MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

★

JEDLIK ÁNYOS FÜZET

★

AZ EÖTVÖS LORÁND
MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

FEJÉR LIPÓT és POGÁNY BÉLA

HARMINCÖTÖDIK ÉVFOLYAM

1928

JANUÁR—JÚNIUSI FÜZET

BUDAPEST 1928

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LORÁND MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

TARTALOMJEGYZÉK.

Oldal

B. Eötvös Loránd: Jedlik Ányos emlékezete (Előadatott a M. Tud. Akadémia 1897 május 9-iki közülésén — 1

Holenda Barnabás: Jedlik életrajza — 23

Ortvay Rudolf: A vegyérték problémája a quantummechanikában — 40

Széll Kálmán: A gáz rotációs energiájának ingadozásáról — 56

Szűcs Adolf: Jelentés az 1928. évi Kőnig Gyula jutalomról — 61

Szegő Gábor: Korlátos hatványsorokra vonatkozó újabb vizsgálatokról 70

Grynaeus István: Az állandó görbületű terek görbéi — 96

Szász Pál: A differenciálszámítás egy általános középértéktételéről — 105

Tanulóversenyek — 117

Társulati élet — 123

MATEMATIKAI
ÉS
FIZIKAI LAPOK

HARMINCÖTÖDIK KÖTET

AZ EÖTVÖS LORÁND
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

FEJÉR LIPÓT és POGÁNY BÉLA

BUDAPEST 1928

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT

A MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

harmincötödik kötetének tartalma.

Oldal

B. EÖTVÖS LORÁND: Jedlik Ányos emlékezete (Előadatott a M. Tud. Akadémia 1897 május 9-i közülésén) ... 1
— A. Jedlik's Gedächtnis ... 22
HOLENDA BARNABÁS: Jedlik életrajza ... 23
— A. Jedlik's Lebenslauf ... 39
ORTVAY RUDOLF: A vegyérték problémája a quantummechanikában ... 40
— Über das Problem der chemischen Valenz in der Quantenmechanik 55
SZÉLL KÁLMÁN: A gáz rotációs energiájának ingadozásáról ... 56
— Über die Rotationsenergieschwankung im Gase ... 60
SZŰCS ADOLF: Jelentés az 1928. évi Kőnig Gyula jutalomról ... 61
— Rapport sur le Prix Jules Kőnig ... 69
SZEGŐ GÁBOR: Korlátos hatványsorokra vonatkozó újabb vizsgálatokról 70
— Über einige neuere Untersuchungen aus dem Gebiete der beschränkten Potenzreihen (Auszug) ... 90
GRYNAEUS ISTVÁN: Az állandó görbületű terek görbéi ... 96
— Sur le courbes des espaces à courbure constante ... 104
SZÁSZ PÁL: A differenciálszámítás egy általános középértéktételéről 105
— Über einen allgemeinen Mittelwertsatz der Differentialrechnnng ... 115
FORRÓ MAGDOLNA: A dielektromos állandó mérésével kapcsolatos kérdésekről ... 127
— Über Probleme, die im Zusammenhang mit der Messung der Dielektrizitätskonstanten auftreten ... 144
PATAI IMRE: A thermikus elektronemisszió és az izzókathódok technikája 145
— Die thermische Elektronenemission und die Technik der Glühkathoden ... 210
GYULAY ZOLTÁN és HARTLY DOMOKOS: Kősókristályok elektromos vezetőképessége egyoldalú nyomás alatt ... 214
— Elektrische Leitfähigkeit verformter Steinsalzkristalle ... 226
Tanulóversenyek ... 117
Társulati élet ... 123
Az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat 1927. évi zárszámadása és vagyonkimutatása ... 125

JEDLIK ÁNYOS EMLÉKEZETE.

Előadta

B. Eötvös Loránd.

(A M. Tud. Akadémia 1897 május 9-iki közülésén.)

Jedlik Ányos-ról, az ő csendes mederben lefolyt majdnem száz éves életéről és a magyar tudományosság szolgálatában kifejtett munkásságáról, az ő fényes tulajdonságairól és gyengéiről fogok itt megemlékezni, nem magasztaló, de meggyőződésem szerint igazságos szavakban, hogy kegyeletes tiszteletünknek iránta kifejezést adjunk és hogy az ő életének példájából mi is okulást merítsünk.

Nem tartozott ő a nemzet nagyjai közé, mint a legtöbben, akikről akadémiánk ünnepélyes ülésein eddig megemlékeztünk, legalább nem abban az értelemben, melyben ezt a jelzőt rendesen használni szoktuk. Az államférfi, ki egy nemzet sorsát viszontagságok között jóra vezérli, a költő, ki dalával majd vigasztalja, majd önfeláldozó tettekre lelkesíti, a történetíró, ki neki multjáról beszél és az alkotó művész, ki dicsőségének szobrot emel, mind, mind közelebb állanak a nemzet szívéhez és inkább számíthatnak elismerésére, mint a tudós, ki reá közvetlen befolyást nem gyakorol, kinek hazafiasságát különös tettekben kimutatni legtöbbnyire még alkalma sincs és aki, ha búvárkodása közben gyöngyöt talál, még azzal is nem kizárólag csak az ő, hanem az egész világnak szellemi kincsét gazdagítja.

Kimagasló hazafias tettek által Jedlik valóban nem fordíthatta magára kortársainak figyelmét, az ő hazafisága nem volt kivételes, csak olyan, mint Istennek hála! e nemzet fiainak milliói. Feltűnő tettekben, hangos szavakban nem nyilatkozott meg, ott volt elrejtve szíve mélyében, mint a természet rendje szerint anyjától öröklött adomány, de amikor kellett, a nagy és nehéz időkben, látszólagos álmából mégis öntudatra és tettre ébredt.

Jedlik élete folyamában is volt idő, melyben a nemzet sorsa iránti aggodalom minden más gondolatot, a hazafi kötelessége minden más munkásságot háttérbe szorított.

Akkor volt az, amikor 1848 március 15-ikén, mint a pesti egyetem bölcsészeti karának dékánja, ezeket írta be a kar naplójába: «Mindenki érzi, hogy ily mozgalmak között, valamint az egyetemi tanárok, úgy az egyetemi ifjúság közönyös állapotban nem maradhat», és más helyen: «Azon fontos és Magyarország történetében időszakot alkotó események tekintetéből, melyek e folyó hó 15-ik és következő napjaiban fejlődtek ki, ezen napló is ennekutána magyar nyelven vezettetik».

Később a tudós tanár és szerzetes beállott nemzetőrnek és még később, az elnyomatás idejében, amikor azt nem jó szemmel nézték, módot talált arra, hogy a magyar fiúkat magyarul tanítsa.

A veszély multán azonban visszatért, saját szavai szerint, megint a «közönyös állapotba» s újra napról-napra rendesen és odaadással végezte a maga dolgát.

Ilyen egyszerű, mint ő maga, volt az ő hazafisága is, nem különös jutalomra jogosító érdem, hanem csak kötelesség teljesítése és mégis sokszorozva milliók szívében egy nemzet életének és felvirágozásának legszilárdabb biztosítéka.

Kiváló érdemeit más téren, a tudományos munkásság terén kell keresnünk.

*

Maholnap annak a századnak végére érünk, melynek első napjaiban Jedlik született. Az emberiség művelődéstörténetében jelentőségteljes század volt ez, melyben a mult századok küzdelmei után végre felszabadult gondolkozás minden irányban kifejtette erejét és különösen a természettudományokban nagyobb haladást tett, mint előbb évezredek folyamában.

Tréfának megjárja, ha egyszer-másszor a «fin de siècle» jelszavával gúnyolódunk e teremtő korszaknak némely túlhajtott korcs kinövésén; de ha komoly ítéletet akarunk hozni s a század elejét annak végével összehasonlítjuk, akkor a haladáson örvendező bámulattal fogunk meggyőződni arról, hogy az emberiség e néhány emberöltő alatt mi mindennel gazdagodott. Ez a nagy haladás nem egyes kiváltságos nemzeteknek, hanem a nemzetek összeségének műve; a verseny közöttük, melynek végén mindegyik féltékenyen követeli az őt megillető babért. Be kell vallanunk, hogy nekünk e babérokból csak igen kevés követelni valónk van.

A magyar történet és nyelvtudomány, a jogi és államtudományok, melyek a nemzeti élethez közelebb vonatkozásban állanak, nálunk is már régebben nyertek polgárjogot, de a természettudomány, legalább még e század első felében, alig bírt művelődésünk talajában gyökeret verni s a kevesen, kik azt mégis művelték, távol a külföld éltető tudományos légkörétől, segítség nélkül környezőik részéről, valóban az úttörők nehéz munkáját végezték. JEDLIK is így magára hagyatva járt öncsinálta útján és mégis nem egyszer azon nagy felfedezések nyomán haladt, melyek e századnak dicsőségét teszik. Ő sokat keresett és sokat talált, de mert maga nem hirdette, honfitársai nem vették észre, a külföld nem látta az ő találmányait, azért a világ tudományos irodalmában az ő neve alig fordul elő a XIX-ik század felfedezőinek sorában.

Amit, mert nem tudott róla, nem tehetett meg a világ, tegyük azt meg legalább mi. Írjuk oda nevét alkotásaihoz.

*

Életéről nem sok mondani valóm van, mit is beszélhetnék a szerzetes viselt dolgairól, aki egész hosszú életében mindig csak rendjének jelszavát követte: «prædicale et docete» és akinek minden gondolatát Isten és tudománya foglalta el. A keveset, amit mégis elmondhatok, leginkább Szinnyei kérésére írt önéletrajzából tudom.

Jedlik 1800-ik évi január hó 11-én Szimő helységben, Komárom megyében, mint földműves szülők gyermeke született. A keresztségben az István nevet nyerte. Az írást, olvasást falujának iskolájában tanulta s azután tanulmányait a nagyszombati s utóbb a pozsonyi gimnaziumban folytatta. Az akkori gimnázium hat osztályának bevégezte után, 1817-ben, a Szent Benedekrend növendékei közé lépett és mint újonc Anianus, magyarosan mondva Ányos névvel jelölve az 1818-ik évet már Pannonhalmán töltötte.

Ez volt a döntő lépés életében.

Kezdete nemcsak tudományos pályájának, hanem egyénisége alakulásának, jelleme fejlődésének is. Mert bár nem vonhatjuk kétségbe, hogy a szülői ház szokásai s az otthon töltött gyermekévek apró eseményei még öreg korában is visszatükröződhettek némely egyéni sajátságain, mégis jellemének azon lényeges tulajdonságai, amelyek őt az utódok megemlékezésére méltóvá tették, az általa önelhatározásával választott családnak, a magyar bencés rendnek családi vonásait mutatják. A rendhitetetlen hit Istenben, a tudományszeretet, a tanítónak soha nem lankadó szorgalma, az embertársainak bajai iránt fogékony jó szív, az önzetlen hazaszeretet, mind olyan vonások, melyek Jedlik jellemében rendjének hagyományos szokásai nyomán indultak fejlődésnek és erősödtek meg. Szerzetesi életéből származott azonban egy nagy hibája is, a félénk elzárkózottság, amely akadályozta abban, hogy másokkal való érintkezése által tudományos látköre kibővüljön és hogy viszont ő tudományával másokra éltető hatást gyakoroljon.

A bencések rendjébe belépése óta nem fordult elő Jedlik életében olyan esemény, mely életfolyamának új irányt adhatott volna. Előbb rendjének iskoláiban tanult, azután azokban tanított, majd 1840-ben elfoglalta a pesti egyetemen a fizika tanszékét, melyre termettségét, az akkori szokás szerint, előbb versenyző vizsgán kellett kimutatni.

E tanszéken működött 1878-ig s akkor nyugalomba vonulván, visszatért a győri házba.

E rendes életpálya folyamán nem maradhattak el a rendesen szokásos kitüntetések sem. A pesti egyetem bölcsészeti kara 1848-ban dékánjává, az egyetem 1863-ban rektorává választotta, Ő Felsége 1867-ben a királyi tanácsosi címmel, 1879-ben, nyugalmaztatása alkalmából a III-ad osztályú vaskorona-renddel tüntette ki. A magy. tud. Akadémia 1858-ban levelező, 1873-ban pedig tiszteleti tagjainak sorába választotta.

Életviszonyairól nincs több mondani valóm, izléstelenség volna részemről, ha annak leirását e helyen az adatok részletezésével hosszúra nyujtanám, hamisítás, ha ezen, a kötelesség teljesitése közben napról-napra egyformán lefolyó élet egyes jelentéktelen eseményeit, mint érdekes bonyodalmakat tüntetném elő. A festő, ki a csendes tó síma tükrét akarja vásznára varázsolni, ne vegyen tarka színeket ecsetjére.

Amint viharok nélkül, békés egyformaságban vonultak el egymásután életének külső eseményei, úgy béke és egyensúly honolt az ő keble mélyében is. Azok a redők, melyeket mi az ő gyermekes ártatlanságot és kiváncsiságot sugárzó arcán évről-évre mélyebben bevésődni láttunk, nem a szenvedélyek és gondok, hanem a folytonosan kereső, megfeszitett gondolkozásnak redői voltak.

Az ilyen egyszerű, változatosság nélküli s a mellett oly igen hosszú életet sokan talán unalmasnak tartanák, Jedlik azonban soha sem unatkozott.

Egy rendtársa életének utolsó éveiben azt kérdezte tőle, «miért választotta tanulmánya tárgyául éppen a fizikát, miért nem például a theológiát, mely a legmagasztosabb dolgokkal foglalkozik?» Erre ő így felelt: «Látja, minden tudományágban tanulhattam volna eleget és szépet, de a fizikában tanulok és egyszersmind mulatok, gyönyörködöm is».

Nem a fizikát, mely csak annyira gyönyörködteti a vele foglalkozót, mint bármely más tudomány, hanem magát jellemezte ezzel az akkor már közel száz éves tudós, ki tudományában még mindig mulatságot és gyönyörűséget talált.

E saját vallomása nyomán kisértsük meg mi is jellemezni az ő tudományos egyéniségét, azért, hogy törekvéseit és sikereit jobban megérteni tudjuk.

Jedlik a bencésrend iskoláiban végezte felsőbb tanulmányait, azoknak rendeltetése szerint és a kor követelményeinek megfelelőleg tanult sok theológiát s a mellett valami kevés fizikát is. A theológiából eleget arra, hogy hitének tételeiben megerősödjék, a fizikából eleget arra, hogy felébredjen benne a vágy még többet tudni. Ez a tudásvágy azonban nem inditotta őt a végső okok kutatására, melyekre nézve hitében teljes megnyugvást talált, hanem csak arra, hogy a természet jelenségeinek részletes megismerésében keressen kielégitést. Az ő filozófiája nagyon egyszerű volt.

Isten teremtette ezt a világot a maga gazdag változatosságával és bámulatos rendjével és mert ez a világ szép és szépsége annál elragadóbb képekben tárul fel szemeink előtt, mennél behatóbban vizsgáljuk részleteiben, azért az emberi észnek nem lehet nagyobb gyönyörűsége e földön, mint a természet jelenségeinek ez a részletes kutatása. Ez volt a mulatság, ez volt a gyönyörűség, melyet neki a fizika szerzett. A forgó mágnesrudat, a rezgő fémrugót, a higany felületén végigsikamló hullámokat, a lepke szárnyainak csillogásával vetekedő karcolt üvegrácsot, a hatalmas elektromos szikrát órákon, napokon, évtizedeken át gyönyörködve figyelte meg. Csak másodsorban érdekelte az a kérdés, miért? tudta, hogy a felelet, melyet e földön arra nyerhet, megint csak újabb «miért»-re vezet, s erősen bízva hitében, ezt az utolsó kérdést jobb időkre halasztotta, akkorára, mikor a mennyekben Istennel egyesülve lesz. Életének utolsó napjaiban nehezen várta a percet, amelyben égbe szálló szelleme végre meg fogja érteni mindazt, amit e földön szemével látott, fülével hallott, gondolkozásában összegyüjteni és csoportositani tudott, de aminek végső okát véges ésszel még keresni sem merte.

Ez a tudományos hitvallása értetheti meg velünk tudományos munkásságát is.

Kutatásainak kezdete rendesen a gyönyörködés volt egy vagy más olyan egyszerű jelenségben, melyet laboratóriumában, néha régi könyvek, máskor frissen érkezett folyóiratok utasítása nyomán létesíteni tudott. Törekvése azután az volt, hogy a jelenséget szebben, feltűnőbben és újabb változatokban állítsa elő, nem is nyugodott meg addig, amíg tárgyát nem merítette ki, vagy nem jutott el valami olyanhoz, ami előtte új volt s ez által neki még fokozott örömöt szerzett. Azzal, hogy ami neki új, másoknak is az és a tudomány haladására fontos lehet, nem sokat törődött.

A XIX-ik század gazdag volt tudományos meglepetésekben. Az elektromosság, a fény, a hang jelenségeinek részletes kísérleti kutatása nem ritkán csodaszámba menő új dolgok hírét küldte a világba s e hírek szárnyra kelve, mindenütt újabb kutatásokat eredményeztek s így amint elterjedtek, egyszersmind tartalmukban is gazdagodtak. A hír, mely az igaz, sokszor csak elkésve kopogtatott Jedlik félreeső laboratóriumának ajtaján, ritkán került ki onnét újabb ékesség nélkül.

De ez a század nemcsak az új kisérleti tények felismerésében, hanem az elméleti összefoglalás tekintetében is nagy dolgokat végzett. Ez iktatta be a természettudományok épületének alapkövei közé, az anyag megmaradásának tétele mellé az erély megmaradásának tételét, ebben a században fejlődött ki a fénynek rezgési elmélete, ebben jutott diadalra az atomok ősrégi feltevése, leginkább a gázelmélet következtetéseiben. Be kell vallanunk, hogy mindezek az elméletek s az ellenőrzésükre irányult kísérleti vizsgálatok sohasem kötötték le Jedlik-ünk érdeklődését annyira, hogy fejlesztésükhez maga is hozzájárulhatott volna. Lehet, hogy mathematikai iskolázottságának hiányossága akadályozta ebben, de én alig hiszem, hogy még ha azt pótolta volna is, a felvett nyomon fürkészve, az ő, mindig tovább és tovább haladó gondolatmenete örömest felemelkedett volna az elmélet magaslataira, ahonnan körültekintve, szélesebb lesz a látókör, de a részletek eltörpülnek. Olyan volt ő, mint a bányász, aki ha gazdag eret talált, nem tud megválni az abban csillogó arany varázsától s annak nyomán tör előre addig, míg azt ki nem meríti vagy amíg az áttörhetlen kőzet erejét el nem bénítja.

Lássuk már most, mit is hozott ő ki a tudomány aranytermő aknáiból. Azon kezdem, ami neki a legkedvesebb volt, az elektromosságon.

A legmagasztosabb, a leginkább megrendítő elektromos jelenség kétségtelenül a villám, a haragos Zeus hatalmának megnyilatkozása, az Isten nyila, a fizikus műhelyében az elektromos szikra.

Guericke Ottó, a légszivattyúnak és az elektromozó gépnek felfedezője, a dörzsölt kéngolyót még csak sercegni hallotta és a sötétben gyengén világítani látta, az angol Wall azonban a XVII-ik század végén már szikrát csalt ki a borostyánkőből s azt a villámhoz, recsegő hangját pedig a mennydörgéshez hasonlította. Ettől fogva fizikus fizikussal azon versenyzett, ki tud hosszabb, fényesebb, csattogóbb, szóval a villámot jobban megközelítő szikrát létrehozni. Az elektromos gépek, melyekben a kéngolyót csakhamar üvegkorong váltotta fel, e versengés folyamán mind nagyobb és nagyobb méreteket öltöttek s végre létrejött a mult század csodagépe, Van Marum gépe, a leydeni Teyler múzeumban, mely bámulóit két láb hosszú szikrákkal lepte meg. Jedlik-nek ez nem volt elég, túl akart tenni még ezen is. Azok a gépek, melyeket ő a pesti egyetem szertárában talált, nevezetes eszközök voltak ugyan, amennyiben egy félszázaddal azelőtt a tudós jezsuita atya, *Domin Ferenc* elektromos gyógykezeléseinél tettek szolgálatot, Van Marum gépét azonban hatásképességben el nem érték. Ennél nagyobb új gépek beszerzésére nem gondolhatott, mert hogy is versenyzett volna a szerény pesti egyetemi szertár a dúsgazdag Teyler-múzeummal. Jedlik azonban mégis elérte célját, bár más utat választott s éppen ez az érdekes. Ő a szikra hosszát leydeni palackok sorozatának különös kisütési módja által növelte nagyra. Ugyanis négy, egész nyolc palackból álló telepét egy sűrítővé foglalva össze töltötte meg s azután gyorsan láncolatos sorozatba állítva sütötte ki. Sokféleképpen módosított eszközei között a legjobb az volt, melyet a Magyar Orvosok és Természetvizsgálóknak Pesten 1863-ban tartott gyűlésén mutatott be s annak munkálata sorában leírt. A 90 centiméter hosszú szikra, melyet azzal létrehozott, felülmulta mindaz addig ez irányban tett kisérleteket. Eszközének egy másik módositását, az úgynevezett csöves villamszedőt az 1873-iki bécsi kiállitáson is bemutatta és 1882-ben Carl Repertoriumában a nagy világgal német nyelven is megismertette. Addig az igaz, már Mach, Holtz és Planté is megtalálták a sűritők kisütésének ezen módját, Jedlik felfedezésének prioritását azonban magyar nyelvű értekezései kétségbevonhatatlanul bizonyitják.

E század első felében az elektromos szikra mellett talán a mágnes vonzása volt a legnépszerűebb laboratóriumi jelenség. Jedlik, hogy mennél erősebb mágnest készithessen, egy elektromágneses delejező gépet gondolt ki, mely a k. m. Természettudományi Társulat Értesitőjének IV. kötetében van leirva. De nem volna helyén, hogy itt aprólékosságokba bocsátkozzam már, azért sem, mert nagyobb dolgokról szólhatok.

Két nagy felfedezésről akarok emlitést tenni, az elektromágneses motorról és az elektromos dynamogépről, amely Jedlik magányos dolgozószobájában látott napvilágot, de sajnos ott rejtve is maradt. Sem ő maga, sem azok, akik nehezen hozzáférhető műhelyébe bepillanthattak, nem ismerték fel idejekorán e felfedezések jelentőségét s az őt gyönyörködtető experimentum csak olyan kezdet maradt, amelynek nem lett folytatása. Mások később találták meg ugyan ezen felfedezések magvát, de azt termékeny talajba tudták elvetni, hol az nagyra nőtt s ültetőinek babérkoszorút hajtott.

Maga Jedlik e felfedezéséről sem folyóiratokban, sem könyvekben nem tett nyilvános jelentést, az elsőről, az elektromágnesesen forgó készülékről azonban szeretett beszélgetni. Mikor és milyen okoskodások alapján sikerült neki először erre vonatkozó kisérlete, azt elmondta többek között nekem is, le is irta Heller Ágost tudós társunkhoz, a fizika avatott történetirójához, 1886-ban Győrből intézett levelében.

E forrásokból tudom, hogy amint ő 1825 őszén a bencésrend győri lyceumában a fizika tanításához hozzáfogott, figyelmét azonnal lekötötték az akkor még az újdonság varázsával is ható elektromágneses jelenségek. Ismételte ő is Örsted kísérletét, élénk érdeklődéssel figyelve meg a mágnestű áramokozta kitérését. Készített magának csakhamar egy Schweigger-féle multiplikátort is s abban, talán a hatás növelése végett a mágnestűt elektromágnessel cserélte fel. Amikor látta azután, hogy az áramtekercs az elektromágnest nagy erővel kilöki, eszébe jutott, nem lehetne-e azt folytonosan egyirányú forgásba is hozni. Egy kis módosítás az eszközön, mellyel az elektromágnest gerjesztő áram irányát a mozgás kellő pillanatában meg tudta változtatni, a kívánt eredményre vezetett. Mint ő mondja ez 1827-ben vagy 1828-ban történt.

Éppen az előadásra ütött az óra, amikor első ilynemű gépecskéjének egybeállításával elkészült és azt megindíthatta. Kötelességet mulasztani nem tudott, bement hallgatói közé, megtartotta előadását, de gondolata ez alatt is csak elektromágnese körül járt, amely nem csalta meg, hanem amikor vége lett az órának és megalkotója ismét előtte állott, még mindig vígan folytatta szakadatlan körmozgását. Még kilencvenéves korában is bizonyos meghatottsággal és gyemekes örömmel emlékezett vissza életének e dicsőséges pillanatára.

Vajha ő e dicsőségnek igazán öntudatára jutott volna. De ő maga nem tudta hinni, hogy nagy felfedezést tett, csak azért sem, mert az tőle származott.

Heller-hez így ír:

«Midőn ez imént tárgyalt villamdelejes forgásokra való készüléket 1827. és 1828. évek előtt jó eredménnyel létrehoztam, akkor még nem lehetett hasonlóknak leírását a kezemnél létezett folyóiratokban vagy munkákban találni és olvasni. Ezen körülménynél fogva részemről azon véleményben voltam, hogy a leírt villamdelejes készülékeknek és alkalmazási módjuknak én volnék a feltalálója, de csak a magam egyéniségére nézve, mert mint kezdő természettani tanárnak többször volt alkalmam azt tapasztalni, hogy némely természettani tünemények, melyekre csak saját belátásom és kutatásom útján jöttem, másoknál már jóval előbb ismeretesek voltak. E vélemény mellett még továbbra is megmaradtam. 1829-ben vagy 1830-ban valamely könyvben, valószínűleg «Dingler Polytechnisches Journal» egy kötetében találtam egy ábrát, mely az általam itt leírt gépekre vonatkozó ábrával annyira megegyezett, hogyha én az általam létrehozott villamdelejes készülékeket előbb közzétettem volna, azt kellett volna gyanítanom, hogy az illető írónak az általam közzétett leírás szolgálhatott alkalmul. De mivel én a villamdelejes forgásokról akkor semmit sem tettem közzé, meg kell azon nyugodnom, hogy azokat Örsted, Ampère, Schweigger és mások felfedezése nyomán saját iparkodásomnak köszönhetem. Jelenleg már bajos volna a prioritás miatt bárkivel vitatkozni.»

Nem tudom, bámuljam-e vagy hibáztassam ezt a majdnem páratlan szerénységet? De mindennek dacára az idők folyamában ide-oda mégis csak eljutott Jedlik-nek, mint az elektromágneses gép felfedezőjének híre és oklevélszerű bizonyítékok nélkül is hitelre talált.

Leginkább azon személyes érintkezés útján történhetett ez, melyre a Német Orvosok és Természetvizsgálóknak 1856-ban Bécsben tartott ülése szolgáltatott alkalmat, amelyen ama kor kiváló tudósainak társaságában 91 magyar és közöttük Jedlik is megjelent. E tudós fórum előtt két előadást tartott, az egyik «az elektromágnes alkalmazását az elektromágneses forgásoknál», a másik a Grove- és Bunsen-féle elemek egy új módosításáról szólt. Ez értekezéseknek a gyűlésről kiadott jelentések során megjelent szövegében egy szó sem fordul ugyan elő az ő 1830 előtti rokontárgyú kísérleteiről, lehetséges azonban, hogy ez alkalommal élőszóval közölt egyet-mást a régi dolgokról.

Tény az, hogy egyes tekintélyes tudósok még ma is megemlítik könyveikben az ő nevét, mint az első elektromágneses forgókészülék alkotójáét. Így Guillemin, Daguin, Pfaundler fizikai kézikönyveikben, Ferrini elektromossági technológiájában, Reitlinger az 1873-iki bécsi kiállításról szóló s Exner-től szerkesztett jelentésben.

Jedlik-nek egy másik szép felfedezése az elektromos dynamogépre, illetőleg annak alapelvére vonatkozik, de erről a világ már igazán semmit sem tudott; ő maga sem tett róla soha említést. Vessünk egy futó pillantást a dynamogép történetére.

Amióta Faraday nagy felfedezései által e század harmincas éveiben megmutatta, hogy a mágnes erő terében mozgatott vezetékben elektromos áram keletkezik, azóta ki volt jelölve az irány, melyen haladva az áramok gyakorlati értékesítése megvalósulhatott.

Gépet szerkesztettek gép után, de a própálgatások sokáig nem vezettek kielégitő gyakorlati sikerre, különösen azért nem, mert mindig csak úgynevezett állandó mágnesek erejét használták fel bennök. Nagyobb hatások elérésére pedig nagy és nagyszámú ilyen mágnesekre lévén szükség, ezek a gépek méreteit aránytalanul növelték s előállításukat költségessé tették.

Igazán nagy haladás, mondhatnám rohanás, e téren csak az 1867-ik év óta történt, amikor Siemens a berlini akadémia előtt kimondotta az ezután dynamo-elektromosoknak nevezett gépek elvét, amely szerint az indukált áram elektromágnesek útján maga erősbítheti meg majdnem határtalanul a létesítésére szükséges erőteret s ez viszont az áramot, a nélkül, hogy állandó mágnesekre szükség volna.

Ladd gépe, mely az 1867-iki párizsi kiállításon méltó csodálkozást keltett, volt az első, mely ezen elvnek életrevalóságát a tudományos világnak bemutatta.

Ténnyé vált ezután nemsokára a jóslat, mellyel Siemens fentidézett közleményét bevégezte:

«A technikának most már módjában áll határtalan erősségű elektromos áramokat előállitani mindenütt, ahol munkaerő áll rendelkezésére s ez a tény sokféle alkalmazásaiban nagyjelentőségű lesz».

Úgy lett. Alig három évtized mult el azóta s ma már városszerte jár az elektromos kocsi és világit az elektromos lámpa varázsfénye.

Az elektromos dynamogép eredetének ezen általánosan elfogadott történetével szemben vakmerőnek tűnhetik fel az az állitásom, hogy Jedlik már évekkel Siemens előtt felismerte az ettől kimondott elvet s arra alapitva előbb készitett tényleg működő gépet is, mint az angol Ladd.

A budapesti egyetem fizikai szertárában van egy elektromos motor és elektromos áramkeltő gyanánt használható gép, mely az intézet leltárába Jedlik kezeirásával a következő módon van bevezetve:

«Egy sarki villámindító (Unipolar-inductor)............

Célszerű használhatás végett az eszköz rövid leirása és kezelési módja az alapdeszka alá csatolt irásban olvasható. Kigondolva lőn Jedlik Ányos által, elkészitve pedig Nuss pesti gépész műhelyében. Beszerzési ideje 1861. Ára 114 frt 94 kr.»

A használati utasításban pedig, melynek első három pontja a gépnek motor gyanánt való használatára vonatkozik, a negyedik pont igy szól:

«4. Ha *a* és *c* szorítók egymásközt rézhuzallal összeköttetnek, *b* és *d* szorítók közé pedig Bunsen-féle elemek helyett egy Galvanometer vagy érintői tájoló foglaltatik, akkor a delej forgatása folytán a sokszorozó huzalban villamfolyam indíttatik, mely a forgatott delej tekercsén átmenvén, a delejt erősebbé teszi, az pedig ismét erősebb villamfolyamot indit stb.»

Ime a dynamogép elve tisztán és világosan kifejezve.

A leltár adata oklevélszerűen bizonyítja, hogy Jedlik Siemens-t legalább is hat évvel előzte meg, de az ő saját visszaemlékezései és a mechanikusnak állítása szerint valószínű, hogy a gép sokkal előbb, már az ötvenes évek elején munkában volt és csak teljes befejezése és kipróbáltatása után iktattatott a leltárba.

Jedlik e gépét másoknak nem igen mutatta, arról nyilvános közlést nem tett, még önéletrajzában sem emliti, megelégedett azzal, hogy maga megfigyelhette, hogyan növekszik gyorsuló forgása közben az áramot jelző mágnestű kitérése és később befogta mint hajtó művet abba az osztályozó gépbe, mellyel finom optikai rácsokat készített.

Elrejtett felfedezése nem szerezhetett neki hírnevet és nem is csodálkozhatunk azon, hogy a tudomány története inkább azoknak neveit örökíti meg, akik nemcsak maguk haladtak, hanem haladva az egész emberiség haladásának is új utakat nyitottak.

E helyen meg kell még említenem, hogy Siemens-nek felfedezésében volt még egy megelőzője, a dán Soren Hjorth, akiről tudjuk, hogy 1854-ben készített egy a dynamogéphez közel álló gépet, de az ő felfedezése is a nagy tudományos középpontoktól bár csak kissé félreeső Dániában, éppen úgy hatás nélkül maradt az elektrotechnika fejlődésére, mint a Jedlik felfedezése messze Magyarországban. Ez a kisebb nemzetek közös sorsa!

Más úton-módon, mint az elektromosság tana, haladt előre e század első felében az optika. Ebben a Young és különösen Fresnel lángeszével érvényre jutott elméleté lett a vezérszerep s a kisérletezőnek alig volt más feladata, mint az elmélet jóslatainak igazolása. Jedlik, aki tudományában inkább poéta volt, mint a számítás embere, ezen a téren nem tudta oly könnyen megtalálni az előre vezető fonalat, mint az elektromosság tanának néha még a terv nélkül barangolót is gazdag gyümölcsökkel jutalmazó mezején. De azért nem maradt közönyös az optika haladásai iránt s érdeklődését különösen az interferenciának tarka-barka jelenségei hosszú időre lekötötték. Ezekről értekezett a Magyar Orvosok és Természetvizsgálók 1845-iki s utóbb 1865-iki vándorgyűlésein. Törekvése megint leginkább az volt, hogy újat, az ismert szépnél még szebbet lásson s ezért nem elégedve meg Schwerdt-nek az elmélet nyomán haladó gyönyörködtető kísérleteivel sem, készített magának egy eszközt, melylyel a diffrakció jelenségeit újabb és újabb változatokban figyelhette meg.

A diffrakciót létesitő, átlyuggatott ernyő és az észlelő okulárja közé helyezett gyüjtőlencsét majdnem négy méter hosszú vályú mentén, az észlelő ülőhelyéből kezelhető fogantyúval, folytonosan eltolhatóvá tette s óra hosszat el tudta nézni, hogyan változnak át a diffrakció-képek a lencse ilyetén eltolódása közben. Valóságos kaleidoszkóp, mely éppen úgy, mint ez, ezer és ezer változatos képével mindig csak egy törvényt bizonyít be. Ezen, majdnem csak játékszer számba menő eszközénél komolyabb méltatást érdemel JEDLIK fáradozása finom optikai rácsok előállításában. Az ilyen rácsok e század ötvenes éveiben még a ritkaságok közé tartoztak, körrácsok, minőket ő készített, előtte úgy hiszem, egyáltalában ismeretlenek voltak. JEDLIK maga szerkesztette ezt a rendkívül finom mechanikai műveletre szolgáló gépet, amely avatott kezekben még ma is jó szolgálatot tesz Pannonhalmán, ahol a nyugalomba vonuló tudós, mint féltett kincsét elhelyezte.

A hatvanas évek végével JEDLIK figyelme az akusztika felé fordult.

HELMHOLTZ-nak az idevágó ismereteket egy egésszé összefoglaló könyve és népszerű előadásai ez időben nemcsak a fizikusok és fiziológusok, hanem a nyelvészek és zenészek, sőt az egész művelt világ körében érdeklődést keltettek a tudománynak ezen, előbb inkább csak egyes specialisták által művelt ága iránt. Mondhatnám, hogy az akusztikával foglalkozás ez időben divattá vált s ezt nem kis mértékben segítette elő az a kedvező körülmény, hogy csakhamar akadt egy mechanikus, KÖNIG Párizsban, ki az e tanulmányokhoz szükséges eszközöket gondos és tetszetős kivitelben a tudományos piacra hozta. JEDLIK is meghozatta ez eszközöket, próbálgatta őket s miután egy ideig szokása szerint zsémbelt a mechanikus munkájának tökéletlensége miatt, javítgatni kezdte őket, fúrt és faragott rajtok, később azonban, amikor még így sem elégedett meg velük, neki állott a dolognak s újakat csinált.

Az akusztikai kisérletek közül LISSAJOUS nak a lengések összetételét előtüntető alakjai gyönyörködtették őt leginkább. Főtörekvése az lett, hogy e mulékony alakokat papírra vagy üvegtáblára írva, mintegy megörökíteni tudja. A Magyar Orvosok és Természetvizsgálók 1872., 1874. és 1876. évi vándorgyűlésein új meg új erre szolgáló eszközöket mutatott be. Az utolsót, a legtökéletesebbet idevágó értekezésének címében így nevezi: «Két vagy három rezgésszerű és egy haladó mozgás összetételéből eredő mozgás útjának papírra vagy füstkorommal bevont üveglapra szalag alakban való leírására szolgáló készülék és annak használati módja».

Nem közönséges elmésséggel kigondolt eszköz ez, mely mint segéd a tanításban jó szolgálatot tehet.

A végére hagytam, mint a többitől különállót, JEDLIK-nek időben első dolgozatát a mesterséges savanyúvizek készítéséről, amelyet 1829-ben ETTINGSHAUSEN fizikai folyóiratában is közzétett. Ő maga írja ez értekezéséről önéletrajzában, hogy «érdemes volt azt németre fordítani és közzétenni, mert annak utasítása szerint minden savanyúvizet lehet mesterségesen utánozni és olcsón készíteni, sőt tetszésszerinti szénsavtartalmúvá tenni, ami akkor, midőn az úgynevezett szódavíz még nem készíttetett, elég érdekes vala».

GILBERT Annaleseiből értesült ő arról, hogy PAUL és GOFFE gyógyszerész Genfben már a mult század végén készítettek mesterséges savanyúvizeket oly módon, hogy a szénsavat nyomással préselték a vízbe. A nevezettek azonban titokban tartották erre szolgáló gépezetük berendezését. JEDLIK azért a maga terve szerint készített erre való gépet s azt teljes megelégedésére használta is. «Ne gondolja valaki» mondja értekezésének végén, «hogy az előállítási költségek nagyok s ezért e felfedezés, mint sok más, a gyakorlatban kivihetetlen volna. Ötven palack Rohitsi víz (az üveget és fáradságomat nem számítva) nekem bécsi értékben 10 forintomba került, tehát egy palack 12 krajcárba, egy palack Egeri víz pedig csak három krajcárba, holott nálunk az elsőt 48 krajcárért, a másodikat pedig 36 krajcárért árulják.»

De azért bármily jövedelmező üzletnek mutatkozott a savanyúvizek mesterséges gyártása, JEDLIK-ből még sem lett szódavízgyáros, figyelmét, gondolkozását már ekkor lekötötte a mágnestű, az elektromos áram s rejtélyes kölcsönhatásuk, amint arról már előbb beszéltem.

*

«A tudós életrajzának tárgyát leginkább irodalmi munkálatai teszik» így szól maga JEDLIK már említett önéletrajzi vázlatában. Ne alkalmazzuk ezt a tételt egész szigorúságában éppen ő reá, mert irodalmi hagyatéka alig fedi az ő tudományos munkásságát. Arra, hogy őt érdeme szerint méltányolni tudjuk, nem íróasztala mellett, hanem műhelyében kellett felkeresnünk, ahonét sok arra érdemes dolog soha napfényre sem került.

Maga az írás nem okozhatott neki nehézséget, legalább tiszta, majdnem javitás nélküli kéziratai, szabatos és világos mondatai ezt tanusitják, de bizalmatlansága a maga erejében sokszor visszariaszthatta attól, hogy gondolkozásának szülötteit a nyilvános kritika szigorának tegye ki. Ha valami bemutatni vagy közleni valója volt, azt legszivesebben a Magyar Orvosok és Természetvizsgálók vándorgyűlésére vitte. Ennek ülésein érezte ő magát legotthonosabban, ennek évkönyveiben jelent meg értekezéseinek legnagyobb része.

Akadémiánkban 1859-ben tartott székfoglaló értekezése után csak még egyszer tartott előadást a «RUMPELLES MIHÁLY kőbányai pincéjének beomlása által megsűritett légnek nevezetes hatásáról». Azóta itt elhallgatott, elriasztották őt a mathematikai formulák, melyek a jelenkor fizikájában mindinkább tért foglalván, az Akadémia fekete tábláján is megjelentek. E formulák nyelvét ő nem tudta már megtanulni és félt, hogy azok, akiket ő meg nem ért, őt sem fogják megérteni. Így bár az Akadémia megadta neki a tiszteletnek minden jelét, melyet tagjának adhat s ő is üléseinkben részt vevén, az Akadémia iránt mindvégig érdeklődést tanusított, mégis nem fejlődhetett ki közte és e tudományos testület között olyan bizalmas viszony, mely a kölcsönös támogatás által a tudományra nézve gyümölcsözővé válhatott volna.

Jedlik csak egy nagyobb munkát írt és adott ki 1850-ben, a «Súlyos testek természettanát», mint a természettan elemeinek első kötetét.

Azelőtt még ósdi felfogású, többnyire latin nyelvű tankönyvek forogtak a magyar tanulók kezében, olyanok, amelyekre jól ráillett az, amit Göthe a Johannes Baptista Horvát fizikájáról mondott: «Die alte Leyer». Jedlik könyvét a dogmatikus hangra oly könnyen ráhajló latin helyett magyar nyelven írta, mert amint maga mondja: «A magyar nyelvnek gyorsan terjeszkedő használata és azon mindinkább nyilvánuló közkívánat mellett, hogy az a holt latin nyelv helyett az oktatás terén is alkalmaztassék, egy latin szövegű tankönyv többé korszerű nem lehet». Munkája csonka maradt, sajnáljuk, hogy azt be nem fejezte, mert annak különösen az elektromosságra vonatkozó szakaszaiból bizonyára sok érdekeset tanulhattunk volna.

Mint népszerűsítő író, ki a nagy olvasó közönséghez fordul, Jedlik csak egy ízben vette kezébe a tollat, 1853-ban, amikor az asztaljártatás kérdéséről, ezen akkor az egész világot lázas izgatottságban tartó kérdésről a «Pesti Napló»-ban közölt néhány cikket.

Ezekben leírja idevágó, az angol kisasszonyok pesti nevelőintézetében végzett kísérleteit s a jelenség okát keresvén, azt a kezek reszketésében s a reszketés folytán összetevés útján fokozódó mozgásokban találja. Olvasóitól néhány szóval vesz búcsút, melyben a természettudós feladatáról szól s amit itt mond, az, amennyiben különös felfogását jellemzi, érdemes a feljegyzésre.

«Most már csak attól tartok, netalán valaki abban akadjon fel, hogy ezen a közönségnek játékul vált tüneményt oly komoly és részletes értelmezésre méltattam. Annak egyedüli oka, mivel az asztalmozgás is tünemény s mi több, oly tünemény, melynek oka nemcsak a nem tudósok, hanem a tudósok előtt is igen rejtélyesnek látszik. . . . . . . Az asztalmozgás tehát, mint tünemény bármely tudósra vagy természetvizsgálóra nézve nem lehet lealacsonyitó tárgy, ha annak létrehozásával és létrehozására befolyó kutatásával avégből foglalkozott vagy foglalkozandik, miként ezen meglepő tünemények valódi okát minél határozottabban megismerje s másokkal is megismertethesse, mert tudvalevő dolog, hogy minden természettudós kitűzött főcélja egyedül csak abban áll, miként minden előforduló tüneménynek, tehát az asztalmozgásnak is valódi okát lehetőleg felfedezhesse, mi kutatás nélkül vajmi ritkán sikerül.»

Jedlik-ről, a tanárról kell még szólanom. Ötvenhárom éven át tanította ő a fizikát, előbb a bencésrend győri lyceumában, utóbb a pozsonyi akadémián s végre 1840-től 1878-ig a pesti egyetemen. Előadása a kutató tudós előadása volt, ki hallgatóihoz úgy beszél, mint tudós társakhoz, kik előtt nem rejt el titkot, hanem felhívja leplezetlenül a maga gondolatmenetét. Az előadását élénkitő kisérleteket nem szokta volt előre elkésziteni. Behozatta az eszközt, egybeállította, működésbe hozta hallgatóságának szemeláttára, úgy hogy a kisérlet nekik nemcsak mutatványul, hanem igazi tanulságul is szolgált.

Ez előadási modorának megvolt a maga jó oldala, de voltak hiányai is. Jó volt benne különösen az, hogy valóban kísérleti előadásokat tartott már olyan időben, amikor még többnyire csak a kréta és spongya járta, kétségtelenül rossz azonban az, hogy kedvenc tárgyainak apró részletezése mellett elmulasztotta az egész tananyagnak áttekinthető összefoglalását.

Ma, amikor már több főiskolánk van s azokon egy-egy tudományszakot több tanár is tanit, az ő modorában tartott előadás gyümölcsözővé válhatik, de nem lehetett az az ő korában, amikor sokáig széles e hazában ő egymaga volt hivatva arra, hogy szakját tudományosan tanitsa.

Nem rajta mult azért, aki megtett minden tőle kitelhetőt arra, hogy feladatának megfeleljen, hanem viszonyaink kedvezőtlensége okozta, hogy tudományos iskolát teremteni nem tudott s hazánkban a tudományos fellendülés az általa művelt tudományszakban, úgy mint másokban is, csak akkor indult meg igazán, amikor a hatvanas évek végén tanulni vágyó ifjainknak megadatott a lehetőség arra, hogy a külföld egyetemeit nagyobb számban felkeressék.

*

Akinek munkásságával oly hosszasan foglalkoztunk, keressük fel őt pihenési helyén is.

1878-ban tanártársainak, régi tanitványainak tisztelete és és szeretetétől kisérve, királyi kitüntetéssel vonult nyugalomba. Visszatért a győri házba, honnét majdnem egy félszázaddal előbb indult el, hogy tanítói tisztét a zárda falain kívül is teljesitse. Tétlenül azonban ezután sem hevert. Egy rendtársa irja:

«Az öreg úr soha sem pihent, mindig tanulmányozott valamely eszközt vagy olvasott tudományos munkát, mindaddig, míg ágyba nem dőlt. A könyvkereskedők küldték neki az újonnan megjelent fizikai műveket s ő, minthogy ekkor már lassabban haladt az olvasásban, elkeseredve szokta mondani e könyvekre mutatva: «Csak időt is küldenének mindegyikkel». Szíves, udvarias modora dacára megtörtént nem egyszer, hogyha valamely rendtársa, neki szórakozást szerzendő, egymásután többször is elment hozzá beszélgetni, a látogatás ismétlésekor az öreg úr már türelmetlenül kérdezte: «hát az úrnak soha sincsen dolga? Nekem sok dolgom van».

Nagygyűléseinkre mindvégig eljárt s ilyenkor meglátogatta az egyetem fizikai intézetét is. Régi barátait, az ő kedves eszközeit nézegette meg, később már alig ismerte meg a legtöbbet, csak egy érdekelte mindvégig, a csöves villamszedő. Ezzel bajlódott ő legtöbbet, ez volt legkedvesebb gyermeke.

Részt vett rendesen nagygyűlési lakomáinkon is, ahol tudós társunk, György Endre szokott az öregekre s közöttük reá poharköszöntőt mondani. Kedélyesen mulatott ilyenkor közöttünk, csak egy panasza volt, hogy a mai fiatalok nem tudnak már fennhangon beszélni és hogy a szakácsok nem tudják már puhára főzni a húst. Egyébként meg volt elégedve a világ folyásával.

1895-iki nagygyűlésünk alkalmával már nem jelent meg közöttünk, otthon tartotta kilencvenöt évének súlya s 1896-ban, amikor a sor a György Endre pohárköszöntőjére került, nem hangzott többé fel az ő neve azoknak sorában, akiknek még e földön jót kivánhattunk volna.

Az öreg úr 1895 december 15-én örökre elszenderült. A halál neki nem lehetett nehéz tusa, erős hite szerint csak átköltözés földi boldogságból mennyei boldogságba.

Közöttünk már csak emléke él tovább, nem mint szellemóriásé, akit csak bámulni tudnánk, hanem mint úttörő munkásé, akit követhetünk.

Kellő iskolai előképzettség, vele együtt haladók támogatása és útbaigazító tanácsa nélkül, egyedül a maga erejéből, lankadatlan tudományszeretete által serkentve, küzdötte ő fel magát e század felfedezői sorába.

Ma mégis már kedvezőbbek tudományos viszonyaink, többen vagyunk, jobb iskolákban jobban készülhettünk elő, segédeszközökben gazdagabbak lettünk s a nagy világ tudományos intézményeivel is szorosabb kapcsolatba jutottunk, nekünk már könnyebb lehetne a haladás. De mindennek dacára ezzel megelégedve még sem lehetünk.

Jóakaratunkon nem múlik, de hiányzik nekünk egy, ami megvolt Jedlik-nek és kortársainak, az idő, melyet zavartalanul fordíthatnánk tudományos munkásságunkra.

Társadalmi életünknek az a sokféle követelése, mely a tudóst szobájának csendjében megzavarja és őt akarva, nem akarva, nyilvános szereplésre készteti és ehhez az az áldástalan szokásunk, hogy a reformok címén a munka elvégzéséhez mindig új meg új módon rendezkedünk, a helyett, hogy komolyan nekifognánk, szétforgácsolja képességünket, idő előtt kifárasztja erőnket.

Pedig a tudomány, mint féltékeny kedves, csak annak homlokára nyomja csókját, ki minden percét neki szenteli. Azért, ha komolyan akarjuk, hogy a tudományban valamikor a magyarok tudománya is számot tegyen, úgy kövessük Jedlik példáját s utasitsuk el a csábítót, ki mellékes foglalkozások útján könynyebben elérhető babérlevélkékkel kecsegtet az ő szavaival: «hát az úrnak nincsen dolga? nekünk sok dolgunk van».

Használja fel mindegyikünk azt az időt, melyet neki a mindenható e földi életútjára kimért, a maga elvállalt feladatának teljesitésére olyan kitartással és olyan takarékosan, mint ahogy felhasználta Jedlik azt a közel száz évet, amely Isten különös kegyelméből neki jutott.

Őrizzük meg az ő emlékezetét!

A. JEDLIK'S GEDÄCHTNIS.

Vorstehender Nachruf — gehalten von weiland Baron R. v. Eötvös am 9. Mai 1897 in der Ungarischen Akademie der Wissenschaften — wurde hier nochmals aus dem Anlass abgedruckt, dass es nunmehr gerade 100 Jahre her sind, dass Jedlik — von 1840 bis 1878 Professor der Physik an der Universität Budapest und Vorgänger von Eötvös — den ersten Elektromotor konstruiert hat, der im Phys. Institut der Pannonhalmaer Benediktinerabtei aufbewahrt wird. Im Jahre 1861 konstruierte Jedlik eine Dynamoelektrische Maschine, die sammt der von Jedlik niedergeschriebenen Gebrauchsanweisung im Phys. Institut der Universität Budapest aufbewahrt wird. In dieser Gebrauchsanweisung wird das Dynamoelektrische Prinzip 6 Jahre vor Siemens klar ausgesprochen.

JEDLIK ÉLETRAJZA.

I.

Jedlik István Ányos 1800 jan. 11-én született Szémőn, Komárommegyében. Szülői, Jedlik Ferenc és Szabó Rozália, egyszerű földmíves emberek voltak, jobbágyai a hercegprímásnak, akinek érsekújvári dominiumához tartozott Szémő. Jedlik Ferenc negyedtelkes gazda volt, de azért mégsem riadt vissza az anyagi áldozattól sem, amikor gyermekeinek a neveltetéséről volt szó. István fiát 10 éves korában Nagyszombatba vitte, hogy hosszabb ott-tartózkodása alatt megtanulja a tót nyelvet. Itt kezdte meg Jedlik gimnáziumi tanulmányait a bencések intézetében. A gimnázium negyedik osztályát azonban már Pozsonyban végezte a bencéseknél, mert apja ide vitte át, hogy a tót nyelv mellé még a németet is elsajátítsa. Így a körülmények szerencsés találkozása folytán már gyermekkorában három nyelven beszélt Jedlik, nem is számítva a latint, amelyet az akkori tanítási rendszer mellett szintén teljesen elsajátított tanulmányai közben.

A pozsonyi tanárok közül Gácser Leó, a későbbi dömölki apát volt rá legnagyobb hatással. Az ő befolyásának tulajdonítható, hogy a hatosztályú gimnázium elvégzése után Jedlik Pannonhalmára ment, hogy a bencés rendbe való felvételét kérje. Példáját követte osztálytársa és egyben unokatestvére, Czuczor Gergely is. Mindkettőjüket felvették és 1817 okt. 25-én öltötték magukra a Szent Benedek rend ruháját. Ekkor kapta Jedlik az Ányos nevet.

Az egyévi próbaév (noviciatus) kitöltése után a rend győri filozófiai tanfolyamán folytatta tanulmányait. Ez a kétéves tanfolyam tanulmányi szempontból körülbelül ugyanazt nyujtotta, mint az akadémiák bölcseleti fakultása. Jedlik előképzettségének megismerésére érdemes felemlíteni, mit is tanultak az akadémiákon fizikából abban az időben. A fizika csak a második évben szerepelt a tantárgyak között, éppen ezért a másodéves bölcsészeket fizikusoknak nevezték. Az 1806-iki Ratio educationis, amely az akadémiákon is szabályozta a tanítást, a fizika tanítási anyagát részletesen ugyan nem szabta meg, de a mennyiségtannak a fizikában való alkalmazásáról szólva, azt mondja, hogy főleg a nehézségi és vonzási erőket kell tárgyalni Kepler törvényeiből levezetve, azután még az ingalengés törvényeit, a lencsék és tükrök tulajdonságait. Nemcsak az anyag volt szűkre szabott, hanem még a megfelelő szaktanárok is hiányoztak. Egyáltalán abban az időben még meglehetős ismeretlen volt az a fogalom, amit most szakemberen értünk, az akkori főiskolák tanárai inkább polihistorok voltak, mint egy-egy szak alapos ismerői. Jedlik-et is mennyiségtanból és fizikából Győrött Czinár Mór tanította, a bencés rendnek kiváló tagja, később akadémikus, aki azonban tudós hírnevét inkább történelmi munkáival szerezte meg. Ily körülmények között nyilvánvaló, hogy a bölcseleti tanfolyamon inkább csak kedvet kaphatott Jedlik a fizika iránt, mint igazi alapos bevezetést a a fizika tudományába. Ez a körülmény persze hatással volt tudományos egyéniségének kialakulására is.

A bölcseleti tanfolyam elvégzése után Jedlik visszakerült Pannonhalmára, hol megkezdte teológiai tanulmányait. E mellett Horváth Pál kormányzó apát külön parancsára készült a bölcseleti doktorátus letevésére. Ez szintén nem jelentett egy meghatározott tudományágba való elmélyedést, mert a doktori fokozat elnyerésére akkor matematikából, fizikából, filozófiából és történelemből kellett vizsgázni. Miután Jedlik 1821 és 1822-ben ezeket a szigorlatokat letette, 1822 okt. 31-én megkapta az artium liberalium et phylosophiæ doktori címet. Ugyanebben az évben a rendi elöljáróság Győrbe helyezte, hol a harmadik grammatikai osztálynak lett a tanára. De ez a működése csak egy évig tartott, ezután visszament Pannonhalmára teológiai tanulmányainak folytatására, minek végeztével 1825 szept. 3-án áldozó pappá szentelték.

Kissé részletesebben foglalkoztunk Jedlik tanulmányainak ismertetésével, de erre szükségünk van, hogy helyesen tudjuk megítélni tudományos működését. Az iskolákban szerzett teológiai ismereteket, bizonyos általános műveltséget, volt megfelelő nyelvismerete, de semmi sem volt, ami őt valami szaktudomány mivelésére predesztinálta volna, csakis szellemének sajátos rátermettsége. Elvégezte iskolai tanulmányait s mivel nem volt senki az országban, akinek a segítségére, útbaigazítására számíthatott volna, aki irányt tudott volna szabni kutatása számára, a maga erejéből kellett nekiindulni a tudományos munkálkodás rögös útjának. Neki is végig kellett csinálni azt a sok csetlést-botlást, félig tudatos próbálkozást, ami minden autodidaktának az osztályrésze s ami annyira megbénítja éppen a fiatal évek munkálkodását, amelyek pedig a legértékesebbek szoktak lenni.

Jedlik fizikai munkálkodása Győrött kezdődött meg. Ide diszponálta a rendi vezetőség mindjárt a fölszentelése után, hogy a rend filozófiai tanfolyamán a természettant, természetrajzot és mezőgazdaságtant tanítsa. Ezzel határozott irányban terelődött munkálkodása s a természettudományok, ezek közül is különösen a fizika foglalták le lassankint minden érdeklődését. Alkalma volt új hivatásában német tudományos folyóiratokat tanulmányozni s így hamarosan felkeltette figyelmét az a hatalmas nekilendülés, amelyet az elektromosságtan éppen abban az időben mutatott. Ő is elkezdett ezekkel a problémákkal foglalkozni s bár nem volt különösebb kézügyessége, mégis maga is megpróbálkozott a folyóiratokban olvasott készülékeknek összeállításával. Különös tehetsége, amely a XIX. század legnagyobb fizikai felfedezőivel állítja őt egy sorba, már akkor jelentkezett. Összeállította 1827—28-ban az első elektromotort s bár nem is publikálta eredményét, kétségtelen, hogy találmányával időben megelőzte mindazokat, akiket külföldön az elektromotor feltalálói gyanánt említenek. De az elektromosságtan nem az egyedüli terület volt, amelyen abban az időben a kutatásait megkezdte. Majdnem ugyanerre az időre esik a szódavíz készitésének a feltalálása is, amely, ha nem is olyan nagyjelentőségű, jól mutatja szellemének irányát, amely őt annyira képessé tette a felmerülő problémáknak gyakorlati irányban való megoldására. Ezzel a találmányával indult meg irodalmi működése is. Találmányáról szóló latinnyelvű értekezését beküldötte a BAUMGARTNER és ETTINGSHAUSEN szerkesztésében Bécsben megjelenő Zeitschrift für Physik und Mathematik-hoz és ETTINGSHAUSEN németre fordítva 1829-ben le is közölte.[1]

KOVÁCS TAMÁS főapát 1831 áprilisában Győrből Pozsonyba helyezte JEDLIK-et, a pozsonyi akadémián lett a természettan, természetrajz és mezőgazdaságtan tanára. A bencésrend ugyanis 1816-ban vállalkozott arra, hogy a pozsonyi akadémia filozófiai karát ellátja tanárokkal. Ennek megfelelően, ha valamelyik tanszék megüresedett, azt lehetőleg bencésekkel töltötték be.

A pozsonyi fizikai szertár, amelyik JEDLIK rendelkezésére állott, meglehetősen hiányos volt. Alapját az a néhány természettani műszer és természetrajzi preparátum alkotta, amelyeket 1784-ben Nagyszombatból Pozsonyba hoztak, amikor az akadémiát ide áthelyezték. A gyarapodás igen lassú volt, mert az évi 40 forintos általány majdnem egészében elfogyott javításokra, apró pótlásokra, újabb beszerzésre alig maradt valami. JEDLIK külön segélyeket próbált kieszközölni. «A bencések — írja ORTVAY[2] — névszerint JEDLIK és RÓMER tekinthetők tulajdonképpen a múzeum legbuzgóbb gondozóinak, amint tényleg ők voltak azok, kik fáradságot s az instanciázással összekötött vesződséget nem kimélve, a gyüjtemény kiegészítésére lehetőleg törekedtek.» JEDLIK fáradozásainak lett is valami eredménye. Már 1835-ben kapott nagyobb segélyt, 1839-ben pedig 1340 fo-

---

[1] Zeitschrift für Phys. u. Math. VII. k. 1829. 47—58. l.

[2] ORTVAY T.: Száz év egy hazai főiskola életéből. 1884. 92. l.

rintot utaltak ki neki, hogy abból szerezzen be egy-egy mágneselektromos gépet a pozsonyi, kassai, váradi, győri akadémiák és a pesti egyetem részére. Ebből az intézkedésből is látszik, hogy már akkor őt tartották az ország első fizikusának.

Megfelelő tankönyv hiányában már ebben az időben foglalkozott Jedlik azzal a gondolattal, hogy egy nagyobbszabású fizikai kézikönyvet ír. Az akkori tanítási nyelvnek megfelelően latin fizikát kezdett írni, de amikor már munkájának nagyobb része elkészült, abbahagyta a könyvírást, mert látta, hogy már nem lenne időszerű latinnyelvű fizikát írni akkor, amikor mindinkább előtérbe lép az a gondolat, hogy a tanítás nyelvévé is a magyart kell tenni.

Már pozsonyi tanársága elején, 1831 augusztusában gondolt arra, hogy pályázik a pesti egyetemnek fizikai tanszékére, amely akkor Tomcsányi Ádám halálával megüresedett. Azonban ekkor még a főapát lebeszélte. Amikor azonban 1837-ben újra megüresedett a tanszék, ő is pályázott. Ekkor már másodízben szerepelt azon a vizsgálaton, amelyet az akkori rendelkezések az egyetemi tanárságra pályázók számára előírtak. Ez a vizsga írásbeli és szóbeli részből állott. 12 órai munkaidő alatt kellett kidolgozni három előírt tételt, azután következett a szóbeli vizsgálat, ahol tetszésszerint választott témáról kellett előadást tartani 20 percig latin és német nyelven. Az akkori magyarországi tudományos állapotokra jellemző, hogy a tanszékre pályázók között volt egy Vencel nevű fiatal ügyvéd is, aki saját bevallása szerint fizikai kisérleteket, különösen újabbakat sohasem látott s mindössze három hónapig foglalkozott fizikával, t. i. a pályázat kihirdetésétől a vizsga napjáig. Mégis voltak a vizsgabiztosok között, akik erősen pártolták. A vizsga eredménye alapján Jedlik-et nevezték ki egyetemi tanárnak, aki 1840 márc. 1-én el is foglalta a katedráját.

II.

Az eredményes természettudományi vizsgálódásnak elengedhetetlen feltétele a jól felszerelt szertár, laboratórium. Ennek teljes tudatában volt JEDLIK is, annál is inkább, mert már pesti tanársága előtt módjában volt áttanulmányozni a monarchiának nevesebb főiskoláit éppen ebből a szempontból. A pesti egyetem fizikai szertára ebben az időben még nagyon is hiányosan volt felszerelve és a 64 forintos évi átalány mellett gondolni sem lehetett arra, hogy a hiányokat pótolva, a szertár fejlesztésében lépést lehessen tartani a fizikának már mindinkább rohamossá váló fejlődésével. Hogy ezen a téren megtegyen minden lehetőt, ennek kellett akkor az egyetemi tanár első kötelességének lenni. Jól lehet látni JEDLIK hátramaradt feljegyzéseiből[1] az anyagi segédeszközökért való azt a sokszor hiába való küzdelmet, amelyik egyetemi tanárságának első éveit jórészt lefoglalta. Egyik folyamodványt a másik után adja be. Hivatkozik arra, hogy a szertár évi 64 forintos átalánya majdnem egészen elfogy javításokra, alig marad valami új beszerzésekre. Így pl. 1843—46-ig mindössze 141 váltó forint 44 krajcárt, tehát körülbelül 56 pengő forintot tudott csak új eszközök beszerzésére fordítani. Hivatkozik külföldi példákra. A bécsi egyetem már 1835-től kezdve évi 1100 forintot kapott a természettani szertára számára, azonkívül többször nagyobb segélyt. Még a hazai tanintézetek között sem foglalja el a pesti egyetem ebből a szempontból az első helyet. Egyik jelentése szerint a szegedi, pécsi, nagyszombati líceumok, a pápai kollégium, a pesti ipartanoda mind nagyobb jutalékot kaptak a természettani szertár számára, mint a pesti egyetem.

A sok folyamodásnak csak 1852-ben lett látható eredménye, a szertár általányát felemelték 420 o. é. forintra, ami 400 pengőforintnak felelt meg. Közben már a saját pénzéből is sokat áldozott a szertár fejlesztésére, hogy legalább némileg megmentse a fizikai szertár becsületét. Ez az összeg 1848-ig már 1572 p. forintra nőtt, ami nagyon is tekintélyes összeg volt, ha figyelembe vesszük, hogy egyetemi tanári fizetése abban az időben csak 1000 p. forint volt. Ezt a kiadását később részben

[1] Pannonhalmi kézirattár.

megtérítették, mert 1850-ben a tőle beszerzett szerek megvál tására 971 p. forintot utaltak ki neki.

Jedlik egész 1850-ig az egyetemen levő mérnöki intézetben Institutum Geometricum) is tanított, az elektromosságtanból tartott előadásokat. Itt is, meg egyetemi előadásaiban is a latin nyelvet használta az akkori rendelkezéseknek megfelelően, de örömmel fogadta az 1843—44. országgyűlés határozatát, amely a közoktatás hivatalos nyelvévé a magyart tette: «Legelőször is honi nyelven szólítom önöket — mondotta 1845 okt. 8-iki beköszöntő beszédében,[1] — hogy éldelhessék azt az örömöt, amelyet minden honát szerető magyarnak érezni kell, midőn a köz kívánságát méltányló Felséges királyunk a nagyméltóságú Magyar Helytartó Tanács útján honi nyelvünknek is kitárta tanodáink ajtaját; honi nyelven szólok azért is, hogy mindenkit, akinek eddig ezt sajátjává tenni feleslegesnek látszott, emlékeztessek, miszerint már nem elégséges csak születési hely tekintetéből magát magyarnak vallani, hanem nyelv tekintetéből is történendő magyarosodás a jelen kor szelleme által kérlelhetetlenül szorgalmaztatik.»

Nagy nehézséget okozott azonban az egységes magyar műszavak hiánya, azért először a magyar tudományos nyelvet kellett kialakítani, mielőtt a rendelkezést teljes egészében végre lehetett volna hajtani. A hiány pótlására Jedlik is résztvett a Toldi vezetése alatt álló vállalatban, amelynek célja éppen az volt, hogy különösen a középiskolai oktatás számára megállapítsák az egységes magyar tudományos műnyelvet. Az 1858-ban megjelent Német-magyar tudományos műszótárban ő írta a fizikai, kémiai és mechanikai részt.

Jedlik érdeklődését egyetemi tanárságának első idejében az elektromosságtan mellett főleg a fénytan kötötte le. Szelleme irányának megfelelően itt is nem annyira a Fresnel által felvetett elméleti problémák érdekelték, hanem inkább a tüneményeknek minél szebben való előállítása s az ehhez szükséges esz-

[1] Pannonhalmi kézirattár.

közök tökéletesítése foglalkoztatták. Már FRAUNHOFER megállapította, hogy a fényelhajlásnál létrejövő színtünemények különösen jól tanulmányozhatók az optikai rácsok segítségével, amilyeneket már ő is készített. Ilyen optikai rácsok készítésére szolgáló osztógépet mások is készítettek, de ezeknek szerkezetét nem ismertették és optikai rácsokat forgalomba nem hoztak. Ez vezette JEDLIK-et arra a gondolatra, hogy ő is készít ilyen osztógépet. Hamarosan munkába is fogott és a Magyar Orvosok és Természetvizsgálók Pécset tartott VI. naggyűlésén (1845) már be is mutatta a fényelhajlás tüneményeit oly optikai rácsok segítségével, melyek az ő osztógépén készültek.

Gépe nem meglevő készülékek utánzása, hanem eredeti találmány. Az egésznek lelke egy finom csavar, amely a hozzátartozó fogaskeréknek egy-egy fokkal való tovaforgatásakor, a milliméternek csekély tört részével juttatja előre a karcoló készüléket. Eredetileg két csavar tartozott hozzá, amelyeknél egy csavarmenet magassága $1^1/_3$ mm volt, a hozzájuk tartozó fogaskerekek közül pedig az egyiknek 100, a másiknak 200 foga volt; így ezzel a berendezéssel 75, illetőleg 150 vonalat lehetett húzni 1 milliméteres közre. Ugyanis, miután a fogaskerék egy-egy fokkal tovább fordult, alkalmas szerkezet gyémánt-tűvel egy-egy finom vonalat karcolt az üveglapra. 1845-ben csak az első csavar volt készen, az akkor bemutatott rácsoknál egy újjnyi szélességre körülbelül 2000 egyenlőközű vonal esett. Mivel a régebbi osztógépek már 300—400 vonást is adtak egy milliméterre, nyilvánvaló, hogy JEDLIK célja nem annyira a beosztás sűrűsége volt, mint inkább a karcolások egyenletessége, hogy minél szebb színjátéka legyen a szinképeinek. Maga írja GOTTHARD-nak[1] (a herényi csillagásznak), hogy rácsai igen kapósak voltak, mert élénkebb elhajlási képet adtak, mint bárki más által készítettek. ETTINGSHAUSEN bécsi egyetemi tanár és más fizikusok is, még az amerikaiakat sem véve ki, örültek, ha ilyenhez jutottak.

---

[1] Pannonhalmi kézirattár.

Az osztógép további sorsa elég változatos. A 60-as évek végén Jedlik a gép javítását és kitisztását egy vándor mechanikusra bízta. Ez azonban a gép szétszedése után összelopta, ami értékhez a szertárban hamarosan hozzájuthatott és megszökött. Ez annyira felbosszantotta Jedlik-et, hogy gépét többé össze sem állította, hanem úgy szétszedve, amint a mechanikus hátrahagyta, az egyes alkatrészeket egyszerűen belerakta egy ládába és az egészet félretette. Ilyen állapotban került az osztógép 1879-ben Győrbe, amikor Jedlik nyugalomba ment, majd 1884-ben átengedte a pannonhalmi főiskola fizika szertárának. Itt azután a főiskola fizika tanára, Palatin Gergely, nagy fáradsággal és türelemmel, minden tervrajz nélkül, újra összerakta és munkába állította. Több évtizedes munkája által jelentékenyen tökéletesítette a készüléket úgy, hogy a legutóbbi időben már 2093 vonalat tudott vele karcolni egy milliméterre. Magyarország nagyon sok tanintézete manapság is oly optikai ráccsal van ellátva, amely ezen a Jedlik-Palatin-féle osztógépen készül. Fröhlich Izidor a poláros fényre vonatkozó nagyfontosságú vizsgálódásainál is felhasználta ezeket az optikai rácsokat.

Az emberi sors különös megismétlődése, hogy Palatin Gergely hirtelen halálakor (1927) az osztógép épp oly szétszedett állapotban maradt hátra, mint ahogy ő átvette.

Jedlik-et a nyugodt munkálkodásból egyidőre kizökkentette az 1848-as szabadságharc, amelynek eseményei erősen belenyúltak az ő életébe is. Az 1847—48. iskolai évben ő lett a bölcsészeti kar dékánja. Nehéz időkben kellett ezt az állást betöltenie. A márciusi mozgalmak teljesen magukkal ragadták az ifjúságot, ami persze nem történhetett meg az iskolai érdekek kára nélkül. Egész hetekre távol maradtak az előadásoktól. Jedlik, mint dékán, kötelességének tartotta, hogy az ifjúságot lehetőleg visszatartsa a politikai szerepléstől és a további iskolai munkára buzdítsa. E miatt persze népszerűtlen lett ebben a nagyon is mozgalmas időben, amikor oly könnyen dobálódtak a hazafiatlanság vádjával. Jedlik-nél még papi mivolta is hozzájárulhatott, ami a szélsőségesebb elem szemében nagyon is hátrányául szolgált. Ezzel lehet magyarázni, hogy május 8-án macskazenét adtak neki, miután már márc. 31-én egy pisztollyal felfegyverzett részeg ember állított be hozzá, aki agyonlövéssel fenyegette.

Az ellene feltámadt hangulat annyira fokozódott, hogy a kultuszminisztertől elbocsátását is kérték. Ennek a híre Szémőre is eljutott és Ferenc bátyja, aki odahaza a családi vagyonon gazdálkodott, azt írta neki még áprilisban, hogyha elvesztené állását, menjen haza őhozzá, náluk biztos menedéket talál. De erre nem került a sor. Eötvös, az akkori közoktatásügyi miniszter, semmi okot sem talált az érdemes tanár elbocsátására, akinek a hazafiságához nem férhetett kétség, hanem csak anynyit tett meg az ifjúság lecsillapítására, hogy kinevezte Gelentzei Pált ideiglenes tanárnak s mindenkinek a tetszésére bízta, hogy Jedlik vagy Gelentzei előadásait akarja-e hallgatni. Az előadások folyamán azután sikerült Jedlik-nek az ifjúságot visszahódítani, az ellene kinevezett tanárt nagyobbrészt otthagyták és az ő előadásaira jártak. A következő iskolaévben azonban már nem tartott előadásokat és a szertár kulcsait is Gelentzei vette át tőle.

A szabadságharc idején ő is a nemzetőrök közé állott és részt vett a Pestet védő sánc építésében. Az osztrák megszállás alatt továbbra is Pesten maradt, hogy féltett szertárát szükség esetén menthesse.

A szabadságharc leverése után az egyetemi tanároknak is igazolniok kellett magukat a haditörvényszék előtt. Jedlik feljegyzései szerint három kérdésre kellett felelniök.

1. Vajjon a magyar kormány által kívánt nyilatkozatot Magyarország általános függetlenségének elismeréséről sajátkezűleg aláírták-e és volt-e szerepük annak készítésében?

2. Maguk vagy rokonaik kaptak-e polgári vagy katonai hivatalt?

3. A magyar kormánynak szóló hódolóiratot aláírták-e?

Jedlik a magyar kormánynak szóló hódolóiratot aláírta ugyan, de egyébként nem vett részt a politikai életben, azért a haditörvényszéktől 1850 ápr. 16-án megkapta a felmentést. Újra visszatérhetett a tudományokhoz.

1850-ben jelent meg a «Természettan elemei» című művének első kötete «Súlyos testek természettana» címen. Műve előszavában a következőket mondja: «E munka tartalma nagyobb részint a német irodalom nevezetesb kútforrásaiból vagyon merítve; azonban korántsem puszta fordítás, hanem tanulmányaimnak öngondolkozólag eredett kifolyása. Helyzetünkben meg kell elégednünk azzal, ha bármellyik tudományos írónk tanulmányát azon fokra állítva terjeszti elő, mellyen az a nagyobb és műveltebb nemzetek irodalmában áll.» Ez a szempont tudományos irodalmunk megindulásának idejében nagyon is helyes volt.

Ebben a munkájában Jedlik a mechanikát és a hangtant tárgyalja a kémia elemeivel együtt. Erre az utóbbira azért volt szükség, mert a kémiának akkor még nem volt külön tanára a pesti egyetemen. Nagy kár, hogy a további rész, különösen az elektromosságtan már nem jelent meg. Ennek az okát különben maga Jedlik adja meg Heller-hez írt levelében:[1] «Az egyetemi természettani tanszékre történt kinevezésem után — írja — hozzáfogtam hallgatóim számára egy magyarnyelvű természettan megírásához az addig használatban volt latinnyelvű helyett; de abból csak az első kötet jelenhetett meg, mert az egyetemi tanrendszernek azon megváltoztatása folytán, mely szerint a tanár oda lőn utasítva, hogy a tantárgynak nem a kompendiumát, hanem mindegyik félév alatt valamely részét terjedelmesebben adja elő, nem lett volna célszerű a kompendiumozott természettan használata.»

Könyvéért megkapta az akadémia 50 aranyas nagyjutalmát. Az akadémia bírálata nagyon dicsérő:[2] «E munkában a dús tartalom kellő bőséggel és választékossággal, nem egyszerűen

[1] Heller Á.: A physika története. 84. l.
[2] A M. T. Akadémia évkönyvei. IX. k. 1848—59. 43. l.

elsajátítva, hanem a természeti tünemények s ezekből levont törvények saját észleletek és kisérletek által újból megalapítva; sőt önálló vizsgálatokkal is bővítve; a részletek egymásból mintegy szervileg kifejlesztve adatnak; a tudományos tárgyalás kellő tekintettel a matematikai megállapitásra, a tapasztalattal folyvást összefűzve s az életből vett példákkal felderítve halad, ami által az olvasó egyéb tünemények megfejtésére is képesíttetik; előadása végre a meglevő műnyelv szerencsés felhasználása mellett világos és szabatos.»

1858-ban a tudományos akadémia rendes tagjává választotta Jedlik-et. A következő évben már meg is tartotta székfoglalóját, amelynek tárgyául olyan problémát választott, amely az utolsó évtizedben különösen foglalkoztatta. Előadásának címe: «A villanytelepek egész működésének meghatározása.»[1] Azzal a feladattal foglalkozik ebben, hogyan lehetne kísérletileg azt a teljes hatást meghatározni, amelyet egy galvánelem az egész működési ideje alatt ki tud fejteni. Erre a célra egy összetett voltamétert állított össze, amelynek a segítségével nemcsak azt a durranó gáz mennyiséget lehet megállapítani, amelyet egy telep fejleszteni tud, ha azt egész a kimerüléséig működésbe tartjuk, hanem ennek egy-egy meghatározott időre eső részét külön is megmérhetjük. Ezáltal arról is képet kapunk, hogy a telepből nyert áram intenzitása közben micsoda ingadozásokat szenved.

A galvánelemekkel összefüggő kérdések hosszabb időn át foglalkoztatták Jedlik-et. Ismerve az akkori elemek gyengéit, azoknak a tökéletesítését is megkisérelte. A Bunsen-elemet akarta módosítani azáltal, hogy az akkor még igen tökéletlen agyagcellák helyett úgynevezett villampapírost használt. Már 1846-ban észrevették Böttger és Schönbein, hogy a gyapotnak, papírnak megvan az a tulajdonsága, hogy ha meghatározott ideig salétromsavba, azután vízbe áztatjuk őket, akkor a salétromsav további hatásának ellenállnak és gyönge dörzsölésre is erős

[1] Akad. értesítő. Math. és természettud. osztály. 1859. 291. l.

elektromos hatást mutatnak. Ilyen villamos papirt használt JEDLIK az elemében, azonkivül még más módositásokat is tett. Munkájába belevonta CSAPÓ GUSZTÁV-ot és HAMAR LEÓ-t is, de a legjelentősebb módositásokat JEDLIK végezte és az irodalomban is JEDLIK-elem nevet találjuk. A CSAPÓ-val és HAMAR-ral közösen kiállitott irat[1] szerint: «JEDLIK ÁNYOS tanár úr által történt *a)* A szénlemezek készitésének találmánya. *b)* A szénlemezek beragasztására kellékelt Stearinin és Cerinin készitésének találmánya. *c)* A rámákhoz kén és Colcotár keverék alkalmazása. *d)* A rámák bevonásához a SCHÖNBEIN-féle villampapir alkalmazása. *e)* A Cerininnek szénlemezek beragasztására mikénti alkalmazása. *g)* Az elemek összekötése porcellán és gummielasticum nélkül. *h)* A cellából kifejlendő légéleg elvezetésére vagy elnyelésére szolgáló szerkezet. *i)* Az elemek működtetésére légsav helyett Chilisalétromnak alkalmazása.

A JEDLIK-elemet alaposabban SZTOCZEK JÓZSEF műegyetemi tanár vizsgálta,[2] mérte belső ellenállását és elektromotoros erejét. Véleményét a következőkben foglalta össze: «Állithatom hogy a JEDLIK-féle elemek, midőn egyrészt hatályosság tekintetében a legkitűnőbb szénelemekkel versenyeznek, másrészt némely hátrányaik dacára is birnak még mindig annyi előnynyel, hogy ügyes kezelőnek erős folyamatot igénylő kisérleteknél jobb szolgálatot tesznek, mint más ilynemű Bécs és Prágából ide érkezett eszközök.»

Az 1855-iki párizsi világkiállításon is szerepelt a JEDLIK-elem, CSAPÓ GUSZTÁV vitt ki magával néhány battériát és az ő levelei számolnak be azok sorsáról.[3] A kiállításon szörnyű hanyag módon kezelték a beküldött csomagokat, halomszám rakták egymásra a még el nem rendezett tárgyakat, igy nem csoda,

---

[1] A Pannonhalmi szent Benedek-rend története, VI. k. 840. l.

[2] SZTOCZEK: A JEDLIK-féle galvánelem állandóinak meghatározására vonatkozó vizsgálatok. A természettud. társ. évkönyve 1851—56. III. k. 1857. 193. lap.

[3] Pannonhalmi kézirattár. L. még Pesti Napló 1855. szept. 12. sz.-ban CSAPÓ cikkét.

hogy JEDLIK nagyobb battériái annyira tönkrementek, hogy csak a szerkezetüket lehetett megmutatni. A kiküldött bizottság csak egy kisebb telepet tudott működésben megvizsgálni, annak hatását erősebbnek találta egy megfelelő BUNSEN-telepnél s bronzéremmel tüntették ki. CSAPÓ levelei szerint különösen DUBOSCK, akkoriban neves francia optikus, érdeklődött a telep iránt, ajánlotta, hogy küldjön JEDLIK új elemeket Párizsba, amelyekből ott kellene nagyobb telepet összeállitani és hatásukat nyilvános kisérlettel bemutatni. De ennek a megvalósitására már nem került a sor.

A galvánelemekkel egyidőben már egy sokkal fontosabb probléma megoldásán is fáradozott JEDLIK. Az 50-es évek elejétől kezdve foglalkozott a mágnes-elektromos gépek tökéletesitésével és sikerült is a dinamó elvét felfedezni. Az első kész gépét 1861-ben állitotta be az egyetem szertárába, igy hat évvel megelőzte SIEMENS-t. Igaz ugyan ezzel szemben, hogy SIEMENS mindjárt felismerte találmányának óriási gyakorlati jelentőségét s ezt mindjárt első előadásában kifejezésre is juttatta, mig JEDLIK megelégedett az elért eredménnyel és kifelé nem publikálta találmányát. De nem szabad megfeledkeznünk arról, hogy SIEMENS egy elektromos eszközöket késztő gyár élén állott, JEDLIK pedig éppen akkoriban szerzett eléggé kedvezőtlen tapasztalatokat a JEDLIK-elem értékesitése körül. Ezért megérthető, ha nem igyekezett új találmányát gyakorlatilag is értékesiteni.

Az 1873-as bécsi világkiállitáson újabb JEDLIK-találmány keltett nagy feltűnést, a csöves villámszedői. Már régebben arra a gondolatra jött, hogy sűritőkkel úgy lehet nagyobb hatást elérni, ha a leydeni palackok telepét párhuzamos kapcsolásban tölti meg s azután a megtöltött sűritőket sorba kapcsolja, amikor meglepő nagy szikrát kapott. A sűritők kapacitásának a növelésére a fegyverzetek felületét igyekezett növelni. Ezért 10—12 mm átmérőjű és körülbelül 60 cm hosszú üvegcsöveket használt, ezeket egyik végükön beforrasztotta, belül 39 cm magasan megtöltötte vasreszelékkel, kivül pedig ugyanazon magasságig staniollal vonta be őket. Ezekből a kis sűritőkből 20—30-at egy közös nagyobb üveghengerbe tett s gondoskodott róla, hogy a külső és belső fegyverzetek külön-külön jó vezető összeköttetésben legyenek. Az egész rendszer így egyetlen nagy kapacitású sűritőt alkotott.

Foglalkozott JEDLIK a FRESNEL-féle tükörkísérlet módositásával is. Közel 90°-ra állította készülékénél a két tükröt egymáshoz, így olyan berendezést alkotott, amellyel később MICHELSON is megpróbálkozott s természetesen a szakirodalomban is az ő neve szerepel.[1]

Még egyetemi tanárságának utolsó éveiben sem csökkent érdeklődése, szellemének találékonysága. Ezt igazolják azok az ügyes készülékei, amelyet a 70-es években a rezgések összetételének szemléltetésére alkotott. Tevékenyen dolgozott, amig csak 78 éves korában meg nem vált egyetemi katedrájától, hogy visszatérjen rendjének győri házába, ahol ugyanabba a szobába költözködött be, ahol több mint 50 évvel azelőtt tanári működését megkezdette.

III.

JEDLIK 17 évet töltött nyugalomban. Ez az idő sem lett ránézve a tétlenség ideje, tevékeny szelleme folyton működött. Érdeklődéssel olvasta az újonnan megjelenő könyveket, folyóiratokat s mindig szívesen megjelent a gimnázium fizika szertárában, ha a fizikatanár valami új beszerzésről tett neki említést.

Egész életfelfogására jellemző az, amit halála előtt néhány nappal mondott ACSAY győri igazgatónak, amikor az utolsó szentségeket szolgáltatták ki neki: «Kedves rendtárs úr, életem hosszú volt, de a munka sohasem fárasztott; hová kellene lennünk, ha az Isten a munkára való képességet megvonná tőlünk». Nála a munka csakugyan az a segitő csendes társ volt,

[1] CHWOLSON: Lehrbuch der Physik II. k. 747. l.

amely egész életen át végig kisérte vigasztalásával. Papi hivatása és komoly életfelfogása nem engedte, hogy léha örömöket keressen, nagy szenvedélyei sohasem voltak, mindezekért kárpótolta őt az, hogy igazán gyönyörködni tudott munkájában, ami nem robotolás volt az ő számára, hanem életfeladat, ami bőven szerez örömet is.

Jedlik-nek hosszú, nyugodt öregkora volt, amit különben már fiatalkorában megjósoltak neki. Sokszor elbeszélte, hogy pozsonyi tanárkodása alatt egy izben kibukott egy másodemeleti ablakból, úgyhogy eszméletlenül szállították haza. A kezelő orvosa, amikor látta egészséges szervezetét, longam et quietam senectutem helyezett neki kilátásba, ami nagy mértékben be is következett.

Hogy olyan hosszú ideig, egész késő öregségéig tudott dolgozni, abban nem kis része volt egyenletes, mérsékelt életmódjának. E mellett azonban nagyon vigyázott arra, hogy el ne különítse magát a társaságtól, hogy különcnek ne tartsák. Maga beszélte el, hogy fiatal tanár korában ő is elkezdett dohányozni, hogy semmiben se különbözzék a tanártársaitól, bár ő maga semmi élvezetet sem talált benne. Mikor egyetemi tanár lett és külön lakásba költözött, akkor aztán rögtön «sutba vágta a pipát».

Élete utolsó évtizedeiben sok idejét elvette a levélirás, panaszkodott, hogy már egy könyvet megirhatott volna, annyi ideje veszett el igy. Az volt a szokása, hogy minden levelét, még a kevésbbé fontosakat is, két példányban készitette el, hogy az egyiket megőrizhesse. Így azután volt elég dolga, különösen mert a sok segélykérő gondoskodott róla, hogy mindig legyen mire válaszolnia. Mindig bőkezű volt, ha máson segiteni kellett. Nemcsak rokonai részesültek tőle anyagi támogatásban, hanem hátramaradt levelezéséből látható, hogy több jóbarátjának a családját is jelentékeny összeggel támogatta. Ehhez járult még a sok segélykérő, akik kitapasztalták jóságát és néha valósággal megzsarolták. Feljegyzése szerint pl. 1881-ben nyolc hónap alatt száznál több segélykérő levél érkezett hozzá, s körülbelül 2000 forintot osztott szét. Nem csoda, ha azt mondotta egyszer, hogy már fél, ha látja a levélhordót feléje közeledni. Nagy teher volt az, különösen mert egy levelet se hagyott válasz nélkül s még az érdemetlent se tudta üres kézzel elbocsátani. Akárhányszor magának kellett lemondani valami tervéről, elhagyni valamelyik tanulmányútját, annyira kifogyott minden pénzéből.

A halálnak közeledtét teljes lelki nyugalommal várta. A természettudományokkal való foglalkozás nem lett hitének ártalmára. Egyik rendtársának egyszer azt mondotta: «Kedves öcsém, jobban megismertem az Istent a fizikából, mint maga a teológiából». A halál előtte csak átmenet volt egy másik világba, ahol mindaz világossá válik előtte, amit itt nem tudott teljesen megérteni.

Hosszú élet jutott osztályrészeül, néhány hét híján 96 évet élt. Szellemi képességei megmaradtak majdnem halála napjáig. Még halála előtt egy héttel teljesen ép elmével vitatkozott fizikai tételekről, bár emlékezete már elhomályosodott s azt sem tudta, hol van. 1895 dec. 13-án halt meg. Lengyel Béla, az egyetem rektora és Tewrewk Emil, a bölcsészeti kar dékánja képviselték az egyetemet és akadémiát a temetésén. A magyar tudománynak sok kiváló képviselője akadt azóta, de azért mindig büszkesége marad Jedlik Ányos, a magyar fizika úttörő munkása.

Holenda Barnabás.

A. JEDLIK'S LEBENSLAUF.

Von. B. Holenda.

Geb. am 11. Jan. 1800 zu Szimő im Komitate Komárom, trat er mit 17 Jahren in den Benediktinerorden. Von 1840 bis 1878 war er Prof. der Physik an der Budapester Universität. Er starb im Jahre 1895 zu Győr.

A VEGYÉRTÉK PROBLÉMÁJA A QUANTUM-MECHANIKÁBAN.

A Bohr-féle közismert atomelmélet nemcsak a spektrumok mélyreható értelmezését nyujtotta, hanem jelentékeny lépéssel vitte előre a kémiának több régi és alapvető problémájának megoldását is. Igy meglepő világot vetett az elemek periódikus rendszerére és termékeny szempontokat szolgáltatott a vegyérték értelmezésére is. (1)

Amint ismeretes, a Bohr-féle felfogás szerint az atomban egy pozitiv töltésű mag körül negativ töltésű elektronok keringenek, úgy mint a bolygók a nap körül. A mag töltése hydrogéntől, hol az egy elemi töltés, az uránig, hol 92, mindig egy egységgel növekszik, épúgy az elektronok száma is. Az elektronok a maghoz különböző erősen vannak kötve, a kötés erőssége szerint rétegeket különböztetünk meg, így *K*, *L*, *M*, *N*, *P*, *O* réteget. Az optikai spektrumra és kémiai jellegre a leggyengébben kötött, úgynevezett külső vagy valenciaelektronok mérvadók. Az elemek periódikus rendszere azon alapul, hogy az egyes rétegek egészen meghatározott számú elektront vehetnek fel, így legfeljebb 2 *K*, 8 *L*, 18 *M*, 32 *N* elektron lehetséges. Egy teljes réteg kiváló stabilitással bir, valamint a nemes gázok konfigurációi is. Erre alapította Kossel a heteropoláris valenciák értelmezését. Az alkáliák a nemes gázszerű rétegen kívül egy, a földalkáliák két elektronnal birnak. Ezek az elektronok könnyen leszakadnak és hátramarad egy, illetőleg két elemi töltéssel biró pozitiv ion. A halogéneknél ellenben egy, az oxygéncsoportnál két elektron hiányzik a nemes gázszerű konfigurációhoz, azok tehát könnyen egy elektron felvételével kiegészülnek egy, illetőleg két töltésű negatív ionná. A pozitív és negatív ion egymásra vonzó hatást gyakorol. Egy molekula képződéséhez azonban arra is szükség van, hogy ezek egy rendszert képezzenek, melyben az atomok meghatározott távolban vannak. Ezért a vonzáson kívül taszító erőknek is fel kell lépnök. Born és Landé a taszító erőt a távolság magasabb hatványával fordítottnak vették, úgyhogy két ion közt ily erő lép fel:

$$\varphi = \frac{e^2}{r^2} - \frac{a}{r^m}.$$

Ugyanezen erő a test rugalmas viselkedésére is mérvadó; az m kitevő a kompresszibilitásból meghatározható. Ilyen erők hatása alatt, kiegészítve még az elektromos polarizáció hatásával, Born, Heisenberg és Hund megvizsgálták molekulák egyensúlyát. Nehézséget okoz a második tag értelmezése. Born és és Landé elektromos pólusrendszerekkel értelmezték. De ilyen pólusrendszer által gyakorolt erő az iránytól függ, a tér egyes irányában vonzó, a másikban taszító, irányszerinti átlaga zérus. A homöopoláris molekulák képződését ezen az alapon nem sikerült értelmezni.

Az új quantummechanika úgy a Born—Landé-féle erők értelmezéséhez, mint a homöopoláris vegyértékéhez elvezet, minden új feltevés nélkül.

Bohr elmélete felállításánál és keresztülvitelénél geniális intuicióval járt el, feltevéseit az elektronpályákra ad hoc feltevésekkel, szimmetriameggondolásokkal, spektroskópiai tapasztalatokkal támogatja, de nem tudja deduktíve egy általánosabb elvből szükségszerűleg levezetni. A Bohr-féle gondolatok szisztematikus rendszerbe foglalása és precizirozása irányában jelentékeny haladást jelentett a quantummechanika alkalmazása az atomelméletre, amely többek közt a homöopoláris valenciáknak is jellemző értelmezést adott.

A quantummechanika fejlődésének két leglényegesebb mozzanatáról, a HEISENBERG-féle matrixelméletről és a SCHRÖDINGER-féle hullámmechanikáról volt szerencsém a társulatban referálnom. Az elmélet azóta továbbfejlődött, elmélyült, de alapjai teljes tisztázásához nem jutott el. Az alapok továbbfejlődésével itt nem is fogunk foglalkozni, hanem arra szorítkozunk, hogy az alapfeltevéseket lehetőleg egyszerű és érthető alakban kimondva, a további tárgyalás alapjául vegyük. Alapul vesszük a SCHRÖDINGER-féle differenciálegyenletet, mely épúgy, mint ahogy a MAXWELL-féle egyenletek az elektrodynamika alapját képezik, itt a quantummechanika alaptörvényének tekinthető.

Ez a következőkép állítható fel minden ismert mechanikai rendszerhez, így az atomhoz is: Fejezzük ki az összes energiát, a kinetikus és a potenciális energia összegét, mint a koordináták és impulzusuk függvényét

$$T+V=H(q_i, p_i),$$

tegyük a p_i impulzuskomponens helyébe a $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_i}$ operatort, hol h a PLANCK-féle állandó, az így nyert operatort alkalmazva a koordinátáknak egy $\psi(q_1 \dots q_n)$ függvényére, ez egyenlő $W\psi$-vel:

$$H\left(q_i, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_i}\right)\psi = W\psi.$$

Ez egy lineáris másodrendű homogén differenciálegyenlet. A differenciálegyenlet explicite kiírva elektronok rendszerére a következő:

$$\sum_i\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y_i^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z_i^2}\right)+\frac{8\pi^2 m}{h^2}\left\{W-V(x_1 y_1 z_1 \dots x_n y_n z_n)\right\}\psi=0,$$

hol m az elektron tömege, V a potenciális energia.

Ennek az egyenletnek oly megoldásait keressük, melyek a végtelenben eltűnnek. Ez általában csak W-nek meghatározott, karakterisztikus értékeinél («Eigenwert») lehetséges, ezek a lehetséges energiaértékek. Minden W-hez egy vagy több karakterisztikus függvény («Eigenfunkcio») tartozik, melyek egy normirozható orthogonális függvényrendszert képeznek.

Ezek legyenek:

$$W_1, \; W_2, \ldots \; W_i, \ldots \; W_k, \ldots$$
$$\psi_1, \; \psi_2, \ldots \; \psi_i, \ldots \; \psi_k, \ldots$$

hol:

$$\int \psi_i^2 d\tau = 1, \quad \int \psi_i \psi_k d\tau = 0, \quad \text{ha} \quad i \neq k$$

$d\tau$ a kordinátatér térfogateleme. A ψ_i jelentése az, hogy

$$|\psi_i(q_1 \ldots q_n)|^2 d\tau$$

a valószínűsége annak, hogy az energia W_i értékénél az atom koordinátái a $d\tau$ tartományban vannak.

Valamely két állapot közti átmenet valószínűségére, azaz a spektrumvonalak intenzitására mérvadók az elektromos momentumhoz $f = \Sigma e_i r_j$-hez rendelhető matrix elemek. Így az i-ik és k-ik állapot közti átmenetnél:

$$f^{ik} = \int f(q_1 \ldots q_n) \, \psi_i \psi_k d\tau,$$

$|f^{ik}|^2$ arányos a valószínűséggel, ill. a vonal intenzitásával. Ha a megfelelő matrix komponens eltűnik, úgy az átmenet nem lehetséges.

Ez a quantummechanika alapjainak rövid foglalata, ami egyszerűségében igazán nem sok kívánnivalót hagy hátra.

Az egyenlet mint lineáris diffenciálegyenlet avval a sajátsággal bír, hogy megoldások összegei, sőt általában azok lineáris kombinációi, melyek ugyanahhoz a W-hez tartoznak, szintén megoldásai az egyenletnek.

Előfordulhat az az eset, hogy a Schrödinger-féle egyenlet baloldala olyan tagok összegére bontható fel, melyek mindegyike csak egy elektron, ill. atom koordinátáira vonatkozik, azaz az egyenlet szeparálható az elektronokra, illetőleg atomokra:

$$H = H_1 + H_2 + \cdots + H_n = W_1 + W_2 + \cdots + W_n.$$

Ekkor az egy elektronra, ill. atomra vonatkozó egyenletek tárgyalására vezethető vissza a rendszerre vonatkozó egyenlet tárgyalása. Ha a j-ik elektronra vonatkozó egyenlet megoldása $\psi_i(j)$, úgy a rendszer megoldása ezen megoldások szorzatai:

$$\psi_{i,k,\ldots r} = \psi_i(1)\,\psi_k(2)\ldots\,\psi_r(n),$$

amint arról behelyettesítés közvetlenül meggyőz.

Itt egy igen lényeges pontot kell kiemelni. Ez az, hogy a ψ a $3n$ dimenziós koordinátatér függvénye és nem a 3 dimenziós téré. Az elemi statisztikai mechanikában, ill. kinetikai gázelméletben a koordinátatér ama pontjait identifikáljuk, melyek egyenlő elemek felcserélésével egymásba átmennek, itt nem. Tehát $\psi_i(1)\,\psi_k(2)$ nem azonos $\psi_i(2)\,\psi_k(1)$-el. Elvi érdekű kérdés, hogy redukálható-e a koordinátatér a közönséges térre vagy pedig ismét egy oly esettel állunk szemben, melynél a közönséges térfogalmak szűknek bizonyulnak.

Általában ily szeparálható esetet kapunk, ha az egyes elektronok kölcsönhatásától eltekintünk. Első közelítésben a rendszer ψ függvényeit tehát az elektronok ψ függvényei szorzatának tekinthetjük, a további közelítésekre a Schrödinger által kidolgozott perturbáció elméletet alkalmazhatjuk.

Azonban az elektronok egyenlősége folytán a Schrödinger-féle egyenletben az egyes elektronok koordinátái egyenlően, szimmetriásan fordulnak elő. Ha tehát valamely $\psi_{i,k,\ldots r}$ megoldásban az elektronokat permutáljuk és így egy új függvényt kapunk, az ismét megoldás lesz ugyanazon W-nél. Tehát egy megoldásból az n elektron permutálása által $n!$ megoldást kapunk, melyek esetleg nem mind különbözőek ugyanazon W-nél, amit úgy fejezünk ki, hogy W degenerált. Ez a degeneráció jellemző a több-elektron problémára.

Heisenberg, ki először tárgyalta a quantummechanika alapján (5), (6) a többelektronból álló atomot, volt az, ki heliumnál ezt a degenerációt felismerte és kimutatta, hogy ott az állapotok (Termek) két rendszere lehetséges és melyek közt átmenet egyáltalában nem lehetséges, melyek közül csak az egyik van a természetben megvalósítva, mely az ismert paraés orthohélium spektrumnak felel meg. Három elektron esetében a nem kombináló termek számát először WIGNER (9), (10) határozta meg, majd NEUMANN JÁNOS tanácsára csoportelméleti módszerek bevezetésével n elektron esetében is, kimutatva, hogy annyi nem kombináló termrendszer létezik, ahányféleképpen bontható n egész számú összeadandók összegére. A csoportelméleti módszerek azóta az atomelmélet igen hasznos segédeszközének bizonyultak. Felemlítjük, hogy HUND (4) által bevezetett szimmetriakarakter fogalma sok esetben nélkülözhetővé teszi a csoportelmélet explicit alkalmazását. HEITLER és LONDON (11), (12), (13) e módszereket a molekulaképződés kérdéseire alkalmazva, a homöopoláris valencia jellegzetes értelmezését adták és részletesen megvizsgálták a két hydrogén és két héliumatomból álló rendszer egyensúlyi viszonyait. Ezen igen jelentékeny vizsgálatok képezik főkép ezen előadás tárgyát.

E történeti kitérés után vegyük tekintetbe a hélium esetét, melyben két elektron fordul elő. A ψ függvény mindkét elektron koordinátáitól fog függni és vagy szimmetriás az elektronokban, azaz fennáll:

$$\psi(12) = \psi(21),$$

avagy antiszimmetriás, midőn:

$$\psi(12) = -\psi(21).$$

Ha van megoldás, mely nem tartozik e két osztály egyikébe sem, úgy a megfelelő karakterisztikus érték degenerált. Ha ψ egy ily függvény úgy:

$$\Psi = \psi(12) - \psi(21)$$
$$\Phi = \psi(12) + \psi(21)$$

egyike sem identikusan zérus és szintén ugyanazon W-hez tartozó két orthogonális függvény és megoldás. Kis perturbáció esetében W két értékre bomlik és ismét az előbbi esetet kapjuk, mert Ψ antiszimmetriás, Φ szimmetriás.

Átmenet két oly állapot közt, melyek egyikéhez szimmetriás, másikhoz antiszimmetriás megoldás tartozik, nem lehetséges. Erre mérvadó az elektromos momentumnak f-nek matrixeleme:

$$f^{ik} = \int f \Psi_i \Phi_k d\tau.$$

Mivel f és Φ szimmetriás, Ψ antiszimmetriás az egész integrandus és az integrál előjelét megváltoztatja, ha az 1 és 2 elektront felcserélem, másrészt az integrál értéke nem változhatik, ha az integrációs változókat a határok megváltoztatása nélkül más betűvel jelölöm. E két állítás csak úgy elégíthető ki egyszerre, ha az integrál eltűnik, azaz az átmenet nem lehetséges.

Ha tehát kezdetben az egyik megoldás volt megvalósítva, az atom mindig csak oly állapotba mehet át, melynek szimmetriajellege ugyanilyen.

A tapasztalat szerint elektronok rendszerében mindig az antiszimmetriás megoldás van megvalósítva. Ez a nagyfontosságú törvény a Pauli-féle (14) elv, mely kifejezi, hogy az atom elektronjai közt nincs kettő, mely teljesen egyenlően viselkednék, azaz egy n elektront tartalmazó atomban is csak oly megoldások lehetségesek, melyek bármely elektronpárban antiszimmetriás. A Pauli-féle elv az atomelmélet egyik legfundamentálisabb törvénye, melynek segélyével többek közt az atom különböző rétegeiben foglalt elektronok számáról számot adhatunk és ami a következőknek is alapját képezi.

Ha első közelítésben eltekintünk az elektronok kölcsönhatásától, úgy a ψ függvény oly függvények szorzata, melyek mindegyike egy mag körül keringő elektronra vonatkozik. Ezen megoldásban előfordul három egész számú parameter, az úgynevezett quantumszámok, még pedig:

«főquantumszám» $n = 1, 2, 3\ldots$
«mellékquantumszám» $l = 0, 1, 2\ldots \quad l \leq n - 1$

külső erős mágneses tér esetében a «mágneses quantumszám»:

$$m_l = -l, \; -l+1, \ldots \; l-1, \; l,$$

összesen $2l+1$ értéket vehet fel megadott l-nél. Végre az elektron saját mágneses momentumát meghatározza egy quantumszám s. Ez csak két értéket vehet fel: $s=\pm{}^1/_2$.

Az elektron energiájára elsősorban a főquantumszám n mérvadó, az ugyanavval az n-el biró elektronok az atom egy rétegét képezik. Az első K rétegben $n=1$, $l=0$, $m_l=0$, $s=\pm{}^1/_2$, tehát ebben csak két elektron foglalhat helyet. Ez egyszersmind a periodikus rendszer első periodusa hydrogentől héliumig.

Az L rétegben: $n=2$, $l=0$, $m_l=0$, $s=\pm{}^1/_2$
$l=1$, $m_l=-1, 0, +1$, $s=\pm{}^1/_2$

az $l=0$-hoz 2, $l=1$-hez $2(2-1)=6$ elektron tartozik, összesen 8 L elektron van. Ez a réteg teljes lesz a második periodusban.

Az M rétegben $n=3$, $l=0, 1, 2$, az elektronok száma: $2+6+10=18$. A harmadik periodusban ez nem lesz teljes, csak a negyedikben.

A negyedik N rétegben $n=4$, az elektronok száma: $2+6+10+14=32$.

A P rétegben: $2+6+10+14+18=50$ elektron lehetséges.

A Pauli-féle elvre alapitott Fermi-Dirac-féle statisztika, úgylátszik a fémekben levő vezetési elektronokra és gázmolekulákra is érvényes, míg a fényquantumokra az úgynevezett Bose-féle statisztika érvényes.

Itt azonban célszerű figyelembe venni, hogy az elektron saját mágneses momentuma csak kis korrekciót jelent a Schrödinger-féle egyenletben, úgyhogy ez szeparálható. A megoldás két függvény szorzata lesz, melyek közül az első csak az elektron súlypontjának koordinátáitól, a másik csak a sajátmomentumtól fog függni.

$$\Psi=\psi(1, 2, \ldots n)\, u(1, 2, \ldots n).$$

Mivel a sajátmomentum csakis két értéket vehet fel, u legfeljebb két-két elektronban lehet antiszimmetriás, az ilyen párokat alsó vonással jelöljük. Mivel Ψ ezekben is, mint minden elektronban antiszimmetriás, úgy ψ a megfelelő elektronokban szükségkép szimmetriás. Ha pl.

$$\Psi = \psi(\overline{1, 2}, \overline{3, 4}, \underline{5, 6, 7})\, u(\underline{1, 2}, \underline{3, 4}, \overline{5, 6, 7}),$$

ez azt jelenti, hogy ψ 1, 2 és 3, 4 elektronokban szimmetriás, u ugyanazokban antiszimmetriás, 5, 6, 7-ben ψ antiszimmetriás, u szimmetriás.

A továbbiakban u-t nem igen fogjuk külön kiírni. Az elektron saját impulzusa lehetővé teszi, hogy az atom elektronjai közt szimmetriás párok forduljanak elő. Az n elektronból álló rendszer szimmetriakaraktere mindig ilyen:

$$n = 2 + 2 + \cdots + 2 + 1 + \cdots + 1,$$

ami azt jelenti, hogy az első és második stb. elektronban szimmetriás ψ, míg azokban, melyek az egyeseknek felel meg antiszimmetriás.

Az elektronok ily értelemben vett szimmetriás kapcsolata szolgál a homöopoláris valencia értelmezésére és amint kimutatható, legalább hydrogén és hélium esetében egyúttal energetikai szoros kapcsolatot is jelent. Általában ha két elektron a ψ függvényben szimmetriásan fordul elő, ez a két elektron közt szoros fizikai kapcsolatot jelent.

Ha két, n és m elektront tartalmazó atom meg van adva és az is meg van adva, hogy mely elektronok képeznek szimmetriás párokat, úgy abban az esetben, ha ezek molekulává egyesülnek, szintén megkivánjuk, hogy a PAULI-féle elv ki legyen elégítve.

A molekula karakterisztikus függvénye első közelítésben az atomok karakterisztikus függvényeinek szorzatai. Ez, ha a mágneses momentumra vonatkozó részt nem írjuk külön ki, a következő:

$$\Psi = \psi(1, 2, \ldots n)\, \varphi(1, 2, \ldots m) = \Psi(1, 2, \ldots n, n+1, \ldots n+m).$$

Egyszerű meggondolással kimutathatjuk, hogy az elektronok permutációja és a permutált függvények lineáris kombinációja által kapott új megoldásokban elektronoknak csak oly új szimmetriás kapcsolatai fordulhatnak elő, melyek különböző atomok ama elektronjai közt állanak fenn, melyek az atomban nincsenek szimmetriássan kapcsolva.

Igy pl. $\psi(\overline{1, 2}, 3)\, \varphi(\overline{4, 5}, 6)$-ból előállitható:

$$\Psi = \psi(\overline{1, 2}, 3)\, \varphi(\overline{4, 5}, 6) + \psi(\overline{1, 2}, 6)\, \varphi(\overline{4, 5}, 3) = \psi(\overline{1, 2}, \overline{4, 5}, \overline{3, 6}).$$

Ellenben nem létesithetünk egy már szimmetriásan kapcsolt elektronnal szimmetriás kapcsolatot a nélkül, hogy a pár másik elektronjával is ne kapjunk szimmetriás $\varphi(\overline{12})\, \psi(3)$ kapcsolatot. Ez pedig ellenkeznék a Pauli-féle elvvel, mert u csak két elektronban lehet antiszimmetriás.

Három atom, pl. H, H, O esetében a kapcsolás sorrendje lényeges. Ekkor a karakterisztikus függvények

$$\psi(1), \quad \varphi(2), \quad \psi(\overline{3, 4}, 5, 6).$$

Ha 1 és 2 közt $\Phi(\overline{1, 2})$ kapcsolatot létesitjük, a harmadik atommal nem létesíthetünk kapcsolatot. Ellenben 1-et 5-höz, 2-t 6-hoz kapcsolhatjuk, mikor a következő karakterisztikus függvényt kapjuk:

$$\Phi(\overline{1, 5}, \overline{3, 4}, \overline{2, 6}).$$

Mivel a quantummechanika a különböző atomok nem szimmetriásan kapcsolt elektronjai közti szimmetriakapcsolatokat egy rendszerben megengedi, közelfekvő a homöopoláris valencia következő értelmezése.

Minden nem szimmetriásan kapcsolt elektron egy valenciát jelent, minden szimmetriás kapcsolat különböző atomok elektronjai közt egy vegyi kötést.

Minden kötéssel a rendelkezésre álló valenciák közül kettő kiválik, más kötésre nem használható, «telítve lesz» a kémia nyelvén szólva.

A szabad valenciaelektronok a súlypontkoordinátákban antiszimmetriásak, tehát az elektron saját impulzusai megegyeznek és közös eredőt adnak. Ez mérvadó a spektrum multiplicitására, tehát arra, hogy a termek szingulettek, dublettek, triplettek stb. A multiplicitás eggyel nagyobb, mint a szimmetriásan kötött elektronok száma.

$$M = r + 1.$$

Nemesgázoknál minden elektron szimmetriásan van kötve, a vegyérték zérus, a mágneses momentum eltűnik. A szimmetriakarakter ilyen:

$$n = 2 + 2 + \cdots + 2.$$

Ugyanilyen egy lezárt, nemesgázszerű héj vagy réteg, azért ezek sem a vegyértékre, sem a multiplicitásra nem bírnak befolyással, a vegyértékre valóban csak a «külső» a nemesgázszerű rétegen kívüli elektronok mérvadók.

A vegyérték változása is értelmezhető ezen felfogás alapján. Igy a halogéneknél 7 elektron van a nemesgázhéjon kívül. A lehetséges vegyérték 1, 3, 5, 7, de páros nem lehet. Ez megfelel 7 következő előállításainak:

$$\begin{aligned} 7 &= 2+2+2+1 \\ &= 2+2+1+1+1 \\ &= 2+1+1+1+1+1 \\ &= 1+1+1+1+1+1+1 \end{aligned}$$

Fluornál azonban csak egy vegyérték lehetséges. Itt ugyanis az a réteg, melyben l, a mellékquantumszám 2, nem fordul még elő. Itt a következő eloszlás lehetséges:

Mellékquantumszám l	0	1
Mágneses quantumszáma m_l	0	—1, 0, 1
Elektronok száma...	2	2 2 1
vagy	2	2 1 2
vagy	2	1 2 2

Ugyanis 7 elektront négy helyre kell elosztani, ami csak a 2+2+2+1 szkéma szerint lehetséges.

Az oxygéncsoportban hat elektron áll rendelkezésre, a lehetséges szimmetriakarakter itt:

$$6 = 2+2+2 = 2+2+1+1 = 2+1+1+1+1$$
$$= 1+1+1+1+1+1,$$

tehát a vegyérték 0, 2, 4, 6 lehet, de páratlan nem lehet. Oxygénnel az $l = 2$ héj nincs jelen, a 6 elektront 4 helyre kell elosztani, aminek a két vegyérték felel meg.

A széncsoportban 4 elektron áll rendelkezésre a lehetséges vegyérték 0, 2, 4. Szénnél a 4 vegyérték dominál, de előfordul a 2 vegyérték is, így CO-nal. Ellenben a csoport többi elemeinél, így silicium, germanium, stannumnál közönséges a két vegyérték. A vegyérték, azaz a szimmetriásan nem kötött elektronok száma egy szimmetriás kötéssel csak páros számmal változhatik. Ha azonban egy elektron eltávozik, azaz ionizáció áll be, úgy a változás páratlan számmal is történhetik.

Az eddigi meggondolások mutatják, hogy a lehetséges kombinációkra mérvadó az atomok szimmetriakaraktere. Azt azonban külön ki kell mutatni, hogy az ily kapcsolat egy stabilis alakzatra jellemző, azaz az energia minimumának felel meg, mely csak külső energia hozzáadásával szüntethető meg.

Ez az általános meggondolás azonban nem elégít ki, konkrét esetben a molekula főállandóiról számot akarunk adni.

Ezért Heitler és London (11) a hydrogén és hélium esetében két atom rendszerét Schrödinger perturbációs módszereivel részletesen megvizsgálták.

Első közelítésben eltekintettek a jóval nagyobb tömegű atommag mozgásától, azaz a problémát a két, R távolban levő szilárd mag körüli mozgásra redukálták. R mint parameter szerepel az egyenletben, megállapitandó lehetséges értéke.

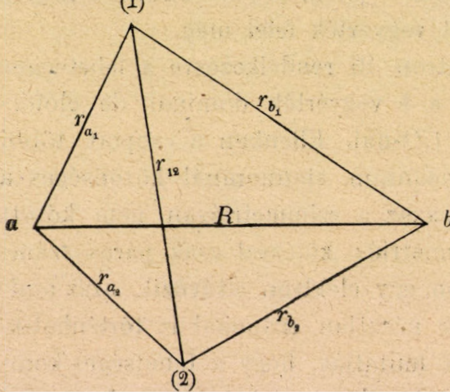
Born és Oppenheimer (17) később megindokolták általánosabb szempontból a Heitler és London által alkalmazott közelítés jogosultságát.

A Schrödinger-féle egyenlet, két hydrogénatom esetében, ha a mágneses hatástól eltekintünk, a következő:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z_1^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z_2^2}+$$

$$+\frac{8\pi^2 m}{h^2}\left\{W-\left(\frac{\varepsilon^2}{R}+\frac{\varepsilon^2}{r_{12}}-\frac{\varepsilon^2}{r_{a_1}}+\frac{\varepsilon^2}{r_{a_2}}-\frac{\varepsilon^2}{r_{b_1}}-\frac{\varepsilon^2}{r_{b_2}}\right)\right\}\psi=0.$$

Itt R a magok távola, r_{12} az elektronok távola, r_{a_1} az (1) elektron és a mag, r_{b_1} az (1) elektron és b mag távola stb., ε a mag, ill. elektron töltése.



1. ábra.

A megoldások, ha az (1) elektron a, ill. b mag közelében az első BOHR-féle pályán van

$$\psi_1 = c.e^{-\frac{r_{a_1}}{a_0}},$$

$$\varphi_1 = c.e^{-\frac{r_{b_1}}{a_0}}$$

hol a_0 az első BOHR-féle pálya sugara, $c=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{a_0^{3/2}}$, ψ_1 és φ_1 az x_1, y_1, z_1 koordináták függvényei. A (2) elektron megfelelő függvényei:

$$\psi_2 = c.e^{-\frac{r_{a_2}}{a_0}},\quad \varphi_2 = c.e^{-\frac{r_{b_2}}{a_0}},$$

melyek az x_2, y_2, z_2 koordinátáktól függnek.

Ha a kölcsönhatástól eltekintünk és mindkét elektron saját magja körül van úgy az egész rendszer karakterisztikus függvényei: $\psi_1\varphi_2$ és $\psi_2\varphi_1$. A karakterisztikus érték kétszeresen degenerált, a fenti függvények lineárkombinációja által egy szimmetriás (α) és egy antiszimmetriás (β) megoldás állítható elő. Ezek, ha normirozási tényezőtől eltekintünk,

$$\alpha = \psi_1\varphi_2 + \psi_2\varphi_1$$
$$\beta = \psi_1\varphi_2 - \psi_2\varphi_1.$$

A SCHRÖDINGER-féle perturbációs elmélet szerint a kölcsönhatás tekintetbevételével a megoldások első közelítésben lesznek,

$$\chi_\alpha = \alpha + v_\alpha$$
$$\chi_\beta = \beta + v_\beta$$

v_α, v_β és a karakterisztikus érték, azaz az energia megváltozása meghatározható.

Az energia megváltozása az α, ill. β esetben lesz:

$$W_\alpha = \frac{1}{1+S}(W_{11} + W_{12})$$
$$W_\beta = \frac{1}{1-S}(W_{11} - W_{12})$$

Itt:

$$S = \int \psi_1\psi_2\varphi_1\varphi_2 d\tau, \quad d\tau = dx_1dy_1dz_1dx_2dy_2dz_2$$

$$W_{11} = \frac{\varepsilon}{2}\int\left\{\left(\frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{R}\right)(\psi_1^2\varphi_2^2 + \psi_2^2\varphi_1^2) - \left(\frac{1}{r_{a_1}} + \frac{1}{r_{b_2}}\right)\psi_2^2\varphi_1^2 - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{1}{r_{a_2}} + \frac{1}{r_{b_2}}\right)\psi_1^2\varphi_2^2\right\} d\tau = \frac{\varepsilon^2}{a_0} e^{-\frac{R}{a_0}}\left(\frac{a_0}{R} + \frac{5}{8} - \frac{3}{4}\frac{R}{a_0} - \frac{1}{6}\frac{R^2}{a^2}\right)$$

$$W_{12} = \frac{\varepsilon^2}{2}\int\left\{\frac{2}{r_{12}} + \frac{2}{R} - \frac{1}{r_{a_1}} - \frac{1}{r_{a_2}} - \frac{1}{r_{b_1}} - \frac{1}{r_{b_2}}\right\}\psi_1\psi_2\varphi_1\varphi_2 d\tau$$

W_α és W_β értékeit grafikusan feltüntethetjük SUGIURA szerint. (l. 2. ábra).

W_{11} a COULOMB-féle kölcsönhatásnak felel meg. Ennél ca 15—20-szor nagyobb a W_{12} tag, amely a quantummechanikára jellemző. Az antiszimmetriás megoldásnál az energia a távolsággal fogy, molekulaképződés itt nem lehetséges.

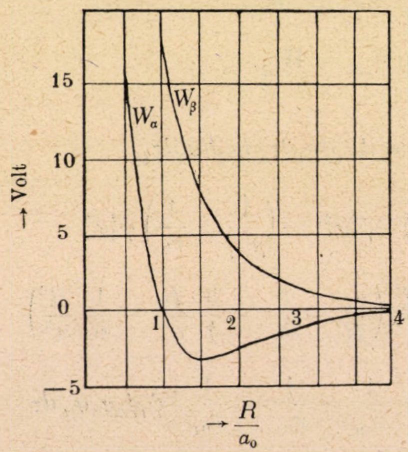
A szimmetriás megoldásnál az energiának meghatározott magtávolnál minimuma van, hol egyensúlyi állapot lehetséges. Kisebb távolban az energia fogy a távolsággal, ennek taszítás, nagyobb távolban az energia a távolsággal nő, ennek vonzás felel meg.

Az egyensúlyi távol r_0, az ennek megfelelő tehetetlenségi momentum A, a disszociációs energia D, a rugalmas rezgési frekvencia ν_0, SUGIURA szerint (15) a következő:

	r_0 (10^{-8} cm)	D (Volt)	A. (10^{-41} gr cm)^2	ν_0 (10^3 cm^{-1})
számítva ...	0·80	3·2	5·2	4·8
mérve	0·75	4·4	4·7	4·4

Tehát a megegyezés igen kielégitő.

Hasonlóan a számítás két héliumatomra is keresztülvihető, de ott a PAULI-féle elv csak az antiszimmetriás megoldást engedi meg, aminek taszitás felel meg, tehát a molekulaképződés ki van zárva, ami meg is felel annak, hogy a nemes gázok nem könnyen képeznek vegyületet. A He_2 molekula úgy értelmezhető, hogy az egyik elektron nincs az alappályán, amikor a PAULI-féle elv kielégüléséhez nem szükséges, hogy a másik elektronnal szimmetriás párt képezzen.



2. ábra.

Már régebben BORN és LANDÉ a molekulaképződés és a kristályrácsok egyensúlya értelmezésére felvettek a COULOMB-féle erőkön kívül más, a távolság magasabb hatványaival arányos erőket. A quantummechanika minden külön feltevés nélkül szolgáltatja ezen erőket: ezek W_{12}-ből erednek. Ezen erők itt, eltekintve egy polynom tényezőtől, exponenciális alakban jejentkeznek:

$$e^{-\frac{R}{b}}.$$

A minimum környezetében helyettesíthető R egy hatványával. Azonkívül szolgáltatja ionok közt a polarizációtól eredő erőket (16).

A quantummechanika a többelektron problémánál rendkívül termékenynek bizonyult és nem alaptalan a remény, hogy a molekulaképződés feltételeire, főkép a sávos spektrumok (2), (3) gazdag tapasztalati anyagára támaszkodva, tovább is szerencsés útmutatónak fog bizonyulni. És úgy látszik, hogy a kutatásnak igen termékeny tartománya nyilik itt meg, mely talán belátható időn belül arra fog vezetni, hogy a vegyületek sajátságait az elemek sajátságaiból számitás útján határozhatjuk meg.

Irodalmi jegyzetek.

1. F. HUND: Linienspektren und periodisches System der Elemente. Berlin. Springer. 1927.
Az irodalomról 1926-ig részletesen tájékoztat.
2. F. HUND: Zeitschr. f. Phys. 40. p. 742. 1927. (Molekulaspektrum.)
3. F. HUND: Zeitschr. f. Phys. 42. p. 93. 1927. (Molekulaspektrum.)
4. F. HUND: Zeitschr. f. Phys. 43. p. 788. 1927. (Szimmetriakarakterek.)
5. W. HEISENBERG: Zeitschr. f. Phys. 38. p. 411. 1926. (Heliumspektrum.)
6. W. HEISENBERG: Zeitschr. f. Phys. 41. p. 239. 1927. (Heliumspektrum.)
7. P. A. DIRAC: Proc. Roy. Soc. (A). 112. p. 661. 1926.
8. P. A. DIRAC: Proc. Roy. Soc. (A). 40. p. 492. 1926.
9. E. WIGNER: Zeitschr. f. Phys. 40. p. 883. 1927.
10. E. WIGNER: Zeitschr. f. Phys. 43. p. 624. 1927.
11. W. HEITLER u. LONDON: Zeitschr. f. Phys. 44. p. 455. 1928.
12. F. LONDON: Zeitschr. f. Phys. 46. p. 455. 1928.
13. W. HEITLER: Zeitschr. f. Phys. 46. p. 47. 1727.; 47. p. 835. 1928.
14. W. PAULI jr.: Zeitschr. f. Phys. 31. p. 765. 1925.
15. Y. SUGIURA: Zeitschr. f. Phys. 45. p. 484. 1927. (1).
16. A. UNSÖLD: Ann. d. Phys. 82. p. 355. 1927.; Zeitschr. f. Phys. 43. p. 563. 1927.
17. M. BORN u. OPPENHEIMER: Ann. d. Phys. 84. p. 457. 1927.

Ortvay Rudolf.

ÜBER DAS PROBLEM DER CHEMISCHEN VALENZ IN DER QUANTENMECHANIK.

Eine Darstellung der neueren Versuche auf Grundlage der Quantenmechanik die chemische Valenz, insbesonderen bei homöopolaren Verbindungen, zu deuten. Es wird besonders auf die bedeutenden Arbeiten von HEITLER und LONDON näher eingegangen.

Rudolf Ortvay.

A GÁZ ROTÁCIÓS ENERGIÁJÁNAK INGADOZÁSÁRÓL.

E sorok írója részletesen foglalkozott[1] az ideális, merev molekulájú gáz energiaingadozásával. Megállapitottam, hogy a gáz energiaingadozása két részből áll, a molekulák mozgási energiájának az összeütközések következtében beálló változásaiból: *a hőingadozásból* és a molekulaszám ingadozására vonatkozó részből: *a sűrűségi ingadozásból.*

A gáz jelzett energiaingadozását két úton számítottam, egyfelől az entrópia és az állapot-valószínűség közötti összefüggés alapján, másfelől a statisztikai mechanika Boltzmann-Gibbs-féle egyenlete segélyével. A hőingadozást a Boltzmann-Gibbs-féle egyenlet alapján jelzett dolgozataimban csak az egyatomú gázoknál számítottam ki. A következő sorokban a gázmolekulák rotációs koordinátáira eső hőingadozás középértékét, illetőleg relativ középértékét számítom a statisztikai mechanika Boltzmann-Gibbs-féle egyenlete alapján *magas hőmérséklet mellett,* e dolgozatom a gáz energiaingadozására vonatkozó jelzett dolgozataim kiegészítőjeként tekintendő.

1. §. Vegyünk tekintetbe egy ideális, egyenletes hőmérsékletű (T), merev molekulájú, többatomú gázt tartalmazó edényt teljesen visszaverő, ugyanazon hőmérsékletű (T) és hőtanilag izoláló oldalfalakkal. Vegyük tekintetbe az edény térfogatának egy igen kicsiny V_1 térfogatrészét. Az n_1 molekulát tartalmazó V_1 térfogatrész rotációs állapothatározói legyenek : $\vartheta_1, \varphi_1, \psi_1, \vartheta_2, \varphi_2, \psi_2. \ldots \dot{\vartheta}_1, \dot{\varphi}_1, \dot{\psi}_1, \dot{\vartheta}_2, \dot{\varphi}_2, \dot{\psi}_2 \ldots$, ahol ϑ_1 és φ_1, ϑ_2 és $\varphi_2 \ldots$, illetőleg

[1] Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 17. 122. (1915). Math. és Phys. Lapok, 24. 159. (1915); 26. 144. (1917).

$\psi_1, \psi_2 \ldots$ az 1, 2...-es molekula súlypontjához tartozó tehetetlenségi ellipszoid harmadik (L), illetőleg első főtehetetlenségi tengelyének (I) pozitiv irányát meghatározó szögek. A valószínűsége annak, hogy $\vartheta_1, \psi_1, \vartheta_2, \psi_2, \ldots \dot\vartheta_1, \dot\varphi_1, \dot\psi_1, \dot\vartheta_2, \dot\varphi_2, \dot\psi_2 \ldots$ koordináták egy tetszésszerinti időpontban $\vartheta_1, \psi_1, \vartheta_2, \psi_2, \ldots$ $\dot\vartheta_1, \dot\varphi_1, \dot\psi_1, \dot\vartheta_2, \dot\varphi_2, \dot\psi_2 \ldots$ és $\vartheta_1 + d\vartheta_1, \psi_1 + d\psi_1, \vartheta_2 + d\vartheta_2, \psi_2 + d\psi_2 \ldots$ $\dot\vartheta_1 + d\dot\vartheta_1, \dot\varphi_1 + d\dot\varphi_1, \dot\psi_1 + d\dot\psi_1, \dot\vartheta_2 + d\dot\vartheta_2, \dot\varphi_2 + d\dot\varphi_2, \dot\psi_2 + d\dot\psi_2 \ldots$ közé esnek, a BOLTZMANN-GIBBS-féle egyenlet alapján:

$$\begin{aligned} &W d\vartheta_1 d\psi_1 d\vartheta_2 d\psi_2 \ldots d\dot\vartheta_1 d\dot\varphi_1 d\dot\psi_1 d\dot\vartheta_2 d\dot\varphi_2 d\dot\psi_2 \ldots \\ &= Ce^{-\frac{E}{kT}} d\vartheta_1 d\psi_1 d\vartheta_2 d\psi_2 \ldots d\dot\vartheta_1 d\dot\varphi_1 d\dot\psi_1 d\dot\vartheta_2 d\dot\varphi_2 d\dot\psi_2 \ldots, \end{aligned} \tag{1}$$

ahol C állandó, E a V_1 térfogatrésznek a $\vartheta_1, \psi_1, \vartheta_2, \psi_2 \ldots$ $\dot\vartheta_1, \dot\varphi_1, \dot\psi_1, \dot\vartheta_2, \dot\varphi_2, \dot\psi_2 \ldots$ által meghatározott állapotához tartozó rotációs energiát jelenti. Jelölje I, K, L egy gázmolekula főtehetetlenségi nyomatékait. A V_1 térfogatrész rotációs energiája:[1]

$$\begin{aligned} E = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_1} [&I(\sin\vartheta_i \cos\psi_i \dot\varphi_i - \sin\psi_i \dot\vartheta_i)^2 + \\ &+ K(-\sin\vartheta_i \sin\psi_i \dot\varphi_i - \cos\psi_i \dot\vartheta_i)^2 + L(\cos\vartheta_i \dot\varphi + \dot\psi_i)^2] = \\ &= \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_1} (Ia_i^2 + Kb_i^2 + Lc_i^2), \end{aligned} \tag{2}$$

ahol a, b, c a forgási sebesség komponensei a főtehetetlenségi tengelyekre és

$$\begin{aligned} a_i &= \sin\vartheta_i \cos\psi_i \dot\varphi_i - \sin\psi_i \dot\vartheta_i, \\ b_i &= -\sin\vartheta_i \sin\psi_i \dot\varphi_i - \cos\psi_i \dot\vartheta_i, \quad c_i = \cos\vartheta_i \dot\varphi_i + \dot\psi_i. \end{aligned} \tag{3}$$

2. §. Ha a gáz rotációs energiája az egész edényben egyenletesen van elosztódva, a V_1 térfogatrész egyes rotációs sebességi koordinátájához tartozó energiaértéket a következőképpen számíthatjuk: Vonatkoztassuk az (1) alatti egyenletet egy mole-

---

[1] A rotációs energia számításánál l. pl. M. PLANCK: Einführung in die Allgemeine Mechanik (1916) 146., 147., 152. §-ait, l. a 212. lapon az (501) alatti egyenleteket.

kulára s vezessük be a rotációs sebességi koordináták helyett a forgási sebességnek a főtehetetlenségi tengelyekre vonatkozó komponenseit: a-, b-, c-t. Akkor

$$W d\vartheta d\psi dadbdc = \text{állandó}.e^{\frac{-(Ia^2+Kb^2+Lc^2)}{2kT}} \,|D|\, d\vartheta d\psi dadbdc, \quad (4)$$

ahol

$$D = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial \dot\vartheta} & \frac{\partial a}{\partial \dot\varphi} & \frac{\partial a}{\partial \dot\psi} \\ \frac{\partial b}{\partial \dot\vartheta} & \frac{\partial b}{\partial \dot\varphi} & \frac{\partial b}{\partial \dot\psi} \\ \frac{\partial c}{\partial \dot\vartheta} & \frac{\partial c}{\partial \dot\varphi} & \frac{\partial c}{\partial \dot\psi} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\sin\vartheta} \quad (5)$$

a $\dot\vartheta$, $\dot\varphi$, $\dot\psi$ függvény-determinánsát jelenti.

A (4) és (5) alatti egyenletből a^2-nak a középértéke:[1]

$$\overline{a^2} = \frac{\int\limits_0^\pi \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} a^2 e^{-\frac{Ia^2}{2kT}} da}{\int\limits_0^\pi \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{Ia^2}{2kT}} da} = \frac{kT}{I}, \quad (6)$$

tehát az a-hoz tartozó átlagos energiaérték:

$$\frac{I\overline{a^2}}{2} = \frac{kT}{2}. \quad (6a)$$

Hasonlóképpen a b, illetőleg c koordinátához tartozó átlagos energiaérték:

$$\frac{K\overline{b^2}}{2} = \frac{kT}{2}, \text{ illetőleg } \frac{L\overline{c^2}}{2} = \frac{kT}{2}. \quad (7)$$

---

[1] Számításaimban használható integrálformula a következő:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx^2} x^{2k} dx = \frac{1}{t^k \sqrt{t}} \frac{(2k)!}{2^{2k} k!} \sqrt{\pi} \quad (k=0,1,2\ldots).$$

3. §. Annak a valószínűsége, hogy az a_1 koordináta a_1 és a_1+da_1 között van, a (4) alatti egyenletből:

$$W da_1 = \text{állandó}. e^{-\frac{I a_1^2}{2kT}} da_1. \tag{8}$$

Következőleg $\overline{(a_1^2 - \overline{a_1^2})^2}$-nak középértéke $\left(\overline{a_1^2} = \frac{kT}{I}\right)^2$.

$$\overline{(a_1^2 - \overline{a_1^2})^2} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (a_1^2 - \overline{a_1^2})^2 e^{-\frac{I a_1^2}{2kT}} da_1}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{I a_1^2}{2kT}} da_1} = 2\left(\frac{kT}{I}\right)^2. \tag{9}$$

Tehát az a_1 koordinátához tartozó energiaingadozás középnégyzete:

$$\overline{\left(\frac{I a_1^2}{2} - \frac{I \overline{a_1^2}}{2}\right)^2} = \frac{(kT)^2}{2}. \tag{10}$$

Ugyanez az érték következik (1)- és (4)-ből a V_1 térfogatrész b_1, c_1, a_2, b_2, c_2... koordinátájának megfelelő energiaingadozás középnégyzetére.

4. §. Ezek után a V_1 térfogatrész hőingadozásának középnégyzetét, azaz a V_1 térfogatrész n_1 molekulája energiaingadozásának középnégyzetét a következőképpen számíthatjuk:

A valószínűségi számítás szerint érvényes a következő tétel:[1] Legyenek x_1, x_2... x_n egymástól független változó mennyiségek. Összegük négyzetének középértéke, ha $\overline{x_i} = 0$ ($i = 1, 2 ... n$), a következő egyenlettel van adva:

$$\overline{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2} = \overline{x_1^2} + \overline{x_2^2} + \cdots + \overline{x_n^2}, \tag{11}$$

a betűk feletti vízszintes vonalkával a középértéket jelölve.

A V_1 térfogatrészben (V_1 igen kicsiny az egész gáztartó térfogatához képest) a molekulák egyes koordinátáihoz tartozó rotációs energiaértékek ingadozásai egymástól független mennyi ségek. Másfelől a (6) és (8) alapján:

[1] L. CZUBER: Wahrscheinlichkeitsrechnung, I. Dritte Auflage, 77. oldal.

$$\overline{\left(\frac{Ia_1^2}{2}-\frac{\overline{Ia_1^2}}{2}\right)}=\frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{Ia_1^2}{2}-\frac{\overline{Ia_1^2}}{2}\right)e^{-\frac{Ia_1^2}{2kT}}da_1}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{Ia_1^2}{2kT}}da_1}=0. \quad (12)$$

Hasonló egyenlet érvényes b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 ...... koordinátára. Tehát a (11) alatti tétel szerint a V_1 térfogatrész rotációs hő-ingadozásának középnégyzete egyenlő az egyes koordinátáknak megfelelő energiaingadozások középnégyzetei összegével, azaz (10) tekintetbevételével:

$$\overline{\varepsilon_{kH}^2}=\overline{\left[\left(\frac{Ia_1^2}{2}-\frac{\overline{Ia_1^2}}{2}\right)+\left(\frac{Kb_1^2}{2}-\frac{\overline{Kb_1^2}}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{Lc_{n_1}^2}{2}-\frac{\overline{Lc_{n_1}^2}}{2}\right)\right]^2}=$$

$$=\overline{\left(\frac{Ia_1^2}{2}-\frac{\overline{Ia_1^2}}{2}\right)^2}+\overline{\left(\frac{Kb_1^2}{2}-\frac{\overline{Kb_1^2}}{2}\right)^2}+\cdots+\overline{\left(\frac{Lc_{n_1}^2}{2}-\frac{\overline{Lc_{n_1}^2}}{2}\right)^2}=$$

$$=n_1q_r\left(\frac{kT}{2}\right)^2, \quad (13)$$

ahol q_r egy molekula rotációs sebességi koordinátáinak számát jelenti. Következőleg térfogatrészük n_1 molekulája rotációs hő-ingadozásának relatív középnégyzete:

$$\overline{\varepsilon_H^2}=\frac{\frac{n_1q_r}{2}(kT)^2}{\left(\frac{n_1q_rkT}{2}\right)^2}=\frac{2}{n_1q_r}, \quad (14)$$

megegyezőleg előbbi dolgozataim megfelelő egyenleteivel.

Széll Kálmán.

ÜBER DIE ROTATIONSENERGIESCHWANKUNG IM GASE.

Es wird die Rotationsenergieschwankung in mehratomigen Gase anknüpfend an die früheren Abhandlungen des Verfassers über dieses Thema auf Grund der Boltzmann-Gibbs-schen Formel der statistischen Mechanik berechnet. Die erhaltenen Resultate stimmen mit den früheren Gleichungen des Verfassers überein. *Koloman Széll.*

JELENTÉS
AZ 1928. ÉVI KŐNIG GYULA JUTALOMRÓL.

Kőnig György és Kőnig Dénes atyjuk emlékére jutalmat alapitottak, a Kőnig Gyula jutalmat, mely kétévenként rendes és rendkivüli egyetemi tanárok mellőzésével egy magyar mathematikusnak itélendő oda, figyelembe véve az illetőnek főként az utolsó két naptári évbe eső munkásságát a tiszta mathematika terén.

Az *Eötvös Loránd Mathematikai és Physikai Társulat* választmánya a jutalom odaitélése ügyében Rados Gusztávot, Kürschák Józsefet, Fejér Lipótot és Szücs Adolfot bizta meg javaslattétellel. E bizottság a jutalomra Jordan Károlyt találta legérdemesebbnek; elhatározásának inditó okait a következő jelentés foglalja össze.

Jordan Károly mathematikai munkássága a mult évtized elején kezdődött és azóta bőségben és értékben folyton emelkedett. Középpontjában mindig a valószinűségszámitás állt. Jordan első nagyobb munkája, melyet Fiedler Rajmunddal a zárt konvex görbék vizsgálatának szentelt, a geometriai valószínűségekből sarjadt. Felismervén a polár-tangenciális koordináták használatának kiváló előnyeit, a két szerző az idézett könyvben és ahhoz csatlakozó dolgozataikban egész seregét adja az általuk *Π* típusúnak nevezett görbék érdekesnél érdekesebb sajátságainak. E görbéket az jellemzi, hogy érintőik távolsága valamely fix ponttól az érintő irányszögének folytonos, 2π szerint periodikus és differenciálható függvénye. Közöttük találhatók az «állandó szélességű» konvex, Euler által orbiformnak nevezett zárt görbék, amelyeknek a szerzők általános elméletét adják abból a modern nézőpontból, mely a *helyi* tulajdonságokon felülemelkedve a *teljes* görbét tartja szem előtt. Eredményeik közül példaképpen csak a következőt idézzük: Minden orbiform görbén legalább hat olyan pont van, ahol a görbületi sugár szélső értéket vesz fel; általánosságban az ilyen pontok száma $4n+2$ alakú.

Mint mondottuk, a valószínűségszámítás és a vele kapcsolatos problémák foglalták le elsősorban Jordan Károly figyelmét; érdeklődése két irányú: egyrészt az alapfogalmak felállítása és a főtételek általános levezetése foglalkoztatták, másrészt régi és új valószínűségi problémák számításra jól használható alakban való megoldása. E mellett teljesen úrrá lett az alkalmazások igen széles területén, a mathematikai statisztikában, amely új problémáinak felvetését sugalmazta és egyúttal alkalmat nyujtott neki a talált megoldások gyakorlati értékének bebizonyítására. A valószínűségi alapfogalmakat két dolgozatban tette beható vizsgálat tárgyává; a második a mi folyóiratunkban jelent meg és az osztályozás elvének következetes keresztülvitelén alapszik.

A klasszikus valószínűségszámítási kérdések körében a legismertebbek egyike e Bernoulli-féle kérdés: Valamely esemény valószínűsége p (az ellenkezőé $q=1-p$); n kísérletet végzünk; mi a valószínűsége annak, hogy a jelenség pontosan x-szer vagy legfeljebb x-szer következik be? Az első kérdésre az

$$\binom{n}{x} p^x q^{n-x},$$

a másodikra a

$$\sum_{\nu=0}^{x} \binom{n}{\nu} p^\nu q^{n-\nu}$$

képlet ad pontos feleletet. Midőn n és x nagy számok, e képletek hosszas számítást követelnek. Könnyebben kiszámítható, bárcsak közelítő értékeket szolgáltatnak e Laplacetól eredő kifejezések:

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2\xi^2} \quad \text{és} \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{k\xi} e^{-t^2} dt,$$

(ahol $k = \frac{1}{\sqrt{2npq}}$, $\xi = x - np$).

Ezek közül az első voltakép egy Hermite-sorfejtés kezdőtagja. Hermite-sorfejtésnek az

$$f(\xi) = e^{-k^2\xi^2}[a_0 + a_1 H_1(\xi) + a_2 H_2(\xi) + \cdots]$$

alakú sort nevezzük, amelyben $H_n(\xi)$ a

$$H_n(\xi) = e^{k^2\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} (e^{-k^2\xi^2})$$

egyenlettel definiált n-edfokú polinom. Az a_n együtthatókat e polinomok orthogonalitási tulajdonságai alapján lehet kiszámítani:

$$a_n = \frac{1}{2^n n!\, k^{2n-1} \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(\xi) f(\xi)\, d\xi$$

és a sorfejtés megadja az $f(\xi)$ függvényt bizonyos általános jellegű és e függvényre vonatkozó feltételek mellett. A második közelítő képlet kezdőtagja egy sornak, melynek folytatása Hermite-féle sorfejtést alkot.

Midőn e sorokat a valószínűségszámításban fellépő függvényekre alkalmazzuk, azaz olyan függvényekre, amelyekben a változó csak izolált értékeket vehet fel, az együtthatók kiszámítása már is nehézségekkel jár, amin lehet ugyan úgy segíteni, hogy az integrálokat közelítő összegekkel helyettesítjük de ezzel új hibaforrást nyitunk.

Jordan megoldotta azt a kérdést, hogy mikép lehet æquidistans helyeken megadott függvényt gyors összetartású polinomsorral elhanyagolások nélkül kifejezni. E célból bevezeti a

$$G_s(t, x) = e^t t^{-x} \frac{d^s}{dt^s} (e^{-t} t^x)$$

függvényeket, amelyek x-re nézve polinomok és kimutatja ezek «orthogonalitását», ami alatt azt kell értenünk, hogy

$$\sum_{x=0}^{\infty} G_s(t, x)\, G_k(t, x) \frac{e^{-t}t^x}{x!} = 0, \qquad (s \neq k)$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} G_s(t, x)^2 \frac{e^{-t}t^x}{x!} = \frac{s!}{t^s}.$$

Lényeges, hogy itt összegek és nem integrálok szerepelnek. Egész számú x változóra definiált $f(x)$ függvények ezek után ily alakú sorba fejthetők:

$$f(x) = \frac{e^{-t}t^x}{x!}[a_0 + a_1 G_1(t, x) + \cdots + a_n G_n(t, x) + \cdots],$$

ahol — elhanyagolás nélkül —

$$a_n = \frac{t^n}{n!} \sum_{x=0}^{\infty} G_n(t, x) f(x).$$

A t paraméter szabadon választható, de célszerűen a következő kifejezéssel vesszük egyenlőnek:

$$t = \frac{\Sigma x f(x)}{\Sigma f(x)}.$$

A Bernoulli-probléma esetében $t = np$ és az első valószínűség számértékét az

$$\frac{e^{-t}t^x}{x!}\left[1 - \frac{t^2}{2n} G_2(t, x) + \frac{t^3}{3n^2} G_3(t, x) + \cdots\right]$$

sor adja, amelyből a második valószínűséget összegezéssel kapjuk, felhasználván a G_s polinomok egyéb, az összegezés szempontjából hasznos tulajdonságait.

Hasonló szerkezetű, jól használható sorokat állapit meg Jordan számos, az okok valószínűségére vonatkozó probléma esetében. Mind e sorok maradéktagjainak megbecslése későbbi vizsgálatok feladatát alkotja. Hogy felállitásuk kétségtelen haladást jelent, az abból is kitűnik, hogy már néhány taggal akkora közelitést lehet elérni, mint más sorok útján sokkal több taggal.

Az idézett BERNOULLI-probléma felfogható olyan kérdésnek is, amelyet valamely urnára vonatkozólag teszünk fel: egy urnában ismert számú és minőségű golyó van, egymás után többször húzunk és mindig visszatesszük a kihúzott golyót; kérdezhetjük, mekkora valószínűséggel húzunk adott minőségű golyót bizonyos számszor (vagy legfeljebb bizonyos számszor)? Ezek az urnakérdések azért fontosak, mert a valószínűségszámításban ugyanazt a szerepet játsszák, mint a geometriában az ábrák: elvont fogalmakat szemléletessé tesznek. Az említett urnakérdésnek egy messzemenő általánositását oldotta meg JORDAN és a megoldásban érdekesen használta fel a többváltozós hipergeometrikus függvények APPELLtől és LAURICELLAtól megállapitott tulajdonságait.

A mathematikai statisztika kérdéseivel foglalkozván, számos új ideát, eddig ismeretlen formulát, továbbá meglepő tulajdonságokkal biró polinomsorozatokat és a régi anyag új feldolgozását köszönhetjük JORDANnak. Említsük meg például, hogy tőle származik az EULER-MACLAURIN-féle összegező formulának olyan levezetése, mely talán a legtermészetesebb, mert nyilvánvalóan mutatja, hogy e formula és a véges TAYLOR-sor közös forrásból erednek. Néhány szóval elmondhatjuk e levezetést.

Induljunk ki az

$$\int_0 f(t)\,dt$$

integrálból és alkalmazzunk reá k parciális integrálást:

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \varphi_0(t)\,f(t)\,dt = [\varphi_1(t)\,f(t)]_0^1 - \int_0^1 \varphi_1(t)\,f'(t)\,dt =$$

$$= [\varphi_1(t)\,f(t) - \varphi_2(t)\,f'(t) + \cdots + (-1)^{k-1}\varphi_k(t)\,f^{(k-1)}(t)]_0^1 +$$

$$+ (-1)^k \int_0^1 \varphi_k(t)\,f^{(k)}(t)\,dt,$$

mely integrálások folyamán bevezetjük a

$$\varphi_0(t)=1,\ \varphi_1(t)=t+c_1,\ \varphi_2(t),\dots,\ \varphi_n(t),\dots$$

polinomokat azzal a feltétellel, hogy

$$\varphi_1'(t)=\varphi_0(t),\ \varphi_2'(t)=\varphi_1(t),\dots,\ \varphi_n'(t)=\varphi_{n-1}(t),\dots$$

E feltétel nyilván nem elegendő a szóban forgó polinomsorozat teljes meghatározására, mert $\varphi_0(t)=1$-ből kiindulván a sorozat tagjait lépésről-lépésre integrálás útján nyerjük és minden lépés egy új határozatlan állandót vezet be. Jogunkban áll tehát még valamilyen kiegészitő feltételt választani.

Ha például az eddig határozatlanoknak megmaradt állandókat a

$$\varphi_n(1)=0 \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\dots)$$

egyenlőségekből vezetjük le, ami egyértelműen lehetséges, kapjuk, hogy

$$\varphi_n(t)=\frac{(t-1)^n}{n!}$$

és

$$\int_0^1 f(t)\,dt=f(0)+\frac{1}{2}f'(0)+\dots+\frac{1}{k!}f^{(k-1)}(0)+$$

$$+(-1)^k\int_0^1\frac{(t-1)^k}{k!}f^{(k)}(t)\,dt.$$

Ez lényegében a véges TAYLOR-sor, amelyet rögtön a szokott alakban pillantunk meg, ha $f(t)$ számára az

$$f(t)=F'[a+t(x-a)]$$

alakot választjuk.

Ha pedig a $\varphi_n(t)$ polinomsorozat állandóit azzal a követeléssel határozzuk meg, hogy

$$\varphi_n(0)=\varphi_n(1)$$

legyen $n=2$-től kezdve (a $\varphi_2(0)=\varphi_2(1)$ egyenlet megállapitja a $\varphi_1(t)$-ben szereplő állandó számértékét: $c_1=-\frac{1}{2}$, azután a

$\varphi_3(0)=\varphi_3(1)$ egyenletből levezetjük a $\varphi_2(t)$-ben fellépő új állandót és így tovább), akkor polinomsorozatul lényegében a BERNOULLI-polinomokat kapjuk. Legyen ugyanis a szokásos jelöléssel élve $B_n(x)$ az az n-edfokú polinom, melyet a

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n!}t^n$$

sorfejtés definiál és

$$B_n(0)=B_n$$

az n-edik BERNOULLI-szám, akkor

$$\varphi_n(t)=\frac{B_n(t)}{n!},\quad \varphi_n(0)=\frac{B_n}{n!}$$

és általános képletünk ezt az alakot ölti:

$$\int_0^1 f(t)\,dt=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]-\frac{B_2}{2!}\Delta f'(0)+\cdots+$$

$$+(-1)^{k-1}\frac{B_k}{k!}\Delta f^{(k-1)}(0)+(-1)^k\int_0^1 B_k(t)f^{(k)}(t)\,dt,$$

amelyben $\Delta f(t)$ alatt $f(t+1)-f(t)$ értendő. E képletet most csak az

$$F(a+t),\ F(a+1+t),\dots,\ F(a+n-1+t)$$

függvényekre kell alkalmaznunk, hogy azután összegezéssel a híres EULER-MACLAURIN-formulát nyerjük.

JORDAN bevezetett egy általa másodfajú BERNOULLI-polinomoknak nevezett $\psi_n(x)$ polinomsorozatot, melynek tulajdonságai sok tekintetben szembeállíthatók az eredeti BERNOULLI-polinomok tulajdonságaival. Ezeket tudvalevőleg így is lehet jellemezni:

$$B'_n(x)=nB_{n-1}(x),\quad \Delta B_n(x)=x^{n-1}$$
$$(n=1,2,3,\dots).$$

JORDAN az ő új

$$\psi_0(x)=1,\ \psi_1(x),\dots,\ \psi_n(x),\dots$$

sorozatát az analog, de fordított

$$\psi'_n(x)=\binom{x}{n-1},\quad \Delta\psi_n(x)=\psi_{n-1}(x)$$

követelményekkel definiálja és kifejti számos érdekes tulajdonságukat.

Az interpolációszámítás mindennapi feladata, hogy táblázattal megadott függvényt közelítőleg polinom-alakban állítson elő. A közelítésnek legtermészetesebb módját a legkisebb négyzetek elvéből vezethetjük le. Legyen az $y(x)$ függvény táblázattal megadva x-nek egész számú 1, 2,...n értékeire nézve. Keressünk adott m fokszámú $P_m(x)$ polinomot, mely azzal a tulajdonsággal bírjon, hogy

$$\sum_{x=1}^{n} [y(x) - P_m(x)]^2$$

kisebb, mint bármely más hasonló összeg, amely ebből úgy származik, hogy $P_m(x)$ helyébe más vele egyenlő vagy nálánál alacsonyabb fokszámú polinomot teszünk. Az analizis általános tételei $P_m(x)$ együtthatóinak meghatározására elvileg egyszerű szabályt adnak, de az a baj, hogy ha $P_m(x)$ nem nyujt kellő pontosságú közelítést és e miatt $P_{m+1}(x)$-re akarunk áttérni, egész fáradságunk, melyet az általános szabályok felhasználásával $P_m(x)$-re áldoztunk, kárba veszett és a munkát újra kell kezdeni. Csebisev egy gondolatát követve, Jordan arra törekedett, hogy a $P_m(x)$ függvényeket ne x hatványai szerint, hanem olyan

$$G_0(x) = 1, \; G_1(x), \ldots, \; G_n(x), \ldots$$

polínomok szerint rendezve állítsa elő, amelyeknek segítségével $P_m(x)$-ről $P_{m+1}(x)$-re egyetlen egy új

$$c_{m+1} G_{m+1}(x)$$

alakú tag hozzáadásával, tehát végeredményben egyetlen új c_{m+1} constans kiszámításával lehessen áttérni.

E polinomokat Jordan meghatárczta, tulajdonságaikat részletesen kifejtette, alkalmazásukat példákkal magyarázta és táblázatokkal segitette egy a londoni Mathematikai Társulat folyóiratában megjelent nagyobb és a mi folyóiratunkban megjelent rövidebb dolgozat keretében.

Néhány szóval érinteni akarjuk még Jordan egyéb tudományos munkásságát. Jóval a háború előtt a budapesti földrengési számoló intézet igazgatója volt: ekkor egy nagy összefoglaló tanulmányt írt a földrengési hullámok terjedéséről. A háború alatt kötelességből a mérges gázok használatára fontos időjárási viszonyokkal foglalkozott: ebből az időből ered egy tanulmánya a ködről. Az utóbbi évek folyamán állandóan a mathematikai módszerek alkalmazásai foglalkoztatják a statisztika körében. E munkásságának gyümölcse egy a mathematikai statisztika egész körét felölelő terjedelmes kézikönyv, mely nemrég magyarul és bővített kiadásban franciául is megjelent. A francia kiadáshoz D'OCAGNE írt előszót és ebben, valamint azon megjegyzésekben, amelyekkel a könyvet a párisi Académie des Sciences-ban bemutatta, magasztalóan emelte ki a munka tartalmának gazdagságát, önálló eredményeinek sokaságát és általában azt a lényeges haladást, amelyet a statisztikai tudomány e könyvnek köszönhet.

Örömmel jegyezhetjük fel, hogy miközben JORDAN KÁROLY az alkalmazott módszerek tökéletesítésére vagy újakkal pótlására törekedett, e munkássága annyi új és szép eredményt hozott a tiszta mathematika terén is. *Szűcs Adolf.*

RAPPORT SUR LE PRIX JULES KŐNIG.

Le prix a été décerné cette année à M. CHARLES JORDAN. Le Rapport analyse ses travaux relatifs aux courbes orbiformes, au calcul des probabilités et à l'interpolation. M. JORDAN a introduit en Analyse des suites de polynomes du plus haut intérêt jouissant toutes de la propriété généralisée de l'orthogonalité. Une de ces suites permet de développer certaines fonctions de probabilité en séries pratiquement très utiles; une autre présente des analogies curieuses avec les polynomes de Bernoulli; une troisième fait l'office des polynomes de Legendre dans le cas des fonctions définies seulement pour les valeurs équidistantes de la variable.

M. JORDAN s'est acquis en outre de grands mérites par la publication d'un traité à maints points de vue très original sur la Statistique mathématique. *Adolphe Szűcs.*

KORLÁTOS HATVÁNYSOROKRA VONATKOZÓ ÚJABB VIZSGÁLATOKRÓL.[1]

A következőkben néhány újabb keletű vizsgálatról óhajtok beszámolni, melyek elsősorban a hatványsorok egy fontos osztályára, az ú. n. korlátos hatványsorokra vonatkoznak. Így nevezzük röviden azokat a $z-z_0$ (z_0 tetszőleges komplex szám) hatványai szerint haladó hatványsorokat, melyek egy bizonyos z_0 középpontú körlemez belsejében konvergálnak és ott abszolút értékre nézve egy véges korlát alatt maradnak. Az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy $z_0 = 0$, azaz hogy a szóbanforgó hatványsor

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots = f(z)$$

alakú, továbbá hogy a kérdéses körlemez a $|z| < 1$ egységkör és hogy a hatványsor által itt értelmezett $f(z)$ függvényre nézve $|f(z)| \leq 1$. Az ezen feltételek által elhatárolt hatványsor-, vagy ha úgy tetszik függvényosztályt, a következőkben röviden az *E-osztály*-nak fogom nevezni.

A Weierstass nevéhez fűződő függvénytani irány szempontjából egészen természetesen merül fel az a kérdés, hogy milyen speciális tulajdonsággal rendelkeznek egy az E-osztályhoz tartozó hatványsor együtthatói. Nem akarok itt azoknak a szükséges és elegendő feltételeknek a részletezésébe bocsátkozni, melyek az E-osztályú hatványsorok együtthatóira nézve megadhatók s amelyek Carathéodory, Fejér [**2**][2] és Schur [**10**]

[1] Az Eötvös Loránd Mathematikai és Physikai Társulat 1928. március 22-iki ülésén tartott előadás.

[2] A szögletes zárójelben álló számok a dolgozat végén közölt irodalmi összeállításra vonatkoznak.

nevéhez fűződnek. Általában legyen szabad megjegyeznem, hogy a következőkben adott beszámoló teljességre nem tarthat igényt s hogy csupán néhány speciális tényt akar kiragadni az idetartozó irodalomból.

A kérdés régebbi irodalmára nézve BIEBERBACH encyklopédiacikkére [**1**] utalok. Csupán a következő észrevételeket bocsátom előre.

Az együtthatók CAUCHY-féle integrálalakjából közvetlenül adódik, hogy minden n-re

$$|c_n| \leqq 1, \tag{1}$$

az ú. n. PARSEVAL-féle képletből pedig folyik a többetmondó tény, hogy a

$$|c_0|^2 + |c_1|^2 + |c_2|^2 + \cdots + |c_n|^2 + \cdots \tag{2}$$

sor mindig konvergens és $\leqq 1$ marad. Megjegyzem, hogy ez utóbbi tulajdonság egy sokkal általánosabb függvényosztály kharakterisztikuma, t. i. azé, melynél a koncentrikus körökön vett quadratikus középértékek

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^2 d\varphi \leqq 1 \tag{3}$$

maradnak, ha $r < 1$. Egy még általánosabb függvényosztály az, amelynél az ú. n. HARDY-féle középértékek

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})| d\varphi \leqq 1 \tag{4}$$

maradnak ($r < 1$), amelynél természetesen (2) már általában nem, (1) azonban, mint könnyen belátható, még mindig érvényes.

Ennyit az *együtthatókról* magukról. Hogyan viselkednek már most egy E-osztályú hatványsor *szeletei*, vagyis az

$$s_n(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n \tag{5}$$

polinomok? Különösen nevezetes és közelfekvő a kérdés, vajjon egy E-osztályú hatványsor szeletei az egységkörben korlátosak maradnak-e?

Két eredményt említek meg, amelyek ebben az irányban fekszenek. LANDAU [7] meghatározta fix n mellett $|s_n(z)|$ maximumát, mialatt $|z| \leqq 1$ és $f(z)$ az E-osztály összes függvényeit átfutja. Az eredmény:

$$G_n = g_0^2 + g_1^2 + g_2^2 + \cdots + g_n^2, \tag{6}$$

ahol

$$g_0 = 1, \; g_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}.$$

Könnyen megmutatható, hogy $G_n \sim \frac{\log n}{\pi}$, úgyhogy $G_n \to \infty$, ha $n \to \infty$. Ez a tény szoros kapcsolatban van egy FEJÉR-féle [3] megállapítással, mely szerint az E-osztályban létezik olyan hatványsor, amelynek szeletei az egységkör egy kerületi pontjában, pl. $z = 1$-re, abszolút értékben tetszőleges nagyok lesznek.

Annál figyelemreméltóbb az a szintén FEJÉR-től [4] származó tétel, hogy a szeletek arithmetikai közepei az egységkörben abszolút értékre nézve az 1 korlát alatt maradnak, tehát hogy $|z| \leqq 1$-re

$$\left| \frac{s_0(z) + s_1(z) + s_2(z) + \cdots + s_n(z)}{n+1} \right| \leqq 1; \tag{7}$$

másszóval ez azt jelenti, hogy az arithmetikai közepek szintén az E-osztályhoz tartoznak. Ez a tény végre úgy is formulázható, hogy

$$\left| \sum_{\nu=0}^{n} \left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right) c_\nu z^\nu \right| \leqq 1 \quad (|z| \leqq 1; \; n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{7'}$$

Elegendő természetesen ezt a $z = 1$ helyre igazolni; minden más z helyre ($|z| \leqq 1$) következik ez tüstént abból a megjegyzésből, hogy ha $f(z)$ egy E-osztályú hatványsor, úgy $f(z_0 z)$ is az, hacsak $|z_0| \leqq 1$.

1. §. Egy általános feladat.

Tekintetbe véve, hogy az éppen említett arithmetikai középek a hatványsor $c_\nu z^\nu$ tagjaiban, ill. $z = 1$-re a c_ν együtthatókban lineáris homogén kifejezések, felmerül az az általánosabb kérdés, hogy miként nyerhető egy becslés általában a c_ν-k egy megadott lineáris kombinációja, tehát egy

$$\lambda_0 c_0 + \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \cdots + \lambda_n c_n = L_n \tag{8}$$

alakú kifejezés számára. Itt $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ megadott komplex állandók; nyilván feltételezhető, hogy $\lambda_n \neq 0$. Különösen nevezetesek lesznek olyan lineáris kombinációk, amelyek becsléséből következtetések vonhatók a $s_n(1) = s_n$ szeletek viselkedésére nézve.

Ezeknek a L_n kifejezéseknek a becslésénél három módszer áll rendelkezésünkre, amelyek közül a mindenkori feladat speciális természete szerint választunk.

I. A fentebbi, a szeletek becslését illető feladat megoldására LANDAU [**7**] adott egy eljárást, melyet SZÁSZ [**13**] kiterjesztett a L_n alakú tetszőleges lineáris kombinációk becslésére. Ez az eljárás a következőkben áll. Képezzük a

$$\sqrt{\lambda_n + \lambda_{n-1} z + \lambda_{n-2} z^2 + \cdots + \lambda_0 z^n} = \mu_0 + \mu_1 z + \mu_2 z^2 + \cdots$$

hatványsort, ahol a baloldali függvénynek egy bizonyos (egyébként tetszőleges) determinációja veendő. Ha $|z|$ elég kicsiny, úgy ez biztosan reguláris, tehát hatványsorba fejthető, tekintve, hogy $\lambda_n \neq 0$. Érvényes most már a következő becslés:

$$|L_n| \leq |\mu_0|^2 + |\mu_1|^2 + |\mu_2|^2 + \cdots + |\mu_n|^2. \tag{9}$$

Ez a korlát *általában nem* pontos, azaz nem azonos a $|L_n|$ számok maximumával, ha $f(z)$ az E-osztályba tartozó hatványsorok összeségét átfutja. Mégis a pontos korlát abban a különös esetben, amikor a

$$\mu_0 + \mu_1 z + \mu_2 z^2 + \cdots + \mu_n z^n \tag{10}$$

racionális egész függvény a $|z| < 1$ egységkörben nem tűnik el.

E módszer pl.

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 1$$

-re azonnal szolgáltatja a $s_n(z)$ részletösszegek, helyesebben a $s_n(1) = s_n$ számok LANDAU-féle becslését, vagyis szolgáltatja a fentebb G_n-nel jelölt pontos korlátot. Ez esetben valóban a megfelelő (10) polinom csak $|z| > 1$-re tűnik el.

Az arithmetikai közepekre vonatkozó tétel is hasonlóan adódik, ha $\lambda_\nu = 1 - \frac{\nu}{n+1}$-et írtunk. A (10) polinom gyökei ekkor valamennyien abszolút értékben 1-gyel egyenlők.

II. A második módszer éppen azon a tényen alapszik, hogy a s_n szeletek arithmetikai közepei

$$\frac{s_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n+1} = \frac{S_n}{n+1}$$

abszolút értékben az 1 korlát alatt maradnak. S_n jelenti azoknak a szeleteknek az összegét ($z = 1$), amelyek indexe n-et nem haladja meg.

Könnyű ugyanis az ú. n. parciális összegezés kétszeri alkalmazásával a L_n kifejezésben a c_ν együtthatók helyébe először a s_ν, majd a S_ν számokat bevezetni. Az eredmény így hangzik:

$$L_n = \sum_{\nu=0}^{n-2} S_\nu (\lambda_\nu - 2\lambda_{\nu+1} + \lambda_{\nu+2}) + S_{n-1}(\lambda_{n-1} - 2\lambda_n) + S_n \lambda_n. \tag{11}$$

Ebből azonban adódik, hogy

$$\begin{aligned} |L_n| \leq \sum_{\nu=0}^{n-2} (\nu + 1) |\lambda_\nu - 2\lambda_{\nu+1} + \lambda_{\nu+2}| \\ + n |\lambda_{n-1} - 2\lambda_n| + (n+1)|\lambda_n|; \end{aligned} \tag{12}$$

a jobboldali korlát az $f(z) = \varepsilon =$ konst. függvényre, ahol $|\varepsilon| = 1$, el is éretik, feltéve, hogy a λ_ν számok mind valósak és a

$$\begin{aligned} \lambda_\nu - 2\lambda_{\nu+1} + \lambda_{\nu+2} \geqq 0, \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-2), \\ \lambda_{n-1} - 2\lambda_n \geqq 0, \\ \lambda_n \geqq 0 \end{aligned} \tag{13}$$

egyenlőtlenségek érvényesek.

Ez a becslési módszer (ha a legutóbb említett (13) feltétel is ki van elégítve) FEJÉR [5] egy becslési módszerének az analogonja, mely trigonometrikus cosinuspolinomokra vonatkozik s amely szerint ez utóbbi három egyenlőtlenség a

$$\frac{\lambda_0}{2} + \lambda_1 \cos\varphi + \lambda_2 \cos 2\varphi + \cdots + \lambda_n \cos n\varphi = T(\varphi) \tag{14}$$

n edrendű trigonometrikus polinom nemnegatív voltát vonja maga után. Ez ugyanúgy bizonyítható be, mint fent, csak ezúttal a kétszeri parciális összegezésnél az

$$\tfrac{1}{2} + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cdots + \cos n\varphi + \cdots$$

sor szeleteinek arithmetikai közepei vezetendők be, amelyek tudvalevően minden φ-re nemnegatívok.

FEJÉR e tételével szoros kapcsolatban van a

III. módszer. Tegyük fel, hogy általában a λ_ν együtthatók olyanok, hogy a fent bevezetett n-edrendű $T(\varphi)$ trigonometrikus polinom minden φ-re nemnegatív. Mivel nyilván

$$L_n = \lim_{r \to 1} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi})\, T(\varphi)\, d\varphi,$$

azért

$$|L_n| \leqq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} T(\varphi)\, d\varphi = \lambda_0. \tag{15}$$

E becslés pontos, mert a λ_0 korlát realizálható, ha $f(z) \equiv \varepsilon$-nal, ahol is $|\varepsilon| = 1$.

A következőkben főként az E-osztályra vonatkozó néhány speciális feladattal szeretnék foglalkozni, amelyek e három módszer egyikének vagy másikának a segítségével megoldhatók.

2. §. Egy Fejér-Rogosinski-féle tétel.

Tekintsük egy E-osztályú $f(z)$ hatványsor $s_n(z)$ szeleteit. Mint említettem, ezek nem maradnak az egységkörben szükségképpen véges korlát alatt, még kevésbbé az $f(z)$ abszolút értékének 1-gyel egyenlő korlátja alatt. Kérdezhető már most, hogy nem létezik-e a nullapontnak egy fix környezete, melyben bármely E-osztályú hatványsor összes $s_n(z)$ szelete abszolút értékre nézve mégis 1 alatt marad. Egy ilyen fix környezet létezése egyáltalában nem magától értetődő. Könnyű azonban belátni, hogy a maximális ilyen tulajdonságú környezet köralakú; ennek a körnek a sugara érdekel bennünket.

Mint FEJÉR [5] és ROGOSINSKI [8] egymástól függetlenül megállapították, a keresett maximális körlemez sugara $= \frac{1}{2}$. Azaz egy tetszőleges E-osztályú hatványsor szeleteire nézve

$$|s_n(z)| \leqq 1, \tag{16}$$

ha $|z| \leqq \frac{1}{2}$ és itt $\frac{1}{2}$ nem pótolható nagyobb számmal. A bizonyítás végett, mint könnyen belátható, elegendő a $z = \frac{1}{2}$-helyre szorítkozni, azaz megmutatni, hogy

$$\left| c_0 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2^2} + \cdots + \frac{c_n}{2^n} \right| \leqq 1.$$

Ismét egy L_n tipusú lineáris kifejezésről van szó, ahol ezúttal $\lambda_\nu = \frac{1}{2^\nu}$. Ebben az esetben a három fent említett módszer közül az első nem vezet célhoz, a második és harmadik azonban igen, mert a (13) feltételek teljesitve vannak; valóban

$$\lambda_\nu - 2\lambda_{\nu+1} + \lambda_{\nu+2} = \frac{1}{2^\nu} - 2\frac{1}{2^{\nu+1}} + \frac{1}{2^{\nu+2}} = \frac{1}{2^{\nu+2}} > 0,$$

$$\lambda_{n-1} - 2\lambda_n = \frac{1}{2^{n-1}} - 2\frac{1}{2^n} = 0,$$

$$\lambda_n = \frac{1}{2^n} > 0.$$

Könnyű kimutatni azt is, hogy $\frac{1}{2}$ nem pótolható nagyobb számmal.

3. §. Egy Schur-Szegő-féle feladat.

Ezekhez az eredményekhez csatlakozik egy SCHUR-ral közösen írt doldozatunk [**12**], melynek kiindulópontját a következő megjegyzés képezi. Az éppen említett szeletbecslésnél, mint már mondottuk, az $\frac{1}{2}$ szám nem pótolható nagyobbal. Ez azonban rögtön megváltozik, ha az első szeletet, azaz $s_1(z)$-t figyelmen kívül hagyjuk és csak az $n \geqq 2$ indexű szeletek becslése iránt érdeklődünk. Igy $n = 2, 3, 4, \ldots$-re

$$|s_n(z)| \leqq 1 \tag{16}$$

marad a $|z| = \sqrt{\frac{3}{8}}$, az $\frac{1}{2}$-nél nyilván nagyobb sugarú körben. Valóban $\sqrt{\frac{3}{8}} = 0{\cdot}6123\ldots$ Ez a $\sqrt{\frac{3}{8}}$ szám különben nem pótolható nagyobbal. Az említett dolgozatban kimutatjuk minden n-re egy bizonyos r_n sugárérték létezését, úgyhogy az E-osztály összes hatványsoraira nézve (16) érvényes, hacsak $|z| \leqq r_n$, továbbá hogy nincs olyan r_n-nél nagyobb sugarú kör a nullapont körül, melyben ugyanez állana.

Eme r_n számok dolgozatunkban kifejtett nevezetesebb tulajdonságai a következők:

$$r_1 = \tfrac{1}{2},\; r_2 = \sqrt{\tfrac{3}{8}},\; r_2 < r_3 < \cdots < r_n < \cdots < 1. \tag{17}$$

Mondhatjuk tehát, hogy a $|z| \leqq r_n$ körben nemcsak $s_n(z)$, hanem az összes *későbbi* szeletek is abszolút értékben a függvény korlátja, azaz 1 alatt maradnak.

Érvényes továbbá

$$\lim_{n \to \infty} r_n = 1. \tag{18}$$

Ami az r_n szám általános meghatározását illeti, úgy páratlan n-re ez az

$$1 - r - 2r^{n+1} = 0$$

algebrai egyenletnek a $0 \ldots 1$ közben fekvő egyetlen gyökével azonos; ha n páros, úgy meghatározása bajosabb ugyan, de ebben az esetben is megadtuk a módszert egy algebrai egyenletnek a felállítására, amelynek r_n eleget tesz s amelynek ez esetben r_n a legkisebb pozitiv gyöke. Egyébiránt

$$r_3 = 0{\cdot}6478\ldots,\quad r_4 = 0{\cdot}694\ldots,\quad r_5 = 0{\cdot}7204\ldots.$$

Figyelemreméltó végre, hogy n nagy értékeire r_n asymptotikusan elég pontosan uralható; érvényes ugyanis

$$r_n = 1 - \frac{\log 2n - \log\log n + \varepsilon_n}{n}, \tag{19}$$

ahol $\varepsilon_n \to 0$, ha $n \to \infty$.

Ez a kérdéstétel több irányban általánosítható, pl. a következőképen. Legyenek $s_n^{(k)}(z)$ a kérdéses hatványsor szeleteinek k-adrendű ú. n. Cesàro-féle közepei, $k \geq 0$, melyeknek részletes definiciójára e pillanatban nem akarok kitérni. Elegendő talán annyit megemlítenem, hogy ezek felfoghatók, mint a szeletek bizonyos n és k-tól függő nemnegatív súlyokkal vett középértékei. Különösen érdekes a $0 \leq k \leq 1$ eset. $k = 0$-ra ezek a közepek magukkal a szeletekkel, $k = 1$-re a közönséges arithmetikai közepekkel azonosak. Mint fent, értelmezhetők már most ebben az általánosabb esetben is az $r_n^{(k)}$ számok azáltal, hogy $|z| \leq r_n^{(k)}$ a legnagyobb kör a nullapont körül, melyben az E-osztály minden hatványsorára

$$|s_n^{(k)}(z)| \leq 1$$

érvényes. Nyilván $r_n^{(0)} = r_n$ és könnyen kimutatható, hogy minden n-re $r_n^{(1)} = 1$. Valószínű, hogy $r_n^{(k)}$ úgy n-ben, mint k-ban monoton nő; ezt azonban az előbb emlitett dolgozatban kimutatni nem tudtuk. Ellenben könnyen kiszámítható

$$r_1^{(k)} = \frac{k+1}{2} \tag{20}$$

és sikerült kimutatnunk, hogy minden n-re

$$r_n^{(k)} \geq r_1^{(k)}. \tag{21}$$

Mondhatjuk tehát, hogy $|z| \leq \frac{k+1}{2}$ a legnagyobb kör a nullapont körül, melyben az összes k-adrendű Cesàro-féle közepek absolút értékben 1 alatt maradnak.

4. §. A «kapcsolatok» fogalma.

Rátérek most egy tételcsoportra, mely egy ROGOSINSKI-val közösen írt dolgozatunk [9] főtárgya s amely helyenként az előbbi kérdésekkel összefüggésben áll. E dolgozat kiinduló-pontja a következő feladat. Legyen $s_n(z)$ az E-osztály egy hatványsorának n-edik szelete, α, β, a, b négy tetszőleges fix komplex állandó. Képezzük az

$$\alpha s_n\left(ze^{\frac{a}{n}}\right) + \beta s_n\left(ze^{\frac{b}{n}}\right) \tag{22}$$

kifejezést, amely tehát a $s_n(z)$ szeletből úgy keletkezik, hogy a z argumentumot egy-egy az n-től függő állandóval megszorozzuk s az ilyen módon keletkező polinomoknak egy az n-től független lineáris összetételét vesszük. Kérdezzük már most, hogy milyen α, β, a, b számok mellett lesz ez a kifejezés $|z| \leqq 1$-re és minden n-re az E-osztályon belül egyenletesen korlátos, azaz mikor marad ez a kifejezés abszolút értékben kisebb, mint egy tisztán az említett négy számtól függő pozitív állandó. (Az ilyen számok létezése a priori egyáltalában nem világos.) A felelet így hangzik: akkor és csak akkor, ha az

$$\alpha e^{a} + \beta e^{b} = 0 \tag{23}$$

feltétel teljesül. Ezt pl. a II. módszer segítségével könnyen lehet igazolni. Hasonló érvényes különben tetszőleges fix számú ilyeténképpen módosított szelet lineáris összefoglalására; az ilyenfajta «kapcsolatokat» — közös dolgozatunkban a «Koppelung» névvel illettük őket — ROGOSINSKI már régebben vizsgálta a FOURIER-féle sorok elméletében.

Két speciális eset különös érdekességgel bír:

a) az ú. n. sugárszerű «kapcsolatok»;

b) az ú. n. forgatási «kapcsolatok».

5. §. A sugárszerű «kapcsolatok».

Legyen $a = 0$, b valós és negatív, α, β pedig legyenek úgy választva, hogy (23) teljesüljön. Ebben a speciális esetben (22) pontos korlátja is meghatározható s az eredményt a jelölések célszerű megváltoztatásával a következőképen mondhatjuk ki: Legyen $0 < \varrho < 1$, úgy $|z| \leqq 1$-re

$$\left| \frac{s_n(\varrho z) - \varrho^n s_n(z)}{1 - \varrho^n} \right| \leqq 1. \tag{24}$$

Ez a tény különben a III. módszer segítségével is könnyen igazolható, tekintve, hogy a már fentebb említett FEJÉR-féle kriterium alapján az

$$\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varrho^\nu - \varrho^n}{1 - \varrho^n} \cos \nu\varphi \tag{25}$$

trigonometrikus polinom pozitív. A $\varrho \to 1$ határesetben innen az

$$\tfrac{1}{2} + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cdots + \cos n\varphi + \cdots$$

sor szeletei arithmetikai közepeinek nemnegatív volta adódik.

Ennek az egyenlőtlenségnek két alkalmazását óhajtom megemlíteni.

1° Tekintsük a $s_n(z)$ szelet által létesített $w = s_n(z)$ leképezést és nevezetesen az egységkör egy sugarának, pl. a $0 \ldots 1$ rádiusnak a képét. Ez egy egészen meghatározott, esetleg kettőspontokkal bíró folytonos görbe $\mathfrak{C}$, amely a $s_n(0) = c_0 = f(0)$ ponttal kezdődik és a $s_n(1) = s_n = w_0$ pontban végződik. Mint már említettük, $s_n(1)$-nek nem kell az egységkörben feküdnie, sőt alkalmas hatványsor esetében alkalmas n-re abszolút értékben tetszőleges nagy is lehet.

Legyen azonban először $|s_n(1)| \leqq 1$. Állítom, hogy akkor az egész görbe, vagyis az egész sugárkép az egységkörben fekszik (1. ábra).

Ugyanis a (24) egyenlőtlenség $z = 1$-re így is írható:

$$\frac{s_n(\varrho) - \varrho^n s_n(1)}{1 - \varrho^n} = \gamma,$$

ahol $|\gamma| = 1$, azaz

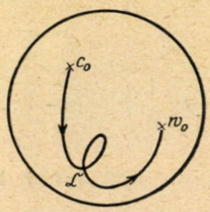
$$s_n(\varrho) = \varrho^n s_n(1) + (1 - \varrho^n)\gamma. \tag{26}$$

Innen

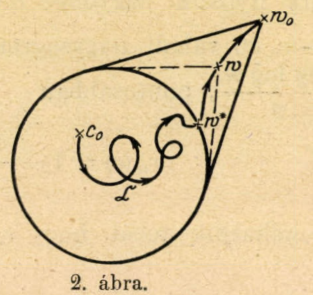
$$|s_n(\varrho)| \leqq \varrho^n + 1 - \varrho^n = 1$$

adódik. Ezt az eredményt a következőképen is mondhatjuk ki: Ha egy E-osztályú hatványsor n-edik szelete az egységkör egy tetszőleges pontjában abszolút értékre nézve $\leqq 1$, akkor ugyanez érvényes az egész sugárdarabon, amely ezt a pontot a nullaponttal összeköti. Másszóval az egységkör ama pontjai, ahol egy E-osztályú hatványsor n-edik szelete abszolút értékben $\leqq 1$, egy (a nullapontra nézve) «csillagszerű» tartományt képeznek.

Legyen másrészt $|s_n(1)| > 1$. A (26) egyenlet szerint $s_n(\varrho)$ rajta van a $s_n(1)$-et és a γ-t összekötő egyenesen; mivel azonban γ az egységkör egy pontja, tehát $s_n(\varrho)$, azaz az egész görbe



1. ábra.



2. ábra.

eleesik a $s_n(1)$-ből az egységkörhöz rajzolt két érintő s az egységkör által meghatározott tartományba (2. ábra). Alkalmazzuk ezt az eredményt az $f(rz)$ függvényre, ahol $0 < r < 1$, úgy nyerjük, hogy a kérdéses görbe egy az egységkörön kívül fekvő tetszőleges w pontjáig teljesen benne van az ebből a pontból az egységkörhöz rajzolt két érintő és az egységkör által meghatározott tartományban.

Az eddigiekből következik többek között, hogy a kérdéses görbe, eltekintve az $f(z) \equiv \varepsilon$ ($|\varepsilon| = 1$) kivételes esettől, az egységkört legföljebb egy w^* pontban metszi és ha az egységkört egyszer elhagyta, úgy teljesen az először említett tartományban maradva, a nullaponttól állandóan távolodik.

2. A második alkalmazás a már említett, Schur-ral közösen írt dolgozatunk tárgyával függ össze. Láttuk, hogy annak a

legnagyobb körnek az r_n sugara, melyben az E-osztály minden hatványsorára (16) érvényes, asymptotikusan

$$r_n = 1 - \frac{\log n}{n} + O\left(\frac{\log\log n}{n}\right) \quad (n \to \infty), \tag{19'}$$

azaz $1 - r_n$ valódi nagyságrendje $\frac{\log n}{n}$. Legyen azonban $c > 0$ és tekintsük azt a legnagyobb a nullapont körül írt kört, melyben

$$|s_n(z)| \leqq 1 + c \tag{16''}$$

marad. Ennek a körnek a tisztán n-től és c-től függő $r_n(c)$ sugara nyilván nagyobb, mint r_n; érvényes már most, hogy $1 - r_n(c)$ valódi nagyságrendje nem $\frac{\log n}{n}$ mint fent, hanem $\frac{\log\log n}{n}$, pontosabban

$$r_n(c) = 1 - \frac{\log\log n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \to \infty). \tag{27}$$

Mondhatjuk tehát, hogy $r_n(c)$ gyorsabban tart 1-hez mint r_n.

6. §. A forgatási «kapcsolatok».

Rátérek most a «kapcsolatok» egy másik nevezetes alosztályára, az ú. n. forgatási «kapcsolatok»-ra, melyeket nyerünk, ha a (22) egyenletben a és b számára tiszta képzetes értékeket választunk. A (23) feltétel ez esetben akkor és csak akkor van teljesítve, vagyis akkor és csak akkor áll fenn korlátosság, ha a szóbanforgó «kapcsolat» egy állandó faktortól eltekintve a következő alakú:

$$e^{i\vartheta} s_n\left(ze^{-\frac{\vartheta}{n}}\right) - e^{-i\vartheta} s_n\left(ze^{\frac{i\vartheta}{n}}\right), \tag{28}$$

ahol ϑ tetszőleges valós érték; kimutatható, hogy ez abszolút értékben

$$\leqq 2\left|\sin\frac{\vartheta}{n}\right| \sum_{\nu=0}^{n-1} P_\nu^2\left(\cos\frac{\vartheta}{n}\right), \tag{29}$$

ahol $P_\nu(x)$ a ν-edik Legendre féle polinom. Ez a becslés már szerepel Szász egy dolgozatában [**13**], mint a fent megadott I. módszer egyik alkalmazása; különösen figyelemreméltó azonban az a tény, hogy a (29) kifejezés, mint Rogosinski-vel kimutattuk [**9**], $0 < \vartheta \leqq \frac{\pi}{2}$-re a pontos határt szolgáltatja, ami az I. módszer szerint azon alapszik, hogy ez esetben egy bizonyos polinom gyökei az egységkörön kívül fekszenek. A (29) kifejezés asymptotikus viselkedésével, midőn n nagy, szintén foglalkoztunk s kimutattuk így a következő tételt:

Legyen

$$|z| \leqq 1;\; n = 1, 2, 3, \ldots;\; 0 < \vartheta \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Akkor

$$\left| \frac{e^{i\vartheta} s_n\left(ze^{-\frac{i\vartheta}{n}}\right) - e^{-i\vartheta} s_n\left(ze^{\frac{i\vartheta}{n}}\right)}{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}} \right| < \frac{1}{\sin\vartheta} \int_0^{\vartheta} J_0^2(x)\, dx, \tag{30}$$

ahol J_0 jelenti a 0-dik Bessel-féle függvényt. A jobboldalon levő szám nem pótolható kisebbel. A baloldal különben ilyen alakban is írható:

$$\left| \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\sin\left(1 - \frac{\nu}{n}\right)\vartheta}{\sin\vartheta} c_\nu z^\nu \right|, \tag{30'}$$

úgy hogy a tétel $\vartheta \to 0$-ra az arithmetikai közepekre vonatkozó egyenlőtlenségbe megy át.

$\vartheta = \frac{\pi}{2}$-re a tétel így hangzik:

$$\left| \frac{s_n\left(ze^{-\frac{i\pi}{2n}}\right) + s_n\left(ze^{\frac{i\pi}{2n}}\right)}{2} \right| < \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0^2(x)\, dx, \tag{30''}$$

ahol a jobboldali integrál, melynek értéke ebben az esetben 1·0777..., nem pótolható kisebb számmal.

Csak röviden említem meg az utóbbi tételnek egy alkalmazását. Fejér [**6**] foglalkozott az E-osztály egy nevezetes $E^\star$ alosztályával, melynek hatványsorai azáltal vannak jellemezve, hogy az általuk értelmezett $f(z)$ függvény az egységkörben csupa különböző értéket vesz fel, vagyis mint mondani szokás, a $w = f(z)$ leképezés «egyrétű». Ezenkívül persze $|f(z)| \leqq 1$ is érvényes. Eme alosztály hatványsorainak szeletei, ellentétben a teljes E-osztály hatványsoraiéval, az egységkörben egyenletesen *korlátosak* maradnak. FEJÉR az arithmetikai közepekről szóló tétel alkalmazásával a szeletek számára az 1·7071... korlátot találta. Ha azonban az arithmetikai közepekre vonatkozó becslés helyett a fenti (30) becslést alkalmazom, úgy ez a korlát — ha csekély mértékben is — mégis tovább kisebbíthető. Nevezetesen ha a $\vartheta = \frac{\pi}{2}$-nek megfelelő (30″) becslést használjuk fel, akkor a FEJÉR-féle okoskodás az 1·6160... korlátra vezet [**15**].

7. §. A szeletek bizonyos középértékeiről.

A fentebb tárgyalt, ROGOSINSKI-vel együtt írt dolgozatunk még egy eredményéről szeretnék röviden megemlékezni, mely szintén az E-osztály hatványsorainak szeleteire vonatkozik. Mint már többször említettük, a $s_n(z)$ szeletek nem maradnak az egységkörben szükségképen korlátosak. Képezzük azonban $s_n(z)$ középértékét az egységkör bármely sugarán, pl. a 0...1 sugáron, tehát a következő integrált:

$$\int_0^1 s_n(z)\,dz, \tag{31}$$

úgy ez nemcsak korlátos lesz, hanem abszolút értékben a függvény korlátja, azaz 1 alatt marad.

Ez a tény a III. módszer segitségével igazolható. Mivel a kérdéses integrál

$$= c_0 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3} + \cdots + \frac{c_n}{n+1}, \tag{31'}$$

azért $\lambda_\nu = \frac{1}{\nu+1}$, úgyhogy tételünk igazolva lesz, ha bebizonyitjuk, hogy az

$$\frac{1}{2}+\frac{\cos\varphi}{2}+\frac{\cos 2\varphi}{3}+\dots+\frac{\cos n\varphi}{n+1} \tag{32}$$

trigonometrikus polinom minden φ-re nemnegatív. Ez nem következik közvetlenül a fentebb a II. módszerrel kapcsolatosan említett FEJÉR-féle kriteriumból (vagyis kétszeres parciális összegezéssel, amely az

$$\tfrac{1}{2}+\cos\varphi+\cos 2\varphi+\dots+\cos n\varphi+\dots$$

sor szeleteinek arithmetikai közepeit vezeti be), hanem ehhez egy további jellegzetes fogás veendő, melynek részletezésébe azonban itt nem akarok bocsátkozni.

Ezzel az eredménnyel összefüggően felvethető a következő kérdés: Melyek azok a z_1, z_2 értékpárok ($|z_1|\leqq 1$, $|z_2|\leqq 1$, $z_1 \neq z_2$), amelyekre nézve

$$\left|\frac{1}{z_2-z_1}\int_{z_1}^{z_2} s_n(z)\,dz\right| \leqq 1, \tag{33}$$

hacsak $s_n(z)$ egy tetszőleges E-osztályú hatványsor bármely szelete. A 2. § eredménye egyértelmű azzal, hogy ez az egyenlőtlenség a $|z_1|\leqq\frac{1}{2}$, $|z_2|\leqq\frac{1}{2}$ esetben teljesül. (31)-ből következik továbbá, hogy (33) érvényes, ha z_1 és z_2 közül az egyik 0. Könnyű bebizonyítani, hogy $|z_1+z_2|\leqq 1$ a (33) tulajdonsághoz *szükséges*; ez a feltétel egyébként abban a különös esetben, amikor z_1 és z_2 az egységkör egyazon átmérőjén fekszenek, *elegendő* is.

8. §. Rokon problémák.

Csak röviden szeretnék néhány rokon természetű kérdésre rámutatni, melyek egyéb függvényosztályokra vonatkoznak s amelyek a következő közös alakra hozhatók. Tekintsük a hatványsorok egy osztályát, amely azáltal van jellemezve, hogy minden egyes hatványsor a $|z|<1$ nyitott egységkörban konvergens és ott egy bizonyos (K) tulajdonsággal rendelkezik. Kérdezzük már most, hogy melyik annak a legnagyobb, a nullapont körül írt körnek a sugara, amelyben bármely ilyen hatványsor összes szeletei ugyanezen (K) tulajdonsággal rendelkeznek. A szeletek helyett tekinthetők különben az arithmetikai közepek, vagy általánosabban a hatványsor tagjainak tetszőleges lineáris kombinációi adott együtthatókkal. Hatványsorok helyett vehetők továbbá egyéb kifejtések is, amelyek adott függvények szerint haladnak. Világos végre, hogy a fentebb (3. §.) bevezetett r_n számok fogalmát is általánosítani lehet egy tetszőleges (K) tulajdonsággal jellemzett hatványsorosztályra, ill. adott függvények szerinti kifejtésekre.

1° Egy az E-osztállyal közeli kapcsolatban álló osztály azoknak a $|z| < 1$-re konvergens $f(z)$ hatványsoroknak az összesége, amelyek az egységkör belsejében pozitiv valós résszel birnak. A bevezetésben említett LANDAU-féle feladat analogonját erre az osztályra SCHUR [**11**] tárgyalta, aki meghatározta $f(z)$ n-edik szelete, azaz $s_n(z)$ valós részének a minimumát, ha $|z| \leqq 1$ és $f(z)$ az osztály összes olyan hatványsorait futja át, amelyekre nézve $f(0)$ valós része 1. Az eredmény egy tisztán n-től függő állandó, mely n-nel osztva $n \to \infty$-re egy negativ határértékhez tart. Ez a határérték jellemezhető, mint a $2\dfrac{\sin x}{x}$ függvény minimuma, ha x az összes valós számokat átfutja. Az r_n szám analogonja, vagyis annak a legnagyobb a nullapont körül rajzolt körnek a sugara, melyben a kérdéses osztály bármely hatványsora n-edik szeletének valós része nemnegativ marad, pontosan megegyezik a 3. §-ban definiált r_n számmal, úgyhogy az $r_1 = \frac{1}{2}$ sugarú kör a nullapont körül a legnagyobb kör, amelyben ez a tulajdonság az összes szeletekre érvényes.

Ezek az eredmények természetesen tüstént átformulázhatók az egységkörben reguláris és pozitiv harmonikus függvényekre. Ilyen formában viszont a kérdés rögtön átvihető a térre, azaz az egységgömb belsejében reguláris térbeli harmonikus függvényekre. Egy ilyen függvény LAPLACE-féle gömbfüggvények szerint haladó kifejtésében az n-edik szelet minimuma, ha a változó az egységgömböt, a függvény pedig a kérdéses függvényosztály összes olyan függvényeit futja át, amelyek a kezdőpontban 1-gyel egyenlők, meghatározható [**14**]. A kérdéses minimum egy tisztán n-től függő állandó, amely n^2-tal osztva $n \to \infty$-re egy negatív határértékhez tart. Ez a határérték jellemezhető, mint a $2\frac{J_1(x)}{x}$ függvény minimuma, ha x az összes valós számokat átfutja. Itt $J_1(x)$ az első Bessel-féle függvényt jelenti. Érvényes továbbá [**14**], hogy az összes szeletek az $\frac{1}{3}$ sugarú gömbben a nullapont körül nemnegatívok maradnak és ez a legnagyobb ilyen tulajdonságú gömb. $\frac{1}{3}$ tehát a térben a síkbeli $\frac{1}{2}$ helyébe lépő szám. Az r_n számok analogonjáról a térben nem tudok sokat; úgy látszik, hogy ezeknek a vizsgálata lényegesen nehezebb, mint a síkban. Megjegyzem végül, hogy mindezek a kérdések, ill. eredmények azáltal precizírozhatók, hogy az összes, az egységkörben, ill. egységgömbben reguláris pozitív harmonikus függvények helyett csak adott fokú pozitív sík-, ill. térbeli harmonikus polinomokat bocsátunk konkurrenciába. Egy idetartozó síkbeli feladattal Sidon [**16**] foglalkozott, kimutatván, hogy egy az egységkörben nemnegatív n-edfokú harmonikus polinom összes szeletei nemcsak a $r \leqq \frac{1}{2}$, hanem a valamivel nagyobb

$$r \leqq \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{n+2}} \tag{34}$$

körben nemnegatívok maradnak. Ez utóbbi szám nem pótolható nagyobbal.

2° Tekintsük azoknak a $|z| < 1$-re konvergens $f(z)$ hatványsoroknak az összeségét, amelyekre nézve az

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi \tag{4'}$$

Hardy-féle középértékek $r < 1$-re az 1 korlát alatt maradnak. (Ezúttal ebben áll a (K) tulajdonság.) Ki lehet mutatni egy olyan legnagyobb pozitív ϱ szám létezését, hogy bármely ilyen függvény összes szeleteire nézve

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |s_n(\varrho e^{i\varphi})|\, d\varphi \leqq 1. \tag{35}$$

Ez a ϱ szám mindenesetre $> \frac{1}{2}$, pontos meghatározása azonban nehéznek látszik. Még az r_1-nek ebben az esetben megfelelő szám, tehát a legnagyobb $\bar{r}_1$ szám, melyre az osztály öszszes hatványsoraiban

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |s_1(\bar{r}_1 e^{i\varphi})|\, d\varphi \leqq 1 \tag{36}$$

érvényes, sem adódik egészen könnyen, hanem csak egy újabb Feketé-től és Riesz M.-től származó, a szóbanforgó hatványsor-osztály együtthatóira vonatkozó parameteres ábrázolás igénybevételével.[1] Az eredmény:

$$\bar{r}_1 = \frac{1}{2\sqrt{\mu}} = 0{\cdot}9146\ldots,$$

ahol μ a

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}\,\frac{E(\sin\alpha) - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^4\frac{\alpha}{2}}$$

függvény maximumát jelöli, mialatt α a $0\cdots\frac{\pi}{2}$ közt átfutja; itt $E(k)$ jelenti a

$$E(k) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi$$

Legendre-féle másodfajú (teljes) elliptikus integrált.

Fekete kimutatta különben,[2] hogy az r_n-nek ebben az esetben megfelelő $\bar{r}_n$ számra nézve

$$\bar{r}_n > r_n \tag{37}$$

érvényes.

---

[1] Ezt a parameteres ábrázolást, melynek részletezésére itt nem akarok kitérni, Fekete és Riesz M. urak egy szóbeli közlésének köszönhetem.

[2] Szóbeli közlés alapján.

3° Végezetül még egy hatványsorosztályt említek meg, t. i. azt, melynek hatványsorai egyetlen komplex értéket sem vesznek fel többször, mint egyszer, azaz mint már fentebb mondottuk, az általuk létesített leképezések *egyrétűek.*[1] Érvényes ekkor a következő tétel [**15**]: Ha egy hatványsor a nyitott egységkörben egyrétű, akkor ugyanez érvényes az összes szeletekre az $\frac{1}{4}$ sugarú körben a nullapont körül; itt $\frac{1}{4}$ nem pótolható nagyobb számmal.

Ennek a tételnek a bizonyítása a KOEBE-féle torzítási tételen s egyéb meglehetősen mélyen fekvő segédeszközökön alapszik, amelyek részletezésébe itt nem akarok bocsátkozni. A fentebb idézett dolgozat foglalkozik különben a (nullapontra nézve) «csillagszerű», továbbá még a konvex leképezésekre vonatkozó megfelelő feladatokkal is. A kritikus szám ezekben az esetekben is $\frac{1}{4}$, a bizonyítások azonban lényegesen egyszerűbben alakulnak, mint abban az esetben, amikor a (K) tulajdonság az egyrétű leképezésben áll.

Idézett irodalom.

1. L. BIEBERBACH: Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variablen. [Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, II C 4, 379—392. o.]

2. C. CARATHÉODORY und L. FEJÉR: Über den Zusammenhang der Extremen von harmonischen Funktionen mit ihren Koeffizienten und über den PICARD-LANDAU'schen Satz. [Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, Bd. 32 (1911), 218—239. o.]

3. L. FEJÉR: Über gewisse Potenzreihen an der Konvergenzgrenze. [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften, 1910, Nr. 3, 17 oldal.]

4. L. FEJÉR: Über gewisse durch die FOURIER'sche und LAPLACE'sche Reihe definierten Mittelkurven und Mittelflächen [Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, Bd. 38 (1914), 79—97. o.]

5. L. FEJÉR: Über die Positivität von Summen, die nach trigonometrischen oder LEGENDRE'schen Funktionen fortschreiten. (Erste Mitteilung.) [Acta litterarum ac scientiarum regiae universitatis hungaricæ Francisco-Josephinæ, sectio scientiarum mathematicarum, 2. kötet (1925), 75—86. o.]

[1] A 6. §-ban említett E^* osztály ennek a hatványsorosztálynak azon $f(z)$ hatványsoraiból áll, amelyekre $|f(z)| \leq 1$.

6. L. Fejér: Über die Koeffizientensumme einer beschränkten und schlichten Potenzreihe. [Acta Mathematica, Bd. 49 (1926), 183—190. o.]

7. E. Landau: Abschätzung der Koeffizientensumme einer Potenzreihe. [Archiv der Mathematik und Physik, Bd. (3) 21 (1913), 42—50 és 250—255. o.; Bd. (3) 24 (1916), 250—260. o.]

8. W. Rogosinski: Über Bildschranken bei Potenzreihen und ihren Abschnitten. [Mathematische Zeitschrift, Bd. 17 (1923), 260—276. o.]

9. W. Rogosinski und G. Szegő: Über die Abschnitte von Potenzreihen, die in einem Kreise beschränkt bleiben. [Mathematische Zeitschrift, Bd. 28 (1928), 73—94. o.]

10. I. Schur: Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind. [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 147 (1917), 205—232. o. és Bd. 148 (1918), 122—145. o.]

11. I. Schur: Über die Koeffizientensummen einer Potenzreihe mit positivem reellen Teil. [Archiv der Mathematik und Physik, Bd. (3) 27 (1918), 126—135. o.].

12. I. Schur und G. Szegő: Über die Abschnitte einer im Einheitskreise beschränkten Potenzreihe. [Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften 1925, 545—560. o.]

13. O. Szász: Ungleichungen für die Koeffizienten einer Potenzreihe. [Mathematische Zeitschrift, Bd. 1 (1918), 163—183. o.]

14. G. Szegő: Koeffizientenabschätzungen bei ebenen und räumlichen harmonischen Entwicklungen. [Mathematische Annalen, Bd. 96 (1927), 601—632. o.]

15. G. Szegő: Zur Theorie der schlichten Abbildungen. [Mathematische Annalen, megjelenőben.]

16. S. Sidon: Ein Satz über positive harmonische Polynome. [Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 35 (1926), 97—99. o.]

Szegő Gábor.

ÜBER EINIGE NEUERE UNTERSUCHUNGEN AUS DEM GEBIETE DER BESCHRÄNKTEN POTENZREIHEN.

(Auszug.)

Es handelt sich um einige Sätze neueren Datums über die Klasse E der Potenzreihen

$$c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n+\cdots=f(z), \tag{1}$$

welche im Einheitskreise $|z|<1$ konvergieren, für welche ferner daselbst $|f(z)|\leq 1$ gilt.

Die ältere Literatur der Frage findet sich in dem Encyklopädieartikel von Bieberbach [1] zusammengestellt. Carathéodory, Fejér [2] und SCHUR [**10**] beschäftigten sich mit notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Koeffizienten c_n. LANDAU [**7**] hat bei festem n das Maximum des absoluten Betrages des n-ten Abschnittes $s_n(z)$ von (1) bestimmt, wenn $|z| \leq 1$ ist und $f(z)$ die Klasse E durchläuft. FEJÉR [**3**] hat die Existenz von Potenzreihen der Klasse E gezeigt, deren geeignete Abschnitte für $z=1$ beliebig gross werden. Er hat dagegen bewiesen [**4**], dass die arithmetischen Mittel der Abschnitte für $|z| \leq 1$ dem Betrage nach unterhalb 1 bleiben, d. h. ebenfalls zu der Klasse E gehören.

In § 1 wird die allgemeine Aufgabe formuliert, eine vorgegebene lineare Kombination

$$\lambda_0 c_0 + \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \cdots + \lambda_n c_n = L_n \tag{2}$$

der Koeffizienten innerhalb E abzuschätzen, $\lambda_n \neq 0$. Es stehen uns zur Lösung dieser Aufgabe drei Methoden zur Verfügung.

I. Bei der oben erwähnten Aufgabe der Abschätzung der Abschnitte hat LANDAU [**7**] eine Methode angegeben, welche SZÁSZ [**13**] zur Abschätzung von (2) verallgemeinert hat. Sie lautet folgendermassen. Man bilde

$$\sqrt{\lambda_n + \lambda_{n-1} z + \lambda_{n-2} z^2 + \cdots + \lambda_0 z^n} = \mu_0 + \mu_1 z + \mu_2 z^2 + \cdots,$$

dann ist

$$|L_n| \leqq |\mu_0|^2 + |\mu_1|^2 + |\mu_2|^2 + \cdots + |\mu_n|^2. \tag{3}$$

Diese Schranke ist genau, wenn das Polynom

$$\mu_0 + \mu_1 z + \mu_2 z^2 + \cdots + \mu_n z^n$$

für $|z| < 1$ nicht verschwindet.

II. Aus dem FEJÉR'schen Satze über die arithmetischen Mittel folgt:

$$|L_n| \leqq \sum_{\nu=0}^{n-2} (\nu+1) \, |\lambda_\nu - 2\lambda_{\nu+1} + \lambda_{\nu+2}| + n \, |\lambda_{n-1} - 2\lambda_n| + (n+1) \, |\lambda_n|. \tag{4}$$

Diese Schranke ist genau, wenn die λ_ν reell sind und den Ungleichungen

$$\begin{aligned} \lambda_\nu - 2\lambda_{\nu+1} + \lambda_{\nu+2} &\geqq 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-2), \\ \lambda_{n-1} - 2\lambda_n &\geqq 0, \\ \lambda_n &\geqq 0 \end{aligned} \tag{5}$$

genügen.

III. Es sei

$$\frac{\lambda_0}{2} + \lambda_1 \cos\varphi + \lambda_2 \cos 2\varphi + \cdots + \lambda_n \cos n\varphi \tag{6}$$

ein nichtnegatives trigonometrisches Polynom. Dann ist

$$|L_n| \leqq \lambda_0. \tag{7}$$

Diese Schranke ist genau.

§ 2. Fejér [5] und Rogosinski [8] haben bewiesen, dass in dem Kreise $|z| \leqq \frac{1}{2}$ für alle Abschnitte $s_n(z)$ einer beliebigen Potenzreihe der Klasse E

$$|s_n(z)| \leqq 1 \tag{8}$$

gilt. Hierbei kann $\frac{1}{2}$ durch keine grössere Zahl ersetzt werden.

§ 3. Schur und Szegő [12] haben für jeden Wert von n die Existenz einer positiven Zahl r_n bewiesen, derart dass für alle Potenzreihen der Klasse E die Ungleichung (8) gilt. Es werden die wichtigsten Eigenschaften dieser Zahlen r_n angegeben. Sie wachsen monoton mit n und es gilt für $n \to \infty$

$$r_n = 1 - \frac{\log 2n - \log\log n + \varepsilon_n}{n} \qquad (\varepsilon_n \to 0). \tag{9}$$

Die Cesáro'schen Mittel k-ter Ordnung $s_n^{(k)}(z)$ der Abschnitte von (1) bleiben für $|z| \leqq \frac{k+1}{2}$ absolut genommen unterhalb 1, wobei die Zahl $\frac{k+1}{2}$ durch keine größere ersetzt werden kann.

§ 4. Rogosinski und Szegő [9] haben die «Koppelungen»

$$\alpha s_n(ze^{\frac{a}{n}}) + \beta s_n(ze^{\frac{b}{n}}) \tag{10}$$

untersucht, α, β, a, b feste komplexe Konstanten. Dann und nur dann bleibt (10) dem Betrage nach unterhalb einer nur von α, β, a, b abhängigen positiven Konstante, wenn die Bedingung

$$\alpha e^a + \beta e^b = 0 \tag{11}$$

erfüllt ist.

§ 5. Die *radialen Koppelungen* erhält man, wenn $a = 0$, b reel und negativ ist. Durch Anwendung der Methode II. oder III. ergibt sichl der folgende Satz: Es sei $0 < \rho < 1$, dann ist für $|z| \leqq 1$

$$\left| \frac{s_n(\rho z) - \rho^n s_n(z)}{1 - \rho^n} \right| \leqq 1. \tag{12}$$

Als erste Anwendung von (12) wird der Verlauf der Bildkurve untersucht, welche bei der Abbildung $w = s_n(z)$ einem Radius des Einheitskreises entspricht. Es wird z. B. gezeigt, dass diese Kurve (abgesehen von dem Spezialfall $f(z) \equiv \varepsilon$, $|\varepsilon| = 1$) den Einheitskreis höchstens einmal schneidet und nach Verlassen des Einheitskreises sich vom Nullpunkte stets entfernt.

Als zweite Anwendung wird eine asymptotische Formel für den Radius $r_n(c)$ des grössten Kreises $|z| \leqq r_n(c)$, in dem $|s_n(z)| \leqq 1 + c$ gilt, angegeben; hierbei ist c eine feste positive Zahl. Man hat

$$r_n(c) = 1 - \frac{\log \log n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{13}$$

§ 6. Die *Drehkoppelungen* erhält man, wenn in (10) a und b rein imaginär sind. Es sei ϑ reell. Dann ist

$$\left| e^{i\vartheta} s_n\left(ze^{-\frac{i\vartheta}{n}}\right) - e^{-i\vartheta} s_n\left(ze^{\frac{i\vartheta}{n}}\right) \right| \leqq 2 \left| \sin \frac{\vartheta}{n} \right| \sum_{\nu=0}^{n-1} P_\nu^2\left(\cos \frac{\vartheta}{n}\right), \tag{14}$$

wo $P_\nu(x)$ das ν-te LEGENDRE'sche Polynom bezeichnet. Für $0 < \vartheta \leqq \frac{\pi}{2}$ ist diese Schranke genau. In diesem Falle gilt, wenn $n = 1, 2, 3 \ldots$, $|z| \leqq 1$ ist,

$$\left| \frac{e^{i\vartheta} s_n\left(ze^{-\frac{i\vartheta}{n}}\right) - e^{-i\vartheta} s_n\left(ze^{\frac{i\vartheta}{n}}\right)}{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}} \right| =$$

$$= \left| \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\sin\left(1 - \frac{\nu}{n}\right)\vartheta}{\sin \vartheta} c_\nu z^\nu \right| < \frac{1}{\sin \vartheta} \int_0^\vartheta J_0^2(x)\, dx, \tag{14'}$$

wo $J_0(x)$ die 0-te BESSEL'sche Funktion bedeutet. Die letze Zahl kann durch keine kleinere ersetzt werden. Der Spezialfall $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ führt [**15**] auf eine Verschärfung eines FEJÉR'schen Satzes [**6**], der besagt, dass die Abschnitte der schlichten Potenzreihen der Klasse E im Einheitskreise dem Betrage nach unterhalb einer absoluten Konstante bleiben.

§ 7. Es gilt

$$\left| \int_0^1 s_n(z)\, dz \right| \leqq 1. \tag{15}$$

Es wird allgemein die Frage nach allen Wertepaaren

$$z_1, z_2 \; (|z_1| \leqq 1, \; |z_2| \leqq 1, \; z_1 \neq z_2)$$

aufgeworfen, für welche stets

$$\left| \frac{1}{z_2 - z_1} \int_{z_1}^{z_2} s_n(z)\, dz \right| \leqq 1 \tag{16}$$

ausfällt. Dies ist z. B. der Fall, wenn $|z_1| \leq \frac{1}{2}$, $|z_2| \leq \frac{1}{2}$ gilt oder wenn eine der Zahlen z_1, z_2 verschwindet. Die Bedingung $|z_1 + z_2| \leq 1$ ist sicher notwendig; sie ist auch hinreichend, wenn z_1 und z_2 auf demselben Durchmesser des Einheitskreises liegen.

§ 8. Es werden einige verwandte Fragen bezüglich anderer Klassen von Potenzreihen behandelt.

a) Die Potenzreihe (1) sei für $|z| < 1$ konvergent und habe dort einen positiven Realteil. Das Analogon der in der Einleitung erwähnten LANDAU'schen Aufgabe hat in diesem Falle SCHUR [**11**] behandelt, der das Minimum μ_n von $\Re s_n(z)$ bestimmt hat, wenn $|z| \leq 1$ ist und $f(z)$ die Gesamtheit aller Potenzreihen der Klasse, für die überdies $\Re f(0) = 1$ gilt, durchläuft. Er fand, daß

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mu_n}{n}$$

existiert und gleich dem Minimum von $2 \frac{\sin x}{x}$ ist, wenn x alle reellen Werte durchläuft. Das Resultat kann freilich sofort für ebene harmonische Funktionen, welche im Innern des Einheitskreises regulär und positiv sind, ausgesprochen werden. Der n-te Abschnitt einer Potenzreihe der fraglichen Klasse besitzt ferner in dem Kreise $|z| \leq r_n$ einen nichtnegativen Realteil, wobei r_n dieselbe Bedeutung hat wie in § 3 und durch keine grössere Zahl ersetzt werden kann. Dieses Resultat lässt sich ebenfalls auf harmonische Funktionen aussprechen. Die entsprechenden räumlichen Aufgaben sind nur wenig untersucht worden. Wir wissen bloß [**14**], dass sämtliche Abschnitte der LAPLACE'schen Entwicklung einer im Innern der Einheitskugel regulären positiven harmonischen Funktion in der Kugel $r \leq \frac{1}{3}$ nichtnegativ bleiben. Hierbei kann $\frac{1}{3}$ durch keine grössere Zahl ersetzt werden. Außerdem ist für den dem obigen analogen Minimumwert μ_n der Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mu_n}{n^2}$$

vorhanden und stimmt mit dem Minimum von $2 \frac{J_1(x)}{x}$ überein, wenn x alle reellen Werte durchläuft. ($J_1(x)$ bedeutet die erste BESSEL'sche Funktion.) SIDON [**16**] hat den grössten Kreis bestimmt, in dem sämtliche Abschnitte eines für $r < 1$ positiven zweidimensionalen harmonischen Polynoms gegebenen Grades nichtnegativ sind.

b) Es sei für $r < 1$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi \leqq 1.$$

Es gibt eine positive Zahl ρ, $\frac{1}{2} < \rho < 1$, so dass für $n = 1, 2, 3\ldots$.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |s_n(\rho e^{i\varphi})|\, d\varphi \leqq 1$$

ausfällt, ferner so, dass ρ durch keine grössere Zahl ersetzt werden kann. Das Analogon der Zahl r_1 ist hier gleich $\dfrac{1}{2\sqrt{\mu}} = 0{\cdot}9146\ldots$, wenn μ das Maximum von

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}\,\frac{E(\sin\alpha) - \sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos^4\dfrac{\alpha}{2}} \qquad \left(0 \leqq \alpha < \tfrac{\pi}{2}\right)$$

bezeichnet. Hier bedeutet

$$E(k) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi$$

das LEGENDRE'sche (vollständige) elliptische Integral zweiter Gattung.

c) Wenn eine Potenzreihe für $|z| < 1$ konvergiert und eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermittelt, so gilt dasselbe für sämtliche Abschnitte im Kreis $|z| < \frac{1}{4}$. Die Zahl $\frac{1}{4}$ kann durch keine grössere ersetzt werden. Analoges gilt für die Klasse der (in Bezug auf den Nullpunkt) sternförmigen und konvexen Abbildungen [**15**].

Gabriel Szegő.

AZ ÁLLANDÓ GÖRBÜLETŰ TEREK GÖRBÉI.

Egy állandó görbületű riemanni varietás[1] mindig úgy tekinthető, mint egy u. o. dimensiójú enclidesi varietás geodetikus transformáltja. Ha ez utóbbi egy cartesiusi (derék- vagy ferdeszögű) coordinátarendszerre van vonatkoztatva, akkor geodetikus transformáltjára nézve, amely egy S_n,

$$\Gamma_{ij}^{k} = A_i^k p_j + A_j^k p_i, \tag{1}$$

ahol p_i egy gradiens-vector. Ebből a szempontból — amint (1)-ből is kitűnik — az S_n egész metrikája egyetlen skalár, a p által szabályoztatik, amely a p_i gradiens-vectort szolgáltatja. Az S_n fundamentalis tensora is a p segítségével fejeződik ki, és pedig

$$\begin{aligned} g_{ik} &= -\frac{1}{K_0}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial p}{\partial x^i}\frac{\partial p}{\partial x^k}\right) \\ &= -\frac{1}{K_0}(\nabla_i p_k + p_i p_k),^{2} \end{aligned} \tag{2}$$

ahol K_0 az S_n középriemanni görbülete.

A p_i vector existentiája módot nyujt a S_n görbéi egyes tulajdonságainak vizsgálatára. Ezek megmutatása a célja e dolgozatnak.

Ha $\overset{1}{i}_\nu$-vel jelöljük a V_n riemanni varietás egy egységcongruentiáját, akkor az ezen congruentiát kísérő általánosított Serret-

---

[1] Jelöléseink a következők: V_n jelent egy n-dimensiós riemanni varietást, S_n egy állandó görbületű és R_n egy euclidesi varietást.

[2] Lásd: Comptes Rendus 1926 T. 182 p. 575. A g_{ik} alaptensornak ott adott (2) formája az itt használtból úgy adódik, hogy $2p = -\log s$ tesszük.

FRENET-féle derékszögű n-éderre nézve érvényesek a következő formulák:[1]

$$\frac{\delta \overset{1}{i}_\nu}{ds} = \frac{\overset{2}{i}_\nu}{r_1}$$

$$\frac{\delta \overset{k}{i}_\nu}{ds} = \frac{\overset{k+1}{i}_\nu}{r_k} - \frac{\overset{k-1}{i}_\nu}{r_{k-1}} \qquad (k=2,\ldots,n-1) \qquad (3)$$

$$\frac{\delta \overset{n}{i}_\nu}{ds} = \quad - \frac{\overset{n-1}{i}_\nu}{r_{n-1}},$$

ahol $r_1 \ldots r_{n-1}$ a görbe első ... $(n-1)$-edik görbületi radiusai és ahol a $\frac{\delta}{ds}$ symbolum a

$$\frac{\delta}{ds} = \underset{1}{i}_\nu \nabla_\nu \qquad (4)$$

operatiót jelenti. Ugyanezek a formulák természetesen contravariáns formájukban is érvényesek.

S_n térünkre visszatérve, legyen abban adva egy $\overset{1}{i}_\nu$ congruentia és az azt kísérő SERRET-FRENET n-éder. A p_k vector az $\overset{a}{i}_\nu$ $(a=1\ldots n)$ vectorok segitségével akkor ily alakban fejeződik ki,

$$p_k = \omega_1 \overset{1}{i}_k + \cdots + \omega_n \overset{n}{i}_k, \qquad (5)$$

ahol

$$\omega_a = p_l \underset{a}{i}^l = \pi \alpha_a \qquad (a=1\ldots n) \qquad (6)$$

α_a jelentvén az $\overset{a}{i}_\nu$ és a p_ν vectorok által respective képezett szögek cosinusait. Azonfelül

$$\pi^2 = \omega_1^2 + \cdots + \omega_n^2. \qquad (7)$$

A (2) relatio módot nyujt arra, hogy a p_l vectornak a görbe mentén vett geodetikus deriváltját előállitsuk. Ha t. i. $\underset{1}{i}^k$-val szorozzuk, akkor

[1] Az általánositott SERRET-FRENET formulákra nézve lásd pld. D. J. STRUIK: Mehrdimensionale Differentialgeometrie, SPRINGER, Berlin 1922 p. 76.

$$\underset{1}{i}^k \nabla_k p_l = \frac{\delta p_l}{ds} = -\omega_1 p_l - K_0 \overset{1}{i_l}, \tag{8}$$

és innen $\underset{a}{i}^l$-el való szorzás útján adódik

$$\underset{a}{i}^l \frac{\delta p_l}{ds} = \frac{\delta}{ds}(\underset{a}{i}^l p_l) - p_l \frac{\delta \underset{a}{i}^l}{ds} = -\omega_1 \omega_a - K_0 (\overset{1}{i_l} \underset{a}{i}^l) \quad (a = 1 \ldots n);$$

ha ármost itt tekintetbe vesszük, hogy $\underset{a}{i}^l p_l = \omega_a$ és a $\frac{\delta \underset{a}{i}^l}{ds}$-et a FRENET-SERRET formulákból fejezzük ki, akkor kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{ds} &= \frac{\omega_2}{r_1} - \omega_1^2 - K_0 \\ \frac{d\omega_k}{ds} &= \frac{\omega_{k+1}}{r_k} - \frac{\omega_{k-1}}{r_{k-1}} - \omega_1 \omega_k \quad (k = 2 \ldots n-1) \\ \frac{d\omega_n}{ds} &= -\frac{\omega_{n-1}}{r_{n-1}} - \omega_1 \omega_n. \end{aligned} \tag{9}$$

A SERRET-FRENET formulák fontossága abban áll, hogy megmutatják, hogy ha egy adott riemanni varietásban az $r_1 \ldots r_{n-1}$ görbületi radiusok mint a görbe s ívhosszának függvényei adva vannak, akkor az ezt kifejező

$$r_i = r_i(s) \quad (i = 1 \ldots n-1) \tag{10}$$

egyenletek a görbe *természetes egyenleteinek* tekinthetők.

Előbbi számításaink lehetővé teszik az S_n tér görbéire vonatkozó következő tétel bizonyitását:

Ha $a_1 \ldots a_n$ a görbét kísérő orthogonalis n-éder egységvectorainak az S_n metrikáját szabályozó p_l vectorral képezett szögei cosinusait jelentik, — melyek természetesen a

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$$

relatio által vannak kötve — ha ezek mint az s ív függvényei ismeretesek, akkor az

$$a_i = a_i(s) \quad (i = 1 \ldots n) \tag{11}$$

egyenletek, mint a görbe természetes egyenletei tekinthetők, azzal a megszorítással, hogy az $\alpha_2 \ldots \alpha_n$ cosinusok közül egyik sem identikusan zérus a görbe mentén.[1]

Ugyanis ezen megszorítás mellett a (9) egyenletek az r_i-kre nézve megoldhatók és adják:

$$\frac{1}{r_1}=\frac{1}{\omega_2}\left\{\frac{d\omega_1}{ds}+\omega_1^2+K_0\right\}$$

$$\frac{1}{r_k}=\frac{1}{\omega_{k+1}}\left\{\frac{d\omega_k}{ds}+\frac{\omega_{k-1}}{r_{k-1}}+\omega_1\omega_k\right\} \quad (k=2\ldots n-2) \qquad (12)$$

$$\frac{1}{r_{n-1}}=\frac{1}{\omega_n}\left\{\frac{d\omega_{n-1}}{ds}+\frac{\omega_{n-2}}{r_{n-2}}+\omega_1\omega_n\right\}=-\frac{1}{\omega_{n-1}}\left\{\frac{d\omega_n}{ds}+\omega_1\omega_n\right\}.$$

Az $\dfrac{1}{r_{n-1}}$ két kifejezése már mutatja, hogy az $\omega_1 \ldots \omega_n$ között szükségképpen egy differentialrelatio áll fenn. Ez megállapitható oly módon, hogy $\dfrac{1}{r_{n-1}}$ első kifejezésében $\dfrac{1}{r_{n-2}}$ az előző sorban levő kifejezése által helyettesíttetik és ez az eljárás tovább folytattatik. Célravezetőbb eljárás az, hogy a (9) egyenleteket rendre $\omega_1 \ldots \omega_n$-el szorozzuk és összeadjuk. Így kapjuk:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\sum_{k=1}^{n}\omega_k^2\right)=-\left(K_0+\sum_{k=1}^{n}\omega_k^2\right)\omega_1, \qquad (13)$$

azaz (7) folytán

$$\frac{d\pi^2}{ds}=-2\left(K_0+\pi^2\right)\omega_1, \qquad (14)$$

és miután $\omega_1=\alpha_1\pi$, innen könnyű integratióval adódik

$$\pi=\frac{1}{R}\operatorname{tanghyp}\frac{1}{R}\left(\int\alpha_1 ds+c\right), \qquad (15)$$

[1] Az R_n-ben a görbét kisérő n-éder egységvectorai és egy *constans* vector által bezárt szögek cosinusai ugyanezt a tulajdonságot mutatják. Tételünk így e tulajdonságnak az S_n-re való általánosítása. Meg kell még jegyeznünk azt is, hogy az S_n-ben a p_λ vector *nem egyértelmüen* meghatározott. Azonban az S_n terek applicabilitását tekintetbevéve, a p_λ vectornak *határozott geometriai jelentést* adhatunk. Ha t. i. az S_n-et egy Beltrami coordináta rendszerre vonatkoztatjuk, — ami az applicabilitás folytán *mindig* lehetséges — akkor a p_λ vector a Beltrami leképzésben az *absoluttal concentrikus hypergömbsereg* normális congruentiájával arányos.

ahol a c constans a π kezdőértékéből állapíttatik meg és ahol szokás szerint

$$K_0 = -\frac{1}{R^2} \tag{16}$$

tettük.

Látható tehát, hogy a $\Sigma a_i^2 = s$ relatio által fűzött a_i $(i=1\ldots n)$ mennyiségeknek, mint az s függvényeinek ismerete, módot ad a π evaluálására; ez lehetővé teszi az $\omega_i = a_i\pi$ $(i=1\ldots n)$ mennyiségeknek, mint az s függvényeinek meghatározását; ez utóbbiakat ismervén, (9) folytán ismertekké válnak az $r_i (i=1\ldots n-1)$ görbületi radiusok, de ezzel állításunk be van bizonyítva.

Az a_i-k mint az s függvényei adottak lévén, az $\frac{1}{r_k}$ evaluálása így történik: (9) folytán

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\omega_2}\left\{\frac{d\omega_1}{ds} + \omega_1^2 + K_0\right\} = \frac{1}{2\omega_1\omega_2}\left\{\frac{d\omega_1^2}{ds} + 2(\omega_1^2 + K_0)\,\omega_1\right\}$$

és ha itt ω_1 értékét (14)-ből helyettesítjük, akkor könnyű átalakítások után

$$\frac{1}{r_1} = -\frac{K_0+\pi^2}{2\omega_1\omega_2}\,\frac{d}{ds}\,\frac{\pi^2-\omega_1^2}{K_0+\pi^2} = -\frac{K_0+\pi^2}{2\omega_1\omega_2}\,\frac{d}{ds}\,\frac{\omega_2^2+\cdots+\omega_n^2}{K_0+\pi^2}.$$

Ugyanígy kapjuk

$$\frac{1}{r_2} = -\frac{K_0+\pi^2}{2\omega_2\omega_3}\,\frac{d}{ds}\,\frac{\pi^2-\omega_1^2-\omega_2^2}{K_0+\pi^2} = -\frac{K_0+\pi^2}{2\omega_2\omega_3}\,\frac{d}{ds}\,\frac{\omega_3^2+\cdots+\omega_n^2}{K_0+\pi^2}$$

és általában

$$\frac{1}{r_k} = -\frac{K_0+\pi^2}{2\omega_k\omega_{k+1}}\,\frac{d}{ds}\,\frac{\pi^2-\sum\limits_{l=1}^{k}\omega_l^2}{K_0+\pi^2} = -\frac{K_0+\pi^2}{2\omega_k\omega_{k+1}}\,\frac{d}{ds}\,\frac{\sum\limits_{l=k+1}^{n}\omega_l^2}{K_0+\pi^2}, \tag{17}$$

vagy az a-kat vezetve be

$$\frac{1}{r_k} = -\frac{\frac{K_0}{\pi^2}+1}{2a_ka_{k+1}}\,\frac{d}{ds}\,\frac{1-\sum\limits_{l=1}^{k}a_l^2}{\frac{K_0}{\pi^2}+1} = -\frac{\frac{K_0}{\pi^2}+1}{2a_ka_{k+1}}\,\frac{d}{ds}\,\frac{\sum\limits_{l=k+1}^{n}a_l^2}{\frac{K_0}{\pi^2}+1}. \tag{18}$$

Ezeket a formulákat két speciális esetre akarom alkalmazni.

1. *A $p = const.$ hyperfelületek görbéi.*

Ezek a hyperfelületek egész speciális szerepet játszanak az S_n terek elméletében, miután a p skalár szabályozza — felfogásunk szerint — ezek metrikáját. Ez az oka annak, hogy e hyperfelületek görbéire vonatkozólag az $\frac{1}{r_k}$ kifejezései az α-k segitségével különösen egyszerűek.

E hyperfelületek görbéire nézve $\alpha_1=0$. A (17) relatio — levezetése folytán — nem alkalmazható $k=1$ esetén, de alkalmazható $k>1$ esetére. (15)-ből

$$\pi = \frac{1}{R}\operatorname{tanghyp}\frac{c}{R} = \pi_0 = \text{const.} \tag{19}$$

és a (9) egyenletek elseje azt adja, hogy

$$\frac{1}{r_1} = \frac{K_0}{\omega_2} = \frac{K_0}{\pi_0}\cdot\frac{1}{\alpha_2}, \tag{20}$$

míg a (18) a többi görbületi radiusokra nézve azt adja, hogy

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_k} &= -\frac{1}{2\alpha_k\alpha_{k+1}}\frac{d}{ds}\left(1-\sum_{l=1}^{k}\alpha_l^2\right) = \\ &= \frac{1}{2\alpha_k\alpha_{k+1}}\frac{d}{ds}\sum_{l=k+1}^{n}\alpha_l^2 \qquad (k=2\ldots n-1).\end{aligned} \tag{21}$$

2. *Az egyenlő hajlású görbék.* Így nevezzük azokat a görbéket, amelyekre nézve

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{22}$$

Az ω_i jelentése folytán szemmel látható, hogy annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy egy görbe egyenlő hajlású legyen az, hogy

$$\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_n = \omega. \tag{23}$$

Bebizonyítjuk, hogy *egyenlő hajlású görbére nézve*

$$\frac{1}{r_k} = (n-k)\,\lambda,$$

tehát

$$\frac{1}{r_1}:\frac{1}{r_2}:\cdots:\frac{1}{r_{n-1}}=(n-1):(n-2):\cdots:1,$$

és a λ a

$$\frac{d\lambda}{ds}-\lambda^2-\frac{K_0}{n}=0$$

differentiálegyenletnek tesz eleget.

Ugyanis, ha $\omega_i=\omega$ $(i=1\ldots n)$, akkor a (12) folytán

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_1}&=\left(\frac{d\log\omega}{ds}+\omega\right)+\frac{K_0}{\omega}\\ \frac{1}{r_k}-\frac{1}{r_{k-1}}&=\left(\frac{d\log\omega}{ds}+\omega\right)\\ \frac{1}{r_{n-1}}&=-\left(\frac{d\log\omega}{ds}+\omega\right),\end{aligned}\tag{12*}$$

innen

$$\frac{1}{r_{n-k}}=-k\left(\frac{d\log\omega}{ds}+\omega\right)=k\lambda\tag{24}$$

és

$$n\left(\frac{d\log\omega}{ds}+\omega\right)=-n\lambda=-\frac{K_0}{\omega},\tag{25}$$

ha

$$\lambda=-\left(\frac{d\log\omega}{ds}+\omega\right)\tag{26}$$

tesszük.

A (24) nyilvánvalóvá teszi állításaink közül az első kettőt, és miután a (25)-ből

$$\omega=\frac{K_0}{n\lambda},$$

a (26) a következő alakot veszi fel:

$$\frac{d\lambda}{ds}-\lambda^2-\frac{K_0}{n}=0.\qquad \text{q. e. d.}\tag{27}$$

Innen könnyű integratio szolgáltatja a λ értéket, amely különböző a szerint, amint $K_0 \gtreqless 0$.

E tulajdonságok jellemzőek az egyenlő hajlású görbékre nézve, amennyiben bebizonyítjuk, hogy *ha az S_n tér egy görbéjére nézve* $\frac{1}{r_k} = (n-k)\lambda$ *és λ eleget tesz a* (27) *egyenletnek, akkor meghatározható egy olyan egyenlő hajlású görbe, amelynek görbületi radiusai a* (24) *által vannak adva.*

E célból csupán azt kell megmutatnunk, hogy e feltételek mellett a (12) differentiálegyenletrendszernek van olyan megoldási rendszere, amelyre nézve

$$\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_n.$$

Ha azonban ω_1-et úgy választjuk, hogy

$$\omega_1 = \frac{K_0}{n\lambda},$$

akkor a (12) első egyenlete azt adja, hogy

$$\begin{aligned}(n-1)\lambda &= \frac{1}{\omega_2}\left\{-\frac{K_0}{n\lambda^2}\frac{d\lambda}{ds} + \frac{K_0^2}{n^2\lambda^2} + K_0\right\}\\ &= \frac{K_0}{n\lambda^2}\cdot\frac{1}{\omega_2}\left\{-\frac{d\lambda}{ds} + \frac{K_0}{n} + n\lambda^2\right\},\end{aligned}$$

ami a (27) folytán így írható:

$$(n-1)\lambda = \frac{K_0}{n\lambda^2}\cdot\frac{1}{\omega_2}(n-1)\lambda^2$$

és innen

$$\omega_2 = \frac{K_0}{n\lambda};$$

a (12) további egyenleteivel successive így járva el, kapjuk, hogy

$$\omega_3 = \omega_4 = \cdots = \omega_n = \frac{K_0}{n\lambda}. \qquad \text{q. e. d.}$$

Grynaeus István.

SUR LES COURBES DES ESPACES À COURBURE CONSTANTE.

La métrique d'une variété à courbure constante — lorsqu'elle est envisagée comme la transformée géodésique d'une variété euclidienne — est régie par un scalaire unique. Ce scalaire définit un vecteur-gradient p_λ. En désignant par a_i $(i = 1 \ldots n)$ les cosinus des angles que les vecteurs unitaires du n-èdre orthogonal de Serret-Frenet associé à la courbe font avec le vecteur p_λ, on démontre le théorème : Les a_i étant connus comme fonctions de l'arc s de la courbe et satisfaisant à l'équation $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$, les équations

$$a_i = a_i(s) \qquad (i=1\ldots n)$$

peuvent être envisagées comme les équations intrensèques de la courbe, avec la restriction qu'aucune des angles a_k $(k=2\ldots n)$ n'est identiquement égal à zéro le long de la courbe. On en fait application à deux types de courbes de l'espace à courbure constante.

Etienne Grynaeus.

A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS EGY ÁLTALÁNOS KÖZÉPÉRTÉKTÉTELÉRŐL.

Bevezetés.

Legyen az $f(x)$ függvény valamely I intervallumban differenciálható. Válasszuk I-ben az a és az $a+h$ helyet. A középértéktétel szerint 0 és 1 között található legalább egy ϑ szám úgy, hogy

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\vartheta h) \quad (0<\vartheta<1); \qquad (K_1)$$

a ϑ általában függ a és h-tól.

Ha

$$f(x)=cx^2+a_0x+a_1 \quad (c\neq 0), \qquad (1)$$

akkor (K_1)-ben

$$\vartheta=\tfrac{1}{2};$$

ha pedig

$$f(x)=ce^{\omega x}+a_0x+a_1 \quad (c\neq 0,\ \omega\neq 0), \qquad (2)$$

úgy (K_1)-ben

$$\vartheta=\frac{1}{\omega h}\log\frac{e^{\omega h}-1}{h}.$$

E szerint a (K_1)-nek megfelelő ϑ az (1) alatti függvényeknél állandó, a (2) alattiaknál meg csak h-tól függ. R. ROTHE[1] bebizonyította, hogy az elsőfokú racionális egész függvények kizárása után:[2]

---

[1] R. ROTHE: Zum Mittelwertsatze der Differentialrechnung, Mathematische Zeitschrift 9 (1921), p. 300—306. L. még T. HAYASHI: On the Nature of θ in the Mean Value Theorem in Differential Calculus, The Science Reports of the Tôhoku Imperial University, I. Series, Vol. XIII (1925), p. 386—388.

[2] Ezeknél (K_1)-nek bármely ϑ megfelel.

I. Az (1) alatti függvények az egyedüliek, melyeknél (K_1)-et egy megfelelő állandó ϑ kielégiti.

II. Csakis a (2) alatti függvényeknek van meg az a tulajdonsága, hogy (K_1)-nek egy alkalmas, pusztán h-tól függő ϑ megfelel.

Az I. tételt R. ROTHE általánositotta. Legyen $f(x)$ az I intervallumban n-szer differenciálható. Vegyük fel I-ben az a és $a+h$ helyeket. A LAGRANGE-féle maradéktaggal ellátott véges TAYLOR-formula szerint

$$f(a+h)=f(a)+\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{h^\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(a)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\vartheta h)\ (0<\vartheta<1). \quad (T_n)$$

Az $l=\frac{h}{n}$ abszcissza-növekménnyel képezett n-edik differenciára vonatkozó középértéktétel pedig azt mondja, hogy

$$\Delta^n f(a)=l^n f^{(n)}(a+\vartheta h) \qquad (0<\vartheta<1).^{3} \qquad (K_n)$$

E formulákban is ϑ általában függ a és h-tól. R. ROTHE[4] kimutatta, hogy (eltekintve a legfeljebb n-edfokú racionális egész függvényektől[5]) (T_n)-et, illetve (K_n)-et egy megfelelő állandó ϑ kielégiti akkor és csak akkor, ha $f(x)$ pontosan $(n+1)$-edfokú racionális egész függvény; ez esetben (T_n)-ben $\vartheta=\frac{1}{n+1}$, míg (K_n)-ben $\vartheta=\frac{1}{2}$. Ha $n=1$, úgy (T_n) és (K_n)-ből (K_1) lesz és R. ROTHE utóbbi tételeiből az I. tételt nyerjük. Hátra volna még a II. tétel általánositása (T_n) és (K_n)-re vonatkozólag.

A (T_n) és (K_n) azonban csak különböző speciális esetei a következő általánosabb középértéktételnek.[6]

---

[3] Itt

$$\Delta^n f(a)=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\binom{n}{\nu}f(a+(n-\nu)l).$$

[4] R. ROTHE,[1] p. 307—309 és 310—313. L. még N. KRYLOFF: Sur la détermination précise de Θ dans la formule des accroissements finis et sur quelques généralisation qui s'y rattachent, The Tôhoku Mathematical Journal 27 (1926), p. 132—134.

[5] Ezeknél (T_n)-et vagy (K_n)-et minden ϑ kielégiti.

[6] V. ö. GENOCCHI-PEANO: Calcolo differenziale etc. Torino 1884, p. XXII.

A $(0,1)$ intervallumban szemeljük ki a

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_k = 1 \tag{3}$$

helyeket s ezekhez rendeljük sorjában az

$$m_0, m_1, \ldots, m_k$$

pozitív egész számokat. Legyen

$$n = m_0 + m_1 + \cdots + m_k - 1. \tag{4}$$

Jelöljük $c_i^{(j)}$-vel a t^n együtthatóját abban a legfeljebb n-edfokú $\varphi_{i,j}(t)$ racionális egész függvényben, melynél a

$$\varphi_{i,j}(\tau_\mu),\ \varphi'_{i,j}(\tau_\mu), \ldots, \varphi_{i,j}^{(m_\mu-1)}(\tau_\mu) \qquad (\mu=0, 1, \ldots, k)$$

adatok közül $\varphi_{i,j}^{(j)}(\tau_i) = 1$, a többi pedig 0. Tegyük fel már most, hogy $f(x)$ bizonyos I intervallumban n-szer differenciálható. Válasszuk I-ben az

$$a,\ a + \tau_1 h, \ldots,\ a + \tau_{k-1} h,\ a + h$$

helyeket. Akkor a 0 és 1 között található legalább egy ϑ középérték úgy, hogy

$$\sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m_i-1} c_i^{(j)} f^{(j)}(a + \tau_i h)\, h^j = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \vartheta h) \tag{K}$$

$$(0<\vartheta<1,\ n=m_0+m_1+\cdots+m_k-1);$$

a ϑ általában függ a és h-tól.

A tételnek ehhez az alakjához következőkép jutok. Tekintsük a

$$\Phi(t) = f(a + th) \tag{5}$$

függvényt. Legyen

$$H(t) = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m_i-1} \Phi^{(j)}(\tau_i)\, \varphi_{i,j}(t); \tag{6}$$

ez legfeljebb n-edfokú racionális egész függvény, melyben t^n együtthatója

$$\frac{H^{(n)}(t)}{n!} = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m_i-1} c_i^{(j)} \Phi^{(j)}(\tau_i). \tag{7}$$

Tekintetbe véve a $\varphi_{i,j}(t)$ függvények előbbi definicióját, (6)-ból

$$H(\tau_i) = \Phi(\tau_i),\ H'(\tau_i) = \Phi'(\tau_i), \ldots, H^{(m_i-1)}(\tau_i) = \Phi^{(m_i-1)}(\tau_i)$$
$$(i = 0, 1, \ldots, k)$$

s így Rolle tétele alapján

$$H^{(n)}(t) = \Phi^{(n)}(\vartheta) \qquad (0<\vartheta<1). \tag{8}$$

(7) és (8)-ból (5)-re tekintettel előáll (K).

(K)-ból (T_n)-et kapjuk, ha

$$k = 1,\ m_0 = n,\ m_1 = 1\,;$$

ekkor u. i.

$$c_0^{(0)} = -1,\ c_0^{(1)} = -\frac{1}{1!},\ c_0^{(2)} = -\frac{1}{2!}, \ldots,$$

$$c_0^{(n-1)} = -\frac{1}{(n-1)!},\ c_1^{(0)} = 1.$$

És (K) a (K_n)-be megy át, ha

$$k = n,\ \tau_1 = \frac{1}{n},\ \tau_2 = \frac{2}{n}, \ldots, \tau_{n-1} = \frac{n-1}{n},$$

$$m_0 = m_1 = \cdots = m_n = 1\,;$$

ez esetben t. i.

$$c_i^{(0)} = \frac{(-1)^{n-i} n^n}{i!\,(n-i)!} \qquad (i=0, 1, \ldots, n).$$

Az alábbiakban már most a (K) középértéktétellel kapcsolatban bebizonyítom a következő tételt, mely R. Rothe idézett tételeit magában foglalja.

Tétel. Tekintsük mindazon $f(x)$ függvényeket, melyek egy adott I intervallumban n-szer differenciálhatók; ezekre különkülön érvényes a (K). *Azt állítom, hogy a legfeljebb n-edfokú racionális egész függvényeket kizárván,*

1. (K)-*t egy alkalmas állandó ϑ érték kielégíti akkor és csak akkor, ha*

$$f(x) = cx^{n+1} + a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \quad (c \neq 0); \quad (9)$$

ez esetben

$$\vartheta = \frac{m_0\tau_0 + m_1\tau_1 + \cdots + m_k\tau_k}{m_0 + m_1 + \cdots + m_k}. \quad (10)$$

2. *(K)-t egy megfelelő, pusztán h-tól függő ϑ kielégíti akkor és csak akkor, ha*

$$f(x) = ce^{\omega x} + a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \quad (c \neq 0,\ \omega \neq 0); \quad (11)$$

ez esetben

$$\vartheta = \frac{1}{\omega h} \log \left\{ n! \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m_i-1} \frac{c_i^{(j)} e^{\omega h \tau_i}}{(\omega h)^{n-j}} \right\}. \quad (12)$$

Tárgyalás.

Mindenekelőtt megmutatom, hogy a (9), illetve (11) alatti függvények tényleg az említett tulajdonságúak. Minthogy azonban a

$$\psi(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

függvényre nézve (K)-szerint

$$\sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m_i-1} c_i^{(j)} \psi^{(j)}(a + \tau_i h)\, h^j = a_0 h^n,$$

azért nyilván csak azt kell kimutatnom, hogy ha $f(x) = x^{n+1}$ resp. $e^{\omega x}$, úgy (K)-ban ϑ a (10) illetve (12) alatti értékkel bír.

Vegyük először az $f(x) = x^{n+1}$ függvényt. Legyen

$$H_1(x) = x^{n+1} - (x-a-\tau_0 h)^{m_0}(x-a-\tau_1 h)^{m_1} \ldots (x-a-\tau_k h)^{m_k}. \quad (13)$$

Akkor a

$$H_1(a+\tau_i h),\ H_1'(a+\tau_i h), \ldots,\ H_1^{(m_i-1)}(a+\tau_i h)$$
$$(i = 0, 1, \ldots, k)$$

adatok rendre megegyeznek az x^{n+1} függvény megfelelő adataival. Ennélfogva (K) a jelen esetben így is írható

$$\sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m_i-1} c_i^{(j)} H_1^{(j)}(a + \tau_i h)\, h^j = (n+1)(a + \vartheta h)\, h^n. \quad (14)$$

De (K)-t $H_1(x)$-re alkalmazva, (13) és (4) alapján

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m_i-1} c_i^{(j)} H_1^{(j)}(a+\tau_i h)\, h^j = \\ &= \{(n+1)\,a + (m_0\tau_0 + m_1\tau_1 + \cdots + m_k\tau_k)\,h\}\, h^n.\end{aligned} \tag{15}$$

(14) és (15)-ből (4)-re tekintettel adódik (10).

Legyen másodszor $f(x) = e^{\omega x}$. Ez esetben (K)-ból közvetlenül nyerjük (12)-t.

Most következik annak bebizonyítása, hogy fordítva: ha (K)-ban ϑ csak a h függvénye, azaz

$$\vartheta = \vartheta(h), \tag{16}$$

(ez magában foglalja azt az esetet is, midőn ϑ állandó), úgy $f(x)$ vagy a (9) vagy a (11) alatti függvények közül való.

Könnyen beláthatjuk, hogy a szóban forgó esetben $f(x)$ I-ben akárhányszor differenciálható. Mivel a legfeljebb n-edfokú racionális egész függvények ki vannak zárva, a σ hely választható úgy, hogy

$$f^{(n+1)}(\sigma) \neq 0. \tag{17}$$

Ki fogom mutatni, hogy $f(x)$ I-ben eleget tesz az

$$f^{(n+2)}(x) = \frac{f^{(n+2)}(\sigma)}{f^{(n+1)}(\sigma)}\, f^{(n+1)}(x) \tag{18}$$

differenciálegyenletnek. Ezzel a tétel be lesz bizonyítva, mert bevezetvén az

$$\omega = \frac{f^{(n+2)}(\sigma)}{f^{(n+1)}(\sigma)}$$

jelölést, (18) megoldását $\omega = 0$ esetén (9), $\omega \neq 0$ esetén pedig (11) szolgáltatja.

Legyen rövidség kedvéért

$$s = \frac{m_0\tau_0 + m_1\tau_1 + \cdots + m_k\tau_k}{m_0 + m_1 + \cdots + m_k} \tag{19}$$

és

$$T = m_0(\tau_0 - s)^2 + m_1(\tau_1 - s)^2 + \cdots + m_k(\tau_k - s)^2. \tag{20}$$

Bebizonyítom, hogy a (16) alatti ϑ-ra nézve

$$\lim_{h=0} \vartheta = s\ ^{7} \tag{21}$$

és

$$\lim_{h=0} \frac{\vartheta - s}{h} = \frac{T}{2(n+1)(n+2)} \frac{f^{(n+2)}(\sigma)}{f^{(n+1)}(\sigma)}.\ ^{8} \tag{22}$$

Tekintsük e végből a következő függvényt:

$$F(x) = f(x) - \frac{f^{(n+1)}(\sigma)}{(n+1)!} f_1(x) - \frac{f^{(n+2)}(\sigma)}{(n+2)!} f_2(x), \tag{23}$$

melyben

$$f_1(x) = (x-\sigma)^{n+1}, \quad f_2(x) = (x-\sigma)^{n+2}. \tag{24}$$

Reá alkalmazhatjuk a (K) középértéktételt. Az a helyet h-tól függőleg alkalmasan akarom választani. Legyen

$$a = \sigma - sh. \tag{25}$$

Ha a $|h|$ elég kicsiny, a és $a+h$ I-ben vannak, tehát (K) alkalmazható. Előzetesen megmutatom, hogy (25)-tel egyidejűleg

$$\sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m_i-1} c_i^{(j)} f_1^{(j)}(a+\tau_i h) h^j = 0 \tag{26}$$

és

$$\sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m_i-1} c_i^{(j)} f_2^{(j)}(a+\tau_i h) h^j = \frac{T}{2} h^{n+2}. \tag{27}$$

A (26) egyik módon így látható be. (K)-t $f_1(x)$-re alkalmazva,

$$\sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m_i-1} c_i^{(j)} f_1^{(j)}(a+\tau_i h) h^j = \frac{h^n}{n!} f_1^{(n)}(a+\vartheta_1 h) \quad (0<\vartheta_1<1). \tag{28}$$

---

[7] V. ö. szerzőtől: A differenciálszámítás középértéktételével kapcsolatos kérdésekről, Math. és Phys. Lapok XXXIII. (1926), p. 165, I. tétel.

[8] Legyen per definitionem

$$\vartheta(0) = s;$$

akkor (22) azt fejezi ki, hogy $\vartheta(h)$ a $h=0$ helyen differenciálható. Megjegyzem, hogy egy megfelelő tétel érvényes az általános esetben is, midőn (K)-ban ϑ az a és h függvénye. A (T_n) alatti véges Taylor-formula esetére nézve v. ö. R. Rothe: Über den Mittelwertsatz und die Taylorsche Formel, Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft, XXVI. Jahrgang 2. Stück (1927), p. 90—91.

De $f_1(x)$ (24) szerint a (9) alatti függvények közé tartozik s így (amint már bebizonyítottam)

$$\vartheta_1 = \frac{m_0\tau_0 + m_1\tau_1 + \cdots + m_k\tau_k}{m_0 + m_1 + \cdots + m_k}. \tag{29}$$

(24), (28) és (29)-ből (19) és (25)-re tekintettel adódik (26).

(27)-et bebizonyítandó, legyen

$$\Phi_2(t) = (t - s)^{n+2}, \tag{30}$$

és

$$H_2(t) = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m_i-1} \Phi_2^{(j)}(\tau_i)\, \varphi_{i,j}(t), \tag{31}$$

ahol $\varphi_{i,j}(t)$ $(i = 0, 1, \ldots k;\ j = 0, 1, \ldots, m_{i-1})$ a fentebb definiált függvények (l. 107. old.). Akkor az

$$u^{n+2} - H_2(u + s) = 0 \tag{32}$$

egyenlet megoldása (az egyes gyököket annyiszor írva fel, mint amennyi a multiplicitásuk)

$$u = \overbrace{\tau_0 - s, \ldots, \tau_0 - s}^{m_0\text{-szor}},\ \overbrace{\tau_1 - s, \ldots, \tau_1 - s}^{m_1\text{-szer}}, \ldots, \overbrace{\tau_k - s, \ldots, \tau_k - s}^{m_k\text{-szor}},\ 0. \tag{33}$$

T. i. a $\varphi_{i,j}(t)$ függvények definiciója alapján (31)-ből

$$H_2(\tau_i) = \Phi_2(\tau_i),\ H_2'(\tau_i) = \Phi_2'(\tau_i), \ldots,\ H_2^{(m_i-1)}(\tau_i) = \Phi_2^{(m_i-1)}(\tau_i)$$
$$(i = 0, 1, \ldots, k),$$

tehát (30)-ra tekintettel a (33) alatt felírt első $n+1$ szám (32)-nek gyöke. Mivel pedig e gyökök összege (19)-ből folyólag 0 és (32) többtagújában az u^{n+1} együtthatója szintén 0, azért az $n+2$-dik gyök $= 0$. Fejezzük ki már most az u^n-nek $H_2(u+s)$-beli együtthatóját a (32) egyenlet (33) alatti gyökeivel (figyelembe véve ismét (19)-et), t^n-nek $H_2(t)$-beli együtthatóját pedig (31)-ből a $c_i^{(j)}$ számokkal (l. 107. old.); e két együttható egyenlő lévén, nyerjük:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k} m_i(\tau_i - s)^2 = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m_i-1} c_i^{(j)} \Phi_2^{(j)}(\tau_i). \tag{34}$$

De (24), (25) és (30) ból

$$f_2(a+th)=h^{n+2}\Phi_2(t),$$

következőleg

$$\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m_i-1} c_i^{(j)} f_2^{(j)}(a+\tau_i h)\, h^j = h^{n+2}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m_i-1} c_i^{(j)}\Phi_2^{(j)}(\tau_i). \tag{35}$$

(34) és (35)-ből (20)-ra tekintettel előáll (27).

Már most (K)-t a (23) alatti $F(x)$-re alkalmazva, (26), (27) és az eredeti $f(x)$-re vonatkozó (K) alapján adódik

$$f^{(n)}(a+\vartheta h)-\frac{Tf^{(n+2)}(\sigma)}{2(n+1)(n+2)}h^2=F^{(n)}(a+\bar{\vartheta}h) \quad (0<\bar{\vartheta}<1), \tag{36}$$

(23), (24), (25) és (36)-ból pedig

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(\sigma)\frac{\vartheta-s}{h}+\frac{f^{(n+2)}(\sigma)}{2}\left\{(\vartheta-s)^2-\frac{T}{(n+1)(n+2)}\right\}= \\ =\frac{F^{(n)}(a+\bar{\vartheta}h)-F^{(n)}(a+\vartheta h)}{h^2}. \end{aligned} \tag{37}$$

Mivel $0<\vartheta<1$ és $0<\bar{\vartheta}<1$, (25)-ből folyólag

$$a+\bar{\vartheta}h \text{ és } a+\vartheta h \to \sigma, \text{ midőn } h\to 0. \tag{38}$$

Állítom, hogy $h\to 0$ esetén

$$\frac{F^{(n)}(a+\bar{\vartheta}h)-F^{(n)}(a+\vartheta h)}{h^2}\to 0. \tag{39}$$

(23) és (24)-ből

$$F^{(n+1)}(\sigma)=F^{(n+2)}(\sigma)=0,$$

tehát

$$F^{(n)}(x)=F^{(n)}(\sigma)+(x-\sigma)^2\,\varepsilon(x), \tag{40}$$

ahol

$$\lim_{x=\sigma}\varepsilon(x)=0.^{9} \tag{41}$$

[9] Lásd pl. DE LA VALLÉE POUSSIN: Cours d'analyse infinitesimale t. I. 6. ed. (1926), p. 77—79.

Legyen $\varepsilon(\sigma)$ bárhogyan definiálva. (25) és (40)-ből

$$\frac{F^{(n)}(a+\bar{\vartheta}h)-F^{(n)}(a+\vartheta h)}{h^2}= \\ =(\bar{\vartheta}-s)^2\,\varepsilon(a+\bar{\vartheta}h)-(\vartheta-s)^2\,\varepsilon(a+\vartheta h). \tag{42}$$

(41) és (42)-ből (38) tekintetbevételével következik (39).

(37) és (39)-ből (17) alapján folyik (21) és (22).

Legyen már most z tetszés szerint választott hely a I belsejében. Az előbbi meggondolás, mely (37) és (39)-hez vezetett, szóról-szóra ismételhető ha σ-t z-vel pótoljuk, és két hasonló relációt eredményez. Ezekből (21) és (22) felhasználásával nyerjük, hogy

$$f^{(n+2)}(z)=\frac{f^{(n+2)}(\sigma)}{f^{(n+1)}(\sigma)}\,f^{(n+1)}(z), \tag{43}$$

mert, amint (20)-ból (3) alapján látható, $T\neq 0$. Mivel z tetszőleges volt, (43) szerint I-ben fennáll a (18) differenciálegyenlet, q. e. d.

A mondottakkal kapcsolatban megjegyzem még a következőket. Ha (K)-ban ϑ helyébe az a és h adott $\vartheta(a, h)$ függvényét tesszük, úgy (K) $f(x)$-re nézve *funkcionál-differenciálegyenlet.* Ha ϑ speciálisan a (10) vagy (12) által van adva, úgy az előbbiek szerint $f(x)=x^{n+1}$ resp. $e^{\omega x}$ (K)-nak megoldása és az összes megoldásokat (9), illetve (11) szolgáltatja. Megjegyzésem abban áll, hogy az általános esetben is hasonlóan lehet (K)-nak egy megoldásából (ha ilyen van!) az összeseket előállítani. Szorítkozzunk azokra a függvényekre, melyek az adott I intervallumban $n+2$-ször differenciálhatók. Legyen $f_0(x)$ a (K)-nak oly megoldása, melynél I-ben $f_0^{(n+1)}(x)\neq 0$; akkor (K) összes megoldásait az

$$f(x)=cf_0(x)+a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n \tag{44}$$

alakú függvények képezik.[10] U. i. a fentebbiek után könnyen

[10] Az $n=1$ esetre nézve (mikor is (K) átmegy (K_1)-be) l. R. Rothe[1] p. 317.

beláthatjuk, hogy ha $f(x)$ (K)-nak megoldása, akkor eleget tesz az

$$f^{(n+2)}(x) = \frac{f_0^{(n+2)}(x)}{f_0^{(n+1)}(x)} f^{(n+1)}(x)$$

differenciálegyenletnek. Ennek megoldását (44) szolgáltatja, tehát (K) barmely megoldása a (44) alatti függvények közül való; és evidens, hogy mindezen függvények $f_0(x)$-szel együtt eleget tesznek (K)-nak.

Példának okáért vegyük I-nek a pozitív x-ek tartományát és legyen (K)-ban

$$a + \vartheta h =$$

$$\sqrt{\frac{m_0(a+\tau_0 h)^2 + \cdots + m_k(a+\tau_k h)^2 + \{m_0(a+\tau_0 h) + \cdots + m_k(a+\tau_k h)\}^2}{(n+1)(n+2)}}.$$

Ez esetben $f(x) = x^{n+2}$ (K)-nak megoldása; tehát az összes megoldások az

$$f(x) = cx^{n+2} + a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

alakú függvények.[11]

Szász Pál.

ÜBER EINEN ALLGEMEINEN MITTELWERTSATZ DER DIFFERENTIALRECHNUNG.

Es sei

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_k = 1,$$

und

$$m_0, m_1, \ldots, m_k$$

seien positive ganze rationale Zahlen. Es werde der Kürze wegen

$$n = m_0 + m_1 + \ldots + m_k - 1$$

gesetzt. Bedeute $c_i^{(j)}$ den Koeffizienten von x^n in der ganzen rationalen Funktion $\varphi_{i,j}(x)$ vom Grade $\leqq n$ bestimmt durch die Daten

$$\varphi_{i,j}(\tau_\mu), \ \varphi'_{i,j}(\tau_\mu), \cdots, \ \varphi_{i,j}^{(m_\mu - 1)}(\tau_\mu) \qquad (\mu = 0, 1, \cdots, k),$$

unter denen $\varphi_{i,j}^{(j)}(\tau_i) = 1$ ist, alle übrigen aber $= 0$ sind.

[11] $n=1$-re l. R. ROTHE[1] p. 320—321.

Ist nun die Funktion $f(x)$, in einem gewissen Intervalle I, n-mal differenzierbar, und sind $k+1$ Stellen in I

$$a, \ a+\tau_1 h, \dots, \ a+\tau_{k-1}h, \ a+h$$

gewählt, so gibt es wenigstens einen Mittelwert ϑ zwischen 0 und 1, welcher der Gleichung

$$\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m_i-1} c_i^{(j)} f^{(j)}(a+\tau_i h)\, h^j = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+\vartheta h) \qquad (M)$$

$$(0<\vartheta<1, \ n=m_0+m_1+\dots+m_k-1)$$

genügt.[1] Die Grösse ϑ hängt im Allgemeinen von den beiden Veränderlichen a und h ab.

In vorliegender Arbeit wird bewiesen, dass *nach Ausschliessung der ganzen rationalen Funktionen vom Grade* $\leq n$, *folgende Sätze gelten:*[2]

1. *Die Funktion*

$$f(x) = cx^{n+1} + a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \qquad (c \neq 0)$$

ist die einzige, die den Mittelwertsatz (M) mit einem von a *und* h *unabhängigen konstanten Wert von* ϑ, *nämlich*

$$\vartheta = \frac{m_0\tau_0 + m_1\tau_1 + \dots + m_k\tau_k}{m_0 + m_1 + \dots + m_k},$$

befriedigt.

2. *Die Funktion*

$$f(x) = ce^{\omega x} + a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \quad (c \neq 0, \ \omega \neq 0)$$

hat allein die Eigenschaft, den Mittelwertsatz (M) mit einem nicht von a, *sondern nur von* h *abhängigen Werte von* ϑ, *nämlich*

$$\vartheta = \frac{1}{\omega h} \log\left\{ n! \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m_i-1} \frac{c_i^{(j)} e^{\omega h \tau_i}}{(\omega h)^{n-j}} \right\},$$

zu befriedigen.

Paul v. Szász.

---

[1] Vgl. GENOCCHI-PEANO: Calcolo differenziale etc., Torino 1884, p. XXII.

[2] In speziellen Fällen wurden diese Sätze von Herrn R. ROTHE (Zum Mittelwertsatze der Differentialrechnung, Mathematische Zeitschrift 9 (1921) S. 300—314) bewiesen.

TANULÓVERSENYEK.

Jelentés az 1927. évi XXXI-ik mathematikai tanulóversenyről.

A Társulat XXXI-ik mathematikai tanulóversenyét 1927 okt. 15-én tartotta Budapesten és Szegeden egyidejűleg. Budapesten 30, Szegeden 9 versenyző jelentkezett; beadatott 21, illetőleg 1 dolgozat.

A verseny tételei a következők voltak:

1. Legyenek a, b, c, d olyan egész számok, melyek az

$$m = ad - bc$$

számhoz viszonylagos törzsszámok. Bebizonyítandó, hogy azok az egész számokból álló (x, y) számpárok, amelyekre $ax+by$ osztható m-me ugyanazok, mint amelyekre $cx+dy$ osztható m-mel.

2. Mekkora mindazon négyjegyű számok összege, melyek csak az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyeket és pedig mindegyiket legfeljebb egyszer tartalmazzák?

3. Tekintsük az ABC háromszög oldalait érintő négy kör közül azt a kettőt, amely az AB oldalt A és B között érinti. Bebizonyítandó, hogy e két kör sugarának geometriai közepe nem lehet nagyobb AB felénél.

A dolgozatok megbírálására kiküldött bizottság, melynek tagjai voltak Rados Gusztáv elnöklete alatt Éber József, Kürschák József, Szűcs Adolf és Kőnig Dénes előadó, 1927 okt. 29-i ülésén a következő egyhangú határozatot hozta.

«A bizottság örömmel állapítván meg az idei verseny kedvező eredményét, az első díjjal való kitüntetésre Beke Gyulát, Szegeden, a «*Dugonics András*» *gimnázium*ban Ravadics Ferenc tanítványát ajánlja, aki mind a három feladatot röviden és szabatosan oldotta meg. Az első feladat megoldásában nemcsak megmutatta, hogy a szóbanforgó kétféle számpárok ugyanazok, hanem e számpárokat igen ügyesen valóban meg is határozta.

A második díjra legérdemesebb SÁG MIKLÓS, Budapesten a «*Kemény Zsigmond*» *reáliskolá*ban HEGYI FERENC tanítványa. Szintén mind a három példát jól és röviden oldotta meg, de fogalmazása nem olyan gondos.

Még három dolgozat tartalmazza mind a három feladat helyes megoldását. Ezek szerzői: LUKÁCS ERNŐ, tóvárosi FISCHER GYÖRGY és ELEK TIBOR. Önmagukban tekintve ők is megérdemelnék a díjakat. Tekintettel azonban — különösen az első feladatra adott megoldásukban található — néhány fölösleges, illetve helyt nem álló megjegyzésükre, BEKE és SÁG mögé kellett őket sorozni. Ezért a bizottság e három érdemes dolgozatot csupán dícséretre ajánlhatja.»

Az 1927 november 10-i választmányi ülés a bizottság e javaslatát egyhangúlag elfogadta.

Az 1927. évi XXXI-ik mathematikai tanulóversenyen díjat nyert dolgozatok.*

I. Beke Gyula dolgozata.

I. Legyenek a, b, c, d olyan egész számok, amelyek az

$$m = ad - bc$$

számhoz viszonylagos törzsszámok. Bebizonyítandó, hogy azok az egész számokból álló (x, y) számpárok, amelyekre $ax + by$ osztható m-mel, ugyanazok, mint amelyekre $cx + dy$ osztható m-mel.

II. Mekkora mindazon négyjegyű számok összege, amelyek csak az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyeket és pedig mindegyiket legfeljebb egyszer tartalmazzák.

III. Tekintsük az ABC háromszög oldalait érintő négy kör közül azt a kettőt, amely az AB oldalt A és B között érinti. Bebizonyítandó, hogy e két kör sugarának geometriai közepe nem lehet nagyobb AB felénél.

* A dolgozatok változtatás és javítás nélkül közöltetnek. SZERK.

I. Közvetlenül látható, hogy az

$$ax+by=km \quad (k=\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots) \qquad A)$$

egyenletnek egy megoldásrendszere

$$x=kd, \; y=-kc.$$

Eszerint érvényes a következő egyenlet:

$$a(x-kd)+b(y+kc)=0,$$

ahonnan:

$$x=kd-\frac{b(y+kc)}{a}.$$

a és b viszonylagos törzsszámok, mert ha oszthatók volnának pl. δ-val, akkor az $m=ad-bc$ összefüggés miatt m is osztható volna δ-val, tehát nem volna a és b-hez viszonylagos törzsszám. Következéskép x csakis akkor egész szám, ha

$$y+kc=pa. \quad (p=\cdots, -1, 0, 1, 2, \ldots)$$

Tehát az $A)$ alatti egyenlet teljes megoldásrendszere, mint a k és p parameterek függvénye:

$$x=kd-pb$$
$$y=ap-kc.$$

Ezen (x, y) értékpárra vonatkozóan

$$cx+dy=p(ad-bc)=pm$$

osztható m-mel. Azon értékpárok mellett tehát, amelyekre $ax+by$ osztható m-mel, $cx+dy$ is osztható m-mel és viszont, ami belátható a két kifejezés fölcserélhetőségéből. Qu. e. d.

II. A feladatnak megfelelő négyjegyű számokat úgy állítjuk elő, hogy a négyes variációs csoportokban minden jegynek megfelelő helyi értéket tulajdonítunk. Minden jegy előfordul minden helyen, az összegben tehát minden helyen szerepel ezek összege $=1+2+3+4+5=15$ és pedig annyiszor, ahányszor egy-egy jegy ezen a helyen előfordulhat. Bármelyik jegy egy helyen annyiszor fordulhat elő, ahányszor a fönnmaradt négy elemből hármat a megmaradt három üres helyre elhelyezhetünk, ezt tehetjük V_4^3-szor. A keresett összeg tehát:

$$15V_4^3 10^3+15V_4^3 10^2+15V_4^3 10+15V_4^3=15V_4^3 \,.\, 1111=399960.$$

III. Legyen $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, a beírt* kör sugara r, a hozzáírté* ρ; akkor, ha $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$,

$$r=\frac{T}{s},\ \rho=\frac{T}{s-c}.$$

Tehát a mértani közép:

$$\sqrt{r\rho}=\frac{T}{\sqrt{s(s-c)}}=\sqrt{(s-a)(s-b)},$$

mert $T=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. Alkalmazzuk a mértani és számtani közepek összefüggését:

$$\sqrt{r\rho}=\sqrt{(s-a)(s-b)}\leqq\frac{(s-a)+(s-b)}{2}=\frac{c}{2}.\qquad \text{Qu. e. d.}$$

II. Ság Miklós dolgozata.

I. Legyenek a, b, c, d olyan egész számok, melyek az

$$m=ad-bc$$

számhoz viszonylagos törzsszámok. Bebizonyítandó, hogy azok az egész számokból álló (x, y) számpárok, melyekre $ax+by$ osztható m-mel, ugyanazok, mint amelyekre $cx+dy$ osztható m-mel.

Bizonyítás.

Az (x, y) egész számú számpárokra nézve legyen $ax+by$ osztható m-mel, vagyis

$$ax+by=km$$

s így

$$x=\frac{km-by}{a};$$

bebizonyítandó, hogy ekkor $cx+dy$ is osztható m-mel. Helyettesítve x értékét

$$cx+dy=\frac{ckm-bcy}{a}+dy=\frac{ckm-bcy+ady}{a}=\frac{ckm+ym}{a},$$

---

* beirt és hozzáírt: belülről, ill. kívűlről érintő helyett.

mert $ad-bc=m$. Ez a tört okvetlenül egész számot eredményez, mert $cx+dy$ egész szám. Kell tehát, hogy $(ck+y)m$ osztható legyen a-val. Azonban m és a relatív primek, tehát $ck+y$ osztható a-val, megmarad tehát az m tényező, vagyis $ck+dy$ is osztható m-mel. Q. E. D.

II. Mekkora mindazon négyjegyű számok összege, melyek csak az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyeket tartalmazzák és pedig legfeljebb egyszer.

Megoldás.

Ezen számok számát az 5 elemből alkotható 4-edosztályú variáciok adják meg:

$$V_5^4=5.4.3.2=120.$$

Ezen 120 szám összegét megállapíthatjuk, ha megállapítjuk, hogy az egyes számok hányszor állanak az egyes helyeken s mennyi a helyérték. Az egyes számok az egyes helyeken V_4^3-szor állanak s így

$$\Sigma V_5^4=V_4^3(1111+2222+3333+4444+5555)=399{,}960.$$

III. Az egyik sugár legyen ρ_1, a másik ρ_2; ekkor a feltételek szerint:

$$\rho_1=\frac{t}{s} \text{ és } \rho_2=\frac{t}{s-c}.$$

Kérdés, hogy $\sqrt{\rho_1\rho_2}<\frac{c}{2}$? A geometriai közép $\sqrt{\rho_1\rho_2}$, de

$$\sqrt{\rho_1\rho_2}=\sqrt{\frac{t^2}{s(s-c)}}=\frac{t}{\sqrt{s(s-c)}}=\sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)s-c)}{s(s-c)}}=$$

$$=\sqrt{(s-a)(s-b)}=\sqrt{\frac{(b+c-a)(a+c-b)}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{(b+c-a)(a+c-b)}.$$

Azonban $\sqrt{(b+c-a)(a+c-b)}$ az $(a+c-b)$ és $(b+c-a)$ számok geometriai közepe. Ugyanezen számok számtani közepe

$$\frac{a+c-b+b+c-a}{2}=c.$$

Az analízis azonban azt tanítja, hogy két szám geometriai közepe mindig kisebb a számtani középnél s így:

$$\sqrt{(b+c-a)(a+c-b)}<c,$$

vagy

$$\frac{1}{2}\sqrt{(b+c-a)(a+c-b)}<\frac{c}{2}. \quad \text{Q. E. D.}$$

Jelentés az 1927. évi IX-ik fizikai tanulóversenyről.

Társulatunk 1927 október 22-én tartotta IX-ik «Károly Irén» fizikai tanulóversenyét Budapesten és Szegeden egyidejűleg. Budapesten jelentkezett 18 versenyző, beadtak 16 dolgozatot. Szegeden jelentkezett 5 versenyző és beadatott 1 dolgozat.

A verseny tételei a következők voltak:

1. m tömegű, r sugarú vékony falú cső α hajlásszögű lejtőn gurul lefelé. *a)* Mily nagy lesz a tengelyének a sebessége, ha a lejtőn az elindulástól számítva l utat tett meg? *b)* Mennyi idő alatt írja le a tengely ezt az l távolságot?

2. Két f_1 és f_2 fókusztávolságú homorú gömbtükröt úgy állítunk egymással szembe, hogy a főtengelyeik egy egyenesbe essenek és a gömbsüvegek középpontjainak távolsaga $d = 2(f_1 + f_2)$ legyen. Hová kell a tárgyat helyezni, *a)* hogy a két kép egybeessék, *b)* hogy a képek nagyságának viszonya $\frac{m}{n}$ legyen?

3. Két üvegedényben egyenlő mennyiségű víz van; A-ban tiszta, B-ben feketére festett víz. Mindkettőbe 100 wattot fogyasztó villanylámpát helyezünk. A lámpák égése közben *a)* lesz e különbség a folyadékok felmelegedésében, *b)* ha lesz, miért lesz, *c)* mennyire fog a B edény és a víz 30 min. alatt felmelegedni, ha az edény és a víz hőkapacitása együttvéve 1 kgkal?

A bíráló-bizottság javaslatára a Választmány az első «Károly Irén» díjat Beke Gyulának ítélte oda, ki a szegedi *«Dugonics András» gimnáziumban* Ravadics Ferenc tanítványa; a második díjat Elek Tibornak, ki a budapesti *VI. ker. áll. «Kemény Zsigmond» reáliskolában* Kiricsi János tanítványa volt és végül könyvjutalomban részesítette Ság Miklóst, ki a budapesti *VI. ker. áll. «Kemény Zsigmond» reáliskolában* Kiricsi János tanítványa és tóvárosi Fischer Györgyöt, ki a budapesti *fasori ág. hv. ev. gimnáziumban* Mikola Sándor tanítványa volt.

Mind a négy nyertes mind a három feladatot helyesen megoldotta. Beke Gyula megoldásai a legrövidebbek és legszabatosabbak, a többi három egészen egyenlő értekű dolgozat közül a Választmány Elek Tiborét jutalmazta a második díjjal, aki készségének tanujelét azzal is adta, hogy legkorábban készült el dolgozatával.

A Választmány üdvözölte Kiricsi János tanár urat, kinek két tanítványa van a nyertesek között.

TÁRSULATI ÉLET.

Az 1927. évben tartott XXXII. közgyűlés.

E közgyűlést a Társulat 1927 június 4-én tartotta meg. A titkári jelentés szerint az elmult esztendőben a Társulat 3 választmányi, 11 rendes előadó és 1 ünnepélyes ülést tartott. A rendes előadó üléseken 16 előadás, nevezetesen 7 mathematikai és 9 fizikai tárgyú került napirendre. Az előadások közül az 1927 április 21-ikit és a május 12-ikit a Társulat meghívására két külföldi (Wieni) tudós: HANS PETTERSSON és FELIX EHRENHAFT tartotta nagyszámú hallgatóság előtt. HANS PETTERSSON előadása a Mathematikai és Physikai Lapokban is megjelent. FELIX EHRENHAFT előadásán az a nagy megtiszteltetés érte a Társulatot és az Előadó Urat, hogy Ő Királyi Fensége, dr. József Ferenc Főherceg Ur magas megjelenésével érdeklődést tanusított az előadás iránt. Az ünnepélyes ülés 1927 március 28-án volt Társulatunk Nesztorának, FARKAS GYULA Tiszteleti Tagnak ünneplésére, ki ekkor töltötte be életének 80-ik esztendejét és kinek eredményes munkáiról ORTVAY RUDOLF az ünnepélyen és a Mathematikai és Physikai Lapokban beszámolt. A Választmányból automatikusan kiléptek: GRUBER NÁNDOR, MIKOLA SÁNDOR, ORTVAY RUDOLF, RÁTZ LÁSZLÓ, RIESZ FRIGYES és RYBÁR ISTVÁN, akiket a közgyűlés újra egyhangúlag megválasztott. A Mathematikai és Physikai Lapok 1926. évfolyama 12 ívnyi terjedelemben jelent meg.

Az 1928. évi Kőnig Gyula-jutalom.

Az idei Kőnig Gyula-jutalmat a bizottság JORDAN KÁROLYnak ítélte oda értékes tudományos munkáiért. Ezek között különösen megemlítendők az általa felfedezett nevezetes polynom-sorozatok, részint valószínűségi függvények sorbafejtéséhez, részint interpolációs feladatok megoldásához. Ezenkívül igen eredményes munkásságot fejtett ki a mathematikai statisztika terén.

Az 1927—28. társulati évben a rendes előadó üléseken megtartott előadások.

1927 nov. 10. A mathematikai és fizikai tanulóversenyek eredményeinek kihirdetése és a díjak kiosztása. ORRÁN GYÖRGY: Ibolyántúli fénnyel besugárzott olajok hatása a fényképező lemezre. *1927 nov. 24.* VERESS PÁL: Függvényhalmazokról. *1927 dec. 15.* GYULAY ZOLTÁN: Alkalihaloid kristályok törésmutatójának meghatározása az ultraibolyában. POGÁNY BÉLA: A Harress-készülék bemutatása. *1928 jan. 26.* NAGY JÓZSEF: A Seemann-féle Röntgen-spektrográfról (bemutatással). *1928 febr. 9.* TIHANYI MIKLÓS: Törzsideálok megkeresése körosztási számtestekben. *1928 febr. 23.* ORTVAY RUDOLF: A vegyérték problémája a kvantummechanikában. *1928 márc. 22.* SZEGŐ GÁBOR: Korlátos hatványsorokra vonatkozó újabb vizsgálatokról. *1928 ápr. 12.* CSÁSZÁR ELEMÉR: Az új kvantumelmélet és a kvantumintegrálok. *1928 ápr. 19.* SZŰCS ADOLF: Jelentés a Kőnig Gyula-jutalomról. NEUMANN JÁNOS: Szimmetrikus funkcionál-operátorokról. *1928 ápr. 26.* SCHMID REZSŐ: Az *NO*-színkép γ-sávjairól. POGÁNY BÉLA: A γ-sávok Zeeman-effektusáról. *1928 máj. 26.* FORRÓ MAGDOLNA: A dielektromos állandó mérésével kapcsolatos kérdésekről.

Új tagok: *Patai Imre*, a «Vatea»-gy. igazg., Bpest; *Szolnoki Imre,* Bpest; *Schmid Rezső,* műegy. asszistens, Bpest, *Schaller Mátyás,* bencés tanár, Esztergom; *Szalmay Rupert,* bencés tanár, Pápa; *Pados Raynald,* bencès tanár, Bakonybél; *Lengyel Béla,* egy. asszistens, Bpest; *Dér Zoltán,* Budapest; *Patai László,* Budapest; *Nagy Julián,* bencés tanár, Pápa; *Debreceni felső kereskedelmi iskola,* Debrecen. (Összesen: 11.)

Kilépő tagok: *Soós Sándor,* Bpest; *Mészáros László,* Bpest; *Szmodics Kázmér,* Bpest; *Héjas Endre,* Bpest; *Hanauer Jenő,* Bpest. (Összesen: 5.)

Meghalt: *Bogyó Samu.* a bpesti keresk. akad. és keresk. tanárképző ny. tanára, Bpest.

«EÖTVÖS LORÁND» MATHEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT 1927-IK ÉVI ZÁRSZÁMADÁSA ÉS VAGYONKIMUTATÁSA.

A) Bevételek:

	Pengő
1. Mult évi zárszámadási maradvány:	
a) készpénzbeu	62·51
b) takarékbetétekben	1199·12
2. tagdíjakból	971·60
3. segélyekből és kamatokból	1643·39
4. vegyesekből	49·05
Összesen:	3925·67

B) Kiadások:

1. Betétek	
a) Leszámítoló és Pénzváltó Bankban	600·—
b) Postatakarékpénztárban	128·03
2. nyomda	2519·75
3. jutalom	100·—
4. vegyesek	449·75
5. maradvány készpénzben	128·14
Összesen:	3925·67

A) Vagyon:

I. Alaptőke.

		Korona	Pengő
1. Állami kezelésben: Majthényi Ottó hagyaték		10000·—	
2. Pesti Hazai Takarékpénztárban $\frac{04557}{c_2}$ jelzésű könyvben		108·—	
3. Magyar Leszámítoló és Pénzváltó Bankban:			
2600 K n. é. 4%-os fővárosi kölcsönkötvény		2600·—	
1800 « « « 6%-os hadikölcsönkötv. (4. kib.)		1800·—	
2000 « « « 5½%-os « (4. kib.)		2000·—	
10,000 « « « 6%-os « (3. kib.)	Kőnig-alap	10000	
300 « « « 4%-os Magy. korona-járadékkötvény	Károly Irén alap	300·—	
2200 « « « 6%-os hadikölcsönkötv. (6. kib)	Károly Irén alap	2200·—	
betétkönyvben 36,090. sz. a.)	Károly Irén alap		320·—
4. Gödöllői Tak.-pénztárban 21,842. sz. a.	Károly Irén alap		400·—

II. Forgótőke.

	Korona	Pengő
1. Készpénz		128·14
2. Betét		728·03
3. Tagdíjhátralék		200·—
4. Nyomtatványok		300·—
Összesen:	29008·—	2076·17

B) **Teher:**

Tiszta vagyon mint egyenleg	29008·—	2076·17

Budapest, 1928 május 12.

Nagy József
pénztáros.

Átvizsgáltuk és rendben találtuk:

Rátz László, báró Harkányi Béla.
számvizsgálók.

A DIELEKTROMOS ÁLLANDÓ MÉRÉSÉVEL KAPCSOLATOS KÉRDÉSEKRŐL.

A dielektromos állandónak a hőmérséklettel, nyomással, hullámhosszal és a térerősséggel való összefüggése már régóta tárgyát képezi a fizikai vizsgálatoknak. Ezek a vizsgálatok ugyanis alkalmasak arra, hogy bepillantást nyerjünk az anyagok, speciálisan a szigetelők szerkezetébe, képet alkossunk belső felépitésükről, a molekulák méreteiről, a molekulák közt működő erőkről stb. Az ezen vizsgálatok kapcsán felmerülő problémák és a megoldásukra irányuló kisérletek közül szeretnék a következőkben néhányat kiragadni és röviden ismertetni.

A legrégibb törvényszerűség, mely a dielektrikumok dielektromos állandójára vonatkozóan elméleti úton kialakult, Clausius[1] és Masotti-tól[2] származik. Ez azt tartalmazza, hogy a dielektromos állandóból (ε) alakitható következő kifejezés $\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\frac{M}{\varrho}\right)$, melyet molekuláris polarizációnak nevezünk, a hőmérséklettől és nyomástól független állandó:

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\frac{M}{\varrho}=\frac{4\pi}{3}N_0\gamma,$$

ahol M a molekulasúly, ϱ a sűrűség, N_0 a Loschmidt-féle szám és γ egy állandó.

Ezen összefüggés levezetésénél a következő meggondolásból indulhatunk ki: A külső térerősség hatására a dielektrikum molekuláiban a + és — elektromosság kettéoszlik és pedig úgy,

---

[1] Clausius: Mech. Wärmetheorie 2, 94, 1879.

[2] Mosotti: Mem. della Soc. ital. Sc. Modena 14, 49, 1850.

hogy a kétféle töltés a térerősség irányában egymástól eltávolodni igyekszik. A közöttük fennálló elasztikus kötés folytán azonban csak bizonyos λ távolságig lehetséges az eltávolodás, előáll tehát egy $e\lambda$ nagyságú momentum (e az egyes részecske töltése), melyet ezen elgondolásban a dielektrikumban ható térerősséggel arányosnak vehetünk.

A CLAUSIUS-MOSOTTI kifejezés azonban nem felel meg mindenképpen a kisérleti eredményeknek; sokkal pontosabb, tökéletesebb képet nyujt a dielektrikumokra vonatkozó DEBYE-féle[1] elmélet. Ez az elmélet abból indul ki, hogy a külső térerősség által előidézett polarizáción kívül léteznek a dielektrikumban kész kettős polusok, ú. n. dipolok, melyeknek momentuma független a külső térerősségtől. Ezek a dipolok a külső térerősség hatására tengelyeikkel a tér irányába igyekszenek fordulni; a molekulák hőmozgása és az ezáltal előálló ütközéseik következtében azonban ez az állapot, melyben valamennyi dipol beáll a térerősség irányába, sohasem jön létre. Ha egy időpillanatban ez az állapot elő is állana, a következő ütközések folytán ismét felbomlana; a dipolok egy része a külső térerősségtől eltérő irányú lesz. A dipolok irányeloszlását egy időpillanatban a statisztikus mechanika módszerével állapíthatjuk meg. E szerint (kanoni eloszlást feltételezve) azon dipolok száma, melyeknek tengelyei egy $d\Omega$ elemi kúpszögbe esnek:

$$a e^{-\frac{E}{kT}} d\Omega$$

(ahol E jelenti egy dipol energiáját, a egy állandó, k a BOLTZMANN-PLANCK állandó, T az abszolút hőmérséklet). Ezen irányeloszlást feltételezve, a számítások megfelelő elvégzése után nyerhetjük a dipoloktól származó, térfogategységre eső molekuláris polarizációt. Azt kapjuk, hogy ez a molekuláris polarizáció arányos a kész dipolok (melyeknek momentuma tehát független a külső térerősségtől) momentumának négyzetével és fordítva arányos az abszolút hőmérséklettel. A töltéseknek a

[1] DEBYE: Theorie d. Elektr. u. Magn. Marx.: Handb. d. Radiologie 1925.

térerősség következtében előálló elmozdulása és a dipolok orientálódása folytán előálló összes polarizációt egybevéve nyerjük a következő kifejezést:

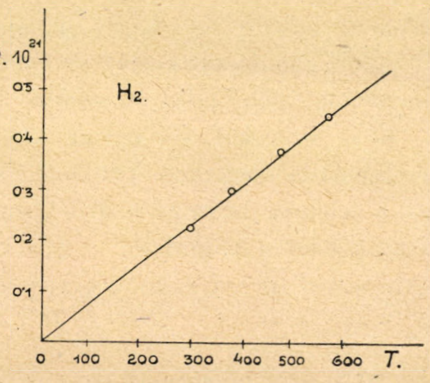
$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\frac{M}{\varrho}=\frac{4\pi}{3}N_0\left(\gamma+\frac{\mu^2}{3kT}\right)=a+\frac{b}{T}$$

$$a=\frac{4\pi}{3}N_0\gamma\,;\quad b=\frac{4\pi}{3}N_0\frac{\mu^2}{3k}$$

(μ a dipol momentuma) T-vel megszorozva az egyenletet nyerjük:

$$D=\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon-2}\frac{M}{\varrho}T=aT+b. \qquad (1)$$

Ha egy koordinátarendszerben ábrázoljuk, úgy hogy D-t tekintjük ordinátának és T-t abscisszának, egy egyenest nyerünk, melynek irányát a (a CLAUSIUS-MOSOTTI tag) szabja meg, b (a DEBYE tag) pedig jelenti a baloldali kifejezés értékét az abszolút nulla pontban. Azokra az anyagokra, melyek kész dipolokat nem tartalmaznak (pl. a gázok közül H_2, N_2, O_2, levegő stb., folyadékok közül benzol stb.), $\mu=0$ és így $b=0$, az egyenes átmegy az origon. Az 1. ábra a H_2 gázra nyert eredményeimet [1] ábrázoló grafikont tünteti fel; az abscissza a hőmérséklet, mely méréseimben 295° abs.-tól 571° abs.-ig változott, az ordináta a $D=\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\frac{M}{\varrho}T$ kifejezés. Amint látjuk, a lemért pontokon át tényleg oly egyenes húzható, mely metszi a koordinátarendszer kezdőpontját. Ha a vizsgált dielektrikum tartalmaz kész

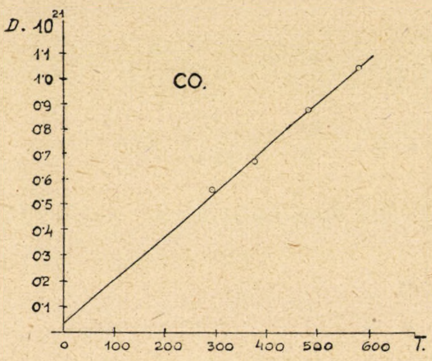


1. ábra.

[1] FORRÓ: Doktori értekezés 1927, Zeitschr. f. Phys. 47, 430. 1928.

dipolokat, úgy $b \mp 0$, vagyis az egyenes nem megy át az origón. A 2. ábra az általam[1] a CO gázra nyert értékeket ábrázolja; itt, mint látjuk, az egyenes nem megy át a kezdőponton, hanem lemetsz a $+D$ tengelyből egy $0{\cdot}0355 . 10^{-21}$ nagyságú darabot, melyből a $b = \frac{\mu^2}{3k}$ formula alapján μ meghatározható:

$$\mu = 0{,}118 . 10^{-18}.$$



2. ábra.

A 3. ábra az NH_3 gázra vonatkozó, BÄDEKER[2] által nyert görbét tünteti elő, melyen különösen szemléletesen látható az eltérés a lemért pontokon és az origón áthaladó (pontozott görbe) egyenesek között. Az NH_3 dipolmomentuma több mint tízszerese a CO dipolmomentumának.

Kész dipolokat azoknál az anyagoknál találunk, melyeknek molekuláris szerkezete aszimmetrikus; ezzel többnyire együttjár az a jelenség is, hogy a dielektromos állandó abnormisan nagy, vagyis nagy a különbség az átlátszó fényből a ∞ hullámhosszra extrapolált törésmutató négyzete és a dielektromos állandó közt.

Így pl. a nitromethannak $\begin{array}{c} H \\ | \\ H\text{—}C\text{—}NO_2 \\ | \\ H \end{array}$ dielektromos állandója 56,

míg a szimmetrikus tetranitromethané $\begin{array}{c} NO_2 \\ | \\ NO_2\text{—}C\text{—}NO_2 \\ | \\ NO_2 \end{array}$ csak 2, 1.

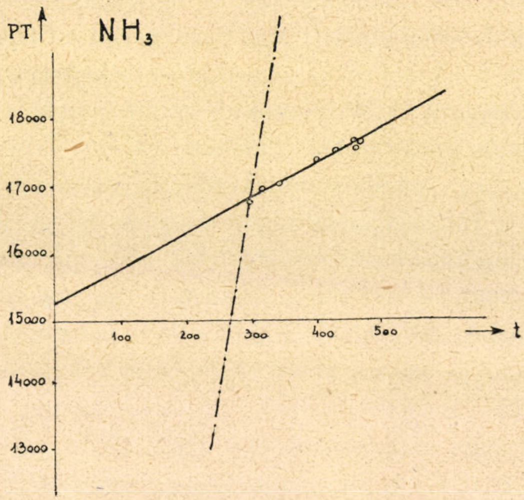
Egy érdekes problémát vet fel a széndioxid viselkedése; máig is vitás, hogy vajjon benne a szén- és oxigénatomok sorrendjének az O, C, O sorrend, avagy a C, O, O sorrend felel-e

[1] Ugyanott.

[2] BÄDEKER: Zeitschr. f. phys. Chemie 36, 315, 1901.

meg. Az elsőből következnék, hogy a szimmetrikus elrendezés folytán a fenti csoportosítás első osztályába tartozik, vagyis nincsenek kész dipolusai; ezt az eredményt a temperaturaváltozás észleléséből nyerték ZAHN[1] és STUART;[2] ezzel szemben JONA,[3] WEIGT,[4] BRAUNMÜHL[5] és én[6] noha kicsiny, de mindenesetre nullától különböző (középértékben ($0{\cdot}19.10^{-18}$) dipolmomentum értéket nyertünk.

Valamely anyag dipolmomentumának nagyságára az elektrosztrikciós jelenségekre vonatkozó vizsgálatokból és mérésekből is



3. ábra.

lehet következtetni. Elektrosztrikció, mint ismeretes, az a jelenség, midőn a dielektrikum térfogata megváltozik az elektromos térben beálló polarizáció folytán. KLIEFOTH[7] ilyen mérésekből a széndioxidra $0{\cdot}2.10^{-18}$ momentumértéket nyert, de ezzel az

[1] ZAHN. Phys. Rev. 27, 455, 1926.
[2] STUART: Zeitschr. f. Phys, 47, 457, 1928.
[3] JONA: Phys Zeitschr. 20, 12, 1919.
[4] WEIGT: Phys. Zeitschr. 22, 643, 1921.
[5] BRAUNMÜHL: Phys Zeitschr. 28, 141, 1927.
[6] FORRÓ: Doktori értekezés 1927, Zeitschr. f. Phys. 47, 430, 1928.
[7] KLIEFOTH: Zeitschr. f. Phys. 39, 402, 1926.

eredménnyel STUART-nak az az ellenvetése, hogy az eredmény lényegesen függ attól, hogy a törésmutató extrapolálásánál az ultravörös abszorpció tekintetbe lett-e véve vagy sem, és KLIEFOTH nem adja meg az általa használt n_∞ értékét. Az ultravörös abszorpciós csikok intenzitási viszonyából vont következtetések úgy a szimmetrikus, mint az aszimmetrikus elrendezés mellett bizonyithatnak, a szerint, hogy mely frekvenciákat tekintjük a molekula saját alapfrekvenciájának. Viszont MAC CREA [1] magas hőmérsékleteken végzett fajhőméréseiből az következtethető, hogy az eredményekkel az aszimmetrikus forma hozható inkább összhangzásba; MAC CREA szerint a CO_2 alacsony hőmérsékleteken szimmetrikus, magas hőmérsékleteken pedig aszimmetrikus. JOACHIM és WISNIEWSKY [2] számításaiból és az ultravörös rotációs spektrumból számitott rotációs sebességekből az következik, hogy mindkét molekulakonfiguráció egyaránt lehetséges, sőt a valóságban mindkettő létezik is. A dielektromos állandó temperaturaváltozásából tehát a dipolmomentum értékét csak abban az esetben számithatjuk, ha ismerjük az aszimmetrikus molekulák számát. A molekuláris polarizáció kifejezését ugyanis azon az alapon vezettük le, hogy valamennyi molekula polarizálódik és valamennyinek van kész dipolja, ha azonban feltesszük, hogy a molekulák egy része (NX) asszimmetrikus, a többi $[N(1-X)]$ pedig szimmetrikus, úgy csak X-ed részének van kész dipolja és igy a molekuláris polarizáció módosított kifejezése lesz:

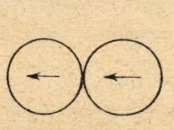
$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\,\frac{M}{\varrho}=\frac{4\pi}{3}N_0\gamma+\frac{4\pi}{3}N_0X\frac{\mu^2}{3kT}=a+\frac{bX}{T},$$

ahol a második tag az aszimmetrikus molekuláktól származik. NX ezeknek számát adja meg az összes molekulák tört részében. A széndioxid-molekulának szimmetrikusból aszimmetrikusba való átrendeződését úgy gondolom elképzelhetőnek, hogy a mo-

[1] MAC. CREA: Proc. Cambridge Phil. Soc. 23, 890, 1927.
[2] JOACHIM és WISNIEWSKY: Zeitschr. f. Phys. 47, 567, 1928.

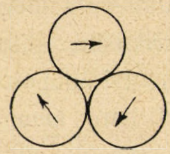
lekulák állandó gyors ütközése közben (miután a molekulák nem merevek) alakjuk a két lehető alak között állandóan változik, illetőleg kicserélődik; minden hőmérsékleten előáll egy dinamikus egyensúlyi állapot, melyben ugyanannyi molekula megy át a szimmetrikus elrendezésből az aszimmetrikusba, mint amennyi ismét visszaalakul. Egy olyanfajta egyensúlyi állapotot kell elképzelnünk, mint amilyen pl. egy megfordítható kémiai reakciónál következik be. Természetesen ez az egyensúlyi állapot minden hőmérsékleten más és más, ami magyarázza, hogy különböző hőmérsékleteken az egyik, illetve másik konfiguráció koncentrációja nagyobb, vagyis az X a hőmérséklettel változik. (Ezen értelmezés szerint NX-nek középérték jellege van.) Ezen meggondolásból tehát az következnék, hogy az $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\frac{M}{\varrho}T$ kifejezés nem változhat lineárisan a hőmérséklettel, miután az X is függvénye a temperaturának. Azt a kétségtelen ellenmondást, hogy éppen az általam végzett mérésekből is egy lineáris változásra lehet következtetni, úgy gondolom magyarázni, hogy az általam használt hőmérsékleti intervallumban, mely aránylag elég kicsi (294° abs. —479° abs.), az X praktikusan konstáns. A kérdés eldöntése végett kívánatos volna a dielektromos állandónak a hőmérséklettel való változását 1000° C fölöttig megvizsgálni.

Egy más figyelemre méltó és elméletileg még megoldatlan probléma a molekuláknak kettős, hármas, négyes stb. molekulákká való asszociációjával függ össze. Az asszociált molekula momentuma ugyanis különbözni fog az asszociálatlanétól; pl. ha egy kettős molekula keletkezik és csak azt a helyzetet vesszük tekintetbe, melyben a potenciális energiának minimuma van, így a következő konfiguráció áll elő (4*a*. ábra), vagyis a keletkező kettős molekula momentuma (μ) az eredeti molekula momentumának kétszerese. Ha N számú molekula áll így össze $\frac{N}{2}$ számú kettős molekulává, úgy, míg eredetileg a polarizációhoz a dipolok



4*a*. ábra.

folytán járuló tag $N\mu^2$-tal volt arányos, most $\frac{N}{2}(2\mu)^2 = 2N\mu^2$-tal lesz arányos, vagyis az eredeti érték kétszerese. Ha most tovább 3 molekula összeállítását figyeljük meg, úgy, amint a 4. *b)* ábrából látható, ezen konfigurá-ció mellett a dipolmomentum nullává vált. A folyamatot pl. következőképpen képzelhetjük el: Ha egy ilyen dipolos folyadékot összenyomunk, akkor először is kettős molekulák keletkeznek és így a molekuláris polarizáció nőni fog; ha most a folyadékot tovább komprimáljuk, úgy a kettős molekulákon kívül hármas csoportok is képződhetnek nulla momentummal, tehát a molekuláris polarizáció csökkenni fog. Ezekből a meggondolásokból következik, hogy az $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\frac{M}{\varrho}$ kifejezés értéke változni fog a nyomással. Ez a mechanizmus magyarázhatja az æthylalkohol sajátszerű viselkedését. (Az æthylalkohol tipikusan asszociálódó folyadék). Ennél a folyadéknál a DEBYE egyenes $T=0$ pontban negatív értékekben metszi a D tengelyt, aminek, állandó dipolmomentumot feltételezve, fizikai értelme nincs; ez tehát nyilvánvalóan arra vezethető vissza, hogy alacsony hőmérsékleteken a molekulák részben asszociálódnak és így a molekuláris polarizáció értékét erősen lenyomják. A valóságnak megfelelő tényállás az itt vázolténál sokkal bonyolultabb, amennyiben a molekulák nemcsak úgy csoportosulhatnak, hogy potenciális energiájuk a lehető legkisebb legyen, hanem lehetséges a potenciális energiának bármely értéke is és ezenkívül egyszerre keletkezhetnek kettős, hármas, négyes stb. csoportok. E bonyolult viszonyok közt rendszert teremteni csak egy kellő nagy kisérleti adathalmaz segítségével lehetséges.



4*b*. ábra.

Az érdekes vizsgálatok egy másik csoportja a dielektromos állandónak a hullámhosszal való összefüggésére vonatkozik. Ezekből a vizsgálatokból, az észlelt abszorpciós csikok kapcsán, felvilágosítást nyerhetünk a molekulák, illetőleg atomok saját frekvenciáiról, arról is, hogy a molekulák hányféle rezonátorokból vannak felépitve; ennek ismerete az atommodell kialakulása szempontjából nagyon lényeges. Egyetlen széles abszorpciós csíkból arra következtethetünk, hogy a molekula egyféle rezonátorokból van csak felépitve, több abszorpciós csíkból arra, hogy a molekula többféle rezonátorokat tartalmaz, miután a különböző rezonátorok saját frekvenciája különböző. A saját frekvenciák közelében a dielektromos állandó anomális diszperziót mutat, vagyis értéke csökken a frekvencia növekedésével, de ezen rezonanciahelyek befolyásolják a dielektromos állandó értékét a tőlük távolfekvő frekvenciáknál is. Ha a hullámhosszváltoztatás nem történik folytonosan és a mérés nem kellő érzékenységgel, úgy könnyen megtörténhetik, hogy egyes ilyen keskeny abszorpciós csíkok kimaradnak; példa erre a víz, melyről már régen tudták, hogy dielektromos állandója a statikus 80 értékről rövid hullámokra lecsökken a 4·4 értékre, de míg kezdetben egyetlen széles abszorpciós csíkkal akarták interpretálni, addig később kiderült, hogy több ilyen csíkból áll; az anomális diszperzió cca. 5 cm-es hullámoknál kezd mutatkozni. Az ezen a téren rendelkezésre álló kisérleti anyag nagyon gyér és a különböző adatok különböző szerzőktől lévén, különböző érzékenységű módszerekkel lettek meghatározva, amiáltal összehasonlításuk nagyon nehezen vihető keresztül. Ezenkivül a dielektromos állandó változását nagy frekvenciaintervallumban jóformán nem is figyelték meg. Jelenlegi vizsgálataimban feladatomul tűztem ki néhány gázra 600 m-től 60 m-ig terjedő hullámhossz közben a diszperziót megállapitani.[1]

Úgy a nyomás, mint a hőmérséklet és a hullámhossz változtatása során beálló változások a dielektromos állandóban igen kicsinyek, az én méréseimnél még a dielektrikum gáz volt; ennek dielektromos állandója közel egyenlő 1-gyel (pl. a levegőé 1·000586, tehát a változás, ami pl. előáll, ha a nyomást 1 atm.-ról vakuumig csökkentjük, miután a vakuum dielektromos állandója =1, mindössze csak: 0·000586); éppen ezért a vizsgála-

[1] Zeitschrift. f. Phys. 51, 374, 1928.

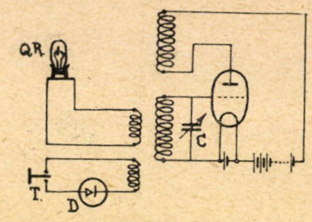
tokhoz csakis olyan módszerek és berendezések alkalmasak, melyekkel nagy érzékenység és nagy pontosság érhető el. A mérések pontossága és érzékenysége a használt frekvenciával növekszik, úgy hogy célszerű (hacsak nem éppen a hullámhosszal való összefüggésről van szó) a mérésekhez igen nagy frekvenciájú áramokat használni. Nagy frekvenciájú csillapitatlan rezgéseket előállító, megbízhatóan és üzembiztosan működő mérőberendezések készítése és összehasonlítása maga is érdekes technikai probléma.

A dielektromos állandó változását a következőképpen mérhetjük: egy rezgőkörbe kondenzátort kapcsolunk, melyet a kérdéses dielektrikummal megtöltünk, és meghatározzuk, hogy a dielektromos állandó változása milyen kapacitásváltozást idéz elő; a változást azáltal észlelhetjük, hogy a rezgőkör frekvenciája megváltozik. A frekvencia, illetőleg a hullámhossz közvetlen mérése azonban nem nyujt kellő pontosságot, miután maga a hullámhossz mérése nem végezhető el kellő pontossággal. Még legpontosabban mérhetjük a hullámhosszat kvarcoscillátorok felhasználásával, melyek a hullámhosszat $1/2$ pro mille pontossággal adják meg. Igen kényelmes és célszerű formája a Gíebe és Scheibe[1] által konstruált oscillátor, melynél egy vékony kvarclemez egy neonnal töltött csőbe van forrasztva. A kvarcoscillátor működése a kvarckristálynak piezoelektromos viselkedésén alapszik. Ez a jelenség abban áll, hogy ha a kvarcot összenyomjuk vagy kiterjesztjük, úgy felülete, illetve a vele érintkező vagy hozzá közel elhelyezett fémelektródok töltést nyernek, ennek reciprok effektusa úgy áll elő, ha az elektródokra töltést viszünk; ekkor ugyanis a kvarc megrövidül, illetőleg meghosszabbodik az elektromos térre merőleges irányban (elektrosztrikció). A térerősség megszűnésekor a kvarc rugalmassága folytán nem nyeri vissza azonnal eredeti alakját, hanem úgy mint a kilendített inga, csak miután egyensúlyi helyzete körül rezgéseket végzett. A kvarckristály tehát saját rezgései-

---

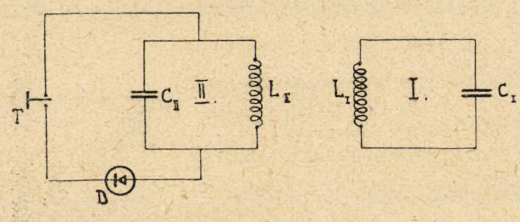
[1] Giebe és Scheibe: Zeitschr. f. Hochfrequ. Technik, 28, 15, 1926.

vel azonos frekvenciájú elektromos rezgésekre mechanikus rezgésekkel rezonál, e rezgések viszont elektromos rezgéseket idéznek elő. A kvarcoscillátort rezgésbe úgy hozhatjuk, hogy pl. egy generátorként kapcsolt elektroncső rácsa és kathodja közé kapcsoljuk a kristályt körülvevő elektródokat. A kapcsolás lehet induktiv (5 ábra), galvanikus stb. Ha az adó frekvenciája megegyezik a kvarc elasztikus saját frekvenciájával, úgy a kvarc rezonanciába kerül, vagyis a reciprok effektus folytán rezgésbe jön; a rezgések folyománya, hogy az elektródok a közvetlen effektus kapcsán váltakozó töltéseket kapnak, vagyis a kristály saját frekvenciájával megegyező frekvenciájú hullám indul meg. (1 mm vastag kristály saját frekvenciája kereken 3.10^6, aminek megfelel 100 m-es elektromágneses hullám). A kristály rezonanciáját többek közt kimutathajuk azáltal, hogy a kvarc és az elektródok közt kisülés történik, mely fény villanással jár. E kisüléshez szükséges térerősséget az elektródok a közvetlen piezoelektromos effektus kapcsán nyerik. Ha a kristályt rezgésbe hozzuk és ezután az adó frekvenciáját egy kissé elhangoljuk, úgy a kristály rezgései és így az elektródokról kiinduló rezgések nem szűnnek meg azonnal, hanem ez a két kissé eltérő frekvencia interferál; ezt úgy vesszük észre, hogy a vele csatolt aperiodikus körben lévő telefonban ezt az interferenciahangot halljuk. Ez a hang azután mérési célokra is felhasználható, mert ha az adó rezgőkörében lévő kondenzátor dielektromos állandója megváltozik, úgy a lebegések szaporábbak, illetőleg lassúbbak lesznek. Tudtommal azonban ezt a módszert ilyen természetű mérésekre még nem használták fel.



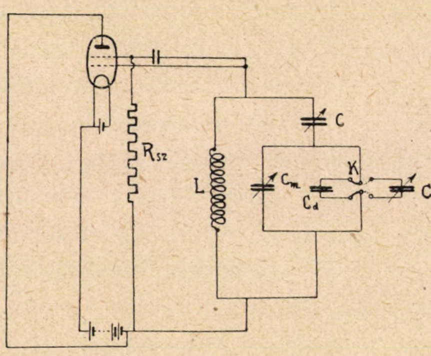
5. ábra.

A dielektromos állandó vátlozása folytán előálló frekvenciaváltozást közvetlenül mérési célokra nem lehet alkalmasan felhasználni, ezért oly módszereket kellett konstruálni, melyekben a frekvenciának egy fix frekvenciához viszonyított változását figyelhetjük meg. Egy ilyen sokat alkalmazott eljárás az, mely Pungs és Preuner[1] és Herweg-től[2] származik és melyet részletesebben szeretnék ismertetni (6. ábra). Ebben az esetben



6. ábra.

két igen szapora frekvenciájú rezgőkör közt létesítünk akár induktív, akár kapacitív, vagy akár galvanikus kapcsolást; az egyik körbe egy telefont (és detektort) iktatunk. Ekkor az egyik körben, pl. a II. körben két frekvencia fog működni, egyrészt a II. kör saját frekvenciája, mely legyen pl. 10^6 és az I. kör ráható frekvenciája, mely ettől kissé eltér, pl. 1.001,000 frekvencia. E két rezgés közt 1000 rezgésszámkülönbség van. Ha, mint felvettük, a rezgésszámkülönbség 1000 rezgés, úgy a rezgések másodpercenként 1000-szer fogják egymást erősíteni és 1000-szer gyöngíteni; fülünkben, illetőleg a telefonban az 1000 rezgésszámú hang fog keletkezni. A 7. ábrával vázolt berendezésnél (ez az általam használt összeállítás kapcsolási rajza) a rezgések gerjesztésére az úgynevezett negadyn kapcsolást használtam fel. Mindkét körben (az ábrán



7. ábra.

1 Pungs és Preuner: Phys. Zeitschr. 20, 543, 1919.
2 Herweg: Verh. d. D. Phys. Ges. 21, 572, 1919.

az egyik és pedig a tulajdonképpeni mérőkör van csak feltűntetve) kétrácsos Vatea D. G. P. 3. elektron-csöveket használok. A rezgőkör a belső rács körébe van iktatva. Amint a két kör rezgésszámkülönbsége a hallható intervallumba esik, a hangszóró meg fog szólalni. Ha most akármelyik körben a kapcsolást változtatjuk, pl. úgy, hogy egy kondenzátor lemezeit egymáshoz közelitjük, az interferenciahang a hallható legmélyebbtől kezdve a még érzékelhető legmagasabb hangig átfutja az egész hangskálát. A hang magasságának megváltozását csak az I. vagy II. kör saját frekvenciájának megváltozása okozhatja, vagyis amidőn valamelyik körben az önindukció (általában azonban a méréseknél ez állandó szokott maradni) vagy a kapacitás megváltozik. A kapacitás megváltozása, mint láttuk, maga után vonja az interferenciahang magasságának változását, amit azután úgy mérhetünk, hogy ezt a hangot egy ismert állandó frekvenciájú hangforrással, pl. hangvillával hasonlítjuk össze, úgy hogy ismételt lüktetéseket állitunk elő a hang és a hangvilla közt és úgy számoljuk a fellépő lüktetéseket, vagy pedig a berendezést minden esetben 0 lüktetésre állítjuk be. Ezen berendezésnél én az utóbbi módszert használtam. Az I. körben parallel kapcsoltam a megvizsgálandó dielektrikumot tartalmazó kondenzátort (C_d) (lásd 7. ábra) és a mérőkondenzátort (C_m); a dielektromos állandó változása okozta kapacitásváltozása C_d-nek $\varDelta C_d$ ellentétesen egyenlő azzal a kapacitásváltozással, melyet létesitünk C_m-en $\varDelta C_m$, hogy ismét nulla lebegés álljon elő. A berendezés érzékenységét egyszerűen állapithatjuk meg, ha alatta a legkisebb még észlelhető kapacitásváltozásnak ($\varDelta C$) és az összkapacitásnak (C) hányadosát értjük. A Thomson-formula, mely a rezgésidőt csillapitatlan hullámok esetében adja meg:

$$\frac{1}{n} = T = 2\pi\sqrt{LC}$$

differenciálásából nyerhető:

$$\varDelta n = -\frac{n}{2}\left(\frac{\varDelta C}{C}\right). \qquad (3)$$

Az emberi fül még észre tud venni oly kis hangmagasságkülönbséget, mely egy lebegést létesít két mp alatt; vagyis ahol $\Delta n = \frac{1}{2}$ és ha a rezgésszám, mint fent felvettük, 10^6, úgy:

$$\frac{1}{2} = -\frac{10^6}{2}\left(\frac{\Delta C}{C}\right); \quad \left|\frac{\Delta C}{C}\right| = 10^6 \qquad (4)$$

(3) egyenletből az is látható, hogy annál kisebb ΔC kapacitásváltozásokat fogunk tudni még észlelni, vagyis annál érzékenyebb lesz a berendezésünk, minél nagyobb a frekvencia, vagyis az n.

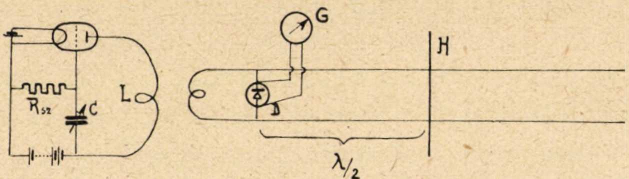
Egy ilyen összeállítás érzékenysége igen szépen demonstrálható, ha az egyik körbe kapcsolt kondenzátor lemezei közé széndioxidot bocsátunk. Az egész létesített kapacitásváltozás, ha a kondenzátor kapacitását vakuumban 250 cm-rel vesszük, kereken 0·09 cm kapacitás, vagyis az összkapacitás 3·6 tizezred része; az észlelt hangmagasságváltozás pedig igen jelentékeny. A berendezés érzékenysége növelhető azáltal, hogy még nagyobb frekvenciájú hullámokat használunk (n nagyobb), vagy pedig úgy, hogy a szubjektiv és ezáltal fárasztó hanglebegés megfigyelése helyett valamely objektiv mérő módszert alkalmazunk. Nagyobb mérési pontosság elérése céljából ajánlatos a dielektrikumot tartalmazó kondenzátort minden leolvasás előtt és után egy kommutátor (K) segitségével egy összehasonlításra szolgáló kondenzátorral (C_c) kicserélni. Ennek segitségével megitélhetjük, vajjon az észlelt kapacitásváltozást tényleg a dielektromos állandó megváltozása hozta-e létre, vagy pedig a mérés időtartama alatt valamely más természetű változás állott be a rezgőkörök valamelyikében. Ezáltal az ilyen spontán és kontrolálhatatlan frekvenciaváltozásból származó hibákat ki lehet küszöbölni. Ezek a spontán frekvenciaváltozások bekövetkezhetnek, ha a kathódtelep, vagy kisebb mértékben, ha az anódtelep akkumulátorainak a feszültsége ingadozik, ha a drótvezetékek egymáshoz viszonyitott helyzete megváltozik és végül, ha a berendezés előtt az észlelő mozog. A felsorolt hibaforrások kiküszöbölésére, vagy legalább is csökkentésére célszerű egyrészt igen nagy kapacitású és mindenekfölött jó állapotban lévő akkumulátortelepeket alkalmazni, másrészt vastag, merev drótokat a kapcsolásokhoz felhasználni, az egész berendezést rázkódástól mentes helyen felállítani és végül az egész összeállítást földelt fémfalakkal körülvenni, úgy hogy az állítandó alkatrészeket fogantyúk segítségével kivülről lehessen kezelni. Hogy mennyire változik a rezgésszám, ha ilyen földelt fal hiányában az észlelő vagy bármely más vezető mozog a berendezés előtt, azt a következő kisérlettel lehet demonstrálni. E kisérlet lényegében azonos azzal a bemutatással, amit a mult télen Theremin mint étermuzsika mutatott be Berlinben és melynek nagy újságszenzáció hatása volt. Kis fémbillentyűket, melyek semmi vezetői összeköttetésben nincsenek a berendezéssel, egy kondenzátor szórási terébe helyezünk, amint egyenként megérintjük őket, vagyis földeljük, a környezetben előálló potenciálváltozás révén megváltozik a kör frekvenciája, illetőleg az interferenciahang magassága; így tehát a billentyűk elhelyezése szerint különböző hangokat lehet előállítani. Egy pálcának a szabályos lengetésével olyan trillákat lehet kihozni, melyeket a legjobb koloratura énekesnő is megirígyelne.

Az itt ismertetett berendezéssel körülbelül még 15—20 m-es hullámok állithatók elő; ha azonban ezen túl is akarjuk a méreteket, vagyis a kapacitást és az önindukciót csökkenteni, úgy az elektroncső már nem gerjed be, tehát ennél rövidebb hullámok létesitésére másféle berendezéseket kell használni. Mérő módszer gyanánt ez esetben legtöbbször a Drude[1] által először felhasznált Lecher-drótpáron keletkező állóhullámokat szokás alkalmazni, vagyis közvetlenül a hullámhossz, vagyis a terjedési sebesség változásából a dielektromos állandó változására következtetni.

10 m alatti hullámokra pl. a következő kapcsolást (8. ábra) lehet előnyösen felhasználni. A rezgések gerjesztésére egy 50 m emissziójú kis adócsövet használhatunk. A rezgőkör áll a rács

[1] Drude: Ann. d. Phys. 54, 352, 1895.

anód kapacitásból, evvel sorba kapcsolva egy cca 50 cm hosszú drót, mely az önindukciós tekercset helyettesíti és még egy kis kondenzátorból, mely utóbbi változtatásával a hullámhosszat lehet szabályozni. Az önindukciós tekercset jelképező dróttal induktíve van csatolva a LECHER-drótpár. Egyik csomópontjába helyezzük az indikátort, egy zseblámpát, vagy pontosabb méréseknél detektorral egy galvanométert; egy mozgatható áthidalással a LECHER-drótpár hosszát úgy szabályozzuk, hogy a ráérkező hullámhossz felének egészszámú többszöröse legyen.



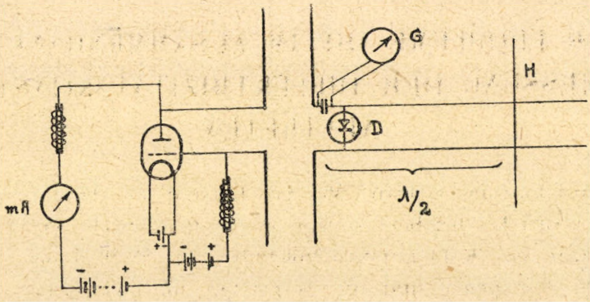
8. ábra.

Ezekben a helyzetekben a lámpa felvillan, illetőleg a galvanométer maximális kitérést fog mutatni. Egy ilyen összeállítással még körülbelül 1 m-es hullámok állíthatók elő.

Még rövidebb hullámok előállítására az ú. n. BARKHAUSEN-KURZ-féle[1] kapcsolást szokás alkalmazni, mellyel még 30 cm-es hullámok is előállíthatók. E rövid hullámok keletkezése teorétikusan még nincs teljesen indokolva, felismerésüket is egy puszta véletlennek köszönhetik. (A lámpa vakuumának vizsgálata közben vették észre.) A rezgőkör ez esetben magában a lámpában van és a rezgések keletkeznek, ha a lámpa anódjára nulla vagy negatív feszültséget, rácsára viszont nagy pozitív feszültséget viszünk. KOHL,[2] aki e kérdéssel tüzetesen foglalkozott, úgy gondolja, hogy itt, midőn az elektronok vándorlási ideje olyan nagyságrendű, mint a keletkezett rezgés, az elektronok mozgása megszűnik stacionárius lenni. Az elektronok a pozitív rácstól a negatív feszültségű anódig, illetőleg a nulla potenciálú felületig vándorolnak, itt meg-

[1] BARKHAUSEN és KURZ: Phys. Zeitschr. 21, 1, 1920.
[2] KOHL: Ann. d. Phys. 85, 1, 1928.

fordulnak; ha a rács-anódkör rezgésekre van gerjesztve, úgy a nulla potenciálú felület a kör saját frekvenciájának ritmusában tolódik el és igy az elektronáram magassága periodikusan változik. Ezen elmélet helyességének ellenőrizésére kisérleteket végeztem és pedig úgy, hogy az elektroncsövet egy tekercsben helyeztem el olyképpen, hogy a tekercsben haladó áram létesí-



9. ábra.

tette mágneses tér merőleges legyen az elektronok pályájára és most a Barkhausen-Kurz rezgéseket mágneses térben vizsgáltam. Azt találtam, hogy a mágneses tér befolyásolja úgy a rezgések amplitudóját, mint a hullámhosszukat.[1]

Ezeket a Barkhausen-Kurz rezgéseket determinálják a lámpa méretei, illetőleg az anód és rács egymástól való távolsága és az alkalmazott feszültségek. Ezáltal belátható, hogy minden hullámhossz előállitásához más és más speciális elkészitésű lámpa szükségeltetik, ami a folytonos mérések, vagyis teljesen azonos körülmények közt véghezviendő mérések elvégzése szempontjából hátrányos. Egy ilyen összeállitás kapcsolását a 9. ábra tünteti elő.

A technika, de egyúttal a fizikai kutatás további feladata, még rövidebb csillapitatlan rezgések gerjesztését lehetővé tenni, amiáltal biztositva volna a folytonos átmenet a leghosszabb 0·3 mm-es ultravörös és a legrövidebb elektromos hullám hullám-

[1] E vizsgálatok eredményét részletesen ismertetem egy most sajtó alatt lévő cikkemben.

hossza között. Ezek a vizsgálatok a diszperzió vizsgálatát és evvel együtt az atommodell kialakulását nagymértékben elősegitenék. Egyelőre azonban még nem világos, hogy ez mely módszerrel lesz elérhető.

Forró Magdolna.

ÜBER PROBLEME DIE IM ZUSAMMENHANG MIT DER MESSUNG DER DIELEKTRIZITÄTSKONSTANTEN AUFTRETEN.

Es wird kurz die Clausius-Mosottische und die Debyeische Theorie der Dielektrika beschrieben, sodann einige theoretische Probleme, wie: die Struktur des Kohlendioxyd-Moleküls, der Einfluss der Assoziation auf die Erscheinungen und die Dispersion im elektrischen Spektrum besprochen. Der Verfasser versucht eine theoretische Erklärung zu schildern, welche das widersprechende Verhalten des CO_2 bei hohen und tiefen Temperaturen zu erklären imstande ist.

Im zweiten Teil werden einige der für die Messung der Dielektrizitätskonstanten angewendeten Messanordnungen erörtert. Es werden drei Verfahren geschildert, von denen das eine von Pungs und Preuner und Herweg stammend bis 15—20 m Wellenlänge, das zweite eine modifizierte Dreipunktschaltung bis 1 m Wellenlänge und das dritte die Barkhausen-Kurz Schwingungserzeugung bis 30 cm Wellenlänge die Versuche zu vollführen erlaubt.

M. Forró.

A THERMIKUS ELEKTRONEMISSZIÓ ÉS AZ IZZÓKATHÓDOK TECHNIKÁJA.[1]

Az izzó testek elektronemissziójára vonatkozó vizsgálatok két irány felé mutatnak. Az egyik cél tisztán tudományos: a jelenségek pontos leírása, törvényszerűségeinek számszerű megállapítása, felismerése azoknak az összefüggéseknek, amelyek a thermikus elektronemissziós jelenségeket más jelenségekhez, a vezetők belsejében érintkező felületükön stb. lejátszódó folyamatokhoz fűzik; olyan egységes fizikai és matematikai kép, modell megkonstruálása, amelynek alapján a folyamatok és jelenségek deduktív úton levezethetők.

A másik cél technikai; az izzókathódok leglényegesebb alkotórészei azoknak a készülékeknek, melyeknél nagy intenzitású kathódsugarak előállítására van szükség: erősítő és adócsöveknek, Röntgencsöveknek és egyirányító készülékeknek. Az izzókathódok fontos szerepet játszanak fizikai vizsgálatoknál és méréseknél. Az elektroncső technikai fejlődése voltaképpen tudományos vizsgálatokból indult ki és mai alakja pontosan azt az elrendezést mutatja, mellyel Lénárd, Baeyer, Frank és Hertz a lassú elektronoknak a gázmolekulákkal való ütközéseit vizsgálták.[2]

---

[1] Ez a vázlatos, kompendiumszerű ismertetés semmiféle tekintetben nem tart számot a teljességre; inkább csak az a célja, hogy bepillantást nyujtson abba a gondolatkörbe, azokba a feladatokba és problémákba, amelyek a Vatea Rádiótechnikai és Villamossági Rt. elektrontechnikai laboratóriumában folyó munkáknál keretül és alapul szolgálnak.

A szerző vezetése alatt álló Vatea-laboratórium állandó munkatársai: Tomaschek Zoltán és Egri Imre; külső és átmeneti munkatársak: Harsányi Jenő, dr. Schay Géza és dr. Kalmár László urak.

[2] P. Lénárd: Ann. d. Phys. 8. 149, 1902.

O. v. Baeyer: Verh. d. D. Phys. Ges. 7. 109. 1908.

I. Franck und G. Hertz: Verh. d. D. Phys. Ges. 15. 34. 1913.

I. Franck und G. Hertz: Verh. d. D. Phys. Ges. 15. 373. 1913.

10*

A technika feladata: mindezen célokra olyan izzókathódokat előállítani, melyeknek elektronemissziója stabilis, egyenletes, kellő intenzitású s amelyek azonkívül kis energiával tarthatók üzemben s emellett hosszú élettartamúak.

1. Az első pontosabb vizsgálatok, amelyek a fémek, elsősorban a platina elektronemissziójára vonatkoztak, Elster és Geitel, Mc. Clelland, Wilson és Richardson-tól erednek.[1] Richardson állapította meg először a fémek elektronemissziójának a hőfokkal való számszerű összefüggését. Elméleti és kísérleti úton a következő egyenlethez jutott:

$$I = AT^{\frac{1}{2}} . e^{-\frac{b}{T}}, \qquad (1)$$

ahol I a felületegységre jutó emissziós áramot jelenti, T az abs. temperaturát, A és b pedig állandók.

A későbbi mérésekből kitűnt, hogy ez az egyenlet, melynek általánosabb alakja:

$$I = A . T^{a} . e.^{-\frac{b}{T}} \qquad (2)$$

nemcsak a tiszta fémek elektronemissziójára alkalmazható, hanem sok vegyületre, fémoxydok és általában fémsók elektronemissziójára is. Fredenhagen[2] mutatta ki, hogy valamely fém vagy vegyület elektronemissziója nem függ a hevítés módjától, vagyis árammal való közvetlen fűtésnél ugyanaz, mint indirekt (sugárzás, vagy vezetés útján való) hevítésnél.

A különböző anyagokra vonatkozó régebbi vizsgálatok az állandók értékeire igen különböző számadatokhoz vezettek. Az eltéréseknek okai a következők voltak: 1. a mérések nem történtek kellő tisztaságú anyagokkal (az elektronemisszió rendkívüli módon függ a legcsekélyebb felületi tisztátlanságtól; 2. a vákuum nem volt tökéletes, minek következtében a tiszta emissziós áramhoz a gázmolekulák ionizációja folytán előálló ionáram is hozzáadódott, a maradékgázok ezenkívül az izzó-

[1] J. J. Thomson: Elektrizitäts Durchg. in Gasen 1906. p. 154—161.
[2] Fredenhagen: Phys. Zeitschr. 13. 539. 1912.

kathód felületén igen komplikáltan követhető hatásokat idéztek elő; 3. a második, hideg elektródon (anódon) alkalmazott feszültség nem volt elegendő a *telítési áram* létrehozására; 4. az izzókathód hőfokának mérése tökéletlen volt.

A hibaforrások első két csoportját azóta sikerült tökéletesebben elliminálni, mióta a fejlődő vákuumtechnika olyan eszközöket szolgáltatott, amelyekkel nemcsak tartós, kellő nagyfokú vákuumot tudunk előállitani, hanem a vizsgált anyagokban okkludált és felületükön adsorbeált gáznyomokat is gyakorlatilag tökéletesen el tudjuk távolitani.

Az elektronemisszió vizsgálatához szükséges vákumnak legalább olyan nagyságúnak kell lennie, hogy lökésionizáció ne következzék be. Ennek viszont az a feltétele, hogy a gázmolekulák közepes szabad úthossza nagyságrenddel nagyobb legyen az áramlási tér méreteinél. Ez a vákuum azonban, amely pl. a wolframkathóddal biró elektroncső szabályos működését már elvileg is biztositja, (kis vevőcsöveknél ez a szükséges vákuum 10^{-6} Hgmm) általában még nem kielégitő.

Wilson[1] fedezte fel, hogy a platina elektronemissziója 1500° C-nál $^{1}/_{250000}$ részre csökken, ha a drótot salétromsavban való kezeléssel megszabaditjuk az okkludált hydrogéntől. Ez a felfedezés azt a gondolatot vetette fel, hogy talán minden thermikus elektronemisszió okkludált gázok hatásának, a maradékgázokkal a felületen végbemenő chémiai folyamatoknak tulajdonitható. Ezt a felfogást megerősiteni látszottak Soddy vizsgálatai, amelyek azt mutatták, hogy a Wehnelt-féle földalkálioxydkathódok elektronemissziója extrém vákuumban eltűnik.[2] Soddy az extrém vákuumot úgy állitotta elő, hogy a burában fémkalciumot párologtatott el. A kalcium, párolgása közben, az egyidejűleg történő kisülés hatása alatt ionizált, illetőleg gerjesztett maradékgázmolekulákkal chémiailag egyesül, illetőleg azokat absorbeálja. Ugyancsak ezt a felfogást (t. i. hogy az

---

[1] Wilson: Phil. Trans. A. **202**. 263. 1903.
[2] Soddy: Phys. Zeits. **9**. 8. 1908.

elektronemisszió chémiai folyamatokra vezethető vissza), látszottak igazolni FREDENHAGEN-nek[1] az alkáli fémekre, továbbá PRING és PARKER-nek[2] a szén elektonemissziójára vonatkozó vizsgálatai. Azt, hogy chémiai folyamatok elektronemisszióval járhatnak, először JUST és HABER mutatták ki a foszfor lassú oxydációjánál.[3]

A thermikus elektronemisszió igazi «okának» tisztázása nagy fontosságot és jelentőséget nyert azáltal, hogy a kérdés belekapcsolódott az elektromosság tanának egy másik, régóta vitás kérdésébe, mely a fémek, elektrolytek között fellépő *kontaktuspotenciál* eredetére vonatkozott. RICHARDSON[4] mutatta ki a szoros összefüggést két különböző fém elektronemissziója és a közöttük fellépő VOLTA-féle kontaktuspotenciál között. Az elektronemisszió eredetének tisztázása így hivatva volt dönteni a kontaktuspotenciál «érintkezési elmélete» és a «chémiai elmélet» között.[5] EINSTEIN-nek[6] és RICHARDSON-nak[7] a fotoelektromos jelenségekre vonatkozó vizsgálatai rámutattak arra az összefüggésre is, amely a thermikus és fotoelektromos elektronemisszió között fennáll. A nagyfontosságú kérdésnek tisztázása LANGMUIR-nek[8] sikerült, aki a General El. Co. laboratóriumában sorozatos vizsgálatokat végzett a wolfram elektronemissziójára vonatkozólag. LANGMUIR vizsgálatainál az elérhető legnagyobb fokú vákuumot állította elő (a leforrasztott burában wolframszálat izzított olyan magas hőfokon, hogy a wolfram erősen párolgott és a bura falán lecsapódva, a gázokat igen nagy mértékben absorbeáló bevonatot képezett) és azt találta, hogy *gáznyomásnak egy bizonyos ér-*

---

1 FREDENHAGEN: Verh. d. D. Phys. Ges. **14**. 384. 1912.
2 PRING és PARKER: Phil. Mag. **23**. 192. 1912.
3 JUST és HABER: Ann. Phys. **36**. 308. 1911.
4 RICHARDSON: Phil. Mag. **23**. 265. 1912.
5 LANGMUIR: Trans. Am. Electrochem. Soc. **29**. 125. 1916.
6 EINSTEIN: Ann. Phys. **17**. 132. 1905.
EINSTEIN: Ann. Phys. **20**. 199. 1906.
7 RICHARDSON: Ann. Phys. **23**. 615. 1912.
RICHARDSON: Ann. Phys. **24**. 570. 1912.
8 LANGMUIR: Phys. Zeitschr. **15**. 516. 1914.

tékén alul az elektronemisszió a vákuum jóságától független. Azt is megállapította, hogy a maradékgázok egy része, különösen az oxigén nitrogén, szénmonoxid, széndioxid és vízgőzök az elektronemissziót *leszállítják.* Az oxigén például már igen kis nyomásnál (10^{-6} Hgmm-nél) képes az elektronemissziót tetemesen csökkenteni; a nitrogén 10^{-5} Hgmm-nél az emisszió mérhető csökkenését idézi elő. Langmuir beigazolt feltevése szerint oxigén jelenlétében a wolfram felületén vékony oxidréteg képződik, amely igen stabilis és csak igen magas hőfokon távolítható el; ez az oxidréteg okozza az elektronemisszió csökkenését.

A maradékgázoknak egy másik csoportja, különösen az argon, higanygőz és hydrogén a wolfram elektronemisszióját nem befolyásolják.

Langmuir elméleti és kisérleti vizsgálat tárgyává tette az emissziós áramnak az anódfeszültséggel való összefüggését is és ezzel megmagyarázhatóvá tette a korábbi kutatások ellentmondó eredményeit.

A fizikai kutató munka és a gyakorlati technika kölcsönhatásainak szép példáját mutatja, hogy ezekből a vizsgálatokból alakult ki az elektroncső mai, tökéletes formája: a nagyvákuummal dolgozó elektroncső. Az elméleti eredmény: kétségtelenné vált, hogy a *thermikus elektronemisszió az anyagok általános thermikus tulajdonsága.* Ez a megállapítás egyúttal azt is eldöntötte, hogy a Volta-*féle kontaktuspotenciál és a fotoelektromos emisszió ugyancsak a szilárd testek általános tulajdonságai,* nem pedig az okkludált gázok, felületi rétegek, chemiai folyamatok hatásainak tulajdonithatók. (Azoknak a hatásoknak megismerése viszont, amelyeket az okkludált és absorbeált gázok az elektronemisszióra, a fotoelektromos emisszióra és a kontaktuspotenciálra gyakorolnak, kiterjedt vizsgálatok tárgyát képezik. Ezek a vizsgálatok nemcsak elméleti érdekkel birnak, hanem technikai fontossággal is, mert pl. éppen az úgynevezett «gázkathódok»-tól várhatjuk a technikai izzókathódok újabb tökéletesedését.)

2. RICHARDSON a róla elnevezett emissziós formulát először a fémek elektromos jelenségeire vonatkozó RIECKE-DRUDE-LORENTZ-féle elmélet alapján vezette le.[1]

Ezen elmélet szerint a fémek belsejében a szilárd helyzet körül rezgő mozgást végző fématomokon kívül nagy számú szabad elektron van jelen, amelyeknek mozgása, ütközése a kinetikus gázelmélet törvényeit követi.

DRUDE egyszerűsített meggondolása szerint az elektronok átlagos kinetikus energiája

$$\frac{1}{2} m.v^2 = \frac{3}{2} \frac{R}{N} T = \frac{3}{2} kT, \tag{3}$$

hol m az elektron tömege $[=9,01 \times 10^{-28}$ gr], R a gázállandó pro mol $[=8,316 \times 10^7$ erg/grad] N a molekulák, illetőleg elektronok száma pro mol, v az elektronok átlagos sebessége, T az abszolút hőfok. Ez az egyenlet megfelel a klasszikus statisztikai mechanika «æquipartició elvének».

Ha az egy molra eső töltést F-fel, az elektron töltését pedig e-vel jelöljük, akkor ($F=9647$ el. m. egység, $e=1,59 \times 10^{-20}$ el. m.)

$$N = \frac{F}{e} = \frac{9647}{1,59.10^{-20}} = 6,06.10^{23}. \tag{4}$$

Ha ezen értéket a (3) egyenletbe behelyettesítjük, kapjuk, hogy

$$v = \frac{3R}{F} \frac{e}{m} T \qquad \left[\frac{e}{m} = 1,766.10^7\right]. \tag{5}$$

A számértéket behelyettesítve 0° C mellett

$$v^2 = \frac{3.8,316.10^7}{9647} \cdot 1,766.10^7.273$$

$$v (=) 110 \text{ km/sec.}$$

[1] Összefoglaló munkák:
Handbuch der Radiologie Bd. 4 u. 6. Leipzig 1927.
K. BAEDEKER: Die elektr. Ersch. in Metall. Leitern. Braunschweig, 1911.

A fémek belsejében mozgó elektronok általános sebessége tehát aránylag nem nagy, a nagy feszültséggel előállitott kathódsugarak sebességéhez viszonyitva.

Az elektronok a fémekben keltett elektromos tér hatása alatt irányitott mozgást kapnak: így áll elő az elektromos áram; mozgásuk közben a fématómokkal ütközéseket szenvednek, energiát adnak át, amely hővé alakul. A fém felületén az elektronokra visszatérő erő hat, amely megakadályozni igyekszik az elektronok kiszabadulását. Ha azonban a felület felé repülő elektronok sebessége elég nagy, akkor keresztül tudnak hatolni a felületen működő erőtéren. A fém belsejében mozgó elektronok sebessége általában különböző; a sebességeloszlásra különböző számszerű feltevések lehetségesek, amelyek természetesen más és más emissziós formulához vezetnek. A klasszikus kinetikus elmélet szerint a sebességeloszlás (a gázmolekulák sebességeloszlásával megegyezően) a Maxwell-féle törvényt követi.

Eszerint a térfogategységben foglalt azon elektronok száma, melyeknek sebessége u és $u+du$ közé esik,[1]

$$dN = n\left(\frac{m}{2k\pi T}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m}{2kT}u^2} du, \tag{6}$$

ahol $k = \frac{R}{N}$ (Boltzmann-féle szám); n pedig a térfogategységben foglalt szabad elektronok száma.

A felületegységre másodpercenként érkező elektronok száma egyenlő az u magasságú, felületegység keresztmetszetű hasábban foglalt elektronok számával; ez a szám:

$$nu\left(\frac{m}{2k\pi T}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m}{2kT}u^2}. \tag{7}$$

A felületet csak azok az elektronok hagyhatják el, melyeknek kinetikai energiája nagyobb, mint a felületen működő

$$w = \int X dx \tag{8}$$

erőintegrállal kifejezhető *kilépési munka.*

---

[1] Jäger: Kinetische Gastheorie.

A kilépéshez tehát szükséges, hogy

$$\tfrac{1}{2}mu^2 > w\,;\quad u > \sqrt{\frac{2w}{m}} \tag{9}$$

legyen.

Azon elektronok száma, melyeknek sebessége $\sqrt{\frac{2w}{m}}$-nél nagyobb:

$$\int\limits_{\sqrt{\frac{2w}{m}}}^{\infty} nu\left(\frac{m}{2k\pi T}\right)^{\frac{1}{2}}.e^{-\frac{m}{2kT}u^2}du = n\left(\frac{k}{2m\pi}\right)^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{w}{kT}}. \tag{10}$$

Ha ezt a számot megszorozzuk az elektronok töltésével, úgy megkapjuk a *telítési áramot*, vagyis a felületegységből adott hőfokon kivehető legnagyobb áramot, vagyis

$$I = e.n.\left(\frac{k}{2\pi m}\right)^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{w}{kT}}. \tag{11}$$

A kilépési munka a mérések szerint a hőfokkal igen kevéssé változik, úgy, hogy a (11) egyenlet így irható:

$$I = A.T^{\frac{1}{2}}.e^{-\frac{b}{T}},$$

hol

$$b = \frac{w}{k} = \frac{N}{R}w\,;\quad A = e.n\left(\frac{k}{2\pi m}\right). \tag{12}$$

Ezek az összefüggések módot nyujtottak arra, hogy a kisérleti úton nyert Richardson-féle görbéből meghatározzuk egyrészt a kilépési munkát, másrészt a szabad elektronok számát.

A kilépési munkát felfoghatjuk úgy is, mintha az e töltésű elektronnak egy φ potenciálkülönbségű kettős rétegen kellene áthaladnia; az elektron munkája

$$w = e.\varphi. \tag{13}$$

Ezt behelyettesitve a (12) egyenletbe

$$b = \frac{N.e}{R}\varphi,$$

vagyis

$$\varphi^{\text{volt}} = \frac{R}{N.e}b = \frac{R}{F}b = 8{,}62.10^{-5}b. \tag{14}$$

A Drude-Riecke-Lorentz-féle elmélet, bármennyire tetszetős módon látszik számszerű képet adni a fémekben lejátszódó sokféle jelenségről (így a thermikus elektronemisszió mechanizmusáról is) mai tudásunk szerint nyilvánvalóan nem felel meg a tényeknek. A kísérletekkel ellentétes eredményekre vezet pl. a fémek fajhőjének meghatározásánál stb. Kétségtelen, hogy ez az elmélet a valóságnak egy részét tartalmazza. Erre mutat pl. az, hogy Richardson és mások kisérletei szerint az izzó testekből kilépő elektronok sebességeloszlása valóban a Maxwell-féle törvényt látszik követni.

3. Az elméletnek egy következtetése kétségtelen és kísérletileg is igazolható: az elektronoknak az izzó testből való kilépésnél munkát kell végezniök. Ez a munkavégzés, az elektron energiaváltozása tökéletesen hasonló ahhoz az energiaváltozáshoz, amely a testek párolgásánál előáll s amely a párolgási hőben mutatkozik. A párolgó folyadék lehűléséhez teljesen hasonló módon minden izzó test, melyből elektronok lépnek ki, meleget veszít, lehűl, hacsak nem történik gondoskodás a melegveszteség pótlásáról. Ezt a lehűlési effektust először Wehnelt és Jentsch mutatták ki.[1]

Richardson[2] hangsúlyozta először, hogy a kilépési munka létezése nem vonja maga után szükségképpen az izzótest felületén egy *kettős réteg* létezését. Az elektronnak a kilépésnél akkor is munkát kell végeznie, ha a potenciál a felületen nem változik.

Minden elektromosan töltött testre ugyanis, amely egy vezetőfelület közelében foglal helyet, az elektromos megosztás következtében olyan elektromos erő működik, amely a töltéssel bíró testet a vezető felület felé vonzza.

Ez az erő (a Thomson-féle «képerő») akkora, mint amekkora erővel a töltött testet ellenkező töltéssel elképzelt tükörképe

---

1 Wehnelt és Jentsch: Verh. der Deutsch. Phys. Ges. **10.** 610. 1908.
2 Richardson: Phil. Mag. **23.** 278. 1912.

vonzaná. Ezt a gondolatot Schottky építette ki részletes elméletté.[1]

Ha az e töltésű elektron a vezető felületről x távolságban van, akkor a ráható erő

$$F = \frac{e^2}{(2x)^2} = \frac{e^2}{4x^2}. \tag{15}$$

Ha az elektron a felülethez igen közel jut, akkor ez az erő végtelenné válik (x zérus felé tart). Fel kell tehát tételeznünk, hogy a (15) erőtörvény egy bizonyos x_0 atomikus nagyságrendű távolságban érvényét veszti és $x < x_0$ értékeknél az erőtörvény más lesz. A kilépési munka tehát két részből tevődik össze: x_0 távolságon kívül:

$$w_1 = \int_{x_0}^{\infty} \frac{e^2}{4x^2}\, dx = \frac{e^2}{4x_0}, \tag{16}$$

x_0 távolságon belül:

$$w_0 = \int_0^{x_0} F(x)\, dx, \tag{17}$$

ahol $F(x)$ egyelőre ismeretlen (atomikus) erőtörvény.

Az egész munka:

$$w = w_0 + w_1. \tag{18}$$

Mindenesetre feltételezhető, hogy az erőnek az $x = x_0$ pontban nincs ugrása. Schottky feltétele szerint az $O < x < x_0$ intervallumban az erő állandó és egyenlő az $x = x_0$ pontban működő erővel. Ez esetben

$$w_0 = \frac{e^2}{4x_0} \tag{17a}$$

és

$$w = \frac{e^2}{2x_0}. \tag{18a}$$

Más feltevés szerint az $x = 0$ pontban az erő zérus és az $O < x < x_0$ intervallumban olyan görbe szerint változik, melynek

---

[1] Schottky: Phys. Zeitschr. 15. 872. 1914.

érintője az $x=x_0$ pontban folytonos. Ha még azt is feltesszük, hogy erőgörbe másodfokú, akkor az integrál értéke megegyezik a (17*a*) értékkel.

Miután a kilépési munka $w = e.\varphi$, azért

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{w}{e} = \frac{e}{2x_0} = \frac{7{,}16.10^{-8}}{x_0}\ \text{volt} \\ x_0 &= \frac{7{,}16.10^{-8}}{\varphi\ \text{volt}}. \end{aligned} \tag{19}$$

A φ számára talált kísérleti értékek 1 és 10 között mozognak; az x_0 számára tehát a (19) egyenlet olyan értékeket ad, amelyek a röntgenspektroszkopia által szolgáltatott atomtávolságokkal nagyságrendben megegyezőek. Ez az eredmény mindenesetre a számítás nagy valószínűségét igazolja.

4. A klasszikus quantumelmélet nem sokkal vitte előre a thermikus elektronemisszió belső mechanizmusának, törvényszerűségeinek mélyebb feltárását. A hőfokfüggvény levezetésénél RICHARDSON alkalmazott először quantumelméleti meggondolásokat, ezek alapján az

$$I = A'T^2 e^{-\frac{b'}{T}} \tag{20}$$

alakú kifejezés adódott.

Annál nagyobb jelentőségűnek mutatkoznak SOMMERFELD-nek és iskolájának elméleti vizsgálatai, amelyek a fémek elektronelméletét új alapokra fektetik és számos kísérletileg is jól igazolható eredményeket mutatnak fel.[1] Ezek a vizsgálatok a fizikai elméleteknek merőben új ágaihoz kapcsolódnak, a PAULI-FERMI-féle quantumstatisztikához, a DE BROGLIE, SCHRÖDINGER-HEISENBERG-féle quantum-, illetőleg hullámmechanikához.[2]

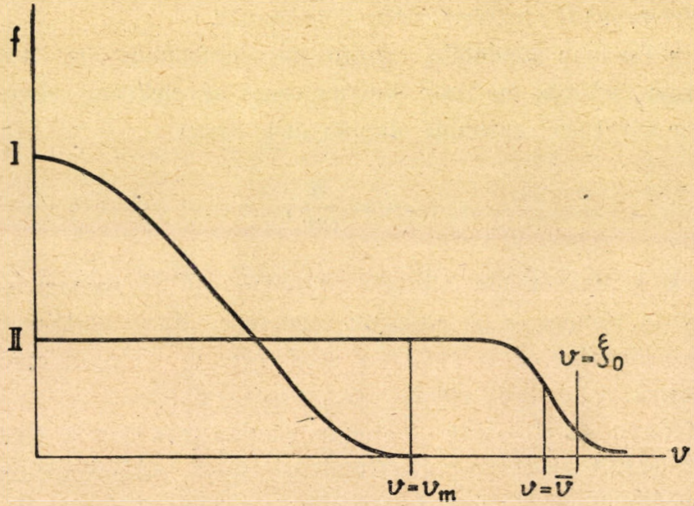
[1] Összefoglaló ismertetés:
SOMMERFELD: Die Naturwissenschaften **15.** 825. 1927.
16. 374. 1928.

[2] A. HAAS: Materiewellen u. Quantummechanik. Leipzig, 1928.
M. BORN: Probleme der Atomdynamik. Leipzig, 1926.
L. DE BROGLIE: Ondes et Mouvements. Paris, 1926.
E. SCHRÖDINGER: Abhandlungen zur Wellenmechanik. Leipzig, 1928.

I. táblázat.

Anyag	Szám	Megfigyelő	A_1	b	C	d	Φ_0 äquival. feszültség Volt
Szén	1	Richardson	$.10^{34}$	$7{\cdot}8\,.10^{4}$		$7{\cdot}55.10^{4}$	6·48
	2	Deininger	$4{\cdot}68.10^{25}$	$5{\cdot}49.10^{4}$	$7{\cdot}46.10^{10}$	$5{\cdot}25.10^{4}$	45·1
	3	Langmuir	$1{\cdot}49.10^{25}$	$4{\cdot}87.10^{4}$	$1{\cdot}78.10^{10}$	$4{\cdot}57.10^{4}$	3·92
	3·3	Langmuir		$4{\cdot}8\,.10^{4}$			
Platina	4	Richardson	$7{\cdot}5\,.10^{25}$	$4{\cdot}93.10^{4}$		$4{\cdot}75.10^{4}$	4·1
	5	Wilson	$6{\cdot}9\,.10^{26}$	$6{\cdot}55.10^{4}$		$6{\cdot}3\,.10^{4}$	5·45
	6	Wilson	$1{\cdot}17.10^{27}$	$7{\cdot}25.10^{4}$		$7{\cdot}0\,.10^{4}$	6·0
	7	Richardson	$5{\cdot}0\,.10^{28}$	$6{\cdot}78.10^{4}$		$6{\cdot}55.10^{4}$	5·65
	8	Deininger	$3.06.10^{25}$	$6{\cdot}1\,.10^{4}$	$4{\cdot}9\,.10^{10}$	$5{\cdot}85.10^{4}$	5·02
	9	Horton	$1{\cdot}6\,.10^{25}$	$6{\cdot}1\,.10^{4}$		$5{\cdot}9\,.10^{4}$	5·1
	10	Wilson	$2{\cdot}0\,.10^{21}$	$2{\cdot}8\,.10^{4}$		$2{\cdot}56.10^{4}$	2·18
	11	Langmuir	$2{\cdot}02.10^{31}$	$8{\cdot}0\,.10^{4}$	$2{\cdot}42.10^{16}$	$7{\cdot}7\,.10^{4}$	6·62
	11*a*	Schlichter	$7{\cdot}2\,.10^{25}$	$5{\cdot}11.10^{4}$		$4{\cdot}9\,.10^{4}$	4·2
Wolfram	12	Langmuir	$1{\cdot}55.10^{26}$	$5{\cdot}25.10^{4}$	$1{\cdot}86.10^{11}$	$4{\cdot}95.10^{4}$	4·25
	12*a*	K. K. Smith	$3{\cdot}0\,.10^{27}$	$5{\cdot}47.10^{4}$		$5{\cdot}20.10^{4}$	4·46
Tantal	13	Deininger	$2{\cdot}7\,.10^{21}$	$4{\cdot}42.10^{4}$	$4{\cdot}3\,.10^{6}$	0^{4}	3·58
	14	Langmuir	$7{\cdot}45.10^{25}$	$5{\cdot}0\,.10^{4}$	$8{\cdot}94.10^{10}$	$4{\cdot}7\,.10^{4}$	4·04
Molybdän	14·1	Stoekle	$6{\cdot}9\,.10^{26}$	$5{\cdot}36.10^{4}$			
	15	Langmuir	$1{\cdot}38.10^{26}$	$5{\cdot}0\,.10^{4}$	$1{\cdot}65.10^{11}$	$4{\cdot}7\,.10^{4}$	4·04
Thorium	15·1	Langmuir	$1{\cdot}25.10^{27}$	$3.90.10^{4}$			
Nickel	15*a*	Schlichter	$2{\cdot}9\,.10^{25}$	$3{\cdot}4\,.10^{4}$		$3{\cdot}3\,.10^{4}$	2·9
Vas	15·2	Dushman	$1{\cdot}5\,.10^{22}$?	$3{\cdot}7\,.10^{4}$			
Titan	15·3	Dushman	$8{\cdot}1\,.10^{21}$?	$2{\cdot}8\,.10^{4}$			
Calcium	16	Horton	$1{\cdot}1\,.10^{23}$	$3{\cdot}65.10^{4}$		$3{\cdot}5\,.10^{4}$	3·04
Natrium	17	Richardson	$.10^{31}$	$3{\cdot}16.10^{4}$		$3{\cdot}1\,.10^{4}$	2·65

A PAULI-FERMI-elmélet szerint a szabad gázmolekulák sebesség-energia eloszlását a klasszikus MAXWELL-féle sebességeloszlásában kifejezésre jutó törvényszerűségektől lényegesen eltérő «quantumfeltételek» szabályozzák. Az ezekből a quantumfeltételekből levezethető állapotváltozási függvények a tapasztalatokkal jól egyező eredményekhez vezettek, különösen az úgynevezett «elfajult» gázoknál, amelyeknek fajhője közel zérus értékű (ezt tekinthetjük az «elfajulás» definiciójának). Ilyen elfajulást mutat pl. a heliumgáz 5° abs. temperaturán; PAULI mutatott



1. ábra.

rá, hogy a fémek belsejében levő «szabad elektrongáz» (tekintetbe véve az elektron csekély tömegét és egyszerű strukturáját) a földünkön elérhető legnagyobb temperatúra mellett is tökéletesen elfajult. Ebből következik, hogy a szabad elektrongázban a sebességeloszlás a MAXWELL-félétől eltérő. Az 1. ábra I. görbéje egy adott irányú sebességkomponensen MAXWELL-féle eloszlását tünteti fel, mig a II. görbe a PAULI-FERMI-féle eloszlást. Látható, hogy a szabad elektrongázban sebességeloszlás egy bizonyos sebességen alul közel egyenletes, csak a nagy sebességnél mutatkozik a MAXWELL-féléhez hasonló törvényszerűség.

Ez a sebességeloszlási görbe nem áll ellentétben RICHARDSON kisérleteivel, melyek szerint a fémekből kilépő elektronok sebességeloszlása a MAXWELL-félének felel meg, mert hiszen a fémből azok az elektronok lépnek ki, melyeknek sebessége egy megadott értéknél *nagyobb*. Ezekre nézve pedig a PAULI-FERMI-féle eloszlási törvény a MAXWELL-féléhez hasonló eloszlást megenged.

Még mélyebbnek mondható az az átalakulás, amelyet a DE BROGLIE-SCHRÖDINGER-HEISENBEG-féle quantummechanika az *elektronmodell strukturájában* létrehozott.

DE BROGLIE gondolata szerint az elektronhoz egy hullámmozgás tartozik, melynek hullámhossza az elektron sebességével a következő egyenlet alapján függ össze:

$$\lambda = \frac{h}{mv}, \qquad (21)$$

hol h a PLANCK-féle állandó ($h = 655 \times 10^{-29}$ ergsec) m az elektron tömege, v az elektron sebessége. Ezen hullám terjedési sebessége, u az elektron sebességének a fénysebességhez viszonyított reciprok értéke, vagyis $u . v = c^2$.

EINSTEIN és ELSASSER gondolatai alapján DAWISSON és GERMER-nek sikerült kisérletileg is kimutatni, hogy nikkelkristályokról visszaverődő elektronok az elhajlított fényhez tökéletesen azonos módon *interferenciajelenségeket* mutatnak; a visszaverődő elektronok intenzitása a különböző azimutális irányokban, a visszaverődési irányoktól függő határozott maximumokat és minimumokat mutat, melyeknek szögtávolsága megfelel a DE BROGLIE-féle hullámok elhajlásából számított értékeknek.[1]

DAWISSON és GERMER kisérleteinél a beeső elektronsugár sebessége gyorsító feszültségben mérve, a nikkelkristály rácsállandójának megfelelően 20—400 volt között változott.

[1] DAWISSON és GERMER: Phys. Rev. **30**. 705. 1927. Újabban RUPP-nak sikerült optikai rácsokon is észlelnie a DE BROGLIE-féle hullámok elhajlását. (RUPP: Zeitschr. f. Phys. **52**, 8. 1928.

SOMMERFELD-nek a fémek elektronelméletére vonatkozó levezetései a szabad elektrongáznak PAULI-FERMI-féle energiaelosztását veszik alapul, annak feltételezésével, hogy a szabad elektronok száma a fématomok számával megegyezik. Ez utóbbi feltevés jogosultságát a fémek paramágneses viselkedésére vonatkozó, a tapasztalatokkal jól egyező PAULI-féle elmélet igazolja. A fémekben foglalt szabad elektrongáz sebességeloszlását a klasszikus elmélet szerint az

$$f = A.e.^{-\frac{\varepsilon}{kt}} \tag{22}$$

függvény szolgáltatja, hol ε az elektron energiája, K a BOLTZMANN-féle állandó; a PAULI-FERMI-elv szerint a sebességeloszlási függvény

$$f = \frac{1}{\frac{1}{A} e^{\frac{\varepsilon}{kT}} + 1}. \tag{23}$$

Ennek alapján egyszerűen kiszámítható a fém felületéről kilépő elektronáram intenzitása, ha ismét feltételezzük, hogy a felületet csak azok az elektronok hagyják el, melyeknek energiája elegendő a kilépési munka legyőzésére.

$$I = \frac{2\pi e m G}{h^3} (kT)^2 e^{-\frac{w}{kT}}. \tag{24}$$

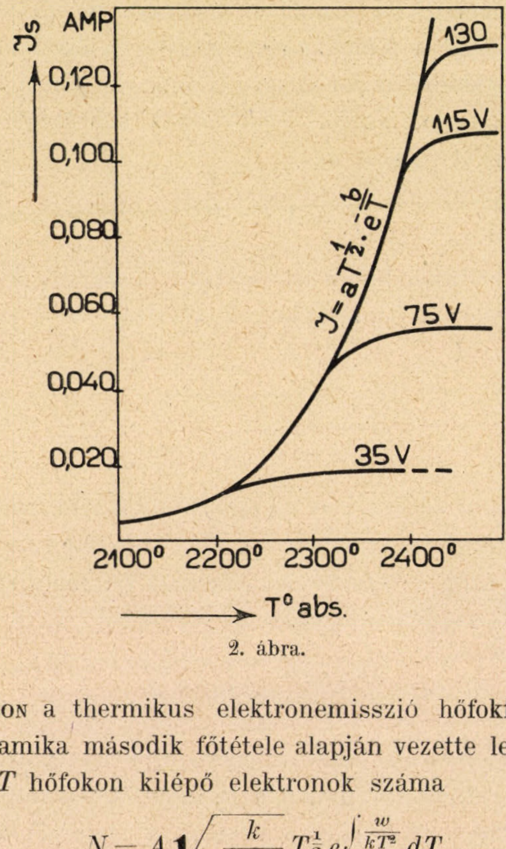
Ezen egyenletben G jelöli az elektron «quantumstatisztikus súlyát», amely 2-vel egyenlő, h a PLANCK-féle állandó, w pedig a kilépési munka. SOMMERFELD szerint a kilépési munka két részből tevődik össze:

$$w = w_1 - w_2 \tag{25}$$

w_2 *negatív* kilépési munka, amelyet tehát az elektronnak nem legyőznie kell, hanem annak a nyomásnak a mértéke, amelylyel az elektrongáz a felületről kilépni igyekszik, w_1 pedig a visszatérítő elektrosztatikus erőknek megfelelő munka:

$$w_2 = \frac{m}{2} v^2, \tag{26}$$

ahol $\bar{v}$ az elektronok közepes belső sebessége a Pauli-Fermi eloszlást alapul véve, w_1 pedig megfelel a Thomson-féle «képerő» legyőzéséhez szükséges munkának.



2. ábra.

5. Wilson a thermikus elektronemisszió hőfokfüggvényét a thermodynamika második főtétele alapján vezette le. Levezetése szerint a T hőfokon kilépő elektronok száma

$$N = A\sqrt{\frac{k}{2\pi m}}\,T^{\frac{1}{2}}\,e^{\int\frac{w}{kT^2}}\,dT, \tag{27}$$

hol $k = \frac{R}{N}$; w az az energiaváltozás, amelyet az elektron az izzótestből való kilépésekor szenved. w értéke közelítőleg

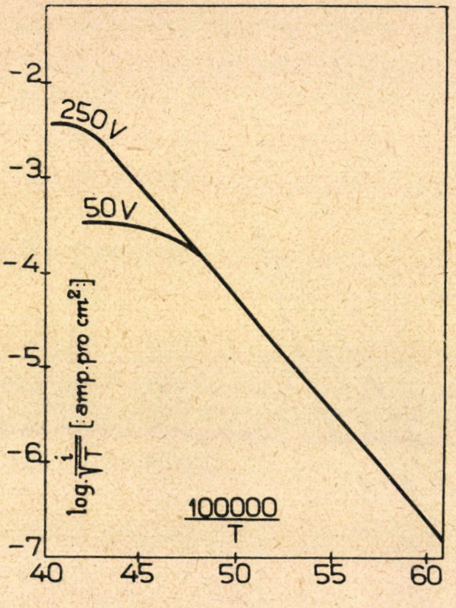
$$w = w_0 + \tfrac{3}{2}kT. \tag{28}$$

(w_0 a $T = 0$-hőfokhoz tartozó érték).

Ennek figyelembevételével a (27) egyenlet alapján a telítési áram:

$$I = N.e = AT^2 e^{-\frac{w_0}{kT}}. \tag{29}$$

Ezen egyenlet a T kitevőjében különbözik az első RICHARDSON-féle egyenlettől, viszont megfelel a SOMMERFELD által levezetett formulának.



3. ábra.

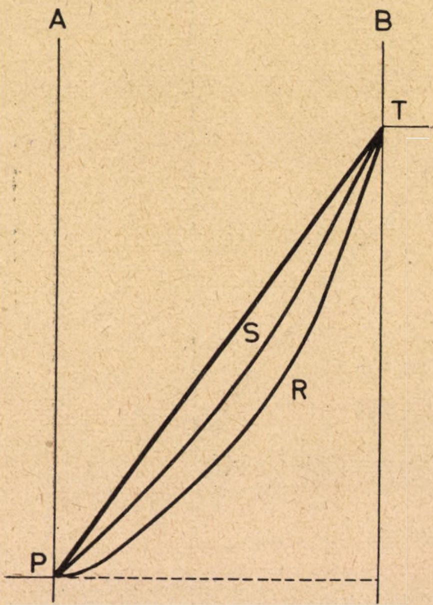
6. A kétféle egyenlet igazolására igen sok kisérlet történt. Az eddigi mérések pontossága nem elegendő annak az eldöntésére, hogy vajjon melyik egyenlet fedi tökéletesebben a kisérleti eredményeket. Mégis úgylátszik, hogy a (20) alakú kifejezés a mérésekkel jobban összhangzásba hozható. Az I. táblázat a különböző anyagokra vonatkozó kisérleti eredményeket tünteti fel, míg a 2. és 3. ábrán a wolfram emissziós egyenletének grafikus ábrázolása található.

A grafikus ábrázoláshoz célszerű a

$$\log_{10} i - \frac{1}{2} \log_{10} T = \log_{10} A - \frac{b}{2{,}303\, T} \tag{30}$$

alakú logaritmikus kifejezést alapul venni (3. ábra).

7. Az izzókathódból kilépő elektronáramnak az anódfeszültséggel való összefüggését először Child és tőle függetlenül Langmuir[1] vezette le. A levezetés kiinduló pontját az képezi, hogy a negatív töltésekkel repülő elektronok a kathód és anód közötti térben az elektrosztatikus téreloszlást módosítják (tértöltés hatás). A legegyszerűbb esetben a kathód és anód végtelen kiterjedésű, párhuzamos sík felületek; a két felület közötti térben a tértöltéshatását a Poisson-féle egyenlet fejezi ki:



4. ábra.

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -4\pi\varrho, \tag{31}$$

ahol V a potenciál, ϱ az elektromos sűrűség, a tér valamely tetszőleges pontjában. Ha nincs elektronemisszió, akkor ezen egyenletből következik, hogy a potenciál a távolsággal lineárisan változik (4. ábra). Ha a kathód elektronokat emittál, akkor a térben ϱ mindenütt negatív és így a potenciál lineáris eloszlása megváltozik. A 4. ábra S görbéje a potenciál eloszlását mutatja kisebb, R görbéje nagyobb emissziós áram esetén. Ha feltesszük, hogy a kathódból kiinduló elektronok sebessége zérus, ha továbbá feltételezzük, hogy a kathód felületén $\frac{dV}{dx} = 0$, akkor az elektronáram

$$i = \frac{\sqrt{2}}{9.\pi} \sqrt{\frac{e}{m}} \, \frac{V_a^{\frac{3}{2}}}{d^2}, \tag{32}$$

[1] Handbuch der Radiologie IV. S. 62.

hol V_a az anódfeszültség, d a két felület távolsága, $\frac{e}{m} = 1,763 \times 10^7$ az elektron specifikus töltése. LANGMUIR ugyanilyen alapon határozta meg az elektronáram-anódfeszültség-törvényt arra az esetre, ha a kathód végtelen hosszú egyenes drót, az anód pedig azt körülvevő henger.

Ez esetben

$$i = \frac{2\sqrt{2}}{9}\sqrt{\frac{e}{m}}\,\frac{V_a^{\frac{3}{2}}}{r.z^2}, \tag{33}$$

hol

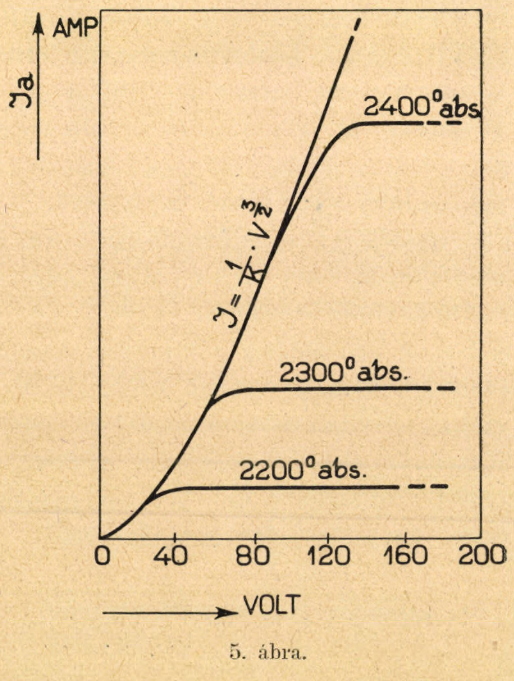
$$z = \log\frac{r}{a} - \frac{2}{5}\left(\log\frac{r}{a}\right)^2 + \frac{11}{12}\left(\log\frac{r}{a}\right)^3 \tag{34}$$

(a a kathód-drót átmérője, r az anódhenger sugara).

Mindkét esetben tehát az elektronáram az anódfeszültség $\frac{3}{2}$-ik hatványával változik.

Ez a törvény azonban csak addig érvényes, amíg az anódfeszültség nem túl nagy, vagyis távol esik a telítési feszültségtől; az anódfeszültség növekedésével ez az egyenlet mindinkább elveszíti érvényességét. Az összefüggés valóságos képét az 5. ábra mutatja. A $\frac{3}{2}$ törvény érvényességeinek gyakorlati feltétele az, hogy a kathód közelében az elektronok sűrűsége (a tértöltés sűrűsége) nagy legyen.

Ha az áramlás nem tökéletes vákuumban történik, akkor a kathód



5. ábra.

és anód közötti térben a potenciáleloszlás és az áramnak a feszültséggel való összefüggése megváltozik. Ekkor ugyanis azok az elektronok, amelyeknek sebessége elég nagy, a jelenlevő gázmolekulákat ionizálják és az így keletkezett lassú pozitív ionok már igen kis ionizáció esetén az elektronok negatív töltéseinek a potenciáleloszlásra való hatását lerontják. Kis nyomású gáz jelenlétében a telitési értéknél kisebb feszültségnél az elektronáram növekszik és pedig két okból: 1. a tértöltés csökken, 2. az elektronáramhoz hozzáadódik az ionáram. Nagyobb feszültségnél természetesen ugyancsak növekszik az áram, sőt ívkisülésbe is átmehet. A jelenséget komplikálhatja a jelenlevő gázoknak a kathód elektronemissziójára gyakorolt esetleges csökkentő hatása. Mindezen hatások jelentős szerephez juthatnak az elektroncsövek technikájában is.

8. Richardson [1] mutatott rá arra az összefüggésre, amely egyrészt a thermikus elektronemisszió, másrészről a fémek között fellépő Volta-féle kontaktuspotenciál, illetőleg a fémek fotoelektromos emissziója között fennáll.

A Volta-féle kontaktuspotenciál létrejön két különböző fém között, ha azok egymással érintkezésbe jutnak. Ez a potenciálkülönbség pl. kimutatható quadranselektrometerrel, melynek két quadranspárját különböző fémekből készitjük. Kimutatható úgy is, hogy a két fémet kontaktusba hozzuk s azután eltávolitjuk egymástól; az eltávolitásnál a két fémben a töltéseloszlás megváltozik, áram áll elő, amely galvanometerrel mérhető.

Richardson ugyancsak abból a feltevésből indult ki, hogy a két érintkező fémben a kinetikus gázelmélet törvényeit követő szabad elektronok vannak jelen. Ha N_1 és N_2 a két fémben a szabad elektronok koncentrációját jelentik, w_1 és w_2 pedig a thermikus elekronemissziónál mérhető egy gramm-molekulára (96500 coulombra) eső kilépési munkát, akkor az érintkező fémek kontaktuspotenciálkülönbsége

[1] Richardson: Phil. Mag. **23.** 615. 1912.
24. 570. 1912.

$$V_1 - V_2 = \frac{1}{F}\left(w_2 - w_1 + RT \log_{nat} \frac{N_1}{N_2}\right), \tag{35}$$

hol F = az 1 molra eső töltés.

Az elektronok koncentrációkülönbségéből eredő tag (amely a Peltier-effektusnak függvénye) igen kicsiny, úgy, hogy jó közelítéssel

$$V_1 - V_2 = \frac{w_2 - w_1}{F},$$

vagyis

$$V_1 - V_2 = \varphi_2 - \varphi_1 \tag{36}$$

két különböző fém között fellépő kontaktuspotenciál tehát egyenlő a két fémhez tartozó (voltokban mért) kilépési munka különbségével.

Ez a nevezetes összefüggés, amelynek igazolására még igen kevés kisérlet történt, más úton is levezethető. Az energia megmaradásának elvét két, egymással részben galvanikusan, részben pedig elektronárammal összekapcsolt fém rendszerére alkalmazva adódik a következő egyenlet:

$$e(\varphi_1 - \varphi_2) = e(V_1 - V_2) - e.P, \tag{37}$$

hol P a Peltier-effektusra jellemző elektromotoros erő. A jobboldal második tagja az elsőhöz képest a legtökéletesebben elhanyagolható (ha a két fém a Volta-féle sorban elég távol áll), úgy, hogy ebből is következik a (36) egyenlet.

A kisérleti vizsgálatok azt mutatták, hogy a kontaktuspotenciál ugyanúgy, mint a thermikus elektronemisszió, nagy mértékben függ a vizsgált fémeknek, főképpen ezek felületeinek tisztaságától. Csekély tisztátlanságok, gáznyomok, absorbeált gázrétegek jelentékeny mértékben befolyásolják a kontaktuspotenciált, úgy, hogy a pontos mérések csakis a legnagyobb fokú vákuumban és a gázmaradékok tökéletes eltávolitásával történhetnek. Viszont éppen ezeknek a zavaró hatásoknak pontos, jól definiált viszonyok mellett való vizsgálata közelebb visz a fémek felületi sajátságainak, felületi erőinek megismeréséhez.

9. A fotoelektromos emissziónál a hideg fém felületéből kilépő elektronok a kilépéshez szükséges energiát a ráeső fény energiájából nyerik. EINSTEIN[1] elmélete szerint a maximális sebességgel kilépő elektronra vonatkozólag érvényes, hogy

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = h\nu - P, \tag{38}$$

hol m az elektron tömege, v sebessége, h a PLANCK-féle állandó, ν a fény rezgésszáma, P pedig az egy elektronra eső kilépési munka. Ez az összefüggés abból a meggondolásból adódik, hogy a fény (általában a sugárzó energia) nem *folytonos*, hanem energiaatomokból, quantumokból áll (az energiaquantum $\varepsilon = h\nu$); a fény és elektron energiakicserélődéseinél mindig egy teljes fényquantum alakul át az elektron energiájává. Ez az energiaquantum egyrészt arra fordíttatik, hogy az elektron a felületi kilépési munkát legyőzze, a felesleg pedig a kiszabaduló elektron kinetikus energiájában mutatkozik. Az a hullámhosszúság λ_0, amelynél a $h\nu_0$ energiaquantum egyenlő a kilépési munkával, határt jelöl, amelynél hosszabb hullámú fény fotoelektromos emissziót előidézni nem képes. Ez a λ_0 határ a különböző fémeknél természetesen különböző, a kilépési munkával összefüggően. (Platinára $\lambda_0 = 280$ $\mu\mu$ ami már az ultraibolyába esik; az alkáli fémeknél «határszín» a látható spektrumba esik.)

RICHARDSON szerint a fotoelektromos kilépési munka és a thermikus elektronemissziónál fellépő kilépési munka egymással egyenlők. Ez az egyenlőség nem következik *a priori*, mert hiszen a két jelenség alapjában véve különböző. Mégis az a kevés számú kisérlet, mely ennek igazolására történt, ezt az igen valószínű feltevést igazolni látszik.[2]

10. A thermikus elektronemisszióra vonatkozó fizikai és technikai vizsgálatoknál a legelső feltétel: tökéletes, jól definiált vákuum, illetőleg tökéletesen tiszta, jól definiált gázatmoszféra

---

[1] EINSTEIN: Ann. Phys. **17.** 132. 1905.
20. 199. 1906.

[2] A fényelektromos jelenségekre vonatkozó igen részletes összefoglaló munka:
B. GUDDEN: Lichtelektrische Erscheinungen. 1928.

létesitése. A szivattyúzásnál általános a GAEDE-LANGMUIR-féle higanysugárszivattyúk használata; a higanygőzöket és a kondenzálható egyéb gőzöket és gázokat a szivattyú és a recipiens között elhelyezett kifagyasztó edény alkalmazásával távolithatjuk el. Legcélszerűbb az elektródokat az üvegburába platina bevezetődrótokkal beforrasztani, mindennemű csiszolat, vagy ragasztás elkerülésével. A méréseket megelőzően a szivattyúzás alatt a burát egy-két órán keresztül 400—500° C fokon hevítjük, a recipiens leforrasztása folytonos szivattyúzás közben történik, hogy a leforrasztásnál az izzó üvegből felszabaduló gázok is eltávolíttassanak. A leforrasztás után a vákuum tökéletesebbé tételére általában még további kémiai és elektrokémiai szivattyúzási módszerek használatosak (magnézium, kalcium, wolfram stb. elpárologtatása nagyfeszültségű elektronkisülés egyidejű létesitése közben).

Az összes fémrészek a szivattyúzás alatt elektronbombázás által, vagy célszerűbben nagyfrequenciájú örvényáramokkal az elérhető és megengedhető legmagasabb hőfokra hevítendők, hogy az okkludált gázok kiszabadulhassanak.[1]

A kathódszálat legcélszerűbben hengeralakú, nickel, platina vagy molybdänból készült anóddal vesszük körül; minden esetben célszerű a kathódon és anódon kívül még egy harmadik elektródot is elhelyezni, amely a nyomásnak ionizációs módszerrel való mérésére szolgál.

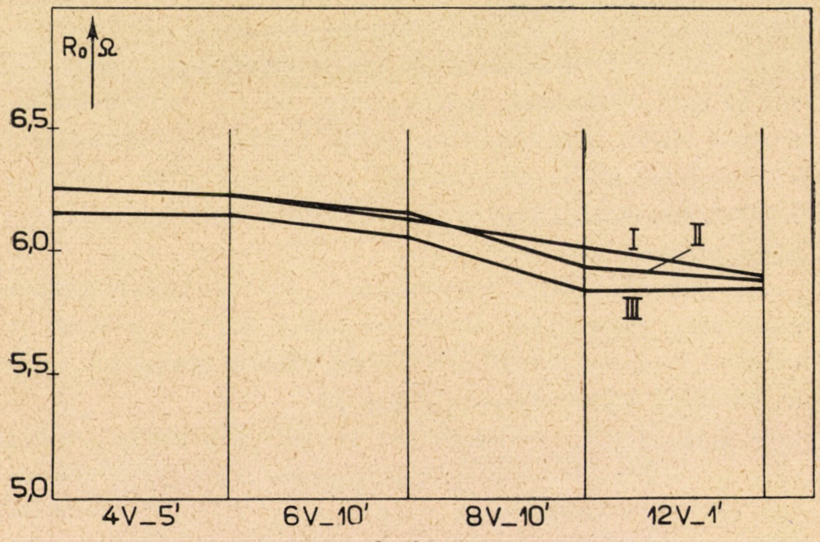
A kathód hőfoka rendesen nem egyenletes; a tartódrótok felé a hőfok csökken, pontos méréseknél éppen ezért a kathódot három részre szokás osztani, úgy, hogy a középső részre eső feszültségesést, emissziót külön lehessen mérni. A középső rész tehát igen vékony, feszültségkivezető elektródokkal bír, azonkivül pedig az anód is három részre osztott.

---

[1] S. DUSHMAN: Production and Meausurement of High Vakuum. Schenectady 1922.
L. DUNOYER: La Technique du Vide. Paris, 1924.
A. GOETZ: Physik und Technik des Hochvakuums. Braunschweig, 1926.

A kathód hőfokának meghatározására különböző módszerek szolgálnak:

1. Előzetesen meghatározzuk a kathód hideg- és melegellenállásának viszonyát, mint a hőfok függvényét, elektromos kályhában, thermoelem felhasználásával. A burába beépitett kathódszál hőfokát azután ezen az alapon számítjuk. Figyelembe kell venni, hogy a legtöbb drótanyag izzítás alatt hideg- és meleg-



6. ábra.

ellenállását, temperaturakoefficiensét változtatja. A 6. ábra wolframdrótok ellenállásváltozásait tünteti fel az izzítás hatása alatt. A Vatea-laboratóriumban végzett méréseknél a használt drótokat előzetesen vákuumkályhában 900—1000° C mellett 6—8 órán keresztül kiizzítjuk.

2. Az izzításhoz szükséges elektromos energia, amely egyenlő a kisugárzott energiával, a hőfok függvénye. Az összefüggést fekete testnél a Stephan-Boltzmann-féle törvény [1]

$$w = \sigma T^4 \tag{39}$$

[1] A sugárzási jelenségekre és törvényekre vonatkozó összefoglaló munka: Lummer: Ziele und Grenzen der Leuchttechnik. Berlin, 1918.

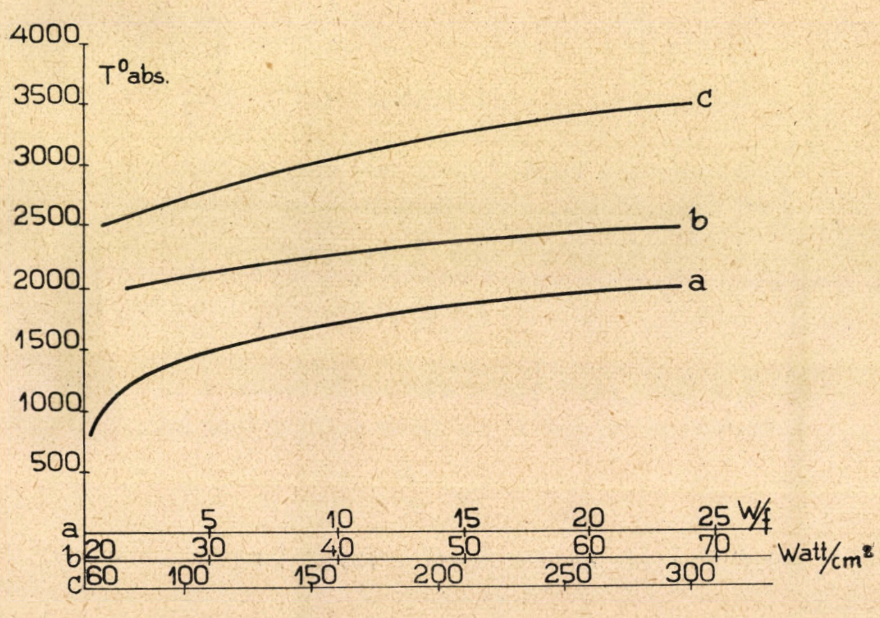
adja meg. Nem fekete testnél a sugárzási törvény általában más LUMMER szerint nem fényes platinára

$$w = \sigma . T^5 \tag{40}$$

LANGMUIR szerint wolframra

$$w = \sigma . T^{4,65}. \tag{41}$$

A wolfram sugárzására vonatkozólag a legpontosabb méréseket



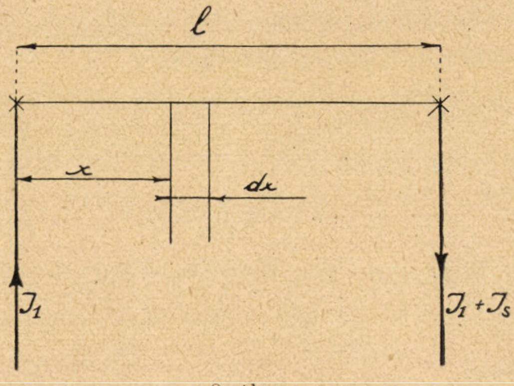
7. ábra.

FORSYTHE és WORTHING végezték,[1] méréseik eredményét a 7. ábra tünteti fel.

Ha a kathód elektronáramot is emittál, akkor az ezen módszer szerinti hőfokmérésnél tekintetbe veendő az emissziós áram fűtőhatása és a lehűlési effektus is.

Az emissziós áram fűtőhatását úgy vehetjük figyelembe, hogy

[1] FORSYTHE és WORTHING: Astroph. Journ. 61. 146. 1925.



8. ábra.

meghatározzuk a kathód elemi hosszúságára eső fűtőenergiát és ezt integráljuk (l. a 8. ábrát). Az elemi fűtőenergia

$$dW_h = I^2 dr$$

$$I = I_1 + \frac{x}{l} I_s,$$

hol I_1 a fonal egyik végén mérhető fűtőáram, I_s az emissziósáram (melyet egyenletes eloszlásúnak tételezünk fel);

$$dr = \frac{R}{l} dx,$$

hol R az egész fonal ellenállása. Eszerint tehát

$$dW_h = \left(I_1 + \frac{x}{l} I_s\right)^2 \frac{R}{l} dx =$$

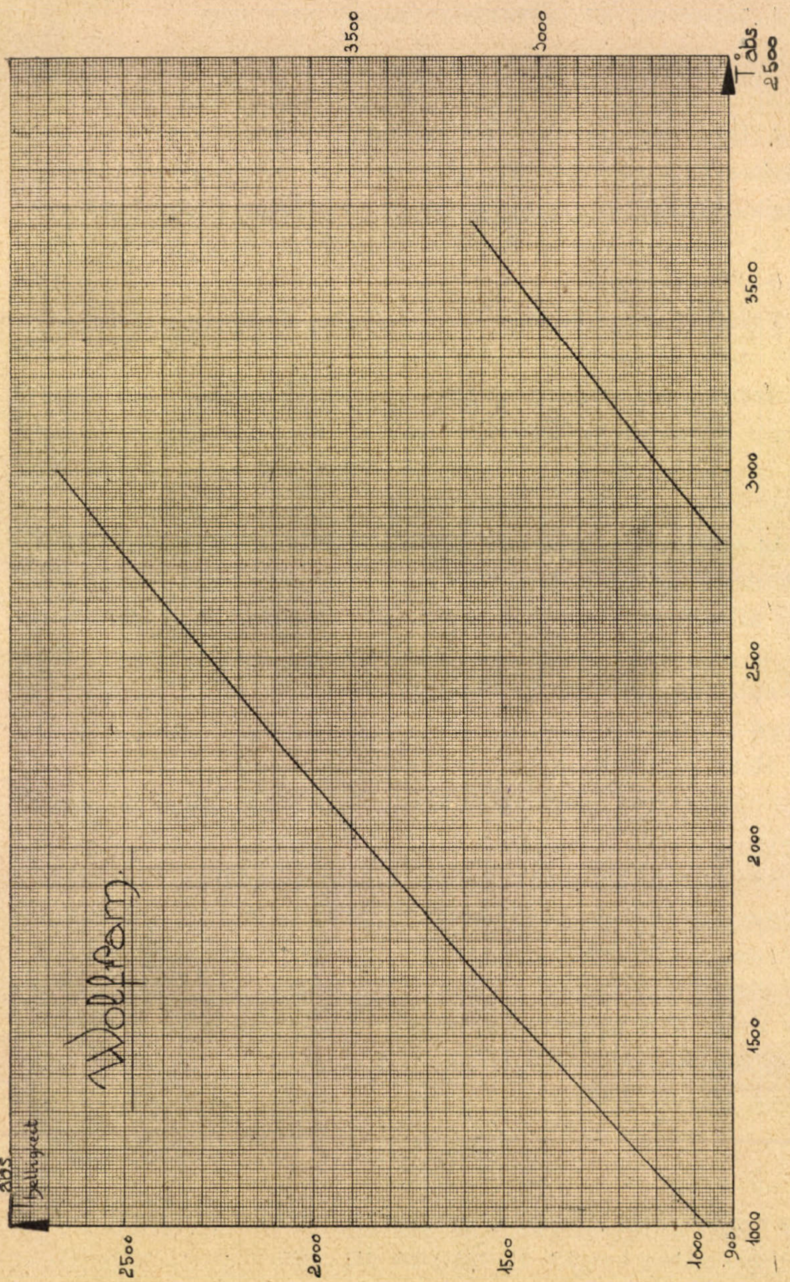
$$= I_1^2 \frac{R}{l} dx + 2 I_1 I_s \frac{R}{l^2} x dx + \frac{R}{l^3} I_s^2 x^2 dx$$

$$W_h = \int_0^l dW = (I_1^2 + I_1 I_2 + \tfrac{1}{3} I_s^2) R. \qquad (42)$$

A lehűlési effektus egyszerűen kiszámítható, ha ismeretes a kathódfelületnek voltokban mért kilépési munkája. Ekkor ugyanis

$$w = I_s^{\mathrm{Amp}} \varphi^{\mathrm{Volt}} \qquad (43)$$

hol I_s^{Amp}: az emisszióáram.



9. ábra.

A hőtermelésnél számításba veendő érték tehát

$$W = W_h - w. \tag{44}$$

3. Legkényelmesebb a kathód hőfokának optikai úton való mérése. Ez a módszer feltételezi, hogy ismeretes a kathódanyag hőmérsékletének és fényességének összefüggése egy bizonyos spektrálintervallumban. A mérés általában vörös szűrővel történik: $\lambda = 648\ \mu\mu$.

A Vatea-laboratóriumban a fonalhőfok mérésére a GOETZ-féle mykropyrometerokulárt használjuk.[1]

Wolframra a «fényességi hőfok» és valódi hőfok közötti összefüggés FORSYTHE és WORTHING mérései alapján nagy pontossággal ismeretes (9. ábra). Földalkáli fémek sugárzása a vörösben közel ugyanaz, mint a fekete testé.

Az elektromos árammal izzitott kathód potenciálja a drót különböző pontjain különböző, a fűtőáram okozta feszültségesés következtében. Ezt a hibát csak tökéletlenül küszöbölhetjük ki úgy, hogy a közepes feszültséget vesszük számításba. További hibákat okoz a fűtőáram mágneses hatása is, amely a kilépő elektronok pályáját befolyásolja. Ezen hatás kiszámításával HULL próbálkozott.[2]

A fűtőszál és anód véges hossza is hibákat okoz, hacsak a rendszer három részre való osztását nem alkalmazzuk.

Mindezen hibák következtében az elméletileg kiszámitott összefüggések gyakorlati elektroncsövek karakterisztikus görbéinek, emissziós görbéinek számításainál csaknem illuzórius értékűek és legcélszerűbben empírikus úton állapitandók meg. A 10. ábra egy Vatea TP3 típusú elektroncsőnél a feszültség és emisszióáram összefüggését tünteti fel. A LANGMUIR-féle képletből számitott állandó értéke

$$0{\cdot}250\ ^{\mathrm{mA}}/_{\mathrm{Volt}^{3/2}}.$$

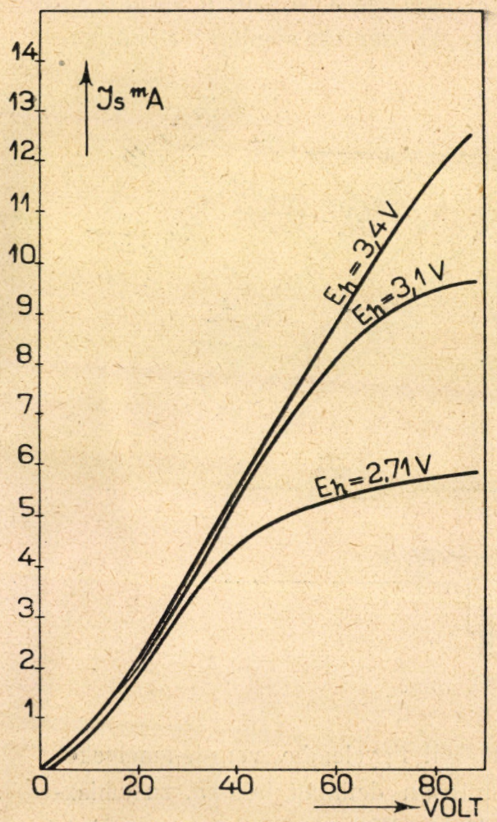
---

[1] GOETZ: Zeitschr. f. Physik **38.** 119. 1926.
[2] HULL: Phys. Rev. **18,** 31. 1921; **25,** 645. 1925.

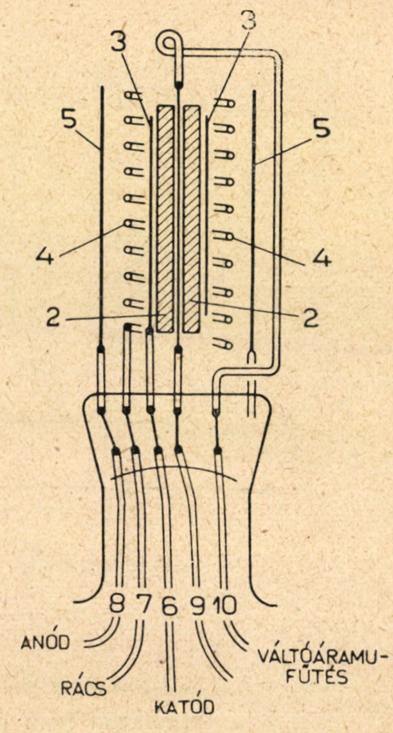
A valóságban ez az érték

$$0{\cdot}0251 \ {}^{\mathrm{mA}}/_{\mathrm{Volt}^{3/2}}.$$

A fűtőáram feszültségesésének és mágneses terének hatását kétféle módon küszöbölhetjük ki: Aequipotenciális kathód al-



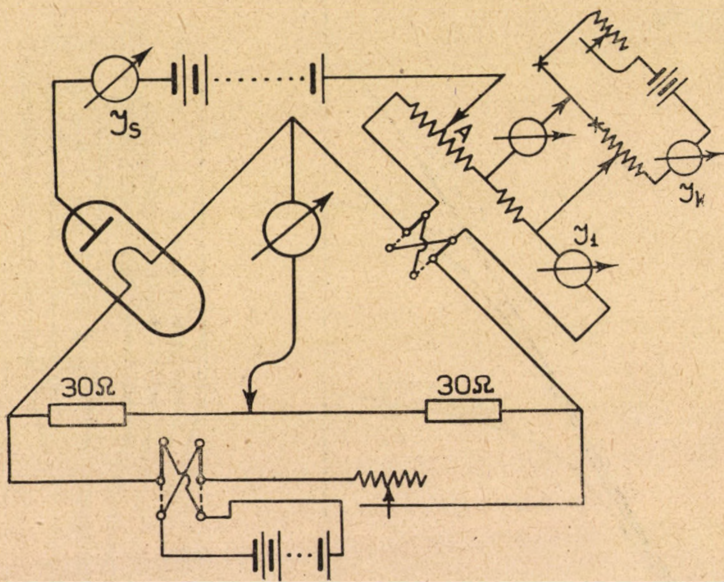
10. ábra.



11. ábra.

kalmazásával (11. ábra), melynél a kathód fűtése indirekt úton (vezetés vagy sugárzás által) történik, vagy pedig forgó kommutátor alkalmazásával, amely a fűtőáramot és az anódfeszültséget felváltva kapcsolja. Gyors váltakozás mellett a kathód hőfoka, thermikus tehetetlensége következtében eléggé egyenletes. Ezeket a módszereket kell alkalmazni mindazon esetekben is, amikor homogén elektronsugarak előállítására van szükség.

11. Igen nagyfontosságúak azok a mérések, amelyek a RICHARDSON-egyenletben szereplő b exponenciális állandónak, illetőleg a kilépési munkának a lehűlési effektusból való meghatározására vonatkoznak.[1] A lehűlési effektust a 12. ábrán feltüntetett elrendezéssel demonstrálhatjuk. Az ezen elv alapján történő pon-



12. ábra.

tos mérésnél több korrekciót kell figyelembe venni, amelyeket részint a kathódszál nem pontosan definiált hőfoka, az emissziós áram egyenlőtlen eloszlása, a WHEATSTONE-híd egyensúlyának feltételei tesznek indokolttá.[2] Az anód felmelegedéséből előálló visszafűtés ugyancsak hibákat okoz, amelyeket úgy küszöbölhetünk ki, hogy a leolvasásokat a felmelegés előrehalad-

---

[1] A lehűlési effektus első kimutatása WEHNELT és JENTSCH-től származik (Verh. d. deutsch. phys. Ges. **10**, 605. 1908.).

[2] RICHARDSON és COOKE: Phil. Mag. **25**, 624. 1913.

tával különböző időkben végezzük s az így nyert értékekből extrapolálunk.[1]

Az ezen hibák okozta összes korrekciók nélkül történő méréseket teljesen megbízhatatlanoknak kell tekintenünk.

A Vatea laboratórium mérési elrendezésében (12. ábra) az izzító telep kommutálásával egyidejűleg a híd II. ágát is kommutáljuk. Ezzel az eljárással meghatározható az az A pont, amely a kathódszálon egyenlőtlenül eloszló emissziós áram súlypontjának felel meg.

Folyamatban levő méréseinkből nyert értékek Wolframra: $\varphi = 4{\cdot}5$—5^{Volt} (DAWISSON és GERMER mérései szerint $\varphi = 4{\cdot}51^{\mathrm{Volt}}$)[2] Thoriumos wolframra: $2{\cdot}2 \div 3^{\mathrm{Volt}}$.

A méréseknél mint leglényegesebb korrekció tekintetbe veendő az emissziós áram fűtőhatása, melyet a 170. oldalon kifejtettek alapján számíthatunk.

12. A (36) összefüggés alapján valamely anyag kilépési munkája meghatározható, ha meghatározzuk a kérdéses anyag és valamely ismert kilépési munkájú anyag közötti *kontaktuspotenciált*. A kontaktuspotenciálra vonatkozó mérések más vonatkozásokban is nagyfontosságúak és többek között éppen a (36) összefüggés helyességének megvizsgálására is szolgálnak. A kontaktuspotenciálnak vákuumban történő mérésére szolgáló berendezésnek olyannak kell lennie, hogy a vizsgált anyagok hevíthetők, tehát tökéletesen kigázosíthatók legyenek; a hevítés egyúttal azt is lehetővé teszi, hogy a kontaktuspotenciálnak a hőfokkal való változását is vizsgálhassuk, továbbá, hogy megállapítható legyen az absorbeált és okkludált gázok hatása is. Ilyen méréseket végeztek ROTHE,[3] LANGE,[4] MÖNCH.[5]

Az eddigi vizsgálatok pontossága általában nem kielégítő,

---

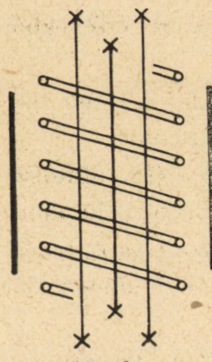
[1] L. DAWISSON és GERMER-nek más módszerrel való méréseit Phys. Rev. **20**, 300. 1922.

[2] Phys. Rev. **20**. 300. 1922.

[3] ROTHE: Zeitschr. f. techn. Phys. **6**. 633. 1925.

[4] LANGE: Diss. Dresden, 1927.

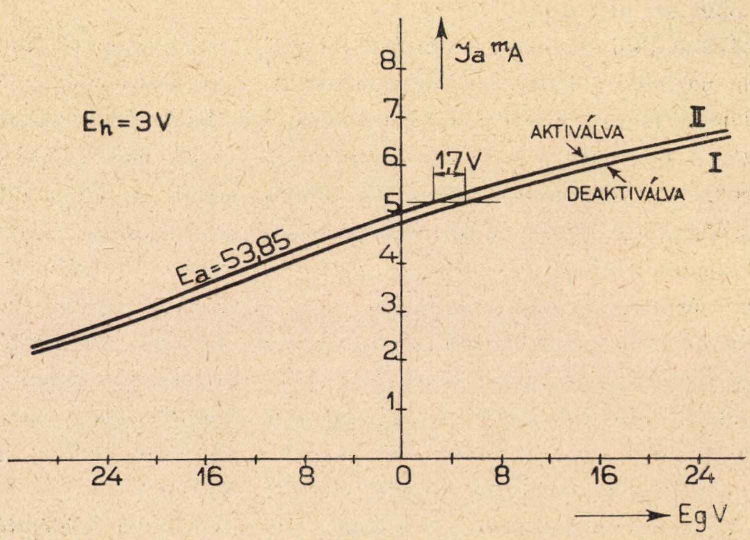
[5] MÖNCH: Zeitschr. f. Phys. **47**. 522. 1928.



13. ábra.

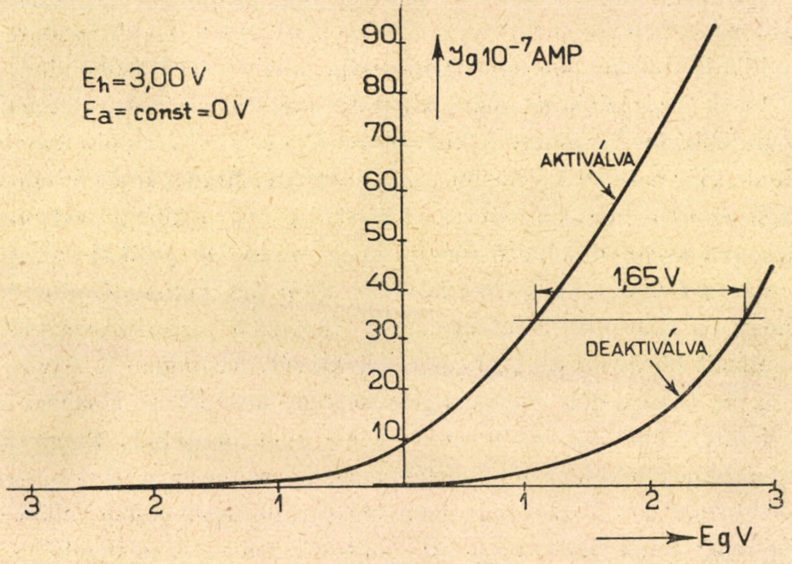
azoknak finomítása az ezzel kapcsolatos kérdések fontosságát tekintve, mindenképpen kívánatos.

Igen egyszerű és elegáns módszerrel határozhatjuk meg a tisztafelületű wolfram és thóriumfelületű wolfram közötti kontaktuspotenciálkülönbség értékét. A kísérleti elrendezés vázlatát a 13. ábra tünteti fel. Egy elektroncső burájába a rácson és anódon belül három paralell wolframszálat feszítettünk. A szálak közül a középső rövidebb, hossza: 20 mm, a szélső szálak hossza 24 mm. Mindhárom szál cca 1 % thóriumot tartalmazott és külön fűthető volt. A kész lámpák karakterisztikáit meghatároztuk oly módon, hogy a középső szál



14. ábra.

kathód gyanánt szolgált, a két szélső egymással összekötve rács gyanánt, a voltaképpeni rács a legkülső hengerrel együtt anód gyanánt. Az I. görbe (14. ábra) úgy készült, hogy a két szélső szálat megelőzőleg 3000° C-ra hevítettük, miáltal tökéletesen tiszta wolframfelület állt elő. A II. görbe felvétele előtt a két szélső szálat szabályos aktiválási folyamatnak vetettük alá (l. 186. oldal), miáltal tiszta thóriumos felületet nyertünk. A két görbe eltolódása (14. ábra) 1, 6—1, 8 volt elég jól megegyezik a wolfram és thóriumfelületű wolfram voltokban mért kilépési munkáinak különbségével.



15. ábra.

Ugyanilyen pontos megegyezésre vezetett az a mérés is, melynél a két szélső szál anód gyanánt szolgált (a mérésnél célszerűnek mutatkozott a külső elektródoknak kis pozitív feszültséget adni). A mérések eredményét a 15. ábra tünteti fel. A tiszta és kiaktivált anódoknál mért áramgörbék ugyancsak 1·6—1·8 volt eltolódást mutatnak. Ugyanezen elrendezéssel megállapitható a kontaktuspotenciálkülönbségnek a hőfokkal való változása, valamint más felületi rétegek, gázadsorpció hatása is. A vizsgálatok kiterjesztése, tökéletesitése és alkalmazása folyamatban van.

13. Az oxydkathódokra vonatkozó vizsgálatainknál merült fel annak a valószinűsége, hogy az izzó testből kilépő elektronok felületi eloszlása szabályosságokat mutat, amely szorosan összefügg a kathód kristálystrukturájával. Komplex kathódanyagoknál, különösen WEHNELT-kathódoknál mindinkább valószinűnek látszik az a feltevés, hogy az emisszió forrása voltaképpen a földalkáli sókat képező fématom; a ma uralkodó elméletekkel ugyan ellentétben áll, de nem áll ellentétben az eddigi *tapasztalatokkal* az a feltevés sem, hogy a homogén fémek elektronemissziója is voltaképpen felületi jelenség, amely a legkülsőbb atomrétegek ionizációjából indul ki. Erre mutatna az a kétségtelen paralellizmus is, amely a kilépési munka és a gőzállapotú fémek ionizációs potenciálja között megállapitható. Mindenképpen indokolt azonban annak a feltevésnek felvetése, hogy a kilépő elektronáram a kristályt képező atomrácsnak megfelelő *felületi szakaszosságot* mutat. A kérdés kisérleti úton úgy volna eldönthető, hogy ha sikerülne kimutatni, egy homogén egykristályfémből emittált elektronoknak elhajlási effektusát, hasonlóan a DAWISSON és GERMER-féle elhajlási jelenséghez, melynél az elhajlást a kristály felületéről *visszaverődő* elektronok mutatják. Ennek a kisérletnek mindenesetre nehézségei is vannak: a thermikus elektronok kezdősebessége igen kicsiny, DE BROGLIE-féle hullámhosszuk tehát igen nagy az emittáló fémek rácsállandóihoz viszonyitva, a gyorsitó tér alkalmazásával szemben felmerül a koherencia kérdése is stb.

Hasonló kérdésekhez jutottak a fotoelektronokra vonatkozólag WITTMER és ROSENFELD.[1]

15. Az izzókathódoknak első technikai alkalmazása WEHNELT-től ered, aki az általa felfedezett, nagy emisszióval biró földalkáli oxydokkal bevont kathódokat egyirányitó készitésére használta fel. (1904.)[2] Ugyanezen évből származik FLEMING készüléke, amely a drótnélküli táviró vevőberendezésének detektora gyanánt szolgált és lényegében véve ugyancsak az egyenirányitás

---

[1] ROSENFELD és WITTMER: Zeitschr. f. Phys. **48**, 530. 1928.
[2] DRP. 157,845. 1904.

alapján működött.[1] (I. tábla, 1. ábra.) FLEMING detektorcsövében az izzókathód szénfonal volt, melynek közelében egy második, hideg elektród volt elhelyezve. A váltakozó áramok erősítésére szolgáló első elektroncső LIEBEN-REISS és STRAUSS-tól[2] származik (I. tábla, 2. ábra); a LIEBEN-cső izzókathódja ugyancsak földalkáli oxidokból állt, amelyek egy platinaszallag bevonatát képezték.

LANGMUIR vizsgálatai óta az elektroncsövek technikájában a wolfram-kathód jutott domináló szerephez és ezt a szerepét a nagyobb teljesítményű és nagy feszültséggel dolgozó elektroncsöveknél (adócsöveknél) ma is megtartotta. Kisebb teljesítményű elektroncsöveknél a kezdetben majdnem kizárólagosan használatos tiszta wolfram-kathódokat néhány év óta kiszorították az aktiváló anyagokat, főként thóriumot tartalmazó wolfram- és molybdaen-kathódok; a legutolsó években pedig a tökéletesített WEHNELT-kathódok jutottak első helyre.

A tiszta wolfram széleskörű alkalmazását elsősorban annak köszönheti, hogy olvadáspontja az ismert fémek között a legmagasabb; emellett az elektronemisszióra jellemző adatai nagy elektronáram előállítását teszik lehetővé olyan hőfokon, melynél élettartama a gyakorlat igényeinek gazdaságosan megfelel. A wolfram nagy olvadáspontjánál és csekély párolgásánál (porlódásánál) fogva az izzólámpafonalaknak úgyszólván kizárólagos anyaga.

A wolframdrótok gyártása[3] (éppen a magas olvadáspont miatt) nem történhetik az egyéb fémeknél alkalmazható módon, megömlesztés által. A gyártás kiindulási pontja a wolframsaw (WO_3), amelyből tiszta poralakú wolframot hydrogénben 900—1000° C-nál történő redukcióval állítják elő. Az ily módon nyert

---

[1] J. A. FLEMING: The Thermionic Valve. London, 1924.

[2] DRP. 249 142.
DRP. 236 716.

[3] Az igen kiterjedt irodalomból mint összefoglaló munkák kiemelendők:
WEBER: Die Metallfadenlampen. Leipzig, 1914.
ALTERTHUM: Wolfram. Braunschweig, 1925.

wolframport nagy nyomással rudakká préselik és ugyancsak hydrogénben való izzítás által kristályosítják. A kristályképződés, sarjadzás (Sprossen) 2300° C-nál indul meg. Az izzított, zsugorított (szinterelt, Sintern) wolframrúd apró kristályokból áll, amelyeknek orientációja rendezetlen. Alkáli- és halogenvegyületek hozzáadása, valamint az izzításnak megfelelő menete által elérhető, hogy az izzított wolframrúd kevésszámú nagy kristályból álljon, esetleg egész tömegében egyetlen nagy kristályból. A zsugorított wolframrudat izzó állapotban gyorsforgású körkapcsolással nyújtják, vékonyítják, amíg átmérője 1—2 mm lesz. Az így kapott vastag drótot azután vörös izzásnál gyémántsablonokon kisebb keresztmetszetű drótokká, fonalakká húzzák. A húzásnál kenőanyagul és védőréteg gyanánt finom grafit vizes kolloidális oldatát használják; a gyártásból kikerülő wolframdrótot a grafit (aquadag) rétegtől fürdetés, mechanikus tisztítás, továbbá hidrogénben való izzítás útján szabadítják meg. A tisztított wolframdrót tükröző, fémes felületet mutat. A húzott wolframdrót nagy szilárdságú, hidegen szívós, hajlítható; izzó állapotban azonban csakhamar törékennyé válik. A mechanikai tulajdonságok megváltozása szoros összefüggésben van a kristálystruktúra megváltozásával. A húzásból kikerülő drót kristálystuktúrája axiális irányítottságot mutat: a drót szálas, rostos struktúrájú. Izzításnál a kristálystruktúra megváltozik, az orientáció rendetlenné válik, durva kristályok állanak elő, melyeknek illeszkedése éppen az orientáció esetlegessége, továbbá a minimális, tökéletesen el nem távolítható tisztátlanságok, okkludált gázok következtében is, nem tökéletes. A kristályosodás megakadályozására szokásos eljárás, hogy a kiindulásnál a wolframporhoz kis mennyiségű thóriumot adagolnak, oxid vagy nitrát alakjában; utóbbi esetben a redukciónál ugyancsak oxid áll elő. Az izzólámpagyártásnál még néhány évvel ezelőtt általánosan használatos wolframdrótok thóriumoxyd tartalma 0·25—0·75% volt. A legutóbbi években általánossá lett a nagykristályú tiszta wolframdrót használata (amerikai *C*-drót), amely a gyártási eljárás következtében jól illeszkedő, hosszú kristályokból áll; ez a kristálystruktúra s az ennek megfelelő kedvező mechanikai tulajdonságok még igen hosszú izzítás után is megmaradnak.

A húzott wolframdrótok gyártási problémájának megoldása előtt az izzólámpa-ipar a drót előállítására igen sokféle eljárással próbálkozott.[1] Legjelentősebb ezek között az úgynevezett paszta-eljárás, melynél a drót — a műselyem gyártásához hasonló módon — sajtolás útján áll elő; a finomra őrölt wolframport organikus kötőanyagokkal keverve, megfelelő átmérőjű, gyémántba, vagy acélba fúrt lyukakon nagy nyomással keresztülpréselik s az így nyert törékeny fonalakat izzítással tisztítják és kristályosítják mindaddig, amíg mechanikailag kellő szilárdságú lesz. A Pintsch-féle eljárásnál (amely még ma is jelentőséggel bír), a sajtolás útján nyert wolframszál izzítása különleges módon történik: a fonalat igen kis sebességgel keresztülvezetik egy izzó spirális tengelyen, miáltal a drótban nagy axiális temperaturaesés áll elő (ez az izzítás történhetik természetesen, direkt árammal is). Ha a drót haladási sebessége a kristályképződés sebességénél kisebb, akkor sikerül elérni, hogy a drót egész keresztmetszetében egyetlen kristállyá alakul. (Pintsch-féle egykristály wolframdrót.)

Ilyen elven alapuló eljárásokkal egyébként nemcsak wolframkristályok állíthatók elő, hanem különböző fémes és nemfémes elemek, megömleszthető vegyületek kristályai is.[2]

A Pintsch-féle drótok cca 2% thóriumoxydot tarmaznak, elsősorban azért, mert ez a nagy thóriumtartalom a kristályképződéshez szükséges és kedvező hatású.

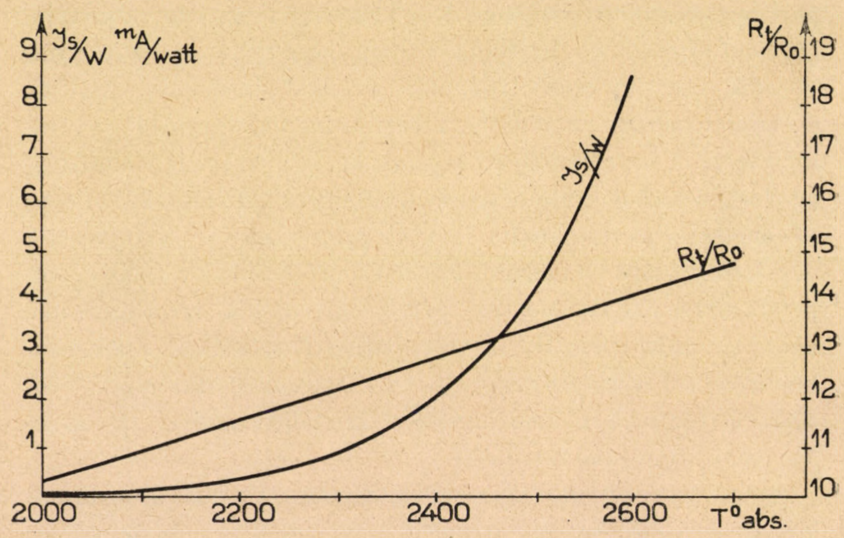
A Pintsch-féle eljárással készült kristálydrót nem tökéletesen tömör, hanem többé-kevésbbé porózus szerkezetű; ennek az az oka, hogy a drót organikus kötőanyagokkal készül, melyek az izzítás alatt gőzalakban eltávoznak, illetőleg a drótban,

---

[1] Weber: Die Metallfadenlampen.

[2] Hausser és Scholz: Wissenschaftliche Veröffentlichungen d. Siem. Konzern. 5, 9. 1927.

mint okkludált gázok visszamaradnak. Ez a porozus struktúra jól kimutatható volt szerzőnek 1923-ban végzett kísérleteinél, melyeknek célja igen kis átmérőjű homogén wolframfonalaknak maratás útján való előállítása volt. Az egykristály drótok maratása 60—70° H_2O_2 oldatban történt, több napon keresztül; a körkeresztmetszet fokozatosan átment hatszögletűbe, a várt egyenletes méretcsökkenés helyett azonban lyukacsos, egyenletlen felületek álltak elő, melyek a kísérletek további folytatását



16. ábra.

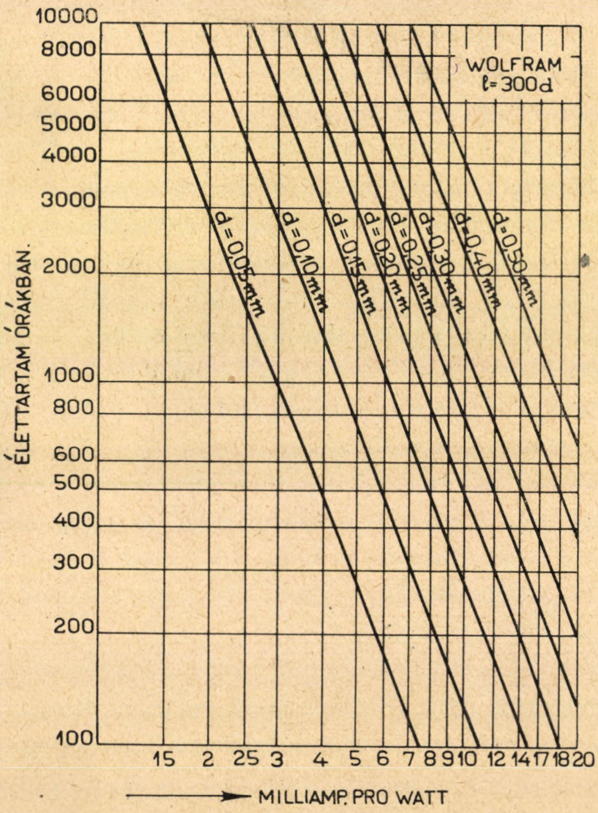
kilátástalannak mutatták. Ugyanezen kísérletet kedvezőbb feltételek között és a közlemény szerint nagyobb eredménnyel B. Duschnitz[1] végezte 1927-ben.

Egykristály-wolframdrótok előállítására, illetőleg vékony kristálydrótok növelésére Clausing[2] gőzeljárást dolgozott ki, melynek elve abban áll, hogy egy vékony kristálydrótot wolframhexachloridgőzben izzítanak. Az izzó drót felületén a wolframhexachlorid megbomlik s a kiváló wolframmolekulák a kristályos

[1] Duschnitz: Helios 33. 336, 340. 1927, Nr. 36.
[2] Clausing: Physica 7. 193. 1927.

felület rácsszerkezetébe belerendeződnek. Az ilyen módon nyert kristályok tömör szerkezetűek.

Az egykristály-wolframdrót izzókathódok készítésére különösen alkalmas, és nagyteljesítményű adócsöveknél széles körben használatos is. Az egykristálydrót ugyanis valamivel kisebb mér-



17. ábra.

tékben párolog, mint a sokkristályos drót, mechanikai tulajdonságai kedvezőbbek, azonkívül pedig a specifikus elektronemissziója is nagyobb.

16. A technikai izzókathódoknál az üzemi hőfok pontos megadása nehézségekkel jár; wolframkathódoknál a hőfok helyett mint összehasonlító értéket a fűtőenergia egységére vonatkoztatott úgynevezett specifikus emissziót szokás megadni (milliamp/watt). A 16. ábra a hőfok és specifikus emisszió, valamint a hideg és meleg ellenállás viszonyának összefüggését mutatja;[1] a 17. ábra pedig a specifikus emisszió és az élettartam összefüggését. Az élettartam sok körülménytől függ, így nagymértékben a drót átmérőjétől is. Nagyobb átmérőjű drótok ugyanolyan megterhelés mellett hosszabb élettartammal bírnak. Kis wolframcsöveknél megengedhető megterhelés 2—4 milliamp/watt; nagyteljesítményű adócsöveknél a megengedhető megterhelés 5—10 milliamp/watt; emellett a kathód élettartama több ezer óra.[2] Az élettartam nagy mértékben függ a vákuum jóságától is; tökéletes vákuumban a wolframdrótok élettartamának Langmuir vizsgálatai szerint csupán a párolgás szab határt. Izzólámpáknál az elpárolgó wolfram a bura falán rakódik le és annak fényátbocsátó képességét csökkenti. Adócsöveknél és izzókathódos Röntgencsöveknél ez a bevonat mindaddig nem káros, amíg az elektromos szigetelés szempontjából nem válik veszélyessé (Röntgencsöveknél a bevonat ezenkivül a lágy sugarakra absorbeáló hatással is van), illetőleg nem idézi elő a bura veszélyes felmelegedését. A párolgó wolfram bizonyos mértékben még a jó vákuum fenntartásához is hozzájárul, mert a nagy területre szétosztott wolframtükör a jelenlevő ionizált maradékgázokra absorbeáló hatással van.

Langmuir vizsgálatai óta tudjuk, hogy a wolfram emissziójára a maradékgázok milyen hatást gyakorolnak; viszont a magas hőfokon izzó wolfram a maradékgázokra igen érdekes fizikai és kémiai hatással van.[3] A hidrogén az izzó drót felületén kémiailag aktívabbá válik (atómos állapotba kerül), a nitrogén a párolgó wolframgőzökkel nitridet képez, stb.

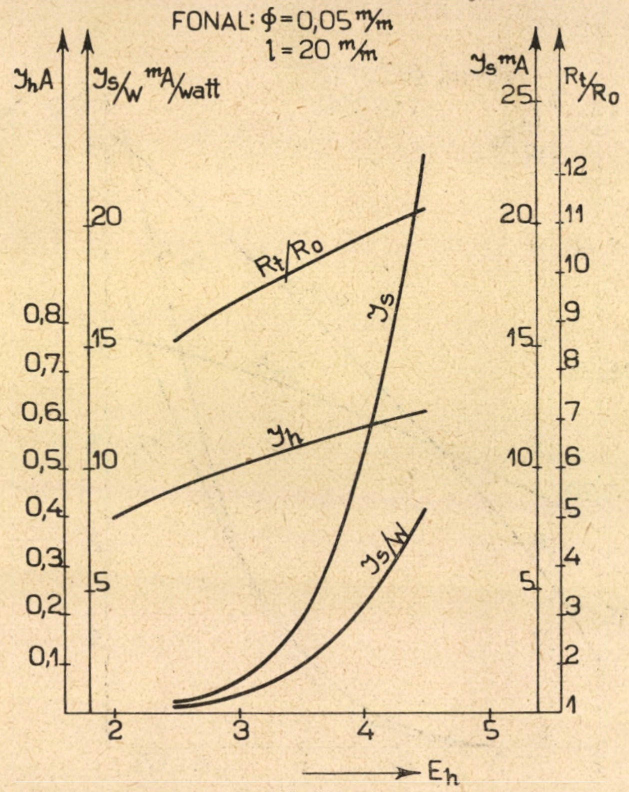
---

1 Langmuir: Gen. El. Rev. **30.** 310. 1927.

2 A Vatea Rt. által a csepeli és székesfehérvári adóállomások részére regenerált adócsövekben nagykristályú wolframdrótokat használnak, melyeknek terhelése 3—10 milliamp/watt. A regenerált adócsövek garantált élettartama 800—1000 égésóra, a csövek ennek többszörösét is elérik.

3 Langmuir: Chemical Reactions at low Pressures. The Journal of the American Chem. Soc. Vol. **37.** No. 5. 1915.

(A 18. és 19. ábrák a Vatea WP3 és GL10 típusjelzésű, tiszta wolframkathóddal bíró csöveinek karakterisztikus görbéit tüntetik fel.)



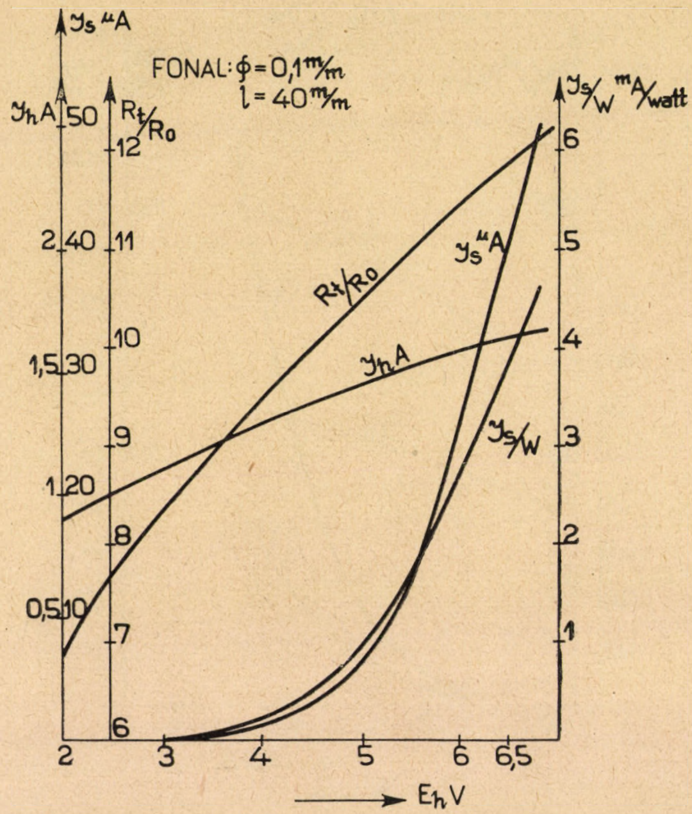
18. ábra.

17. Miután az elektroncsőgyártás kezdetén kathód gyanánt az izzólámpagyártásban használatos kis thóriumtartalmú wolframdrótokat alkalmazták, kézenfekvő volt az a gondolat, hogy vajjon a thóriumoxid jelenléte (a Wehnelt-kathódokhoz hasonlóan) nem növeli-e az elektronemissziót.

Langmuir-nek sok évi kisérletezés után sikerült a thóriumtartalmú wolframdrót emissziójának törvényszerűségeit megállapitania.[1] A vizsgálatokból kitűnt, hogy a thóriumos wolfram

[1] Langmuir: Phys. Rev. **22**, 357. 1923.

emissziója magas hőmérsékleten ugyanolyan nagyságú, mint a tiszta wolframé. Ha azonban a drótot megfelelő hőkezelésnek vetjük alá, akkor emissziója alacsony hőfokon (1500—1800 abs.)



19. ábra.

tetemesen megnövekszik. A hőkezelés abban áll, hogy a drótot néhány másodpercig 2600—2800 abs. hőfokra hevítjük, azt követőleg pedig 2000—2100 abs. hőfokon tartósan izzítjuk. Langmuir szerint magas hőfokon a wolfram a thóriumoxydot fémthóriummá redukálja, mely azután a tartós izzítás hatása alatt (a Gibbs-féle szabály, illetőleg az Eötvös-Ramsay-Shields-féle törvény értelmében) a felületre diffundál. A felületen a thórium állandóan párolog, viszont a drót belsejéből állandó utánpótlás érkezik a felületre. Ezen dinamikus egyensúlyi állapot következtében a thórium a wolfram felületén egyetlen atomvastagságú réteget képez. 1900° abs. felett a thórium párolgási sebessége nagyobb, mint az utánpótlás sebessége, a kathód ennélfogva fokozatosan elveszti emissziótöbbletét.

Az ilyen thóriumfelületű drót emisszió-hőfokfüggvénye[1]

$$i_\theta = [a_1^\theta + a_2^{(1-\theta} - 1]\, A_0 T^2 e^{-[b_1\theta + b_2(1-\theta)]\frac{1}{T}} \tag{45}$$

θ az a szám, amely kifejezi azt, hogy a felületnek hányadrésze thóriummal födött;

$A_0 = 1$ amp/cm² deg² $a_1 = 7$, $a_2 = 60$, $b_1 = 31200°$, $b_2 = 52000°$.

A gyakorlatban a thóriumos kathódokat olyan üzemi hőfokra készitik, melynél specifikus emissziójuk 30—60 milliamp/watt.

A thóriumfelületű wolframdrót még sokkal érzékenyebb a tisztátlanságokkal szemben, mint a tiszta wolframdrót: az oxigén igen kis nyomokban képes az elektronemissziót, a felület «aktív» állapotát lerontani, hasonlóképpen minden kémiailag hatékony gáz. Ha a thóriumos felületet nagysebességű gázionok bombázzák, a thóriumréteg ugyancsak tönkremegy, a kathód «deaktiválódik». Langmuir és Kingdon[2] azt is kimutatták, hogy nagysebességű gázionok bombázásának hatása alatt a thóriumréteg még hideg kathód esetén is elpusztul; hydrogén ionok 600 volt sebességgel kezdik a thóriumréteget roncsolni, argon, cæsium, higany, neon ionok már 50 volt sebességnél roncsoló hatásúak. Langmuir és Kingdon ezt a roncsoló hatást egyszerűen mechanikus úton magyarázzák, aminek alátámasztásául az szolgál, hogy a teljesen ép thóriumréteget az ionbombázás kevésbbé roncsolja, mint a már kissé sérültet.

Langmuir elmélete szerint, melyet közelítőleg a kisérletek is igazolnak, a thóriumos kathódból kilépő elektronáram a felület thóriumtartalmának, θ-nak exponenciális függvénye, vagyis:

[1] Kingdon: Phys. Rev. **24.** 510. 1924.

[2] Kingdon és Langmuir: Phys. Rev. **22.** 148. 1923.

$$\theta = \frac{\log i - \log i_0}{\log i_1 - \log i_0}, \tag{46}$$

hol i_0 a tiszta wolfram felület szolgáltatta elektronáram, i_1 a thóriummal teljesen burkolt felülethez tartozó érték, i és θ pedig az összetartozó értékek.

LANGMUIR felfogása szerint a thóriumos wolframfelület fokozott elektronemissziója nem magának a thóriumnak anyagi sajátsága, hanem annak a hatásnak tulajdonítható, amelyet a thóriumréteg a wolfram-felület kilépési munkájára gyakorol. SCHOTTKY tükörképerő-elmélete alapján levezethető a következő összefüggés:

$$\theta = \frac{b - b_0}{b_1 - b_0}, \tag{47}$$

hol b_0 a tiszta wolfram RICHARDSON-féle állandója, b_1 a thóriummal födött wolframkathódé, b és θ pedig összetartozó értékek.

SCHOTTKY elmélete szerint[1] a wolfram felületén elhelyezkedő idegen atomok a wolframatomok elektromos attrakciója következtében deformált állapotba kerülnek, dipolusokat alkotnak. Ha az idegen atom elektropozitiv, akkor a dipolus pozitiv töltése kifelé kerül, ha elektronegativ, mint pl. az oxigén, akkor a negatív töltés kerül kivülre. A dipolusréteg a kilépési munkát módosítja: elektropozitiv atomok esetén csökkenti, elektronegativ atomok felületi rétege a kilépési munkát növeli. KINGDON[2] mérései szerint oxygénréteggel födött wolframra: $b = 107000°$. A dipolusos réteg kilépési munkája az elmélet szerint a hőfokkal is változik; SCHOTTKY szerint a θ födöttségű rétegre vonatkozólag

$$b_\theta = b + \theta\,(C_0 + \beta T), \tag{48}$$

hol C_0 a dipolus struktúrájától függő konstans. Ennek alapján az emisszió hőfokfüggvénye a következő volna:

$$i_\theta = A e^{-\beta\theta} T^2 e^{-\frac{b + C_0\theta}{T}}. \tag{49}$$

[1] SCHOTTKY: Zeitschrift f. Phys. 18. 872. 1924.
[2] KINGDON: Phys. Rev. 24. 510. 1924.

Kingdon kísérletei ezt az egyenletet *nem igazolták;* a hőfokegyenlettel teljesen ellentétben állanak a 176. oldalon közölt, a thóriumos wolfram kontaktuspotenciáljára vonatkozó méréseink is, melyek szerint a (36) összefüggést alapul véve a thóriumos wolfram kilépési munkája szobahőmérsékleten megegyezik a magas hőmérsékleten mért értékkel.

A kérdés további tisztázására szolgálnak előkészületben levő méréseink az oxigénnel, cæsiummal, stb.-vel födött wolframdrótok kontaktuspotenciáljának meghatározására ugyanilyen módszerrel.

A thórium-film képződése és az idő közötti összefüggésre az elmélet és a kisérletek egybehangzóan a következő alakú kifejezést adják:

$$\frac{d\theta}{dt} = K(1-\theta), \tag{50}$$

hol K = konstans.

Az aktiváiási görbék teljes levezetéséhez szükséges még a thórium diffuziósebességének és párolgási sebességének ismerete. A diffuziósebesség nyilvánvalóan DG kifejezéssel arányos, hol D a diffuzió-coefficiens, G pedig a koncentrációesés a felület felé, amely természetesen a drót thóriumtartalmától és a drót előéletétől, előzetes hőkezelésétől függ. A diffuzió-coefficiens és hőfok között a következő összefüggés érvényes

$$\log_{10} D = 0{\cdot}044 - 20540\,\frac{1}{T}\,. \tag{51}$$

A thórium normális párolgására érvényes

$$\log_{10} E_n = 31{\cdot}43 - 44500\,\frac{1}{T}\,. \tag{52}$$

Ha θ értéke nagyobb, mint 0·8, akkor a thórium párolgási sebessége erősen megnövekszik; Langmuir ezt a jelenséget «indukált párolgás»-nak nevezi, melynek mibenlétét a feltörekvő thóriumatomok taszító hatásában látja. Az indukált párolgásra érvényes

$$E_i = DG\,(0{\cdot}82\,\theta + 0{\cdot}18\,\theta^3). \tag{53}$$

Mindezek alapján az aktiválási függvény elméleti alakja:

$$N_0 \frac{d\theta}{dt} = DG - E_n - E_i = DG\,(1 - 0{\cdot}82\,\theta - 018\,\theta^3) - E_n, \quad (54)$$

hol N_0 a teljesen födött wolfram felületegységére eső thóriumatomok száma ($N_0 = 0{\cdot}756 \times 10^{15}$). A kisérleti úton nyert aktivitási görbe a következő függvényt ábrázolja:

$$\frac{d\theta}{dt} = K(\theta_\infty - \theta), \quad (55)$$

hol θ_∞ az egyensúlyi állapotnak megfelelő érték.

Langmuir levezetéseinél mint hallgatólagos feltevés szerepel, hogy a thórium eloszlása és diffuziója a wolframon belül térbelileg *egyenletes*. Ezzel szemben áll, W. Geiss és van Liemptnek [1] az a kisérleti megállapitása, hogy a thórium a wolframmal nem képez elegykristályokat.

Clausing [2] azt is kimutatta, hogy a thórium a tömör wolframkristályokon nem diffundál keresztül, hanem a vándorlás a kristályok sérült felületén és a kristályok közötti hézagokon át történik. A Pintsch-féle kristálydrót porozus, lyukacsos szerkezete a thórium vándorlását mindaddig biztosítja, amig a tartós, magas hőfokon való izzitás által a kristály tömörré nem válik.

A gyakorlati thóriumos, elektroncsöveknél legcélszerűbb az aktiválási és desktiválódási görbéket minden egyes típusra kisérletileg megállapitani; a körülményes hőfokmérés helyett (amely a drót egyenlőtlen hőfoka miatt amúgy is kétséges értékű) kényelmesebb a fűtőfeszültséget megadni.

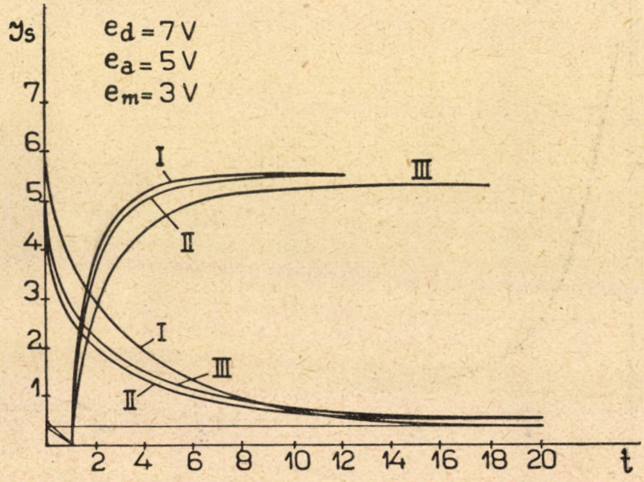
A 20. ábra a Vatea U406 tipusú lámpán végzett aktiválási mérések menetét tüntetik fel; igen érdekes az ismételt aktiválás, illetőleg izzitás hatása, mely az előbbiek szerint azzal magyarázható, hogy az izzitás által a drót tömörebbé válik és a thórium vándorlási sebessége csökken. Ezt a feltevést igazolják a 6. ábrán feltüntetett ellenálláscsökkenési görbék.

---

[1] Geiss és Liempt: Zeitschr. f. Metallk. 17. 194. 1925.

[2] Clausing: Physikal. Zeitschr. 7. 193. 1927.

A thórium és wolframkathód üzembiztos működésének és tartósságának elengedhetetlen feltétele a kitűnő, tartós vákuum, még helyesebben minden kémiailag aktív gáz távoltartása. A gyakorlatban ezt legbiztosabban a SODDY-féle eljárással lehet elérni. Az elpárologtatott magnézium vagy kalcium a bura falára rakódik és ott az üzem alatt is állandó abszorbeáló hatást fejt ki a maradékgázokra. Ez az abszorpció különösen akkor intenzív, ha a maradékgázok az elektronbombázás következtében ionizáltat-



20. ábra.

nak. Az elektromos abszorpciót jól követhetjük, ha egy három elektródos elektroncsőnél állandó emisszió mellett mérjük a gáznyomást. (A nyomásmérés az ionizációs manométer elve alapján történik.)[1]

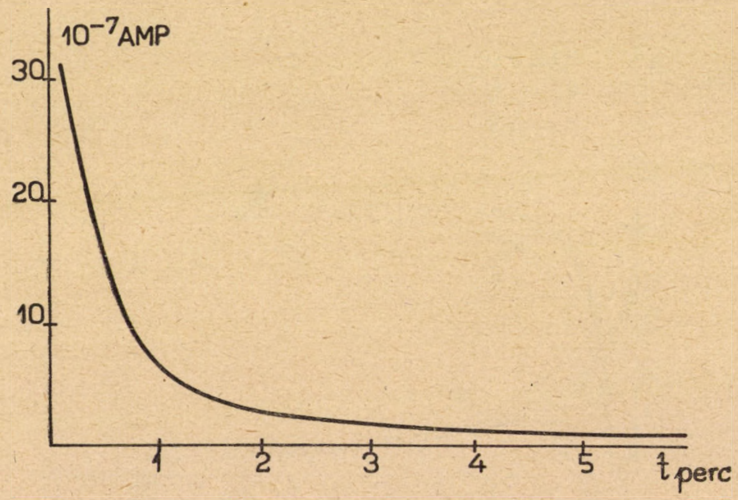
A 21. ábra egy ilyen gázeltűnési görbét tüntet fel.

18. LANGMUIR kíséleteit más elemi rétegekre is kiterjesztette, úgy elsősorban alkálifémeknek wolfram, illetőleg oxidált wolfram felületen abszorbeált rétegeire. Ezekből a vizsgálatokból gyakor-

[1] DUSHMAN: High Vakuum. Schenectady 1922.

lati fontosságúvá vált a cæsiumos wolfram-kathód.[1] Előállítása úgy történik, hogy a felületesen izzítás által oxidált wolframdrótot cæsiumgőzben izzítjuk.

Oxidálás előtt célszerű a wolframdrótot magas hőfokra (2700° abs.) izzítani; az oxidálás legcélszerűbben 0·02 mm nyomású oxigénben történhetik 1900° abszolút temperatúrán. A szabályszerű evakuálás után a burába cæsiumot párologtatnak, vagy a burában előre elhelyezett disszociálható cæsiumvegyületet (például



21. ábra.

cæsium-oxidot) hevítéssel megbontunk. Ha a burát 30° C temperaturán tartjuk, akkor a cæsium gőznyomása elég nagy, úgy, hogy a kathódra cæsium kondenzálódik. Az így nyert kathód még nem ad nagy elektronemissziót. Ha azonban a kathódot most 1200—1600° abs.-ra hevítjük, néhány percig tartó izzítás után az emisszió tetemesen megnövekszik. Az így aktivált kathód ugyanis 1000° abs. mellet 0·35 amp/cm² elektronáramot ad. LANGMUIR és KINGDON sze nt az aktiváló izzításnak

[1] KINGDON: Phys. Rev. **24**. 510. 1924.
LANGMUIR és KINGDON: Proc. Roy. Soc. **107**. 61. 1925.

csupán tisztító hatása van. Erre nézve azonban meggyőző kísérletek és vizsgálatok nem történtek.

A wolfram-oxyd-cæsiumkathód emissziója a hőfokkal a RICHARDSON-féle törvény szerint változik. Az állandók közelítő értéke

$$a = 0{\cdot}003 \text{ amp/cm}^2 \text{ deg}^2,$$
$$b = 8300°$$

Ezek az értékek akkor adódnak, ha a bura cseppfolyós levegőbe van mártva. Ha a bura hőfoka emelkedik, a cæsium gőznyomása is nagyobb lesz, ami az emisszió csökkenését idézi elő.

Az elektronemisszió mechanizmusára fontos körülmény, hogy tiszta cæsium, éppen úgy, mint a tiszta thórium sokkal csekélyebb elektronemisszióval bír, mint a cæsiummal, illetőleg thóriummal födött wolfram.

A cæsiumos kathódok működésére vonatkozólag LANGMUIR [1] részletes elméleti vizsgálatokat is végzett. Kimutatta, hogy különböző anyagú (wolfram, oxyddal födött wolfram, thóriumos wolfram) kathódoknak alkáli fémek gőzeiben mérhető elektronemissziója szoros összefüggésben van a *pozitív ionemisszióval:* ez utóbbi az elektronemisszióból kiszámítható a fémgőzök thermikus ionizációjának módosított «SAHA-féle elmélet»-e alapján.[2] Ha a kathód hőfoka magas, akkor a fémgőz-molekulák a kathódról, mint ionok reflektálódnak. A pozitív ionáram érthető módon a gőznyomástól függ. Ha a kathód hőfoka csökken, akkor a gőzmolekulák egy része a felületen fogva marad (az attrakciós erőviszonyok a kathódfelület elektronaffinitásától függnek: oxigénnel födött kathód a gőzmolekulákat magasabb hőfokon tartja vissza, mint a tiszta, vagy a thóriumos wolframfelület). A felületen annál több gőzmolekula marad fogva, minél alacsonyabb a kathód hőfoka. A felületre kondenzált és ott mint ionok jelenlevő alkálifém-réteg kettős réteget képez, amely a felület ki-

---

[1] LANGMUIR: Proc. Roy. Soc. A. **107**. 61. 1925.

[2] Erre a nagyfontosságú elméletre vonatkozólag l. SAHA dolgozatát: Phil. Mag. **11**. 472. 809. 1920.

lépési munkáját leszállítja. Ha az egész felület födve van, akkor az elektronemisszió a hőfokkal a RICHARDSON-féle törvény szerint változik; a hőfok emelkedésével az alkálifém-atomok mindig nagyobb és nagyobb mértékben párolognak, az elektronemisszió tehát maximumot ér el, majd a hőfok további emelkedésével rohamosan csökken. A kathód tehát magas hőfokon deaktiválódik, ugyanúgy, mint a thóriumos wolframkathód, viszont alacsonyabb hőfokon regenerálódás áll elő, miután az alkáli gőzök újra kondenzálódnak. Az egész folyamat tehát *külsőleg* tökéletesen azonos a thóriumos wolframkathódon észlelhető folyamattal, a belső mechanizmus azonban egészen más.

LANGMUIR kísérleti vizsgálatai cæsiumos kathódokra vonatkoztak; káliumra és rubidiumra vonatkozó kísérleti vizsgálatokat KILIAN[1] végzett.

Hogy az oxigénnel födött kathód és az alkálifémmolekulák között működő attrakciós erők fizikai, vagy kémiai természetűek-e, elméletileg majdnem ízlés dolga; gyakorlatilag azonban igen fontos kérdés, amennyiben szorosan összekapcsolódik az oxidkathódok körül keletkezett (néhány év előtt megindult) szabadalmi vitákkal. Szerző azt a felfogását igyekszik érvényesíteni, hogy a felületen voltaképpen nem egyszerű abszorpcióról van szó, hanem oxidképződésről; ezt a felfogást támogatja az a tény, hogy a wolfram-oxigén-alkáli kathódok fokozott elektronemissziója *csak megfelelő hőkezelés után áll elő*; ez a hőkezelés hozza létre a szorosabb, *kémiai* kötést.[2]

19. A wolframdrótok oxidálása legcélszerűbben elektromos árammal való izzítás útján történhetik. Egyenletes felületi oxidréteget kapunk, ha a drótot néhány másodpercig 0·02 mm nyomásra oxigénben 1600° C-on hevítjük. A szabad levegőn való oxidálás általában nagy nehézségekkel jár; az oxidréteg nem egyenletes, magasabb hőfokon pedig a drót rohamos oxidáló-

---

1 KILIAN: Phys. Rev. 27, 578. 1626.

2 L. erre vonatkozólag még SIMON cikkét a WIEN-HARMS-féle Handbuch der Experimentalphisik (Leipzig, 1928.) 283. oldalán.

dása és ennek következtében gyors átégés következik be. Ha a wolframdrótot egyenárammal izzítjuk, kezdődő sötétvörös izzáson, érdekes jelenség észlelhető, amely egyúttal a THOMSON-féle áram-hőeffektus egyszerű demonstrálására is szolgál. Egy-két percnyi izzítás után ugyanis a drót az egyik befogási helyhez közel (ahol az áram kilép) élénkebben kezd izzani és néhány másodperc alatt átég. (A kisérletnél fontos, hogy az izzó dróttól minden légáramot visszatartsunk.) Ha az áram irányát megfordítjuk, akkor az átégés a másik elektród közelében történik, pontosan ugyanolyan távolságban. Az átégés mehanizmusa nyilvánvalóan az, hogy a drót a legmagasabb temperatura helyén gyorsabban oxidálódik, a vezető keresztmetszete itt kisebb lesz, mint a drót más részein, a hőfok a JOULE-féle meleg koncentrációja következtében még jobban emelkedik stb. A kisérlet már most azt mutatja, hogy a maximális hőfok nem a *drót közepén* áll elő, a hőfokeloszlás az áramiránytól függő *asszimetriát* mutat, ami csakis a THOMSON-effektussal magyarázható, összhangzásban azzal a ténnyel, hogy a THOMSON-effektus wolframnál aránylag nagy. Érdekes volna ennek a jelenségnek más oxidálható fémeknél való további vizsgálata, esetleges összehasonlító mérések céljából.

20. A legutóbbi években nagy jelentőséghez jutott, oxidkathódokra vonatkozó első részletes, pontos vizsgálatok WEHNELT-től erednek.[1]

WEHNELT az oxidoknak és egyéb vegyületeknek nagy sorozatát vizsgálta végig és azt találta, hogy a földalkáli fémeknek, a bárium, stroncium és kalcium oxidjai igen nagy elektronemisszióval bírnak.

Az oxidkathódok első primitív előállítása úgy történt, hogy a gondosan megtisztított platinadrótot a megfelelő fémek nitrátjaival kenték be; a drótot azután szabad levegőn elektromos

---

[1] WEHNELT: Verhandl. d. deutsch. phys. Ges. 5. 255. 1903.
L. WEHNELT összefoglaló ismertetését: Ergebnisse d. exakt. Naturwiss. Bd. 4., 86. 1925.

árammal vagy BUNSEN-lángban magas hőfokra hevítették, amikor is a nitrát oxiddá alakult. Már az első vizsgálatokból is kitünt, hogy legnagyobb emisszióval a báriumoxid bír, legkisebbel a kalciumoxid. A földalkálioxidok elektronemissziójára, kilépési munkájára vonatkozó igen kiterjedt mérések meglehetősen eltérő értékekhez vezettek, aminek magyarázata az, hogy az emisszió nagy mértékben függ az oxidkathód előállítási módjától, az anyag, a felület tisztaságától, minimális szennyezésektől, amelyek az emissziót a legtöbb esetben csökkentik, néha pedig növelik. Az is megnehezitette a pontos méréseket, hogy az oxidkathódok csaknem lehetetlenné teszik a tökéletes vákuum előállítását és fenntartását. A porózus oxidok igen nehezen kigázosíthatók, azonkívül pedig bomlást is szenvednek. A maradék gázok az oxidok elektronemisszióját sokkal nagyobb mértékben befolyásolják, mint a tiszta wolfram- vagy akár a thóriumos wolframkathódoknál. Az oxidkathódok előállításának tökéletesítéséről legjobban azok a mérések adnak képet, amelyeket különböző kutatók különböző időkben eszközöltek.

JENTSCH[1] mérései szerint a kilépési munka voltokban kifejezve:

$$BaO : \varphi = 3{\cdot}58 \text{ volt}$$
$$SrO : \varphi = 3{\cdot}87 \text{ «}$$
$$CaO : \varphi = 3{\cdot}48 \text{ «}$$

ESPE-nek[2] a legutóbbi időkben történt, tökéletesített és aktivált oxidkathódokon végzett mérései a következő értékeket adták:

$$BaO : \varphi = 0{\cdot}99 \text{ volt}$$
$$SrO : \varphi = 1{\cdot}27 \text{ «}$$
$$CaO : \varphi = 1{\cdot}77 \text{ «}$$

A LIEBEN-cső platinamaggal készült kathódját MgO, $Mg(OH)_2$, $CaCO_3$ keverékével vonták be.[3] A bevont drótot jól kiizzítot-

[1] JENTSCH: Ann. d. Phys. **27**. 129. 1908.

[2] ESPE: Wiss. Veröff. d. Siem. Konz. **5**. 29. 1927.

[3] PERCZEL ALADÁR úrnak, LIEBEN egykori asszistensének szóbeli **közlése.**

ták s az eljárást többször ismételték. Igen jól tapadó, egyenletes, tömör oxidréteg állt elő ily módon, amely azonban gyakorlatilag nem volt kigázosítható. A Lieben-csőnél ez nem is volt túlságosan fontos, mert a cső nem nagy vákuummal dolgozott, hanem alacsony nyomású gázzal és fémgőzökkel, a kathód ökonomiája pedig a horribilis méretek mellett nem is jött tekintetbe.

Az első, nagy vákuummal biró, tömegszerűleg gyártott, oxidkathóddal ellátott elektroncsöveket a Western El. Co. hozta forgalomba a világháború alatt.[1] A kathód előállítása a következőleg történt: Tiszta paraffinban (megömlesztett állapotban) finomra őrölt bárium, stroncium és kalcium karbonátokat szuszpendáltak. A paraffin kihűlése után jól kezelhető «gyertya» állott elő, mely a karbonátokat egyenletesen elosztott állapotban tartalmazta. A magnak szolgáló nikkeltartalmú platinadrótot elektromos árammal hevítették, miközben felületét a gyertyával végigkenték. Az így nyert réteget a drótnak magas hőfokra való izzítása által megszabadították a paraffintól s egyúttal a karbonátot oxiddá alakították. Ezt a műveletet 15—20-szor megismételve, jól tapadó, egyenletes réteget nyertek, amely eléggé ökonomikus elektronemisszióval is birt.[2]

Horton[3] a kalciumoxiddal bevont elektródot úgy állította elő, hogy a magdrótot fémes kalciummal vonta be és ezt utólagosan izzítás által oxidálta. Ennek az eljárásnak, amely az utolsó évek technikájában is elvi jelentőséghez jutott, az az előnye, hogy a földalkálifém a magdróttal ötvöződik, jól tapad, azonkívül pedig a tiszta fém egy bizonyos készletet nyujt az oxidfelület «aktiválására».

Az oxidkathódok nagy gyakorlati fontossága magyarázza azoknak az eljárásoknak nagy számát, amelyek a gyakorlatban vagy

---

[1] Arnold: Phys. Rev. 16. 70. 1920.

[2] Ilyen módon készült (ma már természetesen elavult) elektroncsövek még ma is forgalomban vannak (pea-nut csövek); a kis vevőcsövek fűtőfogyasztása 1·25 volt, 0,25—0,3 amp.

[3] Horton: Phil. Trans. A CCVII. 149. 1907.

csupán tervezetben felvetődtek.[1] Így a magdrót anyaga gyanánt a platinán, a nikkel, illetőleg iridiumtartalmú platinán kívül számos kísérletnél és gyártásnál is szerepeltek: chromnikkel, chromvas, wolfram, molybdaen, továbbá a különböző bevonatokkal készült fémdrótok. Célszerűnek bizonyult a magdrótnak vörösrézzel való bevonása, miután a vörösréz az alkálifémekkel könnyen képez ötvözetet. Az oxidok előkészítésére és keverésére is igen sokféle eljárás ismeretes. Arnold (l. e.) újabban pedig Spanner[2] vizsgálatai óta kiderült, hogy a bárium, stroncium és kalciumoxidoknak megfelelő arányú keverésével az elektronemisszió fokozható. Spanner azt találta, hogy a legkedvezőbb keverési arány:

$$600 \text{ mol } CaO + 10 \text{ mol } BaO + 5 \text{ mol } SrO.$$

A földalkáli oxidokhoz kevert kis mennyiségű egyéb vegyületek hatásairól részletes vizsgálatok még nem ismeretesek, de ilyen keverékkathódok számos szabadalom tárgyát képezik. Valószínűnek látszik hasonlóképpen a Lénárd-féle foszforokhoz vagy pedig az Auer-féle izzótesthez, hogy alkalmas «katalizátorok» az elektronemissziót fokozzák, illetőleg elősegítik az oxidkathódok «aktiválhatóságát». A keverékanyagokat a már ismertetett paraffinon kívül még más organikus anyagokban lehet szuszpendáltatni vagy oldani. Ilyenek pld. a viasz, kolofonium stb., amelyek azután a réteg felkenése után izzítás útján eltávolíttatnak.

Az Osram Ges.-nak gyakorlatilag is keresztülvitt eljárása szerint[3] a földkáli nitrátokat és hidroxidokat paraffinolajban szuszpendáltatják s kenés után a drótot izzítják; ezt az eljárást folyamatossá dolgozták ki, úgy, hogy a kész bevont drót tekercselhető.

Mindezen eljárásoknak közös hátránya azonban, hogy a kathód

[1] L. W. Loest cikkét: Funk: 5. Heft 17, 19, 26. 1928.
[2] Spanner: Ann. d. Phys. 75. 609. 1924.
[3] W. Stütz: Zeitschr. f. techn. Phys. 8. 451. 1927.

többé-kevésbbé tisztátalan, szennyező anyagokkal bír, amelyek a legkülönbözőbb, áttekinthetetlen hatásokat gyakorolják, az izzítás után visszamaradó oxidok ugyancsak porózusok maradnak, felületük egyenlőtlen, göröngyös (l. II. tábla 1. ábra).

Az oxidkathódok igazi térhódítását az elektroncsőiparban az ú. n. gőzeljárás tette lehetővé, amelyet a Philips-féle izzólámpagyár alkalmazott először.[1] Az eljárás kivitelében tökéletesen azonos a cæsiumos kathód készítésénél követett eljárással, azzal a különbséggel, hogy cæsium helyett bárium, stroncium, ill. kalcium szerepel. A kathódmag wolfram, molybdæn vagy rézzel bevont platina, amelynek felületét a szivattyuzás előtt oxidálják. Az anód belső felületére alkalmas módon olyan anyagokat helyeznek, amelyek hevítéskor fémbáriumot képeznek. Ilyen anyagok pld. a földalkálifémek azidjai (BaN_3). Az azidok 100—200° között bomlanak, a nitrogént a szivattyú eltávolítja s az anódon visszamarad a tiszta földalkálifém, amely természetesen az elkerülhetetlenül képződött nitridekkel van keverve, azonkívül pedig nitrogént is tartalmaz okkludált állapotban. A hevítés menetétől függ, hogy a visszamaradt anyag nitrogéntartalma mekkora; a gyártásnál természetesen előnyös, ha ez minél kisebb. Az evakuálás befejezése után az anódot olyan magas hőfokra hevítik, hogy a földalkálifémek párolognak; a fémgőzök az oxidált kathódmag-felületet redukálják, illetőleg a gőzök az alacsonyabb hőmérsékletű kathódra lecsapódnak. Megfelelő hőkezelés után, amely lényegében teljesen azonos a cæsiumos kathód készítésénél követett kezeléssel, a mag felületén jól tapadó, a redukált wolframba, illetőleg molybdaenbe vagy rézbe beleágyazott oxidréteget kapunk, amely előállítási módja következtében igen tiszta, gázmentes és eléggé homogén. Az ilyen módon előállított kathód emissziója megfelelő aktiválás után eléri a 80—100, sőt vékony drótoknál a 120 milliamp/volt értéket is.

A gőzeljárásoknak az a nagy előnye is van, hogy a párolgó

[1] D. R. P. 443. 323. 1923.

földalkálifémek mint hatásos gázlekötő (getter) anyagok működnek, amennyiben a maradékgázokkal igen hevesen egyesülnek és azokat absorpció útján is lekötik. Ez lehetővé teszi, hogy a szivattyúzási idő minimumra redukálható. Szivattyúzás alatt a burát 400° C-ig hevitik. A bura falára csapódott bárium stb. tükör a vákuum fenntartásáról az elektroncső egész üzeme alatt is gondoskodik. (SODDY-féle eljárás.)

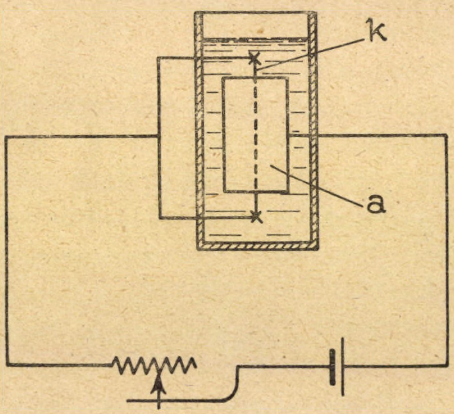
A földalkálifémeket úgy is előállíthatjuk, hogy az anódra olyan reakciós keveréket helyezünk, amely hevitéskor báriumot stb. tesz szabaddá. Ilyen pld. a báriumoxid és aluminium vagy magnézium keveréke. A földalkálifémeknek a kathód felületére való juttatása történhetik elektronbombázás segitségével is. Ha ugyanis a kathód egy kis kezdeti emisszióval már bir és a kathód és anód közé nagy feszültséget kapcsolunk, akkor az anód melegedése következtében párolgó és a nagy feszültség hatása alatt ionizált bárium stb. molekulák a kathód felé repülnek és ott elektromos erőkkel is kötődnek. Szerző által felvetett eljárásnál az anódra a földalkálifémeknek valamely melegen elektrolizálható sóját helyezzük az anódra; az anódáram következtében fém szabadul fel, amely töltésénél fogva a kathód felé röpül. Ennek az eljárásnak általánosítása talán alkalmas lesz igen nagy tisztaságú fémek előállítására.

21. A VATEA-laboratóriumban igen hosszú kisérletezés tárgyát képezte az ú. n. kolloid eljárás; a kisérletek, amelyek gyakorlatilag is értékesithető eredményekkel jártak, még nincsenek lezárva és számos távolabbi alkalmazáshoz is vezetnek. Az eljárás, amelynek alapgondolata HARSÁNYI JENŐtől származik abban áll, hogy a megfelelő földalkálioxidokból, illetőleg más földalkáli vegyületekből kolloidális oldatot készitünk, amelyből a kathódmagra a sókat elektroforetikus úton (kataforezis) választjuk le. A kisérletek folyamán legjobban bevált eljárás szerint a földalkálifémek karbonátjaiból indulunk ki.[2]

1 A magyar szabadalom prioritása 1925 márc.

2 A kolloidok készitését, valamint a kisérletek gyakorlati kivitelét THOMASCHEK ZOLTÁN vegyészmérnök úr végezte.

Földalkálikarbonátok kolloidális oldatát először Neuberg[1] állította elő. A Neuberg-féle kolloidok oldószere methylalkohol; a földalkálikarbonátok vizes kolloidális oldatát először Buzagh állította elő;[2] ezt az eljárást követtük mi is. Az oldat készítése úgy történik, hogy az alkáliföldfém hidroxidját methilalkoholban szuszpendáltatjuk és CO_2 hozzávezetésével dimethyl-



22. ábra.

földalkálikarbonáttal alakítjuk át. Ez a szerves vegyület vízzel megbontva kolloidális karbonátot ad, amely tetszés szerint higitható. A nyers kolloidális oldatot a szokásos módon szűréssel, centrifugálással és ülepitéssel finomítjuk, a kathódszál a legtöbb kísérletnél platiniridiumból készült, amelyet salétromsavban váltakozó áramú elektrolizis által érdesítettünk. Célszerűnek mutatkozott, habár nem feltétlenül szükséges, a drótot vékony vörösrézréteggel bevonni (elektrolizis segítségével), amely hevítéssel oxidálható. Az így nyert oxidfelületre a földalkálioxidok jobban tapadnak. A kataforezisra használt készüléket a 22. ábra tünteti fel. *k* a platiniridiumszál, *a* a nikkellemezből készült anód, mely a szálat koncentrikusan körülveszi. Áramforrásul egy 2 voltos akkumulátor-

[1] Neuberg: Biochem. Zeitschr. 1. 166. 1906.
[2] Buzagh: Kolloid-Zeitschr. 38. 222. 1926.

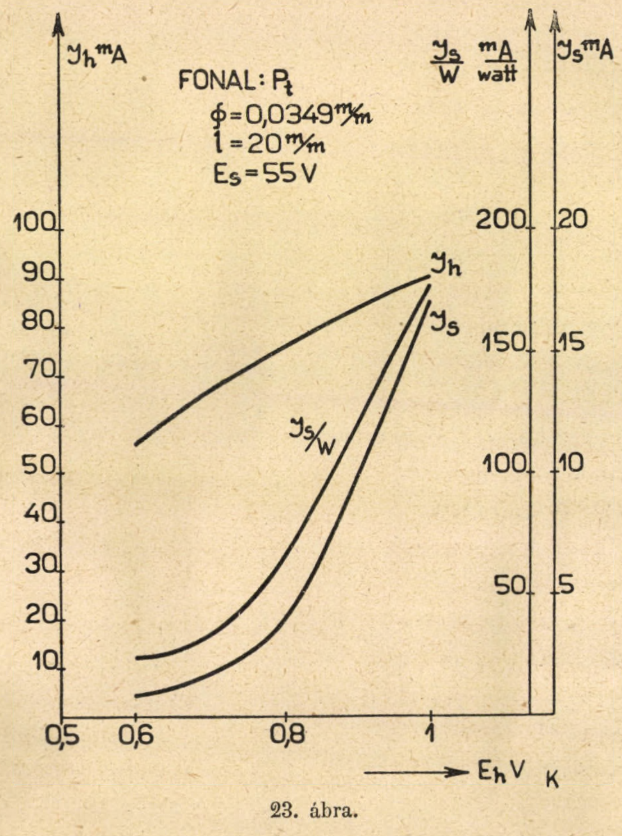
cellát használtunk. A kolloidális oldat (báriumkarbonát) koncentrációja 1—2% között változott. A rétegképződéshez szükséges időtartam 2—5'. A legtöbb kisérletnél 0·035 mm átmérőjű fonalat használtunk, amelyre 0·005—0·02 mm vastagságú réteg képződött.

A kataforetikus úton nyert réteget izzítás által oxiddá alakíthatjuk, mikor is a réteg finom, egyenletes strukturáját megtartja. Az izzítás mindenesetre elővigyázatosan kell hogy történjék; túlizzításnál a karbonát megömlik, darabos lesz, kristályosodik. A karbonátnak oxiddá való tökéletes átalakitását csak vákuumban való izzítással érhetjük el. A II. tábla 2. ábrája egy ilyen kiizzított kathód mikrofotografiáját tünteti fel. A kolloid eljárásnak nagy előnye, hogy a földalkáli sók a legtökélesebb tisztaságban állithatók elő: minden idegen anyag, melynek egyensúlyi feltételei a földalkálisókétól különböző, az oldatból az ülepítésnél kiválik. További előny az, hogy ezzel a módszerrel különböző földalkáli oxidoknak igen homogén keverékét készíthetjük, amelyben az egyes alkatrészek majdnem molekuláris elegyet képeznek. Nem jár különösebb nehézséggel kis mennyiségű katalizátoranyagok hozzákeverése sem, amelyek az elektronemissziót fokozhatják, illetőleg az aktiválásra kedvező hatással vannak.

A kataforetikus úton nyert réteg rendkivül tömör, nagy sűrűségű, mert hiszen a részecskék elektromos erőkkel tapadnak egymáshoz, illetőleg a mag felületére.

A réteg sima, egyenletes felülete hatással van az erősitőcsövek karakterisztikus görbéire; a felület egyenetlensége, göröngyössége a meredekséget csökkenti. Egy ilyen kolloidális kathóddal biró cső karakterisztikáját a 23. ábra tünteti fel. A kathód fűtéséhez szükséges üzemi feszültség 0·8—1 volt, fűtőáram 60—80 milliamp. A kolloid eljárásnak további, kisérletezés alatt álló alkalmazásai: igen nagy thórium tartalmú wolfram és molybdaenrétegek előállítása (a módszer tetszőleges keverést tesz lehetővé, míg a húzási, illetőleg pasztaeljárásnál az elérhető thóriummennyiség max. 2—4%).

A módszer alkalmas más sugárzási testeknek, pl. Röntgencsövek antikathódjainak, a fénysugárzó izzó szálaknak vizes oldatban nem elektrolizálható fémekkel (pld. wolframmal) való bevonására stb. (A kolloid eljárás maga alapjában véve nem új; a legutóbbi években hasonló eljárásokat sikerrel alkalmaz-



23. ábra.

tak a gumigyártásnál és a porcellániparban is.) A kolloidális úton nyert kathóddal biró elektroncsöveket legcélszerűbben ugyancsak a Soddy-féle eljárás segitségül vételével készithetjük; eljárásainknál mint getteranyagok a magnézium, kalcium, bárium, amely a kathódok aktiválásánál is igen kedvező hatásúnak bizonyult.

22. Az oxidkathódok emissziós állandóinak meghatározására, az emisszió mechanizmusának, a kathód aktiválási folyamatainak feltárása igen kiterjedt kutatás tárgyát képezte és képezi ma is.[1]

A folyamatok egyértelmű, számszerű megfigyelését és leírását az teszi igen nehézzé, hogy a vizsgált kathódanyag úgyszólván minden vizsgálatnál más és más, a felhasznált különböző eredetű és előállítású oxidok természete szerint: különböző az oxidréteg vastagsága, tömörsége, elektromos ellenállása, ezenkívül pedig rendkívüli komplikációkat okoznak a maradékgázok, a kathód maradékgáztartalma, kémiai állapota, valamint az az előzetes hőkezelés, amelyen a kathód a vizsgálat előtt keresztül ment. Éppen ezért nagy fontosságú egy olyan előállítási mód, mint amilyan a *kolloidális eljárás,* amellyel meghatározott tisztaságó, meghatározott szemcsenagyságú, minden részében homogén, tetszőleges vastagságú és felületű, valamint tetszőleges keverési arányt mutató rétegek előállíthatók. Kolloidális eljárásunk tökéletes kidolgozása után rendkívül érdekkel bír mindazon méréseknek és vizsgálatoknak megismétlése, amelyek eddig tökéletlen és nem jól definiált körülmények között csak közelítő vagy éppen ellentmondó eredményekhez vezettek. Az első részletesebb vizsgálatokat maga Wehnelt[2] végezte, aki kimutatta, hogy az oxidkathódok emissziója 0,001 mm Hg nyomáson alul a vákuum jóságától független és hogy az emisszió a Richardson-féle törvényt követi. Deininger[3] mutatta ki, hogy az emisszió független a magdrót anyagától; vizsgálatainál platina, nikkel, tantal és szén szerepeltek. Jentsch[4] rendszeres vizsgálat alá vette a különböző fémek oxidjait és meghatározta emissziós állandóikat.

---

[1] Irodalom:
Ergebnisse der ex. Naturw. 4. 86. 1925.
Handbuch der Radiologie IV. 84. 1927.
Handbuch der Experimentalphysik **13.** 2. Teil 215. 1928.

[2] Wehnelt: Ann. d. Phys. **14.** 425. 1904.

[3] Deininger: Verhandl. d. deutsch. Phys. Ges. **9.** 674. 1907.

[4] Jentsch: Ann. d. Phys. XXVII. p. 129. 1908.

Mérései természetesen igen kevéssé pontosak, tekintve, hogy a vákuumtechnika akkori állása mellett a mai értelemben vett jó vákuum előállitása nem volt lehetséges. Mégis összehasonlitás szempontjából ezek a mérések, melyeknek eredményét a II. táblázat tünteti fel, értékeseknek mondhatók.

II. táblázat.

Oxid neme	A_1	n_1	b	Φ Volt
Ba	$2 \cdot 94 . 10^{26}$	$2 \cdot 0 . 10^{22}$		3·58
Sr	$3 \cdot 16 . 10^{26}$	$2 \cdot 1 . 10^{22}$	$4 \cdot 49 . 10^{4}$	3·87
Ca	$2 \cdot 68 . 10^{26}$	$1 \cdot 8 . 10^{22}$	$4 \cdot 03 . 10^{4}$	3·48
Mg	$2 \cdot 11 . 10^{19}$	$1 \cdot 4 . 10^{14}$	$3 \cdot 95 . 10^{4}$	3·40
Be	$6 \cdot 45 . 10^{18}$	$4 \cdot 3 . 10^{13}$	$2 \cdot 39 . 10^{4}$	2·06
Y	$1 \cdot 17 . 10^{23}$	$7 \cdot 8 . 10^{17}$	$3 \cdot 63 . 10^{4}$	3·13
La	$4 \cdot 3 \ . 10^{21}$	$2 \cdot 9 . 10^{16}$	$3 \cdot 79 . 10^{4}$	3·26
Al	$4 \cdot 0 \ . 10^{19}$	$2 \cdot 7 . 10^{14}$	$3 \cdot 73 . 10^{4}$	3·21
Zr	$4 \cdot 1 \ . 10^{22}$	$2 \cdot 7 . 10^{17}$	$3 \cdot 66 . 10^{4}$	3·15
Th	$2 \cdot 19 . 10^{20}$	$1 \cdot 5 . 10^{15}$	$3 \cdot 56 . 10^{4}$	3·06
Ce	$1.22 . 10^{22}$	$8 \cdot 2 . 10^{16}$	$3 \cdot 71 . 10^{4}$	3·20
Zn	$1 \cdot 92 . 10^{18}$	$1 \cdot 3 . 10^{13}$	$3 \cdot 51 . 10^{4}$	3·02
Fe	$2 \cdot 23 . 10^{22}$	$1 \cdot 5 . 10^{17}$	$4 \cdot 69 . 10^{4}$	4·04
Ni	$1 \cdot 74 . 10^{23}$	$1 \cdot 2 . 10^{18}$	$5 \cdot 12 . 10^{4}$	4·41
Co	$3 \cdot 32 . 10^{22}$	$2 \cdot 2 . 10^{17}$	$4 \cdot 97 . 10^{4}$	4·28
Cd	$2 \cdot 33 . 10^{18}$	$1 \cdot 6 . 10^{13}$	$3 \cdot 02 . 10^{4}$	2·60
Cu	$2 \cdot 19 . 10^{16}$	$1 \cdot 5 . 10^{11}$	$2 \cdot 25 . 10^{4}$	1·94

Komplikálja az oxidkathódok vizsgálatát, hogy ezeknél voltaképpen nincs is telitési áram; az emisszió látszólag ugyanazon hőfokon a feszültséggel folyton növekszik, ellentétben a tiszta fémekkel, ahol egy bizonyos feszültségnél az áram tovább nem növekszik. Ennek a jelenségnek többféle oka van. 1. az oxidrétegen keresztül haladó emissziós áram, a Joule-féle hőhatásnál fogva a réteg hőfokát emeli, 2. az oxidréteg még a legtökéletesebb kigázositás után is folyton gázokat ad le, minden valószinűség szerint az oxid disszociációja folytán ; ez a disszociáció egyrészt tisztán thermikus, másrészt annak az elektrolytikus folyamatnak tulajdonitható, amelyet az emissziós áram magában az oxidban létrehoz, 3. az oxidréteg egyenetlen felülete is megnehezíti a telítési áram létrejöttét, lokális felmelegedések, csúcshatások lépnek fel stb.

Horton[1] mutatta ki először, hogy a földalkálioxidok (természetesen más oxidok is) a fémes vezetésen kívül, magas hőfokon kismértékű elektrolytikus vezetéssel is bírnak. Ez a körülmény vezette Fredenhagent[2] vizsgálataiban, melyekkel azt akarta kimutatni, hogy az oxidok elektronemissziója voltaképpen elvileg különböző a tiszta fémek elektronemissziójától és az elektrolyzis által előidézett folytonos kémiai átalakulásnak kisérő jelensége. Ezt a következtetést a későbbi vizsgálatok nem igazolták; az oxidrétegben kétségtelenül végbemenő elektrolytikus folyamat, amelynél tehát a fématom a mag felé vándorol, az oxigénatom pedig a kathód felületére, nem *oka* az elektronemissziónak, ellenben nagy szerepet játszik az oxidkathódok *aktiválási folyamatainál.*

Az oxidkathódok vizsgálatainál elkerülhetetlen az optikai pyrometer alkalmazása, éppen annál a körülménynél fogva, hogy az emissziós áram Joule-féle hatása következtében az oxidréteg hőfoka a magdrót hőfokától különböző. Arnold[3] mérései szerint a földalkálioxidok a spektrum vörös részében fekete testként sugároznak; az optikai hőfokmérés így egyszerűbbé válik, mint a tiszta fémeknél, ahol a reflexiókoefficiens meghatározása nehéz és bizonytalan.

A legújabb részletes vizsgálatok közül elsősorban említendők Spanner[4] vizsgálatai. Spanner különböző fémoxidoknak egész sorozatát vizsgálta és mindenekelőtt megállapította, hogy az elektromos vezetőképesség és a thermikus elektronemisszió tökéletes párhuzamot mutatnak; mindkettő exponenciális törvény szerint változik. Határozott törvényszerűségeket állapított

---

1 Horton: Phil. Mag. **11.** 505. 1906.
2 Fredenhagen: Phys. Zeitschr. **15.** 21. 1914.
3 Arrold: Phys. Rev. **16.** 70. 1920.
4 Spanner: Ann. d. Phys. 75. 609. 1924.

meg az emissziós állandók és az illető fém elemrendszáma között. A III. táblázat mutatja az atomszám, a kilépési munka és a vezetőképességre jellemző $\Delta\lambda$ számok közötti összefüggést földalkálifémek oxidjaira vonatkozólag. SPANNER empirikus képletet is állitott fel az atomszám és a kilépési munka közötti összefüggés kifejezésére; e szerint:

$$\Delta\varphi = c\frac{N^a}{Z^b} + c', \tag{56}$$

ahol N az illető fématom vegyértékelektronjainak számát jelenti, Z az atomszám, ab, cc' pedig állandók.

III. táblázat.

Elem	Atom szám	Ionizáló feszültség Volt	$\Delta\varphi$ Volt	$\Delta\lambda$ Volt	Schottky-féle kritikus távolság x_0 cm
Be	4	—	3·45	1·54	2·1 .10^{-8}
Mg	12	7·61	3·01	1·6	2·4 .10^{-8}
Ca	20	6·09	2·4	1·45	3·0 .10^{-8}
Sr	38	5·67	2·15	1·32	3·38.10^{-8}
Ba	56	5·19	1·85	1·11	3·97.10^{-8}

A normális oxidkathódtól határozottan meg kell különböztetnünk az «aktivált» vagy «formált» oxidkathódot, amely úgy áll elő, hogy a normális oxidkathódot megfelelő «formáló eljárásnak» vetjük alá. Ennek az eljárásnak az a célja, hogy a kathód felületét megváltoztassa, a felület kilépési munkáját leszállitsa. A formált, aktivált oxidkathódok tanulmányozása és vizsgálata mindezideig még nem történt azzal a részletességgel és pontossággal, amelyet a jelenségcsoport nagy technikai fontosságánál és fizikai érdekességénél fogva megérdemelne.

Igen sok vizsgálat mutatta, hogy a maradékgázok jelenléte az oxidkathódok felületét és elektronemisszióját megváltoztatja. HORTON[1] és MARTYN[2] megállapitották, hogy a *hydrogén jelen-*

[1] HORTON: Phil. Trans. A. **207**. 149. 1907.
[2] MARTYN: Phil. Mag. **14**. 306. 1907.

léte az oxidkathódok emisszióját lényegesen növeli. KOLLER[1] vizsgálatai szerint az oxigén csekély nyomai, továbbá a vízgőz jelenléte az oxidkathódok elektronemisszióját károsan befolyásolják, viszont argon, CO, CO_2 és hidrogén az elektronemissziót növelik.

Az oxidkathódok *formálása* a gőzeljárással készült oxidkathódoknál egyszerűen abban áll, hogy a kathódot 1400° C körül hosszabb-rövidebb ideig izzítjuk. Saját kísérleteinknél egy olyan hőkezelési eljárás mutatkozott legcélszerűbbnek, melynél a kathód hevítése fokozatosan történt alacsonyabb hőfokoktól felfelé.

A kolloid eljárással készült kathódok aktiválása is igen könnyűnek mutatkozott, sőt igen sok esetben minden különösebb aktiválási eljárás nélkül előállt a fokozott elektronemisszió (80—100 mA) watt, 1,0 volt fűtőfeszültség mellett). Más esetekben viszont szükséges volt a kathódoknak magas hőfokra való hevítése, hogy a formálás végbemenjen. Számos kísérletnél a kolloid kathódokat a szivattyún kis nyomású hidrogénben izzítottuk, hogy a formálás végbemenjen. Voltak viszont olyan kathódjaink, amelyek még hőkezeléssel sem aktiválódtak, csupán akkor, ha a kathód és a rács közé nagyobb (100—200 volt) feszültséget kapcsoltunk. Az emissziósáram hatására az aktiválás aránylag gyorsan végbement, viszont a kiaktivált kathód fokozott elektronemissziója csak akkor volt tartós, ha a csőben igen nagyfokú vákuum uralkodott. Kézenfekvő volt tehát az a feltevés, hogy az *aktivált kathód fokozott emisszióját hasonlóképpen a thóriumos vagy caesiumos wolframkathódokhoz egy felületi rétegnek köszönheti, amely tekintve, hogy az aktiválódás hidrogénben való izzítással létrehozható, minden valószínűség szerint tiszta fémes felületi réteg.* Ez a fémes felületi réteg minden kezelés nélkül is létrejöhet a cső kémiai szivattyúzásakor. Kolloidkathódjaink aktiválási kísérleteinél igen bonyolultnak látszó jelenségeket figyeltünk meg, amelyeknek maagyrázatát sokáig nem tudtuk megtalálni. Így pld. az elektron-

[1] KOLLER: Phys. Rev. 25. 671. 1925.

emisszió egy ideig növekedett, ha a rácsra 100—150 volt feszültséget kapcsoltunk, egy idő mulva azonban az aktiválódás megszünt; akkor a 100—150 volt feszültséget néhány pillanatra az anódra kapcsoltuk, a rács pedig kis negatív feszültséget kapott; a visszakapcsolás után az aktiválódás rohamosan megindult. Kétségtelen, hogy ebben az aktiválási folyamatban *az anódra rakódott anyagoknak van szerepe.*

Azt az érdekes jelenséget is megfigyeltük, hogy az emisszió alatt való aktiválódás gyakran csak akkor kezdődik meg, ha a rács az emissziós áram hatása alatt izzásba jött. Ilyenkor az aktiválódás rohamosan folytatódott akkor is, ha a kathód hőfokát fokozatosan csökkentettük, sőt a hőfokcsökkentés még kedvező hatású is volt. Ezt a folyamatot tetszés szerint meg lehet ismételni, azonban 10—20 ismétlés után az aktiválás már csak úgy sikerült, ha a kathódot előzőleg magas hőfokra izzitottuk. *Az aktiválódást tetemesen meggyorsította,* ha a rácsot külön árammal vörös izzásba hoztuk.

Mindezekből a jelenségekből joggal következtethettük, hogy *az a fémes felületi réteg, amely a fokozott elektronemissziót előidézi, a rácsról, illetőleg az anódról párolog át a kathódra.* A rácsra, illetőleg az anódra a földalkálifémek, illetőleg oxidok akkor kerülnek, amikor a kathódot magas hőfokra hevítjük; ekkor ugyanis az oxid párolog, illetőleg bomlik.

A kathód felé való átvándorlást megkönnyíti az is, hogy az elektronkisülés hatása alatt a rácsról, illetőleg anódról elpárolgó földalkálifémek ionizálódnak és a pozitív fémionok a kathód felé röpülnek. Az itt leirt aktiválási folyamat tehát lényegében véve hasonlit a caesiumos wolframkathód aktiválásához. Érthető az is, hogy az aktiválódásra kedvezőbb, ha a kathód alacsonyabb hőfokú, mert akkor a reflektálódó fématomok, illetőleg molekulák száma kisebb; a kathód felületén több atom marad visszatartva. Ezeknek a jelenségeknek megfigyelése alapján jutottunk arra a gondolatra, hogy a kathód aktív állapota talán még tökéletlenebb vákuum esetében is folytonosan fenntartható, ha az anódra elektrolyzálható földalkáli vegyületet helyezünk, amely az anódáram hatására folytonos bomlást szenved, folytonosan fématomokat ad le, amelyek pozitív töltésüknél fogva a kathód felé röpülnek.

Az oxidkathódok fokozott elektronemisszióját előidéző fémes felületi réteg jelenlétét KOLLER[1] azzal mutatta ki, hogy meghatározta a felület kilépési munkáját a formált kathódnál, továbbá magas hőfokon való izzitás után. A kilépési munkának ezen izzitás következtében mérhető tetemes növekedése (1,04—3,1 voltra) akkor is előállott, ha a kathód egyszerűen oxigénnel vagy vízgőzzel érintkezett.

ROTHE[1] vizsgálatainál abból a feltevésből indult ki, hogy a fémes felületi réteg képződése úgy történik, hogy az elektrolyzis folytán szabaddá váló fématomok a felületre diffundálnak. Ezt a feltevést számos vizsgálat látszik megerősiteni. BARTON[3] pld. kimutatta, hogy az oxidkathódokból működés közben negatív töltésű O_2 ionok lépnek ki és valószínű, hogy kolloidkathódjaink aktiválásánál ez az elektrolytikus folyamat is szerepet játszik. Az elektrolytikus formálási eljárást ESPE[4] tette igen részletes vizsgálat tárgyává.

Az oxidkathódok működése közben még igen sok érdekes jelenség tapasztalható: az absorbeált gázrétegek viselkedése, aktiváló hatása, a szekunder elektronemisszió, kontaktuspotenciál sajátosságai stb., stb.

Mindezeknek a jelenségeknek tüzetes tanulmányozása a technikai izzókathódok tökéletesitése szempontjából igen fontos és kívánatos.

Patai Imre.

DIE THERMISCHE ELEKTRONENEMISSION UND DIE TECHNIK DER GLÜHKATHODEN.

Dieser Aufsatz bezweckt vor Allem eine Übersicht über diejenigen Erscheinungen, Gesetzmässigkeiten zu bieten, welche die physikalische Grundlage der Wirkungsweise der Glühkathoden bilden; weiter stellt sie

1 KOLLER: Phys. Rev. **25**. 671. 1925.
2 ROTHE: Zeitschr. f. Phys. **36**. 737. 1926.
3 BARTON: Phys. Rev. **26**. 360. 1925.
4 ESPE: Wiss. Veröff. d. Siem. Konz. **5**. 29. 1926.

die Zusammenhänge der thermischen Emissionserscheinungen mit anderen Erscheinungsgebieten dar. Andererseits gedenke ich einen Einblick in die Forschungsarbeiten des Vatea-Laboratoriums [1] zu gewähren. Diese Arbeiten haben das Studium und das Ausarbeiten von solchen Verfahren zum Zweck, welche das stabile, ökonomische Funktionieren der Glühkathoden zu sichern im Stande sind.

Den grundlegenden theoretischen und experimentellen Untersuchungen von RICHARDSON, LANGMUIR, SCHOTTKY und neuerdings von SOMMERFELD ist es bisher nicht gelungen, ein einheitliches Bild, Modell zu schaffen, wodurch die Erklärung sämtlicher Erscheinungen ermöglicht wäre; immerhin haben die Theorien zahlreiche solche Folgerungen, die für die experimentellen Untersuchungen zugänglich sind: so die Zusammenhänge zwischen der thermischen Elektronenemission, dem VOLTA'schen Kontaktpotential, und der photoelektrischen Emission; weiter die Wirkungen von Fremdatomen auf die freie Metalloberfläche, die Gesetzmässigkeiten der Aktivierungsprozesse etc.

Aus den experimentellen Untersuchungen des Vatea-Laboratoriums seien die vorbereitenden Messungen bezüglich des Abkühlungseffektes erwähnt, aus denen es sich ergab, dass die Messung der Austrittsarbeit mit der WHEATSTON'schen Brücke nicht nur zahlreicher Korrektionen bedarf, sondern auch eine solche Modifikation der Schaltanordnung benötigt, dass die Wirkung des Emissionsstromes auf die Brücke ausgeschaltet werden kann. Fig. 12 zeigt eine derart modifizierte Schaltanordnung.

Es sei auch jene Messeinrichtung erwähnt, wodurch das VOLTA'sche Kontaktpotential ermittelt werden kann, dass zwischen mit Fremdatomen bedeckten Metallen (insbesondere mit Thorium bedecktem Wolfram) und reinen Metallen auftritt. Diese Messung geschah auf zweierlei Weise. 1. Der aktivierbare Thorium-Wolframdraht bildete das Gitter einer Dreielektrodenröhre, wobei die Verschiebung der charakteristischen Kurven bei der Aktivierung des Gitters 1·6—1·8 Volt betrug, entsprechend der RICHARDSON'schen Gleichung:

$$V_1 - V_2 = \varphi_1 - \varphi_2$$

wo φ_1 bezw. φ_2 die, in Volt gemessene Austrittsarbeit der reinen, bezw. mit Thorium bedeckten Wolframoberflächen bedeutet. 2. Der aktivierbare Thorium-Wolframdraht diente als Anode; die Verschiebung der Anlaufstromkurve ergab den gleichen Wert. Aus diesen Messungen kann

[1] Die Mitarbeiter des unter der Leitung des Autors stehenden Vatea-Laboratoriums sind: die Herren EUGEN HARSÁNYI, ZOLTÁN TOMASCHEK, EMERICH EGRI, Dr. LADISLAUS KALMÁR und Dr. GÉZA SCHAY.

die Folgerung gezogen werden, dass die Austrittsarbeit der mit Fremdatomen bedeckten Metalloberflächen, im Gegensatze zu der SCHOTTKY'schen Dipoltheorie, von der Temperatur unabhängig ist. Die Messungen, welche sich auf die Wirkung der wiederholten Aktivierung des Thorium-Wolframdrahtes beziehen, sind vollständig im Einklang mit der Feststellung von CLAUSING: das Thorium wandert zwischen den Kristalliten des Wolframmetalles.

Die moderne Röhrentechnik stellt die WEHNELT'sche Erdalkalikathoden in den Vordergrund, dementsprechend waren die technische Arbeiten des Vatea-Laboratoriums hauptsächlich auf das Studium von Erdalkalioxydkathoden und deren Herstellung gerichtet. Zur Erzeugung solcher Kathoden sind zahlreiche Methoden bekannt, jedoch leiden sie (mit Ausnahme des Dampfverfahrens, das heute als das Vollkommenste gilt) alle unter den Mangel, dass es ungeheuer schwer ist vollkommen reine Oxydschichten zu erreichen. Auch die betriebsmässige Herstellung solcher Oxydschichten, deren Struktur homogen und gleichmässig ist, ist mit grossen Schwierigkeiten verbunden. Die Schichten, die bis jetzt erzeugt worden sind, zeigen eine grobe Oberfläche. Das, durch das Vatea-Laboratorium ausgearbeitete Kolloidverfahren, dessen Grundgedanke von Herrn E. HARSÁNYI stammt, ist zur Herstellung von äusserst reinen, gleichmässigen und glatten Oxydschichten am besten geeignet; durch dieses Verfahren ist es auch möglich geworden, Schichte, deren Material aus homogenem Gemisch besteht, herzustellen. Das Verfahren besteht wesentlich darin, dass die Schicht aus kolloidalen Lösungen der geeigneten Erdalkaliverbindungen auf dem Metalldraht mittels Elektrophorese abgeschieden wird. Als das Zweckmässigste hat sich eine wässerige kolloidale Lösung von Erdalkalicarbonaten erwiesen; die aus Carbonaten bestehende Schicht wird durch Glühen in Oxyde verwandelt. Die mikroskopische Untersuchung (s. das Mikrophotogram Tafel II, Fig. 2) zeigt, dass die Schicht nach dem entsprechend ausgeführten Glühen ihre gleichmässige Struktur behält. Die wässerigen kolloidalen Lösungen von Erdalkalicarbonaten wurden zuerst von BUZÁGH hergestellt; die Herstellung der Lösung geschieht in der Weise, dass zuerst das Hydroxyd des Erdalkalimetalles in Methylalkohol suspendiert und dann durch Zuführung von Kohlensäure in Dimethyl-Erdalkalicarbonat verwandelt wird. Diese Verbindung, durch Wasser zersetzt, gibt eine koloidale Lösung von Erdalkalicarbonat, die nach Bedarf verdünnt werden kann. Die rohe Lösung wird, wie üblich, durch Filtrieren, Zentrifugieren und Sedimentieren gereinigt. Bei den meisten Versuchen wurde ein Metallkerndraht von iridiumhaltigen Platin verwendet, welcher durch Wechselstromelektrolyse in Salpetersäure gerauht worden ist. Es erschien für zweckmässig, den Draht auf elektrolytischem Wege mit einer dünnen Kupferschicht zu überziehen, die durch mässiges Erwärmen oxydierbar ist. Fig. 22 zeigt die schematische Abbildung der kataphoretischen Vorrichtung. Die Konzentration der Lösung variierte zwischen 1—2% o, die zur Bildung der Schicht genötigte Zeitdauer betrug 2—5 Minuten. Das Verfahren kann natürlich auch kontinuierlich durchgeführt werden. Die im Wege der Kataphorese gewonnene Schicht ist ausserordentlich kompakt, dicht, da die Teilchen elektrisch zu einander, bezw. zu der Kernoberfläche haften.

Das «Philips'sche» Dampfverfahren zur Herstellung von Oxydkathoden in der fertigen Röhre, findet seinen Ursprung im Caesiumdampf-Verfahren von Langmuir, bei welchem die aktive Oberfläche dadurch erzeugt wird, dass ein oberflächlich oxydierter Wolframdraht mit Caesiumdampf in Berührung gebracht und nachher durch Glühen aktiviert wird. Wenn in der Röhre statt Caesium ein Erdalkalimetall verdampft wird, bildet sich nach der Reduktion des Wolframoxydes eine Erdalkalioxydschicht. Bei der Wiederholung dieses Verfahrens, namentlich bei der Oxydierung des Wolframdrahtes in freier Luft, wurde eine interessante Erscheinung beobachtet, die gleichzeitig zu einer einfachen Demonstration des Thomson'schen Strom-Wärmeeffektes dienen kann. Wenn nämlich der Wolframdraht mittels Gleichstrom bei beginnender Rotglut geglüht wird, so beginnt der Draht nahe zu einem Ende (der Austrittstelle des Stromes) lebhafter zu glühen und brennt nach wenigen Sekunden durch. Bei verkehrter Stromrichtung wiederholt sich das Durchbrennen auf der entgegengesetzten Seite, u. zw. genau in gleicher Entfernung. Der Vorgang des Durchbrennens spielt sich in der Weise ab, dass der Draht sich an der Stelle der Höchsttemperatur am raschesten oxydiert, der Querschnitt geringer wird, u. s. w. Die Erscheinung beweist, dass sich die Stelle der Höchsttemperatur nicht in der Mitte befindet; die Temperaturverteilung zeigt eine Assimetrie in Abhängigkeit von der Stromrichtung, die nur durch das Thomson-Effekt erklärt werden kann.

Es wurden eingehende Untersuchungen bezüglich der Aktivierung der Oxydkathoden angestellt, wobei eine ganze Reihe von interessanten und teilweise noch ungeklärten Erscheinungen beobachtet worden sind. Die meisten Erscheinungen sind mit der Hypothese erklärbar, dass sich auf der Oberfläche der Oxyden ein dünnes metallisches Film bildet, wodurch eine Verringerung der Austrittsarbeit entsteht. Diese Erscheinungen bedürfen weiterer Untersuchungen, die das Vatea-Laboratorium weiter beschäftigen. *Emerich Patai.*

Versuchslaboratorium der VATEA A. G.
Budapest.

KŐSÓKRISTÁLYOK ELEKTROMOS VEZETŐKÉPESSÉGE EGYOLDALÚ NYOMÁS ALATT.

1. §. A fényelektromos vizsgálatok során[1] bizonyos jelek arra engedtek következtetni, hogy a vezetés mechanizmusában még ismeretlen tényezők is szerepelnek, melyeknek felkutatása a fényelektromos jelenségek ismeretére igen fontos. Új kilátást nyujtott erre SMEKAL-nak[2] pár év előtt kezdeményezett elmélete a kristályok belső szerkezetéről. SMEKAL elméletének kiindulópontja az a diskrepancia, ami a kristályoknak bizonyos számított és észlelt tulajdonságaik — nevezetesen szilárdságuk — között van. A kősón keresztülvitt pontos mérések[3] azt mutatták, hogy a kristályok sokkal kisebb megterhelésre elszakadnak, mint az elméleti számítások[4] alapján várható volna. Miután a kristályok legtöbb más tulajdonságaiban is nagy individuális eltérések mutatkoztak, SMEKAL bizonyos szempontokat állított fel, melyek alapján mind e jelenségek érthetőbbek lesznek. SMEKAL elmélete szerint a kristályok, melyeket a Röntgen-felvételek alapján szabályos rácsszerkezetből állóknak gondolunk, valójában olyanszerű szerkezettel birnak, mint egy téglafal, mely szabályos merev alkatrészeknek egy lazább halmazából áll. Így a valóságos egykristályoknak csak igen kicsiny

---

[1] GYULAI Z.: Quantummérések, Zeitschr. f. Phys. 1925. **32**, 103 és A. ARSENEWA: Zeitschr. f. Phys. 1926. **37**, 701.

[2] A. SMEKAL: Phys. Zeitschr. 1925. **26**, 707 és legutóbb Zeitschr. f. technische Physik. 1927. **8**, 561.

[3] A. JOFFÉ: Zeitschr. f. Phys. 1924. **22**, 286.

[4] F. ZWICKY: Phys. Zeitschr. 1923. **24**, 131.

részeik állanak szabályos rácsból, míg a valóságos kristály e kis szabályos alkatrészeknek már kevésbbé szabályosan felépített rendszeréből áll. Ezen felfogás szerint a kristályokban vannak kisebb-nagyobb számban kristályalkatrészek, — ionok vagy molekulák — melyeknek kötése lazább, mint egy szabályosan elhelyezett alkatrészé és így ez másképpen viselkedik, mint egy szabályos kötésű alkatrész. E szabálytalan, laza kötésű alkatrészekre törekszik SMEKAL visszavezetni a kristályok bizonyos tulajdonságait. Így magyarázza ő a kősónak a Röntgen-sugár hatására fellépő színeződését. Ő[1] és PRZIBRAM[2] kísérletileg kimutatták, hogy deformált kősódarabok Röntgen és radioaktiv sugárzás hatására tényleg erősebb színeződést mutattak. E kísérletek arra mutatnak, hogy a Röntgen-színeződést okozó centrumok tényleg ilyen laza helyeken foglalnak helyet. Ha azonban ez így áll, akkor a fényelektromos vezetés mechanizmusának is összefüggésben kell lennie a kristályoknak föntemlített laza szerkezetével.

Szükségesnek látszott tehát a SMEKAL-féle laza szerkezetnek a szerepét a kristályok elektromos vezetésében közelebbről tanulmányozni. A következő kísérletek alapgondolata tehát a következő volt: Ha a kristályok különböző tulajdonságai — a mi esetünkben a kristályok elektromos vezetőképessége — tényleg összefüggenek a SMEKAL-féle laza szerkezettel, úgy a kristályok vezetőképességében változást kell észlelnünk, ha az észlelt kristályban a laza helyek számát mesterségesen növeljük. Miután SMEKAL a kristályok elektromos vezetőképességét laza kötésű ionoknak tulajdonítja, ennélfogva a vezetőképesség növekedését várhatjuk, ha mi a laza helyek számát mesterségesen növeljük. Kísérleteink ezen várakozásunkat, melyet már SMEKAL[3] is kifejezett, teljesen igazolták.

Ugyanebből az alapgondolatból kiindulva végeztek kísérle-

---

[1] A. SMEKAL: Phys. Zeitschr. 1926. **27**, 837. Wien. Anz. 1927. Nr. 3. és Nr. 8.

[2] K. PRZIBRAM: Wien. Anz. 1926. Nr. 18.

[3] Lábjegyzet A. SMEKALnál, Zeitschr. f. technische Physik 1927. **12**, 561.

teket JOFFÉ és ZECHNOWITZER,[1] melyekből ők a SMEKAL-féle laza ionoknak az elektromos vezetésben való szerepét illetőleg ellentétes eredményre jutottak, ámbár ők is megemlítik, hogy észleltek átmenetileg áramnövekedéseket, amikor repedések következtében a kristályban új felületek keletkeztek. JOFFÉ és ZECHNOWITZER kisérleteiket 530—597° C-nál végezték, ahol a kősónak a vezetőképessége aránylag nagy, és bár a megterheléseknél észleltek áramnövekedéseket, melyek aztán rövid idő alatt eltűntek, de ők ezeknek nem tulajdonitottak fontosságot. Az ő alapgondolatuk az volt, hogy ha a kősó vezetőképessége laza ionoktól származik, ha ők egyoldalú nyomás által a kristályt erősen deformálják, ezáltal növelik a laza ionok számát és így a kristály specifikus vezetőképességében növekedést kell észlelniök. Miután ezt nem észlelték, kétségbevonták a laza ionok létezését.

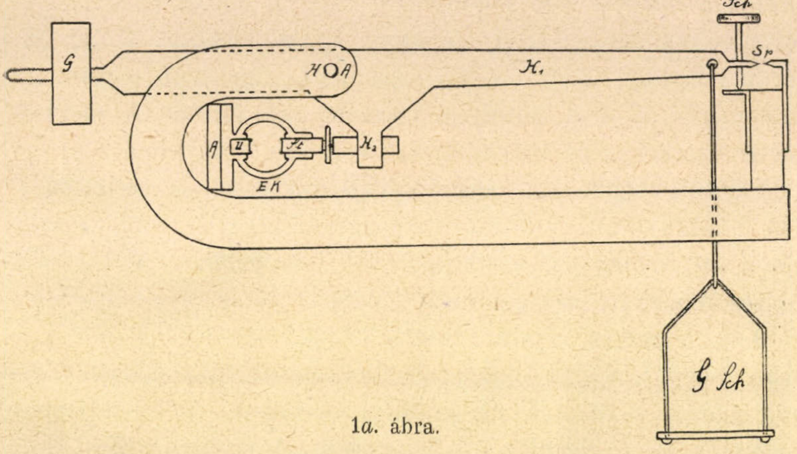
Mi a kisérleteinket sokkal alacsonyabb hőmérsékleten — 40—50° C-nál — hajtottuk végre, és érzékenyebb árammérő berendezésünk segitségével megállapitottuk, hogy a nyomás pillanatában a kristályon erős áramok mennek át, melyek azonban a JOFFÉ-féle elhanyagolt áramugrásoknak megfelelően megszűnnek.

2. §. A kisérleti berendezés lényeges alkatrészei az emelőkaros prés (1*a*. ábra) és a kristályt tartó, fűthető vashenger (1*b*. ábra).[2]

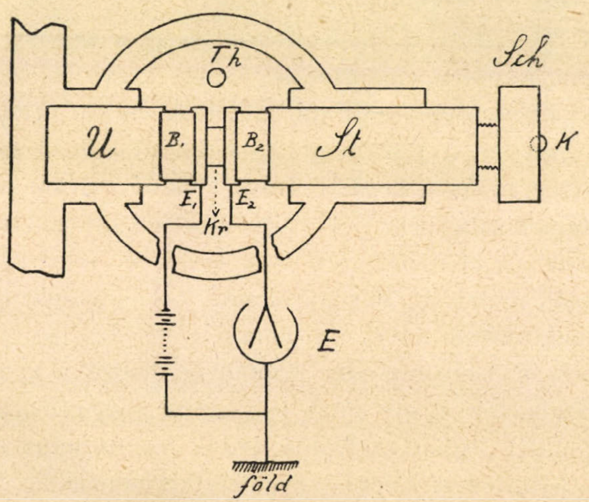
A nyomást a rövidebb emelőkar az *St* nyomórúdra adja át, melyik a kristályt az *U* alapra nyomta. A kristály az E_1E_2 elektródok között foglalt helyet, melyek a szomszédos vasrudaktól a B_1B_2 borostyánkő hengerek által voltak szigetelve. Az egyik elektród 100—300 Volt feszültségű akkumulátortelep egyik sarkával jött érintkezésbe, míg a másik elektród az *E* elektrométerrel jött kapcsolatba. A *Kr* kristály egy vastagfalú vashengerben foglalt helyet egy *Hg* hőmérővel együtt. A vashenger elektromos úton fűthető volt. Az elektródokhoz vezető

[1] JOFFÉ és ZECHNOWITZER: Zeitschr. f. Physik 1926. 35. 446.

[2] A nyomókészülék elkészitéséért e helyen is meleg köszönetünket fejezzük ki dr. PFEIFFER PÉTER e. ny. r. tanár úrnak.



1a. ábra.



1b. ábra.

Kísérleti berendezés. 1a. ábra: H_1 a hosszabb, H_2 a rövidebb emelő kar; *HA* forgástengely; *St* nyomórúd csővezetéssel; *U* aljzat; *Sch* finomabb megterhelésre szolgáló csavar; *Sp* vízszintes beállításra szolgáló csúcs; *GSch* csésze a súlyok felvételére; *A* aszbeszt szigetelés; *EK* vashenger. 1b. ábra: B_1 és B_2 borostyánkő szigetelők; E_1 és E_2 sárgaréz elektródok, melyek a nyomás átadására elég vastagok voltak; *Kr* kristály; *Th* higanyhőmérő; *Sch* az *St* nyomórúd meghosszabbítása a csúcs pontos beállítására; *K* acélgolyó a nyomás felvételére; *E* egyfonalas elektrométer.

drótok a hengert záró fémlapokon szintén borostyánkővel izolálva voltak átvezetve. A zárólapok üvegablakokkal voltak ellátva, hogy a kristály mindig szemmel is figyelhető legyen. Az árammérés az ú. n. feltöltési módszer által történt. A elektrométer érzékenysége 10 skála rész volt pro Volt. Időmérőül egy taktusütő szolgált 1·2 másodpercnyi taktussal. A feltöltődési idő 5 taktus volt. A fűtött vashenger a készülék többi részeitől 2 cm vastag aszbesztlappal volt elszigetelve. A készülék összes fémalkatrészei gondosan földelve voltak.

3. §. A mérés céljaira szolgáló kristályokat Wielickából származó nagy, víztiszta kősódarabokból repesztettük, smirgel papíron mattra csiszoltuk és grafittal bevontuk. A kristálylapok nagysága 7×7, illetőleg 5×5 mm volt. A vastagság 2—3 mm között volt. A mérődobozt a kristály behelyezése után egy éjjen át 60—70° C-ra melegitettük, hogy a kristály felületén adsorbeált vizréteg elpárologjon és igy a kristály szigeteljen. A hőmérséklet aztán ~40°-ra állítottuk be és ezután kezdődött az észlelés. A feszültség kapcsolása után 2—3 percig várni kellett, mig az ú. n. kezdeti áram állandó értékre nem esett. A kristályok általában jól szigeteltek és az elektrométer a szabványos öt ütés alatt rendesen kevesebb mint két osztályrész járást mutatott. Már most meg kell jegyeznünk, hogy a kristálynak ebben az ú. n. normális vezetésében a szigetelési hibák is benne vannak. Ezután kezdődtek a nyomási mérések. Szabadkézzel egy súlyt helyeztünk a csészébe, az elektrométer fonalát rögtön szabaddá tettük és észleltük a feltöltődést. A feltöltődést különböző időközben mindaddig folytattuk, amig az áram láthatóan állandó értéket nem vett fel. Ekkor a csészébe újabb súlydarabot tettünk és újra észleltük az újabb nyomástöbbletre fellépő áramot és időbeli lefolyását. Az eredményeket a 2. ábra tünteti fel. A 2. ábrában lenn az összmegterhelések vannak feltüntetve kg/cm²-ban, míg az egyes görbe ágak felett a megterhelések ugrásai vannak szintén kg/cm²-ban feltüntetve. A megterhelés ugrásszerű növelése után a kristály vezetőképessége a normális értéknek néha százszorosát is elérő

ugrásszerű növekedést mutat, mely érték aztán kezdetben gyorsan, azután fokozatosan a kezdeti értékére csökken. Ugyanez a folyamat ismétlődik, valahányszor a megterhelést ugrásszerűleg növeljük. A vezetőképességben jelentkező ugrások ugyanannál a kristálynál gyakran arányosak a megterhelés ugrásaival, de aztán gyakran következik egy aránytalan ugrás. Úgy ebben, mint a vezetési ugrás abszolút nagyságában a különböző kristályok individuálisan viselkednek, ami különben a kristályok összes tulajdonságainál fellép. Ha az egyes ugrásokat a vezetőképességben a nulla megterheléstől kezdve egymással összehasonlítjuk, azt találjuk, hogy a kezdeti értékek kisebbek és körülbelül csak a JOFFÉ[1] által megállapitott rugalmassági határ átlépése után érjük el a teljes értéket. A kezdeti megterheléseknél észlelt értékek részben biztosan meglevő hibáktól származnak. Az első hiba a kristályfelület nem sik voltából ered, minek következtében a nyomás a felületen nem egyenletesen oszlik el. Ezen állitás helyessége mellett bizonyit az is, hogy látható repedések a kristályban rendesen csak az első megterheléseknél keletkeznek. E hiba befolyása a JOFFÉ-féle rugalmassági határ átlépése után megszűnik, mert mihelyt a kristály folyni kezd, a kristályfelületek hozzásimulnak az elektród felületekhez. A második hiba, amelyik főkép a kezdeti megterheléseknél nyilvánul, a kristályban levő belső feszültségek. A kezdeti megterheléseknél tehát egyes térelemekben a rugalmasság határát átléphetjük és igy a vezetőképességben ugrást észlelünk. Harmadszor meg kell még említenünk, hogy a kristályoknak az előkészitése a mérésekhez — nevezetesen a felület begrafitozása, mely művelet bizonyos nyomás nélkül kivihetetlen — már bizonyos merevülést hoz létre a kristályban, minek következtében a nyomási áramok csak bizonyos megterheléseken túl lépnek fel.

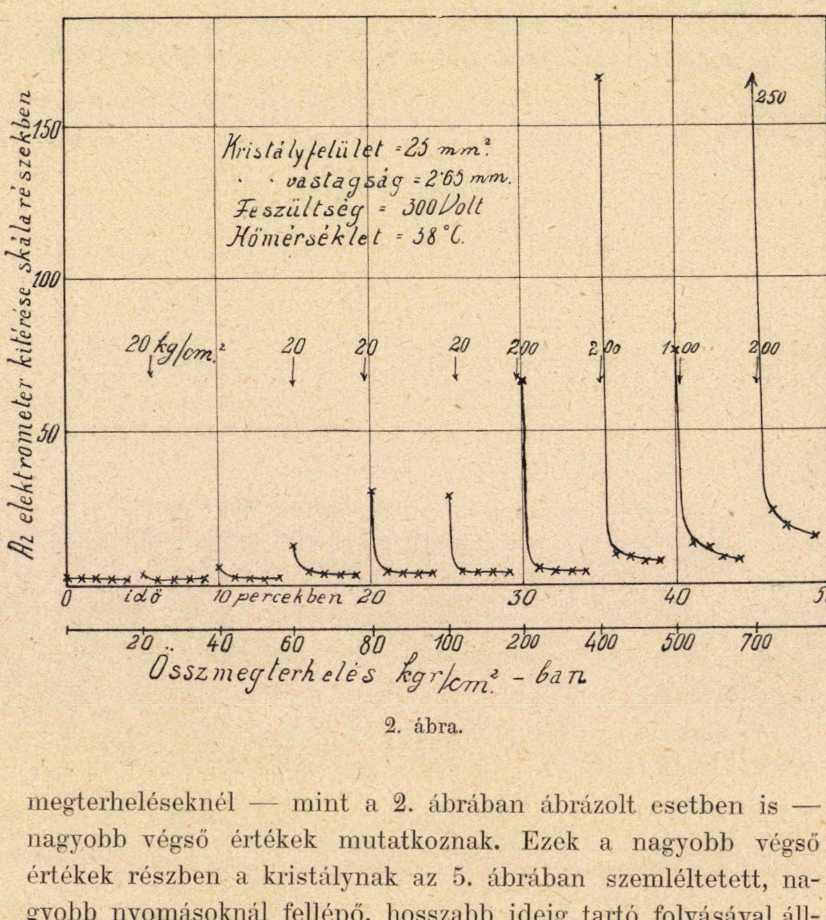
---

[1] A. JOFFÉ, M. W. KIRPITSCHEWA és M. A. LEWITZKY: Zeitschr. f. Phys. 1924. **22**, 286.

POLÁNYI és SACHS: Zeitschr. f. Phys. 1925. **33**, 692 a rugalmasság határára még sokkal alacsonyabb értéket állapitottak meg.

E három hibaforrás miatt a jelen mérésekben észlelt vezetési ugrásokat nem hozhatjuk a kristály rugalmassági határával összefüggésbe.

Ami az egyes görbeágak végső értékeit illeti, ezek általában egyénenként különbözők. Sok kristálynál visszatérnek a 0-megterhelésnél levő, azaz kezdeti értékhez; másoknál, főkép nagyobb



2. ábra.

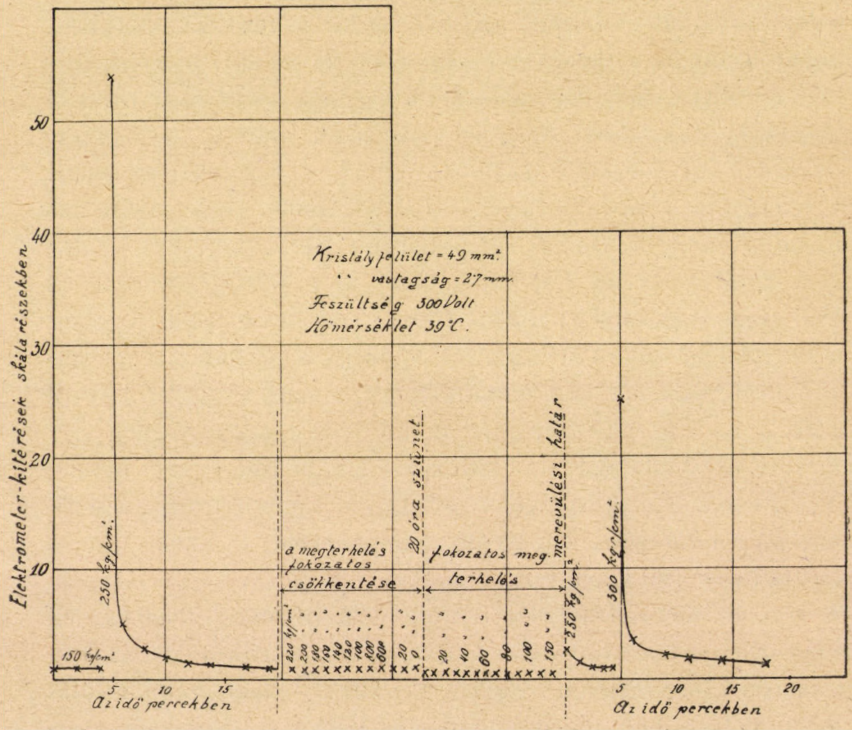
megterheléseknél — mint a 2. ábrában ábrázolt esetben is — nagyobb végső értékek mutatkoznak. Ezek a nagyobb végső értékek részben a kristálynak az 5. ábrában szemléltetett, nagyobb nyomásoknál fellépő, hosszabb ideig tartó folyásával állhatnak összefüggésben.

4. §. Terheljünk meg egy kristályt fokozatosan bizonyos fokig. A kristály vezetőképességében mindannyiszor egy ugrást

észlelünk, valahányszor a megterhelésben egy ugrással előrehaladtunk. Ha most az utolsó vezetési ugrás megszűnése után a megterhelést fokozatosan csökkentjük, a kristály vezetőképességében semmi változást nem észlelünk. Nem észlelünk a vezetőképességben ugrásokat akkor sem, ha a kristályt az előbbi fokozatok szerint újra megterheljük. Csupán az előbbi megterhelés határánál észlelünk egy kis ugrást a vezetőképességben, amely azonban a tizedrészét sem teszi ki az első megterhelésnél ugyanitt észlelt ugrásnak. Ha a megterheléssel most továbbmegyünk, a kristály rendesen viselkedik, mutatja a megterhelésbeli növekedésnek megfelelő ugrást a vezetőképességben. E jelenségre a hasonló mechanikai viselkedés analógiájára azt mondjuk, hogy a kristály megszilárdult (verfestigt). Egy esetet a 3. ábra tüntet fel, hol látjuk, hogy az a kristály, amelyik az első megterhelésnél az utolsó 100 kg/cm^2 nyomásbeli ugrásra a vezetőképességnek 55-szörösét mutatja, a másodszori fokozatos megterhelésnél nem mutat semmit, csupán az utolsó 150-ről 250 kg/cm^2-ra való ugrásnál mutat a vezetőképességben egy kicsiny, az előbbi ugrásnak csupán huszadrészét kitevő ugrást. A következő megterhelésnél 50 kg/cm^2 nyomásra a vezetőképesség 1-ről 25-re emelkedik, ami nagyban megfelel az első megterhelés 100 kg/cm^2-os megterhelés 55-ös vezetési értékének. A vezetési mérésekkel meg tudjuk tehát állapítani, hogy milyen nagy nyomás alatt volt előbb a kristály. A megszilárdulás állapota a mérési hőmérsékleten — tehát 40—50° C — igen stabil. 24 órai megterhelésnélküli pihenés után sem tudtuk a merevülés megszüntének semmi nyomát észlelni. Hogy a megszilárdulás milyen módon szűnik meg magasabb hőmérsékleteken, továbbá a vezetőképesség ugrásának a hőmérséklettől való függéséről legközelebb egyikünk fog beszámolni.

5. §. A fent vázolt mérések Smekal-nak a deformálás által létrehozott vezetési korpuszkulákról szóló elméletét igazolni látszanak. A jelenségről még teljesebb képet nyerünk, ha csak igen rövid ideig tartó ugrásszerű megterheléseket alkalmazunk. A csészébe tehát 1—10 másodpercig helyezünk csak egy súly-

többletet és miután levettük, figyeljük a kristály vezetőképességét. Azt találjuk, hogy a kristály most is mutat ugrást a vezetőképességében, ámbár kisebbet, mint közvetlen a megterhelés után észlelve. Ez azt mondja, hogy a vezetési korpuszkulák, melyek a deformálás által szabaddá tétettek, az elektro-



3. ábra.

mos térben a megterhelés megszünte után is tovább mozognak a kristályban, míg aztán lassanként itt-ott fennakadnak.

Ha most az áram lecsillapodása után a csészébe helyezzük az előbbi súlytöbbletet, a vezetőképesség újra mutat ugrást és pedig kisebbet vagy nagyobbat, a szerint, amint az előbbi rövidebb ideig tartó megterhelés hosszabb vagy rövid ideig tartott. E jelenséget a következő módon értelmezzük: amint a 4. §-ban látjuk, minden megterhelés a kristályban e megterhelésnek megfelelő megszilárdulást hoz létre. E megszilárdulási állapot teljes kifejlődésére időre van szükség. Ha tehát a megterhelés tartama rövidebb volt, mint a teljes megszilárdulás kifejlődésére szükséges idő, a kristály még nincs teljesen megszilárdulva és igy újabb megterhelésnél mutatkozik a vezetőképességbeli ugrás. Ha tehát a kristályt különböző hosszú ideig tartó megterhelések után ismét megterheljük és észleljük ez utóbbi esetben fellépő ugrásokat az elektromos vezetésben, képet nyerünk arról, hogy a megszilárdulás állapota időbelileg miképpen fejlődött ki. Az 1. táblázatban van egy mérési sorozat feltüntetve.

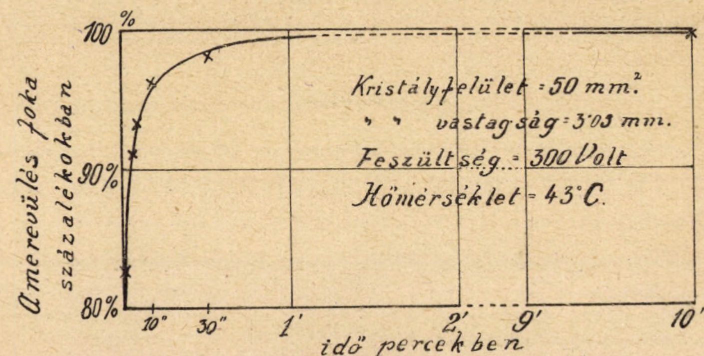
1. Táblázat.

A megszilárdulás időbeli kifejlődése 20 kg/cm^2 megterhelés hatására a No. 15 kristályon. A kristály felülete 50 mm^2, vastagsága 3·05 mm.

A rendes vezetésbeli ugrás előzetes megterhelés nélkül = teljes plasticitás	Az előzetes megterhelés időtartama	A másodszori megterhelésnél mutatkozó ugrás a vezetésben=maradék plasticitás	Az előzetes megterhelésnél kifejlődött megszilárdulás	
			osztályrészekben	százalékokban
21·4	1 sec	3·7	17·7	82·7%
	3 «	1·9	19·5	91·1%
	5 «	1·4	20·0	93·4%
	10 «	1·1	20·6	96·2%
	30 «	0·4	21·0	98·1%
	10 perc	0·1	21·3	99·5%

Az első oszlopbeli érték több megterhelésnek a középértéke, amit itt a teljes plasticitás mértékéül veszünk. A negyedik oszlop számait úgy nyerjük, hogy a harmadik oszlop számait, mint a maradék plasticitás értékeit a teljes plasticitásból (első oszlop) levonjuk. Az ötödik oszlop százalékokban kifejezve a 4. ábrában felrajzolva a megszilárdulás folyamatának időbeli menetét tünteti fel.

E pontnál különösen ki kell emelnünk,[1] hogy a 4. ábra görbéjében még egy ismeretlen tényező hatása is benne van. Ez a a tényező a kristály belsejében uralkodó ellenfeszültség vagy polarizációs feszültség. Eennek az ellenfeszültségnek a nagysága függ a kristályon áthaladó elektromos mennyiségtől, és fel kell tennünk, hogy változik a nyomás hatására is, mivel ez mindig ionok szabaddá tételével jár. Így tehát a fent részletezett műveletek változtatják az ellenfeszültséget a kristály belsejében és így a másodszori terhelésnél végzett méréseink mintegy vál-



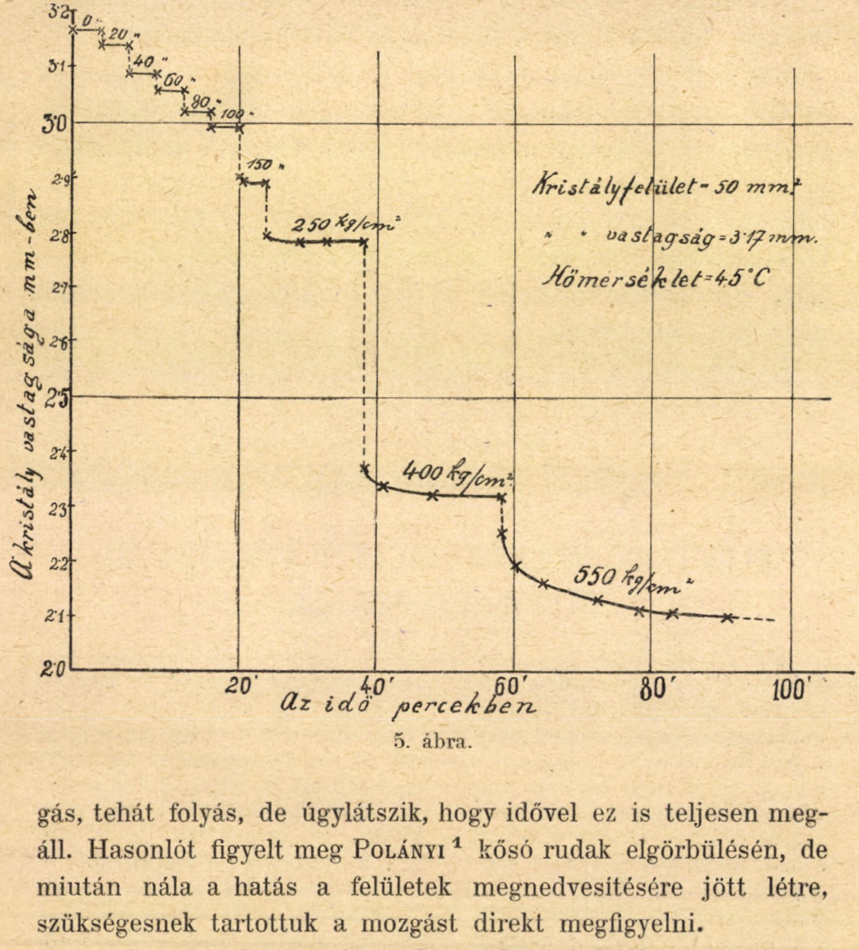
4. ábra.

tozó feszültségnél történnek és így a görbében még az időbelileg változó ellenfeszültség hatása is benne van.

6. §. A 3. §-ban vázolt mérések mutatják, hogy a vezetési korpuszkulák a megterhelés pillanatában hirtelen képződnek. A szokásos elnevezés szerint azonban a rugalmasság határán túl terhelt *NaCl* kristály folyik. Ha a kristálynak ez a folyása folytonos mozgás, úgy nem egészen érthető, hogy a mozgásnak miért csak az első pillanatában keletkeznek elektromos részecskék. Szükséges volt tehát ennek az ú. n. folyási folyamatnak az időbeli lefolyását direkte megfigyelni. Erre a célra 25-szörös nagyitású mikroszkópot használtunk. A mikroszkópot élesen

[1] A levélbeli utalást az időbelileg változó ellenfeszültség szerepére A. Smekal professzornak köszönjük.

beállitottuk az elektródok szélére és figyeltük az elektródok távolságát a megterhelések után. Az eredményt az 5. ábra tünteti fel, hol leolvashatjuk, hogy a kristály alakváltozása a megterhelés után pillanatnyilag, ugrásszerűen változik. Csak nagy megterheléseknél van egy hosszabb ideig tartó folytonos moz-



5. ábra.

gás, tehát folyás, de úgylátszik, hogy idővel ez is teljesen megáll. Hasonlót figyelt meg Polányi[1] kősó rudak elgörbülésén, de miután nála a hatás a felületek megnedvesítésére jött létre, szükségesnek tartottuk a mozgást direkt megfigyelni.

A mi mérési hőmérsékletünkön tehát a kristály ugrásszerűen alkalmazkodik egy nagyobb nyomáshoz és a kristály belsejében

[1] M. Polányi és W. Ewald: Zeitschr. f. Phys. 1924. 27. 29.

e pillanatnyi mozgás alatt elektromos részecskék válnak szabaddá. Ezután a kristály belsejében egy rekristallizációs folyamat történik, miután a kristály e nyomásra megszilárdult. A deformálás által közvetlenül érintett elemi részekről a mi vezetési módszerünk nem tud többet mondani, de remélhetőleg e folyamatokba mélyebben betekinthetünk, ha fényelektromosan érzékeny kősóra fogjuk a deformálás hatását tanulmányozni.

Meg kell még említenünk, hogy a kristályokon rendesen csak az első megterheléseknél keletkeznek egyes látható repedések. A kristályok felületén mikroszkóp alatt finom, a kockaélekkel párhuzamosan haladó hullámos vonalak láthatók. Nagy megterheléseknél némely kristályban a belső szerkezet szétrombolása következtében felhőszerű homályosságok lépnek fel. Ha a kristályt szándékosan széttörjük, pl. ferde megterheléssel, rendkívül nagy áramokat kapunk.

A méréseket a Természettudományi alap adományából beszerzett eszközökkel végeztük.

Szeged, a F. J. T. Egyetem kisérleti fizikai intézete. 1928 július.

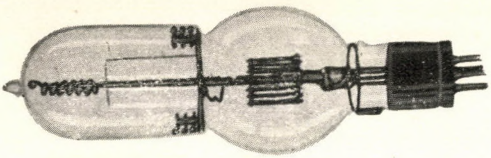
Gyulai Zoltán és Hartly Domokos.

ELEKTRISCHE LEITFÄHIGKEIT VERFORMTER STEINSALZKRISTALLE.

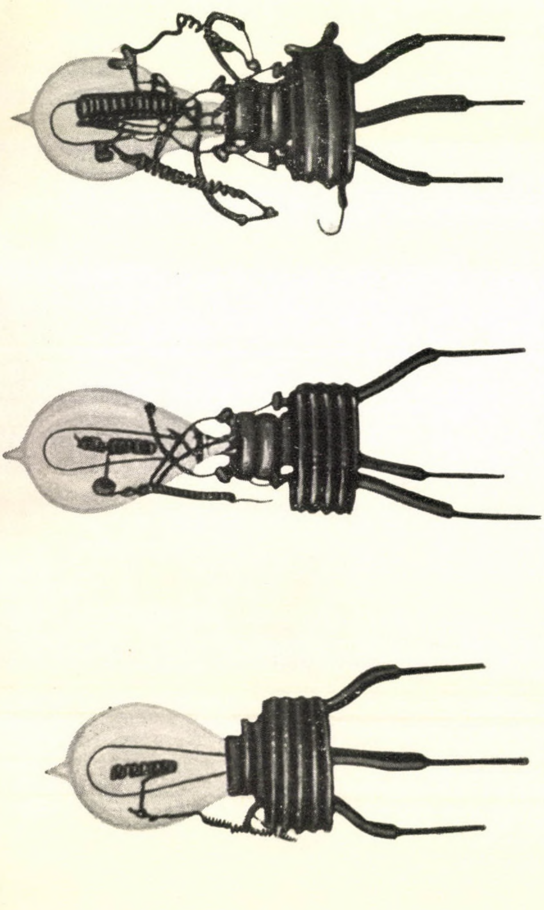
Der Zweck der vorliegenden Untersuchungen ist die experimentelle Prüfung einer Folgerung aus der Theorie von Smekal über die Lockerstruktur der wirklichen Kristalle. Die Folgerung, welche von Smekal neuerdings ausgesprochen und trotz der widersprechenden experimentellen Resultate von Joffe u. Zechnowitzer aufrechterhalten wurde, ist die, dass verformte Krisallte infolge der durch die Verformung entstandenen Lockerung des Kristallgefüges eine erhöhte elektrische Leitfähigkeit zeigen müssen. Unsere Messungen, welche wir gegenüber den Joffeschen Messungen bei viel tieferen Temperaturen — bei 40—50° C gegenüber 530—597° C — ausgeführt haben, bestätigen 1. die Annahme von der Existenz durch die Lockerung entstandenen Leitungscorpuskel. Wir haben weiterhin folgende Tatsachen festgestellt: 2. Die durch die Verformung entstandene Leitfähigkeitserhöhung klingt wieder rasch ab. 3. Durch die Verformung entstandene mechanische Verfestigung ist auch elektrisch feststellbar. 4. Zur vollen Ausbildung der Verfestigung sind einige Sekunden nötig. 5. Die mechanische, bleibende Formänderung entsteht ruckweise. *Z. Gyulai* u. *D. Hartly.*

Mat. és Fizikai Lapok.
XXXV. kötet. I. tábla.

Patai I.: A thermikus elektronemisszió és az izzókathódok technikája.

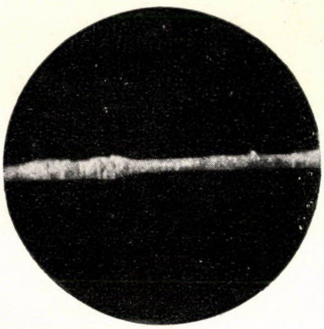


2. ábra.

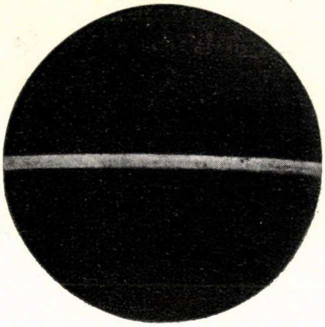


1. ábra.

Patai I.: A thermikus elektronemisszió és az izzókathódok technikája.



1. ábra.



2. ábra.

Az 1926. évi május hó 22-én tartott közgyűlés 1927 január 1.-i hatállyal a tagdíjakat felemelte, budapesti tagok számára 8 pengőre, vidéki tagok számára 6 pengőre.

Minthogy a Mathematikai és Physikai Lapok egyes régibb évfolyamai teljesen elfogytak, kérjük tisztelt tagtársainkat, akik azokat nélkülözhetik, bocsássák a Társulat rendelkezésére.

A folyóirat szellemi részét illető közlemények a szerkesztőkhöz küldendők és pedig a mathematikai tárgyúak *Fejér Lipót* (**V., Falk Miksa-utca 15.**), a fizikai tárgyúak pedig *Pogány Béla* (**I., Budafoki-út 8.**) címére. T. munkatársainkat kérjük, hogy kézirataikban lehető rövidségre törekedjenek, azokhoz néhány soros idegennyelvű összefoglalást mellékeljenek és hogy arra pontos címüket írják rá.

Minden önálló cikk szerzőjének 25 borítéknélküli különlenyomatot adunk. Címzett boríték és több különlenyomat csak a nyomdával való külön megegyezés alapján kapható.

A Társulat ügyvitelére vonatkozó levelek, tagajánlások és folyóirat-cserepéldányok *Pogány Béla* titkár címére küldendők.

A folyóirat és a meghívók expedíciójára vonatkozó kérdések, reklamációk, valamint a tagsági és előfizetési díjak *Nagy József* pénztáros címére (Vác, Kegyesrendi gimnázium.) intézendők.

Austauschexemplare von Zeitschriften erbitten wir an die Adresse des Geschäftsführenden Secretärs *B. Pogány*, Budapest, I., Budafoki-út 8.

On est prié d'envoyer les exemplaires d'échange des périodiques à l'adresse du sécretaire *B. Pogány*, Budapest, I., Budafoki-út 8.

Felhívás tagtársainkhoz!

A rendkívüli viszonyok súlyos helyzetbe sodorták Társulatunkat. Folyóiratunkat még redukált terjedelemben sem tudtuk volna megjelentetni, ha a tudományt megbecsülő, áldozatkész emberbarátok és intézmények nem jöttek volna segítségünkre. Ez a Társulatunk iránt megnyilvánuló bizalom mi ránk is kötelezettséget ró. Nekünk is erőnkhöz képest meg kell tennünk mindent, hogy Társulatunkat fenntartsuk és annak működését minél intenzivebbé tegyük. Ezt követeli tőlünk józanul felfogott saját érdekünk, ezt követeli hazánk érdeke is. Csak így alakul ki bennünk a jövőnk biztosításához annyira szükséges bizalmunk önmagunkhoz.

Kérjük ennélfogva tisztelt tagtársainkat,

1. hogy hátralékos tagdíjaikat (évenkint 8, ill. 6 pengőt) szíveskedjenek *Nagy József* pénztárnoknak (Vác, Kegyesrendi gimnázium) befizetni,

2. hogy megváltozott új címeiket közöljék a Társulat pénztárosával,

3. hogy gyüjtsenek új tagokat.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA: GÉCZY KÁLMÁN.