i^{(1)}; a_i^{(2)})$ und $c_j(a_j^{(1)}; a_j^{(2)})$ sind aber dann und nur dann äquivalent, falls für jedes $p \in F(X)$ die Zustände $\vartheta_c(c_i, p)$ und $\vartheta_c(c_j, p)$ in derselben zu unterscheidenen Zustandteilmenge liegen. Da aber $A^{(1)}$ und $A^{(2)}$ als reduziert vorausgesetzt worden sind, d. h. $a_i^{(1)}$ und $a_j^{(1)} \neq a_i^{(1)}$ bzw. $a_i^{(2)}$ und $a_j^{(2)} \neq a_i^{(2)}$ nicht äquivalent sind, so kann man entweder mindestens ein $p_1 \in F(X)$ mit

$$\vartheta^{(1)}(a_i^{(1)}, p_1) \in \mathscr{A}_1^{(1)}, \quad \text{jedoch} \quad \vartheta^{(1)}(a_j^{(1)}, p_1) \in \mathscr{A}^{(1)} - \mathscr{A}_1^{(1)}, \tag{8}$$

oder aber ein $p_2 \in F(X)$ mit

$$\vartheta^{(1)}(a_i^{(1)}, p_2) \in \mathscr{A}^{(1)} - \mathscr{A}_1^{(1)}, \quad \text{jedoch} \quad \vartheta^{(1)}(a_j^{(1)}, p_2) \in \mathscr{A}_1^{(1)} \tag{9}$$

angeben, und ebenso ein q_1 bzw. q_2 für das Index „(2)".
Es gilt ferner (6) gemäß

$$\begin{aligned} \vartheta_c(c_i, p) &= (\vartheta^{(1)}(a_i^{(1)}, p); \vartheta^{(2)}(a_i^{(2)}, p)); \\ \vartheta_c(c_j, p) &=[(\vartheta^{(1)}(a_j^{(1)}, p); \vartheta^{(2)}(a_j^{(2)}, p)). \end{aligned} \tag{10}$$

Es seien also c_i und c_j äquivalent und es sei vorausgesetzt, daß $a_i^{(2)} = a_j^{(2)}$ (dann also natürlich $a_i^{(1)} \neq a_j^{(1)}$, da $c_i \neq c_j$). Falls aber jetzt der Fall (8) vorliegt, dann ist (8) und (10) gemäß

im Falle $\vartheta^{(2)}(a_i^{(2)}, p_1) = \vartheta^{(2)}(a_j^{(2)}, p_1) \in \mathscr{A}_1^{(2)}$:

$$\vartheta_c(c_i, p_1) \in \mathscr{A}_1^{(1)} \times \mathscr{A}_1^{(2)}, \quad \text{jedoch} \quad \vartheta_c(c_j, p_1) \in (\mathscr{A}^{(1)} - \mathscr{A}_1^{(1)}) \times \mathscr{A}_1^{(2)}, \tag{11}$$

im Falle $\vartheta^{(2)}(a_i^{(2)}, p_1) = \vartheta^{(2)}(a_j^{(2)}, p_1) \in \mathscr{A}^{(2)} - \mathscr{A}_1^{(2)}$ aber:

$$\vartheta_c(c_i, p_1) \in \mathscr{A}_1^{(1)} \times (\mathscr{A}^{(2)} - \mathscr{A}_1^{(2)}) \text{ jedoch } \vartheta_c(c_j, p_1) \in (\mathscr{A}^{(1)} - \mathscr{A}_1^{(1)}) \times (\mathscr{A}^{(2)} - \mathscr{A}_1^{(2)}). \tag{12}$$

Im ersten Falle ist dann (11) gemäß c_i mit c_j jedoch nicht äquivalent, und zwar im Zusammenhang mit $P^{(1)} \wedge P^{(2)}$, im zweiten Falle ebenso (12) gemäß in Zusammenhang mit $P^{(1)} \wedge \overline{P}^{(2)}$.

Demselben Gedankengang kann man bei allen anderen Möglichkeiten (und auch im Fall $k>2$) anwenden um einzusehen, daß c_i und $c_j \neq c_i$ im Zusammenhang mit irgendeinem Ausdruck $\bigwedge\limits_{\varrho} \tilde{P}^{(\varrho)}$ nicht äquivalent sein kann. Damit ist unser Satz bewiesen.

Um noch zu zeigen, daß im Falle, wenn wir durch C nur einen Teil der möglichen Ausdrücke realisieren wollen, die direkte Summe im allgemeinen reduzierbar ist, betrachten wir folgendes Beispiel: Es sei

$$X=\{x, y\}, \; P^{(1)}=x^*(=e\vee x\vee xx\vee xxx\vee \dots),$$

(das sog. Iterierte von x; e ist das leere Wort), weiter $P^{(2)}=y^*$, folglich

$$\vartheta^{(1)}(a_0^{(1)}, x)=a_0^{(1)}; \quad \vartheta^{(1)}(a_0^{(1)}, y)=a^{(1)}\neq a_0^{(1)};$$

$$\vartheta^{(1)}(a^{(1)}, x)=\vartheta^{(1)}(a^{(1)}, y)=a^{(1)},$$

$$\vartheta^{(2)}(a_0^{(2)}, y)=a_0^{(2)}; \quad \vartheta^{(2)}(a_0^{(2)}, x)=a^{(2)}\neq a_0^{(2)};$$

$$\vartheta^{(2)}(a^{(2)}, x)=\vartheta^{(2)}(a^{(2)}, y)=a^{(2)}.$$

Dann ist $P^{(1)}\wedge P^{(2)}=x^*\wedge y^*=e$, und so durch das Viertupel C mit

$$\vartheta_c(c_0, x)=\vartheta_c(c_0, y)=c\neq c_0; \quad \vartheta_c(c, x)=\vartheta_c(c, y)=c,$$

also durch zwei Zustände realisierbar ist. Hier sind ja die Zustände der direkten Summe

$$(a_0^{(1)}, a^{(2)}) \quad \text{und} \quad (a^{(1)}, a_0^{(2)}) \quad \text{und} \quad (a^{(1)}, a^{(2)})$$

miteinander — im Zusammenhang mit $P^{(1)}\wedge P^{(2)}$ allein — äquivalent.

4. Betrachten wir jetzt Produkte von regulären Ausdrücken. In diesem Fall können wir folgendermaßen mit Hilfe eines Rechenautomaten arbeiten: Erst lassen wir nur dasjenige Programm laufen, das dem ersten Faktor entspricht. Falls wir einen solchen Zustand erreichen, der einem zum ersten Faktor gehörigen Wort entspricht, dann schalten wir ein Exemplar des dem zweiten Faktor entsprechenden Programms ein, aber wir lassen parallel auch das andere Programm laufen; man weiss nämlich nicht ob schon jetzt ein dem zweiten Faktor entsprechendes Teilwort anfängt, oder aber die weitere Buchstaben mit dem bisherigen Teilwort ein längeres, aber noch dem ersten Faktor entsprechendes Wort bilden. Falls wir nun wieder einen solchen Zustand erreichen, der einem zum ersten Faktor gehörigen Wort entspricht, dann schalten wir ein zweites Exemplar des dem zweiten Faktor entsprechenden Programms ein, usw. Falls aber zwei Exemplare der dem zweiten Faktor entsprechenden Programme in einem Zeitpunkt denselben Zustand erreichen, dann kann man eines von ihnen ausschalten, denn sie verfolgen beide sowieso denselben Weg, was aber überflüssig ist. Wir brauchen also sicher nicht mehr Exemplaren, als wieviel Zustande das dem zweiten Faktor entsprechende Viertupel insgesamt besitzt. Auch dann, falls es auch solche Zustände gibt, welche solchen Wörtern entsprechen, die nicht in ein dem zweiten Faktor entsprechenden Wort sich fortsetzen lassen, können wir auch diejenige Exemplare gleich ausschalten, die einen solchen Zustand erreicht haben. Es sei noch bemerkt, daß wir — genauer gesagt – nur ein Exemplar der Programme brauchen, nur müssen mehrere Zustandskomponenten in Betracht gezogen werden.

In der Viertupelsprache entspricht diesem Gedankengang folgende Konstruktion für den regulären Ausdruck $P^{(1)}P^{(2)}\ldots P^{(k)}$: wir realisieren sie mit Hilfe des Viertupels $D(X, \mathfrak{D}, d_0, \vartheta_d)$, wobei

$$d_0 = a_0^{(1)}; \quad \mathfrak{D} = \mathscr{A}^{(1)} \times 2^{\mathscr{A}^{(2)}} \times 2^{\mathscr{A}^{(3)}} \times \ldots \times 2^{\mathscr{A}^{(k)}} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \vartheta_d(d, x_j) &= \vartheta_d\big((a^{(1)}; \mathscr{B}_T^{(2)}; \mathscr{B}_T^{(3)}; \ldots; \mathscr{B}_T^{(k)}), x_j\big) = \\ &= \big(\vartheta^{(1)}(a^{(1)}, x_j); \beta_T^{(2)}; \beta_T^{(3)}; \ldots; \beta_T^{(k)}\big); \end{aligned} \tag{14}$$

die $\mathscr{B}_T^{(\varrho)}$ Teilmengen der Mengen $\mathscr{A}^{(\varrho)}$ sind, ferner

$$\beta_T^{(\varrho+1)} = \begin{cases} \vartheta^{(\varrho+1)}(\mathscr{B}_T^{(\varrho+1)}, x_j), & \text{falls} \quad \vartheta^{(\varrho)}(\mathscr{B}_T^{(\varrho)}, x_j) \cap \mathscr{A}_1^{(\varrho)} = \Theta \\ a_0^{(\varrho+1)} \cup \vartheta^{(\varrho+1)}(\mathscr{B}_T^{(\varrho+1)}, x_j), & \text{falls} \quad \vartheta^{(\varrho)}(\mathscr{B}_T^{(\varrho)}, x_j) \cap \mathscr{A}_1^{(\varrho)} \neq \Theta \end{cases} \tag{15}$$

und zuletzt

$$\begin{aligned} \vartheta^{(\varrho)}(\mathscr{B}_T^{(\varrho)}, x_j) &= \vartheta^{(\varrho)}\big(\{a_{\varrho 1}^{(\varrho)}; a_{\varrho 2}^{(\varrho)}; \ldots; a_{\varrho s}^{(\varrho)}\}, x_j\big) = \\ &= \{\vartheta^{(\varrho)}(a_{\varrho 1}^{(\varrho)}, x_j); \vartheta^{(\varrho)}(a_{\varrho 2}^{(\varrho)}, x_j); \ldots; \vartheta^{(\varrho)}(a_{\varrho s}^{(\varrho)}, x_j)\}. \end{aligned} \tag{16}$$

SATZ 6. *Das Viertupel D, definiert durch* (13)–(16) *realisiert den regulären Ausdruck $P^{(1)} \cdot P^{(2)} \ldots P^{(k)}$, undzwar durch die Zustandsmenge*

$$\mathfrak{D}_1 = \mathscr{A}^{(1)} \times 2^{\mathscr{A}^{(2)}} \times 2^{\mathscr{A}^{(3)}} \times \ldots \times 2^{\mathscr{A}^{(k-1)}} \times \mathscr{B}_T^{(k)},$$

mit

$$\mathscr{B}_T^{(k)} \cap \mathscr{A}_1^{(k)} \neq \Theta. \tag{17}$$

BEWEIS. Betrachten wir ein beliebiges Wort $p \in F(X)$. Setzen wir zuerst voraus, daß $p \in P^{(1)}P^{(2)}\ldots P^{(k)}$. In diesem Falle ist p sicher in mindestens einer Form

$$p = q_1 q_2 \cdots q_k \quad \text{mit} \quad q_i \in P^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k) \tag{18}$$

trennbar. Fall nun q_1 nicht in $q_{11} q_{12} = q_1$ mit $q_{11} \in P^{(1)}$ trennbar ist, so gilt

$$\vartheta_d(d_0, q_1) = (a_{q_1}^{(1)}; a_0^{(2)}). \tag{19}$$

Falls aber q_1 so in $q_1 = q_{11} q_{12}$ trennbar ist, daß $q_{11} \in P^{(1)}$ schon gültig ist, so aber nicht, daß auch noch $q_1 = q_{11} q_{12} q_{13}$ mit $q_{11} \in P^{(1)}$, $q_{12} \in P^{(2)}$ gälte, dann ist

$$\vartheta_d(d_0, q_1) = (a_{q_1}^{(1)}; a_0^{(2)} \cup \mathscr{B}_{T_{q_1}}^{(2)}). \tag{20}$$

Falls noch q_1 auch so trennbar ist, daß $q_{11} \in P^{(1)}$, $q_{12} \in P^{(2)}$, usw. gültig ist, dann

$$\vartheta_d(d_0, q_1) = (a_{q_1}^{(1)}; a_0^{(2)} \cup \mathscr{B}_{T_{q_1}}^{(2)}; \ldots). \tag{21}$$

Es folgt also, daß $\vartheta_d(d_0, q_1)$ als zweite Komponente immer eine solche Teilmenge besitzt, welche $a_0^{(2)}$ enthält. Ebenso kann man im allgemeinen einsehen, daß (18) gemäß $\vartheta_d(d_0, q_1, q_2, \ldots, q_i)$ als $(i+1)$-te Komponente eine solche Teilmenge für $i = 1, 2, \ldots, k-1$ enthält, welche auch $a_0^{(i+1)}$ enthält. Daraus folgt aber, daß

$$\vartheta_d(d_0, q_1, q_2, \ldots, q_{k-1}, q_k) = \vartheta_d\big((a_{q_{k-1}}^{(1)}; \mathscr{B}_{T_{q_{k-1}}}^{(2)}; \ldots; \mathscr{B}_{T_{q_{k-1}}}^{(k)} \cup a_0^{(k)}), q_k\big) =$$

$$= (a_{q_k}^{(1)}; \mathscr{B}_{T_{q_k}}^{(2)}; \ldots; \mathscr{B}_{T_{q_k}}^{(k)} \cup \vartheta^{(k)}(a_0^{(k)}, q_k)),$$

mit

$$(\mathscr{B}_{T_{q_k}}^{(k)} \cup \vartheta^{(k)}(a_0^{(k)}, q_k)) \cap \mathscr{A}_1^{(k)} \neq 0 \tag{22}$$

gültig ist.

Es sei nun vorausgesetzt, daß $p \notin P^{(1)} P^{(2)} \ldots P^{(k)}$. Wäre doch in

$$\vartheta_d(d_0, p) = (a_p^{(1)}; \mathscr{B}_{T_p}^{(2)}; \ldots; \mathscr{B}_{T_p}^{(k)}). \tag{23}$$

$\mathscr{B}_{T_p}^{(k)} \cap \mathscr{A}_1^{(k)} \neq \Theta$, das würde bedeuten, daß p so in $p = r_1 \cdot q_k$ trennbar ist, daß die k-te Komponente von $\vartheta_d(d_0, r_1)$ ja $a_0^{(k)}$ enthält und $q_k \in P^{(k)}$; hier kann man ja r_1 auch so wählen, daß für jeden echten vorderen Teil von r_1 der Zustand keine k-te Komponente besässe. Daraus folgt aber, daß auch r_1 so in $r_1 = r_2 q_{k-1}$ trennbar ist, daß $q_{k-1} \in P^{(k-1)}$. Wendet man in den obigen Gedankengang Schritt zu Schritt auf $r_2, r_3, \ldots$, zuletzt auf r_{k-1} an, so folgt, daß p in der Form

$$p = r_1 q_k = r_1 r_2 q_{k-1} = \ldots = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdots q_k$$

mit

$$q_1 \in P^{(1)}; q_2 \in P^{(2)}; \ldots; q_k \in P^{(k)}$$

trennbar ist, folglich $p \in P^{(1)} P^{(2)} \ldots P^{(k)}$ — in Gegensatz zu unser Voraussetzung. Damit ist aber unser Satz völlig bewiesen.

Über die Reduziertheit von D ist sehr schwer etwas zu sagen. Wir haben schon bemerkt, daß im Falle, wenn $A^{(i)}$ auch einen solchen Zustand besitzt, von welchem aus $\mathscr{A}_1^{(i)}$ nicht erreichbar ist, dann D nicht reduziert ist. Um D in solchen Fällen zu reduzieren, können wir diejenige Teilmengen $\mathscr{B}_T^{(i)}$, die sich nur durch solche „nicht-wesentliche" Zustände unterscheiden, als äquivalente Zustände zusammenfassen. Dieses Verfahren nennen wir Zusammenziehen. Reduzierbarkeit kann aber auch aus anderen Gründen vorkommen.

Wir nennen die Zustandsteilmenge $\mathscr{B}_T^{(i)} \subset \mathscr{A}^{(i)}$ im Hinblick auf $\mathscr{A}_1^{(i)}$ vollständig, falls zu jedem Wort $p \in F(X)$ mindestens ein Zustand $a^{(i)} \in \mathscr{B}_T^{(i)}$ so angegeben werden kann, daß $\vartheta^{(i)}(a^{(i)}, p) \in \mathscr{A}_1^{(i)}$ gültig ist. Falls wir nun für ein $i \leqq k$ eine vollständige echte Teilmenge $\mathscr{B}_T^{(i)} \neq \mathscr{A}^{(i)}$ haben, so ist D wieder reduzierbar, da hier alle Teilmengen von $\mathscr{A}^{(i)}$, die $\mathscr{B}_T^{(i)}$ enthalten, mit $\mathscr{B}_T^{(i)}$ äquivalent sind. Um in diesem Falle die Reduziertheit zu sichern, genügt es, wenn man alle $\mathscr{B}_T^{(i)}$ enthaltende Teilmengen von $\mathscr{A}^{(i)}$ den $\mathscr{B}_T^{(i)}$ gleichsetzt, ferner $\vartheta^{(i)}(\mathscr{B}_T^{(i)}, p) = \mathscr{B}_T^{(i)}$ anstatt (16) nimmt. Dieses Verfahren nennen wir Vervollständigung. Es sei hier bemerkt, daß man die Menge der Wörter, die von $a_{i_1}^{(i)}$ zu $a_{i_2}^{(i)}$ führen, durch einen regulären Ausdruck, die Menge der Wörter daher, die von $a_{i_1}^{(i)}$ zu $\mathscr{A}_1^{(i)}$ führen, durch eine Summe von regulären Ausdrücken, d. h. durch einen regulären Ausdruck angeben kann. Die Menge der Wörter daher, die von mindestens einem Zustande von $\mathscr{B}_T^{(i)}$ zu $\mathscr{A}_1^{(i)}$ führen, kann man durch eine Summe der obigen Summen, d. h. wieder durch einen regulären

Ausdruck angeben. $\mathscr{B}_{T_i}^{(i)}$ ist dann und nur dann im Hinblick auf $\mathscr{A}_1^{(i)}$ vollständig, wenn dieser Ausdruck mit $F(X)$ gleich ist.

Es kann auch vorkommen, daß $A^{(i)}$ reduziert, $\mathscr{B}_{T_1}^{(i)}$ und $\mathscr{B}_{T_2}^{(i)}$ nicht gleich, ferner keines der beiden vollständig ist, jedoch der reguläre Ausdruck, welcher alle Wörter, die aus mindestens einem Zustande von $\mathscr{B}_{T_1}^{(i)}$ zu einem von $\mathscr{A}_1^{(i)}$ führen, derselbe ist, wie derjenige Ausdruck, welcher aus irgendwelchem $\mathscr{B}_{T_2}^{(i)}$ in $\mathscr{A}_1^{(i)}$ führt. Um die Reduziertheit von D zu erreichen, müssen wir auch diese Teilmengen zusammenziehen, und die Durchgangsfunktion beliebig durch eines der beiden definieren. Dieses Verfahren nennen wir Vervollkommnung. Es soll auch darauf gewiesen werden, daß Vervollkommnung auch Zusammenziehen involviert.

Auch folgende Erscheinung kann Reduzierbarkeit als Folge haben: für zwei Teilmengen, $\mathscr{B}_{T_1}^{(i)}$ und $\mathscr{B}_{T_2}^{(i)}$ kann der sie unterscheidende reguläre Ausdruck nur solche Wörter p enthalten, die so in $p_1 \cdot p_2$, bzw. $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ usw. trennbar sind, daß mit entsprechenden Teilmengen $\mathscr{B}_T^{(i-1)}$ usw. z. B.

$$\vartheta^{(i)}(\mathscr{B}_{T_1}^{(i)}, p) \cap \mathscr{A}_1^{(i)} = \Theta, \quad \text{jedoch} \quad \vartheta^{(i)}(\mathscr{B}_{T_2}^{(i)}, p) \cap \mathscr{A}_1^{(i)} \neq \Theta$$

gültig ist, aber

$$\vartheta^{(i-1)}(\mathscr{B}_T^{(i-1)}, p_1) \cap \mathscr{A}_1^{(i-1)} \neq \Theta, \quad \text{und} \quad \vartheta^{(i)}(a_0^{(i)}, p_2) \in \mathscr{A}_1^{(i)},$$

bzw.

$$\vartheta^{(i-2)}(\mathscr{B}_T^{(i-2)}, p_1) \cap \mathscr{A}_1^{(i-2)} \neq \Theta;$$

$$\vartheta^{(i-1)}(\mathscr{B}_T^{(i-1)} \cup a_0^{(i-1)}, p_2) \cap \mathscr{A}_1^{(i-1)} \neq \Theta, \quad \text{und} \quad \vartheta^{(i)}(a_0^{(i)}, p_3) \in \mathscr{A}_1^{(i)},$$

usw. vorliegt, und umgekehrt in Hinblick von $\mathscr{B}_{T_2}^{(i)}$. In solchen Fällen und in solchen Kombinationen braucht man nur $\mathscr{B}_{T_1}^{(i)}$ und $\mathscr{B}_{T_2}^{(i)}$ wieder Zusammenzuziehen, um Reduziertheit von D zu sichern; die Durchgangsfunktion läßt sich beliebig durch $\mathscr{B}_{T_1}^{(i)}$ oder $\mathscr{B}_{T_2}^{(i)}$ definieren. Dieses Verfahren nennt man Abkürzung.

Noch eine Ursache kann Reduzierbarkeit von D involvieren. Es sei denn vorausgesetzt, daß $A^{(i)}$ reduziert ist, aber auch solche Zustände besitzt, wie z. B. $a_{i_1}^{(i)}$ und $a_{i_2}^{(i)}$, ferner $\mathscr{A}^{(i+1)}$ eine solche Teilmenge $\mathscr{B}_{T_{i_{12}}}^{(i+1)}$, daß $a_{i_1}^{(i)}$ und $a_{i_2}^{(i)}$ nur durch einen solchen regulären Ausdruck $Q_{i_{12}}^{(i)}$ unterscheidbar sind, daß man zu jedem Worte $p \in Q_{i_{12}}^{(i)}$ mindestens einen Zustand $a^{(i+1)} \in \mathscr{B}_{T_{i_{12}}}^{(i+1)}$ mit $\vartheta^{(i+1)}(a^{(i+1)}, p) = a_0^{(i+1)}$ finden kann. Dann sind aber diejenige Zustände, die in der i-ten Komponente nur $a_{i_1}^{(i)}$ statt $a_{i_2}^{(i)}$ enthalten (oder umgekehrt), in der $(i+1)$-ten Komponente aber eine $\mathscr{B}_{T_{i_{12}}}^{(i+1)}$ enthaltende Teilmenge besitzen, miteinander äquivalent. Man kann also diese Zustände zusammenziehen und die Durchgangsfunktion beliebig durch $a_{i_1}^{(i)}$ oder $a_{i_2}^{(i)}$ definieren um Reduziertheit zu erreichen. Man nennt dieses Verfahren Korrelieren.

SATZ 7. *Sind die Viertupeln* $A^{(i)}$ $(i = 1, 2, \dots, k)$ *im Zusammenhang mit den regulären Ausdrücken* $P^{(i)}$ *reduziert, ist ferner in D Vervollständigung, Vervollkommung, Korrelieren und Abkürzung ausgeführt, so ist D im Zusammenhang mit* $P^{(1)} \cdot P^{(2)} \dots P^{(k)}$ *reduziert.*

Beweis. Wäre D doch reduzierbar, so gäbe es mindestens zwei äquivalente Zustände, z. B.

$$d_\alpha = (a_\alpha^{(1)}, \mathscr{B}_{T_\alpha}^{(2)}, \ldots, \mathscr{B}_{T_\alpha}^{(k)}) \tag{24}$$

und

$$d_\beta = (a_\beta^{(1)}, \mathscr{B}_{T_\beta}^{(2)}, \ldots, \mathscr{B}_{T_\beta}^{(k)}) \neq d_\alpha, \tag{24}$$

d. h. für jedes Wort $p \in F(X)$ entweder

$$\vartheta_d(d_\alpha, p) \in \mathfrak{D}_1 \text{ und gleichzeitig } \vartheta_d(d_\beta, p) \in \mathfrak{D}_1 \tag{25}$$

oder aber

$$\vartheta_d(d_\alpha, p) \notin \mathfrak{D}_1 \text{ und gleichzeitig } \vartheta_d(d_\beta, p) \notin \mathfrak{D}_1 \tag{26}$$

gelten muß. Es sei nun zuerst vorausgesetzt, daß $\mathscr{B}_{T_\alpha}^{(k)} \neq \mathscr{B}_{T_\beta}^{(k)}$ gültig ist. Da aber $A^{(k)}$ reduziert und für D auch in der k-ten Komponente Vervollständigung und Vervollkommung durchgeführt ist, so gibt es mindestens ein Wort $p \in F(X)$ so, daß

$$\vartheta^{(k)}(\mathscr{B}_{T_\alpha}^{(k)}, p) \cap \mathscr{A}_1^{(k)} = \Theta, \quad \text{aber} \quad \vartheta^{(k)}(\mathscr{B}_{T_\beta}^{(k)}, p) \cap \mathscr{A}_1^{(k)} \neq \Theta, \tag{27}$$

oder umgekehrt ein $q \in F(X)$ so, daß

$$\vartheta^{(k)}(\mathscr{B}_{T_\alpha}^{(k)}, q) \cap \mathscr{A}_1^{(k)} \neq \Theta, \quad \text{aber} \quad \vartheta^{(k)}(\mathscr{B}_{T_\beta}^{(k)}, q) \cap \mathscr{A}_1^{(k)} = \Theta \tag{28}$$

gültig ist. $\mathscr{B}_{T_\alpha}^{(k)}$ und $\mathscr{B}_{T_\beta}^{(k)}$ können ja beide nicht vollständig sein wegen Vervollständigung; falls nur eines von ihnen vollständig ist, so muß der Definition gemäß mindestens eines von (27) und (28) gelten, falls aber keines von ihnen vollständig ist, so muß wegen Vervollkommung eines von (27) und (28) erfüllt werden. Aus (27) oder (28) allein sollte jedoch nicht notwendig in einem Widerspruch zu (25) und (26) sein, die vielleicht alle Wörter, die (27) und (28) entsprechen, derart in mehrere Teile zerspaltet werden könnten, daß die vorderen Teile auch $a_0^{(k)}$ in $\vartheta_d(d_\alpha, p_v)$ oder $\vartheta_d(d_\beta, p_v)$ für $\mathscr{B}_{T_\alpha}^{(k)}$ oder $\mathscr{B}_{T_\beta}^{(k)}$ einschalten und die hinteren Teile diesen Zustand in einem Zustande der Menge $\mathscr{A}_1^{(k)}$ überführen. Wegen Abkürzung ist aber das auch ausgeschlossen. $\mathscr{B}_{T_\alpha}^{(k)} \neq \mathscr{B}_{T_\beta}^{(k)}$ führt also zum Widerspruch. Folglich muß $\mathscr{B}_{T_\alpha}^{(k)} = \mathscr{B}_{T_\beta}^{(k)}$ gelten. Da aber $d_\alpha \neq d_\beta$ vorausgesetzt ist, sei i das größte Index, für welches noch $\mathscr{B}_{T_\alpha}^{(i)} \neq \mathscr{B}_{T_\beta}^{(i)}$ gilt. Um nun einzusehen, daß entweder mindestens ein $p \in F(X)$ mit

$$\vartheta^{(i)}(\mathscr{B}_{T_\alpha}^{(i)}, p) \cap \mathscr{A}_1^{(i)} = \Theta, \quad \text{aber} \quad \vartheta^{(i)}(\mathscr{B}_{T_\beta}^{(i)}, p) \cap \mathscr{A}_1^{(i)} \neq \Theta, \tag{29}$$

oder ein $q \in F(X)$ mit

$$\vartheta^{(i)}(\mathscr{B}_{T_\alpha}^{(i)}, q) \cap \mathscr{A}_1^{(i)} \neq \Theta, \quad \text{aber} \quad \vartheta^{(i)}(\mathscr{B}_{T_\beta}^{(i)}, q) \cap \mathscr{A}_1^{(i)} = \Theta \tag{30}$$

existieren muß, braucht man nur den vorigen Gedankengang zu wiederholen. In diesem Falle kann man aber p bzw. q sicher in pr_1 bzw. in qr_1 so fortsetzen, daß

$$\vartheta_d(d_\alpha, pr_1) \notin \mathfrak{D}_1^{(i+1)}, \quad \text{aber} \quad \vartheta_d(d_\beta, pr_1) \in \mathfrak{D}_1^{(i+1)} \tag{31}$$

bzw. daß

$$\vartheta_d(d_\alpha, qr_1) \in \mathfrak{D}_1^{(i+1)}, \quad \text{aber} \quad \vartheta_d(d_\beta, qr_1) \notin \mathfrak{D}_1^{(i+1)}. \tag{32}$$

Das wäre nur dann nicht wahr, falls $\mathscr{B}_T^{(i+1)}$ und $\mathscr{B}_T^{(i+1)} \cup a_0^{(i+1)}$ für jedes r_1 äquivalent wäre, was aber wegen Korrelieren (ferner wegen Vervollkommnung und Vervollständigung) unmöglich ist.

Ebenso kann man darauf folgern, daß pr_1 bzw. qr_1 so zu pr_1r_2, usw. fortzusetzen ist, daß

$$(33) \qquad \vartheta_d(d_\alpha, pr_1 r_2 \ldots r_j) \notin \mathfrak{D}_1^{(i+j)}, \quad \text{aber} \quad \vartheta_d(d_\beta, pr_1 r_2 \ldots r_j) \in \mathfrak{D}_1^{(i+j)}$$

bzw.

$$(34) \qquad \vartheta_d(d_\alpha, qr_1 r_2 \ldots r_j) \in \mathfrak{D}_1^{(i+j)}, \quad \text{aber} \quad \vartheta_d(d_\beta, qr_1 \ldots r_j) \notin \mathfrak{D}_1^{(i+j)}$$

$(j=1, 2, \ldots, k-i)$ gelte $(\mathfrak{D}_1^{(k)} = \mathfrak{D}_1)$.

Aus (27)—(28), bzw. (33)—(34) folgt aber, daß die Voraussetzung, daß d_α und d_β äquivalent sind, in jedem Falle zu einem Widerspruch führt. Dann ist aber D sicher reduziert, was zu bewiesen war.

Es sei gleich bemerkt, daß es praktisch viel bequemer ist D direkt, (13)—(16) gemäß zu konstruieren und nachher zu reduzieren, als Vervollkommnung und Vervollständigung, Abkürzung und Korrelieren auszuführen. Teoretisch ist jedoch Satz 7 interessant, da dadurch gezeigt ist, was für Gründe Reduzierbarkeit von D involvieren können.

5. Betrachten wir jetzt die *Iteration* eines regulären Ausdruckes. Falls das Viertupel $A(X, \mathscr{A}, a_0, \vartheta_a)$ den regulären Ausdruck P durch die Zustandsmenge $\mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}$ realisiert, und wir ein Rechenautomaten-Programm für Simulieren von A haben, so können wir auch $P^* = e \vee P \vee PP \vee PPP \vee \ldots$ leicht simulieren — und zwar fast auf Grund desselben Gedankenganges dessen uns in Bezug auf das Produkt bedienten. Erreicht nämlich der Zustand bei der Eingabe des Eingangswortes die Teilmenge $\mathscr{A}_1$, so schalten wir ein neues Exemplar von A ein, und arbeiten dann mit zwei Zuständen. Erreicht nun wieder ein Zustand dieses Paares $\mathscr{A}_1$, so schalten wir wieder ein neues Exemplar ein, usw. falls es notwendig ist, d. h. falls eines von den anderen nicht mit a_0 gleich ist. Hier benötigt man also wieder nur endlich viele Exemplare, die Maximalzahl ist kleiner oder gleich der Mächtigkeit von $\mathscr{A}$.

In Viertupel-Sprache entspricht diesem Gedankengang folgende Konstruktion für den regulären Ausdruck P^*: wir realisieren sie durch das Viertupel $E(X, \mathscr{E}, e_0, \vartheta_e)$, wo

$$(35) \qquad \mathscr{E} = 2^{\mathscr{A}}; \quad e_0 = a_0$$

und

$$(36) \qquad \vartheta_e(e_i, x_j) = \vartheta_e(\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\}, x_j) = \vartheta_e(\mathscr{B}_{T_i}, x_j) =$$

$$= \begin{cases} \vartheta_a(\mathscr{B}_{T_i}, x_j) = \{\vartheta_a(a_{i_1}, x_j), \vartheta_a(a_{i_2}, x_j), \ldots, \vartheta_a(a_{i_n}, x_j)\}, \text{ falls } \vartheta_a(\mathscr{B}_{T_i}, x_j) \cap \mathscr{A}_1 = \Theta, \\ \vartheta_a(\mathscr{B}_{T_i}, x_j) \cup a_0, \text{ falls } \vartheta_a(\mathscr{B}_{T_i}, x_j) \cap \mathscr{A}_1 \neq \Theta. \end{cases}$$

SATZ 8. *Das Viertupel E, definiert durch* (35)—(36) *realisiert den regulären Ausdruck P^*, und zwar durch die Zustandsmenge* $\{\mathscr{B}_{T\,i_1}, \mathscr{B}_{T i_2}, \ldots, \mathscr{B}_{T i_s}\}$, *wobei*

$$(37) \qquad \mathscr{B}_{T i_j} \cap (\mathscr{A}_1 \cup a_0) \neq \Theta \qquad (j = 1, 2, \ldots, s)$$

die notwendige und hinreichende Bedingung bedeutet.

Beweis. Betrachten wir ein beliebiges Wort $p \in F(X)$. Falls auch $p \in P^*$ gültig ist, so ist entweder $p=e$, oder aber ist in mindestens einer Form

$$p=p_1 p_2 \cdots p_n \quad \text{mit} \quad p_i \in P \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{38}$$

darstellbar. Ist jedoch $p=e$, so wird (37) sicher erfüllt. Ist aber p in der Form (38) darstellbar, so enthält ja (36) gemäß die Teilmenge $\vartheta_e(e_0, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1})$ auch den Zustand a_0, folglich, (36) gemäß

$$\begin{aligned}\vartheta_e(e_0, p) &= \vartheta_e[(\vartheta_e, p_1 p_2 \cdots p_{n-1}), p_n] = \\ &= \vartheta_e(\mathscr{B}_{T_{n-1}} \cup a_0, p_n) = \vartheta_e(\mathscr{B}_{T_{n-1}}, p_n) \cup \vartheta_a(a_0, p)\end{aligned} \tag{39}$$

und so (38) gemäß

$$\vartheta_e(e_0, p) \cap \mathscr{A}_1 \neq \Theta, \quad \text{da} \quad \vartheta_a(a_0, p_n) \in \mathscr{A}_1. \tag{40}$$

Ist aber $p \notin P^*$, so kann es sicher nicht in der Form (38) trennbar sein. Wäre jedoch $\vartheta_e(e_0, p) \cap \mathscr{A}_1 \neq \Theta$ gültig, so besässe p eine Form $p=r_1 q_2$ mit $q_2 \in P$ (wir betrachten den Eintritt desjenigen a_0, das in ein $a \in \mathscr{A}_1$ übergeht) und $r_1 \in P^*$ — oder eventuell $r_1=e$ — da das obige a_0 eben deswegen eintreten kann. Aus $r_1 \in P^*$ und $q_2 \in P$ folgt jedoch $p \in P^*$, in Gegensatz zu unserer Voraussetzung. Folglich ist in diesem Falle $\vartheta_e(e_0, p) \cap \mathscr{A}_1 \neq \Theta$ unmöglich, womit der Satz bewiesen ist.

Es sei hier gleich bemerkt, daß im Beweis des obigen Satzes keine neuen Gedanken herangezogen werden, die über Satz 6 hinausführen würden. Ebenso ist es mit der Reduziertheit von E. Anstatt des Verfahrens „Abkürzung" muß man hier jedoch etwas anderes definieren, da hier im Falle, wenn wir $\mathscr{A}_1$ erreichen, a_0 nicht zu einer anderen, sondern zur selben Teilmenge zugeordnet sein soll.

Wir nennen die Zustände $a_\nu \in \mathscr{A}$ und $a_\mu \neq a_\nu \in \mathscr{A}$ in verallgemeinertem Sinne mit einander äquivalent, falls sie im Zusammenhang mit $\mathscr{A}_1$ nur in solchen Wörtern p abweichen, welche so in $q_1 \cdot q_2$ trennbar sind, daß

$$\vartheta_a(a_\nu, p) \in \mathscr{A}_1, \quad \vartheta_a(a_\mu, p) \notin \mathscr{A}_1$$

jedoch

$$\vartheta_a(a_\mu, q_1) \in \mathscr{A}_1 \quad \text{und} \quad q_2 \in P^*$$

gültig sind. Um Reduziertheit für E sichern, braucht man alle Teilmengen von $\mathscr{A}$, d. h. Zustände von E, die nur in solchen $\mathscr{A}$-Zuständen abweichen, die mit einander im verallgemeinertem Sinne äquivalent sind, zusammenzuziehen, und die Durchgangsfunktion beliebig durch eine von ihnen zu definieren. Dieses Verfahren nennt man Verkürzung.

Satz 9. *Ist A reduziert, ferner in E Vervollkommnung, Vervollständigung und Verkürzung ausgeführt, so ist auch E reduziert.*

Beweis. Wäre E nicht reduziert, so gäbe es mindestens zwei äquivalente Zustände, z. B.

$$e_i=\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_\nu}\} \quad \text{und} \quad e_j=\{a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_\mu}\} \neq e_i.$$

Sind e_i und e_j äquivalent, so gilt für jedes $p \in F(X)$ entweder

$$\vartheta_e(e_i, p) \cap \mathscr{A}_1 = \Theta \quad \text{und zugleich} \quad \vartheta_e(e_j, p) \cap \mathscr{A}_1 = \Theta \tag{41}$$

oder aber

$$\vartheta_e(e_i, p) \cap \mathscr{A}_1 \neq \Theta \quad \text{und zugleich} \quad \vartheta_e(e_j, p) \cap \mathscr{A}_1 \neq \Theta. \tag{42}$$

Nun e_i und e_j können nicht beide vollständig im Hinblick auf $\mathscr{A}_1$ sein, da Vervollständigung ausgeführt ist, und so sie gleich wären. Auch eines und nur eines von ihnen kann nicht vollständig sein, da dann für diesen Zustand immer (42), für den anderen jedoch nachmal (41) gälte. Falls also e_i und e_j äquivalent, jedoch nicht gleich sind, so sind beide nichtvollständig im Hinblick auf $\mathscr{A}_1$. Folglich besitzt mindestens eines von ihnen (z. B. e_i) einen solchen $\mathscr{A}$-Zustand (z. B. a_{i_1}) welchen der andere nicht enthält. Von a_{i_1} ist $\mathscr{A}_1$ sicher erreichbar, da Vervollständigung — wie es schon bemerkt wurde — auch Zusammenziehen enthält. Da weiter auch Vervollkommnung ausgeführt ist, so kann man sicher zu a_{i_1} auch ein solches direkt $\mathscr{A}_1$-erreichendes Wort $q \in F(X)$ angeben, durch welches man von e_j die Menge $\mathscr{A}_1$ nicht erreichen kann, d. h. daß

$$(43) \qquad \vartheta_a(a_{i_1}, q) \in \mathscr{A}_1, \quad \text{folglich} \quad \vartheta_e(e_i, q) \cap \mathscr{A}_1 \neq \Theta,$$

jedoch

$$(44) \qquad \vartheta_a(a_{j_\varrho}, q) \notin \mathscr{A}_1 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, \mu)$$

gültig ist. Es könnte aber geschehen, daß man aus e_j durch q $\mathscr{A}_1$ ja indirekt erreichen kann, d. h. daß zu a_{i_1} ein solches a_{j_ϱ} angegeben werden kann, ferner q so in $q_1 q_2$ bzw. $q_1 q_2 q_3$ bzw. usw. trennbar ist, daß

$$d_a(a_{j_\varrho}, q_1) \in \mathscr{A}_1; \quad \vartheta_a(a_0; q_2) \in \mathscr{A}_1; \ldots$$

doch gültig ist. Diese Möglichkeit ist aber durch Verkürzung auch ausgeschlossen. Folglich kann e_i und $e_j \neq e_i$ nicht äquivalent sein, und damit ist unser Satz völlig bewiesen.

Es sei zuletzt noch bemerkt, daß praktisch auch jetzt bequemer ist anstatt Vervollkommnung, Vervollständigung und Verkürzung das Reduzieren des ursprünglichen Viertupels E auszuführen.

6. Betrachten wir jetzt die Ergänzung $E(P)$ eines regulären Ausdruckes P, d. h. die Menge derjenigen Wörter, die mit einem vorderen Teil eines entsprechenden Wortes aus P identisch sind, auch das leere Wort miteinbegriffen. Ist P mit Hilfe des Viertupels $A(X, \mathscr{A}, a_0, \vartheta_a)$ durch $\mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}$ realisiert, so nennen wir einen jeden Zustand $a \in \mathscr{A}$, zu welchem man ein Wort $p \in F(X)$ mit $\vartheta_a(a, p) \in \mathscr{A}_1$ angeben kann, $\mathscr{A}_1$-Ausgangszustand. Es gilt nun

SATZ 10. *Die Ergänzung $E(P)$ des regulären Ausdruckes P ist mit Hilfe desselben Viertupels A realisiert, welches auch P realisiert, und zwar durch die Teilmenge $\mathscr{A}_2$ der $\mathscr{A}_1$-Ausgangszustände von $\mathscr{A}$.*

BEWEIS. Betrachten wir ein beliebiges Wort $p \in F(X)$. Ist $p \in E(P)$, so kann man der Definition von $E(P)$ gemäß ein Wort $q \in F(X)$ mit $pq \in P$ angeben. Folglich muß

$$(45) \qquad \vartheta_a(a_0, p) = a_p \in \mathscr{A}_2$$

gelten, da

$$\vartheta_\alpha(a_p, q) = \vartheta_a(a_0, pq) \in \mathscr{A}_1$$

wegen $p \cdot q \in P$ gültig ist.

Es sei nun umgekehrt $p \notin E(P)$ vorausgesetzt. Gälte jedoch $\vartheta_a(a_0, p) = a_p \in \mathscr{A}_2$, so könnte man der Definition von $\mathscr{A}_2$ gemäß ein q mit $\vartheta_a(a_p, q) = \vartheta_a(a_0, pq) \in \mathscr{A}_1$ angeben. Folglich wäre $pq \in P$, d. h. $p \in E(P)$ gültig, im Gegensatz zu unserer Voraussetzung. Daraus folgt aber, daß für $p \notin E(P)$ auch $\vartheta_a(a_0, p) \notin \mathscr{A}_2$ gelten muß, womit der Satz bewiesen ist.

SATZ 11. *Ist das Viertupel A im Zusammenhang mit P reduziert, es ist im allgemeinen jedoch im Zusammenhang mit E(P) nicht reduziert.*

BEWEIS. Betrachten wir den regulären Ausdruck $P = x \vee xy \vee zyy$ über $X = \{x, y, z\}$. Dieser ist mit Hilfe des reduzierten Viertupels

$$\vartheta_a(a_0, x) = a_1; \quad \vartheta_a(a_0, y) = a_2; \quad \vartheta_a(a_0, z) = a_3$$

$$\vartheta_a(a_1, x) = a_2; \quad \vartheta_a(a_1, y) = a_4; \quad \vartheta_a(a_1, z) = a_2$$

$$\vartheta_a(a_2, x) = \vartheta_a(a_2, y) = \vartheta_a(a_2, z) = a_2$$

$$\vartheta_a(a_3, x) = a_2; \quad \vartheta_a(a_3, y) = a_5; \quad \vartheta_a(a_3, z) = a_2$$

$$\vartheta_a(a_4, x) = \vartheta_a(a_4, y) = \vartheta_a(a_4, z) = a_2$$

$$\vartheta_a(a_5, x) = a_2; \quad \vartheta_a(a_5, y) = a_4; \quad \vartheta_a(a_5, z) = a_2$$

durch die Zustände a_1, a_4 dargestellt. $E(P)$ ist jedoch auch mit Hilfe

$$\vartheta_a(a_0, x) = a_1; \quad \vartheta_a(a_0, y) = a_2; \quad \vartheta_a(a_0, z) = a_3$$

$$\vartheta_a(a_1, x) = a_2; \quad \vartheta_a(a_1, y) = a_4; \quad \vartheta_a(a_1, z) = a_2$$

$$\vartheta_a(a_2, x) = \vartheta_a(a_2, y) = \vartheta_a(a_2, z) = a_2$$

$$\vartheta_a(a_3, x) = a_2; \quad \vartheta_a(a_3, y) = a_1; \quad \vartheta_a(a_3, z) = a_2$$

$$\vartheta_a(a_4, x) = \vartheta_a(a_4, y) = \vartheta_a(a_4, z) = a_2$$

durch a_1, a_3, a_4 darstellbar, da im Zusammenhang von P sind a_1 und a_5 nicht äquivalent, im Zusammenhang mit $E(P)$ aber äquivalent.

7. Betrachten wir jetzt die sog. Erweiterung $R(P)$ eines regulären Ausdruckes P, welche alle Wörter enthält, die als echter vordere Teil ein Wort aus P besitzen, ferner das leere Wort auch. Falls nun das Viertupel $A(X, \mathscr{A}, a_0, \vartheta_a)$ durch $\mathscr{A}_1$ den regulären Ausdruck P realisiert, so werden wir $R(P)$ durch das Viertupel $F(X, \mathscr{F}, f_0, \vartheta_f)$ realisieren, wo $\mathscr{F}$ ein eindeutiges Bild von $\mathscr{A}$ ist, und zwar

$$a_\nu \to f_\nu, \quad \text{falls} \quad a_\nu \notin \mathscr{A}_1; \quad a_0 \to f_0; \quad a_\mu \to f_{id} \neq f_0, \quad \text{falls} \quad a_\mu \in \mathscr{A}_1 - a_0, \tag{46}$$

ferner für $f_\nu \neq f_{id}$

$$\vartheta_f(f_\nu; x_j) = \begin{cases} f_{\nu_1} \leftarrow \vartheta_a(a_\nu, x_j), & \text{falls} \quad \vartheta_a(a_\nu; x_j) \notin \mathscr{A}_1 - a_0 \\ \qquad f_{id}, & \text{falls} \quad \vartheta_a(a_\nu; x_j) \in \mathscr{A}_1 - a_0, \end{cases} \tag{47}$$

für $f_\nu = f_{id}$ aber

$$\vartheta_f(f_{id}, x_j) = f_{id}. \tag{48}$$

SATZ 12. *Das Viertupel F, definiert unter* (46)—(48), *realisiert den regulären Ausdruck R(P), und zwar durch die Zustände f_0 und f_{id}.*

BEWEIS. Betrachten wir ein beliebiges Wort $p \in F(X)$. Ist $p = e$, so ist definitionsgemäß $p \in R(P)$, und tatsächlich $\vartheta_f(f_0, p) = f_0$. Ist nun $p \neq e, p \in R(P)$, so besitzt p einen kürzesten vorderen Teil $p_1 = p_{11}p_v \in P$. Dann ist $p = p_{11}p_v p_2$, mit $p_{11} \notin P$; $p_{11}p_v \in P$; $p_2 \in F(X)$. Da aber $p_{11}p_v$ der kürzeste zu P gehörige vordere Teil von

p ist, so berührt bei der Eingabe von p_{11} das Viertupel A keinen zu $\mathscr{A}_1 - a_0$ gehörigen Zustand; folglich gilt

$$(49) \qquad \vartheta_f(f_0; p_{11}) \neq f_{id};$$

da nun weiter $p_{11}p_v \in P$, so ist $\vartheta_a(a_0, p_{11}p_v) = a \in \mathscr{A}_1$, folglich

$$(50) \qquad \vartheta_f(f_0, p_{11}p_v) = f_{id}$$

und so, (48) gemäß

$$(51) \qquad \vartheta_f(f_0; p_{11}p_vp_2) = f_{id}.$$

Ist nun $p \neq e$; $p \notin R(P)$, so besitzt p keinen zu P gehörigen vorderen Teil, deshalb wird mit $p = p_{11}$ (49) erfüllt. Damit haben wir unseren Satz bewiesen.

SATZ 13. *Das Viertupel F, definiert wie oben, ist im allgemeinen nicht reduziert.*

BEWEIS. Es sei $X = \{x, y\}$, und $P = xx \vee xy \vee yx \vee yy \vee yyx$. Dann ist das P durch a_3 und a_4 zu realisierende Viertupel

$$\vartheta_a(a_0, x) = a_1; \quad \vartheta_a(a_0, y) = a_2$$

$$\vartheta_a(a_1, x) = \vartheta_a(a_1, y) = a_3 = \vartheta_a(a_2, x); \quad \vartheta_a(a_2, y) = a_4$$

$$\vartheta_a(a_3, x) = \vartheta_a(a_3, y) = a_5; \quad \vartheta_a(a_4, x) = a_3$$

$$\vartheta_a(a_4, y) = a_5; \quad \vartheta_a(a_5, x) = \vartheta_a(a_5, y) = a_5$$

reduziert.

Aber das $R(P)$ zu realisierende Viertupel F, das (46)—(48) gemäß konstruiert wird:

$$\vartheta_f(f_0; x) = f_1; \quad \vartheta_f(f_0, y) = f_2$$

$$\vartheta_f(f_1, x) = \vartheta_f(f_1, y) = f_{id} = \vartheta_f(f_2, x); \quad \vartheta_f(f_2, y) = f_{id},$$

$$\vartheta_f(f_{id}, x) = \vartheta_f(f_{id}, y) = f_{id}$$

ist jedoch nicht reduziert, da f_1 und f_2 hier äquivalent sind. Fast trivial ist

SATZ 14. *Ist A reduziert, und besitzt A keine solche von $\mathscr{A} - \mathscr{A}_1 - a_0$ gewählte Zustandspaare, die nur durch solche Wörter unterscheidbar wären, welche aus dem einen Zustand ausgehend diesen in $\mathscr{A}_1 - a_0$ überführen, aus dem anderen ausgehend, ihn in $\mathscr{A} - \mathscr{A}_1 - a_0$ über führen, jedoch notwendigerweise auch $\mathscr{A}_1 - a_0$ berührend, so ist F auch reduziert. Besitzt jedoch A auch solche Zustände, so können wir sie in F zusammenziehen, und dann wird F reduziert.*

BEWEIS. Ist F nicht reduziert, so besitzt es mindestens zwei äqiuvalente Zustände, z. B. f_1 und f_2. Keine der beiden kann mit f_0 oder mit f_{id} identisch sein, da diese sicher nicht mit anderen Zuständen äquivalent sind. Folglich entspricht beiden ein solcher $\mathscr{A}$-Zustand, z. B. a_1 und a_2, der in $\mathscr{A} - \mathscr{A}_1 - a_0$ liegt. Ist nun A reduziert, so sind a_1 und a_2 unterscheidbar, d. h. es gibt mindestens ein Wort p bzw. $q \in F(X)$, mit

$$(52) \qquad \vartheta_a(a_1, p) \in \mathscr{A}_1, \quad \text{aber} \quad \vartheta_a(a_2, p) \in \mathscr{A} - \mathscr{A}_1$$

oder mit

$$(53) \qquad \vartheta_a(a_1, q) \in \mathscr{A} - \mathscr{A}_1, \quad \text{aber} \quad \vartheta_a(a_2, q) \in \mathscr{A}_1.$$

Kann man auch ein solches, (52) erfüllendes p bzw. (53) erfüllendes q finden, mit dessen Hilfe hervorgerufene Zustandswort von a_2 bzw. von a_1 ausgehend $\mathcal{A}_1$ nicht berührt, so ist f_1 und f_2 nicht äquivalent, da der Definition von F, bzw. (52)—(53) gemäß

$$\vartheta_f(f_1, p) = f_{id}, \quad \text{aber} \quad \vartheta_f(f_2, p) \cap (f_{id} \cup f_0) = \Theta$$

bzw.

$$\vartheta_f(f_1, q) \cap (f_{id} \cup f_0) = \Theta, \quad \text{aber} \quad \vartheta_f(f_2, q) = f_{id}$$

gültig ist. Falls also A nur solche Zustände besitzt, so ist F reduziert. Falls aber auch solche Zustandspaare, z. B. a_1 und a_2, existieren, die nur durch solche Wörter p bzw. q unterscheidbar sind, die den Zustand in $\mathcal{A}$ durch $\mathcal{A}_1$ führen, so ist für solche a_1 und a_2 bzw. für ihnen entsprechende f_1 und f_2

$$\vartheta_f(f_1, r) = \vartheta_f(f_2, r) = f_{id}, \quad \text{falls} \quad \vartheta_a(a_1, r) \in \mathcal{A}_1, \quad \vartheta_a(a_2, r) \in \mathcal{A}_1$$

bzw.

$$\vartheta_f(f_1, r) \neq f_{id}, \vartheta_f(f_2, r) \neq f_{id}, \quad \text{falls} \quad \vartheta_a(a_1, r) \notin \mathcal{A}_1; \quad \vartheta_a(a_2, r) \notin \mathcal{A}_1$$

und

$$\vartheta_f(f_1, p) = \vartheta_f(f_2, p) = f_{id},$$

bzw.

$$\vartheta_f(f_1, q) = \vartheta_f(f_2, q) = f_{id},$$

folglich sind f_1 und f_2 äquivalent, und so zusammenziehbar. Damit ist unser Satz bewiesen.

8. Betrachten wir jetzt die s. g. Verkürzung $V(P)$ des regulären Andruckes P, welcher auch als dualer Ausdruck von $R(P)$ betrachtet werden kann, und welcher aus jenen und nur jenen echten Wörtern von P besteht, von welchen alle echte vorderen Teile P auch enthält.

Die Konstruktion eines Viertupels $G(X, \mathcal{G}, g_0, \vartheta_g)$ welches $V(P)$ realisiert, ist eine duale Version derjenigen von $R(P)$. Betrachten wir also das P durch die Zustandsteilmenge $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$ realisierende Viertupel $A(X, \mathcal{A}, a_0, \vartheta_a)$, und wählen wir diejenige Zustandsmenge $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$, welche von a_0 angehend und nur durch die Zustände von $\mathcal{A}_1$ gehend erreichbar sind; wir nennen die Zustände von $\mathcal{A}_2$ „bezeichnete Zustände". Der Bezeichnungs-Algoritmus ist folgenderweise definiert: Erst bezeichnen wir diejenige Zustände von $\mathcal{A}_1$, die von a_0 direkt, d. h. durch einbuchstäbige Wörter erreichbar sind, und zwar in der Reihenfolge, wie wir das Eingangsalphabet geordnet haben. Dann bezeichnen wir diese Reihenfolge beachtend diejenige Zustände, die von dem schon bezeichneten ersten, zweiten, usw. Zustande wieder direkt erreichbar sind, usw. So bekommen wir $\mathcal{A}_2$. Nun sei

$$g_0 = a_0; \quad \mathcal{G} = g_0 \cup \mathcal{A}_2 \cup g_{id} \tag{54}$$

und

$$\vartheta_g(g, x_j) = \begin{cases} \vartheta_a(g, x_j), & \text{falls} \quad g = g_0 \quad \text{oder} \quad g \in \mathcal{A}_2, \quad \text{und} \quad \vartheta_a(g, x_j) \in \mathcal{A}_2 \\ g_{id} & , \text{falls} \quad g = g_0 \quad \text{oder} \quad g \in \mathcal{A}_2, \quad \text{und} \quad \vartheta_a(g, x_j) \notin \mathcal{A}_2 \\ g_{id} & , \text{falls} \quad g \neq g_0 \quad \text{und} \quad g \notin \mathcal{A}_2, \quad (\text{folglich } g = g_{id}). \end{cases} \tag{55}$$

Satz 15. *Das Viertupel G, definiert durch* (54)—(55), *realisiert $V(P)$ durch die Zustandsmenge $\mathcal{A}_2$.*

BEWEIS. Es sei erst vorausgesetzt, daß $\mathcal{A}_2$ leer ist. Dann ist aber auch $V(P)$ leer, da dann P kein einbuchstäbiges Wort enthält (ist kein $\mathcal{A}_1$-Zustand direkt aus a_0 erreichbar). Es sei jetzt vorausgesetzt, daß $\mathcal{A}_2$ nicht leer ist, und betrachten wir ein Wort $p = x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_n} \in F(X)$. Ist nun $p \in V(P)$, so folgt aus der Definition von $V(P)$, daß

$$(56) \qquad p_1 = x_{i_1} \in P; \quad p_2 = x_{i_1} x_{i_2} \in P; \quad \ldots; \quad p_{n-1} = x_{i_1} \ldots x_{i_{n-1}} \in P; \quad p \in P$$

gültig sind. Wir bekommen durch Induktion

$$(57) \qquad \vartheta_g(g_0, p_1) \in \mathcal{A}_2; \quad \vartheta_g(g_0; p_2) \in \mathcal{A}_2; \ldots; \quad \vartheta_g(g_0, p) \in \mathcal{A}_2.$$

Ist aber $p \notin V(P)$, so gibt es in (56) einen kleinsten Index $j \geqq 1$, für welchen schon $p_j \notin P$ gültig ist. Dann folgt aber durch Induktion, bzw. (55) gemäß, daß

$$\vartheta_g(g_0; p_1) \in \mathcal{A}_2; \quad \ldots; \quad \vartheta_g(g_0; p_{j-1}) \in \mathcal{A}_2;$$

$$\vartheta_g(g_0, p_j) = g_{id} = \vartheta_g(g_0, p_{j+1}) = \ldots = \vartheta_g(g_0, p),$$

folglich $\vartheta_g(g_0, p) \notin \mathcal{A}_2$, was noch zu bewiesen war.

Es ist nicht schwer einzusehen, daß G im allgemeinen nicht reduziert ist, auch wenn A reduziert ist.

9. Bei der Konstruktion eines Viertupels, welches die reguläre Ausdrücke $P_1, P_2, \ldots, P_n$ durch entsprechende Zustandsteilmengen realisiert, können wir praktisch folgendermaßen verfahren: P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ soll durch Buchstaben des Eingangsalphabets, ferner durch die Operationen Komplementbildung, Schnittbildung, Summation, Produktion, Iteration, Ergänzung, Erweiterung und Verkürzung angegeben werden. In diesem Falle können wir Schritt zu Schritt mit Hilfe des Satzes 1, 2, 3, 6, 8, 10, 12, und 15 die vorderen Teile, zuletzt das den ganzen Ausdruck realisierende Viertupel aufbauen, bzw. reduzieren. Zuletzt — und zwar mit Hilfe des Satzes 4 — können wir das erwünschte Viertupel konstruieren und reduzieren, die schon bekannte $A^{(i)}$-s benützend. Diese Methoden lassen sich aber natürlich auch bei der Simulation auf Rechenautomaten gut anwenden.

RECHENTECHNISCHES ZENTRUM
DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN,
BUDAPEST

(Eingegangen am 10. Oktober 1963.)

Literaturverzeichnis

[1] R. F. McNaughton—J. Yamada, Regular expressions and state graphs for automata, *IRE Trans, Elektr. Comp. EC*—9, **1** (1960), S. 39—48.

[2] В. М. Глуков, Абстракная теория автоматов, *Успехи мат. наук.*, **1** (1961), S. 1—62.

[3] S. C. Kleene, Representation of events in nerve nets and automata, *Automata Studies Princeton.* (1956), S. 3—41.

ON THE LIMIT DISTRIBUTION OF THE MAXIMUM OF A RANDOM NUMBER OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES*

By

O. BARNDORFF-NIELSEN (Stanford, California, USA)

(*Presented by* A. RÉNYI)

Let $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ be a sequence of independent, identically distributed random variables (r. v. 's) defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Let $N_1, N_2, \ldots, N_n, \ldots$ denote a sequence of positive, integer-valued r. v. 's on $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ such that

$$\frac{N_n}{n} \to N \text{ in probability}$$

where N is a r. v. satisfying $P\{N \leqq 0\} = 0$. It is known that if X_1 has mean value 0 and variance 1 then as $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{S_{N_n}}{\sqrt{N_n}} \leqq x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \qquad \forall x,$$

where $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. This proposition was proved by ANSCOMBE [1] in the case where N is constant with probability 1. RÉNYI [6] extended Anscombe's result to discrete r. v. 's N. Finally, BLUM, HANSON and ROSENBLATT [3] and MOGYORÓDI [5] independently and at the same time obtained a proof for arbitrary (positive) N. Here we prove a similar result for the r. v. $Z_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Specifically we have

THEOREM. *Let* $\{a_n\}$ *and* $\{b_n\}$ *be sequences of constants with* $a_n > 0 \ \forall n$, *let* Λ *be a nondegenerate d. f. and let* C_Λ *denote the set of continuity points for* Λ. *The following three statements are equivalent.*

(i) $$\mathbf{P}\{Z_n \leqq a_n x + b_n\} \to \Lambda(x) \qquad \forall x \in C_\Lambda$$

(ii) $$\mathbf{P}\{Z_{N_n} \leqq a_{N_n} x + b_{N_n}\} \to \Lambda(x) \qquad \forall x \in C_\Lambda$$

(iii) $$\mathbf{P}\{Z_{N_n} \leqq a_n x + b_n\} \to \int_0^\infty [\Lambda(x)]^s \, d\mathbf{P}\{N \leqq s\} \qquad \forall x \in C_\Lambda$$

(*as* $n \to \infty$).**

As is well-known if (i) holds, then Λ is of one of three types [4]. Necessary and sufficient conditions for convergence to each of the types were given by GNEDENKO

---

* This work was supported in part by the Office of Naval Research, Contract Nonr 225 (28) at Stanford University.

** While the present paper was in print the author learned that this theorem was discovered independently by J. LAMPERTI at approximately the same time as the author found the result.

in [4]. The equivalence of (i) and (iii) in the special case where N is constant with probability 1 has been proved by BERMAN [2].

Before proving the theorem we state two lemmas. The first is essentially Lemma 3 of [3], the second is readily inferred from the first. With $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{A}$ we denote the conditional probability of A given B by $\mathbf{P}(A|B)$. If $\mathbf{P}(B)=0$ we set $\mathbf{P}(A|B)=\mathbf{P}(A)$.

LEMMA 1. *Let $\{k_n\}$ and $\{m_n\}$ with $k_n \leqq m_n$ be two increasing sequences of positive integers and let $\{A_n\}$ be a sequence of events such that A_n depends only on $X_{k_n}, \dots, X_{m_n}$. If A is any event, then*

$$\mathbf{P}(A_n|A) - \mathbf{P}(A_n) \to 0$$

as $n \to \infty$.

LEMMA 2. *Let $\alpha = \sup \{\xi \colon \mathbf{P}\{X_1 \leqq \xi\} < 1\}$ and let $\{\alpha_n\}$ be a sequence with $\alpha_n < \alpha$ $\forall n$ and $\alpha_n \to \alpha$ as $n \to \infty$. If A is any event, then*

$$\mathbf{P}\{Z_n \leqq \alpha_n | A\} - \mathbf{P}\{Z_n \leqq \alpha_n\} \to 0$$

as $n \to \infty$.

Now, let us assume that (i) holds. Let i_0 and v be positive integers. We have (for arbitrary real z)

$$\mathbf{P}\{Z_{N_n} \leqq z\} = \gamma_n + \delta_n + \sum_{i=i_0}^{\infty} \varepsilon_{ni} \tag{1}$$

where

$$\gamma_n = \mathbf{P}\left\{Z_{N_n} \leqq z, \left|\frac{N_n}{n} - N\right| > \frac{1}{v}\right\} \leqq \mathbf{P}\left\{\left|\frac{N_n}{n} - N\right| > \frac{1}{v}\right\}$$

$$\delta_n = \mathbf{P}\left\{Z_{N_n} \leqq z, \left|\frac{N_n}{n} - N\right| \leqq \frac{1}{v}, N \leqq \frac{i_0}{v}\right\} \leqq \mathbf{P}\left\{N \leqq \frac{i_0}{v}\right\}$$

and

$$\varepsilon_{ni} = \mathbf{P}\left\{Z_{N_n} \leqq z, \left|\frac{N_n}{n} - N\right| \leqq \frac{1}{v}, \frac{i}{v} < N \leqq \frac{i+1}{v}\right\}.$$

To prove (ii) we substitute $a_{N_n} x + b_{N_n}$ for z in (1) and note that

$$\varepsilon_{ni} \leqq \mathbf{P}\left\{Z_{\left[n\frac{i-1}{v}\right]} \leqq a_{N_n} x + b_{N_n}, \left|\frac{N_n}{n} - N\right| \leqq \frac{1}{v}, \frac{i}{v} < N \leqq \frac{i+1}{v}\right\}$$

$$\leqq \mathbf{P}\left\{Z_{\left[n\frac{i-1}{v}\right]} \leqq a_{\left[n\frac{i-1}{v}\right]} x + b_{\left[n\frac{i-1}{v}\right]} + \varrho'_{ni}, \frac{i}{v} < N \leqq \frac{i+1}{v}\right\} + \varphi_{ni}$$

where

$$\varrho'_{ni} = \max\left\{\left(a_k - a_{\left[n\frac{i-1}{v}\right]}\right) x + b_k - b_{\left[n\frac{i-1}{v}\right]} \colon \left[n\frac{i-1}{v}\right] < k \leqq \left[n\frac{i+2}{v}\right]\right\}$$

and

$$\varphi_{ni} = \mathbf{P}\left\{\left|\frac{N_n}{n} - N\right| > \frac{1}{v}, \frac{i}{v} < N \leqq \frac{i+1}{v}\right\}.$$

Similarly we find

$$\varepsilon_{ni} \geqq \mathbf{P}\left\{Z_{\left[n\frac{i+2}{v}\right]} \leqq a_{\left[n\frac{i+2}{v}\right]} x + b_{\left[n\frac{i+2}{v}\right]} + \varrho''_{ni},\ \frac{i}{v} < N \leqq \frac{i+1}{v}\right\} - \varphi_n$$

where

$$\varrho''_{ni} = \min\left\{\left(a_k - a_{\left[n\frac{i+2}{v}\right]} x + b_k - b_{\left[n\frac{i+2}{v}\right]} : \left[n\frac{i-1}{v}\right] < k \leqq \left[n\frac{i+2}{v}\right]\right\}.$$

Putting $Z_{\left[n\frac{i+2}{v}\right]} = Z''_{ni}$, $Z_{\left[n\frac{i-1}{v}\right]} = Z'_{ni}$ and defining $a''_{ni}, a'_{ni}, b''_{ni}, b'_{ri}$ similarly we may sum up the above calculations as follows

$$(2) \qquad -\sigma_n + \sum_{i=i_0}^{\infty} \mathbf{P}\left\{Z''_{ni} \leqq a''_{ni} x + b''_{ni} + \varrho''_{ni} \;\middle|\; \frac{i}{v} < N \leqq \frac{i+1}{v}\right\} \cdot \pi_i \leqq \mathbf{P}\{Z_{N_n} \leqq a_{N_n} x + b_{N_n}\} \leqq$$

$$\leqq \sum_{i=i_0}^{\infty} \mathbf{P}\left\{Z'_{ni} \leqq a'_{ni} x + b'_{ni} + \varrho'_{ni} \;\middle|\; \frac{i}{v} < N \leqq \frac{i+1}{v}\right\} \pi_i + \sigma_n$$

where

$$\pi_i = \mathbf{P}\left\{\frac{i}{v} < N \leqq \frac{i+1}{v}\right\} \quad \text{and} \quad \sigma_n = \gamma_n + \delta_n + \sum_{i=i_0}^{\infty} \varphi_{ni}.$$

We have

$$\sigma_n \leqq 2\mathbf{P}\left\{\left|\frac{N_n}{n} - N\right| > \frac{1}{v}\right\} + \mathbf{P}\left\{N \leqq \frac{i_0}{v}\right\}.$$

Take i_0 so large that $(1-\varepsilon)\, \Lambda(x) \leqq \Lambda^{(i+2)/(i-1)}(x)$ and $\Lambda^{(i-1)/(i+2)}(x) \leqq (1+\varepsilon)\, \Lambda(x)$ $\forall\, i \geqq i_0$ and choose v to satisfy $\mathbf{P}\{N \leqq (i_0/v)\} < \varepsilon$. Finally, choose n_0 so large that $\mathbf{P}\{|(N_n/n) - N| > 1/v\} < \varepsilon$ $\forall\, n \geqq n_0$. Then $\sigma_n \leqq 3\varepsilon$ $\forall\, n \geqq n_0$ and thus, on account of lemma 2, (ii) will follow from (2) if we prove that for fixed $i \geqq i_0$

$$(3) \qquad \liminf_{n\to\infty} \mathbf{P}\{Z''_{ni} \leqq a''_{ni} x + b''_{ni} + \varrho''_{ni}\} \geqq (1-\varepsilon)\, \Lambda(x)$$

and

$$(4) \qquad \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\{Z'_{ni} \leqq a'_{ni} x + b'_{ni} + \varrho'_{ni}\} \leqq (1+\varepsilon)\, \Lambda(x).$$

Let $\{k''_n\}$ and $\{k'_n\}$ be sequences of positive integers satisfying $\left[n\frac{i-1}{v}\right] < \begin{Bmatrix} k'_n \\ k''_n \end{Bmatrix} \leqq \left[n\frac{i+2}{v}\right]$ and

$$a''_{ni} x + b''_{ni} + \varrho''_{ni} = a_{k''_n} x + b_{k''_n},$$

$$a'_{ni} x + b'_{ni} + \varrho'_{ni} = a_{k'_n} x + b_{k'_n}.$$

The probability in (3) is equal to

$$F^{\left[n\frac{i+2}{v}\right]}(a_{k''_n} x + b_{k''_n}) \geqq [F^{k''_n}(a_{k''_n} x + b''_{k_n})]^{\mu_n}$$

where

$$\mu_n = \frac{\left[n\dfrac{i+2}{\nu}\right]}{\left[n\dfrac{i-1}{\nu}\right]} \to \frac{i+2}{i-1} \quad \text{as} \quad n\to\infty.$$

Thus

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbf{P}\{Z''_{ni} \leqq a''_{ni}x + b''_{ni} + \varrho''_{ni}\} \geqq \Lambda^{\frac{i+2}{i-1}}(x) \geqq (1-\varepsilon)\Lambda(x).$$

Similarly we obtain

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\{Z'_{ni} \leqq a'_{ni}x + b'_{ni} + \varrho'_{ni}\} \leqq \Lambda^{\frac{i-1}{i+2}}(x) \leqq (1+\varepsilon)\Lambda(x).$$

We have now proved that (i) implies (ii). To prove that it also implies (iii) we put $z = a_n x + b_n$ and $i_0 = 2$ in (1). Reasoning similarly to above we find

$$(5) \qquad -\sigma_n + \sum_{i=2}^{\infty} \mathbf{P}\left\{Z''_{ni} \leqq a_n x + b_n \,\middle|\, \frac{i}{\nu} < N \leqq \frac{i+1}{\nu}\right\}\pi_i \leqq \mathbf{P}\{Z_{N_n} \leqq a_n x + b_n\} \leqq$$

$$\leqq \sum_{i=2}^{\infty} \mathbf{P}\left\{Z'_{ni} \leqq a_n x + b_n \,\middle|\, \frac{i}{\nu} < N \leqq \frac{i+1}{\nu}\right\}\pi_i + \sigma_n.$$

Hence

$$(6) \qquad -\mathbf{P}\left\{N \leqq \frac{2}{\nu}\right\} + \sum_{i=2}^{\infty} \Lambda^{\frac{i+2}{\nu}}(x)\pi_i \leqq \liminf_{n\to\infty} \mathbf{P}\{Z_{N_n} \leqq a_n x + b_n\} \leqq$$

$$\leqq \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\{Z_{N_n} \leqq a_n x + b_n\} \leqq \sum_{i=2}^{\infty} \Lambda^{\frac{i-1}{\nu}}(x)\pi_i + \mathbf{P}\left\{N \leqq \frac{2}{\nu}\right\}$$

and from these inequalities (iii) easily follows.

Next, let us assume (ii) or (iii). According to the weak compactness theorem there exists a subsequence $\{m_n\}$ of $\{n\}$ and a nondecreasing, right continuous function Λ^* such that

$$\mathbf{P}\{Z_{m_n} \leqq a_{m_n}x + b_{m_n}\} \to \Lambda^*(x) \qquad \forall x \in C_{\Lambda^*}.$$

From what has already been proved we obtain $\Lambda = \Lambda^*$. (i) now follows by a standard argument.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
STANFORD UNIVERSITY,
STANFORD, CALIFORNIA, USA

(Received 24 October 1963)

References

[1] F. J. Anscombe, Large-sample theory of sequential estimation, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **48** (1952), pp. 600–607.

[2] S. Berman, *Limiting distribution of the maximum of a diffusion process* (1963). To be published.

[3] J. R. Blum, D. L. Hanson and J. I. Rosenblatt, On the central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables, *Zeit. Wahr. Verw. Gebiete*, **1** (1963), pp. 389–393.

[4] B. V. Gnedenko, Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire, *Ann. Math.*, **44** (1943), pp. 423–453.

[5] J. Mogyoródi, A central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables, *Publ. Math. Inst. Hungarian Acad. Sci.*, **7** (1962), pp. 409–423.

[6] A. Rényi, On the central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **11** (1960), pp. 97–102.

RECENT RESULTS IN TOPOLOGICAL GRAPH THEORY*

By

F. HARARY (Ann Arbor, USA)

(*Presented by* A. RÉNYI)

A *graph* G is usually defined as a finite collection V of points together with a collection X of *lines*, each of which joins two distinct points and no two of which join the same pair of points. This combinatorial definition asserts nothing about drawing graphs on surfaces such as the plane, sphere, torus, projective plane etc. The purpose of this lecture is to explore some of these topological aspects of graph theory and to describe a few unsolved problems concerning them.

In order to fix the terminology of this lecture, we begin by drawing all the graphs with four points:

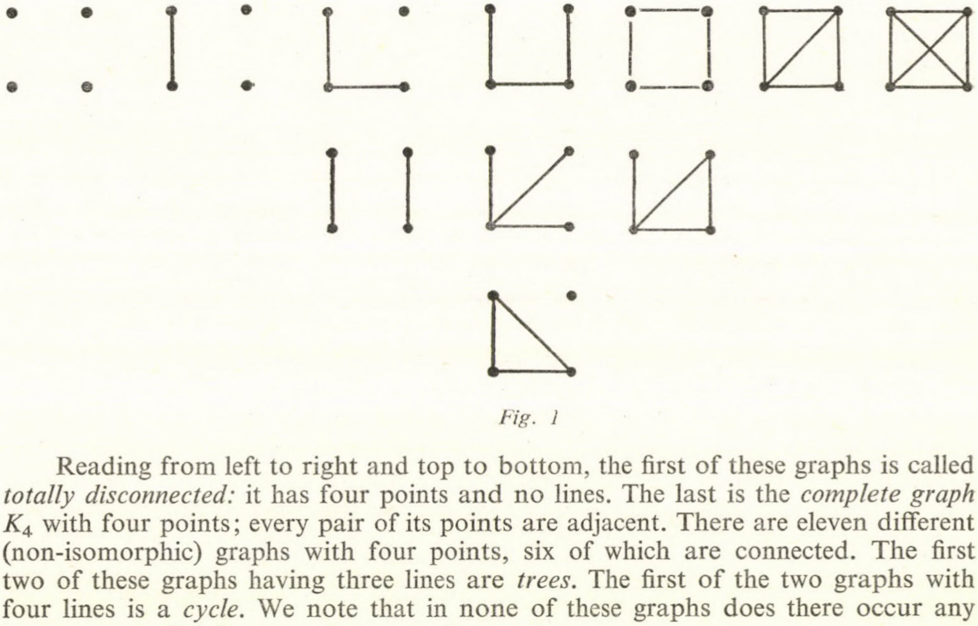


Fig. 1

Reading from left to right and top to bottom, the first of these graphs is called *totally disconnected:* it has four points and no lines. The last is the *complete graph* K_4 with four points; every pair of its points are adjacent. There are eleven different (non-isomorphic) graphs with four points, six of which are connected. The first two of these graphs having three lines are *trees*. The first of the two graphs with four lines is a *cycle*. We note that in none of these graphs does there occur any loops or parallel lines as shown in Figure 2.

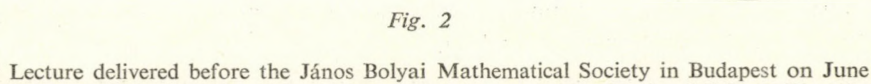


Fig. 2

---

* Lecture delivered before the János Bolyai Mathematical Society in Budapest on June 26, 1963. The preparation of this article was supported in part by the National Science Foundation, U. S. A. under grant NSF GP—207.

A *planar graph* is one which can be drawn in the plane in such a way that no two of its edges intersect, a *plane graph* is already so drawn. In Figure 3 the complete graph K_4 is redrawn as a plane graph differently than in Figure 1, so that it is obviously planar.

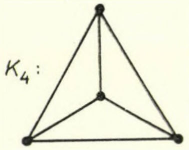


Fig. 3

The *complete bicolored graph* $K_{m,n}$ consists of m points of one color, say light, and n points of another color, say dark, in which two points are adjacent if and only if they have different colors. In Figure 4, both the complete graph K_5 and the complete bicolored graph $K_{3,3}$ are shown. It is easy to verify that neither of these graphs is planar.

Fig. 4

Two graphs are *isomorphic* if there is a 1—1 correspondence between their sets of points which preserves adjacency. The *degree* of a point is the number of lines with which it is incident. Two graphs are *homeomorphic* if it is possible to insert new points of degree 2 into their lines in such a way that the two resulting graphs are isomorphic. A graph homeomorphic with K_4 is shown in Figure 5.

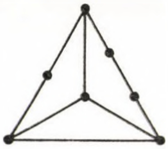


Fig. 5

With the help of these definitions we may state the first theorem of topological graph theory, due to KURATOWSKI [13].

THEOREM 0. *A graph G is planar if and only if it has no subgraph homeomorphic with* K_5 *or* $K_{3,3}$.

We illustrate Theorem 0 in Figure 6(a) with the graph known as the Peterson graph. In Figure 6(b), we see that this graph is not planar, since it contains a subgraph homeomorphic with $K_{3,3}$ as shown by the light and dark points. Surprisingly, this graph which superficially resembles K_5 in appearance does not contain any subgraph homeomorphic with K_5.

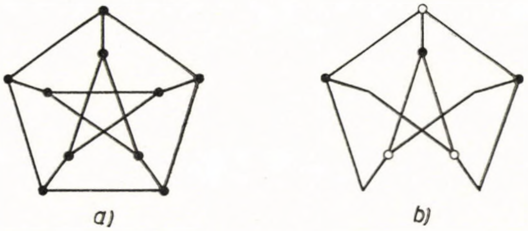


Fig. 6

If a graph with a given number p of points has a sufficiently large number of lines, then it is not planar. The next little theorem, described in HARARY [9], states this precisely.

THEOREM 1. *If a graph G has p points, q lines and $q > 3p-6$, then G is not planar.*

The proof uses Euler's polyhedron formula $V-E+F = 2$. In a triangulated plane graph each edge is on two faces and each face has three edges, so that $3F = 2E$. Hence in such a graph $q = 3p-6$.

COROLLARY 1a. K_5 is not planar.

This is verified at once, since K_5 has $q=10$ and $3p-6 = 9$.

The *thickness* $t(G)$ of a graph G (a term introduced and studied by TUTTE [16]) with at least one line is the minimum number of planar subgraphs whose union is G. For example $t(K_5)=2$ and $t(K_{3,3})=2$.

COROLLARY 1b. For any graph G with p points and q lines,

$$q \leqq (3p-6)\,t(G). \tag{1}$$

Of course every planar graph with at least one line has thickness 1. It is easy to verify that $t(K_8)=2$ by drawing a planar graph G with 8 points whose complement G is also planar. Only recently it has been shown by exhaustion that $t(K_9)=3$; see BATTLE, HARARY and KODAMA [2], and TUTTE [15]. The following table, which will be called Figure 7, lists all the known thicknesses of complete graphs, K_p, for $p=2$ to 33.

p	2–4	5–8	9–15	16	17–21	22	23–28	29–33	34
$t(K_p)$	1	2	3	?	4	?	5	6	?

Fig. 7

The entries for $n = 13$, 14, and 15 cost me one shilling each, since I wagered L. W. BEINEKE that these thicknesses would be 4 and he was able to construct a decomposition of each of these three complete graphs as the union of three planar subgraphs. Of course, knowing in advance that $t(K_9) = 3$ and $t(K_{15}) = 3$, it would not be necessary to demonstrate that this is the value for $p = 13$ and 14. The smallest complete graph whose thickness is not yet known is K_{16}. I would conjecture that $t(K_{16}) = 4$, and that it would require an argument similar to that which settled the thickness of K_9, but even more exhausting because of the considerably increased number of points of the graph. In the next theorem, BEINEKE and HARARY [4], the thickness of five-sixths of all the complete graphs is determined exactly.

THEOREM 2. *The thickness of the complete graph K_p is given by*

$$t(K_p) = \left[\frac{p+7}{6}\right] \quad \textit{for} \quad p \equiv 0, 1, 2, 3, 5 \pmod{6}, p \neq q. \tag{2}$$

The entries in Figure 7 starting with $n = 17$ were first obtained from this theorem.

A graph is *bicolorable* if its points can be colored, using two colors, in such a way that only two points having different colors are adjacent. It is well known that a graph is bicolorable if and only if it contains no cycles of odd length. Therefore, in particular, such a graph contains no triangles and satisfies the hypothesis of the next little theorem, whose proof is entirely analogous with that of Theorem 1.

THEOREM 3. *If G has no triangles and $q > 2p - 4$, then G is not planar.*

COROLLARY 3a. $K_{3,3}$ is not planar.

COROLLARY 3b. If G has no triangles, then

$$q \leqq (2p-4)t(G). \tag{3}$$

The inequalities (1) and (3) and the concept of thickness are generalized in [5].

Applying the inequality (3) to the complete bicolored graph, which is of course bicolorable, we obtain the next inequality. Let $\{x\}$ be the smallest integer not less than x, and as usual let $[x]$ be the largest integer not exceeding x.

COROLLARY 3c. A lower bound for the thickness of the complete bicolored graph is given by

$$t(K_{m,n}) \geqq \left\{\frac{mn}{2(m+n-2)}\right\}.$$

As reported in BEINEKE, HARARY and MOON [7], one can construct a family of graphs to show that most of the time the equality in the preceding corollary holds.

THEOREM 4. *The thickness of the complete bicolored graph is given by*

$$t(K_{m,n}) = \left\{\frac{mn}{2(m+n-2)}\right\} \tag{4}$$

except possibly when m, n are both odd and there exists a positive integer k such that

$$n = \left[\frac{2k(m-2)}{m-2k}\right].$$

The smallest complete bicolored graph whose thickness is not yet known is $K_{17,21}$.

An orientable surface may be regarded as a sphere with handles on it (or holes in it); its genus is the number of handles. The *genus* $\gamma(G)$ of a graph G is defined as the minimum genus of an orientable surface on which G can be drawn with no two of its edges intersecting. Thus Theorem 0 says that a graph has genus 0 if and only if it contains no subgraph homeomorphic with K_5 or $K_{3,3}$. In Figure 8, we see that $\gamma(K_5)=\gamma(K_{3,3})=1$, i. e. that these two graphs are *toroidal.* In this figure a torus is represented in the usual way as a rectangle in which both pairs of opposite sides are identified with each other as indicated by arrows.

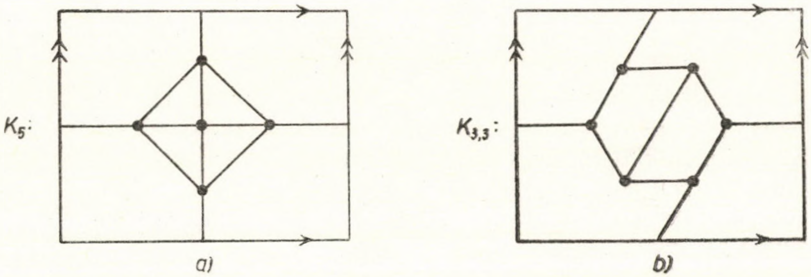


Fig. 8

Nobody knows the generalization of Theorem 0 to graphs of positive genus, not even for toroidal graphs. The question is: G is toroidal if and only if G does not contain homeomorphs of which subgraphs? It is not even known whether the family of such exceptional graphs is finite.

In order to embed graphs (without intersecting edges) in surfaces of large genus, COHEN, HARARY and KODAMA [8] have developed a new method of representing an orientable surface by identifying appropriate edges of a pair of oriented polygons. They then illustrate by embedding K_7 in S_1 (a sphere with one handle), K_8 in S_2, and K_9 in S_3. An especially interesting problem involved the determination of $\gamma(K_n)$. In a sense, this problem is one-half solved.*

THEOREM 5. *The genus of a complete graph is*

$$\gamma(K_n) = \left\{\frac{(n-3)(n-4)}{12}\right\} \tag{5}$$

when $n \equiv 0, 3, 4, 5, 7, 10 \pmod{12}$.

---

* J. W. T. YOUNGS has just informed me that he has also proved equation (5) when $n=12s+1$, so that equation (5) is now 7/12 verifed.

The proof of this result for $n \equiv 3, 5, 7, 10 \pmod{12}$ appears in the work of RINGEL [14]. For $n \equiv 0 \pmod{12}$, the formula (5) was demonstrated by J. W. T. YOUNGS (unpublished) and its validity for $n \equiv 4 \pmod{12}$ was recently established by GUSTIN (unpublished).

The next result, also found by YOUNGS et al [1], [17], is interesting because it relates the genus of a graph with the question of embedding it in a nonorientable surface. The theorem was proved by constructing an appropriate family of graphs G_n.

THEOREM 6. *For any positive integer n, there exists a graph G_n of genus n which can be embedded in the projective plane.*

A *cut point* of a connected graph is one whose removal results in a disconnected graph. A *block of a graph G* is a maximal connected subgraph of G containing no cut points of itself. The next result, proved only after extensive collaborative efforts, expresses the genus of a graph in terms of the genuses of its blocks; see BATTLE, HARARY, KODAMA and YOUNGS [3].

THEOREM 7. *The genus of any graph is the sum of the genuses of its blocks.*

A graph is *n-connected* if it is not disconnected by the removal of any $n-1$ of its points. Thus a block of a graph is a maximal 2-connected subgraph if it has more than two points. Recently, the preceding theorem has been generalized slightly by HARARY and KODAMA [12] to the case in which a given graph is the union of exactly two maximal n-connected subgraphs. Further generalization appears to be a very subtle problem.

The *connectivity* of a graph G is n if G is n-connected but not $(n+1)$-connected. We have recently [10] obtained a formula for the greatest connectivity among all graphs with a given number of points and lines.

THEOREM 8. *The maximum connectivity among all graphs with p points and q lines, is* $\left[\frac{2q}{p}\right]$, *provided* $q \geqq p-1$.

For a given graph G, its *crossing number* $c(G)$ is the minimum number of pairwise intersections of its edges when G is drawn in the plane. The crossing number of the complete bicolored graph was determined exactly by ZARANKIEWICZ [18]:

$$(6) \qquad \begin{cases} c(K_{2m,2n}) = (m^2-m)(n^2-n) \\ c(K_{2m,2n+1}) = (m^2-m)n^2 \\ c(K_{2m+1,2n+1}) = m^2n^2. \end{cases}$$

However, the crossing number of the complete graph remains an open problem. It can be shown by an explicit construction that an upper bound for $c(K_n)$ is given by

$$(7) \qquad c(K_n) \leqq \begin{cases} \frac{1}{64}\ (n-1)^2(n-3)^2 & n \quad \text{odd} \\ \frac{1}{64} n(n-4)\ (n-2)^2 & n \quad \text{even} \end{cases}$$

as mentioned in HARARY and HILL [11]. The concensus of opinion is that the conjecture, which asserts that this upper bound is the exact value of $c(K_n)$, is correct. But it has not even been proved that $c(K_n)$ approaches $n^4/64$ for large n.

Let Q_n be the (graph of the) n-cube, so that Q_n has 2^n points each being a binary sequence $a_1a_2...a_n$ (of zeros and ones). Two points of Q_n are adjacent whenever their sequences differ in exactly one place. We have recently obtained [6] an exact formula for its genus.

THEOREM 9. *The genus of the n-cube is*

$$\gamma(Q_n) = (n-4)2^{n-3}+1. \tag{8}$$

Added in proof. A *shrinking* of a graph is the result of replacing a line by a single point. A *contraction* of a graph is obtained from a sequence of shrinkings. The following criterion for planarity [19] may be readily derived from Kuratowski's theorem.

Theorem 10. *A graph is nonplanar if and only if it has* K_5 *or* $K_{3,3}$ *as a subgraph of a contraction.*

For example it is immediately apparent that the PETERSON graph shown in Figure 6(a) has K_5 as a contraction and hence is nonplanar.

THE UNIVERSITY OF MICHIGAN
AND UNIVERSITY COLLEGE, LONDON

(Received 24 October 1963)

References

[1] L. AUSLANDER, T. A. BROWN and J. W. T. YOUNGS, The imbedding of graphs in manifolds, *J. Math. Mech.*, **12** (1963), pp. 629–634.

[2] J. BATTLE, F. HARARY and Y. KODAMA, Every planar graph with nine points has a nonplanar complement, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **68** (1962), pp. 569–571.

[3] J. BATTLE, F. HARARY, Y. KODAMA and J. W. T. YOUNGS, Additivity of the genus of a graph, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **68** (1962), pp. 565–568.

[4] L. W. BEINEKE and F. HARARY, On the thickness of the complete graph, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **70** (1964), pp. 618–620. The thickness of the complete graph. To appear in *Canadian J. Math.*

[5] L. W. BEINEKE and F. HARARY, Some inequalities involving the genus of a graph and its thicknesses, to appear in *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, 1964.

[6] L. W. BEINEKE and F. HARARY, The genus of the *n*-cube, to appear in *Canadian J. Math.*

[7] L. W. BEINEKE, F. HARARY and J. W. MOON, On the thickness of the complete bipartite graph, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **60** (1964), pp. 1–5.

[8] D. E. COHEN, F. HARARY and Y. KODAMA, On the embedding of complete graphs in orientable surfaces, *Mathematika*, **10** (1963), pp. 79–83.

[9] F. HARARY, A complementary problem on nonplanar graphs, *Math. Mag.*, **35** (1962), pp. 301–303.

[10] F. HARARY, The maximum connectivity of a graph, *Proc. Natl. Acad. Sci.*, U. S. A. **48** (1962), pp. 1142–1146.

[11] F. HARARY and A. HILL, On the number of crossings in a complete graph, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **13** (1963), pp. 333–338.

[12] F. HARARY and Y. KODAMA, On the genus of an *n*-connected graph, *Fund. Math.*, **54** (1963). pp. 7–13.

[13] C. Kuratowski, Sur le problème des courbes gauches en topologie, *Fund. Math.*, **15** (1930), pp. 271–283.

[14] G. Ringel, *Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen* (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1959), Über das Problem der Nachbargebiete auf orientierbaren Flächen, *Abhandlung Math. Sem. Univ. Hamburg*, **25** (1961), pp. 105–127.

[15] W. T. Tutte, The non-biplanar character of the complete 9-graph, *Canad. Math. Bull.*, **6** (1963), pp. 319–330.

[16] W. T. Tutte, The thickness of a graph, *Indag. Math.*, **25** (1963), pp. 567–577.

[17] J. W. T. Youngs, Minimal embeddings and the genus of a graph, *J. Math. Mech.*, **12** (1963), pp. 303–315.

[18] K. Zarankiewicz, On a problem of P. Turán concerning graphs, *Fund. Math.*, **41** (1954), pp. 137–145.

[19] F. Harary and W. T. Tutte, A dual form of Kuratowski's theorem, to appear in *Canadian Math. Bull.*

GRAPHENTHEORETISCHE EXTREMALPROBLEME

Von
B. ANDRÁSFAI (Budapest)
(*Vorgelegt von* G. HAJÓS)

P. Erdős zum 50. Geburtstag mit aufrichtiger Hochachtung gewidmet

§ 1.

Die in dieser Arbeit vorkommenden Graphen sind endlich, ungerichtet und enthalten keine Schlingen; zwei Knotenpunkte (im weiteren einfach *Punkte*) werden höchstens durch eine Kante verbunden.[1] TURÁN ([6], [7]) hat gezeigt, wie viele Kanten bei einem Graphen mit gegebener Punktanzahl die Existenz eines vollständigen Graphen von vorgeschriebener Punktanzahl sichern, und hat alle jene Graphen mit gegebener Punktanzahl bestimmt, die bei maximaler Kantenanzahl keinen vollständigen Graphen von vorgeschriebener Punktanzahl enthalten. Darauf folgend hat ZARANKIEWICZ [8] gezeigt, welcher minimale Grad bei einem Graphen mit gegebener Punktanzahl die Existenz eines vollständigen Graphen mit vorgeschriebener Punktanzahl sichert. Unsere Untersuchungen schließen sich diesen beiden Problemen an, derart, daß außer der Angabe der Punktanzahl n des Graphen auch eine obere Schranke für die maximale Anzahl τ der unabhängigen Punkte vorgeschrieben wird, wobei als Teilgraphen nicht nur vollständige Graphen mit vorgeschriebener Punktanzahl, sondern auch Graphen mit anderen vorgeschriebenen Eigenschaften in Frage kommen. Genauer gefaßt, wir suchen unter den genannten Bedingungen für die Kantenanzahl m *(Kantenanzahl-Problem)* bzw. für die minimale Gradzahl φ_0 *(Gradzahl-Problem)* eine solche untere Schranke, die die Existenz von Teilgraphen mit gegebenen Eigenschaften (kurz, einen vorgeschriebenen Teilgraphen) sichert. Unsere Hauptergebnisse erhalten wir jedoch durch eine solche Modifizierung der vorausgehenden Bedingungen, daß neben n auch τ festgehalten ist. Die Bedingungen bezüglich des Wertes von τ haben die Probleme wesentlich erschwert, und so ist es nicht gelungen, dem Satz von TURÁN bzw. ZARANKIEWICZ ähnlich, diejenigen Bedingungen allgemein anzugeben, die das Vorhandensein eines vollständigen Teilgraphen mit gegebener Punktanzahl sichern. Tiefliegende Ergebnisse haben wir nur für jenen Spezialfall erhalten, wo der vorgeschriebene Teilgraph ein Dreieck ist. (Ergebnisse bezüglich des Kantenanzahl-Problems siehe in [2].) Wir haben uns dagegen mit jener Verallgemeinerung dieses Spezialfalles beschäftigt, wo die vorgeschriebenen Teilgraphen solche ungerade Kreise sind, die eine kleinere

---

[1] In der Arbeit können auch kantenlose sowie leere Graphen auftreten. Der *Grad eines Punktes* ist gleich der Anzahl der zum Punkt inzidenten Kanten. Bestimmte Punkte eines Graphen sind *unabhängig*, wenn unter ihnen kein durch eine Kante verbundenes Paar vorkommt. Bezüglich der Definition von *Teilgraph*, *Weg*, *Kreis*, *n-Eck* siehe [5]. Unter der *Länge eines Kreises* werden wir die Anzahl seiner Kanten verstehen. Einen *Kreis* nennen wir *gerade* oder *ungerade*, je nachdem ob die Anzahl der Kanten gerade oder ungerade ist. Ein *vollständiger n-Graph* ist ein solcher Graph, der n Punkte hat, und je zwei dieser Punkte durch eine Kante verbunden sind.

Länge als eine gegebene Zahl besitzen. Bezüglich dieser Verallgemeinerung ist es uns gelungen, im Gradzahl-Problem tiefliegende Ergebnisse zu erhalten (§ 2).

Wie die Erfahrung zeigt, ist die Lösung der Gradzahl-Probleme leichter als die der entsprechenden Kantenanzahl-Probleme. Dies läßt sich vielleicht dadurch erklären, daß für die Struktur eines Graphen die Bedingung bezüglich der Gradzahlen eine stärkere Einschränkung bedeutet als diejenigen bezüglich der Kantenanzahl.

Die *vollständige Lösung* eines der obenerwähnten Probleme bedeutet die Bestimmung des Maximums der φ_0- bzw. m-Werte jener Graphen, die keinen vorgeschriebenen Teilgraphen enthalten. Jene Graphen von gegebener Punktanzahl und gegebenem τ-Wert, die keinen vorgeschriebenen Teilgraphen enthalten, und deren φ_0- bzw. m-Werte maximal sind, nennen wir die *extremalen Graphen* des Problems.

Unsere Ergebnisse beziehen sich auf solche Fälle, in denen τ/n größer als eine gegebene Schranke ist. Die vollständige Lösung der Probleme für „kleine" Werte von τ/n kann augenblicklich noch nicht erhofft werden, wie dies in [2] § 1 begründet wird.

In § 2 beschäftigen wir uns mit dem folgenden Gradzahl-Problem: n, τ und $k \geqq 2$ seien festgehaltene Werte, und betrachten wir jene Graphen mit n Punkten, in welchen die maximale Anzahl der unabhängigen Punkte gleich τ ist, und die keinen solchen ungeraden Kreis enthalten, dessen Länge kleiner als $2k+1$ wäre. Wir suchen für die φ_0-Werte dieser Graphen eine genaue obere Schranke. Im Falle $\tau/n \geqq \frac{1}{2}$ ist die Lösung einfach (2. 6). (Ähnlicherweise ist die Lösung des entsprechenden Kantenanzahl-Problems für diesen Fall ebenfalls einfach: [2], Satz (3. 4).) Die Lösung für das Intervall $\frac{k}{2k+1} \leqq \frac{\tau}{n} < \frac{1}{2}$ stellt das Hauptergebnis dieses §-en, und gleichzeitig der ganzen Arbeit dar (Satz (2. 7)). Falls n, τ und k auch noch gewissen zahlentheoretischen Bedingungen genügen, so ist unsere Lösung vollständig, und in diesem Falle bestimmen wir für gerades k auch alle extremalen Graphen. Den überwiegenden Teil der Arbeit macht der Beweis des Satzes (2. 7) aus.

§ 3 behandelt einige einfachere Kantenanzahl-Probleme, und berichtet über Verallgemeinerungen, sowie Teilergebnisse und Vermutungen bezüglich dieser.

Nun führen wir einige Bezeichnungen und Definitionen ein.

Wir bezeichnen die Menge der Punkte des Graphen G mit M_G, die Anzahl seiner Punkte mit $\pi(G)$, die maximale Anzahl seiner unabhängigen Punkte mit $\varkappa(G)$ und die Anzahl seiner Kanten mit $\nu(G)$. Anstatt der Bezeichnung $p \in M_G$ schreiben wir auch $p \in G$. Wenn die Punkte p und q durch eine Kante verbunden sind, so sagen wir auch, daß p und q *benachbarte* Punkte sind. Die Kante, welche die Punkte p und q verbindet, wird mit (p, q) bezeichnet. $(p, q) \in G$ bedeutet, daß die Kante (p, q) im Graphen G existiert. Die Anzahl jener Kanten, die in G zum Punkt $p \in G$ inzident sind, d. h. *der Grad von p in G* wird mit $\varphi_G(p)$ bezeichnet, und die kleinste Gradzahl in G mit $\varphi_0(G)$. Wenn $p \in G$ und $A \subseteqq M_G$, bzw. G' ein Teilgraph von G ist, so bezeichnen $\varphi_G(p, A)$ bzw. $\varphi_G(p, G')$ die Anzahl jener Kanten von G, die zu p inzident sind, und deren von p verschiedene Endpunkte zu A bzw. G' gehören. Ist $A = M_G$ bzw. $G' = G$, dann besteht $\varphi_G(p, A) = \varphi_G(p)$ bzw. $\varphi_G(p, G') = \varphi_G(p)$.

Ist A eine Punktmenge und $a \in A$, so nennen wir den Punkt a auch einen *A-Punkt*. Wenn A und B zwei Punktmengen sind, so nennen wir eine solche Kante, welche einen A-Punkt mit einem B-Punkt verbindet, eine *AB-Kante*. Ist $A \subseteqq M_G$ und $B \subseteqq M_G$, so bezeichnet $[A, B]_G$ jenen Graphen, dessen Punktmenge $A \cup B$ ist, und dessen Kanten sämtliche in G existierenden AB-Kanten sind. Anstatt $[A, A]_G$ schreiben wir kurz $[A]_G$, und sprechen von dem durch A in G *gespannten Graphen*.

Sind die Punkte von $A \subseteqq M_G$ unabhängige Punkte des Graphen G, so sagen wir, daß die Menge A *unabhängig in* G ist. Eine in G unabhängige Punktmenge mit maximaler Anzahl von Punkten wird eine *$\varkappa$-Menge von G* genannt. Aus dieser Definition folgt unmittelbar, daß falls T eine $\varkappa$-Menge des Graphen G ist, und $R = M_G - T$, so zu jedem R-Punkt eine RT-Kante inzident ist.

Sind $(p_1, p_2), (p_2, p_3), \ldots, (p_{k-1}, p_k)$ die Kanten eines Weges, so werden p_1 und p_k *die Endpunkte des Weges*, und $p_2, \ldots, p_{k-1}$ die *inneren Punkte des Weges* genannt. Unter einem *Bogen eines Kreises* verstehen wir einen solchen Weg, dessen sämtliche Kanten auch Kanten des Kreises sind. Der ganze Kreis wird auch Bogen genannt, in diesem Falle werden alle Punkte des Kreises als innere Punkte des Bogens aufgefaßt. Unter der *Sehne eines Kreises* verstehen wir einen solchen Weg, dessen Endpunkte zum Kreis gehören, dessen Kanten und innere Punkte jedoch nicht. Eine Sehne der Länge 1 wird auch *Diagonale* genannt. Ein Graph, der keinen ungeraden Kreis enthält, wird *paarer Graph* genannt. Es ist bekannt, daß der Graph G dann und nur dann ein paarer Graph ist, wenn seine Punkte so in zwei Gruppen A and B aufgeteilt werden können, daß jede Kante von G eine AB-Kante wird. Daraus folgt: ist G ein paarer Graph, so besteht $\varkappa(G) \geqq \left[\frac{\pi(G)+1}{2}\right]$.

Die Anzahl der Elemente einer beliebigen endlichen Menge A wird mit $\alpha(A)$ bezeichnet. Falls bezüglich der Mengen $A_1, \ldots, A_k$ $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i, j = 1, \ldots, k; i \neq j)$ und $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = A$ gilt, so sagen wir, daß $\{A_1, \ldots, A_k\}$ eine *Zerlegung* von A ist. Unter einer *gleichmäßigen Zerlegung* der Punktmenge A verstehen wir eine solche Zerlegung $\{A_1, \ldots, A_k\}$, für welche

$$|\alpha(A_i) - \alpha(A_j)| \leqq 1 \qquad (i, j = 1, \ldots, k)$$

besteht. Aus dieser Definition folgt unmittelbar, daß durch $\alpha(A)$ und k die Menge der nicht-negativen ganzen Zahlen $\alpha(A_i)$ $(i = 1, \ldots, k)$ eindeutig bestimmt wird.

Kann zwischen den Punkten zweier Graphen eine solche ein-eindeutige Zuordnung errichtet werden, daß ein Punktpaar in dem einen dann und nur dann benachbart ist, wenn das entsprechende Punktpaar im anderen ebenfalls benachbart ist, nennen wir die beiden Graphen *isomorph*. Die Isomorphie zwischen G_1 und G_2 wird folgendermaßen bezeichnet: $G_1 = G_2$. Solche Graphen, die paarweise keinen gemeinsamen Punkt enthalten, werden *fremd* genannt.

Im späteren werden wir bei den Bezeichnungen M_G, $\varphi_G(p)$, $\varphi_G(p, A)$, $\varphi_G(p, G')$, $[A, B]_G$ und $[A]_G$ — die auf den Graphen G hinweisen — im allgemeinen den Index G weglassen. So beziehen sich M, $\varphi(p)$, $\varphi(p, A)$, $\varphi(p, G')$, $[A, B]$ und $[A]$ immer auf den Graphen G.

Nun definieren wir zwei Graphenklassen. Mit $\mathcal{H}(n, k)$ $(k \geqq 2)$ bezeichnen wir die folgende Klasse von Graphen: $G \in \mathcal{H}(n, k)$ dann und nur dann, wenn $\pi(G) = n$ ist und G keinen vollständigen k-Graphen enthält. $\mathcal{H}(k)$ bezeichnet die Klasse jener Graphen, die keine vollständigen k-Graphen enthält. $\mathcal{H}(k)$ bezeichnet die Klasse jener Graphen, die keine vollständigen k-Graphen enthalten. So besteht die

Klasse $\mathcal{H}(2)$ aus jenen Graphen, die keine Kanten und die Klasse $\mathcal{H}(3)$ aus jenen Graphen, die keine Dreiecke enthalten.

Mit $\mathcal{K}(n, 2k+1)$ $(k \geqq 2)$ bezeichnen wir die folgende Klasse von Graphen: $G \in \mathcal{K}(n, 2k+1)$ dann und nur dann, wenn $\pi(G) = n$ und G keinen solchen ungeraden Kreis enthält, dessen Länge kleiner als $2k+1$ ist. $\mathcal{K}(2k+1)$ bezeichnet die Klasse jener Graphen, die keinen ungeraden Kreis von einer Länge kleiner als $2k+1$ enthalten. Offensichtlich gilt $\mathcal{K}(5) = \mathcal{H}(3)$ und für $k > 2$ besteht $\mathcal{K}(2k+1) \subset \mathcal{H}(3)$.

Nun definieren wir zwei solche Typen von Graphen, die in unserer Arbeit oft vorkommen.

Mit $\Gamma\langle\gamma_1, \ldots, \gamma_k\rangle$ bezeichnen wir alle jene zueinander isomorphen Graphen, zu deren Punktmengen eine Zerlegung $\{A_1, \ldots, A_k\}$ folgender Art existiert: $\alpha(A_i) = \gamma_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ und die Kanten von $\Gamma\langle\gamma_1, \ldots, \gamma_k\rangle$ sind sämtliche A_iA_j-Kanten $(i, j = 1, \ldots, k; i \neq j)$.

Wir zählen einige Eigenschaften dieser Graphen auf: Es sei $G = \Gamma\langle\gamma_1, \ldots, \gamma_k\rangle$. Dann ist

$$\pi(G) = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i,$$

$$v(G) = \binom{\pi(G)}{2} - \sum_{i=1}^{k} \binom{\gamma_i}{2},$$

$$\varkappa(G) = \max(\gamma_1, \ldots, \gamma_k),$$

$$\varphi_0(G) = \pi(G) - \varkappa(G)$$

und $G \in \mathcal{H}(k+1)$; wie man auch nämlich $k+1$ Punkte von G auswählt, so müssen mindestens zwei dieser derselben Menge A_i angehören. Zwei solche Punkte sind jedoch nicht benachbart.

$\Gamma(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2k+1})$ $(k \geqq 2)$ bezeichnet alle jene zueinander isomorphen Graphen, zu deren Punktmengen eine Zerlegung $\{A_1, \ldots, A_{2k+1}\}$ folgender Art existiert: $\alpha(A_i) = \gamma_i > 0$ $(i = 1, \ldots, 2k+1)$ und die Kanten von $\Gamma(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2k+1})$ sind sämtliche A_1A_2-, A_2A_3-, $\ldots$, $A_{2k}A_{2k+1}$-, $A_{2k+1}A_1$-Kanten.

Zwecks Aufzählung einiger Eigenschaften dieser Graphen sei $G = \Gamma(\gamma_1, \ldots$ $\ldots, \gamma_{2k+1})$. Dann ist

$$\pi(G) = \sum_{i=1}^{2k+1} \gamma_i,$$

$$v(G) = \sum_{i=1}^{2k+1} \gamma_i \gamma_{i+1} \qquad (\gamma_{2k+2} = \gamma_1),$$

$$\varphi_0(G) = \min(\gamma_1 + \gamma_3, \gamma_2 + \gamma_4, \ldots, \gamma_{2k} + \gamma_1, \gamma_{2k+1} + \gamma_2).$$

Aus den Mengen A_i können k Mengen derart ausgewählt werden, daß ihre Vereinigung in G unabhängig sei. Die gesamte Punktanzahl von k derart ausgewählten A_i-Mengen bezeichnen wir mit γ_*^j. Mit dieser Bezeichnung ist

$$\varkappa(G) = \max(\gamma_*^1, \gamma_*^2, \ldots).$$

G enthält einen Kreis der Länge $2k+1$ und $G \in \mathcal{K}(2k+1)$, da jeder ungerade Kreis von G aus jeder der Mengen A_i Punkte enthalten muß.

Die diesen beiden Typen angehörigen Graphen werden auf unseren Abbildungen derart veranschaulicht, daß wir den Mengen A_i entsprechend k bzw. $2k+1$ „Kreisgebiete" zeichnen; die γ_i-Werte in die entsprechenden Kreisgebiete einschreiben und die zu A_i und A_j gehörenden Kreisgebiete dann und nur dann mit einer Linie verbinden, wenn im Graphen alle A_iA_j-Kanten existieren. Abb. 1 veranschaulicht einen $\Gamma\langle\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\rangle$-Graphen, Abb. 2 einen $\Gamma(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5)$ Graphen.

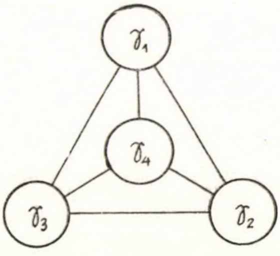


Abb. 1

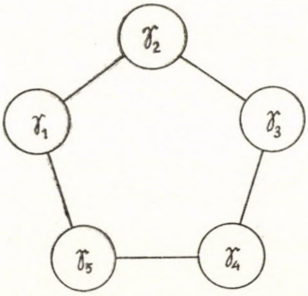


Abb. 2

Wir werden uns auf den bereits erwähnten folgenden Satz von TURÁN berufen:

(1. 1) (TURÁN) *Die Kantenanzahl des Graphen* $G\in\mathcal{H}(n, k)$ $(k\geqq 2)$ *ist dann und nur dann maximal, wenn* $G=\Gamma\langle\gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1}\rangle$ *ist mit* $\gamma_i=\alpha(A_i)$ $(i=1, \ldots, k-1)$, *wobei* $\{A_1, \ldots, A_{k-1}\}$ *eine gleichmäßige Zerlegung der Punktmenge von G ist.*

Den Spezialfall dieses Satzes für $k=3$ sagen wir auch gesondert aus in einer solchen Form, auf die man sich gut berufen kann.

(1. 2) (TURÁN). *Ist* $G\in\mathcal{H}(n, 3)$, *so gilt*

$$v(G)\leqq\left[\frac{n^2}{4}\right];$$

und die Gleichheit besteht dann und nur dann, wenn $G = \Gamma\left\langle\left[\frac{n}{2}\right], n-\left[\frac{n}{2}\right]\right\rangle$.

Ist $G\in\mathcal{H}(3)$, so ist die Menge jener Punkte von G, die zu einem beliebigen Punkt $p\in G$ benachbart sind, eine unabhängige Punktmenge in G, und so gilt die folgende Abschätzung:

(1. 3) *Ist* $G\in\mathcal{H}(3)$, *so besteht für jedes* $p\in G$

$$\varphi(p)\leqq\varkappa(G).$$

§ 2.

In diesem Teil suchen wir eine obere Schranke für die $\varphi_0(G)$ Werte der Graphen G der Klasse $\mathcal{H}(n, 2k+1)$, unter der Bedingung, daß die $\varkappa(G)$ Werte festgehalten oder kleiner als eine gegebene Zahl τ_0 sind. Es werden nun drei einfache — im folgenden mehrmals gebrauchte — Feststellungen vorausgeschickt:

(2. 1) *Es sei* $G \in \mathcal{H}(3)$, *ferner seien* K *ein ungerader Kreis minimaler Länge von* G, *und* L *eine Sehne von* K *der Länge* λ. *Die beiden Endpunkte von* L *zerlegen den Kreis* K *in zwei Bogen der Längen* λ_1 *und* λ_2. *Dann besteht*

$$\lambda \geqq \min(\lambda_1, \lambda_2).$$

BEWEIS. Da die Paritäten von λ_1 und λ_2 verschieden sind, unterscheidet sich die Parität von λ von der einen dieser Paritäten — sagen wir von der Parität von λ_1. Wären also $\lambda < \lambda_1$ und $\lambda < \lambda_2$, so würden L und der Bogen von K der Länge λ_1 zusammen einen solchen ungeraden Kreis von G ergeben, dessen Länge kleiner als die Länge von K wäre.

(2. 2) *Ist* $G \in \mathcal{H}(3)$ *und* K *ein ungerader Kreis minimaler Länge von Graphen* G, *so besteht für jedes* $p \in G$

$$\varphi(p, K) \leqq 2;$$

bezeichnen a *und* b *zwei solche Punkte von* K, *welche einen gemeinsamen benachbarten Punkt in* G *besitzen, so hat der eine zwischen* a *und* b *befindliche Bogen von* K *die Länge* 2.

BEWEIS. Zum Nachweis des ersten Teiles der Behauptung nehmen wir an, daß für einen Punkt p $\varphi(p, K) \geqq 3$. Ist $p \in K$, so besitzt K eine Diagonale; laut (2. 1) ist dies jedoch unmöglich. Ist $p \notin K$, so seien a, b und c drei, mit p benachbarte Punkte von K. Diese Punkte zerlegen K in drei Bogen. Wegen $G \in \mathcal{H}(3)$ sind die Längen dieser Bogen $\geqq 2$. Da K ungerade ist, muß die Länge einer dieser drei Bogen mindestens gleich 3 sein. Also zerlegen zwei von den Punkten a, b und c — sagen wir a und b — K in solche Bogen, deren Längen mindestens gleich 3 sind. Der Weg, der aus den Kanten (a, p) und (p, b) besteht, ist jedoch eine solche Sehne von K, deren Länge gleich 2 ist; laut (2. 1) führt dies zu einem Widerspruch.

Der zweite Teil der Behauptung ergibt sich unmittelbar aus (2. 1).

(2. 3) *Sind* A *und* B *zwei Teilmengen der Punktmenge des Graphen* G, *so besteht*

$$\sum_{a \in A} \varphi(a, B) = \sum_{b \in B} \varphi(b, A).$$

BEWEIS. Es sei $C = A \cap B$, ferner seien die Anzahl der AB-Kanten des Graphen G gleich ν_1, und die Anzahl seiner CC-Kanten gleich ν_2. In diesem Fall stimmen beide Seiten der obigen Gleichung mit dem Wert $\nu_1 + \nu_2$ überein.

Für den Fall, wenn wir bezüglich der $\varkappa(G)$-Werte der Graphen $G \in \mathcal{H}(n, 2k+1)$ keinerlei Bedingungen festlegen, können wir den folgenden Satz aussagen:

SATZ (2. 4) *Ist* $G \in \mathcal{H}(n, 3)$, *so besteht*

$$\varphi_0(G) \leqq \left[\frac{n}{2}\right];$$

und das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn entweder

$$G = \Gamma\left\langle \left[\frac{n}{2}\right], n - \left[\frac{n}{2}\right] \right\rangle$$

oder wenn G *ein Fünfeck ist.*

BEMERKUNG. Die im Satz vorkommenden extremalen Graphen sind — dem Fünfeck ausgenommen — alle paare Graphen, also Elemente jeder Klasse $\mathcal{H}(2k+1)$. Deshalb ist die Behauptung des Satzes unverändert für die Klasse $\mathcal{H}(n, 5)$, und ohne Erwähnung des Fünfeckes für beliebiges $k \geqq 3$ auch für die Klasse $\mathcal{H}(n, 2k+1)$ gültig.

BEWEIS. Gilt für einen Graphen G' mit n Punkten $\varphi_0(G') \geqq \left[\frac{n}{2}\right]+1$, so ist

$$\nu(G') = \frac{1}{2} \sum_{p \in G'} \varphi(p) \geqq \frac{n}{2}\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right) > \left[\frac{n^2}{4}\right];$$

und laut (1. 2) $G' \notin \mathcal{H}(3)$. Nun bezeichne G einen solchen Graphen der Klasse $\mathcal{H}(n, 3)$, für welchen $\varphi_0(G) = \left[\frac{n}{2}\right]$ ist.

Zuerst sei n gerade. Laut der Annahme besteht für jeden Punkt p $\varphi(p) \geqq \frac{n}{2}$, also ist $\nu(G) \geqq \frac{n^2}{4}$. Daraus folgt auf Grund von (1. 2), daß für jeden Punkt p $\varphi(p) = \frac{n}{2}$ und $G = \Gamma\left\langle \frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right\rangle$ bestehen.

Zweitens sei $n = 2s+1$ $(s \geqq 0)$. Dann ist $\varphi_0(G) = \left[\frac{n}{2}\right] = s$. T sei eine $\varkappa$-Menge von G, und $R = M - T$. Da $G \in \mathcal{H}(3)$ und $\varphi_0(G) = s$ ist, folgt aus (1. 3) $\alpha(T) \geqq s$. Es besteht aber auch $\alpha(T) \leqq s+1$, da für jedes $t \in T$ $\varphi(t) \leqq \alpha(R) = n - \alpha(T)$ gilt. Ist $\alpha(T) = s+1$, so ist $\alpha(R) = s$, und so ist $\varphi(t) = s$ für jedes $t \in T$, woraus die Existenz aller TR-Kanten folgt. Dann ist jedoch wegen $G \in \mathcal{H}(3)$ $\nu([R]) = 0$; also $G = \Gamma\langle s, s+1 \rangle$. Nun sei $\alpha(T) = s$. Dann ist $\alpha(R) = s+1$. Daraus folgt, daß es in $[R]$ eine Kante (r_1, r_2) gibt; da T eine $\varkappa$-Menge ist, gibt es sowohl zu r_1, wie auch zu r_2 inzidente TR-Kanten. Solche Kanten seien (r_1, t_1) und (r_2, t_2). Wegen $G \in \mathcal{H}(3)$ besteht $t_1 \neq t_2$. Es sei $R' = R - \{r_1, r_2\}$. Da $\varphi(t_i) \geqq s$ $(i=1, 2)$ ist, sind sowohl t_1 wie auch t_2 allen R'-Punkten benachbart, und deshalb r_1 und r_2 keinem R'-Punkt benachbart. Demnach sind sowohl zu r_1 wie auch zu r_2 mindestens $s-1$ TR-Kanten inzident. Die zu T gehörigen Endpunkte dieser Kanten sind verschieden, woraus $s \leqq 2$ folgt. Da aber t_1 und t_2 existieren, so ist $s=2$, $\alpha(R') = 1$, also G ist ein Fünfeck. Damit ist der Satz bewiesen.

Für die n-punktigen extremalen Graphen G des Satzes ist $\varkappa(G) = \left[\frac{n+1}{2}\right]$, das Fünfeck ausgenommen, wo $\varkappa(G) = 2$ ist. Fordert man also, daß die $\varkappa(G)$-Werte der Graphen $G \in \mathcal{H}(n, 2k+1)$ kleiner seien als eine gegebene Zahl τ_0, so erhält man im Falle $\tau_0 > \left[\frac{n+1}{2}\right]$ die beste obere Schranke für $\varphi_0(G)$, sowie die extremalen Graphen unverändert aus (2. 4). Ist $\varkappa(G) < \left[\frac{n+1}{2}\right]$, so besteht auch $\varkappa(G) < \frac{n}{2}$. Im folgenden behandeln wir daher dem Fall $\tau_0 = \frac{n}{2}$.

SATZ (2. 5) *Ist* $G\in\mathcal{H}(n, 2k+1)$ $(k\geqq 2, n\geqq 2k+1)$ *und gilt* $\varkappa(G)<\frac{n}{2}$, *so besteht*

$$\varphi_0(G)\leqq\frac{2n}{2k+1};$$

und das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn $G=\Gamma(\gamma_1, \dots, \gamma_{2k+1})$ *ist, wobei* $\gamma_1=\dots=\gamma_{2k+1}=\frac{n}{2k+1}$.

BEWEIS. Da $\varkappa(G)<\frac{n}{2}$ ist, so enthält G mindestens einen ungeraden Kreis. Es sei K ein ungerader Kreis minimaler Länge. Die Länge von K sei $2l+1$ $(l\geqq k)$, seine Punkte seien $a_1, \dots, a_{2l+1}$ $(a_1=a_{2l+2}, a_{2l+1}=a_0)$, seine Kanten (a_i, a_{i+1}) $(i=0, 1, \dots, 2l)$. Einerseits gilt für jeden Punkt $p\in K$ $\varphi(p)\geqq\varphi_0(G)$, anderseits für jedes $p\in G$ laut (2. 2) $\varphi(p, K)\leqq 2$. Aus all diesen folgt unter Berücksichtigung von (2. 3): $(2l+1)\varphi_0(G)\leqq\sum_{p\in K}\varphi(p)=\sum_{p\in G}\varphi(p, K)\leqq 2n$; hieraus $\varphi_0(G)\leqq\frac{2n}{2l+1}\leqq\frac{2n}{2k+1}$, also

$$\varphi_0(G)\leqq\frac{2n}{2k+1};$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur dann, wenn $l=k$, für jedes $p\in K$ $\varphi(p)=\frac{2n}{2k+1}$ und für jedes $p\in G$ $\varphi(p, K)=2$. Demzufolge existiert im Falle $\varphi_0(G)=\frac{2n}{2k+1}$ eine eindeutige Zerlegung $\{A_1, \dots, A_{2k+1}\}$ der Punktmenge von G derart, daß $p\in A_i$ dann und nur dann richtig ist, wenn die beiden Nachbarn von p auf K a_{i-1} und a_{i+1} sind. Offenbar gilt $a_i\in A_i$ $(i=1, \dots, 2k+1)$. Da K ungerade ist, und für jedes $p\in K$ $\varphi(p)=\frac{2n}{2k+1}$ besteht, ergibt sich für jedes i $\alpha(A_i)=\frac{n}{2k+1}$. Enthält K nicht die Kante (a_i, a_j), so kann G laut (2. 1) (oder im Falle $k=3$ wegen $G\in\mathcal{H}(7)$) keine A_iA_j-Kante enthalten. Da für jeden Punkt p $\varphi(p)\geqq\frac{2n}{2k+1}$ besteht, so folgt daraus, daß falls $(a_i, a_j)\in K$ ist, so in G alle A_iA_j-Kanten existieren. Also besitzt der Graph G die erwünschten Eigenschaften, und so läßt sich $\varkappa(G)= =\frac{kn}{2k+1}<\frac{n}{2}$ leicht kontrollieren. Ist $\frac{2n}{2k+1}$ eine ganze Zahl, so ist $\frac{n}{2k+1}$ ebenfalls ganz. Hiermit ist der Satz bewiesen.

Die extremen Graphen des Satzes bezeugen, daß (2. 5) unverändert gültig ist, wenn für die $\varkappa(G)$-Werte der Graphen $G\in\mathcal{H}(n, 2k+1)$ eine obere Schranke τ_0 mit $\frac{kn}{2k+1}<\tau_0\leqq\frac{n}{2}$ festgelegt wird. Im Falle $\tau_0\leqq\frac{kn}{2k+1}$ können wir auf unser Problem keine Antwort erteilen. Es ist uns aber gelungen, das bis jetzt besprochene Gradzahl-Problem im wesentlichen vollständig zu lösen, unter der wesentlich stärkeren Bedingung, daß der festgesetzte $\varkappa(G)$-Wert der Graphen G nicht kleiner als $\frac{kn}{2k+1}$ ist. Wenn der festgesetzte Wert von $\varkappa(G)$ nicht kleiner als $\frac{n}{2}$ ist, so ist die Lösung einfach.

SATZ (2. 6). *Sind n und $\tau \geqq \frac{n}{2}$ festgehalten, und ist für den Graphen $G \in \mathcal{H}(n, 3)$ der Wert $\varkappa(G) = \tau$, so besteht*

$$\varphi_0(G) \leqq n - \tau;$$

und das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn $G = \Gamma\langle\tau, n-\tau\rangle$ ist (s. auch die Bemerkung von (2. 4)).

BEWEIS. Es soll mit T eine $\varkappa$-Menge von G bezeichnet werden, und sei $R = M - T$ $\left(\alpha(T) = \tau \text{ und } \alpha(R) = n - \tau\right)$. Dann besteht für jedes $t \in T$ $\varphi(t) \leqq n - \tau$. Gilt also für jeden Punkt p $\varphi(p) \geqq n - \tau$, dann existieren alle TR-Kanten, und so kann wegen $G \in \mathcal{H}(3)$ keine RR-Kante existieren.

Das Hauptergebnis unserer Arbeit wird im folgenden Satz ausgesprochen, der bei einem festgehaltenen Wert τ von $\varkappa(G)$ im Falle $\frac{kn}{2k+1} \leqq \tau < \frac{n}{2}$ die Lösung des Problems angibt. Die Bedingung, daß τ dem angegebenen Intervall angehört, kann auch folgendermaßen ausgedrückt werden: $n = 2\tau + \delta$ wobei $1 \leqq \delta \leqq \frac{\tau}{k}$ ist.

SATZ (2. 7) *$n, \tau, k \geqq 2$ seien festgehalten und es sei $n = 2\tau + \delta$ $\left(1 \leqq \delta \leqq \frac{\tau}{k}\right)$. Ist $G \in \mathcal{H}(n, 2k+1)$ und $\varkappa(G) = \tau$, so ist*

$$\text{für gerades } k \quad \varphi_0(G) \leqq \frac{2\tau + \frac{4}{3}\delta}{k + \frac{2}{3}} \quad \text{und}$$

$$\text{für ungerades } k \quad \varphi_0(G) \leqq \frac{2\tau + 2\delta}{k+1}.$$

Sind die angegebenen Schranken ganze Zahlen, so sind sie auch erreichbar.

BEMERKUNGEN. 1° Ist $\delta = \frac{\tau}{k}$ $\left(\text{d. h. } \tau = \frac{kn}{2k+1}\right)$, so wird das Problem durch (2. 5) beantwortet. Von den Schranken, die im Satz vorkommen, ist für dieselben Werte von τ, δ und k im Falle $\delta < \frac{\tau}{k}$ $\left(\text{also } \tau > \frac{kn}{2k+1}\right)$ die zu geradem Wert von k gehörende Schranke die größere, jedoch sind beide kleiner als $\frac{2n}{2k+1}$, in Übereinstimmung mit (2. 5).

2° Im Falle von geradem k bestimmen wir alle extremalen Graphen, für welche die angegebene Schranke durch $\varphi_0(G)$ erreicht wird. Wir geben extremale Graphen auch für ungerades k an, jedoch streben wir in diesem Falle wegen der vielen Möglichkeiten keinen vollständigen Überblick an. Es wird jedoch in beiden Fällen gezeigt, daß für die Punktmengen der extremalen Graphen eine solche Zerlegung $\{A_1, \ldots, A_{2k+1}\}$ existiert, bei der der Graph nur A_1A_2-, …, $A_{2k}A_{2k+1}$-, $A_{2k+1}A_1$-Kanten enthalten kann.

3° Wir beweisen zuerst die Fälle $k=2$ und $k=3$, wodurch der Beweis des allgemeinen Falles übersichtlicher wird.

(2. 8) *n, τ seien festgehalten und es sei* $n = 2\tau+\delta$ $\left(1 \leqq \delta \leqq \frac{\tau}{2}\right)$. *Ist* $G \in \mathcal{H}(n, 3)$ *und ist* $\varkappa(G)=\tau$, *so besteht*

$$\varphi_0(G) \leqq \frac{3\tau+2\delta}{4};$$

und das Gleichheitszeichen ist dann und nur dann gültig, wenn $G=\Gamma(\tau/2, \tau/2, \tau/2, \tau/4+\delta/2, \tau/4+\delta/2)$ *ist.*

Beweis. T sei eine $\varkappa$-Menge von G und $R = M-T$. Dann gilt $\alpha(T)=\tau$, $\alpha(R) = \tau+\delta>\tau$, und so besitzt $[R]$ Kanten; (r_1, r_2) sei eine solche Kante. Wegen $G\in\mathcal{H}(3)$ ist für einen der Punkte r_1 und r_2 — sagen wir, für r_1 — $\varphi(r_1, T)\leqq\frac{\tau}{2}$ erfüllt. T_1 bzw. R_2 seien die Mengen der zu r_1 benachbarten T- bzw. R-Punkte und seien $T_2 = T-T_1$, $R_1 = R-R_2$. (Da T eine $\varkappa$-Menge ist, ist T_1 nicht leer.) Also gelten $\alpha(T_1)\leqq\frac{\tau}{2}$ und $\varphi(r_1) = \alpha(T_1)+\alpha(R_2)$. Da $G\in\mathcal{H}(3)$, so besteht für jedes $t\in T_1$ $\varphi(t)\leqq\alpha(R_1)$. Aus den letzten drei Zusammenhängen, und aus dem Umstand, daß für jeden Punkt $\varphi(p)\geqq\varphi_0(G)$ ist, ergibt sich $2\varphi_0(G) \leqq \varphi(t)+\varphi(r_1) \leqq \alpha(R_1)+ +\alpha(R_2)+\alpha(T_1) \leqq \tau+\delta+\frac{\tau}{2}=\frac{3\tau+2\delta}{2}$. Hieraus folgt

$$\varphi_0(G) \leqq \frac{3\tau+2\delta}{4}.$$

Es sei $\xi = \frac{3\tau+2\delta}{4}$. Auf Grund der vorangehenden besteht $\varphi_0(G)=\xi$ nur dann, wenn $\alpha(T_1)=\frac{\tau}{2}$ ist, ferner für jedes $t\in T_1$, r_1 und R_1 $\varphi(t)=\varphi(r_1)=\xi=\alpha(R_1)$ ist. Dann ist $\alpha(T_2)=\frac{\tau}{2}$, $\alpha(R_2) = \xi-\frac{\tau}{2}$ und es existieren alle T_1R_1-Kanten. Im weiteren sei G derart beschaffen, daß $\varphi_0(G)=\xi$ bestehe. Da T eine $\varkappa$-Menge ist, muß eine Kante (t_2, r_2) $(t_2\in T_2)$ existieren. t_2 kann nur in R, und r_2 kann nur in $T_2\cup R_1$ Nachbarn haben; gemeinsame Nachbarn können sie jedoch nicht besitzen. Bezeichnen wir die Menge der Nachbarn von t_2 bzw. r_2 in R_1 mit R_1' bzw. mit R_1''. Dann ist $\alpha(R_1')\geqq\frac{\tau}{2}$, $\alpha(R_1'')\geqq\xi-\frac{\tau}{2}$, und so ist $\alpha(R_1')=\frac{\tau}{2}$, $\alpha(R_1'') = \xi-\frac{\tau}{2}$ d. h. $\{R_1', R_1''\}$ eine Zerlegung von R_1. Nun folgt aus $\varphi_0(G)=\xi$ und aus $G\in\mathcal{H}(3)$ die Existenz aller T_2R_2-, T_2R_1'- und R_2R_1''-Kanten. Bei den Bezeichnungen $T_2=A_1$, $R_1'=A_2$, $T_1=A_3$, $R_1''=A_4$ und $R_2=A_5$ und $\gamma_i=\alpha(A_i)$ $(i=1,\dots, 5)$ sieht man, daß G der $\Gamma(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5)$-Graph mit den erforderten Eigenschaften ist. (Siehe Abb. 3.) Wir haben noch zu beweisen, daß wenn G ein $\Gamma(\tau/2, \tau/2, \tau/2, \tau/4+\delta/2, \tau/4+\delta/2)$ Graph ist, so G ein extremaler Graph mit $\varphi_0(G)=\xi$ ist. Dies bekommt man durch den gleichen Gedankengang, mit welchem wir im Falle $k\geqq 4$ zeigen, daß die angegeben Schranken, falls sie ganze Zahlen sind, erreicht werden können.

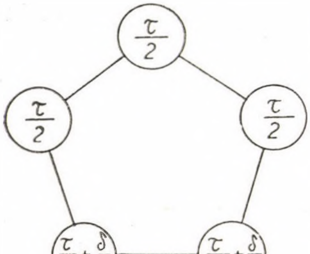


Abb. 3

Beweis des Falles $k=3$. T sei eine $\varkappa$-Menge des Graphen G, der die Voraussetzungen erfüllt, ferner sei $R = M-T$. Dann ist $\alpha(T)=\tau$, $\alpha(R) = \tau+\delta>\tau$, und so besitzt $[R]$ Kanten; (r_1, r_2) sei eine solche Kante. Da T eine $\varkappa$-Menge ist, haben sowohl r_1 wie auch r_2 je einen Nachbarn in T. Bezeichnen wir den Nachbarn von r_1 (in T) mit t_1 den von r_2 (in T) mit t_2. Wegen $G\in\mathcal{H}(3)$ ist $t_1\neq t_2$. Betrachten wir nun die Nachbarn von t_1 und t_2. Diese sind alle R-Punkte, und sie sind wegen $G\in\mathcal{H}(7)$ verschieden. Deshalb gilt $2\varphi_0(G) \leqq \varphi(t_1)+\varphi(t_2) \leqq \tau+\delta$, und daraus folgt

$$\varphi_0(G) \leqq \frac{\tau+\delta}{2}.$$

Nun sei G ein Graph mit $\varphi_0(G) = \frac{\tau+\delta}{2}$. Wir zeigen, daß in diesem Falle G ein Siebeneck enthält, und eine solche Zerlegung $\{A_1, \ldots, A_7\}$ seiner Punktmenge existiert, für welche G nur A_1A_2-, …, A_6A_7- und A_7A_1-Kanten (aber nicht unbedingt alle solche Kanten) enthält. Wird die Menge der Nachbarn von t_1 mit R_1, die der Nachbarn von t_2 mit R_2 bezeichnet, so ist $\{R_1, R_2\}$ eine Zerlegung von R und $r_1\in R_1, r_2\in R_2$, ferner ist $\alpha(R_1)=\alpha(R_2)=\frac{\tau+\delta}{2}$ und $\nu([R_1])=\nu([R_2])=0$. Da für jedes $t\in T$ $\varphi(t)>0$ ist, existiert eine eindeutige Zerlegung $\{T_1, T_2, T_3\}$ von T derart, daß $t\in T$ T_1 bzw. T_2 angehört, wenn alle seine benachbarten Punkte R_1- bzw. R_2-Punkte sind, und T_3 angehört, wenn er sowohl in R_1 wie auch in R_2 Nachbarn hat. Dann ist $t_1\in T_1, t_2\in T_2$ und T_3 ist nicht leer, denn sonst wären $T_1\cup R_2$ und $T_2\cup R_1$ in G unabhängig, und einer von ihnen würde wenigstens $\frac{\tau}{2}+\frac{\tau+\delta}{2} = =\tau+\frac{\delta}{2}$ Punkte enthalten; dies steht jedoch in Widerspruch zu $\varkappa(G)=\tau$. Bezeichnen wir die Mengen der Nachbarn der Punkte von T_3 in R_1 bzw. R_2 mit R_3' bzw. R_3''. Nun gilt $G\in\mathcal{H}(7)$ und mit Verwendung von (2. 1) läßt es sich leicht einsehen, daß für jede beliebige Kante von $[R]$ der eine Endpunkt zu R_1-R_3', der andere zu R_2-R_3'' gehört. Bei den Bezeichnungen $R_1-R_3' = A_1, T_1=A_2, R_3'=A_3, T_3=A_4, R_3''=A_5, T_2=A_6$ und $R_2-R_3''=A_7$ ist ersichtlich, daß G die erforderte Eigenschaft besitzt. Wir haben noch zu beweisen, daß im Falle wo $\frac{\tau+\delta}{2}$ ganz ist, diese Schranke auch erreichbar ist. Dies bekommt man durch den gleichen Gedankengang der bei dem Fall $k\geqq 4$ angewendet wird (s. S. 431).

Im Falle $\delta=\frac{\tau}{3}$ sind laut (2. 5) sämtliche extremalen Graphen die zueinander isomorphen $\Gamma(\gamma_1, \ldots, \gamma_7)$ Graphen, wobei $\gamma_1=\gamma_2=\ldots=\gamma_7=\frac{\tau}{3}$ ist. Abbildungen 4 und 5 veranschaulichen zwei solche extremale Graphen, die im Falle $\delta<\frac{\tau}{3}$ nicht isomorph sind. Die in der oberen Reihe stehenden drei Kreisgebiete entsprechen zusammen einer $\varkappa$-Menge. In Abb. 4 ist eine Verbindungslinie, in Abb. 5 sind zwei solche Linien mit einem Querstrich bezeichnet. Es ist leicht zu sehen, daß wenn man im Falle $\delta<\frac{\tau}{3}$ aus jenen Kanten, die den bezeichneten Linien entsprechen,

„nicht zu viel" (z. B. eine Kante) streicht, so die zurückbleibenden Graphen (mit demselben τ) noch immer extremal sind.

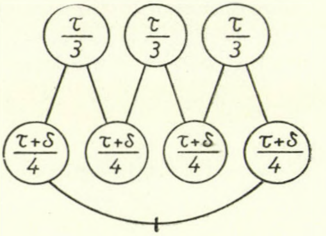


Abb. 4

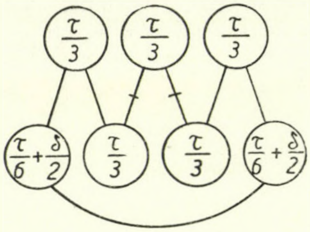


Abb. 5

BEWEIS VON (2. 7) IM FALLE $k \geqq 4$.

Der Beweis beruht auf der folgenden Methode:

(1) H sei eine Teilmenge der Punktmenge des Graphen G. Die Nachbarn der Punkte von H bilden die Menge Z. H wird in geeigneter Weise derart gewählt, daß für jedes $p \in Z$ $\varphi(p, H) \leqq \varphi^*$ mit möglichst kleinem φ^* bestehe. Da für jeden Punkt von G $\varphi(p) \geqq \varphi_0(G)$ ist, folgt mit Benützung von (2. 3) $\alpha(H)\cdot\varphi_0(G) \leqq \sum_{p\in H}\varphi(p) = \sum_{p\in Z}\varphi(p, H) \leqq \varphi^*\cdot\alpha(Z)$, und daraus

$$\varphi_0(G) \leqq \frac{\varphi^*\cdot\alpha(Z)}{\alpha(H)}.$$

Im Beweis wählen wir für H auf zweierlei Arten geeignete Mengen aus, die wir mit X bzw. Y bezeichnen. Als φ^* wird sich 1 oder 2 ergeben.

Unseren Satz beweisen wir unter der Annahme, daß in G ein Kreis der Länge $2k+1$ existiert. Diese Annahme bedeutet keine Einschränkung, da einerseits G wegen $\varkappa(G) < \frac{n}{2}$ mindestens einen ungeraden Kreis enthält, und ist die minimale Länge der ungeraden Kreise von G gleich $2k'+1$ $(k'>k)$, so ist $G \in \mathfrak{K}(n, 2k'+1) \subset \mathfrak{K}(n, 2k+1)$; anderseits sind die in (2. 7) vorkommenden Schranken streng monoton abnehmende Funktionen von k, und zwar ist auch die zum geraden k gehörende Schranke kleiner, als die zu $k-1$ gehörende.

G sei nun ein solcher Graph, der den Bedingungen des Satzes genügt, und es bestehe $k \geqq 4$. Bezeichnen wir mit T eine $\varkappa$-Menge von G und es sei $R = M - T$. Dann ist $\alpha(T) = \tau$ und $\alpha(R) = \tau + \delta$. K sei ein solcher Kreis der Länge $2k+1$ von G, der eine maximale Anzahl von T-Punkten enthält. Da die Nachbarn von T-Punkten nur R-Punkte sein können, ist die Anzahl der T-Punkte an K höchstens k. Die Mengen T und R, sowie den Kreis K halten wir im weiteren fest. Längs K legen wir eine Umlaufsrichtung fest. In dieser Richtung fortschreitend, werden wir die Punkte an den Bogen von K numerieren, und dieser Umlaufsrichtung entsprechend werden wir von *Anfangs-* und *Endpunkten der Bogen* sprechen. Die Eigenschaften von K ergeben unmittelbar:

(2) *ist L eine Sehne von K, deren beide Endpunkte K in die Bogen K_1 und K_2 zerlegen, und stimmt die Parität der Länge von L mit der von K_1 überein, so ist L nicht kürzer als K_1, und falls sie von gleicher Länge sind, so kann L nicht mehr T-Punkte als K_1 enthalten.*

Da zu T-Punkten nur R-Punkte benachbart sein können, und K ungerade ist, muß K mindestens einen zu $[R]$ gehörenden Bogen enthalten. Ein Bogen von K wird ein *alternierender Bogen* genannt, wenn er nur TR-Kanten besitzt. Ein Bogen von K wird ein *α-Bogen* bzw. ein *ϱ-Bogen* genannt, wenn er ein alternierender Bogen bzw. ein zu $[R]$ gehörender Bogen ist, jedoch kein echter Teil von einem alternierenden bzw. zu $[R]$ gehörenden Bogen. Ist K selber nicht ein einziger ϱ-Bogen, so zerfällt er eindeutig in α- und ϱ-Bogen, die längs K abwechselnd aufeinander folgen. Die Länge aller α-Bogen ist gerade, und daher ist die Gesamtlänge der ϱ-Bogen ungerade. Ein α-Bogen wird *α_0-Bogen* bzw. *α_2-Bogen* genannt, wenn seine Länge durch 4 geteilt 0 bzw. 2 als Rest ergibt, und ein ϱ-Bogen wird *ϱ_1-Bogen, ϱ_{02}-Bogen* bzw. *ϱ_3-Bogen* genannt, wenn seine Länge durch 4 geteilt 1 bzw. 0 oder 2, bzw. 3 als Rest ergibt. Die Anzahl dieser Bogen bezeichnen wir der Reihe nach mit $\tilde{\alpha}_0$, $\tilde{\alpha}_2, \tilde{\varrho}_1, \tilde{\varrho}_{02}, \tilde{\varrho}_3$. Die Menge der α_0- bzw. α_2-Bogen bezeichnen wir mit $\{K_i | i \in \mathfrak{I}_0\}$ bzw. $\{K_i | i \in \mathfrak{I}_2\}$, die der ϱ_1-, ϱ_{02}- bzw. ϱ_3-Bogen mit $\{K_j | j \in \mathfrak{J}_1\}$, $\{K_j | j \in \mathfrak{J}_{02}\}$ bzw. $\{K_j | j \in \mathfrak{J}_3\}$, wobei $\mathfrak{I}_0, \mathfrak{I}_2, \mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_{02}, \mathfrak{J}_3$ paarweise fremde Indexmengen sind. Es sei $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{I}_2$ und $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1 \cup \mathfrak{J}_{02} \cup \mathfrak{J}_3$. Die Längen (Kantenanzahl) der betreffenden Bogen werden folgendermaßen bezeichnet:

$$\begin{array}{llll}
\text{für } i \in \mathfrak{I}_0 & \text{ist } \nu(K_i) = 4s_i, & s_i \geqq 1, \\
\text{für } i \in \mathfrak{I}_2 & \text{ist } \nu(K_i) = 4u_i + 2, & u_i \geqq 0, \\
\text{für } j \in \mathfrak{J}_1 & \text{ist } \nu(K_j) = 4v_j + 1, & v_j \geqq 0, \\
\text{für } j \in \mathfrak{J}_{02} & \text{ist } \nu(K_j) = 2w_j, & w_j \geqq 1, \\
\text{für } j \in \mathfrak{J}_3 & \text{ist } \nu(K_j) = 4z_j + 3, & z_j \geqq 0.
\end{array}$$

Dann besteht offensichtlich

$$(3) \qquad 2k+1 = \sum_{i \in \mathfrak{I}_0} 4s_i + \sum_{i \in \mathfrak{I}_2} (4u_i + 2) + \sum_{j \in \mathfrak{J}_1} (4v_j + 1) + \sum_{j \in \mathfrak{J}_{02}} 2w_j + \sum_{j \in \mathfrak{J}_3} (4z_j + 3).$$

Aus dem Umstand, daß T eine $\varkappa$-Menge ist, sowie aus (2. 2) und aus (2) folgt, daß falls wir die inneren Punkte eines ϱ-Bogens von K mit $r_1, \ldots, r_m$ bezeichnen, so verschiedene T-Punkte $t_1, \ldots, t_m$ derart existieren, daß $(t_1, r_1), \ldots, (t_m, r_m)$ Kanten in G sind. Es soll den inneren Punkten der ϱ-Bogen auf diese Weise je ein T-Punkt zugeordnet werden. Diese können laut (2. 1) nicht in K enthalten sein, und laut (2. 2) sind auch jene verschieden, die zu verschiedenen Bogen gehören.

Wir führen die folgenden Bezeichnungen der gewählten Umlaufsrichtung von K entsprechend ein: Es seien die T-Punkte bzw. R-Punkte von K_i $(i \in \mathfrak{I})$ $t_1^i, t_2^i, \ldots$, bzw. $r_1^i, r_2^i, \ldots$; die inneren Punkte von K_j $(j \in \mathfrak{J})$ seien $r_1^j, r_2^j, \ldots$, und die auf der oben angegebenen Weise hierzu ausgewählten T-Punkte seien $t_1^j, t_2^j, \ldots$. Ist K ein einziger ϱ-Bogen, so wählen wir r_1^j beliebig aus, und führen die Numerierung der

Umlaufsrichtung entsprechend aus. Die Mengen T^i, T^i_*, R^i_* $(i \in \mathfrak{I})$, und T^j_*, R^j $(j \in \mathfrak{J})$ werden folgendermaßen definiert:

$$T^i = \{t^i_1, t^i_2, \ldots\},$$
$$T^i_* = \{t^i_1, t^i_3, t^i_5, \ldots\},$$
$$R^i_* = \{r^i_1, r^i_3, r^i_5, \ldots\},$$
$$T^j_* = \{t^j_1, t^j_2, t^j_5, t^j_6, t^j_9, t^j_{10}, \ldots\},$$
$$R^j = \{r^j_1, r^j_2, \ldots\},$$

wo die Indizes der obigen Regel entsprechend alle Werte annehmen, zu denen noch Punkte am betrachteten Bogen existieren. Nun werden zwei Teilmengen der Punktmenge von G folgendermaßen definiert:

$$X = \Big(\bigcup_{i \in \mathfrak{I}} T^i_*\Big) \cup \Big(\bigcup_{j \in \mathfrak{J}} T^j_*\Big)$$

und

$$Y = \Big(\bigcup_{i \in \mathfrak{I}} T^i\Big) \cup \Big(\bigcup_{i \in \mathfrak{I}} R^i_*\Big) \cup \Big(\bigcup_{j \in \mathfrak{J}} R^j\Big).$$

So liegen alle Punkte von Y auf K, und der Anfangspunkt eines α_2-Bogens gehört immer zu Y, der Endpunkt jedoch nie. Die folgenden Zusammenhänge können durch einfache Berechnung bestätigt werden:

$$\alpha(X) = \sum_{i \in \mathfrak{I}_0} s_i + \sum_{i \in \mathfrak{I}_2} (u_i + 1) + \sum_{j \in \mathfrak{J}_1} 2v_j + \sum_{j \in \mathfrak{J}_{02}} w_j + \sum_{j \in \mathfrak{J}_3} (2z_j + 2) \tag{4}$$

$$\alpha(Y) = \sum_{i \in \mathfrak{I}_0} (3s_i + 1) + \sum_{i \in \mathfrak{I}_2} (3u_i + 2) + \sum_{j \in \mathfrak{J}_1} 4v_j + \sum_{j \in \mathfrak{J}_{02}} (2w_j - 1) + \sum_{j \in \mathfrak{J}_3} (4z_j + 2) \tag{5}$$

und

$$\alpha(X) + \alpha(Y) = \sum_{i \in \mathfrak{I}_0} (4s_i + 1) + \sum_{i \in \mathfrak{I}_2} (4u_i + 3) +$$
$$+ \sum_{j \in \mathfrak{J}_1} 6v_j + \sum_{j \in \mathfrak{J}_{02}} (3w_j - 1) + \sum_{j \in \mathfrak{J}_3} (6z_j + 4).$$

Unter Berücksichtigung von (3) gilt

$$\alpha(X) + \alpha(Y) = 2k + 1 + \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_2 + \sum_{j \in \mathfrak{J}_1} 2v_j - \tilde{\varrho}_1 + \tag{6}$$
$$+ \sum_{j \in \mathfrak{J}_{02}} (w_j - 1) + \sum_{j \in \mathfrak{J}_3} (2z_j + 1) = 2k + 1 + \xi.$$

Nun sehen wir die folgende Behauptung ein:

(7) $\xi \geqq 0$; $\xi = 0$ *kann nur dann bestehen, wenn* K *weder* ϱ_{02}*-Bogen, noch* ϱ_3*-Bogen enthält, und für jedes* $j \in \mathfrak{J}_1$ $v_j = 0$ *ist, d. h. jeder* ϱ_1*-Bogen von* K *aus einer einzigen Kante besteht. In diesem Fall kann* K *nicht ein einziger* ϱ*-Bogen sein, und enthält daher genau so viele* α*-Bogen, wie* ϱ*-Bogen, also ist* $\tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_2 = \tilde{\varrho}_1 \geqq 1$ *richtig.*

Besteht K aus einem einzigen ϱ-Bogen, so ist $\tilde{\alpha}_0 = \tilde{\alpha}_2 = \tilde{\varrho}_{02} = 0$; eine der Zahlen $\tilde{\varrho}_1$ und $\tilde{\varrho}_3$ ist gleich Null, die andere ist gleich 1; in diesem Fall ist jedenfalls $\xi > 0$. Besitzt K auch α-Bogen, so besteht $\tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_2 \geqq \tilde{\varrho}_1$, und das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn K weder ϱ_{02}- noch ϱ_3-Bogen hat. Da $\sum_{j \in \mathfrak{J}_1} 2v_j + \sum_{j \in \mathfrak{J}_{02}} (w_j - 1) + \sum_{j \in \mathfrak{J}_3} (2z_j + 1) \geqq 0$ ebenfalls besteht, kann unsere Behauptung unmittelbar eingesehen werden.

Bezeichnen wir mit M_X bzw. mit M_Y die Menge der zu den Punkten von X bzw. Y benachbarten Punkte in G. Dann besteht $M_X \subseteqq R$. Die folgenden beiden Behauptungen können unter Benützung von (2. 1), (2. 2), (2) und unter Berücksichtigung von $k \geqq 4$ nachgewiesen werden:

(8) *Für jedes* $r \in M_X$ *ist* $\varphi(r, X) = 1$; *für jedes* $p \in M_Y$ *ist* $\varphi(p, Y) = 1$ *falls* $p \in T$ *und* $\varphi(p, Y) \leqq 2$ *falls* $p \in R$.

(9) *Es sei* $r \in R$. *Ist* r *Endpunkt eines* α_0-*Bogens, oder* $r \in \bigcup_{j \in \mathfrak{J}} \{r_3^j, r_4^j, r_7^j, r_8^j, r_{11}^j, r_{12}^j, \ldots\}$ *(für alle möglichen Indizes), so besteht*

$$\varphi(r, X) = 0;$$

ist r *ein solcher Punkt von* K, *der auf den Endpunkt eines* α_2-*Bogens folgt, so besteht*

$$\varphi(r, Y) = 1.$$

Wir bezeichnen die Anzahl der ersteren R-Punkte mit ε_X, die der letzteren mit ε_Y. Eine einfache Rechnung ergibt

$$\varepsilon_X = \tilde{\alpha}_0 + \sum_{j \in \mathfrak{J}_1} 2v_j + \sum_{j \in \mathfrak{J}_{02}} (w_j - 1) + \sum_{j \in \mathfrak{J}_3} 2z_j, \tag{10}$$

$$\varepsilon_Y = \tilde{\alpha}_2 \quad \text{und} \quad \varepsilon = \varepsilon_X + \varepsilon_Y \geqq 1.$$

Auf Grund von all diesen erhält man durch Anwendung des Verfahrens (1) auf X und auf Y:

$$\alpha(X) \cdot \varphi_0(G) \leqq \sum_{p \in X} \varphi(p) = \sum_{p \in M_X} \varphi(p, X) \leqq \alpha(R) - \varepsilon_X \tag{11}$$

und

$$\alpha(Y) \cdot \varphi_0(G) \leqq \sum_{p \in Y} \varphi(p) = \sum_{p \in M_Y} \varphi(p, Y) \leqq \alpha(T) + 2\alpha(R) - \varepsilon_Y. \tag{12}$$

Aus den beiden letzteren folgt

$$\big(\alpha(X) + \alpha(Y)\big) \cdot \varphi_0(G) \leqq \alpha(T) + 3\alpha(R) - \varepsilon \tag{13}$$

und dies ergibt, unter Berücksichtigung von (6),

$$\varphi_0(G) \leqq \frac{4\tau + 3\delta - \varepsilon}{2k + 1 + \xi} = \eta.$$

Ist $\xi \neq 0$, so ist $\eta < \frac{2\tau + 2\delta}{k+1} \leqq \frac{2\tau + \frac{4}{3}\delta}{k + \frac{2}{3}}$, was für diesen Fall den Satz beweist.

Betrachten wir also den Fall $\xi = 0$. Dann hat laut (6), (7) und (10) K weder ϱ_{02}-noch ϱ_3-Bogen, und für jedes $j \in \mathfrak{J}_1$ ist $v_j = 0$, $\tilde{\varrho}_1 = \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_2$, $\varepsilon_X = \tilde{\alpha}_0$, $\varepsilon_Y = \tilde{\alpha}_2$ und $\alpha(X) + \alpha(Y) = 2k+1$.

Nun verzweigt sich unsere Untersuchung, je nachdem, ob k gerade oder ungerade ist.

FALL 1: $k = 2l$, d. h. $2k+1 = 4l+1$ $(l \geqq 2)$. Ist $\alpha(X) \geqq \frac{k}{2} + 1$, so ergibt sich aus (11) $\varphi_0(G) < \frac{2\tau + 2\delta}{k+1}$. Im entgegengesetzten Fall ist $\alpha(X) \leqq \frac{k}{2}$, also $\alpha(Y) \geqq \frac{3}{2}k + 1$, daher laut (12)

$$\varphi_0(G) \leqq \frac{2\tau + \frac{4}{3}\delta}{k + \frac{2}{3}};$$

das Gleichheitszeichen kann nur dann gelten, wenn K keinen α_2-Bogen hat und $\alpha(Y) = \frac{3}{2}k + 1 = 3l + 1$ ist. In diesem Fall ist laut (5) $3l + 1 = \sum_{i \in \mathfrak{I}_0} (3s_i + 1)$, und auf Grund von (3) $4l + 1 = \sum_{i \in \mathfrak{I}_0} 4s_i + \tilde{\varrho}_1$. K kann jedoch nicht aus einem einzigen ϱ-Bogen bestehen, deshalb besteht auch $\tilde{\varrho}_1 = \tilde{\alpha}_0$. Aus all diesem folgt jedoch

$$\tilde{\varrho}_1 = \tilde{\alpha}_0 = 1.$$

Also kann $\varphi_0(G) = \frac{2\tau + \frac{4}{3}\delta}{k + \frac{2}{3}}$ nur dann bestehen, wenn eine einzige Kante von K eine RR-Kante ist, und alle anderen TR-Kanten sind, $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_0 = \{1\}$ und so $Y = \{t_1^1, t_2^1, \ldots, t_k^1, r_1^1, r_3^1, \ldots, r_{k+1}^1\}$ ist (siehe Abb. 6); ferner laut (12)

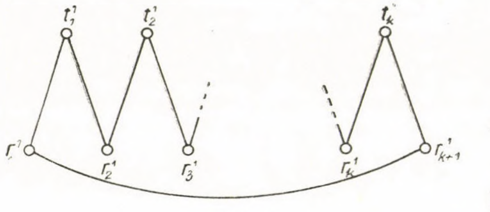


Abb. 6

$$\text{(14)} \quad \textit{für jedes} \quad p \in Y \quad \varphi(p) = \frac{2\tau + \frac{4}{3}\delta}{k + \frac{2}{3}} = \varphi_0,$$

und laut (8) und (12), mit Berücksichtigung von $M_Y = M$

(15) *für jedes* $t \in T$ $\varphi(t, Y) = 1$ *und für jedes* $r \in R$ $\varphi(r, Y) = 2$.

Aus alledem folgt: ist G ein extremaler Graph, so existiert laut (2. 2) und (15) die eindeutige Zerlegung $\{R_1, \ldots, R_{k+1}\}$ von R derart, daß $r \in R_i$ dann und nur dann gilt, wenn r mit zwei zu Y gehörenden zu r_i^1 benachbarten Punkten von K durch Kanten verbunden ist. Offensichtlich gilt $r_i^1 \in R_i$ $(i=1, \ldots, k+1)$. Es sei $\alpha(R_1)=\sigma$. Dann erhalten wir, (14) der Reihe nach auf die Punkte $t_1^1, \ldots, t_k^1$ anwendend, $\alpha(R_2) = \varphi_0-\sigma$, $\alpha(R_3)=\sigma, \ldots, \alpha(R_k) = \varphi_0-\sigma$ und $\alpha(R_{k+1})=\sigma$. Aus diesen

$$\tau+\delta = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha(R_i) = \sigma+\frac{k}{2}\varphi_0,$$

und so

$$\sigma = \frac{2\tau+(k+2)\delta}{3k+2}.$$

Nun folgt aus (2. 1):

(16) *Der eine Endpunkt aller RR-Kanten von G ist ein R_1-Punkt, der andere ein R_{k+1}-Punkt.*

Laut (2. 1) und (2. 2) können alle Nachbarn eines beliebigen T-Punktes nur einem der Mengen $R_i \cup R_{i+1}$ $(i=1, \ldots, k)$ angehören. Da für jedes $t \in T$ $\varphi(t) \geqq \varphi_0$ ist und $\alpha(R_i \cup R_{i+1}) = \varphi_0$ $(i=1, \ldots, k)$ besteht, existiert eine solche eindeutige Zerlegung $\{T_1, \ldots, T_k\}$ von T, daß $t \in T_i$ dann und nur dann gilt, wenn seine Nachbarn die Menge $R_i \cup R_{i+1}$ bilden. Offensichtlich ist $t_i^1 \in T_i$ $(i=1, \ldots, k)$. Also existieren alle R_iT_i- und T_iR_{i+1}-Kanten $(i=1, \ldots, k)$. Nun wenden wir auf die R-Punkte von Y (14) an, und erhalten das folgende:

(17) $$\alpha(T_{2i})+\alpha(T_{2i+1}) = \varphi_0 \qquad \left(i=1, \ldots, \frac{k}{2}-1\right)$$

und mit Benützung dieses Zusammenhanges

(18) $$\alpha(T_1) = \alpha(T_k) = \varphi_0-\sigma.$$

Da für jeden R-Punkt $\varphi(r) \geqq \varphi_0$ ist, folgt auf Grund von (16) und (18), daß alle R_1R_{k+1}-Kanten existieren, und die folgenden Zusammenhänge bestehen:

(19) $$\alpha(T_{2i-1})+\alpha(T_{2i}) \geqq \varphi_0 \qquad \left(i=1, \ldots, \frac{k}{2}\right).$$

Mit Verwendung von (17) und (19) läßt es sich einsehen, daß

$$\sigma \leqq \alpha(T_i) \leqq \varphi_0-\sigma \qquad (i=2, \ldots, k-1)$$

und hieraus ist es ersichtlich, daß die $\alpha(T_i)$-Werte $(i=2, \ldots, k-1)$ im Falle $\delta < \frac{\tau}{k}$ nicht eindeutig bestimmt sind; dabei ist nämlich $\sigma < \varphi_0-\sigma$.

Nun sehen wir ein, daß wenn $\varphi_0 = \frac{6\tau+4\delta}{3k+2}$ eine ganze Zahl ist, so ein (extremaler) Graph existiert (unser Gedankengang ist auch für $k=2$ gültig). Hierzu genügt es nachzuweisen, daß falls φ_0 ganz ist, so $\frac{2\tau+(k+2)\delta}{3k+2}$ ebenfalls ganz sein muß, es kann nämlich erreicht werden, daß auch die Mengen T_i $(i=2, \ldots, k-1)$

$\sigma=\alpha(R_1)$ oder $\varphi_0-\sigma$ Punkte enthalten sollen. Eine einfache Berechnung ergibt $\varphi_0+\delta = 3\sigma = \dfrac{3(2\tau+(k+2)\delta)}{3k+2}$. Daraus ist ersichtlich, daß $2\tau+(k+2)\delta$ durch $3k+2$ teilbar, d. h. $\dfrac{2\tau+(k+2)\delta}{3k+2}$ ganz ist.

Wenn wir noch einsehen, daß die Menge T im Falle einer solchen Zerlegung, welche (17), (18) und (19) erfüllt, immer eine $\varkappa$-Menge ist, so ist jener Graph G, der den bisherigen Bedingungen genügt, immer zugleich ein extremaler Graph. Unsere Behauptung läßt sich daraus einsehen, daß jeder T-Punkt genau φ_0 Nachbarn, und jeder R-Punkt mindestens φ_0 Nachbarn hat, weiterhin $2\sigma \leqq \varphi_0$ ist.

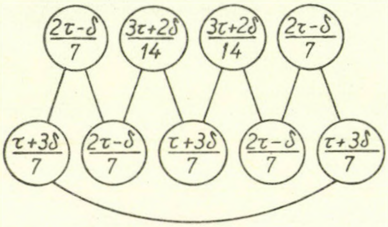


Abb. 7

Hiermit wurde für gerade Werte von k (2. 7) bewiesen, und alle extremalen Graphen wurden bestimmt. Abbildung 7 veranschaulicht für $k=4$ einen solchen extremalen Graphen, für welchen $\alpha(T_2)=\alpha(T_3)=\dfrac{\varphi_0}{2}=\dfrac{3\tau+2\delta}{14}$ besteht.

FALL 2: $k = 2l+1$, d. h. $2k+1 = 4l+3$ $(l\geqq 2)$. Ist $\alpha(Y)\geqq\dfrac{3}{2}(k+1)$, dann folgt aus (12) $\varphi_0(G)<\dfrac{2\tau+2\delta}{k+1}$. Im entgegengesetzten Fall ist $\alpha(Y)\leqq\dfrac{3k+1}{2}$, und so $\alpha(X)\geqq\dfrac{k+1}{2}$, also laut (11)

$$\varphi_0(G)\leqq\frac{2\tau+2\delta}{k+1};$$

das Gleichheitszeichen kann nur dann gültig sein, wenn K keinen α_0-Bogen besitzt und $\alpha(X)=\dfrac{k+1}{2}=l+1$ ist. In diesem Fall ist laut (4) $l+1=\sum\limits_{i\in\mathfrak{J}_2}(u_i+1)$ und laut (3) $4l+3=\sum\limits_{i\in\mathfrak{J}_2}(4u_i+2)+\tilde{\varrho}_1$. K kann jedoch nicht aus einem einzigen ϱ-Bogen bestehen, deshalb ist auch $\tilde{\varrho}_1=\tilde{\alpha}_2$ wahr. Aus diesen Zusammenhängen folgt jedoch

$$\tilde{\varrho}_1=\tilde{\alpha}_2=1.$$

Also kann $\varphi_0(G)=\dfrac{2\tau+2\delta}{k+1}$ dann und nur dann erfüllt sein, wenn eine einzige Kante von K eine RR-Kante ist, und alle anderen TR-Kanten sind, $\mathfrak{J}=\mathfrak{J}_2=\{1\}$ und so $X=\{t_1^1, t_3^1, \ldots, t_k^1\}$ ist; ferner laut (11) falls für jedes $t\in X$ $\varphi(t)=\dfrac{2\tau+2\delta}{k+1}$ und $M_X=R$ gilt.

Nun sehen wir ein, daß wenn G ein extremaler Graph ist, so eine solche Zerlegung $\{P_1, \ldots, P_{2k+1}\}$ seiner Punktmenge existiert, daß G nur P_1P_2-, …, $P_{2k}P_{2k+1}$- und $P_{2k+1}P_1$-Kanten enthält. (Ähnlich wie für $k=3$, kann auch hier gezeigt werden, daß im Falle $\delta < \frac{\tau}{k}$ G nicht notwendigerweise sämtliche solche Kanten enthält.) Jeder X-Punkt hat genau $\frac{2\tau+2\delta}{k+1}$ Nachbarn, die alle R-Punkte und wegen $G \in \mathcal{H}(2k+1)$ laut (2. 1) alle verschieden sind. Demzufolge existiert eine solche eindeutige Zerlegung $\{Q_1, Q_3, \ldots, Q_k\}$ von R, daß die Punkte der Menge Q_i Nachbarn von t_i^1 sind, also $\alpha(Q_i) = \frac{2\tau+2\delta}{k+1}$ $(i=1, 3, \ldots, k)$ gilt. Nun läßt es sich auf Grund von $G \in \mathcal{H}(2k+1)$ und (2. 1) einsehen, daß die Nachbarn eines beliebigen T-Punktes nur einer der Mengen $Q_1 \cup Q_3, Q_3 \cup Q_5, \ldots, Q_{k-2} \cup Q_k$ angehören können. Aus diesem Grunde existiert eine solche Zerlegung $\{T_1, \ldots, T_k\}$ von T, daß $t_i^1 \in T_i$ $(i=1, \ldots, k)$ ist und für ungerade Werte von i die Elemente von Q_i Nachbarn der T_i-Punkte sind, während für gerade Werte von i jeder T_i-Punkt sowohl in Q_{i-1} wie auch in Q_{i+1} Nachbarn besitzt. In diesem Falle, da für jedes $t \in T$ $\varphi(t) \geqq \geqq \frac{2\tau+2\delta}{k+1} = \alpha(Q_i)$ gilt, existieren alle $T_i Q_i$-Kanten $(i=1, 3, \ldots, k)$ und für gerades i können wegen $G \in \mathcal{H}(2k+1)$ solche Punkte, die verschiedenen Mengen T_i zugehören, keine gemeinsamen Nachbarn haben. Auf Grund all dessen bezeichne nun $R_1 \subset Q_1$ bzw. $R_{k+1} \subset Q_k$ jene Menge, die keine zu T_2-Punkten bzw. zu T_{k-1}-Punkten benachbarten Punkte hat. Es ist leicht einzusehen, daß die einzige zu $[R]$ gehörige Kante von K eine $R_1 R_{k+1}$-Kante ist. Es sei $Q_1 - R_1 = R_2$ und $Q_k - R_{k+1} = = R_k$. Falls $i \neq 1$ und $i \neq k$ ist, so besitzt jede Menge Q_i eine solche Zerlegung $\{R_i, R_{i+1}\}$, bei der keine zu T_{i+1}-Punkten benachbarten R_i-Punkte und keine zu T_{i-1}-Punkten benachbarten R_{i+1}-Punkte existieren. Nun folgt aus $G \in \mathcal{H}(2k+1)$ und (2. 1), daß jede Kante in $[R]$ eine $R_1 R_{k+1}$-Kante ist. So ist $\{R_1, T_1, R_2, T_2, \ldots \ldots, R_k, T_k, R_{k+1}\}$ eine erwünschte Zerlegung der Punktmenge von G.

Nun zeigen wir, daß falls $\frac{2\tau+2\delta}{k+1}$ eine ganze Zahl ist, so ein (extremaler) Graph G mit $\varphi_0(G) = \frac{2\tau+2\delta}{k+1}$ existiert (die folgenden gelten auch für $k=3$). $\frac{2\tau+2\delta}{k+1}$ sei eine ganze Zahl, A eine Punktmenge, $\alpha(A) = 2\tau+\delta$, $\{A_1, \ldots, A_{2k+1}\}$ eine Zerlegung von A und $\alpha(A_i) = \gamma_i$ $(i=1, \ldots, 2k+1)$. Führen wir die folgenden Bezeichnungen ein: $T = \bigcup_{i=1}^{k} A_{2i}$ und $R = A - T$. Die Zahlen γ_i werden folgendermaßen bestimmt: Ist $\frac{\tau+\delta}{k+1}$ ganz, so setzen wir zuerst in jede Menge A_i $\frac{\tau+\delta}{k+1}$ Punkte. Dies ist möglich, da wegen $\delta \leqq \frac{\tau}{k}$ auch $(2k+1)\frac{\tau+\delta}{k+1} \leqq 2\tau+\delta$ besteht. Wenn so noch Punkte übrigbleiben, so verteilen wir diese beliebig unter den in T fallenden Mengen A_i. Ist $\frac{\tau+\delta}{k+1}$ nicht ganzzahlig, so ist $\frac{\tau+\delta}{k+1} - \frac{1}{2}$ eine ganze Zahl, und deshalb besteht im Falle $\delta \leqq \frac{\tau}{k}$ auch $(2k+1)\frac{\tau+\delta}{k+1} + \frac{1}{2} \leqq 2\tau+\delta$. Setzen wir zuerst in jede Menge A_i $\frac{\tau+\delta}{k+1} - \frac{1}{2}$ Punkte, und dann in die Mengen $A_1, A_2,$

$A_5, A_6, \dots, A_{2k-1}, A_{2k}$ je einen Punkt. Falls noch Punkte übrigbleiben, so verteilen wir diese beliebig unter den in T fallenden A_i. Aus der letzteren Ungleichung folgt, daß wir nicht zu viele Punkte verwendet haben. Mit den so bestimmten Daten sind die Graphen $\Gamma(\gamma_1, \dots, \gamma_{2k+1})$ extremale Graphen des Problems, die T-Punkte haben nämlich genau $\frac{2\tau+2\delta}{k+1}$ Nachbarn, und die übrigen Punkte haben mindestens so viele Nachbarn, es ist $\alpha(R) = \tau+\delta$, $\alpha(T)=\tau$ und auf Grund des Aufbaus kann man einsehen, daß T immer eine $\varkappa$-Menge dieser Graphen ist. Damit ist Satz (2. 7) bewiesen. Es läßt sich auch zeigen, daß im Falle $\delta < \frac{\tau}{k}$ mehrere, paarweise nicht isomorphe extremale Graphen existieren. Abb. 8 veranschaulicht einen extremalen Graphen für $k=5$. Die fünf Kreisgebiete der oberen Reihe entsprechen zusammen einer $\varkappa$-Menge.

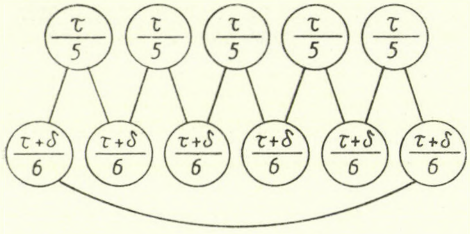


Abb. 8

§ 3.

In diesem Teil erwähnen wir einige Kantenanzahlprobleme bezüglich Graphen der Klasse $\mathcal{K}(2k+1)$; in einem einfacheren Fall lösen wir auch ein Kantenanzahl- bzw. Gradzahl-Problem bezüglich Graphen der Klasse $\mathcal{K}(k)$; ferner berichten wir über eine weitere Verallgemeinerung, über diesbezügliche Ergebnisse und Vermutungen.

Die Lösung der (2. 4) und (2. 6) entsprechenden Kantenanzahl-Probleme findet man in [2] (siehe dort Satz (3. 5) — dieser stammt von TURÁN — bzw. Satz (3. 4)). Die Lösung des (2. 7) entsprechenden Kantenanzahl-Problems für die Graphen der Klasse $\mathcal{K}(n, 5)$ enthält Satz (3. 6) von [2]. Wenn die $\varkappa(G)=\tau$-Werte der Graphen $G \in \mathcal{K}(n, 2k+1)$ kleiner als $n/2$ gewählt werden, so können wir das Kantenanzahl-Problem mit beliebigem $k>2$ nur für den Fall $\tau = \frac{n-1}{2}$ beantworten:

SATZ (3. 1), *$k \geqq 2$, n, $\tau \geqq k$ seien festgehalten und $n = 2\tau+1$. Ist $G \in \mathcal{K}(n, 2k+1)$ und $\varkappa(G)=\tau$, so besteht*

$$v(G) \leqq \tau^2 - 2\tau(k-2) + (k-1)^2;$$

und das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn $G=\Gamma(\gamma_1, \dots, \gamma_{2k+1})$ ist, wobei $1 \leqq \gamma_1 \leqq \frac{\tau-(k-2)}{2}$, $\gamma_2 = \tau-(k-1)$, $\gamma_3 = \tau-(k-2)-\gamma_1$, $\gamma_4 = \dots = \gamma_{2k+1} = 1$ gilt.

BEMERKUNG. Der extremale Graph für $\gamma_1 = 1$ stammt von ERDŐS und GALLAI ([3], S. 124).

BEWEIS. Es sei G ein den Bedingungen genügender Graph und K ein ungerader Kreis minimaler Länge in G; die Länge von K sei $2l+1$. Dann ist $k \leqq l$; auf Grund von (2. 1) hat K keine Diagonale, also besteht $l \leqq \tau$. Die Menge der Punkte von K

bezeichne P, und es sei $Q = M-P$. Dann besteht $\alpha(P) = 2l+1$ und $\alpha(Q) = 2(\tau-l)$. Da $[Q]\in\mathcal{H}(2k+1) \subseteqq \mathcal{H}(3)$ gilt, ist laut (1. 2) $\nu([Q]) \leqq (\tau-l)^2$ und das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn $[Q] = \Gamma\langle\tau-l, \tau-l\rangle$. Es ist $\nu([P]) = 2l+1$ und laut (2. 2) gilt $\nu([Q, P]) \leqq 2\cdot\alpha(Q) = 4(\tau-l)$. Aus alledem folgt $\nu(G) = \nu([Q])+\nu([P])+\nu([Q, P]) \leqq (\tau-l)^2+2l+1+4(\tau-l) \leqq \tau^2-2\tau(k-2)+(k-1)^2$.

Es sei nun G ein extremaler Graph des Problems. Dann ist laut den bisher Gesagten $l=k$, $[Q] = \Gamma\langle\tau-k, \tau-k\rangle$ und für jedes $q\in Q$ gilt $\varphi(q, P)=2$. Bezeichnen wir die beiden disjunkten, $\tau-k$ Elemente enthaltenden, unabhängigen Punktmengen in $[Q]$ mit R und T, und die Punkte von K mit $p_1, \ldots, p_{2k+1}$ (die Kanten von K sind: $(p_1, p_2), \ldots, (p_{2k}, p_{2k+1}), (p_{2k+1}, p_1)$). Es sei $t\in T$ und die zwei Nachbarn von t in P seien p_1 und p_3. Da jede RT-Kante existiert, und $G\in\mathcal{H}(2k+1)$ gilt, folgt wegen (2. 1) und (2. 2), daß die beiden Nachbarn eines beliebigen $r\in R$ entweder p_2 und p_4, oder p_{2k+1} und p_2 sind; weiterhin, falls zwei solche R-Punkte existieren, deren Nachbarpaare in P verschieden sind, so sind die beiden Nachbarn jedes T-Punktes in P p_1 und p_3. Also gilt mindestens für den einen der Mengen R und T, daß alle seine Punkte zu denselben beiden Punkten von K benachbart sind. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß dies für T erfüllt ist. Dann existiert die eindeutige Zerlegung $\{R_1, R_3\}$ von R derart, daß $r\in R$ dann und nur dann R_1 bzw. R_3 angehört, wenn seine beiden Nachbarn in P die zwei Nachbarn von p_1 bzw. p_3 in K sind. Da $\alpha(R) = \tau-k$ ist, enthält der eine der Mengen R_1 und R_3 — sagen wir R_1 — nicht mehr als $\frac{\tau-k}{2}$ Punkte. Demzufolge kann man bei den Bezeichnungen $R_1\cup\{p_1\}=A_1$, $T\cup\{p_2\}=A_2$, $R_3\cup\{p_3\}=A_3$, $\{p_4\}=A_4, \ldots, \{p_{2k+1}\}=A_{2k+1}$, $\gamma_i=\alpha(A_i)$ $(i=1, \ldots, 2k+1)$ sehen, daß G über die im Satz ausgesagten Eigenschaften verfügt; ferner, daß die Punkte von T und die Punkte $p_1, p_3, \ldots, p_{2k-1}$ insgesamt eine $\varkappa$-Menge von G bilden, also $\varkappa(G)=\tau$ besteht. Damit ist der Satz bewiesen.

(3. 2) Ist $G\in\mathcal{H}(n, 2k+1)$, $\varkappa(G)=\tau$ und $n = 2\tau+\delta$, dann vermuten wir für den Fall $1\leqq\delta\leqq\frac{\tau}{k}$ $\left(\text{d. h. } \frac{k}{2k+1}\leqq\frac{\tau}{n}<\frac{1}{2}\right)$, daß die extremalen Graphen des Kantenanzahl-Problems jene und nur jene $\Gamma(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2k+1})$ Graphen sind, für welche $\delta\leqq\gamma_1\leqq\frac{\tau-(k-2)\delta}{2}$, $\gamma_2 = \tau-(k-1)\delta$, $\gamma_3 = \tau-(k-2)\delta-\gamma_1$, $\gamma_4=\ldots=\gamma_{2k+1}=\delta$ gilt. Diese Graphen stimmen für $\delta=\frac{\tau}{k}$ mit den extremalen Graphen des Satzes (2. 5) überein. Die Richtigkeit der Vermutung folgt für $\delta=1$ aus (3. 1), für $k=2$ aus [2], Satz (3. 6). Außerdem haben wir die Richtigkeit der Vermutung noch für den Spezialfall $k=3$, $\delta=2$, $\tau=6$ nachgewiesen, worauf wir jedoch hier nicht eingehen.

Falls bezüglich der $\varkappa(G)=\tau$ Werte der Graphen G der Klasse $\mathcal{H}(n, k)$ $\frac{\tau}{n}\geqq\frac{1}{k-1}$ besteht, dann lassen sich die entsprechenden Sätze der erwähnten Sätze von TURÁN und ZARANKIEWICZ leicht beweisen.

SATZ (3. 3) *Es seien* $n, \tau, k\geqq 2$ *festgehalten,* $\frac{\tau}{n}\geqq\frac{1}{k-1}$ *und für den Graphen* $G\in\mathcal{H}(n, k)$ *sei* $\varkappa(G)=\tau$. *Die Kantenanzahl von* G *ist dann und nur dann maximal,* *wenn* $G=\Gamma\langle\gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1}\rangle$ *ist, wobei* $\gamma_1=\tau$ *und für den Fall* $k>2$ $\gamma_i=\alpha(A_i)$ $(i=1, \ldots \ldots, k-1)$, $\{A_2, \ldots, A_{k-1}\}$ *eine gleichmäßige Zerlegung von* $M-A_1$ *ist.*

BEWEIS. Der Satz ist für $k=2$ trivial und folgt für $k=3$ aus Satz (3. 4) von [2]. Es seien $k>3$, A_1 eine $\varkappa$-Menge des Graphen G, für welche die Bedingungen des Satzes erfüllt sind, und $R = M-A_1$. Dann bestehen $\alpha(A_1)=\tau$ und $\alpha(R) = n-\tau$. Es sei $\{A_2, \ldots, A_{k-1}\}$ eine gleichmäßige Zerlegung von R, $\alpha(A_2)=\gamma_2, \ldots, \alpha(A_{k-1})= =\gamma_{k-1}$, und $\beta=\min(\gamma_2, \ldots, \gamma_{k-1})$. Da $\beta\leqq\frac{n-\tau}{k-2}$ besteht, folgt aus $\frac{\tau}{n}\geqq\frac{1}{k-1}$ die Ungleichung $\beta\leqq\tau$. Nun sei B eine beliebige Teilmenge von A_1 mit $\alpha(B)=\beta$. Dann ist $\{B, A_2, \ldots, A_{k-1}\}$ eine gleichmäßige Zerlegung der Menge $R\cup B$. Es besteht $[R\cup B]\in\mathcal{H}(n-\tau+\beta, k)$, und so ist $\nu([R\cup B])$ laut (1. 1) dann und nur dann maximal, wenn $[R\cup B] = \Gamma\langle\beta, \gamma_2, \ldots, \gamma_{k-1}\rangle$ ist. Bezeichnet ν^* die Kantenanzahl der Graphen $\Gamma\langle\beta, \gamma_2, \ldots, \gamma_{k-1}\rangle$, dann besteht

$$\nu(G) = \nu([R\cup B])+\sum_{t\in A_1-B}\varphi(t) \leqq \nu^*+(\tau-\beta)(n-\tau).$$

Aus den bisherigen folgt, daß $\nu(G) = \nu^*+(\tau-\beta)(n-\tau)$ dann und nur dann richtig ist, wenn $[R\cup B]$ ein $\Gamma\langle\beta, \gamma_2, \ldots, \gamma_{k-1}\rangle$-Graph ist, und alle $(A_1-B)R$-Kanten existieren, d. h. $G=\Gamma\langle\gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1}\rangle$ mit $\gamma_1=\tau$ ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Die extremalen Graphen, die im Satz auftreten, sind für $\frac{\tau}{n}\geqq\frac{1}{k-1}$ gleichzeitig extremale Graphen des entsprechenden Gradzahl-Problems. Ist nämlich für einen Graphen G $\pi(G)=n$ und $\varkappa(G)=\tau$, so ist für alle solche Punkte t, die den $\varkappa$-Mengen von G angehören, $\varphi(t) \leqq n-\tau$, also $\varphi_0(G) \leqq n-\tau$. Für die obigen Graphen Γ ist dagegen $\varphi_0(\Gamma) = n-\tau$. Es ist ebenfalls ersichtlich, daß diese Graphen Γ im Falle $\frac{\tau}{n}>\frac{1}{k-1}$ auch dann extremale Graphen des Gradzahl-Problems bleiben, wenn die Gleichmäßigkeit der Zerlegung $\{A_2, \ldots, A_{k-1}\}$ von $M_\Gamma-A_1$ „in kleinem Masse" verdorben wird.

Bezüglich des Kantenanzahl-Problems vermuten wir für $k\geqq 4$, im Falle $\frac{2}{2k-1}\leqq \leqq\frac{\varkappa(G)}{\pi(G)}<\frac{1}{k-1}$ das folgende:

(3. 4) (VERMUTUNG) Es seien $n, \tau, k \geqq 4, \delta\left(1 \leqq \delta \leqq \frac{\tau}{2}\right)$ festgehalten, $n = (k-1)\tau+\delta\left(\text{dann ist } \frac{2}{2k-1}\leqq\frac{\tau}{n}<\frac{1}{k-1}\right)$ und für den Graphen $G\in\mathcal{H}(n, k)$ sei $\varkappa(G)=\tau$. Die Kantenanzahl von G ist dann und nur dann maximal, wenn G aus einem Graphen $\Gamma(\delta, \delta, \delta^*, \tau-\delta, \tau-\delta^*)\left(\delta\leqq\delta^*\leqq\frac{\tau}{2}\right)$ und aus einem hierzu fremden Graphen $\Gamma\langle\gamma_1, \ldots, \gamma_{k-3}\rangle$ $(\gamma_1=\ldots=\gamma_{k-3}=\tau)$ in solcher Weise zustande gebracht werden kann, daß alle Punkte des einen mit allen Punkten des anderen verbunden werden.

Die Vermutung (3. 4) haben wir für die Fälle $\tau=2$ und 3 (in beiden Fällen ist $\delta=1$) und für den Fall $k=4$ bei $\delta=1$ nachgewiesen; darauf wollen wir jedoch hier nicht eingehen.

Im folgenden beschäftigen wir uns mit einer Verallgemeinerung jenes Gradzahl- bzw. Kantenanzahl-Problems, wobei n und τ festgehalten sind und der vorgeschriebene Teilgraph ein Dreieck ist. Der Anlaß zu dieser Verallgemeinerung ergibt sich aus der folgenden naheliegenden Verallgemeinerung des Begriffes der maximalen Anzahl unabhängiger Punkte eines Graphen (s. auch [4] S. 702).

Bezeichnen wir mit $\varkappa_l(G)$ $(l \geqq 2)$ die maximale Anzahl jener Punkte des Graphen G, die einen solchen Graphen in G spannen, der keinen vollständigen l-Graphen enthält. Speziell ist $\varkappa_2(G)=\varkappa(G)$. Bezüglich der Gradzahlen der Graphen der Klasse $\mathcal{H}(k)$ ist die folgende Abschätzung gültig (für $k=3$ gibt das (1. 3) an).

(3. 5) *Ist* $G \in \mathcal{H}(k)$ $(k \geqq 2)$, *so besteht für jeden Punkt* $p \in G$

$$\varphi(p) \leqq \varkappa_{k-1}(G).$$

Es gilt nämlich für die Menge P aller zum Punkt p benachbarten Punkte in G $[P] \in \mathcal{H}(k-1)$, da sich sonst zu einem vollständigen $(k-1)$-Graphen von $[P]$ p und die anschließenden Kanten hinzugenommen, ein vollständigen k-Graph von G ergeben würde.

Auf Grund der vorausgegangenen läßt sich das erwähnte Problem folgendermaßen formulieren: $k \geqq 3$, n, τ_{k-1} seien festgehalten und für den Graphen $G \in \mathcal{H}(n, k)$ sei $\varkappa_{k-1}(G)=\tau_{k-1}$. Dann suchen wir bei dem Gradzahl-Problem für $\varphi_0(G)$, bei dem Kantenanzahl-Problem für $v(G)$ eine genaue obere Schranke. Falls $\frac{\tau_{k-1}}{n} \geqq \frac{k-2}{k-1}$, so können wir beide Probleme lösen.

SATZ (3. 6) *Es seien* $k \geqq 3$, n, τ_{k-1} *festgehalten,* $\frac{\tau_{k-1}}{n} \geqq \frac{k-2}{k-1}$ *und für den Graphen* $G \in \mathcal{H}(n, k)$ *sei* $\varkappa_{k-1}(G)=\tau_{k-1}$. *Die Kantenanzahl von G ist dann und nur dann maximal, wenn* $G=\Gamma\langle\gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1}\rangle$ *ist, wobei* $\gamma_i=\alpha(A_i)$ $(i=1, \ldots, k-1)$, $\gamma_1 = n-\tau_{k-1}$ *und* $\{A_2, \ldots, A_{k-1}\}$ *eine gleichmäßige Zerlegung von* $M-A_1$ *bezeichnet.*

Der Beweis des Satzes läßt sich mit dem gleichen Gedankengang durchführen, mit welchem wir in [1] den Satz von TURÁN bewiesen haben. Wir gehen hier auf diesen Beweis nicht ein. Für $k=3$ stimmen die Sätze (3. 6) und (3. 3) überein.

Nun zeigen wir, daß falls G ein im Satz (3. 6) vorkommender extremaler Graph ist, so er zugleich ein extremaler Graph des entsprechenden Gradzahl-Problems ist. Wegen der Bedingung $\frac{\tau_{k-1}}{n} \geqq \frac{k-2}{k-1}$ ist $\gamma_1 \leqq \min(\gamma_2, \ldots, \gamma_{k-1})$, und so gilt $\varphi_0(G) = n-\max(\gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1}) = n-\max(\gamma_2, \ldots, \gamma_{k-1})$. Es seien nun $k \geqq 3$, n, τ_{k-1} festgehalten, $\frac{\tau_{k-1}}{n} \geqq \frac{k-2}{k-1}$ und für den Graphen $G' \in \mathcal{H}(n, k)$ sei $\varkappa_{k-1}(G')=\tau_{k-1}$. Es bezeichne T_{k-1} eine solche Teilmenge der Punktmenge von G', für welche $[T_{k-1}]_{G'} \in \mathcal{H}(k-1)$ und $\alpha(T_{k-1})=\tau_{k-1}$ gilt, ferner sei $M_{G'}-T_{k-1} = B$. Betrachten wir eine gleichmäßige Zerlegung von T_{k-1} in $k-2$ Mengen. Die maximale Anzahl der Elemente dieser Mengen bezeichnen wir mit $\beta_{\max}$ die minimale Anzahl mit $\beta_{\min}$. Wenn für jedes $p \in T_{k-1}$ $\varphi_{G'}(p, T_{k-1}) > \tau_{k-1}-\beta_{\max}$ ist, dann läßt es sich unter Anwendung des Satzes (1. 1) einsehen, daß $[T_{k-1}]_{G'}$, unserer Annahme widersprechend, einen vollständigen $(k-1)$-Graphen enthält. Also besteht $\varphi_0([T_{k-1}]_{G'}) \leqq$

$\leqq \tau_{k-1} - \beta_{\max}$. Da $\alpha(B) + \tau_{k-1} = n$ und wegen der Bedingung $\frac{\tau_{k-1}}{n} \geqq \frac{k-2}{k-1}$ $\alpha(B) \leqq \beta_{\min}$ ist, so gilt $\varphi_0(G') \leqq n - \beta_{\max}$, dies beweist aber unsere Behauptung. Aus dem Gesagten kann auch eingesehen werden, daß für $\frac{\tau_{k-1}}{n} = \frac{k-2}{k-1}$ sowohl das Gradzahl-Problem wie auch das Kantenanzahl-Problem — von Isomorphien abgesehen — je einen einzigen extremalen Graphen besitzen.

Nun besprechen wir im Falle $\frac{\varkappa_{k-1}(G)}{\pi(G)} < \frac{k-2}{k-1}$ unsere Teilergebnisse bezüglich des letzteren Gradzahl- bzw. Kantenanzahl-Problems. Besteht für die Graphen $G \in \mathcal{H}(n, k)$ $\varkappa_{k-1}(G) = \tau_{k-1}$, dann ist laut (3. 5)

$$\varphi_0(G) \leqq \tau_{k-1}$$

und daraus folgt

$$\nu(G) \leqq \frac{n \cdot \tau_{k-1}}{2}.$$

Auf Grund der Obigen kann man sich überzeugen, daß diese trivialen Schranken für $\frac{\tau_{k-1}}{n} = \frac{k-2}{k-1}$ genau sind. Nun zeigen wir, daß sie bei beliebigem $k \geqq 3$ in jedem solchen Fall genau sind, wo $\frac{\tau_{k-1}}{n} = \frac{(k-2)m}{km-1}$ gilt $\Big($$m$ ist positiv, ganz; $\frac{k-2}{k} < \frac{(k-2)m}{km-1} \leqq \frac{k-2}{k-1}$ und für $m=1$ gilt $\frac{(k-2)m}{km-1} = \frac{k-2}{k-1}\Big)$. Wir geben nämlich für jedes ganze $k \geqq 3$ und jeden positiven, ganzen Wert von m solche Graphen $G \in \mathcal{H}(n, k)$ an, für welche $\varkappa_{k-1}(G) = \tau_{k-1}$ ist, $\frac{\tau_{k-1}}{n} = \frac{(k-2)m}{km-1}$ besteht und für alle Punkte der Graphen $\varphi(p) = \varphi_0(G) = \tau_{k-1}$ gilt. Zuerst geben wir eine Gruppe dieser Graphen an, und dann mit Hilfe dieser Gruppe die anderen (den Fall $k=3$ siehe in [2], § 4).

(3. 7) Wir bezeichnen mit $G_{k,m}$ ($k \geqq 3$, $m \geqq 1$) jenen Graphen, dessen Punkte die Eckpunkte eines in den Einheitskreis eingeschriebenen, regelmäßigen $(km-1)$-Ecks sind, und dessen Kanten durch sämtliche solche Punktpaare gebildet werden, deren Entfernungen größer sind als die Länge einer Seite des in den Einheitskreis eingeschriebenen, regelmäßigen k-Ecks.

Es ist leicht ersichtlich, daß $G_{k,m}$ dann und nur dann einen vollständigen l-Graphen enthält, wenn er einen solchen Kreise K der Länge l besitzt, dessen Punkte bei der Durchlaufung von K und bei der Durchlaufung des Einheitskreises in derselben Reihenfolge berührt werden können. Demzufolge besteht $G_{k,m} \in \mathcal{H}(k)$. Aus der Definition folgt unmittelbar, daß zu jedem Punkt von $G_{k,m}$ $(k-2)m$ Kanten inzident sind, und so $\varphi_0(G_{k,m}) = (k-2)m$ ist. Daraus ergibt sich $\varkappa_{k-1}(G_{k,m}) \geqq$ $\geqq (k-2)m$. Nun beweisen wir, daß $\varkappa_{k-1}(G_{k,m}) \leqq (k-2)m$ besteht. Aus der Definition folgt, daß zwei Punkte von $G_{k,m}$ dann und nur dann durch eine Kante verbunden sind, wenn innerhalb jedes der durch diese beiden Punkte entstehenden zwei Bogen des Einheitskreises sich mindestens $m-1$ der $km-1$ Punkte befinden. Wir zeigen, daß man von den $km-1$ Punkten mindestens $2m-1$ weglassen muß, um alle vollständigen $(k-1)$-Graphen in $G_{k,m}$ zu zerstören. In diesem Falle bleiben jedoch höchstens $km-1-(2m-1) = (k-2)m$ Punkte übrig, wodurch unsere Behauptung bewiesen wird. Da $km-1 = (k-1)m+m-1$ ist, lassen sich bei beliebiger Weglassung von $m-1$ Punkten von den übriggebliebenen immer noch $k-1$ Punktgruppen mit je m Elementen bilden; führen wir dies in der Reihenfolge durch, die dem einmaligen Umlauf des Einheitskreises entspricht, und betrachten wir die Punkte jeder Gruppe ebenfalls in dieser Reihenfolge. Dann werden durch die ersten, zweiten, ..., m-ten Elemente der Gruppen je ein vollständiger $(k-1)$-Graphen in $G_{k,m}$ gespannt. Diese Graphen sind paarweise fremd. Also müssen außer den $m-1$ Punkten nach mindestens m Punkte weggelassen werden, was unserer Behauptung entspricht.

(3. 8) Nun ordnen wir jedem Graphen $G_{k,m}$ und jeder Zahl $q \geqq 1$ einen Graphen $G^q_{k,m}$ zu. Es bezeichne $A_1, \ldots, A_{km-1}$, paarweise fremde, aus je q Punkten bestehende Mengen. Die Menge der Punkte von $G^q_{k,m}$ sei gleich $\bigcup\limits_{i=1}^{km-1} A_i$. Die Kanten von $G^q_{k,m}$ werden folgendermaßen bestimmt: ist i, j ein solches Zahlenpaar, für welches der Graph $G_{k,m}$, dessen Punkte $a_1, \ldots, a_{km-1}$ sind, die Kante (a_i, a_j) enthält, so soll $G^q_{k,m}$ sämtliche A_iA_j-Kanten enthalten, enthält aber $G_{k,m}$ für das Zahlenpaar i, j nicht die Kante (a_i, a_j), so soll $G^q_{k,m}$ keine einzige A_iA_j-Kante enthalten.

Aus den Eigenschaften von $G_{k,m}$ folgt, daß $G^q_{k,m} \in \mathcal{H}(q(km-1), k)$ ist, zu jedem seiner Punkte $q(k-2)m$ Kanten inzident sind und $\varkappa_{k-1}(G^q_{k,m}) = q(k-2)m$ gilt. Also besitzt $G^q_{k,m}$ die erforderten Eigenschaften.

Die zu $G^q_{k,m}$ isomorphen Graphen nennen wir $\Gamma^q_{k,m}$-Graphen. Man kann sich überzeugen, daß $G^1_{k,m} = G_{k,m}$, $\Gamma^q_{k,1} = \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1} \rangle$ (wobei $\gamma_1 = \ldots = \gamma_{k-1} = q$) und $\Gamma^q_{3,2} = \Gamma(q, q, q, q, q)$ gilt.

Wir vermuten, daß in den Fällen $\dfrac{\varkappa_{k-1}(G)}{\pi(G)} = \dfrac{(k-2)m}{km-1}$ ($k \geqq 4$ und $m \geqq 2$ ganz) nur die n Punkte enthaltenden $\Gamma^{\frac{n}{km-1}}_{k,m}$ Graphen die extremalen Graphen sowohl des Gradzahl-Problem, wie auch des Kantenanzahl-Problems sind.

Endlich drücke ich Herrn Gallai meinen Dank dafür aus, daß er meine Aufmerksamkeit auf die hier besprochenen Gradzahl-Probleme gelenkt hat, und Herrn Hajós für seine wertvollen Bemerkungen.

MATHEMATISCHER LEHRSTUHL 4
DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE,
BUDAPEST

(Eingegangen am 30. Oktober 1963.)

Literaturverzeichnis

[1] B. ANDRÁSFAI, Neuer Beweis eines graphentheoretischen Satzes von P. Turán, *M. T. A. Mat. Kut. Int. Közl.*, 7 (1962), A, S. 193–196.

[2] B. ANDRÁSFAI, Über ein Extremalproblem der Graphentheorie, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **13** (1962), S. 443–455.

[3] P. ERDŐS, On a theorem of Rademacher–Turán, *Ill. J. Math.*, **6** (1962), S. 122–127.

[4] P. ERDŐS–C. A. ROGERS, The construction of certain graphs, *Can. J. Math.*, **14** (1962), S. 702–707.

[5] D. KÖNIG, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* (Leipzig, 1936).

[6] P. TURÁN, Egy gráfelméleti szélsőérték feladatról, *Mat. és Fiz. Lapok*, **48** (1941), S. 436–452.

[7] P. TURÁN, On the theory of graphs, *Coll. Math.*, **3** (1954), S. 19–30.

[8] K. ZARANKIEWICZ, Sur les relations symétriques dans l'ensamble fini, *Coll. Math.*, **1** (1947), S. 10–14.

ÜBER HALBKÖRPER, DIE IN ALGEBRAISCHEN ZAHLKÖRPERN ENTHALTEN SIND

Von

H. KOCH (Berlin)

(Vorgelegt von L. RÉDEI)

Sei **P** der Körper der rationalen Zahlen, K eine endliche Erweiterung von **P** vom Grade n und $\mathfrak{R}$ die Menge der Isomorphismen von K in dem Körper R der reellen Zahlen.

Das Ziel dieser Note ist der Beweis der folgenden Sätze.

SATZ 1. *b sei ein Element aus K mit*

$$\varphi(b) > 0$$

für alle $\varphi \in \mathfrak{S}$, wobei $\mathfrak{S}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{R}$ ist.

Weiter sei a ein erzeugendes Element von $K/\mathbf{P}$ mit

$$\varphi(a) < 0$$

für alle $\varphi \in \mathfrak{R} - \mathfrak{S}$.

Dann gibt es eine rationale Funktion $r(x)$ mit nicht negativen rationalen Koeffizienten, so daß

$$b = r(a)$$

gilt.

SATZ 2. *H sei ein in K enthaltener Halbkörper mit Nullelement, der in keinem echten Teilkörper von K enthalten ist.*

Dann gibt es eine Teilmenge $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{R}$, so daß H genau aus den Elementen b von K mit

$$\varphi(b) \geqq 0$$

ür alle $\varphi \in \mathfrak{S}$ besteht.

SATZ 3. *Jeder in K enthaltene Halbkörper ist einfach.*

Zur Definition des Begriffs Halbkörper siehe L. RÉDEI [2]. Weitergehende Betrachtungen über Halbringe und Halbkörper finden sich bei H. J. WEINERT [3]—[5].

Satz 2 führt die Theorie der Halbkörper, die in algebraischen Zahlkörpern enthalten sind, auf die Theorie der algebraischen Zahlkörper zurück. Die Einschränkung auf Halbkörper mit Nullelement ist unwesentlich, da ein Halbkörper ohne Nullelement bei Adjunktion eines Nullelements Halbkörper bleibt.

In dem Fall eines total imaginären oder quadratischen Zahlkörpers wurde Satz 2 bereits von H. J. WEINERT [5], [6] auf anderem Wege bewiesen.

Für die Anregung zu dieser Note möchte ich Herrn DR. H. J. WEINERT meinen herzlichsten Dank aussprechen.

1. Vorbereitende Betrachtungen. Sei C der Körper der komplexen Zahlen, R^+ bzw. $\mathbf{P}^+$ der Halbkörper der nicht negativen reellen bzw. rationalen Zahlen.

Die kommutative Algebra $R\otimes_{\mathbf{P}}K$ ist halbeinfach und zerfällt daher in die direkte Summe von $r=\frac{n+r_1}{2}$ Körpern K_ν, von denen r_1 zu R und $r_2=\frac{n-r_1}{2}$ zu C isomorph sind. Sei

$$e = e_1+\ldots+e_r$$

die Zerlegung des Einselementes e von $R\otimes_{\mathbf{P}}K$ in orthogonale Idempotente und

$$R\otimes_{\mathbf{P}}K \cong Re_1+\ldots+Re_{r_1}+Ce_{r_1+1}+\ldots+Ce_r$$

die entsprechende Zerlegung von $R\otimes_{\mathbf{P}}K$.

Dann ist durch

$$a\to ae_\nu = \alpha e_\nu\to\alpha, \quad a\in K, \quad \alpha\in R, \quad \nu=1,\ldots,r_1$$

ein Isomorphismus φ_ν von K in R definiert. Die Isomorphismen φ_ν durchlaufen für $\nu=1,\ldots,r_1$ sämtliche Isomorphismen von K in R.

Für $\nu=r_1+1,\ldots,r$ sei i_ν ein Element aus K_ν, das der Gleichung $i_\nu^2=-e_\nu$ genügt, ψ_ν sei ein Isomorphismus von $Re_\nu+Ri_\nu$ auf C mit

$$\psi_\nu(\alpha e_\nu)=\alpha, \quad \alpha\in R.$$

Dann ist durch

$$a\to ae_\nu = \alpha e_\nu+\beta i_\nu\to\psi_\nu(\alpha e_\nu+\beta i_\nu), \quad a\in K, \quad \alpha,\beta\in R$$

ein Isomorphismus φ_ν von K in C definiert. Die Isomorphismen φ_ν durchlaufen für $\nu=r_1+1,\ldots,r$ ein Halbsystem der komplexen Isomorphismen von K in C (siehe hierzu H. HASSE [1] S. 208—210).

Entsprechend dem eben geschilderten Sachverhalt können wir

$$a=\sum_{\nu=1}^{r}\varphi_\nu(a)e_\nu, \qquad a\in K,$$

$$R\otimes_{\mathbf{P}}K = Re_1+\ldots+Re_{r_1}+Ce_{r_1+1}+\ldots+Ce_r$$

setzen.

$R\otimes_{\mathbf{P}}K$ ist ein n-dimensionaler Vektorraum über R. Wenn im folgenden von einer Topologie in $R\otimes_{\mathbf{P}}K$ die Rede ist, ist immer die Topologie des R^n gemeint. Diese Topologie ist mit der Produktoperation in $R\otimes_{\mathbf{P}}K$ verträglich.

Sei a ein Element aus K. Mit $H(a)$ werde der von a erzeugte Halbkörper, mit $\overline{H(a)}$ die topologische Abschließung von $H(a)$ in $R\otimes_{\mathbf{P}}K$ bezeichnet.

2. HILFSSATZ. *Sei a ein erzeugendes Element von K mit*

$$\varphi_\nu(a)>0, \quad \nu\in I\subseteqq\{1,\ldots,r_1\},$$
$$\varphi_\nu(a)<0, \quad \nu\in\{1,\ldots,r_1\}-I.$$

Dann ist $\overline{H(a)}$ gleich der Menge B aller $b\in R\otimes_{\mathbf{P}}K$, die der Bedingung

$$\overline{\varphi}_\nu(b)\geqq 0, \quad \nu\in I$$

genügen. Dabei ist $\overline{\varphi}_\nu$ die Fortsetzung von φ_ν auf $R\otimes_{\mathbf{P}}K$.

BEWEIS. Trivialerweise ist $\overline{H(a)} \subseteqq B$. Es bleibt daher nur $B \subseteqq \overline{H(a)}$ zu beweisen. Wir setzen

$$C_\nu = R^+, \quad \nu \in I,$$
$$C_\nu = R, \quad \nu \in \{1, \dots, r_1\} - I,$$
$$C_\nu = C, \quad \nu \in \{r_1 + 1, \dots, r\}.$$

Sei bereits $\bigcup\limits_{\nu \in J} C_\nu e_\nu \subseteqq \overline{H(a)}$ für ein J mit $\emptyset \subseteqq J \subset \{1, \dots, r\}$ bewiesen. Wir zeigen, daß man ein $\varkappa \notin J$ finden kann, so daß auch $C_\varkappa e_\varkappa$ in $\overline{H(a)}$ enthalten ist.

Sei $a = \sum\limits_{\nu=1}^{r} \alpha_\nu e_\nu$ und seien ω_μ, $\mu = 1, \dots, r$, rationale Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

$$\omega_\mu > 2 \max_{\nu = 1, \dots, r} |\alpha_\nu| \quad \text{für} \quad \mu \in J,$$
$$\omega_\mu = 0 \quad \text{für} \quad \mu \in \{1, \dots, r\} - J.$$

Dann kann man immer ein $\beta \in \mathbf{P}^+$ finden, so daß es unter den Zahlen

$$|\alpha_\nu + \beta + \omega_\nu|, \qquad \nu = 1, \dots, r$$

eine echt kleinste $|\alpha_\varkappa + \beta + \omega_\varkappa|$ gibt. Wegen

$$|\alpha_\nu + \beta + \omega_\nu| \geqq \beta + \omega_\nu - |\alpha_\nu| > |\alpha_\mu + \beta|$$

für $\nu \in J$, $\mu = 1, \dots, r$ gilt $\varkappa \notin J$.

Wir bestimmen weiter ein $\delta \in \mathbf{P}^+$ mit

$$\delta |\alpha_\varkappa + \beta| < 1, \tag{1}$$
$$\delta |\alpha_\nu + \beta + \omega_\nu| > 1, \quad \nu \neq \varkappa$$

und setzen

$$\delta(a + \beta e + \sum_{\nu \in J} \omega_\nu e_\nu) = \sum_{\nu=1}^{r} \gamma_\nu e_\nu .$$

Es gilt also $\sum\limits_{\nu=1}^{r} \gamma_\nu e_\nu \in \overline{H(a)}$.

Sei δ_m eine positive rationale Zahl mit

$$\frac{1}{2} \leqq |\delta_m \gamma_\varkappa^{-m}| \leqq 1. \tag{2}$$

Wegen (1) gilt

$$\lim_{m \to \infty} \delta_m \gamma_\nu^{-m} = 0 \tag{3}$$

für $\nu \neq \varkappa$. Die Menge

$$\left\{ \delta_m \left(\sum_{\nu=1}^{r} \gamma_\nu e_\nu \right)^{-m}, m = 1, \dots \right\}$$

liegt in einem beschränkten Gebiet des Raumes R^n. Sie besitzt daher einen Häufungspunkt $\sum\limits_{\nu=1}^{r} \varepsilon_\nu e_\nu$. Wegen (2) und (3) ist $\varepsilon_\varkappa \neq 0$ und $\varepsilon_\nu = 0$ für $\nu \neq \varkappa$. Damit haben wir

$$\varepsilon_\varkappa e_\varkappa \in \overline{H(a)}, \qquad \varepsilon_\varkappa \neq 0$$

bewiesen.

Wir haben nun die drei Fälle $\varkappa \in I$, $\varkappa \in \{1, \ldots, r_1\} - I$, $\varkappa \in \{r_1 + 1, \ldots, r\}$ zu untersuchen.

a) $\varkappa \in I$. In diesem Fall ist $\varepsilon_\varkappa > 0$ und daher

$$C_\nu e_\varkappa = R^+ e_\varkappa = R^+ \cdot \varepsilon_\varkappa e_\varkappa \subseteqq \overline{H(a)}.$$

b) $\varkappa \in \{1, \ldots, r_1\} - I$. Nach Voraussetzung ist $\alpha_\varkappa < 0$, $\varepsilon_\varkappa$ reell. Daher ist

$$C_\varkappa e_\varkappa = R e_\varkappa = R^+ e_\varkappa \cup - R^+ e_\varkappa = R^+ \varepsilon_\varkappa^2 e_\varkappa \cup R^+ \alpha_\varkappa \varepsilon_\varkappa^2 e_\varkappa =$$

$$= R^+ (\varepsilon_\varkappa e_\varkappa)^2 \cup R^+ a (\varepsilon_\varkappa e_\varkappa)^2 \subseteqq \overline{H(a)}.$$

c) $\varkappa \in \{r_1 + 1, \ldots, r\}$. In diesem Fall ist $\alpha_\varkappa$ komplex. Wir können eine positive reelle Zahl τ so bestimmen, daß $(\alpha_\varkappa + \tau)\varepsilon_\varkappa = \varrho e^{2\pi i \varphi}$ eine komplexe Zahl mit irrationalem Argument φ wird. Dann liegt die Menge

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} R^+ [(\alpha_\varkappa + \tau)\varepsilon_\varkappa]^m$$

in der komplexen Zahlenebene dicht. Also liegt

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} R^+ [(a + \tau e)\varepsilon_\varkappa e_\varkappa]^m$$

in $Ce_\varkappa$ dicht und es gilt

$$C_\varkappa e_\varkappa = C e_\varkappa \subseteqq \overline{H(a)}.$$

Damit ist der Induktionsbeweis beendet. Es folgt

$$\bigcup_{\nu=1}^{r} C_\nu e_\nu \subseteqq \overline{H(a)}$$

und daraus ergibt sich unmittelbar $B \subseteqq \overline{H(a)}$.

3. Beweis von Satz 1. Sei $\mathfrak{S} = \{\varphi_\nu, \nu \in I\}$ und b ein Element von K mit

$$\varphi_\nu(b) > 0, \quad \nu \in I.$$

Wir definieren Elemente b_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, von $Rx_{\mathrm{P}}K$ durch

$$\begin{aligned} b_\nu &= \beta_\nu e_\nu & \nu &= 1, \ldots, r_1, \\ b_\nu &= \beta_\nu (1 - i) e_\nu, & \nu &= r_1 + 1, \ldots, r, \\ b_\nu &= \beta_{\nu - r_2} i e_{\nu - r_2}, & \nu &= r + 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

wobei die von null verschiedenen, komplexen Zahlen β_ν durch

$$b = \sum_{\nu=1}^{r} \beta_\nu e_\nu$$

bestimmt sind.

Die Elemente b_ν, $\nu=1, \dots, n$, bilden eine Vektorbasis von $R \otimes_{\mathbf{P}} K$ über R mit

$$b = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu .$$

Nach Hilfssatz 1 ist $b_\nu \in \overline{H(a)}$, $\nu=1, \dots, n$. Wir wählen Elemente c_ν, $\nu=1, \dots, n$, aus $H(a)$, die in einer genügend kleinen Umgebung von b_ν liegen. Dann ist $\{c_\nu, \nu=1, \dots, n\}$ eine Basis von $K/\mathbf{P}$ und in

$$b = \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu c_\nu$$

sind die γ_ν, $\nu=1, \dots, n$, rationale Zahlen, die beliebig wenig von eins abweichen und daher positiv sind. Es gilt also $b \in H(a)$, q. e. d.

4. Beweis von Satz 2 und Satz 3. Es genügt Satz 3 für Halbkörper H zu beweisen, die in keinem echten Teilkörper von K enthalten sind.

Wir ordnen H die Menge γ aller Isomorphismen φ von K in R zu, für die $\varphi(H) \geqq 0$ gilt. Es gibt daher für alle $\varphi \in \mathfrak{R} - \mathfrak{S}$ Elemente a'_φ aus H mit $\varphi(a'_\varphi) < 0$. Weiter sei $a_0 \in H$ ein erzeugendes Element von $K/\mathbf{P}$. Dann gibt es für alle $\varphi \in \mathfrak{R} - \mathfrak{S}$ eine rationale Zahl $\varepsilon_\varphi > 0$, so daß $a_\varphi = a'_\varphi + \varepsilon_\varphi a_0 \in H$ ein erzeugendes Element von $K/\mathbf{P}$ mit $\varphi(a_\varphi) < 0$ ist.

Da die Elemente von K in $R \otimes_{\mathbf{P}} K$ dicht liegen, gibt es zu jedem $\varphi \in \mathfrak{R} - \mathfrak{S}$ ein Element b_φ mit

$$(4) \qquad \begin{aligned} &\varphi(b_\varphi) < -r_1, \\ &0 < \psi(b_\varphi) < 1 \quad \text{für} \quad \psi \in \mathfrak{R} - \{\varphi\}. \end{aligned}$$

Nach Satz 1 liegt b_φ in H. Daher gilt auch

$$a' = \sum_{\varphi \in \mathfrak{R} - \mathfrak{S}} b_\varphi \in H$$

und nach (4) ist $\varphi(a') < 0$ für alle $\varphi \in \mathfrak{R} - \mathfrak{S}$.

Dann gibt es eine rationale Zahl $\varepsilon > 0$, so daß $a = a' + \varepsilon a_0 \in H$ ein erzeugendes Element von $K/\mathbf{P}$ mit $\varphi(a) < 0$ für alle $\varphi \in \mathfrak{R} - \mathfrak{S}$ ist. Nach Satz 1 sind also alle $b \in K$ mit $\varphi(b) > 0$ für $\varphi \in \mathfrak{S}$ in H enthalten.

Da nach Voraussetzung auch die Null in H liegt, besteht H nach der Definition von $\mathfrak{S}$ genau aus den Elementen b von K mit $\varphi(b) \geqq 0$ für alle $\varphi \in \mathfrak{S}$. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Zum Beweis von Satz 3 ist nur zu bemerken, daß das eben konstruierte Element a von H eine Halbkörpererzeugende von H ist.

DEUTSCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN,
INSTITUT FÜR REINE MATHEMATIK,
BERLIN

(Eingegangen am 9. Dezember 1963.)

Literaturverzeichnis

[1] H. HASSE, *Zahlentheorie* (Berlin, 1949).

[2] L. RÉDEI, *Algebra I*, deutsche Ausg. (Leipzig, 1959).

[3] H. J. WEINERT, Über Halbringe und Halbkörper. I, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **13** (1962), S. 365–378.

[4] H. J. WEINERT, Über Halbringe und Halbkörper. II, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **14** (1963), S. 209–227.

[5] H. J. WEINERT, Über Halbringe und Halbkörper. III, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **15** (1964), S. 177–194.

[6] H. J. WEINERT, Unterhalbkörper quadratische Zahlkörper, im Druck.

ON A COMBINATORIAL PROBLEM. II*

By

P. ERDŐS (Budapest), member of the Academy

Let M be a set and F a family of its subsets. F is said by E. W. MILLER [5] to possess property B if there exists a subset K of M so that no set of the family F is contained either in K or in $\bar{K}$ ($\bar{K}$ is the complement of K in M).

HAJNAL and I [2] recently published a paper on the property B and its generalisations. One of the unsolved problems we state asks: What is the smallest integer $m(n)$ for which there exists a family F of sets $A_1, \dots, A_{m(n)}$ each having n elements which does not possess property B? Throughout this paper A_i will denote sets having n elements.

We observed $m(n) \leqq \binom{2n-1}{n}$, $m(1)=1$, $m(2)=3$, $m(3)=7$. As far as I know the value of $m(4)$ is not yet known.

Recently I [3] showed that $m(n) > 2^{n-1}$ for all n and thatfor $n > n_0(\varepsilon)$ $m(n) > (1-\varepsilon) 2^n \log 2$. W. M. SCHMIDT [6] proved $m(n) > 2^n(1+4n^{-1})^{-1}$ and up to date this is the best lower bound known for $m(n)$.

Recently ABBOTT and MOSER [1] proved that

$$m(a \cdot b) \leqq m(a)\, m(b)^a. \tag{1}$$

From (1) they deduced that for $n > n_0$, $m(n) < (\sqrt{7}+\varepsilon)^n$ and that $\lim\limits_{n\to\infty} m(n)^{1/n}$ exists. Their method is constructive. By non-constructive methods I now prove

THEOREM 1. $m(n) < n^2 2^{n+1}$.

Theorem 1 thus implies $\lim\limits_{n=\infty} m(n)^{1/n} = 2$. Theorem 1 and the result of SCHMIDT gives

$$2^n(1+4n^{-1})^{-1} < m(n) < n^2 2^{n+1}. \tag{2}$$

It would be interesting to improve the bounds for $m(n)$. A reasonable guess seems to be that $m(n)$ is of the order $n\ 2^n$.

A family of sets F is said to have property $B(s)$ if there exists a set S which has a non-empty intersection with each set of the family, but the cardinal number of the intersection is $< s$. HAJNAL and I asked what is the smallest integer $m(n, s)$ for which there exist sets $\{A_i\}$, $1 \leqq i \leqq m(n, s)$ which does not possess property $B(s)$? Clearly $m(n, n) = m(n)$.

---

* This paper was written while the author was visiting at the university of Alberta in Edmonton.

Mr. H. L. ABBOTT pointed it out to me that $m(2k, 2)=3$, $m(2k+1, 2)=4$.

Now we prove Theorem 1. We shall construct our $n^2 2^{n+1}$ sets of n elements not having property B as subsets of a set M of $2n^2$ elements. Suppose I have chosen already k of the sets $(k<n^2 2^{n+1})$ $A_1, \ldots, A_k$ and suppose that there are u_k pairs of subsets $\{K_i, \bar{K_i}\}$, $1 \leqq i \leqq u_k$ of M so that no set A_i, $1 \leqq i \leqq k$ is contained either in K or in $\bar{K}$. If $u_k=0$ our Theorem is proved. Assume henceforth $u_k>0$. We shall prove that we can find a set A_{k+1} so that

$$u_{k+1} \leqq u_k \left(1-\frac{1}{2^n}\right). \tag{3}$$

(For each i, $1 \leqq i \leqq u_k$, consider all subsets of n elements of K_i and $\bar{K}_i$.) For fixed i the number of these subsets is clearly ($|B|$ denotes the number of elements of B)

$$\binom{|K_i|}{n}+\binom{|\bar{K}_i|}{n} \geqq 2\binom{n^2}{n} \qquad (|K_i|+|\bar{K}_i| = |M| = 2n^2).$$

Thus the total number of subsets of n elements under consideration $(1 \leqq i \leqq u_k)$ is at least $2u_k\binom{n^2}{n}$.

The total number of subsets of M taken n at a time is $\binom{2n^2}{n}$. Hence at least one of these sets, say A_{k+1}, occurs either in K_i or in $\bar{K_i}$ for at least

$$\frac{2u_k\binom{n^2}{n}}{\binom{2n^2}{n}} = 2u_k \prod_{i=0}^{n-1} (n^2-i)\left(\prod_{i=0}^{n-1} (2n^2-i)\right)^{-1} = \tag{4}$$

$$= \frac{u_k}{2^{n-1}} \prod_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{i}{2n^2-i}\right) > \frac{u_k}{2^n}$$

values of i. Hence from (4) $u_{k+1}<u_k\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$ and (3) is proved.

Clearly $u_0=2^{2n^2-1}$ (since M has 2^{2n^2} subsets). Hence from (3)

$$u_r \leqq 2^{2n^2-1}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^r. \tag{5}$$

Hence from (5) if $r=n^2 2^{n+1}$, $u_r<1$, thus $u_r=0$ and our sets A_i, $1 \leqq i \leqq n^2 2^{n+1}$ do not have property B and the proof of Theorem 1 is complete.

By taking M to have $\left[\frac{n^2}{2}\right]$ elements we could show by slightly more careful calculation that for every $\varepsilon>0$ and $n>n_0(\varepsilon)$

$$m(n)<(1+\varepsilon)e \log 2\, n^2 2^{n-2}. \tag{6}$$

It seems unlikely that (6) can be improved to any great without some new idea.

By methods used in a paper of RÉNYI and myself [4] I can prove the following

THEOREM 2. *Let M be a set of N elements. Put*

$$k = CN2^n \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{N-i}\right)^{-1} \tag{7}$$

where C is a sufficiently large absolute constant. Then for all but

$$O\left(\binom{\binom{N}{n}}{k}\right)$$

choices of k subsets A_i, $1 \leqq i \leqq k$ of M, the A's will not have property B.

I can show that the order of magnitude in (7) cannot be improved, but I can not determine the correct value of C.

Let M be a set of N elements. Denote by $m_N(n)$ the smallest integer for which there exist subsets A_i, $1 \leqq i \leqq m_N(n)$ of M which do not have property B. The problem makes sense only for $N \geqq 2n-1$ and clearly $m_{2n-1}(n) = \binom{2n-1}{n}$. For $N \geqq 2n-1$, $m_N(n)$ is a non-increasing function of N and for sufficiently large N, $m_N(n) = m(n)$. Let N_0 be the smallest integer for which $m_{N_0}(n) = m(n)$, probably $N_0 = Cn^2$. It seems to me that perhaps the order of magnitude of $m_N(n)$ is

$$N2^n \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{N-i}\right)^{-1}.$$

This would in particular imply that if $N < c_1 n$, $m_N(n) > (2+c_2)^n$. I have been unable to throw any light on any of these questions.

MATHEMATICAL INSTITUTE,
EÖTVÖS LORÁND UNIVERSITY,
BUDAPEST

(Received 6 January 1964)

References

[1] A. L. ABBOTT and L. MOSER, On a Combinatorial Problem of Erdős and Hajnal, *Canad. Math. Bull.*, **7** (1964).

[2] P. ERDŐS and A. HAJNAL, On a property of families of Sets, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **12** (1961), pp. 87–123; see in particular problem 12 on p. 119.

[3] P. ERDŐS, On a Combinatorial Problem, *Nordisk Mat. Tidskrift*, **11** (1963), pp. 5–10.

[4] P. ERDŐS and A. RÉNYI, On the Evolution of Random Graph, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad.*, **5** (1960), pp. 17–67.

[5] E.W. MILLER, On a property of families of sets, *Comp. Rend. Varsovie*, (1937), pp. 31–38.

[6] W. M. SCHMIDT, Ein Kombinatorisches Problem von P. Erdős und A. Hajnal, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **15** (1964), pp. 373–374.

COMPARISON AND MONOTONITY THEOREMS FOR SECOND ORDER NON-LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

By

K. M. DAS (New Delhi, India)

(*Presented by* P. TURÁN)

1. In this paper we consider self-adjoint differential equations of the form

$$y''+yF(y,x)=0, \tag{1}$$

where $F(s,t)$ satisfies

(2a) $F(s,t)$ is continuous in both s and t for $-\infty<s<\infty$ and $0<t<\infty$;

(2b) $F(s,t)>0$ for $s,t>0$ and $F(-s,t)=F(s,t)$ for every t.

In view of (2b), $yy''<0$ and therefore all solution curves of (1) are concave toward the horizontal axis.

A special class of equations of the form (1) is

$$y''+p(x)y^{2n+1}=0, \qquad p(x)>0. \tag{3}$$

It is well-known that, as in the case of linear equations, we can associate with (3) the functional

$$J(y)=\frac{\left(\int_a^b y'^2\,dx\right)^{n+1}}{\int_a^b py^2\,dx}, \tag{4}$$

and its extremal values under appropriate admissibility conditions for $y(x)$. [3]

2. Here we prove the following comparison theorem:

THEOREM I. *Consider the differential equations*

$$u''+uF_1(u,x)=0, \tag{5}$$

$$v''+vF_2(v,x)=0. \tag{6}$$

Let

$$F_1(s,t)\leqq F_2(s,t) \tag{7}$$

(but equality does not hold in any t subinterval); $F_i(s,t)$ $i=1,2$ satisfy (2). *Further, suppose that $F_2(s,t)$ is non-increasing.*

If $u(x)$ is a solution of (5) *which vanishes at $x=a(>0)$ and which satisfies*

$$u(0)=0, \quad u(x)>0 \text{ in } (0,a),$$

then a solution of (6) *for which*

$$v(0)=0, \quad 0<v'(0)(\leqq u'(0)),$$

vanishes in $(0, a)$.

PROOF. It is not difficult to see that immediately to the right of $x=0$

$$u(x) \geqq v(x).$$

Suppose that the conclusion is false. Then, there is a first point $b(>0)$ such that

$$u(x)>v(x) \quad \text{in} \quad (0, b) \quad \text{and} \quad u(b)=v(b)>0.$$

(We first dispose of the case $b<a$.) Multiplying (5) by u, (6) by u^2/v ($v>0$ in $(0, b]$), integrating between ε and b, and subtracting — Picone's formula —, we get

$$\left[uu'-\frac{u^2 v'}{v}\right]_\varepsilon^b - \int_\varepsilon^b \left(u'-\frac{uv'}{v}\right)^2 dx + \int_\varepsilon^b u^2[F_1(u, x)-F_2(v, x)]\, dx = 0,$$

whence

$$\left[uu'-\frac{u^2 v'}{v}\right]_\varepsilon^b + \int_\varepsilon^b u^2[F_1(u, x)-F_2(v, x)]\, dx \geqq 0. \tag{8}$$

Since u/v tends to a limit as $x \to 0^+$, in view of the assumption on F_2, we have from (8)

$$u(b)[u'(b)-v'(b)]+\int_0^b u^2[F_1(u, x)-F_2(u, x)]\, dx > 0.$$

As $u'(b)<v'(b)$,

$$\int_0^b u^2[F_1(u, x)-F_2(u, x)]\, dx > 0,$$

which is in contradiction to (7). Thus $v(x)$ must vanish in $(0, a]$. However, $v(a)=0$ would lead to similar contradiction — Picone's formula applied on $(\varepsilon, a-\varepsilon')$ and $\varepsilon, \varepsilon' \to 0^+$, since $v'(a) \neq 0$ — (uniqueness of the trivial solution) — and so $u(x)/v(x)$ tends to a limit as $x \to a^-$.

This completes the proof.

REMARK 1. We can take solutions which have the same positive initial values without affecting the conclusion.

REMARK 2. It is clear that if $u(x)$ $(v(x))$ is a solution of (5) ((6)), so is $-u(x)$ $(-v(x))$. Thus the theorem holds for negative solutions as well, provided they start off properly.

EXAMPLE. Consider

$$u''+\frac{u}{4}=0, \tag{9}$$

$$v''+\frac{v}{(1+v^2)^2}=0. \tag{10}$$

A solution of (9) for which $u(0)=0$ is $\sin x/2$. All the hypotheses in Theorem 1 are satisfied, provided $v^2 \leqq 1$, which indeed is the case if we take

$$v(0)=0, \quad v'(0)=b, \quad 0<b\leqq 1/\sqrt{2}.$$

Thus this solution $v(x)$ of (10) vanishes in $(0, 2\pi)$.

3. In this section we establish some monotonity results for differential equations of the form (1). Similar theorems were proved by MAKAI [2] for Sturm—Liouville functions and generalized to some non-linear differential equations by BIHARI [1].

THEOREM II. *Consider the differential equation* (1). *Let* $F(s, t)$ *be increasing (decreasing) in* t, *that is for each* s

$$F(s, t_1)<(>)F(s, t_2), \quad t_1<t_2. \tag{11}$$

Then, if x_1, x_2 *are the successive zeros of a solution and* $\bar{x}_1$, *the intermediate point of extremum,* $(x_1<\bar{x}_1<x_2)$

$$x_2-\bar{x}_1<(>)\bar{x}_1-x_1. \tag{12}$$

PROOF. We first show that for two points t_1, t_2 such that

$$y(t_1)=y(t_2), \quad t_1<\bar{x}_1<t_2,$$

the following holds

$$|y'(t_1)|<(>)|y'(t_2)|. \tag{13}$$

To this end, multiply (1) by $2y'$ and integrate first between t_1 and $\bar{x}_1$, and then between $\bar{x}_1$ and t_2 to obtain

$$y'^2(t_1) = 2\int_{y(t_1)}^{y(\bar{x}_1)} yF(y, x)\,dy,$$

$$y'^2(t_2) = 2\int_{y(t_1)}^{y(\bar{x}_1)} yF(y, x)\,dy.$$

In view of (11) above, from these equations (13) follows. Therefore, if the part of the solution curve $y(x)$ for x in $[x_1, \bar{x}_1)$ is reflected in the ordinate at $x=x_1$, the desired conclusion (12) follows as the image of x_1 falls either to the right or to the left of x_2. Next theorem shows that the successive amplitudes are monotone decreasing (increasing).

THEOREM III. *Let the hypotheses of Theorem II be satisfied. Let* x_1, x_2, x_3 *be three consecutive zeros of a solution of* (1) *and* x_1, x_2, *the two intermediate extrema* $(x_1<\bar{x}_1<x_2<\bar{x}_2<x_3)$. *Then*

$$|y(\bar{x}_2)|<(>)|y(\bar{x}_1)|. \tag{14}$$

PROOF. There is no loss of generality in assuming that $y(\bar{x}_1)<0$, $y(\bar{x}_2)>0$.

As in the proof of the last theorem, multiplying (1) by $2y'$ and integrating between $\bar{x}_1$ and x_2 as well as x_2 and $\bar{x}_2$, we get

$$y'^2(x_2)+2\int_{\bar{x}_1}^{x_2} yy'F(y,x)\,dx = 0,$$

$$-y'^2(x_2)+2\int_{x_2}^{\bar{x}_2} yy'F(y,x)\,dx = 0,$$

whence

$$\int_0^{y(\bar{x}_1)} yF(y,x)\,dy = \int_0^{y(\bar{x}_2)} yF(y,x)\,dy,$$

that is

$$\int_0^{|y(\bar{x}_1)|} sF(s,x)\,ds = \int_0^{|y(\bar{x}_2)|} sF(s,x)\,ds, \qquad s=|y|, \tag{15}$$

because of (2b).

Now (14) follows from (15) in view of (11).

THEOREM IV. *Let the hypotheses of Theorem III hold. Then,*

$$|y(x_2+u)|<(>)|y(x_2-u)|, \quad 0<u\leqq \min(x_2-\bar{x}_1, \bar{x}_2-x_2). \tag{16}$$

PROOF. We rotate the half arch between $\bar{x}_1$ and x_2 around x_2 through $-180°$. If $0\leqq t\leqq x_2-\bar{x}_1$, the ordinate of the point on the rotated half arch with abscissa x_2+t, is

$$-y(x_2-t) = Y(t), \quad \text{say.}$$

Then, $Y(t)$ satisfies the differential equation

$$Y''(t)+Y(t)\,F(Y(t), x_2-t) = 0, \quad 0\leqq t\leqq x_2-\bar{x}_1.$$

Moreover, for the half arch between x_2 and $\bar{x}_2$ we have from (1)

$$y''(x_2+t)+y\,F(y, x_2+t) = 0, \quad 0\leqq t\leqq \bar{x}_2-x_2.$$

From these we obtain

$$Y'^2(t_1) = y'^2(x_2)-2\int_0^{t_1} YY'F(Y, x_2-t)\,dt, \tag{17}$$

$$y'^2(x_2+t_2) = y'^2(x_2)-2\int_0^{t_2} yy'F(y, x_2+t)\,dt, \tag{18}$$

where t_1, t_2 satisfy

$$Y(t_1) = -y(x_2-t_1) = y(x_2+t_2), \quad 0<t_1, t_2\leqq \min(x_2-\bar{x}_1, \bar{x}_2-x_2). \tag{19}$$

Therefore, in view of (11) from (17) and (18) we have

$$y'(x_2+t_2)<(>)y'(x_2-t_1).$$

Thus, at any level parallel to (and above) the horizontal axis, the rotated half arch is less (more) turned in towards the axis than the half arch between x_2 and $\bar{x}_2$, as long as both are rising. Hence (16) follows because

$$\text{if} \quad t_1 < t_2 = u, \quad |y(x_2-u)| = Y(u) > Y(t_1) = y(x_2+t_2) = |y(x_2+u)|;$$

$$\text{if} \quad t_2 < t_1 = u, \quad |y(x_2-u)| = Y(u) = y(x_2+t_2) < y(x_2+t_1) = |y(x_2+u)|.$$

This completes the proof of the theorem.

Without imposing further restrictions on $F(s, t)$ nothing more can be concluded. One desirable result which is the parallel of the result in the linear case is,

$$x_2 - x_1 < (>) x_3 - x_2;$$

and this would follow if

$$x_2 - \bar{x}_1 < (>) \bar{x}_2 - x_2,$$

in view of (12).

Our results above have been obtained under less restrictive hypotheses than those of Bihari. Also, the differential equation (1) is more general than the equation considered in [1].

4. In this last section we turn to the differential equation (3). It has been shown by Moore and Nehari [3] that the minimum for the functional (4), if the class of admissible functions consists of $u(x)$ with $u(a)=0$ and $u(x) \in D'[a, b]$, is attained for a solution of (3) for which

$$y(a) = y'(b) = 0 \quad \text{and} \quad y(x) > 0.$$

As a preliminary result we prove the following

Lemma V. *Let $p_i(x)$, $i=1, 2$, be positive and continuous on* $[0, b]$. *Then,*

$$\int_x^b p_1(t)\,dt \leqq \int_x^b p_2(t)\,dt, \quad \textit{for any} \quad x \in (0, b], \tag{20}$$

implies that $\lambda_1 \geqq \lambda_2$ where λ_i denotes the minimum of (4) *(with p_i in place of p).*

Proof. Let $y_1(x)$ be an extremal function corresponding to λ_1. Then

$$\Big(\int_0^b y_1^2(x)\,dx\Big)^{n+1} = -\lambda_1 \int_0^b \Big(\int_x^b p_1(t)\,dt\Big)' y_1^{2n+2}(x)\,dx =$$

$$= \lambda_1 \int_0^b \Big(\int_x^b p_1(t)\,dt\Big)(y_1^{2n+2}(x))'\,dx \leqq \lambda_1 \int_0^b \Big(\int_x^b p_2(t)\,dt\Big)(y_1^{2n+2}(x))'\,dx,$$

by (20) since $y_1'(x) \geqq 0$ on $[0, b]$. Therefore,

$$\lambda_1 \geqq \frac{\Big(\int_0^b y_1'^2(x)\,dx\Big)^{n+1}}{\int_0^b p_2(x) y_1^{2n+2}(x)\,dx}.$$

In view of the fact that $y_1(x)$ is an admissible function for the other minimum problem, the conclusion follows.

THEOREM VI. *Consider solutions of* (3) *which satisfy*

$$y(0)=0, \quad y'(0)>0 \quad \text{and} \quad \int_0^b y'^2(x)\,dx = 1. \tag{21}$$

Such solutions do not attain maximum in $(0, b)$ *if*

$$\frac{1}{b-x}\int_x^b p(t)\,dt \leqq 1, \tag{22}$$

where b *is such that*

$$(n+2)^n b^{n+2} < (n+1)^{n+1}. \tag{23}$$

PROOF. Assume that there is a solution $u(x)$ of (3) satisfying (21), which does attain maximum at $c(<b)$. Then,

$$\int_0^c u'^2(x)\,dx = \int_0^c p(x)u^{2n+2}(x)\,dx. \tag{24}$$

If the minimum of (4) is denoted by $\lambda(a, b)$ in order to exhibit the dependence on the interval, we have in view of monotonity of λ and (24)

$$\lambda(0, b) \leqq \lambda(0, c) = \Big(\int_0^c u'^2(x)\,dx\Big)^n \leqq 1.$$

On account of (22) the hypotheses of Lemma V hold with $p_2 \equiv 1$. Therefore,

$$\hat{\lambda}(0, b) \leqq \lambda(0, b) \leqq 1,$$

where

$$\hat{\lambda}(0, b) = \min_{y\in D^1[0,b]} \frac{\Big(\int_0^b y'^2(x)\,dx\Big)^{n+1}}{\int_0^b y^{2n+2}(x)\,dx}, \quad y(0)=y'(b)=0.$$

As this minimum is attained for a solution of

$$y'' + y^{2n+1} = 0,$$

we find that

$$\hat{\lambda}(0, b) = \frac{((n+1)\,\nu^2)^{n+1}}{(n+2)^n b^{n+2}},$$

where

$$\nu = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^{2n+2}}}.$$

Since $\nu > 1$, we immediately find that in view of (23) $\hat{\lambda}(0, b) > 1$. This contradiction establishes the theorem.

Finally we prove the following criterion for a solution of (3) to be non-zero in (0, 1], provided $y'(0)$ is bounded.

THEOREM VII. *Let $p(x)$ in* (3) *be a decreasing function. A solution of* (3) *which satisfies*

$$y(0)=0, \quad 0<y'(0)\leqq 1,$$

does not vanish in (0, 1], *provided there is a positive function $q(x)$ such that $p(x) \leqq \leqq q(x)$ and the minimum $\mu(0, 1)$ of*

$$\Big(\int_0^b y'^2(x)\,dx\Big)^{n+1} \Big/ \int_0^1 q(x) y^{2n+2}(x)\,dx,$$

over the admissible functions $y(x) \in D'[0, 1]$ which satisfy $y(0)=0$ is greater than 1.

PROOF. Multiplying (3) by $y(x)$ and integrating between 0 and $x(<1)$,

$$y(x)y'(x) - \int_0^x y'^2(t)\,dt + \int_0^x p(t)y^{2n+2}(t)\,dt = 0,$$

that is,

$$|y(x)|\,|y'(x)| \geqq \int_0^x y'^2(t)\,dt - \int_0^x p(t)y^{2n+2}(t)\,dt.$$

In view of (13),

$$|y'(x)| \leqq 1,$$

and so

$$|y(x)| \geqq \int_0^x y'^2(t)\,dt - \int_0^x q(t)y^{2n+2}(t)\,dt$$

$$\geqq \int_0^x y'^2(t)\,dt - \mu^{-1}(0, x)\Big(\int_0^x y'^2(t)\,dt\Big)^{n+1}$$

$$\geqq \Big(\int_0^x y'^2(t)\,dt\Big)(1-\mu^{-1}(0, 1)).$$

Thus, $|y(x)| > 0$, that is $y(x) > 0$. This completes the proof.

INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY,
NEW DELHI, INDIA

(*Received 10 February 1964*)

References

[1] I. Bihari, Oscillation and monotonity theorems concerning non-linear differential equations of the second order, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **9** (1958), pp. 83—104.

[2] E. Makai, On a monotonic property of certain Sturm—Liouville functions, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **3** (1952), pp. 165—172.

[3] R. A. Moore and Z. Nehari, Non-Oscillation theorems for a class of non-linear differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **93** (1959), pp. 30—52.

[4] Z. Nehari, On a class of non-linear second-order differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **95** (1960), pp. 101—123.

Printed in Hungary

Technikai szerkesztő: Szabados József

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor
A kézirat nyomdába érkezett: 1964. VI. 19. — Terjedelem: 18,50 (A/5) ív, — 40 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat, Szeged 64-1152

The Acta Mathematica publish papers on mathematics in English, German, French and Russian.

The Acta Mathematica appear in parts of various size, making up volumes.

Manuscripts should be sent with short summary to:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Mathematica is 110 forints a volume. Orders may be placed with „*Kultura*" Foreign Trade Company for Books and Newpapers (Budapest, I., Fő utca 32. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Mathematica paraissent en franaçis, allemand, anglais et russe et publient des mémoires du domaine des sciences mathématiques.

Les Acta Mathematica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction avec court résumé à l'adresse suivante:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

Toute correspodance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonement est de110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux „*Kultura*" (Budapest, I., Fő utca 32. Compte-courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

„*Acta Mathematica*" публикует трактаты из области математических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

„*Acta Mathematica*" выходит отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи вместе с коротким резюме следует направлять по адресу:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена „*Acta Mathematica*" — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет „*Kultura*" (*Budapest, I., Fő utca 32.* Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

56,— forint

INDEX

Index: 26.014