ACTA MATHEMATICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

G. ALEXITS, E. EGERVÁRY, P. ERDŐS, L. FEJÉR,
CH. JORDAN, L. KALMÁR, L. RÉDEI, A. RÉNYI,
B. SZ.-NAGY, P. TURÁN, O. VARGA

REDIGIT

G. HAJÓS

TOMUS IX FASCICULI 1—2

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST

1958

ACTA MATH. HUNG.

ACTA MATHEMATICA
ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK
MATEMATIKAI KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST, V., ALKOTMÁNY U. 21

Az Acta Mathematica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a matematika köréből.

Az Acta Mathematica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Mathematica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó"-nál (Budapest, V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-44), a külföld számára pedig a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest, VI., Népköztársaság útja 21. Bankszámla 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

Die Acta Mathematica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der mathematischen Wissenschaften in deutscher, englischer, französicher und russischer Sprache.

Die Acta Mathematica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Redaktion und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forints. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen *„Kultura"* (Budapest, VI., Népköztársaság útja 21. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandvertretungen und Kommissionären.

ACTA MATHEMATICA
ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS
G. ALEXITS, P. ERDŐS, L. FEJÉR,
CH. JORDAN, L. KALMÁR, L. RÉDEI, A. RÉNYI,
B. SZ.-NAGY, P. TURÁN, O. VARGA

REDIGIT
G. HAJÓS

TOMUS IX

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST
1958

ACTA MATH. HUNG.

INDEX

TOMUS IX

UNMITTELBARE EINFÜHRUNG WEIERSTRASSSCHER HOMOGENEN KOORDINATEN IN DER HYPERBOLISCHEN EBENE AUF GRUND DER HILBERTSCHEN ENDENRECHNUNG

Von

PAUL SZÁSZ (Budapest)

(*Vorgelegt von* G. HAJÓS)

Einleitung

Unter einer *hyperbolischen Ebene* soll im folgenden irgendeine Gesamtheit von *„Punkten“* und *„Geraden“* verstanden werden, für die außer den ebenen Axiomgruppen I, II, III von D. HILBERT,[1] noch die nachstehenden zwei Axiome gelten:[2]

IV$_1$. *Es seien P, Q zwei verschiedene Punkte in der Ebene und QY eine Halbgerade an der einen Seite der Geraden PQ. So gibt es stets eine Halbgerade PX an derselben Seite von PQ, die QY nicht schneidet, während jede im $\sphericalangle QPX$ gelegene innere Halbgerade PZ diese Halbgerade QY schneidet* (Fig. 1).

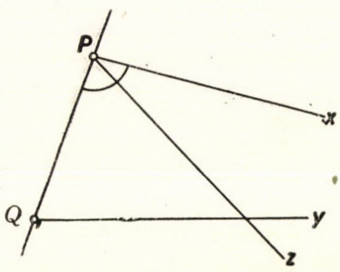


Fig. 1

IV$_2$. *Es gibt eine Gerade g_0 und einen nicht auf ihr liegenden Punkt P_0 der Ebene derart, daß durch P_0 zwei verschiedene Geraden gelegt werden können, die g_0 nicht schneiden.*

Aus diesem unvollständigen Axiomensystem folgt schon[3] der von D. HILBERT[4] bei seiner neuen

[1] D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie,* 7. Aufl. (Leipzig und Berlin, 1930), Anhang III, S. 160—162.

[2] Von dem modernen, viel allgemeineren Begriff der hyperbolischen Ebene wird hier abgesehen. Bezüglich dieses Begriffes verweise ich auf die Arbeit von W. KLINGENBERG Eine Begründung der hyperbolischen Geometrie, *Math. Annalen,* **127** (1954), S. 340—356

[3] PAUL SZÁSZ, Über die Hilbertsche Begründung der hyperbolischen Geometrie, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.,* **4** (1953), S. 243—250, insbesondere S. 243, Fußnote. Für den Beweis siehe SZÁSZ PÁL, A Poincaré-féle félsík és a hiperbolikus síkgeometria kapcsolatáról (ungarisch), *MTA Mat. és Fiz. Oszt. Közl.,* **6** (1956), S. 163—184, insbesondere S. 165, oder ausführlicher PAUL SÁSZ, A remark on Hilbert's foundation of the hyperbolic plane geometry, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.,* **9** (1958), S. 29—31.

[4] D. HILBERT, Neue Begründung der Bolyai—Lobatschefskyschen Geometrie, *Math. Annalen,* **57** (1903), S. 137—150, insbesondere S. 139—140, oder a. a. O. [1], S. 159—177, insbesondere S. 162.

Begründung der hyperbolischen Geometrie der Ebene neben den Axiomgruppen I, II, III noch als Axiom vorausgesetzte

SATZ. *Ist g eine beliebige Gerade und P ein nicht auf ihr gelegener Punkt, so bilden die durch P gelegten und g schneidenden Geraden, die inneren Geraden eines gewissen* $\sphericalangle(p_1, p_2)$. Die Geraden p_1, p_2, die also g nicht mehr schneiden, heißen die durch P gelegten *hyperbolischen Parallelen* zur Geraden g (Fig. 2).

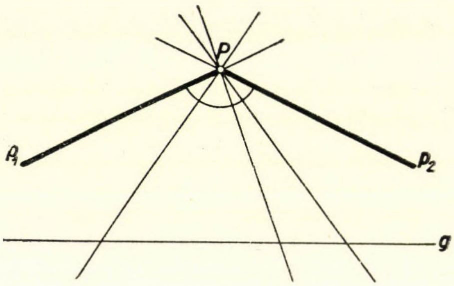


Fig. 2

Nach dem Gesagten bilden die Hilbertschen ebenen Axiomgruppen I, II, III zusammen mit den von mir gewählten Axiomen IV_1 und IV_2 ein Axiomensystem, welches mit dem durch D. HILBERT[5] zu Grunde gelegten äquivalent ist. Dieses Axiomensystem hat den Zweck, ebenso wie das von D. HILBERT, die hyperbolische Geometrie der Ebene ausschließlich auf Grund der ebenen Axiome ohne Anwendung von Stetigkeitsaxiomen zu begründen.

D. HILBERT hat in seiner eben zitierten Arbeit die Fernpunkte der Ebene, die durch je eine hyperbolische parallele Geradenschar bestimmt werden (Fig. 3), *Enden* genannt. Eine Gerade besitzt infolge des obigen Satzes stets zwei Enden (Fig. 4). Nach dem Beweis des grundlegenden Satzes, laut welches

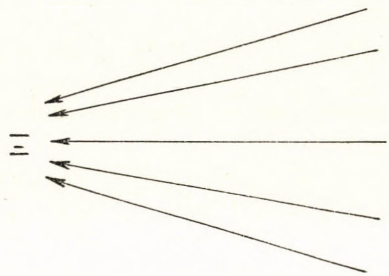


Fig. 3

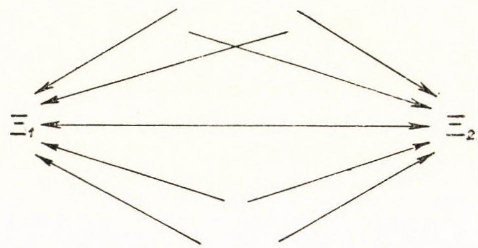


Fig. 4

zu irgend zwei Geraden, die sich weder schneiden, noch einander hyperbolisch parallel sind, stets eine Gerade gibt, welche auf beiden zugleich senkrecht steht, konnte D. HILBERT auch die Existenz jener Geraden beweisen, die zwei vorgeschriebene Enden besitz. Das hat schon zur Folge, daß auf eine Gerade von einem nicht zu ihr gehörenden Ende aus ein bestimmtes Lot gefällt werden kann. Von den vorbereitenden Sätzen, die D. HILBERT

[5] D. HILBERT, a. a. O. [4], S. 137—140 bzw. S. 160—162.

a. a. O.[6] seiner sogenannten *Endenrechnung* vorangeschickt hat, möchte ich hierbei nur die erwähnten hervorheben. Diese Endenrechnung, die von ihm für die Enden eingeführt wurde, werde ich der Vollständigkeit halber im § 1 besprechen.

Während der von D. HILBERT[7] gestreifte Weg zum Aufbau der hyperbolischen Geometrie der Ebene mit Hilfe seiner Endenrechnung durch die projektive Geometrie führt, wird in vorliegender Arbeit durch die unmittelbare Einführung gewisser homogenen Koordinaten und selbstsändige Begründung der analytischen Geometrie der hyperbolischen Ebene die Grundlage für einen *vollständig elementaren* Aufbau geschaffen. Diese Koordinaten werden bei der Annahme der Stetigkeitsaxiome (statt des Axioms IV_1), die das obige unvollständige Axiomensystem zu einem vollständigen machen, identisch mit den bekannten *Weierstraßschen homogenen Koordinaten,* deshalb nenne ich sie ebenso.[8] Bei diesem Aufbau der hyperbolischen ebenen Geometrie habe ich mit der hyperbolischen Trigonometrie nichts zu tun, letztere ist vielmehr eine Folge der hier begründeten analytischen Geometrie der hyperbolischen Ebene.[9] Ich mache auch von der euklidischen Geometrie keinen Gebrauch, daher kann meine Darstellung als ein *independenter* elementarer Aufbau der hyperbolischen Geometrie der Ebene gelten.

§ 1. Die Hilbertsche Endenrechnung. Die Streckenfunktion $E(t)$ und die aus ihr hergeleiteten Streckenfunktionen

Die Hilbertsche Endenrechnung ist kurz gefaßt und in etwas anderer, meinem Ziele entsprechender Form, die folgende.[10]

Es sei in der hyperbolischen Ebene ein rechter Winkel mit dem Scheitel O vorgelegt, dessen Schenkel als Halbgeraden die Enden Ω bzw. E haben

[6] Siehe a. a. O. [4], § 1, S. 140—145 bzw. S. 164—170.

[7] D. HILBERT, a. a. O. [4], § 4, S. 149—150 bzw. S. 175—177.

[8] Bei der Annahme der Stetigkeitsaxiome habe ich die unmittelbare Einführung der Weierstraßschen homogenen Koordinaten und die selbstständige Begründung der analytischen Geometrie der hyperbolischen Ebene in einer früheren Arbeit mutatis mutandis dargetan. Siehe PAUL SZÁSZ, Begründung der analytischen Geometrie der hyperbolischen Ebene mit den klassischen Hilfsmitteln, unabhängig von der Trigonometrie dieser Ebene, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **8** (1957), S. 139—157.

[9] Für den Fall der Annahme der Stetigkeitsaxiome siehe PAUL SZÁSZ, Die hyperbolische Trigonometrie als Folge der analytischen Geometrie der hyperbolischen Ebene, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **8** (1957), S. 159—161.

[10] Vgl. auch PAUL SZÁSZ, a. a. O. [3], zweites Zitat, § 1, wobei die Hilbertsche Endenrechnung als *Bogenrechnung bezüglich des Grenzkreises* dargestellt wird. Diese Darstellung ist anschaulicher, setzt aber aus der hyperbolischen Elementargeometrie etwas mehr voraus.

(Fig. 5). Das Ende Ω (in der Bezeichnung von D. HILBERT das ∞) wird ausgezeichnet und die Endenrechnung für die von Ω verschiedenen Enden erklärt. Ein solches Ende α heiße *positiv*, wenn die Geraden $\alpha\Omega$ und $E\Omega$ auf derselben Seite der Geraden $O\Omega$ liegen, und heiße *negativ*, wenn diese Geraden auf verschiedenen Seiten von $O\Omega$ liegen. Wenn wir eine Gerade $\alpha\Omega$ mit dem anderen Ende α an der Geraden $O\Omega$ spiegeln, so werde das von Ω verschiedene Ende der so entstehenden Geraden mit $-\alpha$ bezeichnet. Das andere Ende der Geraden $O\Omega$ mag mit 0 bezeichnet werden.

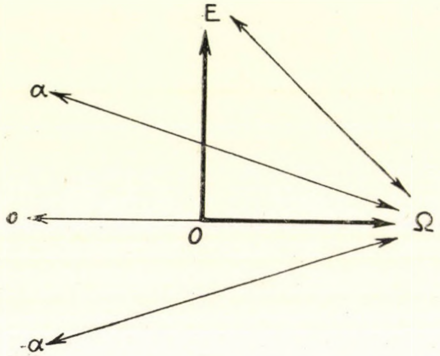


Fig. 5

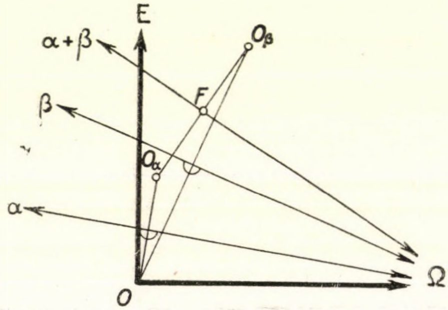


Fig. 6

D. HILBERT[11] definiert nun die Summe zweier Enden folgendermaßen:

ERKLÄRUNG. Es seien α, β irgend zwei von Ω verschiedene Enden; ferner sei O_α das Spiegelbild des Punktes O an der Geraden $\alpha\Omega$, und O_β das Spiegelbild von O an der Geraden $\beta\Omega$; die Mitte F der Strecke $\overline{O_\alpha O_\beta}$ (im Falle $\alpha=\beta$ den Punkt $O_\alpha=O_\beta$ selbst) verbinden wir mit dem Ende Ω; das andere Ende der so konstruierten Geraden $F\Omega$ heiße *die Summe der beiden Enden α und β* und werde mit $\alpha+\beta$ bezeichnet (Fig. 6).

Die Definition des Produktes zweier Enden wird einfacher als bei D. HILBERT,[12] wenn vorher eine gewisse *Streckenfunktion $E(t)$*, die den Schlüssel meiner ganzen Darstellung bildet und die ich übrigens schon in einer früheren Arbeit[13] eingeführt habe, definiert wird, wie folgt:

Die Gerade $O\Omega$ sei nach Ω gerichtet; bedeute

$$\sigma=E(t) \tag{1}$$

das positive Ende derjenigen Geraden, die im Endpunkt A der mit Vorzeichen genommenen Strecke $\overline{OA}=t$ auf $O\Omega$ senkrecht steht (Fig. 7). Offenbar ent-

[11] D. HILBERT, a. a. O. [4], § 2, S. 145—146 bzw. S. 170—171.
[12] D. HILBERT, a. a. O. [4], § 3, S. 147—148 bzw. S. 173.
[13] PAUL SZÁSZ, a. a. O. [3], erstes Zitat, S. 248.

spricht ein positives Ende σ immer einer bestimmten, mit Vorzeichen genommenen Strecke t.

Mit Hilfe dieser Streckenfunktion (1) können wir nunmehr das Produkt zweier Enden folgendermaßen definieren:

ERKLÄRUNG. *Das Produkt* $\sigma_1 \sigma_2$ *der positiven Enden* $\sigma_1 = E(t_1)$ *und* $\sigma_2 = E(t_2)$ *heiße das Ende*

(2) $$E(t_1) E(t_2) = E(t_1 + t_2)$$

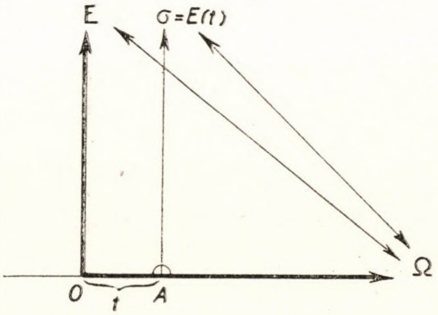


Fig. 7

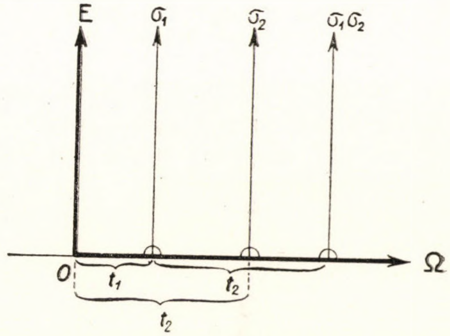


Fig. 8

(Fig. 8); wir kommen noch darüber ein, daß *für positive Enden* α, β *immer*

(3) $$\alpha(-\beta) = (-\alpha)\beta = -\alpha\beta, \quad (-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta$$

und für ein von Ω *verschiedenes Ende* ξ *stets*

(4) $$\xi \cdot 0 = 0 \cdot \xi = 0$$

ausfalle.

In der Bezeichnung (1) bedeutet $E(0)$ das Ende E und dieses spielt bei der Multiplikation die Rolle der *positiven Einheit,* da doch nach (2)

$$E(t) E(0) = E(0) E(t) = E(t)$$

ausfällt. Deshalb sei für dieses Ende die Bezeichnung

(5) $$E(0) = 1$$

eingeführt. Auf Grund von (2) kann diese Formel auch noch in der Gestalt

(5*) $$E(t) E(-t) = 1$$

geschrieben werden.

Das Ende 0, welches im Sinne von (4) bei der Multiplikation die Rolle von *Null* spielt, verhält sich auch bei der Addition als *Null,* da offenbar für ein von Ω verschiedenes Ende ξ, stets

(6) $$\xi + 0 = 0 + \xi = \xi$$

und

(7) $$\xi + (-\xi) = 0$$

besteht. In dieser Endenrechnung gelten nach dem grundlegenden Ergebnis von D. HILBERT[14] die nämlichen Regeln, wie für die Rechnung mit gewöhnlichen Zahlen. Oder in moderner Ausdrucksweise: die von Ω verschiedenen Enden bilden einen *kommutativen Körper*. Dieser Körper hat aber noch die fundamentale Eigenschaft,[15] daß *es zu jedem positiven Ende stets ein positives Ende gibt, dessen Quadrat jenem Ende gleich wird.* In der Tat ist mit Rücksicht auf (2) $E(t) = E\left(\frac{t}{2}\right)^2$. Dem positiven Ende ξ so entsprechendes Ende möge mit $\sqrt{\xi}$ bezeichnet und *positiver Quadratwurzel von* ξ genannt werden.

Der Körper der von Ω verschiedenen Enden kann noch zu einem *angeordneten Körper* gemacht werden, durch die folgende

FESTSETZUNG, *Es heiße* α *größer als* β *(*β *kleiner als* α*), in Zeichen* $\alpha > \beta$ $(\beta < \alpha)$, *wenn das Ende* $\alpha - \beta$ *positiv ausfällt.* Man überzeugt sich leicht, daß *für positive Enden* α, β *im Falle* $\alpha > \beta$ *die Gerade* $\beta\Omega$ *zwischen den Geraden* $O\Omega$ *und* $\alpha\Omega$ *liegt, und umgekehrt* (Fig. 9). Das hat zur Folge, daß *für* $t > 0$ *stets* $E(t) > 1$ *ist* (Fig. 10) und *ganz allgemein*

(8) $$E(t_2) > E(t_1) \quad \text{für} \quad t_2 > t_1.$$

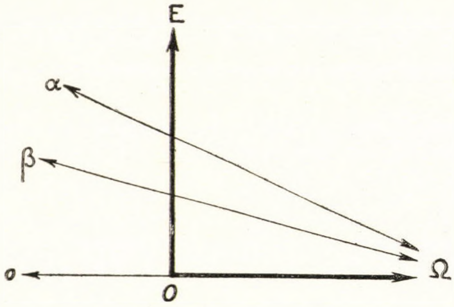


Fig. 9

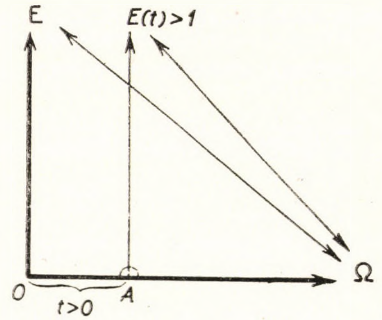


Fig. 10

Der Kürze wegen ist es zwäckmäßig, außer der Streckenfunktion $E(t)$ unter (1), noch die Streckenfunktionen

(9) $$C(t) = \frac{E(t) + E(-t)}{2}, \quad S(t) = \frac{E(t) - E(-t)}{2},$$
$$T(t) = \frac{S(t)}{C(t)} = \frac{E(t) - E(-t)}{E(t) + E(-t)}$$

[14] D. HILBERT, a. a. O. [4], §§ 2—3, S. 145—149 bzw. S. 170—174.
[15] D. HILBERT, a. a. O. [4], § 3, S. 148 bzw. S. 174.

einzuführen. Während $E(t)$ das Analogon der Exponentialfunktion ist, sind diese letzteren Streckenfunktionen die Analoga der Hyperbelfunktionen. Für die zwei ersten besteht z. B. die Grundformel

$$C(t)^2 - S(t)^2 = 1 \tag{10}$$

und auch noch

$$C(a+b) = C(a)C(b) + S(a)S(b), \tag{11}$$

sowie

$$S(a+b) = S(a)C(b) + C(a)S(b). \tag{12}$$

Auch ihren Verläufen nach erinnern diese Streckenfunktionen unter (9) an die Hyperbelfunktionen, ähnlich wie die Streckenfunktion $E(t)$ an die Exponentialfunktion erinnert, z. B. der Ungleichung (8) genügt.

§ 2. Die Weierstraßschen homogenen Koordinaten eines Punktes

Ein Punkt P der Ebene kann durch die folgenden zwei Daten charakterisiert werden. Das eine ist das andere Ende σ der Geraden $P\Omega$ (Fig. 11). Ist aber $O_{\frac{\sigma}{2}}$ das Spiegelbild von O an der Geraden mit den Enden $\frac{\sigma}{2}$, Ω, so ist das andere Ende der Geraden $O_{\frac{\sigma}{2}}\Omega$ nach der Definition der Summe zweier Enden (§ 1) gleich $\frac{\sigma}{2}+\frac{\sigma}{2}=\sigma$, d. h. ist die Gerade $\sigma\Omega$ das Spiegelbild von $O\Omega$ an der vorher erwähnten Geraden, die neben Ω das andere Ende $\frac{\sigma}{2}$ hat. Infolgedessen liegt das Spiegelbild P' von P an dieser Geraden mit den Enden $\frac{\sigma}{2}$, Ω auf $O\Omega$. Nun ist der Punkt P durch die Daten σ und $\overline{OP'}=t$, wobei letztere auf der nach Ω gerichteten Geraden $O\Omega$ mit Vorzeichen genommen wird, offenbar vollkommen bestimmt. Diese zwei Daten t, σ sollen die *gemischten Koordinaten* des Punktes P heißen. Mit Hilfe dieser Koordinaten beweise ich den folgenden

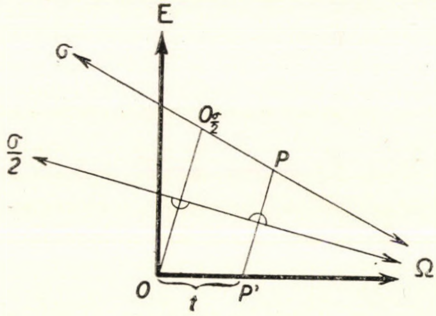


Fig. 11

SATZ. *Zwischen den Punkten der hyperbolischen Ebene und den Endentripeln* (x_1, x_2, x_3), *für welche*

$$x_3^2 - x_2^2 - x_1^2 = 1 \tag{1}$$

und

$$(2) \qquad x_3 > 0$$

ist, findet ein eineindeutiges Entsprechen statt. Dieses Entsprechen kann dadurch hergestellt werden, daß man einem jeden in gemischten Koordinaten gegebenen Punkt (t, σ) *das Endentripel*

$$(3) \qquad x_1 = S(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 E(-t), \quad x_2 = \sigma E(-t), \quad x_3 = C(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 E(-t)$$

zuordnet.

Beweis. Für das Endentripel (3) erweist sich die Gleichung (1) mit Rücksicht auf die Formeln (9) und (10) des § 1, sofort als richtig. Und mittelst der dritten Gleichung unter (3) fällt das Bestehen von (2) ins Auge, da doch $C(t) > 0$ und $E(-t) > 0$ ausfallen (§ 1, (1), (9)).

Ich werde jetzt zeigen, daß umgekehrt jedes Endentripel (x_1, x_2, x_3) von den Eigenschaften (1) und (2) durch die Zuordnung (3) genau einem Punkt (t, σ) entspricht.

Aus (1) folgt zunächst

$$x_3^2 = 1 + x_1^2 + x_2^2 > x_1^2,$$

also ist mit Rücksicht auf (2) gewiß $x_3 > x_1$, d. h.

$$(4) \qquad x_3 - x_1 > 0.$$

Wenn es nun überhaupt einen Punkt (t, σ) gibt, für welchen die Gleichungen unter (3) bestehen, so muß (§ 1, (9))

$$x_3 - x_1 = C(t) - S(t) = E(-t)$$

oder (§ 1, (5*))

$$(5) \qquad E(t) = \frac{1}{x_3 - x_1}$$

gelten. Eine solche mit Vorzeichen genommene Strecke t gibt es aber genau eine, da doch nach (4) die rechte Seite von (5) positiv ausfällt. Aus der zweiten Gleichung unter (3) ergibt sich weiter durch Verwendung von (5)

$$(6) \qquad \sigma = \frac{x_2}{x_3 - x_1}.$$

Das gegebene Endentripel (x_1, x_2, x_3) von den Eigenschaften (1) und (2) kann also durch die Zuordnung (3) nur dem durch (5) und (6) bestimmten Punkt (t, σ) entsprechen.

Durch eine direkte Rechnung verifiziere ich nun, daß es dem in der Tat entspricht.

(5) und (6) ergeben vor allem (§ 1, (5*))

$$\sigma^2 E(-t) = \frac{x_2^2}{(x_3-x_1)^2}(x_3-x_1) = \frac{x_2^2}{x_3-x_1}$$

und (§ 1, (9))

$$S(t) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x_3-x_1} - (x_3-x_1)\right] = \frac{1-(x_3-x_1)^2}{2(x_3-x_1)}$$

bzw.

$$C(t) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x_3-x_1} + (x_3-x_1)\right] = \frac{1+(x_3-x_1)^2}{2(x_3-x_1)}.$$

Also ist auf Grund von (1)

$$S(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 E(-t) = \frac{1-(x_3-x_1)^2+x_2^2}{2(x_3-x_1)} = \frac{x_3^2-x_1^2-(x_3-x_1)^2}{2(x_3-x_1)} =$$

$$= \frac{(x_3+x_1)-(x_3-x_1)}{2} = x_1,$$

während

$$C(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 E(-t) = \frac{1+(x_3-x_1)^2+x_2^2}{2(x_3-x_1)} = \frac{x_3^2-x_1^2+(x_3-x_1)^2}{2(x_3-x_1)} =$$

$$= \frac{x_3+x_1+(x_3-x_1)}{2} = x_3.$$

Weiter ergibt sich aus (5) und (6) unmittelbar

$$\sigma E(-t) = x_2.$$

Damit ist das Bestehen von (3) bewiesen.

Durch die Zuordnung (3) wird demnach zwischen den Punkten (t, σ) der hyperbolischen Ebene und den Endentripeln (x_1, x_2, x_3) von den Eigenschaften (1) und (2) ein eineindeutiges Entsprechen hergestellt, w. z. b. w.

Aus diesem Grunde sollen die unter (3) definierten Enden x_1, x_2, x_3 als die *Weierstraßschen homogenen Koordinaten* des Punktes (t, σ) erklärt werden.

Aus (3) ergeben sich für $t=0, \sigma=0$ als *die Weierstraßschen homogenen Koordinaten des Punktes O*

(7) $$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1.$$

In meinen späteren Erörterungen spielt die folgende Eigenschaft der hier definierten Weierstraßschen homogenen Koordinaten eine entscheidende Rolle:

für die Weierstraßschen homogenen Koordinaten x_1, x_2, x_3 *bzw.* $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ *zweier Punkte ist stets*

(8) $$x_3\bar{x}_3 - x_2\bar{x}_2 - x_1\bar{x}_1 > 0.$$

Sind nämlich diese Punkte in gemischten Koordinaten (t, σ) bzw. $(\bar{t}, \bar{\sigma})$, so bestehen neben (3) noch

$$(\bar{3}) \qquad \bar{x}_1 = S(\bar{t}) + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 E(-\bar{t}), \quad \bar{x}_2 = \bar{\sigma} E(-\bar{t}) \quad \bar{x}_3 = C(\bar{t}) + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 E(-\bar{t})$$

und aus diesen Formeln (3), $(\bar{3})$ ergeben sich

$$x_3\bar{x}_3 = C(t)C(\bar{t}) + \frac{1}{2}\sigma^2 E(-t)C(\bar{t}) + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 E(-\bar{t})C(t) + \\ + \frac{1}{4}\sigma^2\bar{\sigma}^2 E(-t)E(-\bar{t}),$$

$$x_2\bar{x}_2 = \sigma\bar{\sigma} E(-t)E(-\bar{t}),$$

$$x_1\bar{x}_1 = S(t)S(\bar{t}) + \frac{1}{2}\sigma^2 E(-t)S(\bar{t}) + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 E(-\bar{t})S(t) + \\ + \frac{1}{4}\sigma^2\bar{\sigma}^2 E(-t)E(-\bar{t}).$$

Also ist (§ 1, (9), (11))

$$x_3\bar{x}_3 - x_2\bar{x}_2 - x_1\bar{x}_1 = C(t-\bar{t}) + \frac{1}{2}\sigma^2 E(-t)E(-\bar{t}) + \\ + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 E(-\bar{t})E(-t) - \sigma\bar{\sigma} E(-t)E(-\bar{t}) = C(t-\bar{t}) + \\ + \frac{1}{2} E(-t)E(-\bar{t})(\sigma-\bar{\sigma})^2.$$

Da aber hierbei (§ 1, (1), (9))

$$C(t-\bar{t}) > 0, \quad E(-t) > 0, \quad E(-\bar{t}) > 0, \quad (\sigma-\bar{\sigma})^2 \geqq 0$$

ausfallen, so tritt dadurch die Ungleichung (8) in Evidenz.

§ 3. Die Gleichung der Geraden. Weierstraßsche homogene Linienkoordinaten

Im folgenden werde ich von den nachstehenden zwei Hilfssätzen von D. HILBERT[16] Gebrauch machen. Diese beziehen sich auf die Endenrechnung, die zum angenommenen rechten Winkel $\Omega O E$ gehört (§ 1).

HILFSSATZ 1. *Sind α und β von Ω verschiedene Enden, und wird die Gerade $\alpha\Omega$ an der Geraden $\beta\Omega$ gespiegelt, so entsteht diejenige Gerade, die das Ende $2\beta-\alpha$ mit Ω verbindet* (Fig. 12).

[16] D. HILBERT, a. a. O. [4], § 2, S. 147 bzw. S. 172, weiter § 3, S. 148 bzw. 174.

HILFSSATZ 2. *Wird durch den Punkt O eine von der Geraden $O\Omega$ verschiedene Gerade gelegt, so erfüllen die Enden α, β dieser Geraden die Gleichung $\alpha\beta = -1$.* Das folgt einfach daraus, daß die Enden einer solchen Geraden offenbar $\alpha = E(t)$ und $\beta = -E(-t)$ sind (Fig. 13). Das Produkt dieser Enden ist in der Tat $-E(-t)E(t) = -1$ (§ 1, (5*)).

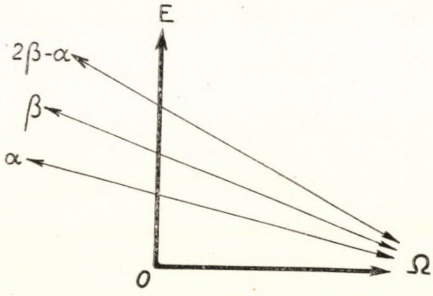


Fig. 12

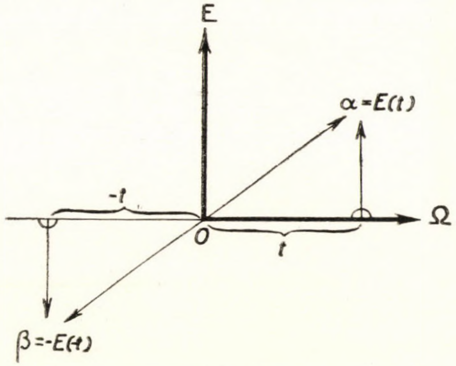


Fig. 13

Unter Benützung dieser Hilfssätze leite ich nun die Gleichung der Geraden her.

Es sei zunächst eine solche Gerade betrachtet, deren Enden ξ, η von Ω verschieden sind (Fig. 14). Es sei durch gemischte Koordinaten (§ 2) ein beliebiger Punkt $P(t, \sigma)$ dieser Geraden angegeben. Dann geht P mit Rücksicht auf die Definition der gemischten Koordinaten durch die Spiegelung an der Geraden mit den Enden $\frac{\sigma}{2}$, Ω in denjenigen Punkt P' der Geraden $O\Omega$ über, für den mit Vorzeichen genommen $\overline{OP'} = t$ ausfällt. Dieser Punkt P' geht also durch die Verschiebung längs der Geraden $O\Omega$ mit der Strecke $-t$ in O über. Die ursprüngliche Gerade $\xi\eta$ wird daher durch die Aufeinanderfolge von dieser Spiegelung und Verschiebung in eine solche versetzt, die durch den punkt O läuft. Die Enden ξ, η gehen bei der genannten Spiegelung laut des Hilfssatzes 1 in $\sigma - \xi$, $\sigma - \eta$, sodann diese letzteren durch jene Verschiebung nach der Definition des Produktes (§ 1, (2), (3), (4)) der Reihe nach in die Enden $E(-t)(\sigma - \xi)$, $E(-t)(\sigma - \eta)$ über. Da aber die Verbindungsgerade dieser Enden iden-

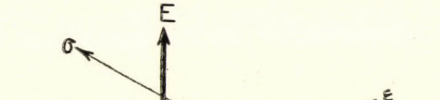


Fig. 14

tisch mit derjenigen ist, in welche $\xi\eta$ versetzt wurde, also durch den Punkt O geht, so ist nach dem Hilfssatz 2 das Produkt dieser zwei Enden (§ 1, (2))

(1) $$E(-2t)(\sigma-\xi)(\sigma-\eta)=-1.$$

Demnach genügen die gemischten Koordinaten t, σ eines jeden Punktes der betrachteten Geraden $\xi\eta$ dieser Gleichung (1). Es leuchtet sofort ein, daß auch jeder Punkt, durch dessen gemischte Koordinaten t, σ diese Gleichung (1) erfüllt wird, der Geraden $\xi\eta$ angehört. (1) ist also die Gleichung dieser Geraden in gemischten Koordinaten. Sie geht wegen

$$(\sigma-\xi)(\sigma-\eta)=\xi\eta-(\xi+\eta)\sigma+\sigma^2$$

durch Multiplikation mit $E(t)\neq 0$ in die Gleichung

(1*) $$\xi\eta E(-t)-(\xi+\eta)\sigma E(-t)+\sigma^2 E(-t)+E(t)=0$$

über. Mit Rücksicht auf die Formeln (3) im vorigen § ist aber (§ 1, (9))

$$x_3-x_1=C(t)-S(t)=E(-t)$$

und

$$x_3+x_1=C(t)+S(t)+\sigma^2 E(-t)=E(t)+\sigma^2 E(-t),$$

während

$$x_2=\sigma E(-t),$$

also kann dieser Gleichung (1*) die Gestalt

$$\xi\eta(x_3-x_1)-(\xi+\eta)x_2+x_3+x_1=0$$

gegeben werden.

Damit ist gezeigt, daß eine Gerade mit den von Ω verschiedenen Enden ξ, η, in Weierstraßschen homogenen Koordinaten x_1, x_2, x_3 durch die Gleichung

(2) $$(\xi\eta-1)x_1+(\xi+\eta)x_2-(\xi\eta+1)x_3=0$$

charakterisiert werden kann.

Wird ein von Ω verschiedenes Ende η mit Ω verbindet, so lautet die Gleichung dieser Verbindungsgeraden in gemischten Koordinaten offenbar $\sigma-\eta=0$. Durch Multiplikation mit $E(-t)\neq 0$ wird diese Gleichung infolge der Formeln (3) des vorigen §

$$x_2-\eta(x_3-x_1)=0.$$

Die Gleichung der Geraden, die das Ende η mit Ω verbindet, lautet also in Weierstraßschen homogenen Koordinaten

(3) $$\eta x_1+x_2-\eta x_3=0.$$

Wird die Gerade (2) nach dem Ende ξ gerichtet, so sollen die Enden

(4) $$u=\frac{\xi\eta-1}{\xi-\eta}, \quad v=\frac{\xi+\eta}{\xi-\eta}, \quad w=\frac{\xi\eta+1}{\xi-\eta}$$

als die *Weierstraßschen homogenen Linienkoordinaten* dieser gerichteten Geraden erklärt werden. Als solche erkläre man für die nach Ω gerichteten Geraden (3) die Enden

(5) $$u=\eta, \quad v=1, \quad w=\eta;$$

bei Umkehrung des Richtungssinnes sollen die Linienkoordinaten dieser Geraden mit —1 multipliziert werden.

Es besteht für die Weierstraßschen homogenen Linienkoordinaten u, v, w einer Geraden in jedem Falle

(6) $$u^2+v^2-w^2=1,$$

und ihre Gleichung kann in Weierstraßschen homogenen Koordinaten x_1, x_2, x_3 in der „Normalform"

(7) $$ux_1+vx_2-wx_3=0$$

geschrieben werden. Umgekehrt ist eine jede Gleichung dieser Art, in welcher die Kooeffizienten u, v, w der Forderung (6) *genügen, die Gleichung einer gerichteten Geraden in ihrer Normalform.*

Davon überzeugt man sich leicht auf Grund der Erklärungen unter (4) und (5).

§ 4. Transformation der Weierstraßschen homogenen Linienkoordinaten

Außer dem bisher zu Grunde gelegten rechten Winkel $\Omega O \mathrm{E}$ sei noch ein rechter Winkel mit dem Scheitel O' angenommen werden, dessen Schenkel als Halbgeraden die Enden Ω' bzw. E' haben (Fig. 15). Wir betrachten diejenige Bewegung bzw. Umwendung der Ebene, durch die der rechte Winkel $\Omega' O' \mathrm{E}'$ in den ursprünglichen $\Omega O \mathrm{E}$ übergeführt wird. *Als Weierstraßsche homogene Linienkoordinaten einer gerichteten Geraden g in Bezug auf das „Koordinatensystem" $\Omega' O' \mathrm{E}'$ sollen die Linienkoordinaten* u', v', w' (§ 3) *derjenigen Geraden g' verstanden werden, in die g bei der betrachteten Bewegung bzw. Umwendung übergeht.* Wir sehen zu, wie sich u', v', w' durch die ursprünglichen Linienkoordinaten u', v', w' von g ausdrücken lassen.

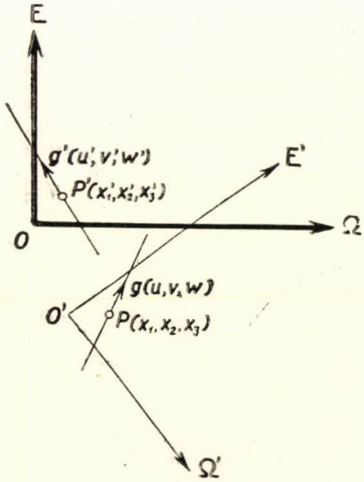


Fig. 15

Die Beantwortung dieser Frage kann auf die bekannte Tatsache gegründet werden, daß bei einer Bewegung bzw. Umwendung der Ebene ein jedes Ende ξ in

$$\xi' = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta} \tag{1}$$

übergeht, wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ von ξ unabhängig sind und

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1 \tag{2}$$

ausfällt, je nachdem eine Bewegung bzw. Umwendung vorliegt.[17] (Im Falle $\gamma \neq 0$ geht das Ende $-\frac{\delta}{\gamma}$ in Ω, und Ω in das Ende $\frac{\alpha}{\gamma}$ über.)

Sind die Enden der gerichteten Geraden g von Ω, sowie von Ω' verschieden, und sind diese Enden ξ, η so bezeichnet, daß g nach dem Ende ξ gerichtet ist, so sind im Sinne von (1) die entsprechenden Enden von g' der Reihe nach

$$\xi' = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}, \quad \eta' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}. \tag{1*}$$

Auf Grund dieser Formeln (1*) ergeben sich mit Rücksicht auf (2) für die Linienkoordinaten u', v', w' der Geraden g' in Bezug auf das ursprüngliche System (§ 3, (4)) die Enden

$$u' = \frac{\xi'\eta' - 1}{\xi' - \eta'} = \frac{(\alpha^2 - \gamma^2)\xi\eta + (\alpha\beta - \gamma\delta)(\xi + \eta) + \beta^2 - \delta^2}{\pm(\xi - \eta)},$$

$$v' = \frac{\xi' + \eta'}{\xi' - \eta'} = \frac{2\alpha\gamma\xi\eta + (\beta\gamma + \alpha\delta)(\xi + \eta) + 2\beta\delta}{\pm(\xi - \eta)},$$

$$w' = \frac{\xi'\eta' + 1}{\xi' - \eta'} = \frac{(\alpha^2 + \gamma^2)\xi\eta + (\alpha\beta + \gamma\delta)(\xi + \eta) + \beta^2 + \delta^2}{\pm(\xi - \eta)}.$$

Es ist aber, wie sofort ersichtlich (§ 3, (4)), durch die ursprünglichen Linienkoordinaten u, v, w der Geraden g ausgedrückt

$$\xi - \eta = \frac{2}{w - u}, \quad \xi\eta = \frac{w + u}{w - u}, \quad \xi + \eta = \frac{2v}{w - u},$$

und durch Einsetzen in die obigen Formeln erhält man nach u, v, w geordnet

$$\left\{\begin{aligned} u' &= \pm\left\{\frac{\alpha^2 - \gamma^2 - \beta^2 + \delta^2}{2}u + (\alpha\beta - \gamma\delta)v + \frac{\alpha^2 - \gamma^2 + \beta^2 - \delta^2}{2}w\right\}, \\ v' &= \pm\{(\alpha\gamma - \beta\delta)u + (\beta\gamma + \alpha\delta)v + (\alpha\gamma + \beta\delta)w\}, \\ w' &= \pm\left\{\frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 - \delta^2}{2}u + (\alpha\beta + \gamma\delta)v + \frac{\alpha^2 + \gamma^2 + \beta^2 + \delta^2}{2}w\right\}. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

[17] Vgl. H. LIEBMANN, Über die Begründung der hyperbolischen Geometrie, *Math. Annalen*, **59** (1904), S. 110—128, insbesondere S. 118. Für den Beweis siehe PAUL SZÁSZ, a. a. O. [3], S. 246—247, sowie den Anhang.

Werden hierbei in der j-ten Gleichung die Koeffizienten von u, v, w der Reihe nach mit a_{j1}, a_{j2}, a_{j3} bezeichnet ($j = 1, 2, 3$), so lauten diese Formeln

$$(3^*)\qquad \begin{cases} u' = a_{11}\,u + a_{12}\,v + a_{13}\,w, \\ v' = a_{21}\,u + a_{22}\,v + a_{23}\,w, \\ w' = a_{31}\,u + a_{32}\,v + a_{33}\,w. \end{cases}$$

Diese Formeln (3) bzw. (3*) sind auch dann gültig, wenn die Enden von g nicht beide von Ω und Ω' verschieden sind. Davon überzeugt man sich leicht, in jedem möglichen Falle.

Für die Koeffizienten auf der rechten Seite von (3*) *gelten die Gleichungen*

$$(4)\qquad \begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 - a_{31}^2 = 1, \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 - a_{32}^2 = 1, \\ -a_{13}^2 - a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1 \end{cases}$$

und ouch noch

$$(5)\qquad \begin{cases} a_{11}\,a_{12} + a_{21}\,a_{22} - a_{31}\,a_{32} = 0, \\ a_{12}\,a_{13} + a_{22}\,a_{23} - a_{32}\,a_{33} = 0, \\ a_{13}\,a_{11} + a_{23}\,a_{21} - a_{33}\,a_{31} = 0. \end{cases}$$

Diese ergeben sich auf Grund von (2) durch einfache Rechnung mit Rücksicht auf die unter (3) angeschriebenen Ausdrücke der Koeffizienten a_{jk}.

Die aus den Koeffizienten a_{jk} *gebildete Determinante ist*

$$(6)\qquad D = \pm \begin{vmatrix} \dfrac{\alpha^2-\gamma^2-\beta^2+\delta^2}{2} & \alpha\beta-\gamma\delta & \dfrac{\alpha^2-\gamma^2+\beta^2-\delta^2}{2} \\ \alpha\gamma-\beta\delta & \beta\gamma+\alpha\delta & \alpha\gamma+\beta\delta \\ \dfrac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2-\delta^2}{2} & \alpha\beta+\gamma\delta & \dfrac{\alpha^2+\gamma^2+\beta^2+\delta^2}{2} \end{vmatrix} = 1,$$

wie man sich davon auf Grund der ersten Gleichung unter (4) und mit Rücksicht auf (2) durch die Entwicklung

$$D = a_{11}\,D_1 + a_{21}\,D_2 + a_{31}\,D_3$$

nach den Elementen der ersten Kolonne leicht überzeugen kann.

Zusammenfassend können wir also über die Transformation der Weierstraßschen homogenen Linienkoordinaten folgendes aussagen:

Sind die Weierstraßschen homogenen Linienkoordinaten einer gerichteten Geraden in der durch den rechten Winkel $\Omega O E$ definierten Endenrechnung der Reihe nach u, v, w, so ergeben sich ihre Linienkoordinaten u', v', w', bezüglich eines neuen Koordinatensystems $\Omega' O' E'$ aus den Formeln unter (3*), *wobei* *die Koeffizienten a_{jk} von g unabhängig sind und den Gleichungen unter* (4) *und* (5) *genügen, ferner die Determinante dieser Transformation*

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1 \tag{6*}$$

ausfällt.

Aus (4) und (5) folgt bekanntlich,[18] daß *für die Koeffizienten a_{jk} auch die Gleichungen*

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{12}^2 - a_{13}^2 = 1. \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 - a_{23}^2 = 1, \\ -a_{31}^2 - a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1 \end{cases} \tag{7}$$

und

$$\begin{cases} a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} - a_{13}a_{23} = 0, \\ a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} - a_{23}a_{33} = 0, \\ a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} - a_{33}a_{13} = 0 \end{cases} \tag{8}$$

bestehen. Diese Gleichungen können übrigens ähnlich wie die unter (4) und (5) durch direkte Rechnung verifiziert werden.

Aus (3) folgen schon durch eine leichte Überlegung die Formeln

$$u = \pm \left\{ \frac{\delta^2 - \gamma^2 - \beta^2 + \alpha^2}{2} u' + (\alpha\gamma - \beta\delta) v' + \frac{\delta^2 - \gamma^2 + \beta^2 - \alpha^2}{2} w' \right\},$$
$$v = \pm \{ (\alpha\beta - \gamma\delta) u' + (\beta\gamma + \alpha\delta) v' - (\alpha\beta + \gamma\delta) w' \},$$
$$w = \pm \left\{ \frac{\delta^2 + \gamma^2 - \beta^2 - \alpha^2}{2} u' - (\alpha\gamma + \beta\delta) v' + \frac{\delta^2 + \gamma^2 + \beta^2 + \alpha^2}{2} w' \right\}.$$

Das bedeutet, mit Rücksicht auf die unter (3) angeschriebenen Ausdrücke der Koeffizienten a_{jk} in (3*), folgendes:

Die ursprünglichen Weierstraßschen homogenen Linienkoordinaten u, v, w sind durch die auf das neue Koordinatensystem $\Omega' O' E'$ bezogenen Linienkoordinaten u', v', w' ausgedrückt

$$\begin{cases} u = a_{11} u' + a_{21} v' - a_{31} w', \\ v = a_{12} u' + a_{22} v' - a_{32} w', \\ w = -a_{13} u' - a_{23} v' + a_{33} w', \end{cases} \tag{9}$$

wobei die Koeffizienten a_{jk} mit denen unter (3*) *identisch ausfallen.*

[18] Vgl. z. B. G. Kowalewski, *Einführung in die Determinantentheorie einschließlich der unendlichen und der Fredholmschen Determinanten* (Leipzig, 1909), S. 161.

§ 5. Transformation der Weierstraßschen homogenen Punktkoordinaten. Der Abstand zweier Punkte

Ähnlich wie am Anfang des vorigen § die Linienkoordinaten, definiere ich die Weierstraßschen homogenen Punktkoordinaten in Bezug auf ein neues Koordinatensystem folgendermaßen:

Als Weierstraßsche homogene Koordinaten eines Punktes P in Bezug auf das „Koordinatensystem“ $\Omega' O' \mathrm{E}'$ sollen die Koordinaten x_1', x_2', x_3' (§ 2) desjenigen Punktes P' verstanden werden, in den P bei derjenigen Bewegung bzw. Umwendung der Ebene übergeht, durch die der rechte Winkel $\Omega' O' \mathrm{E}'$ in den ursprünglichen $\Omega O \mathrm{E}$ übergeführt wird.

Wir sehen zu, wie sich die ursprünglichen Koordinaten durch die neuen ausdrücken lassen und umgekehrt.

Es sei zu diesem Zwecke durch den Punkt P eine gerichtete Gerade g gelegt, deren ursprüngliche Weierstraßsche homogene Linienkoordinaten (§ 3) der Reihe nach u, v, w, und die auf das neue System bezogenen u', v', w' sind. Durch diejenige Bewegung oder Umwendung, welche den rechten Winkel $\Omega' O' \mathrm{E}'$ in $\Omega O \mathrm{E}$ überführt, gehen die Gerade g und der Punkt P in g' bzw. P' über, die die ursprünglichen Linien- bzw. Punktkoordinaten u', v', w' bzw. x_1', x_2', x_3' haben. Da aber die Gerade g' durch den Punkt P' hindurchgeht, so ist (§ 3, (7))

$$u' x_1' + v' x_2' - w' x_3' = 0. \tag{1}$$

Diese Gleichung nimmt durch Anwendung der Transformationsformeln der Weierstraßschen homogenen Linienkoordinaten (§ 4, (3*)) die Gestalt

$$(a_{11} x_1' + a_{21} x_2' - a_{31} x_3') u + (a_{12} x_1' + a_{22} x_2' - a_{32} x_3') v - (-a_{13} x_1' - a_{23} x_2' + a_{33} x_3') w = 0$$

an. Wenn der Kürze halber die Bezeichnung

$$\left\{\begin{aligned} y_1 &= a_{11} x_1' + a_{21} x_2' - a_{31} x_3', \\ y_2 &= a_{12} x_1' + a_{22} x_2' - a_{32} x_3', \\ y_3 &= -a_{13} x_1' - a_{23} x_2' + a_{33} x_3' \end{aligned}\right. \tag{2}$$

eingeführt wird, so geht diese Gleichung (1) in

$$y_1 u + y_2 v - y_3 w = 0 \tag{1*}$$

über. Aus (2) folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen (7) und (8) des vorigen § 4

$$y_3^2 - y_2^2 - y_1^2 = -x_1'^2 - x_2'^2 + x_3'^2,$$

also ist (§ 2, (1))

$$y_3^2 - y_2^2 - y_1^2 = 1,$$

da doch x_1', x_2', x_3' Weierstraßsche homogene Koordinaten sind. Demnach sind entweder y_1, y_2, y_3 oder $-y_1, -y_2, -y_3$ die Weierstraßschen homogenen

Koordinaten eines Punktes Q in der durch den rechten Winkel $\Omega O\mathrm{E}$ definierten Endenrechnung. Dieser Punkt Q liegt aber infolge (1*) auf der Geraden g, und zwar bei beliebiger Wahl der letzteren, die durch den Punkt P gelegt wird, deshalb fällt Q mit P zusammen. Die Enden y_1, y_2, y_3 oder $-y_1, -y_2, -y_3$ sind also mit x_1, x_2, x_3 der Reihe nach identisch, und es bestehen daher mit Rücksicht auf (2) die Formeln

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1 = \varepsilon(a_{11}x_1' + a_{21}x_2' - a_{31}x_3'), \\ x_2 = \varepsilon(a_{12}x_1' + a_{22}x_2' - a_{32}x_3'), \\ x_3 = \varepsilon(-a_{13}x_1' - a_{23}x_2' + a_{33}x_3'), \end{cases}$$

wobei $\varepsilon = \pm 1$ ausfällt. Jedem Punkt P entspricht ein solches Vorzeichen ε, es ist aber noch fraglich, ob dies für jeden Punkt dasselbe ist.

Ich zeige, daß es unter (3) für jeden Punkt P dasselbe $\varepsilon = \pm 1$ gilt, je nachdem die Koordinatensysteme $\Omega O\mathrm{E}$ und $\Omega' O' \mathrm{E}'$ gleichsinnig oder ungleichsinnig ausfallen.

Für den Beweis seien $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ die Weierstraßschen homogenen Koordinaten eines von P verschiedenen Punktes $\bar{P}$. Dann gelten neben (3) die entsprechenden Gleichungen

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \bar{\varepsilon}(a_{11}\bar{x}_1' + a_{21}\bar{x}_2' - a_{31}\bar{x}_3'), \\ \bar{x}_2 &= \bar{\varepsilon}(a_{12}\bar{x}_1' + a_{22}\bar{x}_2' - a_{32}\bar{x}_3'), \\ \bar{x}_3 &= \bar{\varepsilon}(-a_{13}\bar{x}_1' - a_{23}\bar{x}_2' + a_{33}\bar{x}_3') \end{aligned}$$

und auf Grund der Gleichungen (7) und (8) im vorigen § 4 ergibt sich hieraus

$$(4)\qquad x_3\bar{x}_3 - x_2\bar{x}_2 - x_1\bar{x}_1 = \varepsilon\bar{\varepsilon}(x_3'\bar{x}_3' - x_2\bar{x}_2' - x_1\bar{x}_1').$$

Da aber hierbei der auf der linken Seite, sowie auf der rechten in Klammern stehende Ausdruck positiv ausfällt (§ 2, (8)), so ist $\varepsilon\bar{\varepsilon} > 0$, es bedeuten also ε und $\bar{\varepsilon}$ in den beiden Punkten gewiß dasselbe Vorzeichen. Wird nun (3) speziell auf den Punkt O' angewandt, dessen Koordinaten in Bezug auf das neue System $\Omega' O' \mathrm{E}'$ der Reihe nach $x_1' = 0$, $x_2' = 0$, $x_3' = 1$ sind (§ 2, (7)), so erhält man aus der dritten Gleichung $x_3 = \varepsilon a_{33}$, d. h. mit Rücksicht auf die dritte Gleichung unter (3) im vorigen §

$$x_3 = \pm\, \varepsilon \frac{\alpha^2 + \gamma^2 + \beta^2 + \delta^2}{2},$$

wobei das Vorzeichen $+$ oder $-$ gilt, je nachdem das System $\Omega' O' \mathrm{E}'$ durch eine Bewegung bzw. Umwendung in $\Omega O\mathrm{E}$ übergeführt wird, oder mit anderen Worten die beiden Koordinatensysteme gleichsinnig oder ungleichsinnig ausfallen. Das hat wegen $x_3 > 0$ (§ 2, (2)) zur Folge, daß diesen zwei Fällen entsprechend auch $\varepsilon = \pm 1$ ist, wie behauptet wurde.

Wir haben somit folgendes Ergebnis gewonnen:

Sind x_1, x_2, x_3 *die Weierstraßschen homogenen Koordinaten eines Punktes* P *in der durch den rechten Winkel* $\Omega O \mathrm{E}$ *definierten Endenrechnung und* x'_1, x'_2, x'_3 *die Koordinaten desselben bezüglich eines neuen Koordinatensystems* $\Omega' O' \mathrm{E}'$, *so bestehen die Transformationsformeln*

$$(3^*) \qquad \begin{cases} x_1 = \pm (a_{11}x'_1 + a_{21}x'_2 - a_{31}x'_3), \\ x_2 = \pm (a_{12}x'_1 + a_{22}x'_2 - a_{32}x'_3), \\ x_3 = \pm (-a_{13}x'_1 - a_{23}x'_2 + a_{33}x'_3), \end{cases}$$

wobei die Koeffizienten a_{jk} *von* P *unabhängig, nämlich mit den obigen* (§ 4, (3*)) *identisch sind, und das Zeichen* $+$ *oder* $-$ *gültig ist, je nachdem das neue Koordinatensystem mit dem ursprünglichen gleichsinnig oder ungleichsinnig ausfällt.*

Aus (3*) kann schon auf Grund der Formeln (9) des vorigen § durch eine leichte Überlegung gefolgert werden, daß *die neuen Weierstraßschen homogenen Koordinaten* x'_1, x'_2, x'_3 *durch die ursprünglichen ausgedrückt*

$$(5) \qquad \begin{cases} x'_1 = \pm (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3), \\ x'_2 = \pm (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3), \\ x'_3 = \pm (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) \end{cases}$$

sind, wobei das Zeichen $+$ *oder* $-$ *zu nehmen ist, je nachdem die beiden Koordinatensysteme gleichen oder entgegengesetzten Drehungssinn haben.* Es kann noch mit Rücksicht auf die Formel (6*) des vorigen § zusätzlich hinzugefügt werden, daß *die Determinante der Transformation* (5) *dem gültigen Vorzeichen entsprechend* $\Delta = \pm 1$ *ist.*

Die Formel (4) hat wegen $\varepsilon = \bar{\varepsilon} = +1$ zur Folge, daß der Ausdruck $x_3\bar{x}_3 - x_2\bar{x}_2 - x_1\bar{x}_1$ gegen Koordinatentransformation invariant ist. Wird das neue Koordinatensystem $\Omega' O' \mathrm{E}'$ so gewählt, daß O' mit dem Punkt $\bar{P}$ zusammenfällt und P auf der Halbgeraden $O'\Omega'$ liegt (Fig. 16), so sind die neuen Koordinaten dieser Punkte $\bar{x}'_1 = 0$, $\bar{x}'_2 = 0$, $\bar{x}'_3 = 1$ (§ 2, (7)) bzw. $x'_1 = S(d)$, $x'_2 = 0$, $x'_3 = C(d)$ (§ 2, 3)), also der fragliche Ausdruck $x'_3\bar{x}'_3 - x'_2\bar{x}'_2 - x'_1\bar{x}'_1 = C(d)$. Wir können somit wegen der Invarianz dieses Ausdruckes folgendes feststellen:

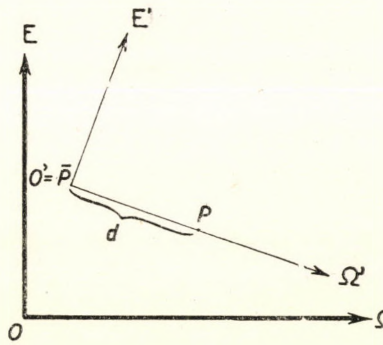


Fig. 16

Der Abstand d *der Punkte* P *und* $\bar{P}$ *von den Weierstraßschen homogenen Koordinaten* x_1, x_2, x_3 *bzw.* $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ *ist durch die Formel*

$$(6) \qquad C(d) = x_3\bar{x}_3 - x_2\bar{x}_2 - x_1\bar{x}_1$$

bestimmt.

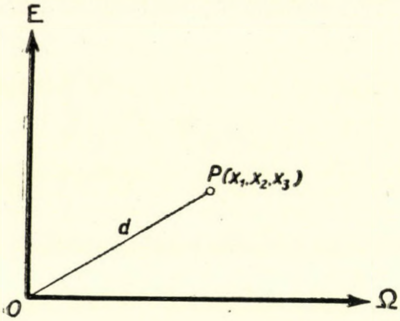


Fig. 17

Mit Hilfe dieser Formel kann die einfache geometrische Bedeutung der Koordinate x_3 gleich entdeckt werden. Wird nämlich neben dem Punkt $P(x_1, x_2, x_3)$ als zweiter Punkt $\bar{P} = O$ gewählt (Fig. 17), dessen Koordinaten $\bar{x}_1, = 0, \bar{x}_2 = 0, \bar{x}_3 = 1$ sind (§ 2, (7)), so lehrt die Formel (6) folgendes:

Die dritte Koordinate des Punktes P ist mit dem Abstand $\overline{OP} = d$ ausgedrückt

(7) $$x_3 = C(d).$$

§ 6. Der Abstand eines Punktes von einer Geraden

Es seien x_1, x_2, x_3 die Weierstraßschen homogenen Koordinaten eines Punktes P und u, v, w die Linienkoordinaten einer gerichteten Geraden g. Hat ein neues Koordinatensystem $\Omega' O' \mathrm{E}'$ denselben Drehungssinn wie das ursprüngliche System $\Omega O \mathrm{E}$, so ist nach den Formeln der Transformation der Linien- bzw. Punktkoordinaten (§ 4, (3*); § 5, (5))

$$\begin{aligned} u'x_1' + v'x_2' - w'x_3' = {} & (a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w)(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + \\ & + (a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w)(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) - \\ & - (a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w)(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3). \end{aligned}$$

Es besteht also auf Grund der Gleichungen (4) und (5) des § 4 die Formel

(1) $$u'x_1' + v'x_2' - w'x_3' = ux_1 + vx_2 - wx_3.$$

Der Ausdruck $ux_1 + vx_2 - wx_3$ ist demnach gegen Koordinatentransformation bei Beibehaltung des Drehungssinnes invariant. Dieser Ausdruck hat eine einfache geometrische Bedeutung. Um sie zu bestimmen, werde das neue Koordinatensystem $\Omega' O' \mathrm{E}'$ so gewählt, wie es an der Figur 18 zu sehen ist. Wir nehmen zunächst an, daß P auf der positiven Seite der Geraden g liegt, und es sei t der Abstand dieses Punktes von g. Bei derjenigen Bewegung, durch die der rechte Winkel $\Omega' O' \mathrm{E}'$ in $\Omega O \mathrm{E}$ übergeführt wird, geht der Punkt P in $P' = O$ und die Gerade g in g' über, die auf $O\Omega$ senkrecht steht. Letztere ist mit $O\mathrm{E}$ gleichgerichtet und hat von O den Abstand $t > 0$ (Fig. 19). Die Enden ξ, η dieser Geraden g' (wobei ξ in die positive Rich-

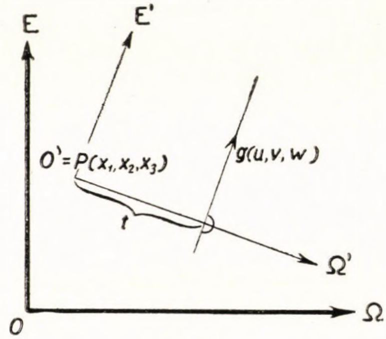


Fig. 18

tung gefallen sei) sind (§ 1, (1)) $\xi = E(t)$ und $\eta = -E(t)$, also hat g definitionsgemäß (§ 4) in Bezug auf das neue System $\Omega' O' E'$ die Linienkoordinaten (§ 3, (4))

$$u' = \ldots, \quad v' = \ldots, \quad w' = \frac{\xi\eta + 1}{\xi - \eta} = \frac{-E(t)^2 + 1}{2E(t)} =$$
$$= -\frac{E(t) - E(-t)}{2} = -S(t)$$

(§ 1, (5*), (9)), während P die neuen Koordinaten (§ 5) $x_1' = 0, x_2' = 0, x_3' = 1$ (§ 2, (7)) aufweist. Demnach ist auf Grund von (1) der fragliche Ausdruck $ux_1 + vx_2 - wx_3 = S(t)$. Liegt P auf der negativen Seite von g, d. h. auf der positiven Seite der entgegengesetzt gerichteten Geraden von den Linienkoordinaten $-u, -v, -w$, so ist nach dieser Formel

$$-ux_1 - vx_2 + wx_3 = S(t).$$

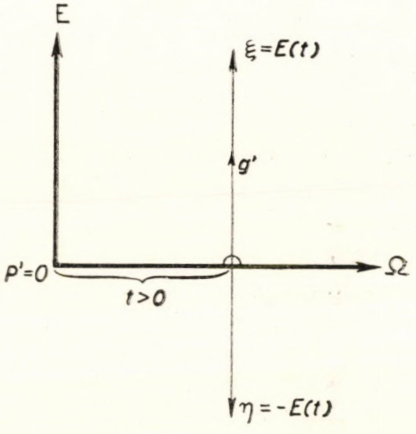


Fig. 19

Zusammengefaßt können wir dieses Ergebnis so ausdrücken:

Sind x_1, x_2, x_3 die Weierstraßschen homogenen Koordinaten eines Punktes P und u, v, w die Linienkoordinaten einer gerichteten Geraden g, und wird der Abstand t dieses Punktes von dieser Geraden positiv oder negativ genommen, je nachdem P auf der positiven oder negativen Seite von g liegt, so besteht die Formel

(2) $$S(t) = ux_1 + vx_2 - wx_3.$$

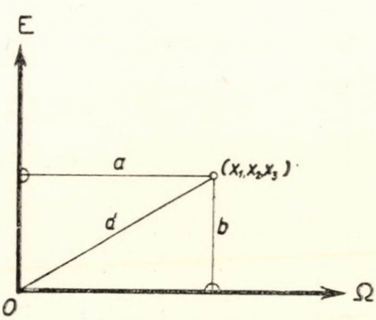


Fig. 20

Diese Formel (2) ist geeignet, die einfache geometrische Bedeutung der zwei ersten Koordinaten x_1, x_2 zu entdecken. Da nämlich das Ende E in der Endenrechnung $\xi = E(0) = 1$ ist (§ 1, (5)) und folglich das andere Ende der Geraden OE als $\eta = -1$ ausfällt, so sind die Linienkoordinaten dieser nach E gerichteten Geraden der Reihe nach $-1, 0, 0$ (§ 3, (4)). Wird also der Abstand des Punktes $P(x_1, x_2, x_3)$ von der Geraden OE mit $-a$ bezeichnet, so ist nach (2) $-x_1 = S(-a)$, d. h. $x_1 = S(a)$. Da die Gerade $O\Omega$ das andere Ende 0 hat, also die Linienkoordinaten dieser nach Ω gerichteten Geraden der Reihe nach 0, 1, 0 sind (§ 3, (5)), so besteht für den Abstand b des Punktes P von $O\Omega$ im Sinne von (2) $x_2 = S(b)$.

Mit Rücksicht auf die Formel (7) des vorigen § können wir also über die geometrische Bedeutung der Weierstraßschen homogenen Koordinaten eines Punktes zusammenfassend folgendes feststellen:

Wird der Abstand eines Punktes von der Geraden $O\mathsf{E}$ *mit* a, *von der Geraden* $O\Omega$ *mit* b, *und vom Punkt* O *mit* d *bezeichnet, und zwar* (Fig. 20) a *an der rechten Seite von* $O\mathsf{E}$, b *an der oberen Seite von* $O\Omega$ *positiv, und an der anderen negativ genommen, so sind die im* § 2 *unter* (3) *definierten Weierstraßschen homogenen Koordinaten dieses Punktes*

$$x_1 = S(a), \quad x_2 = S(b), \quad x_3 = C(d). \tag{3}$$

§ 7. Die geometrische Bedeutung des Ausdruckes $u_1 u_2 + v_1 v_2 - w_1 w_2$ in Bezug auf zwei Geraden

Ich betrachte nun zwei voneinander verschiedene gerichtete Geraden g_1, g_2, die in der durch den rechten Winkel $\Omega O\mathsf{E}$ definierten Endenrechnung die Weierstraßschen homogenen Linienkoordinaten u_1, v_1, w_1 bzw. u_2, v_2, w_2 haben (§ 3). Auf Grund der Formeln unter (3*) im § 4 und mit Rücksicht

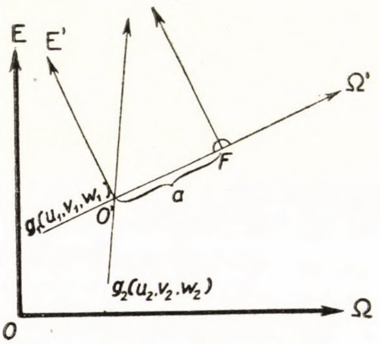


Fig. 21

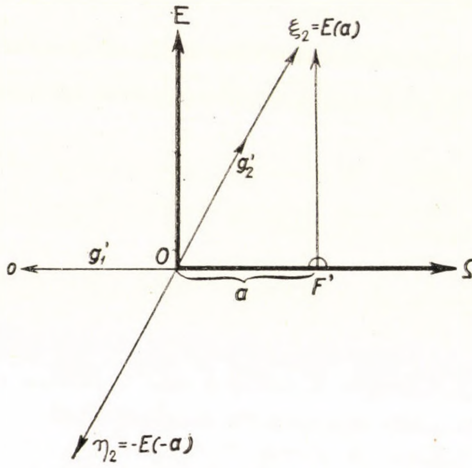


Fig. 22

auf die Gleichungen (4) und (5) in demselben § ist der Ausdruck $u_1 u_2 + v_1 v_2 - w_1 w_2$ gegen Koordinatentransformation invariant. Es sind bezüglich der geometrischen Bedeutung dieses Ausdruckes drei Fälle zu unterscheiden.

1° Fall. Die Geraden g_1, g_2 schneiden einander.

Das neue Koordinatensystem $\Omega' O' \mathrm{E}'$ werde so gewählt, wie es die Figur 21 zeigt. Von dem in die positive Richtung fallende Ende von g_2 werde auf g_1 das Lot gefällt, und der Fußpunkt F desselben habe von O' den mit Vorzeichen genommenen Abstand a. Bei derjenigen Bewegung bzw. Umwendung, durch die der rechte Winkel $\Omega' O' \mathrm{E}'$ in $\Omega O \mathrm{E}$ übergeführt wird, gehen die gerichteten Geraden g_1, g_2 der Reihe nach in g_1', g_2', der Punkt F in F' über, wobei mit Vorzeichen genommen $\overline{OF'} = a$ ausfällt (Fig. 22). Die Enden von g_1' sind Ω und $\eta_1 = 0$, und zwar fällt Ω in die positive Richtung von g_1'. Sind ξ_2, η_2 die Enden von g_2', wobei ξ_2 in die positive Richtung gefallen sei, so ist (§ 1, (1))

$$\xi_2 = E(a), \quad \eta_2 = -E(-a).$$

Also hat g_2 in Bezug auf das neue System $\Omega' O' \mathrm{E}'$ definitionsgemäß (§ 4) die Linienkoordinaten (§ 3, (4); § 1, (9))

$$u_2' = \cdots, \quad v_2' = \frac{E(a) - E(-a)}{E(a) + E(-a)} = T(a), \quad w_2' = \cdots,$$

während die von g_1 (§ 3, (5))

$$u_1' = 0, \quad v_1' = 1, \quad w_1' = 0$$

sind. Es folgt deshalb

$$u_1' u_2' + v_1' v_2' - w_1' w_2' = T(a),$$

und wir haben somit wegen der Invarianz des fraglichen Ausdrucks folgendes Resultat gewonnen:

Für einander schneidende gerichtete Geraden g_1, g_2 hat man

(1) $$u_1 u_2 + v_1 v_2 - w_1 w_2 = T(a),$$

wobei a den vom Schnittpunkt der beiden Geraden gerechneten Abstand des Fußpunktes desjenigen Lotes bedeutet, welches von dem in die positive Richtung fallenden Ende der Geraden g_2 auf g_1 gefällt wird (Fig. 21).

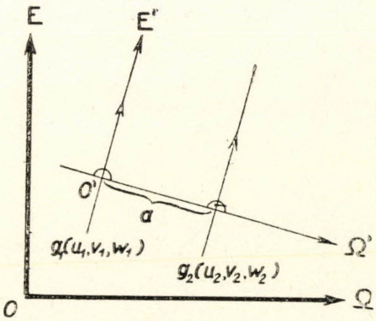


Fig. 23

2° Fall. Die Geraden g_1, g_2 haben ein gemeinsames Lot und sind gleichgerichtet.

Es sei $a > 0$ der zwischen g_1 und g_2 fallende Teil des gemeinsamen Lotes, und das neue System $\Omega' O' \mathrm{E}'$ werde so gewählt, wie es die Figur 23 andeutet. Wird der rechte Winkel $\Omega' O' \mathrm{E}'$ durch eine Bewegung bzw. Umwendung in $\Omega O \mathrm{E}$ übergeführt, so gehen g_1, g_2 der Reihe nach in die gerichteten Geraden g_1', g_2' über, die das gemeinsame Lot $O\Omega$ haben, dessen zwischen diesen Geraden fallender Teil $a > 0$ ist (Fig. 24), und zwar fällt g_1'

mit der Geraden $O\mathrm{E}$ überein, nach dem Ende E oder (§ 1, (5)) $\xi_1 = 1$ gerichtet. Das andere Ende von g_1' ist $\eta_1 = -1$, während g_2' die entsprechenden Enden $\xi_2 = E(a)$, $\eta_2 = -E(a)$ hat (§ 1, (1)). Die neuen Linienkoordinaten von g_1, g_2 sind mithin (§ 3, (4))

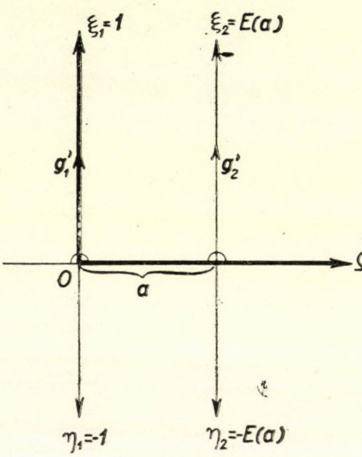


Fig. 24

$$u_1' = -1, \quad v_1' = 0, \quad w_1' = 0$$

bzw.

$$u_2' = \frac{-E(a)^2 - 1}{2E(a)}, \quad v_2' = \cdots, \quad w_2' = \cdots,$$

also ist in diesem Falle (§ 1, (5*), (9))

$$u_1'u_2' + v_1'v_2' - w_1'w_2' = \frac{E(a)^2 + 1}{2E(a)} = C(a).$$

Infolge der Invarianz des fraglichen Ausdruckes kann demnach jetzt folgendes festgestellt werden:

Haben die Geraden g_1, g_2 ein gemeinsames Lot und sind sie gleichgerichtet, so ist

$$(2) \qquad u_1u_2 + v_1v_2 - w_1w_2 = C(a),$$

wobei a den Abstand der Schnittpunkte dieser Geraden mit ihrem gemeinsamen Lot bedeutet (Fig. 23).

3° *Fall.* Die Geraden g_1, g_2 sind hyperbolisch parallel und gleichgerichtet.

Es kann offenbar angenommen werden, daß die beiden Geraden nach dem gemeinsamen Ende gerichtet sind. In diesem Falle werde das neue Koordinatensystem $\Omega' O' \mathrm{E}'$ so gewählt, wie es an der Figur 25 zu sehen ist,

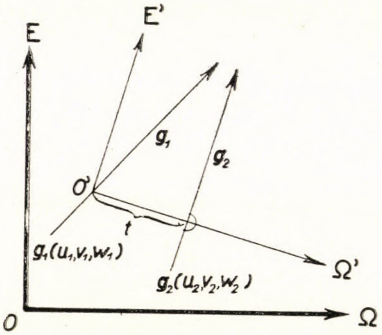


Fig. 25

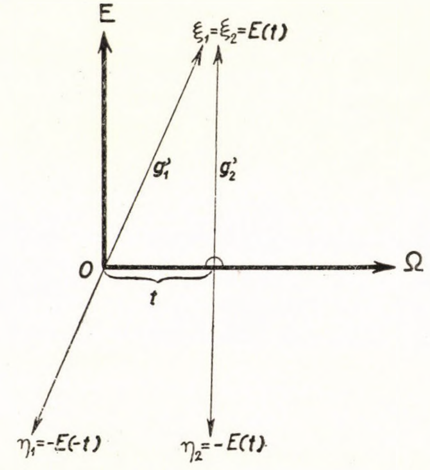


Fig. 26

und es sei das von O' auf g_2 gefälltes Lot als positive Strecke mit t bezeichnet. Bei derjenigen Bewegung bzw. Umwendung, durch die der rechte Winkel $\Omega' O' \mathrm{E}'$ in $\Omega O \mathrm{E}$ übergeführt wird, gehen die gerichteten Geraden g_1, g_2 der Reihe nach in g_1', g_2' über (Fig. 26), mit dem in die positive Richtung fallenden Ende $\xi_1 = \xi_2 = E(t)$. Das andere Ende von g_1' ist $\eta_1 = -E(-t)$, während g_2' das andere Ende $\eta_2 = -E(t)$ hat. Demzufolge sind die neuen Linienkoordinaten dieser Geraden (§ 3, (4); § 1, (9))

$$u_1' = \frac{-2}{E(t) + E(-t)} = -\frac{1}{C(t)}, \quad v_1' = \cdots, \quad w_1' = 0$$

bzw. (§ 1, (5*))

$$u_2' = \frac{-E(t)^2 - 1}{2E(t)} = -C(t), \quad v_2' = 0, \quad w_2' = \cdots,$$

woraus sich

$$u_1' u_2' + v_1' v_2' - w_1' w_2' = 1$$

ergibt. Wegen der Invarianz dieses Ausdruckes sind wir somit in diesem dritten Falle zum folgenden Resultat gekommen:

Es besteht für hyperbolisch parallele und gleichgerichtete Geraden g_1, g_2 (Fig. 25) *die Gleichung*

(3) $$u_1 u_2 + v_1 v_2 - w_1 w_2 = 1.$$

Aus den gewonnenen Formeln (1), (2) und (3) kann mit Rücksicht auf den Verlauf der Streckenfunktionen $C(t)$ und $T(t)$ (§ 1) folgendes gefolgert werden:

Die in Weierstraßschen homogenen Linienkoordinaten gegebenen verschiedenen Geraden $g_1(u_1, v_1, w_1), g_2(u_2, v_2, w_2)$

1. *schneiden einander dann und nur dann, wenn*

$$|u_1 u_2 + v_1 v_2 - w_1 w_2| < 1$$

ausfällt, insbesondere stehen sie nur dann aufeinander senkrecht, falls

$$u_1 u_2 + v_1 v_2 - w_1 w_2 = 0$$

ist;

2. *haben ein gemeinsames Lot dann und nur dann, wenn*

$$|u_1 u_2 + v_1 v_2 - w_1 w_2| > 1$$

ausfällt;

3. *sind hyperbolisch parallel dann und nur dann, falls die Gleichung*

$$u_1 u_2 + v_1 v_2 - w_1 w_2 = \pm 1$$

besteht.

*

Durch diese Erörterungen der §§ 2—7 habe ich im Besitze der Hilbertschen Endenrechnung, die analytische Geometrie der hyperbolischen Ebene selbstständig begründet. Ich meine damit für einen vollständig elementaren und independenten Aufbau der hyperbolischen Geometrie der Ebene, die Grundlage geschaffen zu haben.

Es ist in der Tat nicht schwer, auf Grund der obigen Darlegungen auch die homogenen Koordinaten von Fernpunkten (d. h. *Enden*) und von *idealen Punkten* einzuführen, sowie den Begriff der *idealen Geraden* bzw. *Randgeraden* analytisch zu erklären. Die Identität der hyperbolischen ebenen Geometrie mit dem bekannten Klein—Hilbertschen Kreismodell,[19] wohlverstanden unabhängig von der Stetigkeit, ist sodann eine Folge dieser analytischen Geometrie.[20]

Anhang

Darstellung der Bewegungen bzw. Umwendungen der hyperbolischen Ebene mit Hilfe der Hilbertschen Endenrechnung

Die Bewegungen bzw. Umwendungen der hyperbolischen Ebene sind, auf die Enden ξ bezogen, analytisch durch die linearen Transformationen

$$\xi' = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma > 0) \tag{1}$$

bzw.

$$\xi' = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma < 0) \tag{2}$$

dargestellt.

Für diesen oben benutzten Satz (§ 4), der dem Wesen nach von H. LIEBMANN[21] herrührt, habe ich schon früher einen einfachen Beweis mitgeteilt.[22] In den folgenden Zeilen gebe ich der Vollständigkeit halber diesen Beweis mit einer wesentlichen Modifikation wieder. Diese neue Beweisanordnung scheint mir anschaulicher zu sein.

[19] Vgl. F. KLEIN, Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, *Math. Annalen,* **4** (1871), S. 583—625, insbesondere S. 620—621, oder *Gesammelte mathematische Abhandlungen. I* (Berlin, 1921), S. 254—305, insbesondere S. 300—301; ferner D. HILBERT, a. a. O. [1], S. 38.

[20] Für den Beweis der Indentität der hyperbolischen ebenen Geometrie mit der Poincaréschen Halbebene, ebenfalls unabhängig von der Stetigkeit, siehe B. KERÉKJÁRTÓ, Nouvelle méthode d'édifier la géométrie plane de Bolyai et de Lobatchefski, *Commentarii Math. Helv.*, **13** (1940), S. 11—48. Dieser Beweis erfordert eine viel kompliziertere Betrachtungsweise.

[21] H. LIEBMANN, a. a. O. [17].

[22] Siehe [17].

Da die Transformationen

$$\xi' = \xi + \lambda, \quad \xi' = -\frac{1}{\xi}, \quad \xi' = \mu\xi \quad (\mu > 0)$$

der Reihe nach eine Drehung um den Fernpunkt Ω, die Halbdrehung um den Punkt O, eine Verschiebung längs der Geraden $O\Omega$ bedeuten,[23] so stellt die Transformation (1) auf Grund der Umformung (im Falle $\gamma \neq 0$)

$$\frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma^2} \frac{-1}{\xi + \frac{\delta}{\gamma}}$$

eine Bewegung der hyperbolischen Ebene dar (das leuchtet unmittelbar ein, falls $\gamma = 0$ ist).

Umgekehrt kann eine jede Bewegung der hyperbolischen Ebene, durch eine derartige Transformation dargestellt werden, wie es die folgende Überlegung zeigt.

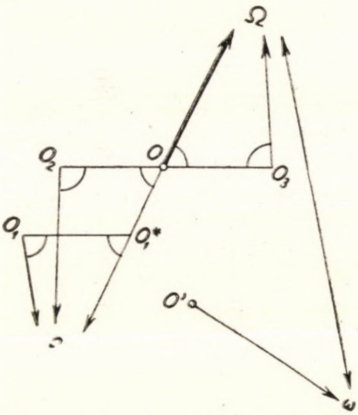


Fig. 27

Die Bewegung ist durch die Angabe derjenigen Halbgeraden $O'\omega$, die in $O\Omega$ übergeführt wird (Fig. 27), vollkommen bestimmt. Sie läßt sich nun im Falle $\omega \neq \Omega$ aus den folgenden vier Bewegungen zusammensetzen:

1° Drehung um den Fernpunkt Ω, bei der die Gerade $\omega\Omega$ in 0Ω übergeführt wird. Dabei soll die Halbgerade $O'\omega$ in $O_1 0$ übergehen. Der *homologe Punkt* von O_1 auf der Geraden 0Ω sei mit O_1^* bezeichnet. (Dieser Punkt wird durch die Forderung $\sphericalangle 0 O_1 O_1^* = \sphericalangle 0 O_1^* O_1$ bestimmt.)

2° Verschiebung längs der Geraden 0Ω, bei der O_1^* in den Punkt O übergeht. Dabei werde $O_1 0$ in die Halbgerade $O_2 0$ übergeführt. Da O_1^* der homologe Punkt von O_1 war, so ist jetzt O der von O_2.

3° Halbdrehung um den Punkt O. Dabei soll $O_2 0$ in die Halbgerade $O_3\Omega$ übergehen. Da O und O_2 homologe Punkte waren, so sind O und O_3 ebenfalls homologe Punkte.

4° Drehung um den Fernpunkt Ω, bei der die Gerade $O_3\Omega$ in 0Ω übergeht. Da O und O_3 homologe Punkte waren, so wird dabei die Halbgerade $O_3\Omega$ in $O\Omega$ übergeführt.

[23] D. Hilbert, a. a. O. [4], § 4.

Wie man sieht, wird durch die Aufeinanderfolge dieser vier Bewegungen, die Halbgerade $O'\omega$ in $O\Omega$ übergehen. Die angenommene Bewegung ist also in der Tat die Zusammensetzung dieser Bewegungen $1° — 4°$.

Bei der Bewegung 1° geht ein von Ω verschiedenes Ende ξ in $\xi_1 = \xi + \lambda$ über, bei 2° wird ξ_1 in $\xi_2 = \frac{\xi_1}{\mu} (\mu > 0)$, sodann ξ_2 durch 3° in $\xi_3 = -\frac{1}{\xi_2}$ übergeführt, endlich wird ξ_3 bei der Bewegung 4° in $\xi_4 = \xi_3 + \nu$ übergehen, wobei λ, μ, ν von ξ unabhängig sind. Folglich ist die betrachtete Bewegung durch eine Transformation

$$\xi' = -\frac{\mu}{\xi + \lambda} + \nu = \frac{\nu\xi + (\nu\lambda - \mu)}{\xi + \lambda} \qquad (\mu > 0)$$

dargestellt, die die Form (1) hat.

Im Falle $\omega = \Omega$ ist die Bewegung offenbar die Zusammensetzung einer Drehung um den Fernpunkt Ω und einer Verschiebung längs der Geraden $O\Omega$, also durch eine Transformation

$$\xi' = \mu(\xi + \lambda) = \mu\xi + \mu\lambda \qquad (\mu > 0)$$

darstellbar, die ebenfalls von der Form (1) ist.

Die Transformation $\xi' = -\xi$ stellt definitionsgemäß (§ 1) die Spiegelung an der Geraden $O\Omega$ dar, also bedeuten die Transformationen (2) mit Rücksicht auf die Bedeutung der Transformationen (1), die Umwendungen der hyperbolischen Ebene.

Damit ist der Beweis des obigen Satzes über die Transformationen (1) und (2) beendet.

Diese Beweisanordnung hat auch den Vorteil, daß solcherart der nachstehende Satz von B Kerékjártó[24] zugleich mitbewiesen ist.

Jede Bewegung der hyperbolischen Ebene kann aus den folgenden zusammengesetzt werden:

a) *Halbdrehung um einen gegebenen Punkt O;*

b) *Verschiebung längs einer Geraden $O\Omega$, wobei Ω ein gegebener Fernpunkt ist;*

c) *Drehung um den Fernpunkt Ω.*

Während der ursprüngliche Beweis von B. Kerékjártó fünf solche Bewegungen verwendet, bin ich im obigen mit vier ausgekommen.

(Eingegangen am 30. Juli 1957.)

[24] B. Kerékjártó, a. a. O. [20], § 2, Théorème 11.

A REMARK ON HILBERT'S FOUNDATION OF THE HYPERBOLIC PLANE GEOMETRY

By
PAUL SZÁSZ (Budapest)
(*Presented by* G. HAJÓS)

D. HILBERT[1] showed that the hyperbolic plane geometry may be built up also exclusively based on the axioms of the plane and without the use of axioms of continuity. The system of axioms laid down by him for this purpose may be even somewhat more reduced. Namely, as I have already alluded to at another place,[2] beside HILBERT's groups of axioms I, II, III on incidence, order, and congruence in the plane, the following two axioms are sufficient:

AXIOM IV_1. *Let P, Q be two different points in the plane, and QY a half-line on one side of the straight line PQ, then there exists always a half-line PX on the same side of PQ, that does not intersect QY, while every half-line PZ lying in the $\sphericalangle QPX$ cuts the half-line QY* (Fig. 1).

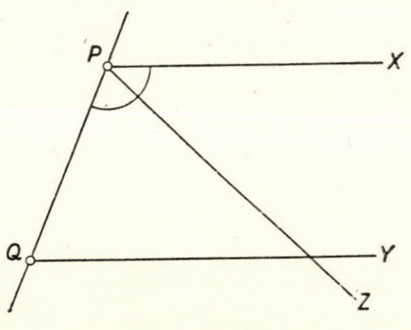


Fig. 1

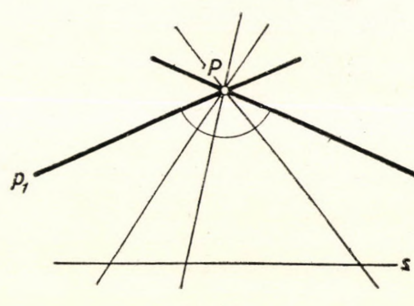


Fig. 2

AXIOM IV_2. *There exists in the plane a straight line s_0 and a point P_0 outside it through which two different straight lines can be drawn not intersecting s_0.*

[1] D. HILBERT, Neue Begründung der Bolyai—Lobatschefskyschen Geometrie, *Math. Annalen*, **57** (1903), pp. 137—150; or *Grundlagen der Geometrie*, 7. ed. (Leipzig und Berlin, 1930), Anhang III, pp. 159—177.

[2] PAUL SZÁSZ, Über die Hilbertsche Begründung der hyperbolischen Geometrie, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **4** (1953), pp. 243—250, in particular p. 243, footnote [2].

From these axioms we can conclude indeed on the axiom by which the Euclidean axiom of parallels was substituted by HILBERT if maintaining the groups I, II, III of axioms. Namely, by help of these groups I, II, III and of my Axioms IV_1, IV_2 we can prove the following

THEOREM. *If s is any straight line and P any point outside it, then the straight lines drawn through P and intersecting s form the interior of a certain* $\sphericalangle(p_1, p_2)$ (Fig. 2).

For the proof we use the following

LEMMA. *If the point R moves along the half-line QY, then* $\sphericalangle QRP \to 0$ *for* $\overline{QR} \to +\infty$ (Fig. 3).

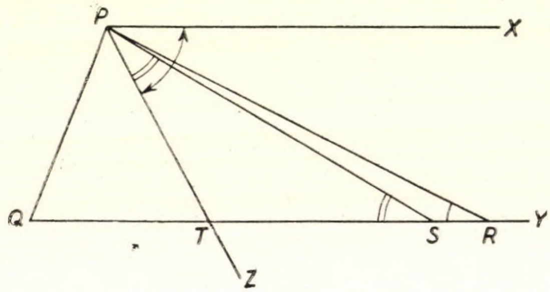


Fig. 3

This lemma is due to JÁNOS BOLYAI.[3] We prove it by Axiom IV_1.

Let PX be the half-line mentioned in Axiom IV_1. Let us be given an arbitrarily small angle ε. We draw the half-line PZ in $\sphericalangle QPX$ in such a manner (Fig. 3) that $\sphericalangle ZPX < \varepsilon$. According to Axiom IV_1, PZ cuts QY in a point T. If $\overline{TS} = \overline{TP}$, then $\sphericalangle TSP = \sphericalangle TPS$. Since $\sphericalangle TPS < \sphericalangle ZPX < \varepsilon$, we have $\sphericalangle TSP < \varepsilon$. Moreover, if $\overline{TR} > \overline{TS}$ then, as well known, $\sphericalangle TRP < \sphericalangle TSP$. Therefore we obtain $\sphericalangle TRP < \varepsilon$ if $\overline{TR} > \overline{TS}$. Thus $\sphericalangle QRP < \varepsilon$ holds if $\overline{QR}$ is large enough, i. e. $\sphericalangle QRP \to 0$ for $\overline{QR} \to +\infty$ and the lemma is proved.

PROOF OF THE THEOREM. By reason of Axiom IV_2 there exist two straight lines l, m through P_0 not crossing s_0 (Fig. 4). Let δ denote the supplement of that angle $\omega = \sphericalangle(l, m)$ which contains the straight lines through P_0 and crossing s_0 (Fig. 4). Owing to our lemma, we can obviously choose the points A, B on s_0 in such a way that

$$\sphericalangle P_0AB + \sphericalangle P_0BA < \delta.$$

[3] JOHANNES BOLYAI, *Appendix. Scientiam spatii absolute veram exhibens etc.* (Marosvásárhely, 1832), § 1.

It follows that the sum of the angles in the triangle ABP_0 is less than two right angles since $\sphericalangle AP_0B < \omega$ and the angles ω, δ form two right angles. From this it follows, as well known, that in any triangle the sum of the angles is less than two right angles.[4] Relying on this fact it results at once

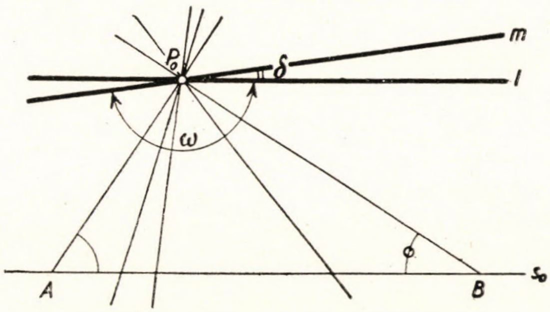


Fig. 4

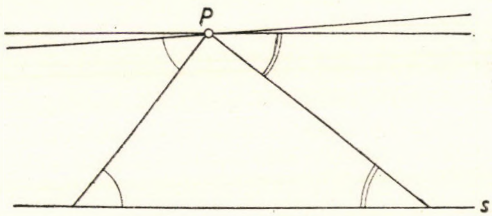


Fig. 5

(Fig. 5) that in the case of every straight line s and every point P outside it there exist two straight lines through P which do not cross s. Hence, by Axiom IV_1, the theorem follows immediately.

(Received 30 September 1957)

[4] A very elegant proof was given by K. FLADT, Der Saccheri—Legendresche Satz etc., *Zeitschrift für Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Unterricht*, **56** (1925), p. 345.

ZUR AXIOMATIK DER ZAHLEN

Von

HANFRIED LENZ (München)

(*Vorgelegt von* G. Hajós)

Es ist üblich, die elementare Arithmetik ausgehend von den Peanoschen Axiomen[1] zu entwickeln und anschließend die ganzen, rationalen und reellen Zahlen mit ihren Rechengesetzen einzuführen. Hier sollen die Peanoschen Axiome etwas abgeschwächt werden. Man erhält so gemeinsame Axiome für das System der natürlichen Zahlen, der ganzen Zahlen und für endliche zyklische Gruppen, und kann ausgehend davon in natürlicher Weise die Addition und Multiplikation in diesen Bereichen gemeinsam einführen.

§ 1. Axiomatische Definition der Zahlensysteme

Man kann die Peanoschen Axiome wie folgt fassen:

Die natürlichen Zahlen bilden eine Menge N mit einer umkehrbaren Abbildung π (der Nachfolgerfunktion) in sich von folgender Eigenschaft: *Es gibt in N ein Element $0 \notin N^{\pi}$, so daß aus $0 \in U \subseteq N$ und $U^{\pi} \subseteq U$ stets $U = N$ folgt.*[2]

Dieses Axiomensystem schwächen wir wie folgt ab:

Definition 1. *Ein Zahlensystem ist eine Menge S mit einer Abbildung π in sich von den folgenden Eigenschaften:*

(1) (I) *π ist umkehrbar, d. h. aus $x^{\pi} = y^{\pi}$ folgt $x = y$.*

(II) *Es gibt ein Element $0 \in S$, so daß aus $0 \in U \subseteq S$ und $U^{\pi} = U \cap S^{\pi}$ stets $U = S$ folgt* (Induktionsaxiom).

Eine Teilmenge $U \subseteq S$ soll also mit S zusammenfallen, sobald sie die Zahl 0 und mit jedem Element x den Nachfolger und, falls einer existiert, einen Vorgänger von x enthält. Es ist wohlbekannt, daß die natürlichen Zahlen, die ganzen Zahlen, sowie die Elemente einer zyklischen Gruppe die-

[1] Vgl. etwa Asser oder Landau. Namenangaben beziehen sich auf die Literaturangaben am Schluß.

[2] Das Bild des Elements x bzw. der Menge X sei mit x^{π} bzw. X^{π} bezeichnet. Natürlich ist es Formsache, ob man die natürlichen Zahlen mit der 0 oder mit der 1 beginnen läßt.

sem *Induktionsaxiom* genügen. Wir wollen zeigen, daß es — abgesehen von Isomorphie — keine anderen Zahlensysteme gibt, die den Axiomen (1) (I) und (II) genügen.

Wir zeigen zunächst, daß die Sonderstellung der Zahl 0 nur scheinbar ist.

HILFSSATZ 1. *Ist U eine nichtleere Teilmenge von S mit der Eigenschaft $U^n = U \cap S^n$, so ist $U = S$.*

BEWEIS.[3] V sei die Menge aller $x \in S$ mit der Eigenschaft: Für beliebiges U mit $x \in U$, $U^n = U \cap S^n$ ist $U = S$. Nach (1) (II) ist $0 \in V$.

Nun sei $y \in V$ und $y^n \in U$, $U^n = U \cap S^n$, also $y^n \in U \cap S^n = U^n$. Nach (1) (I) folgt daraus $y \in U$. Wegen $y \in V$ folgt (nach der Definition von V) $U = S$. Also ist $y^n \in V$, wieder nach der Definition von V.

Ferner sei $y \in V$ und $y = z^n$; U sei eine z enthaltende Teilmenge von S mit $U^n = U \cap S^n$, also $U^n \subseteq U$, $z^n = y \in U$. Wegen $y \in V$ muß $U = S$ sein. Weil das für beliebige nach obiger Vorschrift gewählte Teilmengen $U \subseteq S$ gilt, muß $z \in V$ sein.

V enthält also mit jedem Element y den Nachfolger y^n, sowie den Vorgänger, falls er existiert. Also ist $V^n = V \cap S^n$. Nach dem Induktionsaxiom folgt $V = S$, w. z. b. w.

HILFSSATZ 2. *Hat die Zahl 0 keinen Vorgänger, so hat jede andere Zahl einen Vorgänger.*

BEWEIS (ohne Verwendung von (1) (I)). Es sei $0 \notin S^n$. D sei der Durchschnitt aller Mengen $U \subseteq S$ mit den Eigenschaften $0 \in U$, $U^n \subseteq U$. D hat selbst diese Eigenschaften. D enthält nach Definition außer 0 kein Element a ohne Vorgänger in D; denn mit D hätte auch die Differenzmenge $U = D \setminus \{a\}$ die Eigenschaften $0 \in U$, $U^n \subseteq U$, im Widerspruch zu der Annahme, daß D der Durchschnitt aller derartigen Mengen sein sollte. Daher ist $D^n = D \setminus \{0\}$. Es folgt $D \cap S^n \subseteq D \setminus \{0\} = D^n$. Andererseits ist offenbar $D^n \subseteq D \cap S^n$, also $D^n = D \cap S^n$, nach dem Induktionsaxiom also $D = S$, $S^n = S \setminus \{0\}$, w. z. b. w.

Gleichzeitig haben wir das Induktionsprinzip in der klassischen Form abgeleitet, nämlich

SATZ 1. *Ein System S, das durch* (1) (II) *erklärt ist, und in dem die Zahl 0 keinen Vorgänger hat, genügt dem Peanoschen Induktionsaxiom. Gilt auch* (1) (I), *so gelten alle Peanoschen Axiome.*

Weil man nach Hilfssatz 1 die Zahl 0 in den Axiomen durch jede andere Zahl ersetzen kann, folgt (wenn (1) (I) vorausgesetzt ist)

HILFSSATZ 3. *Es gibt in S höchstens ein Element ohne Vorgänger.*

[3] Vgl. LOEWY, S. 6, wo eine ähnliche Betrachtung angestellt wird.

Später wird gezeigt werden, daß dieser Hilfssatz ohne Verwendung des Axioms (1) (I) bewiesen werden kann.

SATZ 2. *Ein nach* (1) (I) *und* (1) (II) *erklärtes Zahlensystem* S *mit* $S^\pi \subset S$ *genügt den Peanoschen Axiomen. Die Rolle des Nullelements übernimmt dabei das einzige Element der Menge* $S \setminus S^\pi$.

DEFINITION 2. *Ein System natürlicher Zahlen ist ein Zahlensystem* S *mit der Eigenschaft* $S^\pi \subset S$. *Eine natürliche Zahl ist ein Element eines Systems natürlicher Zahlen.* Wenn nichts anderes gesagt wird, bedeute dabei 0 stets das einzige Element von $S \setminus S^\pi$. (Das ist keine Folgerung aus den Axiomen, sondern eine willkürliche, aber zweckmäßige Festsetzung, die nach Hilfssatz 1 berechtigt ist.)

Wir behandeln nun den Fall

$$S^\pi = S \tag{2}$$

und unterscheiden zwei Unterfälle:

(2a) *Jede nichtleere Untermenge* $U \subseteq S$ *mit der Eigenschaft* $U^\pi \subseteq U$ *ist mit* S *identisch.*

Dann nennen wir S ein *zyklisches Zahlensystem.*

(2b) Es gibt eine nichtleere Untermenge $V \subset S$ mit $V^\pi \subseteq V$; nach Hilfssatz 1 also $V^\pi \subset V$ (sonst wäre doch $V = S$).

Dann nennen wir S ein *System ganzer Zahlen.*

Natürlich haben derartige Definitionen nur einen Sinn, wenn sie widerspruchsfrei sind. Am einfachsten ist das im Fall (2a). Dann liefert schon die Menge $\{0\}$ ein Beispiel. Die Existenz eines Systems natürlicher Zahlen schließt man nach DEDEKIND aus dem Glauben an die Existenz einer Menge, die sich umkehrbar in eine echte Teilmenge abbilden läßt. *Unter Annahme dieses Glaubenssatzes zeigen wir nun, daß es Systeme ganzer Zahlen gibt.*

Es seien $+$ und $-$ die beiden Elemente der Menge $\{+,-\}$, und N ein System natürlicher Zahlen mit der Nachfolgerfunktion π_0. Wir betrachten die Produktmenge $N \times \{+,-\} = S$ und führen in ihr eine Nachfolgerfunktion π ein durch die Festsetzungen

$$(x,+)^\pi = (x^{\pi_0},+), \quad (x,-)^\pi = (x^{\pi_0^{-1}},-) \quad \text{für} \quad x \neq 0, \quad (0,-)^\pi = (0,+).$$

Man überzeugt sich mühelos, daß S die Bedingungen (1), (2) und (2b) erfüllt.

Umgekehrt läßt sich jedes System ganzer Zahlen S *mit der Nachfolgerfunktion* π *in zwei Systeme natürlicher Zahlen* N, N_- *mit den Nachfolgerfunktionen* π *bzw.* π^{-1} *zerlegen.*

Es sei etwa V die in (2b) angegebene Menge. Nach Hilfssatz 1 kann in den Axiomen die Zahl 0 durch jede andere ersetzt werden; daher ist es keine Beschränkung der Allgemeinheit, $0 \in V$, $0 \notin V^\pi$ anzunehmen. Wir setzen $1_- = 0^{\pi^{-1}}$. Weiter bedeute N bzw. N_- den Durchschnitt aller Mengen $U \subseteq S$ mit den Eigenschaften

(3) $$0 \in U, \quad U^\pi \subseteq U$$

bzw.

(4) $$1_- \in U, \quad U^{\pi^{-1}} \subseteq U.$$

Es ist $N \subseteq V$, also $N \subset S$. Weiter ist $1_- \notin N$, also $1_- \in S \setminus N$. Wegen $0 \in V^\pi \supseteq N^\pi$ ist

(5) $$N^\pi \subset N.$$

Ferner enthält $S \setminus N$ mit jedem x auch $x^{\pi^{-1}}$, daher ist $N_- \subseteq S \setminus N$ oder $N \cap N_- = \emptyset$, also $0 \notin N_-$, $1_- \notin N^{\pi^{-1}}$,

(6) $$N_-^{\pi^{-1}} \subset N_-.$$

Weil N und N_- den Bedingungen (1) genügen, sind sie Zahlensysteme, wegen (5) und (6) also Systeme natürlicher Zahlen. Ihre Vereinigung enthält 0 und mit jedem x auch x^π und $x^{\pi^{-1}}$, fällt also mit S zusammen, w. z. b. w.

§ 2. Die Definition durch Induktion

Für die Zulässigkeit der Definition durch Induktion ist ein auf KALMÁR zurückgehender Beweis üblich.[4] Unsere axiomatische Darstellung gestattet einen anderen einfachen Beweis.[5]

SATZ 3. *Es sei N ein System natürlicher Zahlen mit der Nachfolgerfunktion π und B eine beliebige nichtleere Menge. γ sei eine beeibige Abbildung der Produktmenge $N \times B$ in die Menge B. Dann gibt es zu jedem $b \in B$ genau eine Abbildung α von N in B mit den Eigenschaften*

(7) $$0^\alpha = b, \quad (x^\pi)^\alpha = (x, x^\alpha)^\gamma.$$

BEWEIS. Eine Abbildung β von $N \times B$ in sich sei erklärt durch

(8) $$(x, y)^\beta = (x^\pi, (x, y)^\gamma).$$

D sei der Durchschnitt aller Teilmengen $U \subseteq N \times B$ mit den Eigenschaften
$$(0, b) \in U, \quad U^\beta \subseteq U.$$

Offenbar genügt D hinsichtlich des Nullelements $(0, b)$ und der Nachfolgerfunktion β der Forderung (1)(II); also gilt Hilfssatz 2 des vorigen Paragraphen. $(0, b)$ hat in $N \times B$, also erst recht in D keinen Vorgänger.

[4] Vgl. z. B. KNESER, S. 82. Über Verallgemeinerungen des Satzes vgl. VAN DER WAERDEN (§ 3), LORENZEN.

[5] Inhaltlich bringt der vorliegende Paragraph nichts Neues.

Nach Hilfssatz 2 hat daher jedes andere Paar $(x, y) \in D$ einen Vorgänger in D. Insbesondere kann $(0, c)$ mit $c \neq b$ nicht in D liegen.

X sei die Menge aller $x \in N$, für die genau ein Paar (x, y) mit $y \in B$ in D liegt. Es ist $0 \in X$. Nun sei etwa $x \in X$, $(x, y) \in D$, $(x, z) \notin D$ für $z \neq y$. Dann ist wegen $D^{\beta} \subseteq D$ sicher $(x^{\pi}, (x, y)^{\gamma}) \in D$. Ein anderes Paar (x^{π}, t) kann nicht in D liegen; denn es könnte in D keinen von (x, y) verschiedenen Vorgänger haben. Wenn es gar keinen hat, so liegt es nach Hilfssatz 2 nicht in D; ist aber (x, y) der Vorgänger, so ist $t = (x, y)^{\gamma}$. Daher ist $x^{\pi} \in X$; nach Satz 1 ist also $X = N$.

Es gibt also zu jedem $x \in N$ genau ein Paar $(x, y) \in D$. Die Abbildung α: $x \to y$ mit $(x, y) \in D$ erfüllt die Bedingungen (7). Ist α' eine zweite Abbildung, die diesen Bedingungen genügt, so sei Y die Menge aller x mit $x^{\alpha} = x^{\alpha'}$. Y enthält 0 und mit jedem x auch x^{π}. Daher ist $Y = N$. Damit ist Satz 3 bewiesen.

Satz 4. *Je zwei Systeme natürlicher Zahlen sind isomorph, d. h. sind N, N' Systeme natürlicher Zahlen mit den Nachfolgerfunktionen π bwz. π', so gibt es eine umkehrbare Abbildung α von N auf N' mit den Eigenschaften*

$$\alpha\pi' = \pi\alpha, \quad \alpha^{-1}\pi = \pi'\alpha^{-1}. \tag{9}$$

Beweis. Daß die zweite Eigenschaft (9) aus der ersten folgt, ergibt sich durch beiderseitige Multiplikation mit α^{-1}.

Mit den vorherigen Bezeichnungen sei $b = 0'$ (Null des Systems N'), $(x, y)^{\gamma} = y^{\pi'}$ gesetzt. Dann wird $(x, y)^{\beta} = (x^{\pi}, y^{\pi'})$. Weil die Voraussetzungen in N und N' ganz symmetrisch sind, gibt es nicht nur zu jedem $x \in N$, sondern auch zu jedem $y \in N'$ genau ein Paar $(x, y) \in D$. Also bildet α das System N *umkehrbar auf* N' ab. Die Bedingung $\alpha\pi' = \pi\alpha$ ist nichts anderes als die zweite Zeile von (7), w. z. b. w.

Aus der am Schluß des §1 gezeigten Zerlegung jedes Systems ganzer Zahlen in zwei Systeme natürlicher Zahlen folgt nun sofort:

Je zwei Systeme ganzer Zahlen sind isomorph.

§ 3. Folgerungen aus dem Induktionsaxiom allein

Wir setzen nun voraus, daß ein System S gegeben sei, das nur dem Axiom (1) (II) zu genügen braucht. Sein Nullelement heiße $0'$, seine Nachfolgerfunktion π'. Nach Satz 3 gibt es eine Abbildung α des Systems N der natürlichen Zahlen in S mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} &0^{\alpha} = 0', \\ &x^{\pi\alpha} = x^{\alpha\pi'} \quad \text{für} \quad x \in N, \quad \text{oder kurz} \end{aligned} \tag{10}$$

$$\pi\alpha = \alpha\pi'. \tag{11}$$

α ist also ein *Homomorphismus* von N in S. Weiter sei μ eine Abbildung von $S^{\pi'}$ in S mit der Eigenschaft

$$(12) \qquad x^{\mu\pi'} = x \quad \text{für alle} \quad x \in S^{\pi'},$$

d. h. $\mu\pi'$ bildet $S^{\pi'}$ identisch ab. Die Abbildung μ besteht einfach darin, daß zu jedem Element von $S^{\pi'}$ ein Vorgänger ausgewählt wird. Wir verwenden also in diesem Paragraphen das Auswahlprinzip. Jetzt sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Fall 1. $(0)^{\mu^n}$ existiert für alle natürlichen Zahlen $n \in N$.

Fall 2. Es gibt eine natürliche Zahl m, so daß $(0')^{\mu^n}$ genau für $n < m$ existiert.

Wir setzen nun die Abbildung α auf negative Zahlen als Argumente fort durch die Festsetzung

$$(13) \qquad (-n)^\alpha = (0')^{\mu^n} \quad \text{für} \quad \begin{cases} \text{alle } n \in N \text{ im Fall 1,} \\ 0 < n < m \text{ im Fall 2.} \end{cases}$$

Dann gilt, wie man mit Hilfe von Gleichung (12) leicht sieht, die Gleichung $x^{\pi\alpha} = x^{\alpha\pi'}$ im Fall 1 für alle ganzen Zahlen x, im Fall 2 für alle ganzen Zahlen $x > -m$. α ist also ein Homomorphismus der Menge M aller ganzen Zahlen bzw. aller Zahlen $> -m$ in S. Im Fall 2 ist M isomorph zu N. Wir setzen nun

$$x^\beta = \begin{cases} x^\alpha & \text{im Fall 1} \quad \text{(für alle ganzen Zahlen } x\text{),} \\ (x-m+1)^\alpha & \text{im Fall 2} \quad \text{(für natürliche Zahlen } x\text{).} \end{cases}$$

Dann ist β ein Homomorphismus des Systems Z der ganzen Zahlen bzw. des Systems N der natürlichen Zahlen in das System S mit den Eigenschaften

$$(14) \qquad 0' \in Z^\beta \quad \text{bzw.} \quad 0' \in N^\beta,$$

$$(15) \qquad x^{\pi\beta} = x^{\beta\pi'} \quad \text{für alle} \quad x \in Z \quad \text{bzw.} \quad x \in N.$$

BEHAUPTUNG. *β bildet Z bzw. N auf S ab.*

BEWEIS. Wir setzen $U = Z^\beta$ bzw. N^β. Aus $x \in U$, etwa $x = y^\beta$ folgt $x^{\pi'} = y^{\beta\pi'} = y^{\pi\beta} \in U$, also

$$(16) \qquad U^{\pi'} \subseteq U \cap S^{\pi'}.$$

Ferner sei $x \in U \cap S^{\pi'}$. Im Fall 1 sei wieder $x = y^\beta$ gesetzt. y hat in Z einen Vorgänger, etwa z; dann ist $x = y^\beta = z^{\pi\beta} = z^{\beta\pi'}$, d. h. x hat einen Vorgänger in U, oder es ist

$$(17) \qquad U \cap S^{\pi'} \subseteq U^{\pi'}.$$

Im Fall 2 hat $(-m+1)^\alpha = 0^\beta$ keinen Vorgänger in S. Ist dagegen $n-1 \in N$, so hat $n^\beta = (n-1)^{\pi\beta}$ den Vorgänger $(n-1)^\beta$ in U. Also ist

$$U = U^{\pi'} \cup \{0^\beta\} \quad \text{oder} \quad U^{\pi'} = U \setminus \{0^\beta\}.$$

Es folgt $U \cap S^{\pi'} \subseteq U \cap [S \setminus \{0^\beta\}] = U \setminus \{0^\beta\} = U^{\pi'}$, also wieder (17). Nach (16) und (17) ist $U \cap S^{\pi'} = U^{\pi'}$, nach dem Induktionsaxiom also $U = S$, w. z. b. w.

Wenn die Funktion β umkehrbar ist, so ist S zu Z bzw. zu N isomorph. Wir nehmen also jetzt an, β sei nicht umkehrbar. Ist $a^\beta = b^\beta$ für zwei Zahlen a, b, so ist auch $a^{\pi\beta} = b^{\pi\beta}$, d. h. die Menge M aller Zahlen x, für die eine Zahl $y \neq x$ mit $x^\beta = y^\beta$ existiert, enthält mit jedem x auch x^π. Entweder ist also

Fall a) $M = Z$ bzw. $M = N$, oder[6]

Fall b) es gibt in der Komplementärmenge $\bar{M}$ eine größte Zahl p.

Wir untersuchen zunächst *Fall a)*. Es sei k die kleinste Zahl > 0, so daß für irgendeine Zahl x (aus Z bzw. N, je nachdem ob Fall 1 oder 2 vorliegt)

$$(18) \qquad (x+k)^\beta = x^\beta$$

ist. Dann ist auch für alle $y > x$

$$(18') \qquad (y+k)^\beta = y^\beta.$$

Wir zeigen, daß (18) sogar für alle x gilt. Andernfalls sei z die größte Zahl mit $(z+k)^\beta \neq z^\beta$. Unter den positiven Zahlen n, für die $(z+n)^\beta = z^\beta$ ist (solche gibt es wegen $M = Z$ bzw. $M = N$ und (18')), gibt es eine kleinste, etwa q. Nach unserer Annahme über k ist $q > k$. Dann ist aber $(z+q-k)^\beta = (z+q)^\beta = z^\beta$ im Widerspruch zur Minimaleigenschaft der Zahl q. Die Gleichung (18) muß also für alle $x \in Z$ bzw. N gelten. S enthält genau die k Elemente $0^\beta, 1^\beta, \ldots, (k-1)^\beta$. Es ist $S^{\pi'} = S$. $(\pi')^k$ ist die Identität. S erweist sich in diesem Fall als *zyklisches Zahlensystem*. Man denke etwa an die Restklassen nach der Zahl k in der elementaren Arithmetik der ganzen oder der natürlichen Zahlen. Die Nachfolgerfunktion π' ist umkehrbar; denn aus $x^{\pi'} = y^{\pi'}$ würde, wenn wir $x = a^\beta$, $y = b^\beta$ setzen, folgen

$$a^{\beta\pi'} = b^{\beta\pi'}, \quad a^{\pi\beta} = b^{\pi\beta}, \quad \text{also} \quad a^\pi \equiv b^\pi \pmod{k}, \quad a \equiv b \pmod{k}$$

und daher $x = y$.

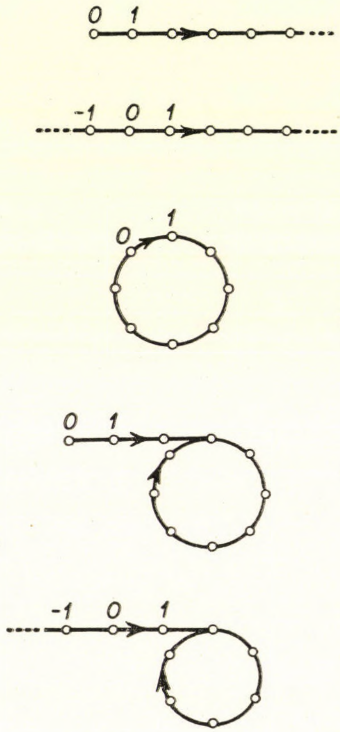
Fall b) p sei die größte Zahl aus $\bar{M}$. Alle Zahlen $< p$ gehören gleichfalls zu $\bar{M}$. Es gibt eine kleinste Zahl $r > 0$ mit $(p+1+r)^\beta = (p+1)^\beta$. Für alle $y > p$ ist, wie Induktion zeigt, $(y+r)^\beta = y^\beta$. Wir nehmen an, es gebe eine kleinste Zahl $z \in M$, für die ein positives $s < r$ mit $(z+s^\beta) = z^\beta$ existiert. Dann ist, wie Induktion zeigt,

$$(z+r-s-1)^\beta = (z+r-1)^\beta = (z-1)^\beta$$

[6] Wir verwenden hier die Addition und die Ordnung der natürlichen bzw. ganzen Zahlen.

im Widerspruch zur Minimaleigenschaft vom z. Also ist M ein zyklisches Zahlensystem aus r Elementen und $\bar{M}$ eine vorgeschaltete, zu einem Abschnitt entweder von Z (d. h. zu einer rückwärts angeordneten natürlichen Zahlenreihe) oder von N (d. h. zu einer endlichen Folge) isomorphe Menge.

Die fünf Fälle, die nach dieser Untersuchung für Systeme S, die dem Induktionsaxiom (1) (II) genügen, möglich sind, werden in der Figur veranschaulicht.



(1) (I), nicht (2)
(natürliche Zahlen)

(1) (I), (2), (2b)
(ganze Zahlen)

(1) (I), (2), (2a)
(zyklisches Zahlensystem)

Nicht (1) (I), nicht (2)

Nicht (1) (I), (2)

Fig. 1. Systeme, in denen das Induktionsaxiom (1) (II) gilt

In den zuletzt behandelten Fällen, in denen also die Abbildung β nicht umkehrbar ist, ohne daß S ein zyklisches Zahlensystem wäre, nehmen wir an, es sei

$$x^{\pi'} = y^{\pi'} \quad \text{für} \quad x, y \in S \quad (x \neq y),$$

etwa $x = a^{\beta}, y = b^{\beta}, a^{\pi\beta} = b^{\pi\beta}$. Das ist im Fall $a < b$ nur möglich für $a^{\pi} \in M$, $b^{\pi} \in M$, also $a^{\pi} \equiv b^{\pi}$ (mod r), $a \equiv b$ (mod r). Im Fall $a \in M$ ist $x = y$; nur im Fall $a \notin M$, $b \in M$, also $a = p$, $b = p + r$ ist $x \neq y$.

Im Fall a) ist also π' umkehrbar, während es im Fall b) genau ein Paar (x, y) mit $y \neq x$ gibt, für das $x^{\pi'} = y^{\pi'}$ wird.

Ab jetzt setzen wir wieder stets das Axiom (1) (I) voraus, das man nach dem Ergebnis dieses Paragraphen auch ersetzen könnte durch: *Gibt es in S zwei Elemente mit demselben Nachfolger, so gibt es in S noch ein drittes Element, das mit einem anderen denselben Nachfolger hat.*

Daraus folgt nämlich ein Widerspruch, sobald man die Voraussetzung dieser Forderung als zutreffend annimmt; also die Umkehrbarkeit von π'.

§ 4. Homomorphismen von Zahlensystemen

Unter einem Homomorphismus α eines Zahlensystems S mit der Nachfolgerfunktion π in ein Zahlensystem S' mit der Nachfolgerfunktion π' verstehen wir eine Abbildung von S in S' mit der Eigenschaft (9)

$$\pi\alpha = \alpha\pi'.$$

Ein umkehrbarer Homomorphismus ist ein Isomorphismus, was sich durch Links- und Rechtsmultiplikation mit α^{-1} ergibt.

HILFSSATZ 4. *Sind α und β zwei Homomorphismen eines Zahlensystems S in ein Zahlensystem S', und ist $a^\alpha = a^\beta$ für ein $a \in S$, so für alle $a \in S$, d. h. es ist $\alpha = \beta$.*

BEWEIS. Die Menge U der Zahlen $x \in S$ mit der Eigenschaft $x^\alpha = x^\beta$ enthält nach Voraussetzung die Zahl a und mit jeder Zahl x wegen $x^{\pi\alpha} = x^{\alpha\pi'} = x^{\beta\pi'} = x^{\pi\beta}$ auch die Zahl x^π. Ist $x \in U$ Nachfolger einer Zahl y, so ist

$$y^{\alpha\pi'} = y^{\pi\alpha} = y^{\pi\beta} = y^{\beta\pi'},$$

wegen der Umkehrbarkeit der Funktion π' also $y \in U$. Daher ist $U^\pi = U \cap S^\pi$, also $U = S$, w. z. b. w.

HILFSSATZ 5. 0 *sei im Fall $S^\pi \subset S$ Element von $S \setminus S^\pi$, andernfalls ein beliebiges Element von S* (diese Annahme ist nach Hilfssatz 1 zulässig). *Dann gibt es zu jedem $a \in S$ genau einen Homomorphismus α_a von S in sich mit der Eigenschaft $0^{\alpha_a} = a$.*

BEWEIS. Daß es höchstens einen solchen Homomorphismus gibt, folgt aus Hilfssatz 4. Zu zeigen ist noch, daß es mindestens einen gibt. U sei die Menge der $a \in S$, für die ein Homomorphismus α_a mit $0^{\alpha_a} = a$ existiert. Offenbar ist $0 \in U$, weil die Identität ein Homomorphismus ist. Aus $x \in U$ folgt nun $0^{\alpha_x} = x$, $0^{\alpha_x \pi} = x^\pi$. Ferner ist $\pi(\alpha_x \pi) = (\pi\alpha_x)\pi = (\alpha_x \pi)\pi$, d. h. $\alpha_x \pi$ ist ein Homomorphismus und $x^\pi \in U$. Im Fall $S \subset S^\pi$ sind wir also nach Satz 1 fertig.

Nun sei $S^\pi = S$. Dann existiert π^{-1}, und aus $x \in U$, $x = y^\pi$, $\pi\alpha_x = \alpha_x \pi$ folgt $\alpha_x \pi^{-1} = \pi^{-1}\alpha_x$, $0^{\alpha_x \pi^{-1}} = y$, ferner $\pi(\alpha_x \pi^{-1}) = (\alpha_x \pi^{-1})\pi$, d. h. $\alpha_x \pi^{-1}$ ist ein Homomorphismus. Es folgt $y \in U$, $U = U^\pi$, $U = S$, w. z. b. w.

Definition der Addition. *In einem Zahlensystem bedeute α_y den Homomorphismus, der* 0 *in y überführt. Dann erklären wir*

$$x + y = x^{\alpha_y} \quad \text{für alle} \quad x \in S. \tag{19}$$

Aus dem assoziativen Gesetz für Homomorphismen folgt leicht das assoziative Gesetz der Addition. Es ist nämlich

$$x = 0^{\alpha_x}, \quad y + z = y^{\alpha_z} = (0^{\alpha_y})^{\alpha_z} = 0^{(\alpha_y \alpha_z)} = 0^{\alpha_{y+z}},$$
$$x + (y + z) = (0^{\alpha_x})^{(\alpha_y \alpha_z)} = 0^{\alpha_x(\alpha_y \alpha_z)},$$
$$(x + y) + z = (0^{\alpha_x \alpha_y})^{\alpha_z} = 0^{(\alpha_x \alpha_y)\alpha_z}.$$

Im Fall $S^\pi = S$ sind nach Hilfssatz 5 alle Homomorphismen umkehrbar, und ihre Umkehrabbildungen sind wieder Homomorphismen. Zu je zwei Elementen a, b gibt es nämlich eindeutig bestimmte Homomorphismen α, β mit $a^\alpha = b$, $b^\beta = a$. $\alpha\beta$ läßt also a fest und ist daher die Identität. Im Fall $S^\pi = S$ verstehen wir unter $-a$ das Element $0^{\alpha_a^{-1}}$. Offenbar ist $a + (-a) = -a + a = 0$. D. h.

Ein Zahlensystem S mit $S^\pi = S$ bildet hinsichtlich der Addition eine Gruppe.

Das kommutative Gesetz der Addition beweist man leicht durch Induktion. Das bleibe dem Leser überlassen. Eine leichte Folgerung ist: *Jeder Homomorphismus eines Zahlensystems in sich ist ein Isomorphismus.*

Das ist im Fall $S = S^\pi$ schon bewiesen. Es sei also nun $S^\pi = S \setminus \{0\}$. Zu zeigen ist noch, daß jeder Homomorphismus α umkehrbar ist. Es sei $a^\alpha = b^\alpha, 0^\alpha = c$. Nach Hilfssatz 4 ist $\alpha = \alpha_c$, ferner $a^\alpha = a + c = b + c$, also $c + a = c + b$. Nach Hilfssatz 4 muß $\alpha_a = \alpha_b$ oder $a = b$ sein, w. z. b. w.

Wir haben also die Addition nach einem einheitlichen Prinzip für die verschiedenen Zahlensysteme eingeführt. Es ist noch zu zeigen, daß die im System der ganzen Zahlen Z erklärte Addition in der Teilmenge der Zahlen $\geqq 0$ gerade die im System der natürlichen Zahlen definierte Addition ergibt. Doch soll diese leichte Aufgabe hier nicht durchgeführt werden.

Jedes Zahlensystem, als Struktur mit Nachfolgerfunktion erklärt, wird also durch Hinzunahme der mittels seiner Isomorphismen in sich erklärten Addition zu einer kommutativen additiven Halbgruppe (im Fall $S = S^\pi$ Gruppe). Es liegt nahe, nach den Homomorphismen dieser additiven Halbgruppe, ohne Berücksichtigung der Nachfolgerbeziehungen, zu fragen.

HILFSSATZ 6. *Ist S ein Zahlensystem, so existiert zu jedem Element $s \in S$ genau ein Homomorphismus der additiven Halbgruppe von S in sich, der die Zahl $1 = 0^n$ in s überführt.*

BEWEIS. U sei die Menge der Zahlen $s \in S$, für die der gewünschte Homomorphismus μ_s mit $1^{\mu_s} = s$ existiert. Es ist $0 \in U$; denn die Abbildung $\mu_0 : x \rightarrow 0$ für alle $x \in S$ ist ein solcher Homomorphismus. Aus $s \in U$ folgt wegen $(x+y)^{\mu_s} \pm (x+y) = x^{\mu_s} \pm x + y^{\mu_s} \pm y$, daß die Abbildung $\mu_{s \pm 1}$: $x \rightarrow x^{\mu_s} \pm x$ mit der Eigenschaft $1^{\mu_s \pm 1} = s \pm 1$ gleichfalls ein additiver Homomorphismus ist. (Dabei ist das $-$Zeichen nur im Fall $S^n = S$ zu berücksichtigen.) Also ist $s \pm 1 \in U$ und daher (nach dem Induktionsaxiom) $U = S$. Sind nun zwei Homomorphismen μ und μ' mit $1^{\mu} = 1^{\mu'}$ gegeben, so enthält die Menge V der Zahlen $x \in S$ mit $x^{\mu} = x^{\mu'}$ die Zahl 1 und mit jedem x wegen $(x \pm 1)^{\mu} = x^{\mu} \pm 1^{\mu} = x^{\mu'} \pm 1^{\mu'} = (x \pm 1)^{\mu'}$ auch $x+1$ und (falls in S vorhanden) $x-1$. Also ist $V = S$, w. z. b. w.

DEFINITION DER MULTIPLIKATION. *Für beliebige $x, y \in S$ erklären wir*

$$xy = x^{\mu_y}, \tag{20}$$

wobei μ_y den Homomorphismus der additiven Halbgruppe von S in sich bedeutet, der 1 in y überführt.

Es ist leicht, aus dieser Definition die üblichen Rechengesetze für ganze Zahlen bzw. Restklassen mod n abzuleiten. Das sei hier nicht durchgeführt.

Ist G eine additiv geschriebene (nicht notwendig abelsche) Gruppe, so existiert zu jedem $g \in G$ ein Homomorphismus μ_g des Systems der ganzen Zahlen Z in G mit der Eigenschaft

$$1^{\mu_g} = g.$$

Dann kann man genauso ein Produkt von ganzen Zahlen n mit Gruppenelementen g erklären durch

$$ng = n^{\mu_g}.$$

Natürlich kommt dabei das übliche heraus.

Die hier skizzierte Einführung der elementaren Rechenoperationen dürfte dem Standpunkt der neueren Algebra am besten gerecht werden. Sie ist analog zur Einführung der Vektoren in der affinen Geometrie als Isomorphismen des affinen Raumes, die alle Richtungen einzeln fest lassen und der Skalare als Homomorphismen der Vektorengruppe, die jeden Vektor in einen parallelen überführen nach ARTIN.[7]

(Eingegangen am 18. November 1957.)

[7] Im Kapitel II seines Buches.

Literaturverzeichnis

[1] E. Artin, *Geometric Algebra*, (New York, 1957).

[2] G. Asser, *Einführung in die Höhere Mathematik*, 1. und 2. Teil. Lehrbriefe für das Fernstudium der Oberstufenlehrer, Pädagogische Hochschule Potsdam (Berlin, 1955).

[3] H. Kneser, Aus einer Vorlesung über den mathematischen Schulstoff, *Math. Phys. Semesterberichte*, **5** (1956), S. 80—91.

[4] E. Landau, *Grundlagen der Analysis* (Leipzig, 1930).

[5] A. Loewy, *Lehrbuch der Algebra*. Erster Teil: Grundlagen der Arithmetik (Leipzig, 1915).

[6] P. Lorenzen, Die Definition durch vollständige Induktion, *Monatshefte f. Math. u. Phys.*, **47** (1939), S. 356—358.

[7] B. L. van der Waerden, *Algebra*, Band I.

ON A COINCIDENCE PROBLEM CONCERNING TELEPHONE TRAFFIC

By

L. TAKÁCS (Budapest)

(*Presented by* A. RÉNYI)

Dedicated to the memory of CONNY PALM (1907—1951)
on the occasion of the anniversary of his 50th birthday

Introduction

Let us consider a telephone exchange. Suppose that the subscribers make calls at the instants $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ where $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n < \cdots < \infty$. It is assumed that τ_1 is an arbitrary positive random variable and the inter-arrival times $\tau_{n+1} - \tau_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ are identically distributed independent positive random variables which are independent also of τ_1. Put

$$\mathbf{P}\{\tau_{n+1} - \tau_n \leqq x\} = F(x) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{1}$$

further

$$\alpha = \int_0^\infty x \, dF(x) \tag{2}$$

and

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \, dF(x). \tag{3}$$

Suppose that there is an infinite number of available channels and that each call gives rise to a connection (conversation) on one of the free channels. Denote by χ_n the duration of the holding time beginning at the instant τ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. It is assumed that the χ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ are identically distributed, mutually independent positive random variables which are independent also of the random variables τ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Put

$$\mathbf{P}\{\chi_n \leqq x\} = H(x) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{4}$$

and

$$\varrho = \int_0^\infty x \, dH(x). \tag{5}$$

REMARK 1. The usual assumption that $\{\tau_n\}$ forms a Poisson process, with intensity λ, is a particular case of the above one. Namely, in this case $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ if $x \geqq 0$ $(\alpha = 1/\lambda)$ and the distribution function of τ_1 is also $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ if $x \geqq 0$.

In the sequel we shall call the sequence $\{\tau_n\}$ defined above a *recurrent process*. If, particularly, $\alpha < \infty$ and the distribution function of τ_1 is

$$F^*(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \int\limits_0^x [1-F(y)]dy & \text{if} \quad x \geqq 0, \\ 0 & \text{if} \quad x < 0, \end{cases} \tag{6}$$

then we shall call $\{\tau_n\}$ a *stationary recurrent process*.

Accordingly, the Poisson process is a particular case of a stationary recurrent process.

We mention here some important properties of the stationary recurrent processes.

Denote by $\zeta(t)$ the distance between t and the next incoming call Then in case of a stationary process we have $\mathbf{P}\{\zeta(t) \leqq x\} = F^*(x)$ for all $t \geqq 0$.

Denote by $m(t)$ the expected number of calls taking place in the time interval $(0, t]$. Then, generally, we have

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\tau_n \leqq t\} \tag{7}$$

and in case of a stationary process $m(t) = t/\alpha$.

REMARK 2. In the theory of the telephone traffic it is usually supposed that the holding times are exponentially distributed, i. e.

$$H(x) = \begin{cases} 1-e^{-\mu x} & \text{if} \quad x \geqq 0, \\ 0 & \text{if} \quad x < 0. \end{cases} \tag{8}$$

Then $\varrho = 1/\mu$. This particular case has an important property. Namely, if (and only if) χ_n is distributed according to (8), then we have

$$\mathbf{P}\{\chi_n \leqq y + x \mid \chi_n \geqq y\} = H(x)$$

for all $y \geqq 0$.

REMARK 3. The unrealistic assumption that the number of channels is infinite requires some explanation. Firstly, knowing the probability laws concerning this ideal model we can establish the correct design of a telephone exchange with a finite number of channels. Secondly, by the aid of this ideal model we can determine the law of the overflow traffic for a telephone exchange with a finite number of channels.

Finally, we remark that the mentioned problem arises also for instance in the theory of counters or in connection with power-supply.

NOTATIONS. Denote by $\eta(t)$ the number of the busy channels at the instant t and put $\eta(\tau_n - 0) = \eta_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. We say that the system is in state E_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ if k channels are busy. Let us introduce the limiting distributions $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=P_k^*$ and $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\eta_n=k\}=P_k$ $(k=0,1,2,\ldots)$ if they exist. Further let their binomial moments be $B_r^*=\sum_{k=r}^{\infty}\binom{k}{r}P_k^*$ and $B_r=\sum_{k=r}^{\infty}\binom{k}{r}P_k$ $(r=0,1,2,\ldots)$, respectively, if they exist. Put $\mathbf{P}\{\eta(t)=j\}=P_j(t)$ $(j=0,1,2,\ldots)$.

Denote by $\nu_t^{(k)}$ the number of transitions $E_k\to E_{k+1}$ $(k=0,1,2,\ldots)$ occurring in the time interval $(0,t]$ and put $\mathbf{M}\{\nu_t^{(k)}\}=M_k(t)$ $(k=0,1,2,\ldots)$. Further denote by $N_{k+1}(t)$ $(k=0,1,2,\ldots)$ the expectation of the number of transitions $E_{k+1}\to E_k$ occurring in the time interval $(0,t]$. Finally, denote by $\beta_k(t)$ the Lebesgue measure of that subset of the interval $(0,t)$ which consists of all points u for which $\eta(u)\geqq k$ (k is a fixed integer).

In this paper we shall distinguish four cases as follows:

A) $\{\tau_n\}$ is a recurrent process and the distribution of the random variables χ_n is arbitrary.

B) $\{\tau_n\}$ is a recurrent process and the random variables χ_n are exponentially distributed.

C) $\{\tau_n\}$ is a Poisson process and the distribution of the random variables χ_n is arbitrary.

D) $\{\tau_n\}$ is a Poisson process and the random variables χ_n are exponentially distributed.

REMARK 4. We can describe the state of the system by the following random variables: $\eta(t)$, the number of the busy channels at the instant t; $\zeta(t)$, the distance between t and the next incoming call; $\chi_1(t),\chi_2(t),\ldots$, the distances between t and the termination points of the conversations which are going on at the instant t (if such are going on at all).

It is easy to see that in the case A) the vector process $\{\eta(t),\zeta(t);\chi_1(t),\chi_2(t),\ldots\}$ is a Markov process; in the case B) the vector process $\{\eta(t),\zeta(t)\}$ is a Markov process; in the case C) the vector process $\{\eta(t);\chi_1(t),\chi_2(t),\ldots\}$ is a Markov process and in the case D) the process $\{\eta(t)\}$ is a Markov process.

It is possible to show that under general assumptions ($\alpha<\infty$, $\varrho<\infty$, $F(x)$ is not a lattice distribution) the processes in question are ergodic. Supposing that $\alpha<\infty$ and $\varrho<\infty$ and choosing an appropriate initial distribution for $\{\eta(0),\zeta(0);\chi_1(0),\chi_2(0),\ldots\}$ we can define the stationary process. In case of a stationary process we denote by $\eta^*(t)$ the number of the busy channels at the instant t.

REMARK 5. The process $\{\eta(t)\}$ can be described as a secondary stochastic process generated by a recurrent process (or a Poisson process, respectively). Put

$$f(u,x)=\begin{cases}1 & \text{if } 0\leqq u\leqq x,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{9}$$

If, especially, $\eta(0)=0$, then we have

$$\eta(t)=\sum_{0<\tau_n\leqq t} f(t-\tau_n, \chi_n). \tag{10}$$

If the initial state is other than $\eta(0)=0$, then (10) contains also an additive term.

If we suppose that $\alpha<\infty$, $\varrho<\infty$ and $F(x)$ is not a lattice distribution, then $\{\eta^*(t)\}$ can be considered also as a secondary stochastic process. Suppose that calls are arriving at the exchange in the instants τ_n $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ where $-\infty<\cdots<\tau_{-1}<\tau_0<\tau_1<\cdots<\infty$ and $\mathbf{P}\{\tau_{n+1}-\tau_n\leqq x\}=F(x)$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, further that the holding times χ_n $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ are identically distributed, independent positive random variables with the distribution function $H(x)$. Then we have

$$\eta^*(t)=\sum_{-\infty<\tau_n\leqq t} f(t-\tau_n, \chi_n). \tag{11}$$

RESULTS. In what follows we shall deal with the determination of the distributions $\{P_k\}$ and $\{P_k^*\}$ and that of their binomial moments B_r and B_r^* $(r=0,1,2,\ldots)$, respectively. Further, in case D), we shall investigate the distribution of the number of transitions $E_k \to E_{k+1}$ occurring in $(0,t]$ and the distribution of the total sojourn time $\beta_k(t)$ spent in states $E_k, E_{k+1}, \ldots$ in the time interval $(0,t)$. In addition we shall deal with some related problems.

The above problems in the cases A), B), C), D) were investigated by the author [32], [34]. The case B) was treated by C. PALM [18] and J. W. COHEN [4]. In the cases C) and D) the distribution $\{P_k^*\}$ was determined by several authors, namely A. K. ERLANG [5], F. POLLACZEK [19], C. PALM [17], L. KOSTEN [14], R. FORTET [7], A. RÉNYI [21], C. RYLL-NARDZEWSKI [22], B. A. SEVASTJANOV [23] and others.

Further we mention that the process $\{\eta(t)\}$ arises also in the theory of counters. At Type II counter the main problems consist of the determinations of the probability $\mathbf{P}\{\eta(t)=0\}$ and the distribution function of the number of the transitions $E_0 \to E_1$ occurring in the time interval $(0,t)$. (Cf. [35].)

Finally, we remark that the author [27], [26] has previously given some general results concerning secondary stochastic processes generated by a recurrent process (or a Poisson process, respectively). These results contain some theorems of this paper as a particular case.

§ 1. The case A)

First, for the sake of simplicity, let us suppose that $\eta(0)=0$ and $\mathbf{P}\{\tau_1 \leqq x\}=F(x)$. In this particular case let $\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=P_k(t)$ $(k=0,1,2,\ldots)$. Knowing $P_k(t)$, the determination of $\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}$ in the general case can easily be reduced to this particular case.

The process $\{\eta(t)\}$ may be considered as a secondary stochastic process generated by a recurrent process. In this case, to determine the distribution of $\eta(t)$, the method of R. FORTET [8] or that of the author [27] can be applied. I am indebted to Mr. R. SYSKI (England) who has kindly called my attention to this possible way.

Let us introduce the generating function

$$G(t,z)=\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) z^k.$$

THEOREM 1. *The generating function $G(t,z)$ satisfies the following integral equation:*

$$G(t,z)=[1-F(t)]+\int_0^t G(t-x,z)[z+(1-z)H(t-x)]dF(x). \tag{12}$$

PROOF. By (10) we can write

$$\eta(t)=\sum_{0<\tau_n\leqq t} f(t-\tau_n,\chi_n)$$

where $f(u,x)$ is defined by (9). Earlier the author [27] investigated this process for arbitrary $f(u,x)$. As a particular case of the theorems of [27] Theorem 1 and some further results can be obtained.

Let us suppose that conditionally $\tau_1=x$, then

$$\eta(t)=\begin{cases} f(t-x,\chi_1)+\bar{\eta}(t-x) & \text{if } x\leqq t,\\ 0 & \text{if } x>t.\end{cases}$$

Here $\bar{\eta}(t-x)$ is independent of $f(t-x,\chi_1)$ and has the same distribution as $\eta(t-x)$. Now the generating function of $f(t-x,\chi_1)$ is $H(t-x)+z[1-H(t-x)]$ and the generating function of $\bar{\eta}(t-x)$ is $G(t-x,z)$. Therefore, by the aid of the theorem of total expectation, we obtain

$$G(t,z)=[1-F(t)]+\int_0^t G(t-x,z)[z+(1-z)H(t-x)]dF(x)$$

what was to be proved.

Let us introduce the binomial moments $B_r(t)$ $(r=0,1,2,\ldots)$ of the distribution $\{P_k(t)\}$, i. e.

$$B_r(t)=\sum_{k=r}^{\infty}\binom{k}{r}P_k(t). \tag{13}$$

THEOREM 2. *The binomial moments* (13) *exist and can be determined by the aid of the following recurrence formulae:* $B_0(t) \equiv 1$ *and*

$$B_r(t) = \int_0^t B_{r-1}(t-x)[1-H(t-x)]\,dm(x) \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots) \tag{14}$$

where

$$m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) \tag{15}$$

and here $F_n(x)$ *denotes the n-th iterated convolution of* $F(x)$ *with itself.*

Further

$$P_k(t) = \sum_{r=k}^{\infty} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} B_r(t). \tag{16}$$

PROOF. It is easy to see that

$$B_r(t) = \frac{1}{r!} \left(\frac{d^r G(t, z)}{dz^r} \right)_{z=1} \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots).$$

Clearly, $B_0(t) \equiv 1$ and derivating (12) r-times with respect to z at $z = 1$ we obtain

$$B_r(t) = \int_0^t B_r(t-x)\,dF(x) + \int_0^t B_{r-1}(t-x)[1-H(t-x)]\,dF(x).$$

This is a linear integral equation of Volterra type for the unknown $B_r(t)$. As it is well known, the solution is

$$B_r(t) = \int_0^t B_{r-1}(t-x)[1-H(t-x)]\,dm(x)$$

what was to be proved.

To prove (16) we remark that there exists a positive constant C so that

$$B_r(t) \leqq \frac{C^r}{r!}.$$

Namely, according to (14) we can write

$$B_r(t) = \int\int_{t_1+t_2+\ldots+t_r \leqq t} \cdots \int [1-H(t_2-t_1)] \cdots [1-H(t-t_r)]\,dm(t_1) \cdots dm(t_r).$$

Let now h be a fixed positive number, $K(x) = H(x-h)$ and take into consideration that $m(t+h) - m(t) \leqq 1 + m(h)$ for all $t \geqq 0$. Then we easily obtain that

$$B_r(t) \leqq \left(\frac{1+m(h)}{h} \right)^r \int\int_{x_1+x_2+\ldots+x_r \leqq t+h} \cdots \int [1-K(x_1)] \cdots [1-K(x_r)]\,dx_1 \cdots dx_r =$$

$$= \left(\frac{1+m(h)}{h} \right)^r \frac{\left(\int_0^{t+h} [1-K(x)]\,dx \right)^r}{r!} \leqq \left(\frac{1+m(h)}{h} \right)^r \frac{(h+\varrho)^r}{r!},$$

as stated.

Now it is allowed to invert (13) and so we obtain (16).

The following theorem relates to the general process:

THEOREM 3. *If $\varrho<\infty$, $\alpha<\infty$ and $F(x)$ is not a lattice distribution, then the limiting distribution* $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=P_k^*$ $(k=0,1,2,\ldots)$ *exists, it is independent of the initial distribution and we have*

$$P_k^*=\sum_{r=k}^{\infty}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}B_r^*, \tag{17}$$

where B_r^* is the r-th binomial moment of the distribution $\{P_k^*\}$ and it can be determined by the following way: $B_0^*=1$ and

$$B_r^*=\frac{1}{\alpha}\int_0^{\infty}B_{r-1}(t)[1-H(t)]dt \qquad (r=1,2,3,\ldots). \tag{18}$$

PROOF. First we prove the theorem in the particular case when $\eta(0)=0$ and $\mathbf{P}\{\tau_1\leqq x\}=F(x)$. Next we shall show that it is true also in the general case. We need

LEMMA 1. *If $g(t)$ is a function of bounded variation in $(0,\infty)$, $\alpha<\infty$ and $F(x)$ is not a lattice distribution, then we have*

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t g(t-x)dm(x)=\frac{1}{\alpha}\int_0^{\infty}g(x)dx. \tag{19}$$

This easily follows from a theorem stated by D. BLACKWELL [3] which asserts that for any $h>0$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{m(t+h)-m(t)}{h}=\frac{1}{\alpha}. \tag{20}$$

Estimating the upper bound and lower bound of the approximative sum of the integral

$$\int_0^t g(t-x)dm(x),$$

we easily obtain (19). (Cf. also W. L. SMITH [24], [25].)

Now we show that $\lim_{t\to\infty}B_r(t)=B_r^*$ $(r=0,1,2,\ldots)$ exists and then we shall prove that B_r^* $(r=0,1,2,\ldots)$ is the r-th binomial moment of the distribution $\{P_k^*\}$.

Clearly, $B_0^*=1$. Applying Lemma 1, from (14) we obtain that $\lim_{t\to\infty}B_1(t)=B_1^*$ exists and we have

$$B_1^*=\frac{1}{\alpha}\int_0^{\infty}[1-H(t)]dt=\frac{\varrho}{\alpha}.$$

Proceeding similarly, (18) can be proved by induction. If we suppose that $\lim_{t\to\infty} B_{r-1}(t) = B^*_{r-1}$ exists, then, by Lemma 1, it follows from (14) that $\lim_{t\to\infty} B_r(t) = B^*_r$ also exists and (18) holds.

Since

$$B^*_r(t) \leqq \frac{C^r}{r!}$$

for all $t \geqq 0$, consequently

$$\lim_{t\to\infty} G(t, z) = G^*(z) \tag{21}$$

exists and we have

$$G^*(z) = \sum_{r=0}^{\infty} B^*_r (z-1)^r. \tag{22}$$

The series (22) is convergent for every z. By (18) we conclude also that

$$G^*(z) = 1 - \frac{(1-z)}{\alpha} \int_0^{\infty} G(t, z)[1-H(t)]\,dt. \tag{23}$$

Now $G^*(1) = 1$ and according to the continuity theorem for generating functions it follows that the limiting probabilities $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t) = k\} = P^*_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ exist and we have

$$G^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P^*_k z^k. \tag{24}$$

Finally, by (22),

$$P^*_k = \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k G^*(z)}{dz^k} \right)_{z=0} = \sum_{r=k}^{\infty} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} B^*_r \tag{25}$$

and it can evidently be seen that B^*_r $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ are, indeed, the binomial moments of the distribution $\{P^*_k\}$. This completes the proof for our particular initial state. If we consider an arbitrary initial state, then the only difference is that $\eta(t)$ is to be replaced by $\bar{\eta}(t-\tau_1) + \varepsilon(t)$, where τ_1 is an arbitrary positive random variable, $\bar{\eta}(t)$ has the same distribution as the particular $\eta(t)$ and $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\varepsilon(t) = 0\} = 1$. Consequently, $\bar{\eta}(t-\tau_1) + \varepsilon(t)$ has the same limiting distribution as the particular $\eta(t)$ when $t \to \infty$. This completes the proof for the general case too.

Finally, we mention that the distribution $\{P^*_k\}$ can also be expressed as follows:

$$P^*_0 = 1 - \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} P_0(t)[1-H(t)]\,dt \tag{26}$$

and

$$(27)\qquad P_k^* = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty [P_{k-1}(t) - P_k(t)][1-H(t)]\,dt \qquad (k=1,2,3,\ldots).$$

REMARK 6. Denote by $m(t)$ the expected number of calls in the time interval $(0, t]$. Clearly, we have

$$(28)\qquad m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\tau_n \leqq t\}.$$

If $\alpha < \infty$ and $F(x)$ is not a lattice distribution, then we can easily prove by the aid of the mentioned theorem of D. BLACKWELL [3] that for all $h > 0$

$$(29)\qquad \lim_{t\to\infty} \frac{m(t+h) - m(t)}{h} = \frac{1}{\alpha}$$

independently of the distribution of τ_1.

LEMMA 2. *Denote by $\beta_k(t)$ the sojourn time spent in states $E_k, E_{k+1}, \ldots$ in the time interval $(0, t)$, then we have*

$$(30)\qquad \mathbf{M}\{\beta_k(t)\} = \sum_{j=k}^{\infty} \int_0^t P_j(u)\,du.$$

PROOF. Define

$$\chi_k(t) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \eta(t) \geqq k, \\ 0 & \text{if} \quad \eta(t) < k. \end{cases}$$

Then

$$\beta_k(t) = \int_0^t \chi_k(u)\,du.$$

Since

$$\mathbf{M}\{\chi_k(u)\} = \mathbf{P}\{\chi_k(u) = 1\} = \sum_{j=k}^{\infty} P_j(u)\,du,$$

we get

$$\mathbf{M}\{\beta_k(t)\} = \mathbf{M}\left\{\int_0^t \chi_k(u)\,du\right\} = \int_0^t \mathbf{M}\{\chi_k(u)\}\,du = \sum_{j=k}^{\infty} \int_0^t P_j(u)\,du$$

what was to be proved.

The stationary process. It can be shown that the Markov process $\{\eta(t), \zeta(t);\ \chi_1(t), \chi_2(t), \ldots\}$ is ergodic if $\varrho < \infty$, $\alpha < \infty$ and $F(x)$ is not a lattice distribution. Accordingly, there exists a uniquely determined stationary process. If we suppose that $\varrho < \infty$ and $\alpha < \infty$, then by choosing an appropriate initial distribution we obtain the stationary process. In case of the stationary process let us denote by $\eta^*(t)$ the number of the busy channels at the instant t. Then we have $\mathbf{P}\{\eta^*(t)=k\}=P_k^*$ $(k=0,1,2,\ldots)$ for all $t\geqq 0$. Further in this case $\mathbf{P}\{\zeta(t)\leqq x\}=F^*(x)$ for all $t\geqq 0$ and $m(t)=t/\alpha$.

REMARK 7. In case of a stationary process we get by (30)

$$\mathbf{M}\{\beta_k(t)\}=\left(\sum_{j=k}^{\infty}P_j^*\right)t. \tag{31}$$

Let us introduce the following notations: $\mathbf{M}\{\eta^*(t)\}=M$ and $\mathbf{D}^2\{\eta^*(t)\}=D^2$; then $M=B_1^*$ and $D^2=2B_2^*+B_1^*-B_1^{*2}$. By (18) we have

$$M=\frac{\varrho}{\alpha} \tag{32}$$

and

$$D^2=\frac{2}{\alpha}\int_0^{\infty}B_1(t)[1-H(t)]\,dt+\frac{\varrho(\alpha-\varrho)}{\alpha^2} \tag{33}$$

where

$$B_1(t)=\int_0^t[1-H(t-x)]\,dm(x)$$

and $m(x)$ is defined by (15).

THEOREM 4. *For the stationary process $\{\eta^*(t)\}$ there exists the correlation function*

$$R(\tau)=\frac{\mathbf{M}\{\eta^*(t)\eta^*(t+\tau)\}-M^2}{D^2} \tag{34}$$

and we have

$$R(\tau)=\frac{1}{\varrho D^2}\int_{|\tau|}^{\infty}[1-H(x)]\,dx+\frac{1}{\varrho D^2}\int_0^{\infty}[h(x+\tau)+h(x-\tau)]\,dm(x)-\frac{M^2}{D^2} \tag{35}$$

where

$$h(\tau)=\int_0^{\infty}[1-H(t)][1-H(t+\tau)]\,dt \tag{36}$$

and $m(x)$ is defined by (15).

PROOF. This theorem is a particular case of Theorem 6 in [27] and so the proof is omitted.

REMARK 8. Denote by $G^*(\omega)$ the spectral distribution function of the process $\{\eta^*(t)\}$. According to the theorem stated by A. JA. KHINTCHINE [10] we have

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega\tau\,dG^*(\omega) \tag{37}$$

and by inversion we obtain $G^*(\omega)$.

REMARK 9. The random variable

$$\frac{1}{T}\int_0^T \eta^*(t)\,dt \tag{38}$$

can be used to the statistical estimation of the telephone traffic. (Cf. e. g. L. KOSTEN [15], V. E. BENEŠ [1].) It is easy to prove that

$$\mathbf{M}\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \eta^*(t)\,dt\right\} = M = \frac{\varrho}{\alpha} \tag{39}$$

and

$$\mathbf{D}^2\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \eta^*(t)\,dt\right\} = \frac{2D^2}{T^2}\int_0^T (T-\tau)R(\tau)\,d\tau \tag{40}$$

where $R(\tau)$ is defined by (35).

§ 2. The case B)

Let us consider the case A) in the particular case

$$H(x) = \begin{cases} 1-e^{-\mu x} & \text{if } x \geqq 0, \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases} \tag{41}$$

when $\varrho = 1/\mu$.

Introduce the following notations: $\varphi_i = \varphi(i\mu)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, further $C_0 = 1$ and

$$C_j = \prod_{i=1}^{j} \frac{\varphi_i}{1-\varphi_i} \qquad (j = 1, 2, \ldots). \tag{42}$$

THEOREM 5. *The limiting distribution* $\{P_k\}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ *exists and is independent of the initial distribution of* $\{\eta(0), \zeta(0)\}$. *We have*

$$P_k = \sum_{r=k}^{\infty} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} C_r \tag{43}$$

where C_r *is defined by* (42). *The r-th binomial moment of* $\{P_k\}$ *is*

$$B_r = C_r \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots). \tag{44}$$

PROOF. It is easy to see that the sequence of random variables $\{\eta_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ forms a Markov chain with transition probabilities $\mathbf{P}\{\eta_{n+1} = k \mid \eta_n = j\} = p_{jk}$ where

$$p_{jk} = \binom{j+1}{k} \int_0^\infty e^{-k\mu x}(1-e^{-\mu x})^{j+1-k}\,dF(x). \tag{45}$$

The Markov chain $\{\eta_n\}$ is evidently irreducible and aperiodic. By the aid of the theorem stated by F. G. FOSTER [9] can easily be proved that the states are also ergodic. Namely, to apply FOSTER's theorem it is enough to consider the probabilities (43) themselves. Consequently, the limiting distribution $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\eta_n = k\} = P_k$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ exists and is independent of the initial distribution of η_1 (and thus also independent of $\{\eta(0), \zeta(0)\}$). The limiting distribution $\{P_k\}$ is uniquely determined by the following system of linear equations:

$$P_k = \sum_{j=k-1}^{\infty} p_{jk} P_j \qquad (k=0, 1, 2, \ldots) \tag{46}$$

and

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1 \tag{47}$$

(cf. W. FELLER [6], p. 325).

To solve this system of linear equations, let us introduce the generating function

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k z^k. \tag{48}$$

By (46) we have

$$U(z) = \int_0^{\infty} (1 - e^{-\mu x} + z e^{-\mu x}) U(1 - e^{-\mu x} + z e^{-\mu x}) dF(x). \tag{49}$$

Now let us consider the binomial moments B_r $(r=0, 1, 2, \ldots)$ of the distribution $\{P_k\}$. As it is known

$$B_r = \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k}{r} P_k. \tag{50}$$

If B_r exists, then by (48) we get

$$B_r = \frac{1}{r!} \left(\frac{d^r U(z)}{dz^r} \right)_{z=1}. \tag{51}$$

Now by (47) $B_0 = 1$ and forming the r-th derivatives of (49) at $z=1$ we obtain

$$B_r = (B_r + B_{r-1}) \varphi_r \qquad (r=1, 2, 3, \ldots),$$

i. e.

$$B_r = \frac{\varphi_r}{1-\varphi_r} B_{r-1} \qquad (r=1, 2, 3, \ldots).$$

Hence it follows by induction that

$$B_r = C_r \qquad (r=0, 1, 2, \ldots) \tag{52}$$

what proves (44).

We observe that $\lim_{r\to\infty}\varphi_r=0$ and therefore

$$\lim_{r\to\infty}\frac{C_r}{C_{r-1}}=0.$$

Thus taking (51) and (52) into consideration we can write

$$U(z)=\sum_{r=0}^{\infty}C_r(z-1)^r \tag{53}$$

and this series is convergent for every z. Consequently,

$$P_k=\frac{1}{k!}\left(\frac{d^k U(z)}{dz^k}\right)_{z=0}=\sum_{r=k}^{\infty}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}C_r \tag{54}$$

what was to be proved.

REMARK 10. As we have seen, to prove Theorem 5 it is sufficient to show that $B_r=C_r$ $(r=0,1,2,\ldots)$. Knowing B_r $(r=0,1,2,\ldots)$ the distribution $\{P_k\}$ can easily be determined. To determine B_r we can apply the following heuristic way. Let us define a stationary Markov chain $\{\eta_n\}$ $(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ for which $\mathbf{P}\{\eta_n=k\}=P_k$ $(k=0,1,\ldots)$ for all n. Let us consider an incoming call in the stationary process. Define ε_n $(n=1,2,3,\ldots)$ as follows: $\varepsilon_n=1$ if the conversation corresponding to the former n-th call is in course and $\varepsilon_n=0$ if this is not the case. Then clearly

$$P_k=\mathbf{P}\{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n+\cdots=k\}\qquad(k=0,1,2,\ldots) \tag{55}$$

and

$$B_r=\mathbf{M}\left\{\binom{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n+\cdots}{r}\right\}=\lim_{n\to\infty}\mathbf{M}\left\{\binom{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n}{r}\right\} \tag{56}$$

where it is still to be proved that the expectation and the limit can be interchanged. Since

$$\binom{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n}{r}=\sum_{j_1+j_2+\cdots+j_r\leq n}\varepsilon_{j_1}\varepsilon_{j_1+j_2}\cdots\varepsilon_{j_1+j_2+\cdots+j_r}$$

where $j_1,j_2,\ldots,j_r$ are positive integers, consequently

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{M}\left\{\binom{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n}{r}\right\}=\sum_{j_1=1}^{\infty}\sum_{j_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{j_r=1}^{\infty}\mathbf{M}\{\varepsilon_{j_1}\varepsilon_{j_1+j_2}\cdots\varepsilon_{j_1+j_2+\cdots+j_r}\}.$$

A simple calculation shows that

$$\mathbf{M}\{\varepsilon_{j_1}\varepsilon_{j_1+j_2}\cdots\varepsilon_{j_1+j_2+\cdots+j_r}\}=\varphi_r^{j_1}\varphi_{r-1}^{j_2}\cdots\varphi_1^{j_r}$$

and, consequently,

$$B_r=\frac{\varphi_1}{1-\varphi_1}\,\frac{\varphi_2}{1-\varphi_2}\cdots\frac{\varphi_r}{1-\varphi_r}=C_r \tag{57}$$

what was to be proved.

THEOREM 6. *Suppose that $F(x)$ is not a lattice distribution and $\alpha<\infty$, then the limiting distribution $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=P_k^*$ $(k=0,1,2,\ldots)$ exists and is independent of the initial distribution of $\{\eta(0),\zeta(0)\}$. We have*

$$P_k^*=\frac{1}{\alpha\mu}\sum_{r=k}^{\infty}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}\frac{C_{r-1}}{r}\qquad(k=1,2,3,\ldots)\tag{58}$$

and

$$P_0^*=1-\frac{1}{\alpha\mu}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{C_{r-1}}{r}.\tag{59}$$

Further the r-th binomial moment of the distribution $\{P_k^*\}$ is

$$B_r^*=\frac{C_{r-1}}{r\alpha\mu}\qquad(r=1,2,3,\ldots)\tag{60}$$

while $B_0^*=1$.

PROOF. We need a lemma.

LEMMA 3. *Denote by $M_j(t)$ the expectation of the number of transitions $E_j\to E_{j+1}$ occurring in the time interval $(0,t]$. If $F(x)$ is not a lattice distribution and $\alpha<\infty$, then for all $h>0$ we have*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M_j(t+h)-M_j(t)}{h}=\frac{P_j}{\alpha}\qquad(j=0,1,2,\ldots).\tag{61}$$

PROOF. The time differences between consecutive transitions $E_j\to E_{j+1}$ are, as it can easily be seen, identically distributed independent positive random variables. If $F(x)$ is not a lattice distribution function, then these random variables have not lattice distribution functions either. If $\alpha<\infty$, then these random variables have a finite expectation α/P_j. Under these conditions according to an easy extension of the theorem of D. BLACKWELL [3] we obtain the limit (61) and this limit is independent of the initial distribution of $\{\eta(0),\zeta(0)\}$. It remains only to prove that the expectation in question is α/P_j. Let us consider the Markov chain $\{\eta_n\}$. The state E_j is a recurrent state and the expectation of the recurrence step number is $1/P_j$ (cf. W. FELLER [6], p. 325). As transitions $E_j\to E_{j+1}$ occur at such instants τ_n $(n=1,2,3,\ldots)$ for which $\eta_n=j$, consequently the expected number of steps between consecutive transitions $E_j\to E_{j+1}$ is $1/P_j$. The expectation of the length of each step is α and so using the Markov character of the process it follows by the aid of the known theorem of A. WALD [36] (cf. A. N. KOLMOGOROV and J. V. PROHOROV [13]) that the expectation of the time differences between consecutive transitions $E_j\to E_{j+1}$ is α/P_j. This completes the proof of the lemma.

To return to the proof of Theorem 6 we shall show that the limits $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=P_k^*$ $(k=0,1,2,\ldots)$ exist and are independent of the initial distribution of $\{\eta(0),\zeta(0)\}$.

First we can write

(62) $$\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=\sum_{j=k-1}^{\infty}\binom{j+1}{k}\int_0^t e^{-k\mu(t-u)}(1-e^{-\mu(t-u)})^{j+1-k}[1-F(t-u)]\,dM_j(u).$$

For the sake of brevity put

(63) $$\pi_{jk}(x)=\binom{j+1}{k}e^{-k\mu x}(1-e^{-\mu x})^{j+1-k}$$

and denote by $\tau_1^{(j)}, \tau_2^{(j)}, \ldots, \tau_n^{(j)}, \ldots$ the instants of the consecutive transitions $E_j \to E_{j+1}$. Then evidently

(64) $$M_j(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\{\tau_n^{(j)}\leqq t\}.$$

Now the event $\eta(t)=k$ can occur in the following mutually exclusive ways: the n-th ($n=1,2,3,\ldots$) transition $E_j\to E_{j+1}$ ($j=k-1,k,\ldots$) occurs at the instant u (where $0\leqq u\leqq t$), i. e. $\tau_n^{(j)}=u$ and in the time interval $(u,t]$ does not arrive any new call (let this event be A_{ut}), further in the time interval $(u,t]$ $j+1-k$ conversations terminate and k conversations do not terminate (the probability of this is $\pi_{jk}(t-u)$). Consequently,

$$\mathbf{P}\{\eta(t)=k, A_{ut}\,|\,\tau_n^{(j)}=u\}=\pi_{jk}(t-u)[1-F(t-u)] \quad \text{if} \quad 0\leqq u\leqq t$$

and finally by the total probability theorem we can write

(65) $$\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=\sum_{j=k-1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t \pi_{jk}(t-u)[1-F(t-u)]\,d\mathbf{P}\{\tau_n^{(j)}\leqq u\}$$

what proves (62).

Applying Lemma 1 and Lemma 3 it follows that $\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=P_k^*$ exists and is independent of the initial distribution of $\{\eta(0),\zeta(0)\}$, further

(66) $$P_k^*=\sum_{j=k-1}^{\infty}p_{jk}^*P_j$$

where

(67) $$p_{jk}^*=\frac{1}{\alpha}\int_0^{\infty}\pi_{jk}(x)[1-F(x)]\,dx.$$

It is easy to see from (66) that $\{P_k^*\}$ is a probability distribution. The formula (66) gives $\{P_k^*\}$ explicitly, but we shall construct later a simpler formula.

Introduce the generating function

(68) $$U^*(z)=\sum_{k=0}^{\infty}P_k^*z^k.$$

By (66) we have

$$(69)\qquad U^*(z)=\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^\infty (1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x})U(1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x})[1-F(x)]\,dx.$$

For the binomial moments

$$(70)\qquad B_r^*=\sum_{k=r}^{\infty}\binom{k}{r}P_k^*=\frac{1}{r!}\left(\frac{d^r U^*(z)}{dz^r}\right)_{z=1}\qquad (r=0,1,2,\ldots)$$

we have $B_0^*=1$ and forming the r-th derivative of (69) at $z=1$

$$(71)\qquad B_r^*=[B_r+B_{r-1}]\frac{1-\varphi_r}{r\alpha\mu}\qquad (r=1,2,3,\ldots).$$

As we have seen earlier,

$$B_r=[B_r+B_{r-1}]\varphi_r\qquad (r=1,2,3,\ldots),$$

consequently

$$(72)\qquad B_r^*=\frac{1-\varphi_r}{\varphi_r}\,\frac{B_r}{r\alpha\mu}=\frac{C_{r-1}}{r\alpha\mu}$$

what proves (60).

Hence, using (70), we obtain

$$(73)\qquad U^*(z)=1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{C_{r-1}}{r\alpha\mu}(z-1)^r$$

and this series is convergent for every z. Finally,

$$(74)\qquad P_k^*=\frac{1}{k!}\left(\frac{d^k U^*(z)}{dz^k}\right)_{z=0}=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha\mu}\displaystyle\sum_{r=k}^{\infty}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}\frac{C_{r-1}}{r} & (k=1,2,3,\ldots),\\ 1-\dfrac{1}{\alpha\mu}\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{r}C_{r-1} & (k=0)\end{cases}$$

what completes the proof of the theorem.

THEOREM 7. *The probability distribution $\{P_k^*\}$ can be expressed by the distribution $\{P_k\}$ as follows:*

$$(75)\qquad P_k^*=\frac{P_{k-1}}{k\alpha\mu}\qquad (k=1,2,3,\ldots)$$

and

$$(76)\qquad P_0^*=1-\frac{1}{\alpha\mu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{P_{k-1}}{k}.$$

PROOF. First we prove a lemma.

LEMMA 4. *Denote by $N_k(t)$ the expectation of the number of transitions $E_k\to E_{k-1}$ occurring in the time interval $(0,t]$. If $F(x)$ is not a lattice distribution and $\alpha<\infty$, then we have*

$$(77)\qquad \lim_{t\to\infty}N_k'(t)=P_k^*k\mu\qquad (k=1,2,3,\ldots).$$

It is easy to see that

$$N_k(t+\Delta t)-N_k(t)=\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}k\mu\Delta t+o(\Delta t).$$

As $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=P_k^*$ exists, (77) follows immediately.

To prove Theorem 7 we observe that the difference of the number of transitions $E_{k-1}\to E_k$ and $E_k\to E_{k-1}$ occurring in the time interval $(0,t]$ is at most 1. Consequently, $|M_{k-1}(t)-N_k(t)|\leqq 1$ and hence

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M_{k-1}(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{N_k(t)}{t}.$$

By Lemma 3 we obtain

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M_{k-1}(t)}{t}=\frac{P_{k-1}}{\alpha}$$

and by Lemma 4

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N_k(t)}{t}=P_k^*k\mu$$

and thus (75) is proved. Further, clearly, $P_0^*=1-\sum\limits_{k=1}^{\infty}P_k^*$ what proves (76).

REMARK 11. For the sake of simplicity let us suppose that $\eta(0)=0$ and τ_1 has the distribution function $F(x)$. Now in this particular case we put $\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=P_k(t)$ $(k=0,1,2,\ldots)$ and introduce the following generating function:

$$G(t,z)=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(t)z^k. \tag{78}$$

As now

$$H(x)=\begin{cases}1-e^{-\mu x} & \text{if } x\geqq 0,\\ 0 & \text{if } x<0,\end{cases}$$

we can write by Theorem 1 that

$$G(t,z)=[1-F(t)]+\int_0^t G(t-x,z)[1-(1-z)e^{-\mu(t-x)}]dF(x). \tag{79}$$

I should like to mention that Mr. R. SYSKI was so kind to call my attention to the possibility of such a treatment. Applying the results of R. FORTET [8] or of [27], Mr. R. SYSKI showed that for $G(t,z)$ we have

$$G(t,z)=1-(1-z)\int_0^t G(t-x,z)e^{-\mu(t-x)}dm(x) \tag{80}$$

where $m(t)$ denotes the expectation of the number of calls occurring in the time interval $(0,t]$.

The integral equations (79) and (80) can easily be solved by Laplace transform. Inverting the Laplace transform we can determine the probabilities

$P_k(t)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$. Knowing the probabilities $P_k(t)$ for this particular case, the solution for the general case can easily be given. Now we shall prove

THEOREM 8. *If* $\eta(0)=0$ *and* $\mathbf{P}\{\tau_1 \leqq x\} = F(x)$, *then for the Laplace transform of* $P_k(t) = \mathbf{P}\{\eta(t)=k\}$ *we have*

$$(81) \qquad \int_0^\infty e^{-st} P_k(t)\,dt = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{(-1)^{j-k}\binom{j}{k}}{s+j\mu} \prod_{i=0}^{j-1} \frac{\varphi(s+i\mu)}{1-\varphi(s+i\mu)} \quad \textit{if} \quad k=1, 2, 3, \ldots$$

and

$$(82) \qquad \int_0^\infty e^{-st} P_0(t)\,dt = \frac{1}{s} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{s+j\mu} \prod_{i=0}^{j-1} \frac{\varphi(s+i\mu)}{1-\varphi(s+i\mu)}.$$

PROOF. Introducing the Laplace transform

$$(83) \qquad \psi(s, z) = \int_0^\infty e^{-st} G(t, z)\,dt$$

we obtain by (79) or by (80) that

$$(84) \qquad \psi(s, z) = \frac{1}{s} - \frac{(1-z)\varphi(s)}{1-\varphi(s)}\,\psi(s+\mu, z).$$

By successive applications of this formula we can express $\psi(s, z)$ with the aid of $\psi(s+n\mu, z)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, respectively. If we take into consideration that $\lim\limits_{n\to\infty} \psi(s+n\mu, z) = 0$, then, finally, we get an explicit formula for $\psi(s, z)$, namely:

$$(85) \qquad \psi(s, z) = \frac{1}{s} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j (1-z)^j}{s+j\mu} \prod_{i=0}^{j-1} \frac{\varphi(s+i\mu)}{1-\varphi(s+i\mu)}.$$

This series is convergent for every z if $\Re(s) > 0$. Forming the coefficient of z^k we obtain

$$\int_0^\infty e^{-st} P_k(t)\,dt$$

what proves (81) and (82).

Inverting the Laplace transforms we can determine $P_k(t)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ uniquely. We have shown that $\lim\limits_{t\to\infty} P_k(t) = P_k^*$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ exists and then clearly

$$(86) \qquad P_k^* = \lim_{s\to 0} s \int_0^\infty e^{-st} P_k(t)\,dt.$$

Since

$$\lim_{s\to 0}\frac{s\varphi(s)}{1-\varphi(s)}=\frac{1}{\alpha},$$

we easily obtain that

$$P_k^*=\frac{1}{\alpha\mu}\sum_{j=k}^{\infty}\frac{(-1)^{j-k}}{j}\binom{j}{k}\prod_{i=1}^{j-1}\frac{\varphi(i\mu)}{1-\varphi(i\mu)}\qquad(k=1,2,3,\ldots)\tag{87}$$

and

$$P_0^*=1-\frac{1}{\alpha\mu}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\prod_{i=1}^{j-1}\frac{\varphi(i\mu)}{1-\varphi(i\mu)}\tag{88}$$

where the empty product means 1. These results are in agreement with Theorem 6.

The stationary process. Denote by $\zeta(t)$ the distance between the instant t and the instant of the next incoming call. The conditional limiting distributions of $\zeta(t)$ are described by the following

THEOREM 9. *If $\alpha<\infty$ and $F(x)$ is not a lattice distribution, then there exist the following limiting distributions:*

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\zeta(t)\leqq x\mid\eta(t)=k\}=F_k^*(x)\qquad(k=0,1,2,\ldots),\tag{89}$$

where

$$F_k^*(x)=\frac{1}{\alpha P_k^*}\sum_{j=k-1}^{\infty}P_j\binom{j+1}{k}\int_0^{\infty}e^{-k\mu y}(1-e^{-\mu y})^{j+1-k}[F(x+y)-F(y)]\,dy,\tag{90}$$

and they are independent of the initial distribution of $\{\eta(0),\zeta(0)\}$.

PROOF. We can proceed similarly as in the proof of Theorem 6. Applying similar notations we can write

$$\mathbf{P}\{\zeta(t)\leqq x,\,\eta(t)=k\}=\sum_{j=k-1}^{\infty}\int_0^t\pi_{jk}(t-u)[F(t+x-u)-F(t-u)]\,dM_j(u).\tag{91}$$

The event $\{\zeta(t)\leqq x,\eta(t)=k\}$ can occur, namely, in the following mutually exclusive ways: the n-th $(n=1,2,3,\ldots)$ transition $E_j\to E_{j+1}$ $(j=k-1,k,\ldots)$ occurs at the instant u (where $0\leqq u\leqq t$), i. e. $\tau_n^{(j)}=u$ and in the time interval $(0,t]$ new calls do not arrive (event A_{ut}) and the next incoming call occurs in the time interval $(t,t+x]$, further in the time interval $(u,t]$ $j+1-k$ conversations terminate and k conversations do not terminate (the probability of this is $\pi_{jk}(t-u)$). Consequently,

$$\mathbf{P}\{\zeta(t)\leqq x,\,\eta(t)=k,\,A_{ut}\mid\tau_n^{(j)}=u\}=\pi_{jk}(t-u)[F(t+x-u)-F(t-u)]$$

if $0 \leqq u \leqq t$ and by the aid of the total probability theorem we obtain

$$\mathbf{P}\{\zeta(t) \leqq x, \eta(t) = k\} = \tag{92}$$
$$= \sum_{j=k-1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \pi_{jk}(t-u)[F(t+x-u)-F(t-u)]\, d\mathbf{P}\{\tau_n^{(j)} \leqq u\}$$

what proves (91).

Applying Lemma 1 and Lemma 3 it follows that $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\zeta(t) \leqq x, \eta(t) = k\} = P_k^* F_k^*(x)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ exists and is independent of the initial distribution of $\{\eta(0), \zeta(0)\}$. Finally, since $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t) = k\} = P_k^*$, we have

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\zeta(t) \leqq x \mid \eta(t) = k\} = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{\zeta(t) \leqq x, \eta(t) = k\}}{\mathbf{P}\{\eta(t) = k\}} = F_k^*(x) \tag{93}$$

what was to be proved.

Thus we have shown that the Markov process $\{\eta(t), \zeta(t)\}$ is ergodic if $\alpha < \infty$ and $F(x)$ is not a lattice distribution. Accordingly, there exists a uniquely determined stationary process. Namely, if we suppose that $\alpha < \infty$ and the initial distribution of $\{\eta(0), \zeta(0)\}$ is

$$\mathbf{P}\{\zeta(0) \leqq x, \eta(0) = k\} = P_k^* F_k^*(x) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{94}$$

then $\{\eta(t), \zeta(t)\}$ will be a stationary stochastic process for which

$$\mathbf{P}\{\zeta(t) \leqq x, \eta(t) = k\} = P_k^* F_k^*(x) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{95}$$

for all $t \geqq 0$.

In case of a stationary process $\{\eta(t), \zeta(t)\}$ the Markov chain $\{\eta_n\}$ will also be stationary and we have for every n

$$\mathbf{P}\{\eta_n = k\} = P_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{96}$$

This is a consequence of the identity

$$P_k = \sum_{j=k-1}^{\infty} P_j^* \binom{j+1}{k} \int_0^{\infty} e^{-k\mu x}(1-e^{-\mu x})^{j+1-k}\, dF_j^*(x). \tag{97}$$

REMARK 12. In case of a stationary process $\{\eta(t), \zeta(t)\}$ we have

$$\mathbf{P}\{\zeta(t) \leqq x\} = F^*(x) \tag{98}$$

for all $t \geqq 0$ and, consequently, in this case $\{\tau_n\}$ forms a stationary recurrent process.

Further, in case of a stationary process we have

$$M_k(t) = \frac{P_k^* t}{\alpha} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{99}$$

and

$$N_{k+1}(t) = P_k \mu t \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{100}$$

Palm's functions. Hitherto we did not make any restrictions concerning the servicing of the calls. Now following C. PALM [18] let us suppose that the channels are numbered by $1, 2, \ldots, r, \ldots$ and an incoming call realizes a connection through the idle channel which has the lowest serial number. This assumption does not restrict the generality, since $\{\eta(t), \zeta(t)\}$ is independent of the system of handling of the traffic. Now, denote by $\tau_1^{(r)}, \tau_2^{(r)}, \ldots, \tau_n^{(r)}, \ldots$ the instants of the calls which find all the channels in the group $(1, 2, \ldots, r)$ busy. It is easy to see that the time differences $\tau_{n+1}^{(r)} - \tau_n^{(r)}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ are identically distributed independent positive random variables. Denote by $G_r(x)$ their common distribution function.

C. PALM [18] has proved that the distribution functions $G_r(x)$ $(r = 1, 2, \ldots)$ satisfy the following system of integral equations:

$$G_r(x) = G_{r-1}(x) - \int_0^x (1 - e^{-\mu y})[1 - G_r(x-y)]\, dG_{r-1}(y) \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots) \tag{101}$$

where $G_0(x) = F(x)$.

Let us suppose, namely, that $\tau_n^{(r)} = \tau_m^{(r-1)}$ (where $\tau_m^{(0)} = \tau_m$). Then clearly

$$\mathbf{P}\{\tau_{n+1}^{(r)} - \tau_n^{(r)} \leqq x \mid \tau_{m+1}^{(r-1)} - \tau_m^{(r-1)} = y\} = \begin{cases} e^{-\mu y} + (1 - e^{-\mu y}) G_r(x-y) & \text{if } 0 \leqq y \leqq x, \\ 0 & \text{if } y > x \end{cases}$$

and by the theorem of total probability we have

$$G_r(x) = \mathbf{P}\{\tau_{n+1}^{(r)} - \tau_n^{(r)} \leqq x\} = \int_0^x [e^{-\mu y} + (1 - e^{-\mu y}) G_r(x-y)]\, dG_{r-1}(y)$$

what proves (101).

THEOREM 10. *Define*

$$\gamma_r(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dG_r(x) \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots), \tag{102}$$

then we have

$$\gamma_r(s) = \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} \prod_{i=0}^{j-1} \frac{1 - \varphi(s + i\mu)}{\varphi(s + i\mu)}}{\displaystyle\sum_{j=0}^{r+1} \binom{r+1}{j} \prod_{i=0}^{j-1} \frac{1 - \varphi(s + i\mu)}{\varphi(s + i\mu)}} \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots) \tag{103}$$

where the empty product means 1.

PROOF. Taking the Laplace—Stieltjes transform of (101) we obtain PALM's recurrence formula

$$\gamma_r(s) = \frac{\gamma_{r-1}(s + \mu)}{1 - \gamma_{r-1}(s) + \gamma_{r-1}(s + \mu)} \qquad (r = 1, 2, \ldots) \tag{104}$$

where $\gamma_0(s) = \varphi(s)$.

Introduce the following functions:

$$D_r(s)=\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}\prod_{i=0}^{j-1}\frac{1-\varphi(s+i\mu)}{\varphi(s+i\mu)} \qquad (r=0,1,2,\ldots). \tag{105}$$

It is easy to see that

$$D_{r+1}(s)=D_r(s)+\frac{1-\varphi(s)}{\varphi(s)}D_r(s+\mu) \qquad (r=0,1,2,\ldots) \tag{106}$$

and a simple calculation shows that

$$\gamma_r(s)=\frac{D_r(s)}{D_{r+1}(s)} \qquad (r=0,1,2,\ldots) \tag{107}$$

satisfies (104) and $\gamma_0(s)=\varphi(s)$.

REMARK 13. Define

$$\alpha_r=\int_0^\infty x\,dG_r(x). \tag{108}$$

Since

$$\alpha_r=\lim_{s\to 0}\frac{1-\gamma_r(s)}{s}$$

and

$$\lim_{s\to 0}\frac{1-\varphi(s)}{s\varphi(s)}=\alpha,$$

we have

$$\alpha_r=\alpha\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}\prod_{i=1}^{j}\frac{1-\varphi(i\mu)}{\varphi(i\mu)} \qquad (r=0,1,2,\ldots). \tag{109}$$

REMARK 14. Let us consider the stationary process. Denote by Π_r $(r=1,2,3,\ldots)$ the probability that an incoming call finds every channel in the group $(1,2,\ldots,r)$ busy and put $\Pi_0=1$. C. PALM [18] has showed that

$$\Pi_r=\frac{1}{\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}\prod_{i=1}^{j}\frac{1-\varphi(i\mu)}{\varphi(i\mu)}} \qquad (r=0,1,2,\ldots). \tag{110}$$

(Cf. also F. POLLACZEK [20], J. W. COHEN [4] and the author [32], [33].) It is easy to see that

$$\alpha_r=\frac{\alpha}{\Pi_r} \qquad (r=0,1,2,\ldots) \tag{111}$$

and thus (110) follows from (109).

§ 3. The case C)

Let us suppose that $\{\tau_n\}$ forms a Poisson process with intensity λ and $H(x)$ is arbitrary. First let us suppose that $\eta(0)=0$ and put $\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=$ $=P_k(t)$. In this case the following result is well known:

THEOREM 11. *If $\eta(0)=0$, then we have*

$$P_k(t)=e^{-\lambda\int\limits_0^t[1-H(x)]\,dx}\,\frac{\left[\lambda\int\limits_0^t(1-H(x))\,dx\right]^k}{k!}\qquad (k=0,1,2,\ldots) \tag{112}$$

and if $\varrho<\infty$, then there exists $\lim\limits_{t\to\infty}P_k(t)=P_k^*$ *where*

$$P_k^*=e^{-\lambda\varrho}\frac{(\lambda\varrho)^k}{k!}\qquad (k=0,1,2,\ldots). \tag{113}$$

This theorem is plausible taking into consideration the investigations of A. K. ERLANG [5]. (Cf. L. KOSTEN [16].) If we suppose that the limiting distribution $\{P_k^*\}$ exists, then (113) follows from the results of F. POLLACZEK [19], C. PALM [17] and L. KOSTEN [14]. Further (112) and (113) follow from a more general result given by the author [26]. An immediate proof for (113) was given by A. RÉNYI [21], R. FORTET [7] and C. RYLL-NARDZEWSKI [22].

PROOF. By the aid of the theorem of total probability we can write

$$\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=\sum_{n=k}^{\infty}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\binom{n}{k}\left[\frac{1}{t}\int\limits_0^t(1-H(x))\,dx\right]^k\left[\frac{1}{t}\int\limits_0^t H(x)\,dx\right]^{n-k}. \tag{114}$$

For the event $\eta(t)=k$ can occur in several mutually exclusive ways, namely in the time interval $(0,t)$ n $(n=0,1,2,\ldots)$ calls can occur. The probability that n calls arrive in the time interval $(0,t)$ is

$$e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

It is known (cf. [26], p. 233) that under the condition that in the Poisson process in the time interval $(0,t)$ there occur exactly n calls, the joint distribution of the instants of these calls agrees with the joint distribution of n independent random points distributed uniformly in the time interval $(0,t)$. Thus under the condition that in the time interval $(0,t)$ there occur n calls, the probability of $\eta(t)=k$ is

$$\binom{n}{k}\left[\frac{1}{t}\int\limits_0^t(1-H(x))\,dx\right]^k\left[\frac{1}{t}\int\limits_0^t H(x)\,dx\right]^{n-k}.$$

Thus we get (114).

Since

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t [1-H(x)]\,dx=\varrho,$$

we conclude that $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=P_k^*$ $(k=0,1,2,\ldots)$ exists and (113) holds.

If we consider instead of $\eta(0)=0$ an arbitrary initial distribution, then the new $P_k(t)$ can easily be obtained by the aid of (112) and we get again the limiting distribution (113) independently of the initial state.

REMARK 15. If $M_k(t)$ is the expectation of the number of transitions $E_k\to E_{k+1}$ occurring in the time interval $(0,t]$, then we have

$$M_k(t)=\lambda\int_0^t P_k(u)\,du. \tag{115}$$

Namely, the transitions $E_k\to E_{k+1}$ in $(0,t]$ can be obtained in such a way that we consider each call in $(0,t]$ and take into consideration only those which occur at such instants when there is a state E_k. Thus we get

$$M_k(t+\Delta t)-M_k(t)=P_k(t)\lambda\Delta t+o(\Delta t) \tag{116}$$

what proves (115)

The stationary process. Under the condition that $\eta(t)=k$, denote by $\chi_1(t),\chi_2(t),\ldots,\chi_k(t)$ the distances between t and the termination points of the conversations which are going on at the instant t.

THEOREM 12. *If $\varrho<\infty$, then we have the following limiting distribution:*

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\chi_1(t)\le x_1,\chi_2(t)\le x_2,\ldots,\chi_k(t)\le x_k\,|\,\eta(t)=k\}=\\=H^*(x_1)H^*(x_2)\cdots H^*(x_k)\end{aligned} \tag{117}$$

where

$$H^*(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\varrho}\displaystyle\int_0^x[1-H(y)]\,dy & \text{if } x\ge 0,\\[2mm] 0 & \text{if } x<0\end{cases} \tag{118}$$

and the limiting distribution is independent of the initial state.

PROOF. First we suppose that $\eta(0)=0$. In this case proceeding similarly as in the proof of Theorem 11 we obtain by the aid of the theorem of total probability that

$$\mathbf{P}\{\chi_1(t)\le x_1,\chi_2(t)\le x_2,\ldots,\chi_k(t)\le x_k;\eta(t)=k\}=$$

$$=\sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\binom{n}{k}\left[\frac{1}{t}\int_0^t H(x)\,dx\right]^{n-k}\prod_{i=1}^{k}\left\{\frac{1}{t}\int_0^t [H(x+x_i)-H(x)]\,dx\right\}=$$

$$=e^{-\lambda\int_0^t [1-H(x)]\,dx}\,\frac{\lambda^k}{k!}\prod_{i=1}^{k}\left\{\int_0^t [H(x+x_i)-H(x)]\,dx\right\}.$$

Hence, by (112),

$$\mathbf{P}\{\chi_1(t)\leqq x_1,\chi_2(t)\leqq x_2,\dots,\chi_k(t)\leqq x_k\,|\,\eta(t)=k\}=$$

(119)
$$=\prod_{i=1}^{k}\frac{\int_0^t [H(x+x_i)-H(x)]\,dx}{\int_0^t [1-H(x)]\,dx}.$$

If $t\to\infty$, then we obtain (117). If we consider an arbitrary initial state, then the only difference is that $\eta(t)$ is to be replaced by $\eta(t)+\varepsilon(t)$, where $\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\varepsilon(t)=0\}=1$ and, consequentiy, we obtain the same limiting distribution as above. This completes the proof.

Thus we have shown that the Markov process $\{\eta(t);\chi_1(t),\chi_2(t),\dots\}$ is ergodic if $\varrho<\infty$. Accordingly, there exists a uniquely determined stationary process. If we suppose that $\varrho<\infty$ and

$$\mathbf{P}\{\chi_1(0)\leqq x_1,\chi_2(0)\leqq x_2,\dots,\chi_k(0)\leqq x_k;\ \eta(0)=k\}=P_k^*H^*(x_1)H^*(x_2)\cdots H^*(x_k),$$

then we obtain the stationary process. In this case $\{\eta(t);\chi_1(t),\chi_2(t),\dots\}$ has the same distribution for all $t\geqq 0$. For the stationary process let us denote by $\eta^*(t)$ the number of the busy channels at the instant t. Then we have $\mathbf{P}\{\eta^*(t)=k\}=P_k^*$ $(k=0,1,2,\dots)$ for all $t\geqq 0$.

REMARK 16. The stationary process $\{\eta^*(t)\}$ forms a particular case of the secondary processes investigated in [26]. The following statements can be proved by the theorems of [26] or by an immediate way.

If B_r^* denotes the r-th binomial moment of $\eta^*(t)$, then we have

(120)
$$B_r^*=\frac{(\lambda\varrho)^r}{r!}\qquad (r=0,1,2,\dots).$$

Especially $\mathbf{M}\{\eta^*(t)\}=\lambda\varrho$ and $\mathbf{D}^2\{\eta^*(t)\}=\lambda\varrho$.

The correlation function $R(\tau)$ exists and we have

(121)
$$R(\tau)=\frac{1}{\varrho}\int_{|\tau|}^{\infty}[1-H(x)]\,dx.$$

Denote by $G^*(\omega)$ the spectral distribution function of the process $\{\eta^*(t)\}$. Then, by the theorem of A. JA. KHINTCHINE [10], we have

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega\tau\, dG^*(\omega) \tag{122}$$

and by inversion we obtain

$$G^{*\prime}(\omega)=\frac{2\pi}{\varrho}\int_{0}^{\infty}(1-\cos\omega x)\,dH(x). \tag{123}$$

The above results were proved by V. E. BENEŠ [2] in another way. For the average traffic

$$\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\eta^*(t)\,dt \tag{124}$$

we have

$$\mathbf{M}\left\{\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\eta^*(t)\,dt\right\}=\lambda\varrho \tag{125}$$

and

$$\mathbf{D}^2\left\{\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\eta^*(t)\,dt\right\}=\frac{2\lambda\varrho}{T^2}\int_{0}^{T}(T-\tau)R(\tau)\,d\tau \tag{126}$$

where $R(\tau)$ is defined by (121). Thus

$$\mathbf{D}^2\left\{\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\eta^*(t)\,dt\right\}=\lambda\int_{T}^{\infty}[1-H(x)]\,dx+\frac{\lambda}{T^2}\int_{0}^{T}x(2T-x)[1-H(x)]\,dx. \tag{127}$$

§ 4. The case D)

In this case $\{\tau_n\}$ forms a Poisson process with density λ and

$$H(x)=\begin{cases}1-e^{-\mu x} & \text{if } x\geqq 0,\\ 0 & \text{if } x<0\end{cases} \tag{128}$$

when $\varrho=1/\mu$. In this particular case $\{\eta(t)\}$ is a Markov process.

If, particularly, $\eta(0)=0$, then by (112) we obtain

$$P_k(t)=e^{-\frac{\lambda(1-e^{-\mu t})}{\mu}}\frac{\left[\frac{\lambda(1-e^{-\mu t})}{\mu}\right]^k}{k!}\qquad (k=0,1,2,\ldots), \tag{129}$$

and by (81) and (82) the Laplace transform of $P_k(t)$ is

$$(130)\qquad \int_0^\infty e^{-st}P_k(t)\,dt=\sum_{j=k}^{\infty}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}\frac{\lambda^j}{s(s+\mu)\cdots(s+j\mu)}\qquad (k=0,1,2,\ldots),$$

namely in this case

$$\varphi(s)=\frac{\lambda}{\lambda+s}.$$

If $\eta(0)=k$, then as an easy consequence of (129) we obtain that

$$(131)\qquad \mathbf{P}\{\eta(t)=j\}=\sum_{i=0}^{j}\binom{k}{i}(1-e^{-\mu t})^{k-i}e^{-i\mu t}e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})}\frac{\left[\frac{\lambda(1-e^{-\mu t})}{\mu}\right]^{j-i}}{(j-i)!}$$

and clearly

$$(132)\qquad \lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\eta(t)=j\}=e^{-\frac{\lambda}{\mu}}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{j!}$$

independently of k.

The distribution of the transitions $E_k\to E_{k+1}$. Denote by $\tau_1^{(k)},\tau_2^{(k)},\ldots,$ $\tau_n^{(k)},\ldots$ the instants of the consecutive transitions $E_k\to E_{k+1}$ $(k=0,1,2,\ldots)$. It is easy to see that the time differences $\tau_{n+1}^{(k)}-\tau_n^{(k)}$ $(n=1,2,3,\ldots)$ are identically distributed independent random variables. Denote by $R_k(x)$ their common distribution function. Further put

$$(133)\qquad \psi_k(s)=\int_0^\infty e^{-sx}dR_k(x),\qquad\qquad (134)\qquad \varrho_k=\int_0^\infty x\,dR_k(x)$$

and

$$(135)\qquad \sigma_k^2=\int_0^\infty (x-\varrho_k)^2dR_k(x).$$

THEOREM 13.* *We have*

$$(136)\qquad \psi_k(s)=1-\frac{\lambda^k}{\left[\lambda^{k+1}+\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k+1}{\nu}s(s+\mu)\cdots(s+(k-\nu)\mu)\lambda^\nu\right]}\cdot\frac{1}{\left[\sum_{j=k}^{\infty}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}\frac{\lambda^j}{s(s+\mu)\cdots(s+j\mu)}\right]},$$

* *Note added in proof.* In the case B) we have the following generalization of (136):

$$\psi_k(s)=1-\left\{\left[\sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j}\prod_{i=0}^{j-1}\frac{1-\varphi(s+i\mu)}{\varphi(s+i\mu)}\right]\left[\sum_{r=k}^{\infty}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}\prod_{i=0}^{r}\frac{\varphi(s+i\mu)}{1-\varphi(s+i\mu)}\right]\right\}^{-1}.$$

(Cf. the author's paper: "On the limiting distribution of the number of coincidences concerning telephone traffic" submitted to the *Annals of Mathematical Statistics.*)

further

$$\varrho_k = \frac{1}{\lambda e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!}} \tag{137}$$

and

$$\begin{aligned}\sigma_k^2 = \frac{2\varrho_k}{\lambda} \sum_{\nu=0}^{k} (k-\nu)! \binom{k+1}{\nu} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{k-\nu} - \\ - \varrho_k^2 \left[\frac{2}{k!} \sum_{j=k}^{\infty} \frac{(-1)^{j-k}}{(j-k)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j+1} \left(\sum_{\nu=1}^{j} \frac{1}{\nu}\right) + 1\right].\end{aligned} \tag{138}$$

PROOF. Let us consider the process $\{\eta(t)\}$ with initial state $\eta(0)=0$. Denote by $G_0(x)$ the distribution function of the distance between $t=0$ and the first transition $E_0 \rightarrow E_1$, further denote by $G_1(x), G_2(x), \ldots, G_k(x)$ the distribution functions of the distances between the successive transitions $E_0 \rightarrow E_1$, $E_1 \rightarrow E_2, E_2 \rightarrow E_3, \ldots, E_k \rightarrow E_{k+1}$, respectively. It is easy to see that the distribution functions $G_r(x)$ $(r=0, 1, 2, \ldots, k)$ are the particular cases of the PALM's functions $G_r(x)$ defined by Theorem 10. In our case $\varphi(s)=\lambda/(\lambda+s)$ and we have

$$\gamma_r(s) = \frac{\lambda B_{r-1}(s)}{B_r(s)} \qquad (r=0, 1, 2, \ldots) \tag{139}$$

where

$$B_r(s) = \lambda^{r+1} + \sum_{\nu=0}^{r} \binom{r+1}{\nu} s(s+\mu)\cdots(s+(r-\nu)\mu)\lambda^{\nu} \quad (r=-1, 0, 1, 2, \ldots) \tag{140}$$

(cf. C. PALM [18] and A. JA. KHINTCHINE [11]). Namely, in this case, especially,

$$D_r(s) = \frac{1}{\lambda^r} B_{r-1}(s).$$

Now, in our particular case denote by $M_k(t)$ the expectation of the number of transitions $E_k \rightarrow E_{k+1}$ occurring in the time interval $(0, t]$. Then it can easily be seen that

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dM_k(t) = \frac{\gamma_0(s)\gamma_1(s)\cdots\gamma_k(s)}{1-\psi_k(s)} = \frac{\lambda^{k+1}}{B_k(s)[1-\psi_k(s)]} \tag{141}$$

and

$$M_k'(t) = \lambda P_k(t) \tag{142}$$

where $P_k(t)$ is defined by (129). Thus by (130) we obtain

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dM_k(t) = \lambda \int_0^{\infty} e^{-st} P_k(t)\, dt = \lambda \sum_{j=k}^{\infty} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} \frac{\lambda^j}{s(s+\mu)\cdots(s+j\mu)}. \tag{143}$$

Comparing (141) and (143) we obtain (136). Further if we take into consideration that

$$\frac{1-\psi_k(s)}{s}=\varrho_k-\frac{\sigma_k^2+\varrho_k^2}{2}s+o(s) \tag{144}$$

if $s\to 0$, we obtain (137) and (138).

REMARK 17. We now suppose that $\eta(0)$ is arbitrary. Denote by $\nu_t^{(k)}$ the number of transitions $E_k\to E_{k+1}$ occurring in the time interval $(0, t]$. Independently of $\eta(0)$ we have

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbf{M}\{\nu_t^{(k)}\}}{t}=\frac{1}{\varrho_k} \tag{145}$$

and

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbf{D}^2\{\nu_t^{(k)}\}}{t}=\frac{\sigma_k^2}{\varrho_k^3}. \tag{146}$$

Further the random variable $\nu_t^{(k)}$ has an asymptotical normal distribution as $t\to\infty$, namely

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{\nu_t^{(k)}-\frac{t}{\varrho_k}}{\sqrt{\frac{\sigma_k^2 t}{\varrho_k^3}}}\leqq x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-y^2/2}dy \tag{147}$$

(cf. [29]).

Denote by $\beta_k(t)$ the Lebesgue measure of that subset of the interval $(0, t)$ which consists of the points u for which $\eta(u)\geqq k$.

THEOREM 14. *If $t\to\infty$, then $\beta_k(t)$ has an asymptotical normal distribution and is independent of the initial state. We have*

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{\beta_k(t)-\frac{\beta_k t}{\alpha_k+\beta_k}}{\sqrt{\frac{\alpha_k^2\sigma_{\beta,k}^2+\beta_k^2\sigma_{\alpha,k}^2}{(\alpha_k+\beta_k)^3}t}}\leqq x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-y^2/2}dy, \tag{148}$$

where

$$\alpha_k=\frac{1}{\lambda}\sum_{\nu=0}^{k}\nu!\binom{k}{\nu}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\nu}, \tag{149}$$

$$\sigma_{\alpha,k}^2=\frac{2\alpha_k}{\lambda}\sum_{\nu=0}^{k-1}\nu!\binom{k}{\nu+1}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\nu}+\alpha_k^2-\frac{2}{\lambda\mu}\sum_{j=0}^{k}j!\binom{k}{j}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{j}\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{i}, \tag{150}$$

$$\beta_k=\frac{1}{\lambda}\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\frac{k!}{\nu!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\nu-k} \tag{151}$$

and

$$\sigma^2_{\beta,k} = \sigma^2_k - \sigma^2_{\alpha,k} \tag{152}$$

where σ^2_k *is defined by* (138) *and* $\sigma^2_{\alpha,k}$ *by* (150).

Further we have

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{M}\{\beta_k(t)\}}{t} = \frac{\beta_k}{\alpha_k+\beta_k} \tag{153}$$

and

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{D}^2\{\beta_k(t)\}}{t} = \frac{\alpha_k^2\sigma^2_{\beta,k}+\beta_k^2\sigma^2_{\alpha,k}}{(\alpha_k+\beta_k)^3}. \tag{154}$$

PROOF. Let us consider the instants of the successive transitions $E_k \to E_{k+1}, E_{k+1} \to E_k, E_k \to E_{k+1}, E_{k+1} \to E_k, \ldots$. It is easy to see that the time differences between such transitions are independent positive random variables, namely the distances between consecutive transitions $E_{k+1} \to E_k$ and $E_k \to E_{k+1}$ have a common distribution function, say $G_k(x)$, and the distances between consecutive transitions $E_k \to E_{k+1}$ and $E_{k+1} \to E_k$ have also a common distribution function, say $H_k(x)$. Put

$$\alpha_k = \int_0^\infty x\,dG_k(x), \quad \beta_k = \int_0^\infty x\,dH_k(x) \tag{155}$$

and

$$\sigma^2_{\alpha,k} = \int_0^\infty (x-\alpha_k)^2\,dG_k(x), \quad \sigma^2_{\beta,k} = \int_0^\infty (x-\beta_k)^2\,dH_k(x). \tag{156}$$

It is evident that

$$R_k(x) = \int_0^x H_k(x-y)\,dG_k(y) \tag{157}$$

and, consequently, we have

$$\varrho_k = \alpha_k + \beta_k \tag{158}$$

and

$$\sigma^2_k = \sigma^2_{\alpha,k} + \sigma^2_{\beta,k}. \tag{159}$$

We have seen that σ^2_k is finite and therefore $\sigma^2_{\alpha,k}$ and $\sigma^2_{\beta,k}$ are also finite. In this case we can apply Theorems 1, 6 and 7 of our paper [30] (cf. also [31]) and it follows that (148), (153) and (154) are valid. It remains only to prove (149), (150), (151) and (152).

We have seen that

$$\int_0^\infty e^{-st}\,dR_k(x) = \psi_k(s) \tag{160}$$

where $\psi_k(s)$ is defined by (136). Further it can easily be seen that $G_k(x)$ is just the PALM's distribution function for which

$$\int_0^\infty e^{-sx} d G_k(x) = \gamma_k(s) \tag{161}$$

where $\gamma_k(s)$ is defined by (139) and (140).

Taking (157) into consideration we obtain by Laplace—Stieltjes transform that

$$\int_0^\infty e^{-sx} d H_k(x) = \frac{\psi_k(s)}{\gamma_k(s)}. \tag{162}$$

Knowing the Laplace—Stieltjes transforms (161) and (162) we can write clearly that

$$\int_0^\infty e^{-sx} d G_k(x) = 1 - \alpha_k s + \frac{\sigma^2_{\alpha,k} + \alpha_k^2}{2} s^2 + o(s^2) \tag{163}$$

and

$$\int_0^\infty e^{-sx} d H_k(x) = 1 - \beta_k s + \frac{\sigma^2_{\beta,k} + \beta_k^2}{2} s^2 + o(s^2) \tag{164}$$

if $s \to 0$. Hence we obtain (149), (150), (151) and (152). This completes the proof of the theorem.

REMARK 18. We shall now give another method to prove (149), (150), (151) and (152). Let us suppose that $\eta(0) = k$ (k is fixed) and put $\mathbf{P}\{\eta(t) = j\} = P_j(t)$ and $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t) = j\} = P_j$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$. By (131) we have

$$P_j(t) = \sum_{i=0}^{j} \binom{k}{i} (1 - e^{-\mu t})^{k-i} e^{-i\mu t} e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})} \frac{\left[\frac{\lambda(1-e^{-\mu t})}{\mu}\right]^{j-i}}{(j-i)!} \tag{165}$$

and, consequently,

$$\lim_{t\to\infty} P_j(t) = P_j = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!} \tag{166}$$

where the convergence is of exponential type.

In this particular case also denote by $M_k(t)$ the expected number of transitions $E_k \to E_{k+1}$ occurring in the time interval $(0, t)$ and by $N_{k+1}(t)$ the expected number of transitions $E_{k+1} \to E_k$ occurring in the time interval $(0, t)$. Clearly, we have

$$M_k'(t) = \lambda P_k(t) \tag{167}$$

and

$$N'_{k+1}(t) = (k+1)\mu P_{k+1}(t). \tag{168}$$

Further it can easily be shown that

$$\int_0^\infty e^{-st} dM_k(t) = \frac{\gamma_k(s)}{1-\psi_k(s)} \tag{169}$$

and

$$\int_0^\infty e^{-st} dN_{k+1}(t) = \frac{\psi_k(s)}{1-\psi_k(s)}. \tag{170}$$

Comparing (168) and (170) we obtain

$$\psi_k(s) = \frac{(k+1)\mu \int_0^\infty e^{-st} P_{k+1}(t)\, dt}{1+(k+1)\mu \int_0^\infty e^{-st} P_{k+1}(t)\, dt}. \tag{171}$$

Hence, by (169) and (167),

$$\int_0^\infty e^{-sx} dG_k(x) = \gamma_k(s) = \frac{\lambda \int_0^\infty e^{-st} P_k(t)\, dt}{1+(k+1)\mu \int_0^\infty e^{-st} P_{k+1}(t)\, dt}, \tag{172}$$

further by (162)

$$\int_0^\infty e^{-sx} dH_k(x) = \frac{\psi_k(s)}{\gamma_k(s)} = \frac{(k+1)\mu \int_0^\infty e^{-st} P_{k+1}(t)\, dt}{\lambda \int_0^\infty e^{-st} P_k(t)\, dt}. \tag{173}$$

Using (165), the Laplace—Stieltjes transforms of $G_k(x)$ and $H_k(x)$ can be obtained explicitly. But it seems that the formulae obtained in this way are more complicated than the earlier similar formulae (cf. [28]). We shall now show that the expectations and variances in question can easily be determined by (172) and (173). Namely, we shall show that

$$\alpha_k = \frac{\mathfrak{P}_k}{\lambda P_k}, \tag{174}$$

$$\beta_k = \frac{1-\mathfrak{P}_k}{\lambda P_k}, \tag{175}$$

$$\sigma^2_{\alpha,k} = \alpha_k\left(2\frac{R_k}{P_k} + \alpha_k\right) - 2\frac{R_0+R_1+\cdots+R_k}{\lambda P_k} \tag{176}$$

and

(177) $$\sigma^2_{\beta,k} = \beta_k \left(2\frac{R_k}{P_k} - \beta_k\right) + 2\frac{R_0 + R_1 + \cdots + R_k}{\lambda P_k}$$

where

(178) $$P_j = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{j} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

and

(179) $$\mathfrak{P}_j = P_0 + P_1 + \cdots + P_j.$$

Further

(180) $$R_0 = -\frac{1}{\mu}\sum_{j=k}^{\infty} \frac{(-1)^{j-k}}{(j-k)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j-k}\left(\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{i}\right)$$

and

(181) $$R_j = P_j\left[\frac{R_0}{P_0} + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=0}^{j-1}\frac{\mathfrak{P}_i}{P_i} - \frac{1}{\lambda}\sum_{i=k}^{j-1}\frac{1}{P_i}\right].$$

To prove the above formulae let us introduce the quantities

$$R_j = \int_0^\infty [P_j(t) - P_j]\,dt \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

and

$$S_j = \int_0^\infty t[P_j(t) - P_j]\,dt \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots).$$

R_j and S_j exist because $\lim_{t\to\infty} P_j(t) = P_j$ and the convergence is of exponential type. Clearly, we have

(182) $$\int_0^\infty e^{-st} P_j(t)\,dt = P_j s^{-1} + R_j - S_j s + o(s)$$

if $s \to 0$.

Substituting (182) in formulae (172) and (173), by virtue of (163) and (164) we obtain that

(183) $$\alpha_k = \frac{1 + (k+1)\mu R_{k+1} - \lambda R_k}{\lambda P_k},$$

(184) $$\beta_k = \frac{\lambda R_k - (k+1)\mu R_{k+1}}{\lambda P_k},$$

(185) $$\sigma^2_{\alpha,k} = \alpha_k\left(2\frac{R_k}{P_k} + \alpha_k\right) - 2\frac{\lambda S_k - (k+1)\mu S_{k+1}}{\lambda P_k}$$

and

(186) $$\sigma^2_{\beta,k} = \beta_k\left(2\frac{R_k}{P_k} - \beta_k\right) + 2\frac{\lambda S_k - (k+1)\mu S_{k+1}}{\lambda P_k}$$

where we used that $(k+1)\mu P_{k+1} = \lambda P_k$.

We remark that by (158) and (159) we have

$$\varrho_k = \alpha_k + \beta_k = \frac{1}{\lambda P_k} \tag{187}$$

and

$$\sigma_k^2 = \sigma_{\alpha,k}^2 + \sigma_{\beta,k}^2 = 2\varrho_k \frac{R_k}{P_k} + \varrho_k(\alpha_k - \beta_k). \tag{188}$$

In the above formulae only R_j and S_j $(j=0,1,2,\ldots)$ are unknown. In order to determine R_j and S_j we observe that $P_j(t)$ $(j=0,1,2,\ldots)$ satisfy the following system of differential equations:

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = \Phi_j(t) - \Phi_{j-1}(t) \qquad (j=0,1,2,\ldots) \tag{189}$$

where

$$\Phi_j(t) = (j+1)\mu P_{j+1}(t) - \lambda P_j(t) \qquad (j=0,1,2,\ldots), \tag{190}$$

while $\Phi_{-1}(t) \equiv 0$. The initial conditions are

$$P_j(0) = \begin{cases} 1 & \text{if } j=k, \\ 0 & \text{if } j \neq k. \end{cases}$$

By (189) we get

$$\int_0^\infty \Phi_j(t)\,dt = \int_0^\infty \Phi_{j-1}(t)\,dt + P_j - P_j(0)$$

and by successive applications of this recurrence formula we obtain

$$\int_0^\infty \Phi_j(t)\,dt = \sum_{i=0}^{j} [P_i - P_i(0)].$$

It is easily seen that

$$(j+1)\mu R_{j+1} - \lambda R_j = \int_0^\infty \Phi_j(t)\,dt = \sum_{i=0}^{j} [P_i - P_i(0)] \tag{191}$$

and putting $j=k$ we get

$$(k+1)\mu R_{k+1} - \lambda R_k = \mathfrak{P}_k - 1. \tag{192}$$

Substituting (192) in (183) and (184) we obtain (174) and (175), respectively. Further by (189) we get also

$$\int_0^\infty t\,\Phi_j(t)\,dt = \int_0^\infty t\,\Phi_{j-1}(t)\,dt - R_j$$

and by successive applications of this formula we obtain

$$\int_0^\infty t\,\Phi_j(t)\,dt = -(R_0 + R_1 + \cdots + R_j).$$

Since

(193) $$(k+1)\mu S_{k+1}-\lambda S_k=\int_0^\infty t\,\Phi_k(t)\,dt=-(R_0+R_1+\cdots+R_k),$$

this proves (176) and (177) by virtue of (185) and (186), respectively.

Finally, it remains only to determine the unknown R_j $(j=0,1,2,\ldots)$. By (191) we obtain

(194) $$(j+1)\mu R_{j+1}-\lambda R_j=\begin{cases}\mathfrak{P}_j & (j=0,1,\ldots,k-1),\\ \mathfrak{P}_{j-1} & (j=k,k+1,\ldots)\end{cases}$$

and clearly

(195) $$\sum_{j=0}^{\infty} R_j=0.$$

The difference equation (194) can easily be solved (cf. CH. JORDAN [12]). Taking into consideration that $(j+1)\mu P_{j+1}=\lambda P_j$ from (194) we obtain

(196) $$\frac{R_{j+1}}{P_{j+1}}-\frac{R_j}{P_j}=\begin{cases}\dfrac{\mathfrak{P}_j}{\lambda P_j} & (j=0,1,\ldots,k-1),\\[2ex] \dfrac{\mathfrak{P}_j-1}{\lambda P_j} & (j=k,k+1,\ldots).\end{cases}$$

Summing up the above equations, we get

(197) $$\frac{R_j}{P_j}-\frac{R_0}{P_0}=\sum_{i=0}^{j-1}\frac{\mathfrak{P}_i}{\lambda P_i}-\sum_{i=k}^{j-1}\frac{1}{\lambda P_i}\qquad (j=1,2,\ldots)$$

what proves (181). Finally, R_0 can be determined by the aid of (195) or by the following way: Clearly

(198) $$P_0(t)=e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})}(1-e^{-\mu t})^k=\sum_{j=k}^{\infty}\frac{(-1)^{j-k}}{(j-k)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j-k}(1-e^{-\mu t})^j$$

and therefore

(199) $$R_0=\int_0^\infty [P_0(t)-P_0]\,dt=-\frac{1}{\mu}\sum_{j=k}^{\infty}\frac{(-1)^{j-k}}{(j-k)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j-k}\left(\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{i}\right)$$

what proves (180).

We remark, further, that the identities

$$\frac{\mathfrak{P}_j}{P_j}=\sum_{\nu=0}^{j}\nu!\binom{j}{\nu}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\nu}$$

and

$$\sum_{i=0}^{j}\frac{\mathfrak{P}_i}{P_i}=\sum_{\nu=0}^{j}\nu!\binom{j+1}{\nu+1}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\nu}$$

hold which may be applied in the formulae (174), (175), (176) and (177).

MATHEMATICAL INSTITUTE
OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

(Received 26 November 1957)

References

[1] V. E. Beneš, A sufficient set of statistics for a simple telephone exchange model, *Bell System Technical Journal*, **36** (1957), pp. 939—964.

[2] V. E. Beneš, Fluctuations of telephone traffic, *Bell System Technical Journal*, **36** (1957), pp. 965—973.

[3] D. Blackwell, A renewal theorem, *Duke Math. Journal*, **15** (1948), pp. 145—150.

[4] J. W. Cohen, The full availability group of trunks with an arbitrary distribution of the inter-arrival times and a negative exponential holding time distribution, *Simon Stevin Wis-en Natuurkundig Tijdschrift*, **31** (1957), pp. 169—181.

[5] A. K. Erlang, Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges, *Post Office Electrical Engineer's Journal*, **10** (1918), pp. 189—197.

[6] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications* (New York, 1950).

[7] R. Fortet, Random functions from a Poisson process, *Proc. Second Berkeley Symposium on Math. Stat. and Probability*, (1951), pp. 373—385.

[8] R. Fortet, Random distributions with an application to telephone engineering, *Proc. Third Berkeley Symposium on Math. Stat. and Probability*, **2** (1956), pp.81—88.

[9] F. G. Foster, On the stochastic matrices associated with certain queueing processes, *Annals of Math. Stat.*, **24** (1953), pp. 355—360.

[10] A. Khintchine, Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse, *Math. Annalen*, **109** (1934), pp. 604—615.

[11] A. Я. Хинчин, Математические методы теории массового обслуживания, Труды Математического Института им В. А. Стеклова, **49** (1955).

[12] Ch. Jordan, *Calculus of finite differences* (Budapest, 1939).

[13] A. H. Колмогоров и Ю. В. Прохоров, О суммах случайного числа случайных слагаемых, Усп. Мат. Наук, **4** (1949), вып. 4, pp. 168—172.

[14] L. Kosten, On the validity of the Erlang and Engset loss-formulae, *Het P. T. T. Bedrijf*, **2** (1948-49), pp. 42—45.

[15] L. Kosten, On the accuracy of measurements of probabilities of delay and of expected times of delay in telecommunication systems. I, *Applied Scientific Research* B, **2** (1951), pp. 108—130, and II, **2** (1952), pp. 401—415.

[16] L. Kosten, The historical development of the theory of probability in telephone traffic engineering in Europe, *Teleteknik*, **1** (1957), pp. 32—40.

[17] C. Palm, Analysis of the Erlang traffic formulae for busy-signal arrangements, *Ericsson Technics*, No. 4 (1938), pp. 39—58.

[18] C. Palm, Intensitätsschwankungen im Fernsprechverkehr, *Ericsson Technics*, No. 44 (1943), pp. 1—189.

[19] F. Pollaczek, Lösung eines geometrischen Wahrscheinlichkeitsproblems, *Math. Zeitschrift*, **35** (1932), pp. 230—278.

[20] F. Pollaczek, Généralisation de la théorie probabiliste des systèmes téléphoniques sans dispositif d'attente, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **236** (1953), pp. 1469—1470.

[21] A. Rényi, On some problems concerning Poisson processes, *Publ. Math. Debrecen*, **2** (1951), pp. 66—73.

[22] C. Ryll-Nardzewski, On the non-homogeneous Poisson processes, *Colloquium Math.*, **3** (1955), pp. 192—195.

[23] Б. А. Севастьянов, Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами, *Теория вероятностей и ее применения*, **2** (1957), pp. 106—116.

[24] W. L. Smith, Asymptotic renewal theorems, *Proc. of the Royal Society of Edinburgh* A, **64** (1954), pp. 9—49.

[25] W. L. Smith, Regenerative stochastic processes, *Proc. of the Royal Society* A, **232** (1955), pp. 6—31.

[26] L. Takács, On secondary processes generated by a Poisson process and their applications in physics, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **5** (1954), pp. 203—236.

[27] L. Takács, On secondary stochastic processes generated by recurrent processes, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **7** (1956), pp. 17—29.

[28] L. Takács, Some investigations concerning recurrent stochastic processes of a certain type (Hungarian, English summary), *MTA Alk. Mat. Int. Közl.*, **5** (1954), pp. 115—128.

[29] L. Takács, On some probability problems concerning the theory of counters, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **8** (1957), pp. 127—138.

[30] L. Takács, On certain sojourn time problems in the theory of stochastic processes, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **8** (1957), pp. 169—191.

[31] L. Takács, On a sojourn time problem, *Теория вероятностей и ее применения*, **2** (1957), pp. 61—69.

[32] L. Takács, On the generalization of Erlang's formula, *Acta Math. Acad. Sci. Hung*, **7** (1956), pp. 419–433.

[33] L. Takács, On a probability problem concerning telephone traffic, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **8** (1957), pp. 319—324.

[34] L. Takács, A telefon-forgalom elméletének néhány valószínűségszámítási kérdéséről, *MTA Mat. és Fiz. Oszt. Közl.*, **8** (1958), pp. 151—210.

[35] L. Takács, On the sequence of events, selected by a counter from a recurrent process of events, *Теория вероятностей и ее применения*, **1** (1956), pp. 90—102.

[36] A. Wald, Sequential tests of statistical hypotheses, *Annals of Math. Stat.*, **16** (1945), pp. 117—186.

OSCILLATION AND MONOTONITY THEOREMS CONCERNING NON-LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER

By

I. BIHARI (Budapest)

(*Presented by* P. TURÁN)

Introduction

There are known theorems stating the existence of an oscillating solution of a linear or non-linear differential equation of the second order and also theorems stating the monotonity of the amplitudes (SONIN's and PÓLYA's theorem). Only one will be quoted here: that of W. E. MILNE[1] concerning the non-linear equation

$$y''+\varphi(x)f(y)=0.$$

Let $\varphi(x)$ be a positive continuous increasing and bounded function for $x\geqq a$; the function $f(y)$ an increasing odd one and $f(y)\in \mathrm{Lip}\,(1)$ for $|y|\leqq b$. Taking a real value η $(0<|\eta|\leqq b)$ the theorem states for $x\geqq a$ the existence and uniqueness of a solution subjected to the initial conditions $y(a)=\eta$, $y'(a)=0$ and this solution oscillates infinitely often for $x\geqq a$, the amplitudes decrease but do not approach zero.

The present paper discusses the generalization of this theorem and certain comparison theorems of Sturmian type concerning the "half-waves", "quarter-waves", "amplitudes" (see below the explication of these expressions) and the distances of the zeros.

§ 1

One can raise the question what a condition imposed on the function $f(x, y, y')$ involves the existence of an oscillatory solution of the equation

(I) $$y''=f(x, y, y').$$

It will be shown here that the separability of the variables of $f(x, y, y')$ leads to such conditions. — We shall prove the following generalization of the above-mentioned theorem of W. E. MILNE:

THEOREM 1. *Suppose that in the non-linear differential equation*

(1) $$y''+\varphi(x)f(y)h(y')=0$$

[1] W. E. MILNE, A theorem of oscillation, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **28** (1922), pp. 102—104.

1. $\varphi(x) > 0$ *is continuous, increasing and bounded for* $x \geqq a$;

2. $f(y)$ *is an odd*[2] *non-decreasing function and* $f(y) \in \mathrm{Lip}\,(1)$ *for* $|y| \leqq b$;

3. $h(u) > 0$ *is non-decreasing for* $u \leqq 0$ *and non-increasing for* $u \geqq 0$, *further* $h(u) \in \mathrm{Lip}\,(1)$ *for all* u;[3] *then equation* (1) *has a unique solution subjected to the initial conditions* $y(a) = \eta$, $y'(a) = 0$ $(0 < |\eta| \leqq b)$; *this solution exists for all* $x \geqq a$, *oscillates an infinite number of times, the amplitudes decrease but do not approach zero and* y' *remains bounded too.*

PROOF. Being $f(x, y, u) = \varphi(x) f(y) h(u)$ continuous in the domain $x \geqq a, |y| \leqq b$ and u arbitrary, the existence of the desired solution in a certain right-hand neighbourhood of a is already clear. In order to prove the uniqueness of the solution, we shall show that the function $f(x, y, u) = \varphi(x) f(y) h(u)$ satisfies in y and u a Lipschitz condition for $|y| \leqq b$ (u arbitrary and $x \geqq a$).

On account of 2 and 3,

$$|f(x, y_2, u_2) - f(x, y_1, u_1)| = \varphi(x)\,|f(y_2)h(u_2) - f(y_1)h(u_1)| \leqq$$
$$\leqq \varphi(x)\,|f(y_2) - f(y_1)|\,h(u_1) + |f(y_2)|\,|h(u_2) - h(u_1)| \leqq$$
$$\leqq \varphi(x)(K_1|y_2 - y_1|\,h(0) + K_2|u_2 - u_1|\,f(b)) \leqq M(|y_2 - y_1| + |u_2 - u_1|),$$

where $M = L \max\,(K_1 h(0), K_2 f(b))$ and L is the least upper bound of $\varphi(x)$, i. e. $L = \lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$, further $|y_1| \leqq b$, $|y_2| \leqq b$, u_1 and u_2 are arbitrary, K_1 and K_2 are the Lipschitz constants of $f(y)$ and $h(u)$, respectively. We must show the existence of the solution for all $x \geqq a$. Equation (1) may be written in the form

$$\frac{y' y''}{h(y')} + \varphi(x) f(y) y' = 0. \tag{1'}$$

By means of the notations

$$\int_0^y f(t)\,dt = F(y), \qquad \int_0^u \frac{t}{h(t)}\,dt = H(u) \quad (H(\pm\infty) = +\infty)$$

this can be written as follows:

$$\frac{dH(y')}{dx} + \varphi(x)\frac{dF(y)}{dx} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{1}{\varphi(x)}\frac{dH(y')}{dx} + \frac{dF(y)}{dx} = 0.$$

[2] In order to prove the oscillating character of the solution, it is sufficient to assume instead of "$f(y)$ is odd" that $\operatorname{sg} f(y) = \operatorname{sg} y$.

[3] E. g. $h(u)$ may be an even function decreasing for $u \geqq 0$.

Hence, making use of Stieltjes integral, we obtain the following two equations:

(2) $$H(y')+\varphi(x)F(y)=\int_a^x F(y)\,d\varphi(x)+\varphi(a)\,F(\eta),$$

(3) $$\frac{H(y')}{\varphi(x)}+F(y)=-\int_a^x \frac{H(y')}{\varphi(x)^2}\,d\varphi(x)+F(\eta).$$

The function $F(y)$ is positive for $y \neq 0$, $F(0)=0$ and $F(y)$ is an even function and increasing for $y>0$. The function $H(u)$ is positive, except at $u=0$ where $H(0)=0$, and $H(u)$ is increasing for $u \geqq 0$.

With regard to (2) and (3) the first of the functions

$$P(x)=H(y')+\varphi(x)F(y), \quad Q(x)=\frac{H(y')}{\varphi(x)}+F(y)=\frac{P(x)}{\varphi(x)}$$

is obviously increasing, the second one is decreasing.

The solution $y(x)$ in question cannot attain for $x>a$ the boundary $y=\pm b$ of the domain D $(x \geqq a,\ |y| \leqq b,\ u$ arbitrary). For, if a_1' is the next point where $y(a_1')=\pm\eta$ (Fig. 1), then, by the monotonity of $Q(x)$,

$$Q(a)=F(\eta)>Q(a_1')=\frac{H(y'(a_1'))}{\varphi(a_1')}+F(\eta)$$

whence

$$0>\frac{H(y'(a_1'))}{\varphi(a_1')},$$

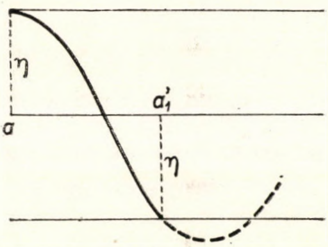


Fig. 1

and this is in contradiction to $H(u) \geqq 0$, $\varphi(x)>0$ also in the case when $y'(a_1')=0$. Therefore $y(x)$ cannot attain the value $\pm\eta$, still less the value $\pm b$.

Equation (1) assures that $y''(x)$ remains finite in every finite interval $[a, c]$ and even as $y'(x)$, being $y'=\int_a^x y''(t)\,dt$. Therefore the solution $y(x)$ may be continued for all $x \geqq a$, i. e. this exists for $x \geqq a$.

Otherwise, the monotonity of $Q(x)$ involves the boundedness of $|y'|$ for all $x \geqq a$, too.

Now we prove the oscillatory character of $y(x)$.

See e. g. the case $\eta>0$. Then considering (1) it is clear that at the place $x=a$ y'' is negative and remains this as long as y is positive. Since $y'=\int_a^x y''\,dx<0$ $(x>a)$, y decreases, its graph is concave downward with negative slope to the right of a (as long as y is positive) and therefore must cut the x axis at a finite point $x_1 > a$ (Fig. 2). In this point the derivative of $y(x)$ is $y_1' = \int_a^{x_1} y'' dx < 0$. To the right of x_1 the value y is negative and therefore (see (1)) $y'' > 0$ (the graph of y is convex downward), *moreover y'' increases* as long as y' is negative, because y' (which is < 0) is increasing and thus $h(y')$, too, and again by virtue of (1) y'', increases. Since $y' = y_1' + \int_{x_1}^{x} y'' dx$, y' must vanish for a finite value $x = a_1$ (otherwise y'' would be positive and increasing, $\int_{x_1}^{x} y'' dx$ would surpass $|y_1'|$ and y' would be positive without having been zero). Starting at the place $x = a_1$, $y = y(a_1) < 0$ we can arrive in the same manner at the succeeding zero x_2 and further at a maximum place a_2 (where $y'(a_2) = 0$), etc. Consequently, the oscillatory character for $x \geqq a$ is proved.[4] Zeros and only these are the points of inflexions. If $\eta < 0$, the proof follows exactly the same lines. Let the zeros, the places ($> a$) of the extrema and

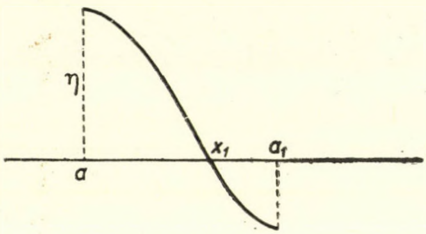


Fig. 2

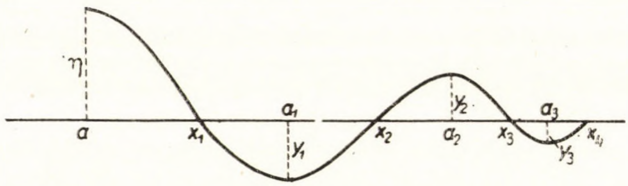


Fig. 3

the corresponding values at these be denoted by x_i, a_i and y_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, respectively. Let $|y_i|$ be called as "amplitudes" of $y(x)$, the graph of $y(x)$ belonging to $[x_i, x_{i+1}]$ as a "half wave", and that belonging to $[x_i, a_i]$ or $[a_i, x_{i+1}]$ as a "quarter-wave" (Fig. 3). Being $Q(x)$ decreasing and $y'(a) = y'(a_i) = 0$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, $H(0) = 0$, we have

$$F(y_i) > F(y_{i+1}) \quad \text{whence} \quad |y_i| > |y_{i+1}| \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

what indicates the decrease of the amplitudes;[5] but these do not approach

[4] Similarly, it may readily be seen that *all* the solutions of (1) have this character, provided that b is large enough compared to η.

[5] If $f(y)$ is like that in footnote [2], then the maxima form a decreasing sequence and similarly the minima form another one.

zero because owing to the increase of $P(x)$

$$\varphi(a)F(\eta) < \varphi(a_1)F(y_1) < \varphi(a_2)F(y_2) < \cdots < \varphi(a_n)F(y_n) < \cdots,$$

$$F(y_n) > \frac{\varphi(a)}{\varphi(a_n)} F(\eta) > \frac{\varphi(a)}{L} F(\eta) \qquad (L = \lim_{x \to +\infty} \varphi(x)).$$

COROLLARIES.

1. At places of equal $|y|$ (not only at zeros) the sequence $\frac{H(y')}{\varphi(x)}$ is decreasing.

2. At places characterized by equal $\frac{H(y')}{\varphi(x)}$ the values $|y|$ decrease.

3. At places of equal y' the values $\varphi(x)F(y)$ increase. If $h(u)$ is an even function, these values corresponding to equal $|y'|$ are increasing too.

4. At zeros and at places of equal $\varphi(x)F(y)$ of the ascending branchs of the curve of y, the values y' increase. A similar statement is valid for the descending branchs. If $h(u)$ is even, $|y'|$ increases at places of equal $\varphi(x)F(y)$.

5. On account of the decrease of $Q(x)$ we obtain

$$F(\eta) > \frac{H(y_1')}{\varphi(x_1)} > F(y_1) > \frac{H(y_2')}{\varphi(x_2)} > F(y_2) > \cdots \qquad (y_i' = y'(x_i)).$$

This is the relation between the amplitudes and the slopes at the neighbouring zeros.

6. Being $P(x)$ increasing we get $\varphi(a)F(\eta) < H(y_1') < \varphi(a_1)F(y_1) < < H(y_2') < \varphi(a_2)F(y_2) < \cdots$.

7. In the case of MILNE's theorem $h(u) \equiv \text{const}$

$$P(x) = \frac{y'^2}{2} + \varphi(x)F(y), \quad Q(x) = \frac{y'^2}{2\varphi(x)} + F(y)$$

and considering the linear equation $y'' + \varphi(x)y = 0$ $(f(y) \equiv y, h(u) = \text{const})$

$$P(x) = \frac{y'^2}{2} + \varphi(x)\frac{y^2}{2}, \quad Q(x) = \frac{P(x)}{\varphi(x)}$$

and some of the above formulae will be simplified.

8. Assumption $\varphi(x) = k = \text{const} > 0$ is possible too. In this case the functions $P(x)$ and $Q(x)$ remain constant, therefore the amplitudes, the values $H(y')$ at zeros and at places of equal y remain constant too, consequently all the "half-waves" are congruent, *finally $y(x)$ is periodic* and y' is bounded.[6] If $h(u)$ is even, all the half-waves are symmetrical relative to their centres.

[6] If $f(y)$ is like that in footnote [2], then the maxima are equal and the minima too, but their absolute values may be different.

Provided that $\varphi(x) = k = \text{const} > 0$, equation (1) will be of the form

$$y'' + kf(y)h(y') = 0$$

and from this

$$H(y') + kF(y) = c = kF(\eta),$$

hence denoting the inverse function of $H(u)$ by $H^{-1}(u)$ (it is a bivalent function)

$$y' = H^{-1}(k(F(\eta) - F(y))),$$

therefore

$$I(y) = \int\limits_{\eta}^{y} \frac{du}{H^{-1}(k[F(\eta) - F(u)])} = x - a.$$

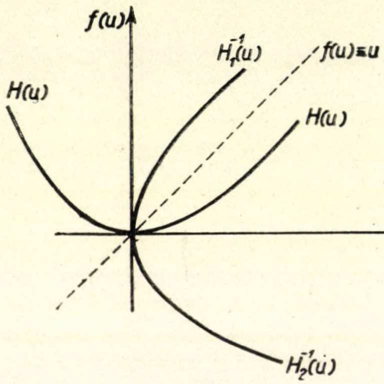


Fig. 4

According to the above theorem, *the solution of this equation* (the inverse function) *exists for all $x \geqq a$ and it is periodic. If $h(u)$ is even, all the half-waves are symmetrical to their centres.* Let the inverse of the function $H(u)$ be denoted by $H_1^{-1}(u)$ for $u \geqq 0$ and by $H_2^{-1}(u)$ for $u \leqq 0$ (Fig. 4). Then

$$x_1 - a = \int\limits_{\eta}^{0} \frac{dy}{H_2^{-1}(k[F(\eta) - F(y)])}, \quad a_1 - x_1 = \int\limits_{0}^{-\eta} \frac{dy}{H_2^{-1}(k[F(\eta) - F(y)])}.$$

Similarly

$$x_2 - a_1 = \int\limits_{-\eta}^{0} \frac{dy}{H_1^{-1}(k[F(\eta) - F(y)])}, \quad a_2 - x_2 = \int\limits_{0}^{\eta} \frac{dy}{H_1^{-1}(k[F(\eta) - F(y)])}$$

etc. The length of a period is

$$p = a_2 - a = \int\limits_{-\eta}^{\eta} \frac{dy}{H_1^{-1}(\cdots)} + \int\limits_{\eta}^{-\eta} \frac{dy}{H_2^{-1}(\cdots)}.$$

Let $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$ be denoted by k, then we see that *the solution of* (1) *in question tends to the above periodic function and the distance of two consecutive zeros tends to* $\frac{p}{2}$ *(moreover decreasing as we shall show later) as* $x \to +\infty$. See, for example, the equation

$$y'' + ky\frac{1}{1 + y'^2} = 0 \qquad (k > 0).$$

We get herefrom

$$I(y) = -\int_{\eta}^{y} \frac{du}{\sqrt{-1+\sqrt{1+2k(\eta^2-u^2)}}} = x - a \qquad (a \leqq x \leqq a_1).$$

Introducing the notation $\sqrt{1+2k\eta^2} = K$ and carrying out the transformation $1 - \frac{2k}{K^2} u^2 = v^2$

$$I(y) = \frac{K}{\sqrt{2k}} \int_{1/K}^{v_y} \frac{v\,dv}{\sqrt{1-v^2)(Kv-1)}} = x - a \quad (a \leqq x \leqq x_1), \quad v_y = \frac{\sqrt{1+2k(\eta^2-y^2)}}{K}.$$

This integral is an elliptic one and its inverse is an elliptic doubly periodic function and the theorem states that one of the periodes is real, etc., and we recognize all these without the explicit form of the solution. As another example we take the equation

$$y'' + kye^{-y'^2} = 0 \qquad (k > 0).$$

Hence

$$I(y) = -\int_{\eta}^{y} \frac{du}{\sqrt{\log(1+k\eta^2 - ku^2)}} = x - a \qquad (a \leqq x \leqq x_1).$$

The above statements are valid here too and this is already more interesting because otherwise there is very little known about this function.

§ 2

Take now the general form of the explicit differential equation of the second order

(1) $$y'' = f(x, y, y').$$

It will be formulated here an *oscillation theorem* concerning this:

THEOREM 2. *Let $f(x, y, u)$ be defined for $x \geqq a$ and for arbitrary y and u with the following properties:*

1. *$f(x, y, u)$ is continuous and* $\operatorname{sg} f(x, y, u) = -\operatorname{sg} y$;
2. *$f_x(x, y, u)$, $f_y(x, y, u)$, $f_u(x, y, u)$ exist and are continuous;*
3. $\operatorname{sg} f_x = -\operatorname{sg} y$;
4. $f_y(x, y, u) < 0$ *and* $f_u(x, y, u) \begin{cases} > 0 & \text{if} \quad \operatorname{sg} u = \operatorname{sg} y \neq 0, \\ = 0 & \text{if} \quad y = 0, \\ < 0 & \text{if} \quad \operatorname{sg} u = -\operatorname{sg} y \neq 0 \end{cases} \quad (x \geqq a);$

5. *let $f(x, y, u)$ satisfy the Nagumo condition, i. e. let a continuous positive function $\Phi(u)$ $(u \geqq 0)$ exist satisfying the conditions*

$$|f(x, y, u)| \leqq \Phi(|u|) \quad and \quad \int_0^\infty \frac{u}{\Phi(u)} du = +\infty;$$

then there exists for $x \geqq a$ a unique solution of (1) *satisfying the initial conditions $y(a) = \eta \neq 0$, $y'(a) = 0$ and oscillating an infinite number of times.*

The proof follows exactly the same lines as in § 1. The theorem of NAGUMO[7] assures the existence of the solution for $x \geqq a$ stating the boundedness of y'. (The question arises whether there exist at all functions $f(x, y, u)$ satisfying 1—5. The function $f(x, y, u) = -\varphi(x) f(y) h(u)$ of § 1 is an example for a function of this kind. Another example is $f(x, y, u) = -\varphi(x)\frac{y^3}{y^2 + y'^2}$ $(|y| \leqq b)$. The corresponding equation[8] has an oscillatory solution etc.) The increase and decrease of y'' in the right-hand neighbourhood of the zeros x_1 and x_2, respectively (see Figures 2—3), are to read off from the formula $y''' = f_x + f_y y' + f_{y'} y''$ in which all the terms of the right member are positive or negative, respectively. It is easy to see, even as in the linear case, that the zeros cannot have a finite limit point. If we restrict y by $|y| \leqq b$ $(b > 0)$, then the graph of y can leave the domain $x \geqq a$, $|y| \leqq b$ attaining the boundary $y = -b$ (supposed $\eta > 0$) and we cannot assert its further existence.

§ 3

Theorem 1 may be extended to the equation

$$(1) \qquad y'' + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) f_i(y) h_i(y') = 0$$

where the functions φ_i, f_i, h_i have the same properties as in § 1. Theorem 2 cannot be applied here immediately without any hypothesis on the derivability of the functions φ_i, f_i, h_i. In general, it seems to be impossible to find the analogues of the functions $P(x)$ and $Q(x)$. Let the restriction

$$h_1 \equiv h_2 \equiv h_3 \equiv \cdots \equiv h_n \equiv h(y')$$

be assumed. Then

$$\frac{y' y''}{h(y')} + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) f_i(y) y' = 0$$

[7] M. NAGUMO, Über die Differentialgleichung $y'' = f(x, y, y')$, *Proc. of the Phys.-math. Soc. of Japan* (3), **19** (1937), pp. 861—865.

[8] See the discussion of this equation in a forthcoming paper of the author.

and with the notations

$$F_i(y)=\int_0^y f_i(t)\,dt, \quad H(u)=\int_0^u \frac{t}{h(t)}\,dt$$

we have

$$\text{(2)} \qquad \frac{dH(y')}{dx}+\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x)\frac{dF_i(y)}{dx}=0$$

whence, making use of Stieltjes integral,

$$H(y')+\sum\varphi_i(x)F_i(y)=\sum\int_a^x F_i(y)\,d\varphi_i(x)+\sum\varphi_i(a)F_i(\eta).$$

Thus the function

$$P(x)=H(y')+\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x)F_i(y)$$

is increasing, and similar conclusions may be made as in § 1. Without further restriction one cannot find the analogue of the function $Q(x)$. If one of the functions $\varphi_i(x)$, say $\varphi_1(x)$, is more quickly increasing, then the other ones, i. e. $\frac{\varphi_i(x)}{\varphi_1(x)}$, are decreasing for $i=2, 3, \ldots, n$, then from (2)

$$\frac{1}{\varphi_1(x)}\frac{dH(y')}{dx}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i(x)}{\varphi_1(x)}\frac{dF_i(y)}{dx}=0,$$

and so we obtain by integration

$$\frac{H(y')}{\varphi_1(x)}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i(x)}{\varphi_1(x)}F_i(y)=-\int_a^x H(y')\frac{1}{\varphi_1(x)^2}\,d\varphi_1(x)+\sum\int_a^x F_i(y)\,d\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_1}\right)+$$
$$+\sum\frac{\varphi_i(a)}{\varphi_1(a)}F_i(\eta).$$

Clearly, the function

$$Q(x)=\frac{H(y')}{\varphi_1(x)}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i(x)}{\varphi_1(x)}F_i(y)$$

is decreasing. In this case we cannot state the decrease of the amplitudes (however, see this problem later), only the decrease of the sequence $\sum\frac{\varphi_i(x)}{\varphi_1(x)}F_i(y)$ formed at the amplitudes, etc.

The equation

$$\text{(3)} \qquad \frac{d}{dx}(p(x)y')+q(x)f(y)h(p(x)y')=0$$

may be written by the transformation $\xi=\int\limits_a^x \frac{dx}{p(x)}$ in the form

$$\frac{d^2\bar{y}}{d\xi^2}+\bar{p}(\xi)\bar{q}(\xi)f(\bar{y})h\left(\frac{d\bar{y}}{d\xi}\right)=0 \tag{3'}$$

where $\bar{y}$, $\bar{p}$, $\bar{q}$ mean y, p, q as functions of ξ. Since $p(x)$ must have a constant sign (see the above transformation), $p(x)$ must be positive (in the opposite case ξ would be negative for $x>a$). Being

$$\frac{d(\bar{p}\bar{q})}{d\xi}=\frac{d(pq)}{dx}\frac{dx}{d\xi}=\frac{d(pq)}{dx}p,$$

Theorem 1 may be applied:

THEOREM 1′. *Let the functions $p(x)$ and $q(x)$ be positive continuous, pq increasing and bounded for $x\geqq a$, further let $f(y)$ and $h(u)$ be the same as in § 1, then the same is true as under conditions of Theorem 1. The inflexions are not necessarily on the x axis.*

The function $P(x)=H(py')+pqF(y)$ is increasing and $Q(x)=$ $=\frac{H(py')}{pq}+F(y)$ is decreasing and the results of § 1 hold concerning these functions.

In the linear case

$$P(x)=\frac{(py')^2}{2}+pq\frac{y^2}{2},\quad Q(x)=\frac{(py')^2}{2pq}+\frac{y^2}{2}.$$

$Q(x)$ is the function used in proving the SONIN—PÓLYA theorem. This is thus included in the above theorem.

The equation

$$\frac{d}{dx}(py')+\sum_{i=1}^{n}q_i(x)f_i(y)h_i(py')=0$$

may be discussed similarly.

§ 4

Let us consider again the equation

$$y''+\varphi(x)f(y)\,h(y')=0 \tag{1}$$

with the premises of § 1 and the graph of the solution obtained there.

THEOREM 3. *If $h(u)$ is an even function, then regarding equal values of y (equal levels) on a half-wave, the slope $|y'|$ is greater to the right of the maximum (extremum) point than to the left of it. Consequently, the symmet-*

rical of the left-hand quarter-wave to the ordinate $x = x_m$ of the extremum will lie entirely above the right-hand quarter-wave (Fig. 5), *hence its area is greater too, finally*

$$x_m - x_1 > x_2 - x_m.$$

PROOF. Equation (1) may be written in the form

$$\frac{dH(y')}{dx} = -\varphi(x)f(y)y'. \tag{2}$$

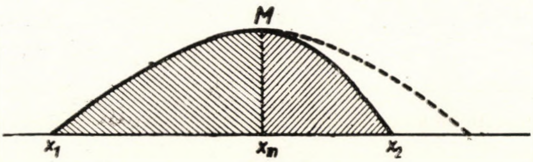


Fig. 5

The coordinates and the derivative of the left-hand branch will be denoted by x, y and y', and those of the right-hand branch by ξ, η and η', respectively. Then (2) relates to the left-hand branch and

$$\frac{dH(\eta')}{d\xi} = -\varphi(\xi)f(\eta)\eta' \tag{3}$$

to the right-hand one.

Integrating (2) as a function of x from x_0 to x_m and (3) as a function of ξ from ξ_0 to x_m, we have (being $H(0) = 0$) (Fig. 6)

$$H(y_0') = \int_{x_0}^{x_m} \varphi(x)f(y)y'\,dx = \int_{y_0}^{y_m} \varphi(x)f(y)\,dy \qquad (y_0' = y'(x_0))$$

and

$$H(\eta_0') = \int_{\xi_0}^{x_m} \varphi(\xi)f(\eta)\eta'\,d\xi = \int_{\eta_0}^{y_m} \varphi(\xi)f(\eta)\,d\eta \qquad (\eta_0' = \eta'(\xi_0)),$$

respectively. The variables of the integration of the right sides (i. e. y and η) pass the same interval (y_0, y_m), but ξ passes the interval (x_m, ξ_0) and x the interval (x_0, x_m). On account of the monotonity of $\varphi(x)$, there will be on the same level $0 \leqq y_0 = \eta_0 \leqq y_m$

$$H(\eta_0') > H(y_0')$$

and, being $H(u)$ an even function,

$$|\eta_0'| > |y_0'|.$$

The further conclusion is obvious.

The case of MILNE's theorem and that of the linearity are included too.

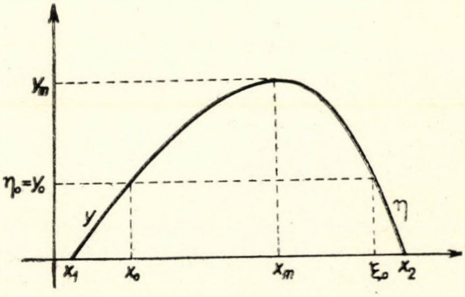


Fig. 6

§ 5

THEOREM 4. *Holding the premises of the previous § but omitting the restriction $h(-u)=h(u)$ it will be proved that a quarter-wave lying before a zero may be brought by a rotation of 180° or —180° around the common endpoint quite over the succeeding half-wave, i. e.* (Fig. 7) *the arc $\widehat{AM}'$ is outside of the area bounded by the arc $\widehat{ANB}$ and the part $\overline{AB}$ of the x axis:*

$$|y(x_2-u)|>|y(x_2+u)| \qquad (0<u\leqq \min(x_2-x_M, x_3-x_2)).$$

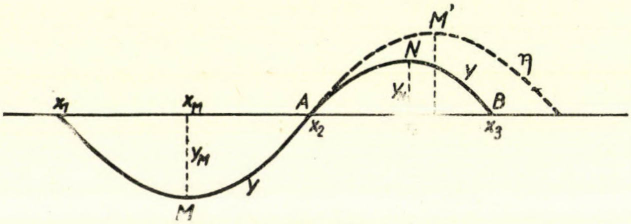


Fig. 7

Here x_M is the abscissa of the point M, x_N is that of the point N. Placing the origin in x_2 (carrying out a linear transformation) the form of the equation will not be changed. Let e. g. $y(x)$ be the left-hand half-wave under the x axis and let the ordinate of the rotated half-wave be denoted by $\eta(x)$ as a function of x. Then

$$\eta(x)=-y(-x), \quad \eta'(x)=y'(-x), \quad \eta''(x)=-y''(-x)$$

whence

$$y(x)=-\eta(-x), \quad y'(x)=\eta'(-x), \quad y''(x)=-\eta''(-x).$$

Writing these in the equation

$$(1) \qquad y''+\varphi(x)f(y)h(y')=0$$

we have

$$-\eta''(-x)+\varphi(x)f(-\eta(-x))h(\eta'(-x))=0.$$

Putting here $-x$ instead of x and taking into account that $f(-\eta)=-f(\eta)$ we obtain as an equation satisfied by $\eta(x)$

$$(2) \qquad \eta''(x)+\varphi(-x)f(\eta)h(\eta')=0.$$

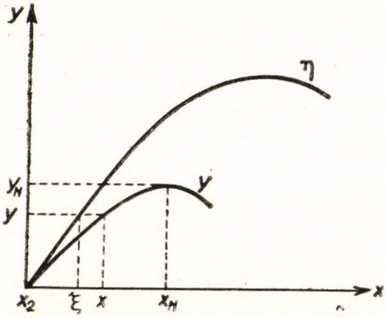


Fig. 8

Now it will be proved that on the same level $(y=\eta)$ $\eta'>y'$ from the level $y=\eta=0$ up to the level $\eta=y=y_N$ where $y_N=y(x_N)$ (Fig. 8). Equations (1) and (2) may be written, denoting the abscissae by x and ξ, in the form

$$\frac{dH(y')}{dx} = -\varphi(x)f(y)y' \tag{1'}$$

and

$$\frac{dH(\eta')}{d\xi} = -\varphi(-\xi)f(\eta)\eta', \tag{2'}$$

respectively. Integrating from 0 to the common level $y=\eta \leqq y_N$ and taking into consideration that $y'(0)=\eta'(0)=y_0$, we obtain

$$H(y') = H(y_0') - \int_0^x \varphi(x)f(y)y'\,dx = H(y_0') - \int_0^y \varphi(x)f(y)\,dy,$$

$$H(\eta') = H(y_0') - \int_0^\xi \varphi(-\xi)f(\eta)\eta'\,d\xi = H(y_0') - \int_0^y \varphi(-\xi)f(\eta)\,d\eta,$$

hence

$$H(\eta') - H(y') = \int_0^y [\varphi(x) - \varphi(-\xi)]f(y)\,dy,$$

but

$$\varphi(x) > \varphi(-\xi) \quad (x > x_2) \quad \text{and} \quad f(y) \geqq 0,$$

therefore $H(\eta') > H(y)$, consequently $\eta' > y'$ (being $\eta' > 0$, $y' > 0$) up to the level $y = y_N$, i. e.

$$|y(x_2-u)| > |y(x_2+u)| \qquad (0 < u \leqq \min(x_2 - x_M, x_3 - x_2)).$$

On this level $y'=0$, $\eta' > 0$ and η is still further increasing up to its maximum; thus its arc will be over that of y.

We shall prove, restricting $f(y)$, in § 7 that an extremum lying to the left of a zero is farther hereform than the extremum lying to the right of this zero, what means: the left-hand quarter-wave may be brought *quite* over the right-hand one; its area and "length" are greater. Similar facts will be stated concerning the half-waves too.

§ 6

Now we extend one of STURM's comparison theorems to the equations

$$y'' + \varphi(x)f(y)h(y') = 0, \tag{1}$$

$$\eta'' + \psi(x)f(\eta)h(\eta') = 0. \tag{2}$$

THEOREM 5. *We assume the following conditions:*

1. $\varphi(x)$ *and* $\psi(x)$ *are positive continuous increasing bounded functions in* $[a, b]$ *and* $\varphi(x) \geqq \psi(x)$ *but* $\varphi(x) \not\equiv \psi(x)$ *in any subinterval of* $[a, b]$, *further* $\varphi(x) - \psi(x) \geqq O(x-a)$, $x - a \to a+0$;

2. $f(u) \in \mathrm{Lip}\,(1)$, $f(u)$ *is increasing and* $\mathrm{sg}\, f(u) = \mathrm{sg}\, u$, $\dfrac{f(u)}{u} = O(1)$ $(u \to 0)$, *further* $\dfrac{f(u)}{u}$ *is non-increasing for* $u > 0$ *and non-decreasing for* $u < 0$ *(e. g.* $f(u) \equiv \mathrm{Arctg}\, u$*)*;

3. $h(u) > 0$ *is an even function non-increasing for* $u > 0$, *non-decreasing for* $u < 0$ *and* $h(u) \in \mathrm{Lip}\,(1)$;

4. *let* $y(x)$ *and* $\eta(x)$ *be oscillatory solutions of* (1) *and* (2), *respectively, and*

$$y(a) \geqq 0, \quad \eta(a) \geqq 0, \quad y'(a) > 0, \quad \eta'(a) > 0, \quad y(b) = 0,$$
$$\eta'(a)\, y(a) - y'(a)\, \eta(a) \geqq 0;$$

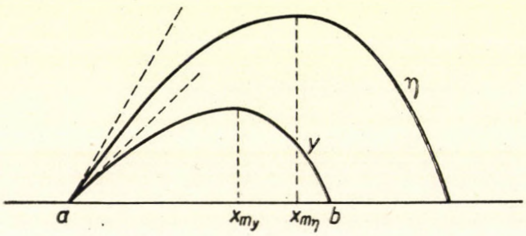


Fig. 9

then (Fig. 9) $\dfrac{\eta(x)}{y(x)}$ *is increasing in* $a < x \leqq b$ *and assuming* $\eta(a) \geqq y(a)$ *we have*

$$\eta'(x) > y'(x) \qquad (a < x < x_{m_\eta} + \delta)$$

and

$$x_{m_\eta} > x_{m_y},$$

where δ *is a certain positive number,* x_{m_η} *and* x_{m_y} *mean the abscissae of the first maximum points of* $\eta(x)$ *and* $y(x)$, *respectively, succeeding* a, *finally*

$$\eta(x) > y(x) \qquad (a < x \leqq b).$$

PROOF. It will be dealt with here only the case when

$$y(a) = \eta(a) = 0, \quad \eta'(a) \geqq y'(a) > 0.$$

The general case may be treated in the same way.

In the first place it will be shown that in a certain right-hand neighbourhood of a $\eta' > y'$ and so $\eta > y$. Applying the finite Taylor formula we have

$$\left.\begin{aligned} y(x) &= y'(a)(x-a) + \frac{1}{2} y''(a + \theta(x-a))(x-a)^2, \\ \eta(x) &= \eta'(a)(x-a) + \frac{1}{2} \eta''(a + \theta'(x-a))(x-a)^2 \end{aligned}\right\} \qquad (0 < \theta,\ \theta' < 1).$$

Being $\eta''(x)$, $y''(x)$ continuous (see (1) and (2))

$$\left.\begin{aligned} y(x) &= y'(a)(x-a) + o((x-a)^2), \\ \eta(x) &= \eta'(a)(x-a) + o((x-a)^2) \end{aligned}\right\} \qquad (x \to a+0) \quad (\text{being } \eta''(a) = y''(a) = 0)$$

and

$$\eta(x) - y(x) = (\eta'(a) - y'(a))(x-a) + o((x-a)^2) \qquad (x \to a+0).$$

Now we have two cases:

1. $\eta'(a) > y'(a)$, thus $\eta'(x) > y'(x)$ and $\eta(x) > y(x)$ for sufficiently small $x-a > 0$;

2. $\eta'(a) = y'(a)$, consequently

$$\eta(x) - y(x) = o((x-a)^2) \qquad (x \to a+0)$$

and we get similarly

$$\eta'(x) - y'(x) = o((x-a)) \qquad (x \to a+0).$$

By virtue of these and 2—3 we obtain

$$\left.\begin{aligned} |f(\eta(x)) - f(y(x))| \leqq K_1|\eta(x) - y(x)| = o((x-a)^2), \\ |h(\eta'(x)) - h(y'(x))| \leqq K_2|\eta'(x) - y'(x)| = o(x-a), \\ f(\eta(x)) = f(y(x)) + o((x-a)^2), \\ h(\eta'(x)) = h(y'(x)) + o(x-a), \\ f(\eta(x))h(\eta'(x)) = f(y(x))h(y'(x)) + o((x-a)^2) \end{aligned}\right\} \qquad (x \to a+0),$$

being $f(y(x)) = O(x-a)$. Therefore

$$\begin{aligned} \eta''(x) - y''(x) &= \varphi(x)f(y)h(y') - \psi(x)f(\eta)h(\eta') = \\ &= [\varphi(x) - \psi(x)]f(y)h(y') + o((x-a)^2) \qquad (x \to a+0) \end{aligned}$$

but

$$f(y) = O(x-a), \quad \varphi(x) - \psi(x) \geqq O(x-a) \qquad (x \to a+0),$$

consequently

$$\eta'' > y'',$$

hence

$$\eta' > y', \qquad \text{for sufficiently small } x-a > 0.$$

finally

$$\eta > y$$

It will easily be found from equations (1) and (2) that

$$\eta'' y - y'' \eta = \varphi(x)f(y)h(y')\eta - \psi(x)f(\eta)h(\eta')y$$

or

$$(\eta' y - y' \eta)' = \eta y \left(\varphi(x)\frac{f(y)}{y}h(y') - \psi(x)\frac{f(\eta)}{\eta}h(\eta')\right)$$

whence

$$\Delta(x) \equiv \eta' y - y' \eta = \int_a^x \eta y \left(\varphi(x)\frac{f(y)}{y}h(y') - \psi(x)\frac{f(\eta)}{\eta}h(\eta')\right)dx. \tag{3}$$

Taking 1—3 into consideration we have for sufficiently small $x-a > 0$ (at least as long as $\eta' \geqq y' \geqq 0$)

$$\Delta(x) \equiv \eta' y - \eta y' > 0.$$

We state that $\eta' > y'$ holds up to $x = \max(x_{m_\eta}, x_{m_y}) + \delta$ at least with some

$\delta > 0$. In the opposite case there would exist a first place c $(a<c<b)$ where

$$\eta'(c) = y'(c), \quad \eta(c) > y(c) > 0$$

and

$$\Delta(c) = \eta'(c)y(c) - y'(c)\eta(c) > 0,$$

what is a contradiction, provided that $\eta'(c) = y'(c) \geqq 0$. Therefore $x_{m_\eta} > x_{m_y}$ and $\eta' > y'$ for $a < x < x_{m_\eta} + \delta$ and $c > x_{m_\eta}$ when c exists at all.

See now the sign of $\Delta(x)$. This could be negative only for $x > x_{m_\eta}$. We state that $\Delta(x)$ remains non-negative at least up to b. In the opposite case there would be a first place d $(x_{m_\eta} < c < d < b)$ where

$$\frac{\eta'(d)}{\eta(d)} = \frac{y'(d)}{y(d)}, \quad \eta'(d) < 0, \quad y'(d) < 0$$

hold but $\Delta(x) = y\eta\left(\frac{\eta'}{\eta} - \frac{y'}{y}\right) < 0$ in a certain right-hand neighbourhood of d. $\frac{\eta}{y}$ increases up to d, thus $\eta(d) > y(d) > 0$, $|\eta'(d)| > |y'(d)|$, consequently the integrand of (3) is positive at d and in some right-hand neighbourhood of it. Therefore

$$\Delta(x) = \int_a^d \cdots + \int_d^x \cdots = \int_d^x \cdots > 0 \qquad (x > d),$$

what is in contradiction to the definition of d. Moreover $\Delta(d) > 0$. For, if $\Delta(d) = 0$, the function $\Delta(x)$ has a minimum at d where $\Delta'(x)$ (the integrand of (3) at $x = d$) must vanish in contradiction to the above statement. Thus the theorem is proved.

We cannot decide whether or not η' remains greater than y' for $a < x \leqq b$. Assuming $\eta'(a) > y'(a)$ the functions $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ may be identical, i. e. *a solution of* (1) *having a greater initial slope remains greater up to b, provided that at least one of* $\frac{f(y)}{y}$ *and* $h(u)$ *is strictly monotone.*

§ 7

Now we can solve the problem of the quarter and half-waves. We shall prove the following

THEOREM 6.[9] *All the half-waves of the solution, obtained in § 1, of the equation*

$$(1) \qquad y'' + \varphi(x)f(y)h(y') = 0$$

[9] This is a generalization of a theorem of E. MAKAI concerning the linear equation $y'' + \varphi(x)y = 0$: On a monotonity property of certain Sturm—Liouville functions, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **3** (1952), pp. 165—172.

may be rotated (in the sense of § 5) over the succeeding one (see Fig. 7), *provided that the premises of § 6 hold, further one of $D_+\varphi(x)$ and $D_-\varphi(x)$ is positive at every place $x \geqq a$ ($D_\pm\varphi(x)$ mean the one-sided derivatives). A similar statement is valid concerning the quarter-waves too (without supposing that $h(u)$ is even).*

PROOF. As we have seen, placing the common endpoint in the origin, the ordinates of the rotated curve satisfy the equation

$$\eta'' + \varphi(-x) f(\eta) h(\eta') = 0. \tag{2}$$

Let e. g. the left-hand half-wave be under the x axis. Now we have

$$\eta'(a) = y'(a) > 0, \quad \eta(a) = y(a) = 0, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\eta(x)}{y(x)} = 1, \quad \varphi(x) > \varphi(-x) \quad (x > a)$$

and

$$\varphi(x) - \varphi(-x) = \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} + \frac{\varphi(0) - \varphi(-x)}{x} \right) x$$

but

$$\lim_{x\to +0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = D_+\varphi(0) \quad \text{and} \quad \lim_{x\to +0} \frac{\varphi(0) - \varphi(-x)}{x} = D_-\varphi(0),$$

thus $\varphi(x) - \varphi(-x) \geqq O(x)$ $(x \to +0)$ and Theorem 5 can be applied whereby Theorem 6 is proved.

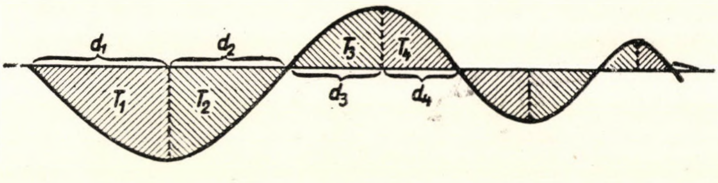


Fig. 10

Denoting the areas and "lengths" of the successive quarter-waves by T_i and d_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, respectively, we have (Fig. 10)

$$T_1 > T_2 > T_3 > \cdots,$$

$$d_1 > d_2 > d_3 > \cdots \quad \text{(convexity of the zeros).}$$

Of course, all these are valid in the MILNE's case and in the linear case, too. Simultaneously, the present proof is a new one concerning the decrease of the amplitudes too (although making use of more restrictive conditions).

§ 8

Consider again the equation of § 3

$$(1)\qquad (py')' + qf(y)h(py') = 0$$

with the premises assumed there and further let us assume $\frac{f(u)}{u}$ to be as in § 6 and $p(x)$ a *decreasing* function. Then the decrease of the area of the *half*-waves holds.

Namely, as we have seen in § 3, by the transformation $\frac{dx}{p} = d\xi$ equation (1) will be of the form

$$(2)\qquad \frac{d^2\bar{y}}{d\xi^2} + \bar{p}\bar{q}f(\bar{y})h\left(\frac{d\bar{y}}{d\xi}\right) = 0.$$

The results of § 7 concerning $\bar{y}(\xi)$ hold, i. e. denoting the zeros of $\bar{y}(\xi)$ by $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ and those of $y(x)$ by $x_1, x_2, x_3, \ldots$, the sequence

$$\left| \int\limits_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \bar{y}(\xi) d\xi \right| = \left| \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} y(x) \frac{1}{p(x)} dx \right| \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

is decreasing. Omitting the increasing factor $\frac{1}{p(x)}$ the sequence $\left| \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} y(x) dx \right|$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ is a fortiori decreasing.

We cannot decide in this way whether over-rotation of the half-waves is possible or not, because by the above transformation the distances of the zeros increase compared to the corresponding ones of $\bar{y}(\xi)$, hence the distances in question can be increased too (while the amplitudes remain decreasing). Proofs and results of §§ 4—7 may be extended to the equation

$$y'' + \sum \varphi_i(x) f_i(y) h_i(y') = 0$$

inclusive the decrease of the amplitudes *what we could not prove in § 3.* STURM's theorem can also be formulated and proved. The above Sturm theorem may otherwise be extended to the equations

$$y_i'' + \varphi_i(x) f_i(y_i) h_i(y_i') = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

with different φ_i, f_i and h_i, but we do not deal with this.

§ 9

The question arises how STURM's comparison theorem will be formed concerning the equation

$$(1)\qquad (py')' + q(x)f(y)h(py') = 0.$$

Holding the premises already often used relative to p, q, $f(u)$, $\frac{f(u)}{u}$, $h(u)$ and the initial conditions of § 6 we have for the solutions y_1 and y_2 of the equations

$$(py_i')' + q_i f(y_i) h(py_i') = 0 \qquad (q_2 \geqq q_1)$$
$$(i = 1, 2)$$

(but not identically in any interval) the inequalities

$$y_1' > y_2' \qquad (a < x \leqq x_{m_\eta} + \delta),$$
$$x_{m_\eta} > x_{m_y},$$
$$y_1 > y_2 \qquad (a < x \leqq b).$$

It is more interesting that assuming $q_1 = q_2 = q$ (a unique equation) these inequalities hold, provided that $y_1(a) = y_2(a) = 0$, $y_1'(a) > y_2'(a) > 0$ and that one of the functions $\frac{f(y)}{y}$, $h(u)$ is strictly monotone. The proof follows previous lines.

COROLLARIES. Two particular solutions of (1) can have a zero in common without having only common zeros (differently from the linear case).

In fact, $y_1(a) = y_2(a)$ and $y_1'(a) = y_2'(a)$ imply $y_1 \equiv y_2$ by virtue of the uniqueness of the solution, but $y_1(a) = y_2(a)$ and $y_1'(a) > y_2'(a) > 0$ result in $y_1 > y_2$ up to the next zero of y_2. Hence two consecutive zeros of y_1 cannot be consecutive zeros of y_2. y_2 cannot twice intersect y_1 without vanishing one or other between these points of intersection. If y is a solution, $-y$ is also that. Therefore, comparing the zeros of y_1 and y_2, these functions may be assumed of the same sign in the initial part of the interval of the comparison and so the comparison can be carried out.

In order to compare the solutions of the equations

$$(p_i y_i')' + q_i f(y_i) h(p_i y_i') = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

one can deduce in the usual way the analogues of the formulae of STURM and PICONE. These are the following:

$$\frac{d}{dx}(p_1 y_1' y_2 - p_2 y_2' y_1) = \left[q_2 \frac{f(y_2)}{y_2} h(p_2 y_2') - q_1 \frac{f(y_1)}{y_1} h(p_1 y_1')\right] y_1 y_2 + (p_1 - p_2) y_1' y_2',$$

$$\frac{d}{dx}\left[y_1^2\left(\frac{p_1 y_1'}{y_1} - \frac{p_2 y_2'}{y_2}\right)\right] =$$

$$= \left[q_2 \frac{f(y_2)}{y_2} h(p_2 y_2') - q_1 \frac{f(y_1)}{y_1} h(p_1 y_1')\right] y_1^2 + (p_1 - p_2) y_1'^2 + p_2 \left(\frac{y_1' y_2 - y_2' y_1}{y_2}\right)^2.$$

However, applying these either in this form or taking $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$ (considering one equation with two particular solutions) it will not be obtained new results because the first term of the right-hand member of the Picone formula cannot be asserted to be positive when $q_2 > q_1$ and $p_1 > p_2$.

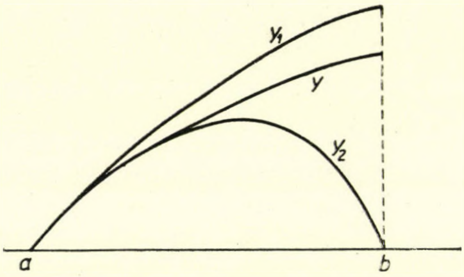


Fig. 11

According to Sturm's theorem we can enclose any solution of

$$y'' + \varphi(x) f(y) h(y') = 0$$

by the solutions of the equations

$$y_1'' + (\min \varphi) f(y_1) h(y_1') = 0,$$

$$y_2'' + (\max \varphi) f(y_2) h(y_2') = 0$$

with the same initial conditions, i. e. we have (Fig. 11)

$$y_2 < y < y_1 \qquad (a < x \leqq b).$$

A separability theorem in the sense of Sturm is not valid here. Rather there are particular solutions of (1) situated to each other as on the Figures 12. The existence of the first and second configurations is obvious. It will be shown the existence of the third too. Corollary 5 of § 1 ensures that the value of a maximum and the slope on the next zero may be made as small as wanted by decreasing the slope at the zero preceding the maximum place.

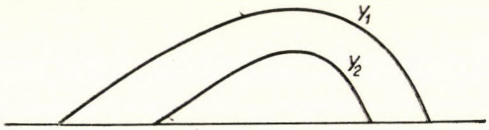


Fig. 12a

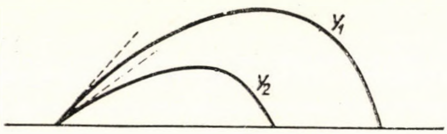


Fig. 12b

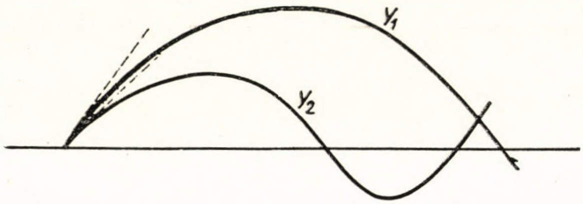


Fig. 12c

Corollary 8 of the same § shows that the distance of two consecutive zeros tends to zero with this slope, provided that $\varphi(x)$ is constant, but also for variable $\varphi(x)$ on account of our statement relative to enclosing of a solution by solutions of the equations with constant $\varphi(x)$. Thus we obtain the interesting result: *given a solution $y(x)$ of* (1), *then there are also solutions having an arbitrary number of zeros between two consecutive zeros of $y(x)$.*

Application of § 1. On account of the decrease of[10] $Q(x)=\frac{H(y')}{\varphi(x)}+$ $+F(y)$, we have

$$H(y_n')<F(\eta)\varphi(x_n)<LF(\eta).$$

This implies[11] a bound for $|y_n'|$ and considering that $|y'|$ assumes its maximum at the zeros the mentioned bound of $|y_n'|$ is that of $|y'|$ too. The inequality $F(y_n)>\frac{\varphi(a)}{L}F(\eta)$ involves *a lower bound for* $|y_n|$. *In the linear case* we have

$$|y'|<|\eta|\sqrt{L},\quad |y_n|>\sqrt{\frac{\varphi(a)}{L}}|\eta|.$$

Let Δ be the distance between the zero x_n and the next extremum place (Fig. 13). Then

$$|\eta|\sqrt{L}\Delta>|y_n'|\Delta>y_n>\sqrt{\frac{\varphi(a)}{L}}|\eta|.$$

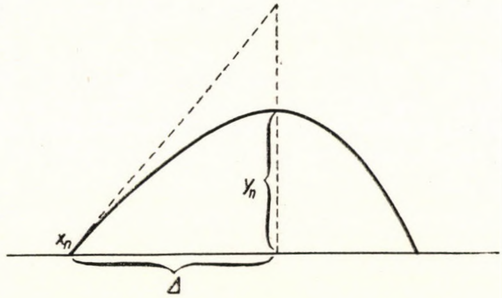


Fig. 13

Thus we obtain a lower bound for Δ *and for the distances of the zeros:*

$$\Delta>\frac{\sqrt{\varphi(a)}}{L}\quad \textit{and}\quad \frac{2\sqrt{\varphi(a)}}{L},$$

respectively. E. g., the function $\sqrt{x}J_\nu(x)$ satisfies

$$y''+\varphi(x)y=0.$$

The function $\varphi(x)=1+\frac{\frac{1}{4}-\nu^2}{x^2}$ is increasing for $|\nu|>\frac{1}{2}$. Denoting a maximum place, where already $\varphi(x)>0$, by a_ν, the distances of the zeros of $\sqrt{x}J_\nu(x)$ and those of $J_\nu(x)$ (which are the same) remain greater than

$$2\sqrt{1+\frac{1-4\nu^2}{4a_\nu^2}}=\frac{\sqrt{1+4(a_\nu^2-\nu^2)}}{a_\nu}\qquad (L=1).$$

I. e. $\Delta>1$ and the distances of the zeros are greater than 2. The increase of $P(x)$ and decrease of $Q(x)$ imply

$$F(y_{i-1})>F(y_i)>\frac{\varphi(a_{i-1})}{\varphi(a_i)}F(y_{i-1}).$$

In the linear case

$$y_{i-1}>y_i>\sqrt{\frac{\varphi(a_{i-1})}{\varphi(a_i)}}\,y_{i-1}.$$

[10] See the notations in § 1.

[11] Viz. $H(u)$ and $F(u)$ are increasing functions for $u>0$ and have also increasing inverse functions.

Application of § 7. Let us denote *any* solution of the Bessel equation

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$$

by $Z_\nu(x)$. The function $\sqrt{x} Z_\nu(x)$ satisfying the equation

$$y'' + \left(1 + \frac{1-4\nu^2}{4x^2}\right) y = 0$$

is of character of § 7 for $|\nu| > \frac{1}{2}$ and $x \geqq 0$ being $\varphi'(x) > 0$. Similarly, the function $\sqrt{x} Z_\nu\left(2\nu x^{\frac{1}{2\nu}}\right)$ for $0 < \nu < \frac{1}{2}$, $x \geqq 0$ (this satisfies $y'' + x^{\frac{1}{\nu}-2} y = 0$) and, in general, $\sqrt{x} Z_\nu(x^\alpha)$ for $\alpha > 1$, $x > \left(\frac{1-4\alpha^2\nu^2}{4\alpha^2(\alpha-1)}\right)^{\frac{1}{2\alpha}}$ and *arbitrary* ν $\left(\text{this satisfies } y'' + \frac{1-4\alpha^2\nu^2 + 4\alpha^2 x^{2\alpha}}{4x^2} y = 0\right)$ are also of this character. Concerning $J_\nu(x)$ the decrease of the area of the *half*-waves holds, provided that $x \geqq 0$ and $\nu > -1$ as R. COOKE[12] showed. E. MAKAI[13] proved the same for $Z_\nu(x)$, provided that $|\nu| > \frac{1}{2}$, $x \geqq 0$, moreover also the same is shown by G. SZEGŐ[14] for all ν but only for $x > \sqrt[3]{2\left(\frac{1}{9} - \nu^2\right)}$.

Of course, for $\nu < 0$ the lower limit of x is positive in all the above cases. The property of the quarter-waves of $\sqrt{x} Z_\nu(x)$ etc. cannot be extended to $Z_\nu(x)$.

(Received 2 December 1957)

[12] R. COOKE, A monotonity property of Bessel functions, *Journal London Math. Soc.*, **12** (1937), pp. 180—185.

[13] Loc. cit. in § 7.

[14] Still unpublished.

ON A MAXIMUM PROBLEM

By

E. MAKAI (Budapest)

(*Presented by* P. TURÁN)

In his book[1] P. TURÁN deals among others with the problem of finding the minimum of the quotient

$$\max_{a \leqq t \leqq b} \left| \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu w_\nu^t \right| \Big/ M(t) \qquad [M(t) = \min_{\nu=1, 2, \ldots, n} |w_\nu|^t]$$

where the a_ν's are given and the w_ν's are variables and gives applications of his estimates for it. In connection with this, P. TURÁN suggested the investigation of the following problem the solution of which may be regarded as a first step in a chain of extremal problems with further applications in view:

Let us define the polynomial $P(z)$ by

$$P(z) = \prod_{i=1}^{n} (1 + u_i z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \qquad (c_0 = 1, |c_n| \leqq 1, c_{n+1} = c_{n+2} = \cdots = 0)$$

where $|u_i| \leqq 1$ and let $\Sigma b_i z^i$ be the formal power series expansion of the function $[P(z)]^{-1} = g(z)$. Finally, let the function $h_m(z)$ be defined by

$$h_m(z) = (-1)^{m+1} \left[1 - P(z) \sum_{i=0}^{m} b_i z^i \right] = \sum_{k=0}^{\infty} a_{mk} z^k.$$

What upper and lower bounds may be given for the quantity

$$K_{mn} = \max_{|u_i| \leqq 1} \int_0^{2\pi} |h_m(z)|^2 d\vartheta \qquad (z = e^{i\vartheta})?$$

In this paper there are given several estimates of the quantity K_{mn}, the simplest of which is the double inequality (4).

1. It is easily seen that the coefficients a_{mk} are vanishing if $0 \leqq k \leqq m$ or $k > n + m$ and so

$$h_m(z) = \sum_{k=m+1}^{m+n} a_{mk} z^k.$$

[1] P. TURÁN, *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen* (Budapest, 1953).

One may verify by induction that

$$h_0(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n,$$

$$h_1(z) = \begin{vmatrix} c_1 & 1 \\ c_2 & c_1 \end{vmatrix} z^2 + \begin{vmatrix} c_1 & 1 \\ c_3 & c_2 \end{vmatrix} c^3 + \cdots + \begin{vmatrix} c_1 & 1 \\ c_n & c_{n-1} \end{vmatrix} z_n + \begin{vmatrix} c_1 & 1 \\ 0 & c_n \end{vmatrix} z^{n+1}$$

and generally

$$h_m(z) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \begin{vmatrix} c_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & c_1 & 1 & 0 & & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ c_m & c_{m-1} & c_{m-2} & & & 1 \\ c_k & c_{k-1} & c_{k-2} & & \cdots & c_{k-m} \end{vmatrix} z^k,$$

as the upper limit $m+n$ of the summation can be replaced by ∞.

We argue by induction from $m-1$ to m. For $m=0$ the assertion is trivial. If $m \neq 0$, then

$$h_m(z) = (-1)^m \left[P(z) \sum_{i=0}^{m-1} b_i z^i - 1 + P(z) b_m z^m \right] = -h_{m-1}(z) + (-1)^m P(z) b_m z^m =$$

$$(1) \qquad = -\sum_{k=m}^{\infty} \begin{vmatrix} c_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & c_1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ c_{m-1} & c_{m-2} & c_{m-3} & & 1 \\ c_k & c_{k-1} & c_{k-2} & \cdots & c_{k-m+1} \end{vmatrix} z^k + (-1)^m \sum_{l=0}^{\infty} b_m c_l z^{m+l}.$$

From $a_{mm} = 0$ it follows that

$$b_m = (-1)^m \begin{vmatrix} c_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{m-1} & c_{m-2} & & 1 \\ c_m & c_{m-1} & \cdots & c_1 \end{vmatrix}.$$

Comparing this with (1) we have

$$a_{mk} = -\begin{vmatrix} c_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{m-1} & c_{m-2} & & c_1 \\ c_k & c_{k-1} & \cdots & c_{k-m+1} \end{vmatrix} + c_{k-m} \begin{vmatrix} c_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{m-1} & c_{m-2} & & 1 \\ c_m & c_{m-1} & \cdots & c_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ c_{m-1} & c_{m-2} & & 1 & 0 \\ c_m & c_{m-1} & & c_1 & 1 \\ c_k & c_{k-1} & \cdots & c_{k-m+1} & c_{k-m} \end{vmatrix}.$$

2. The coefficients a_{mk} are symmetrical functions of the quantities $u_1, u_2, \ldots, u_n$, more precisely, symmetrical polynomials of the form

$$a_{mk} = \sum_{(\alpha_j)} d_{m,k;\,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_n^{\alpha_n}. \tag{2}$$

It will be shown that the *coefficients d of these polynomials are non-negative real numbers.*

It is well known that

$$c_1 = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$$
$$c_2 = u_1 u_2 + u_1 u_3 + \cdots + u_{n-1} u_n,$$
$$\ldots$$
$$c_n = u_1 u_2 \ldots u_n.$$

As an analogy of this we define the quantities γ_i by

$$\gamma_1 = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1},$$
$$\gamma_2 = u_1 u_2 + u_1 u_3 + \cdots + u_{n-2} u_{n-1},$$
$$\ldots$$
$$\gamma_{n-1} = u_1 u_2 \ldots u_{n-1}.$$

Furthermore, it will be assumed that $\gamma_0 = 1$, $\gamma_n = \gamma_{n+1} = \cdots = 0$, $c_0 = 1$, $c_{n+1} = c_{n+2} = \cdots = 0$. Now clearly

$$c_i = \gamma_i + u_n \gamma_{i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

and so

$$a_{mk} = \begin{vmatrix} c_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & c_1 & 1 & & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ c_m & c_{m-1} & c_{m-2} & & 1 \\ c_k & c_{k-1} & c_{k-2} & \cdots & c_{k-m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma_1 + u_n & 1 & & \cdots & 0 \\ \gamma_2 + u_n\gamma_1 & \gamma_1 + u_n & & & 0 \\ \gamma_3 + u_n\gamma_2 & \gamma_2 + u_n\gamma_1 & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \gamma_m + u_n\gamma_{m-1} & \gamma_{m-1} + u_n\gamma_{m-2} & & & 1 \\ \gamma_k + u_n\gamma_{k-1} & \gamma_{k-1} + u_n\gamma_{k-2} & & \cdots & \gamma_{k-m} + u_n\gamma_{k-m-1} \end{vmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ -u_n & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (-u_n)^2 & -u_n & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ (-u_n)^{m-1} & (-u_n)^{m-2} & (-u_n)^{m-3} & 1 & 0 \\ (-u_n)^m & (-u_n)^{m-1} & (-u_n)^{m-2} & \cdots -u_n & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \gamma_1 & 1 & 0 & \ldots 0 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & 1 & 0 \\ \gamma_3 & \gamma_2 & \gamma_1 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \gamma_m & \gamma_{m-1} & \gamma_{m-2} & 1 \\ \gamma_k - (-u_n)^{m+1}\gamma_{k-m-1} & \gamma_{k-1} - (-u_n)^m \gamma_{k-m-1} & \gamma_{k-2} - (-u_n)^{m-1}\gamma_{k-m-1} & \cdots\ \gamma_{k-m} + u_n\gamma_{k-m-1} \end{vmatrix}.$$

From this form we can determine the power series expansion of a_{mk} as a function of u_n:

$$a_{mk} = \alpha_{mk} + \gamma_{k-m-1}(\alpha_{m-1,m} u_n + \alpha_{m-2,m-1} u_n^2 + \cdots + \alpha_{01} u_n^m + u_n^{m+1})$$

where

$$\alpha_{pq} = \begin{vmatrix} \gamma_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \gamma_p & \gamma_{p-1} & \gamma_{p-2} & & 1 \\ \gamma_q & \gamma_{q-1} & \gamma_{q-2} & \cdots & \gamma_{q-p} \end{vmatrix}.$$

The quantities α_{pq} have the same structure as the a_{mk}'s except that they are symmetrical functions of not n but only of $n-1$ arguments, namely of the quantities $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$.

Therefore the assertion of **2** will be proved by induction with respect to n by showing that in case $n=1$ the a_{mk}'s are polynomials or rather monomials of the quantity u_1 with non-negative coefficients.

Indeed, if $n=1$, then $P(z) = 1 + u_1 z$ and

$$h_m(z) = (-1)^m \left[P(z) \sum_{i=0}^{m} (-u_1 z)^i - 1 \right] = u_1^{m+1} z^{m+1}.$$

3. Now we make use of the assumption $|u_i| \leqq 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. From formula (2)

$$|a_{mk}| \leqq \sum_{(\alpha_j)} d_{m,k;\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} |u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_n^{\alpha_n}|$$

and from this

$$|a_{mk}| \leqq \sum_{(\alpha_j)} d_{m,k;\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}.$$

The upper bound will be reached if e. g. $u_1 = u_2 = \cdots = u_n = 1$ and so

$$\int_0^{2\pi} |h_m(z)|^2 d\vartheta = \sum_k |a_{mk}|^2 \leqq \sum_k \Big| \sum_{(\alpha_j)} d_{m,k;\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} \Big|^2 = K_{mn}$$

with the sign of equality if $P(z) = (1+z)^n$.

Consequently, the polynomial $(1+z)^n$ and hence every polynomial of the form $(1+e^{i\alpha}z)^n$ (α real) has the property of extremum.

4. If $P(z) = (1+z)^n$, then $g(z) = (1+z)^{-n} = \Sigma \binom{-n}{k} z^k$. Denoting by $H_m(z)$ the quantity

$$(-1)^m \left[(1+z)^n \sum_{k=0}^{m} \binom{-n}{k} z^k - 1 \right]$$

one can show again by induction that

$$H_m(z)=\binom{n+m}{m}n\int_0^z \zeta^m(1+\zeta)^{n-1}\,d\zeta. \tag{3}$$

For, if $m=0$, it is readily seen that

$$H_0(z)=(1+z)^n-1=n\int_0^z(1+\zeta)^{n-1}\,d\zeta$$

and, if $m \neq 0$, then using (1) we have

$$H_m(z)=-H_{m-1}(z)+(-1)^m\binom{-n}{m}(1+z)^n z^m=$$

$$=-H_{m-1}(z)+\binom{n+m-1}{m}(1+z)^n z^m$$

whence we get by differentiating

$$H'_m(z)=-H'_{m-1}(z)+\binom{n+m-1}{m}[n(1+z)^{n-1}z^m+m(1+z)^n z^{m-1}].$$

Using our inductive assumption we have

$$H'_m(z)=-\binom{n+m-1}{m-1}n z^{m-1}(1+z)^{n-1}+$$

$$+\binom{n+m-1}{m-1}\frac{n}{m}[n(1+z)^{n-1}z^m+m(1+z)^n z^{m-1}]=\binom{n+m}{m}n z^m(1+z)^{n-1}.$$

This is equivalent to formula (3) as from $H_m(0)=0$ it follows that

$$H_m(z)=\int_0^z H'_m(\zeta)\,d\zeta.$$

5. Let the quantities A_{mk} be defined by

$$H_m(z)=\sum_{k=m+1}^{m+n}A_{mk}z^k.$$

By **3** we have

$$K_{mn}=\int_0^{2\pi}|H_m(e^{i\vartheta})|^2\,d\vartheta=2\pi\sum_{k=m+1}^{m+n}A_{mk}^2.$$

Comparing this with the quantity

$$L_{mn}=\int_0^{2\pi}|H'_m(e^{i\vartheta})|^2 d\vartheta=2\pi\sum_{k=m+1}^{m+n}k^2A_{mk}^2$$

it follows that

$$\frac{L_{mn}}{(m+n)^2}\leqq K_{mn}\leqq\frac{L_{mn}}{(m+1)^2}.$$

Now L_{mn} can be readily determined. Its value is ($z=e^{i\vartheta}$)

$$L_{mn}=\int_0^{2\pi} H'_m(z)\cdot H'_m(\bar z)\,d\vartheta = n^2\binom{n+m}{m}^2\int_0^{2\pi} z^m(1+z)^{n-1}\bar z^m(1+\bar z)^{n-1}\,d\vartheta =$$

$$=n^2\binom{n+m}{m}^2\int_0^{2\pi}(1+z+\bar z+z\bar z)^{n-1}\,d\vartheta = n^2\binom{n+m}{m}^2\int_0^{2\pi}(2+2\cos\vartheta)^{n-1}\,d\vartheta.$$

Calculating this last integral we are able to show the validity of the double inequality

$$\frac{1}{(m+n)^2}\leqq\frac{K_{mn}}{n^2\binom{n+m}{m}^2\cdot 4^n\,\dfrac{(2n-3)(2n-5)\dots 1}{(2n-2)(2n-4)\dots 2}\cdot\dfrac{\pi}{2}}\leqq\frac{1}{(m+1)^2}$$

and from this the simpler but less sharp inequalities

$$4^n\binom{m+n-1}{m}^2\cdot\frac{1}{2n-2}\,\frac{\pi}{2}<K_{mn}<4^n\binom{m+n}{m+1}^2\cdot\frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

6. The quotient K_{mn}/L_{mn} fulfils the sharper inequalities

$$\frac{1}{\left(m+\dfrac{n+1}{2}\right)^2}\leqq\frac{K_{mn}}{L_{mn}}\leqq\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+n)^2}\right] \tag{5}$$

too. This can be seen if we write K_{mn} in its explicit form

$$K_{mn}=2\pi\sum_k A_{mk}^2=\binom{m+n}{n}^2 n^2\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l}^2\frac{1}{(m+l+1)^2}.$$

From the equality $\binom{n-1}{k}=\binom{n-1}{n-1-k}$ and from the convexity of the function x^{-2} it follows that

$$\frac{1}{\left(m+\dfrac{n+1}{2}\right)^2}\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l}^2\leqq\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l}^2\frac{1}{(m+l+1)^2}\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+n)^2}\right]\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l}^2.$$

Since

$$L_{mn}=2\pi\binom{m+n}{n}^2 n^2\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l}^2,$$

the last double inequality is equivalent to (5).

(Received 12 December 1957)

ON THE STRUCTURE OF SET-MAPPINGS

By

P. ERDŐS (Budapest), corresponding member of the Academy, and A. HAJNAL (Budapest)

1. Introduction. Let S be a set and $f(x)$ a function which makes correspond to every $x \in S$ a subset $f(x)$ of S so that $x \notin f(x)$. Such a function $f(x)$ we shall call a set-mapping defined on S.

A subset $S' \subseteq S$ is called free (or independent) with respect to the set-mapping $f(x)$, if for every $x \in S'$ and $y \in S'$, $x \notin f(y)$ and $y \notin f(x)$.

Let $\overline{\overline{S}} = m \geqq \aleph_0$ and $n < m$. Assume that $\overline{\overline{f(x)}} < n$ for every $x \in S$. RUZIEWICZ raised the problem if there always exists a free set of power m. Assuming the generalized hypothesis of the continuum the answer to the problem of RUZIEWICZ is positive.[1]

In our present paper we are going to define more general set-mappings and raise analogous questions to those of RUZIEWICZ. Let there be given the set S and a set of its subsets I. Assume that the function $f(X)$ makes correspond to every set X of I a subset $f(X)$ of S so that the intersection of $f(X)$ and X is empty. $f(X)$ will be defined as a set-mapping of S of type I. This is clearly a generalization of the original concept of the set-mapping. (There I consisted of all the subsets of S having one element.) The subset $S' \subseteq S$ is called free (with respect to this set-mapping, or briefly a free set of the set-mapping) if for every $X \subseteq S'$ $(X \in I)$ the intersection of $f(X)$ and S' is empty.

Our aim is the investigation of those set-mappings where I consists either of all subsets of S of a given cardinal t or of all subsets of less than a given cardinal t. In these cases we shall briefly say that the set-mapping is of type t or of type $< t$, respectively. If $\overline{\overline{f(X)}} < n$ for all X of I we shall say that the set-mapping is of order n. Our problems will be of the following kind: Let $\overline{\overline{S}} = m$, further let $f(X)$ be a set-mapping of S of order n and type t. Does there then always exist an independent set of power p?

2. Definitions and notations. In what follows capital letters will denote sets; $x, y, z, \ldots$ are the elements of the sets; greek letters denote ordinals; a, b, c, m, n, t, p denote cardinals and $k, l, s, \ldots$ denote integers.

[1] For the history and older results on this problem see [1], for the more recent results and ramifications see [2].

Union of sets will be denoted by $+$ and Σ, intersection of sets by $\cdot$ and Π. $+$ will also be used to denote addition of ordinals, $-$ will be used to define taking relative complements. $x \in A$ denotes that x is an element of A, $A \subseteq B$ denotes that the set A is contained in B ($A \subset B$ denotes that A is a proper subset of B). ω_α will denote the initial number of $\aleph_\alpha$ ($\omega_0 = \omega$). a^+ will denote the cardinal $\aleph_{\alpha+1}$ where $a = \aleph_\alpha$. If Ω is the initial number of a, then Ω^+ is the initial number of a^+.

The cardinal numbers $b_{a,k}$ are defined by induction as follows:

$$b_{a,0} = a, \quad b_{a,k+1} = 2^{b_{a,k}}.$$

The initial number of $b_{a,k}$ will be denoted by $\Omega_{a,k}$.

The proof of some of our theorems makes use of the generalized continuum hypothesis. These theorems will be denoted by (*).

In the proof of some of our theorems, wich will be denoted by (**), we make use of the following hypothesis:[2]

Let m be a strongly inaccessible cardinal number, $\overline{\overline{S}} = m$. Then one can define a two-valued measure $\mu(X)$ on all subsets of S for which $\mu(S) = 1$; $\mu(\{x\}) = 0$ for all $x \in S$ and the measure is additive for less than m summands. In the present paper we do not investigate the problem, if these theorems are equivalent to the above hypothesis.

Let $\varphi(x)$ be an arbitrary property of the elements of the set H. The set of all $x \in H$ which satisfy $\varphi(x)$ will be denoted by $\{x : \varphi(x)\}$. The notation $\{\ \}$ will also be used to denote sets whose elements are those which are contained in the brackets $\{\ \}$. The set $\{X : X \subseteq S; \overline{\overline{X}} = t\}$ will be denoted by $[S]^t$ and the set $\{X : X \subseteq S; \overline{\overline{S}} < t\}$ by $[S]^{<t}$.

For the study of the set-mappings we introduce the notations $(m, n, t) \to p$ and $(m, n, < t) \to p$ to denote that every set-mapping, defined on S ($\overline{\overline{S}} = m$), of order n and type t (or $< t$, respectively) has a free set of power p. In the opposite case we write $(m, n, t) \not\to p$ and $(m, n, < t) \not\to p$, respectively.

3. A short summary of the principal results and problems. As a first step we show that if the type t of the set-mapping is infinite, one can never assure the existence of a (non-trivial) free set, even if the order of the set-mapping is 2, in other words we shall show that for every m and $t \geqq \aleph_0$, $(m, 2, t) \not\to t$. (From this it is easy to deduce that $(m, 2, < t) \not\to \aleph_0$ for $t > \aleph_0$ (see Theorem 1).)

Thus we can expect positive results only for $(m, n, k) \to p$ and $(m, n, < \aleph_0) \to p$, for simplicity we write $(m, n, \omega) \to p$ instead of $(m, n, < \aleph_0) \to p$.

For the symbol $(m, n, \omega) \to p$ we obtain the following negative result: Let $m < \aleph_\omega$, then $(m, 2, \omega) \not\to \aleph_0$ (see Theorem 2).

[2] See [3] and [4].

Then we prove the following surprising result: (**) Let m be strongly inaccessible and $n < m$, then $(m, n, \omega) \to m$ (see Theorem 7).

The simplest unsolved problem here is the following:

PROBLEM 1. $(\aleph_\omega, 2, \omega) \to \aleph_0$?

(It is easy to see that $(\aleph_\omega, 2, \omega) \not\to \aleph_1$, this easily follows from $(m, 2, \omega) \not\to \aleph_0$ for $m < \aleph_\omega$).

The problem of the set-mappings of type ω is closely connected with a problem considered by ERDŐS—RADO:

Can one split for each k $(1 \leqq k < \aleph_0)$ the subsets of k elements of S into two classes so that if $S_1 \subseteq S$ $(\overline{\overline{S_1}} \geqq \aleph_0)$ is an arbitrary infinite subset of S, then there always exists a k such that S_1 has a subset of k elements in both classes?[3]

By the methods used in this paper we prove that if m is less than the first strongly inaccessible cardinal m_0, $m_0 > \aleph_0$, such a splitting is possible, but if m is strongly inaccessible, $m > \aleph_0$, then there always exists an $S_1 \subseteq S$, $\overline{\overline{S_1}} = m$, such that for every k $(1 \leqq k < \aleph_0)$ all subsets of S_1 having k elements are in the same class (here we have to use (**)). (See Theorem 9.) By the symbolism introduced in [6] these results can be expressed in the form:

$m \not\to (\aleph_0)^{<\aleph_0}$ if m is less than the first strongly inaccessible cardinal $m_0 > \aleph_0$ and

$m \to (m)^{<\aleph_0}$ if m is a strongly inaccessible cardinal, $m > \aleph_0$.

For the set-mappings of finite type our results are more complete.

For the set-mappings of type 1 we already stated that (*) $(m, n, 1) \to m$ for $n < m$ and $m \geqq \aleph_0$.

For strongly inaccessible cardinals m we have $(m, n, \omega) \to m$ (**) and consequently $(m, n, k) \to m$ $(n < m)$ for every k too.

If $m = \aleph_\alpha$, where α is a limit number (but we assume that $\aleph_\alpha$ is not inaccessible), we can prove, using (*), that $(m, n, k) \to m$ $(n < m)$ (see Theorem 8).

Thus in these cases the exact analogue of the results of RUZIEWICZ for $k = 1$ holds.

If $m = \aleph_{\alpha+1}$, the analogue of the conjecture of RUZIEWICZ fails already for $k \geqq 2$, i. e. we shall show that $(\aleph_{\alpha+k-1}, \aleph_\alpha, k) \not\to k+1$ for $k = 1, 2, \ldots$ (see Lemma 2).

On the other hand, we can prove that (*) $(\aleph_{\alpha+k}, \aleph_\alpha, k) \to \aleph_{\alpha+1}$ (see Theorem 3).

[3] See [5].

Thus we know that the smallest m, for which the symbols $(m, \aleph_\alpha, k) \to \aleph_0, \ldots, (m, \aleph_\alpha, k) \to \aleph_{\alpha+1}$ are true, is $\aleph_{\alpha+k}$, but, on the other hand, we do not know the greatest p for which $(\aleph_{\alpha+k}, \aleph_\alpha, k) \to p$ is true. We can prove only the following negative result: (*) $(\aleph_{\alpha+k}, \aleph_\alpha, k) \not\to \aleph_{\alpha+k}$ if $k \geqq 2$ (see Theorem 5).

So the simplest unsolved problem here is the following:

PROBLEM 2. $(\aleph_3, \aleph_0, 3) \to \aleph_2$?

($(\aleph_3, \aleph_0, 3) \to \aleph_1$ is true and $(\aleph_3, \aleph_0, 3) \to \aleph_3$ is false.)

For the set-mappings of finite order we have the following results: If m is infinite, then $(m, l+1, k) \to \aleph_0$ (see Theorem 10) and (*) $(\aleph_{\alpha+k-1}, l+1, k) \to \aleph_\alpha$ for $k = 1, 2, \ldots$; $l = 1, 2, \ldots$ (see Theorem 11).

We have no negative results corresponding to the result of Lemma 2, but we know that (*) $(\aleph_{\alpha+1}, 2, 2) \not\to \aleph_{\alpha+1}$ (see Theorem 5).

The simplest unsolved problem here is the following:

PROBLEM 3. $(\aleph_2, 2, 3) \to \aleph_1$?

($(\aleph_2, 2, 3) \to \aleph_0$ is true, $(\aleph_2, 2, 3) \to \aleph_2$ is false.)

We investigate separately the set-mappings defined on a finite set S. We have the following result: If p, m, l and k are integers and $p(m, l, k)$ denotes the greatest integer p for which $(m, l+1, k) \to p$ is true, then

$$c_1 \sqrt[k+1]{m} < p(m, l, k) < c_2 \sqrt[k]{m \log m}$$

where the positive real numbers c_1 and c_2 depend on k and l.

The following problem arises:

PROBLEM 4. *What is the exact order of magnitude of* $p(m, l, k)$?

4. Proof of the results. We enumerate some simple properties of our symbols:

If $m < m'$ and $(m, n, t) \to p$, then $(m', n, t) \to p$.

If $n < n'$ and $(m, n', t) \to p$, then $(m, n, t) \to p$.

If $p < p'$ and $(m, n, t) \to p'$, then $(m, n, t) \to p$.

Similar theorems are true for the symbol $(m, n, < t) \to p$ and we also have

$$(m, n, t) \to p \quad \text{and} \quad (m, n, < t) \to p \quad \text{if} \quad t < t' \quad \text{and} \quad (m, n, < t') \to p.$$

In what follows we shall use these theorems without references.

LEMMA 1. *Let S be a set, $\overline{\overline{S}} \geqq t \geqq \aleph_0$. There exists a function $g(X)$ defined on the set $[S]^t$ which satisfies the following conditions:*

$$(1)\ g(X) \subset X, \quad (2)\ \overline{\overline{g(X)}} = t, \quad (3)\ g(X) \neq g(Y) \quad \textit{if} \quad X \neq Y.$$ [4]

[4] This construction is due to J. NOVAK.

PROOF. First we prove the existence of such a function in the case $\overline{\overline{S}} = t$. Then $\overline{\overline{[S]^t}} = 2^t$. Let Ω denote briefly the initial number of 2^t, and let $\{X_\nu\}_{\nu<\Omega}$ be a well-ordering of $[S]^t$ of type Ω. We define the function $g(X_\nu)$ by transfinite induction as follows: Let $g(X_0)$ be an arbitrary proper subset of power t of X_0. Suppose that $g(X_\mu)$ is already defined for all $\mu < \nu$ where $\nu < \Omega$. Then $\overline{\overline{\{g(X_\mu)\}_{\mu<\nu}}} \leqq \overline{\overline{\nu}} < 2^t$ and, on the other hand, $\overline{\overline{[X_\nu]^t}} = 2^t$. Thus there exist proper subsets of power t of X_ν different from all $g(X_\mu)$ for all $\mu < \nu$. Let $g(X_\nu)$ be such a subset of X_ν with the smallest subscript. Thus $g(X_\nu)$ is defined for all $\nu < \Omega$ and it is obvious that conditions (1), (2) and (3) hold.

Now let us consider the case $\overline{\overline{S}} > t$. Let M be a maximal subset of $[S]^t$ such that $\overline{\overline{X}} = t$ for every $X \in M$ and $\overline{\overline{X \cdot Y}} < t$ if X, Y are two distinct elements of M. (The existence of such an M is assured by ZORN'S lemma.) Let $\{Y_\alpha\}_{\alpha<\tau}$ be a well-ordering of M. Since $\overline{\overline{Y_\alpha}} = t$ for every $\alpha < \tau$, we already know that there exist functions $g_\alpha(X)$ defined on the set $[Y_\alpha]^t$ satisfying the conditions (1), (2) and (3). By the definition of M there exists an α ($\alpha < \tau$), for every $X \in [S]^t$, for which $\overline{\overline{X \cdot Y_\alpha}} = t$. Let $\alpha(X)$ denote the smallest α for which $\overline{\overline{X \cdot Y_\alpha}} = t$.

We define $g(X)$ as follows:

$$g(X) = g_{\alpha(X)}(X \cdot Y_{\alpha(X)}) + (X - Y_{\alpha(X)}).$$

From the properties of the functions $g_\alpha(X)$ it follows immediately that $g(X)$ satisfies the conditions (1) and (2).

We have only to prove $g(X_1) \neq g(X_2)$ for $X_1 \neq X_2$ where $X_1, X_2 \in [S]^t$. We distinguish two cases: (i) $\alpha(X_1) = \alpha(X_2) = \alpha$, (ii) $\alpha(X_1) \neq \alpha(X_2)$.

(i) Then either $X_1 \cdot Y_\alpha \neq X_2 \cdot Y_\alpha$ or $X_1 - Y_\alpha \neq X_2 - Y_\alpha$ and therefore either $g_\alpha(X_1 \cdot Y_\alpha) \neq g_\alpha(X_2 \cdot Y_\alpha)$ or $X_1 - Y_\alpha \neq X_2 - Y_\alpha$, hence $g(X_1) \neq g(X_2)$.

(ii) We may suppose $\alpha(X_1) < \alpha(X_2)$. Then, by the definition of $\alpha(X)$,

$$\overline{\overline{g(X_1) \cdot Y_{\alpha(X_1)}}} = t \quad \text{and} \quad \overline{\overline{g(X_2) \cdot Y_{\alpha(X_1)}}} < t,$$

hence $g(X_1) \neq g(X_2)$. Q. e. d.

REMARK. In case $\overline{\overline{S}} > t$, we can prove with a slight modification of the construction the existence of a function $g_1(X)$ defined on the set $[S]^t$ satisfying the conditions (1), (2), (3) and the following condition too:

(4) For every $Y \in [S]^t$ there is an $X \in [S]^t$ for which $Y = g_1(X)$.[5]

We can not solve the following problem:

PROBLEM 5. *Let S be a set, $\overline{\overline{S}} > t \geqq \aleph_0$. Does there exist a function $g_2(X)$ defined on the set $[S]^t$ satisfying the conditions* (2), (3), (4) *and the following stronger condition* (1′) *instead of* (1):

[5] See ERDŐS—FODOR—HAJNAL'S forthcoming paper.

(1') *For all* $X \in [S]^t$ $g(X) \subseteq X$ *and* $\overline{\overline{X - g(X)}} = t$?

THEOREM 1. $(m, 2, t) \not\rightarrow t$ *if* $t \geqq \aleph_0$; $(m, 2, < t) \not\rightarrow \aleph_0$ *if* $t > \aleph_0$.

We shall only prove the first statement; the second is a consequence of it.

PROOF. Let S be a set, $\overline{\overline{S}} = m \geqq t$. We define a set-mapping $f(X)$ of S of type t and order 2, having no free sets of power t. Let $g(X)$ be a function defined on the set $[S]^t$ satisfying the conditions (1), (2), (3) of Lemma 1. We define the set-mapping $f(X)$ as follows: Let X be an arbitrary element of $[S]^t$. If there is a $Y \in [S]^t$ for which $X = g(Y)$, then by condition (3) this Y is uniquely determined and by (1) the set $Y - X$ is not empty. In this case we choose an element x of $Y - X$ and we put $f(X) = \{x\}$. In the other case we put $f(X) = 0$. It is obvious that $f(X)$ is a set-mapping of S of type t and order 2.

If X_0 is an arbitrary element of $[S]^t$, then by (1) and (2) we have $g(X_0) \subset X_0$, $g(X_0) \in [S]^t$.

By the definition of $f(X)$, $f(g(X_0)) \cdot X_0 = \{x_0\} \neq 0$. It follows that X_0 is not free. Q. e. d.

We need the following lemma:

LEMMA 2. $(\aleph_{\alpha+k-1}, \aleph_\alpha, k) \not\rightarrow k+1$; $(\aleph_{\alpha+k}, \aleph_\alpha, k) \rightarrow k+1$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Lemma 2 is another form of a theorem of KURATOWSKI—SIERPINSKI proved in [7]. Therefore we omit the proof of it.[6]

The proof of KURATOWSKI shows that the first part of Lemma 2 is true in the following stronger form too:

Let S be a set of power $\aleph_{\alpha+k-1}$ and $\{x_\nu\}_{\nu < \omega_{\alpha+k-1}}$ a well-ordering of S of type $\omega_{\alpha+k-1}$. One can define a set-mapping $f(X)$ of S of type k and order $\aleph_\alpha$, having no free sets of power $k+1$ and satisfying the following condition: (1) *For every* $\{x_{\nu_1}, \ldots, x_{\nu_k}\} \in [S]^k$, $x_\gamma \in f(\{x_{\nu_1}, \ldots, x_{\nu_k}\})$ implies that $\gamma < \operatorname{Max}(\nu_1, \ldots, \nu_k)$.

THEOREM 2. $(m, 2, \omega) \not\rightarrow \aleph_0$ *if* $m < \aleph_\omega$.

PROOF.[7] Let S be a set of power $\aleph_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$; $\{x_\nu\}_{\nu < \omega_k}$ a well-ordering of S and $f(X)$ a set-mapping of S of type k and order $\aleph_1$ satisfying the first part of Lemma 2.

[6] The equivalence of Lemma 2 and of KURATOVSKI's paper [7] may be seen by using the following idea. The splitting of Z^{n+1} in [7] induces a set-mapping $f(x_1, \ldots, x_n)$ as follows: $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(i_1, \ldots, i_n)} \sum_{k=1}^{n+1} \{x : (x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k-1}}, x, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}) \in A_k\}$, where $(i_1, \ldots, i_n)$ runs over all permutations of the numbers $1, \ldots, n$.

[7] The idea of this proof for the case $k = 0$ is due to J. SURÁNYI.

We define a set-mapping $g(X)$ of S of type ω and order 2 as follows:

Let X be an arbitrary element of $[S]^{<\aleph_0}$ and $\{f_l(X)\}_{l<\omega}$ a well-ordering of type ω of the set $f(X)$. We have two cases: a) X has at most k elements. Then we put $g(X)=0$. b) X has more than k elements. Then X has the form $\{x_{\nu_1},\ldots,x_{\nu_k},x_{\nu_{k+1}},\ldots,x_{\nu_{k+l}}\}$ ($\nu_i<\nu_j$ for $i<j$).

Let $g(X)=\{f_l(\{x_{\nu_1},\ldots,x_{\nu_k}\})\}$.

Since $g(X)\cdot X=0$, by condition (1) of Lemma 2, $g(X)$ is a set-mapping. It is obvious that $g(X)$ is of type ω and order 2. We have only to prove that $g(X)$ has no infinite free sets.

Let Y be an arbitrary infinite subset of S. Then there is a subset $\{x_{\nu_s}\}_{s<\omega}$ of Y such that $\nu_{s_1}<\nu_{s_2}$ for $s_1<s_2$. The set-mapping $f(X)$ has no free sets of $k+1$ elements. Therefore there is an i $(0\leqq i\leqq k)$ and an $l<\omega$ such that

$$x_{\nu_i}=f_l(\{x_{\nu_0},\ldots,x_{\nu_{i-1}},x_{\nu_{i+1}},\ldots,x_{\nu_k}\}).$$

Let X_0 denote the set $\{x_{\nu_0},\ldots,x_{\nu_{i-1}},x_{\nu_{i+1}},\ldots,x_{\nu_{k+l}}\}$. Then $X_0\in[S]^{<\aleph_0}$, $X_0\subset Y$ and by b) $g(X_0)=\{x_{\nu_i}\}$. Thus $g(X_0)\cdot Y=\{x_{\nu_i}\}\neq 0$; hence Y is not free. Q. e. d.

LEMMA 3. *If* $[S]^{k+1}=\sum_{\nu<\omega_\alpha} I_\nu$ *and* $\bar{\bar{S}}>b_{\aleph_\alpha,k}$, *then there exists a subset* S_0 *of* S *and a* $\nu_0<\omega_\alpha$ *such that* $[S_0]^{k+1}\subseteq I_{\nu_0}$ *and* $\bar{\bar{S}}_0\geqq\aleph_{\alpha+1}$ $(k=0,1,2,\ldots)$.[8]

PROOF. Without loss of generality we may assume that the sets I_ν are mutually exclusive.

We prove the theorem by induction on k. In the case $k=0$ the theorem is obviously true. Suppose now that it is true for a certain k and let S be a set satisfying the following conditions:

$$(') \ \bar{\bar{S}}>b_{\aleph_\alpha,k+1},\quad ('')\ [S]^{k+2}=\sum_{\nu<\omega_\alpha} I_\nu,\quad (''')\ I_{\nu_1}\cdot I_{\nu_2}=0 \quad\text{for}\quad \nu_1\neq\nu_2.$$

Let $x_0,\ldots,x_k$ be $k+1$ arbitrary elements of S. We split the set $S-\{x_0,\ldots,x_k\}$ into classes. The elements x and y belong to the same class if and only if there is a $\nu<\omega_\alpha$ such that $\{x,x_0,\ldots,x_k\}\in I_\nu$ and $\{y,x_0,\ldots,x_k\}\in I_\nu$. It follows from the conditions ('') and (''') that this really defines a splitting of the set $S-\{x_0,\ldots,x_k\}$ into classes. Let Q_{β_1} denote these different classes where β_1 runs through the ordinals less than ω_α. We select an element x_{β_1} from each of the non-empty classes.

Suppose that we have already defined the classes $Q_{\beta_1\ldots\beta_\mu}$ and the elements $x_{\beta_1\ldots\beta_\mu}$ for $\mu<\lambda$. Let $\{\beta_\mu\}_{\mu<\lambda}$ be a sequence of type λ of these ordi-

[8] This theorem is proved in [6]. By the symbolism introduced there the theorem can be expressed in the form: If $m>b_{\aleph_\alpha,k}$, then $m\to(\aleph_{\alpha+1})^{k+1}_{\aleph_\alpha}$.

nals. Let us consider the classes

$$\prod_{\mu<\lambda} Q_{\beta_1\ldots\beta_\mu} - \{x_0,\ldots,x_k,x_{\beta_1}\ldots x_{\beta_\mu}\}_{\mu<\lambda} = Q'_{\{\beta_\mu\}_{\mu<\lambda}}.$$

We split these classes into subclasses as follows: The elements x, y of $Q'_{\{\beta_\mu\}_{\mu<\lambda}}$ are in the same class if and only if for an arbitrary $A \in [\{x_0,\ldots,x_k,x_{\beta_1\ldots\beta_\mu}\}_{\mu<\lambda}]^{k+1}$ there exists a $\nu<\omega_\alpha$ such that the sets $\{x\}+A, \{y\}+A$ belong to the same class I_ν. It follows from the conditions ($''$) and ($'''$) that this really defines a splitting of the class $Q'_{\{\beta_\mu\}_{\mu<\lambda}}$ into subclasses. Let $Q_{\beta_1\ldots\beta_\mu\ldots\beta_\lambda}$ denote the classes thus obtained where β_λ runs over the ordinals less than a certain initial number. We select an element $x_{\beta_1\ldots\beta_\lambda}$ from the non-empty classes $Q_{\beta_1\ldots\beta_\lambda}$.

We shall prove that there is a sequence $\{\beta_\lambda\}_{\lambda<\Omega^+_{\aleph_\alpha,k}}$ for which the elements $x_{\beta_1\ldots\beta_\lambda}$ are really defined. First of all we prove that $\beta_\lambda<\Omega_{\aleph_\alpha,k+1}$ for every $\lambda<\Omega^+_{\aleph_\alpha,k}$ and for every sequence $\{\beta_\mu\}_{\mu<\lambda}$, i. e. at every step in our process the power of the set of all non-empty subclasses of the class $Q'_{\{\beta_1\ldots\beta_\mu\ldots\}_{\mu<\lambda}}$ is at most $b_{\aleph_\alpha,k+1}$. Namely, we can obtain these classes as follows: First we split the set $Q'_{\{\beta_1\ldots\beta_\mu\ldots\}_{\mu<\lambda}}$ corresponding to an element A of $[\{x_0,\ldots,x_k,x_{\beta_1\ldots\beta_\mu}\}_{\mu<\lambda}]^{k+1}$ into $\aleph_\alpha$ classes and then we say that x and y belong to the same class if they belong to the same class for all A. On the other hand, $\bar{\lambda}\leqq b_{\aleph_\alpha,k}$ and so $\overline{\overline{[\{x_0,\ldots,x_k,x_{\beta_1\ldots\beta_\mu}\}_{\mu<\lambda}]^{k+1}}}\leqq b_{\aleph_\alpha,k}$. Thus the power of the set of all non-empty subclasses of $Q'_{\{\beta_\mu\}_{\mu<\lambda}}$ is at most $\aleph_\alpha^{b_{\aleph_\alpha,k}}=2^{b_{\aleph_\alpha,k}}=b_{\aleph_\alpha,k+1}$.

Let A_λ denote the set of all sequences $\{\beta_\mu\}_{\mu<\lambda}$. By the result just proved we have

$$\bar{\bar{A}}_\lambda\leqq b^{\bar{\lambda}}_{\aleph_\alpha,k+1}\leqq b^{b_{\aleph_\alpha,k}}_{\aleph_\alpha,k+1}=2^{b_{\aleph_\alpha,k}\cdot b_{\aleph_\alpha,k}}=b_{\aleph_\alpha,k+1} \text{ if } \lambda<\Omega^+_{\aleph_\alpha,k}.$$

Let S_λ denote the set $\sum_{\{\beta_\mu\}_{\mu<\lambda}\in A_\lambda}\{x_0,\ldots,x_k,x_{\beta_1\ldots\beta_\mu}\}_{\mu<\lambda}$. If $\lambda<\Omega^+_{\aleph_\alpha,k}$, then $\bar{\bar{S}}_\lambda=\bar{\bar{A}}_\lambda\cdot\bar{\lambda}\leqq b_{\aleph_\alpha,k+1}$.

It is obvious from the construction that $S=S_{\Omega^+_{\aleph_\alpha,k}}+$
$+\sum_{\{\beta_\lambda\}_{\lambda<\Omega^+_{\aleph_\alpha,k}}\in A_{\Omega^+_{\aleph_\alpha,k}}}\left(\prod_{\lambda<\Omega^+_{\aleph_\alpha,k}} Q_{\beta_1\ldots\beta_\lambda}\right)$ and $S_{\Omega^+_{\aleph_\alpha,k}}=\sum_{\lambda<\Omega^+_{\aleph_\alpha,k}} S_\lambda$.

Therefore $\bar{\bar{S}}_{\Omega^+_{\aleph_\alpha,k}}\leqq\overline{\overline{\Omega^+_{\aleph_\alpha,k}}}\cdot b_{\aleph_\alpha,k+1}\leqq b_{\aleph_\alpha,k+1}$. It follows by condition ($'$) that there is a sequence $\{\beta_\lambda\}_{\lambda<\Omega^+_{\aleph_\alpha,k}}$ for which $\prod_{\lambda<\Omega^+_{\aleph_\alpha,k}} Q_{\beta_1\ldots\beta_\lambda}$ is non-empty. Thus $Q_{\beta_1\ldots\beta_\lambda}$ is non-empty and therefore $x_{\beta_1\ldots\beta_\lambda}$ is really defined. It is obvious from the construction that if $\lambda_1\neq\lambda_2$, then $x_{\beta_1\ldots\beta_{\lambda_1}}\neq x_{\beta_1\ldots\beta_{\lambda_2}}$.

For the sake of brevity let $x_{k+\lambda}$ denote $x_{\beta_1 \dots \beta_\lambda}$. Then for the set $S_1 = \{x_\lambda\}_{\lambda < \Omega^+_{\aleph_\alpha, k}}$ we get $\overline{\overline{S}}_1 > b_{\aleph_\alpha, k}$. If $\{x_{\lambda_0}, \dots, x_{\lambda_k}\}$ is an arbitrary subset of $k+1$ elements of the set S_1, then by the construction there is exactly one $\nu < \omega_\alpha$ such that $\{x_{\lambda_0}, \dots, x_{\lambda_k}, x_\lambda\} \in I_\nu$ for every $\lambda > \mathrm{Max}(\lambda_0, \dots, \lambda_k)$. In this case we say that $\{x_{\lambda_0}, \dots, x_{\lambda_k}\}$ is an element of I'_ν. It is obvious that $[S_1]^{k+1} = \sum_{\nu < \omega_\alpha} I'_\nu$ and $I'_{\nu_1} \cdot I'_{\nu_2} = 0$ for $\nu_1 \neq \nu_2$. Thus by the induction hypothesis there is a set $S_0 \subseteq S_1$ and a $\nu_0 < \omega_\alpha$ such that $[S_0]^{k+1} \subseteq I'_{\nu_0}$ and $\overline{\overline{S}}_0 \geqq \aleph_{\alpha+1}$.

But if $\{x_{\lambda_0}, \dots, x_{\lambda_{k+1}}\}$ $(\lambda_0 < \dots < \lambda_{k+1})$ is an arbitrary subset of $k+2$ elements of the set S_0, then $\{x_{\lambda_0}, \dots, x_{\lambda_k}\} \in I'_{\nu_0}$ and therefore $\{x_{\lambda_0}, \dots, x_{\lambda_{k+1}}\} \in I_\nu$, i. e. $[S_0]^{k+2} \subseteq I_{\nu_0}$. Thus we have finished the induction, and Lemma 3 is proved. Q. e. d.

LEMMA 4. *Let S be a set, $\overline{\overline{S}} = m \geqq \aleph_0$ $(n < m)$ and $f(X)$ a set-mapping of S of type* 1 *and order n. The set S is the sum of at most n free sets.*

Lemma 4 is a theorem of G. FODOR.[9]

(*) THEOREM 3. $(\aleph_{\alpha+k}, \aleph_\alpha, k) \to \aleph_{\alpha+1}$ $(k = 1, 2, \dots)$.

PROOF. Let S be a set, $\overline{\overline{S}} = \aleph_{\alpha+k}$ and $f(X)$ a set-mapping of S of type k and order $\aleph_\alpha$. We have to prove the existence of a free set of power $\aleph_{\alpha+1}$. For $k=1$ the theorem is well known. We shall suppose $k > 1$.

$f(\{x_1, \dots, x_k\})$ will be denoted briefly by $f(x_1, \dots, x_k)$. Let $\{x_1, \dots, x_{k-1}\}$ be an arbitrary element of $[S]^{k-1}$. We define the set-mapping $g_{x_1, \dots, x_{k-1}}(X)$ of the set $S - \{x_1, \dots, x_{k-1}\}$ of type 1 and order $\aleph_\alpha$ as follows:

For every $x \in S - \{x_1, \dots, x_{k-1}\}$ let $g_{x_1 \dots x_{k-1}}(\{x\}) = f(x_1, \dots, x_{k-1}, x)$. By Lemma 4 $S - \{x_1, \dots, x_{k-1}\} = \sum_{\nu < \omega_\alpha} S^\nu_{x_1 \dots x_{k-1}}$ for every $x_1, \dots, x_{k-1}$, where the sets $S^\nu_{x_1 \dots x_{k-1}}$ are free sets of the set-mapping $g_{x_1 \dots x_{k-1}}(X)$ for every $\nu < \omega_\alpha$. We may suppose that $S^{\nu_1}_{x_1 \dots x_{k-1}} \cdot S^{\nu_2}_{x_1 \dots x_{k-1}} = 0$ for $\nu_1 \neq \nu_2$. Let $\{x_\mu\}_{\mu < \omega_{\alpha+k}}$ be a well-ordering of S of type $\omega_{\alpha+k}$. Let $\{x_{\mu_1}, \dots, x_{\mu_k}\}$ $(\mu_1 < \dots < \mu_k)$ be an arbitrary subset of k elements of the set S. We split the set $[S]^k$ into subsets $I_{(\nu_1 \dots \nu_k)}$ where the symbol $(\nu_1 \dots \nu_k)$ used as subscript consists of k ordinals less than ω_α. $\{x_{\mu_1}, \dots, x_{\mu_k}\} \in I_{(\nu_1 \dots \nu_k)}$ if and only if $x_{\mu_i} \in S^{\nu_i}_{x_{\mu_1} \dots x_{\mu_{i-1}} x_{\mu_{i+1}} \dots x_{\mu_k}}$ for every i $(1 \leqq i \leqq k)$. Obviously

$$[S]^k = \sum_{(\nu_1 \dots \nu_k)\ (\nu_i < \omega_\alpha;\ i = 1, \dots, k)} I_{(\nu_1 \dots \nu_k)}.$$

The set of the symbols $(\nu_1 \dots \nu_k)$ is of power $\aleph_\alpha$ and by (*) $\overline{\overline{S}} > b_{\aleph_\alpha, k-1}$, thus by Lemma 3 there is a subset S_0 and a symbol $(\nu_1^0 \dots \nu_k^0)$ such that $[S_0]^k \subseteq I_{(\nu_1^0 \dots \nu_k^0)}$ and $\overline{\overline{S}}_0 \geqq \aleph_{\alpha+1}$.

[9] See [8], Theorem 1.

The set S_0 is free. It is sufficient to prove that if $\{x_{\mu_0}, \dots, x_{\mu_k}\}$ $(\mu_0 < \dots < \mu_k)$ is an arbitrary subset of $k+1$ elements of the set S_0, then $x_{\mu_i} \notin f(x_{\mu_0}, \dots, x_{\mu_{i-1}}, x_{\mu_{i+1}}, \dots, x_{\mu_k})$ for $i = 0, \dots, k$.

In fact, for example, in the cases $i \neq 0$ we have $\{x_{\mu_0}, \dots, x_{\mu_{i-1}}, x_{\mu_{i+1}}, \dots, x_{\mu_k}\} \in \in I_{(\nu_1^0 \dots \nu_k^0)}$ and $\{x_{\mu_0}, \dots, x_{\mu_{i-2}}, x_{\mu_i}, \dots, x_{\mu_k}\} \in I_{(\nu_1^0 \dots k_k^0)}$ and therefore $x_{\mu_{i-1}}, x_{\mu_i} \in S^{\nu_{i-1}^0}_{x_{\mu_0} \dots x_{\mu_{i-2}} x_{\mu_{i+1}} \dots x_{\mu_k}}$, consequently $x_{\mu_i} \notin g_{x_{\mu_0} \dots x_{\mu_{i-2}} x_{\mu_{i+1}} \dots x_{\mu_k}}(\{x_{\mu_{i-1}}\}) = = f(x_{\mu_0}, \dots, x_{\mu_{i-1}}, x_{\mu_{i+1}}, \dots, x_{\mu_k})$.

We have similarly in the case $i = 0$ that $x_{\mu_0} \notin g_{x_{\mu_2} \dots x_{\mu_k}}(\{x_{\mu_1}\}) = = f(x_{\mu_1}, \dots, x_{\mu_k})$. Thus we have proved that there is a free set S_0 of power $\aleph_{\alpha+1}$. Q. e. d.

(*) THEOREM 4. *The smallest m for which the symbols $(m, \aleph_\alpha, k) \to \aleph_\beta$ $(0 \leqq \beta \leqq \alpha + 1)$ are true is $\aleph_{\alpha+k}$.*

Theorem 4 is an immediate consequence of Theorem 3 and Lemma 2.

(*) THEOREM 5. $(\aleph_{\alpha+k}, \aleph_\alpha, k) \not\to \aleph_{\alpha+k}$ *if* $k \geqq 2$; $(\aleph_{\alpha+1}, 2, 2) \not\to \aleph_{\alpha+1}$.

We shall only prove the second statement, the first is a consequence of it. We have stated the first one explicitly, to make Problem 2 clear.

PROOF. Let S be a set, $\overline{\overline{S}} = \aleph_{\alpha+1}$. We define a set-mapping of S of type and order 2 which has no free set of power $\aleph_{\alpha+1}$. Using (*), we have $\overline{\overline{[S]^{\aleph_\alpha}}} = \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. Let $\{x_\nu\}_{\nu < \omega_{\alpha+1}}$ and $\{X_\nu\}_{\nu < \omega_{\alpha+1}}$ be well-orderings of type $\omega_{\alpha+1}$ of the sets S and $[S]^{\aleph_\alpha}$, respectively. We define the sets $S_\nu = = \{x_\mu\}_{\mu < \nu}$ and $[S]_\nu^{\aleph_\alpha} = \{X_\mu : X_\mu \subseteq S_\nu;\ \mu < \nu.\}$ Then $\overline{\overline{S_\nu}} \leqq \aleph_\alpha$ and $\overline{\overline{[S]_\nu^{\aleph_\alpha}}} \leqq \aleph_\alpha$ for every $\nu < \omega_{\alpha+1}$. Let $\{x_\iota^\nu\}_{\iota < \omega_\alpha}$ and $\{X_\tau^\nu\}_{\tau < \omega_\alpha}$ be well-orderings of type ω_α of the sets S_ν and $[S]_\nu{}^\alpha$, respectively. We can choose a sequence $\{\tau_\sigma\}_{\sigma < \omega_\alpha}$ $(\tau_{\sigma_1} < \tau_{\sigma_2}$ if $\sigma_1 < \sigma_2)$ in such a manner that $x_{\tau_\sigma}^\nu \in X_\sigma^\nu$. This sequence may be defined by induction. Suppose that we have already defined $x_{\tau_{\sigma'}}^\nu$, for every $\sigma' < \sigma$, then the set $\{x_{\tau_{\sigma'}}^\nu\}_{\sigma' < \sigma}$ has a power less than $\aleph_\alpha$ and the set X_σ^ν, being an element of $[S]^{\aleph_\alpha}$, has an element x_τ^ν different from all $x_{\tau_{\sigma'}}^\nu$ $(\sigma' < \sigma)$. Let τ_σ be the smallest τ for which $x_\iota^\nu \in X_\sigma^\nu$ and $x_\tau^\nu \notin \{x_{\tau_{\sigma'}}^\nu\}_{\sigma' < \sigma}$.

We define the function $g(x_\mu, x_\nu)$ for $\mu < \nu < \omega_{\alpha+1}$ as follows: We define $g(x_\tau^\nu, x_\nu)$ for every fixed $\nu < \omega_{\alpha+1}$ and for all $\tau < \omega_\alpha$. If τ is an element of the set $\{\tau_\sigma\}_{\sigma < \omega_\alpha}$, we put $g(x_\tau^\nu, x_\nu) = x_{\mu_0}$ where μ_0 denotes the smallest ordinal number μ for which $x_\mu \in X_\sigma^\nu$ $(\tau = \tau_\sigma, x_\mu \neq x_\nu, x_\mu \neq x_{\tau_\sigma}^\nu)$ and put $g(x_\tau^\nu, x_\nu) = x_0$ in the other cases.

Thus we have defined $g(x_\mu, x_\nu)$ for every $\mu < \nu < \omega_{\alpha+1}$. We define the set-mapping $f(X)$ of the set S of type and order 2 as follows:

If $\{x_\mu, x_\nu\}$ $(\mu < \nu)$ is an arbitrary element of $[S]^2$, we put $f(\{x_\mu, x_\nu\}) = = \{g(x_\mu, x_\nu)\}$.

We have to prove that there is no free set of power $\aleph_{\alpha+1}$. Let S_0 be an arbitrary subset of power $\aleph_{\alpha+1}$ of S and S_0' a subset of S_0 such that $\overline{\overline{S_0'}}=\aleph_\alpha$. Then there is a $\nu<\omega_{\alpha+1}$ for which $S_0'=X_\nu$ and a $\nu_0>\nu$ such that $X_\nu\in[S]^{\aleph_\alpha}_{\nu_0}$ and $x_{\nu_0}\in S_0$. Then, by the construction of the function $g(x_\mu,x_\nu)$, there exists a $\mu_0<\nu_0$ for which $x_{\mu_0}\in X_\nu$ and $g(x_{\mu_0},x_{\nu_0})\in X_\nu$. This means that $\{x_{\mu_0},x_{\nu_0}\}\subset S_0$ and $f(\{x_{\mu_0},x_{\nu_0}\})\cdot S_0=\{g(\{x_{\mu_0},x_{\nu_0}\})\}\neq 0$, consequently the set S_0 is not free. Q. e. d.

(*) THEOREM 6. *If α is an ordinal number of the second kind and $\aleph_\alpha$ is not inaccessible, then $(\aleph_\alpha,\aleph_\beta,k)\to\aleph_\alpha$ for every $\beta<\alpha$ $(k=1,2,\ldots)$.*

PROOF. We prove the theorem by induction on k. For $k=1$ the theorem is well known.[10]

We shall now prove the theorem for $k=2$. Our proof shows clearly how induction works in the general case.

Let S be a set of power $\aleph_\alpha$, $f(X)$ a set-mapping of S of type 2 and order $\aleph_\beta$. Let τ be the smallest ordinal number for which $\aleph_\alpha=\sum_{\nu<\tau}\aleph_{\beta_\nu}$ $(\beta_\mu<\beta_\nu<\alpha$ if $\mu<\nu)$. By the assumption of the theorem $\overline{\overline{\tau}}<\aleph_\alpha$. Since $\beta<\alpha$, we may suppose that $\beta+2<\beta_\nu$ for every $\nu<\tau$.

We define $\aleph_{\gamma_\nu}$ as the sum $\sum_{\mu<\nu}\aleph_{\beta_\mu}$. We may also suppose that $\aleph_{\beta_\nu}\geqq\aleph_{\gamma_\nu}+3$ and that every β_ν is of the form $\gamma+s$ where $s\geqq 3$.

By Theorem 3 every subset of power $\aleph_\alpha$ of the set S contains a free subset of power $\aleph_{\beta_\nu}$. So we may select a sequence $\{S_\nu\}_{\nu<\tau}$ of the subsets of S which satisfies the following conditions:

(1) $\overline{\overline{S_\nu}}=\aleph_{\beta_\nu}$; (2) S_ν is a free set; (3) $S_{\nu_1}\cdot S_{\nu_2}=0$ if $\nu_1\neq\nu_2$.

Put $F_\nu=\sum_{\mu<\nu}S_\mu$. By (1) and (3) $\overline{\overline{F_\nu}}=\aleph_{\gamma_\nu}$. Thus $\overline{\overline{[F_\nu]^2}}=\aleph_{\gamma_\nu}$, consequently $\overline{\overline{\sum_{X\in[F_\nu]^2}f(X)}}\leqq\aleph_{\gamma_\nu}\cdot\aleph_\beta=\aleph_{\gamma_\nu}<\aleph_{\beta_\nu}$. Therefore we may suppose that

$$f(X)\cdot S_\nu=0 \quad\text{if}\quad X\in[F_\nu]^2. \tag{4}$$

Let S^0 denote the set $\sum_{\nu<\tau}S_\nu$. If $X\in[S^0]^2$, then $X=\{x,y\}$. In what follows $f(X)\cdot S^0$ will be denoted by $f_1(x,y)$. Suppose now that $x,y\in S_\nu$. Then $f_1(x,y)\cdot S_\mu=0$ for $\mu>\nu$ by (4) and for $\mu=\nu$ by (2). Thus $f_1(x,y)\subseteq F_\nu$ and since $\overline{\overline{f_1(x,y)}}<\aleph_\beta$, $f_1(x,y)\in[F_\nu]^{<\aleph_\beta}$.

We split the set $[S_\nu]^2$ into classes. The sets $\{x_1,y_1\}$ and $\{x_2,y_2\}$ belong to the same class if and only if $f_1(x_1,y_1)=f_1(x_2,y_2)$. Using (*), we have $\overline{\overline{[F_\nu]^{<\aleph_\beta}}}\leqq\aleph_{\gamma_\nu}^{\aleph_\beta}\leqq\aleph_{\gamma_\nu+1}\leqq\aleph_{\beta_\nu-2}$. Thus, by Lemma 3, there is an $S_\nu'\subseteq S_\nu$

[10] See e. g. [1].

($\overline{\overline{S'_\nu}} \geqq \aleph_{\beta_\nu-1}$) such that for every $x, y \in S'_\nu$ $f_1(x, y)$ is the same subset of F_ν. We define S^1_ν as follows: $S^1_\nu = S'_\nu - \sum\limits_{\mu>\nu,\ \{x, y\}\subset S'_\mu} f_1(x, y)$. It is obvious that

$$\overline{\overline{\sum_{\mu>\nu,\ \{x, y\}\subset S'_\mu} f_1(x, y)}} \leqq \overline{\tau}\cdot\aleph_\beta \leqq \aleph_{\beta_\nu-2} < \aleph_{\beta_\nu-1}$$

and therefore we have

(5) $$\overline{\overline{S^1_\nu}} \geqq \aleph_{\beta_\nu-1}.$$

Let S^1 be the set $\sum\limits_{\nu<\tau} S^1_\nu$. By the construction of S^1_ν we have

(6) $$f_1(x, y)\cdot S^1 = 0 \quad \text{if} \quad x, y \in S^1_\nu \quad \text{for every} \quad \nu < \tau.$$

Let F^1_ν be the set $\sum\limits_{\mu<\nu} S^1_\mu$. We define the set-mapping $g_\nu(\{y\})$ of the set S^1_ν of type 1 as follows: For every element y of S^1_ν let $g_\nu(\{y\}) = \sum\limits_{x\in F^1_\nu} f_1(x, y)\cdot S^1_\nu$.

We have

$$\overline{\overline{\sum_{x\in F^1_\nu} f_1(x, y)}} \leqq \overline{\overline{F^1_\nu}}\cdot\aleph_\beta \leqq \aleph_{\gamma_\nu}\cdot\aleph_\beta = \aleph_{\gamma_\nu}.$$

Thus the order of the set-mapping $g_\nu(\{y\})$ is less than $\aleph_{\beta_\nu-1}$. By the case $k=1$ of Theorem 3 there is an $S^2_\nu \subseteq S^1_\nu$ ($\overline{\overline{S^2_\nu}} = \aleph_{\beta_\nu-1}$) such that S^2_ν is a free set of $g_\nu(\{y\})$.

Let S^2 be the set $\sum\limits_{\nu<\tau} S^2_\nu$ and F^2_ν the set $\sum\limits_{\mu<\nu} S^2_\mu$. We have by the construction of S^2_ν

(7) $$\overline{\overline{S^2_\nu}} = \aleph_{\beta_\nu-1}.$$

From (6) we have

(8) $$f_1(x, y)\cdot S^2 = 0 \quad \text{if} \quad x, y \in S^2_\nu \quad \text{for every} \quad \nu < \tau,$$

and from (4), by the construction of S^2_ν, we get

(9) $$f_1(x, y)\cdot \sum_{\mu\geqq\nu} S^2_\mu = 0 \quad \text{if} \quad x \in F^2_\nu \quad \text{and} \quad y \in F^2_\nu \quad \text{or} \quad y \in S^2_\nu.$$

Put $f_2(x, y) = f_1(x, y)\cdot S^2$.

If $x \in F^2_\nu$ and $y \in S^2_\nu$, then, by (9), $f_2(x, y) \subseteq F^2_\nu$. We split the set S^2_ν into classes as follows: y and z belong to the same class if and only if $f_2(x, y) = f_2(x, z)$ for every $x \in F^2_\nu$.

We can obtain these classes as follows: First we split S^2_ν into classes, corresponding to every $x_0 \in F^2_\nu$, so that y and z belong to the same class if $f_2(x_0, y) = f_2(x_0, z)$ for this x_0 and thus we obtain at most $\overline{\overline{[F^2_\nu]^{<\aleph_\beta}}} \leqq \aleph_{\gamma_\nu}^{\aleph_\beta} \leqq \aleph_{\gamma_\nu+1}$ classes, since $f_2(x, y) \in [F^2_\nu]^{<\aleph_\beta}$. y and z belong to the same class if they belong to the same class for all x_0. Therefore we have split the set S_ν^2 into at most $\aleph_{\gamma_\nu+1}^{\aleph_{\gamma_\nu}} = \aleph_{\gamma_\nu+1}$ classes, consequently, by (7), there is a subset S_ν^3 of power $\aleph_{\beta_\nu-1}$ of S_ν^2 whose all elements belong to the same class. It follows that

$$(10) \qquad \overline{\overline{S_\nu^3}} = \aleph_{\beta_\nu-1}\,.$$

Let S^3 be the set $\sum_{\nu<\tau} S_\nu^3$ and F_ν^3 the set $\sum_{\mu<\nu} S_\mu^3$. If

$$(11) \qquad x \in F_\nu^3, \quad y, z \in S_\nu^3,$$

then, by the construction of S_ν^3, $f_2(x, y) = f_2(x, z)$. Further, by (8),

$$(12) \qquad f_2(x, y)\cdot S^3 = 0 \quad \text{for} \quad x, y \in S_\nu^3.$$

We define the set-mapping $g_0(\{x\})$ of the set S^3 of type 1 as follows: For every $x \in S^3$ there is exactly one $\nu < \tau$ for which $x \in S_\nu^3$. Put $g_0(\{x\}) = \sum'_{\mu>\nu,\, y\in S_\mu^3} f_2(x, y)\cdot S^3$ for all $x \in S^3$ where ν is the ordinal number for which $x \in S_\nu^3$. It follows from (11) that $\overline{\overline{g_0(\{x\})}} \leqq \tau\cdot\aleph_\beta < \aleph_\alpha$.

The set S^3 has the power $\aleph_\alpha$. This is true because by (3) the sets S_ν^3 are mutually exclusive and by (10) $\overline{\overline{S_\nu^3}} = \aleph_{\beta_\nu-1}$. Thus, by the induction hypothesis, i. e. by the case $k = 1$ of our theorem which is already proved, there is a free set S^4 of $g_0(\{x\})$ such that $S^4 \subseteq S^3$ and $\overline{\overline{S^4}} = \aleph_\alpha$. Let S_ν^4 be the set $S^4\cdot S_\nu^3$. Then $S^4 = \sum_{\nu<\tau} S_\nu^4$. If $x, y \in S^4$, then there is a μ and ν such that $x \in S_\mu^4$ and $y \in S_\nu^4$. We may suppose that $\mu \leqq \nu$. Obviously, $f(\{x, y\})\cdot S^4 = f_2(x, y)\cdot S^4$ and, by (12), $f_2(x, y)\cdot S^4 = 0$ if $\mu = \nu$. Further $f_2(x, y) \subseteq g_0(\{x\})$ if $\mu < \nu$. Therefore $f_2(x, y)\cdot S^4 = 0$ in this case too, since S^4 is a free set of $g_0(\{x\})$. Thus S^4 is a free set of power $\aleph_\alpha$ of the set-mapping $f(x)$. Q. e. d.

In the proof of Theorem 6 we have made use of the assumption that $\aleph_\alpha$ is not inaccessible. In the case when $\aleph_\alpha$ is inaccessible, we can prove $(\aleph_\alpha, \aleph_\beta, k) \to \aleph_\alpha$ $(\beta < \alpha)$ only if we use (**). But using (**), we can prove the following much stronger result:

(**) THEOREM 7. *If the cardinal number* $\aleph_\alpha > \aleph_0$ *is strongly inaccessible, then* $(\aleph_\alpha, \aleph_\beta, \omega) \to \aleph_\alpha$ *for every* $\beta < \alpha$.

PROOF. Let S be a set, $\overline{\overline{S}} = \aleph_\alpha$ and $f(X)$ a set-mapping of S of type ω and order $\aleph_\beta$. We have to prove the existence of a free set of power $\aleph_\alpha$.

Let $f(x_1, \ldots, x_k)$ denote briefly $f(\{x_1, \ldots, x_k\})$. Let $\mu(X)$ be the two-valued measure defined on all subsets of S the existence of which is assured by the hypothesis (**).

Let $\{x_1, \ldots, x_k\}$ be an arbitrary element of $[S]^k$ and $y \in S$. We define the set $S^y_{x_1 \ldots x_k}$ as follows: Let

(1) $$S^y_{x_1 \ldots x_k} = \{x : y \in f(x_1, \ldots, x_k, x);\ x \neq x_1, \ldots,\ x \neq x_k\}.$$

We define the set-mapping $f'(x_1, \ldots, x_k)$ of the set S of type ω as follows: Let

(2) $$f'(x_1, \ldots, x_k) = \{y : \mu(S^y_{x_1 \ldots x_k}) = 1\} \quad \text{for every} \quad \{x_1, \ldots, x_k\} \in [S]^k.$$

We call f' the derived set-mapping of f. First we prove the following lemma:

(3) *If f is an arbitrary set-mapping of S of type ω and order $\aleph_\beta$ ($\beta < \alpha$), then the derived set-mapping f' is of order $\aleph_\beta$ too.*

To see this assume $\overline{\overline{f'(x_1, \ldots, x_k)}} \geqq \aleph_\beta$ for a certain $\{x_1, \ldots, x_k\} \in [S]^k$. Then there is a set Y ($\overline{\overline{Y}} = \aleph_\beta$) such that $Y \subseteq f'(x_1, \ldots, x_k)$. Let $\{y_\nu\}_{\nu < \omega_\beta}$ be a well-ordering of Y of type ω_β. For every $\nu < \omega_\beta$, by (2), $\mu(S^{y_\nu}_{x_1 \ldots x_k}) = 1$ and therefore $\mu(\prod_{\nu < \omega_\beta} S^{y_\nu}_{x_1 \ldots x_k}) = 1$, since $\beta < \alpha$ and the measure μ is additive for less than $\aleph_\alpha$ summands. Thus the set $\prod_{\nu < \beta} S^{y_\nu}_{x_1 \ldots x_k}$ is non-empty; let x_0 be an element of it. Then $y_\nu \in f(x_1, \ldots, x_k, x_0)$ for every $\nu < \omega_\beta$, therefore $Y \subseteq f(x_1, \ldots, x_k, x_0)$, consequently $\overline{\overline{f(x_1, \ldots, x_k, x_0)}} \geqq \aleph_\beta$. This is a contradiction, because f is of order $\aleph_\beta$. Therefore $\overline{\overline{f'(x_1, \ldots, x_k)}} < \aleph_\beta$ for every $\{x_1, \ldots, x_k\} \in [S]^k$.

Now we define the set-mappings $f_l(X)$ of S by induction on l.

Put $f_0(x) = f(x)$ and $f_{l+1}(x) = f_l'(x)$. We define $S^{y,l}_{x_1 \ldots x_k}$ writing $f_l(X)$ instead of $f(X)$ in (1).

(4) The set-mappings $f_l(X)$ of type ω are, by (3), of order $\aleph_\beta$.

Now we define a sequence $\{x_\nu\}_{\nu < \omega_\alpha}$ by induction as follows: Let x_0 be an arbitrary element of S. Suppose that we have already defined the elements x_μ for all $\mu < \nu$, where $\nu < \omega_\alpha$ is a given ordinai number, such that $x_\mu \in S$.

Let S^ν be the set $\{x_\mu\}_{\mu < \nu}$ and S_1^ν the set $\sum_{X \in [S^\nu]^{<\aleph_0};\, l = 0, 1, 2, \ldots} f_l(X)$. We define the sets $\overline{S}^{y,l}_{x_1 \ldots x_k}$ as follows: Let

(5) $$\overline{S}^{y,l}_{x_1 \ldots x_k} = \begin{cases} S^{y,l}_{x_1 \ldots x_k} & \text{if} \quad \mu(S^{y,l}_{x_1 \ldots x_k}) = 0, \\ 0 & \text{if} \quad \mu(S^{y,l}_{x_1 \ldots x_k}) = 1. \end{cases}$$

Let further S_2^ν be the set $\sum_{y, x_1, \ldots, x_k \in S^\nu;\, l = 0, 1, 2, \ldots} \overline{S}^{y,l}_{x_1 \ldots x_k}$. It follows that $\overline{\overline{S^\nu}} \leqq \overline{\overline{\nu}} < \aleph_\alpha$ and $\overline{\overline{S_1^\nu}} \leqq \overline{\overline{\nu}} \cdot \aleph_0 \cdot \aleph_\beta < \aleph_\alpha$. From (5) it follows by the additivity of the measure that $\mu(S_2^\nu) = 0$. Thus the set $S - (S^\nu + S_1^\nu + S_2^\nu)$ is of measure 1 and therefore it is non-empty. Let x_ν be an arbitrary element of it.

Thus we have defined x_ν for all $\nu < \omega_\alpha$ and it is obvious from the construction that $x_\nu \neq x_\mu$ for $\nu \neq \mu$. Therefore the set $S_1 = \{x_\nu\}_{\nu < \omega_\alpha}$ is of power $\aleph_\alpha$.

We define the set-mapping $g(\{x\})$ of S_1 of type 1. Let $g(\{x\}) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l(x) \cdot S_1$ for every $x \in S_1$. We have by (4) that $\overline{\overline{g(\{x\})}} \leqq \aleph_\beta \cdot \aleph_0$, i. e. $g(\{x\})$ is of order $\aleph_{\beta+1} < \aleph_\alpha$. Then, by a theorem of ERDŐS already cited,[11] there is a free set $S_2 \subseteq S_1$ of power $\aleph_\alpha$ of the set-mapping $g(\{x\})$.

We shall prove that S_2 is a free set of the set-mapping $f(x)$ too. Since $S_2 \subseteq S_1$, S_2 has the form $\{x_{\nu_\mu}\}_{\mu < \omega_\alpha}$. If S_2 is not a free set of $f(X)$, then there is a subset $\{x_{\nu_{\mu_0}}, \ldots, x_{\nu_{\mu_k}}\}$ $(\mu_0 < \cdots < \mu_k)$ of S_2 for which $x_{\nu_{\mu_i}} \in f(x_{\nu_{\mu_0}}, \ldots, x_{\nu_{\mu_{i-1}}}, x_{\nu_{\mu_{i+1}}}, \ldots, x_{\nu_{\mu_k}})$ for an i $(0 \leqq i \leqq k)$. If $i = k$, then $x_{\nu_{\mu_k}} \in S_1^{\nu_{\mu_k}}$, in contradiction to the construction. Therefore we may suppose that $i < k$. But if $i < k$, then by the construction $x_{\nu_{\mu_k}} \notin S_2^{\nu_{\mu_k}}$. Thus $\mu(S^{x_{\nu_{\mu_i}}, 0}_{x_{\nu_{\mu_1}} \ldots x_{\nu_{\mu_{i-1}}} x_{\nu_{\mu_{i+1}}} \ldots x_{\nu_{\mu_{k-1}}}}) = 1$, i. e., by (2),

$$x_{\nu_{\mu_i}} \in f_1(x_{\nu_{\mu_0}}, \ldots, x_{\nu_{\mu_{i-1}}}, x_{\nu_{\mu_{i+1}}}, \ldots, x_{\nu_{\mu_{k-1}}}).$$

Repeating these considerations for $f_1, f_2, \ldots$ instead of f_0, we obtain that $i = 0$ and

$$x_{\nu_{\mu_0}} \in f_{k-1}(x_{\nu_{\mu_1}}).$$

But this is a contradiction, because S_2 is a free set of the set-mapping $g(\{x\})$ and $f_{k-1}(x_{\nu_{\mu_1}}) \subseteq g(\{x_{\nu_{\mu_1}}\})$. Thus S_2 must be a free set of $f(x)$ and $\overline{\overline{S_2}} = \aleph_\alpha$. Q. e. d.

(**) THEOREM 8. *If α is an ordinal number of the second kind and $\beta < \alpha$, then $(\aleph_\alpha, \aleph_\beta, k) \to \aleph_\alpha$ for $k = 1, 2, \ldots$.*

Theorem 8 is a consequence of Theorems 6 and 7.

THEOREM 9.[12]

9a) *Let m_0 be a strongly inaccessible cardinal number, $m_0 > \aleph_0$, $\overline{\overline{S}} = m_0$ and $[S]^k = I_1^k + I_2^k$ for $k = 1, 2, \ldots$. Then there exists a subset $S_0 \subseteq S$ and a series $\{n_k\}_{k=1,2,\ldots}$, where $n_k = 1, 2$, such that $\overline{\overline{S_0}} = m_0$ and $[S]^k \subseteq I_{n_k}^k$ for every k.*

9b) *Let m_0 be the first strongly inaccessible cardinal number greater than $\aleph_0$ and $m < m_0$. Let S be a set, $\overline{\overline{S}} = m$. One can define the classes I_1^k, I_2^k for every k so that the following conditions hold:*

[11] See [1].

[12] Theorem 9 gives the solution of the problem of P. ERDŐS and R. RADO mentioned on p. 113. The statement 9b) was first proved by G. FODOR.

(1) $I_1^k \cdot I_2^k = 0$ for $k = 1, 2, \ldots$;

(2) $[S]^k = I_1^k + I_2^k$ for $k = 1, 2, \ldots$;

(3) *for every infinite subset* S_0 *of* S *there is a* k *such that neither* $[S_0]^k \subseteq I_1^k$ *nor* $[S_0]^k \subseteq I_2^k$.

PROOF. The idea of the proof of 9a) is the same as the one we have used to prove Theorem 8. Therefore we shall only sketch this proof.

We define the classes $I_1^{k,l}, I_2^{k,l}$ for every $l < \omega$ by induction on l.

Put $I_1^{k,0} = I_1^k$, $I_2^{k,0} = I_2^k$. Suppose that $I_1^{k,l}$, $I_2^{k,l}$ are already defined and let $\{x_1, \ldots, x_k\}$ be an arbitrary element of $[S]^k$. Put $S^{1,l}_{x_1 \ldots x_k} = \{x : \{x_1, \ldots, x_k, x\} \in I_1^{k+1,l}\}$ and $S^{2,l}_{x_1 \ldots x_k} = \{x : \{x_1, \ldots, x_k, x\} \in I_2^{k+1,l}\}$. We shall say that $\{x_1, \ldots, x_k\} \in I_1^{k,l+1}$ if $\mu(S^{1,l}_{x_1 \ldots x_k}) = 1$ and $\{x_1, \ldots, x_k\} \in I_2^{k,l+1}$ if $\mu(S^{2,l}_{x_1 \ldots x_k}) = 1$. Let ω_α be the initial number of m_0. We define the sequence $\{x_\nu\}_{\nu < \omega_\alpha}$ by induction. Let x_0 be an arbitrary element of S. Suppose that x_μ is already defined for all $\mu < \nu$. For every l and X $(X \in [\{x_\mu\}_{\mu<\nu}]^{<\aleph_0})$ there is an $n(X, l)$ $(n(X, l) = 1$ or $n(X, l) = 2)$ such that $\mu(S_X^{n(X,l),l}) = 1$. The set $\prod_{X \in [\{x_\mu\}_{\mu<\nu}]^{<\aleph_0};\, l=0,1,2,\ldots} S_x^{n(X,l),l}$ is non-empty and we define x_ν as an arbitrary element of it.

Put $S_1 = \{x_\nu\}_{\nu < \omega_\alpha}$. We split the set S_1 into classes, x and y belong to the same class if and only if for every $l < \omega$ $\{x\} \in I_1^{1,l}$ holds if and only if $\{y\} \in I_1^{1,l}$ holds. Thus we obtain at most $2^{\aleph_0}$ classes, and therefore there is a class $S_0 \subseteq S_1$ of power m_0 which satisfies the requirements of 9a). Indeed, S_0 has the form $\{x_{\nu_\mu}\}_{\mu < \omega_\alpha}$. Suppose that for a k neither $[S_0] \subseteq I_1^k$ nor $[S_0]^k \subseteq I_2^k$. Then there is a set $\{x_{\nu_{\mu_1}}, \ldots, x_{\nu_{\mu_k}}\}$ $(\mu_1 < \cdots < \mu_k)$ and a set $\{x_{\nu_{\mu'_1}}, \ldots, x_{\nu_{\mu'_k}}\}$ $(\mu'_1 < \cdots < \mu'_k)$ for which $\{x_{\nu_{\mu_1}}, \ldots, x_{\nu_{\mu_k}}\} \in I_1^{k,0}$ and $\{x_{\nu_{\mu'_1}}, \ldots, x_{\nu_{\mu'_k}}\} \in I_2^{k,0}$. Then, by the construction, $\{x_{\nu_{\mu_1}}, \ldots, x_{\nu_{\mu_{k-1}}}\} \in I_1^{k-1,1}$ and $\{x_{\nu_{\mu'_1}}, \ldots, x_{\nu_{\mu'_{k-1}}}\} \in I_2^{k-1,1}, \ldots$, and finally $\{x_{\nu_{\mu_1}}\} \in I_1^{1,k-1}$, $\{x_{\nu_{\mu'_1}}\} \in I_2^{1,k-1}$, but this contradicts the fact that $x_{\nu_{\mu_1}}, x_{\nu_{\mu'_1}}$ belong to the same class S_0.

To prove 9b) we shall first prove the following:

(i) If the statement is true for $m = \aleph_\alpha$, then it is true for $m = 2^{\aleph_\alpha}$.

Let S_1 be the set $\{\nu\}_{\nu < \omega_\alpha}$. Then $\overline{\overline{S}}_1 = \aleph_\alpha$ and by the assumption of (i) one can define the classes I_1^k, I_2^k satisfying the conditions (1), (2), (3) of 9b) (with S_1 instead of S). To prove (i) it is sufficient to define a set S of power $2^{\aleph_\alpha}$ and the classes I_{I}^k, I_{II}^k satisfying the conditions (1), (2) and (3).

Let S be the set of all sequences $\{\varepsilon_\nu\}_{\nu < \omega_\alpha}$ where $\varepsilon_\nu = 0$ or $\varepsilon_\nu = 1$. Then $\overline{\overline{S}} = 2^{\aleph_\alpha}$. Let x_1, x_2 be two arbitrary elements of S, $x_1 \neq x_2$, $x_1 = \{\varepsilon_\nu^1\}_{\nu < \omega_\alpha}$

and $x_2 = \{\varepsilon_\nu^2\}_{\nu<\omega_\alpha}$. Let $\nu(x_1, x_2)$ denote the smallest ordinal number ν for which $\varepsilon_\nu^1 \neq \varepsilon_\nu^2$.

We define the usual lexicografical ordering of S, we say that $x_1 < x_2$ if and only if $\varepsilon^1_{\nu(x_1, x_2)} = 0$.

Now let $\{x_1, \ldots, x_k\}$ be an arbitrary subset of k elements of S. We may suppose that $x_1 < \cdots < x_k$. We write $\nu_1, \ldots, \nu_{k-1}$ instead of $\nu(x_1, x_2), \ldots, \nu(x_{k-1}, x_k)$.

We define the classes I_{I}^k, I_{II}^k for $k \geqq 2$ as follows:

(a) if $\nu_1 < \cdots < \nu_{k-1}$ or $\nu_1 > \cdots > \nu_{k-1}$, then we say that

$$\{x_1, \ldots, x_k\} \in \begin{cases} I_{\mathrm{I}}^k & \text{if } \{\nu_1, \ldots, \nu_{k-1}\} \in I_1^{k-1}, \\ I_{\mathrm{II}}^k & \text{if } \{\nu_1, \ldots, \nu_{k-1}\} \in I_2^{k-1}; \end{cases}$$

(b) in the other cases let $\{x_1, \ldots, x_k\} \in I_{\mathrm{I}}^k$.

Obviously, conditions (1) and (2) hold for S, I_{I}^k and I_{II}^k. We have to prove that condition (3) holds too.

Let S_0 be an infinite subset of S. It is well known that there exists a sequence $\{x_l\}_{l<\omega} \subseteq S_0$ for which either $x_1 < \cdots < x_l < \cdots$ or $x_1 > \cdots > x_l > \cdots$.

We shall define a subsequence $\{x_{l_s}\}_{s<\omega}$ for which $\mu_{l_1} < \cdots < \mu_{l_s} < \cdots$, where $\mu_{l_s} = \nu(x_{l_s}, x_{l_{s+1}})$. Without loss of generality we may assume that $x_1 < \cdots < x_l < \cdots$. Let ν' denote the smallest ordinal number which occurs among the ordinals $\nu(x_l, x_{l'})$ $(l < \omega, l' < \omega, l \neq l')$. Let l' be the smallest integer for which $\varepsilon_{\nu'}^{l'} = 1$ and let l be the greatest integer less than l' for which $\varepsilon_{\nu'}^{l} = 0$. Put $x_{l_1} = x_l$. It is obvious that $\nu(x_{l_1}, x_{l''}) = \nu'$ for every $l'' \geqq l'$ and $\nu(x_{l''}, x_{l'''}) > \nu'$ for $l'', l''' \geqq l'$. If we repeat this for the sequence $x_{l'}, x_{l'+1}, \ldots$ we obtain an element x_{l_2} and so on. The sequence $\{x_{l_s}\}_{s<\omega}$ satisfies our requirement.

In what follows we write x_s instead of x_{l_s} and μ_s instead of μ_{l_s}. Let S' denote the a set $\{x_s\}_{s<\omega}$ and S_1' the set $\{\mu_s\}_{s<\omega}$.

If $\{\mu_{s_1}, \ldots, \mu_{s_{k-1}}\}$ $(\mu_{s_1} < \cdots < \mu_{s_{k-1}})$ is an arbitrary finite subset of S_1', then $\{x_{s_1}, \ldots, x_{s_{k-1}}, x_{s_k}\}$ with $s_k = s_{k-1} + 1$ is a subset of k elements of S' such that $\nu(x_{s_1}, x_{s_2}) = \mu_{s_1}, \ldots, \nu(x_{s_{k-1}}, x_{s_k}) = \mu_{s_{k-1}}$. This means by (a) that to every finite subset of $k-1$ elements of S_1' there is a subset of k elements of S' such that the second belongs to I_{I}^k or to I_{II}^k if and only if the first belongs to I_1^k or to I_2^k, respectively. But there is a k for which neither $[S_1']^k \subseteq I_1^k$ nor $[S_1']^k \subseteq I_2^k$ and for this k neither $[S']^{k+1} \subseteq I_{\mathrm{I}}^{k+1}$ nor $[S']^{k+1} \subseteq I_{\mathrm{II}}^{k+1}$. Thus the sets S, I_{I}^k, I_{II}^k satisfy condition (3) too, and so (i) is proved.

Let ω_{α_0} denote the initial number of m_0.

(ii) If α is an ordinal number of the second kind, $\alpha < \alpha_0$ and if the statement of 9b) is true for every $m = \aleph_\beta$ $(\beta < \alpha)$, then it is true for $m = \aleph_\alpha$.

Proof of (ii). If $\aleph_\alpha$ is inaccessible, then it can not be strongly inaccessible, because $0<\alpha<\alpha_0$. Thus if $\aleph_\alpha$ is inaccessible, then there is a $\beta<\alpha$ for which $\aleph_\alpha \leqq 2^{\aleph_\beta}$, but then, by (i), 9b) is true for $\aleph_\alpha$. Thus we may suppose that $\aleph_\alpha$ is not inaccessible.

Let S be a set, $\overline{\overline{S}}=\aleph_\alpha$ and τ the smallest ordinal number for which $\aleph_\alpha=\sum_{\nu<\tau}\aleph_{\beta_\nu}$, $\beta_{\nu_1}<\beta_{\nu_2}<\alpha$ for $\nu_1<\nu_2<\tau$. In this case we have $\overline{\overline{\tau}}<\aleph_\alpha$. There is a sequence $\{S_\nu\}_{\nu<\tau}$ for which $S=\sum_{\nu<\tau}S_\nu$, $S_{\nu_1}\cdot S_{\nu_2}=0$ if $\nu_1\neq\nu_2$ and $\overline{\overline{S_\nu}}=\aleph_{\beta_\nu}$. By the assumption corresponding to every set S_ν ($\nu<\tau$), we can define the sets $I_1^{k,\nu}$, $I_2^{k,\nu}$ so that (1), (2) and (3) hold for $S_\nu, I_1^{k,\nu}$, $I_2^{k,\nu}$ instead of S, I_1^k, I_2^k, respectively. Put $S^*=\{\nu\}_{\nu<\tau}$. Then $\overline{\overline{S^*}}<\aleph_\alpha$ and we can define the sets $I_1^{k,*}$, $I_2^{k,*}$ satisfying the conditions (1), (2) and (3).

Now we define the sets I_1^k, I_2^k for $k=1,2,\ldots$ as follows: Let $\{x_1,\ldots,x_k\}$ be an arbitrary element of $[S]^k$.

a) If for every i $(1\leqq i\leqq k)$ $x_i\in S_{\nu_i}$ and $\nu_i\neq\nu_j$ for every $i\neq j$, then let

$$\{x_1,\ldots,x_k\}\in\begin{cases} I_1^k & \text{if} \quad \{\nu_1,\ldots,\nu_k\}\in I_1^{k,*},\\ I_2^k & \text{if} \quad \{\nu_1,\ldots,\nu_k\}\in I_2^{k,*}.\end{cases}$$

b) If there is a ν for which $\{x_1,\ldots,x_k\}\subseteq S_\nu$, then let

$$\{x_1,\ldots,x_k\}\in\begin{cases} I_1^k & \text{if} \quad \{x_1,\ldots,x_k\}\in I_1^{k,\nu},\\ I_2^k & \text{if} \quad \{x_1,\ldots,x_k\}\in I_2^{k,\nu}.\end{cases}$$

c) Let $\{x_1,\ldots,x_k\}\in I_1^k$ in the other cases.

It is obvious that conditions (1) and (2) hold for I_1^k, I_2^k.

Let S' be an arbitrary infinite subset of S. Then either (o) $S'\cdot S_\nu\neq 0$ for infinitely many ν or (oo) there is a ν such that $\overline{\overline{S_\nu\cdot S'}}\geqq\aleph_0$.

If (o) holds, then there is a subset S'' of S' such that S'' is infinite and $\overline{\overline{S''\cdot S_\nu}}=1$ for every ν. Then, by the case a), there is a k for which neither $[S'']^k\subseteq I_1^k$ nor $[S'']^k\subseteq I_2^k$.

If (oo) holds, then there is a ν and a subset S''' of S' such that $S'''\subseteq S_\nu$ and $\overline{\overline{S'''}}\geqq\aleph_0$. Then, by the case b), there is a k such that neither $[S''']^k\subseteq I_1^k$ nor $[S''']^k\subseteq I_2^k$.

It follows that condition (3) holds, consequently (ii) is proved.

The statement of 9b) is true for $m=\aleph_0$.[13]

It follows from (i) and (ii) by transfinite induction that 9b) is true for every $m=\aleph_\alpha$ where $\alpha<\alpha_0$.

REMARK. In the proof of 9b) neither (**) nor (*) are used.

[13] See e.g. [5].

LEMMA 5. *Let S be a set, $\overline{\overline{S}} \geqq \aleph_0$ and $[S]^{k+1} = I_0 + \cdots + I_l$. Then there is an i $(0 \leqq i \leqq l)$ and a subset $S_0 \subseteq S$ such that $\overline{\overline{S_0}} \geqq \aleph_0$ and $[S_0]^{k+1} \subseteq I_i$ for $k = 0, 1, 2, \ldots;\ l = 0, 1, 2, \ldots$.*

Lemma 5 is a theorem of RAMSEY.[14]

THEOREM 10. *$(m, l+1, k) \to \aleph_0$ if $m \geqq \aleph_0$ for $l = 1, 2, \ldots;\ k = 1, 2, \ldots$.*

PROOF. Let S be a set, $\overline{\overline{S}} \geqq \aleph_0$ and $f(X)$ a set-mapping of S of type k and order $l+1$. We shall prove the existence of a free set of power $\aleph_0$.

For every $X \in [S]^k$ the set $f[X]$ has at most l elements. Let $f_1(X), \ldots, f_l(X)$ denote the elements of the set $f(X)$. (If $f(X)$ has less than l elements, then one element may occur more than once.)

Let us split the set $[S]^{k+1}$ into the sum of the sets $I_0, \ldots, I_l$ as follows: If $\{x_0, \ldots, x_k\}$ is an arbitrary element of $[S]^{k+1}$, then it is an element of I_i (for $i = 1, \ldots, l$) if and only if there is a j $(0 \leqq j \leqq k)$ for which $x_j = f_i(\{x_0, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_k\})$. If such a j does not exist, then $\{x_0, \ldots, x_k\}$ belongs to I_0.

Obviously $[S]^{k+1} = I_0 + \cdots + I_k$.

Let now S'' be a finite subset of S and suppose that it has s elements. If $[S'']^{k+1} \subseteq I_i$ for some i $(1 \leqq i \leqq l)$, then the set of subsets of S'' taken $k+1$ at a time has at most as many elements as the set of subsets of S'' taken k at a time. It follows that $\binom{s}{k+1} \leqq \binom{s}{k}$, i. e. $s \leqq 2k+1$. Therefore, for every infinite subset S' of S, $[S']^{k+1} \not\subseteq I_i$ for $i = 1, \ldots, k$. Then, by Lemma 5, there is an infinite subset S_0 of S for which $[S_0]^{k+1} \subseteq I_0$, but then S_0 is obviously free. Q. e. d.

(**) THEOREM 11. *$(\aleph_{\alpha+k-1}, l+1, k) \to \aleph_\alpha$ if α is of the first kind; $(\aleph_\alpha, l+1, k) \to \aleph_\alpha$ if α is of the second kind $(l = 1, 2, \ldots;\ k = 1, 2, \ldots)$.*

The first part of the theorem is a consequence of Theorem 3. The second one follows for $\alpha > 0$ from Theorem 8, and for $\alpha = 0$ from Theorem 10. The hypothesis (**) is used only in the case when $\aleph_\alpha$ is inaccessible.

We have stated Theorem 11 explicitly only to make Problem 3 clear.

In what follows let p, m, l and k denote integers.

THEOREM 12. *Let $p(m, l, k)$ denote the greatest integer p for which $(m, l+1, k) \to p$ is true. Then*

$$c_1 \sqrt[k+1]{m} < p(m, l, k) < c_2 \sqrt[k]{m \log m}$$

where the numbers c_1 and c_2 depend on k and l but they does not depend on m, and $c_1 > 0$.

[14] See [9].

PROOF. First we prove (i) $c_1\sqrt[k+1]{m} < p(m, l, k)$.

Let S be a set, $\overline{\overline{S}} = m$ and $f(X)$ a set-mapping of S of type k and order $l+1$.

If p is an integer for which there is no free subset of power $\geqq p$, then every $X \in [S]^p$ has a subset $Y \in [S]^{k+1}$ such that Y is not free. But if $Y \in [S]^{k+1}$, then there exist in $[S]^p$ at most $\binom{m-k-1}{p-k-1}$ sets X such that $Y \subseteq X$. Therefore there are at least $\binom{m}{p} \Big/ \binom{m-k-1}{p-k-1}$ sets Y in $[S]^{k+1}$ which are not free. On the other hand, we know that there are at most $\binom{m}{k} l$ such Y's and therefore we have

$$\frac{\binom{m}{p}}{\binom{m-k-p}{p-k-1}} < l\binom{m}{k}.$$

It follows that for such a p

$$c\sqrt[k+1]{m} \leqq p$$

for some $c > 0$ which proves (i).

Now we outline the proof of (ii) $p(m, l, k) < c_2\sqrt[k]{m \log m}$. Let S be a set, $\overline{\overline{S}} = m$ and M the set of all set-mappings of S of type k and order $l+1$. We define on M a probability field such that every element f of M has the same probability. Let A be the following event: The set-mapping $f(X)$ of S of type k and order $l+1$ has a free set of p elements. For the proof of (ii) it is obviously sufficient to show that the probability of the event A is less than 1 if $p \geqq c_2\sqrt[k]{m \log m}$.

The probability of the event that a given subset of p elements of S is a free set, is

$$\left[\frac{\binom{m-p}{l}}{\binom{m-k}{l}}\right]^{\binom{p}{k}}.$$

Thus the probability of A is less than 1 if

$$\binom{m}{p}\left(\frac{\binom{m-p}{l}}{\binom{m-k}{l}}\right)^{\binom{p}{k}} < 1.$$

It follows that there is a c_2 $(c_2 = c_2(k, l))$ for which the probability of A is less than 1, if $p \geqq c_2 \sqrt[k]{m \log m}$.

Consequently, $p(m, l, k) < c_2 \sqrt[k]{m \log m}$. Q. e. d.

(Received 18 December 1957)

References

[1] P. Erdős, Some remarks on set theory, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **1** (1950), pp. 127—141.

[2] P. Erdős and G. Fodor, Some remarks on set theory. VI, *Acta Sci. Math. Szeged*, **18** (1957), pp. 243—260.

[3] A. Tarski, Drei Überdeckungssätze der allgemeinen Mengenlehre, *Fundamenta Math.*, **30** (1938), pp. 132—155.

[4] P. Erdős and A. Tarski, On families of mutually exclusive sets, *Annals of Math.*, **44** (1943), pp. 315—329.

[5] P. Erdős and R. Rado, Combinatorial theorems on classification of subsets of a given set, *Proc. London Math. Soc.* (3), **2** (1952), pp. 417—439.

[6] P. Erdős and R. Rado, A partition calculus in set theory, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **62** (1956), pp. 427—489.

[7] K. Kuratowski, Sur une caractérisation des alephs, *Fundamenta Math.*, **38** (1951), pp. 14—17.

[8] G. Fodor, Proof of a conjecture of P. Erdős, *Acta Sci. Math. Szeged*, **14** (1951—1952), pp. 219—227.

[9] F. P. Ramsey, On a problem of formal logic, *Proc. London Math. Soc.*, **30** (1930), pp. 264—286.

GENERALIZATION OF THE INEQUALITY OF P. CIVIN FOR THE FRACTIONAL DERIVATIVE OF A TRIGONOMETRICAL POLYNOMIAL TO L_p SPACE

By

I. I. OGIEWETZKI (Dniepropetrovsk, USSR)

(*Presented by* B. SZ.-NAGY)

In the paper [1] CIVIN has generalized the well-known Bernstein theorems on derivatives of a trigonometrical polynomial on the fractional index of derivative.

The purpose of this paper is to obtain an analogous result for L_p space ($p \geqq 1$), particularly, when the index of the derivative is integer, the paper's results reduce to ZYGMUND's known theorem (see [2]).

For a trigonometrical polynomial

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

the fractional derivative of order α is defined as follows:

$$T_n^\alpha(x) = \cos\frac{\pi\alpha}{2} \sum_{k=1}^{n} k^\alpha A_k(x) - \sin\frac{\pi\alpha}{2} \sum_{k=1}^{n} k^\alpha B_k(x)$$

where

$$A_k(x) = a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad B_k(x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx.$$

Let

$$\|f\|_p = \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}},$$

then we show the following inequality:

$$\| T_n^\alpha \|_p \leqq C(\alpha) n^\alpha \| T_n \|_p \qquad (p \geqq 1)$$

where $C(\alpha)$ denotes some constant depending only on α.

This inequality represents a generalization of CIVIN's inequality to which it reduces for $p = \infty$.

The method of the proof is based on a devise related to the operation of convolution.

Let

$$F_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} T_n(x+y) g(y) dy. \tag{1}$$

It may easily be shown that

$$(2) \qquad F_n^\alpha(x) = \int_{-\pi}^{\pi} T_n^\alpha(x+y)g(y)dy.$$

From CIVIN's inequality ($\max|T_n^\alpha| \leqq C(\alpha)n^\alpha \cdot \max|T_n(x)|$) and HÖLDER's inequality we have, for $p>1$ (since $F_n(x)$ is a trigonometrical polynomial of order n)

$$|F_n^\alpha(0)| \leqq \max|F_n^\alpha(x)| \leqq C(\alpha)n^\alpha \cdot \max|F_n(x)| \leqq C(\alpha)n^\alpha \|T_n\|_p \|g\|_{p'}.$$

Hence on the class of functions g for which $\|g\|_{p'}=1$ we have

$$(3) \qquad |F_n^\alpha(0)| \leqq C(\alpha)n^\alpha \|T_n\|_p.$$

But if we write in (2) $x=0$, then we get that on the same class of functions

$$(4) \qquad |F_n^\alpha(0)| \leqq \|T_n^\alpha\|_p.$$

The inequality (4) is exact, an extremal function of this inequality being

$$g(x) = \frac{[|T_n^\alpha|^{p-1} \cdot \operatorname{sg} T_n^\alpha]}{\||T_n^\alpha|^{p-1}\|_{p'}} \qquad (p>1).$$

Therefore

$$(5) \qquad \|T_n^\alpha\|_p \leqq C(\alpha)n^\alpha \|T_n\|_p.$$

If $p=1$, it may easily be seen that on the class of functions g for which $|g(x)| \leqq 1$ we will have

$$|F_n^\alpha(0)| \leqq C(\alpha)n^\alpha \|T_n\|_1$$

and

$$(4') \qquad |F_n^\alpha(0)| \leqq \|T_n^\alpha\|_1$$

where we have an equality for the function $g(x)$:

$$g(x) = \operatorname{sg} T_n^\alpha(x).$$

therefore (5) holds also for $p=1$.

Since $C(\alpha)=1$ for integer $\alpha=k$, (5) gives for those α

$$\|T_n^k\|_p \leqq n^k \|T_n\|_p,$$

an inequality of ZYGMUND (see [2]).

DNIEPROPETROVSK STATE UNIVERSITY,
SHEVCHENKO 59, DNIEPROPETROVSK, USSR

(Received 30 December 1957)

References

[1] P. Civin, Inequalites for trigonometrical integrals, *Duke Math. Journal,* **8** (1941), pp. 656–665.

[2] A. Zygmund, A remark on conjugate series, *Proc. London Math. Soc.,* **34** (1932), pp. 392-400.

ОБОБЩЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА САЙВИНА О ПРОИЗВОДНОЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО МНОГОЧЛЕНА НА СЛУЧАЙ ПРОСТРАНСТВА L_p

И. И. Огиевецкий (Днепропетровск, СССР)

(Резюме)

Для тригонометрического многочлена $T_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ дробная производная порядка α определяется следующим образом

$$T_n^\alpha(x)=\cos\frac{\pi\alpha}{2}\sum_{k=1}^{n}k^\alpha A_k(x)-\sin\frac{\pi\alpha}{2}\sum_{k=1}^{n}k^\alpha B_k(x),$$

где

$$A_k(x)=a_k\cos kx+b_k\sin kx,\qquad B_k(x)=a_k\sin kx-b_k\cos kx.$$

Положим

$$\|f_p\|=\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

тогда справедливо следующее неравенство

$$\|T_n^\alpha\|_p\leqq C(\alpha)n^\alpha\|T_n\|_p\qquad(p\geqq 1),$$

где $C(\alpha)$ — некоторая постоянная зависящая от α а не зависящая от n и p. Это неравенство является обобщением неравенства Сайвина, которому оно приводится для $p=\infty$.

Доказательство опирается на т. н. метод свертки.

IDEALS AND CONGRUENCE RELATIONS IN LATTICES

By

G. GRÄTZER and E. T. SCHMIDT (Budapest)

(*Presented by* A. RÉNYI)

Introduction

One of the important tools of the lattice-theoretical researches is the examination of lattice congruences. In connection with lattice congruences arises the necessity of the examination of lattice ideals, for I_Θ — the kernel of the homomorphism induced by the congruence relation Θ — is an ideal (if it is any), and this ideal implicates a lot of properties of Θ.

In this paper our aim is to examine the properties of lattice congruences and the correspondence $\Theta \rightarrow I_\Theta$. Our main tools in the discussion are two special types of congruence relations: the minimal congruence relations, induced by a subset of the lattice L, and the separable congruence relations, respectively.

In this paper we deal also with three problems of G. BIRKHOFF [2].[1] We prove a result of J. HASHIMOTO [14] (solving problem 73) in a new and more simple way,[2] and get a new answer to the question raised in problem 72; this has more applications to special cases than the original solution of this problem given by T. TANAKA [18]. We obtained a more general solution of problem 67 than J. JAKUBIK in [15].

The paper consists of four parts. In Part I we deal with congruence relations in distributive lattices. First we prove a theorem that describes the minimal congruence relations in distributive lattices. By the help of this theorem we get a good look at numerous properties of congruence relations in distributive lattices, all of which are able to characterize the distributivity of a lattice. We prove, finally, a theorem which is a far-reaching generalization

[1] Numbers in brackets refer to the Bibliography given at the end of the paper.

[2] In his cited paper J. HASHIMOTO deals with the representations (representation is a homomorphism of a lattice onto a ring of sets) of a lattice, and with topologies which are defined by special representations and inverse representations. Among the applications of these general discussions one can find the solution of problem 73. This explains that if we consider a single theorem independently of the others, then the proof seems to be rather difficult. It has some interest that while J. HASHIMOTO uses the Axiom of Choice during the proof, we succeeded in omitting it.

of many known theorems (which are due to J. HASHIMOTO and M. KOLIBIAR), and contains the solution of G. BIRKHOFF's problem 73 too.

In Part II we discuss with the help of the notion "weak projectivity" (introduced by R. P. DILWORTH [3]) the questions related to congruences in general lattices. After three preliminary lemmas we get an answer to the following question: In which lattices is every congruence relation Θ completely determined by the ideal I_Θ consisting of all x with $x \equiv 0$? Further on we consider the least congruence relation $\Theta[I]$ under which a given ideal is a congruence class. We point out that the correspondence $I \rightarrow \Theta[I]$ is a complete join-homomorphism and in case of distributive lattices it is moreover an isomorphism. Finally, we turn our attention to some questions related to weak projectivity.

In Part III we deal with the notion of separable congruence relations. After the definition and typical examples we prove some lemmas of preliminary character, some of which are interesting in their own right. Next we turn to the problem of giving an answer to G. BIRKHOFF's problem 72, by applying the results concerning separable congruence relations. Then we use these results in order to characterize the distributive lattices on which the congruence relations satisfy the dual infinite distributive law.

In Parts II and III we get the results of J. JAKUBIK [15] — concerning problems 72 and 73 of G. BIRKHOFF, in case of discrete lattices — as trivial special cases.

We close Part III by analysing a question raised in problem 67 of G. BIRKHOFF.

After some preliminary theorems we deal in Part IV with the problem: in which distributive lattices may a Boolean ring operation be defined? We describe also in Part IV the types of these lattices and operations.

The kernel of this paper has been published in Hungarian in the papers [6] and [7]. We supplemented the results by several new ones. For instance, the results concerning G. BIRKHOFF's problem 67 are all new.

Preliminaries

Let L be a lattice. The elements of L are denoted by the letters $a, b, c, \ldots, x, y, z$. If the lattice L has a greatest or a least element, then it will be indicated by 1 and 0, respectively. Proper inclusion will be denoted by $a > b$, while the fact that a covers b will be indicated by $a \succ b$. The lattice operations are denoted, as usual, by $\cup$ and $\cap$, while $\bigvee_\alpha a_\alpha$ and $\bigwedge_\alpha a_\alpha$ will mean the complete join and meet of the elements a_α, respectively, if they exist. If a has a complement, it will be denoted by a'.

$\{x, \alpha(x)\}$ designates the set of all elements x in L for which the proposition $\alpha(x)$, defined on the elements of L, is true.

The principal ideal generated by a is $(a] = \{x; x \leqq a\}$, the principal dual ideal generated by a is $[a) = \{x; x \geqq a\}$ and the closed interval $[a, b]$ is $\{x; a \leqq x \leqq b\}$.

The congruence relations on the lattice L are denoted by Θ, Φ, ξ, η. The set of all congruence relations on the lattice L is indicated by $\Theta(L)$. The universal and the identical congruence relations are designated by ι and ω, i. e. $x \equiv y\ (\iota)$ for all $x, y \in L$; $x \equiv y\ (\omega)$ if and only if $x = y$.

Ideals of the lattice L are denoted by the symbols I, J, K. The set of all ideals of the lattice L is indicated by $\mathfrak{L}$.

The sets $\Theta(L)$ and $\mathfrak{L}$ under suitably defined partial orderings form a lattice. This is assured by the following two assertions:

Under the natural partial ordering, $\Theta \leqq \Phi$ $(\Theta, \Phi \in \Theta(L))$ if and only if $x \equiv y\ (\Theta)$ implies $x \equiv y\ (\Phi)$, $\Theta(L)$ form a complete lattice. Moreover, let A be any set of congruence relations Θ on L. We define two new relations ξ and η by

(i) $x \equiv y(\xi)$ means $x \equiv y\ (\Theta)$ for all $\Theta \in A$;

(ii) $x \equiv y(\eta)$ means that for some finite sequence $x = z_0, z_1, \ldots, z_m = y$ we have $z_{i-1} \equiv z_i\ (\Theta_i)$ for some $\Theta_i \in A$.

Then ξ, η are congruence relations; moreover η is the join and ξ is the meet of all $\Theta \in A$.

LEMMA 1. *Let L be a lattice and $\mathfrak{L}$ the set of all ideals of L. Under the set inclusion, $\mathfrak{L}$ is a lattice with complete union. If A is a subset of $\mathfrak{L}$, then we define K as the set of all x for which*

$$x \leqq y_1 \cup y_2 \cup \cdots \cup y_n, \quad y_i \in I_i$$

for some $I_i \in A$. Then K is the complete union of the $I \in A$.

The first assertion is due to G. BIRKHOFF [2]; we were unable to find a proof of the second one in the literature, but the proof is clear from the definitions, so we omit it.

Now we define some special congruence relations. Let S be a subset of L and A the set of all congruence relations under which S lies wholly in one congruence class. By BIRKHOFF's theorem (cited above) the meet of the set of congruences A is again a congruence relation, and under this, too, all the elements of S are in the same congruence class. Hence there exists a least congruence relation under which the elements of S are in the same class. We shall say that this is the congruence relation generated by S, and we shall denote it by $\Theta[S]$. A special case of great importance is when S contains only two elements a and b; in this case $\Theta[S]$ will be designated by $\Theta_{a,b}$. A trivial connection between the notions $\Theta[S]$ and $\Theta_{a,b}$ is the following

LEMMA 2. *Let S be a subset of the lattice L. Then*

$$\Theta[S] = \bigvee_{a,b\in S} \Theta_{a,b}. \tag{1}$$

PROOF. Obviously, $\Theta_{a,b} \leqq \Theta[S]$ for all $a, b \in S$, hence $\bigvee_{a,b\in S} \Theta_{a,b} \leqq \Theta[S]$. On the other hand, S is in one congruence class under $\bigvee_{a,b\in S} \Theta_{a,b}$, for $x, y \in S$ and $x \not\equiv y(\bigvee_{a,b\in S} \Theta_{a,b})$ contradict $\Theta_{x,y} \leqq \bigvee_{a,b\in S} \Theta_{a,b}$. Thus $\Theta[S] = \bigvee_{a,b\in S} \Theta_{a,b}$ by the minimal property of $\Theta[S]$, as asserted.

If L is a lattice, then $\bar{L}$ denotes a homomorphic image of L, under the homomorphism $a \to \bar{a}$, i. e. $\bar{a}$ denotes an element of $\bar{L}$ as well as the class of those elements x of L for which $x \to \bar{a}$. If a congruence relation Θ is given, then the homomorphic image of L induced by Θ (i. e. the lattice of all congruence classes) will be indicated by $L(\Theta)$. If there exists an ideal which is a congruence class under the congruence relation Θ, then we denote it by I_Θ. Clearly, I_Θ is the kernel of the homomorphism induced by Θ.

If in L all bounded chains are finite, then following J. JAKUBIK and M. KOLIBIAR we speak of a discrete lattice. Further, if in L between all comparable pairs of elements there exists a finite maximal chain, then we call the lattice semi-discrete. (These notions coincide in modular, moreover in semi-modular lattices, see e. g. [10].)

At last, we shall denote by S and T the five element lattices generated by the elements x, y, z such that the following identities hold:

(S) $x > y$, $x \cup z = y \cup z = 1$, $x \cap z = y \cap z = 0$;

(T) $x \cup y = x \cup z = y \cup z = 1$, $x \cap y = x \cap z = y \cap z = 0$.

I. CONGRUENCE RELATIONS IN DISTRIBUTIVE LATTICES

§ 1. Description of minimal congruence relations in distributive lattices

It is well known that if Θ is a congruence relation, then $a \equiv b$ (Θ) if and only if $a \cup b \equiv a \cap b$ (Θ) (see [2]). From this trivial fact it follows that we need consider only the problem of determining the comparable pairs of elements congruent under the minimal congruence relation, which collapses a comparable pair of elements. (We say that Θ collapses a and b if they are in one congruence class under Θ)

THEOREM 1. *Given two elements a, b of the distributive lattice L with $a \geqq b$, the elements $c, d \in L$ with $c \geqq d$ satisfy $c \equiv d\ (\Theta_{a,b})$ if and only if*

$$(a \cup d) \cap c = c \tag{2}$$

and

$$(b \cup d) \cap c = d. \tag{3}$$

PROOF. We define the relation Θ on L by putting

$$x \equiv y\ (\Theta) \tag{4}$$

if and only if $c = x \cup y$ and $d = x \cap y$ satisfy (2) and (3).

From the identities $(a \cup x) \cap x = x$, $(b \cup x) \cap x = x$ it follows that Θ is reflexive, and from the symmetry of x, y in the definition of Θ it follows the symmetric property of Θ. To prove the substitution law for Θ, let us suppose $x \equiv y\ (\Theta)$, and let t be arbitrary, then from the distributivity of L and from (2), (3), (4) we obtain

$$\{a \cup [(x \cup t) \cap (y \cup t)]\} \cap [(x \cup t) \cup (y \cup t)] = \{[a \cup (x \cap y)] \cup t\} \cap$$
$$\cap [(x \cup y) \cup t] = \{[a \cup (x \cap y)] \cap (x \cup y)\} \cup t = (x \cup y) \cup t = (x \cup t) \cup (y \cup t);$$

and in a similar way

$$\{b \cup [(x \cup t) \cap (y \cup t)]\} \cap [(x \cup t) \cup (y \cup t)] = (x \cup t) \cap (y \cup t);$$

furthermore

$$\{a \cup [(x \cap t) \cap (y \cap t)]\} \cap [(x \cap t) \cup (y \cap t)] = \{[a \cup (x \cap y)] \cap (a \cup t)\} \cap$$
$$\cap [(x \cup y) \cap t] = [a \cup (x \cap y)] \cap (x \cup y) \cap [(a \cup t) \cap t] = \{[a \cup (x \cap y)] \cap$$
$$\cap (x \cup y)\} \cap t = (x \cup y) \cap t = (x \cap t) \cup (y \cap t),$$

and likewise

$$\{b \cup [(x \cap t) \cap (y \cup t)]\} \cap [(x \cap t) \cup (y \cap t)] = (x \cap t) \cap (y \cap t).$$

Thus these equations show us that $x \equiv y\ (\Theta)$ implies $x \cup t \equiv y \cup t\ (\Theta)$ and $x \cap t \equiv y \cap t\ (\Theta)$.

We show the transitivity of Θ at first in case $u \geqq v \geqq w$, $u \equiv v\ (\Theta)$, $v \equiv w\ (\Theta)$. By (4) we get

$$(a \cup v) \cap u = u, \tag{5}$$

$$(b \cup v) \cap u = v \tag{6}$$

and

$$(a \cup w) \cap v = v, \tag{7}$$

$$(b \cup w) \cap v = w. \tag{8}$$

We prove

$$(a \cup w) \cap u = u, \tag{9}$$

$$(b \cup w) \cap u = w \tag{10}$$

which are by (4) equivalent to $u \equiv w$ (Θ). Clearly, from (7) we have $a \cup w \geqq v$, applying this fact, $u \geqq v$, $v \geqq w$ and the distributivity of the lattice we get

$$(a \cup w) \cap u = [(a \cup w) \cap u] \cup v = (a \cup w \cup v) \cap (u \cup v) = (a \cup v) \cap u,$$

but by (5) $u = (a \cup v) \cap u$, thus $(a \cup w) \cap u = u$, completing the proof of (9).

From $v \geqq w$ we get $b \cup v \geqq b \cup w$, hence, using (6) and (8),

$$(b \cup w) \cap u = (b \cup w) \cap (b \cup v) \cap u = (b \cup w) \cap v = w,$$

as asserted.

Now let us suppose $u \equiv v$ (Θ), $v \equiv w$ (Θ) for arbitrary $u, v, w \in L$. Applying the substitution law, it follows $u \cup v = (u \cup v) \cup (v \cap w) \equiv u \cup v \cup w$ (Θ), $u \cap v = (u \cap v) \cap (v \cup w) \equiv (u \cap v) \cap (v \cap w) = u \cap v \cap w$ (Θ), i. e.

$$u \cup v \cup w \equiv u \cup v \quad (\Theta),$$
$$u \cup v \equiv u \cap v \quad (\Theta),$$
$$u \cap v \equiv u \cap v \cap w \quad (\Theta).$$

But

$$u \cup v \cup w \geqq u \cup v \geqq u \cap v \geqq u \cap v \cap w,$$

thus from the previous paragraph it follows that $u \cup v \cup w \equiv u \cap v \cap w$ (Θ). From the substitution law by direct computation we obtain $u \cup w = (u \cup w) \cup \cup (u \cap w) = [(u \cup v \cup w) \cap (u \cup w)] \cup (u \cap w) \equiv [(u \cap v \cap w) \cap (u \cup w)] \cup (u \cap w) = = (u \cap v \cap w) \cup (u \cap w) = u \cap w$ (Θ). This completes the proof of the transitivity of Θ.

We conclude that Θ is a congruence relation. Furthermore, $a \equiv b$ (Θ), so $\Theta \geqq \Theta_{a,b}$, $\Theta_{a,b}$ being the least congruence relation with $a \equiv b$. Again, $x \equiv y$ (Θ) implies in view of Theorem 1

$$x \cup y = [a \cup (x \cap y)] \cap (x \cup y) \quad \text{and} \quad x \cap y = [b \cup (x \cap y)] \cap (x \cup y).$$

$a \equiv b$ $(\Theta_{a,b})$ and so applying the substitution law twice to the elements $t = x \cup y$ and $t = x \cap y$, we get $[a \cup (x \cap y)] \cap (x \cup y) \equiv [b \cup (x \cap y)] \cap (x \cup y)$ $(\Theta_{a,b})$ which is equivalent to $x \cup y \equiv x \cap y$ $(\Theta_{a,b})$ if we take into consideration the above equations. Hence $x \equiv y$ (Θ) implies $x \equiv y$ $(\Theta_{a,b})$, that is, $\Theta \leqq \Theta_{a,b}$, which compared with the inequality proved above gives the desired result, $\Theta = \Theta_{a,b}$, completing the proof of Theorem 1.

Some of the most important applications of Theorem 1 will be proved in the following section.

§ 2. Characterizations of distributive lattices

Some properties of congruence relations of a lattice are suitable to characterize the distributivity of a lattice. We shall deduce such characterizations from Theorem 1.

THEOREM 2. *Each one of the following conditions is equivalent to the distributivity of the lattice* L:

(a) *if* $c \equiv d\ (\Theta_{a,b})$, *then* $a \leqq d$ *(or* $c \leqq b$*) is impossible whenever* $b \leqq a$, $d < c$ $(a, b, c, d \in L)$;

(b) $[b, a]$ *is a congruence class under* $\Theta_{a,b}$ *for all* $b \leqq a$ $(a, b \in L)$;

(c) $\Theta_{a,b} \cap \Theta_{c,d} = \omega$ *for all* $a \geqq b \geqq c \geqq d$ $(a, b, c, d \in L)$;

(d) $\Theta_{a,b}$ *has a complement in* $\Theta(L)$ *(for all* $a \geqq b$*) such that* $c \geqq a$ *implies* $c \equiv a\ (\Theta'_{a,b})$ $(a, b, c \in L)$;

(e) *if* C *is a chain of the lattice* L, *then every congruence relation of* C *may be extended to* L *such that the congruence classes on* C *remain the same;*

(f) *for any ideal* I *and for any* $x \geqq y$, $x \equiv y\ (\Theta[I])$ *if and only if* $x = y \cup v$ *for some* $v \in I$;

(g) *the condttion* (f) *is valid for all principal ideals* I;

(h) *every ideal is a congruence class under some homomorphism;*

(j) *every principal ideal is a congruence class under some homomorphism.*

PROOF. First we prove that conditions (a)—(j) hold in a distributive lattice L.

Let us suppose that $c \equiv d\ (\Theta_{a,b})$ $(a \geqq b, c > d)$ and yet $b \geqq c$, then from (3) $d = (b \cup d) \cap c = c$ contrary to $c > d$. We get a contradiction in a similar way from $a \leqq d$ and (2). Thus the validity of (a) is a simple consequence of Theorem 1.

From (a) we can easily deduce (b). Indeed, if $c \equiv a\ (\Theta_{a,b})$ and $c \notin [b, a]$, then either $c \cup a > a$ or $c \cap b < b$ holds (for, in case $c \cup a = a$ and $c \cap b = b$, we should have $b \leqq c \leqq a$, i. e. $c \in [b, a]$). But from $a < a \cup c$ and $a \equiv c\ (\Theta_{a,b})$ we get $a \equiv a \cup c\ (\Theta_{a,b})$, while $b > c \cap b$, $c \equiv b\ (\Theta_{a,b})$ imply $b \equiv c \cap b\ (\Theta_{a,b})$, both are in a contradiction to (a).

Now we prove that (c) holds in L. Let $a > b \geqq c > d$, $x > y$ and $x \equiv y\ (\Theta_{a,b} \cap \Theta_{c,d})$. Then $x \equiv y\ (\Theta_{c,d})$, hence by Theorem 1

$$(d \cup y) \cap x = y. \tag{11}$$

We assert that $c \cap (d \cup x) > c \cap (d \cup y)$. Indeed, if $c \cap (d \cup x) = c \cap (d \cup y)$, then from the equality $c \cup x = c \cup y$ (it follows from $c \cup x \equiv c \cup y\ (\Theta_{c,d})$ and from (a)) we get $c \cup (d \cup x) = c \cup (d \cup y)$. Thus $d \cup x$ and $d \cup y$ are both relative complements of c in the interval $[c \cap (d \cup x), c \cup x]$, hence $d \cup x = d \cup y$. From (11) we infer $x = (d \cup x) \cap x = (d \cup y) \cap x = y$, a contradiction. Obviously, $c \cap (d \cup x) \equiv c \cap (d \cup y)$ $(\Theta_{x,y})$ and $\Theta_{x,y} \leqq \Theta_{a,b}$, so we get $c \cap (d \cup x) \equiv$ $\equiv c \cap (d \cup y)$ $(\Theta_{a,b})$ and $a > b \geqq c \geqq c \cap (d \cup x) > c \cap (d \cup y)$, in contradiction to (a). If $a = b$ or $c = d$, then there is nothing to prove.

Next let us consider condition (d). We define Φ as the join of the congruence relations $\Theta[[a)]$ and $\Theta[(b]]$. Then $\Theta_{a,b} \cup \Phi = \iota$, because for all $x \leqq y \in L$, $[x, y] \subseteq [x \cap b, y \cup a]$, thus from $x \cap b \equiv y \cup a$ $(\Theta_{a,b} \cup \Phi)$ we get $x \equiv y$ $(\Theta_{a,b} \cup \Phi)$. Let us suppose that for some $x, y \in L$ $(x \neq y)$ we have $x \equiv y$ $(\Theta_{a,b} \cap \Phi)$. This is equivalent to $\omega < \Theta_{x,y}$ and $\Theta_{x,y} \leqq \Theta_{a,b} \cap \Phi$. From the latter $\Theta_{x,y} = \Theta_{a,b} \cap \Theta_{x,y} \cap \Phi$ and $\Phi = \bigvee\limits_{\substack{u > v \geqq a \\ u \leqq v \leqq b}} \Theta_{u,v}$. Thus (using the infinite distributive law in $\Theta(L)$, see in [2], [4], or in § 1 of Part II) $\Theta_{x,y} = \Theta_{x,y} \cap$ $\cap\, \Theta_{a,b} \cap \bigvee\limits_{\substack{u > v \geqq a \\ u < v \leqq b}} \Theta_{u,v} = \Theta_{x,y} \cap \bigvee (\Theta_{a,b} \cap \Theta_{u,v})$ and from (c) $\Theta_{a,b} \cap \Theta_{u,v} = \omega$ which is a contradiction. So, $\Phi = \Theta'_{a,b}$. Obviously, $c \geqq a$ implies $c \equiv a(\Phi)$.

To prove the validity of condition (e), let a chain C be given in L, and a congruence relation Φ on C. We define the following congruence relation of L: $\Theta = \bigvee\limits_{\substack{a \geqq b \in C \\ a \equiv b\,(\Phi)}} \Theta_{a,b}$. We prove that Θ has the desired property. Assume $x \equiv y$ (Θ), $x, y \in C$. Then by BIRKHOFF's theorem cited in the Preliminaries, there exists a finite number of pairs of elements a_i, b_i such that $a_i < b_i$ and $a_i \equiv b_i$ (Φ), furthermore $x \equiv y(\bigvee\limits_{i=1}^{n} \Theta_{a_i, b_i})$. If $[x, y] \subset \bigcup [a_i, b_i]$, then $x \equiv y$ (Φ) is valid too and there is nothing to prove. If $x \not\equiv y(\Phi)$, then there exists a part $[x_1, y_1]$ of $[x, y]$ with the property that for each i either $a_i < b_i \leqq$ $\leqq x_1 < y_1$ or $x_1 < y_1 \leqq a_i < b_i$. Then from (c) $\Theta_{x,y} \cap \bigvee\limits_{i=1}^{n} \Theta_{a_i, b_i} = \omega$ which contradicts $\Theta_{x,y} \leqq \bigvee \Theta_{a_i, b_i}$.

To verify condition (f), let the ideal I of L be given and let $x \geqq y$, $x \equiv y$ $(\Theta[I])$. We prove that $x \equiv y$ $(\Theta_{a,b})$ for some $a, b \in I$. Indeed, from Lemma 2 $\Theta[I] = \bigvee\limits_{\substack{a, b \in I \\ a \geqq b}} \Theta_{a,b}$, and by BIRKHOFF's theorem there exists a finite number of pairs of elements $a_i > b_i$, $a_i, b_i \in I$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ such that $x \equiv y(\bigvee\limits_{i=1}^{n} \Theta_{a_i, b_i})$. Let $a = \bigvee a_i$ and $b = \bigwedge b_i$, then $a, b \in I$ and obviously $x \equiv y$ $(\Theta_{a,b})$. Then by Theorem 1 $x = x \cap (a \cup y)$, thus from the distributivity of L we get $x = (x \cap a) \cup y$, hence $v = x \cap a$ has the desired property. On the other hand, it is clear that if $x = y \cup v$ and $v \in I$, then $x \equiv y$ $(\Theta[I])$, so we have proved the validity of (f).

The conditions (g), (h), (j) are special cases of (f).

Now we prove that each one of the conditions (a)—(j) implies the distributivity of L.

If L is not distributive, then it contains as a sublattice a lattice, isomorphic to the lattice S or T, defined formerly. Since a lattice has one of the properties (a)—(j) only if every sublattice of it has this property, so we must prove only that the lattices S and T fail to have this property. Among the conditions (f), (g), (h), (j) the last is the weakest one, hence in this step of the proof we may omit the others. (b) is a consequence of (a), so we may omit condition (a) too.

First we verify that the interval $[0, y]$ is a congruence class under no homomorphism in S and T. Indeed, if $y \equiv 0$ (Θ) for some Θ, then $x = x \cap (y \cup z) \equiv x \cap (0 \cup z) = 0$ and $x \notin [0, y]$, a contradiction. Hence it results that in a non-distributive lattice conditions (a), (b), (f), (g), (h), (j) do not hold. A similar trivial computation shows that conditions (c) (consider in S the chain $0, y, x$ and in T the chain $0, x, 1$), (d) (in S the interval $[y, x]$, in T the interval $[0, x]$ play the role of the interval $[b, a]$), (e) (see the chains described at the condition (c)), do not hold in the lattices S and T. Thus the proof of Theorem 2 is completed.

We mention that the conditions of Theorem 2 play a fundamental role in our researches related to all properties of distributive lattices, not only in this paper, but in the papers [9], [10], [11], [12] too.

Conditions (h) and (j) are the same as those of Theorem 2. 2 of J. HASHIMOTO [14] (conditions (3) and (4)).

§ 3. A generalized form of G. Birkhoff's problem 73

In his textbook [2] G. BIRKHOFF proposed the following problem:

Find necessary and sufficient conditions in order that the correspondence between the congruence relations and ideals of a lattice be one-to-one.

More precisely:

Find necessary and sufficient conditions in order that the correspondence $\Theta \to I_\Theta$ be an isomorphism between $\Theta(L)$ and $\mathfrak{L}$.

Applying Theorems 1 and 2, we get an answer to this question.

LEMMA 3 (J. HASHIMOTO's theorem). *In the lattice L there is a one-to-one correspondence (in the natural way) between the ideals and congruence relations if and only if L is a distributive, relatively complemented lattice with zero element.*

PROOF.

The necessity of the conditions. Obviously, I_ω is the zero ideal of L. Every ideal of L is a congruence class under some homomorphism, so the distributivity of L is assured by condition (h) of Theorem 2.

Now let us suppose that L is a distributive lattice with zero element. We prove that L is relatively complemented. By a theorem of J. VON NEUMANN (see [2], p. 114), it is sufficient to prove that if $b < a$, then b has a complement in the interval $[0, a]$. Let $V_{a,b}$ be the ideal which consists of all u with $u \equiv 0\ (\Theta_{a,b})$. $V_{a,b}$ is a congruence class under precisely one congruence relation, hence $a \equiv b\ (\Theta[V_{a,b}])$. From condition (f) it follows that for some $v \in V_{a,b}$ we have

$$b \cup v = a. \tag{12}$$

It is clear that $v \equiv 0\ (\Theta_{a,b})$, hence from Theorem 1 ($v$ and 0 play the roles of c and d)

$$b \cap v = 0. \tag{13}$$

(12) and (13) show that v is the complement of b in $[0, a]$.

The sufficiency of the conditions. From condition (h) of Theorem 2 it follows that every ideal of L is a congruence class under some homomorphism. Furthermore, every ideal is a congruence class under at most one congruence relation, as it follows from the complementedness of the intervals of type $[0, a]$ (see [2], p. 23, or the Corollary of Theorem 4 in this paper).

Now we are ready to prove the general theorem.

THEOREM 3. *Let L be a lattice and "a" a fixed element of L. Every convex sublattice of L containing "a" is a congruence class under precisely one congruence relation if and only if L is distributive, and all the intervals of type $[a, b]$ ($a \geqq b$ or $a < b$) are complemented.*

PROOF.

The necessity of the conditions. First we show the necessity of the distributivity of the lattice L. Let us suppose that L is not distributive; then it contains as a sublattice either the lattice S or the lattice T. (x, y, z will indicate the generators of S or T.)

We prove that $z = a$ is impossible. Indeed, since $x \cap y \neq x \cup y$, that is, $\Theta = \Theta_{x\cap y, x \cup y}$ is not equal to ω, the congruence class which contains a under Θ, is different from the congruence class which contains a under ω. Thus the congruence class under Θ containing a contains a further element x, so we may pick out an element c such that $c \gtrless a$ and

$$c \equiv a\ (\Theta). \tag{14}$$

Now, according as $c > a$ or $c < a$, the interval $[x \cap y \cap a, a]$ or $[a, x \cup y \cup a]$ is a congruence class under no homomorphism. Let us discuss the case $c > a$ (if $c < a$, then the proof goes on the same lines). Then $a \equiv x \cap y \cap a\ (\Phi)$ implies (as in the proof of condition (b) in Theorem 2) $x \equiv y\ (\Phi)$, for any Φ, so $x \cup y \equiv x \cap y\ (\Phi)$, hence $\Phi \geqq \Theta$, $c \equiv a\ (\Phi)$ (see (14)), but $c \notin [x \cap y \cap a, a]$; a contradiction.

Thus we have proved that $x \cup z = y \cup z$ and $x \cap z = y \cap z$ are impossible if $z = a$. So we may suppose by the Duality Principle that $x \cup a \not\equiv y \cup a$. We assert that under these hypotheses the interval $[y \cap z \cap a, y \cup a]$ (which contains a) is no congruence class under any congruence relation. Indeed, if $y \cup a \equiv y \cap z \cap a$, then

$$z = z \cup (y \cap z \cap a) \equiv z \cup (y \cup a) = (z \cup y) \cup a = z \cup x \cup a,$$

furthermore $x \cap z \equiv x \cap (z \cup x \cup a) = x$. But $x \equiv y \cap z, y \cup a \geqq y \cap z \geqq y \cap z \cap a$ and $x \notin [y \cap z \cap a, y \cup a]$, a contradiction.

Summarizing the above proved assertions, we get that the existence of the sublattices S or T contradicts the fact that every convex sublattice of L containing a is a congruence class under precisely one congruence relation.

Our second aim is to prove the complementedness of the intervals of type $[a, b]$ ($a \geqq b$ or $a < b$). Let $b_1 > b_2 > a$. Since $\Theta_{b_1, b_2} \neq \omega$, there exists an element c, comparable with a, such that $c \equiv a\ (\Theta_{b_1, b_2})$. From condition (a) of Theorem 2 we see $c < a$ is impossible. It follows that the congruence class under Θ_{b_1, b_2} which contains a is not empty and it is a part of $[a)$. Hence in $[a)$ the condition of Lemma 3 holds, that is, $[a)$ is relatively complemented. In a similar way we get the relative complementedness of $(a]$ too. The necessity of the conditions is therefore proved.

The sufficiency of the conditions. Let L be a distributive lattice such that, for a fixed a, the lattices $(a]$ and $[a)$ are relatively complemented. First we show that the distributivity of L implies that every convex sublattice is a congruence class under some homomorphism. Let D be a convex sublattice, I and J the ideal resp. dual ideal generated by D. A trivial computation shows that D is a congruence class under $\Theta[I] \cap \Theta[J]$.

Secondly we prove that every convex sublattice containing a is a congruence class under precisely one congruence relation. It is enough to prove in case the convex sublattice consists of a alone, for if D is a congruence class under more than one homomorphism, then let us consider among these the minimal one, $\Theta[D]$, and let $\bar{L} = L(\Theta[D])$ be the corresponding homomorphic image of L. In $\bar{L}$ there are fulfilled all the conditions as in L if the fixed element is $\bar{a}$, furthermore the one element convex sublattice $\bar{a}$ is a congruence class under more than one homomorphism of $\bar{L}$. So we succeeded in reducing the proof to a special case.

Now let us suppose that $x > y$. It is enough to prove the existence of a c with $c \neq a$ and $c \equiv a$ $(\Theta_{x,y})$. From the distributivity of L we obtain $a \cup x > a \cup y$ or $a \cap x > a \cap y$ ($a \cup x = a \cup y$ and $a \cap x = a \cap y$ contradict $x \neq y$). Let c be the relative complement of $a \cup y$ in the interval $[a, a \cup x]$ in the first case, and the relative complement of $a \cap x$ in the interval $[a \cap y, a]$ in the second case. A trivial calculation shows that $x \equiv y$ implies $c \equiv a$ in both cases, that is, the one element sublattice a is a congruence class only under ω. Thus the proof of Theorem 3 is completed.

The proof shows us that Theorem 3 may be sharpened by replacing the condition "every convex sublattice containing a..." by the following weaker one: "every interval containing a...".

That the relative complementedness of the whole lattice is not a consequence of the condition, it may be illustrated by the following simple counterexample: L is the chain of three elements and a, the fixed element, is the only element different from 0 and 1.

An immediate consequence of our Theorem 3 is the

COROLLARY. *Every convex sublattice of L is a congruence class under precisely one homomorphism if and only if L is a relatively complemented distributive lattice.*

Special cases of Theorem 3 were already known. Lemma 3 (the special case $a = 0$) was first proved by J. HASHIMOTO [14] in 1952; a year later G. J. AREŠKIN [1] has proved Lemma 3, by supposing that the lattice L is distributive and has a zero element. The Corollary was proved independently of us — by supposing the distributivity of the lattice considered — by M. KOLIBIAR [16].

We remark that we may get further theorems, too, as easy consequences of Theorem 3. For instance, in [9] we have pointed out that the following assertion of J. HASHIMOTO [14] is also a simple consequence of Theorem 3:

A relatively complemented lattice L is distributive if and only if L has an element a such that $(a]$ and $[a)$ are prime factorizable.

Using transfinite methods it results [11] that Lemma 3 may be sharpened; in [11] we have published another very simple proof of Lemma 3. Related to these questions we refer to [9] too.

II. CONGRUENCE RELATIONS IN GENERAL LATTICES

§ 1. Some lemmas on congruence relations

In this section we prove three lemmas which will simplify the proofs of several theorems in Parts II and III. A part of the merely technical Lemma 4 was proved already in Theorem 2.

LEMMA 4. *Let ξ be a binary relation defined on the lattice L. ξ is a congruence relation if and only if*

(a) $x \equiv x\ (\xi)$ *for all* $x \in L$;

(b) $x \equiv y\ (\xi)$ *is equivalent to* $x \cup y \equiv x \cap y\ (\xi)$ *for all* $x, y \in L$;

(c) $x \geqq y \geqq z, x \equiv y\ (\xi)$ *and* $y \equiv z\ (\xi)$ *imply* $x \equiv z\ (\xi)$;

(d) *if* $x \geqq y$ and $x \equiv y\ (\xi)$, *then* $x \cup t \equiv y \cup t\ (\xi)$, $x \cap t \equiv y \cap t\ (\xi)$ *for all* $t \in L$.

PROOF. Obviously, it is sufficient to prove that a relation ξ satisfying conditions (a)—(d) is a congruence relation.

By (a) ξ is *reflexive*, and by (b) it is *symmetric* too.

Let $u \geqq v$, $u \equiv v\ (\xi)$ and $a, b \in [v, u]$, then we assert $a \equiv b\ (\xi)$. Indeed, $u \geqq a \cup b \geqq a \cap b \geqq v$ and from (d) $u \cap (a \cup b) \equiv v \cap (a \cup b)\ (\xi)$ and $u \cap (a \cup b) \geqq$ $\geqq v \cap (a \cup b)$, thus applying again (d), $a \cup b = [u \cap (a \cup b)] \cup (a \cap b) \equiv [v \cap$ $\cap (a \cup b)] \cup (a \cap b) = a \cap b\ (\xi)$, whence from (b) $a \equiv b\ (\xi)$, and the assertion is established.

Next let $x \equiv y\ (\xi)$ and $y \equiv z\ (\xi)$. On account of (b) $x \cup y \equiv x \cap y\ (\xi)$, thus from (d) $x \cup y \cup z = (x \cup y) \cup (y \cup z) \equiv (x \cap y) \cup (y \cup z) = y \cup z\ (\xi)$, similarly, $x \cap y \cap z \equiv y \cap z\ (\xi)$, that is, $x \cup y \cup z \geqq y \cup z \geqq y \cap z \geqq x \cap y \cap z$ and the consecutive elements are congruent modulo ξ, so applying twice (c) we get $x \cup y \cup z \equiv x \cap y \cap z\ (\xi)$. Considering that $x, z \in [x \cap y \cap z, x \cup y \cup z]$, we conclude $x \equiv z\ (\xi)$, i. e. ξ is *transitive.*

The substitution law may easily be proved too, for if we assume $x \equiv y\ (\xi)$, then from (b) and (d) $x \cup y \equiv x \cap y\ (\xi)$ and $(x \cup y) \cup t \equiv (x \cap y) \cup t\ (\xi)$, but $x \cup t, y \cup t \in [(x \cap y) \cup t, x \cup y \cup t]$, hence we obtain $x \cup t \equiv y \cup t\ (\xi)$ and alike $x \cap t \equiv y \cap t\ (\xi)$, completing the proof of the Lemma.

We note that the conditions of Lemma 4 are independent and may be weakened, e. g. (a) may be replaced by (a′) $x \equiv y\ (\xi)$ for some $x, y \in L$, but we need only the above described form of Lemma 4.

Now we prove a lemma which sharpens for lattices a similar result of G. BIRKHOFF for general algebras (see the Preliminaries).

LEMMA 5. *Let A be a subset of $\Theta(L)$. We define the relation $\eta: x \equiv y\ (\eta)$ if and only if there is a finite sequence $x \cup y = u_0 \geqq u_1 \geqq \cdots \geqq u_n = x \cap y$ satisfying $u_i \equiv u_{i-1}\ (\Theta_i)$ for some $\Theta_i \in A$ $(i = 1, \ldots, n)$. Then η is a congruence relation and $\eta = \bigvee_{\Theta_\alpha \in A} \Theta_\alpha$.*

PROOF. It is clear that if η is a congruence relation, then $\eta = \bigvee \Theta_\alpha$. Thus it remains to prove that η is a congruence relation. Obviously, it is reflexive and symmetric. If $x \geqq y \geqq z$, $x \equiv y\ (\eta)$ and $y \equiv z\ (\eta)$, then we have two chains which connect x and y, resp. y and z, having the desired property. Joining these two chains, we get one from x to z with the desired property. At last if $x = z_0 \geqq z_1 \geqq \cdots \geqq z_n = y$, then $t \cup x = t \cup z_0 \geqq t \cup z_1 \geqq \cdots \geqq t \cup z_n = t \cup y$, thus $x \equiv y\ (\eta)$ implies $x \cup t \equiv y \cup t\ (\eta)$, and in a similar way we get that it implies $x \cap t \equiv y \cap t\ (\eta)$ too. We see η satisfies the conditions of Lemma 4, that is, η is a congruence relation.

The importance of Lemma 5 should be revealed by the fact that it decides in the interval $[a, b]$ whether $a \equiv b$ is valid or not. For instance, applying Lemma 5, it may be proved easily[3] the notable theorem of N. FUNAYAMA and T. NAKAYAMA [5], according to which in $\Theta(L)$ unrestrictedly holds the infinite distributive law

(ID) $\Theta \cap \bigvee \Theta_\alpha = \bigvee(\Theta \cap \Theta_\alpha)$.

In proving (ID) it suffices to show that $x \geqq y$ and $x \equiv y\ (\bigvee(\Theta \cap \Theta_\alpha))$ imply $x \equiv y\ (\Theta \cap \bigvee \Theta_\alpha)$. If $x \equiv y\ (\bigvee(\Theta \cap \Theta_\alpha))$, then by Lemma 5 for some finite sequence we have $x = z_0 \geqq z_1 \geqq \cdots \geqq z_n = y$, $z_{i-1} \equiv z_i\ (\Theta \cap \Theta_i)$, hence $z_{i-1} \equiv z_i(\Theta)$, further on $z_{i-1} \equiv z_i\ (\Theta_i)$, so $z_{i-1} \equiv z_i\ (\bigvee \Theta_\alpha)$, consequently $z_{i-1} \equiv z_i\ (\Theta \cap \bigvee \Theta_\alpha)$, that is, $x \equiv y\ (\Theta \cap \bigvee \Theta_\alpha)$, thus $\Theta \cap \bigvee \Theta_\alpha \leqq \bigvee (\Theta \cap \Theta_\alpha)$, q. e. d.

According to Theorem 1, in a distributive lattice under $\Theta_{a,b}$ $(a \geqq b)$ the elements c, d, $(c \geqq d)$ are congruent if and only if $c = (a \cup d) \cap c$, $d = (b \cup d) \cap c$. Now we generalize this theorem to arbitrary lattices.

Obviously, if

$$[\cdots(\{[(a \cup b) \cup x_1] \cap x_2\} \cup x_3) \cap \cdots] \cup x_n = c \cup d, \tag{15}$$

$$[\cdots(\{[(a \cap b) \cup x_1] \cap x_2\} \cup x_3) \cap \cdots] \cup x_n = c \cap d, \tag{16}$$

then $c \equiv d\ (\Theta_{a,b})$, as it follows from the substitution law.

The theory of congruence relations in arbitrary lattices is based upon the notion of weak projectivity due to R. P. DILWORTH [3].

[3] The idea of this proof of the theorem of FUNAYAMA and NAKAYAMA is essentially due to R. P. DILWORTH [3].

DEFINITION 1.[4] Let L be a lattice and $a, b, c, d \in L$. The pair of elements a, b is weakly projective into the pair of elements c, d if for some $x_1, \ldots, x_n \in L$ the equations (15) and (16) hold.

In what follows $\overline{a, b} \rightarrow \overline{c, d}$ will denote that a, b is weakly projective into c, d. Obviously, the relation $\rightarrow$ is transitive.

With the help of this notion we can easily describe the congruence relation $\Theta_{a,b}$.

LEMMA 6 (DILWORTH [3]). *$c \equiv d$ $(\Theta_{a,b})$ in the lattice L if and only if for some finite sequence*

(17) $c \cup d = y_0 \geqq y_1 \geqq \cdots \geqq y_k = c \cap d$ *one has* $\overline{a, b} \rightarrow \overline{y_{i-1}, y_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

PROOF. It is clear that if c, d satisfy (17), then $c \equiv d$ $(\Theta_{a,b})$. On the other hand, let us define the relation ξ such that $u \equiv v$ (ξ) if and only if some sequence $\{y_i\}$ and $c = u$, $d = v$ satisfy (17). Repeating word for word the trivial calculation of Lemma 5 we get (applying Lemma 4) that ξ is a congruence relation, completing the proof of this lemma.

COROLLARY 1. *Let L be a lattice and S a subset of L. S is a congruence class under some congruence relation if and only if $a, b, c \in S$ and $\overline{a, b} \rightarrow \overline{c, d}$ imply $d \in S$.*

PROOF. The assertion "only if" is trivial from the definition, and "if" is obvious from Lemma 2 and Lemma 6.

From Corollary 1 and from Theorem 1 it results the well-known fact that every convex sublattice of a distributive lattice is a congruence class under some congruence relation. This proof gives perhaps more insight into the cause of the validity of the above statement.

Another trivial consequence of this lemma is

COROLLARY 2. *A lattice L is simple if and only if for all $a, b, c, d \in L$ there exists a finite sequence $c \cup d = z_0 \geqq z_1 \geqq \cdots \geqq z_n = c \cap d$ such that $\overline{a, b} \rightarrow \overline{z_{i-1}, z_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.*

If L is a modular lattice and a covers b, then $\overline{a, b} \rightarrow \overline{c, d}$ implies that $c = d$ or c covers d. Thus we are led to

COROLLARY 3. *If in the simple modular lattice L there exists a pair of elements a, b such that a covers b, then L is discrete.*

[4] Definition 1 is that of [6], but it may be shown easily that it is equivalent to that of R. P. DILWORTH. The notation is the same as in [6].

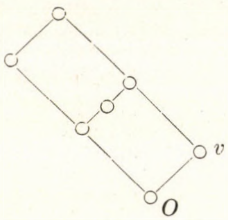
§ 2. Weakly complemented lattices

The notion of weak complementedness was introduced by H. WALLMAN [19] for distributive lattices. Now we define the notion of weak complementedness[5] in general such that for distributive lattices this is equivalent to that of H. WALLMAN.

DEFINITION 2. A lattice L with 0 is weakly complemented if to all pairs of elements a, b ($a \neq b$; $a, b \in L$) there exists an element $c \neq 0$ such that $\overline{a, b} \to \overline{c, 0}$.

A trivial computation shows[6] that in a distributive lattice $a > b$ and $\overline{a, b} \to \overline{c, 0}$ ($c \neq 0$) imply $a \cap c > 0$, $b \cap c = 0$. On the other hand, if $a \cap c > 0$ and $b \cap c = 0$, then putting $c' = a \cap c$ we obviously have $\overline{a, b} \to \overline{c', 0}$ and $c' \neq 0$. This coincides with the original definition of weak complementedness in distributive lattices.

Weak complementedness is not a homomorphic invariable property, that is, there exists a lattice which is weakly complemented, but a suitable homomorphic image of it is not relatively complemented. If this lattice is distributive, then it is necessarily infinite (see the example in [11]), but in the non-distributive case there are finite examples too; e. g. let L be the following lattice:



We can easily verify that this lattice is weakly complemented, yet $L(\Theta_{v,0})$ — which is isomorphic to the chain of three elements — is not weakly complemented.

G. J. AREŠKIN [1] proved the following assertion:

Let L be a distributive lattice with zero element. Every ideal of L is the kernel of at most one homomorphism if and only if every homomorphic image of L is weakly complemented.

[5] It seems to be unreasonable to change the definition of weakly complemented lattices, for it is a well-known notion. Our motivation is: the original notion of weak complementedness was successfully used only in distributive lattices in discussing the connection of topological spaces and distributive lattices [19] and in the researches of the congruence relations of distributive lattices [1]. In general lattices only some theorems were known which are based on the original definition. For this reason we propose the notion of "weakly complemented in the stronger sense" for the original one.

[6] It follows trivially from Theorem 1 too.

Now we show that this theorem is valid for arbitrary lattices with the above defined notion of weakly complementedness. This is a solution of the most natural generalization of G. BIRKHOFF's problem 73.[7]

THEOREM 4. *In the lattice L every congruence relation is the minimal one of a suitable ideal if and only if L has a zero and every homomorphic image of L is weakly complemented.*

For the proof a preliminary lemma is needed.

LEMMA 7. *Let L be a lattice with zero element. The zero ideal is a congruence class under precisely one congruence relation if and only if L is weakly complemented.*

PROOF. If the lattice L is weakly complemented, then the zero ideal is a congruence class only under ω, for if $x \neq y$, then there exists a $z \neq 0$, with $\overline{x, y} \to \overline{z, 0}$, that is, $z \equiv 0\ (\Theta_{x,y})$, i. e. the zero ideal is not a congruence class. On the other hand, let us assume that to the elements x, y there is no element z with $\overline{x, y} \to \overline{z, 0}$. Then $z \equiv 0\ (\Theta_{x,y})$, $z > 0$, is impossible, for if this held, then from Lemma 6 it would follow the existence of a $z_1 > 0$ with $\overline{a, b} \to \overline{z_1, 0}$. Thus the zero ideal is a congruence class under ω and $\Theta_{x,y}$ too, a contradiction.

Now we prove Theorem 4. Let I be an ideal which is a congruence class under at least one congruence relation. Obviously, I is a congruence class under more than one congruence relation if and only if the zero ideal of $L(\Theta[I])$ is a congruence class under more than one congruence relation. Thus the proof of Theorem 4 is completed.

If L is distributive, then we get from Theorem 4 the above theorem of of G. J. AREŠKIN.[8] On the other hand, we want to point out that every relatively complemented lattice with zero element is weakly complemented, so as a trivial special case of Theorem 4 we get a result of G. BIRKHOFF (see [2], p. 23):

COROLLARY. *In a lattice with* 0, *where all closed intervals* $[0, a]$ *are complemented, every congruence relation is determined by the ideal consisting of all* x *with* $x \equiv 0$.

We can get another answer to the above-mentioned problem.

[7] J. JAKUBIK [15] and J. HASHIMOTO [14] have also formulated in such a way the more natural generalization.

[8] Comparing Theorem 4 with Lemma 3 we get the following theorem of G. J. AREŠKIN [1]: A distributive lattice with zero is relatively complemented if and only if every homomorphic image of it is weakly complemented. (A far-reaching generalization of this theorem may be found in our paper [11].)

If $a, b \in L$, then $V_{a,b}$ will denote the ideal which is generated by all x with $\overline{a, b} \rightarrow \overline{x, 0}$.

THEOREM 5. *In the lattice L every congruence relation has an ideal as a congruence class and every ideal is a congruence class under at most one congruence relation if and only if L is a weakly complemented lattice with zero element and to all $a, b \in L$ there exist a $y \in V_{a,b}$ and a sequence $a \cup b = d_0 \geqq d_1 \geqq \cdots \geqq d_n = a \cap b$ with $\overline{y, 0} \rightarrow \overline{d_{i-1}, d_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$.*

PROOF. We already know the necessity of the existence of a zero element and of weak complementedness. The third condition is necessary too, because if for a, b it did not hold, then $V_{a,b}$ would be a congruence class under more than one homomorphism. Indeed, if $V_{a,b}$ were the kernel of precisely one homomorphism, then $a \equiv b$ $(\Theta[V_{a,b}])$ would be valid, and this means just by Lemma 6 the validity of the third condition.

The sufficiency of the conditions follows from the fact that under these conditions

$$a \equiv b \ (\Theta) \quad \text{if and only if} \quad V_{a,b} \subseteq I_\Theta,$$

that is, I_Θ determines the congruence relation. Indeed, if $a \equiv b$ (Θ), then $\overline{a, b} \rightarrow \overline{c, 0}$ implies $c \equiv 0$ (Θ), that is, $V_{a,b} \subseteq I_\Theta$. On the other hand, if $V_{a,b} \subseteq I_\Theta$, then there exist a $y \in V_{a,b}$ and a finite sequence $a \cup b = y_0 \geqq y_1 \geqq \cdots \geqq y_n = a \cap b$ with $\overline{y, 0} \rightarrow \overline{y_{i-1}, y_i}$, but from $y \in V_{a,b} \subseteq I_\Theta$ it follows $y \equiv 0$ (Θ) and so $a \equiv b$ (Θ), q. e. d.

Theorem 5 is a generalization of a theorem of J. JAKUBIK [15]. J. JAKUBIK dealt with discrete lattices and he got the conditions of Theorem 5 with the small difference that the conditions on a, b are supposed only if a covers b. An easy computation shows that these conditions are equivalent in discrete lattices, and what is more it becomes trivial that it is valid not only in discrete lattices but under that weakened condition, too, that L is semi-discrete.

§ 3. Minimal congruence relations generated by ideals

In this section we deal with the correspondence $I \rightarrow \Theta[I]$.

THEOREM 6. *The congruence relation generated by the ideal $\bigvee I_\alpha$ is $\bigvee \Theta[I_\alpha]$, that is,*

$$\Theta[\bigvee I_\alpha] = \bigvee \Theta[I_\alpha]. \tag{18}$$

PROOF. First we verify that if $a \leqq b$ and $a \leqq c$, then

$$\Theta_{a,b} \cup \Theta_{a,c} = \Theta_{a,b \cup c}. \tag{19}$$

Since $a\equiv b\ (\Theta_{a,\, b\cup c})$ and $a\equiv c\ (\Theta_{a,\, b\cup c})$, thus $\Theta_{a,\, b}\cup\Theta_{a,\, c}\leqq\Theta_{a,\, b\cup c}$; on the other hand, $a\equiv b\ (\Theta_{a,\, b})$ and $a\equiv c\ (\Theta_{a,\, c})$, hence $a\equiv b\cup c\ (\Theta_{a,\, b}\cup\Theta_{a,\, c})$, that is, $\Theta_{a,\, b\cup c}\leqq\Theta_{a,\, c}\cup\Theta_{a,\, c}$. These inequalities prove (19).

By Lemma 2, (18) is equivalent to

$$\bigvee_{x,\, y\in\bigvee\limits_{\alpha\in A} I_\alpha}\Theta_{x,\, y}=\bigvee_{\alpha\in A}\ \bigvee_{a,\, b\in I_\alpha}\Theta_{a,\, b}. \tag{20}$$

Let us suppose that $\Theta_{a,\, b}$ occurs in the right side of (20), then $a, b\in I_\alpha$ for some $\alpha\in A$, hence $a, b\in\bigvee\limits_{\alpha\in A} I_\alpha$, thus we obtain that $\Theta_{a,\, b}$ occurs in the left side of (20), i. e. (20) holds with $\geqq$ instead of $=$.

Conversely, let $\Theta_{x,\, y}$ be a congruence relation which occurs in the left side of (20). By Lemma 1 this means the existence of such i_{α_r} $(\in I_{\alpha_r},\ \alpha_r\in A$; $r=1, 2, \ldots, n)$ that $x, y\leqq i_{\alpha_1}\cup\cdots\cup i_{\alpha_r}$. Let $u=\bigwedge\limits_{r=1}^{n} i_{\alpha_r}\cap(x\cap y)$. Obviously, $u\in I_{\alpha_r}$ $(r=1,\ldots, n)$, hence $\Theta_{u,\, i_{\alpha_r}}$ occurs in the right side of (20). By (19) $\bigvee\limits_{r=1}^{n}\Theta_{u,\, i_{\alpha_r}}=\Theta_{u,\, \bigvee\limits_{r=1}^{n} i_{\alpha_r}}\geqq\Theta_{x,\, y}$, and so

$$\bigvee_{x,\, y\in\bigvee\limits_{\alpha\in A} I_\alpha}\Theta_{x,\, y}\leqq\bigvee_{\alpha\in A}\ \bigvee_{a,\, b\in I_\alpha}\Theta_{a,\, b},$$

that is, (20) is valid.

Let us denote by $\Theta_0[I]$ the least congruence relation under which I is a congruence class. Obviously, $\Theta[I]=\Theta_0[I]$ if $\Theta_0[I]$ exists.[9]

COROLLARY. *If $\Theta_0[I_\alpha]$ exists for all $\alpha\in A$, and also $\Theta_0[\bigvee\limits_{\alpha\in A} I_\alpha]$ exists, then*

$$\bigvee\Theta_0[I_\alpha]=\Theta_0[\bigvee I_\alpha].$$

In Theorem 6 we have proved that the join of minimal congruence relations of ideals is a minimal congruence relation of an ideal. The analogous assertion for the meet is not true as it may be shown by the example of the lattice S. It would have some interest to give conditions under which the meet of minimal congruence relations remains minimal. We assert only

LEMMA 8. *Let L be a lattice with* 0 *on which every ideal is a congruence class under at most one congruence relation. Let $\bar{\mathfrak{L}}$ denote the lattice of all ideals in L which are congruence classes under some congruence relation. Then $\bar{\mathfrak{L}}$ is isomorphic to $\Theta(L)$, i. e.*

$$\Theta[\bigvee_{\alpha\in A} I_\alpha]=\bigvee_{\alpha\in A}\Theta[I_\alpha]\qquad (I_\alpha\in\bar{\mathfrak{L}}), \tag{21}$$

$$\Theta[\bigwedge_{\alpha\in A} I_\alpha]=\bigwedge_{\alpha\in A}\Theta[I_\alpha]\qquad (I_\alpha\in\bar{\mathfrak{L}}); \tag{22}$$

[9] It would be of great interest to examine the lattice of all ideals for which $\Theta_0[I]$ exists. One can easily prove that they form a distributive lattice.

let ($\bar{I}, \bar{K}, \bar{X}_i, \bar{Y}_j \in \bar{\mathfrak{L}}$)

$$\bar{I} = \bar{X}_0 \supset \bar{X}_1 \supset \cdots \supset \bar{X}_n = \bar{K}$$

and

$$\bar{I} = \bar{Y}_0 \supset \bar{Y}_1 \supset \cdots \supset \bar{Y}_s = \bar{K},$$

then there are refinements of these chains of common length.

PROOF. (21) was proved in Theorem 6. (22) follows from the fact that the existence of $0 \in L$ implies the existence of $\bigwedge I_\alpha$; furthermore $\bigwedge I_\alpha$ is a congruence class under $\bigwedge \Theta[I_\alpha]$. But $\bigwedge I_\alpha$ is a congruence class under at most one congruence relation, hence $\bigwedge \Theta[I_\alpha] = \Theta[\bigwedge I_\alpha]$. Thus we have proved that the correspondence $I \to \Theta[I]$ ($I \in \bar{\mathfrak{L}}$) is an isomorphism, between $\bar{\mathfrak{L}}$ and $\Theta(L)$, and so $\bar{\mathfrak{L}}$ is distributive. Hence the JORDAN—DEDEKIND theorem is applicable to $\bar{\mathfrak{L}}$, and this assures the validity of the last statement.

Now we give a simple answer to the problem formulated above.

THEOREM 7. *The congruence relations of the form $\Theta[I]$ form a sublattice of $\Theta(L)$ if*

(23) $$\Theta_{a,b} \cap \Theta_{a,c} = \Theta_{a,b\cap c} \quad \textit{for all} \quad a \leqq b, a \leqq c.$$

PROOF. We must prove only

(24) $$\Theta[I_1] \cap \Theta[I_2] = \Theta[I_1 \cap I_2],$$

for the same statement for joins was proved in Theorem 6. Applying Lemma 2, (24) get the following form:

$$\bigvee_{a,b \in I_1} \Theta_{a,b} \cap \bigvee_{c,d \in I_2} \Theta_{c,d} = \bigvee_{x,y \in I_1 \cap I_2} \Theta_{x,y},$$

thus from the infinite distributive law we conclude

(25) $$\bigvee_{a,b \in I_1;\, c,d \in I_2} (\Theta_{a,b} \cap \Theta_{c,d}) = \bigvee_{x,y \in I_1 \cap I_2} \Theta_{x,y}.$$

If $\Theta_{x,y}$ occurs in the right side of (25), i. e., $x, y \in I_1 \cap I_2$, then $\Theta_{x,y}$ occurs in the left side too, i. e.

$$\bigvee_{a,b \in I_1;\, c,d \in I_2} (\Theta_{a,b} \cap \Theta_{c,d}) \geqq \bigvee_{x,y \in I_1 \cap I_2} \Theta_{x,y}.$$

On the other hand, we see that if $t \leqq a \cap b \cap c \cap d$ ($a, b \in I_1$, $c, d \in I_2$), then by (23)

$$\Theta_{a,b} \cap \Theta_{c,d} \leqq \Theta_{a\cup b,t} \cap \Theta_{c\cup d,t} = \Theta_{(a\cup b)\cap(c\cup d),t},$$

where $(a \cup b) \cap (c \cup d) \in I_1 \cap I_2$ and $t \in I_1 \cap I_2$, i. e. every member of the left side is less than or equal to a suitable member of the right side, and so the inequality holds in the reversed sense too, completing the proof of (25).

The condition (23) is not necessary, not even in modular lattices.

As an easy consequence of Theorems 1 and 7 we get:

COROLLARY. *In a distributive lattice the congruence relations of type* $\Theta[I]$ *form a sublattice of* $\Theta(L)$.

PROOF. Let $a \leqq b$ and $a \leqq c$, then $u \equiv v$ $(\Theta_{a,b})$ and $u \equiv v$ $(\Theta_{a,c})$ under the condition $u \geqq v$ are equivalent to (Theorem 1)

$$(a \cup v) \cap u = v, \tag{26}$$

$$(b \cup v) \cap u = u, \tag{27}$$

$$(c \cup v) \cap u = u. \tag{28}$$

From (27) and (28) by the distributive law

$$u = u \cap u = (b \cup v) \cap u \cap (c \cup v) \cap u = [(b \cap c) \cup v] \cap u. \tag{29}$$

(26) and (29) together mean by Theorem 1 that $u \equiv v$ $(\Theta_{a, b \cap c})$. Thus $\Theta_{a,b} \cap \Theta_{a,c} \leqq \Theta_{a, b \cap c}$; the converse inequality is an immediate consequence of $\Theta_{a,b}, \Theta_{a,c} \geqq \Theta_{a, b \cap c}$; the proof is completed.

We remark that this Corollary is an immediate consequence of condition (f) of Theorem 2 too.

The validity of (21) and (22) is assured under a lot of restrictions by

THEOREM 8. *Let L be a dual infinite distributive lattice with zero element. Then the congruence relations* $\Theta[I]$ *form a complete sublattice of* $\Theta(L)$, *that is,* (21) *and* (22) *are valid.*

PROOF. It is enough to prove (22). This may be treated in a similar manner as the Corollary of Theorem 7. It suffices to note that the zero element assures the existence of $\bigwedge I_\alpha$, and the dual infinite distributive law is used in the proof of

$$\bigwedge \Theta_{a, b_\alpha} = \Theta_{a, \wedge b_\alpha}$$

which is analogous to (23). We omit here the detailed proof.

§ 4. Remarks on weak projectivity

Let four elements a, b, c, d be given in L such that $\overline{a, b} \rightarrow \overline{c, d}$ and $\overline{c, d} \rightarrow \overline{a, b}$. Then $a \equiv b$ is equivalent to $c \equiv d$ under every congruence relation. The situation is the same if a, b and c, d are projective[10] (which shall be denoted by $[a, b]\,\Pi\,[c, d]$ if $a \leqq b$ and $c \leqq d$). The following problem arises: give a necessary and sufficient condition under which a, b is

[10] In the literature one speaks about the projectivity of intervals. We say that a, b and c, d are projective if the intervals $[a \cap b, a \cup b]$ and $[c \cap d, c \cup d]$ are projective in the usual sense. Our definition is more convenient in the sequel.

projective into c, d if and only if

(30) $$\overline{a, b} \to \overline{c, d} \quad \text{and} \quad \overline{c, d} \to \overline{a, b}.$$

Now we consider two classes of lattices in which this condition holds.

THEOREM 9. *Let L be a*

A) *distributive, or*

B) *discrete, modular*

lattice, then a, b and c, d are projective if and only if (30) *holds.*

PROOF. Evidently, in both cases it is enough to verify that (30) implies the projectivity of a, b and c, d.

A) By Theorem 1, (30) is equivalent to (we suppose that $a \leqq b, c \leqq d$)

(31) $$(a \cup c) \cap d = c;$$

(32) $$(b \cup c) \cap d = d;$$

(33) $$(c \cup a) \cap b = a;$$

(34) $$(d \cup a) \cap b = b.$$

Let us prove the equation $b \cup (a \cup c) = d \cup (a \cup c)$, i. e.

(35) $$b \cup c = d \cup a.$$

From (32) $b \cup c \geqq d$ and from $b \geqq a$ we get $b \cup c \geqq d \cup a$ and, on the other hand, from (34) $a \cup d \geqq b$ and from $d \geqq c$ we get $a \cup d \geqq b \cup c$; these inequalities prove (35). The equations (31), (33), (35) show that the consecutive members of the sequence of intervals $[a, b]$, $[a \cup c, b \cup c]$, $[c, d]$ are transposed, that is, $[a, b]\, \Pi\, [c, d]$, q. e. d.

We see that we have proved more than it was required by Theorem 9. In addition we get

THEOREM 9'. *$\Theta_{a,b} = \Theta_{c,d}$ in a distributive lattice L if and only if a, b and c, d are projective.*

B) The proof may be decomposed into two assertions. These may be proved by trivial induction, hence the detailed proofs may be omitted.

LEMMA 9. *If L is a modular, discrete lattice and $a, b, c \in L$, $a \leqq b$, then under condition* B *we have*[11]

$$l[a, b] \geqq l[a \cup c, b \cup c] \quad \text{and} \quad l[a, b] \geqq l[a \cap c, b \cap c],$$

and if a sign of equality holds, then the corresponding intervals are transposed.

PROOF by induction on $l[a, b]$.

[11] $l[a, b]$ denotes the length of a maximal chain from a to b.

LEMMA 10. *If L is a modular, discrete lattice and $a, b, c, d \in L$, $a \leqq b$, $c \leqq d$, $\overline{a, b} \rightarrow \overline{c, d}$, then*

$$l[a, b] \geqq l[c, d].$$

PROOF by Lemma 9 and by an induction on the number of steps in the definition of weak projectivity (the number n in (15) and (16)).

The proof of case B) may be completed as follows: if $a \leqq b$ and $c \leqq d$ and condition (30) holds, then $l[a, b] = l[c, d]$ from Lemma 10, hence $[a, b] \, \Pi \, [c, d]$ from Lemma 9, q. e. d.

By repeated use of distributivity it is clear that if in a distributive lattice $\overline{a, b} \rightarrow \overline{c, d}$ $(a \geqq b,\ c \geqq d)$, then for suitable p and $q (\in L)$ the following two equations hold (see Theorem 1 too):

$$(a \cup p) \cap q = c, \tag{36}$$

$$(b \cup p) \cap q = d. \tag{37}$$

Now we prove that this property characterizes the distributivity of the lattice L.

THEOREM 10. *The condition $\overline{a, b} \rightarrow \overline{c, d}$ $(a \geqq b,\ c \geqq d)$ is equivalent to* (36) *and* (37) *if and only if L is distributive.*

PROOF. The sufficiency of the distributivity is obvious. Therefore we may restrict ourselves to the necessity.

Let us suppose that the stated condition holds. We prove that $c > d \geqq a$ is impossible. Indeed, if $d \geqq a$, then $b \cup p \geqq a$, and so $a \cup p \leqq b \cup p$, that is, $a \cup p = b \cup p$, consequently $c = (a \cup p) \cap q = (b \cup p) \cap q = d$, a contradiction.

It follows from Lemma 6, that $c > d \geqq a$, $c \equiv d$ $(\Theta_{a,b})$ is impossible, hence from condition (a) of Theorem 2 we get the distributivity of L.

III. SEPARABLE CONGRUENCE RELATIONS

§ 1. The definition of separable congruence relations; examples

In this section we introduce the notion of separable congruence relation. This notion will enable us to solve many problems.

DEFINITION 3. Let L be a lattice and Θ a congruence relation on L. Θ is separable if to all $a \leqq b$ in L there exists a chain $a = z_0 \leqq z_1 \leqq \cdots \leqq z_n = b$ such that for each i either $z_{i-1} \equiv z_i$ (Θ) or $(z_{i-1} \not\equiv z_i (\Theta)$ and) $x, y \in [z_{i-1}, z_i]$, $x \equiv y$ (Θ) imply $x = y$.

We also say that this chain $\{z_i\}$ is separated modulo Θ, or Θ separates the chain $\{z_i\}$, or a and b are separated modulo Θ by the chain $\{z_i\}$.

We get immediately from the definition:

LEMMA 11. *If the lattice L is semi-discrete, then all congruence relations on L are separable.*

Now let us consider an example[12] of a non-separable congruence relation. Let L be the chain of all positive integers, together with $+\infty$. We define $x \equiv y$ (Θ) if and only if $x = 2i$, $y = 2i+1$ for some $i = 1, 2, \ldots$. Obviously, Θ is non-separable, e. g. no chain separates 1 and $+\infty$.

From the definition it is also clear that if Θ is separable, then between all a, b $(a \geqq b)$ there exists a maximal chain such that on this chain there is but a finite number of congruence classes with more than one element under Θ. Indeed, every maximal chain which refines a separating chain has the required property.

The converse statement is in general not true. It is neither true that if Θ is a congruence relation such that between all $a > b$ there is a maximal chain with the property described above, then Θ is necessarily separable. The statement: if Θ is separable, then all maximal chains between any $a \geqq b$ have the property described above, is also false. Counterexamples may be found in § 4 of this Part, see examples (A) and (B).

Some typical examples on separable and non-separable congruence relation will be shown by the following lemmas.

LEMMA 12. *Let L be a lattice with the greatest element* 1, *and I a neutral ideal*[13] *of L. $\Theta[I]$ is separable if and only if I is a principal ideal.*

PROOF. If 1 and $y (\in I)$ are separated under $\Theta[I]$ $(I \neq L)$ by the chain $\{z_i\}$ $(i = 1, \ldots, n)$, then it may be supposed that $z_1 = y$, $z_3 = 1$ $(n = 3)$. There is no subinterval of $[z_2, 1]$ which is congruent under $\Theta[I]$, thus z_2 is the generating element of I. On the other hand, if $I = (a]$, then $x \geqq y$ may be separated under $\Theta[I]$ by the chain $y \leqq x \cap (y \cup a) \leqq x$.[14]

The following is a significant example of a non-separable congruence relation of distributive lattices.

LEMMA 13. *Let an infinite sequence of elements $a = a_1 < b_1 < \cdots < a_i < < b_i < \cdots < b$ be given in the distributive lattice L. Then $\bigvee_{i=1}^{\infty} \Theta_{a_i, b_i}$ is not separable.*

[12] This example is generalized by Lemma 13.

[13] The ideal I of the lattice L is called neutral if for any ideals J, K of L, the sublattice of the lattice of all ideals of L generated by I, J, K is distributive. If I is neutral, then $x \equiv y$ under $\Theta[I]$ if and only if $(x \cap y) \cup i \geqq x \cup y$ for some $i \in I$. For this fact we refer to [2], pp. 28, 79, 119 and 124, or to [14], p. 167.

[14] If in Lemma 14 we omit the condition that L has a unit element, then the assertion does not remain valid.

PROOF. Suppose that $\Theta = \bigvee \Theta_{a_i, b_i}$ is separable, and let $\{z_i\}$ be a chain which separates a and b $(a = z_0 < z_1 < \cdots < z_n = b)$. If $z_{i-1} \equiv z_i$ (Θ), then $z_{i-1} \equiv z_i (\bigvee_{l=1}^{n} \Theta_{a_{j_l}, b_{j_l}})$, that is, already a *finite number* of the $[a_i, b_i]$ generates all congruences on the chain $\{z_i\}$. Let $[a_t, b_t]$ be an interval different from the above ones. Let Θ'_{a_t, b_t} be the complement of Θ_{a_t, b_t} (see condition (d) of Theorem 2), then $a \equiv b$ $(\Theta_{a_t, b_t} \cup \Theta'_{a_t, b_t})$, $a \not\equiv b$ (Θ'_{a_t, b_t}) (for $a_t \not\equiv b_t$ (Θ'_{a_t, b_t})). Hence for a suitable index j we have $z_{j-1} \not\equiv z_j$ (Θ'_{a_t, b_t}). According to Lemma 5 applied to $z_{j-1} \equiv z_j$ $(\Theta'_{a_t, b_t} \cup \Theta_{a_t, b_t})$, there is a pair of elements u, v such that $z_{j-1} \leqq u < v \leqq z_j$ and $u \equiv v$ (Θ_{a_t, b_t}). On the other hand, $z_{j-1} \equiv z_j$ (Θ), that is, $u \equiv v$ (Θ) whence $u \equiv v$ $(\bigvee_{l=1}^{n} \Theta_{a_{j_l}, b_{j_l}})$. Comparing this with the above congruence we get $u \equiv v$ $(\Theta_{a_t, b_t} \cap \bigvee_{l=1}^{n} \Theta_{a_{j_l}, b_{j_l}})$, that is, $u \equiv v$ $(\bigvee_{l=1}^{n} (\Theta_{a_{j_l}, b_{j_l}} \cap \Theta_{a_t, b_t}))$. From the conditions of the Lemma and from $[a_{j_l}, b_{j_l}] \neq [a_t, b_t]$, we get for each l either $a_{j_l} < b_{j_l} < a_t < b_t$ or $a_t < b_t < a_{j_l} < b_{j_l}$. Thus by condition (c) of Theorem 2 we get $\Theta_{a_{j_l}, b_{j_l}} \cap \Theta_{a_t, b_t} = \omega$. Hence the above congruence becomes $u \equiv v$ (ω), i. e. $u = v$, in contradiction to $u < v$. The proof is completed.

Now we prove

LEMMA 14. *The separable congruence relations on L form a sublattice $\Theta_s(L)$ of $\Theta(L)$. $\Theta_s(L)$ contains ι* and ω.

PROOF. It is clear that ι and ω are separable, so $\Theta_s(L)$ is not the void set. Furthermore, let $\Theta, \Phi \in \Theta_s(L)$, and let $a \geqq b$ $(a, b \in L)$. The chain $\{z_i\}_i$ separates a and b modulo Θ, and let $\{u_{ij}\}_j$ be a chain which separates z_i and z_{i-1} modulo Φ. A rather simple computation shows that the chain $\{u_{i,j}\}_{i,j}$ separates a and b modulo $\Theta \cup \Phi$ as well as modulo $\Theta \cap \Phi$, completing the proof.

$\Theta(L)$ is distributive, hence its center $\Theta_z(L)$ is the set of all congruence relations having a complement. It is well known that $\Theta_z(L)$ is a sublattice of $\Theta(L)$. (It is trivial from the identities $(\Theta \cup \Phi)' = \Theta' \cap \Phi'$ and $(\Theta \cap \Phi)' = \Theta' \cup \Phi'$.)

LEMMA 15. *If the congruence relation Θ has a complement, then it is separable, that is, $\Theta_z(L) \subseteq \Theta_s(L)$.*

PROOF. By Lemma 5, to all $a > b$ there exists a chain $a = z_0 \geqq \cdots \geqq z_n = b$ such that either $z_i \equiv z_{i-1}$ (Θ) or $z_i \equiv z_{i-1}$ (Θ') for every i. We assert that the chain $\{z_i\}$ separates a and b modulo Θ. Indeed, if $x, y \in [z_i, z_{i-1}]$ and $z_i \not\equiv z_{i-1}$ (Θ), furthermore $x \equiv y$ (Θ), then from $x \equiv y$ (Θ') we get $x \equiv y$ $(\Theta \cap \Theta')$, that is, $x = y$, q. e. d.

COROLLARY. *In a distributive lattice all congruence relations of the form* $\Theta_{a,b}$ *are separable.*

This is an immediate consequence of condition (d) of Theorem 2 and of Lemma 15.

§ 2. Weakly modular lattices and G. Birkhoff's problem 72

First of all we introduce the notion of weakly modular lattices. It plays an important role in the discussion of problem 72 as well as in our researches concerning the so-called standard ideals (see [8]).

DEFINITION 4. The lattice L is weakly modular if $\overline{a,b}\to\overline{c,d}$ $(a<b, c\neq d, a,b,c,d\in L)$ implies the existence of elements a_1, b_1 $(a\leqq a_1<b_1\leqq b)$ such that $\overline{c,d}\to\overline{a_1,b_1}$.

The weakly modular lattices are a common generalization of the modular and relatively complemented lattices[15] as it is assured by

LEMMA 16. *If L is a*

(a) *modular, or*

(b) *relatively complemented*

lattice, then it is weakly modular.

PROOF. The case (a) is an immediate consequence of the isomorphism theorem for modular lattices (we refer to [2], p. 73). Now consider case (b). Let $a>b$ and $a\cap x>y\geqq b\cap x$. Then denoting by z the relative complement of y in the interval $[b\cap x, a\cap x]$, we have $\overline{a\cap x, y}\to\overline{b, b\cup z}$ and $b<b\cup z\leqq a$, for $[(a\cap x)\cap z]\cup b=b\cup z$ and $(y\cap z)\cup b=b$. In the same lines it may be proved that in case $a>b, a\cup x\geqq y>b\cup x$, we have $\overline{b\cup x, y}\to\overline{a_1, a}$ for

[15] The necessity of a common generalization of modular and relatively complemented lattices has arisen in many cases. Let us consider an illustrative example. DILWORTH and HALL [4] proved — generalizing a theorem of G. BIRKHOFF — that every weakly atomic (a lattice is called weakly atomic, if any $a>b$ implies the existence of c, d with $a\geqq c\succ d\geqq b$) modular lattice is the subdirect product of projective lattices (a projective lattice is a lattice in which all prime intervals are projective). J. HASHIMOTO [13] proved a similar result for relatively complemented lattices. Thus the necessity of a theorem arises which is a common generalization of the above mentioned ones. Let us call the lattice L weakly projective if for any pair of prime intervals p, q the relations $p\to q$ and $q\to p$ hold (the notations are that of § 3). Obviously, any weakly projective modular or relatively complemented lattice is projective. We assert: Any weakly atomic, weakly modular lattice is a subdirect product of weakly projective lattices. The proof goes on the same lines as the proof of the assertion of DILWORTH and HALL, or, what is the same, the proof of J. HASHIMOTO. This is also a consequence of Lemma 18.

suitable $a > a_1 \geqq b$. The proof may be completed by an easy induction on n of Definition 1.

From Lemma 16 it is also clear that the weakly modular lattices generalize the modularity in another way than the semi modularity. We remark that by the Corollary 2 of Lemma 6 all simple lattices are also weakly modular.

An important property of weakly modular lattices is proved in

LEMMA 17. *Let L be a weakly modular lattice and Θ a congruence relation on L. Define $x \equiv y$ (Θ^*) if and only if in the interval $[x \cap y, x \cup y]$ every congruence class under Θ consists of a single element. Then Θ^* is a congruence relation, furthermore Θ^* is the pseudo-complement*[16] *of Θ in $\Theta(L)$.*

PROOF. Owing to the definition of Θ^*, it is reflexive and satisfies the condition (b) of Lemma 4. Let $u > v > w$, $u \equiv v$ (Θ^*) and $v \equiv w$ (Θ^*) and let us suppose that for some $u \geqq x > y \geqq v$ we have $x \equiv y$ (Θ). Since $x \equiv y$ $(\Theta_{u,v} \cup \Theta_{v,w})$, from Lemma 5 it follows the existence of x_1, y_1 such that $x \geqq x_1 > y_1 \geqq y$ and either $\overline{u, v} \rightarrow \overline{x_1, y_1}$ or $\overline{v, w} \rightarrow \overline{x_1, y_1}$. From the weak modularity it results that $\overline{x_1, y_1} \rightarrow \overline{v_1, w_1}$ for some $v \geqq v_1 > w_1 \geqq w$ or $\overline{x, y} \rightarrow \overline{u_1, v_1}$ for some $u \geqq u_1 > v_1 \geqq v$. But $x \equiv y$ (Θ) implies $v_1 \equiv w_1$ (Θ) or $u_1 \equiv v_1$ (Θ), in contradiction to $v \equiv w$ (Θ^*) or to $u \equiv v$ (Θ^*). The cases $u = v$ and $v = w$ are trivial. Finally, we prove that $x \geqq y$ and $x \equiv y$ (Θ^*) imply $x \cup t \equiv y \cup t$ (Θ^*). Indeed, if $x \cup t \equiv y \cup t$ (Θ^*) is not true, then $u \equiv v$ (Θ) is valid for some $x \cup t \geqq u > v \geqq y \cup t$. From the weak modularity it follows that $\overline{u, v} \rightarrow \overline{x_1, y_1}$ for some $x \geqq x_1 > y_1 \geqq y$, that is, $x \equiv y$ (Θ^*) is false. Thus we have proved the validity of the conditions (a)—(d) of Lemma 4, and so Θ^* is a congruence relation. The last assertion of the lemma is clear.

COROLLARY. *Any separable congruence relation of a weakly modular lattice has a complement, that is, $\Theta_s(L) = \Theta_z(L)$.*

PROOF. Let Θ be separable; we assert that the congruence relation Θ^* of Lemma 17 is the complement of Θ. Indeed, if $a \geqq b$ $(a, b \in L)$, then let $a = z_0 \geqq z_1 \geqq \cdots \geqq z_n = b$ be a chain which separates a and b modulo Θ. If $z_i \not\equiv z_{i-1}$ (Θ), then by the definition of Θ^* it follows $z_i \equiv z_{i+1}$ (Θ^*), whence $a \equiv b$ $(\Theta \cup \Theta^*)$, completing the proof of $\Theta \cup \Theta^* = \iota$.

Now we proceed to problem 72 of G. BIRKHOFF (see [2], p. 153):

Find necessary and sufficient conditions on a lattice L that its congruence relations should form a Boolean algebra.

[16] Let L be a lattice with 0. The element a^* is called the pseudo-complement of a if $x \cap a = 0$ is equivalent to $x \leqq a^*$.

First T. TANAKA [18] gave an answer to this question.[17] He got the following interesting theorem which is a generalization of a theorem of R. P. DILWORTH [3]:

The congruence relations of the lattice L form a Boolean algebra if and only if L is a discrete subdirect product of simple lattices. (Discrete subdirect product is a subdirect product in which any two elements differ only in a finite number of components.)

The theorem of T. TANAKA may be considered as the structure theorem of lattices L for which $\Theta(L)$ is a Boolean algebra. However, in some respects the following theorem is more applicable to interesting special cases:

THEOREM 11. *The congruence relations of the lattice L form a Boolean algebra if and only if*

(W) *L is weakly modular*

and

(S) *all congruence relations on L are separable.*

PROOF.

The necessity of the conditions. Let us suppose that $\Theta(L)$ is a Boolean algebra for the lattice L. Then by Lemma 15 all congruence relations are separable, hence (S) is necessary.

Let us suppose that $\overline{a, b} \to \overline{c, d}$ $(a > b, c \neq d)$. $\Theta_{c,d}$ has a complement, let us denote it by Φ. Now, $a \equiv b$ $(\Theta_{c,d} \cup \Phi)$, but in case $a \equiv b$ (Φ), it follows that $c \equiv d$ (Φ) which is impossible, so $a \not\equiv b$ (Φ). Thus Lemma 5 implies that for some $a \geqq a_1 > b_1 \geqq b$ the relation $a_1 \equiv b_1$ $(\Theta_{c,d})$ holds. By Lemma 6 this implies that for some $a_1 \geqq a_2 > b_2 \geqq b_1$, $\overline{c, d} \to \overline{a_2, b_2}$ is valid, thus in case $\Theta(L)$ is complemented, (W) holds.

The sufficiency of the conditions. By (W), $\Theta_z(L) = \Theta_s(L)$, as it was proved in the Corollary of Lemma 17. Condition (S) is equivalent to $\Theta(L) = \Theta_s(L)$, thus $\Theta(L) = \Theta_z(L)$, as we wished to prove.

We get from Theorem 11 a lot of Corollaries.

COROLLARY 1. *The lattice of all congruence relations of a*

(a) *modular, or*

[17] The result of T. TANAKA remains valid in abstract algebras, too, this explains that for lattices one can get sharper results. We note that while the result of T. TANAKA depends on the Axiom of Choice, our result does not use it.

(b) *relatively complemented*[18]

lattice is a Boolean algebra if and only if the condition (S) *holds.*

It follows from Theorem 11 and from Lemma 16.

In case the distributivity of L is assumed, we can get further improvements.

COROLLARY 2 (Theorem of J. HASHIMOTO [14]). *The lattice of all congruence relations of a distributive lattice L is a Boolean algebra if and only if L is discrete.*

PROOF. By Corollary 1 it is enough to prove that in distributive lattices (S) is equivalent to the discreteness of L. Indeed, if L is discrete, then by Lemma 11 (S) holds. On the other hand, if L is not discrete, then by the usual method of bisection of intervals we get a sequence of elements required in Lemma 13, so that, by this lemma it follows the existence of a nonseparable congruence relation, that is, condition (S) is false.[19]

In case of modular complemented lattices, SHIH-CHIANG WANG got a condition for the complementedness of $\Theta(L)$.

COROLLARY 3 (Theorem of SHIH-CHIANG WANG [20]). *The lattice of all congruence relations of a complemented modular lattice is a Boolean algebra if and only if all neutral ideals are principal.*

PROOF. By a theorem of G. BIRKHOFF, every congruence relation of a complemented modular lattice is a minimal congruence relation of a neutral ideal. By Lemma 12, the minimal congruence relation of a neutral ideal is separable if and only if the ideal is principal, and so Corollary 3 follows.

It is surprising that Corollary 3 which seems to be true only in complemented modular lattices remains true after omitting the condition of modularity, provided that we replace neutral ideals by standard[20] ones. In [8] we proved that every congruence relation of a relatively complemented lattice with 0 and 1 is a minimal congruence relation of a standard ideal, thus the proof of Corollary 3 may be applied to establish

[18] The results of this section were published in [7] in 1957. At the same time, J. HASHIMOTO published in [13] the following result: If in L the restricted chain condition holds (that is, in every (closed) interval of L the maximum *or* the minimum condition holds) and L is relatively complemented, then $\Theta(L)$ is a Boolean algebra. Indeed, the restricted chain condition is a special case of semi-discreteness, further, on any semi-discrete lattice all congruence relations are separable (Lemma 11), thus the assertion follows from the part (b) of Corollary 1.

[19] For a direct proof of Corollary 2 see our paper [12].

[20] We have introduced the notion of standard ideals in [8]. Among the more than seven equivalent definitions now we formulate only the following two: (a) the ideal I is called standard if for any ideals J, K of L the relation $J \cap (I \cup K) = (J \cap I) \cup (J \cap K)$ holds;

COROLLARY 4. *The lattice of all congruence relations of a relatively complemented lattice with* 0 *and* 1 *is a Boolean algebra if and only if all standard ideals are principal.*

We get other types of Corollaries if we restrict our consideration to discrete or semi-discrete lattices. In semi-discrete lattices (S) is valid (Lemma 11). We prove that in semi-discrete lattices (W) is equivalent to

(J) weak projectivity between prime intervals is symmetric.

(The interval $[a, b]$ is called prime if b covers a.) Indeed, if (W) holds and b covers a, d covers c, $\overline{a, b} \to \overline{c, d}$, then for some $b \geqq b_1 > a_1 \geqq a$, $\overline{c, d} \to \overline{a_1, b_1}$ is valid, but from the covering relations we infer $b = b_1$ and $a = a_1$, hence (J) is valid. On the other hand, assume the validity of (J), and let $\overline{a, b} \to \overline{c, d}$, $a < b$. Let $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ be a finite maximal chain between a and b. Then $c \equiv d \; (\bigcup\limits_{i=1}^{n} \Theta_{x_i, x_{i-1}})$, so that by Lemmas 4 and 5, for some $c \cap d \leqq c_1 \prec d_1 \leqq c \cup d$ and for some i, $\overline{x_{i-1}, x_i} \to \overline{c_1, d_1}$ is valid. But then by (J) $\overline{c_1, d_1} \to \overline{x_i, x_{i-1}}$ and the assertion follows. Thus we have

COROLLARY 5. *The lattice of all congruence relations of a semi-discrete lattice is a Boolean algebra if and only if the relation of weak projectivity between prime intervals is symmetric.*

Corollary 5 in case of discrete lattices was firstly proved by J. JAKUBIK [15]. We shall weaken the conditions of Corollary 5 in the following section.

§ 3. Special properties of $\Theta(L)$

If we can construct from the lattice L a new lattice, then it is always interesting to characterize those lattices for which the new lattice has some special properties. So, for instance, the characterization of those lattices for which $\Theta(L)$ is a Boolean algebra was the content of § 2. Now we consider further problems of this kind.

(b) the ideal I is said to be standard if $x \equiv y$ under $\Theta[I]$ if and only if $(x \cap y) \cup t = x \cup y$ for some $t \in I$. From (a) it is clear that the notion of standard ideals is a generalization of the neutral ideals; from (b) we see that the proof of Lemma 12 for standard ideals remains valid.

In [8] we have proved Corollary 4 in another way. We can sharpen Corollary 4, for in [8] we have proved that in a weakly modular lattice all standard elements are neutral and in a relatively complemented lattice all ideals which are congruence classes under some congruence relation are standard, thus we get: the lattice of all congruence relations of a relatively complemented lattice with 0 and 1 is a Boolean algebra if and only if every ideal which is a congruence class under some congruence relation is a principal ideal.

We know that in $\Theta(L)$ the infinite distributive law

(ID) $\Theta \cap \bigvee \Theta_\alpha = \bigvee(\Theta \cap \Theta_\alpha)$

holds, but, as it was pointed out by N. FUNAYAMA and T. NAKAYAMA [5], the dual law

(DID) $\Theta \cup \bigwedge \Theta_\alpha = \bigwedge(\Theta \cup \Theta_\alpha)$

does not hold in general. Let us consider the lattices in which (DID) does hold. First we prove

LEMMA 18. *Let Θ be a separable congruence relation of L. Then for any subset A of $\Theta(L)$*

$$\Theta \cup \bigwedge_{\Theta_\alpha \in A} \Theta_\alpha = \bigwedge_{\Theta_\alpha \in A} (\Theta \cup \Theta_\alpha)$$

is valid.

PROOF. Since $\Theta \cup \bigwedge \Theta_\alpha \leqq \bigwedge(\Theta \cup \Theta_\alpha)$ is true in any complete lattice, it is enough to verify that $\Theta \cup \bigwedge \Theta_\alpha \geqq \bigwedge(\Theta \cup \Theta_\alpha)$. Let $x \equiv y$ $(\bigwedge(\Theta \cup \Theta_\alpha))$; since Θ is separable, there exists a chain $x \cup y = z_0 \geqq z_1 \geqq \cdots \geqq z_n = x \cap y$ separating $x \cup y$ and $x \cap y$ modulo Θ. If $z_i \not\equiv z_{i-1}$ (Θ) for some i, then from $z_{i-1} \equiv z_i$ $(\bigwedge(\Theta \cup \Theta_\alpha))$ we get $z_i \equiv z_{i-1}$ $(\bigwedge \Theta_\alpha)$. Thus for every i either $z_i \equiv z_{i-1}$ (Θ) or $z_i \equiv z_{i-1}$ $(\bigwedge \Theta_\alpha)$, that is, $x \equiv y$ $(\Theta \cup \bigwedge \Theta_\alpha)$, which we intended to prove.

COROLLARY. *If all congruence relations on L are separable, then* (DID) *holds unrestrictedly.*

Lemma 18 or its Corollary may not be conversed, as it will be shown in § 4 by a counterexample (example (C)).

Now we characterize the distributive lattices L such that in $\Theta(L)$ (DID) holds.

THEOREM 12. *In the lattice of all congruence relations of a distributive lattice* (DID) *holds unrestrictedly if and only if L is discrete.*[21]

PROOF. If L is discrete, then all congruence relations on L are separable by Lemma 11, thus, by the Corollary of Lemma 18, (DID) holds in $\Theta(L)$.

On the other hand, assume that (DID) holds in $\Theta(L)$. Let $\Theta \in \Theta(L)$. then $\Theta = \bigvee\limits_{a \equiv b(\Theta)} \Theta_{a,b}$. By condition (d) of Theorem 2 any $\Theta_{a,b}$ has a complement $\Theta'_{a,b}$. Put $\Phi = \bigwedge\limits_{a \equiv b\,(\Theta)} \Theta'_{a,b}$, then by (ID)

$$\Theta \cap \Phi = \bigvee \Theta_{a,b} \cap (\bigwedge \Theta'_{a,b}) = \bigvee(\Theta_{a,b} \cap \bigwedge \Theta'_{a,b}) \leqq \bigvee(\Theta_{a,b} \cap \Theta'_{a,b}) = \bigvee \omega = \omega,$$

hence $\Theta \cap \Phi = \omega$, and from (DID)

$$\Theta \cup \Phi = \bigvee \Theta_{a,b} \cup (\bigwedge \Theta'_{a,b}) = \bigwedge(\Theta'_{a,b} \cup \bigvee \Theta_{a,b}) \geqq \bigwedge(\Theta'_{a,b} \cup \Theta_{a,b}) = \iota,$$

[21] A simple proof of Theorem 12 was published in our paper [12].

(the $\bigwedge$ and $\bigvee$ are extended to all a, b with $a \equiv b$ (Θ) in all above formulae), thus $\Theta \cup \Phi = \iota$, that is, Φ is the complement of Θ. Thus $\Theta(L)$ is a Boolean algebra, hence from Corollary 2 of Theorem 11 L is discrete and the theorem follows.

*

Now we consider a question related to problem 67 of G. BIRKHOFF [2].

Let P be the set of all prime intervals of the lattice L; the elements of P are denoted by p, q. If $p = [a, b]$ and $q = [c, d]$, furthermore $\overline{a, b} \to \overline{c, d}$, then we write $p \to q$. The elements of P under the relation $\to$ are quasi-ordered, thus if we identify those p, q for which $p \to q$ and $q \to p$ simultaneously, then we get a partially ordered set which will be denoted also by P. Now we are seeking for a condition under which $\Theta(L) \simeq \mathbf{2}^P$. ($\mathbf{2}$ denotes the lattice of two elements. The definition of $\mathbf{2}^P$ may be found in [2], p. 8.)

LEMMA 19. *For any lattice L, $\mathbf{2}^P$ is a complete homomorphic image of $\Theta(L)$.*

PROOF. We say that the congruence relation Θ collapses the prime interval p, if $p = [a, b]$ and $a \equiv b$ (Θ). We call a subset A of P s-ideal, if $p \in A$ and $p \to q$ imply $q \in A$. We assert that every s-ideal may be regarded as the set of all prime intervals collapsed by some congruence relation. Indeed, if Θ is a congruence relation, then the set of all collapsed prime intervals A form an s-ideal, for if $p \in A$ and $p \to q$, then q is also collapsed by Θ. On the other hand, let A be an s-ideal of P, and let us define $\Theta = \bigvee_{p=[a,b] \in A} \Theta_{a,b}$. Under Θ the prime intervals of A are collapsed, furthermore if q is collapsed by Θ, then $q = [a, b]$, $a \equiv b$ (Θ), thus, by Lemmas 4 and 5, $p \to q$ for some $p \in A$, hence $q \in A$.

In a similar way we get that if under Φ and Θ the collapsed prime intervals are A_Φ and A_Θ, respectively, then under $\Theta \cup \Phi$ and $\Theta \cap \Phi$ the collapsed prime intervals are $A_\Phi \cup A_\Theta$ and $A_\Phi \cap A_\Theta$, where $\cup$ and $\cap$ denote the set theoretical meet and join. Thus the set B of all s-ideals of P, partially ordered under set-inclusion is a homomorphic, moreover, a complete homomorphic image of $\Theta(L)$ (naturally the void set is also regarded as an s-ideal). It is evident that B is isomorphic to $\mathbf{2}^P$, completing the proof of Lemma 19.

A trivial condition concerning the problem under discussion follows from Lemma 19.

THEOREM 13. *The isomorphism $\Theta(L) \simeq \mathbf{2}^P$ holds if and only if to any pair $\Theta > \Phi$ $(\Theta, \Phi \in \Theta(L))$ there exists some $p \in P$ collapsed by Θ but not by Φ.*

PROOF. Since $\mathbf{2}^P$ is a homomorphic image of $\Theta(L)$, the condition of Theorem 13 is necessary and sufficient in order that this homomorphism may be an isomorphism. Q. e. d.

As a trivial consequence of Theorem 13 we get immediately a sharpened form of a theorem of J. JAKUBÍK [15] (he restricts himself to discrete lattices; in § 4 we prove by examples that the following Corollary is more sharpen than JAKUBÍK's theorem):

COROLLARY 1. *If L is a semi-discrete lattice, then $\Theta(L) \simeq \mathbf{2}^P$.*

Instead of proving it we shall verify a more general assertion.

COROLLARY 2. *Let L be a weakly atomic lattice with separable congruence relations. Then $\Theta(L) \simeq \mathbf{2}^P$.*

PROOF. It is enough to prove that if $\Theta > \Phi$, then there exists a prime interval p which is collapsed by Θ but not by Φ. As a matter of fact, there exists a pair of elements a, b with $a > b$, $a \equiv b\ (\Theta)$ and $a \not\equiv b\ (\Phi)$, and there exists a chain which separates a and b modulo Φ; let $a = z_0 \geqq \cdots \geqq z_n = b$ be this chain. Choose an index i for which $z_i \not\equiv z_{i-1}\ (\Phi)$. Then no subinterval of $[z_i, z_{i-1}]$ is congruent under Φ. By weak atomicity there is a prime interval p in $[z_i, z_{i-1}]$; thus p is not collapsed by Φ but is collapsed by Θ, completing the proof.

Theorem 13 and Corollary 2 may be regarded as a general solution of G. BIRKHOFF's problem 67.

From Corollary 1 one can deduce Corollary 5 of Theorem 11 using only the fact that $\mathbf{2}^P$ is a Boolean algebra if and only if P is unordered.[22] Thus from Corollary 2 of Theorem 13 we get a generalization of Corollary 5 of Theorem 11:

Let L be a weakly atomic lattice with separable congruence relations. $\Theta(L)$ is a Boolean algebra if and only if weak projectivity is a symmetric relation among its prime intervals.

§ 4. Counterexamples

Now we construct some counterexamples to questions raised in Part III.

(A) There is a lattice having a congruence relation Θ and a maximal chain C such that Θ induces on C an infinity of congruence classes of more than one element.

[22] Let us prove that $\mathbf{2}^P$ is a Boolean algebra if and only if P is unordered. Indeed, if P is unordered and $f \in \mathbf{2}^P$, i. e. f is an isotone function from P to $\mathbf{2}$, then define g by $g(a) = 0$ if $f(a) = 1$ and $g(a) = 1$ if $f(a) = 0$. Obviously, g is the complement of f in $\mathbf{2}^P$. On the other hand, if $x, y \in P$ and $x > y$, then consider the function f for which $f(x) = 1$, $f(y) = 0$. If g is the complement of f, then $\max(f(a), g(a)) = 1$ for all $a \in P$, that is, $g(y) = 1$, $\min(f(a), g(a)) = 0$ for all $a \in P$, whence $g(x) = 0$, g is not isotone, a contradiction.

EXAMPLE. Let P be the chain of all non-positive integers together with $-\infty$, with the natural ordering. In the cardinal product of P with itself let us consider the congruence relation $\Theta = \Theta_{(0,0),(-\infty,0)}$ and a maximal chain C which consists of all elements of type (x, x). By the Corollary of Lemma 15 Θ is separable, yet on the chain C it induces an infinity of congruence classes with more than one element.

(B) There exists a lattice L on which there is a non-separable congruence relation Θ with the property that any a, b $(a \geqq b)$ may be connected by a maximal chain on which there is but a finite number of congruence classes of more than one element.

EXAMPLE. Let P be the chain of all non-negative integers and let L be the lattice $P \cdot P$ bounded with I, and $\Theta = \bigvee_{i=1}^{\infty} \Theta_{(2i,0)(2i+1,0)}$. By Lemma 13, Θ is non-separable. Let $a > b$. We may suppose $a = I$ unless $[b, a]$ is finite. If $a = I$, then a chain with the required properties is formed by the elements (b_1, x), where $b = (b_1, b_2)$ and x runs over the numbers $b_2, b_2+1, b_2+2, \ldots$.

It is of some interest that examples (A) and (B) could be constructed among distributive lattices.

(C) There is a lattice L with the property that in $\Theta(L)$, although the dual infinite distributive law unrestrictedly holds, yet there are non-separable congruence relations.

EXAMPLE. Let P be again the set of all non-negative integers and let L consist of P and of three new elements I, x, y. L will be a lattice if the partial ordering of P remains the usual and the following relations hold:

$$x \cup i = y \cup i = x \cup y = x \cup I = y \cup I = I,$$

$$x \cap i = y \cap i = I \cap 0 = 0 \quad \text{for all} \quad i \in P.$$

Let us have a look over the congruence relations of this lattice L. It is easy to verify that $I \equiv i$ and $i \equiv 0$ $(i \neq 0)$ hold only under ι. This implies that with the exception of ι all congruence relations of L are those of P, in the sense that the congruence relations of P are extended to congruence relations of L such that the congruence classes outside P consist of one element only. In $\Theta(P)$ the law (DID) is satisfied as we proved it in Theorem 12, thus a trivial calculation shows its validity in $\Theta(L)$ too. Yet in $\Theta(L)$ there are non-separable congruence relations, for instance, let $x \equiv y$ (Θ) if and only if $x = 2i+1$ and $y = 2i$ (i is arbitrary, $i \in P$, $i \neq 0$), then one cannot separate e. g. 1 and I.

Naturally, all counterexamples of type (C) are non-distributive, for if L were distributive, then by Theorem 12 it would follow that L is discrete, hence by Lemma 11 all congruence relations on L are separable.

(D) There is a semi-discrete but not discrete lattice L, with the property that $\Theta(L)$ is a Boolean algebra.[23]

EXAMPLE. Let L be the set of all non-negative integers. We partially order L by putting

$$\left.\begin{aligned} 2i-1 &< 2i < 0, \\ 2i-1 &< 2i+1 \end{aligned}\right\} \qquad (i=1,2,\ldots).$$

Then L is a lattice which is obviously non-discrete but semi-discrete, furthermore L is simple, that is, it has all the required properties.

(E) There is a weakly atomic, not semi-discrete lattice L with separable congruence relations such that $\Theta(L)$ is a Boolean algebra.[24]

EXAMPLE. Let L be the lattice of all partitions of an infinite set. Then L is a simple, weakly atomic lattice (for the proof we refer to O. ORE [17]), thus it satisfies the required properties.

IV. BOOLEAN RING OPERATIONS ON DISTRIBUTIVE LATTICES

§ 1. A characterization of relatively complemented distributive lattices

In this section we prove a theorem which enables us to prove the main theorem of this part without complicated computations.

Let

$$f_i(u_1,\ldots,u_n,x_1,\ldots,x_m)$$

and

$$\left.\begin{aligned} &f_i(u_1,\ldots,u_n,x_1,\ldots,x_m) \\ &\psi_i(u_1,\ldots,u_n,x_1,\ldots,x_m) \end{aligned}\right\} \qquad (i=1,2,\ldots,k)$$

be lattice-polynomials with the variables x_j.

THEOREM 14. *In a relatively complemented lattice L the system of equations*

(38) $$f_i=\psi_i \qquad (i=1,2,\ldots,k)$$

has a solution for any

$$u_1=a_1,\ldots,u_n=a_n \qquad (a_j\in L; j=1,2,\ldots,n)$$

if and only if (38) *has a solution in* **2** *for any*

$$u_1=b_1,\ldots,u_n=b_n \qquad (b_j\in \mathbf{2}; j=1,2,\ldots,n).$$

We remark that if $m=0$ (that is the set of unknowns is void), then (38) is a system of identities, the validity of which is in question.

[23] Example (D) shows that Corollary 5 of Theorem 11 is applicable to more lattices than the original theorem of J. JAKUBIK.

[24] (E) shows that the assertion formulated at the end of § 3 is actually stronger than Corollary 5 of Theorem 11.

First we prove

LEMMA 20. *Let L be a relatively complemented distributive lattice and $x_1, \ldots, x_n \in L$. L has a sublattice B_n which is a finite Boolean algebra containing $x_1, \ldots, x_n$ (and $O(B_n) \leqq 4^n$).*[25]

PROOF. The assertion for $n = 1$ is true. Now we make an induction on n. Let us suppose that we have already constructed B_{n-1} which contains $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Let O_{n-1}, I_{n-1} be the least and greatest elements of B_{n-1}, respectively. Let us consider in the interval $[O_{n-1}, u_n \cup I_{n-1}]$ the relative complement I'_{n-1} of I_{n-1} and let A_1 and A_2 be sublattices of L consisting of O_{n-1}, I'_{n-1} and $x_n \cup I_{n-1}, x_n$, respectively. Let $B_n = (B_{n-1} \cdot A_1) \circ A_2$ where $\circ$ denotes the cardinal product, but if B_n is regarded as a sublattice of L, then the embedding B_n in L is effected by $(x, y) \to x \cap y$. Obviously, B_n is a finite Boolean algebra and $x_1, \ldots, x_n \in B_n$. The calculation on the number of the elements of B_n is very easy by the construction.

Now we prove Theorem 14.

The necessity of the condition. Consider a finite Boolean algebra B_{n+m} containing the elements $x_1, \ldots, x_m; a_1, \ldots, a_n$. (38) is solvable in B_{n+m}, thus it is solvable in **2** too. Any choice of $\bar{a}_i$ may be regarded as a homomorphic image of a suitable chosen a_i.

The sufficiency of the condition. Let us suppose that (38) may be solved for some $x_i = b_i$ in **2**. Then (38) is solvable in all finite Boolean algebras, for (38) is solvable componentwise. Let B_n be a finite Boolean algebra containing $a_1, \ldots, a_n$. (38) is solvable in B_n, thus it is solvable in L too.

From Theorem 14 we get easily a theorem which characterizes the relatively complemented distributive lattices.

THEOREM 15. *The solvability of* (38) *in L is equivalent to the solvability in* **2** *if and only if L is relatively complemented and distributive.*

PROOF. The case "if" was proved in Theorem 14. Now prove the "only if". The identity

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$$

holds in **2**, thus it must hold in L, that is, L is distributive. Furthermore, the equation system

$$(a \cup b) \cup x = a \cup b \cup c,$$
$$(a \cup b) \cap x = a$$

is solvable in **2**, thus it must be solvable in L too, hence L is relatively complemented, q. e. d.

[25] The number of the elements of the finite lattice L is indicated by $O(L)$.

§ 2. Boolean ring operations

In Corollary of Theorem 3 we have shown that among distributive lattices just the relatively complemented ones have the property that every congruence relation is determined by any congruence class of it. It is well known that the rings have the same property. We prove that this connection between the rings and relatively complemented distributive lattices is not accidental. We shall see that any relatively complemented distributive lattice may be regarded as a Boolean ring, hence the validity of the above statement becomes very natural.

DEFINITION 5. Let A be a set of equations on the distributive lattice L, containing a finite number of equations, parameters and the unknowns x, y and z. If A has a unique solution with respect to z for any fixed values of x and y in any homomorphic image of L, then we write $z = x + y$. If the operation $+$ satisfies the group axioms, then we speak of a group operation defined on the lattice L. If, furthermore, in a similar way (that is, with an equation system, having unique solution in any homomorphic image of L) there is defined another operation denoted by $\cdot$ such that $+$ and $\cdot$ satisfy the ring axioms, then we speak of a ring operation defined on the lattice L.[26]

THEOREM 16. *On the distributive lattice L one may define a Boolean ring operation if and only if L is relatively complemented.*[27] *All Boolean ring operations may be defined in the following way:*

Let a be a fixed element of L. Let $x \cdot y$ be equal to $(x \cup a) \cap (x \cup y) \cap (a \cup y)$ and let $x + y$ be the relative complement of $x \cdot y$ in the interval $[a \cap x \cap y, a \cup x \cup y]$.

PROOF. First we prove that the operations defined in the Theorem are ring operations. Applying Theorem 14 we get that it suffices to prove in case of the lattice **2**.

In the lattice **2** the above operations may be given by the following tables:

$$a = 0 \qquad \begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

[26] The conditions of Definition 5 are satisfied if we define $+$ and $\cdot$ only with the operations: join, meet, and taking the relative complement of an element in an interval.

[27] One can easily show that if we restrict ourselves to that special case in Definition 5 in which the equations of A contain x and y only in the form $x \cup y$ and $x \cap y$, then the existence of a ring operation characterizes not only the relative complementedness of a distributive lattice, but even the distributivity of the lattice. It immediately follows from the fact that with the above definition $+$ is ambiguous in the lattices S and T.

Thus it is clear that we get Boolean ring operations. The case $a=1$ is the dual of the above.

Now we prove that in a relatively complemented distributive lattice one cannot define other Boolean ring operations. First we prove this for finite lattices. If the lattice considered is **2**, then the assertion is trivial, there is only two types of Boolean ring operations. Let us consider the Boolean algebra $B_n = \mathbf{2}^n$. A system of equations is uniquely solvable in a lattice which is a cardinal product of lattices if and only if the same is true in all of its cardinal-components. Thus the Boolean ring operations in B_n are in a one-to-one correspondence with the Boolean ring operations of the n components. In all of its components two operations may be defined, thus in B_n the number of different operations is 2^n (these are all different from each other, for the zero elements are unequal). On the other hand, the construction in the Theorem gives also 2^n different operations, for a may be chosen in 2^n different ways and these are also different from each other, for the zeros of the rings (a) are unequal. Thus the definition of Theorem 16 exhausts all the Boolean ring operations in the finite case.

Now, let us turn to the general case. Let x, y and u, v be two pairs of elements of L, and $B_{x,y}$, $B_{u,v}$ will denote the finite Boolean algebras containing x, y resp. u, v and the parameters of the operations. $B_{x,y}$ and $B_{u,v}$ are finite, thus they have elements a and b which characterize the operations in $B_{x,y}$ and in $B_{u,v}$, respectively. We get a contradiction from $a \neq b$, and this will complete the proof of the statement according to which all Boolean ring operations may be defined in the way described in the Theorem. Indeed, if $a \neq b$, then consider an element s common to $B_{x,y}$ and to $B_{u,v}$. Now, $s+s=a$ considered in $B_{x,y}$ and $s+s=b$ in $B_{u,v}$, thus necessarily $a=b$.

We shall use the following note: if L is a distributive lattice and $x_1, \ldots, x_n \in L$, then there exists a finite sublattice L_n of L, containing $x_1, \ldots, x_n$. Indeed, by an obvious induction ($n=1$ is trivial) if L_{n-1} is already constructed such that $x_1, \ldots, x_{n-1} \in L_{n-1}$, then let L_n consist of L_{n-1}, from x_n and from the elements of the form $x_n \cap u$ and $x_n \cup u$ where u runs over the elements of L_{n-1}.

At last we prove that if on the distributive lattice L one may define a Boolean ring operation, then L is relatively complemented. Let $L_{x,y}$ be a finite sublattice of L which contains x, y and all the parameters. $L_{x,y}$ is a subdirect product of replicas of **2** and in **2** the operations are defined as in the Theorem, thus in $L_{x,y}$ the operations are defined by the definition of our Theorem too. From the fact that $L_{x,y}$ is closed under the operations $+$ and $\cdot$, it follows the relative complementedness of $L_{x,y}$ and in the same way the relative complementedness of L, q. e. d.

(Received 2 January 1958)

Bibliography

[1] Г. Я. Арешкин, Об отношениях конгруенции в дистрибутивных структурах с нулевым элементом, ДАН СССР, **90** (1953), pp. 485—486.

[2] G. Birkhoff, *Lattice theory* (New York, 1948).

[3] R. P. Dilworth, The structure of relatively complemented lattices, *Annals of Math.*, **51** (1950), pp. 348—359.

[4] R. P. Dilworth and M. Hall, The imbedding problem for modular lattices, *Annals of Math.*, **45** (1944), pp. 450—456.

[5] N. Funayama and T. Nakayama, On the distributivity of a lattice of lattice-congruences, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **18** (1942), pp. 553—554.

[6] G. Grätzer and E. T. Schmidt, Hálók ideáljai és kongruenciarelációi. I, *MTA Mat. és Fiz. Oszt. Közl.*, **7** (1957). pp. 93—108.

[7] G. Grätzer and E. T. Schmidt, Hálók ideáljai és kongruenciarelációi. II, *MTA Mat. és Fiz. Oszt. Közl.*, **7** (1957), pp. 417—434.

[8] G. Grätzer and E. T. Schmidt, Hálók ideáljai és kongruenciarelációi. III, *MTA Mat. és Fiz. Oszt. Közl.*, **8** (1958) (under press).

[9] G. Grätzer and E. T. Schmidt, On ideal theory for lattices, *Acta Sci. Math. Szeged*, **19** (1958), pp. 82—92.

[10] G. Grätzer and E. T. Schmidt, On the Jordan—Dedekind chain condition, *Acta Sci. Math. Szeged*, **18** (1957), pp. 52—56.

[11] G. Grätzer and E. T. Schmidt, Characterizations of relatively complemented distributive lattices, *Publ. Math. Debrecen*, **5** (1958), pp. 275—287.

[12] G. Grätzer and E. T. Schmidt, Two notes on lattice congruences, *Annales Univ. Sci. Budapestiensis de Rolando Eötvös nominatae*, Sectio Math., **1** (1958) (under press).

[13] J. Hashimoto, Direct, subdirect decompositions and congruence relations, *Osaka Math. Journal*, **9** (1957), pp. 87—112.

[14] J. Hashimoto, Ideal theory for lattices, *Math. Japonicae*, **2** (1952), pp. 149—186.

[15] J. Jakubík, Relàcie kongruentnosti a slabá projektivnosť vo svätoch, *Časopis Pěst. Mat.*, **80** (1955), pp. 206—216.

[16] M. Kolibiar, O kongruenciách na distributívnych sväzoch, *Acta Facultatis Rev. Nat. Univ. Comenianae*, Math., **1** (1956), pp. 247—253.

[17] O. Ore, Theory of equivalence relations, *Duke Math. Journal*, **9** (1942), pp. 573—627.

[18] T. Tanaka, Canonical subdirect factorizations of lattices, *J. Sci. Hiroshima Univ.*, Ser. A, **16** (1952), pp. 239—246.

[19] H. Wallman, Lattices and topological spaces, *Annals of Math.*, **39** (1938), pp. 112—126.

[20] Shih-chiang Wang, Notes on the permutability of congruence relations, *Acta Math. Sinica*, **3** (1953), pp. 133—141.

ÜBER DIE METRISCHE THEORIE DER DIOPHANTISCHEN APPROXIMATION

Von

P. SZÜSZ (Budapest)

(*Vorgelegt von* P. TURÁN)

KHINTCHINE [1] bewies den folgenden

SATZ 1. *Es sei $f(x)$ eine positive, monoton abnehmende Funktion des Argumentes x. Dann hat die Ungleichung*[1]

$$\|\alpha x\| < \frac{f(x)}{x} \tag{1}$$

für fast alle reellen α (d. h. für alle α, höchstens bis auf eine Menge vom Lebesgueschen Maß Null) höchstens endlich viele oder unendlich viele Lösungen mit natürlichem x, je nachdem die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(k)}{k}$ konvergiert oder divergiert.

Ist α eine beliebige Irrationalzahl, so kann nach einem klassischen Satz von HURWITZ die Ungleichung

$$\|\alpha x\| < \frac{1}{\sqrt{5}x} \tag{2}$$

unendlich oft mit natürlichem x erfüllt werden und die Konstante $5^{-1/2}$ läßt sich im allgemeinen durch keine kleinere ersetzen. Nach KHINTCHINE [4] ist (2) auch dann mit natürlichem x unendlich oft erfüllbar, wenn man in (2) $\|\alpha x\|$ durch $\|\alpha x - \beta\|$ ersetzt, wobei β eine beliebige reelle Zahl bedeutet.

Es erhebt sich die Frage, was sich über die Ungleichung

$$\|\alpha x - \beta\| < \frac{f(x)}{x} \tag{3}$$

aussagen läßt, wenn man eine Nullmenge in α außer Acht läßt. Der Vergleich des Hurwitzschen Satzes über die Ungleichung (2) mit dem Khintchineschen Analogon im inhomogenen Falle, d. h. mit dem Satz über die Lösbarkeit von $\|\alpha x - \beta\| < \frac{1}{\sqrt{5}x}$ mit natürlichem x legt die Vermutung nahe, daß die Behauptung des Khintchineschen Satzes 1 gültig bleibt, wenn man statt (1) die Ungleichung (3) betrachtet.

[1] $\|\cdots\|$ bedeutet den Abstand der zwischen den Strichen stehenden Zahl von der nächstbenachbarten ganzen Zahl.

Es ist mir gelungen, den Khintchineschen Beweis des Satzes 1 so zu modifizieren, daß er auch die Bestätigung der obigen Vermutung ergibt. Außerdem zeige ich, daß sich im allgemeinen nichts aussprechen läßt, wenn man in (3) α festlegt und nach einer für *fast alle* β gültigen Behauptung fragt. Es werden genauer die folgenden beiden Sätze bewiesen:

SATZ 2. *Es sei $f(x)$ eine monoton abnehmende Funktion. Ist dann β eine beliebige reelle Zahl, so hat die Ungleichung* (3) *für fast alle α unendlich viele oder höchstens endlich viele Lösungen mit natürlichem x, je nachdem die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(k)}{k}$ divergiert oder konvergiert.*

SATZ 3. *Ist $g(x)$ eine mit $x \to \infty$ beliebig langsam gegen Null strebende Funktion, so existiert ein α derart, daß die Ungleichung*

$$\|\alpha x - \beta\| < \frac{g(x)}{x} \tag{4}$$

für fast alle β höchstens endlich viele Lösungen hat, d. h. es gilt für fast alle β $\|\alpha x - \beta\| \geqq \frac{g(x)}{x}$ für jedes ganze genügend große x.

Bevor ich zum Beweis dieser Sätze übergehe, mache ich einige Bemerkungen.

1. Frau VERA T. SÓS verdanke ich die Bemerkung, daß die Behauptung des Satzes 3 nicht mehr gültig bleibt, wenn unendlich oft $g(x) > c$ ist, wobei c eine beliebig kleine positive Konstante bedeutet.

2. Satz 2 ist im gewissen Sinne schärfer als ein Satz von CASSELS [7], S. 121. Dort wird der entsprechende Satz, allerdings auch für den mehrdimensionalen Fall nicht bei gegebenem β für fast alle α, sondern für fast alle Zahlenpaare (α, β) (d. h. für alle Zahlenpaare (α, β) höchstens bis auf eine *zweidimensionale* Nullmenge) bewiesen. In diesem Falle braucht über die Monotonie von $f(x)$ nichts vorausgesetzt zu werden. In unserem Satz 2 läßt sich die Forderung der Monotonie von $f(x)$ nicht ohne weiteres weglassen; sonst lassen sich Gegenbeispiele angeben.

3. Es erhebt sich die Frage, ob die zu Satz 2 analoge Behauptung nicht auch im mehrdimensionalen Falle gilt, ähnlich zum homogenen Fall (vgl. KHINTCHINE [3]). Bisher ist mir nicht gelungen, diese Frage zu beantworten. Ich hoffe, auf diese in einer späteren Arbeit zurückkommen zu können.

Im § 1 gebe ich eine Zusammenstellung derjenigen Bezeichnungen, die durchweg gebraucht werden, § 2 enthält den Beweis des Satzes 2, § 3 den des Satzes 3.

§ 1

In dieser Arbeit bezeichnen α und β stets reelle Zahlen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $0 < \alpha < 1$, $0 \leqq \beta < 1$ vorausgesetzt werden. Ferner wird α als irrational angenommen. Es bezeichnen $a_1, a_2, \ldots$ die Teilnenner der regelmäßigen Kettenbruchentwicklung der Zahl α:

(1.1) $$\alpha = [0; a_1, a_2, \ldots].$$

Es seien $\frac{A_n}{B_n}$ die Näherungsbrüche von α, schon in irreduzibler Gestallt geschrieben, d. h.

(1.2) $$[0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = \frac{A_n}{B_n}, \qquad (A_n, B_n) = 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Es wird

(1.3) $$B_n \alpha - A_n = D_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

gesetzt. Bekanntlich gilt[2]

(1.4) $$D_n = \frac{(-1)^n}{B_n \zeta_{n+1} + B_{n-1}},$$

wobei

$$\zeta_n = [a_n; a_{n+1}, \ldots] \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Wegen $\zeta_m > a_m$ ist

(1.5) $$|D_m| < \frac{1}{B_{m+1}}.$$

Ist z eine reelle Zahl, so bezeichnet $[z]$ bzw. (z) den ganzen bzw. Bruchteil von z. Es ist also

(1.6) $$z = [z] + (z), \quad 0 \leqq (z) < 1.$$

Ferner bedeutet, wie bereits erwähnt, $\|z\|$ den Abstand der reellen Zahl z von der nächstbenachbarten ganzen Zahl, es ist also

(1.7) $$\|z\| = \min((z), (1 - (z))).$$

Ist E eine Lebesgue-meßbare Teilmenge des Intervalles $(0, 1)$, so bedeutet

(1.8) $$\mu(E)$$

das Lebesguesche Maß von E.

§ 2. Beweis des Satzes 2

Der Beweis des Satzes 2 verläuft parallel zum Khintchineschen Beweis des Satzes 1. Damit der einzige, aber sehr wesentliche Unterschied zwischen den beiden Beweisen hervorgehoben werden kann, möchte ich zunächst in

[2] Vgl. PERRON [6], S. 33, Formel (3).

großen Zügen den Khintchineschen Beweis des Satzes 1 wiedergeben. Es sei also zunächst $\beta = 0$.

Der Fall der Konvergenz von $\sum_{k=}^{\infty} \frac{f(k)}{k}$ kann im Falle $\beta = 0$ und auch im inhomogenen Falle auf triviale Weise erledigt werden. Die Durchführung dieser Überlegung soll unterbleiben. (Vgl. z. B. KHINTCHINE [2], S. 75.) Im folgenden wird angenommen, daß $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(k)}{k} = \infty$ ist.

Der Khintchinesche Beweis von Satz 1 beruht auf folgenden drei Hilfssätzen:

HILFSSATZ 1 (F. BERNSTEIN [5]). *Ist $c_1, c_2, \ldots$ eine Folge positiver Zahlen mit $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \infty$, so gilt für fast alle α für unendlich viele n*

$$a_{n+1} > \frac{1}{c_{n+1}},$$

oder, was wegen $\|B_n \alpha\| = \frac{1}{B_n \zeta_{n+1} + B_{n-1}} < \frac{1}{a_{k+1} B_n}$ dasselbe besagt,

$$\|B_n \alpha\| < \frac{c_{n+1}}{B_n}. \tag{2.1}$$ [3]

Hier hat $a_1, a_2, \ldots$ bzw. $B_1, B_2, \ldots$ die Bedeutung (1. 1) bzw. (1. 2). Ist dagegen $\sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$, so gilt (2. 1) für fast alle α für höchstens endlich viele n.

HILFSSATZ 2 (KHINTCHINE [1]). *Es existiert eine numerische Konstante A derart, daß für fast alle α bis auf endlich viele n die Relation*

$$B_n < e^{An} \tag{2.2}$$

gilt.

Außer diesen beiden Hilfssätzen benötigen wir noch den folgenden, fast trivialen

HILFSSATZ 3.[4] *Ist $f(x)$ eine monoton abnehmende Funktion und $r_1, r_2, \ldots$ eine monoton streng zunehmende Folge natürlicher Zahlen mit $r_n \leqq K^n$, wobei*

[3] Wegen der späteren Anwendung müssen wir voraussetzen, daß $c_1, c_2, \ldots$ eine monoton abnehmende Folge ist.

[4] KHINTCHINE [1] benutzt statt Hilfssatz 3 einen nur formell veschiedenen Hilfssatz, in dem statt der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n}$ das Integral $\int_1^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ auftritt. Hilfssatz 3 besagt im Wesentlichen dasselbe und scheint mir anschaulicher zu sein.

K eine beliebige natürliche Konstante $\geqq 2$ bedeutet, so folgt aus der Divergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(k)}{k}$ die Divergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f(r_k)$.

Der ganz einfache BEWEIS: Es gilt wegen der Monotonie von $f(x)$ und wegen $r_n \leqq K^n$

$$\sum_{n=K^N}^{\infty} \frac{f(n)}{n} = \sum_{j=N}^{\infty} \sum_{n=K^j}^{K^{j+1}-1} \frac{f(n)}{n} \leqq \sum_{j=N}^{\infty} \frac{f(K^j)}{K^j} (K^{j+1} - K^j) =$$

$$= (K-1) \sum_{j=N}^{\infty} f(K^j) \leqq (K-1) \sum_{j=N}^{\infty} f(r_j).$$

Aus $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n} = \infty$ folgt also $\sum_{n=1}^{\infty} f(r_n) = \infty$.

Nun kann der Khintchinesche Satz 1 aus den Hilfssätzen 1—3 folgendermaßen gefolgert werden:

Es sei K eine natürliche Zahl, die größer ist als das A des Hilfssatzes 2. Beschränken wir uns auf die Zahlen α mit

$$B_n < K^n,$$

falls n genügend groß ist, so bilden die außer Acht gelassenen α eine Nullmenge. Man setze nun

$$f_1(x) = f(K^n) \quad \text{für} \quad K^{n-1} < x \leqq K^n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2.3}$$

Dann ist natürlich für alle α, die nicht derjenigen Nullmenge angehören, für deren Elemente bei unendlich vielen n $B_n > K^n$ ist,

$$f(B_n) \geqq f_1(B_n), \tag{2.4}$$

falls n genügend groß ist. Gehört α nicht der obenerwähnten Nullmenge an, so folgt wegen Hilfssatz 3 aus $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_1(n)}{n} = \infty$ die Relation $\sum_{n=1}^{\infty} f_1(B_n) = \infty$; die Ungleichung $\|B_n \alpha\| < \frac{f_1(B_n)}{B_n} < \frac{f(B_n)}{B_n}$ ist also wegen Hilfssatz 1 für fast alle α unendlich oft lösbar, und damit ist auch die nichttriviale Behauptung des Khintchineschen Satzes bewiesen.

Will man den Beweis der Aussage im Falle $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n} = \infty$ des Khintchineschen Satzes 1 auf den inhomogenen Fall übertragen, so stellt man zunächst die Frage, wo die Voraussetzung, daß es sich um $\|\alpha x\|$ und nicht um $\|\alpha x - \beta\|$ (β beliebig reell) handelt, ausgenutzt war. Man erkennt leicht, daß dies nur bei Hilfssatz 1 der Fall war. Der Khintchinesche Beweisgang läßt sich nämlich wörtlich wiederholen, wenn man zu jedem β $(0 < \beta < 1)$

und für fast alle α eine Folge monoton streng zunehmender natürlicher Zahlen

$$x_1, x_2, \ldots$$

angeben kann, die folgendes erfüllen:

a) Es existiert eine von α unabhängige natürliche Zahl K, für die bei jedem genügend großen n die Ungleichung

$$x_n < K^n \tag{2.5}$$

gilt.

b) Ist $c_1, c_2, \ldots$ eine beliebige monoton abnehmende Folge mit divergenter Summe, so gilt

$$\|\alpha x_n - \beta\| < \frac{c_{n+1}}{x_n} \tag{2.6}$$

bei unendlich vielen n.

Nun versuche ich, für fast jedes α eine Zahlenfolge $x_1, x_2, \ldots$ zu konstruieren, die (2. 5) und (2. 6) erfüllt. Habe ich dies erzielt, so bin ich nach dem Gesagten mit dem Beweis des Satzes 2 fertig.

HILFSSATZ 4. *Ist $c_1, c_2, \ldots$ eine monoton abnehmende Folge positiver Zahlen mit $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \infty$ und β eine beliebige Zahl mit $0 < \beta < 1$, so gibt es für fast alle α eine Zahlenfolge $x_1, x_2, \ldots$, für die*

$$2B_n \leqq x_n < 3B_n \tag{2.7}$$

und bei unendlich vielen n

$$\|\alpha x_n - \beta\| < \frac{c_{n+1}}{B_n} \tag{2.8}$$

gilt. (Für die Bedeutung der B_n s. (1. 2).)

Aus (2. 7) folgt wegen (2. 2) die Relation (2. 5) mit einer geeigneten natürlichen, von α unabhängigen Zahl K. (2. 8) ist wegen (2. 7) gleichbedeutend mit (2. 6), die Folge $c_1, c_2, \ldots$ wird dabei geändert, genügt aber ebenfalls den Voraussetzungen. Haben wir daher Hilfssatz 4 bewiesen, so ist der Beweis des Satzes 2 vollendet.

BEWEIS DES HILFSSATZES 4. Es sei β eine gegebene Zahl, die nur der Beschränkung

$$0 < \beta < 1 \tag{2.9}$$

unterworfen ist. Ist α eine Irrationalzahl, so gibt es immer eine natürliche Zahl n_0 derart, daß

$$\frac{3}{B_n} < \beta < 1 - \frac{3}{B_n}, \quad \text{falls} \quad n \geqq n_0 \tag{2.10}$$

gilt. Bekanntlich läßt sich für n_0 eine von α unabhängige obere Schranke angeben. Im folgenden wird stets angenommen, daß (2. 10) gilt.

Nehmen wir an, daß die ersten n Teilnenner von α schon angegeben sind:

(2. 11) $$\alpha = [0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots].$$

Bekanntlich sind durch $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die Zahlen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ und $B_1, B_2, \ldots, B_n$ völlig bestimmt und die Zahlen α, die (2. 11) genügen, bilden ein Intervall $\frac{A_n}{B_n} < \alpha < \frac{A_n + A_{n-1}}{B_n + B_{n-1}}$ oder $\frac{A_n + A_{n-1}}{B_n + B_{n-1}} < \alpha < \frac{A_n}{B_n}$, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Es ist ferner bekannt,[5] daß α eine Darstellung der Gestalt

(2. 12) $$\alpha = \frac{A_n}{B_n} + \frac{(-1)^n \vartheta}{B_n^2}$$

zuläßt, wobei ϑ eine positive Zahl mit

(2. 13) $$0 < \vartheta < \frac{B_n}{B_n + B_{n-1}}$$

ist. Das durch (2. 13) definierte Intervall sei mit $\mathfrak{J}$ bezeichnet. Offenbar gilt $\frac{1}{2} < \mu(\mathfrak{J}) < 1$. Durchläuft ϑ das Intervall $\mathfrak{J}$, so durchläuft α das Intervall $\left(\frac{A_n}{B_n}, \frac{A_n + A_{n-1}}{B_n + B_{n-1}}\right)$, das wir nach KHINTCHINE [2] ein Intervall vom Rang n nennen wollen. Ein Intervall vom Rang n sei mit I_n bezeichnet. Falls es nötig ist, die Abhängigkeit von den Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ besonders hervorzuheben, so wird

(2. 14) $$I_n = I(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

gesetzt. Bekanntlich gilt

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} I(a_1, a_2, \ldots, a_n, k) = I(a_1, a_2, \ldots, a_n)^{6} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Da bekanntlich $(A_n, B_n) = 1$ ist, sind die Zahlen $\left\{\frac{A_n}{B_n} x\right\}$ $(x = 2B_n, 2B_n + 1, \ldots, 3B_n - 1)$ in irgendeiner Reihenfolge gleich den Zahlen $0, \frac{1}{B_n}, \frac{2}{B_n}, \ldots, \frac{B_n - 1}{B_n}$; wegen (2. 10) existiert daher genau eine natürliche Zahl x_n $(2B_n \leqq x_n < 3B_n)$ und eine natürliche Zahl k_n $(3 \leqq k_n \leqq B_n - 3)$ derart, daß

(2. 15) $$\begin{cases} 0 \leqq \beta - \left\{\frac{A_n}{B_n} x_n\right\} = \beta - \frac{k_n}{B_n} < \frac{1}{B_n}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 0 \leqq \left\{\frac{A_n}{B_n} x_n\right\} - \beta = \frac{k_n}{B_n} - \beta < \frac{1}{B_n}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

ist.

[5] Vgl. PERRON [6], S. 39.

[6] $\bigcup$ bedentet die mengentheoretische Vereinigung, $\bigcap$ den Durchschnitt.

Es sei nun $c_1, c_2, \ldots$ die im Hilfssatz 4 auftretende monoton abnehmende Folge positiver Zahlen mit divergenter Summe. Es bezeichne $E(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ die Menge der Zahlen $\alpha \in I(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ für die

$$(2.16) \qquad |\beta - (\alpha x_n)| > \frac{c_{n+1}}{B_n}$$

ist, E_n die Vereinigungsmenge der $E(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, falls $a_1, a_2, \ldots, a_n$ voneinander unabhängig alle natürlichen Zahlen durchlaufen, ferner bezeichne

$$(2.17) \qquad E^*_{n,m} = \bigcap_{k=n}^{m} E_k.$$

Natürlich gilt $E^*_{n,n} = E_n$. Es wird gezeigt, daß

$$(2.18) \qquad \mu(E^*_{n,m}) < \prod_{0 \leqq k \leqq \frac{m-n}{2}} \left(1 - \frac{c_{n+2k+1}}{9}\right).$$[7]

Ist (2.18) bewiesen, so ist wegen der Monotonie von $c_1, c_2, \ldots$ und wegen $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \infty$ unser Hilfssatz 4 bewiesen, denn das Produkt auf der rechten Seite von (2.18) kann durch Wahl genügend großer Zahl m beliebig klein gemacht werden.

Setzt man in (αx_n) statt α den Wert $\frac{A_n}{B_n} + \frac{(-1)^n \vartheta}{B_n^2}$, so erhält man mit Rücksicht auf (2.10)

$$(\alpha x_n) = \left(\frac{A_n}{B_n} x_n + \frac{(-1)^n \vartheta x_n}{B_n^2}\right) = \frac{k_n}{B_n} + \frac{(-1)^n \vartheta x_n}{B_n^2}.$$

Hieraus folgt wegen (2.15)

$$(2.19) \qquad \beta - (\alpha x_n) = (-1)^n \left(\left| \beta - \frac{k_n}{B_n} \right| - \frac{\vartheta x_n}{B_n} \right),$$

wobei ϑ das durch (2.13) definierte Intervall $\mathfrak{J}$ durchlaufen kann. Wegen

$$\frac{1}{2} < \frac{B_n}{B_n + B_{n-1}} < 1, \quad 2B_n \leqq x_n < 3B_n$$

durchläuft (αx_n) ein Intervall, dessen Länge nicht kleiner als $\frac{1}{B_n}$ und nicht größer als $\frac{3}{B_n}$ ist. Da $\left| \beta - \frac{k_n}{B_n} \right| < \frac{1}{B_n}$ ist, nimmt der Ausdruck (2.19) auch den Wert 0 an. Nun bestimme ich diejenigen ϑ, für die

$$(2.20) \qquad |\beta - (\alpha x_n)| < \frac{c_{n+1}}{B_n}$$

[7] Für die Bedeutung von $\mu(\ldots)$ vgl. (1.8).

gilt. Wegen (2. 19) ist (2. 20) äquivalent mit

$$\left\| \beta - \frac{k_n}{B_n} \right| - \frac{\vartheta}{B_n^2} x_n \right| < \frac{c_{n+1}}{B_n},$$

also

$$-\frac{c_{n+1}}{B_n} < \left| \beta - \frac{k_n}{B_n} \right| - \frac{\vartheta x_n}{B_n^2} < \frac{c_{n+1}}{B_n},$$

woraus

$$\frac{B_n}{x_n}(|B_n\beta - k_n| - c_{n+1}) < \vartheta < \frac{B_n}{x_n}(|B_n\beta - k_n| + c_{n+1})$$

folgt. Da wegen der Definition von ϑ jedenfalls $0 < \vartheta < \frac{B_n}{B_n + B_{n-1}}$ sein muß, ist (2. 20) äquivalent mit

$$\max\left(0, \frac{B_n}{x_n}(|B_n\beta - k_n| - c_{n+1})\right) < \tag{2. 21}$$
$$< \vartheta < \min\left(\frac{B_n}{B_n + B_{n-1}}, \frac{B_n}{x_n}(|B_n\beta - k_n| + c_{n+1})\right).$$

Nun zeige ich für $c_{n+1} \leqq \frac{1}{2}$ (was ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden darf)

$$\min\left(\frac{B_n}{B_n + B_{n-1}}, \frac{B_n}{x_n}(|B_n\beta - k_n| + c_{k+1})\right) - \tag{2. 22}$$
$$- \max\left(0, \frac{B_n}{x_n}(|B_n\beta - k_n| - c_{k+1})\right) \geqq \frac{c_{n+1}}{3}.$$

(2. 22) kann folgendermaßen eingesehen werden: wegen (2. 15) ist $|B_n\beta - k_n| \leqq 1$. Ist

$$\max\left(0, \frac{B_n}{k_n}(|B_n\beta - k_n| - c_{n+1})\right) = 0,$$

so ist

$$|B_n\beta - k_n| \leqq c_{n+1} \leqq \frac{1}{2}$$

und folglich auch $|B_n\beta - k_n| \leqq \frac{1}{2}$. Daher gilt wegen der Definition von x_n

$$\frac{B_n}{x_n}(|B_n\beta - k_n| + c_{n+1}) \leqq \frac{1}{2};$$

andererseits ist $\frac{B_n}{B_n + B_{n-1}} > \frac{1}{2}$, also ist im Falle $|B_n\beta - k_n| \leqq c_{n+1}$ die linke Seite der Ungleichung (2. 22) nicht kleiner als $\frac{1}{3} c_{n+1}$. Gilt $|B_n\beta - k_n| > c_{n+1}$, so ist

$$\frac{B_n}{B_n+B_{n-1}} > \frac{1}{2}, \qquad \frac{B_n}{x_x}(|B_n\beta - k_n| + c_{n+1}) > \frac{B_n}{x_n}|B_n\beta - k_n|$$

und $\frac{B_n}{x_n}|B_n\beta - k_n| < \frac{1}{2}$; die linke Seite von (2. 22) ist größer als

$$\frac{B_n}{x_n}(|B_n\beta - k_n| - (|B_n\beta - k_n| - c_{n+1})) = \frac{B_n}{x_n}c_{n+1} > \frac{c_{n+1}}{3}.$$

(2. 22) ist also bewiesen. Ich erinnere noch einmal daran, daß ϑ das Intervall $\mathfrak{J}$ durchläuft. Jedenfalls ist $\vartheta < 1$. Damit (2. 20) gilt, muß daher aus jedem Intervall n-ten Ranges (was durch α durchlaufen wird, wenn ϑ das Intervall $\mathfrak{J}$ durchläuft) mindestens der $\frac{c_{n+1}}{3}$-fache Teil gestrichen werden, wenn wir nur diejenigen α betrachten, für die (2. 16) gilt. Daher besagt die Ugleichung (2. 22), daß $\mu(E(a_1, a_2, \ldots, a_n))$ höchstens das $\left(1 - \frac{c_{n+1}}{3}\right)$-fache von $\mu\ (I(a_1, a_2, \ldots, a_n))$ ist.[8] Da (2. 22) unabhängig von der speziellen Wahl der $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gültig ist und alle Intervalle n-ten Ranges paarweise fremd sind, folgt hieraus weiter

$$\mu(E^*_{n,n}) = \mu(E_n) \leqq 1 - \frac{c_{n+1}}{3} < 1 - \frac{c_{n+1}}{9}; \tag{2. 23}$$

die Ungleichung (2. 19) ist also für $E^*_{n,m}$, $n = m$ bewiesen. Wir führen nun eine vollständige Induktion bezüglich m durch.

Es ist zweckmäßig, anstatt $E^*_{n,m}$ ähnlich, aber einfacher konstruierte Mengen $E_{n,m}$ zu betrachten, die die Eigenschaft haben, daß stets

$$E^*_{n,m} \subseteq E_{n,m} \tag{2. 24}$$

ist. Natürlich wird es genügen, (2. 18) mit E anstatt E^* zu beweisen.

Es ist $E^*_{n,n} = E_n$. Wir bildeten die Durchschnitte

$$I(a_1, a_2, \ldots, a_n, k) \cap E_n \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

und strichen aus diesen die Zahlen α mit (2. 20). So erhielten wir $E_n E_{n+1} = E^*_{n,n+1}$. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhielten wir $E^*_{n,m}$. $E_{n,m}$ entsteht dadurch, daß man nicht aus jedem $I(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, k) \cap E_{n,m-1}$ die Zahlen α mit (2. 20) streicht, sondern nur aus jenen $I(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, k)$ die Zahlen mit (2. 20) ausschließt, die *ganz* in $E_{n,m-1}$ enthalten sind. $E_{n,n}$ ist also gleich $E^*_{n,n}$. $E_{n,n+1}$ erhält man so, daß man von denjenigen Intervallen $I(a_1, a_2, \ldots, a_n, k)$, die ganz in $E_{n,n}$ enthalten sind, die Zahlen α mit (2. 20) ausschließt usw. (2. 24) ist offenbar erfüllt.

[8] Für die Definition von $E(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ bzw. $I(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vgl. (2. 14) bzw. (2. 16).

Nun zeige ich (2. 18) mit $E_{n,m}$ statt $E^*_{n,m}$, d. h.

$$\mu(E_{n,m}) < \prod_{0 \leqq k \leqq \frac{m-n}{2}} \left(1 - \frac{c_{n+2k+1}}{9}\right). \tag{2. 25}$$

Die Relation (2. 25) ist, wie bereits gesehen, für $m = n$ richtig. Nehmen wir an, sie ist bis m bewiesen. Nun ist trivialerweise

$$E_{n,m} = E_{n,m} \cap \bigcup_{a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}=1}^{\infty} I(a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}). \tag{2. 26}$$

Nun entsteht $E_{n,m+2}$ dadurch, daß man aus sämtlichen Intervallen $I(a_1, \ldots, a_{m+1})$, die *ganz* in $E_{n,m}$ enthalten sind, die Zahlen α mit (2. 20) streicht und dann von allen Intervallen $I(a_1, \ldots, a_{m+2})$, von welchen noch keine Zahlen ausgeschlossen wurden, die Zahlen α mit (2. 20) ausschließt.

Es seien $a_1, \ldots, a_m$ gegeben und wir betrachten das Maß der Menge

$$E_{n,m+2} \cap I(a_1, \ldots, a_m).$$

Bei jedem Ausschließen von Zahlen mit (1. 9) muß nach (2. 22) ein Intervall von einer Länge ausgeschlossen werden, die nicht kleiner als

$$\frac{c_{m+2}}{3} \mu(I(a_1, \ldots, a_m, l)) \quad \text{bzw.} \quad \frac{c_{m+2}}{3} \mu(I(a_1, \ldots, a_m, l, r))$$

ist. Daher ist

$$\mu(E_{n,m+2} \cap I(a_1, \ldots, a_m)) = \mu(E_{n,m+2} \cap \bigcup_{l,r=1}^{\infty} I(a_1, \ldots, a_m, l, r)) < \tag{2. 27}$$

$$< \mu(E_{n,m} \cap \textstyle\bigcup_1 I(a_1, \ldots, a_m, l, r)) + \left(1 - \frac{c_{m+3}}{3}\right) \mu(E_{n,m} \cap \textstyle\bigcup_2 I(a_1, \ldots, a_m, l, r)),$$

wobei $\bigcup_1$ über diejenigen Intervalle $(m+2)$-ten Ranges zu erstrecken ist, für die $E_{n,m} \cap I(a_1, \ldots, a_m, l, r) \neq I(a_1, \ldots, a_m, l, r)$ $(l, r = 1, 2, \ldots)$ ist, und $\bigcup_2$ über die Übrigen.

Im folgenden wird das Maß

$$\mu(E_{n,m} \cap \textstyle\bigcup_2 I(a_1, \ldots, a_m, k, r))$$

nach unten abgeschätzt. Es sei $I(a_1, \ldots, a_m)$ ein beliebiges Intervall vom Rang m. Wegen der Konstruktion von $E_{n,m}$ entsteht der Durchschnitt $E_{n,m} \cap I(a_1, \ldots, a_m)$ aus $I(a_1, \ldots, a_m)$, indem daraus genau ein Teilintervall ausgeschlossen wurde. Ist also der Durchschnitt

$$E_{n,m} \cap I(a_1, \ldots, a_m)$$

nicht leer, so besteht er aus höchstens zwei fremden Intervallen, die, falls beide vorhanden sind, die Endpunkte von $I(a_1, \ldots, a_m)$ enthalten. Besteht $E_{n,m} \cap I(a_1, \ldots, a_m)$ aus einem einzigen nichtleeren Intervall, so enthält dieses den einen Endpunkt von $I(a_1, \ldots, a_m)$.

Geht man von $E_{n,m} \cap I(a_1, \ldots, a_m)$ auf $E_{n,m+1} \cap I(a_1, \ldots, a_m)$ über, so hat man folgendermaßen zu verfahren: Man muß die Endpunkte der Intervalle $m+1$-ten Ranges (die $I(a_1, a, \ldots, a_m)$ genau einfach überdecken)

$$I(a_1, \ldots, a_m, l) \qquad (l = 1, 2, \ldots)$$

auf der Zahlengeraden markieren. Von denjenigen dieser Intervalle, die ganz in $E_{n,m} \cap I(a_1, \ldots, a_m)$ enthalten sind, müssen die α mit (2. 20) gestrichen werden. Falls aus einem $I(a_1, \ldots, a_m, l)$ bei dem Übergang auf $E_{n,m+1} \cap I(a_1, \ldots, l)$ überhaupt etwas gestrichen wird, so muß wegen (2. 22) mindestens das $\frac{c_{m+2}}{3}$-fache von $I(a_1, \ldots, a_m, l)$ ausgeschlossen werden. Da nun

$$E_{n,m} \cap I(a_1, \ldots, a_m)$$

aus höchstens zwei disjunkten Intervallen besteht, die (falls sie nicht leer sind) die Endpunkte von $I(a_1, \ldots, a_m)$ enthalten, gibt es höchstens zwei von den Intervallen $I(a_1, \ldots, a_m, l)$, die einerseits mit $E_{n,m} \cap I(a_1, \ldots, a_m)$ einen nichtleeren gemeinsamen Teil haben, andererseits nicht ganz in $E_{n,m} \cap I(a_1, \ldots, a_m)$ enthalten sind; mit anderen Worten, es gibt höchstens zwei $I(a_1, \ldots, a_m, l)$, die mit $E_{n,m} \cap I(a_1, \ldots, a_m)$ einen nichtleeren gemeinsamen Teil haben und von denen beim Übergang von $E_{n,m} \cap I(a_1, \ldots, a_m)$ auf $E_{n,m+1} \cap I(a_1, \ldots, a_m)$ keine Zahlen gestrichen werden müssen.

Wir setzen für einen Augenblick

$$L \cup R = E_{n,m} \cap I(a_1, \ldots, a_m), \tag{2. 28}$$

wobei L das Intervall am linken Ende von $E_{n,m} \cap I(a_1, \ldots, a_m)$, R dasjenige am rechten Ende von $E_{n,m} \cap I(a_1, \ldots, a_m)$ bedeutet. Nehmen wir an, m ist ungerade und L nicht leer. Da die Endpunkte der $I(a_1, \ldots, a_m, l)$ $(l = 1, 2, \ldots)$ die Zahlen

$$\frac{A_m l + A_{m-1}}{B_m l + B_{m-1}}$$

sind, die mit $l \to \infty$ monoton abnehmend gegen $\frac{A_m}{B_m}$ streben, folgt die Tatsache, daß es höchstens *ein* $I(a_1, \ldots, a_m, l)$ mit nichtleerem $L \cap I(a_1, \ldots, a_m, l)$ und $L \cap I(a_1, \ldots, a_m, l) \neq I(a_1, \ldots, a_m, l)$ geben kann. Da durch eine ganz einfache Rechnung die Ungleichung

$$1 < \frac{\mu(I(a_1, \ldots, a_m, l))}{\mu(I(a_1, \ldots, a_m, l+1))} < 3 \tag{2. 29}$$

bestätigt werden kann, gilt

$$\mu(L \cap \textstyle\bigcup_2 I(a_1, \ldots, a_m, l)) > \frac{1}{3} \mu(L \cap \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} I(a_1, \ldots, a_m, l)) = \frac{1}{3} \mu(L), \tag{2. 30}$$

wobei $\bigcup_2$ über diejenigen $I(a_1, \ldots, a_m, l)$ zu erstrecken ist, die ganz in L

enthalten sind. Man erhält dasselbe mit Intervallen $m+2$-ten Ranges $I(a_1, \ldots, a_m, l, r)$ für R, wobei R durch (2. 28) definiert ist. So ergibt sich

$$\mu(R \cap \mathsf{U}_2 I(a_1, \ldots, a_m, l, r)) > \frac{1}{3}\mu(R),$$

also, da man die $I(a_1, \ldots, a_m, l)$ in (2. 30) noch weiter in Intervalle $m+2$-ten Ranges unterteilen kann und wegen (2. 28),

$$\mu(E_{n,m} \cap \mathsf{U}_2 I(a_1, \ldots, a_m, l, r)) > \frac{1}{3}\mu(E_{n,m}). \tag{2. 31}$$

Hieraus folgt wieder, wegen (2. 28),

$$\mu(E_{n,m} \cap \mathsf{U}_1 I(a_1, \ldots, a_m, l, r)) \leqq \frac{2}{3}\mu(E_{n,m})$$

(U_1 bzw. U_2 bedeuten dasselbe wie in (2. 27)), also wegen (2. 27)

$$\mu(E_{n,m+2} \cap I(a_1, \ldots, a_m)) < \left(1 - \frac{c_{m+3}}{9}\right)\mu(E_{n,m} \cap I(a_1, \ldots, a_m)). \tag{2. 32}$$

Für gerades m erhält man dasselbe; es tauschen nur bei der Rechnung L und R die Rolle.

Nun lasse man die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ voneinander unabhängig alle natürlichen Zahlen durchlaufen. Da alle Intervalle m-ten Ranges das Intervall $(0, 1)$ genau einfach überdecken, erhalten wir

$$\mu(E_{n,m+2}) < \left(1 - \frac{c_{m+3}}{9}\right)\mu(E_{n,m}), \tag{2. 33}$$

womit (2. 25) wegen der Induktionsvoraussetzung bewiesen ist. Damit ist wegen (2. 24) auch (2.18), also auch unser Satz 2 bewiesen.

§ 3. Beweis des Satzes 3

Der Beweis des Satzes 3 geschieht ebenfalls mittels der Kettenbruchlehre. Für die Bezeichnungen vgl. § 1.

HILFSSATZ 5. *Es sei $b_1, b_2, \ldots$ eine Folge positiver Zahlen mit konvergenter Summe. Dann ist die Menge der Zahlen β $(0 \leqq \beta < 1)$, für die für unendlich viele n mit einem natürlichen x $(1 \leqq x < B_n)$*

$$\|\alpha x - \beta\| < \frac{b_n}{B_n} \tag{3. 1}$$

gilt, eine Nullmenge.

BEWEIS. Es bezeichne (bei gegebenem n) E_n die Menge der Zahlen β mit (3. 1). Offenbar gilt

$$\mu(E_n) < 2b_n.$$

Falls $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert, kann keine Menge vom positiven Maß in $\bigcap_{n=m}^{\infty} E_{\psi(m)}$ enthalten sein, wobei $\{\psi(m)\}$ eine beliebige unendliche Teilfolge der natürlichen Zahlenfolge bedeutet.

HILFSSATZ 6. *Man markiere im Intervall* $(0, 1)$ *die Punkte* (αx) $(x=1, 2, \ldots, B_n-1)$. *Diese Punkte zerlegen* $(0, 1)$ *in* B_n *Teilintervalle, die mit* $I_{n,j}$ $(n=1, 2, \ldots; j=1, 2, \ldots, B_n)$ *bezeichnet werden mögen. Dann gilt*

$$\mu(I_{n,j}) > |D_{n-1}|, \tag{3.2}$$

wobei D_k $(k=1, 2, \ldots)$ *durch* (1.3) *definiert ist.*

(3.2) ist eine unmittelbare Folgerung aus dem Gesetz der besten Näherung der Kettenbruchlehre (vgl. PERRON [6], S. 44).

HILFSSATZ 7. *Es bezeichnen* k_j *bzw.* l_j *diejenigen natürlichen Zahlen unterhalb* B_n, *für die* $(k_j\alpha)$ *der linke,* $(l_j\alpha)$ *der rechte Endpunkt von* $I_{n,j}$ *ist, welches im vorigen Hilfssatz definiert wurde. (Der rechte Endpunkt von* I_{n,B_n} *ist der Punkt* 1, *der sich nicht in der Gestalt* (αx) *(x natürlich) schreiben läßt; ferner ist* $k_1=0$.*)*

Betrachten wir dann nicht nur die Punkte

$$(\alpha x) \qquad (x=1, 2, \ldots, B_n-1),$$

sondern auch die Punkte

$$(\alpha x) \qquad (x=1, 2, \ldots, B_{n+1}-1),$$

so liegen von den Punkten (αx) *im Inneren des Intervalls* $I_{n,j}$ *genau die Punkte*

$$((k_j+qB_n)\alpha) \qquad (q=1, 2, \ldots, a_{n+1})$$

oder

$$((l_j+qB_n)\alpha) \qquad (q=1, 2, \ldots, a_{n+1}),$$

je nachdem n gerade oder ungerade ist; ist k_j *bzw.* l_j *nicht kleiner als* B_{n-1}, *so entfällt das letzte Glied in den obigen Folgen.*

Der Beweis folgt sofort aus Hilfssatz 6 und aus der durch eine einfache Umformung zu bestätigenden Tatsache, daß für $m < B_{n+1}$, $m=qB_n+s$, $s \geqq 1$, die Relation

$$(m\alpha) = (s\alpha) + qD_n$$

gilt.

HILFSSATZ 8. *Es sei* β *eine Zahl, für die*

$$\|\alpha x - \beta\| \geqq \frac{b_n}{B_n} \tag{3.3}$$

gilt, falls x *eine natürliche Zahl ist, die kleiner als* B_n *ist. Betrachtet man* *dann die Zahlen $\alpha x'$ mit natürlichem x' $(1 \leqq x' < B_{n+1})$, so gilt für jede Zahl x' mit*

(3. 4) $$\|\alpha x' - \beta\| < \frac{b_n}{2B_n}$$

die Ungleichung

(3. 5) $$\frac{b_n}{4} B_{n+1} \leqq x' < B_{n+1}.$$

BEMERKUNG. Ist $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$, so bilden die Zahlen β, die für unendlich viele n die Relation $\|\alpha x - \beta\| < \frac{b_n}{B_n}$ $(1 \leqq x < B_n)$ erfüllen, eine Nullmenge; (3. 3) ist also für fast alle β und für jedes genügend große n erfüllt, falls $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert. Diese Tatsache wird stark ausgenutzt werden.

BEWEIS. Es bezeichne j' die Zahl, für die $I_{n,j}$ β enthält. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $0 < \beta < 1$ gilt und dann n so groß wählen, daß $2 \leqq j' < B_n$ gilt.

Voraussetzungsgemäß gilt

(3. 6) $$|(k_j\alpha) - \beta| \geqq \frac{b_n}{B_n}, \quad |(l_j\alpha) - \beta| \geqq \frac{b_n}{B_n}.$$

Wegen Hilfssatz 7 haben die Zahlen x' $(1 \leqq x' < B_{n+1})$, für die $(\alpha x')$ im Intervall $I_{n,j}$ liegen, die Gestalt $k_{j'} + qB_n$ oder $l_{j'} + qB_n$, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Es gilt

$$(\alpha x') - \beta = (k_j\alpha) - \beta + qD_n,$$

falls n gerade,

$$(\alpha x') - \beta = (l_j\alpha) - \beta + qD_n,$$

falls n ungerade ist. Damit (3. 4) gilt, muß wegen (3. 6) jedenfalls

$$q > \frac{b_n}{2B_n|D_n|} > \frac{b_n}{2}\frac{B_{n+1}}{B_n} > \frac{b_n}{2} a_{n+1}$$

sein. Daher gilt

$$x' > \frac{b_n}{2} a_{n+1} B_n > \frac{b_n}{4} B_{n+1};$$

womit Hilfssatz 8 bewiesen ist.

Nun kommen wir rasch zum Ziel. Wir wählen α so, daß ihre Kettenbruchnenner so schnell anwachsen, daß stets

(3. 7) $$b_n B_{n+1} > 4B_n$$

gilt.

Ist n gegeben, so teilen wir die natürlichen x mit $B_{n-1} \leqq x < B_n$ in zwei Klassen, je nachdem

$$B_{n-1} \leqq x < \frac{b_{n-1}}{4} B_n \tag{3.8}$$

oder

$$\frac{b_{n-1}}{4} B_n \leqq x < B_n \tag{3.9}$$

gilt.

Gilt nun für alle natürlichen x'' mit $B_{n-2} \leqq x'' < B_{n-1}$

$$\|\alpha x'' - \beta\| > \frac{b_{n-1}}{B_{n-1}},$$

was nach Hilfssatz 5 für fast alle β bei genügend großem n der Fall ist, so ist für alle x mit (3. 8) nach Hilfssatz 8

$$\|\alpha x - \beta\| > \frac{b_{n-1}}{2B_{n-1}} > \frac{b_{n-1}}{2x}. \tag{3.10}$$

Gilt (3. 9), so folgt, nach Hilfssatz 5, für fast alle β

$$\|\alpha x - \beta\| > \frac{b_n}{B_n} > \frac{b_{n-1} b_n}{8} \frac{1}{x} > \frac{b_n^2}{8x}. \tag{3.11}$$

Daher gilt in jedem Falle für fast alle β (3. 11), für genügend großes n und $x < B_n$.

Es sei nun $g(x)$ eine beliebig langsam gegen Null strebende Funktion. Wachsen die Kettenbruchnenner $a_1, a_1, \ldots$ von α so stark an, daß (3. 7) erfüllt ist und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (g(B_n))^{1/2}$ konvergiert, so folgt hieraus, daß die Ungleichung

$$\|\alpha x - \beta\| < \frac{g(x)}{x}$$

für fast alle β höchstens endlich viele Lösungen besitzt.

Zum Schluß möchte ich Herrn J. Surányi meinen besten Dank für manche Verbesserungsvorschläge und für seine wertvolle Hilfe bei der Abfassung dieser Arbeit aussprechen.

BUDAPEST, MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT
DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

(Eingegangen am 3. Januar 1958.)

Literaturverzeichnis

[1] A. Khintchine, Einige Sätze über Kettenbrüche mit Anwendungen auf die Theorie der diophantischen Approximationen, *Math. Annalen*, **92** (1924), S. 115—125.

[2] A. Khintchine, *Kettenbrüche* (Leipzig, 1956).

[3] A. Khintchine, Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen, *Math. Zeitschrift*, **24** (1926), S. 706—714.

[4] A. Khintchine, Ein Satz über lineare diophantische Approximationen, *Math. Annalen*, **113** (1936), S. 398—415.

[5] F. Bernstein, Über eine Anwendung der Mengenlehre auf ein aus der Theorie der säkularen Störungen herrührendes Problem, *Math. Annalen*, **71** (1912), S. 417—439.

[6] O. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen. I*, III. Aufl. (Stuttgart, 1954).

[7] J. W. S. Cassels, *An introduction to diophantine approximation* (Cambridge, 1956).

NOTES ON INTERPOLATION. III
(CONVERGENCE)

By

J. BALÁZS (Budapest) and P. TURÁN (Budapest), member of the Academy

§ 1. Introduction

1. In this paper as well as in the previous two of this series[1, 2] we are dealing with the investigation of what we call as (0,2)-interpolation which is in some respects thoroughly different from other sorts of interpolation studied sofar. Given n points in $[-1, +1]$

$$1 \geqq t_1 > t_2 > \cdots > t_n \geqq -1$$

usually only that sort of interpolation was considered when the *consecutive* derivatives were prescribed for the t_ν's. By (0,2)-interpolation we mean the investigation of those polynomials of degree $\leqq 2n-1$ whose function-values and values of the second derivatives at the t_ν's $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ are prescribed. It turned out in [1, 2] that the behaviour of these polynomials can be studied most conveniently in the case when we choose as the "fundamental points" t_ν of the (0,2)-interpolation the zeros x_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ of the polynomial $\Pi_n(x)$ where

$$\Pi_n(x) \equiv -n(n-1)\int_{-1}^{x} P_{n-1}(t)\,dt \equiv (1-x^2)\,P'_{n-1}(x) \tag{1.1.1}$$

and $P_k(x)$ stands throughout this paper for the k^{th} Legendre polynomial with the normalisation

$$P_k(1) = 1. \tag{1.1.2}$$

Then we have

$$1 = x_1 > x_2 > \cdots > x_{n-1} > x_n = -1. \tag{1.1.3}$$

We shall use also in the present paper exclusively this choice of the t_ν's. It turned out[1] that such interpolatory polynomials exist if and only if n is even.

[1] J. Surányi and P. Turán, Notes on interpolation. I (On some interpolatorical properties of the ultraspherical polynomials), *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), pp. 67–79.

[2] J. Balázs and P. Turán, Notes on interpolation. II (Explicit formulae), *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **8** (1957), pp. 201–215.

Throughout this paper let

$$(1.1.4)\qquad n=2k\geqq 4.$$

Denoting by $R_n(x)$ the polynomial of degree $\leqq 2n-1$ with

$$(1.1.5)\qquad \begin{aligned} R_n(x_\nu)&=\alpha_\nu=\text{prescribed},\\ R_n''(x_\nu)&=\beta_\nu=\text{prescribed},\end{aligned}$$

we have obviously

$$(1.1.6)\qquad R_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu r_\nu(x)+\sum_{\nu=1}^{n}\beta_\nu\varrho_\nu(x),$$

where the polynomials $r_\nu(x)$ and $\varrho_\nu(x)$, the so-called fundamental functions of the first and second kind, are of degree $\leqq(2n-1)$, uniquely determined[1] by the conditions

$$(1.1.7)\qquad \begin{aligned} &r_\nu(x_j)=\begin{cases}1 & \text{for } j=\nu,\\ 0 & \text{for } j\neq\nu\end{cases}\quad (1\leqq j\leqq n),\\ &r_\nu''(x_j)=0\quad \text{for } j=1,2,\ldots,n\end{aligned}$$

and

$$(1.1.8)\qquad \begin{aligned} &\varrho_\nu(x_j)=0\quad \text{for } j=1,2,\ldots,n,\\ &\varrho_\nu''(x_j)=\begin{cases}1 & \text{for } j=\nu,\\ 0 & \text{for } j\neq\nu\end{cases}\quad (1\leqq j\leqq n),\end{aligned}$$

respectively.

2. We now consider the *sequence* of points

$$(1.2.1)\qquad 1=x_{1n}>x_{2n}>\cdots>x_{n-1,n}>x_{nn}=-1\qquad (n=4,6,8,\ldots,2k,\ldots)$$

where $x_{\nu n}$'s stand[3] for the zeros of $\Pi_n(x)$. Then forming the interpolatory polynomials (1.1.5) and (1.1.6) for *each* $n=2k$ we shall write the fundamental functions (1.1.7) and (1.1.8) as

$$r_{\nu n}(x)\quad\text{and}\quad \varrho_{\nu n}(x),$$

respectively. Let now $f(x)$ be defined for $[-1,+1]$; we consider the sequence of polynomials

$$(1.2.2)\qquad R_n(x,f)=\sum_{\nu=1}^{n}f(x_{\nu n})r_{\nu n}(x)+\sum_{\nu=1}^{n}\beta_{\nu n}\varrho_{\nu n}(x)$$

with arbitrary numbers $\beta_{\nu n}$. We shall prove the following

THEOREM I. *Let $f(x)$ be continuously derivable in $[-1,+1]$ with the continuity modul $\omega(\delta)$ of $f'(x)$ such that*

$$(1.2.3)\qquad \int_0 \frac{\omega(t)}{t}\,dt$$

[3] The notation (1.1.3) of the zeros $\Pi_n(x)$ was more suitable when n was *fixed.*

exist. Supposing that for arbitrary small $\varepsilon > 0$ *we have for* $n > n_0(\varepsilon)$ *and* $\nu = 1, 2, \ldots, n$

$$|\beta_{\nu n}| \leq \varepsilon n, \tag{1.2.4}$$

the sequence $R_n(x, f)$ *converges to* $f(x)$ *uniformly in* $[-1, +1]$.

In order to show that Theorem I is to a certain extent best-possible, we state the

THEOREM II. *If* ε *is an arbitrary small positive number, then there is a function* $F(x)$ *belonging to the class* Lip $(1-\varepsilon)$ *such that the polynomials* $R_n(x, F)$ *(even in the case* $\beta_{\nu n} = 0$*) are unbounded for* $x = 0$.

3. The theory of the interpolation abounds in convergence proofs. The essentially new feature of the present one — apart from the fact that this is according to our knowledge the first convergence theorem concerning "lacunary" interpolation process — is caused by the fact that being forced to use *rational* approximation polynomials of increasing degree we need a good upper bound for its second derivative in the whole $[-1, +1]$. Approximating periodical functions by trigonometrical polynomials the first result in this direction is due to L. FEJÉR[4] who, when proving that if the Fourier series of an everywhere continuous function, having an everywhere continuous conjugate, converges uniformly everywhere, then so does the Fourier series of the conjugate function, used the remark that if the sequence $\pi_n(\vartheta)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ of trigonometrical polynomials of order n converges uniformly to a (continuous) $g(\vartheta)$, then we have $\pi_n'(\vartheta) = o(n)$ (and thus $\pi_n''(\vartheta) = o(n^2)$). This result was generalized by G. FREUD[5] in his study on the asymptotical representation of general orthogonal polynomials and asserts that if[6]

$$|\pi_n(\vartheta) - g(\vartheta)| \leq c_1 n^{-\alpha} \qquad (0 < \alpha < 1),$$

then

$$|\pi_n'(\vartheta)| \leq c_2 n^{1-\alpha} \tag{1.3.1}$$

and in the case $\alpha = 1$

$$|\pi_n'(\vartheta)| \leq c_3 \log n \tag{1.3.2}$$

(and thus $\pi_n''(\vartheta) = O(n \log n)$). Even from

$$|\pi_n(\vartheta) - g(\vartheta)| = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

it follows $\pi_n'(\vartheta) = o(n \log n)$ only and this is not enough for our purposes; moreover, new difficulties arise in the rational case near the points $x = \pm 1$.

[4] L. FEJÉR, Über konjugierte trigonometrische Reihen, *Crelle Journ.*, **144** (1914), pp. 48—56.

[5] See his unpublished thesis. For (1.3.1) and (1.3.2) simpler proofs have been given by the second of us.

[6] In what follows $c_1, c_2, \ldots$ denote numerical positive constants; if some of them depends on some parameters, then this will be explicitly stated.

Therefore we have to make use of a different approach using special rational approximation polynomials to overcome this difficulty.

Since — after having once Lemma 4.4 — the proof of Theorem II follows closely a construction given in a paper of P. ERDŐS and P. TURÁN (On the role of the Lebesgue functions in the theory of the Lagrange interpolation, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), pp. 47—66), we shall omit the details.

§ 2. Preliminaries

1. The explicit form of the fundamental functions $r_\nu(x)$ and $\varrho_\nu(x)$ what we have found in [2] is the following:

$$\varrho_1(x) = -\frac{\Pi_n(x)}{n^2(n-1)^2}\left\{1+\frac{1}{3}P_{n-1}(x)\right\}, \tag{2.1.1}$$

$$\varrho_n(x) = \frac{\Pi_n(x)}{n^2(n-1)^2}\left\{-1+\frac{1}{3}P_{n-1}(x)\right\} \tag{2.1.2}$$

and[7] for $2 \leqq \nu \leqq n-1$

$$\begin{aligned}\varrho_\nu(x) = \frac{\Pi_n(x)}{4n^2(n-1)^2P_{n-1}(x_\nu)^2}\Bigg\{&(1-x_\nu^2)\int_1^x \frac{P'_{n-1}(t)}{t-x_\nu}\,dt+\\ &+(1-x_\nu^2)\int_{-1}^x \frac{P'_{n-1}(t)}{t-x_\nu}\,dt+2P_{n-1}(x)\left(\frac{1}{3P_{n-1}(x_\nu)}-x_\nu\right)-4\Bigg\}.\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Further, if

$$l_\nu(x) = \frac{\Pi_n(x)}{\Pi'_n(x_\nu)(x-x_\nu)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.1.4}$$

stand for the fundamental functions of the Lagrange interpolation based on our x_ν-points in (1.1.3), then we have

$$\begin{aligned}r_1(x) = {}& \frac{3+x}{4}\,l_1(x)^2-\frac{1-x^2}{4}\,l_1(x)l'_1(x)+\\ &+\left(\frac{5}{16}+\frac{1}{8n(n-1)}\right)\Pi_n(x)\left\{1+\frac{1}{3}P_{n-1}(x)\right\},\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

$$\begin{aligned}r_n(x) = {}& \frac{3-x}{4}\,l_n(x)^2+\frac{1-x^2}{4}\,l_n(x)l'_n(x)+\\ &+\left(\frac{5}{16}+\frac{1}{8n(n-1)}\right)\Pi_n(x)\left\{1-\frac{1}{3}P_{n-1}(x)\right\}\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

[7] (1.1.1) gives that the integrand of (2.1.3) is a polynomial.

[8] Since according to a remark of FEJÉR $l'_\nu(x_\nu)=0$, the integrand in (2.1.7) is a polynomial (see [14]).

and for[8] $2 \leqq \nu \leqq n-1$

$$
(2.1.7)\qquad r_\nu(x) = l_\nu(x)^2 - \frac{\Pi_n(x)}{2\Pi_n'(x_\nu)}\left\{\int_1^x \frac{l_\nu'(t)}{t-x_\nu}\,dt + \int_{-1}^x \frac{l_\nu'(t)}{t-x_\nu}\,dt + \frac{P_{n-1}(x)}{3(1-x_\nu^2)P_{n-1}(x_\nu)^2}\right\}.
$$

2. These forms seem to us the most symmetrical ones for the fundamental functions. In this paper, however, we shall need some other representations more suitable for our purposes. Lemma 4.1 and Lemma 6.1 of the paper[2] give for $\nu = 2, 3, \ldots, n-1$

$$
(2.2.1)\qquad \varrho_\nu(x) = \frac{\Pi_n(x)}{2\Pi_n'(x_\nu)P_{n-1}''(x_\nu)}\left\{\int_{-1}^x \frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_\nu}\,dt + P_{n-1}(x)\left(-\frac{x_\nu}{1-x_\nu^2} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{(1-x_\nu^2)P_{n-1}(x_\nu)}\right) + \left(-\frac{3}{1-x_\nu^2} + \frac{1}{(1-x_\nu^2)P_{n-1}(x_\nu)}\right)\right\}
$$

and

$$
(2.2.2)\qquad \varrho_\nu(x) = \frac{\Pi_n(x)}{2\Pi_n'(x_\nu)P_{n-1}''(x_\nu)}\left\{\int_1^x \frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_\nu}\,dt + P_{n-1}(x)\left(-\frac{x_\nu}{1-x_\nu^2} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{(1-x_\nu^2)P_{n-1}(x_\nu)}\right) - \left(\frac{1}{1-x_\nu^2} + \frac{1}{(1-x_\nu^2)P_{n-1}(x_\nu)}\right)\right\},
$$

respectively. From (2.1.7) we evidently have for $\nu = 2, 3, \ldots, n-1$

$$
r_\nu(x) = l_\nu(x)^2 - \frac{\Pi_n(x)}{2\Pi_n'(x_\nu)}\left\{-\int_{-1}^1 \frac{l_\nu'(t)}{t-x_\nu}\,dt + 2\int_{-1}^x \frac{l_\nu'(t)}{t-x_\nu}\,dt + \frac{P_{n-1}(x)}{3(1-x_\nu^2)P_{n-1}(x_\nu)^2}\right\}
$$

and

$$
r_\nu(x) = l_\nu(x)^2 - \frac{\Pi_n(x)}{2\Pi_n'(x_\nu)}\left\{\int_{-1}^1 \frac{l_\nu'(t)}{t-x_\nu}\,dt - 2\int_x^1 \frac{l_\nu'(t)}{t-x_\nu}\,dt + \frac{P_{n-1}(x)}{3(1-x_\nu^2)P_{n-1}(x_\nu)^2}\right\}.
$$

According to Lemma 9.1 of [2] we have

$$
\int_1^1 \frac{l_\nu'(t)}{t-x_\nu}\,dt = -\frac{1}{(1-x_\nu^2)P_{n-1}(x_\nu)^2}
$$

which gives

$$r_\nu(x) = l_\nu(x)^2 - \frac{\Pi_n(x)}{\Pi_n'(x_\nu)} \left\{ \int_{-1}^{x} \frac{l_\nu'(t)}{t-x_\nu}\, dt + \left(\frac{1}{2} + \frac{P_{n-1}(x)}{6}\right) \frac{1}{(1-x_\nu^2) P_{n-1}(x_\nu)^2} \right\}$$

and

$$r_\nu(x) = l_\nu(x)^2 - \frac{\Pi_n(x)}{\Pi_n'(x_\nu)} \left\{ \int_{1}^{x} \frac{l_\nu'(t)}{t-x_\nu}\, dt + \left(-\frac{1}{2} + \frac{P_{n-1}(x)}{6}\right) \frac{1}{(1-x_\nu^2) P_{n-1}(x_\nu)^2} \right\}.$$

Applying partial integration the term $l_\nu(x)^2$ will obviously be cancelled and we obtain, using $l_\nu(\pm 1) = 0$, in the case $x < x_\nu$ the form

$$r_\nu(x) = \frac{\Pi_n(x)}{\Pi_n'(x_\nu)} \left\{ \int_{-1}^{x} \frac{l_\nu(t)}{(t-x_\nu)^2}\, dt - \left(\frac{1}{2} + \frac{P_{n-1}(x)}{6}\right) \frac{1}{(1-x_\nu^2) P_{n-1}(x_\nu)^2} \right\} \tag{2.2.3}$$

and in the case $x_\nu < x$

$$r_\nu(x) = \frac{\Pi_n(x)}{\Pi_n'(x_\nu)} \left\{ \int_{1}^{x} \frac{l_\nu(t)}{(t-x_\nu)^2}\, dt + \left(\frac{1}{2} - \frac{P_{n-1}(x)}{6}\right) \frac{1}{(1-x_\nu^2) P_{n-1}(x_\nu)^2} \right\}. \tag{2.2.4}$$

Using (2.1.4) and (1.1.1) we obtain the forms, which fit the best to our present purposes valid for $\nu = 2, 3, \ldots, n-1$,

$$\begin{aligned} r_\nu(x) &= (x-x_\nu) l_\nu(x) \int_{-1}^{x} \frac{l_\nu(t)}{(t-x_\nu)^2}\, dt + \\ &+ \frac{1}{n(n-1)} \left(\frac{1}{2} + \frac{P_{n-1}(x)}{6}\right) \frac{\Pi_n(x)}{(1-x_\nu^2) P_{n-1}(x_\nu)^3} \qquad \text{for} \quad x < x_\nu \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

and

$$\begin{aligned} r_\nu(x) &= (x-x_\nu) l_\nu(x) \int_{1}^{x} \frac{l_\nu(t)}{(t-x_\nu)^2}\, dt + \\ &+ \frac{1}{n(n-1)} \left(-\frac{1}{2} + \frac{P_{n-1}(x)}{6}\right) \frac{\Pi_n(x)}{(1-x_\nu^2) P_{n-1}(x_\nu)^3} \qquad \text{for} \quad x > x_\nu, \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

respectively.

Owing to the uniqueness theorem in [1] we have for an arbitrary polynomial $V(x)$ of degree $\leqq 2n-1$

$$\sum_{j=1}^{n} V(x_j) r_j(x) + \sum_{j=1}^{n} V''(x_j) \varrho_j(x) \equiv V(x). \tag{2.2.7}$$

[9] See e. g. G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. (New York, 1939), p. 167, formula (7.33.8).

3. We shall use some well-known facts about Legendre polynomials. For $-1 \leqq x \leqq +1$ we have[9]

$$(2.3.1)\qquad |P_m'(x)| \leqq \frac{m(m+1)}{2}$$

and S. BERNSTEIN's inequalities[10]

$$(2.3.2)\qquad |P_m(x)| \leqq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{\sqrt{m}\,\sqrt[4]{1-x^2}};$$

for $n \geqq 4$

$$(2.3.3)\qquad (1-x^2)^{3/4}|P_{n-1}'(x)| \leqq \sqrt{2n},$$

$$(2.3.4)\qquad |\Pi_n(x)| \leqq \sqrt{\frac{2}{\pi}n}.$$

Further, for $-1 \leqq x \leqq +1$ we need[11]

$$(2.3.5)\qquad |P_m(x)| \leqq 1,$$

the equation[12]

$$(2.3.6)\qquad (1-x^2)P_m''(x) - 2xP_m'(x) + m(m+1)P_m(x) = 0,$$

and finally[13] the estimation

$$(2.3.7)\qquad |P_{n-1}'(0)| = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots (n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots (n-2)} > \frac{1}{3}\sqrt{n}.$$

We shall also repeatedly use MARKOV's and S. BERNSTEIN's inequalities, according to which for a polynomial $g(x)$ of degree $\leqq m$ and real coefficients we have for $-1 \leqq x \leqq +1$

$$(2.3.8)\qquad |g'(x)| \leqq m^2 \max_{-1 \leqq x \leqq +1} |g(x)|$$

and

$$(2.3.9)\qquad |g'(x)| \leqq \frac{m}{\sqrt{1-x^2}} \max_{-1 \leqq x \leqq +1} |g(x)|,$$

respectively.

Further, for the fundamental functions $l_j(x)$ from (2.1.4) we have[14]

$$(2.3.10)\qquad l_j(x)^2 \leqq \sum_{\nu=1}^{n} l_\nu(x)^2 \leqq 1 \qquad (-1 \leqq x \leqq +1; \qquad j = 1, 2, \ldots, n).$$

[10] S. BERNSTEIN, Sur les polynômes orthogonaux relatifs à un segment fini. II, *Journ. Math. pures et appl.*, **10** (1931), pp. 219—286.

[11] See SZEGŐ, l. c., p. 159, formula (7.21.1).

[12] See SZEGŐ, l. c., p. 59, formula (4.2.1).

[13] See SZEGŐ, l. c., p. 161, formula (7.3.11).

[14] L. FEJÉR, Bestimmung derjenigen Abszissen eines Intervalles, für welche die Quadratsumme der Grundfunktionen der Lagrangeschen Interpolation im Intervalle ein möglichst kleines Maximum besitzt, *Annali della Sc. Norm. Sup. di Pisa* (2), **1** (1932), pp. 3—16.

4. An important role will be played by

LEMMA 2. 1. *For the relative extrema of $P_{n-1}(x)$ in $0<x<1$ (i. e. for the numbers $|P_{n-1}(x_\nu)|$) we have the estimation* [15]

$$|P_{n-1}(x_\nu)| \geqq \frac{1}{\sqrt{8\pi\nu}} \qquad \left(n=4, 6, 8, \ldots;\ \nu=2, 3, \ldots, \frac{n}{2}\right).$$

PROOF. Denoting for $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$

$$u(\vartheta) = \sin^{1/2}\vartheta \cdot P_{n-1}(\cos\vartheta) \tag{2.4.1}$$

and

$$\Phi(\vartheta) = (2\sin\vartheta)^{-2} + \left(n-\frac{1}{2}\right)^2, \tag{2.4.2}$$

SONIN's theorem [16] gives that

$$f(\vartheta) \equiv u(\vartheta)^2 + \frac{1}{\Phi(\vartheta)} u'(\vartheta)^2 \tag{2.4.3}$$

increases for $0 \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2}$. If $x_\nu = \cos\vartheta_\nu$ and $|P_{n-1}(x_\nu)| = M_\nu$, then owing to (2. 4. 2) and (2. 4. 3) we have

$$f(\vartheta_\nu) = \sin\vartheta_\nu \cdot M_\nu^2 + \frac{1}{\Phi(\vartheta_\nu)}\left(\frac{\cos\vartheta_\nu}{2\sin^{1/2}\vartheta_\nu}\right)^2 M_\nu^2 < M_\nu^2 \cdot 2\sin\vartheta_\nu.$$

On the other hand, we apply SONIN's theorem (2. 4. 3) with $\vartheta = \vartheta_\nu$ and $\vartheta = \frac{\pi}{4(n-1)}$ $(<\vartheta_1<\vartheta_\nu)$. This gives

$$\begin{aligned} M_\nu^2 \cdot 2\sin\vartheta_\nu > f\left(\frac{\pi}{4(n-1)}\right) > u\left(\frac{\pi}{4(n-1)}\right)^2 = \\ = \sin\frac{\pi}{4n-4} P_{n-1}\left(\cos\frac{\pi}{4n-4}\right)^2. \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

But, as well known, [17]

$$P_{n-1}(\cos\vartheta) = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu \cos\nu\vartheta$$

[15] One could deduce Lemma 2. 1. and (2. 3. 2) also from the deep asymptotical representation of $P_{n-1}(x)$ due to HILB, without explicit constants. We shall not need this representation in this paper. With slight modifications one could obtain also the corresponding lower bound also for odd n's but we do not need it. For the relative extrema in $-1<x<0$ obviously an analogous estimation holds. For $\nu=1$ the lemma holds trivially. Our first proof was longer than that in the text and also the numerical constant was worse; the proof in the text was communicated to us in a letter of Prof. G. SZEGŐ in 4 Nov. 1957.

[16] See e. g. SZEGŐ, l. c., p. 160.

[17] See e. g. SZEGŐ, l. c., p. 131.

with $a_\nu > 0$ and $\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu = 1$; hence

$$P_{n-1}\left(\cos\frac{\pi}{4n-4}\right) > \cos\frac{\pi}{4}\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

i. e. from (2. 4. 4)

$$2\vartheta_\nu M_\nu^2 > M_\nu^2 \cdot 2\sin\vartheta_\nu > \frac{1}{4(n-1)}. \tag{2.4.5}$$

If φ_ν's stand for the zeros of $P_{n-1}(\cos\vartheta)$, we evidently have

$$0 = \vartheta_1 < \varphi_1 < \vartheta_2 < \varphi_2 < \cdots < \vartheta_\nu < \varphi_\nu < \cdots < \pi$$

and thus from (2. 4. 5)

$$M_\nu^2 > \frac{1}{8\vartheta_\nu(n-1)} > \frac{1}{8\varphi_\nu(n-1)}. \tag{2.4.6}$$

But owing to the separation theorem of BRUNS[18] we have for our ν's

$$\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n-1} < \varphi_\nu < \nu\frac{\pi}{n}, \tag{2.4.7}$$

which together with (2. 4. 6) proves the lemma.

For later purposes we remark that for $0 < \vartheta_\nu \leq \frac{\pi}{2}$ we have

$$\vartheta_\nu > \left(\nu-\frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{n-1}. \tag{2.4.8}$$

§ 3. Investigation of the fundamental functions of the second kind

1. In this § we shall estimate the quantity

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\varrho_\nu(x)|.$$

It follows immediately from (2. 1. 1), (2. 1. 2), (2. 3. 4) and (2. 3. 5) that for $n = 4, 6, 8, \ldots$ and $-1 \leq x \leq +1$

$$\begin{aligned} |\varrho_1(x)| &\leq \frac{2}{n^{3/2}(n-1)^2}, \\ |\varrho_n(x)| &\leq \frac{2}{n^{3/2}(n-1)^2}. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

For the further fundamental functions we have

LEMMA 3. 1. *For* $n = 4, 6, 8, \ldots$ *and* $-1 \leq x \leq +1$ *we have*

$$|\varrho_\nu(x)| \leq \sqrt{8\pi}\,\frac{|l_\nu(x)|(1-x_\nu^2)}{n(n-1)}\sqrt{\nu} + 128\pi\left(\frac{\nu}{n}\right)^{3/2}\frac{1}{(n-1)^2} \quad \textit{for} \quad 2 \leq \nu \leq \frac{n}{2}$$

[18] See SZEGŐ, l. c., p. 118, formula (6. 21. 7).

and

$$|\varrho_\nu(x)| \leqq \sqrt{8\pi}\,\frac{|l_\nu(x)|\,(1-x_\nu^2)}{n(n-1)}\sqrt{n-\nu}+128\pi\left(\frac{n-\nu}{n}\right)^{3/2}\frac{1}{(n-1)^2}$$

$$\textit{for}\quad \frac{n}{2}+1 \leqq \nu \leqq n-1.$$

PROOF. Obviously, it suffices to prove the first assertion. Let first be

$$x < x_\nu < 1.$$

Since

$$\int_{-1}^{x}\frac{P'_{n-1}(t)}{t-x_\nu}\,dt=\frac{P_{n-1}(x)}{x-x_\nu}-\frac{1}{1+x_\nu}+\int_{-1}^{x}\frac{P_{n-1}(t)}{(t-x_\nu)^2}\,dt,$$

we have owing to (2. 3. 5)

$$\left|\int_{-1}^{x}\frac{P'_{n-1}(t)}{t-x_\nu}\,dt\right| \leqq \frac{2}{x_\nu-x}+\frac{1}{1+x_\nu}<2\left(\frac{1}{x_\nu-x}+\frac{1}{1-x_\nu^2}\right).$$

Then (2. 2. 1) gives owing to (2. 1. 4) and (2. 3. 5)

$$(3.\,1.\,2)\qquad |\varrho_\nu(x)| \leqq \frac{1}{|P''_{n-1}(x_\nu)|}\,|l_\nu(x)|+\frac{|\Pi_n(x)|}{2|\Pi'_n(x_\nu)P''_{n-1}(x_\nu)|}\left\{\frac{6}{1-x_\nu^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{4}{3}\,\frac{1}{(1-x_\nu^2)|P_{n-1}(x_\nu)|}\right\}<\frac{|l_\nu(x)|}{|P''_{n-1}(x_\nu)|}+4\,\frac{|\Pi_n(x)|}{|\Pi'_n(x_\nu)P''_{n-1}(x_\nu)|}\cdot\frac{1}{(1-x_\nu^2)|P_{n-1}(x_\nu)|}.$$

Since from (2. 3. 6)

$$(1-x_\nu^2)P''_{n-1}(x_\nu)=-n(n-1)P_{n-1}(x_\nu)$$

and from (1. 1. 1)

$$\Pi'_n(x_\nu)=-n(n-1)P_{n-1}(x_\nu),$$

further

$$\frac{1}{|P''_{n-1}(x_\nu)|}=\frac{1-x_\nu^2}{n(n-1)|P_{n-1}(x_\nu)|},$$

Lemma 2. 1 and (2. 3. 4) give from (3. 1. 2)

$$|\varrho_\nu(x)| \leqq \sqrt{8\pi}\,\frac{|l_\nu(x)|(1-x_\nu^2)}{n(n-1)}\sqrt{\nu}+128\pi\left(\frac{\nu}{n}\right)^{3/2}\frac{1}{(n-1)^2}.$$

For $-1 \leqq x_\nu < x$ the estimation runs similarly, since we have again

$$\left|\int_{x}^{1}\frac{P'_{n+1}(t)}{t-x_\nu}\,dt\right|<2\left(\frac{1}{x-x_\nu}+\frac{1}{1-x_\nu^2}\right).$$

For $x=x_\nu$ the lemma obviously holds.

From Lemma 3. 1 we can deduce

LEMMA 3. 2. *We have for* $n=4,6,8,\ldots$ *and* $-1\leqq x\leqq +1$ *the estimation*

$$\sum_{\nu=1}^{n}|\varrho_\nu(x)|\leqq\frac{36\pi}{n}.$$

PROOF. From (3. 1. 1) and Lemma 3. 1, using also (2. 3. 10), we obtain

$$\sum_{\nu=1}^{n}|\varrho_\nu(x)|\leqq\frac{4}{n^{3/2}(n-1)^2}+\frac{\sqrt{8\pi}}{n(n-1)}\left\{\sum_{\nu=2}^{\frac{n}{2}}\sqrt{\nu}\,|l_\nu(x)|+\sum_{\nu=\frac{n}{2}+1}^{n-1}\sqrt{n-\nu}\,|l_\nu(x)|\right\}+$$

$$+\frac{33\pi}{n}<\frac{34\pi}{n}+\frac{\sqrt{8\pi}}{n(n-1)}\left(\sum_{\nu=1}^{\frac{n}{2}}\nu\right)^{1/2}\left(\sum_{\nu=1}^{n}l_\nu(x)^2\right)^{1/2}<\frac{34\pi}{n}+\frac{2\pi}{n}=\frac{36\pi}{n}.$$

In order to show that Lemma 3. 2 is best-possible what order concerns, we state

LEMMA 3. 3. *We have for all even* $n\geqq 8$ *the inequality*

$$\sum_{\nu=1}^{n}|\varrho_\nu(0)|>\frac{c_4}{n}.$$

PROOF. From (2. 1. 3) and (1. 1. 1) we have

$$\sum_{\nu=1}^{n}|\varrho_\nu(0)|>\sum_{\nu=\left[\frac{n}{8}\right]}^{\left[\frac{n}{4}\right]}\frac{1}{4n^2(n-1)^2}\,\frac{|P'_{n-1}(0)|}{P_{n-1}(x_\nu)^2}\left|(1-x_\nu^2)\int_1^0\frac{P'_{n-1}(t)}{t-x_\nu}dt+\right.$$

$$\left.+(1-x_\nu^2)\int_{-1}^0\frac{P'_{n-1}(t)}{t-x_\nu}dt-4\right|.$$

Using (2. 3. 7) and (2. 3. 2) this gives

$$\sum_{\nu=1}^{n}|\varrho_\nu(0)|>\frac{\pi}{24\sqrt{n}\,(n-1)^2}\sum_{\nu=\left[\frac{n}{8}\right]}^{\left[\frac{n}{4}\right]}\sqrt{1-x_\nu^2}\left|(1-x_\nu^2)\int_{-1}^1\frac{P'_{n-1}(t)}{t-x_\nu}dt-\right.$$

$$\left.-2(1-x_\nu^2)\int_{-1}^0\frac{P'_{n-1}(t)}{t-x_\nu}dt+4\right|.$$

Taking into account[2] (Lemma 6. 1) that

$$\int_{-1}^1\frac{P'_{n-1}(t)}{t-x_\nu}dt=\frac{2x_\nu}{1-x_\nu^2}-\frac{2}{(1-x_\nu^2)P_{n-1}(x_\nu)},$$

we obtain, using once more (2. 3. 2),

$$\sum_{\nu=1}^{n}|\varrho_\nu(0)|>\frac{\pi}{24\sqrt{n}(n-1)^2}\sum_{\nu=\left[\frac{n}{8}\right]}^{\left[\frac{n}{4}\right]}\sqrt{1-x_\nu^2}\Bigg(\frac{2}{|P_{n-1}(x_\nu)|}-$$

$$-6-2\left|\int_{-1}^{0}\frac{P'_{n-1}(t)}{t-x_\nu}dt\right|\Bigg)>\frac{\pi}{24n^{5/2}}\sum_{\nu=\left[\frac{n}{8}\right]}^{\left[\frac{n}{4}\right]}\sqrt{1-x_\nu^2}\Big\{\sqrt{2\pi}\sqrt{n}(1-x_\nu^2)^{1/4}-$$

$$-20-2\left|\int_{-1}^{0}\frac{P_{n-1}(t)}{(t-x_\nu)^2}dt\right|\Big\}>\frac{\pi}{24n^{5/2}}\sum_{\nu=\left[\frac{n}{8}\right]}^{\left[\frac{n}{4}\right]}\{\sqrt{2\pi n}(1-x_\nu^2)-40\}>\frac{\pi}{10^7}\frac{1}{n}.$$

§ 4. Investigation of the fundamental functions of the first kind

1. We need the

LEMMA 4. 1. *For $n=4,6,8,\dots$ and $-1\leqq x\leqq+1$ the estimations*

$$|r_1(x)|<\frac{n}{4}+2\sqrt{n},\qquad |r_n(x)|<\frac{n}{4}+2\sqrt{n}$$

hold.

PROOF. It is enough to consider only $r_1(x)$. Owing to (2. 1. 5), (2. 3. 10) and (2. 3. 5) we have

$$|r_1(x)|\leqq 1+\frac{1-x^2}{4}|l'_1(x)|+\frac{2}{3}|\Pi_n(x)|.$$

Using (2. 3. 9) and (2. 3. 4) the lemma is proved.

Further we have

LEMMA 4. 2. *For $n=4,6,8,\dots$ and $-1\leqq x\leqq+1$ we have*

$$|r_\nu(x)|\leqq 87\pi\sqrt{\frac{n}{\nu}}\quad for\quad 2\leqq\nu\leqq\frac{n}{2},$$

$$|r_\nu(x)|\leqq 87\pi\sqrt{\frac{n}{n-\nu}}\quad for\quad \frac{n}{2}<\nu\leqq n-1.$$

PROOF. We may confine ourselves to the case $2\leqq\nu\leqq\frac{n}{2}$. Let first be $x<x_\nu$. Then the representation (2. 2. 5) gives with (2. 3. 10), (2. 3. 4), (2. 3. 5)

and Lemma 2.1

$$(4.2.1)\qquad |r_\nu(x)| \leqq |x-x_\nu| \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{dt}{(t-x_\nu)^2} + \frac{2\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{3(n-1)\sqrt{n}} \frac{1}{(1-x_\nu^2)|P_{n-1}(x_\nu)|^3} \leqq$$

$$\leqq 1 + \frac{64}{3} \frac{\pi}{(n-1)\sqrt{n}} \frac{\nu^{3/2}}{1-x_\nu^2}.$$

Since according to ROLLE's theorem we have

$$x_\nu < \xi_{\nu-1}$$

and thus, using again BRUNS's estimation (2.4.7),

$$1-x_\nu^2 > 1-\xi_{\nu-1}^2 = \sin^2\varphi_{\nu-1} > \frac{4}{\pi^2}\varphi_{\nu-1}^2 > \frac{4}{\pi^2}\frac{\left(\nu-\frac{3}{2}\right)^2\pi^2}{(n-1)^2} > \frac{\nu^2}{4(n-1)^2},$$

Lemma 4.2 follows from (4.2.1) for $x < x_\nu$. For $x > x_\nu$ this follows analogously, starting from (2.2.6) instead of (2.2.5). For $x = x_\nu$ the lemma is trivial.

From Lemma 4.1 and 4.2 it follows evidently

LEMMA 4.3. *For $n = 4, 6, 8, \ldots$ and $-1 \leqq x \leqq +1$ we have*

$$\sum_{\nu=1}^{n} |r_\nu(x)| \leqq 249\pi n.$$

2. In order to show that the estimation of Lemma 4.3 is essentially best-possible, we prove

LEMMA 4.4. *For all sufficiently large even n's we have for a suitable numerical positive c*

$$\sum_{\left[\frac{n}{8}\right] \leqq \nu \leqq \left[\frac{n}{4}\right]} |r_\nu(0)| > c_5 n,$$

i. e. a fortiori

$$\sum_{\nu=1}^{n} |r_\nu(0)| > c_5 n.$$

PROOF. Using the representation (2.2.3) we have for $2 \leqq \nu \leqq \frac{n}{2}$

$$r_\nu(0) = \frac{\Pi_n(0)}{\Pi_n'(x_\nu)} \left\{ \int\limits_{-1}^{0} \frac{l_\nu(t)}{(t-x_\nu)^2} dt - \frac{1}{2(1-x_\nu^2)P_{n-1}(x_\nu)^2} \right\}.$$

Using (1.1.1), (2.3.7), (2.3.10) and (2.3.2) for sufficiently large even n's and for $\left[\frac{n}{8}\right] \leqq \nu \leqq \left[\frac{n}{4}\right]$ we obtain with numerical positive c_6 and c_7

$$|r_\nu(0)| > \frac{1}{3\sqrt{n}(n-1)|P_{n-1}(x_\nu)|} \left\{ \frac{1}{2(1-x_\nu^2)P_{n-1}(x_\nu)^2} - \frac{1}{x_\nu} \right\} >$$

$$> \frac{c_6}{\sqrt{n}(n-1)|P_{n-1}(x_\nu)|^3} > c_7$$

from which Lemma 4. 4 easily follows.

§ 5. Lemmas on Jackson means

1. Let $\varphi(\vartheta)$ have the period 2π and its Jackson means[19]

(5. 1. 1)
$$J_n(\vartheta, \varphi) = \frac{3}{2\pi n(2n^2+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \left(\frac{\sin n \frac{t-\vartheta}{2}}{\sin \frac{t-\vartheta}{2}} \right)^4 dt.$$

An alternative form of $J_n(\vartheta, \varphi)$ is, as well known,

(5. 1. 2)
$$J_n(\vartheta, \varphi) = \frac{3}{\pi n(2n^2+1)} \int_0^{\pi/2} \{\varphi(\vartheta+2t) + \varphi(\vartheta-2t)\} \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt.$$

From (5. 1. 2) it follows

(5. 1. 3)
$$1 = \frac{6}{\pi n(2n^2+1)} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt.$$

We need the following lemma which is certainly well known, but we know no place where it is explicitly stated; so we sketch its (conventional) proof.

LEMMA 5. 1. *If $\varphi(\vartheta)$ is everywhere continuously derivable, then for an arbitrary small $\varepsilon > 0$ we have for $n > n_0(\varepsilon)$*

$$|\varphi(\vartheta) - J_n(\vartheta, \varphi)| \leqq \frac{\varepsilon}{n}.$$

PROOF. From (5. 1. 2) and (5. 1. 3) we get

$$\Delta_n(\vartheta) \equiv J_n(\vartheta, \varphi) - \varphi(\vartheta) =$$

$$= \frac{3}{\pi n(2n^2+1)} \int_0^{\pi/2} \{\varphi(\vartheta+2t) + \varphi(\vartheta-2t) - 2\varphi(\vartheta)\} \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt.$$

[19] D. JACKSON, *Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch Polynome gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung*, Inaug. Diss. (Göttingen, 1911).

The mean value theorem gives

$$(5.1.4) \qquad \Delta_n(\vartheta)=\frac{3}{\pi n(2n^2+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t\{\varphi'(t_1)-\varphi'(t_2)\}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt$$

with

$$(5.1.5) \qquad \vartheta\leqq t_1\leqq\vartheta+2t, \quad \vartheta\geqq t_2\geqq\vartheta-2t.$$

Since owing to the hypothesis and (5.1.5) we have

$$(5.1.6) \qquad |\varphi'(t_1)-\varphi'(t_2)|\leqq\omega_1(4t)$$

denoting by $\omega_1(\delta)$ the continuity modul of $\varphi'(\vartheta)$, (5.1.4) gives

$$|\Delta_n(\vartheta)|\leqq\frac{3}{\pi n(2n^2+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t\omega_1(4t)\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt<\frac{1}{2n^3}\left\{\int_0^{\frac{1}{n}}+\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}+\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}}\right\}<$$

$$<\frac{1}{n^3}\left\{n^4\int_0^{\frac{1}{n}} t\omega_1(2t)dt+\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\frac{\omega_1(2t)}{t^3}dt+\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\infty}\frac{\omega_1(2t)}{t^3}dt\right\}<\frac{\varepsilon}{n}$$

for $n>n_0(\varepsilon)$. Q. e. d.

2. Let now $f(x)$ be continuously derivable in $[-1,+1]$ and

$$(5.2.1) \qquad \varphi(\vartheta)=f(\cos\vartheta).$$

Let $\omega(\delta)$ be the continuity modul of $f'(x)$ for $-1\leqq x\leqq+1$ with existing

$$\int_0 \frac{\omega(v)}{v}dv.$$

If $\max\limits_{-1\leqq x\leqq+1}|f'(x)|=M$, then

$$\omega_1(\delta)=\max_{|\vartheta''-\vartheta'|\leqq\delta}\left|\left(\frac{df(\cos u)}{du}\right)_{u=\vartheta''}-\left(\frac{df(\cos u)}{du}\right)_{u=\vartheta'}\right|=$$

$$=\max_{|\vartheta''-\vartheta'|\leqq\delta}\left|\left(\frac{df(x)}{dx}\sqrt{1-x^2}\right)_{x=\cos\vartheta'}-\left(\frac{df(x)}{dx}\sqrt{1-x^2}\right)_{x=\cos\vartheta''}\right|\leqq\omega(\delta)+M\delta,$$

i. e. the integral

$$(5.2.2) \qquad \int_0 \frac{\omega_1(v)}{v}dv$$

exists too.

We consider the polynomials $J_n(\vartheta,\varphi)$ belonging to $\varphi(\vartheta)=f(\cos\vartheta)$. Since $\varphi(\vartheta)$ is now even, $J_n(\vartheta,\varphi)$ is a pure cosine polynomial of order

$(2n-2)$, i. e.

$$J_n(\arccos x, \varphi) = \pi_{2n-2}(x)$$

is a rational polynomial of degree $(2n-2)$ and

$$\pi_{2n-2}(x) = \frac{3}{\pi n(2n^2+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\varphi(\arccos x + 2t) + \tag{5.2.3}$$
$$+ \varphi(\arccos x - 2t)\} \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt.$$

Lemma 5.1 gives for $-1 \leqq x \leqq +1$, arbitrary small $\varepsilon > 0$ and $n > n_1(\varepsilon)$

$$|\pi_{2n-2}(x) - f(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{n}. \tag{5.2.4}$$

Differentiating (5.2.3) *one*-times according to x we get

$$\pi'_{2n-2}(x) = -\frac{3}{\pi n(2n^2+1)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \left(\frac{d\varphi(u)}{du}\right)_{u=\arccos x+2t} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{d\varphi(u)}{du}\right)_{u=\arccos x-2t} \right\} \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt$$

or using the alternative form (5.1.1)

$$\pi'_{2n-2}(x) = -\frac{3}{2\pi n(2n^2+1)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt} \left(\frac{\sin n \frac{t-\arccos x}{2}}{\sin \frac{t-\arccos x}{2}} \right)^4 dt.$$

Differentiating once more *on the last form* we get

$$\pi''_{2n-2}(x) = \frac{-3}{2\pi n(2n^2+1)} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt} \left(\frac{\sin n \frac{t-\vartheta}{2}}{\sin \frac{t-\vartheta}{2}} \right)^4 dt +$$
$$+ \frac{3}{\pi n(2n^2+1)} \frac{1}{1-x^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt} \left(\frac{\sin n \frac{t-\vartheta}{2}}{\sin \frac{t-\vartheta}{2}} \right)^3 \cdot$$
$$\cdot \frac{n \sin \frac{t-\vartheta}{2} \cos n \frac{t-\vartheta}{2} - \sin n \frac{t-\vartheta}{2} \cos \frac{t-\vartheta}{2}}{\sin^2 \frac{t-\vartheta}{2}} dt.$$

Returning to the form (5. 1. 2) this gives

$$\pi_{2n-2}'(x) = -\frac{3}{\pi n(2n^2+1)} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{d\varphi(u)}{du} \right)_{u=\vartheta+2t} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{d\varphi(u)}{du} \right)_{u=\vartheta-2t} \right] \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^4 dt + \frac{6}{\pi n(2n^2+1)} \frac{1}{1-x^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \left(\frac{d\varphi(u)}{du} \right)_{u=\vartheta+2t} - \right.$$

(5. 2. 5)

$$\left. - \left(\frac{d\varphi(u)}{du} \right)_{u=\vartheta-2t} \right\} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^3 n \frac{\cos nt}{\sin t} dt - \frac{6}{\pi n(2n^2+1)} \frac{1}{1-x^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \left(\frac{d\varphi(u)}{du} \right)_{u=\vartheta+2t} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{d\varphi(u)}{du} \right)_{u=\vartheta-2t} \right\} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^4 \operatorname{ctg} t dt \equiv u_1(x) + u_2(x) + u_3(x).$$

With the aid of this representation of $\pi_{2n-2}'(x)$ we can easily prove

LEMMA 5. 2. *For* $-1 < x < +1$ *we have for* $n > n_2(\varepsilon)$ *for the* $\pi_{2n-2}(x)$, *defined in* (5. 2. 3) *the estimation*

$$|\pi_{2n-2}'(x)| \leqq \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} \max_{\vartheta} \left| \frac{df(\cos\vartheta)}{d\vartheta} \right| + \frac{\varepsilon n}{1-x^2}.$$

PROOF. Denoting

$$\max_{\vartheta} \left| \frac{df(\cos\vartheta)}{d\vartheta} \right| = M_1$$

we have from (5. 2. 5) and (5. 1. 3)

$$(5.\,2.\,6)\quad |u_1(x)| \leqq M_1 \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} \frac{6}{\pi n(2n^2+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^4 dt = M_1 \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

For the estimation of $u_2(x)$ and $u_3(x)$ we write

$$u_2(x) = \frac{6}{\pi(2n^2+1)} \frac{1}{1-x^2} \left[\int_0^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} + \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}} \right\} \left(\frac{d\varphi(u)}{du} \right)_{u=\vartheta+2t} -$$

(5. 2. 7)

$$\left. - \left(\frac{d\varphi(u)}{du} \right)_{u=\vartheta-2t} \right\} \frac{\cos nt}{\sin t} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^3 dt \Bigg] = \frac{6}{\pi(2n^2+1)} \frac{1}{1-x^2} [I_1 + I_2 + I_3].$$

and

$$u_3(x) = -\frac{6}{\pi n(2n^2+1)}\frac{1}{1-x^2}\Bigg[\int_0^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} + \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}}\Bigg]\Bigg\{\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\right)_{u=\vartheta+2t} - \tag{5.2.8}$$

$$-\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\right)_{u=\vartheta-2t}\Bigg\}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 \operatorname{ctg} t\,dt\Bigg] \equiv -\frac{6}{\pi n(2n^2+1)}\frac{1}{1-x^2}[I_4+I_5+I_6],$$

respectively. For I_1 we have owing to (5.1.6), (1.2.3) and (5.2.2) for $n > n_3(\varepsilon)$

$$|I_1| \leqq \frac{6}{\pi(2n^2+1)}\frac{1}{1-x^2}\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\omega_1(2t)}{t} n^3 dt < \frac{\varepsilon n}{1-x^2}.$$

The same holds for I_4. For I_2 we have for $n > n_4(\varepsilon)$

$$|I_2| \leqq \frac{c_8}{n^2(1-x^2)}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{\omega_1(2t)}{t^4} dt < \frac{\varepsilon n}{1-x^2}.$$

The same holds for I_5. For I_3 we have for $n > n_5(\varepsilon)$

$$|I_3| \leqq \frac{c_9 M_1}{n^2(1-x^2)}\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\infty} \frac{dt}{t^4} < \frac{\varepsilon n}{1-x^2}.$$

The same holds for I_6. This proves Lemma 5.2.

Lemma 5.2 gives no information for $x = \pm 1$. This is given by

LEMMA 5.3. *We have for the* $\pi_{2n-2}(x)$ *defined in* (5.2.3) *the estimation*

$$|\pi''_{2n-2}(\pm 1)| \leqq c_{10} n^3.$$

PROOF. If $2^k \leqq 2n-2 < 2^{k+1}$, we write

$$\pi_{2n-2}(x) = (\pi_{2n-2}(x) - \pi_{2^k}(x)) + \sum_{j=0}^{k-1}(\pi_{2^{j+1}}(x) - \pi_{2^j}(x)) + \pi_1(x). \tag{5.2.9}$$

For $-1 \leqq x \leqq +1$ and from (5.2.4) we get roughly

$$|\pi_{2^{j+1}}(x) - \pi_{2^j}(x)| \leqq |\pi_{2^{j+1}}(x) - f(x)| + |\pi_{2^j}(x) - f(x)| \leqq \frac{c_{11}}{2^j}$$

and similarly for $|\pi_{2n-2}(x)-\pi_{2^k}(x)|$. Thus MARKOV's inequality gives

$$|\pi''_{2^{j+1}}(x)-\pi''_{2^j}(x)|\leqq c_{12}2^{3j}$$

and similarly for $|\pi''_{2n-2}(x)-\pi''_{2^k}(x)|$. Thus we get

$$|\pi''_{2n-2}(x)|\leqq c_{13}n^3+\sum_{j=0}^{k-1}c_{12}\cdot 2^{3j}<c_{10}n^3.$$

§ 6. The proof of Theorem I

1. The previous lemmas lead quickly to the proof of Theorem I. For the polynomial $\pi_{2n-2}(x)$ in (5. 2. 3) we have owing to (2. 2. 7)

$$\pi_{2n-2}(x)\equiv\sum_{\nu=1}^{n}\pi_{2n-2}(x_{\nu n})r_{\nu n}(x)+\sum_{\nu=1}^{n}\pi''_{2n-2}(x_{\nu n})\varrho_{\nu n}(x). \tag{6. 1. 1}$$

Hence owing to this, (1. 2. 2) and (1. 2. 4) we have for $n>n_6(\varepsilon)$

$$\begin{aligned}|f(x)-R_n(x,f)|&\leqq|f(x)-\pi_{2n-2}(x)|+\Bigl|\sum_{\nu=1}^{n}(\pi_{2n-2}(x_{\nu n})-f(x_{\nu n}))r_{\nu n}(x)+\\&+\sum_{\nu=1}^{n}(\pi''_{2n-2}(x_{\nu n})-\beta_{\nu n})\varrho_{\nu n}(x)\Bigr|\leqq|f(x)-\pi_{2n-2}(x)|+\\&+\sum_{\nu=1}^{n}|r_{\nu n}(x)|\max_{-1\leqq u\leqq+1}|f(u)-\pi_{2n-2}(u)|+\varepsilon n\sum_{\nu=1}^{n}|\varrho_{\nu n}(x)|+\\&+\sum_{\nu=1}^{\nu}|\pi''_{2n-2}(x_{\nu n})||\varrho_{\nu n}(x)|.\end{aligned} \tag{6. 1. 2}$$

Using Lemma 5. 1 and Lemma 4. 3 the first two terms tend to 0 uniformly for $-1\leqq x\leqq+1$; so does the third term owing to Lemma 3. 2. To estimate the last sum in (6. 1. 2)

$$\sum_{\nu=1}^{n}|\pi''_{2n-2}(x_{\nu n})||\varrho_{\nu n}(x)|\equiv S$$

we write owing to (1. 2. 1)

$$S=|\pi''_{2n-2}(1)||\varrho_{1n}(x)|+|\pi''_{2n-2}(-1)||\varrho_{nn}(x)|+\sum_{\nu=2}^{n-1}|\pi''_{2n-2}(x_{\nu n})||\varrho_{\nu n}(x)|. \tag{6. 1. 3}$$

Lemma 5. 3 and (3. 1. 1) obviously give for the first two terms in (6. 1. 3) the upper bound $c_{14}n^{-\frac{1}{2}}$. In order to estimate the critical sum

$$S_1=\sum_{\nu=2}^{n-1}|\pi''_{2n-2}(x_{\nu n})||\varrho_{\nu n}(x)|$$

we use Lemma 5. 2 and Lemma 3. 1. These give

$$S_1 \leqq c_{15} \sum_{\nu=2}^{n-1} \left\{ \frac{M_1}{(1-x_{\nu n}^2)^{3/2}} + \frac{\varepsilon n}{1-x_{\nu n}^2} \right\} \left\{ \frac{|l_{\nu n}(x)|(1-x_{\nu n}^2)\sqrt{\nu}}{n^2} + \frac{\nu^{3/2}}{n^{7/2}} \right\} =$$

(6. 1. 4)
$$= c_{15} \sum_{\nu=2}^{n-1} \left\{ \frac{M_1}{(1-x_{\nu n}^2)^{1/2}} + \varepsilon n \right\} \frac{|l_{\nu n}(x)|\sqrt{\nu}}{n^2} +$$

$$+ c_{15} \sum_{\nu=2}^{n-1} \frac{\nu^{3/2}}{n^{7/2}} \left\{ \frac{M_1}{(1-x_{\nu n}^2)^{3/2}} + \frac{\varepsilon n}{1-x_{\nu n}^2} \right\} \equiv S_1' + S_1'' + S_1''' + S_1''''.$$

The "heaviest" terms are the sums

$$S_1'' = \varepsilon n \sum_{\nu=2}^{n-1} \frac{|l_{\nu n}(x)|\sqrt{\nu}}{n^2} = \frac{\varepsilon}{n} \sum_{\nu=2}^{n-1} \sqrt{\nu}\,|l_{\nu n}(x)|$$

and

$$S_1'''' = \frac{\varepsilon}{n^{5/2}} \sum_{\nu=2}^{n-1} \frac{\nu^{3/2}}{1-x_{\nu n}^2}.$$

For S_1'' SCHWARZ's inequality gives owing to (2. 3. 10)

(6. 1. 5)
$$S_1'' \leqq \frac{\varepsilon}{n} \left(\sum_{\nu=1}^{n} l_{\nu n}(x)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{\nu=1}^{n} \nu \right)^{1/2} < c_{16}\varepsilon$$

and for S_1'''' oving to (2. 4. 8)

(6. 1. 6)
$$S_1'''' < \frac{c_{17}\varepsilon}{n^{5/2}} \sum_{2 \leqq \nu \leqq n-1} \frac{n^2}{\sqrt{\nu}} < c_{18}\varepsilon.$$

For the remaining two sums

$$S_1' = \frac{M_1}{n^2} \sum_{\nu=2}^{n-1} \frac{\sqrt{\nu}\,|l_{\nu n}(x)|}{(1-x_{\nu n}^2)^{1/2}}, \quad S_1''' = \frac{M_1}{n^{7/2}} \sum_{\nu=2}^{n-1} \frac{\nu^{3/2}}{(1-x_{\nu n}^2)^{3/2}}$$

we have owing to (2. 4. 8)

(6. 1. 7)
$$S_1' < \frac{c_{19} M_1}{n} \sum_{\nu=2}^{n-1} \frac{|l_{\nu n}(x)|}{\sqrt{\nu}} < \frac{c_{20} M_1 \log n}{n}$$

and

(6. 1. 8)
$$S_1''' < \frac{c_{21} M_1}{\sqrt{n}} \sum_{\nu=2}^{n-1} \nu^{-\frac{3}{2}} < \frac{c_{22} M_1}{\sqrt{n}}.$$

(6. 1. 2), (6. 1. 4), (6. 1. 5), (6. 1. 6), (6. 1. 7) and (6. 1. 8) complete the proof of Theorem I.

(Received 6 February 1958)

ON MIXING SEQUENCES OF SETS

By

A. RÉNYI (Budapest), member of the Academy

Introduction

Let $[\Omega, \mathcal{A}, \mu]$ be a measure space. By other words, let Ω be an arbitrary abstract set, $\mathcal{A}$ a σ-algebra of subsets of Ω and $\mu(A)$ $(A \in \mathcal{A})$ a measure defined in Ω and on $\mathcal{A}$. We shall denote the elements of $\mathcal{A}$ by capital letters $A, B, C, \ldots$. The elements of Ω will be denoted by ω. We denote by $A+B$ the union and by AB the intersection of the sets A and B.

We shall call a sequence A_n $(n=0, 1, \ldots)$ of measurable sets *strongly mixing with density* α if for any $B \in \mathcal{A}$, such that $\mu(B) < +\infty$, we have

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n B) = \alpha\mu(B) \tag{1}$$

where $0 < \alpha < 1$ and the value of α does not depend on B.

Evidently, in the case when $\mu(\Omega) < +\infty$, we have, choosing in (1) $B=\Omega$,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \alpha\mu(\Omega). \tag{2}$$

Thus if $\mu(\Omega) < +\infty$, (1) can also be written in the form

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n B) = \frac{\mu(B)}{\mu(\Omega)} \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \tag{3}$$

The term "strongly mixing" has been chosen in accordance with the well-known definition of a strongly mixing measure preserving transformation of a measure space in ergodic theory (see [1], [2]). As a matter of fact, if T is a measurable transformation of the measure space $[\Omega, \mathcal{A}, \mu]$ preserving the measure μ and $\mu(\Omega) < +\infty$, then T is called strongly mixing if for any $A \in \mathcal{A}$ and $B \in \mathcal{A}$ we have

$$\lim_{n\to\infty} \mu(T^{-n} A \cdot B) = \frac{\mu(A)\mu(B)}{\mu(\Omega)}. \tag{4}$$

Taking into account that in this case $\mu(T^{-n}A) = \mu(A)$ $(n=0, 1, \ldots)$ and using the terminology introduced above, we may say that the measure preserving transformation T is strongly mixing if and only if for any $A \in \mathcal{A}$ the sequence $A_n = T^{-n}A$ $(n=0, 1, \ldots)$ is strongly mixing with density $\dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$.

This is, however, a very special way of obtaining strongly mixing sequences of sets, as will be seen from the examples given below.

The notion of strongly mixing sequences of sets is especially important in probability theory. In the present paper we shall mostly deal with these applications, and therefore we suppose in general that the measure space considered is a probability space, i. e. $\mu(\Omega)=1$. To avoid misunderstandings we shall denote probability measures by $\mathbf{P}$ (or $\mathbf{Q}$). If $[\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}]$ is a probability space, then, as usual, the elements of $\mathcal{A}$ will be called *events*. Thus a sequence A_n $(n=0, 1, \ldots)$ of events will be called strongly mixing with density α if for any event $B \in \mathcal{A}$ we have

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n B) = \alpha \mathbf{P}(B) \tag{5}$$

where $0<\alpha<1$. As (5) is trivially satisfied (with every value of α) for any sequence A_n of events if the event B has probability 0, it suffices to suppose that (5) holds if $\mathbf{P}(B)>0$. By using the usual notation $\mathbf{P}(A|B)$ for the conditional probability of the event A with respect to the event B, defined in the case $\mathbf{P}(B)>0$ by

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}, \tag{6}$$

we may write (5) in the following equivalent form:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n|B) = \alpha \tag{5*}$$

for every event B for which $\mathbf{P}(B)>0$. Thus *a sequence A_n $(n=0, 1, \ldots)$ of events is strongly mixing with density α $(0<\alpha<1)$ if* (5*) *is satisfied for every B which has a positive probability.*

It is easy to show that the following theorem[1] holds:

THEOREM 1. *If $[\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}]$ is a probability space and the sequence A_n $(n=0, 1, \ldots)$ of events is strongly mixing with density α, then*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{Q}(A_n) = \alpha \tag{7}$$

holds for any probability measure $\mathbf{Q}$ in Ω and on $\mathcal{A}$ which is absolutely continuous with respect to the measure $\mathbf{P}$.

PROOF. By the Radon—Nikodym theorem there exists a non-negative and measurable function $\chi(\omega)$ on Ω which is integrable with respect to the

[1] This theorem is, of course, known. (It has been used e. g. implicitly in [3].) We state it here for the sake of reference, as we did not find it explicitly formulated in the literature. For the same reason we sketch its simple proof.

measure $\mathbf{P}$ and is such that for any $A \in \mathcal{A}$ we have

$$\mathbf{Q}(A) = \int_A \chi(\omega)\, d\mathbf{P}. \tag{8}$$

Clearly, (7) holds if $\chi(\omega)$ is a step function (i. e. if $\chi(\omega)$ takes on only a finite number of different values). As to any integrable χ and any $\varepsilon > 0$ there can be found a step function χ_1 such that $\int |\chi(\omega) - \chi_1(\omega)|\, d\mathbf{P} < \varepsilon$, it follows easily that (7) holds in the general case too.

Thus Theorem 1 is proved.

In § 1 of the present paper we shall give the following necessary and sufficient condition for a sequence of events being strongly mixing:

THEOREM 2. *The sequence A_n of events, such that $A_0 = \Omega$ and $\mathbf{P}(A_n) > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$,*[2] *is strongly mixing with density α if (and only if)*

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(A_n | A_k) = \alpha \tag{9}$$

for $k = 0, 1, \ldots$ where $0 < \alpha < 1$ and α does not depend on k.

Thus the strongly mixing property of the sequence A_n depends on the relative positions of the sets A_n only.

Theorem 2 will be proved in § 1 by means of Lemma 1, relating to sequences of elements of an arbitrary Hilbert space.

Theorem 2 is fairly general and when applied to different types of sequences of events, leads to some interesting special cases. One of these is the following:

THEOREM 4. *Let $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ be a sequence of independent random variables on the probability space $[\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}]$ and let us suppose that there can be found a sequence C_n of real numbers and another sequence D_n of positive numbers such that $\lim_{n \to \infty} D_n = +\infty$, further a distribution function $F(x)$ such that putting $\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ we have*

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\left(\frac{\zeta_n - C_n}{D_n} < x \right) = F(x) \tag{10}$$

for every real x which is a point of continuity of the distribution function $F(x)$. Let $\mathbf{Q}$ be an arbitrary probability measure in Ω and on $\mathcal{A}$ which is

[2] The supposition $\mathbf{P}(A_n) > 0$ for every $n \geqq 1$ is made only to make a simple formulation of our result possible; it is not an essential restriction. As a matter of fact, according to the definition, in a strongly mixing sequence of events there can occur only a finite number of events having the probability 0, and these may be omitted as the strongly mixing character of a sequence of events is not influenced by the change of a finite number of elements of the sequence. The condition $A_0 = \Omega$ is not a restriction either; it has been supposed only to include the condition $\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(A_n) = \alpha$ into (9).

absolutely continuous with respect to **P**. *Then we have*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{Q}\left(\frac{\zeta_n - C_n}{D_n} < x\right) = F(x) \tag{11}$$

in every point of continuity x *of* $F(x)$.

Thus the fact that the distribution of $\frac{\zeta_n - C_n}{D_n}$ tends to a limiting distribution as well as this limiting distribution itself, are invariant against the change of the underlying probability measure, provided that this measure **P** is replaced by a probability measure **Q** which is absolutely continuous with respect to **P**.

Note that with respect to the measure **Q** the random variables ξ_n are, in general, not independent. Thus Theorem 3 may be considered as a result extending the validity of the limit theorems of probability theory, valid for independent random variables, to certain sequences of "almost independent" random variables.

The first result of the type of Theorem 4 has been given by the author of the present paper in [3] where there were two restrictions: it has been supposed that the random variables ξ_n have discrete distributions and that the probability space $[\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}]$ is isomorphic to the probability space for which Ω is the interval (0, 1) and **P** the ordinary Lebesgue measure. In a subsequent paper [4] A. N. KOLMOGOROV has proved a more general result. He dropped the supposition that the variables ξ_n are discrete, and concerning the probability space he supposed that the measure **P** is perfect (for the definition of perfect measures see [5]). Theorem 4 does not contain any restriction concerning the probability space, thus it is more general than the result of KOLMOGOROV mentioned above. It has been pointed out by E. MARCZEWSKI (oral communication) that Theorem 4 can be deduced also from certain results of E. SPARRE-ANDERSEN and B. JESSEN [6]. P. RÉVÉSZ (oral communication) has shown that Theorem 3 can be proved also by using certain limit theorems of J. L. DOOB on martingales [7]. However, the proof given in § 2 of the present paper, which shows that Theorem 4 is a special case of Theorem 2, is in some sense the most natural approach. As a matter of fact, Theorem 2 is a source of a large number of similar results which can not all be obtained by the other methods mentioned. We can obtain e. g. by means of Theorem 2 results similar to Theorem 4 for general Markov chains instead of the special Markov chains formed by partial sums of independent random variables.[3]

[3] This question will be discussed in a forthcoming joint paper of P. RÉVÉSZ and the author.

Theorem 2 when applied to ergodic theory leads to a criterion (Theorem 3) for a measure preserving transformation defined on the measure space $[\Omega, \mathcal{A}, \mu]$ being strongly mixing.

In § 3 we consider weakly mixing sequences of sets and events, respectively, and obtain similar results as in the case of strong mixing.

My thanks are due to Mr. P. RÉVÉSZ for his valuable remarks which I utilized in preparing the present paper.

§ 1. A criterion for the strongly mixing property of a sequence of events

Let $\mathcal{H}$ be an arbitrary Hilbert space. We denote the elements of $\mathcal{H}$ by small letters (e. g. f, g). The inner product of the elements f and g will be denoted by (f, g) and the norm $(f, f)^{1/2}$ of f by $\|f\|$. We first prove the following

LEMMA 1. *Let f_n $(n=0, 1, \ldots)$ be a sequence of elements of a Hilbert space $\mathcal{H}$. Let us suppose that*

$$\|f_n\| \leqq K \qquad (n=0, 1, \ldots) \tag{1.1}$$

where K is a positive constant not depending on n. Let us suppose further that for any $k=0, 1, \ldots$ we have

$$\lim_{n\to\infty} (f_k, f_n) = 0. \tag{1.2}$$

Then for any $g \in \mathcal{H}$ we have

$$\lim_{n\to\infty} (g, f_n) = 0. \tag{1.3}$$

PROOF. Let us denote by $\mathcal{H}_1$ the least subspace of $\mathcal{H}$ which contains the elements $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$. Clearly, (1. 3) holds if g is a finite linear combination of the elements $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$, i. e. if $g = \sum_{k=1}^{n} c_k f_k$. It follows that (1. 3) holds also if g is an arbitrary element of $\mathcal{H}_1$, because in this case for any $\varepsilon > 0$ there exists a finite linear combination $g_1 = \sum_{k=1}^{n} c_k f_k$ such that $\|g - g_1\| < \varepsilon$ which implies that

$$|(g, f_n) - (g_1, f_n)| \leqq K\varepsilon \tag{1.4}$$

and thus

$$\limsup_{n\to\infty} |(g, f_n)| \leqq K\varepsilon. \tag{1.5}$$

As $\varepsilon > 0$ is arbitrary, (1. 5) implies (1. 3). Now, let $\mathcal{H}_2$ denote the set of those elements of $\mathcal{H}$ which are orthogonal to every element of the sequence

f_n. Clearly, (1. 3) holds if $g \in \mathcal{H}_2$. As by a well-known theorem (see [8], p. 8) every $g \in \mathcal{H}$ can be represented in the form $g = g_1 + g_2$ where $g_1 \in \mathcal{H}_1$ and $g_2 \in \mathcal{H}_2$, it follows[4] that (1. 3) holds for any $g \in \mathcal{H}$. Thus our lemma is proved.[5]

It should be mentioned that our lemma contains as a special case the well-known fact that if $\{f_n\}$ is an orthonormal system, the Fourier coefficients (g, f_n) of an arbitrary $g \in \mathcal{H}$ are tending to 0 for $n \to \infty$. This fact is usually proved by means of BESSEL's inequality which gives, of course, much more. The corresponding stronger result under the supposition (1. 2) will be given in a forthcoming paper.

We now deduce from our lemma

THEOREM 2. *Let* $[\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}]$ *be a probability space. Let* A_n $(n = 0, 1, \ldots)$ *be a sequence of events such that* $A_0 = \Omega$ *and* $\mathbf{P}(A_n) > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. *The sequence* A_n *of events is strongly mixing with density* α $(0 < \alpha < 1)$ *if (and only if)*

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(A_n \mid A_k) = \alpha \tag{1. 6}$$

for $k = 0, 1, \ldots$.

PROOF OF THEOREM 2. Let $\mathcal{H}$ denote the Hilbert space of all real random variables $\xi = \xi(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ such that $\int_\Omega \xi^2 \, d\mathbf{P}$ exists. Let us define the inner product by $(\xi, \eta) = \int_\Omega \xi \eta \, d\mathbf{P}$ and, correspondingly, the norm by $\|\xi\| = \left(\int_\Omega \xi^2 \, d\mathbf{P}\right)^{1/2}$.

Let the random variables $\alpha_n = \alpha_n(\omega)$ be defined as follows:

$$\alpha_n(\omega) = \begin{cases} 1 - \alpha & \text{if } \omega \in A_n, \\ -\alpha & \text{if } \omega \in \bar{A}_n \end{cases} \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Then we have

$$(\alpha_k, \alpha_n) = \mathbf{P}(A_k A_n) - \alpha \mathbf{P}(A_k) - \alpha \mathbf{P}(A_n) + \alpha^2. \tag{1. 7}$$

As $A_0 = \Omega$, it follows from (1. 6) that

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(A_n) = \alpha. \tag{1. 8}$$

Further it follows from (1. 6) that

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(A_n A_k) = \alpha \mathbf{P}(A_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{1. 9}$$

[4] B. SZ.-NAGY kindly called my attention to the fact that the idea of the above proof of our lemma is the same as that of the standard proof of the theorem (see e. g. [8], p. 10) that if f_n is an arbitrary sequence of elements of $\mathcal{H}$ such that $\|f_n\|$ is bounded, then there exists a subsequence of the sequence f_n which converges weakly to an element f of $\mathcal{H}$.

[5] Another proof of Lemma 1 has been found independently by P. RÉVÉSZ.

From (1. 7), (1. 8) and (1. 9) we obtain

(1. 10) $$\lim_{n\to\infty} (\alpha_k, \alpha_n) = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Taking into account that

(1. 11) $$\|\alpha_n\|^2 = (1-\alpha)^2 \mathbf{P}(A_n) + \alpha^2(1-\mathbf{P}(A_n)) \leqq 1,$$

we see that the sequence α_n satisfies the conditions of Lemma 1. Thus we have for any $g \in \mathcal{H}$

(1. 12) $$\lim_{n\to\infty} (g, \alpha_n) = 0.$$

Choosing for $g = g(\omega)$ the random variable defined by

(1. 13) $$g(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \omega \in B, \\ 0 & \text{if} \quad \omega \bar{\in} B, \end{cases}$$

we have

(1. 14) $$(g, \alpha_n) = \mathbf{P}(A_n B) - \alpha \mathbf{P}(B)$$

and thus by virtue of (1. 12) we obtain, provided that $\mathbf{P}(B) > 0$,

(1. 15) $$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n | B) = \alpha.$$

Thus Theorem 2 is proved.

By combining Theorem 2 with Theorem 1 it follows[6] that if $\mathbf{Q}$ is any probability measure in Ω and on $\mathcal{A}$ which is absolutely continuous with respect to $\mathbf{P}$, and A_n satisfies the conditions of Theorem 2, then we have

(1. 16) $$\lim_{n\to\infty} \mathbf{Q}(A_n) = \alpha.$$

Let us now consider the application of Theorem 2 to ergodic theory. Let $[\Omega, \mathcal{A}, \mu]$ be a measure space and suppose that $\mu(\Omega) < +\infty$. A measure preserving (not necessarily one-to-one) transformation T of this space is called strongly mixing if, denoting by $T^{-1}A$ the inverse image of the set A (i. e. the set of those $\omega \in \Omega$ for which $T\omega \in A$) and defining $T^{-n}A$ by the recursion $T^{-n}A = T^{-(n-1)}(T^{-1}A)$ $(n = 2, 3, \ldots)$, we have for any $A \in \mathcal{A}$ and $B \in \mathcal{A}$

(1. 17) $$\lim_{n\to\infty} \mu(T^{-n}A \cdot B) = \frac{\mu(A)\mu(B)}{\mu(\Omega)}.$$

[6] It should be mentioned that (1.16) could be deduced directly from the above proof of Theorem 2 without making use of Theorem 1. As a matter of fact, let $\chi = \chi(\omega)$ be a function, the existence of which is ensured by the Radon—Nikodym theorem, such that

$$\mathbf{Q}(A) = \int_A \chi(\omega)\, d\mathbf{P} \quad \text{for} \quad A \in \mathcal{A}.$$

If χ belongs to $\mathcal{H}$, i. e. if $\int_\Omega \chi^2 d\mathbf{P}$ exists, then applying (1. 12) to this function χ we directly obtain (1. 16). The general case follows by remarking that to any integrable random variable χ and any $\varepsilon > 0$ there can be found a $\chi_1 \in \mathcal{H}$ such that $\int |\chi - \chi_1| d\mathbf{P} < \varepsilon$.

Applying Theorem 2 to the sequence $A_n = T^{-n}A$ of sets of the probability space $[\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}]$ where $\mathbf{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$ and taking into account that by virtue of the supposed measure preserving property of the transformation T

$$\mu(T^{-n}A \cdot T^{-k}A) = \mu(T^{-k}(T^{-(n-k)}A \cdot A)) = \mu(T^{-(n-k)}A \cdot A) \tag{1.18}$$

for $n \geqq k$, we obtain the following

THEOREM 3. *Let $[\Omega, \mathfrak{A}, \mu]$ be a measure space, $\mu(\Omega) < +\infty$ and T a measure preserving transformation of Ω onto itself. A necessary and sufficient condition for T being strongly mixing (i. e. for the validity of* (1. 17)*) is that for any $A \in \mathfrak{A}$ with $\mu(A) > 0$ we should have*

$$\lim_{n \to \infty} \mu(T^{-n}A \cdot A) = \frac{\mu^2(A)}{\mu(\Omega)}. \tag{1.19}$$

By other words, if (1. 17) is valid for $B = A$, it is always valid.

§ 2. The invariance of the limiting distribution of sums of independent random variables

In this § we prove

THEOREM 4. *Let $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ be a sequence of independent random variables defined on the probability space $[\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}]$. Let us suppose that there can be found a sequence C_n of real numbers and another sequence D_n of positive numbers for which $\lim_{n\to\infty} D_n = +\infty$, further a distribution function $F(x)$ such that putting $\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$ we have*

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\left(\frac{\zeta_n - C_n}{D_n} < x\right) = F(x) \tag{2.1}$$

in every point of continuity x of the distribution function $F(x)$. Let $\mathbf{Q}$ be an arbitrary measure in Ω and on $\mathfrak{A}$ which is absolutely continuous with respect to $\mathbf{P}$. Then we have

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{Q}\left(\frac{\zeta_n - C_n}{D_n} < x\right) = F(x) \tag{2.2}$$

if x is any point of continuity of $F(x)$.

PROOF OF THEOREM 4. Let x be a point of continuity of $F(x)$ and $F(x) > 0$. Clearly, it suffices to consider such values of x. In this case evidently $\mathbf{P}\left(\frac{\zeta_n - C_n}{D_n} < x\right) > 0$ for $n > n_0$. Let us put $A_0 = \Omega$ and denote by A_n the event that the inequality $\frac{\zeta_{n+n_0} - C_{n+n_0}}{D_{n+n_0}} < x$ takes place $(n = 1, 2, \ldots)$.

According to Theorems 1 and 2, if we show that condition (1. 6) is fulfilled for these events, (2. 2) follows. Let us put $\zeta_n^* = \frac{\zeta_n - C_n}{D_n}$. Thus it suffices to prove that

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\zeta_n^* < x \mid \zeta_k^* < x) = F(x) \tag{2. 3}$$

for any $k > n_0$.

Now we need the following simple lemma (see e. g. [9], p. 254):

LEMMA 2. *If ϑ_n and ε_n are random variables such that $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\vartheta_n < x) = F(x)$ in every point of continuity x of the distribution function $F(x)$, and $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|\varepsilon_n| \geqq \delta) = 0$ for any $\delta > 0$, then we have $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\vartheta_n + \varepsilon_n < x) = F(x)$ in any point of continuity of $F(x)$.*

Applying Lemma 2 to $\vartheta_n = \zeta_n^*$ and $\varepsilon_n = -\frac{\zeta_k}{D_n}$, it follows from (2. 1) that

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\zeta_n^* - \frac{\zeta_k}{D_n} < x\right) = F(x). \tag{2. 4}$$

As $\zeta_n^* - \frac{\zeta_k}{D_n} = \frac{\zeta_n - \zeta_k - C_n}{D_n}$ is independent of ζ_k^*, we have

$$\mathbf{P}\left(\zeta_n^* - \frac{\zeta_k}{D_n} < x \,\middle|\, \zeta_k^* < x\right) = \mathbf{P}\left(\zeta_n^* - \frac{\zeta_k}{D_n} < x\right) \tag{2. 5}$$

and thus from (2. 4)

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\zeta_n^* - \frac{\zeta_k}{D_n} < x \,\middle|\, \zeta_k^* < x\right) = F(x). \tag{2. 6}$$

Applying again Lemma 2 to the random variables $\vartheta_n = \zeta_n^* - \frac{\zeta_k}{D_n}$ and $\varepsilon_n = \frac{\zeta_k}{D_n}$ on the probability space $[\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}']$ where $\mathbf{P}'(A) = \mathbf{P}(A \mid \zeta_k^* < x)$, we obtain (2. 3). Thus Theorem 3 is proved.

Let us call a sequence η_n $(n = 1, 2, \ldots)$ of random variables *a mixing sequence with the limiting distribution function* $F(x)$ if for every $B \in \mathcal{A}$ with $\mathbf{P}(B) > 0$ and for every real x which is a point of continuity of $F(x)$ we have

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\eta_n < x \mid B) = F(x). \tag{2. 7}$$

The assertion of Theorem 3 can be expressed by saying that if the random variables ξ_n are independent and putting $\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$ the random variables $\zeta_n^* = \frac{\zeta_n - C_n}{D_n}$, where $D_n \to \infty$, have the limiting distribution function $F(x)$, then ζ_n^* *is a mixing sequence of random variables with the limiting distribution function* $F(x)$.

Mixing sequences of random variables have remarkable properties. For instance, if η_n is a mixing sequence of random variables, then η_n is in the limit independent of any random variable ϑ. As a matter of fact, if $\mathbf{P}(\vartheta < y) > 0$, we have

$$(2.8)\quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\eta_n < x, \vartheta < y) = \mathbf{P}(\vartheta < y) \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\eta_n < x \mid \vartheta < y) = \mathbf{P}(\vartheta < y) F(x).$$

Thus we obtain the following consequence of Theorem 4:

COROLLARY 1. *If the random variables ξ_n are independent, $\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$, and there can be found sequences of real numbers C_n and $D_n > 0$ such that $D_n \to +\infty$ and $\zeta_n^* = \frac{\zeta_n - C_n}{D_n}$ has the limiting distribution $F(x)$, then ζ_n^* is in the limit independent of any random variable.*

Another interesting property of mixing sequences of random variables with a non-degenerate limiting distribution is that they can not be stochastically convergent to some random variable. As a matter of fact, let us suppose in contrary to our statement that η_n is a mixing sequence of random variables with the non-degenerate limiting distribution $F(x)$, and that η_n tends stochastically to the random variable η_∞, i. e. for any $\delta > 0$ we have

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|\eta_n - \eta_\infty| \geqq \delta) = 0.$$

Then evidently by Lemma 2

$$(2.9)\qquad \mathbf{P}(\eta_\infty < x) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\eta_n < x) = F(x),$$

further by Theorem 4 and Lemma 2

$$(2.10)\qquad \mathbf{P}(\eta_\infty < x, \eta_k < y) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\eta_n < x, \eta_k < y) = F(x)\mathbf{P}(\eta_k < y),$$

and therefore, applying again Theorem 3 and Lemma 2,

$$(2.11)\qquad \mathbf{P}(\eta_\infty < x, \eta_\infty < y) = \lim_{k\to\infty} \mathbf{P}(\eta_\infty < x, \eta_k < y) = F(x)F(y).$$

Thus η_∞ would be independent of itself which is clearly impossible, as by (2.9) and the supposition that $F(x)$ is a non-degenerate distribution, η_∞ is not a constant.

Thus we obtain the following

COROLLARY 2. *If $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ are independent random variables, further there can be found real sequences C_n and $D_n > 0$ with $D_n \to +\infty$ such that putting $\zeta_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ and $\zeta_n^* = \frac{\zeta_n - C_n}{D_n}$ the limiting distribution of ζ_n^* exists and is non-degenerate, then the random variables ζ_n^* can not converge stochastically to a random variable.*

A special case of Corollary 2 has been mentioned in the textbook on probability theory of the author ([10], p. 534, Exercise 21).

Let us consider an example. Let

$$t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n(t)}{2^n} \tag{2.12}$$

be the dyadic expansion of the real number t $(0<t<1)$ where each $\varepsilon_n(t)$ is equal to 0 or 1. The functions $\varepsilon_n(x)$ may be considered as random variables on the probability space $[\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}]$, where Ω is the interval $(0, 1)$, $\mathcal{A}$ the set of all Lebesgue measurable subsets of Ω and $\mathbf{P}$ the ordinary Lebesgue measure. The random variables $\varepsilon_n(t)$ are clearly independent and each takes on the values 0 and 1 with probability $\frac{1}{2}$. It follows by the Moivre—Laplace theorem that putting

$$S_n(t)=\varepsilon_1(t)+\cdots+\varepsilon_n(t) \tag{2.13}$$

we have

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\frac{S_n(t)-\frac{n}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}<x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du. \tag{2.14}$$

Our Theorem 4 gives in this case the following result: If $\mathbf{Q}$ is any probability measure defined on the Lebesgue measurable subsets of the interval $(0, 1)$, which is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure, i. e. if

$$\mathbf{Q}(A)=\int_A q(t)\,dt \tag{2.15}$$

where $q(t)\geqq 0$ and $\int_0^1 q(t)\,dt=1$, then we have

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{Q}\left(\frac{S_n(t)-\frac{n}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}<x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du. \tag{2.16}$$

Let us define the set $E_n(x)$ as the set of those t's $(0<t<1)$ for which $\dfrac{S_n(t)-\frac{n}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}<x$ $(n=1, 2, \ldots)$. Then, clearly, $E_n(x)$ is a strongly mixing sequence of sets. This example gives some idea about the structure of strongly mixing sequences of sets, as the sets $E_n(x)$ can easily be constructed.

§ 3. Weak mixing

A measure preserving transformation T of the measure space $[\Omega, \mathcal{A}, \mu]$ with $\mu(\Omega) < +\infty$ is called weakly mixing (see [1], [2]) if for any $A \in \mathcal{A}$ and $B \in \mathcal{A}$ we have

$$(3.1) \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left| \mu(T^{-n} A \cdot B) - \frac{\mu(A)\mu(B)}{\mu(\Omega)} \right| = 0,$$

i. e. if $\mu(T^{-n} A \cdot B)$ is strongly $(C, 1)$-summable to the limit $\frac{\mu(A)\mu(B)}{\mu(\Omega)}$. Generalizing this notion, we shall say that *the sequence A_n $(n = 0, 1, \ldots)$ of sets is weakly mixing with density α $(0 < \alpha < 1)$ if for every $B \in \mathcal{A}$ we have*

$$(3.2) \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\mu(A_n B) - \alpha \mu(B)| = 0.$$

A sequence of sets in a probability space which is weakly mixing with density α, will correspondingly be called a weakly mixing sequence of events (with density α). By the same method as used in the preceding §§ we can obtain analogous results for weak mixing.

The analogue of Theorem 1 runs as follows:

THEOREM 5. *If the sequence A_n $(n = 0, 1, \ldots)$ of events of the probability space $[\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}]$ is weakly mixing with density α $(0 < \alpha < 1)$, we have for any probability measure $\mathbf{Q}$ in Ω and on $\mathcal{A}$, which is absolutely continuous with respect to $\mathbf{P}$,*

$$(3.3) \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\mathbf{Q}(A_n) - \alpha| = 0.$$

The proof of Theorem 5 runs along the same lines as that of Theorem 1. Instead of Lemma 1 we need the following analogous

LEMMA 3. *Let f_n $(n = 0, 1, \ldots)$ be a sequence of elements of the Hilbert space $\mathcal{H}$. Let us suppose that*

$$(3.4) \qquad \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \|f_n\| \leqq K \qquad (N = 1, 2, \ldots),$$

further that for any $k = 0, 1, \ldots$ we have

$$(3.5) \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |(f_k, f_n)| = 0.$$

Then we have for any $g \in \mathcal{H}$

$$(3.6) \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |(g, f_n)| = 0.$$

PROOF OF LEMMA 3. Clearly, (3.6) holds if g is a finite linear combination of the elements of the sequence f_n, because

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|\left(\sum_{k=0}^{r} c_k f_k, f_n\right)\right| \leqq \sum_{k=0}^{r}|c_k|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|(f_k, f_n)|.$$

If $\mathcal{H}_1$ is the least subspace of $\mathcal{H}$ containing the sequence f_n and $g \in \mathcal{H}_1$, we may find for any $\varepsilon > 0$ coefficients $c_0, c_1, \ldots, c_r$ such that putting $g_1 = \sum_{k=0}^{r} c_k f_k$ we have $\|g - g_1\| < \varepsilon$. It follows that

$$\big||(g, f_n)| - |(g_1, f_n)|\big| \leqq |(g, f_n) - (g_1, f_n)| \leqq \varepsilon \|f_n\|$$

and thus

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|(g, f_n)| - \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|(g_1, f_n)|\right| \leqq K\varepsilon$$

what proves that (3.6) holds for any $g \in \mathcal{H}_1$. But if we denote again by $\mathcal{H}_2$ the set of those elements $\mathcal{H}$ which are orthogonal to every f_n, (3.6) evidently holds for $g \in \mathcal{H}_2$ too, and as every $g \in \mathcal{H}$ can be represented in the form $g = g_1 + g_2$ with $g_1 \in \mathcal{H}_1$ and $g_2 \in \mathcal{H}_2$, it follows that (3.6) holds for every $g \in \mathcal{H}$. Thus Lemma 3 is proved. From Lemma 3 we may deduce the following result which is analogous to Theorem 2:

THEOREM 6. *The sequence A_n $(n = 0, 1, \ldots)$ of events belonging to the probability space $[\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}]$, for which $A_0 = \Omega$ and $\mathbf{P}(A_n) > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, is weakly mixing with density α $(0 < \alpha < 1)$ if (and only if) we have*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|\mathbf{P}(A_n|A_k) - \alpha| = 0 \quad \textit{for} \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{3.7}$$

The analogue of Theorem 3 for weakly mixing transformations may be stated as follows:

THEOREM 7. *The measure preserving transformation T of the measure space $[\Omega, \mathcal{A}, \mu]$, for which $\mu(\Omega) < +\infty$, is weakly mixing if for any $A \in \mathcal{A}$ for which $\mu(A) > 0$ we have*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left|\mu(T^{-n}A\cdot A) - \frac{\mu^2(A)}{\mu(\Omega)}\right| = 0. \tag{3.8}$$

The analogue of Theorem 4 for weakly mixing sequences of events is evidently also valid.

(Received 6 February 1958)

References

[1] E. Hopf, *Ergodentheorie*, Ergebnisse der Math., V. 2 (Berlin, 1937), p. 36.

[2] P. R. Halmos, *Lectures on ergodic theory*, The Mathematical Society of Japan, (1956), p. 36.

[3] A. Rényi, Contributions to the theory of independent random variables (in Russian, with Summary in English), *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **1** (1950), pp. 99—108.

[4] А. Н. Колмогоров, Теорема о сходимости условных математических ожиданий и некоторые ее применения, Comptes Rendus du Premier Congrès des Mathématiciens Hongrois (Budapest, 1952), pp. 367—386.

[5] B. V. Gnedenko and A. N. Kolmogorov, *Limit distributions for sums of independent random variables* (Cambridge, 1954).

[6] E. Sparre-Andersen and B. Jessen, Some limit theorems on integrals in an abstract set, *Kgl. Danske Videnskabernes Selskab*, **22** (1946), pp. 3—29.

[7] J. L. Doob, *Stochastic processes* (New York, 1953).

[8] B. Sz.-Nagy, *Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes*, Ergebnisse der Math., V. 5 (Berlin, 1942).

[9] H. Cramér, *Mathematical methods of statistics* (Princeton, 1946).

[10] A. Rényi, *Valószínűségszámítás* (Budapest, 1954).

ON THE THEORY OF DIOPHANTINE APPROXIMATIONS. II
(INHOMOGENEOUS PROBLEMS)

By

VERA T. SÓS (Budapest)

(*Presented by* A. RÉNYI)

§ 1

The one-dimensional homogeneous problems of diophantine approximations have a unified treatment by the algorithm of continued fractions. It is possible to give such a geometrical interpretation of convergents and by-denominators (Nebennenner) of continued fractions, which can be extended for the inhomogeneous case, and so it furnishes a parallel treatment of these cases. In this way, e. g., it is possible to prove some simple theorems of Borel type for the inhomogeneous case, to get new lower and upper bounds for the Khintchine constant c defined by

$$c = \inf_{\alpha} \sup_{\beta} \inf_{x>0,\, y \text{ integers}} x|\alpha x - \beta - y|.$$

This last result will be treated in [5] and [6].

A similar algorithm, as we give in this paper for the inhomogeneous case, is given in an arithmetical way by J. W. S. CASSELS [1] and used also by R. DESCOMBES [2]. A comparison of both treatments is made in footnote[8].

In § 2 we give this geometrical interpretation of continued fractions for an irrational α and the corresponding algorithm for the inhomogeneous case giving a sequence of multipla $s_\nu(\beta)$ which corresponds to the sequence of convergents and by-denominators of continued fractions, and further a sequence of pairs of multipla $q_k(\beta)$, $q'_k(\beta)$ which is a subsequence of $s_\nu(\beta)$ and corresponds to the sequence of convergents q_k of α.

In § 3 we give the proof of some simple theorems of Borel type corresponding to the inhomogeneous case. We call these theorems Borel type, since BOREL sharpened HURWITZ's theorem to the effect that the inequality

$$x|x\alpha - y| < \frac{1}{\sqrt{5}} \tag{1.1}$$

is soluble with x being among *any three* consecutive convergents of α. It is well known that if we consider *two* consecutive convergents of α, we may assert only the solubility of the inequality

$$x|x\alpha - y| < \frac{1}{2} \tag{1.2}$$

among them, and the constant $\frac{1}{2}$ cannot be diminished. For *any* convergent one may assert only the inequality

$$x|x\alpha-y|<1, \tag{1.3}$$

and again the constant 1 is best-possible. HURWITZ's theorem gives at once that for more than three consecutive convergents generally no inequality better than (1. 1) can be proved.

Corresponding to (1. 3) and what has been said above we shall prove for the inhomogeneous case that to an irrational α and real β the inequality

$$x|x\alpha-\beta-y|<\frac{2}{3}$$

is soluble among *any* pairs $q_k(\beta)$, $q'_k(\beta)$ corresponding to α, and the constant $\frac{2}{3}$ is best-possible. Corresponding to (1. 2) we shall prove that the inequality

$$x|x\alpha-\beta-y|<\frac{1}{2}$$

has a solution among any *two* consecutive pairs $q_k(\beta), q'_k(\beta), q_{k+1}(\beta), q'_{k+1}(\beta)$ corresponding to α and again $\frac{1}{2}$ is best-possible.

Concerning (1. 1) we remark first that a theorem corresponding to HURWITZ's is due to CASSELS [1] and asserts that for any real irrational α and $\beta \neq \langle n\alpha\rangle$[1] the inequality

$$x|x\alpha-\beta-\gamma|<\frac{27}{28}\frac{1}{\sqrt{7}}+\varepsilon$$

has infinitely many solutions (with arbitrary $\varepsilon>0$) and the constant $\frac{27}{28}\frac{1}{\sqrt{7}}$ is best-possible. So one would expect that for any real irrational α and $\beta\neq\langle n\alpha\rangle$ the inequality is soluble among any three consecutive pairs $q_k(\beta)$, $q'_k(\beta)$, $q_{k+1}(\beta)$, $q'_{k+1}(\beta)$, $q_{k+2}(\beta)$, $q'_{k+2}(\beta)$ corresponding to α. It is somewhat surprising, after what has been said above, that this is not the case. Moreover, one can show that the number *three* cannot be replaced by *any* universal constant l. For any prescribed positive integer l we shall even show that the inequality

$$x|x\alpha-\beta-y|<c$$

with any $c<\frac{1}{\sqrt{5}}$ is not soluble in general among *any* l consecutive pairs $q_{k+1}(\beta), q'_{k+1}(\beta), \ldots, q_{k+l}(\beta), q'_{k+l}(\beta)$ of our algorithm.

[1] $\langle x\rangle$ denotes the fractional part of the real number x.

§ 2

In what follows let α be irrational, $0 < \alpha < 1$ and $0 \leqq \beta < 1$. Starting in positive direction from a periphery-point O of the circle K with unity periphery, we put up the arcs with length β and $n\alpha$ for $n = 1, 2, \ldots$. We call the endpoints of these as the "β-" and "$n\alpha$-points", respectively. As it is easy to see, the structure of the $n\alpha$-points for $n = 1, 2, \ldots$ has the following

PROPERTY A. The directed distance between the $m\alpha$- and $n\alpha$-points for $m > n$ is the same as that between the $(m-n)\alpha$-point and the point O.

DEFINITION. We call the $s\alpha$-point and the corresponding multipla s *adjacent to* β (corresponding to α) if there are no $n\alpha$-points with $0 < n < s$ in at least one of the two arcs determined by β and the $s\alpha$-point.

We shall use the following notations:

The sequence of the adjacent multipla s to β is denoted by

$$s_1(\beta) \leqq s_2(\beta) < s_3(\beta) < \cdots < s_\nu(\beta) < \ldots$$

where $s_1(\beta) = s_2(\beta)$ if and only if $\beta = 0$ and $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.[2]

We denote by $\Delta_\nu(\beta)$ the directed "empty" arc on the circle K corresponding to $s_\nu(\beta)$, which does not contain $n\alpha$-points with $0 < n < s$. $\Delta_\nu(\beta)$ has positive or negative sign, according to the direction in which it starts from the point β. We denote the directed length of $\Delta_\nu(\beta)$ by $\delta_\nu(\beta)$ and the absolute length of it by $\bar{\delta}_\nu(\beta)$.

If for an index ν the inequality $\delta_\nu(\beta)\,\delta_{\nu+1}(\beta) < 0$ holds, we call this pair of adjacent multipla a pair of *jumping multipla* and denote it by $s_{\nu_k}(\beta) = q_k(\beta)$, $s_{\nu_k+1}(\beta) = q'_k(\beta)$.[3] For the corresponding $\delta_\nu(\beta)$ we use the notation $\delta_{\nu_k}(\beta) = d_k(\beta)$, $\delta_{\nu_k+1}(\beta) = d'_k(\beta)$. For the sake of simplicity, in the case $\beta = 0$ we use instead of $s_\nu(0)$, $q_k(0)$ etc. only s_ν, q_k etc., respectively.

From the definition of the adjacent multipla $s_\nu(\beta)$ it follows that for an arbitrary positive integer $x \neq s_\nu(\beta)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ there is an $s_\nu(\beta) < x$ for which

$$\bar{\delta}_\nu(\beta) = \min_y |s_\nu(\beta)\,\alpha - \beta - y| < \min_y |x\alpha - \beta - y|$$

and a fortiori

$$s_\nu(\beta)\,\bar{\delta}_\nu(\beta) < x\,|x\alpha - \beta - y|. \tag{2.1}$$

The homogeneous case. For the case $\beta = 0$ we have proved in [3] and [4], as a simple consequence of Property A, the following

[2] By this convention the recursive formulae in (2.2)—(2.4) are valid also for $k = 1$.

[3] I. e., if the $s_\nu(\beta)\alpha$- and $s_{\nu+1}(\beta)\alpha$-points approach the point β from opposite sides.

LEMMA I. *If the $s_\nu\alpha$-point is adjacent to O and the $s_{\nu-l}\alpha$-point (l positive integer) among the α-, 2α-, ..., $s_\nu\alpha$-points is the nearest to O from the opposite side,*[4] *then*

$$s_{\nu+1}=s_\nu+s_{\nu-l},$$
$$\delta_{\nu+1}=\delta_\nu+\delta_{\nu-l}.$$

Further, as a consequence of Lemma I and Property A, we have proved

LEMMA II. *Let a_k be defined by*[5]

$$a_k=\left[\left|\frac{d_{k-1}}{d_k}\right|\right] \tag{2.2}$$

and let

$$s_0=q_0=0,\quad d_0=\delta_0=-1,\quad q_1=q_2 \quad \text{if} \quad s_1=s_2,$$

then for the above-defined quantities we have for $k=1,2,\ldots$

$$q_{k+1}=q_{k-1}+a_kq_k,\quad d_{k+1}=d_{k-1}+a_kd_k,\quad \bar{d}_{k+1}=\bar{d}_{k-1}-a_k\bar{d}_k, \tag{2.3}$$

$$q_{k+1}\bar{d}_k+q_k\bar{d}_{k+1}=1, \tag{2.4}$$

and for $0<r<a_k$

$$s_{\nu_k+r}=q_{k-1}+rq_k,\quad d_{\nu_k+r}=d_{k-1}+rd_k,\quad \bar{d}_{\nu_k+r}=\bar{d}_{k-1}-r\bar{d}_k. \tag{2.5}$$

As a consequence of Lemma II it follows

LEMMA III. *If $q_k<s_\nu<q_{k+1}$, then*

$$q_{k+1}\bar{d}_{k+1}<s_\nu\bar{\delta}_\nu.\text{[6]} \tag{2.6}$$

These lemmas show that the above-defined multipla q_k are identical with the convergents of α, the other multipla s_ν with the by-denominators (Nebennenner) of α. The numbers a_k defined in (2. 2) are identical with the digits of the continued fraction of α.

From the definition of the multipla q_k and from Lemmas I—II it follows the

REMARK. a) The sequence $d_1,\ldots,d_k,\ldots$ has alternative signs, $|d_1|,\ldots,|d_k|,\ldots$ is monotonically decreasing.

b) For an arbitrary N among the α-, 2α-, ..., $N\alpha$-points the two adjacent points intercepting O have always the form with a suitable r and k.

$$s_{\nu-l}\alpha=q_k\alpha,\quad s_\nu\alpha=(q_{k-1}+rq_k)\alpha \qquad (0<r\leqq a_k).$$

c) The $(q_{k-1}+rq_k)\alpha$-points with $0<r\leqq a_k$ are between the $q_{k-1}\alpha$-point and the point O, in the arc $\Delta_{\nu_{k-1}}$, and with the restriction $n<q_{k+1}$ only these $n\alpha$-points are in $\Delta_{\nu_{k-1}}$.

[4] I. e. $\delta_\nu\delta_{\nu-l}<0$ and in the arc $\Delta_\nu+\Delta_{\nu-l}$ there is no $n\alpha$-point with $0<n<s_\nu$.

[5] $[x]$ denotes, as usual, the integral part of the real number x.

[6] I.e. Lemma III diminishes further the set of those integer x's for which $x|x\alpha-y|$ is the "least possible".

The inhomogeneous case. Since in the case when $\beta = \langle n\alpha \rangle$ the approximation of β by the multipla of α is similar to the case $\beta = 0$, in the sequel we suppose that $\beta \neq \langle n\alpha \rangle$.

THEOREM I. *For every* $0 < \beta < 1$ *one can determine uniquely a sequence of integers* $b_1, \ldots, b_k, \ldots$ *with the property*

$$(2.7) \qquad 1 < b_1 \leqq a_1 + 1, \quad 0 \leqq b_k \leqq a_k \qquad (k = 2, 3, \ldots),$$
$$b_{k+1} = 0 \quad \text{only if} \quad b_k = a_k,$$

so that the sequence of the adjacent multipla $s_\nu(\beta)$ *is identical with the numbers*

$$(2.8) \qquad b_1 q_1 + \cdots + b_{k-1} q_{k-1} + r q_k$$

for $0 < r \leqq b_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

PROOF. In what follows we give a process for the determination of the numbers b_k $(k = 1, 2, \ldots)$ from which the statement of the theorem follows.

Determination of b_1. The α-, 2α-, $\ldots$, $(a_1 + 1)\,\alpha$-points split the periphery of K into $a_1 + 1$ disjunct arcs.

Case 1. If β lies in the arc with length $\alpha = d_1$ bordered by the $(r-1)\alpha$- and $r\alpha$-points with $0 < r \leqq a_1 + 1$, then let $b_1 = r$.

Case 2. If β is in the arc with length $\bar{d}_2$ bordered by the $(a_1 + 1)\,\alpha$- and α-points, then let $b_1 = a_1 + 1$. From the definition of b_1 in both cases obviously follows that the $r\alpha$-points $(0 < r \leqq b_1)$ — and with the restriction $n \leqq a_1 + 1$ only these — are adjacent to β.

In Case 1 $(b_1 - 1)\,\alpha$ and $b_1 \alpha$ are jumping multipla, i. e. in this case

$$q_1(\beta) = b_1 - 1 = (b_1 - 1)\, q_1, \quad q_1'(\beta) = b_1 = b_1 q_1.$$

Next we determine b_k supposing that $b_1, \ldots, b_{k-1}$ are already determined.

Case k—1. 1. If β is in an arc with length $\bar{d}_{k-1}$ bordered by the $(b_1 q_1 + \cdots + (b_{k-1} - 1)\, q_{k-1})\,\alpha$- and $(b_1 q_1 + \cdots + b_{k-1} q_{k-1})\,\alpha$-points, then we consider the points with multipla

$$b_1 q_1 + \cdots + b_{k-1} q_{k-1} + r q_k \qquad (0 < r \leqq a_k).$$

According to Remark c) and Property A, these — and with the restriction $n \leqq b_1 q_1 + \cdots + b_{k-1} q_{k-1} + a_k q_k$ only these — points are in this arc with length $\bar{d}_{k-1}$. We determine b_k in a similar way as b_1 by distinguishing two cases:

Case k. 1. If the point β is in one of the arcs with length $\bar{d}_k$ bordered by the $(b_1 q_1 + \cdots + b_{k-1} q_{k-1} + (r-1)\, q_k)\,\alpha$- and $(b_1 q_1 + \cdots + b_{k-1} q_{k-1} + r q_k)\,\alpha$-points with $0 < r \leqq a_k$, then let $b_k = r$.

Case k. 2. If the point β is in the arc bordered by the $(b_1 q_1 + \cdots + b_{k-1} q_{k-1} + a_k q_k)\alpha$- and $(b_1 q_1 + \cdots + (b_{k-1} - 1) q_{k-1})\alpha$-points with length $\bar{d}_{k-1}$, then let $b_k = a_k$.

Case k—1.2. If β is in the arc with length d_k bordered by the $(b_1q_1+\cdots+b_{k-2}q_{k-2}+a_{k-1}q_{k-1})\alpha$- and $(b_1q_1+\cdots+(b_{k-2}-1)q_{k-2})\alpha$-points, then let $b_k=0$. (Since the first point with smallest multiplum which lies in the arc bordered by these points, is the $(b_1q_1+\cdots+a_{k-1}q_{k-1}+q_{k-1})\alpha$-point.)

From the definition of b_k it follows, according to Remark c) and Property A, that the $(b_1q_1+\cdots+b_{k-1}q_{k-1}+rq_k)\alpha$-points $(0<r\leqq b_k)$ — and with the restriction $b_1q_1+\cdots+b_{k-1}q_{k-1}<n<b_1q_1+\cdots+b_{k-1}q_{k-1}+a_kq_k$ only these — are adjacent to β.[7]

COROLLARY. From the determination of the numbers b_k it follows that if $b_{k+1}\neq 0$, then $s_\nu(\beta)=b_1q_1+\cdots+b_{k-1}q_{k-1}+(b_k-1)q_k$ and $s_{\nu+1}(\beta)=$ $=b_1q_1+\cdots+b_kq_k$ form a pair of jumping multipla, i. e. with a suitable l

$$(2.\,9)\qquad q_l(\beta)=b_1q_1+\cdots+(b_k-1)q_k,\quad q_l'(\beta)=b_1q_1+\cdots+b_kq_k.$$

If $b_{k+1}=0$, then it is suitable to call also the pair of multipla

$$(2.\,10)\qquad q_l(\beta)\equiv s_\nu(\beta)=b_1q_1+\cdots+b_kq_k,\quad q_l'(\beta)=s_\nu(\beta)-q_{k+1}$$

a pair of jumping multipla.

From Property A it follows that for every index ν the distance between the $s_\nu(\beta)\alpha$-point and the point O has the form

$$(2.\,11)\qquad \langle s_\nu(\beta)\alpha\rangle=b_1d_1+\cdots+b_{k-1}d_{k-1}+rd_k\qquad (0<r\leqq b_k).$$

Since the $n\alpha$-points are everywhere dense on the periphery of K, the β-point is the limit of the $s_\nu(\beta)\alpha$-points, and so, according to (2. 10),

$$(2.\,12)\qquad \beta=\sum_{k=1}^{\infty}b_kd_k.$$

From (2. 10) and (2. 11) we obtain for $\nu>\nu_2$

$$(2.\,13)\qquad \delta_\nu(\beta)=\langle s_\nu(\beta)\alpha\rangle-\beta=rd_k-\sum_{\nu=k}^{\infty}b_\nu d_\nu.^{8}$$

The following theorem gives an analogous result as (2. 5) for the inhomogeneous case:

LEMMA IV. *Let* $b_{k+1}\neq 0$, $b_k>1$, $0<r<b_k-1$ *and*

$$(2.\,14)\quad s_\nu(\beta)=b_1q_1+\cdots+b_{k-1}q_{k-1}+(b_k-1)q_k\;(=q_l(\beta)),\; s_{\nu-r}(\beta)=s_\nu(\beta)-rq_k;$$

[7] It follows directly from the definition of the numbers b_k that for every index ν $s_{\nu+1}(\beta)-s_\nu(\beta)=q_k$ with a suitable l. Using this remark, b_k could have been defined as the number of indices with the property $s_{\nu+1}(\beta)-s_\nu(\beta)=q_k$.

[8] The difference between the treatment of CASSELS—DESCOMBES and that given above for the inhomogeneous case lies in the fact that the mentioned authors start from an arithmetical definition of the numbers $q_k(\beta)$ and deduce from it the minimum properties, while we start from the minimum properties and deduce their arithmetical properties.

then we have

$$s_\nu(\beta)\bar{\delta}_\nu(\beta) < s_{\nu-r}(\beta)\,\bar{\delta}_{\nu-r}(\beta). \tag{2.15}$$

If $b_{k+1}=0$, $(b_k=a_k)$, *let* $0<r<b_k$ *and*

$$s_\nu(\beta)=b_1q_1+\cdots+b_{k-1}q_{k-1}+b_kq_k\ (=q_l(\beta)),\quad s_{\nu-r}(\beta)=s_\nu(\beta)-rq_k,$$

then we have

$$s_\nu(\beta)\bar{\delta}_\nu(\beta) < s_{\nu-r}(\beta)\bar{\delta}_{\nu-r}(\beta). \tag{2.16}$$

PROOF. From the definition of the numbers b_k it follows that $\delta_\nu(\beta)\delta_{\nu-r}(\beta)>0$ and, consequently, from (2.13) and (2.12)

$$\bar{\delta}_\nu(\beta)=\bar{\delta}_{\nu-r}(\beta)-r\bar{d}_k.$$

From this and (2.13)

$$\frac{s_{\nu-r}(\beta)\bar{\delta}_{\nu-r}(\beta)}{s_\nu(\beta)\bar{\delta}_\nu(\beta)}=\left(1-r\frac{q_k}{s_\nu(\beta)}\right)\left(1+r\frac{\bar{d}_k}{\bar{\delta}_\nu(\beta)}\right). \tag{2.17}$$

(2.14) gives $s_\nu(\beta)>(b_k-1)q_k$. Further, from the definition of b_k and $b_{k+1}\neq 0$ it follows that β is in the arc with length $\bar{d}_k$ bordered by the $s_\nu(\beta)\alpha$- and $(s_\nu(\beta)+q_k)\alpha$-points. Consequently,

$$\bar{\delta}_\nu(\beta)<\bar{d}_k. \tag{2.18}$$

Using these in (2.16), we obtain

$$\frac{s_{\nu-r}(\beta)\bar{\delta}_{\nu-r}(\beta)}{s_\nu(\beta)\bar{\delta}_\nu(\beta)}>\left(1-\frac{r}{b_k-1}\right)(1+r)\geqq 1.$$

The proof of (2.15) runs analogously as the above proof of (2.14).

§ 3

For the proof of theorems of Borel type we need the following

LEMMA V. *If* $b_{k+1}=0$, *then for*

$$q_l(\beta)=b_1q_1+\cdots+b_kq_k,\quad q_l'(\beta)=q_l(\beta)-q_{k+1} \tag{3.1}$$

we have

$$\min\left(q_l(\beta)\bar{d}_l(\beta),\ q_l'(\beta)\bar{d}_l'(\beta)\right)<\frac{1}{3}.\text{[9]} \tag{3.2}$$

PROOF. Using the recursive formulae (2.3) and (2.7), we have

$$q_l'(\beta)\leqq(a_1+1)q_1+\cdots+a_kq_k=q_{k+1}+q_k,\quad q_l(\beta)\leqq q_k. \tag{3.3}$$

From the definition of the numbers b_k and $b_{k+1}=0$ it follows that β is in the arc with length $\bar{d}_{k+1}$ bordered by the $q_l(\beta)\alpha$- and $(q_l(\beta)-q_{k+1})\alpha$-points.

[9] The same lemma occurs in CASSELS' paper [1]

Therefore

$$\bar{d}_l(\beta)+\bar{d}'_l(\beta)=\bar{d}_{k+1}. \tag{3.4}$$

Let t be defined by

$$(q_{k+1}+q_k)t=q_k\ (\bar{d}_{k-1}-t).$$

Obviously, from (3. 3) and (3. 4), using also (2. 4) we get

$$\min(q_l(\beta)\bar{d}_l(\beta), q'_l(\beta)\bar{d}'_l(\beta)) \leqq \min((q_{k+1}+q_k)\bar{d}_l(\beta),\ q_k(\bar{d}_{k+1}-\bar{d}_l(\beta)) \leqq$$

$$\leqq (q_{k+1}+q_k)t=\frac{q_{k+1}+q_k}{q_{k+1}+2q_k}q_k\,\bar{d}_{k+1}<\frac{q_{k+1}+q_k}{q_{k+1}+2q_k}\,\frac{q_k}{q_{k+1}}\,\frac{1}{\dfrac{q_k}{q_{k+1}}+\dfrac{\bar{d}_k}{\bar{d}_{k+1}}}.$$

Since $0<\dfrac{q_k}{q_{k+1}}<1, \dfrac{\bar{d}_k}{\bar{d}_{k+1}}>1$, it follows that

$$\min(q_l(\beta)\bar{d}_l(\beta),\ q'_l(\beta)\bar{d}'_l(\beta))<\frac{q_k}{q_{k+1}}\,\frac{1}{1+2\dfrac{q_k}{q_{k+1}}}<\frac{1}{3}.$$

From this proof it is easy to see that the constant $\frac{1}{3}$ is best-possible.

THEOREM II. *For every pair of jumping multipla we have*

$$\min(q_l(\beta)\bar{d}_l(\beta),\ q'_l(\beta)\bar{d}'_l(\beta))<\frac{2}{3}. \tag{3.5}$$

PROOF. Owing to Lemma V we may suppose that the pair of jumping multipla $q_l(\beta)$, $q'_l(\beta)$ has the form as in (2. 9). Similarly as in (3. 3), we have

$$q_l(\beta)\leqq q_{k+1},\quad q'_l(\beta)\leqq q_{k+1}+q_k.$$

Similarly as we obtained (2. 17), we have

$$\bar{d}_l(\beta)+\bar{d}'_l(\beta)=\bar{d}_k.$$

Therefore, if t is defined by

$$q_{k+1}\,t=(q_k+q_{k+1})\,(\bar{d}_k-t),$$

we have

$$\min(q_l(\beta)\bar{d}_l(\beta),\ q'_l(\beta)\bar{d}'_l(\beta))\leqq q_{k+1}\,t=\frac{q_{k+1}+q_k}{2q_{k+1}+q_k}\,q_{k+1}\,\bar{d}_k.$$

From this, taking (2. 4) and $\dfrac{q_k}{q_{k+1}}<1$ into account, it follows the statement of the theorem, and also the fact that the constant $\frac{2}{3}$ is best-possible.

THEOREM III. *For any two consecutive pairs of jumping multipla the inequality*

$$\min(q_l(\beta)\bar{d}_l(\beta),\ q'_l(\beta)\bar{d}'_l(\beta),\ q_{l+1}(\beta)\bar{d}_{l+1}(\beta),\ q'_{l+1}(\beta)\bar{d}'_{l+1}(\beta))<\frac{1}{2}$$

holds.

By other words, the inequality $x|\alpha x-\beta-y|<\frac{1}{2}$ has a solution among any two consecutive pairs of jumping multipla.

PROOF. Owing to Lemma V we may suppose that both pairs of jumping multipla have the form as in (2. 9), i. e.

$$q_l(\beta)=b_1q_1+\cdots+b_{k-1}q_{k+1}+(b_k-1)q_k,\quad q_l'(\beta)=q_l(\beta)+q_k,$$
$$q_{l+1}(\beta)=q_l'(\beta)+(b_{k+1}-1)q_{k+1},\qquad q_{l+1}'(\beta)=q_l'(\beta)+b_{k+1}q_{k+1}.$$

Similarly as in (3. 3), we have

$$\begin{aligned} &q_l(\beta)\leqq q_{k+1}, && q_l'(\beta)\leqq q_{k+1}+q_k, \\ &q_{l+1}(\beta)\leqq q_k+b_{k+1}q_{k+1}, && q_{l+1}'(\beta)\leqq q_k+(b_{k+1}+1)q_{k+1}. \end{aligned}\tag{3. 6}$$

Let u be defined by $\bar{d}_{l+1}'(\beta)=u\bar{d}_{k+1}$. According to (2. 17)[10] $0<u<1$ holds.

From (2. 13), taking into account that the sequence $d_1,\ldots,d_k,\ldots$ has alternative signs, we have

$$\begin{aligned} &\bar{d}_l(\beta)=\bar{d}_k-(b_{k+1}-u)\bar{d}_{k+1}, && \bar{d}_l'(\beta)=(b_{k+1}-u)\bar{d}_{k+1}, \\ &\bar{d}_{l+1}(\beta)=(1-u)\bar{d}_{k+1}, && \bar{d}_{l+1}'(\beta)=u\bar{d}_{k+1}. \end{aligned}\tag{3. 7}$$

With the notation $x=\frac{\bar{d}_k}{\bar{d}_{k+1}}$, $y=\frac{\bar{q}_k}{q_{k+1}}$, $b=b_{k+1}$ we have from (3. 6) and (3. 7), using (2. 4),

$$q_l(\beta)\bar{d}_l(\beta)\leqq q_{k+1}(\bar{d}_k-(b_{k+1}-r)\bar{d}_{k+1})=q_{k+1}\bar{d}_{k+1}\left(\frac{\bar{d}_k}{\bar{d}_{k+1}}-(b_{k+1}-r)\right)=$$

$$=\frac{1}{\frac{q_k}{q_{k+1}}+\frac{\bar{d}_k}{\bar{d}_{k+1}}}\left(\frac{\bar{d}_k}{\bar{d}_{k+1}}-(b_{k+1}-u)\right),$$

$$q_l(\beta)\bar{d}_l(\beta)\leqq\frac{1}{x+y}(x-b+u)\overset{\text{def}}{=}F_1(x,y,b,u).\tag{3. 8}$$

Similarly

$$q_l'(\beta)\bar{d}_l'(\beta)\leqq\frac{1}{x+y}(1+y)(b-u)\overset{\text{def}}{=}F_2(x,y,b,u),\tag{3. 9}$$

$$q_{l+1}(\beta)\bar{d}_{l+1}(\beta)\leqq\frac{1}{x+y}(b+y)(1-u)\overset{\text{def}}{=}F_3(x,y,b,u),\tag{3. 10}$$

$$q_{l+1}'(\beta)\bar{d}_{l+1}'(\beta)\leqq\frac{1}{x+y}(1+b+y)u\overset{\text{def}}{=}F_4(x,y,b,u)\tag{3. 11}$$

[10] β is in the arc with length $\bar{d}_{k+1}$ bordered by the $q_{l+1}(\beta)\alpha$- and $q_{l+1}'(\beta)\alpha$-points.

where

(3. 12) $\qquad (a_k < x < a_k+1, \quad 0<y<1, \quad 0<b\leqq a_k, \quad b \text{ integer}).$

Since from (3. 12) we get $(1+y)(b-u)\geqq(b+y)(1-u)$ and consequently $F_2\geqq F_3$, for the proof of the theorem we have to show that with the restriction given in (3. 12) for (x, y, b, u)

$$\sup_{x,y,b,u} \min(F_1, F_3, F_4)\leqq \frac{1}{2}$$

holds. It follows obviously from (3. 8)—(3.11) that if for a value of (x, y, b, u) for any pair $i\neq k$ also $F_i\neq F_k$, then one may change the value of u so that $\min(F_1, F_3, F_4)$ increases. This is the fact also in the case when $F_1=F_4<F_3$. So for the determination of $\sup\limits_{x,y,b,u}\min(F_1, F_3, F_4)$ we have to investigate the following two cases only:

1. $F_1=F_3\leqq F_4$,
2. $F_3=F_4\leqq F_1$.

Case 1. From $F_1=F_3$ it follows $x-b+r=(y+b)(1+r)$,

$$r=\frac{y+2b-x}{y+b+1}, \quad 1-r=\frac{x-b+1}{y+b+1},$$

and consequently in this case

$$F_1=F_3=\frac{1}{x+y}(b+y)\frac{x-b+1}{y+b+1}, \quad F_4=\frac{1}{x+y}(1+b+y)\frac{y+2b-x}{1+b+y} \tag{3. 13}$$

and, since $F_1=F_3\leqq F_4$, therefore $(b+y)(x-b+1)\leqq(1+b+y)(y+2b+x)$, i. e.

$$x\leqq\frac{(y+b)^2}{2y+2b+1}+b. \tag{3. 14}$$

From $b\geqq 1$ it follows that

$$F_1=F_3=\frac{x-b+1}{x+y}\,\frac{b+y}{1+b+y}=\left(1-\frac{y+b-1}{x+y}\right)\frac{b+y}{1+b+y}$$

is monotonically increasing in x. Putting therefore in (3. 13) the upper bound of x, from (3. 14), we get

$$F_1=F_3\leqq\frac{y+b+1}{3y+3b+1}\leqq\frac{1}{2}. \tag{3. 15}$$

In *Case 2* we can obtain in a quite analogous way the same expression of y and b as an upper bound for the minimum in question. These together prove the theorem.

From the proof it follows that for the values

$$b = b_{k+1} = 1,$$

$$y = \frac{q_k}{q_{k+1}} \sim 0 \qquad (a_k \text{ large}),$$

$$x = \frac{\bar{d}_k}{\bar{d}_{k+1}} \sim \frac{4}{3} \qquad (a_{k+1} = 1, \quad a_{k+2} = 3, \ a_{k+3} \text{ large}),$$

$$u = \frac{1}{3}$$

we have $F_1 = F_3 = F_4 \sim \frac{1}{2}$, i. e. the constant $\frac{1}{2}$ is best-possible.

THEOREM IV. *For every positive integer l there exists a suitable irrational α and a real $\beta \neq \langle n\alpha \rangle$ so that with arbitrary $\varepsilon > 0$ for an infinity of k_0 the inequality*

$$\min_{k_0 < k < k_0+l} (q_k(\beta)\bar{d}_k(\beta), \quad q'_k(\beta)\bar{d}'_k(\beta)) > \frac{1}{\sqrt{5}} - \varepsilon$$

holds.

By other words, the inequality $x|\alpha x - \beta - y| < \frac{1}{\sqrt{5}} - \varepsilon$ cannot be satisfied among the l consecutive pairs of jumping multipla and, according to Lemma IV, also among the numbers x with $q_{k_0}(\beta) < x < q'_{k_0+l}(\beta)$.

PROOF. The theorem follows easily from the following

LEMMA. *Let ε be an arbitrary small positive number and the integer M sufficiently large. If for an α and β and for $k - 2M \leqq \nu \leqq k + 2M$ $(k > 2M)$ we have*

$$a_\nu = b_\nu = 1, \tag{3.16}$$

then putting

$$q_k(\beta) = q'_{k-1}(\beta) = b_1 q_1 + \cdots + b_{k-1} q_{k-1},$$

the inequality

$$q_k(\beta)\bar{d}_k(\beta) > \frac{1}{\sqrt{5}} - \varepsilon$$

holds.

PROOF OF THE LEMMA. Using the recursive formulae (2. 3), we obtain according to (3. 16)

$$q_k(\beta) = b_1 q_1 + \cdots + b_{k-1} q_{k-1} < \sum_{\nu=k-2M}^{k-1} b_\nu q_\nu = \sum_{\nu=k-2M}^{k-1} q_\nu = \sum_{\nu=k-2M}^{k-1} a_\nu q_\nu = \tag{3.17}$$

$$= \sum_{\nu=k-2M}^{k-1} (q_{\nu+1} - q_{\nu-1}) = q_k + q_{k-1} - q_{k-2M} - q_{k-2M-1} = q_{k+1} - q_{2M+1} > q_{k+1}(1 - \varepsilon')$$

where ε' is arbitrary small if M is large enough.

Similarly, for $\bar{d}_k(\beta)$ we have from (2. 3) and (3.16)

$$d_k(\beta) = d_k + \sum_{\nu=k+1}^{\infty} b_\nu d_\nu = \sum_{\nu=k}^{k+2M-1} d_\nu + \sum_{\nu=k+2M}^{\infty} b_\nu d_\nu .$$

Since

$$\sum_{\nu=k}^{k+2M-1} d_\nu = \sum_{\nu=k}^{k+2M-1} a_\nu d_\nu = \sum_{\nu=k}^{k+2M-1} (d_{\nu+1} - d_{\nu-1}) = -d_{k-1} - d_k + d_{2M-1} + d_{2M} =$$
$$= -d_{k+1} + d_{2M+1}$$

and

$$\Big| \sum_{\nu=k+2M}^{\infty} b_\nu d_\nu \Big| \leqq \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{k+2M+2\nu} \bar{d}_{k+2M+2\nu} = \bar{d}_{k+2M-1},$$

we have

$$\bar{d}_k(\beta) > \bar{d}_{k+1} - \bar{d}_{k+2M-1} - \bar{d}_{k+2M} > \bar{d}_{k+1}(1-\varepsilon'') \tag{3. 18}$$

where ε'' is arbitrary small if M is large enough.

From (3. 17) and (3. 18) we get

$$q_k(\beta)\bar{d}_k(\beta) > q_{k+1}\bar{d}_{k+1}(1-\varepsilon')(1-\varepsilon'') = \frac{1}{\dfrac{q_k}{q_{k+1}} + \dfrac{\bar{d}_k}{\bar{d}_{k+1}}}(1-\varepsilon')(1-\varepsilon'').$$

Since the first $2M$ digits of the continued fractions of $\dfrac{q_k}{q_{k+1}}$ and $\dfrac{\bar{d}_k}{\bar{d}_{k+1}}$ are the same as those for the numbers

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\cdots \quad \text{and} \quad 1+\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1 + \frac{1}{1+}\frac{1}{1+\cdots},$$

respectively, we obtain

$$\frac{1}{\dfrac{q_k}{q_{k+1}} + \dfrac{\bar{d}_k}{\bar{d}_{k+1}}} > \frac{1}{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} + 1 + \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}(1-\varepsilon''') = \frac{1}{\sqrt{5}}(1-\varepsilon'''). \tag{3. 19}$$

From (3. 19) the Lemma follows if M is so large that

$$(1-\varepsilon')(1-\varepsilon'')(1-\varepsilon''') > (1-\varepsilon).$$

Theorem IV is a simple consequence of this. Namely, if in the sequence a_k $(k=1,2,\ldots)$ we have for an infinity of indices ν

$$a_\nu = a_{\nu+1} = \cdots = a_{\nu+2M+l} = 1,$$

this means that the conditions of the Lemma are fulfilled for l consecutive indices $k_0+1, \ldots, k_0+l$ and for infinitely many k_0. Further, if for infinitely many μ-indices $a_\mu \neq 1$ and $b_\mu \neq a_\mu$, $b_\mu \neq 0$, then, as one can see from the definition of the numbers b_k, $\beta \neq \langle n\alpha \rangle$.

(Received 6 March 1958)

Bibliography

[1] J. W. S. CASSELS, On a theorem of Khintchine, *Proc. London Math. Soc.* (2), **53** (1951), pp. 310—320.

[2] R. DESCOMBES, Sur la répartition des sommets d'une ligne polygonale regulière non-fermée, *Annales scientifiques d'école normale supérieure,* **75** (1956), pp. 284—355.

[3] VERA T. SÓS, On the theory of diophantine approximations. I, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.,* **8** (1957), pp. 461—472.

[4] VERA T. SÓS, A lánctörtek egy geometriai interpretációja és alkalmazásai, *Math. Lapok,* **8** (1957), pp. 248—263.

[5] VERA T. SÓS, On a theorem of A. Khintchine, *Acta Arithmetica* (under press).

[6] VERA T. SÓS, On the theory of diophantine approximations. III, to appear in *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*

Technikai szerkesztő: Molnár Ferenc

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki felelős: Farkas Sándor
A kézirat beérkezett: 1958. III. 18. — Terjedelem: 21 (A/5) ív, 48 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat, Szeged 58-1147 Felelős vezető: Vincze György

The Acta Mathematica publish papers on mathematics in English, German, French and Russian.

The Acta Mathematica appear in parts of various size, making up one volume.

Manuscripts should be addressed to:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Mathematica is 110 forints a volume. Orders may be placed with „*Kultura*" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest, VI., Népköztársaság útja 21. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Mathematica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des mémoires du domaine des sciences mathématiques.

Les Acta Mathematica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en un volume.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux „*Kultura*" (Budapest, VI, Népköztársaság útja 21. Compte-courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

„*Acta Mathematica*" публикует трактаты из области математических наук на русском немецком, английском и французском языках.

„*Acta Mathematica*" выходит отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена „*Acta Mathematica*" — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет „*Kultura*" (*Budapest, VI., Népköztársaság útja 21.* Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

61,— Ft

INDEX

ACTA MATHEMATICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

G. ALEXITS, P. ERDŐS, L. FEJÉR,
CH. JORDAN, L. KALMÁR, L. RÉDEI, A. RÉNYI,
B. SZ.-NAGY, P. TURÁN, O. VARGA

REDIGIT

G. HAJÓS

TOMUS IX FASCICULI 3—4

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST

1958

ACTA MATH. HUNG.

ACTA MATHEMATICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK
MATEMATIKAI KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST, V., ALKOTMÁNY U. 21

Az Acta Mathematica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a matematika köréből.

Az Acta Mathematica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Mathematica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó"-nál (Budapest, V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-44), a külföld számára pedig a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest, VI., Népköztársaság útja 21. Bankszámla 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

Die Acta Mathematica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der mathematischen Wissenschaften in deutscher, englischer, französischer und russischer Sprache.

Die Acta Mathematica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Redaktion und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forints. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen *„Kultura"* (Budapest, VI., Népköztársaság útja 21. Bankkonto Nr. 43 790-057-181) oder bei seinen Auslandvertretungen und Kommissionären.

NOTES ON INTERPOLATION. IV
(INEQUALITIES)

By

J. BALÁZS (Budapest) and P. TURÁN (Budapest), member of the Academy

§ 1. Introduction

1. In this paper we continue the investigation of the interpolatory polynomials $R_n(x)$ of degree $\leqq 2n-1$ for which

$$\left.\begin{array}{ll}(1.1.1) & R_n(x_\nu)=\alpha_\nu = \text{prescribed} \\ \text{and} & \\ (1.1.2) & R_n''(x_\nu)=\beta_\nu=\text{prescribed}\end{array}\right\} \qquad (\nu=1,2,\ldots,n).$$

Here n is always even and the values

$$1=x_1>x_2>\cdots>x_{n-1}>x_n=-1 \tag{1.1.3}$$

are zeros of the polynomial

$$\Pi_n(x)\equiv -n(n-1)\int_{-1}^{x}P_{n-1}(t)dt\equiv(1-x^2)P_{n-1}'(x), \tag{1.1.4}$$

$P_{n-1}(x)$ being the $(n-1)^{\text{th}}$ Legendre polynomial with the normalisation

$$P_{n-1}(1)=1. \tag{1.1.5}$$

We may write

$$R_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu r_\nu(x)+\sum_{\nu=1}^{n}\beta_\nu\varrho_\nu(x), \tag{1.1.6}$$

where the fundamental polynomials $r_\nu(x)$ and $\varrho_\nu(x)$ are defined by

$$r_\nu(x_j)=\begin{cases}1 & \text{for } j=\nu,\\ 0 & \text{for } j\neq\nu\end{cases} \quad \text{and} \quad r_\nu''(x_j)=0 \text{ for all } j\text{'s} \tag{1.1.7}$$

and

$$\varrho_\nu(x_j)=0 \text{ for all } j\text{'s} \quad \text{and} \quad \varrho_\nu''(x_j)=\begin{cases}1 & \text{for } j=\nu,\\ 0 & \text{for } j\neq\nu,\end{cases} \tag{1.1.8}$$

respectively. These $r_\nu(x)$ and $\varrho_\nu(x)$ are uniquely determined.[1] It follows from this fact that if $\pi_{2n-1}(x)$ is an arbitrary polynomial of degree $\leqq 2n-1$, then

$$\sum_{\nu=1}^{n}\pi_{2n-1}(x_\nu)r_\nu(x)+\sum_{\nu=1}^{n}\pi_{2n-1}''(x_\nu)\varrho_\nu(x)\equiv\pi_{2n-1}(x). \tag{1.1.9}$$

Based on this we shall prove the following theorems.

[1] J. SURÁNYI and P. TURÁN, Notes on interpolation. I (On some interpolatorical properties of the ultraspherical polynomials), *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), pp. 67–79.

THEOREM I. *If for* $\nu = 1, 2, \ldots, n$ *we have for a polynomial* $\pi_{2n-1}(x)$ *of degree* $\leqq 2n-1$

$$|\pi_{2n-1}(x_\nu)| \leqq A, \quad |\pi'_{2n-1}(x_\nu)| \leqq B, \tag{1.1.10}$$

then for $-1 \leqq x \leqq +1$ *we have*

$$|\pi_{2n-1}(x)| \leqq \pi^6 n A + \frac{\pi^5}{n} B.$$

This theorem will follow very easily from the estimations of the previous paper of this series.[2] It will follow further easily that this theorem is essentially best-possible, i. e. for a suitable polynomial $f_0(x)$ of degree $\leqq 2n-1$ and numerical positive c

$$|f_0(0)| > c\left(An + \frac{B}{n}\right).$$

More difficult is, however, the estimation of

$$\max_{-1 \leqq x \leqq +1} |\pi'_{2n-1}(x)|.$$

We shall prove the somewhat unusual

THEOREM II. *Under the condition* (1.1.10) *we have for* $-1 \leqq x \leqq +1$ *the estimation*[3]

$$|\pi'_{2n-1}(x)| \leqq \pi^8 n^{5/2} \cdot A + \pi^5 \sqrt{n} \cdot B.$$

Unusual is the appearence of the exponent 5/2; that this is really connected with the matter, will be shown by constructing a suitable polynomial $f_1(x)$ of degree $\leqq 2n-1$ satisfying (1.1.10), for which

$$|f_1'(1)| > c(An^{5/2} + Bn^{1/2})$$

with a suitable numerical positive c. If, however, we consider only

$$\max_{-1+\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon} |\pi'_{2n-1}(x)| \qquad (0 < \varepsilon < 1),$$

S. BERNSTEIN's inequality gives at once from Theorem I that for $-1+\varepsilon \leqq$ $\leqq x \leqq 1-\varepsilon$ we have

$$|\pi'_{2n-1}(x)| \leqq \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \pi^6 n^2 \cdot A + \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \pi^5. \tag{1.1.11}$$

Finally, we shall show that this is also essentially best-possible, too, i. e. for

[2] J. BALÁZS and P. TURÁN, Notes on interpolation. III (Convergence), *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **9** (1958), pp. 195—214.

[3] For the sake of orientation we remark that if in $[-1, +1]$ $f''(x)$ exists *everywhere* and here $|f(x)| \leqq 1$ and $|f''(x)| \leqq 1$, then we have for $[-1, +1]$ $|f'(x)| \leqq 2$. This has been proved after the first results of C. N. MOORE and HARDY–LITTLEWOOD by E. LANDAU (Einige Ungleichungen für zweimal differenzierbare Funktionen, *Proc. London Math. Soc.*, Ser. 2, **13** (1913), pp. 43—49).

a suitable $f_2(x)$ of degree $\leqq 2n-1$ satisfying (1. 1. 10) we have

$$|f_2'(\eta_0)|>c(An^2+B)$$

with a numerical positive c; here η_0 is "near" to 0.

We are indebted to Mr. G. FREUD for his valuable remarks.

§ 2. Preliminaries

1. The explicit form of the fundamental functions $r_\nu(x)$ and $\varrho_\nu(x)$, what we have found in [2], is the following:

$$\varrho_1(x)=-\frac{\Pi_n(x)}{n^2(n-1)^2}\left\{1+\frac{1}{3}P_{n-1}(x)\right\}, \tag{2. 1. 1}$$

$$\varrho_n(x)=\frac{\Pi_n(x)}{n^2(n-1)^2}\left\{-1+\frac{1}{3}P_{n-1}(x)\right\} \tag{2. 1. 2}$$

and[4] for $2\leqq\nu\leqq n-1$

$$\begin{aligned}\varrho_\nu(x)=\frac{\Pi_n(x)}{2\Pi_n'(x_\nu)P_{n-1}''(x_\nu)}\Bigg\{&\int_{-1}^{x}\frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_\nu}dt+\\&+P_{n-1}(x)\left(-\frac{x_\nu}{1-x_\nu^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{(1-x_\nu^2)P_{n-1}(x_\nu)}\right)+\\&+\left(-\frac{3}{1-x_\nu^2}+\frac{1}{(1-x_\nu^2)P_{n-1}(x_\nu)}\right)\Bigg\}\end{aligned} \tag{2. 1. 3}$$

and

$$\begin{aligned}\varrho_\nu(x)=\frac{\Pi_n(x)}{2\Pi_n'(x_\nu)P_{n-1}''(x_\nu)}\Bigg\{&\int_{1}^{x}\frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_\nu}dt+\\&+P_{n-1}(x)\left(-\frac{x_\nu}{1-x_\nu^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{(1-x_\nu^2)P_{n-1}(x_\nu)}\right)-\\&-\left(\frac{1}{1-x_\nu^2}+\frac{1}{(1-x_\nu^2)P_{n-1}(x_\nu)}\right)\Bigg\},\end{aligned} \tag{2. 1. 4}$$

respectively. Further, if

$$l_\nu(x)=\frac{\Pi_n(x)}{\Pi_n'(x_\nu)(x-x_\nu)}\qquad(\nu=1,2,\ldots,n) \tag{2. 1. 5}$$

stand for the fundamental functions of the Lagrange interpolation based on

[4] (1. 1. 4) gives that the integrand of (2. 1. 3)—(2. 1. 4) is a polynomial.

our x_ν-points in (1. 1. 4), then we have

$$(2.1.6)\quad \begin{aligned} r_1(x) &= \frac{3+x}{4} l_1(x)^2 - \frac{1-x^2}{4} l_1(x) l_1'(x) + \\ &+ \left(\frac{5}{16}+\frac{1}{8n(n-1)}\right) \Pi_n(x) \left\{1+\frac{1}{3}P_{n-1}(x)\right\}, \end{aligned}$$

$$(2.1.7)\quad \begin{aligned} r_n(x) &= \frac{3-x}{4} l_n(x)^2 + \frac{1-x^2}{4} l_n(x) l_n'(x) + \\ &+ \left(\frac{5}{16}+\frac{1}{8n(n-1)}\right) \Pi_n(x) \left\{1-\frac{1}{3}P_{n-1}(x)\right\} \end{aligned}$$

and for $2 \leqq \nu \leqq n-1$ and $x < x_\nu$

$$(2.1.8)\quad r_\nu(x) = \frac{\Pi_n(x)}{\Pi_n'(x_\nu)} \left\{ \int_{-1}^{x} \frac{l_\nu(t)}{(t-x_\nu)^2} dt - \left(\frac{1}{2}+\frac{P_{n-1}(x)}{6}\right) \frac{1}{(1-x_\nu^2)P_{n-1}(x_\nu)^2} \right\}$$

and for $2 \leqq \nu \leqq n-1$ and $x > x_\nu$

$$(2.1.9)\quad r_\nu(x) = \frac{\Pi_n(x)}{\Pi_n'(x_\nu)} \left\{ \int_{1}^{x} \frac{l_\nu(t)}{(t-x_\nu)^2} dt + \left(\frac{1}{2}-\frac{P_{n-1}(x)}{6}\right) \frac{1}{(1-x_\nu^2)P_{n-1}(x_\nu)^2} \right\},$$

respectively.

2. We shall use some well-known facts about Legendre polynomials. For $-1 \leqq x \leqq +1$ we have[5]

$$(2.2.1)\quad |P_m'(x)| \leqq \frac{m(m+1)}{2}$$

and S. BERNSTEIN's inequalities[6]

$$(2.2.2)\quad |P_m(x)| \leqq \sqrt{\frac{2}{\pi m}}(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}$$

and for $n \geqq 4$

$$(2.2.3)\quad (1-x^2)^{3/4} |P_{n-1}'(x)| \leqq \sqrt{2n},$$

$$(2.2.4)\quad |\Pi_n(x)| \leqq \sqrt{\frac{2}{\pi}n}.$$

Further, for $-1 \leqq x \leqq +1$ we need[7]

$$(2.2.5)\quad |P_m(x)| \leqq 1$$

[5] See e. g. G. SZEGŐ, *Orthogonal polynomials,* Amer. Math. Soc. Coll. Publ. (New York, 1939), p. 167, formula (7. 33. 8).

[6] S. BERNSTEIN, Sur les polynômes orthogonaux relatifs à un segment fini. II, *Journ. Math. pures et appl.*, **10** (1931), pp. 219—286.

[7] See G. SZEGŐ, l. c., p. 159, formula (7. 21. 1).

and the differential equation[8]

$$(1-x^2)P_m''(x)-2xP_m'(x)+m(m+1)P_m(x)=0. \tag{2.2.6}$$

We have further for $\nu=2,3,\ldots,\frac{n}{2}$ and $n=4,6,8,\ldots$ the estimation[2]

$$|P_{n-1}(x_\nu)|>\frac{1}{\sqrt{8\pi\nu}}. \tag{2.2.7}$$

We shall use further the estimation[2]

$$\max_{-1\leq x\leq +1}\sum_{\nu=1}^{n}|r_\nu(x)|<\pi^6 n \tag{2.2.8}$$

and that for a suitable positive[2] numerical c

$$\sum_{\nu=1}^{n}|r_\nu(0)|>cn, \tag{2.2.9}$$

further[2] that

$$\max_{-1\leq x\leq +1}\sum_{\nu=1}^{n}|\varrho_\nu(x)|\leq\frac{\pi^5}{n} \tag{2.2.10}$$

and[2] with the above c

$$\sum_{\nu=1}^{n}|\varrho_\nu(0)|>\frac{c}{n}. \tag{2.2.11}$$

We shall also repeatedly use MARKOV's and S. BERNSTEIN's inequalities, according to which for a polynomial $g(x)$ of degree $\leq m$ and real coefficients we have for $-1\leq x\leq +1$

$$|g'(x)|\leq m^2\max_{-1\leq x\leq +1}|g(x)| \tag{2.2.12}$$

and

$$|g'(x)|\leq\frac{m}{\sqrt{1-x^2}}\max_{-1\leq x\leq +1}|g(x)|, \tag{2.2.13}$$

respectively.

Further, for the fundamental functions $l_\nu(x)$ from (2.1.5) we have[9]

$$l_j(x)^2\leq\sum_{\nu=1}^{n}l_\nu(x)^2\leq 1 \tag{2.2.14}$$

$(-1\leq x\leq +1,\ n=4,6,8,\ldots,\ j=1,2,\ldots,n)$.

3. We shall need further something about the Hermite—Fejér interpolation based on our x_ν-points.[10] This is the polynomial of degree $\leq 2n-1$

[8] See G. SZEGŐ, l. c., p. 59, formula (4. 2. 1).

[9] L. FEJÉR, Bestimmung derjenigen Abszissen eines Intervalles, für welche die Quadratsumme der Grundfunktionen der Lagrangeschen Interpolation im Intervalle ein möglichst kleines Maximum besitzt, *Annali della Sc. Norm. Sup. di Pisa* (2), **1** (1932), pp. 3—16.

[10] L. FEJÉR, Lagrangesche Interpolation und die zugehörigen konjugierten Punkte, *Math. Annalen*, **106** (1932), pp. 1—55.

whose function values and *first* derivatives are prescribed numbers y_ν and y'_ν, respectively ($\nu=1,2,\ldots,n$). This polynomial is always uniquely determined and has the form

$$Q_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu h_\nu(x)+\sum_{\nu=1}^{n} y'_\nu \mathfrak{h}_\nu(x).$$

In particular, if the y_ν-values are values of a function $f(x)$, we write

$$H_n(f,x)=\sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu)h_\nu(x)+\sum_{\nu=1}^{n} y'_\nu \mathfrak{h}_\nu(x). \tag{2.3.1}$$

The polynomials $h_\nu(x)$ and $\mathfrak{h}_\nu(x)$ are of degree $\leqq 2n-1$ and

$$\sum_{\nu=1}^{n} h_\nu(x)\equiv 1 \tag{2.3.2}$$

holds; more generally, if $\varphi(x)$ is any polynomial of degree $\leqq 2n-1$, we have

$$\sum_{\nu=1}^{n} \varphi(x_\nu)h_\nu(x)+\sum_{\nu=1}^{n} \varphi'(x_\nu)\mathfrak{h}_\nu(x)\equiv\varphi(x). \tag{2.3.3}$$

As FEJÉR l. c.[10] proved, we have for $\nu=1,2,\ldots,n$ and $-1\leqq x\leqq +1$

$$h_\nu(x)\geqq 0. \tag{2.3.4}$$

§ 3. Investigation of the derivative of the fundamental functions of the second kind

1. In this § we shall estimate the quantity

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\varrho'_\nu(x)|.$$

It follows immediately from (2. 1. 1) and (1. 1. 4) that

$$\varrho'_1(x)=-\frac{1}{n^2(n-1)^2}\left\{\frac{\Pi_n(x)}{3}P'_{n-1}(x)-n(n-1)P_{n-1}(x)\left[1+\frac{1}{3}P_{n-1}(x)\right]\right\}$$

and using (2. 2. 4), (2. 2. 5) and (2. 2. 1)

$$|\varrho'_1(x)|<\frac{1}{2\sqrt{n}(n-1)}, \tag{3.1.1}$$

valid for $n=4,6,8,\ldots$ and $-1\leqq x\leqq +1$. The same holds for $|\varrho'_n(x)|$.

For the further fundamental functions we have the

LEMMA 3. 1. *For $n=4,6,8,\ldots$, $-1\leqq x\leqq +1$ we have for $2\leqq\nu\leqq\frac{n}{2}$*

$$|\varrho'_\nu(x)|\leqq 154\pi\frac{\nu}{n^{3/2}}+4\sqrt{\frac{\nu}{n}}\left(\int_{-1}^{1} l_\nu(t)^2dt\right)^{1/2}$$

and for $\frac{n}{2}+1 \leqq \nu \leqq n-1$

$$|\varrho_\nu'(x)| \leqq 154\pi \frac{n-\nu}{n^{3/2}} + 4\sqrt{\frac{n-\nu}{n}}\left(\int_{-1}^{1} l_\nu(t)^2 dt\right)^{1/2}.$$

PROOF. It is sufficient to consider the case $2 \leqq \nu \leqq \frac{n}{2}$. From (2.1.4), (1.1.4) we have

$$\varrho_\nu'(x) = \frac{1}{2\Pi_n'(x_\nu)P_{n-1}''(x_\nu)}\Bigg\{-n(n-1)P_{n-1}(x)\left(\int_1^x \frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_\nu}dt + \right.$$

(3.1.2)
$$+P_{n-1}(x)\left(-\frac{x_\nu}{1-x_\nu^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1-x_\nu^2)P_{n-1}(x_\nu)}\right)-$$

$$\left.-\left(\frac{1}{1-x_\nu^2}+\frac{1}{(1-x_\nu^2)P_{n-1}(x_\nu)}\right)\right)+$$

$$+\Pi_n(x)\left(\frac{P_{n-1}'(x)}{x-x_\nu}+P_{n-1}'(x)\left(-\frac{x_\nu}{1-x_\nu^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1-x_\nu^2)P_{n-1}(x_\nu)}\right)\right)\Bigg\}.$$

We split it into parts

(3.1.3)
$$J_1 = -\frac{n(n-1)P_{n-1}(x)}{2\Pi_n'(x_\nu)P_{n-1}''(x_\nu)}\int_1^x \frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_\nu}dt,$$

(3.1.4)
$$J_2 = \frac{n(n-1)}{2\Pi_n'(x_\nu)(1-x_\nu^2)P_{n-1}''(x_\nu)}\Bigg\{P_{n-1}(x)^2\left(x_\nu - \frac{1}{3P_{n-1}(x_\nu)}\right)+ + P_{n-1}(x)\left(1+\frac{1}{P_{n-1}(x_\nu)}\right)\Bigg\},$$

(3.1.5)
$$J_3 = \frac{\Pi_n(x)}{2\Pi_n'(x_\nu)P_{n-1}''(x_\nu)}\cdot\frac{P_{n-1}'(x)}{x-x_\nu},$$

(3.1.6)
$$J_4 = \frac{\Pi_n(x)P_{n-1}'(x)}{2\Pi_n'(x_\nu)P_{n-1}''(x_\nu)(1-x_\nu^2)}\left(\frac{1}{3P_{n-1}(x_\nu)}-x_\nu\right).$$

2. As to J_4 we have from (2.2.6) and (1.1.4)

$$J_4 = \frac{(1-x^2)P_{n-1}'(x)^2}{2n^2(n-1)^2P_{n-1}(x_\nu)^2}\cdot\frac{1-3x_\nu P_{n-1}(x_\nu)}{3P_{n-1}(x_\nu)}.$$

(2.2.5) and (2.2.13) give for $-1 \leqq x \leqq +1$

$$(1-x^2)P_{n-1}'(x)^2 \leqq (n-1)^2$$

and thus, using (2.2.5) and (2.2.7),

(3.2.1)
$$|J_4| \leqq 16\pi^{3/2}\frac{\nu^{3/2}}{n^2} \leqq 21\pi\frac{\nu}{n^{3/2}}.$$

For J_2 we have from (1. 1. 4), (2. 2. 6), (2. 2. 5)

$$|J_2| < \frac{2}{n(n-1)|P_{n-1}(x_\nu)|^3}$$

and hence from (2. 2. 7)

$$|J_2| < 72\pi^{3/2}\frac{\nu^{3/2}}{n^2} \leqq 94\pi\frac{\nu}{n^{8/2}}. \tag{3. 2. 2}$$

The estimation of $|J_1|$ and $|J_3|$ is much more difficult and needs another idea. We represent

$$\frac{P'_{n-1}(x)}{x-x_\nu}$$

which is a polynomial of degree $n-3$, as a Lagrange interpolatory polynomial taken at our x_j-numbers. With (2. 1. 5) we have

$$\frac{P'_{n-1}(x)}{x-x_\nu} = \frac{P'_{n-1}(1)}{1-x_\nu} l_1(x) + P''_{n-1}(x_\nu) l_\nu(x) - \frac{P'_{n-1}(-1)}{1+x_\nu} l_n(x). \tag{3. 2. 3}$$

Using this, (2. 2. 1) and (2. 2. 14) we obtain

$$\begin{aligned} |J_3| &\leqq \frac{|\Pi_n(x)|}{2|\Pi'_n(x_\nu)P''_{n-1}(x_\nu)|}\left(\frac{n(n-1)}{2(1-x_\nu)} + |P''_{n-1}(x_\nu)| + \frac{n(n-1)}{2(1+x_\nu)}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left|\frac{\Pi_n(x)}{\Pi'_n(x_\nu)}\right| + \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{|\Pi_n(x)|}{|\Pi'_n(x_\nu)|(1-x_\nu^2)|P''_{n-1}(x_\nu)|} < 7\pi\frac{\nu}{n^{3/2}}, \end{aligned} \tag{3. 2. 4}$$

using also (2. 2. 4), (1. 1. 4), (2. 2. 6) and (2. 2. 7). For J_1 we get from (3. 2. 3)

$$\int_1^x \frac{P'_{n-1}(t)}{t-x_\nu}dt = \frac{P'_{n-1}(1)}{1-x_\nu}\int_1^x l_1(t)dt + P''_{n-1}(x_\nu)\int_1^x l_\nu(t)dt - \frac{P'_{n-1}(-1)}{1+x_\nu}\int_1^x l_n(t)dt. \tag{3. 2. 5}$$

(2. 1. 5) and (1. 1. 4) give

$$\begin{aligned} \int_1^x l_1(t)dt &= \frac{1}{\Pi'_n(1)}\int_1^x \frac{\Pi_n(t)}{t-1}dt = \frac{1}{n(n-1)}\int_1^x (1+t)P'_{n-1}(t)dt = \\ &= \frac{1}{n(n-1)}\left\{(1+x)P_{n-1}(x) - 2 - \int_1^x P_{n-1}(t)dt\right\}, \end{aligned}$$

i. e. from (2. 2. 5)

$$\left|\int_1^x l_1(t)dt\right| \leqq \frac{6}{n(n-1)}, \tag{3. 2. 6}$$

and similarly

$$\left|\int_1^x l_n(t)dt\right| \leqq \frac{6}{n(n-1)}. \tag{3. 2. 7}$$

Since

$$\left|\int_1^x l_\nu(t)\,dt\right| \leqq \sqrt{1-x}\left(\int_{-1}^1 l_\nu(t)^2\,dt\right)^{1/2},$$

we have from this, (3. 1. 3), (3. 2. 5), (3. 2. 6), (3. 2. 7), (1. 1. 4), (2. 2. 1) and (2. 2. 6)

$$|J_1| \leqq \frac{n(n-1)\,|P_{n-1}(x)|}{2|\Pi_n'(x_\nu)P_{n-1}''(x_\nu)|}\left\{\frac{|P_{n-1}'(1)|}{1-x_\nu}\cdot\frac{6}{n(n-1)}+\frac{|P_{n-1}'(-1)|}{1+x_\nu}\cdot\frac{6}{n(n-1)}+\right.$$

$$\left.+|P_{n-1}''(x_\nu)|\sqrt{1-x}\left(\int_{-1}^1 l_\nu(t)^2\,dt\right)^{1/2}\right\} \leqq \frac{3|P_{n-1}(x)|}{n(n-1)P_{n-1}(x_\nu)^2}+$$

$$+\frac{\sqrt{1-x}\,|P_{n-1}(x)|}{2|P_{n-1}(x_\nu)|}\left(\int_{-1}^1 l_\nu(t)^2\,dt\right)^{1/2}.$$

(2. 2. 5) and (2. 2. 7) give

$$(3.\,2.\,8) \qquad |J_1| \leqq 32\pi\frac{\nu}{n^2}+\sqrt{2\pi\nu}\sqrt{(1-x)}\,|P_{n-1}(x)|\left(\int_{-1}^1 l_\nu(t)^2\,dt\right)^{1/2}.$$

(3. 1. 2), (3. 1. 3), (3. 1. 4), (3. 1. 5), (3. 1. 6), (3. 2. 1), (3. 2. 2), (3. 2. 4) and (3. 2. 8) give for $2 \leqq \nu \leqq \frac{n}{2}$, $-1 \leqq x \leqq +1$

$$(3.\,2.\,9) \qquad |\varrho_\nu'(x)| \leqq 154\pi\frac{\nu}{n^{3/2}}+\sqrt{2\pi(1-x)}\,|P_{n-1}(x)|\sqrt{\nu}\left(\int_{-1}^1 l_\nu(t)^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Actually, we shall use it only for $0 \leqq x \leqq 1$; for $-1 \leqq x \leqq 0$ we shall use the estimation

$$(3.\,2.\,10) \qquad |\varrho_\nu'(x)| \leqq 154\pi\frac{\nu}{n^{3/2}}+\sqrt{2\pi(1+x)}\,|P_{n-1}(x)|\sqrt{\nu}\left(\int_{-1}^1 l_\nu(t)^2\,dt\right)^{1/2}$$

which one obtains similarly but starting form the representation (2. 1. 3) instead of (2. 1. 4). Since for $0 \leqq x \leqq +1$ and for $-1 \leqq x \leqq 0$ we have

$$\sqrt{1-x}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}} \leqq \sqrt{1-x^2} \quad \text{and} \quad \sqrt{1+x} \leqq \sqrt{1-x^2},$$

respectively, (3. 2. 9) and (3. 2. 10) give for $-1 \leqq x \leqq +1$

$$|\varrho_\nu'(x)| \leqq 154\pi\frac{\nu}{n^{3/2}}+\sqrt{2\pi(1-x^2)}\,|P_{n-1}(x)|\sqrt{\nu}\left(\int_{-1}^1 l_\nu(t)^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Then (2. 2. 2) proves the lemma.

From this we easily obtain

LEMMA 3. 2. *We have for $n=4, 6, 8, \ldots$ and $-1 \leqq x \leqq +1$ the estimation*

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\varrho_\nu'(x)| < \pi^5 \sqrt{n}.$$

PROOF. From (3. 1. 1), (2. 2. 14) and Lemma 3. 1 it follows

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\varrho_\nu'(x)| \leqq \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} + 58\pi\sqrt{n} + \frac{8}{\sqrt{n}} \sum_{\nu=1}^{\frac{n}{2}} \sqrt{\nu} \left(\int_{-1}^{1} l_\nu(t)^2\, dt \right)^{1/2} \leqq 60\pi\sqrt{n} < \pi^5 \sqrt{n},$$

using SCHWARZ's inequality.

3. Next we show that Lemma 3. 2 is essentially best-possible. This will be shown by

LEMMA 3. 3. *For all sufficiently large even n's we have*

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\varrho_\nu'(1)| > c\sqrt{n}$$

with a positive numerical c.

PROOF. For $2 \leqq \nu \leqq \frac{n}{2}$ we have from (3. 1. 2), (1. 1. 5) and (1. 1. 4)

$$\varrho_\nu'(1) = \frac{n(n-1)}{2\Pi_n'(x_\nu) P_{n-1}''(x_\nu)} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(1-x_\nu^2) P_{n-1}(x_\nu)} + \frac{1+x_\nu}{1-x_\nu^2} \right),$$

i. e. using (2. 2. 6) and (1. 1. 4)

$$|\varrho_\nu'(1)| \geqq \frac{1}{2n(n-1) P_{n-1}(x_\nu)^2} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{|P_{n-1}(x_\nu)|} - 2 \right).$$

Since for all sufficiently large n's and $\left[\frac{n}{8}\right] \leqq \nu \leqq \left[\frac{n}{4}\right]$ we have

$$|P_{n-1}(x_\nu)| < \frac{1}{6},$$

we get for such ν's

$$|\varrho_\nu'(1)| \geqq \frac{1}{6n(n-1)|P_{n-1}(x_\nu)|^3}.$$

(2. 2. 2) gives then

$$|\varrho_\nu'(1)| > \frac{\pi}{12} \cdot \frac{\sqrt{n-1}}{n} (1-x_\nu^2)^{3/4},$$

i. e.

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\varrho_\nu'(1)| > \sum_{\nu=\left[\frac{n}{8}\right]}^{\left[\frac{n}{4}\right]} |\varrho_\nu'(1)| > c\sqrt{n}. \qquad \text{Q. e. d.}$$

Further we need the following

LEMMA 3.4. *Denoting by η_0 the smallest positive zero of $\Pi_n(x)$ we have for all sufficiently large even n's*

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\varrho'_\nu(\eta_0)| > c$$

with a numerical c.

PROOF. (2.1.3) gives for $2 \leqq \nu \leqq n-1$

$$\varrho'_\nu(\eta_0) = -\frac{n(n-1)P_{n-1}(\eta_0)}{2\Pi'_n(x_\nu)P''_{n-1}(x_\nu)}\left\{\int_{-1}^{\eta_0}\frac{P'_{n-1}(t)}{t-x_\nu}dt + \right.$$

$$\left. + \frac{P_{n-1}(\eta_0)}{1-x_\nu^2}\left(\frac{1}{3P_{n-1}(x_\nu)} - x_\nu\right) + \frac{1}{1-x_\nu^2}\left(\frac{1}{P_{n-1}(x_\nu)} - 3\right)\right\}. \tag{3.3.1}$$

Restricting again ν by $\left[\frac{n}{8}\right] \leqq \nu \leqq \left[\frac{n}{4}\right]$ we get from (2.2.5)

$$\left|\int_{-1}^{\eta_0}\frac{P'_{n-1}(t)}{t-x_\nu}dt\right| = \left|\left[\frac{P_{n-1}(t)}{t-x_\nu}\right]_{-1}^{\eta_0} + \int_{-1}^{\eta_0}\frac{P_{n-1}(t)}{(t-x_\nu)^2}dt\right| \leqq 20 \leqq \frac{20}{1-x_\nu^2}$$

and thus from (3.3.1), (2.2.5), (1.1.4) and (2.2.6)

$$|\varrho'_\nu(\eta_0)| \geqq \frac{n(n-1)|P_{n-1}(\eta_0)|}{2|\Pi'_n(x_\nu)|(1-x_\nu^2)|P''_{n-1}(x_\nu)|}\left\{\frac{1}{|P_{n-1}(x_\nu)|} - 3 - \frac{1}{3|P_{n-1}(x_\nu)|} - 21\right\} \geqq$$

$$\geqq \frac{|P_{n-1}(\eta_0)|}{(n-1)n|P_{n-1}(x_\nu)|^2}\left\{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{|P_{n-1}(x_\nu)|} - 12\right\} > \frac{|P_{n-1}(\eta_0)|}{6n(n-1)|P_{n-1}(x_\nu)|^3}$$

for all sufficiently large n's. Applying (2.2.7) and (2.2.2) we obtain with a numerical c

$$|\varrho'_\nu(\eta_0)| > \frac{c}{n}$$

and thus

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\varrho'_\nu(\eta_0)| \geqq \sum_{\nu=\left[\frac{n}{8}\right]}^{\left[\frac{n}{4}\right]} |\varrho'_\nu(\eta_0)| > \frac{c}{8}. \qquad \text{Q. e. d.}$$

§ 4. Investigation of the derivative of the fundamental functions of the first kind

1. We shall start with a general observation valid for any of our $r_\nu(x)$-polynomials. We represent it as an Hermite—Fejér interpolatory polynomial defined in (2. 3. 3). This gives owing to the definition of $r_\nu(x)$

$$r'_\nu(x) = \sum_{j=1}^{n} r'_\nu(x_j) h_j(x). \tag{4. 1. 1}$$

Using (2. 3. 2) and (2. 3. 4) we obtain

$$|r'_\nu(x)| \leqq \max_j |r'_\nu(x_j)|. \tag{4. 1. 2}$$

Actually, we have even

$$\max_{-1 \leqq x \leqq +1} |r'_\nu(x)| = \max_j |r'_\nu(x_j)|, \tag{4. 1. 3}$$

i. e. *all polynomials $r'_\nu(x)$ attain their absolute maxima with respect to $[-1, +1]$ at one of the x_j-points.*[11] The use of (4. 1. 2) consists obviously in the fact that we have only to estimate the numbers $|r'_\nu(x_j)|$ which are owing to our explicit formulae much easier.

2. We shall first prove

LEMMA 4. 1. *For $n = 4, 6, 8, \ldots$ and $-1 \leqq x \leqq +1$ we have*

$$|r'_1(x)| \leqq 4n^2,$$
$$|r'_n(x)| \leqq 4n^2.$$

PROOF. It is sufficient again to discuss the first. Owing to the remark (4. 1. 2) we have to estimate only

$$\max_j |r'_1(x_j)|.$$

For $2 \leqq j \leqq n$ we have from (2. 1. 6), using (1. 1. 4),

$$\begin{aligned} r'_1(x_j) = &-\frac{1-x_j^2}{4} l'_1(x_j)^2 - \\ &-\left(\frac{5}{16} + \frac{1}{8n(n-1)}\right) n(n-1) P_{n-1}(x_j) \left(1 + \frac{1}{3} P_{n-1}(x_j)\right). \end{aligned} \tag{4. 2. 1}$$

Since from (2. 2. 14) and (2. 2. 13) we have

$$(1-x_j^2) l'_1(x_j)^2 \leqq (n-1)^2,$$

[11] A similar remark holds instead of our x_ν-numbers for any point-system, which Fejér calls normal point-systems, supposed that for this system the (0, 2)-interpolation is uniquely determined. For the normal systems see [10].

(2.2.5) gives from (4.2.1)

$$|r_1'(x_j)| \leqq \frac{(n-1)^2}{4} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{4}{3} < n^2. \tag{4.2.2}$$

Further from (2.1.6)

$$r_1'(1) = \frac{1}{4} + \frac{5}{2} l_1'(1) - \left(\frac{5}{16} + \frac{1}{n(n-1)}\right) n(n-1) \frac{4}{3},$$

i. e. since from (2.2.14) and (2.2.12)

$$|l_1'(1)| \leqq (n-1)^2,$$

we obtain

$$|r_1'(1)| < 4n^2.$$

This and (4.2.2) prove Lemma 4.1.

To the further fundamental functions refers

LEMMA 4.2. *For* $n = 4, 6, 8, \ldots,\ -1 \leqq x \leqq +1$ *we have*

$$|r_\nu'(x)| \leqq 66\pi^{3/2} \frac{n^2}{\sqrt{\nu}} + 348\pi \frac{n^{5/2}}{\nu^{3/2}} \quad \textit{for} \quad 2 \leqq \nu \leqq \frac{n}{2},$$

$$|r_\nu'(x)| \leqq 66\pi^{3/2} \frac{n^2}{\sqrt{n-\nu}} + 348\pi \frac{n^{5/2}}{(n-\nu)^{3/2}} \quad \textit{for} \quad \frac{n}{2} < \nu \leqq n.$$

PROOF. It is sufficient again to consider the case $2 \leqq \nu \leqq \frac{n}{2}$; let first be $n \geqq 8$. We use again (4.1.2). The representation (2.1.8) gives for $j > \nu$, using also (1.1.4),

$$r_\nu'(x_j) = \frac{P_{n-1}(x_j)}{P_{n-1}(x_\nu)} \left\{ \int_{-1}^{x_j} \frac{l_\nu(t)}{(t-x_\nu)^2} dt - \left(\frac{1}{2} + \frac{P_{n-1}(x_j)}{6}\right) \frac{1}{(1-x_\nu^2) P_{n-1}(x_\nu)^2} \right\}, \tag{4.2.3}$$

and for $j < \nu$ from the representation (2.1.9)

$$r_\nu'(x_j) = \frac{P_{n-1}(x_j)}{P_{n-1}(x_\nu)} \left\{ \int_{1}^{x_j} \frac{l_\nu(t)}{(t-x_\nu)^2} dt + \left(\frac{1}{2} - \frac{P_{n-1}(x_j)}{6}\right) \frac{1}{(1-x_\nu^2) P_{n-1}(x_\nu)^2} \right\}, \tag{4.2.4}$$

respectively. Using (2.2.5), (2.2.14) we get for $j > \nu$

$$|r_\nu'(x_j)| \leqq \frac{1}{|P_{n-1}(x_\nu)|} \left\{ \frac{1}{x_\nu - x_{\nu+1}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(1-x_\nu^2) P_{n-1}(x_\nu)^2} \right\}. \tag{4.2.5}$$

But we have with an $x_{\nu+1} \leqq \lambda \leqq x_\nu$

$$\frac{1}{x_\nu - x_{\nu+1}} = \frac{l_\nu(x_\nu) - l_\nu(x_{\nu+1})}{x_\nu - x_{\nu+1}} = l_\nu'(\lambda) = |l_\nu'(\lambda)|,$$

i. e. using (2.2.14), (2.2.13) and[12] with the notation $x_\nu = \cos\vartheta_\nu$

$$\frac{1}{x_\nu - x_{\nu+1}} = \frac{n-1}{\sqrt{1-\lambda^2}} < \frac{n}{\sqrt{1-x_\nu^2}} = \frac{n}{\sin\vartheta_\nu} < \frac{\pi}{2}\cdot\frac{n}{\vartheta_\nu} < \frac{n^2}{2\nu-3} < 2\frac{n^2}{\nu}.$$

Putting it into (4.2.5) and using footnote [12] and (2.2.7) we get

$$|r_\nu'(x_j)| < 66\pi^{3/2}\frac{n^2}{\sqrt{\nu}}. \tag{4.2.6}$$

For the case $j<\nu$ we have to proceed analogously, starting, however, from (4.2.4) instead of (4.2.3). For $j=\nu$ we have[13] from (2.2.13) and footnote[12]

$$|r_\nu'(x_\nu)| \le 87\pi\sqrt{\frac{n}{\nu}}\cdot\frac{2n-1}{\sqrt{1-x_\nu^2}} < 348\pi\frac{n^{5/2}}{\nu^{3/2}}. \tag{4.2.7}$$

From (4.2.6), (4.2.7) and (4.1.2) our lemma evidently follows.

From Lemma 4.1 and 4.2 it follows evidently

LEMMA 4.3. *For $n=4,6,8,\dots$ and $-1\le x\le +1$ we have*

$$\sum_{\nu=1}^{n}|r_\nu'(x)| \le \pi^8 n^{5/2}.$$

In order to show that the estimation of Lemma 4.3 is essentially best-possible, we prove

LEMMA 4.4. *For all sufficiently large even n's we have*

$$\sum_{\nu=1}^{n}|r_\nu'(1)| > c n^{5/2}$$

with a positive numerical c.

PROOF. (4.2.4) gives for $2\le\nu\le\frac{n}{2}$

$$r_\nu'(1) = \frac{1}{3(1-x_\nu^2)P_{n-1}(x_\nu)^3}.$$

[12] Here we use the estimation $\vartheta_\nu > \left(\nu-\frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{n-1}$ for $0<\vartheta_\nu\le\frac{\pi}{2}$ which follows at once from BRUNS's well-known inequalities. See [2], formula (2.4.8).

[13] Here we use the estimation

$$|r_\nu(x)| \le 87\pi\sqrt{\frac{n}{\nu}} \quad \text{for} \quad 2\le\nu\le\frac{n}{2},$$

$$|r_\nu(x)| \le 87\pi\sqrt{\frac{n}{n-\nu}} \quad \text{for} \quad \frac{n}{2}<\nu\le n,$$

valid for $n=4,6,8,\dots$ and $-1\le x\le +1$, which is proved in [2] (Lemma 4.2).

Hence (2.2.2) gives with a numerical positive c

$$\sum_{\nu=1}^{n}|r_\nu'(1)|>\sum_{\nu=\left[\frac{n}{8}\right]}^{\left[\frac{n}{4}\right]}|r_\nu'(1)|>\frac{1}{3}\sum_{\nu=\left[\frac{n}{8}\right]}^{\left[\frac{n}{4}\right]}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{3/2}(n-1)^{3/2}\frac{1}{(1-x_\nu^2)^{1/4}}>cn^{5/2},$$

indeed.

Further we need the

LEMMA 4.5. *Denoting again by η_0 the smallest positive zero of $\Pi_n(x)$ we have for all sufficiently large even n's*

$$\sum_{\nu=1}^{n}|r_\nu'(\eta_0)|>cn^2$$

with a numerical c.

PROOF. From (4.2.3) we get for $\left[\frac{n}{8}\right]\leqq\nu\leqq\left[\frac{n}{4}\right]$

$$r_\nu'(\eta_0)=\frac{P_{n-1}(\eta_0)}{P_{n-1}(x_\nu)}\left\{\int_{-1}^{\eta_0}\frac{l_\nu(t)}{(t-x_\nu)^2}dt-\left(\frac{1}{2}+\frac{P_{n-1}(\eta_0)}{6}\right)\frac{1}{(1-x_\nu^2)P_{n-1}(x_\nu)^2}\right\}.$$

Hence, using (2.2.5) and (2.2.14),

$$(4.2.8)\quad \sum_{\nu=1}^{n}|r_\nu'(\eta_0)|>|P_{n-1}(\eta_0)|\sum_{\nu=\left[\frac{n}{8}\right]}^{\left[\frac{n}{4}\right]}\frac{1}{|P_{n-1}(x_\nu)|}\left\{\frac{1}{3(1-x_\nu^2)|P_{n-1}(x_\nu)|^2}-10\right\},$$

since for our ν's, for all sufficiently large n's,

$$\left|\int_{-1}^{\eta_0}\frac{l_\nu(t)}{(t-x_\nu)^2}dt\right|\leqq\frac{1}{x_\nu-\eta_0}<10.$$

Since owing to (2.2.2) we have for our ν's

$$\frac{1}{3(1-x_\nu^2)|P_{n-1}(x_\nu)|^2}>\frac{\pi}{6}\cdot\frac{n-1}{\sqrt{1-x_\nu^2}}>40,$$

if n is sufficiently large, this gives from (4.2.8)

$$\sum_{\nu=1}^{n}|r_\nu'(\eta_0)|>\frac{|P_{n-1}(\eta_0)|}{6}\sum_{\nu=\left[\frac{n}{8}\right]}^{\left[\frac{n}{4}\right]}\frac{1}{(1-x_\nu^2)|P_{n-1}(x_\nu)|^3}>c|P_{n-1}(\eta_0)|n^{5/2},$$

as in Lemma 4.4. Thus (2.2.7) completes the proof.

§ 5. Conclusion of the proofs

1. Owing to (1. 1. 9) Theorem I follows at once from (2. 2. 8) and (2. 2. 10). That Theorem I is essentially best-possible, is shown by the polynomial

$$f_0(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\operatorname{sign} r_\nu(0)\cdot r_\nu(x)+\sum_{\nu=1}^{n}\operatorname{sign}\varrho_\nu(0)\cdot\varrho_\nu(x)$$

for $x=0$ owing to (2. 2. 9) and (2. 2. 11).

Since from (1. 1. 9) we have

$$\pi'_{2n-1}(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\pi_{2n-1}(x_\nu)\,r'_\nu(x)+\sum_{\nu=1}^{n}\pi''_{2n-1}(x_\nu)\,\varrho'_\nu(x),$$

Theorem II follows at once from Lemma 3. 2 and 4. 3. That Theorem II is essentially best-possible, is shown by the polynomial

$$f_1(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\operatorname{sign} r'_\nu(1)\cdot r_\nu(x)+\sum_{\nu=1}^{n}\operatorname{sign}\varrho'_\nu(1)\cdot\varrho_\nu(x)$$

for $x=1$, owing to Lemma 3. 3 and Lemma 4. 4. That (1. 1. 11) is essentially best-possible, is shown by the polynomial

$$f_2(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\operatorname{sign} r'_\nu(\eta_0)\cdot r_\nu(x)+\sum_{\nu=1}^{n}\operatorname{sign}\varrho'_\nu(\eta_0)\cdot\varrho_\nu(x)$$

for $x=\eta_0$, owing to Lemma 3. 4 and Lemma 4. 5. Here η_0 stands for the least positive zero of $\Pi_n(x)$.

(Received 6 February 1958)

NOTES ON INTERPOLATION. V
(ON THE STABILITY OF INTERPOLATION)

By

E. EGERVÁRY and P. TURÁN (Budapest), members of the Academy

1. Let

(1.1) $$1 \geqq x_1 > x_2 > \cdots > x_n \geqq -1$$

be n points in $[-1, +1]$ and

(1.2) $$r_1(x), r_2(x), \ldots, r_n(x)$$

polynomials with the property

(1.3) $$r_\nu(x_j) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{for} \quad \begin{matrix} j = \nu, \\ j \neq \nu. \end{matrix}$$

Then for arbitrary real y_ν's we have for

(1.4) $$R_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu r_\nu(x)$$

the relations

(1.5) $$R_n(x_j) = y_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

The polynomial $R_n(x)$ we call an interpolatory polynomial, the points x_ν the n^{th} fundamental points, the polynomials $r_\nu(x)$ the n^{th} fundamental functions. A classical example is furnished by the Lagrange interpolation where with

(1.6) $$\omega(x) = \prod_{n=1}^{n} (x - x_\nu)$$

we have

(1.7) $$r_\nu(x) = \frac{\omega(x)}{\omega'(x_\nu)(x - x_\nu)} \equiv l_\nu(x),$$

i. e. all fundamental functions are of degree $n-1$. Another type of interpolatory polynomials is due to HERMITE and extensively investigated by FEJÉR, SZEGŐ and others; here is

(1.8) $$r_\nu(x) \equiv h_\nu(x) = \left(1 - \frac{\omega''(x_\nu)}{\omega'(x_\nu)}(x - x_\nu)\right) l_\nu(x)^2,$$

i. e. all fundamental functions are of degree $2n-1$. FEJÉR discovered that at certain choices of the n^{th} fundamental points his interpolatory polynomials

$$F_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu h_\nu(x)$$

have a remarkable stability property, whose importance for the study of experimentally given functions is obvious. This asserts that for any real y_ν and y_ν^* we have for $-1 \leqq x \leqq +1$

$$\min_\nu (y_\nu - y_\nu^*) \leqq \left(\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu h_\nu(x) - \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu^* h_\nu(x) \right) \leqq \max_\nu (y_\nu - y_\nu^*).$$

The Lagrange interpolation has according to a theorem of G. FABER[1] *never* such a stability property.[2] Generally we call the procedure (1.2) a stable one if for arbitrary real y_ν and y_ν^* we have for $-1 \leqq x \leqq +1$

$$(1.9) \qquad \min_\nu (y_\nu - y_\nu^*) \leqq \left(\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu r_\nu(x) - \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu^* r_\nu(x) \right) \leqq \max_\nu (y_\nu - y_\nu^*).$$

We define the degree $\deg R_n$ of the interpolation process (1.2) by

$$(1.10) \qquad \deg R_n = \sum_{\nu=1}^{n} \text{degree of } r_\nu(x).$$

In this note we intend to determine the "most economical" interpolation process, i. e. which is stable and $\deg R_n$ is minimal. In our solution essential role is played by the $n-2$ simple zeros

$$(1.11) \qquad (1 = \xi_1 >) \xi_2 > \xi_3 > \cdots > \xi_{n-1} (> \xi_n = -1)$$

of the $(n-2)^{th}$ Legendre polynomial $P_{n-2}(x)$ (which we always mean with the normalisation

$$(1.12) \qquad P_{n-2}(1) = 1$$

in the sequel). We assert namely the following

THEOREM I. *The minimal degree of a stable interpolation process* (1.2) *is*

$$2(2n-3) + (n-2)(2n-4) = 2(n-1)^2;$$

this is attained if and only if the fundamental points (1.1) *are given by*

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$$

in (1.11).

Hence our theorem gives a new interpolation-theoretical characterisation of the zeros of the Legendre polynomials. The first such characterisation was given by GAUSS and JACOBI with the aid of mechanical quadrature.

The most economical interpolation process is given by

$$(1.13) \qquad \begin{aligned} \bar{R}_n(x) &= y_1 \frac{1+x}{2} P_{n-2}(x)^2 + y_n \frac{1-x}{2} P_{n-2}(x)^2 + \\ &+ \sum_{k=2}^{n-1} y_k \frac{1-x^2}{1-\xi_k^2} \left(\frac{P_{n-2}(x)}{P'_{n-2}(\xi_k)(x-\xi_k)} \right)^2 \equiv \sum_{k=1}^{n} y_k \bar{r}_k(x). \end{aligned}$$

[1] Über die interpolatorische Darstellung stetiger Funktionen, *Jahresb. der Deutschen Math. Ver.*, **23** (1914).

[2] This was in the particular case of equidistant abscissae emphasized by H. HAHN. See his paper: Über das Interpolationsproblem, *Math. Zeitschrift*, **1** (1918), pp. 115—142.

2. The economicity of the interpolation process (1.13) shows itself also in other respects. In **7** we shall see how they give at once a proof of the classical inequality

$$|P_n(x)| \leqq 1 \tag{2.1}$$

for $-1 \leqq x \leqq +1$. More interesting is the comparison of the sequence

$$\begin{aligned} \bar{R}_n(x,f) &= f(1)\frac{1+x}{2}P_{n-2}(x)^2 + f(-1)\frac{1-x}{2}P_{n-2}(x)^2 + \\ &+ \sum_{k=2}^{n-1} f(\xi_k)\frac{1-x^2}{1-\xi_k^2}\left(\frac{P_{n-2}(x)}{P'_{n-2}(\xi_k)(x-\xi_k)}\right)^2 \equiv \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\bar{r}_{kn}(x) \end{aligned} \tag{2.2}$$

with that of the step-parabolae of FEJÉR

$$\bar{F}_{n-2}(x,f) = \sum_{k=2}^{n-1} f(\xi_k)\frac{1+\xi_k^2-2\xi_k x}{1-\xi_k^2}\left(\frac{P_{n-2}(x)}{P'_{n-2}(\xi_k)(x-\xi_k)}\right)^2; \tag{2.3}$$

$f(x)$ should stand for a function continuous for $-1 \leqq x \leqq +1$. The deg $\bar{F}_n(x,f)$ of this interpolation process is obviously $n(2n-1) > 2(n-1)^2$ and, as he proved,[3] the sequence $\bar{F}_n(x,f)$ converges to $f(x)$ uniformly in $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$, but *not* for $-1 \leqq x \leqq +1$, since it converges at $x = \pm 1$ curiously enough to

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\,dt. \tag{2.4}$$

In **6** we shall give the very short proof of the following

THEOREM II. *The sequence of interpolatory polynomials* (2.2) *converges uniformly in* $[-1, +1]$ *to* $f(x)$ *whenever* $f(x)$ *is continuous for* $-1 \leqq x \leqq +1$[4] *if* $n \to \infty$.

In an Appendix we shall give a very simple explanation of the phenomenon (2.4) of FEJÉR.

3. For the trigonometrical interpolation the corresponding stability problem was solved by D. JACKSON[5] and L. FEJÉR[6] to the effect that the

[3] L. FEJÉR, Über Interpolation, *Gött. Nachr.*, (1916), pp. 1—16.

[4] Actually a much stronger local theorem could have been stated.

[5] A formula of trigonometric interpolation, *Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo*, **37** (1914), p. 371.

[6] In a lecture of G. PÓLYA. See *Jahresb. der Deutschen Math. Ver.*, **22** (1913), Mitteilungen und Nachr., p. 206.

most economical trigonometrical interpolatory polynomial is given by

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\left(\frac{\sin\left(\dfrac{nx}{2}-k\pi\right)}{n\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{k\pi}{n}\right)}\right)^2 \equiv \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\bar{\varrho}_k(x). \tag{3.1}$$

Improving a result of D. QUILGHINI[7] we remark that if $0 \leqq \Theta \leqq \pi$, $0 \leqq \Phi \leqq 2\pi$ denote the spherical coordinates of a point P on the unit sphere, then with the polynomials $\bar{r}_k(x)$ from (2.2) and $\bar{\varrho}_k(x)$ from (3.1) the polynomials

$$\bar{R}_{mn}(\Theta, \Phi, F) = \sum_{\nu=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{n} F(\Theta_\nu, \Phi_\mu)\bar{r}_\nu(\cos\Theta)\varrho_\mu(\Phi) \tag{3.2}$$

converge for $m\to\infty$, $n\to\infty$ uniformly on the whole sphere to $F(P)$ whenever $F(P)$ is continuous on the whole sphere. We shall omit the simple proof.

The **7** shall also contain a remark on Legendre functions of the second kind. In a further note we shall return to the stability problem concerning infinite intervals. (See also the addendum.)

4. Next we turn to the proof of Theorem I. Let $1 \leqq k \leqq n$ and integer and we apply (1.9) with

$$y_k = 1,$$
$$y_\nu = 0 \quad \text{for} \quad \nu \neq k,$$

further

$$y_\nu^* = 0 \quad \text{for} \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

This gives at once that for $-1 \leqq x \leqq +1$ we have

$$0 \leqq r_k(x) \leqq 1. \tag{4.1}$$

Taking into account also (1.3) we obtain at once that if x_l $(l \neq k)$ lies in the *inside* of $[-1, +1]$, then $r_k(x)$ has at $x = x_l$ a zero of multiplicity $\geqq 2$. Thus if *all* points x_l are in the inside of $[-1, +1]$, the degrees of all $r_k(x)$'s are $\geqq 2n-2$, i. e.

$$\deg R_n \geqq n(2n-2) > 2(n-1)^2.$$

If e. g. $x_1 = 1$ and $x_n > -1$, then the degree of $r_1(x)$ is $\geqq 2n-2$ and the degrees of the other fundamental polynomials are at least $1+2(n-2) = 2n-3$, i. e.

$$\deg R_n \geqq (2n-2)+(n-1)(2n-3) > 2(n-1)^2$$

[7] Interpolazione di una funzione $F(P)$ continua nei punti P di una superficie sferica, *Boll. Un. Mat. Ital.* (3), **11** (1956), pp. 40—45.

again and similarly if $x_1 < 1$ and $x_n = -1$. Hence the relation $\deg R_n = 2(n-1)^2$ can only be true if

$$1 = x_1 > x_2 > \cdots > x_{n-1} > x_n = -1 \tag{4.2}$$

and putting

$$\prod_{k=2}^{n-1} (x - x_k) = \omega^*(x), \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} R_n(x) = y_1 \frac{1+x}{2} \left(\frac{\omega^*(x)}{\omega^*(1)}\right)^2 + \sum_{k=2}^{n-1} y_k \frac{1-x^2}{1-x_k^2} \left(\frac{\omega^*(x)}{\omega^{*\prime}(x_k)(x-x_k)}\right)^2 + \\ + y_n \frac{1-x}{2} \left(\frac{\omega^*(x)}{\omega^*(-1)}\right)^2. \end{aligned} \tag{4.4}$$

But from (4.1) and (1.3) it follows also

$$r_k'(x_k) = 0 \quad \text{for} \quad k = 2, 3, \ldots, n-1. \tag{4.5}$$

Deriving three-times the identity

$$(x - x_k)^2 r_k(x) = \frac{1-x^2}{1-x_k^2} \left(\frac{\omega^*(x)}{\omega^{*\prime}(x_k)}\right)^2$$

at $x = x_k$ we get from (4.5) and (4.2)

$$0 = (1 - x_k^2)\, \omega^{*\prime\prime}(x_k) - 2 x_k \omega^{*\prime}(x_k) \qquad (k = 2, 3, \ldots, n-1).$$

Hence the polynomial

$$(1 - x^2)\, \omega^{*\prime\prime}(x) - 2x\, \omega^{*\prime}(x)$$

of degree $n-2$ has the same zeros as $\omega^*(x)$ itself and thus

$$(1 - x^2)\, \omega^{*\prime\prime}(x) - 2x\, \omega^{*\prime}(x) + C\omega^*(x) = 0$$

with a C independent of x. As well known, then it follows $C = (n-1)(n-2)$ and

$$\omega^*(x) = P_{n-2}(x).$$

Hence the necessity-part of Theorem I is already proved.

5. Owing to the non-negativity of the fundamental functions $\bar{r}_k(x)$ in (1.13) the sufficiency-part will be an easy consequence of the identity

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{r}_k(x) \equiv 1. \tag{5.1}$$

But this follows at once from the fact that the polynomial

$$-1 + \sum_{k=1}^{n} \bar{r}_k(x)$$

is of degree $\leqq 2n-3$, vanishes for $x = \xi_1, \ldots, \xi_n$ and for $x = \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ at least doubly. Hence the proof of Theorem I is completed.

6. Next we turn to the proof of Theorem II. Owing to (5. 1) we may write

$$\bar{R}_n(x,f)-f(x)=\sum_{\nu=1}^{n}(f(\xi_\nu)-f(x))\,\bar{r}_{\nu n}(x). \tag{6. 1}$$

Let for $-1\leqq x\leqq +1$ be

$$|f(x)|\leqq M \tag{6. 2}$$

and for the fixed x-place with an arbitrary small positive ε and $|x'-x|\leqq\delta\,(<1)$

$$|f(x')-f(x'')|\leqq\varepsilon. \tag{6. 3}$$

From (6. 1), (6. 2), (6. 3), (5. 1) and the non-negativity of the fundamental functions $r_{\nu n}(x)$ we have

$$|\bar{R}_n(x,f)-f(x)|\leqq\varepsilon+2M\sum_{|\xi_\nu-x|>\delta}{}_{\nu}\;\bar{r}_{\nu n}(x). \tag{6. 4}$$

Taking (1. 13) into account we have for $-1+\delta<x<1-\delta$

$$\sum_{|\xi_\nu-x|>\delta}{}_{\nu}\;\bar{r}_{\nu n}(x)<(1-x^2)\,P_{n-2}(x)^2\,\frac{1}{\delta^2}\left\{1+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(1-\xi_k^2)\,P'_{n-2}(\xi_k)^2}\right\}, \tag{6. 5}$$

further for $1-\delta\leqq x\leqq 1$ or for $-1\leqq x\leqq -1+\delta$

$$\sum_{|\xi_\nu-x|>\delta}{}_{\nu}\;\bar{r}_{\nu n}(x)<(1-x^2)\,P_{n-2}(x)^2\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{\delta^2}\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(1-\xi_k^2)\,P'_{n-2}(\xi_k)^2}\right\}. \tag{6. 6}$$

But writing out (5. 1) explicitly by the aid of (1. 13) we obtain

$$P_{n-2}(x)^2+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1-x^2}{1-\xi_k^2}\,\frac{P_{n-2}(x)^2}{P'_{n-2}(\xi_k)^2(x-\xi_k)^2}=1 \tag{6. 7}$$

and thus taking the coefficient of the highest power of x we get[8]

$$\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(1-\xi_k^2)\,P'_{n-2}(\xi_k)^2}=1.$$

This, (6. 4), (6. 5) and (6. 6) give together

$$|\bar{R}_n(x,f)-f(x)|\leqq\varepsilon+\frac{4M}{\delta^2}(1-x^2)\,P_{n-2}(x)^2. \tag{6. 8}$$

Taking into account that according to S. Bernstein's inequality[9]

$$|P_{n-2}(x)|\leqq\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{(n-2)}\,(1-x^2)^{1/4}}$$

[8] The same identity was derived by Fejér l. c. from his step-parabola and used in his convergence-proof too.

[9] Sur les polynômes orthogonaux relatifs à un segment fini, *Journ. de Math.* (9), **9** (1930) and **10** (1931), pp. 219—286, especially p. 236.

for $-1 \leqq x \leqq +1$, we obtain finally from (6.8)

$$|\bar{R}_n(x,f)-f(x)| \leqq \varepsilon + \frac{8}{\pi}\frac{M}{\delta^2}\frac{1}{(n-2)} \leqq 2\varepsilon,$$

if only

$$n \geqq 2+\frac{8}{\pi}\frac{M}{\delta^2 \varepsilon}. \qquad \text{Q. e. d.}$$

7. The formula (6.7) deserves a slight attention. It can be written in the form — replacing n by $n+2$ and the numbers ξ_k by the ξ_{kn}-zeros of $P_n(x)$ —

$$1-P_n(x)^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1-x^2}{1-\xi_{kn}^2} \frac{P_n(x)^2}{P_n'(\xi_{kn})^2 (x-\xi_{kn})^2}, \tag{7.1}$$

which puts into evidence the well-known fact that for $-1 \leqq x \leqq +1$ the inequality

$$|P_n(x)| \leqq 1$$

and for $x \geqq 1$

$$P_n(x) \geqq 1$$

holds. A similar but perhaps more complicated identity given by G. SZEGŐ[10]

$$P_n(x)^2 + 2\sum_{k=1}^{n} (1-x^2)^k \frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2 \ldots (n+k)^2} \left(\frac{d^k P_n(x)}{dx^k}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{1-\cos^2 \vartheta (1-x^2)\}^n d\vartheta$$

can serve the same purpose. Another consequence of (7.1) worth-while mentioning is the inequality

$$|P_n(x)| \leqq \sqrt{\frac{1-\xi_{kn}^2}{1-x^2}} |P_n'(\xi_{kn})| |x-\xi_{kn}|, \tag{7.2}$$

valid for $-1 \leqq x \leqq +1$ and $k=1, 2, \ldots, n$.

Secondedly dividing in (7.1) by $(1-x^2)P_n(x)^2$ we get the identity

$$\frac{1}{(1-x^2)P_n(x)^2} = \frac{1}{1-x^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1-\xi_{kn}^2) P_n'(\xi_{kn})^2} \cdot \frac{1}{(x-\xi_{kn})^2}. \tag{7.3}$$

This can be used to give a simple representation of the Legendre function of the second kind $Q_n(x)$. We start from the representation

$$Q_n(x) = P_n(x) \int_x^{\infty} \frac{dt}{(1-t^2) P_n(t)^2}. \tag{7.4}$$

[10] Ein Beitrag zur Theorie der Polynome von Laguerre und Jacobi, *Math. Zeitschrift*, 1 (1918), pp. 341—356.

It is well known that $Q_n(x)$ can be written in the form

(7.5) $$Q_n(x) = \frac{1}{2} P_n(x) \log \frac{1+x}{1-x} + \pi_{n-1}(x),$$

where $\pi_{n-1}(x)$ stands for a polynomial of degree $n-1$. Now replacing the representation (7.3) into (7.4) we obtain

$$Q_n(x) = P_n(x) \int_x^\infty \frac{dt}{1-t^2} + P_n(x) \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1-\xi_{kn}^2)\, P_n'(\xi_{kn})^2} \int_x^\infty \frac{dt}{(t-\xi_{kn})^2} =$$

$$= \frac{1}{2} P_n(x) \log \frac{1+x}{1-x} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1-\xi_{kn}^2)\, P_n'(\xi_{kn})^2} \frac{P_n(x)}{x-\xi_{kn}}.$$

Comparing this with (7.5) we obtained the representation

(7.6) $$\pi_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1-\xi_{kn}^2)\, P_n'(\xi_{kn})^2} \frac{P_n(x)}{x-\xi_{kn}}.$$

*

Added in proof (1 December 1958). In a conversation with G. SZEGŐ he suggested the possibility of a new identity concerning the Bessel function $J_0(z) = \sum_{\nu=0}^\infty \frac{(-1)^\nu}{\nu!^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu}$ by a passage to limit from (7.1). One could deduce, indeed, in this way *elementarily* the interesting identity

$$1 - J_0(z)^2 = 4z^2 J_0(z)^2 \sum_{\nu=1}^\infty \frac{1}{J_0'(\lambda_\nu)^2 (z^2-\lambda_\nu^2)^2}$$

where λ_ν runs over the positive zeros of $J_0(z)$. To the general function-theoretical background of this formula we shall return elsewhere.

Appendix

As mentioned after (2.4), we shall compare our polynomial $\bar{R}_n(x,f)$ with FEJÉR's step-parabola in (2.3). Writing shortly

$$\frac{1}{(1-\xi_k^2)\, P_{n-2}'(\xi_k)^2} = g_k \qquad (k = 2, 3, \ldots, n-1)$$

we have

$$\bar{F}_{n-2}(x,f) = \sum_{k=2}^{n-1} f(\xi_k) g_k (1 - 2\xi_k x + \xi_k^2) \left(\frac{P_n(x)}{x-\xi_k}\right)^2 =$$

$$= \sum_{k=2}^{n-1} f(\xi_k) g_k \{(1-x^2) + (x-\xi_k)^2\} \left(\frac{P_{n-2}(x)}{x-\xi_k}\right)^2 = P_{n-2}(x)^2 \sum_{k=2}^{n-1} f(\xi_k) g_k +$$

$$+\sum_{k=2}^{n-1} f(\xi_k)\, g_k (1-x^2) \frac{P_{n-2}(x)^2}{(x-\xi_k)^2} = \frac{1+x}{2} P_{n-2}(x)^2 \left(\sum_{k=2}^{n-1} f(\xi_k)\, g_k\right) +$$

$$+\sum_{k=2}^{n-1} f(\xi_k) \frac{1-x^2}{1-\xi_k^2} \left(\frac{P_{n-2}(x)}{P'_{n-2}(\xi_k)(x-\xi_k)}\right)^2 + \frac{1-x}{2} P_{n-2}(x)^2 \left(\sum_{k=2}^{n-1} f(\xi_k)\, g_k\right)$$

and thus

$$\bar{F}_{n-2}(x,f) = \left(\sum_{k=2}^{n-1} g_k f(\xi_k)\right) \bar{r}_1(x) + \sum_{k=2}^{n-1} f(\xi_k)\, \bar{r}_k(x) + \left(\sum_{k=2}^{n-1} g_k f(\xi_k)\right) \bar{r}_n(x).$$

Hence FEJÉR's $(n-2)^{th}$ step-parabola is identical with our $\bar{R}_n(x,f)$ *if for* $x = \pm 1$ *instead of* $f(\pm 1)$ *the value*

$$\sum_{k=2}^{n-1} f(\xi_k)\, g_k$$

is prescribed. Since, as well known,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n-1} f(\xi_k) g_k = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(t)\, dt$$

and generally

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(t) dt \neq f(\pm 1),$$

the convergence of FEJÉR's step-parabolae is generally not uniform in the whole interval $[-1, +1]$.

(Received 30 June 1958)

ÜBER EIN PROBLEM VON K. ZARANKIEWICZ

Von

I. REIMAN (Budapest)

(*Vorgelegt von* P. TURÁN)

1. K. ZARANKIEWICZ stellte die folgende Frage: Es sei A_n eine Matrix mit n Zeilen und n Spalten, dessen Elemente nur 0-en und 1-er sind. Mindestens wieviel 1-er muß A_n enthalten, damit darin gewiß ein aus lauter 1-ern bestehender Minor zweiter Ordnung M_2 vorhanden sei [1].

Wir bezeichnen mit $k_2(n)$ die kleinste Zahl der 1-er, bei welcher A_n schon gewiß wenigstens einen Minor M_2 enthält. S. HARTMAN, J. MYCIELSKI und C. RYLL-NARDZEWSKI [2] haben

$$c_1 n^{4/3} < k_2(n) < c_2 n^{3/2}$$

bewiesen, wo c_1 und c_2 Konstanten sind. T. KŐVÁRI, VERA T. SÓS und P. TURÁN [3] haben

$$k_2(n) < 1 + 2n + [n^{3/2}] \tag{1.1}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_2(n)}{n^{3/2}} = 1$$

bewiesen.

Es sei $A_{n_1 n_2}$ eine Matrix mit n_1 Zeilen und n_2 Spalten, dessen Elemente nur 0-en und 1-er sind, und sei $k_2(n_1, n_2)$ die kleinste Anzahl der 1-er, bei welcher $A_{n_1 n_2}$ schon einen Minor M_2 enthalten muß. In [3] ist für $n_1 = p^2 + p$, $n_2 = p^2$ (p prim)

$$k_2(p^2+p, p^2) = p^2(p+1) + 1 \tag{1.2}$$

bewiesen werden.

Im folgenden beweisen wir unter Anwendung des in [3] benützten Gedankenganges, daß

$$k_2(n_1, n_2) \leqq \frac{1}{2}\left(n_1 + \sqrt{n_1^2 + 4n_1 n_2(n_2 - 1)}\right) + 1 \tag{1.3}$$

ist, was bei $n_1 = n_2 = n$ in die Ungleichung

$$k_2(n) \leqq \frac{1}{2}\left(n + n\sqrt{4n-3}\right) + 1 \tag{1.4}$$

übergeht. Dies ist etwas genauer als (1. 1). Mit Hilfe geometrischer Überlegungen geben wir schließlich unendlich viele solche Wertepaare (n_1, n_2) bzw. Werte n an, bei welchen in (1. 3) bzw. in (1. 4) Gleichheit zutrifft.

2. Zum Beweise von (1. 3) führen wir

$$s = \frac{1}{2}\left(n_1 + \sqrt{n_1^2 + 4n_1 n_2(n_2-1)}\right) \tag{2. 1}$$

ein, das die Gleichung

$$(s-n_1)s = n_1 n_2(n_2-1) \tag{2. 2}$$

erfüllt. Wir bezeichnen durch l_ν die Anzahl der 1-er in der ν-ten Zeile von $A_{n_1 n_2}$ und nehmen an, daß für die Anzahl der 1-er in $A_{n_1 n_2}$ die Ungleichung

$$\sum_{\nu=1}^{n_1} l_\nu > s \tag{2. 3}$$

gilt. Wir beweisen, daß unter dieser Voraussetzung ein Minor M_2 aus $A_{n_1 n_2}$ auswählbar ist.

Es seien $m_1, m_2, \ldots, m_{l_\nu}$ die Indizes der die 1-er der ν-ten Zeile enthaltenden Spalten. Aus diesen können $\binom{l_\nu}{2}$ Zahlenpaare ausgewählt werden. Die Gültigkeit der Ungleichung

$$\sum_{\nu=1}^{n_1} \binom{l_\nu}{2} > \binom{n_2}{2} \tag{2. 4}$$

ist eine hinreichende Bedingung dafür, daß $A_{n_1 n_2}$ einen Minor M_2 enthält. Für die nichtnegativen l_ν besteht die Ungleichung

$$\sum_{\nu=1}^{n_1} l_\nu^2 \geqq \frac{1}{n_1}\left(\sum_{\nu=1}^{n_1} l_\nu\right)^2,$$

und folglich ist

$$\sum_{\nu=1}^{n_1} \binom{l_\nu}{2} = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n_1} l_\nu^2 - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n_1} l_\nu \geqq \frac{1}{2n_1}\left(\sum_{\nu=1}^{n_1} l_\nu\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n_1} l_\nu .$$

Hieraus ergibt sich wegen (2. 3) und (2. 2)

$$\sum_{\nu=1}^{n_1} \binom{l_\nu}{2} \geqq \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n_1} l_\nu \left(\frac{1}{n_1}\sum_{\nu=1}^{n_1} l_\nu - 1\right) > \frac{s}{2}\cdot\frac{s-n_1}{n_1} = \frac{n_2(n_2-1)}{2} = \binom{n_2}{2},$$

womit wir (1. 3) bewiesen haben.

3. Wir nennen die Matrix $A_{n_1 n_2}$ gesättigt, wenn aus ihr einerseits kein Minor M_2 auswählbar ist, andererseits aber dies ermöglicht wird, sobald man die Anzahl ihrer 1-er mit Eins vermehrt. Es ist offenbar, daß jede Matrix

$A_{n_1 n_2}$ gesättigt ist, aus der kein Minor M_2 auswählbar ist, und dabei die Anzahl ihrer 1-er gleich $[s]$ ist. Ist in einem solchen Falle s ganz, so gilt für das entsprechende Wertepaar (n_1, n_2) in (1. 3) das Gleichheitszeichen, d. h. es ist

$$k_2(n_1, n_2) = \frac{1}{2}\left(n_1 + \sqrt{n_1^2 + 4n_1 n_2(n_2 - 1)}\right) + 1. \tag{3.1}$$

Um gesättigte Matrizen zu konstruieren, betrachten wir den r-dimensionalen endlichen projektiven Raum über einem endlichen Körper der Ordnung

$$N = p^\alpha \qquad (p \text{ prim}).$$

Die Punkte dieses Raumes sind die aus Körperelementen bestehenden $r+1$-tupeln $(x_1, x_2, \ldots, x_{r+1})$ (nicht alle x_i gleich 0). Die Punkte $\mathbf{x}(x_1, x_2, \ldots, x_{r+1})$ und $\mathbf{y}(y_1, y_2, \ldots, y_{r+1})$ sind dann und nur dann identisch, wenn es ein Körperelement λ gibt, für welches

$$x_i = \lambda y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r+1)$$

gilt. Die Menge der Punkte

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_{t+1} \mathbf{a}_{t+1} \qquad (t < r)$$

wird als t-dimensionaler Unterraum bezeichnet, wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{t+1}$ Körperelemente und $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{t+1}$ linear unabhängige Punkte des Raumes sind. Die eindimensionalen Unterräume heißen Geraden. Eine beliebige Gerade des r-dimensionalen Raumes befindet sich entweder gänzlich in einem bestimmten $r-1$-dimensionalen Unterraum, oder hat mit ihm genau einen Punkt gemein. Zu zwei Punkten gehört eine und nur eine Gerade und zwei Geraden können höchstens einen gemeinsamen Punkt besitzen.

Jede Gerade hat $N+1$ Punkte. Ein t-dimensionaler Unterraum kann gewonnen werden, indem man jeden Punkt eines $t-1$-dimensionalen Unterraumes mit einem nicht zugehörigen Punkt verbindet; die Gesamtheit der Punkte der Verbindungsgeraden bildet einen t-dimensionalen Unterraum. So kann man, z. B. durch vollständige Induktion, einsehen, daß die Punkteanzahl des t-dimensionalen Unterraumes

$$\frac{N^{t+1} - 1}{N - 1},$$

und die Punkteanzahl n_2 des r-dimensionalen projektiven Raumes

$$n_2 = \frac{N^{r+1} - 1}{N - 1} \tag{3.2}$$

ist. Es sei nun n_1 die Geradenanzahl des r-dimensionalen Raumes. Mit Rücksicht darauf, daß jede Gerade $N+1$ Punkte hat, gilt

$$n_1 = \binom{n_2}{2} : \binom{N+1}{2} = \frac{(N^{r+1}-1)(N^r-1)}{(N^2-1)(N-1)}. \tag{3. 3}$$

Wir konstruieren nun die Inzidenzmatrix $I_{n_1 n_2}$ der Geraden und Punkte des Raumes. Die Zeilen von $I_{n_1 n_2}$ entsprechen den Geraden und die Spalten den Punkten. Ein Element der Martix ist genau dann gleich 1, wenn die seiner Zeile entsprechende Gerade den seiner Spalte entsprechenden Punkt enthält. Die so gewonnene Matrix ist gesättigt, d. h. es kann aus ihr kein Minor M_2 ausgewählt werden, da dies bedeuten würde, daß zwei Geraden zwei verschiedene gemeinsame Punkte haben. Ferner ist die Anzahl der in $I_{n_1 n_2}$ befindlichen 1-er $n_1(N+1)$, da in jeder Zeile $N+1$ 1-er sind. Diese Anzahl ist genau der unseren in (3. 3) und (3. 2) angegebenen Werten n_1, und n_2 laut (2. 1) entsprechende Wert s, wie dies durch Einsetzen leicht bestätigt werden kann. Damit haben wir das Bestehen von (3. 1) bewiesen.

Ist $r=2$, dann ist

$$n_1 = n_2 = n = N^2 + N + 1 = p^{2\alpha} + p^\alpha + 1. \tag{3. 4}$$

In diesem Falle gilt also

$$k_2(n) = \frac{1}{2}\left(n + n\sqrt{4n-3}\right) + 1. \tag{3. 5}$$

Gesättigte Inzidenzmatrizen werden auch durch r-dimensionale endliche affine Räume geliefert. Läßt man aus dem r-dimensionalen projektiven Raum einen $r-1$-dimensionalen Unterraum weg, so erhält man einen r-dimensionalen affinen Raum. Auf Grund obiger Überlegungen gilt für die Geradenanzahl n_1 bzw. Punkteanzahl n_2 des r-dimensionalen affinen Raumes

$$n_1 = \frac{N^{r-1}(N^r-1)}{N-1}, \qquad n_2 = N^r. \tag{3. 6}$$

Die Anzahl der Punkte auf jeder Geraden ist nun gleich N. Die Matrix $I_{n_1 n_2}$ hat somit $n_1 N$ 1-er, und das ist wiederum der durch (2. 1) angegebene Wert s, was durch Einsetzen der Werte (3. 6) bestätigt werden kann. Laut (3. 1) gilt dann in diesem Falle

$$k_2(n_1, n_2) = \frac{N^r(N^r-1)}{N-1} + 1. \tag{3. 7}$$

Ist $N=p, r=2$, so ergibt (3. 7) eben das Ergebnis (1. 2).

Endlich sei als Beispiel die Inzidenzmatrix des zweidimensionalen projektiven Raumes, d. h. der projektiven Ebene mit 5 Punkten auf jeder Geraden, also der Spezialfall $N=2^2, r=2, n=21$ angegeben. Die gestrichelt abgegrenzte Teilmatrix ist die Inzidenzmatrix der affinen Ebene mit 4 Punkten auf jeder Geraden.

$$
\left(\begin{array}{ccccc|cccccccccccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cline{6-21}
1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\
\cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\
\cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot
\end{array}\right)
$$

(Eingegangen am 6. März 1958.)

Literaturverzeichnis

[1] K. Zarankiewicz, Problème 101, *Coll. Math.*, **2** (1951), S. 301.

[2] S. Hartman, J. Mycielski et C. Ryll-Nardzewski, Systèmes spéciaux de points à coordonnées entières, *Coll. Math.*, **3** (1954), S. 84—85. (Bericht über die Tagung der Poln. Math. Gesellschaft in Wroclaw am 20. September 1951.)

[3] T. Kővári, Vera T. Sós and P. Turán, On a problem of K. Zarankiewicz, *Coll. Math.*, **3** (1954), S. 50—57.

SUR LES SOMMES DE PUISSANCES DES NOMBRES COMPLEXES

Par

S. UCHIYAMA (Sapporo, Japon)

(*Présenté par* P. TURÁN)

1. Étant donné un nombre naturel n, nous désignerons par M_n la quantité

$$\min_{(z_1, z_2, \ldots, z_n)} \max_{1 \leqq \nu \leqq n} \frac{|z_1^\nu + z_2^\nu + \cdots + z_n^\nu|}{(\max\limits_{1 \leqq j \leqq n} |z_j|)^\nu}$$

où le minimum est évalué sur tous ensembles $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ de n nombres complexes. M. P. TURÁN[1] a démontré qu'on a

$$M_n > \frac{\log 2}{\sum\limits_1^n \frac{1}{\nu}}$$

pour tout $n \geqq 1$. Cette inégalité peut s'améliorer considérablement, quand n est un nombre assez grand. En effet, M. N. G. DE BRUIJN[2] a établi qu'il existe une constante numérique $C > 0$ telle que

$$M_n > C \frac{\log \log n}{\log n} \tag{1}$$

pour tout n assez grand.

L'objet de la présente note est de donner une démonstration de l'inégalité (1), en montrant qu'on peut prendre $1-\varepsilon$ pour la constante C, quel que soit le nombre positif ε: on note que la démonstration originale[2] de (1) n'a pas affirmé la possibilité de prendre C supérieure à $\frac{1}{2}$. Par exemple, on a

$$M_n > \frac{2}{3} \cdot \frac{\log \sum\limits_1^n \frac{1}{\nu}}{\sum\limits_1^n \frac{1}{\nu}} \tag{2}$$

pour tout $n \geqq 1$, ce qui est meilleure pour $n \geqq 9$ que l'inégalité de M. TURÁN mentionnée ci-dessus.

[1] P. TURÁN, *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen* (Budapest, 1953).

[2] P. TURÁN, *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen*, édition chinoise (Peking, 1956).

Ce m'est un vif plaisir de pouvoir présenter ici l'expression de ma profonde reconnaissance à M. P. TURÁN pour tout l'intérêt qu'il m'a porté avec la plus aimable bienveillance et pour ses remarques très précieuses. Ma gratitude s'adresse également à M. N. G. DE BRUIJN qui m'a montré complaisamment son témoignage pour (1).

2. Soit donné un ensemble $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ de n nombres complexes quelconques, tel que

$$1 = z_1 \geqq |z_2| \geqq \cdots \geqq |z_n|.$$

Posons $s_\nu = z_1^\nu + z_2^\nu + \cdots + z_n^\nu$. Pour démontrer notre inégalité (1) ou (2) il suffit évidemment de montrer que

$$M \cdot e\left(M \sum_1^n \frac{1}{\nu}\right) > 1 \tag{3}$$

pour les $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ envisagés où $M = \max_{1 \leqq \nu \leqq n} |s_\nu|$ et $e(x) = e^x$. En effet, (1) est une conséquence immédiate de (3): quant à (2) on notera seulement que $\log x \leqq \frac{x}{2}$ pour $x \geqq 1$.

Nous posons $f(z) = \prod_{j=1}^n (1 - z_j z)$: évidemment $f(1) = 0$. En suivant la méthode de M. DE BRUIJN, on considère l'expression

$$e\left(-\sum_{\nu=1}^\infty \frac{s_\nu}{\nu} z^\nu\right) = f(z) \qquad (|z| < 1).$$

On a alors

$$e\left(-\sum_{\nu=1}^n \frac{s_\nu}{\nu} z^\nu\right) \equiv \sum_{j=0}^\infty a_j(s_1, \ldots, s_n) z^j = f(z) + \sum_{j \geqq n+1} a_j(s_1, \ldots, s_n) z^j,$$

ce qui est toujours valable sans restriction à z: donc, en y posant $z = 1$ et en prenant le module, on obtient d'une part

$$\left|\sum_{j \geqq n+1} a_j(s_1, \ldots, s_n)\right| \geqq e\left(-M \sum_1^n \frac{1}{\nu}\right).$$

D'autre part, la fonction $a_j(t_1, \ldots, t_n)$ est pour chaque j un polynôme en $t_1, \ldots, t_n$ dont les coefficients, étant universels, deviendraient non négatifs, si l'on remplaçait $t_1, \ldots, t_n$ par $-t_1, \ldots, -t_n$. On a donc

$$\left|\sum_{j \geqq n+1} a_j(s_1, \ldots, s_n)\right| \leqq \sum_{j \geqq n+1} \left|a_j(s_1, \ldots, s_n)\right| \leqq \sum_{j \geqq n+1} a_j(-M, \ldots, -M) =$$

$$= e\left(M \sum_1^n \frac{1}{\nu}\right) - \binom{M+n}{n},$$

puisque

$$\sum_{j=0}^n a_j(-M, \ldots, -M) = \sum_{j=0}^n \binom{M+j-1}{j} = \binom{M+n}{n}.$$

Or, on peut supposer sans rien perdre de la généralité que $M < 1$: on a ainsi

$$\binom{M+n}{n} = \prod_{\nu=1}^{n}\left(1+\frac{M}{\nu}\right) = e\left(M\sum_{1}^{n}\frac{1}{\nu} - \sum_{1}^{n}\left(\frac{M}{\nu} - \log\left(1+\frac{M}{\nu}\right)\right)\right) \geqq$$

$$\geqq e\left(M\sum_{1}^{n}\frac{1}{\nu} - \frac{M^2}{2}\sum_{1}^{n}\frac{1}{\nu^2}\right) > e\left(M\sum_{1}^{n}\frac{1}{\nu} - \frac{\pi^2 M^2}{12}\right).$$

Il en résulte que

$$\left|\sum_{j\geqq n+1} a_j(s_1,\ldots,s_n)\right| < e\left(M\sum_{1}^{n}\frac{1}{\nu}\right)\left(1-e\left(-\frac{\pi^2 M^2}{12}\right)\right),$$

et par suite

$$e\left(-M\sum_{1}^{n}\frac{1}{\nu}\right) < \frac{\pi^2 M^2}{12}\, e\left(M\sum_{1}^{n}\frac{1}{\nu}\right)$$

d'où

$$M\cdot e\left(M\sum_{1}^{n}\frac{1}{\nu}\right) > \frac{2\sqrt{3}}{\pi},$$

ce qui achève notre démonstration de (3), car $\dfrac{2\sqrt{3}}{\pi} > 1$.

3. Nous voulons mentionner finalement une application du résultat (2) à la solution approximative des équations algébriques de BERNOULLI et GRAEFFE: le passage sera complètement analogue à celui de [3].

Considérons maintenant l'équation algébrique

$$f_0(x) \equiv a_{00} + a_{10}x + \cdots + a_{n0}x^n = 0 \qquad (a_{n0} = 1),$$

où on peut supposer sans rien perdre de la généralité que ses racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soient telles que

$$|x_1| \geqq |x_2| \geqq \cdots \geqq |x_n|.$$

La suite des polynômes $f_\varkappa(x)$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots)$ étant définie par la formule

$$f_\varkappa(x) = (-1)^n f_{\varkappa-1}(\sqrt{x})\, f_{\varkappa-1}(-\sqrt{x}),$$

nous posons

$$f_\varkappa(x) = a_{0\varkappa} + a_{1\varkappa}x + \cdots + a_{n\varkappa}x^n \qquad (a_{n\varkappa} = 1).$$

Comme on sait bien, en vertu des formules récurrentes de NEWTON, la somme $s_{\nu\varkappa}$ des $\nu^{\text{ièmes}}$ puissances des racines du polynôme $f_\varkappa(x)$ peut s'écrire sous forme d'un polynôme en ses coefficients $a_{0\varkappa}, a_{1\varkappa}, \ldots, a_{n\varkappa}$.

[3] P. TURÁN, Remark on the preceding paper of J. W. S. Cassels. (Application to approximative solution of algebraic equations), *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **7** (1956), pp. 291—294.

M. TURÁN[3] a établi, d'après un résultat dû à M. J. W. S. CASSELS,[4] la règle

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{2^{-\varkappa}} \leqq \frac{|x_1|}{\left(\max\limits_{1 \leqq \nu \leqq 2n-1} |s_{\nu\varkappa}|^{\frac{1}{\nu}}\right)^{2^{-\varkappa}}} \leqq 1. \tag{4}$$

De même, en utilisant le résultat (2), on trouve

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{2^{-\varkappa}} \leqq \frac{|x_1|}{\left(\max\limits_{1 \leqq \nu \leqq n} |s_{\nu\varkappa}|^{\frac{1}{\nu}}\right)^{2^{-\varkappa}}} \leqq \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{\sum\limits_{1}^{n} \frac{1}{\nu}}{\log \sum\limits_{1}^{n} \frac{1}{\nu}}\right)^{2^{-\varkappa}} \tag{5}$$

dont la borne supérieure est plus faible que celle de (4) : mais concernant le calcul pratique avec les $|s_{\nu\varkappa}|^{\frac{1}{\nu}}$ y impliquées, il peut arriver que la règle (5) soit encore plus convenable que (4). Cette remarque est due à M. TURÁN.

(Reçu le 31 mars 1958.)

[4] J. W. S. CASSELS, On the sums of powers of complex numbers, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 7 (1956), pp. 283—289.

TWO NEW METHODS FOR THE APPROXIMATE CALCULATION OF MULTIPLE INTEGRALS

By

L. C. HSU and L. W. LIN (Changchun, China)

(*Presented by* P. TURÁN)

This work is concerned with the approximate calculation of multiple integrals. We shall present two general methods, of which the first one is devised only for the approximate integration of periodic functions.

§ 1. The first method

Very recently, N. M. KOROBOV [1] has offered a number-theoretical method for the approximate integration of periodic functions. His results are surely of practical value. In fact, the labour of calculation involved in his approximate formulae, can be conveniently carried out by means of the high-speed computing machine, though the convergence of his approximation process appears to be quite slow.

In this section we shall proceed to give a new method which is actually suggested by the idea of WEYL's lemma [2] in the theory of almost periodic functions. For obtaining our principal result, we need to make use of CHENG—CHEN's generalization [3] of ZYGMUND's theorem [4] for the trigonometrical approximation of periodic functions. Our method will yield a kind of approximate formulae whose constructions are as equally simple as those of KOROBOV's. On the other hand, the degree of approximation given by our process appears to be much better than that of KOROBOV's.

Let $f(P)\equiv f(x_1, \ldots, x_m)$ be a function of period 2π in each variable x_j. It is always assumed that $f(P)$ has continuous partial derivatives of the orders up to p $(p\geqq 4)$.

Denote by $f_{\alpha_1\ldots\alpha_m}(x_1, \ldots, x_m)$ the partial derivative of f in which α_j just indicates the number of times of differentiation with respect to x_j $(j=1, \ldots, m)$. Thus the partial derivative with order p just means that $\alpha_1+\cdots+\alpha_m=p$ $(\alpha_j\geqq 0)$. Define

$$\omega_p(\varrho)=\max|f_{\alpha_1\ldots\alpha_m}(x_1, \ldots, x_m)-f_{\alpha_1\ldots\alpha_m}(x_1', \ldots, x_m')|$$

where the "max" is taken over all the compositions $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ subject to the condition $\alpha_1+\cdots+\alpha_m=p$ $(\alpha_j\geqq 0)$, and over all the points $(x_1,\ldots,x_m)$ and $(x_1',\ldots,x_m')$ with the restriction $\sum_j(x_j-x_j')^2\leqq\varrho^2$.

Let $f(P)$ have the Fourier series of the form

$$f(P)\sim\sum C_{n_1,\ldots,n_m}e^{i(n_1x_1+\cdots+n_mx_m)} \tag{1}$$

where the summation Σ ranges over all $-\infty<n_j<\infty$ $(j=1,\ldots,m)$. Define

$$A_\nu(P)=\sum_{n_1^2+\cdots+n_m^2=\nu}C_{n_1,\ldots,n_m}e^{i(n_1x_1+\cdots+n_mx_m)},$$

the summation being extended over all $(n_1,\ldots,n_m)$ subject to the condition indicated. It is known that the following trigonometrical polynomial (with large R) gives actually a very good approximation to $f(P)$ (see [3]):

$$S_R^{(k)}(P;f)=\sum_{\nu<R^2}\left(1-\frac{\nu^{k/2}}{R^k}\right)^{\sigma_m}A_\nu(P)=\sum_{\nu<R^2}a_{n_1,\ldots,n_m}(R)e^{i(n_1x_1+\cdots+n_mx_m)} \tag{2}$$

where R,k,σ_m are positive integers with $k>p+1$, $\sigma_m=\left[\frac{m-1}{2}\right]+1$, and

$$a_{n_1,\ldots,n_m}(R)=\left(1-\frac{\nu^{k/2}}{R^k}\right)^{\sigma_m}C_{n_1,\ldots,n_m}. \tag{3}$$

Moreover, let us denote

$$\sigma^*(R)=\sum_{\nu<R^2}{}'\,|a_{n_1,\ldots,n_m}(R)|, \tag{4}$$

the summation Σ' being omitted the term of the case $\nu=0$, (i. e. all $n_j=0$).

Having stated all the preliminaries as above, we may now prove the following

THEOREM 1. *Let q be a positive integer and let $\varphi(t)\equiv f(\gamma_1t,\ldots,\gamma_mt)$, $\gamma_j=R^{q-j}$ $(j=1,\ldots,m)$ and $M=R^{p+m-q}$. Then for R large we have*

$$\left|\left(\frac{1}{2\pi}\right)^m\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}f(x_1,\ldots,x_m)dx_1\cdots dx_m-\frac{1}{M}\int_0^M\varphi(t)dt\right|\leqq \tag{5}$$
$$\leqq 2\sigma^*(R)\left(\frac{1}{R}\right)^p+O\left(\left(\frac{1}{R}\right)^p\omega_p\left(\frac{1}{R}\right)\right).$$

PROOF. It is clear that the inequality $\nu=n_1^2+\cdots+n_m^2<R^2$ implies $|n_j|\leqq R-1$ $(j=1,\ldots,m)$. Consider now all the linear combinations $\sum_1^m n_j\gamma_j$ of $\gamma_j=R^{q-j}$; we may easily find that

$$\inf_{\nu<R^2}|n_1\gamma_1+\cdots+n_m\gamma_m|=R^{q-m} \tag{6}$$

where the "inf" (infimum) is taken over all $(n_1,\ldots,n_m)$ subject to the condition $n_1^2+\cdots+n_m^2<R^2$ with $(n_1,\ldots,n_m)\neq(0,\ldots,0)$.

According to a generalization of ZYGMUND's theorem due to CHENG and CHEN (see [3]), we know that

$$S_R^{(k)}(P;f)-f(P)=O\left(\left(\frac{1}{R}\right)^p\omega_p\left(\frac{1}{R}\right)\right) \tag{7}$$

holds uniformly on the domain $D(0\leqq x_j\leqq 2\pi;\ j=1,\dots,m)$. Therefore, on substituting $\varphi(t)\equiv f(\gamma_1 t,\dots,\gamma_m t)$ into (7) and by term-wise integration, we may obtain (in view of (2))

$$\begin{aligned}\frac{1}{M}\int_0^M\varphi(t)dt&=\frac{1}{M}\int_0^M S_R^{(k)}(P;f)dt+O\left(\left(\frac{1}{R}\right)^p\omega_p\left(\frac{1}{R}\right)\right)=\\&=\frac{1}{M}\sum_{\nu<R^2}{}'\frac{a_{n_1,\dots,n_m}(R)}{i(n_1\gamma_1+\cdots+n_m\gamma_m)}\left(e^{i(n_1\gamma_1+\dots+n_m\gamma_m)M}-1\right)+\\&\qquad+a_{0,\dots,0}(R)+O\left(\left(\frac{1}{R}\right)^p\omega_p\left(\frac{1}{R}\right)\right)\end{aligned} \tag{8}$$

where

$$a_{0,\dots,0}(R)=C_{0,\dots,0}=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^m\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}f(P)dx_1\cdots dx_m.$$

Hence, by making use of (6) and (8), we have

$$\left|\frac{1}{M}\int_0^M\varphi(t)dt-C_{0,\dots,0}\right|\leqq\frac{2\sigma^*(R)}{MR^{q-m}}+O\left(\left(\frac{1}{R}\right)^p\omega_p\left(\frac{1}{R}\right)\right)$$

where the constant factor involved in the order estimation $O(\cdot)$ depends merely upon the function $f(P)$. This is what we wish to prove; as we have already assumed $M=R^{p+m-q}$.

Obviously, the factor $\sigma^*(R)$ contained in the right-hand side of (5) can be replaced by the absolute constant

$$\sigma=\sum|C_{n_1,\dots,n_m}|, \tag{9}$$

in case the Fourier series (1) is absolutely convergent.

As is easily seen, the meaning of Theorem 1 lies in the fact that the m-fold integration of $f(P)$ over the domain $D(0\leqq x_j\leqq 2\pi)$ may be replaced approximately by a definite integral. This remark suggests that Theorem 1 can be employed to construct a variety of approximate formulae for the multiple integral concerned, since in fact the definite integral $\int_0^M\varphi(t)dt$ may be evaluated by various approximation methods (quadrature formulae).

In order to illustrate the method just indicated, we now take, for instance, $q=p+m-1$ in Theorem 1, so that $M=R$, and we apply the Simpson formula with $N+1$ terms to the integral $(1/M)\int\limits_0^M \varphi(t)dt$, where $N=M^r$ is a large even integer, r being a certain positive integer to be chosen for best advantage. Clearly, we may express

$$\frac{1}{M}\int\limits_0^M \varphi(t)dt=\frac{1}{3N}\sum_{l=0}^{N} A_l f(ly_1, \ldots, ly_m)+\epsilon_N, \tag{10}$$

where $y_k=\gamma_k\left(\frac{M}{N}\right)$ $(k=1, \ldots, m)$ and

$$A_l=\begin{cases} 1 & \text{for } l=0,\ N; \\ 2 & \text{for } l=\text{even integer} < N; \\ 4 & \text{for } l=\text{odd integer}, \end{cases} \tag{11}$$

and the remainder is estimated by

$$|\epsilon_N| \leqq \frac{1}{180\, M}\left(\frac{M}{N}\right)^5 N\cdot\sup_t |\varphi^{(4)}(t)|. \tag{12}$$

By the definition of $\varphi(t)$ we may find that

$$|\varphi^{(4)}(t)|=\left|\frac{d^4}{dt^4}f(\gamma_1 t, \ldots, \gamma_m t)\right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{i,j,k,l=1}^{m} \gamma_i\gamma_j\gamma_k\gamma_l \left|\frac{\partial^4 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l}\right| \leqq (M^{q-1})^4 m^4 K$$

where

$$K=\sup\left|\frac{\partial^4 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l}\right|, \tag{13}$$

the supremum being taken over all $1\leqq i, j, k, l \leqq m$ and $0 \leqq x_i, x_j, x_k, x_l \leqq 2\pi$. Thus, by recalling that $N=M^r=R^r$, we obtain

$$|\epsilon_N| \leqq \frac{m^4 K}{180} R^{4q-4r}=\frac{m^4 K}{180} R^{4(p+m-r-1)}. \tag{14}$$

On the other hand, we have seen that the order estimate of the right-hand side of (5) is of $O(R^{-p})$. Hence it is better to choose r such that $4(p+m-r-1)=-p$. That is, we may take $r=\frac{1}{4}(5p+4m-4)$, so that we have

$$|\epsilon_N| \leqq \frac{m^4 K}{180}\left(\frac{1}{R}\right)^p. \tag{14 bis}$$

Moreover, we may express $y_k = R^{1-k-\frac{1}{4}p}$ $(k=1, \ldots, m)$. Hence, as a conclusion, we may state the following (with $M = R = L^4$):

THEOREM 2. *Let L denote a positive even integer, and let $N = L^{5p+4m-4}$, $y_k = L^{4(1-k)-p}$ $(k=1, \ldots, m)$. Then for N large we have*

$$\left| \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} f(P) dx_1 \cdots dx_m - \frac{1}{3N} \sum_{l=0}^{N} A_l f(ly_1, \ldots, ly_m) \right| \leqq \tag{15}$$
$$\leqq \left(\frac{m^4 K}{180} + 2\sigma(L)\right)\left(\frac{1}{L}\right)^{4p} + O\left(\frac{1}{L^{4p}} \omega_p\left(\frac{1}{L^4}\right)\right)$$

where $\sigma(L) = \sigma^*(L^4) \leqq \sigma$ and A_l and K are defined by (11) *and* (13).

As a comparison with KOROBOV's results, we may observe that the degree of approximation by Theorem 2 is much higher than that of KOROBOV's, especially for large p. In fact, the principal error estimation contained in KOROBOV's theorems (pp. 1062—1065 of [1]) is $O((1/N)^{1/2})$; while in our case the error is of the same order as $(1/L)^{4p} = (1/N)^{4p/(5p+4m-4)}$ where $4p/(5p+4m-4) \approx 4/5$ for p large and $4p/(5p+4m-4) > 4/7$ for $p \geqq 2m$.

§ 2. The second method

The object of this section is to present a quite effective method for the approximate integration of functions having no periodicity in its variables. The original idea of the method has been generally given in a previous paper [5] due to one of the authors, but not fully developed. In the present work we shall always assume integrand functions to possess continuous partial derivatives of higher orders, so that results much more precise and useful than the original ones may be obtained.

We shall confine our attention mainly to the case of double integrals, for there is no essential difficulty involved in the extension of our results to the case of many variables.

In what follows $\langle\alpha\rangle$ always denotes the fractional part of α, i. e. $\langle\alpha\rangle = \alpha - [\alpha]$. For convenience, we also use the notation $(\psi(x))_{x=a}^{x=b} = \psi(b) - \psi(a)$.

Applying the Euler—Maclaurin summation formula and making use of a well-known property of the Bernoulli polynomials, we can now establish a pair of "expansion theorems" as follows:

THEOREM 3. *Let $F(x, y)$ be continuous together with its partial derivatives, with respect to x, of orders up to $m(\geqq 1)$ on the square region $R(0 \leqq x \leqq 1$,*

$0 \leqq y \leqq 1$). *Then for N (integral parameter) large we have*

$$\int_0^1\int_0^1 F(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 F(x, \langle Nx\rangle)\,dx - \tag{16}$$
$$-\sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{1}{\nu!}\left(\frac{1}{N}\right)^{\nu}\int_0^1\left(\frac{\partial^{\nu-1}F}{\partial x^{\nu-1}}\right)_{x=0}^{x=1}\cdot B_\nu(y)\,dy + O(N^{-m})$$

where $B_\nu(y)$ is the Bernoulli polynomial of degree ν.

THEOREM 4. *Let the continuous function $f(r,\theta)$ be of period 2π in θ having continuous partial derivatives, with respect to r, of orders up to m on the circular region $S(0 \leqq r \leqq 1, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$. Then for N large we have*

$$\iint_S f(r,\theta)\,dS = 2\pi\int_0^1 f(r, 2\pi N r)\,r\,dr - \tag{17}$$
$$-\sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{1}{\nu!}\left(\frac{1}{N}\right)^{\nu}\int_0^{2\pi}F_\nu(\theta)\cdot B_\nu\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)d\theta + O(N^{-m})$$

where $F_\nu(\theta) = f_r^{(\nu-1)}(1,\theta) + (\nu-1)f_r^{(\nu-2)}(1,\theta) - (\nu-1)f_r^{(\nu-2)}(0,\theta)$, $f_r^{(\nu)}(r,\theta)$ denoting the νth partial derivative of $f(r,\theta)$ with respect to r.

PROOF. Denote $\Delta x = 1/N$ and let (cf. § 1 of [5])

$$\psi_1(N) = \sum_{k=1}^{N}\int_{(k-1)\Delta x}^{k\Delta x}\left(F(x,\langle Nx\rangle) - F\left(\frac{k-1}{N}, \langle Nx\rangle\right)\right)dx,$$

$$\psi_2(N) = \sum_{k=1}^{N}\int_{(k-1)\Delta x}^{k\Delta x}dx\left(\int_0^1\left(F\left(\frac{k-1}{N}, y\right) - F(x,y)\right)dy\right).$$

Evidently we have

$$\int_{(k-1)\Delta x}^{k\Delta x}F\left(\frac{k-1}{N}, \langle Nx\rangle\right)dx = \int_{(k-1)\Delta x}^{k\Delta x}dx\int_0^1 F\left(\frac{k-1}{N}, y\right)dy;$$

so we may easily verify that

$$\int_0^1 F(x,\langle Nx\rangle)\,dx = \int_0^1\int_0^1 F(x,y)\,dx\,dy + \psi_1(N) + \psi_2(N). \tag{18}$$

Applying TAYLOR's theorem to expand $F(x,\langle Nx\rangle) - F\left(\frac{k-1}{N}, \langle Nx\rangle\right)$ in terms of the powers of $\left(x-\frac{k-1}{N}\right)$, and then using term-wise integration, we may express $\psi_1(N)$ in the form

$$(19)\qquad \psi_1(N)=\sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{1}{\nu!}\left(\frac{1}{N}\right)^{\nu}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{N}\left(\int_0^1\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}F\left(\frac{k-1}{N},y\right)y^\nu dy\right)+O(N^{-m}).$$

Let us define

$$\Phi(x)=\int_0^1\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}F(x,y)y^\nu dy \qquad (1\leqq\nu\leqq m-1).$$

Then the Euler—Maclaurin summation formula with a remainder estimate is seen to be applicable to the sum $\sum_1^N\Phi\left(\frac{k-1}{N}\right)\frac{1}{N}$, yielding

$$\psi_1(N)=\sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{1}{\nu!}\left(\frac{1}{N}\right)^{\nu}\Bigg\{\int_0^1\left(\frac{\partial^{\nu-1}F}{\partial x^{\nu-1}}\right)_{x=0}^{x=1}\cdot y^\nu dy+\frac{B_1}{N}\int_0^1\left(\frac{\partial^\nu F}{\partial x^\nu}\right)_{x=0}^{x=1}\cdot y^\nu dy+$$

$$+\frac{B_2}{2!\,N^2}\int_0^1\left(\frac{\partial^{\nu+1}F}{\partial x^{\nu+1}}\right)_{x=0}^{x=1}\cdot y^\nu dy+\frac{B_4}{4!\,N^4}\int_0^1\left(\frac{\partial^{\nu+3}F}{\partial x^{\nu+3}}\right)_{x=0}^{x=1}\cdot y^\nu dy+\cdots+O(N^{-(m-\nu)})\Bigg\}$$

where $B_1, B_2, B_4, \ldots$ are known as the Bernoulli numbers. Now collecting all the terms of the same power in N, we find that the coefficient of $N^{-\nu}$ is given by (with $B_0=1$)

$$C_\nu=\int_0^1\left(\frac{\partial^{\nu-1}F}{\partial x^{\nu-1}}\right)_{x=0}^{x=1}\left(\sum_{s=0}^{\nu-1}\frac{B_s}{(\nu-s)!\,s!}\,y^{\nu-s}\right)dy.$$

Making use of the formula $B_n(y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k y^{n-k}$ for the Bernoulli polynomial, we can still simplify the expression of the coefficient. In fact, we have

$$C_\nu=\frac{1}{\nu!}\int_0^1\left(\frac{\partial^{\nu-1}F}{\partial x^{\nu-1}}\right)_{x=0}^{x=1}(B_\nu(y)-B_\nu)dy.$$

Thus we get the result

$$(20)\qquad \psi_1(N)=\sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{1}{\nu!\,N^\nu}\int_0^1\left(\frac{\partial^{\nu-1}F}{\partial x^{\nu-1}}\right)_{x=0}^{x=1}(B_\nu(y)-B_\nu)dy+O(N^{-m}).$$

As regards the summation $\psi_2(N)$, we may directly apply the Euler—Maclaurin formula inasmuch as $\psi_2(N)$ may be rewritten in the form

$$\psi_2(N)=\sum_{k=1}^{N}G\left(\frac{k-1}{N}\right)\frac{1}{N}-\int_0^1 G(x)dx$$

where $G(x)=\int_0^1 F(x,y)\,dy$. Noticing that

$$G^{(\nu-1)}(1)-G^{(\nu-1)}(0)=\int_0^1\left(\frac{\partial^{\nu-1}F}{\partial x^{\nu-1}}\right)_{x=0}^{x=1}dy \qquad (1\leqq \nu\leqq m-1),$$

we obtain finally

$$\psi_2(N)=\sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{B_\nu}{\nu!\,N^\nu}\int_0^1\left(\frac{\partial^{\nu-1}F}{\partial x^{\nu-1}}\right)_{x=0}^{x=1}dy+O(N^{-m}). \tag{21}$$

Hence our Theorem 3 is proved by means of (18), (20) and (21).

For proving Theorem 4, it needs only to transform the polar coordinate system into the rectangular one, and make use of Theorem 3. Since the deduction from Theorem 3 to Theorem 4 consists of only elementary calculations, we may omit its details here.

In particular, taking $m=2$ and recalling $B_1(y)=y-\frac{1}{2}$, we see that the formula (17) gives

$$\begin{aligned}\iint_S f(r,\theta)\,dS-2\pi\int_0^1 f(r,2\pi Nr)\,r\,dr=\\ =\frac{1}{2N}\int_0^{2\pi}f(1,\theta)\left(1-\frac{\theta}{\pi}\right)d\theta+O(N^{-2}).\end{aligned} \tag{22}$$

This is clearly a refinement (or an improvement) of the MARÉCHAL—WILKINS theorem (see [6]; cf. GROSSWALD [7]) and also of a result obtained previously by one of the authors (see § 1 of [5]). As a consequence, we may immediately infer from (22) that the integral $2\pi\int_0^1 f(r,2\pi Nr)\,r\,dr$ can approximate $\iint_S f(r,\theta)\,dS$ with an error estimation of the order $O(N^{-2})$ in case $f(r,\theta)$ vanishes along the circle $r=1$ (the boundary of S).

As is easily observed, the formulae (16) and (17) are useful for the approximate evaluation of the double integrals

$$\int_0^1\int_0^1 F(x,y)\,dx\,dy, \qquad \iint_S f(r,\theta)\,dS.$$

In fact, taking for instance $N=10$, $m=4$, we see that the right-hand side of (17), which consists of only 4 definite integrals, will provide quite a good approximation to $\iint_S f(r,\theta)\,dS$ in case $|F_4(\theta)|$ is moderate in its magnitude $\left(\text{noticing also } |B_1(y)|\leqq\frac{1}{2},\ |B_2(y)|\leqq\frac{1}{6},\ |B_3(y)|\leqq\frac{1}{10},\ |B_4(y)|\leqq\frac{1}{30}\ \text{for } 0\leqq y\leqq 1\right)$.

On the other hand, if $F(x, y)$ is of period 1 in y, then $F(x, \langle Nx \rangle) \equiv F(x, Nx)$ and the integral $\int_0^1 F(x, Nx)dx$ with large parameter N can also be evaluated approximately through the computation of the double integral $\int_0^1\int_0^1 F(x, y)dx\,dy$ with an error estimate rendered by the formula (16).

It is clear that $F(x, \langle Nx \rangle)$ is in general not a continuous function of x unless $F(x, 0) \equiv F(x, 1)$. But this disadvantage can easily be obviated by replacing $F(x, y)$ by

$$\tilde{F}(x, y) = \frac{1}{2}\{F(x, y) + F(x, 1-y)\}; \tag{23}$$

for actually we have $\tilde{F}(x, 0) \equiv \tilde{F}(x, 1)$ and $\int_0^1\int_0^1 \tilde{F}(x, y)dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 F(x, y)dx\,dy$. Moreover, recalling the simple relation $B_\nu(1-y) = (-1)^\nu B_\nu(y)$ for the Bernoulli polynomials, we may accordingly deduce that

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} F(x, y)\right)_{x=0}^{x=1} \cdot B_{\nu+1}(y)dy = (-1)^{\nu+1} \int_0^1 \left(\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} F(x, 1-y)\right)_{x=0}^{x=1} \cdot B_{\nu+1}(y)dy.$$

Thus upon substituting (23) into (16) we get at once the following

THEOREM 5. *Let $F(x, y)$ be continuous together with its partial derivatives, with respect to x, of orders up to $2p+1$. Then we have the expansion of the form*

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1 F(x, y)dx\,dy &= \int_0^1 \tilde{F}(x, \langle Nx \rangle)dx - \\ &- \sum_{r=1}^{p} \frac{1}{(2r)!}\left(\frac{1}{N}\right)^{2r} \int_0^1 \left(\frac{\partial^{2r-1} F}{\partial x^{2r-1}}\right)_{x=0}^{x=1} \cdot B_{2r}(y)dy + R_p\end{aligned} \tag{24}$$

where $R_p = R_p(N) = O(N^{-2p-2})$ for N large.

This expansion formula is certainly better than that of Theorem 3, inasmuch as $\tilde{F}(x, \langle Nx \rangle)$ is already made continuous and the speed of convergence has been improved. Moreover, it is seen that the formula may be used effectively for the construction of cubature formulae. As a matter of fact, when specializing N and p (e. g. $5 \leqq N \leqq 10$, $3 \leqq p \leqq 6$), the right-hand side of (24) gives only a few definite integrals, to which the Gauss quadrature formulae may directly apply. Concrete examples will be omitted here. However, it is worthy of mention that the cubature formulae so constructed are actually of higher accuracy which may be comparable with LIUSTERNICK's work [8] on the cubature over a circular region.

A question of some theoretical interest may arise: When does the remainder $R_p = R_p(N)$ tend to zero as $p \to \infty$? Evidently, the following theorem just gives a sufficient condition for $R_p(N) \to 0$ $(p \to \infty)$:

THEOREM 6. *If the continuous function $F(x, y)$ possesses partial derivatives of all orders with respect to x, and if*

$$(25) \qquad \max_{0 \leqq y \leqq 1} \left| \left(\frac{\partial^{2r-1} F}{\partial x^{2r-1}} \right)_{x=0}^{x=1} \right| \leqq C_r \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots),$$

then we have the following estimate for $|R_p|$:

$$(26) \qquad |R_p| \leqq 6\left(1 + \frac{1}{2p}\right) \sum_{r=p+1}^{\infty} \frac{C_r}{(2\pi N)^{2r}}.$$

PROOF. It is known that $|B_{2r}(y) - B_{2r}|$ attains its maximum at $y = \frac{1}{2}$. Moreover, by the multiplication theorem of Bernoulli polynomials we have $B_\nu\left(\frac{1}{2}\right) = (2^{1-\nu} - 1) B_\nu$. Thus, for $0 \leqq y \leqq 1$ we get

$$|B_{2r}(y)| \leqq \left| B_{2r}\left(\frac{1}{2}\right) - B_{2r} \right| + |B_{2r}| = |(2^{1-\nu} - 2) B_{2r}| + |B_{2r}| \leqq$$
$$\leqq 3|B_{2r}| = 6 \frac{(2r)!}{(2\pi)^{2r}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2r}} \right\} < 6 \frac{(2r)!}{(2\pi)^{2r}} \left(1 + \frac{1}{2r-1}\right) \qquad (r \geqq 1).$$

Here we have employed the series form of the number $|B_{2r}|$. Consequently we obtain

$$|R_p| \leqq \sum_{r=p+1}^{\infty} \frac{1}{(2r)!} \left(\frac{1}{N}\right)^{2r} \cdot \max_{0 \leqq y \leqq 1} |B_{2r}(y)| \cdot C_r \leqq 6\left(1 + \frac{1}{2p+1}\right) \sum_{r=p+1}^{\infty} \frac{C_r}{(2\pi N)^{2r}}.$$

Hence the inequality (26) is proved.

COROLLARY. *If the series $\sum_1^\infty C_r/(2\pi N)^{2r}$ converges, then $R_p \to 0$ $(p \to \infty)$ and the right-hand side of (24) can be extended as an infinite series.*

Let us finally mention a result for the case of 4-fold integrations. In a manner similar to the case of two variables, we define

$$\tilde{F}(x, y, u, v) = \frac{1}{4} \{ F(x, y, u, v) + F(x, y, 1-u, v) + F(x, y, u, 1-v) +$$
$$+ F(x, y, 1-u, 1-v) \}.$$

It is then easily verified that $\tilde{F}(x, y, \langle Nx \rangle, \langle Ny \rangle)$ is a continuous function of (x, y), provided that $F(x, y, u, v)$ is a continuous function of the 4 variables.

Thus, by applying a generalized form of the Euler—Maclaurin summation formula for several variables, we can establish the following

THEOREM 7. *Let the continuous function $F(x, y, u, v)$ have continuous partial derivatives, with respect to x and y, of orders up to $2p$. Then we have the expansion formula*

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 F\,dx\,dy\,du\,dv = \int_0^1\int_0^1 \tilde{F}(x, y, \langle Nx\rangle, \langle Ny\rangle)\,dx\,dy - \tag{27}$$
$$-\sum_{r=2}^{2p}{}^{*}\frac{1}{r!}\left(\frac{1}{N}\right)^r\int_0^1\int_0^1 \Psi_r(u, v)\,du\,dv + O\left(\left(\frac{1}{N}\right)^{2p+2}\right),$$

where

$$\Psi_r(u, v) = \sum_{s=0}^{r}{}^{*}\binom{r}{s}B_s(u)B_{r-s}(v)\left(\left(\frac{\partial^{r-2}F}{\partial x^{s-1}\partial y^{r-s-1}}\right)_{x=0}^{x=1}\right)_{y=0}^{y=1}, \tag{28}$$

the summations $\sum_r^*$ *and* $\sum_s^*$ *being taken over even integers r $(2\leqq r\leqq 2p)$ and s $(0\leqq s\leqq r)$, and the notation* $\left(\frac{\partial^{r-2}F}{\partial x^{-1}\partial y^{r-1}}\right)_{x=0}^{x=1}$ *signifying that the function F is differentiated $r-1$-times with respect to y and then integrated with regard to x from 0 to 1.*

The proof of this theorem runs quite similarly as that of Theorem 3 and need not be reproduced here.

Evidently, the formula (27) can be employed for constructing approximate formulae for the 4-fold integrals, as N and p are suitably chosen fixed. Finally, we see also that Theorem 7 actually suggests a further generalization to the case of more variables.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
NORTH-EAST PEOPLE'S UNIVERSITY,
CHANGCHUN, CHINA

(Received 19 April 1958)

References

[1] Н. М. Коробов, Приближенное вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел, ДАН СССР, **115** (1957), No. 6, pp. 1062—1065.

[2] Б. М. Левитан, Почти-периодические функции (Москва, 1953), Гл. 2, § 3.

[3] M. T. CHENG and Y. H. CHEN, Trigonometrical approximation of functions of several variables (Chinese, English summary), *Acta Sci. Nat. Univ. Pekinensis*, **2** (1956), No. 4, pp. 411—428.

[4] A. Zygmund, The approximation of functions by typical means of their Fourier series, *Duke Math. Journal*, **12** (1945), pp. 695—704.

[5] L. C. Hsu, A general approximation method of evaluating multiple integrals, *Tôhoku Math. Journal*, **9** (1957), pp. 45—55.

[6] J. E. Wilkins, An integration scheme of Maréchal, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55** (1949), pp. 191—192.

[7] E. Grosswald, On the integration scheme of Maréchal, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2** (1951), pp. 706—709.

[8] Л. А. Люстерник, Некоторые кубатурные формулы для двукратных интегралов, ДАН СССР, **62** (1948), pp. 449—452.

AN EFFICIENT PROCESS OF SUCCESSIVE APPROXIMATION FOR SOLVING ALGEBRAIC OR TRANSCENDENTAL EQUATIONS

By

L. C. HSU (Changchun, China)

(*Presented by* P. TURÁN)

§ 1. Introduction

Throughout this paper we shall consider an equation of the ordinary form

$$f(x)=0. \tag{1}$$

Here $f(x)$ is a single-valued function continuous together with its first and second derivatives $f'(x), f''(x)$. In case the function $f(x)$ is of a complex variable $(x=u+iv)$, it is assumed to be analytic.

The process mentioned in the title is constructed as follows:

$$x_{n+1}=x_n-\left(\frac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}\right)f(x_n) \qquad (n=1,2,3,\ldots) \tag{2}$$

where x_0 is an initial approximate solution of (1), and x_1 is determined by the classical Newton method

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \tag{3}$$

Obviously, the process (2) differs from both the Newton process and the ordinary method of chord for real equations. Certainly, we may also call (2) the "*asymptotic Newton process*" in view of the fact that

$$\frac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}\sim\frac{1}{f'(x_n)} \quad \text{for} \quad (x_n-x_{n-1})\to 0.$$

As a comparison with the Newton method

$$x^*_{n+1}=x^*_n-\frac{f(x^*_n)}{f'(x^*_n)} \qquad (n=0,1,2,\ldots,\ x^*_0=x_0) \tag{4}$$

we may assert that the process (2) is more convenient for practical applications. In fact, the Newton method requires the values $x^*_\nu, f(x^*_\nu), f'(x^*_\nu)$ $(\nu=0,1,\ldots,n)$ in order to determine the $(n+1)$th approximation x^*_{n+1}; while in the process (2) only the values x_ν, $f(x_\nu)$ $(\nu=0,1,\ldots,n)$ and $f'(x_0)$ are needed for calculating x_{n+1}. On the other hand, we may also predict that the convergence speed of the process (2) should be much better than that of the modified Newton method

(5) $$x'_{n+1} = x'_n - \frac{f(x'_n)}{f'(x'_0)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, x'_0 = x_0).$$

§ 2. Convergence theorems

In this section we shall be concerned with the case in which $f(x)$ is a real function of the real variable. By means of certain geometrical considerations we may prove first the following

LEMMA. *Let I be a closed interval within which the equation* (1) *has at least one solution. Let x_0 be an interior point of I and let*

(6) $$f(x_0)f''(x) > 0 \qquad (x \in I).$$

Then the sequence $\{x_n\}$ as given by (2) *converges monotonically to a solution x^* of the equation with $x^* \in I$. Moreover, the convergence speed is comparable with that of $\{x_n^*\}$ of the Newton process* (4), *viz.*

(7) $$|x_{2n-1} - x^*| < |x_n^* - x^*| \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

PROOF. It is no real restriction to assume $f(x_0) > 0, f''(x) > 0 \quad (x \in I)$. For otherwise we may consider $-f(x)$ instead of $f(x)$. Clearly, the condition $f''(x) > 0$ just means that the curve $y = f(x)$ is strictly convex throughout I. This fact actually implies that $f'(x_0) \neq 0$. Suppose on the contrary that $f'(x_0) = 0$. Then $f(x)$ must attain an absolute minimum at $x = x_0$, and consequently $f(x) \geqq f(x_0) > 0$ for all $x \in I$. This clearly contradicts the pre-supposition that $f(x)$ has at least one zero within I.

Consider now the case $f'(x_0) < 0$. Let x^* denote a zero of $f(x)$ in I which is nearest to x_0. Then by the convexity of $y = f(x)$ we see that the Newton sequence $\{x_n^*\}$ $(x_0^* = x_0)$ is monotonically increasing to x^*. In fact, the relation $\lim_n x_n^* = x^*$ follows at once by letting $n \to \infty$ in (4 bis): $f'(x_n^*)(x_{n+1}^* - x_n^*) = -f(x_n^*)$.

In order to prove (7) and $\lim x_n = x^*$ we need to compare the convergence speed of $\{x_n\}$ with that of $\{x_n^*\}$. Evidently, the relation (2) means that x_{n+1} is just the abscissa of the x-axis determined by the intersection of the line through the pair of points $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ and $(x_n, f(x_n))$. On the other hand, the abscissa x_{n+1}^* is determined by the intersecting line tangent to the curve $y = f(x)$ at $x = x_n^*$. Thus by the convexity of $y = f(x)$ we easily find that $x_n < x_{n+1} < x^*$ (for all n) and

$$x_0 = x_0^* < x_1 = x_1^* < x_2 < x_2^* < x_3.$$

Consider now, for instance, $x_\nu^* < x_{\mu-1} < x_\mu$. Clearly, it must follow that $x_{\nu+1}^* < x_{\mu+1}$, using the convexity again. In other words, the case $x_\nu^* < x_{\mu-1} < x_\mu < x_{\mu+1} \leqq x_{\nu+1}^*$ can never occur. Hence the worst case regarding the convergence speed of $\{x_n\}$ is seen to be

$$x_0 < x_1^* < x_2 < x_2^* < x_3 < x_4 \leqq x_3^* < x_5 < x_6 \leqq x_4^* < \cdots < x_\nu^* < x_{2\nu-1} < x_{2\nu} \leqq x_{\nu+1}^* < \cdots.$$

Consequently, we obtain $\lim x_n = x^*$ and, moreover,

$$|x_{2\nu-1} - x^*| < |x_\nu^* - x^*| \qquad (\nu = 2, 3, \ldots).$$

The other case $f'(x_0) > 0$ can be treated in exactly same way. Hence our lemma is proved.

The lemma just proved enables us to state a pair of convergence theorems with the aid of the well-known results due to A. OSTROWSKI and L. V. KANTOROVITCH, respectively (see §§ 5—6 of [1] and [2]).

THEOREM 1. *Let x_0 be a point interior to a closed interval I and let*

$$f(x_0)f''(x) > 0, \quad f(x_0)f(\alpha) < 0 \qquad (x \in I) \tag{8}$$

where α is an endpoint of I. Then the sequence $\{x_n\}$ constructed by (2) converges monotonically to a unique solution x^* of (1) with $x^* \in I$.

THEOREM 2. *Let x_0 be an initial approximation and denote*

$$\left|\frac{1}{f'(x_0)}\right| = \beta_0, \quad \left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right| = \eta_0. \tag{9}$$

Let I be an interval of the form

$$|x - x_0| \leqq \frac{1 - \sqrt{1 - 2\alpha_0}}{\alpha_0}\eta_0 \qquad \left(0 < \alpha_0 \leqq \frac{1}{2}\right) \tag{10}$$

within which we have

$$|f''(x)| \leqq \frac{\alpha_0}{\beta_0\eta_0}, \quad f(x_0)f''(x) > 0. \tag{11}$$

Then the sequence $\{x_n\}$ of (2) converges to a solution x^* of (1) within I. Moreover, the speed of convergence is estimated by

$$|x_{2n} - x^*| < |x_{2n-1} - x^*| < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(2\alpha_0)^{2^n - 1}\eta_0. \tag{12}$$

As a matter of fact, the uniqueness and the existence of the solution of (1) as asserted, respectively, in Theorems 1 and 2 are implied by OSTROWSKI's and KANTOROVITCH's theorems (see Theorem 4 of § 5 and Theorem 1 of § 6 of [1]). Other conclusions of our theorems are merely consequences of the lemma. For instance, (12) actually follows from (7) and the known estimate about $|x_n^* - x^*|$.

Evidently, our Theorems 1 and 2 do not apply to the case where $(x^*, 0)$ is just the point of inflection of the curve $y = f(x)$.

§ 3. A further theorem on convergence

More generally, we shall now consider (1) as a complex equation in which the unknown x may be complex or real. A result to be presented here is somewhat similar to that of I. P. MISOVSKIH for the case of NEWTON's method in solving general functional equations (cf. Theorem 5 of § 6 of [1]; see also [3]).

THEOREM 3. *Let the following conditions be fulfilled:*

1° $|f'(x_0)^{-1}|=\beta>0$, $\max(|f(x_0)|, 4|f(x_1)|)=l>0$;

2° $|f''(x)|\leqq\delta$ *holds for all* x*'s in the region* $|x-x_0|\leqq\gamma$;

3° $\gamma\equiv\beta l\left(1+2\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{2^k-1}\right)$, $\alpha\equiv4\beta^2l\delta$, $\beta\gamma\delta\leqq\frac{3}{4}$.

Then the equation (1) *has a solution* x^* ($|x^*-x_0|\leqq\gamma$), *toward which the process* (2) *converges with the convergence speed estimated by*

$$|x_{n+1}-x^*|\leqq\gamma\alpha^{\psi(n)} \tag{13}$$

where $\alpha<1$ *and* $\psi(n)=2^{[n/2]}-1$, $[n/2]$ *denoting the integral part of* $n/2$.

Clearly, all the conditions 1°, 2°, 3° of the theorem can always be fulfilled when l is sufficiently small (i. e. when the first two approximations x_0 and x_1 are sufficiently near to x^*).

PROOF. To begin with, we shall now prove that all the x_n's are contained in the region $G: |x-x_0|\leqq\gamma$. Since in accordance with (3) we have

$$|x_1-x_0|=\left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right|\leqq\beta l<\gamma,$$

it is seen that $x_1\in G$. Using induction, suppose that $x_1, x_2, \ldots, x_n\in G$. We shall show that $x_{n+1}\in G$. Clearly we have, using conditions 1°, 2° and 3°,

$$\left|\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}\right|=\left|\int_0^1 f'(x_{n-1}+t(x_n-x_{n-1}))dt\right|\geqq$$

$$\geqq|f'(x_0)|-\left|\int_0^1[f'(x_{n-1}+t(x_n-x_{n-1}))-f'(x_0)]dt\right|\geqq$$

$$\geqq\beta^{-1}-\delta\int_0^1|x_{n-1}+t(x_n-x_{n-1})-x_0|dt\geqq$$

$$\geqq\beta^{-1}-\delta\gamma=\frac{1-\beta\gamma\delta}{\beta}\geqq\frac{1-3/4}{\beta}=\frac{1}{4\beta}.$$

Hence it follows that

$$|x_{n+1}-x_n| = \left|\frac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}\right| |f(x_n)| \leqq 4\beta|f(x_n)| =$$

$$= 4\beta\left|f(x_n)-f(x_{n-1})-\left(\frac{f(x_{n-1})-f(x_{n-2})}{x_{n-1}-x_{n-2}}\right)(x_n-x_{n-1})\right| \leqq$$

$$\leqq 4\beta\Big\{|f(x_n)-f(x_{n-1})-f'(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})| +$$

$$+\left|\left(f'(x_{n-1})-\frac{f(x_{n-1})-f(x_{n-2})}{x_{n-1}-x_{n-2}}\right)(x_n-x_{n-1})\right|\Big\} \leqq$$

$$\leqq 4\beta\Big\{\frac{1}{2}\delta|x_n-x_{n-1}|^2 + |x_n-x_{n-1}|\left|\int_0^1 [f'(x_{n-1})-f'(x_{n-2}+t(x_{n-1}-x_{n-2}))]dt\right|\Big\} \leqq$$

$$\leqq 4\beta\Big\{\frac{1}{2}\delta|x_n-x_{n-1}|^2 + |x_n-x_{n-1}|\delta\int_0^1 |(x_{n-1}-x_{n-2})(1-t)|\,dt\Big\} \leqq$$

$$\leqq 4\beta\delta\Big\{\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|^2 + \frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|\,|x_{n-1}-x_{n-2}|\Big\} \leqq$$

$$\leqq \begin{cases} 4\beta\delta|x_n-x_{n-1}|^2 & \text{for } |x_n-x_{n-1}| \geqq |x_{n-1}-x_{n-2}|, \\ 4\beta\delta|x_{n-1}-x_{n-2}|^2 & \text{for } |x_{n-1}-x_{n-2}| \geqq |x_n-x_{n-1}|. \end{cases}$$

So we have arrived at a recurrence relation for $|x_{n+1}-x_n|$; and consequently we get

$$|x_{n+1}-x_n| \leqq (4\beta\delta)^{1+2+\cdots+2^{s-1}}(\max(|x_2-x_1|, |x_1-x_0|))^{2^s}$$

where $s \geqq \left[\frac{n-1}{2}\right]$. Notice that

$$\max(|x_1-x_0|, |x_2-x_1|) \leqq \max\left(\beta l, \left|\frac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_0)}\right| |f(x_1)|\right) \leqq$$

$$\leqq \max(\beta l, 4\beta|f(x_1)|) = \beta l.$$

Moreover, we have $\alpha \equiv 4\beta^2 l\delta < 1$. Hence for any $s \geqq \left[\frac{n-1}{2}\right]$ we have

$$|x_{n+1}-x_n| \leqq (4\beta\delta)^{2^s-1}(\beta l)^{2^s} \leqq \beta l\alpha^{2^s-1} \leqq \beta l\alpha^{\psi(n-1)}.$$

Consequently, we obtain

$$|x_{n+1}-x_0| \leqq \sum_{k=0}^{n} |x_{k+1}-x_k| \leqq \beta l\Big\{1+\sum_{k=1}^{n}\alpha^{\psi(k-1)}\Big\} <$$

$$< \beta l\Big\{1+2\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha^{2^\nu-1}\Big\} = \gamma,$$

so that x_{n+1} is contained in G, and the induction is complete.

Furthermore, we find

$$|x_{n+p}-x_n| \leqq \sum_{k=n}^{n+p-1} |x_{k+1}-x_k| < \beta l \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \alpha^{\psi(k-1)} \right\} \leqq \tag{14}$$

$$\leqq \alpha^{\psi(n-1)}\gamma \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Hence $\{x_n\}$ is a fundamental sequence tending to a limit, say $x^* = \lim x_n$.

Evidently, $|x^*-x_0| \leqq \gamma$ and moreover $f(x^*)=0$, since in fact

$$|x_{n+1}-x_n| \leqq 4\beta|f(x_n)| \leqq 4\beta\delta \cdot \max(|x_n-x_{n-1}|, |x_{n-1}-x_{n-2}|).$$

Finally, we have by letting $p \to \infty$ in (14),

$$|x^*-x_n| \leqq \gamma\alpha^{\psi(n-1)}.$$

The theorem is therefore proved.

§ 4. Remarks

Our first remark, as may easily be justified, is that almost all the known results concerning the Newton process may be extended to the case of the new process here proposed. Actually, the validity of this general remark follows precisely from the asymptotic relation between the two processes.

Also, it may be noticed that the estimations of the convergence speed involved in Theorems 2 and 3 are quite rough. In fact, there can be found various numerical examples, showing that the real speed of convergence of the process (2) is often much better than those given by (12) and (13).

As a final remark, we point out that the classical CHEBYSHEV's process

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2}\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^2 \left(\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)}\right) \qquad (n=0, 1, 2, \ldots) \tag{15}$$

may be modified in such a form that the third term of the right-hand side of (15) is replaced by

$$\varrho_n = \frac{1}{2}\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^2 \left(\frac{f'(x_n)-f'(x_{n-1})}{(x_n-x_{n-1})f'(x_n)}\right).$$

It is apparent that the modified process

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \varrho_n \qquad (n=0, 1, 2, \ldots) \tag{16}$$

is more convenient in practice than the original one, especially when the values $f''(x_n)$ are not easily calculated. Certainly, the mode of convergence of (16) should be, in general, much better than that of the Newton process and is slightly inferior to that of (15).

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
NORTH-EAST PEOPLE'S UNIVERSITY,
CHANGCHUN, CHINA

(Received 9 May 1958)

Bibliography

[1] Г. С. Салехов и М. А. Мертвецова, О сходимости некоторых итерационных процессов, Изв. Казанского Фил. АН СССР, (1954), pp. 77—108.
[2] Л. В. Канторович, О методе Ньютона для функциональных уравнений, ДАН СССР, **59** (1948), pp. 1237—1240.
[3] И. П. Мысовских, О сходимости метода Л. В. Канторовича решения функциональных уравнений и его применениях, ДАН СССР, **70** (1950), pp. 565—568.

AN ESTIMATION IN THE THEORY OF DIOPHANTINE APPROXIMATIONS

By

E. MAKAI (Budapest)

(*Presented by* P. TURÁN)

§ 1

P. TURÁN observed [5] that certain extremal problems connected with the sums of the same powers of different complex numbers play an important role in numerous problems of the analysis and number theory. One of his results is that there exists a constant A such that

$$(1) \qquad M_{m,n} = \min_{|z_j| \leqq 1} \max_{\mu = m+1, \ldots, m+n} |1 + z_2^{\mu} + \cdots + z_n^{\mu}| > \left[\frac{n}{A(m+n)}\right]^n = K_{m,n}(A).$$

Originally he found that (1) is satisfied by $A = 24e^2$ and later in a paper written with VERA T. SÓS [4] it is shown that $A = 2e^{1+4/e} \approx 24$, too, satisfies the inequality (1). They remark that the lessening of the constant A plays an important role at certain applications and the question was raised to find the least numerical constant A^* for which $M_{m,n} > K_{m,n}(A)$ independently of m and n.

Applying an idea of P. ERDŐS they showed [4] that $A^* > 1{,}321$ and in the same paper they indicated a way which it was expected to lead to a better lower estimation of A^*. They have shown, namely, that if $H_\nu(y)$ is the Hermite polynomial defined by

$$H_\nu(y) = (-1)^\nu e^{y^2} \frac{d^\nu}{dy^\nu} e^{-y^2}$$

and $H_{n+1}(\lambda) = 0$, then denoting by $D_n(\lambda)$ the least of the moduli of the roots $z_1, z_2, \ldots, z_n$ of the equation

$$(2) \qquad s_n(z, \lambda) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{H_\nu(\lambda)}{\nu!} z^\nu = 0$$

one has

$$(2') \qquad \frac{1}{A^*} < \overline{\lim_{n \to \infty}} \min_{\lambda} D_n(\lambda) \left[\frac{|H_n(\lambda)|}{n!}\right]^{\frac{1}{n}}.$$

In the following we will give in a certain sense asymptotically exact estimation for the least of the moduli of the roots of the equation $s_n(z, \lambda) = 0$ if $H_n(\lambda) < 0$. This estimation is as follows:

If $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ *is a prescribed quantity and* $\lambda_{n+1}^{\vartheta}$ *is that of the numbers* λ *satisfying* $H_{n+1}(\lambda)=0$, $H_n(\lambda)<0$ *which is nearest to the quantity* $-\vartheta\sqrt{2n+2}$, *then the roots of the least modulus of the sequence of the polynomials*

$$s_n\left(\frac{z}{\sqrt{n}}, \lambda_{n+1}^{\vartheta}\right) \qquad (n=2,3,\dots)$$

converge, as $n\to\infty$, *to the only positive root* $x^{(\vartheta)}$ *of the transcendental equation*

$$\sqrt{2e}\,x e^{x^2+2\sqrt{2}\vartheta x+\vartheta^2}=1.\tag{3}$$ [1]

From this we will have that

$$A^* > 1{,}473.$$

Our result has common features with some other investigations, too. The polynomial (2) is a partial sum of the power series expansion of $e^{-z^2+2\lambda z}$ considered as a function of z. The repartition of the roots of the partial sums of the power series of e^z was studied by G. SZEGŐ [2] who investigated the possibility of the extension to entire functions of a theorem of JENTZSCH. To this question some contribution is given by the result (3).

Another equation analogous to (2) is

$$\sum_{\nu=0}^{n} P_\nu(\lambda) z^\nu = 0$$

where $P_\nu(\lambda)$ is the Legendre polynomial of degree ν normed by the condition $P_\nu(1)=1$. Its roots were investigated by G. SZEGŐ [3].

§ 2

We will need a generalization of a theorem of SONIN by PÓLYA which according to SZEGŐ [1, p. 161] can be shown as follows:

Given the differential equation

$$[k(x)y']' + \varphi(x)y = 0\tag{4}$$

where in $a<x<b$ $\varphi=\varphi(x)$ and $k=k(x)$ are positive and sufficiently smooth functions, moreover $\psi=\psi(x)=1/(k\varphi)$ is monotonous. The derivative of the function

$$f(x) = y^2 + k^2 y'^2 \psi$$

is

$$f'(x) = 2yy' + (2kk'y'^2 + k^2\cdot 2y'y'')\psi + k^2y'^2\psi' = k^2y'^2\psi = -\frac{y'^2(k\varphi)'}{\varphi^2}$$

[1] If $H_n(\lambda)>0$, the same statement holds, only the calculations are more lengthy. Cf. G. SZEGŐ [2], the basic idea of which is used in the following demonstration. Formulae (8) and (9) of this paper are the analogues of formula (1'') of G. SZEGŐ.

whence one sees that if $k\varphi$ is monotonously decreasing (increasing), then $f(x)$ is monotonously increasing (decreasing) in the interval $a \leqq x \leqq b$.

It follows that if the zeros of the function $y' = y'(x)$ are x'_i $(a \leqq x'_1 < < x'_2 < \cdots \leqq b)$ and $k\varphi$ is e. g. monotonously increasing in (a, b), then

$$f(a) \geqq [y(x'_1)]^2 > [y(x'_2)]^2 > \cdots$$

(theorem of SONIN—PÓLYA) and hence

$$f(a) > [y(x)]^2 \qquad (a \leqq x \leqq b). \tag{5}$$

If again the zeros of $y = y(x)$ are x_i $(a \leqq x_1 < x_2 < \cdots \leqq b)$ and $k\varphi$ is e. g. monotonously decreasing in (a, b), then the inequalities

$$f(a) \leqq f(x_1) < f(x_2) < \cdots$$

are equivalent to the inequalities

$$f(a) \leqq \frac{k(x_1)}{\varphi(x_1)} [y'(x_1)]^2 < \frac{k(x_2)}{\varphi(x_2)} [y'(x_2)]^2 < \cdots. \tag{6}$$

From (5) and (6) we can derive two lemmas connected with the Hermite polynomials.

LEMMA I. *If* $H_{n+1}(\lambda) = 0$, then

$$H_n(\lambda) \geqq A_n \sqrt{2n+3-\lambda^2}\, e^{\lambda^2/2}$$

where

$$A_n \geqq \frac{n!}{2\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)!}.$$

PROOF. It is known that $e^{-x^2/2} H_{n+1}(x)$ is a solution of the differential equation $y'' + (2n+3-x^2)y = 0$. Comparing this equation with equation (4) it is seen that now $k = 1$, $\varphi(x) = 2n+3-x^2$ and $k\varphi$ is monotonously decreasing and positive in $0 < x < \sqrt{2n+3}$. Now it is known that $\lambda^2 < 2n+3$, so using (6) we have for $\lambda \geqq 0$

$$f(0) = [e^{-x^2/2} H_{n+1}(x)]^2_{x=0} + \frac{1}{2n+3} \left[\frac{d}{dx} e^{-x^2/2} H_{n+1}(x)\right]^2_{x=0} \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2n+3-\lambda^2} \left[\frac{d}{dx} e^{-x^2/2} H_{n+1}(x)\right]^2_{x=\lambda}$$

whence with the help of the relation $H'_{n+1}(x) = 2(n+1) H_n(x)$

$$\left[\frac{H_{n+1}(0)}{2(n+1)}\right]^2 + \frac{1}{2n+3} [H_n(0)]^2 \leqq \frac{1}{2n+3-\lambda^2} [e^{-\lambda^2/2} H_n(\lambda)]^2.$$

Denoting the left-hand side by A_n^2 and using the formulae

$$H_{2m}(0) = (-1)^m \frac{(2m)!}{m!}, \quad H_{2m+1}(0) = 0 \tag{7}$$

[1, p. 102], one can write

$$A_{2m}=\frac{(2m)!}{2}\frac{1}{m!\sqrt{m+\frac{3}{4}}},\quad A_{2m-1}=\frac{(2m-1)!}{2}\frac{1}{m!}$$

whence

$$A_n\geqq\frac{n!}{2}\frac{1}{\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)!}.$$

Thus we have proved Lemma I for non-negative λ's. The validity of the lemma for negative λ's follows from $|H_n(\lambda)|=|H_n(-\lambda)|$.

LEMMA II. *If* $|x|<\sqrt{2\nu+1}$ $(\nu>1)$, *then*

$$|H_\nu(x)|\leqq B_\nu\frac{e^{x^2/2}}{\sqrt[4]{2\nu+1-x^2}}$$

where

$$B_\nu\leqq\sqrt[4]{2\nu+1}\,\frac{\nu!}{[\nu/2]!}.$$

PROOF. Consider the differential equation

$$y''+u(x)y=0\qquad (u=u(x)=2\nu+1-x^2),$$

one of whose solutions is $e^{-x^2/2}H_\nu(x)$, and put $y=u^{-1/4}v$. Performing the calculations we get

$$(u^{-1/2}v')'+\left(\frac{5}{16}u^{-5/2}\cdot 4x^2+\frac{1}{2}u^{-3/2}+u^{1/2}\right)v=0,$$

one solution of which is

(8) $$v=u^{1/4}e^{-x^2/2}H_\nu(x).$$

The last differential equation is that special case of (4) where

$$k(x)=u^{-1/2},\quad \varphi(x)=\frac{5}{16}u^{-5/2}\cdot 4x^2+\frac{1}{2}u^{-3/2}+u^{1/2}.$$

It is to be seen that if $0<x<\sqrt{2\nu+1}$, then $k(x)>0$, $\varphi(x)>0$ and

$$k(x)\varphi(x)=\frac{5}{16}u^{-3}\cdot 4x^2+\frac{1}{2}u^{-2}+1$$

is a monotonously increasing function of x. Using formula (5) we have

$$\left[v^2+u^{-1/2}\left(\frac{5}{16}u^{-5/2}\cdot 4x^2+\frac{1}{2}u^{-3/2}+u^{1/2}\right)^{-1}v'^2\right]_{x=0}\geqq[v(x)]^2\qquad (0\leqq x<\sqrt{2\nu+1}).$$

Writing in the place of v the right-hand side of (8) and in the place of u the quantity $2\nu+1-x^2$, we have for $x^2<2\nu+1$

$$\sqrt{2\nu+1}\left([H_\nu(0)]^2+\frac{8\nu^2(2\nu+1)}{2(2\nu+1)^2+1}[H'_{\nu-1}(0)]^2\right)\geqq\left|\sqrt[4]{2\nu+1-x^2}\,e^{-x^2/2}H_\nu(x)\right|.$$

Denoting the left-hand side by B_ν^2 and using (7) one can write

$$B_{2m}=\sqrt[4]{4m+1}\,\frac{(2m)!}{m!},$$

$$B_{2m+1}=\sqrt[4]{4m+3}\,\frac{(2m+1)!}{m!}\cdot 2\left[2(2m+1)+1+\frac{1}{2}\,\frac{1}{2(2m+1)+1}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

and from this

$$B_\nu\leqq\sqrt[4]{2\nu+1}\,\frac{\nu!}{[\nu/2]!}\qquad(\nu\neq 1).$$

§ 3

Let again $H_{n+1}(\lambda)=0$. Our two lemmas yield upper and lower bounds of $H_n(\lambda)$, whence using the notation

$$C_n(\lambda)=2\,\frac{|H_n(\lambda)|}{n!}\,\frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}+1}}{(2e)^{(n+1)/2}}\,e^{-\lambda^2/2}$$

we have

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2n+3-\lambda^2}}\,\frac{(n+1)^{(n+1)/2+1}}{([n/2]+1)!\,(2e)^{(n+1)/2}}<C_n(\lambda)<\sqrt[4]{2n+1}\,\frac{(n+1)^{(n+1)/2+1}}{[n/2]!\,(2e)^{(n+1)/2}},$$

i. e. there exist quantities γ and Γ independent of λ and n such that

$$\text{(9)}\qquad \frac{2}{\sqrt{2n+3-\lambda^2}}\,\frac{\gamma}{n}<C_n(\lambda)<\Gamma n^{1/4}<\Gamma n.$$

Consider now the polynomial

$$\text{(2)}\qquad s_n(z,\lambda)=s_n(z)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{H_\nu(\lambda)}{\nu!}z^n$$

where again $H_{n+1}(\lambda)=0$. One can verify using the recurrence formula of the Hermite polynomials that

$$\frac{ds_n(z)}{dz}+2(z-\lambda)s_n(z)=2\,\frac{H_n(\lambda)}{n!}\,z^{n+1}.$$

Integrating this differential equation we have

$$\text{(10)}\qquad \sigma_n(z)=s_n(z)e^{z^2-2\lambda z}=1+2\,\frac{H_n(\lambda)}{n!}\int_0^z\zeta^{n+1}e^{\zeta^2-2\lambda\zeta}\,d\zeta.$$

Formula (10) shows that if $H_n(\lambda)<0$ and $x>0$, then $\sigma_n(x)$ is a monotonously decreasing function having one positive zero $x_n(\lambda)$. It will be shown that supposing $\lambda \leqq 0$, $x_n(\lambda)$ is the zero of least modulus of the complex function $\sigma_n(z)$. For consider a complex number z_0 the modulus of which is less than $x_n(\lambda)$. Then choosing as path of integration the straight line segment connecting 0 with z_0, we have $(\zeta=\xi+i\eta)$

$$|\sigma_n(z_0)| = \left|1+2\frac{H_n(\lambda)}{n!}\int_0^{z_0} \zeta^{n+1} e^{\zeta^2-2\lambda\zeta}\, d\zeta\right| \geqq$$

$$\geqq 1-2\frac{|H_n(\lambda)|}{n!}\int_0^{z_0} |\zeta|^{n+1} |e^{\zeta^2-2\lambda\zeta}|\, |d\zeta| =$$

$$= 1+2\frac{H_n(\lambda)}{n!}\int_0^{|z_0|} |\zeta|^{n+1} e^{\xi^2-\eta^2-2\lambda\xi}\, d|\zeta| \geqq$$

$$\geqq 1+2\frac{H_n(\lambda)}{n!}\int_0^{|z_0|} |\zeta|^{n+1} e^{\xi^2+\eta^2-2\lambda|\zeta|}\, d|\zeta| =$$

$$= \sigma_n(|z_0|) > \sigma_n(x_n(\lambda)) = 0$$

and so $|\sigma_n(z_0)|>0$.

§ 4

Let ϑ and $\lambda_{n+1}^{\vartheta}$ be the quantities defined in § 1. It is known that

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_{n+1}^{\vartheta}}{\sqrt{2n+2}} = -\vartheta.$$

Denoting the quantity $x_n(\lambda_{n+1}^{\vartheta})$ by $\sqrt{n+1}\,x_n^{(\vartheta)}$ our task will be to investigate the asymptotic behaviour of $x_n^{(\vartheta)}$ as n tends to infinity. Writing in formula (10) instead of z, ζ and λ the quantities $\sqrt{n+1}\,x$, $\sqrt{n+1}\,\xi$ and $\lambda_{n+1}^{\vartheta}$, respectively, we have

$$f_n(x,\vartheta) = \sigma_n(\sqrt{n+1}\,x, \lambda_{n+1}^{\vartheta}) =$$

$$(11)\qquad = 1+2\frac{H_n(\lambda_{n+1}^{\vartheta})}{n!}(n+1)^{\frac{n+1}{2}+1}\int_0^x \xi^{n+1} \exp\left[(n+1)\xi^2 - 2\lambda_{n+1}^{\vartheta}\sqrt{n+1}\,\xi\right] d\xi =$$

$$= 1-C_n^{\vartheta}\int_0^x \xi^{n+1}(\sqrt{2e})^{n+1} \exp\left[(n+1)\xi^2 - 2\frac{\lambda_{n+1}^{\vartheta}}{\sqrt{n+1}}(n+1)\xi + \frac{n+1}{2}\left(\frac{\lambda_{n+1}^{\vartheta}}{\sqrt{n+1}}\right)^2\right] d\xi$$

where

$$C_n^{\vartheta} = C_n(\lambda_{n+1}^{\vartheta}).$$

Now the only positive root of the equation $f_n(x, \vartheta) = 0$ is $x_n^{(\vartheta)}$ and our task will be to seek upper and lower bounds of this root. To get these bounds we will majorize and minimize the function $f_n(x, \vartheta)$ by two other functions, each monotonously decreasing for positive x's. With the help of the positive zeros of the latter functions we will estimate $x_n^{(\vartheta)}$.

If $x > 0$, we have, using (9),

$$1 - \Gamma n \int_0^x \left[\sqrt{2e}\,\xi \exp g\left(\xi, -\frac{\lambda_{n+1}^{\vartheta}}{\sqrt{2n+2}}\right)\right]^{n+1} d\xi < f_n(x, \vartheta) <$$

$$< 1 - \frac{\gamma}{n^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right)^2}} \int_0^x \left[\sqrt{2e}\,\xi \exp g\left(\xi, -\frac{\lambda_{n+1}^{\vartheta}}{\sqrt{2n+2}}\right)\right]^{n+1} d\xi$$

where the function

$$g(\xi, \Theta) = \xi^2 + 2\sqrt{2}\,\Theta\xi + \Theta^2$$

is in the case of positive ξ's and Θ's a monotonously increasing function of these quantities. As for any positive ε and sufficiently large n

$$-\vartheta - \varepsilon < \frac{\lambda_{n+1}^{\vartheta}}{\sqrt{2n+2}} < -\vartheta + \varepsilon,$$

therefore

$$g(\xi, \vartheta - \varepsilon) < g\left(\xi, -\frac{\lambda_{n+1}^{\vartheta}}{\sqrt{2n+2}}\right) < g(\xi, \vartheta + \varepsilon)$$

if n is sufficiently large.

Consider now the monotonously decreasing functions

$$k_n(x) = 1 - \Gamma n \int_0^x [\sqrt{2e}\,\xi e^{g(\xi, \vartheta+\varepsilon)}]^{n+1} d\xi$$

and

$$K_n(x) = 1 - \frac{\gamma}{n^{3/2}\sqrt{1 - \vartheta^2}} \int_0^x [\sqrt{2e}\,\xi e^{g(\xi, \vartheta-\varepsilon)}]^{n+1} d\xi.$$

We have

$$k_n(x) < f_n(x, \vartheta) < K_n(x)$$

and the positive zero $x_n^{(\vartheta)}$ of $f_n(x, \vartheta)$ lies between the positive zeros of $k_n(x)$ and $K_n(x)$.

We now define the quantity $x^{(\Theta)}$ as the positive zero of the equation

(3′) $$\sqrt{2e}\,\xi e^{g(\xi, \Theta)} = 1$$

where we regard Θ as a constant quantity. It is to be seen that $x^{(\Theta)}$ is a decreasing function of Θ.

Further if $x < x^{(\vartheta+\varepsilon)}$ and $n \to \infty$, then $k_n(x) \to 1$ and if $x > x^{(\vartheta-\varepsilon)}$ and $n \to \infty$, then $K_n(x) \to -\infty$.

For if $x < x^{(\vartheta+\varepsilon)}$, then in the interval $0 \leqq \xi \leqq x$ the function $\sqrt{2e}\xi e^{g(\xi,\vartheta-\varepsilon)}$ is less than q where $q<1$, and so

$$1 - k_n(x) = \Gamma n \int_0^x [\sqrt{2e}\xi e^{g(\xi,\vartheta+\varepsilon)}]^{n+1} d\xi < \Gamma n x q^{n+1} \to 0.$$

On the other hand, if $x > x^{(\vartheta-\varepsilon)}$ and the value of the monotonously increasing function $\sqrt{2e}\xi e^{g(\xi,\vartheta-\varepsilon)}$ at the place $\frac{1}{2}(x^{(\vartheta-\varepsilon)}+x)$ is r $(r>1)$, then

$$\int_0^x [\sqrt{2e}\xi e^{g(\xi,\vartheta-\varepsilon)}]^{n+1} d\xi > \int_{\frac{x^{(\vartheta-\varepsilon)}+x}{2}}^{x^{(\vartheta-\varepsilon)}} [\sqrt{2e}\xi e^{g(\xi,\vartheta-\varepsilon)}]^{n+1} d\xi > \frac{x^{(\vartheta-\varepsilon)}-x}{2} r^{n+1} \to \infty.$$

Therefore for any positive η and sufficiently large n it holds

$$f_n(x^{(\vartheta+\varepsilon)}-\eta) > k_n(x^{(\vartheta+\varepsilon)}-\eta) > 0$$

and

$$f_n(x^{(\vartheta-\varepsilon)}+\eta) < K_n(x^{(\vartheta-\varepsilon)}+\eta) < 0.$$

Tending with ε and η to 0 we have

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{(\vartheta)} = x^{(\vartheta)}$$

where $x^{(\vartheta)}$ is the positive root of the transcendental equation (3).

§ 5

Returning now to formula (2′) we can insert in the place of $D_n(\lambda)$ the quantity $\sqrt{n}\,x^{(\vartheta)}$, and using (9) one has

$$\frac{1}{A^*} < \frac{1}{A^{(\vartheta)}}$$

where

$$A^{(\vartheta)} = [\sqrt{2e}e^{\vartheta^2}x^{(\vartheta)}]^{-1}. \tag{12}$$

We have now to search for a value of ϑ for which $A^{(\vartheta)}$ is large. Numerical calculations show[2] that

$$A^{(0)} = 1{,}15, \quad A^{(1)} = 1{,}395; \quad x^{(0)} = 0{,}3731, \quad x^{(1)} = 0{,}1131.$$

The quantity $A^{(\vartheta)}$ considered as a function of ϑ has a maximum in $0<\vartheta<1$ only when $\frac{dA^{(\vartheta)}}{d\vartheta}=0$. Now the interval where the derivative of $A^{(\vartheta)}$

[2] The numerical calculations were performed by A. HEPPES to whom I express my gratitude.

may vanish can be estimated as follows. Differentiating equations (3) and (12) with respect to ϑ and equating this last expression with 0, we have

$$x'+x(2xx'+2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}\,\vartheta x'+2\vartheta)=0,$$
$$2\vartheta x+x'=0.$$

(The differentiation is denoted by a prime, x stands for $x^{(\vartheta)}$ and ϑ is the place of a possible extremum or inflexion of $A^{(\vartheta)}$.) Eliminating x' from these equations we have

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}\,\vartheta}-\sqrt{2}\,\vartheta.$$

But we know that $x^{(0)}<x<x^{(1)}$ (§ 4), i. e.

$$0{,}113<\frac{1}{\sqrt{2}\,\vartheta}-\sqrt{2}\,\vartheta<0{,}374$$

or $0{,}59<\vartheta<0{,}67$. From these data a rough graphical estimation shows that the place of the extremum is near to $\vartheta=0{,}642$. At this place we have $A^{(\vartheta)}=1{,}473$.

(Received 25 April 1958)

References

[1] G. Szegő, *Orthogonal polynomials* (New York, 1939).

[2] G. Szegő, Über eine Eigenschaft der Exponentialreihe, *Sitzungsb. der Berliner Math. Ges.*, **23** (1924), pp. 50—63.

[3] G. Szegő, Zur Theorie der Legendreschen Polynome, *Jahresb. der Deutschen Math. Ver.*, **40** (1931), pp. 163—166.

[4] Vera T. Sós and P. Turán, On some new theorems in the theory of diophantine approximations, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), pp. 241—255.

[5] P. Turán, *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen* (Budapest, 1953), Akadémiai Kiadó.

ON AN EXTREMAL PROBLEM

By

I. DANCS (Budapest)

(*Presented by* P. TURÁN)

In his book[1] P. TURÁN raised new problems of the theory of diophantine approximations and the results of the theory are applied to various problems of the analysis and analytical number theory. Pushing further these researches he got recently to a general extremal problem, the general solution of which would imply the improvement of the applications. This extremal problem is the following:

Let $z_1, z_2, \ldots, z_n$ be complex numbers with absolute value 1, k of them are fixed: $z_1 = \alpha_1, z_2 = \alpha_2, \ldots, z_k = \alpha_k$, furthermore

$$f(z) = \prod_{j=1}^{n} (1 - z_j z) = 1 + \sum_{l=1}^{n} a_l^{(1)} z^l, \tag{1}$$

$$\frac{1}{f(z)} = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} a_l^{(2)} z^l, \tag{2}$$

$$s_m(z) = 1 + \sum_{l=1}^{m} a_l^{(2)} z^l \tag{3}$$

and

$$I(z_{k+1}, z_{k+2}, \ldots, z_m) = \int\limits_{|z|=1} |1 - f(z) s_m(z)|^2 |dz|. \tag{4}$$

The general question is: what is $\max I(z_{k+1}, z_{k+2}, \ldots, z_n)$ when $z_{k+1}, z_{k+2}, \ldots, z_n$ vary independently on $|z| = 1$.

In this paper we solve the special case $k=1$. This case was also solved by E. MAKAI.[2] His proof is different from ours. We shall prove

THEOREM 1. *If $k=1$ and $|\alpha_1| = 1$, then* $\max\limits_{z_1=\alpha_1, |z_2|=1, \ldots, |z_n|=1} I(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *is attained only for $\alpha_1 = z_1 = z_2 = \cdots = z_n$ and its value is*

$$2\pi \sum_{\nu=m+1}^{m+n} \left\{ \sum_{0 \leqq j} (-1)^j \binom{m+n-j-1}{n-1} \binom{n}{\nu-m+j} \right\}^2.$$

[1] P. TURÁN, *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen* (Budapest, 1953), Akadémiai Kiadó.

[2] E. MAKAI, On a maximum problem, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **9** (1958), pp. 105—110.

PROOF. Without loss of generality we may suppose $z_1 = \alpha_1 = 1$. For the proof we write $I(z_1, z_2, \dots, z_n) = \int_0^{2\pi} |1 - f(e^{i\varphi}) s_m(e^{i\varphi})|^2 d\varphi$. Introducing the notation $g(z) = 1 - f(z) s_m(z) = \sum_{\nu=1}^{m+n} a_\nu^{(3)} z^\nu$ we may observe, as in [1], p. 40, that $a_1^{(3)} = a_2^{(3)} = \cdots = a_m^{(3)} = 0$.

Hence

$$I(z_1, z_2, \dots, z_n) = 2\pi \sum_{\nu=m+1}^{m+n} |a_\nu^{(3)}(z_1, z_2, \dots, z_n)|^2. \tag{5}$$

Our assertion will be proved if we can show that $|a_\nu^{(3)}|$ — for all our ν's — attains its maximal value if and only if $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = 1$. From (1), (2) and (3) it follows easily that

$$a_l^{(1)} = (-1)^l \sum_{1 \leqq j_1 < j_2 < \dots < j_l \leqq n} z_{j_1} z_{j_2} \cdots z_{j_l}, \tag{6}$$

$$a_l^{(2)} = \sum_{\substack{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n = l \\ \mu_1 \geqq 0, \mu_2 \geqq 0, \dots, \mu_n \geqq 0}} z_1^{\mu_1} z_2^{\mu_2} \cdots z_n^{\mu_n}, \tag{7}$$

further

$$a_\nu^{(3)} = -(a_m^{(2)} a_{\nu-m}^{(1)} + a_{m-1}^{(2)} a_{\nu-m+1}^{(1)} + \cdots).$$

Hence

$$a_\nu^{(3)} = \sum_{\substack{l_1 + l_2 + \dots + l_n = \nu \\ l_1 \geqq 0, l_2 \geqq 0, \dots, l_n \geqq 0}} a_{l_1, l_2, \dots, l_n} z_1^{l_1} z_2^{l_2} \cdots z_n^{l_n}. \tag{8}$$

Obviously, $|a_\nu^{(3)}| \leqq \sum_{l_1 + l_2 + \dots + l_n = \nu} |a_{l_1, l_2, \dots, l_n}|$ and the equality occurs if and only if $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = 1$, provided that the sign of each $a_{l_1, l_2, \dots, l_n}$ $(l_1 + l_2 + \cdots + l_n = \nu;\ l_1 \geqq 0, l_2 \geqq 0, \dots, l_n \geqq 0)$ is for each fixed ν the same. This is what we shall prove.

$a_{l_1, l_2, \dots, l_n}$ will be determined explicitly. At first we consider what is the contribution of $-a_m^{(2)} a_{\nu-m}^{(1)}$ to $a_{l_1, l_2, \dots, l_n}$. From (6) and (7) it is clear that $z_1^{l_1} z_2^{l_2} \cdots z_n^{l_n}$ $(l_1 + l_2 + \cdots + l_n = \nu)$ occurs as often in $a_m^{(2)} a_{\nu-m}^{(1)}$ as many-times one may choose $\nu - m$ at a time from the positive l_μ's. Denoting by i the numbers of the positive l_μ's in a fix $l_1, l_2, \dots, l_n$ $(l_1 + l_2 + \cdots + l_n = \nu)$, this contribution amounts, taking also the signs into account, to $(-1)^{\nu-m+1} \binom{i}{\nu - m}$ $(i \leqq n$ and $i \leqq \nu)$.

By the same reasoning we see that the contribution of $-a_{m-1}^{(2)} a_{\nu-m+1}^{(1)}$ to $a_{l_1, l_2, \dots, l_n}$ is $(-1)^{\nu-m+2} \binom{i}{\nu - m + 1}$ etc. Hence

$$a_{l_1, l_2, \dots, l_n} = (-1)^{\nu-m+1} \left[\binom{i}{\nu - m} - \binom{i}{\nu - m + 1} + \binom{i}{\nu - m + 2} - \cdots \right].$$

Taking the well-known property $\binom{j}{k}=\binom{j-1}{k-1}+\binom{j-1}{k}$ of the binomial coefficients into account, and using $i\leqq n$ and $i\leqq \nu$, we get

$$a_{l_1, l_2, \ldots, l_n}=(-1)^{\nu-m+1}\binom{i-1}{\nu-m-1}. \tag{9}$$

From this representation it follows that the sign of $a_{l_1, l_2, \ldots, l_n}$ $(l_1+l_2+\cdots+l_n=\nu)$ is independent of $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Hence the first part of our theorem is completed.

For the proof of the second part of our assertion, from (6) and (7) taking into account that

$$\left.\begin{aligned} a_l^{(1)} &= (-1)^l\binom{n}{l} \\ a_l^{(2)} &= \binom{n+l-1}{n-1} \end{aligned}\right\} \text{ if } \quad z_1=z_2=\cdots=z_n=1,$$

and

further the first part of Theorem 1, we write

$$\max_{|z_1|=|z_2|=\ldots=|z_n|=1} I(z_1, z_2, \ldots, z_n)=2\pi\sum_{\nu=m+1}^{m+n}\max_{|z_1|=|z_2|=\ldots=|z_n|=1}|a_\nu^{(3)}(z_1, z_2, \ldots, z_n)|^2=$$

$$=2\pi\sum_{\nu=m+1}^{m+n}|a_\nu^{(3)}(1, 1, \ldots, 1)|^2=2\pi\sum_{\nu=m+1}^{m+n}\left[\binom{m+n-1}{n-1}\binom{n}{\nu-m}-\right.$$

$$\left.-\binom{m+n-2}{n-1}\binom{n}{\nu-m+1}+\cdots\right]^2,$$

as asserted.

As to the application we shall improve a main theorem of the book mentioned in [1]. This theorem is the following:

Let $z_1, z_2, \ldots, z_n$ and $b_1, b_2, \ldots, b_n$ be arbitrary complex numbers and $m\geqq -1$ integer. Then one can find such an integer ν that

$$m+1\leqq \nu\leqq m+n$$

and

$$f(\nu)=\frac{|b_1 z_1^\nu+b_2 z_2^\nu+\cdots+b_n z_n^\nu|}{\min\limits_{1\leqq j\leqq n}|z_j|^\nu}\geqq|b_1+b_2+\cdots+b_n|\left(\frac{n}{2e(m+n)}\right)^n.$$

Our assertion is that under the same conditions the following theorem holds:

THEOREM 2.

$$f(\nu)\geqq\frac{|b_1+b_2+\cdots+b_n|}{2e}\left(\frac{n}{2e(m+n)}\right)^{n-1}.$$

This improvement is not essential if n is large, but in the case $n=2$ this gives the real order in m, as the example $b_1=b_2=\frac{1}{2}$ and $z_1=e^{\frac{\pi i}{2m}}$, $z_2=e^{-\frac{\pi i}{2m}}$ shows.

In this case

$$|f(m+1)|=\left|\cos\frac{\pi(m+1)}{2m}\right|=\left|\sin\frac{\pi}{2m}\right|<\frac{\pi}{2m},$$

similarly

$$|f(m+2)|<\frac{\pi}{m},$$

and from Theorem 2

$$\max_{m+1\leqq\nu\leqq m+2}|f(\nu)|\geqq\frac{1}{2e^2(m+2)}.$$

PROOF OF THEOREM 2. It may be assumed obviously that $\min_{1\leqq j\leqq n}|z_j|=1$. In this case one can prove that (see in [1], p. 40)

$$\max_{m+1\leqq\nu\leqq m+n}|f(\nu)|\geqq\frac{|b_1+b_2+\cdots+b_n|}{\sum_{\nu=m+1}^{m+n}|A_\nu^{(3)}|}$$

where

$$A_\nu^{(3)}=a_\nu^{(3)}\left(\frac{1}{z_1},\frac{1}{z_2},\ldots,\frac{1}{z_n}\right)$$

in our notation. Obviously,

$$|A_\nu^{(3)}|\leqq\max_{|z_1|\geqq1,\,|z_2|\geqq1,\ldots,\,|z_n|\geqq1}a_\nu^{(3)}\left(\frac{1}{z_1},\frac{1}{z_2},\ldots,\frac{1}{z_n}\right)=|a_\nu^{(3)}(1,1,\ldots,1)|.$$

From (9) we have

$$|a_\nu^{(3)}(1,1,\ldots,1)|=\sum_{i=1}^{n}\binom{i-1}{\nu-m-1}P(i)\tag{10}$$

where $P(i)$ indicates that how many solutions are of the equation $l_1+l_2+\cdots+l_n=\nu$ $(l_1\geqq0, l_2\geqq0,\ldots,l_n\geqq0)$ by the condition: exactly i of the l_μ's are positive. Obviously, $P(i)$ is less than the number of the solutions of the equation

$$l_1+l_2+\cdots+l_n=\nu-i\qquad(l_1\geqq0, l_2\geqq0,\ldots,l_n\geqq0)$$

which is $\binom{\nu-i+n-1}{n-1}$.

Thus from (10)

$$|a_\nu^{(3)}(1,1,\ldots,1)|\leqq\sum_{i=1}^{n}\binom{i-1}{\nu-m-1}\binom{\nu-i+n-1}{n-1},$$

further

$$\sum_{\nu=m+1}^{m+n} |a_\nu^{(3)}| \leqq \sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu=m+1}^{m+n} \binom{i-1}{\nu-m-1}\binom{\nu-i+n-1}{n-1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=0}^{n-1}\binom{i-1}{l}\binom{m+n+l-i}{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{m+n-k}{n-1}\left\{\binom{k-1}{0}+\right.$$

$$\left.+\binom{k}{1}+\binom{k+1}{2}+\cdots+\binom{n-1}{k-1}\right\}.$$

But

$$\binom{k-1}{0}+\binom{k}{1}+\binom{k+1}{2}+\cdots+\binom{n-1}{n-k}=\binom{n}{n-k}$$

and thus

$$\sum_{\nu=m+1}^{m+n}|a_\nu^{(3)}| \leqq \sum_{k=1}^{n}\binom{m+n-k}{n-1}\binom{n}{k} \leqq \binom{m+n-1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} < 2^n\binom{m+n-1}{n-1} <$$

$$< \left(\frac{2e(m+n)}{n}\right)^{n-1} \cdot 2\frac{\left(1-\dfrac{1}{m+n}\right)^{n-1}}{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n-1}} < \left(\frac{2e(m+n)}{n}\right)^{n-1} \cdot \frac{2}{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n-1}} <$$

$$< 2e\left(\frac{2e(m+n)}{n}\right)^{n-1}$$

from which our Theorem 2 follows.

(Received 5 May 1958)

SUR LES COURBES IRRAMIFIÉES

Par

Á. CSÁSZÁR et J. CZIPSZER (Budapest)

(*Présenté par* G. ALEXITS)

1. On connaît bien le rôle fondamental que deux espaces topologiques particuliers, *l'arc* et la *courbe simple fermée*, jouent dans bien de problèmes de la topologie. C'est ce rôle de grande importance qui explique le nombre très considérable des travaux s'occupant de la caractérisation topologique de ces deux sortes d'espaces. Parmi ces caractérisations, il y a une, due à K. MENGER, qui mérite une attention particulière, parce qu'elle est basée sur la notion très intuitive *d'ordre de ramification* d'un point d'un espace topologique, notion que l'on définit, en se bornant à des points d'ordre fini, de la façon suivante: le point x de l'espace topologique R possède l'ordre de ramification n, en symbole: $\text{ord}_x R = n$, si n est le plus petit des nombres cardinaux finis m tels que chacun des voisinages du point x contient un voisinage ouvert de x dont la frontière se compose de m points au plus.

Or, la caractérisation en question affirme que *l'arc et la courbe simple fermée sont les seuls continus*[1] *métriques non dégénérés se composant exclusivement de points d'ordre* 2 *au plus.*[2] En appelant *point de ramification* tout point d'ordre supérieur à 2 (y compris les points dits d'ordre infini, c'est-à-dire: les points qui ne possèdent aucun ordre de ramification fini), on peut donc dire que *l'arc et la courbe simple fermée* sont les seuls continus métriques sans points de ramification, ou qu'ils *sont les seuls continus métriques irramifiés.*

C'est F. FRANKL qui a réussi à généraliser les résultats cités de K. MENGER, en démontrant que si l'on remplace dans l'hypothèse, les mots "continus métriques" par "espaces de Hausdorff connexes et contenant un sous-ensemble dense dénombrable", on parvient à une caractérisation topologique des espaces homéomorphes, soit à un segment, soit à une circonférence, soit à une droite, soit à une demi-droite. De plus, il a montré qu'en supprimant l'hypothèse de l'existence d'un sous-ensemble dense dénombrable, l'énoncé reste le même, pourvu que l'on substitue, dans la définition du

[1] Nous entendrons par *continu* un espace de Hausdorff connexe et (bi)compact; un espace est dit dégénéré s'il se compose d'un seul point.

[2] V. [7], p. 303; [8], p. 267.

segment, de la circonférence, de la droite et de la demi-droite, à l'ensemble ordonné des nombres réels, un ensemble ordonné quelconque dont l'ordre est continu.[3]

Le but de cet ouvrage est de donner une nouvelle démonstration aux résultats indiqués de F. FRANKL. Cette démonstration présente deux avantages vis-à-vis de la démonstration originale : d'une part, certaines étapes communes aux deux démonstrations ont été considérablement simplifiées (v. p. ex. la démonstration de la compacité locale, proposition (2. 10)), de l'autre, la méthode de démonstration utilise la notion de connexité par arcs généralisés, ce qui permet des simplifications ultérieures lorsqu'on se borne au cas d'un espace de Hausdorff séparable[4] ou d'un espace métrisable. Dans ce qui suit, nous commençons par traiter ces deux cas particuliers, sans doute les plus importants au point de vue des applications, et passerons ensuite aux modifications nécessaires pour parvenir aux résultats généraux de F. FRANKL.

Dans § 4, nous présentons comme application de ces résultats une généralisation de la caractérisation topologique, due à K. MENGER, des ainsi-dites *courbes ordinaires.* On appelle courbe ordinaire un contenu métrique qui est la réunion d'un nombre fini d'arcs n'ayant deux à deux qu'une extrémité commune au plus, ou, autrement dit, un espace homéomorphe à un polytope connexe de dimension 1. Le théorème mentionné de K. MENGER affirme *qu'un continu métrique non dégénéré composé exclusivement de points d'ordre fini et ne contenant qu'un nombre fini de points de ramification est nécessairement une courbe ordinaire.*[5]

Nous allons généraliser ce théorème de K. MENGER dans la même direction que F. FRANKL l'a fait quant à la caractérisation de l'arc et de la courbe simple fermée, en considérant des continus généraux au lieu des continus métriques. Notre démonstration présente, vis-à-vis de la démonstration de K. MENGER, même si l'on se borne à des continus métriques,

[3] V. [3]. Nous reviendrons à la formulation précise de ces résultats au § 3. Un résultat analogue a été démontré pour des espaces de Moore connexes irramifiés par F. B. JONES [5].

[4] C'est-à-dire admettant une base dénombrable.

[5] V. [7], p. 304; [8], p. 266. Il faut remarquer que la formulation du théorème est inexacte à chacun des deux endroits cités, puisque la condition que l'espace ne doit contenir aucun point d'ordre infini manque de l'hypothèse. Cette condition est tout de même essentielle, comme le montre l'exemple de la réunion, dans le plan, d'une suite infinie de circonférences à rayons tendant vers 0 et contenant un point commun où elles possèdent une tangente commune ; en effet, cet espace est un continu métrique se composant d'un seul point d'ordre infini et des points d'ordre 2 et lequel, pourtant, n'est pas une courbe ordinaire.

l'avantage de ne pas faire usage du théorème profond appelé "n-Beinsatz",[6] sur lequel K. MENGER a fondé sa propre démonstration.

2. Dans ce qui suit, nous entendons par *courbe irramifiée* un espace de Hausdorff R connexe, non dégénéré et sans points de ramification, c'est-à-dire tel qu'on ait $\operatorname{ord}_x R \leqq 2$ pour $x \in R$ quelconque.

(2. 1) *R étant une courbe irramifiée, tout sous-ensemble connexe et non dégénéré de R est une courbe irramifiée.*

En effet, il suffit de remarquer que l'on a

$$\operatorname{ord}_x E \leqq \operatorname{ord}_x R \quad \text{pour} \quad x \in E \subset R, \tag{2.2}$$

conséquence évidente de la formule

$$\operatorname{Fr}_E(G \cap E) \subset (\operatorname{Fr}_R G) \cap E, \tag{2.3}$$

valable pour un ensemble ouvert G quelconque, où $\operatorname{Fr}_X Y$ désigne la frontière de l'ensemble Y relativement à l'espace X.[7]

(2. 4) *Tout espace de Hausdorff R admettant une base composée d'ensembles à frontière finie est régulier. Si, en outre, R est connexe, il est localement connexe.*[8]

DÉMONSTRATION. Si $x \in G \subset R$ et si G est un sous-ensemble ouvert de R, il existe un voisinage ouvert U de x tel que $U \subset G$ et à frontière finie: $\operatorname{Fr} U = \{x_0, \ldots, x_n\}$. En désignant par U_i et par V_i deux ensembles ouverts tels que

$$x \in U_i, \quad x_i \in V_i, \quad U_i \cap V_i = 0,$$

l'ensemble $V = U \cap U_0 \cap \cdots \cap U_n$ est un voisinage ouvert de x tel que $x \in V \subset \overline{V} \subset \overline{U} - \{x_0, \ldots, x_n\} = U \subset G$.

La seconde partie de l'énoncé s'ensuit de la première par un raisonnement connu.[9]

(2. 5) *R étant une courbe irramifiée, tout point $x \in R$ possède des voisinages ouverts arbitrairement petits, connexes et dont la frontière se compose de n points au plus, où $n = \operatorname{ord}_x R \leqq 2$; en particulier, R est localement connexe.*

DÉMONSTRATION. La connexité locale de R est contenue dans la proposition (2. 4). En posant ensuite $\operatorname{ord}_x R = n$, on peut trouver des voisinages ouverts arbitrairement petits de x et dont la frontière se compose de n points au plus. En remplaçant ces voisinages par leurs composantes contenant le point x, on parvient aux voisinages exigés, eu égard à ce que, dans les

[6] V. [8], p. 214.

[7] $\operatorname{Fr}_E(G \cap E) = E \cap \overline{(G \cap E)} - E \cap G \subset E \cap \overline{G} - E \cap G = E \cap (\overline{G} - G) = E \cap \operatorname{Fr}_R G$.

[8] V. [3], th. I et II; [5], th. 3.

[9] V. p. ex. [6], § 46, IV, 1 ou [3], th. II.

espaces localement connexes, toute composante C d'un ensemble ouvert G est ouverte[10] et qu'on a $\mathrm{Fr}\, C \subset \mathrm{Fr}\, G$.[11]

(2. 6) *Si la courbe irramifiée R contient deux points d'ordre $\leqq 1$, R est compacte.*

DÉMONSTRATION. On a par hypothèse deux points $a \neq b$ de R tels que $\mathrm{ord}_a R \leqq 1$, $\mathrm{ord}_b R \leqq 1$.

Soit $R = \bigcup G^\gamma$ un recouvrement ouvert quelconque de R. Désignons par U_a (et par U_b) un voisinage ouvert de a (et de b, respectivement), connexe, compris dans un seul ensemble G^γ, dont la frontière se compose d'un seul point au plus, et tel que $b \notin U_a$ $(a \notin U_b)$. De même si $a \neq x \neq b$, soit U_x un voisinage ouvert de x, connexe, compris dans un seul ensemble G^γ, dont la frontière se compose de deux points au plus, et tel que $a, b \notin U_x$. L'existence des voisinages de ce genre s'ensuit de (2. 5).

Or, les ensembles ouverts U_a, U_b et U_x $(a \neq x \neq b)$ couvrent l'espace connexe R, par suite il existe une suite finie $U_{x_0}, \ldots, U_{x_n}$ telle que

$$(2.7) \qquad a \in U_{x_0}, \quad b \in U_{x_n}, \quad U_{x_{i-1}} \cap U_{x_i} \neq 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$ [12]

On peut supposer que cette suite se compose du plus petit nombre possible de termes. En ce cas, on a évidemment

$$(2.8) \qquad x_0 = a, \quad x_n = b, \quad U_{x_i} \cap U_{x_j} = 0 \quad \text{pour} \quad |i-j| > 1.$$

Les relations (2. 7) et (2. 8) ont pour conséquence

$$U_a \cap U_{x_1} \neq 0, \quad U_{x_1} - U_a \neq 0,$$

ce qui entraîne, U_{x_1} étant connexe, l'inégalité $\mathrm{Fr}\, U_a \cap U_{x_1} \neq 0$, équivalente à l'inclusion $\mathrm{Fr}\, U_a \subset U_{x_1}$, puisque $\mathrm{Fr}\, U_a$ se compose d'un seul point. On obtient de la même façon $\mathrm{Fr}\, U_b \subset U_{x_{n-1}}$. Enfin, pour $0 < i < n$, on a

$$U_{x_i} \cap U_{x_{i-1}} \neq 0, \quad U_{x_{i-1}} - U_{x_i} \neq 0,$$
$$U_{x_i} \cap U_{x_{i+1}} \neq 0, \quad U_{x_{i+1}} - U_{x_i} \neq 0,$$

donc

$$\mathrm{Fr}\, U_{x_i} \cap U_{x_{i-1}} \neq 0 \neq \mathrm{Fr}\, U_{x_i} \cap U_{x_{i+1}},$$

ce qui entraîne en vertu de $U_{x_{i-1}} \cap U_{x_{i+1}} = 0$ et comme $\mathrm{Fr}\, U_{x_i}$ se compose de deux points au plus, $\mathrm{Fr}\, U_{x_i} \subset U_{x_{i-1}} \cup U_{x_{i+1}}$.

Les inclusions obtenues impliquent

$$\overline{\bigcup_0^n U_{x_i}} = \bigcup_0^n \overline{U}_{x_i} \subset \bigcup_0^n U_{x_i},$$

[10] V. [6], § 44, II, 4.
[11] V. [6], § 44, III, 3.
[12] V. [6], § 41, II, 8.

de sorte que l'ensemble $\bigcup_0^n U_{x_i}$ est fermé-ouvert, d'où

$$R = \bigcup_0^n U_{x_i},$$

vu que R est connexe. A plus forte raison, R peut être couvert avec une suite finie des ensembles G^γ, ce qui montre que R est (bi)compact.

(2. 9) *R étant une courbe irramifiée, tout voisinage U d'un point $x \in R$ contient un voisinage fermé V de x, tel qu'il existe deux points $a \neq b$ jouissant de la propriété*

$$a, b \in V, \quad \mathrm{ord}_a V \leqq 1, \quad \mathrm{ord}_b V \leqq 1$$

et que V soit lui-même une courbe irramifiée.

Démonstration. R étant connexe et non-dégénéré, l'égalité $\mathrm{ord}_x R = 0$ est évidemment impossible.

Supposons qu'on ait $\mathrm{ord}_x R = 1$. D'après (2. 5) et (2. 4), le voisinage U de x contient un voisinage ouvert U' connexe et tel que $\overline{U'} \subset U$, $\overline{U'} \neq R$, $\mathrm{Fr}\, U' = \{y\}$. L'ensemble $V = \overline{U'}$ satisfait aux conditions de la proposition. En effet, $V \subset U$ est un voisinage fermé de x, il est connexe, donc une courbe irramifiée (cf. (2. 1)), et on a d'après (2. 2) $\mathrm{ord}_x V \leqq \mathrm{ord}_x R = 1$. De plus, on a $\mathrm{ord}_y V \leqq 1$; pour s'en convaincre, il suffit de montrer l'existence de voisinages ouverts arbitrairement petits W de y tels que $V \cap \mathrm{Fr}\, W$ se compose d'un seul point au plus (cf. (2. 3)). Or, s'il n'en était pas ainsi, posons $z \in R - V$ et soit W un voisinage ouvert de y tel que $z \notin W$ et que $\mathrm{Fr}\, W$ se compose de deux points au plus, mais que $V \cap \mathrm{Fr}\, W$ contienne au moins deux points. On aura en ce cas $\mathrm{Fr}\, W \subset V$, donc $\overline{U' \cup W} = U' \cup \mathrm{Fr}\, U' \cup W \cup \mathrm{Fr}\, W \subset U' \cup W$, en vertu des inclusions $\mathrm{Fr}\, U' = \{y\} \subset W$ et $\mathrm{Fr}\, W \subset V = U' \cup \mathrm{Fr}\, U' \subset U' \cup W$. L'espace R étant connexe et l'ensemble $U' \cup W$ fermé-ouvert, il s'ensuivrait $R = U' \cup W$, ce qui contredirait à la relation $z \notin U' \cup W$.

Considérons ensuite un point x d'ordre 2: $\mathrm{ord}_x R = 2$. Soit $U' \subset U$ un voisinage ouvert de x tel que la frontière d'un voisinage ouvert $U_1 \subset U'$ quelconque de x se compose d'au moins deux points. D'après (2. 5) et (2. 4), il existe un voisinage ouvert et connexe U'' de x tel que $\overline{U''} \subset U'$, $\mathrm{Fr}\, U'' = \{a, b\}$, $a \neq b$. Il suffit de poser $V = \overline{U''}$ et de montrer que l'on a $\mathrm{ord}_a V \leqq 1$, $\mathrm{ord}_b V \leqq 1$. A ce but, nous montrons comme plus haut que le point a possède des voisinages ouverts arbitrairement petits W tels que $V \cap \mathrm{Fr}\, W$ se compose d'un seul point au plus. S'il n'en était pas ainsi, soit W un voisinage ouvert de a tel que $W \subset U'$, que $\mathrm{Fr}\, W$ contienne deux points au plus et que $V \cap \mathrm{Fr}\, W$ contienne au moins deux points. En ce cas, on a $\mathrm{Fr}\, W \subset V$, donc $\overline{U'' \cup W} = \overline{U''} \cup \overline{W} = U'' \cup \{a, b\} \cup W \cup \mathrm{Fr}\, W =$

$= U'' \cup \{b\} \cup W$, en vertu de la relation $a \in W$. Il s'ensuivrait $\mathrm{Fr}\,(U'' \cup W) \subset \{b\}$, ce qui contredirait à l'inclusion $U'' \cup W \subset U'$ et au choix de U'. Le cas du point b se traite de la même manière.

Les propositions (2. 6) et (2. 9) ont pour conséquence immédiate:

(2. 10) *Toute courbe irramifiée est localement compacte.*

La proposition (2. 4) entraîne, en vertu du théorème de métrisation de TYCHONOFF et d'URYSOHN:

(2. 11) *Toute courbe irramifiée séparable est métrisable.*

La proposition suivante joue un rôle fondamental dans ce qui suit:

(2. 12) *Toute courbe irramifiée métrisable est connexe par arcs.*

DÉMONSTRATION. D'après (2. 10), une courbe irramifiée R quelconque est localement compacte. Or, un espace métrique localement compact est ouvert dans son complété,[13] donc topologiquement complet, ce qui entraîne l'énoncé d'après la connexité locale de R et le théorème de MAZURKIEWICZ—MOORE—MENGER.[14]

(2. 13) *Si la courbe irramifiée métrisable R contient une courbe simple fermée C, on a $C = R$.*

En effet, soit $x \in R - C$, $y \in C$, et z le premier point situé sur C d'un arc xy; on aurait $\mathrm{ord}_z R \geqq 3$, ce qui est impossible.

(2. 14) *R étant une courbe irramifiée métrisable ne contenant aucune courbe simple fermée, deux points quelconques $a \neq b$ se laissent unir par un arc ab et un seul, et, parmi trois points distincts, il y a un qui est situé sur l'arc qui relie les deux autres.*

DÉMONSTRATION. Si A et A' étaient deux arcs d'extrémités a et b, posons p. ex. $x \in A' - A$ et soient y et z les premiers points situés sur A de l'arc $xa \subset A'$ et $xb \subset A'$, respectivement. La réunion des arcs $yz \subset A'$ et $yz \subset A$ forme une courbe simple fermée, contrairement à l'hypothèse.

Si a, b, c sont trois points distincts tels que $a \notin bc$, $b \notin ca$, $c \notin ab$, le premier point x situé sur bc de ab ne peut coïncider ni avec b, ni avec c; on en tire $\mathrm{ord}_x R \geqq 3$, ce qui est impossible.

[13] La plus simple démonstration de ce fait est la suivante: Soit R^* le complété de l'espace métrique R, $x \in R$ et $K \subset R$ un voisinage (relatif à R) compact de x. Si $x_n^* \in R^* - R$, $x_n^* \to x$, soit $\{x_{ni}\}$ une suite telle que $x_{ni} \in R$, $x_{ni} \to x_n^*$ pour $i \to \infty$. Pour n fixé, il n'y a qu'un nombre fini de points x_{ni} qui soient compris dans K, puisque $x_{ni} \to x_n^* \notin K$ et que K est compact, on peut donc trouver un indice i_n tel que $x_{ni_n} \notin K$, $\varrho(x_{ni_n}, x_n^*) < \frac{1}{n}$. Il s'ensuit $x_{ni_n} \to x$, contrairement à l'hypothèse que K est un voisinage de x relativement à R.

[14] V. p. ex. [6], § 45, II, 1 et § 45, I, 2.

(2. 15) *R étant une courbe irramifiée métrisable contenant deux points $a \neq b$ d'ordre $\leqq 1$, R est un arc ab.*

En effet, si $\mathrm{ord}_a R \leqq 1$, $\mathrm{ord}_b R \leqq 1$, $a \neq b$, soit $A \subset R$ un arc ab. Si $x \in R - A$, soit y le premier point situé sur A d'un arc xa. Or, $y = a$ impliquerait $\mathrm{ord}_a R \geqq 2$, $y = b$ impliquerait $\mathrm{ord}_b R \geqq 2$ et $a \neq y \neq b$ impliquerait $\mathrm{ord}_y R \geqq 3$, inégalités qui sont toutes impossibles.

(2. 16) *Dans les hypothèses de* (2. 14), *tout ensemble compact $K \subset R$ est contenu dans un arc $A \subset R$.*

En effet, on conclut de (2. 9) et de (2. 15) que K peut être couvert par une suite finie d'arcs $a_i b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Or, la réunion des arcs ab et bc étant identique à l'arc bc, ac ou ab suivant que l'on a $a \in bc$, $b \in ac$ ou $c \in ab$ (v. (2. 14)), on constate que l'ensemble $a_1 b_1 \cup b_1 a_2 \cup a_2 b_2 \cup \cdots \cup \cup a_{n-1} b_{n-1} \cup b_{n-1} a_n \cup a_n b_n$ est un arc $A \subset R$ contenant K.

(2. 17) *R étant une courbe irramifiée métrisable, si $ab \subset R$ est un arc, tout point $x \in ab$, $a \neq x \neq b$ est un point intérieur de ab.*

Démonstration. Soit U un voisinage ouvert et connexe de x tel que $a, b \notin U$ (cf. (2. 5)) et posons $y \in U - ab$. L'ensemble U étant, d'après (2. 1), une courbe irramifée métrisable, il contient en vertu de (2. 12) un arc yx. En désignant par z le premier point situé sur ab de l'arc yx, on a $a \neq z \neq b$, donc $\mathrm{ord}_z R \geqq 3$, ce qui est impossible.

Les propositions établies permettent de démontrer les deux théorèmes suivants:

Théorème I. *R étant une courbe irramifiée séparable, R est homéomorphe, soit à un segment, soit à une circonférence, soit à une droite, soit à une demi-droite.*

Démonstration. D'après (2. 11), R est métrisable. Si R est compacte, elle est une courbe simple fermée ou un arc, d'après (2. 13) et (2. 16).

En supposant que R n'est pas compacte, elle ne contient aucune courbe simple fermée (cf. (2. 13)) et elle est localement compacte (cf. (2. 10)), donc, en désignant par $R^* = R \cup \{\omega\}$ le compactifié d'Alexandroff correspondant,[15] R^* est un espace de Hausdorff connexe, compact et séparable, et on a évidemment $\mathrm{ord}_x R^* = \mathrm{ord}_x R \leqq 2$ pour $x \in R$. Or, on a $\mathrm{ord}_\omega R^* \leqq 2$, puisque les ensembles $R^* - K$, où K est un sous-ensemble compact quelconque de R, forment un système fondamental de voisinages du point ω, et que tout ensemble compact $K \subset R$ peut être renfermé dans un arc $ab = A \subset R$, (cf. (2. 16)) ce qui entraîne d'après (2. 17)

$$\omega \in R^* - A \subset R^* - K \quad \text{et} \quad \mathrm{Fr}_{R^*}(R^* - A) = \mathrm{Fr}_{R^*} A = \mathrm{Fr}_R A \subset \{a, b\}.$$

[15] V. [1], p. 93.

On voit donc que R^* est une courbe irramifiée séparable et compacte, donc, en vertu de la partie démontrée de l'énoncé, une courbe simple fermée ou un arc. L'ensemble $R = R^* - \{\omega\}$ est donc homéomorphe à une droite ou à une demi-droite, puisque si R^* est un arc, ω doit être nécessairement une de ses extrémités, autrement l'ensemble R ne serait plus connexe.

THÉORÈME II. *Les énoncés du* th. I *restent valables sous l'hypothèse que R est une courbe irramifiée métrisable.*[16]

DÉMONSTRATION. Il suffit évidemment de démontrer que l'espace R est séparable, ce qui est évidemment le cas si R est compact. Supposons donc que R ne soit pas compact, donc, d'après (2. 13), qu'il ne contienne aucune courbe simple fermée.

Soit $a \in R$ et posons $R' = R - \{a\}$. L'ensemble R' ne peut avoir que deux composantes au plus; en effet x, y et z étant situés dans trois composantes distinctes de R', les arcs xa, ya et za sont compris, sauf le point a, dans les mêmes composantes que leurs extrémités x, y et z, donc ils ne possèdent d'autres points communs que a, ce qui entraînerait $\mathrm{ord}_a R \geqq 3$.

Il suffit donc de montrer que toute composante C de R' est séparable. S'il n'en était pas ainsi, C ne pourrait pas être totalement bornée, elle contiendrait donc une suite infinie $\{x_i\}$ telle que $\varrho(x_i, x_j) \geqq \varepsilon > 0$ pour $i \neq j$. Les arcs ax_i sont tous séparables, l'inclusion $C \subset \bigcup_i ax_i$ serait donc impossible. Or, en posant $x \in C - \bigcup_i ax_i$, $a \in xx_i$ impliquerait $a \in C$, puisque C est ouvert, donc connexe par arcs, et par conséquent $xx_i \subset C$ (cf. (2. 14)). Egalement d'après (2. 14), on aurait $x_i \in ax$ pour $i = 1, 2, \ldots$, contrairement à ce fait que l'arc ax est compact.

3. Afin de passer au problème des courbes irramifiées quelconques, rappelons d'abord les définitions et les propositions suivantes.

Soit R un ensemble (totalement) ordonné et supposons que l'ordre de R soit *continu*, ce qui veut dire, d'une part, que l'inégalité $x < y$ entraîne l'existence d'un élément $z \in R$ tel que $x < z < y$, de l'autre que si $R = A \cup B$, $A \cap B = 0$, $A \neq 0 \neq B$, et si $a \in A$, $b \in B$ implique $a < b$, en ce cas ou bien A contient un élément maximum, ou bien B contient un élément minimum.

Posons

$$(-\infty, a) = \{x : x < a\} \quad (a, +\infty) = \{x : x > a\}, \quad (a, b) = \{x : a < x < b\}$$

et munissons R de la topologie dans laquelle les ensembles de la forme

[16] Tandis que le th. I est un cas particulier des résultats de F. FRANKL ([3]), l'énoncé du th. II semble être nouveau; v. tout de même [6], § 46, V, 5. En se bornant à des courbes irramifiées métrisables complètes, la démonstration devient bien plus facile; cf. [2].

$(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ et (a, b) forment une base. De cette façon, R devient un espace de Hausdorff connexe et sans points de ramification, autrement dit, une courbe irramifiée (pourvu qu'il contienne au moins deux points). Si R contient un élément minimum a et un élément maximum $b \neq a$, il s'appelle un *arc généralisé* ab, a et b étant ses *extrémités*; si R contient un élément minimum, mais il ne contient aucun élément maximum, il s'appelle une *demi-droite généralisée*; si R ne contient ni élément minimum, ni élément maximum, il s'appelle *droite généralisée*. Enfin, un espace de Hausdorff qui est la réunion de deux arcs généralisés dont les extrémités sont communes mais qui n'ont aucun autre point commun, s'appelle *circonférence généralisée*.

D'après ces définitions, on démontre facilement les propositions suivantes:

(3. 1) *Tout arc généralisé est compact; toute circonférence généralisée est une courbe irramifiée compacte.*

(3. 2) *A étant un arc généralisé, si $a, b \in A$ et $a < b$, l'ensemble $[a, b] = \{x : a \leqq x \leqq b\}$ est un arc généralisé ab.*

(3. 3) *R étant un espace de Hausdorff et ab et bc étant deux arcs généralisés tels que $ab \cap bc = \{b\}$, $R = ab \cup bc$, R est un arc généralisé ac.*

(3. 4) *$F \neq 0$ étant un sous-ensemble fermé d'un arc généralisé A, F contient un élément minimum et un élément maximum.*

(3. 5) *ab et bc étant deux arcs généralisés, situés dans un espace de Hausdorff, leur réunion contient un arc généralisé ac.*

(3. 6) *C étant une circonférence généralisée, si $x \in C$, l'ensemble $C - \{x\}$ est une droite généralisée.*

Nous démontrons ensuite la proposition suivante, analogue à (2. 15):

(3. 7) *R étant une courbe irramifiée contenant deux points $a \neq b$ d'ordre $\leqq 1$, R est un arc généralisé ab.*

DÉMONSTRATION. Soit $a \neq x \neq b$. En désignant par C une composante de $R - \{x\}$, on a $\mathrm{Fr}\, C \subset \{x\}$[17] et $\mathrm{Fr}\, C \neq 0$ (puisque R est connexe), donc $\mathrm{Fr} C = \{x\}$. Par conséquent, la frontière d'un voisinage ouvert quelconque suffisamment petit de x rencontre l'ensemble C, ce qui entraîne que le nombre des composantes de $R - \{x\}$ est inférieur ou égal à 2. Or, ce nombre ne peut pas être inférieur à 2, en particulier, les points a et b appartiennent à deux composantes distinctes de $R - \{x\}$, autrement la composante de $R - \{x\}$ qui contient a et b serait compacte d'après (2. 6), donc fermée-ouverte,[18] contrairement à l'hypothèse de la connexité de R.

Désignons par A_x et par B_x les composantes de $R - \{x\}$ qui contien-

[17] V. 6, § 44, III, 3.
[18] Cf. (2.5) et [6], § 44, II, 4.

nent a et b, respectivement. Si $y \in A_x$, $y \neq a \neq x$, on a $x \in B_y$, parce que l'ensemble connexe $B_x \cup \{x\}$ réunit les points b et x sans rencontrer le point y.

On en conclut que l'on peut définir un ordre (total) sur R de la façon suivante:

posons $a < x$ pour $x \neq a$, $x < b$ pour $x \neq b$, et, pour $x, y \neq a, b$, soit $x < y$ si et seulement si $x \in A_y$.

En effet, d'après ce que nous venons d'établir, pour $x \neq y$, des relations $x \in A_y$ et $y \in A_x$ une et une seule est remplie (on pose naturellement $A_a = B_b = 0$, $A_b = R - \{b\}$, $B_a = R - \{a\}$); de plus, $x \in A_y$ et $y \in A_z$ entraînent $z \in B_y$, par suite A_y relie x à a sans rencontrer z, d'où $x \in A_z$.

Désignons par R' l'ensemble R muni de la topologie qui résulte de cet ordre. La topologie de R' est identique à celle de R; en effet, les ensembles $(-\infty, x) = A_x$ et $(x, +\infty) = B_x$ sont ouverts dans R, donc il en est de même quant à l'ensemble $(x, y) = A_y \cap B_x$, ce qui veut dire que la transformation identique de l'espace compact R (cf. 2.6)) en R' est continue, donc un homéomorphisme.

Eu égard à ce que R est connexe, on constate aisément que l'ordre introduit sur R est continu.

Ceci établi, on arrive à la proposition suivante, analogue à (2.12):

(3.8) *Toute courbe irramifiée R est connexe par arcs généralisés (c'est-à-dire deux points quelconques $c \neq d$ de R peuvent être reliés par un arc généralisé $cd \subset R$).*

Démonstration. Soit A l'ensemble des points $x \in R$ tels que soit $x = a$, soit qu'il existe un arc généralisé $cx \subset R$. R étant connexe, il suffit de démontrer que A est fermé-ouvert pour en conclure que $A = R$.

Or, si $x \in \overline{A}$, soit V un voisinage fermé de x qui satisfait aux conditions de la proposition (2.9). D'après (3.7), V est un arc généralisé, et il existe un point $y \in V \cap A$. En vertu de (3.2), V contient (pourvu que $c \neq y$) un arc généralisé cy, ce qui entraîne d'après (3.5) que $x \in A$. Par suite, A est fermé.

D'autre part, si $x \in A$, soit V un voisinage fermé de x, remplissant les conditions de (2.9), donc identique à un arc généralisé. Également d'après (3.2) et (3.5), on constate que $V \subset A$; donc A est ouvert.

Les propositions suivantes s'obtiennent de la même manière que les propositions (2.13), (2.14), (2.16) et (2.17), seulement on doit remplacer les mots "arc" et "courbe simple fermée" par "arc généralisé" et "circonférence généralisée" et appliquer (3.7) au lieu de (2.15), (3.8) au lieu de (2.12), de même que les propositions (3.1) à (3.5) au lieu des propriétés élémentaires analogues des arcs.

(3.9) *Si la courbe irramifiée R contient une circonférence généralisée C, on a $C = R$.*

(3.10) *R étant une courbe irramifiée ne contenant aucune circonférence généralisée, deux points quelconques $a \neq b$ se laissent unir par un arc généralisé ab et un seul, et, parmi trois points distincts, il y a un qui est situé sur l'arc généralisé qui relie les deux autres.*

(3.11) *Dans les mêmes hypothèses, tout ensemble compact $K \subset R$ est contenu dans un arc généralisé $A \subset R$.*

(3.12) *R étant une courbe irramifiée, si $ab \subset R$ est un arc généralisé, tout point $x \in ab$, $a \neq x \neq b$ est un point intérieur de ab.*

On parvient enfin aux deux théorèmes suivants de F. FRANKL ([3]):[19]

THÉORÈME III. *R étant une courbe irramifiée quelconque, elle est soit un arc généralisé, soit une circonférence généralisée, soit une droite généralisée, soit une demi-droite généralisée.*

La démonstration est analogue à celle du th. I, sans faire appel à la séparabilité de R (et de R^*).

THÉORÈME IV. *Si la courbe irramifiée R contient un sous-ensemble dense dénombrable, elle est homéomorphe, soit à un segment, soit à une circonférence, soit à une droite, soit à une demi-droite.*

DÉMONSTRATION. L'énoncé résulte de th. III lorsqu'on remarque que, d'après (3.12), tout arc généralisé $A \subset R$ contient un ensemble dense dénombrable et qu'un arc généralisé de ce genre est identique à un arc (au sens ordinaire).[20]

4. Nous formulons de la façon suivante la généralisation du théorème de K. MENGER sur les courbes ordinaires:

THÉORÈME V. *Si le continu non dégénéré R ne contient aucun point d'ordre infini et s'il ne contient qu'un nombre fini de points de ramification, il est la réunion d'un nombre fini d'arcs généralisés, dont deux quelconques n'ont d'autres points communs qu'une extrémité commune au plus. Si, en outre, R contient un ensemble dénombrable dense, il est une courbe ordinaire.*

DÉMONSTRATION. Si R ne contient aucun point de ramification, il est en vertu du théorème III soit un arc généralisé, soit une circonférence généralisée (les droites généralisées et les demi-droites généralisées n'étant pas compactes), et satisfait par conséquent évidemment à l'énoncé.

[19] Le lecteur observera que la démonstration des théorèmes III et IV ne fait pas usage des cas particuliers traités dans § 2; nous n'avons commencé par le cas des espaces séparables ou métrisables que pour mettre mieux en évidence le caractère élémentaire des raisonnements.

[20] En effet, un ensemble dense au sens topologique est évidemment dense an sens de l'ordre, de sorte qu'on peut appliquer un théorème connu de la théorie des ensembles ordonnés, v. p. ex. [4], p. 54, th. V.

Supposons donc que l'ensemble fini S des points de ramification de R ne soit pas vide. L'égalité $R-S=0$ entraînerait que l'espace connexe R se compose d'un seul point, on a donc $R-S\neq 0$.

Soit C une composante de $R-S$. D'après (2.4), R est localement connexe, donc C est un ensemble ouvert; de plus, on a évidemment $\operatorname{ord}_x C \leqq \operatorname{ord}_x R \leqq 2$ pour $x\in C$, de sorte que C est une courbe irramifiée ou il se compose d'un seul point. Cette dernière possibilité et, de la même manière, la possibilité que C soit un arc généralisé ou une circonférence généralisée, sont exclues, puisque en ces cas C serait compact, donc fermé, tandis que R est connexe et que l'on a $R-C\supset S\neq 0$. Par conséquent, C est soit une droite généralisée, soit une demi-droite généralisée.

Supposons d'abord que C soit une droite généralisée et considérons pour $x\in C$ quelconque les ensembles $(-\infty, x)$.[21] L'intersection d'un nombre fini quelconque de ces ensembles n'étant jamais vide et l'espace R étant compact, il existe au moins un point $a\in R$ tel que $a\in\overline{(-\infty, x)}$ pour $x\in C$. Si l'on avait $a\neq a'$ et $a, a'\in \bigcap_{x\in C}\overline{(-\infty, x)}$, soient U et U' deux voisinages ouverts disjoints de a et a', respectivement, ayant des frontières finies; on pourrait construire aisément une suite infinie d'arcs généralisés $x_n x_n'\subset C$ disjoints et tels que $x_n\in U$, $x_n'\in U'$, et il s'ensuivrait que chacun des arcs généralisés $x_n x_n'$ rencontre tant l'ensemble $\operatorname{Fr} U$ que celui $\operatorname{Fr} U'$, ce qui est impossible, $\operatorname{Fr} U$ et $\operatorname{Fr} U'$ étant finis.

On a donc $\bigcap_{x\in C}\overline{(-\infty, x)}=\{a\}$ et on constate de la même manière l'existence d'un point b tel que $\bigcap_{x\in C}\overline{(x, +\infty)}=\{b\}$.

On a naturellement $a, b\notin C$, et les composantes de $R-S$ étant fermées relativement à $R-S$, il s'ensuit que $a, b\in S$. De plus, on a pour $x, y\in C$, $x<y$ l'égalité $\overline{(-\infty, y)}=\overline{(-\infty, x)}\cup xy$, ce qui entraîne $\overline{(-\infty, y)}-C\subset \subset\bigcap_{x<y}\overline{(-\infty, x)}=\{a\}$. On obtient de la même façon $\overline{(y, +\infty)}-C\subset \subset\bigcap_{x>y}\overline{(x, +\infty)}=\{b\}$, par conséquent $\overline{C}=C\cup\{a\}\cup\{b\}$.

L'ensemble $\overline{C}$ est donc connexe et non dégénéré et, C étant ouvert, on a pour $x\in C$ $\operatorname{ord}_x\overline{C}=\operatorname{ord}_x C\leqq 2$. Nous montrerons qu'on a également $\operatorname{ord}_a\overline{C}\leqq 2$, $\operatorname{ord}_b\overline{C}\leqq 2$. En effet, si $a\neq b$, les ensembles $(-\infty, x)\cup\{a\}$ forment un système fondamental de voisinages du point a relativement à $\overline{C}$, puisque, d'une part, $\overline{C}-((-\infty, x)\cup\{a\})=[x, +\infty)\cup\{b\}$ est fermé, de l'autre que si un voisinage ouvert G du point a ne contenait aucun ensemble de la forme $(-\infty, x)$, l'intersection d'un nombre fini quelconque des ensembles $(-\infty, x)-G$ serait non vide, de sorte que, par suite de la compacité de R,

[21] Pour la notation, v. le début de § 3.

il existerait un point $a' \in \bigcap_{x\in C} \overline{(-\infty, x)} - G$, ce qui entraînerait la relation $a \neq a' \in \bigcap_{x\in C} \overline{(-\infty, x)}$, dont l'impossibilité a été établie plus haut. On parvient, si $a = b$, par un raisonnement analogue à la conclusion que les ensembles $(-\infty, x) \cup (y, +\infty) \cup \{a\}$ forment un système fondamental de voisinages du point a relativement à $\overline{C}$. Or, la frontière relativement à $\overline{C}$ de l'ensemble $(-\infty, x) \cup \{a\}$ se compose évidemment du seul point x, et celle de l'ensemble $(-\infty, x) \cup (y, +\infty) \cup \{a\}$ (si $a = b$ et $x < y$) des deux points x et y. On a donc dans les deux cas $\mathrm{ord}_a \overline{C} \leqq 2$, et on établit de la même manière $\mathrm{ord}_b \overline{C} \leqq 2$.

L'ensemble compact $\overline{C}$ est par conséquent une courbe irramifiée. De façon plus précise, si $a \neq b$, on a $\mathrm{ord}_a \overline{C} \leqq 1$, $\mathrm{ord}_b \overline{C} \leqq 1$, donc $\overline{C}$ est un arc généralisé ab en vertu du théorème III, tandis que si $a = b$, $\overline{C}$ est une circonférence généralisée, car autrement il serait un arc généralisé qui, privé d'un de ses points, deviendrait une droite généralisée, ce qui est évidemment impossible.

On constate par un raisonnement analogue (même plus simple) que si C est une demi-droite généralisée d'extrémité a, il existe un point $b \in S$ tel que $\overline{C}$ est un arc ab.

Convenons d'appeler *arêtes* de R les fermetures des composantes de $R - S$. D'après ce que nous avons établi, une arête est soit un arc généralisé dont l'une des extrémités, ou toutes les deux, appartiennent à S, soit une circonférence généralisée dont un point et un seul appartient à S.

Si un point $a \in S$ appartient à n arêtes distinctes, on a évidemment $\mathrm{ord}_a R \geqq n$. Par conséquent, un point quelconque de S n'est contenu qu'en un nombre fini d'arêtes, d'où il s'ensuit que le nombre des arêtes est fini: $\overline{C}_i$ $(i = 1, \ldots, r)$.

Dans l'espace connexe R, l'ensemble fini S est non-dense, de sorte que $R = \overline{R - S} = \bigcup_1^r \overline{C}_i$. En décomposant chacune des arêtes ayant la forme d'une circonférence généralisée en trois arcs généralisés au moyen du point de celle-ci commun avec S et de deux autres points, et chacune de celles ayant la forme d'un arc généralisé en deux arcs généralisés au moyen d'un point de celle-ci qui n'appartient pas à S, l'espace R sera représenté comme la réunion d'un nombre fini d'arcs généralisés, dont deux quelconques n'ont d'autres points communs qu'une extrémité commune au plus.

Si R contient un ensemble dénombrable dense, on conclut du théorème IV que les ensembles C sont des droites ou des demi-droites (ordinaires), ce qui fournit la seconde partie de l'énoncé.[22]

[22] Bien entendu, si l'on suppose que l'ensemble R est métrisable (ou, ce qui veut dire la même chose, qu'il est séparable), on peut faire intervenir dans la démonstration le théorème I (ou II) au lieu des théorèmes III et IV.

Le lecteur observera que la démonstration précédente reste valable si l'on remplace l'hypothèse que R ne contienne aucun point d'ordre infini par celle que R admette une base composée d'ensembles à frontière finie, sauf la dernière proposition d'après laquelle le nombre des arêtes est fini. L'égalité $R=\overline{R-S}=\bigcup_{\gamma}\overline{C_\gamma}$ reste tout de même valable, où les ensembles C_γ désignent les composantes de $R-S$. En effet, soit $a\in S$ et désignons par U un voisinage ouvert de a tel que $\overline{U}$ ne contienne aucun autre point de S et dont la frontière est finie. L'égalité $R=\overline{R-S}=\bigcup_{\gamma}\overline{C_\gamma}$ étant évidente, si U ne rencontre qu'un nombre fini des ensembles C_γ, a appartient à la fermeture d'un de ceux-ci. Si U rencontre une infinité des ensembles C_γ, il y en aura une infinité qui sont contenus entièrement dans U, autrement une infinité des C_γ rencontreraient la frontière (finie) de U. Or, si $C_\gamma\subset U$, l'ensemble $\overline{C_\gamma}\subset\overline{U}$ contient, comme nous l'avons vu, au moins un point de S, qui ne peut être autre que a. En tout cas, on a donc $a\in\bigcup_{\gamma}\overline{C_\gamma}$ pour $A\in S$.

Or, l'hypothèse que l'espace compact R ne contienne qu'un nombre fini de points de ramification entraîne l'existence d'une base composée d'ensembles à frontière finie.[23] De cette façon, nous avons démontré le théorème suivant:

THÉORÈME VI. *Si le continu non dégénéré R ne contient qu'un nombre fini de points de ramification, R est la réunion d'une famille (de puissance quelconque) d'arcs généralisés, dont deux quelconques n'ont d'autres points communs qu'une extrémité commune au plus. Si, en outre, R contient un sous-ensemble dénombrable dense, ces arcs généralisés sont des arcs ordinaires et leur famille est dénombrable.*

(Reçu le 7 mai 1958)

Ouvrages cités

[1] P. ALEXANDROFF und H. HOPF, *Topologie. I* (Berlin, 1935).
[2] Á. CSÁSZÁR, Sur les courbes atriodiques, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **9** (1958), p. 329—332.
[3] F. FRANKL, Über die zusammenhängenden Mengen von höchstens zweiter Ordnung, *Fund. Math.*, **11** (1928), p. 96—104.
[4] F. HAUSDORFF, *Mengenlehre* (Berlin und Leipzig, 1927).
[5] F. B. JONES, Concerning certain linear abstract spaces and simple continuous curves, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **45** (1939), p. 623—628.
[6] K. KURATOWSKI, *Topologie. I*, 3^e^ édition et *II*, 2^e^ édition (Warszawa, 1952).
[7] K. MENGER, Grundzüge einer Theorie der Kurven, *Math. Annalen*, **95** (1926), p. 277—306.
[8] K. MENGER, *Kurventheorie* (Leipzig und Berlin, 1932).

[23] V. [7], p. 288, théorème VIII, ou [6], § 46, III, 5. Le théorème y est formulé pour des espaces métriques compacts, mais la démonstration reste valable pour des espaces de Hausdorff compacts quelconques.

SUR LES COURBES ATRIODIQUES

Par
Á. CSÁSZÁR (Budapest)
(*Présenté par* G. ALEXITS)

1. On doit à R. L. MOORE la caractérisation topologique suivante de l'arc et de la courbe simple fermée: *Si un continu*[1] *métrique localement connexe et non dégénéré*[2] *ne contient aucune triode,*[3] *ce continu est soit un arc, soit une courbe simple fermée.*[4]

F. B. JONES a démontré que ce théorème admet la généralisation suivante: *Si un espace métrique non dégénéré, complet, connexe, localement connexe et localement compact ne contient aucune triode, cet espace est homéomorphe soit à un segment, soit à une circonférence, soit à une droite, soit à une demi-droite.*[5]

Ce théorème se ramène évidemment, au moyen du théorème profond de K. MENGER appelé "*n*-Beinsatz",[6] au théorème suivant: *Un espace métrique non dégénéré, connexe et admettant une base composée d'ensembles dont la frontière ne contient que deux points au plus, est toujours homéomorphe soit à un segment, soit à une circonférence, soit à une droite, soit à une demi-droite.*[7]

Le but de cet ouvrage est de montrer qu'on peut supprimer des hypothèses du théorème précédent la condition de la compacité locale et de donner à cette forme plus générale du théorème une démonstration élémentaire, ne faisant pas appel au théorème appelé "*n*-Beinsatz".

2. THÉORÈME. *Un espace métrique R non dégénéré, complet, connexe, localement connexe et ne contenant aucune triode est homéomorphe soit à un segment, soit à une circonférence, soit à une droite, soit à une demi-droite.*

[1] Nous appelons *continu* un espace de Hausdorff connexe et (bi)compact.

[2] Un espace topologique est dit *dégénéré* s'il se compose d'un seul point.

[3] Une *triode* est la réunion de trois arcs issus d'un point a et ne contenant deux-à-deux aucun point commun, sauf a.

[4] V. [6], p. 250.

[5] V. [3], lemma A. A vrai dire, il s'agit dans ce théorème de F. B. JONES, de façon un peu plus générale, des espaces de Moore complets.

[6] V. [5], p. 214.

[7] V. [1], théorème II.

DÉMONSTRATION. L'espace R est connexe par arcs et localement connexe par arcs, en vertu du théorème de MAZURKIEWICZ—MOORE—MENGER.[8]

Ceci étant établi, supposons d'abord que R contienne une courbe simple fermée C. En ce cas on doit avoir $R=C$; autrement posons $x \in R-C$, $y \in C$ et soit z le premier point situé sur C d'un arc xy: on obtiendrait de cette façon une triode de sommet z contenue en R.

On peut donc supposer que R ne contienne aucune courbe simple fermée. Il s'ensuit que deux points $a \neq b$ de R peuvent être reliés par un arc et un seul. En effet, si A et A' étaient deux arcs d'extrémités a et b, posons p. ex. $x \in A - A'$ et soient y et z les premiers points situés sur A' des arcs $xa \subset A$ et $xb \subset A$ respectivement. Les arcs $yz \subset A$ et $yz \subset A'$ formeraient une courbe simple fermée contrairement à l'hypothèse.

Les points a, b et c étant trois points distincts de R, l'un d'eux est situé sur l'arc qui relie les deux autres. En effet, si l'on avait $a \notin bc$, $b \notin ca$, $c \notin ab$, le premier point x situé sur bc de l'arc ab ne pourrait coïncider ni avec a, ni avec b, ni avec c, de sorte que R contiendrait une triode de sommet x.

Admettons à présent l'hypothèse suivante:

(*) *R contient un point a tel qu'il n'existe pas deux arcs ab et ac ne contenant aucun point commun autre que a.*

Dans cette hypothèse, on définit sur R un ordre (total) en posant $x<y$ si et seulement si $x \in ay$.[9] En effet on a toujours $a \in ay$ et, si $x \neq a \neq y$, la relation $a \in xy$ étant inpossible d'après (*), on a soit $x \in ay$, soit $y \in ax$. De plus, $x \in ay$ et $y \in ax$ entraînent évidemment $x=y$. Enfin, $x \in ay$ et $y \in az$ ont $x \in az$ pour conséquence.

S'il y a, dans cet ordre, un point maximum b, l'espace R coïncide avec l'arc ab. Supposons donc qu'il n'existe aucun élément maximum.

Nous montrons que les intervalles $[a,x)=\{z: z \in R,\ a \leqq z < x\}$ et $(x,y)=\{z: z \in R, x<z<y\}$ forment une base pour la topologie de R. En effet, ces ensembles sont ouverts, car, si $z \in (x,y)$, désignons par U un voisinage du point z connexe par arcs et ne contenant ni x, ni y, et posons $t \in U-(x,y)$; le premier point s situé sur l'arc xy de l'arc $tz \subset U$ ne pouvant coïncider ni avec x, ni avec y, on obtiendrait une triode de sommet s, de sorte qu'on en conclut $U \subset (x,y)$. On constate de la même manière que l'ensemble $[a,x)$ est ouvert, en faisant appel à la condition (*). D'autre part, si $z \neq a$, $z \in G$ et si G est ouvert, soient x' et y' deux points tels que $x'<z<y'$; l'intersection $G \cap x'y'$ étant ouverte relativement à l'arc $x'y'$, il existe un arc $xy \subset x'y'$ tel que $x<z<y$ et que $xy \subset G$ et il s'ensuit évidemment $z \in (x,y) \subset xy \subset G$. On raisonne de la même manière pour $z=a$.

[8] V. p. ex. [4], §45, II, 1.

[9] On pose $cd=\{c\}$ pour $c=d$.

L'espace R étant connexe, l'ordre établi sur R doit être continu. Il suffit donc de montrer que R contient un sous-ensemble dénombrable dense (au sens topologique et par conséquent au sens de l'ordre) pour pouvoir appliquer un théorème classique[10] et conclure que l'ordre de R est semblable à celui d'une demi-droite, donc que R est homéomorphe à une demi-droite. Or, si l'espace métrique R ne contenait aucun sous-ensemble dénombrable dense, il ne pourrait pas être totalement borné, donc il contiendrait pour un $\varepsilon > 0$ une suite infinie $\{x_i\}$ telle que $\varrho(x_i, x_j) \geqq \varepsilon$ $(i \neq j)$. Chacun des arcs ax_i étant séparable, il en serait de même quant à l'espace R si l'on avait $R = \bigcup_1^\infty ax_i$. D'autre part, si $x \in R - \bigcup_1^\infty ax_i$, on a nécessairement $x_i \in ax$ pour $i = 1, 2, \ldots$, contrairement à la compacité de l'arc ax. Cette contradiction montre que R doit être séparable, et par conséquent homéomorphe à une demi-droite dont l'extrémité correspond à a.

Il ne nous reste qu'à considérer le cas où R ne contient aucune courbe simple fermée et où tout point a de R est l'extrémité commune de deux arcs n'ayant aucun autre point commun. Posons en ce cas $a \in R$ et désignons par C une composante de l'ensemble $R - \{a\}$. Si $x \in C$, l'arc xa est contenu, sauf l'extrémité a, entièrement dans C, ce qui a pour conséquence que le nombre des composantes de $R - \{a\}$ ne peut être supérieure à 2, autrement R contiendrait une triode de sommet a. D'autre part, si ab et ac sont deux arcs tels que $ab \cap ac = \{a\}$, les points b et c appartiennent à deux composantes distinctes de $R - \{a\}$, autrement la composante C de $R - \{a\}$ qui les contient serait un ensemble connexe, ouvert[11] et localement connexe,[12] donc topologiquement complet et, par suite, connexe par arcs; C contiendrait par conséquent un arc bc, tandis qu'il existe un arc bac distinct du premier, ce qui est impossible.

Ainsi l'ensemble $R - \{a\}$ se compose de deux composantes. C étant l'une de celles-ci, l'ensemble $C \cup \{a\}$ est fermé, donc complet, connexe (puisque $a \in \overline{C}$, autrement C serait fermé-ouvert) et la condition (∗) est évidemment remplie pour le point a relativement à l'espace $C \cup \{a\}$ au lieu de R (vu que R ne contient aucune triode et qu'il contient un arc issu de a et contenu, sauf le point a, dans l'autre composante de $R - \{a\}$). L'ensemble $\overline{C} = C \cup \{a\}$ est, de plus, localement connexe, puisque Fr $\overline{C} = \{a\}$ l'est également.[13] Eu égard à ce que $C \cup \{a\}$ ne contient aucune courbe simple fermée et que tout point $x \neq a$ de $C \cup \{a\}$ est, par hypothèse, l'extrémité

[10] V. p. ex. [2], p. 54, th. V.
[11] V. [4], § 44, II, 4.
[12] V. [4], § 44, II, 3.
[13] V. [4], § 44, III, 4.

commune de deux arcs n'ayant aucun point commun, sauf x, et qui peuvent être évidemment choisis suffisamment petits pour être contenus dans C, on peut appliquer la partie démontrée du théorème et constater que $C \cup \{a\}$ est homéomorphe à une demi-droite, le point a formant l'extrémité de $C \cup \{a\}$. Ceci étant valable pour chacune des composantes de $R - \{a\}$, l'espace R est évidemment homéomorphe à une droite.

Ceci achève la démonstration.

COROLLAIRE. *L'énoncé du théorème précédent reste valable si R est un espace métrique non dégénéré, complet, connexe et admettant une base composée d'ensembles dont la frontière ne contient que deux points au plus.*[14]

En effet, un espace R de ce genre est localement connexe[15] et ne contient évidemment aucune triode.

(Reçu le 7 mai 1958.)

Ouvrages cités

[1] Á. Császár et J. Czipszer, Sur les courbes irramifiées, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **9** (1958), p. 315—328.

[2] F. Hausdorff, *Mengenlehre* (Berlin und Leipzig, 1927).

[3] F. B. Jones, Concerning the boundary of a complementary domain of a continuous curve, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **45** (1939), p. 428—435.

[4] K. Kuratowski, *Topologie. II* (Warszawa, 1950).

[5] K. Menger, *Kurventheorie* (Leipzig und Berlin, 1932).

[6] R. L. Moore, *Foundations of point set theory*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. XIII (New York, 1932).

[14] C'est un cas particulier du théorème II de l'ouvrage [1].

[15] V. [4], § 46, IV, 1.

EIN BEITRAG ZU DEM SATZE VON CANTOR UND BENDIXSON

Von

G. FREUD (Budapest)

(*Vorgelegt von* G. ALEXITS)

In den folgenden Zeilen wollen wir eine allgemeinere Fassung des Cantor—Bendixsonschen Satzes geben, nach welchem eine abgeschlossene Menge in einem separablen Raum die Vereinigung einer perfekten und einer abzählbaren Menge ist.[1]

Im ersten Teil wollen wir uns mit einer Art Neutopologisierung eines topologischen Raumes beschäftigen; diese enthält als einfachste Spezialisierung den Fall, wenn man die Kondensationspunkte als verallgemeinerte Häufungspunkte betrachtet. Im zweiten Teil wird unter passenden einschränkenden Bedingungen ein Satz hergeleitet, welcher auf diesen Spezialfall angewendet eben den Cantor—Bendixsonschen Satz ergibt. Im dritten Teil werden wir verschiedene weitere Spezialfälle der bewiesenen Sätze aufzählen.

§ 1. Einführung einer neuen Topologie

R sei ein topologischer T_1 Raum. In R sei eine nichtleere Klasse $\mathfrak{A}$ der Teilmengen von R mit folgenden beiden Eigenschaften vorhanden:[2]

I. Jede Teilmenge einer Menge der Klasse $\mathfrak{A}$ gehört ebenfalls zu $\mathfrak{A}$.

II. Die Vereinigung zweier Mengen aus $\mathfrak{A}$ gehört ebenfalls zu $\mathfrak{A}$.

Es scheint treffend, für die $\mathfrak{A}$-Mengen nach einem Vorschlage von Herrn Prof. P. S. ALEXANDROW (persönliche Mitteilung) die Bezeichnung "fast leere Menge" einzuführen.

Wir nennen das Element c einen $\mathfrak{A}$-Häufungspunkt der Menge $C \subset R$, wenn für jede den Punkt c enthaltende offene Menge U_c[3] die Beziehung

$$(C \cap U_c) - c \bar{\in} \mathfrak{A}$$

besteht. Sei C' die Menge der $\mathfrak{A}$-Häufungspunkte von C; die Menge $\overline{C} = C \cup C'$ nennen wir $\mathfrak{A}$-Abschließung von C.

[1] Vgl. K. KURATOWSKI, *Topologie. I*, 2. Aufl. (Warszawa, 1948), S. 141.

[2] Teilmengen dieser Art wurden zuerst von F. HAUSDORFF, *Mengenlehre* (3. Aufl., Leipzig, 1935), § 45, betrachtet.

[3] Im weiteren wollen wir, ohne es besonders hervorzuheben, mit $U_a, U_b, U_c, \ldots$ stets eine den Punkt $a, b, c, \ldots$ enthaltende offene Menge bezeichnen.

In diesem Paragraphen wollen wir zeigen, daß mit der $\mathfrak{A}$-Abschließung eine neue T_1 Topologie in R entsteht, d. h.[4] die folgenden Axiomen sind befriedigt:[5]

a) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup B$.

b) Besteht A aus einem einzigen Punkt oder ist es die leere Menge, dann gilt $\bar{A} = A$.

c) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

a) Wir zeigen zunächst, daß

$$(A \cup B)' = A' \cup B' \tag{1}$$

gültig ist. Sei $a \overline{\in} A' \cup B'$, dann gibt es Umgebungen V_a und W_a, so daß $(V_a \cap A) - a \in \mathfrak{A}$ und $(W_a \cap B) - a \in \mathfrak{A}$ besteht. Sei nun $U_a = V_a \cap W_a$, dann ist

$$[U_a \cap (A \cup B)] - a = [(V_a \cap W_a) \cap (A \cup B)] - a \subset$$
$$\subset [(V_a \cap A) \cup (W_a \cap B)] - a = [(V_a \cap A) - a] \cup [(W_a \cap B) - a] \in \mathfrak{A},$$

da beide in den eckigen Klammern stehende Mengen des letzten Ausdruckes zu $\mathfrak{A}$ gehören (vgl. II), also ist $a \overline{\in} (A \cup B)'$. Hieraus folgt $(A \cup B)' \subset A' \cup B'$. Anderseits ist $A' \subset (A \cup B)'$. Ist nämlich $(A \cap U_a) - a \overline{\in} \mathfrak{A}$, dann ist wegen II umsomehr $(A \cap U_a) - a \subset [(A \cup B) \cap U_a] - a \overline{\in} \mathfrak{A}$. Ebenso ist $B' \subset (A \cup B)'$, also $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$, und hieraus folgt (1). Wegen $\overline{A \cup B} = (A \cup B) \cup (A \cup B)' = (A \cup A') \cup (B \cup B') = \bar{A} \cup \bar{B}$ ist damit a) bewiesen.

b) Die leere Menge $\emptyset$ gehört wegen I zu $\mathfrak{A}$. Infolgedessen ist $\bar{\emptyset} = \emptyset$. Besteht A aus einem einzigen Punkt a, so ist $(A \cap U_a) - a = \emptyset \in \mathfrak{A}$ für jedes U_a; ist $b \neq a$ und $a \overline{\in} U_b$, dann ist auch $(A \cap U_b) - b = \emptyset \in \mathfrak{A}$, d. h. $A' = \emptyset$, $\bar{A} = A \cup A' = A$, w. z. b. w.

c) Nach (1) ist

$$\bar{\bar{A}} = (A \cup A') \cup (A \cup A')' = A \cup A' \cup A''.$$

Es bleibt zu zeigen, daß $A'' \subset A'$ gilt. Sei $a \in A''$, dann ist für jedes U_a $(U_a \cap A') - a \overline{\in} \mathfrak{A}$, infolgedessen gibt es einen von a verschiedenen Punkt $a' \in U_a \cap A'$. Wir wählen ein $U_{a'}$ mit $a \overline{\in} U_{a'} \subset U_a$. Wegen $a' \in A'$ ist $(A \cap U_{a'}) - a' \overline{\in} \mathfrak{A}$ und umsomehr $A \cap U_{a'} = (A \cap U_{a'}) - a \overline{\in} \mathfrak{A}$. Diese Menge ist aber in $(A \cap U_a) - a$ enthalten, daher ist auch $(A \cap U_a) - a \overline{\in} \mathfrak{A}$, also $a \in A'$. Damit haben wir den Beweis beendet.

[4] K. KURATOWSKI, loc. cit. [1], S. 20.

[5] Diese Topologie ist mit der Ursprünglichen identisch, wenn $\mathfrak{A}$ nur aus der leeren Menge besteht.

§ 2. Der Cantor—Bendixsonsche Satz

Im weiteren wollen wir über die Klasse der Ausnahmemengen zwei weitere Vorzusetzungen stellen.

Die Mengenklasse $\mathfrak{A}^*$ erfülle I und II und außerdem auch die folgenden Bedingungen:

III. Die aus einem einzigen Punkt bestehenden Mengen gehören zu $\mathfrak{A}^*$.

IV. Gibt es zu jedem Punkt $a \in A$ eine Umgebung U_a dieses Punktes, für welche $A \cap U_a \in \mathfrak{A}^*$ gültig ist, dann ist auch $A \in \mathfrak{A}^*$.

Ein Punkt a ist dann und nur dann $\mathfrak{A}^*$-Häufungspunkt der Menge A, wenn $A \cap U_a \bar{\in} \mathfrak{A}^*$ für jedes U_a besteht. Um das einzusehen, genügt es zu zeigen, daß α) $A \cap U_a \in \mathfrak{A}^*$ und β) $(A \cap U_a) - a \in \mathfrak{A}^*$ gleichzeitig richtig oder falsch sind. Nach I folgt nämlich β) aus α), und nach II und III folgt α) aus β).

Im weiteren soll A' die $\mathfrak{A}^*$-Derivierte von A, $\bar{A}$ die $\mathfrak{A}^*$-Abschließung von A bezeichnen.

Hilfssatz. *Enthält die Menge $B \subset R$ keinen einzigen seiner $\mathfrak{A}^*$-Häufungspunkte, dann ist $B \subset \mathfrak{A}^*$.*

Beweis. Jeder Punkt $b \in B$ hat eine Umgebung U_b mit $(U_b \cap B) \in \mathfrak{A}^*$, also ist nach IV auch $B \subset \mathfrak{A}^*$.

Satz I. *Gilt für ein $B \subset R$ die Beziehung $B \cap B' \in \mathfrak{A}^*$, so ist auch $B \in \mathfrak{A}^*$.*

Beweis. Nach Hilfssatz I ist $B - B' \in \mathfrak{A}^*$ und nach Voraussetzung $B \cap B' \in \mathfrak{A}^*$, also folgt $B = (B \cap B') \cup (B - B') \in \mathfrak{A}^*$, w. z. b. w.

Eine Menge nennen wir $\mathfrak{A}^*$-perfekt, wenn sie aus ihren $\mathfrak{A}^*$-Häufungspunkten besteht.

Satz II. *Jede $\mathfrak{A}^*$-abgeschlossene Menge $C \subset R$ ist die Vereinigung einer $\mathfrak{A}^*$-perfekten Menge und einer $\mathfrak{A}^*$-Menge, und umgekehrt.*

Beweis. Es ist $C = (C - C') \cup C'$. Nach Hilfssatz I ist $C - C' \in \mathfrak{A}^*$, und wir zeigen, daß C' $\mathfrak{A}^*$-perfekt ist. Es ist zunächst $C'' \subset C'$ (vgl. den Beweis von c) im § 1). Ist weiter $c \in C'$, dann gilt $U_c \cap C \bar{\in} \mathfrak{A}^*$ für jedes U_c, und wegen Satz I folgt hieraus $(U_c \cap C) \cap (U_c \cap C)' \bar{\in} \mathfrak{A}^*$, umsomehr $U_c \cap C' \bar{\in} \mathfrak{A}^*$, da diese Menge die vorangehende enthält. Infolgedessen ist $c \in C''$, also $C' \subset C''$, d. h. $C' = C''$; C' ist $\mathfrak{A}^*$-perfekt. Die Umkehrung ist trivial: aus $A = B \cup C$, $B' = B$ und $C \in \mathfrak{A}^*$ folgt $A' = B' = B \subset A$.

Satz III. *Jede $\mathfrak{A}^*$-perfekte Menge ist auch in der ursprünglichen Topologie des Raumes R perfekt.*

Beweis. Sei $P \subset R$ eine $\mathfrak{A}^*$-perfekte Menge und $a \bar{\in} P$, dann gibt es ein U_a mit $U_a \cap P \in \mathfrak{A}^*$. Die Menge $U_a \cap P$ kann keinen $\mathfrak{A}^*$-Häufungspunkt von P

und mithin auch keinen Punkt von P enthalten, d. h. sie ist leer. Also ist $R-P$ offen und somit P abgeschlossen. P ist auch in sich dicht, da alle seiner Punkte $\mathfrak{A}^*$-Häufungspunkte und damit auch Häufungspunkte sind.

§ 3. Anwendungen

Als $\mathfrak{A}^*$-Mengen kann man z. B. die folgenden Mengenklassen wählen:

a) $\mathfrak{A}^*$ bestehe aus den separierten Mengen. (Eine Menge heißt separiert, wenn sie keine nichtleere in sich dichte Teilmenge enthält.)

b) $\mathfrak{A}^*$ sei die Klasse der nirgends dichten Mengen, wenn R keine isolierten Punkte enthält.

c) Es sei τ das Gewicht[6] von R, ϱ eine nichtabzählbare Mächtigkeit größer als τ. $\mathfrak{A}^*$ bestehe aus den Mengen, deren Mächtigkeit höchstens gleich ϱ ist.

d) R sei metrisierbar und habe keine isolierten Punkte. $\mathfrak{A}^*$ bestehe aus den Punktmengen erster Kategorie.

e) R besitze die Lindelöfsche Eigenschaft (d. h. jede Überdeckung einer beliebigen Menge mit offenen Mengen soll eine überdeckende Teilfolge haben). $\mathfrak{A}^*$ soll I, III erfüllen und sei abzählbar additiv. (Aus dieser Wahl von $\mathfrak{A}^*$ ergibt sich der Cantor—Bendixsonsche Satz.)

f) R sei ein separierbarer, metrischer Raum und $\mathfrak{A}^*$ bestehe aus allen Mengen, die Teilmengen von höchstens k-dimensionalen F_σ-Mengen sind. (Spezialfall von e).)

g) R habe eine abzählbare Basis, μ sei eine absolut additive Maßfunktion, für welche jeder einzelne Punkt eine Nullmenge ist. $\mathfrak{A}^*$ bestehe aus den Mengen vom μ-Maße Null.

Meinem Kollegen J. CZIPSZER verdanke ich eine Reihe wertvoller Bemerkungen. Insbesondere war die Einführung der Bedingung IV seine Idee (Verf. formulierte den Satz ursprünglich nur für den Fall e)), und von ihm stammen auch die meisten der aufgezählten Anwendungen.

(Eingegangen am 31. Mai 1958.)

[6] Als Gewicht von R bezeichnen wir, wie üblich, die kleinste Kardinalzahl τ, für welche eine Basis der offenen Mengen in R der Mächtigkeit τ vorhanden ist. (S. L. PONTRJAGIN, *Topologische Gruppen*, 2. Aufl., Definition 14.)

BEMERKUNG ÜBER DIE KONVERGENZ EINES INTERPOLATIONSVERFAHRENS VON P. TURÁN

Von

G. FREUD (Budapest)

(*Vorgelegt von* P. TURÁN)

P. TURÁN und seine Mitarbeiter studierten in mehreren Arbeiten[1] die Interpolationspolynome höchstens $2n-1$-ten Grades

$$R_n(x;f)=\sum_{\nu=1}^{n}[f(x_\nu)r_{\nu n}(x)+\beta_{\nu n}\varrho_{\nu n}(x)], \tag{1}$$

welche an n Stellen $x_{\nu n}$ vorgeschriebene Werte $f(x_\nu)$ und vorgeschriebene zweite Derivierte $\beta_{\nu n}$ besitzen. Es erwies sich am zweckmäßigsten die n Grundpunkte $x_{n\nu}$ als Nullstellen von $(1-x^2)P'_{n-1}(x)$ zu wählen, wobei $P_n(x)$ das Legendresche Polynom n-ten Grades ist, und n gleich einer *geraden* Zahl zu setzen.

Es wurde im Teil I von [1] gezeigt, daß ein Polynom höchstens $2n-1$-ten Grades durch seine Werte und die Werte seiner zweiten Derivierten an diesen Stellen eindeutig bestimmt ist. Für diesen Fall wurde unter geeigneten Bedingungen, welche u. a. die Differenzierbarkeit der interpolierenden Funktion voraussetzen, die Konvergenz des Verfahrens bewiesen. In den folgenden Zeilen geben wir, uns auf die Abschätzungen von J. BALÁZS und P. TURÁN stützend, ein verschärftes Resultat an. Wir wollen alle Bezeichnungen der dritten Mitteilung von J. BALÁZS und P. TURÁN (loc. cit. [1]) übernehmen.

SATZ. *Die stetige Funktion $f(x)$ genüge der Bedingung*

$$|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)|\leqq\varepsilon(h) \qquad (x-h,x+h)\in[-1,+1] \tag{2}$$

mit

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varepsilon(h)}{h}=0. \tag{3}$$

[1] J. SURÁNYI and P. TURÁN, Notes on interpolation. I, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), S. 67—79.

J. BALÁZS and P. TURÁN, Notes on interpolation. II, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **8** (1957), S. 201—215.

J. BALÁZS and P. TURÁN, Notes on interpolation. III, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **9** (1958), S. 195—214.

Die vorgeschriebenen Werte $\beta_{\nu n}$ der Interpolationspolynome sollen in ν gleichmäßig den Abschätzungen

$$(4)\qquad |\beta_{\nu n}| \leqq \frac{\varepsilon_n n}{\sqrt{1-x_{\nu n}^2}} \quad (\nu=2,3,\ldots,n-1), \quad |\beta_{0n}| \leqq \varepsilon_n n^2, \quad |\beta_{nn}| \leqq \varepsilon_n n^2$$

mit

$$(5)\qquad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$$

genügen. Unter diesen Bedingungen konvergiert die Folge $R_n(x,f)$ der Turánschen Interpolationspolynome in $[-1,+1]$ gleichmäßig gegen $f(x)$.

Wir wollen zuerst eine Reihe von Ungleichungen, welche in der Arbeit von BALÁZS und TURÁN bewiesen sind, erwähnen:

$$(6)\qquad \varrho_{1n}(x) = O(n^{-\frac{7}{2}}), \quad \varrho_{nn}(x) = O(n^{-\frac{7}{2}});$$

$$(7a)\qquad \varrho_{\nu n}(x) = O(n^{-2}) l_{\nu n}(x)(1-x_{\nu n}^2)\nu^{\frac{1}{2}} + O(n^{-\frac{7}{2}})\nu^{\frac{3}{2}} \quad \left(2 \leqq \nu \leqq \frac{n}{2}\right)$$

und

$$(7b)\qquad \varrho_{\nu n}(x) = O(n^{-2}) l_{\nu n}(x)(1-x_{\nu n}^2)(n-\nu)^{\frac{1}{2}} + O(n^{-\frac{7}{2}})(n-\nu)^{\frac{3}{2}}$$

$$\left(\frac{n}{2} < \nu \leqq n-1\right)$$

(hierbei bedeutet $l_{\nu n}(x)$ die zu $x_{\nu n}$ gehörende Lagrangesche Parabel des Grundpunktsystems $x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{nn}$);

$$(8)\qquad r_{1n}(x) = O(n), \quad r_{nn}(x) = O(n);$$

$$(9a)\qquad r_{\nu n}(x) = O(n^{\frac{1}{2}})\nu^{-\frac{1}{2}} \quad \left(2 \leqq \nu \leqq \frac{n}{2}\right)$$

und

$$(9b)\qquad r_{\nu n}(x) = O(n^{\frac{1}{2}})(n-\nu)^{-\frac{1}{2}} \quad \left(\frac{n}{2} < \nu \leqq n-1\right).$$

Die aufgezählten Abschätzungen sind der Reihe nach mit (3. 1. 1), Lemma 3. 1, Lemma 4. 1 und Lemma 4. 2 der dritten Arbeit von [1] identisch.

Es sei noch bemerkt, daß durch die Substitution $x_{\nu n} = \cos \Theta_{\nu n}$ $(0 \leqq \Theta_{\nu n} \leqq \pi)$ aus den wohlbekannten Abschätzungen über die Nullstellenverteilung der Jacobischen Polynome

$$(10)\qquad \frac{c_1}{n} \leqq \Theta_{\nu+1,n} - \Theta_{\nu n} \leqq \frac{c_2}{n}$$

folgt.[2]

[2] Das Grundpunktsystem $\{x_{\nu n}\}$ ist bekanntlich im Fejérschen Sinne streng normal und auch hieraus folgt (10) mit Hilfe eines Satzes von P. ERDŐS und P. TURÁN: On interpolation. II, *Annals of Math.*, **39** (1938), S. 703—724.

Das hat

$$\text{(11a)} \qquad c_3 \frac{\nu}{n} \leqq (1-x_{\nu n}^2)^{\frac{1}{2}} \leqq c_4 \frac{\nu}{2} \qquad \left(2 \leqq \nu \leqq \frac{n}{2}\right),$$

$$\text{(11b)} \qquad c_3 \frac{n-\nu}{n} \leqq (1-x_{\nu n}^2)^{\frac{1}{2}} \leqq c_4 \frac{n-\nu}{n} \qquad \left(\frac{n}{2} < \nu \leqq n-1\right)$$

zur Folge.

HILFSSATZ. *Die stetige Funktion* $f(x)$ $(-1 \leqq x \leqq +1)$ *soll* (2) *und* (3) *befriedigen. Dann gibt es eine Polynomfolge* $\{\Phi_n(x)\}$ *mit den folgenden Eigenschaften:*

a) *der Grad von* $\Phi_n(x)$ *ist höchstens* n;

b) *es gilt*

$$\text{(12)} \qquad f(x) - \Phi_n(x) = o(n^{-1})(\sqrt{1-x^2} + n^{-1})$$

gleichmäßig in $x \in [-1, +1]$;

c)

$$\text{(13)} \qquad \Phi_n''(x) = o(n) \operatorname{Min} \{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}, n\}$$

besteht in $[-1, +1]$ *gleichmäßig.*

Teil a) und b) dieses Satzes ist ein Spezialfall eines Satzes des Verfassers,[3] wir zeigen mit Hilfe einer Idee von Herrn Prof. P. TURÁN,[4] daß c) aus den Behauptungen a) und b) folgt.

Wir setzen $n_0 = n, n_1 = [n/2], \ldots, n_{j+1} = [n_j/2], \ldots, n_r = 1$;

$$r = \left[\frac{\log n}{\log 2}\right] + 1.$$

Es ist

$$\Phi_n(x) = \sum_{j=0}^{r-1} [\Phi_{n_j}(x) - \Phi_{n_{j+1}}(x)] + \Phi_1(x)$$

und infolge (12)

$$\Phi_{n_j}(x) - \Phi_{n_{j+1}}(x) = o(n_j^{-1})(\sqrt{1-x^2} + n_j^{-1}).$$

Da die linke Seite ein Polynom höchstens n_j-ten Grades ist, ergibt sich aus der Ungleichung von DZJADIK[5]

$$\Phi_{n_j}''(x) - \Phi_{n_{j+1}}''(x) = o(n_j) \operatorname{Min} [(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}, n_j] = o\left(\frac{n}{2^j}\right) \operatorname{Min} [(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}, n]$$

[3] G. FREUD, Über die Approximation reeller stetiger Funktionen durch gewöhnliche Polynome, *Math. Annalen* (im Erscheinen).

[4] Persönliche Mitteilung; der ursprüngliche Beweis des Verfassers war verwickelter.

[5] В. К. Дзядик, О конструктивной характеристике функций, удовлетворяющих условию Lip α $(0 < \alpha < 1)$ на конечном отрезке вещественном оси, Изв. Акад. Наук СССР, Сер. мат., **20** (1956), S. 623—642.

und weiter

$$\Phi_n''(x) = \sum_{j=0}^{r-1} o\left(\frac{n}{2^j}\right) \operatorname{Min}\,[(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}, n] = o(n) \operatorname{Min}\,[(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}, n],$$

w. z. b. w.

Nun wenden wir uns zum Beweise des Hauptsatzes. Es gilt (vgl. (1))

$$R_n(x;f) - f(x) = R_n(x; f - \Phi_n) + \Phi_n(x) - f(x) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} [f(x_\nu) - \Phi_n(x_\nu)] r_{\nu n}(x) + \sum_{\nu=1}^{n} [\beta_{\nu n} - \Phi_n''(x_\nu)] \varrho_{\nu n}(x) + o(1). \tag{14}$$

Es ist infolge (8), (9a), (11a) und (12)

$$\sum_{\nu=1}^{\frac{n}{2}} [f(x_\nu) - \Phi_n(x_\nu)] r_{\nu n}(x) =$$

$$= o(n^{-2}) O(n) + \sum_{\nu=2}^{\frac{n}{2}} o(n^{-1}) \frac{\nu}{n} O(n^{\frac{1}{2}}) \nu^{-\frac{1}{2}} = \tag{15a}$$

$$= o(n^{-1}) + o(n^{-\frac{3}{2}}) \sum_{\nu=2}^{\frac{n}{2}} \nu^{\frac{1}{2}} = o(1)$$

und infolge (4), (6), (7a), (11a) und (13)

$$\sum_{\nu=1}^{\frac{n}{2}} [\beta_{\nu n} - \Phi_n''(x_{\nu n})] \varrho_{\nu n}(x) =$$

$$= o(n^2) O(n^{-\frac{7}{2}}) + \sum_{\nu=2}^{\frac{n}{2}} o(n) \frac{n}{\nu} O(n^{-2}) l_\nu(x) \frac{\nu^2}{n^2} \nu^{\frac{1}{2}} =$$

$$= o(n^{-\frac{3}{2}}) + o(n^{-2}) \sum_{\nu=2}^{\frac{n}{2}} \nu^{\frac{3}{2}} l_{\nu n}(x) =$$

$$= o(n^{-\frac{3}{2}}) + o(n^{-2}) \left(\sum_{\nu=2}^{\frac{n}{2}} \nu^3\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\nu=2}^{\frac{n}{2}} l_{\nu n}^2(x)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nach einem schönen Satze von L. FEJÉR[6] gilt

$$\sum_{\nu=1}^{n} l_{\nu n}^2(x) \leqq 1 \quad \text{für} \quad x \in [-1, +1].$$

[6] L. FEJÉR, Bestimmung derjenigen Abszissen eines Intervalles, für welche die Quadratsumme der Grundfunktionen der Lagrangeschen Interpolation im Intervalle $[-1, +1]$ ein möglichst kleines Maximum besitzt, *Annali della Sc. Norm. Sup. di Pisa* (2), 1 (1932), S. 3—16.

Es folgt also aus den beiden letzten Beziehungen

$$\text{(16a)} \qquad \sum_{\nu=1}^{\frac{n}{2}} [\beta_{\nu n} - \Phi_n''(x_{\nu n})]\varrho_{\nu n}(x) = o(1).$$

Auf dieselbe Weise wie (15a) und (16a) ergibt sich aus (8), (9b), (11b) und (12) bzw. (4), (6), (7b), (11b) und (13)

$$\text{(15b)} \qquad \sum_{\nu=\frac{n}{2}+1}^{n} [f(x_\nu) - \Phi_n(x_\nu)] r_{\nu n}(x) = o(1)$$

bzw.

$$\text{(16b)} \qquad \sum_{\nu=\frac{n}{2}+1}^{n} [\beta_{\nu n} - \Phi_n''(x_{\nu n})]\varrho_{\nu n}(x) = o(1).$$

Aus (15a), (16a), (15b) und (16b) folgt dann wegen (14) die Behauptung des Satzes.

MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT
DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

(Eingegangen am 6. Juni 1958.)

EINE CHARAKTERISIERUNG DER HALBEINFACHEN RINGE
(ERGÄNZUNG ZU MEINER ARBEIT „BEITRÄGE ZUR THEORIE DER OPERATORMODULN")

Von

A. KERTÉSZ (Debrecen)

(*Vorgelegt von* L. RÉDEI)

In einer früheren Arbeit [1] ist der folgende Satz bewiesen:

Ein Ring[1] *R ist dann und nur dann halbeinfach (d. h. ein Ring, der keine von Null verschiedenen nilpotenten Linksideale besitzt und für Linksideale der Minimalbedingung genügt), falls er ein Einselement hat und der linksseitige Annihilator eines jeden* ($\neq 0$) *Elementes von R der Durchschnitt von endlich vielen maximalen Linksidealen des Ringes R ist.*

In Zusammenhang mit diesem Satz wird (auch in [1]) die Frage gestellt, ob der Satz seine Gültigkeit behält, wenn man statt der Existenz des „Einselementes" nur die Anwesenheit eines „rechtsseitigen Einselementes" erfordert. Das Ziel dieser kleinen Note ist zu zeigen, daß die Antwort auf diese Frage affirmativ ausfällt. Wir beweisen den folgenden

SATZ. *Für einen Ring R sind die folgenden beiden Bedingungen äquivalent:*

α) R ist halbeinfach;

β) R ist ein Ring mit rechtsseitigem Einselement und der linksseitige Annihilator eines jeden ($\neq 0$) *Elementes von R ist der Durchschnitt von endlich vielen maximalen Linksidealen des Ringes R.*

Zum Beweis werden wir die folgenden Hilfssätze benutzen:

HILFSSATZ 1. *Ein Ring ist dann und nur dann halbeinfach, falls er ein Einselement besitzt und eine direkte Summe von endlich vielen minimalen Linksidealen ist.* (Siehe [3], § 123.)

HILFSSATZ 2. *Es sei R ein beliebiger Ring. Der linksseitige R-Modul G ist genau dann eine direkte Summe von endlich vielen minimalen Untermoduln, wenn in G eine endliche Menge von maximalen Untermoduln existiert, die als Durchschnitt das Element* 0 *haben.* (Siehe [2], Lemma, S. 231.)

Nun sei zuerst α) erfüllt. Dann enthält R, auf Grund des Hilfssatzes 1, ein Einselement, und es existiert eine direkte Zerlegung

$$R = L_1 + \cdots + L_k, \tag{1}$$

[1] Ring bedeutet hier immer einen assoziativen Ring.

wo die L_i $(i=1,\ldots,k)$ minimale Linksideale von R sind. Jedes Element $r(\in R)$ wird offenbar genau durch diejenigen Elemente annulliert, welche sämtliche, der Zerlegung (1) entsprechende Komponenten des betreffenden Elementes annullieren. Um zu zeigen, daß für R die Bedingung β) erfüllt ist, ist es somit genügend, den Nachweis zu erbringen, daß der linksseitige Annihilator A eines beliebigen Elementes $l(\neq 0)$ von L_i ein maximales Linksideal des Ringes R ist. Es sei s ein beliebiges, in A nicht enthaltenes Element von R. Dann gilt $0 \neq sl(\in L_i)$, und wegen der Minimalität von L_i ergibt sich die Existenz eines Elementes $t(\in R)$ derart, daß $tsl=l$, d. h. $(1-ts)\,l=0$ ist. So ist $(1-ts)\in A$, was zeigt, daß das von A und s erzeugte Linksideal mit dem ganzen Ring R übereinstimmt; somit ist A ein maximales Linksideal von R.

Umgekehrt gelte jetzt β) für den Ring R. Wenn e ein rechtsseitiges Einselement und r ein beliebiges Element von R ist, dann gilt $s(er-r)=$ $=(se)r-sr=0$ für jedes Element $s(\in R)$. Darum ist der linksseitige Annihilator von $er-r$ der ganze R, und folglich gilt kraft der Eigenschaft β) $er-r=0$; somit ist e ein zweiseitiges Einselement. Dabei besitzt R, da der linksseitige Annihilator von e die 0 ist, endlich viele maximale Linksideale, die den Durchschnitt 0 haben. Deshalb ist R auf Grund des Hilfssatzes 2 eine direkte Summe von endlich vielen minimalen Linksidealen. Wir wenden jetzt noch den Hilfssatz 1 an, und damit ist der Beweis des Satzes erbracht.

(Eingegangen am 18. Juni 1958.)

Literaturverzeichnis

[1] A. Kertész, Beiträge zur Theorie der Operatormoduln, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **8** (1957), S. 235—257.

[2] A. Kertész, Modules and semi-simple rings. II, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1956), S. 229—236.

[3] B. L. van der Waerden, *Algebra. II*, 3. Auflage (Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955).

ON SOME INTERPOLATORY PROPERTIES OF LEGENDRE POLYNOMIALS

By

R. B. SAXENA and A. SHARMA (Lucknow, India)

(*Presented by* P. TURÁN)

1. In most of the problems of interpolation we prescribe the values of a function at each point x_ν, and of some of its consecutive derivatives there. Thus in the Hermite interpolation formula, the value of the function and its first derivative are prescribed at some points in a given interval. A general problem of interpolation was treated by BIRKHOFF, who considered a system of pairs of numbers (k_i, x_i) $(i=1,2,\ldots,n)$ where k_i are integers $\geqq 0$ and x_i are any points in a given interval. A more particular case $n=2$ was treated directly by PÓLYA. A similar case in the complex plane has been treated by CINQUINI. But this general point of view does not bring out the character of the interpolatory polynomials.

Recently in two papers, TURÁN has opened a new line by considering what he calls (0,2)-interpolation, where the value of the function and its second derivative are given at some points. He considers the problem of their existence and uniqueness and also the problem of their explicit representation. He has also promised a study of the problem of convergence.

The object of this paper is to extend the programme of TURÁN to the case of (0, 1, 3)-interpolation, i. e. the problem of existence and uniqueness of interpolatory polynomials when the value of the function, its first and third derivatives are prescribed at a set of points. The other part of the paper obtains the explicit representation of these polynomials, in a most suitable form. The problem of convergence will be treated in the next communication.

2. We seek a polynomial $f_{3n-1}(x)$ of degree $\leqq 3n-1$, where the value of the function, its first and third derivatives are prescribed at the n points x_ν where

(2. 1) $$-1 \leqq x_n < x_{n-1} < \cdots < x_1 \leqq 1,$$

that is, we are given (say):

(2. 2) $$f_{3n-1}(x_\nu) = y_\nu, \quad f'_{3n-1}(x_\nu) = y^*_\nu, \quad f'''_{3n-1}(x_\nu) = y^{**}_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

In order to get the simplest proofs, we choose the points (2. 1) to be the same as those chosen by TURÁN and his associates for the case of (0, 2)-interpolation, i. e. as the zeros

(2. 3) $$-1 \leqq \xi_n < \xi_{n-1} < \cdots < \xi_1 \leqq 1$$

of the polynomials

(2.4) $$\pi_n(x) = (1-x^2)\,P'_{n-1}(x)$$

where $P_{n-1}(x)$ is the $(n-1)$th Legendre polynomial with $P_{n-1}(1)=1$.

3. Let $n=2k+1$, and let

(3.1) $$1 \geqq x_1 > x_2 > \cdots > x_k > x_{k+1} = 0 > x_{k+2} > \cdots > x_{2k+1} \geqq -1$$

with

(3.2) $$x_j = -x_{2k+2-j} \qquad (j=k+2,\ldots,2k+1).$$

We shall prove

THEOREM I. *If $n=2k+1$ and the points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfy* (3.1) *and* (3.2), *there is in general no polynomial $f(x)$ of degree $\leqq 3n-1$ such that for given y_ν, y_ν^* and y_ν^{**}*

(3.3) $$f(x_\nu)=y_\nu,\quad f'(x_\nu)=y_\nu^*,\quad f'''(x_\nu)=y_\nu^{**} \qquad (\nu=1,2,\ldots,n).$$

If there exists such a polynomial, then there is an infinity of them.

Thus in the case of an odd number of distinct symmetrical points x_ν, both the problem of existence and uniqueness have a negative solution.

Taking x_ν as the points (2.3) we shall show that in the case of infinitely many solutions in Theorem I for $n \geqq 3$, the general form of the solution is

(3.4) $$f(x) = f_0(x) + c f_1(x)$$

where $f_0(x)$ and $f_1(x)$ are fixed polynomials of degree $\leqq 3n-1$ and c is an arbitrary complex number.

4. In the case of n even $(=2k)$ the situation changes. We shall show

THEOREM II. *If $n=2k$, then to prescribed values y_ν, y_ν^*, y_ν^{**} there is a uniquely determined polynomial $f(x)$ of degree $\leqq 3n-1$ such that*

(4.1) $$f(\xi_\nu)=y_\nu,\quad f'(\xi_\nu)=y_\nu^* \quad \text{and} \quad f'''(\xi_\nu)=y_\nu^{**} \qquad (\nu=1,2,\ldots,n)$$

if ξ_ν stands as in (2.3) *for the zeros of $\pi_n(x)$.*

This means, of course, that in the case

(4.2) $$y_\nu = y_\nu^* = y_\nu^{**} = 0 \qquad (\nu=1,2,\ldots,n;\ n \text{ even})$$

the only solution of (4.1) is $f(x)\equiv 0$. This result is curious because the polynomial

$$Q_{2n}(x) = \pi_n^2(x)$$

has the property

$$Q_{2n}(\xi_\nu) = Q'_{2n}(\xi_\nu) = 0,$$

but $Q_{2n}'''(\xi_\nu)=0$ for $\nu=2,3,\ldots,n-1$, i.e. there is a non-trivial polynomial of degree $2n$ satisfying almost the requirements (4.2), i.e. all except the two conditions

$$f'''(\xi_1) = f'''(\xi_n) = 0.$$

Theorem II shows that for n even there is no polynomial of degree $\leqq 3n-1$ satisfying condition (4. 2), except $f(x)\equiv 0$.

5. If we replace in the interpolation problem (2. 2) the points x_ν by the zeros $\eta_{l\nu}^{\lambda}$ of the nth ultraspherical polynomial $P_n^\lambda(x)$ with $\lambda > -\frac{1}{2}$ $\left(\text{for } \lambda = -\frac{1}{2}\text{ we come back to the case of Theorem II}\right)$ which satisfies the differential equation

$$(1-x^2)y''-(2\lambda+1)xy'+n(n+2\lambda)y=0 \tag{5. 1}$$

with

$$P_n^\lambda(1)=\begin{cases}\binom{n+2\lambda-1}{n} & \text{for } \lambda\neq 0,\\ 1 & \text{for } \lambda=0,\end{cases}$$

then by the method used by TURÁN and SURÁNYI we get the following

THEOREM III. *If* $2\lambda+2=$ *odd integer* $\geqq 3$, $\lambda>-\frac{1}{2}$, *then in the case* $4\leqq n$ *(even)* $\leqq 2\lambda+1$, *the only solution of* (4. 2) *is* $g(x)\equiv 0$. *In case* $n=$ *even and* $\geqq 2\lambda+3$, *there is an infinity of solutions of the form*

$$g(x)=ck(x) \tag{5. 2}$$

where c *is an arbitrary constant and* $k(x)$ *is a uniquely determined polynomial of degree* $2n+2\lambda+1$.

The proof of this theorem is omitted as it can easily be carried out on the same pattern as that of the corresponding theorem of TURÁN—SURÁNYI.

6. We now prove Theorem I. We decompose the polynomial

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{3n-1} c_\nu x^\nu$$

into an even and an odd part;

$$s(x)=\sum_{\nu=0}^{3k+1} c_{2\nu}x^{2\nu},\quad t(x)=\sum_{\nu=0}^{3k} c_{2\nu+1}x^{2\nu+1}.$$

The first part of the condition (2. 2) will then give

$$\left.\begin{aligned} f(x_\nu)&=s(x_\nu)+t(x_\nu)=y_\nu,\\ f(-x_\nu)&=s(x_\nu)-t(x_\nu)=y_{n-\nu+1}\end{aligned}\right\}\quad(\nu=1,2,\ldots,k). \tag{6. 1}$$

Since $s'(x)$ and $t'(x)$ are odd and even polynomials, respectively, from the second part of the condition follows

$$\left.\begin{aligned} f'(x_\nu)&=s'(x_\nu)+t'(x_\nu)=y_\nu^*,\\ f'(-x_\nu)&=-s'(x_\nu)+t'(x_\nu)=y_{n-\nu+1}^*\end{aligned}\right\}\quad(\nu=1,2,\ldots,k). \tag{6. 2}$$

Since $s'''(x)$ and $t'''(x)$ are again odd and even, respectively, the third condition then gives

$$(6.3)\qquad \left.\begin{aligned} f'''(x_\nu)&=s'''(x_\nu)+t'''(x_\nu)=y_\nu^{**}\\ f'''(-x_\nu)&=-s'''(x_\nu)+t'''(x_\nu)=y_{n-\nu+1}^{**}\end{aligned}\right\}\qquad (\nu=1,2,\dots,k).$$

From (6. 1), (6. 2), (6. 3) we get for $t(x)$

$$(6.4)\qquad \left.\begin{aligned} t(x_\nu)&=\frac{1}{2}(y_\nu-y_{n-\nu+1}),\\ t'(x_\nu)&=\frac{1}{2}(y_\nu^{*}+y_{n-\nu+1}^{*}),\\ t'''(x_\nu)&=\frac{1}{2}(y_\nu^{**}+y_{n-\nu+1}^{**})\end{aligned}\right\}\qquad (\nu=1,2,\dots,k)$$

and, of course,

$$(6.5)\qquad t(0)=0,\quad t'(0)=c_1,\quad t'''(0)=6c_3.$$

The coefficients to be determined are $3k+1$, out of which two are determined from (6. 5). For the remaining $3k-1$ coefficients we have $3k$ equations which is one more than the number of coefficients to be determined.

For $s(x)$ the equations (6. 1), (6. 2), (6. 3) give

$$(6.6)\qquad \left.\begin{aligned} s(x_\nu)&=\frac{1}{2}(y_\nu+y_{n-\nu+1}),\\ s'(x_\nu)&=\frac{1}{2}(y_\nu^{*}-y_{n-\nu+1}^{*}),\\ s'''(x_\nu)&=\frac{1}{2}(y_\nu^{**}-y_{n-\nu+1}^{**})\end{aligned}\right\}\qquad (\nu=1,2,\dots,k)$$

and

$$(6.7)\qquad s(0)=c_0,\quad s'(0)=0,\quad s'''(0)=0.$$

The coefficients to be determined are $3k+2$, out of which one is determined by (6. 7). For the remaining $3k+1$ coefficients we are furnished $3k$ equations which is one less than the number of coefficients to be determined. Hence there are an infinity of solutions.

7. As stated in § 3, we shall consider with an odd n, in the case of $x_\nu=\xi_\nu$, the general structure of the solutions. The assertion is obviously proved if we show that in our case all polynomials $f(x)$ of degree $\leqq 3n-1$ satisfying

$$(7.1)\qquad f(\xi_\nu)=f'(\xi_\nu)=f'''(\xi_\nu)=0\qquad (\nu=1,2,\dots,n)$$

are

$$(7.2)\qquad cQ_{2n}(x)(P_{n-1}(x)-2)$$

with arbitrary numerical c. If $f(x)$ statisfies (7.1), the first part of the condition implies

$$f(x) = Q_{2n}(x)\, q_{n-1}(x) \tag{7.3}$$

where $q_{n-1}(x)$ is a polynomial of degree $\leqq n-1$. But the second part of the condition requires

$$Q'_{2n}(\xi_\nu)\, q_{n-1}(\xi_\nu) + Q_{2n}(\xi_\nu)\, q'_{n-1}(\xi_\nu) = 0 \tag{7.4}$$

which is automatically satisfied as the ξ_ν's are the double zeros of $Q_{2n}(x)$.

The third part of the condition means

$$\begin{aligned} Q'''_{2n}(\xi_\nu)\, q_{n-1}(\xi_\nu) + 3\, Q''_{2n}(\xi_\nu)\, q'_{n-1}(\xi_\nu) + 3\, Q'_{2n}(\xi_\nu)\, q''_{n-1}(\xi_\nu) + \\ + Q_{2n}(\xi_\nu)\, q'''_{n-1}(\xi_\nu) = 0. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Since

$$Q_{2n}(\xi_\nu) = Q'_{2n}(\xi_\nu) = 0 \quad \text{for} \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{7.6}$$

we have

$$Q'''_{2n}(\xi_\nu)\, q_{n-1}(\xi_\nu) + 3\, Q''_{2n}(\xi_\nu)\, q'_{n-1}(\xi_\nu) = 0. \tag{7.7}$$

The differential equation satisfied by

$$\pi_n(x) = (1-x^2)\, P'_{n-1}(x) \tag{7.8a}$$

is

$$(1-x^2)\,\pi''_n(x) + n(n-1)\,\pi_n(x) = 0 \qquad (n \geqq 2). \tag{7.8}$$

Hence the differential equation satisfied by $Q_{2n}(x)$ is

$$(1-x^2)^2\, Q'''_{2n}(x) + 4n(n-1)(1-x^2)\, Q'_{2n}(x) + 4n(n-1)x\, Q_{2n}(x) = 0. \tag{7.9}$$

This gives

$$Q'''_{2n}(\xi_\nu) = 0 \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n-1). \tag{7.10}$$

Therefore (7.7) gives

$$q'_{n-1}(\xi_\nu) = 0 \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n-1).$$

But this means that $q'_{n-1}(x)$ has all its zeros common with $P'_{n-1}(x)$, i.e. $q'_{n-1}(x) = c P'_{n-1}(x)$ with a numerical c. Hence if $c \neq 0$,

$$q_{n-1}(x) = c\{P_{n-1}(x) + c_1\},$$

that is

$$f(x) = c\, Q_{2n}(x)\,(P_{n-1}(x) + c_1). \tag{7.11}$$

To determine c and c_1, we shall make use of $f'''(\pm 1) = 0$. We shall now require the following known results:

$$P'_{n-1}(1) = \frac{1}{2}\, n(n-1) = (-1)^n P'_{n-1}(-1), \tag{7.12}$$

$$\pi'_n(1) = -n(n-1) = (-1)^{n-1}\pi'_n(-1), \tag{7.13}$$

$$\pi''_n(1) = -\frac{1}{2}\, n^2(n-1)^2 = (-1)^n \pi''_n(-1). \tag{7.14}$$

From the above three relations we have

(7.15) $$Q_{2n}''(1) = 2n^2(n-1)^2 = Q_{2n}''(-1),$$

(7.16) $$Q_{2n}'''(1) = 3n^3(n-1)^3 = -Q_{2n}'''(-1).$$

The requirement $f'''(1)=0$ then gives with the help of (7.15) and (7.16) $c_1 = -2$. Hence

(7.17) $$f(x) = cQ_{2n}(x)(P_{n-1}(x)-2).$$

For n odd it is easy to verify with (7.12), (7.15), (7.16) that the polynomial (7.17) satisfies also the condition $f'''(-1)=0$. If $c=0$, then $q_{n-1}(x)=$ constant, i.e. $f(x)$ would be $cQ_{2n}(x)$ with a numerical c; but then $f'''(1)\neq 0$. Hence only the polynomials (7.17) fulfil our requirement.

8. The proof of Theorem II in the case of n even runs parallel to that of Theorem I. In the case of n even, it is proved also that if

(8.1) $$f(\xi_\nu) = f'(\xi_\nu) = f'''(\xi_\nu) = 0,$$

then $f(x)$ has necessarily the form (7.17) with numerical c, without using the requirement $f'''(-1)=0$.

For even n it can be seen with the help of formulae (7.12) to (7.16) that

$$\left[\frac{d^3}{dx^3}(Q_{2n}(x)\{P_{n-1}(x)-2\})\right]_{x=-1} \neq 0.$$

Hence $c=0$, i.e.

(8.2) $$f(x)\equiv 0.$$

Now this means that writing out (8.1) as a linear system, the determinant is not zero. Considering the general problem

(8.3) $$f(\xi_\nu)=y_\nu,\quad f'(\xi_\nu)=y_\nu^*,\quad f'''(\xi_\nu)=y_\nu^{**}\qquad (\nu=1,2,\dots,n)$$

this shows that the corresponding linear system is always uniquely solvable and Theorem II is proved.

9. Explicit representation of the interpolatory polynomials. We now consider the following problem of (0, 1, 3)-interpolation:

Given $n(=2k)$ distinct points $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ satisfying (2.3) and arbitrary

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n;\quad c_1, c_2, c_3, \dots, c_n;\quad d_1, d_2, d_3, \dots, d_n;$$

we want to find explicit form of the polynomial $R_n(x)$ of degree $\leqq 3n-1$ such that

(9.1) $$R_n(\xi_\nu)=b_\nu,\quad R_n'(\xi_\nu)=c_\nu,\quad R_n'''(\xi_\nu)=d_\nu\qquad (\nu=1,2,3,\dots,n).$$

The existence and uniqueness has already been proved in Theorem II. For convenience we select the numbers ξ_ν as n different real x_ν-zeros

(9.2) $$-1 = x_n < x_{n-1} < \cdots < x_2 < x_1 = 1$$

of the polynomial $\pi_n(x)$.

For $R_{2k}(x)$ we evidently have the form

$$(9.3) \qquad R_{2k}(x)=\sum_{\nu=1}^{2k} b_\nu u_\nu(x)+\sum_{\nu=1}^{2k} c_\nu v_\nu(x)+\sum_{\nu=1}^{2k} d_\nu w_\nu(x)$$

where the polynomials $u_\nu(x)$, $v_\nu(x)$, $w_\nu(x)$, the fundamental polynomials of the first, second and third kind of the (0, 1, 3)-interpolation belonging to the x_j-points, respectively, are polynomials of degree $\leqq 3n-1=6k-1$, uniquely determined by the following requirements:

$$(9.4) \qquad u_\nu(x_j)=\begin{cases}1 & \text{for } j=\nu\\ 0 & \text{for } j\neq\nu\end{cases},\quad u'_\nu(x_j)=0,\quad u'''_\nu(x_j)=0,$$

$$(9.5) \qquad v_\nu(x_j)=0,\quad v'_\nu(x_j)=\begin{cases}1 & \text{for } j=\nu\\ 0 & \text{for } j\neq\nu\end{cases},\quad v'''_\nu(x_j)=0,$$

$$(9.6) \qquad w_\nu(x_j)=0,\quad w'_\nu(x_j)=0,\quad w'''_\nu(x_j)=\begin{cases}1 & \text{for } j=\nu\\ 0 & \text{for } j\neq\nu\end{cases},$$

respectively, where $j=1,2,\ldots,n$. In what follows we shall explicitly determine these fundamental polynomials $u_\nu(x)$, $v_\nu(x)$, $w_\nu(x)$.

10. We shall denote by $l_\nu(x)$ the fundamental polynomials of the Lagrange interpolation, i. e.

$$(10.1) \qquad l_\nu(x)=\frac{\pi_n(x)}{\pi'_n(x_\nu)(x-x_\nu)}.$$

We shall make use of an observation of FEJÉR that

$$(10.2) \qquad l'_\nu(x_\nu)=0 \qquad (\nu=2,3,\ldots,n-1).$$

Further we have

$$(10.3) \qquad l_\nu(x_j)=\begin{cases}1 & \text{for } j=\nu\\ 0 & \text{for } j\neq\nu\end{cases} \qquad (j=1,2,\ldots,n).$$

We shall also require the following results which are easy to verify:

$$(10.4) \qquad (1-t^2)(t-x_\nu)\,l''_\nu(t)+2(1-t^2)\,l'_\nu(t)+n(n-1)(t-x_\nu)\,l_\nu(t)=0,$$

$$(10.5) \qquad l''_\nu(x_j)=-2l'_\nu(x_j)/(x_j-x_\nu),$$

$$(10.6) \qquad l'_\nu(1)=\frac{-n(n-1)}{(1-x_\nu)\pi'_n(x_\nu)},\quad l'_\nu(-1)=\frac{(-1)^{n+1}n(n-1)}{(1+x_\nu)\pi'_n(x_\nu)},$$

$$(10.7) \qquad \begin{aligned} l''_\nu(1)&=\left(-\frac{2}{1-x_\nu}+\frac{n(n-1)}{2}\right)l'_\nu(1),\\ l''_\nu(-1)&=\left(\frac{2}{1+x_\nu}-\frac{n(n-1)}{2}\right)l'_\nu(-1),\end{aligned}$$

$$(10.8) \qquad \pi'''_n(x_\nu)=-\frac{n(n-1)}{1-x_\nu^2}\pi'_n(x_\nu),$$

$$(10.9) \qquad l_\nu''(1) = \frac{1}{(1-x_\nu)\pi_n'(x_\nu)}\left[\pi_n''(1) - \frac{2\pi_n'(1)}{1-x_\nu}\right],$$

$$(10.10) \qquad l_\nu''(-1) = -\frac{1}{(1+x_\nu)\pi_n'(x_\nu)}\left[\pi_n''(-1) + \frac{2\pi_n'(-1)}{1+x_\nu}\right].$$

11. THEOREM IV. *The fundamental polynomials $u_\nu(x)$, $v_\nu(x)$, $w_\nu(x)$ are given by the following:*

(a)

$$(11.1) \qquad w_1(x) = \frac{Q_{2n}(x)}{6n^3(n-1)^3}\left[1 + \frac{1}{2}P_{n-1}(x)\right],$$

$$(11.2) \qquad w_n(x) = -\frac{Q_{2n}(x)}{6n^3(n-1)^3}\left[1 - \frac{1}{2}P_{n-1}(x)\right],$$

and for $2 \leqq \nu \leqq n-1$

$$(11.3) \qquad \begin{aligned} w_\nu(x) = \frac{Q_{2n}(x)}{3Q_{2n}''(x_\nu)P_{n-1}''(x_\nu)}\Bigg[\int_{-1}^{x}\frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_\nu}\,dt - \\ -P_{n-1}(x)\left\{\frac{x_\nu}{2(1-x_\nu^2)} + \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_\nu}\,dt\right\} - \\ -\left\{\frac{1}{1-x_\nu^2} + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_\nu}\right\}dt\Bigg]; \end{aligned}$$

(b)

$$(11.4) \qquad v_1(x) = \frac{\pi_n(x)}{\pi_n'(x_1)}\{r_1(x) + c_1\pi_n(x) + c_1' Q_{2n}'(x)\}$$

where

$$(11.5) \qquad c_1 = \frac{1}{48}\left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right),$$

$$(11.6) \qquad c_1' = -\frac{1}{32n(n-1)}$$

and

$$(11.7) \qquad \begin{aligned} r_1(x) = \frac{3+x}{4}l_1^2(x) - \frac{1-x^2}{4}l_1(x)l_1'(x) + \\ +\left(\frac{5}{16} + \frac{1}{8n(n-1)}\right)\pi_n(x)\left\{1 + \frac{1}{3}P_{n-1}(x)\right\}, \end{aligned}$$

$$(11.8) \qquad v_n(x) = \frac{\pi_n(x)}{\pi_n'(x_n)}\{r_n(x) + c_n\pi_n(x) + c_n' Q_{2n}'(x)\}$$

where

$$c_n=\frac{1}{48}\left(1-\frac{2}{n(n-1)}\right), \tag{11.9}$$

$$c_n'=\frac{1}{32n(n-1)} \tag{11.10}$$

and

$$\begin{aligned} r_n(x)&=\frac{3-x}{4}\,l_n^2(x)+\frac{1-x^2}{4}\,l_n(x)l_n'(x)+\\ &+\left(\frac{5}{16}+\frac{1}{8n(n-1)}\right)\pi_n(x)\left\{1-\frac{1}{3}P_{n-1}(x)\right\}, \end{aligned} \tag{11.11}$$

and for $2\leqq \nu\leqq n-1$

$$v_\nu(x)=\frac{\pi_n(x)}{\pi_n'(x_\nu)}\left[r_\nu(x)+\frac{n(n-1)}{3(1-x_\nu^2)}\varrho_\nu(x)+c_\nu\pi_n(x)+c_\nu' Q_{2n}'(x)\right] \tag{11.12}$$

where

$$c_\nu=\frac{1}{6n(n-1)(1-x_\nu^2)P_{n-1}^2(x_\nu)}, \tag{11.13}$$

$$c_\nu'=-\frac{1}{18n^2(n-1)^2(1-x_\nu^2)\,P_{n-1}^3(x_\nu)}, \tag{11.14}$$

$$\begin{aligned} r_\nu(x)&=l_\nu^2(x)+\frac{\pi_n(x)}{2n(n-1)P_{n-1}(x_\nu)}\left\{\int_{+1}^{x}\frac{l_\nu'(t)}{t-x_\nu}\,dt+\right.\\ &\left.+\int_{-1}^{x}\frac{l_\nu'(t)}{t-x_\nu}\,dt+\frac{P_{n-1}(x)}{3(1-x_\nu^2)P_{n-1}^2(x_\nu)}\right\} \end{aligned} \tag{11.15}$$

and

$$\begin{aligned} \varrho_\nu(x)&=\frac{\pi_n(x)}{4n^2(n-1)^2P_{n-1}^2(x_\nu)}\left\{(1-x_\nu^2)\int_{1}^{x}\frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_\nu}\,dt+\right.\\ &\left.+(1-x_\nu^2)\int_{-1}^{x}\frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_\nu}\,dt+2P_{n-1}(x)\left[-x_\nu+\frac{1}{3P_{n-1}(x_\nu)}\right]-4\right\}; \end{aligned} \tag{11.16}$$

(c) *and lastly for* $2\leqq\nu\leqq n-1$ *we have*

$$u_\nu(x)=A_\nu w_\nu(x)+B_\nu w_1(x)+C_\nu w_n(x)+l_\nu^3(x)+\frac{\pi_n(x)\,l_\nu(x)\,l_\nu'(x)}{3\pi_n'(x_\nu)} \tag{11.17}$$

where $w_\nu(x)$, $w_1(x)$, $w_n(x)$ *are polynomials each of degree* $\leqq 3n-1$, *given* *by* (11.3), (11.1) *and* (11.2), *respectively, and*

(11.18)
$$A_\nu = -4l_\nu'''(x_\nu), \quad B_\nu = \frac{2n^4(n-1)^4}{\pi_n'^3(x_\nu)(1-x_\nu)^2},$$
$$C_\nu = \frac{2n^4(n-1)^4}{(1+x_\nu)^2\pi_n'^3(x_\nu)},$$

(11.19)
$$u_1(x) = l_1^3(x) + \frac{\pi_n(x)}{3\pi_n'(1)}[l_1(x)\,l_1'(x) - 10\,l_1'(1)\,r_1(x)] +$$
$$+ A_1 w_1(x) + B_1 w_n(x)$$

where

$$A_1 = -\frac{n(n-1)}{32}(n^4 - 2n^3 - 17n^2 + 18n + 8),$$

$$B_1 = \frac{n(n-1)}{96}(25n^4 - 50n^3 + 35n^2 - 10n - 48),$$

(11.20)
$$u_n(x) = l_n^3(x) + \frac{\pi_n(x)}{3\pi_n'(-1)}[l_n(x)\,l_n'(x) - 10\,l_n'(-1)\,r_n(x)] +$$
$$+ A_n w_1(x) + B_n w_n(x)$$

where

$$A_n = -\frac{n(n-1)}{96}(25n^4 - 50n^4 + 35n^2 - 10n - 48),$$

$$B_n = \frac{n(n-1)}{32}(n^4 - 2n^3 - 17n^2 + 18n + 8).$$

12. In order to prove part (a) of the above theorem, we observe that in view of conditions (9.6) we take

$$w_1(x) = c\,Q_{2n}(x)\,(c_1 + P_{n-1}(x))$$

which is of degree $\leqq 3n-1$, so that it only remains to verify that $w_1'''(x_j) = 0$ for $j = 2, 3, \ldots, n-1$. This is easily done in virtue of (7.10), (7.8a) and (7.6). In order to determine c and c_1, we use the requirement

$$w_1'''(1) = 1, \quad w_1'''(-1) = 0$$

which gives on simplification

$$w_1'''(1) = 3cn^3(n-1)^3(2+c_1) = 1$$

and

$$w_1'''(-1) = 3cn^3(n-1)^3(2-c_1) = 0$$

whence we get (11.1)

Similarly we get (11.2). For obtaining (11.3) for $2 \leqq \nu \leqq n-1$, we put

$$w_\nu(x) = c_1 Q_{2n}(x)\left\{\int_1^x \frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_\nu}\,dt + c_2 P_{n-1}(x) + c_3\right\}.$$

The conditions

$$w_\nu(x_j) = w'_\nu(x_j) = 0 \quad \text{for} \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

are already seen to be true. Also

$$w'''_\nu(x_j) = 0 \quad \text{for} \quad j \neq \nu.$$

But from $w'''_\nu(x_\nu) = 1$ and $w'''_\nu(+1) = w'''_\nu(-1) = 0$, we are able to determine c_1, c_2, c_3, viz.,

$$w'''_\nu(x_\nu) = 3c_1 Q''_{2n}(x_\nu) P''_{n-1}(x_\nu) = 1,$$

$$w'''_\nu(1) = 2c_2 + c_3 + \frac{1}{1-x_\nu} + \int_{-1}^{1} \frac{P'_{n-1}(t)}{t-x_\nu}\, dt = 0,$$

$$w'''_\nu(-1) = 2c_2 - c_3 - \frac{1}{1+x_\nu} = 0.$$

Solving these, we get (11.3) for $2 \leqq \nu \leqq n-1$.

13. In order to obtain part (b) of Theorem IV, we require the polynomials $r_\nu(x)$ and $\varrho_\nu(x)$ obtained by P. TURÁN and J. BALÁZS for (0, 2)-interpolation for $\nu = 1, 2, \ldots, n$, where we have

$$(13.1) \qquad \left.\begin{aligned} & r_\nu(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{for } j = \nu \\ 0 & \phantom{\text{for }} j \neq \nu, \end{cases} \\ & r''_\nu(x_j) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

and

$$(13.2) \qquad \left.\begin{aligned} & \varrho_\nu(x_j) = 0, \\ & \varrho''_\nu(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{for } j \neq \nu \\ 1 & \phantom{\text{for }} j = \nu \end{cases} \end{aligned}\right\} \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

We now determine $v_\nu(x)$ of degree $\leqq 3n-1$ for $2 \leqq \nu \leqq n-1$ in the form

$$v_\nu(x) = \frac{\pi_n(x)}{\pi'_n(x_\nu)} [r_\nu(x) + c\varrho_\nu(x) + c_\nu \pi_n(x) + c'_\nu Q'_{2n}(x)].$$

It is easy to check from (13.1) and (13.2) that

$$v_\nu(x_j) = 0 \quad \text{for} \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

and

$$v'_\nu(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{for } j \neq \nu, \\ 1 & \phantom{\text{for }} j = \nu. \end{cases}$$

Also from (13.1), (13.2), (7.10) and (7.8)

$$v'''_\nu(x_j) = 0 \quad \text{for} \quad j \neq \nu \qquad (j = 2, 3, \ldots, n-1),$$

and $v'''_\nu(x_\nu) = 0$ gives

$$c = -\frac{1}{3} \frac{\pi'''_n(x_\nu)}{\pi'_n(x_\nu)} = \frac{1}{3} \frac{n(n-1)}{1-x_\nu^2}.$$

Now the two conditions $v_\nu'''(\pm 1)=0$ furnish the two linear equations

$$r_\nu'(1)+c\varrho_\nu'(1)-2n(n-1)c_\nu+8n^2(n-1)^2c_\nu'=0$$

and

$$r_\nu'(-1)+c\varrho_\nu'(-1)+2n(n-1)c_\nu+8n^2(n-1)^2c_\nu'=0$$

whence

$$c_\nu=\frac{1}{4n(n-1)}\left[\{r_\nu'(1)-r_\nu'(-1)\}+\frac{1}{3}\frac{n(n-1)}{1-x_\nu^2}\{\varrho_\nu'(1)-\varrho_\nu'(-1)\}\right]$$

and

$$c_\nu'=-\frac{1}{16n^2(n-1)^2}\left[\{r_\nu'(1)+r_\nu'(-1)\}+\frac{1}{3}\frac{n(n-1)}{1-x_\nu^2}\{\varrho_\nu'(1)+\varrho_\nu'(-1)\}\right].$$

From (11.15) and (11.16) we get after simplification

$$r_\nu'(1)=\frac{1}{3(1-x_\nu^2)P_{n-1}^3(x_\nu)}=r_\nu'(-1)$$

and

$$\varrho_\nu'(1)=\frac{1}{n(n-1)P_{n-1}^2(x_\nu)}\left(1+\frac{1}{3P_{n-1}(x_\nu)}\right),$$

$$\varrho_\nu'(-1)=\frac{1}{n(n-1)P_{n-1}^2(x_\nu)}\left(-1+\frac{1}{3P_{n-1}(x_\nu)}\right)$$

for $2\leqq \nu\leqq n-1$. Hence we get the formula (11.12).

In order to obtain $v_1(x)$, we take

$$v_1(x)=\frac{\pi_n(x)}{\pi_n'(1)}\{r_1(x)+c_1\pi_n(x)+c_1'Q_{2n}'(x)\}.$$

Clearly,

$$v_1(x_j)=0 \quad \text{for} \quad j=1,2,\ldots,n; \text{ and } v_1'(x_j)=\begin{cases}0 & \text{for} \quad j=2,3,\ldots,n,\\ 1 & \phantom{\text{for}} \quad j=1.\end{cases}$$

Also $v_1'''(x_j)=0$ for $j=2,3,\ldots,n-1$, while $v_1'''(\pm 1)=0$ help us to determine c_1 and c_1'.

Indeed, we get

$$16c_1'n^2(n-1)^2=-r_1'(1)-r_1'(-1)-\frac{(n+1)(n-2)}{12}$$

and

$$4c_1n(n-1)=-r_1'(-1)+r_1'(1)+\frac{(n+1)(n-2)}{12}.$$

From (11.7) we can easily get

$$r_1'(1)=\frac{1}{12}+\frac{5n(n-1)}{24}=r_1'(-1).$$

Hence we get (11.4).

Similarly one obtains the formula (11.8).

14. The explicit representation of $u_\nu(x)$ and its determination gave us the greatest trouble. In order to prove (11.17), we start with the forms (11.17) with A, B, C still to be determined.

Obviously,

$$u_\nu(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{for } j \neq \nu \\ 1 & \phantom{\text{for }} j = \nu \end{cases} \qquad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Also $u'_\nu(x_j) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$. Further from (10.2), (10.3) we get for $j \neq \nu$ and $2 \leqq \nu \leqq n-1$

$$u'''_\nu(x_j) = 3l'_\nu(x_j)\left[2l'^2_\nu(x_j) - \frac{2\pi'_n(x_j)}{\pi'_n(x_\nu)} \cdot \frac{l'_\nu(x_j)}{x_j - x_\nu}\right] = 0.$$

For $j = \nu$, we see from $u'''_\nu(x_\nu) = 0$ that

$$A = -4l'''_\nu(x_\nu) = \frac{4n(n-1)x_\nu}{(1-x_\nu^2)^2}.$$

From the requirement that $u'''_\nu(\pm 1) = 0$ we get

$$B + 6l'^3_\nu(1) + \frac{\pi''_n(1)}{\pi'_n(x_\nu)} l'^2_\nu(1) + \frac{3\pi'_n(1) l'_\nu(1) l''_\nu(1)}{\pi'_n(x_\nu)} = 0$$

and

$$C + 6l'^3_\nu(-1) + \frac{\pi''_n(-1) l'^2_\nu(-1)}{\pi'_n(x_\nu)} + \frac{3\pi'_n(-1) l'_\nu(-1) l''_\nu(-1)}{\pi'_n(x_\nu)} = 0.$$

These on simplification with the help of (10.4) to (10.10) yield the required results.

The explicit forms of $u_1(x)$ and $u_n(x)$ are obtained in a similar manner.

*

The following computations have helped to simplify some formulae:

$$l'_1(1) = \frac{n(n-1)}{4}, \qquad l'_n(1) = -\frac{(-1)^n}{2},$$

$$l''_1(1) = \frac{(n-2)(n+1)}{6} l'_1(1), \qquad l''_n(1) = \frac{(n-2)(n+1)}{2} l'_n(1),$$

$$l'''_1(1) = \frac{(n-3)(n+2)}{8} l''_1(1), \qquad l'''_n(1) = \frac{(n-3)(n+2)}{4} l''_n(1),$$

$$l'_1(-1) = \frac{(-1)^n}{2}, \qquad l'_n(-1) = -\frac{n(n-1)}{4},$$

$$l''_1(-1) = -\frac{(n-2)(n+1)}{2} l'_1(-1), \qquad l''_n(-1) = -\frac{(n-2)(n+1)}{6} l'_n(-1),$$

$$l'''_1(-1) = -\frac{(n-3)(n+2)}{4} l''_1(-1), \qquad l'''_n(-1) = -\frac{(n-3)(n+2)}{8} l''_n(-1).$$

(Received 25 June 1958)

References

[1] J. Surányi and P. Turán, Notes on interpolation. I, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), pp. 66—79.

[2] J. Balázs and P. Turán, Notes on interpolation. II, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **8** (1957), pp. 201—215.

ÜBER DIE GEODÄTISCHEN ABBILDUNGEN VON RIEMANNSCHEN RÄUMEN AUF PROJEKTIV-SYMMETRISCHE RIEMANNSCHE RÄUME

Von

GY. SOÓS (Debrecen)

(*Vorgelegt von* O. VARGA)

Prof. Dr. O. VARGA *anläßlich seines 50-ten Geburtstages gewidmet*

Ein n-dimensionaler Riemannscher Raum V^n wird projektiv-symmetrisch genannt, falls der Weylsche projektive Krümmungstensor

$$W^h_{ijk} = R^h_{ijk} - \frac{1}{n-1}(\delta^h_k R_{ij} - \delta^h_j R_{ik})$$

der Bedingung

$$W^h_{ijk|l} = 0 \tag{0. 1}$$

genügt. Man sieht leicht, daß die Riemannschen Räume konstanter Krümmung, ferner die im Cartanschen Sinne symmetrischen Riemannschen Räume ($R^h_{ijk|l} = 0$) zur Klasse der projektiv-symmetrischen Räume gehören.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit den (von der Identität verschiedenen) geodätischen Abbildungen eines beliebigen Riemannschen Raumes auf projektiv-symmetrische Räume, und zeigen, daß ein V^n, der auf einen projektiv-symmetrischen V^n geodätisch abbildbar ist, notwendig ein Raum konstanter Krümmung sein muß. Diese Behauptung bildet eine wesentliche Verschärfung eines Satzes von N. S. SINJUKOW [1], der die obige Behauptung im Falle von in Cartanschem Sinne symmetrischen Räumen bewiesen hat.

Im folgenden stellen wir die aus der Bedingung (0. 1) herleitbaren Konsequenzen zusammen.

1. Projektiv-symmetrische Riemannsche Räume

Man bekommt aus (0. 1) leicht die Relationen

$$W^h_{ijk|h} = \frac{n-2}{n-1}(R_{ik|j} - R_{ij|k}) = 0,$$

d. h. es folgt, falls $n \neq 2$ ist,

$$R_{ik|j} - R_{ij|k} = 0. \tag{1. 1}$$

Da andererseits

$$R_{ik|j} - R_{ij|k} = -R^h_{ijk|h}$$

ist, haben wir auch

$$R^h_{ijk|h} = 0. \tag{1.2}$$

Aus (1. 2) folgt

$$R^h_{ijk|h|m} = 0. \tag{1.3}$$

Es wird gezeigt, daß auch die Relationen

$$R^h_{ijk|m|h} = 0 \tag{1.4}$$

gültig sind. Dazu brauchen wir folgendes Lemma von A. G. WALKER [2]:

Es gilt in einem Riemannschen Raum die Identität:

$$R_{hijk|l|m} - R_{hijk|m|l} + R_{jklm|h|i} - R_{jklm|i|h} + R_{lmhi|j|k} - R_{lmhi|k|j} = 0.$$

Zieht man nun den Index h herauf, und verjüngt nach h und l, so entstehen aus der obigen Identität die Relationen:

$$R^h_{ijk|h|m} - R^h_{ijk|m|h} + R^h_{mjk|h|i} - R^h_{mjk|i|h} - R_{im|j|k} + R_{im|k|j} = 0.$$

Wegen (1. 3) folgt

$$R_{im|k|j} - R_{im|j|k} - R^h_{ijk|m|h} - R^h_{mjk|i|h} = 0. \tag{1.5}$$

Wir betrachten nun die Gleichungen

$$W^h_{ijk|l|m} - W^h_{ijk|m|l} = 0.$$

Diese lauten, wenn man nach h und l verjüngt,

$$\frac{1}{n-1}(R_{ij|m|k} - R_{ik|m|j}) - (R_{ij|k|m} - R_{ik|j|m}) - R^h_{ijk|m|h} = 0. \tag{1.6}$$

Wegen (1. 1) verschwindet der in Klammer stehende Ausdruck. Verwendet man dieselben Relationen auf die beiden ersten Glieder, so erhalten wir aus den vorangehenden Gleichungen

$$R^h_{ijk|m|h} = \frac{1}{n-1}(R_{im|j|k} - R_{im|k|j}). \tag{1.7}$$

Setzt man dies und den ähnlichen Ausdruck für $R^h_{mjk|i|h}$ in (1. 5) ein, so ergibt sich

$$\frac{n+1}{n-1}(R_{im|j|k} - R_{im|k|j}) = 0,$$

also ist

$$R_{im|j|k} - R_{im|k|j} = 0. \tag{1.8}$$

Unter Beachtung von (1. 6) und (1. 7) stellt man die Richtigkeit der Behauptung (1. 4) fest.

Endlich gelten wegen (1. 3) und (1. 4) die Gleichungen

$$g^{sh}(R_{sijk|h|m} - R_{sijk|m|h}) = 0,$$

oder nach einer Umformung

$$g^{kl}(R_{pijk|l|m} - R_{pijk|m|l}) = 0. \tag{1.9}$$

2. Formulierung und Beweis des Hauptsatzes

SATZ 1. *Ist ein Riemannscher Raum V^n $(n>2)$ auf einen projektiv-symmetrischen Riemannschen Raum geodätisch abbildbar, so ist V^n von konstanter Krümmung.*

BEWEIS. Es seien $\overline{V}^n$ und V^n Riemannsche Räume, ferner sei $\overline{V}^n$ projektiv-symmetrisch. Es wird vorausgesetzt, daß V^n auf $\overline{V}^n$ geodätisch abbildbar ist. Da $\overline{V}^n$ projektiv-symmetrisch ist, folgt das Bestehen von (1.9):

$$\bar{g}^{kl}(\overline{R}_{pijk|l|m}-\overline{R}_{pijk|m|l})=0$$

oder

$$\bar{g}^{kl}(\overline{R}_{psjk}\overline{R}^{s}_{ilm}+\overline{R}_{pisk}\overline{R}^{s}_{jlm}+\overline{R}_{pijs}\overline{R}^{s}_{klm}-\overline{R}^{s}_{ijk}\overline{R}_{pslm})=0. \tag{2.1}$$

Diese Gleichungen bilden, zusammen mit den in unserem Falle nach (1.7) auch geltenden Gleichungen

$$\overline{R}_{im|j|k}-\overline{R}_{im|k|j}=0, \tag{2.2}$$

die einzigen Relationen, mit deren Hilfe N. S. SINJUKOW die Richtigkeit des Satzes, falls $\overline{V}_n$ symmetrisch ist, beweist. Damit ist der Beweis auf die Aussage eines schon bewiesenen Satzes zurückgeführt. Für die Einzelheiten des Beweises verweisen wir auf die zitierte Arbeit.

Nach einem bekannten Satz von BELTRAMI kann man Riemannsche Räume konstanter Krümmung nur auf Räume mit derselben Eigenschaft geodätisch abbilden. Daraus folgt

SATZ 2. *Es ist unmöglich, Riemannsche Räume V^n $(n>2)$ auf vom Raum konstanter Krümmung verschiedene projektiv-symmetrische Räume geodätisch abzubilden.*

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT DEBRECEN

(Eingegangen am 27. Juni 1958)

Literaturverzeichnis

[1] Н. С. Синюков, О геодезическом отображении римановых пространств на симметрические римановы пространства, ДАН СССР, **98** (1954), S. 21–23.

[2] A. G. WALKER, On Ruse's spaces of recurrent curvature, *Proc. London Math. Soc.* (2), **52** (1951), S. 36—64.

[3] L. P. EISENHART, *Riemannian geometry* (Princeton, 1926).

BEMERKUNGEN ZUR HERMITE—FEJÉRSCHEN INTERPOLATIONSTHEORIE

Von

J. BALÁZS (Budapest)

(*Vorgelegt von* P. TURÁN)

§ 1. Einleitung

1. Es sei $f(x)$ eine im Intervall $[-1, +1]$ definierte Funktion und

$$+1 \geqq \xi_{1n} > \xi_{2n} > \cdots > \xi_{nn} \geqq -1 \qquad (n=1,2,3,\ldots) \tag{1.1.1}$$

ein Punktsystem in demselben Intervall, dann ist

$$H_n(f;x) = \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_{\nu n}) h_{\nu n}(x) + \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{\nu n} \mathfrak{h}_{\nu n}(x) \qquad (n=1,2,3,\ldots) \tag{1.1.2}$$

die zur Funktion $f(x)$ gehörende und am Punktsystem (1. 1. 1) definierte Hermite—Fejérsche Interpolationsfolge. Die im Ausdruck (1. 1. 2) enthaltenen $\{\alpha_{\nu n}\}$ sind vorgeschriebene Zahlenwerte,

$$h_{\nu n}(x) = v_{\nu n}(x) l_{\nu n}(x)^2 \tag{1.1.3}$$

sind die Grundpolynome erster Art und

$$\mathfrak{h}_{\nu n}(x) = (x - \xi_{\nu n}) l_{\nu n}(x)^2 \tag{1.1.4}$$

die Grundpolynome zweiter Art, wobei

$$l_{\nu n}(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(\xi_{\nu n})(x - \xi_{\nu n})} \tag{1.1.5}$$

und

$$\omega_n(x) = c(x-\xi_{1n})(x-\xi_{2n})\cdots(x-\xi_{nn}) \qquad (c = \text{konstant} \neq 0), \tag{1.1.6}$$

sowie

$$v_{\nu n}(x) = 1 - \frac{\omega_n''(\xi_{\nu n})}{\omega_n'(\xi_{\nu n})}(x - \xi_{\nu n}) \tag{1.1.7}$$

bedeutet. Aus der Definition von $H_n(f;x)$ folgt, daß es ein Polynom höchstens $(2n-1)$-ten Grades ist, wofür

$$H_n(f;\xi_{\nu n}) = f(\xi_{\nu n}) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx}\{H_n(f;x)\}_{x=\xi_{\nu n}} = \alpha_{\nu n} \tag{1.1.8}$$

besteht.

Es sei $\pi_{2n-1}(x)$ ein Polynom höchstens $(2n-1)$-ten Grades, dann ist, wie bekannt,

$$\sum_{\nu=1}^{n} \pi_{2n-1}(\xi_{\nu n}) h_{\nu n}(x) + \sum_{\nu=1}^{n} \pi_{2n-1}'(\xi_{\nu n}) \mathfrak{h}_{\nu n}(x) \equiv \pi_{2n-1}(x) \tag{1.1.9}$$

und für den Spezialfall von $\pi_{2n-1}(x) \equiv 1$

$$\sum_{\nu=1}^{n} h_{\nu n}(x) \equiv 1. \tag{1.1.10}$$

2. Die Untersuchungen der Interpolationsfolge $\{H_n(f;x)\}$ bezüglich ihrer Konvergenz wurden von L. FEJÉR ([1], [2], [3], [4], [5]) begonnen. Das Konvergenzproblem der Folge $\{H_n(f;x)\}$ mit den Wurzeln der zur Gewichtsfunktion $w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ gehörenden orthogonalen, sogenannten Jacobischen Polynome als Grundpunktsystem wurde für den allgemeinen Fall, also für jeden Parameterwert $\alpha > -1$, $\beta > -1$ von G. SZEGŐ [9] und S. SHOHAT [8] geklärt. Aus ihren Untersuchungen ging hervor, daß aus der Voraussetzung der Stetigkeit von $f(x)$ im abgeschlossenen Intervall $[-1, +1]$ und aus $\{\alpha_{\nu n}\} = \{f'(\xi_{\nu n})\}$, $|f'(\xi_{\nu n})| < A$ die gleichmäßige Konvergenz von $H_n(f;x)$ gegen $f(x)$ im Intervall $[-1+\varepsilon, +1-\varepsilon]$ folgt; für $\alpha < 0$ ist die Konvergenz auch im Intervall $[-1+\varepsilon, +1]$ gleichmäßig, für $\alpha \geqq 0$ ist jedoch $\{H_n(f;x)\}$ im Punkt $x = +1$ — wo also die Gewichtsfunktion bei $\alpha > 0$ gleich Null ist — im allgemeinen divergent.

G. FREUD [6] beschäftigte sich mit der Konvergenz der Folge $\{H_n(f;x)\}$, wenn das Grundpunktsystem aus den Wurzeln der zu einer beliebigen nichtnegativen Gewichtsfunktion $w(x)$ gehörenden orthogonalen Polynome $\{\omega_n(x)\}$ besteht. Seine Konvergenzsätze enthalten die Voraussetzung, daß die Gewichtsfunktion $w(x)$ im ganzen Intervall $[-1, +1]$ entschieden positiv ist. Prof. P. TURÁN hat nun die folgende Frage gestellt: Gibt es im Intervall $[-1, +1]$ ein orthogonales Polynomsystem $\{\omega_n(x)\}$, dessen Gewichtsfunktion an einer inneren Stelle dieses Intervalles gleich Null ist, während die Folge $\{H_n(f;x)\}$ im abgeschlossenen Intervall $[-1, +1]$ gleichmäßig gegen die Funktion $f(x)$ konvergiert, wenn die Wurzeln von $\{\omega_n(x)\}$ zum Grundpunktsystem gewählt werden und von der Funktion nur die Stetigkeit, von den $\{\alpha_{\nu n}\}$ die Beschränktheit vorausgesetzt wird? Auf diese Frage geben wir im Satz I dieser Arbeit eine bejahende Antwort.

L. FEJÉR nannte das Grundpunktsystem von (1.1.1) normal, wenn im Interpolationsintervall $-1 \leqq x \leqq +1$

$$v_{\nu n}(x) \geqq 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\; n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1.2.1}$$

besteht, und streng normal, wenn

$$v_{\nu n}(x) \geqq \varrho > 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\; n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1.2.2}$$

besteht, wobei $v_{\nu n}(x)$ die lineare Funktion (1.1.7) bezeichnet. Bezeichne $X_{\nu n}$ die Nullstelle von $v_{\nu n}(x)$, so besteht wegen (1.1.7)

$$X_{\nu n} = \xi_{\nu n} + \frac{\omega_n'(\xi_{\nu n})}{\omega_n''(\xi_{\nu n})}. \tag{1.2.3}$$

L. Fejér hat die Nullstelle $X_{\nu n}$ als konjugierten Punkt bezeichnet. Aus (1.2.1) und (1.2.2) folgt offensichtlich, daß keiner der konjugierten Punkte im Inneren des Intervalls $(-1, +1)$ liegt, wenn das Grundpunktsystem (1.1.1) normal ist, bzw. alle konjugierten Punkte außerhalb des Intervalls $[-1, +1]$ liegen, wenn das Grundpunktsystem streng normal ist.

Den Untersuchungen von Fejér anschließend hat G. Grünwald [7] folgendes gezeigt: liegt keiner der zum Grundpunktsystem (1.1.1) gehörenden konjugierten Punkte im Inneren des Intervalls $(-1, +1)$, d. h. ist das Punktsystem normal, so konvergiert $\{H_n(f; x)\}$ in jedem beliebigen inneren Teilintervall des Intervalls $(-1, +1)$ gleichmäßig gegen die im abgeschlossenen Intervall $[-1, +1]$ stetige Funktion $f(x)$, wenn die Zahlenwerte $\{\alpha_{\nu n}\}$ beschränkt sind. Befindet sich jedoch jeder konjugierte Punkt des Grundpunktsystems außerhalb des Intervalls $[-1, +1]$, d. h. ist das Grundpunktsystem streng normal, so ist die Konvergenz im abgeschlossenen Intervall $[-1, +1]$ gleichmäßig; es genügt sogar, statt der Beschränktheit der Zahlen $\{\alpha_{\nu n}\}$ die Ungleichheit $|\alpha_{\nu n}|<cn^{\varrho-\varepsilon}$ anzunehmen, wobei c eine von n unabhängige Konstante bedeutet und $\varrho>\varepsilon>0$ ist. Im Zusammenhang mit den Gesagten hat ebenfalls Prof. P. Turán die folgende Frage erwähnt: Kann im Intervall $[-1, +1]$ ein Grundpunktsystem angegeben werden, dessen konjugierte Punkte (1.2.3) im Intervall $[-1, +1]$ überall dicht sind, und die zu diesem Grundpunktsystem gehörende Interpolationsfolge $\{H_n(f; x)\}$ im abgeschlossenen Intervall $[-1, +1]$ trotzdem gleichmäßig gegen die Funktion $f(x)$ konvergiert, wenn nur die Stetigkeit der Funktion $f(x)$ im Intervall $[-1, +1]$ und die Beschränktheit der Zahlen $\{\alpha_{\nu n}\}$ angenommen wird? Mit dem Beweis des Satzes II dieser Arbeit bejahen wir auch diese Frage.

Die zu beweisenden Sätze sind die folgenden:

Satz I. *Die auf das Grundpunktsystem*

$$x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{nn} \qquad (n=1,2,3,\ldots) \tag{1.2.4}$$

beruhende Interpolationsfolge $\{H_n(f; x)\}$, *wo* (1.2.4) *die Wurzeln des zur Gewichtsfunktion*

$$p(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}|x|^{2\mu+1} \qquad \left(-\frac{1}{2}<\mu<0\right) \tag{1.2.5}$$

gehörenden orthogonalen Polynomsystems $\{p_n(x)\}$ *bezeichnen, konvergiert im abgeschlossenen Intervall* $[-1, +1]$ *gleichmäßig gegen die in diesem Intervall stetige Funktion* $f(x)$, *wenn* $|\alpha_{\nu n}|\leqq c_1 n^{\delta}$, $|\mu|>\delta\geqq 0$ *besteht und* c_1 *eine von* n *unabhängige Konstante ist.*[1]

[1] Im weiteren werden c_i $(i=1,2,3,\ldots)$ immer von n unabhängige Konstanten bezeichnen.

SATZ II. *Die zum Interpolationsgrundpunktsystem* (1.2.4) *gehörenden konjugierten Punkte*

$$X_{\nu n} = x_{\nu n} + \frac{p_n'(x_{\nu n})}{p_n''(x_{\nu n})} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1.2.6}$$

liegen überall dicht im Intervall $[-1, +1]$.

Aus (1.2.5) folgt $p(0) = 0$, also ist die Gewichtsfunktion an einer Stelle im Inneren des Intervalls $[-1, +1]$ tatsächlich gleich Null.

§ 2. Bei den Beweisführungen angewandte Resultate

1. Die im Intervall $[-1, +1]$ zur Gewichtsfunktion $p(t) = (1-t^2)^\alpha$ gehörenden orthogonalen Jacobischen Polynome $y(t) = P_m^{(\alpha)}(t)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, die sogenannten ultrasphärischen Polynome, genügen der Differentialgleichung[2]

$$(1-t^2)y'' - 2(\alpha+1)ty' + n(n+2\alpha+1)y = 0 \tag{2.1.1}$$

für $\alpha > -1$. Das Polynom $P_m^{(\alpha)}(t)$ ist derart normiert, daß

$$P_m^{(\alpha)}(1) = \binom{m+\alpha}{m}. \tag{2.1.2}$$

Es besteht die folgende Gleichung:[3]

$$P_m^{(\alpha)}(t) = (-1)^m P_m^{(\alpha)}(-t). \tag{2.1.3}$$

Wir werden von den folgenden Formeln Gebrauch machen:[4]

$$\max_{-1 \leqq x \leqq +1} |P_m^{(\alpha)}(t)| = \binom{m+\alpha}{m}, \quad \text{wenn} \quad \alpha \geqq -\frac{1}{2}, \tag{2.1.4}$$

sowie[5]

$$\frac{d}{dt}\{P_m^{(\alpha)}(t)\} = \frac{1}{2}(m+2\alpha+1)P_{m-1}^{(\alpha+1)}(t). \tag{2.1.5}$$

Bezeichne $t_\nu = \cos\vartheta_\nu$ eine Wurzel des Polynoms $P_m^{(\alpha)}(t) = P_m^{(\alpha)}(\cos\vartheta)$, so gilt für $-\frac{1}{2} \leqq \alpha \leqq +\frac{1}{2}$ die Brunssche Ungleichung[6]

$$\left(\nu - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{m} \leqq \vartheta_\nu \leqq \nu\frac{\pi}{m+1} \qquad \left(\nu = 1, 2, \ldots, \left[\frac{m}{2}\right]\right). \tag{2.1.6}$$

[2] Siehe z. B. G. SZEGŐ, *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. (New York, 1939), S. 59, Formel (4.2.1).

[3] Siehe [2], S. 58, Formel (4.1.3).

[4] Siehe [2], S. 163, Formel (7.32.2).

[5] Siehe [2], S. 62, Formel (4.21.7).

[6] Siehe [2], S. 118, Formel (6.21.7).

Eine ähnliche Ungleichung gilt für die negativen Wurzeln wegen der aus (2. 1. 3) folgenden Gleichung $t_\nu + t_{m+1-\nu} = 0$.

Für den Differentialquotienten von $P_m^{(\alpha)}(t)$ nach t besteht für $\alpha > -1$ die folgende Ungleichung:[7]

$$(2.1.7) \qquad |P_m^{(\alpha)\prime}(\cos\vartheta_\nu)| \geqq c_2 \nu^{-\alpha-\frac{3}{2}} m^{\alpha+2} \qquad \left(0 < \vartheta_\nu \leqq \frac{\pi}{2}\right).$$

2. Im folgenden bestimmen wir die zur Gewichtsfunktion (1. 2. 5) gehörenden und im Intervall $[-1, +1]$ ein orthogonales System bildenden Polynome $\{p_n(x)\}$. Diese sind die folgenden:[8]

$$(2.2.1) \qquad p_n(x) = \begin{cases} P_{2k}^{(\mu)}(\sqrt{1-x^2}) & \text{für } n = 2k, \\ xP_{2k}^{(\mu+1)}(\sqrt{1-x^2}) & \text{für } n = 2k+1 \end{cases} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

wobei durch die Substitution $\sqrt{1-x^2} = t$, $P_{2k}^{(\mu)}(t)$ bzw. $P_{2k}^{(\mu+1)}(t)$ die im Intervall $-1 \leqq t \leqq +1$ zu den Gewichtsfunktionen $(1-t^2)^\mu$ bzw. $(1-t^2)^{\mu+1}$ gehörenden orthogonalen, ultrasphärischen Polynome von geradem Grade bezeichnen, wobei $-\frac{1}{2} < \mu < 0$ ist. Die Ausdrücke in (2. 2. 1) sind offensichtlich wegen (2. 1. 3) Polynome.

Es läßt sich leicht zeigen, daß die Polynome in (2. 2. 1) im Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ ein zur Gewichtsfunktion (1. 2. 5) orthogonales System bilden. Und zwar erhält man mit Rücksicht darauf, daß die Polynome $P_{2k}^{(\mu)}(t)$ bzw. $P_{2k}^{(\mu+1)}(t)$ zu den Gewichtsfunktionen $(1-t^2)^\mu$ bzw. $(1-t^2)^{\mu+1}$ gehörende orthogonale Systeme bilden und (1. 2. 5) eine gerade Funktion ist, durch die Substitution $t = \sqrt{1-x^2}$ wegen (2. 1. 3)

$$\int_{-1}^{1} p_{2k}(x)p_{2l}(x)p(x)\,dx = 2\int_0^1 p_{2k}(x)p_{2l}(x)p(x)\,dx =$$

$$= 2\int_0^1 P_{2k}^{(\mu)}(t)P_{2l}^{(\mu)}(t)(1-t^2)^\mu\,dt = \delta_{kl} \begin{cases} = 0 & \text{für } k \neq l, \\ \neq 0 & \text{für } k = l \end{cases} \qquad (k, l = 0, 1, 2, \ldots),$$

sowie auf ähnliche Weise

$$\int_{-1}^{1} p_{2k+1}(x)p_{2l+1}(x)p(x)\,dx = 2\int_0^1 P_{2k}^{(\mu+1)}(t)P_{2l}^{(\mu+1)}(t)(1-t^2)^{\mu+1}\,dt = \delta_{kl} \begin{cases} = 0 & \text{für } k \neq l, \\ \neq 0 & \text{für } k = l \end{cases}$$

[7] Siehe [2], S. 232, Formel (8. 9. 2).

[8] Die zur Gewichtsfunktion $(1-x^2)^p|x|^q$ $(p > -1, q > -1)$ gehörenden orthogonalen Polynome wurden durch K. V. Laščenov bestimmt. Siehe K. V. Laščenov, On a class of orthogonal polynomials (russisch), *Leningrad, Gos. Ped. Uč. Zap.*, **89** (1953), S. 167—189. Die Polynome in (2. 2. 1) unterscheiden sich nur durch konstante Faktoren von den durch K. V. Laščenov bestimmten orthogonalen Polynomen für $p = -\frac{1}{2}$ und $q = 2\mu + 1$.

und

$$\int_{-1}^{1} p_{2k}(x) p_{2l+1}(x) p(x) dx = 0,$$

da die zu integrierende Funktion, wie aus (2. 2. 1) und (2. 1. 3) sofort ersichtlich, ungerade ist. Also bildet $\{p_n(x)\}$ im Intervall $[-1, +1]$ tatsächlich ein zur Gewichtsfunktion $p(x)$ in (1. 2. 5) gehörendes orthogonales Polynomsystem. Daraus folgt nun, daß die Punkte $x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{nn}$ in (1. 2. 4) alle verschieden sind und im Inneren des Intervalls $[-1, +1]$ liegen. Wir betrachten diese Wurzelstellen in folgender Reihenfolge:

(2. 2. 2) $$-1 < x_{k+1,n} < x_{k+2,n} < \cdots < x_{nn} < 0 < x_{1n} < x_{2n} < \cdots < x_{kn} < +1$$ für $n = 2k$

und

(2. 2. 3) $$-1 < x_{k+2,n} < x_{k+3,n} < \cdots < x_{nn} < 0 = x_{k+1,n} < x_{1n} < x_{2n} < \cdots < x_{kn} < +1$$ für $n = 2k+1$.

Aus der Reihenfolge von (2. 2. 2) und (2. 2. 3) folgt offensichtlich wegen (2. 2. 1) und (2. 1. 3)

(2. 2. 4) $$x_{\nu n} + x_{n+1-\nu, n} = 0 \qquad \left(\nu = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\right).$$

Wir werden bezüglich der Wurzelstellen des Polynoms $p_n(x)$ von folgender Abschätzung Gebrauch machen:

HILFSSATZ 2. 1. *Bezeichne $x_{\nu n}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$; $n = 1, 2, \ldots$) die Wurzeln der Polynome $p_n(x)$ in der Reihenfolge* (2. 2. 2) *bzw.* (2. 2. 3), *so ist für* $\sqrt{1 - x_{\nu n}^2} = t_{\nu n} = \cos \vartheta_{\nu n}$ $\left(\nu = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\right)$

(2. 2. 5) $$\vartheta_{\nu n} > \left(\nu - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n} \geqq \frac{\pi}{2}\frac{\nu}{n}.$$

BEWEIS. Für den Fall $n = 2k+1$ seien $\tau_{\nu, 2k+1} = \cos \varphi_{\nu, 2k+1}$ bzw. $t_{\nu, 2k+1} = \cos \vartheta_{\nu, 2k+1}$ die Wurzel- bzw. relativen Maximumstellen des Polynoms $P_{2k+1}^{(\mu)}(t)$. Wegen (2. 1. 5) ist jedoch die relative Maximumstelle $t_{\nu, 2k+1} = \cos \vartheta_{\nu, 2k+1}$ eine Wurzel des Polynoms $P_{2k}^{(\mu+1)}(t)$, daher gilt wegen (2. 2. 1) und (2. 2. 3)

$$t_{\nu, 2k+1} = \cos \vartheta_{\nu n} = \sqrt{1 - x_{\nu n}^2}$$

für jeden von $k+1$ verschiedenen Wert von ν. Da, wie bekannt,

$$0 < \varphi_{1, 2k+1} < \varphi_{2, 2k+1} < \cdots < \varphi_{2k+1, 2k+1} < \pi$$

ist, folgt aus dem Satz von ROLLE

(2. 2. 6) $$\varphi_{\nu, 2k+1} < \vartheta_{\nu, 2k+1} < \varphi_{\nu+1, 2k+1},$$

und da $-\frac{1}{2}<\mu<0$ gilt, erhält man wegen (2.2.6) und (2.1.6) die Ungleichung (2.2.5) für den Fall $n=2k+1$.

Ist $n=2k$, so ergibt sich, da $-\frac{1}{2}<\mu<0$, wegen (2.2.2), (2.2.1) und (2.1.6) direkt die Ungleichung (2.2.5).

FOLGERUNG. *Für die Wurzeln $x_{\nu n}$ der in* (2.2.1) *definierten Polynome $p_n(x)$ gilt die folgende Ungleichung:*

$$|x_{\nu n}|=|x_{n+1-\nu,\,n}|>\frac{\nu}{n}\qquad\left(\nu=1,2,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right]\right). \tag{2.2.7}$$

Ist nämlich $t_{\nu n}=\sqrt{1-x_{\nu n}^2}=\cos\vartheta_{\nu n}$, so ist wegen (2.2.2), (2.2.3) und (2.2.4) offensichtlich

$$|x_{\nu n}|=|x_{n+1-\nu,\,n}|=\sin\vartheta_{\nu n}\geqq\frac{2}{\pi}\vartheta_{\nu n}\qquad\left(\nu=1,2,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right]\right),$$

und daraus folgt schon (2.2.7) wegen (2.2.5).

Wir werden weiterhin folgende Abschätzungen der Polynome $p_n(x)$ (2.2.1) gebrauchen:

HILFSSATZ 2.2. *Im Intervall $-1\leqq x\leqq+1$ ($n=1,2,\ldots$) besteht*

$$|p_n(x)|\leqq c_5 n^{\mu}. \tag{2.2.8}$$

BEWEIS. Die Ungleichung (2.2.8) kann für den Fall $n=2k$ sofort eingesehen werden. Es ist nämlich $0\leqq\sqrt{1-x^2}\leqq 1$ und $-\frac{1}{2}<\mu<0$, sowie wegen (2.2.1) und (2.1.4)

$$\max_{-1\leqq x\leqq+1}|p_{2k}(x)|=\binom{2k+\mu}{2k}\leqq c_3(2k)^{\mu}.$$

Ist dagegen $n=2k+1$, so erhält man durch die Substitution $t=\sqrt{1-t^2}$ mit Rücksicht auf (2.2.1) und (2.1.5)

$$p_{2k+1}(x)=\sqrt{1-t^2}\,P_{2k}^{(\mu+1)}(t)=\frac{1}{k+\mu+1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{d}{dt}\{P_{2k+1}^{(\mu)}(t)\}.$$

Hieraus folgt jedoch durch Anwendung der Bernsteinschen Ungleichung für Polynome wegen (2.1.4)

$$|p_{2k+1}(x)|\leqq\frac{2k+1}{k+\mu+1}\binom{2k+1+\mu}{2k+1}\leqq c_4(2k+1)^{\mu}.$$

Q. e. d.

§ 3. Eine Abschätzung bezüglich der Grundpolynome erster Art

1. Bezeichne $x_{\nu n}$ eine Wurzel des Polynoms $p_n(x)$, so folgt wegen (2.2.1) durch Differenzieren nach x für $n=2k$

$$(3.1.1)\qquad \frac{p_n''(x_{\nu n})}{p_n'(x_{\nu n})}=-\frac{x_{\nu n}}{\sqrt{1-x_{\nu n}^2}}\left\{\frac{\dfrac{d^2}{dt^2}[P_{2k}^{(\mu)}(t)]}{\dfrac{d}{dt}[P_{2k}^{(\mu)}(t)]}\right\}_{t=\sqrt{1-x_{\nu n}^2}}+\frac{1}{x_{\nu n}(1-x_{\nu n}^2)}.$$

Durch die Substitution $\sqrt{1-x_{\nu n}^2}=t_{\nu n}$ erhält man dagegen wegen (2.1.1)

$$\left\{\frac{\dfrac{d^2}{dt^2}[P_{2k}^{(\mu)}(t)]}{\dfrac{d}{dt}[P_{2k}^{(\mu)}(t)]}\right\}_{t=t_{\nu n}}=\frac{2(\mu+1)t_{\nu n}}{1-t_{\nu n}^2}=\frac{2(\mu+1)\sqrt{1-x_{\nu n}^2}}{x_{\nu n}^2};$$

dies setzen wir in (3.1.1) ein:

$$(3.1.2)\qquad \frac{p_n''(x_{\nu n})}{p_n'(x_{\nu n})}=-\frac{2(\mu+1)}{x_{\nu n}}+\frac{1}{x_{\nu n}(1-x_{\nu n}^2)}=\frac{2(\mu+1)(x_{\nu n}^2-1)+1}{x_{\nu n}^2(1-x_{\nu n}^2)}.$$

Ist dagegen $n=2k+1$ und $\nu\neq k+1$, so ist wegen (2.2.3) und (2.2.1)

$$(3.1.3)\qquad \frac{p_n''(x_{\nu n})}{p_n'(x_{\nu n})}=\frac{1}{x_{\nu n}}-\frac{x_{\nu n}}{\sqrt{1-x_{\nu n}^2}}\left\{\frac{\dfrac{d^2}{dt^2}[P_{2k}^{(\mu+1)}(t)]}{\dfrac{d}{dt}[P_{2k}^{(\mu+1)}(t)]}\right\}_{t=\sqrt{1-x_{\nu n}^2}}+\frac{2-x_{\nu n}^2}{x_{\nu n}(1-x_{\nu n}^2)}.$$

Durch die Substitution $\sqrt{1-x_{\nu n}^2}=t_{\nu n}$ erhält man wegen (2.1.1)

$$\left\{\frac{\dfrac{d^2}{dt^2}[P_{2k}^{(\mu+1)}(t)]}{\dfrac{d}{dt}[P_{2k}^{(\mu+1)}(t)]}\right\}_{t=t_{\nu n}}=\frac{P_{2k}^{(\mu+1)''}(t_{\nu n})}{P_{2k}^{(\mu+1)'}(t_{\nu n})}=\frac{2(\mu+2)t_{\nu n}}{1-t_{\nu n}^2}=\frac{2(\mu+2)\sqrt{1-x_{\nu n}^2}}{x_{\nu n}^2},$$

und dies in (3.1.3) einsetzend

$$(3.1.4)\qquad \frac{p_n''(x_{\nu n})}{p_n'(x_{\nu n})}=\frac{1}{x_{\nu n}}-\frac{2(\mu+2)}{x_{\nu n}}+\frac{2-x_{\nu n}^2}{x_{\nu n}(1-x_{\nu n}^2)}=\frac{2(\mu+1)(x_{\nu n}^2-1)+1}{x_{\nu n}(1-x_{\nu n}^2)}.$$

In dem Fall $\nu=k+1$ ist wegen (2.2.3) $x_{\nu n}=x_{k+1,n}=0$; da jedoch auch das Polynom $p_n''(x)$ eine ungerade Funktion ist, besteht $p_n''(x_{k+1,n})=0$ und es ist in diesem Fall

$$(3.1.5)\qquad \frac{p_n''(x_{k+1,n})}{p_n'(x_{k+1,n})}=0.$$

2. Nun können wir zur Abschätzung der Summe der absoluten Werte der Grundpolynome erster Art übergehen. Es gilt der folgende

HILFSSATZ 3.1. *Im Intervall* $-1 \leqq x \leqq +1$ *besteht für das Grundpunktsystem* (1.2.4)

$$\sum_{\nu=1}^{n} |h_{\nu n}(x)| \leqq c_{10}. \tag{3.2.1}$$

BEWEIS. Aus (1.1.7), (3.1.2) bzw. (3.1.4) folgt

$$v_{\nu n}(x) = 1 - \frac{2(\mu+1)(x_{\nu n}^2-1)+1}{x_{\nu n}(1-x_{\nu n}^2)}(x-x_{\nu n}) \quad \text{für} \quad x_{\nu n} \neq 0; \tag{3.2.2}$$

ist dagegen im Fall $n = 2k+1$, $\nu = k+1$, d. h. ist wegen (2.2.3) $x_{k+1,n} = 0$, so folgt aus (1.1.7) und (3.1.5)

$$v_{k+1,n}(x) \equiv 1. \tag{3.2.3}$$

Aus (3.2.2) ergibt sich für $x = 0$ wegen der Ungleichungen $-\frac{1}{2} < \mu < 0$ und $|x_{\nu n}| < 1$

$$v_{\nu n}(0) = 1 + \frac{2(\mu+1)(x_{\nu n}^2-1)+1}{1-x_{\nu n}^2} \geqq 2|\mu| > 0. \tag{3.2.4}$$

Diese Ungleichung ist wegen (3.2.3) auch für $n = 2k+1$ und $\nu = k+1$ gültig.

Im Intervall $-1 \leqq x \leqq 0$ ist wegen $v_{\nu n}(x_{\nu n}) = 1$ und (3.2.4) für $x_{\nu n} \leqq 0$

$$v_{\nu n}(x) \geqq 2|\mu| > 0, \tag{3.2.5}$$

da $v_{\nu n}(x)$ eine lineare Funktion ist. Im Intervall $0 \leqq x \leqq +1$ folgt aus $v_{\nu n}(x_{\nu n}) = 1$ und (3.2.4) für $x_{\nu n} \geqq 0$ ebenfalls

$$v_{\nu n}(x) \geqq 2|\mu| > 0. \tag{3.2.6}$$

Wir beweisen die Ungleichung (3.2.1) im Intervall $-1 \leqq x \leqq 0$. In diesem Intervall ist für $x_{\nu n} \leqq 0$ wegen (3.2.5) und (1.1.3) $h_{\nu n}(x) \geqq 0$, also mit Rücksicht auf (1.1.10)

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{n} |h_{\nu n}(x)| &= \sum_{x_{\nu n} \leqq 0} + \sum_{x_{\nu n} > 0} = \sum_{x_{\nu n} \leqq 0} h_{\nu n}(x) + \sum_{x_{\nu n} > 0} |h_{\nu n}(x)| = \\ &= 1 - \sum_{x_{\nu n} > 0} h_{\nu n}(x) + \sum_{x_{\nu n} > 0} |h_{\nu n}(x)| \leqq 1 + 2 \sum_{x_{\nu n} > 0} |h_{\nu n}(x)|.\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Wegen (1.1.3), (3.2.2), sowie (1.1.5) erhält man

$$\begin{aligned}\sum_{x_{\nu n} > 0} |h_{\nu n}(x)| &= \sum_{x_{\nu n} > 0} \left| 1 - \frac{2(\mu+1)(x_{\nu n}^2-1)+1}{x_{\nu n}(1-x_{\nu n}^2)}(x-x_{\nu n}) \right| \frac{p_n(x)^2}{p_n'(x_{\nu n})^2 (x-x_{\nu n})^2} \leqq \\ &\leqq \sum_{x_{\nu n} > 0} \frac{p_n(x)^2}{p_n'(x_{\nu n})^2 (x-x_{\nu n})^2} + \sum_{x_{\nu n} > 0} \left| \frac{2(\mu+1)(x_{\nu n}^2-1)+1}{x_{\nu n}(1-x_{\nu n}^2)} \right| \frac{p_n(x)^2}{p_n'(x_{\nu n})^2 |x-x_{\nu n}|}.\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Da $-1 \leqq x \leqq 0$, $0 < x_{\nu n} < 1$ und $-\frac{1}{2} < \mu < 0$, ist $|2(\mu+1)(x_{\nu n}^2 - 1) + 1| \leqq 1$ und $|x - x_{\nu n}| > x_{\nu n}$, also auf Grund von (3. 2. 8)

$$\sum_{x_{\nu n} > 0} |h_{\nu n}(x)| \leqq 2 \sum_{x_{\nu n} > 0} \frac{p_n(x)^2}{x_{\nu n}^2 (1 - x_{\nu n}^2) p_n'(x_{\nu n})^2},$$

woraus wegen (2. 2. 1)

$$\text{(3. 2. 9)} \qquad \sum_{x_{\nu n} > 0} |h_{\nu n}(x)| \leqq \begin{cases} 2 \displaystyle\sum_{x_{\nu n} > 0} \frac{p_n(x)^2}{x_{\nu n}^4 \left[\frac{d}{dt} \{P_{2k}^{(\mu)}(t)\} \Big|_{t = \sqrt{1 - x_{\nu n}^2}} \right]^2} & \text{für } n = 2k, \\ 2 \displaystyle\sum_{x_{\nu n} > 0} \frac{p_n(x)^2}{x_{\nu n}^6 \left[\frac{d}{dt} \{P_{2k}^{(\mu+1)}(t)\} \Big|_{t = \sqrt{1 - x_{\nu n}^2}} \right]^2} & \text{für } n = 2k + 1 \end{cases}$$

folgt. Sei $t_{\nu n} = \sqrt{1 - x_{\nu n}^2} = \cos \vartheta_{\nu n}$, so folgt aus der Ungleichung (3. 2. 9), sowie aus (2. 2. 8), (2. 2. 7) und (2. 1. 7)

$$\sum_{x_{\nu n} > 0} |h_{\nu n}(x)| \leqq \begin{cases} c_6 \displaystyle\sum_{\nu=1}^{k} n^{2\mu} \left(\frac{n}{\nu} \right)^4 \nu^{2\mu+3} n^{-2\mu-4} & \text{für } n = 2k, \\ c_7 \displaystyle\sum_{\nu=1}^{k} n^{2\mu} \left(\frac{n}{\nu} \right)^6 \nu^{2\mu+5} n^{-2\mu-6} & \text{für } n = 2k + 1, \end{cases}$$

und da $-\frac{1}{2} < \mu < 0$ ist:

$$\text{(3. 2. 10)} \qquad \sum_{x_{\nu n} > 0} |h_{\nu n}(x)| \leqq c_8.$$

Aus (3. 2. 7) und (3. 2. 10) ergibt sich (3. 2. 1) im Intervall $-1 \leqq x \leqq 0$.

Durch ganz ähnliche Beweisführung erhält man für das Intervall $0 \leqq x \leqq +1$

$$\sum_{\nu=1}^{n} |h_{\nu n}(x)| \leqq c_9.$$

Es ist nämlich im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ für $x_{\nu n} \geqq 0$ wegen (3. 2. 6) und (1. 1. 3) $h_{\nu n}(x) \geqq 0$, und deshalb besteht, ähnlich dem Ausdruck von (3. 2. 7),

$$\sum_{\nu=1}^{n} |h_{\nu n}(x)| \leqq 1 + 2 \sum_{x_{\nu n} < 0} |h_{\nu n}(x)|.$$

Diese Abschätzung erfolgt im Intervall $0 \leqq x \leqq +1$ analog wie die des Ausdruckes (3. 2. 7) im Intervall $-1 \leqq x \leqq 0$, bei Beachtung von (2. 2. 7). Q. e. d.

§ 4. Eine Abschätzung bezüglich der Grundpolynome zweiter Art

1. Aus (1. 1. 4) und (1. 1. 5) ergibt sich

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\mathfrak{h}_{\nu n}(x)| = \sum_{\nu=1}^{n} |x-x_{\nu n}| \frac{p_n(x)^2}{p_n'(x_{\nu n})^2 (x-x_{\nu n})^2}. \tag{4. 1. 1}$$

Für diese Summe gilt die folgende Abschätzung:

HILFSSATZ 4. 1. *Im Intervall* $-1 \leqq x \leqq +1$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ *besteht nebst dem Grundpunktsystem* (1. 2. 4) *die Abschätzung*

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\mathfrak{h}_{\nu n}(x)| \leqq c_{21} n^{\mu}. \tag{4. 1. 2}$$

BEWEIS. Wir betrachten das Intervall $-1 \leqq x \leqq 0$ und den Ausdruck

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\mathfrak{h}_{\nu n}(x)| = \sum_{x_{\nu n} \leqq 0} + \sum_{x_{\nu n} > 0}. \tag{4. 1. 3}$$

Wegen $-1 \leqq x \leqq 0$ ist $|x-x_{\nu n}| \geqq x_{\nu n}$ für $x_{\nu n} > 0$; daraus folgt nach (2. 2. 1), (2. 2. 2) und (2. 2. 3)

$$\sum_{x_{\nu n} > 0} |\mathfrak{h}_{\nu n}(x)| \leqq \begin{cases} \displaystyle\sum_{x_{\nu n} > 0} \frac{p_n(x)^2}{|x_{\nu n}|^3 \left[\dfrac{d}{dt} \{P_{2k}^{(\mu)}(t)\} \Big|_{t=\sqrt{1-x_{\nu n}^2}} \right]^2} & \text{für } n=2k, \\ \displaystyle\sum_{x_{\nu n} > 0} \frac{p_n(x)^2}{|x_{\nu n}|^5 \left[\dfrac{d}{dt} \{P_{2k}^{(\mu+1)}(t)\} \Big|_{t=\sqrt{1-x_{\nu n}^2}} \right]^2} & \text{für } n=2k+1. \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich bei Beachtung von (2. 2. 8) und (2. 2. 7), sowie durch die Substitution $\sqrt{1-x_{\nu n}^2} = \cos \vartheta_{\nu n}$ wegen (2. 1. 7)

$$\sum_{x_{\nu n} > 0} |\mathfrak{h}_{\nu n}(x)| \leqq \begin{cases} c_{11} \displaystyle\sum_{\nu=1}^{k} n^{2\mu} \left(\frac{n}{\nu}\right)^3 n^{-2\mu-4} \nu^{2\mu+3} & \text{für } n=2k, \\ c_{12} \displaystyle\sum_{\nu=1}^{k} n^{2\mu} \left(\frac{n}{\nu}\right)^5 \nu^{2\mu+5} n^{-2\mu-6} & \text{für } n=2k+1. \end{cases} \tag{4. 1. 4}$$

Da $-\frac{1}{2} < \mu < 0$ ist, gilt wegen (4. 1. 4) im Intervall $-1 \leqq x \leqq 0$

$$\sum_{x_{\nu n} > 0} |\mathfrak{h}_{\nu n}(x)| \leqq c_{13} n^{2\mu}. \tag{4. 1. 5}$$

Es seien nun $x_{\nu n} \leqq 0$, $-1 \leqq x \leqq 0$ und

$$\sum_{x_{\nu n} \leqq 0} |\mathfrak{h}_{\nu n}(x)| = \sum_{\substack{x_{\nu n} \leqq 0 \\ |x-x_{\nu n}| \leqq n^{\mu}}} + \sum_{\substack{x_{\nu n} \leqq 0 \\ |x-x_{\nu n}| > n^{\mu}}} = \sum{}' + \sum{}''. \tag{4. 1. 6}$$

In Anbetracht von (1.1.4), (3.2.5), (1.1.3) und (3.2.1) gilt im Intervall $-1 \leqq x \leqq 0$

$$\begin{aligned}\sum{}' |\mathfrak{h}_{\nu n}(x)| \leqq n^{\mu} \sum{}' l_{\nu n}(x)^2 \leqq \frac{n^{\mu}}{2|\mu|} \sum{}' |v_{\nu n}(x)| l_{\nu n}(x)^2 \leqq \\ \leqq \frac{n^{\mu}}{2|\mu|} \sum_{\nu=1}^{n} |h_{\nu n}(x)| \leqq c_{14} n^{\mu}.\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

Aus (1.1.4), (1.1.5), (2.2.1), (2.2.8) und (2.2.7) folgt jedoch wegen (2.1.7) durch die Substitution $\sqrt{1-x_{\nu n}^2} = \cos \vartheta_{\nu n}$ die Beziehung

$$\begin{aligned}\sum{}'' |\mathfrak{h}_{\nu n}(x)| \leqq n^{-\mu} \sum{}'' \frac{p_n(x)^2}{p_n'(x_{\nu n})^2} \leqq \\ \leqq \begin{cases} c_{15} n^{-\mu} \sum_{\nu=1}^{k} n^{2\mu} \nu^{2\mu+3} n^{-2\mu-4} & \text{für} \quad n = 2k, \\ n^{-\mu} \frac{p_n(x)^2}{p_n'(0)^2} + c_{16} n^{-\mu} \sum_{\nu=1}^{k} n^{2\mu} \nu^{2\mu+5} n^{-2\mu-6} & \text{für} \quad n = 2k+1. \end{cases}\end{aligned} \tag{4.1.8}$$

Aus (2.2.8), (2.2.1) und (2.1.2) erhält man für $n = 2k+1$

$$\frac{p_n(x)^2}{p_n'(0)^2} \leqq \frac{c_5 n^{2\mu}}{[P_{2k}^{(\mu+1)}(1)]^2} = \frac{c_5 n^{2\mu}}{\binom{2k+\mu+1}{2k}^2} \leqq c_{17} \frac{1}{n}.$$

Hieraus und aus (4.1.8) ergibt sich im Intervall $-1 \leqq x \leqq 0$

$$\sum{}'' |\mathfrak{h}_{\nu n}(x)| \leqq c_{18} n^{\mu}. \tag{4.1.9}$$

Im Intervall $-1 \leqq x \leqq 0$ besteht also auf Grund von (4.1.3), (4.1.5), (4.1.6), (4.1.7), sowie (4.1.9)

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\mathfrak{h}_{\nu n}(x)| \leqq c_{19} n^{\mu}.$$

Auf ganz ähnliche Weise läßt sich im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ die Ungleichung

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\mathfrak{h}_{\nu n}(x)| \leqq c_{20} n^{\mu}$$

beweisen. Hiermit ist unser Hilfssatz bewiesen.

§ 5. Beweis von Satz I

1. Sei $f(x)$ im Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ stetig. Dann ist

$$H_n(f; x) = \sum_{\nu=1}^{n} f(x_{\nu n}) h_{\nu n}(x) + \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{\nu n} \mathfrak{h}_{\nu n}(x) \tag{5.1.1}$$

die Hermite—Fejérsche Interpolationspolynomfolge des Grundpunktsystems (1.2.4), wobei $\{\alpha_{\nu n}\} \leqq c_1 n^{\delta}$ und $0 \leqq \delta < |\mu|$ ist. Laut des Weierstraßschen

Approximationssatzes gibt es ein rationales Polynom $\pi(x)$ derart, daß im Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ für $\varepsilon > 0$

$$|f(x)-\pi(x)| \leqq \min\left(\frac{\varepsilon}{3c_{10}}, \frac{\varepsilon}{3}\right) \tag{5. 1. 2}$$

besteht. Ist $M = \max\limits_{-1\leqq x\leqq +1} |\pi'(x)|$, so läßt sich n wegen $-\frac{1}{2} < \mu < 0$ und (4. 1. 2) so groß wählen, daß im Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} \pi'(x_{\nu n}) \mathfrak{h}_{\nu n}(x)\right| \leqq (M + c_1 n^{\delta}) \sum_{\nu=1}^{n} |\mathfrak{h}_{\nu n}(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{3} \tag{5. 1. 3}$$

gilt. Ist n groß genug, so folgt aus (1. 1. 9)

$$\pi(x) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \pi(x_{\nu n}) h_{\nu n}(x) + \sum_{\nu=1}^{n} \pi'(x_{\nu n}) \mathfrak{h}_{\nu n}(x). \tag{5. 1. 4}$$

Nun erhalten wir mit Hilfe von (5. 1. 1), (5. 1. 4), (5. 1. 3), (5. 1. 2), sowie (3. 2. 1) die Abschätzung

$$|H_n(f; x) - f(x)| \leqq \sum_{\nu=1}^{n} |f(x_{\nu n}) - \pi(x_{\nu n})| \, |h_{\nu n}(x)| + (M + c_1 n^{\delta}) \sum_{\nu=1}^{n} |\mathfrak{h}_{\nu n}(x)| +$$

$$+ |\pi(x) - f(x)| \leqq \max_{\nu} |f(x_{\nu n}) - \pi(x_{\nu n})| \cdot c_{10} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \leqq \varepsilon.$$

Hiermit ist Satz I bewiesen.

§ 6. Beweis von Satz II

1. Die zum Grundpunktsystem (1. 2. 4) gehörenden konjugierten Punkte sind aus (1. 2. 6), (3. 1. 2) bzw. (3. 1. 4) folgend, für $x_{\nu n} \neq 0$:

$$X_{\nu n} = x_{\nu n} + \frac{x_{\nu n}(1 - x_{\nu n}^2)}{2(\mu + 1)(x_{\nu n}^2 - 1) + 1} = \frac{x_{\nu n}[(2\mu + 1)x_{\nu n}^2 - 2\mu]}{2(\mu + 1)x_{\nu n}^2 - (2\mu + 1)}. \tag{6. 1. 1}$$

Ist dagegen $x_{\nu n} = 0$, d. h. im Fall $n = 2k + 1$ mit $\nu = k + 1$, so gilt wegen (3. 1. 5) und (1. 2. 6)

$$X_{k-1, n} = \infty.$$

Zum Beweise des Satz II werden wir von folgender Behauptung Gebrauch machen:

Sei (α, β) ein beliebig kleines, festgehaltenes Teilintervall des Intervalls $[-1, +1]$. Betrachten wir das Grundpunktsystem (1. 2. 4). Wir beweisen, daß für ein genügend großes n, von diesem n an mindestens ein Glied einer jeden Reihe der dreieckförmigen Matrix des Grundpunktsystems sich im Inneren des Intervalls (α, β) befindet.[9]

Es sei

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{für} \quad -1\leqq x<\alpha,\\ (x-\alpha)(\beta-x) & \text{für} \quad \alpha\leqq x\leqq\beta,\\ 0 & \text{für} \quad \beta<x\leqq+1;\end{cases}$$

$f(x)$ ist im Intervall $-1\leqq x\leqq+1$ offensichtlich stetig. Nehmen wir an, daß die Behauptung falsch ist. Dann gibt es eine Folge $n_1<n_2<\cdots<n_i<\cdots$ derart, daß kein Glied der zu diesen Indizes gehörenden Punktgruppe $x_{1n_i}, x_{2n_i}, \ldots, x_{n_i n_i}$ $(i=1,2,3,\ldots)$ sich im Inneren des Intervalls (α, β) befindet. Hieraus ergibt sich, daß im Intervall $-1\leqq x\leqq+1$ $\lim\limits_{i\to\infty} H_{n_i}(f;x)=0$ gilt.

Dagegen ist nach Satz I an der Stelle $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

$$\lim_{i\to\infty} H_{n_i}(f;x)=f\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2\neq 0,$$

in Widerspruch zur vorausgehenden Folgerung.

Also bedecken die Punkte des Punktsystems (1. 2. 4) das Intervall $[-1, +1]$ überall dicht.

Hiernach ist es leicht zu beweisen, daß auch die zum Punktsystem (1. 2. 4) gehörenden konjugierten Punkte (6. 1. 1) das Intervall $[-1, +1]$ überall dicht bedecken.

Die zu den Punkten $x_{\nu n}\neq 0$ gehörenden konjugierten Punkte erhält man wegen (6. 1. 1) aus der Funktion

$$g(x)=\frac{x[(2\mu+1)x^2-2\mu]}{2(\mu+1)x^2-(2\mu+1)}$$

an den Stellen $x_{\nu n}$. Im Intervall $-1\leqq x\leqq+1$ ist $g'(x)<0$. Daher ist die Funktion $g(x)$ im Intervall $\left(-\sqrt{\dfrac{2\mu+1}{2\mu+2}}, +\sqrt{\dfrac{2\mu+1}{2\mu+2}}\right)$, welches wegen $-\dfrac{1}{2}<$ $<\mu<0$ ein Teilintervall von $[-1, +1]$ bildet, monoton abnehmend, stetig, und ihr Wertbereich umfaßt alle Werte von $+\infty$ bis $-\infty$. Also muß es zwei voneinander verschiedene Punkte a und b im Inneren des Intervalls $\left(-\sqrt{\dfrac{2\mu+1}{2\mu+2}}, +\sqrt{\dfrac{2\mu+1}{2\mu+2}}\right)$ geben, so daß $g(a)=-1$ und $g(b)=+1$. Wegen $g'(x)<0$ ist $-1\leqq g(x)\leqq+1$ im Intervall $b\leqq x\leqq a$. Es seien γ und δ zwei

[9] Diese Behauptung wurde für den Fall eines normalen Punktsystems $x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{nn}$ $(n=1,2,\ldots)$ von L. FEJÉR bewiesen. S. L. FEJÉR, Lagrangesche Interpolation und die zugehörigen konjugierten Punkte, *Math. Annalen*, **106** (1932), S. 68. Der hier mitgeteilte Beweis ist identisch mit der Beweismethode von L. FEJÉR.

voneinander verschiedene, reelle Werte, für welche $-1<\gamma<\delta<+1$ besteht. Dann muß es offensichtlich im Intervall (a, b) zwei verschiedene Punkte α und β geben derart, daß $g(\alpha)=\gamma$ und $g(\beta)=\delta$. Wie wir vorausgehend bewiesen haben, liegt mindestens ein Punkt einer jeden Reihe des Punktsystems (1. 2. 4), von einem bestimmten Index n an, im Inneren des Intervalls (α, β). Daraus ergibt sich, daß sich die zu den im Inneren des Intervalls (α, β) liegenden Grundpunkten gehörenden konjugierten Punkte wegen der Monotonie von $g(x)$ — von diesem Index an — im Inneren des Intervalls (γ, δ) befinden. Da γ und δ beliebig nahe zu einander liegen können, ist hiermit der Satz II bewiesen.

(Eingegangen am 8. Juli 1958.)

Literaturverzeichnis

[1] L. Fejér, Über Interpolation, *Nachrichten der Ges. der Wiss. Göttingen*, Math.-phys. Kl. (1916), S. 66—91.

[2] L. Fejér, Über Weierstraßsche Approximation, besonders durch Hermitesche Interpolation, *Math. Annalen*, **102** (1930), S. 707—725.

[3] L. Fejér, Die Abschätzung eines Polynomes, *Math. Zeitschrift*, **32** (1930), S. 426—457.

[4] L. Fejér, Lagrangesche Interpolation und die zugehörigen konjugierten Punkte, *Math. Annalen*, **106** (1932), S. 1—55.

[5] L. Fejér, On the characterization of some remarkable systems of points of interpolation by means of conjugate points, *Amer. Math. Monthly*, **41** (1934), S. 1—14.

[6] G. Freud, Über die Konvergenz des Hermite-Fejérschen Interpolationsverfahrens, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **5** (1954), S. 109—127.

[7] G. Grünwald, On the theory of interpolation, *Acta Math.*, **75** (1943), S. 219—245.

[8] S. Shohat, On interpolation, *Annals of Math.* (2), **34** (1933), S. 130—146.

[9] G. Szegő, Über gewisse Interpolationspolynome, die zu den Jacobischen und Laguerreschen Abszissen gehören, *Math. Zeitschrift*, **35** (1932), S. 579—602.

A NOTE ON THE SECOND MAIN THEOREM OF P. TURÁN

By

S. UCHIYAMA (Sapporo, Japan)

(*Presented by* P. TURÁN)

Let $z_1, z_2, \ldots, z_n$ be n complex numbers satisfying the condition

$$1 = z_1 \geqq |z_2| \geqq \cdots \geqq |z_n| \tag{1}$$

and put for the sake of brevity

$$s_\nu = b_1 z_1^\nu + b_2 z_2^\nu + \cdots + b_n z_n^\nu$$

where the b_j's are arbitrary complex numbers. Then the second main theorem in the title states that there exists an absolute constant $A > 0$ such that

$$\max_{m+1 \leqq \nu \leqq m+n} |s_\nu| \geqq \left(\frac{n}{A(m+n)}\right)^n \cdot \min_{1 \leqq j \leqq n} |b_1 + \cdots + b_j|$$

where m is a non-negative integer.

It is known[1] that the constant A in the second main theorem satisfies the inequalities

$$2e^{1+\frac{4}{e}} \geqq A \geqq e^{\theta_0} \tag{2}$$

where θ_0 is the (only) positive zero of the equation

$$\theta e^{\theta+1} = 1$$

and hence $e^{\theta_0} \sim 1{,}321$. It is to be noticed that the second inequality of (2) occurs even when the b_j's are restricted in such a way that $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 1$.

The purpose of this brief note is to prove that *the constant A in the second main theorem in its full generality cannot be smaller than e.* A proof will be supplied if we construct a suitable example with n complex numbers $z_1, \ldots, z_n$ satisfying (1) and the complex numbers $b_1, \ldots, b_n$: indeed, as is seen below, such an example exists in which all the b_j's are real numbers.

Consider n complex numbers $z_1, z_2, \ldots, z_n$ such that

$$z_1 z_2 \cdots z_n \prod_{j \neq k} (z_j - z_k) \neq 0 \tag{3}$$

and put

$$b_j = \frac{1}{z_j f'(z_j)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

where $f(z) = \prod_{j=1}^{n} (z - z_j)$. It is then clear that

$$b_1 z_1^\nu + \cdots + b_n z_n^\nu = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad 1 \leqq \nu \leqq n-1, \\ 1 & \text{for} \quad \nu = n. \end{cases} \tag{4}$$

[1] VERA T. SÓS and P. TURÁN, On some new theorems in the theory of diophantine approximations, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), pp. 241—255.

In fact, this is nothing but so-called EULER's identity and is well known.

Let us take

$$z_j = 1 - \frac{j-1}{n} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Then the conditions (1) and (3) are satisfied and, by definition, the b_j's are now real numbers. A simple computation shows that

$$b_j = (-1)^{j-1} \frac{n^n}{(j-1)!\,(n-j+1)!},$$

$$\sum_{k=1}^{j} b_k = \frac{n^n}{n!} \sum_{k=1}^{j} (-1)^{k-1} \binom{n}{k-1} = (-1)^{j-1} \frac{n^n}{n!} \binom{n-1}{j-1}.$$

Thus we find that

$$\min_{1 \leqq j \leqq n} \left| \sum_{k=1}^{j} b_k \right| = \frac{n^n}{n!} \cdot \min_{1 \leqq j \leqq n} \binom{n-1}{j-1} = \frac{n^n}{n!}. \tag{5}$$

Now, by the second main theorem with $m = 0$ we must have

$$\max_{1 \leqq \nu \leqq n} |s_\nu| \geqq \left(\frac{1}{A}\right)^n \cdot \min_{1 \leqq j \leqq n} |b_1 + \cdots + b_j|,$$

and hence, using (4) and (5),

$$A^n \geqq \frac{n^n}{n!}.$$

Since

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{e^{n+o(1)}}{\sqrt{2\pi n}}$$

and n may be arbitrarily large, this last inequality implies that

$$A \geqq e,$$

completing the proof of our assertion.

(Received 15 July 1958)

Added in proof (20 November 1958). The double inequality (2) can now be replaced by

$$8e \geqq A \geqq 1{,}473;$$

the second inequality is, according to a written communication of Prof. TURÁN with the author, a recent result of Mr. E. MAKAI who proved this for $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 1$, while the first is seen without difficulty from the argument developed in [1].

We have

$$2e^{1+\frac{4}{e}} > 8e \sim 21{,}746,$$

since $e^{\frac{1}{e}} > 2^{\frac{1}{2}}$.

PROBLEMS AND RESULTS ON THE THEORY OF INTERPOLATION. I

By

P. ERDŐS (Budapest), corresponding member of the Academy

Let $\begin{array}{ccc} & x_1^{(1)} & \\ x_1^{(2)} & & x_2^{(2)} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \end{array}$ be a triangular matrix of real numbers in $(-1,+1)$, $-1 \leqq$ $\leqq x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)} \leqq 1$. It is well known that the unique polynomial of degree at most $n-1$, which assumes the values y_k at $x_k^{(n)} (1 \leqq k \leqq n)$, is given by (the upper index n will be omitted if there is no danger of confusion)

$$\sum_{k=1}^{n} y_k l_k(x), \quad l_k(x) = \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}, \quad \omega(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-x_i).$$

Clearly

$$l_k(x_k) = 1, \quad l_k(x_i) = 0 \quad \text{for} \quad 1 \leqq i \leqq n, \quad i \neq k.$$

Let $f(x)$ be a continuous function in $(-1,+1)$. Put

$$L_n(f(x)) = \sum_{k=1}^{n} y_k l_k(x),$$

i. e. $L_n(f(x))$ assumes the values $f(x_k)$ at x_k $(1 \leqq k \leqq n)$.

Let $f(x)$ be continuous in $(-1,+1)$. A well known theorem of HAHN[1] states that the sequence $L_n(f(x_0))$ converges to $f(x_0)$ if and only if

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n} |l_k(x_0)| < c$$

where c is independent of n.

FABER[2] first proved that for every point group there exists a function $f(x)$ continuous in $(-1,+1)$ for which $L_n(f(x))$ does not converge uniformly to $f(x)$ in $(-1,+1)$, FABER in fact proved that for every point group

$$(2) \qquad \overline{\lim_{n=\infty}} \max_{-1 \leqq x \leqq 1} \sum_{k=1}^{n} |l_k(x)| = \infty.$$

Actually FABER proved slightly more, he shoved that

$$(3) \qquad \max_{-1 \leqq x \leqq 1} \sum_{k=1}^{n} |l_k(x)| > c \log n.$$

[1] H. HAHN, Über das Interpolationsproblem, *Math. Zeitschrift*, **1** (1918), pp. 115—142.

[2] G. FABER, Über die interpolatorische Darstellung stetiger Funktionen, *Jahresb. der Deutschen Math. Ver.*, **23** (1914), pp. 190—210.

From (2) and (3) it does not yet follow that to every point group there exists a point x_0 and a continuous function $f(x)$ so that the sequence $L_n(f(x_0))$ does not converge to $f(x_0)$, or what is the same thing (by HAHN's theorem) that there exists an x_0 $(-1 \leqq x_0 \leqq 1)$ so that

$$(4) \qquad \overline{\lim_{n=\infty}} \sum_{k=1}^{n} |l_k(x)| = \infty.$$

S. BERNSTEIN[3] proved (4), and in fact he proved that for a certain x_0 and for infinitely many n

$$(5) \qquad \sum_{k=1}^{n} |l_k(x_0)| > \left(\frac{2}{\pi} + o(1)\right) \log n.$$

In the case of the Chebyshev abscissae

$$(6) \qquad \max_{-1 \leqq x \leqq 1} \sum_{k=1}^{n} |l_k(x)| < \frac{2}{\pi} \log n + O(1).$$

Thus in some sense (5) is best-possible. (5) holds in fact for the Chebyshev abscissae for every x_0 and infinitely many n.

In this paper we shall prove that for every point group (4) holds for almost all x. In fact, we shall prove the following stronger

THEOREM 1. *Let ε and A be any given numbers, and let $n > n_0 = n_0(\varepsilon, A)$. Further let $-1 \leqq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leqq 1$ be any n points. Then the measure of the set in x $(-\infty < x < \infty)$ for which*

$$(7) \qquad \sum_{k=1}^{n} |l_k(x)| \leqq A$$

holds, is less than ε.

Theorem 1 clearly implies that (4) holds for almost all x in $(-1, +1)$. It is well known that (4) does not have to hold for all x in $(-1, +1)$, in fact, it is easy to see that there exists a Cantor set S so that for every x in S

$$(8) \qquad \sum_{k=1}^{n} |l_k(x)| < c$$

where c does not depend on n or x. To see this it suffices to start with the roots of $T_n(x)$ and push two consecutive roots close together; we suppress the details which can easily be supplied by the reader. By slightly more complicated arguments one can show that the set S can have Hausdorff dimension 1.

[3] S. BERNSTEIN, Sur la limitation des valeurs etc., *Bull. Acad. Sci. de l'URSS*, (1931), No. 8, pp. 1025—1050.

By more complicated arguments we could prove the following stronger

THEOREM 2. *Let* $n > n_0(A, c, \beta, \varepsilon)$ *be sufficiently large,* $-1 \leqq x_1 < x_2 < \cdots$ $\cdots < x_n \leqq 1$. *Then the measure of the set in x for which*

$$\sum_{k=1}^{n} |l_k(x)| \leqq A$$

holds, is less than $c/\log n$ $(c = c(A))$. *Further if* $\eta = \eta(\varepsilon)$ *is sufficiently small, then the measure of the set in x for which*

$$\sum_{k=1}^{n} |l_k(x)| \leqq \eta \log n$$

holds, is less than ε.

The case of the Chebyshev abscissae shows that Theorem 2 is best-possible. We do not give the proof of Theorem 2 since it is similar but more complicated than that of Theorem 1.

In a subsequent paper I shall prove that for every point group there exists a point x_0 $(-1 \leqq x_0 \leqq 1)$ so that for infinitely many n

$$\sum_{k=1}^{n} |l_k(x_0)| > \frac{2}{\pi} \log n - c. \tag{9}$$

In view of (6) (9) is best-possible.

Here the following question could be asked: For which distribution of points $-1 \leqq x_1 < \cdots < x_n \leqq 1$ is

$$\max_{-1 \leqq x \leqq 1} \sum_{k=1}^{n} |l_k(x)|$$

a minimum? It has been conjectured that this point group $x_1, x_2, \ldots, x_n$ is uniquely determined by the fact that all the $n+1$ maxima of $\sum_{k=1}^{n} |l_k(x)|$ in (x_i, x_{i+1}) $(0 \leqq i \leqq n+1,\ x_0 = -1,\ x_{n+1} = +1)$ are equal. Denote the value of this minimum by U_n. We would further conjecture that for every other n points in $(-1, +1)$ $(-1 \leqq x_1' < x_2' < \cdots \leqq x_n' \leqq 1)$ at least one of the $n+1$ maxima of $\sum_{k=1}^{n} |l_k(x)|$ in (x_i', x_{i+1}') $(0 \leqq i \leqq n+1)$ is less than U_n. The only result I can prove in this direction is that at least one of these maxima is less than $n^{1/2}$.[4]

It might be further worth-while to formulate the following conjecture: Let $|z_i| = 1$ $(1 \leqq i \leqq n)$. Then

$$\max_{|z| \leqq 1} \sum_{k=1}^{n} |l_k(z)|$$

is a minimum if and only if the z_i's are the roots of $z^n = a, |a| = 1$.

[4] P. ERDŐS, Some remarks on polynomials, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53** (1947), pp. 1169—1176, Theorem 2 (p. 1171).

G. GRÜNWALD[5] and J. MARCINKIEWICZ[6] proved simultaneously and independently that there exists a continuous function $f(x)$ so that the sequence of Lagrange interpolatory polynomials $L_n(f(x))$ taken at the Chebyshev abscissae diverge for every x $(-1 \leqq x \leqq 1)$. In fact, they prove that for all x $(-1 \leqq x \leqq 1)$ $\overline{\lim_{n=\infty}} L_n(f(x)) = \infty$. In a subsequent paper I hope to prove the following result: Let $\begin{matrix} & x_1^{(1)} & \\ x_2^{(1)} & & x_2^{(2)} \\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot \end{matrix}$ be any point group. Then there exists a continuous function $f(x)$ so that for almost all x, $\overline{\lim_{n=\infty}} L_n(f(x)) = \infty$.

On the other hand, it is not true that there always exists a continuous $f(x)$ so that $L_n(f(x))$ diverges at all those x for which (4) holds. In fact, I can construct a point group so that for every continuous function $f(x)$ there are continuum many points x_0 for which (4) holds and nevertheless $L_n(f(x_0)) \to f(x_0)$ as n tends to infinity.

If (4) holds for every x_0 $(-1 \leqq x_0 \leqq 1)$, I can not decide whether there exists an $f(x)$ so that $L_n(f(x))$ diverges for every x $(-1 \leqq x \leqq 1)$.

One final remark. It is not difficult to construct a point group so that for every continuous function $f(x)$ and every x_0 there should exist a sequence n_k (depending on $f(x)$ and x_0) so that

$$\lim_{k=\infty} L_{n_k}(f(x_0)) \to f(x_0). \tag{10}$$

We can, in fact, construct a point group so that for every x_0

$$\underline{\lim} \sum_{k=1}^{n} |l_k(x_0)| = 1 \tag{11}$$

which by HAHN's theorem implies (10).

The proof of (11) is easy, we just outline it. Let $x_1, \ldots, x_i, x_{i+2}, \ldots, x_n$ be $n-1$ roots of $T_n(x)$ and $x_{i+1} - x_i = o\left(\frac{1}{n(\log n)^{1/2}}\right)$. Then a simple computation shows that for $x_i \leqq x \leqq x_{i+1}$

$$\sum_{k=1}^{n} |l_k(x)| = 1 + o(1).$$

Now $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{1/2}} = \infty$, thus it is easy to see that we can construct a point group whose n^{th} row is the above-modified Chebyshev point group and so

[5] G. GRÜNWALD, Über die Divergenzerscheinungen etc., *Annals of Math.*, **37** (1936), pp. 908—918.

[6] J. MARCINKIEWICZ, Sur la divergence des polynômes d'interpolation, *Acta Sci. Math. Szeged*, **8** (1937), pp. 131—135.

that every x_0 $(-1 \leqq x_0 \leqq 1)$ should be contained infinitely often in a „short" interval (x_i, x_{i+1}) and thus (11) follows.

Now we prove Theorem 1. We put $x_0 = -1, x_{n+1} = +1$. Henceforth $c_1, c_2, \dots$ will denote positive absolute constants independent of ε, A and n. The points x $(-\infty < x < \infty)$ which satisfy (7) we shall call bad points. Thus we have to prove that the measure of the bad points is less than ε. First we prove the following

LEMMA 1. *The measure of the bad points x which satisfy any of the conditions*

a) *are not in* $(-1, +1)$,

b) *for which* $\min\limits_{1 \leqq k \leqq n} |x - x_i| < \varepsilon/12n$,

c) *which are in intervals* (x_i, x_{i+1}) *satisfying* $x_{i+1} - x_i > c_1 A/\varepsilon n$,

is less than $\varepsilon/2$.

Let x_0 be a bad point not in $(-1, +1)$. By interpolating x^{n-1} on the points x_i $(1 \leqq i \leqq n)$ we obtain for all x

$$x^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} x_k^{n-1} l_k(x)$$

or

$$x_0^{n-1} < \sum_{k=1}^{n} |l_k(x_0)|. \tag{12}$$

Now if $|x_0| \geqq 1 + \dfrac{A}{n}$, then $x^{n-1} > A$, or we have from (12) that for $|x| \geqq 1 + A/n$

$$\sum_{k=1}^{n} |l_k(x)| > A,$$

or if x_0 is bad we have $|x_0| < 1 + A/n$. Thus the measure of the bad points satisfying a) is less than $2A/n < \varepsilon/6$ for $n > n_0$.

By similar arguments we can easily show that the measure of the bad points satisfying a) is less than c_2/n^2. In fact, it is easy to show that the measure of the points x outside $(-1, +1)$ for which

$$\max_{1 \leqq k \leqq n} |l_k(x)| < A,$$

is less than c_3/n^2.

Since the number of the points x_i is $n+2$, it is clear that the measure of the points in x satisfying b) is less than $\varepsilon/6$.

Now we have to deal with the bad points satisfying c). Let $-1 \leqq \xi \leqq 1$. It is well known[7] that there exists a polynomial $p_{n-1}(x)$ of degree at most

[7] See e. g. P. ERDŐS and P. TURÁN, On interpolation. II, *Annals of Math.*, **39** (1938), p. 712.

$n-1$ for which

(13) $$p_{n-1}(\xi)=1, \quad |p(x)| < \min\left(c_4, \frac{c_5}{n(x-\xi)}\right) \quad \text{for} \quad -1 \leqq x \leqq 1.$$

Assume now that

(14) $$\min_{1 \leqq k \leqq n} |\xi - x_k| > c_5 A/n.$$

Then we obtain from (13) and (14)

(15) $$|p_{n-1}(x_k)| < \frac{1}{A} \qquad (1 \leqq k \leqq n).$$

Thus from (15) and the identity $p_{n-1}(\xi) \equiv \sum_{k=1}^{n} p_{n-1}(x_k) l_k(\xi)$ we obtain

$$\sum_{k=1}^{n} |l_k(\xi)| > A,$$

or a point ξ can be bad only if

(16) $$\min_{1 \leqq k \leqq n} |\xi - x_k| \leqq c_5 A/n.$$

The number of intervals (x_i, x_{i+1}) satisfying $x_{i+1} - x_i > c_1 A/\varepsilon n$ is clearly less than $\varepsilon n/c_1 A$ and thus from (16) the measure of the bad points satisfying c) is less than

$$\frac{2c_5 A}{n} \cdot \frac{\varepsilon n}{c_1 A} = \frac{2c_5 \varepsilon}{c_1} < \frac{\varepsilon}{6},$$

if $c_1 > 12c_5$. Thus the proof of Lemma 1 is complete.

To complete the proof of our theorem we only have to prove that the measure of the bad points not satisfying any of the conditions a), b) and c) is less than $\varepsilon/2$. In other words, we have to prove that the measure of the points x (satisfying $-1 \leqq x \leqq 1$) which are in intervals (x_i, x_{i+1}) satisfying $\frac{\varepsilon}{6n} < x_{i+1} - x_i < \frac{c_1 A}{\varepsilon n}$ and for which

(17) $$x_i + \frac{\varepsilon}{12n} < x < x_{i+1} - \frac{\varepsilon}{12n}$$

and which satisfy (7), is less than $\varepsilon/2$.

If the above statement is false there clearly must exist at least $\varepsilon^2 n/2c_1 A$ intervals (x_i, x_{i+1}), $x_{i+1} - x_i < c_1 A/\varepsilon n$, which contain bad points satisfying (17). But then there must exist at least $\varepsilon^2 n/4c_1 A$ such intervals

(18) $$(x_{i_r}, x_{i_r+1}) \qquad \left(1 \leqq r \leqq \left[\frac{\varepsilon^2 n}{4c_1 A}\right]\right)$$

which do not have an endpoint in common and each of which contains bad points satisfying (17). Now we prove

LEMMA 2. *Assume without loss of generality that* $|\omega'(x_i)| \geqq |\omega'(x_{i+1})|$. *Then for any* x *satisfying* (17) *and* $x_{i+1}-x_i \leqq c_1 A/\varepsilon n$ *(i. e. not satisfying* c)*) we have*

$$|l_{i+1}(x)| > c_6\varepsilon^2/A.$$

It is known[8] (and easy to see) that for $x_i < x < x_{i+1}$

$$l_i(x)+l_{i+1}(x) > 1, \tag{19}$$

or by $|\omega'(x_i)| \geqq |\omega'(x_i)|$ we have for $x_i < x < x_{i+1}$

$$\left|\frac{\omega(x)}{\omega'(x_{i+1})(x-x_i)}\right| + \left|\frac{\omega(x)}{\omega'(x_{i+1})(x-x_{i+1})}\right| > 1. \tag{20}$$

Now since x satisfies (17) and (x_i, x_{i+1}) does not satisfy c) we have

$$|x-x_i| > \frac{12c_1A}{\varepsilon^2}|x-x_{i+1}|. \tag{21}$$

Thus from (20) and (21)

$$|l_{i+1}(x)|\left(1+\frac{12c_1A}{\varepsilon^2}\right) > 1$$

which proves the lemma.

LEMMA 3. *Let* $y_1, y_2, \ldots, y_t$ *be any* t $(t > t_0)$ *distinct numbers in* $(-1, +1)$ *not necessarily in increasing order. Then for at least one* u $(1 \leqq u \leqq t)$

$$\sum_{i=1}^{u-1}{}' \frac{1}{|y_u-y_i|} > \frac{t\log t}{8}.$$

If the lemma would be false we would have

$$\sum_{1\leqq i<j\leqq t} \frac{1}{y_i'-y_j'} < \frac{t^2\log t}{8} \tag{22}$$

where the y''s are ordered by size, i. e. $-1 \leqq y_1' < y_2' < \cdots < y_t' \leqq 1$. But it is easy to see that (22) is false. To see this observe that

$$\sum_{i=1}^{t-k}(y_{i+k}'-y_i') \leqq 2k,$$

and using the inequality between the arithmetic and harmonic mean, we obtain

$$\sum_{i=1}^{t-k}\frac{1}{y_{i+k}'-y_i'} \geqq (t-k)\frac{t-k}{2k} = \frac{(t-k)^2}{2k}$$

or

$$\sum_{1\leqq i<j\leqq t}\frac{1}{y_i'-y_j'} = \sum_{k=1}^{t-1}\sum_{i=1}^{t-k}\frac{1}{y_{i+k}'-y_i'} > \sum_{k=1}^{t-1}{}'\frac{(t-k)^2}{2k} > \frac{t^2\log t}{8}$$

for $t > t_0$ which proves Lemma 3.

[8] See P. ERDŐS and P. TURÁN, On interpolation. III, *Annals of Math.*, **41** (1940), Lemma IV, p. 529.

Consider now the intervals (18). By assumption each of them contains bad points satisfying (17). Define

$$y_{i_r}=x_{i_r} \quad \text{if} \quad |\omega'(x_{i_r})|\geqq|\omega'(x_{i_r+1})|, \quad \text{otherwise} \quad y_{i_r}=x_{i_r+1}.$$

Reorder the y_{i_r} as follows:

$$|\omega'(y_1)|\leqq|\omega'(y_2)|\leqq\cdots\leqq|\omega'(y_t)|, \quad t=\left[\frac{\varepsilon^2 n}{4c_1 A}\right]. \tag{23}$$

By Lemma 3 there is a y_u so that

$$\sum_{i=1}^{u}\frac{1}{|y_u-y_i|}>\frac{t\log t}{8}. \tag{24}$$

We have (say) $y_u=x_{i_r}$. Now we show that the interval

$$x_{i_r}+\frac{\varepsilon}{12n}<x<x_{i+1}-\frac{\varepsilon}{12n} \tag{25}$$

does not contain any bad points, and this contradiction will complete the proof of Theorem 1. To see this let x satisfy (25).

We have form (24) and (23) by a simple computation that for the x's satisfying (25) we have for $n>n_0(\varepsilon)$

$$\sum_{i=1}^{u-1}\frac{1}{|x-y_i|}>\frac{t\log t}{16}>\frac{n\log n}{20}. \tag{26}$$

Further clearly

$$\sum_{k=1}^{n}|l_k(x)|>\sum{}'\,|l_k(x)| \tag{27}$$

where the dash indicates that the summation is extended only over those x_k's which are equal to one of the y_i $(1\leqq i\leqq u)$. By (23) we have $(x_{i_r}=y_u)$

$$\sum|l_k'(x)|=\sum{}'\left|\frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}\right|\geqq\left|\frac{\omega(x)}{\omega'(y_u)(x-y_u)}\right|\sum_{i=1}^{u-1}\left|\frac{x-y_u}{x-y_i}\right|. \tag{28}$$

Now, by Lemma 2, (23) and (26) we have $\left(|x-y_u|>\frac{\varepsilon}{12n} \text{ by } (25)\right)$

$$\left|\frac{\omega(x)}{\omega'(y_u)(x-y_u)}\right|\sum_{i=1}^{u-1}\left|\frac{x-y_u}{x-y_i}\right|>\frac{c_6\varepsilon^2}{A}\cdot\frac{\varepsilon}{12n}\sum_{i=1}^{u-1}\frac{1}{x-y_i}>\frac{c_6\varepsilon^3}{12n}\,\frac{n\log n}{20}>A \tag{29}$$

which completes the proof of Theorem 1.

(Received 1 August 1958)

ON MIXING SEQUENCES OF RANDOM VARIABLES

By

A. RÉNYI (Budapest), member of the Academy, and P. RÉVÉSZ (Budapest)

Introduction

In a recent paper [1] the first named author proved the following

THEOREM 1. *Let* $[\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}]$ *be a probability space (i. e.* $\mathbf{P} = \mathbf{P}(A)$ *a probability measure defined for sets A belonging to the* σ*-algebra* $\mathcal{A}$ *of subsets of the set* Ω*). Let* C_n *be a sequence of sets such that* $C_0 = \Omega, C_n \in \mathcal{A}$ *and* $\mathbf{P}(C_n) > 0$ *for* $n = 1, 2, \ldots$. *If for* $k = 0, 1, 2, \ldots$ *the condition*[1]

(1) $$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(C_n | C_k) = \lambda \qquad (0 < \lambda < 1)$$

is fulfilled, then for any $B \in \mathcal{A}$ *such that* $\mathbf{P}(B) > 0$ *we have*

(2a) $$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(C_n | B) = \lambda.$$

This implies that if $\mathbf{Q}$ *is an arbitrary measure on* $\mathcal{A}$ *which is absolutely continuous with respect to* $\mathbf{P}$, *we have*

(2b) $$\lim_{n\to\infty} \mathbf{Q}(C_n) = \lambda.$$

We shall say that a sequence $\{\zeta_n\}$ of random variables defined on the probability space $[\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}]$ has the "mixing" property (or simply: is „mixing“) if

(3) $$\mathbf{P}(\zeta_n < x | B) \Longrightarrow F(x)$$

for every $B \in \mathcal{A}$ with $\mathbf{P}(B) > 0$, where $F(x)$ is a distribution function not depending on B. Here $\Longrightarrow$ denotes, as usual, the weak convergence of a sequence of distributions to a limiting distribution (i. e. that $\mathbf{P}(\zeta_n < x)$ tends for $n \to \infty$ to $F(x)$ for every x which is a continuity point of $F(x)$).

It has been shown in [1] that in case $\{\zeta_n\}$ has the mixing property, and $\mathbf{Q}$ is a measure on $\mathcal{A}$ which is absolutely continuous with respect to $\mathbf{P}$, then

(4) $$\mathbf{Q}(\zeta_n < x) \Longrightarrow F(x).$$

In [1] it has been proved by means of Theorem 1 that if $\xi_1, \xi_2, \ldots$ are independent random variables, A_n and B_n sequences of real numbers such

[1] $\mathbf{P}(A|B)$ denotes the conditional probability of A with respect to the condition B.

that $B_n \to +\infty$ for $n \to \infty$ and putting

$$\zeta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n - A_n}{B_n} \tag{5}$$

we have

$$\mathbf{P}(\zeta_n < x) \Longrightarrow F(x) \tag{6}$$

where $F(x)$ is a distribution function, then the sequence ζ_n is mixing, i. e. (3) holds.

This result has been proved previously only under some restrictions in [2] and [3].

As the random variables (5) form an (additive) Markov chain, it is natural to ask whether general Markov chains do possess also under suitable conditions the mixing property.

In § 1 it is shown that it is rather easy to find sufficient conditions for a sequence of random variables being mixing. The conditions in question are, especially, satisfied for certain Markov chains. This is shown in § 2 by giving some examples.

§ 1. Some conditions for a sequence of random variables being mixing

Let $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \ldots$ be a sequence of (real-valued) random variables and suppose that for any real x and for any possible value y of ζ_k we have for $n \to \infty$

$$\mathbf{P}(\zeta_n < x \mid \zeta_k = y) \Longrightarrow F(x) \tag{1. 1}$$

where $F(x)$ is a distribution function.[2]

Putting $\mathbf{P}_k(x) = \mathbf{P}(\zeta_k < x)$ we have for any real z

$$\mathbf{P}(\zeta_n < x \mid \zeta_k < z) = \frac{1}{\mathbf{P}_k(z)} \int_{-\infty}^{z} \mathbf{P}(\zeta_n < x \mid \zeta_k = y)\, d\mathbf{P}_k(y). \tag{1. 2}$$

Thus, by the theorem of LEBESGUE on the integration of bounded convergent sequences of functions it follows from (1. 2) by virtue of (1. 1) that

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(\zeta_n < x \mid \zeta_k < z) = F(x) \tag{1. 3}$$

for every point of continuity x of $F(x)$. Especially we have (for $z = +\infty$)

$$\mathbf{P}(\zeta_n < x) \Longrightarrow F(x). \tag{1. 4}$$

[2] It suffices to suppose that (1. 1) holds for $y \in B_k$ where $\mathbf{P}(\zeta_k \in B_k) = 1$.

Thus, applying Theorem 1 to the sets $C_0 = \Omega$, $C_n = \{\omega: \zeta_n(\omega) < x\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ we obtain that if $\mathbf{Q}$ is a probability measure on $\mathfrak{A}$ which is absolutely continuous with respect to $\mathbf{P}$, we have

$$\mathbf{Q}(\zeta_n < x) \Longrightarrow F(x). \tag{1.5}$$

Evidently, condition (1.3) is also necessary for the validity of (1.5). Thus we have obtained the following

THEOREM 2. *The sequence* $\{\zeta_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *of random variables defined on the probability space* $[\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}]$ *has the mixing property if and only if for every* $k = 0, 1, 2, \ldots$ *there exists a set* E_k *for which* $\mathbf{P}(\zeta_k \in E_k) = 1$ *and is such that for* $y \in E_k$ *we have for* $n \to \infty$

$$\mathbf{P}(\zeta_n < x \mid \zeta_k = y) \Longrightarrow F(x) \tag{1.6}$$

where $F(x)$ *is a distribution function not depending on* y.

Theorem 2 can be applied, especially, to verify the mixing property of Markov chains.

§ 2. Examples

EXAMPLE 1. Let $\{\zeta_n\}$ be a Markov chain. It follows from a well-known theorem of KOLMOGOROV [4] that condition (1.6) is satisfied (moreover, the convergence is uniform) if the following two conditions are fulfilled:

a) For any pair x, y of possible values of ζ_k and for any measurable set G we have

$$\mathbf{P}(\zeta_{k+1} \in G \mid \zeta_k = x) \geqq \lambda_k \mathbf{P}(\zeta_{k+1} \in G \mid \zeta_k = y) \tag{2.1}$$

for $k = 0, 1, 2, \ldots$ where the constants $\lambda_k \geqq 0$ are such that

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = +\infty. \tag{2.2}$$

b) $\mathbf{P}(\zeta_n < x) \Longrightarrow F(x)$ for $n \to \infty$.

EXAMPLE 2. Let $\{\zeta_n\}$ be a homogeneous Markov chain having a finite number of possible states. Suppose that each ζ_n can take on only the values $1, 2, \ldots, r$. Let us denote by p_{ij} the transition probabilities of the Markov chain $\{\zeta_n\}$, i. e. put

$$p_{ij} = \mathbf{P}(\zeta_{n+1} = j \mid \zeta_n = i) \tag{2.3}$$

and denote by π the matrix (p_{ij}). Suppose that there exists a positive integer s so that all elements of π^s are positive. Then, as well known, (1.6) is satisfied. Thus it follows from Theorem 2 that the Markov chain $\{\zeta_n\}$ is mixing.

EXAMPLE 3. Let the random variables ζ_n $(n=0, 1, 2, \dots)$ defined on the probability space $[\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}]$ form a homogeneous Markov chain. Let C_n and $D_n > 0$ be two sequences of real numbers such that for any fixed $k (k=1,2,\dots)$ we have

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_{n-k}}{D_n} = 1 \quad \text{and} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{C_n - C_{n-k}}{D_n} = 0, \tag{2. 4}$$

further

$$\mathbf{P}\left(\frac{\zeta_n - C_n}{D_n} < x \,\middle|\, \zeta_0 = y \right) \Longrightarrow F(x), \tag{2. 5}$$

where $F(x)$ is a distribution function which is independent of the value of y where y may take on any element of a set Y such that $\mathbf{P}(\zeta_0 \in Y) = 1$. Then we have

$$\mathbf{Q}\left(\frac{\zeta_n - C_n}{D_n} < x \right) \Longrightarrow F(x) \tag{2. 6}$$

for any probability measure $\mathbf{Q}$ on $\mathfrak{A}$ which is absolutely continuous with respect to $\mathbf{P}$.

As a matter of fact, owing to the supposition that the Markov chain is homogeneous and the supposition (2. 4), it follows from (2. 5) that if $n \to \infty$, then

$$\mathbf{P}\left(\frac{\zeta_n - C_n}{D_n} < x \,\middle|\, \zeta_k = y \right) \Longrightarrow F(x) \tag{2. 7}$$

for $k = 0, 1, 2, \dots$; thus our assertion follows from Theorem 2.

EXAMPLE 4. Let us consider the Engel's series of the real number t $(0 < t < 1)$

$$t = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1 q_2} + \cdots + \frac{1}{q_1 q_2 \dots q_n} + \cdots \tag{2. 8}$$

where $q_n = q_n(t) \geqq 2$ is an integer. It is known (see [5] and for another proof [6]) that $\frac{\log q_n - n}{\sqrt{n}}$ is in the limit for $n \to \infty$ normally distributed, that is

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\log q_n - n}{\sqrt{n}} < x \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du \tag{2. 9}$$

where $\mathbf{P}$ denotes the Lebesgue measure. It has been shown in [6] that the random variables $\log q_n(t)$ are forming a homogeneous Markov chain on the probability space $[\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}]$ where Ω is the interval $(0, 1)$, $\mathfrak{A}$ the set of measurable subsets of Ω and $\mathbf{P}(A)$ the Lebesgue measure of $A \in \mathfrak{A}$. It is easy to see from the proof given in [6] that (2. 9) remains valid also under the condition $q_1 = k$ where $k \geqq 2$ is an arbitrary integer. As for $C_n = n$,

$D_n = \sqrt{n}$ the conditions (2. 4) of Example 3 are satisfied, it follows from Theorem 2 that

$$\text{(2. 10)} \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbf{Q}\left(\frac{\log q_n - n}{\sqrt{n}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

if $\mathbf{Q}$ is any probability measure in the interval (0, 1) which is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure.

(Received 6 August 1958)

References

[1] A. Rényi, On mixing sequences of sets, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **9** (1958), pp. 215—228.

[2] А. Реньи, К теории предельных теорем для сумм независимых случайных величин, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **1** (1950), pp. 99—108.

[3] А. Н. Колмогоров, Теорема о сходимости условных математических ожиданий и некоторые ее применения, Comptes Rendus du Premier Congrès des Mathématiciens Hongrois (Budapest, 1952), pp. 367—376.

[4] A. Kolmogorov, Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Math. Annalen,* **104** (1931), pp. 415—458.

[5] P. Lévy, Remarques sur un théorème de M. Émile Borel, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris,* **225** (1947), pp. 918—919.

[6] P. Erdős, A. Rényi and P. Szüsz, On Engel's and Sylvester's series, *Annales Univ. Sci. Budapestiensis de Rolando Eötvös nominatae,* Sectio Math., **1** (1958), pp. 7—32.

MAXIMUM-MINIMUM SÄTZE ÜBER GRAPHEN

Von

T. GALLAI (Budapest)

(*Vorgelegt von* G. HAJÓS)

Einleitung

Im folgenden behandeln wir in vereinfachter Weise die Ergebnisse einer kürzlich in ungarischer Sprache erschienenen Arbeit ([9], [10]). Wir beweisen mehrere, dem Mengerschen „n-Kettensatz" ([14], S. 222) ähnliche „Maximum-Minimum" Sätze. EGERVÁRY verallgemeinerte (in matrizentheoretischer Formulierung) den auf paare Graphen bezüglichen Spezialfall des Mengerschen Satzes in solcher Weise, daß er die Kanten der Graphen mit Zahlen bewertete und statt des Maximums der Kantenanzahlen gewisser Kantenmengen das Maximum der Wertsummen der betrachteten Kantenmengen nahm ([3], S. 17, I). Den allgemeinen Mengerschen Satz kann man nicht in der gleichen Richtung ausdehnen. Es gelingt aber, einen der Egerváryschen Verallgemeinerung ähnlichen Satz dadurch zu finden, daß man statt ungerichteter Graphen gerichtete, statt Wege gerichtete Kreise nimmt. In gleicher Weise kann man aus dem „max-flow min-cut" Satz ([1], [5], [6], [7]), der den Mengerschen Satz als Spezialfall enthält, mehrere der Egerváryschen Verallgemeinerung entsprechende Sätze herleiten (Sätze (2. 1. 6), (3. 1. 4), (3. 2. 3), (3. 2. 6)). Wir werden jedem dieser Sätze je einen „dualen" Satz zur Seite stellen (Sätze (2. 1. 7), (3. 1. 5), (3. 2. 4), (3. 2. 7)). Durch Anwendung der erhaltenen Sätze auf besondere Graphen bzw. Bewertungen gelangen wir zu weiteren Maximum-Minimum Sätzen (Sätze (4. 2. 3), (4. 2. 5), (4. 2. 7), (4. 2. 9), (4. 3. 1), (4. 3. 3), (4. 3. 5), (4. 4. 12), (4. 4. 13)), die sich auf Wege bzw. auf Kanten beziehen, und die als Spezialfall den „max-flow min-cut" Satz, den erwähnten Egerváryschen Satz und einen von DILWORTH stammenden, auf halbgeordnete Mengen bezüglichen Satz ([2], S. 161, 1. 1) enthalten.

Es ist bemerkenswert, daß in den Sätzen die Ganzwertigkeit der Bewertung die Ganzwertigkeit der anderen auftretenden Zahlenwerte nach sich zieht. Wir werden unsere Sätze erst unter Berücksichtigung der Ganzwertigkeit ableiten und nur nachträglich zeigen, daß sie auch mit nicht ganzzahligen Bewertungen in Kraft bleiben (Abschnitt 2. 5).

Man kann unsere Sätze auch auf unendliche Graphen ausdehnen. Das zeigen wir in Bezug auf Satz (2. 1. 6) (Abschnitt 2. 6).

Als Anwendung beweisen wir zwei Sätze bezüglich Faktoren (Sätze (5. 1. 2), (5. 2. 2)), und wir leiten aus diesen einen Satz von ORE ([15], S. 405, Theorem 2. 3. 2), sowie einen Satz von TUTTE ([16], S. 930) ab.

Unser Beweisverfahren stammt aus der in [8] angewendeten Methode. Man kann dieses Verfahren sowohl auf die Sätze (2. 1. 6), (2. 1. 7), als auch auf die Sätze (3. 2. 6), (3. 2. 7) anwenden, doch sind die Beweise der erstgenannten Sätze viel einfacher (siehe [9] und [10]). Glücklicherweise lassen sich jedoch mit einem durch FORD und FULKERSON ersonnenen Verfahren ([6], S. 212) aus (2. 1. 6) und (2. 1. 7) die Sätze (3. 2. 6) und (3. 2. 7) leicht herleiten (Abschnitt 3. 2).

Zuletzt zeigen wir, daß die Sätze (2. 1. 6) und (2. 1. 7) auch mit Hilfe des Dualitätssatzes der Theorie der linearen Programmierung (s. [11], S. 58—65) ableitbar sind (§ 6).

§ 1

1. 1. Grundbegriffe

Betrachten wir zwei nichtleere Mengen Φ und Ψ. Es sei Φ die Menge der *Knotenpunkte* — im folgenden einfach nur *Punkte* — Ψ die Menge der *gerichteten Kanten*. Wir bezeichnen einen beliebigen Punkt mit X, eine beliebige Kante mit x. Auch die mit Indizes versehenen Buchstaben X und x sollen Punkte bzw. Kanten bedeuten. Der *gerichtete Graph* Γ ist dann gegeben, wenn es vorgeschrieben ist, welche Punkte und Kanten zueinander *inzident* sind. Wir geben die Inzidenzen in folgender Form an: Man ordnet zu jedem Paar der Elemente x und X eine Zahl (x, X) mit folgenden Eigenschaften zu:

(1) es gebe zu jedem x ein X' und ein X'' mit

$$(x, X') = -\frac{1}{2}, \quad (x, X'') = \frac{1}{2}, \quad (x, X) = 0, \quad \text{falls} \quad X \neq X', X'';$$

(2) es gebe zu jedem X ein x mit $(x, X) \neq 0$.

Die in (1) auftretenden Punkte X' und X'' heißen die *Randpunkte* der Kante x, X' ist der *Anfangspunkt*, X'' der *Endpunkt*. Wir werden die Behauptung, daß X' der Anfangspunkt, X'' der Endpunkt der Kante x ist, kurz mit der Gleichung $x = x(X' X'')$ ausdrücken. Auch die folgenden Ausdrucksweisen werden wir benützen: die Kante *läuft* von ihrem Anfangspunkt *aus, läuft* in ihren Endpunkt *ein, ist* zu jedem ihrer Randpunkte *inzident*.

Die Bestimmung eines *ungerichteten* Graphen unterscheidet sich von der vorausgehenden Definition nur darin, daß die Funktion (x, X), welche die Inzidenzen angibt, für eine jede Kante und für die beiden zu der Kante gehörigen Randpunkte den Wert 1/2 annimmt.

Im folgenden verstehen wir — wenn nicht das Gegenteil bemerkt wird — unter einem Graphen immer einen gerichteten Graphen.

Sind die Mengen Φ und Ψ endlich, so heißt der Graph *endlich*.

1. 2. Ketten

(1. 2. 1) Es sei $f(x)$ eine auf der Menge Ψ definierte ganzwertige Funktion. Wir nennen die lineare Form $\sum_{x \in \Psi} f(x)x$, sowie die Funktion $f(x)$ selbst (diese Zweideutigkeit führt zu keinem Mißverständnis) eine *Kette* und bezeichnen sie mit f. Der Wert $f(x)$ heißt die *Multiplizität* der Kante x in f. Ist die Anzahl der Kanten, die in f eine von Null verschiedene Multiplizität haben, endlich, so heißt die Kette *endlich*. In dieser Arbeit treten nur endliche Ketten auf, und deshalb wird das Wort „endlich" meistens weggelassen.

Sind die in f vorkommenden, von Null verschiedenen Multiplizitäten sämtlich positiv, so nennen wir die Kette *positiv*. Die Positivität der Kette f drücken wir mit der Ungleichung $f \geqq 0$ aus. Im allgemeinen fassen wir eine sich auf Funktionen beziehende Ungleichung bzw. Gleichung, in der das Argument nicht explizit vorkommt, derart auf, daß sie für jeden Argumentwert besteht. Dementsprechend bedeutet $f=0$, daß jede Kante in f die Multiplizität Null besitzt. $f \neq 0$ soll die Negation von $f=0$ bedeuten.

(1. 2. 2) Sind $f_1, \ldots, f_n$ Ketten, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ganze Zahlen, so ist auch $f = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n$ eine Kette. Sind die Ketten $f_1, \ldots, f_n$, sowie die ganzen Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ positiv, so ist auch f positiv.

$f' \subset f$ soll bedeuten, daß die Ketten f' und f den Ungleichungen $f'f \geqq 0$ und $|f'| \leqq |f|$ gleichzeitig genügen.

Man kann die folgenden Behauptungen leicht einsehen:

Ist $f' \subset f$, so ist auch $f - f' \subset f$.

Aus $f \geqq 0$ und $f' \subset f$ folgt $f' \geqq 0$.

Sind $f_1, \ldots, f_n$ positive Ketten, und ist $f = f_1 + \cdots + f_n$, so ist $f_i \subset f$ $(i = 1, \ldots, n)$.

(1. 2. 3) Besitzt die Kette f die Eigenschaft, daß mit Ausnahme einer Kante x' jede Kante in f die Multiplizität Null besitzt und $|f(x')| = 1$ ist, so nennen wir die Kette f eine *Kante*. (Wir werden solche Kanten gewöhnlich mit e bezeichnen.) Um die ursprünglichen Kanten von den jetzt definierten zu unterscheiden, werden wir die ersteren *Grundkanten* nennen. Kann jedoch kein Mißverständnis vorkommen, so werden wir statt Grundkante einfach Kante sagen.

Ist e eine Kante und ist $|e(x')| = 1$, so heißt x' die *Grundkante von e.* Im Falle $e(x') = 1$ ist $e = x'$. e ist jetzt eine *positive* Kante und wir sagen, daß der Anfangs- bzw. der Endpunkt der Kante e mit dem Anfangs- bzw. dem Endpunkt der Grundkante x' zusammenfällt. Falls $e(x') = -1$ ist, gilt $e = -x'$. Wir nennen jetzt e eine *negative* Kante, und wir verstehen unter dem Anfangs- bzw. Endpunkt der Kante e den Endpunkt bzw. Anfangspunkt der Grundkante x'. (Wie ersichtlich, kann man die positiven Kanten mit den Grundkanten identifizieren.) Wir werden die Tatsache, daß X' der Anfangspunkt, X'' der Endpunkt der Kante e ist, durch die Gleichung $e = e(X'X'')$ ausdrücken.

(1.2.4) Ist $f(x) \neq 0$, so heißt x eine *Grundkante der Kette f*. Ist $fe \geqq 0$ und $fe \neq 0$, so sagen wir, daß *e eine Kante von f ist*, oder daß *e auf f liegt*, oder daß *f e enthält*. Da wir nur endliche Ketten betrachten, hat jede Kette nur endlich viele Grundkanten und Kanten.

Ist e eine Kante von f und x' die Grundkante von e, so nennen wir den Wert $|f(x')|$ *die Multiplizität von e in f*.

Es sei die Folge $e_1, \ldots, e_n$ aus Kanten der Kette f gebildet. Kommt eine jede Kante von f in der Folge ebensooft vor, wie die Multiplizität der Kante in f ist, so gilt die Gleichung $f = e_1 + \cdots + e_n$, und wir sagen, daß *die Anzahl der Kanten von f* gleich n ist. Wir werden diese Anzahl der Kanten von f mit $\nu(f)$ bezeichnen. Wie ersichtlich, ist $\nu(f) = \sum_x |f(x)|$, wo das Zeichen $\sum_x$ die Summation nach allen Grundkanten x bedeutet.

In ähnlicher Auffassung wollen wir von der Anzahl derjenigen Kanten von f sprechen, die zu einem Punkte X inzident sind, von X auslaufen bzw. in X einlaufen. Wir bezeichnen diese Anzahlen, in der gleichen Reihenfolge, mit $\nu_X(f)$, $\nu'_X(f)$, $\nu''_X(f)$. Es gelten die Gleichungen

$$\nu_X(f) = 2\sum_x |f(x)|\,|(x, X)|, \quad \nu'_X(f) = -2\sum_x{}' f(x)(x, X),$$
$$\nu''_X(f) = 2\sum_x{}'' f(x)(x, X);$$

hierbei bedeuten die Zeichen $\sum_x{}'$ bzw. $\sum_x{}''$ die Summation nach denjenigen Grundkanten, welche die Ungleichungen $f(x)(x, X) < 0$ bzw. $f(x)(x, X) > 0$ befriedigen.

Ist $\nu_X(f) > 0$, so sagen wir, daß *X ein Punkt von f ist*, oder daß *X auf f liegt*, oder daß *f X enthält*. Wegen der Endlichkeit der vorkommenden Ketten enthält jede Kette nur endlich viele Punkte.

(1.2.5) Wir führen das Zeichen (f, X) ein:

$$(f, X) = \sum_x f(x)(x, X) = \frac{1}{2}(\nu''_X(f) - \nu'_X(f)).$$

Ist $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$, so gilt $(f, X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (f_i, X)$.

Besitzt die Kette f die Eigenschaft, daß für jeden beliebigen Punkt X die Anzahl der von X auslaufenden Kanten von f gleich der Anzahl der in X einlaufenden Kanten von f ist, d. h. wenn für jedes X $(f, X) = 0$ ist, so nennen wir die Kette f *geschlossen*, oder wir sagen, daß f ein *Zyklus* ist. Wir werden die Zyklen gewöhnlich mit dem Buchstaben z bezeichnen.

Sind $z_1, \ldots, z_n$ Zyklen, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ganze Zahlen, so ist auch $z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i$ ein Zyklus.

(1. 2. 6) Es sei

$$(*) \qquad X_0 e_1 X_1 \ldots X_{n-1} e_n X_n$$

eine Folge von Punkten und Kanten, welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

$$e_i = e_i(X_{i-1} X_i) \quad (i = 1, \ldots, n), \quad X_i \neq X_j \quad \text{wenn} \quad i \neq j \quad (i, j = 0, 1, \ldots, n).$$

Dann heißt die Kette $f = e_1 + \cdots + e_n$ ein *Weg*, genauer ein $X_0 X_n$-*Weg*, und wir nennen die Folge $(*)$ die zum Wege f gehörige Folge. X_0 und X_n sind die *Randpunkte*, X_0 der *Anfangspunkt*, X_n der *Endpunkt* des Weges. Die Punkte $X_1, \ldots, X_{n-1}$ nennen wir — wenn solche Punkte vorhanden sind — die *inneren* Punkte.

Es ist vorteilhaft, auch die Kette $f = 0$ als einen XX-*Weg* zu betrachten, wo X jeden beliebigen Punkt bedeuten kann.

Die aus den Elementen der Folge $(*)$ gebildete Kette $f' = \sum_{i=j}^{k} e_i$ $(1 \leqq j \leqq k \leqq n)$ ist ein $X_{j-1} X_k$-Weg. Es gilt $f' \subset f$, und wir bezeichnen f' als den $X_{j-1} X_k$-*Teil* von f. Den Weg $f' = 0$ werden wir als den $X_i X_i$-Teil von f betrachten $(i = 0, 1, \ldots, n)$.

Ist in der Folge $X_0 e_1 X_1 \ldots X_{n-1} e_n X_n$ $X_0 = X_n$, sind jedoch $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ alle voneinander verschieden und gilt $e_i = e_i(X_{i-1} X_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$, so heißt die Kette $f = e_1 + \cdots + e_n$ ein *Kreis*. Wir werden die Kreise gewöhnlich mit dem Buchstaben k bezeichnen. Wir betrachten auch die Kette $f = 0$ als einen Kreis.

Ist f ein Weg oder ein Kreis, so gilt $|f| \leqq 1$.

(1. 2. 7) SATZ. *Man kann jeden Zyklus z in der Form $z = \sum_{i=1}^{n} k_i$ darstellen, wobei k_i einen Kreis mit $k_i \subset z$ bedeutet $(i = 1, \ldots, n)$.*

BEWEIS. Ist $z = 0$, so kann man $n = 1, k_1 = 0$ setzen. Es sei $z \neq 0$, und es sei $e_1 = e_1(X_0 X_1)$ eine beliebige Kante von z. Wegen der Geschlossenheit der Kette z existiert eine zu z gehörige Kante $e_2 = e_2(X_1 X_2)$. Aus dem gleichen Grunde gibt es auch eine zu z gehörige Kante $e_3 = e_3(X_2 X_3)$ usw. Da jedoch z nur endlich viele Punkte enthält, müssen in der Folge $X_0, X_1, X_2, \ldots$ gleiche Punkte vorkommen. Bezeichnen wir mit m die kleinste

Nummer, für die $X_m = X_{l-1}$ mit $l < m$ gilt; so ist $k_1 = \sum_{i=l}^{m} e_i$ ein Kreis, $k_1 \neq 0$ und $k_1 \subset z$. Ist $k_1 = z$, so ist der Beweis beendet. Ist $k_1 \neq z$, so ist der Zyklus $z - k_1 \neq 0$, und die Zahl der Kanten von $z - k_1$ ist kleiner als diejenige von z. Wir können unser Verfahren auf $z - k_1$ wiederholen. So erhalten wir einen Kreis k_2 mit $k_2 \subset z - k_1$ und $k_2 \neq 0$ usw. Da z nur endlich viele Kanten enthält, kommen wir nach einer endlichen Anzahl von Schritten zum Ende. Unsere Behauptung ist damit bewiesen.

Wir bemerken, daß die in (1. 2. 7) angegebene Darstellung auf mehrere Weise realisierbar ist, und man kann im Falle $z \neq 0$ auch die Forderung $k_i \neq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ erfüllen.

(1. 2. 8) *Ist $e = e(X'X'')$ eine Kante eines Zyklus z, so gibt es einen $X''X'$-Weg f mit $f \subset z$.*

Beweis. Nach (1. 2. 7) ist $z = \sum_{i=1}^{n} k_i$, wo k_i ein Kreis mit $k_i \subset z$ $(i = 1, \ldots, n)$ ist. e muß in einem der Kreise k_i, zum Beispiel in k_1, enthalten sein. Dann ist jedoch $f = k_1 - e$ ein gesuchter Weg.

(1. 2. 9) *Ist f_i ein $X_{i-1}X_i$-Weg $(i = 1, \ldots, n)$, so gibt es einen X_0X_n-Weg f mit $f \subset f_1 + \cdots + f_n$.*

Beweis. Ist $X_0 = X_n$, so kann man $f = 0$ setzen. Es sei $X_0 \neq X_n$. Ergänzen wir dann den Graphen Γ mit einer neuen Grundkante $y = y(X_nX_0)$. In dem so entstandenen Graphen ist $z = f_1 + \cdots + f_n + y$ ein Zyklus, der die Kante y enthält. Nach (1. 2. 8) gibt es also einen X_0X_n-Weg f mit $f \subset z$. y kann aber nicht zu f gehören, und so gilt auch $f \subset f_1 + \cdots + f_n$.

(1. 2. 10) Aus (1. 2. 2), (1. 2. 7) und (1. 2. 9) ergeben sich die nachstehenden Sätze:

Jede Kante einer positiven Kette ist positiv.

Man kann jeden positiven Zyklus als Summe von positiven Kreisen darstellen.

Ist f_i ein positiver $X_{i-1}X_i$-Weg $(i = 1, \ldots, n)$, so gibt es einen positiven X_0X_n-Weg.

§ 2

2. 1. Die Bewertung der Kanten. Die Hauptsätze

(2. 1. 1) Es seien f und g *positive* Ketten. Wir wollen mit dem Wert

$$|f, g| = \sum_x f(x)g(x)$$

den „Inzidenzgrad" der Ketten f und g ausdrücken. Sind $x_1, \ldots, x_n$ die Grundkanten des positiven Kreises k, so ist $|f, k| = f(x_1) + \cdots + f(x_n)$, d. h.

$|f, k|$ gibt die mit Multiplizitäten gerechnete Zahl der auf k liegenden Kanten von f an.

Ist $g = \sum_{i=1}^{n} g_i$, $g_i \geqq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, so gilt $|f, g| = \sum_{i=1}^{n} |f, g_i|$.

(2. 1. 2) Es seien $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei — in diesem Paragraphen festgehaltene — auf der Menge Ψ definierte *ganzwertige* Funktionen. Wir nennen die Werte $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ den *φ-Wert* bzw. den *ψ-Wert der Kante x*.

Ist f eine Kette, so soll

$$\varphi[f] = \sum_x \varphi(x) f(x) \quad \text{bzw.} \quad \psi[f] = \sum_x \psi(x) f(x)$$

der *φ-Wert* bzw. der *ψ-Wert von f* heißen. Nach unseren Annahmen sind sämtliche φ- und ψ-Werte ganzzahlig.

Ist $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$, so ist $\psi[f] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \psi[f_i]$.

Wir nennen einen *positiven* Zyklus z *kanteaufnehmbar* bzw. *kantefüllend*, wenn $z \leqq \varphi$ bzw. $z \geqq \varphi$ gilt.

Die *positive* Kette f heißt *kreisaufnehmbar* bzw. *kreisfüllend*, wenn für jeden *positiven* Kreis k $|f, k| \leqq \psi[k]$ bzw. $|f, k| \geqq \psi[k]$ besteht.

(2. 1. 3) *Ist $f \geqq 0$ und ist f kreisaufnehmbar bzw. kreisfüllend, so gilt für jeden positiven Zyklus z $|f, z| \leqq \psi[z]$ bzw. $|f, z| \geqq \psi[z]$.*

Beweis. Ist z ein positiver Zyklus, so ist nach (1. 2. 10) $z = \sum_{i=1}^{n} k_i$, wo die k_i positive Kreise bezeichnen. Ist nun f kreisaufnehmbar, so gilt

$$|f, z| = \sum_{i=1}^{n} |f, k_i| \leqq \sum_{i=1}^{n} \psi[k_i] = \psi[z].$$

Ähnlich sieht man die auf kreisfüllende Ketten bezügliche Behauptung ein.

Wir bezeichnen die Menge der kanteaufnehmbaren bzw. kantefüllenden *positiven* Zyklen mit Z_a bzw. Z_f, die Menge der kreisaufnehmbaren bzw. kreisfüllenden positiven Ketten mit F_a bzw. F_f.

(2. 1. 4) *Ist $z \in Z_a$ und $f \in F_f$, so gilt $\psi[z] \leqq \varphi[f]$.*

Beweis. Nach (2. 1. 3) ist

$$\psi[z] \leqq |f, z| = \sum_x f(x) z(x) \leqq \sum_x f(x) \varphi(x) = \varphi[f].$$

Ähnlich kann man die folgende Behauptung beweisen:

(2. 1. 5) *Ist $z \in Z_f$ und $f \in F_a$, so gilt $\psi[z] \geqq \varphi[f]$.*

Aus (2. 1. 4) und (2. 1. 5) bekommt man die folgenden Ungleichungen:

$$\max_{z \in Z_a} \psi[z] \leqq \min_{f \in F_f} \varphi[f], \quad \min_{z \in Z_f} \psi[z] \geqq \max_{f \in F_a} \varphi[f],$$

vorausgesetzt, daß die vorkommenden Extremwerte existieren.

In den Abschnitten 2. 2, 2. 3 und 2. 4 beweisen wir die folgenden zwei Hauptsätze:

(2. 1. 6) SATZ. *Ist Γ endlich und ist $\varphi \geqq 0$, so existieren die Werte* $\max\limits_{z \in Z_a} \psi[z]$ *und* $\min\limits_{f \in F_f} \varphi[f]$, *und diese Werte sind einander gleich.*

(2. 1. 7) SATZ. *Ist Γ endlich, und ist für jeden positiven Kreis k $\psi[k] \geqq 0$, liegt ferner jede Kante x, für welche $\varphi(x) > 0$ ist, auf einem positiven Kreis, so existieren die Werte* $\min\limits_{z \in Z_f} \psi[z]$ *und* $\max\limits_{f \in F_a} \varphi[f]$, *und diese Werte sind einander gleich.*

2. 2. Zwei Hilfssätze

(2. 2. 1) HILFSSATZ. *Ist Γ endlich, und ist für jeden positiven Kreis k $\psi[k] \leqq 0$, so existiert eine auf Φ definierte ganzwertige Funktion $s(X)$, für die*

$$\psi(x) \leqq s(X'') - s(X')$$

für jede beliebige Grundkante $x = x(X'X'')$ besteht.

BEWEIS. Es sei X ein beliebiger Punkt des Graphen Γ, und bezeichnen wir mit $H(X)$ die Menge der positiven X_0X-Wege, wobei X_0 sämtliche Punkte des Graphen durchläuft. Da Γ endlich und der XX-Weg $f = 0$ ein Element von $H(X)$ ist, ist $H(X)$ endlich und nicht leer. Es existiert also der Wert

$$s(X) = \max_{f \in H(X)} \psi[f].$$

Wir zeigen, daß $s(X)$ den gewünschten Forderungen entspricht. Erstens ist $s(X)$ offensichtlich eine ganze Zahl. Es sei nun weiter $x = x(X'X'')$ eine beliebige Kante und f' ein positiver X_0X'-Weg, für den $\psi[f'] = s(X')$ gilt.

(1) Enthält f' den Punkt X'' nicht, so ist $f'' = f' + x$ ein positiver X_0X''-Weg, und es besteht

$$s(X') + \psi(x) = \psi[f'] + \psi(x) = \psi[f''] \leqq s(X'').$$

(2) Enthält f' den Punkt X'', so teilt X'' den Weg f' in die Teile f_1' und f_2', wo f_1' ein positiver X_0X''-Weg, f_2' ein positiver $X''X'$-Weg ist. Es gilt $\psi[f_1'] \leqq s(X'')$, und da $k = f_2' + x$ ein positiver Kreis ist, besteht auch $\psi[f_2'] + \psi(x) = \psi[k] \leqq 0$. Aus diesen Ungleichungen folgt

$$s(X') + \psi(x) = \psi[f_1'] + \psi[f_2'] + \psi(x) \leqq s(X'').$$

Aus (2. 2. 1) kann man den folgenden Satz leicht ableiten:

(2. 2. 2) HILFSSATZ. *Ist Γ endlich und ist für jeden positiven Kreis k $\psi[k] \geqq 0$, so existiert eine auf Φ definierte ganzwertige Funktion $s(X)$, für die*

$$\psi(x) \geqq s(X'') - s(X')$$

für jede beliebige Grundkante $x = x(X'X'')$ besteht.

2.3. Beweis des Satzes (2.1.6)

(2.3.1) Zuerst beweisen wir, daß der allgemeine Fall auf den Fall $\varphi > 0$ zurückführbar ist. Wir nennen eine jede Kante, deren φ-Wert gleich Null ist, eine *0-Kante*. Wir zeigen, daß die Weglassung der 0-Kanten weder die Existenz noch die Größe der im Satze auftretenden Extremwerte beeinflußt.

Was den Maximalwert anbelangt, folgt unsere Behauptung aus der Tatsache, daß die Zyklen von Z_a keine 0-Kanten enthalten, und deshalb die Weglassung der 0-Kanten die Elemente von Z_a nicht berührt.

Bei der Untersuchung des Minimalwertes ziehen wir in Betracht, daß die positiven Kreise des durch die Weglassung entstehenden Graphen mit denjenigen positiven Kreisen des ursprünglichen Graphen übereinstimmen, die keine 0-Kanten enthalten. Es ist ferner klar, daß die zu den 0-Kanten gehörigen Multiplizitäten (d. h. die $f(x)$ Werte) einer Kette f den Wert $\varphi[f]$ nicht beeinflussen. Nun folgt aus den obigen: Ist f im ursprünglichen Graphen kreisfüllend, so bleibt diese Eigenschaft auch nach der Weglassung in Kraft, und auch $\varphi[f]$ bleibt unverändert. Ist hingegen f im neuen Graphen kreisfüllend, so kann man wegen der Endlichkeit des Graphen die 0-Kanten mit so großen f Werten versehen, daß f auch im ursprünglichen Graphen kreisfüllend wird; dabei bleibt $\varphi[f]$ unverändert.

Aus den vorgeführten Betrachtungen folgt die zu beweisende Behauptung.

(2.3.2) Wegen der Annahme $\varphi \geqq 0$ ist der Zyklus $z=0$ ein Element von Z_a. Aus der Endlichkeit von Γ und der Ganzwertigkeit der Ketten folgt die Endlichkeit von Z_a. Es existiert daher der Wert $\max\limits_{z \in Z_a} \psi[z]$.

Es sei $\tilde{z}$ ein — im Abschnitt 2.3 festgehaltenes — Element von Z_a, für welches $\psi[\tilde{z}] = \max\limits_{z \in Z_a} \psi[z]$ gilt.

Zum Beweis des Satzes (2.1.6) genügt es wegen (2.1.4) zu zeigen, daß eine solche positive, kreisfüllende Kette f existiert, für welche $\varphi[f] = \psi[\tilde{z}]$ besteht. Die Existenz einer solchen Kette beweisen wir in mehreren Schritten. Wir setzen im folgenden voraus, daß $\varphi > 0$ ist.

(2.3.3) *Es existiert eine auf Φ definierte ganzwertige Funktion $s(X)$, welche die folgende Eigenschaft besitzt: Für eine jede Kante $x = x(X'X'')$ gilt*

(1) $$\psi(x) \leqq s(X'') - s(X'), \quad \textit{falls} \quad 0 = \tilde{z}(x) < \varphi(x),$$

(2) $$\psi(x) = s(X'') - s(X'), \quad \textit{falls} \quad 0 < \tilde{z}(x) < \varphi(x),$$

(3) $$\psi(x) \geqq s(X'') - s(X'), \quad \textit{falls} \quad 0 < \tilde{z}(x) = \varphi(x)$$

ist.

Beweis. Wir konstruieren aus Γ einen neuen Graphen Γ': Die Punkte von Γ' seien identisch mit den Punkten von Γ. Ist $x = x(X'X'')$ eine Grundkante von Γ, und ist

(1′) $\tilde{z}(x) = 0$, so sei x mit unverändertem ψ-Wert auch eine Kante von Γ';

(2′) $0 < \tilde{z}(x) < \varphi(x)$, so sei x mit unverändertem ψ-Wert auch eine Kante von Γ', außerdem nehmen wir jedoch noch eine neue Grundkante $\bar{x} = \bar{x}(X''X')$ mit $\psi(\bar{x}) = -\psi(x)$ auf;

(3′) $0 < \tilde{z}(x) = \varphi(x)$, so lassen wir die Kante x weg und wir nehmen die neue Kante $\bar{x} = \bar{x}(X''X')$ mit $\psi(\bar{x}) = -\psi(x)$ auf.

Wir werden die in den Fällen (2′) und (3′) auftretenden Kanten x und $\bar{x}$ als zueinander gehörige Kanten bezeichnen.

Nun zeigen wir, daß für jeden positiven Kreis k' von Γ' die Ungleichung $\psi[k'] \leqq 0$ gilt.

Unsere Behauptung ist trivial für $k' = 0$ und für diejenigen Kreise, die aus zwei zusammengehörigen Kanten x und $\bar{x}$ bestehen. Ist k' von diesen verschieden und enthält es eine neue Kante $\bar{x}$, so kann es die zu $\bar{x}$ gehörige alte Kante x nicht enthalten. Ersetzen wir in k' eine jede solche Kante $\bar{x}$ durch die Kante $-x$, wo immer x und $\bar{x}$ zusammengehörige Kanten bezeichnen, so bekommen wir einen eventuell nicht positiven Kreis k_1 des Graphen Γ. Es gilt $\psi[k_1] = \psi[k']$. Enthält k' keine neue Kante, so sei $k_1 = k'$. Die Kette $z_1 = \tilde{z} + k_1$ ist ein Zyklus von Γ. Es gilt $z_1 \geqq 0$. Es ist nämlich $\tilde{z}$ ganzwertig und $\tilde{z} \geqq 0$. Ferner ist $|k_1| \leqq 1$ und $k_1(x) < 0$ kann nur für solche Kanten x bestehen, zu welchen wir neue Kanten zugeordnet haben, also für welche $\tilde{z}(x) > 0$ gilt. Es besteht weiter $z_1 \leqq \varphi$, da φ und $\tilde{z}$ ganzwertig sind, $|k_1| \leqq 1$ ist und $k_1(x) > 0$ nur für solche Kanten x bestehen kann, die auch in k' enthalten sind, was nur im Falle $\tilde{z}(x) < \varphi(x)$ möglich ist. Unsere Behauptungen bedeuten aber, daß $z_1 \in Z_a$ ist. Demzufolge gilt $\psi[\tilde{z}] + \psi[k_1] = \psi[z_1] \leqq \psi[\tilde{z}]$, woraus $\psi[k'] = \psi[k_1] \leqq 0$ folgt.

Man kann nun auf Γ' den Hilfssatz (2. 2. 1) anwenden. Nach diesem existiert eine ganzwertige Funktion $s(X)$ mit der folgenden Eigenschaft: Ist $x = x(X'X'')$ eine zu Γ' gehörige alte Kante, so besteht $\psi(x) \leqq s(X'') - s(X')$. Ist $\bar{x} = \bar{x}(X''X')$ eine neue Kante, so besteht $\psi(\bar{x}) \leqq s(X') - s(X'')$, d. h. für die zu $\bar{x}$ gehörige alte Kante $x = x(X'X'')$ gilt $\psi(x) \geqq s(X'') - s(X')$. Aus der Definition von Γ' folgt jetzt, daß $s(X)$ den in (2. 3. 3) gestellten Forderungen entspricht.

(2. 3. 4) Es sei $x = x(X'X'')$ eine beliebige Kante von Γ, und es sei

$$f(x) = \max\,[0, \psi(x) - (s(X'') - s(X'))],$$

wo $s(X)$ eine den in (2. 3. 3) gestellten Forderungen entsprechende Funktion bezeichnet. Wir zeigen, daß $f \in F_f$ und $\varphi[f] = \psi[\tilde{z}]$ gilt.

$f(x)$ kann nur nichtnegative, ganze Werte annehmen, sie ist also eine positive Kette. Es gilt ferner für jede Kante $x = x(X'X'')$

(4) $$f(x) \geqq \psi(x) - (s(X'') - s(X')).$$

Nach (2. 3. 3) (2) und (3)

(5) gilt $f(x) = \psi(x) - (s(X'') - s(X'))$, falls $\tilde{z}(x) > 0$ ist.

Man sieht auch, daß $f(x) > 0$ nur im Falle $\tilde{z}(x) = \varphi(x)$ eintreten kann. Daraus folgt, daß

(6) $$f(x)\varphi(x) = f(x)\tilde{z}(x)$$

für jede Kante x besteht.

f ist kreisfüllend. Es sei nämlich k ein beliebiger positiver Kreis. Falls $k = 0$ ist, so gilt $|f, k| = \psi[k] = 0$. Ist $k \neq 0$, so seien $x_1, \ldots, x_n$ die Kanten von k, und es sei $x_i = x_i(X_{i-1}X_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$, $X_n = X_0$. Dann ist nach (4)

$$|f, k| = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geqq \sum_{i=1}^{n} \{\psi(x_i) - [s(X_i) - s(X_{i-1})]\} = \sum_{i=1}^{n} \psi(x_i) = \psi[k].$$

In gleicher Weise ergibt sich aus (5), daß im Falle $k \subset \tilde{z}$ $|f, k| = \psi[k]$ besteht.

Um die Gleichung $\varphi[f] = \psi[\tilde{z}]$ zu beweisen, betrachten wir eine nach (1. 2. 7) existierende Darstellung $\tilde{z} = \sum_{i=1}^{m} k_i$ von $\tilde{z}$, wo k_i ein Kreis und $k_i \subset \tilde{z}$ ist $(i = 1, \ldots, m)$. Es gelten die Gleichungen $|f, k_i| = \psi[k_i]$ $(i = 1, \ldots, m)$, und aus diesen und (6) folgt

$$\varphi[f] = \sum_x f(x)\varphi(x) = \sum_x f(x)\tilde{z}(x) = \sum_x f(x)\left(\sum_{i=1}^{m} k_i(x)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_x f(x)k_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{m} |f, k_i| = \sum_{i=1}^{m} \psi[k_i] = \psi[\tilde{z}].$$

Damit haben wir den Beweis des Satzes (2. 1. 6) beendet.

2. 4. Beweis des Satzes (2. 1. 7)

(2. 4. 1) Z_f ist nicht leer. Wählen wir nämlich zu jeder Kante x, mit $\varphi(x) > 0$, einen x enthaltenden, positiven Kreis k_x, so ist $z = \sum_x^{+} \varphi(x) k_x$ ein positiver, kantefüllender Zyklus; dabei bedeutet $\sum_x^{+}$ die Summation nach sämtlichen Elementen von Ψ, die positive φ-Werte besitzen.

Aus der Annahme, daß die ψ-Werte der positiven Kreise nicht negativ sind, und aus (1. 2. 10) folgt $\psi[z] \geqq 0$ für jeden positiven Zyklus z. Daraus und aus der Ganzzahligkeit der ψ-Werte ergibt sich, daß der Wert $\min_{z \in Z_f} \psi[z]$ existiert.

Es sei $\tilde{z}$ ein im Abschnitt 2.4 festgehaltenes Element von Z_f, für welches $\psi[\tilde{z}] = \min_{z \in Z_f} \psi[z]$ gilt.

Zum Beweis des Satzes (2.1.7) genügt es, nach (2.1.5) zu zeigen, daß eine positive kreisaufnehmbare Kette f existiert, für die $\varphi[f] = \psi[\tilde{z}]$ besteht. Die Existenz einer solchen Kette beweisen wir in mehreren Schritten.

(2.4.2) *Es existiert eine auf Φ definierte ganzwertige Funktion $s(X)$, welche die folgende Eigenschaft besitzt:*

(1) *Für jede Kante $x = x(X'X'')$ ist $\psi(x) \geqq s(X'') - s(X')$.*

(2) *Für diejenigen Kanten $x = x(X'X'')$, die der Ungleichung $\tilde{z}(x) > \max(0, \varphi(x))$ genügen, gilt $\psi(x) = s(X'') - s(X')$.*

Beweis. Durch Hinzufügung neuer Grundkanten konstruieren wir aus Γ einen neuen Graphen Γ' wie folgt: Genügt eine Kante $x = x(X'X'')$ von Γ der Ungleichung $\tilde{z}(x) > \max(0, \varphi(x))$, so fügen wir zu x eine neue Grundkante $\bar{x} = \bar{x}(X''X')$ mit $\psi(\bar{x}) = -\psi(x)$ hinzu.

Durch die in (2.3.3) angewendete Schlußweise können wir zeigen, daß für jeden positiven Kreis k' von Γ' $\psi[k'] \geqq 0$ gilt. Nach dem Hilfssatz (2.2.2) existiert dann eine ganzwertige Funktion $s(X)$ mit der folgenden Eigenschaft: Ist $x = x(X'X'')$ eine beliebige Kante von Γ, so gilt $\psi(x) \geqq s(X'') - s(X')$. Ist $\bar{x} = \bar{x}(X''X')$ eine neue Kante, so gilt $\psi(\bar{x}) \geqq s(X') - s(X'')$, d. h. für die zu $\bar{x}$ gehörige alte Kante $x = x(X'X'')$ gilt $\psi(x) \leqq s(X'') - s(X')$. Aus der Definition von Γ' folgt jetzt, daß $s(X)$ den in (2.4.2) gestellten Forderungen genügt.

(2.4.3) Wir definieren die Funktion $f(x)$ folgendermaßen:

$$\begin{cases} f(x) = \psi(x) - (s(X'') - s(X')), & \text{falls } \tilde{z}(x) = \varphi(x) \text{ ist,} \\ f(x) = 0, & \text{falls } \tilde{z}(x) > \varphi(x) \text{ ist;} \end{cases}$$

dabei bedeutet $x = x(X'X'')$ eine beliebige Kante von Γ und $s(X)$ eine den in (2.4.2) gestellten Forderungen genügende Funktion. Wir zeigen, daß $f \in F_a$ ist, und daß $\varphi[f] = \psi[\tilde{z}]$ gilt.

$f(x)$ kann nur nichtnegative ganze Werte annehmen, d. h. f ist eine positive Kette. Ferner gilt

(3) für jede Kante $x = x(X'X'')$ die Ungleichung $f(x) \leqq \psi(x) - (s(X'') - s(X'))$;

(4) für diejenigen Kanten $x = x(X'X'')$, die der Ungleichung $\tilde{z}(x) > 0$ genügen, die Gleichung $f(x) = \psi(x) - (s(X'') - s(X'))$.

Die letzte Behauptung folgt im Falle $\tilde{z}(x) = \varphi(x)$ aus der Definition von f, im Falle $\tilde{z}(x) > \varphi(x)$ aus (2.4.2), da in diesem Falle $\tilde{z}(x) > \max(0, \varphi(x))$ ist.

Laut der Definition von f kann $f(x)>0$ nur im Falle $\tilde{z}(x)=\varphi(x)$ bestehen und daraus ergibt sich die Gleichung

(5) $$f\varphi=f\tilde{z}.$$

Ganz ähnlich wie in (2. 3. 4) kann man mit Hilfe von (3), (4) und (5) zeigen, daß f kreisaufnehmbar ist und daß $\varphi[f]=\psi[\tilde{z}]$ gilt. Damit ist der Beweis des Satzes (2. 1. 7) beendet.

2. 5. Nicht-ganzzahlige Bewertungen

Man kann die Sätze (2. 1. 6) und (2. 1. 7) auch auf solche Fälle übertragen, wo die Funktionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x)$ und $z(x)$ auch nicht-ganzzahlige Werte annehmen. Die Definitionen und Sätze bleiben — mit eventuellen kleineren Änderungen — auch dann in Kraft, wenn wir die Forderung und die Behauptung der Ganzzahligkeit weglassen. Es ist zum Beispiel $z(x)$ ein Zyklus, wenn für jeden Punkt X $(z, X)=\sum_x z(x)(x, X)=0$ gilt. Ferner ist es leicht ersichtlich, daß wir statt der nach (1. 2. 7) existierenden Zerlegung $z=\sum_{i=1}^{n} k_i$ die Existenz einer Darstellung $z=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i k_i$ beweisen können, wo $\lambda_i\geqq 0$ und k_i ein Kreis mit $k_i\subset z$ ist $(i=1,\ldots,n)$.

Die Existenz der in (2. 1. 6) und (2. 1. 7) auftretenden Extremwerte kann man durch die gewöhnliche Schlußweise der Theorie der reellen Funktionen erhalten; man muß nur die Grundkanten des Graphen irgendwie in eine Folge $x_1,\ldots,x_n$ ordnen, und zu einer jeden Kette f einen Punkt $[f(x_1),\ldots,f(x_n)]$ eines n-dimensionalen Raumes zuordnen.

Die Definition der Kette z_1 in (2. 3. 3) muß man folgendermaßen abändern: Es sei ζ bzw. δ das Minimum der positiven Werte, welche die Funktion $\tilde{z}(x)$ bzw. $\varphi(x)-\tilde{z}(x)$ annimmt. Ist $\tilde{z}=0$ bzw. $\varphi-\tilde{z}=0$, so sei $\zeta=1$ bzw. $\delta=1$. Ferner sei $\varepsilon=\min(\zeta,\delta,1)$. Es ist dann $\varepsilon>0$. Wir setzen

$$z_1=\tilde{z}+\varepsilon k_1.$$

Eine ähnliche Änderung muß man in (2. 4. 2) durchführen.

Man kann nun leicht kontrollieren, daß durch die erwähnten Modifizierungen die Beweise der Sätze (2. 1. 6) und (2. 1. 7) auch auf nicht-ganzzahlige Funktionenwerte anwendbar sind.

2. 6. Übertragung des Satzes (2. 1. 6) auf unendliche Graphen

(2. 6. 1) SATZ. *Betrachten wir auch weiterhin nur endliche Ketten, so gilt der Satz* (2. 1. 6) *auch bezüglich unendlicher Graphen, vorausgesetzt, daß die folgenden Bedingungen bestehen:*

(1) *Die ψ-Werte der kanteaufnehmbaren positiven Zyklen sind von oben beschränkt.*

(2) *Die Anzahl der 0-Kanten ist endlich.*

(3) *Die ψ-Werte der positiven Kreise, die 0-Kanten enthalten, sind von oben beschränkt.*

Den Beweis erhalten wir durch folgende Modifizierung des Beweises von (2. 1. 6).

(2. 6. 2) Es genügt, uns wieder nur mit dem Fall $\varphi > 0$ zu beschäftigen. Dies kann man aus den Bedingungen (2) und (3) ebenso einsehen, wie das in (2. 3. 1) geschah. Wir heben hervor, daß zufolge $\varphi > 0$ jeder positive Kreis kanteaufnehmbar ist.

Gilt für jeden positiven Kreis k $\psi[k] \leqq 0$, so ist die Kette $f = 0$ kreisfüllend, und dann ist die Behauptung unseres Satzes trivial. Wir setzen daher im folgenden voraus, daß es einen positiven Kreis mit *positivem* ψ-Wert gibt.

Der Zyklus $z = 0$ ist ein Element von Z_a; Z_a ist also nicht leer. Die Existenz des Wertes $\max\limits_{z \in Z_a} \psi[z] = \mu$ ist jetzt eine einfache Folge der Bedingung (1) und der Ganzwertigkeit der ψ-Werte. Es gilt $\mu > 0$, da nach unseren Voraussetzungen ein Element von Z_a mit positivem ψ-Wert existiert.

Es sei wieder $\tilde{z}$ ein im Abschnitt 2. 6 festgehaltenes Element von Z_a, für welches $\psi[\tilde{z}] = \mu$ gilt. Wegen $\mu > 0$ ist $\tilde{z} \neq 0$. Zum Beweis unseres Satzes genügt auch jetzt, die Existenz eines solchen Elementes von F_f zu zeigen, für welches $\varphi[f] = \psi[\tilde{z}]$ gilt. Das geschieht in mehreren Schritten.

(2. 6. 3) Zuerst führen wir einige neuen Abkürzungen und Begriffe ein.

Die zu $\tilde{z}$ gehörigen Punkte und Kanten wollen wir *$\tilde{z}$-Punkte* bzw. *$\tilde{z}$-Kanten* nennen.

Haben die Punkte X und X' des Graphen Γ die Eigenschaft, daß sowohl ein positiver XX'-Weg wie auch ein positiver $X'X$-Weg existiert, so sagen wir, daß *X mit X' (in Γ) in Verbindung steht*, oder daß *X und X' (in Γ) miteinander in Verbindung stehen.* Es ist klar, daß X mit X, und wenn X mit X', dann auch X' mit X in Verbindung steht. Aus (1. 2. 10) folgt ferner, daß wenn X mit X' und X' mit X'', dann auch X mit X'' in Verbindung steht. Wie ersichtlich, stehen zwei beliebige Punkte eines positiven Kreises immer miteinander in Verbindung. Aus (1. 2. 8) folgt, daß die Randpunkte einer jeden $\tilde{z}$-Kante miteinander in Verbindung stehen.

Wir definieren die Teilmenge Φ_z von Φ wie folgt: Ein Punkt gehört dann und nur dann zu Φ_z, wenn er mit irgendeinem $\tilde{z}$-Punkt in Verbindung steht. Die Teilmenge Ψ_z von Ψ wird folgendermaßen definiert: Eine Kante gehört dann und nur dann zu Ψ_z, wenn die Randpunkte der Kante zu Φ_z gehören, und wenn diese Randpunkte miteinander in Verbindung stehen.

Φ_z bzw. Ψ_z enthält sämtliche Punkte bzw. Kanten von $\tilde{z}$. Da $\tilde{z} \neq 0$ ist, sind Φ_z und Ψ_z nicht leer.

(2. 6. 4) Wir werden nachfolgend in (2. 6. 5) beweisen, daß eine auf Φ_z definierte ganzwertige Funktion $s(X)$ existiert, für die eine jede Kante $x = x(X'X'')$ von Ψ_z den in (2. 3. 3) gestellten Forderungen (1), (2) und (3) genügt. Mit einer solchen Funktion $s(X)$ definieren wir die Kette f folgendermaßen:

Ist $x \notin \Psi_z$, so sei $f(x) = 0$. Ist $x \in \Psi_z$ und $x = x(X'X'')$, so sei $f(x) = \max[0, \psi(x) - (s(X'') - s(X'))]$.

Da $0 < \tilde{z}(x) = \varphi(x)$ nur für endlich viele Kanten bestehen kann, ist f eine *endliche* Kette. Ferner ist f offensichtlich eine *positive* Kette.

Für eine jede Kante $x = x(X'X'')$ der Menge Ψ_z gilt $f(x) \geqq \psi(x) - (s(X'') - s(X'))$, gehört jedoch die Kante auch zu $\tilde{z}$, so gilt $f(x) = \psi(x) - (s(X'') - s(X'))$.

Wie ersichtlich, besteht die Gleichung $f(x)\varphi(x) = f(x)\tilde{z}(x)$ für jede Kante des Graphen.

f ist kreisfüllend. Enthält nämlich der positive Kreis k keine $\tilde{z}$-Kante, so ist der positive Zyklus $z_2 = \tilde{z} + k$ wegen $\varphi > 0$ kanteaufnehmbar, d. h. es ist $z_2 \in Z_a$, und daher gilt $\psi[\tilde{z}] + \psi[k] = \psi[z_2] \leqq \psi[\tilde{z}]$, also ist $\psi[k] \leqq 0$ und $|f, k| \geqq \psi[k]$. Enthält k eine $\tilde{z}$-Kante, so gehört jeder Punkt bzw. jede Kante des Kreises zu Φ_z bzw. Ψ_z, und man kann dann die Ungleichung $|f, k| \geqq \psi[k]$ genau wie in (2. 3. 4) beweisen.

Schließlich kann man die Behauptungen, daß im Falle $k \subset \tilde{z}$ die Gleichung $|f, k| = \psi[k]$ gilt, und daß $\varphi[f] = \psi[\tilde{z}]$ ist, ebenfalls mit der in (2. 3. 4) angewendeten Schlußweise beweisen.

(2. 6. 5) Zum Beweis des Satzes (2. 6. 1) blieb es nur zu zeigen, daß die in (2. 6. 4) verwendete Funktion $s(X)$ wirklich existiert. Den Beweis führen wir in mehreren Schritten.

(I) Wir konstruieren aus Γ mit dem in (2. 3. 3) angewendeten Verfahren den Graphen Γ'. Dann gilt für jeden positiven Kreis k' von Γ' $\psi[k'] \leqq 0$.

Wir zeigen erst, daß wenn X_1 und X_2 in Γ, so auch in Γ' miteinander in Verbindung stehen und umgekehrt, daß die Verbindung in Γ' diejenige in Γ nach sich zieht.

Es sei f ein positiver X_1X_2-Weg von Γ. Wir konstruieren aus f einen positiven X_1X_2-*Weg* f' des Graphen Γ'. Gilt für jede Kante x von f $\tilde{z}(x) < \varphi(x)$, so ist jede Kante von f auch eine Kante von Γ', und man kann $f' = f$ setzen. Es sei nun $x = x(X'X'')$ eine solche Kante von f, die in Γ' nicht vorkommt, d. h. für die $0 < \tilde{z}(x) = \varphi(x)$ gilt. x ist eine $\tilde{z}$-Kante, und so existiert nach (1. 2. 8) ein aus lauter $\tilde{z}$-Kanten bestehender $X''X'$-Weg f_1 in Γ.

Zu jeder $\tilde{z}$-Kante gehört aber eine neue Kante, und so bilden die zu den Kanten von f_1 gehörigen neuen Kanten einen positiven $X'X''$-Weg von Γ'. Nimmt man nun zu jeder Kante von f, die in Γ' nicht vorkommt, einen solchen positiven Weg von Γ', so bilden diese Wege zusammen mit denjenigen Kanten von f, die auch in Γ' vorkommen, eine Folge von sich einander anschließenden positiven Wegen, die in Γ' von X_1 zu X_2 führen. Dann existiert aber nach (1. 2. 10) ein in Γ' liegender, positiver X_1X_2-Weg.

Umgekehrt sei jetzt f' ein positiver X_1X_2-Weg von Γ'. Wir zeigen, daß dann auch in Γ ein positiver X_1X_2-Weg existiert. Enthält f' keine neue Kante, so ist f' selbst ein positiver Weg von Γ. Nehmen wir nun an, daß f' eine neue Kante $\bar{x}=\bar{x}(X''X')$ enthält. Die zu $\bar{x}$ gehörige alte Kante sei $x=x(X'X'')$. Es muß dann x eine $\tilde{z}$-Kante sein und daraus folgt, daß ein positiver $X''X'$-Weg von Γ existiert. Nimmt man zu jeder neuen Kante von f' einen solchen Weg von Γ, so bilden diese Wege zusammen mit denjenigen Kanten von f', die auch in Γ vorkommen, eine Folge von sich einander anschließenden positiven Wegen, die in Γ von X_1 zu X_2 führen. Dann existiert aber nach (1. 2. 10) ein in Γ liegender positiver X_1X_2-Weg.

Aus der bewiesenen Behauptung folgt, daß die Menge derjenigen Punkte, die in Γ' mit $\tilde{z}$-Punkten in Verbindung stehen, mit Φ_z identisch ist.

(II) Es sei $X\in\Phi_z$ und bezeichnen wir die Menge derjenigen in Γ' liegenden positiven X_0X-Wege, wo X_0 sämtliche mit X in Verbindung stehenden $\tilde{z}$-Punkte durchläuft, mit $H'(X)$. Es sind dann die ψ-Werte der zu $H'(X)$ gehörigen Wege von oben beschränkt.

Beweis. Es sei der X_0X-Weg f' ein Element von $H'(X)$ und f_0' ein positiver XX_0-Weg von Γ'. Die Kette $z'=f'+f_0'$ ist ein positiver Zyklus von Γ'. Wir betrachten eine Zerlegung $z'=\sum_{i=1}^{n}k_i'$ von z', wo k_i' ein positiver Kreis von Γ' ist $(i=1,\dots,n)$. Da die ψ-Werte der positiven Kreise von Γ' nicht positiv sind, gilt $\psi[z']=\sum_{i=1}^{n}\psi[k_i']\leqq 0$. Demzufolge ist $\psi[f']=$ $=\psi[z']-\psi[f_0']\leqq -\psi[f_0']$. Daraus und aus der Endlichkeit der Anzahl der $\tilde{z}$-Punkte folgt unsere Behauptung.

(III) Es sei X ein beliebiges Element von Φ_z. Aus (II) und aus der Ganzzahligkeit der ψ-Werte folgt die Existenz von

$$s(X)=\max_{f'\in H'(X)}\psi[f'].$$

Ganz ähnlich wie im Beweis des Hilfssatzes (2. 2. 1) kann man jetzt aus der Tatsache, daß sämtliche positive Kreise von Γ' nichtpositive ψ-Werte besitzen, zeigen, daß eine jede alte Kante $x=x(X'X'')$ bzw. eine jede neue

Kante $\bar{x} = \bar{x}(X''X')$, deren Randpunkte zu Φ_z gehören und miteinander in Verbindung stehen, die Ungleichung

$$\psi(x) \leqq s(X'') - s(X') \quad \text{bzw.} \quad \psi(\bar{x}) \leqq s(X') - s(X'')$$

befriedigt. Daraus folgt aber ähnlicherweise wie unter (2. 3. 3), daß $s(X)$ den in (2. 6. 4) gestellten Forderungen genügt.

§ 3

3.1. Neue Fassung der Sätze (2. 1. 6) und (2. 1. 7)

(3. 1. 1) Wir können den Sätzen (2. 1. 6) und (2. 1. 7) eine anschaulichere Fassung geben, wenn wir — entsprechend der Darstellung (1. 2. 7) bzw. $f = e_1 + \cdots + e_n$ (s. (1. 2. 4)) — die Zyklen durch „Kreissysteme", die (kreisfüllenden und kreisaufnehmbaren) positiven Ketten durch „Kantensysteme" ersetzen.

Das *Kreissystem* $\varkappa = (k_1, \ldots, k_n)$ bzw. das *Kantensystem* $\varepsilon = (x_1, \ldots, x_n)$ ist eine solche Folge von Kreisen bzw. Grundkanten, wo ein Kreis bzw. eine Kante auch *mehrmals* vorkommen kann. Diejenigen Folgen, die sich nur in der Reihenfolge ihrer Elemente unterscheiden, betrachten wir als identisch. Es ist vorteilhaft, auch die „leere Folge" als System zu betrachten. Daß ein System leer ist, werden wir mit $\varkappa = 0$ bzw. $\varepsilon = 0$ ausdrücken.

(3. 1. 2) Sind alle Kreise eines Kreissystems positiv, so heißt das System *positiv*. Das System $\varkappa = 0$ nennen wir auch positiv. Ist $\varkappa = (k_1, \ldots, k_n)$, so heißt $\psi[\varkappa] = \sum_{i=1}^{n} \psi[k_i]$ der ψ-Wert von $\varkappa$. Ist $\varkappa = 0$, so sei $\psi[\varkappa] = 0$. (Ein Kreis ist positiv, wenn jede seiner Kanten positiv ist. Nach (2. 1. 2) gilt für eine positive Kante $e = x$, $\psi[e] = \psi(x)$, für eine negative $e = -x$, $\psi[e] = -\psi(x)$. Der ψ-Wert eines Kreises ist die Summe der ψ-Werte seiner Kanten.)

Das Zeichen $|\varkappa, x|$ soll die Anzahl derjenigen Kreise der Folge $k_1, \ldots, k_n$ bedeuten, welche die Kante x als Grundkante enthalten (d. h. es besteht $k_i(x) \neq 0$). Ist $\varkappa = 0$, so sei $|\varkappa, x| = 0$.

Das Kreissystem $\varkappa$ heißt *kanteaufnehmbar* bzw. *kantefüllend*, wenn für jede Kante x $|\varkappa, x| \leqq \varphi(x)$ bzw. $|\varkappa, x| \geqq \varphi(x)$ gilt.

(3. 1. 3) Ist $\varepsilon = (x_1, \ldots, x_n)$, so heißt $\varphi[\varepsilon] = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)$ der φ-Wert von ε. Ist $\varepsilon = 0$, so sei $\varphi[\varepsilon] = 0$.

Das Zeichen $|\varepsilon, k|$ soll die Anzahl derjenigen Kanten der Folge $x_1, \ldots, x_n$ bedeuten, die Grundkanten des Kreises k sind. Ist $\varepsilon = 0$, so sei $|\varepsilon, k| = 0$.

Das Kantensystem ε heißt *kreisaufnehmbar* bzw. *kreisfüllend*, wenn für jeden positiven Kreis k $|\varepsilon, k| \leqq \psi[k]$ bzw. $|\varepsilon, k| \geqq \psi[k]$ gilt.

Mit den oben eingeführten Begriffen können wir nun die angekündigte Umformung der Sätze (2. 1. 6) und (2. 1. 7) in folgender Weise durchführen. (Der Kürze wegen werden wir die Existenz der Extremwerte, die in unseren Sätzen vorkommen, von jetzt an nicht mehr explizit festsetzen, wohl aber wollen wir diese immer zu den Behauptungen der Sätze stillschweigend hinzunehmen.)

(3. 1. 4) SATZ. *Ist Γ endlich und ist $\varphi \geqq 0$, so ist das Maximum der ψ-Werte der kanteaufnehmbaren positiven Kreissysteme gleich dem Minimum der φ-Werte der kreisfüllenden Kantensysteme.*

(3. 1. 5) SATZ. *Ist Γ endlich und gilt für jeden positiven Kreis $\psi[k] \geqq 0$, ist ferner jede Kante x mit $\varphi(x) > 0$ in einem positiven Kreis enthalten, so ist das Minimum der ψ-Werte der kantefüllenden Kreissysteme gleich dem Maximum der φ-Werte der kreisaufnehmbaren Kantensysteme.*

3. 2. Verallgemeinerung der Sätze (3. 1. 4) und (3. 1. 5)

Wir wollen unsere Sätze in solcher Richtung verallgemeinern, wo die Funktionen φ und ψ auch auf den Punkten des Graphen definiert sind. Wir müssen dann die Kantensysteme durch „Punktsysteme" bzw. durch „Punkt-Kantensysteme" ersetzen.

(3. 2. 1) Die *Punktsysteme* sind aus Punkten in gleicher Weise gebildet, wie die Kreis- und Kantensysteme aus Kreisen bzw. aus Kanten (s. (3. 1. 1)).

Ein Punktsystem π und ein Kantensystem ε bilden zusammen ein *Punkt-Kantensystem* $\gamma = (\pi, \varepsilon)$. Wir machen folgende Verabredungen: $(\pi, 0) = \pi$, $(0, \varepsilon) = \varepsilon$, $(0, 0) = 0$.

Zu den schon früher eingeführten „Inzidenzgraden" $|f, g|$, $|\varkappa, x|$ und $|\varepsilon, x|$ nehmen wir noch die folgenden hinzu:

Ist f eine beliebige Kette, so sei

$$|f, X| = \sum_x |f(x)|\,|(x, X)| = \frac{1}{2}\nu_X(f).$$

Wenn k ein Kreis ist, so ist $|k, X|$ gleich 1 oder 0, je nachdem ob X ein Punkt von k ist oder nicht.

Ist $\varkappa = (k_1, \ldots, k_n)$ bzw. $\varkappa = 0$, so sei

$$|\varkappa, X| = \sum_{i=1}^{n} |k_i, X| \quad \text{bzw.} \quad |\varkappa, X| = 0.$$

$|\varkappa, X|$ gibt die Anzahl derjenigen Kreise der Folge $k_1, \ldots, k_n$ an, die den Punkt X enthalten.

Ist $\pi = (X_1, \ldots, X_n)$ ein Punktsystem und k ein Kreis, so sei $|\pi, k|$ die Anzahl derjenigen Punkte der Folge $X_1, \ldots, X_n$, die auf k liegen. Ist $\pi = 0$, so sei $|\pi, k| = 0$.

Ist $\gamma = (\pi, \varepsilon)$, so sei $|\gamma, k| = |\pi, k| + |\varepsilon, k|$. $|\gamma, k|$ bedeutet die gemeinsame Anzahl derjenigen Punkte und Kanten von γ, die zu k gehören.

(3. 2. 2) Es seien φ und ψ zwei ganzwertige Funktionen, die auf sämtlichen Punkten und Kanten des Graphen, d. h. auf der Menge $\Phi \cup \Psi$ definiert sind. Sind $X_1, \ldots, X_n$ und $e_1, \ldots, e_n$ die Punkte bzw. die Kanten des Kreises k, so wollen wir jetzt unter dem *ψ-Wert von k* den Wert

$$\psi[k] = \sum_{i=1}^{n} \psi(X_i) + \sum_{i=1}^{n} \psi[e_i]$$

verstehen. Ist $k = 0$, so sei $\psi[k] = 0$.

Für $\varkappa = (k_1, \ldots, k_n)$, $\pi = (X_1, \ldots, X_n)$ und $\gamma = (\pi, \varepsilon)$ sei $\psi[\varkappa] = \sum_{i=1}^{n} \psi[k_i]$, $\varphi[\pi] = \sum_{i=1}^{n} \varphi(X_i)$ und $\varphi[\gamma] = \varphi[\pi] + \varphi[\varepsilon]$.

Für $\varkappa = 0$ und $\pi = 0$ sei $\psi[\varkappa] = 0$ und $\varphi[\pi] = 0$.

Wir nennen ein Kreissystem $\varkappa$ *aufnehmbar* bzw. *füllend*, wenn für jedes X und x $|\varkappa, X| \leqq \varphi(X)$ und $|\varkappa, x| \leqq \varphi(x)$ bzw. $|\varkappa, X| \geqq \varphi(X)$ und $|\varkappa, x| \geqq \varphi(x)$ gilt.

Ein Punkt-Kantensystem γ heißt *kreisaufnehmbar* bzw. *kreisfüllend*, wenn für jeden *positiven* Kreis k $|\gamma, k| \leqq \psi[k]$ bzw. $|\gamma, k| \geqq \psi[k]$ gilt.

In (3. 2. 8) werden wir unter Benützung eines Gedankens von Ford und Fulkerson aus den Sätzen (3. 1. 4) und (3. 1. 5) die folgenden Verallgemeinerungen ableiten:

(3. 2. 3) Satz. *Ist Γ endlich und gilt für jedes X und x $\varphi \geqq 0$, so ist das Maximum der ψ-Werte der aufnehmbaren positiven Kreissysteme gleich dem Minimum der φ-Werte der kreisfüllenden Punkt-Kantensysteme.*

(3. 2. 4) Satz. *Ist Γ endlich und gilt für jeden positiven Kreis k die Ungleichung $\psi[k] \geqq 0$, gibt es ferner zu jedem Punkt X bzw. zu jeder Kante x mit $\varphi(X) > 0$ bzw. $\varphi(x) > 0$ einen positiven Kreis, der den Punkt bzw. die Kante enthält, so ist das Minimum der ψ-Werte der füllenden Kreissysteme gleich dem Maximum der φ-Werte der kreisaufnehmbaren Punkt-Kantensysteme.*

Man kann leicht einsehen: Gilt für jedes X $\varphi(X) = \infty$ (d. h. sind sämtliche $\varphi(X)$ Werte genügend groß), und für jedes X $\psi(X) = 0$, so erhält man aus (3. 2. 3) den Satz (3. 1. 4). Ist für jedes X $\varphi(X) = 0$ und $\psi(X) = 0$, so ergibt (3. 2. 4) den Satz (3. 1. 5).

(3. 2. 5) Wegen der Anwendungen haben einige Spezialfälle von (3. 2. 3) und (3. 2. 4) besondere Bedeutung, und zwar bei (3. 2. 3) der Fall, wo für jedes x $\varphi(x)=\infty$ und für jedes X $\psi(X)=0$ ist, bei (3. 2. 4) der Fall, wo für jedes x $\varphi(x)=0$ und für jedes X $\psi(X)=0$ gilt. Wir wollen einige in diesen Fällen auftretende Vereinfachungen hervorheben.

Die Aussage, daß ein Kreissystem $\varkappa$ aufnehmbar bzw. füllend ist, bedeutet jetzt, daß $|\varkappa, X| \leqq \varphi(X)$ bzw. $|\varkappa, X| \geqq \varphi(X)$ für jeden Punkt X besteht. Wir werden ein solches Kreissystem *punktaufnehmbar* bzw. *punktfüllend* nennen.

Der ψ-Wert eines Kreises ergibt sich als die Summe der ψ-Werte seiner Kanten.

Bei der Aufsuchung des Minimums bzw. des Maximums der φ-Werte können wir uns auf kantenlose Punkt-Kantensysteme, d. h. einfach nur auf Punktsysteme beschränken. Ein Punktsystem π ist dann kreisfüllend bzw. kreisaufnehmbar, wenn für jedes positive k $|\pi, k| \geqq \psi[k]$ bzw. $|\pi, k| \leqq \psi[k]$ gilt.

Wir sehen so, daß in der Tat nur die zu den Punkten gehörigen φ-Werte bzw. zu den Kanten gehörigen ψ-Werte eine Rolle spielen, also *wir können uns auf solche Funktionen φ bzw. ψ beschränken, die nur auf Punkten bzw. Kanten* definiert sind. Mit solchen Funktionen formulieren wir die betrachteten Spezialfälle folgendermaßen:

(3. 2. 6) SATZ. *Ist Γ endlich und ist $\varphi \geqq 0$, so ist das Maximum der ψ-Werte der punktaufnehmbaren positiven Kreissysteme gleich dem Minimum der φ-Werte der kreisfüllenden Punktsysteme.*

(3. 2. 7) SATZ. *Ist Γ endlich und gilt $\psi[k] \geqq 0$ für jeden positiven Kreis k, gibt es ferner zu jedem Punkt X mit $\varphi(X) > 0$ einen positiven Kreis, der X enthält, so ist das Minimum der ψ-Werte der punktfüllenden positiven Kreissysteme gleich dem Maximum der φ-Werte der kreisaufnehmbaren Punktsysteme.*

(3. 2. 8) Wir beweisen nun die Sätze (3. 2. 3) und (3. 2. 4) dadurch, daß wir sie auf die Sätze (3. 1. 4) bzw. (3. 1. 5) zurückführen. Zu diesem Zwecke konstruieren wir, nach einem Verfahren von FORD und FULKERSON ([6], S. 212), aus Γ einen neuen Graphen Γ'. Die Konstruktion kann man kurz folgendermaßen beschreiben: Wir zerspalten einen jeden Punkt X von Γ in zwei Punkte X^- und X^+ und fügen die in X einlaufenden Kanten zu X^-, die von X auslaufenden zu X^+, ferner verbinden wir X^- mit X^+ durch eine neue, aus X^- nach X^+ laufende Kante y_X.

Aus den Funktionen φ und ψ, die auf den Punkten und Kanten des Graphen Γ definiert sind, bilden wir zwei neue Funktionen φ' und ψ', die nur auf den Kanten von Γ' definiert sind:

Ist x eine auch in Γ vorkommende Kante von Γ', so sei $\varphi'(x)=\varphi(x)$ und $\psi'(x)=\psi(x)$. Für eine neue Kante y_X sei $\varphi'(y_X)=\varphi(X)$ und $\psi'(y_X)==\psi(X)$.

Jeder positive Kreis von Γ' enthält mit einem Punkte X^- (bzw. X^+) den Punkt X^+ (bzw. X^-) und die Kante y_X. Dies ermöglicht uns, daß wir zwischen den positiven Kreisen und dementsprechend zwischen den positiven Kreissystemen der Graphen Γ und Γ' eine sich natürlicherweise ergebende ein-eindeutige Zuordnung errichten. Es ist leicht ersichtlich, daß bei dieser Zuordnung die entsprechenden Kreissysteme gleichzeitig aufnehmbar bzw. kanteaufnehmbar, sowie gleichzeitig füllend bzw. kantefüllend sind; ferner, daß die ψ- bzw. ψ'-Werte der entsprechenden Kreise einander gleich sind.

Gleichfalls kann man eine natürliche Zuordnung zwischen den Punkt-Kantensystemen von Γ und den Kantensystemen von Γ' errichten. Hier sind die entsprechenden Systeme gleichzeitig kreisaufnehmbar bzw. kreisfüllend, sowie besitzen sie gleiche φ- bzw. φ'-Werte.

Laut der obigen können wir nun feststellen: Der auf Γ' ausgesprochene Satz (3. 1. 4) bzw. (3. 1. 5) ergibt den auf Γ bezüglichen Satz (3. 2. 3) bzw. (3. 2. 4).

3. 3. Beliebige Kreissysteme

(3. 3. 1) Man kann einen zu (3. 2. 3) ähnlichen Satz auf beliebige — nicht nur positive Kreise enthaltende — Kreissysteme aussprechen. Wir wollen jedoch hier uns nur mit demjenigen Satz beschäftigen, der dem Spezialfall von (3. 2. 6) entspricht.

Es sei also φ bzw. ψ nur auf allen Punkten bzw. Kanten definiert. Wir untersuchen nun solche Punktsysteme π, die mit jedem — *nicht nur positiven* — Kreis k die Ungleichung $|\pi, k| \geqq \psi[k]$ erfüllen. Wir nennen diese Punktsysteme *b-kreisfüllend.*

Es besteht nun der folgende Satz:

(3. 3. 2) SATZ. *Ist Γ endlich und ist $\varphi \geqq 0$, so ist das Maximum der ψ-Werte der punktaufnehmbaren Kreissysteme gleich dem Minimum der φ-Werte der b-kreisfüllenden Punktsysteme.*

BEWEIS. Wir führen unseren Satz auf (3. 2. 6) zurück (s. [1], S. 217 und [6], S. 211). Durch Hinzunahme von neuen Kanten errichten wir aus Γ einen Graphen Γ' wie folgt: Wir nehmen zu jeder Kante $x=x(X'X'')$ von Γ eine neue Kante $\bar{x}=\bar{x}(X''X')$ mit $\psi(\bar{x})=-\psi(x)$ auf. Nennen wir einen Kreis, der aus zwei zueinander gehörigen Kanten x und $\bar{x}$ besteht, einen 0-Kreis, so hat jeder 0-Kreis den ψ-Wert Null. Lassen wir dann aus einem *positiven* punktaufnehmbaren Kreissystem $\varkappa'$ von Γ' die eventuell vorkommenden 0-Kreise weg, so bilden die zurückbleibenden Kreise ein *positives* punktaufnehmbares Kreissystem von Γ', das den gleichen ψ-Wert besitzt wie $\varkappa'$. Demzufolge können wir uns bei der Untersuchung des Maximums der ψ-Werte auf diejenigen positiven Kreissysteme beschränken, die keinen 0-Kreis enthalten.

Wenn man jedoch von den 0-Kreisen absieht, so kann man zwischen den *positiven* Kreisen von Γ' und *sämtlichen* Kreisen von Γ eine sich in natürlicher Weise ergebende ein-eindeutige Zuordnung errichten (man ersetze in jedem Kreis von Γ' eine jede neue Kante $\bar{x}$ durch $-x$). Bei dieser Zuordnung stimmen die Punkte und die ψ-Werte der entsprechenden Kreise überein. Durch die Zuordnung der Kreise entsteht eine solche ein-eindeutige Abbildung der 0-kreislosen, positiven Kreissysteme von Γ' auf sämtliche Kreissysteme von Γ, wo die entsprechenden Systeme gleichzeitig punktaufnehmbar sind und den gleichen ψ-Wert besitzen.

Anderseits kann man leicht einsehen, daß wenn ein Punktsystem in Γ' kreisfüllend ist, so es in Γ b-kreisfüllend ist — und umgekehrt.

Nach den obigen kann man nun feststellen: Der auf Γ' ausgesprochene Satz (3. 2. 6) ergibt den auf Γ bezüglichen Satz (3. 3. 2).

BEMERKUNG. Ähnlich wie der Satz (2. 1. 6) lassen sich auch die Sätze (3. 2. 3) und (3. 3. 2) auf unendliche Graphen ausdehnen.

§ 4

In diesem Paragraphen leiten wir einige Maximum-Minimum Sätze über Weg- und Kantensysteme ab. Wir erhalten diese Sätze dadurch, daß wir die Sätze (3. 2. 6) und (3. 2. 7) auf spezielle Graphen bzw. Bewertungen anwenden. Entsprechend den Sätzen (3. 2. 6) und (3. 2. 7) soll immer in § 4 die Funktion φ nur auf den Punkten, die Funktion ψ nur auf den Kanten definiert sein.

Wir bemerken, daß unser Verfahren auch auf die Sätze (3. 1. 4) und (3. 1. 5) bzw. (3. 2. 3) und (3. 2. 4) anwendbar ist.

4. 1. Wegsysteme

(4. 1. 1) Es sei Φ die Menge der Punkte des gerichteten Graphen Γ, Φ_α und Φ_β seien zwei — in § 4 festgehaltene — nichtleere, elementfremde Teilmengen von Φ. Wir werden die Punkte von Φ_α bzw. Φ_β *α-Punkte* bzw. *β-Punkte* nennen. ϱ sowie σ sollen im folgenden einen beliebigen der Buchstaben α und β bezeichnen. Ein Weg heißt $\varrho\sigma$-Weg, wenn sein Anfangspunkt

ein ϱ-Punkt, sein Endpunkt ein σ-Punkt ist, und wenn seine inneren Punkte weder α- noch β-Punkte sind.

Es sei w ein beliebiger Weg und X ein beliebiger Punkt. Der Wert des Zeichens $[w, X]$ soll gleich 1 oder 0 sein, je nachdem X auf w liegt oder nicht. (Der in (3. 2. 1) eingeführte Wert $|w, X|$ stimmt außer den Randpunkten von w mit $[w, X]$ überein, in den Randpunkten gilt jedoch $2|w, X| = [w, X]$.)

Unter einem *Wegsystem* $\omega = (w_1, \ldots, w_n)$ verstehen wir eine solche Folge der *$\alpha\beta$-Wege* w_i, wo ein Weg auch mehrmals vorkommen kann. Systeme, die sich nur in der Reihenfolge ihrer Elemente unterscheiden, werden als gleich betrachtet. Die „leere Folge" ($\omega = 0$) sei auch ein Wegsystem.

Das System ω heißt *positiv*, wenn alle seine Wege positiv sind, oder wenn $\omega = 0$ ist.

Es sei $[\omega, X] = \sum_{i=1}^{n} [w_i, X]$ bzw. $[\omega, X] = 0$, wenn $\omega = 0$ ist. $[\omega, X]$ bedeutet die Anzahl derjenigen Wege der Folge $w_1, \ldots, w_n$, die den Punkt X enthalten.

Ist $\pi = (X_1, \ldots, X_m)$ ein Punktsystem und w ein Weg, so sei $[\pi, w] = \sum_{i=1}^{m} [w, X_i]$. Ist $\pi = 0$, so sei $[\pi, w] = 0$. $[\pi, w]$ bedeutet die Anzahl derjenigen Punkte von π, die auf w liegen.

Ist $\pi = (X_1, \ldots, X_m)$ und $\omega = (w_1, \ldots, w_n)$, so sei

$$[\pi, \omega] = \sum_{i=1}^{n} [\pi, w_i] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} [w_i, X_j] = \sum_{j=1}^{m} [\omega, X_j].$$

Ist $\pi = 0$ oder $\omega = 0$, so sei $[\pi, \omega] = 0$.

Durch die Vereinigung der Wege der Systeme $\omega_1, \ldots, \omega_n$ entsteht ein neues System, das wir mit $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ bezeichnen wollen. Es gilt $[\omega, X] = \sum_{i=1}^{n} [\omega_i, X]$ für jeden beliebigen Punkt X.

(4. 1. 2) Es seien $\varphi(X)$ und $\psi(x)$ zwei ganzwertige Funktionen, die auf den Punkten bzw. Kanten des Graphen definiert sind.

Wir nennen das Wegsystem ω *punktaufnehmbar* bzw. *punktfüllend*, wenn für jedes X $[\omega, X] \leqq \varphi(X)$ bzw. $[\omega, X] \geqq \varphi(X)$ besteht. Die Menge der *positiven* punktaufnehmbaren bzw. punktfüllenden Wegsysteme bezeichnen wir mit Ω_a bzw. Ω_f.

Der *ψ-Wert des Wegsystems* $\omega = (w_1, \ldots, w_n)$, $\psi[\omega]$ ist gleich der Summe der ψ-Werte der Wege w_i. (Der ψ-Wert eines Weges ist gleich der Summe der ψ-Werte seiner Kanten.) Ist $\omega = 0$, so sei $\psi[\omega] = 0$. Ist $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$, so ist $\psi[\omega] = \sum_{i=1}^{m} \psi[\omega_i]$.

Ein Punktsystem π heißt *wegaufnehmbar* bzw. *wegfüllend*, wenn für jeden *positiven* $\alpha\beta$-Weg w die Ungleichung $[\pi, w] \leqq \psi[w]$ bzw. $[\pi, w] \geqq \psi[w]$ gilt. Gibt es keinen positiven $\alpha\beta$-Weg, so betrachten wir das Punktsystem $\pi = 0$ als wegfüllend.

Ist π wegaufnehmbar bzw. wegfüllend, so kann man leicht einsehen, daß für jedes *positive* Wegsystem ω $[\pi, \omega] \leqq \psi[\omega]$ bzw. $[\pi, \omega] \geqq \psi[\omega]$ gilt.

Wir bezeichnen die Menge der wegaufnehmbaren bzw. wegfüllenden Punktsysteme mit R_a bzw. R_f.

4. 2. Sätze über punktaufnehmbare Wegsysteme

In diesem Abschnitt spielen folgende Bedingungen eine Rolle:

(4. 2. 1) $\varphi \geqq 0$.

(4. 2. 2) (1) *Jeder positive $\beta\alpha$-, $\alpha\alpha$- und $\beta\beta$-Weg besitzt einen nichtpositiven ψ-Wert.*

(2) *Jeder positive Kreis besitzt — mit Ausnahme jener Kreise, die gleichzeitig α- und β-Punkte enthalten — einen nichtpositiven ψ-Wert.*

Es besteht nun der folgende Satz:

(4. 2. 3) SATZ. *Ist Γ endlich und bestehen die Bedingungen* (4. 2. 1) *und* (4. 2. 2), *so gilt*

$$\max_{\omega \in \Omega_a} \psi[\omega] = \min_{\pi \in R_f} \varphi[\pi].$$

BEWEIS. (I) Man kann aus unseren Bedingungen leicht einsehen, daß die Werte $\mu_1 = \max\limits_{\omega \in \Omega_a} \psi[\omega]$ und $\bar{\mu}_1 = \min\limits_{\pi \in R_f} \varphi[\pi]$ existieren. Den Beweis der Behauptung $\mu_1 = \bar{\mu}_1$ werden wir durch die Konstruktion eines neuen Graphen Γ' auf den Satz (3. 2. 6) zurückführen. Γ' entsteht aus Γ dadurch, daß wir einen jeden β-Punkt mit einem jeden α-Punkt durch je eine neue, von dem β-Punkt zu dem α-Punkt gerichtete Kante verbinden. Ferner soll jede neue Kante den ψ-Wert Null erhalten.

(II) Wir ordnen zu einem jeden positiven Kreis k von Γ' ein solches positives Wegsystem ω_k von Γ zu, für welches mit jedem X die Ungleichungen $[\omega_k, X] \leqq |k, X|$ und $\psi[\omega_k] \geqq \psi[k]$ bestehen.

Enthält k nicht gleichzeitig α- und β-Punkte, so kann k keine neue Kante enthalten, also ist k ein positiver Kreis von Γ und nach (4. 2. 2) (2) ist $\psi[k] \leqq 0$. Wir setzen jetzt $\omega_k = 0$.

Nehmen wir nun an, daß k gleichzeitig α- und β-Punkte enthält. Diese Punkte zerlegen den Kreis in sich einander anschließende positive Wege $v_1, \ldots, v_n$ $(n \geqq 2)$. Jeder Weg v_i ist entweder ein $\varrho\sigma$-Weg, oder er besteht aus einer einzigen neuen Kante. Nach unseren Annahmen kann also $\psi[v_i] > 0$ nur dann eintreten, wenn v_i ein $\alpha\beta$-Weg ist. Gibt es zwischen den v_i keinen $\alpha\beta$-Weg, so ist $\psi[k] = \sum_{i=0}^{n} \psi[v_i] \leqq 0$ und wir setzen dann $\omega_k = 0$. Sind einige v_i $\alpha\beta$-Wege, so wollen wir diese mit $w_1, \ldots, w_m$ bezeichnen. Wir setzen jetzt $\omega_k = (w_1, \ldots, w_m)$. Es gilt dann

$$\psi[\omega_k] = \sum_{i=1}^{m} \psi[w_i] \geqq \sum_{j=1}^{n} \psi[v_j] = \psi[k]$$

und es ist für jedes X $[\omega_k, X] \leqq |k, X|$, da w_i und w_j $(i \neq j)$ gemeinsame Punkte nicht enthalten können.

(III) Es sei $\varkappa = (k_1, \ldots, k_n)$ ein nichtleeres, positives Kreissystem von Γ'. Wir ordnen zu $\varkappa$ das positive Wegsystem $\omega_\varkappa = (\omega_{k_1}, \ldots, \omega_{k_n})$ zu, wo ω_{k_i} jenes Wegsystem bezeichnet, das laut (II) zu k_i gehört. Ist $\varkappa = 0$, so sei $\omega_\varkappa = 0$. Mit Hilfe dieser Zuordnung beweisen wir die Ungleichung $\mu_1 \geqq \mu_1'$, wo $\mu_1' = \max_{\varkappa \in K_a'} \psi[\varkappa]$ ist, und K_a' die Menge der positiven, punktaufnehmbaren Kreissysteme von Γ' bezeichnet. Ist nämlich $\varkappa = (k_1, \ldots, k_n)$ ein nichtleeres positives Kreissystem von Γ', so gilt

$$(*) \qquad \psi[\omega_\varkappa] = \sum_{i=1}^{n} \psi[\omega_{k_i}] \geqq \sum_{i=1}^{n} \psi[k_i] = \psi[\varkappa],$$

und für jeden Punkt X besteht

$$[\omega_\varkappa, X] = \sum_{i=1}^{n} [\omega_{k_i}, X] \leqq \sum_{i=1}^{n} |k_i, X| = |\varkappa, X|.$$

Ist weiterhin $\varkappa \in K_a'$, so gilt für jedes X $|\varkappa, X| \leqq \varphi(X)$, also gilt $[\omega_\varkappa, X] \leqq \varphi(X)$, d. h. $\omega_\varkappa \in \Omega_a$. Die gleichen Behauptungen treffen auch im Falle $\varkappa = 0$ zu. Aus $(*)$ und $\omega_\varkappa \in \Omega_a$ folgt nun $\mu_1 \geqq \mu_1'$.

(IV) Wir beweisen, daß $\mu_1 \leqq \mu_1'$ ist. Zu diesem Zwecke ergänzen wir einen jeden positiven $\alpha\beta$-Weg w von Γ zu einem positiven Kreis k_w von Γ'. Die Ergänzung erfolgt durch Hinzunahme derjenigen neuen Kante, die von dem Endpunkt zum Anfangspunkt des Weges w führt. Offenbar gelten die Gleichungen $\psi[k_w] = \psi[w]$, $|k_w, X| = [w, X]$ für jedes X.

Ist $\omega = (w_1, \ldots, w_n)$ ein beliebiges, nichtleeres, positives Wegsystem, so sei $\varkappa_\omega = (k_{w_1}, \ldots, k_{w_n})$. Ist $\omega = 0$, so sei $\varkappa_\omega = 0$. Es bestehen die Gleichungen $\psi[\varkappa_\omega] = \psi[\omega]$, $|\varkappa_\omega, X| = [\omega, X]$ für jedes X. Man sieht, daß aus $\omega \in \Omega_a$ die Behauptung $\varkappa \in K_a'$ folgt. Aus den obenstehenden folgt nun $\mu_1 \leqq \mu_1'$.

(III) und (IV) ergeben die Gleichung $\mu_1 = \mu_1'$.

(V) Bezeichnen wir mit Π_f' die Menge der kreisfüllenden Punktsysteme von Γ'. Wir zeigen, daß $\Pi_f' = R_f$ ist.

Ist $\pi = (X_1, \ldots, X_n) \in R_f$ und ist k ein beliebiger positiver Kreis von Γ', so gilt mit den Bezeichnungen und nach den Behauptungen von (II)

$$|\pi, k| = \sum_{i=1}^{n} |k, X_i| \geqq \sum_{i=1}^{n} [\omega_k, X_i] = [\pi, \omega_k] \geqq \psi[\omega_k] \geqq \psi[k].$$

Es ist daher $\pi \in \Pi'_f$.

Ist umgekehrt $\pi = (X_1, \ldots, X_n) \in \Pi'_f$ und ist w ein beliebiger positiver $\alpha\beta$-Weg, so gilt mit den Bezeichnungen und nach den Behauptungen von (IV)

$$[\pi, w] = \sum_{i=1}^{n} [w, X_i] = \sum_{i=1}^{n} |k_w, X_i| = |\pi, k_w| \geqq \psi[k_w] = \psi[w].$$

Es ist daher $\pi \in R_f$.

(Die gleichen Behauptungen treffen auch im Falle $\pi = 0$ zu.)

Aus den obigen folgt $\Pi'_f = R_f$.

Nun folgt endlich aus (3. 2. 6), $\mu_1 = \mu'_1$ und $\Pi'_f = R_f$ der Satz (4. 2. 3).

Bemerkung. Durch Hinzunahme der folgenden Bedingungen kann man den Satz (4. 2. 3) auf unendliche Graphen übertragen:

(1) Die ψ-Werte der positiven, punktaufnehmbaren $\alpha\beta$-Wege sind von oben beschränkt.

(2) Die Anzahl der 0-Punkte ist endlich. (Ein Punkt heißt 0-Punkt, wenn $\varphi(X) = 0$ gilt.)

(3) Die ψ-Werte jener positiven $\alpha\beta$-Wege, die 0-Punkte enthalten, sind von oben beschränkt.

(4. 2. 4) Im folgenden wenden wir den Satz (4. 2. 3) auf einige spezielle Graphen bzw. ψ-Bewertungen an.

Ein gerichteter Graph hei t *azyklisch*, wenn er außer dem Kreis $k = 0$ keinen *positiven* Kreis enthält. Es gilt nun der folgende Satz:

(4. 2. 5) Satz. *Ist Γ endlich und azyklisch, treten ferner die α-Punkte nur als Anfangspunkte, die β-Punkte nur als Endpunkte von Kanten auf, so gilt mit jeder beliebigen ψ-Bewertung*

$$\max_{\omega \in \Omega_a} \psi[\omega] = \min_{\pi \in R_f} \varphi[\pi],$$

vorausgesetzt, daß $\varphi \geqq 0$ ist.

Der Graph kann nämlich keinen positiven $\beta\alpha$-, $\alpha\alpha$- und $\beta\beta$-Weg, und außer $k = 0$ keinen positiven Kreis enthalten. Die Bedingungen (4. 2. 2) sind daher erfüllt.

Ist der Anfangspunkt einer jeden Kante ein α-Punkt und der Endpunkt ein β-Punkt, so liegt ein spezieller Fall von (4. 2. 5) vor. Es ist jetzt Γ ein *paarer* Graph ([13], S. 170) und die positiven $\alpha\beta$-Wege reduzieren sich auf

Kanten, die positiven Wegsysteme auf Kantensysteme. Man kann ferner den Satz auch auf ungerichtete Graphen aussprechen.

(4. 2. 6) Betrachten wir einen *ungerichteten* Graphen und es seien auf dessen Punkten bzw. Kanten die ganzwertigen Funktionen $\varphi(X)$ bzw. $\psi(x)$ definiert. Ist $\varepsilon=(x_1,\ldots,x_n)$ ein Kantensystem, so sei $\psi[\varepsilon]=\sum_{i=1}^{n}\psi(x_i)$. Ist $\varepsilon=0$, so sei $\psi[\varepsilon]=0$.

Wir nennen das *Kantensystem* ε *1-aufnehmbar* bzw. *1-füllend,* wenn für jeden Punkt X die Anzahl derjenigen Kanten von ε, die zu X inzident sind, nicht größer bzw. nicht kleiner als $\varphi(X)$ ist. Ferner heißt das *Punktsystem* π *1-aufnehmbar* bzw. *1-füllend,* wenn für jede Kante x die Anzahl derjenigen Punkte von π, die zu x inzident sind, nicht größer bzw. nicht kleiner als $\psi(x)$ ist.

Nach (4. 2. 5) kann man nun folgenden Satz formulieren (s. [6], S. 214—218):

(4. 2. 7) SATZ. *Bei jedem ungerichteten, endlichen paaren Graphen ist das Maximum der ψ-Werte der 1-aufnehmbaren Kantensysteme gleich dem Minimum der φ-Werte der 1-füllenden Punktsysteme, vorausgesetzt, daß $\varphi\geqq 0$ gilt.*

Im Falle $\varphi=1$ ergibt (4. 2. 7) den in der Einleitung erwähnten Egerváryschen Satz.

(4. 2. 8) Es seien jetzt der Graph und die Mengen Φ_α und Φ_β beliebig, die Funktion $\psi(x)$ soll jedoch folgendermaßen gewählt werden: Sind beide Randpunkte einer Kante x α-Punkte, oder ist kein Randpunkt von x ein α-Punkt, so sei $\psi(x)=0$. Ist nur der Anfangspunkt bzw. der Endpunkt von x ein α-Punkt, so sei $\psi(x)=1$ bzw. $\psi(x)=-1$.

Es folgt aus diesen Bedingungen, daß die ψ-Werte der positiven $\alpha\beta$-, $\beta\alpha$-, $\alpha\alpha$-, $\beta\beta$-Wege, in dieser Reihenfolge, gleich $1,-1,0,0$ sind, und daß für jeden positiven Kreis k $\psi[k]=0$ gilt. Daraus folgt jedoch, daß $\psi(x)$ den Bedingungen (4. 2. 2) genügt.

Ist weiterhin $\omega=(w_1,\ldots,w_n)$ ein positives Wegsystem, so gilt $\psi[\omega]=$ $=\sum_{i=1}^{n}\psi[w_i]=n$. $\psi[\omega]$ gibt also die *Weganzahl* von ω an.

Ein Punktsystem π ist jetzt dann und nur dann wegfüllend, wenn jeder positive $\alpha\beta$-Weg *mindestens* einen Punkt von π enthält. Nach (4. 2. 3) gilt nun der folgende Satz:

(4. 2. 9) SATZ. *Ist der Graph endlich und gilt $\varphi\geqq 0$, so ist das Maximum der Weganzahlen der punktaufnehmbaren positiven Wegsysteme gleich dem Minimum der φ-Werte der wegfüllenden Punktsysteme.*

Dieser Satz ist im wesentlichen einem Falle des „max-flow min-cut" Satzes gleich (s. [1], [6]).

Ist $\varphi = 1$, so ergibt (4. 2. 9) den auf gerichtete Graphen formulierten Mengerschen Satz ([7], S. 188).

BEMERKUNG. Die in (4. 2. 9) nicht enthaltenen Fälle des „max-flow min-cut" Satzes ([1], [5], [6], [7]) kann man aus dem Satz (3. 2. 3) und aus den unter (3. 3. 1) bzw. (4. 2. 10) erwähnten Sätzen herleiten.

(4. 2. 10) Von (3. 3. 2) ausgehend kann man einen dem Satze (4. 2. 3) ähnlichen Satz erhalten, in dem die Positivität der Wege nicht verlangt wird. Wir können die in (4. 2. 8) definierte ψ-Funktion auch hier anwenden. Auf diese Weise kann man zu dem auf ungerichtete Graphen bezüglichen „max-flow min-cut" Satz und zu dem Mengerschen Satz ([14], S. 222) gelangen.

4. 3. Sätze über punktfüllende Wegsysteme

Ähnlich wie den Satz (4. 2. 3) kann man mit Hilfe von (3. 2. 7) den folgenden Satz beweisen:

(4. 3. 1) SATZ. *Ist Γ endlich und azyklisch, kommen ferner die α-Punkte nur als Anfangspunkte, die β-Punkte nur als Endpunkte von Kanten vor, sind schließlich die ψ-Werte der positiven $\alpha\beta$-Wege nicht negativ, so gilt*

$$\min_{\omega \in \Omega_f} \psi[\omega] = \max_{\pi \in R_\alpha} \varphi[\pi],$$

vorausgesetzt, daß Ω_f nicht leer ist.

Wir heben zwei Spezialfälle von (4. 3. 1) hervor.

(4. 3. 2) Γ soll nur α- und β-Punkte enthalten. Der Graph ist dann *paarer* und an die Stelle der Wegsysteme treten Kantensysteme. Ähnlich wie bei (4. 2. 5) kann man jetzt wieder den Satz auf ungerichtete Graphen formulieren (s. (4. 2. 6) und [6], S. 214—218):

(4. 3. 3) SATZ. *Bei jedem endlichen, ungerichteten paaren Graphen ist das Minimum der ψ-Werte der 1-füllenden Kantensysteme gleich dem Maximum der φ-Werte der 1-aufnehmbaren Punktsysteme, vorausgesetzt, daß $\psi \geqq 0$ gilt.*

Daß überhaupt ein 1-füllendes Kantensystem existiert, folgt jetzt aus der Annahme (2) des Abschnittes 1. 1.

Derjenige Fall von (4. 3. 3), wo $\varphi = 1$ und $\psi = 1$ ist, stammt von D. KÖNIG (mündliche Mitteilung, 1932).

(4. 3. 4) Der Graph soll nur die in (4. 3. 1) gestellten Bedingungen erfüllen. Wir definieren die Funktion ψ folgendermaßen: für jede Kante x, die von einem α-Punkt ausläuft, sei $\psi(x)=1$, für jede andere Kante x sei $\psi(x)=0$. Ist jetzt w ein positiver $\alpha\beta$-Weg, so gilt $\psi[w]=1$ und daher gibt $\psi[\omega]$ die Weganzahl des Systems ω an. Ein Punktsystem π ist dann und nur dann wegaufnehmbar, wenn jeder positive $\alpha\beta$-Weg *höchstens* einen Punkt von π enthält. Nach (4. 3. 1) gilt nun der folgende Satz:

(4. 3. 5) SATZ. *Ist Γ endlich und azyklisch und treten die α-Punkte nur als Anfangspunkte, die β-Punkte nur als Endpunkte von Kanten auf, so ist das Minimum der Weganzahlen der punktfüllenden positiven Wegsysteme gleich dem Maximum der φ-Werte der wegaufnehmbaren Punktsysteme, vorausgesetzt, daß irgendein positives punktfüllendes Wegsystem existiert.*

Ist $\varphi=1$, so gibt (4. 3. 5) einen von DILWORTH stammenden, sich auf halbgeordnete Mengen beziehenden Satz für endliche Mengen an ([2], S. 161, 1. 1).

4. 4. Weitere Sätze über ungerichtete Graphen

(4. 4. 1) In Abschnitt 4. 4 sollen folgende Annahmen gelten:

Γ sei ein *ungerichteter, endlicher* Graph, $\varphi(X)$ und $\psi(x)$ seien ganzwertige, *nichtnegative* Funktionen, die auf den Punkten bzw. auf den Kanten von Γ definiert sind. Unter Ketten wollen wir nur *positive* Ketten, d. h. nur nichtnegative, ganzwertige Funktionen $f(x)$ verstehen.

(4. 4. 2) Wir definieren die Begriffe „x ist eine Kante von f", „die Anzahl der Kanten von f", „die Anzahl der zu X inzidenten Kanten von f", „ein zu f gehöriger Punkt" wie in (1. 2. 4), die Zeichen $\psi[f]$ und $|f, X|$ wie in (2. 1. 2) bzw. (3. 2. 1).

Wir heben hervor, daß $|f, X|$ die *halbe* Zahl der zu X inzidenten Kanten von f bedeutet. Die volle Anzahl der zu X inzidenten Kanten von f heißt *der Grad von X in f.* Ist der Grad gerade, so ist $|f, X|$ eine ganze Zahl, ist er ungerade, so ist $|f, X|$ eine halbe Zahl. Bezeichnet $\sum\limits_X$ die Summation nach sämtlichen Punkten des Graphen, so folgt aus

$$\sum_X |f, X| = \sum_X \sum_x f(x)\,(x, X) = \sum_x f(x) \big(\sum_X (x, X)\big) = \sum_x f(x),$$

daß für jede beliebige Kette f die Anzahl derjenigen Punkte, die in f einen ungeraden Grad besitzen, gerade ist.

Wir nennen jetzt eine Kette f *geschlossen* (Zyklus), wenn sie keinen Punkt ungeraden Grades (in f) enthält.

Gibt es zu der Kette f eine Folge $X_0 x_1 X_1 \ldots X_{n-1} x_n X_n$ $(n \geqq 1)$ mit lauter verschiedenen Punkten, und sind X_{i-1} und X_i die Randpunkte von x_i $(i=1, \ldots, n)$, gilt ferner $f(x_i)=1$ $(i=1, \ldots, n)$ und $f(x)=0$, wenn x mit keiner der x_i zusammenfällt, so heißt f ein *Weg*. $X_0 x_1 X_1 \ldots X_{n-1} x_n X_n$ ist eine zu f gehörige Folge, X_0 und X_n sind die Randpunkte von f.

Die *geschlossene* Kette k wollen wir einen *Kreis* nennen, wenn entweder $k=0$ ist, oder wenn es eine solche Kante x gibt, für die $f=k-x$ ein Weg ist. Nach dieser Definition ist auch eine solche Kette $f(x)$ ein Kreis, die eine Kante x' mit $f(x')=2$ enthält und für die $f(x)=0$ für $x \neq x'$ ist. Einen solchen Kreis werden wir eine *zweifache Kante* nennen.

Dem Satz (1. 2. 7) entsprechende folgende Behauptung kann man leicht durch Induktion beweisen:

(4. 4. 3) *Jede geschlossene Kette kann man als Summe von Kreisen darstellen.*

Durch eine einfache Schlußweise, die dem Beweis von (1. 2. 9) ähnlich ist, gelangt man aus (4. 4. 3) zum folgenden Satz:

(4. 4. 4) *Jede ungeschlossene Kette f kann man als Summe von einer geschlossenen Kette und von solchen Wegen, die keine gemeinsame Randpunkte haben, darstellen. Jeder Weg verbindet zwei solche Punkte, die in f ungeraden Grad besitzen.*

(4. 4. 5) Wir nennen die Kette f *punktaufnehmbar* bzw. *punktfüllend*, wenn für jedes X $|f, X| \leqq \varphi(X)$ bzw. $|f, X| \geqq \varphi(X)$ gilt. Wir bezeichnen die Menge der punktaufnehmbaren bzw. punktfüllenden Ketten mit F_a bzw. F_f, die Menge der punktaufnehmbaren bzw. punktfüllenden *geschlossenen* Ketten mit G_a bzw. G_f $(G_a \subset F_a,\ G_f \subset F_f)$.

(4. 4. 6) *Es gilt*

$$\max_{f \in F_a} \psi[f] = \max_{g \in G_a} \psi[g].$$

Beweis. Die Existenz der Maximumwerte kann man leicht einsehen, und so genügt es nur zu zeigen, daß es zu jedem f von F_a ein g von G_a mit $\psi[g] \geqq \psi[f]$ gibt.

Es sei f ein beliebiges Element von F_a. Ist f geschlossen, so ist unsere Behauptung trivial. Ist f nicht geschlossen, so betrachten wir eine dem Satz (4. 4. 4) entsprechende Darstellung $f=g'+\sum_{i=1}^{m} f_i$ (g' ist geschlossen, die f_i sind Wege ohne gemeinsame Randpunkte $(m \geqq 1)$).

Wir wollen jeden Weg f_i durch eine geschlossene Kette g_i ersetzen. Betrachten wir nun einen Weg f_i und es sei $X_0 x_1 X_1 \ldots X_{n-1} x_n X_n$ eine zu f_i

gehörige Folge. Wir konstruieren folgende Summen:

$$\psi_1 = \sum_{j=1}^{r} \psi(x_{2j-1}) \qquad (n-1 \leqq 2r-1 \leqq n),$$

$$\psi_2 = \sum_{j=1}^{s} \psi(x_{2j}) \qquad (n-1 \leqq 2s \leqq n).$$

Die Definition von g_i lautet: Ist $\psi_1 \geqq \psi_2$, so sei $g_i(x_{2j-1}) = 2$ $(j = 1, \ldots, r)$, und für jede andere Kante x sei $g_i(x) = 0$. Ist $\psi_1 < \psi_2$, so sei $g_i(x_{2j}) = 2$ $(j = 1, \ldots, s)$, und für jede andere Kante x sei $g_i(x) = 0$.

Wie ersichtlich, ist g_i geschlossen und es gilt $\psi[g_i] \geqq \psi[f_i]$. Außerdem besteht $|g_i, X| = |f_i, X|$ für jedes X mit Ausnahme von X_0 und X_n und es gelten

$$|g_i, X_0| = |f_i, X_0| \pm \frac{1}{2}, \qquad |g_i, X_n| = |f_i, X_n| \pm \frac{1}{2}.$$

Daraus folgt ($\varphi(x)$ ist ganzwertig!), daß die Kette $g = g' + \sum_{i=1}^{m} g_i$ ein Element von G_a ist und $\psi[g] \geqq \psi[f]$ gilt.

Ähnlicherweise kann man auch die folgende Behauptung beweisen:

(4. 4. 7) *Es gilt*

$$\min_{f \in F_f} \psi[f] = \min_{g \in G_f} \psi[g].$$

(4. 4. 8) Wir nennen ein Punktsystem π *2-aufnehmbar* bzw. *2-füllend,* wenn die *halbe* Anzahl der Punkte von π, die zu einer jeden Kante x inzident sind, nicht größer bzw. nicht kleiner als $\psi(x)$ ist.

Unter Berücksichtigung der zweifachen Kanten kann man leicht einsehen, daß ein Punktsystem π dann und nur dann 2-aufnehmbar bzw. 2-füllend ist, wenn es „kreisaufnehmbar" bzw. „kreisfüllend" ist, d. h. wenn für jeden beliebigen Kreis k $|\pi, k| \leqq \psi[k]$ bzw. $|\pi, k| \geqq \psi[k]$ gilt, wo $|\pi, k|$ die Anzahl der auf k liegenden Punkte von π bedeutet.

Bezeichnen wir mit Π_a bzw. Π_f die Menge der 2-aufnehmbaren bzw. 2-füllenden Punktsysteme, so können wir den folgenden Satz aussprechen:

(4. 4. 9) *Es gilt*

$$\max_{g \in G_a} \psi[g] = \min_{\pi \in \Pi_f} \varphi[\pi].$$

BEWEIS. Bilden wir aus Γ den gerichteten Graphen Γ' in solcher Weise, daß wir zu einer jeden Kante x von Γ je eine neue Kante $\bar{x}$ mit den gleichen Randpunkten hinzunehmen und dann x und $\bar{x}$ mit entgegengesetzten Richtungen versehen (s. [1], S. 217 und [6], S. 211). Es sei $\psi(\bar{x}) = \psi(x)$. Man kann in natürlicher Weise zu jedem Kreis k von Γ je einen *positiven*

Kreis k' von Γ' mit den gleichen Punkten und mit dem gleichen ψ-Wert zuordnen — und umgekehrt. Mit Hilfe dieser Zuordnungen und (4. 4. 3) kann man zu einem jeden Element von G_a ein den gleichen ψ-Wert besitzendes, punktaufnehmbares positives Kreissystem von Γ' konstruieren — und umgekehrt. Man kann ferner leicht nachweisen, daß die Punktsysteme in Γ und in Γ' gleichzeitig kreisfüllend sind oder nicht.

Nach den obigen Behauptungen können wir nun feststellen: Der auf Γ' angewendete Satz (3. 2. 6) ergibt den auf Γ ausgesprochenen Satz (4. 4. 9).

Ähnlicherweise kann man aus (3. 2. 7) den folgenden Satz ableiten:

(4. 4. 10) *Es gilt*

$$\min_{g \in G_f} \psi[g] = \max_{\pi \in \Pi_a} \varphi[\pi].$$

(4. 4. 11) Wir nennen das *Kantensystem* $\varepsilon = (x_1, \ldots, x_n)$ *2-aufnehmbar* bzw. *2-füllend,* wenn für einen jeden Punkt X die *halbe* Zahl der Kanten von ε, die zu X inzident sind, nicht größer bzw. nicht kleiner als $\varphi(X)$ ist. Diese Kantensysteme entsprechen offensichtlich den punktaufnehmbaren bzw. punktfüllenden Ketten.

Nach (4. 4. 6) und (4. 4. 9) bzw. nach (4. 4. 7) und (4. 4. 10) können wir dann die folgenden Sätze aussprechen:

(4. 4. 12) SATZ. *Das Maximum der ψ-Werte der 2-aufnehmbaren Kantensysteme ist gleich dem Minimum der φ-Werte der 2-füllenden Punktsysteme.*

(4. 4. 13) SATZ. *Das Minimum der ψ-Werte der 2-füllenden Kantensysteme ist gleich dem Maximum der φ-Werte der 2-aufnehmbaren Punktsysteme.*

BEMERKUNG. Man kann die Sätze (4. 4. 9) und (4. 4. 12) bzw. (4. 4. 10) und (4. 4. 13) auch aus dem Satz (4. 2. 7) bzw. (4. 3. 3) ableiten.

§ 5

Als Anwendung der gewonnenen Maximum-Minimum Sätze leiten wir in diesem Paragraphen einige Bedingungen für die Existenz von speziellen Faktoren gerichteter und ungerichteter, endlicher Graphen ab.

5. 1. 1-Faktoren von gerichteten, endlichen Graphen

(5. 1. 1) Es sei Γ ein *gerichteter, endlicher* Graph, der N Punkte enthält. Unter einem 1-*Faktor* von Γ verstehen wir ein positives Kreissystem mit folgender Eigenschaft: Durch jeden Punkt von Γ geht ein und nur ein Kreis des Systems ([16], S. 922).

Die gesamte Anzahl der Kanten, die zu den Kreisen eines 1-Faktors gehören, ist gleich N.

Definieren wir die Funktionen $\varphi(X)$ und $\psi(x)$ so, daß für jeden Punkt X bzw. für jede Kante x $\varphi(X)=1$ bzw. $\psi(x)=1$ gelte, so ist ein positives Kreissystem $\varkappa$ dann und nur dann punktaufnehmbar bzw. punktfüllend, wenn durch jeden Punkt höchstens bzw. mindestens ein Kreis des Systems geht. Ferner gibt der ψ-Wert des Systems die Summe der Anzahlen der Punkte der zu dem System gehörigen Kreise an, da die Anzahl der Punkte eines Kreises der Anzahl seiner Kanten gleich ist. Daraus folgt, daß Γ dann und nur dann einen 1-Faktor besitzt, wenn das Maximum der ψ-Werte der punktaufnehmbaren positiven Kreissysteme, oder das Minimum der ψ-Werte der punktfüllenden positiven Kreissysteme gleich N ist. Da jetzt $\varphi[\pi]$ die Zahl der Punkte des Punktsystems π angibt, kann man nach (3. 2. 6) und (3. 2. 7) folgenden — zwei duale Behauptungen enthaltenden — Satz aussprechen:

(5. 1. 2) SATZ. *Ein gerichteter, endlicher Graph mit N Punkten besitzt dann und nur dann einen* 1*-Faktor, wenn es zu einer jeden Folge $X_1, \ldots, X_n$, die weniger (bzw. mehr) als N Punkte enthält ($n \geqq 1$; derselbe Punkt kann in der Folge mehrmals auftreten), einen solchen positiven Kreis gibt, der von der Folge weniger (bzw. mehr) Elemente enthält, als die Anzahl der Punkte des Kreises ausmacht.*

(5. 1. 3) Aus (5. 1. 2) beweisen wir folgenden Satz von ORE ([15], S. 405, Theorem 2. 3. 2):

Jeder reguläre, gerichtete, endliche Graph besitzt einen 1*-Faktor.*

Einen gerichteten Graphen nennt man *regulär,* wenn für jeden Punkt die Anzahl der auslaufenden Kanten, sowie die Anzahl der einlaufenden Kanten die gleiche Zahl j ist ($j \geqq 1$).

Die Kette $z_0=1$, die jede Kante des Graphen mit der Multiplizität 1 enthält, ist jetzt ein positiver Zyklus. Betrachten wir nun eine Zerlegung von z_0 in positive Kreise k_i: $z_0=k_1+\cdots+k_m$ ($m \geqq 1, k_i \neq 0$ ($i=1,\ldots,m$)). Es gehen dann durch jeden Punkt genau j Kreise von $k_1,\ldots,k_m$. Bezeichnet $\nu(k_i)$ auch ferner die Anzahl der Kanten bzw. der Punkte von k_i und $|\pi, k_i|$ die Anzahl derjenigen Punkte eines Systems $\pi=(X_1,\ldots,X_n)$, die auf k_i liegen, so bestehen folgende Gleichungen:

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{m} |\pi, k_i| = jn, \quad \sum_{i=1}^{m} \nu(k_i) = jN,$$

da jeder Punkt in den linksstehenden Summen genau j-mal vorkommt.

Gilt daher $|\pi, k_i| \geqq \nu(k_i)$ für $i=1,\ldots,m$, so folgt aus (*), daß $n \geqq N$ ist. Wenn also $n<N$ ist, so muß ein Kreis k_i existieren, für den $|\pi, k_i|<\nu(k_i)$ gilt. Daraus folgt aber nach (5. 1. 2), daß der Graph einen 1-Faktor besitzt.

5.2. Q-Faktoren von ungerichteten, endlichen Graphen

(5.2.1) Es sei Γ ein *endlicher, ungerichteter* Graph, der N Punkte besitzt. Unter einem *Q-Faktor* von Γ verstehen wir ein solches Kreissystem von Γ, bei dem durch jeden Punkt von Γ ein und nur ein Kreis des Systems geht. Dabei wird eine durch eine einzige Kante repräsentierte „zweifache Kante" als Kreis betrachtet ([16], S. 930).

Es sei $\varkappa$ ein beliebiger Q-Faktor. Nehmen wir die Kanten derjenigen Kreise von $\varkappa$, die mehr als zwei Punkte enthalten, je einmal, und diejenigen Kanten, welche die in $\varkappa$ vorkommenden zweifachen Kanten repräsentieren, je zweimal in einer Folge an. So erhalten wir ein solches Kantensystem, bei dem zu jedem Punkt von Γ genau zwei Kanten des Systems inzident sind. Umgekehrt kann man jedes solche Kantensystem in der angedeuteten Weise aus einem Q-Faktor herleiten. Es ist klar, daß in den erwähnten Kantensystemen die Anzahl der Kanten gleich N ist.

Es seien wieder $\varphi(X)\equiv 1$ und $\psi(x)\equiv 1$. In diesem Falle ist ein Kantensystem ε dann und nur dann 2-aufnehmbar bzw. 2-füllend, wenn zu jedem Punkt höchstens bzw. mindestens *zwei* Kanten von ε inzident sind. Ferner gibt $\psi[\varepsilon]$ die Anzahl der Kanten von ε an.

Daraus folgt, daß Γ dann und nur dann einen Q-Faktor besitzt, wenn das Maximum bzw. das Minimum der Kantenanzahl der 2-aufnehmbaren bzw. 2-füllenden Kantensysteme gleich N ist. Da $\varphi[\pi]$ wieder die Anzahl der Punkte des Punktsystems π angibt, kann man aus (4.4.12) und (4.4.13) folgenden, zwei duale Behauptungen enthaltenden, Satz ableiten:

(5.5.2) SATZ. *Ein ungerichteter, endlicher Graph mit N Punkten besitzt dann und nur dann einen Q-Faktor, wenn zu jeder Folge $X_1, \ldots, X_n$, die weniger (bzw. mehr) als N Punkte enthält ($n\geq 1$; derselbe Punkt kann in der Folge mehrmals vorkommen), eine solche Kante existiert, zu der weniger (bzw. mehr) als zwei Punkte der Folge inzident sind.*

(5.2.3) Wir zeigen, daß aus (5.2.2) ein Tuttescher Satz über Q-Faktoren folgt ([16], S. 930):

Ein endlicher, ungerichteter Graph soll ein $\bar{Q}$-Graph heißen, wenn zwei Teilmengen Φ_1 und Φ_2 der Punkte von Γ existieren, die folgende Eigenschaften besitzen:

(1) Φ_1 und Φ_2 haben keinen gemeinsamen Punkt.

(2) Φ_1 enthält mehr Punkte als Φ_2.

(3) Gehört der eine Randpunkt einer Kante zu Φ_1, so gehört der andere zu Φ_2.

Nun besagt der Tuttesche Satz:

Ein endlicher Graph besitzt dann und nur dann einen Q-Faktor, wenn er kein $\bar{Q}$-Graph ist.

BEWEIS. Es bezeichne N die Zahl der Punkte des Graphen Γ.

(I) Wir nehmen zuerst an, daß ein solches, weniger als N Punkte enthaltendes Punktsystem existiert, bei dem jede Kante von Γ mindestens zu zwei Punkten des Systems inzident ist. Es sei $\pi=(X_1, \ldots, X_n)$ ein solches System *mit minimaler Anzahl von Punkten.*

Es existieren Punkte, die in π nicht vorkommen. Bezeichnen wir diese mit $U_1, \ldots, U_r$ $(r \geqq 1)$. Ist der eine der Randpunkte einer Kante ein Punkt U_i, so muß der andere in π mindestens zweimal vorkommen. Aus der Minimaleigenschaft von n folgt, daß in π kein Punkt mehr als zweimal vorkommen kann. Bezeichnen wir dann die in π zweimal vorkommenden Punkte mit $V_1, \ldots, V_s$, und die Anzahl derjenigen Punkte, die in π nur einmal vorkommen, mit t. So gilt $n=2s+t$ und wir erhalten aus $n<N$ und $r+s+t=N$ die Ungleichung $s<r$. Die Mengen $\Phi_1=(U_1, \ldots, U_r)$ und $\Phi_2=(V_1, \ldots, V_s)$ genügen demnach den Bedingungen (1), (2), (3), Γ ist also ein $\bar{Q}$-Graph.

(II) Umgekehrt nehmen wir jetzt an, daß Γ ein $\bar{Q}$-Graph ist und es seien $\Phi_1=(U_1, \ldots, U_r)$ und $\Phi_2=(V_1, \ldots, V_s)$ zwei, den Bedingungen (1), (2), (3) genügende Mengen.

Bezeichnen wir jene Punkte, die weder in Φ_1 noch in Φ_2 vorkommen, mit $X_1, \ldots, X_t$. Existieren solche Punkte nicht, so sei $t=0$. Die Zahl der Punkte des Systems $\pi=(V_1, \ldots, V_s, V_1, \ldots, V_s, X_1, \ldots, X_t)$ ist $n=2s+t<$ $<r+s+t=N$. Offensichtlich sind nun zu jeder Kante von Γ mindestens zwei Punkte von π inzident.

Aus (I), (II) und (5. 2. 2) folgt der Tuttesche Satz.

(5. 2. 4) Man kann ähnlich wie unter (5. 1. 3) aus (5. 2. 2) den folgenden Satz beweisen:

Jeder endliche, ungerichtete, reguläre Graph besitzt einen Q-Faktor.

Ein ungerichteter Graph heißt *regulär,* wenn zu jedem seiner Punkte gleichviele Kanten inzident sind.

Wir bemerken noch, daß der letzte Satz auch aus dem bekannten Petersenschen Satz, laut dessen jeder endliche, reguläre Graph geraden Grades einen Faktor zweiten Grades besitzt, folgt (s. [13], S. 161).

§ 6

In diesem Paragraphen wollen wir die Sätze (2. 1. 6) und (2. 1. 7) mit Hilfe des Dualitätssatzes der Theorie der linearen Programmierung ([11], S. 58—65) ableiten.

(6. 1) Wir führen zuerst geeignete Bezeichnungen ein. Es seien die Punkte bzw. die Grundkanten des gerichteten, endlichen Graphen Γ $X_1, \ldots, X_m$ bzw. $x_1, \ldots, x_n$. Wir setzen $(x_i, X_j) = \frac{1}{2} a_{ij}$. (Die Größen a_{ij} können nur die Werte 0, 1, —1 annehmen. Die Matrix $[a_{ij}]$ ist die „Kante-Punkt" Inzidenzmatrix von Γ.)

Ist f eine beliebige Kette, so sei $f_i = f(x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Wir können die Kette f durch den Vektor $f = [f_1, \ldots, f_n]$ ersetzen. f ist positiv, wenn $f_i \geqq 0$ ist $(i = 1, \ldots, n)$. Es ist

$$(f, X_j) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i$$

und eine Kette z ist dann ein Zyklus, wenn

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} z_i = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

besteht.

Es seien $\varphi_i = \varphi(x_i)$, $\psi_i = \psi(x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Dann gelten

$$\varphi[f] = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i f_i, \qquad \psi[z] = \sum_{i=1}^{n} \psi_i z_i.$$

Der positive Zyklus z ist kanteaufnehmbar bzw. kantefüllend, wenn $z_i \leqq \varphi_i$ bzw. $z_i \geqq \varphi_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ besteht.

Für den Inzidenzgrad der positiven Ketten f und z gilt

$$|f, z| = \sum_{i=1}^{n} f_i z_i.$$

Die positive Kette f ist kreisaufnehmbar bzw. kreisfüllend, wenn für jeden positiven Zyklus z $|f, z| \leqq \psi[z]$ bzw. $|f, z| \geqq \psi[z]$ gilt (s. (2. 1. 3)).

(6. 2) Um den Satz (2. 1. 6) zu behandeln, verzichten wir vorläufig auf die Ganzzahligkeit der vorkommenden Werte. Dann bedeutet die Bestimmung der maximalen ψ-Wert besitzenden, positiven, kanteaufnehmbaren Zyklen die Aufsuchung derjenigen Zahlensysteme $z_1, \ldots, z_n$, die den linearen Ausdruck

(1) $$\psi_1 z_1 + \cdots + \psi_n z_n$$

maximal machen, während sie folgende Bedingungen erfüllen:

(2) $$z_1 \leqq \varphi_1, \ldots, z_n \leqq \varphi_n;$$

(3) $$\begin{matrix} a_{11} z_1 + \cdots + a_{n1} z_n = 0, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{1m} z_1 + \cdots + a_{nm} z_n = 0; \end{matrix}$$

(4) $$z_1 \geqq 0, \ldots, z_n \geqq 0.$$

Dies ist ein lineares Programmierungsproblem mit *gemischten* Bedingungen.

Zu diesem „ursprünglichen" Problem gehört das folgende „duale" Problem (s. [11], S. 63):

Man soll diejenigen Zahlensysteme $f_1, \ldots, f_n, s_1, \ldots, s_m$ bestimmen, die den linearen Ausdruck

$$\varphi_1 f_1 + \cdots + \varphi_n f_n \tag{5}$$

minimal machen, während sie folgende Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} f_1 + a_{11} s_1 + \cdots + a_{1m} s_m &\geqq \psi_1, \\ &\vdots \\ f_n + a_{n1} s_1 + \cdots + a_{nm} s_m &\geqq \psi_n; \end{aligned} \tag{6}$$

$$f_1 \geqq 0, \ldots, f_n \geqq 0. \tag{7}$$

(Die Erfüllung der Bedingungen $s_1 \geqq 0, \ldots, s_m \geqq 0$ wird nicht gefordert!)

Die in (2. 1. 6) gestellte Annahme $\varphi \geqq 0$, d. h. die Annahmen $\varphi_1 \geqq 0, \ldots, \varphi_n \geqq 0$ sichern, daß ein Wertsystem existiert, welches den Bedingungen (2), (3), (4) genügt. ($z_1 = 0, \ldots, z_n = 0$ ist nämlich ein solches System.)

Die Existenz eines Wertsystems $f_1, \ldots, f_n, s_1, \ldots, s_m$, das den Bedingungen (6) und (7) genügt, ist trivial. Nun folgt aus diesen beiden Existenzen nach dem Dualitätssatz (genauer nach dem Existenz- und Dualitätssatz) das Vorhandensein eines den Bedingungen (2), (3), (4) genügenden Wertsystems $z_1, \ldots, z_n$, welches (1) maximal macht, sowie das Vorhandensein eines den Bedingungen (6), (7) genügenden Wertsystems $f_1, \ldots, f_n, s_1, \ldots, s_m$, welches (5) minimal macht; ferner folgt, daß das Maximum von (1) gleich dem Minimum von (5) ist. ([11], S. 60—61.)

Bei einem bestimmten Wertsystem $f_1, \ldots, f_n$ hat aber das Ungleichungssystem (6), laut eines bekannten Satzes ([4], S. 100), dann und nur dann eine Lösung in den Unbekannten $s_1, \ldots, s_m$, wenn für sämtliche die Bedingungen (3) und (4) erfüllende Wertsysteme $z_1, \ldots, z_n$ stets

$$z_1(\psi_1 - f_1) + \cdots + z_n(\psi_n - f_n) \leqq 0,$$

d. h.

$$z_1 f_1 + \cdots + z_n f_n \geqq z_1 \psi_1 + \cdots + z_n \psi_n$$

gilt. Das bedeutet jedoch nach (6. 1), daß die Kette $[f_1, \ldots, f_n] = f$ kreisfüllend ist. Das duale Problem ist daher gleichwertig mit der Aufsuchung solcher positiven, kreisfüllenden Ketten $f = [f_1, \ldots, f_n]$, deren φ-Werte minimal sind. Abgesehen von den Ganzwertigkeiten ergibt also der Dualitätssatz tatsächlich den Satz (2. 1. 6).

Um den vollständigen, auch die Ganzwertigkeiten berücksichtigenden Satz (2. 1. 6) zu erhalten, ziehen wir in Betracht, daß die Matrix $[a_{ij}]$ die Inzidenzmatrix von Γ ist. Man kann nun leicht zeigen, daß die oben vorkommenden Programmierungsprobleme, sowie die zu diesen gehörigen „kanonischen" Probleme ([11], S. 54) *unimodulare* Matrizen besitzen. (Eine Matrix heißt unimodular, wenn sämtliche aus ihr gebildeten Minordeterminanten nur die Werte 0, 1 und -1 annehmen können.) Daraus folgt jedoch (s. [12]) für ganzzahlige Werte von φ_i und ψ_i, daß solche ganze Zahlen $z_1, \ldots, z_n$ bzw. $f_1, \ldots, f_n, s_1, \ldots, s_m$ existieren, die (1) bzw. (5) maximal bzw. minimal machen und die gestellten Bedingungen erfüllen. Damit ist der Beweis von (2. 1. 6) vollendet.

(6. 3) Um den Satz (2. 1. 7) zu behandeln, verzichten wir wieder erst auf die Ganzzahligkeiten. Nach (6. 1) bedeutet dann die Bestimmung der den minimalen ψ-Wert besitzenden positiven, kantefüllenden Zyklen die Aufsuchung derjenigen Wertsysteme $z_1, \ldots, z_n$, die den Ausdruck

$$\psi_1 z_1 + \cdots + \psi_n z_n \tag{8}$$

minimal machen, während sie folgende Bedingungen erfüllen:

$$z_1 \geqq \varphi_1, \ldots, z_n \geqq \varphi_n; \tag{9}$$

$$\begin{array}{c} a_{11} z_1 + \cdots + a_{n1} z_n = 0, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{1m} z_1 + \cdots + a_{nm} z_n = 0; \end{array} \tag{10}$$

$$z_1 \geqq 0, \ldots, z_n \geqq 0. \tag{11}$$

Zu diesem *ursprünglichen* Programmierungsproblem gehört das folgende *duale* Problem: Man suche diejenigen Wertsysteme $f_1, \ldots, f_n, s_1, \ldots, s_m$, die den Ausdruck

$$\varphi_1 f_1 + \cdots + \varphi_n f_n \tag{12}$$

maximal machen, während sie folgende Bedingungen erfüllen:

$$\begin{array}{c} f_1 + a_{11} s_1 + \cdots + a_{1m} s_m \leqq \psi_1, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ f_n + a_{n1} s_1 + \cdots + a_{nm} s_m \leqq \psi_m; \end{array} \tag{13}$$

$$f_1 \geqq 0, \ldots, f_n \geqq 0. \tag{14}$$

(Die Bedingungen $s_1 \geqq 0, \ldots, s_m \geqq 0$ werden nicht gefordert!)

Aus der in (2. 1. 7) gestellten Annahme, nach der jede Kante x, die einen positiven φ-Wert besitzt, in einem positiven Kreis enthalten ist, folgt: Es existiert zu jedem solchen Index i, für den $\varphi_i > 0$ gilt, ein solches System $z_1, \ldots, z_n$, welches (10) und (11) erfüllt und in dem $z_i > 0$ ist. Durch lineare Kombination solcher Wertsysteme kann man jedoch leicht ein solches System $z_1, \ldots, z_n$ erhalten, das sämtliche Bedingungen (9), (10), (11) des ursprünglichen Problems erfüllt.

Hat weiter das Ungleichungssystem

$$\begin{array}{c} a_{11} s_1 + \cdots + a_{1m} s_m \leqq \psi_1, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1} s_1 + \cdots + a_{nm} s_m \leqq \psi_m \end{array} \tag{15}$$

eine Lösung in $s_1, \ldots, s_m$, so existiert offensichtlich ein Wertsystem $f_1, \ldots, f_n$,

$s_1, \ldots, s_m$, das die Bedingungen (13) und (14) des dualen Problems erfüllt. Die Lösbarkeit von (15) ist mit derjenigen Bedingung gleichwertig, daß für jedes Wertsystem $z_1, \ldots, z_n$, welches (10) und (11) erfüllt,

$$\psi_1 z_1 + \cdots + \psi_n z_n \geqq 0$$

gilt ([4], S. 100). Diese Bedingung ist aber gleichbedeutend mit der in (2. 1. 7) gestellten Annahme, daß für jeden positiven Kreis k $\psi[k] \geqq 0$ ist (s. (2. 4. 1)).

Da so die in (2. 1. 7) gestellten Annahmen die Erfüllbarkeit von (9), (10) und (11), sowie von (13) und (14) sichern, folgt nach dem Dualitätssatz die Existenz solcher Wertsysteme $z_1, \ldots, z_n$ und $f_1, \ldots, f_n, s_1, \ldots, s_m$, welche die gestellten Bedingungen erfüllen und (8) bzw. (12) minimal bzw. maximal machen. Es folgt ferner, daß das Minimum von (8) gleich dem Maximum von (12) ist.

Bei bestimmten Werten von $f_1, \ldots, f_n$ hat jedoch (13) dann und nur dann eine Lösung in $s_1, \ldots, s_m$ (s. [4], S. 100), wenn für jedes Wertsystem $z_1, \ldots, z_n$, welches (10) und (11) erfüllt, stets

$$z_1(\psi_1 - f_1) + \cdots + z_n(\psi_n - f_n) \geqq 0,$$

d. h.

$$z_1 f_1 + \cdots + z_n f_n \leqq z_1 \psi_1 + \cdots + z_n \psi_n$$

gilt, d. h. wenn die Kette $[f_1, \ldots, f_n] = f$ kreisaufnehmbar ist. Das duale Problem ist demnach gleichwertig mit der Aufsuchung derjenigen positiven, kreisaufnehmbaren Ketten $f = [f_1, \ldots, f_n]$, deren φ-Werte maximal sind. Von den Ganzwertigkeiten abgesehen ergibt also der Dualitätssatz tatsächlich den Satz (2. 1. 7).

Den vollständigen Satz (2. 1. 7) kann man in ähnlicher Weise erhalten, wie bei (2. 1. 6).

Wir bemerken noch, daß man — abgesehen von den Ganzwertigkeiten — auch die Sätze (3. 2. 6) und (3. 2. 7) aus dem Dualitätssatz unmittelbar herleiten kann. Bei den Beweisen der Ganzwertigkeiten stößt man jedoch hier auf Schwierigkeiten.

(Eingegangen am 1. September 1958.)

Literaturverzeichnis

[1] G. B. DANTZIG and D. R. FULKERSON, On the max-flow min-cut theorem of networks, Linear Inequalities and Related Systems, *Annals of Math. Study*, **38** (1956), S. 215—221.

[2] R. P. DILWORTH, A decomposition theorem for partially ordered sets, *Annals of Math.*, **51** (1950), S. 161—166.

[3] J. EGERVÁRY, Matrixok kombinatorikus tulajdonságairól, *Mat. és Fiz. Lapok*, **38** (1931), S. 16—27.

[4] KY FAN, On systems of linear inequalities, *Annals of Math. Study*, **38** (1956), S. 99—156.

[5] L. R. FORD, JR. and D. R. FULKERSON, Maximal flow through a network, *Canadian Journal of Math.*, **8** (1956), S. 399—404.

[6] L. R. FORD, JR. and D. R. FULKERSON, A simple algorithm for finding maximal network flows and an application to the Hitchcock problem, *Canadian Journal of Math.*, **9** (1957), 210 218.

[7] D. GALE, A theorem on flows in networks, *Pacific Journal of Math.*, **7** (1957), S. 1073—1082.

[8] T. GALLAI (GRÜNWALD), Ein neuer Beweis eines Mengerschen Satzes, *Journal London Math. Soc.*, **13** (1938), S. 188—192.

[9] T. GALLAI, Gráfokkal kapcsolatos maximum-minimum tételek. I, *MTA Mat. és Fiz. Oszt. Közl.*, **7** (1957), S. 305—338.

[10] T. GALLAI, Gráfokkal kapcsolatos maximum-minimum tételek. II, *MTA Mat. és Fiz. Oszt. Közl.*, **8** (1958), S. 1—40.

[11] A. J. GOLDMAN and A. W. TUCKER, Theory of linear programming, *Annals of Math. Study*, **38** (1956), S. 53—97.

[12] A. J. HOFFMANN and J. B. KRUSKAL, Integral boundary points of convex polyhedra, *Annals of Math. Study*, **38** (1956), S. 223—246.

[13] D. KÖNIG, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* (Leipzig, 1936).

[14] K. MENGER, *Kurventheorie* (Leipzig und Berlin, 1932), S. 221—228.

[15] O. ORE, Studies on directed graphs. I, *Annals of Math.*, **63** (1956), S. 383—406.

[16] W. T. TUTTE, The 1-factors of oriented graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953), S. 922—931.

Technikai szerkesztő: Molnár Ferenc

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki felelős: Farkas Sándor

A kézirat beérkezett: 1958. IX. 16. — Terjedelem: 16,75 (A/5) ív

Szegedi Nyomda Vállalat, Szeged 58-3501 Felelős vezető: Vincze György

The Acta Mathematica publish papers on mathematics in English, German, French and Russian.

The Acta Mathematica appear in parts of various size, making up volumes.

Manuscripts should be addressed to:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Mathematica is 110 forints a volume. Orders may be placed with *„Kultura“* Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest, VI., Népköztársaság útja 21. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Mathematica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des mémoires du domaine des sciences mathématiques.

Les Acta Mathematica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux *„Kultura“* (Budapest, VI, Népköztársaság útja 21. Compte-courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

„Acta Mathematica“ публикует трактаты из области математических наук на русском немецком, английском и французском языках.

„Acta Mathematica“ выходит отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена *„Acta Mathematica“* — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет *„Kultura“* (*Budapest, VI., Népköztársaság útja 21.* Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

48,— forint

INDEX