ACTA MATHEMATICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

G. ALEXITS, E. EGERVÁRY, L. FEJÉR, CH. JORDÁN,
L. KALMÁR, L. RÉDEI, A. RÉNYI, F. RIESZ,
B. SZ.-NAGY, J. SZ.-NAGY, P. TURÁN

REDIGIT

G. HAJÓS

TOMUS I. FASCICULUS 1

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1950

ACTA MATHEMATICA HUNGARICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK MATEMATIKAI KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST VI, SZTÁLIN-ÚT 31

Az Acta Mathematica orosz, francia, angol és német nyelven közöl értekezéseket a matematika köréből.

Az Acta Mathematica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg: 20—30 ív terjedelemben, több füzet alkot egy kötetet. Évenként általában egy kötet jelenik meg.

A közlésre szánt kéziratok, lehetőleg géppel írva, a következő címre küldendők:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Mathematica előfizetési ára kötetenként 60 forint. Megrendelhető a „Kultúra" Könyv és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest V, Akadémia-u. 10. Bankszámla: 929040. sz.), vagy külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

„Acta Mathematica" издает трактаты из области математических наук на русском, французском, английском и немецком языках.

„Acta Mathematica" выходит в брошюрах переменного объема (20—30 печатных листов) несколько выпусков объединяются в одном томе.

Ежегодно предвидено издание одного тома.

Предназначенные для публикации авторские рукописи следует направлять, по возможности машинописью, по следующему адресу:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

Поэтому же адресу направляется всякая корреспонденция для редакции и администрации.

Подписная цена „Acta Mathematica" — 60 форинтов за том. Заказы принимает Предприятие по внешней торговле книг и газет „Kultúra" (Budapest V, Akadémia-u. 10. Счет Банка № 929040) или его заграничные представительства и уполномоченные.

HUNGARICA ACTA MATHEMATICA

AUCTORITATE

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

EDIDIT

E. EGERVÁRY

VOL. I.

BUDAPESTINI

1946–1949

INDEX

	fasc.	p.
Aczél, J. and *St. Fenyő*, On fields of forces in which centres of gravity can be defined	III.	53—60
Egerváry, E., On a new form of the differential equations of the problem of three bodies	I.	1—18
— On a generalization of a theorem of Sylvester	II.	53—57
Fenyő, St. and *J. Aczél*, On fields of forces in which centres of gravity can be defined	III.	53—60
Gyires, B., Funktionensysteme mit vertauschbaren Gramschen Matrizen	IV.	28—32
— Darstellung symmetrischer regulärer Matrizen als Produkt von zueinander transponierten Matrizen	IV.	33—35
Jordán, Ch., Note on approximation and graduation by orthogonal moments	IV.	4—9
Rapcsák, A., Kurven auf Hyperflächen im Finslerschen Raume	IV.	21—29
Rényi, A., On the minimal number of terms of the square of a polynomial	II.	30—34
— Some remarks on independent random variables	IV.	17—20
Sz.-Nagy, B., Sur une classe générale de procédés de sommation pour les séries de Fourier	III.	14—52
Sz.-Nagy, Gy., Über den Wertvorrat gebrochener rationaler Funktionen in Kreisbereichen	III.	1—13
— Darstellung algebraischer Flächen von Gestalt einer Kurve	IV.	10—11
— Über rationale Funktionen, deren Nullstellen und Pole an entgegengesetzten Seiten einer Geraden liegen	IV.	12—16
Turán, P., On the gap-theorem of Fabry	II.	21—27
Varga, O., Über die Lösung differentialgeometrischer Fragen in der nichteuklidischen Geometrie unter gleichzeitiger Verwendung homogener und inhomogener Koordinaten	II.	35—52
— Vektorfelder, deren kovariante Ableitung längs einer vorgegebenen Kurve verschwindet	IV.	1—3

ACTA MATHEMATICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

G. ALEXITS, E. EGERVÁRY, L. FEJÉR, CH. JORDÁN,
L. KALMÁR, L. RÉDEI, A. RÉNYI, F. RIESZ,
B. SZ.-NAGY, GY. SZ.-NAGY, P. TURÁN, O. VARGA

REDIGIT

G. HAJÓS

TOMUS I.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1950

INDEX

TOMUS I.

ACZÉL, J., Über Niveaukurven und Flächen von Lösungsfunktionen partieller Differentialgleichungen

Я. Ацел, Линии и поверхности уровня решений дифференциальных уравнений в частных производных 125

ACZÉL, J., L. JÁNOSSY and A. RÉNYI, On composed Poisson distributions, I

Я. Ацел, Л. Яноши и А. Реньи, Обобщенные распределения типа Пуассона, I 209

ALEXITS, G., Théorie mathématique du trafic de marchandises sous le régime du capitalisme de monopole

Г. Алексич, Математическая теория монополь-капиталистического товарооборота 17

CSÁSZÁR, Á., Sur les nombres de Lipschitz généralisés

А. Часар, Об обобщенных числах Липшица 277

EGERVÁRY, E., On the Feuerbach-spheres of an orthocentric simplex

Е. Эгервари, Шары Фейербаха ортоцентричного симплекса 5

EGERVÁRY, E., A remark on the curvature and tortuosity of space-curves

Е. Эгервари, О кривизне и кручении пространственных кривых 46

FEJES TÓTH, L., Elementarer Beweis einer isoperimetrischen Ungleichung

Л. Фейеш Тот, Элементарное доказательство одного изопериметрического неравенства 273

FUCHS, L., The extension of partially ordered groups

Л. Фукс, Расширение частично упорядоченных групп 118

FUCHS, L., On mean systems

Л. Фукс, О средних системах 303

GALLAI, T., On factorisation of graphs

Т. Галлаи, О факторизации „графов" 133

Гелфонд, А. О., Приближение алгебраических чисел, алгебраическими же числами и теория трансцендентых чисел 229

HAJÓS G., Sur le problème de factorisation des groupes cycliques

Г. Гаёш, Проблема факторизации циклических групп 189

JÁNOSSY, L., A. RÉNYI and J. ACZÉL, On composed Poisson distributions, I

Л. Яноши, А. Реньи и Я. Ацел, Обобщенные распределения типа Пуассона, I 209

KALMÁR, L., Contributions to the reduction theory of the decision problem, first paper

Л. Кальмар, Вклады в теорию приведения проблемы разрешимости, первая статья 64

KALMÁR, L., On Cauchy's convergence test

Л. Кальмар, О критерии сходимости Коши 109

OBLÁTH, R., Über die diophantische Gleichung $x^3 - 1 = 2y^2$

Р. Облат, Диофантовое уравнение $x^3 - 1 = 2y^2$ 113

OBLÁTH, R., Berichtigung 321

RÉDEI, L., Zur Theorie der faktorisierbaren Gruppen, I

Л. Рэдэи, К теории факторизуемых групп, I 74

RÉDEI, L., Ein Beitrag zum Problem der Faktorisation von endlichen Abelschen Gruppen
Л. Рэдэи, К проблеме факторизации конечных групп Абеля 197
Реньи, А., К теории предельных теорем для сумм независимых случайных величин
A. RÉNYI, Contributions to the theory of independent random variables 99
RÉNYI, A., L. JÁNOSSY and J. ACZÉL, On composed Poisson distributions, I
А. Реньи, Л. Яноши и Я. Ацел, Обобщенные распределения типа Пуассона, I 209
SURÁNYI, J., Contributions to the reduction theory of the decision problem, second paper
Я. Шурани, Вклады в теорию приведения проблемы разрешимости, вторая статья 261
SZ.-NAGY, B., Sur l'ordre de l'approximation d'une fonction par son intégrale de Poisson
Б. С.-Надь, О мере апроксимации функции ее интегралом Пуассона 183
SZ.-NAGY, GY., Tschirnhaus'sche Eiflächen und Eikurven
Д. С.-Надь, Выпуклые поверхности и кривые Тширнгауса 36
SZ.-NAGY, GY., Tschirnhaus'sche Flächen und Kurven
Д. С.-Надь, Поверхности и кривые Тширнгауса 167
SZ.-NAGY, GY., Über Polynome mit lauter reellen Nullstellen
Д. С.-Надь, О многочленах все корни которых действительны 225
TURÁN, P., On the remainder-term of the prime-number formula, I
П. Туран, Об остаточном члене формулы простых чисел, I 48
TURÁN, P., On the remainder-term of the prime-number formula, II
П. Туран, Об остаточном члене формулы простых чисел II 155

Akadémia Kiadó (Budapest, VI. Sztálin-út 31.) Felelős: Mestyán János

Budapest nyomda, Gerlóczy-utca 2. — 9705 — Felelős vezető: ifj. Puskás Ferenc

ВСТУПЛЕНИЕ

Обновление Венгерской Академии Наук открыло новую главу в истории венгерской науки. Ученые Венгрии всеми силами стремятся служить делу народа и своими исследованиями способствовать созидательному труду построения социализма. Венгерская Народная Республика оказывает развитию научной жизни нашей страны громадную материальную и моральную помощь и наука пользуется в нашей родине таким уважением и такой поддержкой, как еще никогда в нашей истории. Одной из характерных черт нашей обновленной науки является связь между научной теории и практической жизнью. Это взаимодействие оказывает серьезное, плодотворное влияние на развитие нашей науки.

Венгерская Академия Наук поставила себя целю изданием новой серии Acta Mathematica способствовать углублению международных связей прогрессивной науки, дальнейшему развитию науки, делу мира и прогресса и дружбы народов.

INTRODUCTION

La renaissance de l'Académie des Sciences de Hongrie ouvre un nouveau chapitre dans l'histoire des sciences hongroises. Les savants hongrois font tous leurs efforts pour servir la cause du peuple travailleur et aider par leurs travaux de recherche le travail créateur de l'édification du socialisme. La République Populaire Hongroise contribue largement, matériellement et moralement, au développement de la vie scientifique de notre pays. Dans notre pays, le travail scientifique jouit d'une estime et d'un soutien tels qu'il n'en a encore jamais joui au cours de notre histoire. Une des caractéristiques de notre vie scientifique renaissante est le contact entre la vie scientifique et la vie pratique de notre pays. Cette influence réciproque se fait fructueusement sentir dans le développement de notre vie scientifique.

Le but de l'Académie des Sciences de Hongrie, en publiant la nouvelle série des Acta Mathematica, est de contribuer par là au développement des relations internationales de la science progressiste, au développement de la science, à la défense de la Paix et du progrès, et au développement de l'amitié entre les peuples.

INTRODUCTION

The rebirth of the Hungarian Academy of Science has opened a new chapter in the history of Hungarian science. The scientists of Hungary endeavour in every way to serve the cause of the working people and with their research work to help in the creative task of building socialism. The Hungarian People's Republic affords vast help and encouragement to the development of the scientific life of our country and scientific work in Hungary today is honoured and aided to an extent that is unparalleled in the history of the land. One of the characteristic features of our reborne science is the connection between scientific theory and the practical life of the country. This interrelation has a profound stimulative effect on the development of our scientific life.

The aim of the Hungarian Academy of Science in starting the new series of Acta Mathematica is to contribute to the improvement of the international relations of progressive science, to the further development of science, to the ause of peace, progress and the closer friendship of the peoples.

EINLEITUNG

Die Wiedergeburt der ungarischen Akademie der Wissenschaften eröffnete einen neuen Abschnitt in der Geschichte der ungarischen Wissenschaft. Die ungarischen Gelehrten bemühen sich auf jede Art und Weise der Sache des werktätigen Volkes zu dienen und mit ihren Forschungen die schöpferische Arbeit des Aufbaues des Sozialismus zu fördern. Zur Entwicklung des wissenschaftlichen Lebens in unserem Lande trägt die ungarische Volksrepublik mit riesiger materieller und moralischer Hilfe bei. Die wissenschaftliche Arbeit in unserer Heimat wird in solchem Maße geschätzt und unterstützt, wie noch niemals in unserer Geschichte. Einer der charakteristischen Züge unserer wiedergeborenen Wissenschaft ist die Verbindung der wissenschaftlichen Theorie mit der Praxis im Leben unseres Landes. Diese Wechselwirkung ist von ernstem, fruchtbarem Einfluß auf die Entwicklung unseres wissenschaftlichen Lebens.

Mit der Ausgabe der neuen Serie der Acta Mathematica verfolgt die ungarische Akademie der Wissenschaften das Ziel, beizutragen zur Vertiefung der internationalen Verbindungen der fortschrittlichen Wissenschaften, zur Weiterentwicklung der Wissenschaft, zum Frieden und zum Fortschritt, zur Sache der engeren Freundschaft zwischen den Völkern.

ON THE FEUERBACH-SPHERES OF AN ORTHOCENTRIC SIMPLEX

By

E. EGERVÁRY (Budapest), member of the Academy

1. Attempting to extend the theorems of the geometry of the triangle to three and more dimensions it is known by experience that strict analogies exist only in the case of an orthocentric tetrahedron or simplex, i. e., such one whose altitudes have a point in common.

Actually it has been recognized rather long ago that the Feuerbach-circle (or nine-point circle) has no analogon in the case of a general tetrahedron, but if the tetrahedron is orthocentric then there are two spheres (the „twelve-point" spheres), each of which can be regarded as the three dimensional extension of the Feuerbach-circle.

Recent researches[1] have shown that with an orthocentric simplex in $n-1$ dimensions n spheres may be associated so that the k-th sphere contains the orthocenters and the barycenters of all the $k-1$ dimensional partial simplices. Consequently, in $n-1$ dimensions there are n extensions of the Feuerbach-circle. These Feuerbach-spheres belong to the pencil which is determined by the circumsphere and the polarsphere.

It is well known that the discussion of the Feuerbach-figure is rather asymmetrical and cumbersome if one uses Cartesian coordinates. Therefore several writers, when dealing with the Feuerbach-circle, made use of triangular coordinates. The discussion in Cartesian coordinates becomes even more clumsy in the case of three and more dimensions.

In the present paper we wish to show that the Feuerbach-figure in any dimension is capable of a symmetrical and very intuitive analytic representation by means of an orthocentric system of coordinates.

The orthocentric system of coordinates is a barycentric system whose fundamental simplex (tetrahedron) is orthocentric. In order to simplify the discussion of metric questions, the barycentric coordinates can be normalized in such a way that their sum should be equal to 1.

[1] E. EGERVÁRY, On Orthocentric Simplexes, *Acta. Scient. Math. Szeged.*, **9** (1940), pp. 218—226.

These orthocentric coordinates proved to be a very useful instrument in the treatment of some metric questions[2]. Their application to the investigation of the Feuerbach-figure is particularly suggested by their close connection with the poly(penta)spherical coordinates.

2. The Feuerbach-circle possesses the following characteristic properties:

I. It is a Carnot-conic of the fundamental triangle belonging to the orthocenter and the barycenter.

II. It is a pedal-conic of the fundamental triangle belonging to the orthocenter and the circumcenter.

III. It touches each of the four tangent-circles of the fundamental triangle.

I shall show first that a simplex in $n-1$ dimensions being given, one can associate with any pair of points n quadrics each of which is an extension of the Carnot-conic.

In agreement with this interpretation, the Feuerbach-spheres $\Phi_{(1)}$, $\Phi_{(2)}, \ldots, \Phi_{(n)}$ of an orthocentric simplex appear as the Carnot-quadrics belonging to the orthocenter and the barycenter.

Moreover I prove that the Feuerbach-sphere $\Phi_{(k)}$ is the pedal-quadric of the orthocenter and of its symmetric with respect to the center of $\Phi_{(\ )}$, i. e., it passes through the orthogonal projections of these points on the $k-1$ dimensional partial simplices.

Before entering into the discussion of the Feuerbach-figure we give a short summary of the properties of the orthocentric system of coordinates.

I. The orthocentric system of coordinates

1. If in the space of $n-1$ dimensions a fixed set of N ($\geqq n$) points $P_1, P_2, \ldots, P_N$ (containing at least one non-degenerate $n-1$ dimensional simplex) is given, then any point X may be represented as the barycenter of masses ξ_i placed in the points P_i ($i = 1, 2, \ldots, N$). Using the notation of GRASSMANN, a point X can be represented in the form

$$X = \frac{\xi_1 P_1 + \xi_2 P_2 + \ldots + \xi_N P_N}{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_N}, \tag{1}$$

and the (real) numbers ξ_i are the homogeneous (and in the case $N > n$ *supernumerary*) barycentric coordinates of the point X. When dealing with metric problems it is convenient to use normal barycentric coordinates submitted to the restriction $\sum_1^N \xi_i = 1$ (with the exception of points at infinity).

[2] See e. g. E. EGERVÁRY, Über ein räumliches Analogen des Sehnenvierecks, *Journ. f. Math.*, **182** (1940) pp. 122—128.

The distance of two points $X = \Sigma \xi_i P_i$ and $Y = \Sigma \eta_i P_i$ is given by

$$(2) \qquad \overline{XY}^2 = -\sum_{\substack{i,j=1 \\ (i>j)}}^{N} \overline{P_i P_j}^2 \, (\xi_i - \eta_i)(\xi_j - \eta_j), \qquad \sum_1^N \xi_i = \sum_1^N \eta_i = 1.$$

2. A general simplex of n points $P_1 P_2 \ldots P_n$ in $n-1$ dimensions is determined by $\frac{n(n-1)}{2}$ independent parameters, e. g. by the lengths of its edges $\overline{P_i P_j}$. If the simplex is orthocentric, i. e., if its altitudes meet in one point P_0 (the orthocenter), then its parameters have to satisfy $\frac{n(n-3)}{2}$ equations. In order to avoid the necessity of having regard continually to these equations of condition it seems to be desirable to determine an orthocentric simplex by a minimal number of independent and symmetrical parameters.

In one of my previous papers[1] I have shown that an orthocentric simplex $P_1 P_2 \ldots P_n$ in $n-1$ dimensions can be determined by n independent and symmetrical parameters in such a way, that the measure (length, volume) of its $k-1$ dimensional partial simplices ($k = 1, 2, \ldots, n-1$) is immediately given by the elementary symmetric functions of the parameters in the form

$$(3) \qquad (k-1)!^2 \, \overline{P_{j_1} P_{j_2} \ldots P_{j_k}}^2 = \lambda_{j_1} \lambda_{j_2} \ldots \lambda_{j_k} \left(\frac{1}{\lambda_{j_1}} + \frac{1}{\lambda_{j_2}} + \ldots + \frac{1}{\lambda_{j_k}} \right).$$

In particular

$$(3') \qquad \overline{P_j P_k}^2 = \lambda_j + \lambda_k .$$

From this representation it is obvious that any partial simplex of an orthocentric simplex is orthocentric too.

For some purposes it is more convenient to consider the set of $n+1$ points: the orthocenter P_0 and the vertices $P_1, P_2, \ldots, P_n$ as a whole, called an orthocentric set of $n+1$ points in the $n-1$ dimensional space, each point of the set being the orthocenter of the simplex formed by the others.

The mutual distances $\overline{P_i P_j}$ of the points of an orthocentric set can be expressed in the same way by $n+1$ symmetric parameters $\lambda_i \, (i = 0, 1, \ldots, n)$

$$(3'') \qquad \overline{P_i P_j}^2 = \lambda_i + \lambda_j$$

but the n-dimensional measure of the simplex formed by the points $P_0 P_1 \ldots P_n$ of the $n-1$ dimensional space is equal to 0, consequently, the parameters λ_i are restricted by the relations

$$(4) \qquad \frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n} = 0, \qquad (\lambda_i + \lambda_j > 0).$$

According to this there is always one and only one negative value amongst the parameters λ_i, or, what is the same thing, one and only one

point of the set $P_0P_1 \ldots P_n$ is contained in the interior of the convex cover of the set.

The consideration of the $n-1$ dimensional volumes of the simplices contained in the orthocentric set $P_0P_1 \ldots P_n$ shows immediately that if the masses $\frac{1}{\lambda_i}$ are placed in the points P_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$, then each point is the barycenter of the masses placed in the others. In other words, the mass-points $\frac{P_0}{\lambda_0}, \frac{P_1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{P_n}{\lambda_n}$ satisfy the equations

$$\frac{P_0}{\lambda_0} + \frac{P_1}{\lambda_1} + \ldots + \frac{P_n}{\lambda_n} = 0\,, \qquad \frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n} = 0\,,$$

i. e. they constitute an indifferent mass-system.

3. In general we shall use in this paper the barycentric simplex-coordinates $x_1\, x_2 \ldots x_n$ referring to the basic orthocentric simplex $P_1P_2 \ldots P_n$. But, for the sake of simplicity and symmetry, at the beginning we shall develop the most important metric relations in terms of the supernumerary barycentric coordinates $\xi_0\, \xi_1\, \xi_2 \ldots \xi_n$ referring to the orthocentric set $P_0P_1P_2 \ldots P_n$. Afterwards we arrive by specialisation at the corresponding relations in terms of the simplex coordinates.

Let $\xi_0\, \xi_1\, \xi_2 \ldots \xi_n$ be a system of supernumerary barycentric coordinates of a point X, i. e., $X = \sum_0^n P_i\, \xi_i \Big/ \sum_0^n \xi_i\,;\ \sum_0^n \xi_i \neq 0$. Then, from the fact that the mass-system P_i/λ_i is indifferent, we infer immediately that the most general system of supernumerary coordinates belonging to the same point X is given by

$$(5) \qquad \xi_i' = \xi_i + \frac{\varrho}{\lambda_i},\ (i = 0, 1, \ldots, n);\ X = \frac{\sum_0^n P_i\, \xi_i}{\sum_0^n \xi_i} = \frac{\sum_0^n P_i\, \xi_i'}{\sum_0^n \xi_i}$$

where ϱ denotes an arbitrary real parameter.

Applying the expression (2) of the distance of two points and having regard to the relations (3″), we find immediately that the expression for the distance in terms of the coordinates ξ_i is given by

$$(6) \qquad \overline{XY}^2 = -\sum\sum \overline{P_iP_j}^2\, (\xi_i - \eta_i)\, (\xi_j - \eta_j) = \sum_0^n \lambda_i\, (\xi_i - \eta_i)^2\,;$$
$$\sum_0^n \xi_i = \sum_0^n \eta_i = 1\,.$$

I should not miss here to draw the attention to the analogy between the orthogonal Cartesian coordinates and the orthocentric coordinates. For

both system of coordinates (and only in these cases) the expression for the squared distance reduces to a sum of squares.

4. The equation of any sphere, having the center $C = \sum_0^n \gamma_i P_i$; $\sum_0^n \gamma_i = 1$ and the radius $r^2 = \sum_0^n \lambda_i \gamma_i^2$, may be derived immediately from (6)

$$\sum_0^n \lambda_i (\xi_i - \gamma_i)^2 - r^2 \equiv \sum_0^n \lambda_i \xi_i^2 - 2\sum_0^n \lambda_i \gamma_i \xi_i = 0; \qquad \sum_0^n \xi_i = \sum_0^n \gamma_i = 1,$$

or in homogeneous form

$$\sum_0^n \lambda_i \xi_i^2 - 2 \sum_0^n \lambda_i \gamma_i \xi_i \sum_0^n \xi_i = 0. \tag{7}$$

We infer from this that the $n + 1$ spheres Γ_k having their centers in the vertices $P_k = \sum \delta_{ki} P_i$ ($\delta_{ki} = 0$ for $k \neq i$, $\delta_{kk} = 1$) and their radii $r_k^2 = \lambda_k$ are represented by the equations

$$\Gamma_k \equiv \sum_0^n \lambda_i \xi_i^2 - 2 \lambda_k \xi_k \sum_0^n \xi_i = 0, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

Any two of these spheres are orthogonal to each other in consequence of the equations $r_k^2 + r_h^2 - \overline{P_k P_h}^2 = \lambda_k + \lambda_h - (\lambda_k + \lambda_h) = 0$.

Comparing (7) with (8) we see that the equation of any sphere (point, plane) may be written as a homogeneous, linear combination of the forms Γ_k

$$\sum_0^n \gamma_i \sum_0^n \lambda_i \xi_i^2 - 2 \sum_0^n \lambda_i \gamma_i \xi_i \sum_0^n \xi_i \equiv \sum_0^n \gamma_i \Gamma_i = 0 \tag{9}$$

and in the case of this representation of a sphere the *supernumerary* coordinates of its center are proportional to the coefficients γ_i, while the radius is given by $r^2 = \sum_0^n \lambda_i \gamma_i^2 / (\sum_0^n \gamma_i)^2$.

The plane resp. the point are obviously characterised by the relations $\sum_0^n \gamma_i = 0$ resp. $\sum_0^n \lambda_i \gamma_i^2 = 0$.

5. In order to pass from the supernumerary coordinates $(\xi_0 \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n)$ to the simplex-coordinates $(x_1 x_2 \ldots x_n)$ referring to one of the simplices, e. g. to $P_1 P_2 \ldots P_n$, we have only to impose on the supernumerary coordinates the restriction that the point P_0 is deprived of mass. This involves that the arbitrary parameter ϱ in the expression (5) of the supernumerary coordinates must be chosen so that $x_0 = \xi_0 - \varrho/\lambda_0 = 0$, i. e. $\varrho = \xi_0 \lambda_0$. Hence the passage from ξ_i to x_j is mediated by the equations (and similarly the passage from γ_i to c_j)

$$x_j = \xi_j - \frac{\lambda_0}{\lambda_j} \xi_0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{10}$$

By means of these equations $\sum_0^n \lambda_i (\xi_i - \gamma_i)^2$ will be transformed into $\sum_1^n \lambda_j (x_j - c_j)^2$ and similarly $\sum_0^n \xi_i$ into $\sum_0^n x_j$; consequently, the general equation of a sphere in orthocentric simplex-coordinates takes the homogeneous form

$$\sum_1^n \lambda_j x_j^2 - 2 \sum_1^n a_j x_j \sum_1^n x_j = 0 \tag{11}$$

with arbitrary coefficients a_j.

Comparing this with (9), excluding the case of a plane and assuming $\sum_0^n \gamma_i = 1$, we get for the *supernumerary* coordinates γ_i and the radius r of the sphere the following expressions:

$$\gamma_0 = 1 - \sum_1^n \frac{a_j}{\lambda_j}; \quad \gamma_j = \frac{a_j}{\lambda_j}; \quad r^2 = \sum_1^n \lambda_i \gamma_i^2 = \lambda_0 \left(1 - \sum_1^n \frac{a_j}{\lambda_j}\right)^2 + \sum_1^n \frac{a_j^2}{\lambda_j}. \tag{12}$$

The corresponding formulae in terms of the orthocentric simplex-coordinates x_j follow from here immediately by substituting these values in the equations (10).

II. Representation of the Feuerbach-spheres as Carnot-quadrics

1. Two points

$$U = \frac{u_1 P_1 + u_2 P_2 + u_3 P_3}{u_1 + u_2 + u_3} \quad \text{and} \quad V = \frac{v_1 P_1 + v_2 P_2 + v_3 P_3}{v_1 + v_2 + v_3}$$

in the plane of the basic-triangle $P_1 P_2 P_3$ should be projected from the vertices on the opposite sides. According to a theorem of CARNOT, these projections $(0\, u_2 u_3)$ $(u_1\, 0\, u_3)$ $(u_1 u_2\, 0)$; $(0\, v_2 v_3)$ $(v_1\, 0\, v_3)$ $(v_1 v_2\, 0)$ lie on a conic represented by the equation

$$2\left(\frac{x_1^2}{u_1 v_1} + \frac{x_2^2}{u_2 v_2} + \frac{x_3^2}{u_3 v_3}\right) - \left(\frac{x_1}{u_1} + \frac{x_2}{u_2} + \frac{x_3}{u_3}\right)\left(\frac{x_1}{v_1} + \frac{x_2}{v_2} + \frac{x_3}{v_3}\right) = 0.$$

Consider now two points U, V in the $n-1$ dimensional space, whose barycentric coordinates are $(u_1\, u_2 \ldots u_n)$ resp. $(v_1\, v_2 \ldots v_n)$.

These points U, V can now be projected from any $n-k-1$ dimensional partial simplex $P_{k+1} P_{k+2} \ldots P_n$ on the $k-1$ dimensional complementary partial simplex $P_1 P_2 \ldots P_k$. The projection of U (being the point of intersection of the $n-k$ dimensional plane $P_{k+1} P_{k+2} \ldots P_n U$ with the $k-1$ dimensional plane $P_1 P_2 \ldots P_k$) has the coordinates

$$(u_1\, u_2 \ldots u_{k-1}\, u_k\, 0\, 0 \ldots 0)$$

and the coordinates of the projection of V are

$$(v_1\, v_2 \ldots v_{k-1}\, v_k\, 0\, 0 \ldots 0).$$

Obviously all these projections of the pair of points U, V on the $k-1$ dimensional partial simplices lie on a quadric whose equation is easily found to be

$$k \sum_1^n \frac{x_j^2}{u_j v_j} - \sum_1^n \frac{x_j}{u_j} \sum_1^n \frac{x_j}{v_j} = 0. \tag{13}$$

Consequently, with any pair of points and with an $n-1$ dimensional (general) simplex n quadrics may be associated each of which can be interpreted as an extension of the Carnot-conic, i. e., the quadrics given by (13) for the values $k = 1, 2, \ldots, n$.

2. Let us now assume that the basic simplex $P_1 P_2 \ldots P_n$ is an orthocentric one, specified by the parameters $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ and consider the Carnot-quadrics $\Phi_{(1)}, \Phi_{(2)}, \ldots, \Phi_{(n)}$ associated with the orthocenter $O = P_0 = \sum_1^n \frac{P_j}{\lambda_j} \Big/ \sum_1^n \frac{1}{\lambda_j}$ and the barycenter $B = \frac{1}{n} \sum_1^n P_j$.

Their equation follows at once from (13):

$$\Phi_{(k)} \equiv k \sum_1^n \lambda_j x_j^2 - \sum_1^n \lambda_j x_j \sum_1^n x_j = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{14}$$

and comparing this equation with (11) we notice that they represent n spheres belonging to the pencil which is determined by the polarsphere ($k = \infty$) and the circumsphere ($k = 1$). But the projections of O and B are obviously identical with the orthocenters and barycenters of the partial simplices, consequently, each of the spheres $\Phi_{(1)}, \Phi_{(2)}, \ldots \Phi_{(n)}$ can be interpreted as an $n-1$ dimensional extension of the Feuerbach-circle. The sphere $\Phi_{(k)}$ ($k = 2, 3, \ldots, n-1$) passes through the orthocenters and barycenters of all the $k-1$ dimensional partial simplices, $\Phi_{(1)}$ is the circumsphere; $\Phi_{(n)}$ is the orthocentroidal sphere, because it has the join of the orthocenter O and barycenter B as diameter.

Applying (12) we get for the radius $r_{(k)}$ and the *supernumerary* coordinates $\gamma_i^{(k)}$ of the center $C_{(k)}$ of the Feuerbach-sphere $\Phi_{(k)}$

$$\begin{gathered} \gamma_0^{(k)} = 1 - \frac{n}{2k}; \quad \gamma_j^{(k)} = \frac{1}{2k} \quad (j = 1, 2, \ldots, n); \\ r_{(k)} = \sqrt{(n-2k)^2 \lambda_0 + \lambda_1 + \ldots \lambda_n}/2k. \end{gathered} \tag{15}$$

According to (15) the center $C_{(k)}$ of $\Phi_{(k)}$ is given by

$$C_{(k)} = \frac{(2k-n)\,O + n\,B}{2k} = O + \frac{n}{2k}(B - O), \tag{16}$$

i. e., $C_{(k)}$ is collinear with O and B and coincides with the terminal-point of the

vector $\frac{n}{2k}\overrightarrow{OB}$ issuing from O. Thus all the centers lie on the „Euler-line" joining O and B.

3. Having regard to the following discussions it is convenient to distribute the Feuerbach-spheres into complementary pairs $\Phi_{(k)}$, $\Phi_{(n-k)}$ (which coincide only for $n = 2m$, $k = m$). The radii of a complementary pair are connected by the simple relation

$$k\, r_{(k)} = (n - k)\, r_{(n-k)},$$

while their centers satisfy the equations

$$2\,k C_{(k)} = nB + (2\,k - n)\,O; \quad 2\,(n - k)\,C_{(n-k)} = n\,B - (2\,k - n)\,O,$$

i. e., the barycenter B, the orthocenter O and the centers $C_{(k)}$, $C_{(n-k)}$ of a pair of complementary Feuerbach-spheres form a harmonic quadruple of points.

Particularly in the case of the orthocentric tetrahedron ($n = 4$) we get from (15)

$$C_{(1)} = 2\,B - O,\ r_{(1)} = \sqrt{4\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}/2 \quad \text{(circumsphere)}$$

$$C_{(2)} = B\ ,\ r_{(2)} = \sqrt{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}/4 \quad \text{(first twelve-point-sphere)}$$

$$3\,C_{(3)} = 2\,B + O,\ r_{(3)} = \sqrt{4\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}/6 \quad \text{(second twelve-point-sphere)}$$

in agreement with the well known results in the geometry of the tetrahedron.

It has been observed that the four circumcircles, resp. the four Feuerbach-circles of triangles contained in a planar orthocentric quadruple of points are equal, while in the three dimensional space no such relations exist. The expression (15) of $r_{(k)}$ shows clearly that similar relations exist only in a space of an even number of dimensions. In the case of $2\,m$ dimensions we have from (15)

$$r_{(k)} = \sqrt{\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_{2m+1}}/2\,k \qquad (k = m,\ m + 1),$$

i. e., the Feuerbach-spheres $\Phi_{(m)}$ resp. $\Phi_{(m+1)}$ of the orthocentric simplices contained in an orthocentric set of $2\,m + 1$ points in $2\,m$ dimensions are equal.

III. Representation of the Feuerbach-spheres as pedal quadrics

1. An other characteristic feature of the Feuerbach-circle is that it passes through the orthogonal projections of the orthocenter and circumcenter on the sides of the basic triangle (it is the pedal-circle of O and $C_{(1)}$).

In order to establish the corresponding property of the Feuerbach-spheres in $n - 1$ dimensions let us consider the intersection of the Feuerbach-sphere

$$\Phi_{(k)} \equiv k \sum_1^n \lambda_j x_j^2 - \sum_1 \lambda_j x_j \sum_1^n x_j = 0$$

with one of „its" partial-simplices, e. g. with

$$x_{k+1} = x_{k+2} = \ldots = x_n = 0.$$

This intersection

$$\Phi^* \equiv k \sum_1^k \lambda_j x_j^2 - \sum_1^k \lambda_j x_j \sum_1^k x_j = 0$$

s obviously the orthocentroidal-sphere of the partial-simplex $P_1 P_2 \ldots P_k$. According to one of our former results **(II. 2.)** the center C^* of Φ^* is collinear with and equidistant to the orthocenter O^* and the barycenter B^* of the partial simplex $P_1 P_2 \ldots P_k$.

Erect now through O^*, C^* and B^* $n - k - 1$ dimensional planes which are perpendicular to the $k - 1$ dimensional plane of $P_1 \ldots P_k$. These parallel planes meet the Euler-line of the basic orthocentric simplex in O, $C_{(k)}$ and in a point $B_{(k)}$, this latter being obviously the symmetric of O with respect to $C_{(k)}$.

Starting with any other $k - 1$ dimensional partial-simplex, we arrive evidently at the same point $B_{(k)}$. Hence we have the theorem:

The Feuerbach-sphere $\Phi_{(k)}$ is the pedal-sphere of the orthocenter O and of its symmetric $B_{(k)}$ with respect to the center $C_{(k)}$ of $\Phi_{(k)}$. In other words, $\Phi_{(k)}$ passes through the orthogonal projections of O and $B_{(k)}$ on all the $k - 1$ dimensional partial-simplices.

The point $B_{(k)}$, being the symmetric of O with respect to $C_{(k)}$, is represented by

$$B_{(k)} = 2\, C_{(k)} - O = O + \frac{n}{k}\,(B - O),$$

i. e., $B_{(k)}$ coincides with the terminal-point of the vector $\frac{n}{k}\overrightarrow{OB}$ issuing from O. All these centers of projection lie on the Euler-line, moreover $C_{(2k)}$ coincides with $B_{(k)}$.

IV. On the intersections of the Feuerbach-spheres and the altitudes

1. In the case of three and more dimensions the notion of the altitude may be viewed from a more general point of view, i. e., as the common perpendicular of a pair of complementary partial-simplices. This extension is justified by the fact that the normal-transversal of any pair of complementary partial-simplices passes through the orthocenter O as well as through the orthocenters $O_{(k)}$ and $O_{(n-k)}$ of the complementary partial-simplices.

~~Indeed, the orthocenter of~~ $P_1 P_2 \ldots P_n$ ~~is~~ $O = \sum P_j/\lambda_j : \sum_1^n 1/\lambda_j$, ~~the~~ orthocenters of $P_1 P_2 \ldots P_k$ resp. $P_{k+1} P_{k+2} \ldots P_n$ are $O_{(k)} = \sum_1^k P_j/\lambda_j : \sum_1^k 1/\lambda$

resp. $O_{(n-k)} = \sum_{k+1}^{n} P_j/\lambda_j : \sum_{k+1}^{n} 1/\lambda_j$. Hence

$$O_{(k)} \sum_{1}^{k} 1/\lambda_j + O_{(n-k)} \sum_{k+1}^{n} 1/\lambda_j = O \sum_{1}^{n} 1/\lambda_j ,$$

i. e., O, $O_{(k)}$, $O_{(n-k)}$ are collinear.

We have further $\overline{OO_{(k)}} \perp \overline{P_1 P_2 \ldots P_k}$ and $\overline{OO_{(n-k)}} \perp \overline{P_{k+1} \ldots P_n}$, consequently the altitude $\overline{O_{(k)}\, O_{(n+k)}}$ belonging to $P_1 P_2 \ldots P_k$ and $P_{k+1} P_{k+2} \ldots P_n$ is the normal-transversal of these partial-simplices.

In this wider sense the number of the altitudes of an orthocentric simplex $P_1 P_2 \ldots P_n$ in the $n-1$ dimensional space is obviously

$$2^{2m} - 1 \quad \text{for} \quad n = 2m+1 \quad \text{and} \quad 2^{2m-1} + \frac{1}{2}\binom{2m}{m} - 1 \quad \text{for} \quad n = 2m.$$

We shall prove that the products of the segments, into which any of these altitudes is divided by the orthocenter, has the same value, this common value being equal to $|\lambda_0|$.

The segment $\overline{OO_{(k)}}$ is the altitude (in the narrower sense) of the partial-simplex $P_0 P_1 \ldots P_k$, therefore its length is given by

$$\overline{OO}^2_{(k)} = k^2 \frac{\overline{P_0 P_1 P_2 \ldots P_k}^2}{\overline{P_1 P_2 \ldots P_k}^2} \quad \text{and similarly} \quad \overline{OO}^2_{(n-k)} = (n-k)^2 \frac{\overline{P_0 P_{k+1} \ldots P_n}^2}{\overline{P_{k+1} \ldots P_n}^2}$$

Applying (3) we get from here

$$\overline{OO}^2_{(k)} \cdot \overline{OO}^2_{(n-k)} =$$

$$= \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_k \left(\frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} + \ldots + \frac{1}{\lambda_k}\right)}{\lambda_1 \ldots \lambda_k \left(\frac{1}{\lambda_1} + \ldots + \frac{1}{\lambda_k}\right)} \cdot \frac{\lambda_0 \lambda_{k+1} \ldots \lambda_n \left(\frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_{k+1}} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n}\right)}{\lambda_{k+1} \ldots \lambda_n \left(\frac{1}{\lambda_{k+1}} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n}\right)}$$

or, having regard to $\sum_{0}^{n} 1/\lambda_i = 0$,

$$\overline{OO}^2_{(k)} \cdot \overline{OO}^2_{(n-k)} = \left(\lambda_0 + \frac{1}{\frac{1}{\lambda_1} + \ldots + \frac{1}{\lambda_k}}\right)\left(\lambda_0 + \frac{1}{\frac{1}{\lambda_{k+1}} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n}}\right) = \lambda_0^2 ,$$

q. e. d.

2. The denomination „nine-point circle" is justified by the fact, that this circle passes not only through the projections of O and B on the sides, but it passes also through the middle-point of the „upper" segments of the

altitudes. A corresponding theorem is known in the case of an orthocentric tetrahedron, i. e., the sphere which contains the orthocenters and barycenters of the faces, divides the „upper" segments of the altitudes in the ratio 1 : 2.

These statements can be generalised as follows. Each extremity of an altitude is lying on a Feuerbach-sphere. E. g. the extremities of an altitude of type $\overline{O_{(k)}\,O_{(n-k)}}$ (belonging to a $k-1$ dimensional and to an $n-k-1$ dimensional partial-simplex) are lying on $\Phi_{(k)}$ and $\Phi_{(n-k)}$. Using our former results we can easily determine the second point of intersection of a Feuerbach-sphere with its corresponding altitude.

Retaining the previously used notations and denoting the second point of intersection of $\Phi_{(k)}$ with its altitude $\overline{O_{(k)}\,O_{(n-k)}}$ by $O'_{(k)}$, we inquire after the value of the ratio

$$\frac{\overline{OO'_{(k)}}}{\overline{OO_{(n-k)}}} = \frac{\overline{OO'_{(k)}} \cdot \overline{OO_{(k)}}}{\overline{OO_{(n-k)}} \cdot \overline{OO_{(k)}}}.$$

It has been previously proved that $\overline{OO_{(k)}} \cdot \overline{OO_{(n-k)}} = \lambda_0$, thus we have only to calculate $\overline{OO'_{(k)}} \cdot \overline{OO_{(k)}}$, i. e., the power of the orthocenter O with respect to the Feuerbach-sphere $\Phi_{(k)}$. Using our former results (15) we have

$$\overline{OO'_{(k)}} \cdot \overline{OO_{(k)}} = OC^2_{(k)} - r^2_{(k)} = \frac{n^2}{k^2} r^2_{(n)} - r^2_{(k)} = \lambda_0 \frac{n-k}{k}.$$

Hence we infer that $\overline{OO'_{(k)}} : \overline{OO_{(n-k)}} = (n-k) : k$ and this result can be stated as follows.

Each altitude of the type $\overline{O_{(k)}\,O_{(n-k)}}$ joins a point $O_{(k)}$ of the Feuerbach-sphere $\Phi_{(k)}$ to a point $O_{(n-k)}$ of the complementary Feuerbach-sphere $\Phi_{(n-k)}$. Consequently, this altitude cuts both of $\Phi_{(k)}$, $\Phi_{(n-k)}$ once more, and the positions of these intersections $O'_{(k)}$, $O'_{(n-k)}$ are determined by the ratios

$$\frac{\overline{OO'_{(k)}}}{\overline{OO_{(n-k)}}} = \frac{n-k}{k}; \quad \frac{\overline{OO'_{(n-k)}}}{\overline{OO_{(k)}}} = \frac{k}{n-k}.$$

This theorem contains the above mentioned results in the geometry of the triangle, resp. of the tetrahedron, if we adopt the circumcircle, resp. sphere as the first member $\Phi_{(1)}$ in the Feuerbach-sequence.

If $n = 2m$ and $k = m$, then the two complementary Feuerbach-spheres coincide. This is realized in three dimensions ($n = 4$) for $k = 2$, i. e., in the case of the first twelve-point sphere.

(Received 8 May 1950)

ШАРЫ ФЕЙЕРБАХА ОРТОЦЕНТРИЧНОГО СИМПЛЕКСА

Е. ЭГЕРВАРИ (Будапешт)

(Резюме)

Если ребра симплекса $P_1 P_2 \ldots P_n$ размерности $n-1$ могут быть выражены с помощью n параметров в виде $\overline{P_i P_j}^2 = \lambda_i + \lambda_j$, то симплекс является ортоцентричным и в относящейся к нему барицентричной системе координат $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ координаты ортоцентра суть $\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$ и общее уравнение шара будет

$$a_o \sum_1^n \lambda_i x_i^2 - \sum_1^n a_i x_i \sum_1^n x_i = 0.$$

Уравнение

$$k \sum_1^n \lambda_i x_i^2 - \sum_1^n \lambda_i x_i \sum_1^n x_i = 0$$

получающееся из соответствующей специализации коэффициентов $a_o a_1 \ldots a_n$ означает такой шар, который содержит ортоцентры и барицентры всех частных симплексов $P_{\nu_1} P_{\nu_2} \ldots P_{\nu_k}$ всех размерностей $k-1$, то есть все шары соответствующие $k = 1, 2, \ldots, n$ могут считаться обобщением окружности Фейербаха. Использованием вышеприведенного уравнения шаров Фейербаха многие теоремы тригонометрии и геометрии тетраэдров обобщаются на ортоцентричные симплексы.

THÉORIE MATHÉMATIQUE DU TRAFIC DE MARCHANDISES SOUS LE RÉGIME DU CAPITALISME DE MONOPOLE

Par

GEORGES ALEXITS (Budapest), membre de l'Académie

1. Méthode de la fondation mathématique de l'économie politique

Le traitement des problèmes de l'économie politique par des méthodes mathématiques a déja un long passé. C'est bien compréhensible que les succès de la physique mathématique aient éveillé le désir de décrire d'une manière exacte les lois de l'économie politique. Malgré cela, les travaux de mathématiques économiques sont loin d'approcher l'exactitude de la physique théorique. La vérité est que la plupart de ces investigations ne cherche qu'à se donner l'apparence d'une recherche scientifique en se servant du symbolisme mathématique, mais en réalité elles ne font que d'habiller les allégations des différentes théories bourgeoises d'économie dans un vêtement mathématique. Mais même l'usage qu'elles font des formes mathématiques ne paraît point exact parce qu'il faut considérer en général les refontes mathématiques des notions de l'économie politique bourgeoise comme manquées en principe.

Avant tout, nous considérons *intenable* le point de vue des travaux bourgeois de l'économie mathématique qui examine les phénomènes économiques d'une façon axiomatique et par là ne tient pas compte de la structure sociale des phénomènes économiques qu'ils veulent décrire. De cette manière, les méthodes mathématiques employées dans l'économie bourgeoise donnent au système économique capitaliste l'apparence d'être la seule forme possible de l'économie. Le système économique capitaliste apparaît donc dans ces théories mathématiques de la science économique bourgeoise comme une nécéssité mathématique alors qu'il est évident que c'est entré dans la théorie non comme *conséquence* du contenu mathématique, mais parce que ce système a été tacitement *insinué* dans les formes mathématiques. Il est clair qu'une théorie qui croit trouver les mêmes lois économiques dans le système économique d'une société barbare dont la production est basée sur le travail des esclaves que dans une société développée du capitalisme financier est nécéssairement fausse et

ne pourrait être considerée comme science sérieuse malgré *l'apparence* mathématique.

En principe doit encore être considéré intenable un point de vue qui promet de traiter exactement les relations quantitatives se présentant dans des formes différentes de la valeur d'économie politique sans mettre au point la notion de valeur comprise implicitement dans les symboles mathématiques. Pourtant, nous rencontrons dans la science économique mathématique bourgeoise à tous les pas cette erreur: les formules expriment des changements de valeur, mais on ne peut pas établir qu'est-ce que c'est qui change: est-ce seulement la valeur des fonctions figurant dans les formules mathématiques ou est-ce l'unité servant à mesurer la valeur des variables figurant dans les fonctions, unité qui elle-même est une fonction inconnue d'une autre unité pas nommée?

Mais il se trouve, même dans les oeuvres fondamentales de l'économie mathématique, non seulement des grosses erreurs de caractère économique, mais aussi des fautes mathématiques irréparables. Leur caractéristique commun est que les auteurs ne tâchent même pas à examiner si le système d'équations accepté comme point de départ possède une solution interprétable au point de vue économique. Nous en trouvons un exemple très caractéristique dans le système d'équations connu sous le nom d'équations de WALRAS—CASSEL. Les inconnus de ces équations sont les quantités de moyens de production et de produits ainsi que leurs prix. Ce système d'équations ne peut donc avoir du sens économique que s'il a un système de solutions positives uniquement déterminé. Par contre, on a réussi à démontrer[1] que la supposition d'un tel système de solutions contient une contradiction mathématique, c'est-à-dire: le système d'équations de WALRAS—CASSEL est bien un résultat apparemment important de l'économie mathématique, mais en réalité il n'a pas de solution à laquelle on pourrait attribuer un sens économique.

Les fautes graves revenant fréquemment et systématiquement ont discrédité la science d'économie mathématique à tel point qu'aujourd'hui on peut recevoir à priori avec suspicion toute oeuvre qui traite les problèmes de l'économie politique par des méthodes mathématiques. Il serait cependant faux de proscrire tout à fait des sciences économiques les réflexions mathématiques exactes, puisque ce n'est point la méthode mathématique qui est responsable des erreurs de principe commises jusqu'ici, mais son application tout à fait erronnée, ou plus précisément: l'abus commis à l'aide du formalisme mathématique. Mais l'application des résultats de la mathématique — avec la critique nécéssaire — aux phénomènes sociaux qui s'y prêtent peut conduire à des résultats précieux, parce qu'elle pourrait éclaircir plus profondément les

[1] Au sujet de la discussion mathématique concernant le système d'équations de WALRAS—CASSEL, v. Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, Wien, **6** (1935), p. 10—20 et **7** (1936), p. 1—6.

rapports intrinséques des forces cachées derrière les mouvements de la société.

Ce serait naturellement une grave erreur de nous imaginer que la méthode mathématique nous rendra capables à décrire exactement les phénomènes économiques. Le développement économique est un phénomène social, il faut donc considérer à priori comme manqué toute tentative qui essayerait de le faire paraître comme un processus machinal, déterminé au sens mathématique. La méthode mathématique ne peut jamais décrire la réalité sociale toute entière, mais seulement le développement d'un modèle économique qui *dans certaines circonstances* peut approcher la réalité. Les tendances éclaircies par la mathématique économique ne peuvent donc reflêter une partie de la réalité que jusqu-au point où la structure sociale crée des situations économiques similaires au modèle supposé. Mais *la société peut changer les conditions* et alors les processus économiques réels peuvent s'écarter complètement de ceux qu'avaient établi les méthodes mathématiques, même si le modèle avait reflété primitivement la structure économique assez exactement. Il paraît que cette circonstance rend l'applicabilité des mathématiques à l'économie politique illusoire, mais en réalité c'est justement ce qui la rend légitime. C'est que les réflexions mathématiques appliquées au modèle économique correctement construit peuvent éclaircir de quels modèles la structure économique de la société doit s'écarter si nous en attendons un développement qui s'écarte *qualitativement* du développement se révélant *nécéssairement* sur le modèle. Le traitement mathématique de la science d'économie politique joue donc dans la cognition de la réalité sociale un rôle pareil par exemple à celui de la mécanique rationnelle dans la construction des appareils éléctriques: la mécanique, sans être capable de décrire complètement le fonctionnement des appareils éléctriques dont le fonctionnement est déterminé par les lois propres de l'électrodynamique, peut indiquer les difficultés mécaniques que le constructeur doit éviter s'il veut que son appareil fonctionne avec un certain effet.

L'idée fondamentale de nos investigations suivantes remonte à la théorie mathématique de VOLTERRA[2] concernant le développement des collectifs biologiques; en ce qui concerne leur contenu, elles essayent de refléter sur un modèle aussi simple que possible le développement du trafic des marchandises qui se produit sous les conditions de production du capitalisme le plus développé. Nous allons démontrer que ce développement conduit nécéssairement à ce que certains producteurs de marchandises deviennent monopolisateurs, dont il s'ensuit aisément que les conditions économiques reflétées par notre modèle rendent forcément la lutte de classes plus aiguë. Nous allons encore démontrer que l'on ne peut faire disparaître ces phénomènes même par des changements assez importants faits sur le modèle, mais seulement par

[2] L. VOLTERRA, Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie, (Paris, 1931).

la modification complète de la structure du modèle. Exprimé d'une autre manière, cela veut dire qu'à *un certain degré du développement du capitalisme, l'intensification de la lutte de classes est inévitable si l'on conserve tant soit peu de l'essence de l'économie capitaliste.*

2. Le système d'équations différentielles du trafic des marchandises

Dans le modèle servant comme base de notre travail mathématique, nous ne faisons pas de différence entre producteurs et vendeurs de marchandises, c'est-à-dire nous ne tenons pas compte de l'intermédiaire qui s'interpose entre le producteur et le consommateur. Nous mesurons la valeur des marchandises, moyens de production etc. à un moment donné uniformément par le temps du travail socialement nécéssaire pour les produire, c'est-à-dire nous employons une mesure dont l'unité ne dépend pas des fluctuations momentanées du marché. Nos premières hypothèses sont les suivantes:

1°. La production est tellement développée que le producteur est pratiquement incapable d'utiliser ses surplus pour d'autre chose que l'augmentation de sa production, c'est-à-dire ses ventes avec profit augmentent sa production.

2°. La production de marchandises a saturé le marché au point que si le producteur A vend de la marchandise d'une valeur ξ, il y aura une quantité de marchandises de valeur $\eta = \eta(\xi)$ que le producteur B ne pourra pas placer s'il cherche à atteindre sa production maximum.

Dans les conditions du capitalisme le plus développé, ces conditions se réalisent si nous ne tenons compte que du trafic de marchandises non produites par des petits producteurs, mais seulement par des grandes installations mécaniques. Nous ajouterons que nous ne considérons comme différents deux producteurs que s'ils se font de la concurrence aiguë, c'est-à-dire si la condition sous 2° joue sur eux.

Supposons que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ signifient tous les producteurs d'un marché qui répond à nos conditions et n'est pratiquement pas influencé par le trafic d'autres marchés. Supposons que la valeur des marchandises écoulées par eux au moment t exprimée comme fonction du temps t sera[3]

$$y_1 = y_1(t), \quad y_2 = y_2(t), \ldots, y_n = y_n(t).$$

Les producteurs emploient le surplus restant du profit provenant de la valeur des marchandises placées, conformément à notre hypothèse 1°, immédiate-

[3] Plus précisément, nous entendons par y_k la fonction définie de la manière suivante: Soit $Y_k(t)$ la valeur de la quantité totale des marchandises écoulées par le producteur A_k jusqu'au moment t; alors, y_k est la vitesse de la croissance de $Y_k(t)$, c'est à dire:

$$y_k = \frac{dY_k}{dt}.$$

ment pour produire de nouvelles marchandises ce qui entraîne une augmentation du trafic de marchandises si le marché est capable d'absorber la nouvelle quantité. De cette manière, la valeur des ventes de marchandises du producteur A_k dans l'intervalle de temps $(t, t + dt)$ augmente de la quantité dy_k et cette augmentation peut être représentée comme résultante de deux composantes. L'une est la quantité que l'augmentation des ventes de marchandises de A_k atteindrait si la capacité d'absorption du marché était illimitée. Dans ce cas A_k pourrait vendre, après avoir placé une quantité de marchandises de valeur d'unité, des marchandises d'une valeur $1 + \alpha_k$ où $\alpha_k = \alpha_k(t)$ est une fonction positive ne dépendant que de l'augmentation de la capacité de production du producteur A_k résultant de l'hypothèse 1°. De cette manière, dans l'intervalle de temps $(t, t + dt)$ l'augmentation de valeur des ventes de marchandises de A_k serait

$$dy_k = \alpha_k y_k \, dt$$

et la valeur $y_k(t)$ serait déterminée par l'égalité

$$y_k(t) = e^{\int \alpha_k(t) \, dt}.$$

Par contre, nous avons tenir compte de l'autre composante qui résulte de la diminution de la puissance d'achat du marché découlant de notre hypothèse 2° de manière que les marchandises d'une valeur de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ rendent impossible que A_k puisse déployer le maximum de sa capacité de vente de marchandises, ainsi la valeur des marchandises valant une unité vendues au moment t ne pourra pas accroître dans l'intervalle de temps $(t, t + dt)$ de la quantité $\alpha_k \, dt$, mais il faut réduire la quantité α_k de la valeur d'une fonction positive $\psi_k (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dépendant des variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$; soit l'augmentation de valeur des ventes de marchandises de A_k est défini au lieu de $dy_k = \alpha_k y_k \, dt$ par l'équation

$$dy_k = (\alpha_k - \psi_k) y_k \, dt.$$

Mettons que $\varphi (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ signifie la diminution totale qui se produit dans la croissance maximum $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des ventes de valeur unité des producteurs $A_1, A_2, \ldots, A_n$ dans l'intervalle de temps $(t, t + dt)$, alors ψ_k sera la part de la diminution φ tombant sur le producteur A_k, autrement dit

$$\psi_k (y_1, y_2, \ldots, y_n) = \beta_k \varphi (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

où $\beta_k = \beta_k(t)$ est une fonction ayant des valeurs comprises entre 0 et 1. L'équation précédente peut donc être écrite sous la forme

$$dy_k = (\alpha_k - \beta_k \varphi) y_k \, dt$$

également, c'est-à-dire qu'en désignant la dérivée de $y_k(t)$ par $y_k'(t)$, la valeur des ventes des producteurs $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se laisse déterminer par le sys-

tème suivant d'équations différentielles:

$$
\begin{aligned}
\frac{y_1'}{y_1} &= \alpha_1 - \beta_1 \varphi\,(y_1, y_2, \ldots, y_n),\\
\frac{y_2'}{y_2} &= \alpha_2 - \beta_2 \varphi\,(y_1, y_2, \ldots, y_n),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{y_n'}{y_n} &= \alpha_n - \beta_n \varphi\,(y_1, y_2, \ldots, y_n)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

pour toute valeur $y_k(t) \neq 0$.

3. L'existence d'un système de solutions positives

Afin de pouvoir démontrer l'existence d'un système uniquement déterminé de solutions continues et positives du système (1) d'équations différentielles de premier ordre, nous avons besoin de l'hypothèse suivante:

3°. Le marché est saturé par les quantités de marchandises vendues au point que, si n'importe quel producteur met en circulation de nouvelles marchandises, il en résulte une diminution *immédiate* de la puissance d'achat.

Cette hypothèse s'exprime en langage mathématique par l'exigence que $\varphi\,(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ soit une fonction croissante en chacune de ses variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Il s'ensuit immédiatement que, si $\varphi\,(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n) > \varphi\,(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, il existe un indice k pour lequel $\bar{y}_k > y_k$. Puisque φ mesure la diminution de la puissance d'achat du marché, il n'a de signification économique qu'en cas de valeurs bornées. Les valeurs économiquement interprétables de φ ont donc un maximum et un minimum, au-delà les valeurs de φ peuvent être définies arbitrairement. Choisissons une telle extension de φ aux valeurs économiquement non interprétables qu'il reste monotone en chacune de ses variables, de plus qu'il soit assez régulier dans le sens que, $\varepsilon > 0$ étant une quantité arbitraire, il existe toujours un $\delta > 0$, de manière que

$$\varphi\,(y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, y_k + \delta, y_{k+1}, \ldots, y_n) \geqq \varphi\,(y_1, y_2, \ldots, y_n) + \varepsilon\,.$$

Par cette extension du domaine des valeurs de la fonction φ, nous avons atteint que φ n'ait pas de maximum et qu'il ne devient infini que si au moins une des variables y_k devient également infinie. Après cela, nous démontrons le lemme suivant:

Les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ restent bornées dans l'intervalle de temps $(0, \infty)$.

Admettons, par absurde, que y_k atteint à un certain moment une valeur supérieure à une quantité M que l'on peut choisir arbitrairement grande. Il y aura alors, en conséquence de la continuité des fonctions y_k, un moment t_M auquel

$$y_k(t_M) = M\,.$$

Mais si nous choisissons M assez grand, la valeur de $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ deviendrait, d'après ce qui précède, arbitrairement grande, quelles que soient les valeurs des fonctions y_i ayant un indice i différent de k, c'est-à-dire: même si $\overline{y_i} \leqq y_i(t_M)$ pour chaque indice $i \neq k$, on a

$$\varphi(\overline{y_1}, \overline{y_2}, \ldots, \overline{y_{k-1}}, y_k(t_M), \overline{y_{k+1}}, \ldots, \overline{y_n}) \geqq N \tag{2}$$

où N peut être arbitrairement grand, pourvu que M soit assez grand. En choisissant donc M assez grand, on peut aboutir à l'inégalité

$$N \geqq \operatorname{Max} \frac{\alpha_k}{\beta_k}. \tag{2*}$$

C'est que dans le cas contraire la relation $\frac{\alpha_k}{\beta_k} \to \infty$ devrait subsister, ce qui est impossible vu la signification économique de α_k et β_k, puisque α_k est définie par les valeurs et les frais de production des marchandises, α_k reste donc pour des raisons économiques au-dessous d'une certaine limite, quant à la valeur de β_k, elle doit rester au dessus d'une quantité positive β, sinon la diminution de la puissance d'achat du marché n'affecterait pas du tout la production de A_k, ce qui est également absurde pour des raisons d'ordre économique. La quantité $\operatorname{Max} \frac{\alpha_k}{\beta_k}$ est donc finie, il s'ensuit par conséquent d'après (2) et (2*) pour des valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_n$ prises au moment t_M:

$$\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n) \geqq \frac{\alpha_k}{\beta_k}.$$

On en obtient, en vertu de (1):

$$y_k'(t_M) < 0,$$

la valeur $y_k(t)$ ne peut donc pas être $> M$ dans le voisinage de t_M. — L'hypothèse qu'après un moment t'_M

$$y_k(t) < -M'$$

où M est arbitrairement grand, conduit pareillement à une contradiction et notre lemme est entièrement démontré.

Après cela il n'est pas difficile de démontrer le théorème d'existence suivant:

Le système (1) *d'équations différentielles possède en tout intervalle fini de temps un système de solutions composé de fonctions continues, positives et uniquement déterminées par leurs valeurs initiales.*

Comme il ressort de (1):

$$\log \frac{y_k(t)}{y_k(t_0)} = \int_{t_0}^{t} (\alpha_k - \beta_k \varphi)\, dt.$$

Mais, selon notre lemme, $y_k(t)$ est borné et ainsi — comme nous l'avons vu — φ reste aussi sous une borne finie, donc

$$|a_k - \beta_k \varphi| \leqq C$$

où C est une constante absolue. Par conséquent

$$\left| \log \frac{y_k(t)}{y_k(t_0)} \right| \leqq C\,(t - t_0)\,,$$

c'est-à-dire:

$$y_k(t) \geqq y_k(t_0)\, e^{-C\,(t - t_0)}\,,$$

donc, si $y_k(t_0) > 0$, alors $y_k(t)$ est également positif. La détermination des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_k$ peut se faire par la méthode des approximations successives. La continuité et la donnée des valeurs initiales assure l'unicité du système des solutions.

4. La monopolisation du trafic de marchandises dans un système de production capitaliste très développée

Nous allons rechercher le développement du trafic des marchandises pendant une longue période tranquille de l'économie capitaliste très développée. La tranquillité de la période signifie que les conditions pour le placement des marchandises d'un producteur par rapport à celles de l'autre ne varient pas. Or les fonctions $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ désignent la part de la diminution totale de la puissance d'achat du marché tombant sur les producteurs $A_1, A_2, \ldots, A_n$, la tranquillité de la période se traduit donc en langage de notre symbolisme mathématique par l'hypothèse que les $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ sont des constantes, hypothèse que nous allons accepter pour le calcul suivant.

Éliminons φ des équations (1) et nous obtenons la relation

$$\beta_k \frac{y_i'}{y_i} - \beta_i \frac{y_k'}{y_k} = \alpha_i \beta_k - \alpha_k \beta_i$$

que nous pouvons écrire sous la forme suivante aussi:

$$d\left(\log \frac{\sqrt[\beta_i]{y_i}}{\sqrt[\beta_k]{y_k}} \right) = \left(\frac{\alpha_i}{\beta_i} - \frac{\alpha_k}{\beta_k} \right) dt.$$

Il en résulte que

$$y_k(t) = \frac{y_i(t_0)}{y_k(t_0)}\, [y_i(t)]^{\frac{\beta_i}{\beta_k}} \exp \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\alpha_i}{\beta_i} - \frac{\alpha_k}{\beta_k} \right) dt.$$

Mais nous avons démontré au chapitre précédent que, pour un t quelconque

$0 < y_i \leqq M$, donc

$$y_k(t) \leqq \frac{y_i(t_0)}{y_k(t_0)} M^{\frac{\beta_i}{\beta_k}} \exp \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\alpha_i}{\beta_i} - \frac{\alpha_k}{\beta_k}\right) dt. \tag{3}$$

Il existe donc une constante absolue K, ainsi que

$$\frac{y_i(t_0)}{y_k(t_0)} M^{\frac{\beta_i}{\beta_k}} \leqq K . \tag{4}$$

Le quotient $\frac{\alpha_m}{\beta_m}$ exprime le rapport entre le plus grand accroissement possible des ventes de marchandises du producteur A_m et la diminution de la puissance d'achat du marché limitant cet accroissement, c'est-à-dire: $\frac{\alpha_m}{\beta_m}$ est une mesure de la capacité de vente du producteur A_m. L'expérience prouve que, s'il n'y a pas de changement essentiel dans les conditions de la concurrence, la capacité de vente du producteur qui a réussi de vendre plus pendant un temps prolongé continuera de rester plus grande que la capacité de celui dont les ventes sont restées entretemps toujours plus petites; au contraire, la différence entre les deux aura plutôt tendance à augmenter et non à diminuer. Ce fait d'expérience s'exprime dans le langage de notre formalisme mathématique que la différence $\frac{\alpha_i}{\beta_i} - \frac{\alpha_k}{\beta_k}$ ne disparaît pas si $\frac{\alpha_i}{\beta_i} - \frac{\alpha_k}{\beta_k}$ a différé de zéro pendant un temps prolongé. Si donc $\frac{\alpha_k}{\beta_k} > \frac{\alpha_i}{\beta_i}$, nous pouvons supposer par expérience l'existence d'un nombre $\gamma > 0$ ainsi que

$$\frac{\alpha_i}{\beta_i} - \frac{\alpha_k}{\beta_k} < -\gamma . \tag{5}$$

Il s'ensuit des inégalités (3), (4) et (5):

$$y_i(t) \leqq K\, e^{-\gamma (t - t_0)}$$

d'où nous parvenons au résultat

$$\lim_{t \to \infty} y_i(t) = 0 .$$

Cette relation est valable pour chaque indice i auquel on peut trouver un indice k de manière qu'on ait $\frac{\alpha_k}{\beta_k} > \frac{\alpha_i}{\beta_i}$ pendant un temps prolongé. Vu que, abstraction faite de quelques valeurs momentanées, on ne peut pas supposer en général $\frac{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{\alpha_k}{\beta_k}$, parce que cela signifierait que les conditions de la con-

currence entre les producteurs A_i et A_k sont inaltérables, il n'y a, en général, qu'un seul indice k tel que $\frac{\alpha_k}{\beta_k} > \frac{\alpha_i}{\beta_i}$ pour tout i différent de k. Il n'y a donc qu'un seul producteur A_k qui soit dans la situation que la valeur $y_k(t)$ des marchandises vendues par lui reste constamment au-dessus d'une borne inférieure positive, la valeur des ventes de marchandises de tout autre producteur A_i tend, dans les conditions économiques décrites, à zéro. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Le trafic de marchandises étant suffisamment développé et les conditions de concurrence économique assez constantes, un des producteurs tend nécéssairement à acquérir un monopole en s'accaparant tout le trafic de marchandises du marché.

Au sujet de l'applicabilité de notre théorème à la réalité, nous devons tenir compte du fait que les considérations mathématiques ne peuvent jamais décrire exactement la vie économique réelle, ils peuvent seulement éclaircir quels phénomènes devront se présenter dans la vie économique *en cas de la stabilisation de certaines conditions.* Ces conditions se reflètent dans les hypothèses faites sur le caractère du modèle mathématique. Une partie de nos hypothèses exprime la sursaturation en marchandises du marché. Ces hypothèses peuvent être acceptés comme première approximation dans la concurrence économique aiguë du capitalisme développé pour beaucoup de marchandises. L'autre partie de nos hypothèses cependant, à savoir que les fonctions $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ sont des constantes et l'hypothèse $\frac{\alpha_i}{\beta_i} - \frac{\alpha_k}{\beta_k} < -\gamma$ ne sont pas des concomitants indispensables du capitalisme développé. Car ces hypothèses veulent dire économiquement qu'il ne se produit pas de changement essentiel dans les conditions de concurrence des producteurs $A_1, A_2, \ldots, A_n$ par rapport de l'un à l'autre. Et de tels changements essentiels ne se produisent pas si des crises économiques éventuelles ne changent pas complètement la structure du marché. Le deuxième groupe de nos hypothèses concernant notre modèle établit donc en essence le postulat que le développement se produise sans crises économiques. Nos investigations mathématiques montrent donc que la monopolisation des marchés par des producteurs individuels ne peut pas être considerée seulement comme un *excès* du capitalisme, comme on prétend souvent à tort, mais justement au contraire: *le phénomène de la monopolisation est un concomitant aux périodes exemptes de crises du capitalisme développé. Le développement de la concurrence toujours plus aiguë du capitalisme ne mène donc pas du tout vers un nivellement des forces économiques, mais entraîne nécéssairement le développement inégal.*

Cette conclusion obtenue par des considérations mathématiques est justifiée par la supériorité sur les producteurs indépendants des trust de mam-

mouth prolifères et des cartels entrelacés par des fils compliqués. Voici comment une bonne part de ces monopoles s'est formée: les petits producteurs étaient incapables de suivre la concurrence même dans les périodes tranquilles, parce que la diminution de la capacité d'absorption du marché les aurait fait supporter des charges hors de proportion avec le bénéfice probable; c'est-à-dire l'accroissement des ventes de marchandises effectuées par le petit producteur A_i était affecté bien plus par la diminution de la capacité du marché que l'accroissement de celles effectuées par le grand producteur A_k. Ce procédé est exprimé dans le langage de notre symbolisme mathématique comme suit: la quantité β_i est grande par rapport à β_k, $\frac{\alpha_i}{\beta_i}$ est donc petit par rapport à $\frac{\alpha_k}{\beta_k}$, autrement dit: la différence $\frac{\alpha_i}{\beta_i} - \frac{\alpha_k}{\beta_k}$ reste négative, par conséquent la fonction $y_i(t)$, c'est-à-dire la valeur des ventes de marchandises du petit producteur A_i diminue exponentiellement. Nous pouvons donc considérer, en quelque sorte, le procédé de formation des monopoles connus dans la réalité comme exemple réél de notre théorie mathématique, c'est-à-dire que notre modèle mathématique reflète le développement du capitalisme moderne correctement *quant à la qualité*.

5. Le développement des ventes de marchandises éffectuées par le producteur monopolisateur

En comparaison de la valeur des ventes de marchandises effectuées par le producteur A_k devenu monopolisateur à partir d'un moment t_0, nous pouvons négliger la valeur des ventes de marchandises qui pourraient éventuellement encore être effectuées par les $n - 1$ autres producteurs. A partir de ce moment, nous pouvons supprimer l'indice k et désigner par α, β et y les quantités α_k, β_k et y_k. Puisque φ aussi ne dépend que de la seule variable $y = y(t)$, le système (1) d'équations différentielles se réduit pour $t > t_0$ à la seule équation différentielle

$$\frac{y'}{y} = \alpha - \beta\,\varphi(y)\,. \tag{6}$$

Le producteur qui se trouve dans une situation monopolisée n'est naturellement pas tenu de compter avec la force impérieuse de la concurrence, il a donc moyen de planifier sa production tant que possible et de produire tant qu'exigent les besoins du marché et, en proportion à ces besoins, le maintien et le développement de sa situation monopolisée. Le producteur monopolisateur peut donc régler sa production de manière que le développement des ventes de marchandises devienne uniforme, c'est-à-dire que le quotient $\frac{\alpha}{\beta}$ peut

être considéré pour $t > t_0$ comme constant. Dans ce cas, nous pouvons démontrer le théorème suivant:

La valeur des ventes de marchandises effectuées par le producteur monopolisé augmente à partir du moment t_0 d'une manière monotone et tend asymptotiquement vers une limite uniquement déterminée par les valeurs de α, β et φ données au moment t_0.

Admettons que y ait au moment t_1 un maximum. Dans ce cas, il s'ensuivrait de (6)

$$\varphi[y(t_1)] = \frac{\alpha}{\beta}$$

et pour des valeurs $t > t_1$ voisins de t_1 on devrait avoir

$$\varphi[y(t)] > \frac{\alpha}{\beta},$$

c'est-à-dire que $\varphi(y)$ augmente autour de t_1. Or φ étant une fonction monotone de y, il s'ensuivrait $y(t) > y(t_1)$, par conséquent $y(t_1)$ ne peut pas être le maximum de la fonction $y(t)$. Par cette contradiction nous avons démontré que $y(t)$ n'a pas de maximum, mais elle est une fonction croissante pour $t > t_0$.

En ce qui concerne la deuxième partie de notre proposition, supposons que dans des intervalles assez petits $\varphi(y)$ varie proportionnellement à y et à sa valeur initiale. Il nous semble que cette hypothèse peut être acceptée comme première approximation de la réalité. Si nous introduisons donc pour simplification la notation $y_0 = y(t_0)$, $\varphi_0 = \varphi(y_0)$ et divisons l'intervalle (y_0, y) en un nombre n assez grand de parties, alors il est approximativement vrai que

$$\varphi(y) = \varphi_0 \left(1 + c\,\frac{y - y_0}{n}\right)^n$$

où c est un facteur de proportionnalité. Cette équation est d'autant plus exacte que n est plus grand, c'est-à-dire qu'ayant passé à la limite $n \longrightarrow \infty$, nous arrivons à la définition suivante de φ:

$$\varphi(y) = \varphi_0\, e^{c(y - y_0)}.$$

L'équation différentielle (6) peut donc être écrite dans la forme suivante:

$$y' = (\alpha - \beta\, \varphi_0\, e^{c(y - y_0)})\, y.$$

Nous avons cependant vu que y augmente de manière monotone restant, en même temps, fini, par conséquent c'est seulement sa valeur obtenue par le passage à la limite $t \longrightarrow \infty$ qui représente son maximum, il s'ensuit donc que

$$\lim_{t \to \infty} y'(t) = 0.$$

Nous en obtenons d'après la relation précédente:

$$\lim_{t \to \infty} e^{c(y-y_0)} = \frac{\alpha}{\beta \varphi_0},$$

c'est-à-dire:

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \frac{1}{c} \log \frac{\alpha}{\beta \varphi_0} + y_0 .$$

Cette valeur est en effet uniquement déterminée par les quantités $\frac{\alpha}{\beta} = \text{const.}$, φ_0 et y_0 données au moment t_0.

6. L'influence du développement du capital monopoliste sur les salaires

Tant que la production et le trafic de marchandises sont assez équilibrés, ce que le producteur monopolisé peut atteindre par la rationalisation de sa production, la valeur de ses marchandises vendues sera proportionnelle à la valeur de l'installation et des matières premières. La valeur du capital fixe du producteur monopolisé est donc ay où a est un facteur de proportionnalité. Si le travail était gratuit, la partie fixe ay du capital augmenterait pendant le temps dt de la quantité ady. Pour pouvoir établir le profit du capitaliste, il en faut encore déduire les salaires dz revenant à la période dt comme quantité qui réduit le revenu brut. Au point de vue du capitaliste l'accroissement dx du capital est défini par

$$dx = ady - dz,$$

c'est-à-dire le capital est déterminé par l'équation fonctionnelle

$$x = ay - z .$$

Il en résulterait formellement

$$\frac{x'}{x} = \frac{ay' - z'}{ay - z};$$

nous pouvons cependant considérablement simplifier cette équation différentielle en tenant compte du fait que, selon notre théorème précédent, y croît monotonément en tendant vers une limite finie. Si nous supposons le moment t_0 assez grand, l'accroissement de y pourra être négligé pour $t > t_0$; cela revient à dire que nous pouvons supposer $y' = 0$ et $y(t) = y(t_0) = y_0$. De cette manière nous ne devons résoudre que l'équation différentielle

$$\frac{x'}{x} = -\frac{z'}{ay - z}.$$

En introduisant la notation $z_0 = z(t_0)$, nous obtenons donc le résultat

$$z(t) = ay_0 - (ay_0 - z_0) \exp \int_{t_0}^{t} \frac{x'}{x}\, dt\,. \tag{7}$$

Vu que dans la production de la plupart de marchandises la valeur de l'installation et des matières premières à un moment donné (capital fixe) est plus grand que celui des salaires payés au même moment (capital variable), on a en général $ay_0 - z_0 > 0$. En même temps, le capitaliste tâche nécéssairement d'augmenter son capital, c'est-à-dire que $\frac{x'}{x} > 0$. Mais on a alors pour $t_2 > t_1$:

$$\int_{t_0}^{t_2} \frac{x'}{x}\, dt > \int_{t_0}^{t_1} \frac{x'}{x}\, dt.$$

Il résulte donc de (7), tenant compte de la valeur positive de $ay_0 - z_0$:

$$z(t_2) < z(t_1).$$

Nous sommes donc arrivés au résultat que, *si le capital monopoliste croît constamment, ceci entraîne — à moins que d'autres influences ne se fassent valoir — la diminution des salaires.*

Notre résultat exprime la propriété de l'époque du capitalisme de monopole que la valeur presque constante des ventes de marchandises du producteur monopolisateur *ne signifie pas* en même temps que le développement économique de la société devient uniforme, car le développement du capital monopoliste produit nécéssairement des périodes pendant lesquelles *la valeur des salaires payés par les entrepreneurs capitalistes diminue.*

Dans la réalité sociale, le rapport du développement du capital et des salaires n'est pas tellement simple comme le montre l'équation différentielle (7). C'est que le développement des salaires est influencé hors du développement du capital monopoliste examiné isolément par beaucoup d'autres facteurs sociaux que notre modèle mathématique ne reflète pas du tout. Toutefois nos raisonnements n'ont même pas le but d'exprimer la réalité sociale insaisissable par des moyens mathématiques, mais de *signaler une tendance de développement* qui dans la réalité apparaît sous une forme ou une autre; nous pouvons exprimer cette tendance le plus simplement comme suit: *il s'ensuit de la nature du développement du capital monopoliste que la lutte pour les salaires devient plus aiguë.*

7. L'apparition du processus de monopolisation en cas du règlement de la concurrence capitaliste

Nous avons tâché d'exclure de nos raisonnements, autant que possible, toute circonstance qui hors du développement du trafic de marchandises basé sur offre et demande et hors de la structure du marché pourrait encore influ-

encer la vie économique. Ainsi nous n'avons pas tenu compte par exemple des fluctuations des prix ou des possibilités offertes par le crédit et nous avons surtout négligé de prendre en considération l'influence de la structure politique de la société sur la vie économique. Malgré cela, notre modèle reflète justement les conditions du capitalisme développé, car la structure du modèle est basé sur des hypothèses économiques qui ne peuvent se réaliser que dans les conditions de production et du marché du capitalisme développé. C'est qu'une telle diminution de la capacité d'absorption du marché qu'exige notre modèle ne peut être supposée que dans une époque quand le développement téchnique de la production est capable à satisfaire la plus grande demande, par conséquent la production des marchandises dépasse les demandes moyennes du marché.

Supposant en plus certaines relations constantes par rapport de l'un à l'autre dans les capacités de vente des producteurs, nous avons également compris la concurrence aiguë du capitalisme développé parmi nos hypothèses, parce que l'exclusion de divergences essentielles ne peut être considérée comme hypothèse réelle que si la production est développée au point que le producteur ne peut pas changer essentiellement sans intervention extérieure ses rapports au marché et aux autres producteurs. Nos investigations se rapportent par conséquent aux conditions du capitalisme le plus développé; nos résultats obtenus jusqu'ici peuvent donc s'exprimer sous la forme suivante aussi: *le développement inégal créant des monopoles appartient aux propriétés intrinséques de la production capitaliste la plus développée; il en résulte nécéssairement l'apparition de certains phénomènes de la lutte pour les salaires.* Après cela, il paraît naturel de poser la question suivante: peut-on maintenir l'essence de la concurrence capitaliste, mais régler en même temps le trafic des marchandises par intervention sociale de manière qu'il ne puisse pas se développer de monopoles au détriment des autres producteurs?

Le maintien de l'essence de la concurrence capitaliste veut dire que les lois d'offre et de demande doivent en général rester en vigueur, il peut y être ajouté tout au plus encore une mesure qui restreindrait les ventes de marchandises effectuées par les producteurs individuels à point suffisant pour exclure la monopolisation du marché. L'hypothèse de la restriction se reflète mathématiquement par cela que la valeur $y_k(t)$ des ventes du producteur A_k ne pourrait augmenter de la quantité $\alpha_k y_k dt$ même si le marché était capable d'absorber n'importe combien de marchandises, parce que la mesure de restriction diminue cette augmentation d'une quantité $\lambda_k y_k dt$ où la grandeur de $\lambda_k = \lambda_k(t)$ dépend de la valeur de $\alpha_k = \alpha_k(t)$ et des valeurs $y_i(t)$ des ventes de marchandises effectuées des producteurs A_i différents du producteur A_k. Les fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont donc des facteurs appelés à compenser le développement inégal des ventes de marchandises ayant les valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_n$ effectuées par les producteurs $A_1, A_2, \ldots, A_n$. De cette manière, nous

obtenons, au lieu de (1), le système d'équations différentielles suivant:

$$
(1a)\qquad
\begin{aligned}
\frac{y_1'}{y_1} &= \alpha_1 - \lambda_1 - \beta_1 \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n),\\
\frac{y_2'}{y_2} &= \alpha_2 - \lambda_2 - \beta_2 \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{y_n'}{y_n} &= \alpha_n - \lambda_n - \beta_n \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n).
\end{aligned}
$$

Si nous admettons que les relations

$$
(8)\qquad \frac{\alpha_1 - \lambda_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2 - \lambda_2}{\beta_2} = \ldots = \frac{\alpha_n - \lambda_n}{\beta_n}
$$

subsistent pour toute valeur de t, alors les facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ devraient changer de manière de compenser un à un les différences des quotients $\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\beta_n}$ différents l'un de l'autre, ce qui est pratiquement irréalisable, parce qu'il est impossible de prendre des mesures qui règleraient le trafic des marchandises automatiquement. L'hypothèse (8) est par conséquent irréelle, en écrivant donc α_k' au lieu de $\alpha_k - \lambda_k$, le système (1a) d'équations différentielles devient tout à fait analogue à (1), nous pouvons donc tirer de (1a) les mêmes conclusions que de (1), c'est tout au plus le moment t_0 de monopolisation qui peut changer. Bien entendu, pour pouvoir raisonner ainsi, il faut supposer que les quotients $\frac{\alpha_k'}{\beta_k}$ sont doués des mêmes propriétés comme les quotients $\frac{\alpha_k}{\beta_k}$. En ce qui concerne cette question, il n'y a que trois possibilités: 1° Il existe une constante $\gamma > 0$ telle que $\frac{\alpha_i'}{\beta_i} - \frac{\alpha_k'}{\beta_k} < -\gamma$. 2° Les fonctions λ_k oscillent constamment, c'est à dire: si $\alpha_k'(t_1) > \alpha_i'(t_1)$ à un moment t_1, il existe toujours un moment $t_2 > t_1$ auquel $\alpha_k'(t_2) < \alpha_i'(t_2)$. 3° Les λ_k tendent asymptotiquement vers des valeurs déterminées par

$$
\lim_{t\to\infty} \frac{\alpha_k'}{\beta_k} = \lim_{t\to\infty} \frac{\alpha_i'}{\beta_i}
$$

pour tous les couples d'indices i et k.

Ce dernier cas équivaut à un règlement presque automatique du trafic des marchandises; de plus, l'automatisme doit fonctionner sans limites. Or l'hypothèse qu'un tel règlement automatique peur être imposé à la société est évidemment absurde. Dans la réalité, on ne peut donc accepter que les hypothèses 1° et 2°. Nous sommes donc parvenus au résultat suivant: si l'essence de la concurrence capitaliste est maintenue, il n'y a en réalité que deux cas possibles: *1° ou la monopolisation du trafic des marchandises et les conséquences*

qui en découlent sont inévitables malgré toutes mesures de compensation qui pourraient être introduites; 2° ou bien les facteurs de compensation causent une oscillation sans fin de la puissance de production, phénomène qui rend impossible le développement tranquille de la société. Il est donc impossible de transformer le capitalisme développé — tout en conservant son essence — en un système social dont le développement se déroule sans secousses et sans crises.

Le résultat serait tout autre si nous ne nous limitions pas uniquement à la restriction de la concurrence capitaliste, mais, en excluant complètement la possibilité de la concurrence capitaliste, nous examinerions le développement sur le modèle mathématique d'un caractère tout différent de *l'économie planifiée*. C'est que dans ce cas le développement des forces productrices et le trafic des marchandises se produit selon un plan établi d'avance; le problème mathématique ne consiste donc pas à établir le système d'équations de l'équilibre dynamique entre le développement maximum selon la téchnique de l'époque de la production des producteurs individuels d'une part et de la diminution de la puissance d'achat survenue *par suite* de ce développement d'autre part; le problème consisterait à rechercher l'optimum du développement des forces productrices en présence duquel la puissance d'achat du marché augmente au maximum. La condition préalable d'un changement si radical des conditions économiques est cependant une transformation essentielle de toute la structure de la société capitaliste dont la discussion dépasserait de loin les cadres de nos raisonnements de caractère mathématique.

(Reçu le 2 juin 1959.)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МОНОПОЛЬ-КАПИТАЛИСТИЧЕСКОГО ТОВАРООБОРОТА

ГЕОРГИЙ АЛЕКСИЧ (Будапешт)

(Резюме)

Буржуазно-экономическая наука пыталась трактовать не мало проблем математическими методами. Попытки эти оказывались абсолютно ошибочными, потому что под видом математических форм скрывается тот взгляд, якобы капиталистическое хозяйство является единственной формой жизни. Они не выяснили, можно ли считать постоянной, единицу оборота стоимости, или она сама является функцией неизвестных факторов. Далее мы встретили даже такие трактовки, которые с математической точки зрения могут быть резко критикованы. Таким образом о системе уравнений Вольрас—Касселя считавшейся в буржуазной математической экономии основной, было доказано, что она не имеет однозначно определенной положительной системы решения, т. е. математические решения системы уравнения Вольрас—Касселя, не может иметь никакого экономического значения.

Мы прежде всего подчеркиваем, что математическая трактовка экономии не может быть принята без критики даже и в том случае, если она была бы лишена вышеупомянутых ошибок. Экономическое развитие есть социальное явление, всякие попытки старающиеся

доказать это развитие в математическом смысле детерминированным процессом. являются фундаментально ошибочными. Максимум чего можно достигнуть это конструкция такой модели, математические свойства которой правильно отражают одну часть экономической истины и таким образом бросают свет на то, какими силами вызываются известные исследуемые явления На фоне этого можно определить и то, какие условия должны быть безусловно изменены обществом, чтобы элиминировать некоторые вредные явления. Цель данной статьи, что по методу исследований Вольтера в связи с биологическим коллективом, доказать на математической моделе отражающей некоторые свойства товарооборота развитого капитализма, что процесс монополизации есть неизбежное последствие развитого капитализма, и таким образом принципиально ошибочно любое представление о том, что при сохранении основных свойств капиталистического конкурса без монополизации, могло бы надеяться на спокойное экономическое развитие.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ означают производителей товаров определенного рынка функции $Y_1(t), Y_2(t), \ldots, Y_n(t)$ стоимость всего количества товаров, выпущенных ими до времени t и

$$y_1(t) = \frac{dY_1}{dt}, \; y_2(t) = \frac{dY_2}{dt}, \ldots, y_n(t) = \frac{dY_n}{dt}.$$

Если рыночная потребность была бы безпредельна, то количество $y_k(t)$, в интервале времени $(t, t + dt)$ увеличилось бы количеством $\alpha_k y_k dt$, где $\alpha_k = \alpha_k(t)$ является положительной функцией зависящей лишь от производительной способности A_k производителя. Если предположить, что рынок настоль перегружен, что когда один из производителей выпустит товар в оборот, тогда расположенное количество товара влечет за собой немедленное уменьшение максимально возможного оборота других производителей. В этом случае $y_k(t)$ увеличится не на $\alpha_k y_k dt$, а на $(\alpha_k - \psi_k) y_k$ где ψ_k является функцией переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Пусть $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ уменьшение причиненное единицей товарооборота покупной способности рынка, тогда $\psi_k = \beta_k \varphi$, где $\beta_k = \beta_k(t)$ является функцией со значениями между 0 и 1. Если $y'_k(t)$ означает производную от $y_k(t)$, тогда развитие товарооборота выражается следующей системой дифференциальных управлений:

$$\frac{y'_1}{y_1} = \alpha_1 - \beta_1 \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

$$\frac{y'_2}{y_2} = \alpha_2 - \beta_2 \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{y'_n}{y_n} = \alpha_n - \beta_n \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Сохранивши предположение о перегруженном рынке, доказываем, что эта система дифференциальных уравнений имеет систему решения, состоящую из положительных функций, однозначно определенных начальными условиями.

Рассмотрим вопрос о том возможно ли спокойное развитие товарооборота без кризиса, при производственных отношениях развитого капитализма? Такое развитие характеризовалось бы тем, что сравниваемые один с другим условия конкурса производителей $A_1, A_2, \ldots, A_n$ существенно не изменились бы, что мы можем выразить на нашей моделе рассматривая функции $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ постоянными. Кроме этого мы употребляем еще тот известный эмпирический факт, что способность увеличения товарооборота у A_k, за длительное время была больше, чем у A_i, тогда же в условиях развитого капитализма так и остается вообще, что на нашей

моделе выражается тем, что существует такое постоянное $\gamma > 0$ для которого

$$\frac{\alpha_k}{\beta_k} - \frac{\alpha_i}{\beta_i} > \gamma.$$

На основании этих двух предположений мы доказываем, что лишь одна единственяо функция $y_k(t)$ может остаться больше чем некоторое положительное пастоянное, а другие асимптотически приближаются к нулю.

Экономическое обяснение эгих математических данных следующее: при товарообороге соответствующем условиям развитого капитализма, и при более менее постоянных условиях конкурса, один из производителей обязательно приходит в монополизированное состояние ввиду того он охватывает совершение всего товарооборота рынка. Монополизация единичными производителями рынков, не может быть рассмотрена как болезненный прирост капитализма, как это утверждается некоторыми буржуазными экономистами, а на самом деле, она является безусловным спутником развитого канитализма и в периодах без кризиса.

На фоне исследований товарооборота монополизированного производителя, мы доказываем, что если монополь-капитал монотонно увеличивается вместе с товарооборотом, тогда это, если другие влияния на него не действуют, влечет за собой уменьшение зарплаты.

Наконец рассмотрим вопрос о том, возможно ли сохранивши суть капиталистического конкурса, принять такие меры которые исключили бы монополизацию и ее последствия? Эта проблема математически выражается тем, что в систему дифференциальных уравнений нужно привести такие функции λ_k значение которых зависит от α_k и от значения функций y_1, y_2, ..., y_n, т. е. мы должны исследовать следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{y_1'}{y_1} = \alpha_1 - \lambda_1 - \beta_1 \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

$$\frac{y_2'}{y_2} = \alpha_2 - \lambda_2 - \beta_2 \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{y_n'}{y_n} = \alpha_n - \lambda_n - \beta_n \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Из этих исследований мы получили тот результат, что в действительности имеются лишь две возможности: 1) или происходит процесс монополизации, несмотря на примененные принудительных мер, 2) или в товарообороте наступает такое постоянное колебание, которое полностью приводит производство в неопределенное состояние. Сохранивши суть капиталистического социального строя, становится невозможным постоянно спокойное развитие без кризиса товарооборота даже при применении принудительных мер.

TSCHIRNHAUS'SCHE EIFLÄCHEN UND EIKURVEN

Von

GYULA SZ.-NAGY (Szeged), Mitglied der Akademie

1. Eine Tschirnhaus'sche Kurve ist der Ort der Punkte der Ebene, deren Abstände von n festen Punkten der Ebene multipliziert mit gegebenen Konstanten eine konstante Summe ergeben.[1]

Eine *Tschirnhaus'sche Fläche $E_n(R)$ n-ten Grades mit dem Radius R* wird den Ort der Punkte P bedeuten, deren Abstände von n festen Punkten $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *(Brennpunkte)* multipliziert mit gegebenen positiven Konstanten $q_1, q_2, \ldots, q_n$ *(Gewichte der Brennpunkte)*, deren Summe gleich n ist, die konstante Summe nR ergeben.

Liegen die Brennpunkte in einer Ebene ε, so ist die Schnittkurve der Ebene ε und der Tschirnhaus'schen Fläche $E_n(R)$ eine *Tschirnhaus'sche Kurve*. Auch diese Kurve läßt sich mit $E_n(R)$ bezeichnen. Liegen die Brennpunkte nicht in einer Ebene, so bezeichnet $E_n(R)$ nur die Fläche.

In einem multipolaren Koordinatensystem, dessen Pole die Brennpunkte sind, hat die Fläche oder Kurve $E_n(R)$ die Gleichung

$$T(P) \equiv G(P) - nR \equiv \sum_{k=1}^{n} q_k r_k - nR = 0, \tag{1}$$

$$q_k > 0\,, \qquad \sum_{k=1}^{n} q_k = n\,, \qquad r_k = \overline{PF_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Ein Punkt P liegt dann auf $E_n(R)$, wenn seine multipolaren Koordinaten $r_1, r_2, \ldots, r_n$ der linearen Gleichung (1) genügen. Eine nichtnegative Lösung $r_1, r_2, \ldots, r_n$ der Gleichung gibt aber nur dann einen Punkt von $E_n(R)$, wenn die n Kugeln von Halbmessern r_k, mit den Mittelpunkten F_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ einen Punkt gemeinsam haben. Dann liegt dieser Punkt

[1] Die Tschirnhaus'schen Kurven kommen erst in der Arbeit „Medicina mentis" von W. v. Tschirnhaus, Amsterdam 1686, S. 91. vor. Die Tschirnhaus'sche Kurven sind spezielle Polyzonalkurven von A. Cayley. Vgl. G. Loria, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, Bd I: Die algebraischen Kurven, Leipzig, 1910, S. 348—351. J. Molnár hat für die Fadenkonstruktion Tschirnhaus'scher Eikurven mit ganzzahligen Gewichten ein einfaches Verfahren gegeben, *Középisk. Mat. Lapok.* 2 (1950), S. 117-121.

auf $E_n(R)$. Es wird angenommen, daß $E_n(R)$ eine reelle Fläche oder Kurve ist, daß sie also mindestens einen reellen Punkt besitzt.

Wir nennen die Flächen oder Kurven $E_n(R)$ *Tschirnhaus'sche Eiflächen* bzw. *Eikurven*, weil sie nach Satz II konvex sind.

$E_n(R)$ ist *isobar* bzw. *allgemein, anisobar*, je nachdem die Gleichungen $q_1 = q_2 = \ldots = q_n$ $(= 1)$ bestehen bzw. nicht bestehen. Die Fläche bzw. Kurve $E_1(R)$ ist eine Kugel bzw. ein Kreis vom Halbmesser R. Eine isobare bzw. allgemeine Kurve $E_2(R)$ ist eine Ellipse bzw. ein Cartesisches Oval.[2]

Haben die Brennpunkte eine symmetrische Lage in bezug auf eine Ebene, Gerade bzw. auf einen Punkt, so besitzt offenbar auch $E_n(R)$ diese Symmetrie. Eine Tschirnhaus'sche Eifläche, deren Brennpunkte auf einer Geraden g liegen, ist eine Rotationsfläche mit der Achse g. Bei einer zentralen Symmetrie der Brennpunktgruppe hat $E_n(R)$ ein Zentrum.

2. Die Flächen oder Kurven $E_n(R_1)$ und $E_n(R_2)$ sind *konfokal*, wenn sie dieselben Brennpunkte besitzen und einem Brennpunkt bei beiden Flächen oder Kurven dasselbe Gewicht gehört.

Der Radius R der konfokalen Flächen oder Kurven $E_n(R)$ hat einen von der Lage der Brennpunkte und von ihren Gewichten abhängigen kleinsten Wert R_0 mit der Eigenschaft: $E_n(R)$ ist eine reelle Fläche oder Kurve, wenn $R > R_0$ ist, im Falle $R < R_0$ hat sie keinen reellen Punkt. $E_n(R_0)$ ist ein isolierter Punkt oder eine isolierte Strecke, mit einem gemeinsamen Namen: der *Kern* der konfokalen reellen Flächen oder Kurven $E_n(R)$ $(R > R_0)$. Dieser Kern ist also ein *Kernpunkt* oder eine *Kernstrecke*.

Der Kern von $E_n(R)$ besteht aus den Punkten, in denen die Funktion $G(P) = \sum_{k=1}^{n} q_k \overline{PF_k}$ ihren kleinsten Wert $G^* = n R_0$ erreicht. Die stetige Funktion $G(P)$ hat in der (abgeschlossenen) konvexen Hülle H^* der Brennpunkte ein Minimum, das von G^* nicht abweichen kann. Es gibt nämlich zu jedem Punkt P außerhalb von H^* eine Ebene ε, durch welche P und H^* getrennt werden. Die orthogonale Projektion P_0 des Punktes P auf ε liegt zu jedem Punkt von H^*, also zu jedem Brennpunkt F_k, näher als P. Deshalb sind

$$\overline{P_0 F_k} < \overline{PF_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\text{und} \quad G^* \leqq G(P_0) = \sum_{k=1}^{n} q_k \overline{P_0 F_k} < \sum_{k=1}^{n} q_k \overline{PF_k} = G(P) .$$

Der Kern von $E_n(R)$ liegt also in der konvexen Hülle H^* der Brennpunkte.

Ist H^* keine Strecke, so ist der Kern ein Kernpunkt. Die Annahme: $G(P_1) = G(P_2) = G^* = n R_0$, $P_1 \neq P_2$ führt nämlich zum Widerspruch

[2] Vgl. bei G. Loria, a. a. O., S. 173—183.

$G(H) < G^*$, wo H den Halbierungspunkt der Strecke $\overline{P_1P_2}$ bezeichnet. Nach einem bekannten elementargeometrischen Satz besteht für einen beliebigen Punkt F die Ungleichung

$$2\,\overline{HF} \leqq \overline{P_1F} + \overline{P_2F} \tag{2}$$

und das Gleichheitszeichen gilt hier dann und nur dann, wenn F ein Punkt der Verlängerungen der Strecke $\overline{P_1P_2}$ ist (inbegriffen auch die Punkte P_1 und P_2). Enthalten also die Verlängerungen der Strecke $\overline{P_1P_2}$ nicht jeden Brennpunkt, so besteht mindestens eine der Ungleichungen

$$2\,\overline{HF_k} \leqq \overline{P_1F_k} + \overline{P_2F_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

mit Ungleichheitszeichen. Deshalb ist

$$2\,G(H) = 2\sum_{k=1}^{n} q_k\,\overline{HF_k} < \sum_{k=1}^{n} q_k\,\overline{P_1F_k} + \sum_{k=1}^{n} q_k\,\overline{P_2F_k} = G(P_1) + G(P_2) = 2\,G^*.$$

Liegen die Brennpunkte auf einer Geraden und haben sie dort die Reihenfolge $F_1, F_2, \ldots, F_n$, so gibt es einen Index p $(1 \leqq p \leqq n)$, so daß entweder

$$\sum_{=1}^{p-1} q_k < \sum_{k=p}^{n} q_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{p} q_k > \sum_{k=p+1}^{n} q_k, \quad \text{oder} \quad \sum_{k=1}^{p} q_k = \sum_{k=p+1}^{n} q_k$$

sind. Diese Relationen lassen sich wegen der Gleichung $\sum_{k=1}^{n} q_k = n$ in der Form

$$2\sum_{k=1}^{p-1} q_k < n < 2\sum_{k=1}^{p} q_k, \quad \text{bzw.} \quad 2\sum_{k=1}^{p} q_k = n$$

schreiben. Besteht die Ungleichung bzw. Gleichung für p, so ist der Kern von $E_n(R)$ der Kernpunkt F_p bzw. die Kernstrecke $\overline{F_pF_{p+1}}$, weil der Wert der Funktion $G(P)$ in F_p bzw. in den Punkten der Strecke $\overline{F_pF_{p+1}}$ minimal ist.

Besteht nämlich die Ungleichung für p und ist P $(\neq F_p)$ ein beliebiger Punkt der Geraden g, so ist

$$G(P) - G(F_p) = \sum_{k=1}^{n} q_k\,(\overline{PF_k} - \overline{F_pF_k}) = \sum_{k=1}^{n} q_k\,D_k > 0\,.$$

Liegt P auf der Halbgeraden F_pF_1 bzw. F_pF_n (im Falle $p = 1$ bzw. $p = n$ ist diese Halbgerade die Verlängerung der Strecke $\overline{F_pF_n}$ bzw. $\overline{F_pF_1}$ über F_p), so erhält man aus der Reihenfolge der Brennpunkte offenbar die Relationen

$$D_k > -\overline{PF_p} \quad (k = 1, 2, \ldots, p-1), \quad D_k = \overline{PF_p} \quad (k = p, p+1, \ldots, n),$$

bzw.

$$D_k = \overline{PF_p} \quad (k = 1, 2, \ldots p), \quad D_k > -\overline{PF_p} \quad (k = p+1, \ldots, n)\,.$$

Daraus ergibt sich die Ungleichung

$$G(P) - G(F_p) = \sum_{k=1}^{p-1} q_k D_k + \sum_{k=p}^{n} q_k D_k > (-\sum_{k=1}^{p-1} q_k + \sum_{k=p}^{n} q_k)\,\overline{P F_p} > 0$$

bzw.

$$G(P) - G(F_p) = \sum_{k=1}^{p} q_k D_k + \sum_{k=p+1}^{n} q_k D_k > (\sum_{k=1}^{p} q_k - \sum_{k=p+1}^{n} q_k)\,\overline{P F_p} > 0\,.$$

Der Punkt F_n ist also der Kernpunkt von $E_n(R)$.

Ist $\sum_{k=1}^{p} q_k = \sum_{k=p+1}^{n} q_k$, so erhält man ebenso für einen beliebigen Punkt P der Halbgeraden $F_p F_1$ bzw. $F_{p+1} F_n$ die Ungleichung $G(P) - G(F_p) > 0$ bzw. $G(P) - G(F_{p+1}) > 0$.

In einem beliebigen Punkt P der Strecke $\overline{F_p F_{p+1}}$ (F_p und F_{p+1} inbegriffen) sind

$$D_k = -\overline{PF_p} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \quad D_k = \overline{P F_p} \quad (k = p+1, \ldots, n)$$

und

$$G(P) - G(F_p) = \left(-\sum_{k=1}^{p} q_k + \sum_{k=p+1}^{n} q_k\right)\overline{P F_p} = 0\,.$$

Damit ist der Satz bewiesen:

I. *Der Kern einer Tschirnhaus'schen Eifläche oder Eikurve $E_n(R)$ liegt in der konvexen Hülle ihrer Brennpunkte. Liegen die Brennpunkte nicht auf einer Geraden, so ist der Kern ein Kernpunkt.*

Liegen die Brennpunkte auf einer Geraden in der Reihenfolge $F_1, F_2, \ldots, F_n$ und besteht für einen Index p die Ungleichung bzw. Gleichung

$$2\sum_{k=1}^{p-1} q_k < n < 2\sum_{k=1}^{p} q_k \quad \textit{bzw.} \quad 2\sum_{k=1}^{p} q_k = n\,,$$

so ist der Kern von $E_n(R)$ ein Kernpunkt, der Brennpunkt F_p, bzw. eine Kernstrecke, die Strecke $\overline{F_p F_{p+1}}$.

Ist also $E_n(R)$ keine Rotationsfläche, so hat sie einen Kernpunkt. Eine Rotationsfläche $E_n(R)$ hat dann eine Kernstrecke, wenn ihre Rotationsachse außerhalb der Brennpunkte einen Punkt enthält, von dem die linksseitigen Brennpunkte dieselbe Gewichtssumme ergeben, wie die rechtsseitigen.

3. Der folgende Satz ist für uns wesentlich.

II. *Jede Tschirnhaus'sche Fläche oder Kurve $E_n(R)$ ($R > R_0$) ist eine Eifläche bzw. Eikurve.*

Dieser Satz wurde von mir zuerst mit Hilfe der Ungleichung (2) elementar bewiesen. Man kann nämlich zeigen, daß keiner der Punkte einer Sehne $\overline{P_1 P_2}$ von $E_n(R)$ ($R > R_0$), von denen die Sehne in 2^N ($N = 1, 2, \ldots$) gleiche Strecken geteilt werden, auf $E_n(R)$ liegen kann.

Die Konvexität von $E_n(R)$ folgt aus den Eigenschaften der konvexen Funktionen einfach.

Ist nämlich g eine Gerade durch einen beliebigen Punkt P_1 von $E_n(R)$, so ist der Abstand r_k eines auf g laufenden Punktes P vom Brennpunkt F_k eine (von unten) konvexe Funktion von P. Deshalb ist auch $G(P) = \sum_{k=1}^{n} q_k r_k$ $(q_k > 0;\ k = 1, 2, \ldots, n)$ auf g eine konvexe Funktion von P, die den Wert $G(P_1) = n R$ in höchtens einem Punkt P_2 außerhalb von P_1 annimmt. $E_n(R)$ hat also mit g höchstens zwei Treffpunkte. Daraus folgt die Konvexität von $E_n(R)$, weil ihre Punkte in einem beschränkten Raum liegen.[3]

4. Sind $R_1, R_2, \ldots, R_n$ beliebige nichtnegative reelle Zahlen, so läßt sich die Gleichung von $E_n(R)$ in der Form

$$\sum_{k=1}^{n} q_k (r_k - R_k) = n R - \sum_{k=1}^{n} q_k R_k = C \tag{4}$$

schreiben.

Bezeichnet K_h die Kugel vom Halbmesser R_h $(\geqq 0)$, deren Mittelpunkt der Punkt F_h ist, so bedeutet $d_h = r_h - R_h$ den Abstand eines Punktes P mit den multipolaren Koordinaten $r_1, r_2, \ldots, r_h$ von der Kugel K_h. Dieser Abstand ist negativ, Null oder positiv, je nachdem P innerhalb von K_h, auf K_h bzw. außerhalb von K_h liegt.

Es gilt also der Satz:

III. *Ist K_h eine Kugel von Halbmesser R_h $(\geqq 0)$, deren Mittelpunkt im Brennpunkt F_h einer Tschirnhaus'schen Fläche $E_n(R)$ liegt und hat F_h das Gewicht q_h, so genügen die Abstände d_h eines beliebigen Punktes der Fläche $E_n(R)$ von den Kugeln K_h $(h = 1, 2, \ldots, n)$ einer linearen Gleichung*

$$q_1 d_1 + q_2 d_2 + \ldots + q_n d_n = C\,.$$

Die Punkte, deren Abstände von n Kugeln mit verschiedenen Mittelpunkten einer linearen Gleichung mit positiven Koeffizienten genügen, liegen auf einer Tschirnhaus'schen Eifläche n-ten Grades, deren Brennpunkte die

[3] Ebenso kann man einsehen, daß eine reelle Fläche oder Kurve mit einer Gleichung von der Form

$$\sum_{k=1}^{n} \left[[q_k^{(1)} r_k^{\nu_1} + q_k^{(2)} r_k^{\nu_2} + \ldots + q_k^{(h)} r_k^{\nu_h} + \ldots + q_k^{(m)} r_k^{\nu_m}\right] = \text{Konst} > 0,\ q_k^{(h)} \geqq 0,\ \nu_h \geqq 1$$

$(h = 1, 2, \ldots, m)$ konvex ist, weil r_h^{ν} im Falle $\nu \geqq 1$ auf einer Geraden g eine konvexe Funktion ist. Legt man nämlich g in die x-Achse, so hat r_h^{ν} die Form

$$r_k^{\nu} = f(x) = \left[(x - a_k)^2 + b_k^2 + c_k^2\right]^{\frac{\nu}{2}}$$

und in den Punkten der x-Achse ist $f''(x) > 0$.

Kugelmittelpunkte sind. Die Gewichte der Brennpunkte sind zu den Koeffizienten der linearen Gleichung proportional.

Sind $R_1, R_2, \ldots, R_n$ die multipolaren Koordinaten eines festen Punktes P_0 von $E_n(R)$, haben also die Kugeln K_h $(h = 1, 2, \ldots, n)$ einen Punkt P_0 gemeinsam, so hat die Gleichung (4) die Form

$$(6) \qquad \sum_{h=1}^{n} q_h (r_h - R_h) = \sum_{h=1}^{n} q_h d_h = 0 , \qquad \sum_{h=1}^{n} q_h R_h = n R .$$

Daraus erhält man im Falle $n = 2$ die von I. Newton entdeckte Eigenschaft des Cartesischen Ovales, daß die Abstände seiner Punkte von zwei festen Kreisen in einem gegebenen Verhältnisse stehen.[4]

Die Kugeln K_h $(h = 1, 2, \ldots, n)$, deren Mittelpunkte Brennpunkte von $E_n(R)$ sind und deren Halbmesser R_h der zweiten Gleichung von (6) genügen, bilden *ein konfokales System* Σ *von* $E_n(R)$. Insbesondere bilden die Kugeln K_h vom Halbmesser R mit den Mittelpunkten F_h $(h = 1, 2, \ldots, n)$ ein konfokales System von $E_n(R)$. Hat die erste Gleichung von (6) ein nicht verschwindenes Glied, so hat sie mindestens je ein positives und negatives Glied.

Daraus folgt der Satz:

IV. *Ein jeder Punkt einer Tschirnhaus'schen Eifläche* $E_n(R)$ *liegt innerhalb einer Kugel eines konfokalen Systems* Σ *von* $E_n(R)$ *und außerhalb einer Kugel von* Σ, *oder er ist ein gemeinsamer Punkt der n Kugeln von* Σ.

Die Gesamtheit der gemeinsamen inneren und der Randpunkte der n Kugeln eines konfokalen Systems Σ *von* $E_n(R)$ *enthält die Fläche. Der Durchschnitt der Kugelinneren von* Σ *enthält keinen Punkt von* $E_n(R)$.

Aus diesem Satz erhält man im Falle $R_1 = R_2 = \ldots = R_n (= R)$ den Satz:

V. *Enthält eine Kugel K vom Halbmesser* ϱ *die Brennpunkte einer Eifläche* $E_n(R)$ *im Innern oder am Rande, so liegt jeder Punkt von* $E_n(R)$ *im Innern oder am Rande der konzentrischen Kugel K' vom Halbmesser* $\varrho' = R + \varrho$. *Im Falle* $\varrho < R$ *liegt die Fläche* $E_n(R)$ *außerhalb der konzentrischen Kugel K'' vom Halbmesser* $\varrho'' = R - \varrho$.

Die Fläche $E_n(R)$ *hat bei genügend großem Radius die Form einer Kugel.*

Die Kugeln vom Halbmesser R, deren Mittelpunkte in die Brennpunkte fallen, bilden nämlich ein konfokales System Σ von $E_n(R)$, sie liegen in K' und enthalten K''.

Der zweite Absatz des Satzes folgt daraus, daß das Verhältnis $\varrho' : \varrho''$ von der Einheit wenig abweicht, wenn der Radius R genügend groß ist.

[4] I. Newton, Philosophia naturalis, Principia mathematica, Buch I, Satz XIV. Vgl. bei G. Loria, a. a. O., S. 178.

5. Der *Hauptpunkt* O einer Tschirnhaus'schen Eifläche oder Eikurve $E_n(R)$ ist der Schwerpunkt ihrer (mit Gewichten versehenen) Brennpunkte. Die *Hauptkugel* der Eifläche bzw. der *Hauptkreis* der Eikurve hat den Mittelpunkt im Hauptpunkt O und den Halbmesser R. Es gilt der Satz:

VI. *Eine Eifläche bzw. Eikurve* $E_n(R)$ $(R > R)$ *liegt innerhalb ihrer Hauptkugel bzw. ihres Hauptkreises und sie kann auf der Hauptkugel bzw. auf dem Hauptkreis nur dann einen Punkt haben, wenn die Brennpunkte auf einer Geraden liegen.*

Dieser Satz verallgemeinert einen bekannten Satz der Ellipse. Er scheint für ein Cartesisches Oval nicht bekannt zu sein.

Hat der Brennpunkt F_k bzw. der Hauptpunkt O in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Koordinaten a_k, b_k, c_k bzw. ξ, η, ζ, so sind

$$\sum_{k=1}^{n} q_k a_k = \xi \sum_{k=1}^{n} q_k = n\,\xi, \quad \sum_{k=1}^{n} q_k b_k = n\,\eta, \quad \sum_{k=1}^{n} q_k c_k = n\,\zeta. \tag{7}$$

Für einen beliebigen Punkt $P = (x, y, z)$ des Raumes bestehen also die Gleichungen

$$\begin{gathered} \sum_{k=1}^{n} q_k (a_k - x) = n\,(\xi - x), \quad \sum_{k=1}^{n} q_k (b_k - y) = n\,(\eta - y), \\ \sum_{k=1}^{n} q_k (c_k - z) = n\,(\zeta - z)\,. \end{gathered} \tag{8}$$

Die linken bzw. rechten Seiten dieser Gleichungen sind Komponenten des Vektors $\sum_{k=1}^{n} q_k \overrightarrow{PF_k}$ bzw. $n\,\overrightarrow{PO}$. Die Gleichungen (8) lassen sich also in der Vektorgleichung

$$\sum_{k=1}^{n} q_k \overrightarrow{PF_k} = n\,\overrightarrow{PO} \tag{9}$$

zusammenfassen. Liegt der Punkt P auf $E_n(R)$, so ist

$$n\,R = \sum_{k=1}^{n} q_k \overline{PF_k} \geqq n\,\overline{PO}, \quad \text{also } R \geqq \overline{PO}\,. \tag{10}$$

Hier besteht das Gleichheitzeichen nur dann, wenn die Vektoren $\overrightarrow{PF_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ dieselbe Richtung haben, wenn also die Brennpunkte auf der Halbgeraden PO liegen. Damit ist der Satz VI bewiesen.

6. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem hat $E_k(R)$ die Gleichung

$$\begin{gathered} T(x, y, z) \equiv \sum_{k=1}^{n} q_k r_k - n\,R \equiv \\ \equiv \sum_{k=1}^{n} q_k \left[(x - a_k)^2 + (y - b_k)^2 + (z - c_k)^2\right]^{\frac{1}{2}} - n\,R = 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Die Richtungscosinus der Normalen dieser Fläche in ihrem Punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ sind zu $T_x(x_0, y_0, z_0)$, $T_y(x_0, y_0, z_0)$, $T_z(x_0, y_0, z_0)$ proportional.

Liegt die Normale bzw. der Punkt P_0 in der z-Achse bzw. im Anfang des Koordinatensystems und sind $d_k = (a_k^2 + b_k^2 + c_k^2)^{\frac{1}{2}}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, so sind

$$-T_x(0, 0, 0) = \sum_{k=1}^{n} q_k \frac{a_k}{d_k} = 0, \quad -T_y(0, 0, 0) = \sum_{k=1}^{n} q_k \frac{b_k}{d_k} = 0,$$

$$-T_z(0, 0, 0) = \sum_{k=1}^{n} q_k \frac{c_k}{d_k}.$$

Der Punkt M_k, in dem die Einheitskugel mit dem Mittelpunkt P_0 von der Halbgeraden $P_0 F_k$ getroffen wird, hat die Koordinaten $x_k = \frac{a_k}{d_k}$, $y_k = \frac{b_k}{d_k}$, $z_k = \frac{c_k}{d_k}$. Wird der Punkt M_k mit dem Gewicht q_k von F_k belegt, so genügen die Koordinaten ξ_0, η_0, ζ_0 des Schwerpunktes S_0 der Punkte M_1, $M_2, \ldots, M_n$ den Gleichungen

$$\xi_0 \sum_{k=1}^{n} q_k = n\,\xi_0 = \sum_{k=1}^{n} q_k x_k = -T_x(0, 0, 0) = 0,$$

$$n\,\eta_0 = \sum_{k=1}^{n} q_k y_k = -T_y(0, 0, 0) = 0, \quad n\,\zeta_0 = \sum_{k=1}^{n} q_k z_k.$$

Der Punkt S_0 liegt also auf der Normalen von $E_n(R)$ im Punkt P_0. Daraus ergibt sich die folgende einfache Konstruktion der Normalen:

VII. *Ist M_k die zentrale Projektion des Brennpunktes F_k von einem Punkt P_0 der Eifläche $E_n(R)$ aus auf die Einheitskugel mit dem Mittelpunkt P, wird M_k mit dem Gewicht q_k versehen und ist S_0 der Schwerpunkt der Punkte $M_1, M_2, \ldots, M_n$, so schneidet die Gerade $P_0 S_0$ die Fläche $E_n(R)$ im Punkt P_0 senkrecht.*[5]

Aus diesem Satz folgt der Satz:

VIII. *Jede Normale einer Eifläche $E_n(R)$ $(R > R_0)$ trifft die konvexe Hülle ihrer Brennpunkte.*

7. Ein Punkt einer konvexen Fläche heißt *regulär* bzw. *singulär*, je nachdem durch ihn eine bzw. mehr als eine Stützebene der Fläche geht. Der Punkt P_0 ist also ein regulärer Punkt der Tschirnhaus'schen Eifläche $E_n(R)$, wenn die Fläche in P_0 eine bestimmte Normale besitzt. In einem singulären Punkt P_0 versagt also die eindeutige Konstruktion der Normalen. Dies findet nur

[5] Der Satz VII kommt nach G. Loria (a. a. O., S. 176) auch bei G. Peano, Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale, Torino 1887, S. 142 vor.

dann statt, wenn P_0 mit dem Schwerpunkt S_0 oder mit einem Brennpunkt F_k zusammenfällt, weil dann der Punkt M_k und damit S_j unbestimmt ist.

Fallen P_0 und S_j zusammen, so verschwinden die partiellen Differentialquotienten T_x, T_y und T_z in P_0. Enthält die Fläche $E_n(R)$ mit der Gleichung $G(P) = T(P) + nR = T(x, y, z)$ den Punkt P_0, so ist P_0 ein mehrfacher Punkt von $E_n(R)$. Wegen der Konvexität von $E_n(R)$ kann P_j nur ein isolierter Punkt oder Punkt einer isolierten Strecke, also ein Punkt des Kerns sein. Deshalb sind $R = R_0$ und $G(P_0) = G^*$.

Die Differentialqotienten von $T(x, y, z)$ sind offenbar Komponenten des Vektors $\sum_{k=1}^{n} q_k \overrightarrow{P_0 M_k}$. Daraus folgt der Satz:

IX. *Hat eine Tschirnhaus'sche Eifläche einen singulären Punkt P_0, so fällt P_0 entweder in einen Brennpunkt oder in den Kern der Fläche. In einem Punkt P_0 des Kerns besteht die Vektorgleichung* $\sum_{k=1}^{n} q_k \overrightarrow{P_0 M_k} = 0$.

Aus dieser Vektorgleichung kann man auf die Lage des Kerns Folgerungen ziehen. Im Falle $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 1$ lassen sich die Sätze über die Lage eines Punktes kleinster Entfernungssumme von n gegebenen Punkten leicht ableiten.[6]

Die Sätze dieser Arbeit lassen sich ohne Schwierigkeiten auf die ähnlich definierten Tschirnhaus'schen Hypereiflächen mit positiven Gewichten verallgemeinern.

(Eingegangen am 10. März 1950.)

[6] H. Sturm, Über den Punkt kleinster Entfernungssumme von gegebenen Punkten, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **97** (1884), S. 49—61. F, Weissfeld, Sur un problème de minimum dans l'espace, *Tôhoku Math. Journal*, **42** (1936), S. 274—280.

ВЫПУКЛЫЕ ПОВЕРХНОСТИ И КРИВЫЕ ТШИРНГАУСА

Д. С.-НАДЬ (Сегед)

(Резюме)

Поверхность Тширнгауса степени n является геометрическим местом тех точек, у которых расстояние от n неподвижных точек F_1, F_2, ..., F_n (фокусов) умноженные на данные положительные постоянные q_1, q_2, ..., q_n (массы фокусов), сумма которых равняется n, дают постоянную сумму nR. Если фокусы лежат в одной плоскости, то кривая, которая получается как пересечение плоскости с поверхностью, называется кривой Тширнгауса. Если q_1, q_2, ..., q_n (массы фокуса) положительны и если

$$\sum_{k=1}^{n} q_k = n \quad \text{и} \quad C = nR,$$

то поверхность является выпуклой поверхностью Тширнгауса $E_n(R)$ степени n и радиуса R, так как такая поверхность выпукла.

В такой мультиполярной системе координат, где полюсами служат фокусы, уравнение поверхности имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} q_k r_k - nR = 0.$$

Если фокусы поверхности $E_n(R_1)$ и $E_n(R_2)$ и массы отдельных фокусов соответствует друг-другу, тогда две поверхности софокусны. Между радиусами конфокальных поверхностей $E_n(R)$ имеются такой радиус R_o, зависящий от места и веса фокусов, что поверхность $E_n(R)$ является действительной поверхностью, если $R > R_o$. Поверхности $E_n(R)$ $(R < R_o)$ не имеют действительных точек, поверхность $E_n(R_o)$ является изолированной точкой или изолированным отрезком. Последний случай только тогда имеет место, если фокусы располагаются на одной прямой и на этой прямой имеется отличная от фокуса точка, от которой сумма масс фокусов, лежащих налево от этой точки равна сумме масс фокусов, лежащих направо от этой точки.

Поверхность $E_n(R)$ шарообразна, если ее радиус достаточно велик. Поверхность $E_n(R)$ находится в том шаре с радиусом R, центр которого является центром тяжести фокусов. Одновременно $E_n(R)$ является также и геометрическим местом таких точек, у которых сумма от перемноженных с положительными массами расстояний от n шаров есть постоянная. Центрами шаров будет фокусы поверхности.

Нормаль к поверхности $E_n(R)$ в его точке P_o строится таким образом, что фокусы проектируем на шар с центром P_o, и полученным точкам соответствуют массы проектируемых фокусов, определяем центртяжести S_o этих точек. Прямая $P_o S_o$ является нормалью поверхности в точке P_o. Любая нормаль поверхности имеет общую точку с выпуклой оболочкой фокусов. Если поверхность $E_n(R)$ пересекает один фокус, то там нет определенной нормали.

A REMARK ON THE CURVATURE AND TORTUOSITY OF SPACE-CURVES[1]

By

E. EGERVÁRY (Budapest), member of the Academy

Making a survey of the various methods of dealing with the curvature and tortuosity of a space-curve, one feels bound to ascertain that even in elementary treatises the formulae of the curvature and tortuosity are derived in a rather intricate manner, very often by the sideway of Frenet's equations.

In the present note I wish to propose a short and straightforward derivation of these formulae which rests entirely upon the definitions and requires only the most elementary tools of the vector-analysis.

The parameter t in the vector-function $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t)$ being interpreted as time, it is easily proved that the angular velocity-vector of $\boldsymbol{v} \,|\, \boldsymbol{v} \,|^{-1}$ is given by $(\boldsymbol{v} \times \dot{\boldsymbol{v}})/\boldsymbol{v}^2$.

Then, having defined the curvature $1/R$ of the curve $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ as the limit of the ratio of the angle $\Delta\alpha$ through which the tangent-vector turns to the length Δs of the arc and identifying $\boldsymbol{v}$ with $\dot{\boldsymbol{r}}$, we get at once

$$\frac{1}{R} = \lim \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{dt} : \frac{ds}{dt} = \frac{|\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}|}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^2} : |\dot{\boldsymbol{r}}| \,.$$

Similarly, the tortuosity $1/T$ being defined as the limit of the ratio of the angle $\Delta\beta$ through which the binormal (or the osculating plane) turns to the length Δs of the arc, and identifying $\boldsymbol{v}$ with $\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}$ we get

$$\frac{1}{T} = \lim \frac{\Delta\beta}{\Delta s} = \frac{d\beta}{dt} : \frac{ds}{dt} = \frac{|(\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}) \times (\dot{\boldsymbol{r}} \times \dddot{\boldsymbol{r}})|}{|\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}|^2} : |\dot{\boldsymbol{r}}| \,.$$

Applying the rule $(\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}) \times (\dot{\boldsymbol{r}} \times \dddot{\boldsymbol{r}}) = (\dot{\boldsymbol{r}}\, \ddot{\boldsymbol{r}}\, \dddot{\boldsymbol{r}})\, \dot{\boldsymbol{r}}$, the usual expression of $1/T$ immediately follows.

[1] The author believes his method to be new, and in the contrary case he hopes to be excused by the difficulties of taking cognizance of the complete related literature.

In order to be able to distinguish the sign of the tortuosity, one has only to retain the vector-character of the foregoing expression of $\frac{d}{dt}\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$.

(Received 8 May 1950)

О КРИВИЗНЕ И КРУЧЕНИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ

Е. ЭГЕРВАРИ (Будапешт)

(Резюме)

Автор дает единое, прямое и краткое доказательство формулы для кривизны и кручений пространственных кривых (при любых параметрах) при помощи простых средств векторной алгебры и векторного анализа, без применения формул Френе.

ON THE REMAINDER-TERM OF THE PRIME-NUMBER FORMULA, I

By

PAUL TURÁN (Budapest), corresponding member of the Academy

1. Throughout this paper p denotes prime-numbers and $\Lambda(n)$ the classical Dirichlet-symbol

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{if } n = p^{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Further in the usual notation

$$\pi(x) = \sum_{n \leqq x} 1 ,$$

$$\psi(x) = \sum_{n \leqq x} \Lambda(n) ;$$

we introduce $D(x)$ and $\Delta(x)$ by

$$D(x) = \pi(x) - \int_2^x \frac{dv}{\log v} = \pi(x) - \operatorname{li}(x) , \tag{1,1}$$

$$\Delta(x) = \psi(x) - x . \tag{1,2}$$

The complex variable will be $s = \sigma + i t$; the zeta-function of RIEMANN is defined for $\sigma > 1$ by

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots . \tag{1,3}$$

This function[1] is regular, apart from a pole of first order at $s = 1$, in every bounded domain. As well known, it has an infinity of zeros in $0 < \sigma < 1$ which we denote by

$$\varrho = \beta + i \gamma \tag{1,4}$$

and call non-trivial zeros; besides them $\zeta(s)$ has only the zeros

$$s = -2n, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

[1] All the mentioned facts on $\zeta(s)$ can be found in every standard book of the subject. we quote only INGHAM's book "The distribution of prime-numbers", Cambr. Tracts in Math. and Math. Phys., No. 30, which we shall quote often for reference.

Further we know that the non-trivial zeros are symmetrical with respect to the point $s = \frac{1}{2}$; denoting by Θ the least upper bound of the β's we have

$$\Theta \geqq \frac{1}{2} . \tag{1,5}$$

The significance of these zeros on the distribution of primes is signalised by the formula of RIEMANN—MANGOLDT which states that if

$$\psi(x) = \frac{\psi(x+0) + \psi(x-0)}{2} \qquad x > 1 ,$$

then we have

$$\psi(x) = x - \sum_{\varrho} \frac{x^{\varrho}}{\varrho} - \frac{1}{2} \log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) .$$

This shows that $\Delta(x)$ is "essentially"

$$= - \sum_{\varrho} \frac{x^{\varrho}}{\varrho} . \tag{1,6}$$

The classical results of HADAMARD and DE LA VALLÉE—POUSSIN according to which for $x \longrightarrow \infty$

$$\frac{\psi(x)}{x} \longrightarrow 1 , \qquad \frac{\pi(x)}{\mathrm{li}(x)} \longrightarrow 1 ,$$

raise immediately the questions on the upper and lower estimation of $\Delta(x)$ and $D(x)$. A particular emphasis is given to these questions by an assertion of RIEMANN on the distribution of primes, made at the end of his famous paper, according to which $\mathrm{li}(x)$ furnishes always an *upper* estimation of $D(x)$.

2. It is well known that we are at present much more successful with the lower estimations than with the upper ones of $\Delta(x)$ and $D(x)$. Also this paper deals exclusively with their *lower* estimation. We shall often use the notation

$$f(x) = \Omega_{\pm} (g(x))$$

where $g(x)$ is positive for all sufficiently large x-values; we denote by this notation that both inequalities

$$f(x) \geqq cg(x), \qquad f(x) \leqq -cg(x)$$

(c a suitable positive constant) have an infinity of solutions which $\longrightarrow \infty$. The symbol

$$f(x) = \Omega (g(x))$$

denotes only that the inequality

$$|f(x)| \geqq cg(x)$$

has an infinity of solutions which $\longrightarrow \infty$ for a suitable positive constant c.

3. It turned out long ago that the lower estimation of $\Delta(x)$ is easier than that of $D(x)$. My results will refer exclusively to $\Delta(x)$; the reason why

inspite of this I shall speak much in these introductory § 's also about $D(x)$ is that, by doing so, some curious features in the known results are emphasised.

It was PHRAGMÉN[1] who first succeeded in proving that if Θ denotes as before the least upper bound of the β' s, then forevery $\delta > 0$

$$\Delta(x) = \Omega_{\pm}\,(x^{\Theta - \delta}) \tag{3,1}$$

and ERHARD SCHMIDT[1] proved in 1903 that

$$\Delta(x) = \Omega_{\pm}\,(\sqrt{x}) \tag{3,2}$$

which is better than (3,1) in case $\Theta = \frac{1}{2}$. The corresponding inequality for $D(x)$ is much deeper. As ERHARD SCHMIDT remarked, if RIEMANN's assertion mentioned at the end of **1** is true, then the famous other conjecture of RIEMANN is also true, according to which all the nontrivial zeros of $\zeta(s)$ are on the line $\sigma = \frac{1}{2}$. This fact gave a new turn to the theory but it has been proved in 1914 by LITTLEWOOD[1] that

$$D(x) = \Omega_{\pm}\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\log\log\log x\right). \tag{3,3}$$

This shows, of course, that the statement of RIEMANN mentioned at the end of **1** is false.

4. These results have some curious features. They do not furnish any *explicit* x-values for which (3,1), (3,2) or (3,3) is true and, in particular, for which RIEMANN's above mentioned statement is false. The reason for this curious phenomenon is principial. The proofs of the assertions (3,1), (3,2) and (3,3) use a theorem due in its ultimate form to LANDAU.[1] This states that a function defined by a series

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n s}, \qquad \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \longrightarrow \infty$$

or an integral

$$\int_1^{\infty} c(x)\, x^{-s}\, dx$$

which is regular on the real axis for $s > \sigma_0$ but has a singular point in the half-plane $\sigma > \sigma_0$, has the property that the sequence c_ν resp. the function $c(x)$ changes its sign infinitely often. The quoted theorem states this without giving any *explicit* information about the location of these sign-changes or about the density of these. The question of density was treated by PÓLYA[2] who showed that

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\ \frac{W(x)}{\log x} > 0 \tag{4,1}$$

[2] G. PÓLYA, Über das Vorzeichen des Restgliedes im Primzahlsatz, *Gött. Nachrichten* 1930, pp. 19—27.

where $W(x)$ denotes the number of changes of sign in the sequence $\psi(n) - n$ $(n \leqq x)$. His ingenious proof is based on a general theorem, in principle similar to that of LANDAU, requiring more about the function and obtaining at that rate also conclusions of type (4,1) on the density of sign-changes. This involves that his results give no *explicit* location for these sign-changes either. In case (3,3) the matter was worsened also by the use of PHRAGMÉN-LINDELÖF's principle which in itself causes similar difficulty.

5. Therefore LANDAU's theorem and the PHRAGMÉN-LINDELÖF principle caused this indeterminedness. The latter has been completely removed by SKEWES[3] and INGHAM.[4] This was needed only in that part of LITTLEWOOD's argument which supposed $\Theta = \frac{1}{2}$, i. e., the truth of the hypothesis of RIEMANN; hence in this case they could obtain *explicit* locations for the sign-changes, in particular for the smallest value of x for which $D(x) > 0$. INGHAM even proved in this case that there is a numerical A such that for all $x > 1$ there are integers n and n' with

$$x \leqq n, n' \leqq Ax \tag{5,1}$$

and

$$D(n) > 0, \quad D(n') < 0. \tag{5,2}$$

It follows easily — denoting by $V(y)$ the number of sign-changes in the sequence $D(n)$ $(2 \leqq n \leqq y)$ — that

$$\lim_{y \to \infty} \frac{V(y)}{\log y} > 0 \tag{5,3}$$

which is stronger than the corresponding inequality (4,1) of PÓLYA dealing with $\Delta(x)$. INGHAM could prove (5,1) and (5,3) even in the case when $\Theta > \frac{1}{2}$, supposing that there is a zero on the line $\sigma = \Theta$, but of course his lower estimation depends then on this hypothetical zero; if the line $\sigma = \Theta$ does not contain a ϱ, his method fails at the present. The inequality which would correspond to (5,1) for $\Delta(x)$ instead of $D(x)$ is nowhere explicitly stated; the other one corresponding to (5,3) is proved by PÓLYA[2] supposing again $\Theta = \frac{1}{2}$.

6. Thus we have a rather intricate situation. All difficulties arise obviously from the fact that the lower estimation is made dependent upon the

[3] S. SKEWES, On the difference $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$, *Journal of Lond. Math. Soc.*, **8** (1933), pp. 277—283. I learn from a letter of Prof. LITTLEWOOD that Mr. SKEWES will publish a paper containing a complete solution of the problem of the least sign-change, giving without any supposition an *explicit* numerical upper bound for it. (Letter dated from 29. Aug. 1949.)

[4] A. E. INGHAM, A note on the distribution of primes, *Acta Arith.*, **1** (1936), pp. 201—211.

configuration of *all* non-trivial zeros, about which our knowledge is rather poor. As LITTLEWOOD[5] wrote „Those familiar with the theory of the RIEMANN zeta-function in connection with the distribution of primes may remember that the interference difficulty arises with the function

$$f(x) = \sum_{\varrho}' \frac{x^{\varrho}}{\varrho} = \sum' \frac{x^{\beta+i\gamma}}{\beta+i\gamma}$$

(where the ϱ's are the complex zeros of $\zeta(s)$). There exist proofs that if Θ is the upper bound of the β's (so that $\Theta = \frac{1}{2}$ if RIEMANN hypothesis is true) then $f(x)$ is of order at least $x^{\Theta-\varepsilon}$ in x. But these proofs are curiously indirect: if $\left(\Theta > \frac{1}{2} \text{ and}\right)$ we are given a particular $\varrho = \varrho_0$ for which $\beta = \beta_0 > \frac{1}{2}$, they provide no explicit X depending only upon β_0, γ_0 and ε such that $|f(x)| > X^{\beta_0-\varepsilon}$ for some x in $(0, X)$." In other words, he asks for the Ω-estimation of $D(x)$ and $\Delta(x)$ to replace LANDAU's theorem by another estimation *depending on one single ϱ only, instead of one depending on the „smallest" half-plane containing all the zeros ϱ*. And he adds „There is no known way of showing (for any explicit X) that the single term $\frac{x^{\beta_0+i\gamma_0}}{\beta_0+i\gamma_0}$ of f is not interfered with by the other terms of the series over the range $(0, X)$". In what follows I shall show in the case of $\Delta(x)$ such a way which is workable also for many similar problems and means a new approach to the problem. This way consists in the application of a method which I applied several times for various aims in the analysis and analytical theory of numbers.[6] If $c_0, c_1, \ldots$ denote either numerical constants whose values can be given *explicitly*, or *explicitly given* functions of ϱ_0 (the latter case will be always stated explicitly), then I shall prove the following

THEOREM. If $\varrho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$, $\beta_0 \geqq \frac{1}{2}$ is an arbitrary zero of $\zeta(s)$, then for[7]

$$T > \max\ (c_0,\ c_1(\varrho_0))$$

we have

$$\max_{1 \leqq x \leqq T} |\Delta(x)| > \frac{T^{\beta_0}}{|\varrho_0|^{10\frac{\log T}{\log\log T}}} e^{-c_{17}\frac{\log T \log\log\log T}{\log\log T}}.$$

[5] J. E. LITTLEWOOD, Mathematical notes (12). An inequality for a sum of cosines, *Journ. of Lond. Math. Soc.*, **12** (1937), pp. 217–222.

[6] For a discussion of the applications see my lecture at the Meeting of the Czechoslovakian and Polish Mathematical Associations in Prague delivered on 3. Sept. 1949 entitled "On a new method in the analysis with applications".

[7] For c_0 we have only to choose max $(c_5, c_{12}, c_{13}, c_{14})$; for $c_1(\varrho_0)$ we have only the requirements (15.2) and (16.5).

7. Hence taking[8] e. g. $\varrho_0 = \frac{1}{2} + i\ 14{,}13\ \ldots$ we obtain that for $T > c_2$ we have *without any supposition*

$$\max_{1 \leqq x \leqq T} |\Delta(x)| > \sqrt{T}\ e^{-c_3 \frac{\log T \log\log\log T}{\log\log T}}. \tag{7,1}$$

8. The main tool in the proof of the theorem will be the following

LEMMA[9]. If $n \leqq N$, $m \geqq 28\ N$ and the complex numbers $z_1, z_2, \ldots, z_n$ are subjected only to the condition

$$\max_{\nu = 1, 2, \ldots, n} |z_\nu| \geqq 1, \tag{8,1}$$

then we have

$$\max_{m \leqq \nu \leqq m+N} |z_1^\nu + z_2^\nu + \ldots + z_n^\nu| \geqq \frac{1}{N^2} \left(\frac{N}{e^{27} m}\right)^N. \tag{8,2}$$

9. INGHAM's theorem (5,1) — (5,2) suggests among others the question: „how often" can $\Delta(x)$ be large positively and negatively without any hypothesis? My method can not answer to this question at this moment; it would need instead of the above formulated lemma another one giving one-sided estimations for $R(z_1^\nu + z_2^\nu + \ldots + z_n^\nu)$. My original lemma admits an estimation, analogous to (8,2), also for expressions $(b_1 z_1^\nu + \ldots + b_n z_n^\nu)$, but I have shown by counter-examples[10] that there is no one-sided theorem in such a generality even if we suppose all the coefficients b_j to be positive. But information can easily be derived for $|\Delta(x)|$. As a matter of fact, since for $T > 1$

$$\max_{1 \leqq x \leqq T^{\frac{3}{10}}} |\Delta(x)| < 10\ T^{\frac{3}{10}},$$

we obtain for $T > c_4$

$$\max_{T^{\frac{3}{10}} \leqq x \leqq T} |\Delta(x)| > T^{\frac{4}{10}}. \tag{9,1}$$

No doubt, my argument can be modified to tighten the interval $(T^{\frac{3}{10}}, T)$, even perhaps to an interval $(T - h(T), T)$, where $h(T) = o(T)$. Such a result could be easily deduced from a mean-value theorem for $|\Delta(x)|$ or $\Delta(x)^2$; but such one exists only in the case when RIEMANN's hypothesis is true.[11]

[8] See e. g. E. C. TITCHMARSH, The Zeta-Function of Riemann, Cambr. Tracts in Math. and Math. Phys., No. 26, p. 45.

[9] P. TURÁN, On Riemann's hypothesis, *Bull. de l'Acad. des Sciences de l'URSS*, **11** (1947), pp. 197—262.

[10] P. TURÁN, On a theorem of Littlewood, *Journ. of the Lond. Math. Soc.*, **21** (1946), pp. 268—275.

[11] H. CRAMÉR, Ein Mittelwertsatz in der Primzahltheorie, *Math. Zeitschr.*, **12** (1946), pp. 147—153.

10. As well known[1]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \ ;$$

hence from (1,3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)-1}{n^s} = -\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \zeta(s)\right) = F(s). \tag{10,1}$$

Since $\zeta(s)$ has a pole of first order at $s=1$, it follows easily that $F(s)$ is regular for $s=1$; thus $F(s)$ is singular only at $s=\varrho$ and $s=-2n$ $(n=1, 2, \ldots)$, where all singularities are poles of first order with residua 1. Let T be so large that

$$\frac{20}{\log\log T} < \frac{3}{2}, \qquad T > 100, \qquad 44 \log^2 T < e^{41 \frac{\log T \log\log\log T}{\log\log T}},$$

$$9 < \log^{\frac{1}{30}} T < \log^{\frac{1}{10}} T \, (\log\log T)^3 < \frac{\log^{0,9} T}{\log\log T} < 10 \frac{\log T}{(\log\log T)^2}, \tag{10,2}$$

$$20 \log^{\frac{1}{10}} T < T, \quad \log^2 (1 + \log^{\frac{1}{10}} T) < \log^{\frac{1}{10}} T;$$

all of these are satisfied if

$$T > c_5.$$

Let K_0 and N_0 be defined by

$$K_0 = 10 \frac{\log T}{\log\log T}, \tag{10,3}$$

$$N_0 = \log^{\frac{1}{10}} T \, (\log\log T)^2. \tag{10,4}$$

From (10,2) we have

$$K_0 > N_0 > 9. \tag{10,5}$$

Then there is an $L > 2$ for which

$$(L^{K_0} <) \, L^{K_0+N_0} \leqq T < L^{K_0+N_0+1} \, (< L^{3K_0}); \tag{10,6}$$

for this L we have

$$(9 <) \, \log^{\frac{1}{30}} T \leqq L \leqq \log^{\frac{1}{10}} T. \tag{10,7}$$

After fixing these, we restrict the quantities U and the integer k at this moment only by

$$L \leqq U < L+1 \tag{10,8}$$

and

$$(9 <) \, K_0 < k+1 < K_0 + N_0 \ (< 2K_0). \tag{10,9}$$

11. First we consider the integral

$$J(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1+\eta-iU}^{1+\eta+iU} \frac{\xi^s}{s^{k+1}} F(s)\, ds \tag{11,1}$$

where

$$\xi = L^{k+1}\,, \qquad \eta = \frac{1}{\log\,(L^{k+1})}\,. \tag{11,2}$$

Using the representation (10,1) which converges absolutely, we have

$$J(T) = \sum_{n=1}^{\infty} (\Lambda(n) - 1)\, \frac{1}{2\pi i} \int_{1+\eta-iU}^{1+\eta+iU} \frac{\left(\frac{\xi}{n}\right)^s}{s^{k+1}}\, ds\,. \tag{11,3}$$

If we write the integral in (11,3) in the form

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{1+\eta-i\infty}^{1+\eta+i\infty} - \frac{1}{2\pi i} \int_{1+\eta-i\infty}^{1+\eta-iU} - \frac{1}{2\pi i} \int_{1+\eta+iU}^{1+\eta+i\infty}$$

then for the first we have the classical value

$$\frac{1}{k!} \log^k \frac{\xi}{n} \qquad \text{if } n \leqq \xi$$

and

$$0 \quad \text{if} \quad n > \xi\,;$$

for the second and third we have trivially the upper bound

$$\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\xi}{n}\right)^{1+\eta} \int_{U}^{\infty} \frac{dt}{t^{k+1}} = \frac{e}{2\pi}\, \frac{\xi}{n^{1+\eta}}\, \frac{1}{k\, U^k} \leqq \frac{e}{2\pi}\, \frac{L}{k\, n^{1+\eta}}\,.$$

Collecting these we obtain from (11,3)

$$\left| J(T) - \sum_{n \leqq \xi} (\Lambda(n) - 1) \frac{\log^k \frac{\xi}{n}}{k!} \right| < \frac{e}{\pi}\, \frac{L}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log\, n}{n^{1+\eta}} < \frac{L}{k} \left(1 + \frac{1}{\eta^2}\right) =$$

$$= \frac{L}{k} \{1 + (k+1)^2 \log^2 L\} < \frac{L}{k} \{1 + 2\, k^2\, \log^2 L\} < 3\, kL\, \log^2\, L$$

or using (10,7), (10,9), (10,3) and (10,2)

$$< 3.20\, \frac{\log\, T}{\log\, \log\, T} \log^{\frac{1}{10}} T\, \frac{1}{10^2}\, (\log\, \log\, T)^2 < \log^2\, T.$$

Or

$$|\, J(T)\,| \leqq \frac{1}{k!} \sum_{n \leqq \xi} (\Lambda(n) - 1)\, \log^k \frac{\xi}{n} + \log^2\, T. \tag{11,4}$$

Since we have

$$\Delta(1) - 1 = \Delta(1)$$

and for $n \geqq 2$

$$\Delta(n) - 1 = \{\sum_{\nu \leqq n} \Delta(\nu) - n\} - \{\sum_{\nu \leqq n-1} \Delta(\nu) - (n-1)\} = \Delta(n) - \Delta(n-1),$$

we may write the sum in (11,4) in the form

$$\Delta(1) \log^k \frac{\xi}{1} + (\Delta(2) - \Delta(1)) \log^k \frac{\xi}{2} + \ldots + \{\Delta([\xi]) - \Delta([\xi]-1)\} \log^k \frac{\xi}{[\xi]} =$$

$$= \Delta(1)\left(\log^k \frac{\xi}{1} - \log^k \frac{\xi}{2}\right) + \Delta(2)\left(\log^k \frac{\xi}{2} - \log^k \frac{\xi}{3}\right) + \ldots$$

$$+ \Delta([\xi]-1)\left(\log^k \frac{\xi}{[\xi]-1} - \log^k \frac{\xi}{[\xi]}\right) + \Delta([\xi])\left(\log^k \frac{\xi}{[\xi]} - \log^k \frac{\xi}{[\xi]}\right) =$$

$$= -\int_1^{\xi} \Delta(x) \frac{d}{dx}\left(\log^k \frac{\xi}{x}\right) dx.$$

Hence (11,4) takes the form

$$|J(T)| \leqq \log^2 T + \frac{1}{k!}\left|\int_1^{\xi} \Delta(x) \frac{d}{dx}\left(\log^k \frac{\xi}{x}\right) dx\right|$$

or a fortiori

$$|J(T)| \leqq \frac{1}{k!}\int_1^{\xi} |\Delta(x)| \left|\frac{d}{dx} \log^k \frac{\xi}{x}\right| dx + \log^2 T. \tag{11,5}$$

12. To find a lower estimation for $|J(T)|$, we shall use first in a usua way CAUCHY's theorem. It is well known[1] that for $m = 2, 3, \ldots$ there is a T_m with

$$m < T_m < m + 1 \tag{12,1}$$

and

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right| < c_6 \log^2 T_m, \qquad -1 \leqq \sigma \leqq 2. \tag{12,2}$$

Since the integer L is > 2, according to (10,7) we determine U in the integral (11,1) by

$$U = T_L \tag{12,3}$$

and we apply CAUCHY's theorem to the function

$$\frac{\xi^s}{s^{k+1}} F(s)$$

along the parallelogram l formed by the segments l_1, l_2, l_3, l_4 where these are defined by

$$\sigma = 1 + \eta, \qquad -T_L < t < T_L,$$

$$t = T_L, \qquad -2\left[\frac{k}{2}\right] + 1 \leqq \sigma \leqq 1 + \eta,$$

$$t = -T_L, \qquad -2\left[\frac{k}{2}\right] + 1 \leqq \sigma \leqq 1 + \eta,$$

$$\sigma = -2\left[\frac{k}{2}\right] + 1, \qquad -T_L \leqq t \leqq T_L$$

respectively. According to what was said in **10** after the formula (10,1) we have

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(l)} \frac{\xi^s}{s^{k+1}} F(s)\, ds = \sum_{|\gamma| < T_L} \frac{\xi^\varrho}{\varrho^{k+1}} + \frac{1}{k!}\left(\xi^s F(s)\right)^{(k)}_{s=0} + \sum_{n=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]-1} \frac{\xi^{-2n}}{(-2n)^{k+1}}$$

or

$$|J(T)| > \left|\sum_{|\gamma|<T_L} \frac{\xi^\varrho}{\varrho^{k+1}}\right| - \frac{1}{k!}\left|\left(\xi^s F(s)\right)^{(k)}_{s=0}\right| - \left|\sum_{n=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]-1} \frac{\xi^{-2n}}{(-2n)^{k+1}}\right| - \tag{12,4}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\left|\int_{(l_2)}\right| - \frac{1}{2\pi}\left|\int_{(l_3)}\right| - \frac{1}{2\pi}\left|\int_{(l_4)}\right| = |J_1| - |J_2| - |J_3| - |J_4| - |J_5| - |J_6|.$$

13. We need upper estimations for $|J_2|, |J_3|, \ldots, |J_6|$. All these are routine work. For J_3 we have simply

$$|J_3| < \xi^{-2} = L^{-2(k+1)} \leqq 1. \tag{13,1}$$

To estimate J_2 we first remark that

$$J_2 = \frac{1}{k!}\sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} \log^\nu \xi\, F^{(k-\nu)}(0),$$

$$|J_2| \leqq \sum_{\nu=0}^{k} \frac{1}{\nu!\,(k-\nu)!} \log^\nu \xi\, |F^{k-\nu}(0)|. \tag{13,2}$$

Using the known fact[8] that $\zeta(s)$ does not vanish in the circle $|s| \leqq \frac{3}{2}$, it follows from **10** that $F(s)$ is regular in the circle $|s| \leqq \frac{3}{2}$ and here

$$|F(s)| \leqq c_7. \tag{13,2}$$

Hence CAUCHY's coefficient-estimation gives

$$|F^{(k-\nu)}(0)| \leqq c_7\,(k-\nu)!\left(\frac{2}{3}\right)^{k-\nu}.$$

Putting this into (13,2) we obtain

$$|J_2| \leqq c_7 \left(\frac{2}{3}\right)^k \sum_{\nu=0}^{k} \frac{1}{\nu!} \left(\frac{3}{2} \log \xi\right)^{\nu};$$

using (10,9) and (10,6) we have

$$\log \xi = \log (L^{k+1}) \leqq \log (L^{K_0+N_0}) \leqq \log T.$$

Hence

$$|J_2| \leqq c_7 \left(\frac{2}{3}\right)^k \sum_{\nu=0}^{k} \frac{1}{\nu!} \left(\frac{3}{2} \log T\right)^{\nu}. \tag{13,4}$$

But the sequence

$$\frac{1}{\nu!} \left(\frac{3}{2} \log T\right)^{\nu} \qquad \nu = 0, 1, \ldots$$

increases for $\nu \leqq \frac{3}{2} \log T$; this means that — owing to (10,9) — the terms of the sum in (13,4) are certainly increasing if

$$\frac{20 \log T}{\log \log T} = 2K_0 \leqq \frac{3}{2} \log T$$

which is true according to (10,2). Hence from (10,9)

$$|J_2| \leqq c_7 \left(\frac{2}{3}\right)^k (k+1) \frac{1}{k!} \left(\frac{3}{2} \log T\right)^k < c_7 \frac{2K_0}{k!} \log^k T =$$

$$= 20\, c_7 \frac{\log T}{\log \log T} \frac{\log^k T}{k!} < 20\, c_7 \log T \left(\frac{e \log T}{k}\right)^k < 20\, c_7 \log T \left(\frac{6 \log T}{K_0}\right)^{2K_0} =$$

$$= 20\, c_7 \log T \left(\frac{3}{5} \log \log T\right)^{20 \frac{\log T}{\log \log T}} < c_7\, e^{41 \frac{\log T \log \log \log T}{\log \log T}} \tag{13,5}$$

using also (10,2). Hence from (12,4), (13,1) and (13,5) we have

$$|J(T)| > |J_1| - 1 - c_7\, e^{41 \frac{\log T \log \log \log T}{\log \log T}} - |J_4| - |J_5| - |J_6|. \tag{13,6}$$

14. For the estimation of $|J_4|$, $|J_5|$ and $|J_6|$ we need the well-known inequalities[8]

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right| \leqq c_8 \log |s| \leqq c_8 |s| \tag{14,1}$$

valid for the half-plane $\sigma \leqq -1$ removing from it the circles

$$|s - n| < \frac{1}{2}, \quad (n = -2, -4, \ldots),$$

and

$$|\zeta(s)| \leqq c_9 \{1 + (|t| + 2)^{1-\sigma}\} \log (|t| + 2), \tag{14,2}$$

$$|\zeta(s)| \leqq c_9 \{(|t| + 2) + (|t| + 2)^{1-\sigma} \log (|t| + 2)\} \tag{14,3}$$

valid uniformly for $|s-1| \geqq 1$. Hence from (14,1) and (14,3)

$$|J_6| \leqq \xi^{1-2\left[\frac{k}{2}\right]}\left(\int_{-(L+1)}^{L+1}\frac{c_8|s|}{|s|^{k+1}}dt + c_9\int_{-(L+1)}^{L+1}\frac{(|t|+2)+(|t|+2)^k\log(|t|+2)}{\left(\frac{|t|+2}{\sqrt{2}}\right)^{k+1}}dt\right)<$$

$$< \xi^{3-k}\,2^{\frac{k+1}{2}}\left(2c_8\int_0^\infty\frac{dt}{1+t^2}+2c_9\int_0^\infty\frac{dt}{(2+t)^2}+2c_9\int_0^{L+1}\frac{\log(t+2)}{t+2}\,dt\right)<$$

$$< 4\left(\frac{2}{\xi}\right)^{\frac{k+1}{2}}\{c_8+c_9+c_9(L+3)\} < 4L^{-\frac{(k+1)^2}{4}}\{c_8+4c_9+c_9\log^{\frac{1}{10}}T\}\,.$$

But

$$\frac{(k+1)^2}{4}\geqq\frac{K_0^2}{4}\geqq 2K_0 > K_0+N_0+1\,,$$

i. e.,

$$(14,4)\quad |J_6| < \frac{4}{T}(c_8+4c_9+c_9\log^{\frac{1}{10}}T) < (c_8+c_9)\frac{20\log^{\frac{1}{10}}T}{T} < (c_8+c_9)$$

owing to (10,6) and (10,2). To estimate $|J_4|$ and $|J_5|$ it is obviously sufficient to consider $|J_4|$ only. For that part of l_2 on which $\sigma \leqq -1$ we have again

$$(14,5)\qquad |F(s)| \leqq c_8|s| + c_9\{|t|+2+(|t|+2)^{1-\sigma}\log(|t|+2)\}\,;$$

for the remaining part of l_2 we have, using (12,2) and (14,3),

$$|F(s)| \leqq c_6\log^2 T_L + c_9\{|t|+2+(|t|+2)^{1-\sigma}\log(|t|+2)\} <$$
$$< c_6|s| + c_9\{|t|+2+(|t|+2)^{1-\sigma}\log(|t|+2)\}\,,$$

i. e., again the estimation (14,5) but with c_6 instead of c_8. Replacing both c_6 and c_8 by (c_6+c_8) we have on the whole segment l_2

$$(14,6)\quad |F(s)| \leqq (c_6+c_8)|s| + c_9\{|t|+2+(|t|+2)^{1-\sigma}\log(|t|+2)\}\,.$$

Hence

$$|J_4| < \int_{-\infty}^{1+\eta}\xi^\sigma\left(\frac{c_6+c_8}{|s|^k}+c_9\frac{L+2+(L+2)^{1-\sigma}\log(L+2)}{L^{k+1}}\right)d\sigma <$$

$$< \frac{c_6+c_8}{L^k}(L^{k+1})^{1+\eta}+\frac{2c_9}{L^k}(L^{k+1})^{1+\eta}+c_9\frac{(L+2)\log(L+2)}{L^{k+1}}\int_{-\infty}^{1+\eta}\left(\frac{\xi}{L+2}\right)^\sigma d\sigma <$$

$$< e(c_6+c_8+2c_9)L+\frac{2c_9\log(L+2)}{L^k}\int_{-\infty}^{1+\eta}L^{k\sigma}\,d\sigma < 3(c_6+c_8+2c_9)\log^{\frac{1}{10}}T +$$

$$+\frac{4c_9\log L}{L^k}\cdot\frac{L^k\,.\,e}{\log L} < 3(c_6+c_8+2c_9)\log^{\frac{1}{10}}T+12c_9 <$$

$$< 3\,(c_6 + c_8 + 6\,c_9)\,\log^{\frac{1}{10}} T. \tag{14,7}$$

Collecting (13,6), (14,4) and (14,7), we have owing to (10,2)

$$|J(T)| > |J_1| - 1 - c_7\, e^{41\frac{\log T \log\log\log T}{\log\log T}} - 6\,(c_6 + c_8 + 6\,c_9)\,\log^{\frac{1}{10}} T -$$

$$- (c_8 + c_9) > |J_1| - 7\,(c_6 + c_7 + c_8 + 6\,c_9 + 1)\, e^{41\frac{\log T \log\log\log T}{\log\log T}} =$$

$$= |J_1| - c_{10}\, e^{41\frac{\log T \log\log\log T}{\log\log T}}.$$

Putting this into (11,5) we have

$$|J_1| < c_{10}\, e^{41\frac{\log T \log\log\log T}{\log\log T}} + \log^2 T + \frac{1}{k!}\int_1^{\xi} |\Delta(x)| \left|\frac{d}{dx}\,\log^k \frac{\xi}{x}\right| dx <$$

$$< (c_{10} + 1)\, e^{41\frac{\log T \log\log\log T}{\log\log T}} + \frac{1}{k!}\int_1^{\xi} |\Delta(x)| \left|\frac{d}{dx}\,\log^k \frac{\xi}{x}\right| dx. \tag{14,8}$$

15. To obtain finally a *lower* estimation of $|J_1|$ by a suitable choice of k we write it first in the form

$$|J_1| = \frac{\xi^{\beta_0}}{|\varrho_0|^{k+1}}\left|\sum_{|\gamma|<T_L} \xi^{\varrho-\varrho_0}\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^{k+1}\right| > \frac{L^{(k+1)\beta_0}}{|\varrho_0|^{k+1}}\left|\sum_{|\gamma|<T_L}\left(L^{\varrho-\varrho_0}\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^{k+1}\right| =$$

$$= \left(\frac{L^{\beta_0}}{|\varrho_0|}\right)^{k+1}\left|\sum_{|\gamma|<T_L}\left(L^{\varrho-\varrho_0}\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^{k+1}\right|. \tag{15,1}$$

Let T be so large that

$$\log^{\frac{1}{60}} T > |\varrho_0|. \tag{15,2}$$

Then we have a fortiori from (10,7)

$$L^{\beta_0} \geqq (\log^{\frac{1}{30}} T)^{\frac{1}{2}} > |\varrho_0|,$$

i. e., from (10,6), (10,3) and (10,7)

$$\left(\frac{L^{\beta_0}}{|\varrho_0|}\right)^{k+1} > \left(\frac{L^{\beta_0}}{|\varrho_0|}\right)^{K_0} = \frac{L^{\beta_0(K_0+N_0+1)}}{|\varrho_0|^{K_0}}\, L^{-\beta_0(N_0+1)} >$$

$$> \frac{T^{\beta_0}}{|\varrho_0|^{10\frac{\log T}{\log\log T}}}\,\frac{1}{(\log^{\frac{1}{10}} T)^{2\,\log^{\frac{1}{10}} T\,(\log\log T)^2}} = \frac{T^{\beta_0}}{|\varrho_0|^{10\frac{\log T}{\log\log T}}}\, e^{-\frac{1}{5}\log^{\frac{1}{10}} T\,(\log\log T)^2}.$$

Thus from (15,1)

$$|J_1| > \frac{T^{\beta_0}}{|\varrho_0|^{10\frac{\log T}{\log\log T}}}\, e^{-\frac{1}{5}\log^{\frac{1}{10}} T\,(\log\log T)^2}\left|\sum_{|\gamma|<T_L}\left(L^{\varrho-\varrho_0}\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^{k+1}\right|. \tag{15,3}$$

16. We denote the remaining sum by Z. We shall use now our lemma formulated in **8.** Since L and T_L are defined as functions of T only, the number of the terms and also the terms $\left(L^{\varrho-\varrho_0}\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)$ themselves are independent of k; they will play the role of z_ν's of the lemma. Since from (15,2) and (10,7) we have

$$T_L > L > \log^{\frac{1}{3\,0}} T > \log^{\frac{1}{6\,0}} T > |\varrho_0|\,,$$

$\varrho = \varrho_0$ occurs in Z, i. e., the condition

$$\max_\nu |z_\nu| \geqq 1$$

is certainly fulfilled. We choose

(16,1) $$m = K_0\,.$$

The n of the lemma is obviously the number $N(T_L)$ of the zeros of $\zeta(s)$ in

$$0 < \sigma < 1, \qquad |t| \leqq T_L\,;$$

owing to $L < T_L < L + 1$ we may choose for the N of the lemma any upper bound for $N(L + 1)$ of the zeros in

$$0 < \sigma < 1, \qquad |t| \leqq L + 1.$$

RIEMANN-MANGOLDT's theorem gives in the weak form[1]

$$N(L + 1) < c_{11}\, L \log L\,;$$

hence from (10,7)

$$N(L + 1) < \frac{c_{11}}{10} \log^{\frac{1}{1\,0}} T \log\log T,$$

i. e., we may choose

(16,2) $$N = \frac{c_{11}}{10} \log^{\frac{1}{1\,0}} T \log\log T.$$

Further we have

$$m = K_0 = 10\frac{\log T}{\log\log T} > 28\,\frac{c_{11}}{10} \log^{\frac{1}{1\,0}} T \log\log T = 28\,N$$

if

$$100 \log^{0{\cdot}9} T > 28\, c_{11} (\log\log T)^2$$

which is true for $T > c_{12}$. Hence our lemma is applicable to Z; the only question which remains is whether the value so obtained for $(k + 1)$ fulfils the restriction (10,9) or not. Denoting the value of $(k + 1)$ given by lemma by $(k^* + 1)$, we have for $T > c_{13}$

$$K_0 = m \leqq k^* + 1 \leqq m + N = K_0 + \frac{c_{11}}{10} \log^{\frac{1}{1\,0}} T \log\log T <$$

(16,3) $$< K_0 + \log^{\frac{1}{1\,0}} T\, (\log\log T)^2 = K_0 + N_0,$$

i. e., (10,9) is indeed satisfied by choosing $k = k^*$. Hence for $T > c_{14}$

$$|Z| > \frac{100}{c_{11}^2} \frac{1}{\log^{\frac{1}{5}} T (\log\log T)^2} \cdot \left(\frac{c_{11}}{10^2 e^{27}} \frac{\log^{\frac{1}{10}} T (\log\log T)^2}{\log T} \right)^{\frac{c_{11}}{10} \log^{-\frac{1}{10}} T \log\log T} >$$

$$> e^{-c_{15} \log^{\frac{1}{10}} T (\log\log T)^2}$$

or from (15,3)

$$|J_1| > \frac{T^{\beta_0}}{|\varrho_0|^{10 \frac{\log\log T}{\log T}}} e^{-\left(c_{15} + \frac{1}{5}\right) \log^{\frac{1}{10}} T (\log\log T)^3}$$

and from (14,8)

$$\frac{1}{(k^*)!} \int_1^{\xi} |A(x)| \left| \frac{d}{dx} \log^{k^*} \frac{\xi}{x} \right| dx > \frac{T^{\beta_0}}{|\varrho_0|^{10 \frac{\log\log T}{\log T}}} e^{-\left(c_{15} + \frac{1}{5}\right) \log^{\frac{1}{10}} T (\log\log T)^3} -$$

$$- (c_{10} + 1) e^{41 \frac{\log T \log\log\log T}{\log\log T}} . \tag{16,4}$$

If $c_{16}(\varrho_0)$ is determined so that for $T > c_{16}(\varrho_0)$

$$(c_{10} + 1) e^{41 \frac{\log T \log\log\log T}{\log\log T}} < \frac{1}{2} \frac{\sqrt{T}}{|\varrho_0|^{10 \frac{\log T}{\log\log T}}} e^{-\left(c_{15} + \frac{1}{5}\right) \log^{\frac{1}{10}} T (\log\log T)^3} , \tag{16,5}$$

then we obtain for all such large T-values

$$B \equiv \frac{1}{(k^*)!} \int_1^{\xi} |A(x)| \left| \frac{d}{dx} \log^{k^*} \frac{\xi}{x} \right| dx > \frac{1}{2} \frac{T^{\beta}}{|\varrho_0|^{10 \frac{\log T}{\log\log T}}} \cdot e^{-\left(c_{15} + \frac{1}{5}\right) \log^{\frac{1}{10}} T (\log\log T)^3} . \tag{16,6}$$

17. To complete the proof of our theorem we have only to find an upper estimation for the integral on the left side. Introducing the notation

$$\max_{1 \leqq x \leqq T} |A(x)| = M,$$

first we have from (16,3) and (10,6)

$$\xi = L^{k^*+1} \leqq L^{K_0 + N_0} \leqq T,$$

$$\max_{1 \leqq x \leqq \xi} |A(x)| \leqq M,$$

i. e.,

$$B = \frac{1}{(k^*)!} \int_1^{\xi} |A(x)| \left| \frac{d}{dx} \log^{k^*} \frac{\xi}{x} \right| dx \leqq -\frac{M}{(k^*)!} \int_1^{\xi} \frac{d}{dx} \left(\log^{k^*} \frac{\xi}{x} \right) dx <$$

$$< \frac{M}{(k^*)!} \log^{k^*} T < M \left(\frac{e \log T}{k^*} \right)^{k^*} .$$

But

$$\frac{1}{k^*} < \frac{2}{k^*+1} \leqq \frac{2}{K_0} = \frac{1}{5}\,\frac{\log\log T}{\log T}\,,$$

$$k^* < 2\,K_0 = 20\,\frac{\log T}{\log\log T}\,,$$

i. e.,

$$B < M\left(\frac{e}{5}\,\log\log T\right)^{20\frac{\log T}{\log\log T}} < M\,e^{40\frac{\log T\log\log\log T}{\log\log T}}$$

or from (16,6) and (10,2)

$$M > \frac{1}{2}\,\frac{T^{\beta_0}}{|\varrho_0|^{10\frac{\log T}{\log\log T}}}\,e^{-\left(c_{15}+\frac{1}{5}\right)\log^{\frac{1}{10}}T\,(\log\log T)^3 - 40\,\frac{\log T\log\log\log T}{\log\log T}} >$$

$$> \frac{T^{\beta_0}}{|\varrho_0|^{10\frac{\log T}{\log\log T}}}\,e^{-c_{17}\frac{\log T\log\log\log T}{\log\log T}}$$

with

$$c_{17} = c_{15} + 41. \qquad Q.\ e.\ d.$$

(Received 31 March 1950)

ОБ ОСТАТОЧНОМ ЧЛЕНЕ ФОРМУЛЫ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ, I

ПАВЕЛ ТУРАН (Будапешт)

(Резюме)

Пусть $\Lambda(n)$ — хорошо известный символ Диришлэ, $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$ и $\Delta(x) = \psi(x) - x$. Фрагмен, Э. Шмидт, Ландау, Литтльвуд, Ингэм и другие авторы занимались оценками $\Delta(x)$ и подобных отношений типов Ω и $\Omega_{\pm}$. Известные до сих пор результаты отличаются общим свойством зависимости от конфигурации всех нетривиальных корней функции $\zeta(s)$ и поэтому, а даже и вследствие своих методов, они не дают *явных* оценок. Для устранения этих затруднении, Литтльвуд предлагает задать вопрос возможно-ли дать оценку Ω для $\Delta(x)$, зависящего лишь от одного (произвольного) нетривиального корня функции $\zeta(s)$. В настоящей статье, автор дает результат такого типа, как новое применение своего метода, изложенного на с'езде чехо-словацкого и польского математических обществ в Праге в 1949 г. Здесь доказана следующая теорема:

Если $\varrho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ — произвольный нетривиальный корень $\zeta(s)$, то можно дать *явно* две числовые постоянные c_0 и c_1, далее $c_2 = c_2(\varrho_0)$, так что для $T > \max(c_0, c_2(\varrho_0))$ мы имеем

$$\max_{1 \leqq x \leqq T} \left(\Delta(x)\right) > T^{\beta_0}\,|\varrho_0|^{-\frac{10\log T}{\log\log T}}\,e^{-\frac{c_1\log T\log\log\log T}{\log\log T}}.$$

CONTRIBUTIONS TO THE REDUCTION THEORY OF THE DECISION PROBLEM

First paper

Prefix $(x_1)\,(x_2)\,(Ex_3)\ldots(Ex_{n-1})\,(x_n)$, a single binary predicate

By

LÁSZLÓ KALMÁR (Szeged), corresponding member of the Academy

1. In the reduction theory of the decision problem of the first order predicate calculus, the intention is to find as simple cases of this problem as possible, which are equivalent to the decision problem itself. On the one hand, the *number of arguments* of the predicate variables contained in the formula to be examined has been reduced; indeed, LÖWENHEIM[1] has proved that the special case of the decision problem dealing with binary[2] formulae is equivalent to the general problem. In addition, I have reduced the *number of the predicate variables* appearing in the formula to one.[3] On the other hand, it has been attempted to reduce the decision problem to the case if the formula to be examined as to being satisfiable has a *special type of prefix*, as simple

[1] L. LÖWENHEIM, Über Möglichkeiten im Relativkalkül, *Mathematische Annalen*, **76** (1915), pp. 447—470, especially theorem 6, pp. 463—470.

[2] A further reduction, viz. the reduction to the case of unary formulae, is impossible, for this case of the decision problem has been solved by LÖWENHEIM (loc. cit., especially theorem 4, pp. 459—462) by an algorithm which is readily to be recognized as a recursive one (in the sense of ALONZO CHURCH, An unsolvable problem of elementary number theory, *American Journal of Mathematics*, **58** (1936), pp. 345—363 and S. C. KLEENE, General recursive functions of natural numbers, *Mathematische Annalen*, **112** (1936), pp. 727—742), while the decision problem itself has been proved to be unsolvable by any such algorithm by ALONZO CHURCH, A note on the Entscheidungsproblem, *The Journal of Symbolic Logic*, **1** (1936), pp. 40—41 and 101—102.

[3] LÁSZLÓ KALMÁR, Zurückführung des Entscheidungsproblems auf den Fall von Formeln mit einer einzigen, binären, Funktionsvariablen, *Compositio Mathematica*, **4** (1936), pp. 137—144; see also Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, *Verhandlungen des internationalen Mathematikerkongresses Zürich* 1932, vol. 2, pp. 337—338. Previously, HERBRAND has reduced the same number to three; see JACQUES HERBRAND, Sur le problème fondamental de la logique mathématique, *Sprawozdania z posiedzeń Towarsystwa Naukowego Warszawskiego*, wydział III, **24** (1931), pp. 12—56, especially pp. 39—41.

as possible.[4] However, the simplicity of a prefix can be judged from different points of view. The Skolem prefix[5]

$$(x_1) \ldots (x_m)\,(Ex_{m+1}) \ldots (Ex_n)$$

is the simplest one as to the *number of alternations* of universal and existential quantifiers.[6] As to its subcases, the Gödel prefix[7]

$$(1) \qquad (x_1)\,(x_2)\,(x_3)\,(Ex_4) \ldots (Ex_n)$$

contains a *minimal number of universal quantifiers*,[8] while the Pepis prefix[9]

$$(2) \qquad (x_1) \ldots (x_{n-1})\,(Ex_n)$$

keeps the *number of existential quantifiers* as small as possible. The "non-Skolemian" Pepis prefix[10]

$$(3) \qquad (x_1)\,(x_2)\,(Ex_3)\,(x_4) \ldots (x_n)$$

has the advantage over (2) of reducing the *order of the existential quantifier*

[4] In the first line, see the papers quoted in the footnotes [5], [7], [8] (papers of PEPIS), [9], [10] and [12].

[5] See TH. SKOLEM, Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theorem über dichte Mengen, *Videnskapsselkapets Skrifter*, Kristiania, mat.-naturv. klasse, 1920, no. 4, pp. 1—36, especially pp. 4—6.

[6] Indeed, for the case of a prefix without alternation of universal and existential quantifiers at all, (i. e. of the form $(x_1) \ldots (x_n)$ or $(Ex_1) \ldots (Ex_n)$) the satisfiability problem has been solved by BERNAYS and SCHÖNFINKEL by a recursive algorithm; the same holds for the other case of a prefix with a single alternation, viz. of the form $(Ex_1) \ldots (Ex_m)\,(x_{m+1}) \ldots (x_n)$. See P. BERNAYS and M. SCHÖNFINKEL, Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, *Mathematische Annalen*, **99** (1928), pp. 342—372, especially pp. 359—360.

[7] See K. GÖDEL, Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, **40** (1933), pp. 433—443.

[8] Indeed, for the case of a Skolem prefix with two universal quantifiers, the decision problem has been solved by a recursive algorithm independently by GÖDEL, KALMÁR and SCHÜTTE; see K. GÖDEL, Ein Spezialfall des Entscheidungsproblems der theoretischen Logik, *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, **2** (1932), pp. 27—28; LÁSZLÓ KALMÁR, Über die Erfüllbarkeit derjenigen Zählausdrücke, welche in der Normalform zwei benachbarte Allzeichen enthalten, *Mathematische Annalen*, **108** (1933), pp. 466—484; KURT SCHÜTTE, Untersuchungen zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, *ibid.*, **109** (1934), pp. 572—603 and Über die Erfüllbarkeit einer Klasse von logischen Formeln, *ibid.*, **110** (1935), pp. 161—194. If we do not insist on the Skolem form, and if we allow the fixed predicate $x = y$ besides predicate variables, a further reduction of the number of universal quantifiers, viz. to two, is possible; see JÓZEF PEPIS, Beiträge zur Reduktionstheorie des logischen Entscheidungsproblems, *Acta Scientiarum Mathematicarum*, **8** (1936—37), pp. 7—41, especially theorems 38 and 39, pp. 37—41; and Untersuchungen über das Entscheidungsproblem des mathematischen Logik, *Fundamenta Mathematicae*, **30** (1938), pp. 257—348, especially theorem 33, p. 319. A still further reduction is impossible, owing to a recursive solution of the satisfiability problem of formulae containing a single universal quantifier; see WILHELM ACKERMANN, Über die Erfüllbarkeit gewisser Zählausdrücke, *Mathematische Annalen*, **100** (1928), pp. 638—649.

[9] See JÓZEF PEPIS, Ein Verfahren der mathematischen Logik, *The Journal of Symbolic Logic*, **3** (1938), pp. 61—76 and Untersuchungen etc. (loc. cit.), theorems 36 and 39, pp. 339—340.

[10] See JÓZEF PEPIS, Ein Verfahren etc. (loc. cit.) and Untersuchungen etc. (loc. cit.), theorems 37 and 40, pp. 339—340.

from $n - 1$ to 2; here, the order of an existential quantifier is defined as the number of universal quantifiers preceding it.[11] The Ackermann prefix[12]

$$(Ex_1)\,(x_2)\,(Ex_3)\,(x_4)\,\ldots\,(x_n) \tag{4}$$

is — though containing one more existential quantifier — still more advantageous in this respect, the order of the quantifiers being zero and one, respectively.

As to the *simultaneous* reduction of the decision problem in both directions, it has been proved in three preceding papers[13] that the decision problem is equivalent to those of its special cases in which the formula to be examined as to being satisfiable, besides containing no predicate variable but a single binary one, has a prefix of the form (4), resp. (1), resp. (2) or (3).

Now, the question arises as to whether the same is true for the prefixes

$$(x_1)\,(x_2)\,(Ex_3)\,\ldots\,(Ex_{n-1})\,(x_n) \tag{5}$$

and

$$(x_1)\,(Ex_2)\,\ldots\,(Ex_{n-2})\,(x_{n-1})\,(x_n), \tag{6}$$

similar to (1) but, though non-Skolemian, more advantageous as to the order of the existential quantifiers. In this paper, I shall answer this question as to the prefix (5) by proving the

THEOREM. *To any given formula of the first order predicate calculus it is possible to construct another, containing no other predicate variable but a single binary one, having a prefix of the form* (5), *and equivalent, in respect of being or being not satisfiable, to the given formula.*

As to the prefix (6), I shall return to the question in a subsequent paper.[14]

2. To prove our theorem, first, we construct to any given first order formula **A** another, say **B**, which, besides having a prefix of the form (5) and a matrix containing a single, binary, predicate variable, can be satisfied if **A** can; then, we prove that conversely, if **B** can be satisfied, the same holds for **A** too.

[11] By an existential quantifier the existence of an individual depending on the individual variables bound by universal quantifiers preceding it is formalized; i. e. that of a descriptive function over the set of individuals, the number of the arguments of which equals the order of the existential quantifier in question.

[12] See WILHELM ACKERMANN, Beiträge zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, *Mathematische Annalen*, **112** (1936), pp. 419—432.

[13] LÁSZLÓ KALMÁR, On the reduction of the decision problem, first paper, Ackermann prefix, a single binary predicate, *The Journal of Symbolic Logic*, **4** (1939), pp. 1—9 LÁSZLÓ KALMÁR and JÁNOS SURÁNYI, On the reduction etc., second paper, Gödel prefix, a single binary predicate, *ibid.*, **12** (1947), pp. 65—73; third paper, Pepis prefix, a single binary predicate, *ibid.*, **15** (1950) pp. 161—163. I shall quote the first and the second one of these papers as "Reduction I" and "Reduction II."

[14] We observe that neither the theorem of the present paper is an immediate consequence of that of Reduction II, nor conversely; and the analogous theorem concerning the prefix (6) is, in the same sense, independent of the theorem of the present paper as well as of that of Reduction II.

By the theorem of Reduction II, we may suppose, **A** has the prefix (1) and a matrix

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(F;\ x_1, \ldots, x_n) \tag{7}$$

containing the binary predicate variable F but no other; thus, **M** is a truth-function of the n^2 arguments $F(x_\mu, x_\nu)$, $\mu, \nu = 1, \ldots, n$.

Suppose **A** can be satisfied on a set I by a binary predicate Φ defined over I; i. e., for some descriptive funtions $\xi_4(x_1, x_2, x_3), \ldots, \xi_n(x_1, x_2, x_3)$ defined over I, we have

$$\mathbf{M}(\Phi;\ x_1, x_2, x_3, \xi_4(x_1, x_2, x_3), \ldots, \xi_n(x_1, x_2, x_3)) \tag{8}$$

for arbitrary $x_1, x_2, x_3 \in I$. The formula **B** has to give an alternative formalization of the same fact. In order to replace the three initial universal quantifiers by two, we adjoin to I the ordered pairs of elements of I; thus, "for arbitrary $x_1, x_2, x_3 \in I$" we can express as "for arbitrary $x \in I^2$ and $y \in I$," I^2 denoting the set of ordered pairs formed of elements of I, x standing for the pair (x_1, x_2) and y for x_3. In order to assure adequacy of this new expression to the old one, **B** has to formalize also, for any $x, y \in I$, the existence of a $p \in I^2$ with x as first and y as second component. The predicates "$x \in I$," "$x \in I^2$," "x is the first component of p," "x is the second component of p" are to be expressed, beside "$\Phi(x, y)$," by means of the single predicate Ψ satisfying **B**. For this purpose we adjoin, besides the elements of I^2, the predicate Φ to I, and, on the new domain of individuals[15] $J = I + I^2 + \{\Phi\}$ resulting thus, we define the binary predicate Ψ so that

(i) $\Psi(x, \Phi)$ holds if and only if $x \in I$;

(ii) $\Psi(\Phi, p)$ holds if and only if $p = (x, y) \in I^2$ $(x, y \in I)$ and $\Phi(x, y)$ holds;

(iii) for $x \in I$, $p \in I^2$, $\Psi(x, p)$ holds if and only if x is the first component of p,

(iv) for $x \in I$, $p \in I^2$, $\Psi(p, x)$ holds if and only if x is the second component of p,

finally, in order to distinguish between the cases[16] $x = \Phi$ and $x \in I^2$,

(v) $\Psi(x, x)$ holds always excepting for $x = \Phi$,

so that[17]

(vi) $\Psi(x, x)\ \overline{\Psi}(x, \Phi)$ holds if and only if $x \in I^2$.

[15] We suppose tacitly that I and I^2 have no element in common; i. e., no element of I is of the form (x, y) with $x, y \in I$. We can secure this by replacing I, if necessary, by an appropriate set of the same cardinal number. Of course, Φ does not belong to I or I^2.

[16] By (i), we have $\overline{\Psi}(x, \Phi)$ in both cases. — Of course, instead of the predicate Ψ defined above we could use another predicate $\Psi(x, y)$ for which $\Psi(x, x)$ holds if and only if $x = \Phi$ (and, $\overline{\Psi}(x, \Phi)$ holds if and only if $x \in I$); this predicate would be more analogous to those chosen in Reduction I and Reduction II. However, in our case the definition adopted here seems more natural.

[17] For simplicity, we omit the conjunction sign, or we replace it by a dot.

We see at once that conditions (i)—(vi) are consistent[18] and they define the predicate $\Psi(x, y)$ over J except for $x, y \in I$, $x \neq y$, and for $x, y \in I^2$, $x \neq y$. Defining $\Psi(x, y)$ in these cases to be true,[19] say, we can tabulate the definition of Ψ as follows

	$y = \Phi$	$y \in I$	$y = (y_1, y_2) \in I^2$
$x = \Phi$	false	false	$\Phi(y_1, y_2)$
$x \in I$	true	true	$x = y_1$
$x = (x_1, x_2) \in I^2$	false	$x_2 = y$	true

Now, we could formalize the existence of a pair having given components as follows[20]

$$(9) \qquad (x)(y)(Ep)(\Psi(x, \Phi)\,\Psi(y, \Phi) \rightarrow \Psi(p, p)\,\overline{\Psi}(p, \Phi)\,\Psi(x, p)\,\Psi(p, y)).$$

However, similarly as in Reduction II, we have to ensure that the predicate $\Psi(\Phi, p)$ in (ii) depends on x and y only. In our case this can be done much simpler than in Reduction II,[21] for we have an universal quantifier at disposal which can be placed after the existential one;[22] thus, we can extend (9) to

$$(10) \qquad (x)(y)(Ep)(z)\{\Psi(x, \Phi)\,\Psi(y, \Phi) \rightarrow \Psi(p, p)\,\overline{\Psi}(p, \Phi)\,\Psi(x, p)\cdot$$
$$\cdot\,\Psi(p, y)[\Psi(z, z)\,\overline{\Psi}(z, \Phi)\,\Psi(x, z)\,\Psi(z, y) \rightarrow (\Psi(\Phi, z) \sim \Psi(\Phi, p))]\}$$

3. Now, let $x = (x_1, x_2) \in I^2$ $(x_1, x_2 \in I)$ and $y \in I$. Let $x_3 = y$ and

$$x_\mu = \xi_\mu(x_1, x_2, x_3) \quad \text{for } \mu = 4, \ldots, n,$$
$$p_{\mu\nu} = (x_\mu, x_\nu) \quad \text{for } \mu, \nu = 1, \ldots, n.$$

Then we have, by (i),

$$(11) \qquad \Psi(x_\mu, \Phi) \text{ for } \mu = 4, \ldots, n;$$

[18] Indeed, (vi) is a consequence of (i) and (v) (see footnote [15]); and (i)—(v) determine the truth-value of Ψ at different places except $\Psi(\Phi, \Phi)$, which is determined to be false by each of (i), (ii) or (v).

[19] $\Psi(x, y)$ has to be true, on account of (v), for $x = y \in I$ as well as for $x = y \quad I^2$. We have chosen $\Psi(x, y)$ to be true for $x, y \in I$, $x \neq y$ and for $x, y \in I^2$, $x \neq y$ merely to simplify the following table. For a similar reason, in (ii), we have defined $\Psi(\Phi, x)$ to be false for $x \in I$.

[20] Here and in the following formulae (up to the end of **5**), J has to be taken as the range of the quantifiers.

[21] In Reduction II, we had to introduce two representatives of each pair to the same effect.

[22] Here, the situation is analogous to that in my paper: László Kalmár, Zur Reduktion des Entscheidungsproblems, *Norsk Matematisk Tidsskrift*, **19** (1937), pp. 121—130, especially pp. 127—129.

by (vi),

(12) $\quad \Psi(p_{\mu\nu}, p_{\mu\nu})\,\overline{\Psi}(p_{\mu\nu}, \Phi)$ for $\mu, \nu = 1, \ldots, n$;

by (iii) and (iv),

(13) $\quad \Psi(y, p_{3\nu})\,\Psi(p_{\nu 3}, y)$ for $\nu = 1, \ldots, n$

and

(14) $\quad \Psi(x_\mu, p_{\mu\nu})\,\Psi(p_{\mu\nu}, x_\nu)$ for $\mu = 4, \ldots, n$ and $\nu = 1, \ldots, n$;

further, for arbitrary $z \in J$, by (i), (iii) and (iv),

(15) $\quad \Psi(z, \Phi)\,\Psi(z, x) \rightarrow \Psi(z, p_{1\nu})\,\Psi(p_{\nu 1}, z)$ for $\nu = 1, \ldots, n$

and

(16) $\quad \Psi(z, \Phi)\,\Psi(x, z) \rightarrow \Psi(z, p_{2\nu})\,\Psi(p_{\nu 2}, z)$ for $\nu = 1, \ldots, n$.

Finally, denoting by $\mathbf{M}^* = \mathbf{M}^*(G; u, p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{nn})$ the matrix which results from (7) by replacing $F(x_\mu, x_\nu)$ throughout by $G(u, p_{\mu\nu})$ for $\mu, \nu = 1, \ldots, n$, we have by (8) and (ii),

(17) $\quad \mathbf{M}^*(\Psi; \Phi, p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{nn})$.

Summarizing our results, we have[22] by (vi), (i), (11), (12), (13), (14), (15), (16) and (17),

$$
\begin{aligned}
(18)\quad & (x)(y)(Ex_4)\ldots(Ex_n)\,Ep_{11})(Ep_{12})\ldots(Ep_{nn})(z)\,\{\Psi(x, x)\cdot \\
& \overline{\Psi}(x, \Phi)\,\Psi(y, \Phi) \rightarrow \prod_{\mu=4}^{n} \Psi(x_\mu, q)\,\prod_{\mu,\nu=1}^{n} \big(\Psi(p_{\mu\nu}, p_{\mu\nu})\,\overline{\Psi}(p_{\mu\nu}, \Phi)\big)\cdot \\
& \cdot \prod_{\nu=1}^{n} \big[\big(\Psi(z, \Phi)\,\Psi(z, x) \rightarrow \Psi(z, p_{1\nu})\,\Psi(p_{\nu 1}, z)\big)\big(\Psi(z, \Phi)\,\Psi(x, z) \rightarrow \\
& \qquad \rightarrow \Psi(z, p_{2\nu})\,\Psi(p_{\nu 2}, z)\big)\,\Psi(y, p_{3\nu})\,\Psi(p_{\nu 3}, y)\cdot \\
& \qquad \cdot \prod_{\mu=4}^{n} \big(\Psi(x_\mu, p_{\mu\nu})\,\Psi(p_{\nu\mu}, x_\mu)\big)\big]\,\mathbf{M}^*(\Psi; \Phi, p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{nn})\,\}\,.
\end{aligned}
$$

4. Now, we have to express the existence of an element Φ of J with the properties (10) and (18). To this effect, the most natural way would be to form the conjunction of (10) and (18), to replace Φ throughout by an individual variable u and to place the quantifier (Eu) at the beginning of the formula resulting thus. This way would lead, choosing an appropriate prenex form for the conjunction of (10) and (18), to the prefix

$$(Eu)(x)(y)(Ep)(Ex_4)\ldots(Ex_n)(Ep_{11})(Ep_{12})\ldots(Ep_{nn})(z)\,,$$

not of the form (5). However, we can avoid this inconvenience similarly as in Reduction II, viz. by weakening (10) and (18) to the proposition that for any $x, y \in J$, there is a $u \in J$ having the same property as Φ in (10) and (18), further, securing independence of this u from x and y by postulating that it has, in addition, the property $\overline{\Psi}(u, u)$ characterizing Φ, and,

[23] For simplicity, we abbreviate conjunctions of analogous terms with a Π-sign.

that any two elements x and y of J having this property can be replaced, each by the other, in either argument of Ψ, no matter what stands in the other argument, thus, they can be replaced, each by the other, in any formula containing no predicate but Ψ. The last postulate can be formalized as follows:

$$(19)\quad (x)(y)(z)\left[\overline{\Psi}(x,x)\,\overline{\Psi}(y,y) \rightarrow \big(\Psi(x,z) \sim \Psi(y,z)\big)\big(\Psi(z,x) \sim \Psi(z,y)\big)\right],$$

and the stated modifications on the conjunction of (10) and (18) lead to[24]

$$\begin{aligned}(20)\quad & (x)(y)(Eu)(Ep)(Ex_4)\ldots(Ex_n)(Ep_{11})(Ep_{12})\ldots(Ep_{nn})(z)\Big\{\Big[\Psi(x,u)\cdot\\ &\cdot\Psi(y,u) \rightarrow \Psi(p,p)\,\Psi(p,u)\,\Psi(x,p)\,\Psi(p,y)\cdot\\ &\cdot\big[\Psi(z,z)\,\overline{\Psi}(z,u)\,\Psi(x,z)\,\Psi(z,y) \rightarrow \big(\Psi(u,z) \sim \Psi(u,p)\big)\big]\Big]\cdot\\ &\cdot\Big[\Psi(x,x)\,\overline{\Psi}(x,u)\,\Psi(y,u) \rightarrow \prod_{\mu=4}^{n}\Psi(x_\mu,u)\prod_{\mu,\nu=1}^{n}\big(\Psi(p_{\mu\nu},p_{\mu\nu})\,\overline{\Psi}(p_{\mu\nu},u)\big)\cdot\\ &\cdot\prod_{\nu=1}^{n}\big[\big(\Psi(z,u)\,\Psi(z,x) \rightarrow \Psi(z,p_{1\nu})\,\Psi(p_{\nu 1},z)\big)\cdot\\ &\cdot\big(\Psi(z,u)\,\Psi(x,z) \rightarrow \Psi(z,p_{2\nu})\,\Psi(p_{\nu 2},z)\,\Psi(y,p_{3\nu})\,\Psi(p_{\nu 3},y)\cdot\\ &\cdot\prod_{\mu=4}^{n}\big(\Psi(x_\mu,p_{\mu\nu})\,\Psi(p_{\nu\mu},x_\mu)\big)\big]\,\mathbf{M}^*(\Psi;u,p_{11},p_{12},\ldots,p_{nn})\Big]\,\overline{\Psi}(u,u)\Big\}.\end{aligned}$$

5. Forming the conjunction of (19) and (20), carrying it to a prenex form and changing Ψ throughout into a predicate variable G, we get the required formula[25] **B**, viz.

$$\begin{aligned}&(x)(y)(Eu)(Ep)(Ex_4)\ldots(Ex_n)(Ep_{11})(Ep_{12})\ldots(Ep_{nn})(z)\Big\{\Big[\overline{G}(x,x)\cdot\\ &\cdot\overline{G}(y,y) \rightarrow \big(G(x,z) \sim G(y,z)\big)\big(G(z,x) \sim G(z,y)\big)\Big]\cdot\\ &\cdot\big[G(x,u)\,G(y,u) \rightarrow G(p,p)\,\overline{G}(p,u)\,G(x,p)\,G(p,y)\cdot\\ &\cdot\big[G(z,z)\,\overline{G}(z,u)\,G(x,z)\,G(z,y) \rightarrow \big(G(u,z) \sim G(u,p)\big)\big]\big]\cdot\\ &\cdot\Big[G(x,x)\,\overline{G}(x,u)\,G(y,u) \rightarrow \prod_{\mu=4}^{n}G(x_\mu,u)\prod_{\nu,\mu=1}^{n}\big(G(p_{\mu\nu},p_{u\nu})\cdot\\ &\cdot\overline{G}(p_{u\nu},u)\big)\prod_{\nu=1}^{n}\big[\big(G(z,u)\,G(z,x)\,G(z,p_{1\nu})\,G(p_{\nu 1},z)\big)\cdot\end{aligned}$$

[24] Formally, we can deduce (20) from (10), (18) and $\Psi(\Phi,\Phi)$ by omitting the quantifiers $(x)(y)$ (on account of the rule "$(x)\,F(x)$ implies $F(x)$"), by forming the conjunction, by changing Φ into an individual variable u bound by an existential quantifier (Eu) (on account of the rule "$F(\Phi)$ implies $(Eu)\,F(u)$") and by placing the quantifiers $(x)(y)$ at the beginning of the formula (on account of the rule "$F(x)$ implies $(x)\,F(x)$").

[25] By a slight modification of the above argument, we could spare two existential quantifiers, viz. by omitting the quantifiers, (Ep) and (Ep_{12}) and replacing p by p_{13} and p_{12} by x in the matrix. However, these modifications would complicate our formulae.

$$\cdot\ (G(z,u)\,G(x,z) \rightarrow G(z,p_{2\nu})\,G(p_{\nu 2},z))\,G(y,p_{3\nu})\,G(p_{\nu 3},y)\cdot$$

$$\cdot \prod_{\mu=4}^{n} (G(x_\mu, p_{\mu\nu})\,G(p_{\nu\mu}, x_\mu))\Big] \quad \mathbf{M}^*(G; u, p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{nn})\Big]\,\overline{G}(u,u)\Big\}.$$

We see at once, **B** has a prefix of the form (5) and can be satisfied, by what precedes, if **A** can.

6. To prove the converse of the last property of **B**, suppose, **B** can be satisfied on a (non empty) set J' by a predicate Ψ to be substituted for G. Then, (19) and (20) hold, J' being taken as range of the quantifiers. By (20), there are descriptive functions $u = \varphi(x, y)$, $p = \pi(x, y)$, $x_\mu = \xi_\mu(x, y)$ $(\mu = 4, \ldots, n)$, $p_{\mu\nu} = \pi_{\mu\nu}(x, y)$ $(\mu, \nu = 1, \ldots, n)$ defined over J' such that for any $x, y \in J'$ for which $\Psi(x, \varphi(x, y))$ and $\Psi(y, \varphi(x, y))$ hold, we have

$$(9') \qquad \Psi(\pi(x,y), \pi(x,y))\,\overline{\Psi}(\pi(x,y), \varphi(x,y)),$$

$$(9''') \qquad \Psi(x, \pi(x,y))\,\Psi(\pi(x,y), y);$$

further, for any $z \in I'$ for which $\Psi(z,z)\,\overline{\Psi}(z, \varphi(x,y))\,\Psi(x,z)\,\Psi(z,y)$ holds, we have

$$(10') \qquad \Psi(\varphi(x,y), z) \sim \Psi(\varphi(x,y), \pi(x,y));$$

moreover, for any $x, y \in J'$ for which $\Psi(x,x)\,\overline{\Psi}(x, \varphi(x,y))$ and $\Psi(y, \varphi(x,y))$ hold, we have

$$(11') \qquad \Psi(\xi_\mu(x,y), \varphi(x,y)) \text{ for } \mu = 4, \ldots, n,$$

$$(12') \qquad \Psi(\pi_{\mu\nu}(x,y), \pi_{\mu\nu}(x,y))\,\overline{\Psi}(\pi_{\mu\nu}(x,y), \varphi(x,y)) \text{ for } \mu, \nu = 1, \ldots, n,$$

$$(13') \qquad \Psi(y, \pi_{\nu\nu}(x,y))\,\Psi(\pi_{\nu 3}(x,y), y) \text{ for } \nu = 1, \ldots, n,$$

$$(14') \qquad \Psi(\xi_\mu(x,y), \pi_{\mu\nu}(x,y))\,\Psi(\pi_{\nu\mu}(x,y), \xi_\mu(x,y)) \text{ for } \mu = 4, \ldots, n \text{ and } \nu = 1, \ldots, n,$$

$$(17') \qquad \mathbf{M}^*(\Psi; \varphi(x,y), \pi_{11}(x,y), \pi_{12}(x,y), \ldots, \pi_{nn}(x,y)),$$

and, for any $z \in J'$,

$$(15') \qquad \Psi(z, \varphi(x,y))\,\Psi(z,x) \rightarrow \Psi(z, \pi_{1\nu}(x,y))\,\Psi(\pi_{\nu 1}(x,y), z)$$

and

$$(16') \qquad \Psi(z, \varphi(x,y))\,\Psi(x,z) \rightarrow \Psi(z, \pi_{2\nu}(x,y))\,\Psi(\pi_{\nu 2}(x,y), z) \text{ for } \nu = 1, \ldots, n;$$

finally, we have for any $x, y \in J'$ whatever,

$$(21) \qquad \overline{\Psi}(\varphi(x,y), \varphi(x,y)).$$

7. Let a be any fixed element of J' and let $\varphi = \varphi(a, a)$. Then, we get from (21)

$$\overline{\Psi}(\varphi, \varphi);$$

hence, considering (21), we obtain from (19) for arbitrary $x, y, z \in J'$

$$\Psi(\varphi(x,y), z) \sim \Psi(\varphi, z)$$

and

$$\Psi(z, \varphi(x, y)) \sim \Psi(z, \varphi);$$

therefore, we may replace $\varphi(x, y)$ by φ in (9'), (10'), (11'), (12'), (17'), (15'), (16') as well as in the conditions $\Psi(x, \varphi(x, y))$, $\Psi(y, \varphi(x, y))$, $\overline{\Psi}(z, \varphi(x, y))$ and $\overline{\Psi}(x, \varphi(x, y))$. We shall quote the formulae modified thus as (9''), (10''), (11''), (12''), (17''), (15'') and (16'').

8. We define I' as the subset of J' defined by the condition $\Psi(x, \varphi)$. On account of (11''), we see that I' is not empty. We shall prove that **A** can be satisfied on I'.

Let x_1, x_2, x_3 be arbitrary elements of I'. Let

$$x = \pi(x_1, x_2),$$

$$y = x_3,$$

$$x_\mu = \xi_\mu(x, y) = \xi_\mu(\pi(x_1, x_2), x_3) \text{ for } \mu = 4, \ldots, n,$$

and

$$p_{\mu\nu} = \pi_{\mu\nu}(x, y) = \pi_{\mu\nu}(\pi(x_1, x_2), x_3) \text{ for } \mu, \nu = 1, \ldots, n.$$

By (9''), we have (taking x_1 for x and x_2 for y)

$$\Psi(x, x)\,\overline{\Psi}(x, \varphi),$$

further, on account of $y \in I'$,

$$\Psi(y, \varphi),$$

so that the conditions of (11''), (12''), (13'), (14'), (17''), (15'') and (16'') are fulfilled. (11'') shows that $x_4, \ldots, x_n \in I'$; from (12'') we take

$$\Psi(p_{\mu\nu}, p_{\mu\nu})\,\overline{\Psi}(p_{\mu\nu}, \varphi) \text{ for } \mu, \nu = 1, \ldots, n. \tag{22}$$

Now, we show

$$\Psi(x_\mu, p_{\mu\nu})\,\Psi(p_{\nu\mu}, x_\mu) \text{ for } \mu, \nu = 1, \ldots, n. \tag{23}$$

For $\mu = 4, \ldots, n$ and $\nu = 1, \ldots, n$, (23) is identical to (14'); (13') shows that (23) remains true for $\mu = 3$; $\nu = 1, \ldots, n$ too. By (9''') we have (taking x_1 for x and x_2 for y)

$$\Psi(x_1, x) \tag{24}$$

and

$$\Psi(x, x_2). \tag{25}$$

From (15''), $z = x_1$, we obtain, on account of $x_1 \in I'$ and (24),

$$\Psi(x_1, p_{1\nu})\,\Psi(p_{\nu 1}, x_1) \text{ for } \nu = 1, \ldots, n;$$

similarly, from (16''), $z = x_2$, we obtain

$$\Psi(x_2, p_{2\nu})\,\Psi(p_{\nu 2}, x_2) \text{ for } \nu = 1, \ldots, n,$$

since $x_2 \in I'$ and (25) holds. That is, (23) holds for $\mu = 1,2$; $\nu = 1, \ldots, n$ too.

Now, (23) can be written as follows:

$$\Psi(x_\mu, p_{\mu\nu})\,\Psi(p_{\mu\nu}, x_\nu) \quad \text{for} \quad \mu, \nu = 1, \ldots, n;$$

this shows, together with (22), that the conditions of (10″) are fulfilled by taking x_μ, x_ν and $p_{\mu\nu}$ for x, y and z, respectively; therefore, we have

$$\Psi(\varphi, p_{\mu\nu}) \sim \Psi(\varphi, \pi(x_\mu, x_\nu)) \quad \text{for} \quad \mu, \nu = 1, \ldots, n.$$

Thus, we may replace in (17″), i. e., in

$$\mathbf{M}^*(\Psi; \varphi, p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{nn})$$

the proposition $\Psi(\varphi, p_{\mu\nu})$ by $\Psi(\varphi, \pi(x_\mu, x_\nu))$ for $\mu, \nu = 1, \ldots, n$. On account of the definition of $\mathbf{M}^*$, this means that for the predicate Φ defined for arbitrary $x, y \in I'$ by

$$\Phi(x, y) = \Psi(\varphi, \pi(x, y)),$$

we have

$$\mathbf{M}(\Phi; x_1, \ldots, x_n);$$

x_1, x_2 and x_3 being arbitrary elements of I', this shows that **A** is satisfied by Φ on I'. Thus the equivalence of **A** and **B** has been proved, and so our theorem holds.

The Bolyai Institute, University of Szeged.

(Received 16 April 1950)

ВКЛАДЫ В ТЕОРИЮ ПРИВЕДЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ РАЗРЕШИМОСТИ

Первая статья. Префикс $(x_1)\,(x_2)\,(Ex_3)\ldots(Ex_{n-1})\,(x_n)$, единственный, двухпеременнный предикат.

ЛАСЛО КАЛЬМАР (Сегед)

(Резюме)

Автор, в совместной статье с Яношом Шурани (Journal of Symbolic Logic, том 12-ый), доказал, что проблема разрешимости математической логики может быть приведена к вопросу выполнимости таких логических формул с префиксом Геделя $(x_1)(x_2)\,x_3)\,Ex_4)\ldots Ex_n,)$ которые содержат только одну, двухпеременную логическую переменную функцию. Исходя из этого результата, автор в настоящем статье доказывает аналогичную теорему, относящуюся к префиксу, упоминаемому в подзаголовке, которая постольку преимущесвеннее, поскольку эксистенциальные кванторы опережаются не тремя, а только двумя общими кванторами, следовательно они выражают существование не трехпеременных, а двухпеременных математических функций. Метод доказательства состоит в замене x_1 и x_2 одной упорядоченной парой (x_1, x_2). То, что каждому x_1 и x_2 принадлежит одна и только одна упорядоченная пара, у которой первый компонент x_1, а второй компонент x_2, удается выразыть без увеличения числа логических функций, с помощью единственного общего квантора, ставящегося после эксистенциальных кванторов.

ZUR THEORIE DER FAKTORISIERBAREN GRUPPEN, I

Von

L. RÉDEI (Szeged), korrespondierendem Mitglied der Akademie

§ 1. Einleitung

Stets bezeichnen G, Γ, $\mathfrak{G}$ drei Gruppen mit

$$\mathfrak{G} = G\,\Gamma, \tag{1}$$

unter welcher Gleichung wir verstehen, daß die Produkte $\mathrm{A}\,\mathsf{A}$ ($\mathrm{A} \in G$, $\mathsf{A} \in \Gamma$) alle verschiedenen Elemente von $\mathfrak{G}$ sind. Wir nennen dann $\mathfrak{G}$ eine *faktorisierbare Gruppe* mit den komplementären Faktoren G, Γ. Gleich bemerken wir, daß die Reihenfolge von G, Γ unwesentlich ist, denn (1) und $\mathfrak{G} = \Gamma\,G$ bedingen einander gegenseitig. (Das verleiht der Theorie der faktorisierbaren Gruppen eine Art Dualität, s. unten.) Die faktorisierbaren Gruppen haben ZAPPA [11][1] und SZÉP [5]—[10] voneinander unabhängig untersucht, gewisse ihrer Resultate finden sich teils ergänzt auch in einer neueren Arbeit von mir [2]. Ein Teil der SZÉPschen Arbeiten betrachtet den allgemeineren Fall, daß in (1) die gesagten Produkte $\mathrm{A}\,\mathsf{A}$ die Elemente von $\mathfrak{G}$ auch mehrmals darstellen dürfen, von diesem ebenfalls sehr interessanten Fall nehmen wir hier Abstand. ZAPPA hat nicht nur die Eigenschaften der faktorisierbaren Gruppen untersucht, sondern er hat auch das folgende wichtige *Umkehrproblem* gestellt und gelöst: Für zwei gegebene Gruppen G, Γ sind alle Gruppen $\mathfrak{G}$ mit der Eigenschaft (1) zu bestimmen. Dabei dürfen G, Γ (als abstrakte Gruppen) ganz beliebig sein, damit aber das Problem lösbar ist, müssen wir G, Γ natürlich so realisieren, daß sie dasselbe Einselement aber keine weiteren gemeinsamen Elemente haben. Das nehmen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit stets an und bezeichnen mit $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots, \mathrm{P}, \ldots, \mathrm{X}$ und $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \ldots \Pi, \ldots \mathsf{X}$ Elemente von G bzw. Γ. Das Einselement bezeichnen wir mit E bzw. E, so daß dann nach unserer Annahme $\mathrm{E} = \bar{\mathsf{E}}$ gilt. (Es wird von Nutzen sein für das gemeinsame Einselement beide Bezeichnungen E, E beizubehalten.) Der Satz von ZAPPA lautet so:[2]

[1] Eckige Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis angefügt am Ende der Arbeit.

[2] Vgl. die Arbeit [2], in der ich weniger einfach (A, A) für $\mathrm{A}\,\mathsf{A}$ geschrieben habe, diese Abweichung ist unwesentlich, verleiht aber dem Satz von ZAPPA eine überaus durchsichtige Form. Der Satz läßt sich aus den Gruppenpostulaten mit wenig Rechnung ableiten (ohne Kenntnis der Arbeiten [11] oder [2]).

Gilt (1) für die Gruppen G, Γ, $\mathfrak{G}$, so gibt es zwei eindeutig bestimmte Funktionen (in „Operatorschreibweise")

$$A^{A} \ (\in G), \qquad A^{A} \ (\in \Gamma) \tag{2}$$

mit

$$A\,A = A^{A}\,A^{A}\,, \tag{3}$$

es gilt auch

$$A^{E} = A, \qquad E^{A} = E, \qquad A^{E} = A, \qquad E^{A} = E \tag{4}$$

$$A^{BC} = (A^{C})^{B}, \qquad A^{BC} = (A^{B})^{C}\,, \tag{5}$$

$$(A\,B)^{C} = A^{C}\,B^{C^{A}}, \qquad (A\,B)^{C} = A^{C^{B}}\,B^{C}\,. \tag{6}$$

Umgekehrt, wenn die Gruppen G, Γ vorgegeben sind und man eine Lösung (2) von (4), (5), (6) bestimmt, so erzeugen die Elemente von G und Γ bei der Annahme (3) eine Gruppe $\mathfrak{G}$[3] mit der Eigenschaft (1), alle letzteren Gruppen gewinnt man auf diesem Wege.

Zur Ergänzung bemerken wir, daß das Multiplikationsgesetz in $\mathfrak{G}$ wegen (3) so lautet:

$$A\,A\,B\,B = A\,B^{A}A^{B}B\,. \tag{7}$$

Die erste Hälfte des Satzes von ZAPPA hat auch SZÉP gewonnen, außerdem hat er zuerst aus den Bedingungsgleichungen (4), (5), (6) weitere interessante Schlüsse gezogen. Aus diesen Gründen nennen wir jede Gruppe $\mathfrak{G}$ in (1) ein ZAPPA—SZÉPsches Produkt von G und Γ.

Ich muß auf die auch schon durch ZAPPA bemerkte Analogie mit der SCHREIERschen Erweiterungstheorie hinweisen, in der es sich bekanntlich um die Bestimmung der Gruppen $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{G}/G = \Gamma$ handelt. Wie ich gezeigt habe [2], läßt sich die SCHREIERsche Erweiterungstheorie ähnlich begründen wie die Theorie von ZAPPA—SZÉP, ich fand sogar, daß sich beide als Spezialfälle in eine allgemeinere Theorie einbetten lassen. Aus diesem Grunde nenne ich die SCHREIERsche Erweiterung von G mit Γ gerne auch das SCHREIERsche Produkt von G und Γ. Mir scheinen beide Produkte (das SCHREIERsche und das ZAPPA—SZÉPsche) gleich wichtige Angelegenheiten der Gruppentheorie zu sein.

Ein ZAPPA—SZÉPsches Produkt $\mathfrak{G} = G\,\Gamma$ enthält unter Umständen Normalteiler, ein Teil der Untersuchungen von SZÉP gibt eben solche Fälle an, es kann aber auch einfach sein, z. B. gehört die Ikosaedergruppe auch hierzu (vgl. [2]). Wenn eben G oder Γ ein Normalteiler von $\mathfrak{G} = G\,\Gamma$ ist, dann und nur dann stimmen beide Produkte überein und zwar ist das eben die sogenannte zerfallende Erweiterung. Wir werden in dieser Arbeit auch Beispielen

[3] Das ist so zu verstehen, daß die Elemente von G alle endlichen Produkte aus den Elementen von G, Γ sind, die sich aber wegen (3) auf die Form $A\,A$ bringen lassen.

begegnen, wo $\mathfrak{G} = G\,I'$ wohl nicht einfach aber kein SCHREIERsches Produkt von G und I' oder von I' und G ist.

Weiter wird uns hier nur das oben formulierte Umkehrproblem von ZAPPA interessieren, wo nämlich G, I' vorgegeben sind und man alle $\mathfrak{G} = G\,I'$ sucht, in dieser Richtung machte man bisher keine Untersuchungen. Der Satz von ZAPPA bringt dieses Problem gar nicht zum Abschluß, sondern führt es auf die Angabe aller Lösungen (2) der Funktionalgleichungen (4), (5), (6) zurück. Die Lösungen zu bestimmen ist im allgemeinen eine sehr schwierige Aufgabe, überhaupt scheint uns die Theorie von ZAPPA—SZÉP schwieriger und vielgestalteter zu sein als die von SCHREIER.

Ohne Zweifel ist eine der primitivsten Aufgaben der ZAPPA—SZÉPschen Theorie, das ZAPPA—SZÉPsche Produkt GI' von zwei zyklischen Gruppen G, I' zu bestimmen. Auch schon dieser Fall, der uns hier von einigen vorbereitenden allgemeineren Untersuchungen abgesehen allein beschäftigen wird, bietet ernste Schwierigkeiten. Den Spezialfall, daß die eine der zyklischen Gruppen G, I' unendlich, die andere endlich ist, konnten wir vollständig erledigen, für den Fall aber, daß G, I' beide unendlich sind, haben wir nur einige Teilresultate bekommen, die vollständige Lösung ist eine sehr interessante und schwierige Aufgabe. In der Mitteilung II dieser Arbeit wollen wir den Fall betrachten, daß G, I' beide endlich sind, dieser Fall ist überraschend reich an Lösungen. (Für die SCHREIERsche Theorie ist der Fall von zyklischen G, I' bekanntlich sehr leicht.)

Wir wollen hier einiges über den allgemeinen Fall bemerken. Kraft (2) erscheint im Satz von ZAPPA jedes von G, I' als ein Operatorenbereich für das andere. Und zwar nennen wir A und A in einer (symbolischen) Potenz A^{A} das *Grundelement* bzw. den *Operator* (für A^{A} vertauschen sich die Rollen). Die Gleichungen (5) besagen mit der üblichen Redensart, daß G und I' je ein multiplikativer Operatorenbereich für das andere ist (und zwar das erste ein Rechts-, das zweite ein Linksoperatorenbereich). Aus (5_1), (4_1) sieht man sofort, daß die Abbildung $\mathsf{A} \to \mathsf{A}^{\mathsf{A}}$ (bei festem A) eine Permutation von G ist, und zwar hat die Gleichung $\mathsf{A}^{\mathsf{A}} = \mathsf{B}$ bei festen A, B die einzige Lösung $\mathsf{A} = \mathsf{B}^{\mathsf{A}^{-1}}$, ähnlich ist $\mathsf{A} \to \mathsf{A}^{\mathsf{A}}$ eine Permutation von I'. Während man es aber in der Gruppentheorie meistens mit solchen Operationen A^{A} zu tun hat, für die $(\mathsf{A}\,\mathsf{B})^{\mathsf{A}} = \mathsf{A}^{\mathsf{A}}\,\mathsf{B}^{\mathsf{A}}$ gilt („linearer" oder „distributiver Operator"), so daß dann die gesagte Permutation $\mathsf{A} \to \mathsf{A}^{\mathsf{A}}$ ein Automorphismus von G ist, in unserem Falle gelten die viel komplizierteren Bedingungen (6), eben darin liegt die Schwierigkeit der Theorie von ZAPPA—SZÉP.

Des näheren bemerken wir hierzu folgendes. Bezeichnen wir für einen Augenblick mit $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots$ bzw. $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots$ je ein System von Erzeugenden von G und I'. Man würde sich denken, daß das Funktionenpaar (2) durch die Bedingungsgleichungen (4), (5), (6) und durch die „Anfangswerte" $\mathsf{A}_i^{\mathsf{A}_k}$,

$\mathsf{A}_k^{\mathsf{A}_i}$ eindeutig bestimmt ist (wie im Falle linearer Operatoren), aber wir werden die Falschheit hiervon mit einem Beispiel zeigen.

Wir bemerken, daß im ZAPPA—SZÉPschen Produkt GI' oft eine gewisse *Asymmetrieerscheinung* auftritt, womit wir folgendes meinen. Wohl sind (4), (5), (6) symmetrisch in G und I' (die völlige Symmetrie könnte man so herstellen, daß man z. B. in I' von AB auf die umgekehrte Multiplikation BA übergeht), trotzdem, wenn G und I' isomorph sind, kommt es vor, daß in einer Lösung (2) die eine der Funktionen A^{A}, A^{A} viel komplizierter aussieht als die andere, man könnte in solchen Fällen sagen, daß im ZAPPA—SZÉPschen Produkt GI' der eine Faktor den anderen überwältigt. Auch hierfür werden wir ein interessantes Beispiel sehen.

Es muß bemerkt werden, daß die triviale Lösung $\mathsf{A}^{\mathsf{A}} = \mathsf{A}$, $\mathsf{A}^{\mathsf{A}} = \mathsf{A}$ stets vorliegt, dieser entspricht das direkte Produkt von G und I'.

§ 2. Allgemeines

Bezeichne H eine beliebig vorgelegte Gruppe. Für gewöhnlich versteht man unter einem Komplex K (von H) eine Teilmenge von H, oft kommt es aber auch vor, daß man dabei den Elementen des Komplexes eine Multiplizität zukommen läßt. Das wollen wir tun, so daß wir einen Komplex in der Form

$$K = a_1\gamma_1, a_2\gamma_2, \ldots \tag{8}$$

annehmen, wobei $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ alle verschiedenen Elemente von H sind und jedes a_i gleich $0, 1, 2, \ldots$ oder ∞ ist. (Ist H von der endlichen Ordnung n, so ist (8) mit dem Glied $a_n\gamma_n$ abzubrechen.) Kommt ein $a_i = \infty$ vor, so nennen wir K *uneigentlich*. Im Falle $a_1 = a_2 = \ldots = 0$ setzen wir $K = 0$. Die $a_i\ \gamma$ nennen wir die Glieder von K, zwei Komplexe sind gleich zu betrachten, wenn ihre Glieder (ungeachtet der Reihenfolge) übereinstimmen. Selbst a_i nennen wir die Multiplizität oder den Koeffizienten von γ_i in K. Die Glieder $a_i\gamma_i$ mit $a_i = 0$ dürfen wir in (8) streichen. Dann und nur dann, wenn $a_i \neq 0$ ist, sagen wir, daß γ_i ein *Element von* K ist, hierfür verwenden wir die mengentheoretische Schreibweise $\gamma_i \in K$. Ist

$$L = b_1\gamma_1, b_2\gamma_2, \ldots \tag{9}$$

ein weiterer Komplex, so definieren wir die Summe beider Komplexe durch

$$K + L = (a_1 + b_1)\gamma_1, (a_2 + b_2)\gamma_2 \ldots .$$

und entsprechend soll die Summe beliebig (eventuell unendlich) vieler Komplexe definiert werden. Selbstverständlich is dabei eine Summe $a + b + \ldots$ $(a, b, \ldots = 0, 1, \ldots, \infty)$ gleich ∞ zu setzen, wenn entweder unendlich viele nichtverschwindende Summanden vorkommen oder mindestens ein

Summand ∞ vorkommt. Die Addition von Komplexen ist offenbar kommutativ und assoziativ. Nunmehr dürfen wir (8) auch als $K = a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + \ldots$ schreiben. Wir werden diese „additive Schreibweise der Komplexe" bevorzugen. Ferner definieren wir das Produkt KL als die Summe aller $a_i b_j \gamma_i \gamma_j$, dabei ist ein Produkt ab $(a, b = 0, 1, \ldots, \infty)$ gleich 0 zu setzen, wenn $a = 0$ oder $b = 0$ gilt, und es ist $ab = \infty$ zu setzen, wenn weder $a = 0$ noch $b = 0$ gilt und $a = \infty$ oder $b = \infty$ ist. Die Multiplikation der Komplexe ist assoziativ und (gegenüber der Addition) beiderseits distributiv. (Auch das Produkt unendlich vieler Komplexe könnte man entsprechend definieren, aber wir nehmen davon Abstand.) Wohl unterschieden von der Potenz K^i $(i = 1, 2, \ldots)$ bezeichne $K^{(i)}$ $(i = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ denjenigen Komplex, den man aus (8) bei Ersetzung von jedem γ_k durch γ_k^i gewinnt. Insbesondere nennen wir $K^{(-1)}$ den zu K inversen Komplex. Endlich definieren wir das Skalarprodukt rK $(r = 0, 1, \ldots, \infty)$ durch $rK = r a_1 \gamma_1, r a_2 \gamma_2, \ldots$ Eine (endliche oder unendliche) Summe

$$r_1 K_1 + r_2 K_2 + \ldots \qquad (r_i = 0, 1, \ldots, \infty) \tag{10}$$

nennen wir eine Linearkombination der Komplexe $K_1, K_2, \ldots$. Sind diese nicht uneigentlich, von 0 verschieden und paarweise elementenfremd, so sind die r_i durch den Wert von (10) eindeutig bestimmt.

Wir verabreden uns noch, daß wir für ein Glied $a_i\gamma_i$ von K mit $a_i = 1$ einfach γ_i schreiben. Durch diese Vereinbarung haben wir die gewöhnlichen Komplexe unter die obigen verallgemeinerten Komplexe eingeordnet, sie lassen sich dann auch in der Form $\alpha + \beta + \ldots$ schreiben (mit verschiedenen $\alpha, \beta, \ldots$). Umgekehrt ist K in (8) dann und nur dann ein gewöhnlicher Komplex, wenn alle a_i gleich 0 oder 1 sind. Da insbesondere eine Untergruppe U von H stets ein gewöhnlicher Komplex ist, deshalb führen wir im Bereich unserer verallgemeinerten Komplexe die kurze (aber nicht ganz korrekte) Redensart „ein (verallgemeinerter) Komplex K ist eine Gruppe" ein und verstehen darunter, daß K ein gewöhnlicher Komplex ist und seine Elemente eine Gruppe bilden. Diese Redensart werden wir auch dann verwenden, wenn wir K in additiver Form schreiben, ein Mißverständnis wird daraus nicht entstehen[4].

Von hier an betrachten wir die anfangs eingeführten Gruppen G, I und ein Funktionenpaar (2) mit den Eigenschaften (4), (5), (6). Ein (verallgemei-

[4] Die oben eingeführten verallgemeinerten Komplexe und die Rechnung mit ihnen bilden ein wichtiges Hilfsmittel in der Theorie von Zappa—Szép, das uns aus den nachfolgenden Entwicklungen klar wird. Wir bemerken folgendes. Würde man in unseren Komplexen nur endlich viele Elemente und nur endliche aber auch negative Multiplizitätszahlen zulassen, so erhält man den wohlbekannten Begriff des Gruppenringes (über dem Ring der ganzen Zahlen). Dieser Gruppenring spielt eine unentbehrliche Rolle im Beweis des Satzes von Hajós [1] über endliche Abelsche Gruppen, in dem es sich ebenfalls um ein gewisses (sehr schwieriges) Faktorisationsproblem handelt. Vgl. Rédei [3] und Szele [4].

nerter) Komplex soll nachher stets einen solchen von G oder von Γ bedeuten. Ist $K = a_1 A_1 + a_2 A_2 + \ldots$ ein Komplex von G, so setzen wir $K^{\mathsf{A}} = a_1 A_1^{\mathsf{A}} + a_2 A_2^{\mathsf{A}} + \ldots$. Gilt $K^{\mathsf{A}} = K$ für alle $\mathsf{A}\ (\in \Gamma)$, so nennen wir den Komplex K *operatorinvariant*. Im Spezialfall, wo $K = \mathrm{A}$ ein Element von G ist, sprechen wir dann über ein *operatorinvariantes Element*, wofür wir auch *Fixelement* sagen. Das Einselement E ist stets ein Fixelement, allgemeiner folgt aus (6_1) sofort der

HILFSSATZ 1. *Die Fixelemente von G bilden stets eine Untergruppe von G.*

Die vorangeschickten Definitionen und selbst Hifssatz 1 gelten wörtlich auch nach Vertauschung von G mit Γ. Diese Vertauschung nennen wir *Dualisation*. Auch der noch folgende Inhalt dieses Paragraphen läßt sich dualisieren, worüber wir unten noch näheres sagen werden.

Von einem beliebigen Element $\mathrm{A}\ (\in G)$ ausgehend üben wir auf ihm alle Operatoren $\mathsf{A}\ (\in \Gamma)$ aus. Die verschiedenen der erhaltenen Elemente A^{A} (A fest, A beliebig variabel) bilden einen (gewöhnlichen) Komplex von G, den wir mit $T = T(\mathrm{A})$ bezeichnen und die Transitivitätsklasse von A nennen. Stets gilt dann $\mathrm{A} \in T(\mathrm{A})$. Wir beweisen den

HILFSSATZ 2. *Die Transitivitätsklassen $T(\mathrm{A})$ sind operatorinvariant und die verschiedenen unter ihnen bilden eine Klasseneinteilung von G in paarweise fremde Klassen.*

Da nämlich $\mathrm{A} \to \mathrm{A}^{\mathsf{A}}$ eine Permutation von G ist, so folgt hieraus, daß für einen gewöhnlichen Komplex K von G stets auch K^{A} ein gewöhnlicher Komplex von G ist. Insbesondere ist also jedes $(T(\mathrm{A}))^{\mathsf{A}}$ ein gewöhnlicher Komplex. Gilt nun $\mathrm{B} \in T(\mathrm{A})$ d. h. $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{\mathsf{B}}$ mit einem passenden B, so folgt aus (5_1) $\mathrm{B}^{\mathsf{A}} = \mathrm{A}^{\mathsf{AB}}$. Dies ergibt $(T(\mathrm{A}))^{\mathsf{A}} \leqq T(\mathrm{A})$ für alle A. Dann gilt auch $(T(\mathrm{A}))^{\mathsf{A}^{-1}} \leqq T(\mathrm{A})$, also $T(\mathrm{A}) \leqq T((\mathrm{A}))^{\mathsf{A}}$, beide ergeben $(T(\mathrm{A}))^{\mathsf{A}} = T(\mathrm{A})$, folglich ist $T(\mathrm{A})$ operatorinvariant. Haben $T(\mathrm{A})$, $T(\mathrm{B})$ ein gemeinsames Element $\mathrm{A}^{\mathsf{A}} = \mathrm{B}^{\mathsf{B}}$, so folgt aus (5_1) $\mathrm{A}^{\mathsf{C}} = \mathrm{B}^{\mathsf{CA}^{-1}\mathsf{B}}$ also $T(\mathrm{A}) \leqq T(\mathrm{B})$. Aus Symmetriegründen folgt $T(\mathrm{A}) = T(\mathrm{B})$, womit Hilfssatz 2 bewiesen ist.

Nach der Definition sind die Transitivitätsklassen mit nur einem Element eben die Fixelemente.

HILFSSATZ 3. *Die Linearkombinationen der Transitivitätsklassen sind die sämtlichen operatorinvarianten Komplexe von G.*

Daß nämlich eine Linearkombination der $T(\mathrm{A})$ operatorinvariant ist, ist wegen Hilfssatz 2 klar. Bezeichne umgekehrt K einen operatorinvarianten Komplex von G und A ein beliebiges Element von G. Dann kommen A und A^{A} $(\mathrm{A} \in \Gamma)$ mit derselben Multiplizität in K vor, und dies bedeutet, daß für jede Transitivitätsklasse $T(\mathrm{A})$ sämtliche Elemente von $T(\mathrm{A})$ die gleiche Multiplizität in K haben. Dies und Hilfssatz 2 liefern den Beweis von Hilfssatz 3.

HILFSSATZ 4. *Bezeichne T und T je eine Transitivitätsklasse von G bzw. Γ. Dann gelten die Formeln:*

$$(11) \qquad (\mathsf{A}\,T)^{\mathsf{A}} = \mathsf{A}^{\mathsf{A}}\,T, \quad (\mathsf{T}\,\mathsf{A})^{\mathsf{A}} = \mathsf{T}\,\mathsf{A}^{\mathsf{A}} \quad (\mathsf{A} \in G,\ \mathsf{A} \in \Gamma).$$

(Auch diese Formeln sind dual, in ihnen kommt die sich in (5), (6) offenbarende Asymmetrie in Vorschein. Es ist TA nicht mit $\mathsf{T}(\mathsf{A})$ zu verwechseln!)

Aus Dualitätsgründen genügt es (11_1) zu beweisen. Man lasse B in (6_1) alle Elemente von T durchlaufen und addiere die so erhaltenen Gleichungen, wegen $T = T^{\mathsf{A}}$ (A beliebig) entsteht dann

$$(\mathsf{A}\,T)^{\mathsf{C}} = \mathsf{A}^{\mathsf{C}}\,T.$$

Dies stimmt mit (11_1) überein, womit wir Hilfssatz 4 bewiesen haben.

Wir beweisen jetzt die folgendenden zwei Hilfssätze:

HAUPTHILFSSATZ 1. *Für zwei beliebige Transitivitätsklassen T_1, T_2 von G gilt*

$$(12) \qquad (T_1\,T_2)^{\mathsf{A}} = T_1\,T_2 \qquad (\mathsf{A} \in \Gamma).$$

Dies bedeutet, daß das Produkt von zwei Transitivitätsklassen von G stets operatorinvariant, d. h. nach Hilfssatz 3 eine Linearkombination der Transitivitätsklassen von G ist. In Formeln:

$$(13) \qquad T_i\,T_k = \sum_l c_{ikl}\,T_l \quad (c_{ikl} = 0, 1, \ldots, \infty),$$

wobei T_1, T_2, ... alle Transitivitätsklassen von G bezeichnen.

HAUPTHILFSSATZ 2. *Für jede Transitivitätsklasse T von G ist auch der inverse Komplex $T^{(-1)}$ eine Transitivitätsklasse.* Gilt $T = T^{(-1)}$, so nennen wir die Transitivitätsklasse *selbstinvers*[5].

[5] Für den Augenblick nennen wir allgemeiner jede Klasseneinteilung T_1, T_2, ... einer Gruppe G regulär, wenn für diese beide Haupthilfssätze 1,2 gelten und das Einselement für sich eine Klasse bildet. Die regulären Klasseneinteilungen spielen in der Gruppentheorie eine wohlbekannte wichtige Rolle. Und zwar bezeichne jetzt Γ (anders als im Text) eine Automorphismengruppe von G (deren Elemente wir weiter auch auf die bisherige Art bezeichnen), mit anderen Worten sollen jetzt die [(4), (5), (6) ähnlichen aber einfacheren] Gleichnungen $\mathsf{A}^{\mathsf{E}} = \mathsf{A}$, $\mathsf{E}^{\mathsf{A}} = \mathsf{E}$, $\mathsf{A}^{\mathsf{BC}} = (\mathsf{A}^{\mathsf{C}})^{\mathsf{B}}$, $(\mathsf{AB})^{\mathsf{C}} = \mathsf{A}^{\mathsf{C}}\,\mathsf{B}^{\mathsf{C}}$ gelten. Definiert man dann die Klasse $T = T(\mathsf{A})$ wieder als die Menge aller A^{A} ($\mathsf{A} \in \Gamma$), so entsteht offenbar eine reguläre Klasseneinteilung von G. (Das allerbekannteste Beispiel bilden die natürlichen Klassen von G, so nenne ich die Klassen der konjugierten Elemente. Dies entspricht dem Fall, daß Γ die Gruppe der inneren Automorphismen von G ist. Ist Γ die volle Automorphismengruppe von G, so nenne ich die entsprechenden Klassen charakteristisch.) Es braucht nicht besonders betont zu werden, daß wegen der Haupthilfssätze 1,2 für die Theorie von ZAPPA—SZÉP die Untersuchung der regulären Klasseneinteilungen einer Gruppe eine wichtige Aufgabe ist. Um Mißverständnisse zu vermeiden bemerken wir, daß in einer regulären Klasseneinteilung einer Gruppe sehr wohl Elemente verschiedener Ordnung in eine Klasse kommen können (insbesondere bei den natürlichen und den charakteristischen Klassen ist das nie der Fall). Z. B. ist

1; (14) (23); (12) (34), (142), (124), (143), (134); (13) (24), (123), (132), (234), (243)

eine Einteilung der alternierenden Permutationsgruppe von vier Ziffern in vier reguläre Klassen, wie man das leicht nachprüfen kann, dabei finden sich in einer Klasse Elemente zweiter und dritter Ordnung.

Bemerkung. Selbstverständlich gilt das Duale der Haupthilfssätze 1,2 auch.

Für den Haupthilfssatz 1 genügt es (12) zu beweisen. Nun folgt aber (12) sofort aus (11_1), wenn man in diesem für A die Elemente einer Transitivitätsklasse von G einsetzt und summiert, wobei man die Operatorinvarianz der Transitivitätsklassen zu berücksichtigen hat.

Den Haupthilfssatz 2 beweisen wir so. Gilt $\mathsf{A} \in T^{(-1)}$, so gilt $\mathsf{E} \in \mathsf{A}T$, und dann folgt hieraus nach (11_1) $\mathsf{E} \in \mathsf{A}^{\mathsf{A}} T$, also auch $\mathsf{A}^{\mathsf{A}} \in T^{(-1)}$. Das bisherige besagt $(T^{(-1)})^{\mathsf{A}} \leqq T^{(-1)}$. Da dies auch für A^{-1} statt A gilt, leitet sich aus beiden $(T^{(-1)})^{\mathsf{A}} = T^{(-1)}$ ab. Hiernach ist $T^{(-1)}$ operatorinvariant, und so gilt nach Hilfssatz 3 eine Gleichung $T^{(-1)} = T_1 + T_2 + \ldots$ mit gewissen Transitivitätsklassen T_i. Dann besteht $T = T_1^{(-1)} + T_2^{(-1)} + \ldots$. Da aber jedes Glied der rechten Seite nach dem schon bewiesenen ebenfalls eine Linearkombination von Transitivitätsklassen ist, so folgt aus der Bemerkung über die Eindeutigkeit von (10) mit Notwendigkeit $T = T_1^{(-1)}$ also $T^{(-1)} = T_1$. Haupthilfssatz 2 haben wir bewiesen.

Als weitere Vorbereitung bezeichnen wir die Permutation $\mathsf{A} \to \mathsf{A}^{\mathsf{A}}$ mit $[\mathsf{A}]$. Ähnlich bezeichne $[A]$ die Permutation $\mathsf{A} \to \mathsf{A}^{\mathsf{A}}$. Nach (5) bilden diese Permutationen (nämlich die verschiedenen unter ihnen) je eine Gruppe, die wir mit $[\Gamma]$ bzw. $[G]$ bezeichnen, und es gelten die Homomorphien:

$$G \sim [G], \quad \Gamma \sim [\Gamma]. \tag{14}$$

Und zwar werden diese Homomorphien bzw. durch die Abbildung

$$\mathsf{A} \to [\mathsf{A}], \quad \mathsf{A} \to [\mathsf{A}^{-1}] \tag{15}$$

vermittelt. Ein Element $\mathsf{A}\,(\in G)$ oder $\mathsf{A}\,(\in \Gamma)$ nennen wir einen *identischen Operator*, wenn $[\mathsf{A}]$ bzw. $[\mathsf{A}]$ die identische Permutation (von Γ bzw. G) ist. Die identischen Operatoren in G bzw. Γ bilden je eine Untergruppe G^0, Γ^0, diese sind die beiden Kerne der Homomorphien (14), folglich gelten die Isomorphien

$$G/G^0 \approx [G], \qquad \Gamma/\Gamma^0 \approx [\Gamma]. \tag{16}$$

Aus (5_1) sieht man sofort, daß gewiß $\mathsf{A}^{\mathsf{A}} = \mathsf{A}^{\mathsf{B}}$ gilt, wenn A, B dieselbe Klasse nach Γ^0 repräsentieren. Läßt man also A ein volles Repräsentantensystem der Klassen von Γ mod Γ^0 durchlaufen, so durchläuft A^{A} auch schon alle Elemente der Transitivitätsklasse $T(\mathsf{A})$ (einige eventuell mehrmals). Wenn also Γ/Γ^0 endlich ist, so sind auch alle Transitivitätsklassen endlich.

Aus den Definitionen und aus (6_1) entstehen sofort:

HILFSSATZ 5. *Ist* C *ein Fixelement von* Γ, *so gilt*

$$(\mathsf{A}\,\mathsf{B})^{\mathsf{C}} = \mathsf{A}^{\mathsf{C}}\,\mathsf{B}^{\mathsf{C}}.$$

(Kurz: Die Fixelemente von Γ bewirken als Operatoren lauter Automorphismen von G.)

HILFSSATZ 6. *Sind die Elemente* $A, B (\in G)$ *identische Operatoren (für* I*), so gilt*

$$(A\,B)^C = A^C\,B^C.$$

(Kurz: Bei Anwendung eines Operators in I erleidet die Gruppe G^0 der identischen Operatoren in G einen Automorphismus.)

Wir bemerken noch die aus (6) folgenden Formeln: Ist C bzw. $\mathfrak{C}$ je ein Fixelement von G bzw. I, so gilt

$$(17) \qquad (A\,\mathfrak{C})^A = A^A\mathfrak{C}, \qquad (C\,\mathfrak{A})^A = C\,\mathfrak{A}^A.$$

(Beide Hilfssätze 5, 6 lassen sich dualisieren. Die Formeln (17) sind zueinander „asymmetrisch-dual".)

§ 3. Der Fall zyklischer Gruppen G, I

Wie üblich bezeichnen wir mit $\{\ \}$ die durch die eingeklammerten Elemente erzeugte Gruppe. Von jetzt an betrachten wir in dieser Arbeit weiter nur den Fall, daß die Gruppen G, I beide zyklisch sind und setzen

$$(18) \qquad G = \{P\}, \quad I = \{\Pi\},$$

wobei P, Π je ein erzeugendes Element ist. Mit $O(x)$ bezeichnen wir die Ordnung von x, wobei x eine Gruppe oder ein Gruppenelement ist.

Für zyklische (sogar allgemeiner für ABELsche) Gruppen G, I verschwindet die sich in den Formeln (5), (6) offenbarende Asymmetrie, und zwar gilt jetzt

$$(19) \qquad A^{BC} = (A^B)^C = (A^C)^B, \qquad \mathfrak{A}^{BC} = (\mathfrak{A}^B)^C = (\mathfrak{A}^C)^B,$$

$$(20) \qquad (A\,B)^C = A^{C^B}\,B^C = A^C\,B^{C^A}, \qquad (\mathfrak{A}\,\mathfrak{B})^C = \mathfrak{A}^{C^B}\,\mathfrak{B}^C = \mathfrak{A}^C\,\mathfrak{B}^{C^A}.$$

Aus (14) folgt, daß die Permutationsgruppen $[G]$, $[I]$ auch zyklisch sind, offenbar sind dabei $[P]$, $[\Pi]$ erzeugende Elemente. Zerlegt man die Permutation $[P]$ (von I) in paarweise fremde Zyklen, so fallen diese mit den Transitivitätsklassen von I zusammen, das Duale hiervon gilt auch.

Wie bemerkt, wollen wir in dieser Arbeit den Fall außer Acht lassen, daß G, I *beide endlich sind, deshalb nehmen wir im folgenden*

$$(21) \qquad O(G) = \infty$$

an. Die hier zu beweisenden Hilfssätze gelten dann, ob I endlich oder unendlich ist.

HILFSSATZ 7. *Ist* T $(\neq E)$ *eine endliche Transitivitätsklasse von* G *mit minimaler Elementzahl, so ist auch jedes* $T^{(i)}$ *eine solche.*

Wegen $T^{(-i)} = (T^{(-1)})^{(i)}$ und Haupthilfssatz 2 genügt es die Behauptung für $i > 0$ zu beweisen. Bezeiche a die größte ganze Zahl mit $P^a \in T$. Aus dem

Polynomialsatz folgt, daß die außerhalb von $T^{(i)}$ liegenden Elemente von $T^{(i)}$ einen Koffizienten > 1 haben, ferner hat das Element P^{ai} den Koeffizienten 1 in T^i. Andererseits folgt aus der mehrmaligen Anwendung des Haupthilfssatzes 1, daß T^i eine Linearkombination der Transitivitätsklassen von G ist. Nach vorigem tritt in dieser Linearkombination notwendig die Transitivitätsklasse $T(\mathrm{P}^{ai})$ mit dem Koeffizienten 1 auf, ferner kann diese nur Elemente von $T^{(i)}$ enthalten. Hieraus folgt wegen der Minimaleigenschaft von T, daß selbst $T^{(i)}$ eine Transitivitätsklasse von G sein muß, womit wir Hilfssatz 7 bewiesen haben.

HILFSSATZ 8. *Enthält G eine endliche Transitivitätsklasse ($\neq \mathrm{E}$), so enthält es entweder ein Fixelement ($\neq \mathrm{E}$) oder eine selbstinverse Transitivitätsklasse mit nur zwei Elementen.*

Bezeichne nämlich T eine Transitivitätsklasse ($\neq \mathrm{E}$) von G mit minimaler Elementzahl t. Ist $t = 1$, so ist T ein Fixelement von G, und dann ist Hilfssatz 8 richtig. Im anderen Falle zeigen wir zunächst $t = 2$. Denn nehmen wir $t \geqq 3$ an. Da nach dem Haupthilfssatz 2 mit T zusammen auch $T^{(-1)}$ eine Transitivitätsklasse ist und dabei die Elementzahl unverändert bleibt, so darf (wegen $\mathrm{E} \bar{\in} T$)

$$\mathrm{P}^a,\ \mathrm{P}^b \in T \quad (a \neq b;\ a, b > 0) \tag{22}$$

angenommen werden. Aus Hilfssatz 6 folgt, daß $T^{(a)}$, $T^{(b)}$ auch Transitivitätsklassen von G sind. Beide enthalten P^{ab}, und so sind sie gleich. Dies ist wegen $a \neq b$ ein offenbarer Widerspruch, womit wir $t = 2$ bewiesen haben. Hiernach gilt (mit anderen a, b)

$$T = \mathrm{P}^a + \mathrm{P}^b \quad (a \neq b;\ a,\ b \neq 0)\,. \tag{23}$$

Wegen $T^2 = \mathrm{P}^{2a} + \mathrm{P}^{2b} + 2\,\mathrm{P}^{a+b}$ folgt aus Haupthilfssatz 1, daß P^{a+b} (eine Transitivitätsklasse d. h.) ein Fixelement sein muß. Da aber jetzt (wegen $t = 2$) kein Fixelement ($\neq \mathrm{E}$) in G vorhanden ist, so ist $\mathrm{P}^{a+b} = \mathrm{E}$, $b = -a$, $T = P^a + P^{-a}$ $(a \neq 0)$. Dies ist eben die allgemeine Form einer selbstinversen Transitivitätsklasse mit zwei Elementen, womit wir Hilfssatz 8 bewiesen haben.

HILFSSATZ 9. *Ist T eine selbstinverse Transitivitätsklasse in G mit zwei Elementen, so sind es auch alle $T^{(i)}$ $(i = 1,2, \ldots)$.*

Denn wir dürfen

$$T = \mathrm{P}^a + \mathrm{P}^{-a} \quad (a > 0) \tag{24}$$

setzen. In T^i $(i > 1)$ kommen P^{ai}, P^{-ai} mit der Multiplizität 1 vor, die übrigen Elemente haben eine Multiplizität > 1, und so folgt aus Haupthilfssatz 1, daß entweder $\mathrm{P}^{ai} + \mathrm{P}^{-ai} = T^{(i)}$ eine Transitivitätsklasse ist oder P^{ai}, P^{-ai} Fixelemente sind. Wir haben zu zeigen, daß stets der erste Fall zutrifft. Im anderen Falle gäbe es ein i (> 1) so, daß

$$\mathrm{P}^a + \mathrm{P}^{-a},\ \mathrm{P}^{a(i-1)} + \mathrm{P}^{-a(i-1)},\ \mathrm{P}^{ai},\ \mathrm{P}^{-a}$$

lauter Transitivitätsklassen sind. Dann gilt nach (6_1)

$$P^{ai} = (P^{ai})^{\Pi} = (P^{a})^{\Pi}\,(P^{a(i-1)})^{\Pi^{P^{a}}} = P^{-a}\,P^{\pm a(i-1)}.$$

Mit diesem Widerspruch haben wir Hilfssatz 9 bewiesen.

HILFSSATZ 10. *Kommt in G ein Fixelement ($\neq E$) vor, so enthält G keine selbstinversen Transitivitätsklassen mit zwei Elementen.*

Denn nehmen wir an (vgl. Hilfssatz 1), daß $\{P^r\}$ $(r > 0)$ die Gruppe der Fixelemente von G ist und dabei G auch noch eine Transitivitätsklasse T mit zwei Elementen enthält. Diese nehmen wir wieder in der Form (24) an. Nach Hilfssatz 9 ist auch $T^{(r)} = P^{ar} + P^{-ar}$ eine Transitivitätsklasse, obwohl doch P^{ar}, P^{-ar} Fixelemente sind. Dieser Widerspruch beweist Hilfssatz 10.

HILFSSATZ 11. *Gibt es in G eine selbstinverse Transitivitätsklasse mit zwei Elementen, so lassen sich alle selbstinversen Transitivitätsklassen mit zwei Elementen in der Form $T^{(i)}$ $(i = 1,2, \ldots)$ angeben.*

Nehmen wir nämlich an, daß

$$T = P^{a} + P^{-a} \quad (a > 0), \quad T_1 = P^{b} + P^{-b} \quad (b > 0)$$

zwei verschiedene Transitivitätsklassen von G sind und dabei a minimal ist. Wegen Hilfssatz 9 genügt es $a|b$ zu beweisen. Es gilt eine Gleichung

$$b = a\,k + r \qquad (0 \leqq r < a; \quad k \geqq 1)$$

mit ganzen k, r. Nach (20) und Hilfssatz 9 gilt dann für $\varepsilon = \pm 1$ mit geeigneten $\varrho = \pm 1$, $\sigma = \pm 1$

$$(P^{\varepsilon r})^{\Pi} = (P^{\varepsilon b - \varepsilon a k})^{\Pi} = P^{\varrho}\,P^{\varepsilon a k} = P^{-\varepsilon b}\,P^{\sigma a k}.$$

Hieraus folgt $(\varrho + \varepsilon)\,b = (\sigma - \varepsilon)\,a\,k$. Dies ergibt $\varrho = -\varepsilon$, $\sigma = \varepsilon$, also nach obigem

$$(P^{\varepsilon r})^{\Pi} = P^{-\varepsilon b + \varepsilon a k} = P^{-\varepsilon r}.$$

Dies bedeutet, daß $P^r + P^{-r}$ eine Transitivitätsklasse von G ist, und so muß wegen der Minimaleigenschaft von a gewiß $r = 0$, $a|b$ sein. Wir haben Hilfssatz 11 bewiesen.

HILFSSATZ 12. *Eine endliche Transitivitätsklasse von G kann nur ein Fixelement oder selbstinvers mit zwei Elementen sein.*

Denn nehmen wir an, daß es in G eine endliche Transitivitätsklasse

$$T = P^{a_1} + \ldots + P^{a_k} \quad (k \geqq 2) \tag{25}$$

gibt, die weder ein Fixelement noch selbstinvers mit zwei Elementen ist. Schon aus der schwächeren Annahme $T \neq E$ folgt nach den Hilfssätzen 8, 10,

11 die Existenz von zwei eindeutig bestimmten ganzen Zahlen $d\,(>0)$, $\varepsilon\,(=\pm 1)$ mit

$$(26) \qquad (\mathfrak{P}^{di})^{\Pi} = \mathfrak{P}^{\varepsilon d i} \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

$$(27) \qquad (\mathfrak{I}^{i} + \mathfrak{P}^{-i})^{\Pi} \neq \mathfrak{I}^{i} + \mathfrak{P}^{-i} \qquad (d \nmid i)$$

(Im Fall $\varepsilon = 1$ ist nämlich $\{\mathfrak{P}^{d}\}$ die Gruppe der Fixelemente von G, im Fall $\varepsilon = -1$ sind die $\mathfrak{P}^{di} + \mathfrak{P}^{-di}$ $(i > 0)$ die sämtlichen selbstinversen Transitivitätsklassen mit zwei Elementen.) Bemerke man noch, daß nach diesen Definitionen gewiß

$$(28) \qquad d \nmid a_1, \ldots, a_k$$

gilt.

Da nach (26), (6_1) und (5_1)

$$(\mathfrak{P}^{r+di})^{\Pi} = (\mathfrak{P}^{r})^{\Pi}\,(\mathfrak{P}^{\pm di})$$

gilt und der Exponent $r + di$ für $r\,(= 0, \ldots, d-1)$, $i\,(= 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ alle ganzen Zahlen durchläuft, so folgt hieraus die Existenz einer Konstanten $\varkappa\ (>0)$ mit

$$(29) \qquad (\mathfrak{P}^{i})^{\Pi} = \mathfrak{P}^{\pm i + i^*} \qquad (i = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots; |i^*| < \varkappa).$$

Bezeichne p eine Primzahl. Aus der bekannten Teilbarkeitseigenschaft der Polynomialkoeffizienten folgt, daß in T^{p} die Elemente von $T^{(p)}$ eine Multiplizität $\equiv 1 \pmod{p}$, die übrigen Elemente eine durch p teilbare Multiplizität haben. Dies ergibt nach dem Haupthilfssatz 1 sofort

$$(T^{(p)})^{\Pi} = T^{(p)},$$

d. h. nach (25)

$$(30) \qquad (\mathfrak{P}^{pa_j})^{\Pi} = \mathfrak{P}^{pa_{j'}} \qquad (j = 1, \ldots, k),$$

wobei j' eine (von p abhängige) Permutation der j bezeichnet. Aus (29), (30) folgt aber, daß für genügend große p (nämlich gewiß für $p > \varkappa$) $a_{j'} = \pm a_j$ sein muß. Wendet man dies auch auf $T^{(-1)}$ statt T an (vgl. Haupthilfssatz 2), so hat man das Resultat:

$$(31) \qquad (\mathfrak{P}^{\pm pa_j})^{\Pi} = \mathfrak{P}^{\pm pa_j} \qquad (j = 1, \ldots, k;\ p > \varkappa),$$

wobei das Vorzeichen links beliebig wählbar, rechts vorläufig nicht näher bestimmt ist.

Da aber nach Hilfssatz 1 mit einem Element von G zusammen auch sein Inverses ein Fixelement ist, so müssen in (31) für jedes feste Paar p, j stets entweder beiderseits gleiche oder beiderseits ungleiche Vorzeichen stehen. Das bedeutet, daß statt (31) genauer

$$(\mathfrak{P}^{pa_j} + \mathfrak{P}^{-pa_j})^{\Pi} = \mathfrak{P}^{pa_j} + \mathfrak{P}^{-pa_j}$$

gilt. Wegen (28) ist das für $(p, d) = 1$ ein Widerspruch zu (27), womit wir Hilfssatz 12 bewiesen haben.

HILFSSATZ 13. *Enthält Γ ein Fixelement ($\neq \mathsf{E}$), so enthält G nur endliche Transitivitätsklassen.*

Bezeichne nämlich C ($\neq \mathsf{E}$) ein Fixelement von Γ. Nach Hilfssatz 5 bewirkt C einen Automorphismus von G. Das bedeutet $A^{\mathsf{C}} = A^{\varepsilon}$ ($A \in G$) mit konstantem $\varepsilon = \pm 1$, also gilt $A^{\mathsf{C}^2} = A$, d. h. C^2 ist ein identischer Operator. Gewiß ist dann die Faktorgruppe Γ/Γ^0 in (16) endlich, woraus nach der dort gemachten Bemerkung die Endlichkeit aller Transitivitätsklassen von G folgt. Das beweist Hilfssatz 13.

HILFSSATZ 14. *Gibt es in Γ keine endlichen Transitivitätsklassen ($\neq \mathsf{E}$), so folgt aus jeder Gleichung $A^{A} = A^{-1}$ ($A \in G$, $A \in \Gamma$, $A \neq \mathsf{E}$) auch das Bestehen von $A^{A} = A^{-1}$.*

Nach der Annahme gilt nämlich $A^{A}A = \mathsf{E}$. Wendet man beiderseits den Operator A an, so folgt nach Formel (6_2)

$$(A^{A})^{A^{A}}\, A^{A} = \mathsf{E},$$

also nach (5_2) und voriger Gleichung:

$$A^{A^{A}A} = A.$$

Ist die Behauptung falsch, d. h. $A^{A}A \neq \mathsf{E}$, so besagt die erhaltene Gleichung, daß die Transitivitätsklasse $\mathsf{T}(A)$ von Γ endlich ist. Dieser Widerspruch beweist Hilfssatz 14.

§ 4. Der Fall zyklischer Gruppen G, Γ mit $O(G) = \infty$, $O(\Gamma) = \mu$

Wir betrachten weiter auch die zyklischen Gruppen $G = \{\mathsf{P}\}$, $\Gamma = \{\Pi\}$, nehmen aber jetzt an, daß G unendlich, Γ ($\neq \mathsf{E}$) endlich ist und setzen

$$O(\Gamma) = \mu (> 1). \tag{32}$$

Anschließend bestimmen wir in diesem Spezialfall alle Funktionenpaare (2) aus dem Satz von ZAPPA.

Wegen (32) ist die Permutationsgruppe $[\Gamma]$ endlich, und so müssen alle Transitivitätsklassen von G endlich sein. Wegen der Hilfssätze 12, 10 gilt also mit einem festen ε

$$(\mathsf{P}^{i})^{\Pi} = \mathsf{P}^{\varepsilon i} \qquad (\varepsilon = \pm 1;\ i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \tag{33}$$

Erster Fall: $\varepsilon = 1$. Wir werden leicht zeigen, daß jezt die gesuchten Funktionenpaare (2) durch[6]

$$(\mathrm{P}^i)^{\Pi^k} = \mathrm{P}^i\,, \quad (\Pi^k)^{\mathrm{P}^i} = \Pi^{k\ i} \qquad ((g, \mu) = 1) \tag{34}$$

mit einer sonst beliebigen ganzen Zahl g gegeben sind.

Aus (33) und $\varepsilon = 1$ folgt nämlich (34_1). Wir setzen $\Pi^{\mathrm{P}} = \Pi^g$. Nach Hilfssatz 5 (angewendet für G, Γ statt Γ, G) gilt dann (34_2) zunächst für $i = 1$, also allgemeiner für $i \geqq 0$. Man sieht auch, daß $(g, \mu) = 1$ sein muß, denn sonst wäre [P] keine Permutation von Γ. Endlich gilt (34_2) wegen (5_2) offenbar auch für $i < 0$.

Umgekehrt sieht man leicht, daß (34) stets eine Lösung von (4), (5), (6) ist, womit wir die Behauptung bewiesen haben.

Zweiter Fall: $\varepsilon = -1$. Aus (33) folgt sofort

$$(\mathrm{P}^i)^{\Pi^k} = \mathrm{P}^{i(-1)^k}. \tag{35}$$

Dies ergibt wegen $\Pi^{\mu} = \mathsf{E}$ für $k = \mu$ mit Notwendigkeit

$$2 | \mu\,. \tag{36}$$

Um auch die Funktion (2_2) zu bestimmen, gehen wir so vor. Zunächst folgt aus (35) $\mathrm{P}^{\Pi^2} = \mathrm{P}$, also wegen (6_2)

$$(\Pi^{k+2})^{\mathrm{P}} = (\Pi^k)^{\mathrm{P}}\,(\Pi^2)^{\mathrm{P}}\,.$$

Mit Induktion schließt man hieraus auf

$$(\Pi^{k+2r})^{\mathrm{P}} = (\Pi^k)^{\mathrm{P}}\,((\Pi^2)^{\mathrm{P}})^r\,, \tag{37}$$

gültig zunächst für $r \geqq 0$, offenbar aber auch für $r < 0$. Insbesondere für $k = 0$, $r = \frac{\mu}{2}$ bekommen wir $((\Pi^2)^{\mathrm{P}})^{\frac{\mu}{2}} = \mathsf{E}$ und so gilt

$$(\Pi^2)^{\mathrm{P}} = \Pi^{2a} \tag{38}$$

mit einer ganzen Zahl a. Wir setzen

$$\Pi^{\mathrm{P}} = \Pi^{a+b} \tag{39}$$

mit einer passenden ganzen Zahl b.

Bezeichnen wir für ganze x mit $\bar{x}$ den kleinsten nichtnegativen Rest von x mod 2, d. h. wir setzen

$$\bar{x} = \begin{cases} 0 & (2 \mid x), \\ 1 & (2 \nmid x). \end{cases} \tag{40}$$

Mit dieser Bezeichnung kommen wir von (37), (38), (39) leicht zur Formel

$$(\Pi^k)^{\mathrm{P}} = \Pi^{ak + b\bar{k}}\,. \tag{41}$$

[6] Selbstverständlich kommt g^i nur mod μ in Betracht.

Der Exponent auf der rechten Seite muß wegen (36) für passende k auch ungerade Werte annehmen, und so folgt hieraus wegen

$$a\,k + b\,\overline{k} \equiv (a + b)\,k \pmod 2$$

mit Notwendigkeit

$$2 \nmid a + b\,. \tag{42}$$

Die a, b sind nicht unabhängig, wie wir das hier prüfen werden. Aus diesem Zweck berechnen wir nach (6_2) und (35):

$$(\pi^{k+1})^{\mathrm{P}} = (\pi^k)^{\mathrm{P}\pi}\,\pi^{\mathrm{P}} = (\pi^k)^{\mathrm{P}-1}\,\pi^{\mathrm{P}}\,.$$

Wegen (41) und $\overline{k+1} = 1 - \overline{k}$ schreibt sich dies als

$$\pi^{a(k+1)+b(1-\overline{k})} = (\pi^k)^{\mathrm{P}-1}\,\pi^{a+b},$$

d. h.

$$\pi^{a\,k - b\,\overline{k}} = (\pi^k)^{\mathrm{P}-1}\,.$$

Der Exponent auf der linken Seite ist wegen (42) kongruent k (mod 2). Wendet man also beiderseits den Operator P an, so folgt aus (41), (5_2)

$$\pi^{a(a\,k - b\,\overline{k}) + b\,\overline{k}} = \pi^k\,.$$

Dies ergibt

$$a\,(a\,k - b\,\overline{k}) + b\,\overline{k} \equiv k \pmod{\mu}\,.$$

Insbesondere für $k = 2, 1$ folgt hieraus

$$a^2 - 1 \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\ \frac{\mu}{2}\right), \quad a^2 - 1 \equiv (a-1)\,b \pmod{\mu}. \tag{43}$$

Jetzt sind wir schon in der Lage

$$(\pi^k)^{\tau^i} = \pi^{k + (a-1)\overline{i}\,k + b\,i\,\overline{k}} \tag{44}$$

zu beweisen. Dies lautet für $i + 1$ statt i so:

$$(\pi^k)^{\mathrm{P}^{i+1}} = \pi^{k + (a-1)(1-\overline{i})\,k + b\,(i+1)\,\overline{k}}. \tag{45}$$

Da (44) für $i = 0$ richtig ist, werden wir (44) für $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ bewiesen haben, wenn wir zeigen, daß (44), (45) auseinander folgen. Es genügt zu zeigen, daß die rechte Seite von (44) nach Ausübung des Operators P in die von (45) übergeht. Da nach (42) der Exponent rechts in (44) kongruent k mod 2 ist, so kommen wir nach (41) zu

$$\pi^{a\,(k + (a-1)\,\overline{i}\,k + b\,i\,\overline{k}) + b\,\overline{k}}.$$

Wir haben zu zeigen, daß die beiden Exponenten hier und rechts in (45) mod μ kongruent sind, d. h. für ihre Differenz

$$(a^2 - 1)\,\overline{i}\,k + (a-1)\,b\,i\,\overline{k} \equiv 0 \pmod{\mu}$$

gilt. Diese Kongruenz ist wegen (43) in der Tat befriedigt, womit wir (44) bewiesen haben.

Leicht überzeugt man sich, daß umgekehrt das Funktionenpaar (35), (44) den Gleichungen (4), (5), (6) genügt, wenn (36), (42), (43) erfüllt sind. Mit dem vorigen Resultat zusammen haben wir den folgenden:

SATZ 1. *Es seien G, Γ zyklische Gruppen mit den Erzeugenden* P, Π *von unendlicher bzw. der endlichen Ordnung* μ. *Die sämtlichen Lösungen (2) der Bedingungsgleichungen (4), (5), (6) von* ZAPPA *sind*

$$(46) \qquad (\mathrm{P}^i)^{\Pi^k} = \mathrm{P}^i, \qquad (\Pi^k)^{\mathrm{P}^i} = \Pi^{kg^i} \qquad ((g, \mu) = 1)$$

und im Falle $2 \mid \mu$ *noch*

$$(47) \qquad (\ ^i)^{\Pi^k} = \mathrm{P}^{i(-1)^k}, \quad (\Pi^k)^{\mathrm{P}^i} = \Pi^{k + (a-1)\bar{i}k + b i \bar{k}}$$

$$\left(2 \nmid a + b,\ \frac{\mu}{2} \mid a^2 - 1,\ \mu \mid a^2 - 1 + (a^2 - 1)b\right).$$

Bemerkung. Nach dem Satz von ZAPPA liefern (46), (47) alle Gruppen $\mathfrak{G} = G\,\Gamma$ in diesem Falle. Zur vollständigen Beantwortung dieser Frage ist natürlich nötig, daß man die nichtisomorphen unter ihnen bestimmt. Das tun wir im § 6, wo wir auch die näheren Eigenschaften dieser Gruppen untersuchen werden. Hier wollen wir aber auf den (in der Einleitung schon vorhergesagten) Umstand aufmerksam machen, daß insbesondere die Lösung (47) von (4), (5), (6) durch die beiden „Anfangswerte" $\mathrm{P}^{\Pi} = \mathrm{P}^{-1}$, $\Pi^{\mathrm{P}} = \Pi^{a+b}$ noch nicht bestimmt ist, erst die Hinzunahme des weiteren „Anfangswertes" $(\Pi^2)^{\mathrm{P}} = \Pi^{2a}$ schafft Eindeutigkeit.

§ 5. Der Fall zyklischer Gruppen G, Γ mit $O(G) = O(\Gamma) = \infty$

Wir wollen jetzt den Fall von zwei unendlichen zyklischen Gruppen $G = \{\mathrm{P}\}$, $\Gamma = \{\Pi\}$ betrachten. In diesem Fall können wir nur diejenigen Lösungen (2) von (4), (5), (6) bestimmen, für die es unter den zugehörigen Transitivitätsklassen ($\neq \mathrm{E}$ bzw. E) von G und Γ mindestens eine endliche gibt. Für die etwaigen übrigen Lösungen werden wir uns mit einigen Bemerkungen begnügen müssen, uns scheint, daß solche Lösungen überhaupt nicht vorhanden sind.

Betrachten wir eine Lösung A^{A}, A^{A} von (4), (5), (6) unter der gesagten Einschränkung. Wir unterscheiden die folgenden Fälle 1), 2), 3), wovon sich 2) in die weiteren Fälle 21), 22) spalten wird:

Fall 1): Beide Gruppen G, Γ enthalten Fixelemente außer E bzw. E. Nach Hilfssatz 13 (angewendet auf G, Γ und auf Γ, G) enthalten G, Γ nur endliche Transitivitätsklassen, woraus nach den Hilfssätzen 12, 10 folgt,

daß G und ebenso auch I' überhaupt nur Fixelemente enthält. Mit anderen Worten gilt jetzt $\mathrm{A}^{\mathsf{A}} = \mathrm{A}$, $\mathsf{A}^{\mathsf{A}} = \mathsf{A}$ unbeschränkt, das ist die identische Lösung von (4), (5), (6).

Fall 2): G enthält keine Fixelemente ($\neq \mathrm{E}$), I' enthält Fixelemente ($\neq \mathsf{E}$). Aus letzterem folgt nach Hilfssatz 13 wieder, daß G aus lauter endlichen Transitivitätsklassen besteht; diese müssen jetzt nach den Hilfssätzen 12, 10 selbstinvers sein mit zwei Elementen. Das bedeutet, daß unbeschränkt $\mathrm{A}^{\Pi} = \mathrm{A}^{-1}$ gilt. Dann ist Π^2 ein identischer Operator für G, und so folgt aus Hilfssatz 6 (angewendet für I', G statt G, I'), daß P als Operator einen Automorphismus der Gruppe $\{\Pi^2\}$ bewirkt. Hiernach gilt $(\Pi^{2i})^{\mathrm{P}} = \Pi^{2i\varepsilon}$ mit einem festen $\varepsilon = \pm 1$. Der Fall $\varepsilon = -1$ ist unmöglich, denn dann hätte I' selbstinverse Transitivitätsklassen mit zwei Elementen, was jetzt wegen Hilfssatz 10 unmöglich ist. Also gilt $\varepsilon = 1$, und dies bedeutet, daß Π^2 ein Fixelement von I' ist.

Fall 21): Π ist ein Fixelement von I'. Mit obigem zusammen gilt dann

$$(\mathrm{P}^i)^{\Pi^k} = \mathrm{P}^{i(-1)^k}, \quad (\Pi^k)^{\mathrm{P}^i} = \Pi^k. \tag{48}$$

Umgekehrt sieht man, daß dies eine Lösung von (4), (5), (6) ist.

Fall 22): Π ist kein Fixelement von I'. Da jetzt $\{\Pi^2\}$ die Gruppe der Fixelemente von I' ist, so muß Π^{P} außerhalb $\{\Pi^2\}$ liegen. Deshalb können wir

$$\Pi^{\mathrm{P}} = \Pi^{1+2g}$$

setzen mit einem ganzen g ($\neq 0$). Aus (6_2) folgt wegen $(\Pi^{2k})^{\mathrm{P}} = \Pi^{2k}$:

$$(\Pi^{2k+1})^{\mathrm{P}} = \Pi^{2k}\Pi^{\mathrm{P}} = \Pi^{2k+1+2g}.$$

Beide lassen sich (mit Hilfe des in (40) eingeführten Zeichens $\bar{x}$) vereinigen als

$$(\Pi^k)^{\mathrm{P}} = \Pi^{k+2g\bar{k}}.$$

Dies läßt sich wegen $k + 2g\bar{k} \equiv k \pmod 2$ leicht auf P^i (statt P) verallgemeinern, und so kommen wir zu

$$(\mathrm{P}^i)^{\Pi^k} = \mathrm{P}^{i(-1)^k}, \quad (\Pi^k)^{\mathrm{P}^i} = \Pi^{k+2gi\bar{k}} \qquad (g \neq 0). \tag{49}$$

Umgekehrt sieht man leicht, daß (49) stets eine Lösung von (4), (5), (6) ist.

Fall 3): Weder G noch I' enthält Fixelemente ($\neq \mathrm{E}$ bzw. E). Wegen der oben getroffenen Einschränkung dürfen wir aus Symmetriegründen annehmen, daß G endliche Transitivitätsklassen ($\neq \mathrm{E}$) enthält. Diese sind nach Hilfssatz 12 selbstinvers mit zwei Elementen, also gibt es in G ein Element A ($\neq \mathrm{E}$) mit

$$\mathrm{A}^{\Pi^k} = \mathrm{A}^{(-1)^k}.$$

Wir berechnen nach (20_2):

$$(\Pi^{2k+1})^{A} = \begin{cases} (\Pi^{2k})^{A^{\Pi}}\,\Pi^{A} = (\Pi^{2k})^{A^{-1}}\,\Pi^{A}, \\ (\Pi^{2k})^{A}\,\Pi^{A^{\Pi^{2k}}} = (\Pi^{2k})^{A}\,\Pi^{A}. \end{cases}$$

Hieraus folgt $(\Pi^{2k})^{A^{-1}} = (\Pi^{2k})^{A}$ also nach (5_2)

$$(\Pi^{2k})^{A^2} = \Pi^{2k}.$$

Dies hat zur Folge, daß Π^{2k} in eine endliche Transitivitätsklasse gehört. Insbesondere folgt dann aus der hiermit erwiesenen Existenz von endlichen Transitivitätsklassen ($\neq \mathsf{E}$) auch in Γ, daß das vorhergesagte auch für P statt Π gilt, und so gilt nach Hilfssatz 12

$$(50) \qquad (\mathrm{P}^{2i})^{\Pi^k} = \mathrm{P}^{2i(-1)^k}, \quad (\Pi^{2k})^{\mathrm{P}^i} = \Pi^{2k(-1)^i}.$$

Wir zeigen, daß sogar

$$(51) \qquad (\mathrm{P}^i)^{\Pi^k} = \mathrm{P}^{i(-1)^k}, \quad (\Pi^k)^{\mathrm{P}^i} = \Pi^{k(-1)^i}$$

gilt. Wegen (50) muß nämlich

$$\mathrm{P}^{\Pi} = \mathrm{P}^{1+2a}, \quad \Pi^{\mathrm{P}} = \Pi^{1+2b}$$

gelten mit irgendwelchen ganzen a, b. Wir berechnen nach (5_1), (6_1) und (50):

$$\mathrm{P}^{\Pi^2} = (\mathrm{P}^{1+2a})^{\Pi} = \mathrm{P}^{\Pi}\,(\mathrm{P}^{2a})^{\Pi^{\mathrm{P}}} = \mathrm{P}^{\Pi}\,(\mathrm{P}^{2a})^{\Pi^{1+2b}} = \mathrm{P}^{1+2a}\,\mathrm{P}^{-2a} = \mathrm{P}.$$

Hiernach gehört P in eine endliche Transitivitätsklasse, und so folgt aus Hilfssatz 12, daß $\mathrm{P} + \mathrm{P}^{-1}$ eine Transitivitätsklasse sein muß. Nach Hilfssatz 9 gilt also (51_1) zunächst für $k = 1$, dann aber auch allgemein. Aus Symmetriegründen ist auch (51_2) richtig.

Umgekehrt sieht man sofort, daß (51) eine Lösung von (4), (5), (6) ist.

Da (48) der Fall $g = 0$ von (49) ist, so sammeln wir die Resultate von diesem Paragraphen im folgenden:

SATZ 2. *Es seien G, Γ unendliche zyklische Gruppen mit den Erzeugenden P bzw. Π. Diejenigen Lösungen (2) der Bedingungsgleichungen (4), (5), (6) von* ZAPPA, *für die es ein Paar X ($\neq \mathsf{E}$), X ($\neq \mathsf{E}$) mit $\mathsf{X}^{\mathsf{X}} = \mathsf{X}$ oder $\mathsf{X}^{\mathsf{X}} = \mathsf{X}$ gibt,*[7] *sind (von der identischen Lösung $\mathsf{A}^{\mathsf{A}} = \mathsf{A}$, $\mathsf{A}^{\mathsf{A}} = \mathsf{A}$ abgesehen) im wesentlichen nur die folgenden:*[8]

$$(52) \qquad (\mathrm{P}^i)^{\Pi^k} = \mathrm{P}^{i(-1)^k}, \qquad (\Pi^k)^{\mathrm{P}^i} = \Pi^{k(-1)^i},$$

$$(53) \qquad (\mathrm{P}^i)^{\Pi^k} = \mathrm{P}^{i(-1)^k}, \qquad (\Pi^k)^{\mathrm{P}^i} = \Pi^{k+2gi\bar{k}}.$$

[7] Es muß bemerkt werden, daß bei festem X die Existenz einer Lösung X ($\neq \mathsf{E}$) von $\mathsf{X}^{\mathsf{X}} = \mathsf{X}$ mit der Endlichkeit der Transitivitätsklasse $T(\mathsf{X})$ gleichbedeutend ist, und so wurden im Satz 2 eben diejenigen Lösungen (2) außer Acht gelassen, für die sowohl G als auch Γ lauter unendliche Transitivitätsklassen ($\neq \mathrm{E}$ bzw. E) enthalten.

[8] Die Funktion $\bar{k}$ haben wir in (40) erklärt.

(Als nicht wesentlich neue Lösungen treten außerdem diejenigen hinzu, die aus (53) nach Vertauschung von P *mit* Π *entstehen.)*

Bemerkungen. Wir sehen, daß von den beiden Funktionen (53) trotz der Isomorphie $G \approx T$ die zweite verwickelter ist als die erste, auf diese Asymmetrie haben wir in der Einleitung schon hingespielt. Die näheren Eigenschaften der aus (52), (53) entspringenden Gruppen werden wir im § 6 untersuchen.

§ 6. Nähere Beschreibung der in den Sätzen 1, 2 gewonnenen Gruppen

Auf Grund des Satzes von ZAPPA liefern die vier Funktionenpaare (46), (47), (52), (53) je eine Gruppe, die wir am bequemsten mit $\mathfrak{G}_{46}$, $\mathfrak{G}_{47}$, $\mathfrak{G}_{52}$, $\mathfrak{G}_{53}$ bezeichnen. Und zwar sind diese Gruppen lauter ZAPPA-SZÉPschen Produkte $(GT =)\ \{\mathrm{P}\}\{\Pi\}$, wobei stets $O(\mathrm{P}) = \infty$, ferner in den ersten zwei Fällen $O(\Pi) = \mu$, in den letzten zwei Fällen $O(\Pi) = \infty$ ist. Wir wollen einiges über diese Gruppen kurz bemerken, führen aber die Rechnungen nur teils aus. Selbstverständlich kommen die Parameter g, a, b in $\mathfrak{G}_{46}$, $\mathfrak{G}_{47}$ nur mod μ in Betracht. Den Fall $\mu \mid g-1$ von $\mathfrak{G}_{46}$ schließen wir aus, da es sich dann um das direkte Produkt von G, T handelt. Ebenfalls schließen wir den Fall

$$\mu \mid 2b,\ a - 1 + b$$

von $\mathfrak{G}_{47}$ aus, da dann diese Gruppe sichtbar isomorph zum Fall $\mu \mid g - 1$ von $\mathfrak{G}_{46}$ ist.

Wir werden sehen, daß die Abhängigkeit von $\mathfrak{G}_{47}$ von den beiden Parametern a, b nur scheinbar ist, statt ihrer werden wir mit einem (invarianten) Parameter $d\left(d \,\middle|\, \frac{\mu}{2}\right)$ auskommen. Auch der Parameter g in $\mathfrak{G}_{53}$ wird sich herauswerfen lassen, und zwar werden wir sehen, daß die Fälle $g = 0, 1$ schon alle nichtisomorphen $\mathfrak{G}_{53}$ erschöpfen.

Wir schicken voraus, daß nach (7) für eine beliebige Gruppe $\mathfrak{G} = GT$ im Satz von ZAPPA die zwei beliebigen Elemente $\mathrm{A}\,\mathsf{A}$, $\mathrm{B}\,\mathsf{B}$ dann und nur dann vertauschbar sind, wenn

$$\mathrm{A}\,\mathrm{B}^{\mathrm{A}} = \mathrm{B}\,\mathrm{A}^{\mathrm{B}}\,, \qquad {}_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{P}}\mathrm{B} = \mathrm{B}^{\mathrm{A}}{}_{\mathrm{A}}$$

gelten. Ferner schreiben wir den Spezialfall von (7) hin:

$$(\mathrm{A}\,\mathsf{A})^2 = \mathrm{A}\,\mathrm{A}^{\mathrm{A}}\ {}_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{A}}{}_{\mathrm{A}}\,.$$

Die Kommutatorgruppe und das Zentrum von $\mathfrak{G}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{G}'$ bzw. $\mathfrak{G}^\circ$. Insbesondere für den uns interessierenden Fall $G = \{\mathrm{P}\}$, $T = \{\Pi\}$ setzen wir

$$(\mathrm{P}, \Pi) = \mathrm{P}^{-1}\,\Pi\,\mathrm{P}\,\Pi^{-1}\,.$$

Offenbar wird dann $\mathfrak{G}'$ durch die Konjugierten von (P, Π) erzeugt.

Nunmehr betrachten wir die Gruppen $\mathfrak{G}_{46}$, $\mathfrak{G}_{47}$, $\mathfrak{G}_{52}$, $\mathfrak{G}_{53}$ unter 1), 2), 3), 4):

1) Für $\mathfrak{G}_{46}$ ist I offenbar eine normale Untergruppe, diese umfaßt zugleich alle Elemente endlicher Ordnung. Man sieht leicht, daß zwei Parameterwerte g, g' dann und nur dann zu isomorphen Gruppen $\mathfrak{G}_{46}$ führen, wenn $g\,g' \equiv 1 \pmod{\mu}$ gilt. Es gelten

$$\mathfrak{G}'_{46} = \{\Pi^{g-1}\}\,,\quad \mathfrak{G}^{\circ}_{46} = \{\mathrm{P}^{Q\,(g \pmod{\mu})}\,,\ \Pi^{\mu\,(\mu,\,g-1)^{-1}}\}\,,$$

wobei $O(g \pmod{\mu})$ die Ordnung von g mod μ bezeichnet.

2) Für $\mathfrak{G}_{47}$ sieht man vor allem, daß (47) gegenüber der Ersetzung von a, b durch $a + \frac{\mu}{2}$, $b + \frac{\mu}{2}$ invariant bleibt. Deshalb darf stets $2 \nmid a$ (also $2 \mid b$) angenommen werden. Weder G noch I ist normal in $\mathfrak{G}_{47}$, denn es gelten nach (47) (und (7))

$$\Pi\,\mathrm{P}\,\Pi^{-1} = \mathrm{P}^{-1}\,\Pi^{a-1+b}\,,\quad \mathrm{P}^{-1}\,\Pi = \mathrm{P}^{-2}\,\Pi^{a+b}\,,$$

nie kann aber $\Pi^{a-1+b} = \mathsf{E}$ sein, da hieraus $\mu \mid a - 1 + b$ (ferner wegen (47)) $\mu \mid 2b$ folgte, und diesen Fall haben wir oben ausgeschlossen. Leicht zeigt man

$$\mathfrak{G}'_{47} = \{\mathrm{P}^{-2}\,\Pi^{a-1+b}\,,\ \Pi^{2\,(a-\,)}\}\,,\quad \mathfrak{G}^{\circ}_{47} = \left\{\Pi^{\mu/\left(\frac{\mu}{2},\,a-1\right)}\right\}\,,$$

Aus letzterem folgt $O(\mathfrak{G}^{\circ}_{47}) = \left(\frac{\mu}{2}, a - 1\right)$, und so ist

$$d = \left(\frac{\mu}{2}, a - 1\right) \tag{54}$$

eine Invariante von $\mathfrak{G}_{47}$. Dabei gilt (wegen $2 \nmid a$):

$$d \,\Big|\, \frac{\mu}{2}\,,\qquad \left(\frac{\mu}{2}, 2\right) \,\Big|\, d\,. \tag{55}$$

Wir bezeichnen mit d' den komplementären Teiler:

$$d\,d' = \frac{\mu}{2}\,. \tag{56}$$

Nunmehr zeigen wir, daß man alle nichtisomorphen $\mathfrak{G}_{47}$ schon bei der Einschränkung

$$b = d',\ 2d' \text{ oder } 4d' \tag{57}$$

erfaßt. Denn setzen wir

$$\mathrm{P}' = \mathrm{P}\,\Pi^{2x}\,,\quad \Pi' = \mathrm{P}^{2y}\,\Pi^{z-by} \qquad ((z, \mu) = 1)\,.$$

Man sieht leicht nach, daß P', Π' ein mit P, Π gleichberechtigtes Elementenpaar ist (darunter verstehen wir, daß $\mathfrak{G}_{47} = \{\mathrm{P}'\}\,\{\Pi'\}$ mit $O(\mathrm{P}') = \infty$, $O(\Pi) = \mu$

gilt). Ferner berechnet man

$$\Pi'^2 P' = P' \Pi'^{2a}, \quad \Pi' P' = P'^{-1} \Pi'^{a+b'}$$

$$(zb' \equiv (a+1)(2x + (a-1)y) + b \pmod{\mu}).$$

Andererseits gilt

$$\Pi^2 P = P \Pi^{2a}, \quad \Pi P = P^{-1} \Pi^{a+b}.$$

Vergleicht man diese miteinander, so sieht man, daß bei Ersetzung von P, Π durch P', Π' das Parameterpaar a, b in a, b' übergeht. Ferner läßt sich für passende x, y, z erreichen, daß

$$b' = (2(a+1), b, \mu).$$

Andererseits folgt aus (54)

$$db' = \left(a-1, \frac{\mu}{2}\right)(2(a+1), b, \mu) = (2(a^2-1), b(a-1), \mu(a-1), 2\mu, \frac{b}{2}\mu, \frac{\mu}{2}\mu) =$$

$$= \frac{\mu}{2}, \mu, \text{ oder } 2\mu.$$

Hieraus und aus (56) folgt, daß für b' nur die drei Werte d', $2d'$, $4d'$ möglich sind, womit die Behauptung über (57) bewiesen ist. Wegen $\frac{\mu}{2} \mid a^2 - 1$ und (54), (56) muß auch

$$d \mid a-1, \qquad d' \mid a+1 \tag{58}$$

gelten. Dies und (54) ergeben auch

$$(d, d') = 1 \text{ oder } 2. \tag{59}$$

Nach diesen haben wir folgendes gewonnen. Sämtliche $\mathfrak{G}_{47}$ (bis auf Isomorphie) gewinnt man auch schon so, daß man $\frac{\mu}{2}$ nach (56), (59) zerlegt, a und b nach (58) und (57) wählt, ferner auch auf $(\mu =) 2dd' \mid (a-1)(a+1+b)$ achtet. Es wäre leicht unter den so verbliebenen $\mathfrak{G}_{47}$ die nichtisomorphen herauszuscheiden, wovon wir aber Abstand nehmen. Wir wollten bloß zeigen, daß ein nur von einem Parameter $d\left(d \middle| \frac{\mu}{2}\right)$ abhängiges volles System von nichtisomorphen $\mathfrak{G}_{47}$ sich angeben läßt. Wir bemerken noch, daß $\{P^2, \Pi^2\}$ eine Abelsche normale Untergruppe von $\mathfrak{G}_{47}$ vom Index 4 ist. Die Untergruppe $\{P, \Pi^2\}$ ist vom Index 2 (also auch normal), ihre Elemente ($\neq E$) sind von unendlicher Ordnung, dagegen besteht die Nebengruppe $\{P, \Pi^2\}\Pi$ aus lauter Elementen endlicher Ordnung.

3) Für $\mathfrak{G}_{52}$ gilt

$$\mathfrak{G}'_{52} = \{P^2 \Pi^2, P^4\}, \quad \mathfrak{G}^2_{52} = E.$$

Keine der Untergruppen G, I ist normal, die Untergruppe $\{P^2, \Pi^2\}$ ist wieder Abelsch und normal vom Index 4, die Elemente der Nebengruppe $\{P^2, \Pi^2\} P \Pi$

sind von 2-ter Ordnung, die übrigen Elemente ($\neq \mathrm{E}$) sind von unendlicher Ordnung.

4) Für $\mathfrak{G}_{53}$ gilt

$$\mathfrak{G}'_{53} = \{\mathrm{P}^{-2}\,\Pi^{2g}\}\,, \quad \mathfrak{G}^{\circ}_{53} = \{\Pi^2\}\,.$$

Wieder ist $\{\mathrm{P}^2, \Pi^2\}$ eine Abelsche normale Untergruppe. Wir zeigen, daß die beiden Fälle $g = 0, 1$ schon alle nichtisomorphen $\mathfrak{G}_{53}$ sind. Setzt man nämlich $\mathrm{P}' = \mathrm{P}\,\Pi^{2x}$, so ist P' ein mit P gleichberechtigtes Element (d. h. es gilt $\mathfrak{G}_{53} = \{\mathrm{P}'\}\{\Pi\}$ mit $O(\mathrm{P}') = \infty$). Wir berechnen:

$$\Pi\,\mathrm{P}' = \mathrm{P}'^{-1}\,\Pi^{1+2(g+2x)}\,.$$

Andererseits gilt

$$\Pi\,\mathrm{P} = \mathrm{P}^{-1}\,\Pi^{1+2g}\,.$$

Diese zeigen schon, daß sich der Parameter g bei passender Wahl von x auf einen der Werte 0, 1 reduzieren läßt. Im Fall $g = 0$ ist unter den Untergruppen G, I' nur die zweite normal, im Fall $g = 1$ ist keine dieser Gruppen normal. Über den Fall $g = 1$ bemerken wir, daß dann $\mathfrak{G}_{53}$ auch Elemente zweiter Ordnung enthält, diese sind nämlich die und nur die $\mathrm{P}^i\,\Pi^{-i}$ ($i = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$), die übrigen Elemente sind (außer dem Einselement) von endlicher Ordnung. Wir wollen auf folgenden interessanten Umstand aufmerksam machen. Betrachten wir wieder alle Parameterwerte g ($= 0, \pm 1, \ldots$), fassen aber z. B. nur die ungeraden g ins Auge. (Nach obigem sind die entsprechenden G_{53} alle miteinander isomorph.) Die Transitivitätsklassen von I' sind die folgenden: Zunächst sind die Π^{2k} ($k = 0, \pm 1, \ldots$) lauter Fixelemente, hierzu kommen noch $|g|$ (unendliche) Transitivitätsklassen von der Form Π^{a+2gi} ($i = 0, \pm 1, \ldots$), wobei a eine der Zahlen $1, 3, \ldots, 2|g| - 1$ ist. Dieses Beispiel zeigt uns, daß in einem ZAPPA—SZÉPschen Produkt $\mathfrak{G} = G\,I'$ die Natur der Transitivitätsklassen der Faktoren G, I' sich stark ändern kann, wenn man auf eine äquivalente Repräsentation übergeht. (Auch im Fall 2) sehen die Transitivitätsklassen von I' ziemlich bunt aus, wie man das von (47_2) abliest.)

§ 7. Bemerkungen über den Ausnahmefall von § 5

Wieder betrachten wir den Fall von zwei unendlichen zyklischen Gruppen $G = \{\mathrm{P}\}$, $I' = \{\Pi\}$. Im Satz 2 haben wir bei der Bestimmung der Lösungen $\mathfrak{A}^{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{a}^{\mathfrak{A}}$ der Bedingungsgleichungen (4), (5), (6) von ZAPPA den Fall mit

$$\mathfrak{A}^{\mathfrak{A}} \neq \mathfrak{A}\,, \quad \mathfrak{a}^{\mathfrak{A}} \neq \mathfrak{A} \qquad (\mathfrak{A} \neq \mathfrak{E}\,,\ \mathfrak{a} \neq \mathfrak{E}) \tag{60}$$

ausgenommen. Wir wollen einiges über diesen Ausnahmefall bemerken, um hiermit der Lösung dieses restlichen Problems näher zu kommen.

Wir wiederholen, daß nach[7] die fraglichen Lösungen sich auch so charakterisieren lassen, daß alle Transitivitätsklassen ($\neq \mathrm{E}, \mathfrak{E}$) von G und I' unendlich sind. Gibt es unter diesen Transitivitätsklassen mindestens eine selbstin-

verse, so sprechen wir kurz über Fall a, sonst sprechen wir über Fall b. (Wir konnten die Existenz keiner dieser Fälle bekräftigen oder widerlegen.)

Fall a bedeutet, daß es ein Paar A ($\neq \mathsf{E}$), A ($\neq \mathsf{E}$) gibt, wofür eine der Gleichungen

$$\mathsf{A}^{\mathsf{A}} = \mathsf{A}^{-1}, \quad \mathsf{A}^{\mathsf{A}} = \mathsf{A}^{-1} \qquad (\mathsf{A} \neq \mathsf{E}, \ \mathsf{A} \neq \mathsf{E}) \tag{61}$$

gilt. Nun besagt aber Hilfssatz 14 für diesen Fall, daß beide Gleichungen (61) einander gegenseitig bedingen. Hieraus folgt auch, daß im vorliegenden Fall a beide Gruppen G, Γ mindestens eine selbstinverse Transitivitätsklasse ($\neq \mathsf{E}$, E) enthalten. Ferner sieht man, daß (61) auch gleichbedeutend mit

$$(\mathsf{A}\,\mathsf{A})^2 = 1 \tag{62}$$

ist (mit 1 bezeichnen wir hier das Einselement von $\mathfrak{G} = G\,\Gamma$). Da (62) unmöglich ist, wenn aus den Gleichungen $\mathsf{A} = \mathsf{E}$, $\mathsf{A} = \mathsf{E}$ nur die eine gilt, so ist Fall a gleichbedeutend damit, daß es in $\mathfrak{G} = G\,\Gamma$ Elemente zweiter Ordnung gibt. Ihre Zahl ist dann unendlich, denn zu jedem Element A bzw. A einer unendlichen Transitivitätsklasse gibt es ein A bzw. A mit (62), d. h. mit $O(\mathsf{A}\,\mathsf{A}) = 2$. Genauer gilt auch, daß zu jedem A oder A höchstens nur ein A bzw. A gibt, so daß $O(\mathsf{A}\,\mathsf{A}) = 2$ gilt, denn ist z. B. A vorgegeben, so existiert höchstens ein A mit (61_1). Wenn also z. B. A die Elemente aller selbstinversen Transitivitätsklassen ($\neq \mathsf{E}$) von G durchläuft, so durchläuft das nach (62) bestimmte A ebenfalls alle selbstinversen Transitivitätsklassen ($\neq \mathsf{E}$) von Γ, gleichzeitig durchläuft $\mathsf{A}\,\mathsf{A}$ alle verschiedenen Elemente zweiter Ordnung von $\mathfrak{G} = G\,\Gamma$. Es ist leicht aus einem Element zweiter Ordnung $\mathsf{A}\,\mathsf{A}$ weitere solche abzuleiten, so daß man seine Konjugierten bildet. So ist z. B. auch

$$\mathsf{B}^{-1}\,\mathsf{A}\,\mathsf{A}\,\mathsf{B} = \mathsf{A}\,\mathsf{B}^{\mathsf{A}}\,\mathsf{B}^{-1}\,\mathsf{A}^{\mathsf{B}}$$

von zweiter Ordnung. Folglich sind alle $\mathsf{A}\,\mathsf{B}^{\mathsf{A}}\,\mathsf{B}^{-1}$ ($\mathsf{B} \in G$) verschieden und sie gehören in selbstinverse Transitivitätsklassen. Das ist im wesentlichen alles, was wir über Fall a feststellen können.

Fall b scheint noch schwerer zugänglich zu sein. Wir müssen uns jetzt mit der ärmlichen Feststellung begnügen, daß dann wegen Haupthilfssatz 2 sowohl G als auch Γ mindestens zwei Transitivitätsklassen ($\neq \mathsf{E}$, E) enthält.

Man kann das Problem der Bestimmung aller Lösungen (2) von (4), (5), (6) (in beiden Fällen a, b) folgenderweise umformulieren. Man definiere zwei Funktionen f, g durch

$$(\mathsf{P}^x)^{\Pi^y} = \mathsf{P}^{f(x,y)}, \quad (\Pi^x)^{\mathsf{P}^y} = \Pi^{g(x,y)}.$$

Dann lauten (4), (5), (6) so

$$f(x, 0) = x, \ f(0, y) = 0, \qquad g(x, 0) = x, \ g(0, y) = 0,$$

$$f(x, y + z) = f(f(x, y), z), \qquad g(x, y + z) = g(g(x, y), z),$$

$f(x+y,z) = f(x,z) + f(y, g(z,x)), \quad g(x+y,z) = g(x,z) + g(y, f(z,x)).$

Diese Funktionalgleichungen scheinen noch schwerer handlich zu sein als die ursprüglichen (4), (5), (6).

LITERATURVERZEICHNIS

[1] G. Hajós, Über einfache und mehrfache Bedeckung des n-dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter, *Math. Zeitschrift*, **47** (1942), S. 427—467.

[2] L. Rédei, Anwendungen des schiefen Produktes in der Gruppentheorie, *Journal für reine und angewandte Math.*, **188.** (Unter Druck.)

[3] L. Rédei, Kurzer Beweis des gruppentheoretischen Satzes von Hajós, *Commentarii Math. Helvetici*, **23** (1949), S. 272—282.

[4] T. Szele, Neuer vereinfachter Beweis des gruppentheoretischen Satzes von Hajós, *Publicationes Math.* (Debrecen), **1** (1949), S. 56—62.

[5] J. Szép, Über die als Produkt zweier Untergruppen darstellbaren endlichen Gruppen, *Commentarii Math. Helvetici*, **22** (1948), S. 31—33.

[6] J. Szép, On the structure of groups which can be represented as the product of two subgroups, *Acta Sci. Math.*, **12** A (1950), S. 57—61.

[7] J. Szép and L. Rédei, On factorisable groups, *Acta Sci. Math.*, **13** (1950), S. 235—238.

[8] J. Szép, On factorisable simple groups, *Acta Sci. Math.* (Unter Druck.)

[9] J. Szép, On factorisable, not simple groups, *Acta Sci. Math.*, **13** (1950), S. 239—241.

[10] J. Szép, On simple groups, *Publicationes Math.* (Debrecen), **1** (1949), S. 98.

[11] G. Zappa, Costruzione dei gruppi prodotto di due dati sottogruppi permutabili tra loro, *Atti Secondo Congresso Unione Mat. Italiana Bologna* 1940, S. 115—125.

(Eingegangen am 4. Mai 1950.)

К ТЕОРИИ ФАКТОРИЗУЕМЫХ ГРУПП, I

Л. РЭДЭИ (Сегед)

(Резюме)

Пусть G, I, $\mathfrak{G}$ обозначают три группы. Если

(1) $$\mathfrak{G} = GI$$

подразумевая, что AA $(\mathsf{A} \varepsilon G, \ \mathsf{A} \varepsilon I)$ охватывает все различные элементы $\mathfrak{G}$, тогда частные группы G, I называем комплементарными факторами группы $\mathfrak{G}$, а саму группу $\mathfrak{G}$ факторизованной группой. Факторизуемые группы были исследованы Заппа [11][1] Сеп [5]—[10] и автором [2]. В основе вопроса лежит теорема Заппа:

Если для групп G, I, $\mathfrak{G}$ имеет место (1), тогда имеется два однозначно определенные функции

(2) $$\mathsf{A}^{\mathsf{A}} \ \varepsilon G, \quad \mathsf{A}^{\mathsf{A}} (\varepsilon I) \qquad (\mathsf{A} \varepsilon G, \ \mathsf{A} \varepsilon I)$$

со свойством

(3) $$\mathsf{AA} = \mathsf{A}^{\mathsf{A}} \mathsf{A}^{\mathsf{A}}$$

и с свойствами

(4) $$\mathsf{A}^{\mathsf{E}} = \mathsf{A}, \ \mathsf{E}^{\mathsf{A}} = \mathsf{E}, \ \mathsf{A}^{\mathsf{E}} = \mathsf{A}, \ \mathsf{E}^{\mathsf{A}} = \mathsf{E}$$

(5) $$\mathsf{A}^{\mathsf{BC}} = (\mathsf{A}^{\mathsf{C}})^{\mathsf{B}}, \quad \mathsf{A}^{\mathsf{BC}} = (\mathsf{A}^{\mathsf{B}})^{\mathsf{C}}.$$

(6) $$(\mathsf{AB})^{\mathsf{C}} = \mathsf{A}^{\mathsf{C}} \mathsf{B}^{\mathsf{C}^{\mathsf{A}}}, \quad (\mathsf{AB})^{\mathsf{C}} = \mathsf{A}^{\mathsf{C}^{\mathsf{B}}} \mathsf{B}^{\mathsf{C}}.$$

И наоборот, если даны, группы G, Γ о которых предположим, что имеют общий единичный элемент но других общих элементов не имеют, тогда любые решения (2), (4), (5), (6) с учетом (3) определяет одну группу $\mathfrak{G}$ со свойством (1), произведенную элементами G и Γ.

Согласно этому составление групп $\mathfrak{G}$ по(1) для данных групп G, Γ сведено к решению системы функциональных уравнений и поэтому эта задача является основной проблемой теории Заппа—Сеп. Еще до сего времени ни в одном случае не было дано конкретных решений. Автор ставит целью решение этой проблемы в случае с циклическими группами G, Γ, с предположением, что группа G бесконечна (случай двух конечных групп G, Γ будет разбираться в сообщении II.) — В случае конечной группы Γ, проблема получила полное решение. Если и Γ бесконечно, тогда автор мог решить только часть проблемы, неразрешенным отстался вопрос тех решений, для которых соотношения

$$\mathsf{A}^{\mathsf{A}} \neq \mathsf{A}, \mathsf{A}^{\mathsf{A}} \neq \mathsf{A} \; (\mathsf{A} \varepsilon G, \mathsf{A} \neq \mathsf{E}, \mathsf{A} \varepsilon \Gamma, \mathsf{A} \neq \mathsf{E}).$$

всегда имеют место. По всей вероятности, такого решения нет. Один простой, но интересный пример: если G и Γ бесконечные циклические группы, P и Π производящие элементы этих групп, то функции

$$(P^i)^{\Pi^k} = P^{i^{(-1)^k}}, \quad (\Pi^k)^{P^i} = \Pi^{k+\varepsilon g i \bar{k}} \qquad (i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

дают одно решение где g является целым числом, далее $\bar{k} = 0$ или 1, $\bar{k} \equiv k \pmod 2$. Из групп $\mathfrak{G}$, относящимся к здесь приведенным решениям, все не изоморфные типы выявляются из двух случаев $g = 0, 1$.

[1] Скобки „[ ]“ — указывают на список литературы, приложенный к немецкому тексту.

К ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Член-корреспондент АЛЬФРЕД РЕНЬИ (Будапешт)

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\boldsymbol{M}$ — некоторое множество элементов $a, b, \ldots$ (в дальнейшем $\boldsymbol{M}$ будет называн основным пространством), $\boldsymbol{P}$ — борелевское поле подмножеств $A, B, \ldots$ пространства $\boldsymbol{M}$ и $\mu(A)$ – непрерывная мера *Lebesgue*-а. определенная для $A \varepsilon \boldsymbol{P}$; предположим $\boldsymbol{M} \varepsilon \boldsymbol{P}$ и $\mu(\boldsymbol{M}) = 1$. Измеримую относительно μ вещественную функцию $\xi = \xi(a)$ $(a \varepsilon \boldsymbol{M})$ называем случайной величиной, через $E(\xi < x)$ обозначим множество тех $a \varepsilon \boldsymbol{M}$ для которых $\xi(a) < x$ и положим $P[\xi < x] = \mu(E(\xi < x))$; т. е. $P[\xi < x]$ означает вероятность события $\xi < x$.

В настоящей статьи изучаются некоторые специальные последовательности случайных величин $\xi_n = \xi_n(a)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ каждая из которых принимает лишь конечное число различных значений[1] и обладающие свойством, что $\xi_n(a) = \xi_n(b)$ для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$ не возможно. если $a \neq b$ (кроме быть может для точек a, b некоторого множества меры 0); такие последовательности случайных величим будем называть максимальными.

Пусть $\{\xi_n\}$ — максимальная последовательность независимых случайных величин, $\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$, и положим $M(\zeta_n) = A_n$, $M((\zeta_n - A_n)^2) = B_n^2$, где $M(\xi)$ означает математическое ожидание величины ξ, т. е.

$$M(\xi) = \int_M \xi d\mu$$

и предположим, что закон распределения величины

$$\eta_n = \frac{\zeta_n - A_n}{B_n}$$

стремится для $n \to \infty$ к нормалному закону

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \tag{1}$$

[1] От этого ограничения можно было бы освободиться.

В настоящей работе доказано, что если мера μ заменяется какой-либо другой мерой μ', которая абсолютно непрерывна относительно μ, то предельный закон распределения последовательности η_n остается неизменным (несмотря на то, что относительно меры μ' величины ξ_n вообще не являются независимыми и их законы распределения совсем изменяются). С другими словами, если $A_n(x) = E[\eta_n < x]$ из

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n(x)) = \Phi(x) \qquad (-\infty < x < +\infty) \tag{2}$$

следует

$$\lim_{n\to\infty} \mu'(A_n(x)) = \Phi(x) \qquad (-\infty < x < +\infty) \tag{3}$$

если только μ' абсолютно непрерывная относительно μ.[2] Указанное свойство максимальных последовательностей случайных величин является следствием того, что последовательности множеств $A_n(x)$ имеют „перемещающиеся свойства", значит для всех $A \varepsilon P$ имеет место

$$\lim_{n\to\infty} \{\mu(A \,.\, A_n(x)) - \mu(A)\,\mu(A_n(x))\} = 0. \tag{4}$$

Это свойство можно выразить также следующим образом: случайные величины η_n в пределе независимы от всякой случайной величины ξ; в самом деле, пусть $A = E(\xi < y)$, то из (4) получим

$$\lim_{n\to\infty} \{P[\eta_n < x; \xi < y] - P[\eta_n < x] \,.\, P[\xi < y]\} = 0. \tag{5}$$

Наиболее простой пример максимальной последовательности получим, если за $\boldsymbol{M}$ примем отрезок (0,1), за μ — обычную меру *Lebesgue*-а и за ξ_n — функции *Rademacher*-а, т. е. $\xi_n = R_n(t) = sg(\sin 2^n \pi t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$. В самом деле, значение t однозначно определяется значениями $R_n(t), n = 1, 2, 3, \ldots$, так как

$$t = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n(t)}{2^{n+1}} \,. \tag{6}$$

В этом случае наш результат может быть сформулирован следующим образом: Пусть $A_n(x)$ означает множество тех вещественных чисел t $(0 \leqq t \leqq 1)$ в разложении которых по двойной системе разница между числом нулей и числом единицей среди первых n цифр не превосходит $\frac{x\sqrt{n}}{2}$, и пусть μ некоторая абсолютно непрерывная мера

$$\mu(A) = \int_A \lambda(t)\, dt \tag{7}$$

[2] То же самое имеет место, если предельный закон распределения величин η_n отличается от нормального закона, но мы ограничимся рассмотрением этого наиболее важного случая.

где $\lambda(t)$ измеримая неотрицательная функция и $\int_0^1 \lambda(t)\,dt = 1$, тогда имеем

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n(x)) = \Phi(x). \tag{8}$$

Рассмотрим частный случай $\lambda(t) = \frac{1}{r} t^{\frac{1}{r}-1}$ $(r>0)$: тогда (8) равносильно следующему утверждению: путь $A_n^{(r)}(x)$ означает множество тех вещественных чисел $t\,(0 \leq t \leq 1)$ для которых в разложении числа t^r по двойчной системе разница между числом нулей и числом единицей среди первых n цифр не превосходит $\frac{x\sqrt{n}}{2}$, тогда имеем

$$\lim_{n\to\infty} |A_n^{(r)}(x)| = \Phi(x) \tag{9}$$

где $|A_n^{(r)}(x)|$ означает обычную меру *Lebesgue*-а множества $A_n^{(r)}(x)$.

Заметим лишь что условие максимальности не является очень ограничительным, так как всякая последовательность независимых случайных величин может быть превращена в максимальную отождествляя все точки в которых значения ξ_n совпадают для всех n, т. е. переходя к рассмотрению фактор — пространства пространства M по некоторому разбиению. Что касается теории измеримых разбиений пространства *Lebesgue*-а и вообще теории меры *Lebesgue*-а, мы будем пользоваться результатами В. А. Рохлина [1].

Обнаруженная устойчивость предельного распределения при изменении вероятностной меры свидетельствует о том, что предельные законы теории вероятностей не теряют силу, если обычные предположения (например предположение независимости) в некоторой степени нарушаются, как это хорошо известно из исследованиях С. Н. Бернштейна и [2] др. о слабо зависимых случайных величин. В самом деле, результаты настоящей работы могут быть истолкованы, как дающие обобщение предельных законов теорий вероятностей на некоторый класс слабо зависимых случайных величин.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть $\boldsymbol{M}$ — основное пространство, $\boldsymbol{P}$ борелевское поле подмножеств пространства $\boldsymbol{M}$, $\mu(A)$ — вполне аддитивная неотрицательная функция множеств, определенная на $\boldsymbol{P}$. Предположим что $\boldsymbol{M} \varepsilon \boldsymbol{P}$ и $\mu(\boldsymbol{M}) = 1$. далее что если $\mu(A) = 0$, и $B \varepsilon A$, то $B \varepsilon \boldsymbol{P}$ (и следовательно $\mu(B) = 0$). В этом случае $\boldsymbol{M}$ называется пространством с мерой. Элементы пространства $\boldsymbol{M}$ будем называть точками и обозначить малыми буквами, элеметы $\boldsymbol{P}$ называем измеримыми множествами и обозначим большими буквами. Предположим, что пространство $\boldsymbol{M}$ сепарабельно, т. е. что существует счетная система $\Delta = \{D_n\}$ измеримых множеств, которая является базисом пространства $\boldsymbol{M}$, значит обладает следующими двумя свойствами:

Б. 1. Для любой пары точек a, b, $a \neq b$, пространства $\boldsymbol{M}$ (кроме быть может точек множества меры 0) существует множество $D_n \varepsilon \mathcal{A}$ которое содержит только одну из точек, a, b.

Б. 2. Пусть $\boldsymbol{P}(\mathcal{A})$ найменьшее борелевское поле подмножеств пространства $\boldsymbol{M}$ которое содержит все множества D_n системы $\mathcal{A}$; тогда для всякого измеримого A существует содержащее A множество $B \varepsilon \boldsymbol{P}(\mathcal{A})$ которое мод. 0 тождественно с A т. е. $\mu(B-A)=0$.

Предположим дальше что $\boldsymbol{M}$ является полным относительно своего базиса, т. е для всякой последовательности патуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ существует точка a так что $a \ni D_{n_k}$ и $a \varepsilon D_n$ если $n \neq n_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Из Б. 1. следует что точка a однозначно определена, т е. если положим $D_n^1 = D_n$ и $D_n^{-1} = \boldsymbol{M} - D_n$ то всякое множество $\prod_{n=1}^{\infty} D_n^{i_n}$ где $i_n = \pm 1$, одноточечно. Сепарабельное и полное относительно своего базиса пространство с мерой называется пространством *Lebesgue*-а. В далнейшем предположим что простарнство $\boldsymbol{M}$ с мерой μ является пространством *Lebesgue*-а, и кроме того, что мера μ непрерывна. т. е. что в $\boldsymbol{M}$ нет точек положительной меры. Известно, что пространство *Lebesgue*-а с непрерывной мерой по модулю 0 изоморфно единичному отрезку с обычной мерой *Lebesgue*-а. (См. [1.])

§ 2. МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕЗАВИСИМЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть $\boldsymbol{M}$ пространство *Lebesgue*-а с непрерывной мерой μ; $\boldsymbol{M}$ может быть рассматриван как поле вероятностей в смысле А. Н. Колмогорова. Вещественную функцию $\xi = \xi(a)$, $(a \varepsilon \boldsymbol{M})$ определенную на $\boldsymbol{M}$ измеримую относительно μ будем называть случайной величиной. Случайную величину, которая принимает лишь конечное число различных значений, называем элементарной случайной величиной. Пусть ξ_n — последовательность элементарных случайных величин, положим $E_{nk} = E(\xi_n = x_{nk})$ $(k = 1, 2, \ldots, K_n$ и $n = 1, 2, \ldots)$; предположим далее что величины ξ_n независимы т. е. что

$$\mu\left(\prod_{i=1}^{j} E_{i k_i}\right) = \prod_{i=1}^{j} \mu(E_{n_i k_i}) \qquad (n_1 < n_2 < \ldots < n_j). \tag{2.1}$$

Введем следующее определение:

М. 1. Последовательность независимых элементарных случайных величин ξ_n называется максимальной если из $\xi_n(a) = \xi_n(b)$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$ следует $a = b$ (кроме быть может для точек a, b некоторого множества меры 0).

Так как известно (см. [1]) что в случае пространства *Lebesgue*-а Б. 2. является следствием Б. 1., получим

M. 2. Последовательность независимых элементарных случайных величин (ξ_n) максимальна тогда и только тогда, если система $\mathcal{A} = \{E_{nk}\}$ где $E_{nk} = E(\xi_n = x_{nk})$ является базисом пространства $\boldsymbol{M}$.

Всякая последовательность независимых элементарных случайных величин может быть превращена в максимальную с заменой поля вероятностей. В самом деле пусть $D_{nk} = E_{n1} + E_{n2} + \ldots + E_{nk}$ $(k \leq K_n;\ n = 1, 2, \ldots)$, $D_{nk}^1 = D_{nk}$ и $D_{nk}^{-1} = \boldsymbol{M} - D_{nk}$, и обозначим через C всякое непустое множество вида $\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{K_n} D_{nk}^{i_{nk}}$ где $i_{nk} = \pm 1$; множества C не пересекаются и покрывают $\boldsymbol{M}$; таким образом мы получим измеримое разбиение пространства $\boldsymbol{M}$, которое обозначим через $\boldsymbol{R}$. Множества C могут быть рассматриваны как точки нового пространства $\boldsymbol{N}$. Подмножество X множества $\boldsymbol{N}$ будем называть измеримым, если совокупность Y тех точек a, которые принадлежат к некоторому $C \varepsilon X$ измерима, и положим $\nu(X) = \mu(Y)$; пространство $\boldsymbol{N}$ с мерой ν называется фактор-пространством множества $\boldsymbol{M}$ по разбиению $\boldsymbol{R}$, и обозначается через $\boldsymbol{M}/\boldsymbol{R}$. Ввиду того что фактор-пространство пространства *Lebesgue*-а по некоторому его измеримому разбиению является также пространством *Lebesgue*-а (см. [1]) $\boldsymbol{N}$ с мерой ν будет пространством *Lebesgue*-а; легко видеть что мера ν непрерывна тогда и только тогда если положив

$$q_n = 1 - \operatorname*{Max}_{k \leq K_n} P[E_{nk}],\ \text{ряд}\ \sum_{n=1}^{\infty} q_n\ \text{расходится.}$$

§ 3. ИНВАРИАНТНОСТЬ ПРЕДЕЛЬНОГО ЗАКОНА ПРИ ЗАМЕНЕ МЕРЫ

Прежде всего докажем следующую лемму:

Лемма: Пусть $\eta_n^{(1)}$ и $\eta_n^{(2)}$ независимые случайные величины $\eta_n = \eta_n^{(1)} + \eta_n^{(2)}$ для $n = 1, 2, \ldots$; пусть $F_n(x) = P(\eta_n < x)$, дальше $F_n^{(j)}(x) = P(\eta_n^{(j)} < x)$ для $j = 1, 2$. Если $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$, $(-\infty < x < +\infty)$ где $F(x)$ непрерывная функция распределения и $\lim_{n\to\infty} F_n^{(2)}(x) = 0$ если $x < 0$ и $\lim_{n\to\infty} F_n^{(2)}(x) = 1$ если $x > 0$, то имеем также $\lim_{n\to\infty} F_n^{(1)}(x) = F(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$.

Доказательство леммы:

Пусть $f_n(t) = M(e^{i\eta_n t})$ характеристическая функция величины η_n, дальше $f_n^{(j)}(t) = M(e^{i\eta_n^{(j)} t})$ характеристическая функция величины $\eta_n^{(j)}$ $(j = 1, 2)$ и наконец

$$(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\, dF(x).$$

Тогда имеем

(3.1) $$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$$

и

(3.2) $$\lim_{n\to\infty} f_n^{(2)}(t) = 1.$$

Так как $f_n(t) = f_n^{(1)}(t) f_n^{(2)}(t)$, из (3.1) и (3.2) следует что

(3.3) $$\lim_{n\to\infty} f_n^{(1)}(t) = f(t).$$

В силу известной теоремы о характеристических функциях (3.3) равносильна утверждению леммы.

Введем теперь некоторые обозначения: пусть $P_A(B)$ означает условную вероятность события B при условии A, т. е. положим $P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}$. Если $F(x) = P[\xi < x]$ — функция распределения случайной величины ξ, то обозначим через $F(x; A)$ условную функцию распределения величины при условии A, т. е. положим

(3.4) $$F(x; A) = P_A(\xi < x).$$

Докажем теперь следующую теорему:

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{\xi_n\}$ — максимальная последовательность независимых элементарных случайных величин, $\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$, $M(\zeta_n) = A_n$ и $M[(\zeta_n - A_n)^2] = B_n^2$; предположим что $B_n \to \infty$. Пусть $\eta_n = \frac{\zeta_n - A_n}{B_n}$, $F_n(x) = P(\eta_n < x)$ и A некоторое событие, $\mu(A) > 0$. Если

(3.5) $$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

то имеем также

(3.6) $$\lim_{n\to\infty} F_n(x; A) = \Phi(x).$$

Доказательство Теоремы 1. Пусть $E_{nk} = E(\xi_n = x_{nk})$ $(k \leq K_n;$ $n = 1, 2, \ldots)$ и предположим вначале, что $A = \prod_{r=1}^{N} E_{r k_r}$. Тогда ζ_N постоянная на A, $\zeta_N(a) = Z_N$ для $a \in A$ и в силу независимости величин ξ_n получим для $n < N$.

(3.7) $$F_n(x; A) = P(\eta_{n\,N} < x)$$

где

(3.8) $$\eta_{n\,N} = \eta_n - \frac{(\eta_N \cdot B_N - Z_N)}{B_n}.$$

Пусть

$$\vartheta_n = \frac{\eta_N B_N - Z_N}{B_n}. \tag{3.9}$$

тогда имеем

$$\lim_{n\to\infty} P(\vartheta_n < x) = \begin{cases} 0 \text{ если } x < 0 \\ 1 \text{ если } x > 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

так как $B_n \to \infty$. Применяя Лемму с $\eta_n^{(1)} = \eta_{nN}$ и $\eta_n^{(2)} = \vartheta_n$, получим

$$\lim_{n\to\infty} P(\eta_{nN} < x) = \Phi(x). \tag{3.11}$$

Таким образом Теорема 1. доказана в частном случае, если A имеет вид $\prod_{r=1}^{N} E_{rk_r}$; но так как имеем

$$F_n(x; E_1 + E_2 + \ldots + E_s) = \sum_{j=1}^{S} \frac{\mu(E_j)}{\mu(E)} F_n(x_j; E_j), \tag{3.12}$$

если $E_i E_j = 0$ для $i \neq j$, сразу следует, что Теорема 1. верна также если A есть сумма конечного числа множеств вида $\prod_{r=1}^{N} E_{rk_r}$; из этого следует, что (3.6) имеет место, если A принадлежит к найменьшему борелевскому полю, содержащему все множества вида $\prod_{r=1}^{N} E_{rk_r}$; так как последовательност $\{\xi_n\}$ максимальна, это значит (см. М. 2 и Б 2) что (3.6) имеет место для всякого измеримого множества A, и таким образом Теорема 1. доказана.

Теперь перейдем к доказательству теоремы о замене меры:

ТЕОРЕМА 2. Пусть μ' относительно μ абсолютно непрерывная мера,

$$\mu'(A) = \int_A \lambda(a)\, d\mu \tag{3.13}$$

где $\lambda(a) \geqq 0$ измеримая по μ функция, определенная на $\boldsymbol{M}$, и

$$\int_M \lambda(a)\, d\mu = 1. \tag{3.14}$$

Тогда при условиях Теоремы 1., если положим $A_n(x) = E(\eta_n < x)$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \mu'(A_n(x)) = \Phi(x). \tag{3.15}$$

Доказательство Теоремы 2.:

Предположим вначале, что $\lambda(a)$ „кусочно постоянная" функция, другими словами, что $\lambda(a)$ принимает лишь конечное число различных значений $\lambda(a) = \lambda_i$ если $a \in A_i$, $i = 1, 2, \ldots r$. Пусть $\mu(A_i) = \alpha_i$ тогда из (3.14) находим

$$\sum_{=}^{r} \lambda_i \alpha_i = 1. \tag{3.16}$$

Очевидно имеем

$$\mu'(A_n(x)) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \alpha_i F_n(x_j; A_i) \tag{3.17}$$

и поэтому применяя Теорему 1 и имея (3.16) в виду следует

$$\lim_{n\to\infty} \mu'(A_n(x)) = \Phi(x); \tag{3.18}$$

это значит, что (3.15) имеет место, если $\lambda(a)$ кусочно постоянна; из этого следует, что (3.15) верно, если $\lambda(a)$ ограниченная функция (так как всякая органиченная измеримая функция может быть как угодно точно приближена с помощью кусочно постоянных функций); оттого следует что (3.15) имеет место также, если $\lambda(a)$ произвольная измеримая функя (и (3.14) удовлетворена) таким образом Теорема 2. доказана.

§ 4. НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ И ЗАМЕЧАНИЯ

ТЕОРЕМА 3. Пусть $b = f(a)$ измеримое отображение пространства $\boldsymbol{M}$ на самое себя, и рассмотрим меру μ', которая определена следующим образом:

$$\mu'(A) = \mu(f^{-1}[A]) \tag{4.1}$$

где $f^{-1}[A] = E(f(a) \varepsilon A)$; предположим что μ' абсолютно непрерывна относительно μ. При условиях Теоремы 1., если

$$\vartheta_n(a) = \eta_n(f(a)) \quad (a \varepsilon M) \tag{4.2}$$

и

$$G_n(x) = P(\vartheta_n < x) \tag{4.3}$$

следует

$$\lim_{n\to\infty} G_n(x) = \Phi(x). \tag{4.4}$$

Теорема 3. следует непосредственно из Теоремы 2. так как

$$G_n(x) = \mu'(E(\eta_n < x)). \tag{4.5}$$

Замечание о функциях *Rademacher*-а в введении (см. (9)) является частным случаем Теоремы 3.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $g(t, u)$ функция двух вещественных переменных которая имеет для всякого фиксированного значения u однозначную обратную функцию $g_u^{-1}(x)$ $(g(g_u^{-1}(x), u) = x)$. Пусть ζ элементарная случайная величина. $F(x) = P(\zeta < x)$; рассмотрым случайные величины (4.6) $\vartheta_n = g(\eta_n, \zeta)$ и положим (4.7) $G_n(x) = P(\vartheta_n < x)$.

При условиях Теоремы 1 имеет место

$$\lim_{n\to\infty} G_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(g_n^{-1}(x))\, dF(u). \tag{4.8}$$

Теорема 4. является непосредственным следствием Теоремы 1.

Дальнейшие обобщения результатов настоящей работы и некоторые применения будут даны в другом статье. Заметим лишь что результаты настоящей работы связаны с некоторыми прежними исследованиями автора [3].

(Поступило 11/IV 1950 г.)

ЛИТЕРАТУРА

[1] *B. A. Рохлин*, Об основных понятиях теории меры. *Математический Сборник* 25/67/:1 (1949), стр 107—150.

[2] *S. Bernstein*, Sur l'extension du théorème limite du calcul des probabilités aux sommes des quantités dépendantes, *Math. Ann.*, **97** (1926), pp. 1—59.

[3] *A. Rényi*, Sur un théorème général de probabilités, *Annales de l'Institut Fourier*, **1** (1949), pp. 43—52.

CONTRIBUTIONS TO THE THEORY OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES

By ALFRÉD RÉNYI

(Summary)

Let μ denote a Lebesgue measure defined on the abstract space $\mathbf{M}$; let A, B, ... denote measurable sets. The sequence of random variables (i. e. — measurable real functions defined on $\mathbf{M}$) $\xi_n = \xi_n(a)$ $(a \in \mathbf{M})$ $(n = 1, 2, \ldots)$ is called *maximal* if $\xi_n(a) = \xi_n(b)$ holds for $n = 1, 2, \ldots$ only if $a = b$ (except for a and b belonging to a certain set of measure 0). If $\xi = \xi(a)$ denotes a random variable, let $M(\xi)$ denote the mean value of ξ, $E(\xi < x)$ the event $\xi < x$, $P(\xi < x) = \mu(E(\xi < x))$ the probability of the event $\xi < x$. Let $P_A(B)$ denote the conditional probability of the event B relative to the event A and let

$$F(x; A) = P_A(\xi < x)$$

denote the conditional distribution function of ξ relative to A. The following results are proved:

Theorem 1. Let $\{\xi_n\}$ denote a maximal sequence of independent random variables, each assuming only a finite number of different values; let us put $\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$, $M(\zeta_n) = A_n$, $M((\zeta_n - A_n)^2) = B_n$ and suppose $B_n \to \infty$; let us put $\eta_n = \dfrac{\zeta_n - A_n}{B_n}$ and $F_n(x) = P(\eta_n < x)$ and let A denote any event having positive probability $(\mu(A) > 0)$. If

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \Phi(x) \qquad (-\infty < x < +\infty) \tag{1}$$

where

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt,$$

it follows that

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x;\ A) = \Phi(x)\,. \tag{2}$$

THEOREM 2. If μ' denotes a Lebesgue measure on $\boldsymbol{M}$ which is absolutely continuous with respect to μ, and $A_n(x) = E(\eta_n < x)$, we have, under the conditions of Theorem 1,

$$\lim_{n\to\infty} \mu'(A_n(x)) = \Phi(x)\,. \tag{3}$$

THEOREM 3. Let $b = f(a)$ denote a measurable transformation of $\boldsymbol{M}$ onto itself and let us define the measure μ' as follows:

$$\mu'(A) = \mu(f^{-1}(A)) \tag{4}$$

where $f^{-1}(A) = E(f(a) \in A)$; let us suppose that μ' is absolutely continuous with respect to μ. Under the conditions of Theorem 1, if we put $\vartheta_n(a) = \eta_n(f(a))$ and $G_n(x) = P(\vartheta_n < x)$, it follows

$$\lim_{n\to\infty} G_n(x) = \Phi(x)\,. \tag{5}$$

THEOREM 4. Let $g(t, u)$ denote a function of two real variables which has for every fixed u a unique inverse function $g_u^{-1}(x)$ $(g(g_u^{-1}(x), u) = x)$. Let ξ denote an arbitrary random variable, and consider the sequence of random variables $F(x) = P(\xi < x)$; let us put $G_n(x) = P(\vartheta_n < x)$. Under the conditions of Therem 1, we have

$$\lim_{n\to\infty} G_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(g_u^{-1}(x))\, dF(u)\,. \tag{6}$$

Theorem 2 follows from Theorem 1, while Theorems 3 and 4 are simple consequences of Theorems 1 resp. 2. The proof of Theorem 1 makes use of some results of V. A. ROHLIN on measure theory [1].

ON CAUCHY'S CONVERGENCE TEST

By

LÁSZLÓ KALMÁR (Szeged), corresponding member of the Academy

1. This paper contains two proofs, seeming to be never published, of Cauchy's convergence test, i. e. of the theorem to the effect that the condition

(C) to any positive ε there is a $\varrho = \varrho(\varepsilon)$ such that we have $| a_m - a_n | < \varepsilon$ for every $m, n > \varrho(\varepsilon)$

is necessary and sufficient for the convergence of the infinite sequence $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Both proofs might be useful for lecture purposes. The first of them has the advantage over the usual class-room proofs of being direct, i. e. not based on the Bolzano-Weierstrass theorem. The second proof furnishes an equivalent form of Cauchy's test allowing some simplifications in Cantor's theory of real numbers, as to be shown in a subsequent paper.

2. Cauchy's convergence test is proved in lectures on Calculus usually by means of the Bolzano-Weierstrass theorem, stating the existence of a convergent subsequence of every bounded infinite sequence. The latter theorem is usually proved by means of successive halving of the interval containing the sequence in question, choosing for the next halving in each case the half, or one of the halves, containing an infinity of terms of the sequence, and considering the common point of the intervals formed thus.

Now, the same idea, slightly modified, leads directly to (the sufficiency[1] of) Cauchy's convergence test. The modification consists in replacing the halves of an interval by two overlapping parts[2], e. g. by its left and right two-thirds. Indeed, let a_n be (the general term of) a sequence satisfying condition (C). We define b_n and c_n recursively as follows. Let $b_1 = a_{\varrho(1)+1} - 1$, $c_1 = a_{\varrho(1)+1} + 1$, and, given b_r and c_r, let $b_r' = \dfrac{2\,b_r + c_r}{3}$, $c_r' = \dfrac{b_r + 2\,c_r}{3}$ and

[1] The necessity of condition (C) for the convergence of the sequence a_n is obvious.

[2] The idea of this modification is due to BROUWER who applied, in several publications, overlapping intervals for the construction of numbers the mere existence of which has been proved by means of non-overlapping intervals.

define $b_{r+1} = b_r$, $c_{r+1} = c_r'$ if for all but a finite number of terms of the sequence a_n we have $b_r < a_n < c_r'$, and $b_{r+1} = b_r'$, $c_{r+1} = c_r$ in the opposite case. We prove by induction $b_r < a_n < c_r$ for every r and for every but a finite number of n. Indeed, this is true for $r = 1$ by (C), $\varepsilon = 1$. Suppose it to be true for an r and to be false for $r + 1$. Then, by definition of b_{r+1} and c_{r+1}, we should have $c_r' \leqq a_m < c_r$ and $b_r < a_n \leqq b_r'$ for an infinity of values of m and n, hence $a_m - a_n \geqq c_r' - b_r'$, contrarily to (C), $\varepsilon = c_r' - b_r'$.

Let a be the common point of the intervals $b_r \leqq x \leqq c_r$; then we have $|a_n - a| < c_r - b_r = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{r-1}$ for all but a finite number of n, hence $a_n \to a$.

3. We next show that (C) is equivalent to the condition[3]

(C') any two subsequences[4] of a_n differ but in a 0-sequence (i. e. in a sequence converging to 0).

Hence, Cauchy's convergence test is equivalent to the theorem:

Condition (C') is necessary and sufficient for the convergence of the sequence a_n.

Indeed, suppose the sequence a_n satisfies condition (C). Let a_{k_n} and a_{l_n} be any two subsequences of a_n $(k_1 < k_2 < \ldots,\ l_1 < l_2 < \ldots)$. Then for any positive ε, we have $|a_{k_n} - a_{l_n}| < \varepsilon$ for $k_n, l_n > \varrho(\varepsilon)$, hence, on account of $k_n, l_n \geqq n$, for $n > \varrho(\varepsilon)$, i. e., we have $a_{k_n} - a_{l_n} \to 0$, thus, a_n satisfies condition (C') too. On the other hand, suppose the sequence a_n does not satisfy condition (C), i. e., for a positive ε_0, and for every positive integer ϱ, there are integers $m = \mu(\varrho)$ and $n = \nu(\varrho)$ such that $m, n > \varrho$ and $|a_m - a_n| \geqq \varepsilon_0$. Define $k_1 = l_1 = 1$ and, given k_r and l_r, let $k_{r+1} = \mu(\max(k_r, l_r))$ and $l_{r+1} = \nu(\max(k_r, l_r))$. Then we have $k_1 < k_2 < \ldots$, $l_1 < l_2 < \ldots$ and $|a_{k_n} - a_{l_n}| \geqq \varepsilon_0$ for every n. Hence $a_{k_n} - a_{l_n}$ does not converge to 0 and the sequence a_n does not satisfy condition (C').

4. Now, we prove the theorem, equivalent to Cauchy's convergence test, formulated in the preceding section. The necessity of condition (C') for the convergence of the sequence a_n being obvious, we have to prove its sufficiency only. First we prove that a sequence a_n satisfying condition (C') is necessarily bounded. Indeed, let a_n be a sequence unbounded from above. Define k_1 as the least k for which we have $a_k > a_1 + 1$ and, given k_r, define k_{r+1} as the least $k > k_r$ for which we have $a_k > a_{r+1} + 1$ (existing, for otherwise $a_{r+1} + 1$ would be an upper bound for the sequence $a_{k_r+1}, a_{k_r+2}, \ldots,$

[3] See also K. KNOPP, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen* (Berlin, 1931) pp. 89—90 (II. Hauptkriterium (3. Form)).

[4] "Subsequence" is meant in this paper so as to include the whole sequence too. Obviously, (C') is equivalent to the condition that a_n differs from any of its subsequences but in a 0-sequence.

and so, the whole sequence a_n would be bounded from above). Then, for $l_n = n$, we have $a_{k_n} > a_{l_n} + 1$ for every n, thus $a_{k_n} - a_{l_n}$ does not converge to 0 and the sequence a_n does not satisfy condition (C'). Similarly, we can show that a sequence unbounded from below does not satisfy condition (C').

Now, let a_n be a sequence satisfying condition (C') and a_{l_n} one of its convergent subsequences existing on account of the Bolzano-Weierstrass theorem. Let $a_{l_n} \to a$; by condition (C'), we have $a_n - a_{l_n} \to 0$; hence, $a_n \to a$.

5. In a lecture where Cauchy's convergence test is based on the proof given in the preceding two sections, it would be advisable, on reasons of style, to give a "qualitative" proof of the Bolzano—Weierstrass theorem too. The following such proof is due to the late Professor KÜRSCHÁK. It is an instance of a proof by cases of an unusual type[5].

Obviously, it suffices to prove that every infinite sequence has a monotonous subsequence; for if the sequence in question is bounded, the same holds for its subsequences too and so a monotonous subsequence of it is necessarily convergent. Now, let a_n be the sequence in question; define k_1 as the least k for which we have $a_k \leqq a_n$ for every n, and, given k_r, define k_{r+1} as the least $k > k_r$ for which we have $a_k \leqq a_n$ for every $n > k_r$. Of course, k_r may fail to exist; however, if it exists for every r, we have the increasing subsequence a_{k_n} of a_n. If, on the other hand, for a positive integer s, k_s does not exist, then the sequence $a_{k_s+1}, a_{k_s+2}, \ldots$ does not have a least term. In this case, define $l_1 = k_s + 1$ and, given l_r, define l_{r+1} as the least $l > l_r$ for which $a_l < a_{l_r}$ (existing, for otherwise a_{l_r} would be the least term of the sequence a_{l_r}, a_{l_r+1}, a_{l_r+2}, ... and thus the sequence a_{k_s+1}, a_{k_s+2}, ... formed of the former by subjoining a finite number of terms, would also have a least term[6]). Then a_{l_n} is a decreasing subsequence of a_n.

(Received 29 October 1949)

[5] This type of the proof by cases consists in giving first a proof method which does not work always and in giving another proof method for the case in which the first method does not work. The proofs for some particular cases, which I know from oral communication of Mr. BERNAYS, of the arithmetical lemma to which the consistency of Analysis has been reduced by ACKERMANN (see D. HILBERT, Die Grundlagen der Mathematik, *Abhandlungen aus dem math. Seminar der Hamburgischen Universität*, **6** (1928), pp. 65—85, especially the last paragraph beginning on p. 84), belong to the same type.

[6] As a matter of fact, as easily seen, a_{l_r} would be the least term of the sequence $a_{k_s+1}, a_{k_s+2}, \ldots$ too.

О КРИТЕРИИ СХОДИМОСТИ КОШИ

ЛАСЛО КАЛЬМАР (Сегед)

(Резюме)

Автор дает два новых доказательства критерия *Коши*, относящегося к сходимости бесконечных последовательностей. Первое доказательство аналогично обычному доказательству теоремы *Больцано—Вейерштрасса*, но применяет пересекающие интервалы; оно основывается на том, что если интервал содержит все члены бесконечной последовательности с исключением конечного числа членов, то или левая, или правая $^2/_3$ часть интервала имеет такие же свойства. Второе доказательство основывается на теореме *Больцано—Вейерштрасса* и дает критерий *Коши* в следующей форме: последовательность сходится тогда и только тогда, если от любой своей бесконечной под-последовательности она отличается только последовательностью сходящейся к нулю. Автор сообщает также одно доказательство *Кюрщака* теоремы *Больцано—Вейерштрасса*, которое основывается на том, что каждая последовательность имеет или возрастающую или убывающую под-последовательность.

ÜBER DIE DIOPHANTISCHE GLEICHUNG $x^3 - 1 = 2y^2$

Von
RICHARD OBLÁTH (Budapest)
(*Vorgelegt von* A. RÉNYI)

EULER[1] und T. NAGELL[2] haben die Unmöglichkeit der diophantischen Gleichung

$$x^3 + 1 = y^2$$

für $x > 2$ bewiesen. V. A. LEBESGUE[3] bewies, daß auch

$$x^3 - 1 = y^2$$

(allgemeiner $x^n - 1 = y^2$) unlösbar ist. STÖRMER[4] hat diese Resultate ausgedehnt, indem er die Unmöglichkeit der Gleichung

$$x^2 + 1 = 2y^n$$

gezeigt hat. Prof. T. NAGELL bewies die Unmöglichkeit der Gleichungen

$$x^3 \pm 1 = y^n \qquad (n \geqq 3).$$

In diesen Gedankenkreis gehören auch die interessanten diophantischen Gleichungen

(I) $$x^3 - 1 = 2y^2$$

[1] L. EULER: Theorematum quorumdam arithmeticorum demonstrationes (1738), *Comm. Arithm. Coll.* **I** (1849), pp. 24—34, *Opera Omnia, Series prima* **II** (1915), pp. 38—58, speziell pp. 56—58, Theorema 10.

[2] T. NAGELL: Résultats nouveaux de l'analyse indéterminée I, *Norsk Matematisk Forenings Skrifter*, Série **I**, Nr. 8 (1922), § 10, pp. 11—13. Sur l'impossibilité de l'équation indéterminée $z^p + 1 = y^2$, ebenda Nr. 4 (1921), pp. 1—10, besonders pp. 1—2. Sur une équation diophantienne à deux indéterminées, *Det Kgl. Norske Videnskabers Selskabs Forhandlinger* **7**, Nr. 38, (1934), pp. 136—139.

[3] V. A. LEBESGUE: Sur l'impossibilité en nombres entiers de l'équation $x^m = y^2 + 1$. *Nouv. Ann. de Math.*, **9** (1850), pp. 178—181. Auch T. NAGELL, Analyse indéterminée de degré supérieur. *Mémorial des Sciences Mathématiques* Fasc. **39**, Paris (1929), p. 58.

[4] C. STÖRMER: Solution complète en nombres entiers de l'équation $m \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + n \operatorname{arctg} \frac{1}{y} = k\frac{\pi}{4}$, *Bull. de la Soc. Math. de France*, **27** (1899), pp. 160—170, aber auch schon in 1895 in den Christiania Videnskabers Selskabs Skrifter. Auch NAGELL, a. a. O.[3], p. 58.

und

(II) $$x^3 - 1 = 2y^n ,$$

deren Unmöglichkeitsbeweis den Inhalt der gegenwärtigen Mitteilung bildet.

Im Laufe unserer Untersuchung werden wir auch anderen interessanten unmöglichen diophantischen Gleichungen begegnen. Zuerst beweisen wir den im Folgenden öfter anzuwendenden, an und für sich interessanten

SATZ 1. *Die diophantische Gleichung*

(III) $$x^2 + x + 1 = 3v^2$$

mit ungeradem x hat außer den trivialen Lösungen $x = 1$, $v = 1$ keine weiteren Lösungen.

Beweis. Wenn (III) besteht, muß, da x als ungerade vorausgesetzt wurde, x die Form $x = 6a + 1$ und v die Form $v = 2b + 1$ besitzen. Dann ist also

$$3a(2a + 1) = 2b(b + 1) ,$$

folglich $a = 2c$ und deshalb

(1) $$3c(4c + 1) = b(b + 1) ,$$

$c = 0$ führt zur trivialen Lösung $x = 1$, $v = 1$, die wir ausgeschlossen haben, so erhält man

$$b = kc \qquad \text{oder} \qquad b = kc - 1 .$$

(1) ergibt im ersten Falle

$$(k^2 - 12)c = 3 - k ,$$

was aber unmöglich ist, weil die zwei Seiten entgegengesetzte Vorzeichen besitzen. Im zweiten Falle bekommt man die ebenfalls unmögliche Gleichung

$$(k^2 - 12)c = 3 + k .$$

Wenn nämlich die linke Seite positiv ist, muß $k \geqq 4$ sein. Dies ist aber ausgeschlossen: die Unmöglichkeit von $k = 4$ springt in die Augen, wenn aber $k \geqq 5$ sein sollte, dann wäre

$$k^2 - 12 > k + 3 ,$$

daraus folgt aber $c < 1$, was doch unmöglich ist, weil c eine ganze Zahl ist. Q. e. d.

Diesen kurzen Beweis verdanke ich einer freundlichen Mitteilung des Herrn Prof. A. RÉNYI.

SATZ 2. *Die diophantische Gleichung (I) ist* (außer der trivialen Lösung $x = 1$, $y = 0$) *unmöglich.*

Aus (I) würde

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 2y^2$$

folgen. Denkbar wären die beiden Zerlegungen

$$A) \qquad x - 1 = 2u^2, \qquad x^2 + x + 1 = v^2,$$

$$B) \qquad x - 1 = 6u^2, \qquad x^2 + x + 1 = 3v^2,$$

denn es ist $(x^2 + x + 1) - (x - 1)^2 - 3(x - 1) = 3$ identisch, und darum kann der größte gemeinsame Teiler von $x^2 + x + 1$ und $x - 1$ nur gleich 1 oder 3 sein.

Der Fall *A)* ist sofort auszuschließen wegen

$$x^2 < x^2 + x + 1 < (x + 1)^2.$$

Im Falle *B)* zeigt die Gleichung $x = 6u^2 + 1$, daß x ungerade sein muß, die Bedingungen des Satzes 1 sind also erfüllt. Satz 1 zeigt, daß auch die Möglichkeit *B)* entfällt. Unser Satz ist also bewiesen.

Mein urspünglicher Beweis dieses Satzes beruhte auf einer descente infinie und war viel länger.

Als Verallgemeinerung des Satzes 2 beweisen wir den

Satz 3. *Die diophantische Gleichung*

$$x^3 - 1 = 2y^n \qquad (n \geqq 3) \tag{II}$$

ist (von den trivialen Lösungen $x = 1$, $y = 0$ und mit ungeradem n $x = -1$, $y = -1$, abgesehen) *in ganzen Zahlen unlösbar.*

Die beiden im vorausgegangenen Beweise benützten Zerlegungen

$$A) \qquad x - 1 = 2u^n, \qquad x^2 + x + 1 = v^n,$$

$$B) \qquad x - 1 = 2 \cdot 3^{n-1} u^n, \qquad x^2 + x + 1 = 3v^n$$

sind auch jetzt zu unterscheiden.

Die Unmöglichkeit der Gleichung

$$x^2 + x + 1 = 3v^n$$

mit den trivialen Ausnahmen ($x = 1$, $x = -2$, $v = 1$) wurde von Herrn T. Nagell[5] für jeden Exponenten $n \geqq 3$ bewiesen, während die Unmöglichkeit von

$$x^2 + x + 1 = v^n \tag{2}$$

(mit den Ausnahmen $x = 0$, $x = -1$, $v = 1$; $n = 3$, $x = 18$, $x = -19$, $v = 7$) in Anlehnung an ein Nagellsches[5] Resultat von Herrn Prof. W. Ljunggren[6] für jeden Exponenten $n \geqq 3$ bewiesen wurde. Nun haben wir durch

[5] T. Nagell, Des équations indéterminées $x^2 + x + 1 = y^n$ et $x^2 + x + 1 = 3y^n$, *Norsk Matematisk Forenings Skrifter*, Serie **I**, Nr. 2 (1921), pp. 1—14, besonders § 3, pp. 12—14.

[6] W. Ljunggren: Einige Bemerkungen über die Darstellung ganzer Zahlen durch binäre kubische Formen mit positiver Diskriminante, *Acta Math.*, **75** (1942), pp. 1—21, besonders p. 11, die Anmerkung.

Satz 2 die Ausnahmefälle erledigt, die Einsetzung der zulässigen Lösungen der Gleichung (2) in *A)* zeigt, daß sie keine, bzw. nur die triviale Lösung der Gleichung (II) ergeben, womit unser Satz als bewiesen erscheint.

Es wäre naheliegend, daran zu denken, daß die sehr analoge Gleichung

$$x^3 + 1 = 2y^2$$

ebenfalls unmöglich ist. Diese Gleichung hat aber außer den trivialen $x = -1$, $y = 0$; $x = 1$, $y = +1$ zwei nichttriviale Lösungen:[7] $x = 23$, $y = \pm 78$, so daß unser Satz auf diese Gleichung sicher nicht in unveränderter Weise ausgedehnt werden kann. Infolge des THUE—SIEGELschen, bzw. des LANDAU—OSTROWSKYschen Satzes hat sie jedenfalls bloß eine endliche Anzahl von Lösungen.

Wir zeigen aber, und zwar als weitere Anwendung des Satzes 1 den

SATZ 4. *Die diophantische Gleichung*

$$3x^2 + 1 = z^3 \tag{IV}$$

ist (von der trivialen Lösung $x = 0$, $z = 1$ abgesehen) *in ganzen Zahlen unmöglich.*

Beweis. (IV) ist identisch mit

$$z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1) = 3x^2.$$

Die beiden denkbaren Zerlegungen sind

$$A) \qquad z - 1 = 3u^2, \qquad z^2 + z + 1 = v^2,$$
$$B) \qquad z - 1 = u^2, \qquad z^2 + z + 1 = 3v^2.$$

A) entfällt, denn aus $z \equiv 1 \bmod 3$ folgt zwar $z^2 + z + 1 \equiv 0 \bmod 3$, der Ausdruck links ist aber, wie bekannt, bloß durch 3, nicht durch 3^2 teilbar. Im Falle *B)* kann z wegen Satz 1 (außer dem trivialen Fall) nicht ungerade sein. z sei also gerade. Aus (IV) folgt, daß dann x ungerade sein muß, es ist also

$$3x^2 \equiv 3 \bmod 8,$$

während doch aus (IV)

$$3x^2 \equiv -1 \bmod 8$$

entspringt. Der Widerspruch beweist unseren Satz.

(Eingegangen am 15. Mai 1950.)

[7] AUBRY und FAUQUEMBERGUE: Sphinx-Oedipe, **6** (1911), pp. 103—104, und **8** (1913), pp. 170—171. Eine eventuelle Lösung > 23 besteht aus mindestens 256 Ziffern. S. auch L. E. DICKSON: History of the Theory of Numbers **II**, New York (1934), p. 630.

ДИОФАНТОВОЕ УРАВНЕНИЕ $x^3 - 1 = 2y^2$

РИХАРД ОБЛАТ (Будапешт)

(Резюме)

В работе показано невозможность нескольких диофантовых уравнений (за исключением тривиальных решений) напр.

$$x^3 - 1 = 2y^2$$
$$x^3 - 1 = 2y^n \qquad (n \geqq 3)$$
$$3x^3 + 1 = z^3$$

Кроме нескольких теорем *Нагеля* и *Люнгрена*, основным средством доказательства служит то, что диофантовое уравнение

$$x^2 + x + 1 = 3y^2,$$

за исключением тривиального решения $x = 1$, с нечетным x невозможно.

THE EXTENSION OF PARTIALLY ORDERED GROUPS

By

L. FUCHS (Budapest)

(*Presented by* G. HAJÓS)

1. The extension theory of algebraic systems is a young part of the algebra. At first O. SCHREIER[1] has proposed and solved the problem of group extensions: given two groups N and F, find all possible groups G such that N is an invariant subgroup of G and G/N is isomorphic to F. Analogous problems on some other systems have been discussed by other authors,[2] but it seems to me that the extension problem for partially ordered groups has not yet been studied in general.[3] The purpose of the present paper is to give a general discussion of the extension of partially ordered groups.

2. First we recall some definitions needed throughout the paper.

A group G, written additively, is said to be a *partially ordered group* if an order relation $\geqq$ is defined for some pairs of its elements satisfying the following postulates:[4]

(I) *reflexive law:* $x \geqq x$ for all x in G.

(II) *antisymmetric law:* $x \geqq y$ and $y \geqq x$ imply $x = y$,

(III) *transitive law:* $x \geqq y$ and $y \geqq z$ imply $x \geqq z$,

(IV) *homogeneity law:* $x \geqq y$ implies $u + x + v \geqq u + y + v$ for all u, v in G.

Sometimes it is useful to add a fifth postulate:

(V) *the MS-property* (MOORE—SMITH): for every x, y in G there exists a third element z in G such that $z \geqq x$ and $z \geqq y$.

[1] O. SCHREIER, Über die Erweiterung von Gruppen, I: *Monatshefte Math. Phys.*, **34** (1926), pp. 165—180; II: *Hamburger Abh.*, **4** (1926), pp. 321—346.

[2] For example, the extension theory for rings was given by C. J. EVERETT, JR, An extension theory for rings, *Amer. J. Math.*, **64** (1942), pp. 363—370. Independently of EVERETT, T. SZELE discovered the same extension theory.

[3] In a very special case G. BIRKHOFF has given a method for constructing certain, but not all extensions. See his paper: Lattice-ordered groups, *Annals Math.*, **43** (1942), pp. 298—331.

[4] See e. g. C. J. EVERETT and S. ULAM, On ordered groups, *Trans. Amer. Math., Soc.*, **57** (1945), pp. 208—216.

x and y are called *incomparable*, in sign $x \parallel y$, if neither $x \geqq y$ nor $y \geqq x$. By G^+ we denote the set of all *positive* elements of G, i. e., those satisfying $x \geqq 0$ where 0 is the group identity. Homogeneity implies that $x \geqq y$ if and only if $x - y$, or equivalently, $-y + x$ is positive, and that the set G^+ is invariant under all inner automorphisms of G.

If a partially ordered group G is at the same time a lattice under the same order relation $\geqq$ as inclusion relation, G is termed a *lattice-ordered group*. A *linearly ordered* group ($x \parallel y$ is impossible) is always lattice-ordered.

A group isomorphism Θ between two partially ordered groups G and H is said to be an *order-isomorphism* (o-isomorphism), if it preserves order in both directions, i. e., $x \geqq y$ in G if and only if $\Theta(x) \geqq \Theta(y)$ in H. If C is an invariant subgroup of G which is at the same time convex in the sense that $a \geqq x \geqq b$ (a, b in C) implies $x \in C$, then in the factor-group G/C a natural order is induced by the order in G. This is defined by putting $C + x \geqq C + y$ if and only if for some representatives $u \in C + x$, $v \in C + y$ a relation $u \geqq v$ holds. The fulfilment of (I)—(IV) in G/C is an immediate consequence of the convexity of G. Whenever we are speaking of G/C as a partially ordered group, we always mean G/C with the order induced by the order of G.[5]

3. If the partially ordered group G contains C as an invariant convex subgroup and the factor-group G/C is o-isomorphic to the partially ordered group F, then G will be called a partially ordered extension of C by F, briefly a $C-F$-extension. Given two partially ordered groups $C = \{0, a, b, \ldots\}$ and $F = \{o, \varrho, \sigma, \ldots\}$, our problem consists in finding all possible $C-F$-extensions.

Assuming the problem solved, let $\{s_\varrho\}$ be a complete representation system for the extension group G modulo C, so that under the o-isomorphism $G/C \leftrightarrow F$ we have $s_\varrho \leftrightarrow \varrho$. We may always normalize the representation system by assuming 0 to be chosen for the representative of the null-class mod C, that is,

$$s_0 = 0. \tag{1}$$

With this representation system $\{s_\varrho\}$ each element x of G may be written uniquely in the form

$$x = s_\varrho + a \quad \text{with} \quad \varrho \in F, \ a \in C.$$

A factor-set $\{f_{\varrho\sigma}\}$ is defined by the addition rule

$$s_\varrho + s_\sigma = s_{\varrho+\sigma} + f_{\varrho\sigma} \quad (f_{\varrho\sigma} \in C) \quad \textit{for all} \quad \varrho, \sigma \in F. \tag{2}$$

By our normality assumption (1) we clearly have

$$f_{00} = f_{\varrho 0} = f_{0\varrho} = 0 \quad \textit{for all} \quad \varrho \in F. \tag{3}$$

[5] For a detailed discussion see my paper: On partially ordered groups, *Proc. Kon. Nederl. Akad. v. Wetensch.*, **53** (1950), pp. 828—834.

Each s_ϱ defines an o-automorphism Θ_ϱ in C given by

$$a\,\Theta_\varrho = -s_\varrho + a + s_\varrho,$$

in particular, by (1),

(4) $$a\,\Theta_0 = a \quad \textit{for all} \quad a \in C.$$

Two o-automorphisms Θ_ϱ and Θ_σ may be composed by the rule

$$a\,(\Theta_\varrho\,\Theta_\sigma) = (a\,\Theta_\varrho)\,\Theta_\sigma = -s_\sigma - s_\varrho + a + s_\varrho + s_\sigma = \\ = -f_{\varrho\sigma} - s_{\varrho+\sigma} + a + s_{\varrho+\sigma} + f_{\varrho\sigma},$$

that is,

(5) $$a(\Theta_\varrho\,\Theta_\sigma) = -f_{\varrho\sigma} + a\,\Theta_{\varrho+\sigma} + f_{\varrho\sigma}.$$

The associative law in G implies

(6) $$f_{\tau\,|\,\sigma,\tau} + f_{\sigma}\,\Theta_\tau = f_{\varrho,\sigma\,|\,\tau} + f_{\sigma\tau}.$$

We have so far considered merely the group operation in G. In order to describe the order relation in G, we have to define sets $P_{\varrho\sigma}$, which may be called *order-sets*, consisting of all $a \in C$ satisfying $s_\varrho + a \geqq s_\sigma$. These sets $P_{\varrho\sigma}$ will in fact characterize the order in G, for, clearly, $s_\varrho + a \geqq s_\sigma + b$ if and only if $a - b \in P_{\varrho\sigma}$. For these sets we establish the following properties.

A relation $s_\varrho + a \geqq s_\sigma + b$ in G implies, by definition, a relation $\varrho \geqq \sigma$ in F, and if $\varrho = \sigma$, then $a \geqq b$. Therefore,

(7) $P_{\varrho\sigma}$ *is nonvacuous if and only if* $\varrho \geqq \sigma$; *further* $P_{\varrho\varrho} = C^+$ *for all* $\varrho \in F$.

The reflexive and antisymmetric laws for the order in G are now readily checked.

By the transitive law, $s_\varrho + a \geqq s_\sigma + b \geqq s_\tau + c$, that is, $a - b \in P_{\varrho\sigma}$ and $b - c \in P_{\sigma\tau}$ imply $s_\varrho + a \geqq s_\tau + c$, that is, $a - c \in P_{\varrho\tau}$. Hence it follows

(8) $$P_{\varrho\sigma} + P_{\sigma\tau} \subseteq P_{\varrho\tau} \quad \textit{for all} \quad \varrho \geqq \sigma \geqq \tau.$$

Left-homogeneity implies that $s_\varrho + a \geqq s_\sigma$ is equivalent to $c + s_\varrho + a \geqq c + s_\sigma$, or $s_\varrho + c\,\Theta_\varrho + a \geqq s_\sigma + c\,\Theta_\sigma$ for each $c \in C$, hence

(9) $$c\,\Theta_\varrho + P_{\varrho\sigma} - c\,\Theta_\sigma = P_{\varrho\sigma} \quad \textit{for all} \quad c \in C \quad \textit{and} \quad \varrho \geqq \sigma.$$

Again from left-homogeneity we conclude to the equivalence of $s_\varrho + a \geqq s_\sigma$ with $s_\tau + s_\varrho + a \geqq s_\tau + s_\sigma$, or with $s_{\tau+\varrho} + f_{\tau\,\varrho} + a \geqq s_{\tau+\sigma} + f_{\tau\sigma}$ for every $\tau \in F$, whence we get

(10) $$f_{\tau\sigma} + P_{\varrho\sigma} - f_{\tau\sigma} = P_{\varrho+\tau,\sigma+\tau} \quad \textit{for all} \quad \tau \in F \quad \textit{and} \quad \varrho \geqq \sigma.$$

Right-homogeneity asserts that from $s_\varrho + a \geqq s_\sigma$ it follows $s_\varrho + a + s_\tau \geqq s_\sigma + s_\tau$ and hence $s_{\varrho+\tau} + f_{\varrho\tau} + a\,\Theta_\tau \geqq s_{\sigma+\tau} + f_{\sigma\tau}$, and vice versa. Thus we obtain

(11) $$f_{\varrho\tau} + P_{\varrho\sigma}\,\Theta_\tau - f_{\sigma\tau} = P_{\varrho+\tau,\sigma+\tau} \quad \textit{for all} \quad \tau \in F \quad \textit{and} \quad \varrho \geqq \sigma,$$

where, evidently, $P_{\varrho\sigma}\Theta_\tau$ denotes the totality of elements of the form $x\Theta_\tau$ with $x \in P_{\varrho\sigma}$.

A system $\{f_{\varrho\sigma}, \Theta_\varrho, P_{\varrho\sigma}\}$ where $f_{\varrho\sigma} \in C$, $\Theta_\varrho \in A(C)$,[6] $P_{\varrho\sigma} \subset C$ will be called a *$C-F$-extension-set* if it satisfies (3)—(11). Thus every extension G with a representation system $\{s_\varrho\}$ defines some $C-F$-extension-set.

Conversely, if given two partially ordered groups C, F, any $C-F$-extension-set $\{f_{\varrho\sigma}, \Theta_\varrho, P_{\varrho\sigma}\}$ defines an extension. For, the system consisting of all symbols (ϱ, a) with $\varrho \in F$, $a \in C$ under the rules

(α) *equality:* $(\varrho, a) = (\sigma, b)$ *if and only if* $\varrho = \sigma$ *and* $a = b$,

(β) *composition:* $(\varrho, a) + (\sigma, b) = (\varrho + \sigma,\ f_{\varrho\sigma} + a\Theta_\sigma + b)$,

(γ) *order relation:* $(\varrho, a) \geqq (\sigma, b)$ *if and only if* $a - b \in P_{\varrho\sigma}$

becomes a partially ordered group H. In fact, conditions (3)—(6) imply that H is a group (SCHREIER) and conditions (7)—(11) ensure that H obeys the laws (I)—(IV) for partial order.[7] Since H has a convex invariant subgroup C^* consisting of all elements of the form $(0, a)$ o-isomorphic to C under the mapping $(0, a) \leftrightarrow a$,[8] and the factor-group H/C is c-isomorphic to F, our stated problem is solved if we know all $C-F$-extension-sets.

It can happen that two or more extension-sets define the same extension. Indeed, if we use another representation system $\{t_\varrho\}$ instead of $\{s_\varrho\}$, connected by the relations $t_\varrho = s_\varrho + c_\varrho$ $(c_\varrho \in C)$, then the $C-F$-extension-set $\{f'_{\varrho\sigma}, \Theta'_\varrho, P'_{\varrho\sigma}\}$ belonging to the system $\{t_\varrho\}$ will define the same extension. The new extension-set satisfies the relations

(a) $c_o = 0$,

(b) $f'_{\varrho\sigma} = -c_{\varrho+\sigma} + f_{\varrho\sigma} + c_\varrho\Theta_\sigma + c_\sigma$,

(c) $a\Theta'_\varrho = -c_\varrho + a\Theta_\varrho + c_\varrho$,

(d) $P'_{\varrho\sigma} = -c_\varrho + P_{\varrho\sigma} + c_\varrho$,

which are readily obtained from the definitions by direct computations.

We shall call two $C-F$-extension-sets $\{f_{\varrho\sigma}, \Theta_\varrho, P_{\varrho\sigma}\}$ and $\{f'_{\varrho\sigma}, \Theta'_\varrho, P'_{\varrho\sigma}\}$ *equivalent*, if they are connected by elements c_ϱ of C satisfying (a)—(d). This is actually an equivalence relation in the usual sense. By definition, extension-sets defined by the same extension belong to the same class of equivalence.

The converse is also true: two equivalent extension-sets define abstractly the same extension; in other words, the extensions H_1 and H_2 defined by equivalent $C-F$-extension-sets are o-isomorphic under the mapping $(\varrho, a) \leftrightarrow (\varrho, c_\varrho + a)$ which leaves the elements of C and the cosets of F fixed. (For the proof, which is easy to perform, use (α)—(γ) as well as (a)—(d).)

[6] $A(C)$ denotes the group of all o-automorphisms of C.

[7] We observe that if one assumes the MS-property both in C and in F, then the extension group will also have the MS-property. The proof is immediate.

[8] Henceforth we shall identify C^* with C.

Hence there is a one-one correspondence between the $C-F$-extensions and the classes of equivalent $C-F$-extension-sets. We thus conclude

THEOREM 1. *Every $C-F$-extension defines a class of equivalent $C-F$-extension-sets and conversely, every class of equivalent $C-F$-extension-sets defines a $C-F$-extension which is unique up to an o-isomorphism leaving the elements of C and the cosets of F fixed.*

By this theorem the extension problem for partially ordered groups is completely solved.

4. Let C and F be two partially ordered groups. In the hierarchy of all possible $C-F$-extensions we shall point out a certain type of particular interest.

One may ask whether to any factor-set $\{f_{\varrho\,\sigma}\}$ and any system of o-automorphisms $\{\Theta_\varrho\}$ satisfying (3)—(6) there may be found a system of order-sets $\{P_{\varrho\,\sigma}\}$ completing them to a $C-F$-extension-set. This question will be answered in the affirmative by putting

$$P_{\varrho\,\sigma} = \begin{cases} C \text{ if } \varrho > \sigma, \\ C^+ \text{ if } \varrho = \sigma, \\ \text{empty otherwise.} \end{cases}$$

As is readily seen, under this definition all conditions (7)—(11) are necessarily fulfilled. Accordingly, we have in the extension group H^*:

$$(\varrho, a) \geqq (\sigma, b) \text{ if and only if } \varrho > \sigma, \text{ or } \varrho = \sigma \text{ and } a \geqq b;$$

therefore, it is natural to say that H^* is a *lexicographic $C-F$-extension.*

Let H^* be a fixed lexicographic $C-F$-extension and H any other one with the same factor-set $\{f_{\varrho\,\sigma}\}$ and the same set $\{\Theta_\varrho\}$ of o-automorphisms. The mapping $(\varrho, a) \to (\varrho, a)$ of H onto H^* is by (β) an isomorphism in the pure group-theoretic sense. Moreover, this group-isomorphism preserves order; however, its inverse mapping does not do it necessarily. Hence it is a tautomorphism in the sense defined by the author[9] and thus we arrive at

THEOREM 2. *If $\{f_{\varrho\,\sigma}\}$ and $\{\Theta_\varrho\}$ satisfy (3)—(6), the lexicographic extension always exists. Any $C-F$-extension H with the extension-set $\{f_{\varrho\,\sigma}, \Theta_\varrho, P_{\varrho\,\sigma}\}$ is tautomorphic to the lexicographic $C-F$-extension H^* with the same factor-set $\{f_{\varrho\,\sigma}\}$ and the same set $\{\Theta_\varrho\}$ of o-automorphism.*

5. There is an analogue of the direct sum extension of groups.

Let $f_{\varrho\,\sigma} = 0$ for all $\varrho, \sigma \in F$; $a\,\Theta_\varrho = a$ for all $a \in C$ and all $\varrho \in F$; further let $P_{\varrho\,\sigma} = C^+$ whenever $\varrho \geqq \sigma$. Then the extension defined by this extension-set always exists; it is called the *direct sum* of the partially ordered groups C and F.

Of course, this is not the only extension-set by which the extension is direct, for any other equivalent extension-set defines the same extension.

[9] See loc. cit.[5]

From (a)—(d) in 3 it is evident that an extension with the extension-set $\{f_{\varrho\sigma}, \Theta_\varrho, P_{\varrho\sigma}\}$ is direct if and only if there are elements c_ϱ in C such that (a') $c_0 = 0$, (b') $f_{\varrho\sigma} = c_{\varrho+\sigma} - c_\varrho - c_\sigma$, (c') $a\Theta_\varrho = c_\varrho + a - c_\varrho$, (d') $P_{\varrho\sigma} = c_\varrho + C^+ - c_\sigma$ for $\varrho \geqq \sigma$.

The order definition of the direct sum extension:

$$(\varrho, a) \geqq (\sigma, b) \text{ if and only if } \varrho \geqq \sigma \text{ and } a \geqq b,$$

is so simple that one naturally arises the question as to whether there exist even other $C-F$-extensions with the same order definition. Otherwise expressed, we seek the $C-F$-extension-sets with the order-sets $P_{\varrho\sigma} = C^+$ for $\varrho \geqq \sigma$. We shall show that if we assume the MS-property in the factor-group F, then with this definition of order no extension exists except the direct one.

Conditions (9)—(11) with $P_{\varrho\sigma} = C^+$ ($\varrho \geqq \sigma$) in turn imply

$$c\,\Theta_\varrho = c\,\Theta_\sigma \text{ for } \varrho \geqq \sigma \text{ and all } c \in C,$$
$$f_{\tau\varrho} = f_{\tau\sigma} \text{ and } f_{\varrho\tau} = f_{\sigma\tau} \text{ for } \varrho \geqq \sigma \text{ and all } \tau \in F.$$

Hence, using the MS-property in F, we conclude that $c\,\Theta_\varrho = c\,\Theta_0 = c$, i. e., Θ_ϱ is the identity mapping for all $\varrho \in F$, and $f_{\varrho\sigma} = f_{\varrho 0} = 0$ for all $\varrho, \sigma \in F$, that is, the extension is direct, as stated.

6. We shall now give conditions under which the extension group becomes a lattice-ordered group. $\wedge$ and $\vee$ will denote the lattice operations meet and join, respectively.

Let G be a lattice-ordered group and assume that the convex invariant subgroup C is closed under the lattice operations. Then, whenever $\varrho \geqq \varphi$ as well as $\sigma \geqq \varphi$, the order-sets $P_{\varrho\varphi}$ and $P_{\sigma\varphi}$ always have a common element f; for this f we have $s_\varphi - f \leqq s_\varrho \wedge s_\sigma$. Therefore $s_\varrho \wedge s_\sigma = s_\tau + c$ implies $\tau \geqq \varphi$, consequently, τ is the greatest lower bound for ϱ and σ, and hence $\tau = \varrho \wedge \sigma$ exists. Similarly, $\varrho \vee \sigma$ also exists. Thus the factor-group has to be lattice-ordered.

Let $(s_\varrho + a) \wedge (s_\sigma + b) = s_{\varrho\wedge\sigma} + c$. The two inequalities $s_\varphi + f \leqq \leqq s_\varrho + a$ and $s_\varphi + f \leqq s_\sigma + b$ are together equivalent to the single one $s_\varphi + f \leqq s_{\varrho\wedge\sigma} + c$, whence we get ($\bigcap$ denotes set-theoretic intersection):

$$(12) \quad (-a + P_{\varrho\varphi}) \bigcap (-b + P_{\sigma\varphi}) = -c + P_{\varrho\wedge\sigma,\varphi} \quad \textit{if} \quad \varphi \leqq \varrho \wedge \sigma,$$

where $-c$ *is the unique least element of the set* $(-a + P_{\varrho,\varrho\wedge\sigma}) \bigcap \bigcap (-b + P_{\sigma,\varrho\wedge\sigma})$.

Similarly,

$$(13) \quad (P_{\varphi,\varrho} + a) \bigcap (P_{\varphi,\sigma} + b) = P_{\varphi,\varrho\vee\sigma} + c \quad \textit{if} \quad \varphi \geqq \varrho \vee \sigma,$$

where c *is the unique least element of the set* $(P_{\varrho\vee\sigma,\varrho} + a) \bigcap (P_{\varrho\vee\sigma,\sigma} + b)$.

Now if H is any $C-F$-extension, where both C and F are lattice-ordered groups and the extension-set satisfies in addition to (3)—(11) also (12) and (13),

the extension group H becomes a lattice-ordered group, as the reader may readily verify for himself.

We finally observe that the extension group is linearly ordered if and only if both C and F are linearly ordered and the extension is lexicographic.

(Received 5 April 1950)

РАСШИРЕНИЕ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУПП

Л. ФУКС (Будапешт)

(Резюме)

Автор, в соответствии с расширением групп по Шрейеру, дает расширение для частично упорядоченных групп. Если дано $C = \{a, b, \ldots\}$ и $F = \{\varrho, \sigma, \ldots\}$ — частично упорядоченные группы, проблема состоит в том, чтобы найти все те частично упорядоченные группы G, в которых C является выпуклым нормальным делителем и факторгруппа G/C (в которой может быть введено естественное упорядочение) изоморфна с F при сохранении порядка. Проблема может быть сведена на системы $C - F$ — расширений $\{f_{\varrho\sigma}, \Theta_\varrho, P_{\varrho\sigma}\}$ где $\{f_{\varrho\sigma}\}$ система факторов Шрейера, Θ_ϱ автоморфизм группы C которые сохраняют порядок и $P_{\varrho\sigma}$ — подмножества группы C, которые в группе G определяют порядок. Автор доказывает, что если система расширений $C - F$ удовлетворяет условиям (3) — (11), тогда она определяет расширение G на основе $(\alpha) = (\gamma)$. Наконец разбирается лексикографическое и прямое расширение, а также расширение структуры.

ÜBER NIVEAUKURVEN UND FLÄCHEN VON LÖSUNGSFUNKTIONEN PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Von
J. ACZÉL (Miskolc)
(*Vorgelegt von* G. HAJÓS)

1. Zielsetzung. Im folgenden wird die unter anderen mit der Potentialtheorie und der Nomographie zusammenhängende Frage erörtert, welcher partiellen Differentialgleichung jene Funktionen genügen müssen, deren Niveaukurven- bzw. Niveauflächensysteme mit denen der Lösungsfunktionen einer gegebenen partiellen Differentialgleichung gemeinsam sind. Dieses Problem wird für einige lineare partielle Differentialgleichungen und Systeme erster Ordnung, und homogene Gleichungen und Systeme zweiter Ordnung gelöst.

2/a. Beispiel aus der Potentialtheorie. Eine bekannte Aufgabe in der Potentialtheorie ist die folgende.[1] (Wir beschränken uns der Kürze halber auf Funktionen zweier Veränderlichen.)

Welche sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß eine Kurvenfamilie $F(x, y) = C$, wo $F(x, y)$ wenigstens zweimal derivierbar ist,[2] das Niveaukurvensystem (System äquipotentieller Kurven) einer Potentialfunktion, d. h. einer Lösungsfunktion der Laplace'schen Differentialgleichung

$$U_{xx} + U_{yy} = 0 \tag{1}$$

sei; und wie kann jene Potentialfunktion $U(x, y)$ bestimmt werden, deren äquipotentielle Kurven durch $F(x, y) = C$ angegeben sind? — Die Antwort ist einfach:

Die Forderung, daß $F(x, y) = C$ alle Niveaukurven von $U(x, y)$ und nur diese angebe, d. h. daß das Niveaukurvensystem von $U(x, y)$ mit dem von

[1] Siehe z. B.: O. D. KELLOGG, Foundations of Potential Theory, New York (1929), p. 195.

[2] Auch weiterhin werden wir die vorkommenden Funktionen dem Bedürfnis gemäß als einmal, zweimal oder dreimal derivierbar voraussetzen und, wo es nötig ist, wird eine erste Derivierte als nirgends verschwindend vorausgesetzt.

$F(x, y)$ zusammenfalle, ist offensichtlich mit $U(x, y) = s\,[F(x, y)]$ äquivalent, da ja sonst, wenn U außer F noch z. B. von x abhinge, so könnte U bei $F(x, y) = C$ nicht konstant bleiben. — Wegen (1) ist also

$$0 = U_{xx} + U_{yy} = [s'(F)\,F_x]_x + [s'(F)\,F_y]_y = s'(F)\,(F_{xx} + F_{yy}) + \\ + s''(F)\,(F_x^2 + F_y^2),$$

$$\frac{F_{xx} + F_{yy}}{F_x^2 + F_y^2} = -\frac{s''(F)}{s'(F)} = \varphi(F), \tag{2}$$

$$\varphi(t) = -\frac{s''(t)}{s'(t)}, \qquad s(t) = \int e^{-\int \varphi(t)\,dt}\,dt = \int_c^t e^{-\int_k^t \frac{F_{xx}+F_{yy}}{F_x^2+F_y^2}\,dF}\,dt, \tag{3}$$

$$U(x, y) = s\,[F(x, y)] = \int_c^{F(x,y)} e^{-\int_k^t \varphi(t)\,dt}\,dt = \int_c^{F(x,y)} e^{-\int_k^t \frac{F_{xx}+F_{yy}}{F_x^2+F_y^2}\,dF}\,dt,$$

und dieses U ist auch fürwahr eine Potentialfunktion, da wegen (2)

$$U_{xx} + U_{yy} = \left[e^{-\int_k^F \varphi(t)\,dt} F_x\right]_x + \left[e^{-\int_k^F \varphi(t)\,dt} F_y\right]_y = \\ = e^{-\int_k^F \varphi(t)\,dt}\,[F_{xx} + F_{yy} - \varphi(F)\,(F_x^2 + F_y^2)] = 0$$

ist, also erwies sich die notwendige Bedingung (2) auch als hinreichend.

Die notwendige und hinreichende Bedingung (2) bedeutet, daß $\frac{F_{xx} + F_{yy}}{F_x^2 + F_y^2}$ eine Funktion von $F(x, y)$ allein sein soll. Ist F dreimal derivierbar, so kann dies auch in die Form einer partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung umgestaltet werden:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F_{xx} + F_{yy}}{F_x^2 + F_y^2}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F_{xx} + F_{yy}}{F_x^2 + F_y^2}\right) \\ F_x & F_y \end{vmatrix} = 0.$$

(3) ergibt die gesuchte Darstellung von U. — Lösung und Beweis erfolgt in gleicher Weise bei Potentialfunktionen von drei oder mehr Veränderlichen. (Siehe 3/c.).

2/b. Beispiel aus der Nomographie. Eine wichtige einfache Klasse von Nomogrammen ist jene, wo alle drei Träger gerade Linien sind.[3] Damit eine

[3] Siehe z. B. M. d'Ocagne: Traité de Nomographie, Paris (1921), Ch. IV, §§ 57, 67, 71, 74; vgl. auch J. Aczél.[4]

Funktion $F(x, y)$ durch ein Nomogramm dieser Art darstellbar sei, ist es notwendig und hinreichend, daß es drei Funktionen $f(x)$, $g(y)$, $s(t)$ gebe derart, daß

$$s\,[F(x, y)] = f(x) + g(y) \tag{4}$$

gelte.[3]

Es stellt sich die Frage nach einer notwendigen und hinreichenden Differentialgleichungsbedingung für $F(x, y)$, die das Bestehen von (4) sichert, falls $F(x, y)$ genügend oft derivierbar ist.[4, 5]

Nach dem Vorbild der vorhergehenden Nummer können wir derart folgern: Die Funktion $U(x, y) = f(x) + g(y)$ ist bekanntlich durch die Gleichung $U_{xy} = 0$ vollständig charakterisiert. Da aber $U(x, y) = s\,[F(x, y)]$ ist, haben wir

$$0 = U_{xy}(x, y) = [s\,(F)]_{xy} = [s'\,(F)\,F_x]_y = s'\,(F)\,F_{xy} + s''\,(F)\,F_x\,F_y,$$

$$\frac{F_{xy}}{F_x\,F_y} = -\frac{s''\,(F)}{s'\,(F)} = \varphi(F), \tag{5}$$

$$\varphi(t) = -\frac{s''(t)}{s'(t)}\,, \qquad s(t) = \int e^{-\int \varphi(t)\,dt}\,dt = \int_c^t e^{-\int_k^t \frac{F_{xy}}{F_x F_y}\,dF}\,dt\,. \tag{6}$$

Das Gelten der Gleichung (5) ist also notwendig und, wie man leicht einsieht (vgl. 3/a), auch hinreichend zum Bestehen von (4). — (5) bedeutet wieder, daß $\dfrac{F_{xy}}{F_x\,F_y}$ Funktion von $F(x, y)$ allein ist, und das ist abermals äquivalent mit der partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{F_{xy}}{F_x\,F_y}\right) & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{F_{xy}}{F_x\,F_y}\right) \\ F_x & F_y \end{vmatrix} = 0,$$

$$F_x^2\,(F_{xy}\,F_{yy} - F_{xyy}\,F_y) = F_y^2\,(F_{xx}\,F_{xy} - F_x\,F_{xxy}). \tag{7}$$

[4] Für die resultierende partielle Differentialgleichung dritter Ordnung (7) siehe P. Saint-Robert: De la résolution de certaines équations à trois variables par le moyen d'une régle glissante, *Memorie d. R. Accad. di Scienze di Torino*, (2) **25** (1871), pp. 53—72; für die Bedingung (5) und für die Bestimmung (6) von $s\,(t)$ sowie auch von $f\,(x)$ und $g\,(y)$ siehe J. Aczél: Zur Charakterisierung nomographisch einfach darstellbarer Funktionen durch Differential- und Funktionalgleichungen, *Acta Scientiarum Math. Szeged*, **12A** (1950), pp. 73—80.

[5] Vgl. auch L. Fantappie: Sulla struttura delle funzioni di più variabili, *Rendiconti di Mat. Roma*, (5) **2** (1941), pp. 61—70 und S. Martis-Biddau: Sulla caratterizzazione di alcune classi di funzioni, *Collectanea Math. Barcelona*, **1** (1948), pp. 67—81, die wahrscheinlich den Zusammenhang der Frage mit der Nomographie und das Resultat (7) von P. Saint-Robert[4] (das sie wiederentdecken) nicht kennen. Da anderseits die Formeln (5), (6) nicht abgeleitet werden, kann dort nur eine indirekte Bestimmung von $s\,(t)$ angegeben werden.

3/a. Homogene Gleichungen zweiter Ordnung. Der in den vorhergehenden Beispielen benützte Gedankengang läßt sich in folgender Weise verallgemeinern:

Man sucht Bedingungen, die notwendig und hinreichend für das Zusammenfallen des Niveaukurvensystems der wenigstens zweimal derivierbaren Funktion $F(x, y)$ mit dem der Lösungsfunktion von der homogenen partiellen Differentialgleichung

$$(8)\quad a_1(x,y)\,U_x + a_2(x,y)\,U_y + a_{11}(x,y)\,U_{xx} + a_{12}(x,y)\,U_{xy} + a_{22}(x,y)\,U_{yy} = 0$$

sind.

Da unsere Forderung auch hier mit $U(x, y) = s\,[F(x, y)]$ gleichbedeutend ist, ergibt (8)

$$s'(F)\,[a_1 F_x + a_2 F_y + a_{11} F_{xx} + a_{12} F_{xy} + a_{22} F_{yy}] +$$
$$+ s''(F)\,[a_{11} F_x^2 + a_{12} F_x F_y + a_{22} F_y^2] = 0,$$

$$(9)\qquad \frac{a_1 F_x + a_2 F_y + a_{11} F_{xx} + a_{12} F_{xy} + a_{22} F_{yy}}{a_{11} F_x^2 + a_{12} F_x F_y + a_{22} F_y^2} = -\frac{s''(F)}{s'(F)} = \varphi(F),$$

also soll die linke Seite wieder eine Funktion von F allein sein.

Diese Bedingung (9), die für dreimal derivierbares F in der schon erkannten Weise ebenfalls in eine partielle Differentialgleichung dritter Ordnung umgestaltet werden kann, ist aber nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend. Dazu brauchen wir nur zu beweisen, daß jeder Funktion F, die der Bedingung (9) Genüge leistet, eine Funktion $U(x, y) = s\,[F(x, y)]$ zugeordnet werden kann, die (mit F gemeinsames Niveaukurvensystem hat und) der Gleichung (8) genügt. Da aus (9)

$$s(t) = \int e^{-\int \varphi(t)\,dt}\,dt$$

ist, muß

$$(10)\quad U(x,y) = \int_c^{F(x,y)} e^{-\int_k^t \varphi(t)\,dt}\,dt = \int_c^{F} e^{-\int_k^t \frac{a_1 F_x + a_2 F_y + a_{11} F_{xx} + a_{12} F_{xy} + a_{22} F_{yy}}{a_{11} F_x^2 + a_{12} F_x F_y + a_{22} F_y^2}\,dF}\,dt$$

die gesuchte Funktion sein. Und wegen (9) haben wir auch tatsächlich

$$a_1 U_x + a_2 U_y + a_{11} U_{xx} + a_{12} U_{xy} + a_{22} U_{yy} =$$
$$= e^{-\int_k^F \varphi(t)\,dt}\,[a_1 F_x + a_2 F_y + a_{11} F_{xx} + a_{12} F_{xy} + a_{22} F_{yy} -$$
$$- \varphi(F)\,(a_{11} F_x^2 + a_{12} F_x F_y + a_{22} F_y^2)] = 0, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Also haben wir den

SATZ 1. *Die Bedingung (9) oder die mit ihr äquivalente Differentialgleichungsbedingung dritter Ordnung ist notwendig und hinreichend zum Übereinstimmen des Niveaukurvensystems von $F(x, y)$ mit dem von $U(x, y)$, der Lösungsfunktion der Gleichung (8); die Berechnung von $U(x, y)$ aus $F(x, y)$ wird durch die Formel (10) angegeben.*

Ist insbesondere $a_1(x, y) \equiv a_2(x, y) \equiv 0$, so erhält auch (9) die symmetrische Gestalt

$$\frac{a_{11} F_{xx} + a_{12} F_{xy} + a_{22} F_{yy}}{a_{11} F_x^2 + a_{12} F_x F_y + a_{22} F_y^2} = \varphi(F).$$

3/b. Gleichungen erster Ordnung. Ist U eine Lösung der Gleichung

$$a(x, y) + a_1(x, y)\, U_x + a_2(x, y)\, U_y = 0, \tag{11}$$

bzw. der Gleichung

$$a(x, y)\, U + a_1(x, y)\, U_x + a_2(x, y)\, U_y = 0, \tag{12}$$

so erhält man in einer zur bisher beschriebenen ganz analogen Weise den

SATZ 2. *Für das Übereinstimmen des Niveaukurvensystems von $F(x, y)$ mit dem von $U(x, y)$, der Lösungsfunktion der Gleichung (11) bzw. (12), ist die Bedingung*

$$\frac{a(x, y)}{a_1(x, y)\, F_x + a_2(x, y)\, F_y} = \varphi(F)$$

oder die äquivalente Differentialgleichungsbedingung zweiter Ordnung notwendig und hinreichend; und die Formel

$$U(x, y) = -\int_c^{F(x,y)} \varphi(t)\, dt = -\int_c^{F(x,y)} \frac{a}{a_1 F_x + a_2 F_y}\, dF \tag{13}$$

bzw.

$$U(x, y) = e^{-\int_c^{F(x,y)} \varphi(t)\, dt} = e^{-\int_c^{F(x,y)} \frac{a}{a_1 F_x + a_2 F_y}\, dF} \tag{14}$$

liefert die Berechnung von $U(x, y)$ aus $F(x, y)$.

Übrigens sind (11) und (12) [sowie (13) und (14)] äquivalent, wie die Substitution $\log U(x, y) = V(x, y)$ in (12) sofort zeigt.

3/c. Differentialgleichungssysteme und Differentialgleichungen mit mehr als zwei Veränderlichen. Gleichungssysteme und Gleichungen mit drei oder mehr Veränderlichen, deren Gestalt der der Gleichungen (8), (11), (12) ähnlich ist, lassen sich in der gleichen Weise untersuchen.

Zum Beispiel ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Flächenfamilie $F(x, y, z) = C$ das System äquipotentieller Flächen (das Niveauflächensystem) einer Potentialfunktion $U(x, y, z)$, also einer

Lösung der Laplace'schen Gleichung

$$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 0$$

sei:

$$\frac{F_{xx} + F_{yy} + F_{zz}}{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \varphi(F) \quad \text{und es ist}^1 \quad U(x, y, z) = \int_c^{F(x,y,z)} e^{-\int_k^t \varphi(t)\, dt}\, dt.$$

Betrachtet man andererseits die Funktionen $F(x, y, z)$, zu denen es vier Funktionen $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$, $s(t)$ gibt, derart daß

$$s\,[F(x, y, z)] = f(x) + g(y) + h(z) \tag{15}$$

bestehe, — auch diese Funktionen sind in der Nomographie von Bedeutung —, so erhält man, da die Funktion $U(x, y, z) = s\,[F(x, y, z)]$ durch das Differentialgleichungssystem $U_{xy} = U_{yz} = U_{zx} = 0$ vollständig charakterisiert wird, als notwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen von (15):

$$\frac{F_{xy}}{F_x F_y} = \frac{F_{yz}}{F_y F_z} = \frac{F_{zx}}{F_z F_x} = -\frac{s''(F)}{s'(F)} = \varphi(F)$$

und es ist [5]

$$s(t) = \int e^{-\int \varphi(t)\, dt}\, dt, \qquad U(x, y, z) = \int_c^{F(x,y,z)} e^{-\int_k^t \varphi(t)\, dt}\, dt.$$

4. Probleme. Es stellt sich die Frage, welcher Differentialgleichungsbedingung eine Funktion F genügen muß, damit sie mit einer Funktion U gemeinsames Niveaukurven- bzw. Niveauflächensystem besitze, die Lösungsfunktion einer partiellen Differentialgleichung höherer Ordnung oder anderer Gestalt ist, als die Gleichungen (8), (11), (12).

Ich glaube, daß die Lösung dieses allgemeinen Problems kaum uninteressant oder unbedeutend sein könnte.

Wie man gleich sieht, versagt unsere Methode bei dieser Aufgabe deshalb, weil hier die Einsetzung von $U = s(F)$ in die Differentialgleichnung von U eine Gleichung gibt, deren linke Seite in mehr als zwei Gliederkomplexe zerfällt, die also nicht auf die Gestalt gebracht werden kann, wo ein Ausdruck der Derivierten von F sowie der Koeffizienten eine Funktion von F allein ist.

Durch Differentialgleichun*gssysteme* ist allerdings F mit unserer Methode charakterisierbar, auch wenn die Differentialgleichung, deren Lösung U ist, zu einer weit breiteren Klasse von Differentialgleichungen gehört, in der unter anderen alle linearen Differentialgleichungen, deren Koeffizienten von U unabhängig sind, enthalten sind.

Z. B. bekommt man aus $U(x, y) = s\,[F(x, y)]$,

$$a_1(x, y)\, U_x + a_2(x, y)\, U_y + a_{11}(x, y)\, U_{xx} + a_{12}(x, y)\, U_{xy} + a_{22}(x, y)\, U_{yy} = a(x, y) \tag{16}$$

die Gleichung

$$s''(F)\,(a_{11}\,F_x^2 + a_{12}\,F_x\,F_y + a_{22}\,F_y^2) +$$

$$+\, s'(F)\,(a_1\,F_x + a_2\,F_y + a_{11}\,F_{xx} + a_{12}\,F_{xy} + a_{22}\,F_{yy}) = a$$

oder mit den Bezeichnungen

$$u = \frac{a}{a_{11}\,F_x^2 + a_{12}\,F_x\,F_y + a_{22}\,F_y^2}, \tag{17}$$

$$v = \frac{a_1\,F_x + a_2\,F_y + a_{11}\,F_{xx} + a_{12}\,F_{xy} + a_{22}\,F_{yy}}{a_{11}\,F_x^2 + a_{12}\,F_x\,F_y + a_{22}\,F_y^2},$$

$$s''(F) + s'(F)\,v = u. \tag{18}$$

Derivieren wir dies nach x bzw. y

$$s'''(F)\,F_x + s''(F)\,v\,F_x + s'(F)\,v_x = u_x \qquad F_y$$

$$s'''(F)\,F_y + s''(F)\,v\,F_y + s'(F)\,v_y = u_y \qquad (-F_x)$$

$$s'(F) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ F_x & F_y \end{vmatrix},$$

d. h. mit der Bezeichnung

$$w = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} \tag{19}$$

ist $\begin{vmatrix} w_x & w_y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} = 0$. Dies und (18) ergeben das Gleichungssystem

$$\frac{w_x}{F_x} = \frac{w_y}{F_y} = u - v\,w. \tag{20}$$

Alle unsere Betrachtungen sind umkehrbar und *so ist das Differentialgleichungssystem (20), wo u, v, w die Bedeutung (17), (19) haben, notwendig und hinreichend zum Bestehen von* $U = s(F)$, *falls U der Differentialgleichung (16) genügt.*

Ähnlich, bzw. durch wiederholtes Anwenden desselben Verfahrens lassen sich alle Differentialgleichungen der Gestalt

$$\Phi(x, y; U, U_x, U_y, U_{xx}, U_{xy}, U_{yy}, \ldots) = 0$$

behandeln, wo Φ ein Polynom von U und seinen Derivierten ist, deren Koeffizienten von x und y abhängen. — Allerdings geht dabei auch die Einfachheit des Ergebnisses verloren.

(Eingegangen am 4. Mai 1950.)

ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ УРОВНЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Я. АЦЕЛ (Мишкольц)

(Резюме)

Работа поднимает проблему о том, какому дифференциальному уравнению (или же системе дифференциальных уравнений) должна удовлетворять та функция, у которой система линий поверхностей уровня совпадает с системой линий уровня решений данного дифференциального уравнения. Нахождением искомого дифференциального уравнения, проблема разрешается в следующих случаях: а) В случае, если первоначальное дифференциальное уравнение 1-го порядка и его левая сторона относительно функции и первой производной однородно линейна; б) если оно 1-го порядка и его левая сторона относительно производных функций однородно линейно, а сама функция явно не фигурирует, и в) если оно 2-го порядка и его левая сторона относительно первой и второй производных функции однородно линейна, а сама функция явно не фигурирует. Проблема разрешается также в более общих случаях. Вопрос связан с известными задачами теории потенциала и номографий.

ON FACTORISATION OF GRAPHS

By
T. GALLAI (Budapest)
(*Presented by* P. TURÁN)

§ 1.

By a *graph* we mean in this paper a set of *vertices* (or *points*) and *edges*, where each edge joins two different vertices called the *endpoints* or *extremities* of the edge[1]. A graph is finite if the set of its points and edges is finite. By a *subgraph* is meant a graph which is a subset of the original graph. An edge will be called *adjoint* to a subgraph if one of its endpoints belongs to the subgraph and the other does not; the former endpoint is said to be the *internal* vertex, the latter one the *external* vertex of the adjoint edge. The number of edges adjoint to a subgraph will be called the *adjoint number* of the subgraph. The number of edges adjoint to a single point is termed the *degree* of the point. If every point has a finite degree, the graph is said to be of finite degree or locally finite. If the degree of all points of the graph is the same, then we say the graph is *regular* and its *degree* is the common degree of its points. A regular subgraph containing each point of the original graph is said to be a *factor* of the graph. In particular, if the graph has a factor of degree 1, then each point of the graph belongs to one and only one edge of the factor; the edges of a factor of degree 2 are „circles" having no vertex in common and containing together every vertex of the original graph[2].

A regular graph having a factor has another factor too, called the *complementary factor*, consisting of the edges not belonging to the factor-graph and of all vertices. The original graph is called the *product* of these two factors. The sum of the degrees of these two factors is clearly the degree of the whole graph. A regular graph having no factors is said to be *primitive*.

The first results of considerable importance concerning the factorisation of graphs are due to PETERSEN. He has proved the following theorems on finite regular graphs[3]:

[1] These concepts will be used here only in the combinatorial sense.
[2] D. KÖNIG, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Akad. Verl., Leipzig (1936), pp. 155—159.
[3] J. PETERSEN, Die Theorie der regulären Graphs, *Acta Math.*, **15** (1891), pp. 193-220.

Every regular graph of even degree has a factor of degree 2. Consequently, a regular graph of even degree can be resolved into the product of factors of degree 2.

There exist primitive graphs of any given odd degree.

If the adjoint number of each proper subgraph of a graph of degree 3 exceeds 1 (i. e. the graph has no „bridge"), then the graph has necessarily a factor of degree 2 (and hence one of degree 1).

The conjecture of PETERSEN concerning factors of degree 2 of graphs of odd degrees greater than 3, as well as an extension thereof to factors of higher degree than 2 were proved by BAEBLER[4]. His theorem is as follows:

A finite graph of degree $2m+1$ has a factor of degree 2ϱ, if it has no proper subgraph whose adjoint number is less than 2ϱ.

Since in this case, the complementary factor of a factor of even degree is of odd degree, we have also found a condition for the existence of factors of odd degrees. In particular, in case $\varrho = m$ BAEBLER's theorem yields a condition for the existence of a factor of degree 1.

Recently TUTTE[5] has given a necessary and sufficient condition for the existence of a factor of degree 1 of a (not necessarily regular) finite graph. A new proof of this theorem may be found in § 5 of this paper.

KÖNIG[6] has shown that a special type of graphs, the so-called regular graphs of *even circuits*, can be resolved into the product of factors of degree 1. Starting from a theorem due to HALL[7], R. RADO has given a necessary and sufficient condition for the existence of factors of degree 1 in even (not necessarily regular) graphs[8] (see § 5 of this paper).

The cited theorem of KÖNIG has been generalized to infinite even graphs by KÖNIG and VALKO[9], PETERSEN's theorem on even regular graphs by KÖNIG[10], the HALL—RADO theorem by R. RADO[8] and the TUTTE theorem by TUTTE himself[11].

PETERSEN, KÖNIG and BAEBLER obtained their results by using the method of alternating paths. TUTTE used the elegant method of skew-symmetric determinants.

[4] F. BAEBLER, Über die Zerlegung regulärer Streckenkomplexe ungerader Ordnung, *Comment. Math. Helvetici*, **10** (1938), pp. 275—287.

[5] W. T. TUTTE, The factorization of linear graphs, *Journ. London Math. Soc.*, **22** (1947), pp. 107—111.

[6] Loc. cit.[2], pp. 170—175. A graph is said to be of *even circuit*, or, simply *even*, if it has no circle with an odd number of edges.

[7] P. HALL, On representations of subsets, *Journ. London Math. Soc.*, **10** (1934), pp. 26—30.

[8] R. RADO, Factorization of even graphs, *Quart. Journ. Math.* (Oxford series), **20** (1949), pp. 95—104.

[9] D. KÖNIG und S. VALKÓ, Über mehrdeutige Abbildungen von Mengen, *Math. Annalen*, **95** (1926), pp. 135—138.

[10] D. KÖNIG, loc. cit.[2], pp. 203—205.

[11] W. T. TUTTE, The factorisation of locally finite graphs, *Canadian Journ. Math.*, **2** (1950), pp. 44—49.

In the present paper we will show, by further developping the methods of PETERSEN and BAEBLER, how the cited theorems may be derived from a common source. Even for the existence of factors we shall give a condition which is independent of whether the degree of the graph or of the factor is even or odd. Accordingly we shall get in case of graphs of even degree a condition for the existence of factors of odd degrees higher than 1. This problem was not discussed by the aforesaid papers. Our results on adjoint numbers are sharper than the previous ones.

At first all propositions will be proved for the case of finite graphs (in §§ 4—7 only finite graphs are considered), and then in § 8 we extend the theorems simultaneously to infinite graphs of finite degree.

With the present method I have even found a necessary and sufficient condition for the existence of a factor of degree 2; this will be discussed on another occasion.

§ 2.

Our aims necessitate some subdivision of the edges of the graph into classes. Let us therefore consider a graph G, whose edges are arbitrarily divided into two classes. The edges belonging to the first class will be called α-coloured edges, briefly *α-edges*, while those belonging to the other class will be called *β-edges*. The letters u, v, w, x, y, z, as well as $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$, will serve to denote one of the colours α, β such that

$$x = \alpha \quad \text{implies} \quad \overline{x} = \beta$$
$$\text{and} \quad x = \beta \quad \text{implies} \quad \overline{x} = \alpha.$$

By a *path* we understand a sequence

$$A_0\, e_1\, A_1\, e_2\, A_2 \ldots A_{n-1}\, e_n\, A_n$$

of the vertices $A_0, A_1, \ldots, A_n$ and the *different* edges $e_1, e_2, \ldots, e_n$, where the vertices A_{i-1} and A_i are the extremities of the edge e_i $(i = 1,2, \ldots, n)$. If in the sequence $e_1, e_2, \ldots, e_n$ the α and β-edges follow in an alternating order, we say the path is an *alternating path*. Since no other path will occur in this paper, we shall say simply path instead of alternating path.

This definition lacks of meaning if $n = 1$. However, we shall regard also the sequence $A_0\, e_1\, A_1$, containing one edge only, as an alternating path, provided the A_0 and A_1 are extremities of the edge e_1; moreover we regard any single vertex of the graph in itself as an (alternating) *path without edge*.

If e_1 is a u-edge and e_n is a v-edge, then, if there is no risk of ambiguity, we shall briefly denote this path in the following manner:

$$A_0\, e_1\, A_1 \ldots A_{n-1}\, e_n\, A_n = (A_0^u - {}^v A_n)$$

and we shall say that A_n *is accessible from* A_0 by a path beginning with a u-edge

and ending in a v-edge, briefly *by a uv-path*. For a path consisting of a single u-edge e_1 we write

$$e_1 = A_0\, e_1\, A_1 = (A_0^u - {}^u A_1).$$

For convenience, we shall regard any vertex as a point that is accessible from itself by a $\overline{uu}$-path ($u = \alpha, \beta$). In other words, we postulate for each point A the existence of the paths without edge $(A^\alpha - {}^\beta A)$ and $(A^\beta - {}^\alpha A)$.

If all vertices and edges of the path $(A_0^u - {}^v A_n)$ belong to a subgraph G' of G, we say that the path is lying in G' and A_n is accessible from A_0 within G' by a uv-path.

If the two paths $(A^u - {}^x B)$ and $(B^{\bar{x}} - {}^v C)$ have no edge in common, then they can be united into one path:

$$(A^u - {}^x B) + (B^x - {}^v C) = (A^u - {}^v C).$$

Conversely, every path $(A^u - {}^v C)$ may be decomposed in this manner by means of any of its points B. (In case $B = A$ we put $x = \bar{u}$, and if $B = C$, then $x = v$.)

We shall prove the following lemma.

LEMMA. *If some vertex P of the path $(B^x - {}^y C)$ is accessible from the vertex A by a path $(A^u - {}^v P)$, then from A either B is accessible by a ux-path, or C by a uy-path. The new path consists of certain edges of the two old paths.*

Let T denote the first point lying on the path $(A^u - {}^v P)$ which is also a point of the path $(B^x - {}^y C)$. Then we decompose these paths:

$$(B^x - {}^y C) = (B^x - {}^z T) + (T^{\bar{z}} - {}^y C)$$

and

$$(A^u - {}^v P) = (A^u - {}^w T) + (T^{\bar{w}} - {}^v P).$$

The path $(A^u - {}^w T)$ has no edge in common with the path $(B^x - {}^y C)$. Therefore, if $z = \bar{w}$, then

$$(A^u - {}^w T) + (T^z - {}^x B) = (A^u - {}^x B),$$

or, if $z = w$, then

$$(A^u - {}^w T) + (T^{\bar{z}} - {}^y C) = (A^u - {}^y C)$$

constitutes a path satisfying the postulates of the lemma.

§ 3.

Let A denote an arbitrary but fixed point of the graph G. Let us consider the vertices of G from the point of view of accessibility from this fixed point A by paths beginning with a β-edge.[12] From now on, if no mention is made

[12] A classification of certain points of a graph from a similar point of view may be found in J. PETERSEN, loc. cit.[3], pp. 211–212 and in D. KÖNIG, loc. cit.[2], pp. 232–233.

of the starting point of a path and the colour of its starting edge, we shall always understand a path issuing from A and beginning with a β-edge. In case a path $(A^{\beta} - {}^{x}P)$ exists, we shall call P briefly an *accessible point*. If no such path leading up to P can be found, then P is said to be an *inaccessible point*.

The accessible points can be divided into three classes. Points accessible by a path ending in an α-edge, but not by a path ending in a β-edge, are called *α-points*. Similarly are defined the *β-points*. Points accessible by paths of both kinds are called *γ-points*.

As we have required the existence of the path $(A^{\beta} - {}^{\alpha}A)$ without edge we conclude that

(3,1) *A is either an α-point or a γ-point.*

Let us consider an arbitrary edge: $PeQ = (P^{u} - {}^{u}Q)$. If P is accessible i. e., a path $(A^{\beta} - {}^{x}P)$ exists, then our Lemma in § 2 implies that either a path $(A^{\beta} - {}^{u}P)$ or a path $(A^{\beta} - {}^{u}Q)$ must also exist. Hence it follows that both points, P and Q, are not simultaneously $\bar{u}$-points, that is, both extremities of a u-edge are not $\bar{u}$-points. In detail this means:

(3,2) *two α-points are not connected by a β-edge;*

(3,3) *two β-points are not connected by an α-edge.*

If, in addition, Q is inaccessible, then of the two former paths only $(A^{\beta} - {}^{u}P)$ exists, therefore P is either a u-point or a γ-point. The latter case is impossible, since this would imply the existence of a path $(A^{\beta} - {}^{\bar{u}}P)$, further, considering that Q is inaccessible, this path could not contain PeQ; consequently, the paths $(A^{\beta} - {}^{\bar{u}}P)$ and $(P^{u} - {}^{u}Q)$ could be united into one path, which contradicts the inaccessibility of Q:

(3,4) *an inaccessible point is not connected with a γ-point, it can be connected with an α-point only by an α-edge or, with a β-point only by a β-edge.*

Let us now consider the subgraph Γ consisting of the γ-vertices of the graph and of all edges joining these vertices. This graph is either *coherent*[13] or falls into coherent parts or, briefly, *blocks*:[14] $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ (i. e., subgraphs which have no vertex in common):

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots$$

(3,5) *The external point of an edge adjoint to a Γ_i must be either an α-point or a β-point,*

since it can be neither a γ-point because of the definition of Γ_i, nor an inaccessible point because of (3,4).

[13] In general, a graph is called coherent, if any two points of it are connected by a „path" of the graph (here the „path" is not necessarily alternating).

[14] In PETERSEN, loc. cit. [3], p. 214, „Systeme zweipfeiliger Linien", in BAEBLER, loc. cit.,[4] p. 280, G-komplexes correspond to these blocks.

If we proceed along a path issuing from A to one of the vertices of the block Γ_i, we have to enter the block through an edge adjoint to this block (not to mention the case when the whole path together with A lies in block Γ_i). If the external point of such an adjoint edge is an α-point, then the edge can be nothing el e but a β-edge; if on the other hand the external point is a β-point, the edge must be an α-edge. In what follows we shall call every edge adjoint to the block Γ_i, whose external point is a u-point and which is a $\bar{u}$-edge, an *entering edge* of the block.

The following theorem is intended to serve as the main tool in later considerations and theorems.

THEOREM I. *There is at most one entering edge adjoint to a block Γ_i. If Γ_i does not contain A, there is one entering edge, in case Γ_i does contain A, there is none.*

Let us consider a path $(A^\beta - {}^xR)$ leading to some point R of Γ_i and let the first point of this path which belongs to Γ_i be denoted by A_i. Then $(A^\beta - {}^xR) = (A^\beta - {}^{\bar{v}}A_i) + (A_i^v - {}^xR)$, where the path $(A^\beta - {}^{\bar{v}}A_i)$ has no edge belonging to Γ_i. We shall examine the accessibility of the points of Γ_i from A_i by paths beginning with a v-edge and lying in Γ_i. (In what follows, when speaking of *accessibility within* Γ_i we shall confine ourselves to the accessibility from A_i by a path beginning with a v-edge and lying in Γ_i.)

Let us first prove two auxiliary theorems.

AUXILIARY THEOREM I. *If some point R of Γ_i is accessible within Γ_i by a path ending in a y-edge, then it is also accessible within Γ_i by a path ending in a $\bar{y}$-edge.*

Assuming the existence of a path $(A_i^v - {}^yR)$ in Γ_i we shall prove the existence of a path $(A_i^v - {}^{\bar{y}}R)$ lying in Γ_i.

As R is a γ-point, there exists a path $(A^\beta - {}^{\bar{y}}R)$. If all edges of this path belong to Γ_i, then all its points together with A belong to Γ_i; then $(A^\beta - {}^{\bar{y}}R)$ is a desired path, since $A_i = A$ and $v = \beta$.

If the path $(A^\beta - {}^{\bar{y}}R)$ has an edge not belonging to Γ_i, then let $e = MeN = (M^z - {}^zN)$ denote the last of such edges. e is evidently an edge adjoint to Γ_i, M is its external point and N is its internal point. We have

$$(A^\beta - {}^{\bar{y}}R) = (A^\beta - {}^{\bar{z}}M) + (M^z - {}^zN) + (N^{\bar{z}} - {}^{\bar{y}}R),$$

where the path $(N^{\bar{z}} - {}^{\bar{y}}R)$ lies in the block Γ_i. Owing to our Lemma, from the existence of the paths $(N^{\bar{z}} - {}^{\bar{y}}R)$ and $(A_i^v - {}^yR)$ lying in Γ_i we may conclude that there must exist either a path $(A_i^v - {}^{\bar{y}}R)$ lying in Γ_i (in this case the auxiliary theorem has already been proved) or a path $(A_i^v - {}^{\bar{z}}N)$ lying in Γ_i. In the latter case the edge e must belong to the path $(A^\beta - {}^{\bar{v}}A_i)$, for otherwise the paths $(A^\beta - {}^{\bar{v}}A_i)$, $(A_i^v - {}^{\bar{z}}N)$ and $(N^z - {}^zM)$ having no

edge in common could be united into one path. This is impossible, because in view of the path $(A^{\beta} - \overline{{}^{z}M})$ the point M would be accessible from A by a path ending in a z-edge as well as by one ending in a $\overline{z}$-edge; in other words, M would be a γ-point contrary to (3,5). This shows that in the second alternative the edge e belongs in fact to the path $(A^{\beta} - \overline{{}^{v}A_i})$. But this can happen only if $N = A_i$ and $z = \overline{v}$. Then

$$(N^{\overline{z}} - \overline{{}^{y}R}) = (A_i^{v} - \overline{{}^{y}R})$$

is a desired path.

AUXILIARY THEOREM II. *Every point of Γ_i is accessible within Γ_i both by paths ending in α-edges and by those ending in β-edges.*

Owing to auxiliary theorem I all we have to prove is that every point of Γ_i is accessible within Γ_i by some path.

Let us consider all points of Γ_i which are accessible within Γ_i and let us denote the subgraph consisting of these points and of the edges joining these points by $\overline{\Gamma}_i$. Since the path $(A_i^{v} - \overline{{}^{v}A_i})$ (without edge) exists, A_i is accessible within Γ_i; therefore $\overline{\Gamma}_i$ is not void. Assuming that there is a point inaccessible within Γ_i, i. e. $\overline{\Gamma}_i \neq \Gamma_i$, from the coherence of Γ_i it follows that there is a point K, inaccessible within Γ_i, connected with a point L accessible within Γ_i. The joining edge $f = Kf L = (K^{x} - \overline{{}^{x}L})$ does not belong to $\overline{\Gamma}_i$. In accordance with auxiliary theorem I L is accessible within Γ_i by paths of any ending edge, therefore a path $(A_i^{v} - \overline{{}^{x}L})$ in Γ_i must exist. All its vertices and edges are also in $\overline{\Gamma}_i$ and thus the edge f can be united with it in the following manner:

$$(A_i^{v} - \overline{{}^{x}L}) + (L^{x} - {}^{x}K) = (A_i^{v} - {}^{x}K).$$

This is, however, contradictory to the inaccessibility of K within Γ_i. Consequently, there is no point inaccessible within Γ_i, q. e. d.

Using the auxiliary theorems we can prove theorem I as follows.

Let us assume that the edge $g = (S^{u} - {}^{u}T)$ is one of the entering edges of the block Γ_i. If S is the external point of this edge, then S is a $\overline{u}$-point. The internal point T is accessible from A_i, according to auxiliary theorem II, by a path $(A_i^{v} - \overline{{}^{u}T})$ in Γ_i. The paths $(A^{\beta} - \overline{{}^{v}A_i})$, $(A_i^{v} - \overline{{}^{u}T})$ and $(T^{u} - {}^{u}S)$ can not be united into one path $(A^{\beta} - {}^{u}S)$, for S would be in this case accessible by a path ending in a u-edge, i. e., it would not be a $\overline{u}$-point. The only case when these three paths can not be united into a single path is clearly that when g is an edge of the path $(A^{\beta} - \overline{{}^{v}A_i})$. This is inconsistent if $A_i = A$; therefore, if Γ_i contains A, no entering edge exists. If $A_i \neq A$, then the only case when g lies in the path $(A^{\beta} - \overline{{}^{v}A_i})$ is when $T = A_i$ and g is the last edge of the path. Hence it follows that g is the only entering edge of Γ_i, q. e. d.

The above discussions imply that

(3,6) *each block Γ_i contains more than one point.*

For auxiliary theorem II ensures the existence of a path $(A_i^{\nu} - {}^{\nu}A_i)$ in Γ_i. This is not without edge and therefore it contains more than one point.

§ 4.

Now we come to the problem of examining the condition for the existence of a factor of degree $\sigma \geqq 1$ of a finite graph[15]. We have to find a condition for the case when the edges of the graph G can be coloured by the colours α and β so that in each point the number of the incident α-coloured edges sha

The edges in any graph can certainly be coloured so that the number of the α-edges incident to each vertex of the graph is at most σ (*„admissible colouring"*). We shall henceforth allow such a type of colouring only.

If the number of α-edges incident to one vertex is just σ, we shall call this point *saturated*, and if it is less than σ, we call the point *unsaturated*. In the latter case the number of the missing α-edges will be called the *deficiency* of the vertex.

Let us now consider an admissible colouring for which the sum of the deficiencies taken for all points is minimal. Such a colouring necessarily exists by the finiteness of the graph.

No *„singular path"* may exist in case of such a colouring, i. e., no path $(B^{\beta} - {}^{\beta}C)$ where B and C are unsaturated and the sum of its deficiencies exceeds 1 (the latter requirement guarantees that if $B = C$, the deficiency in this point is greater than 1). In fact, changing the colours of the edges in such a path, we diminish the deficiencies with 1 in B and C, and leave them unaltered in the other points. The new colouring is again an admissible one because of the properties of the singular path. Here the deficiency sum would be 2 less than the minimal, which is absurd.

Furthermore let us assume that

(4, H) the graph G has no factor of degree σ,

i. e., no colouring exists, where every point is saturated, or otherwise, the minimal sum of deficiencies is greater than 0. We show that assuming this hypothesis we shall obtain results contradictory to some other assumptions and therefore, these assumptions will assure the existence of a factor of degree σ.

We shall transfer the notations and statements of the previous sections to the colouring of a graph G with a minimal sum of deficiencies, so that *A shall always stand for an unsaturated point of the graph.*

[15] Since in §§ 4—7 we confine ourselves exclusively to finite graphs, the term „finite" will in general be suppressed.

What has been said about the singular path implies

(4,1) *every β-point and every γ-point is saturated with the only exception of the point A if A is a γ-point and in this case the deficiency in A is exactly 1.*

Since the factorisation problem is essentially simpler in case $\sigma = 1$, and therefore we can establish more general theorems, first we shall deal with this case separately.

§ 5.

We consider now the case $\sigma = 1$. Since apart from A, to an α-point at least one α-edge must be incident, the α-points are now saturated. To every α-point and by (4,1) even to every β- and γ-point (except A) exactly one α-edge is incident. We can also conclude that

(5,1) *an α-edge issuing from an α-point ends neither in an α-point nor in an inaccessible point.*

Indeed, an edge $(P^\alpha - {}^\alpha Q)$ is the *only* α-edge incident to both P and Q. If P is an α-point, i. e., there exists a path $(A^\beta - {}^\alpha P)$, then the last edge in this path is necessarily $(Q^\alpha - {}^\alpha P)$. Leaving this edge aside, the path $(A^\beta - {}^\beta Q)$ remains. But this means that Q is neither an α-point nor an inaccessible point, as stated.

(5,2) *The entering edge adjoint to a Γ_i is an α-edge.*

The internal point A_i of an entering β-edge would be — in accordance with auxiliary theorem II — accessible from A_i within Γ_i by an $\alpha\alpha$-path. (In the present case $\overline{v} = \beta$, $v = \alpha$.) Then two α-edges would be incident to A_i, what is impossible because of $\sigma = 1$. Similarly, auxiliary theorem II implies that every point of Γ_i is accessible within Γ_i by a path ending in an α-edge, therefore each point of Γ_i with the sole exception of A_i is an endpoint of some α-edge belonging to Γ_i. Hence it follows on the one hand that

(5,3) *besides the entering α-edge, only β-edges are adjoint to Γ_i,*

and on the other hand that

(5,4) *every Γ_i consists of an odd number of points,*

viz. it consists of the point A_i and of an even number of extremities of α-edges having no vertex in common.

Consequently, the graph will have the following structure:

A β-edge issuing from an α-point ends neither in an α-point (3,2), nor an inaccessible point (3,4), nor a γ-point (5,2); hence its endpoint is a β-point.

An α-edge issuing from an α-point terminates neither in an α-point, nor an inaccessible point (5,1), nor a γ-point (5,3); thus its endpoint is a β-point.

The external point of a β-edge adjoint to a block Γ_i is neither an α-point (5,2), nor an inaccessible point (3,4), nor, by definition of Γ_i, a point belonging to another block, consequently it is a β-point.

The single α-edge adjoint casually to a block Γ_i must start, by (5,2) and by definition of Γ_i, from a β-point.

By (4,1), to each β-point an α-edge is incident which ends neither in a β-point (3,3), nor in an inaccessible point (3,4), i. e., it ends either in an α-point or is the entering edge of some block Γ_i.

These discussions show that, leaving A out of consideration, each α-point is the endpoint of one and only one α-edge issuing from a β-point, and each block (with the exception of the block containing A, if this exists) has one and only one α-edge of the same type as its sole entering edge. Hence it follows that there is a one-to-one correspondence between the set of all α-points and blocks Γ_i (except A resp. the block containing A) and the set of β-points. If we omit now the β-points and every edge issuing from them, then the α-points become isolated points and the blocks Γ_i lose their adjoint edges. The α-points and the blocks Γ_i are coherent parts of the remaining graph and each of them contains an odd number of points. But the above correspondence shows that these parts are, just because of the existence of A, in number one more that the β-points omitted.

Thereby we have given a new proof for the sufficiency of TUTTE's theorem:[5]

If a graph has no factor of degree 1, then there is a subset (void or not) of the points of the graph such that by omitting it together with the edges incident to these points, we arrive at a graph whose coherent parts containing an odd number of points are in number more than the number of points omitted.

The converse of this theorem also holds; the following proof is due to TUTTE.[5] If a graph has a subgraph with stated properties, and a factor of degree 1 existed, then to each part arising by the omission we should have to find an adjoint edge of the original graph, which is also an edge of the factor of degree 1. This follows from the fact the number of the points is odd and therefore the edges of the factor incident to the points of a part can not all be edges of the same part. Clearly, the external endpoint of this adjoint edge must be one of the points omitted. But this is impossible, since the number of the points omitted is less than the number of the parts and two edges of a factor of degree 1 have no point in common.

We also give another formulation of TUTTE's theorem; for this purpose we introduce some new terminologies which we shall use later.

Two subgraphs containing no common points, of a graph are *connected* if there is an edge whose endpoints are in the first and in the second subgraph, respectively. A point is connected with a system of subgraphs, if it is

connected with at least one of them. We shall speak of *independent subgraphs*, or of a set of independent subgraphs, if no two of them have a point in common and no two are connected.

Now TUTTE's theorem may be reformulated as follows.

A necessary and sufficient condition that a finite graph shall have a factor of degree 1, is that the number of points connected with any system of independent subgraphs containing an odd number of points shall not be less than the number of the subgraphs in the system.

Let us now assume that the graph in question is even.

It is a well-known elementary fact[16] that the points of such a graph may be divided into two groups in such a manner that no two points belonging to the same group are connected by an edge. The edges of the graph are therefore edges connecting two points of different groups. Thus if we start from A along a path with a β-initial edge, we arrive alternately at points of the two groups. Therefore the points accessible by a path ending in an α-edge belong to the same group as A, and the β-points to the other group. Hence we conclude that the α-points are independent and the graph fails to have γ-points. (Both assertions hold even if $\sigma > 1$.) This implies that the α-edges issuing from β-points terminate in α-points. As we have seen, the α-points are connected neither with each other, nor with inaccessible points; consequently, these points (together with A) form a system of independent points, which is connected only with β-points whose number is one less than that of this system. Therefore, if an even graph has no factor of degree 1, then it has a system of independent points, connected with points in number less than the number of the points in the system.

On the other hand, it is trivial that the existence of a factor of degree 1 implies the possibility of finding to any choice of independent points, points in number equal to the chosen points such that any of them is connected with some of the chosen points. For, if we consider the edges of the factor of degree 1 which are incident to the chosen points, the other endpoints of these edges have the required property.

This completes a new proof of the HALL—RADO theorem:[7,8]

A necessary and sufficient condition for the existence of a factor of degree 1 of a finite even graph is that with any system of independent points at least as many points shall be connected as the number of the points in the system.

Thus we see that, against TUTTE's theorem, in case of even graphs it is sufficient to consider only systems of independent points instead of independent systems of subgraphs containing an odd number of points.

[16] KÖNIG, loc. cit.[2], pp. 151 and 170.

§ 6.

Let us turn our attention to the case of factors of degree $\sigma > 1$. Our method applies in case $\sigma > 2$ only for regular graphs[17]. Therefore, in the following chapter we assume that the finite graph G is a regular graph of degree $\nu > 1$. At the same time we may assume — without loss of generality — that the graph is coherent. By the regularity, if there is a factor of degree σ, then its complementary factor exists and is of degree $\tau = \nu - \sigma$.

Since the number of points of odd degree of a graph is even, it follows that if at least one of σ and τ is odd, then factors of degree σ resp. τ can exist only in case G contains an even number of points. If $\nu = \sigma + \tau$ is also odd, then this condition is automatically satisfied. However, we assume that

(6,C) *if both σ and τ are odd, then the graph has an even number of points.*

Now we are going to show that, if we proceed again by assuming the failure of factors of degree σ (4,H), then by making use of the regularity and coherence of the graph as well as of condition (6,C) we are led to a contradiction arising against the hypothesis that the adjoint numbers of proper subgraphs exceed certain bounds. The fulfilment of these conditions will therefore ensure the existence of a factor of degree σ (and at the same time one of degree τ).

In order to establish the structure of the graph we shall introduce a few more notations.

We shall denote the block Γ_i containing A (inasmuch as such a block exists) by Γ_A, and the number of α- and β-edges adjoint to Γ_A by λ_α and λ_β respectively (if Γ_A does not exist, we put $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = 0$).

We shall write Γ_{α_i} for the blocks to which an α-coloured entering edge belongs, and Γ'_{α_i} for those Γ_{α_i} to which no α-edge other than the entering edge is adjoint. g_α will denote the number of the blocks Γ_{α_i}, and g'_α the number of the blocks Γ'_{α_i}. The marks Γ_{β_i}, Γ'_{β_i}, g_β, g'_β have similar meanings.

Let n_α denote the number of α-points and n_β that of β-points. Let further ε mean 1 if A is an α-point and 0 if A is a γ-point (cf. (3,1)).

We are going to show that

(6,1) *each block Γ'_{α_i} or Γ'_{β_i}, if they exist, contains an odd number of points.*

Let us consider, for instance, the α-edges of a block Γ'_{α_i}, leaving all other α-edges aside. If σ is odd, then of the points of Γ'_{α_i} only the entering point (i. e., the internal endpoint of the entering edge) is of even degree in the α-edges, for all points being γ-points are saturated (4,1). Then the fact that the number of the points of odd degree is even implies (6,1). If σ is even,

[17] With the present method I have succeeded in getting factorisation theorems for general graphs besides $\sigma = 1$ only for the case $\sigma = 2$. I shall discuss these results on another occasion.

then only the entering point might be of odd degree in the α-edges. This is, however, impossible and therefore we have

(6,2) *if σ is even, then no block $\Gamma'_{\alpha i}$ exists, i. e. $g'_\alpha = 0$.*

The same inference shows that

(6,3) *if τ is even, no block $\Gamma'_{\beta i}$ exists, i. e. $g'_\beta = 0$.*

The existence of Γ_A, i. e., the fact that A is a γ-point, implies the existence of an edge adjoint to it. For, in the contrary case, in view of (4,1) we could show as before that both σ and τ are odd and Γ_A has an odd number of points. Because of the coherence of G we have then $G = \Gamma_A$ in contradiction to our assumption (6,C). Therefore we may state that if Γ_A exists ($\varepsilon = 0$), then $\lambda_\alpha + \lambda_\beta > 0$ and hence

(6,4) *ε, λ_α and λ_β do not vanish simultaneously.*

Let us denote by ξ the minimum of the adjoint numbers of those proper subgraphs of the graph, wh ich contain an odd number of points. The coherence implies $\xi \geqq 1$.

We shall count in two ways the α-edges incident to α-points[18] and the β-edges incident to β-points and then compare the results.

First method of counting. The number of the α-edges incident to α-points is by no means greater than $n_\alpha \sigma - \varepsilon$.

Second method of counting. The number α-edges issuing from a β-point is exactly σ [cf. (4,1)]. The α-edges leading from β-points to γ-points are the entering edges of the blocks Γ_{α_i}, their number is g_α (Theorem I). The other α-edges issuing from β-points end in α-points [(3,3) and (3,4)]. Hence the number of α-edges connecting α-points with β-points is $n_\beta \sigma - g_\alpha$.

The α-edges adjoint to Γ_A end in α-points, this follows from Theorem I and (3,4). Their number is λ_α.

In addition to the entering edge, at least one more α-edge is adjoint to every Γ_{α_i} which is not a $\Gamma'_{\alpha i}$. These end in α-points [Theorem I and (3,4)]; their number is at least $g_\alpha - g'_\alpha$.

By the definitions of the blocks $\Gamma'_{\beta i}$ and the number ξ, the number of α-edges adjoint to a block $\Gamma'_{\beta i}$ is at least $\xi - 1$ and they end in α-points [Theorem I and (3,4)]. Their number is at least $g'_\beta (\xi - 1)$.

Collating the two results, it is required that

$$(n_\beta \sigma - g_\alpha) + \lambda_\alpha + (g_\alpha - g'_\alpha) + g'_\beta (\xi - 1) \leqq n_\alpha \sigma - \varepsilon,$$

whence

(6,5) $$\varepsilon + \lambda_\alpha + g'_\beta (\xi - 1) - g'_\alpha \leqq (n_\alpha - n_\beta) \sigma .$$

[18] An α-edge incident to β-points on both ends is counted twice; the same is true for the β-edges.

Turning our attention to the β-edges, *by the first method of counting* the number of β-edges incident to β-points is $n_\beta \tau$.

By the second method the number of β-edges issuing from an α-point is at least τ. (If A is an α-point, then it is for this point at least $\tau + 1$.) g_β of these are adjoint to some of $\Gamma_{\beta i}$, the rest of them ends in β-points [Theorem I, (3,2) and (3,4)]. Hence the number of the latter ones is at least $n_\alpha \tau + \varepsilon - g_\beta$.

The same inference as above shows that the numbers of β-edges in the corresponding three cases are λ_β, at least $g_\beta - g'_\beta$ and at least $g'_\alpha(\xi - 1)$ respectively.

By comparing the results we get

$$(n_\alpha \tau + \varepsilon - g_\beta) + \lambda_\beta + g'_\alpha (\xi - 1) + (g_\beta - g'_\beta) \leqq n_\beta \tau ,$$

whence

$$\varepsilon + \lambda_\beta + g'_\alpha (\xi - 1) - g'_\beta \leqq (n_\beta - n_\alpha) \tau. \tag{6,6}$$

By eliminating n_α and n_β from (6,5) and (6,6) we get

$$\varepsilon (\sigma + \tau) + \tau \lambda_\alpha + \sigma \lambda_\beta + g'_\alpha[\sigma (\xi - 1) - \tau] + g'_\beta[\tau (\xi - 1) - \sigma] \leqq 0 . \tag{6,7}$$

According to (6,4), since $\sigma > 0$, $\tau > 0$, we obtain

$$g'_\alpha[\sigma (\xi - 1) - \tau] + g'_\beta [\tau (\xi - 1) - \sigma] < 0 . \tag{6,8}$$

We find a contradiction to our hypothesis (4,H) if we stipulate the inequalities

$$\sigma (\xi - 1) - \tau \geqq 0 \qquad \text{and} \qquad \tau (\xi - 1) - \sigma \geqq 0, \tag{6,9}$$

i. e.,

$$\xi \geqq \frac{\nu}{\sigma} \quad \text{and} \quad \xi \geqq \frac{\nu}{\tau} .$$

We have thereby proved the following theorem:

THEOREM II. *A coherent regular finite graph of degree $\nu = \sigma + \tau$ can be decomposed into the product of factors of degree σ and of degree τ, if the adjoint numbers of its proper subgraphs containing an odd number of points exceed or equal the greater of the numbers $\frac{\nu}{\sigma}$ and $\frac{\nu}{\tau}$; provided that whenever both σ and τ are odd, the graph has an even number of points.*

(6,9) is equivalent to

$$\frac{\nu}{\xi} \leqq \sigma \leqq \nu - \frac{\nu}{\xi}. \tag{6,10}$$

Theorem II can be reformulated as follows:

COROLLARY 1. *The graph has a factor of degree σ for every number σ satisfying the following condition:*

$$\frac{\nu}{\xi} \leqq \sigma \leqq \nu - \frac{\nu}{\xi}$$

provided that, in case σ is odd and ν is even, the graph has an even number of points.

§ 7.

By considering the evenness resp. oddness of the numbers σ, τ and ν, we can further sharpen the above results.

a) (6,2) and (6,3) show that if *both σ and τ are even*, then

$$g'_\alpha = g'_\beta = 0.$$

This is contradictory to (6,8) and to assumption (4,H). This implies PETERSEN's theorem[3] on graphs of even degree:

Every finite graph of even degree may be splitted into the product of two factors of arbitrary even degrees. (Of course, the sum of the degrees of the factors must be equal to the degree of the graph.)

b) *If σ is even and τ is odd,* then we can ascertain the vanishing of g'_α only. Then the inequality

$$\tau(\xi - 1) - \sigma \geqq 0$$

resp. the hypothesis

$$\xi \geqq \frac{\nu}{\nu - \sigma} \quad \text{or} \quad \sigma \leqq \nu - \frac{\nu}{\xi} \tag{7,1}$$

contradicts (6,8) and so even (4,H). Hence we have

THEOREM III. *A finite graph of an odd degree ν has a factor of even degree σ if ξ satisfies condition* (7,1).

Now we prove the following

LEMMA. *ξ is even or odd according as ν is even or odd.*

All subgraphs of a graph of even degree have an even adjoint number. For let us consider an arbitrary subgraph and let us complete it by all those edges of the original graph whose both endpoints belong to this subgraph. Then unite all external points of the edges adjoint to this subgraph into one point K. All points different from K of the graph thus arising are of even degree and thus K cannot be the only point of odd degree. Hence the adjoint number of each subgraph is even, in fact. Similar arguments show that a subgraph having an odd number of points, of a graph of odd degree, has an odd adjoint number. This completes the proof of the lemma.

In view of this lemma we see that for graphs of an odd degree $\xi > 1$ implies $\xi \geqq 3$ and from Theorem III we conclude

THEOREM IV. *If a finite graph of an odd degree ν has no „bridge" ($\xi > 1$), then it has always a factor of any even degree not exceeding $\frac{2}{3}\nu$, consequently, also a factor of any odd degree not less than $\frac{1}{3}\nu$.*

If $\nu = 3$, we get PETERSEN's theorem quoted in § 1.

Since by $0 < \sigma < \nu$

$$\frac{\nu}{\nu - \sigma} \leqq \sigma + 1,$$

the existence of (7,1) follows from the condition $\xi \geqq \sigma + 1$. On the other hand, if ξ is odd and σ is even, it is enough to suppose $\xi \geqq \sigma$. Accordingly, we have

A finite graph of odd degree has a factor of even degree σ if $\xi \geqq \sigma$.

This is BAEBLER's theorem cited in § 1.

c) *If both σ and τ are odd,* then ν and hence by lemma ξ is even. In this case for instance $\xi > 2$ implies $\xi \geqq 4$ and so, if $\xi > 2$, by (6,10) factors of degree σ can be found for every σ satisfying the inequality $\frac{\nu}{4} \leqq \sigma \leqq \frac{3\nu}{4}$. The condition $\xi > 2$ can be replaced by the condition that the graph has no „double bridge", i. e., by omitting any two edges the coherence of the graph will not be destroyed. Consequently, we have proved

THEOREM V. *If a coherent finite graph of even degree with an even number of points has no double bridge, then it has a factor of degree σ for every σ satisfying the inequality*

$$\frac{\nu}{4} \leqq \sigma \leqq \frac{3\nu}{4}.$$

We remark that in case of an even ν it follows $\xi \geqq 2$ and hence the inequality

$$\frac{\nu}{\xi} \leqq \frac{\nu}{2} \leqq \nu - \frac{\nu}{\xi}$$

is fulfilled without any further assumption. This means :

A finite graph of an even degree ν with an even number of points always possesses a factor of degree $\frac{\nu}{2}$. (KÖNIG.[19])

As it has been shown in § 5, an even graph contains no γ-points, hence Γ_{α_i} and $\Gamma'_{\beta_i'}$ fail to exist. Consequently, $g'_\alpha = g'_\beta = 0$ is always true, leading at once to a contradiction to (4,H) and proving that the graph has a factor of degree σ whatever the value of σ ($\sigma \leqq \nu$). Since A is necessarily an α-point, ε is equal to 1 and so we have not even to assume[20] (6,C) to prove (6,4). We thus get

[19] KÖNIG, loc. cit. [2], p. 160.

[20] We remark that for for regular even graphs, as easily proved, (6, C) is automatically fulfilled.

A regular finite even graph possesses a factor of any degree not exceeding the degree of the graph. (KÖNIG.[21])

§ 8.

In this section we extend the results of the previous sections to infinite graphs of finite degree. Since a coherent graph of finite degree may have only denumerable points[22], in what follows we may confine ourselves only to graphs containing denumerable points. Evidently, in an infinite graph of finite degree the edges adjoint to any finite subgraph are finite in number.

We are going to prove the following theorem.

THEOREM VI. *Suppose that an infinite graph G of finite degree satisfies the conditions for the existence of factors of degree σ of finite graphs stated in §§ 5—7 with the trivial exception of the condition of containing an even number of points) such that by „systems of points," „subgraphs," „coherent parts" of G we mean only the f i n i t e ones. Then G has a factor of degree σ.*

This theorem essentially contains as special cases the theorems of KÖNIG—VALKÓ, KÖNIG, RADÓ and TUTTE cited in §1.

In the preceding discussions the finiteness of the graph was first used in § 4, when we assumed the existence of a minimal deficiency-sum. Hence we concluded that the graph has no singular path and this led us to (4,1) on which all subsequent statements are based. Besides this we used the finiteness of the graph only through the finiteness of the number of accessible points in the graph.

Starting with the assumptions and notations of §3 we shall show, applying a reasoning due to KÖNIG and VALKÓ[9], that every infinite graph of finite degree has a colouring such that the number of α-edges incident to any point does exceed σ and there is no (finite) singular path in the sense of §4. We shall call such colourings *suitable*.

Let $P_1, P_2, \ldots$ denote the points of the graph in some order. By G_n $(n = 1, 2, \ldots)$ we shall mean the subgraph consisting of the points $P_1, P_2, \ldots, P_n$ and the edges connecting these points. If $k < l$, G_k is a subgraph of G_l; each colouring of G_l implies a colouring of G_k which will be called a part of the colouring of G_l, and the colouring of G_l is said to be an extension of the colouring of G_k. (We observe that for the sake of uniformity we shall also speak of the colouring of graphs without edge, this having all other colourings as its extension.) It is evident that each finite graph G_n has admissible colourings with a minimal deficiency-sum, i. e. suitable colourings, but only a finite number of them.

[21] KÖNIG, loc. cit. [2], pp. 170—195.

[22] KÖNIG, loc. cit. [2], pp. 73—80.

The suitable colourings of the graphs $G_2, G_3, \ldots$ imply suitable colourings of G_1. Therefore, G_1 has a colouring which is part of an infinity of suitable colourings. Let us fix one of such colourings of G_1, and in what follows we consider only the extensions of this fixed colouring. Each of these implies a suitable colouring on G_2, hence G_2 has a suitable colouring which is part of infinitely many suitable colourings, etc. We proceed in this manner to get fixed suitable colourings of the graphs $G_1, G_2, \ldots$ such that each is an extension of its predecessor. Therefore, each edge of G obtains a well-defined colour and this defines a colouring of G which is evidently suitable (since a singular path of G would be that of some G_n).

Assume now that the graph satisfies the conditions of Theorem VI. We shall arrive at a contradiction to the hypothesis that

(8,H) the graph has no factor of degree σ.

Owing to (8,H), in every suitable colouring the graph must have unsaturated points. But unsaturated points may only occur such that the points accessible from any fixed one of them on a path with an initial β-edge are infinite in number. For, if an unsaturated point existed from which only finitely many points were accessible by paths with initial β-edges, then choosing this point for the point A of § 4, (4,1) would be true because of the suitability of the colouring and we should arrive, applying the reasonings of §§ 5—7, at a contradiction to the hypotheses of Theorem VI.

Let us choose an arbitrary suitable colouring and let the unsaturated points be $A_1, A_2, \ldots$ (this is either a finite or an infinite sequence). From each of these points infinitely many points are accessible by a path beginning with a β-edge. Now we show that in this case from each of these points an infinite alternating path starts, having an initial β-edge.

Consider A_j and the infinitely many alternating paths issuing from A_j and beginning with a β-edge. If $l > n$, then a path consisting of l edges contains a subpath of n edges. Because of the finite degree of the graph, the number of paths containing n edges are finite in number. Hence, there is a path with n edges which is part of infinitely many paths, and applying the same inference as above, we conclude that there is an infinite alternating path issuing from A_j with an initial β-edge.

If we interchange the colours of the edges on such a path, we diminish the deficiency of A_j without altering the deficiencies of the other points. We shall prove at the end of this section that the new colouring got by interchanging the colours is again a suitable colouring of the graph. Suppose that we have already verified this statement.

At first, interchange the colours of an infinite path issuing from A_1. If A_1 is yet unsaturated, do the same with another path of the same type etc. until A_1 becomes saturated. Then we apply the same process on $A_2, A_3, \ldots$

If the number of A_i were finite, then we would arrive after a finite number of steps at a colouring, where each A_i, and hence each point of the graph is saturated. This is against (8,H). We show now that, in case of infinitely many A_i, one is able to construct a colouring of the graph where each point is saturated, i. e., Theorem VI is true.

We shall denote the colourings got by successive interchanging of colours as described above by $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ It is clear that to any k we can find an N such that in φ_n $(n > N)$ all points $A_1, \ldots, A_k$ are saturated. Since these infinitely many colourings determine on each subgraph G_i only finitely many different subcolourings, by the KÖNIG—VALKÓ method we can successively fix on the subgraphs $G_1, G_2, \ldots$ colourings $\psi_1, \psi_2, \ldots$ such that each ψ_{i+1} is an extension of ψ_i and each of them is a part of infinitely many φ_j. The colourings $\psi_1, \psi_2, \ldots$ determine uniquely a colouring ψ of the edges of G where each point is saturated. For, any point P of the graph, together with the extremities of the edges issuing from it, belongs to some subgraph G_j. Since ψ_j, the colouring of G_j determined by ψ, is part of infinitely many φ_i, it is part of a certain colouring φ_i, at which the points A_k belonging to G_j (finite in number) and hence all the points of G_j are saturated together with P. But every edge issuing from P belongs to G_j, hence P is saturated in ψ_j and so even in ψ.

In order to complete the proof we have to show that if we interchange the colours on an infinite alternating path $(A^\beta \ldots)$ issuing from an unsaturated point A with an initial β-edge, then the new colouring will be again a suitable colouring of the graph. That is, we have to prove that if there is in the new colouring a singular path, then there is such a path even in the original colouring. Let us suppose, therefore, the existence of a path $(B^\beta - {}^\beta C)$ in the new colouring, where B and C are both unsaturated points and their deficiency-sum is greater than 1.

In the original colouring the points A, B, C are not only all unsaturated, but any two of them have a deficiency-sum at least two. This is a simple consequence of the fact that in the original colouring A has one greater deficiency, while all other points have the same deficiency as in the new colouring.

It is sufficient to prove that in the old colouring some two of A, B, C are connected by a $\beta\beta$-path, i. e., a singular path exists.

Let us consider a point D on the path $(A^\beta \ldots)$ such that in $(A^\beta \ldots) = (A^\beta - {}^u D) + (D^u \ldots)$ we have $u = \beta$ and the infinite path $(D^{\bar{u}} \ldots)$ contains no point of $(B^\beta - {}^\beta C)$. The existence of such a D is implied by the finite degree of the graph.

We consider only the points and edges of the alternating path $(A^\beta - {}^\beta D)$, taken in the original colouring, and leave all other points and edges of the graph aside. Then the number of β-edges issuing from A and D exceeds with one

the number of α-edges issuing from A and D, while for all other points the two corresponding numbers are equal. The same is true for the path $(B^{\beta} - {}^{\beta}C)$ in the new colouring with respect to B and C.

Let us consider the points and edges of the paths $(A^{\beta} - {}^{\beta}D)$ and $(B^{\beta} - {}^{\beta}C)$ in the original resp. in the new colouring, twice considering the common edges. The coinciding edges of these two paths have different colours in the two paths, while all other edges, even those of the path $(B^{\beta} - {}^{\beta}C)$, have the original colouring. It is evident that by omitting the coinciding pairs of edges the difference of the numbers of the α- and β-edges incident to any point does not chan e. The finite subgraph Φ arising by this omission out of the paths $(A^{\beta} - {}^{\beta}D)$ and $(B^{\beta} - {}^{\beta}C)$ has the property that to all of its points the number of inciden β edge and α edge are equal except A, B, C, D to which one more (if 2, 3 or 4 of them are coinciding, then 2, 3 or 4 more) β-edge belongs. We shall show that in the graph Φ (whose edges have their original colours) there exists a $\beta\beta$-path which is a singular path of G.

From what has been said about the graph Φ we infer that we can start from A along an alternating path with an initial β-edge and we must arrive at a point whence we cannot proceed so that the path shall be alternating. This point is surely one of B, C, D. If this point is either B or C, then we are ready. If this point is D, then omit the edges of the path from A to D just constructed. The remaining subgraph of Φ has the property that to all of its points the same number of β-edges as α-edges is incident with the exception of the points B and C to which one more (if $B = C$, two more) β-edge is incident. By the process used above we get a $\beta\beta$-path connecting B and C which is a singular path of G. This completes the proof.

(Received 16 May 1950)

О ФАКТОРИЗАЦИИ „ГРАФОВ"

Т. ГАЛЛАИ (Будапешт)

(Резюме)

"Графом" называется некоторое множество точек и ребер, причем к каждому ребру принадлежат две точки. (Streckenkomplex, simplicial 1-complex.) Зацепным числом подграфа называется число тех ребер, только одна точка которых принадлежит к подграфу. Число упирающихся в одну точку ребер называется степенью точки. Граф называется правильным, если степени всех его точек равны между собою. Общая степень точек правильного графа называется степенью графа. Фактором графа называется правильный подграф содержащий все точки графа.

Важной проблемой теории графов является вопрос существования факторов. В этом направлении известны исследования *Петерсена, Кенига, Веблера, Холля-Радо* и *Туттэ*. Теоремы этих авторов обладают различным характером в зависимости от того, является ли степень графа и фактора четной, или нечетной.

В настоящей работе вышеупомянутые теоремы доказываются, исходя из общего основания и дается новое условие существования факторов, существенно независимое от четного характера степени. Теоремы доказываются сначала для конечных графов, а затем мы их обобщаем и на бесконечные графы конечной степени (§ 8). В наших утверждениях важную роль играет минимум зацепных чисел, принадлежащих подграфам состоящим из нечетного числа точек (ξ).

После вступительных теорем первых четырех параграфов мы доказываем в пятом параграфе теоремы *Туттэ, Холля* и *Радо* относящиеся к существованию фактора первой степени.

В шестом параграфе мы доказываем следующую теорему:

ТЕОРЕМА II. *Конечный, связанный, правильный граф степени* $\nu = \sigma + \tau$ *обладает фактором степени* σ и τ *если* $\xi \geqq \max\left(\frac{\nu}{\sigma}, \frac{\nu}{\tau}\right)$ *предполагая, что при* σ *и* τ *— нечетных, граф имеет четное число точек.*

В седьмом параграфе, принимая во внимание четность или нечетность ν, σ, τ, мы доказываем следующие следствия предыдущей теоремы, которые относятся к конечным, связанным, правильным графам:

Если степень ν *графа нечетная, то существует для каждой четной* σ, *удовлетворяющей условию:* $\sigma \leqq \nu - \frac{\nu}{\xi}$ *фактор степени* σ.

Если степень ν *графа нечетная и граф не имеет моста* ($\xi > 1$) *то существует фактор четной степени не превосходящий* $\frac{2}{3}\nu$ *и фактор нечетной степени не меньше* $\frac{\nu}{3}$.

Если граф имеет четное число точек, его степень ν *четная и у него нет двойного моста* ($\xi > 2$), *то существует для каждой* σ, *удовлетворяющей требованию:* $\frac{\nu}{4} \leqq \sigma \leqq \frac{3\nu}{4}$ *фактор степени* σ.

Akadémiai Kiadó (Budapest VI, Sztálin-út 31) Felelős: Mestyán János

53 161 — Egyetemi Nyomda, Budapest. (F.: Mező Sándor)

Les Acta Mathematica paraissent en russe, français, anglais et allemand et publient des mémoires du domaine des sciences mathématiques.

Les Acta Mathematica sont publiés, à époques indéterminées, en cahiers qui seront réunis en volumes de 300 à 500 pages. Il paraît, en général, un volume par an.

Les manuscrits, autant que possible écrits à la machine, doivent être envoyés à l'adresse suivante:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est 60 forints par an.

On peut s'abonner à l'entreprise de commerce extérieur des livres et journaux „Kultúra" (Budapest V, Akadémia-u. 10. Compte courant No. 929040) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

The Acta Mathematica publish papers on mathematics in Russian, French, English and German.

The Acta Mathematica appear in parts of various size, making up volumes of 300—500 pages. On the average, one volume is published annually.

Manuscripts should, if possible, be typewritten and addressed to

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

Correspondence with the editors or publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Mathematica, is 60 forints a volume. Orders may be placed with „Kultúra" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest V, Akadémia-u. 10. Account No. 929040) or with representatives abroad.

Die Acta Mathematica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der mathematischen Wissenschaften in russischer, französischer, englischer und deutscher Sprache.

Die Acta Mathematica erscheinen zwanglos in Heften. Mehrere Hefte bilden einen Band von 20—30 Bogen. Im allgemeinen erscheint jährlich ein Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind, möglichst mit Maschine geschrieben, an folgende Adresse zu senden:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Redaktion und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu senden.

Abonnementspreis pro Band 60 Forints. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Aussenhandels-Unternehmen „Kultúra" (Budapest V, Akadémia-u. 10. Bankkonto Nr.: 929040) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

INDEX

Egerváry, E., On the Feuerbach-spheres of an orthocentric simplex — Е. Эгервари, Шары Фейербаха ортоцентричного симплекса 5

Alexits, G., Théorie mathématique du trafic de marchandises sous le régime du capitalisme de monopole — Г. Алексич, Математическая теория монополь-капиталистического товарооборота 17

Sz.-Nagy, Gy., Tschirnhaus'sche Eiflächen und Eikurven — Д. С.-Надь, Выпуклые поверхности и кривые Тширнгауса 36

Egerváry, E., A remark on the curvature and tortuosity of space-curves — Е. Эгервари, О кривизне и кручений пространственных кривых 46

Turán, P., On the remainder-term of the prime-number formula. I. — П. Туран, Об остаточном члене формулы простых чисел, I 48

Kalmár, L., Contributions to the reduction theory of the decision problem, first paper — Л. Кальмар, Вклады в теорию приведения проблемы разрешимости, первая статья 64

Rédei, L., Zur Theorie der faktorisierbaren Gruppen, I. — Л. Рэдэи, К теории факторизуемых групп, I 74

Реньи, А., К теории предельных теорем для сумм независимых случайных величин — A. Rényi, Contributions to the theory of independent random variables 99

Kalmár, L., On Cauchy's convergence test — Л. Кальмар, О критерии сходимости Коши 109

Obláth, R., Über die diophantische Gleichung $x^3 - 1 = 2y^2$ — Р. Облат, Диофантовое уравнение $x^3 - 1 = 2y^2$ 113

Fuchs, L., The extension of partially ordered groups — Л. Фукс, Расширение частично упорядоченных групп 118

Aczél, J., Über Niveaukurven und Flächen von Lösungsfunktionen partieller Differentialgleichungen — Я. Ацел, Линии и поверхности уровня решений дифференциальных уравнений в частных производных 125

Gallai, T., On factorisation of graphs — Т. Галлаи, О факторизации „графов“ 133

ACTA MATHEMATICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADJUVANTIBUS

G. ALEXITS, E. EGERVÁRY, L. FEJÉR, CH. JORDÁN,
L. KALMÁR, L. RÉDEI, A. RÉNYI, F. RIESZ,
B. SZ.-NAGY, GY. SZ.-NAGY, P. TURÁN, O. VARGA

REDIGIT

G. HAJÓS

TOMUS I. FASCICULI 2—4.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1950

ACTA MATHEMATICA HUNGARICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK MATEMATIKAI KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST, VI., SZTÁLIN-ÚT 31

Az Acta Mathematica orosz, francia, angol és német nyelven közöl értekezéseket a matematika köréből.

Az Acta Mathematica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet. Évenként általában egy kötet jelenik meg 20 ív terjedelemben.

A közlésre szánt kéziratok, lehetőleg géppel írva, a következő címre küldendők:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Mathematica előfizetési ára kötetenként (egy évre) belföldre 40 forint, külföldre 60 forint. Megrendelhető a belföld számára az »Akadémiai Kiadó«-nál (Budapest, VI., Sztálin-út 31. Bankszámla 936.550), külföld számára pedig a »Kultúra« Könyv- és Hirlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest, VIII., Rákóczi-út 5. Bankszámla 929.040 sz.), vagy külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

»*Acta Mathematica*« издает трактаты из области математических наук на русском французском, английском и немецком языках.

»*Acta Mathematica*« выходит в брошюрах переменного объема (20 печатных листов); несколько выпусков объединяются в одном томе.

Ежегодно предвидено издание одного тома.

Предназначенные для публикации авторские рукописи следует направлять, по возможности машинописью, по следующему адресу:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

По этому же адресу направляется всякая корреспонденция для редакции и администрации.

Подписная цена «*Acta Mathematica*« — 60 форинтов за том. Заказы принимает Предприятие по внешней торговле книг и газет »*Kultura*« (*Budapest, VIII., Rákóczi-út 5.* Счет Банка № 929.040) или его заграничные представительства и уполномоченные.

ON THE REMAINDER-TERM OF THE PRIME-NUMBER FORMULA, II[1]

By
P. TURÁN (Budapest), corresponding member of the Academy

1. We denote as usual by $\pi(x)$ the number of prime-numbers $\leqq x$. It is well-known[2] that at the end of the XVIIIth century GAUSS and LEGENDRE conjectured that

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1,$$

i. e., $\pi(x)$ can be approximated »with an exactitude of 100%« by the simple function $\frac{x}{\log x}$. The exactitude can be measured also by the difference $\pi(x) - \frac{x}{\log x}$; then the conjecture is obviously equivalent to

$$\pi(x) - \frac{x}{\log x} = o\left(\frac{x}{\log x}\right). \tag{1.1}$$

GAUSS also conjectured that $\pi(x)$ can be »better« approximated by the expression

$$Li\,(x) = \int_2^x \frac{dv}{\log v}.$$

But hundred years elapsed when HADAMARD and DE LA VALLÉE-POUSSIN succeeded in proving (1.1). DE LA VALLÉE-POUSSIN proved also the other conjecture of GAUSS by showing that

$$\pi(x) = Li\,(x) + O\,(x \exp\,(-c_1 \sqrt{\log x})) \tag{1.2}$$

where c_1 — and later $c_2, c_3, \ldots$ — denote suitable constants dependent at most on β (see the theorem). When c_ν depends on β, we shall denote this dependence explicitly. Their proofs were based on analytical properties of the zeta-function $\zeta(s)$ $(s = \sigma + it)$ of RIEMANN defined for $\sigma > 1$ by

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots \tag{1.3}$$

[1] The knowledge of the first paper (appeared in this volume) is not supposed.

[2] A. E. INGHAM, *The distribution of prime numbers*, Cambridge Tracts in Math. and Math. Phys., No. 30. We shall quote this for reference.

It was N. WIENER who pointed out thirty years later, after the essential simplifications of LANDAU, that of these properties in the proof of (1.1) only one is essential; this property asserts that for the function $\zeta(s)$ (which can be analytically continued, apart from the pole of order one at $s=1$, over the whole plane) we have

$$\zeta(s) \neq 0 \qquad \text{for} \quad \sigma = 1 \,. \tag{1.4}$$

It was quite recently that P. ERDŐS[3] and A. SELBERG[4] found very ingenious elementary proofs for (1.1) and even for the formula

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^{1+c_2} x}\right). \tag{1.5}$$

It is known that (1.1) is equivalent to (1.4).

2. This fact shows a deep connection between the zeros of $\zeta(s)$ and the prime-number formula. As a matter of fact, this was observed long ago. Let Θ be the upper limit of the real parts of these zeros; of course $\Theta \leqq 1$. Assuming $\Theta < 1$. H. VON KOCH[2] and PHRAGMÉN[2] showed that

$$\pi(x) = Li\,(x) + O\,(x^{\Theta} \log x) \tag{2.1}$$

and for every $\varepsilon > 0$ infinitely often

$$|\pi(x) - Li\,(x)| > x^{\Theta-\varepsilon}. \tag{2.2}$$

Hence, if we suppose conversely (2.1) or even

$$\pi(x) = Li\,(x) + O\,(x^{\Theta+\varepsilon}) \tag{2.3}$$

for every $\varepsilon > 0$, then it follows that all the zeros of $\zeta(s)$ lie in the half-plane $\sigma \leqq \Theta$. But unfortunately no such $\Theta < 1$ is known. The estimation (1.2) was proved by DE LA VALLÉE-POUSSIN by showing that $\zeta(s) \neq 0$ in the domain

$$\sigma > 1 - \frac{c_3}{\log |t|} \quad \text{for } |t| \geqq c_4\,, \quad \sigma \geqq 1 - \frac{c_3}{\log c_4} \quad \text{for } |t| \leqq c_4\,. \tag{2.4}$$

It turned out that the larger domain of this type with $\zeta(s) \neq 0$ can be assured, the smaller remainder term in (2.3) can be proved (but of course not so small as in (2.3)). A general theorem of this type was formulated by INGHAM.[2] Confining ourselves to the special case when $\zeta(s)$ is supposed to be non-vanishing in the domain

$$\sigma > 1 - \frac{c_5}{\log^{\beta} |t|} \quad \text{for } |t| \geqq c_6 \tag{2.5}$$

with

$$0 < \beta \leqq 1\,, \tag{2.6}$$

[3] P. ERDŐS, On a new method in elementary number theory etc., *Proc. of the Nat. Acad. of Sciences of the USA*, (1949), pp. 374—384.

[4] A. SELBERG, An elementary proof of the prime-number theorem, *Annals of Math.*, **50** (1949), pp. 305—313.

INGHAM's theorem gives

$$\pi(x) = Li(x) + O\left(x \exp\left(-c_7 \log^{\frac{1}{1+\beta}} x\right)\right). \tag{2.7}$$

The best known value for β in (2.5) is $\beta > \frac{2}{3} + \varepsilon$; more exactly $\zeta(s) \neq 0$ in the domain

$$\sigma > 1 - \frac{c_8}{(\log|t| \log\log|t|)^{2/3}} \text{ for } |t| \geqq c_9 ,$$

which follows from recent estimations of I. M. VINOGRADOFF[5] by a routine-calculation, though it is nowhere stated explicitly.

Concerning the theorem (2.5) — (2.6) — (2.7) the question arises immediately, whether or not one could infer from the premissa (2.5) — (2.6) a formula for $\pi(x)$ with a better remainder-term than that in (2.7). The question is obviously equivalent to the other one, as to whether or not conversely from (2.7) one can assure a domain of non-vanishing of $\zeta(s)$ of the type (2.5) — (2.6). The question is interesting even in itself, since in the affirmative case it would mean a new contribution to the mysterious connection of the primes and the zeros of $\zeta(s)$. Its importance would become principial if the upper limit of the real parts of the zeros of $\zeta(s)$ were 1. But the possibility of such a reverse inference is not at all clear. At first, as L. KALMÁR[6] remarked and showed by a simple example, a function $f(s)$, defined for $\sigma > 1$ by

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} ,$$

can be given, the coefficient-sum of which satisfies (2.7) or even the estimation

$$\sum_{n \leq x} a_n = O\left(x^{1-\varepsilon(x)}\right)$$

with a prescribed $\varepsilon(x)$ restricted only by

$$\lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$$

and for which the line $\sigma = 1$ is a natural boundary. Secondly, one can easily show that, knowing (1.4) and some very mild estimations on $\zeta(s)$ and on its first few derivatives on the line $\sigma = 1$ only, one can obtain (1.5) so that it is not at all evident that (1.5) would imply anything more about the zeros than (1.4). Nevertheless we shall show that the exact converse of (2.5) — (2.7) is true. We shall show the following

[5] И. М. ВИНОГРАДОВ, Метод тригонометрических сумм в теории чисел, *Труды Мат. Инст. Стеклова*, 1947.

[6] L. KALMÁR, Über die Abschätzung der Koeffizientensumme Dirichletscher Reihen, *Acta Math. Univ. Szeged*, **4** (1929), pp. 151—181.

THEOREM. *If for a* β *with* $0 < \beta < 1$ *we have*

$$\pi(x) = Li(x) + O\left(x \exp\left(-c_{10} \log^{\frac{1}{1+\beta}} x\right)\right), \tag{2.8}$$

then $\zeta(s)$ *does not vanish in the domain*

$$\sigma > 1 - \frac{c_{11}}{\log^{\beta} |t|}, \qquad |t| \geqq c_{12}(\beta). \tag{2.9}$$

3. (2.5) — (2.7) gives only a special case of INGHAM's theorem. His general theorem could have been reversed similarly as our theorem shows, but we shall restrict ourselves to the most interesting special case treated in our theorem.

The method is applicable to a class of other functions instead of the zeta-function. The general problem in the background reads as follows. Let $f(s)$ be defined by

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \tag{3.1}$$

where

$$\sum_{n \leq N} a_n = O(N). \tag{3.2}$$

Then, as easily seen, $f(s)$ is regular for $\sigma > 1$. But what more can be said about $f(s)$ if (3.2) is replaced by

$$\sum_{n \leq N} a_n = O\left(N^{1-\varepsilon(N)}\right)$$

where

$$\lim_{N \to \infty} \varepsilon(N) = 0 \quad ?$$

As mentioned, generally nothing can be said. But if $f(s)$ is *meromorphic* ina domain beyond the line $\sigma = 1$ and something is known about the density of its poles, then even a domain of *regularity* (i. e. a domain free of poles) can be assured, which is a continuation of the half-plane $\sigma \geqq 1$. A proof of this assertion can follow the method of the proof of our theorem, but we omit the details.

In a letter of 19 Oct. 1946 Prof. H. HEILBRONN has kindly called my attention to the fact, that the method of another paper of mine[7] is probably applicable to the solution of this problem.

4. The main tool of the proof will be again the following lemma, which I state here in the following form.[8]

[7] On Riemann's hypothesis, *Bull. de l'Acad. des Sciences de l'URSS, Série Math.*, **11.** (1947), pp. 197—262.

[8] This form of the lemma will occur in my forthcoming paper entitled »On Carlson's theorem«. The original form, in which it would suffice here too, required $m \geqq 28N$ and had on the right of (4.3) the term $\frac{1}{N^2}\left(\frac{N}{e^{23}m}\right)^N$ instead of $\left(\frac{N}{e^6 m}\right)^N$. In a new unpublished application of this lemma to the Graeffe-Bernoulli method, even this improvement is of significance.

LEMMA. *If $n \leqq N$ and $z_1, z_2, \ldots, z_n$ satisfy the condition*

$$\max |z_\nu| \geqq 1 \ , \tag{4.1}$$

then for $m \geqq N$ there exists an integer ν for which

$$m \leqq \nu \leqq m + N \tag{4.2}$$

and

$$|z_1^\nu + z_2^\nu + \ldots + z_n^\nu| \geqq \left(\frac{N}{e^6\, m}\right)^N. \tag{4.3}$$

5. As well known, (2.8) is equivalent to

$$\Theta(x) \equiv \sum_{n \leqq x} \Lambda(n) = x + O\left(x \exp(c_{13} \log^{\frac{1}{1+\beta}} x)\right), \tag{5.1}$$

where $\Lambda(n)$ denotes DIRICHLET'S symbol

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, \text{ if } n = p^\alpha, \quad p \text{ a prime} \\ 0 \qquad \text{otherwise.} \end{cases}$$

Hence in order to prove our theorem it is sufficient to deduce (2.9) from (5.1)

6. First we draw from (5.1) some conclusions for the expression

$$f(t) = \sum_{N' \leqq n \leqq N''} \Lambda(n)\, e^{-it \log n}, \tag{6.1}$$

where we restrict the integers N', N'' and $t > 0$ by

$$1 + t^2 \leqq \exp\left(\frac{2}{c_{13}} \log t\right)^{1+\beta} \leqq N \leqq N' < N'' \leqq 2N. \tag{6.2}$$

We have

$$f(t) = \sum_{n=N'}^{N''} (\Theta(n) - \Theta(n-1))\, e^{-it \log n} = -\Theta(N'-1)\, e^{-it \log N'} + \tag{6.3}$$

$$+ \sum_{n=N'}^{N''} \Theta(\nu)\, (e^{-it \log \nu} - e^{-it \log (\nu+1)}) + \Theta(N'')\, e^{-it \log N''} = -(N'-1)\, e^{-it \log N'} +$$

$$+ \sum_{\nu=N'}^{N''-1} \nu\, (e^{-it \log \nu} - e^{-it \log (\nu+1)}) + (N''\, e^{-it \log N'}) + O(N \exp(c_{13} \log^{\frac{1}{1+\beta}} N))$$

$$+ O(1) \sum_{\nu=N'}^{N''-1} \nu \exp(-c_{13} \log^{\frac{1}{1+\beta}} \nu)\, |e^{-it \log \nu} - e^{-it \log (\nu+1)}| = \sum_{N' \leqq n \leqq N''} e^{-it \log n} +$$

$$+ O(N \exp(-c_{13} \log^{\frac{1}{1+\beta}} N)) + \exp(c_{13} \log^{\frac{1}{1+\beta}} N) \sum_{\nu=N'}^{N''-1} \nu\, |e^{-it \log \nu} - e^{-it \log (\nu+1)}|.$$

But on the one hand we have

$$|(n+1)^{1+it} - n^{1+it} - (1+it)\, n^{it}| = n \left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+it} - 1 - \frac{1+it}{n}\right| \leqq$$

$$\leqq n \left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+it} - 1 - (1+it) \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right| + n\, |1+it| \left|\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right|$$

and further, using the inequality

$$|e^z - 1 - z| \leqq |z|^2$$

valid for $\Re z \leqq 1$,

$$|(n+1)^{1+it} - n^{1+it} - (1+it)n^{it}| \leqq (1+t^2)\, n \log^2\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{\sqrt{1+t^2}}{n} < \frac{2(1+t^2)}{n};$$

summing for $N' \leqq n \leqq N''$ we obtain

$$|(N''+1)^{1+it} - N'^{1+it} - (1+it)\sum_{\nu=N'}^{N''} \nu^{it}| \leqq 2(1+t^2)$$

or from (6.2)

$$|\sum_{\nu=N''}^{N''} \nu^{it}| \leqq 2\sqrt{1+t^2} + \frac{5N}{\sqrt{1+t^2}} \leqq \frac{9N}{t}. \tag{6.4}$$

On the other hand

$$\sum_{n=N'}^{N''-1} n\,|e^{-it\log n} - e^{-it\log(n+1)}| = \sum_{n=N'}^{N''-1} n\,|1 - e^{-it\log(1+1/n)}| \leqq c_{14} Nt;$$

hence from (6.4) and (6.3) we obtain

$$|f(t)| \leqq N\left(\frac{9}{t} + c_{15}\, t \exp\left(-c_{13} \log^{\frac{1}{1+\beta}} N\right)\right). \tag{6.5}$$

Finally from (6.2)

$$N \geqq \exp\left(\left(\frac{2}{c_{13}} \log t\right)^{1+\beta}\right),$$

$$\log^{\frac{1}{1+\beta}} N \geqq \frac{2}{c_{13}} \log t,$$

$$\exp\left(-c_{13} \log^{\frac{1}{1+\beta}} N\right) \leqq \frac{1}{t^2},$$

i. e. from (6.5), under the restriction (6.2), we obtain that

$$|f(t)| \leqq c_{16} \frac{N}{t}. \tag{6.6}$$

For

$$1 + t^2 \leqq \exp\left(\left(\frac{2}{c_{13}} \log t\right)^{1+\beta}\right) \leqq N \leqq N_1 \leqq N_2 \leqq 2N \tag{6.7}$$

partial summation gives

$$|f_1(s)| \equiv |\sum_{N_1 \leqq n \leqq N_2} \Lambda(n)\, n^{-s}| \leqq c_{17} \frac{N^{1-\sigma}}{t}. \tag{6.8}$$

7. Restricting η only by

$$\eta > \exp\left(\left(\frac{2}{c_{13}}\log t\right)^{1+\beta}\right), \tag{7.1}$$

we apply (6.8) with $\sigma > 1$ and

$$N_1 = \eta \cdot 2^j, \qquad N_2 = \eta \cdot 2^{j+1} \qquad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

(6.7) is evidently satisfied and hence

$$|f_2(s,\eta)| \equiv \Big|\sum_{n>\eta} \Lambda(n)\, n^{-s}\Big| \leqq c_{17}\frac{\eta^{1-\sigma}}{t}\sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(1-\sigma)} < c_{18}\frac{\eta^{1-\sigma}}{(\sigma-1)\,t}. \tag{7.2}$$

Finally, if

$$\xi > \exp\left(\left(\frac{2}{c_{13}}\log t\right)^{1+\beta}\right), \tag{7.3}$$

then for the integral

$$f_3(s,\xi) = \int_{\xi}^{\infty} f_2(s,\eta)\,\frac{\log^k\frac{\eta}{\xi}}{\eta}\,d\eta \tag{7.4}$$

we have on the one hand

$$|f_3(s,\xi)| \leqq \frac{c_{18}}{(\sigma-1)\,t}\int_{\xi}^{\infty}\eta^{-\sigma}\log^k\frac{\eta}{\xi}\,d\eta = \frac{c_{13}}{t}\frac{\xi^{1-\sigma}}{(\sigma-1)}\int_0^{\infty} e^{-(\sigma-1)v}\,v^k dv = \tag{7.5}$$

$$= c_{18}\frac{\xi^{1-\sigma}\,k!}{t\,(\sigma-1)^{k+2}}$$

and on the other hand

$$f_3(s,\xi) = \sum_{n\geqq\xi}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\int_{\xi}^{n}\frac{1}{\eta}\log^k\frac{\eta}{\xi}\,d\eta = \sum_{n\geqq\xi}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\int_1^{\frac{n}{\xi}}\frac{\log^k v}{v}\,dv =$$

$$= \frac{1}{k+1}\sum_{n\geqq\xi}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\log^{k+1}\frac{n}{\xi}.$$

From this and (7.5) we have

$$\left|\sum_{n\geqq\xi}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\log^{k+1}\frac{n}{\xi}\right| \leqq c_{13}\frac{\xi^{1-\sigma}\,(k+1)!}{t\,(\sigma-1)^{k+2}}. \tag{7.6}$$

But for $\sigma \geqq 1$ we have[9]

$$\sum_{n\geqq\xi}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\log^{k+1}\frac{n}{\xi} =$$

[9] For the proof of this relation which follows closely the usual proof of RIEMANN's exact prime-number formula, see my paper[7].

$$= (k+1)!\left(\frac{\xi^{1-s}}{(s-1)^{k+2}} - \sum_{\varrho}\frac{\xi^{\varrho-s}}{(s-\varrho)^{k+2}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^{-2n-s}}{(s+2n)^{k+2}}\right);$$

therefore this and (7.6) give

$$\left|\frac{\xi^{1-s}}{(s-1)^{k+2}} - \sum_{\varrho}\frac{\xi^{\varrho-s}}{(s-\varrho)^{k+2}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^{-2n-s}}{(s+2n)^{k+2}}\right| \leqq \tag{7.7}$$

$$\leqq c_{18}\frac{\xi^{1-\sigma}}{t\,(\sigma-1)^{k+2}}.$$

8. Let us suppose that

$$\varrho^* = \sigma^* + i\,t^*$$

is a non-trivial zero of $\zeta(s)$ with

$$\sigma^* > 1 - \frac{1}{10}\left(\frac{c_{13}}{2}\right)^{1+\beta}\frac{1}{\log^{\beta} t^*}, \tag{8.1}$$

$$t^* \geqq \max\left(e^{36},\ \exp\left(\left(\frac{c_{13}}{2}\right)^{\frac{1+\beta}{\beta}} 56^{\frac{1}{\beta}}\right)\right). \tag{8.2}$$

Using the existence of such ϱ^* we shall get a contradiction. We choose

$$s = 1 + \left(\frac{c_{13}}{2}\right)^{1+\beta}\frac{1}{\log^{\beta} t^*} + it^* \equiv \sigma_1 + i\,t^*, \qquad \sigma_1 \leqq 2, \tag{8.3}$$

further

$$\xi = e^{(k+2)\omega} \tag{8.4}$$

with

$$\omega = \left(\frac{2}{c_{13}}\right)^{1+\beta}\log^{\beta} t^* \tag{8.5}$$

and

$$\log t^* \leqq (k+2) \leqq \frac{5}{4}\log t^*. \tag{8.6}$$

Multiplying (7.7) by

$$\left|\xi^{s-\varrho^*}(s-\varrho^*)^{k+2}\right| = \xi^{\sigma_1-\sigma^*}(\sigma_1-\sigma^*)^{k+2}$$

we obtain the inequality

$$\left|\xi^{1-\varrho^*}\left(\frac{s-\varrho^*}{s-1}\right)^{k+2} - \sum_{\varrho}\xi^{\varrho-\varrho^*}\left(\frac{s-\varrho^*}{s-\varrho}\right)^{k+2} - \right. \tag{8.7}$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{\infty}\xi^{-2n-\varrho^*}\left(\frac{s-\varrho^*}{s+2n}\right)^{k+2}\right| \leqq c_{18}\frac{\xi^{1-\sigma^*}}{t}\left(\frac{\sigma_1-\sigma^*}{\sigma_1-1}\right)^{k+2}.$$

9. First we estimate the quantity

$$\left(\frac{\sigma_1-\sigma^*}{\sigma_1-1}\right)^{k+2}.$$

Using (8.1), (8.3) and (8.6) we have

$$\left(\frac{\sigma_1-\sigma^*}{\sigma_1-1}\right)^{k+2}=\left(1+\frac{1-\sigma^*}{\sigma_1-1}\right)^{k+2}< \tag{9.1}$$

$$<\left[1+\frac{\frac{1}{10}\left(\frac{c_{13}}{2}\right)^{1+\beta}\frac{1}{\log^\beta t^*}}{\left(\frac{c_{13}}{2}\right)^{1+\beta}\frac{1}{\log^\beta t^*}}\right]^{k+2}=\left(\frac{11}{10}\right)^{k+2}<(t^*)^{\frac{1}{8}}.$$

Further, from (8.3) and (8.6) we have roughly

$$\left|\xi^{1-\varrho^*}\left(\frac{s-\varrho^*}{s-1}\right)^{k+2}\right|\leqq\xi^{1-\sigma^*}\left(\frac{2}{t^*}\right)^{k+2}\leqq\frac{\xi^{1-\sigma^*}}{(t^*)^{7/8}} \tag{9.2}$$

and

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\xi^{-2n-\varrho^*}\left(\frac{s-\varrho^*}{s+2n}\right)^{k+2}\right|\leqq\xi^{-2}\left(\frac{2}{t^*}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}<\frac{\xi^{1-\sigma^*}}{(t^*)^{7/8}}. \tag{9.3}$$

(9.1), (9.2), (9.3) give from (8.7)

$$\left|\sum_{\varrho}\xi^{\varrho-\varrho^*}\left(\frac{s-\varrho^*}{s-\varrho}\right)^{k+2}\right|\leqq c_{19}\frac{\xi^{1-\sigma^*}}{(t^*)^{7/8}}. \tag{9.4}$$

10. Now we estimate slightly less roughly the contribution of the terms on the left of (9.4) with

$$t_\varrho\geqq t^*+8 \tag{10.1}$$

if $\varrho=\sigma_\varrho+i\,t_\varrho$. Denoting this part of the sum by Σ_1, we have

$$|\Sigma_1|\leqq\xi^{1-\sigma^*}\sum_{t_\varrho\geqq t^*+8}\left(\frac{\sigma_1-\sigma^*}{|s-\varrho|}\right)^{k+2}\leqq c_{20}\,\xi^{1-\sigma^*}\sum_{n=8}^{\infty}\left(\frac{2}{n}\right)^{k+2}\log\,(t^*+n),$$

since the number of the zeros of $\zeta(s)$ satisfying

$$t^*+n\leqq t_\varrho\leqq t^*+n+1$$

is

$$<c_{20}\log\,(t^*+n). \tag{10.2}$$

Hence

$$|\Sigma_1|<c_{21}\frac{\xi^{1-\sigma^*}\log t^*}{3^{k+2}}<c_{21}\frac{\xi^{1-\sigma^*}\log t^*}{t^*}<c_{22}\frac{\xi^{1-\sigma^*}}{(t^*)^{7/8}} \tag{10.3}$$

and a similar reasoning can be applied to

$$\Sigma_2 = \sum_{t\varrho \leq t^* - 8} \xi^{\varrho - \varrho^*} \left(\frac{s-\varrho^*}{s-\varrho}\right)^{k+2}. \tag{10.4}$$

For the sum

$$\Sigma_3 = \sum_{8 > |t\varrho - t^*| > 6(\sigma_1 - \sigma^*)} \xi^{\varrho - \varrho^*} \left(\frac{s-\varrho^*}{s-\varrho}\right)^{k+2}, \tag{10.5}$$

using (10.2) and (8.7), we have

$$|\Sigma_3| \leqq c_{23} \log t^* . \xi^{1-\sigma^*} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma^*}{6(\sigma_1 - \sigma^*)}\right)^{k+2} \leqq c_{23} \frac{\xi^{1-\sigma} \log t^*}{(t^*)^{\log 6}} < c_{23} \frac{\xi^{1-\sigma^*}}{(t^*)^{7/8}}. \tag{10.6}$$

Further for

$$\Sigma_4 = \sum_{\substack{|t\varrho - t^*| \leqq 6(\sigma_1 - \sigma^*) \\ \sigma_\varrho \leq 1 - 3(\sigma_1 - \sigma^*)}} \xi^{\varrho - \varrho^*} \left(\frac{s-\varrho^*}{s-\varrho}\right)^{k+2}$$

we have

$$|\Sigma_4| \leqq c_{23} \log t^* \left(\frac{\sigma_1 - \sigma^*}{3(\sigma_1 - \sigma^*)}\right)^{k+2} < c_{23} \frac{\log t^*}{t^*} < c_{23} \frac{\xi^{1-\sigma^*}}{(t^*)^{7/8}}. \tag{10.7}$$

Collecting (10.3), (10.4), (10.6) and (10.7), from (9.4) we obtain

$$\left| \sum_{\substack{|t\varrho - t^*| < 6(\sigma_1 - \sigma^*) \\ \sigma_\varrho \geqq 1 - 3(\sigma_1 - \sigma^*)}} \xi^{\varrho - \varrho^*} \left(\frac{s-\varrho^*}{s-\varrho}\right)^{k+2} \right| < c_{24} \frac{\xi^{1-\sigma^*}}{(t^*)^{7/8}},$$

or, replacing ξ by its value (8.4),

$$\left| \sum_{\substack{|t\varrho - t^*| < 6(\sigma_1 - \sigma^*) \\ \sigma_\varrho \geqq 1 - 3(\sigma_1 - \sigma^*)}} \left(e^{\omega(\varrho - \varrho^*)} \frac{s-\varrho^*}{s-\varrho}\right)^{k+2} \right| < c_{24} \frac{\xi^{1-\sigma^*}}{(t^*)^{7/8}}, \tag{10.8}$$

11. The value of the integer k was subjected only to the restriction (8.7); now we determine its exact value from the lemma formulated in (4.1)—(4.2)—(4.3). Since ω, ϱ^* and s are fixed, the domain of summation in (10.8) is independent of k and so are the numbers

$$e^{\omega(\varrho - \varrho^*)} \frac{s-\varrho^*}{s-\varrho}$$

too; they can be chosen as z_ν's. The condition (4.1) is for $\varrho = \varrho^*$ satisfied. n is obviously the number of the zeros $\zeta(s)$ in the domain

$$\sigma \geqq 1 - 3(\sigma_1 - \sigma^*), \qquad |t - t^*| \leqq 6(\sigma_1 - \sigma^*). \tag{11.1}$$

But according to lemma II of my paper[7] we have (applying it with $\sigma'' = 1 - 3(\sigma_1 - \sigma^*)$, $t'' = t^*$)

$$n \leqq 12\,(\sigma_1 - \sigma^*)\log t^* + 3\log\log(t^*+1) + 5 < 12 \cdot \frac{11}{10}\left(\frac{c_{13}}{2}\right)^{1+\beta}\log^{1-\beta} t^* +$$

$$+ 3\log\log(t^*+1) + 5 < 14\left(\frac{c_{13}}{2}\right)^{1+\beta}\log^{1-\beta} t^*$$

for $t^* > c_{25}(\beta)$. Hence choosing

$$m = \log t^*, \qquad N = 14\left(\frac{c_{13}}{2}\right)^{1+\beta}\log^{1-\beta} t^*$$

the condition $m \geqq N$ is satisfied and hence we may choose our $(k+2)$ as ν in (4.2). Since

$$N < \frac{1}{4}\log t^*$$

owing to the lower limitation for t^* and hence

$$m + N < \frac{5}{4}\log t^*,$$

the resulting ν-value will satisfy (8.6). Thus for $t^* > c_{26}$

$$\left|\sum_{\substack{|t_\varrho - t^*| < 6(\sigma_1 - \sigma^*) \\ \sigma_\varrho > 1 - 3(\sigma_1 - \sigma^*)}}\left(e^{\omega(\varrho - \varrho^*)}\,\frac{s-\varrho^*}{s-\varrho}\right)^{\nu}\right| >$$

$$> \left(\frac{1}{e^6\log t^*}\cdot 14\left(\frac{c_{13}}{2}\right)^{1+\beta}\log^{1-\beta} t^*\right)^{14\left(\frac{c_{13}}{2}\right)^{1+\beta}\log^{1-\beta} t^*} >$$

$$> \exp\left(-c_{27}\,\beta\log^{1-\beta} t^*\log\log t^*\right)$$

or from (10.8) for $t^* > c_{28}(\beta)$

$$c_{24}\,\xi^{1-\sigma^*} > (t^*)^{\frac{7}{8}}\exp\left(-c_{27}\beta\log^{1-\beta} t^* \cdot \log\log t^*\right) > (t^*)^{\frac{3}{4}} > c_{24}\,(t^*)^{\frac{1}{2}}.$$

From this, (8.4), (8.5) and (8.6) we have

$$\frac{1}{2}\log t^* < (1-\sigma^*)\log\xi = (1-\sigma^*)(k+2)\left(\frac{2}{c_{13}}\right)^{1+\beta}\log^{\beta} t^* <$$

$$< \frac{5}{4}(1-\sigma^*)\left(\frac{2}{c_{13}}\right)^{1+\beta}\log^{1+\beta} t^*,$$

$$\sigma^* < 1 - \frac{2}{5}\left(\frac{c_{13}}{2}\right)^{1+\beta}\frac{1}{\log^{\beta} t^*}$$

which contradicts (8.1). Q. e. d.

(Received 14. September 1950.)

ОБ ОСТАТОЧНОМ ЧЛЕНЕ ФОРМУЛЫ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ. II

П. ТУРАН (Будапешт)

(*Резюме*)

Известно, что если верхний предел действительных частей так называемых нетривиальных корней функции $\zeta(s)$ Римана $\Theta \leqq 1$, то

$$|\pi(x) - Li(x)| < c_1 x^{\Theta} \log x, \tag{1}$$

(где c подходящее численное постоянное). Наоборот, из такой оценки остаточного члена следует, что функция $\zeta(s)$ не имеет корней в полуплоскости $\sigma > \Theta$ $(s = \sigma + it)$.

Однако до сих пор удалось доказать только, что $\zeta(s) \neq 0$ для областей вида

$$\sigma > 1 - \frac{c_2}{\log^{\beta} |t|} \qquad \left(|t| > c_3, \beta > \frac{2}{3}\right). \tag{2}$$

При условии (2) известно, что

$$|\pi(x) - Li(x)| < c_4 x \exp\left(-c_5 \log^{\frac{1}{1+\beta}} x\right). \tag{3}$$

Естественно возникает, вопрос нельзя ли из условия (2) вывести более сильное утверждение, чем (3). Имеющиеся методы не дают ответа на этот вопрос. Настоящая работа содержит доказательство того, что (3) является сильнейшим утверждением, вытекающим из условия (2), ибо из (3) можно вывести (2).

TSCHIRNHAUS'SCHE FLÄCHEN UND KURVEN

Von

GYULA SZ.-NAGY (Szeged), Mitglied der Akademie

1. Eine *Tschirnhaus'sche Fläche T_n n-ten Grades* (abgekürzt eine Fläche T_n) ist der Ort der Punkte P, deren Abstände von n verschiedenen Punkten $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *(Brennpunkte)* multipliziert mit gegebenen reellen Konstanten $q_1, q_2, \ldots, q_n$ *(Gewichte der Brennpunkte)* eine konstante Summe C ergeben. Es wird angenommen, dass T_n reell ist, also mindestens einen reellen Punkt besitzt. Die Brennpunkte, ihre Gewichte und ein Punkt P_0 von T_n bestimmen die Fläche T_n eindeutig. Dann ist $C = \sum_{k=1}^{n} q_k \overline{P_0F_k}$.

Eine Fläche T_n, deren Brennpunkte auf einer Geraden g liegen, ist offenbar eine Rotationsfläche mit der Achse g. Eine Fläche T_1 (ersten Grades) ist eine Kugel mit dem Mittelpunkt F_1 und mit dem Halbmesser C/q_1 ($Cq_1 > 0$). Eine Fläche T_2 (zweiten Grades) ist im Falle $C = 0$ und $q_1 q_2 < 0$ eine Kugel und zwar eine Apollonische Kugel mit den Polen F_1 und F_2, weil ihre Punkte P der Gleichung $\overline{PF_1} : \overline{PF_2} = -q_2 : q_1$ genügen. Im Falle $C = 0$ und $q_1 + q_2 = 0$ ist T_2 die Mittelebene der Strecke F_1F_2. Im Falle $C > 0$ und $q_1 = q_2 = 1$ ist T_2 ein Rotationsellipsoid, dessen Achse die Gerade F_1F_2 ist. Im Falle $C \neq 0$ und $q_1 = -q_2 > 0$ bzw. $q_1 = -q_2 < 0$ ist T_2 der eine bzw. der andere Mantel eines Rotationshyperboloids mit der Achse F_1F_2.

Liegen die Brennpunkte einer Fläche T_n in einer Ebene ε, so ist der Ort der Punkte P in dieser Ebene ε eine *Tschirnhaus'sche Kurve n-ten Grades*, die Schnittkurve der (in bezug auf ε symmetrischen) Fläche T_n mit der Ebene ε. Aus den Eigenschaften der Flächen T_n, deren Brennpunkte in einer Ebene liegen, folgen einfach die Eigenschaften der Tschirnhaus'schen Kurven. Auch die Tschirnhaus'schen Kurven n-ten Grades können mit T_n bezeichnet werden, wenn ein Missverständnis ausgeschlossen ist.

In einem multipolaren Koordinatensystem, dessen Pole die Brennpunkte von T_n sind, hat die Tschirnhaus'sche Fläche (oder Kurve) T_n die Gleichung

$$(1) \qquad T(P) \equiv \sum_{k=1}^{n} q_k \overline{PF_k} - C \equiv \sum_{k=1}^{n} q_k r_k - C = 0, \quad \overline{PF_k} \equiv r_k \geqq 0$$

($k = 1, 2, \ldots, n$). Der Abstand r_k verschwindet für höchstens einen Index.

Bei einem reellen Wert C stellt diese Gleichung nicht immer eine reelle Fläche T_n dar. Z. B. stellt die Gleichung

$$r_1 + r_2 - C = 0 \quad \text{bzw.} \quad r_1 - r_2 - C = 0$$

keine reelle Fläche dar, falls $C < C_0$ bzw. $C > C_0$ ist, wo C_0 den Abstand der Brennpunkte F_1 und F_2 bezeichnet. Bei $C = C_0$ stellt die erste bzw. zweite Gleichung die Strecke F_1F_2 bzw. die von F_2 ausgehende und F_1 nicht enthaltende Halbgerade dar.

Ein Punkt P liegt auf T_n, wenn seine multipolaren Koordinaten $r_1, r_2, \ldots, r_n$ der linearen Gleichung (1) genügen. Eine nichtnegative Lösung $r_1, r_2, \ldots, r_n$ der Gleichung gibt nur dann einen Punkt von T_n, wenn die n Kugeln von Halbmessern r_k und mit den Mittelpunkten F_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ einen Punkt gemeinsam haben. Dann liegt dieser Punkt auf T_n.

Aus der Gleichung (1) folgt, dass ein unendlichferner Punkt des Raumes nur dann auf einer Fläche T_n (mit unendlichvielen reellen Punkten) liegen kann, wenn die *Gewichtssumme* $Q = \sum_{k=1}^{n} q_k$ verschwindet.

Bedeutet nämlich R den Abstand eines Punktes P der Fläche T_n von einem festen Punkt O, so sind

$$\frac{r_k}{R} = 1 + \delta_k \,, \quad \frac{T(P)}{R} = \sum_{k=1}^{n} q_k (1 + \delta_k) - \frac{C}{R} = Q + \sum_{k=1}^{n} q_k \delta_k - \frac{C}{R} = 0 \,.$$

Wird R genügend gross, so nähern sich δ_k und $\dfrac{C}{R}$ gegen Null. Daraus folgt die Richtigkeit der Behauptung. Bei $Q \neq 0$ ist also T_n beschränkt.

Zwei (reelle) Flächen T_n und T_n' mit denselben Brennpunkten und mit den Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} q_k r_k - C = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{n} q_k r_k - C' = 0$$

sind *konfokal im engeren* bzw. *im weiteren Sinne*, je nachdem $q_k' = q_k$ bzw. $|q'_k| = |q_k|$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ sind. In einer früheren Arbeit[1] habe ich die Flächen T_n untersucht, deren Brennpunkte positive Gewichte haben. Diese Flächen wurden von mir Tschirnhaus'sche Eiflächen gennant, weil sie immer konvex sind.

[1] Gyula Sz.-Nagy, Tschirnhaus'sche Eiflächen und Eikurven, *Acta Math. Hung.*, **1** (1950), S. 36—44.

Die Funktion

$$G(P) = \sum_{k=1}^{n} |q_k| r_k = \sum_{k=1}^{n} |q_k| \overline{PF}_k$$

ist eine stetige Funktion des Punktes P. Die Punkte, in denen $G(P)$ ihren kleinsten Wert annimmt, bilden den *Kern* der Fläche T_n mit der Gleichung (1). Der Kern besteht im allgemeinen aus einem einzigen Punkt, aus dem *Kernpunkt* von T_n. Nur bei Rotationsflächen T_n kann der Kern aus den Punkten einer Strecke, der *Kernstrecke* von T_n bestehen.[2] Die (im engeren und im weiteren Sinne) konfokalen Flächen haben denselben Kern.

Hat die Fläche T_n bzw. T'_n die Brennpunkte F_k bzw. F'_k mit den Gewichten q_k bzw. q'_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, sind $|q_k| = |q'_k|$, ist P_0 ein gemeinsamer Punkt von T_n und T'_n und liegt der Punkt F'_k auf der Halbgeraden P_0F_k bzw. auf ihrer Verlängerung, je nachdem q_k und q'_k gleiches Vorzeichen haben bzw. nicht, so werden die Flächen T_n und T'_n *in bezug auf den Punkt* P_0 *perspektivkonfokal* genannt. Ich werde beweisen, dass die in bezug auf P_0 perspektivkonfokalen Flächen T_n und T'_n in P_0 dieselbe Normale und damit dieselbe Berührungsebene besitzen.

2. Die *äussere* bzw. *innere Seite* der Fläche T_n mit der Gleichung (1) besteht aus den Punkten P des Raumes, in denen im Falle $Q \neq 0$ die Ungleichung $Q\,T(P) > 0$ bzw. $Q\,T(P) < 0$, im Falle $Q = 0$ aber die Ungleichung $T(P) > 0$ bzw. $T(P) < 0$ gilt. Ein Punkt an der inneren bzw. äusseren Seite von T_n liegt innerhalb bzw. ausserhalb der Fläche T_n.

I. *Hat die Tschirnhaus'sche Fläche* T_n *bzw.* T'_n *dieselben Brennpunkte* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *und die Gleichung*

$$T(P) = \sum_{k=1}^{n} q_k r_k - C = 0 \quad \text{bzw.} \quad T'(P) = \sum_{k=1}^{n} q'_k r_k - C = 0$$

und sind

$$q_k - q'_k = q''_k \geqq 0 \ (k = 1, 2, \ldots, n), \ \sum_{k=1}^{n} q''_k > 0,$$

so liegt die Fläche T'_n *im Falle* $Q \geqq 0$ *ausserhalb, im Falle* $Q < 0$ *innerhalb der Fläche* T_n.

Aus der Identität

$$T(P) = \sum_{q=1}^{n} q_k r_k - C = \sum_{k=1}^{n} (q'_k + q''_k) r_k - C$$

erhält man für einen beliebigen Punkt P'_0 von T'_n die Ungleichung

[2] S. 39.

$$T(P_0') = \sum_{k=1}^{n}{}' q_k r_k(P_0') - C = \sum_{k=1}^{n}{}' q_k'' r_k(P_0') > 0.$$

Damit ist der Satz I bewiesen.

II. *Haben die (im engeren Sinne) konfokalen Tschirnhaus'schen Flächen* T_n *und* T_n' *die Gleichungen*

$$T(P) = \sum_{k=1}^{n}{}' q_k r_k - C = 0 \text{ bzw. } T(P) = \sum_{k=1}^{n}{}' q_k r_k - C' = 0,$$

so liegt die Fläche T_n *im Falle* $Q \geqq 0$ *und* $C < C'$ *innerhalb von* T_n'. *Im Falle* $Q < 0$ *und* $C < C'$ *liegt* T_n' *innerhalb von* T_n.

Dieser Satz folgt aus der Identität $T(P) - T'(P) = C - C'$. In einem Punkt P_0 bzw. P_0' von T_n bzw. T_n' ist nämlich $T(P_0') = C' - C$ bzw. $T'(P_0) = C - C'$.

3. Eine Tschirnhaus'sche Eifläche T_n (mit positiven Gewichten) liegt in einer Kugel, deren Mittelpunkt der Schwerpunkt der (mit den Gewichten q_k versehenen) Brennpunkte ist und deren Halbmesser R der Gleichung $QR = C$ genügt.[3] Dieser Satz lässt sich für den Fall ausdehnen, wenn der letzte Brennpunkt der Schwerpunkt der übrigen (mit den positiven Gewichten q_k versehenen) Brennpunkte ist und ein negatives Gewicht besitzt.

III. *Fällt der Brennpunkt* F_n *einer Tschirnhaus'schen Fläche* T_n *in den Schwerpunkt der übrigen, mit positiven Gewichten* q_k *versehenen* $n-1$ *Brennpunkte und ist* $Q = \sum_{k=1}^{n} q_k > 0$, *so liegt die Fläche* T_n *in einer Kugel vom Mittelpunkt* F_n, *deren Halbmesser* R *der Gleichung* $QR = C$ *genügt. Auf dieser Kugel hat die Fläche dann einen Punkt, wenn ihre Brennpunkte auf einer Geraden liegen.*

Für einen beliebigen Punkt P des Raumes gilt die Vektorgleichung

$$Q' \overrightarrow{PF_n} = \sum_{k=1}^{n-1} q_k \overrightarrow{PF_k}, \quad Q' = \sum_{k=1}^{n-1} q_k = Q - q_n,$$

weil F_n der Schwerpunkt der mit den Gewicht q_k versehenen Punkte F_k ($k = 1, 2, \ldots, n-1$) ist. Aus dieser Vektorgleichung folgt die Ungleichung

$$Q' \overline{PF_n} \leqq \sum_{k=1}^{n-1} q_k \overline{PF_k}.$$

Das Gleichheitszeichen besteht hier dann, wenn die Vektoren $\overrightarrow{PF_k}$ ($k = 1, 2, \ldots, n-1$) dieselbe Richtungen haben. In diesem Falle liegen die Brennpunkte $F_1, F_2, \ldots, F_n$ und der Punkt P auf einer Geraden.

[3] S. 42.

Addiert man zu beiden Seiten der Ungleichung $q_n \overline{PF_n}$, so ergibt sich

$$(Q' + q_n)\overline{PF_n} = Q\overline{PF_n} \leqq \sum_{k=1}^{n} q_k \overline{PF_k}.$$

Liegt der Punkt P auf der Fläche T_n, so ist

$$Q\overline{PF_n} \leqq \sum_{k=1}^{n} q_k \overline{PF_k} = C = QR.$$

Damit ist der Satz III bewiesen.

Ebenso ergibt sich der Satz

IV. *Liegen die Brennpunkte $F_1, F_2, \ldots, F_n$ der Fläche T_n mit der Gleichung*

$$\sum_{k=1}^{n} q_k r_k = 0,\ q_k > 0\ \ (k = 1, 2, \ldots, n-1),\ Q = Q' + q_n = 0,$$

auf der Strecke F_1F_2 der Geraden g und fällt der Brennpunkt F_n mit dem Schwerpunkt der übrigen $n-1$, mit den Gewichten q_k versehenen Brennpunkte zusammen, so besteht T_n aus den Punkten der Geraden g, die keine inneren Punkte der Strecke F_1F_2 sind.

Für jeden Punkt P des Raumes besteht nämlich die Vektorgleichung bzw. die Ungleichung.

$$Q'\overrightarrow{PF_n} = \sum_{k=1}^{n-1} q_k \overrightarrow{PF_k} \text{ bzw. } Q'\overline{PF_n} \leqq \sum_{k=1}^{n-1} q_k \overline{PF_k}.$$

In dieser Ungleichung besteht das Gleichheitszeichen, wenn die Vektoren $\overrightarrow{PF_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ dieselbe Richtungen haben, wenn also P ein Punkt der Geraden g, aber kein innerer Punkt der Strecke $\overline{F_1F_2}$ ist. Daraus folgt die Ungleichung

$$0 \leqq \sum_{k=1}^{n-1} q_k \overline{PF_k} - Q'\overline{PF_n} = \sum_{k=1}^{n-1} q_k \overline{PF_n} + q_k \overline{PF_n} = \sum_{k=1}^{n} q_k \overline{PF_k}.$$

Damit ist der Satz IV bewiesen, weil P dann ein Punkt von T_n ist, wenn hier das Gleichheitszeichen gilt.

Bezüglich des Satzes III teilt J. MOLNÁR mir den Satz mit:

Ist S der Schwerpunkt der Brennpunkte $F_1, F_2, \ldots, F_n$ mit positiven Gewichten und ist $R\sum_{k=1}^{n} q_k = RQ = C$, so liegt eine reelle Tschirnhaus'sche Fläche

$$2q_i\overline{PF_i} - \sum_{k=1}^{n} q_k \overline{PF_k} = 0\ (1 \leqq i \leqq n)$$

ausserhalb der Kugel von Halbmesser R, deren Mittelpunkt S ist.

Es gilt nämlich die Vektorgleichung

$$Q\overrightarrow{PS} = \sum_{k=1}^{n} q_k \overrightarrow{PF}_k = q_1 \overrightarrow{PF}_1 + \sum_{k=1}^{n} q_k \overrightarrow{PF}_k.$$

Für einen Punkt P der Fläche $(i=1)$ besteht also die Ungleichung

$$Q\overline{PS} \geqq q_1 \overline{PF}_1 - \sum_{k=2}^{n} q_k \overline{PF}_k = 2\, q_1 \overline{PF}_1 - \sum_{k=1}^{n} q_k \overline{PF}_k = C.$$

4. Sind $R_1, R_2, \ldots, R_n$ beliebige nicht negative reelle Zahlen, so lässt sich die Gleichung (1) in der Form

$$\sum_{k=1}^{n} q_k (r_k - R_k) = C - \sum_{k=1}^{n} q_k R_k = C' \tag{2}$$

schreiben.

Bezeichnet K_h die Kugel vom Halbmesser R_h ($\geqq 0$) und mit dem Mittelpunkt F_h, so bedeutet $d_h = r_h - R_h$ den Abstand eines Punktes P mit den multipolaren Koordinaten $r_1, r_2, \ldots, r_n$ von der Kugel K_h. Dieser Abstand ist negativ, Null oder positiv, je nachdem P innerhalb K_h, auf K_h bzw. ausserhalb K_h liegt.

Es gilt also der Satz

V. *Ist K_h eine Kugel vom Halbmesser R_h ($\geqq 0$), deren Mittelpunkt im Brennpunkt F_h einer Tschirnhaus'schen Fläche T_n liegt und hat F_h das Gewicht q_h, so genügen die Abstände d_h eines beliebigen Punktes der Fläche T_n von den Kugeln K_h $(h = 1, 2, \ldots, n)$ einer linearen Gleichung*

$$q_1 d_1 + q_2 d_2 + \ldots + q_n d_n = C'. \tag{3}$$

Die Punkte, deren Abstände von n Kugeln mit verschiedenen Mittelpunkten einer linearen Gleichung mit nicht verschwindenden reellen Koeffizienten genügen, liegen auf einer Tschirnhaus'schen Fläche n-ten Grades, deren Brennpunkte die Kugelmittelpunkte sind. Die Gewichte der Brennpunkte sind zu den Koeffizienten der linearen Gleichung proportional.

Sind $R_1, R_2, \ldots, R_n$ die multipolaren Koordinaten eines festen Punktes P der Fläche T_n, der also ein gemeinsamer Punkt der Kugeln K_h $(h = 1, 2, \ldots, n)$ ist, so ist die Gleichung (3) homogen, weil nach (2) $C' = C - \sum_{h=1}^{n} q_h R_h = 0$ ist. Die nichtnegativen Zahlen $R_1, R_2, \ldots, R_n$ können aber auch dann der Gleichung (3) genügen, wenn es keinen Punkt mit den multipolaren Koordinaten $R_1, R_2, \ldots, R_n$ gibt. Die Gleichung (3) kann also auch dann homogen sein, wenn die Kugeln K_h keinen gemeinsamen Punkt haben.

5. Hat der Brennpunkt F_k bzw. ein Punkt von T_n die rechtwinkligen Koordinaten a_k, b_k, c_k bzw. x, y, z, so hat die Gleichung (1) die Form

$$(4) \qquad T(x,y,z) = \sum_{k=1}^{n} q_k \left[(x-a_k)^2 + (y-b_k)^2 + (z-c_k)^2\right]^{\frac{1}{2}} - C = 0.$$

Die Richtungscosinus der Normalen dieser Fläche in ihrem Punkt P_0 mit den Koordinaten x_0, y_0, z_0, sind zu $T_x(x_0, y_0, z_0)$, $T_y(x_0, y_0, z_0)$, $T_z(x_0, y_0, z_0)$ proportional. Liegt die Normale bzw. der Punkt P_0 in der z-Achse bzw. im Anfang des rechtwinkligen Koordinatensystems und sind

$$d_k = (a_k^2 + b_k^2 + c_k^2)^{\frac{1}{2}} \ (k = 1, 2, \ldots, n),$$

so sind

$$(5) \qquad \begin{gathered} -T_x(0,0,0) = \sum_{k=1}^{n} q_k \frac{a_k}{d_k} = 0, \quad -T_y(0,0,0) = \sum_{k=1}^{n} q_k \frac{b_k}{d_k} = 0, \\ -T_z(0,0,0) = \sum_{k=1}^{n} q_k \frac{c_k}{d_k}. \end{gathered}$$

Der Punkt N_k, in dem die Einheitskugel K_0 mit dem Mittelpunkt $P_0 = (0, 0, 0)$ von der Halbgeraden P_0F_k getroffen wird, hat die Koordinaten $x_k = \frac{a_k}{d_k}$, $y_k = \frac{b_k}{d_k}$ $z_k = \frac{c_k}{d_k}$, die Richtungscosinus der Halbgeraden P_0F_k. Der Gegenpunkt N_k' von N_k auf der Kugel K_0 hat die Koordinaten $-x_k$, $-y_k$, $-z_k$. Der Punkt N_k bzw. N_k' wird mit M_k bezeichnet, je nachdem $q_k > 0$ bzw. $q_k < 0$ ist. Der Punkt M_k wird mit dem Gewicht $|q_k|$ versehen (also mit q_k, wenn $M_k \equiv N_k$, und mit $-q_k$, wenn $M_k \equiv N_k'$ ist). Ist $Q^* = \sum_{k=1}^{n} |q_k|$, so genügen die Koordinaten (ξ_0, η_0, ζ_0) des Schwerpunktes S_0 der Punkte $M_1, M_2, \ldots, M_n$ den Gleichungen

$$(6) \qquad \begin{gathered} Q^*\xi_0 = \sum_{k=1}^{n} q_k x_k = 0, \quad Q^*\eta_0 = \sum_{k=1}^{n} q_k y_k = 0, \\ Q^*\zeta_0 = \sum_{k=1}^{n} q_k z_k = T_z(0,0,0). \end{gathered}$$

Der Punkt S_0 liegt also auf der z-Achse, auf der Normalen der Fläche T_n im Punkt P_0. Daraus ergibt sich die folgende einfache Konstruktion der Normalen von T_n:

VI. *Ist N_k die Zentralprojektion des Brennpunktes F_k aus einem Punkt P_0 der Tschirnhaus'schen Fläche* (1) *auf die Einheitskugel K_0 mit dem Mittelpunkt P_0 und ist N'_k der Gegenpunkt von N_k auf K_0, so wird N_k bzw. N'_k mit M_k bezeichnet,*

je nachdem $q_k > 0$ *bzw.* $q_k < 0$ *ist. Wird der Punkt* M_k *mit dem Gewicht* $|q_k|$ *versehen und bezeichnet* S_0 *den Schwerpunkt der Punkte* $M_1, M_2, \ldots, M_n$, *so geht die Normale der Fläche im Punkt* P_0 *durch den Schwerpunkt* S_0.

Aus den Gleichungen (5) folgt, dass der Punkt M_k und sein Gewicht unverändert bleibt, wenn der Brennpunkt F_k unter Erhaltung seines Gewichtes q_k durch einen beliebigen Punkt F'_k der Halbgeraden P_0F_k ersetzt wird, oder wenn F_k durch einen beliebigen Punkt F_k'' der Verlängerung der Halbgeraden P_0F_k (über P_0) und zugleich q_k durch $-q_k$ ersetzt wird. Bei diesen Ersetzungen bleibt der Schwerpunkt S_0 und damit die Normale der entsprechenden Fläche T_n in P_0 unverändert. Auf Grund der Definition der in bezug auf einen Punkt P_0 perspektiv-konfokalen Flächen T_n gilt also der Satz

VII. *Die in bezug auf einen Punkt* P_0 *perspektiv-konfokalen Tschirnhaus'schen Flächen haben im Punkt* P_0 *dieselbe Normale (und damit dieselbe Berührungsebene).*

6. Ein Punkt P_0 ist ein *regulärer Punkt* von T_n, wenn die Fläche in P_0 eine bestimmte Normale besitzt. Widrigenfalls ist P_0 ein *singulärer Punkt* von T_n.

Die Konstruktion der Normalen in einem Punkt P_0 von T_n versagt, wenn P_0 mit einem Brennpunkt F_k zusammenfällt, weil dann der Punkt M_k und damit der Schwerpunkt S_0 unbestimmt ist.

Die Normale P_0S_0 ist auch dann unbestimmt, wenn die Punkte P_0 und S_0 zusammenfallen. Nach (5) verschwinden dann alle drei partielle Differentialquotiententen von $T(x, y, z)$ in P_0. Dann verschwinden die Komponenten des Vektors $V = \sum_{k=1}^{n} q_k \overrightarrow{P_0M_k}$, weil sie offenbar $-T_x(x_0, y_0, z_0)$, $-T_y(x_0, y_0, z_0)$, $-T_z(x_0, y_0, z_0)$ gleich sind. Es gilt also der Satz

VIII. *Ist* P_0 *ein singulärer Punkt der Tschirnhaus'schen Fläche* (1), *so fäll* P_0 *entweder mit einem Brennpunkt zusammen, oder verschwindet der Vektor*

$$V = \sum_{k=1}^{n} q_k \overrightarrow{P_0M_k}.$$

Hier sind die Vektoren $\overrightarrow{P_0M_k}$ *Einheitsvektoren und der Punkt* M_k *liegt auf der Halbgeraden* P_0F_k *bzw. auf ihrer Verlängerung, je nachdem das Gewicht* $q_k > 0$ *bzw.* $q_k < 0$ *ist. Ein singulärer Punkt* P_0 *einer Fläche* T_n *ist ein singulärer Punkt auf jeder in bezug auf* P_0 *perspektiv-konfokalen Fläche.*

Unter den in bezug auf einen Punkt P_0 perspektiv-konfokalen Flächen T_n gibt es Tschirnhaus'sche Eiflächen, z. B. die Fläche T_n durch P_0, deren Brennpunkte mit den Punkten M_k zusammenfallen und die Gewichte $|q_k|$ besitzen.

Hat eine Eifläche T_n ausserhalb der Brennpunkte einen singulären Punkt, so besteht sie aus einem isolierten Punkt oder aus einer isolierten Strecke. Dieser letzte Fall kann aber nur dann vorkommen, wenn die Brennpunkte auf einer Geraden liegen. Jeder ausserhalb der Brennpunkte liegende singuläre Punkt einer Eifläche T_n fällt in den Kern der Fläche.[4]

Zu einem gegebenen Punkt P_o kann man n Brennpunkte und ihre Gewichte so bestimmen, dass eine Eifläche T_n mit diesen Brennpunkten in P_o einen singulären Punkt besitzt.

Ist $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ein beliebiges Polygon im Raume mit den Seitenlängen $\overline{A_n A_1} = q_1$, $\overline{A_1 A_2} = q_2, \ldots, \overline{A_{n-1} A_n} = q_n$, sind $\overrightarrow{P_0 B_1} = \overrightarrow{A_n A_1}$, $\overrightarrow{P_0 B_2} = \overrightarrow{A_1 A_2}, \ldots, \overrightarrow{P_0 B_n} = \overrightarrow{A_{n-1} A_n}$, bezeichnet F_k irgendeinen Punkt der Halbgeraden $P_0 B_k$ und hat der Brennpunkt F_k das Gewicht q_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, so hat die den Punkt P_0 enthaltende Eifläche T_n mit den Brennpunkten F_k im Punkt P_0 einen singulären Punkt. P_0 ist der einzige reelle Punkt von T_n, wenn das Polygon $A_1, A_2, \ldots, A_n$ keine Doppelstrecke ist, wenn also die Punkte F_k nicht auf einer Geraden liegen.

Der Punkt P_0 ist nämlich der Schwerpunkt der zu ihm gehörigen Punkte M_k, weil $\overline{P_0 M_k} = 1$, $\overline{P_0 B_k} = q_k \overline{P_0 M_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ und

$$\sum_{k=1}^{n} q_k \overrightarrow{P_0 M_k} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{P_0 B_k} = \overrightarrow{A_n A_1} + \overrightarrow{A_1 A_2} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1} A_n} = \overrightarrow{A_n A_n} = 0$$

sind.

Die in bezug auf den Punkt P_0 perspektiv-konfokalen Flächen T_n haben in P_0 einen singulären Punkt.

7. Haben die Tschirnhaus'schen Flächen T' und T'' im multipolaren Koordinatensystem der Brennpunkte $F_1, F_2, \ldots, F_n$ die Gleichungen

$$T' \equiv \sum_{k=1}^{n} q'_k r_k - C' = 0 \text{ bzw. } T'' \equiv \sum_{k=1}^{n} q''_k r_k - C'' = 0$$

und sind

$$q'_k + q''_k = q_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \quad C = C' + C'',$$

so sind Flächen T' und T'' bezüglich der Fläche T mit der Gleichung

$$T \equiv \sum_{k=1}^{n} q_k r_k - C = 0$$

komplementär.

Aus der Identität $T \equiv T' + T''$ folgt, dass jeder gemeinsame Punkt irgendzweier der Flächen T, T' und T'' auch auf der dritten liegt.

[4] S. 47.

Der Brennpunkt F_k hat die Gleichung $q_k r_k = 0$, seine komplementäre ist die *Gegenfläche* des Brennpunktes F_k bezüglich von T_n. Sie ist eine Tschirnhaus'sche Fläche $(n-1)$-ten Grades mit der Gleichung

$$q_1 r_1 + q_2 r_2 + \dots + q_{k-1} r_{k-1} + q_{k+1} r_{k+1} + \dots + q_n r_n = C .$$

Sind $q_k' q_k'' = 0$ und $q_k' + q_k'' = q_k$ $(k = 1, 2, \dots, n)$, so haben die Flächen T' und T'' keinen Brennpunkt gemeinsam und die Summe ihrer Gradzahlen ist der Gradzahl von T gleich.

8. Ist

$$(7) \qquad L(x, y, z) \equiv \sum_{k=1}^{n}{}' q_k r_k \equiv \sum_{k=1}^{n}{}' q_k \left[(x - a_k)^2 + (y - b_k)^2 + (z - c_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

und bezeichnet $e_1, e_2, \dots, e_n$ eine beliebige Anordnung der Zahlen $+1$ und -1, so stellt die Gleichung

$$(8) \qquad H_m(x, y, z) = \sum_{k=1}^{n}{}' e_k q_k r_k - C = L_m(x, y, z) - C = 0$$

eine reelle oder nichtreelle adjungierte Tschirnhaus'sche Fläche von T_n mit der Gleichung (1) dar. Den $2^n = N$ verschiedenen Folgen der Zahlen $e_1, e_2, \dots, e_n$ entsprechend gibt es N adjungierte Tschirnhaus'sche Flächen $(m = 1, 2, \dots, N)$, unter denen eine (reelle) Eifläche vorkommen kann.

Die adjungierten Flächen T_n sind im weiteren Sinne konfokal. Wegen der Ungleichungen $|q_k| - e_k q_k \geqq 0$ erhält man aus dem Satz I:

IX. *Bei einer Tschirnhaus'schen Eifläche liegen alle ihr adjungierten reellen Flächen ausserhalb der Eifläche.*

Es kann sogar bewiesen werden, dass eine Tschirnhaus'sche Eifläche innerhalb einer jeder anderen, ihr adjungierten reellen Fläche liegt.

H_m ist eine lineare Funktion der variablen $r_1, r_2, \dots, r_n$. Das Produkt

$$\Pi = H_1 H_2 \dots H_N = \Phi_n(x, y, z)$$

ist ein Polynom N-ten Grades von $r_1, r_2, \dots, r_n$ und ein Polynom $N' = N/2$-ten Grades von $r_1^2, r_2^2, \dots, r_n^2$, weil das Produkt sich nicht verändert, wenn r_k in jedem Faktor durch $-r_k$ ersetzt wird. Daraus folgt, dass $\Phi_n(x, y, z)$ ein Polynom von x, y, z ist, dessen Grad höchstens gleich $N = 2^n$ ist. Die Gleichung

$$(9) \qquad \Phi_n(x, y, z) = 0$$

stellt also eine algebraische Fläche von der Ordnung $\nu \leqq N$ dar.

Die Ordnung der Fläche

$$\Phi_2(x, y, z) = (q_1^2 r_1^2 - q_2^2 r_2^2)^2 - 2 C^2 (q_1^2 r_1^2 + q_2^2 r_2^2) + C^4 = 0$$

ist Vier bzw. Zwei, je nachdem $q_1^2 \neq q_2^2$ bzw. $q_1^2 = q_2^2$ ist. Im zweiten Fall ist die Fläche ein Rotationsellipsoid bzw. Hyperboloid, je nachdem der Abstand der Brennpunkte F_1 und F_2 kleiner bzw. grösser als $\left|\frac{C}{q_1}\right|$ ist.

Da

$$r_k^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2\,(a_k\,x + b_k\,y + c_k\,z) + a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

ist, haben die höchsten Glieder von $\Phi_n(x, y, z)$ die Form

$$A\,(x^2 + y^2 + z^2)^{N'} = A\,r^N, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

wo A eine von den Koordinaten der Brennpunkte unabhängige Konstante ist. Die höchsten Glieder von $\Phi_n(x, y, z)$ stimmen nämlich mit den höchsten Gliedern des Produktes $L_1 L_2 \ldots L_N$ überein, wenn man in jedem Faktor $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = r$ setzt, wenn also $L_m = r\,(e_1 q_1 + e_2 q_2 + \ldots + e_n q_n)$ ist. Deshalb ist

$$A = \Pi\,(e_1 q_1 + e_2 q_2 + \ldots + e_n q_n).$$

Die algebraische Fläche (9) hat also nur dann die Ordnung N, wenn keine der adjungierten Flächen $H_m(x, y, z) = 0$ eine verschwindende Gewichtssumme besitzt. Hat eine adjungierte Fläche T_n einen reellen unendlichfernen Punkt, so hat die Fläche (9) höchstens die Ordnung $N - 2$.

Es gilt also der Satz:

X. *Die adjungierten Tschirnhaus'schen Flächen n-ten Grades bilden eine algebraische Fläche $\nu \leqq N = 2^n$-ter Ordnung. Hat eine adjungierte Tschirnhaus'sche Fläche einen reellen unendlichfernen Punkt, so ist $\nu \leqq N - 2$.*

Die Tschirnhaus'sche Fläche mit der Gleichung $T \equiv \sum_{k=1}^{n} q_k\,r_k - C = 0$ kann mit ihrer adjungierten von der Gleichung

$$T_{(k)} \equiv q_1 r_1 + q_2 r_2 + \ldots + q_{k-1} r_{k-1} - q_k r_k + q_{k+1} r_{k+1} + \ldots + q_n r_n - C \equiv$$
$$\equiv T - 2 q_k r_k = 0$$

ausser dem Brennpunkt F_k keinen Punkt gemeinsam haben. Die multipolaren Koordinaten ihrer gemeinsamen Punkte genügen nämlich der Gleichung $T - T_{(k)} \equiv 2 q_k r_k = 0$. Liegt also F_k nicht auf T, so haben T und $T_{(k)}$ keinen Punkt gemeinsam.

Die gemeinsamen Punkte der Flächen $T_{(k)}$ und $T_{(h)}$ genügen der Gleichung

$$T_{(h)} - T_{(k)} = 2\,(q_k\,r_k - q_h\,r_h) = 0.$$

Ist $q_h q_k < 0$, so haben $T_{(h)}$ und $T_{(k)}$ keinen Punkt gemeinsam. Ist aber $q_h\,q_k < 0$, so liegen die gemeinsamen Punkte von $T_{(h)}$ und $T_{(k)}$ — unabhängig von der Lage der übrigen Brennpunkte und von ihren Gewichten — auf einer Apollonischen Kugel mit den Polen F_h und F_k mit dem Verhältnis $\overline{PF}_h : \overline{PF}_k = q_k : q_h$.

9. Die geschlossenen Teilflächen, Schalen der algebraischen Fläche (9) sind adjungierte Tschirnhaus'sche Flächen n-ten Grades. Zwei Mäntel eines zweischaligen Rotationshyperboloids bilden zwei Schalen, obgleich sie im projektiven Sinne eine geschlossene Fläche bilden.

Die Sätze über die Tschirnhaus'schen Flächen, deren Brennpunkte in einer Ebene liegen, lassen sich auf die Tschirnhaus'schen (ebenen) Kurven anwenden und umgekehrt.

Die einfachsten Tschirnhaus'schen Kurven, die in einem Brennpunkt einen Punkt besitzen, werden von einer Pascalschen Schnecke S gebildet.[5] Diese Kurve ist eine Konchoide, deren Basis ein Kreis K ist und deren Pol O auf dem Kreis K liegt. Ist das Zwischenstück[6] kleiner als der Durchmesser von K, so ist O ein Knoten, in dem die Kurve S sich schneidet.[7] Diese Kurve S ist ein spezielles Cartesisches Oval[8], das im Punkt O einen Brennpunkt besitzt. Der Pol O teilt die Pascalsche Schnecke S mit Knoten in zwei adjungierte Tschirnhaus'sche Kurven zweiten Grades, von denen die eine im Kreis K liegt und eine Eikurve T_2 ist. Beide Kurven haben im Brennpunkt O einen Eckpunkt.

Ein vollständiges Cartesisches Oval besteht aus zwei adjungierten Tschirnhaus'schen Kurven zweiten Grades[9].

Durch Rotation der Cartesischen Ovale um die Gerade ihrer Brennpunkte ergeben sich Tschirnhaus'sche Flächen zweiten Grades.

10. Für adjungierte Tschirnhaus'sche Flächen zweiten Grades gilt der Satz:

XI. *Sind* $q_1 > q_2 > 0$ *und* $f = \overline{F_1F_2}$, *so stellt die Gleichung*

$$T \equiv q_1 r_1 - q_2 r_2 - C = 0$$

dann und nur dann eine reelle Fläche dar, wenn $C \geqq -q_2 f$ *ist. Im Falle* $C = -q_2 f$ *besteht diese Fläche aus einem einzigen Punkt, aus dem Brennpunkt* F_1. *Die Fläche* T *umschliesst den Brennpunkt* F_1, *wenn* $-q_2 f < C < q_1 f$ *ist, und beide Brennpunkte, wenn* $C > q_1 f$ *ist. Für* $C = q_1 f$ *hat die Fläche* T *in* F_2 *einen Eckpunkt.*

Die adjungierten Flächen mit der Gleichung

$$T_1 \equiv -q_1 r_1 + q_2 r_2 - C = 0, \text{ bzw. } T_2 \equiv q_1 r_1 + q_2 r_2 - C = 0$$

sind dann reell, wenn $C \leqq q_2 f$, *bzw.* $C \geqq q_2 f$ *ist.*

Beide Flächen T *und* T_1 *sind reell, wenn* $-q_2 f < C < q_2 f$ *ist. Im Falle* $0 < C < q_2 f$ *liegt die Fläche* T_1 *innerhalb von* T, *im Falle* $0 > C > -q_2 f$ *liegt aber die Fläche* T *innerhalb von* T_1.

Falls $C \geqq q_2 f$ *ist, sind beide Flächen* T *und* T_2 *reell und die Fläche* T_2 *wird von der Fläche* T *umschlossen.*

[5] Vgl. G. LORIA, *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven*, Bd. I: Die algebraischen Kurven (Leipzig, 1910), S. 147. Im dritten Teil der Arbeit von J. MOLNÁR, Über Fadenkonstruktion ebener Kurven (*Középiskolai Matematikai Lapok*, **2** (1950), S. 176—178) wurden auch Tschirnhaus'sche Kurven konstruiert, deren Gewichte ganze Zahlen von verschiedenen Vorzeichen sind. Dort wurde auch eine Pascalsche Schnecke dargestellt.

[6] Bei G. LORIA, a. a. O.[5], S. 136.

[7] Bei G. LORIA, a. a. O.[5], Tafel IV., Fig. 29 a.

[8] Bei G. LORIA, a. a. O.[5], S. 176—177.

[9] Bei G. LORIA, a. a. O.[5], S. 178. Die Behauptung von CHASLES, dass die konjugierten Ovale einer vollständigen Cartesischen Ovale keinen gemeinsamen Punkt im Endlichen haben, gilt nicht, weil sie in einem Brennpunkt einen Eckpunkt gemeinsam haben können.

Eine Tschirnhaus'sche Fläche zweiten Grades mit den Brennpunkten F_1 und F_2 ist eine Rotationsfläche mit der Achse F_1F_2. Sie ist reell, wenn sie mit der Achse Treffpunkte besitzt.

Die Achse wird von den Brennpunkten in drei Strecken : a, b bzw. c geteilt. Ein Punkt P liegt auf der Strecke a, b bzw. c, je nachdem die Punkte P, F_1 und F_2 auf der Achse die Aufeinanderfolge PF_1F_2, F_1PF_2 bzw. F_1F_2P besitzen.

Bezeichnet $x = r_1 (\geqq 0)$ den Abstand $\overline{PF_1}$, so ist $r_2 = \overline{PF_2} = f + x$, $r_2 = f - x$ bzw. $r_2 = x - f$, je nachdem der Punkt P auf a, b bzw. c liegt. Die Differenz $D = q_1r_1 - q_2r_2$ hat in einem Punkt der Strecke a, b bzw. c den Wert

$$D_a = (q_1 - q_2)\,x - q_2f,\ D_b = (q_1 + q_2)\,x - q_2f \text{ bzw. } D_c = (q_1 - q_2)\,x + q_2f.$$

Die Fläche T hat die Gleichung $D - C = 0$. Sie hat im Innern der Strecke a, b bzw. c einen Treffpunkt, wenn die Gleichung $D_a - C = 0$, $D_b - C = 0$, bzw. $D_c - C = 0$ eine positive Lösung x_a, $x_b < f$ bzw. $x_c > f$ besitzt. Daraus ergeben sich unmittelbar alle unsere Aussagen über die Fläche T.

Die adjungierte Fläche T_1 hat die Gleichung $D + C = 0$. Sie hat im Falle $C < q_2f$ auf a und $b + c$ je einen Treffpunkt. Dieser letztere fällt auf b, c bzw. in F_2, je nachdem $C > -q_1f$, $C < -q_1f$ bzw. $C = -q_1f$ ist.

Beide Flächen T und T_1 sind reell, wenn $-q_2f < C < q_2f$ ist. Im Falle $0 < C < q_2f$ trifft die Fläche T bzw. T_1 die Strecken a und b in je einem Punkt und diese Punkte haben vom Brennpunkt F_1 die Abstände

$$x_a = \frac{q_2f + C}{q_1 - q_2},\ x_a^{(1)} = \frac{q_2f - C}{q_1 - q_2},\quad x_b = \frac{q_2f + C}{q_1 + q_2},\ \text{bzw. } x_b^{(1)} = \frac{q_2f - C}{q_1 + q_2}.$$

Wegen der Ungleichung $C < q_2f < q_1f$ sind nämlich $x_b < f$ und $x_b^{(1)} < f$.

Aus den Ungleichungen $x_a > x_a^{(1)} > 0$ und $0 < x_b^{(1)} < x_b$ folgt, dass die Fläche T_1 innerhalb von T liegt. Ebenso beweist man, dass T innerhalb von T_1 ist, falls $0 > C > -q_2f$ ist. Für $C = 0$ fallen die Flächen T und T_1 in einer Apollonischen Kugel zusammen.

Bezeichne S die Summe $q_1r_1 + q_2r_2$. Sie hat in einem Punkt P der Strecke a, b bzw. c den Wert

$$S_a = (q_1 + q_2)\,x + q_2f,\quad S_b = (q_1 - q_2)\,x + q_2f\ (x < f),$$
$$S_c = (q_1 + q_2)\,x - q_2f\ \ (x > f).$$

Die Fläche T_2 hat die Gleichung $S - C = 0$. Die Summe S hat auf der Achse den kleinsten Wert q_2f. Die Fläche T_2 ist also nur dann reell, wenn $C \geqq q_2f$. Ist $C = q_2f$, so besteht die Fläche aus dem einzigen Punkt F_1. Im Falle $C > q_2f$ ist die Fläche T_2 reell und sie hat auf den Strecken a und $b + c$ je einen Treffpunkt. Der letztere fällt auf b, c bzw. in F_2, je nachdem $C < q_1f_1$, $C > q_1f$ bzw. $C = q_1f$ ist.

Die adjungierten Flächen T und T_2 sind gleichzeitig reell, wenn $C > q_2 f$ ist. Dann liegt die Fläche T_2 innerhalb der Fläche T.

Die Strecke a wird von der Fläche T bzw. T_2 in einem Punkt P getroffen, für den

$$x_a = \frac{q_2 f + C}{q_1 - q_2} \text{ bzw. } x_a^{(2)} = \frac{-q_2 f + C}{q_1 + q_2}$$

ist. Im Falle $C < q_1 f$ bzw. $C > q_1 f$ treffen beide Flächen (ausserhalb von a) die Strecke b bzw. c und für die Treffpunkte gelten die Gleichungen

$$x_b = \frac{q_2 f + C}{q_1 + q_2}, \quad x_b^{(2)} = \frac{-q_2 f + C}{q_1 - q_2} \quad (C < q_1 f);$$

$$x_c = \frac{-q_2 f + C}{q_1 - q_2}, \quad x_c^{(2)} = \frac{q_2 f + C}{q_1 + q_2} \quad (C > q_1 f).$$

Aus den Relationen

$$x_a > x_a^{(2)}; \; x_b > x_b^{(2)} \; (C < q_1 f), \; x_c > x_c^{(2)} \; (C > q_1 f),$$
$$x_b = x_b^{(2)} = x_c = x_c^{(2)} = f \; (C = q_1 f)$$

folgt, dass die Fläche T_2 innerhalb von T liegt.

Damit ist der Satz XI bewiesen.

Man kann leicht einsehen, dass die Gleichung $T_3 \equiv -q_1 r_1 - q_2 r_2 - C = 0$ nur dann eine reelle Fläche darstellt, wenn $C \leqq -q_2 f$ ist.

Auf Grund des Satzes XI gilt auch der Satz:

XII. *Sind* $|q_1| > |q_2| > 0$, $C \neq 0$ und $|C| \neq |q_2 f|$, *so gibt es unter den adjungierten Flächen*

$$q_1 r_1 + q_2 r_2 - C = 0, \; q_1 r_1 - q_2 r_2 - C = 0, \; -q_1 r_1 + q_2 r_2 - C = 0,$$
$$-q_1 r_1 - q_2 r_2 - C = 0$$

genau zwei von einem Punkt verschiedene reelle Flächen.

Sind $|q_1| > |q_2| > 0$ *und* $C = 0$, *so fallen zwei reelle adjungierte Flächen in eine Apollonische Kugel des Punktpaares* $F_1 F_2$ *zusammen.*

Ist $|q_1| = |q_2| = 1$, *so gibt es unter den adjungierten Flächen zweiten Grades eine, zwei bzw. drei von einem Punkt verschiedene reelle Flächen, je nachdem* $|C| > f$, $|C| < f$ *bzw.* $|C| = f$ *ist. Die reellen adjungierten Flächen bestehen aus einem Rotationsellipsoid, aus den zwei Mänteln eines Rotationshyperboloids, bzw. aus der Strecke* $F_1 F_2$ *und aus ihren zwei Verlängerungen.*

Man kann nämlich annehmen, dass im Falle $|q_1| \neq |q_2| > 0$ $q_1 > q_2 > 0$ ist.

(Eingegangen am 24. März 1950.)

ПОВЕРХНОСТИ И КРИВЫЕ ТШИРНГАУСА

Д. С.-НАДЬ (Сегед)

(*Резюме*)

Поверхность порядка n Тширнгауса (коротко поверхность T_n) есть геометрическое место точек, сумма расстояний которых от n различных точек $F_1, \ldots, F_n$ (фокусов), умноженных на данные числа $q_1, \ldots, q_n$ (веса) равняется постоянному числу C. Если фокусы находятся в какой-либо плоскости, то поверхность симметрична относительно неё, и кривая, по которой пересекаются поверхность и эта плоскость, называется кривой Тширнгауса порядка n.

В мультиполярной системе координат, полюсами которой служат фокусы уравнения поверхности T_n

$$\sum_{k=1}^{n} q_k PF_k - C \equiv \sum_{k=1}^{n} q_k r_k - C = 0.$$

В одной из предыдущих работ автор исследует поверхности T_n с положительными весами. В настоящей работе не делается такого ограничения. Геометрическое место точек, расстояние которых от n различных сфер d_k $(k = 1, \ldots, n)$ удовлетворяет данное линейное уравнение, также поверхность T_n. Поверхности T_n и T_n', обладающие общими фокусами, конфокальны в более узком (широком) смысле слова, если в отдельных фокусах веса (их абсолютные величины) одинаковы. Если P_0' общая точка поверхностей T_n и T_n', если C одинакого для обеих поверхностей, если $|q_k| = |q_k'|$ $(k = 1, \ldots, n)$ и, наконец, если F'_k лежит на прямой P_0F_k или её продолжении, в зависимости от того, что $q_k' = q_k$ или $q_k' = q_k$, то эти поверхности перспективно конфокакальны относительно точки P_0. Две такие поверхности касаются в точке P_0. Поверхности T'_n, которые конфокальны с T_n в более общем смысле слова, для которых C одинакого, называются сопряжёнными поверхностями к T_n. T_n и сопряжённые с нею поверхности вместе образуют такую алгебраическую поверхность порядок которой $\leqq N = 2^n$.

SUR L'ORDRE DE L'APPROXIMATION D'UNE FONCTION PAR SON INTÉGRALE DE POISSON

Par

BÉLA SZ.-NAGY (Szeged), correspondant de l'Académie

On sait que si $f(x)$ est une fonction continue de période 2π, son intégrale de Poisson

$$f(r, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{1-r^2}{\Delta_r(t)} dt ,$$

où

$$\Delta_r(t) = 1 - 2r\cos t + r^2 = (1-r)^2 + 2r(1-\cos t),$$

tend, pour $r \to 1$, uniformément vers $f(x)$. SALEM et ZYGMUND[1] ont démontré que si $f(x)$ satisfait à la condition de Lipschitz d'ordre α $(0 < \alpha < 1)$, on a

$$f(r, x) - f(x) = O(1-r)^{\alpha} .$$

NATANSON[2] vient d'envisager aussi le cas $\alpha = 1$ et de démontrer la proposition plus précise suivante :

Soit

$$u(r, \alpha) = \sup_{f} \max_{x} |f(r, x) - f(x)|$$

où f parcourt la classe $\mathrm{Lip}_1 \alpha$ *des fonctions de période 2π telles que*

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqq |x_2 - x_1|^{\alpha}.$$

On a alors

$$(1) \qquad u(r, \alpha) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}(1-r) \log \dfrac{1}{1-r} + O(1-r) & \textit{pour } \alpha = 1, \\ \sec \dfrac{\pi\alpha}{2} \cdot (1-r)^{\alpha} + O(1-r) & \textit{pour } 0 < \alpha < 1.^{3}) \end{cases}$$

[1] R. SALEM — A. ZYGMUND, Capacity of sets and Fourier series, *Transactions American Math. Society*, **59** (1946), 23—41, en particulier p. 30.

[2] I. P. NATANSON, Sur l'ordre de l'approximation d'une fonction continue 2π-périodique par son intégrale de Poisson, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, **72** (1950), 11—14 (en russe).

[3] Ici, et dans ce qui suit, $O(1-r)^{\beta}$ désigne une quantité qui, divisée par $(1-r)^{\beta}$, reste bornée dans l'intervalle $0 \leqq r < 1$. À vrai dire, NATANSON a observé seulement que les termes respectifs au second membre de (1) sont égaux à $K_{\alpha}(r)(1-r)$ avec $K_{\alpha}(r)$ borné dans tout intervalle $r_0 \leqq r < 1$ où $r_0 > 0$. Mais une évaluation évidente prouve que $u(r, \alpha)$, donc aussi $K_{\alpha}(r)$, sont bornés aussi dans le voisinage de $r = 0$.

Le but de la présente Note est d'envisager la même question pour les fonctions conjuguées

$$\overline{f}(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \psi_x(t)\ \operatorname{cotg}\frac{t}{2}\,dt$$

où

$$\psi_x(t) = f(x+t) - f(x-t)\ .$$

Nous démontrerons la proposition suivante :

Soit

$$v(r,\alpha) = \sup_f \max_x |\overline{f}(r,x) - \overline{f}(x)|$$

où f parcourt la classe $\mathrm{Lip}_1\,\alpha$. *On a*

$$v(r,\alpha) = 2^{\alpha-1}\operatorname{cosec}\frac{\pi\alpha}{2}\cdot(1-r)^{\alpha} + O\,(1-r)^{\alpha+1} \tag{2}$$

et cela pour $0 < \alpha \leqq 1$. *En particulier, on a*

$$v(r,1) = \frac{4}{\pi}\int_r^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx = (1-r) + O\,(1-r)^2 \leqq \frac{4}{\alpha}(1-r)\ . \tag{3}$$

Partons de la formule [4]

$$\overline{f}(r,x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \psi_x(t)\ \frac{r\,\sin t}{\Delta_r(t)}\,dt\ .$$

Il en résulte que

$$\overline{f}(r,x) - \overline{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\psi_x(t)\left[\operatorname{cotg}\frac{t}{2} - \frac{2r\,\sin t}{\Delta_r(t)}\right]dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\psi_x(t)\operatorname{cotg}\frac{t}{2}\cdot\frac{(1-r)^2}{\Delta_r(t)}\,dt,$$

ou, grâce à la périodicité de $f(x)$,

$$\overline{f}(r,x) - \overline{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2}\psi_x(t)\operatorname{cotg}\frac{t}{2}\cdot\frac{(1-r)^2}{\Delta_r(t)}\,dt - \tag{4}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\psi_{x+\pi}(\pi-t)\operatorname{cotg}\frac{t}{2}\cdot\frac{(1-r)^2}{\Delta_r(t)}\,dt\ .$$

Lorsque $f(x) \in \mathrm{Lip}_1\,\alpha$ $(0 < \alpha \leqq 1)$, il en vient que

$$\left|\overline{f}(r,x) - \overline{f}(x)\right| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2}(2t)^{\alpha}\ \operatorname{cotg}\frac{t}{2}\cdot\frac{(1-r)^2}{\Delta_r(t)}\,dt + \tag{5}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}[2(\pi-t)]^{\alpha}\operatorname{cotg}\frac{t}{2}\cdot\frac{(1-r)^2}{\Delta_r(t)}\,dt\ .$$

Désignons par $g_\alpha(x)$ la fonction impaire de période 2π, qui est définie dans $(0,\pi)$ par

[4] Cf. par ex. A. ZYGMUND, *Trigonometrical series* (Warszawa-Lwów, 1935), § 3.4.

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} 2^{\alpha-1} x^\alpha & \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right), \\ 2^{\alpha-1} (\pi - x)^\alpha & \left(\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi\right). \end{cases}$$

En écrivant (4) pour $g_\alpha(x)$ au lieu de $f(x)$, on voit que le second membre de (5) est égal à

$$\bar{g}_\alpha(r, 0) - \bar{g}_\alpha(0) .$$

Or on voit sans peine que $g_\alpha(x)$ appartient aussi à la classe $\mathrm{Lip}_1 \alpha$, d'où il résulte que

(6) $$v(r, \alpha) = \bar{g}_\alpha(r, 0) - \bar{g}_\alpha(0) =$$

$$= \frac{2^{\alpha-1} (1-r)^2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} t^\alpha \operatorname{cotg} \frac{t}{2} \cdot \frac{dt}{\Delta_r(t)} + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)^\alpha \operatorname{cotg} \frac{t}{2} \cdot \frac{dt}{\Delta_r(t)} \right] .$$

Désignons la première de ces intégrales par I et la seconde par J.

Comme $\Delta_r(t) \geqq 1$ pour $\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \pi$, J est bornée par une constante ne dépendant ni de r ni de α,

(7) $$0 < J \leqq C .$$

Pour I on a tout d'abord, puisque $\Delta_r(t) \geqq (1-r)^2$,

(8) $$0 < I \leqq C(\alpha) / (1-r)^2 .$$

D'autre part, vu que

$$0 \leqq t^2 - 2(1 - \cos t) \leqq t^4/12 ,$$

et que

$$1 - \cos t \geqq t^2/\pi \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqq t \leqq \pi/2, \quad [5])$$

on a pour $0 \leqq t \leqq \pi/2$

$$\delta_r(t) = \frac{1}{\Delta_r(t)} - \frac{1}{(1-r)^2 + rt^2} =$$

$$= \frac{r[t^2 - 2(1 - \cos t)]}{[(1-r)^2 + 2r(1 - \cos t)][(1-r)^2 + rt^2]} \begin{cases} \geqq 0, \\ \leqq \dfrac{\pi}{24\, r} . \end{cases}$$

Donc

(9) $$I = \int_0^{\pi/2} t^\alpha \operatorname{cotg} \frac{t}{2} \cdot \frac{dt}{(1-r)^2 + rt^2} + \int_0^{\pi/2} t^\alpha \operatorname{cotg} \frac{t}{2} \cdot \delta_r(t)\, dt = I_1 + R_1$$

où

[5] Cela vient par intégration de l'inégalité $\sin t \geqq 2t/\pi$, valable dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(10) $$0 < R_1 \leqq C_1(\alpha) / r \ .$$

Le développement

$$c(u) = \frac{1}{u} - \operatorname{cotg}\ u = 2u \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2 - u^2}$$

met en évidence que $c(u)/u$ est une fonction positive et croissante pour $0 \leqq u \leqq \pi/2$, et par conséquent

$$0 \leqq c(u)/u \leqq \frac{2}{\pi} c\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi^2}, \quad 0 \leqq c(u) \leqq \frac{4}{\pi^2} u \, .$$

On en tire que

(11) $$I_1 = \int_0^{\pi/2} 2t^{\alpha-1} \frac{dt}{(1-r)^2 + rt^2} - \int_0^{\pi/2} t^{\alpha} c\left(\frac{t}{2}\right) \frac{dt}{(1-r)^2 + rt^2} = I_2 - R_2$$

où

(12) $$0 < R_2 < \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} t^{\alpha+1} \frac{dt}{rt^2} \leqq C_2(\alpha)/r;$$

d'autre part,

(13) $$I_2 = \int_0^{\infty} 2t^{\alpha-1} \frac{dt}{(1-r)^2 + rt^2} - \int_{\pi/2}^{\infty} = I_3 - R_3$$

où

(14) $$0 < R_3 < \int_{\pi/2}^{\infty} \frac{2t^{\alpha-1}}{rt^2} \, dt \leqq C_3(\alpha)/r.$$

En substituant

$$\frac{rt^2}{(1-r)^2} = x$$

on obtient que

(15) $$I_3 = \frac{(1-r)^{\alpha-2}}{r^{\alpha/2}} \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{\alpha}{2}} - 1}{1+x} \, dx.$$

Or cette intégrale est égale à $\pi \operatorname{cosec} \frac{\alpha\pi}{2}$ [6]) ; et puisque

$$0 \leqq \frac{1}{r^{\alpha/2}} - 1 = \frac{1}{r^{\alpha/2}} (1 - r^{\alpha/2}) \leqq \frac{1}{r^{\alpha/2}} (1-r),$$

[6] Cf. par ex. E. C. TITCHMARSH, *The theory of functions* (Oxford, 1932), 105. p.

on a

$$I_3 = (1-r)^{\alpha-2}\ \pi\ \operatorname{cosec}\frac{\alpha\pi}{2} + R_4 \tag{16}$$

où

$$|R_4| \leqq \frac{(1-r)^{\alpha-1}}{r^{\alpha/2}}. \tag{17}$$

En réunissant (9) — (17), on voit que

$$I = (1-r)^{\alpha-2}\ \pi\ \operatorname{cosec}\frac{\alpha\pi}{2} + R(r,\alpha)$$

où

$$R(r,\alpha) = O\,(1-r)^{\alpha-1} \quad \text{pour} \quad r \to 1\ .$$

En vertu de (8), la quantité I, et par conséquent aussi la quantité $R(r,\alpha)$, restent bornées dans tout intervalle $0 \leqq r \leqq r_0$ où $r_0 < 1$. On en conclut que

$$|\,R(r,\alpha)\,| \leqq K(1-r)^{\alpha-1}$$

dans tout l'intervalle $0 \leqq r < 1$ avec une constante $K = K(\alpha)$.

Eu égard aussi à (6) et (7), cela achève la démonstration de (2).

Pour démontrer (3), observons que

$$g_1(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\,(2n+1)\,x}{(2n+1)^2}\ ,$$

$$\bar{g}_1(x) = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos\,(2n+1)\,x}{(2n+1)^2}\ ,$$

$$\bar{g}_1(r,x) = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}r^{2n+1}\,(-1)^n\frac{\cos\,(2n+1)\,x}{(2n+1)^2}\ ,$$

d'où il s'ensuit que

$$v(r,1) = \bar{g}_1(r,0) - \bar{g}_1(0) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1-r^{2n+1}}{(2n+1)^2} = \frac{4}{\pi}\int_r^1\frac{\operatorname{arctg} z}{z}\,dz.$$

Vu que

$$0 < \frac{\operatorname{arctg} z}{z} \leqq 1 \text{ pour } 0 \leqq z \leqq 1 \text{ et } \lim_{z\to 1}\frac{\operatorname{arctg} z}{z} = \frac{\pi}{4}\ ,$$

cela prouve (3).

(Reçu le 15. juin 1950.)

О МЕРЕ АПРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИИ ЕЕ ИНТЕГРАЛОМ ПУАССОНА

Б. С.-НАДЬ (Сегед)

(*Резюме*)

Пусть $\mathrm{Lip}_1 \alpha$ класс периодических функций, с периодом 2π и удовлетворяющих условие $|f(x_2) - f(x_1)| \leqq |x_2 - x_1|^{\alpha}$. Пусть $f(r, x)$ соответственный интеграл Пуассона:

$$f(r, x) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\ (1-r^2)\ (1-2r\cos t + r^2)^{-1}\ dt.$$

И. П. Натансон недавно нашёл следующую теорему: Если $f(x)$ пробегает класс $\mathrm{Lip}_1 \alpha$, то

$$u(r, \alpha) = \sup_f \max_x |f(r, x) - f(x)| =$$

$$= \begin{cases} (2/\pi)(1-r)\log\dfrac{1}{1-r} + O(1-r) & \text{если } \alpha = 1, \\ \sec\dfrac{\alpha\pi}{2}\cdot(1-r)^{\alpha} + O(1-r) & \text{если } 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Настоящая работа разрешает аналогичный вопрос для сопряженных функций:

Если $f(x)$ снова пробегает класс $\mathrm{Lip}_1 \alpha$, то $v(r, \alpha) = \sup_f \max_x |\overline{f}(r, x) - \overline{f}(x)| =$ $= 2^{\alpha-1}\operatorname{cosec}\dfrac{\alpha\pi}{2}(1-r)^{\alpha} + O(1-r)^{1+\alpha}$, не только при $0 < \alpha < 1$, но и в случае $\alpha = 1$:

$$v(r, 1) = \frac{4}{\pi}\int_r^1 \frac{\operatorname{arc\ tg} t}{t}\,dt = 1 - r + O(1-r)^2 \leqq \frac{4}{\pi}(1-r).$$

SUR LE PROBLÈME DE FACTORISATION DES GROUPES CYCLIQUES

Par

G. HAJÓS (Budapest), correspondant de l'Académie

1. Soit C un groupe abélien, A et B deux de ses sous-ensembles. Nous disons que C est le produit des sous-ensembles A et B,

$$C = AB,$$

si l'on trouve à chaque $c \in C$ des éléments $a \in A$ et $b \in B$ pour lesquels on a $c = ab$ et s'il n'y a pas d'autres éléments suffisant à cette condition. In n'est pas facile de trouver toutes les *factorisations* $C = AB$ d'un groupe donné. C'est le *problème de factorisation* de ce groupe[1].

Si A est un sous-groupe de C, alors tout ensemble B représentant des classes appartenant à C/A nous donne une factorisation $C = AB$. Ce ne sont alors que les factorisations ne contenant pas un sous-groupe comme facteur qui nous intéressent. De telles factorisations existent, ce que montre l'exemple suivant : Soit C un groupe cyclique défini par $a^8 = 1$, $A = (1, a^2)$, $B = (1, a, a^4, a^5)$; aucun des sous-ensembles A et B n'est un sous-groupe et nous avons pourtant $C = AB$.

Nous disons que le sous-ensemble A du groupe C est *périodique* s'il y a un élément $a \in C$ différent de l'élément neutre, pour lequel $aA = A$. Dans ce cas A peut être représenté comme produit du sous-groupe cyclique engendré par a et d'un sous-ensemble. Les sous-ensembles représentables comme le produit d'un sous-groupe et d'un sous-ensemble quelconque sont alors justement les sous-ensembles périodiques. Les sous-groupes sont périodiques. L'ensemble B de l'exemple ci-dessus est périodique, comme $a^4B = B$.

Il se pose la question si toute factorisation d'un groupe abélien contient un facteur périodique. En général, ce n'est pas le cas, comme le montre l'exemple suivant de T. SZELE : Soit C le groupe cyclique infini engendré par l'élément a ; nous désignons par A le produit des sous-ensembles $(1, a^2)$, $(1, a^8)$, $(1, a^{32})$, ... et par B le produit des sous-ensembles $(1, a^{-1})$, $(1, a^{-4})$, $(1, a^{-16})$, ... ; aucun de ces sous-ensemble n'est périodique et nous avons $C = AB$.

Il est plus difficile de trouver une factorisation sans facteurs périodiques d'un groupe fini. Il n'est même pas facile de décider si un groupe cyclique donné

[1] Cf. G. HAJÓS, Sur la factorisation des groupes abéliens, *Časopis*, 74 (1950), pp. 157—162.

possède une telle factorisation.[2] Il n'y en a pas si l'ordre du groupe cyclique est une puissance d'un nombre premier.[3] Non plus, comme L. RÉDEI a montré[4], si l'ordre est le produit de deux ou trois nombres premiers. Le but de cette note est de prouver qu'ils existent des groupes cycliques finis qui peuvent être représentés comme le produit de deux de leurs sous-ensembles non-périodiques Plus précisément, nous démontrerons le théorème suivant :

Un groupe cyclique fini, l'ordre duquel est le produit de trois nombres entiers premiers entre eux, parmi lesquels il y a au moins deux nombres composés, peut être représenté comme le produit de deux de ses sous-ensembles non-périodiques.

Il est une question ouverte si l'affirmation de notre théorème s'accomplit pour autres groupes cycliques aussi. La question est indécise pour les ordres pq^β, $p^\alpha q^\beta$, pqr^γ, $pqrs$, où p, q, r, s sont des nombres premiers, α, β, γ des entiers positifs dépassant l'unité.

2. C'était un raisonnement géométrique qui nous conduisait à notre résultat. Nous faisons connaître cette voie. Pour l'ensemble φ de figures géométriques et l'ensemble F de translations (éventuellement d'une seule) nous désignerons par $F\varphi$ l'ensemble des figures résultant de α en lui appliquant la translation A, où $\alpha \in \varphi$ et $A \in F$. Nous écrirons aussi $A = (\alpha \to \alpha')$, si $A\alpha = \alpha'$.

Nous considérons l'espace à n dimensions et le découpons en parallélotopes congruents par n suites d'hyperplans parallèles équidistants. Un de ces parallélotopes soit π et leur ensemble (π). Nous désignons par P le groupe des translations T pour lesquelles on a $T(\pi) = (\pi)$.

Nous choisissons un parallélotope ϱ qui contient π et se compose des parallélotopes de (π). C'est à dire, ϱ n'a pas de point intérieur commun avec ceux des parallélotopes de (π) qui ne sont pas contenu en ϱ. Nous remplissons l'espace simplement par des parallélotopes congruents à ϱ et de situation parallèle, chacun desquels se compose des parallélotopes de (π). L'ensemble (ϱ) de ces parallélotopes jouit de la propriété que chaque élément de (π) est contenu par un et un seul de ses éléments. Soit R le groupe des translations pour lesquelles $R(\varrho) = (\varrho)$.

P et R sont des groupes abéliens, R un sous-groupe de P. En choisissant convenablement l'ensemble (ϱ), le groupe-quotient $C = P/R$ sera un groupe fini ou bien cyclique. Nous définissons maintenant deux sous-ensembles des éléments de C, c'est à dire des classes des éléments de P définies par R.

[2] Cf. 1. c.[1]

[3] Cf. 1. c.[1] et L. RÉDEI, 1. c.[4]

[4] Cf. l'article suivant de ces Acta: L. RÉDEI, Ein Beitrag zum Problem der Faktorisation von endlichen Abelschen Gruppen, *Acta Math. Hung.*, 1 (1950), 197—207.

Nous considérons d'abord les éléments $T \in P$ pour lesquels on a $T\pi \in \varrho$. Chacune de ces tranlations T appartient à une classe définie par R,[5] l'ensemble desquelles soit désigné par A. On a alors $A\pi \subset R\varrho$.

De plus nous considérons les translations T pour lesquelles on a $T\varrho \in (\varrho)$. L'ensemble de toutes ces translations se compose de certaines classes définies par R. En effet, si T_1 et T_2 appartiennent à la même classe, c'est à dire, si $T_1 T_2^{-1} \in R$, il suit de $T_2\varrho \in (\varrho)$

$$T_1\varrho = (T_1 T_2^{-1})\,(T_2\varrho) \in R\,(\varrho) = (\varrho).$$

Nous désignons par B l'ensemble des classes définies par R et contenus dans l'ensemble des translations considérées.

Nous démontrons qu'on a $C = AB$. Soit T une translation appartenant à une classe $c \in C$, soit $T\pi = \pi'$ et $\pi' \subset \varrho' \in (\varrho)$. Soit $\pi^* \in (\pi)$ le parallélotope pour lequel $(\varrho \to \varrho')\,\pi^* = \pi'$ et par conséquent $\pi^* \subset \varrho$. Si $U = (\pi \to \pi^*)$ et $V = (\varrho \to \varrho')$, alors $T = UV$ et $U \in a \in A$, $V \in b \in B$. Il s'ensuit donc $c = ab$.

Si par contre $a_1 b_1 = a_2 b_2$, où $a_i \in A$, $b_i \in B$ $(i = 1, 2)$, soient alors U_i et V_i des translations pour lesquelles $T = U_1 V_1 = U_2 V_2$ et

$$\begin{aligned} U_i &\in a_i, & U_i\pi &= \pi_i \subset \varrho, \\ V_i &\in b_i, & V_i\varrho &= \varrho_i \subset (\varrho). \end{aligned} \qquad (i = 1, 2)$$

Comme $T\pi = V_i\,(U_i\pi) = V_i\pi_i \subset V_i\varrho = \varrho_i$, il suit $\varrho_1 = \varrho_2$ et par conséquent $V_1 = (\varrho \to \varrho_1) = (\varrho \to \varrho_2) = V_2$, $U_1 = TV_1^{-1} = TV_2^{-1} = U_2$, donc $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$. Ce qui finit la démonstration de $C = AB$.

L'ensemble B n'est pas périodique. Soit en effet $aB = B$, où $a \in C$, et T une translation appartenant à la classe a. Nous démontrerons notre proposition en prouvant $T(\varrho) = (\varrho)$, on en conclut $T \in R$ et que a est l'élément neutre du groupe C. Soit $\varrho_1 \in (\varrho)$, $(\varrho \to \varrho_1) \in b_1 \in B$ et $ab_1 = b_2 \in B$, alors $T\,(\varrho \to \varrho_1) \in b_2$. Comme

$$T\varrho_1 = [T\,(\varrho \to \varrho_1)]\,\varrho \in b_2\,\varrho \subset (\varrho)$$

et comme cela est valable pour tous les parallélotopes $\varrho_1 \in (\varrho)$, on a vraiment $T(\varrho) = (\varrho)$.

Si $aA = A$, où $a \in C$, et $T \in a$, on a alors $T(R\varrho) = R\varrho$. Soit en effet $\pi_1 \subset \varrho_1 \in R\varrho$, $(\varrho \to \varrho_1)\,\pi^* = \pi_1$ et par conséquent $\pi^* \subset \varrho$. Il suit

$$\begin{aligned} T\pi_1 = T\,(\varrho \to \varrho_1)\,\pi^* = (\varrho \to \varrho_1)\,T\,(\pi \to \pi^*)\,\pi \in \\ \in (\varrho \to \varrho_1)\;a\,A\pi = (\varrho \to \varrho_1)\,A\pi \subset R \cdot R\varrho = R\varrho\ . \end{aligned}$$

[5] On démontre aisément qu'elles appartiennent toutes à des classes différentes. Mais nous n'emploierons pas ce fait.

Comme cela est vrai pour tous les parallélotopes $\varrho_1 \subset R\varrho$, on a $T(R\varrho) = R\varrho$.

Lorsque l'ensemble $R\varrho$ des parallélotopes consiste des parallélotopes isolés, la relation $T(R\varrho) = R\varrho$ entraîne $T \in R$. Dans ce cas là, A n'est pas périodique parce que $aA = A$ et $T \in a$ entraînent $T \in R$, ce qui assure que a est l'élément neutre du groupe C.

Nous avons obtenu une méthode pour construire des groupes C qui peuvent être représentés comme le produit de deux de leurs sous-ensembles non-périodiques. Lorsqu'on choisit convenablement l'ensemble (ϱ) de parallélotopes construits des parallélotopes de (π), le groupe C défini par cet ensemble sera cyclique. On a pour les sous-ensembles A, B définis ci-dessus $C = AB$ et aucun de ces facteurs n'est périodique si $R\varrho$ consiste de parallélotopes isolés.

3. Pour démontrer notre théorème nous choisissons un ensemble de parallélotopes convenable. Soit C un groupe cyclique de l'ordre $n = m_1 m_2 m_3$, où m_1, m_2, m_3 sont premiers entre eux. Soit $m_1 = u_1 v_1$ et $m_2 = u_2 v_2$, où les entiers u_1, v_1, u_2, v_2 dépassent l'unité.

Nous opérerons dans l'espace à trois dimensions. Nous désignons les translations par leurs vecteurs. Soient $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ trois vecteurs d'unité, l'un à l'autre orthogonaux et soit π un cube à arêtes d'unité parallèles à ces vecteurs. π définit un ensemble (π) de cubes. Le groupe P appartenant à (π) est engendré par les translations $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

Pour ϱ nous choisissons le parallélépipède contenant les cubes qui résultent de π en lui appliquant les translations

$$\alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} \quad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, u_1 - 1; \quad \beta = 0, 1, 2, \ldots, u_2 - 1).$$

Soit R le groupe engendré par les translations $m_1\mathbf{i}$, $m_2\mathbf{j}$, $m_3\mathbf{k}$. Le groupe-quotient P/R est le produit extérieur des groupes cycliques d'ordre m_1, m_2, m_3. Comme ces nombres sont premiers entre eux, P/R est isomorphe au groupe donné C.

Si nous réussissons à définir l'ensemble de parallélépipèdes (ϱ) de la manière que ce soit vraiment le groupe R qui appartient à lui, nous recevrons une factorisation de C en facteurs non-périodiques, comme $R\varrho$ consiste de parallélépipèdes isolés.

Nous considérons dans ce but d'abord l'ensemble $(\varrho)'$ des parallélépipèdes résultant de ϱ en lui appliquant les éléments du groupe engendré par les translations $u_1\mathbf{i}$, $u_2\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. L'ensemble $(\varrho)'$ remplit l'espace simplement.

Ceux des parallélépipèdes de $(\varrho)'$ qui résultent des parallélépipèdes de $R\varrho$ en leur appliquant les translations

$$\mathbf{k} + \mu u_1 \mathbf{i}, \qquad u_1 \mathbf{i} + \nu u_2 \mathbf{j} \qquad (\mu, \nu \text{ entiers})$$

forment des colonnes en direction de $\mathbf{i}$ et $\mathbf{j}$ respectivement. Cela veut dire qu'en translatant les sous-ensembles de $(\varrho)'$ ainsi définis en direction de $\mathbf{i}$ on $\mathbf{j}$ respectivement, on reçoit des ensembles de parallélépipèdes remplissant la même

partie de l'espace que remplissaient les ensembles originels. Nous supprimons de $(\varrho)'$ les dits deux sous-ensembles et les remplaçons par les ensembles qui résultent des ensembles supprimés en leur appliquant les translations **i** et **j** respectivement. L'ensemble reçu remplit l'espace simplement et nous le choisissons pour ensemble (ϱ).

Il suit de la définition de (ϱ) que les parallélépipèdes de $R\varrho$ appartiennent à (ϱ) et qu'on a $R(\varrho) = (\varrho)$. On constate aisément qu'en appliquant aux parallélépipèdes de $R\varrho$ soit la translation **k**, soit la translation $u_1\mathbf{i}$, on ne reçoit pas des parallélépipèdes appartenant à (ϱ). Comme les autres parallélépipèdes de (ϱ) ne jouissent pas de cette propriété, on en conclut qu'une translation T satisfaisant à $T(\varrho) = (\varrho)$ satisfait nécessairement à $T(R\varrho) = R\varrho$ aussi et on a par conséquent $T \in R$. C'est alors vraiment le groupe R qui appartient à (ϱ).

4. Nos raisonnements nous ont conduit à des facteurs non-périodiques du groupe C. Nous allons maintenant à formuler et vérifier notre résultat en termes pures de la théorie des groupes. C'est ainsi que la note présente reste logiquement complète même si on supprime **2** et **3.**

Soient a, b, c les éléments générateurs du groupe additif abélien C,

$$m_1 a = 0, \qquad m_2 b = 0, \qquad m_3 c = 0$$

ses relations définissantes, où m_1, m_2, m_3 sont premiers entre eux de sorte que C est un groupe cyclique d'ordre $n = m_1 m_2 m_3$. Soit $m_1 = u_1 v_1$, $m_2 = u_2 v_2$, où u_1, v_1, u_2, v_2 dépassent l'unité. Nous définissons deux sous-ensembles du groupe C.

Les éléments du sous-ensemble A sont

$$\alpha a + \beta b \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, u_1 - 1\,; \quad \beta = 0, 1, 2, \ldots u_2 - 1).$$

Ce sous-ensemble n'est pas périodique. Si en effet $x + A = A$, alors

$$x + 0 \qquad \text{et} \qquad x + (u_1 - 1)\, a + (u_2 - 1)\, b$$

appartiennent à A, donc x est un élément commun des ensembles

$$A \qquad \text{et} \qquad A - (u_1 - 1)\, a - (u_2 - 1)\, b.$$

Mais le seul élément commun de ceux-ci est 0 et on a $x = 0$.

Les éléments du sous-ensemble B sont

$$\begin{aligned}
&\alpha u_1 a + \beta u_2 b && (\alpha \neq 1),\\
&u_1 a + (1 + \beta u_2) b,\\
&\alpha u_1 a + \beta u_2 b + c && (\beta \neq 0),\\
&(1 + \alpha u_1) a + c,\\
&\alpha u_1 a + \beta u_2 b + \gamma c\ ,
\end{aligned}$$

où les entiers α, β, γ satisfont (au delà des restrictions faites) aux inégalités

$$0 \leqq \alpha < v_1, \quad 0 \leqq \beta < v_2, \quad 2 \leqq \gamma < m_3\ .$$

B n'est pas périodique, comme 0 est le seul de ses éléments qui ne donne pas un élément de B en lui additionnant soit $u_1 a$, soit c.

Le groupe C est la somme des sous-ensembles A et B. On le montre de la manière suivante. C est évidemment la somme de A et de l'ensemble B' des éléments $\alpha u_1 a + \beta u_2 b + \gamma c$ ($0 \leqq \alpha < v_1$, $0 \leqq \beta < v_2$, $0 \leqq \gamma < m_3$). B ne diffère de B' que par cela qu'il contient

$$u_1 a + (1 + \beta u_2) b \quad \text{au lieu de} \quad u_1 a + \beta u_2 b,$$
$$(1 + \alpha u_1) a + c \quad \text{au lieu de} \quad \alpha u_1 a + c .$$

Ces pairs d'ensembles donnent les même résultats si on leur additionne les ensembles $[0, b, 2b, \ldots, (u_2 - 1) b]$, $[0, a, 2a, \ldots, (u_1 - 1) a]$ respectivement. Ces pairs de sous-ensembles donnent alors les même résultats en leur additionnant le sous-ensemble A qui est la somme des deux sous-ensembles mentionnés À cause de cela, on a $A + B = A + B' = C$.

5. Le plus petit des nombres n qui satisfait à la condition de notre theorème est 180. Nous donnons pour cet ordre un exemple de factorisation en facteurs non-périodiques. Nous parlons du groupe additif des nombres entiers mod 180.

Les éléments de A sont

0, 20, 45, 65, 100, 145.

Les éléments de B sont

0, 6, 10, 12, 18, 24, 42, 48, 54, 60, 66, 70, 72, 78, 81,
84, 96, 102, 108, 114, 120, 130, 132, 138, 144, 156, 162, 168, 171, 174.

En additionnant par couple les éléments de ces deux ensembles, on reçoit un système de résidus complet mod 180.

6. Toutes les factorisations des groupes abéliens finis connues jusqu'à présent sont *quasipériodiques* dans le sens suivant du mot : Nous disons que la factorisation $C = AB$ est quasipériodique si l'un des facteurs, p. ex. B, est décomposable en ensembles $B_1, B_2, \ldots, B_k$ de la manière que les ensembles $AB_1, AB_2, \ldots, AB_k$ résultent en multipliant l'un d'eux par des éléments d'un sous-ensemble périodique. C'est à dire, il existe un ensemble périodique $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$, pour lequel les sous-ensembles AB_i et $AB_1 b_i$ ne diffèrent que dans leur ordre. Il est une question ouverte si toutes les factorisations des groupes abéliens finis sont quasipériodiques. La réponse n'est pas connu même pour le cas des groupes cycliques finis.

(Reçu le 10. Mars 1951.)

ПРОБЛЕМА ФАКТОРИЗАЦИИ ЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП

Г. ГАЁШ (Будапешт)

(*Резюме*)

Подмножества A и B группы Абеля C дают факторизацию $C = AB$, если для любого элемента $c \in C$ можно единственным образом найти такие $a \in A$ и $b \in B$, что $c = ab$. Мы говорим, что подмножество A группы C периодично, если в группе C имеется отличный от единицы элемент a, удовлетворяющий условию $aA = A$.

Работа содержит доказательство следующей теоремы: если порядок группы произведение трёх таких чисел, которые взаимно просты и среди которых имеется по крайней мере одно простое число, то эта группа имеет такую факторизацию, в которой ни один из членов не периодичен.

EIN BEITRAG ZUM PROBLEM DER FAKTORISATION VON ENDLICHEN ABELSCHEN GRUPPEN

Von

L. RÉDEI (Szeged), korrespondierendem Mitglied der Akademie

§ 1. Einleitung

Für eine endliche Abelsche Gruppe $\mathfrak{G}$ ist es ein interessantes, aber schwieriges Problem, eine Übersicht über die möglichen Faktorisationen

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{K}_1 \dots \mathfrak{K}_l \tag{1}$$

von $\mathfrak{G}$ zu gewinnen, wobei die $\mathfrak{K}_i$ Komplexe (Teilmengen) von $\mathfrak{G}$ sind; diese Gleichung soll bedeuten, dass sich jedes Element von $\mathfrak{G}$ genau einmal in der Form $A_1 \dots A_l$ $(A_i \in \mathfrak{K}_i)$ darstellen lässt. Die Faktorisation (1) nennen wir echt, wenn jeder Faktor $\mathfrak{K}_i$ aus mindestens zwei Elementen besteht.

Das bisher Gesagte soll für spätere Zwecke auch im allgemeineren Fall gelten, wenn in (1) statt $\mathfrak{G}$ ein Komplex $\mathfrak{K}$ steht. Für zwei Komplexe $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ sagen wir, dass $\mathfrak{A}$ ein Teiler von $\mathfrak{B}$ ist, in Zeichen $\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B}$, wenn es eine Faktorisation $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{C}$ gibt.

Wenn in (1) die besondere Annahme $\mathfrak{K}_i = 1, A_i, \dots, A_i^{e_i}$ $(i = 1, \dots, l)$ gemacht wird, so hat man die Beantwortung im berühmten Satz von HAJÓS [1][1], nach dem dann in (1) mindestens ein $\mathfrak{K}_i$ eine Gruppe sein muss. Verfasser [5] hat dem Satz eine verschärfte Formulierung gegeben, nach der alle möglichen HAJÓS'schen Faktorisationen von $\mathfrak{G}$ sich angeben lassen. Vereinfachungen des Beweises von HAJÓS finden sich bei Verfasser [4] und SZELE [6].

Im allgemeinen Fall kann (1) gelten, ohne dass ein $\mathfrak{K}_i$ durch eine Gruppe $(\neq 1)$ teilbar wäre, wofür ebenfalls HAJÓS das erste Beispiel gab, das mit seiner freundlichen Erlaubnis Verfasser [2] veröffentlicht hat. Daselbst hat Verfasser auf verhältnismässig sehr kompliziertem Wege den kleinen Satz bewiesen, dass in jeder echten Faktorisation (1) einer nichtzyklischen Gruppe $\mathfrak{G}$ von Primzahlquadratordnung (Fall $l = 2$) das eine von $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ durch eine Gruppe $(\neq 1)$ teilbar ist.

Im folgenden betrachten wir nur den verhältnismässig sehr einfachen Spezialfall von (1), dass $\mathfrak{G}$ zyklisch und $l = 2$ ist. Früher hat HAJÓS nach seiner mündlichen Mitteilung vermutet, dass dann in jeder echten Faktorisation (1)

[1] Die [ ] beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

das eine von $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ durch eine Gruppe ($\neq 1$) teilbar sein muss ; vor kurzem aber hat er seine Vermutung widerlegt. Und zwar gelang ihm das für alle $\mathfrak{G}$, ausgenommen die Ordnungszahlen von der Form

$$p^e q^f, p^e qr, pqrs \qquad (e, f \geqq 0), \tag{2}$$

wobei p, q, r, s verschiedene Primzahlen bezeichnen ; seine Arbeit darüber erscheint in diesen Acta.[2] Die restlichen Ordnungszahlen (2) sind bei ihm fraglich geblieben, aber ich habe schon im Jahre 1945 bewiesen, dass insbesondere pqr tatsächlich ein Ausnahmefall ist. Wohl ist mein Beweis interessant, trotzdem wollte ich ihn wegen seiner Mühsamkeit nicht publizieren. Ich tue das jetzt wegen der durch die HAJÓS'schen Untersuchungen erhöhten Aktualität meines an sich sehr bescheidenen Resultats, das nämlich nunmehr auch zeigt, dass das Resultat von HAJÓS «beinahe» scharf ist.

Zum Beweis werden wir länger ausholen müssen, so dass wir eine Methode ausarbeiten, die zur Untersuchung aller Faktorisationen $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2$ von beliebigen endlichen zyklischen Gruppen geeignet zu sein scheint ; trotzdem konnten wir auf diesem Wege nicht alle kritischen Ordnungszahlen (2) erledigen. Ausser dem gesagten Fall pqr konnten wir nur noch die sehr leichten Fälle p^e, pq mit ähnlichem Resultat beantworten. Endgültig formulieren wir unsere Behauptung im folgenden :

SATZ. *Eine zyklische Gruppe von einer der Ordnungen p^e, pq, pqr (p, q, r verschiedene Primzahlen) lässt sich nur so in das Produkt von zwei Komplexen mit je mindestens zwei Elementen faktorisieren, wenn einer der Faktoren durch eine Gruppe ($\neq 1$) teilbar ist.*

Ich will noch kurz betonen, dass die Faktorisationsprobleme aller Art von Abelschen Gruppen im allgemeinen nicht nur an sich, sondern auch in ihren Zusammenhängen interessant sind, weshalb es sich lohnt, ihnen eine grosse Aufmerksamkeit zu widmen. Z. B. kommt (1) für zyklische $\mathfrak{G}$ dem folgenden additiv-zahlentheoretischen Problem gleich : Es sind auf jede mögliche Art l Mengen $M_1, \ldots, M_l$ von ganzen Zahlen anzugeben, so dass $x_1 + \ldots + x_l$ ($x_i \in M_i$) ein volles Restsystem mod m durchläuft. Der anfangs erwähnte Satz von HAJÓS ist eine Äquivalente der Vermutung von MINKOWSKI über lineare Ungleichungen (vgl. auch RÉDEI [3]). Verfassers [2] erwähnter Satz über die Gruppen von Primzahlquadratordnung steht mit einer dort bewiesenen Maximaleigenschaft der Gaussischen Summen im engsten Zusammenhang.

[2] *G.* HAJÓS, Sur le problème de factorisation des groupes cycliques, *Acta Math. Hung.*, 1 (1950), S. 189—195.

§ 2. Vorbereitungen

Durchwegs bezeichne $\mathfrak{G}$ eine zyklische Gruppe von der Ordnung $O(\mathfrak{G}) = n \ (> 1)$ mit einem erzeugenden Element A.

Als Polynome der Unbestimmten x werden stets nur solche mit ganzen rationalen Koeffizienten zugelassen. Ein Polynom $f(x)$ $(\not\equiv 0)$ mit lauter Koeffizienten $\geqq 0$ nennen wir positiv und schreiben hierfür $f(x) > 0$. Insbesondere werden die positiven Polynome von der Form

$$f(x) = x^{i_1} + \ldots + x^{i_t} \qquad (i_u \not\equiv i_v \pmod{n} \text{ für } u \neq v)$$

eine grosse Rolle spielen; diese nennen wir elementar (für n). Zwei positive Polynome $f(x)$, $g(x)$ mit $f(x) \equiv g(x) \pmod{x^n - 1}$ können nur gleichzeitig elementar sein. Dann sind ihre Gliederzahlen gleich und die in ihnen vorkommenden Exponenten paarweise kongruent mod n .

Das n-te Kreisteilungspolynom wird mit $F_n(x)$ bezeichnet, hierfür gilt bekanntlich

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} F_d(x), \tag{2}$$

woraus

$$F_n(x) = \prod_{d|n} (x^d - 1)^{\mu(n/d)} \tag{3}$$

folgt; μ bezeichnet die Funktion von Möbius. Von (3) liest man die bekannten Formeln ab:

$$F_n(1) = \begin{cases} p, \text{ wenn } n = p^e \ (> 1) \text{ ist,} \\ 1, \text{ wenn } n \ (> 1) \text{ keine Primzahlpotenz ist.} \end{cases} \tag{4}$$

Nach (2) gilt

$$1 + x + \ldots + x^{n-1} = \prod_{\substack{d|n \\ d>1}} F_d(x). \tag{5}$$

Stets bezeichnen $\Phi_1(x), \Phi_2(x)$ zwei Polynome mit

$$1 + x + \ldots + x^{n-1} = \Phi_1(x)\, \Phi_2(x), \tag{6}$$

$$\Phi_1(1), \ \Phi_2(1) > 0 . \tag{7}$$

Da die $F_d(x)$ irreduzibel sind und nach (4) $F_d(1) > 0$ $(d > 1)$ gilt, lassen sich die $\Phi_1(x), \Phi_2(x)$ so gewinnen, dass man die $F_d(x)$ in (5) beliebig in zwei Klassen einteilt und für beide Klassen das Produkt der Elemente bildet. Kurz nennen wir die $\Phi_1(x), \Phi_2(x)$ komplementäre Teiler von $1 + x + \ldots + x^{n-1}$.

Einem beliebigen Komplex

$$\mathfrak{K} = A^{i_1} + \ldots + A^{i_t} \tag{8}$$

ordnen wir das Polynom

(9) $$\mathfrak{K}(x) = x^{i_1} + \ldots + x^{i_t}$$

zu. Dieses ist elementar und mod $x^n - 1$ eindeutig bestimmt. Umgekehrt gehört dann zu jedem für n elementaren Polynom $f(x)$ ein einziger Komplex $\mathfrak{K}$, so dass $f(x) = \mathfrak{K}(x)$ gilt.

Insbesondere gilt

(10) $$\mathfrak{G}(x) = 1 + x + \ldots + x^{n-1}.$$

Allgemeiner gilt offenbar folgendes: Ein Komplex $\mathfrak{K}$ ist dann und nur dann eine Untergruppe ($\neq 1$) von $\mathfrak{G}$, wenn

(11) $$\mathfrak{K}(x) = 1 + x^d + \ldots + x^{n-d} = \frac{x^n - 1}{x^d - 1} \qquad (d \mid n,\ d \neq n).$$

Trivial ist auch der folgende

Hilfssatz 1. *Für drei Komplexe* $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ *ist*

(12) $$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1\, \mathfrak{K}_2$$

gleichbedeutend mit

(13) $$\mathfrak{K}(x) \equiv \mathfrak{K}_1(x)\, \mathfrak{K}_2(x) \pmod{x^n - 1}.$$

Wir beweisen:

Hilfssatz 2. *Ein Komplex* $\mathfrak{K}$ *ist dann und nur dann durch eine Gruppe* ($\neq 1$) *teilbar, wenn es ein* d *mit*

$$\frac{x^n - 1}{x^d - 1} \Big| \mathfrak{K}(x) \qquad (d \mid n,\ d \neq n)$$

gibt.

Die angeschriebene Teilbarkeit ist nämlich gleichbedeutend mit der Erfüllbarkeit von

$$\mathfrak{K}(x) \equiv \frac{x^n - 1}{x^d - 1} f(x) \pmod{x^n - 1}$$

durch ein Polynom $f(x)$. Dessen Grad darf $< d$ angenommen werden und dann ist $f(x)$ mit $\mathfrak{K}(x)$ zusammen (vgl. (11)) notwendig elementar für n. Hiernach und nach Hilfssatz 1 ist Hilfssatz 2 richtig.

Wir beweisen den folgenden

Hilfssatz 3. *Alle Faktorisationen*

(14) $$\mathfrak{G} = \mathfrak{K}_1\, \mathfrak{K}_2$$

von $\mathfrak{G}$ *gewinnt man so, dass man zwei komplementäre Teiler* $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ *von* $1 + x + \ldots + x^{n-1}$ *nimmt (definiert durch* (6), (7)*) und nach zwei Polynomeo* $f_1(x), f_2(x)$ *mit*

(15) $$\Phi_1(x) f_1(x),\ \Phi_2(x) f_2(x) > 0,$$

(16) $$f_1(1) = f_2(1) = 1$$

sucht, dann sind die zwei Produkte in (15) *elementar (für n), somit gibt es zwei Komplexe* $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ *mit*

$$\mathfrak{K}_1(x) = \Phi_1(x) f_1(x), \quad \mathfrak{K}_2(x) = \Phi_2(x) f_2(x) \; ; \tag{17}$$

diese $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ *sind die sämtlichen Lösungen von* (14). *Dabei genügt es, sich auf die* $f_1(x)$, $f_2(x)$ *zu beschränken, für die die Produkte in* (15) *vom Grade* $< n$ *sind.*

Setzen wir nämlich zunächts voraus, dass (14) gilt. Wegen Hilfssatz 1 und (10) gilt dann

$$1 + x + \ldots + x^{n-1} \equiv \mathfrak{K}_1(x)\, \mathfrak{K}_2(x) \pmod{x^n - 1}, \tag{18}$$

wobei man annehmen darf, dass $\mathfrak{K}_1(x)$, $\mathfrak{K}_2(x)$ vom Grade $< n$ sind. Aus (18) folgt, dass die linke Seite ein Teiler der rechten Seite ist, gewiss gibt es also nach (6) zwei komplementäre Teiler $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ der linken Seite mit

$$\Phi_1(x) \mid \mathfrak{K}_1(x), \quad \Phi_2(x) \mid \mathfrak{K}_2(x). \tag{19}$$

Hiernach existieren zwei Polynome $f_1(x), f_2(x)$ mit (17). Hieraus und aus (18), (6) folgt

$$1 \equiv f_1(x) f_2(x) \pmod{x - 1}. \tag{20}$$

Dies ergibt $1 = f_1(1) f_2(1), f_1(1) = f_2(1) = \pm 1$. Andererseits gelten $\mathfrak{K}_1(1)$, $\mathfrak{K}_2(1) > 0$, und so folgt aus (17), (7) notwendig $f_1(1), f_2(1) > 0$. Dies mit dem vorigen zusammen ergibt (16). Nach (17) besteht auch (15), und dabei sind mit $\mathfrak{K}_1(x)$, $\mathfrak{K}_2(x)$ zusammen auch die Produkte in (15) vom Grade $< n$.

Wenn umgekehrt (6), (7), (15), (16) gelten, so schliesst man, wie folgt. Wegen (16) gilt (20). Dies und (6) ergeben

$$1 + x + \ldots + x^{n-1} \equiv \Phi_1(x) f_1(x) \Phi_2(x) f_2(x) \pmod{x^n - 1}. \tag{21}$$

Hieraus folgt, dass die zwei Produkte in (15) für n elementar sind, d. h. durch (17) wirklich zwei Komplexe $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ definiert werden. Nach (17) und (21) gilt (18), und dies mit (10) zusammen ergibt nach Hilfssatz 1 die Richtigkeit von (14). Wir haben Hilfssatz 3 bewiesen.

HILFSSATZ 4. *Ein Polynom* $f(x)$ *ist dann und nur dann durch* $F_n(x)$ *teilbar, wenn*

$$f(x) = \sum_{p \mid n} \frac{x^n - 1}{x^{n/p} - 1} f_p(x) \tag{22}$$

gilt, wobei die $f_p(x)$ *Polynome mit ganzen Koeffizienten bezeichnen.*

Offenbar ist nämlich $F_n(x)$ der grösste gemeinsame Teiler der Polynome

$$\frac{x^n - 1}{x^{n/d} - 1} \qquad (d \mid n),$$

woraus die Behauptung folgt.

HILFSSATZ 5. *Man bezeichne mit $n_1, \ldots, n_t$ diejenigen maximalen Teiler von n, die je einen Primfaktor von n nicht enthalten, wobei t die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von n ist. Für jedes ganzzahlige Polynom $f(x)$ gilt*

$$f(x) \equiv \sum_{i_1=0}^{\frac{n}{n_1}-1} \cdots \sum_{i_t=0}^{\frac{n}{n_t}-1} k_{i_1 \ldots i_t}\, x^{n_1 i_1 + \cdots + n_t i_t} \pmod{x^n - 1} \tag{23}$$

mit eindeutig bestimmten ganzen Zahlen $k_{i_1} \ldots {}_{i_t}$.

Es gilt nämlich zunächst

$$f(x) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} k_i\, x^i \pmod{x^n - 1} \tag{24}$$

mit eindeutig bestimmten ganzen k_i. Da ferner durch

$$i \equiv n_1 i_1 + \ldots + n_t i_t \pmod{n}$$

die i in (24) und die Systeme $i_1, \ldots, i_t$ in (23) einander gegenseitig eindeutig bestimmen, so sieht man die Richtigkeit von Hilfssatz 5 ein.

§ 3. Beweis des Satzes

Um unseren Satz zu beweisen, betrachten wir eine echte Faktorisation (14) von $\mathfrak{G}$. Nach Hilfssatz 3 lassen sich dann (6), (7), (15), (16), (17) annehmen.

Vor allem zeigen wir, dass (anstatt (7) sogar)

$$\Phi_1(1)\ ,\ \Phi_2(1) > 1 \tag{25}$$

gilt. Andernfalls wäre wegen (7) z. B. $\Phi_1(1) = 1$, aber dann gilt nach (16), (17) $\mathfrak{R}_1(1) = 1$, also enthält $\mathfrak{R}_1$ nur ein Element, wobei doch (14) eine echte Faktorisation ist. Dieser Widerspruch beweist (25).

Aus (6) und (5) folgt ferner, dass das eine von $\Phi_1(x), \Phi_2(x)$ durch $F_n(x)$ teilbar ist, wir dürfen

$$F_n(x) \mid \Phi_1(x) \tag{26}$$

annehmen.

Fall $n = p^e$. Dann lautet (26) so:

$$\frac{x^{p^e} - 1}{x^{p^{e-1}} - 1} \,\Big|\, \Phi_1(x)\ .$$

Dann ist die linke Seite nach (17) auch ein Teiler von $\mathfrak{R}_1(x)$, und so folgt aus Hilfssatz 2 die Richtigkeit des Satzes für diesen Fall.

Hiernach brauchen wir weiter nur noch die Fälle $n = pq, pqr$ zu betrachten. Wir schicken hiervon den weit schwierigeren zweiten Fall voran. Der Anfang des Beweises wird uns auch zeigen, wie man das Problem der Faktorisation auch für kompliziertere Ordnungszahlen n angreifen könnte.

Fall $n = pqr$. Aus (26), (17_1) folgt $F_n(x) \mid \mathfrak{R}_1(x)$. Dies ergibt wegen Hilfssatz 4:

$$\mathfrak{R}_1(x) = \frac{x^{pqr}-1}{x^{qr}-1} f_p(x) + \frac{x^{pqr}-1}{x^{pr}-1} f_q(x) + \frac{x^{pqr}-1}{x^{pq}-1} f_r(x) \tag{27}$$

mit passenden ganzzahligen Polynomen $f_p(x)$, $f_q(x)$, $f_r(x)$. Nach Hilfssatz 5 lässt sich

$$f_p(x) \equiv \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{k=}^{r-1} a_{jk}\, q^{rj+qk} \pmod{x^{qr}-1} \tag{28}$$

mit passenden ganzen a_{jk} setzen. Im Summand darf der Exponent durch p multipliziert werden, denn das kommt bloss auf eine Umordnung der a_{jk} an. Wird in (27) die rechte Seite des so veränderten (28) für $f_p(x)$ eingesetzt, so geht (27) in eine richtige Kongruenz mod $x^{pqr}-1$ über. Schreibt man gleichzeitig den Kofaktor von $f_p(x)$ in (27) als

$$\sum_{i=0}^{p-1} x^{qri},$$

so entsteht nach Ausmultiplizieren und entsprechender Behandlung des zweiten und dritten Gliedes der rechten Seite:

$$\mathfrak{R}_1(x) \equiv \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{k=1}^{r-1} g_{ijk}\, x^{qri+prj+pqk} \pmod{x^{pqr}-1} \tag{29}$$

mit

$$g_{ijk} = a_{jk} + b_{ik} + c_{ij} \quad (i = 0,\ldots,p-1;\ j = 0,\ldots,q-1;\ k = 0,\ldots,r-1), \tag{30}$$

wobei alle Glieder der rechten Seite ganze Zahlen sind. Andererseits folgt aus (29) unmittelbar

$$g_{ijk} = 0 \text{ oder } 1\ . \tag{31}$$

(Wir bemerken: Der Sinn von (30) ist, dass die Funktion g_{ijk} von drei Variabeln i, j, k sich aus Funktionen von je zwei Variabeln zusammensetzt. Natürlich sind diese letzteren Funktionen noch nicht, erst ihre Summe eindeutig bestimmt.)

Bezüglich der Symbole a_{jk}, b_{ik}, c_{ij}, g_{ijk} verwenden wir die Verkürzung in den Bezeichnungen, dass das Streichen einiger der Indizes die Ausführung der Summation bedeutet. Z. B.:

$$a_k = \sum_{j=0}^{q-1} a_{jk}, \quad g = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{k=0}^{r-1} g_{ijk}\ . \tag{32}$$

Nunmehr wollen wir auch von (25) Gebrauch machen. Aus (6) folgt $\Phi_1(1)\,\Phi_2(1) = pqr$, also gilt nach (25) und nach (4), (5), (6) bei passender Bezeichnung der p, q, r

$$\Phi_1(1) = pq,\ \Phi_2(1) = r;\ F_p(x)\,F_q(x) \mid \Phi_1(x),\ F_r(x) \mid \Phi_2(x),$$

oder

$$\Phi_1(1) = p,\ \Phi_2(1) = qr\ ;\ F_p(x) \mid \Phi_1(x),\ F_q(x)\ F_r(x) \mid \Phi_2(x)\ .$$

Auf Grund von (17), (16) gilt in beiden Fällen dasselbe auch für $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ statt Φ_1, Φ_2. Von allen diesen wird uns weiter nur der auf $\mathfrak{R}_1$ bezügliche Teil interessieren, der so lautet: Es gilt (bei passender Bezeichnung der p, q, r)

$$\mathfrak{R}_1(1) = pq, \qquad F_p(x)\ F_q(x) \mid \mathfrak{R}_1(x), \tag{33}$$

oder

$$\mathfrak{R}_1(1) = p, \quad F_p(x) \mid \mathfrak{R}_1(x). \tag{34}$$

Erstens betrachten wir den Fall (33). Nach (29), (32) gilt dann

$$g = pq. \tag{35}$$

Bezeichne α eine primitive p-te (komplexe) Einheitswurzel. Da nach (33) $F_p(x) \mid \mathfrak{R}_1(x)$, so gilt $\mathfrak{R}_1(\alpha) = 0$. Nach (29) ergibt dies

$$\sum_{i=0}^{p-1} g_i\, \alpha^{qri} = 0,$$

also $g_0 = \cdots = g_{p-1}$. Hieraus folgt nach (35)

$$g_i = q \qquad (i = 0, \ldots, p-1). \tag{36}$$

Dies schreibt sich nach (30) auch so:

$$a + qb_i + rc_i = q \qquad (i = 0, \ldots, p-1). \tag{37}$$

Hiernach hängt die Restklasse $b_i \pmod r$ von i nicht ab. Ferner gilt nach (30)

$$g_{ij} = a_j + b_i + rc_{ij}\ , \tag{38}$$

somit hängt auch die Restklasse $g_{ij} \pmod r$ von i nicht ab. Dann kann man

$$g_{ij} = u_j + rv_{ij} \qquad (0 \leqq u_j \leqq r-1) \tag{39}$$

setzen, mit ganzen u_j, v_{ij}. Ferner gilt wegen (31) gewiss

$$v_{ij} \geqq 0\,. \tag{40}$$

Wegen der Symmetrie von (33) in p, q gilt ähnlich wie (36)

$$g_j = p\,.$$

Summiert man andererseits (39) nach i, so entsteht $g_j = pu_j + rv_j$ (wobei auch v_j mit der bei (32) eingeführten Abkürzung zu verstehen ist). Beide ergeben

$$pu_j + rv_j = p.$$

Dashalb folgt aus (39), (40) notwendig $u_j = 1$, $v_j = 0$, $v_{ij} = 0$. Hiernach und nech (39) gilt

$$g_{ij} = 1\,. \tag{41}$$

Folglich schreibt sich (38) so:

$$1 = a_j + b_i + rc_{ij}. \tag{42}$$

Dies ergibt

$$c_{ij} = \frac{1-b_i}{r} - \frac{a_j}{r} = \left[\frac{1-b_i}{r}\right] - \left[\frac{a_j}{r}\right],$$

wobei $[z]$ die grösste ganze Zahl $\leqq z$ bezeichnet. Man setze dies in (30) ein:

$$g_{ijk} = \left(a_{jk} - \left[\frac{a_j}{r}\right]\right) + \left(b_{ik} + \left[\frac{1-b_i}{r}\right]\right).$$

Vergleicht man dies wieder mit (30), so ist ersichtlich, dass man von vornherein

$$c_{ij} = 0$$

setzen kann, so dass dann (mit veränderter Bezeichnung)

$$g_{ijk} = a_{jk} + b_{ik}, \tag{43}$$

ferner nach (42)

$$a_j + b_i = 1 \tag{44}$$

gilt.

Wegen (31) und (43) ist für jedes feste k mindestens das eine von a_{jk}, b_{ik} konstant. Ist für ein k z. B. $a_{jk} = C$ konstant, so dürfen für dieses k die a_{jk}, b_{ik} von vornherein durch $a_{jk} - C$, $b_{ik} + C$ ersetzt werden, da dann (43) erhalten bleibt. So erreichen wir (wieder nach (31), (43)), dass die folgenden zwei Aussagen richtig sind:

Für jedes feste k gilt $a_{jk} = 0$ (j beliebig) oder $b_{ik} = 0$ (i beliebig).

Alle a_{jk}, b_{ik} sind gleich 0, *oder* 1.

Gibt es aber ein $a_{jk} = 1$ und auch ein $b_{ik'} = 1$ mit festen i, j, k, k', so gilt für diese i, j nach den eben erhaltenen Feststellungen $a_j \geqq 1$, $b_i \geqq 1$, $a_j + b_i \geqq 2$. Dies verstösst gegen (44), folglich muss unbeschränkt $a_{jk} = 0$, oder unbeschränkt $b_{ik} = 0$ gelten. Wegen Symmetrie dürfen wir letzteres annehmen, und dann gilt nach (43) einfach $g_{ijk} = a_{jk}$. Hieraus folgt nach (29) bei Summieren über die i

$$\frac{x^{pqr} - 1}{x^{qr} - 1} \Big| \mathfrak{R}_1(x),$$

und so ist unser Satz nach Hilfssatz 2 für diesen Fall richtig.

Zweitens betrachten wir den Fall (34). Ähnlich wie (35), (36), folgen jetzt

$$g = p, \tag{45}$$

$$g_i = 1 \qquad (i = 0, \ldots, p-1). \tag{46}$$

Dies schreibt sich nach (30) so:

$$a + qb_i + rc_i = 1.$$

Hiernach hängt die Restklasse $b_i \pmod r$ nicht von i ab, weswegen man wieder (39) ansetzen kann, und dabei gilt wegen (31) auch (40). Andererseits gilt nach (31), (46) stets $g_{ij} = 0$ oder 1, und dann folgt aus (39), (40) $v_{ij} = 0$,

$$g_{ij} = u_j = 0 \text{ oder } 1 .$$

Nach diesem und (30) gilt

$$u_j = a_j + b_i + rc_{ij} .$$

Dies ergibt

$$c_{ij} = \frac{u_j - a_j}{r} - \frac{b_i}{r} = \left[\frac{u_j - a_j}{r}\right] - \left[\frac{b_i}{r}\right] .$$

Durch Einsetzen in (30) folgt wieder, dass von vornherein $c_{ij} = 0$ gesetzt werden darf, und dann gilt auch (43). Dies ergibt

$$g_{ik} = a_k + q\, b_{ik} .$$

Andererseits gilt nach (31), (46) $g_{ik} = 0$ oder 1, folglich kann b_{ik} von i nicht abhängen. Nach (43) hängt dann g_{ijk} von i auch nicht ab, d. h. man darf von vornherein $g_{ijk} = a_{jk}$ setzen, womit wir zum selben Schluss gekommen sind wie vorher. Wir haben den Satz für $n = pqr$ bewiesen.

Fall $n = pq$. Mit ähnlichem Schluss wie vor (33), (34) sieht man sofort ein, dass jetzt bei passender Bezeichnung der p, q wegen (26)

$$\Phi_1(x) = F_{pq}(x)\, F_p(x) = \frac{x^{pq} - 1}{x^q - 1}$$

gilt. Dies ergibt nach (17)

$$\frac{x^{pq} - 1}{x^q - 1} \;\Big|\; \mathfrak{R}_1(x) ,$$

woraus nach Hilfssatz 2 die Richtigkeit des Satzes auch jetzt folgt. Wir haben den Satz in allen Fällen bewiesen.

(Eingegangen am 1. August 1950.)

Literaturverzeichnis

[1] G. HAJÓS, Über einfache und mehrfache Bedeckung des n-dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter, *Math. Zeitschrift*, **47** (1941), S. 427—467.

[2] L. RÉDEI, Zwei Lückensätze über Polynome in endlichen Primkörpern mit Anwendung auf die endlichen Abelschen Gruppen und die Gaussischen Summen, *Acta Math.*, **70** (1947), S. 275—290.

[3] L. RÉDEI, Vereinfachter Beweis des Satzes von MINKOWSKI-HAJÓS, *Acta Sci. Math.*, **13** (1949), S. 21—35.

[4] L. RÉDEI, Kurzer Beweis des gruppentheoretischen Satzes von HAJÓS, *Commentarii Math. Helvetici*, **23** (1949), S. 272—282.

[5] L. RÉDEI, Die Reduktion des gruppentheoretischen Satzes von HAJÓS auf den Fall von p-Gruppen, *Monatshefte für Math.*, **53** (1949), S. 221—226.

[6] T. SZELE, Neuer vereinfachter Beweis des gruppentheoretischen Satzes von HAJÓS, *Publicationes Math.*, **1** (1949), S. 56—62.

К ПРОБЛЕМЕ ФАКТОРИЗАЦИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП АБЕЛЯ

Л. РЭДЭИ (Сегед)

(Резюме)

Факторизацией некоторой конечной группы Абеля $\mathfrak{G}$ называется уравнение

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{K}_1 \dots \mathfrak{K}_l \tag{1}$$

где $\mathfrak{K}_i$ комплексы (подмножества) $\mathfrak{G}$, а (1) нужно понимать так, что все элементы $\mathfrak{G}$ могут быть представлены единственным образом в следующей форме: $A_1 \dots A_l$ ($A_i \in \mathfrak{K}_i$). Считаем, что $l \geqq 2$ и каждый $\mathfrak{K}_i$ состоит по крайней мере из двух элементов. Относительно проблем факторизации, уже рассмотренных в литературе, см. работы [1]—[6].

Работа Гаёша, публикуемая в этом томе, показывает, что некоторая конечная циклическая группа $\mathfrak{G}$ имеет такую факторизацию $\mathfrak{G} = \mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2$, в которой ни $\mathfrak{K}_1$, ни $\mathfrak{K}_2$ не может быть произведением группы (содержащей по крайней мере два элемента) и дальнейшего комплекса, за исключением того случая, когда степень $\mathfrak{G}$ одно из следующих чисел: $p^e q^f$, $p^e qr$, $pqrs$ (p, q, r, s, различные простые числа; $e, f \geqq 0$). Этих случаев Гаёш не рассматривает. В этой работе автор доказывает, что степени вида p^e, pq, pqr действительно являются исключениями теоремы Гаёша, доказательство в случае pqr (относительно кажущейся легкости проблемы) довольно сложное. Из оставшихся критических случаев последний оказывается особенно трудным.

ON COMPOSED POISSON DISTRIBUTIONS, I

By

L. JÁNOSSY (Budapest), member of the Academy, A. RÉNYI (Budapest), corresponding member of the Academy, and J. ACZÉL (Miskolc)

Introduction

The present paper consists of four parts. In the first part (§ 1) the classical stochastic process of POISSON is deduced from assumptions much weaker than usual. As a matter of fact, the derivability of the functions $W_k(t)$ $(k = 0,1,2,\ldots)$ denoting the probability of the occurrence of exactly k events in a time interval of length t, is not supposed, and the »rarity« of the events considered is introduced through the rather weak condition:

$$\lim_{t \to 0} \frac{W_1(t)}{1 - W_0(t)} = 1 \tag{1}$$

(instead of the condition $W_0'(0) + W_1'(0) = 0$). The proof makes use of functional equations instead of differential equations, which have been used formerly.[1]

The second part (§ 2) contains the deduction of the most general form of a discontinuous, integer-valued, additive Markoff process (differential process) of random events. Thus we consider processes as follows:

The process is homogeneous in time, further the numbers of events in non-overlapping time intervals are independent random variables. Concerning the rarity of the events nothing is supposed. The general form of such processes is deduced by the same method as in § 1. It is shown that the most general process of this type is the sum of an enumerable set of independent processes $P_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$, P_k being an ordinary Poisson process, but here an event means the simultaneous occurrence of a k-tuple of simple events. In other words, if

$$f(u, t) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k(t)\, e^{iku} \tag{2}$$

is the characteristic function of the process, we have

$$f(u, t) = \prod_{k=1}^{\infty} \exp\ (tc_k\ (e^{iku} - 1)) \tag{3}$$

[1] A. KHINTCHINE, *Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Ergebnisse d. Math. II. 4, 1933.

with $c_k \geqq 0$ and $\sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$. Such a discrete distribution $\{W_k(t)\}$ — in case $\sum_{k=1}^{\infty} k\, c_k$ is finite — is called throughout this paper a *composed Poisson distribution.*

The third part (§ 3) contains the deduction of these composed Poisson distributions, in a still more elementary way, without introducing time. It is shown that if a family of discrete (integer-valued) distributions, depending on a single parameter p (the mean value of the distribution), is closed under convolution (i. e. if the convolution of two members of the family also belongs to the family), then it is a family of composed Poisson distributions. It is also shown that the variance of every member of such a family is not less than its mean value, equality holding only in the case of the family of ordinary Poisson distributions. In other words, the family of Poisson distributions can be characterized — instead of making use of the rarity of the events — as a family of integer-valued distributions, which is closed under convolution, with the further property that for a fixed mean value, the variance is minimal. This condition of the minimality of variance clearly replaces the condition of the rarity of the events. The fourth part (§ 4) contains some remarks on composed Poisson distributions. It is shown that these distributions are contained in the generalized Poisson distributions of A. KHINTCHINE[2], further we show that the class of composed Poisson distributions contains the contagious distributions of PÓLYA-EGGENBERGER[3] (also called »negative-binomial« distributions), the contagious distributions of I. NEYMAN[4] and the generalizations of the Poisson distribution given by H. POLLACZEK-GEIRINGER[5].

The method as well as the results of § 1 are due to A. RÉNYI. Starting from these, J. ACZÉL developed the results of § 2. The interpretation of the generalized Poisson processes considered in § 2, in terms of the superposition of independent Poisson processes of k-tuples of events, has been kindly suggested to the above mentioned two authors by A. N. KOLMOGOROFF, to whom they are

[2] Loc. cit. [1], pp. 21—24. Cf. Also the following papers: F. E. SATHERTHWAITE, Generalized Poisson distribution, *Annals of Math. Stat.*, **13** (1942), pp. 410—417; W. FELLER, On a general class of contagious distributions, *Annals of Math. Stat.*, **14** (1943), pp. 389—400, and E. CANSADO MACEDA, On the composed and generalized Poisson distributions, *Annals of Math. Stat.*, **19** (1948), pp. 414—416.

[3] F. EGGENBERGER und G. PÓLYA, Über die Statistik verketteter Vorgänge, *Zeitschrift für angewandte Math. u. Mech.*, **3** (1923), pp. 279—289.

[4] I. NEYMAN, On a new class of »contagious« distributions applicable in entomology and bacteriology, *Annals of Math. Stat.*, **10** (1939), pp. 35—57.

[5] H. POLLACZEK-GEIRINGER, Über die Poissonsche Verteilung und die Entwicklung willkürlicher Verteilungen, *Zeitschrift für angewandte Math. u. Mech.*, **8** (1928), pp. 292—309.

grateful for his valuable remarks.[6] The results of § 3 (including the interpretation of these distributions as the convolution of an enumerable set of Poisson distributions of k-tuples of events) are due entirely to L. JÁNOSSY who found them independently and some months earlier. The authors are indebted to Á. CSÁSZÁR for a valuable remark.

§ 1. The classical stochastic process of Poisson

Let us consider events occurring in time (for example impacts of particles, telephone calls, etc.) and let us impose the following conditions :

A) *The process is homogeneous in time*, i. e., we assume that the probability of exactly k events occurring in the time interval (t_1, t_2) depends only on the lenght $t = t_2 - t_1$ of this interval ; this probability will be denoted by $W_k(t)$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Evidently we have

$$W_k(t) \geqq 0 \quad \text{and} \quad \sum_{k=0}^{\infty} W_k(t) = 1 \quad \text{for any} \quad t \geqq 0, \tag{1.1}$$

further

$$W_0(0) = 1 \quad \text{and thus} \quad W_k(0) = 0 \quad \text{for} \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.2}$$

B) *The process is of Markoff's type*, i. e., the number of events occurring during the time interval (t_1, t_2) is independent of the number of events occurring during the time interval (t_3, t_4) provided that $t_1 < t_2 \leqq t_3 < t_4$.

C) *The events are rare.* We mean by this that

$$\lim_{t \to 0} \frac{W_1(t)}{1 - W_0(t)} = 1. \tag{1.3}$$

In other words, if t tends to 0, the probability of *one* event occurring in the time interval $(0, t)$ is asymptotically equal to the probability of *at least one* event occurring in the same time interval.

Clearly (1.3) implies that

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sum_{k=2}^{\infty} W_k(t)}{W_1(t)} = 0, \tag{1.4}$$

i. e., (1.3) really means that in a short interval the probability of the occurrence of two or more events becomes arbitrarily small when compared with the probability of the occurrence of exactly one event in the same time interval. Instead

[6] Verbal communication at the Ist Hungarian Mathematical Congress in Budapest, 27 August—3 September 1950.

of (1.3) it would also be sufficient — as will be seen from the proof — to suppose only

$$\limsup_{t \to 0} \frac{W_1(t)}{1 - W_0(t)} = 1. \tag{1.3a}$$

We assert that conditions **A**, **B** and **C** imply that

$$W_k(t) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \tag{1.5}$$

i. e., that the process is that of POISSON: here $\lambda > 0$ is the mean value of the number of events during a time unit (»density« of events).

Let us prove our assertion. First of all it follows from **B** that the probability of no event occurring in the time interval $(0, t + s)$ is equal to the product of the probabilities of no event occurring in the time intervals $(0, t)$ and $(t, t + s)$. Thus, with respect to **A**, we obtain

$$W_0(t + s) = W_0(t)\, W_0(s). \tag{1.6}$$

According to (1.1) $0 \leqq W_0(t) \leqq 1$, and thus, taking into account that the only bounded solutions of this functional equation are[7] $W_0(t) = q^t$; in our case we must have evidently $0 < q < 1$. Consequently, we can put

$$W_0(t) = e^{-\lambda t} \quad \text{with} \quad \lambda > 0. \tag{1.7}$$

Similarly, if in the time interval $(0, t + s)$ there occurs exactly one event, this is possible in two ways: either there occurs an event in the time interval $(0, t)$ and no event in $(t, t + s)$, or there occurs no event in $(0, t)$ and one event in $(t, t + s)$. Therefore, in view of **A** and **B**, we obtain

$$W_1(t + s) = W_1(t)\, W_0(s) + W_1(s)\, W_0(t). \tag{1.8}$$

Substituting the expression (1.7) of $W_0(s)$ and $W_0(t)$ into (1.8), it follows

$$W_1(t + s) = W_1(t)\, e^{-\lambda s} + W_1(s)\, e^{-\lambda t}. \tag{1.9}$$

Let us put

$$f(t) = e^{\lambda t}\, W_1(t), \tag{1.10}$$

then

$$f(t + s) = f(t) + f(s). \tag{1.11}$$

It is well known that the only bounded solutions of (1.11) are of the form

$$f(t) = c_1 t, \tag{1.12}$$

[7] See J. L. W. V. JENSEN, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, *Acta Math.*, **30** (1906), p. 189, where it is proved that the only one-sidedly bounded solutions of $f(x + y) = f(x) + f(y)$ are $f(x) = Cx$, C a constant. This implies that the only bounded solutions of $f(x + y) = f(x) f(y)$ are $f(x) = q^x$.

hence we find

$$W_1(t) = c_1 t e^{-\lambda t}. \tag{1.13}$$

Substituting the expressions for $W_0(t)$ and $W_1(t)$ from (1.7) and (1.13) into (1.3), it follows that

$$\lim_{t \to 0} \frac{c_1 t e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda t}} = \frac{c_1}{\lambda} = 1, \tag{1.14}$$

i. e.,

$$c_1 = \lambda .$$

Consequently, (1.5) is proved for $k = 0$ and 1. Supposing that (1.5) holds for $k = 1, 2, \ldots, n-1$, we can show that it holds also for n. Clearly we have

$$W_n(t+s) = \sum_{k=0}^{n} W_k(t)\, W_{n-k}(s) \tag{1.15}$$

and, as we have supposed (1.5) to hold for $k \leqq n-1$, it follows

$$W_n(t+s) = W_n(t)\, e^{-\lambda s} + W_n(s)\, e^{-\lambda t} + \frac{\lambda^n e^{-\lambda(t+s)}}{n!}\left((t+s)^n - t^n - s^n\right). \tag{1.16}$$

Putting

$$f(t) = e^{\lambda t} W_n(t) - \frac{(\lambda t)^n}{n!} \tag{1.17}$$

we obtain

$$f(t+s) = f(t) + f(s). \tag{1.18}$$

According to (1.17) $f(t)$ is bounded, hence[7] $f(t) = c_n t$ and

$$W_n(t) = \left(\frac{(\lambda t)^n}{n!} + c_n t\right) e^{-\lambda t} . \tag{1.19}$$

According to (1.19) $W_n(t)$ is derivable and

$$W_n'(0) = c_n . \tag{1.20}$$

But it follows from (1.4) that $W_n'(0) = 0$ for $n \geqq 2$ and hence $c_n = 0$. Thus from (1.19) and (1.20) we conclude that (1.5) holds for $k = n$, provided it holds for $k \leqq n-1$. Thus our assertion (1.5) is proved by induction.

§ 2. The general homogeneous Markoff process of random events

In this § we drop the postulate of rarity of events, i. e., we assume the validity of **A** and **B** only, but do not claim the validity of **C**. We obtain exactly as in § 1, that

$$W_0(t) = e^{-\lambda t} \tag{2.1}$$

and

$$W_1(t) = c_1 t e^{-\lambda t}, \tag{2.2}$$

but now we cannot conclude that $c_1 = \lambda$. We shall prove by induction that

$$W_k(t) = e^{-\lambda t} \sum_{\substack{r_1 + 2r_2 + \ldots + kr_k = k \\ r_1 \geqq 0 \ (i=1, 2, \ldots k)}} \frac{(c_1 t)^{r_1} (c_2 t)^{r_2} \ldots (c_k t)^{r_k}}{r_1! \cdot r_2! \ \ldots \ r_k!} . \tag{2.3}$$

Clearly (2.3) holds for $k = 1$ by virtue of (2.2). For $k = 2$ we have by (1.15)

$$W_2(t + s) = W_2(t)\, e^{-\lambda s} + W_2(s)\, e^{-\lambda t} + c_1^2\, ts e^{-\lambda(t+s)}.$$

Putting $f(t) = e^{\lambda t} W_2(t) - \frac{(c_1 t)^2}{2}$ we obtain $f(t + s) = f(t) + f(s)$. Thus (as $f(t)$ is bounded) $f(t) = c_2 t$ and therefore $W_2(t) = \left(\frac{(c_1 t)^2}{2!} + c_2 t \right) e^{-\lambda t}$.

Similarly we obtain $W_k(t)$ for $k = 3, 4$, etc. To prove (2.3) by induction, let us suppose that (2.3) holds for $k = 0, 1, \ldots, n - 1$. Substituting the formula (2.3) for $W_k(t)$ with $k = 0, 1, \ldots, n - 1$ into (1.15), we obtain

$$W_n(t + s) = W_n(t)\, e^{-\lambda s} + W_n(s)\, e^{-\lambda t} + \tag{2.4}$$

$$+ e^{-\lambda(t+s)} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{r_1 + 2r_2 + \ldots + kr_k = k \\ \varrho_1 + 2\varrho_2 + \ldots + (n-k)\varrho_{n-k} = n-k}} \frac{(c_1 t)^{r_1} \ldots (c_k t)^{r_k} \cdot (c_1 s)^{\varrho_1} \ldots (c_{n-k} s)^{\varrho_{n-k}}}{r_1! \ \ldots \ r_k! \cdot \varrho_1! \ \ldots \ \varrho_{n-k}!} .$$

Putting

$$f(t) = e^{\lambda t} W_n(t) - \sum_{r_1 + 2r_2 + \ldots + (n-1)r_{n-1} = n} \frac{(c_1 t)^{r_1} (c_2 t)^{r_2} \ \ldots \ (c_{n-1} t)^{r_{n-1}}}{r_1! \ r_2! \ \ldots \ r_{n-1}!} , \tag{2.5}$$

it follows from (2.4) that

$$f(t + s) = f(t) + f(s) \tag{2.6}$$

and thus

$$f(t) = c_n t, \tag{2.7}$$

which proves (2.3) for $k = n$.

Clearly it follows from (2.3) that

$$c_k = W_k'(0) \qquad (k \geqq 1) \tag{2.8}$$

As $W_k(0) = 0$ and $W_k(t) \geqq 0$ for $t > 0$, we have

$$W_k'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{W_k(t)}{t} \geqq 0 \tag{2.9}$$

and thus

$$c_k \geqq 0 . \tag{2.10}$$

We shall prove that the series $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ converges and its sum is equal to λ. As a matter of fact, it follows from (2.3) that

$$e^{-\lambda t} \prod_{k=1}^{M} \left(\sum_{r=0}^{N} \frac{(c_k t)^r}{r!} \right) \leqq \sum_{k=0}^{n} W_k(t) \leqq 1, \tag{2.11}$$

if $n > NM^2$, and therefore for every $M \geqq 1$ and $N \geqq 0$ we have

$$\prod_{k=1}^{M} \left(\sum_{r=0}^{N} \frac{(c_k t)^r}{r!} \right) \leqq e^{\lambda t}. \tag{2.12}$$

As (2.12) holds for every value of N, it follows that

$$\exp\left(t \sum_{k=1}^{M} c_k \right) \leqq e^{\lambda t} \tag{2.13}$$

and thus

$$\sum_{k=1}^{M} c_k \leqq \lambda. \tag{2.14}$$

With (2.10) we find that $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ converges. Let us put

$$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} c_k. \tag{2.15}$$

It follows that

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} W_k(t) = e^{-\lambda t} \prod_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(c_k t)_r}{r!} \right) = e^{(\mu-\lambda)t} \tag{2.16}$$

whence

$$\mu = \lambda = \sum_{k=1}^{\infty} c_k. \tag{2.7}$$

Substituting this value for λ into (2.3), we obtain the final formula

$$W_k(t) = \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} c_n t \right) \cdot \sum_{r_1 + 2r_2 + \ldots + kr_k = k} \frac{(c_1 t)^{r_1} \cdot (c_2 t)^{r_2} \ldots (c_k t)^{r_k}}{r_1! \cdot r_2! \ldots r_k!}. \tag{2.18}$$

Thus the most general homogeneous Markoff process of random events depends on an enumerable sequence c_n of non-negative numbers, and the corresponding probability of k events holding in a time interval of lenght t is given by (2.18).

From (2.18) it is easily seen that putting

$$v_k^{(n)}(t) = \frac{(c_n t)^k}{k!} e^{-c_n t} \qquad (k = 0, 1, \ldots; \quad n = 1, 2, \ldots), \tag{2.19}$$

we have

$$W_k(t) = \sum_{r_1 + 2r_2 + \ldots + kr_k = k} v_{r_1}^{(1)}(t) \cdot v_{r_2}^{(2)}(t) \ldots v_{r_k}^{(k)}(t) \cdot \prod_{n=k+1}^{\infty} v_0^{(n)}(t). \tag{2.20}$$

This can be interpreted as follows: let $\xi_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots ; t > 0)$ denote independent Poisson-distributed random variables, the mean value of $\xi_n(t)$ being $c_n t$, and let us put

$$\xi(t) = \xi_1(t) + 2\,\xi_2(t) + \ldots + n\,\xi_n(t) + \ldots \tag{2.21}$$

Clearly (2.20) expresses the fact that the probability of $\xi(t) = k$ is given by (2.18) and thus $\xi(t)$ is the stochastic process considered in this §. As $n\,\xi_n(t)$ is a Poisson process in which an »event« means the simultaneous occurrence of n simple events, our result may also be expressed by saying that *the most general homogeneous Markoff process of random events is the sum of an infinity of independent Poisson processes, the n-th process consisting in the random occurrence of n-tuples of events with the mean value (density)* $c_n t$, *where* $c_n \geqq 0$ *and* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *converges.*

Alternatively, $W_k(t)$ can be expressed as follows:

$$W_k(t) = \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} c_n t\right) \cdot \sum_{\substack{r_1+r_2+\ldots+r_n=k,\, n\leq k \\ r_i \geq 1\,;\, i=1,2,\ldots,n}} \frac{c_{r_1}\, c_{r_2} \ldots c_{r_n}}{n\,!}\, t^n \tag{2.22}$$

where the summation is extended over all *ordered* n-tuples of positive integers $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ satisfying $r_1 + r_2 + \ldots + r_n = k$ $(n \leqq k)$.

Let us consider now the characteristic function of the distribution (2.18). Putting

$$f(u, t) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k(t)\, e^{iuk} \tag{2.23}$$

we obtain easily

$$f(u, t) = \exp\left(t \sum_{k=1}^{\infty} c_k (e^{iuk} - 1)\right), \tag{2.24}$$

hence

$$f(u, t) = \prod_{k=1}^{\infty} \exp\left(tc_k (e^{iuk} - 1)\right). \tag{2.25}$$

Let us denote by $\varphi(u, \lambda)$ the characteristic function of an ordinary Poisson process:

$$\varphi(u, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k\, e^{-\lambda}\, e^{iku}}{k!} = \exp\left(\lambda\,(e^{iu} - 1)\right). \tag{2.26}$$

With this notation (2.25) can be written in the form

$$f(u, t) = \prod_{k=1}^{\infty} \varphi(ku, tc_k) \tag{2.27}$$

which expresses the fact, already emphasized, that (2.8) is the distribution

of (2.21). In virtue of (2.24) we see that a distribution of the form (2.18) can be characterized by the following property of its characteristic function : The logarithm of the characteristic function of such a distribution is of the form $g(e^{iu})$ where $g(z)$ is an analytic function which is regular in the unit circle and satisfies the conditions : $g^{(n)}(0) \geqq 0$ for $n = 1, 2, \ldots$, and

$$\lim_{z \to 1} g(z) = 0 .$$

The mean value of the number of events during a time interval of length t produced by the process (2.21) is given by

$$M(t) = t \sum_{k=1}^{\infty} k c_k , \tag{2.28}$$

i. e., it is finite or infinite, according as the series $\sum_{k=1}^{\infty} k c_k$ converges or diverges. Naturally only the first case is of interest. In this case the distribution (2.18) will be called a *composed Poisson distribution.*

§ 3. Descriptive characterisation of families of composed Poisson distributions

Let us consider a random variable ξ which assumes only non-negative integer values, and let us call the distribution of such a variable an *integral-valued* (abbreviated i. v.) *distribution.* Let us consider a family of i. v. distributions depending on a single parameter p, the mean value of the distribution. Let us denote by $P(k, p)$ the probability of the value k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) and by $\{P(k, p)\}$ the distribution itself.

Let us suppose that this family is *closed under convolution.* By this we mean that if ξ_1 and ξ_2 are two independent random variables with the distributions $\{P(k, p_1)\}$ and $\{P(k, p_2)\}$ respectively, then the distribution of $\xi_1 + \xi_2$ also belongs to the family considered, i. e. it is equal to $\{P(k, p_3)\}$. Clearly, we must have $p_3 = p_1 + p_2$, because the mean value of $\xi_1 + \xi_2$ must be equal to the sum of the mean values of ξ_1 and ξ_2 . The well-known family of Poisson distributions

$$P(k, p) = \frac{p^k e^{-p}}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.1}$$

clearly has this property, i. e.

$$\sum_{k=0}^{n} P(k, p_1)\ P(n - k, p_2) = P(n, p_1 + p_2). \tag{3.2}$$

The question arises as to whether there exist even other families of distributions having the same property? The answer to this question is given by the following

THEOREM. *Let* $\{P(k,p)\}$ *be a family of i. v. distributions, closed under convolution, where* p *(denoting the mean value of the distribution) runs over all non-negative real numbers. Then* $\{P(k,p)\}$ *is a composed Poisson distribution, i. e.*

$$(3.3)\quad P(k,p)=\exp\left(-p\sum_{n=1}^{\infty}d_n\right)\sum_{r_1+2r_2+\ldots+kr_k=k}\frac{(pd_1)^{r_1}(pd_2)^{r_2}\ldots(pd_k)^{r_k}}{r_1!\,r_2!\ldots r_k!}$$

where

$$(3.4)\quad \sum_{k=1}^{\infty}kd_k=1.$$

The family of Poisson distributions may be characterized by the following property : For every fixed value of p *the variance of the distribution is minimal in comparison with the other distributions of the family* (3.3).

Let us denote the generating function of the distribution $\{P(k,p)\}$ by $\Pi(z,p)$, i. e. let us put

$$(3.5)\quad \Pi(z,p)=\sum_{k=0}^{\infty}P(k,p)\,z^k\quad (z \text{ complex}, |z|\leqq 1)\ .$$

As we have supposed that the family is closed under convolution, i. e. that (3.2) holds, we conclude

$$(3.6)\quad \Pi(z,p_1)\,\Pi(z,p_2)=\Pi(z,p_1+p_2)\ ,$$

which implies that

$$(3.7)\quad \Pi(z,p)=f(z)^p\ .$$

As we clearly have

$$(3.8)\quad \sum_{k=0}^{\infty}P(k,p)=1$$

and

$$(3.9)\quad \sum_{k=1}^{\infty}k\,P(k,p)=p\ ,$$

it follows that

$$(3.10)\quad f(1)=f'(1)=1\ .$$

Now we prove that $\Pi(z,p)$ can not vanish in the unit circle if p is $<\frac{1}{2}$. As a matter of fact, from (3.8) and (3.9) we conclude that

$$(3.11)\quad P(0,p)=1-p+\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)\,P(k,p),$$

and therefore

$$(3.12)\quad P(0,p)\geqq 1-p$$

and by virtue of (3.8)

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' P(k, p) \leqq p \,. \tag{3.13}$$

This implies that for $|z| \leqq 1$ we have

$$|\Pi(z, p)| \geqq P(0, p) - \sum_{k=1}^{\infty}{}' P(k, p) \geqq 1-2p\,; \tag{3.14}$$

therefore $\Pi(z, p) > 0$ if $p < \frac{1}{2}$. But if a regular analytic function does not vanish in the closed unit circle, its logarithm is also a regular analytic function in the same circle, consequently

$$g(z) = \frac{1}{p}\log\Pi(z, p) = \log f(z) \tag{3.15}$$

is also an analytic function, and we can put

$$\Pi(z, p) = e^{pg(z)} \tag{3.16}$$

with

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' d_n z^n \qquad (|z| \leqq 1). \tag{3.17}$$

Clearly, if (3.16) holds for $p < \frac{1}{2}$, it holds even for all values of $p > 0$.

Now (3.10) implies $g(1) = 0$, that is,

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}' d_n = 0 \tag{3.18}$$

and we may write

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' d_n (z^n - 1) \,. \tag{3.19}$$

We shall prove that the coefficients d_n are real and

$$d_n \geqq 0 \,. \tag{3.20}$$

This may be done as follows: let us denote $M = \underset{|z| \leq 1}{\text{Max}} |g(z)|$. Clearly we have from (3.16)

$$\Pi(z, p) = \sum_{k=0}^{\infty}{}' P(k, p) z^k = 1 + pg(z) + \frac{p^2 g^2(z)}{2!} + \ldots + \frac{p^k g^k(z)}{k!} + \ldots \tag{3.21}$$

Let us differentiate both sides n times, and substitute $z = 0$. Then we obtain

$$n!\, P(n, p) = n!\, p\, d_n + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{p^k D_{kn}}{k!}\,, \tag{3.22}$$

where

$$D_{kn} = \left(\frac{d^n g^k(z)}{dz^n} \right)_{z=0}\,. \tag{3.23}$$

By virtue of CAUCHY's inequality for the coefficients of power series we obtain

$$|D_{kn}| \leqq n!\, M^k. \tag{3.24}$$

Dividing both sides of (3.22) by $n!\, p$, it follows that

$$\left| \frac{P(n, p)}{p} - d_n \right| \leqq p\, M^2\, e^{Mp}, \tag{3.25}$$

which implies that

$$\lim_{p \to 0} \frac{P(n, p)}{p} = d_n\,. \tag{3.26}$$

As $\dfrac{P(n, p)}{p}$ is clearly non-negative, (3.20) follows at once. Substituting $z = e^{it}$ into (3.16) and comparing it with (2.21), taking (3.19) and (3.20) into account, further in view of

$$\sum_{n=1}^{\infty} n d_n = g'(1) = 1 \tag{3.27}$$

it follows that $P(k, p)$ has the form (3.3), i. e. $\{P(k, p)\}$ is a composed Poisson distribution, and the characteristic function of the distribution $\{P(k, p)\}$ is

$$\Pi(z, p) = \exp\left(p \sum_{n=1}^{\infty} d_n (z^n - 1) \right) \tag{3.28}$$

with $d_n \geqq 0$ and $\sum_{n=1}^{\infty} n d_n = 1$.

Otherwise the coefficients d_n are arbitrary, and thus there exists an infinity of families satisfying the condition of the theorem of this § and any

distribution contained in such a family is a composed Poisson distribution. We note that according to (3.28) we have

$$P(0, p) = e^{-p}$$

(compare this with the inequality). Let us now calculate (3.12), the variance of the distribution $\{P(k, p)\}$. We evidently have

$$\sigma^2 = p \sum_{n=1}^{\infty}{}' n^2 d_n , \tag{3.29}$$

Thus we have

$$\sigma^2 = p \sum_{n=1}^{\infty}{}' n^2 d_n \geqq p \sum_{n=1}^{\infty}{}' n d_n = p, \tag{3.30}$$

equality standing if and only if $d_1 = 1$ and thus $d_k = 0$ for $k = 2, 3, \ldots$. Therefore, the second assertion of the above theorem is also proved, and we see that the Poisson distribution can be characterized as having the smallest variance (equal to the mean) among all distributions $\{P(k, p)\}$ satisfying the conditions of the above theorem, provided that the value of p is fixed.

§ 4. Special composed Poisson distributions

Let us consider a composed Poisson distribution with the generating function

$$g(z) = \exp\left(p \sum_{k=1}^{\infty}{}' d_k (z^k - 1)\right) \tag{4.1}$$

where

$$d_k \geqq 0 \ (k = 1, 2, \ldots) \text{ and } \sum_{k=1}^{\infty}{}' k d_k = 1. \tag{4.2}$$

Let us put $\sum_{k=1}^{\infty}{}' d_k = d$ and $\frac{d_k}{d} = e_k$, then we obtain

$$g(z) = \exp\left(pd \sum_{k=1}^{\infty}{}' e_k (z^k - 1)\right) \tag{4.3}$$

where

$$e_k \geqq 0 \ (k = 1, 2, \ldots) \text{ and } \sum_{k=1}^{\infty}{}' e_k = 1. \tag{4.4}$$

Let $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ denote independent random variables, each taking the values 1, 2, 3, ... with the corresponding probabilities $e_1, e_2, e_3, \ldots$. Let us denote by $\Phi_n(k)$ the probability of $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n = k$ for $n \geqq 1$ and let us

put $\Phi_0(0) = 1$ and $\Phi_0(k) = 0$ for $k = 1, 2, \ldots$. We evidently have $\Phi_1(k) = e_k$ and

$$\Phi_n(k) = \sum_{j=0}^{k} \Phi_{n-1}(j)\, e_{k-j}\,. \tag{4.5}$$

Putting $g_0(z) = 1$ and

$$g_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_n(k)\, z^k \qquad \text{for } n = 1, 2, \ldots\,, \tag{4.6}$$

we obtain

$$g_n(z) = (g_1(z))^n\,. \tag{4.7}$$

Making use of (4.7) it follows from (4.1) that

$$g(z) = e^{-pd}\, e^{pdg_1(z)} = e^{-pd} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(pd)^n\, (g_1(z))^n}{n\,!} = e^{-pd} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(pd)^n\, g_n(z)}{n!}\,. \tag{4.8}$$

Comparing the coefficients on both sides of (4.6) we obtain

$$P(k, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(pd)^n\, e^{-pd}}{n!}\, \Phi_n(k). \tag{4.9}$$

Thus we find that the composed Poisson distributions, considered in the preceding §§, are contained in the generalized Poisson distribution of A. KHINTCHINE (loc. cit.[2]). The formula (4.9) can be used also (instead of (3.3) to calculate explicitly the probabilities $P(k, p)$, and especially to obtain an asymptotic formula for $p \to \infty$. Let us now consider some special composed Poisson distributions.

a) *The limit case of the Pólya-Eggenberger contagious distribution. (The »negative-binomial« distribution.)* In this case

$$P(k, p) = (1 + p\delta)^{-\frac{1}{\delta}} \binom{-\frac{1}{\delta}}{k} \left(\frac{p\delta}{1 + p\delta}\right)^k (-1)^k \qquad (\delta > 0) \tag{4.10}$$

and

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(k, p)\, z^k = \exp\left(p \sum_{n=1}^{\infty} d_n\, (z^n - 1)\right) \tag{4.11}$$

with

$$d_n = \frac{1}{p\delta n} \left(\frac{p\delta}{1 + p\delta}\right)^n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4.12}$$

We note that, if $\delta \to 0$, this distribution tends to the ordinary Poisson distribution.

b) *The contagious distribution of* I. NEYMAN. The characteristic function of the »contagious« distribution introduced by I. NEYMAN (loc. cit.[4]) has the form

$$(4.13)\quad g(z) = \exp\left[p\left(\iint_A \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left(F(\xi,\eta)\, z + 1 - F(\xi,\eta)\right)^n d\xi\, d\eta - A \right)\right]$$

where A stands for a domain of the ξ, η plane and at the same time for the area of this domain; in this domain $0 \leqq F(\xi,\eta) \leqq 1$, further $p > 0$, $p_n \geqq 0$ and $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$.

A simple calculation gives

$$(4.14)\quad g(z) = \exp\left(p \sum_{k=1}^{\infty} d_k (z^k - 1) \right)$$

with

$$(4.15)\quad d_k = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \iint_A F^k(\xi,\eta)\,(1 - F(\xi,\eta))^{n-k}\, d\xi\, d\eta.$$

As clearly $d_k \geqq 0$, these distributions are also contained in the class of composed Poisson distributions.

c) *The generalized Poisson distributions of* H. POLLACZEK-GEIRINGER. These distributions (see loc. cit.[5]) are simply the composed Poisson distributions for which $c_n = 0$ for $n \geqq N$, i. e., for which the logarithm of the generating function is a polynomial.

Finally we mention that the composed Poisson distributions may be characterized also as those discrete infinitely divisible distributions which have jumps only at the points $n = 1, 2, \ldots$. The well-known general formula of B. DE FINETTI[8] (which is a special case of the formulae of A. N. KOLMOGOROFF[9] resp. of P. LÉVY[10] and A. KHINTCHINE)

$$(4.16)\quad \log f(u) = p \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{iux} - 1)\, d\Phi(x)$$

reduces to

$$(4.17)\quad \log f(u) = p \sum_{n=1}^{\infty} d_n (e^{inu} - 1)$$

if $\Phi(x)$ is a step function with the discontinuity points $n = 1, 2, \ldots$ and jumps $d_n = \Phi(n + 0) - \Phi(n - 0)$.

[8] B. DE FINETTI, Sulla possibilita di valori eccessionali per una legge di incrementi aleatori, *Atti d. R. Accademia Naz. dei Lincei*, Rendiconti, Cl. sc. fis. mat., **10** (1929), pp. 325—230.

[9] A. KOLMOGOROFF, Sulla forme generale di un processo stocastico omogeneo (Un problema di Bruno de Finetti), *Atti d. R. Accademia Naz. dei Lincei*, Rendiconti, Cl. sc. fis. mat., **15** (1932), pp. 805—808.

[10] P. LÉVY, *Théorie de l'addition des variables aléatoires* (Paris, 1937).

The above examples **a)** — **c)** show that the class of composed Poisson distributions furnishes a large variety of widely different types of distributions. Of course it is an intricate problem to find the precise member of the class which gives the best fit to certain statistical data. If a (theoretically) given distribution is known to belong to the class of composed Poisson distributions, the values of the d_n may successively be calculated directly from the distribution by using the well-known formulae for the semi-invariants. As a matter of fact, if we put

(4.18) $\quad a_k = k!\, P(k, p)\, e^p$ for $k = 0, 1, 2, \ldots$ and $H_k = k!\, d_k\, p$ for $k = 1, 2,$

then it follows

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k\, z^k}{k!} = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k\, z^k}{k!}\right) \tag{4.19}$$

and hence we have

$$\begin{aligned} H_1 &= a_1 \\ H_2 &= a_2 - a_1^2 \\ H_3 &= a_3 - 3a_1a_2 + 2a_1^2 \\ H_4 &= a_4 - 3\,a_2^2 - 4\,a_1a_3 + 12\,a_1^2\,a_2 - 6\,a_1^4 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\text{etc.} \end{aligned} \tag{4.20}$$

Taking into account that $p = \log \dfrac{1}{P(0, p)}$, the values of the d_k can be determined.

(Received 27. October 1950.)

ОБОБЩЕННЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТИПА ПУАССОНА, I

Л. ЯНОШИ (Будапешт), А. РЕНЬИ (Будапешт) и Я. АЦЕЛ (Мишкольц)

(*Резюме*)

В § 1 дается вывод обыкновенного случайного процесса Пуассона, т. е. однородного по времени марковского процесса »редких« событий, исходя из возможно слабых предположений, и особенно из слабого определения »редкости« событий (см. (1.3)). Метод доказательства состоит в применении функциональных уравнений вместо дифференциальных уравнений. В § 2 тем же методом определен общий вид (см. (2.18)) однородных по времени марковских процессов случайных событий ; распределения, полученные при этом называются авторами обобщенными распределениями типа Пуассона. Сказывается (на это обратил внимание двух из авторов статьи А. Н. Колмогоров, кому они выражают благодарность за это), что эти распределения являются композициями счётного множества обыкновенных распределений Пуассона. В § 3 дана характеристика классов обобщенных распределений типа Пуассона как однопараметрических групп (по композиции) целочисленных распределений. Доказывается, что среди всех обобщенных распределений типа Пуассона обыкновенные распределеня Пуассона отличаются минимальной дисперсией при данном среднем значении. В § 4 изучаются некоторые специальные распределения расматриваемого типа, например распределения Эгенвергер-Поля, »заразительные« распределения Неймана, и т. д. Обобщенные распределения типа Пуассона могут быть охарактеризованы также как дискретные целочисленные безгранично делимые распределения.

ÜBER POLYNOME MIT LAUTER REELLEN NULLSTELLEN

Von
GYULA SZ.-NAGY (Szeged), Mitglied der Akademie

Bezeichnet D_n bzw. D_{n-k} den *Abstand der äussersten Nullstellen* eines Polynoms n-ten Grades ($n>2$) mit lauter reellen und nicht lauter zusammenfallenden Nullstellen, bzw. seiner k-ten Derivierten ($k \leqq n-2$), so besteht die Ungleichung

$$\frac{D_{n-k}}{D_n} \geqq \sqrt{\frac{k\,(k-1)}{n\,(n-1)}}\,, \tag{1}$$

wie ich es bewiesen habe.[1,2]

1. *Durchschnittlicher Abstand* d_n der benachbarten Nullstellen soll das arithmetische Mittel der Abstände benachbarter Nullstellen heissen, es gilt also

$$(n-1)\,d_n = D_n\,.$$

Bezeichnet d_n bzw. d_{n-k} den durchschnittlichen Abstand der Nullstellen eines Polynoms n-ten Grades ($n>2$) mit lauter reellen und nicht lauter zusammenfallenden Nullstellen, bzw. seiner k-ten Derivierten ($k \leqq n-2$), so ist

$$d_n < d_{n-1} < \ldots < d_3 < d_2. \tag{2}$$

Mit Hilfe von (1) folgt nämlich

$$\frac{d_{n-1}}{d_n} = \frac{(n-1)\,D_{n-1}}{(n-2)\,D_n} \geqq \frac{n-1}{n-2}\sqrt{\frac{n-2}{n}} = \sqrt{\frac{(n-1)^2}{n\,(n-2)}} > 1$$

und es genügt offenbar nur die Ungleichung $d_n < d_{n-1}$ zu beweisen.

[1] GYULA (JULIUS) SZ.-NAGY, Über algebraische Gleichungen mit lauter reellen Nullstellen, *Jahresbericht der D. M. V.*, **27** (1918), S. 37—43.

[2] N. OBRESCHKOFF und N. TSCHEBOTAREW [*Jahresbericht der D. M. V.*, **35** (1926), Nachtrag S. 49, bzw. **36** (1927), Nachtrag S. 60—61] haben folgenden Satz bewiesen: Bezeichnet d bzw. d' den kleinsten und D bzw. D' den grössten Abstand zweier benachbarten Nullstellen von $f(x)$ bzw. $f'(x)$, wo $f(x)$ ein Polynom n-ten Grades mit lauter reellen Nullstellen bedeutet, so ist

$$D' \geqq d\sqrt{\frac{n+1}{n}} \quad \text{und} \quad d' \leqq D\sqrt{\frac{n+1}{n}}.$$

2. Das quadratische Mittel der Abstände aller Paare von Nullstellen eines Polynoms mit lauter reellen Nullstellen wird als ihr *Mittelabstand* bezeichnet. Für den Mittelabstand δ_n der Nullstellen eines Polynoms mit lauter reellen Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist also

$$\binom{n}{2}\delta_n^2 = \sum_{i<j}(x_i - x_j)^2.$$

Bezeichnet δ_n bzw. δ_{n-k} den Mittelabstand der Nullstellen eines Polynoms n-ten Grades ($n>2$) mit lauter reellen und nicht lauter zusammenfallenden Nullstellen, bzw. seiner k-ten Derivierten ($k \leqq n-2$), so ist

$$\frac{\delta_n^2}{n} = \frac{\delta_{n-1}^2}{n-1} = \ldots = \frac{\delta_3^2}{3} = \frac{\delta_2^2}{2}$$

und folglich

$$\delta_n > \delta_{n-1} > \ldots > \delta_3 > \delta_2. \tag{3}$$

Schreiben wir nämlich das Polynom in der Form

$$x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \binom{n}{2} a_2 x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n} a_n, \tag{4}$$

so ist es unmittelbar zu sehen, dass beim Derivieren die den Grössen $a_1, a_2, \ldots$ entsprechenden Werte unverändert bleiben. Für die Nullstellen des Polynoms (4) ist aber

$$\begin{aligned}\binom{n}{2}\delta_n^2 &= \sum_{i<j}(x_i - x_j)^2 = (n-1)\sum_i x_i^2 - 2\sum_{i<j} x_i x_j = \\ &= (n-1)\left(\sum_i x_i\right)^2 - 2n\sum_{i<j} x_i x_j = \\ &= (n-1)\,n^2 a_1^2 - 2n\binom{n}{2} a_2 = 2n\binom{n}{2}(a_1^2 - a_2).\end{aligned}$$

Es gilt also

$$\frac{\delta_n^2}{n} = 2(a_1^2 - a_2)$$

woraus unsere Behauptung folgt.

3. Wir betrachten die *Streuung* ϱ_n der Nullstellen (um ihr arithmetisches Mittel). Für das Polynom (4) genügt die Streuung bekanntlich der Gleichung

$$n\,\varrho_n^2 = \sum_i (x_i + a_1)^2.$$

Bezeichnet ϱ_n bzw. ϱ_{n-k} die Streuung der Nullstellen eines Polynoms n-ten Grades $(n>2)$ mit lauter reellen und nicht lauter zusammenfallenden Nullstellen, bzw. seines k-ten Derivierten $(k \leqq n-2)$, so ist

$$\frac{\varrho_n^2}{n-1} = \frac{\varrho_{n-1}^2}{n-2} = \ldots = \frac{\varrho_3^2}{2} = \varrho_2^2$$

und folglich

$$\varrho_n > \varrho_{n-1} > \ldots > \varrho_3 > \varrho_2. \tag{5}$$

Unser Satz folgt aus dem vorigen, da für den Mittelabstand δ_n und die Streuung ϱ_n von n Zahlen bekanntlich die Relation

$$\delta_n^2 = \frac{2n}{n-1}\,\varrho_n^2$$

besteht.

Die Ungleichungen (2), (3) und (5) lassen sich auf folgende Weise ausdrücken:

Bei einem Polynom (mindestens dritten Grades) mit lauter reellen und nicht lauter zusammenfallenden Nullstellen wird durch Derivieren des Polynoms der durchschnittliche Abstand der benachbarten Nullstellen vergrössert, dagegen der Mittelabstand der Nullstellen und ihre Streuung verkleinert.

(Eingegangen am 11. Mai 1950.)

О МНОГОЧЛЕНАХ ВСЕ КОРНИ КОТОРЫХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫ

Д. С.-НАДЬ (Сегед)

(*Резюме*)

Пусть $f(x)$ многочлен степени $n\,(n>2)$, все корни которого действительны и не все равны. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ обозначает корни, D_n расстояние между наибольшим и наименьшим корнем, $-a_1$ арифметическое среднее корней. Среднее растояние двух соседних корней d_n, среднее расстояние любых двух корней δ_n, дисперсия этих расстояний ϱ_n определяются следующим образом:

$$(n-1)\,d_n = D_n, \quad \binom{n}{2}\ \delta_n^2 = \sum_{i<j} (x_i - x_j)^2, \quad n\,\varrho_n^2 = \sum_i (x_i + a_1)^2.$$

Таким же образом определяем d_{n-k}, δ_{n-k}, ϱ_{n-k} исходя из много-члена $f^{(k)}(x)$.

Имеют место следующие формулы:

$$\frac{\delta_n^2}{n} = \frac{\delta_{n-1}^2}{n-1} = \ldots = \frac{\delta_2^2}{2}, \quad \frac{\varrho_n^2}{n-1} = \frac{\varrho_{n-1}^2}{n-2} = \ldots = \varrho_2^2,$$

далее

$$d_n < d_{n-1} < \ldots < d_2, \quad \delta_n > \delta_{n-1} > \ldots > \delta_2, \quad \varrho_n > \varrho_{n-1} > \ldots > \varrho_2.$$

ПРИБЛИЖЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ЖЕ ЧИСЛАМИ И ТЕОРИЯ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ЧИСЕЛ

А. О. ГЕЛЬФОНД (Москва)

(Представлено А. Реньи)

§ 1. Введение

Роль работ русских математиков в развитии теории чисел чрезвычайно велика. Начиная с петербургского академика Л. ЭЙЛЕРА, бывшего центральной фигурой восемнадцатого столетия, не только в теории чисел, но и вообще в математике, работы, сделанные в России, приобретают фундаментальное, а во многих направлениях и руководящее значение в теории чисел. Хорошо известно значение в теории чисел, которое нельзя переоценить, работ таких математиков, как П. Л. ЧЕБЫШЕВ, Е. И. ЗОЛОТАРЕВ, Г. Ф. ВОРОНОЙ, А. А. МАРКОВ, а после Октябрьской социалистической революции — И. М. ВИНОГРАДОВА, Л. Г. ШНИРЕЛЬМАНА, Ю. В. ЛИННИКА, А. Я. ХИНЧИНА, Б. Н. ДЕЛОНЕ и многих других. В разработке излагаемых мною в данной работе проблем и методов также с успехом участвовали академик А. А. МАРКОВ, Д. Д. МОРДУХАЙ-БОЛТОВСКОЙ, Р. О. КУЗЬМИН, Н. И. ФЕЛЬДМАН, А. В. ЛОТОЦКИЙ. К этой же области относятся и работы автора этой статьи.

Проблема приближения алгебраических чисел рациональными, или, более обще, алгебраическими числами других полей, является одной из центральных и наиболее трудных проблем теории чисел. Важность этой проблемы определяется, с одной стороны, связью её с решением диофантовых уравнений в целых числах, а с другой стороны, с общей теорией трансцендентных чисел. В свою очередь, аналитические методы теории трансцендентных чисел имеют и могут иметь еще большее значение в исследовании поведения решений широких классов как алгебраических, так и трансцендентных уравнений. Теория трансцендентных чисел получила право на это наименование сравнительно недавно. Только за последние двадцать лет были созданы в этой области общие методы, позволяющие называть ее теорией. Следует отметить также, что первые постановки проблем трансцендентности чисел и алгебраической независимости чисел в рациональном поле принадлежат Л. ЭЙЛЕРУ. В настоящей статье я хочу не только охарактеризовать современное состояние проблемы приближения алгебраических иррациональностей и теории трансцендентных чисел, но и показать связи этих теорий и принадлежащих к ним методов с теорией диофантовых уравнений и общей арифметической теорией алгебраических полей. Я, естественно, ограничив свою задачу изложением теории трансцендентных чисел и приближения алгебраических иррациональностей, останавливаюсь на задачах,

относящихся к решению алгебраических уравнений в целых числах только постольку, поскольку это нужно для показа значения излагаемых мною вопросов в этих задачах. Роль работ советских ученых в развитии этой последней области также весьма велика, и в первую очередь здесь можно отметить работы Б. Н. ДЕЛОНЕ, Д. К. ФАДДЕЕВА и В. А. ТАРТАКОВСКОГО.

В §§ 2 и 3 при изложении теории приближения алгебраических иррациональностей я ограничиваюсь в основном изложением наиболее существенных результатов, почти не останавливаясь на методах их доказательства, так как эти методы представляют развитие такой идеи, которая, насколько можно судить в настоящее время, по существу исчерпана и продолжение исследований в этом же направлении возможно только с помощью существенно новых идей. Наоборот, при изложении в §§ 4 и 5 теории трансцендентных чисел я в основном излагаю ход развития и содержание новых аналитических методов, так как от дальнейшего развития этих общих методов, начавшегося в 1929—1930 г. г., можно ждать новых результатов как в области трансцендентных чисел, так и в области приближения алгебраических иррациональностей и диофантовых уравнений. Параграф 6 посвящен некоторым результатам в области теории трансцендентных чисел, полученным с помощью применения отдельных частных приемов. В § 4 я излагаю развитие метода исследования арифметической природы чисел, порождаемых функциями, имеющими алгебраические коэффициенты при разложении в степенной ряд и удовлетворяющими линейному дифференциальному уравнению с полиномиальными коэффициентами. Этот метод имеет своим источником работу Ш. ЭРМИТА. В § 5 я излагаю метод, развитый мною и основывающийся на исследовании аналитического поведения функций, принимающих алгебраические значения при аргументе, пробегающем всю совокупность целых алгебраических чисел определенного поля. Первая постановка основной задачи в этом направлении принадлежит Л. ЭЙЛЕРУ. Из изложенного ниже фактического положения в области методов и результатов, относящихся к теории трансцендентных чисел, следует также тенденциозное несоответствие с действительным положением дела в этой области высказываний Р. КУРАНТА в книге »Что такое математика«: Р. КУРАНТ в этой книге говорит, что Д. ГИЛЬБЕРТ поставил в 1900 г. проблему трансцендентности одного класса чисел, в частности, числа $2^{\sqrt{2}}$. Это в смысле первой постановки такой проблемы неверно. Впервые петербургский академик Л. ЭЙЛЕР, в 1744 г., четко формулировал в своей книге »Введение в анализ«, ч. 1 утверждение, что логарифм рационального числа при рациональном основании должен быть числом трансцендентным или рациональным. Д. ГИЛЬБЕРТ только включил в число своих 23 проблем обобщение этой постановки, заменив предположение рациональности основания и логарифма на предположение алгебраичности того и другого и придав ей другую, но вполне эквивалентную этой по содержанию, форму. Далее Р. КУРАНТ по поводу этой проблемы пишет: »Наконец, ЗИГЕЛЬ и, независимо от него, молодой русский математик А. ГЕЛЬФОНД открыли новые методы для доказательства трансцендентности многих чисел, имеющих значение в математике. В частности, была установлена не только трансцендентность гильбертова числа $2^{\sqrt{2}}$, но и целого довольно обширного класса чисел вида a^b, где a — алгебраическое число ($\neq 0$ и $\neq 1$), а b—алгебраическое иррацио-

нальное число«. Ни о каком параллелизме в открытии и, тем более, в установлении сначала К. ЗИГЕЛЕМ, а затем мною »независимо« путей подхода к решению проблемы Эйлера—Гильберта не может быть и речи.

В своей работе, опубликованной в 1920—1930 г. г., К. ЗИГЕЛЬ действительно развивает один общий метод, дающий возможность доказывать трансцендентность значений функций, относящихся к классу E-функций (определение этого класса функций дано мною в § 4), но этот метод неприменим к доказательству трансцендентности чисел вида a^b. В этой же работе К. ЗИГЕЛЬ, не зная в момент написания им своей работы о моей работе, опубликованной в 1929 г., в которой я даю новым методом решение части проблемы Эйлера, неправильно указывает возможный путь к решению этой проблемы. В бодее поздних работах К. ЗИГЕЛЬ указывает, что идея, лежащая в основе данного миою доказательства трансцендентности одного подкласса чисел вида a^b, может быть с успехом применена к решению других проблем теории трансцендентных чисел. Полное решение проблемы Эйлера, другими словами, доказательство трансцендентности или рациональности логарифмов алгебраических чисел при аглебраическом основании или, что то же самое, трансцендентности чисел вида a^b было также впервые дано в СССР в 1934 г.

§ 2. Приближение алгебраических чисел. История вопроса

Впервые вопрос об арифметической природе широкого класса числовых образований был поставлен Л. ЭЙЛЕРОМ. Уже было сказано, что в своей книге »Введение в анализ« он высказывает утверждение, что при рациональном основании a логарифм любого рационального числа b, не являющегося рациональной степенью a, не может быть даже числом иррациональным (в современной терминологии алгебраическим) и должен относиться к количествам трансцендентным. Кроме этого утверждения, доказанного только в настоящее время, он ставил и другие задачи, относящиеся непосредственно к теории трансцендентных чисел. Через столетие после Л. ЭЙЛЕРА Ж. ЛИУВИЛЛЬ [8, б] впервые в 1844 г. дал необходимый признак алгебраичности числа и тем самым достаточный признак трансцендентности. Он показал, что если α есть корень неприводимого уравнения степени $\nu \geq 2$, p и q — любые целые рациональные числа, то имеет место неравенство

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^\nu} \qquad (c > 0), \tag{1}$$

где постоянная c не зависит от p и q.

Доказательство этого неравенства весьма просто. Пусть α — корень неприводимого уравнения

$$f(x) = a_0 x^\nu + a_1 x^{\nu-1} + \ldots + a_\nu = 0,$$

где все $a_0, a_1, \ldots, a_\nu$—целые рациональные числа. Тогда из системы соотношений

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \cdot |f'(\xi)| > \frac{1}{q^\nu}; \quad \xi = \alpha + \tau\left(\frac{p}{q} - \alpha\right) \quad (0 \leq \tau \leq 1)$$

непосредственно следует теорема ЛИУВИЛЛЯ. Этот признак трансцендентности числа позволил впервые строить и примеры чисел трансцендентных. Действительно, из лиувиллевского признака трансцендентности следует, например, трансцендентность числа

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n!}}.$$

Итак, ЛИУВИЛЛЬ установил, что алгебраические числа не могут слишком хорошо приближаться рациональными дробями. В связи с этим фактом возникла проблема определения такой константы $\Theta = \Theta(\nu)$, что при α алгебраической степени ν неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{\Theta+\varepsilon}}, \tag{2}$$

где p и q—целые, будет иметь лишь конечное число решений, когда $\varepsilon > 0$, и бесконечное, когда $\varepsilon < 0$. Впервые А. ТУЭ [15] в начале текущего столетия смог понизить величину этой константы. Он показал, что $\Theta \leq \frac{\nu}{2}$. Для доказательства этого предложения А. ТУЭ построил многочлен от двух переменных x и y с целыми рациональными коэффициентами, который имеет вид

$$f(x, y) = (y - \alpha) f_1(x, y) + (x - \alpha)^m f_2(x, \alpha). \tag{3}$$

Допуская, что неравенство (2) имеет два решения с достаточно большими знаменателями q_1 и q_2, $\frac{p_1}{q_1}$ и $\frac{p_2}{q_2}$, полагая в соотношении (3) $m \cong \frac{\ln q_2}{\ln q_1}$ и доказывая, что левая часть (3), при соответствующем выборе $P(x, y)$, при $x = \frac{p_1}{q_1}$ и $y = \frac{p_2}{q_2}$ в нуль не обращается, он получает свое утверждение аналогично тому, как была доказана теорема ЛИУВИЛЛЯ. Этот метод, который позволил существенно понизить константу ЛИУВИЛЛЯ, необходимо связан с предположением существования двух достаточно больших решений неравенства (2). Поэтому этот метод позволяет устанавливать только границу числа решений неравенства (2), а не максимальной величины их знаменателей.

Действительно, из рассуждений А. ТУЭ следует, что если при $\Theta = \frac{\nu}{2}$ и $\varepsilon > 0$ неравенство (2) имеет достаточно большое решение со знаменателем $q_1 > q_1'(\alpha, \varepsilon)$, то нет решений со знаменателями $q_2 \geqq q_2'(\alpha, \varepsilon, q_1)$. Это сразу позволяет, в частности, установить конечность числа решений уравнения

$$y^n f\left(\frac{x}{y}\right) = c_0 y^n + c_1 y^{n-1} x + \ldots + c_n x^n = c \qquad (n \geqq 3) \tag{4}$$

в целых числах x и y при целых рациональных коэффициентах $c, c_0, c_1, \ldots, c_n$.

Действительно, из уравнения (4) следуют соотношения

$$(5) \qquad f\left(\frac{x}{y}\right)=\left(\alpha-\frac{x}{y}\right)f'(\xi)=\frac{c}{y^n}, \quad \xi=\alpha+\tau\left(\frac{x}{y}-\alpha\right) \qquad (0\leqq\tau\leqq 1)$$

из которых, при условии неприводимости полинома $f(t)$ в рациональном поле, сразу следует противоречие с неравенством (2) при $\Theta+\varepsilon<n$, если только мы допустим существование бесконечного числа решений уравнения (4).

Этот метод был обобщен и уточнен К. ЗИГЕЛЕМ [4, а)], который показал, пользуясь попрежнему существованием двух достаточно больших решений, что верно неравенство

$$(6) \qquad \Theta\leqq\min_{1\leq s\leq\nu-1}\left[\frac{\nu}{s+1}+s\right]<2\sqrt{\nu}\,.$$

К. ЗИГЕЛЬ не только уточнил метод А. ТУЭ, но он и распространил его на случай приближения алгебраического числа α числом ζ, также алгебраическим, высоты H и степени n. Высотой алгебраического числа ζ мы называем максимум модуля коэффициентов того неприводимого в рациональном поле уравнения, которому ζ удовлетворяет, если все коэффициенты этого уравнения целые и их общий наибольший делитель равен единице. Он показал, что неравенство

$$(7) \qquad |\alpha-\zeta|<H^{-n(\Theta+\varepsilon)}, \quad \Theta=\min_{1\leq s\leq\nu-1}\left[\frac{\nu}{s+1}+s\right] \qquad (\varepsilon>0)$$

имеет лишь конечное число решений в алгебраических числах ζ, если α есть алгебраическое число степени ν. Кроме этого, им были даны и другие варианты неравенства (7).

Дальнейшие попытки К. ЗИГЕЛЯ [4, б)] и его учеников уменьшить величину константы Θ в неравенствах (2) и (7), ислпользовав предположение о существовании уже не двух, а любого числа достаточно больших решений неравенства (2) или (7), привели его к теореме, которая была уточнена его учеником Т. ШНЕЙДЕРОМ [17, а)], и в уточненной форме звучит так: если $q_1, q_1, \ldots, q_n, \ldots$ будут знаменатели всех последовательных решений неравенства (2) при $\Theta=2$ и $\varepsilon>0$, то или $\overline{\lim}\,\frac{\ln q_{n+1}}{\ln q_n}=\infty$, или $n<n_0$. Эта теорема ЗИГЕЛЯ—ШНЕЙДЕРА, как мы видим, не только не дает возможности установить границу для величны знаменателей решений неравенства (2) при $2<\Theta<\Theta_0$, $\Theta_0=\min_{1\leq s\leq\nu-1}\left[\frac{\nu}{s+1}+s\right]$, но и не утверждает даже их конечности.

Последняя приведенная теорема естественно обобщается на случай неравенства (7). Из первого, основанного на рассмотрении двух достаточно больших решений, обобщения теоремы А. ТУЭ следует, в частности, что уравнение

$$(8) \qquad c_0 y^n+c_1 y^{n-1}x+\ldots+c_n x^n=P_m(x,y) \qquad (n\geqq 3),$$

при целых рациональных c_0, c_1, ..., c_n и $P_m(x, y)$ полиноме с целыми рациональными коэффициентами степени m имеет лишь конечное число решений в целых рациональных числах x и y, когда

$$n - m > \min_{1 \leqq s \leqq n-1} \left[\frac{n}{s+1} + s \right],$$

и левая часть уравнения не приводима. Из теоремы же ЗИГЕЛЯ—ШНЕЙДЕРА следует только, что при $n > m + 2$ целочисленные решения уравнения (8) очень редки. Можно отметить, что вопрос о конечности или бесконечности решений уравнения (8) при $n \geqq m + 1$ решен до конца другим путем.

Дальнейшие обобщения теоремы ЗИГЕЛЯ—ШНЕЙДЕРА и некоторые их приложения можно найти в работах К. МАЛЕРА [10, б)] — [10, д)]. Следует также отметить, что некоторые результаты в области приближения алгебраических иррациональностей были получены Д. Д. МОРДУХАЙ—БОЛТОВСКИМ]12, а)], [12, г)], — [12, е)], Р. О. КУЗЬМИНЫМ [5, б)], А. О. ГЕЛЬФОНДОМ [3, к)], (3, л)] и другими авторами.

Результаты, аналогичные теореме ТУЭ—ЗИГЕЛЯ, относящиеся к вопросу об одновременном приближении нескольких алгебраических чисел рациональными дробями с одинаковыми знаменателями, были получены Г. ГАССЕ [2].

§ 3. Приближение алгебраических чисел и их логарифмов и связь этих вопросов с другими числовыми проблемами

В настоящем параграфе будут изложены результаты, полученные автором настоящей статьи [3, л)].

В связи с тем положением проблемы приближения алгебраических иррациональностей, которое было вкратце изложено в § 2, прежде всего естественно возникает вопрос о том, можно ли понизить величину константы Θ по сравнению с величиной, полученной К. ЗИГЕЛЕМ при использовании только двух решений неравенства (2). Далее, принимая во внимание неэффективность результатов, получаемых методом А. ТУЭ, неэффективность в том смысле, что нельзя установить этим методом границу величины знаменателей решений неравенства (2) при $\Theta < \nu$, также естественно встает вопрос о том, как должна звучать теорема о приближении алгебраических чисел, которая была бы предельной в смысле эффективности при использовании двух решений неравенства (2). В этой постановке вопроса приходится говорить только в двух решениях, так как использование большего числа решений наталкивается на непреодолимые пока трудности, связанные с общей теорией элиминации.

Теорему, которая давала бы ответ на поставленный вопрос, мы сформулируем, введя предварительно понятие меры алгебраического числа. Пусть ζ есть число алгебраического поля K степени σ, а числа $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\sigma$ пусть образуют базис кольца целых чисел этого поля. Взятое нами число ζ может быть бесчисленным множеством способов представлено в форме

$$(9) \qquad \zeta = \frac{p_1\omega_1 + \ldots + p_\sigma\omega_\sigma}{q_1\omega_1 + \ldots + q_\sigma\omega_\sigma}, \quad q[p_1, \ldots, q_\sigma] = \max[|p_1|, \ldots, |q_\sigma|],$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma, q_1, q_2, \ldots, q_\sigma$ — целые рациональные числа с общим наибольшим делителем, равным единице. Мы будем называть число q мерой числа ζ, если оно определяется соотношением

$$q = \min_{\zeta} q\,[p_1, \ldots, p_\sigma, q_1, \ldots, q_\sigma], \tag{10}$$

где минимум в правой части берется по всем возможным представлениям числа ζ. Нетрудно заметить, что когда $\zeta = \frac{p}{q}$ есть число рациональное, то его мера равна $\max[|p|, |q|]$, другими словами, с точностью до несущественного постоянного множителя совпадает с его знаменателем q. Теперь мы можем сформулировать нашу общую теорему, которую мы будем называть в дальнейшем теоремой I.

ТЕОРЕМА I. Пусть α и β будут два произвольных числа алгебраического поля K_0 степени ν (они могут совпадать). Пусть также ζ и ζ_1 будут числами алгебраического поля K, меры которых относительно фиксированного базиса целых чисел этого поля $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\sigma$ будут соответственно q и q_1, а Θ и Θ_1 будут два действительных числа, подчиняющихся условиям $\Theta \leq \Theta_1 \leq \nu$, $\Theta \cdot \Theta_1 = 2\nu(1+\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$, где ε — сколь угодно мало, но фиксировано. Тогда, если неравенство

$$|\alpha - \zeta| < q^{-\sigma\Theta} \tag{11}$$

будет иметь решение ζ с мерой $q > q'\,[K_0, K, \alpha, \beta, \varepsilon, \delta]$, то неравенство

$$|\beta - \zeta_1| < q_1^{-\sigma\Theta_1} \tag{12}$$

не может иметь решений с мерой q_1 при условии, что

$$\ln q_1 \geq \left[\frac{\Theta - 1}{2(\sqrt{1+\varepsilon} - 1)} + \delta\right] \ln q, \tag{13}$$

где δ — любая сколь угодно малая положительная постоянная[1]. Заметим сразу же, что при $\Theta = \Theta_1, \Theta = \sqrt{2\nu}\sqrt{1+\varepsilon}$ и неравенство (13) при условии $\Theta > 3\sqrt{\frac{\nu}{2}}$ переходит в неравенство $\ln q_1 \geq \left[\frac{\Theta - 1}{\eta} + \delta'\right] \ln q$ $(\eta > 1, \delta' > 0$ и сколь угодно мало). Из этого замечания следует, что при $\alpha = \beta$ за пределом $q'(K, K_0, \alpha, \eta)$ может быть только одно решение неравенства (11) при достаточно малом δ'. Соответствующим образом формулируется и p-адический аналог приведенной теоремы. Из приведенной теоремы также следует, полагая в ней $\Theta = \Theta_1$, что неравенство (2) при $\varepsilon > 0$ имеет лишь конечное число решений, когда $\Theta = \sqrt{2\nu}$. Предельность нашей общей теоремы, с точки зрения эффективности, можно непосредственно установить в том случае, когда ζ и ζ_1 будут рациональными дробями, а $\alpha = \beta$. Действительно, если в условии теоремы $\Theta\Theta_1 = 2\nu(1+\varepsilon)$ можно было бы заменить $\varepsilon > 0$ на $-\varepsilon < 0$, то оно имело бы вид $\Theta\Theta_1 = 2\nu(1-\varepsilon)$ и мы могли бы положить

[1] Частный случай этой теоремы при $\alpha = \beta$, ζ — рациональные дроби, $\Theta = \Theta_1$, и без неравенства (13) независимо был доказан ДИСОНОМ, *Acta Mathem.*, **79 № 3—4, 1947. г.**

$\Theta = 2\sqrt{1-\varepsilon} < 2$ и $\Theta_1 = \nu\sqrt{1-\varepsilon} < \nu$. Но неравенство (11) при ζ рациональном, $\sigma = 1$ и $\Theta < 2$ имело бы действительно бесконечное множество решений, значит, для знаменателей рациональных решений неравенства (12) нашлась бы эффективная граница в виде функции K_0, α, ε. Отсюда непосредственно уже следовало бы существование эффективной границы для величин решений уравнения (4). Наконец, можно сказать, что наша общая теорема остается в силе при замене меры чисел ζ на их высоты.

Доказательство этой теоремы основано на некотором усилении метода А. ТУЭ. Пользуясь нашей общей теоремой I, с помощью некоторых дополнительных рассмотрений можно доказать теорему II.

ТЕОРЕМА II. Пусть α, $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_s$ алгебраические числа поля K. Пусть также произведение любых целых степеней чисел $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_s$ не может быть равно единице. Тогда неравенство

$$\left|\alpha - \zeta_1^{x_1}\zeta_2^{x_2}\ldots\zeta_s^{x_s}\right| < e^{-\varepsilon x}, \qquad x = \max_{1\le i\le s}|x_i| \tag{14}$$

и сравнение

$$\alpha \equiv \zeta_1^{y_1}\zeta_2^{y_2}\ldots\zeta_s^{y_s} \bmod \mathfrak{p}^m,\ m = [\delta y],\ y = \max_{1\le i\le s}|y_i| \tag{15}$$

как бы ни были малы числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, могут иметь только конечное число решений в целых рациональных числах $x_1, x_2, \ldots, x_s$ и $y_1, y_2, \ldots y_s$. Число $\mathfrak{p}$ есть простой идеал поля K. Я приведу теперь два следствия теорем I и II. Прежде всего я приведу применение теоремы I к теории алгебраических уравнений. Пусть система однородных форм $P_1(x, y)$, $P_2(x, y), \ldots,$ $P_n(x, y)$ обладает следующими свойствами: степени их будут $m_1, m_2, \ldots,$ m_n, все эти степени выше первой, все коэффициенты полиномов $P_1(x, y), \ldots,$ $P_n(x, y)$—целые рациональные числа, эти полиномы не имеют линейных делителей в рациональном поле, каждый действительный корень полинома $t^{-m_k}P_k(t, tx) = R_k(x)$ принадлежит к алгебраическому полю K степени не выше ν и все такие корни различны между собой. Будем также называть степенью полинома от $2n$ переменных $P(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)$, имеющего целые рациональные коэффициенты, совокупность чисел $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, где s_i есть степень полинома P по совокупности переменных x_i, y_i. Тогда будет иметь место теорема:

Уравнение

$$P_1(x_1, y_1)P_2(x_2, y_2)\cdots P_n(x_n, y_n) = P(x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_n, y_n) \tag{16}$$

будет иметь только конечное число решений в целых рациональных числах $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$, если только одновременно выполнены неравенства

$$m_k - s_k > \sqrt{2\nu} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n,\ \nu \leqq 3).$$

Из теоремы II также можно получить ряд следствий, но уже для показательных уравнений. Пусть, например, числа $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, $\psi_1, \ldots, \psi_m$, $\eta_1, \ldots, \eta_p$ будут целыми числами поля K, ни одно из них не будет алгебраи-

ческой единицей, A, B, C, $ABC \neq 0$, будут числами того же поля K, числа $\zeta = \zeta_1 \dots \zeta_n$, $\psi = \psi_1 \dots \psi_m$, $\eta = \eta_1 \dots \eta_p$ будут взаимно просты. Тогда уравнение

$$A\,\zeta_1^{x_1} \dots \zeta_n^{x_n} + B\,\psi_1^{y_1} \dots \psi_m^{y_m} + C\,\eta_1^{z_1} \dots \eta_p^{z_p} = 0 \tag{17}$$

может иметь только конечное число неотрицательных решений в целых рациональных числах $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_p$. Далее, почти непосредственно из теоремы II можно получить теорему относительно поведения линейных форм с целыми рациональными коэффициентами от логарифмов алгебраических чисел.

Если алгебраические числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ обладают тем свойством, что произведение любых целых степеней этих чисел не равно единице, то неравенство

$$|x_1 \ln \alpha_1 + \dots + x_s \ln \alpha_s| < e^{-\varepsilon x} \qquad (\varepsilon > 0, x = \max_{1 \leq i \leq s} |x_i|), \tag{18}$$

где логарифмы имеют любые, но фиксированные значения, имеет лишь конечное число решений в целых рациональных числах $x_1, \dots, x_n$.

Как было показано Ю. В. ЛИННИКОМ и автором этой статьи [6] в совместной работе, эта последняя теорема при $s = 3$ дает возможность провести новое, не зависящее от аналитической теории $L(s, \chi)$-рядов доказательство конечности числа одноклассных квадратичных полей. Если бы можно было установить верхнюю границу величины решений неравенства (18) при любом фиксированном $\varepsilon > 0$, то из этого нового доказательства следовало бы непосредственно решение классической проблемы эффективизации в квадратических полях, другими словами, возможность явного выражения границы для величины дискриминантов одноклассных полей. Этим устанавливается глубокая связь между неэффективностью в различных на первый взгляд проблемах теории чисел. Конечность числа решений неравенства (18) позволяет также делать заключения и о поведении решений алгебраических уравнений высших степеней с многими переменными. Действительно, например, из уравнения $N(x_1 \omega_1 + \dots + x_s \omega_s) = 1$ следует, что при условии $x_k = 0$ уравнение в единицах поля K, в котором числа $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s$ образуют базис кольца целых чисел. Это уравнение будет вида (17) с большим числом членов. Все теоремы, приведенные в этом параграфе, обладают неэффективностью, другими словами, из-за использования двух решений соответствующих аппроксимативных неравенств принципиально не в состоянии указать величины границ решений неравенств или уравнений и дают только границу их числа. Я перехожу теперь в следующих параграфах к изложению результатов и методов аналитической теории трансцендентных чисел. Повидимому, в настоящее время только с помощью аналитических методов теории трансцендентных чисел можно ожидать эффективного решения аппроксимативных неравенств для алгебраических чисел, а тем самым и эффективного решения проблем из теории диофантовых уравнений и теории полей.

§ 4. Трансцендентность значений аналитических функций, ряды Тейлора которых имеют алгебраические коэффициенты

Как уже говорилось в начале § 2, впервые Л. ЭЙЛЕР поставил ряд вопросов о трансцендентности, другими словами, о неалгебраичности некоторых общих классов чисел. Примеры трансцендентных чисел были построены впервые благодаря неравенству ЛИУВИЛЛЯ (§ 2, неравенство (1)). Уже давно, задолго до работы ЛИУВИЛЛЯ, стояли вопросы об арифметической природе классических постоянных e и π. Вопрос об арифметической природе числа π был тем более интересен, что от арифметической природы числа π зависело положительное или отрицательное решение проблемы квадратуры круга, которой занималась еще древнегреческая математика. Проблема квадратуры круга, т. е. проблема построения с помощью циркуля и линейки квадрата, площадь которого равна площади заданного круга, получала бы отрицательное решение в случае трансцендентности числа π, так как, как было показано в прошлом столетии, строить с помощью циркуля и линейки можно только корни некоторых классов алгебраических уравнений, коэффициенты которых линейно заданы[2]. Числа π и e связаны между собой знаменитой эйлеровской формулой. Впервые во второй половине прошлого века в 1873 г. Ш. ЭРМИТ [18] связал арифметическую природу значения функции в алгебраической точке с ее аналитическим поведением и арифметической природой ее коэффициентов. Связь эта у ЭРМИТА дана в очень частной форме и во всей полноте была им еще не осознана. Ш. ЭРМИТ дал доказательство трансцендентности числа e, основания натуральных логарифмов.

Доказательство ЭРМИТА основано на одном тождестве для функции e^x. Пусть $f(x)$ будет любой многочлен относительно x, а $F(x) = \sum_{0}^{\infty} f^{(k)}(x)$.

Очевидно, что $F(x)$ тоже многочлен той же степени. Тогда с помощью интегрирования по частям непосредственно может быть получено тождество

$$F(x) - e^x F(0) = e^x \int_0^x e^{-t} f(t)\, dt. \tag{19}$$

Если число e удовлетворяет уравнению с целыми рациональными коэффициентами $a_0 + a_1 e + \ldots + a_n e^n = 0 \quad (a_0 \neq 0)$, то из нашего тождества полагая в нем

$$f(t) = \frac{1}{(p-1)!} t^{p-1} \prod (k-x)^p \qquad (p > \max [n, |a_0|]),$$

где p есть простое число, мы непосредственно получаем соотношение

$$a_0 F(0) + \sum_1^n a_k F(k) = \sum_0^n a_k e^k \int_0^k e^{-t} f(t)\, dt = O\left(p^{-\frac{p}{2}}\right). \tag{20}$$

[2] Суть целые кратные основного отрезка.

Первое слагаемое в левой части этого тождества, как легко установить, есть целое, рациональное, не делящееся на p число, а второе слагаемое есть целое число, делящееся на p. Правая же часть с ростом p стремится к нулю. Итак, при любом p левая часть тождества есть целое отличное от нуля число, а правая при достаточно большом p станет меньше единицы. Мы пришли, таким образом, к противоречию, откуда следует, что число e не может быть корнем алгебраического уравнения с целыми коэффициентами. Через некоторое время после работы Ш.ЭРМИТА в 1882 г. ЛИНДЕМАН [7, а), б)] использовал тождество ЭРМИТА для доказательства общей теоремы относительно природы значений функции e^x, при алгебраических значениях аргумента, носящей его имя. Пусть $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ будут произвольные попарно различные алгебраические числа, а $A_1, A_2, \ldots, A_s$ — произвольные, отличные от нуля алгебраические же числа. Тогда соотношение

$$A_1 e^{\omega_1} + A_2 e^{\omega_2} + \cdots + A_s e^{\omega_s} = 0 \tag{21}$$

невозможно. Из этой теоремы следует сразу трансцендентность числа π и тем самым отрицательное решение проблемы квадратуры круга, так как предположение алгебраичности π приводит, благодаря тождеству Л.ЭЙЛЕРА $e^{2\pi i} = 1$, к соотношению типа (21).

Ход доказательства этой общей теоремы тот же самый, что и доказательства теоремы Ш. ЭРМИТА, и отличается от него только технически и усложнениями. После работ ЭРМИТА и ЛИНДЕМАНА появился ряд работ, принадлежащих самым крупным математикам, которые давали различные новые доказательства теорем ЭРМИТА и ЛИНДЕМАНА, не меняя по существу основ метода. Из этих работ я хочу отметить работу академика А. А. МАРКОВА [11], так как в ней доказательство теоремы ЛИНДЕМАНА проведено технически весьма совершенно и основная идея дана очень выпукло. Тождество ЭРМИТА, лежащее в основе общей теоремы ЛИНДЕМАНА, специфично для функции e^z и для других функций того же типа, например, для функции Бесселя аналогичного тождества построить, повидимому, нельзя. Более общий метод, позволяющий исследовать арифметическую природу значений достаточно широкого класса целых функций, имеющих алгебраические коэффициенты ряда Тейлора в нуле и удовлетворяющих алгебраическим дифференциальным уравнениям с полиномиальными коэффициентами, был опубликован К. ЗИГЕЛЕМ [4, в)] в 1929—1930 г. г. Этот метод является естественным продолжением работ ЭРМИТА и ЛИНДЕМАНА. Существенную роль игрвет а нем одна общая идея относительно определения нижних границ линейных форм с целыми или алгебраическими коэффициентами от степеней одного или нескольких чисел, представляющая собой развитие идеи А. ТУЭ в теории приближения алгебраических чисел рациональными дробями.

Для выяснения основ этого общего метода я в весьма общих чертах приведу схему доказательства этим методом теоремы Линдемана. Прежде всего я приведу формулировки двух несложно доказываемых лемм, которые понадобятся нам и в дальнейшем.

ЛЕММА I. Пусть $L_1, L_2, \ldots, L_m$ будут линейные формы с действительными коэффициентами $a_{i,k}$; $i = 1, 2, \ldots, m$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $n > m$, от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, другими словами

$$L_i = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} x_k, \quad \max_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le k \le n}} |a_{i,k}| \le a,$$

где a — целое число. Тогда можно найти целые рациональные $x_1, \ldots, x_n$ $|x_k| \le x$, $1 \le k \le n$, в совокупность отличные от нуля и такие, что при N целом, $N > 1$

$$|L_i| \le N^{-1} \ (i = 1, 2, \cdots, m); \ x < 2 \ (naN)^{\frac{m}{n-m}}.$$

Доказывается эта лемма весьма просто с помощью принципа Дирихле (см., например, А. О. ГЕЛЬФОНД [3, л)]).

ЛЕММА II. Если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ — заданные алгебраические числа поля K степени ν, а $P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$ — полином с целыми рациональными коэффициентами степени n, высота которого, другими словами, максимум модуля коэффициентов, будет H, то или $P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) = 0$, или

$$|P(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)| > H^{-\nu+1} e^{-\gamma n},$$

где γ не зависит ни от H, ни от n.

Эта лемма является непосредственным обобщением неравенства ЛИУВИЛЛЯ (1) (см., например, А. О. ГЕЛЬФОНД [3, л)]).

Пусть теперь числа $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$ образуют базис кольца целых чисел алгебраического поля K. Допустим теперь, что существует соотношение

$$(22) \quad T_1 = \sum_{k_1=0}^{\sigma} \cdots \sum_{k_\nu=0}^{\sigma} A_{k_1, k_2, \ldots, k_\nu} \, e^{k_1\omega_1 + \cdots + k_\nu\omega_\nu} = 0, \ |A_{k_1, \ldots, k_\nu}| < A,$$

где все числа $A_{k_1, k_2, \ldots, k_\nu}$ будут целыми рациональными числами, в совокупности отличными от нуля. Если мы докажем невозможность такого соотношения, то отсюда будет следовать, с помощью весьма несложных чисто алгебраических соображений, теорема ЛИНДЕМАНА.

Я разобью ход доказательства невозможности соотношения (22) на ряд этапов.

Этап первый. Перенумеруем $q = (p+1)^\nu$ чисел

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \cdots + k_\nu\omega_\nu, \qquad 0 \le k_i \le p, \ i = 1, 2, 3, \cdots, \nu,$$

в каком-либо порядке и запишем их в виде последовательности $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$, причем первые $\tau = (\sigma+1)^2$ из них пусть совпадают с совокупностью чисел $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \ldots + k_\nu\omega_\nu$, $k_i = 0, 1, \ldots, \sigma$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$. Тогда соотношение (22) может быть переписано в форме

$$(23) \qquad T_1 = \sum_{1}^{q} A_{k,1} \, e^{\lambda_k} = 0, \qquad A_{k,1} = 0, \ k > \tau, \ |A_{k.1}| \le A.$$

Нетрудно заметить, что умножая равенство (22) на

$$e^{k_1\omega_1 + \cdots + k_\nu\omega_\nu}, \qquad 0 \le k_i \le p - \sigma, \ i = 1, 2, \cdots, \nu,$$

мы будем получать новые соотношения типа (23)

$$(23') \qquad T_s = \sum_1^q A_{k,s}\, e^{\lambda_k}, \quad |A_{k,s}| \leq A, \quad 1 \leq s \leq (p+1-\sigma)^\nu$$

причем, очевидно, линейные формы T_s от величин e^{λ_k} будут линейно независимы между собой. Число их будет $(p+1-\sigma)^\nu$. Итак, из предположения верности соотношения (22) мы получили много линейных форм от величин e^{λ_k}, линейно независимых между собой.

Этап второй. Пусть $N > e^{q\ln^2 q}$ будет достаточно большое целое число. Рассмотрим функцию

$$(24) \qquad f(z) = \sum_1^q P_m(z)\, e^{\lambda_m z}, \quad P_m(z) = N! \sum_{k=0}^{N} \sum_{n=1}^{\nu} C_{k,n,m} \frac{\omega_s z^k}{k!}.$$

Почти непосредственным следствием леммы I является существование таких целых, в совокупности отличных от нуля чисел $C_{k,n,m}$, $|C_{k,n,m}| < e^{\gamma_0 N q \ln q}$, где γ_0 не зависит ни от N, ни от q, что разложение функции $f(z)$ в начале в ряд Тейлора будет начинаться со степени z, не меньшей, чем $N(q-1)+2q$. Мы легко получаем, рассматривая выбранную таким образом функцию $f(z)$, что

$$f(z) = z^{N(q-1)+2q}\, \varphi(z), \quad |\varphi(z)| < e^{-\gamma_1 N (q-2)\ln N}, \quad \gamma_1 > 0$$

при $|z| \leq 4$, где γ_1 опять не зависит от q и N.

Этап третий. Дифференцируя функцию $f(z)$, мы получаем систему линейных форм от $e^{\lambda_k z}$, $k = 1, 2, 3, \ldots, q$,

$$(25) \qquad L_s(z) = f^{(s)}(z) = \sum_1^q U_{m,s}(z)\, e^{\lambda_m z}, \quad U_{m,s}(z) = \sum_{n=1}^{\nu} \sum_{m=0}^{N} C_{m,s,n,k}\, \omega_n z^k,$$

где все числа $C_{m,s,n,k}$ будут целыми рациональными, причем по модулю они не будут превосходить N^{3N} при $s \geqq N$ и $N \geqq N_0$. Так как функция $f(z)$ имеет вначале нуль не ниже, чем порядка $N(q-1)+2q$, то, как легко убедиться последовательным дифференцированием и исключением показательных функций $e^{\lambda_k z}$, ни один из полиномов $P_m(z)$ в представлении (24) функции $f(z)$ не может тождественно равняться нулю. Вследствие этого и того обстоятельства, что функция, состоящая из суммы произведений полиномов на различные степени $e^{\lambda_m z}$, никогда не может быть тождественным нулем, мы можем утверждать, что линейные формы $L_0(z), L_1(z) \ldots, L_{q-1}(z)$ линейно независимы, другими словами, что детерминант

$$(26) \qquad \Delta(z) = \begin{vmatrix} U_{10}(z) & \cdots & U_{q,0}(z) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ U_{1,q-1}(z) & \cdots & U_{q,q-1}(z) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} f(z) & U_{2,0}(z) & \cdots & U_{q,0}(z) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^{(q-1)}(z) & U_{2,q-1}(z) & \cdots & U_{q,q-1}(z) \end{vmatrix} = z^{N(q-1)+2q}\, \psi(z)$$

не равен тождественно нулю. Так как степень этого детерминанта относительно z не превышает Nq, то, имея вначале нуль порядка не ниже $N(q-1)+2q$, он ни при каком значении z, отличном от нуля, не может иметь нуль порядка выше $N-2q$.

Этап четвертый. — Выбирая из $N+1$ линейных форм $L_0(z)$, $L_1(z)$, ..., $L_N(z)$ произвольным образом q форм с индексами $s_1, s_2, \ldots, s_q$ и рассматривая детерминанты таких систем $\Delta(z, s_1, s_2, \ldots, s_q)$, мы можем утверждать, что хотя бы один из этих детерминантов не будет нулем при $z=1$. В противном случае $\Delta(z)$ в точке $z=1$ имел бы нуль порядка не ниже $N-q$, что невозможно. Принимая во внимание ранее приведенную оценку коэффициентов форм $L_s(z)$ при $s \leqslant N$, оценку (24) и меняя нумерацию наших форм, мы можем теперь утверждать существование системы q линейных форм от q величин e^{λ_k}, $k=1, 2, \ldots, q$, детерминант которых не равен нулю и таких, что

$$L_i = \sum_{s=1}^{q}{}' \left(\sum_{k=1}^{v}{}' C_{i,k,s}\ \omega_k \right) e^{\lambda_s},\ |C_{i,k,s}| < N^{4N},\ |L_i| < e^{-\gamma_2 N (q-3) \ln N},$$

где все $C_{i,k,s}$ — целые рациональные и γ_2 не зависит от q и N. Вспоминая, что мы располагаем $r=(p+1-\sigma)^v$ линейно независимыми формами $T_1, \ldots, T_r$ от тех же величин e^{λ_k}, мы можем выбрать, очевидно, из q форм L $q-r$ форм, образующих вместе с r формами T систему линейно независимых форм. Ввиду возможности изменения нумерации форм L мы можем считать, что формы $L_1, L_2, \ldots, L_{q-r}, T_1, \ldots, T_r$ линейно независимы. Детерминант этой системы форм $D \neq 0$ будет иметь вид

$$D = \begin{vmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \cdots B_{1,q} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_{q-r,1} \cdots\cdots B_{q-r,q} \\ A_{1,1} & A_{2,1} \cdots A_{q,1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{1,r} & A_{2,r} \cdots A_{q,r} \end{vmatrix}, \quad B_{i,s} = \sum_{k=1}^{v}{}' C_{i,k,s}\, \omega_k.$$

Этап пятый. — Этот отличный от нуля детерминант D может быть оценен по модулю снизу благодаря лемме II и оценкам величин A и C и сверху, так как нам известны оценки модулей величин форм L. Эти оценки нам дают неравенства:

$$e^{-\Theta_0 - 4v(q-r) N \ln N} A^{-vr} < |D| < [e^{-\gamma_0 (q-3) N \ln N} + |T_1|]\, e^{\Theta_1 + 4(q-r) N \ln N} A^r, \quad (C)$$

где Θ_0 и Θ_1 зависят только от q, а γ_0 не зависит ни от q, ни от N. Так как $q-r=(p+1)^v-(p+1-\sigma)^v < \dfrac{\sigma v}{p+1} q$, то можно выбрать p столь большим, чтобы было верно неравенство $8v(q-r) < \gamma_0 (q-3)$. Выбрав, таким образом, p и полагая $T_1 = 0$ (наше основное предположение), мы при достаточно большом N, которое можно неограниченно увеличивать, придем к противоречию, так как правая часть неравенства (C) станет меньше левой. Этим теорема ЛИНДЕМАНА доказана. Неравенство (C) позволяет не только

доказать эту, последнюю, теорему, но и установить нижнюю границу формы (22) в зависимости от ее высоты A и степени σ. К вопросу о таких нижних границах мы вернемся позже.

Рассматривая этапы, на которые разбито доказательство теоремы ЛИНДЕМАНА, можно сказать следующее. Первый этап заключается в том, что из одного алгебраического соотношения с целыми коэффициентами для степеней $e^{\omega_1}, e^{\omega_2}, \ldots, e^{\omega_\nu}$ получается много соотношений, тоже с целыми коэффициентами. Мы получаем здесь, таким образом, не менее, чем $q - \sigma\nu q^{1-\frac{1}{\nu}}$ линейно независимых форм от q чисел e^{λ_k}, высота которых фиксирована. Этап второй заключается в построении функции, сконструированной из функций, порождающих при $z = 1$ наши числа e^{λ_k}, которая, имея относительно малые целые коэффициенты из поля K, мала как алгебраически, так как ее тейлорово разложение начинается с высокой степени z, так и по модулю на конечном расстоянии от начала. Эта функция служит основой для построения системы линейно независимых функциональных форм. Этап третий состоит в построении системы функциональных линейных форм, причем то обстоятельство, что построенная нами функция мала алгебраически, служит основанием для присутствия в этих формах всех степеней $e^{\lambda_k z}$ и тем самым для линейной независимости q, подряд идущих. Детерминант этой системы не может делиться на $z - 1$ в степени $N - q$ по той же причине. Самым существенным обстоятельством при этом является то, что при дифференцировании этих форм мы получаем снова формы от тех же функций попрежнему с алгебраическими коэффициентами. Это является следствием того, что основные наши функции удовлетворяют системе алгебраических уравнений с полиномиальными коэффициентами, коэффициенты которых в свою очередь — алгебраические числа. Когда мы имеем дело с функциями, этим последним свойством не обладающими, то изложенный метод по существу неприменим, и задача исследования арифметической природы их значений становится неизмеримо более трудной. Этап четвертый состоит в выборе из полученных N функциональных форм, q числовых линейно независимых форм, получающихся из функциональных при $z = 1$. Комбинируя эти формы с ранее имевшимися, мы получаем опять q числовых линейно независимых форм, из которых не менее $q - \sigma\nu q^{1-\frac{1}{\nu}}$, т. е. основная масса, по модулю равны нулю и имеют фиксированные коэффициенты. Пятый, и последний, этап заключается в оценке детерминанта этой комбинированной системы форм как сверху, так и снизу, что при достаточно больших значениях параметров q и N приводит к противоречию. Этот метод, границы применимости которого уже достаточно видны, позволил К. Зигелю доказать ряд теорем трансцендентности. Я сформулирую некоторые из них.

Пусть $\xi, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ будут алгебраическими числами, причем пусть ξ не равно нулю, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ будут различны между собой. Пусть также $P_1(x, y), \ldots, P_n(x, y)$ будут полиномы с алгебраическими коэффициентами, в совокупности не равные нулю тождественно. Тогда

$$P_1[I_0(\xi), I_0'(\xi)]\, e^{\alpha_1} + \ldots + P_n[I_0(\xi), I_0'(\xi)]\, e^{\alpha_n} \neq 0,$$

где $I_0(x)$ — хорошо известная функция Бесселя. В случае, когда левая часть

состоит из одного полинома $P(x, y)$, ξ есть алгебраическое число степени m, а высота и степень полинома $P(x, y)$ суть H и p, то имеет место неравенство

$$|P[I_0(\xi), I_0'(\xi)]| > C H^{-123 p^2 m^3}. \tag{27}$$

Основной класс функций, к которым применим его метод, может быть описан следующим образом: функция $Y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} \frac{z^n}{n!}$ принадлежит к этому классу, если: 1. все числа a_n суть целые числа одного и того же поля K, причем модули как самих чисел a_n, так и всех их сопряженных растут медленнее любой сколь угодно малой степени $n!$, 2. все знаменатели b_n суть целые рациональные, причем общее наименьшее кратное первых n знаменателей растет медленнее любой сколь угодно малой степени $n!$, 3. функция $Y = Y(z)$ должна удовлетворять линейному дифференциальному уравнению с полиномиальными коэффициентами, имеющими в свою очередь алгебраические числовые коэффициенты. Такие функции называются E-функциями. Если E-функция удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению степени s, то весь ход рассуждений в доказательстве теоремы Линдемана к ней применим, вообще говоря, причем роль функций $e^{\lambda_k z}$ будут играть функции $y^{k_1}, (y')^{k_2}, \ldots, (y^{(s-1)})^{k_s}$.

Чисто качественные факты трансцендентности числа α или алгебраической независимости в поле рациональных чисел системы чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, получают количественную характеристику, если мы введем в рассмотрение так называемую меру трансцендентности числа α или, более обще, меру взаимной трансцендентности системы чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$. Мерой взаимной трансцендентности системы чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ мы будем называть функцию

$$\Phi(H, n_1, n_2, \ldots, n_s;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) = \min |P(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)|, \tag{28}$$

где $P(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ есть полином с целыми рациональными коэффициентами; высота его не превышает H, степени его по $x_1, x_2, \ldots, x_s$ не превышают $n_1, n_2, \ldots, n_s$, а минимум в правой части взят по всем полиномам, удовлетворяющим этим условиям. Иногда удобно рассматривать степень полинома $P(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ по совокупности переменных $x_1, x_2, \ldots, x_s$. Обозначая эту степень через n, мы будем записывать тогда нашу меру трансцендентности в виде $\Phi(H, n, \alpha_1, \ldots, \alpha_s)$. Основные неравенства, которым всегда удовлетворяет мера трансцендентности, будут следующие:

$$\Phi(H, n_1, \ldots, n_s; \alpha_1 \alpha_2, \ldots, \alpha_s) < \exp\left(\lambda \sum_1^s n_i\right) \cdot H^{-\varepsilon (n_1 + 1) \cdots (n_s + 1) + 1} \tag{29}$$

и, аналогично,

$$\Phi(H, n;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_s) < e^{\lambda m} H^{-\frac{\tau (n+s)!}{n!\, s!} + 1}, \tag{30}$$

где $\lambda > 0$ не зависит от высоты H и степеней $n_1, \ldots, n_s$ или n, а τ равно 1, если все числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ действительны, и $\frac{1}{2}$, если хотя бы одно из них

комплексное число. Доказываются эти неравенства непосредственно с помощью леммы 1 (принцип ДИРИХЛЕ).

На поведении меры трансцендентности основаны различные классификации трансцендентных чисел, как например, классификация Д. Д. МОРДУХАЯ—БОЛТОВСКОГО или К. МАЛЕРА. Я не буду останавливаться на этих классификациях ввиду их недостаточной эффективности или отсутствия реальных критериев принадлежности чисел к тому или иному классу. Я приведу здесь только определение числа Лиувилля. Число α называется числом Лиувилля, если оно неалгебраическое и

$$\lim_{H\to\infty} \frac{\ln \Phi(H, 1; \alpha)}{\ln H} = -\infty. \tag{31}$$

Исследованием поведения меры трансцендентности занимались весьма многие математики, в частности, Д. Д. МОРДУХАЙ—БОЛТОВСКОЙ [12, а), б)], который впервые дал оценку меры трансцендентности $\Phi(H, n; \ln \alpha)$ и $\Phi(H, n; e^{\omega_1}, \ldots, e^{\omega_\nu})$, К. ЗИГЕЛЬ, К. МАЛЕР, А. О. ГЕЛЬФОНД, Н. И. ФЕЛЬДМАН и многие другие. Я приведу здесь только некоторые наиболее точные существующие результаты относительно нижней границы меры трансцендентности. К. МАЛЕР [10, б)] доказал, что если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ — алгебраические числа и линейно независимы в поле рациональных чисел, то имеет место неравенство

$$\Phi(H, n_1, \cdots, n_s; e^{\alpha_1}, \cdots, e^{\alpha_s}) > H^{-\lambda n_1 \cdots n_s}, \tag{32}$$

где λ не зависит от $H, n_1, \cdots, n_s$. Им же были даны более точные неравенства

$$\Phi(H, n; e) > H^{-n^{\frac{c_0 n^2 \ln (n+1)}{\ln \ln H}}}; \quad \Phi(H, n; \ln \alpha) > H^{-e^n}, H > H(c), \tag{33}$$

где c_0 — абсолютная постоянная, α — число алгебраическое, а $c > 1$. Эти последние неравенства по существу получены для n фиксированного и растущего H. Метод получения этих всех неравенств для меры является количественным оформлением идей ЭРМИТА—ЗИГЕЛЯ. Соответствующая оценка меры для значений функций Бесселя в алгебраических точках была приведена ранее (неравенство (27)). Неравенства для меры трансцендентности числа π, значительно более точное, когда n растет вместе с H, чем неравенство (33), было получено сравнительно недавно моим учеником Н. И. ФЕЛЬДМАНОМ. Метод его получения существенно отличен от методов, изложенных в настоящем параграфе, и о нем будет идти речь в § 5. Н. И. ФЕЛЬДМАН [16, а)] установил неравенства

$$\Phi(H, n; \pi) > e^{-\gamma_0 n N}; \; N = \max [\ln H \cdot \ln \ln H, n \ln^2 n] \tag{34}$$

и при α алгебраическом $\alpha \neq 0, 1$,

$$\Phi(H, n; \ln \alpha) > e^{-\gamma n^2 (1+\ln n) N}, \; N = \max [\ln H \cdot \ln \ln H, n \ln^2 n], \tag{35}$$

где $\gamma_0 > 0$ — абсолютная постоянная, а γ зависит только от α и $\ln \alpha$. При $n \gg \ln \ln H$ неравенства (34) и (35) существенно точнее всех ранее существо-

вавших и значительно ближе подходят к естественной границе сверху для меры трансцендентности, даваемой неравенствами (29) и (30). Существенным преимуществом неравенств (34) и (35) перед ранее имевшимися является то, что они верны при любых n и H.

§ 5. Арифметические свойства множества значений аналитической функции при аргументе, пробегающем точки алгебраического поля, и проблемы трансцендентности

Между ростом целой аналитической функции и арифметической природой ее значений при аргументе, принимающем значения из данного алгебраического поля, существует весьма существенная связь. Если мы предположим, что значения функции также принадлежат при этом к какому-нибудь определенному алгебраическому полю, причем все сопряженные каждого значения в етом поле не будут слишком быстро расти, то это сразу накладывает ограничение на рост функции снизу; другими словами, он не может быть слишком мал. Это обстоятельство и его аналоги для мероморфных функций могут быть с успехом использованы для решения проблем трансцендентности. Первой теоремой, относящейся к связи, между ростом и арифметикой значений функции, была теорема Г. ПОЯ [13]. Он доказал, что если целая аналитическая функция принимает целые значения при целых рациональных и положительных значениях аргумента, а рост ее ограничен неравенством $|f(z)| < c\,2^{\alpha|z|}$, $\alpha < 1$, то она должна быть полиномом.

На дальнейших работах в этом панравлении, ряд из которых принадлежит и автору этой статьи, я не буду останавливаться, так как эти вопросы непосредственно не входят в тему статьи. Впервые связь между ростом и арифметическими свойствами аналитических функций была использована для решения проблем трансцендентности автором этой статьи [3, м)].

Проблема трансцендентности или рациональности значений логарифмов рациональных чисел при рациональном же основании, высказанная Л. ЭЙЛЕРОМ в 1748 г. была сформулирована Д. ГИЛЬБЕРТОМ в значительно более общей форме и введена им в число 23 проблем, под номером семь, к которым не видно было подхода в самом конце девятнадцатого века. Д. ГИЛЬБЕРТ высказал предположение с трансцендентности или рациональности логарифмов алгебраических чисел при алгебраическом основании, что эквивалентно предположению трансцендентности чисел вида α^β, $\alpha \neq 0,1$ при алгебраическом α и алгебраическом и иррациональном β.

В 1929 г. [3, а), б)] мною было дано частичное решение проблемы Эйлера-Гильберта. Я доказал при a алгебраическом, что число, $\alpha^{i\sqrt{p}}$, $\alpha \neq 0,1$, $p > 0$, где p—целое рациональное, будет всегда числом трансцендентным. Для выяснения метода доказательства я вкратце проведу доказательство трансцендентности $(-1)^{-i} = e^{\pi}$. Перенумеруем все точки кольца целых чисел гауссова поля, другими словами, числа $n + mi$, при n и m целых рациональных. Нумерацию будем производить в порядке роста модулей целых комплексных чисел, а в случае одинаковых модулей в порядке роста аргументов их. Тогда мы можем записать множество целых комплексных чисел в виде последовательности $z_0 = 0, z_1, z_2, \ldots$ Разложим целую аналитическую

функцию $e^{\pi z}$ в интерполяционный ряд Ньютона с узлами интерполяции $z_0, z_1, \ldots z_n, \ldots$ Тогда мы будем иметь, как хорошо известно, разложение

$$e^{\pi z} = \sum_0^\infty A_n (z - z_0) \cdots (z - z_{n-1}),$$

(36)

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{e^{\pi\zeta}\, d\zeta}{(\zeta - z_0) \cdots (\zeta - z_n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{\pi z_k}}{(z_k - z_0) \cdots (z_k - z_n)}.$$

Чрезвычайно легко доказывается, что ввиду малого, сравнительно, роста нашей функции и относительно большой плотности узлов интерполяции ряд Ньютона при любом z сходится к этой функции. Рассмотрим теперь общее наименьшее кратное целых комплексных чисел $t_{n,k} = (z_k - z_0) \ldots$ $\ldots (z_k - z_n)$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Воспользовавшись весьма простыми соображениями из теории распределения простых чисел вида $4n + 1$ и $4n + 3$, мы легко можем установить, что это общее наименьшее кратное Ω_n удовлетворяет условия

$$|\Omega_n| = e^{\frac{1}{2} n \ln n + O(n)}, \quad |C_{n,k}| = \left|\frac{\Omega_n}{t_{n,k}}\right| = e^{O(n)}. \tag{37}$$

В силу того, что Ω_n есть общее наименьшее кратное чисел $t_{n,k}$, мы можем утверждать, что все числа $C_{n,k}$ будут целыми комплексными числами. Далее, так как $e^{\pi z_k} = e^{\pi (m_1 + m_2 i)} = e^{\pi m_1}$, $m_1 < 2\sqrt{k}$, мы видим, что $\Omega_n A_n$ будет многочленом с целыми комплексными коэффициентами относительно e^{π} степени не выше $2\sqrt{k}$. Предположив алгебраичность e^{π} и воспользовавшись оценкой (37) и леммой II § 4, мы непосредственно получаем, что или $A_n = 0$, или

$$|\Omega_n A_n| > e^{-O(n)}. \tag{38}$$

С другой стороны, рассматривая интегральное представление A_n (36) и беря в качестве контура с окружность $|\zeta| = n$, мы непосредственно получаем оценку

$$|\Omega_n A_n| < e^{-\frac{1}{2} n \ln n + O(n)}. \tag{39}$$

При достаточно большом n оценки (38) и (39) становятся противоречивы, откуда следует, что $A_n = 0$ при $n > n_0$. Но в правой части разложения (36) будет тогда стоять многочлен, а в левой — целая трансцендентная функция $e^{\pi z}$. Итак, из предположения алгебраичности e^{π} следует, что $e^{\pi z}$ должна быть многочленом. Отсюда и следует трансцендентность e^{π}.

Р. О. КУЗЬМИН [5, а)] перенес этот метод доказательства трансцендентности чисел с небольшими изменениями на случай действительных показателей и доказал, что при алгебраическом не равном единице или нулю α число $\alpha^{\sqrt{p}}$, где $p > 0$ целое рациональное и не равно квадрату целого числа, будет числом трансцендентным. В частности, это относится к числу $2^{\sqrt{2}}$.

К. ЗИГЕЛЬ [4, г)] использовал этот метод для доказательства трансцендентности хотя бы одного периода эллинтической функции $\wp(z)$,

$$[\wp'(z)]^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 \tag{40}$$

если ее инварианты g_2 и g_3 — алгебраические числа. Для показателей β алгебраических, но степени выше второй, К. БОЛЕ [1] установил, что по крайней мере одно из чисел α^β, α^{β^2}, $\cdots$, $\alpha^{\beta^{\nu-1}}$, где $\alpha \neq 0,1$ алгебраическое, а β — корень неприводимого уравнения с целыми коэффициентами степени ν, будет числом трансцендентным. Доказательство этого предложения было проведено тем же методом, что и в случае квадратичной иррациональности. Как видно из этой последней работы, мой метод 1929 г. был недостаточен для полного решения проблемы ЭЙЛЕРА—ГИЛЬБЕРТА. Полное решение этой поблемы было мною дано другим методом в 1934 г. [3, д)]. В этом новом методе прежняя интерполяционная идея была дополнена идеей аналитико-арифметического продолжения. Для выяснения основных элементов этого метода я приведу схему доказательства трансцендентности отношения логарифмов двух алгебраических чисел, когда это отношение иррационально. Я разобью это доказательство на ряд этапов. Пусть α и β будут алгебраическими числами $a = \ln\alpha$, $b = \ln\beta$, $\eta = \dfrac{b}{a}$ и логарифмы пусть будут произвольными, но определенными логарифмами чисел α и β. Пусть также целое число $N > 0$ будет неограниченно велико. Предположим также, что η-алгебраическое иррациональное число.

Этап первый. — Положим $r_1 = \left[\dfrac{N^2}{\ln N \ln\ln N}\right]$, $r_2 = [\ln^2 \ln N]$. Тогда будут существовать также целые рациональные, в совокупности отличные от нуля числа $C_{k,l}$, $|C_{k,l}| < e^{2N^2}$, что фуикция $f(z)$, $f(z) \not\equiv 0$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} C_{k,l}\,\alpha^{kz}\,\beta^{lz} = \sum_{0}^{N}\sum_{0}^{N} C_{k,l}\,e^{(ak+bl)z} \tag{41}$$

будет иметь в точках $0, 1, 2, \ldots, r_2$ нули кратности r_1; другими словами, что

$$f^{(s)}(t) = a^s \sum_{0}^{N}\sum_{0}^{N} C_{k,l}\,(k+\eta l)^s\,\alpha^{kt}\,\beta^{lt} = 0 \qquad (0 \leqq t \leqq r_2,\ 0 \leqq s \leqq r_1). \tag{42}$$

Так как α, β и η — алгебраические числа, то это утверждение может быть легко доказано с помощью лемм I и II § 4.

Этап второй. — Благодаря большому количеству нулей у $f(z)$ и интегральному представлению

$$f^{(s)}(t) = \frac{s!}{(2\pi i)^2}\int_{C_1}\frac{d\zeta}{(\zeta - t)^{s+1}}\int_{C_2}\left[\frac{\zeta(\zeta-1)\ldots(\zeta-r_2)}{z(z-1)\ldots(z-r_2)}\right]^{r_1+1}\frac{f(z)\,dz}{z-\zeta}, \tag{43}$$

где C_1 — окружность $|\zeta| = N^{3/4}$, а C_2 — окружность $|z| = n$, мы легко получаем оценку

$$|f^{(s)}(t)| < e^{-\frac{1}{s}N^2 \ln\ln N}, \quad |t| \leq [\sqrt{N}] = r_4, \; s \leq \left[\frac{N^2}{\ln N}\right] = r_3. \tag{44}$$

Из этих оценок, опять с помощью леммы II, следует, так как α, β и η алгебраические, что

$$f^{(s)}(t) = 0; \qquad t = 0, 1, \ldots, r_4; \; s = 0, 1, \ldots, r_3. \tag{45}$$

Этап третий. — Воспользуемся снова интегральным представлением (43), в котором мы можем заменить r_2 на r_4 и r_1 на r_3, так как функция наша имеет теперь больше нулей и выполняются условия (45). Оценивая с помощью этого нового интегрального представления $f^{(s)}(t)$, мы получаем, что верны неравенства

$$|f^{(s)}(0)| < e^{-\frac{1}{3}N^{\frac{5}{2}}} \qquad (0 \leq s \leq 5N^2). \tag{46}$$

Из этих последних неравенств, опять с помощью леммы П, следует, что

$$a^{-s} f^{(s)}(0) = \sum_0^N \sum_0^N C_{k,l}(k + \eta l)^s = 0 \qquad (0 \leq s \leq 5N^2). \tag{47}$$

Этап четвертый. Так как чисел $C_{k,l}$ всего $(N+1)^2$, то, рассматривая первые $(N+1)^2$ равенств (47), мы получаем систему $(N+1)^2$ однородных уравнений с $(N+1)^2$ неизвестными $C_{k,l}$. Детерминант этой системы есть детерминант ВАНДЕРМОНДА. Он может быть равен нулю тогда и только тогда, когда будет иметь место равенство $\eta l_1 + k_1 = \eta l_2 + k_3$ хотя бы один раз. Но такое равенство вообще невозможно, так как η иррационально. Значит, детерминант системы отличен от нуля и все $C_{k,l}$ равны нулю. Мы приходим к противоречию с условием выбора $C_{k,l}$ и тем самым трансцендентность числа η доказана.

Этап первый состоит в построении функции, являющейся линейной комбинацией степеней α^z и β^z, которая при не слишком больших целых коэффициентах имеет очень много нулей. Это построение возможно только благодаря алгебраичности α, β, и, по предположению, η. Эта функция не может быть тождественным нулем, так как η иррационально. Этап второй состоит в доказательстве существования еще большего количества нулей у нашей функции, расположенных в большем, чем раньше, круге. Это возможно благодаря тому, что функция не слишком большая по модулю в некотором круге и имеющая там достаточно много нулей, должна быть мала в большем, по радиусу, круге. На этом этапе еще нельзя обеспечить достаточную малость $(N+1)^2$ производных в начале, из которой следовали бы условия (47).

Этап третий состоит в новом накоплении нулей нашей функции, число которых становится достаточным для выполнения условий (47). Этап четвертый состоит в использовании большого числа нулей у нашей функции в начале для доказательства, что она тождественно равна нулю. Это же невозможно в силу выбора ее коэффициентов и иррациональности отношения

логарифмов. Этот процесс накопления нулей функции состоит из трех этапов. При получении возможно более точных результатов относительно нижних границ меры трансцендентности число этапов накопления может неограниченно расти.

Т. ШНЕЙДЕР [17, б)], давший вариант доказательства той же теоремы уже после опубликования моей работы, применил этот метод для доказательства трансцендентности некоторых чисел, связанных с эллиптическими функциями. Он доказал, что числа α и $\wp(\alpha)$, где $\wp(z)$ — эллиптическая функция с алгебраическими инвариантами, одновременно не могут быть алгебраическими; откуда следует, в частности, трансцендентность каждого из периодов эллиптической функции при алгебраических инвариантах. Он доказал также, что если β алгебраическое, но не мнимое квадратическое число, то значение модулярной функции $I(\beta)$ будет трансцендентным числом и установил ряд подобных фактов. Позже тем же Т. ШНЕЙДЕРОМ [17, в)] была доказана трансцендентность значений эйлеровых функций $B(p,q)$ при рациональных p и q. Вышеприведенный метод был также использован Д. РИЧЧИ [14] для доказательства трансцендентности чисел вида α^β при α и β, принадлежащих к различным классам чисел типа лиувиллевских, другими словами, чисел допускающих очень хорошие приближения алгебраическими, и К. МАЛЕРОМ [10, в)] — для доказательства p-адического аналога теоремы о трансцендентности чисел вида α^β.

Перейдем теперь к вопросу о мере трансцендентности. Этим вопросом занимался ряд авторов, но я ограничусь здесь изложением наиболее точных полученных результатов. С помощью усложненного метода, состоящего из неограниченного числа переходов для накопления нулей, мною [3, ж), з)] было доказано, что при фиксированном n,

$$(48)\qquad \Phi(H, n; \alpha^\beta) > H^{-\ln\ln^{5+\varepsilon} H},\ \Phi\left(H, n; \frac{\ln\alpha}{\ln\beta}\right) > e^{-\ln^{3+\varepsilon} H},$$

где $\varepsilon > 0$ и сколь угодно мало. Далее мною же был доказан [3, и] p-адический аналог неравенства для меры трансцендентности отношения логарифмов двух алгебраических чисел. Второе из неравенства (48) и его p-адический аналог могут быть записаны в другой форме, именно

$$(49)\qquad \left|\frac{\ln\alpha}{\ln\beta} - \Theta\right| > e^{-\ln^{3+\varepsilon} H},\ \alpha^x \pm \beta^y \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}^{[\ln^{3+\varepsilon} q]},$$

где Θ — алгебраическое число степени n и высоты H, n фиксировано, $H > H_0(\alpha, \beta, \varepsilon, n)$, $\varepsilon > 0$, $\mathfrak{p}$ — простой идеал поля, к которому принадлежат числа α и β, а $q = \max[|x|, |y|]$. Из первого неравенства (49) следует, в частном случае, что неравенство

$$(50)\qquad |x_1 \ln\alpha + x_2 \ln\beta| < e^{-\ln^{3+\varepsilon} x},\ x = |x_1| + |x_2|$$

невозможно при $x > x_0(\ln\alpha, \ln\beta, \varepsilon)$, причем x может быть вполне эффективно вычислено. Это неравенство является частным случаем неравенства (18) § 3,

чрезвычайно существенная роль которого в теории диофантовых уравнений и алгебраических полей была там же установлена. В нашем частном случае при бинарной форме граница величины возможных решений неравенства (50), как уже было сказано, может быть найдена вполне эффективно благодаря применению вполне эффективных аналитических методов. Поетому я считаю основной задачей аналитической теории трансцендентных чисел задачу такого усиления аналитических методов в теории трансцендентных чисел, при котором станет возможным применение их к исследованию поведения линейных форм от n логарифмов алгебраических чисел. Неравенство же (50) позволяет подойти к вопросу о границах решений некоторых классов кубических уравнений, поля которых имеют одну единицу. Из неравенства (49) следует также, что уравнение

$$\alpha^x + \beta^y = \gamma^z \tag{51}$$

при алгебраических α, β и γ и условии, что хотя бы одно из них не есть алгебраическая единица и γ не есть степень двойки, имеет только конечное число решений в целых рациональных числах x, y, z. Граница величины возможных решений здесь может быть эффективно вычислена. Из тех же неравенств (49) следует конечность числа решений довольно широкого класса трансцендентных уравнений с двумя переменными. Возвращаясь опять к вопросу о мере трансцендентности, я приведу еще некоторые результаты относительно меры трансцендентности некоторых классов чисел, связанных с эллиптическими функциями. Впервые результаты в этом направлении были относительно меры трансцендентности некоторых классов чисел, связанных с эллиптическими функциями. Впервые результаты в этом направлении были получены моим учеником Н. И. ФЕЛЬДМАНОМ [16, a)], который пользовался в основном моим методом, изложенным выше, добавляя к нему некоторые соображения, относящиеся к методу, о котором я буду говорить в дальнейшем.

Пусть инварианты g_2 и g_3 эллиптической функции $\mathfrak{p}(z)$ будут алгебраическими числами, ω — ее период, а $\varepsilon > 0$ произвольно мало и действительно. Тогда мы будем иметь неравенство

$$\Phi(H, n; \omega) > \exp\left\{ -n^{4+\varepsilon} \max\left[\ln H (\ln\ln H)^{4+\varepsilon}, n \ln^{5+\varepsilon} n\right]\right\},$$

$$\max[H, n^n] \leqq C(\varepsilon, g_2, g_3).$$

Пусть инварианты $\mathfrak{p}(z)$ — попрежнему алгебраические числа, а α — корень уравнения $\mathfrak{p}(\alpha) = a$, где a — алгебраическое число. Пусть также $0 < \delta \leq 1$ и $\varepsilon > 0$. Тогда мы будем иметь неравенство

$$\Phi(H, n; \alpha) > \exp\left\{ -\max\left[\ln H\, e^{n\,(\ln\ln H)^{\frac{1}{9}+\delta}},\ e^{n^{2+\delta}+n^{2+\frac{\delta}{2}+3\varepsilon}}\right]\right\},$$

$$\max\left[H, e^{e^{n^{2+\delta}}}\right] > C(g_2, g_3, \alpha, \delta, \varepsilon).$$

Проблема алгебраической независимости в рациональном поле чисел вида α^β и тем более логарифмов алгебраических чисел неизмеримо труднее проб-

лемы аглебраической независимости значений E-функций, о которой шла речь в § 4.

Трудность этих проблем связана, повидимому, со следующими обстоятельствами. Прежде всего видно, что при дифференцировании функций типа α^z при α алгебраическом быстро растут степени трансцендентного числа $\ln \alpha$, что препятствует построению линейных форм от произведения степеней этих логарифмов, имеющих не слишком большую степень. Далее, сразу видно, что получающиеся при дифференцировании формы не имеют стандартно и достаточно просто связанных с определенными функциями коэффикиентов. Наконец, можно заметить, что замена действия взятия производной при образовании нужных линейных форм действием прибавления к z единицы или каких-либо алгебраических чисел вызывает слишком большой рост коэффициентов этих форм, что также препятствует получению нужного результата. Благодаря всем этим обстоятельствам долгое время не удавалось добиться движения вперед в решении вопросов взаимной трансцендентности, о которых идет речь. В настоящий момент я могу указать один новый метод [3, м)], который позволяет решать некоторые из этих вопросов, пока еще частного характера, хотя можно надеяться, что этот метод может быть значительно усилен. Я не хочу говорить в данный момент о возможных усилениях этого метода ввиду его новизны и покажу его основные черты на примере доказательства одной достаточно общей теоремы о взаимной трансцендентности или, что то же самое, алгебраической независимости в рациональном поле одного класса чисел. Я, естественно, ограничусь здесь только изложением хода доказательства, разбив его на отдельные этапы. Я докажу теорему, что если a—число алгебраическое, $a \neq 0, 1$, а α—кубическая иррациональность, которую можно без нарушения общности считать целым числом, то между числами a^α и a^{α^2} нет алгебраических соотношений в рациональном поле. Допустим, что такое соотношение существует, другими словами, что имеет место уравнение $P(\omega, \omega_1) = 0$, где $\omega = a^\alpha = e^{\alpha \ln a}$, $\omega_1 = a^{\alpha^2} = e^{\alpha^2 \ln a}$, и полином $P(x, y)$ неприводим в рациональном поле и имеет целые рациональные коэффициенты. Трансцендентность числа ω будем считать уже доказанной. В дальнейшем целое число q будет неограниченно велико, а константы λ с любыми индексами не будут зависеть от q.

Этап первый. — Можно найти такие целые рациональные, в совокупности отличные от нуля числа C_{k_0, k_1, k_2, k_3} и $\lambda_0 > 0$ что для функции $f(z)$

$$f(z) = \sum_{k_1=0}^{q} \sum_{k_2=0}^{q} \sum_{k_3=0}^{q} A_{k_1, k_2, k_3}\, e^{(k_1 + k_2\alpha + k_3\alpha^2)\eta z}$$

(52)

$$\eta = \ln a,\ A_{k_1, k_2, k_3} = \sum_{k_0=0}^{q'} C_{k_0, k_1, k_2, k_3}\, \omega^{k_0},\ q' = [q^{3/2} \ln^{1/4} q]$$

будут выполнены условия

(53) $$|C_{k_0, k_1, k_2, k_3}| < \exp\,[2\, q^{3/2} \ln^{1/4} q]$$

и

(54) $$f^{(s)}(t) = 0;\ t = l_1 + l_2\alpha + l_3\alpha^2,\ 0 \leqq l_i \leqq q_1 = [q^{1/2} \ln^{1/4} q]\ \ i = 1, 2, 3,$$

$$0 \leqq s \leqq s_0 = [\lambda_0\, q^{3/2} \ln^{-3/4} q],\ \lambda_0 > 0.$$

Эта функция легко может быть построена с помощью леммы 1 § 4.

Этап второй. — Можно доказать, что наша функция $f(z)$ обладает тем свойством, что среди чисел $f^{(s)}(t)$,

$$(55)\qquad 0 \leqq s \leqq [4q^{3/2}\ln^{-3/4} q] = s_1;\ t = \sum_0^2 l_k \alpha^k,\ 0 \leqq l_i \leqq q,\ i = 1,\ 2,\ 3$$

найдется хотя бы одно число, отличное от нуля.

Для доказательства этого предложения запишем нашу функцию в форме

$$(56)\qquad f(z) = \sum_0^{N-1} B_k\ e^{\tau_k z},\ \tau_k = k_1 + k_2\alpha + k_3\alpha^2,\ N = (q+1)^3,$$

$$B_k = A_{k_1, k_2, k_3}, \qquad \max_{0 \leqq k \leqq N-1} |B_k| = |B_\nu| \neq 0$$

и положим

$$Q(x) = \prod_0^{N-1} (x - \tau_i), \qquad \sum_0^{N-1} C_{k,s}\ x^s = Q(x)(x - \tau_k)^{-1}.$$

Предположим, что все числа $f^{(s)}(t)$ в границах, указываемых неравенствами (55), равны нулю. Тогда мы будем иметь интегральное представление

(57)

$$-B_\nu = \frac{1}{4\pi^2 Q'(\tau_\nu)} \sum_{s=1}^{N-1} s!\, C_{\nu,s} \int_{\Gamma_0}\int_{\Gamma_1} \prod_0^{q_1}\prod_0^{q_1}\prod_0^{q_1} \left[\frac{x - k_1 - k_2\alpha - k_3\alpha^2}{z - k_1 - k_2\alpha - k_3\alpha^2}\right]^{s_1} \frac{f(z)\,dz\,dx}{x^{s_1+1}(z-x)},$$

где Γ_0 есть окружность $|x| = 1$, а Γ_1 — окружность $|z| = \dfrac{N}{q}$. Оценивая правую часть по модулю и принимая во внимание что $|k_1 + k_2\alpha + k_3\alpha^2| > \lambda_1 k^{-2}$, $k \geqq |k_i|$ в силу того, что α — кубическая иррациональность, мы получим неравенство

$$(58)\qquad 1 < \exp[-q^3(\ln q - \lambda_2 \ln\ln q)],$$

откуда и следует верность нашего утверждения.

Этап третий. — Воспользовавшись представлением чисел

$$(59)\quad f^{(s)}(t) = \frac{-s!}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma}\int_{\Gamma_1} \prod^{q_1}\prod^{q_1}\prod^{q_1} \left[\frac{x - k_1 - k_2\alpha - k_3\alpha^2}{z - k_1 - k_2\alpha - k_3\alpha^2}\right]^{s_0} \frac{f(z)\,dz\,dx}{(x-t)^{s+1}(z-x)},$$

где Γ есть окружность $|x| = \sqrt{q\ln q}$, а Γ_1 — окружность $|z| = q^2$, имеющим место в силу условий, которым с самого начала, по построению, удовлет-

воряет функция $f(z)$, мы доказываем, что для этой функции выполняются условия

$$(60)\qquad \begin{gathered} |\eta^{-s} f^{(s)}(t)| < e^{-1/2\lambda_6 q^3 \ln q},\ 0 \leqq s \leqq [4q^{3/2}\ln^{-3/4} q], \\ t = k_1 + k_2\alpha + k_3\alpha^2,\ 0 \leqq k_i \leqq q_1,\ i = 1, 2, 3. \end{gathered}$$

Это легко может быть получено, если оценить по модулю интеграл в правой части (59).

Этап четвертый. — Комбинирую результат, полученный на втором этапе с неравенством (60) и исключая ω с помощью $P(\omega, \omega_1) = 0$, мы доказываем, что каково бы ни было целое число $q > q_0$, всегда существует полином $P(x)$ с целыми рациональными коэффициентами степени n и высоты H такой, что

$$(61)\qquad 0 < |P(\omega)| < e^{-1/4\lambda_6 q^3 \ln q},\ \max\ [n, \ln H] < \lambda_3 q^{3/2}\ln^{1/4} q,$$

где

$$\lambda_3 > 0 \quad \text{и} \quad \omega = a^\alpha.$$

Этап пятый. — Из факта существования полинома $P(x)$, удовлетворяющего условиям (61) для любого q, мы устанавливаем существование для бесчисленного множества значений q неприводимого, с целыми, без общего делителя, коэффициентами полинома $R(\omega)$, подчиняющегося условиям

$$0 < |R(\omega)| < e^{-\lambda_4 \sigma^2\sqrt{\ln q}},\ \max\ [n_1, \ln H_1] < \sigma < \lambda_5 q^{3/2}\ln^{1/4} q,$$

где $\lambda_4 > 0$, $\lambda_5 > 0$, а n_1 и H_1 — степень и высота полинома $R(x)$. Подбирая полином $P(\omega)$, подходящий по величине, и составляя результант двух полиномов $P(\omega)$ и $R(\omega)$, мы приходим к противоречию ввиду того, что $P(x)$ можно подобрать не делящимся на $R(x)$ и малости $P(\omega)$ и $R(\omega)$.

Этап первый состоит в построении функции $f(z)$, имеющей очень много нулей большой кратности в целых точках вида $k_1 + k_2\alpha + k_3\alpha^2$. Коэффициенты функции выбираются в виду полиномов не слишком большой степени с целыми, в свою очередь не слишком большими коэффициентами. Подобный выбор возможен ввиду того, что при предположении алгебраической зависимости между числами ω и ω_1, число условий, определяющих коэффициенты полиномов от ω, может быть взято значительно меньшим числа этих коэффициентов. Этап второй состоит в том, что доказывается невозможность для функции $f(z)$ иметь слишком много нулей. Это обстоятельство связано с тем, что функция $f(z)$ есть линейная комбинация показательных. Весьма существенным обстоятельством при этом является неравенство $|k_1 + k_2\alpha + k_3\alpha^2| > \lambda k^{-2}$, $k \geqq |k_i|$, $i = 1, 2, 3$, которое в свою очередь имеет место из-за того, что α — кубическая иррациональность.

Этап третий заключается в доказательстве достаточной малости значений функции $f(z)$ и ее производных вплоть до очень большого порядка.

Этап четвертый состоит в доказательстве существования для весьма плотной последовательности целых чисел σ полиномов $P(x)$, высоты и степени которых не превышают величин e^σ и σ, удовлетворяющих неравен-

ствам $-\sigma^2 \sqrt{\ln \sigma} > \ln |P(\omega)|$. Это возможно благодаря тем фактам, которые были установлены на этапах втором и третьем.

Этап пятый заключается в доказательстве того, что не существует никакого трансцендентного числа ω, которое удовлетворяло бы условиям, полученным на предыдущем этапе.

Приведенный ход рассуждения непосредственно, почти без изменений, приводит и к более общему утверждению. Пусть числа α_1, α_2, α_3 будут числами алгебраического поля степени ν, линейно независимыми в рациональном поле, β_1, β_2, β_3 линейно независимы в рациональном поле. Тогда между девятью числами $e^{\alpha_k \beta_i}$, $k = 1, 2, 3$, $i = 1, 2, 3$ не может существовать алгебраических соотношений в рациональном поле, с помощью которых эти числа могут быть выражены алгебраически через одно.

В частности, если α — алгебраическая иррациональность степени не ниже третьей, а $a \neq 0, 1$ алгебраическое, то четыре числа a^{α}, a^{α^2}, a^{α^3}, a^{α^4} не могут одновременно быть выражены алгебраически в рациональном поле через одно из них. Несколько изменив метод, можно, например, доказать, что числа e^{e^k}, $e^{e^{2k}}$, $e^{e^{3k}}$ не могут одновременно быть алгебраически выражены через e и, в частности, хотя бы одно из них должно быть трансцендентным числом при любом целом рациональном $k > 0$. Совершенно так же одно из двух чисел e^{ie^i}, $e^{ie^{2i}}$ должно быть трансцендентным числом.

Этот метод позволяет значительно уточнить нижние границы мер трансцендентности чисел вида α^{β} и $\dfrac{\ln \alpha}{\ln \beta}$.

Пусть $a \neq 0, 1, b, \alpha, \beta$ будут алгебраические числа, а числа b и $\dfrac{\ln \alpha}{\ln \beta}$ иррациональны. Пусть также степень и высота полинома $P(x)$, имеющего целые рациональные коэффициенты, будут s и H. Тогда, какой бы $\varepsilon > 0$ мы ни взяли, при $n + \ln H > c(\varepsilon, \alpha, \beta)$ будут иметь место неравенства:

$$|P(a^b)| > e^{-\frac{s^3}{\ln^3 s}(s + \ln H)[\ln(s + \ln H)]^{2+\varepsilon}}$$

и

$$\left| P\left(\frac{\ln \alpha}{\ln \beta}\right) \right| > e^{-s^2[s + \ln H]^{2+\varepsilon}}.$$

На дальнейших приложениях этого нового метода, как уже говорилось выше, я не буду останавливаться.

§ 6. Вопросы трансцендентности и алгебраической независимости в рациональном поле чисел, заданных бесконечными рядами или являющихся корнями алгебраических или трансцендентных уравнений

Будем говорить, что число η алгебраически не выражается через числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, если между числами $\eta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ нет алгебраических соотношений в рациональном поле. Введя понятие алгебраической невыражаемости, Д. Д. МОРДУХАЙ—БОЛТОВСКОЙ впервые поставил вопрос о признаках, позволяющих судить об алгебраической невыражаемости числа η через числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, по характеру приближения числа η рациональ-

ными дробями или, более общо, алгебраическими числами. Условимся, что (в последующем изложении это относится ко всему параграфу) $P(x, y_1, \ldots, y_n)$ всегда будет полиномом с целыми рациональными коэффициентами, неприводимым в рациональном поле и действительно содержащим x и хотя бы одно y. Д. Д. МОРДУХАЙ—БОЛТОВСКОЙ [12, а) б)] доказал следующие две теоремы об алгебраической невыражаемости.

Если η корень уравнения

$$P(x, e^{\alpha_1 x}, \ldots, e^{\alpha_n x}) = 0, \tag{62}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — алгебраические числа, линейно независимые в рациональном поле, или η — корень уравнения

$$P(x, \ln \alpha) = 0, \tag{63}$$

где $\alpha \neq 0,1$ алгебраическое, то существует целое число $\nu > 0$, такое, что при $q > q_0$ будет выполняться неравенство

$$\left|\eta - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{\nu}!}, \tag{64}$$

где p и q — целые рациональные числа, а ν не зависит от p и q. Обе теоремы обобщаются также на случай приближения числа η алгебраическими числами.

Невыполнение неравенства (64) и является условием невыражаемости числа η через числа $e^{\alpha_1}, e^{\alpha_2}, \ldots, e^{\alpha_n}$, или число $\ln \alpha$. В основе доказательства приведенных теорем лежит тождество Ш. ЭРМИТА и теорема о конечном приращении функции.

Неравенство (64) в этих теоремах может быть значительно улучшено с помощью более поздних оценок меры трансцендентности соответствующих чисел. Из неравенств (32) и (33) § 4 почти непосредственно следует, что неравенство (64) в теоремах Д. Д. МОРДУХАЯ—БОЛТОВСКОГО можно заменить неравенством

$$\left|\eta - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{\nu}} \left(\nu = \nu(\eta)\right). \tag{65}$$

Из этого последнего неравенства следует, что числа ЛИУВИЛЛЯ не выражаются алгебраически через $e^{\alpha_1}, e^{\alpha_2}, \ldots, e^{\alpha_n}$ или $\ln \alpha$. Примером такого числа может служить число $\omega = \sum_{1}^{\infty} 2^{-n!}$. Определение чисел ЛИУВИЛЛЯ было дано в § 4 (определение (31)).

Д. Д. МОРДУХАЙ—БОЛТОВСКОЙ дает и некоторые обобщения вышеприведенных теорем.

Можно дать, пользуясь различными неравенствами для меры трансцендентности различных чисел, и другие признаки алгебраической невыражаемости чисел.

Пусть η будет некоторым действительным числом, p и q, $(q, p) = 1$, — целыми рациональными, а $\varphi(t)$ — монотонно растущей положительной функцией t. Допустим, что для числа η выполняется условие

(66) $$\lim_{H\to\infty}\frac{\ln \Phi(H,1,\eta)}{\varphi(H)}=\lim_{q\to\infty}\frac{\min\limits_{q_0\le q}\ln\left|\eta-\dfrac{p}{q_0}\right|}{\varphi(q)}=-\infty.$$

Если $\varphi(q)=\ln q\ (\ln\ln q)^{\lambda}$, $\lambda>5$, то η алгебраически не выражается через α^{β}, а если $\varphi(q)=(\ln q)^{\lambda}, \lambda>3$, то η не выражается и через $\dfrac{\ln\alpha}{\ln\beta}$ при α и β алгебраических. Это является прямым следствием неравенств (48) § 5. Если $\varphi(q)=\ln q$, другими словами, η будет числом ЛИУВИЛЛЯ, то η не выражается алгебраически через $I_0(\alpha)$, $I_0'(\alpha)$, где $I_0(x)$ — функция Бесселя, а α — алгебраическое число. Это прямое следствие неравенства (27) § 4.

Наконец, если $\lim\dfrac{\ln\varphi(t)}{\ln t}=\infty$, то как доказал Д. Д. МОРДУХАЙ—БОЛТОВСКОЙ [12, е)], число η не может быть корнем уравнения

$$P(x, a_1^x, \ldots, a_n^x)=0,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ будут алгебраическими числами. Он доказал существование такого целого $\nu>0$, что $\left|\eta-\dfrac{p}{q}\right|>\dfrac{1}{q^{\nu}!}$. Это можно получить с помощью леммы II § 4.

В той же работе Д. Д. МОРДУХАЙ—БОЛТОВСКОЙ утверждает, что теорема имеет место и тогда, когда a будет, более общо, корнями уравнения типа (63) при одном и том же $\ln\alpha$. Действительно, подсчет показывает, что из неравенства (35) § 4, верного при любых n и H, следует для η неравенство $\left|\eta-\dfrac{p}{q}\right|>\exp[-q^{3n}\ln^3 q]$, где n — число показательных функций в уравнении (64) и $q>q_0$. Им же [12, а)] была доказана и следующая теорема.

Пусть функция $f(z)$ будет целой, $f(z)=\sum\limits_0^{\infty}a_n z^n$, $a_0\neq 0$, все числа a_n будут рациональными и d_n — такое наименьшее целое число, что все числа $d_n a_k$, $k=0, 1, \ldots n$, будут целыми рациональными. Тогда если $|R_n(x)|<d_n^{-\lambda n}$, $\lim\dfrac{\lambda_n}{n}=\infty$ для всякого x, где $R_n(z)=\sum\limits_n^{\infty}a_k z^k$, то всякий корень уравнения $f(x)=0$ будет числом трансцендентным. Я привожу эту теорему в несколько упрощенной формулировке. Наконец, Д. Д. МОРДУХАЙ—БОЛТОВСКОЙ ввел понятие и доказал существование гипертрансцендентных чисел.

Будем называть просто трансцендентным числом трансцендентное значение, при алгебраическом значении аргумента, всякой функции $F(z)$, которая является решением любого алгебраического дифференциального уравнения с постоянными и целыми коэффициентами и определяется алгебраическими начальными данными. Гиперртансцендентными числами назовем

все остальные комплексные числа. Существование гипертрансцендентных чисел есть следствие счетности множества чисел просто трансцендентных и несчетности множества всех действительных или комплексных чисел.

Отметим здесь, что трансцендентность корней уравнения при алгебраических и линейно независимых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$,

$$P(x, e^{\alpha_1 x}, \ldots, e^{\alpha_n x}) = 0$$

есть следствие общей теоремы ЛИНДЕМАНА.

А. В. ЛОТОЦКИЙ [9], пользуясь моим методом 1929 г., доказал иррациональность бесконечных произведений

$$\prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{\omega}{a^n}\right),$$

где a — целое рациональное, а ω — рациональное комплексное число. Пусть $p(x)$ — целочисленный полином — положителен при $x \geq 1$. Запишем его значения при $x = 1, 2, \ldots$ по системе счисления с основанием q. Напишем q-ичную бесконечную дробь

$$\eta = 0,\ q_1, q_2, \ldots, q_{\nu_1},\ q_{\nu_1+1}, \ldots, q_{\nu_2}, \ldots,$$

где $q_1, q_2, \ldots, q_{\nu_1}$ — знаки q-ичного разложения $p(1)$, $q_{\nu_1+1}, \ldots, q_{\nu_2}$ — знаки q-ичного разложения $p(2)$ и т. д. Тогда число η будет трансцендентным, но не числом ЛИУВИЛЛЯ. В частности, при $p(x) = x$ и $q = 10$ будет трансцендентным число

$$\eta = 0,1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11\,12\ldots$$

Теорема эта была доказана К. МАЛЕРОМ [10, д)] с помощью теоремы о приближении алгебраических иррациональностей рациональными дробями, являющаяся уточнением теоремы Т. ШНЕЙДЕРА в том случае, когда числители и знаменатели приближающих дробей будут специального вида. Из той же теоремы следует трансцендентность чисел

$$\eta = \sum_0^{\infty} \frac{a_k}{a^{\lambda_k}},\ \lambda_{k+1} > (1+\varepsilon)\lambda_k + \ln a_{k+1},\ \varepsilon > 0,$$

где $a > 1$, $a_0, a_1, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ будут целыми рациональными и положительными числами. В частности, это утверждение относится к числу

$$\eta = \sum_0^{\infty} \frac{1}{a^{[2^{\alpha} n]}},\ \alpha > 0.$$

В заключение моей обзорной статьи я хочу указать некоторые проблемы теории трансцендентных чисел, наиболее важные с моей точки зрения. Первоочередной задачей, как я говорил уже ранее, я считаю доказательство взаимной трансцендентности и нахождение нижней грани меры трансцендентности многих логарифмов алгебраических чисел, так как это связано

с возможностью подхода к исследованию поведения решений диофантовых уравнений и эффективного решения некоторых проблем алгебраических полей. Далее следует проблема алгебраической независимости в рациональном поле чисел вида $\ln \alpha$ и α^{β} при a, α и β алгебраических. Наконец, следует отметить, что до настоящего времени не найдено подхода к вопросу об арифметической природе эйлеровой константы c и $\zeta(2n+1)$.

(Поступило 1/IX. 1950 г.)

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] K. Boehle, Über die Transzendenz von Potenzen mit algebraischen Exponenten, *Math. Annalen*, **108** (1933), 56.

[2] H. Hasse, Simultane Approximation algebraischer Zahlen durch algebraische Zahlen, *Monatshefte Math. Phys.*, **48** (1939), 205.

[3] А. О. Гельфонд, а) Sur les propriétés arithmétiques des fonctions entiers, *The Tôhoku Math. Journ.*, **30 (1929)**, 4. б) Sur les nombres transcendants, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 189 (1929), 1224. в) Необходимый и достаточный признак трансцендентности, Учен. Записки МГУ (1929). г) Очерк истории и современного состояния теории трансцендентных чисел, Естеств. и марксизм, 1/5 (1930), 33. д) О седьмой проблеме Гильберта, Дан, 1, (1934); Изв. АН СССР, 7 (1934), 623. е) Трансцендентные числа, Труды Всесоюзного Съезда, 1934. ж) О приближении трансцендентных чисел алгебраическими, ДАН (1935), 177. з) О приближении алгебраическими числами отношения двух алгебраических чисел, Изв. АН СССР, 5—6 (1939), 509. и) Sur la divisibilité de la différence des puissances de deux nombres entiers par une puissance d'un idéal premier, Матем. сб. 7 (1940), 7. к) О совместных приближениях алгебраических чисел рациональными дробями, Изв. АН СССР, 5 (1941), 99. л) Аппроксимация алгебраических иррациональностей и их логарифмов, Вестник МГУ, №9 (1948), 3. м) Об алгебраической независимости алгебраических степеней алгебраических чисел, ДАН, 64, № 3 (1949), 277. н) См. Ю. В. Линник [6]. о) См. Н. И. Фельдман [16,б]. п) Об алгебраической независимости трансцендентных чисел некоторых классов, Успехи матем. наук, т. IV, вып. 5 (1949) (печатается).

[4] C. Siegel, а) Approximation algebraischer Zahlen, *Math. Zeitschr.*, **10** (1921), 173. б) Über Näherungswerte algebraischer Zahlen, *Math. Ann.*, **84** (1921), 80. в) Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen, *Abh. Preuss. Akad. Wiss.*, 1929—30, № 1, 70. г) Über die Perioden elliptischer Funktionen, *Journ. für die reine u. angew. Math.*, **167** (1932), 62.

[5] Р. С. Кузьмин, а) Об одном новом классе трансцендентных чисел, Изв. АН. сер. матем., 3 (1930), 585. б) О диофантовых приближениях к аглебраическим иррациональностям, ДАН (1930), 9. в) О трансцендентных числах Гольдбаха, Труды Ленингр. индустр. ин-та № 5 : 1 (1938), 28.

[6] Ю. В. Линник (совм. с А. О. Гельфондом), О методе Туз и проблеме эффективизации в квадратичных полях, ДАН, **61**, № 5 (1948), 773.

[7] F. Lindemann, а) Sur le rapport de la circonférence au diamètre et sur les logarithmes néperiens des nombres commensurables ou des irrationelles algébriques, *C. R. Acad. Sc., Paris*, **95** (1882), 72. б) Über die Zahl π, *Math. Ann.*, **20** (1882), 213.

[8] J. Liouville, а) Sur l'irrationalité du nombre e, *Journ. de Math. pures et appl.*, 5 (1840,) 192. б) Sur les classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique ni même reductible à des irrationnelles algébriques, *C. R. Acad. Sc., Paris*, 18 (1344). 883, 910; *Journ. de Math. pures et appl.*, **16** (1851), 133.

[9] А. В. Лотоцкий, Sur l'irrationalité d'un produit infini, Матем. сб., 1 (54), (1943), 262.

[10] K. Mahler, а) Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, I, *Journ. für die reine u. angew. Math.*, **166** (1932), 118; II, **166** (1932), 137. б) Zur Approximation algebraischer Zahlen, I., *Math. Ann.*, **107** (1933), 691.; II., *Math. Ann.*, **108** (1933), 37; III,. *Acta Math.*, **62** (1933), 91. ц) Über transzendente p-adische Zahlen, *Compositio*

Math., **2** (1935), 259. г) Ein Analogon zu einem Schneiderschen Satz, *Proc. Koninkl. Akad. w. Wetensch. te Amsterdam*, I, **39**, и 5 (1936), 3; II. **39**, и 6 (1936), 3. д) Arithmetische Eigenschaften einer Klasse von Dezimalbrüchen, *Proc. Koninkl. Akad. w. Wetensch. te Amsterdam*, **40** (1937), 3.

[11] А. А. МАРКОВ, Доказательство трансцедентности чисел e и π. С.—П., 1883, Тип. АН.

[12] Д. Д. МОРДУХАЙ—БОЛТОВСКОЙ, а) О некоторых свойствах трансцендентных чисел первого класса, Матем. сб., **34**, № 1 (1927), 55. б) Sur le logarithme d'un nombre algébrique., *C. R. Acad. Sc., Paris*, (1923), 724. в) Zur Theorie der transzendenten Zahlen, *C. R. et Mém. Soc. Nat. Varsovie*, (1913), 49. г) О трансцендентных числах с последовательными приближениями, определяемыми алгебраическими уравнениями, Матем. сб., 41 (2), (1934), 221. д) Über einige Eigenschaften der transzendenten Zahlen, *Tôhoku Math. Journ.*, 40 (1935), 99, е) Об условиях определяемости числа трансцендентными уравнениями некоторого общего типа, ДАН, **52**, № 6, 487.

[13] G. PÓLYA, Über ganzwertige ganze Funktionen, *Rend. del Circolo Math. di Palermo*, **40** (1941), 1.

[14] G. RICCI, Sul settimo problema di Hilbert, *Annali della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa*, Ser. II, IV, 1935, 1.

[15] A. THUE, Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen, *Journ. für die reine u. angew. Math.*, **135** (1909), 284.

[16] Н. ФЕЛЬДМАН, а) Аппроксимация некоторых трансцендентных чисел, ДАН **66**, № 4 (1949), б) О нижних границах форм от трех логарифмов алгебраических чисел, Вестник МГУ, № 5, 1949 (совм. с А. О. Гельфондом).

[17] T. SCHNEIDER, а) Über die Approximation algebraischer Zahlen, *Journ. für die reine u. angew. Math.*, **175** (1936), 182. б) Arithmetische Untersuchungen elliptischer Integrale, **113**, № 1 (1936), 1. в) Zur Theorie der abelschen Funktionen und Integrale, *Journ. für die reine u. angew. Math.*, **183** (1941), 110.

[18] CH. HERMITE, Sur la fonction exponentielle, *C. R. Acad. Sc., Paris*, **77** (1873), 18, 74, 226, 285.

CONTRIBUTIONS TO THE REDUCTION THEORY OF THE DECISION PROBLEM

Second paper

Three universal, one existential quantifiers

By

JÁNOS SURÁNYI (Budapest)

(*Presented by* L. KALMÁR)

1. One of the goals toward which the reduction theory of the decision problem of the first order predicate calculus tends is the reduction of this problem to the case in which the formula to be examined as to being satisfiable has a particular type of prefix[1], as simple as possible. In this direction, the classical theorem of SKOLEM[2] states that the decision problem is equivalent to the satisfiability question of formulae with a prefix of the form

$$(1) \qquad (x_1)\ldots(x_m)\,(Ey_1)\ldots(Ey_n).$$

In addition, without loss of generality, we may suppose the formula in question to be binary,[3] i. e. to contain only predicate variables with two arguments.

SKOLEM's theorem has been improved in two directions. On the one hand, GÖDEL has reduced the number m of the universal quantifiers in (1) to three, i. e., he has proved that to any first order formula it is possible to construct an equivalent binary formula with a prefix of the form[4]

$$(2) \qquad (x_1)\,(x_2)\,(x_3)\,(Ey_1)\ldots(Ey_n)\,;$$

here we call two formulae *equivalent*, if either both can be satisfied or neither. On the other hand, PEPIS has reduced the number n of the existential quantifiers in (1) to one, by proving that to any first order formula we can construct an equivalent binary formula having a prefix of the form[5]

[1] Whenever we speak about the prefix of a formula, we assume tacitly the formula in question to be prenex; this can be done without loss of generality.

[2] TH. SKOLEM, Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theorem über dichte Mengen, *Videnskapsselskapets Skrifter*, Kristiania, I. Mat. naturw. Klasse, 1920, no. 4, pp. 1—26, especially pp. 4—6.

[3] See K. GÖDEL, Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, **40** (1933), pp. 433—443, especially p. 441.

[4] K. GÖDEL, loc. cit. [3], especially pp. 441—443.

[5] J. PEPIS, Ein Verfahren der mathematischen Logik, *Journal of Symbolic Logic*, **3** (1938), pp. 61—76 and Untersuchungen über das Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, *Fundamenta Mathematicae*, **30** (1938), pp. 257—348, especially pp. 339—340.

(3) $$(x_1) \ldots (x_m)\,(Ey).$$

Also PEPIS' proof allows to replace the prefix (3) by

(4) $$(x_1)\,(x_2)\,(Ey)\,(x_3) \ldots (x_m),$$

being not of the Skolem form (1) but more advantageous in some respect; indeed the individual y whose existence is expressed by the quantifier (Ey) depends in (4) on two variables x_1, x_2 only, contrarily to (3), where it depends on m variables $x_1, \ldots, x_m$.

In the present paper, I shall prove that both results can be combined and therefore, the number of universal and existential quantifiers can be kept fixed simultaneously. More exactly, I shall prove the

THEOREM[6]. *To any given first order formula it is possible to construct an equivalent binary formula of the form*

(5) $$(x)\,(y)\,(Ez)\,\mathbf{N}_1 \;\&\; (x)\,(y)\,(u)\,\mathbf{N}_2\,,$$

which can be transformed into any of the prenex forms

$$(x)\,(y)\,(u)\,(Ez)\,\mathbf{N}$$

and

$$(x)\,(y)\,(Ez)\,(u)\,\mathbf{N}$$

with, $\mathbf{N} = \mathbf{N}_1 \;\&\; \mathbf{N}_2$, *where* $\mathbf{N}_1$ *and* $\mathbf{N}_2$ *do not contain any quantifier.*

As CHURCH[7] has proved, there is no general recursive algorithm by which we could decide whether a given first order formula can be satisfied or not.[8]

[6] This theorem is contained in my Hungarian publication: A logikai függvénykalkulus eldöntés-problémájának redukciójáról, *Matematikai és Fizikai Lapok*, **50** (1943), pp. 51—73. with German abstract: Zur Reduktion des Entscheidungsproblems des logischen Funktionenkalküls, ibid., pp. 73—74 as theorem I (pp. 57—65 and 73—74). The proof given here is not a simple translation of that in the quoted paper but some simplifications were performed the most essential of which is that here we avoid the use of GÖDEL's reduction theorem, so that the proof given here is at the same time a proof of that theorem. This result togesther with two further theorems was presented at the X^{th} International Congress of Philosophy (Amsterdam). See Reduction of the decision problem to formulas containing a bounded number of quanrifiers only, *Proc. of the* X^{th} *International Congress of Philosophy* (1948), fasc. II. pp. 759—762, where the proofs are only sketched.

[7] ALONZO CHURCH, A note on the Entscheidungsproblem, *Journal of Symbolic Logic*, **1** (1936), pp. 40—41 and 101—102.

[8] As a matter of fact, CHURCH's proof applies to the »proof theoretic« formulation of the decision problem; i. e., he proved the impossibility of a recursive algorithm by which we could decide wether a given formula is provable from the postulates of the first order predicate calculus. (The same holds for TURING's proof to be quoted in[9]. However, the equivalence of the proof theoretic formulation of the decision problem to the above »set-theoretic« one has been proved by K. GÖDEL, Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, **37** (1930) pp. 349—360. We ignore objections from the »finite« point of view. They could be removed by transforming the proof given in the present paper into a proof-theoretic one, which can be done after the paradigm given in the paper LÁSZLÓ KALMÁR, Über einen Löwenheimschen Satz, *Acta Scientiarum Mathematicarum*, **7** (1934), pp. 112—121, especially pp. 115—121.

From an alternative proof of CHURCH's theorem, given by TURING[9], it follows the non-existence of a recursive deciding algorithm for prenex formulae containing 8 quantifiers. The above theorem, combined with CHURCH's theorem, shows that here we can replace 8 by 4.

2. First we sketch the main ideas of the proof. Let **A** be the given first order formula. According to SKOLEM's reduction theorem quoted above, we may suppose without loss of generality that **A** has a prefix of the form (1) and a matrix **M** containing the binary predicate variables $F_1, \ldots, F_l$ but no others.[10] In addition, we may suppose that[11] $m = n$. Thus

$$\mathbf{A} = (x_1) \ldots (x_n)\,(Ey_1) \ldots (Ey_n)\,\mathbf{M}$$

where

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}\,(F_1, \ldots, F_l\,;\; x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$$

is a truth function of the $4ln^2$ arguments $F_\lambda(x_\mu, x_\nu)$, $F_\lambda(x_\mu, y_\nu)$, $F_\lambda(y_\mu, x_\nu)$ $F_\lambda(y_\mu, y_\nu)$ $(\lambda = 1, \ldots, l\,;\; \mu, \nu = 1, \ldots, n)$.

The formula **B** to be constructed of the form (5) and equivalent to **A** will provide an alternative formalisation of the fact formalised by **A**, viz. »for any $x_1, \ldots, x_n$ there are $y_1, \ldots, y_n$ such that **M** holds.«

The first idea is to reduce the number of quantifiers by replacing »for any $x_1, \ldots, x_n$« and »there are $y_1, \ldots, y_n$« by »for any x« and »there is an y« respectively, x and y denoting the vectors (ordered n-ads) $(x_1, \ldots, x_n)$ and $(y_1, \ldots, y_n)$ respectively. Correspondingly we have to consider the predicates $F_\lambda(x_\mu, x_\nu)$, figuring in **M**, as relations between the vectors x and y; therefore, we define the predicates $G_{\lambda\mu\nu}(x, y)$ for vectors $x = (x_1, \ldots, x_n)$ and $y = (y_1, \ldots, y_n)$ by $G_{\lambda\mu\nu}(x, y) = F_\lambda(x_\mu, x_\nu)$ for $\lambda = 1, \ldots, l\,;\; \mu, \nu = 1, \ldots, n$. Replacing $F_\lambda(x_\mu, x_\nu)$, $F_\lambda(x_\mu, y_\nu)$, $F_\lambda(y_\mu, x_\nu)$, $F_\lambda(y_\mu, y_\nu)$ in **M** by $G_{\lambda\mu\nu}(x, x)$, $G_{\lambda\mu\nu}(x, y)$, $G_{\lambda\mu\nu}(y, y)$, respectively, we get another matrix $\mathbf{M}^* = \mathbf{M}^*(G_{111}, G_{112}, \ldots, G_{lnn}, x, y)$ and instead of »for any $x_1, \ldots, x_n$ there are $y_1, \ldots, y_n$ such that **M** holds« we can say »for any vector x there is a vector y such that $\mathbf{M}^*$ holds«. However, this proposition does not express the same thing as the original one unless the propositions »for any individuals $x_1, \ldots, x_n$, there is a vector x with the components $x_1, \ldots, x_n$« and »for any vector y there are individuals $y_1, \ldots, y_n$ belonging to y as its components« are included tacitly. Should we formalise them

[9] A. M. TURING, On computable nnumbers, with an applicaion to the Entscheidungsproblem, *Proceedings of the London Mathematical Society*, (2), **42** (1937), pp. 230—265, especially pp. 259—263.

[10] Moreover, according to GÖDEL's reduction theorem, we might suppose, **A** has a prefix of the form (2); in the paper loc. cit. [6] we did so.

[11] Indeed, if $m < n$, say, between (x_m) and (Ey_1) we may insert $(x_{m+1}) \ldots (x_n)$ with variables $x_{m+1}, \ldots, x_n$ not occuring in **A**.

(as parts of **B**), we should not gain anything, because the first one requires n universal quiantifiers, whereas the second one needs n existential quantifiers.

In order to avoid this inconvenience, we consider, besides n-dimensional vectors $(x_1, \ldots, x_n)$ even »ν-dimensional vectors« $(x_1, \ldots, x_\nu)$ for $\nu = 1, \ldots, n-1$,[12] Calling, for $\nu \geqq 1$, the vector $(x_1, \ldots, x_{\nu-1})$ the *projection* of the vector $(x_1, \ldots, x_\nu)$, we can replace the propositions »for any elements $x_1, \ldots, x_n$ there is a vector x with the components $x_1, \ldots, x_n$« and »for any vector y there are individuals $y_1, \ldots, y_n$ belonging to y as its components« by the propositions »for any ν-dimensional vector x and for any individual x_0 there is a $\nu+1$ dimensional vector $\bar{x}$ having x as its projection and x_0 as its last component« and »for any $\nu+1$-dimensional vector y there is a ν-dimensional vector $\bar{y}$ and an individual y_0 such that $\bar{y}$ is the projection and y_0 is the last component of y« ($\nu = 1, \ldots, n-1$). The first of the last propositions requires two universal and one existential quantifier, whereas the second one requires one universal and two existential quantifiers only.

The above propositions would require four existential quantifiers in all. However, we can reduce their number to one by defining a binary descriptive function which assumes, on appropriate parts of its domain, the same values as the descriptive functions whose existence is expressed by those existential quantifiers.[13] This is possible, because only one of those descriptive functions (viz. that attaching to a vector x and an element x_0 a vector $\bar{x}$ having x as its projection and x_0 as its last component) depends on two arguments, while the others depend on one argument only.

Finally, we have to formalize (as a part of **B**) the connection between the old predicates $F_\lambda(x, y)$ and the new ones $G_{\lambda\mu\nu}(x, y)$ figuring in the above proposition »for any (n-dimensional) vector x there is an (n-dimensional) vector y such that **M*** holds.« In order to facilitate the expression of this connection by a proposition requiring, when formalized, three universal quantifiers only, we extend the definition of the predicates $G_{\lambda\mu\nu}(x, y)$ to arbitrary vectors by defining $G_{\lambda\mu\nu}(x, y) = F_\lambda(x_\mu, x_\nu)$, x_μ denoting the μ^{th} component of x and y_ν the ν^{th} component of y, provided that x and y are vectors of at least μ and ν dimensions, respectively; in the opposite case, we agree $G_{\lambda\mu\nu}(x, y)$ to be false. Then for individuals x, y, $G_{\lambda 11}(x, y)$ is the same as $F_\lambda(x, y)$ and the connection mentioned above is a consequence of the fact that $G_{\lambda\mu\nu}(x, y)$ does not change its truth value if we replace x or y by its projection, provided that x or y is not a vector of μ or ν dimensions, respectively; or if we replace x or y, provided

[12] For $\nu = 1$, we do not make any distinction between the vector (x_1) and the individual x_1.

[13] This method of »condensation of descriptive functions« was used at the first time, I think, by LÁSZLÓ KALMÁR, Zurückführung des Entscheidungsproblems auf den Fall von Formeln mit einer einzigen binaeren Funktionsvariablen, *Compositio Mathematica*, **4** (1936), pp. 137—144 especially definition of ψ p. 141.

it is a vector of μ or ν dimensions, respectively, by its last component and at the same time we change the corresponding subscript (μ or ν) to 1. This fact can be readily formalized using three universal quantifiers only.

3. Now, let us expose the proof in its technical details. Suppose first that **A** can be satisfied ; i. e., there is a non-empty set J, and there are binary predicates $\Phi_1, \ldots, \Phi$ as well as descriptive functions $\eta_1, \ldots, \eta_n$ of n arguments defined over J such that, for arbitrary $x_1, \ldots, x_n \in J$,

$$(6) \qquad \mathbf{M}(\Phi_1, \ldots, \Phi_l ; x_1, \ldots, x_n , \eta_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \eta_n(x_1, \ldots, x_n))$$

holds. Let us form the new set of individuals $Y = J + J^2 + \ldots + J^n$, J^r denoting the set of ordered r-ads[14] formed of elements of J. We define over Y predicates $\mathsf{I}_\nu(x)$, $\mathbf{X}_1(x, y)$, $\mathbf{X}_2(x, y)$ and $\Psi_{\lambda\mu\nu}(x, y)$ as well as partly defined[15] descriptive functions $\chi_1(x)$, $\chi_2(x)$, $\omega(x, y)$ and $\eta(x)$ as follows :

$$\mathsf{I}_\nu(x) = \begin{cases} \textit{true} \text{ for } x \in J^\nu \\ \textit{false} \text{ for } x \bar{\in} J^\nu \end{cases} \quad (\nu = 1, \ldots, n),$$

$$\mathbf{X}_1(x, y) = \begin{cases} \textit{true} \text{ for } x = (x_1, \ldots, x_{\nu-1}, x_\nu) \in J^\nu,\ y = (x_1, \ldots, x_{\nu-1}) \in J^{\nu-1},\ (\nu = 2, \ldots, \text{or } n), \\ \textit{false} \text{ in other cases} \end{cases}$$

(i. e. $\mathbf{X}_1(x, y)$ holds if and only if y is the projection of x),

$$\mathbf{X}_2(x, y) = \begin{cases} \textit{true} \text{ for } x = (x_1, \ldots, x_\nu) \in J^\nu,\ y = x_\nu \in J,\ (\nu = 2, \ldots, \text{or } n), \\ \textit{false} \text{ in other cases} \end{cases}$$

(i. e. $\mathbf{X}_2(x, y)$ holds if and only if y is the last component of x),

$$\Psi_{\lambda\mu\nu}(x, y) = \begin{cases} \Phi_\lambda(x_\mu, y_\nu) \text{ for } x = (x_1, \ldots, x_\mu, \ldots, x_\varrho) \in J^\varrho, \\ y = (y_1, \ldots, y_\nu, \ldots, y_\sigma) \in J^\sigma,\ \varrho \geqq \mu,\ \sigma \geqq \nu, \\ \textit{false} \text{ in other cases,} \end{cases}$$

$$\chi_1(x) = \begin{cases} (x_1, \ldots, x_{\nu-1}) \text{ for } x = (x_1, \ldots, x_{\nu-1}, x_\nu) \in J^\nu \quad (\nu = 2, \ldots, \text{or } n), \\ \text{undefined for } x \in J \end{cases}$$

(i. e. the projection of x),

$$\chi_2(x) = \begin{cases} x_\nu \text{ for } x = (x_1, \ldots, x_\nu) \in J^\nu \quad (\nu = 2, \ldots, \text{or } n), \\ \text{undefined for } x \in J \end{cases}$$

[14] As a matter of fact, we suppose that no two of the sets $J, J^2, \ldots, J^n$ have any element in common (e. g. J does not contain any element of the form (a, b) with $a, b, \in J$) ; we can attain this by replacing J, if necessary, by a suitable set of the same cardinal number.

[15] We could replace $\chi_1(x)$, $\chi_2(x)$, $\omega(x, y)$ and $\eta(x)$ by descriptive functions defined throughout Y by defining them arbitrarily (e. g. by making equal them to x) at every place where they are undefined. However, they are used only provisionally ; later on, we shall replace them by the descriptive function $\zeta(x, y)$ defined throughout Y.

(i. e. the last component of x),

$$\omega(x, y) = \begin{cases} (x_1, \ldots, x_{\nu-1}, y) \text{ for } x = (x_1, \ldots, x_{\nu-1}) \in J^{\nu-1},\ y \in J \quad (\nu = 2, \ldots, \text{or } n) \\ \text{undefined for } x \in J^n \text{ or } y \in J^2 + \ldots + J^n \end{cases}$$

(i. e. the vector formed of the projection x and of the last component y) ;

$$\eta(x) = \begin{cases} (\eta_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \eta_n(x_1, \ldots, x_n)) \quad \text{for } x = (x_1, \ldots, x_n) \in J^n, \\ \text{undefined for } x \in J + J^2 + \ldots + J^{n-1}. \end{cases}$$

Then we have[16] by (6) and by the definition of $\mathbf{M}^*$, for any $x \in Y$,

$$\mathsf{I}_n(x) \to \mathsf{I}_n(\eta(x))\, \mathbf{M}^*(\Psi_{111}, \Psi_{112}, \ldots, \Psi_{1nn};\ x,\ \eta(x)) , \tag{7}$$

further for any $x, y, u \in Y$

$$\left.\begin{aligned} &\mathsf{I}_{\nu-1}(x)\ \mathsf{I}_1(y) \to \mathsf{I}_\nu(\omega(x, y))\, \mathsf{X}_1(\omega(x, y), x)\, \mathsf{X}_2(\omega(x, y), y) , && (8) \\ &\mathsf{I}_\nu(x) \to \mathsf{I}_{\nu-1}(\chi_1(x))\, \mathsf{X}_1(x,\ \chi_1(x)) , && (9) \\ &\mathsf{I}_\nu(x) \to \mathsf{I}_1(\chi_2(x))\, \mathsf{X}_2(x, \chi_2(x)) && (10) \end{aligned}\right\} (\nu = 2, \ldots, n),$$

$$\left[\sum_{\nu=1}^{n} \mathsf{I}_\nu(x)\right] \prod_{\substack{\mu,\nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{n} \overline{\mathsf{I}_\mu(x)\, \mathsf{I}_\nu(x)} , \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathsf{X}_1(x, y)\ \overline{\mathsf{I}_\mu(x)} \to (\Psi_{\lambda\mu\nu}(x, u) \sim \Psi_{\lambda\mu\nu}(y, u)), && (12) \\ &\mathsf{X}_1(x, y)\ \overline{\mathsf{I}_\nu(x)} \to (\Psi_{\lambda\mu\nu}(u, x) \sim \Psi_{\lambda\mu\nu}(u, y)), && (13) \\ &\mathsf{X}_2(x, y)\ \mathsf{I}_\mu(x) \to (\Psi_{\lambda\mu\nu}(x, u) \sim \Psi_{\lambda 1\nu}(y, u)), && (14) \\ &\mathsf{X}_2(x, y)\ \mathsf{I}_\nu(x) \to (\Psi_{\lambda\mu\nu}(u, x) \sim \Psi_{\lambda\mu 1}(u, y)) && (15) \end{aligned}\right\} (\lambda = 1, \ldots, l;\ \mu, \nu = 1, \ldots, n).^{17}$$

(8), (11) and (14), (15) are quite obvious on account of the definition of predicates and descriptive functions involved. To prove (12) suppose that the antecedent holds; on account of $\mathsf{X}_1(x, y)$ x is a ϱ-dimensional vector ($\varrho = 2, \ldots,$ or n) and y its ϱ—1-dimensional projection ; by $\overline{\mathsf{I}_\mu(x)}$ we have $\varrho \neq \mu$. If $\varrho < \mu$, we have $\varrho - 1 \geqq \mu$; if u is a vector of at least ν-dimensions, then, denoting the components as usual by suffixes, we have $\Psi_{\lambda\mu\nu}(x, u) = \Phi_\lambda(x_\mu, u_\nu)$, $\Psi_{\lambda\mu\nu}(y, u) = \Phi_\lambda(y_\mu, u_\nu) = \Phi_\lambda(x_\mu, u_\nu)$; in all other cases (i. e. if $\varrho < \mu$, or if u is a vector of at most $\nu - 1$ dimensions), we have $\Psi_{\lambda\mu\nu}(x, u)$ and $\Psi_{\lambda\mu\nu}(y, u)$ both false. (13) can be proved quite analogously.

[16] For simplicity, we omit conjunction sign (except at the end of a line when dividing formulae). For abbreviation of a conjunction or of a disjunction of many terms, we use product and sum sign, Π and Σ, respectively.

[17] (12) for $\mu = n$, (13) for $\nu = n$, (14) for $\mu = 1$, (15) for $\nu = 1$ are superfluous and have been retained for the sake of uniform writing merely.

4. We can replace $\chi_1(x)$, $\chi_2(x)$, $\omega(x, y)$, $\eta(x)$ by a single binary descriptive function $\zeta(x, y)$ defined throughout Y according to the table[18]

		$y\in$				
		J	J^2	...	J^{n-1}	J^n
$x\in$	J	$\omega(x, y)$	$\chi_1(y)$	...	$\chi_1(y)$	$\chi_1(y)$
	J^2	$\omega(x, y)$	$\chi_2(y)$	x	x	x
	$\vdots$	$\vdots$	x	$\ddots$	x	x
	J^{n-1}	$\omega(x, y)$	x	x	$\chi_2(y)$	x
	J^n	$\eta(x)$	x	x	x	$\chi_2(y)$

i. e.

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} \omega(x, y) & \text{for } x \in J^\nu, \quad \nu = 1, \ldots, n-1, \quad y \in J, \\ \eta(x) & \text{for } x \in J^n, \quad y \in J, \\ \chi_1(y) & \text{for } x \in J, \quad y \in J^\nu, \quad \nu = 2, \ldots, n, \\ \chi_2(y) & \text{for } x \in J^\nu, \quad y \in J^\nu, \quad \nu = 2, \ldots, n, \\ x & \text{for}^{18}\ x \in J^\mu, \quad y \in J^\nu, \quad \mu, \nu = 2, \ldots, n, \ \mu \neq \nu. \end{cases}$$

By means of $\zeta(x, y)$ we can write (7) — (10) in the form

$$\left.\begin{array}{ll} (7') & \mathfrak{l}_n(x)\, \mathfrak{l}_1(y) \rightarrow \mathfrak{l}_n(\zeta(x, y))\, \mathbf{M}^*(\Psi_{111}, \Psi_{112}, \ldots, \Psi_{lnn}\,;\, x, \zeta(x, y)), \\ (8') & \mathfrak{l}_{\nu-1}(x)\, \mathfrak{l}_1(y) \rightarrow \mathfrak{l}_\nu(\zeta(x, y))\, \mathfrak{X}_1(\zeta(x_1 y)_1 x)\, \mathfrak{X}_2(\zeta(x, y), y), \\ (9') & \mathfrak{l}_1(x)\, \mathfrak{l}_\nu(y) \rightarrow \mathfrak{l}_\nu(\zeta(x, y))\, \mathfrak{X}_1(y, \zeta(x, y)), \\ (10') & \mathfrak{l}_\nu(x)\, \mathfrak{l}_\nu(y) \rightarrow \mathfrak{l}_1(\zeta(x, y))\, \mathfrak{X}_2(y, \zeta(x, y)) \end{array}\right\} (\nu = 2, \ldots, n).$$

Now, let us form the conjunction of (7′) — (10′) on the one hand (for $\nu = 2, \ldots, n$ in (8′) — (10′)), of (11) — (15) on the other hand (for $\lambda = 1, \ldots, l$; $\mu, \nu = 1, \ldots, n$ in (12) — (15)), then replace $\zeta(x, y)$ throughout by an individual variable z and the predicates: $\Psi_{111}, \Psi_{112}, \ldots, \Psi_{lnn}$, $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_n$ by certain predicate variables $G_{111}, G_{112}, \ldots, G_{lnn}, H_1, H_2, I_1, \ldots, I_n$, respectively; thus we get the matrices

$$\mathbf{N}_1 = \mathbf{N}_1(G_{111}, G_{112}, \ldots, G_{lnn}, H_1, H_2, I_1, \ldots, I_n, ; x, y, z) = [I_n(x)\, I_1(y) \rightarrow I_n(z) \cdot$$

$$\cdot\, \mathbf{M}^*(G_{111}, G_{112}, \ldots, G_{lnn}\,;\, x, z)] \cdot \prod_{\nu=2}^{n} \{[\, I_{\nu-1}(x)\, I_1(y) \rightarrow I_\nu(z)\, H_1(z, x)\, H_2(z, y)] \cdot$$

$$\cdot\, [I_1(x)\, I_\nu(y) \rightarrow I_{\nu-1}(z)\, H_1(y, z)] \cdot [I_\nu(x)\, I_\nu(y) \rightarrow I_1(z)\, H_2(y, z)]\},$$

[18] It does not matter how we define $\zeta(x, y)$ for $x \in J^\mu$, $y \in J^\nu$, $\mu \neq 1$, $\nu \neq 1$, $\mu \neq \nu$.

$$\mathbf{N}_2 = \mathbf{N}_2(G_{111}, G_{112}, \ldots, G_{lnn}, H_1, H_2, I_1, \ldots, I_n; x, y, u) = \sum_{\nu=1} I_\nu(x) \cdot$$

$$\prod_{\substack{\mu,\nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{n} \overline{I_\mu(x)\, I_\nu(x)} \cdot \prod_{\lambda=1}^{l} \prod_{\mu,\nu=1}^{n} \{ [H_1(x,y)\, \overline{I_\mu(x)} \rightarrow (G_{\lambda\mu\nu}(x,u) \sim G_{\lambda\mu\nu}(y,u))] \cdot$$

$$\cdot [H_1(x,y)\, \overline{I_\nu(x)} \rightarrow (G_{\lambda\mu\nu}(u,x) \sim G_{\lambda\mu\nu}(u,y))] \cdot [H_2(x,y)\, I_\mu(x) \rightarrow (G_{\lambda\mu\nu}(x,u) \sim$$
$$\sim G_{\lambda 1\nu}(y,u))] \cdot [H_2(x,y)\, I_\nu(x) \rightarrow (G_{\lambda\mu\nu}(x,u) \sim G_{\lambda\mu\nu}(y,u))]\}.$$

By what we have proved, the formula

$$\mathbf{B} = (x)(y)(Ez)\, \mathbf{N}_1(G_{111}, G_{112}, \ldots, G_{lnn}, H_1, H_2, I_1, \ldots, I_n; x, y, z) \;\&$$
$$\&\; (x)(y)(u)\, \mathbf{N}_2(G_{111}, G_{112}, \ldots, G_{lnn}, H_1, H_2, I_1, \ldots, I_n; x, y, u),$$

obviously of the form (5), can be satisfied if **A** can; indeed, **B** is satisfied on Y by choosing $G_{111} = \Psi_{111}, G_{112} = \Psi_{112}, \ldots, G_{lnn} = \Psi_{lnn}, H_1 = \mathsf{X}_1, H_2 = \mathsf{X}_2, I_1 = \mathsf{I}_1, \ldots, I_n = \mathsf{I}_n$.

5. We have still to show that also conversely, if **B** can be satisfied, the same holds even for **A**. Suppose **B** can be satisfied; i. e., there is a (non-empty) set Y' and there are binary predicates $\Psi_{111}, \Psi_{112}, \ldots, \Psi_{lnn}$, $\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2$, unary predicates $\mathsf{I}_1, \ldots, \mathsf{I}_n$, as well as a binary descriptive function ζ defined over Y', such that, for arbitrary $x, y, u \in Y'$,

$$\mathbf{N}_1(\Psi_{111}, \Psi_{112}, \ldots, \Psi_{lnn}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{I}_1, \ldots, \mathsf{I}_n; x, y, \zeta(x,y))$$

and

$$\mathbf{N}_2(\Psi_{111}, \Psi_{112}, \ldots, \Psi_{lnn}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{I}_1, \ldots, \mathsf{I}_n; x, y, u);$$

consequently (7′) — (10′) and (11) — (15) hold. Let a' be any element of Y'. By (11) we have $\mathsf{I}_\nu(a')$ for one of $\nu = 1, \ldots, n$. In case $\nu > 1$ we have $\mathsf{I}_1(\zeta(a', a'))$ by (10′); therefore, the set J' of the elements x of Y' for which $\mathsf{I}_1(x)$ holds is not empty. We shall prove that **A** can be satisfied on J'. Let $x_1, \ldots, x_n$ be any elements of J' so that

$$\mathsf{I}_1(x_\mu) \quad \text{for} \quad \mu = 1, \ldots, n. \tag{16}$$

We define

$$x^{(1)} = x_1, \tag{17}$$

$$x^{(\mu)} = \zeta(x^{(\mu-1)}, x_\mu) \text{ for } \mu = 2, \ldots, n, \tag{18}$$

$$y^{(n)} = \zeta(x^{(n)}, x_1), \tag{19}$$

$$y^{(\nu-1)} = \zeta(x_1, y^{(\nu)}) \text{ for } \nu = n, \ldots, 2, \tag{20}$$

$$y_\nu = \zeta(y^{(\nu)}, y^{(\nu)}) \text{ for } \nu = 2, \ldots, n, \tag{21}$$

$$y_1 = y^{(1)}. \tag{22}$$

We prove by induction

$$\mathsf{I}_\mu(x^{(\mu)}) \text{ for } \mu = 1, \ldots, n. \tag{23}$$

For $\mu = 1$, (23) follows from (16) by (17). Suppose that (23) holds for some μ $(1 \leqq \mu \leqq n-1)$; then by (16), with $\mu+1$ instead of μ, we get from (8'), with $\nu = \mu+1$, $x = x^{(\mu)}$, $y = x_{\mu+1}$, the truth of $\mathfrak{l}_{\mu+1}(\zeta(x^{(\mu)}, x_{\mu+1}))$; i. e., by (18) with $\mu+1$ instead of μ, the truth of $\mathfrak{l}_{\mu+1}(x^{(\mu+1)})$.

Now we prove by induction

(24) $$\mathfrak{l}_\nu(y^{(\nu)}) \text{ for } \nu = n, \ldots, 1.$$

For $\nu = n$ (24) follows from (7') with $x = x^{(\nu)}$, $y = x_1$; by (23) with $\mu = n$; (16) with $\mu = 1$, and (19). Suppose that (24) holds for some ν, $2 \leqq \nu \leqq n$; then, by (16) with $\mu = 1$, we get $\mathfrak{l}_{\nu-1}(\zeta(x_1, y^{(\nu)}))$, from (9') with $x = x_1$, $y = y^{(\nu)}$ i. e., by (20), the truth of $\mathfrak{l}_{\nu-1}(y^{(\nu-1)})$.

Again we prove

(25) $$\mathfrak{l}_1(y_\nu) \text{ for } \nu = 1, \ldots, n.$$

For $\nu = 1$, (25) follows from (24) with $\nu = 1$, by (22).

For $\nu = 2, \ldots, n$, we get by (24) from (10'), with $x = y^{(\nu)}$, $\mathfrak{l}_1(\zeta(y^{(\nu)}, y^{(\nu)}))$ which is, on account of (21), the same as (25). By (25), we have $y_1, \ldots, y_n \in J'$.

6. By (23) with $\mu = n$; (16) with $\mu = 1$, and (19), we infer from (7') with $x = x^{(n)}$, $y = x_1$,

(26) $$\mathfrak{M}^*(\Psi_{111}, \Psi_{112}, \ldots, \Psi_{lnn};\ x^{(n)}, y^{(n)}).$$

By (23), (16) and (18) we get from (8'), with $\nu = \mu$, $x = x^{(\mu-1)}$, $y = x_\mu$,

(27) $$\mathfrak{X}_1(x^{(\mu)}, x^{(\mu-1)})$$

and

(28) $$\mathfrak{X}_2(x^{(\mu)}, x_\mu)$$

$(\mu = 2, \ldots, n)$.

Further, by (16), with $\mu = 1$, (24) and (20), we infer from (9'), with $x = x_1$, $y = y^{(\nu)}$

(29) $$\mathfrak{X}_1(y^{(\nu)}, y^{(\nu-1)}) \quad (\nu = 2, \ldots, n);$$

by (24) and (21) we get from (10'), with $x = y = y^{(n)}$,

(30) $$\mathfrak{X}_2(y^{(\nu)}, y_\nu) \quad (\nu = 2, \ldots, n).$$

Now we prove

(31) $$\Psi_{\lambda\mu\nu}(x^{(n)}, y^{(n)}) \sim \Psi_{\lambda\mu\nu}(x^{(\varrho)}, y^{(\sigma)})$$

for $\lambda = 1, \ldots, l$; $\mu, \nu = 1, \ldots, n$; $\varrho = \mu, \ldots, n$; $\sigma = \nu, \ldots, n$.

For $\varrho = \sigma = n$, (31) is trivial. Suppose that (31) holds for some ϱ and σ if $\mu + 1 \leqq \varrho \leqq n$, $\nu \leqq \sigma \leqq n$; by (23) with ϱ instead of μ and (11), with $x = x^{(\varrho)}$

(which imply $\overline{I_\mu(x^{(\varrho)})}$ and by (27) we get from (12), with $x = x^{(\varrho)}$, $y = x^{(\varrho-1)}$, $u = y^{(\varrho)}$,

$$\Psi_{\lambda\mu\nu}(x^{(\varrho)}, y^{(\sigma)}) \sim \Psi_\mu(x^{(\varrho-1)}, y^{(\sigma)}),$$

which gives by (31)

$$\Psi_{\lambda\mu\nu}(x^{(n)}, y^{(n)}) \sim \Psi_{\lambda\mu\nu}(x^{(\varrho-1)}, y^{(\sigma)}),$$

i. e., (31) with $\varrho - 1$ and σ instead of ϱ and σ. Quite analogously, by means of (29), (24) and (13) instead of (27), (23) and (12), we infer that if (31) holds for some ϱ and σ with $\mu \leqq \varrho \leqq n$, $\nu + 1 \leqq \sigma \leqq n$, then the same is true even for ϱ and $\sigma - 1$ instead of ϱ and σ. Thus, by induction, we obtain (31) for $\mu \leqq \varrho \leqq n$, $\nu \leqq \sigma \leqq n$, as stated. In particular, we have

(32) $\Psi_{\lambda\mu\nu}(x^{(n)}, y^{(n)}) \sim \Psi_{\lambda\mu\nu}(x^{(\mu)}, y^{(\nu)})$ $(\lambda = 1, \ldots, l;\ \mu, \nu = 1, \ldots, n)$.

On the other hand we prove

(33) $\Psi_{\lambda\mu\nu}(x^{(n)}, y^{(n)}) \sim \Psi_{\lambda 1\nu}(x_\mu, y^{(\nu)})$ $(\lambda = 1, \ldots, l;\ \mu, \nu = 1, \ldots, n)$.

For $\mu = 1$, (33) is an obvious consequence of (17); for $2 \leqq \mu \leqq n$, by (28), (23) and by (32) it is a consequence of (14) with $x = x^{(\mu)}$, $y = x_\mu$, $u = y^{(\nu)}$. Similarly, we can prove, using (22), (30) and (24) and (15) (with 1 instead of μ) instead of (17), (28), (23) and (14), that

(34) $\Psi_{\lambda 1\nu}(x_\mu, y^{(\nu)}) \sim \Psi_{\lambda 11}(x_\mu, y_\nu)$ $(\lambda = 1, \ldots, l;\ \mu, \nu = 1, \ldots, n)$.

(32), (33) and (34) imply

(35) $\Psi_{\lambda\mu\nu}(x^{(n)}, y^{(n)}) \sim \Psi_{\lambda 11}(x_\mu, y_\nu)$ $(\lambda = 1, \ldots, l;\ \mu, \nu = 1, \ldots, n)$.

Quite analogously, we can prove

(36) $\Psi_{\lambda\mu\nu}(x^{(n)}, x^{(n)}) \sim \Psi_{\lambda 11}(x_\mu, x_\nu)$,
(37) $\Psi_{\lambda\mu\nu}(y^{(n)}, x^{(n)}) \sim \Psi_{\lambda 11}(y_\mu, x_\nu)$
and
(38) $\Psi_{\lambda\mu\nu}(y^{(n)}, y^{(n)}) \sim \Psi_{\lambda 11}(y_\mu, y_\nu)$

$(\lambda = 1, \ldots, l;\ \mu, \nu = 1, \ldots, n)$.

By means of (35) — (38), we infer from (35) and (26), on account of the definition of **M***,

$$\mathbf{M}(\Psi_{111}, \ldots, \Psi_{l11};\ x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n);$$

that is, the predicates $\Psi_{111}, \ldots, \Psi_{l11}$ satisfy **A** on J'. Thus the equivalence of **A** and **B** has been proved, and so our theorem holds.

(Received 24. April 1950.)

ВКЛАДЫ В ТЕОРИЮ ПРИВЕДЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ РАЗРЕШИМОСТИ

Вторая статья

Три общие один эксистенциалый квантори

Я. ШУРАНИ (Будапешт)

(Резюме)

Теорема, доказываемая в этой работе является одновременно и обострением класс сической теоремы Школема[2] и углублением, данным Гедель[4]-ем и Пепис[5]-эм.

Теорема: К каждой формуле логического исчисления функций может быть построена такая, которая с точки зрения удовлетворяемости эквивалентна ей, бинэрна и имеет вид (5), таким образом может быть приведена к прэнексной форме и в виде $(x)(y)(z)(Eu)\,\mathbf{N}$ и $(x)(y)(Eu)(z)\,\mathbf{N}$. Здесь $\mathbf{N}=\mathbf{N}_1\ \&\ \mathbf{N}_2$ не содержит квантора.

Идея доказательства следующая: можно считать, что данная формула имеет вид $(x_1)\ldots(x_n)(Ey_1)\ldots(Ey_n)\,\mathbf{M}$, где матрица не содержит ничего другого кроме функций $F_1, \ldots, F_l$ двух переменных. Новая область индивидуумов пусть будет множество $(x_1, \ldots, x_n)$ n-мерных векторов, новые функции $\Psi_{\lambda\mu\nu}(x, y) = F\lambda(x_\mu, y_\nu)$, где x_μ и y_ν компоненты векторов x и y. С помощью этого данная формула может быть заменена некоторой префиксой $(x)(Ey)$. Структура новой области индивидуумов и связь новых функций может быть тогда описана малым числом кванторов, если в область индивидуумов мы примем и векторы более низкой меры, чем n и формализируем следующие утверждения: »Всякий вектор $x=(x_1, \ldots, x_\nu)$ имеет ν—1 мерную »проекцию« $X_1(x) = (x_1, \ldots, x_{\nu-1})$ — существует его последний элемент $X_2(x) = x_\nu$ — наконец всякому менее чем n-мерному вектору и всякому элементу y принадлежит вектор $\omega(x, y)$ проекция которого x, а последний элемент-y«. Таким образом построенные четыре арифметические функции $X_1(x)$, $X_2(x)$, $\omega(x, y)$ и (вектор) $\eta(x) = (y_1, \ldots, y_n)$, который по данной формуле состоит из элементов $y_1, \ldots, y_n$, которые могут быть найдены к »компонентам« всякого вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$, легко могут быть объединены в одну арифметическую функцию двух переменных, например при помощню таблицы стр 267. Эту арифметическую функцию определяют формулы (7′)—(10′), из коньюнкции которых следует $\mathbf{N}_1$. (11) гарантирует разницу векторов различной длины. Функции могут быть определены для векторов любой меры с тем, что если x вектор меры меньшей μ, а y ν, то пусть $\Psi_{\lambda\mu\nu}(x, y)$ неверно. Тогда в $\Psi_{\lambda\mu\nu}(x, y)$, x, y могут быть заменены своей проекцией, за исключением того случая, когда x как раз μ-мерный, y ν-мерный. В этом случае вектор заменяется своим последним элементом, если одновременно и соответствующий индекс изменяется на 1. Эти утверждения формализирует (12)—(15). Из коньюнкции (11)—(15) происходит $\mathbf{N}_2$. Формула (5) образованная из этих $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$ будет эквивалентна данной формуле.

ELEMENTARER BEWEIS EINER ISOPERIMETRISCHEN UNGLEICHUNG

Von

L. FEJES TÓTH (Veszprém)
(*Vorgelegt von* G. HAJÓS)

Der Zweck des vorliegenden Aufsatzes ist eine völlig elementare, einfache und anschauliche Ableitung folgenden bekannten[1] Satzes :

Es sei F der Flächeninhalt, L der Umfang, r der Inkreishalbmesser und R der Umkreishalbmesser eines einfach zusammenhängenden Polygons. Dann gelten folgende Ungleichungen :

$$L^2 - 4\pi F \geqq (L - 2\pi r)^2 , \tag{1}$$

$$L^2 - 4\pi F \geqq (2\pi R - L)^2 . \tag{2}$$

Es sei bemerkt, dass bei dem Übergang von einem nicht konvexen Gebiet zur konvexen Hülle L verkleinert, F vergrössert wird, während R unverändert bleibt. Daher genügt es die Ungleichung (2) für konvexe Vielecke zu beweisen. Dagegen kann von der Gültigkeit der Ungleichung (1) für konvexe Vielecke nicht unmittelbar auf ihre Gültigkeit für beliebige Vielecke gefolgert werden. Im Folgenden werden beide Ungleichungen auf einen Schlag bewiesen und zwar für beliebige Vielecke.[2]

Der Beweis beruht auf zwei Hilfssätzen :

HILFSSATZ 1. *Es bedeute S ein System von einer endlichen Anzahl von Strecken, die in beliebiger Weise auf die Ebene ausgestreut sind und t_i die Mittelpunktsmenge derjenigen Kreise vom Halbmesser ϱ, die S in i Punkten schneiden. Dann gilt*[3]

$$t_1 + 2t_2 + 3t_3 + \ldots = 4S\varrho .$$

[1] BONNESEN—FENCHEL, *Theorie der konvexen Körper* (Berlin, 1934) ; A. S. BESICOVITCH, A variant of a classical isoperimetric problem, *Quart. Journ. of Math.*, **20** (1949), S. 84—94.

[2] Es ist leicht zu erkennen, dass unser Beweis vom Boden der Integralgeometrie erwachsen ist. So sind z. B. auch die untenstehenden Hilfssätze Spezialfälle gewisser integralgeometrischer Formeln, und zwar Hilfssatz 1 eines Satzes von POINCARÉ, Hilfssatz 2 der kinematischen Hauptformel von BLASCHKE (W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Integralgeometrie*, Bd. I., (Leipzig—Berlin, 1936)).

[3] Im folgenden bezeichnen wir eine Punktmenge und ihr lineares bzw. zweidimensionales Mass mit demselben Symbol.

Es sei zunächst $s \equiv AB$ eine einzige Strecke. Wir betrachten den Parallelbereich der Strecke s von Abstand ϱ und überdecken ihn zweifach mit Papier. Wir bezeichnen den um A bzw. B geschlagenen Kreis vom Halbmesser ϱ mit K_A, bzw. K_B und scheiden K_A vom oberen, K_B vom unteren Blatt aus. Dann stimmt der einfach, bzw. zweifach überdeckte Teil τ_1, bzw. τ_2 der Ebene mit der Mittelpunktsmenge derjenigen Kreise vom Halbmesser ϱ überein, die s in einem, bzw. in zwei Punkten schneiden. Somit ist $\tau_1 + 2\tau_2$ die Inhaltssumme der Papierblätter:

$$\tau_1 + 2\tau_2 = 2(2\varrho s + \pi\varrho^2) - 2\pi\varrho^2 = 4s\varrho.$$

Betrachten wir nun den allgemeinen Fall. Wir versehen jede Strecke des Systems S mit je einem soeben betrachteten Papiermodell. Es leuchtet ein, dass ein Kreis vom Radius ϱ, dessen Mittelpunkt auf einen i-fach bedeckten Teil der Ebene fällt, das System S genau in i Punkten schneidet.[4] Somit ist $t_1 + 2t_2 + \ldots$ nichts anderes als die Inhaltssumme $4S\varrho$ der Papierblätter, womit Hilfssatz 1 bewiesen ist.

Hilfssatz 2. *Wir bezeichnen mit f_i die Mittelpunktsmenge derjenigen Kreise vom Halbmesser ϱ, deren Durchschnitt mit einem vorgegebenen, einfach zusammenhängenden Vieleck F aus i Teilgebieten besteht. Dann gilt*

$$f_1 + 2f_2 + 3f_3 + \ldots = F + L\varrho + \pi\varrho^2.$$

Um dies einzusehen, zerlegen wir F durch etwa k Diagonalen $d_1, \ldots, d_k$ in $k+1$ konvexe Teilvielecke $F_1, \ldots, F_{k+1}$ vom Umfang $L_1, \ldots, L_{k+1}$. Wir fügen zu jedem Teilvieleck das Papiermodell seines Parallelgebietes vom Abstand ϱ hinzu und heben von dem so entstehenden, zum Teil mehrfach überdeckten Papiermodell des Parallelbereiches von F die Papiermodelle der Parallelbereiche der Diagonalen $d_1, \ldots, d_k$ heraus. Die Inhaltssumme der zurückbleibenden Papierblätter ist dann

$$\sum_{\nu=1}^{k+1} (F_\nu + L_\nu\varrho + \pi\varrho^2) - \sum_{\nu=1}^{k} (2d_\nu\varrho + \pi\varrho^2) = F + L\varrho + \pi\varrho^2.$$

Andererseits ist der von den Papierblättern i-fach bedeckte Flächenteil genau f_i. Schlagen wir nämlich um einen i-fach überdeckten Punkt einen Kreis vom Halbmesser ϱ und bezeichnen die Anzahl derjenigen Teilvielecke, die mit diesem Kreis einen gemeinsamen Punkt besitzen, mit $i+j$. Dann ist die Anzahl

[4] Dabei sind die Schnittpunkte der Multiplizität nach zu rechnen. D. h. läuft der Kreis durch einen Punkt, in dem etwa zwei Strecken des Systems sich schneiden, so muss dieser Punkt als Schnittpunkt zweimal gezählt werden.

der von der Kreisscheibe getroffenen Diagonalen offenbar j. Da aber die in einer getroffenen Diagonale zusammenstossenden beiden Teilvielecke nur eine einzige einfach zusammenhängende Komponente zum Durchschnitt des Kreises und F ergeben, so ist die Komponentenzahl um j weniger als die Anzahl der getroffenen Teilvielecke, d. h. tatsächlich i.

Damit ist der Hilfssatz 2 dargetan.

Nun fehlt zum Beweis der angedeuteten Ungleichungen nur noch ein einziger Schritt. Wählen wir ϱ so, dass $r \leqq \varrho \leqq R$ sei und betrachten das zum Umfang L des Vielecks gehörige Papiermodell I des Hilfssatzes 1, sowie das zum Vieleck gehörige, im Hilfssatz 2 beschriebene Modell II. Da neben der obigen Wahl von ϱ weder ein Kreis vom Halbmesser ϱ ganz im Inneren von F, noch F ganz im Inneren des Kreises liegen kann, so gehören zu jeder Komponente wenigstens zwei Schnittpunkte. Mit anderen Worten: auf jeden i-fach überdeckten Punkt des Modells II fallen wenigstens $2i$ Blätter des Modells I. Somit ist der Gesamtinhalt der im Modell I enthaltenen Papierblätter wenigstens zweimal so gross wie im Modell II. Folglich gilt

$$4L\varrho \geqq 2\,(F + L\varrho + \pi\varrho^2),$$

d.h.

$$L^2 - 4\pi F \geqq (L - 2\pi\varrho)^2 \qquad (r \leqq \varrho \leqq R),$$

womit (1) und (2) bewiesen ist.

Beschränkt man sich auf konvexe Vielecke, so genügt es, sich statt auf den Hilfssatz 2 auf die Inhaltsformel der Parallelbereiche zu berufen. In diesem Fall ist der obige Beweis eine Übersetzung eines integralgeometrischen Beweises der isoperimetrischen Ungleichung von SANTALÓ in die Sprache der Elementargeometrie.

Zum Schluss sei noch bemerkt, dass der obige Beweis auch eine Diskussion der Frage zulässt, wann in unseren Ungleichungen — die ihre Gültigkeit natürlich auch für beliebig gestaltete Bereiche behalten — das Gleichheitszeichen stehen darf. Darauf wollen wir jedoch nicht näher eingehen.

(Eingegangen am 27. Mai 1950.)

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОДНОГО ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОГО НЕРАВЕНСТВА

Л. ФЕЕШ ТОТ (Веспрем)

(*Рвзюме*)

Простое элементарное доказательство следующих известных улучшений изопериметрического неравенства : Если T означает площадь некоторого (не обязательно выпуклого) односвязного многогранника, L его периметр, r и R радиусы вписанных и описанных окружностей, то

$$L^2 - 4\pi T \geqq (L - 2\pi r)^2,$$

$$L^2 - 4\pi T \geqq (2\pi R - L)^2.$$

SUR LES NOMBRES DE LIPSCHITZ GÉNÉRALISÉS

Par

ÁKOS CSÁSZÁR (Budapest)

(*Présenté par* F. RIESZ)

1. Introduction. On sait bien que, dans plusieurs parties de l'analyse, on considère des classes de fonctions qui — sans être dérivables — présentent une certaine sorte de continuité régulière. Par exemple, dans le problème de la convergence des séries de Fourier, c'est la condition de Lipschitz qui intervient très souvent. Cette condition peut s'énoncer de la façon suivante : pour des valeurs convenables de K et ε, on doit avoir

$$|f(x+h)-f(x)| < K|h|^{\alpha}, \quad (0<|h|<\varepsilon).$$

L'exposant α qui figure dans cette formule satisfait d'habitude à l'inégalité $0<\alpha \leqq 1$, puisque c'est dans ce cas que la condition assure la continuité de la fonction $f(x)$ sans impliquer sa dérivabilité.

Pour $\alpha = 1$, la condition de Lipschitz équivaut évidemment à ce que les quatre dérivées de Dini de la fonction $f(x)$ soient finies. Il est naturel de considérer dans le cas $\alpha < 1$ aussi les limites extrêmes des quotients

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h^{\alpha}} \quad \text{et} \quad \frac{f(x)-f(x-h)}{h^{\alpha}},$$

prises pour $h \to +0$. En connaissant les relations étroites qui lient les valeurs des dérivées de Dini d'une fonction quelconque, on peut poser la question si des relations semblables existent entre les limites analogues pour $\alpha < 1$. C'est A.S. BESICOVITCH [1] qui posa ce problème et qui atteignit les premiers résultats dans cette direction. Ses résultats peuvent être résumés ainsi qu'il suit.

Employons les notations :

$$\overline{L}_{\alpha}^{+} f(x) = \overline{\lim_{h \to +0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h^{\alpha}}, \quad \underline{L}_{\alpha}^{+} f(x) = \underline{\lim_{h \to +0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h^{\alpha}},$$

$$\overline{L}_{\alpha}^{-} f(x) = \overline{\lim_{h \to +0}} \frac{f(x)-f(x-h)}{h^{\alpha}}, \quad \underline{L}_{\alpha}^{-} f(x) = \underline{\lim_{h \to +0}} \frac{f(x)-f(x-h)}{h^{\alpha}}.$$

Le théorème classique de DENJOY sur les dérivées de Dini montre qu'on a presque partout

$$\overline{L}_{\alpha}^{+} f(x) \geqq 0, \quad \overline{L}_{\alpha}^{-} f(x) \geqq 0, \quad \underline{L}_{\alpha}^{+} f(x) \leqq 0, \quad \underline{L}_{\alpha}^{-} f(x) \leqq 0 ;$$

BESICOVITCH établit que $\overline{L}_a^+ f(x)$ et $\overline{L}_a^- f(x)$, *étant finis sur un ensemble* E, *sont égaux presque partout sur* E; une proposition semblable étant naturellement valable pour $\underline{L}_a^+ f(x)$ et $\underline{L}_a^- f(x)$. La démonstration de BESICOVITCH ne peut être appliquée que sur des fonctions mesurables, mais j'ai réussi dans un ouvrage récent [2] de la simplifier et en même temps de la rendre valable pour des fonctions quelconques. Quant au lien entre les limites supérieures et inférieures des côtés opposés, étant très fort dans le théorème de DENJOY, BESICOVITCH montra sur un exemple qu'il n'existe pas dans notre cas, puisqu'il construisit une fonction telle qu'on ait presque partout

$$-\infty < \underline{L}_a^+ f(x) = \underline{L}_a^- f(x) < \overline{L}_a^+ f(x) = \overline{L}_a^- f(x) < +\infty .$$

L'un des but de ce mémoire est d'établir une autre relation entre les limites $\overline{L}_a^+ f(x)$ etc., notamment que *si deux de ces limites d'un même côté sont finies presque partout sur un ensemble* E, *alors toutes les quatre sont finies presque partout sur* E. Ou, dans une autre forme : *si une fonction satisfait à une condition de Lipschitz unilatérale sur un ensemble* E, *elle y satisfait presque partout à une condition de Lipschitz bilatérale du même exposant.*

Ce résultat sera établi dans ce qui suit dans une forme plus générale. Nous donnerons le rôle joué par la fonction h^α dans la définition des limites $\overline{L}_a^+ f(x)$ etc. à une fonction $\varphi(h)$ soumise à quelques conditions convenables. Trois de ces conditions s'imposent tout naturellement, à savoir

1. $\varphi(h)$ est croissant pour $h > 0$,
2. $\lim\limits_{h \to +0} \varphi(h) = 0$, $\lim\limits_{h \to +\infty} \varphi(h) = +\infty$,
3. $\lim\limits_{h \to +0} \dfrac{\varphi(h)}{h} = +\infty$.

La quatrième condition consiste de ce que $\varphi(h)$ doit être une fonction *logarithmiquement concave*, c'est à dire elle doit être de la forme

$$\varphi(h) = \exp\,(\Phi(\log\, h)),$$

où $\Phi(t)$ désigne une fonction concave (qui peut être linéaire où avoir des parties linéaires). L'utilité de cette condition n'est pas évidente, on la reconnaît cependant en analysant les raisonnements de nos démonstrations.

La fonction $\varphi(h)$ étant soumise aux quatre conditions précitées, considérons les limites

$$\overline{L}_\varphi^+ f(x) = \overline{\lim_{h \to +0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(h)} \text{ etc.}$$

que nous appellerons *nombres de Lipschitz généralisés*. Nous démontrerons les théorèmes suivants :

(1.1) $\overline{L}_{\varphi}^{+} f(x)$ *et* $\overline{L}_{\varphi}^{-} f(x)$ *étant finis sur un ensemble* E, *ils sont égaux presque partout sur* E.

(1.2) $\overline{L}_{\varphi}^{+} f(x)$ *et* $\underline{L}_{\varphi}^{+} f(x)$ *étant finis sur un ensemble* E, $\overline{L}_{\varphi}^{-} f(x)$ *et* $\underline{L}_{\varphi}^{-} f(x)$ *sont aussi finis presque partout sur* E .

La démonstration de (1.1) ne diffère pas essentiellement de notre démonstration pour le cas spécial $\varphi(h) = h^{\alpha}$. Par contre, le théorème (1.2) sera la conséquence de plusieurs théorèmes auxiliaires qui concernent quelques classes de fonctions qui jouent un rôle analogue dans nos raisonnements que les fonctions à variation bornée jouent dans les théorèmes sur les dérivées de Dini. Nous poursuivrons l'analyse de ces classes de fonctions un peu plus loin que c'est nécessaire pour la démonstration de (1.2), et établirons des théorèmes analogues à ceux de Denjoy concernant les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction soit dérivable presque partout.

Parallèlement à ces problèmes, nous traiterons les problèmes analogues concernant les nombres de Lipschitz généralisés *approximatifs*, c'est à dire les limites

$$\overline{\Lambda}_{\varphi}^{+} f(x) = \overline{\lim_{h \to +0}}^{\text{ap}} \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(h)} \text{ etc.}$$

Nous établirons des résultats parfaitement semblables aux précédents, en nous bornant au cas de $f(x)$ mesurable. Le théorème analogue à (1.1) se trouve, pour le cas spécial $\varphi(h) = h^{\alpha}$, dans la note citée [2]. Les raisonnements qui figurent dans le traitement de ces questions restent essentiellement semblables à ceux qui servent à démontrer les théorèmes (1.1) et (1.2), mais se compliquent un peu en conséquence de la nature plus délicate des limites extrêmes approximatives.

2. La fonction $\varphi(h)$. Dans ce qui suit, $\varphi(h)$ désignera une fonction définie pour $h > 0$ et jouissant des propriétés suivantes :

(2.1) $\varphi(h)$ *est une fonction croissante au sens strict*,

$$(2.2) \quad \lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0, \quad \lim_{h \to +\infty} \varphi(h) = +\infty,$$

$$(2.3) \quad \lim_{h \to +0} \frac{\varphi(h)}{h} = +\infty,$$

(2.4) $\varphi(h) = \exp\left(\Phi(\log h)\right)$, *où* $\Phi(t)$ *est une fonction définie pour* $-\infty < t < +\infty$ *et concave au sens large.*

Conformément à (2.2), nous poserons $\varphi(0) = 0$.

Il est aisé de voir que — en conservant la condition (2.4) — les conditions (2.1) à (2.3) peuvent être remplacées par les suivantes :

(2.5) *$\Phi(t)$ est une fonction croissante au sens strict,*

$$(2.6)\quad \lim_{t\to-\infty} \Phi(t) = -\infty, \quad \lim_{t\to+\infty} \Phi(t) = +\infty,$$

$$(2.7)\quad \lim_{t\to-\infty} (\Phi(t) - t) = +\infty.$$

Dans nos raisonnements, nous n'aurons besoin de la fonction $\varphi(h)$ que pour les valeurs petites de h, c' est à dire, la fonction $\Phi(t)$ ne doit être définie et s atisfaire aux conditions (2.4) — (2.7) que dans un intervalle $-\infty < t < \eta$. Cependant, pour éviter toute complication dans les énoncés, nous supposerons toujours $\eta = +\infty$. Ce n'est pas une restriction de la généralité, puisque toute fonction $\Phi(t)$ satisfaisant aux conditions (2.4) — (2.7) dans l'intervalle $-\infty < t < \eta$, peut être modifiée d'une façon qu'elle reste invariable pour $-\infty < t < \eta' < \eta$ et satisfasse à ces conditions pour $-\infty < t < +\infty$.

Comme exemples des fonctions de ce type, nous citons

$\varphi(h) = h^\alpha$ qui résulte de $\Phi(t) = \alpha t$, $(0 < \alpha < 1)$,

$\varphi(h) = h \log \dfrac{1}{h}$ qui résulte de $\Phi(t) = t + \log(-t)$,

$\varphi(h) = h \exp\left(\log \dfrac{1}{h}\right)^\beta$ qui résulte de $\Phi(t) = t + (-t)^\beta$, $(0 < \beta < 1)$.

Dans ces deux exemples derniers, la remarque précédente doit être employée.

Nous résumons quelques conséquences immédiates des conditions (2.4)—(2.7) qui seront employées plus tard.

(2.8) *La dérivée $\Phi'(t)$ existe pour $-\infty < t < +\infty$, exception faite d'un ensemble dénombrable de valeurs de t, est une fonction décroissante (au sens large) et satisfait à l'inégalité*

$$0 < \Phi'(t) < 1.$$

Démonstration. Ce n'est que la dernière inégalité qu'on doit démontrer. Or, si l'on avait, pour une valeur t_0, $\Phi'(t_0) \leqq 0$, on aurait $\Phi'(t) \leqq 0$ pour $t > t_0$ et $\Phi(t)$ ne serait pas strictement croissant. Si l'on avait $\Phi'(t_1) \geqq 1$, on aurait $\Phi'(t) \geqq 1$ pour $t < t_1$, c'est à dire $\Phi(t) - t$ serait non-décroissant pour $t < t_1$ et ne pourrait pas avoir la limite $+\infty$ pour $t \to -\infty$. (Dans tous ces raisonnements nous utilisons le fait que $\Phi(t)$ est une intégrale indéfinie de sa dérivée.)

(2.9) *On a $\varphi(\lambda h) \leqq \lambda \cdot \varphi(h)$ pour $\lambda > 1$.*

Démonstration. On a

$$\frac{\varphi(\lambda h)}{\varphi(h)} = \exp\Big(\Phi(\log \lambda h) - \Phi(\log h)\Big) = \exp\Big(\Phi(\log h + \log \lambda) - \Phi(\log h)\Big),$$

mais, log λ étant positif, nous avons en vertu de (2.8)

$$\Phi(\log h + \log \lambda) - \Phi(\log h) = \int_{\log h}^{\log h + \log \lambda} \Phi'(t)\, dt \leqq \log \lambda,$$

et, par conséquent,

$$\frac{\varphi(\lambda h)}{\varphi(h)} \leqq \exp\ (\log \lambda) = \lambda,$$

c. q. f. d.

(2.10) $\dfrac{\varphi(\lambda h)}{\varphi(h)}$ *est une fonction non-décroissante de* h *pour* $0 < \lambda < 1$ *fixe.*

Démonstration. On a

$$\frac{\varphi(\lambda h)}{\varphi(h)} = \exp\ (\Phi\ (\log h + \log \lambda) - \Phi\ (\log h)) =$$

$$= \exp\left(\frac{\Phi(\log h + \log \lambda) - \Phi(\log h)}{\log \lambda} \cdot \log \lambda\right);$$

$\Phi(t)$ étant concave, le quotient

$$\frac{\Phi(\log h + \log \lambda) - \Phi(\log h)}{\log \lambda}$$

est non-croissant quand h croît, ce qui donne l'énoncé, log λ étant négatif.

Désignons par $\psi(u)$ la fonction inverse à $\varphi(h)$. On voit aisément qu'elle jouit des propriétés suivantes :

(2.11) $\psi(u)$ *est défini pour* $u > 0$, *il est croissant au sens strict.*

(2.12) *On a* $\lim_{u \to +0} \psi(u) = 0.$

(2.13) $\psi(u) = \exp\ (\Psi(\log\ u))$, *où* $\Psi(v)$ *désigne la fonction inverse à* $\Phi(t)$, *donc une fonction croissante et convexe (au sens large).*

Nous poserons $\psi(0) = 0$ conformément à (2.12).

Nous avons encore

(2.14) *Pour* $1 < \lambda \leqq \lambda_0$ *et* $u \leqq u_0$, *on a*

$$\psi(\lambda u) \leqq K(\lambda_0, u_0) \cdot \lambda \cdot \psi(u).$$

Démonstration. On trouve facilement

$$\frac{\psi(\lambda u)}{\psi(u)} = \exp\ (\Psi(\log u + \log \lambda) - \Psi(\log u)),$$

et

$$\Psi(\log u+\log\lambda)-\Psi(\log u)=\int_{\log u}^{\log u+\log\lambda}\Psi'(v)\,dv.$$

Désignons par $M(\lambda_0, u_0)$ la borne supérieure de $\Psi'(v)$ dans l'intervalle $0<v\leqq\log u_0+\log\lambda_0$ (une telle borne existe, comme $\Psi'(v)$ est monotone), on a alors

$$\Psi(\log u+\log\lambda)-\Psi(\log u)\leqq M(\lambda_0, u_0)\cdot\log\lambda,$$

donc

$$\frac{\varphi(\lambda u)}{\varphi(u)}\leqq\exp\left(M(\lambda_0, u_0)\right)\lambda=K(\lambda_0, u_0)\cdot\lambda,$$

c.q.f.d.

3. Les fonctions (P_ψ) **etc.** Dans ce qui suit, nous allons employer la notation suivante : I désignant un intervalle $[a, b]$, $(a<b)$, $f(I)$ désignera la différence $f(b)-f(a)$. Nous dirons que l'intervalle I *repose* sur l'ensemble E, si ses extrémités appartiennent à E. Nous désignerons par $|y|_+$ et $|y|_-$ la partie positive et la partie négative du nombre y, c'est à dire

$$|y|_+=\max(y, 0),\quad |y|_-=|\min(y, 0)|.$$

Nous dirons que la fonction $f(x)$ jouit de la propriété (P_ψ) sur l'ensemble E, ou tout court : $f(x)$ est (P_ψ) sur E, si les sommes

$$\sum_{\nu=1}^{n}\psi\left(|f(I_\nu)|_+\right),$$

où $\{I_\nu\}$ est un système quelconque d'intervalles reposant sur E et n'empiétant pas les uns sur les autres, sont bornées. D'une façon analogue, nous définissons la propriété (N_ψ) en remplaçant dans la définition précédente $|f(I_\nu)|_+$ par $|f(I_\nu)|_-$. Enfin, si nous remplaçons $|f(I_\nu)|_+$ par $|f(I_\nu)|$, nous obtenons la définition de la propriété (A_ψ).

On voit aisément que

(3.1) *La propriété* (A_ψ) *équivaut à l'ensemble des propriétés* (P_ψ) *et* (N_ψ).

Nous aurons besoin de la proposition suivante :

(3.2) *Pour que la fonction* $f(x)$ *soit* (P_ψ) *sur l'ensemble borné* E, *il faut et il suffit qu'une fonction non-décroissante* $P(x)$ *existe, telle que, pour tout intervalle* I *reposant sur* E, *on ait*

$$f(I)\leqq\varphi(P(I)). \tag{3.3}$$

Démonstration. Désignons par a et b les bornes de l'ensemble E. Supposons d'abord que $f(x)$ soit (P_ψ) sur E. Définissons $P(x)$ par $P(x) = 0$ pour $x \leqq a$ et par

$$P(x) = \sup_{I_\nu \subset [a,\, x]} \sum_{\nu=1}^{n} \psi\,(|f(I_\nu)|_+)$$

pour $x > a$, $\{I_\nu\}$ désignant toujours un système fini d'intervalles qui reposent sur E et n'empiètent pas les uns sur les autres. Il est clair que $P(x)$ est non-décroissant. $I = (\alpha, \beta)$ étant un intervalle reposant sur E, on a

$$\psi(|f(I)|_+) \leqq P(\beta) - P(\alpha)\ ,$$

puisque l'intervalle I peut être adjoint à tout système fini d'intervalles figurant dans la définition de $P(\alpha)$ pour former un système d'intervalles qui figure dans la définition de $P(\beta)$. On en obtient facilement l'inégalité (3.3).

Supposons maintenant qu'une fonction $P(x)$ de la propriété indiquée existe. On a alors pour un intervalle I reposant sur E

$$|f(I)|_+ = \max\,(f(I), 0) \leqq \max\,(\varphi(P(I)), 0) = \varphi(P(I)),$$

donc

$$\psi(|f(I)|_+) \leqq P(I)$$

et par conséquent pour un système d'intervalles n'empiétant pas les uns sur les autres et reposant sur E, on tire

$$\sum_{\nu=1}^{n} \psi(|f(I_\nu)|_+) \leqq \sum_{\nu=1}^{n} P(I_\nu) \leqq P(b) - P(a).$$

$f(x)$ est donc (P_ψ) sur E.

On obtient par un raisonnement semblable :

(3.4) *Pour que la fonction $f(x)$ soit (N_ψ) sur l'ensemble borné E, il faut et il suffit qu'une fonction non-décroissante $N(x)$ existe, telle que, pour tout intervalle I reposant sur E, on ait*

$$f(I) \geqq -\varphi(N(I)).$$

Introduisons encore la notion de l'*oscillation positive* $\Omega_+(I)$ de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle fermé I :

$$\Omega_+(I) = \sup_{J \subset I} |f(J)|_+\ ,$$

et d'une façon analogue

$$\Omega_-(I) = \sup_{J \subset I} |f(J)|_-\ ,$$

pendant que $\Omega(I)$ désignera l'oscillation ordinaire de $f(x)$:

$$\Omega(I) = \sup_{J \subset I} |f(J)|.$$

$\{I_\nu\}$ désignant, comme toujours, un système fini d'intervalles reposant sur l'ensemble E et n'empiétant pas les uns sur les autres, nous définissons les propriétés (P^*_ψ), (N^*_ψ) et (A^*_ψ) de sorte que les sommes

$$\sum_{\nu=1}^{n} \psi(\Omega_+(I_\nu)) \text{ ou } \sum_{\nu=1}^{n} \psi(\Omega_-(I_\nu)) \text{ ou } \sum_{\nu=1}^{n} \psi(\Omega(I_\nu))$$

soient bornées. Nous obtenons pour ces notions des propositions analogues aux propositions (3.1) à (3.4) :

(3.5) *La propriété* (A^*_ψ) *équivaut à l'ensemble des propriétés* (P^*_ψ) *et* (N^*_ψ).

(3.6) *Pour que la fonction* $f(x)$ *soit* (P^*_ψ) *sur l'ensemble borné* E, *il faut et il suffit qu'une fonction non-décroissante* $P^*(x)$ *existe, telle que, pour tout intervalle* I *reposant sur* E, *on ait*

$$\Omega_+(I) \leqq \varphi(P^*(I)) \ .$$

(3.7) *Pour que la fonction* $f(x)$ *soit* (N^*_ψ) *sur l'ensemble borné* E, *il faut et il suffit qu'une fonction non-décroissante* $N^*(x)$ *existe, telle que, pour tout intervalle* I *reposant sur* E, *on ait*

$$\Omega_-(I) \leqq \varphi(N^*(I)) \ .$$

Nous dirons que la fonction $f(x)$ est $(\mathsf{P}^*_\psi\mathsf{G})$ sur l'ensemble E, si $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ de sorte que $f(x)$ est (P_ψ) sur chacun des ensembles E_n. Nous définissons pareillement les propriétés $(\mathsf{N}_\psi\mathsf{G})$, $(\mathsf{A}_\psi\mathsf{G})$, $(\mathsf{P}^*_\psi\mathsf{G})$, $(\mathsf{N}^*_\psi\mathsf{G})$, $(\mathsf{A}^*_\psi\mathsf{G})$.

Les fonctions (P_ψ) etc. joueront un rôle dans la théorie des nombres de Lipschitz généralisés approximatifs, tandis que les fonctions (P^*_ψ) etc. figureront dans la théorie des nombres de Lipschitz généralisés ordinaires.

4. Les nombres de Lipschitz généralisés ordinaires et approximatifs. Nous admettrons les définitions suivantes :

$$\overline{L}^+_\varphi f(x) = \overline{\lim_{h\to+0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)} \ , \quad \underline{L}^+_\varphi f(x) = \underline{\lim_{h\to+0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)} \ ,$$

$$\overline{L}^-_\varphi f(x) = \overline{\lim_{h\to+0}} \frac{f(x)-f(x-h)}{\varphi(h)} \ , \quad \underline{L}^-_\varphi f(x) = \underline{\lim_{h\to+0}} \frac{f(x)-f(x-h)}{\varphi(h)} \ ,$$

$$\overline{\Lambda}^+_\varphi f(x) = \overline{\lim_{h\to+0}\,\mathrm{ap}} \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)} \ , \quad \underline{\Lambda}^+_\varphi f(x) = \underline{\lim_{h\to+0}\,\mathrm{p}} \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)} \ ,$$

$$\overline{\Lambda}^-_\varphi f(x) = \overline{\lim_{h\to+0}\,\mathrm{ap}} \frac{f(x)-f(x-h)}{\varphi(h)} \ , \quad \underline{\Lambda}^-_\varphi f(x) = \underline{\lim_{h\to+0}\,\mathrm{ap}} \frac{f(x)-f(x-h)}{\varphi(h)} \ .$$

(4.1) *On a presque partout*

$$\overline{L}^+_\varphi f(x) \geqq 0, \qquad \overline{L}^-_\varphi f(x) \geqq 0, \qquad \underline{L}^+_\varphi f(x) \leqq 0, \qquad \underline{L}^-_\varphi f(x) \leqq 0.$$

Démonstration. Nous prouvons la première de ces inégalités, le raisonnement est semblable pour les autres.

Si pour une valeur de x, on a $\overline{L}_{\varphi}^{+} f(x) < 0$, on doit avoir pour $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ convenables

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)} < -\varepsilon < 0 \text{ pour } 0 < h < \delta.$$

D'où l'on tire

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)} \cdot \frac{\varphi(h)}{h} < -\varepsilon \cdot \frac{\varphi(h)}{h}, \quad (0 < h < \delta).$$

On a donc en vertu de (2.3)

$$\lim_{h \to +0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\infty,$$

ce qui ne peut avoir lieu que sur un ensemble de mesure nulle (voir par exemple [3], p. 271).

(4.2) *On a presque partout*

$$\overline{\Lambda}_{\varphi}^{+} f(x) \geqq 0, \quad \overline{\Lambda}_{\varphi}^{-} f(x) \geqq 0, \quad \underline{\Lambda}_{\varphi}^{+} f(x) \leqq 0, \quad \underline{\Lambda}_{\varphi}^{-} f(x) \leqq 0.$$

Démonstration. Tout comme dans le raisonnement précédent, on voit que $\overline{\Lambda}_{\varphi}^{+} f(x) < 0$ implique que la dérivée approximative de $f(x)$ est égale à $-\infty$ dans le point x. Ceci ne peut avoir lieu que dans les points d'un ensemble de mesure nulle [4].

5. Les nombres de Lipschitz généralisés des fonctions $(P_{\psi}^{*} G)$ et $(P_{\psi}^{*} G)$.

(5.1) *Si la fonction $f(x)$ est $(P_{\psi}^{*} G)$ sur l'ensemble E, on a presque partout sur E*

$$0 \leqq \overline{L}_{\varphi}^{+} f(x) < +\infty, \quad 0 \leqq \overline{L}_{\varphi}^{-} f(x) < +\infty.$$

Démonstration. En vertu de (4.1), on n'a qu'à démontrer que les inégalités

$$\overline{L}_{\varphi}^{+} f(x) < +\infty, \quad \overline{L}_{\varphi}^{-} f(x) < +\infty \tag{5.2}$$

sont valables presque partout sur E. On peut se borner évidemment au cas où $f(x)$ est (P_{ψ}^{*}) sur l'ensemble borné E.

Dans cette hypothèse, désignons par $P^{*}(x)$ une fonction non-décroissante et telle que, pour tout intervalle I reposant sur E, on ait

$$\Omega_{+}(I) \leqq \varphi(P^{*}(I)),$$

l'existence d'une telle fonction étant garantie par (3.6). Désignons par A l'ensemble des points de E qui en sont points de densité extérieure et dans lesquels $P^*(x)$ possède une dérivée finie. On a $|E - A| = 0$.

Nous montrons que, dans les points de l'ensemble A, les inégalités (5.2) sont valables. Nous nous bornons à la première de ces inégalités. Soit donc $x_0 \in A$ et choisissons le nombre $\delta > 0$ assez petit pour que les inégalités

$$|E \cdot (x_0, x_0 + h)| > \tfrac{1}{2} h$$

et

$$|P^*(x_0 + h) - P^*(x_0)| < K \cdot h, \quad (K > 1)$$

soient valables pour $0 < h < \delta$. Pour toute valeur positive de h moindre que $\frac{\delta}{2}$, on trouve alors entre $x_0 + h$ et $x_0 + 2h < x_0 + \delta$ un point x_1 appartenant à E. On a donc

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{\varphi(h)} \leqq \frac{\Omega_+(x_0, x_1)}{\varphi(h)} \leqq \frac{\varphi(P^*(x_1) - P^*(x_0))}{\varphi(h)} <$$

$$< \frac{\varphi(K \cdot (x_1 - x_0))}{\varphi(h)} = \frac{\varphi\left(\frac{K \cdot (x_1 - x_0)}{h} \cdot h\right)}{\varphi(h)} \leqq \frac{\varphi(2Kh)}{\varphi(h)} \leqq 2K,$$

en vertu de (2.9), pour $0 < h < \frac{\delta}{2}$. On en tire

$$\overline{L}_\varphi^+ f(x_0) \leqq 2K < +\infty,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Les propositions suivantes résultent immédiatement de ce que nous venons de prouver :

(5.3) *$f(x)$ étant $(\mathsf{N}_\psi^* \mathsf{G})$ sur E, on a presque partout sur E*

$$-\infty < \underline{L}_\varphi^+ f(x) \leqq 0, \quad -\infty < \underline{L}_\varphi^- f(x) \leqq 0.$$

(5.4) *$f(x)$ étant $(\mathsf{A}_\psi^* \mathsf{G})$ sur E, on a presque partout sur E*

$$-\infty < \underline{L}_\varphi^+ f(x) \leqq 0 \leqq \overline{L}_\varphi^+ f(x) < +\infty,$$

$$-\infty < \underline{L}_\varphi^- f(x) \leqq 0 \leqq \overline{L}_\varphi^- f(x) < +\infty.$$

Nous établirons des résultats pareils pour les fonctions $(\mathsf{P}_\psi \mathsf{G})$ et les nombres de Lipschitz généralisés approximatifs, tout en nous bornant aux fonctions mesurables. Mais, pour cela, nous aurons besoin de quelques propositions auxiliaires.

(5.5) *Une fonction $f(x)$, bornée et jouissant de la propriété (P_ψ) sur un ensemble E, coïncide sur cet ensemble avec une fonction $g(x)$ qui jouit de la même propriété sur la droite entière.*

Démonstration. Désignons par $\bar{E}$ la fermeture de E. Posons $g(x) = f(x)$ pour $x \in E$, tandis que pour $x \in \bar{E} - E$, $g(x)$ prenne une des valeurs $\lim_{x_n \to x} f(x_n)$, $x_n \in E$. $f(x)$ étant borné sur E, une telle limite existe toujours. $g(x)$ est (P_ψ) sur $\bar{E}$, puisqu'un système fini d'intervalles, reposant sur $\bar{E}$ et n'empiétant pas les uns sur les autres, peut être modifié de façon que les intervalles nouveaux n'empiètent non plus les uns sur les autres, reposent sur E, et la somme $\sum_{\nu=1}^{n} \psi(|\, g(I_\nu)\,|_+)$ diffère de sa valeur originelle aussi peu que l'on veut.

(α, β) étant un intervalle contigu à $\bar{E}$, posons $g(x) = g(\alpha)$ pour $\alpha < x < \beta$. Si a est la borne inférieure de $\bar{E}$, posons $g(x) = g(a)$ pour $x < a$; si b est la borne supérieure de $\bar{E}$, posons $g(x) = g(b)$ pour $x > b$. Il est clair que $g(x)$, ainsi défini, est (P_ψ) sur la droite entière et coïncide avec $f(x)$ sur l'ensemble E.

(5.6) *Une fonction $g(x)$, (P_ψ) sur la droite entière, est mesurable.*

Démonstration. Désignons par $g_+(x)$ la limite suivante :

$$g_+(x) = \overline{\lim_{h \to +0}}\, g(x+h).$$

On voit aisément que l'ensemble des points x pour lesquels on a

$$g_+(x) - g(x) > \frac{1}{n}$$

est dénombrable, on a donc

$$g(x) \geqq g_+(x),$$

exception faite des points d'un ensemble dénombrable. De là, il s'ensuit que l'ensemble des points x où $g(x) \geqq \alpha$ contient ses points limites du côté droit, excepté peut-être un ensemble dénombrable de ces points. Comme les points de l'ensemble

$$\mathop{\mathbf{E}}_{x}\, [g(x) \geqq \alpha]$$

qui en sont points limites du côté gauche mais qui ne sont pas points limites du côté droit sont en multitude dénombrable au plus, on obtient que l'ensemble $\mathop{\mathbf{E}}_{x}\, [g(x) \geqq \alpha]$ diffère de sa fermeture en un ensemble dénombrable au plus, il est donc mesurable. Cela montre que $g(x)$ est mesurable.

(5.7) *La fonction $f(x)$ étant mesurable et* $(\mathsf{P}_\psi\mathsf{G})$ *sur l'ensemble mesurable E, on a presque partout sur E*

$$\overline{\Lambda}_\varphi^+ f(x) < +\infty, \quad \overline{\Lambda}_\varphi^- f(x) < +\infty. \tag{5.8}$$

Démonstration. Nous avons $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$, la fonction $f(x)$ étant (P_ψ) sur chacun des ensembles E_n. Nous montrons qu'on peut choisir les ensembles E_n *mesurables.* Car, d'après (5.5) et (5.6), $f(x)$ coïncide sur E_n avec une fonction $g(x)$, mesurable et (P_ψ) sur la droite entière, et, par conséquent, on peut remplacer E_n par la partie commune de E et de l'ensemble E $[f(x) = g(x)]$, qui est mesurable. On peut encore supposer que les ensembles E_n sont bornés.

Les ensembles E_n étant ainsi choisis, fixons la valeur de n. On trouve selon (3.2) une fonction non-décroissante $P(x)$ telle qu'on ait pout tout intervalle I reposant sur E_n

$$f(I) \leqq \varphi(P(I)) \ . \tag{5.9}$$

Désignons par A l'ensemble des points de E_n qui en sont points de densité et dans lesquels la dérivée $P'(x)$ existe et est finie. On a $|E_n - A| = 0$. La proposition sera donc établie si nous montrerons que les inégalités (5.8) sont valables pour $x \in A$.

A ce but, posons $x_0 \in A$. Nous établirons pour $x = x_0$ la première des inégalités (5.8). On a en vertu de (5.9) pour $\delta > 0$ suffisamment petit

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x - x_0)} \leqq \frac{\varphi(P(x) - P(x_0))}{\varphi(x - x_0)} \leqq \frac{\varphi((P'(x_0) + 1)(x - x_0))}{\varphi(x - x_0)}$$

$$\text{pour } 0 < x - x_0 < \delta, \ x \in E_n \ .$$

En appliquant (2.9), on a donc

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x - x_0)} \leqq P'(x_0) + 1 \text{ pour } 0 < x - x_0 < \delta, \ x \in E_n \ . \tag{5.10}$$

Les points x dans lesquels (5.10) n'est pas valable appartiennent donc pour $0 < x - x_0 < \delta$ à l'ensemble complémentaire de E_n. E_n étant mesurable, cet ensemble a la densité 0 au point x_0, puisque $x_0 \in A$ est point de densité de E_n. On en tire l'inégalité

$$\overline{\Lambda}_\varphi^+ f(x_0) \leqq P'(x_0) + 1 \ ,$$

ce qui était encore à démontrer.

Par la combinaison de (4.2) et (5.7), on tire

(5.11) *La fonction $f(x)$ étant mesurable et* $(\mathsf{P}_\psi \mathsf{G})$ *sur l'ensemble mesurable E, on a presque partout sur E*

$$0 \leqq \overline{\Lambda}_\varphi^+ f(x) < +\infty, \qquad 0 \leqq \overline{\Lambda}_\varphi^- f(x) < +\infty.$$

On obtient d'une façon analogue

(5.12) *La fonction $f(x)$ étant mesurable et* $(\mathsf{N}_\psi \mathsf{G})$ *sur l'ensemble mesurable E, on a presque partout sur E*

$$-\infty < \underline{\Lambda}_\varphi^+ f(x) \leqq 0, \qquad -\infty < \underline{\Lambda}_\varphi^- f(x) \leqq 0 \ .$$

(5.13) *La fonction $f(x)$ étant mesurable et* $(\mathsf{A}_\psi \mathsf{G})$ *sur l'ensemble mesurable E, on a presque partout sur E*

$$-\infty < \underline{\Lambda}_\varphi^+ f(x) \leqq 0 \leqq \overline{\Lambda}_\varphi^+ f(x) < +\infty \ ,$$
$$-\infty < \underline{\Lambda}_\varphi^- f(x) \leqq 0 \leqq \overline{\Lambda}_\varphi^- f(x) < +\infty \ .$$

6. Critères sur les classes $(\mathsf{P}_\psi \mathsf{G})$ **etc.** Dans ce qui suit, nous établirons des résultats qui permettent de constater le caractère $(\mathsf{P}_\psi \mathsf{G})$ etc. d'une fonction (x) sur un ensemble E dès que l'on sait que quelques-uns parmi ses nombres de Lipschitz généralisés sont finis.

(6.1) *Si pour une fonction $f(x)$ on a*

$$-\infty < \underline{L}_\varphi^+ f(x) \leqq \overline{L}_\varphi^+ f(x) < +\infty \quad \textit{pour} \quad x \in E,$$

alors $f(x)$ est $(\mathsf{A}_\psi^* \mathsf{G})$ *sur E.*

Démonstration. Désignons pour $p = 1, 2, \ldots$ par E_p l'ensemble des points x avec

$$x \in E \text{ et } \left|\underline{L}_\varphi^+ f(x)\right| < p, \quad \left|\overline{L}_\varphi^+ f(x)\right| < p \ .$$

Désignons alors pour $q = 1, 2, \ldots$ par E_{pq} l'ensemble des points x pour lesquels on a $x \in E_p$ et

$$|f(x+h) - f(x)| < p\,\varphi(h) \quad \text{pour} \quad 0 < h \leqq \frac{1}{q} \ .$$

Considérons enfin pour $r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ l'ensemble E_{pqr} qui consiste de la partie commune de E_{pq} et de l'intervalle $\left[\frac{r}{q}, \frac{r+1}{q}\right]$. On a évidemment

$$E = \sum_{p=1}^{\infty}{}' \sum_{q=1}^{\infty}{}' \sum_{r=-\infty}^{+\infty}{}' E_{pqr} \ ,$$

de sorte qu'il suffit de démontrer que la fonction $f(x)$ est (A_ψ^*) sur chacun des ensembles E_{pqr}.

Fixons à ce but les valeurs p, q, r et considérons un intervalle $I = [\alpha, \beta]$ reposant sur E_{pqr} . On a alors

$$\alpha \in E_{pqr} \quad \text{et} \quad 0 < \beta - \alpha \leqq \frac{1}{q},$$

de sorte que pour $x \in I$, $y \in I$, les inégalités

$$|f(x) - f(\alpha)| \leqq p\,\varphi(x - \alpha) \leqq p\,\varphi(\beta - \alpha),$$
$$|f(y) - f(\alpha)| \leqq p\,\varphi(y - \alpha) \leqq p\,\varphi(\beta - \alpha)$$

sont valables. On a donc

$$|f(x) - f(y)| \leqq 2p\,\varphi(\beta - \alpha)$$

pour $x \in I$, $y \in I$ et, par conséquent,

$$\Omega(I) \leqq 2p\,\varphi(\beta - \alpha).$$

En vertu de (2.14), on en tire

$$\psi(\Omega(I)) \leqq K \cdot 2p \cdot \psi(\varphi(\beta - \alpha)) = K \cdot 2p \cdot (\beta - \alpha),$$

K étant un nombre ne dépendant que de p et de q. $\{I_\nu\}$ étant alors un système quelconque d'intervalles reposant sur E_{pqr} et n'empiétant pas les uns sur les autres, on a

$$\sum_{\nu=1}^{n} \psi(\Omega(I_\nu)) \leqq 2p\,K \sum_{\nu=1}^{n} (\beta_\nu - \alpha_\nu) \leqq 2p\,K \frac{1}{q},$$

c'est à dire, $f(x)$ est (A^*_ψ) sur E_{pqr}.

(6.2) *Si, pour une fonction $f(x)$, on a*

$$\bar{L}^+_\varphi f(x) < +\infty \quad \textit{pour} \quad x \in E,$$

laors $f(x)$ est $(\mathsf{P}_\psi\mathsf{G})$ sur E.

Démonstration. Désignons pour $p = 1, 2, \ldots$ par E_p l'ensemble des points x avec

$$x \in E \quad \text{et} \quad \bar{L}^+_\varphi f(x) < p .$$

Désignons alors pour $q = 1, 2, \ldots$ par E_{pq} l'ensemble des points x pour lesquels on a

$$x \in E_p \quad \text{et} \quad f(x + h) - f(x) < p\,\varphi(h) \quad \text{pour} \quad 0 < h \leqq \frac{1}{q}.$$

Considérons enfin l'ensemble E_{pqr} consistant de la partie commune de E_{pq} et de $\left[\frac{r}{q}, \frac{r+1}{q}\right]$, $(r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Tout comme dans le raisonnement précédent, nous montrons que $f(x)$ est (P_ψ) sur E_{pqr}. Cela résulte du fait que pour $\alpha \in E_{pqr}$, $\beta \in E_{pqr}$, $\alpha < \beta$ on a

$$f(\beta) - f(\alpha) < p\,\varphi(\beta - \alpha)\,,$$

et, par conséquent,

$$\psi(|f(\beta) - f(\alpha)|_+) < \psi(p \cdot \varphi(\beta - \alpha)) \leqq K(\beta - \alpha)\,,$$

d'après (2.14), la fin de la démonstration étant semblable à la précédente.

Les propositions suivantes sont des conséquences immédiates de ce que nous venons d'établir.

(6.3) *Si, pour une fonction $f(x)$, on a l'une des inégalités*

$$-\infty < \underline{L}_{\varphi}^{+} f(x) \leqq \overline{L}_{\varphi}^{+} f(x) < +\infty$$

ou

$$-\infty < \underline{L}_{\varphi}^{-} f(x) \leqq \overline{L}_{\varphi}^{-} f(x) < +\infty$$

pour $x \in E$, alors $f(x)$ est $(\mathsf{A}_{\psi}^{*}\mathsf{G})$ sur E.

(6.4) *Si, pour une fonction $f(x)$, on a l'une des inégalités*

$$\overline{L}_{\varphi}^{+} f(x) < +\infty \quad \text{ou} \quad \overline{L}_{\varphi}^{-} f(x) < +\infty$$

pour $x \in E$, alors $f(x)$ est $(\mathsf{P}_{\psi}\mathsf{G})$ sur E.

(6.5) *Si, pour une fonction $f(x)$, on a l'une des inégalités*

$$\underline{L}_{\varphi}^{+} f(x) > -\infty \quad \text{ou} \quad \underline{L}_{\varphi}^{-} f(x) > -\infty$$

pour $x \in E$, alors $f(x)$ est $(\mathsf{N}_{\psi}\mathsf{G})$ sur E.

Les propositions suivantes sont d'un caractère un peu différent.

(6.6) *Si, pour une fonction $f(x)$ qui est $(\mathsf{N}_{\psi}\mathsf{G})$ sur l'ensemble E, on a*

$$\overline{L}_{\varphi}^{+} f(x) < +\infty \text{ et } \overline{L}_{\varphi}^{-} f(x) < +\infty$$

pour $x \in E$, alors $f(x)$ est $(\mathsf{A}_{\psi}^{*}\mathsf{G})$ sur E.

Démonstration. On a par hypothèse $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ d'une façon que $f(x)$ est (N_{ψ}) sur E_n pour $n = 1, 2, \ldots$. Désignons par E_{np} l'ensemble des points x avec

$$x \in E_n \text{ et } \overline{L}_{\varphi}^{+} f(x) < p, \qquad \overline{L}_{\varphi}^{-} f(x) < p, \qquad (p = 1, 2, \ldots)\,.$$

Désignons par E_{npq} l'ensemble des points x pour lesquels on a

$$x \in E_{np}$$

et

$$f(x + h) - f(x) < p\,\varphi(h), \quad f(x) - f(x - h) < p\,\varphi(h)$$

$$\text{pour} \quad 0 < h \leqq \frac{1}{q}\,, \qquad (q = 1, 2, \ldots)\,.$$

Posons enfin

$$E_{npqr}=E_{npq}\cdot\left[\frac{r}{q}\,,\ \frac{r+1}{q}\right],\quad (r=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)\ .$$

Nous allons montrer que la fonction $f(x)$ est (A^*_φ) sur chacun des ensembles E_{npqr}, ce qui entraîne évidemment la proposition.

Considérons à ce but un intervalle $I=[\alpha,\ \beta]$ reposant sur E_{npqr}, les valeurs n, p, q, r étant fixes. On a pour $\alpha\leqq x<y\leqq\beta$

$$f(y)-f(\alpha)<p\,\varphi(y-\alpha)\leqq p\,\varphi(\beta-\alpha)\ ,$$
$$f(\beta)-f(x)<p\,\varphi(\beta-x)\leqq p\,\varphi(\beta-\alpha)\ ,$$

donc

$$f(y)-f(x)<2\,p\,\varphi(\beta-\alpha)-(f(\beta)-f(\alpha))\ .$$

On a de même

$$f(x)-f(\alpha)\leqq p\,\varphi(x-\alpha)\leqq p\,\varphi(\beta-\alpha)\ ,$$
$$f(\beta)-f(y)\leqq p\,\varphi(\beta-y)\leqq p\,\varphi(\beta-\alpha)\ ,$$

donc

$$f(x)-f(y)\leqq 2\,p\,\varphi(\beta-\alpha)-(f(\beta)-f(\alpha))\ ,$$

et par conséquent

$$|f(y)-f(x)|\leqq 2\,p\,\varphi(\beta-\alpha)-(f(\beta)-f(\alpha))\ .$$

On en tire

$$\Omega(\alpha,\beta)\leqq 2\,p\,\varphi(\beta-\alpha)-(f(\beta)-f(\alpha))\ .$$

Considérons maintenant un système $\{I_\nu\}$ d'intervalles reposant sur E_{npqr} et n'empiétant pas les uns sur les autres. Désignons par Σ' la sommation étendue sur les valeurs de ν avec

$$f(\beta_\nu)-f(\alpha_\nu)\geqq -2\,p\,\varphi(\beta_\nu-\alpha_\nu)\,,$$

($\alpha_\nu<\beta_\nu$ désignant les extrémités de I_ν), et par Σ'' la sommation étendue au reste des indices. On a alors

$$\sum{}'\,\psi(\Omega(I_\nu))\leqq\sum{}'\,\psi(4\,p\,\varphi(\beta_\nu-\alpha_\nu))\leqq K\cdot 4\,p\sum{}'(\beta_\nu-\alpha_\nu)$$

et

$$\sum{}''\psi(\Omega(I_\nu))\leqq\sum{}''\,\psi(-2\,(f(\beta_\nu)-f(\alpha_\nu)))=$$
$$=\sum{}''\,\psi(2\,|f(\beta_\nu)-f(\alpha_\nu)|_-)\leqq K\cdot 2\sum{}''\,\psi(|f(\beta_\nu)-f(\alpha_\nu)|_-)\ .$$

La première de ces sommes étant moindre que $K\cdot 4p\cdot\dfrac{1}{q}$ et la deuxième étant bornée par hypothèse, on trouve que $\Sigma'+\Sigma''$ est borné, ce qu'il fallait démontrer.

On trouve par un raisonnement analogue

(6.7) *Si, pour une fonction $f(x)$ qui est $(\mathsf{P}_\varphi\mathsf{G})$ sur l'ensemble E, on a*

$$\underline{L}^+_\varphi f(x)>-\infty \text{ et } \underline{L}^-_\varphi f(x)>-\infty$$

pour $x\in E$, alors $f(x)$ est $(\mathsf{A}^*_\varphi\mathsf{G})$ sur E.

Dans les propositions suivantes, nous tirerons des conséquences du fait que quelques-uns des nombres de Lipschitz généralisés approximatifs de la fonction $f(x)$ sont finis.

(6.8) *Si, pour une fonction $f(x)$, on a*

$$-\infty < \underline{\Lambda}_{\varphi}^{+} f(x) \leqq \overline{\Lambda}_{\varphi}^{+} f(x) < +\infty$$

pour $x \in E$, alors $f(x)$ est $(\mathsf{A}_{\psi}\mathsf{G})$ sur E .

Démonstration. Désignons par E_p pour $p = 1, 2, \ldots$ l'ensemble des points x pour lesquels on a

$$x \in E\ , \qquad -p < \underline{\Lambda}_{\varphi}^{+} f(x) \leqq \overline{\Lambda}_{\varphi}^{+} f(x) < p\ .$$

Désignons ensuite pour $q = 1, 2, \ldots$ par E_{pq} l'ensemble des points x avec

$$x \in E_p$$

et

$$\mathop{\mathbf{E}}_{y}\left[\, |f(y) - f(x)| > p\,\varphi(y - x)\ ,\quad x < y \leqq x + h \,\right] < \frac{h}{4} \text{ pour } 0 < h \leqq \frac{1}{q}\ .$$

Désignons enfin pour $r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ par E_{pqr} la partie commune de E_{pq} et de l'intervalle $\left[\frac{r}{2q}\ ,\ \frac{r+1}{2q}\right]$. On a évidemment

$$E = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} E_{pqr}\ .$$

Il suffit donc de montrer que $f(x)$ est (A_{ψ}) sur chacun des ensembles E_{pqr} .

Considérons à ce but un intervalle $I = [\alpha, \beta]$ reposant sur E_{pqr} (p, q, r étant fixes). Posons $\gamma = 2\beta - \alpha$. On a alors

$$\left|\mathop{\mathbf{E}}_{x}\left[\, |f(x) - f(\alpha)| > p\,\varphi(x - \alpha)\ ,\ \alpha < x \leqq \gamma \,\right]\right| < \frac{\gamma - \alpha}{4} = \frac{\gamma - \beta}{2}\ ,$$

$$\left|\mathop{\mathbf{E}}_{x}\left[\, |f(x) - f(\beta)| > p\,\varphi(x - \beta)\ ,\ \beta < x \leqq \gamma \,\right]\right| < \frac{\gamma - \beta}{4}\ .$$

Il y a donc un point x_0 avec

$$\beta < x_0 \leqq \gamma,$$

$$|f(x_0) - f(\alpha)| \leqq p\,\varphi(x_0 - \alpha) \leqq p\,\varphi(\gamma - \alpha),$$

$$|f(x_0) - f(\beta)| \leqq p\,\varphi(x_0 - \beta) \leqq p\,\varphi(\gamma - \alpha),$$

d'où l'on tire selon (2.9)

$$|f(\beta) - f(\alpha)| \leqq 2\,p\,\varphi(\gamma - \alpha) \leqq 4\,p\,\varphi(\beta - \alpha).$$

Il s'ensuit que pour tout système $\{I_\nu\}$ d'intervalles reposant sur E_{pqr} et n'empiétant pas les uns sur les autres, on a

$$\sum_{\nu=1}^{n} \psi(|f(I_\nu)|) \leqq \sum_{\nu=1}^{n} \psi(4p \cdot \varphi(\beta_\nu - \alpha_\nu)) \leqq K \cdot 4p \sum_{\nu=1}^{n} (\beta_\nu - \alpha_\nu) ,$$

ce qui montre que $f(x)$ est (A_ψ) sur E_{pqr} .

On obtient par un raisonnement analogue :

(6.9) *Si, pour une fonction $f(x)$, on a l'une des inégalités*

$$-\infty < \underline{\Lambda}_\varphi^+ f(x) \leqq \overline{\Lambda}_\varphi^+ f(x) < +\infty$$

ou

$$-\infty < \underline{\Lambda}_\varphi^- f(x) \leqq \overline{\Lambda}_\varphi^+ f(x) < +\infty$$

pour $x \in E$, alors $f(x)$ est $(\mathsf{A}_\psi\mathsf{G})$ sur E .

(6.10) *Si pour une fonction $f(x)$ on a*

$$\overline{\Lambda}_\varphi^+ f(x) < +\infty \quad \textit{et} \quad \overline{\Lambda}_\varphi^- f(x) < +\infty$$

pour $x \in E$, alors $f(x)$ est $(\mathsf{P}_\psi\mathsf{G})$ sur E .

Démonstration. Désignons pour $p = 1, 2, \ldots$ par E_p l'ensemble des points x avec

$$x \in E \quad \text{et} \quad \overline{\Lambda}_\varphi^+ f(x) < p \ , \quad \overline{\Lambda}_\varphi^- f(x) < p \ .$$

Désignons ensuite pour $q = 1, 2, \ldots$ par E_{pq} l'ensemble des points x pour lesquels on a

$$x \in E_p$$

et

$$\left| \mathop{\mathbf{E}}_{y} \left[f(y) - f(x) > p\,\varphi(y - x) , \quad x < y \leqq x + h \right] \right| < \frac{h}{4} ,$$

$$\left| \mathop{\mathbf{E}}_{y} \left[f(x) - f(y) > p\,\varphi(x - y), \ x - h \leqq y < x \right] \right| < \frac{h}{4}$$

$$\text{pour} \quad 0 < h \leqq \frac{1}{q} \ .$$

Désignons enfin pour $r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ par E_{pqr} l'ensemble

$$E_{pq} \cdot \left[\frac{r}{q} , \frac{r+1}{q} \right] .$$

On a

$$E = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} E_{pqr} \ .$$

Nous montrerons que $f(x)$ est (P_ψ) sur chacun des ensembles E_{pqr} .

$I = [\alpha, \beta]$ étant un intervalle reposant sur E_{pqr} (p, q, r étant fixes), on a

$$\left| \mathop{\mathbf{E}}_{x} \left[f(x) - f(\alpha) > p\,\varphi(x-\alpha)\,, \quad \alpha < x \leqq \beta \right] \right| < \frac{\beta-\alpha}{4}\,,$$

$$\left| \mathop{\mathbf{E}}_{x} \left[f(\beta) - f(x) > p\,\varphi(\beta-x)\,, \quad \alpha \leqq x < \beta \right] \right| < \frac{\beta-\alpha}{4}\,;$$

il y a donc un point x_0 avec

$$\alpha < x_0 < \beta$$

et

$$f(x_0) - f(\alpha) \leqq p\,\varphi(x_0-\alpha) \leqq p\,\varphi(\beta-\alpha),$$
$$f(\beta) - f(x_0) \leqq p\,\varphi(\beta-x_0) \leqq p\,\varphi(\beta-\alpha).$$

On en tire

$$f(\beta) - f(\alpha) \leqq 2\,p\,\varphi(\beta-\alpha)\,,$$

et par conséquent

$$|f(\beta) - f(\alpha)|_+ \leqq 2\,p\,\varphi(\beta-\alpha)\,.$$

On termine la démonstration comme dans les raisonnements précédents.

On obtient pareillement

(6.11) *Si, pour une fonction $f(x)$, on a*

$$\underline{\Lambda}_{\varphi}^{+} f(x) > -\infty \quad \textit{et} \quad \underline{\Lambda}_{\varphi}^{-} f(x) > -\infty$$

pour $x \in E$, alors $f(x)$ est (N_{ψ} G) *sur E .*

7. Égalité des nombres de Lipschitz généralisés supérieurs resp. inférieurs finis.

(7.1) *Pour toute fonction $f(x)$, l'ensemble des points x avec*

$$\overline{L}_{\varphi}^{-} f(x) < \overline{L}_{\varphi}^{+} f(x) < +\infty$$

est de mesure nulle.

Démonstration. En vertu de (4.1), on n'a qu'à démontrer que pour $0 < p < q < r$ l'ensemble E_{pqr} des points x satisfaisant à l'inégalité

$$0 \leqq \overline{L}_{\varphi}^{-} f(x) < p < q < \overline{L}_{\varphi}^{+} f(x) < r$$

est de mesure nulle. Désignons par E_{pqrn} l'ensemble des points x avec

$$x \in E_{pqr}$$

et

$$f(y) - f(x) < r\,\varphi(y-x) \qquad \text{pour} \qquad x < y \leqq x + \frac{1}{n}\,,$$

$$f(x) - f(y) < p\,\varphi(x-y) \qquad \text{pour} \qquad x - \frac{1}{n} \leqq y < x\,.$$

Il faut démontrer l'égalité $|E_{pqrn}| = 0$.

Supposons que pour certaines valeurs convenables p, q, r, n on ait $|E_{pqrn}| > 0$. Désignons par x_0 un point de densité extérieure de E_{pqrn}. On a alors la relation

$$f(x) - f(x_0) > q\,\varphi(x - x_0) \tag{7.2}$$

pour des valeurs $x > x_0$ arbitrairement voisines de x_0 ; x_1 soit une de ces valeurs assez voisine de x_0 pour que les inégalités

$$0 < x_1 - x_0 < \frac{1}{n}$$

et

$$|E_{pqrn} \cdot [x_0, x_1]| > \eta\,(x_1 - x_0)$$

soient valables, η désignant un nombre suffisamment petit pour que l'on ait

$$0 < \eta < 1 \text{ et } \varphi\left(\frac{\eta}{n}\right) < \frac{q-p}{r}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right) .$$

Il y a donc un point x_2 avec

$$x_1 - \eta\,(x_1 - x_0) < x_2 < x_1 \text{ et } x_2 \in E_{pqrn} .$$

On a alors en vertu de $x_2 \in E_{pqrn}$ et $0 < x_2 - x_0 < \frac{1}{n}$

$$f(x_2) - f(x_0) < p\,\varphi(x_2 - x_0) \leqq p\,\varphi(x_1 - x_0)$$

et en vertu de $x_2 \in E_{pqrn}$, $0 < x_1 - x_2 < \frac{1}{n}$

$$f(x_1) - f(x_2) < r\,\varphi(x_1 - x_2) \leqq r\,\varphi(\eta\,(x_1 - x_0)) ,$$

d'où l'on tire

$$f(x_1) - f(x_0) < p\,\varphi(x_1 - x_0) + r\,\varphi(\eta\,(x_1 - x_0)) .$$

Mais nous avons selon (2.10) et $0 < x_1 - x_0 < \frac{1}{n}$

$$\frac{\varphi(\eta\,(x_1 - x_0))}{\varphi(x_1 - x_0)} \leqq \frac{\varphi\left(\frac{\eta}{n}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{n}\right)} < \frac{q-p}{r} ,$$

et par conséquent

$$f(x_1) - f(x_0) < p\,\varphi(x_1 - x_0) + \frac{q-p}{r}\,r\,\varphi(x_1 - x_0) = q\,\varphi(x_1 - x_0) ,$$

en contradiction avec (7.2) qui est valable pour $x = x_1$. Cette contradiction montre que notre hypothèse $|E_{pqrn}| > 0$ était fausse.

(7.3) *Si pour une fonction* $f(x)$ *on a*

$$\overline{L}_{\varphi}^{+} f(x) < +\infty \ , \ \overline{L}_{\varphi}^{-} f(x) < +\infty$$

pour $x \in E$, *alors on a*

$$\overline{L}_{\varphi}^{+} f(x) = \overline{L}_{\varphi}^{-} f(x)$$

presque partout sur E .

(7.4) *Si pour une fonction* $f(x)$ *on a*

$$\underline{L}_{\varphi}^{+} f(x) > -\infty, \ \underline{L}_{\varphi}^{-} f(x) > -\infty$$

pour $x \in E$, *alors on a*

$$\underline{L}_{\varphi}^{+} f(x) = \underline{L}_{\varphi}^{-} f(x)$$

presque partout sur E .

Ce sont des conséquences immédiates de (7.1).

(7.5) *Pour toute fonction mesurable* $f(x)$, *l'ensemble des points* x *avec*

$$\overline{\Lambda}_{\varphi}^{-} f(x) < \overline{\Lambda}_{\varphi}^{+} f(x) < +\infty$$

est de mesure nulle.

Démonstration. On n'a qu'à démontrer en vertu de (4.2) que, E_{pqr} désignant l'ensemble des points x pour lesquels on a

$$0 \leqq \overline{\Lambda}_{\varphi}^{-} f(x) < p < q < \overline{\Lambda}_{\varphi}^{+} f(x) < r \ ,$$

la mesure de E_{pqr} est zéro.

Désignons par η un nombre suffisamment petit pour que l'on ait

$$0 < \eta < 1 \ , \ \varphi(\eta) < \frac{q-p}{r} \varphi(1) \ ,$$

et considérons pour $n = 1, 2, \ldots$ l'ensemble E_{pqrn} des points x tels que

$$x \in E_{pq}$$

et

$$\left| \mathop{\mathbf{E}}_{y} \left[f(y) - f(x) > r\,\varphi(y-x) \ , \ x < y \leqq x + h \right] \right| < \frac{\eta}{3} h \ ,$$

$$\left| \mathop{\mathbf{E}}_{y} \left[f(x) - f(y) > p\,\varphi(x-y) \ , \ x - h \leqq y < x \right] \right| < \frac{\eta}{3} h$$

$$\text{pour} \quad 0 < h \leqq \frac{1}{n} \ .$$

Désignons enfin par E_{pqrn} l'ensemble des points x appartenant à E_{pqrn} et de la propriété que la densité extérieure supérieure à droite de l'ensemble

$$\mathop{\mathbf{E}}_{y} \left[f(y) - f(x) > q\,\varphi\,(y-x) \right]$$

dépasse au point x la valeur $\frac{1}{k}$. On a alors

$$E_{pqr} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} E_{pqrnk} ,$$

de sorte qu'il suffit de démontrer qu'on a $|E_{pqrnk}| = 0$.

Supposons qu'on ait pour certaines valeurs convenables de p, q, r, n, k $|E_{pqrnk}| > 0$. Désignons par x_0 un point de densité extérieure de l'ensemble $A = E_{pqrnk}$ qui appartient à cet ensemble. On trouve alors des nombres h arbitrairement petits pour lesquels on a

$$(7.6) \qquad \left| \mathop{\mathbf{E}}_{y} [f(y) - f(x_0) > q\,\varphi(y - x_0) , \; x_0 < y \leqq x_0 + h] \right| > \frac{1}{k} h .$$

Soit h_0 un de ces nombres assez petit pour que les inégalités

$$(7.7) \qquad 0 < h_0 < \frac{1}{n}, \qquad |A \cdot [x_0, x_0 + h_0]| > \left(1 - \frac{1}{2k}\right) h_0$$

soient satisfaites. $f(x)$ étant mesurable, on conclut de (7.6) que

$$(7.8) \qquad \left| \mathop{\mathbf{E}}_{y} [f(y) - f(x_0) > q\,\varphi(y - x_0) , \; x_0 < y \leqq x_0 + h_0] \right| < \left(1 - \frac{1}{k}\right) h_0 .$$

En vertu de (7.7) et (7.8), on trouve un point x_1 avec

$$(7.9) \qquad x_0 < x_1 < x_0 + h_0 , \quad x_1 \in A , \quad f(x_1) - f(x_0) > q\,\varphi(x_1 - x_0) .$$

Nous avons maintenant en vertu de $x_0 \in A$, $x_1 \in A$ et $0 < x_1 - x_0 < \frac{1}{n}$ les inégalités

$$\left| \mathop{\mathbf{E}}_{y} [f(y) - f(x_0) > r\,\varphi(y - x_0) , \; x_0 < y \leqq x_1] \right| < \frac{\eta}{3} (x_1 - x_0) ,$$

$$\left| \mathop{\mathbf{E}}_{y} [f(x_1) - f(y) > p\,\varphi(x_1 - y) , \; x_0 \leqq y < x_1] \right| < \frac{\eta}{3} (x_1 - x_0) ,$$

qui entraînent l'existence d'un point x_2 avec

$$x_0 < x_2 < x_0 + \eta(x_1 - x_0) ,$$

$$f(x_2) - f(x_0) \leqq r\,\varphi(x_2 - x_0) ,$$

$$f(x_1) - f(x_2) \leqq p\,\varphi(x_1 - x_2) .$$

On en tire

$$f(x_1) - f(x_0) \leqq p\,\varphi(x_1 - x_2) + r\,\varphi(x_2 - x_0) \leqq$$
$$\leqq p\,\varphi(x_1 - x_0) + r\,\varphi(\eta\,(x_1 - x_0)) .$$

Mais nous avons selon (2.10) et $0 < x_1 - x_0 < \frac{1}{n} \leqq 1$

$$\frac{\varphi(\eta\ (x_1 - x_0))}{\varphi(x_1 - x_0)} \leqq \frac{\varphi(\eta)}{\varphi(1)} < \frac{q - p}{r}\ ,$$

ce qui donne

$$f(x_1) - f(x_0) < p\,\varphi(x_1 - x_0) + \frac{q - p}{r} \cdot r\,\varphi(x_1 - x_0) = q\,\varphi(x_1 - x_0).$$

Cette inégalité est impossible en vertu de (7.9), et ceci montre que notre hypothèse $\left| E_{pqrnk} \right| > 0$ est fausse. C. q. f. d.

On en conclut aisément

(7.10) *Si pour une fonction mesurable $f(x)$ on a*

$$\overline{\Lambda}_{\varphi}^{+} f(x) < +\infty, \quad \overline{\Lambda}_{\varphi}^{-} f(x) < +\infty$$

pour $x \in E$, alors on a

$$\overline{\Lambda}_{\varphi}^{+} f(x) = \overline{\Lambda}_{\varphi}^{-} f(x)$$

presque partout sur E.

(7.11) *Si pour une fonction mesurable $f(x)$ on a*

$$\underline{\Lambda}_{\varphi}^{+} f(x) > -\infty, \ \underline{\Lambda}_{\varphi}^{-} f(x) > -\infty$$

pour $x \in E$, alors on a presque partout sur E

$$\underline{\Lambda}_{\varphi}^{+} f(x) = \underline{\Lambda}_{\varphi}^{-} f(x).$$

8. Conclusions. Les résultats établis permettent d'énoncer les propositions suivantes :

(8.1) *Si l'on a pour une fonction $f(x)$, en presque tous les points d'un ensemble E, l'une des inégalités*

$$-\infty < \underline{L}_{\varphi}^{+} f(x) \leqq \overline{L}_{\varphi}^{+} f(x) < +\infty$$

ou

$$-\infty < \underline{L}_{\varphi}^{-} f(x) \leqq \overline{L}_{\varphi}^{-} f(x) < +\infty,$$

on a alors presque partout sur E

$$0 \leqq \overline{L}_{\varphi}^{+} f(x) = \overline{L}_{\varphi}^{-} f(x) < +\infty$$

et

$$-\infty < \underline{L}_{\varphi}^{+} f(x) = \underline{L}_{\varphi}^{-} f(x) \leqq 0\ .$$

Démonstration. (6.3), (5.4), (7.3) et (7.4).

(8.2) *Si l'on a pour une fonction $f(x)$, mesurable sur l'ensemble mesurable E, en presque tous les points de E, l'une des inégalités*

$$-\infty < \underline{\Lambda}_{\varphi}^{+} f(x) \leqq \overline{\Lambda}_{\varphi}^{+} f(x) < +\infty$$

ou

$$-\infty < \underline{\Lambda}_{\varphi}^{-} f(x) \leqq \overline{\Lambda}_{\varphi}^{-} f(x) < +\infty ,$$

on a alors presque partout sur E

$$0 \leqq \overline{\Lambda}_{\varphi}^{+} f(x) = \overline{\Lambda}_{\varphi}^{-} f(x) < +\infty$$

et

$$-\infty < \underline{\Lambda}_{\varphi}^{+} f(x) = \underline{\Lambda}_{\varphi}^{-} f(x) \leqq 0 .$$

Démonstration. (6.9), (5.13), (7.10) et (7.11).

(8.3) *Si l'on a pour une fonction* $f(x)$, *mesurable sur l'ensemble mesurable* E, *en presque tous les points de* E, *l'une des inégalités*

$$\overline{L}_{\varphi}^{+} f(x) < +\infty \text{ ou } \overline{L}_{\varphi}^{-} f(x) < +\infty,$$

on a alors

$$0 \leqq \overline{\Lambda}_{\varphi}^{+} f(x) = \overline{\Lambda}_{\varphi}^{-} f(x) < +\infty$$

presque partout sur E .

Démonstration. (6.4), (5.11) et (7.10).

(8.4) *Si l'on a pour une fonction* $f(x)$, *mesurable sur l'ensemble mesurable* E, *en presque tous les points de* E, *l'une des inégalités*

$$\underline{L}_{\varphi}^{+} f(x) > -\infty \text{ ou } \underline{L}_{\varphi}^{-} f(x) > -\infty ,$$

on a alors

$$-\infty < \underline{\Lambda}_{\varphi}^{+} f(x) = \underline{\Lambda}_{\varphi}^{-} f(x) \leqq 0$$

presque partout sur E .

Démonstration. (6.5), (5.12) et (7.11).

(8.5) *Si l'on a pour une fonction* $f(x)$, *en presque tous les points d'un ensemble* E, *l'un des groupes d'inégalités*

$$\overline{L}_{\varphi}^{+} f(x) < +\infty, \quad \overline{L}_{\varphi}^{-} f(x) < +\infty, \quad \underline{\Lambda}_{\varphi}^{+} f(x) > -\infty, \quad \underline{\Lambda}_{\varphi}^{-} f(x) > -\infty$$

ou

$$\underline{L}_{\varphi}^{+} f(x) > -\infty, \quad \underline{L}_{\varphi}^{-} f(x) > -\infty, \quad \overline{\Lambda}_{\varphi}^{+} f(x) < +\infty, \quad \overline{\Lambda}_{\varphi}^{-} f(x) < +\infty,$$

on a alors

$$-\infty < \underline{L}_{\varphi}^{+} f(x) = \underline{L}_{\varphi}^{-} f(x) \leqq 0 \leqq \overline{L}_{\varphi}^{+} f(x) = \overline{L}_{\varphi}^{-} f(x) < +\infty$$

presque partout sur E .

Démonstration. (6.10), (6.11), (6.6), (6.7), (5.4), (7.3) et (7.4).

(8.6) *Pour que l'on ait presque partout sur* E

$$-\infty < \underline{L}_{\varphi}^{+} f(x) \leqq \overline{L}_{\varphi}^{+} f(x) < +\infty, \quad -\infty < \underline{L}_{\varphi}^{-} f(x) \leqq \overline{L}_{\varphi}^{-} f(x) < +\infty,$$

il faut et il suffit que $f(x)$ *soit* $(A_{\varphi}^{*}G)$ *sur un ensemble* $H \subset E$ *avec* $|E - H| = 0$.

Démonstration. (6.3) et (5.4).

(8.7) *$f(x)$ étant mesurable sur l'ensemble mesurable E, la condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait presque partout sur E*

$$\overline{\Lambda}_{\varphi}^{+} f(x) < +\infty, \quad \overline{\Lambda}_{\varphi}^{-} f(x) < +\infty,$$

resp.

$$\underline{\Lambda}_{\varphi}^{+} f(x) > -\infty, \quad \underline{\Lambda}_{\varphi}^{-} f(x) > -\infty,$$

c'est que $f(x)$ soit $(\mathsf{P}_{\varphi}\mathsf{G})$ resp. $(\mathsf{N}_{\rho}\mathsf{G})$ sur un ensemble $H \subset E$ avec $|E - H| = 0$.

Démonstration. (6.10), (6.11), (5.11) et (5.12).

(Reçu le 25. juin 1950.)

Ouvrages cités

[1] A. S. Besicovitch, On Lipschitz numbers, *Math. Zeitschrift*, **30** (1929), p. 514—519
[2] Á. Császár, Sur les nombres de Lipschitz approximatifs, *Acta Sci. Math.*, **12** B (1950), p. 211—214.
[3] S. Saks, *Theory of the integral* (Warszawa-Lwów, 1937).
[4] S. E. Chow, On approximate derivatives, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **54** (1948), p. 793—802.

ОБ ОБОБЩЕННЫХ ЧИСЛАХ ЛИПШИЦА

А. ЧАСАР (Будапешт)

(*Резюме*)

Пусть $f(x)$ функция одного действительного переменного. При $0 < \alpha < 1$ А. Ш Безикович называет $\overline{L}_{\alpha}^{+} f(x) = \overline{\lim}_{h \to +0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h^{\alpha}}$ правым верхним числом Липшица $f(x)$ порядка α в точке x [1], соответственно вводя правое нижнее, левое верхнее и левое нижнее числа Липшица, обозначая их $\overline{L}_{\alpha}^{-} f(x)$, $\underline{L}_{\alpha}^{+} f(x)$, $\underline{L}_{\alpha}^{-} f(x)$. Безикович доказывает, что если $f(x)$ измеримая функция, то из того, что $\overline{L}_{\alpha}^{+} f(x)$ и $\overline{L}_{\alpha}^{-} f(x)$ конечны в точках некоторого множества E, следует, что они равны почти во всех точках этого множества. Автор доказал [2], что теорема верна и в случае неизмеримых $f(x)$.

Одной из главнейших целей работы является обнаружение новой связи между числами Липшица. Эта связь заключается в том, что если два односторонних числа Липшица конечны в точках некоторого множества E, то почти во всех точках этого множества и остальные числа конечны, т. е. если $f(x)$ в точках некоторого множества E удовлетворяет одностороннему условию Липшица, то в этом множестве почти везде удовлетворяет двухстороннему условию Липшица такого же порядка.

Однако автор доказывает этот результат в более общей форме: роль, которую h^{α} играет при введении чисел Липшица, можно передать более общим функциям $\varphi(h)$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi(h)$ растущая функция при $h > 0$,
2. $\lim_{h \to +0} \varphi(h) = 0$, $\lim_{h \to +\infty} \varphi(h) = +\infty$,
3. $\lim_{h \to +0} \frac{\varphi(h)}{h} = +\infty$,

4. $\varphi(h)$ логарифмически выпуклая, т. е. $\varphi(h)=\exp\Phi(\log h)$, где $\Phi(t)$ выпуклая (в общем смысле) функция.

Пусть обобщенные числа Липшица функции $f(x)$: $\overline{L}_{\varphi}^{+} f(x) = \lim\limits_{h \to o} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)}$ и. т. д. Можно доказать следующие теоремы:

(1.1) Если $\overline{L}_{\varphi}^{+} f(x)$ и $\overline{L}_{\varphi}^{-} f(x)$ конечны на некотором множестве E, то они почти везде равны на этом множестве.

(1.2) Если $\overline{L}_{\varphi}^{+} f(x)$ и $\underline{L}_{\varphi}^{+} f(x)$ конечны на некотором множестве E, то на этом множестве почти везде конечны и $\overline{L}_{\varphi}^{-} f(x)$ и $\underline{L}_{\varphi}^{-} f(x)$.

Доказательство (1.1) в основном совпадает с доказательством (2), относящимся к специальному случаю, когда $\varphi(h) = h^{\alpha}$. Доказательство (1.2) происходит при помощи ряда леми, относящихся к свойствам некоторых классов функций. Роль этих классов функций в доказательстве похожа на роль функций конечных изменений в теории производных Дини. Работа исследует эти классы функций глубже, чем этого требует доказательство (1.2) и удается найти различные связи между конечностью обобщенных чисел Липшица некоторой функции и принадлежностью ее к этим классам функций.

Исследования этой работы распространяются и на приближенные обобщенные числа Липшица. Если мы рассматриваем лишь измеримые функции, то среди них имеются связи совсем похожие на связи обыкновенных обобщенных чисел Липшица. Их доказательство во многом похоже на доказательство теорем (1.1), (1.2), хотя, разумеется появляются некоторые осложнения в связи с более тонким существом приближенного, предела, что несколько увеличивает объем некоторых рассуждений.

ON MEAN SYSTEMS

By
L. FUCHS (Budapest)
(*Presented by* A. RÉNYI)

§ 1. Introduction

The concept of mean values was introduced in 1930 by A. KOLMOGOROFF [13][1] and quite independently by M. NAGUMO [16]. They defined a mean value to be an infinite sequence of continuous, symmetric and strictly increasing real functions $M_2(x_1, x_2), \ldots, M_n(x_1, \ldots, x_n), \ldots$ satisfying the reflexive law: $M_n(x, \ldots, x) = x$ for all n and all x, and a certain kind of associative law:

$$M_n(x_1, \ldots, x_n) = M_n(M_k, \ldots, M_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

with $M_k = M_k(x_1, \ldots, x_k)$ for every natural integer $k \leqq n$.[2] They proved that these conditions are necessary and sufficient for the quasiarithmeticity of the mean, i.e., for the existence of a continuous and steadily increasing function $f(x)$ so that M_n may be written in the form

$$M_n(x_1, \ldots, x_n) = f^{-1}\left(\frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}\right) \qquad (n = 2, 3, \ldots) \tag{1.1}$$

where f^{-1} denotes the inverse of $f(x)$. The fault of beauty of this definition of mean values is that here mean values are defined for *all* and not for *any fixed* number of variables. Analytic means of complex numbers with a definite number of variables were considered by G. AUMANN [6]. Later ST. FENYŐ [8] successfully set himself the task of finding necessary and sufficient conditions, without assuming analyticity, for the quasiarithmeticity of a mean value of a fixed number of variables. J. ACZÉL's merit is the discovery of a very simple axiom, which he called *bisymmetry* [1]; this states that

$$M_n[M_n(x_{11}, \ldots, x_{1n}), \ldots, M_n(x_{n1}, \ldots, x_{nn})]$$

is invariant under the change of any two elements x_{ik} and x_{ki} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$. This property is very easy to handle and can be used as an adequate substitute of the above associative law[3] for defining quasiarithmetic mean values with a definite number of variables.

[1] Numbers in brackets refer to the Bibliography at the end of the paper.
[2] Observe that this associative property for $k = n$ implies reflexivity!
[3] The connection between the two concepts was discussed by J. HORVÁTH [11].

B. DE FINETTI [9] and T. KITAGAWA [12] were the first to consider weighted means $M_n(x_1, \ldots, x_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ as functions of $2n$ variables x_i, λ_i and gave conditions for the quasiarithmeticity in the sense that

$$M_n(x_1, \ldots, x_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = f^{-1}(\lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n)) \tag{1.2}$$

with a continuous increasing function f and $0 < \lambda_i < 1$, $\Sigma\lambda_i = 1$.[4] J. ACZÉL [3] showed that, if we omit the postulate of symmetry, then the quasiarithmetic weighted means are obtained. Thus weighted means appear simply as non-symmetric means. Explicit formulae for the function $f(x)$ together with a new simple system of postulates for quasiarithmeticity have been given by J. ACZÉL and ST. FENYŐ [5] if the means have continuous second derivatives.

In the discussions of J. ACZÉL [3] the law of bisymmetry plays a central role. The power of this concept is shown even by the fact that the theory does not lose much of its force if reflexivity fails to hold: as J. ACZÉL [2, 3] has proved, in this case instead of (1.2)

$$M_n(x_1, \ldots, x_n) = f^{-1}(\lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n) + \lambda_0) \tag{1.3}$$

holds with a suitable continuous, increasing function f and $0 < \lambda_i (i = 1, 2, \ldots, n)$.

The bisymmetry is a law of pure algebraic character. This becomes more evident if we write the function M_n as a multiplication and at the same time we restrict ourselves to two variables:

$$(ab)(cd) = (ac)(bd).$$

This law was first discussed for quasigroups by D. C. MURDOCH [14] as a substitute for the common associative law. From our present point of view the most interesting result in this direction is due to K. TOYODA [17] and D. C. MURDOCH [15] who proved, independently of each other, that in quasigroups with the bisymmetry law and with an idempotent element it is possible to introduce a new operation under which the elements form an abelian group. (The converse was shown by R. H. BRUCK [7]: he has given a method of constructing all such quasigroups from abelian groups.) These investigations show the usefulness of the notion of bisymmetry in abstract algebra.

The present paper is concerned with a generalization of the previous results on mean values in an algebraic direction. We consider operations[5] defined in completely ordered systems, possessing the properties of mean values. We shall see that the methods as well as the results of the theory of mean values of real numbers can be carried over without change. A surprising feature of the present development lies in the fact that one can avoid arguments concerning metric and can restrict oneself to pure algebraic axioms. Since the axiom of

[4] See also J. ACZÉL [4].

[5] We shall confine ourselves to two variables without essential loss of generality and so we consider the forming of the mean as a binary operation.

continuity, which was used by all previous authors working on this subject, is not an algebraic one, it will be replaced by an »archimedean axiom« which asserts that if $a < c < b$, then forming the mean ab of a and b, then the mean $(ab)b$ of ab and b, and so on, after a finite number of repetitions we exceed c. It can be shown that this axiom not merely expresses an archimedean-like property, but in view of the main theorem it is equivalent to the well-known archimedean axiom for real numbers. We shall also see that our archimedean axiom and continuity (which may easily be defined in ordered systems) are direct consequences of each other if the other axioms for the systems hold. But, in spite of this, we shall use throughout (with the exception of § 6) the archimedean axiom to make clear its power in the discussions.

After having laid down the definition of the systems considered, called mean systems, and its immediate consequences, we direct our attention to the commutative case on which we shall base the general discussions. Substantially, the present method follows the arguments of J. Aczél [3] supplied with some observations on the automorphisms of mean systems and giving a new method for determining the weights. The main theorem is Theorem 2 which gives a detailed information about the structure of mean systems : it shows that *mean systems are isomorphic to a finite or infinite interval of real numbers under the operation of forming weighted arithmetic means.* This result may be interpreted as a statement of our generalization of the theory of quasi-arithmetic means being only seemingly proper, since the systems considered are abstractly equivalent to some interval of real numbers. The special case of quasigroups is discussed in detail, by making use of the Toyoda–Murdoch theorem cited above.

§ 2. Definition and preliminaries

By a *mean system* we shall understand a set **M** satisfying the following axioms :

(1) **M** *is completely ordered*, i. e., a relation $\geqq$ is defined between the elements of **M** with the properties : (i) for any two elements a, b in **M** either $a \geqq b$ or $b \geqq a$ holds, (ii) $a \geqq b$ and $b \geqq a$ imply $a = b$, (iii) $a \geqq b$ and $b \geqq c$ imply $a \geqq c$, (iv) **M** is *complete* in the sense that any non-void subset of **M** bounded from above (below) has a least upper bound (greatest lower bound[6]) in **M**, or equivalently, any Dedekind cut in **M** defines an element of M;[7]

(2) *any two elements* a, b *of* **M** *have a uniquely defined product* $ab = c$ *in* **M**;

(3) *multiplication is idempotent :* $aa = a$ for every a in **M**;

[6] Abbreviatedly, *l.u.b.* and *g.l.b.*, respectively.

[7] The equivalence of these two conditions may be proved by usual arguments.

(4) *multiplication is strictly monotone :* if $a > b$, then $ac > bc$ and $ca > cb$ for every c in **M**;

(5) *bisymmetry law holds :* $(ab)(cd) = (ac)(bd)$ for any four elements of **M** ;

(6) *multiplication is archimedean*[8] *:* if $a < c < b$, then there is a natural number n such that multiplying a by b n-times on the left (right), we have[9] $bb \ldots ba > c$ $(abb \ldots b > c)$ and dually.

From these axioms one can readily deduce the following simple properties of **M**.

(α) Multiplication is *intern :* if $a > b$, then $a > ab > b$ as well as $a > ba > b$ for all a, b in **M**. These are obvious consequences of (3) and (4). In view of this property it is natural to call the multiplication in **M** a *mean operation.*

(β) The intern character of multiplication implies that **M** is dense in the sense that between any two distinct elements there is a third. Hence, if **M** is finite, it consists of a single element.

(γ) The (twosided) cancellation law holds : $ax = ay$ (or $xa = ya$) implies $x = y$. In fact, $x > y$ or $x < y$ is impossible, since these would imply by the monotonicity law $ax > ay$ and $ax < ay$, respectively.

(δ) Bisymmetry and idempotency imply *distributivity* in the following sense[10] : $a(bc) = (aa)(bc) = (ab)(ac)$ and $(bc)a = (ba)(ca)$. Hence it follows that a certain kind of associative law is fulfilled : $(ab)a = a(ba)$ for all a, b in **M**, and therefore, by dropping the parentheses we may write this simply as aba. Moreover, $aa \ldots aba \ldots a$ has a well-defined meaning if we stipulate that this is to be understood as b being contained in each parenthesis omitted.

(ε) By (δ), if b is any fixed element of **M**, the mapping $a \to ab$ ($a \to ba$) of **M** into itself (more precisely, onto a part of **M**) is an isomorphism of **M** with some of its subsets. If **M** happens to be a quasigroup, i. e., both equations $bx = c$ and $yb = c$ are (uniquely) solvable for any given b and c, then these isomorphisms are clearly automorphisms of **M**.

(ζ) The concept of a *limit* may be introduced in an obvious manner. We say that the sequence a_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) converges to a limit a (in sign $a_\nu \to a$) if for any given interval[11] (b, c) of **M** containing a in its interior $(b < a < c)$

[8] For the reason why we have so chosen the terminology see footnote [15], and also section 5.

[9] Without fear of ambiguity we may write $b \ldots ba$ for $b\{\ldots [b(ba)] \ldots\}$.

[10] (*Added 10 Sep. 1950*) In the Ist Hungarian Mathematical Congress, Prof. E. MARCZEWSKI told me that in a paper under publication in the *Colloquium Mathematicum* KNASTER discussed the connection between distributivity and bisymmetry.

[11] By an *interval* (b, c) of **M** we mean the set of all elements lying between b and c.

there is a natural number n depending on b and c such that $b < a_\nu < c$ whenever $\nu > n$. As in the case of real numbers, it is easy to conclude that a monotone increasing (decreasing) sequence bounded from above (below) has its l.u.b. (g.l.b.) for its limit.

(η) The following lemma shows that the continuity of the mean operation is a consequence of the above axioms.

CONTINUITY LEMMA. *Multiplication is continuous in the sense that* $a_\nu \to a$ *implies* $a_\nu b \to ab$ ($ba_\nu \to ba$), *or more generally,* $a_\nu \to a$ *and* $b_\nu \to b$ *imply* $a_\nu b_\nu \to ab$.

Evidently, there is no loss of generality in restricting ourselves in the proof to the case of a monotone increasing sequence a_ν. Under this assumption, the sequence $a_\nu b$ is again monotone increasing and has ab for its upper bound. Consequently, there is a l.u.b. $c \leqq ab$ which is at the same time the limit of $a_\nu b$. We have to prove that $c < ab$ is impossible. Supposing $c < ab$ and using (6), from $a_\nu b < c < ab$ (with any fixed ν) we conclude that by multiplication in a suitable number of times we have $c < (a_\nu b)\,(ab)\,(ab) \ldots (ab) = (a_\nu aa \ldots a)\,b$ [use (δ) !]. As a_ν tends to a increasingly and $a_\nu aa \ldots a < a$, there must exist an a_μ such that $a_\nu aa \ldots a < a_\mu$. Hence we obtain that $c < a_\mu b$, a contradiction to the definition of c, and therefore $a_\nu b \to ab$, in fact. A similar reasoning applies to establish the remaining part of the statement (use monotony!).

(ϑ) The continuity of multiplication was used as a substitute for our archimedean axiom by previous authors dealing with the theory of mean values. Therefore, it seems to be desirable to show how the archimedean axiom may be derived from continuity. Assume continuity and form the sequence $a_0 = a$, $a_1 = ab$, $a_2 = abb$, ..., for $a < b$. This sequence has certainly a limit l, because it is monotone increasing and bounded from above ($a_\nu < b$). It is evident that the sequence $a_\nu b$ must have the same limit l. Hence, by the continuity of the mean operation we infer that $l = \lim a_\nu = \lim (a_\nu b) = (\lim a_\nu)\, b = lb$, which is impossible unless $l = b$ [cf. (α)]. This implies that for every given c between a and b there is an a_ν which exceeds c, that is, (6) holds.

(ι) If $g(x)$ is any function on **M** to itself, then it is natural to call $g(x)$ continuous, if, whenever x_ν tends to x, the sequence $g(x_\nu)$ converges to $g(x)$. By continuity lemma, any function composed of products of a finite number of constants and variables (for simplicity we say : a *polynomial*) is continuous.

($\varkappa$) For polynomials we have the important lemma :

BOLZANO'S LEMMA. *Let* $g(x)$ *be a polynomial such that there is a* v *with* $g(v) < a$ *and a* w *with* $g(w) > a$. *Then the equation* $g(x) = a$ *has a unique root* x *in* **M**.

At first we observe that each polynomial is either a constant or is strictly increasing as x runs increasingly over all elements of **M**. Hence it follows at

once the uniqueness of the solution. In order to prove the existence of a solution, let us consider the set L of all v with $g(v) \leqq a$ and the set U of all w with $g(w) \geqq a$. Since neither L nor U is empty and have at most one element in common, they are the lower and upper classes of a Dedekind cut in **M**. Let z be the element defined by this cut. For this z we can have neither $g(z) < a$ nor $> a$, since e. g. in the first case taking a sequence w_ν in U tending to z the sequence $g(w_\nu)$ must converge to $g(z)$ owing to the continuity of $g(x)$. This is, however, impossible, since $g(w_\nu) \geqq a$ while $g(z) < a$.

As a corollary to BOLZANO's lemma we obtain that if $a < b$ then $ax = b$ is either uniquely solvable or $ax < b$ for every x. It also follows that the mapping $a \to ab$ $(a \to ba)$ is an isomorphism of **M** onto a *subinterval* of **M**.

The special rules and properties of **M** which we have hitherto demonstrated will henceforth be used without explicit reference.

§ 3. Commutative mean systems

At first we consider the special case of commutative mean systems. Therefore, in the course of this section we assume in addition to (1) — (6) the axiom

(7) *multiplication is commutative : $ab = ba$* for all a, b in **M**.

We shall set up a one-to-one correspondence φ between the real numbers lying in the interval $(0, 1)$ and the elements of an arbitrary interval (a, b) of **M**. This correspondence will have the property that multiplication in the mean system **M** will correspond to forming the classical arithmetic mean of real numbers. In the construction of the function φ mapping $(0,1)$ onto (a, b) we shall follow principally the method of J. ACZÉL[12]; therefore we may restrict ourselves merely to the main steps of the procedure.

Put $\varphi(0) = a$ and $\varphi(1) = b$ and define φ recursively on the set Δ of proper dyadic fractions by the rule (write the numerator of the dyadic fraction $\frac{\delta}{2^n}$ in the form $\delta = 2\delta' + \varepsilon$ with $\varepsilon = 0, 1$):

$$\varphi\left(\frac{\delta}{2^n}\right) = \varphi\left(\frac{\delta'}{2^{n-1}}\right) \cdot \varphi\left(\frac{\delta' + \varepsilon}{2^{n-1}}\right) \qquad (n \geqq 1).$$

φ is evidently a steadily increasing function and it is easy to conclude that it satisfies the equation

$$\varphi(\xi)\,\varphi(\eta) = \varphi\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right). \tag{3.1}$$

[12] Cf. ACZÉL [2] and [3]. For the case of n variables see [1].

Indeed, put $\xi = \dfrac{2\delta+\varepsilon}{2^n}$ and $\eta = \dfrac{2\vartheta+\varepsilon'}{2^n}$, and apply the method of mathematical induction on the exponent of 2 in the denominator to obtain

$$\varphi(\xi)\varphi(\eta) = \left[\varphi\left(\frac{\delta}{2^{n-1}}\right)\varphi\left(\frac{\delta+\varepsilon}{2^{n-1}}\right)\right]\left[\varphi\left(\frac{\vartheta+\varepsilon'}{2^{n-1}}\right)\varphi\left(\frac{\vartheta}{2^{n-1}}\right)\right] =$$

$$= \left[\varphi\left(\frac{\delta}{2^{n-1}}\right)\varphi\left(\frac{\vartheta+\varepsilon'}{2^{n-1}}\right)\right]\left[\varphi\left(\frac{\delta+\varepsilon}{2^{n-1}}\right)\varphi\left(\frac{\vartheta}{2^{n-1}}\right)\right] =$$

$$= \varphi\left(\frac{\delta+\vartheta+\varepsilon'}{2^n}\right)\varphi\left(\frac{\delta+\vartheta+\varepsilon}{2^n}\right) = \varphi\left(\frac{2\delta+2\vartheta+\varepsilon+\varepsilon'}{2^{n+1}}\right) = \varphi\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)$$

(use the definition, commutativity, bisymmetry, induction hypothesis and again the definition).

If $0 < \xi < 1$ is not a dyadic fraction, it defines a Dedekind cut in Δ with L_ξ and U_ξ as lower and upper classes, respectively. The set L of all $y = \varphi(\eta)$ with η in L_ξ is not empty and is bounded from above, hence has a l.u.b. y'. Similarly, let z' denote the g.l.b. for the set U of all $z = \varphi(\zeta)$ with ζ in U_ξ. Evidently we have $a < y' \leqq z' < b$. $y' < z'$ is impossible, for supposing this case we have $y' < az'z' \ldots z'$ with n z'-s for a sufficiently large n and hence for all y in L and z in U the inequality $y < azz \ldots z$ holds. This means that $\varphi(\eta) < \varphi\left(\dfrac{(2^n-1)\zeta}{2^n}\right)$, i.e., φ being increasing, $\eta < \zeta - \dfrac{\zeta}{2^n}$ holds for a fixed integer n and for all dyadic fractions η, ζ with $\eta < \xi < \zeta$. The impossibility of this shows that $y' = z'$ and hence we may define $\varphi(\xi) = y' = z'$. This reasoning also implies that the elements of (a, b) corresponding to the numbers of Δ are everywhere dense in (a, b). Hence it is easy to conclude that the function φ is steadily increasing, assumes every element of (a, b) and satisfies the functional equation (3.1). Thus the function φ provides a one-to-one correspondence between $(0, 1)$ and (a, b).

In order to extend this correspondence to the whole of **M**, we observe that if $b < c$ then the real number γ corresponding to c may be calculated without any difficulties on the basis of $a < c' = aa \ldots ac < b$ and the number corresponding to c'. It is easy to verify that the extended function φ is strictly increasing, defines a one-to-one correspondence between a real interval I and **M** and, finally, it satisfies the functional equation (3.1). The inverse function $f(x)$ of φ maps **M** onto I and has the property $f(xy) = \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$ for all x, y in **M**.

Since there are various ways of selecting the elements a, b which were made to correspond to 0, 1, it is expected to have several functions $f(x)$

defining an order-preserving correspondence between **M** and some real interval I' such that $f(xy) = \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$. In fact, together with $f(x)$ each function $g(x) = \sigma f(x) + \tau$ for all real $\sigma > 0$ and τ gives rise to a desired correspondence between **M** and some real interval I'. Conversely, any such correspondence has the form $g(x) = \sigma f(x) + \tau$ with $\sigma > 0$, since $g\varphi\left(\dfrac{f(x)+f(y)}{2}\right) = g(xy) = \dfrac{g(x)+g(y)}{2}$ or, putting $f(x) = \xi$, $f(y) = \eta$,

$$g\varphi\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) = \frac{g\varphi(\xi)+g\varphi(\eta)}{2}$$

is JENSEN's functional equation[13] for the real function $g\varphi(\xi)$. The only monotone solution of it is the linear function $g\varphi(\xi) = \sigma\xi + \tau$, i. e. $g(x) = \sigma f(x) + \tau$ $(\sigma > 0)$[14], as stated.

This completes the proof of

THEOREM 1.[15] (KOLMOGOROFF, NAGUMO, FENYŐ, ACZÉL) *If* **M** *is a commutative mean system, then there exists a strictly increasing function* $f(x)$ ($\varphi(\xi)$ *its inverse*) *defined on* **M** *with values in an interval* I *of real numbers such that multiplication in* **M** *is performed by the rule*

$$f(xy) = \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

or, equivalently,

$$\varphi(\xi)\,\varphi(\eta) = \varphi\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)$$

for all ξ, η *in* I. *The function* $f(x)$ *is unique up to a linear transformation.*

We observe that the converse of this theorem is obviously true.

In view of Theorem 1 we see that **M** *is a quasigroup if and only if* φ *is defined for every real number*, i. e., if **M** is in a one-to-one order-preserving

[13] Cf. e. g. HARDY, LITTLEWOOD, PÓLYA [10], p. 74.

[14] If we admit of order-reversing functions too, then we may omit the additional condition $\sigma > 0$ and put $\sigma \neq 0$.

[15] In the light of this theorem the terminology of „archimedean" in our present sense may be reformulated: if $\alpha < \gamma < \beta$ then there is an n such that $\gamma < \dfrac{\alpha + (2^n - 1)\beta}{2^n}$, that is, $2^n(\beta - \gamma) > \beta - \alpha$ which is actually nothing else but the well-known archimedean axiom for real numbers.

correspondence with the system of all real numbers so that (3.1) holds. In fact, by Theorem 1, the root of an equation $cx = d$ may be expressed in terms of the corresponding real numbers γ, ξ, δ in the form $\frac{\gamma+\xi}{2} = \delta, \xi = 2\delta - \gamma$. The number ξ belongs for all γ, δ to the same interval as γ, δ if and only if the interval I consists of all real numbers (the trivial case when **M** and hence I consists of a single element is left out of consideration).

In case φ is defined for all real numbers, one may introduce a new operation $\circ$ in **M** in the following manner:

$$x \circ y = \varphi(\xi) \circ \varphi(\eta) = \varphi(\xi + \eta) = z.$$

By definition, **M** becomes under this operation a linearly ordered abelian group which is isomorphic to the additive group of the real numbers.

The operation $\circ$ can be described without making use of the function φ, merely by referring to the quasigroup character of **M**. Indeed, $z = x \circ y$ is the root of the equation $az = xy$, for if $a = \varphi(0)$, $x = \varphi(\xi)$, $y = \varphi(\eta)$, $z = \varphi(\zeta)$, then we have $\zeta = \xi + \eta$. A direct proof of the fact that under the operation $\circ$ thus defined **M** is an ordered abelian group can be found in section 5.

It is worth noticing that the automorphisms of **M** (with respect to both the multiplication and order-preserving) may be characterized by means of the function φ. Each automorphism $x \longleftrightarrow y$ of **M** induces a steadily increasing function $\xi \longleftrightarrow \eta = \varrho(\xi)$ on the real numbers. From $x_1 x_2 \longleftrightarrow y_1 y_2$ (if $x_1 \longleftrightarrow y_1$ and $x_2 \longleftrightarrow y_2$) we conclude that $\varrho(\xi)$ must satisfy JENSEN's functional equation $\varrho\left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right) = \frac{\varrho(\xi_1) + \varrho(\xi_2)}{2}$ and since $\varrho(\xi)$ is monotone, we get $\varrho(\xi) = \sigma\xi + \tau$ with some fixed $\sigma > 0$ and τ. If the real interval I is the set of all real numbers, there is no restriction imposed on $\sigma > 0$ and τ: any such linear function induces an automorphism of **M**. But if I is a finite interval (α, β), either open or closed, then σ and τ are uniquely determined by the fact that the range of $\varrho(\xi)$ must be the entire interval (α, β), so that only $\sigma = 1$, $\tau = 0$ is possible and therefore, if I is a finite interval, **M** has no automorphisms other than the identity mapping. If, finally, I is finite only from one side, say from the left, $I = (\alpha, +\infty)$, then from $\alpha = \varrho(\alpha) = \sigma\alpha + \tau$ we get a relation between σ and τ: $\tau = \alpha(1 - \sigma)$ and any linear function of the form $\varrho(\xi) = \sigma\xi + \alpha(1 - \sigma)$ $(\sigma > 0)$ defines an automorphism of **M**.

§ 4. Non-commutative mean systems

Next we turn our attention to general mean systems, when commutativity is not assumed. We shall prove ACZÉL's theorem stating that a mean opera-

tion is essentially a weighted arithmetic mean. The proof given here is a somewhat simplified and algebraized form of J. Aczél's original proof [3].

Let t denote an arbitrary but fixed element of $\mathbf{M}$ and let two elements x and y be given. The equation

$$(tz)\,(zt) = (tx)\,(yt) \tag{4.1}$$

has by Bolzano's lemma a unique solution z in $\mathbf{M}$, since $\min(x, y) \leqq z \leqq \max(x, y)$. Write the solution as $z = x \wedge y$. We now show that $x \wedge y$ *is a commutative mean operation.* Evidently, $\wedge$ is defined for all x, y in $\mathbf{M}$, and is by definition commutative, idempotent and strictly monotone. In order to prove that it is archimedean, we observe that by

$$[t\,(xy)]\,[(yx)\;t] = [(tx)\,(ty)]\,[(yt)\,(xt)] = [(tx)\,(yt)]\,[(ty)\,(xt)] = (tx)\,(yt) = (tz)\,(zt)$$

we have

$$x \wedge y \geqq \min(xy,\ yx),\quad x \wedge y \wedge y \geqq \min(xyy,\ yxy,\ yyx),\ \text{etc.}$$

Hence, using (6), it follows the archimedean property of $\wedge$. In proving the bisymmetry we need a simple lemma.

Aczél's Lemma.[16] *For any four elements* $(x \wedge y)\,(u \wedge v) = xu \wedge yv$ *holds.*

Proof.
$$\{t\,[(x \wedge y)\,(u \wedge v)]\}\,\{[(x \wedge y)\,(u \wedge v)]\;t\} =$$
$$= \{[t\,(x \wedge y)]\;[(x \wedge y)\;t]\}\,\{[t\,(u \wedge v)]\,[(u \wedge v)\,t]\} =$$
$$= [(tx)\,(yt)]\;[(tu)\,(vt)] = [t\,(xu)]\,[(yv)\;t] = [t\;(xu \wedge yv)]\;[xu \wedge yv)\;t]\,,$$

whence the statement follows.

Lemma implies distributivity: $u\,(x \wedge y) = (u \wedge u)\,(x \wedge y) = ux \wedge uy$ and $(x \wedge y)\,u = xu \wedge yu$.

We observe before passing on, although in what follows we do not need this fact, that $x \wedge y$ is independent of the choice of t. For, if u is another element of $\mathbf{M}$ and $(tz)\,(zt) = (tx)\,(yt)$ and $(uw)\,(wu) = (ux)\,(yu)$, then $z = w$. To verify this, we form

$$u\,[(tx)\,(yt)]\;u = [(utu)\;(uxu)]\;[(uyu)\;(utu)] = [(uux)\;(tuu)]\,[(uyu)\;(uuu)] =$$
$$= \{u\,[(ux)\,(yu)]\}\;\{(tuu)\;(utu)\} = \{u\,[(uw)\,(wu)\,]\}\;\{(tuu)\;(utu)\}$$

and hence conclude that in $u\,[(tx)\,(yt)]\;u$ both elements x and y may be replaced by w, i. e., $u\,[(tz)\,(zt)]\;u = u\,[(tx)\,(yt)]\,u = u\,[(tw)\,(wt)]\,u$. This establishes our contention.

Resuming the proof of the bisymmetry of $\wedge$, we show that in $w = (x \wedge y) \wedge (u \wedge v)$ the elements y and u may be interchanged. In fact,

[16] Note that this is a certain kind of bisymmetry!

by ACZÉL's lemma $(tw)(wt) = [t(x \wedge y)]\ [(u \wedge v)t] = (ty \wedge tx)(ut \wedge vt)$ is equal to $(ty)(ut) \wedge (tx)(vt)$ and thus the bisymmetry of the original operation implies that y and u are interchangeable. This establishes the bisymmetry and hence completes the proof that $\wedge$ is a commutative mean operation.

It follows by Theorem 1 that there is a function φ mapping a real interval I onto $\mathbf{M}$ such that $\varphi(\xi) \wedge \varphi(\eta) = \varphi\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)$. Put this into ACZÉL's lemma to obtain (f is the inverse of φ)

$$\varphi\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)\varphi\left(\frac{\varrho+\sigma}{2}\right) = \varphi\left(\frac{f(\varphi(\xi)\,\varphi(\varrho)) + f(\varphi(\eta)\,\varphi(\sigma))}{2}\right)$$

or

$$f\left[\varphi\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)\varphi\left(\frac{\varrho+\sigma}{2}\right)\right] = \frac{f(\varphi(\xi)\,\varphi(\varrho)) + f(\varphi(\eta)\,\varphi(\sigma))}{2}.$$

This shows that the real function $F(\xi,\eta) = f(\varphi(\xi)\,\varphi(\eta))$ satisfies JENSEN's functional equation for two variables:

$$F\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\varrho+\sigma}{2}\right) = \frac{F(\xi,\varrho) + F(\eta,\sigma)}{2}$$

which has only one monotone solution: $F(\xi,\eta) = \lambda\xi + \mu\eta + \nu$ for some fixed λ, μ, ν, that is to say,

$$\varphi(\xi)\ \varphi(\eta) = \varphi(\lambda\xi + \mu\eta + \nu).$$

Apply this to $\xi = \eta = 0$, then to $\xi = \eta = 1$; we get $\nu = 0$ and $\lambda + \mu = 1$. By internness we have $\min(\xi, \eta) \leqq \lambda\xi + \mu\eta \leqq \max(\xi, \eta)$ and this leads to $0 < \lambda < 1$, $0 < \mu < 1$. We have thus proved

THEOREM 2. (ACZÉL) *If* $\mathbf{M}$ *is a mean system, there is an order-preserving one-to-one mapping* φ *of a real interval* I *onto* $\mathbf{M}$ *and a real number* λ *with* $0 < \lambda < 1$ *such that* (ξ, η *in* I)

$$\varphi(\xi)\,\varphi(\eta) = \varphi(\lambda\,\xi + \mu\,\eta) \quad \textit{with} \quad \lambda + \mu = 1$$

or, equivalently,

$$f(xy) = \lambda f(x) + \mu f(y) \quad \textit{with} \quad \lambda + \mu = 1$$

where f *is the inverse of* φ,[17] *that is,* $\mathbf{M}$ *is isomorphic to a finite or infinite interval of real numbers under the operation of forming weighted arithmetic means.*

It might be of some interest to give a method for determining the nume-

[17] As in the commutative case, one may readily prove that the function $f(x)$ is unique up to a linear transformation. However, a direct proof of this fact is unnecessary if we take into account that the operation $\wedge$ is uniquely determined by the original operation and both oporations have the same function $f(x)$.

rical value of λ without reference to the function f.[18] For this purpose we define $r_k(x) = xaa \ldots a$ (k-times) and $l_k(x) = aa \ldots ax$ and form the sequences $r_0(b) > r_1(b) > \ldots > a$ and $l_0(b) > l_1(b) > \ldots > a$. Consider the set L of all rational fractions $\frac{k}{n}$ with $r_k(b) \leqq l_n(b)$ and the set U of all $\frac{p}{q}$ with $r_p(b) \geqq l_q(b)$; neither of L and U is void. In virtue of the relation $r_k(l_n(x)) = l_n(r_k(x))$ for all non-negative integers k, n and all x in **M**, it is easy to see that $r_{2k}(b) = r_k(r_k(b)) \leqq r_k(l_n(b)) = l_n(r_k(b)) \leqq l_n(l_n(b)) = l_{2n}(b)$ and, in general, $r_{mk}(b) \leqq l_{mn}(b)$ for every natural integer m. This leads us at once to the fact that L and U are the lower and upper classes of a Dedekind cut, consequently, there is a unique real number $\varkappa$ defined by this cut. A simple calculation shows that if we put $\dfrac{\log(1-\lambda)}{\log\lambda} = \varkappa$, then this equation has a unique root[19] λ lying in the interval $(0, 1)$ and satisfying the equation of Theorem 2. This process also implies that the weight λ is uniquely determined.

There is no difficulty in verifying that what has been said in the preceding section about the automorphisms of **M** in the commutative case can be carried over without change for the non-commutative case.

§ 5. Mean systems which are quasigroups

By the same argument as in the commutative case it is readily seen that **M** is a quasigroup under the mean operation if and only if the function f of Theorem 2 maps **M** onto the system of all real numbers. If this is the case, it is possible to introduce a new operation $\circ$ in **M**, making **M** into an ordered abelian group isomorphic to the additive group of all real numbers:

$$x \circ y = \varphi(\xi) + \varphi(\eta) = \varphi(\xi + \eta) = z.$$

Now we are going to give a direct proof of this fact without reference to the function f or φ. At the same time we give a new proof of Theorem 2 in case **M** is a quasigroup, for this proof is somewhat simpler than that given above and does not need a previous discussion of the commutative case. The present method rests on a theorem due to K. Toyoda [17] and D. C. Murdoch [15] for which we give here a new proof.

Theorem 3. (Toyoda–Murdoch). *Let* **N** *be a system with a binary operation, written as multiplication, satisfying*

(1) *ab is a uniquely defined element of* **N** *for all a, b in* **N**,

[18] A practical method has been given by Aczél and Fenyő [5]: the partial derivatives of the mean function $M(x, y)$ in the place $x = y$ yield the numbers λ and μ. However, this method of course fails in our present case, since derivatives can not be defined.

[19] The function $\chi(\lambda) = 1 - \lambda - \lambda^\varkappa$ is continuous in $(0, 1)$, $\chi(0) = 1$, $\chi(1) = -1$, while $\chi'(\lambda) = 1 - \varkappa\lambda^{\varkappa-1}$ is throughout negative (observe that $\varkappa > 0$).

(2) **N** *is a quasigroup under multiplication, i. e.,* $ax = b$ *and* $ya = b$ *have unique solutions in* **N**,

(3) *bisymmetry holds:* $(ab)(cd) = (ac)(bd)$ *for all* a, b, c, d *in* **N**,

(4) *there is an idempotent element* e *in* **N**, $ee = e$.

Then one can define a new operation $\circ$ *in* **N**, *in terms of the original operation, under which* **N** *becomes an abelian group.*

Let e be an idempotent element of **N**. Consider the equation

$$exe = (ea)(be) \tag{5.1}$$

and define $a \circ b$ as the unique solution x of this equation.[20] A direct consequence of the definition is that for all a, b in **N** we have $a \circ b = b \circ a$, $a \circ e = e \circ a = a$ and by the quasigroup property of **N** the equations $a \circ y = b$ and $z \circ a = b$ are uniquely solvable for y, z in **N**. Further, from the fact that in

$$e[(a \circ b) \circ c]ee = \{[e(a \circ b)]\ [ce]\}\, e = [(ea)(be)]\ [cee] = [(ea)(ce)]\ [bee]$$

the elements a and c play a symmetric role (by the bisymmetry in **N**) we can conclude that the operation $\circ$ is associative. Hence it follows that under the operation $\circ$ **N** is an abelian group with e as unit element[21].

It is immediate that if the system **N** is ordered and $a > b$ implies $ac > bc$ and $ca > cb$ for all c, then $a > b$ implies $a \circ c > b \circ c$ for all c, so that $\mathbf{N}^\circ$ becomes an ordered abelian group.

Now we prove Theorem 2 again by making use of Theorem 3 and without appeal to Theorem 1. Therefore suppose that the quasigroup **N** of Theorem 3 is a mean system **M** in the sense of § 2. We associate with each element x of **M** a real number ξ in the following manner.[22] Put $f(a) = 0$ with a equal to e of Theorem 3 and $f(b) = 1$ for some $b > a$, and let $f(b^n) = n$ and $f(b^{-n}) = -n$. To define $f(x)$ for an arbitrary x, we first prove that $\circ$ is archimedean in the traditional sense: if given $e = a < c < d$, then there is an integer n such that $c^n > d$. In fact, define the sequence $d_1, d_2, \ldots$ recursively by $d_1 = d$ and $ad_\nu a = (ad_{\nu+1})(d_{\nu+1}a)$. Then $d_2 \leqq \max(ad_1, d_1a)$, for the contrary case would imply $ad_1a = (ad_2)(d_2a) > (ad_1a)(ad_1a) = ad_1a$; further, $d_3 \leqq \max(aad_1, ad_1a, d_1aa)$, etc. Consequently, by axiom (6), there is a k such that $d_k < c$. Hence we obtain $d_{k-1} = d_k \circ d_k < c \circ c = c^2$, $d_{k-2} < c^{2^2}, \ldots, d_1 = d < c^{2^k - 1}$, q.e.d.

[20] If multiplication is commutative, (5.1) may be written in the form $exe = (ae)(be) = (ab)e$, that is, $ex = ab$; cf. section 3.

[21] If we intend to emphasize that we are considering **N** as an abelian group under $\circ$, we shall write $\mathbf{N}^\circ$ for **N**.

[22] For the sake of simplicity we denote $x \circ x \circ \ldots \circ x$ (with n terms) by x^n and the inverse of x by x^{-1} ($x^{-1} \circ x = e$). We do not discuss the trivial case if the system considered consists of a single element.

We hence infer that the set L of all fractions k/n with $x^n \geqq b^k$ and the set U of all p/q with $x^q \leqq b^p$ are not empty and, as readily seen, they are the lower and upper classes of a Dedekind cut ; therefore they define a real number ξ and we put $f(x) = \xi$. It is easy to verify by the same arguments as already used several times that the function $f(x)$ so defined becomes a strictly monotone increasing function, assumes all real values and satisfies the functional equation

$$f(x \circ y) = f(x) + f(y). \tag{5.2}$$

Before proceeding we observe two simple facts.

LEMMA 1. *For all x, y in* **M** *we have* $xa \circ ay = xy$.

Proof: using the definition (5.1) with $e = a$ we have $a(xa \circ ay)\, a = (axa)(aya) = a(xy)\, a$.

LEMMA 2. *For all x, y in* **M** *we have* $(x \circ y)\, a = xa \circ ya$.

Proof: $a(x \circ y)\, aa = [(ax)(ya)]\, a = [a(xa)]\, [(ya)\, a] = a(xa \circ ya)\, a$.

The latter lemma shows that the mapping $x \to xa$ is an automorphism of the ordered group $\mathbf{M}^\circ$ (order-preserving!). This automorphism induces a steadily increasing real function $\psi(\xi)$ so that $f(xa) = \psi f(x)$, and the functional equation (5.2) implies that the function ψ must satisfy CAUCHY's functional equation $\psi(\xi + \eta) = \psi(\xi) + \psi(\eta)$. This has the only monotone solution $\psi(\xi) = \lambda \xi$, i. e. $f(xa) = \lambda f(x)$. Since xa lies between a and x, we must have $0 < \lambda < 1$.

The same reasoning shows that $f(ay) = \mu f(y)$. Lemma 1 together with (5.2) implies that $f(x) = f(xa \circ ax) = f(xa) + f(ax) = \lambda f(x) + \mu f(x) = (\lambda + \mu) f(x)$ for all x, whence $\lambda + \mu = 1$ is obtained. This establishes by Lemma 1 that

$$f(xy) = f(xa \circ ay) = \lambda f(x) + \mu f(y) \qquad \text{with } 0 < \lambda < 1,\ \lambda + \mu = 1$$

which is just the statement of Theorem 2.

§ 6. Remarks

It is of some interest to inquire to what extent the above results are modified if one of the postulates (1)—(6) is removed. Here we mention only three cases.

1. Mean systems without completeness of order. If the order of **M** is not complete, then it is not expected to have a correspondence between **M** and an interval of the real numbers. But, as is well known, **M** may be embedded in a completely ordered system **M***, and then the mean

operation of **M** may be extended to the new system **M*** in an obvious manner just as addition, multiplication etc. are defined for irrational numbers. Thus **M*** becomes a mean system in the sense of § 2. Theorem 2 is true for **M*** and hence even for **M** with the sole modification that the function f (defined by the mean system **M***) maps **M** onto some *subset* of a real interval I.

2. Mean systems without idempotency. We turn our attention to the proof of

THEOREM 4. (ACZÉL.) *If on a completely ordered set* **M** *an operation is defined which is monotone, bisymmetric and continuous* [23], *then there is a function* f *on* **M** *onto an interval* I *of the real numbers such that*

$$f(xy) = \lambda f(x) + \mu f(y) + \nu \qquad (\lambda, \mu > 0)$$

with suitable real numbers λ, μ, ν.

If given x and y, solve the equation $xy = zz$ for z, existing by BOLZANO's lemma, and write $z = x \vee y$. We show that $\vee$ is a mean operation. It is obviously idempotent, monotone increasing and continuous, further it is bisymmetric: $t = (x \vee y) \vee (u \vee v)$ is, on account of the formula $(tt)\,(tt) = [(x \vee y)\ (u \vee v)]\ [(x \vee y)\ (u \vee v)] = [(x \vee y)\ (x \vee y)]\ [(u \vee v)\ (u \vee v)] = (xy)\,(uv)$, symmetric in y and u. Hence, Theorem 2 implies the existence of a steadily increasing function f on the set **M** onto a real interval I such that $f(x \vee y) = \lambda' f(x) + \mu' f(y)$ $(0 < \lambda' < 1, \lambda' + \mu' = 1)$ for suitable λ', μ', or $x \vee y = \psi(\lambda' \xi + \mu' \eta)$ with $\xi = f(x)$, $\eta = f(y)$. Put $xy = (x \vee y)\,(x \vee y) = \varphi(\lambda' \xi + \mu' \eta) \cdot \varphi(\lambda' \xi + \mu' \eta) = \psi(\lambda' \xi + \mu' \eta)$ and hence by $(xx)\,(yy) = (xy)\,(xy)$ we may write

$$f\psi f\psi(\lambda' \xi + \mu' \eta) = \psi(\lambda' f\psi(\xi) + \mu' f\psi(\eta))$$

or

$$f\psi(\lambda' \xi + \mu' \eta) = \lambda' f\psi(\xi) + \mu' f\psi(\eta) \qquad (0 < \lambda' < 1,\ \lambda' + \mu' = 1)$$

The only monotone increasing solution of this functional equation is the linear function $f\varphi(\xi) = \sigma \xi + \nu$ with $\sigma > 0$, consequently, $f(xy) = f\psi(\lambda' \xi + \mu' \eta) = (\sigma\lambda')\,\xi + (\sigma\mu')\,\eta + \nu = \lambda f(x) + \mu f(y) + \nu$ with $\lambda, \mu > 0$, as stated.

3. Extern operations. Now we consider systems **M** in which the axiom of monotony, (4), is replaced by

(4′) $a > b$ implies $ac > bc$ and $ca > cb$ for all c,

that is, multiplication from the right preserves, while that from the left reverses order.[24] On account of idempotency, (4′) implies that the operation is extern:

[23] Here continuity seems to be more natural than the archimedean axiom.

[24] Extern operations were not yet discussed. J. ACZÉL remarked that the results of J. ACZÉL—ST. FENYŐ [5] on twice derivable real means hold even for extern means. — Clearly, there is no idempotent operation with the property that multiplication from both sides reverses order.

if $a > b$, then $ab > a > ba$ and $ab > b > ba$, i. e., neither ab nor ba belongs to the interval (a, b). For extern operations we may prove a theorem similar to Theorem 2 :

THEOREM 5. *Let* **M** *be a completely ordered set with an idempotent, bisymmetric and continuous*[25] *binary operation satisfying* (4′). *Then there is a mapping* f *of* **M** *onto a real interval*[26] I *such that*

$$f(xy) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

holds with suitable fixed real numbers $\lambda > 0$, $\mu < 0$ and $\lambda + \mu = 1$.

For the proof we may proceed on the same lines as already described in § 4. First we note that, for any fixed t in **M**, (tx) (yt) is a steadily decreasing function of x and y, and so is (tz) (zt) of its variable z. Hence by BOLZANO's lemma (which is an easy consequence of continuity) we may conclude that for any given x and y there is a $z = x \wedge y$ such that (4.1) holds and this z is a continuous function of x and y. Since the further course of the proof does not make use of monotony, but merely the cancellation law holding even for extern operations, we conclude that there exists a function f mapping **M** onto a real interval I and satisfying $f(xy) = \lambda f(x) + \mu f(y) + \nu$ for some fixed real numbers λ, μ, ν. By idempotency we obtain $\nu = 0$ and $\lambda + \mu = 1$. From (4′) we infer that $f(x) > f(y)$ implies $\lambda f(x) + \mu f(z) > \lambda f(y) + \mu f(z)$ and $\lambda f(z) + \mu f(x) < \lambda f(z) + \mu f(y)$ for all z in **M**. Therefore $\lambda > 0$ (moreover, $\lambda > 1$) and $\mu < 0$, and this completes the proof.

(Received 23 August 1950)

[25] It is easy to see that here the archimedean axiom lacks of meaning.
[26] Of course, the interval I here must be open.

Bibliography

1. J. ACZÉL, The notion of mean values, *Norske Vid. Selsk. Forh.*, **19** (1946), pp. 83—86.
2. J. ACZÉL, On mean values and operations defined for two variables, *ibid.*, **20** (1947), pp. 37—40.
3. J. ACZÉL, On mean values, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **54** (1948), pp. 392—400.
4. J, ACZÉL, Un problème de M. L. Fejér sur la construction de Leibniz, *Bull. Sci. Math.*, **72** (1948), pp. 39—45.
5. J. ACZÉL und ST. FENYŐ, Über die Theorie der Mittelwerte, *Acta Sci. Math. Szeged*, **11** (1948), pp. 239—245.
6. G. AUMANN, Aufbau von Mittelwerten mehrerer Argumente, II. (Analytische Mittelwerte), *Math. Annalen*, **111** (1935), pp. 713—730.
7. R. H. BRUCK, Some results in the theory of quasigroups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **55** (1944), pp. 19—52.
8. ST. FENYŐ, *A középértékek elméletéről* (On the theory of mean values, in Hungarian), Doctoral thesis (Budapest, 1945).
9. B. DE FINETTI, Sul concetto di media, *Giornale Istituto Italiano d. Attuarii*, **2** (1931), pp. 369—396.

10. G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD and G. PÓLYA, *Inequalities* (Cambridge, 1934).

11. J. HORVÁTH, Sur le rapport entre les systèmes de postulats caractérisant les valeurs moyennes quasi arithmétiques symétriques, *C. R. Acad. Sci., Paris*, **225** (1947), pp. 1256—1257.

12. T. KITAGAWA, On some class of weighted means, *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan*, **16** (1934), pp. 117—126.

13. A. KOLMOGOROFF, Sur la notion de la moyenne, *Rendiconti Accad. d. Lincei, Roma*, **12** (1930), pp. 388—391.

14. D. C. MURDOCH, Quasi-groups which satisfy certain associative laws, *Amer. Journ. Math.*, **61** (1939), pp. 509—522.

15. D. C. MURDOCH, Structure of abelian quasi-groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **49** (1941), pp. 392—409.

16. M. NAGUMO, Über eine Klasse der Mittelwerte, *Japanese Journ. Math.*, **7** (1930), pp. 71—79.

17. K. TOYODA, On axioms of mean transformations and automorphic transformations of abelian groups, *Tohoku Math. Journ.*, **46** (1940), pp. 239—251.

О СРЕДНИХ СИСТЕМАХ

Л. ФУКС (Будапешт)

(*Резюме*)

А. Н. Колмогоров [13] и М. Нагумо [16] ввели понятие квазиарифметической средней. Это такая функция $\overline{x} = M_n(x_1, \ldots, x_n)$, к которой можно найти такую монотонно возрастающую функцию $f(x)$, что $f(\overline{x}) = \frac{1}{n}\left(f(x_1) + \ldots + f(x_n)\right)$. Система аксиом, относящаяся к квазиарифметическим средним, данная ими, обладает тем недостатком, что содержит такую аксиому, при помощи которой определение возможно лишь для любого n одновременно, а не для любого определенного n отдельно. Это устраняет для аналитических функций Г. Ауманн [6], а для не аналитических функций И. Фенье [8].

Я. Ацелу удалось заменить указанную аксиому Колмогорова и Нагумо одной хорошо применяемой аксиомой — биси метричностью:

$$M_n\left[M_n(x_{11}, \ldots, x_{1n}), \ldots, M_n(x_{n1}, \ldots, x_{nn})\right] = M_n\left[M_n(x_{11}, \ldots, x_{n1}), \ldots, M_n(x_{1n}, \ldots, x_{nn})\right].$$

Далее Ацел показал, что если рассматриваем не симметричные средние, то придем к взвешенным квазиарифметическим средним.

Настоящая работа, употребляя в сущности метод Ацела, переносит теорию квазиарифметических средних на более общие алгебраические системы. Для простоты работа удовлетворяется тем случаем, когда $n = 2$.

Средней системой называется такое множество M, которое удовлетворяет следующим аксиомам: (1) M расположено линейно и всякий отрезок Дедекинда определяет один элемент M; (2) для элементов M определяется единственное, не обязательно коммутативное умножение; (3) это умножение идемпотентно; (4) строго монотонно; (5) существует биси метричность: $(ab)(cd) = (ac)(bd)$; (6) умножение архимедого: если $a < c < b$, то умножая a достаточно раз на b слева (справа), получим, что $b[b \ldots (ba)] > c$, $([(ab)\, b] \ldots b > c)$. Последнюю аксиому автор использует вместо обычной аксиомы непрерывности (как более алгебраическую аксиому). После определения непрерывности, исходя из упорядоченности, доказывается, что непрерывность и аксиома Архимеда легко выводятся одна из другой, при условии справедливости остальных аксиом.

Главная теорема работы показывает, что эта работа с алгебраической точки зрения не является обобщением, ибо всякая средняя система изоморфна с некоторым конечным или бесконечным интервалом действительных чисел, относительно образования взвешенной арифметической средней, как оператора.

Главная теорема: Если M средняя система, то существует такое действительное число λ $(0<\lambda<1)$ и такой интервал действительных чисел I, который имеет взаимное и единственное отображение $\varphi(\xi)$ на M, консервирующую упорядоченность, так что $\varphi(\xi)\varphi(\eta) = \varphi(\lambda\xi+\mu\eta)$ $(\lambda+\mu=1)$, где $\xi, \eta \in I$ и умножение обозначает операцию в M.

Доказательство следует идеи Ацела с некоторыми упрощениями. Для квазигрупп автор дает новое доказательство, употребляя одну теорему К. Тоёда [17] и Д. Ц. Мурдоха [15]. Главная теорема имеет интересные последствия относительно автоморфизмов средних систем.

BERICHTIGUNG ZUM AUFSATZE[1] „ÜBER DIE DIOPHANTISCHE GLEICHUNG $x^3-1=2y^2$“

Von
RICHARD OBLÁTH (Budapest)
(*Vorgelegt von* A. RÉNYI)

Herr Professor T. NAGELL machte mich freundlichst aufmerksam, dass Satz 1 der obengenannten Arbeit, der die Unmöglichkeit der diophantischen Gleichung $x^2+x+1=3v^2$ mit ungeradem x behauptet, falsch ist ($x=313$, $v=181$ ist z. B. eine Lösung). Der Beweis enthält in der Tat einen Fehlschluss, denn der Schritt $b=kc$ oder $b=kc-1$ ist nur dann berechtigt, wenn c eine Primzahl ist.

Die beiden Sätze 2 und 4, zu deren Beweise Satz 1 herangezogen wurde, sind jedoch richtig . Mein ursprünglicher — auf einer *descente infinie* beruhender — Beweis des Satzes 2 ist von Satz 1 unabhängig, da aber dieser Beweis nicht kurz ist, sehe ich von seiner Mitteilung hier ab. Der folgende Beweis, den ich Herrn T. NAGELL verdanke, ist ganz kurz.

Aus der Gleichung

$$x^3=1+2y^2 \tag{I}$$

folgt unmittelbar $(u+v\sqrt{-2})^3=1+y\sqrt{-2}$, woraus $u^3-6uv^2=1$, $y=3u^2v-2v^3$ und $u=1$, $v=0$, $y=0$, $x=1$ folgt, womit Satz 2 bewiesen ist.

Um Satz 4 zu beweisen, bezeichne ε eine primitive dritte Einheitswurzel. Dann folgt aus der Voraussetzung

$$3x^2+1=z^3 \tag{IV}$$

entweder A) $x\sqrt{3}+i=(u\sqrt{3}+vi)^3$,

oder B) $(x\sqrt{3}+i)\varepsilon=(u\sqrt{3}+vi)^3$,

oder C) $(x\sqrt{3}+i)\varepsilon^2=(u\sqrt{3}+vi)^3$.

[1] Diese Acta, **1** (1950), pp. 113—117.

Im Falle A) ergibt die Ausführung der Rechnung

$$x\sqrt{3}+i=3u(u^2-v^2)\sqrt{3}+v(9u^2-v^2)i,$$

also $v(9u^2-v^2)=1$ und $v=\pm 1$. Dies hat entweder $9u^2=2$ oder $u^2=0$ zur Folge. Der erste Fall ist unmöglich, der zweite ergibt die triviale Lösung $x=0$, $z=1$.

Fälle B) und C). Das Gleichsetzen der reellen und der imaginären Komponenten ergibt

$$-(x\pm 1)=6u(u^2-v^2) \qquad \text{und} \qquad \pm 3x-1=2v(9u^2-v^2).$$

Die Elimination von x aus den beiden Gleichungen führt zu

$$\pm 9u(u^2-v^2)+v(9u^2-v^2)=-2,$$

unmöglich mod 4.

Herr Professor W. Ljunggren teilt mir mit, dass er bewiesen hat, dass die Gleichung $x^3+1=2y^2$ ausser den bekannten keine weitere Lösungen besitzt, ferner, dass schon Herr T. Nagell sich mit ähnlichen diophantischen Gleichungen befasst hat.

(*Eingegangen am 12. Mai 1951.*)

Les Acta Mathematica paraissent en russe, français, anglais et allemand et publient des mémoires du domaine des sciences mathématiques.

Les Acta Mathematica sont publiés en cahiers qui seront réunis en volumes de 300 à 350 pages. Il paraît, en général, un volume par an.

Les manuscrits, autant que possible écrits à la machine, doivent être envoyés à l'adresse suivante:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est 60 forints par volume.

On peut s'abonner à l'entreprise de commerce extérieur des livres et journaux »Kultúra« (Budapest, VIII., Rákóczi-út 5. Compte courant No. 929.040) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

The Acta Mathematica publish papers on mathematics in Russian, French, English and German.

The Acta Mathematica appear in parts of various size, making up volumes of 300 to 350 pages. On the average, one volume is published annually.

Manuscripts should, if possible, be typewritten and addressed to:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

Correspondence with the editors or publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Mathematica, is 60 forints a volume. Orders may be placed with »Kultúra« Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest, VIII., Rákóczi-út 5. Account No. 929.040) or with representatives abroad.

Die Acta Mathematica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der mathematischen Wissenschaften in russischer, französicher, englischer und deutscher Sprache.

Die Acta Mathematica erscheinen in Heften wechselnden Umfangens Mehrere Hefte bilden einen Band von 20 Bogen. Im allgemeinen erscheint jährlich ein Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind, möglichst mit Maschine geschrieben, an folgende Adresse zu senden:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Redaktion und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu senden.

Abonnementspreis pro Band 60 Forints. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Aussenhandels-Unternehmen »Kultúra« (Budapest, VIII., Rákóczi-út 5. Bankkonto Nr. 929.040) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

42 forint.

INDEX

Turán, P., On the remainder-term of the prime-number formula, II.
П. Туран, Об остаточном члене формулы простых чисел, II 155
Sz.-Nagy, Gy., Tschirnhaus'sche Flächen und Kurven.
Д. С.-Надь, Поверхности и кривые Тширнгауса 167
Sz.-Nagy, B., Sur l'ordre de l'approximation d'une fonction par son intégrale de Poisson.
Б. С.-Надь, О мере апрокси мации функции ее интегралом Пуассона 183
Hajós, G., Sur le problème de factorisation des groupes cycliques.
Г. Гаёш, Проблема факторизации циклических групп 189
Rédei, L., Ein Beitrag zum Problem der Faktorisation von endlichen Abelschen Gruppen.
Л. Рэдэи, К проблеме факторизации конечных групп Абеля 197
Jánossy, L., A. Rényi and *J. Aczél*, On composed Poisson distributions, I.
Л. Яноши, А. Реньи и Я. Ацел, Обобщенные распределения типа Пуассона, I..... 209
Sz.-Nagy, Gy., Über Polynome mit lauter reellen Nullstellen.
Д. С.-Надь, О многочленах все корни которых действительны 225
Гелфонд, А. О., Приближение алгебраических чисел алгебраическими же числами и теория трансцендентных чисел 229
Surányi, J., Contributions to the reduction theory of the decision problem, second paper.
Я. Шурани, Вклады в теорию приведения проблемы разрешимости, вторая статья 261
Fejes Tóth, L., Elementarer Beweis einer isoperimetrischen Ungleichung.
Л. Фееш Тот, Элементарное доказательство одного изопериметрического неравенства 273
Császár, Á., Sur les nombres de Lipschitz généralisés.
А. Часар, Об обобщенных числах Липшица 277
Fuchs, L., On mean systems.
Л. Фукс, О средних системах 303
Oblath, R., Berichtigung zum Aufsatze: "Über die diophantische Gleichung $x^3 - 1 = 2y^2$." 321

Akadémiai Kiadó (Budapest, VI., Sztálin-út 31.) Felelős: Mestyán János

Budapest nyomda, Gerlóczy-utca 2. — 9705 — Felelős vezető: Ifj. Puskás Ferenc