MATEMATIKAI

ÉS

FIZIKAI LAPOK

AZ EÖTVÖS LORÁND
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT MEGBÍZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

FEJÉR LIPÓT ÉS POGÁNY BÉLA

HARMINCHATODIK ÉVFOLYAM

1929

JANUÁR—JÚNIUSI FÜZET

BUDAPEST 1929

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT

TARTALOMJEGYZÉK.

MATEMATIKAI
ÉS
FIZIKAI LAPOK

HARMINCHATODIK KÖTET

AZ EÖTVÖS LORÁND
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

FEJÉR LIPÓT és POGÁNY BÉLA

BUDAPEST 1929

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT

A MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

HARMINCHATODIK KÖTETÉNEK TARTALMA.

★

A LINEÁRIS FÜGGVÉNYOPERÁCIÓK SZÉTBONTÁSÁRÓL.[1]

Önök jól ismerik azt a problémát, amelyről itt beszélni óhajtok és ismerik annak megoldását is. Engedjék meg, hogy a lényeges definiciókat és tényeket emlékezetükbe idézzem. Tekintsük az (a, b) számközben értelmezett folytonos függvények öszszességét, melyet Ω-val jelölök. Az A függvényoperációt, amely Ω minden f eleméhez egy meghatározott A_f számot rendel, akkor mondjuk lineárisnak, ha disztributiv és korlátos, azaz, ha

$$A_{f+g} = A_f + A_g, \quad A_{cf} = cA_f$$

és

$$|A_f| \leqq M \times \max |f(x)|,$$

ahol az M konstáns független az $f(x)$ függvény megválasztásától.

1909-ben, Hadamard egy tételének kiegészitéseképen megmutattam, hogy *minden lineáris függvényoperáció előállítható* Stieltjes-*féle integrállal:*

$$A_f = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x),$$

ahol $\alpha(x)$ egy csupán az A operációtól függő és ezen operáció által lényegében meghatározott korlátos ingadozású függvény.[2]

---

[1] A bolognai nemzetközi mathematikai kongresszuson (1928) «Sur la décomposition des opérations fonctionnelles linéaires» címen tartott előadás fordítása.

[2] F. Riesz: Sur les opérations fonctionnelles linéaires, *Comptes rendus, Acad. Sc. Paris*, *149* (1909), pp. 974—977.

Mivel pedig megfordítva, minden ilyen alakú integrál egy lineáris operációt értelmez, *ez az integrál a lineáris operációk általános analitikus kifejezésének tekinthető* és ennélfogva a korlátos ingadozású függvények analizálása egyszersmind analizálása a lineáris operációknak is. Így pl. CAMILLE JORDAN-nak az a klasszikus tétele, hogy minden korlátos ingadozású függvény előállítható mint két monoton növekvő függvény különbsége, egyszersmind az általános lineáris függvényoperációnak két pozitív lineáris operáció különbsége gyanánt való előállíthatóságát mondja ki. Ugyanezt a gondolatmenetet követte FRÉCHET is, amikor a lineáris függvényoperációnak azt a három részre való szétbontását tanulmányozta, mely az $\alpha(x)$ korlátos változású függvénynek LEBESGUE-től, BEPPO LEVI-től és DE LA VALLÉE POUSSIN-től származó $\alpha(x) = \alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \alpha_3(x)$ szétbontásának felel meg, ahol $\alpha_1(x)$, az *abszolut folytonos* rész, az $\alpha'(x)$ függvény integrálja, $\alpha_2(x)$, a *szingularitás-függvény*, olyan folytonos és korlátos ingadozású függvény, amelynek differenciálhányadosa majdnem mindenütt 0 és $\alpha_3(x)$ az $\alpha(x)$-nek úgynevezett *ugrásfüggvénye.*[1] Ennyit a probléma historikumáról. Mai előadásomban egy teljesen más módszert akarok röviden ismertetni, mondhatnám szintétikus módszert, mivel t. i. ennek a módszernek az alkalmazásával a lineáris operáció különböző részei jellemezhetők és előállíthatók a nélkül, hogy az operáció föntebbi analitikus kifejezését fölhasználnók. Ennek a módszernek az az előnye — hiszen a módszereknek mindig van előnyük — hogy teljesen általános, úgyhogy *alkalmazható absztrakt halmazokon értelmezett függvények lineáris operációira,* mint amilyeneket DANIELL az integrálfogalom kiterjesztéseként tanulmányozott. Mai előadásomban csupán példa gyanánt és azért szorítkozom a folytonos függvényekre, hogy gondolatmenetemet elhatároljam és jól ismert tényekre hivatkozhassam.

Módszerem alapgondolata a *majoráns* operáció fogalma.

---

[1] M. FRÉCHET: Sur les fonctionnelles linéaires et l'intégrale de STIELTJES, *Comptes rendus du Congrès des Sociétés savantes en 1913, Sciences.*

A B lineáris operációról akkor mondom, hogy majoránsa az A operációnak — és hogy viszont A *minoránsa* B-nek — képletben

$$A \leqq B, \quad B \geqq A,$$

ha a $B - A$ operáció *pozitív*, azaz ha minden nem-negatív $f(x)$ függvényre

$$A_f \leqq B_f.$$

Tekintsük az A lineáris operációknak egy végesszámú vagy végtelen sok operációból álló halmazát. A halmazról akkor mondom, hogy *majorálható,* ha van olyan lineáris operáció, mely valamennyi a halmazba tartozó operációnak majoránsa. Hasonló módon értelmezem a *minorálható* halmazokat. Például minden kizárólag pozitív operációkból álló halmaz minorálható, mert a $B_f \equiv 0$ operáció (melyet 0-val fogok jelölni) a halmaz minden elemének minoránsa.

Alaptételem a következőképpen szól:

Lineáris függvényoperációkból álló majorálható halmaz összes majoránsai közt van egy legkisebb, azaz olyan, mely a többinek minoránsa.

Nyilvánvaló, hogy hasonló tétel érvényes a minorálható halmazokra is.

A majorálható halmaz legkisebb majoránsának, $A^{\star}$-nak, $A_f^{\star}$ értékeit a következő eljárással nyerjük. Az általánosság megszorítása nélkül föltehetjük, hogy $f(x)$ nem-negatív; hiszen a lineáris operációt teljesen értelmeztük, ha értékét minden nem-negatív $f(x)$-re megadtuk. Bontsuk föl az $f(x)$ függvényt tetszésszerinti számú hasonló típusú, azaz folytonos és nem-negatív összeadandóra:

$$f = f_1 + f_2 + \ldots + f_n;$$

alkalmazzunk ezekre egy-egy halmazunkból vett, egyébként tetszés szerinti, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ operációt, és adjuk össze a nyert értékeket. Az $A_f^{\star}$ számot mint az ilyen módon nyerhető összegek felső határát értelmezzük.

Könnyű megmutatni, hogy az így értelmezett A^* operáció lineáris és hogy az halmazunk legkisebb majoránsa. Szerkesztésünkből speciálisan az is következik, hogy *véges számú operációból álló halmaz mindig majorálható és minorálható.* Idő hiányában a bizonyítást nem részletezem.

Tételünknek nyilvánvaló korolláriuma a következő: *Adva lévén a lineáris operációknak két halmaza,* $[A]$ *és* $[B]$, *és pedig úgy, hogy minden A-ra és B-re* $A \leqq B$, *úgy van legalább egy a két halmaz között fekvő, azaz olyan C lineáris operáció, hogy minden A-ra és B-re* $A \leqq C \leqq B$.

Az ezen eredmények és a valós számok arithmetikájának alapvető tényei közt látható analógia, amelyet Önök bizonyosan észrevettek, arra mutat, hogy a lineáris operációk bizonyos tekintetben úgy kezelhetők, mintha egész egyszerűen számokkal volna dolgunk. Így pl., ha max $(A, B, C, \ldots)$ és min $(A, B, C, \ldots)$-vel jelöljük az $A, B, C, \ldots$ operációk legkisebb majoránsát és legnagyobb minoránsát, úgy

$$\max(A, B, C) = \max(A, \max(B, C)),$$
$$\max(A, B) + \min(A, B) = A + B.$$

Az utóbbi indentitásba $B = 0$-t helyettesítve,

$$A = \max(A, 0) + \min(A, 0);$$

ebben az identitásban a jobb oldalon szereplő két operáció nem egyéb, mint az A operációnak *pozitív és negatív részei,* pontosan ugyanazok, amelyeket az $\alpha(x)$ függvénynek Jordan-féle szétbontása szolgáltat.

Hogy ahhoz a kevésbbé kézenfekvő hármas szétbontáshoz is eljussunk, amelyről már beszéltem és amely a korlátos ingadozású függvénynek abszolút folytonos részére, szingularitás-függvényére és ugrás-függvényére való szétbontásának felel meg, mindenekelőtt értelmeznünk kell a lineáris operációknak azt a három speciális kategóriáját, amelyekről szó lesz. Egyszerűség kedvéért pozitív operációkra szorítkozom; ez nem megy az általánosság rovására, mert hiszen egy első szétbontással, amint azt már láttuk, ilyenekhez mindig eljuthatunk. Megjegyzem, hogy a definiciók közvetlenül az általános esetre is megformulázhatók.

Az A és B pozitiv lineáris operációkról akkor mondom, hogy egymással *diszjunktak*, ha

$$\min(A, B) = 0,$$

azaz, ha nincsen a 0-tól különböző pozitiv minoránsuk. Másszóval, föltevésünk azt jelenti, hogy minden nem-negativ folytonos $f(x)$ függvény fölbontható két ugyanilyen összeadandóra, $f_1(x)$-re és $f_2(x)$-re úgy, hogy az A_{f_1} és B_{f_2} értékek tetszésszerint kicsinyek legyenek.

Föltevésünk még így is irható:

$$\max(A, B) = A + B.$$

Ezek után jelöljük I-vel az

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

operációt, azaz az (a, b) számközön végzett integrációt; ez az I operáció bizonyos tekintetben majd az egység-operáció szerepét játssza. Az I operáció segitségével a három szóban forgó kategóriát a következőképen értelmezem. Valamely pozitiv lineáris operációról akkor mondom, hogy *szinguláris*, ha I-vel diszjunkt. Az operációt *reguláris*nak mondom, ha minden szinguláris operációval diszjunkt. Továbbá a szinguláris operációt akkor mondom *folytonos*nak, ha diszjunkt valamennyi

$$A_f = f(x_0)$$

operációval, ahol x_0 a zárt (a, b) számköz tetszésszerinti pontja. A szinguláris operációról akkor mondom, hogy *tisztára nemfolytonos*, ha valamennyi folytonos operációval diszjunkt.

Az imént értelmezett osztályok mindegyikének megvan az a fontos sajátsága, hogy véges számú vagy végtelen sok elemének legkisebb majoránsa ugyanabba az osztályba tartozik.

Ezek után valamely A pozitív operációnak az imént értelmezett három osztály egy-egy elemére való szétbontása csaknem automatikusan eszközölhető. Tekintsük az illető osztály mindazon elemeit, amelyek A-nak minoránsai, például az öszszes A-nál $\leqq$ reguláris operációkat, és vegyük ezek közül a legnagyobbat, vagyis legkisebb majoránsukat. Ha ezt az eljárást mind a három osztályra alkalmazzuk, pontosan azt a három operációt nyerjük, amelyeket FRÉCHET az A operáció integrálelőállításában szereplő korlátos ingadozású $\alpha(x)$ függvény három részre való szétbontása segítségével értelmezett.

Mellőzöm a részleteket és azt a néhány percet, ami még rendelkezésemre áll, inkább arra használom föl, hogy a LEBESGUE-féle integrálelméletnek gondolatkörünkkel való összefüggéséről beszéljek. Csupán a reguláris operációkról lesz szó; Önök bizonyosan észrevették, hogy pontosan ezek azok, amelyeknek analitikus kifejezése az

$$A_f = \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

alakban is írható, ahol $\varphi(x)$ egy a LEBESGUE-féle értelemben integrálható függvény, és pedig nem-negatív függvény, amíg csak pozitív operációkról van szó, ellenben tetszésszerinti előjelű, mihelyt ezt a megszorítást elimináltuk. Ha tehát még megállapodunk abban, hogy olyan két integrálható függvényt, amelyek csupán egy zéró-mértékű halmazon különböznek egymástól, azonosaknak tekintünk, akkor *az integrálható függvények és a reguláris operációk közt egy megfordíthatóan egyértelmű vonatkozás áll fönn.* Bennünket ebben a pillanatban az érdekel, hogy kiindulva a folytonos függvények lineáris operációinak, és pedig speciálisan a reguláris operációk fogalmából,[1]

---

[1] A reguláris operáció egy közvetlen definiciója, amely sem az operáció analitikus kifejezését, sem a szinguláris operáció fogalmát nem használja föl, a következő. *Az A lineáris operációt regulárisnak mondjuk, ha $A_{f_n} \to 0$ minden olyan korlátos $\{f_n\}$ sorozatra, amelyre $\int_a^b |f_n(x)|\,dx \to 0$.*

tehát a nélkül, hogy a klasszikus analizis szent ligetéből kimozdulnánk, lényegben a LEBESGUE szerint integrálható függvények összességéhez jutunk. Természetesen, ezek a függvények még nem jelentkeznek explicit alakjukban; azonban nem okoz semmi nehézséget, hogy gondolatkörünkben megmaradva rekonstruáljuk, ha nem is a megszokott sorrendben, a LEBESGUE-féle elmélet minden részletét. Így többek közt, ami a mérhető halmazokat illeti, amelyeknek a szóbanforgó elméletben való uralkodó szerepét Önök ismerik, ezeknek a mi gondolatkörünkben a lineáris operációk egy meghatározott osztálya felel meg. Minden E mérhető halmazhoz hozzá rendeljük az

$$E_f = \int_E f(x)\,dx$$

operációt; azonban mi, a mi gondolatkörünkben, ezen speciális operációk összességét *analitikus kifejezésük fölhasználása nélkül jellemezzük.* Ezek az operációk ugyanis teljesen jellemezhetők a következő két föltevéssel:

$$1.\ 0 \leqq E \leqq I; \qquad 2.\ E \text{ diszjunkt } I - E\text{-vel.}$$

Tényleg, ha E analitikus kifejezését tekintjük, ez a két föltevés a következőkbe megy át:

$$1.\ 0 \leqq \varphi(x) \leqq 1; \qquad 2.\ \varphi(x)\,[1 - \varphi(x)] = 0,$$

legalább is majdnem mindenütt; azaz egy zérómértékű halmaztól eltekintve, $\varphi(x)$ csak a 0 és 1 értékeket veheti föl, tehát $\varphi(x)$ egy mérhető halmaz karakterisztikus függvénye.

Jelentsen most már $\varphi(x)$ egy tetszésszerinti integrálható függvényt. Ehhez is tartoznak bizonyos jellegzetes halmazok, amelyeknek a $\varphi(x)$ függvény, vagy általánosabban a $\varphi(x) f(x)$ szorzat integrálásában jut szerep; ilyenek azok a halmazok, amelyeken $\varphi(x) \leqq c$ vagy $\geqq c$ stb. Vagyis a dolgot a mi nézőpontunkról tekintve, a következő feladatra jutunk. Jelöljük A-val a $\varphi(x)$ függvénynek megfelelő operációt; ismerve ezt az A operációt, de a $\varphi(x)$ *függvény fölhasználása nélkül* határozzuk meg az imént említett jellegzetes halmazoknak megfelelő, *«halmaz-típusú»* operációkat. Az általánosság megszorítása nélkül föltehetjük, hogy $c = 0$. Ebben az esetben első teendőnk az A operációt pozitív és negatív részeire bontani; ez megfelel a $\varphi(x)$ függvénynek pozitív és negatív részeire való szétbontásának. Ezek után a kérdéses halmazok azok, amelyeken ezen részek egyike $= 0$ és feladatunk vissza van vezetve arra a speciális esetre, amikor $\varphi(x)$ nem-negatív és azt a halmaztípusú operációt keressük, amely a $\varphi(x) = 0$ relációval jellemzett halmaznak felel meg. Jelöljük most is A-val a $\varphi(x)$ függvénynek megfelelő operációt és I-vel az (a, b) közön való integrációt, képezzük a pozitív értékeken át változó λ parametertől függő

$$I - \min(\lambda A, I)$$

operációt és tartassuk λ-t a végtelenbe. Akkor *az imént értelmezett operáció növekvő λ-val fogy és egy limesz-operáció felé tart; ez pontosan a keresett operáció.*

Még egy másik eljárás a $\varphi(x) \geqq c$ által jellemzett E_c halmaznak megfelelő E_c operáció meghatározására a következő. Tekintsük az $A + \lambda I$ operáció *pozitív részét.* Ha ezt a λ parametertől függő operációt egy nem-negatív $f(x)$ függvényre alkalmazzuk, az operáció értéke λ-nak *konvex* függvénye és ennek a függvénynek *a $\lambda = -c$ helyen való jobboldali differenciálhányadosa szolgáltatja a keresett operáció értékét az $f(x)$ függvényre.*

Ezzel elérkeztünk egy *«megközelítő»* szétbontás gondolatához. Jelöljük ugyanis ismét E_c-vel azt a halmaztípusú operációt, amelyhez az imént jutottunk és legyenek

$$\ldots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots$$

egy az integrál kiszámításához használt Lebesgue-féle skála beosztási pontjai. Képezzük a

$$c_k(E_{c_k} - E_{c_{k+1}})$$

operációkat. Ezeknek az operációknak, amelyek a c_k faktortól eltekintve halmaztípusúak, az összege nem egyéb, mint az A

operáció approximatív kifejezése; ha a skálát minden határon túl sűrítjük, ez az összeg pontosan az A operáció felé tart.

De nagyon is eltértem már előadásom főtárgyától, és attól félek, hogyha még tovább beszélek a Lebesgue-féle integrálról, annak az a látszata lesz, hogy csupán ismét egyszer meg akarom bolygatni a paragrafusok sorrendjét ebben az elméletben, amelynek pedig, örömmel mondhatom, az elsők közt ismertem föl a nagy jelentőségét.

Riesz Frigyes.

SUR LA DÉCOMPOSITION DES OPÉRATIONS FONCTIONNELLES LINÉAIRES.

Traduction hongroise d'une conférence faite sous ce titre au Congrès international des mathématiciens à Bologne (1928), sous presse dans les Comptes rendus du Congrès.

Frédéric Riesz.

ABEL HATVÁNYSORTÉTELÉVEL KAPCSOLATOS ÚJABB VIZSGÁLATOKRÓL.

Előadta a szerző a Matematikai és Fizikai Társulat 1929. évi április hó 18-án tartott ülésén.

1. Abel halálának századik évfordulóját most ünnepli Norvégia; időszerű tehát arról az irodalomról beszámolnom, amely egy gyakran említett tételéhez kapcsolódik. A binomiális sorról írt ismert dolgozatában [1][1] Abel többek között a következő tételt bizonyította be.

A) Legyen $\sum\limits_1^\infty c_\nu$ egy konvergens sor, úgy hogy a $\sum\limits_1^\infty c_\nu x^\nu$ hatványsor a $0 \leqq x \leqq 1$ intervallumban is konvergens; akkor

$$\lim_{x\to 1} \sum_1^\infty c_\nu x^\nu \equiv \lim_{x\to 1} f(x) = \sum_1^\infty c_\nu = C,$$

azaz a hatványsor által előállított $f(x)$ függvény az $x=1$ helyen folytonos. A tétel akkor bír fontossággal, ha a $\sum c_\nu$ sor csak feltételesen konvergens. Így például a

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

kifejtésből nyerjük, hogy

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \log 2;$$

hasonlóan az

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

---

[1] A zárójelbe tett számok a dolgozat végén felsorolt irodalomra utalnak. — Itt megjegyzem, hogy ismertetésem nem törekszik az idevágó irodalom teljes felsorolására.

kifejtés az $x=1$ helyen az

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots=\frac{\pi}{4}$$

képletet szolgáltatja. Abel tétele többféle irányú vizsgálatoknak lett kiindulópontja; először is az általánosításait említem meg. A tételt két irányban lehet általánosítani: 1. hatványsor helyett más függvénysort vizsgálunk, 2. a Σc_ν sor konvergenciája helyett általánosabban csak bizonyos szummabilitást követelünk. Az első irányban először Dedekind általánosította a tételt. Könnyebb összehasonlítás céljából az *A)* tételt más alakban írom fel, egy új változó bevezetésével. Legyen $x=e^{-t}$; ha x befutja a $0<x<1$ intervallumot, akkor t monoton csökkenően befutja a pozitiv féltengelyt. Abel tétele most így szól:

A') Ha $\sum\limits_1^\infty c_\nu = C$ egy konvergens sor, úgy hogy a $\sum\limits_1^\infty c_\nu e^{-\nu t}$ sor t pozitiv értékeire is konvergens, akkor

$$\lim_{t\to 0}\sum_1^\infty c_\nu e^{-\nu t} = C. \qquad (a)$$

Már most Dedekind általánosítása Dirichlet-féle sorokra vonatkozik és így szól (l. pl. Landau 16.):

D) Legyen (λ_ν) a pozitiv, minden határon túl monoton növekvő számoknak egy sorozata

$$0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots,\quad \lambda_\nu\to\infty,$$

és legyen $\sum\limits_1^\infty c_\nu$ konvergens, úgy hogy a $\sum\limits_1^\infty c_\nu e^{-\lambda_\nu t}$ Dirichlet-féle sor konvergens, ha $t\geqq 0$. Akkor

$$\lim_{t\to 0}\sum_1^\infty c_\nu e^{-\lambda_\nu t}=\sum c_\nu = C.$$

Innen Abel tételét a $\lambda_\nu=\nu$ esetre nyerjük.

Más függvénysorokra Fejér [4, 5], Hardy [9] és Bromwich [3] adtak általánosításokat.

A második irányban először Frobenius [8] általánosította

ABEL tételét; ő a Σc_ν sor konvergenciájának feltételét helyettesítette az elsőrendű aritmetikai közepekkel való szummabilitás feltételével. ABEL tétele is egy szummálási eljárást ad, amennyiben a konvergens sor értékét egy *radiális* határátmenettel nyeri, amellyel divergens sor összegét is definiálhatjuk. Példa erre az $x-x^2+x^3-\cdots=\frac{x}{1+x}$ hatványsor, tehát $1-1+1-\cdots=\frac{1}{2}$. Már most FROBENIUS kimutatta, hogy az ABEL-féle szummálás az elsőrendű közepekkel való szummálásnak is általánosítása. Tétele tehát a következő:

F) Ha a $\sum_1^\infty c_\nu$ sor részletösszegei

$$C_0=0,\ C_n=c_1+\cdots+c_n,\ n=1,2,3,\ldots$$

és ha

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_1+C_2+\cdots+C_n}{n+1}=C,$$

akkor $\sum_1^\infty c_\nu e^{-\nu t}$ konvergens t pozitív értékeire és

$$\lim_{t\to 0}\sum_1^\infty c_\nu e^{-\nu t}=C.$$

HÖLDER [15] e tételt általánosította magasabbrendű közepekre. DIRICHLET-féle sorok esetében, azaz a *D)* tétel általánosítása céljából az aritmetikai közepeket a RIESZ MARCELL által bevezetett typikus közepekkel kell helyettesítenünk [l. 14, p. 39].

ABEL tétele és általánosításai még abban az irányban szigoríthatók, hogy az adott praemisszákból erősebb konkluzióhoz jutunk: egyenletes konvergencia, a függvény folytonossága egy szögtartományban [l. 20, 21, 14].

2. Bővebben azonban nem ezen általánosításokkal kívánok foglalkozni, hanem azon vizsgálatokkal, amelyek az ABEL-féle, illetve DEDEKIND-féle tétel «megfordítását» célozzák. Az idevágó tételeket HARDY és LITTLEWOOD TAUBER-typusú tételeknek nevezik, mert TAUBER egy tételével indultak meg 1897-ben e kutatások. Az általános problemát így fogalmazhatjuk:

Ha a Σc_ν sor egy megadott eljárással (pl. ABEL szerint) szummabilis, akkor minő további feltétel mellett lesz konvergens?

Ha az elsőrendű aritmetikai közepekkel szummabilis sorokról van szó, könnyen megfelelhetünk kérdésünkre. Legyen ugyanis

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_1+\cdots+C_n}{n+1}=C,$$

akkor a Σc_ν sor konvergenciájának további szükséges és egyszersmind elegendő feltétele nyilván, hogy a

$$\lim_{n\to\infty}\left(C_n-\frac{C_1+\cdots+C_n}{n+1}\right)$$

határérték létezzék és zérussal legyen egyenlő; azaz

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_1+2c_2+\cdots+nc_n}{n+1}=0. \tag{1}$$

Most TAUBER tételét könnyen jellemezhetjük: nemcsak elsőrendű aritmetikai közepekkel szummabilis sorok esetében, hanem az ABEL-féle $\lim \Sigma c_\nu x^\nu$ létezése esetében is az (1) feltétel maga után vonja a Σc_ν sor konvergenciáját [25].

Az (1) feltétel mindenesetre teljesítve van, ha

$$\lim_{n\to\infty} nc_n=0, \quad \text{más jelöléssel:} \quad nc_n=o(1). \tag{1'}$$

HARDY [10] 1909-ben egy jelentékeny lépéssel előbbre jutott, amennyiben bebizonyította, hogy már az

$$n\,|c_n|<K,\ n=1,2,3,\ldots, \quad \text{azaz} \quad nc_n=O(1) \tag{2}$$

feltétel, elsőrendű vagy akárcsak magasabbrendű szummabilitással együtt maga után vonja a sor konvergenciáját. De arra a további kérdésre, hogy az (a) és (2) feltételek is maguk után vonják-e a sor konvergenciáját, csak LITTLEWOOD-nak sikerült 1911-ben igenlőleg megfelelnie [19]. Ezt megelőzőleg LANDAU [17] általánosította HARDY tételét, amennyiben a (2) feltételt az

$$nc_n>-K,\ n=1,2,3,\ldots, \quad \text{röviden:} \quad nc_n=O_L(1) \tag{3}$$

feltevéssel helyettesítette. Végül pedig HARDY és LITTLEWOOD egy közös dolgozatukban [11] 1914-ben egy tételt bizonyítottak be, mely úgy LANDAU, mint LITTLEWOOD tételét magában foglalja, t. i.

H.—L. Az (a) és (3) feltevésekből következik a Σc_ν sor konvergenciája.

A (3) feltevés esetében a c_ν-ket a valós számok tartományára szoritjuk; a többi feltevés esetében e megszorítás nem szükséges.

Ha az (a) limes létezik, röviden azt mondjuk, hogy a Σc_ν sor ABEL szerint szummabilis; az eddigiek szerint e szummabilitás és az (1), (2), (3) feltételek mindegyike maga után vonja a sor konvergenciáját. További ilyen feltételek:

$$\sum_1^\infty \nu^p \,|c_\nu|^{p+1} \tag{4}$$

konvergens, ha p egy alkalmasan választott pozitív szám.

Lásd HARDY és LITTLEWOOD [12].

A $p=1$ esetre FEJÉR [6 és 7] egy tételét nyerjük.

(2)-t és (4)-t általánositja a következő feltétel:

$$\sum_1^n (\nu\,|c_\nu|)^{p+1} = O(n) \tag{5}$$

egy $p>0$ kitevő esetében.[1]

E tételnek egy rövid bizonyítását adtam [24]; levezethető LANDAU-nak [18] egy feltételéből is, amely egy FEJÉR-től eredő egyszerűsítéssel így írható:

$$|c_{n+1}+\cdots+c_{n+k}| < \varepsilon,\ n=1, 2, 3,\ldots,\ k\leq n\delta;\ \text{és}\ C_n=O(1), \tag{6}$$

minden $\varepsilon>0$ és alkalmasan választott $\delta(\varepsilon)$ esetében.

E vizsgálatok szoros kapcsolatban vannak HARDY és LITTLEWOOD egy másik TAUBER-typusú tételével. Térjünk vissza ABEL és FROBENIUS tételeihez; mivel

$$f(x) = \sum_1^\infty c_\nu x^\nu = (1-x)\sum_1^\infty C_\nu x^\nu,$$

[1] A $p=1$ eset alkalmazható a FOURIER-féle sorok elméletében.

tehát Abel szerint a $C_\nu \to C$ feltevésből következik, hogy

$$\Sigma C_\nu x^\nu \sim \frac{C}{1-x} \quad \left(\text{azaz } \lim_{x\to 1}(1-x)\,\Sigma C_\nu x^\nu = C\right)$$

és Frobenius szerint ugyanez következik az általánosabb

$$\frac{C_1 + \cdots + C_n}{n} \to C, \quad \text{ha} \quad n \to \infty$$

feltevésből. E tétel általában meg nem fordítható; példa erre az

$$\frac{x}{(1+x)^2} = x - 2x^2 + 3x^3 - \cdots$$

hatványsor. Itt nyilván

$$C_{2n-1} = n, \; C_{2n} = -n, \; n = 1, 2, 3, \ldots,$$

tehát

$$C_1 + \cdots + C_{2n} = 0, \; C_1 + \cdots + C_{2n+1} = n + 1.$$

Már most Hardy és Littlewood 1913-ban [11] arra a meglepő eredményre jutottak, hogy pozitív C_ν-k esetében a tétel fordítottja is igaz. Általánosabban a következő tételt bizonyították be:

P) Ha

$$C_\nu \geqq 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

és

$$\Sigma C_\nu x^\nu \sim \frac{C}{(1-x)^\alpha}, \; C > 0, \; \alpha > 0,$$

akkor

$$C_1 + C_2 + \cdots + C_n \sim \frac{Cn^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

E tételre támaszkodva nyerték Hardy és Littlewood a H.—L. tételt.

3. Mindeme tételek átvihetők oly Dirichlet-féle sorokra, amelyek kitevői a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1$$

feltételnek tesznek eleget. Az (1)—(6) feltételek helyébe most a következők lépnek:

$$\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \cdots + \lambda_n c_n = o(\lambda_n), \qquad \text{(I)}$$

illetve [Schnee 23]

$$\lambda_n c_n = o(\lambda_n - \lambda_{n-1}),\ n \to \infty. \qquad \text{(I')}$$

$$\lambda_n c_n = O(\lambda_n - \lambda_{n-1}),\ n \to \infty. \quad \text{[Littlewood 19]} \qquad \text{(II)}$$

$$\lambda_n c_n = O_L(\lambda_n - \lambda_{n-1}). \qquad \text{(III)}$$

$$\sum \left(\frac{\lambda_\nu}{\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}}\right)^p |c_\nu|^{p+1} \text{ konvergens.} \quad \text{[Hardy és Littlewood 12]} \qquad \text{(IV)}$$

$$\sum_2^n \left(\frac{\lambda_\nu}{\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}}\right)^p \lambda_\nu . |c_\nu|^{p+1} = O(\lambda_n). \quad \text{Szász.}^1 \qquad \text{(V)}$$

$$|c_{n+1} + \cdots + c_{n+k}| < \varepsilon,\ n \geqq 1,\ \lambda_{n+k} < \lambda_n(1+\delta)$$

és

$$C_n = O(1), \qquad \text{(VI)}$$

minden $\varepsilon > 0$ és alkalmasan választott $\delta(\varepsilon)$ mellett [Landau 18].

Az (V) feltétel általánosítása (II)- és (IV)-nek; mert ha (II) fennáll, akkor nyilván

$$\frac{\lambda_\nu^{p+1} |c_\nu|^{p+1}}{(\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1})^p} = O(\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1})$$

és innen

$$\sum_2^n \frac{\lambda_\nu^{p+1} |c_\nu|^{p+1}}{(\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1})^p} = O(\lambda_n).$$

Ha pedig (IV) fennáll, akkor

$$\sum_2^\nu \lambda_\nu \left(\frac{\lambda_\nu}{\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}}\right)^p |c_\nu|^{p+1} < \lambda_n \sum_2^\nu \left(\frac{\lambda_\nu}{\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}}\right)^p |c_\nu|^{p+1} = O(\lambda_n).$$

Hardy és Littlewood a Tauber-typusú tételeket két csoportba osztják: speciális tétel, amelyben egy o feltétel szerepel (pl. az (I) feltétel) és általános tétel, amelyben egy O feltétel szerepel; az utóbbi tételek bizonyítása lényegesen komplikáltabb. A (IV) tétel speciális jellegű, mert maga után vonja a

$$\sum_2^n \left(\frac{\lambda_\nu}{\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}}\right)^p . \lambda_\nu |c_\nu|^{p+1} = o(\lambda_n)$$

---

[1] A tétel bizonyítását előadtam a bolognai nemzetközi kongresszuson 1928 szeptember 4-én.

relációt. Ha ugyanis rövidség kedvéért

$$\sum_2^n \left(\frac{\lambda_\nu}{\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1}}\right)^p |c_\nu|^{p+1} = u_n, \; n=2, 3, \ldots, \; u_1 = 0,$$

akkor nyilván

$$\sum_2^n \left(\frac{\lambda_\nu}{\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1}}\right)^p . \lambda_\nu |c_\nu|^{p+1} =$$

$$= \sum_2^n \lambda_\nu (u_\nu - u_{\nu-1}) = -\sum_2^{n-1} u_\nu (\lambda_{\nu+1}-\lambda_\nu) + u_n\lambda_n = o(\lambda_n),$$

mert feltevés szerint $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ létezik.[1]

Végül a *P)* tétel általánosítása Dirichlet-féle sorokra így szól [12]:

P') Ha $F(t) = \Sigma C_\nu e^{-\lambda_\nu t}$ t pozitív értékeire konvergens, ha továbbá a C_ν együtthatók pozitívok és $\frac{\lambda_{\nu+1}}{\lambda_\nu} \to 1$, ha végül

$$F(t) \sim \frac{C}{t^\alpha}, \; C>0, \; \alpha \geqq 0, \; t\to 0,$$

akkor

$$C_1 + C_2 + \cdots + C_n \sim \frac{C\lambda_n^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

4. A további vizsgálatok a $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \to 1$ feltétel kiküszöbölésére irányulnak. Hardy és Littlewood 1926-ban [13] kimutatták, hogy a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > 1$ $\left(\text{azaz } \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geqq \vartheta > 1\right)$ esetben már a $\lim\limits_{t\to 0} \Sigma c_\nu e^{-\lambda_\nu t}$ létezéséből következik a Σc_ν sor konvergenciája. (Természetesen fel kell tennünk, hogy a $\Sigma c_\nu e^{-\lambda_\nu t}$ sor t pozitív értékeire konvergens.) Ananda-Rau indus matematikus 1928-ban [2] kimutatta, hogy a (II) tétel minden Dirichlet-féle sorra igaz. Legújabban sikerült kimutatnom, hogy a *P')* tétel is minden

[1] Cauchy és Stolz egy tétele szerint a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ létezéséből következik, hogy

$$u_n - \frac{(\lambda_2-\lambda_1)\,u_1 + \cdots + (\lambda_n-\lambda_{n-1})\,u_{n-1}}{\lambda_n} \to 0, \; n\to\infty.$$

DIRICHLET-féle sorra fennáll. Egyúttal sikerült a (III) és (VI) tételeket (amelyek a többieket magukban foglalják) egy általánosabbra visszavezetnem. E célból a $\Sigma c_\nu e^{-\nu t}$ hatványsor egy formális általánosításából indulok ki; ha a ν index helyébe egy folytonos u változót vezetünk be, az $\int\limits_0^\infty c(u)\, e^{-ut} du$ LAPLACE—ABEL-féle integrálhoz jutunk. Ennek általánosítása STIELTJES-féle integrálra az $I(t) = \int\limits_0^\infty e^{-ut} dC(u)$ alakhoz vezet. Ebben az alakban minden DIRICHLET-féle sor felírható; ha ugyanis

$$C(x) = C_n = c_1 + \cdots + c_n, \quad \lambda_n \leqq x < \lambda_{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

és

$$C(x) = 0, \quad 0 \leqq x < \lambda_1,$$

akkor nyilván

$$\sum_1^\infty c_\nu e^{-\lambda_\nu t} \equiv \int\limits_0^\infty e^{-ut} dC(u).$$

Ha a sor t pozitiv értékeire konvergens, akkor minden pozitív δ-ra [l. pl. 26, p. 4]

$$C_n = O(e^{\delta \lambda_n}), \quad n \to \infty;$$

ennélfogva parciálisan integrálhatunk és nyerjük, hogy

$$I(t) = t \int\limits_0^\infty e^{-ut} C(u)\, du.$$

Ezzel a STILTJES-féle integrált visszavezettük közönséges integrálra, amely t pozitiv értékeire absolute konvergens. Hasonlóan nyerjük, hogy

$$I(t) = t^2 \int\limits_0^\infty e^{-ut} A(u)\, du, \quad \text{ahol} \quad A(x) = \int\limits_0^x C(u)\, du.$$

Most a $P')$ tétel általánosítása így szól:

Legyen $A(x)$ pozitív és monoton növekvő; legyen

$$\varphi(t) = t \int\limits_0^\infty e^{-ut} A(u)\, du$$

konvergens, ha $t > 0$, és legyen

$$\varphi(t) \sim A . t^{-\alpha}, \ A > 0, \ \alpha \geqq 0, \ t \to 0,$$

akkor

$$A(x) \sim \frac{A x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}, \ x \to \infty. \tag{7}$$

5. A bizonyítás módszere, amely LITTLEWOOD-tól származik, röviden az ismételt differenciálással jellemezhető. Fontos segédeszköz a következő segédtétel:

Legyen egy $\psi(t)$ függvény ismételten differenciálható és legyen

$$\psi(t) \to C, \quad \text{ha} \quad t \to 0,$$

és

$$t^r \,|\psi^{(r)}(t)| < K_r, \ r = 1, 2, 3, \ldots, \ t > 0,$$

akkor

$$t^r \psi^{(r)}(t) \to 0, \ t \to 0.$$

Innen könnyen nyerjük, hogy a fentadott feltevések mellett

$$\int_0^\infty u^r A(u)\, e^{-ut} du \sim t^{-(\alpha+r+1)} . A . \frac{\Gamma(\alpha+r+1)}{\Gamma(1+\alpha)};$$

innen r alkalmas választásával sikerül $A(x) . x^{-\alpha}$ ingadozási határait tetszésszerint szűkíteni, míg végül a (7) relációt nyerjük.

Idézett irodalom.

1. N. H. ABEL, Untersuchungen über die Reihe

$$1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 . 3} x^3 + \cdots,$$

Journal für die reine und angewandte Math. 1 (1826), 311—339.

2. K. ANANDA-RAU. On the converse of ABEL's theorem, Journal London Math. Soc. 3 (1928), 200—205.

3. T. J. J'A. BROMWICH, On the limits of certain infinite series and Integrals, Math. Annalen 65 (1908), 350—369.

4. L. FEJÉR, Über zwei Randwertaufgaben, Mathem. und Naturw. Berichte aus Ungarn 19 (1904), 327—331.

5. L. FEJÉR, Untersuchungen über FOURIER'sche Reihen, Math. Annalen 58 (1904), 51—69.

6. L. FEJÉR, La convergence sur son cercle de convergence d'une série de puissances effectuant une représentation conforme du cercle sur le plan simple, Comptes rendus, Paris 156 (1913), 46—49.

7. L. Fejér, Über die Konvergenz der Potenzreihe an der Konvergenzgrenze in Fällen der konformen Abbildung auf die schlichte Ebene, Festschrift Schwarz, 43—53.

8. G. Frobenius. Über die Leibniz'sche Reihe, Journ. f. Math. 89 (1880), 262—264.

9. G. H. Hardy, Some theorems connected with Abel's theorem on the continuity of power series, Proc. London Math. Soc. (2), 4 (1907) 257—265.

10. G. H. Hardy, Theorems relating to the summability and convergence of slowly oscillating series, Proc. London Math. Soc. (2), 8 (1910), 301—320.

11. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Tauberian theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive, Proc. London Math. Soc. (2), 13 (1914), 174—191.

12. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Some theorems concerning series. The Dirichlet's Messenger of Math. (2), 43 (1914), 134—147.

13. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, A further note on the converse of Abel's theorem, Proc. London Math. Soc. (2), 25 (1926), 219—236.

14. G. H. Hardy and M. Riesz, The general theory of Dirichlet's series, Cambridge 1915.

15. O. Hölder, Grenzwerte von Reihen an der Konvergenzgrenze, Math. Annalen 20 (1882), 535—549.

16. E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Verlag Teubner 1909.

17. E. Landau, Über die Bedeutung einiger neuen Grenzwertsätze der Herren Hardy und Axer, Prac. Mat.-Fiz. 21 (1910), 97—177.

18. E. Landau, Über einen Satz des Herrn Littlewood, Rendic. Circ. Matem. Palermo 35 (1913), 265—276.

19. J. E. Littlewood, The converse of Abel's theorem on power series, Proc. London Math. Soc. (2), 9 (1911), 434—448.

20. A. Pringsheim, Über zwei Abel'sche Sätze, die Stetigkeit von Reihensummen betreffend, Sitzungsber. d. Akad. München 27 (1897), 343—356.

21. A. Pringsheim, Über die Divergenz gewisser Potenzreihen an der Konvergenzgrenze, Ibidem 31 (1902), 505—524.

22. A. Pringsheim, Über eine Konvergenzbedingung für unendliche Reihen, die durch iterierte Mittelbildung reduzibel sind, Ibidem 1920, 275—284.

23. W. Schnee, Über Dirichlet'sche Reihen, Rendic. Circ. Matem. Palermo 27 (1909), 87—116.

24. O. Szász, Verallgemeinerung eines Littlewood'schen Satzes über Potenzreihen, Journal London Math. Soc. 3 (1928), 254—262.

25. A. Tauber, Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen, Monatshefte f. Math. u. Phys. 8 (1897), 273—277.

26. G. Valiron, Théorie générale des séries de Dirichlet (Mémorial d. sciences math. XVII). Paris 1926.

Szász Ottó.

ÜBER NEUERE UNTERSUCHUNGEN IM ZUSAMMENHANGE MIT DEM ABEL'SCHEN POTENZREIHEN-SATZ.

Auszug aus einem Vortrag.

1. Abel hat im Jahre 1826 den Satz bewiesen:

Es sei die Reihe $\sum\limits_{1}^{\infty} c_\nu$ konvergent, so dass die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} c_\nu x^\nu \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq 1$$

konvergiert; dann ist

$$\lim_{x\to 1} \sum_{1}^{\infty} c_\nu x^\nu = \sum_{1}^{\infty} c_\nu.$$

Man hat in diesem Satz sowohl die Voraussetzungen verallgemeinert, als auch die Folgerung verschärft. Es lassen sich nämlich die Potenzreihen durch allgemeinere Reihen und die Konvergenz durch Summierbarkeit ersetzen; die Summierbarkeit gilt dann gleichmässig in einem gewissen Bereich. Sätze dieser Art haben Dedekind, Frobenius, Hölder, Stolz, Pringsheim, Fejér, Hardy, Bromwich bewiesen.

2. In anderer Richtung liegen die sogenannten Umkehrungen des Abel'schen Satzes, das heisst Sätze, die aus der Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{x\to 1} \Sigma c_\nu x^\nu = C \tag{a}$$

und aus passenden Zusatzbedingungen auf die Konvergenz der Reihe Σc_ν schliessen lassen. Hardy und Littlewood nennen sie Sätze von Tauber'schem Typus, weil Tauber [25] zuerst einen Satz dieser Art bewiesen hat, nämlich den Satz:

Aus (a) und aus $nc_n \to 0$ folgt die Konvergenz der Reihe Σc_ν.

Ich überschlage einige Resultate von Hardy [10], Landau [17] und Littlewood [19], die schliesslich Hardy und Littlewood [11] zu dem wichtigen Ergebnis führten:

Aus (a) und aus $nc_n > -K$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ (K eine Konstante) folgt die Konvergenz der Reihe Σc_ν.

Sätze mit Beschränkheitsbedingungen, die in diesem Satze nicht enthalten sind, haben noch Landau [18] und der Verfasser [24] gegeben.

In engem Zusammenhang mit diesen Sätzen steht ein Satz von Hardy und Littlewood [11], der sich auf Potenzreihen mit positiven Koeffizienten bezieht:

P) Es sei $C_\nu \geqq 0$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, und

$$\Sigma C_\nu x^\nu \sim C(1-x)^{-\alpha},\quad C > 0,\ \alpha > 0;$$

dann ist

$$C_1 + C_2 + \cdots + C_n \sim \frac{C}{\Gamma(1+\alpha)} \cdot n^\alpha,\quad n \to \infty.$$

3. Entsprechende Sätze gelten für allgemeine DIRICHLET'sche Reihen $\sum\limits_1^\infty c_\nu e^{-\lambda_\nu t}$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n \to \infty$, mit der Bedingung

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \to 1 \quad \text{für} \quad n \to \infty. \tag{c}$$

Aus der Existenz des $\lim\limits_{t \to +0} \Sigma c_\nu e^{-\lambda_\nu t}$ und aus einer der Bedingungen

$$\lambda_n c_n > -K(\lambda_n - \lambda_{n-1}), \quad \text{[HARDY und LITTLEWOOD 12]} \tag{b_1}$$

$$\sum_2^n \lambda_\nu \cdot \left(\frac{\lambda_\nu}{\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}}\right)^p |c_\nu|^{p+1} = O(\lambda_n) \quad \text{für ein} \quad p > 0, \tag{b_2}$$

$$\left.\begin{array}{l} c_1 + c_2 + \cdots + c_n = O(1), \\ |c_{n+1} + \cdots + c_{n+k}| < \varepsilon, \text{ für } n \geqq 1,\ \lambda_{n+k} < \lambda_n(1+\delta), \\ \text{bei passendem } \delta(\varepsilon) \ (\varepsilon \text{ beliebig positiv}), \text{ [LANDAU 18]} \end{array}\right\} \tag{b_3}$$

olgt die Konvergenz der Reihe Σc_ν.

Den Beweis für (b_2) gab ich in einem Vortrag auf dem internationalen Kongress zu Bologna am 4. September 1928.

Die Verallgemeinerung von Satz *P)* lautet hier [12]:

P') Die DIRICHLET'sche Reihe $F(t) = \Sigma C_\nu e^{-\lambda_\nu t}$ sei für $t > 0$ konvergent; es sei $C_\nu \geqq 0$, $\dfrac{\lambda_{\nu+1}}{\lambda_\nu} \to 1$ und

$$F(t) \sim C.t^{-\alpha},\quad C > 0,\ \alpha \geqq 0,\ t \to 0;$$

dann ist

$$C_1 + C_2 + \cdots + C_n \sim \frac{C\lambda_n^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

4. Neuere Arbeiten verfolgen das Ziel, die Bedingung (c) zu eliminieren. HARDY und LITTLEWOOD [13] haben gezeigt, dass im Falle $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > 1$ schon aus der Existenz des $\lim\limits_{t \to 0} \Sigma c_\nu e^{-\lambda_\nu t}$ die Konvergenz der Reihe Σc_n folgt.

ANANDA-RAU [2] bewies, dass aus der Existenz des $\lim \Sigma c_\nu e^{-\lambda_\nu t}$ und aus $\lambda_n c_n = O(\lambda_n - \lambda_{n-1})$ stets die Konvergenz der Reihe Σc_ν folgt. Neuerdings ist es mir gelungen zu zeigen, dass auch im Satz *P')* die Bedingung $\dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \to 1$ gestrichen werden kann; dies ergibt sich aus einer Verallgemeinerung des Satzes auf das LAPLACE—STIELTJES'sche Integral $\int\limits_0^\infty e^{-ut} dC(u)$. Hierdurch gewinne ich einerseits umfassendere Resultate, andererseits eine Vereinfachung der Beweismethode.

Otto Szász.

KEREKGEDEI MAKÓ PÁL ÉLETE ÉS MATEMATIKAI MŰKÖDÉSE.[1]

A két Bolyainak tüneményes matematikai tehetsége és világraszóló munkássága oly fényt árasztott, hogy ebben a nagy világosságban eddig jórészt észrevétlen maradt a magyar géniusz többi matematikai tehetsége. A mellett, hogy a Bolyaiak korszakalkotó hagyományait megbecsüljük és tovább folytatjuk, emlékeznünk kell azokra a tudós férfiakra is, akik — ha korszakalkotó felfedezéseket nem nyujtottak is — de tudásukkal, írásaikkal és buzgóságukkal a matematika iránti érdeklődést fenntartották és terjesztették ebben az országban.

Matematika-történeti értekezéseink vannak régebbről Szily Kálmántól,[2] Kopp Lajostól,[3] Perényi Józseftől,[4] Baumgartner Alajostól.[5] Legújabban Dávid Lajos[6] szép összeállításban adja a Bolyaiak előtti időből azon matematikusok munkásságát, akik-

---

[1] Az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat 1929 január 31-ediki ülésén tartott előadás.

[2] Szily Kálmán idevonatkozó munkái összegyüjtve találhatók az «Adalékok a magyar nyelv és irodalom történetéhez». Budapest, 1898. cimű könyvben.

Magyar természettudósok száz évvel ezelőtt. 1889.

Apáczai Encyclopædiája mathematikai és fizikai szempontból. 1889.

A XVI. századi magyar arithmetikák. 1876.

A legrégibb magyar arithmetika. 1876.

György mester arithmetikája 1499-ből. 1893.

[3] Kopp Lajos: Régi magyar arithmetikák. Budapesti VIII. ker. közs. főreáliskola 1892/93. évi értesítője.

[4] Perényi József: Dugonics András «Tudákossága». Sátoralja-Ujhelyi r. kat. főgimn. értesítője 1903/04.

[5] Baumgartner Alajos: Georgius de Hungaria arithmetikája. Középiskolai Mathematikai Lapok 20. évf. 1912/13.

[6] Dávid Lajos: Debreceni régi matematikusok. A Debreceni Tisza István Tudományos Társaság második osztályának munkái. II. kötet. 1926.

nek működése a debreceni főiskolával kapcsolatos. Az itt említett MARÓTHY, HATVANI, CSERNÁK és KEREKES tudósaink működése mellé méltán sorakozik a Bolyaiak előtti korszak figyelemreméltó szorgalmas munkása, a 18. századnak kiemelkedő egyénisége: KEREKGEDEI MAKÓ PÁL.

I. Élete.

KEREKGEDEI MAKÓ PÁL régi nemesi családból született 1724 július 18-án a jásznagykúnszolnokmegyei Jászapátiban. Elemi iskoláit szülőfalujában, a hatosztályos középiskolát pedig a jezsuiták egri intézetében végezte. A tehetséges ifjú hivatását követve, 1741-ben, 17 éves korában a jezsuita-rendbe vétette fel magát és a kétéves próbaidőt a trencséni házban töltötte.[1] A noviciatus végeztével kezdetét vette a hosszú évekig tartó alapos kiképzése, mely nagy műveltségének alapjait vetette meg. Az 1743—44. iskolai évben Győrött, mint a humaniorák repetense tanult, vagyis mint leendő tanár ismételte, elmélyítette a középiskolából hozott ismereteit. A középiskolai tanulmányokat befejező hároméves filozófiai kurzust az akkor jezsuiták vezetése alatt álló nagyszombati egyetemen végezte az 1744—1747. iskolaévekben. Az 1747—48. iskolai évben már az ungvári középiskolában találjuk, mint a harmadik (grammatika) és negyedik (szintaxis) osztály tanárát. A következő évben pedig a népesebb nagyszombati középiskolában a negyedik osztály (szintaxis) tanára. Majd két évet tölt mint a matematika repetense a bécsi egyetemen. Ez a repetencia voltakép a tanárképzés számára készült intézmény volt.[2] MAKÓ újabb egy évig középiskolai tanár Nagyszombatban. Innen a gráci egyetemre viszik, hogy a teológia négyéves tanfolyamát elvégezze (1752—56.). Közben 1755-ben, 31 éves korában pappá szentelik. Az 1756—57. iskolai évben a szerzetesi nevelést betetőző harmadik próbaévet a beszterce-

---

[1] Ezt és a következő adatokat a jezsuiták névtárából vettem.

[2] FINÁCZY E.: A magyarországi közoktatás története Mária Terézia korában. Budapest, I—II. 1899. és 1902. I. p. 117—118.

bányai kolostorban töltötte. Ennek befejeztével letette a rendi fogadalmakat 1759-ben.

A rendi kiképzésnek ez a változatos és 18 évet felölelő tartama után kizárólag tanítással és neveléssel foglalkozik MAKÓ. Először Nagyszombatba került. A nagyszombati egyetem történetéből félreismerhetetlenül kiolvasható, hogy ebben az időben egyes fiatal jezsuiták mint tanárok, négyéves kurzust végeztek az egyetemmel kapcsolatban.[1] Az egyetemhez kerülő tanár négy egymásutáni év közül az elsőben tanította a mennyiségtant, második évben logikát és metafizikát, a harmadik évben az általános és részletes fizikát és a negyedik évben az egyházi és profán történetet. MAKÓ PÁL 1759-ben kezdte meg ezt a mondhatnánk tanári tanfolyamot. Az első évben tanította a mennyiségtant a nagyszombati egyetemen. A következő 1759—60-ik iskolai évben kezdi tanítani a logikát és metafizikát, de a szemeszter befejezése előtt rendi elüljárósága Bécsbe rendeli.[2] És itt a bécsi egyetemen két évig tanítja ugyanezeket a tárgyakat.

Ekkor már megkezdi irodalmi működését. 1759-ben jelent meg Bécsben logikája, mely latin nyelven nyolc kiadást ért részint Bécsben, részint Velencében. A nyolcadik kiadás MAKÓ halála után három évre 1796-ban jelent meg. A könyv használhatóságát mutatja, hogy még 1819-ben, tehát a szerző halála után 26 esztendő mulva, olaszra fordítva kiadták Velencében.

1761-ben jelent meg ugyancsak latin nyelven metafizikája, mely 11 kiadást ért. Az utolsó kiadás 1832—33-ban, tehát MAKÓ halála után 40 évre látott napvilágot.

A következő két évben kétkötetes fizikáját adja ki szintén latin nyelven. Ez a könyv három kiadást ért.

Világosan megírt tankönyveivel, nagy tudományával és széles-

---

[1] G. FEJÉR: Historia Academiæ Scientiarum Pazmaniæ Archi-episcopalis ac M. Theresianae Regiæ Literaria. Budae. 1835. p. 44—58.

[2] PAINTNER MIHÁLY (1753—1826) exjezsuitának és győri főigazgatónak a pannonhalmi főkönyvtárban lévő kéziratos művéből: Bibliotheca Scriptorum Societatis Jesu olim Provinciæ Austriæ. I—II.

körű műveltségével magára vonta a bécsi egyetem nagyhírű orvosprofesszorának VAN SWIETEN GELLÉRTnek figyelmét. MÁRIA TERÉZIÁnak ez a művelt tanácsadója, aki a bécsi egyetemet 1749—56 között ujjászervezte, ajánlotta, hogy MAKÓ a bécsi Terezianumba kerüljön tanárnak. Ezt az intézetet MÁRIA TERÉZIA alapitotta 1746-ban nemes magyar ifjak kiképzésére és az intézet vezetését a jezsuita-rendre bízta a nagy királyné. MAKÓ tehát 1763-ban ezen akadémiajellegű iskola kötelékébe került mint a matematikának, a kisérleti fizikának és a mechanikának tanára. A matematikát és a kisérleti fizikát latin nyelven, a mechanikát németül kellett előadnia. Mint tősgyökeres magyarnak, a német nyelvvel erős küzdelmet kellett vívnia.[1]

A Terezianumban töltött tíz év a szakfoglalkozásnak nyugodt évei voltak. A jezsuiták szervezete a tudományos hajlamú tagoknak mindig megadta a módot és alkalmat, hogy tehetségüknek megfelelő irányban foglalkozzanak. Hogy csak matematikusokra hivatkozzunk, a naptárreformmal foglalkozó CLAVIUS (1537—1612), a geometriai kutatásairól híres bolognai tanár, CAVALIERI (1591—1647), a nem-euklidesi geometria egyik vezéralakja SACCHERI (1667—1733) és a tudós Riccati-család egyik érdemes tagja, RICCATI VINCE (1707—1775) jezsuiták voltak. A 18. század szelleme inkább az enciklopedikus tudásnak kedvezett és nem a tiszta szakszerűségnek. MAKÓ is egyforma kedvvel, sőt szenvedélyességgel foglalkozott matematikával, fizikával, filozófiával és e mellett üdülésre szánt óráiban a latin költészetet is gazdagitotta verseivel.

Terezianumi tanárkodása alatt írja elterjedt matematikai műveit: *Compendiaria matheseos institutio* 1764, *Calculi differentialis et integralis institutio* 1768, és *De arithmeticis et geometricis aequationum resolutionibus libri duo* 1770.

Tanári működésének virágkorában, 49 éves korában, mint jégverés érte rendjének XIV. KELEMEN pápától 1773 július 21-én

[1] C. WURZBACH: Biographisches Lexicon des Kaisertums Österreich. 16. Teil. Wien. 1867.

elrendelt feloszlatása. Mária Terézia fájó szívvel látja az érdemes rend pusztulását és csak 1773 szeptember 2-án adta meg a pápai bulla kihirdetésére a placet-et. A rend tagjai a magyar főpásztorokhoz fordultak felvételükért. Makó a váci egyházmegyébe vétette fel magát és hamarosan kanonok lett. Tanári állását megtartva továbbra is Bécsben maradt. Még 1776-ban a *Compendiaria* negyedik kiadásának címlapján úgy szerepel, mint apostoli protonotarius, a Terezianumban a matematika, a mechanika és a hidrotechnika tanára. A királyné többszörösen kimutatta iránta jóindulatát, kinevezte szent Margitról nevezett bélai apáttá és királyi tanácsossá.

Bécsi tartózkodásának hátralévő éveit tanárkodása mellett a magyar közoktatásügy szervezésére szenteli. A jezsuita-rend eltörlése válságba juttatta nálunk a tanügyet. A jézustársaság ugyanis a feloszlatás idejében a nagyszombati egyetemet, 4 akadémiát (Buda, Győr, Kassa, Zágráb), 30 gimnáziumot, 12 papnevelő-intézetet és 9 konviktust látott el tanárokkal és vezetőkkel. A feloszlatás tehát szükségessé tette a tanügy sürgős rendezését. A nagyszombati egyetem hittudományi és bölcsészeti kara a feloszlatással tanárok nélkül maradt és a megüresedett tanszékekre pályázatokat hirdettek. A pályázóknak 1774 október 8-án kellett a királyi biztosok előtt vizsgálatot tenni. Makó Pál is a bizottság tagja volt.

Mária Terézia már előbb 1773 november 9-én felszólította a királyi helytartó tanácsot, hogy a szükséges adatok beszerzése után új országos tanulmányi rendtartást dolgozzon ki. A nagy körültekintést igénylő munkát Ürményi József (1741—1825) a kancellária tanügyi előadója, Tersztyánszky Dániel (1730—1800) a bécsi udvari kamarának levéltárosa és Makó Pál végezték.[1]

A nagy feladat, a sürgős munka dacára, 1777 szeptember

[1] G. Fejér: i. m. p. 111. — Pauler Tivadar: A budapesti magy. kir. Tudományegyetem története. Budapest, 1880. p. 100. és 114. — Fináczy: i. m. II. p. 250. és 496. — Kornis Gyula: A magyar művelődés eszményei. 1777—1848. I. 1927. p. 5., 21.

9-ére fejeződött be, amikor megjelent a *Ratio Educationis*, mely az egész ország tanügyét egységes alapon rendezi az elemi iskolától az egyetemig.

Fináczy szerint Makó szerepe volt, hogy «mint az iskola régi hagyományainak alapos ismerője és e hagyományok becses elemeinek hivatott örököse, megadhatta a műnek ama történeti folytonosságot, amelyre, ha valahol, a tanügy fejlesztésében mulhatatlanul szükség van».[1]

Az új tanulmányi renddel kapcsolatosan Mária Terézia a nagyszombati egyetemet Budára helyezi, ahol 1777 november 3-án kezdi meg működését. Ugyanekkor Makó a bölcsészeti kar igazgatójává lesz 1000 frt fizetéssel.[2] Ebben az állásában maradt haláláig.

Az egyetemnek 1780 június 25-iki ünnepélyes megnyitására latin költeményt írt «*Oratio (elegans) in Universitatis Budensis inauguratione*»[3] címmel. A nagy királynő 1780 november 29-én bekövetkezett halálával, illetőleg II. Józsefnek uralmával az egyetem ügye is mélyreható változásokon ment át. Az új uralkodo az egyetem alapítványi javait beolvasztotta a közös állami kincstárba. Bretschneidernek, az egyetem másodkönyvtárosának jelentéseire támaszkodva nincs megelégedve a király az egyetem színvonalával és ezt a jezsuitizmusnak tulajdonítja.[4] Makót érintő változtatást eszközölt II. József 1784 március 10-iki rendeletével. Ekkor ugyanis a karigazgatók hivatalát megszüntette.[5] Makó és az addigi igazgatók a helytartótanács mellett működő tanulmányi bizottság tagjaivá lettek. Bár az egyes karok adminisztrációja a dékánokra szállt, mégis 1785-ben némileg változott ügykörrel Makó igazgatói címen a bölcsészeti kar felügyeletével lett megbízva.[6] Az igazgatói hatáskör főleg

---

[1] Fináczy: i. m. II. p. 250.
[2] Fináczy: i. m. II. p. 372.
[3] Fejér: i. m. p. 104. és 111. — Pauler T.: i. m. p. 122—135.
[4] Pauler T.: i. m. p. 183.
[5] Pauler T.: i. m. p. 209.
[6] Pauler T.: i. m. p. 215.

abban állt, hogy az előadási órák látogatásával a tanítást ellenőrizte, a vizsgákon és vitatkozásokon megjelent.[1]

II. Józsefnek 1790-ben bekövetkezett halála és II. Lipót rövid uralkodása (1790—92) semmi változást nem hozott Makó életébe. I. Ferenc uralkodásának már csak első évét érte meg.

Meghalt hirtelen halállal Budán, 1793 augusztus 19-én.[2] Kreil Antal a pesti egyetemen a bölcsészet tanára, latin és német nyelven meleghangú nekrológot adott ki róla még ugyanabban az évben.[3] Baróti Szabó Dávid pedig a *Magyar Hirmondó* 1793 november 26-iki számában költeményt irt Makóról, melyben elsiratja a nagy tudóst és szeretetreméltó embert.[4]

II. Mennyiségtani művei.

Makónak hat mennyiségtani munkája jelent meg. A három legfontosabb Bécsben terezianumi tanár korában látott napvilágot.

1. Legelső munkája *Compendiaria matheseos institutio.* Első kiadása Bécsben jelent meg 1764-ben. Makó ezt a könyvét gróf Migazzi Kristóf bécsi biboros érseknek ajánlotta, aki egyúttal a váci egyházmegye adminisztrátora is volt. Makónak ez a könyve gyors egymásutánban hat kiadást ért meg. A *Compendiaria* voltaképp a mostani középiskola anyagát öleli fel, de abban az időben mint egyetemi, illetőleg akadémiai tankönyv szerepelt. A nagyszombati egyetem filozófiai karán a második szemeszterben napi két órában ezt a könyvet tanították.[5]

Két részben tárgyalja Makó az algebrát és geometriát. Könyvének tartalmi ismertetése helyett csak pár vonás kiemelésére

---

[1] Pauler T.: i. m. p. 323.

[2] Fejér: i. m. p. 111. — Paintner feljegyzése szerint a halál napja aug. 16.

[3] Egyes részeinek magyar fordítása található Magyar Hirmondó. Negyedik szakasz. 1794. p. 532.

[4] Magyar Hirmondó. Negyedik szakasz. 1794. p. 745.

[5] Fináczy E.: i. m. I. p. 98—99.

szorítkozunk. A 18. században az új számok, a törtek és negatív számok okoztak nagyobb nehézséget. A szellemi tehetetlenség elve szerint mindig nehéz az új fogalmak elterjedése és a velük való megbarátkozás. MAKÓ a negatív számokkal való műveleteknél teljesen helyesen jár el. A 48-ik pontban $a - a = o$ és b összeszorzásából bizonyítja, hogy pozitív és negatív szám szorzata negatív lesz. Ennek felhasználásával $a - a = o$ és $-b$ összeszorzásából kapja, hogy két negatív szám összeszorzása pozitív eredményt ad. Ugyanezt a bizonyítást alkalmazza 31 évvel később LAPLACE.[1] A valódi törttel való szorzásnál szükségesnek tartja megemlíteni, hogy a szorzat kisebb lesz a szorzandónál. A 145. pontban a képzetes számok szorzásánál a

$$\sqrt{-a}\,\sqrt{-a} = -a$$

eredményt fogadja el és megjegyzi, hogy ebben a szerzők nem egyeznek meg. MAKÓ BOSCOVICH jezsuitára hivatkozik.

2. MAKÓnak köszönjük a magyar szerzőtől megjelent első könyvet az infinitezimális számításról: *Calculi differentialis et integralis institutio.* Bécs, 1768.

Ennek a könyvnek megjelenésekor a matematika történetében korszakalkotó differenciál- és integrálszámítás közel száz éves volt. Ennek a kalkulusnak első százada naiv kornak mondható, mikor az évszázadokon át megérlelődött infinitezimális gondolkodás LEIBNIZ és NEWTON által megtalálva a matematikai formát, majdnem egy csapásra meghódította a geometria, mechanika és fizika nagy területeit, de kezdetben minden kritika nélkül alkalmazzák és fejlesztik az új számítást. A 18. század második felében már közkincs lett az infinitezimális számítás. E kornak jutott feladatul a meglévő ismeretek rendezése és tökéletesítése. A differenciál- és integrálszámításról szóló könyvek egymásután jelennek meg. CANTOR[2] több mint 50 szerző könyvét sorolja fel ebből a korból.

---

[1] CANTOR: Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik. IV. B. Leipzig. 1908. p. 85.

[2] CANTOR: i. m. IV. p. 670—695.

Makó Pál könyve méltán sorozható a jobbak közé. Anyagban nem ad újat, de a tudomány haladásával lépést tartva világos és könnyed előadásban hozza mindazt, amit korában az infinitezimális számítás nyujtott. Nem tankönyvnek volt szánva, mert iskoláinkban nem volt kötelező tárgy a differenciál- és integrálszámítás, Makó célja az volt, hogy az érdeklődést felkeltse ezen új tan iránt és hogy a matematikai gondolkodást terjessze Ausztriában is, hazájában is.

A Bevezetésben tárgyalja Makó a különböző rendű végtelen kicsik és végtelen nagyok fogalmát, mint amelyen az egész számitás felépül. A 18. század szokásához mérten a végtelen kicsikkel és végtelen nagyokkal oly szabadon és gondtalanul számol, akár a véges számokkal. Példái világosak és tanulságosak. Pl. a 6. pontban a különböző rendű végtelen kicsik szemléltetésére a körnél említi, hogy ha az a ív végtelen kicsiny, akkor $\sin a$, $1 - \cos a$, $\operatorname{tg} a - \sin a$ sorban első-, másod- és harmadrendű végtelen kicsinyek.

Az első könyv tartalmazza az egyszerű és összetettebb kifejezések első differenciáljainak kiszámitását. Majd az eredményeket bőségesen alkalmazza a síkgörbék tanára, a szélső értékek vizsgálatára és fizikai problémákra. Ezután áttér a magasabb differenciálok vizsgálatára és a geometriai alkalmazásra.

A második könyv az integrálszámitást tárgyalja. Az integrálszámitás, mint a differenciálszámitás megforditása van értelmezve és példákon bemutatva. Majd az egyszeres integrálokkal végezhető terület, ívhosszúság, forgási köbtartalom és forgási felületszámitásokat adja. Végül pedig mechanikai és fizikai alkalmazásokat találunk.

Általános jellemzésül megemlítjük, hogy Makó a hosszú számitásokat is részletesen elvégzi. A szélső értékeknél csak y' jön számitásba. A sinus és logaritmus jelzésére nincs szimbolum, csak szóval írja le. Korának szokását követi abban is, hogy az integrálok osztályozásának nyoma sincs. A sorbafejtést gondolták azon egységes eljárásnak, mellyel az integrálás elvégezhető. Az irracionális és transzcendens integrálokat is sorbafejtéssel számítja. Természetesen ebben az időben a sor konvergenciája még nem probléma.

3. Másik fontosabb munkája MAKÓnak az 1770-ből való és Bécsben megjelent «*De arithmeticis et geometricis aequationum resolutionibus libri duo*». Mint címe is mutatja, a könyv két részre bomlik. Az első rész a mai értelem szerint az algebrai egyenletek elemeit adja (MAKÓ aritmetikai egyenleteknek mondja). Részletesen tárgyalja DESCARTES jelszabályát, a hiánytételt, a gyökök kisebbítését és a többszörös gyökök elméletét. A másod-, harmad- és negyedfokú egyenletek megoldását hozza és bőségesen kitér a gyökök minőségének megállapítására.

A második rész voltaképp a geometriai szerkesztések elméletét tartalmazza. Részletesen tárgyalja az első- és másodrendű feladatokat. A harmad- és negyedrendű feladatokat geometriai helyek vizsgálatára vezeti vissza. Részletesen tárgyalja az egyenletek grafikus megoldását. Általában a geometriai szerkesztéseket algebrai egyenletekre vezeti vissza.

MAKÓ célja ennek a könyvének kiadásában tisztán pedagógiai volt. A tanulók kezébe oly könyvet akart adni, melyből elsajátíthatók a matematikának szép és hasznos ismeretei. A könnyed és világos tárgyalás, a kellő részletezés különösen alkalmassá tette ezt a könyvet arra, hogy a kezdők kedvet kapjanak a felsőbb mennyiségtannal való foglalkozáshoz. Ugyanezt CANTOR negyedik kötetében CAJORI is megjegyzi a könyvről.[1] A megjelenés idejében egész modern könyvnek mondható e munka. Pl. a negyedfokú egyenletek megoldásánál kortársának, EULERnek (1707—1783) módszerét adja.

4. Röviden meg kell emlékeznünk MAKÓ PÁL középiskolai tankönyveiről is. Az 1777-iki *Ratio Educationis* gyökeresen átalakította egész tanítási rendszerünket. Az új terv keresztülviteléhez jó tankönyvek kellettek volna. A tankönyvírás azonban nehezen ment.[2] MAKÓ vállalkozott a matematikai könyvek meg-

---

1 CANTOR: i. m. IV. p. 104.
2 FINÁCZY: i. m. II. p. 354.

írására. Ezek a középiskolai könyvei név nélkül jelentek meg. A kezdő évfolyamoknak szánt *Institutiones arithmeticae* 1777-ben jelent meg Budán, az egyetemi nyomdában. Utána számos kiadása forgott közkézen. Elterjedésére jellemző, hogy az első megjelenés után 64 év mulva, a szerző halála után 48 év mulva még mindig új kiadásban találjuk. Másik két középiskolai könyve nagyrészt a *Compendiaria* anyagát nyujtja. *Elementa matheseos purae* 1778-ban és *Elementa geometricae practicae* szintén 1778-ban jelent meg Budán. Az előbbi hat kiadást, az utóbbi négy kiadást ért. Fináczy szerint [1] szakszerűség szempontjából kiváló művek, de tudományos tárgyalási módjuk és a latin nyelv miatt nehéz volt a diákoknak.

Matematikai könyveinek általános jellemzéseként mondhatjuk, hogy Makó különösen kitűnik tárgyalásának világosságával, előadásának könnyedségével. Nem új dolgokat írt, de az akkori tudás színvonalán állva a matematikai ismeretek továbbadásában oroszlánrésze volt. Könyvei általánosan ismertek és használatosak voltak. Világos előadásával nagyon hozzájárult ahhoz, hogy hazánkban a felsőbb mennyiségtan iránt az érdeklődés állandóan a szinvonalon maradt.

Összehasonlitva Makó matematikai műveit korának mennyiségtani tankönyv-irodalmával, a megállapitás Makó javára nagyon kedvező. Munkái világosságukkal, szabatosságukkal a jobb tankönyvek közé tartoznak. Mint korának gyermeke, az általánosan elterjedt módon tárgyalja a matematika egyes kérdéseit, de hellyel-közzel beledolgozza tankönyveibe kortársainak új eredményeit is. A forrongó, tisztázatlan kérdéseknél is ösztönösen ahhoz az állásponthoz csatlakozik, mely idővel győzedelmeskedett.

*

Makó egyéniségéről pedig megállapithatjuk, hogy színvonalon álló nagy iskolázottságú tudós, egyetemes műveltségű tanár és nagybefolyású tevékeny közéleti férfiú volt. Tudománya kitűnik

[1] Fináczy: i. m. II. p. 357.

megjelent munkáiból. Klasszikus latinságát mutatják költői művei. Nagy iskolázottságára vall, hogy a matematikán, fizikán és filozófián kívül járatos volt a görög és latin irodalomban úgy, mint a modern nyelvekben. Nagy tevékenységét mutatja a *Ratio Educationis* szerkesztésében való közreműködése. Egyik nagy érdeme, hogy mennyiségtani műveivel mind Ausztriában, mind Magyarországban felkeltette az érdeklődést a felsőbb matematika iránt és ezt az érdeklődést gondosan ápolta.

Sárközy Pál.

LEBENSLAUF UND MATHEMATISCHE WERKE VON PAUL MAKÓ DE KEREKGEDE.

I. Paul Makó wurde am 18. Juli 1724 in Jászapáti geboren. Als siebzehnjähriger Jüngling trat er in den Orden der Gesellschaft Jesu. Er wirkte hauptsächlich in der Schule, anfänglich 1747 in Ungvár, später in Tyrnau und Wien. Seine Tüchtigkeit richtete die Aufmerksamkeit Van Swieten's auf ihn und er wurde 1763 ins Theresianum als Professor der Mathematik, Experimentalphysik und Mechanik berufen. Als Professor der Akademie wirkte Makó 14 Jahre lang bis 1777. Nach der Aufhebung seines Ordens 1773 trat Makó in den Weltpriesterstand über und die grosse Königin, Maria Theresia ernannte ihn zum Abt, zum Domherrn, zum königlichen Rat. Grosse Verdienste hat er sich bei der Verfassung der *Ratio Educationis* verschafft. Von 1777 bis zu seinem Tode den 19. Aug. 1793 wirkte Makó als Direktor der philosophischen Fakultät an der Universität von Buda.

II. Als Professor und Gelehrter nimmt Makó zu seiner Zeit eine hervorragende Stellung ein. Nebst philosophischen und physikalischen Werken hat er auch mathematische Werke in lateinischer Sprache geschrieben. Makó's grosses Verdienst besteht darin, dass er im XVIII. Jahrhunderte das Interesse für die höhere Mathematik in Ungarn und Österreich geweckt und erhalten hat.

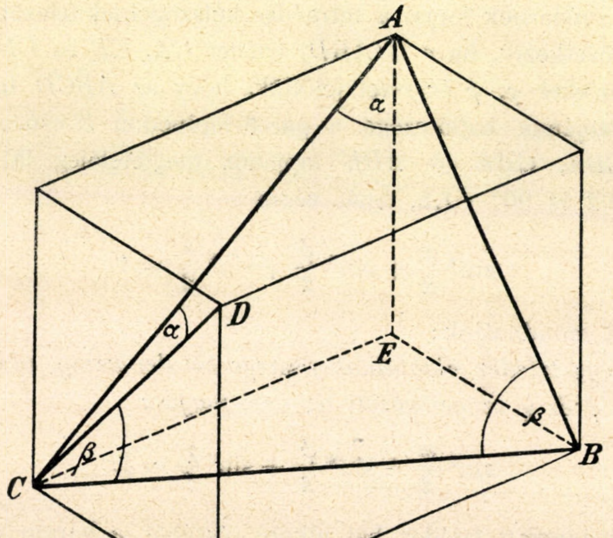
Von Makó's Persönlichkeit wissen wir, dass er ein Gelehrter auf rechtem Niveau, ein sehr gebildeter Professor und im öffentlichen Leben ein tätiger Mann war.

Paul Sárközy.

EGY KÜLÖNÖS TRIÉDERRŐL.

A következőkben oly triéderrel foglalkozunk, amely triéder oldalainak összege két derékszög.

1. Az *ABC* hegyesszögű háromszög *C* csúcsán keresztül oly *CD* egyenest vezethetünk, hogy az *ACD, BCD* szögek megfelelőleg egyenlők legyenek az *ABC* háromszög *A*, *B* csúcsánál



1. ábra.

levő α, illetőleg β szögével. Ekkor a *CD* egyenes a háromszög *CA, CB* oldalaival együtt egy oly *C (ABD)* triédernek éle, amelynek oldalösszege két derékszög. (1. ábra.)

Ha a *D* pontot a triéder *CD* élén akkép választjuk, hogy $CD = AB$, akkor az *ABCD* tetraédernek nemcsak a *CDA, DCB* és *BAD* lapja kongruens az *ABC* háromszöggel, hanem a tetraédernek mind a négy triédere is kongruens egymással és így a tetraédernek szembenfekvő élei és az éleknél levő szögei is egyenlők egymással; ez a tetraéder tehát *egyenoldalú* (de nem szabályos!).[1]

Hogy a $C(ABD)$ triéder szögei, vagy ami ugyanazt fejezi ki, az $ABCD$ egyenoldalú tetraéder szögei között összefüggést találjunk, vezessünk a tetraéder szemben fekvő élein keresztül parallel síkokat. Ezek egy derékszögű parallelepipedont határolnak (1. ábra), mert a tetraéder éleinek derékszögű vetülete bármelyik élpárral parallel síkra egy derékszögű négyszög négy oldala és annak két egyenlő átlója.

E tetraédernek lapjai a tetraéder külszögeinek felezői. Ebből pedig következik, ha a $C(ABD)$ triéder CA, CB és CD éleinél levő szögeket φ, ψ és χ-vel jelöljük, hogy az $ABCD$ tetraéder ABC lapjának hajlásszöge a parallelepipedon E csúcsába ütköző CBE, CAE és ABE lapjához megfelelőleg $90°-\varphi/2$, $90°-\psi/2$ és $90°-\chi/2$, tehát végre

$$\sin^2\frac{\varphi}{2}+\sin^2\frac{\psi}{2}+\sin^2\frac{\chi}{2}=1.$$

Ezért mondhatjuk:

Ha egy triéder oldalainak összege két derékszög, akkor annak φ, ψ és χ szögei között az összefüggés:

$$\sin^2\frac{\varphi}{2}+\sin^2\frac{\psi}{2}+\sin^2\frac{\chi}{2}=1.$$

2. A tárgyalt triéder hat alkotó részéből a három oldalból (α, β, γ) és a három szögből (φ, ψ, χ) csak kettőnek ismerete szükséges, hogy azokból a többit megszerkeszthessük.

Az adott két oldal már meghatározza a harmadikat és azokból az általános eljárás szerint megszerkeszthetők a triéder szögei.

E triéder esetében csak azt a három feladatot kell tehát külön tárgyalni, amelynél a triédernek adva van:

---

[1] L. e folyóirat XXVII. köt. 46—66. oldalon az «Egyenodalú tetraéder» című értekezést.

a) két szöge φ és ψ;

b) egy oldala β és az ezen fekvő egyik szöge φ;

c) egy oldala α és az ezzel szemben fekvő szöge φ.

A feladat megoldottnak tekinthető, ha egy oly háromszöget OBC-t találunk, amelynek α, β és γ szöge a triéder három oldalával egyenlő.

Vegyük sorra ezeket az eseteket!

3. Ha az úgynevezett Monge-féle két képsikos rendszerben egy oly **S** síkot szerkesztünk, amelynek hajlásszögei a két képsíkhoz: $90° - \varphi/2$, $90° - \psi/2$, akkor az **S** síknak nyomai a két képsikon és egy ezekre merőleges oldalképsikon (profilsikon) oly háromszögnek oldalai, amelynek szögei a keresett triéder oldalaival egyenlők. E szerkesztések pedig az ábrázoló geometria módszere szerint könnyen elvégezhetők, és ezzel az *a)* alatti triéderfeladat, azaz a különös triéder szerkesztése két szögből meg van oldva. —

A *b)* alatt levő triéderfeladat azt kivánja, hogy egy ABC háromszöget (vagy ahhoz hasonlót) a következő adatokból szerkesszünk:

Derékszögű vetülete BEC a BC oldalon átmenő és ahhoz $90° - \varphi/2$ szög alatt hajló **K** síkhoz az E csúcsnál derékszögű háromszög legyen; továbbá, hogy a BC oldal mellett a B csúcsnál levő szöge β-val legyen egyenlő (1. ábra).

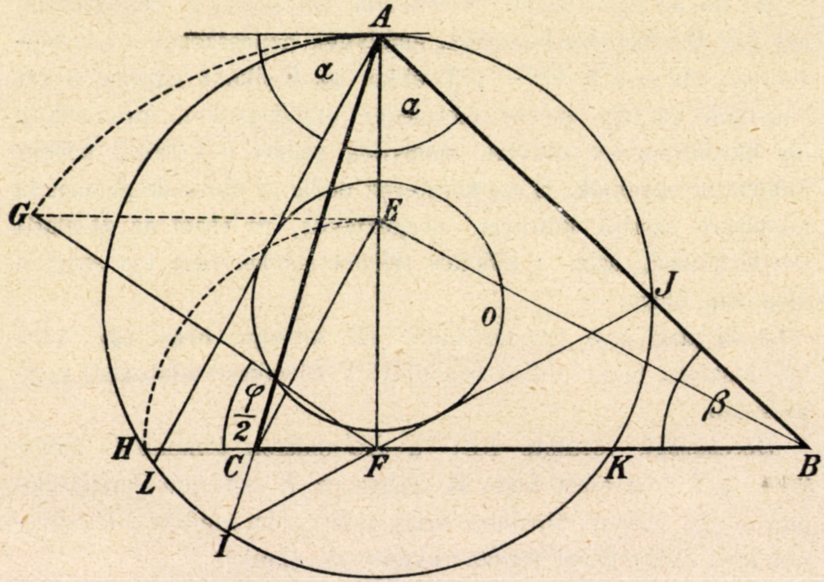
Megoldás (2. ábra). Az adott $\beta = ABC\measuredangle$, AB szárának A pontjából AF merőlegest bocsátunk a másik szárra BFC-re; ha $CFG\measuredangle = \varphi/2$, $FG = FA$, $GE \perp AF$, $EC \perp BE$, akkor az ABC háromszög szögei már oldalai egy oly triédernek, amelynek egyik oldala és a mellett levő szöge β és φ. —

Hogy a triédert a *c)* alatt levő adatokból (α, φ) megoldhassuk, egy ABC háromszöget (vagy ahhoz hasonlót) kell szerkesztenünk, ha ismeretes az A-nál lévő α szöge és tudjuk, hogy derékszögű vetülete BEC egy a BC oldalon átmenő és ahhoz $90° - \varphi/2$ szög alatt hajló **K** síkhoz az E csúcsnál derékszög.

Megoldás (2. ábra). A HK vonaldarab F felező pontján át az FG és FE egyeneseket akkép huzzuk, hogy $\measuredangle HFG = \varphi/2$,

$HFE = 90°$; továbbá $HF = FE$, $EG \perp FE$, $FA = FG$ és az A pont az FE egyenesen van.

A HAK háromszög köré írt körnek AL húrját akkép határozzuk meg, hogy a felette nyugvó hegyes kerületiszög egyenlő legyen az α-val, és leírjuk a HAK körrel koncentrikus és az AL húrt érintő o kört. Ha az F pontból az o körhöz vont egyik érintő a HAK kört az I, J pontokban metszi, akkor e



2. ábra.

metszőpontoknak C, B vetületei az A pontból a HK egyenesre a keresett ABC háromszögnek C, B csúcsai.

Ugyanis közvetlen látható, hogy $BAC\measuredangle$ egyenlő α-val, továbbá, hogy a CIF, JFB háromszögek hasonlósága miatt

$$CF : FI = JF : FB$$

és így

$$CF.FB = JF.FI = HF.FK = FE^2,$$

tehát a CEB derékszög. Ebből pedig következik, hogy az ABC háromszög a feladat követelményeinek megfelel és ezért szögei a *c)* alatt levő adatokból *(α, φ)* meghatározott triédernek oldalai.

Könnyen látható még, hogy a feladatnak csak akkor van reális megoldása, ha tg $\alpha < \sin \varphi$.

Jegyzet. A *b)* és *c)* alatt levő triéderfeladat megoldása az ABC háromszög segélyével abban az esetben egyszerűbb, ha $\varphi = 90°$, tehát a triéder adott szöge derékszög, mert ekkor az ABC háromszög magasságpontja a BC oldalra merőleges magasságnak felezőpontja.

4. A tárgyalt triéder *poláris triéder*ének az a tulajdonsága, hogy szögeinek összege négy derékszög és α', β', γ' oldalai közötti reláció:

$$\cos^2\frac{\alpha'}{2} + \cos^2\frac{\beta'}{2} + \cos^2\frac{\gamma'}{2} = 1.$$

Tekintve, hogy a derékszögű parallelepipedon mind a négy átlója az egy P csúcsba ütköző éleihez egyenlő szögek alatt hajlik és tekintve, hogy ha ezek a hajlásszögek $\alpha'/2$, $\beta'/2$, $\gamma'/2$ értékűek, akkor közöttük az előbbi reláció fönnáll: ezért a parallelepipedonnak a P csúccsal nem incidens három átlója oly triédernek három éle, amelynek szögösszege négy derékszög. Ebből fordítva következik:

A derékszögű parallelepipedon négy átlója hármanként négy csúcstriédernek az éleit képezi; ezek között van egy, amelynek terében a negyedik átló bennfoglaltatik, annak súlyvonala, továbbá e csúcstriéder szögeinek összege egyenlő négy derékszöggel.

Ha e negyedik parallelepidon-átlónak egyik végpontjából a többi három átló által képezett triéder lapjaira merőlegeseket bocsátunk, akkor ezek élei egy triédernek, amelynek oldalösszege két derékszög. Ezt a triédert az előbbitől függetlenül a következőkép szerkeszthetjük:

Három páronként egymásra merőleges síkot egy tetszés szerinti sík, amely amazoknak O közös pontján nem megy keresztül egy ABC háromszögben metszi, és ha ennek a BC, CA és AB oldalaira az O pontból bocsátott merőlegesek azokat az A_1, B_1 és C_1 pontban metszik, akkor az $O(A_1B_1C_1)$ triédernek oldalösszege két derékszög.

Ez közvetlen is belátható:

Ugyanis, ha az $A_1B_1C_1$ talpponti háromszöge az ABC háromszögnek és O_1 az AA_1, BB_1, CC_1 magasságoknak metszőpontja, akkor e magasságok és az ABC háromszög oldalai az $A_1B_1C_1$ háromszög szögfelezői; az ABC háromszög oldalain átmenő páronként egymásra merőleges síkok pedig egymást egy oly O pontban metszik, hogy az OO_1 egyenes merőleges az ABC síkra.

Tekintve, hogy $\overline{OA}_1^2 = BA_1 . A_1C = B_1A_1 . A_1C_1$, és hogy az OA_1 egyenes az $A_1B_1C_1$ háromszög B_1A_1, A_1C_1 oldalaihoz egyenlő szögek alatt hajlik: az OA_1B_1, C_1A_1O háromszögek hasonlók.

Ugyancsak hasonló a C_1OB_1 háromszög is az előbbi kettőhöz és ezért a három háromszög O csúcsánál levő szögeinek összege két derékszög.

Tehát:

Bármely háromszög külszögeinek felezőin átmenő három páronként egymásra merőleges sík egymást egy oly gúla csúcsában metszi, amelynek alaplapja a felvett háromszög és oldallapjai hasonló háromszögek.

Továbbá:

Ha egy gömb-oktansba írt gömbháromszögnek csúcsait a a rajtuk átmenő gömb-oktansoldalakkal szemben fekvő csúcsokkal összekötő főkörök egymást az oldaloktól határolt gömbterület egy pontjában metszik, akkor a gömbháromszög oldalösszege két derékszög.

Ha egy gömb-oktans köré írt gömbháromszög oldalai a rajtuk levő gömb-oktanscsúccsal szembenfekvő oldalakat a gömb egy főkörén metszik, amely a gömboktanstól határolt gömbrészen kívül van, akkor a gömbháromszög szögösszege négy derékszög.

Klug Lipót.

ÜBER EIN BESONDERES DREIKANT.

In dem Aufsatz wird ein Dreikant konstruiert: *a)* aus zwei seiner Winkel; *β)* aus einer Seite und einem dieser Seite anliegenden Winkel; *γ)* aus einer Seite und dem dieser gegenüber liegenden Winkel, mit der Bedingung, dass die Seitensumme des Dreikantes zwei Rechte beträgt.

Leopold Klug.

KONVEX TARTOMÁNYOK KONFORMIS LEKÉPEZÉSEIRŐL.

1. Legyen $w = f(z)$ az $|z| < 1$ egységkörben reguláris függvény, amely az egységkör belsejét kölcsönösen egyértelműen képezi le a w síknak egy G tartományára. Tegyük még föl, hogy a G képtartomány *konvex*, vagyis olyan, hogy ha w_1 és w_2 a G tartomány két tetszőleges belső pontja, akkor az általuk határolt egyenesdarab teljesen G belsejében fekszik. Akkor áll a következő szép és fontos, Study-tól származó tétel.

A) tétel. Az előbbi feltételek mellett minden, az egységkör belsejében fekvő K körlemez képe konvex.

A következőkben elsősorban Study ezen tételének egy teljesen elemi bizonyítását közlöm;[1] másodsorban pedig reá óhajtok mutatni arra, hogy Study tételének segélyével a leképező $w = f(z)$ függvény kerületi viselkedése szintén teljesen elemi eszközökkel állapitható meg. Hogy a lényegest kiemelhessem, ez utóbbi megjegyzést csak az *általános esetre* fejtem ki, amikor tudniillik a G képtartomány *szorosabb értelemben konvex és korlátos,* vagyis olyan, hogy egy véges körben fekszik és bármely egyenes legfeljebb két határpontját tartalmazza. Ebben az esetben ugyanis a leképező $w = f(z)$ függvény kerületi viselkedése levezethető a Study-tételből a nélkül, hogy a leképezés konformis voltára hivatkoznunk kellene, vagyis áll a következő, általánosabb jellegű leképezési tétel.

---

[1] A szokásos bizonyitásra nézve l. például Carathéodory, Sur la représentation conforme des polygones convexes, Annales de la Société scientifique de Bruxelles, XXXVII. kötet (1913), 1—10. old.

B) tétel. *Legyen $w = f(z)$ az $|z| < 1$ egységkör belsejében definiált, nem szükségképpen reguláris függvény, amely az egységkör belsejét kölcsönösen egyértelműen és folytonosan képezi le a w síknak egy G tartományára. Ha*

I. a G képtartomány szorosabb értelemben konvex és korlátos és ha

II. minden az egységkör belsejében fekvő körlemez képe konvex, akkor

α) az $f(z)$ függvény folytonos marad az egységkör kerületén, vagyis az egységkör kerületének bármely ζ pontjára nézve létezik a

$$\lim_{|z|<1,\ z \to \zeta} f(z)$$

határérték, és

β) ha ezt a határértéket $f(\zeta)$-val jelöljük, akkor az egységkör kerületének két különböző ζ_1, ζ_2 pontjára nézve mindig $f(\zeta_1) \neq f(\zeta_2)$.

Ennek a tételnek a bizonyitása, mint látni fogjuk, a legegyszerűbb folytonossági és elemi geometriai meggondolásokkal végezhető; míg tehát *nem konvex* képtartomány esetén a konformis leképezést eszközlő függvény kerületi viselkedésének vizsgálata mély topológiai és függvénytani segédeszközöket igényel, addig konvex képtartomány esetén teljesen elemi úton jutunk célhoz. Mindenesetre fel kellett a *B)* tételnél tennünk, hogy a képtartomány korlátos és *szorosabb értelemben* konvex; ez a feltevés a *B)* tételnél valószínűleg lényeges is,[1] de ha konformis leképezésekre szorítkozunk, az $f(z)$ függvény kerületi vizsgálata még akkor is igen egyszerűen végezhető a STUDY-tétel segélyével, ha a képtartomány határa egyenesdarabokat is tartalmaz. Ilyen egyenesdarabokon ugyanis, a *tükrözési elv* alapján, az $f(z)$ függvény inverz függvénye reguláris; ha ezt az elemi függvénytani tételt is tekintetbe vesszük, úgy a *B)* tétel bizonyításának gondolatmenete még mindig igen egyszerű bizonyításra vezet. A részletek annyira kézenfekvőek, hogy szük-

[1] Ennek a kérdésnek a tisztázása nem látszik érdektelennek.

ségtelennek tartom a megbeszélésüket. Egyébként is, éppen a tükrözési elv, tehát egy függvénytani tény igénybevétele miatt a tágabb értelemben konvex képtartomány esete érdektelenné válik, szemben a szorosabb értelemben konvex képtartomány esetével, amelynek az érdekessége éppen abban a körülményben rejlik, hogy a leképező $f(z)$ függvény kerületi viselkedése, a Study-tétel birtokában, függvénytan nélkül, lényegileg elemi geometriai úton állapítható meg.

Kedves kötelességemnek tartom e helyen megemlíteni, hogy a következő bizonyítások végleges fogalmazásánál Carathéodory professzor úr lényegesen támogatott szíves tanácsaival.

2. Az *A) tétel bizonyítása.* Mivel minden, az egységkör belsejében fekvő körlemez az egységkörnek önmagára való lineáris leképezésével átvihető olyan körlemezbe, amely az egységkörrel koncentrikus, elég az állítást ilyenekre bizonyítani; nyilván föltehetjük továbbá, hogy

$$f(0) = 0. \qquad (1)$$

Az $|z| < r < 1$ körlemezt jelöljük K_r-rel, képét G_r-rel; bizonyítandó, hogy G_r konvex, vagyis hogy ha w_1, w_2 a G_r tartomány két különböző belső pontja, w_0 az általuk határolt egyenesdarab valamely közbülső pontja, akkor w_0 is a G_r belsejében fekszik. Mivel G_r része G-nek, w_1 és w_2 a G-nek is belső pontjai; mivel G konvex, w_0 is belső pontja G-nek és ennélfogva képe az $|z| < 1$ egységkör egy határozott z_0 belső pontjának. w_0 akkor és csak akkor fekszik G_r-ben, ha ez a z_0 pont a K_r-ben fekszik; bizonyítandó tehát, hogy $|z_0| < r$, vagy másszóval, ha $f(z)$ inverz függvényét $F(w)$-vel jelöljük, hogy

$$|F(w_0)| < r. \qquad (2)$$

A w_0 pont a w_1 és w_2 által határolt egyenesdarabnak pontja és ennélfogva a következő alakban írható:

$$w_0 = tw_1 + (1 - t)\,w_2, \qquad (3)$$

ahol

$$t \text{ valós és } 0 < t < 1. \qquad (4)$$

w_1 és w_2 a G_r-nek két különböző pontja és így képe a K_r két különböző z_1, z_2 pontjának; a jelölést úgy választhatjuk, hogy $|z_1| \leqq |z_2|$ legyen, amikor is, mivel $z_1 \neq z_2$, nyilván $z_2 \neq 0$. Ekkor tehát

$$|z_1| \leqq |z_2| < r, \; z_2 \neq 0, \tag{5}$$

$$f(z_1) = w_1, \; f(z_2) = w_2. \tag{6}$$

A (4), illetőleg (6)-ban szereplő t, z_1, z_2 mennyiségek segélyével képezzük már most a következő függvényt:

$$\varphi(z) = tf\left(\frac{z_1}{z_2} z\right) + (1 - t) f(z). \tag{7}$$

(5) miatt $\varphi(z)$ az egységkörben reguláris és (4) miatt csak olyan értékeket vesz fel, melyek a w síkban ábrázolva G belsejébe esnek. Ugyanis $f\left(\frac{z_1}{z_2} z\right)$ és $f(z)$ mindenesetre belső pontjai a G-nek, $\varphi(z)$ viszont az ezen két pontot összekötő egyenesdarab pontja és G konvexitásánál fogva így $\varphi(z)$ is belső pontja G-nek. Képezhetjük tehát a

$$\psi(z) = F(\varphi(z)) \tag{8}$$

függvényt. Ez (1) és (7) miatt és mivel F abszolút értéke mindig kisebb mint 1, az egységkörben reguláris, a középpontban eltűnő, abszolút értékére 1-nél kisebb függvény; a SCHWARZ-lemma szerint tehát

$$|\psi(z)| < r, \quad \text{ha} \quad |z| < r. \tag{9}$$

Mivel $|z_2| < r$, ennélfogva speciálisan

$$|\psi(z_2)| < r,$$

vagyis, mivel (8), (7), (6) és (3) szerint $\psi(z_2) = F(w_0)$, $|F(w_0)| < r$, amit bizonyítani kellett.

3. *A B) tétel bizonyítása.* Tekintsük először az *a)* alatti állítását a tételnek. Legyen ζ az egységkör kerületének egy pontja, z_n egy a ζ-hoz tartó, az egységkör belsejében fekvő pontsorozat. Ha az $f(z_n) = w_n$ sorozat állításunkkal szemben divergens, akkor kiválasztható belőle két részsorozat, z'_n és z''_n,

olymódon, hogy a $w'_n = f(z'_n)$ és $w''_n = f(z''_n)$ sorozatok két különböző w', w'' határértékhez tartanak:

$$w'_n \to w', \quad w''_n \to w'', \quad w' \neq w''. \tag{10}$$

Állításunk be lesz bizonyítva, ha megmutatjuk, hogy (10) ellenmondásra vezet.

4. Ragadjuk ki a z'_n, z''_n sorozatok két egyenlő indexű elemét, z'_n-t és z''_n-t, és tekintsük mindazokat a köröket, amelyek e két pontot tartalmazzák és amelyek teljesen az egységkör belsejében fekszenek. Ezen körök sugarainak alsó határát jelöljük $[z'_n, z''_n]$-vel. Ha

$$[z'_n, z''_n] \to 0, \tag{11}$$

akkor a z'_n, z''_n sorozatokról rövidség okáért azt fogjuk mondani, hogy *szomszédos sorozatok*.

Tegyük föl először, hogy a (10)-hez vezető z'_n, z''_n sorozatok szomszédosak, vagyis hogy (11) teljesül. Minden n-hez megadható ekkor egy K_n körlemez, amely a z'_n és z''_n pontokat tartalmazza, teljesen az egységkör belsejében fekszik és amelynek sugara, az $n \to \infty$ határátmenetnél, zérushoz tart. A K_n körlemez képe legyen G_n. Akkor G_n, a *B)* tétel II. feltevése szerint, konvex tartomány, amely tartalmazza a $w'_n = f(z'_n)$ és $w''_n = f(z''_n)$ pontokat és így e két pontot összekötő egyenesdarab felezőpontját is; vagyis a K_n körben van olyan $z^\star_n$ pont, amelyre nézve

$$f(z^\star_n) = \frac{w'_n + w''_n}{2}. \tag{12}$$

Mivel a K_n kör sugara zérushoz tart, ez a $z^\star_n$ pont is az egységkör kerületének ugyanazon ζ pontjához tart, mint a z'_n, z''_n pontok. A leképezés kölcsönösen egyértelmű és folytonos voltánál fogva tehát az $f(z^\star_n) = \dfrac{w'_n + w''_n}{2}$ sorozat nem konvergálhat a G képtartomány *belső* pontjához; ugyanez áll természetesen az $f(z'_n) = w'_n$, $f(z''_n) = w''_n$ sorozatokra is. Vagyis

$$w' = \lim w'_n, \quad w'' = \lim w''_n \quad \text{és} \quad \frac{w' + w''}{2} = \lim \frac{w'_n + w''_n}{2}$$

határpontjai a G képtartománynak, mégpedig — G korlátossága miatt — véges és így (10) miatt egymástól különböző, nyilván egy egyenesen fekvő határpontjai, ami lehetetlenség, mivel feltettük, hogy G szorosabb értelemben konvex.

5. Ejtsük most el azt a feltevést, hogy a (10)-hez vezető z'_n, z''_n sorozatok szomszédosak. A következő pontban meg fogjuk mutatni, hogy áll a következő (teljesen elemi)

Segédtétel. Ha z'_n, z''_n két, az egységkör belsejében fekvő sorozat, amely az egységkör kerületének ugyanazon ζ pontjához tart, akkor mindig van olyan, az egységkör belsejében fekvő $\bar{z}_n$ sorozat, amely mindkét adott sorozattal szomszédos (és ennélfogva természetesen szintén ζ-hoz tart).

Ennek a $\bar{z}_n$ sorozatnak a segélyével már most így okoskodhatunk. Esetleg előzetes kiválasztást eszközölve feltehetjük, hogy az $f(\bar{z}_n) = \bar{w}_n$ sorozat konvergens:

$$\bar{w}_n \to \bar{w}.$$

Mivel (10) szerint $w' \neq w''$, a $w' \neq \bar{w}$ és $w'' \neq \bar{w}$ egyenlőtlenségek közül legalább az egyiknek állnia kellene; mivel azonban z'_n és $\bar{z}_n$ is, z''_n és $\bar{z}_n$ is szomszédos sorozatok, a 4. pont szerint ez a feltevés ellenmondásra vezet.

6. Hátra van még az előző pontban használt segédtétel igazolása; ez például így történhetik. Mivel z'_n és z''_n az egységkör kerületének ugyanazon pontjához tartanak, mindenesetre $|z'_n| \to 1$, $|z''_n| \to 1$, $|z''_n - z'_n| \to 0$ és így, esetleg véges számú tag elhagyása után,

$$|z'_n| > |z''_n - z'_n|, \quad |z''_n| > |z''_n - z'_n|. \tag{13}$$

Ragadjunk most ki egy határozott n indexet és legyen pl.

$$|z'_n| \geq |z''_n|. \tag{14}$$

Akkor (13) miatt a $z=0$ és $z=z'_n$ pontokat összekötő egyenesdarabon megadhatunk egy $\bar{z}_n$ pontot, amelyre

$$|\bar{z}_n - z'_n| = |z''_n - z'_n|; \tag{15}$$

jegyezzük meg rögtön, hogy ezen $\bar{z}_n$ pont helyzete olyan, hogy áll az

$$|\bar{z}_n| + |z'_n - \bar{z}_n| = |z'_n| \tag{16}$$

összefüggés. *Azt állítjuk, hogy az így szerkesztett $\bar{z}_n$ pont, ha $n \to \infty$, egy a z'_n, z''_n sorozatok mindegyikével szomszédos sorozatot fut be.* Ez igazolva lesz, ha megmutatjuk, hogy (a 4. pont elején bevezetett jelöléssel)

$$[z'_n, \bar{z}_n] \leqq |z''_n - z'_n|, \tag{17}$$

$$[z''_n, \bar{z}_n] \leqq |z''_n - z'_n|, \tag{18}$$

mert hiszen $|z''_n - z'_n| \to 0$.

A $\bar{z}_n$ pont választásánál fogva a $\bar{z}_n$ mint középpont körül az $|z''_n - z'_n|$ sugárral rajzolt kör teljesen az egységkör belsejében fekszik és tartalmazza a $\bar{z}_n$ és z'_n pontokat, tehát (17) mindenesetre áll. Ha a z''_n és z'_n pontok speciálisan az egységkörnek ugyanazon a sugarán fekszenek, akkor a $\bar{z}_n$ pont összeesik a z''_n ponttal, tehát ekkor $[z''_n, \bar{z}_n] = 0$ és (18) is áll. Ha viszont z'_n és z''_n nem fekszenek ugyanazon sugáron, akkor (18) a következőkép igazolható. A $\bar{z}_n$ ponton át a z'_n és z''_n pontokat összekötő egyeneshez rajzolt párhuzamos ekkor az egységkörnek z''_n-ön átmenő sugarát egy határozott $z^\star_n$ pontban metszi; a hasonló háromszögekből, (14) és (15) segélyével, rögtön következnek az

$$|z^\star_n| \leqq |\bar{z}_n|, \tag{19}$$

$$|z''_n - z^\star_n| \leqq |z'_n - \bar{z}_n| = |z''_n - z'_n|, \tag{20}$$

$$|\bar{z}_n - z^\star_n| \leqq |z''_n - z'_n| \tag{21}$$

egyenlőtlenségek. (19), (15) és (16)-ból tovább

$$|z^\star_n| + |z''_n - z'_n| \leqq |\bar{z}_n| + |z'_n - \bar{z}_n| = |z'_n| < 1 \tag{22}$$

következik. Ha már most a $z^\star_n$ pont körül az $|z''_n - z'_n|$ sugárral kört rajzolunk, akkor ez (22) szerint teljesen az egységkörben fekszik, (20) és (21) szerint pedig tartalmazza a $\bar{z}_n$ és z''_n pontokat, tehát (18) is igazolva van.

7. A *B)* tétel *a)* alatti állítását evvel teljesen bebizonyítot-

tuk. A β) alatti állítás igazolásához előrebocsátjuk a következő megjegyzéseket. Legyen ζ az egységkör kerületének pontja, K egy körlemez, amely az egységkört a ζ pontban érinti és egyébként teljesen az egységkör belsejében fekszik. Legyen végül K' a K körlemez belsejének a képe. Mivel K nem fekszik teljesen az egységkör belsejében, K' konvexitása nincsen explicite benne a feltevéseinkben, de azonnal következik. Mert ha K_n a köröknek egy sorozata, amelyek K-val koncentrikusok és amelyeknek a sugarai növekedőleg tartanak K sugara felé, akkor nyilván K' ezen K_n körök képeinek egyesítési halmaza; mivel ez utóbbiak feltevésünk szerint konvexek, K' is konvex. Jelöljük már most $f(z)$ határértékét a ζ pontban $f(\zeta)$-val; mivel $f(z)$ az egységkör belsejét kölcsönösen egyértelműen és folytonosan képezi le a G tartományra, a K kör belsejét pedig a K' tartományra, $f(\zeta)$ a G és K' tartományoknak közös *határpontja.*

Tekintsük most az egységkör kerületének két különböző ζ_1, ζ_2 határpontját. Vegyük fel ezekhez a K_1, K_2 köröket úgy, hogy e körök az egységkört a ζ_1, illetőleg ζ_2 pontban belülről, egymást pedig egy bizonyos, az egységkör belsejében fekvő z_0 pontban kívülről érintsék. Ezen körök belsejének a képei legyenek K_1', K_2'. E képtartományoknak a $w_0 = f(z_0)$ pont közös, a G tartomány belsejében fekvő határpontja; mivel a K_1, K_2 köröknek nincsen z_0-tól különböző közös belső vagy határpontjuk, a K_1', K_2' képtartományoknak sem lehet a w_0-tól különböző, a G tartomány *belsejében fekvő* közös belső vagy határpontjuk. K_1' és K_2' azonban egy fentebbi megjegyzés szerint *konvexek* és ez okból *egyáltalában* nem lehet a w_0-tól különböző közös belső vagy határpontjuk; mert ha volna, pl. $w^* \neq w_0$, akkor a w^* és w_0 pontokat összekötő egyenesdarab minden pontja, a konvexitás miatt, közös belső vagy határpont volna, pedig ezen egyenesdarabnak a w_0-hoz elég közel eső pontjai mindenesetre *belső* pontjai G-nek és így nem lehetnek K_1'-nek és K_2'-nek közös belső vagy határpontjai, mint előzőleg láttuk.

Már most $f(\zeta_1)$, $f(\zeta_2)$ a K_1', illetőleg K_2'-nek a G tartomány határára eső és így a G belsejében fekvő w_0 ponttól különböző határpontjai. Ha tehát $f(\zeta_1) = f(\zeta_2)$ volna, akkor K_1'-nek és K_2'-nek volna a w_0-tól különböző közös határpontja. Az előző megjegyzések szerint ilyen nincsen; következőleg $f(\zeta_1) \neq f(\zeta_2)$, amivel a *B)* tételnek *β)* alatti állítása is igazolva van.

Radó Tibor.

ÜBER DIE KONFORMEN ABBILDUNGEN KONVEXER GEBIETE.

Zunächst wird für den Study'schen Satz, nach welchem sämtliche Niveaukurven eines konvexen Gebietes ebenfalls konvex sind, ein ganz elementarer Beweis gegeben, bei welchem der Study'sche Satz als unmittelbare Folgerung des Schwarz'schen Lemmas erscheint. Es wird dann die Bemerkung ausgeführt, dass bei der konformen Abbildung des Einheitskreises auf ein konvexes Gebiet die Ränderzuordnung in elementarer Weise abgeleitet werden kann, wenn man den Study'schen Satz heranzieht. Insbesondere stellt es sich heraus, dass falls keine drei Randpunkte des konvexen Bildgebietes in einer Geraden liegen, die Stetigkeit und Eineindeutigkeit der Ränderzuordnung ohne Heranziehung funktionentheoretischer Mittel, durch einfachste topologische und elementargeometrische Betrachtungen aus dem Study'schen Satze folgt.

Die Note erscheint in deutscher Sprache in den Math. Annalen.

Tibor Radó.[1]

[1] Research Fellow of the Rockefeller Foundation.

KONVEX ÉS MONOTON FÜGGVÉNYEKRŐL.

Legyen az $f(x)$ függvény valamely I intervallumban felülről konvex (pontosabban: nem konkáv), azaz tegyen eleget a

$$2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geqq f(x_1)+f(x_2) \tag{1}$$

funkcionál-egyenlőtlenségnek. (1)-ből következik, hogy általánosabban

$$f[x_1+\vartheta(x_2-x_1)] \geqq f(x_1)+\vartheta[f(x_2)-f(x_1)] \tag{2}$$
$$(x_1<x_2,\ 0\leqq\vartheta\leqq 1),$$

valahányszor ϑ racionális.[1] Pusztán (1)-ből még nem következik azonban, hogy (2) irracionális ϑ-ra is igaz.[2]

---

[1] JENSEN: Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, Acta Mathematica 30 (1906). p. 188. form. (α). Ennek egyszerűbb bebizonyítását l. alább a szövegben.

[2] Legyen u. i.

$$f(x)=\varphi(x)+\psi(x),$$

ahol $\varphi(x)$ valamely folytonos és felülről konvex függvény, $\psi(x)$ pedig a

$$\psi(x_1+x_2)=\psi(x_1)+\psi(x_2)$$

funkcionál-egyenletnek egy HAMEL-féle nem folytonos megoldása (l. M. HAMEL: Mathematische Annalen 60 (1905) p. 459—462); nyilvánvaló, hogy ez az $f(x)$ eleget tesz (1)-nek. Most azonban (2) nem lehet minden a 0 és 1 közé eső ϑ-ra igaz, mert akkor $f(x)$ az (x_1, x_2) intervallumban alulról korlátos volna, tehát $\psi(x)$ is ilyen volna, ami ellenkezik a feltevéssel.

Ha (2) minden a 0 és 1 közé eső ϑ-ra igaz, úgy $f(x)$ az (x_1, x_2) intervallumban alulról korlátos, tehát ennek belsejében folytonos. (V. ö. JENSEN[1] p. 187—189. L. még SIERPIŃSKI: Sur les fonctions convexes mesurables, Fundamenta Mathematicæ 1 (1920) p. 125—129, ahol JENSEN tételének más bebizonyítása található.) Fordítva, ha $f(x)$ folytonos, úgy (2) nyilván irracionális ϑ-ra is érvényes.

Az (1) nem folytonos megoldásainak mélyebb vizsgálatára nézve l. F. BERNSTEIN—G. DOETSCH: Zur Theorie der konvexen Funktionen, Mathematische Annalen 76 (1915) p. 514—526.

Tegyük fel már most (1) mellett még azt is, hogy $f(x)$ *monoton.* Akkor indirekt úton evidens, miszerint (2) irracionális ϑ esetén is érvényes. Az alábbiakban ennek *direkt* bebizonyítását adom.

Ezzel kapcsolatban megmutatom azután, hogy az alábbi elemi geometriai tételek *a parallelaxiomától függetlenül* direkt úton bebizonyíthatók.

Legyenek ABC és $A'B'C'$ derékszögű háromszögek, ahol $C_{\sphericalangle} = C'_{\sphericalangle} =$ derékszög. A jelzett tételek a következők:

1. Ha $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ és $A_{\sphericalangle} < A'_{\sphericalangle}$, akkor
$$A'_{\sphericalangle} : A_{\sphericalangle} > \overline{B'C'} : \overline{BC}.$$

2. Ha $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ és $\overline{CA} < \overline{C'A'}$, akkor
$$\overline{C'A'} : \overline{CA} > B'_{\sphericalangle} : B_{\sphericalangle}.$$ [3]

*

Előre bocsátom a következő észrevételt. Ha az

$$a_0,\ a_1, \ldots,\ a_n$$

számsorozatban

$$2a_i \geqq a_{i+1} + a_{i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \qquad (3)$$

akkor

$$n(a_k - a_0) \geqq k(a_n - a_0) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1). \qquad (4)$$

U. i. (3) alapján a $j = k+1, \ldots, n$ értékek bármelyikére

$$a_i - a_{i-1} \geqq a_j - a_{j-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

---

[3] V. ö. WEBER—WELLSTEIN: Enzyklopädie der Elementarmathematik Bd. II. 3. Aufl. (1915), p. 339. Itt a

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

egyenlőtlenségek alapján be van bizonyítva, miszerint

$$\frac{\sin x_2}{\sin x_1} < \frac{x_2}{x_1} < \frac{\operatorname{tg} x_2}{\operatorname{tg} x_1} \qquad \left(0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}\right).$$

Ha elfogadjuk a parallelaxiomát, akkor 1. és 2. e tételekkel æquivalensek.

Összeadva

$$(a_k - a_0) \geqq k\,(a_j - a_{j-1}) \qquad (j = k+1, \ldots, n).$$

Ismét összeadva

$$(n-k)\,(a_k - a_0) \geqq k\,(a_n - a_k),$$

honnan (4) folyik.

Racionális ϑ esetén (2) ez észrevétel alapján (1)-nek közvetlen folyománya. Látható, hogy ha egy racionális ϑ-ra (2)-ben a $>$ jel érvényes, úgy mindegyikre ez érvényes.

Áttérek annak direkt bebizonyítására, hogy ha $f(x)$ monoton, úgy (2) irracionális ϑ-ra is igaz. Szorítkozhatom arra az esetre, midőn a J intervallum (0, 1) és $f(x)$ monoton növekedő, továbbá

$$f(0) = 0, \; f(1) = 1, \; f(\tfrac{1}{2}) > \tfrac{1}{2}. \tag{5}$$

Ki kell mutatnom, miszerint

$$f(x) > x \qquad (0 < x < 1). \tag{6}$$

A feltevés alapján az m, n, μ, ν természetes számokat meghatározhatjuk úgy, hogy

$$m\,[2f(\tfrac{1}{2}) - 1] > 1, \tag{7}$$

$$1 > n\,(1-x) \geqq \tfrac{1}{2}, \tag{8}$$

$$\mu\,[1 - n\,(1-x)] > 1, \tag{9}$$

$$\nu \leqq m\mu\,[1 - n\,(1-x)] < \nu + 1. \tag{10}$$

Azt állítom, hogy

$$f(x) > \frac{m\mu\,(n-1) + \nu + 1}{mn\mu}. \tag{11}$$

Legyen rövidség kedvéért

$$z = 1 - n\,(1-x). \tag{12}$$

(12), (10) és (8)-ból

$$\frac{\nu}{m\mu} \leqq z \leqq \tfrac{1}{2}. \tag{13}$$

Alkalmazzuk (2)-t az $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $\vartheta = \dfrac{2\nu}{m\mu}$ esetre; akkor (5) alapján

$$f\left(\frac{\nu}{m\mu}\right) \geqq \frac{2\nu}{m\mu} f(\tfrac{1}{2}),$$

s $f(x)$ monoton növekedő lévén, (13)-ra tekintettel még inkább

$$m\mu f(z) \geqq 2\nu f(\tfrac{1}{2}). \tag{14}$$

De (9) és (10)-ből látható, hogy $\nu \geqq m$, tehát (7)-et erősitjük, ha m-et ν-vel pótoljuk, mikor is adódik

$$2\nu f(\tfrac{1}{2}) > \nu + 1. \tag{15}$$

(14) és (15)-ből

$$m\mu f(z) > \nu + 1. \tag{16}$$

Alkalmazzuk most (2)-őt az $x_1 = z$, $x_2 = 1$, $\vartheta = \frac{n-1}{n}$ esetre; akkor (5) és (12) alapján adódik

$$nf(x) \geqq n - 1 + f(z). \tag{17}$$

(16) és (17)-ből folyik (11), (10) és (11)-ből pedig (6), q. e. d.

Hasonló meggondolással élhetünk a fenti 1. és 2. tétel bebizonyításánál. Ezeknek ily módon *a parallelaxiomától független* direkt bebizonyítása történik, mely csak a HILBERT-féle I., II., III. axioma-csoportokat és ARCHIMEDES axiomáját[4] használja fel.

Legyenek u. i. ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$ derékszögű háromszögek, ahol $C_{\measuredangle} = C'_{\measuredangle} = C''_{\measuredangle} =$ derékszög. Könnyen belátható, hogy

a) Ha $\overline{AB} = \overline{A'B'} = \overline{A''B''}$ és

$$A'_{\measuredangle} = \tfrac{1}{2}(A_{\measuredangle} + A''_{\measuredangle}),$$

akkor

$$\overline{B'C'} > \tfrac{1}{2}(\overline{BC} + \overline{B''C''})$$

(az $A_{\measuredangle} = 0$, $\overline{BC} = 0$ határesetben is).

b) Ha $\overline{BC} = \overline{B'C'} = \overline{B''C''}$ és

$$\overline{C'A'} = \tfrac{1}{2}(\overline{CA} + \overline{C''A''}),$$

[4] HILBERT: Grundlagen der Geometrie 6. Aufl. (1923), Kap. I., §§ 2, 3, 5, 8. Ismeretes, hogy az I—III. axioma-csoportok alapján ARCHIMEDES axiomájából már következik a szögekre vonatkozó analog tétel és viszont. (G. FEIGL: Über das Archimedische Axiom, Mathematische Zeitschrift 25 (1926), p. 590—600. L. még R. BALDUS: Über das Archimedische Axiom, u. o. 26 (1927), p. 758—760.)

akkor

$$B'_{\sphericalangle} > \tfrac{1}{2}(B_{\sphericalangle} + B''_{\sphericalangle})$$

(a $\overline{CA} = 0$, $B_{\sphericalangle} = 0$ határesetben is).[5]

Már most pl. az 1. tétel így látható be. Legyen t a B' pontnak az $A'_{\sphericalangle}$ szögfelezőjétől való távolsága. Akkor *a)* szerint

$$t > \tfrac{1}{2}\overline{B'C'}.$$

Archimedes axiomája alapján az m', n', μ', ν', természetes számokat meghatározhatjuk úgy, hogy

$$m'(2t - \overline{B'C'}) > \overline{B'C'}, \tag{18}$$

$$A'_{\sphericalangle} > n'(A'_{\sphericalangle} - A_{\sphericalangle}) \geqq \tfrac{1}{2}A'_{\sphericalangle}, \tag{19}$$

$$\mu'[A'_{\sphericalangle} - n'(A'_{\sphericalangle} - A_{\sphericalangle})] > A'_{\sphericalangle}, \tag{20}$$

$$\nu A'_{\sphericalangle} \leqq m'\mu'[A'_{\sphericalangle} - n'(A'_{\sphericalangle} - A_{\sphericalangle})] < (\nu'+1)A'_{\sphericalangle}. \tag{21}$$

Kiköthetjük, hogy m' és μ' a 2-nek hatványa legyen. A

$$p = m'\mu'n', \ q = m'\mu'(n'-1) + \nu' + 1$$

jelölés mellett (21)-ből

$$pA_{\sphericalangle} < qA'_{\sphericalangle};$$

és (18)—(21)-ből *a)* alapján a (11) bebizonyításához hasonlóan következik, miszerint

$$pBC > qB'C'.$$[6]

Ezzel az 1. tétel be van bizonyítva.[7] A 2. tételt *b)* alapján hasonlóan láthatjuk be.

Kiemelem 1. és 2. következő speciális eseteit:

1*. Ha $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ és van olyan δ szög, hogy

$$A_{\sphericalangle} = k\delta, \ A'_{\sphericalangle} = n\delta,$$

---

[5] V. ö. Baldus[4] p. 758, Hilfssatz.

[6] Minthogy m' és μ' a 2-nek hatványa, a bebizonyításban fellépő $\frac{\nu'}{m'\mu'}A'_{\sphericalangle}$ létezése a jelzett axiomákból folyik.

[7] V. ö. Euklides V., 7. def.

ahol $k < n$ természetes számok, úgy

$$n\,\overline{BC} > k\overline{B'C'}.$$

2.* Ha $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ és van olyan d egyenesdarab, hogy

$$\overline{CA} = rd,\ \overline{C'A'} = sd,$$

ahol $r < s$ természetes számok, úgy

$$sB_{\sphericalangle} > rB'_{\sphericalangle}.$$

1.* és 2.* -ot *a)* illetve *b)* alapján (4) bebizonyításához hasonlóan is beláthatjuk, ezek tehát ARCHIMEDES axiomájától függetlenek.

Megemlítem az *a)*, *b)*, 1.* és 2.* tételek alábbi folyományait. Legyen k_n egy a körbe beírt, K_n pedig egy a kör körül írt nemszabályos n-szögnek, k'_n, illetve K'_n a megfelelő szabályos n-szögnek kerülete. (A be- és körülírás a szokásos megszorítással értendő.) Már most *a)*- resp. *b)*-ből a konvex függvényekre vonatkozó JENSEN-féle egyenlőtlenség bebizonyításához hasonlóan[8] következik, miszerint

$$k_n < k'_n,\quad K_n > K'_n;$$

1.*- resp. 2.*-nak pedig közvetlen folyománya, hogy

$$k'_n < k'_{n+1},\quad K'_n > K'_{n+1}.$$[9]

Szász Pál.

---

[8] V. ö. JENSEN[1] p. 179.

[9] E tételeknek más bebizonyítására nézve (mely azonban szintén független a parallelaxiomától) l. KÜRSCHÁK: Über dem Kreise ein- und umgeschriebene Vielecke, Mathematische Annalen 30 (1887), p. 578—581.

ÜBER MONOTONE KONVEXE FUNKTIONEN.

Die Funktion $f(x)$ sei in einem gewissen Intervalle von oben nicht konkav, d. h. erfülle die Funktionalungleichung

$$2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geqq f(x_1) + f(x_2). \tag{1}$$

Ist ϑ eine rationale Zahl zwischen 0 und 1, so folgt aus (1)

$$f[x_1 + \vartheta(x_2 - x_1)] \geqq f(x_1) + \vartheta[f(x_2) - f(x_1)] \tag{2}$$
$$(x_1 < x_2,\ 0 < \vartheta < 1).$$ [1]

Es werde nun weiter vorausgesetzt, dass $f(x)$ *monoton* ist. Auf indirektem Wege erweist sich dann als evident, dass (2) auch für *irrationelle* ϑ gilt. In dieser Arbeit wird das *direkt* bewiesen. Es wird gezeigt, dass durch eine ähnliche Schlussweise die folgenden elementargeometrischen Sätze [2] *unabhängig vom Parallelenaxiom* direkt bewiesen werden können.

Es seien ABC und $A'B'C'$ rechtwinklige Dreiecke mit $\sphericalangle C = \sphericalangle C' =$ = rechter Winkel. Die erwähnten Sätze lauten: [3]

1. Ist $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ und $\sphericalangle A < \sphericalangle A'$, so gilt

$$\sphericalangle A' : \sphericalangle A > \overline{B'C'} : \overline{BC}.$$

2. Ist $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ und $\overline{CA} < \overline{C'A'}$, so gilt

$$\overline{C'A'} : \overline{CA} > \sphericalangle B' : \sphericalangle B.$$

Aus diesen folgen gewisse Sätze [4] über die Umfänge von Vielecken die einem Kreise ein- bzw. umgeschrieben sind.

Paul v. Szász.

---

[1] Vgl. Jensen: Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, Acta Mathematica 30 (1906), p. 188. Form. (α). In vorliegender Arbeit wird das einfacher bewiesen.

[2] Vgl. Weber—Wellstein: Enzyklopädie der Elementarmathematik Bd. II. 3. Aufl. (1915) p. 339.

[3] Vgl. Euclid V. Def. 7.

Vgl. J. Kürschák: Über einem Kreise ein- und umgeschriebene Vielecke, Mathematische Annalen 30 (1887), p. 578—581.

EINSTEIN LEGÚJABB GEOMETRIÁJA.

A berlini Akadémián tartott előadássorozatban Einstein egy új, különleges differenciálgeometriát ismertetett, melyről annak idején a napilapok is megemlékeztek. Ez az alkotás legújabb stádiuma annak a tizenkét éves törekvésnek, hogy nemcsak a gravitációs, hanem az elektromágneses téregyenleteket is a tér affin és metrikus tulajdonságai alapján levezessük. A problemának ez a megfogalmazása annyira újszerű a közelmultnak fizikai kérdéstételeivel szemben, hogy talán nem fölösleges a fejlődés néhány nevezetes mozzanatára rámutatni.

A jól ismert Michelson—Morley-féle kisérlet megmutatta, hogy az aetherhez viszonyított egyenesvonalú egyenletes mozgásnak nem felel meg a jelenségek világában semminemű tünemény, amely ennek a mozgásnak kisérője, lefolyásának mintegy kritériuma volna. Az aether elvesztette létjogosultságát. Úgy van, mint Hermann Weyl mondja: mintha csak az aether eltökélte volna, hogy «ti huncut fizikusok, engem ugyan meg nem fogtok». Einstein levonta a konzekvenciákat. Speciális relativitáselméletének kiinduló axiomája, hogy két rendszerben, mely egymáshoz képest egyenesvonalú egyenletes mozgásban van, a természeti törvények szükségkép ugyanazok, mert egy esetleg fellépő különbség ráutalna a mozgásra. Más szóval azok az egyenletrendszerek, melyek a természeti törvények analitikai megfogalmazásai, invariansok az ú. n. Lorentz-transformációkkal szemben. Minkowski vizsgálat tárgyává tette az elektromágneses téregyenleteket az Einstein-féle átírásban, fejlett érzékével a mathematikai szimmetria iránt bizonyos formális jelölésváltozásokat vezette be, nevezetesen ict-t x°-val jelölte (i az imaginárius egység, c a fényterjedés sebessége vakuumban, t a folyó idő), és megállapította, hogy ez az x^0 a három térkoordinátával x^1, x^2, x^3-mal teljesen azonos szerepet játszik. Így alakult ki a négydimenziós téridőkontinuum fogalma. EINSTEINban ez az új gondolat igen erős visszhangra talált. Saját bevallása szerint MINKOWSKI előkészítő munkássága nélkül aligha született volna meg általános relativitáselmélete. Gondolatmenete mindenekfölött logikus. Ha a távolbahatásokat nem az aether közvetíti, ha a tér valóban üres, akkor a vakuum fogalmához csak geometriai tulajdonságok tapadhatnak. Akkor a távolbahatások fizikája és a négydimenziós tér geometriája egy és ugyanaz a dolog. Általános relativitáselméletének lényege a legrövidebbre fogva a következő. Az üres tér euklidesi. Gravitációs tömegek jelenléte azonban adott módon RIEMANN-féle térré változtatja, melyben a testek, ha csak a gravitáció hatása alatt állanak, geodetikus vonalakon mozognak. Az új theoria első megközelítésben a NEWTON-féle elméletre vezet, második megközelítésben a bolygók perihelium-mozgásáról is számot ad. Megállapítja a fénysugár elhajlását erős gravitációs mezőkben, amit a mérés számszerűleg igazol. Az új elmélet eredményei és alapgondolatának belső logikája most már arra ösztönözte az elméleti kutatókat, hogy a gravitáció után az elektromágneses egyenleteket is a tér geometriájából származtassák. WEYL, EINSTEIN, SCHOUTEN, EDDINGTON, újból EINSTEIN, REICHENBÄCHER, KALUZA, MANDEL és KLEIN munkái említendők fel e téren. Az eredmények azonban nem kielégítők vagy nem megnyugtatók. Legutóbb ismét EINSTEIN lépett a nyilvánosság elé egy sokatígérő kisérlettel. Kisérletnek kell neveznünk, mert EINSTEIN még nem vonta le a végső konzekvenciákat. Az alábbiakban az új alkotás első részét, az EINSTEIN-féle geometriát ismertetjük.

Vizsgálatunk tárgya egy n-dimenziós térbeli kontinuum. A tér pontjait tetszésszerinti GAUSS-féle koordinátarendszerre vonatkoztatjuk. Vagyis minden ponthoz bizonyos konvenció szerint n számot rendelünk. Ezek a pont koordinátái: x^1, x^2,... x^n. A pontból kiinduló vonalelem komponensei dx^1, dx^2...dx^n. Transformáljuk a koordinátákat. Az új $'x^\nu$ koordináták az előbbiek adott függvényei:

$$'x^\nu = 'x^\nu (x^1 \ldots x^n), \text{ vagy röviden: } 'x^\nu = 'x^\nu (x^\mu) \tag{1}$$

A vonalelem komponensei ekkor új értékeket vesznek fel:

$$d'x^\nu = \frac{\partial' x^\nu}{\partial x^\lambda} dx^\lambda, \tag{2}$$

ha szokás szerint megállapodunk abban, hogy egy kifejezésben kétszer előforduló index (a fenti képletben λ) összegezést jelentsen ezen index szerint 1-től n-ig. A vonalelem mintájára kontravariáns vektornak nevezünk oly mennyiséget, melyet n szám, n komponens határoz meg: $v^1, v^2, \ldots v^n$, melyek koordinátatransformáció esetén úgy transformálandók, mint a vonalelem komponensei:

$$'v^\nu = \frac{\partial' x^\nu}{\partial x^\lambda} v^\lambda. \tag{3}$$

Kontravariáns vektorok komponenseit felső görög indexekkel jelöljük.

Fölemlítendő még a transformációkoefficiensek ismert összefüggése:

$$\frac{\partial' x^\nu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial' x^\mu} = A^\nu_\mu, \quad A^\nu_\mu = \begin{cases} 1, \text{ ha } \mu = \nu \\ 0, \text{ ha } \mu \neq \nu \end{cases} \tag{4}$$

A^ν_μ neve egységaffinor vagy egységtenzor.

Legyen már most adva egy kontravariáns vektormező, másszóval a koordináták n függvénye, melyek a vektor komponenseit adják meg a tér minden egyes pontjában. Tehát a tér $P(x^\mu)$ pontjában $v^\nu = v^\nu(x^\mu)$. Egy szomszédos $Q(x^\mu + dx^\mu)$ pontban a komponensek értékei akkor a $v^\nu(x^\mu + dx^\mu)$ függvényértékek által vannak adva.

A differenciálgeometriának legelső feladata megállapitani egy eljárást, melynek segítségével a P- és Q-beli vektorok összehasonlíthatók legyenek. Az euklidesi térben ez az összehasonlítás ismert módon úgy történik, hogy a P-beli vektort önmagával párhuzamosan a Q pontba helyezzük át és végpontját össze kötjük a Q-beli vektor végpontjával. Az így nyert elemi vektor adja a Q- és P-beli vektorok különbségét, δv-t. Lényeges megjegyeznünk, hogy euklidesi térben, hol DESCARTES-féle koordinátarendszerek léteznek, van megállapodásszerű kriteriumunk arra nézve, hogy mit nevezünk párhuzamos áthelyezésnek. A P-beli vektor akkor van párhuzamosan áthelyezve Q-ba, ha DESCARTES-féle rendszerre vonatkozó komponensei a Q pontban ugyanakkorák, mint voltak a P pontban. Más, pl. poláris koord. rendszerben azonban az ilyen módon áthelyezett vektor komponensei változást szenvednek. A v^ν komponens változását $\triangle v^\nu$-vel jelöljük. Meghatározása céljából feltesszük, hogy (1)-ben a vesszős koordináta-rendszer DESCARTES-féle. Akkor a $'v^\pi$ komponensek értéke a P pontban és párhuzamos áthelyezés folytán a Q pontban ugyanakkorák. Kiszámítjuk egy másik (vesszőnélküli) rendszerben a Q- és P-beli komponensek különbségét. (3) szerint a P pontban:

$$'v^\pi = \frac{\partial' x^\pi}{\partial x^\lambda} v^\lambda \tag{5}$$

és a Q pontban:

$$'v^\pi = \left(\frac{\partial' x^\pi}{\partial x^\lambda}\right)_{x^\mu + dx^\mu} v^\lambda_Q = \frac{\partial' x^\pi}{\partial x^\lambda} v^\lambda_Q + \frac{\partial^2 x^\pi}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} v^\lambda dx^\mu. \tag{6}$$

A második tagban v^λ_Q helyett v^λ-t írva, ez másodrendűek elhanyagolását jelenti. (6) és (5) különbségéből

$$0 = \frac{\partial' x^\pi}{\partial x^\lambda} \Delta v^\lambda + \frac{\partial^{2\prime} x^\pi}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} v^\lambda dx^\mu.$$

Az egyenlet két oldalát $\frac{\partial x^\nu}{\partial' x^\pi}$-vel szorozva:

$$0 = \Delta v^\lambda A^\nu_\lambda + \frac{\partial^{2\prime} x^\pi}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial' x^\pi} v^\lambda dx^\mu,$$

miből

$$\Delta v^\nu = -\frac{\partial^{2\prime} x^\pi}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial' x^\pi} v^\lambda dx^\mu = -\Gamma^\nu_{\lambda\mu} v^\lambda dx^\mu, \tag{7}$$

ahol a Γ-k a transformáció által meghatározott háromindexes mennyiségek; π t. i. összegező index. Eredményként megállapítható tehát, hogy párhuzamos áthelyezés folytán a vektorkomponensek változásai tetszőleges koordinatarendszerben a komponensek és koordinátadifferenciálok bilineáris formái.

Ezek után kérdés, hogy oldjuk meg a párhuzamos áthelyezés problemáját nem euklidesi térben. Hiszen ott Descartes-féle rendszerek, melyek kiindulásul szolgálhatnának, nincsenek. Ilyen térben hiányzik minden norma és az önkényes megállapodásoknak tág terük van. Ha azonban az analógiát fogadjuk el irányító elvül, akkor az ú. n. lineáris áthelyezésekben fogunk megállapodni, melyeket a fizikai alkalmazásokban mindeddig nem is léptek túl. Lényegük a következő. A $P(x^\mu)$ pontból a v^ν vektor párhuzamosan áthelyezendő $Q(x^\mu + dx^\mu)$ pontba. Legyen (7) mintájára Δv^ν most is bilineáris formája a v^λ-knak és a dx^μ-knek:

$$\Delta v^\nu = -\Gamma^\nu_{\lambda\mu} v^\lambda dx^\mu, \tag{8}$$

de a Γ-k, mivel transformacióhoz most nincs semmi közük, tetszésszerinti számok legyenek. Ebből áll a definicíószerű általánosítás. Még ahhoz sem ragaszkodunk, hogy úgy mint a (7)-beli transformációs Γ-knál, a két alsó indexre vonatkozólag szimmetria álljon fenn. Weyl, aki elektromágneses térelméletében elsőnek vezette be az általánosított Γ-kat, még ragaszkodott ehhez a szimmetriához. Az új Einstein-féle geometriának azonban éppen az a karakterisztikus vonása, hogy

$$\Gamma^\nu_{\lambda\mu} - \Gamma^\nu_{\mu\lambda} = S^\nu_{\lambda\mu} \neq 0. \tag{9}$$

Az n^3 számú Γ számértékek konkrét megadása által a P pont környezetében vektorok összehasonlítása lehetséges. Ha pedig a Γ-kat, mint a koordináták függvényeit adjuk meg; vagyis a tér minden pontjához rendelünk átviteli számokat, akkor bármely pontból vihetünk át vektort párhuzamosan egy környezetbeli pontba. De csakis környezetbeli pontba. Ha az R pont $\bar{x}^\mu$ koordinátái végesen különböznek a P pont x^μ koordinátáitól, a P-ből az R-be való parallel vektoráthelyezés teljesen értelmetlen. Mert hiszen a (8) differenciálegyenletrendszer, mely n egyenletből áll, hol a v^ν-k az ismeretlen függvények és az x^μ-k a független változók, általában nem integrábilis. Csak adott vonal mentén lehet szó párhuzamos áthelyezésről. Ekkor ugyanis a koordináták egy t parameter függvényei: $x^\mu = x^\mu(t)$, a differenciálegyenletrendszer egyváltozossá lesz és akkor adott P-beli kezdeti v^ν értékekhez határozott R-beli v^ν értékek tartoznak. De ezek az értékek függnek a vonal menetétől, úgy, hogy ahány vonal mentén végeznők az áthelyezést, annyi különböző vektort kapnánk R pontban, amelyekről mind egyenlő joggal állíthatnók, hogy párhuzamosak a P-beli vektorral. «Fernparallelismus»-ról, korlátlan párhuzamosságról tehát szó sem lehet. A korlátlan parallelismus különleges követelményeket támaszt a Γ-kkal szemben, azok specializálására vezet és így a végtelen sok lehetséges differenciálgeometria közül egy nevezetes osztályt kiválaszt. Evvel a különleges átvitellel G. Vitali és E. Bortolotti foglalkozott először.

A korlátlan parallelizmust tette meg Einstein is legújabb geometriájának gerincévé. Ez a geometria azt kívánja tehát, hogy a (8) rendszer az átmenet útjától független v^ν értékekhez vezessen az R pontban. Ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy (8) jobboldala exakt differenciál legyen. Ekkor a baloldalt is a szokásos dv^ν jellel írjuk:

$$dv^\nu = \frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu} dx^\mu = -\Gamma^\nu_{\lambda\mu} v^\lambda dx^\mu,$$

miből

$$\frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu} = -\Gamma^\nu_{\lambda\mu} v^\lambda, \tag{10}$$

minden koordinátára, tehát pl. x^ω-ra nézve is:

$$\frac{\partial v^\nu}{\partial x^\omega} = -\Gamma^\nu_{\lambda\omega} v^\lambda. \tag{11}$$

(10) és (11)-ből következik:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\Gamma^\nu_{\lambda\omega} v^\lambda) = \frac{\partial}{\partial x^\omega}(\Gamma^\nu_{\lambda\mu} v^\lambda). \tag{12}$$

Kifejtve:

$$\left(\frac{\partial \Gamma^{\nu}_{\lambda\omega}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}}{\partial x^{\omega}}\right)v^{\lambda}+\Gamma^{\nu}_{\lambda\omega}\frac{\partial v^{\lambda}}{\partial x^{\mu}}-\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\frac{\partial v^{\lambda}}{\partial x^{\omega}}=0.$$

Ha az itt előforduló vektordifferenciálhányadosokat a (10), ill. (11) rendszerből helyettesítjük, a következő egyenlethez jutunk:

$$\left(\frac{\partial \Gamma^{\nu}_{\lambda\omega}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}}{\partial x^{\omega}}-\Gamma^{\nu}_{\varkappa\omega}\Gamma^{\varkappa}_{\lambda\mu}+\Gamma^{\nu}_{\varkappa\mu}\Gamma^{\varkappa}_{\lambda\omega}\right)v^{\lambda}=0. \qquad (13)$$

A zárójeles mennyiséget görbületi tenzor komponensének nevezzük, és mint négyindexű mennyiséget, szokásos módon $R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}$-vel jelöljük. (13) ekkor röviden

$$R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}v^{\lambda}=0 \qquad (14)$$

alakban írható. λ összegező index, (14) tehát a következőt jelenti:

$$R_{\omega\mu 1}{}^{\nu}v^{1}+R_{\omega\mu 2}{}^{\nu}v^{2}+\cdots+R_{\omega\mu n}{}^{\nu}v^{n}=0. \qquad (15)$$

Ez az egyenlet a (8) rendszer integrálhatóságának feltétele. Ennek teljesülése esetén a v vektor korlátlanul párhuzamosan áthelyezhető. Ámde ezt az áthelyezhetőséget minden vektorra nézve kell követelnünk.

Válasszunk tehát n vektort:

$$\underset{1}{v},\ \underset{2}{v},\ldots \underset{s}{v},\ldots \underset{n}{v}.$$

Komponenseik legyenek rendre:

$$\begin{array}{l}
\underset{1}{v}:\ \underset{1}{v^{1}}\ldots\underset{1}{v^{\nu}}\ldots\underset{1}{v^{n}}\\
\underset{2}{v}:\ \underset{2}{v^{1}}\ldots\underset{2}{v^{\nu}}\ldots\underset{2}{v^{n}}\\
\cdots\cdots\\
\underset{s}{v}:\ \underset{s}{v^{1}}\ldots\underset{s}{v^{\nu}}\ldots\underset{s}{v^{n}}\\
\cdots\cdots\\
\underset{n}{v}:\ \underset{n}{v^{1}}\ldots\underset{n}{v^{\nu}}\ldots\underset{n}{v^{n}}
\end{array} \qquad (16)$$

Legyenek ezek a vektorok lineárisan függetlenek, vagyis det $\left|\underset{s}{v^{\nu}}\right| \neq 0$. Ha mindegyik vektorra követeljük a korlátlan parallel áthelyezhetőséget, akkor (15) minden vektorra külön-külön érvényes. Az így előálló lineáris homogen egyenletrendszer determinánsa $\left|\underset{s}{v}^{\nu}\right|$, minélfogva valamennyi $R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}=0$. Az EINSTEIN-féle tér görbületnélküli tér. Az $R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}$-k zérusértéke minden vektor korlátlanul párhuzamos áthelyezhetőségét biztosítja.

Legközelebbi feladatunk az $R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}=0$ feltételi egyenleteket kielégitő Γ-k meghatározása. Mivel ezek a feltételi egyenletek azonos tartalmúak a (10) mintájára felírt

$$\frac{\partial \underset{s}{v}^{\nu}}{\partial x^{\mu}} = -\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\underset{s}{v}^{\lambda} \qquad (s=1\ldots n) \tag{17}$$

rendszerrel, legcélszerűbben úgy járhatunk el, hogy a (16) schemájában szereplő $\underset{s}{v}^{\nu}$-ket a koordináták önkényesen megválasztott függvényeinek tekintjük. Akkor utolsó egyenletrendszerünk lineáris nem homogén rendszert jelent a Γ-kra nézve, melyből azok meghatározhatók. Nevezzük $\left|\underset{s}{v}^{\nu}\right|$-nek $\underset{s}{v}^{\nu}$ eleméhez tartozó aldeterminánsának és $\left|\underset{s}{v}^{\nu}\right|$-nek hányadosát $\overset{s}{v}_{\nu}$-nek. Neve normirozott aldetermináns. Akkor (17)-ből

$$\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = -\frac{\partial \underset{s}{v}^{\nu}}{\partial x^{\mu}}\overset{s}{v}_{\lambda}.$$

Vagy ha tekintetbe vesszük a determinánsok kifejtésének tételét:

$$\underset{s}{v}^{\nu}\overset{s}{v}_{\lambda} = A^{\nu}_{\lambda},$$

akkor ennek differenciálásából közvetlenül kiadódik még

$$\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = \underset{s}{v}^{\nu}\frac{\partial \overset{s}{v}_{\lambda}}{\partial x^{\mu}}. \tag{18}$$

A Γ-knak ezt a meghatározását WEITZENBÖCK végezte először «Invariantentheorie» című művében. Értelme a következő. A (18)-beli Γ-k alapján az előre, önkényesen megadott $\underset{s}{v}^{\nu}$ vektormezők mindegyike most már úgy fogható fel, mintha egy P

pontbeli vektorindividuumának korlátlan parallel áthelyezése által jött volna létre. Helyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy a meghatározott Γ értékek esetén a görbületi tenzorkomponensek azonosan zérusok.

Felvetjük a kérdést, lehet-e $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ szimmetrikus λ, μ-ben. Ha igen, akkor

$$\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} = \underset{s}{v}^{\nu}\left(\frac{\partial \overset{s}{v}_{\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \overset{s}{v}_{\mu}}{\partial x^{\lambda}}\right) = 0.$$

$\overset{r}{v}_{\nu}$-vel való szorzás után:

$$A^{r}_{s}\left(\frac{\partial \overset{s}{v}_{\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \overset{s}{v}_{\mu}}{\partial x^{\lambda}}\right) = \frac{\partial \overset{r}{v}_{\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \overset{r}{v}_{\mu}}{\partial x^{\lambda}} = 0.$$

Létezik tehát egy $'x^{r}$ függvény úgy, hogy

$$\overset{r}{v}_{\lambda} = \frac{\partial' x^{r}}{\partial x^{\lambda}}.$$

De akkor

$$\underset{r}{v}^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial' x^{r}} \quad \text{és} \quad \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = \frac{\partial^{2\prime} x^{r}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}} \cdot \frac{\partial x^{\nu}}{\partial' x^{r}}.$$

Ha az $'x^{r} = 'x^{r}(x^{\mu})$ koordinátatranszformációt végezzük, akkor eredményünknek (7)-tel való összehasonlítása mutatja, hogy az $'x^{r}$ rendszer DESCARTES-féle. Érthető ezek után az a fontos szerep, melyet $S^{\nu}_{\lambda\mu}$ játszik. Zérus értéke esetén euklidesivé zsugorodik össze az EINSTEIN-féle mértan.

$S^{\nu}_{\lambda\mu}$ geometriai értelme egyszerűen demonstrálható. P pontban választunk egy $\underset{1}{dx}$ és egy másirányú $\underset{2}{dx}$ vonalelemet. Az elsőt parallel eltoljuk a másiknak végpontjába. A komponensváltozások ekkor:

$$\triangle \underset{1}{dx}^{\nu} = - \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} \underset{1}{dx}^{\lambda} \underset{2}{dx}^{\mu}. \tag{19}$$

A másodikat viszont párhuzamosan áthelyezzük az elsőnek végpontjába:

$$\triangle \underset{2}{dx}^{\nu} = - \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} \underset{2}{dx}^{\lambda} \underset{1}{dx}^{\mu} = - \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} \underset{1}{dx}^{\lambda} \underset{2}{dx}^{\mu}, \tag{20}$$

ha tekintetbe vesszük, hogy összegező indexek bármily más betűvel jelölhetők. A két eltolt vonalelem kitérő, a végpontok nem esnek egybe. Az első végpontból a második felé haladó p vektor ν komponense:

$$p^\nu = \underset{2}{\Delta}\, dx^\nu - \underset{1}{\Delta}\, dx^\nu = (\Gamma^\nu_{\lambda\mu} - \Gamma^\nu_{\mu\lambda})\, \underset{1}{dx^\lambda} \underset{2}{dx^\mu} = S^\nu{}_{\lambda\mu} \underset{1}{dx^\lambda} \underset{2}{dx^\mu}.$$

Az eddigiekben tárgyalt áthelyezéses mértanhoz, melyet Einstein készen találta, ő rendelt bizonyos speciális metrikus tulajdonságokat. Vektorok értékéről, két vektor által bezárt szögről mindeddig még szó sem volt. A geometria metrikus része ezekre a kérdésekre azáltal ad feleletet, hogy megmondja, mit akarunk egy u és egy v vektor skaláris szorzata alatt érteni. Euklidesi térben:

$$(uv) = |u|\,|v| \cos \varepsilon,$$

ahol ε a két vektor által bezárt szög. Descartes-féle koordinátarendszerben:

$$(uv) = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z. \tag{21}$$

Koordinátatranszformáció esetén ez a speciális forma átmegy a komponensek általánosabb bilineáris alakjába, amelyet ismét mintául fogadunk el a nem euklidesi tér részére. Két vektor skaláris szorzata alatt fogjuk érteni a komponensek nem degenerált, bilineáris alakját:

$$(uv) = g_{\lambda\mu} u^\lambda v^\mu, \text{ hol } \det |g_{\lambda\mu}| \neq 0. \tag{22}$$

$g_{\lambda\mu}$ az ú. n. fundamentális tenzor komponense, melyet két indexében szimmetrikusnak kell tekintenünk, ha azt akarjuk, hogy az u-tól v-ig, ill. v-től u-ig menő szög cosinusa ugyanaz legyen. Ha $u \equiv v$, vagyis $\varepsilon = 0$, a skaláris szorzat láthatólag az u vektor értékének négyzetét adja:

$$|u|^2 = g_{\lambda\mu} u^\lambda u^\mu.$$

u lehet vonalelem is és akkor hosszának négyzete:

$$ds^2 = g_{\lambda\mu} dx^\lambda dx^\mu.$$

(21) és (22)-ből:

$$\cos \varepsilon = \frac{g_{\lambda\mu} u^\lambda v^\mu}{|u|\,|v|}.$$

Két vektor tehát akkor merőleges egymásra, ha $g_{\lambda\mu} u^\lambda v^\mu = 0$.

Einstein a geometriájába bevezetendő metrikát a következő két követeléssel állapitja meg:

1. A $\underset{s}{v}^\nu$ vektorok mindegyike a tér minden pontjában egységvektor legyen, vagyis

$$g_{\lambda\mu} \underset{s}{v}^\lambda \underset{s}{v}^\mu = 1. \tag{23}$$

2. A vektorok a tér minden pontjában páronként merőlegesek legyenek egymásra.

Az r-dik és s-dik vektorra megfogalmazva ezt a követelményt:

$$g_{\lambda\mu} \underset{r}{v}^\lambda \underset{s}{v}^\mu = 0 \qquad r \neq s. \tag{24}$$

A két követelést összefoglalhatjuk a

$$g_{\lambda\mu} \underset{r}{v}^\lambda \underset{s}{v}^\mu = A_{rs}$$

alakban. Ez az egyenletrendszer egyértelműen meghatározva a $g_{\lambda\mu}$-ket:

$$g_{\lambda\mu} = \sum_s \overset{s}{v}_\lambda \overset{s}{v}_\mu = \overset{s}{v}_\lambda \overset{s}{v}_\mu. \tag{25}$$

Érvényes továbbá, hogy $\det |g_{\lambda\mu}| = \det |\overset{s}{v}_\nu|^2$ és ha a $g_{\lambda\mu}$ elemhez tartozó normirozott aldeterminánst $g^{\lambda\mu}$-vel jelöljük:

$$g^{\lambda\mu} = \underset{s}{v}^\lambda \underset{s}{v}^\mu, \quad \underset{s}{v}^\nu = g^{\lambda\nu} \overset{s}{v}_\lambda, \quad \overset{s}{v}_\nu = g_{\lambda\nu} \underset{s}{v}^\lambda. \tag{26}$$

A $g_{\lambda\mu}$-ek értéke folytán a parallel áthelyezés igen nevezetes jelleget ölt: «metrikus» áthelyezéssé lesz; vagyis az áthelyezett vektor értéke ugyanakkora, mint volt áthelyezés előtt:

$$g_{\lambda\mu(x^\mu + dx^\mu)} \cdot (u^\lambda + \Delta u^\lambda)(w^\mu + \Delta w^\mu) = g_{\lambda\mu(x^\mu)} \cdot u^\lambda w^\mu. \tag{27}$$

Állításunk helyessége direkt számitással igazolható.

A tér egy P pontjából kiinduló n számú $\underset{s}{v}$ vektor helyi koordinatarendszert alkot. Neve EINSTEIN szerint «lokalis n-láb». Tetszőleges n vektornak erre a rendszerre nézve van n orthogonalis komponense: $\overset{1}{u}, \overset{2}{u}, \dots \overset{n}{u}$.

$$u^\nu = \overset{s}{u}\underset{s}{v}{}^\nu, \quad \overset{s}{u} = u^\nu \overset{s}{v}_\nu. \tag{28}$$

Az n-láb komponensek fontos szerepet játszanak. Könnyen kimutatható ugyanis, hogy az u vektor parallel áthelyezése folytán ezek a komponensek nem változnak. A vektort n-láb komponenseinek megtartásával helyezhetjük át párhuzamosan a térnek egy tetszésszerinti pontjába.

Ha egy vektort mindig a saját irányában helyezünk át párhuzamosan, vonalat nyerünk: az áthelyezés geodetikus vonalát. Az EINSTEIN-féle mértanban ennek a vonalnak nemcsak két szomszédos, hanem bármely két távoli íveleme is párhuzamos. Joggal nevezhető tehát EINSTEIN-féle pseudoegyenesnek. Másfelől azonban nem mutatja azt a tulajdonságot, hogy két pont közé eső részének ívhossza legrövidebb (stacionárius) volna. Az áthelyezés és a metrika geodetikus vonalai az EINSTEIN-féle mértanban nem esnek össze.

Összefoglalásként kimondható: a tárgyalt geometriát n lineárisan független vektormező határozza meg. A vektormezők mindegyikét olyannak kívánjuk tekinteni, mint amely egy vektoregyedének korlátlan parallel áthelyezése folytán jött létre. Ez a követelmény meghatározza az áthelyezés mennyiségeit, a Γ-kat. A Γ-k értéke a görbületi tenzor eltünését vonja maga után. Az EINSTEIN-féle tér görbületnélküli tér. Az az újabb követelés, hogy a vektormezők orthogonális egységvektormezők legyenek, meghatározza a metrika mennyiségeit, a $g_{\lambda\mu}$-ket. Értékrendszerük az átvitelt «metrikus»-sá teszi.

A hasonlatosság az euklidesi és az EINSTEIN-féle mértan között az, hogy adott ívelemhez a tér minden pontjában parallel ívelem rendelhető. Ezek az ívelemek vonalrendszerré foglalhatók össze és alkotják az egyenesek, ill. pseudoegyenesek egy-egy kongruenciáját. A nagy különbség azonban az, hogy míg az euklidesi mértanban két metsző egyenesnek egymás mentén való parallel eltolásából sík keletkezik, addig a megfelelő pseudoegyenesek két rendszere (20) szerint kitérő, nem felületalkotó. Pseudosíkról tehát oly értelemben, mintha benne a párhuzamos pseudoegyenesek két rendszere foglaltatnék, szó sem lehet.

Fölemlítendő még, hogy a lokális n-lábak azonos helyi forgása által létrejövő új $\underset{s}{\bar{v}^\nu}$ vektormezők ugyanazokat a $g_{\lambda\mu}$-ket és Γ-kat határozzák meg. Ez a körülmény az Einstein-féle geometria differenciálinvariánsainak megállapításánál játszik fontos szerepet. Megfelelő invariánsnak az n-dimenziós térre kiterjesztett integrálja stacionárius. A $\underset{s}{v^\nu}$-k szerinti variacióknak megfelelő Euler-féle egyenletek az új gravitaciós és elektromágneses téregyenletek.

Novobátzky Károly.

DIE NEUE GEOMETRIE EINSTEINS.

Die Geometrie des Fernparallelismus wird in das Schema der linearen Übertragungen eingeordnet. Es wird dargetan, dass die Forderung, das gegebene n-Bein-Feld, durch fernparallele Verschiebung rekonstruieren zu können, zur Bestimmung der Verschiebungsgrössen, die weitere Forderung, es als orthogonales Einheitsfeld betrachten zu dürfen, zur Festlegung des Fundamentaltensors führt. Der metrische Charakter der Verschiebung ist hervorgehoben. Nach einem Vergleich mit der Euklidischen Geometrie wird gezeigt, dass durch das parallele Entlanggleiten zweier Pseudogeraden zwei Parallelsysteme entstehen, die nicht flächenbildend sind, demnach von einer Pseudoebene in diesem Sinne nicht gesprochen werden kann.

K. Novobátzky.

TANULÓVERSENYEK.

Jelentés az 1928. évi XXXII-ik matematikai tanulóversenyről.

A Társulat XXXII-ik matematikai tanulóversenyét 1928 dec. 1-én tartotta Budapesten és Szegeden egyidejűleg. Budapesten ezúttal — hála a Rend lekötelező szívességének — a Piarista Gimnázium helyiségeiben. Budapesten 30, Szegeden 12 versenyző jelentkezett; beadatott 16, illetőleg 7 dolgozat.

A verseny tételei a következők voltak:

1. Jelentsen a egy tetszésszerinti pozitív számot. Tekintsük ennek a számnak első $n-1$ többszörösét, azaz az $a, 2a, 3a, \ldots (n-1)a$ számokat. Bebizonyítandó, hogy ezek között van legalább egy olyan, melynek a legközelebbi egész számtól való különbsége abszolut értékre vagy kisebb mint $\frac{1}{n}$, vagy $\frac{1}{n}$-el egyenlő.

2. Helyezzük el az első n pozitív egész számot egy kör kerületén úgy, hogy két egymás mellé kerülő szám különbsége $\leqq 2$. Továbbá bizonyítsuk be, hogy ez csak egy módon lehetséges, ha pusztán arra nézünk, hogy mely számok kerülnek egymás mellé.

3. Adva van a síkban egy e egyenes és két pont: A és B. Hogyan kell választanunk az e egyenesen a P pontot, hogy

$$\text{Max}\ (AP,\ BP)$$

a lehető legkisebb legyen?

(Ha az AP, BP távolságok különböző hosszúak, akkor Max (AP, BP) a nagyobbnak hosszúságát jelenti. Ha $AP = BP$, akkor ezen a jelen a a két távolság közös hosszúságát értjük.)

A dolgozatok megbírálására kiküldött Bizottság, melynek tagjai voltak Rados Gusztáv elnöklete alatt Éber József, Faragó Andor, Fejér Lipót, Kürschák József, Rátz László, Szűcs Adolf és Kőnig Dénes előadó, 1928 dec. 8-i ülésén a következő egyhangú határozatot hozta:

«A Bizottság a dolgozatok gondos áttekintése után megállapította, hogy csupán két dolgozat tartalmazza a 2-ik és egyszersmind a 3-ik feladat helyes megoldását, az első feladat pedig egyik dolgozatban sincs megoldva. Részben az utóbbi körülményre való tekintettel a Bizottság tisztelettel javasolja, hogy az említett két dolgozat készítőjének: SCHOSSBERGER GYÖRGYnek (V. ker., Bólyai-reáliskolában BODNÁR LAJOS tanítványa) és SCHLÜSSLER ENDRÉnek (VI. ker. Kemény Zsigmond-reáliskolában NEUKOMM GYULA tanítványa) egy-egy *második* br. Eötvös Loránd-díj ítéltessék oda».

Az 1928 dec. 13-i választmányi ülés a Bizottság e javaslatát egyhangúlag elfogadta.

Az 1928. évi XXXII-ik matematikai tanulóversenyen díjat nyert dolgozatok.*

Schossberger György dolgozata.

I. Jelentsen a egy tetszésszerinti pozitív számot. Tekintsük ennek a számnak első $n-1$ többszörösét, azaz az $a, 2a, 3a, \ldots (n-1)a$ számokat. Bebizonyítandó, hogy ezek között van legalább egy olyan, melynek a legközelebbi egész számtól való különbsége abszolut értékre vagy kisebb $\frac{1}{n}$-nél, vagy $\frac{1}{n}$-nel egyenlő.

II. Helyezzük el az első n pozitív egész számot egy kör kerületén úgy, hogy két egymás mellé kerülő szám különbsége $\leqq 2$. Továbbá bizonyítsuk be, hogy ez csak egy módon lehetséges, ha csak arra nézünk, hogy mely számok kerülnek egymás mellé.

III. Adva van a síkban egy e egyenes és két pont: A és B. Hogyan kell választani az e egyenesen a P pontot, hogy max (AP, BP) a lehető legkisebb legyen. — Ha az AP, BP távolságok különböző hosszúak, akkor a max (AP, BP) a nagyobbnak a hosszúságát jelenti. Ha $AP=BP$, akkor ezen a jelen a két távolság közös hosszát értjük.)

II. A kört n egyenlő részre osztjuk. Bármely ponthoz az 1-es számot írva, ettől a ponttól kezdve egyik irányban felírjuk a páros, a másik irányban a páratlan számokat.

Igazolandó, *a)* hogy ez a megoldás a kívánt eredményre vezet, *b)* hogy ez az egyetlen helyes megoldás.

a) Két eset lehetséges, 1. n páratlan, 2. n páros.

---

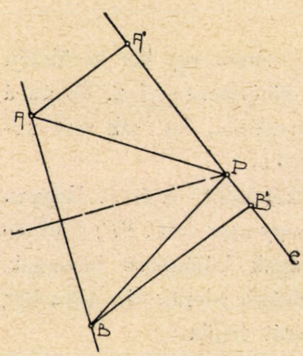
* A dolgozatok változtatás és javítás nélkül közöltetnek. Szerk.

1. A felírásból következik, hogy a szomszédos számok (két egymásra következő páros, illetve páratlan szám) különbsége abszolut értékre $= 2$, illetőleg a kezdőpontnál: $|2 - 1| < 2$. Csak azt kell igazolnunk, hogy azon a ponton, ahol az így felírt páros és páratlan számok találkoznak, ez szintén áll.

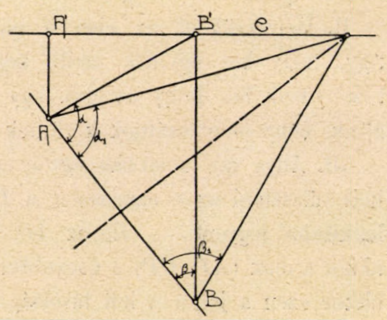
Legyen $n = 2k + 1$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ n-ig van $(k + 1)$ páratlan, k páros szám. Az utolsó páratlan szám, mely egyúttal az utolsó páros szám szomszédja: $2k + 1$, az utolsó páros szám $2k$. A kettő különbségének abszolut értéke $|2k + 1 - 2k| = 1 < 2$.

III. megoldása. — Két eset lehetséges: A és B az egyenesnek vagy ugyanazon, vagy két különböző oldalán lehet. Elegendő, ha az elsővel foglalkozunk, mert a második ebbe átvezethető. Ha ugyanis ebben az esetben az egyik pontnak a tükörképét képezzük az egyenesre vonatkozólag, az így nyert pontnak az egyenes bármely pontjától mért távolsága ugyanaz, mint az eredeti ponté.

a) Rajzoljunk $\overline{AB}$ mint alap fölé egyenlőszárú háromszöget, melynek csúcsa az e egyenesen van és essék e csúcs e-nek $\overline{A'B'}$ darabjára ($\overline{A'B'}$ az $\overline{AB}$ vetülete e-re). Be fogjuk bizonyítani, hogy ez a csúcspont a keresett P pont, amelyre nézve max (AP, BP) a lehető legkisebb.



1. ábra.



2. ábra.

Ha ugyanis ettől a ponttól akár A', akár B' felé eső pontot veszünk, az egyik távolság növekedni fog, mert $AA'P$ (ill. $BB'P$) derékszögű háromszög egyik befogója növekszik, tehát az átfogó is nő.

b) $\overline{AB}$ merőleges felezője e egyenest $\overline{AB}$ vetületének meghosszabbításában metszi. — Ebben az esetben P pont annak a pontnak a vetületével esik össze, amely távolabb van az egyenestől. Legyen ez a pont

B, akkor a $P = B'$ pontban 1., $\overline{PB}$-nek minimuma van, 2., $\overline{AP} < \overline{PB}$, mert APB háromszögben $\overline{AP}$-vel szemben kisebb szög fekszik, mint $\overline{BP}$-vel szemben.

Ebben a pontban tehát

$$\min\left(\max\left(PA,\ PB\right)\right) = \overline{BB'} = \min \overline{BP}.$$

Bármely más pontra nézve $\overline{BP} > \overline{BB'}$, tehát a kérdéses két távolság maximuma is nagyobb.

c) $\overline{AB}$ merőleges felezője éppen átmegy az egyik pont vetületén. — Ez a speciális eset úgy tekinthető, mint bármelyik előbbinek határesete: a keresett P pont éppen ez a vetületi pont.

2. Ugyanazt a felírási módot követjük, n legyen egyenlő $2k$-val. $(k = 1, 2, 3, \ldots)$

Az utolsó páros szám $2k$, az utolsó páratlan $2k - 1$,

$$|2k - (2k - 1)| = 1 < 2.$$

A különbség a felírásban, hogy szabályos n-szöget tételezve föl, az 1. esetben az 1-es ponthoz tartozó körátmérő tulsó végpontján nincs szám, míg a 2. esetben éppen az n szám van ott.

b) Bebizonyítandó, hogy csak ez a fölírási mód helyes. Az 1-es pont mellett föltétlenül 2-nek és 3-nak kell állania, mert már $|4 - 1| = 3 > 2$

Kiindulunk az első három pontnak a fönti követelmény által meghatározott helyzetéből. Egyik szám mellé sem kerülhet más, mint a közvetlen szomszédja, vagy az azután következő szám (l mellé $l + 1$, vagy $l + 2$).

Tegyük föl, hogy egy bizonyos l számig mindkét irányban ezt az eljárást követtük, és itten a fenti eljárás szerint irandó $l + 2$ helyett az egyedül lehetséges $l + 1$-et írjuk. (U. i. $|l + 3 - l| = 3 > 2$). Ezzel a másik félkörön megszakítottuk a sort. Itt ugyanis a képezési törvény szerint l-nek, vagy $l + 1$-nek kellene következnie, mivel azonban mindkettőt fölhasználtuk, a sor itt megszakad.

Schlüssler Endre dolgozata.

2. Induljunk ki az 1-ből. Jobbra és balra csak 2 és 3 jöhet számításba. Mivel csak azt nézzük, hogy milyen számok kerülnek egymás mellé, mindegy, hogy hova tesszük e számokat. Legyen 3 jobbra és 2 balra.

Most 2 mellé csak 3 és 4 jöhetne, 3 már el van helyezve, tehát csak 4 lehet. 3 mellé 4 és 5 jöhetne, 4-nek van helye, tehát 5 következik. Ezt folytatjuk és így jobbra a páratlanok, balra a párosak kerülnek. Ez az út és csak ez felel meg a követelményeknek. Ahol a páros és páratlan számok találkoznak, ott a különbség 1 lesz.

3. Legyen A és B pont helyzete olyan, hogy az egyenes ugyanazon oldalán vannak és az $\overline{AB}$ távolság merőleges felezője messe e-t a C pontban. Legyen továbbá az A pont merőleges vetülete A', B-é B'.

a) Legyen először C az A' és B' között. Ekkor a keresett pont maga C.

Bizonyítás: Vegyünk föl C-től A' felé, tehát balra, egy P_1 pontot. Ekkor $\overline{AP_1} < \overline{AC}$, ugyanis az $AA'P_1$ derékszögű háromszögből:

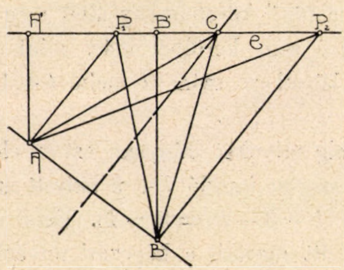
$$\overline{AP_1} = \sqrt{\overline{AA'}^2 + \overline{A'P_1}^2},$$

és az $AA'C$ derékszögű háromszögből:

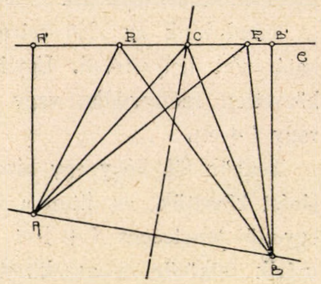
$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AA'}^2 + \overline{A'C}^2},$$

de $\overline{A'P_1} < \overline{A'C}$ és így tényleg $\overline{AP_1} < \overline{AC}$.

Ellenben $\overline{BP_1} > \overline{BC}$, (ami épúgy bizonyítható a BP_1B' és BCB' derékszögű háromszögekkel.) Így most $\overline{BP_1}$ a nagyobbik, de ez nagyobb a $\overline{BC}$-nél is.



1. ábra.



2. ábra.

Ha most a P_2-t a C-től jobbra, B' felé vesszük fel, úgy az előbbi bizonyításhoz teljesen hasonló úton kimutatható, hogy

$$\overline{AP_2} > \overline{AC} = \overline{BC} > \overline{BP_2},$$

és így a keresett pont tényleg C. — Ugyanez a bizonyítás módja, ha a pontok az egyenes különböző oldalán vannak.

β) Messe most a szögfelező a pontok vetületén kívül az egyenest. Ekkor a keresett P pont B', azaz a távolabbi pont orthogonális vetülete lesz.

Bizonyítás: A C-től balra (A' felé) felvett P_1 pontra nézve: $\overline{BP_1} > \overline{AP_1}$, (bizonyítás fent) és C-től jobbra $\overline{AP_2} > \overline{BP_2} > \overline{BB'}$. Így B' a keresett pont.

Ha a szögfelező az egyik pont vetületében metszi az egyenest, akkor ez a pont lesz a keresett P.

Jelentés az 1928. évi X-ik «Károly Irén» fizikai tanulóversenyről.

Társulatunk X-ik «Károly Irén» fizikai tanulóversenyét 1928 dec. 7-én tartotta Budapesten és Szegeden egyidejüleg. Budapesten ugyancsak a piarista gimnázium helyiségeiben. Budapesten 20, Szegeden 2 versenyző jelentkezett és ezek mind beadták dolgozataikat.

A verseny tételei a következők voltak:

1. Guericke Ottó félgömbjeinek az átmérője, melyeket a regensburgi országgyűlés alkalmával végzett kísérleteinél használt 22 hüvelyk (1 hüvelyk = 2·621 cm) volt. Mekkora erő nyomta össze a félgömböket, ha a bennmaradt levegő nyomása 5 mm higany volt?

2. f (20 cm) fókusztávolságú homorú gömbtükörtől $d > 2f$ (120 cm) távolságban elhanyagolhatóan vékony üveglapot állítunk a tükör főtengelyére merőlegesen. Hová kell helyezni a főtengelyen a pontszerű fényforrást, hogy a gömbtükörtől és az üveglaptól, mint síktükörtől származó képek egy pontba essenek?

3. Két különböző elektromótoros erejű galvánelemet, melyek belső ellenállása 0·8, illetőleg 0·2 Ohm, 4 Ohm külső ellenálláson keresztül *egymásután* kapcsolunk. Ha a különböző sarkok vannak egymáshoz kötve, akkor az áram erőssége 0·6 A, ha pedig az egyező sarkok vannak egymáshoz kötve, akkor 0·16 A. 1. Mekkora az elemek elektromótoros ereje? 2. Mekkora a két esetben a potenciálkülönbség (a kapocsfeszültség) a sarkokon?

A Budapesten, 1928. évi dec. 12-én Tangl Károly elnöklete alatt megtartott bírálóbizottsági ülésen jelen voltak az elnökön kívül Harkányi Béla báró, Rybár István és Nagy József.

A Bizottság egyhangú véleménye szerint az első díjra Gerő Loránd dolgozata érdemes, aki a «Szt István» reálgimnáziumban WEGER HENRIK tanítványa volt. Gerő Loránd a 3-ik példában elkövetett kis számolási hibától eltekintve, mind a három feladatot jól oldotta meg. Világos, szabatos fogalmazása mellett jó fizikai gondolkodási módot is árul el.

SCHOSSBERGER GYÖRGY, aki a «Bolyai» reáliskolában FRŐHLICH KÁROLY tanítványa volt, az első feladatban helyes alapgondolattal indul el, de az egyik félgömbre gyakorolt nyomóerőt hibásan megszorozza 2-vel. A második díjra érdemes.

Dícséretre méltó SCHLÜSSLER ENDRE dolgozata, aki a VI. ker. «Kemény Zsigmond» reáliskolában LOSONCZY LAJOS tanítványa volt. Az első feladatban ugyanazon hibát követi el, mint Schossberger s a második feladat megoldásában is csak a tárgytávolságokat szolgáltató másodfokú egyenlet felállításáig jut el, de azt már nem oldja meg.

AZ «EÖTVÖS LORÁND» MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT 1928-IK ÉVI ZÁRSZÁMADÁSA ÉS VAGYONKIMUTATÁSA.

A) **Bevételek:**

1. Mult évi zárszámadási maradvány:	Pengő
a) készpénzben	128·14
b) takarékbetétekben	728·03
2. Tagsági díjak	1520·70
3. Segélyek és kamatok	1053·17
4. Vegyesek	788·35
Összesen:	4218·39

B) **Kiadások:**

1. Betétek:	
a) Leszámítoló és Pénzváltó Bankban	80·00
b) Postatakarékpénztárban	20·71
c) Gödöllői takarékpénztárban (Károly Irén alaphoz)	300·00
2. Nyomda	3195·44
3. Vegyesek	619·49
4. Maradvány készpénzben	2·75
Összesen:	4218·39

A) Vagyon:

I. Alaptőke.

		Korona	Pengő
1. A Magyar Leszámítoló és Pénzváltó Bankban:			
2600 K. n. é. 4%-os fővárosi kölcsönkötvény		2600·00	
1800 « « « 6%-os hadikölcsönkötvény (4-ik kibocsátás)		1800·00	
300 « « « 4%-os magyar korona-járadékkötvény	Károly Irén alap	300·00	
2200 « « « 6%-os hadikölcsönkötv.		2200·00	
36,090. sz. a. betét			320·00
2000 K n. é. 5½%-os hadikölcsönkötvény (4-ik kibocsátás)		2000·00	
10000 « « « 6 %-os hadikölcsönkötvény (3-ik kibocsátás) Kőnig alap.		10000·00	
2. Gödöllői takarékp.-ban (21,842. és 22,097. sz. a.)			700·00
3. Pesti Hazai Takp.-ban $\frac{04557}{c_2}$ könyvben		108·00	
4. Állami kezelésben: Majthényi hagyaték		10000·00	

II. Forgó tőke.

	Korona	Pengő
1. Készpénz		2·75
2. Betét		100·71
3. Tagdíjhátralék		200·00
4. Nyomtatványok		300·00
Összesen:	29008·00	1623·46

B) Teher:

	Korona	Pengő
Tiszta vagyon mint egyenleg	29008·800	1623·46

Budapest, 1929-ik év május 11-én.

Nagy L. József,
pénztáros.

A számadást átvizsgáltuk és rendben találtuk:

br. Harkányi Béla, Rátz László, Renner János, Veress Pál,
számvizsgálók.

Az 1928—29. társulati évben megtartott előadások.

1928 dec. 13. A tanulóversenyek eredményeinek kihirdetése. Egerváry Jenő : Egy bizonyos négyzetes alak szélső értékei a változók permutációjánál.

1929 jan. 17. Gyulay Zoltán és Hartly Domokos : *NaCl*-kristályok elektromos vezetőképessége egyoldalú nyomás alatt. (Előadó : Gyulai.)

1929 jan. 31. Sárközy Pál : Kerekgedei Makó Pál élete és matematikai működése.

1929 febr. 14. Kőnig Dénes : Az áramelágazásra vonatkozó Kirchhoff-féle egyenletek függetlenségéről. Schay Géza : Néhány világító reakció mechanizmusáról.

1929 febr. 28. Steiner Lajos : Hosszabb időtartamra szóló időprognózis.

1929 márc. 21. Rybár István : Újabb rendszerű Eötvös-féle torzió-inga.

1929 ápr. 18. Szász Ottó : Abel hatványsortételével kapcsolatos újabb vizsgálatokról.

1929 máj. 2. Nagy József : A Röntgen-sugarak diszperziója kristályokban. Novobátzky Károly : A legújabb Einstein-féle geometria.

1929 máj. 18. Balyi Ferenc : Károly Irén emlékezete.

1928 január 1-től 1929 május 1-ig befizetett tagdíjak és ajándékok.

Albert Anna (8), Anderkó Aurél (16), Ábrahám István (32), Ádler Erzsébet (10), **B**acsó Vilmos (18), Balyi Eerenc (24), Bauer Mihály (16), Bischitz László (20), Bodócs István (12), Bodola Lajos (24), Bolla Györgyné (8), Bresztovszky Béla (8), Breuer József (11·30), Bricht Lipót (8), Bródi Imre (8), Brummer Ernő (16), Buchböck Gusztáv (8), **C**sada Imre (6), Csaplár Konrád (8), Császár Elemér (8), Csegény Margit (8), Csősz László (6), Czakó Adolf (16), **D**ér Zoltán (12), **E**rdődy Imre (16), Éber József (16), **F**alábú Dezső (18), Faragó Andor (8), Farkas Gyula (16), Fenyvesi Andor (8), Ferenczy Zoltán (10), Forró Magdolna (8), Frenk János (12), Fraunhoffer Lajos (16), Fröhlich Károly (24), Fröhlich Pál (20), Füzi Rezső (16), **G**oldziher Károly (16), Grynaeus István (32), Gruber Nándor (16), Gyulai Zoltán (6), **H**adarics Vendel (16), Hajós Géza (6), Halász Ernő (8), Hanauer Jenő (24), Hang Dániel (12), Harkányi Béla (16), Hartly Domokos (6), Hausbrunner Vilmos (8), Hauser Ignác (24), Havas Miksa (20), Heuer Ede (16), Hoffmann Ernő (16), Holenda Barnabás (18), Hoor Tempis Mór (8), **I**losvay Lajos (8), **J**akab Imre (18), Jurányi Henrik (8), **K**almár László (12), Karai Sándor (6), Kálovits Rezső (16), Kedves Miklós (16), Kilczer Gyula (12), Király László (12), Kiss Jenő (20), Klug Lipót (16), Kohn Jolán (16), Kopp Lajos (8), Koren Dénes (16), Koronczy T. (12), Koschovitz Gyula (16), Kőnig Dénes (16), Körber Tivadar (24), Kövesi Ferenc (18), Kronberger Ede (28), Kronstein Béla (16), Kunfalvi Rezső (8), Kuraila Péter (16), Kürschák József (16), Lajta Ernő (16), Lengyel Béla (8), Lóky Béla (16), Luckhaub Gyula (8), Magdics Gáspár (16), Magi Ferenc (12), Mátray Rudolf (22), Mediczky Julia (24), Mihalovits Alajos (10), Milakoviszky László (14), Molnár Imre (6), Molnár Tibor (6), Müller József (16), Nagy Balázs (22), Sz. Nagy Gyula (16), Nagy Julián (6), Neogrády Sándorné (16), Neubauer Konstantin (8), Neuhold Őzséb (12), Neumann János (18), Nyári Béla (12). Ortvay Rudolf (24), Oszlaczky Szilárd (18), Öveges József (12), Pados Raynold (6), Paudler Éva (8), Patai Imre (12), Patai László (16), Pécsi Albert (24), Pogány Béla (8), Rados Gusztáv (16), Rados Ignác (16), Renner János (16), Reus Ede (16), Rohrer László (18), Richter Rezső (6), Riegl Sándor (12), Riesz Frigyes (16), Romsauer Lajos (16), Rucsinszky Lajos (8), Rybár István (24). Sasváry Géza (16), Sárközy Pál (12), Sebők Ede (6), Schaller Mátyás (12), Schay Géza (8), Schmid Rezső (8), Schwarz Ilona (4), Sós Ernő (16), Steiner Lajos (30), Strausz Hermann (8). Szabó Gábor (16), Szabó Gusztáv (8), Szalay-Ujfalusy László (16), Szász Pál (16), Szekeres Kálmán (8), Székely Károly (6), Széky István (12), Sziklay Jenő (6), Szmodics Kázmér (16), Szőke Béla (24), Szűcs Adolf (8), Tangl Károly (16), Tass Antal (10), Teller Ede (8), Tihanyi Miklós (12), Tobisch János (40), Tolnay Jenő (24), Tóth Aladár (12), Török Elemér (6), Valkó István (10), Varga Virgil (6), Vámos Sándor (6), Veress Pál (24). Vöröss Cyrill (16), Walther Béla (8), Winter József 8, Wodeczky József (12), Zemplén Géza (8), Csillagvizsgáló intézet (40), Kegyesrendi tanárképző (16), Grill könyvkereskedés (24), Egyetemi nyomda könyvesboltja (5·40), «Mária Terézia» leánygimn. (8), Technológiai intézet (8), «Zrinyi Miklós» rg. (8), Term. tud. társulat könyvtára (8), «Széchenyi» rg. (8), Ref. gimn. (Debrecen, 6), Felsőkereskedelmi iskola (Debrecen, 6), Reáliskola (Eger, 26), Ref. reálg. (Hajdunánás, 12), Reálisk. (Hatvan, 12), Állami rg. (Kaposvár, 6), Ref. rg. (Kecskemét, 6), Ref. rg. (Kisujszállás. 12), Állami rg. (Makó, 6), Szt Benedekrendi könyvtár (Pannonhalma, 12), Állami reálisk. (Sopron, 6), Bányamérnöki főiskola (Sopron, 32), Állami reálgimn. (Szekszárd, 18), Állami rg. (Szentes (12), Állami reálisk. (Székesfehérvár (12).

Alapító tagsági díj:

Bláthy Ottó Titusz (100), Nagy L. József (100).

Adományok:

Károly Irén (700), M. kir. Kultuszminisztérium (1000). «Vatea» gyár (400).

A FÉMEK ELEKTRONELMÉLETÉRŐL ÉS AZ ELEKTRON TERMÉSZETÉRŐL.

SOMMERFELD ARNOLD-tól.

(Szerző előadta az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulatnak 1930. évi január hó 27.-én tartott ülésén.)

A fémes vezetés problémái és vele összefüggésben a fémes állapot természetének mibenlétére vonatkozó kérdések csak úgy érdeklik a fizikust, mint kémikust vagy a technikust. Még néhány éve e problémák kilátástalanoknak látszottak. Minden csupa ellentmondás volt. RICHARDSON azt a felfogást vallotta, hogy a fémek belsejében lévő elektronok sebességeloszlása — csak úgy mint az egyatómú gáz molekulái — MAXWELL-féle. Mert ilyen az izzó fémekből kilépő thermoionok, helyesebben thermoelektronok sebességeloszlása. Ekkor azonban a fémek fajhőjéből egy rész az elektronokat illetné meg; egyenlőnek tételezve fel a fémek atómjainak és elektronjainak számát, ha a fématómok pl. hat kalóriával járulnak hozzá a grammolekulasúlynyi fém fajhőjéhez, akkor az elektronok, mint egyatómú ideális gáz, még teljes három kalóriát szolgáltatnának. A fajhőmérések azonban azt mutatják, hogy az elektronok majdnem semmivel járulnak hozzá a fajhő értékéhez. Fel kellene tennünk tehát, hogy a fématómok száma jóval felülmúlja az elektronokét. Ez azonban különösen a jellegzetesen egyértékű alkáliák vagy pl. az ezüst esetében nagyon valószínűtlen feltevés. Ehhez járul még, hogy az egyéb hő- és mágneses-elektromos jelenségek magyarázata céljából az elektronok számát nem köthetjük meg, ha azt a különböző jelenségek igényeihez alkalmazni akarjuk. Két fém elektronjainak számát illetően a Volta-effektus néhány voltos potenciálkülönbségének magyarázata fantasztikusan nagy, a hőelektromos jelenségeké viszont elenyészően kicsiny különbségeket igényel. Szóval az ellentmondások egész láncolata. Figyelemreméltó azonkívül egy nehézség, mely a Wiedemann—Franz-féle törvénynél mutatkozik. Ez, mint tudjuk, a fémek hő- és elektromos vezetőképességének viszonyára vonatkozik. Ha e viszonyszámot az abszolút hőmérséklettel osztjuk, akkor e hányados a tapasztalat szerint (l. pl. Dieselhorst és Jäger, valamint Grüneisen méréseit, hogy csak a legpontosabb és újabb megfigyelőket említsük) univerzális, minden fémre azonos értékű. Volt idő, amikor úgy látszott, hogy a klasszikus elektronelmélet Drude kezében e mennyiség számértékét a tapasztalattal jó egyezésben szolgáltatja, amit a klasszikus elektronelmélet legszebb eredményének tekintettünk. Azonban röviddel azután Lorentz szigorúbb levezetése Drude számértékét 2 : 3 arányban korrigálta meg és így a számszerű egyezés a teória és a tapasztalat között itt is veszendőbe ment.

Hogy az elektromos áramban tényleg áramlik valami és hogy ez az áramló valami konvektive mozgó elektronokból áll, abban tényleg alig kételkedhetünk, ha egy működésben levő katódsugárcsövet megtekintünk. A katódból kilépő elektronok tömegük és sebességüknél fogva kimutathatók. A katódot tápláló elektromos áram a katódsugárnak ellenkező irányú folytatása, és így arra kell jutnunk, hogy az is elektronokból áll, amit már Wilhelm Weber — ha más szavakkal is — kimondott. Az elektromos áram konvektív természetét Tolman valóban csodálatraméltó kísérlete is — a mozgó és hirtelen lefékezett elektronok visszahatásának mérése — bizonyítja. Az elektromos áramban az elektronok áramlásuk számára az elektromos erőtér által kitüntetett irányt nyernek; nem utasíthatjuk el tehát azt a feltevést, hogy külső elektromos tér nélkül irány szempontjából határozatlan, nagyság szempontjából pedig a fém hőmérséklete által megszabott mozgással rendelkeznek. Így jutunk az «elektrongáz» fogalmához, amely a fémmel temperaturaegyensúlyban van.

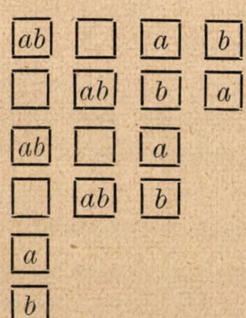
Természetesen megkísérelték restaurálni a fémek elektronelméletét oly módon, hogy az elektrongáz látszólag nagyon nyers fogalmát speciális hipotézisekkel egészítették ki különösen a fémrács szerkezetére és az elektronoknak ennek közeiben való mozgásaira vonatkozóan. Különösen J. J. Thomson, Haber, Bridgman neveit kell itt említenünk. Ám mindezek a feltevések csupán az egyes jelenségeket külön-külön magyarázták és valamennyibe több-kevesebb önkény is vegyült. A kiútat itt is a kvantumelmélet mutatta meg, és pedig annak is a legfiatalabb ága: a hullámmechanika. A megoldás nem az elektronokra vagy fémionokra vonatkozó valamilyen új feltevésben, hanem egy új számítási módszerben, a *statisztika reformjában* állott.

Boltzmann óta tudjuk, hogy a thermodinamika fizikai lényege statisztikus természetű; az entropia tulajdonkép valószínűség. Valószínűségek esetében azonban minden az egyformán valószínű esetek definicióján fordul meg. Tekintsünk egy egyszerű példát. Tűzzük ki feladatul két golyó (molekula, elektron) elosztását két rekeszben. A klasszikus statisztika szerint az 1. ábrában látható négy lehetőség van: az *a* és *b* golyók

Maxwell—Boltzmann: 4 eset

Bose—Einstein: 3 eset

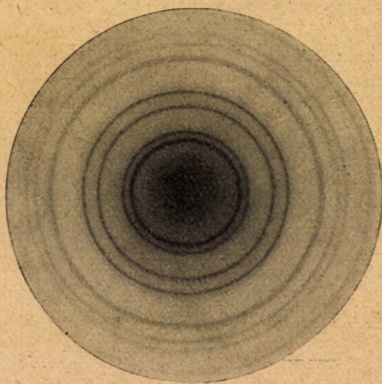
Fermi—Dirac: 1 eset



1. ábra. Az *a* és *b* individuumok eloszlása két állapot között.

vagy mindketten az első, vagy mindketten a második rekeszbe kerülnek, vagy elosztjuk őket a rekeszek között. Ez azonban nem a kvantumelmélet statisztikája, legalább is nem az, melynek alapján a Planck-féle sugárzási törvény levezethető, ha ezt a fénykvantumok alapján akarjuk nyerni. Egyenlő frekvenciájú fénykvantumok egymástól nem különböztethetők meg és igy a 4 eset közül az utolsó kettő, mely a cellákban helyetfoglaló golyók számában nem, csupán azok elnevezésében különbözik egymástól, identikus. Ezt a statisztikát a sugárzás elmélete számára egy indiai tudós, Bose inditványozta és Einstein azt a gázelméletre is kiterjesztette. Ehhez járul most a Pauli-féle elv, amely kimondja, hogy soha sem lehet két individuum ugyanabban a kvantumállapotban. Ha a rekeszeket egy-egy kvantumállapotnak tekintjük, az előbb emlitett 4 lehetséges eset közül az első kettő is kiválik és egyetlen lehetséges eloszlás marad: az egyik individuum az egyik rekeszbe, a másik a másik rekeszbe kerül. A statisztika ezen legutóbbi fajtáját egy fiatal olasz tudós, Fermi[1] és egy fiatal angol tudós, Dirac épitették ki. Hogy a háromféle statisztika mennyire különbözik egymástól, már egyszerű példánk is mutatja: Maxwell—Boltzmann szerint 4, Bose—Einstein szerint 3 és Fermi—Dirac szerint csupán 1 lehetséges esetünk van.

A továbbiakban a Fermi—Dirac-féle statisztika alapján maradunk. Ez szoros kapcsolatban van a *hullámmechanikával* és az elektron hullámszerű természetével. Schrödinger hullámmechanikája, az atómban uralkodó viszonyokhoz alkalmazott és finomitott mikromechanika; statisztikus jellegét elárulja azzal, hogy az elektront egy végtelen kiterjedésű elektromos töltésfelhővel helyettesiti, melynek sűrűsége a tér valamely pontjában megmondja, hogy mily gyakran található az elektron a tér azon pontjában. A de Broglie-féle elektronhullám az elektronrajokra vonatkozik; azonos irányban haladó elektronraj esetében sik Broglie-hullámmal, egy középpontból szertehaladó elektronok esetében gömbhullámmal van dolgunk. A megfigyelés szempontjából csak elektronrajok jönnek tekintetbe, mert az egyes elektron általában megfigyelhetetlen. Az elektronrajok viselkedését azonban ugyanazok a törvények szabályozzák, mint a fényhullámokét. Ezt állítja a hullámmechanika és ezt bizonyítja a tapasztalat is. A 2. ábra R. WIERL[2]-nek az *I. G. Farbenindustrie* ludwigshafeni laboratóriumában készült szép felvételét mutatja. 40 KV feszültségű katódsugárnyaláb igen vékony aluminiumfoliára esik. A folia mögötti fényképezőlemezen DEBYE—SCHERRER-gyűrűk jelennek meg, éppúgy, mintha röntgensugarakat ejtettünk volna ugyanarra a foliára. Az elektronok eltérítését tehát ugyanoly törvények szabályozzák, mint a röntgensugarakét. Egyenesen az elektronsugarak elhajlásáról és visszaverődéséről beszélhetünk és számíthatjuk azokat a röntgeninterferenciák LAUE-féle elmélete szerint. Az elektronok mint a fénysugarak interferálnak (horribile dictu!), más szóval interferálnak annak a valószínűségei, hogy az elektron inkább térül el az egyik, mint a másik irányban. A katódsugárcső sarokfeszültsége szabja meg az elektronhoz rendelt BROGLIE-hullám hullámhosszúságát; 40 KV-nak kb. $^{1}/_{15}$ ANGSTRÖM-egység felel meg. Ha ugyanily hullámhosszúságú röntgensugarakkal végezzük ugyanazon aluminiumfolián a kisérletet, ugyanezen interferenciagyűrűket nyerjük. Éppoly jól lehet az elektronhullámból, mint a röntgenhullámból az aluminiumfoliát felépitő mikrokristályos szerkezetet felderíteni.



2. ábra. MARCK WIERL: 40 KV-os elektronnyaláb elhajlása aluminiumon, $\lambda = 0{\cdot}0605$ Å. Expoziciós idő $^{1}/_{10}$ sec.

Az első ilynemű kisérletek DAVISSON és GERMER[3]-től származnak, akik New-Yorkban a BELL-Telephone-Compagnie tudományos kutató laboratóriumában dolgoztak. Felvételeik hasonló elhajlási jelenségeket mutatnak nickel-egykristályon. A katódsugárcső feszültsége ez alkalommal sokkal kisebb, csupán 200 Volt volt, a vonatkozó BROGLIE-hullámok meglehetős lágy röntgensugaraknak felelnek meg. Itt, éppúgy mint LAUE, FRIEDRICH és

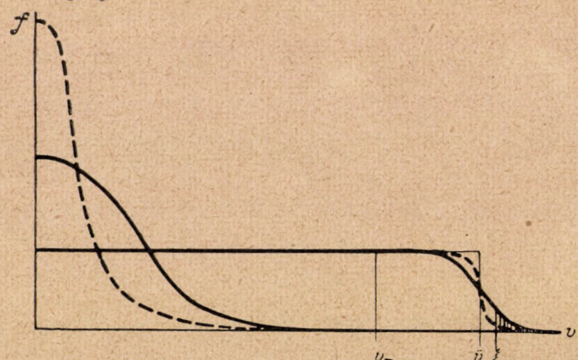
Knipping-nek a cinkszulfid-egykristályon nyert felvételein, kifejezett interferencia *foltok* léptek fel, ellentétben a mikrokristályos foliák interferencia gyűrűivel. Davisson és Germer interferencia képeiben a megfelelő hullámhosszúságú röntgensugárral nyert képhez viszonyítva mutatkozó eltorzulások megmagyarázhatók abból, hogy e relative lassú elektronokkal szemben a kristály nem tekinthető optikailag üresnek, hanem törésmutatóval bir. Ez a törésmutató az elektronoknak a fémekből való kilépési munkájával függ össze, amiről még szólunk.

Ily kísérleteket atóm- és elektronsugarakkal jelenleg másutt is végeznek. Az elektronok elhajlási elmélete tehát éppúgy, mint az egész hullámmechanika e kisérletekkel empirikusan meg van alapozva és így alkalmazható a fémek elektronjaira is.

Térjünk vissza statisztikus kiindulópontunkra. Egy egyatómú gázra vonatkozó Maxwell-féle eloszlási törvény:

$$f = A . e^{-\frac{\varepsilon}{KT}}, \qquad (1)$$

hol f azon gázatómok száma, melyek meghatározott irányban az $\varepsilon = \frac{mv^2}{2}$ kinetikai energiával repülnek, vagy pontosabban: amelyek energiája ε és $\varepsilon + 1$ között van. T az abszolút hőmér-



3. ábra. A Maxwel-féle és a Fermi-féle sebesség elosztás.

séklet, K az egyetlen atomra vonatkozó gázállandó: $K = \frac{R}{N}$, ahol N a Loschmidt-féle szám. A egy állandó. f a v sebesség függvényekép feltüntetve az ismeretes haranggörbét adja (l. 3. ábra), mely egyszersmind a GAUSS-féle hibatörvényt is ábrázolja. Ha azonban az eloszlást a FERMI-féle statisztika szerint számitjuk, akkor

$$f = \frac{1}{\frac{1}{A} e^{\frac{\varepsilon}{KT}} + 1}. \qquad \text{(II)}$$

Ha itt A az egységhez képest kicsiny, akkor (II) átmegy (I)-be. Ha azonban A nagy 1-hez képest, akkor oly sebességekre, melyek egy bizonyos határ alatt maradnak,

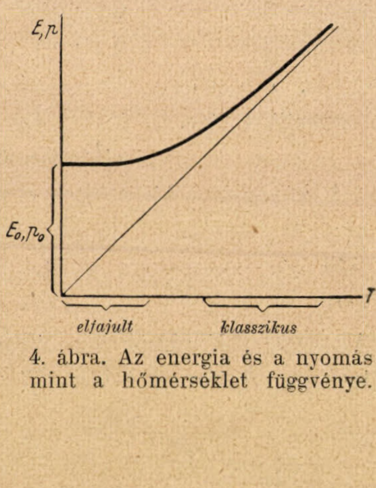
$$f = 1.$$

Éppen ezt követeli a PAULI-elv is, nevezetesen, hogy minden kvantumállapot egyszer és csakis egyszer legyen képviselve. A 0-ra való csökkenés csupán egy bizonyos $\bar{v}$ sebességnél áll be; $\bar{v}$ értéke a hőmérséklettől függetlennek adódik. A gázatómok középsebessége: v_m kisebb, mint $\bar{v}$, de azzal arányos:

$$v_m = \sqrt{3/5} . \bar{v}$$

és így a *középsebesség sem függ a temperaturától.* A klasszikus statisztikában ezzel szemben, mint ismeretes, a középsebesség $\sqrt{T}$-vel arányosan változik.

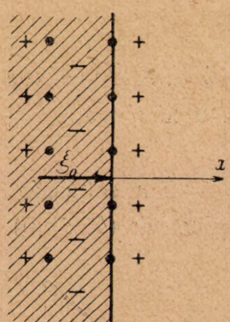
Ha a gáz összes energiáját, vagyis lényegében a sebességnégyzetek középértékét a T függvényeként ábrázoljuk (4. ábra), akkor a klasszikus statisztika szerint egy, az abszolút nullaponton átmenő egyenest nyerünk, míg a FERMI-féle kvantumstatisztika szerint az energia (vagy a nyomás) egy darabig a temperaturától független és csupán magasabb hőmérsékleteknél alakul a klasszikus elmélet kivánta emelkedés szerint. Ily módon az ú. n. *Nullapontenergia* E_0 és *Nullapontnyo-*



4. ábra. Az energia és a nyomás mint a hőmérséklet függvénye.

más p_0 fogalmához jutunk. (A nyomás kvalitatíve az energiagörbével is feltüntethető.) A temperaturától független energiájú állapotokat *elfajult*aknak nevezzük. A gázegyenlet itt nem $pv=RT$, hanem $p=p_0=\text{const}$. Már PAULI [4] hangsúlyozta, hogy ha az elektronok számát a fémekben a fématómokéval egyenlőnek vesszük, az «elektrongázt» néhány ezer fokig teljesen elfajultnak tekinthetjük és ezzel kapcsolatban EINSTEIN [5] arra következtetett, hogy az elektrongáz fajhőjét zérusnak tételezhetjük fel. Ugyanis a fajhő nem egyéb, mint a belső energia megnövekedése egy foknyi hőmérsékletemelkedés alkalmával és elfajulás esetében épp ez az emelkedés zérus, lévén a belső energia a hőmérséklettől független, legalább is első közelítésben: $E=E_0=\text{const}$. Ilymódon sikerült a fémek elektronelméletének első nagy nehézségét elhárítani.

Hogy állunk azonban a fémek belsejében feltételezett és a thermoelektronok megfigyeléséből következő MAXWELL-féle sebességeloszlással? Mint láttuk, az elektronok túlnyomó részére nézve az eloszlás egyáltalában nem MAXWELL-szerű, hanem a temperaturától független. Az eloszlási görbének csupán legszélső csökkenő ága viselkedik MAXWELL-szerűen és függ a hőmérséklettől. Mint a 3. ábra mutatja, csökkenő hőmérsékletnél a FERMI-féle eloszlási görbe meredekebben süllyed, a MAXWELL-féle pedig a középfelé húzódik össze. A RICHARDSON-effektus szempontjából csupán ez a szélső süllyedő görberész jön tekintetbe, mert csupán az igen magas hőmérsékleteknek megfelelő legsebesebb elektronok képesek a fémfelület «kalitkájából» kiszabadulni. De erről később bővebben. Legyen az 5. ábrán ξ_0-val jelölve az a sebesség, mellyel az elektronnak az x-tengely irányában bírni kell, hogy az x irányra merőleges felületen áthaladhasson. A megfigyelésekből kimutatható, hogy ez a ξ_0 nagyobb kell legyen, mint a föntebb említett $\bar{v}$, más szóval a 3. ábrában ξ_0



5. ábra. A fémfelület sematikus képe.

a $\bar{v}$-tól jobbra esik. Ez éppen azt jelenti azonban, hogy a felületből kilépő csekélyszámú elektron — amelyeket a 3. ábrában az eloszlási görbe jobbszélén árnyékolással tüntettünk fel — MAXWELL-szerű jelleggel bír. Ilymódon megnyugtató magyarázatot nyertünk egy másik, a bevezetésben ellentmondással teljesnek jelzett pontra vonatkozólag.

Az abszolút nullapontnál, ahol az eloszlási görbe éles sarkot mutat, az elektronok — habár nyugalomban nincsenek is — mozgásukban meghatározott kvantumszámokhoz vannak kötve. Minden kvantumállapot be van töltve, «túlnépesedés» van jelen. Ezt a PAULI-elv okozza, mely az egyes kvantumállapotoknak csupán egy elektron által való betölthetőséget engedélyez. Sőt magas hőmérsékletnél sincs nagyobb választék a kvantumállapotok között; csupán az energiában leggazdagabb elektronok, a legfelső tízezrek, engedhetik meg maguknak a MAXWELL-féle eloszlás fényűzését és az elfajulás kalitkáján kívüli terekbe való kirándulást. Ez utóbbiak a felületre normális irányban ξ_0-nál nagyobb sebességgel bírnak, azonban a ξ_0-nak megfelelő kinetikus energiát

$$W_a = \frac{m}{2}\xi_0^2$$

a fémből való kilépéskor — mintegy kiviteli illeték fejében — le kell adniok.

Milyen erők vajjon azok, melyek az elektronok túlnyomó részét a fémek belsejében visszatartják és csupán a legsebesebbeket bocsátják ki? A kérdés a kilépési munka eredetének kérdésével egyértelmű. Edénybe zárt közönséges gáz esetében a fal szilárdsága, tehát elasztikus erők, akadályozzák meg a gázmolekulák kilépését. Az elektrongáz esetében az erők elektromos természetűek és tekintettel az elektromos töltés nagyságára, meglehetős tekintélyesek.

Az elektrongáz mintegy elektrosztatikus kalitkában van a fémekben bezárva. A fém belsejében átlagosan semlegesítik egymást a pozitív fémionok és a szabad negatív elektronok. A felületen át kilépni iparkodó elektronra azonban a fémionok kifelé nem neutralizált vonzása hat, amelyek vissza is tartják, amennyiben sebessége ξ_0-t meg nem haladja.

Bizonyos körülmények között az elektronok érzékelhető mennyiségben léphetnek ki a fémből, még alacsony hőmérsékleteknél is. Millikan [7,8] és tanítványai 1 millió Volt/cm feszültséget helyeztek a kilépési felületre és már szobatemperaturáknál mérhető elektronáramokat észleltek, melyek azonban emelkedő hőmérséklettel már nem növekedtek észrevehetően — legalább is nem az egész felületen, hanem csupán parányi felületrészecskékből kiindulólag. Úgy kell képzelnünk, hogy ezeken a helyeken vagy a szükséges W_a kilépési munka kisebb, esetleges szennyeződések folyományaképp, vagy pedig, hogy geométriai szabálytalanságok (csúcshatás) a potenciálgrádienst megnövelik. Így a következő képet nyerjük: az elektronokat magába záró elektrosztatikus kalitka apró lyukakkal bír; ha kívülről nagy erővel szívjuk az elektronokat, akkor ezeken a lyukakon kibújhatnak, engedvén a kívülről működő szívó és a belülről működő nyomó hatásoknak. A nyomás lényegében véve független a temperaturától és egyenlő a nullapontnyomással (p_0). Mivel pedig a külső elektromos erőtér szintén független a hőmérséklettől, az elektronáram is független attól; ez a «hideg elektronáram».

Elégedjünk meg a mondottakkal a fémek belsejében és felületén uralkodó viszonyok szemléltetését illetően. Mégegyszer összefoglalva a következőket kell képzelnünk: a pozitiv fémionok rácsa neutralizálva van negatív elektronok által; ez utóbbiak elvesztették összefüggésüket anyaionjaikkal és a fém belsejében bizonyos kinetikus energiával szabadon mozognak, de úgy, hogy a Pauli-elv értelmében soha két elektron ugyanoly mozgási állapotban nem fordulhat elő. Az elektronok a kifelé nem neutralizált fémionok alkotta rácson át csak kivételesen léphetnek ki.

Forduljunk ezek után az *áramvezetés* alapvető kérdéseihez. Mig külső elektromos tér nélkül ugyanannyi elektron halad a fém belsejében valamely keresztmetszeten át úgy az egyik, mint a másik irányban, addig külső elektromos tér hatása alatt valamelyik irány előnyben részesül. A többlet képezi az elektromos áramot és a külső tér feszültségesése osztva az árammal a fajlagos ellenállást szolgáltatja (ϱ). Drude egészen elemi kinetikus meggondolásokkal találja, hogy

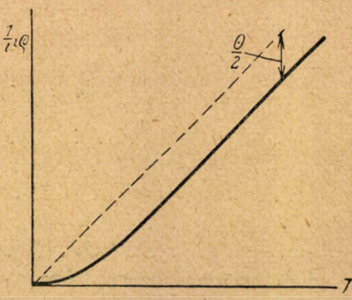
$$\varrho = \frac{m\,v}{e^2 l\,n}, \tag{III}$$

ahol l az elektronok közepes szabad úthossza, másszóval a fémionokkal való kétszeri összeütközés között átlagosan megtett út, n a térfogategységben foglalt elektronok száma, v közepes sebesség, e és m az elektron töltése és tömege; a jobboldalról még hiányzik egy, Drude által pontosan meg nem határozott számfaktor. Az új statisztika alapján ugyanerre a formulára jutunk és pedig a faktor $=1$ értéke mellett, ha v alatt az előbb tárgyalt $\bar{v}$ határsebességet értjük. Mivel, mint láttuk, ez a $\bar{v}$ a temperaturától független, *az ellenállás csak annyiban függ a hőmérséklettől, amennyiben a szabad úthossz függ.* Emelkedő hőmérséklet a fémionok nyugtalanságát, vagyis az ideális rácsszerkezettől való eltéréseket fokozza. Kérdjük, miképpen befolyásolja ez a nyugtalanság a szabad úthosszat? E kérdést Hr. Houston[9] tanulmányozta és pedig a hullámmechanika módszereivel. A vizsgálatot Bloch és Peierls folytatták és mélyítették ki. Ez utóbbi szerzők meglehetős bonyolult gondolatmenetét itt mellőzve foglalkozzunk Houston-nal, aki a Laue-jelenség hőmérséklettől való függésének Debye által már 1914-ben adott tárgyalási mód birtokában tört úton haladhatott. Itt az elektron hullámtermészetének újabb bizonyítékával találkozunk. Gondoljuk az 1. ábra interferenciaképét létrehozó katódsugárcsövet csupán 4 Volt feszültséggel terheltnek. Az elektronok sebessége ily körülmények között körülbelül megfelel a fentemlített $\bar{v}$ nagyságrendjének (kb. 1000 km/sec). A hozzátartozó de Broglie-hullám hosszúsága kb. 5 Å-nek adódik. Ez a hullámhossz — amely az igen lágy röntgensugárzás hullámhosszúságával egyenlő — nagyobb, mint pl. a rézkristályokban két rézatóm távolsága. Ebből következik, hogy tulajdonképpeni LAUE-interferenciakép már nem jöhet létre és csupán általános szóródás lép fel, amely a LAUE-képekről, mint a folytonos háttér okozója, jól ismeretes. Ez a szóródás a hőmérséklettel, vagyis a rácsszerkezet változó szabálytalanságával fokozódik. Ez a röntgensugarak eltérítését, szóródását eredményezi, ami az elektronokra átvíve, az elektronoknak a fématómokkal való ütközése következtében beállott eltérítéséhez, szóródásához vezet. A hullámmechanika segítségével e folyamatot statisztikailag is követhetjük és kiszámíthatjuk, hogy a fématomokba ütköző elektronok hány százaléka szenved az időegység alatt a tér különböző irányaiba eltérítést. Ez az eljárás lényegében éppen abból folyik, hogy az elektront az elektronhullámmal, az atomot pedig a SCHRÖDINGER-től adott hullámmechanikai képpel helyettesíthetjük. Ilymódon az eltérítések gyakoriságához, vagy ezzel kapcsolatban, a szabad úthosszhoz jutunk, és pedig egy egészen racionális statisztikus formula révén, mely HOUSTON, illetőleg DEBYE[10] szerint a következő:

$$\frac{1}{l} \sim \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{\xi d\xi}{e^\xi - 1}\,; \quad x = \frac{\theta}{T}. \tag{IV}$$

Az $\frac{1}{l}$ görbét a temperatura függvényekép a 6. ábra mutatja θ a DEBYE által bevezetett karakterisztikus temperatura $= \frac{h\nu}{k}$, ahol ν az atomok rácsában, azok saját rezgéseinek a számát adja meg 1 másodpercre vonatkoztatva. Mivel pedig a (III) egyenlet szerint az ellenállás $\frac{1}{l}$-lel arányos, akkor a 6. ábra alapján várható, hogy magasabb hőmérsékleteknél az ellenállás a hőmérséklettel arányosan változzék, alacsony hőmérsékleteknél pedig erősen csökkenjen, vagyis éppúgy alakuljon, mint ahogy azt GRÜNEISEN pontos megfigyelései valóban mutatják.

Ilymódon volt lehetséges az elektromos ellenállás első okszerű elméletét megalkotni! Mindenesetre ellenállásgörbénken nem mutatkozik semmi nyoma az ú. n. «szupra-vezetőképesség»-et jellemző hirtelen ugrásszerű ellenálláscsökkenésnek. Ezzel szemben az ellenállás függését a nyomástól Bridgman észlelései szerint, úgyszintén az ellenállás abszolút értékeit is a hullámmechanikai elmélet jól adja vissza, sőt még az ellenállás anizotrópiáját is, hexagonális [zink és cadmium egykristályokban, megfelelően annak, hogy az elhajlási jelenségek a kristályrácsban a különböző irányokban különbözők, a rács szimmetriája szerint. Igen fontos részletkérdés itt még a szabad elektronok számának a fématómok számához való viszonya. Houston szerint úgy látszik, hogy ez a viszonyszám többértékű atómok (*Pb*, *Fe*, *Pt*) esetében 1-nél nagyobb.



6. ábra. A reciprok szabad-úthossz vagy az elektromos ellenállás mint a hőmérséklet függvénye.

Éppúgy, mint ahogy a fémek elektromos ellenállása a szabad úthossztól függ, úgy függ attól a hőellenállásuk, vagyis a reciprok hővezetőképességük is. A kettő hányadosából azonban a szabad úthossz kiesik és megmarad a Wiedemann—Franz törvény által követelt univerzális, az abszolút hőmérséklettel arányos kifejezés. A számbeli szorzó értékét itt az új statisztika $\frac{\pi^2}{3}$-nak adja meg a Drude-től származó 3 helyett, és így a megfigyelésekkel való egyezés még sokkal kielégitőbbnek mutatkozik, amivel a klasszikus elméletnek egy további hiánya is kiküszöbölődött.

Mint tudjuk, a fémek az összes anyagok között, amelyekkel a technika dolgozik, érdekes különállást foglalnak el. A fémeket a szabad elektronok létezése jellemzi. Herzfeld[11] számításai alapján beláthatjuk, hogy a fémek belsejében, a fématómok nagy közelsége következtében az elektronok mikép jutnak instabilis állapotba és szakadnak el anya-atomjaiktól. Sőt valósággal kiszámithatjuk előre, hogy mely atómok vehetnek fel fémes jellemvonásokat szilárd állapotban. A szabad elektronoknak a fémek felületén és belsejében való viselkedését megértendő azonban a kvantumelmélet legújabb fejlődési fokozatára, a hullámmechanikára van szükségünk. Ez az elmélet éppoly egyszerűen és mégis tökéletesen írja le az elektronok statisztikus viselkedését, mint ahogy a fény hullámelmélete az optika és a röntgensugárzás jelenségeit.

Forditotta: *Schmid Rezső.*

Néhány irodalmi adat.

[1] E. Fermi, Zeitschr. f. Phys. **36**, 902, 1926.
[2] R. Wierl, Zeitschr. f. Phys. **60**, 741, 1930.
[3] C. Davisson and L. H. Gebmer, Nature **119**, 538, 1927. Phys. Rev. **30**, 705, 1927.
[4] W. Pauli jr., Zeitschr. f. Phys. **41**, 81, 1927.
[5] A. Einstein, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. XXII. 261, 1924; I, 3; III, 18, 1925.
[6] A. Sommerfeld, Naturwiss. **15**, 825, 1927 ; Zeitschr. f. Phys. **47**, 1, 1928; **47**, 43, 1928.
[7] R. A. Millikan and C. Eyring, Phys. Rev. **27**, 51, 1926.
[8] R. A. Millikan and Lauritsen, Proc. Nat. Acad. Sc. **14**, 45, 1928.
[9] W. V. Houston, Zeitschr. f. Phys. **47**, 33, 1928; **48**, 449, 1928.
[10] P. Debye, Verh. D. phys. Ges. **15**, 678, 1913; Ann. der Phys. **43**, 49, 1914.
[11] K. F. Herzfeld, Phys. Rev. **29**, 701, 1927.

DIE ELEKTRONENTHEORIE DER METALLE UND DIE NATUR DES ELEKTRONS.

von Arnold Sommerfeld.

Die ungarische Übersetzung des Vortrages, den Geheimer Hofrat Prof. Dr. A. Sommerfeld (München), als Gast am 27. Januar 1930. in der Roland Eötvös Mathematischen und Physikalischen Gesellschaft zu Budapest gehalten hat.

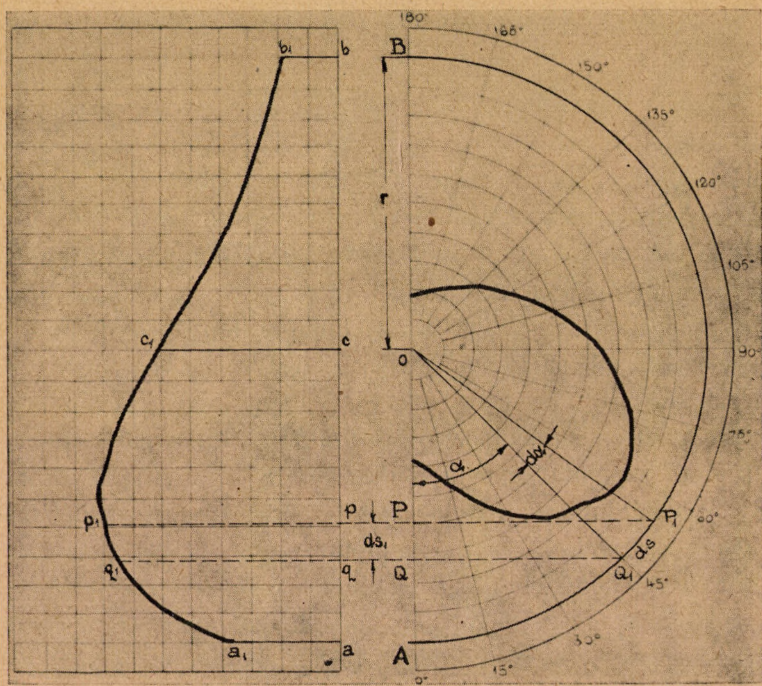
KÖZELÍTŐ FORMULÁK A KÖZEPES TÉRBELI FÉNYERŐSSÉG MEGHATÁROZÁSÁRA.

Minden világitástechnikai számitás alapja az alkalmazott világitó test fényintenzitásának ismerete tetszőleges irányban. Mivel azonban a világitó testek (lámpák és lámpások) túlnyomórészben oly forgástesteknek tekinthetők, amelyeknek fényeloszlását a térben igen nagy megközelitéssel a lámpatengelyen átmenő egy síkban felvett fényeloszlási görbe megforgatásával nyert fényeloszlási felület szolgáltatja, a lámpák és lámpások fényeloszlási görbéi az illető világitó testre egyértelműleg jellemzők.

A fényforrás által kibocsájtott összfényáram, miként ismeretes, ezen fényeloszlási felület által bezárt tér nagyságával arányos. Ha különböző fényeloszlási felülettel biró fényforrásokat akarunk egymással összehasonlítani, akkor azt egyetlen szám megadásával nem tehetjük meg, hiszen azonos térfogatú testet a legkülönbözőbb felületekkel burkolhatunk. És így egyenlő fényáramot szolgáltató különböző típusú fényforrások bizonyos adott irányban különböző megvilágítást hozhatnak létre.

Ha azonban egy szerelvény hatásfokát akarjuk megállapitani, vagy általános világítás esetén az alkalmazandó lámpaerősséget óhajtjuk meghatározni, valamint számos egyéb különleges világítástechnikai számolásnál a közepes térbeli fényerősség fogalma igen üdvös szolgálatokat tehet. Ezalatt értjük azon gömb sugarát, amelynek köbtartalma a fényeloszlási felülettel bezárt térével egyenlő.

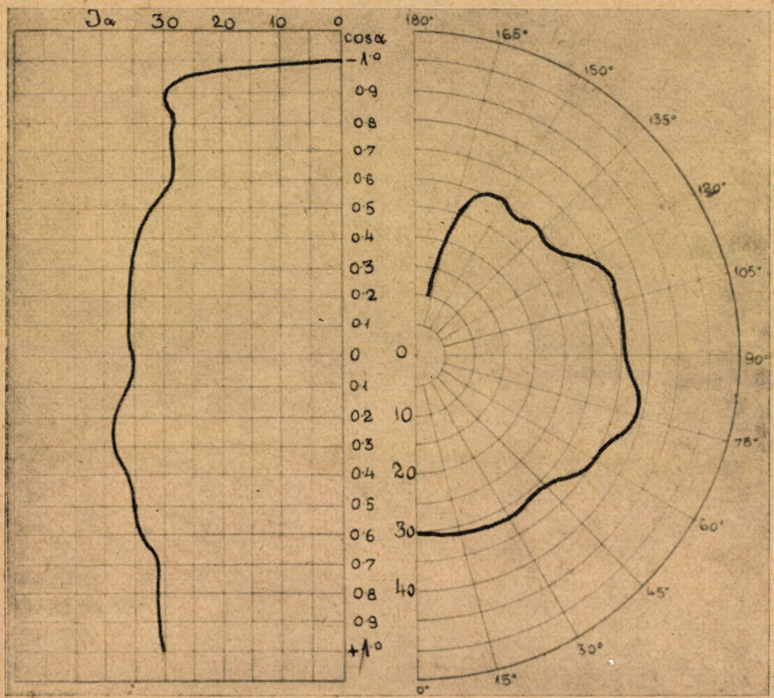
Előáll tehát annak szükségessége, hogy a fényeloszlási felület által bezárt tér nagyságát meghatározzuk. Kísérleti úton ezt az Ulbricht-féle gömbfotométerrel gyorsan és egyszerűen eszközölhetjük — ha megfelelő nagyságú ilyen gömb rendelkezésünkre áll. Mert a használandó gömb átmérőjének a mérendő lámpás legnagyobb átmérőjénél legalább is húszszor nagyobbnak kell lennie, ha elfogadható eredményt óhajtunk nyerni. Nagyobb szerelvények esetén tehát ez számításba nem jöhet;



1. ábra.

a Budapesten jelenleg meglevő gömbök között tudtommal az Egyesült Izzó és Villamossági R. T. két méter átmérőjű Ulbricht-féle gömbje a legnagyobb, amellyel tehát a fenti szabály szem előtt tartása mellett csupán 10 cm átmérőjű szerelvény által kibocsájtott fényáram közepes térbeli fényerőssége határozható meg.

Nem marad tehát egyéb hátra, mint hogy az egy síkban felvett fényeloszlási görbét megforgatva, az ilymódon bezárt teret valaminő módon integráljuk. A fényeloszlási görbét ma már a szerelvényekhez mellékelik; legalább is a megfelelő árjegyzékekben minden esetben megtalálható. Felvétele sem ütközik nagyobb nehézségbe bármely rendszerű padfotométeren csekély berendezési átalakítás után.



2. ábra. Tungsram 120/40 W. «D» vákuum lámpa spiráldróttal.

Legyen adva egy fényeloszlási görbe, mint szokásos, polár diagrammban (1. ábra). A görbe egyes radiusvectorai a megfelelő polárszög alatt mért fényerősséget jelentik.

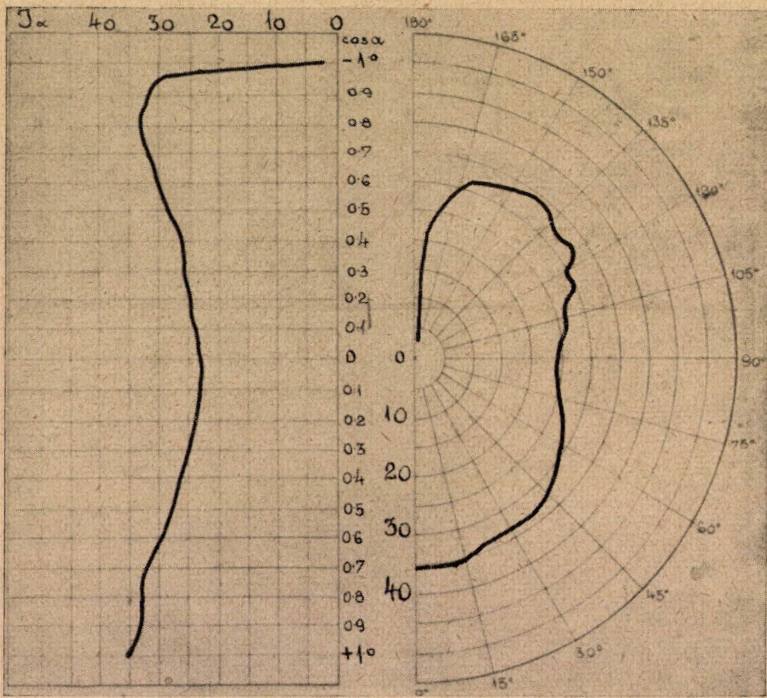
Egy α szögön belüli közepes fényerősség alatt értjük az

$$I = \frac{\Phi_\alpha}{\omega} \tag{1}$$

hányadost, ahol ω az α szögnek megfelelő térszöget, Φ_α pedig az ezen térszögbe sugárzott fényáramot jelentik.

Minthogy azonban a $d\omega$ elemi térszög a $d\alpha$ elemi síkszögnek az OA tengely körüli forgásából származik:

$$d\omega = 2\pi \sin \alpha \, d\alpha \tag{2}$$



3. ábra. Tungsram 110/100 W. gáztöltésű-lámpa spiráldróttal.

és az ezen $d\omega$ térszögbe sugárzott fényáram

$$d\Phi = 2\pi I \sin \alpha \, d\alpha. \tag{3}$$

E két egyenlet integrálása 0 és α határok között

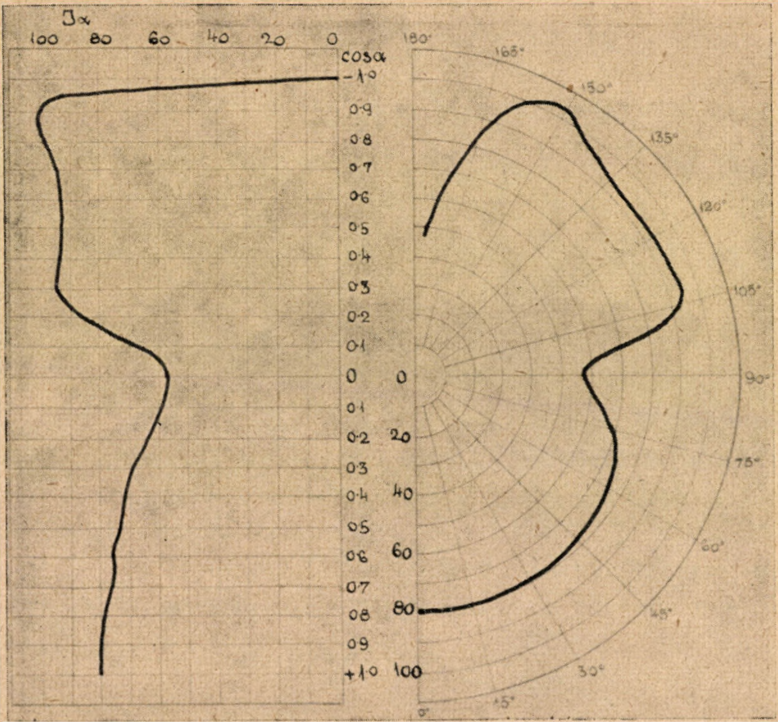
$$\omega = 2\pi \int_0^\alpha \sin \alpha \, d\alpha = 2\pi (1 - \cos \alpha), \tag{4}$$

illetve

$$\Phi_\alpha = 2\pi \int_0^\alpha I \sin \alpha \, d\alpha \tag{5}$$

egyenletekhez vezet, amelyekből (1) szerint a közepes fényerősség ezen a szögön belül

$$I_a = \frac{1}{1 - \cos a} \int_0^a I \sin a \, da. \qquad (6)$$



4. ábra. Tungsram 110/75 W. gáztöltésű félighomályositott-lámpa spiráldróttal.

Ha az O polár kezdőpont körül tetszőleges r sugárral megrajzoljuk a AQ_1P_1B félkört, amelynek metszéspontjait a da száraival P_1, illetve Q_1 jelöljük és ezen pontokat merőlegesen vetítjük az AB átmérőre, amely vetületi pontokat P és Q-val jelöljük, a P_1Q_1 ív

$$ds = rda \quad PQ = ds_1 = r \sin a \, da.$$

Elkészítve oly elemi téglalapot, amelynek alapja ds_1, magassága I, ennek területe (az 1. ábrán $qp\ q_1p_1$)

$$dF = Ids_1 = Ir \sin\alpha\, d\alpha \tag{7}$$

lévén, az $aa_1\ qq_1$ véges terület

$$F_\alpha = r\int_0^\alpha I \sin\alpha\, d\alpha \tag{8}$$

és így (6) a következő alakban írható:

$$I_\alpha = \frac{1}{1-\cos\alpha}\,\frac{F_\alpha}{r}.$$

Mivel azonban $r(1-\cos\alpha) = AQ = aq$ a $0-\alpha$ szögintervallumbeli közepes fényerősség

$$I_\alpha = \frac{F_\alpha}{aq} = \frac{aa_1qq_1\ (\text{terület})}{aq}$$

hányadosból adódik.

Ez az elmélete az általában használatos ROUSSEAU-féle görbének, amelynek nagy előnye, hogy a fényeloszlási felület által bezárt tér integrálása helyett a ROUSSEAU-féle görbe, határozottan egyszerűbb terület-meghatározását kívánja.

Mint speciális eset, az alsó féltér közepes fényerőssége:

$$I_{\bigtriangledown} = \frac{aa_1cc_1\ (\text{terület})}{r}, \tag{10}$$

a felső féltér közepes fényerőssége:

$$I_{\bigtriangleup} = \frac{cc_1bb_1\ (\text{terület})}{r} \tag{11}$$

és az egész térbeli közepes fényerősség

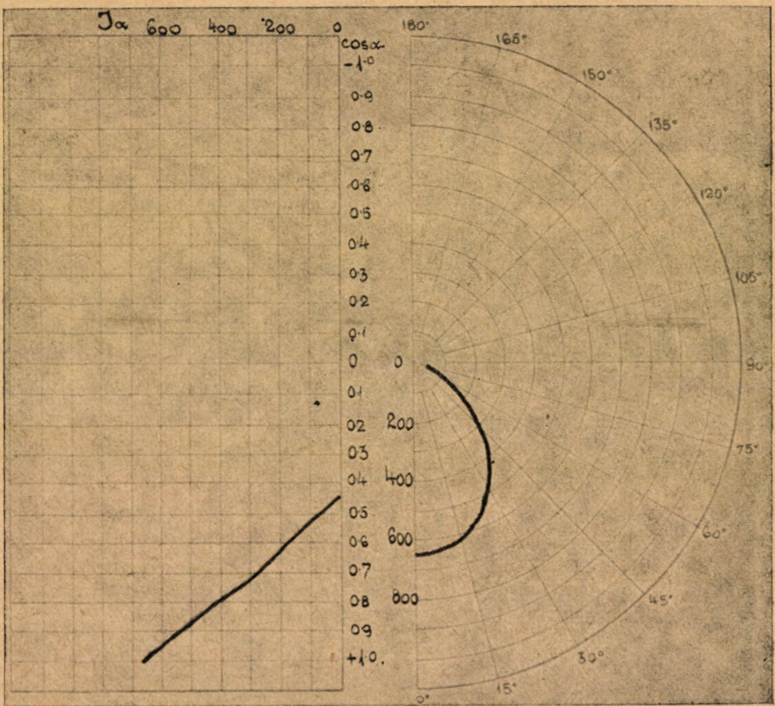
$$I_0 = \frac{aa_1bb_1\ (\text{terület})}{2r} = \frac{I_{\bigtriangledown}+I_{\bigtriangleup}}{2}. \tag{12}$$

A közepes fényerősség meghatározása a ROUSSEAU-féle görbe alapján a következő számítási módokon eszközölhető:

1. Trapéz-módszer.

a) egyenlő szögintervallumok mellett:

A fényeloszlási görbéből egyenlő $\alpha = \frac{180}{2n}$ szögintervallumok alatt kimérjük a megfelelő fényerősségeket, amelyeket I^{α} jelöl-



5. ábra. Erősen mély-sugárzó szerelvény.

jük. A ROUSSEAU-féle görbét ilymódon felbontottuk keskeny sávokra, amelyeknek határai

$$I^{\frac{k\,180}{2n}},\quad I^{\frac{(k+1)\,180}{2n}},\quad \left(\cos\frac{k180}{2n} - \cos\frac{(k+1)\,180}{2n}\right)$$

és a ROUSSEAU-görbe megfelelő íve.

Amennyiben n elég nagy, ezen sáv trapéznak tekinthető és így a megfelelő terület

$$\Delta F_k = \frac{I^{\frac{k\,180}{2n}} + I^{\frac{(k+1)\,180}{2n}}}{2}\left(\cos\frac{k180}{2n} - \cos\frac{(k+1)180}{2n}\right),$$

azaz az alsó féltérbeli közepes fényerősség

$$I_{\bigtriangledown} = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{n}\Delta F_k \tag{13}$$

a felső féltérbeli közepes fényerősség

$$I_{\bigtriangleup} = \frac{1}{r}\sum_{k=n}^{2n}\Delta F_k \tag{14}$$

és a térbeli közepes fényerősség

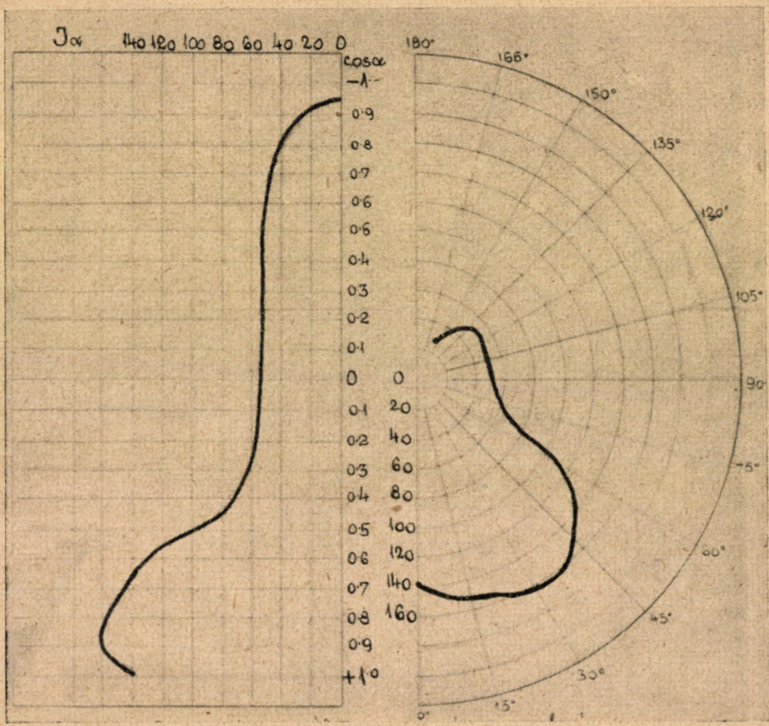
$$I_0 = \frac{I_{\bigtriangledown} + I_{\bigtriangleup}}{2}. \tag{15}$$

Az alább következő példákban a térbeli fényerősség oly módon határoztatott meg, hogy $n = 18$, azaz az intervallum $\frac{180}{2n} = 5°$ volt. Az első három esetben (lámpák) a mérés tényleg 5°-ról 5°-ra történt; a többinél (szerelvények) 15°-ról 15°-ra és a közbenső értékek a fényeloszlási görbéből mérettek ki.

Az alábbi táblázat szolgáltatja a $\cos\frac{k\,180}{2n} - \cos\frac{(k+1)\,180}{2n}$ különbségeket ezen esetre ($n = 18$)

cos 0 — cos 5	= cos 175 — cos 180	= 0·0038
cos 5 — cos 10	= cos 170 — cos 175	= 0·0114
cos 10 — cos 15	= cos 165 — cos 170	= 0·0189
cos 15 — cos 20	= cos 160 — cos 165	= 0·0262
cos 20 — cos 25	= cos 155 — cos 160	= 0·0334
cos 25 — cos 30	= cos 150 — cos 155	= 0·0403
cos 30 — cos 35	= cos 145 — cos 150	= 0·0468
cos 35 — cos 40	= cos 140 — cos 145	= 0·0532
cos 40 — cos 45	= cos 135 — cos 140	= 0·0589
cos 45 — cos 50	= cos 130 — cos 135	= 0·0643
cos 50 — cos 55	= cos 125 — cos 130	= 0·0692
cos 55 — cos 60	= cos 120 — cos 125	= 0·0736
cos 60 — cos 65	= cos 115 — cos 120	= 0·0774
cos 65 — cos 70	= cos 110 — cos 115	= 0·0806
cos 70 — cos 75	= cos 105 — cos 110	= 0·0832
cos 75 — cos 80	= cos 100 — cos 105	= 0·0852
cos 80 — cos 85	= cos 95 — cos 100	= 0·0864
cos 85 — cos 90	= cos 90 — cos 95	= 0·0872

b) A ROUSSEAU-görbe egyenlő abscissa-beosztása mellett: Fenti módszer alkalmatlan volta a számításoknál azonnal kitűnik, mivel a sávok egyenlőtlen szélessége a terület quadraturáját igen nehézkessé teszi. Egyszerűbb a terület meghatározása, ha az 1. ábra ROUSSEAU-görbéjének $a - b = 2r$ abscissá-



6. ábra. Gyengén mély-sugárzó szerelvény.

ját $2n$ egyenlő részre osztjuk, amely esetben minden sáv szélessége $\frac{r}{n}$ = constans.

A fényeloszlási görbe ezen abscissákhoz tartozó pontjainak polárszögei

$$a_1, \; a_2, \; a_3 \ldots, \; a_{2n},$$

úgy hogy

$$\cos a_i - \cos a_{i+1} = \frac{r}{n}. \tag{16}$$

Az ezen pontokhoz tartozó fényintenzitásokat $I^{\cos\alpha_i}$-vel jelölve, egy sáv területe

$$\varDelta F_i = \frac{r}{n}\,\frac{I^{\cos\alpha_i} + I^{\cos\alpha_{i+1}}}{2},$$

azaz az alsó féltérbeli közepes fényerősség

$$I_{\cup} = \frac{1}{r}\sum_{\cos\alpha_i=0}^{\cos\alpha_i=1} \varDelta F_i, \tag{17}$$

a felső féltérbeli fényerősség

$$I_{\cap} = \frac{1}{r}\sum_{\cos\alpha_i=0}^{\cos\alpha_i=-1} \varDelta F_i \tag{18}$$

és a térbeli közepes fényerősség

$$I_0 = \frac{I_{\cup} + I_{\cap}}{2}. \tag{19}$$

Az alábbi példákban $\frac{r}{n} = 0·05$-nek van választva, amely esetben a megfelelő polárszögek — percnyi pontossággal:

α_i	$\cos\alpha_i$	α_i	$-\cos\alpha_i$
0° 0′	1·0000	90° 0′	0·0000
18° 12′	0·9500	92° 52′	0·0500
25° 50′	0·9001	95° 44′	0·0999
31° 47′	0·8500	98° 38′	0·1501
36° 52′	0·8000	101° 32′	0·2000
41° 25′	0·7500	104° 29′	0·2501
45° 34′	0·7001	107° 27′	0·2999
49° 27′	0·6501	110° 29′	0·3499
53° 8′	0·6000	113° 35′	0·4000
56° 38′	0·5500	116° 45′	0·4501
60° 0′	0·5000	120° 0′	0·5000
63° 15′	0·4501	123° 22′	0·5500
66° 25′	0·4000	126° 52′	0·6000
69° 31′	0·3499	130° 33′	0·6501
72° 33′	0·2999	134° 26′	0·7000
75° 31′	0·2501	138° 35′	0·7500
78° 28′	0·2000	143° 8′	0·8000
81° 22′	0·1501	148° 13′	0·8500
84° 16′	0·0999	154° 10′	0·9001
87° 8′	0·0500	161° 48′	0·9500
90° 0′	0·0000	180° 0′	1·0000

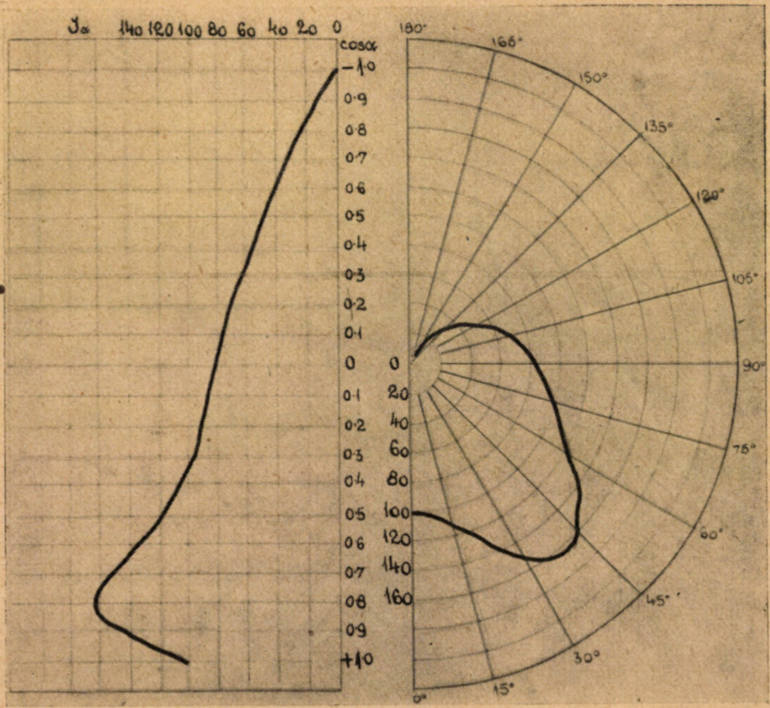
Bánó Géza Bánó G

2. Bloch-féle formula.

Dr. Ing. L. Bloch a közepes fényerősség meghatározására a következő közelítő formulákat ajánlja:[1]

$$I_0 = \tfrac{1}{8}[I^{30} + I^{80} + I^{100} + I^{150} + 2(I^{60} + I^{120})] \qquad (20)$$

$$I_{\smile} = \tfrac{1}{4}[I^{30} + I^{80} + 2I^{60}] \qquad (21)$$



7. ábra. Gyengén oldalt-sugárzó szerelvény.

és igy

$$I_{\frown} = \tfrac{1}{4}[I^{100} + I^{150} + 2I^{120}]. \qquad (22)$$

Szerinte ezen formulák alkalmazása általában 5% pontosságot ad.

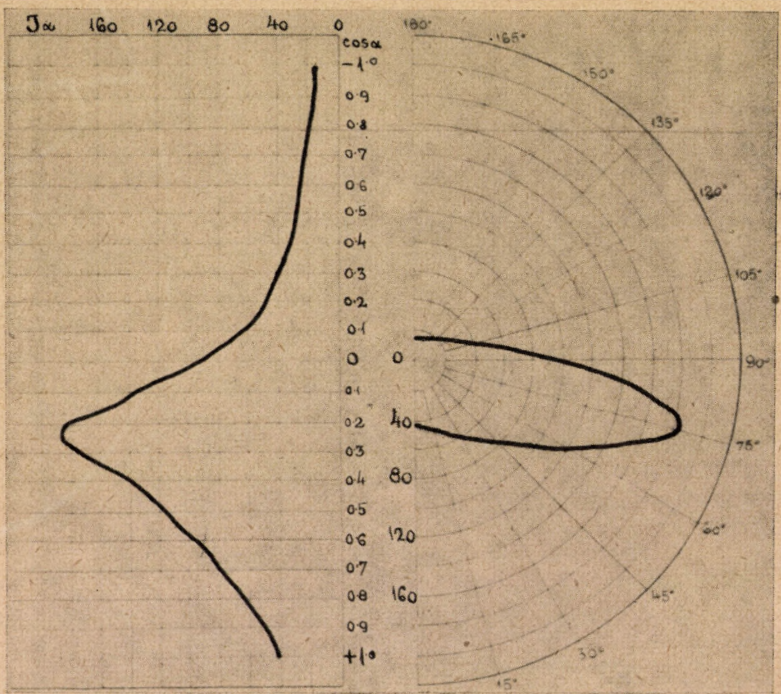
---

[1] Lichttechnik, Berlin 1921, 70. lap.

3. Simpson-féle formula.

Ha az $ab = 2r$ intervallumot 20 egyenlő részre bontjuk, akkor a Simpson-féle formula szerint

$$I_{\smile} = \tfrac{1}{30}[(I^0 + I^1) + 2(I^{0\cdot2} + I^{0\cdot4} + I^{0\cdot6} + I^{0\cdot8}) + \\ + 4(I^{0\cdot1} + I^{0\cdot3} + I^{0\cdot5} + I^{0\cdot7} + I^{0\cdot9})] \tag{23}$$



8. ábra. Erősen oldalt-sugárzó szerelvény.

$$I_{\frown} = \tfrac{1}{30}[(I^0 + I^{-1}) + 2(I^{-0\cdot2} + I^{-0\cdot4} + I^{-0\cdot6} + I^{-0\cdot8}) + \\ + 4(I^{-0\cdot1} + I^{-0\cdot3} + I^{-0\cdot5} + I^{-0\cdot7} + I^{-0\cdot9})] \tag{24}$$

és

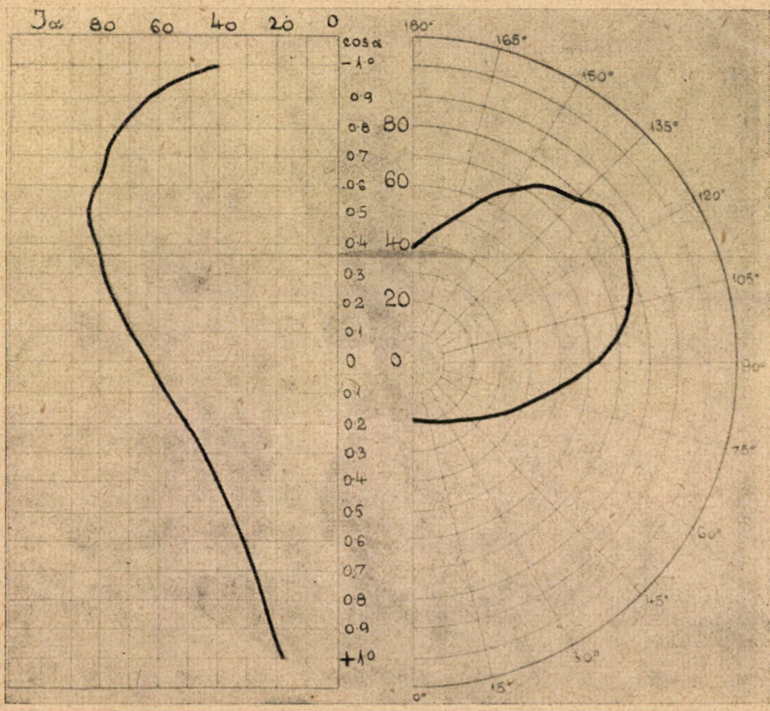
$$I_0 = \frac{I_{\smile} + I_{\frown}}{2}, \tag{25}$$

ahol I^k jelenti a fényintenzitást azon α szög alatt, amelyre $\cos \alpha = k$.

4. A Cotes-féle közelítő formula.

Ha az $a-b=2r$ intervallumot 10 egyenlő részre osztjuk, akkor a közepes fényerősséget a Cotes-féle mechanikus quadraturával a következő módon nyerhetjük:

$$I_{\bigtriangledown} = 0{\cdot}06597\,(I^0 + I^1) + 0{\cdot}26042\,(I^{0\cdot 2} + I^{0\cdot 8}) + \\ + 0{\cdot}17361\,(I^{0\cdot 4} + I^{0\cdot 6})] \qquad (26)$$



9. ábra. Gyengén magasba-sugárzó szerelvény.

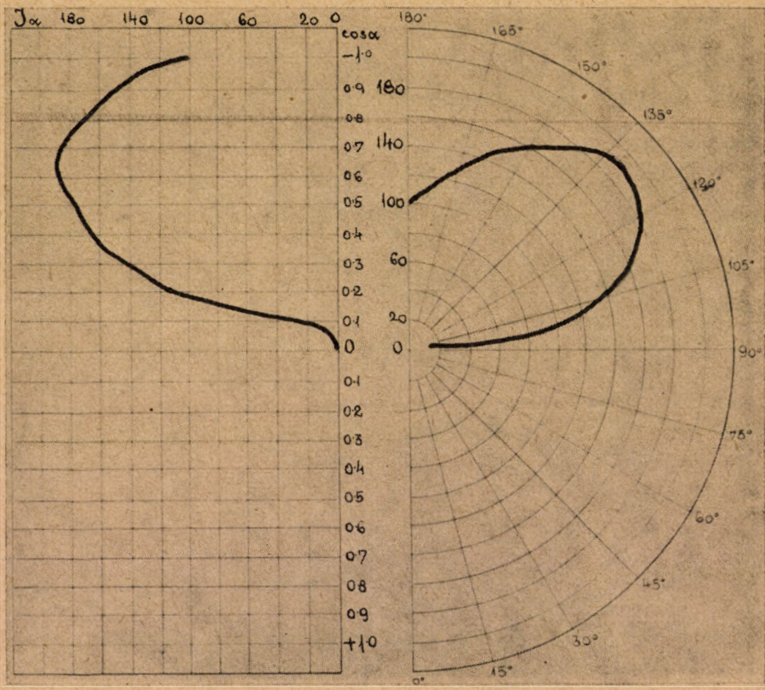
$$I_{\bigtriangleup} = 0{\cdot}06597\,(I^0 + I^{-1}) + 0{\cdot}26042\,(I^{-0\cdot 2} + I^{-0\cdot 8}) + \\ + 0{\cdot}17361\,(I^{-0\cdot 4} + I^{-0\cdot 6}) \qquad (27)$$

és

$$I_0 = \frac{I_{\bigtriangledown} + I_{\bigtriangleup}}{2}, \qquad (28)$$

ahol I^k ujra azon a szög alatti fényerősséget jelenti, amelyre $\cos a = k$.

Mivel a közelitő formulák pontossága adott beosztás esetén függ az integrálandó görbe alakjától, vizsgáljuk meg, hogy a legtipikusabb esetekben melyik minő pontosságot szolgáltat. Az ehhez szükséges méréseket az Egyesült Izzó és Villamossági R. T. újpesti gyárának ellenőrző fotométerén (öt méteres pad) végeztem, amelynek segitségével vettem fel a különböző



10. ábra. Erősen magasba-sugárzó szerelvény.

armaturák fényeloszlási görbéjét is, kikeresve ezek közül azokat, amelyek a legjellegzetesebb fényeloszlást adták. Megjegyezni kivánom, hogy szánt-szándékkal kerestem ki szabályos görbéket adó szerelvényeket.

Ha elfogadjuk az egyenlő szögintervallumok alatt mért fényerősségekből kiszámitott közepes fényerősségeket alapul, akkor a táblázatban mellékelt kilenc típusú fényeloszlási görbékből átlagban a következő eltérések adódnak:

Typikus fényeloszlási felületek mechanikus quadraturáinak eredményei különféle módszerekkel.

		ULBRICHT gömbben mérve	Trapéz-módszer: egyenlő szög-intervallummal	Trapéz-módszer: egyenlő abscisszákkal	BLOCH formula	SIMPSON formula	COTES formula
Tungsram 120 Volt, 40 Watt D lámpa (2. ábra)	I◡	—	34·77	34·69	35·32	34·71	35·04
	I◠	—	31·36	31·49	32·70	31·47	30·18
	I_0	34·0	33·07	33·09	34·01	33·09	32·61
Tungsram 110 Volt, 100 Watt gáztöltésű lámpa, világos (3. ábra)	I◡	—	114·32	114·57	115·50	114·57	114·76
	I◠	—	114·78	111·45	113·75	110·63	117·84
	I_0	115·0	114·55	113·01	114·62	112·60	116·30
Tungsram 110 Volt, 75 Watt gáztöltésű lámpa, félig homályos (4. ábra)	I◡	—	71·87	71·82	72·50	71·83	72·01
	I◠	—	86·72	86·85	91·75	86·60	84·16
	I_0	79·5	79·30	79·34	82·12	79·22	78·08
Erősen mélysugárzó szerelvény (5. ábra)	I◡	—	178·93	177·37	151·50	177·09	177·07
	I◠	—	—	—	—	—	—
	I_0	—	89·46	88·68	75·75	88·55	88·54
Gyengén mélysugárzó szerelvény (6. ábra)	I◡	—	105·55	104·92	106·25	105·37	104·92
	I◠	—	42·31	43·62	44·50	44·30	44·21
	I_0	—	73·93	74·27	75·38	74·84	74·56
Gyengén oldaltsugárzó szerelvény (7. ábra)	I◡	—	120·29	120·18	121·75	120·23	121·58
	I◠	—	46·76	46·68	46·75	46·63	46·58
	I_0	—	83·52	83·43	84·25	83·43	84·08
Erősen oldaltsugárzó szerelvény (8. ábra)	I◡	—	111·11	113·10	114·00	113·47	116·26
	I◠	—	34·65	34·48	30·75	34·17	33·80
	I_0	—	72·88	73·79	72·38	73·82	75·03
Gyengén magasbasugárzó szerelvény (9. ábra)	I◡	—	74·50	74·40	72·50	74·20	73·93
	I◠	—	147·25	147·08	152·00	147·37	147·07
	I_0	—	110·88	110·74	112·25	110·79	110·50
Erősen magasbasugárzó szerelvény (10. ábra)	I◡	—	—	—	—	—	—
	I◠	—	139·40	139·58	152·25	137·50	143·34
	I_0	—	69·70	69·79	76·12	68·75	71·67

	$I_{\smile}$	$I_{\frown}$	I_0
Trapéz-módszer egyenlő abscissákkal	0·5%	0·9%	0·5%
BLOCH-formula	3·3%	5·0%	4·0%
SIMPSON-formula	0·5%	1·5%	0·6%
COTES-formula	11·%	2·5%	1·4%

Az átlagos hibák tehát az armatura fényeloszlási görbéjének felvételére szolgáló mérések mérési hibáin belül maradnak, kivéve a BLOCH-féle formula alapján nyert adatokat, amelyek a bejelentett 5% eltérést is adják. Ha azonban az egyes fényeloszlási görbék eredményeit nézzük, tapasztalhatjuk, hogy erősen mélysugárzó (5. ábra), valamint erősen magasba sugárzó szerelvények (10. ábra) kiméréseinél, illetve ezek ROUSSEAU-görbéinek quadraturájánál a BLOCH-féle formula csupán 15%, illetve 9% pontosságot adna, ami figyelmeztet arra, hogy ily typusoknál a BLOCH-féle formula alkalmazása mellőzendő.

Dr. Ifj. Kövesligethy Radó.

NÄHERUNGSFORMELN ZUR BERECHNUNG DER MITTLEREN SPHÄRISCHEN LICHTSTÄRKE.

Es wird bei verschiedenen Lampen und Armaturgattungen, die typische Lichtverteilungskurven haben, untersucht, inwieweit die üblichen Näherungsformeln untereinander übereinstimmen. Die Integration bei gleichen Winkelabständen, sowie bei gleichen Abscissenabständen aufgenommenen ROUSSEAU-Kurven der einzelnen Geleuchten wird mit den Resultaten der Näherungsformeln von Dr. BLOCH, SIMPSON und COTES verglichen. Gefunden wurden folgende durchschnittliche Abweichungen:

	$I_{\smile}$	$I_{\frown}$	I_0
Trapez-Formel, mit gl. Absc. Abst.	0·5%	0·9%	0·5%
Formel von Dr. BLOCH	3·3%	5·0%	4·0%
Formel von SIMPSON	0·5%	1·5%	0·6%
Formel von COTES	1·1%	2·5%	1·4%

Die grösste Abweichungen ergaben die stark tiefstrahlende und die stark hochstrahlende Armatur (Figur 5 und 10) welche, mittels BLOCH-Formel ausgerechnet 15% bzw. 9% betrugen. Bei Leuchten, deren Lichtverteilungskurve denen ähnlich ist, muss also die Verwendung der BLOCH-Formel bei der Berechnung vermieden werden.

Dr. Radó von Kövesligethy.

ANORGANIKUS SÓOLDATOK ULTRAIBOLYA ABSZORPCIÓJA.[1]

I. Ha valamely közegen sugárzó energia halad keresztül, akkor az áthaladás közben folytonosan veszít intenzitásából. Ennek az intenzitáscsökkenésnek oka lehet: 1. a sugárzó energia szétszóródása (diffúzió); 2. a sugárzó energia egy részének más energiává (rendszerint hő- vagy kémiai energiává) való átalakulása: az *abszorpció.*

Homogén abszorbeáló közegben a fénygyengülés értéke és az abszorpció nagysága a LAMBRECHT által felállított differenciálegyenlettel igen egyszerűen meghatározható. E szerint ugyanis a fénygyengülés (dI) értéke arányos a beeső fény intenzitásával (I) és az egyes rétegelemek rétegvastagságával (dx); azaz:

$$dI = -\varkappa . I . dx, \tag{1}$$

ahol $\varkappa$ a beeső fény hullámhosszúságától és az abszorbeáló anyag természetétől függő állandó, amelyet *abszorpció-koefficiens*nek vagy *elnyelési együtthatónak* szoktak nevezni. Ha az (1) alatti egyenletet véges vastagságú rétegekre is ki akarjuk terjeszteni, akkor egyenletünket $x=0$, $x=x_0$ határokon belül meg kell integrálni. Ekkor:

$$\int_I^{I_x} \frac{dI}{I} = -\int_0^{x_0} \varkappa . dx. \tag{2}$$

[1] Doktori értekezés 1929. Pécs.

Az integrálást elvégezve és az $x=0$-nál a fényintenzitást I_0-val jelölve kapjuk:

$$\log \mathrm{nat} \frac{I}{I_0} = -\varkappa . x, \qquad (3)$$

ahol I_0 a belépő, I pedig az anyagon keresztülhaladt fény intenzitása. A (3) egyenletből:

$$I = I_0 . e^{-\varkappa . x}, \qquad (4)$$

ahol e a természetes logaritmusok alapszáma. Legyen $\varkappa = \frac{1}{x}$, akkor a (4) egyenlet alakja a következő lesz:

$$I = I_0 e^{-1} = \frac{I_0}{e}, \qquad (5)$$

tehát az abszorpció-koefficiens annak a rétegvastagságnak a reciprok értékét jelenti, amely az anyaghoz érkező sugárzást $^1/_e$-ed részre csökkenti.

Az abszorpciós törvényt, melyet szokásos alakjában a (4) egyenlet mond ki, írhatjuk még a következő alakban is:

$$I = I_0 10^{-\varepsilon . x}, \qquad (6)$$

ahol ε ugyancsak a beeső fény hullámhosszúságától és az abszorbeáló anyag természetétől függő állandó, mely annak a rétegvastagságnak a reciprok értékét jelenti, mely az anyaghoz érkező sugárzást $^1/_{10}$ részre csökkenti le. Ezt az állandót *extinkció-koefficiens*nek vagy Bunsen—Ruscoe-féle koefficiensnek szokták nevezni.

Ha a különböző hullámhosszúságokhoz tartozó abszorpció-, illetőleg extinkció-koefficiens értékeket az ordinatára, a hullámhosszúságokat pedig az abscisszára viszem fel, megkapom az illető anyagra jellemző abszorpciós görbét.

II. Az oldatok abszorpciós vizsgálata a homogén közeg abszorpciós vizsgálatánál sokkal körülményesebb. Az oldatoknál ugyanis az abszorpció nagysága nemcsak a rétegvastagságnak, hanem az oldat koncentrációjának is függvénye. Ugyancsak

megnehezíti a vizsgálatokat az is, hogy az oldatok abszorpciójánál az oldott anyagon kívül az oldószer is szerepet játszik. Legegyszerűbb esetben az oldószer abszorpciója elhanyagolhatóan kicsiny (desztillált víz, alkohol stb.). Viszont, ha a tiszta oldószernek van számbavehető abszorpciója, akkor az oldat abszorpciós görbéjének megszerkesztésénél ezt is figyelembe kell venni.

Az oldatok abszorpciós spektrum-vizsgálatainak alapja a LAMBERT—BEER-féle törvény,[1] melynek egyszerű alakja:

$$I = I_0 10^{-E.c.x}, \qquad (7)$$

ezen egyenletet E-re megoldva:

$$E = \frac{1}{c.x} \log \frac{I_0}{I}, \qquad (8)$$

ahol E a *molekuláris extinkció-koefficiens*, I_0 a belépő, I pedig az oldaton keresztülhaladt fény intenzitása; c az oldat koncentrációja molekula pro liter egységekben, végül x a rétegvastagság centiméterekben kifejezve.

A LAMBERT—BEER-féle törvény szerint — amint az a (8) képletből kiolvasható — az egyes hullámhosszakhoz tartozó abszorpció-koefficiensek értéke az $x.c$ szorzattól függ. Ha tehát az oldat különböző koncentrációi mellett azt találjuk:

α) hogy a BEER-féle törvény érvényes; azaz a molekuláris extinkció-koefficiensek értéke a koncentrációtól független, akkor ebből következik, hogy az abszorbeáló komplexumok a koncentráció megváltozásával is változatlanok maradtak.

β) hogy a BEER-féle törvény nem érvényes, akkor ebből komplexképződésekre, disszociációra stb.-re következtethetünk.

Az oldatok abszorpciós vizsgálatánál ügyelni kell a következő körülményekre:

1. hogy a vizsgálandó oldat ne legyen inhomogén, azaz oldatunkban ne legyenek légbuborékok, porszemek stb.;

---

[1] Pogg. Ann, 86, 78, 1852.

2. hogy a vizsgálandó oldat fel ne melegedjék. A felmelegedés folytán ugyanis sűrűségkülönbség áll elő és konvekciós áramok keletkeznek, ami az extinkció-koefficiensek értékét megváltoztatja és elmosódottá teszi az abszorpciós csíkok helyét. (Saját tapasztalásom szerint ez az effektus már akkor is fellépett, ha az abszorpciós edény falát puszta kézzel megfogtam);

3. hogy a vizsgált oldatokban a fény ne hozzon létre kémiai változást. Kisérleteimnél ezt úgy ellenőriztem, hogy minden kísérlet végén az utolsó spektrum-felvétel az első spektrumfelvétel megismétlése volt. Ha a két felvétel megegyezik, akkor joggal feltehető, hogy változás nem állt elő. (A vizsgált oldatoknál semmiféle kémiai változást nem tapasztaltam.)

III. Sóoldatok ultraibolya abszorpciójával már sokan foglalkoztak, így: R. A. Houston és társai,[2] C. J. Webber Grieveson,[3] Morton és Riding,[4] Plotnikov és Karschulin,[5] Jones és társai,[6] Robin Hill és Owen Rhys Howell,[7] akik azonban főként a szulfátokra és a nitrátokra terjesztették ki vizsgálataikat.

A chloridok ultraibolya abszorpciójára vonatkozólag viszont még igen kevésszámú vizsgálat történt.

Néhány ritka föld-fém chloridjainak vizes oldalát vizsgálta Toshi Ione,[8] aki meghatározta a $LaCl_3$, $CeCl_3$, $PrCl_3$, $NclCl_3$, $SmCl_3$ és $ErCl_3$ oldatoknak az abszorpciós-görbéjét különböző koncentrációk mellett.

Az alkáli-fémek chloridjainak ultraibolya abszorpciójával először Brannigan és Mackbeth[9] foglalkoztak, akik a $\lambda = 2100$ Å. körül az anionokra jellemző abszorpciós maximumokat találtak. Ugyancsak az alkáli-fémek chloridjainak abszorpciójával foglalkozott

[2] Proc. Roy. Soc. Edin. 31, 521, 524, 530, 531, 538, 547, 553.
[3] Philos. Magazine (6) 49, 1006—1020, 1924.
[4] Proc. Roy. Soc. A. 113, 717.
[5] Zeitschr. f. Phys. 38, 502, 1926.
[6] Amer. Chem. Journ. 37, 126, 207, 244, 1907 és u. o. 41, 163, 276, 1909.
[7] Philos. Magazine (6), 48, 833—847, 1924.
[8] Bull. chem. Soc. of Japan 1, 9—13.
[9] Journ. of the Chem. Soc. 109 (II), 1277, 1916.

L. A. Müller[10] is, aki az alkalihalogenidek vizes oldatainak tanulmányozása közben, az előzőkkel ellentétben, azt találta, hogy a vizsgált oldatok abszorpciós maximuma a spektrum ultraibolya részében sehol sem jelentkezik. Mérései szerint — amelyeket fotográfiai fotometrálással eszközölt és az extinkció-koefficiensek értékét az egyenlő feketedés elve alapján 10%-os pontossággal határozta meg — az alkálihalogenidek oldatainál az abszorpciónak a nagyobb hullámhosszak felé való eltolódása a spektrum ultraibolya részében:

$$Na \rightarrow K \rightarrow Cs \rightarrow Rb.$$

A chloridok ultraibolya abszorpciójával foglalkozott még G. M. Pool[11] is. Méréseinek inkább metodikai jelentősége volt, eredményeinek pontossága azonban nem kielégítő.[12]

A fentiekből látható, hogy a chloridok ultraibolya abszorpciójára vonatkozólag csak kevésszámú és nem minden tekintetben megbizható adat állt rendelkezésünkre. Dolgozatom céljául éppen ezért a chloridok ultraibolya abszorpciójának vizes oldatokban való meghatározását tűztem ki.

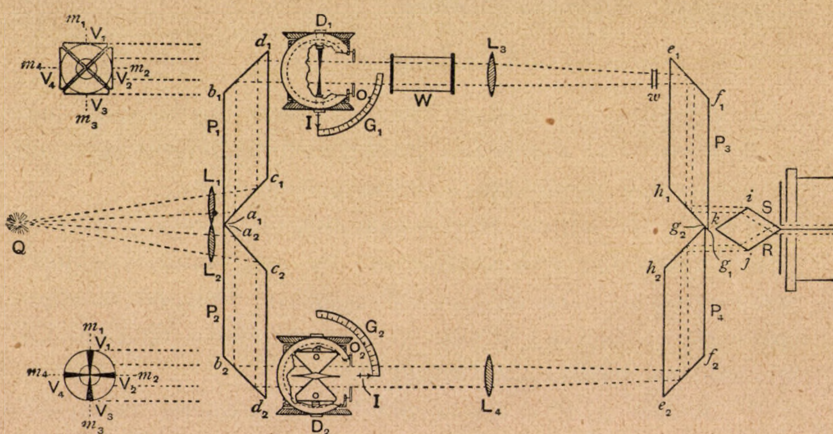
IV. Mielőtt a vizsgálandó oldatok molekuláris extinckció-koefficiens értékeit quantitative meghatároztam, tájékozódás szempontjából qualitativ méréseket eszközöltem. Berendezésem állt egy Carl Leiss-féle B^{xx} tipusú kvarcspektrográfból. Fényforrásul egy 110 Volt feszültségű W. C. Heraeus gyártmányú kvarc-üveg amalgám lámpa szolgált. Hogy a kvarc-lámpa egyenletes égését biztositsam, mindig ugyanakkora — 50 Volt — feszültséggel és 4·5 ampère intenzitással égettem. A fényforrás és a spektrográf rése közé helyeztem el az abszorbeáló oldatokat tartalmazó abszorpciós edényt, melyben a planparallel kvarc-

10 Ann. d. Phys. 82, 39—66, 1926.

11 Diss., Zeitschr. f. Phys. 29, 311—14, 1924.

12 F. H. Getman (Journ. Phys Chem 29, 853—84, 1925) és E. Viterbi (Gar. Chim Ital. 47, 615—20, 1927) dolgozatának birálatát lásd «A földfémek halogénjeinek ultraibolya abszorpciója» c. értekezésemben. (Chemiai Folyóirat 1930).

ablakok közötti réteg vastagságát 0—15 mm határok között tudtam változtatni. A spektrum-felvételeket «Agfa-Extrarapid» lemezekre készítettem. Az expoziciós idő 0·1 mm résszélességnél 15 secundum volt. A lemezek előhivásánál és fixálásánál ügyeltem arra, hogy minden lemez ugyanolyan módon legyen kikészitve; ezért úgy a fixálót, mint az előhivót csak egyszer használtam. A fényképfelvételekből az abszorpciós csíkok helyét és hozzávetőleges intenzitását könnyen meg lehetett határozni



1. ábra.

és így a quantitativ mérések szempontjából tájékozva voltam, hogy milyen koncentráció és milyen rétegvastagság a legalkalmasabb az illető oldat különböző hullámhosszakhoz tartozó molekuláris extinkció-koefficienseinek meghatározására.

V. Quantitatív méréseimet A. Hilger közepes nagyságú quarcspektrográfjával kombinált Judd Lewis-féle[12] szektor-fotométerrel eszközöltem (lásd az 1. ábrát).

A Q fényforrásból kiinduló fénysugarat két részre bontjuk. A fénysugár egyik része áthalad az L_1 kvarc-fluorit lencsén, amely az odaérkező fénynyalábot párhuzamossá teszi. Ez a párhuzamos sugárnyaláb ráesik a P_1 reflektáló rombuszra, ahol az

---

[12] Journ. Roy. Soc. of Arts 1921, 806.

a_1c_1 és b_1d_1 lapokon reflektálódik. Innen a fény a D_1 szektoron és a W abszorpciós edényen keresztül az L_3 lencsére esik. Ez a lencse a fénysugarat — miután az a P_3 rombusz megfelelő lapjain reflektálódott — a spektrográf résére (S) irányítja. A különböző hullámhosszúságú spektrum-vonalak is ezen L_3 lencse eltolásával állíthatók be élesre.

A Q fényforrásból jövő sugárnyaláb másik rése az $L_2P_2D_2L_4P_4$ kombináción keresztül az előbbivel mindenben megegyező utat tesz meg.

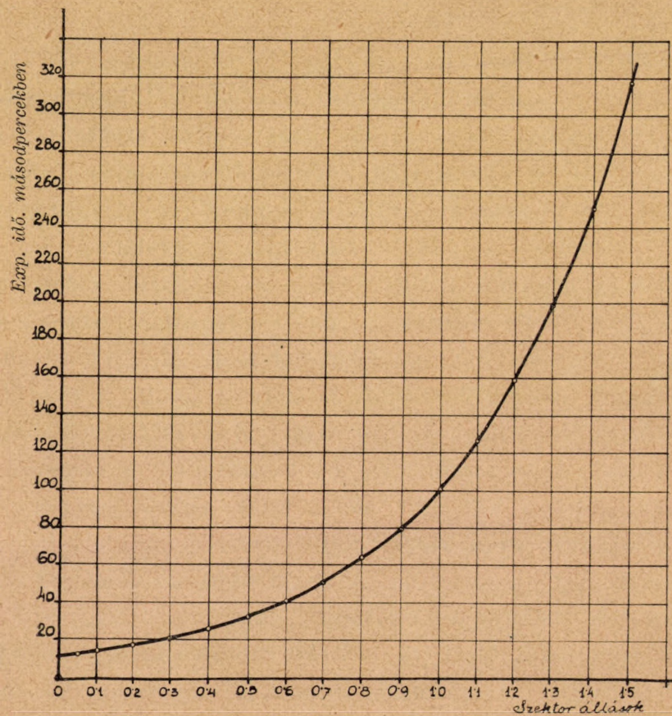
A spektrográf rése előtt áll még egy R Albrecht-féle rombusz, amely a szektorfotométeren áthaladó két sugárnyalábot közvetlenül egymás alá hozza. Ha tehát mindkét szektor teljesen nyitva van és az abszorpciós edényekben semmiféle folyadék sincs, akkor a kvarcspektrográffal közvetlenül egymás alá két — minden tekintetben azonos — spektrum fotografálható le.

A felső sugármenet útjába tesszük a vizsgálandó oldatot tartalmazó abszorpciós edényt; az alsó sugárnyaláb pedig a tiszta oldószert tartalmazó edényen megy keresztül. Méréseimnél oldószer gyanánt mindig desztillált vizet használtam. A desztillált víz abszorpciója pedig még igen nagy rétegvastagságok mellett is elhanyagolhatóan kicsiny. Ha a két szektor állása megegyezik, akkor az oldaton áthaladó sugárnyaláb egyes komponensei annál erősebben gyengülnek, minél erősebb az illető hullámhosszúságú fény abszorpciója. A tiszta oldószer oldalán a szektor fokozatos szűkítésével elérhetjük, hogy a két oldal előbb a gyenge, majd fokozatosan az erősebb abszorpcióknak megfelelő hullámhosszaknál is egyforma intenzitást mutasson. Ha tehát különböző szektorállásoknál a két spektrumot lefényképezzük, akkor ezek az egyenlő intenzitású helyek a kidolgozott fényképezőlemezen, mint «*egyenlő feketedésű helyek*» fognak mutatkozni. Ezekből az egyenlő feketedésű helyekből az abszorpció mértéke könnyen meghatározható; ugyanis a Judd Lewis-féle szektorfotométer szektorállás értékei — a megfelelő korrekcióval — a log $^{I_0}/_{I}$ értékét közvetlenül megadják. A molekuláris extinkciókoefficiens értékét a (8) egyenlet alapján számítjuk ki.

A különböző szektorállásoknak megfelelőleg az expoziciós idő is változik. A gyakorlat azt mutatta, hogy a legjobb felvételeket akkor nyerjük, ha az expoziciós időt a következő — empirikus — formula segítségével határozzuk meg.

$$\text{Expoziciós idő} = A.(\text{antilog } D), \tag{9}$$

ahol A a fényforrás és a használt lemez anyagi minőségétől függő állandó; D pedig a megfelelő szektorállásokat jelenti.

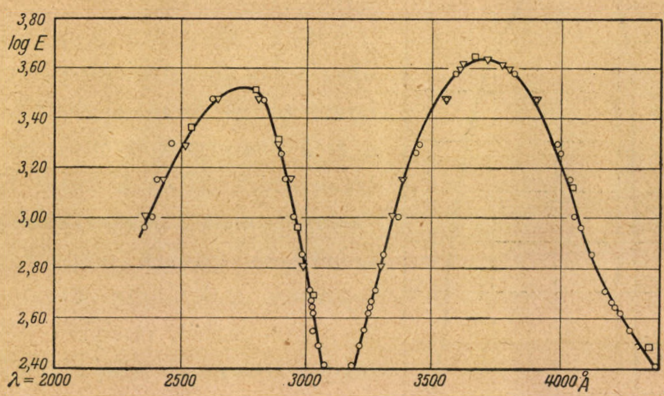


2. ábra.

Vizsgálataimhoz «*Wellington Anti screen London*» lemezeket használtam. Fényforrásul nagy kapacitású wolfrám-acél szikra szolgált. Több próbafelvétel alapján meghatároztam A értékét és megrajzoltam a 2. ábrán látható «*expoziciós görbét*», amely a különböző szektorállásokhoz tartozó expoziciós időket másodpercekben tünteti fel.

Méréseim közben a két wolfrám-acél elektród egymásközti távolsága 3 mm, a spektrográf résszélessége 0·02 mm volt. Az így nyert spektrum hossza a $\lambda=5500$ Å hullámhossztól a $\lambda=2250$ Å hullámhosszig 152 mm volt.

Kísérleteimhez C. A. F. KAHLBAUM «zur Analyse» jelzésű készítményeket használtam. A koncentráció értékét a HCl-nál és a többé-kevésbbé higroszkópos anyagoknál, mint a $LiCl$, $CaCl_2$, $MgCl_2$, $ZnCl_2$ és $AlCl_3$ gravimetrikus chlormeghatározással álla-



3. ábra.

pitottam meg. Egy felvétel látható a mellékelt táblán, mely a $CdCl_2$-al történt felvételeket mutatja.

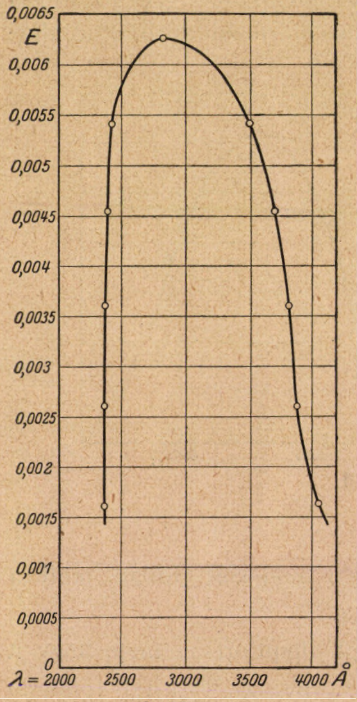
VI. Eredményeim pontosságát úgy állapitottam meg, hogy a HALBAN és SIEDENTOPF[13] s később RÖSSLER[14] által többféle módszerrel vizsgált 0·0001 mólos K_2CrO_4-nek a 0·5 normal KOH-hoz, mint oldószerhez viszonyitott abszorpcióját én is meghatároztam és a nyert értékeket az ő adataikkal összehasonlítottam.

Mivel HALBAN és SIEDENTOPF méréseiket fotoelektromos cellával végezték és eredményeik pontossága $\pm 0{\cdot}1\%$, az általuk nyert

---

[13] Zeitschr. für phys. Chem. 100, 208, 1922.
[14] Ber. d. dtsch. Chem. Ges. 59, 2608, 1926.

értékeket normáknak vettem s RÖSSLER által nyert értékeket és saját eredményeimet a megfelelő hullámhosszakhoz grafikusan interpoláltam. Hogy ezen különböző metódusokkal nyert értékek között milyen megegyezés áll fenn, az a 3. ábrán jól látható, ahol a különböző szerzők által meghatározott pontok különböző módon vannak megjelölve. A nyert adatok alapján meghatároztam a méréseim közben elkövetett relatív hiba nagyságát, amely középértékben $\pm 2{\cdot}2\%$.



4. ábra.

VII. 1. Mielőtt a fémchloridok ultraibolya abszorpciójának vizsgálatába belekezdtem, meghatároztam a *HCl* abszorpcióját 9·87 moláris koncentrációnál és 4 cm-es rétegvastagság mellett. A nyert extinkció-koefficiens értékek alapján megrajzoltam a 4. ábrán látható abszorpciós görbét, amelyből látható, hogy a *HCl* abszorpciója igen kicsi. Az abszorpciós maximum helye a $\lambda = 2819$ Å hullámhosszúságnál van.

2. A $CaCl_2$ vizes oldatának abszorpcióját a 4·035 moláris koncentrációnál és 4 cm-es rétegvastagság mellett az 5. ábra mutatja. Az 5. ábrából jól látható, hogy a $CaCl_2$ vizes oldata a középső ultraibolyában szelektív abszorpciós csíkot mutat és az abszorpciós maximum a $\lambda = 2694$ Å-nél van.

3. A $SrCl_2$ 1·5 mólos oldatának 4 cm-es rétegvastagság melletti abszorpcióját mutatja a 6. ábra.

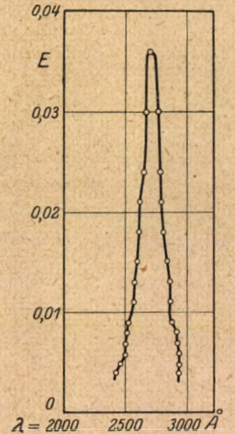
A $SrCl_2$ abszorpciós csíkja már gyenge és elmosódott. Az abszorpciós maximum helye: $\lambda = 2698$ Å.

4. A $BaCl_2$ 2 mólos oldatának 4 cm rétegvastagság melletti abszorpcióját a 7. ábra mutatja.

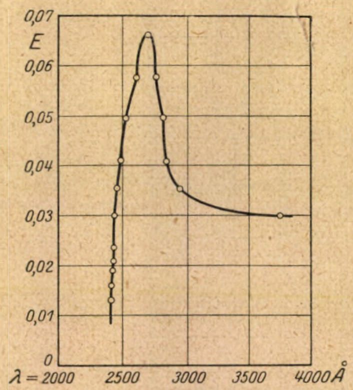
A $BaCl_2$-nak is van szelektív abszorpciós csíkja a középső ultraibolyában; a maximum helye: $\lambda = 2691$ Å.

5. A $MgCl_2$ ultraibolya abszorpciója 2·01 moláris koncentráció és 4 cm-es rétegvastagság mellett: (lásd a 8. ábrát). Az abszorpciós maximum a $\lambda = 2750$ Å hullámhosszúságnál van.

6. Ezután a $ZnCl_2$ vizes oldatának abszorpcióját mértem meg 1·03 moláris koncentráció és 4 cm-es rétegvastagság mellett (lásd a 9. ábrát).



5. ábra.



6. ábra.

A $ZnCl_2$ azonban már ilyen koncentráció mellett is oly nagymértékben hidrolizál, hogy az oldat kolloiddá válik. Ez a kolloid állapot az oldatot inhomogénná teszi s ezáltal — szóródás révén — az extinkció-koefficiensek értékét igen erősen megnöveli. Ezen zavaró hidrolizis visszaszorítása céljából az oldathoz ismert mennyiségű HCl-t adtam és a HCl ön-abszorpcióját a molekuláris extinkció-koefficiens értékek kiszámitásánál figyelembe vettem.

Az abszorpciós görbe maximuma a berendezésemmel még mérhető spektrális területen kívül esik.

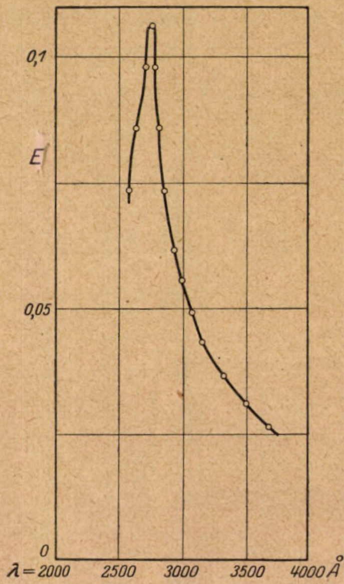
7. A 2 mólos $CdCl_2$ ultraibolya abszorpcióját 4 cm-es rétegvastagság mellett a 10. ábra tünteti fel.

Az abszorpciós maximum helyét a $CdCl_2$-nál sem tudtam meghatározni.

8. 5·01 mólos $LiCl$ abszorpciója 4 cm-es rétegvastagság mellett (l. 11. ábrát).

Az abszorpciós maximum helye a $\lambda = 2702$ Å hullámhosszúságnál van.

7. ábra.



8. ábra.

9. 2 mólos $CoCl_2$ ultraibolya abszorpciója 1 cm-es rétegvastagság mellett (lásd 12. ábrát).

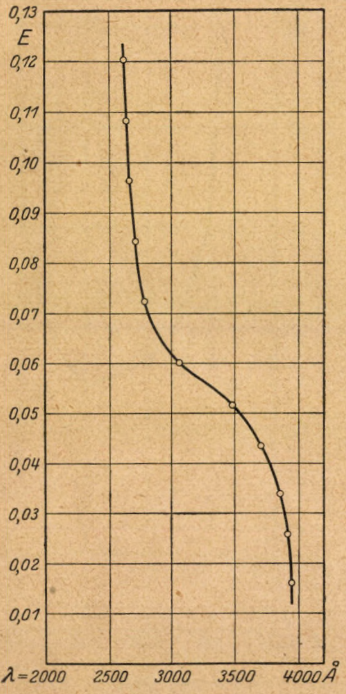
A vizsgált oldatok közül egyedül a $CoCl_2$ az, amelynek csak az abszorpciós minimuma esik a spektrum ultraibolya részébe, míg a két maximum kiesik az ultraibolya régióból. Az abszorpciós minimum helye: $\lambda = 3463$ Å.

10. Az 1·5 moláris koncentrációjú és 2 cm-es rétegvastagságú $MnCl_2$ ultraibolya abszorpcióját a 13. ábra tünteti fel.

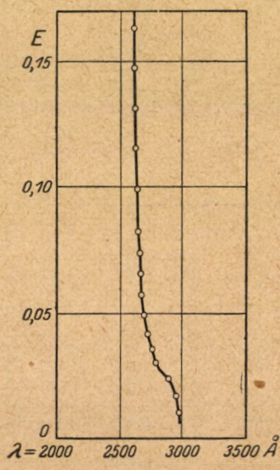
A $MnCl_2$ vizes oldatának abszorpciós görbéje — amint ez az ábrából leolvasható — a vizsgált spektrumrégióban 4 maximumot és 4 minimumot mutat. A maximumok helyei a $\lambda = 4060$, 3623, 2702 Å. hullámhosszúságnál vannak, míg a 4. maximum a vizsgált spektrumterületen kívül esik. A minimumok helyei a λ=2569, 3440, 3832 Å hullámhosszúságoknál vannak és a 4. minimum már a látható színkép területére esik.

11. Az $AlCl_3$ vizes oldatának 3·012 moláris koncentráció és 4 cm-es rétegvastagság melletti abszorpcióját a 14. ábra mutatja. Az $AlCl_3$ abszorpciós maximuma, amint az abszorpciós görbe lefutásából jól látható, a vizsgált spektrumrégión kívül esik.

*



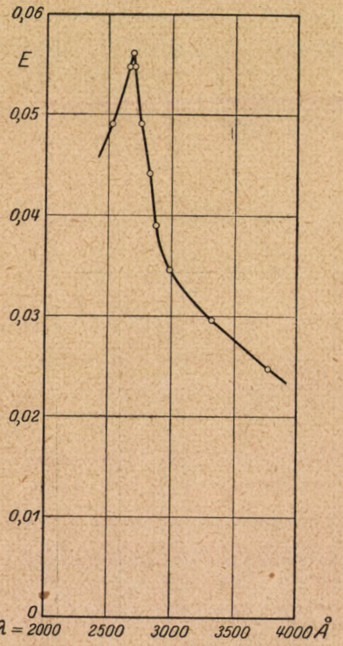
9. ábra.



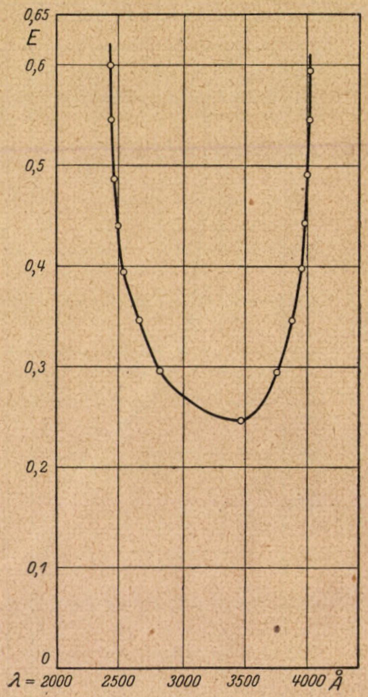
10. ábra.

Az eddigiekben felsorolt oldatoknál az extinkció-koefficiens méréseket csak úgy tudtam eszközölni, hogy elég koncentrált oldatokat vizsgáltam, lehetőleg nagy rétegvastagságok mellett. És így — mivel csak igen kicsiny, vagy éppen semmi koncentráció-intervallum állt rendelkezésemre, hogy a méréseket véghez tudjam vinni — a Lambert—Beer-féle törvény érvényességének vizsgálatára ezeknél az oldatoknál nem térhettem ki.

A LAMBERT—BEER-féle törvény érvényességének vizsgálata csak azoknál az oldatoknál vált lehetségessé, amelyeknél az abszorpció elegendő nagy ahhoz, hogy az egyes extinkció-koefficiens értékeket higabb koncentrációjú oldatoknál is meg tudtam határozni; így a $NiCl_2$, $CuCl_2$ és $FeCl_3$ vizes oldatainál.



11. ábra.



12. ábra.

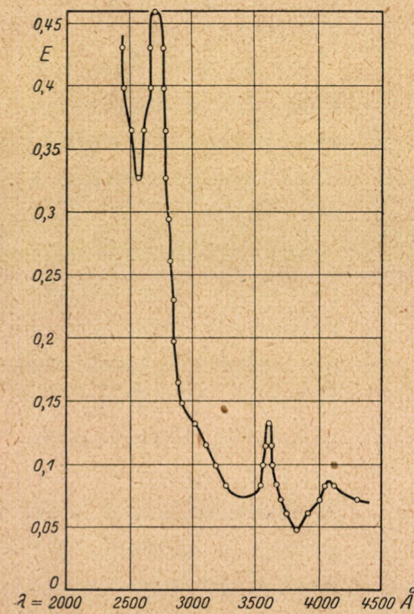
12. *α)* A $NiCl_2$ 1 moláris oldatának 1 cm-es rétegvastagság melletti abszorpcióját tünteti fel az 1. táblázat.

β) $^1/_2$ mólos $NiCl_2$ 1 cm-es rétegvastagság melletti abszorpcióját a 2. táblázat mutatja.

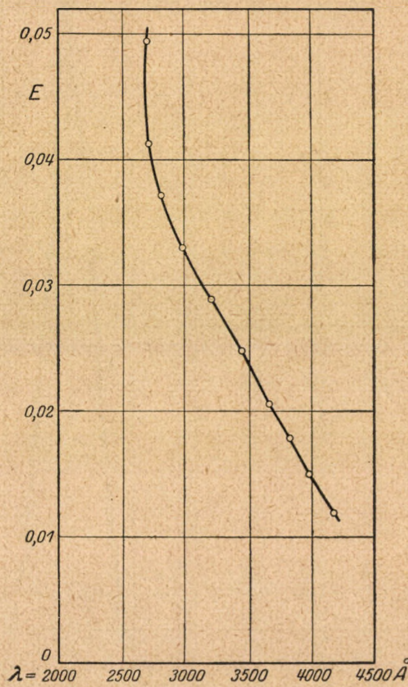
γ) $^1/_{10}$ mólos $NiCl_2$ 1 cm-es rétegvastagság melletti abszorpcióját mutatja a 3. táblázat.

δ) A $NiCl_2$ $^1/_{50}$ moláris oldatának 4 cm-es rétegvastagság melletti abszorpcióját a 4. táblázat tünteti fel.

Az 1., 2., 3. és 4. táblázat alapján megrajzoltam a 15. ábrán látható abszorpciós görbét. A rajzból látható, hogy az abszorpciós görbe lefutása mind a négyféle koncentrációnál azonos; amiből következik, hogy a *$NiCl_2$* vizes oldatainál a Lambert—Beer-féle törvény messzemenőleg érvényes. A spek-



13. ábra.



14. ábra.

trum ultraibolya és látható részének érintkezésénél a *$NiCl_2$* vizes oldatai határozott szelektív abszorpciós csíkot mutatnak.

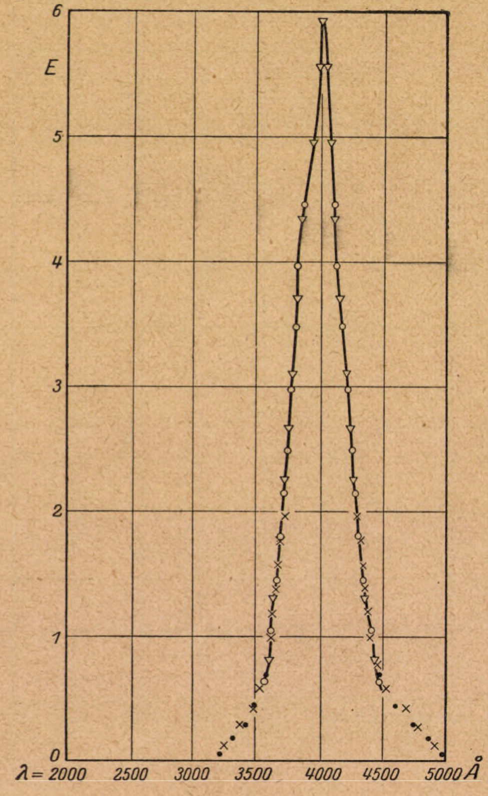
Az abszorpciós maximum helye a λ=4012 Å-nél, tehát a látható színkép határán van.

13. *a)* $^1/_5$ moláris *$CuCl_2$* oldat abszorpciója 1 cm-es rétegvastagság mellett (lásd az 5. táblázatot).

β) A *$CuCl_2$* $^1/_{10}$ mólos oldatának 2 cm rétegvastagság melletti abszorpcióját a 6. táblázat mutatja.

γ) $^{1}/_{50}$ mólos $CuCl_2$ 2 cm-es rétegvastagság melletti abszorpciója (lásd a 7. táblázat).

δ) A $CuCl_2$ $^{1}/_{100}$ moláris oldatának 4 cm-es rétegvastagság melletti abszorpcióját a 8. táblázat mutatja.



15. ábra.

ε) A $CuCl_2$ $^{1}/_{100}$ moláris oldatának 2 cm-es rétegvastagság melletti abszorpcióját a 9. táblázat tünteti fel.

ξ) A $CuCl_2$ $^{1}/_{100}$ moláris oldatának 1 cm-es rétegvastagság melletti abszorpcióját mutatja a 10. táblázat.

A $CuCl_2$ abszorpciójára vonatkozó vizsgálataimat grafikusan ábrázolva a 16. ábrán összefoglalva láthatjuk. Az abszorpciós görbékből leolvasható, hogy a Lambert-törvény érvényessége nyilvánvaló; viszont a szűkebb értelemben vett Beer-féle törvénytől elég nagyfokú eltérés mutatkozik. A Beer-féle törvénytől való eltérésnek R. Mecke és H. Ley[15] vizsgálatai alapján nyilvánvaló oka az autó-komplexképződés.

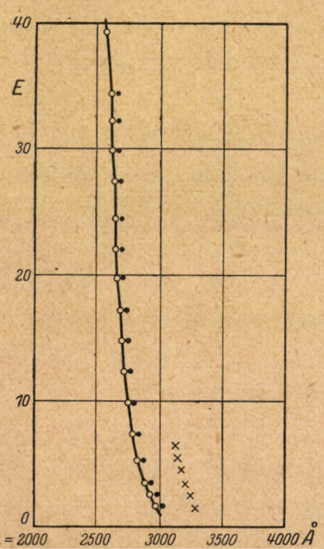
14. a) $^{1}/_{2}$ mólos $FeCl_3$ 1 cm-es rétegvastagság melletti abszorpcióját a 11. táblázat tünteti fel.

[15] Zeitschr. f. phys. Chem. 111, 385, 1924.

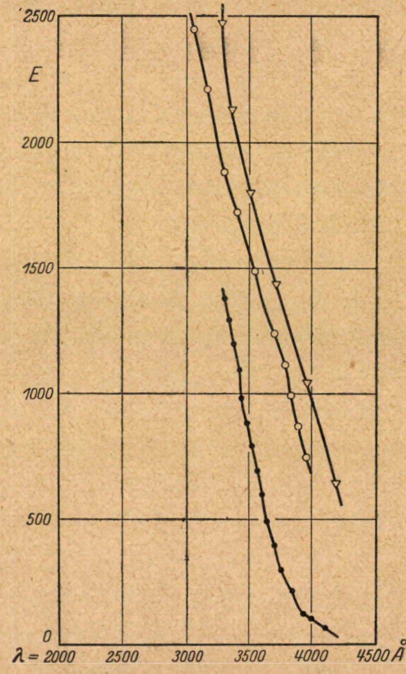
β) $^1/_{10}$ mólos $FeCl_3$ 1 cm-es rétegvastagság melletti abszorpcióját mutatja a 12. táblázat.

γ) $^1/_{50}$ mólos $FeCl_3$ 1 cm-es rétegvastagság melletti abszorpcióját a 13. táblázat mutatja.

δ) $^1/_{100}$ moláris $FeCl_3$ 1 cm-es rétegvastagság melletti abszorpcióját a 14. táblázat mutatja.



16. ábra.



17. ábra.

ε) $^1/_{1000}$ mólos $FeCl_3$ 1 cm-es rétegvastagság melletti abszorpcióját mutatja a 15. táblázat.

ξ) $^1/_{10,000}$ mólos $FeCl_3$ 4 cm-es rétegvastagság melletti abszorpcióját a 16. táblázat mutatja.

A táblázatokból látható, hogy a $FeCl_3$ koncentráltabb vizes oldatai az ultraibolya sugarakat teljesen elnyelik és az abszorpciós csík még erős higítás mellett is belenyúlik a látható színképbe. Ultraibolya abszorpciójának mérése csak igen nagy higítású oldatoknál válik lehetővé. A $FeCl_3$-ra vonatkozó mérések főbb eredményeit a 17. ábrán tüntettem fel. Az abszorpciós görbék lefutása mutatja, hogy a LAMBERT—BEER-féle törvény egyik része sem érvényes.

A LAMBERT-törvény érvénytelenségének igen érthető oka a TYNDALL-tünemény. Ugyanis a $FeCl_3$ ilyen higítású oldatokban kolloiddá válik s az oldatban lebegő kolloid-szemcsék a rájuk eső fényt szétszórják, ami az abszorpciót igen erősen fokozza. A szűkebb értelemben vett BEER-féle törvény érvénytelensége is könnyen érthető, ha meggondoljuk, hogy a $FeCl_3$ igen nagy mértékben hidrolizál,[16] úgyhogy már a csekélyebb higítású oldatokban igen kevés Fe^{+++} van és az oldat legnagyobb része hidrolizis-termék.

VIII. Összefoglalva eredményeimet, megállapítható, hogy:

1. határozott törvényszerűség mutatkozik az alkáli-földfémek chloridjainak abszorpciója között, amennyiben a *Ba, Sr* és *Ca* chloridok vizes oldatainak abszorpciós maximuma nagyon közel ugyanazon helyre és pedig $\lambda = 2690$ Å-re esik. Az egyes hullámhosszakhoz tartozó molekuláris extinkció-koefficiens értékek — *a periodusos rendszernek megfelelően* — a legnagyobbak a $BaCl_2$ és a legkisebbek a $CaCl_2$ vizes oldatainál.

2. A LAMBERT—BEER-féle törvény érvényességét a $NiCl_2$ $CuCl_2$ és $FeCl_3$ vizes oldatainál vizsgáltam és azt találtam, hogy a *$NiCl_2$-nál a törvény érvényes, a $CuCl_2$-nál a* LAMBERT-*törvény érvényes, ellenben a* BEER-*féle törvény érvénytelen, s végül a $FeCl_3$-nál sem a* LAMBERT-, *sem a* BEER-*féle törvény nem érvényes.*

*

Végül igen kellemes kötelességet teljesítek, midőn hálás köszönetemet fejezem ki úgy dr. RHORER LÁSZLÓ egyetemi ny. r. tanár úrnak azokért a hasznos gyakorlati és elméleti tanácsokért és útbaigazításokért, amelyekkel munkám közben ellátni szíves

[16] BJERRUM: Zeitschr. f. phys. Chem. 59, 350, 1907.

volt, valamint dr. GRÓH GYULA állatorvosi főiskolai ny. r. tanár úr Őméltóságának azért a nagybecsű támogatásért, amellyel az intézete tulajdonát képező eszközöket rendelkezésemre bocsátotta és állandó szíves érdeklődésével munkámat elősegitette.

A dolgozat qualitativ részét az *«Országos Természettudományi Alap»* támogatásával a m. kir. Erzsébet Tudomány Egyetem fizikai intézetében készitettem; a quantitativ méréseket pedig a m. kir. Állatorvosi Főiskola vegytani intézetében végeztem.

Pécs, 1929. március 12.-én.

Ifj. Koczkás Gyula.

DIE ULTRAVIOLETTE ABSORPTION DER ANORGANISCHEN SALZLÖSUNGEN.

Die wässerigen Lösungen der Chloride von *Ca*, *Sr* und Ba zeigen je eine selektive Absorptionsbande, deren Kopf ungefähr auf dieselbe Stelle, nämlich auf $\lambda = 2690$ Å fällt, während die Werte der molekularen Extinkcionskoefficienten vom *Ba* bis zum *Ca* abnehmen. Auch die Chloride vom *H, Li, Mg, Cd, Co, Mn, Zn, Al, Ni, Cu, Fe* sind untersucht worden. Das LAMBERT-BEERsche Gesetz gilt bei $NiCl_2$; bei $CuCl_2$ gilt das LAMBERTsche, dagegen nicht das BEERsche Gesetz; endlich hat bei $FeCl_3$ keines der beiden Gesetze Gültigkeit.

J. v. Koczkás.

1. táblázat.

Szektor-állás	Mol. ext. koeff.	Hullámhosszúság Å-ben kifejezve	
0·064	0·064	3222	4975
0·104	0·104	3238	4917
0·143	0·143	3292	4873
0·180	0·180	3322	4870
0·214	0·214	3367	4867
0·248	0·248	3382	4794
0·297	0·297	3407	4743
0·347	0·347	3451	4724
0·396	0·396	3480	4666
0·445	0·445	3489	4601
0·495	0·495	3510	4563
0·593	0·593	3539	4512
0·691	0·691	3569	4472
0·788	0·788	3601	4443
0·884	0·884	3609	4430
0·980	0·980	3619	4385

2. táblázat.

Szektor-állás	Mol. ext. koeff.	Hullámhosszúság Å-ben kifejezve	
0·064	0·128	3258	4906
0·104	0·208	3342	4820
0·143	0·286	3398	4772
0·180	0·360	3442	4739
0·214	0·428	3497	4685
0·248	0·496	3511	4622
0·297	0·594	3535	4520
0·347	0·694	3570	4462
0·396	0·792	3597	4443
0·445	0·890	3614	4404
0·495	0·990	3621	4394
0·593	1·186	3634	4375
0·691	1·382	3652	4355
0·788	1·576	3669	4336
0·884	1·768	3684	4316
0·980	1·960	3708	4297

3. táblázat.

Szektor-állás	Mol. ext. koeff.	Hullámhosszúság Å-ben kifejezve	
0·064	0·64	3565	4462
0·104	1·04	3609	4403
0·143	1·43	3639	4336
0·180	1·80	3678	4297
0·214	2·14	3718	4267
0·248	2·48	3747	4248
0·297	2·97	3767	4209
0·347	3·47	3805	4170
0·396	3·96	3813	4121
0·445	4·45	3861	4102
0·495	4·95	3939	4073
0·593	5·93	4013	

4. táblázat.

Szektor-állás	Mol. ext. koeff.	Hullámhosszúság Å-ben kifejezve	
0·064	0·800	3613	4442
0·104	1·300	3622	4357
0·143	1·788	3667	4299
0·180	2·250	3729	4259
0·214	2·675	3754	4232
0·248	3·100	3781	4200
0·297	3·713	3818	4144
0·347	4·338	3854	4102
0·396	4·950	3932	4054
0·445	5·563	3989	4039
0·475	5·941	4012	

5. táblázat.

Szektor-állás	Mol. ext. koeff.	Hullámhosszúság Å-ben mérve
0·064	0·320	3385
0·104	0·520	3372
0·143	0·715	3354
0·214	1·070	3348
0·297	1·485	3293
0·396	1·980	3278
0·495	2·475	3244
0·593	2·965	3225
0·691	3·455	3212
0·788	3·940	3197
0·884	4·420	3187
0·980	4·900	3172
1·097	5·485	3158
1·196	5·980	3142
1·293	6·465	3138
1·377	6·885	3129

6. táblázat.

Szektor-állás	Moll. ext. koeff.	Hullámhosszúság Å-ben kifejezve
0·064	0·320	3391
0·104	0·520	3381
0·143	0·715	3364
0·214	1·070	3353
0·297	1·485	3291
0·396	1·980	3282
0·495	2·475	3251
0·593	2·965	3228
0·691	3·455	3204
0·788	3·940	3181
0·884	4·420	3176
0·980	4·900	3157
1·097	5·485	3147
1·196	5·980	3139
1·293	6·465	3130
1·377	6·885	3121

Fodor János
Fodor
Fodor
Fodor J
Fodor J
Fodor János
Fodor János

7. táblázat.

Szektor-állás	Mol. ext. koeff.	Hullámhosszúság Å-ben kifejezve
0·064	1·650	3011
0·104	2·600	2954
0·143	3·575	2927
0·214	5·350	2864
0·297	7·425	2806
0·396	9·900	2771
0·495	12·375	2759
0·593	14·825	2731
0·691	17·275	2722
0·788	19·700	2713
0·884	22·100	2690
0·980	24·500	2685
1·097	27·425	2669
1·196	29·900	2664
1·283	32·325	2650
1·377	34·425	2646

8. táblázat.

Szektor-állás	Mol. ext. koeff.	Hullámhosszúság Å-ben mérve
0·064	1·650	2975
0·104	2·600	2934
0·143	3·575	2888
0·214	5·350	2834
0·297	7·425	2799
0·396	9·900	2753
0·495	12·375	2728
0·593	14·825	2703
0·691	17·275	2688
0·788	19·700	2663
0·884	22·100	2652
0·980	24·500	2648
1·097	27·425	2645
1·196	29·900	2621
1·293	32·325	2614

9. táblázat.

Szektor-állás	Mol. ext. koeff.	Hullámhosszúság Å-ben mérve
0·064	3·200	2930
0·104	5·200	2871
0·143	7·150	2821
0·214	10·700	2750
0·297	14·850	2700
0·396	19·800	2681
0·495	24·750	2667
0·593	29·650	2640
0·691	34·550	2606
0·788	39·400	2571
0·884	44·200	2563
0·980	49·000	2527
1·097	54·850	2497
1·196	59·800	2478
1·293	64·650	2457
1·377	68·850	2440

10. táblázat.

Szektor-állás	Mol. ext. koeff.	Hullámhosszúság Å-ben mérve
0·297	29·7	2625
0·396	39·6	2574
0·495	49·5	2530
0·593	59·3	2476
0·691	69·1	2440
0·788	78·8	2420
0·884	88·4	2393
0·980	98·0	2388
1·097	109·7	2380
1·196	119·6	2377
1·293	129·3	2352
1·377	137·7	2349

11. táblázat.

Szektor-állás	Mol. ext. koeff.	Hullámhosszúság Å-ben kifejezve
0·788	1·576	5090
0·884	1·768	5023
0·980	1·960	5004
1·097	2·194	4994
1·196	2·392	4984
1·293	2·586	4956
1·377	2·754	4937

12. táblázat.

Szektor-állás	Mol. ext. koeff.	Hullámhosszúság Å-ben kifejezve
0·214	2·14	5090
0·297	2·97	4994
0·396	3·96	4942
0·495	4·95	4705
0·593	5·93	4647
0·691	6·91	4588
0·788	7·88	4541
0·884	8·84	4525
0·980	9·80	4500
1·097	10·97	4452
1·196	11·96	4433
1·293	12·93	4404
1·377	13·77	4385

13. táblázat.

Szektor-állás	Mol. ext. koeff.	Hullámhosszúság Å-ben kifejezve
0·064	3·20	4878
0·104	5·20	4763
0·143	7·15	4705
0·214	10·70	4345
0·297	14·85	4218
0·396	19·80	4199
0·495	24·75	4180
0·593	29·65	4131
0·691	34·55	4091
0·788	39·40	4053
0·884	42·20	4029
0·980	49·00	4013
1·097	54·85	4013
1·196	59·80	4008
1·293	64·65	3983
1·377	68·85	3973

14. táblázat.

Szektor-állás	Mol. ext. koeff.	Hullámhosszúság Å-ben kifejezve
0·064	6·4	4582
0·104	10·4	4414
0·143	14·3	4238
0·214	21·4	4159
0·297	29·7	4121
0·396	39·6	4062
0·495	49·5	4033
0·593	59·3	4013
0·691	69·1	3964
0·788	78·8	3944
0·884	88·4	3935
0·980	98·0	3910
1·097	109·7	3905
1·196	119·6	3890
1·293	129·3	3877
1·377	137·7	3861

15. táblázat.

Szektor-állás	Mol. ext. koeff.	Hullámhosszúság Å-ben kifejezve
0·064	64	4111
0·104	104	4023
0·143	143	3954
0·213	213	3855
0·298	298	3770
0·396	396	3718
0·495	495	3658
0·594	594	3619
0·691	691	3579
0·788	788	3530
0·884	884	3490
0·980	980	3441
1·097	1097	3426
1·196	1196	3382
1·293	1293	3344
1·377	1377	3303

16. táblázat.

Szektor-állás	Mol. ext. koeff.	Hullámhosszúság Å-ben kifejezve
0·298	745·0	3967
0·347	867·5	3905
0·396	990·0	3846
0·445	1112·5	3797
0·495	1237·5	3708
0·594	1485·0	3549
0·691	1727·5	3410
0·788	1880·0	3319
0·884	2210·0	3168
0·980	2450·0	3064

1929. május 1-től 1930. május 1-ig befizetett tagdíjak és adományok.

Anderkó Aurél (8), **B**acsó E. Vilmos (6), Bauer Mihály (8), Blau Ármin (24), Bodócs István (6), Boharcsik Pál (14), Bresztovszky Béla (10), Bricht Lipót (8), Brummer Ernő (22), Bugarszky István (16), **C**saplár Konrád (6), Csegény Margit (8), Csízhegyi Lajos (18·50), Csősz László (6), **D**eutsch Lajos (8), Dér Zoltán (6), **E**berhardt Béla (10), Erdey-Grúz Tibor (16), Erdődy Imre (8), Éber József (8), **F**alábú Dezső (3), Faragó Andor (8), Farkas Dénes (8), Farkas Gyula (10), Fekete Jenő (20), Fenyvesi Andor (8), Finkey József (20), Forró Magdolna (8), Fraunhoffer Lajos (8), Fröhlich Károly (8), Fűzy Rezső (24), **G**oldziher Károly (8), Grosschmied Lajos (20), Grúber Nándor (8), Gyulay Zoltán (8), **H**aar Alfréd (20), Hajós Géza (6), Harkányi Béla (8), Hartly Domokos (6), Hausbrunner Vilmos (8), Havas Miksa (20), Heuer Ede (8), Holenda Barnabás (6), **J**anicsek József (8), id. Jurányi Henrik (8), **K**arai Sándor (6), Kedves Miklós (6), Kerber János (8), Kilcer Gyula (6), Klug Lipót (8), Koren Dénes (8), Koschovitz Gyula (8), Kőnig Dénes (8), Kövesligethy Radó (8), Kunfalvy Rezső (8), Kürschák József (24), **L**engyel Béla (16), Lóky Béla (8), **M**agdics Gáspár (8), Magi Ferenc (6), Magyar Márta (24), Mihalovits Alajos (6), Milakovszky László (12), Mátray Rudolf (10), **N**agy Gyula (6), Neubauer Konstantin (8), Neuhold Özséb (6), Nyáry Béla (6), **O**ltay Károly (10), Ortvay Rudolf (24), Oszlaczky Szilárd (8), **P**atai Imre (20), Patai László (8), Perényi (Runtágné) Gizella (4), Pécsi Albert (8), Pintér Mihály (8), Pogány Béla (8), Proszt János (8), **R**adó Simon (6), Rados Gusztáv (8), Rados Ignác (8), Rhorer László (10), Riegl Sándor (6), Rigó Ferenc (10), Romsauer Lajos (8), Róna Zsigmond (16), Rucsinszky Lajos (8), **S**árközy Pál (6), Schüssler Endre (6), Schmid Rezső (8), Scholz Pál (6), Schossberger György (6), Sebők Emmánuel (6), Skopál István (8), Somogyi Antal (40), Spitz Iván (8), Steiner Lajos (12), Strausz Hermann (8), Szabó Gábor (16), Szabó Gusztáv (8), Szántó Sándor (8), Szász Pál (8), Szekeres Kálmán (8), Székely Károly (12), Széky István (6), Szőke Béla (8), Szűcs Adolf (8), **T**ass Antal (8), Tihanyi

Miklós (6), Tóth Lajos (8), Török Elemér (12), Turán Pál (6), Vajnóczky István (6), Vámos Sándor (6), Vigassy Lajos (5), Vörös Cyrill (8), Walther Béla (8), Wein Livia (8), Winter József (8), Zigány Ferenc (8) Zipernovszky Károly (1·65).

Békéscsaba, Ág. ev. gimn. (6), Bicske, Állami polgári iskola (60). *Budapest :* Ganz Villamossági R. T. (8), Csillagászati intézet (8), Kegyesrendi tanárképző (8), Grill könyvkereskedés (8), Cisztercita tanárképző (8), Csongrád, reálgimn. (8), Debrecen, zsidó reálgimn. (6), felsőkereskedelmi iskola (6), Eger, reáliskola (6), Gyula, gimn. (6), Hajdunánás, ev. ref. reálgimn. (6), Hatvan, állami reáliskola (6), Jászberény, állami főgimn. (5·43), Kaposvár, állami főgimn. (4·80), Kecskemét, ev. ref. reálgimn. (6), Kisújszállás, ev. ref. gimn. (6), Pannonhalma, könyvtár (6), Sopron, állami reáliskola (6), bányászati főiskola (6), Szeged, állami polgáriiskolai tanárképző (6), Szegszárd, állami reálgimn. (6), Szentes, reálgimn. (6), Székesfehérvár, állami reáliskola (6).

Adományok :

Patai Imre 62 P, V. K. Miniszteriumtól 1000 P, «Széchenyi» tudományos társaságtól 3000 P.

Felhívás tagtársainkhoz!

A rendkívüli viszonyok súlyos helyzetbe sodorták Társulatunkat. Folyóiratunkat még redukált terjedelemben sem tudtuk volna megjelentetni, ha a tudományt megbecsülő, áldozatkész emberbarátok és intézmények nem jöttek volna segítségünkre. Ez a Társulatunk iránt megnyilvánuló bizalom mi ránk is kötelezettséget ró. Nekünk is erőnkhöz képest meg kell tennünk mindent, hogy Társulatunkat fenntartsuk és annak működését minél intenzivebbé tegyük. Ezt követeli tőlünk józanul felfogott saját érdekünk, ezt követeli hazánk érdeke is. Csak így alakul ki bennünk a jövőnk biztosításához annyira szükséges bizalmunk önmagunkhoz.

Kérjük ennélfogva tisztelt tagtársainkat,

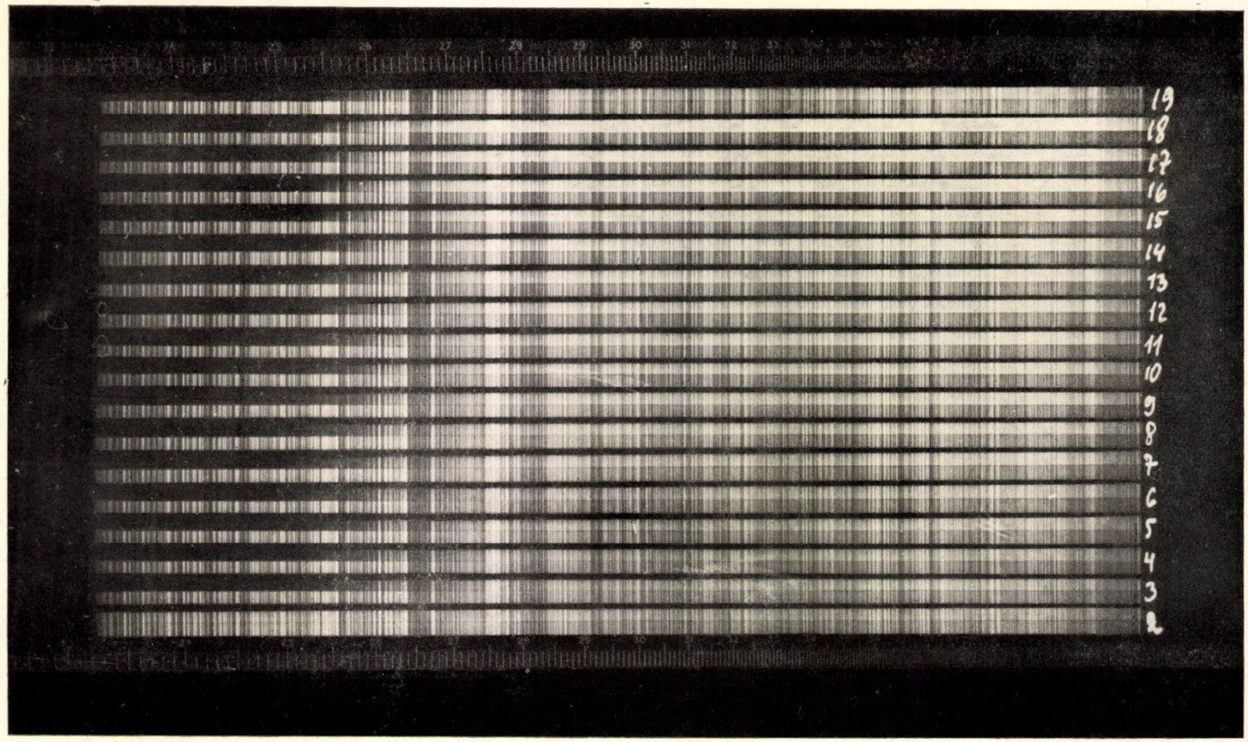
1. hogy hátralékos tagdíjaikat (évenkint 8, ill. 6 pengőt) szíveskedjenek *Nagy József* pénztárnoknak (Vác, Kegyesrendi gimnázium) befizetni,

2. hogy megváltozott új címeiket közöljék a Társulat pénztárosával,

3. hogy gyüjtsenek új tagokat.

Mat. és Fizikai Lapok.
XXXVI. kötet. I. tábla.

Ifj. Koczkás Gyula: Anorganikus sóoldatok ultraibolya abszorpciója.



Az 1926. évi május hó 22-én tartott közgyűlés 1927 január 1.-i hatállyal a tagdíjakat felemelte, budapesti tagok számára 8 pengőre, vidéki tagok számára 6 pengőre.

Minthogy a Matematikai és Fizikai Lapok egyes régibb évfolyamai teljesen elfogytak, kérjük tisztelt tagtársainkat, akik azokat nélkülözhetik, bocsássák a Társulat rendelkezésére.

A folyóirat szellemi részét illető közlemények a szerkesztőkhöz küldendők és pedig a matematikai tárgyúak *Fejér Lipót* **(V., Falk Miksa-utca 15.)**, a fizikai tárgyúak pedig *Pogány Béla* **(I., Budafoki-út 8.)** címére. T. munkatársainkat kérjük, hogy kézirataikban lehető rövidségre törekedjenek, azokhoz néhány soros idegennyelvű összefoglalást mellékeljenek és hogy arra pontos címüket írják rá.

Minden önálló cikk szerzőjének 25 borítéknélküli különlenyomatot adunk. Címzett boríték és több különlenyomat csak a nyomdával való külön megegyezés alapján kapható.

A Társulat ügyvitelére vonatkozó levelek, tagajánlások és folyóirat-cserepéldányok *Pogány Béla* titkár címére küldendők.

A folyóirat és a meghivók expedíciójára vonatkozó kérdések, reklamációk, valamint a tagsági és előfizetési díjak *Nagy József* pénztáros címére (Vác, Kegyesrendi gimnázium.) intézendők.

Austauschexemplare von Zeitschriften erbitten wir an die Adresse des Geschäftsführenden Secretärs *B. Pogány,* Budapest, I., Budafoki-út 8.

On est prié d'envoyer les exemplaires d'échange des périodiques à l'adresse du sécretaire *B. Pogány,* Budapest, I., Budafoki-út 8.

Felhívás tagtársainkhoz!

A rendkívüli viszonyok súlyos helyzetbe sodorták Társulatunkat. Folyóiratunkat még redukált terjedelemben sem tudtuk volna megjelentetni, ha a tudományt megbecsülő, áldozatkész emberbarátok és intézmények nem jöttek volna segítségünkre. Ez a Társulatunk iránt megnyilvánuló bizalom mi ránk is kötelezettséget ró. Nekünk is erőnkhöz képest meg kell tennünk mindent, hogy Társulatunkat fenntartsuk és annak működését minél intenzivebbé tegyük. Ezt követeli tőlünk józanul felfogott saját érdekünk, ezt követeli hazánk érdeke is. Csak így alakul ki bennünk a jövőnk biztosításához annyira szükséges bizalmunk önmagunkhoz.

Kérjük ennélfogva tisztelt tagtársainkat,

1. hogy hátralékos tagdíjaikat (évenkint 8, ill. 6 pengőt) szíveskedjenek *Nagy József* pénztárnoknak (Vác, Kegyesrendi gimnázium) befizetni,
2. hogy megváltozott új címeiket közöljék a Társulat pénztárosával,
3. hogy gyüjtsenek új tagokat.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA: GÉCZY KÁLMÁN