

50255

225

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

AZ EÖTVÖS LORÁND
MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

FEJÉR LIPÓT és POGÁNY BÉLA

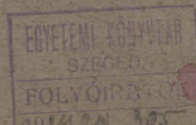
HARMINCNEGYEDIK ÉVFOLYAM

1927

JANUÁR—JUNIUSI FÜZET

BUDAPEST 1927

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LORÁND MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT



TARTALOMJEGYZÉK.

| | <i>Oldal</i> |
|--|--------------|
| Az 1927. március 28-iki Farkas Gyula ünnepély | 1 |
| ORTVAY RUDOLF: Farkas Gyula tudományos működése | 5 |
| ORTVAY RUDOLF: Das Wissenschaftliche Lebenswerk von Julius Farkas | 24 |
| ORTVAY RUDOLF: A de Broglie és Schrödinger-féle hullámmechanika | 26 |
| SZÉLL KÁLMÁN: Az egyatomú, ideális gázok Einstein-féle quantum- elmélete | 55 |
| HOLENDA BARNABÁS: Az elektronütközés és a szinképvonalak elmélete .. . | 69 |
| ARANY DÁNIEL: A játéktartam problémájának általánosítása három játékos esetére | 96 |
| Társulati élet | 106 |

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

HARMINCNEGYEDIK KÖTET

AZ EÖTVÖS LORÁND

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

FEJÉR LIPÓT és POGÁNY BÉLA



BUDAPEST 1927

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LORÁND MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT



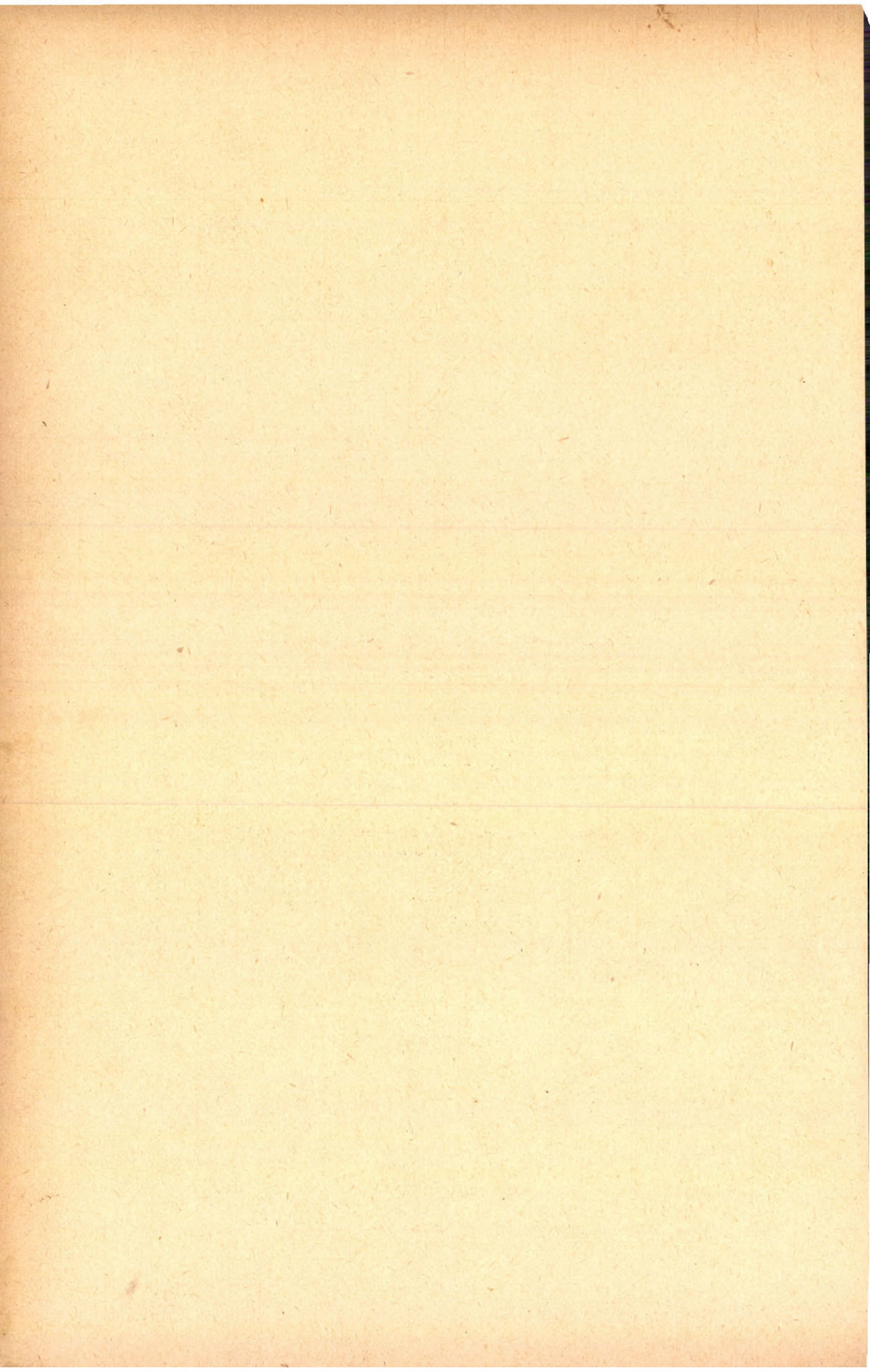
50255



A MATEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

HARMINGYEDIK KÖTETÉNEK TARTALMA.

| | <i>Oldal</i> |
|--|-----------------|
| Az 1927 március 28-iki Farkas Gyula ünnepély | 1 |
| ORTVAY RUDOLF: Farkas Gyula tudományos működése | 5 |
| — Das Wissenschaftliche Lebenswerk von Julius Farkas | 24 |
| ORTVAY RUDOLF: A de Broglie és Schrödinger-féle hullámmechanika | 26 |
| — Die Wellenmechanik von De Broglie und Schrödinger | 54 |
| SZÉLL KÁLMÁN: Az egyatomú, ideális gázok Einstein-féle quantum-elmélete | 55 |
| — Über die Einstein'sche Quantentheorie des einatomigen idealen Gases | 68 |
| HOLENDA BARNABÁS: Az elektronütközés és a szinképvonalak elmélete | 69 |
| — Die Elektronenstöße und die Theorie der Spektrallinien | 95 |
| ARANY DÁNIEL: A játéktartam problémájának általánosítása három játékos esetére | 96 |
| — Verallgemeinerung des Problems der Spieldauer für den Fall von drei Spielern | 105 |
| JORDAN KÁROLY: A valószínűség-számítás alapfogalmai | 109 |
| — Les fondements du calcul des probabilités | 134 |
| SÁRKÖZY PÁL: Adalék a felületi görbék elméletéhez | 137 |
| — Zur Theorie der Flächenkurven | 149 |
| HANS PETTERSON: Új utak az atommag megismerésére | 152 |
| GYULAY ZOLTÁN: A fényelektromos vizsgálatok eredményei | 163 |
| — Die Ergebnisse der lichtelektrischen Untersuchungen | 183 |
| ORBÁN GYÖRGY: Olajok fotoaktivitása | 186 |
| — Die Photoaktivität der Öle | 196 |
| Társulati élet | 106, 197 |



AZ 1927. MÁRCIUS 28-IKI FARKAS GYULA ÜNNEPÉLY.

1927. március 28-án töltötte be életének 80-ik évét FARKAS GYULA Tiszteleti Tagunk s a Társulat kedves kötelességét teljesítette, mikor ezen a napon közliszteleletben álló Nesztorának üdvözlésére külön ünnepélyes ülést rendezett.

FRÖHLICH IZIDOR, a Társulat Elnöke felolvasta a Társulat üdvözlő iratát, majd SZÉKI TIBOR, a M. Kir. Ferencz József Tudományegyetem matematikai és természettudományi Karának Dékánja olvasta fel ezen egyetem tanári testülete által az Ünnepelhez intézett üdvözlő iratot. A volt tanítványok lelkes üdvözlései után ORTVAY RUDOLF, a Társulat választmányi tagja és FARKAS GYULA tanszékutóda mélyen járó előadásában ismertette FARKAS GYULA tudományos munkáit és érdemeit.

Az üdvözlő iratokat és ezen előadást Lapunk e számában megőrökítjük.

Az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat üdvözlő irata.

Mélyen tisztelt Méltóságos Uram!

Kedves Tiszteleti Tagtársunk!

Csak keveseknek jut az a ritka szerencse osztályrészül, hogy komoly és nehéz tudományos munkával eltöltött hosszú pályafutás után jó testi erőben és teljes szellemi ruganyosságban tölthetik be nyolcvanadik életévüket.

Most, mikor Méltóságodnál ez az örvendetes jubiláris nap oly kedvező körülmények között következett be, engedje meg, hogy az Eötvös Lóránd Matematikai és Fizikai Társulat a legőszintebben és a legmelegebben üdvözlje.

Mindnyájunk osztatlan, közös öröme ez az alkalom, amikor Méltóságodat, mint Társulatunk érdemdús Tiszteleti Tagját

és Széniorát itt magunk között láthatjuk és ünnepelhetjük, és mélyen érzett szeretetünknek és egyszersmind nagyrabecsülésünknek fesztelenül adhatunk kifejezést.

A kiváló érdemek, melyeket Méltóságod mint az elméleti fizika egyik úttörője Hazánkban és mint az egyetemi ifjúság Professzora a Kolozsvári Tudományegyetemen hosszú évtizedek alatt szerzett, minden magyar matematikus és fizikus előtt ismeretesekek; és Társulatunk is azért tisztelte meg magát azzal, hogy Méltóságodat az oly kevés számú Tiszteleti Tagjai sorába iktatta.

És most, valamennyünk, közös fohászban egyesülve, arra kérjük a Mindenhatót, hogy még soká részesítsen bennünket abban a szerencsében, hogy Méltóságodat erőben és egészségben itt magunk között láthassuk, és fénylő példájából energiát, biztatást merítsünk ahhoz a további munkánkhoz, mely Hazánk művelődésének a matematikai és fizikai tudományok terén való emelését célozza.

Tiszta szívből kívánjuk, hogy Méltóságod még sokáig élvezhesse fáradhatatlan, munkás élete gyümölcseit.

Budapest, 1927. évi március hó 28. napján.

A báró Eötvös Lóránd Matematikai és Fizikai Társulat nevében,

Dr. Fröhlich Izidor,
a Társulat elnöke.

A Ferenc József Tudományegyetem üdvözlő irata.

Méltóságos Professzor Úr!

A magyar királyi Ferenc József Tudományegyetem Rektora és Tanácsa, valamint Matematikai- és Természettudományi Kara hálás szeretettel, mély tisztelettel és büszkeséggel üdvözlí

M é l t ó s á g o d a t,

egyetemünk tanári testületének Nesztorát, a lelkes tudósnek és az odaadó tanárnak mintaképét,

a tudománynak és egyetemünknek szentelt munkás és eredményekben gazdag élete nyolcvanadik fordulója alkalmából.

Köszöntjük elismerésünk és nagyrabecsülésünk teljes átérzésével Méltóságodban a tudóst, ki kutatásainak legkisebb részlelkérdéseiben is, az alapvető nagy problémák s az átfogó erejű principiumok szempontjait tudta érvényesíteni s tevékenységének sokoldalúan szétágazó munka-mezején, a matematikai és fizikai diszciplínák körében egyaránt — az emberi tudásnak tárházát maradandó eredményekkel gazdagította. Az elliptikus függvények elmélete, az algebra számos kérdése, az iterációk és a lineáris egyenlőtlenségek tana, a Fourier-féle elv jelentőségének mechanikai és thermodynamikai szempontból való megállapítása, az egyre jobban előrenyomuló elektrodinamikai alapkérdések, az elektronelmélet és a relativitás tana, — ime, ezek a jelzőkövei annak a hosszú tudományos multnak, mely Méltóságod teremtő és alkotó lelkén keresztül egyetemünknek és magyar hazánknek a messze külföldön is elismerést és tekintélyt szerzett.

Köszöntjük Méltóságodban szeretetünk és ragaszkodásunk minden melegével, a tanítványaiért fáradhatatlan professzort, ki a tudományos gondolatok átültetésével a tudományos értékek folyamatos kisarjadását tette lehetővé.

És köszöntjük Méltóságodban a férfiúi jellemnek, az önzetlen áldozatkészségnek és hűséges kötelességteljesítésnek minden tiszteletünkre örökké méltó megtettesülését, — visszagondolva arra a pillanatra, midőn legszorosabb munkaközösségünkől kivált azért, mert úgy vélte, hogy a gyorsan múló évek munkaenergiáját megcsökkenthetik. Kivált, hogy kathedráját ifjabb erőnek adhassa át; kivált, hogy munkásságát, tudós működését annál intenzívebben folytathassa tovább.

És mikor jöttek nehéz évek, melyek egyetemünk sorsát nagy megpróbáltatások elé állították, Méltóságod az elsők között volt, kik készséggel vállalták a szervező és megtartó munkának egészséget és ideget megőrlő feladatai teljesítésében az önzetlen közreműködésnek súlyos terhét.

Megilletődéssel állunk követendő például szolgáló életének ez előtt a visszagondolásra és értékelésre készítő jelentőségteljes

évfordulójánál. Szent határkő az, melyen kitörülhetetlenül áll:
«Exegi monumentum ære perennius».

«Ære perennius», mert mindazt, amit hosszú és munkás életén keresztül a tudomány abszolút igazságainak világában örökké maradandónak alkotott, elválaszthatatlanul össze tudta kapcsolni tanártársainak, tanítványainak hűséges szeretetével és lelkük mélyéből jövő hálás ragaszkodásukkal is.

Ezzel a szeretettel és hálával lépünk most Méltóságod elé és kérjük a Gondviselést, hogy áldja és tartsa meg Méltóságodat — a mi örömünkre, a magyar tudományosság hasznára és magyar Hazánknak dicsőségére.

Szeged, 1927. évi március 28.

a m. kir. Ferenc József Tudományegye-
tem Rektora és Tanácsa nevében:

Tóth Károly

e. i. Rektor.

a matematikai és természet-
tudományi Kar nevében:

Széki Tibor

e. i. Dékán.

FARKAS GYULA TUDOMÁNYOS MŰKÖDÉSE.

(Felolvasta a szerző a Matematikai és Fizikai Társulatnak 1927 március 28-án FARKAS GYULA 80-ik születésnapja alkalmából tartott ünnepi gyűlésén.)

Midőn azon megtisztelő feladatnak akarok eleget tenni, hogy FARKAS GYULA tudományos egyéniségéről képet nyujtsak, teljes tudatában vagyok ezen vállalkozásom nehézségeinek. Mert FARKAS GYULA esetében olyan tudományos egyéniséggel állunk szemben, kinek problémái, de főképp módszerei és beállításai igen egyéniek és nagymértékben eltérnek a fiatalabb generáció és így az előadó beállításától is. Ha mégis lelkiismeretem szava arra késztet, hogy ezen feladattal megpróbálkozzam, úgy első-sorban a hála és tisztelet az, ami erre indít. A hála azért, mert FARKAS GYULÁTÓL nyertem olyan maradandó tudományos benyomásokat, melyeket saját fizikai világfelfogásom alapvető elemeihez kell sorolnom. Ezenkívül, azt hiszem, megvan nálam minden igazi objektivitás egyik alapfeltétele: a szeretet. És azt hiszem, ez meglesz mindnyájunknál, kik ezen alkalomból itt összegyűltünk és főképp azoknál, kiknek volt alkalmuk FARKAS GYULA egyéniségének egy sarkalatos tulajdoságával megismerkedni: ez a hajthatatlan, elfáradást, megalkuvást nem ismerő igazságszeretete, mely tudományos és egyetemi működésében egyaránt kifejezésre jutott. A szeretetre mindig szükségünk van, ha egy emberi egyéniséget igazán meg akarunk pillantani, ez az a világító sugár, mely az ember értékeit láthatóvá és felfoghatóvá teszi. Nem felel meg teljesen az igazságnak az az elterjedt felfogás, hogy a szeretet elhomályosítja az ember ítélőképességét és előítéletekhez vezet. Igaz, vezethet aránytalanságokhoz összehasonlításoknál. De mielőtt arra merészkednénk,

hogy egy egyéniségről ítéletet mondjunk, amire csak a legritkább esetben vállalkozik az, kinek sejtelve van arról, hogy milyen nehezen hozzáférhető miszterium az emberi lélek, arra kell törekednünk, hogy előbb az egyén értékeit észrevegyük, aminél csak a szeretet vezethet.

Hogy FARKAS GYULA tudományos egyéniségéről magunknak képet alkothassunk, szükséges szemügyre vennünk a fizikának azt a korszakát, melybe félszázados tudományos működése beleesik. Ez a korszak a hetvenes évektől napjainkig terjedő kor, melyet célszerűen két részre oszthatunk. Az elsőt a kilencvenes évekig, mint a fizikai fenomenologia korszakát jellemezhetjük, míg a másodikat főképp a korpuskuláris elméletek és általában merész, sokszor spekulatív jellegű elméletek előtérbenyomulása jellemzi.

Az elméleti fizika, mint rendszeres tudomány a XIX. században alakult ki azon alapokon, melyeket már a megelőző század az analitikai mechanika és a matematikai analysis módszereinek megteremtésével lefektetett. A XIX. század elejének nagy francia matematikusai és theoretikusai: LAGRANGE, LAPLACE, POISSON, FRESNEL, CAUCHY, FOURIER és mások óta beszélhetünk elméleti fizikáról mint önálló tudományról. Eleinte a mechanika, sőt az égi mechanika mintájára kiépített pontmechanika szempontjai uralkodtak, amennyiben minden jelenséget nemcsak általánosan megegyezésben a mechanikával akartak felfogni, hanem mindent merev kapcsolatokra vagy távolbható centrális erőkre igyekeztek visszavezetni. A XIX. század második felében lassanként kiderült, hogy ez a program tulságosan speciális és nem vihető keresztül. Kezdték felismerni a fizika egyes jelenségsorozatjainak önálló jellegét, melyeket nem lehet a pontmechanika szűk kereteibe beilleszteni. Bizalmatlanság támadt a sokszor tulságosan speciális és nem mindig egyszerű mechanikai modellek iránt, melyekkel a hőt vagy elektromágneses erőteret értelmezni próbálták. Ezzel szemben felismerték a fontosságát annak, hogy minden tulságosan konkrét és korai egységesítéssel szemben a hőtan, fénytán, elektrodinamika, vegytan, önálló alapfeltevéseit a tapasztalat alapján

minden nélkülözhető hypothetikus elem kiküszöbölésével kidolgozzák. Ezen fenomenologikusnak¹ nevezett irány prototypusának tekinthetjük a hővezetés elméletét FOURIERTŐL, mely differenciálegyenlettel írja le a hő terjedését függetlenül a hő természetéről alkotott feltevésektől. Azok a nehézségek, melyek a thermodynamika második főtétele értelmezése elé gördültek, meg a szilárd és cseppfolyós testek kinetikai elméletének nehézségei is a thermodynamika fenomenologikus felfogását helyezték előtérbe. Ép így, midőn a különböző elektrodinamikusan alaptörvények nem váltak be és a MAXWELL-egyenletek mechanikai értelmezése nehézségekbe ütközött, HERTZ után az elektromágneses tér MAXWELL-féle egyenleteiben látták fenomenologikusan az elektrodinamika alaptörvényeit. Sőt OSTWALD még a kémiából is eliminálni akarta az atomelméletet. Mint a fenomenologikus irány kifejezett képviselőit felemlítem KIRCHHOFFOT, ki felfogásának pregnans kifejezést is adott, midőn a mechanika feladatát a mozgás egyszerű leírásában határozta meg, azután W. VOIGTOT, P. DUHEMET, ROBINt, POINCARÉT COSSERAT-t, PLANCKOT régebbi műveiben, MACHt mint ezen irány filozofusát, kinek nézetei azonban nem fedik mindig azt, amit a fizikusok fenomenologia alatt értettek.

A fizikai fenomenológiával szemben a 90-es évek óta a gázokban való kisülések tanulmányozása, a radioaktivitás jelenségeinek felfedezése és LORENTZ elektronelméletének kiépítése óta az atomi, korpuskuláris felfogás nyomul előtérbe és válik mindinkább uralkodóvá. Felismerik GIBBS és BOLTZMANN régebbi elméleteinek igazi jelentőségét. A XX. század eleje óta a régi fizika alapfogalmainak nem sejtett általánosításai és merész átfogó elméletek, mint a relativitás elmélete és a quantumelmélet, határozzák meg a kutatás jellegét.

A fizika fenomenologikus korszakában különösen ki kell emel-

¹ A fizikai fenomenologia a filozófiai irányok közt a pozitivismusnak felel meg és semmi köze a HUSSERL-féle fenomenológiához, melynek beállítása inkább a mai spekulatív iránnyal van rokonságban.

nem azokat a vizsgálatokat, melyek az alaptörvények szigorú, minden feltevést és alapvető tapasztalati elemet explicite kiemelő kidolgozására irányulnak. Nem véletlen, hogy egyidejűleg a matematika alapjai és módszerei szigorúsága iránt kiváló érdeklődés mutatkozik. Ez a kritikai beállítás ugyanazon alapirányzathól táplálkozik, mint a fizikai fenomenologia: a törekvés biztonságra, a közvetlenül adottra, idegenkedés minden túlmessze menő következtetés és egy sokszor tudatos elfordulás és bizalmatlanság a szemlélettel szemben.

Ez a beállítás úgy a fizikában, mint a matematikában óriási szolgálatokat tett, elsöpörte a buján tenyésző sokszor igen rosszul megalapozott elméletek nagyrészét és előkészítette a talajt a fizikai elméletek azon nagyarányú fejlődésére, melynek szemtanui vagyunk. Egy egészséges fejlődés váltakozó szempontok érvényesülését kívánja meg. Így szükség van arra, hogy időnkint magunkba szálljunk és azt keressük, ami biztos és nem azt ami gyorsan és messze visz. A modern elektronelmélet, a relativitás elmélete és a quantumelmélet nem lett volna lehetséges, ha a fenomenologia nem szabadított volna meg azon kényszertől, hogy mindenütt merev kapcsolatokat vagy centrális erőket keressünk. És azt hiszem, hogy ha a mai fizika viharos fejlődése meglassúbbodik, ismét be fog egy elsősorban kritikai szempontok által dominált időszak következni.

FARKAS GYULA tudományos működése a legszorosabb kapcsolatban van a fenomenologikus irányzattal, annak egyik legkövetkezetesebb képviselője. Egész működését a biztonságra való törekvés, a szigorúság mellett a lehető általánosság követelménye jellemzi. W. VOIGT, a fenomenologiai irányzat kimagasló képviselője, *Kompendium der Theoretischen Physik* c. nagyszabású műve II. kötetének előszavában és függelékében (p. 803) elismeréssel nyilatkozik FARKAS GYULÁNAK a hydrodynamika és thermodynamika néhány fontos tételének levezetésére vonatkozó megjegyzéséről. Át van hatva attól a tudattól, hogy sok elmélet sikertelenségének főoka az, hogy alapfeltevéseibe szükségtelen korlátozásokat vezetünk be, tehát az általánosság hiánya.

FARKAS GYULA tudományos kutatásai az elméleti fizika számos és a matematika néhány kérdésére vonatkoznak. Van egy FABINYI RUDOLFFal közösen végzett kísérleti vizsgálata is. Eredményeit hazai és külföldi francia és német szakfolyóiratokban közölte. Általános fizikai felfogására tanulságos rektori beszéde a kolozsvári F. J. tudományegyetem 1907/8. tanéve megnyitásánál. (65). Fel kell említenem előadásait is, melyekben az általánosság és szigorúság követelményének kiemelésével igen egyéni módon és egyéni tárgybeosztás szerint tárgyalja az elméleti fizika főbb fejezeteit és melyekben új, értékes megállapításokat is közöl. Irodalmunk jelentékeny vesztesége, hogy FARKAS GYULA nem tudta elhatározni magát arra, hogy ezeket az egy vektor-tan kivételével könyvalakban kiadja, azt hiszem jelentékeny hatásuk lett volna a hazai fizika fejlődésére.

FARKAS GYULA érdeklődése eleinte elsősorban a zene, majd a matematika felé fordul és első dolgozatai zenei és matematikai tárgyúak. Matematikai értekezései egy részét VILLARCEAU és HERMITE mutatták be a párisi Académie des Sciencesban. Ezek algebrai problémákra, mint lineáris egyenletrendszerek megoldására (10), algebrai egyenletek képzetes gyökeinek meghatározására (11, 12, 17, 18), trinom egyenletekre (19), a gyökök sorfejtéssel való meghatározására (14) vonatkoznak. Majd áttér függvény-tani problémákra: több dolgozatában az elliptikus függvényekkel (20, 21), a magasabbrendű sinusfüggvénnyel (22, 23, 24, 25) és alkalmazásaival, elliptikus integrálok sorbafejtésével (28), JACOBINAK a HAMILTON-féle kanonikus egyenletekre vonatkozó tételének általánosításával (32), egyértékű függvényekkel (31) foglalkozik. Egyik dolgozatában (30) az általa BOLYAI-féle algoritmusnak nevezett, az $x^m = a + bx$ egyenlet megoldására szolgáló iteráló eljárást teszi tanulmány tárgyává. Ugyancsak az iterálás képezi tárgyát a «Sur les fonctions iteratives» című, a Journal de Mathematiques-ban 1884-ben megjelent sokszor idézett dolgozata (33), mely iterálás által nyerhető függvények analitikai karakterének megállapításával és az iterálási proceszus konvergenciájával foglalkozik.



Geometriai tárgyú dolgozata is van kettő: egyik PASCAL-bigavonalával (29), a másik egymásra lefejthető felületekkel (37) foglalkozik.

Tudományos működése első szakában, 1865-től 1887-ig, 25 matematikai tárgyú és négy fizikai, köztük egy az inga közepes tengelynyomását tárgyaló (26) dolgozata jelent meg.

1887-től a kolozsvári F. J. tudományegyetem matematikai fizikai tanszékére való kineveztetésével érdeklődése elsősorban a fizika felé fordul. Későbbi igen jelentékeny, a linearis egyenlőtlenségekre vonatkozó matematikai vizsgálatai is szoros összefüggésben vannak mechanikai vizsgálataival, ezért ezekre azok tárgyalásánál fogok kitérni.

1887-ben jelent meg egyetlen kísérleti tárgyú dolgozata, mely a szén oxydálása által nyert állandó elektromos áramra vonatkozik. (35).

Foglalkozik a GALILEI-féle távcső látóterének elméletével (36) majd a fizikai kémia problémái, így az elemek MENDELEJEFF-féle periodikus rendszere (34) és a kémia thermodynamikai vonatkozásai (34, 39, 40, 41, 42, 44) érdeklik. Azután a thermodynamika második főtétele felé fordul (38, 40) és annak mechanikai értelmezésével a LAGRANGE-féle mechanikai egyenletek alapján (43) foglalkozik, majd később a második főtétel elegáns fenomenologiai levezetését adja (49) az érvényesség előfeltételeinek szabatos megjelölésével.

1893-ban azokat az elektromos áramelemekre ható elemi törvényeket határozza meg, melyeknek észlelhető hatása, ami mindig zárt áramkörre vonatkozik, az AMPÈRE-féle elemi törvény alapján számított hatással megegyezik. (47).

Ugyancsak 1893-ban részt vesz Paduában GALILEI tanszékfoglalásának 300 éves jubileumán (46) és ezen alkalomból (45) egy történeti tárgyú dolgozata a virtuális sebességek elvével GALILEINÉL foglalkozik. Ezzel oly probléma lépett FARKAS GYULA látókörébe, mely évekig lekötötte, sőt egész fizikai világfelfogásának centrumává vált és amelyre vonatkozó mélyreható tanulmányai tudományos működésének legkimagaslóbb részét képezik.

A virtuális elmozdulások vagy virtuális munka elvében találta meg a mechanika alaptörvényének legegyszerűbb és legáltalánosabb kifejezését, még pedig nem annak egyenlőséggel kifejezhető szokásos alakjában, hanem FOURIERTŐL eredő, egyenlőtlenység által jellemzett formájában.

Ezen a mechanika tapasztalati alapját képező elv érvényesége előfeltételeinek, a használt fogalmak szabatos kidolgozásának megállapítására, valamint az elv alkalmazásainak vizsgálatára és az elv történetére vonatkozik FARKAS hét dolgozata (48, 50, 51, 54, 56, 59, 61) és ide sorolhatjuk a bár tiszta matematikai tárgyú, de az elv tárgyalásának matematikai alapját képező, a lineáris egyenlőtleniségekre vonatkozó kutatásait. (51, 54, 58, 60, 71, 72, 73, 74, 76) (9 dolgozat).

FARKAS GYULA a legnagyobb óvatossággal és körültekintéssel járt el mindazon segédfogalmak bevezetésénél, melyekre az elv kimondására szükségünk van; mint a koordinátarendszer, a kényszerűt gyakorló kényszerállomány bevezetésénél, melynél megkülönbözteti a teleprendszert, melynek mozgása függetlennek vehető a rendszer mozgásától és a kapcsoló rendszert, melynek tömege elenyésző a rendszer tömegeihez képest.

A kényszererőt úgy definiálja, mint a tömeg és gyorsulás szorzata által megadott valóságos erő és a szabad erő különbségét. A szabad erő pedig az az erő, mely akkor is hatna, ha a kényszerállományt a rendszer pontjainak közvetlen környezetéből eltávolítanók.

Ha a virtuális elmozdulás komponenseit mint a kényszerfeltételek által megengedett δx_i , δy_i , δz_i és valóságos dx_i , dy_i , dz_i elmozdulások különbségeit definiáljuk $\delta x_i = dx_i - dx_i, \dots$ úgy a FOURIER-féle elvet a következő egyenlőtlenység fejezi ki:

$$\sum_i \{ (m_i \ddot{x}_i - X_i) \delta x_i + (m_i \ddot{y}_i - Y_i) \delta y_i + (m_i \ddot{z}_i - Z_i) \delta z_i \} \geq 0, \quad (1^*)$$

hol m_i az i -ik pont tömege, \ddot{x}_i , \ddot{y}_i , \ddot{z}_i a gyorsulás komponensei, X_i , Y_i , Z_i a szabad erő komponensei.

Szóval kifejezve virtuális elmozdulásnál a kényszererők munkája negatív nem lehet. A kényszerűt általában lineáris relációk

fejezik ki, még pedig egyenlőségek és egyenlőtlenségek a virtuális elmozdulás komponensei közt:

$$\sum_{i=1}^n (A_{ik} \delta x_i + B_{ik} \delta y_i + C_{ik} \delta z_i) = 0,$$

$$k = 1, 2, \dots, j, \quad j \leq 3n, \quad (2^*)$$

$$\sum_{i=1}^n (L_{ik} \delta x_i + M_{ik} \delta y_i + N_{ik} \delta z_i) \geq 0,$$

$$k = 1, 2, \dots,$$

hol az együtthatók a koordináták és az időnek általában differenciálható függvényei, melyek számára diszkrét folytonosság szakadási helyeket megenged. A kényszer független egyenleteinek száma nem lehet nagyobb, mint a változók száma. Ugyanezt fel szokták tenni az egyenlőtlenségekre is. FARKAS GYULÁNAK érdeme, hogy kimutatta azt, hogy a független egyenlőtlenségek száma nem bír felső határral, ha a változók száma kettőnél nagyobb. Független egyenlőtlenségek alatt olyanokat értünk, melyek mindegyike újabb korlátozást jelent a változók számára. Ez a tétel FARKAS GYULA idevonatkozó kutatásainak egyik érdekes eredménye.

Ha:

$$\theta_i \equiv A_{i1} x_1 + A_{i2} x_2 + \dots + A_{in} x_n \quad (3^*)$$

és

$$\theta'_i \equiv A'_{i1} x_1 + A'_{i2} x_2 + \dots + A'_{in} x_n$$

az x, \dots, x_n n változó homogén lineáris formája és a változók-nak minden a

$$\theta_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k \leq n., \quad \theta'_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4^*)$$

lineáris relációrendszert kielégítő értékénél fennáll a

$$\vartheta \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \geq 0 \quad (5^*)$$

lineáris homogén reláció, úgy azt mondjuk, hogy (5^*) reláció a (4^*) relációrendszer következménye.

Ezen esetben mindig található olyan λ multiplikátorok és λ' nem-negatív multiplikátorok, hogy ϑ a következőképen állítható elő:

$$\vartheta \equiv \lambda_1 \theta_1 + \lambda_2 \theta_2 + \dots + \lambda'_1 \theta'_1 + \lambda'_2 \theta'_2 + \dots \quad (6^*)$$

Azt is kimutatta egy lineáris relációrendszer kielégítő változóira, hogy ezek előállíthatók részint mint tetszésszerű v_i , részint mint nem-negatív w_i paraméterek lineáris kifejezései:

$$x_i = \sum_{k=1}^m F_{ik} v_k + \sum_k P_{ik} w_k, \quad w_k \geq 0, \quad (7^*)$$

hol F_{ik} és P_{ik} meghatározott számok.

A lineáris egyenlőtlenségek rendszereivel ily általánosságban FARKASON kívül csak MINKOWSKI foglalkozott, ki «Geometrie der Zahlen» című híres művében FARKASSAL majdnem egyidejűleg állapította meg ezen tételeket. Igen tisztelt kollegám és barátom HAAR ALFRÉD FARKAS tételeit geometriai megfontolások segítségével inhomogén egyenlőtlenségekre általánosította. FARKAS GYULA is foglalkozott később oly nem-lineáris egyenlőtlenségekkel, melyek lineárisak rendszerére redukálhatók (71, 72) és ezek thermodynamikai alkalmazásával. (69).

Az egyenlőtlenségek tanára FARKAS GYULA legújabbban is (76) visszatért és az n -dimenziós vektorok és a konvex test fogalmának felhasználásával rendkívül egyszerűen állította elő az ezekre vonatkozó főtételeket és állapított meg új, érdekes, az egyenlőtlenségek közt fenálló reciprocitási relációkat.

Az egyenlőtlenségekre vonatkozó vizsgálatok alapját képezik a mechanika tárgyalásának a FOURIER elv alapján. Mivel az elvet kifejező (1*) egyenlőtlenség a változóknak ($\partial x_i, \dots$) a kényszer kielégítő összes értékeinél teljesül, az a kényszer relációrendszerének következménye és így úgy a multiplicatoros, mint a parameteres előállítás alkalmazható és oly relációrendszerekhez vezet, melyek a LAGRANGE-féle multiplicatoros illetőleg parameteres egyenleteknek felelnek meg és azok általánosításait képezik.

Ezek a szokottnál sokkal általánosabb megfontolások igen egyszerű, egyáltalában nem mesterkéltné is alkalmazást találnak és nélkülözhetetlenek. Így, ha egy test egy merev testnek csak egyik felületén lehet jelen, pl. ez a krétadarab csak az asztal felső lapján, úgy a kényszer már egyenlőtlenség fejezi

ki. Ezt helyettesíthetjük ugyan egy egyenlettel, ha a test mindig a felületen mozog, de nem helyettesíthetjük, ha a mozgás folyamán elhagyja a felületet. Épigy az az eset, midőn a kényszerfeltétel független egyenlőtlenségeinek száma nagyobb, mint a változók száma, meg van valósítva, ha egy merev pontrendszer egy síkfelülettel egy konvex síkpolygonban érintkezik, melynek szögpontjainak száma háromnál nagyobb. Egyenlőtlenségek által megadott kényszer esetében a mechanikai állapot létezésének egyenlőtlenségi feltételei is vannak, melyeket a FOURIER-féle elv szintén megad.

Nem követhetem FARKAS GYULA idevonatkozó vizsgálatainak további finom részleteit. Csak azt említem meg, hogy meg gondolásait a surlódás esetére is kiterjesztette, midőn a kényszerrelációk együtthatói a sebességtől is függenek.

Tekintetbe veszi azt az esetet is, midőn a kényszert a változók egyes különböző tartományaiban más relációrendszer fejezi ki.

Általánosítja meg gondolásait folytonosan kiterjedt közegekre is.

Tekintetbe veszi azt a lehetőséget is, hogy az anyag több függetlenül mozgó komponensből áll, melyek a teret ugyan folytonosan töltik be, de egymáson áthatolhatnak úgy, hogy a tér egy pontjában többféle sebességről beszélhetünk és a különböző komponensek különböző kényszerrelációknak lehetnek alávetve. (59). Ezen általánosításait az «Általános mechanikai elvek az aether számára» c., az Archiv Neerlandaises LORENTZ jubilaris kötetében is megjelent értekezésében fejtette ki.

A FOURIER-féle elv egész fizikai gondolkozásában centrális helyet foglalt el és ez előadásában is kellően kifejezésre jutott. A pontmechanika általános tételeit, valamint a speciális alkalmazásokat ebből vezette le és a deformálható testek mechanikájában a thermodynamika fundamentális egyenlőtlenségével kiegészítve a FOURIER-féle elv egyenlőtlenségét, állapítja meg az egyensúly feltételeit. (66, 67, 81).

Ide vonatkozik vizsgálata a biztos thermodynamikai egyen-

súly megállapítására. (59). A biztos egyensúlyra vonatkozólag részletes vizsgálatok vannak, ha a

$$d\varepsilon - Td\eta - d\mu \quad (8^*)$$

kifejezés, melyben ε az anyagi rendszer teljes energiájának és kinetikus energiájának különbsége, T az abszolút hőmérséklet, η az entropiája, $d\mu$ az anyagi rendszerrel közölt munka dt idő alatt, teljes differenciállá alakítható. FARKAS kimutatja, hogy ezen feltevés nélkül is lehetséges biztos egyensúly. Az általa nyert egyensúlyi feltételeket néhány érdekes speciális esetre is alkalmazza.

Mielőtt FARKASnak az elektrodinamikára vonatkozó beható vizsgálataira reátérnék, felemlitem a HUYGENS-féle elv KIRCHHOFF-féle alakjának új és rendkívül elegáns levezetését, (53) a gáz-diffúzió KIRCHHOFF-féle egyenleteinek redukálását (55) valamint megjegyzéseit a vektorok tanához és az elektromosságtanhoz (57, 58) és levelét HILBERThez, (63) melyben a HUGONIOT-féle lökeshullámok tárgyalásánál azt a feltevést, hogy bizonyos állapothatározók, mint sűrűség és sebesség, bizonyos felületeken át ugrásszerűen változnak, gyors, de folytonos változással helyettesíti és így is megkapja ugyanazt az eredményt.

FARKAS beható tanulmányokat folytatott a LORENTZ-féle elektronelmélet hatása alatt. (66, 67). Itt is az a gondolat vezette, hogy elimináljon az elméletből mindent, ami speciális és nem szükséges a tapasztalat által ellenőrizhető összefüggések előállítására. Arra a meggyőződésre jutott, hogy az elméletre lényeges a függetlenül mozgó elektromos töltések felvétele, de nem lényeges, hogy ezeknek véges különálló részekből való szerkezetet tulajdonítsunk. Az elektromosság fluidum elméletét alkotta meg a modern követelményeknek megfelelően, melyben a függetlenül mozgó, egymáson áthatolni képes folytonos komponenseken van a fősúly, melyek mechanikájával már régebben foglalkozott. (59). Ha dipolusokról, pentapolusokról beszél, ezeknek nem tulajdonít olyan értelmet, mint a korpuskuláris elmélet, mert ezen polusrendszerek nála nem különülnek el, hanem

folytonosan töltik be a teret és a hellyel folytonosan változnak. Az így kialakult elmélet előállítja a LORENTZ-féle elektronelméletnek a középértékekkel értelmezhető mennyiségekre, mint áramsűrűség, a töltés sűrűsége, dielektromos polárosság stb. vonatkozó törvényszerűségeit. Természetesen ez a tárgyalás kiegészítésre szorulna, ha tárgyalása körébe óhajtaná vonni azon jelenségeket is, melyek egyes elektronokra és nem középértékekre vonatkoznak, mint a scintillációt, a WILSON-féle ködkísérletet avagy MILLIKAN kísérletét, amint ennek FARKAS GYULA teljes tudatában van. Amint ismeretes, történtek az utóbbi években igen jelentékeny, mélyreható kísérletek a korpuskulának a kontinuitási elmélet alapján való értelmezésére (MIE, EINSTEIN, SCHRÖDINGER) anélkül, hogy teljes eredményt értek volna el. Nem tudhatjuk, nem fog-e FARKAS némely gondolata szerepet játszani a kontinuitási elmélet továbbfejlődésében. Mindenesetre jelentékeny érdeme FARKAS GYULÁNAK, hogy megmutatta azt, hogy a LORENTZ-féle elektronelmélet eredményeinek jelentékeny része független az elektromosság diszkrét szerkezetének felvételétől.

Felemlítésre méltó FARKAS felfogásában a MAXWELL-féle egyenletek szerepe. Nem az elektromágneses teret tekinti a tulajdonképeni fizikai realitásnak, hanem a töltéseket. Az elektromágneses tér csupán egy segédszerkesztés jelentőségével bír, mely arra való, hogy a töltések mozgására belőle következtetéseket vonhassunk. A tulajdonképeni alapegyenlet a töltés megmaradását kifejező kontinuitási egyenlet. Ennek parameteres megoldásai a MAXWELL-féle egyenletek az elektromos és mágneses térintenzitásokkal, mint vektorparameterekkel. Az persze külön tapasztalat, hogy ugyanezen vektorok ismert módon mérvadók a töltésre gyakorolt erőre nézve is. Az elektromágneses térre vonatkozó hasonló felfogásnak legújabbán sok vezető fizikus, mint BOHR, BORN, KRAMERS stb. adott kifejezést.

Végre jelentékeny érdeme FARKAS GYULÁNAK, hogy a relativitás elméletének jelentőségét azonnal fölismerte, oly időben midőn a szakkörök tudományos centrumokban sem voltak vele tiszt-

tában. Miután EINSTEIN 1905-ben a relativitás postulátumát felállította, FARKAS már 1906-ban egy értekezésében (62) foglalkozik vele és azóta öt (64, 66, 67, 70, 75) további értekezése vonatkozik ezen tárgyra. Az elektromosság folytonossági elméletében eleve számol a relativitás követelményeivel. Azonkívül megadja a relativitás elmélete szempontjából a virtuális munka, továbbá merevségi, a surlódástalan folyékonysági állapot, rugalmasság és érintkezési kényszer kifejezéseit.

Egy 1921-ben megjelent dolgozata (75) a gravitáció elméletének beillesztését a speciális relativitás elmélet gondolkörébe célozza az egy test problémája esetében. A négy dimenziós MINKOWSKI-féle térben egy forgásfelületet definiál, melyen a pont kényszermozgása a gravitáció hatása alatti pontmozgásnak felel meg. Itt is a virtuális munka elvéből indul ki, melyet négyesvektorokkal fejez ki.

Az «Energia terjedése» c. (81) előadásában a LORENTZ transzformációt abból a föltevésből vezeti le, hogy: 1. a transzformáció véges, 2. a téridősokaság komform látóképezése 3. van egy sebesség mely mindkét téridőrendszerben ugyanazon nagyságú, helytől, időtől, iránytól független. A LORENTZ transzformáció ezen levezetését később C. MUNARI is megállapította és közölte.¹

Egy másik dolgozatában (60) ZEMPLÉN GYÖZÖNEK a MICHELSON-féle kísérlet magyarázatára vonatkozó feltevéseinek a relativitás elméletéhez való viszonyát tárgyalja.

Azon a tényen, hogy FARKAS GYULA, a klasszikus mechanika alapjainak éleselméjű kutatója és a fenomenologikus irányzat művelője oly gyorsan és előszeretettel karolta fel a relativitás elvét, csak a felületes szemlélő csodálkozhat. Mert bár a relativitás elve megszokott fogalmak nagymérvű módosítását kívánja, ezek a módosítások annak számára, ki a klasszikus fizika alapfogalmait kellő absztrakt módon fogta föl, lehetnek merészek, de sohasem paradoxok. Az egész relativitás tana egy igen egy-

¹ C. MUNARI. Rendiconti del Reale Accademia dei Lincei. XXIII. 781. 1914.

séges lezárt rendszert képez és inkább tekinthető a klasszikus fizika betetőzésének mint megdöntésének. Ez főképp nyilvánvalóvá válik ha a relativitás elvét a quantumelmélettel hasonlítjuk össze, mely a fizikai alapfogalmak sokkal mélyrehatóbb átalakulását vonta maga után.

FARKAS GYULA tudományos működésének ez az ismertetése vázlatos és szükségképen egyoldalú, bár reményilem, hogy legalább egyes alapvonásaiban nem ad elhibázott képet tudományos egyéniségéről. Egész beállítása a szigorúságra és általánosságra alkalmatlanná teszi működését rövid ismertetésre. De aki hajlandó magának fáradságot venni arra, hogy egynémely vizsgálatába elmélyedjen, abban tiszta örömet fog találni és értékes tanulságot fog belőle meríteni. Nem is volt más célja ezen előadásomnak, mint hogy ezen rejtett, még nagyon kevésbé ismert kincsekre figyelmüket felhívjam, hogy azok éltető és főképp a gondolkozást fegyelmező hatásukat lehetőleg széles körben kifejthessék.

Ortvay Rudolf.

Farkas Gyula tudományos értekezései.

Rövidített jelölések:

- C. R.* = Comptes Rendus des séances de l'académie des sciences de Paris.
M. T. É. = A Magyar Tud. Akadémia Matematikai és Természettudományi Értesítője.
N. B. U. = Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Kiadja M. Tud. Akadémia.

1865.

1. A zene erkölcsi szempontból. Kisbarnaky (nemesi prædikatum) néven. Zenészet Lapok 1865. nov. 9.
2. Némely hangzat tilos voltának az oka. Kisbarnaky néven. Zenészet Lapok 1865. dec. 14.

1866.

3. Hogyan eszközölhető, hogy nyelvünk versmértéke megegyezzek a ráírt dal mértékével. Kisbarnaky néven. Zenészet Lapok 1866. jan. 10.

1870.

4. Die Diatonische-Durscala wissenschaftlich begründet. 1—12. Különnyomat. Taborszky és Parsch. Pest. 1870.

5. A gyülemcsék képtávolának általános pontos képlete. Székesfehérvári alreáliskola évkönyve. 1870/71.

1871.

6. Egy homályos pont a betűszámokban. A székesfehérvári tanítóképezdei póttanfolyam értesítője. 1871.

1872.

7. Természettan elemei. Népiskolák számára. Szimmer Kálmán kiadása. Székesfehérvár. 1872. 1—63.

1874.

8. A fénysugarak törésmutatója és rezgésszáma. 1—8. A székesfehérvári «Vörösmarty» nyomda. 1874. Különlenyomat.

1877.

9. A determinansok. Genève 1877. BALTZER művének magyarázatokkal ellátott első szakasza.

1878.

10. Solution d'un système d'équations linéaires, présentée par M. Yvon Villarceau.

C. R. LXXXVII. 1878. 523—526.

11. Note sur la détermination des racines imaginaires des équations algébriques. Extrait d'une lettre communiquée par M. Yvon Villarceau.

C. R. LXXXVII. 1878. 791—794.

12. Sur la détermination des racines imaginaires des équations algébriques. Extrait d'une lettre communiquée par M. Yvon Villarceau. (Folytatás.)

C. R. LXXXVII. 1878. 1027—1029.

13. Matematikai tanulmányok. I. A deriváció elmélete 1—79. Budapest. Athenæum R. T. nyomdája 1878.

14. Vegyes m -ed fokú egyenlet egyik gyökének meghatározása sorbafejtés által 1—16. Budapest. Athenæum R. T. ny. 1878.

15. A háromtagú algebrai egyenlet hatványai és még — valami. 1—6. Győr. 1878. Különlenyomat. Czéh Sándor nyomdája.

1879.

16. A C. R. 1879 évt. 1030. lapján a következő közlemény olvasható: M. le Secrétaire perpétuel signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

4° Une brochure de M. J. FARKAS, portant pour titre «Généralisation du logarithme et de l'exponentielle». (Présentée par M. Yvon Villarceau.) Megjelent Budapesten Kiliánnál 1879-ben. V. és 122.

17. Note sur la détermination des racines imaginaires des équations algébriques. (Extrait d'une lettre communiquée par M. Yvon Villarceau.) (Folytatás.)

C. R. LXXXVIII. 1879. 273—275.

18. Note sur la détermination des racines imaginaires des équations algébriques (suite et fin). Extrait d'une lettre communiquée par M. Yvon Villarceau.

C. R. LXXXVIII. 1879. 565—567.

19. Auflösung der dreigliedrigen algebraischen Gleichung. Archiv der Mathematik und Physik. 64. Teil. Erstes Heft. IV. 1—8. Greifswald. 1879.

1880.

20. Sur une classe de deux fonctions doublement périodiques, présentée par M. Yvon Villarceau.

C. R. XC. 1880. 1269—1271.

21. Sur les fonctions elliptiques, présentée par M. Yvon Villarceau.

C. R. XC. 1880. 1482—1484.

22. Sur l'application de la théorie de Sinus des ordres supérieurs à l'intégration des équations différentielles linéaires. (Extrait d'une lettre adressée à M. Yvon Villarceau.)

C. R. XC. 1880. 1542—1545.

23. Sur la théorie de Sinus des ordres supérieurs, communiquée par M. Yvon Villarceau.

C. R. XCI. 1880. 209—211.

24. Sur la théorie de Sinus des ordres supérieurs, communiquée par M. Yvon Villarceau.

C. R. XCI. 1880. 278—281.

25. Sur la théorie des Sinus des ordres supérieurs. Extrait d'une lettre à M. Yvon Villarceau.

C. R. XCI. 1880. 544—547.

26. Mittlerer verticaler Druck des symmetrischen Pendels auf seine Axe. Archiv der Mathematik und Physik. 65. 1880. 435—436.

27. Die Summe gleichartiger Potenzen von den Wurzeln einer algebraischen Gleichung. Archiv der Math. u. Phys. 65. 1880. 433—435.

1881.

28. Sur le développement des intégrales elliptiques de première et de deuxième espèce etc., présentée par M. Yvon Villarceau.

C. R. 1881. XCII.

29. PASCAL biga-vonalának elemzése. Budapest. Athenæum R. T. nyomdája 1881. 1—23.

30. A BÓLYAI-féle algorithmus. Értekezések a matematikai tudományok köréből, kiadja a M. Tud. Akadémia. VIII. kötet III. szám. 1881. 1—8.

1883.

31. Sur les fonctions uniformes, communiquée par M. Yvon Villarceau. C. R. XCVI. 1883.

1884.

32. Généralisation du théorème de JACOBI sur les équations de HAMILTON, présentée par M. Hermite.

C. R. XCVIII. 1884.

33. Sur les fonctions itératives. Journal de Mathématiques. X. 1884. 101—108.

1887.

34. Elmékedések a modern chemia némely hypothésisei és theoriái körül. Vegytani Lapok. Kolozsvár. 1887. V. 49—65 és 112—128.

35. FABINYI RUDOLF és FARKAS GYULA. Állandó elektromos áram a szén oxydálása által. Vegytani Lapok. Kolozsvár. 1887. V. 97—112.

Ugyanaz franciául. C. R. CVI. 1597. 1887.

36. A GALLEI-féle táveső látóterének elmélete és hármás decentrálás alkalmazása a kettős látcső hibáinak redukálására. Orvos-természettudományi Értesítő. Erdélyi Múzeumegylet Kolozsvár. 1887. 273—298.

Ugyanott németnyelvű kivonat. 363—365.

1888.

37. Az egymásra teríthető felületek problémájáról. Erdélyi Múzeumegylet Orvos-természett. Értesítője. Kolozsvárt. 1888 ? 260—265.

38. A thermodynamika második főtételének általánosságáról.

Ugyanott. Évszám nem biztos. 241—248.

Ugyanaz ugyanott német nyelven. 279—288.

39. A chemiai és elektromos energia vonatkozásairól.

Ugyanott. 1888. 33—38.

Ugyanaz. Zeitschrift für allgemeine Chemie. 1888. III. (Märzheft.)

40. A természet felfogásának újabb módjairól.

Ugyanott. 1888. 25—42.

41. Újabb chemiai elméletek és nézetek. (Ismertetés.) Vegytani Lapok. 1888. VI. 17—20.

42. Megjegyzések a folyadékok elméletéhez. (D. KONOWDOW.) (Ismertetés.) Vegytani Lapok. 1888. VI. 60—66.

1890.

43. A LAGRANGE-féle egyenletek thermodynamikai értelmezéséről. Orvos-természettud. Értesítő. Kolozsvárt. 1890. 1—16.

1892.

44. Az egyenletes és állandó elektromos áramlás elméletéről. Orvos-természettud. Értesítő. Kolozsvárt. 1892.

1893.

45. A virtualis sebességek elve GALILEINÉL. Mathematikai és Physikai Lapok. 1893. 78—95.

46. GALILEIÖRÖL S A PÁDUAI GALILEI ÜNNEPLÉSÉRŐL.

Ugyanott. 1893. 65—77.

Kivonat ugyanerről. Természettudományi Közlöny. 1893. 196—201.

47. Az AMPÈRE-féle elemi törvények aequivalenseinek meghatározása. Értekezések a matematikai tudományok köréből. Kiadja a M. Tud. Akadémia 1893. XV. 2 sz. 1—50.

Kivonat ugyanabból franciául. N. B. U. XI. 1893. 161—182.

1895.

48. A FOURIER-féle mechanikai elv alkalmazásai. M. T. É. XII. 459—472. Ugyanez németül. N. B. U. XII. 263—281.

49. A CARNOT-CLAUSIUS-féle tétel egyszerűsített levezetése. Mathematikai és Physikai Lapok. 1895. 7—11.

Ugyanaz németül. N. B. U. XII. 282—286.

50. A FOURIER-féle mechanikai elv története és némely speciális alkalmazásai. Erdélyi Múzeumegylet Értesítője. 1895. 43—54 és 13—32.

1896.

51. A FOURIER-féle mechanikai elv alkalmazásainak algebrai alapjáról. Mathematikai és Physikai Lapok. 1896. 49—54.

1897.

52. Beszéd BRASSAI SÁMUEL koporsója mellett. Kolozsvárt. 1897. Ima és beszédek Brassai Sámuel koporsója mellett. Ajtai könyvnyomdája.

53. A HUYGENS-féle elv új levezetése. M. T. É. XV. 1897. 283—287.

1898.

54. A FOURIER-féle mechanikai elv alkalmazásainak algebrai alapja. M. T. É. XVI. 1898. 361—364.

Ugyanaz németül. N. B. U. XVI. 1899.

55. A gáz-diffúzió KIRCHHOFF-féle egyenleteinek reductiója. M. T. É. XVI. 1898. 201—217.

Ugyanaz németül. N. B. U. 1899. 97—110.

56. Parameteres módszer FOURIER mechanikai elvéhez. Mathematikai és Physikai Lapok. 1898. 63—71.

57. Pótlások a vektortanhoz és az elektromágnesség tanához. M. T. É. XVI. 1898. 321—360.

Ugyanaz németül. N. B. U. XVI. 1899. 111—153.

1900.

58. Vektor-tan és az egyszerű inaequatiók tana. Különlenyomat az Erdélyi Múzeumegylet Értesítője után. Kolozsvárt. 1900. I—XIV. és 1—165.

1901.

59. Általános mechanikai elvek az aether számára. M. T. É. XIX. 1901.

Ugyanaz az Archiv Neerlandaises Livre jubilaire dédié à H. A. LORENTZ-ben.

1902.

60. Theorie der einfachen Ungleichungen. Crelle Journal. 124, 1902. 1—27.

1906.

61. Beiträge zu den Grundlagen der analytischen Mechanik. Crelle Journal. 131, 1906. 165—201.

62. Über den Einfluss der Erdbewegung auf elektromagnetische Erscheinungen. Physikalische Zeitschrift. VII. 1906. 654—658.

63. Über die Ableitung der Impulsgleichung gewöhnlicher Stosswellen. (Aus einem Brief an Herrn HILBERT.) Mathematische Annalen, 62. 1906. 582—584.

1907.

64. Über das Postulat der Relativität. Phys. Zeitschr. VIII. 1907. 169—170. (Berichtigung 256.)

65. Beszéd, mellyel mint a kolozsvári F. J. tud. egyetem rektora az 1907/8. tanévet megnyitotta. Kolozsvár.

1910.

66. Alapvetés az elektromosság és mágnesség folytonossági elméletéhez. M. T. É. XVIII. 1910. 1—25.

1911.

67. Alapvetés az elektromosság és mágnesség folytonossági elméletéhez. M. T. É. XIX. 1911. 771—809.

66. és 67. együtt németül. N. B. U. 31. 1913. 45—64.

68. FARKAS GYULA l. t. beszéde BÓLYAI JÁNOS hamvainak atyja mellett elhelyezése alkalmával. Marosvásárhelyt, 1911 július 7. Akadémiai Értesítő. 1911. 526.

1915.

69. Biztos egyensúly potential nélkül. M. T. É. XXXIII. 1915. 339—354.
 70. MICHELSON negatív kísérletének magyarázatai. M. T. É. XXXIII. 1915. 355—361.

1917.

71. Multiplicatoros módszer négyzetes alakhoz. M. T. É. XXXV. 1917. 51—53.
 69. és 71. összefoglalása németül. N. B. U. XXXII. 43—56.
 72. Nem-vonalas egyenlőtlenségek vonalassá tétele. M. T. É. XXXV. 1917. 41—50.

1918.

73. Egyenlőtlenségek alkalmazásának új módja. M. T. É. XXXVI. 1918. 297—308.
 74. A linearis egyenlőtlenségek következményei. M. T. É. XXXVI. 1918. 397—408.

1921.

75. EINSTEIN-féle gravitáció régi elméletből. M. T. É. XXXIX. 156—163.
 A M. Tud. Akad. 1921. okt. 3. tartott üléséből.
 Ugyanaz németül N. B. U. 1921.

1926.

76. Alapvetés az egyszerű egyenlőtlenségek vektorelméletéhez. M. T. É. XLIII 1926. 1—3. Kivonat németül ugyanott.

Litografált előadási jegyzetek:

77. A mechanika alaptanai.
 78. Analytikus mechanika.
 79. Erőtan.
 80. Az energia átalakulása
 81. Az energia terjedése.

DAS WISSENSCHAFTLICHE LEBENSWERK VON JULIUS FARKAS.

(Vortrag, gehalten in der Mathematischen und Physikalischen Gesellschaft
 in Budapest, den 28. März 1927, anlässlich des 80-ten Geburtstages von
 JULIUS FARKAS.)

Die wissenschaftliche Arbeiten von JULIUS FARKAS, ord. Professor der
 theoretischen Physik i. R. an der ehemaligen ungarischen Universität
 in Klausenburg, beziehen sich auf mannigfaltige Probleme der Mathe-

matik und der theoretischen Physik. Seine Arbeiten, über achtzig an der Zahl, sind meist in ungarischen, deutschen und französischen Fachzeitschriften veröffentlicht.

JULIUS FARKAS war ein konsequenter Vertreter der phenomenologischen Richtung in der Physik und sein Augenmerk war immer auf grösstmögliche Allgemeinheit und Strenge gerichtet.

Seine hervorragendste Leistung war, dass er die Bedeutung, der von FOURIER herrührenden, durch eine Ungleichung dargestellten Form des Principes der virtuellen Verrückungen ins rechte Licht gesetzt, und auf Probleme der Mechanik und der Thermodynamik angewandt hat. Um die mathematische Grundlagen des Prinzipes entwickeln zu können, hat er sich eingehend mit der Theorie der linearen Ungleichungen befasst und die Hauptsätze dieser Theorie ungefähr gleichzeitig mit MINKOWSKI gefunden.

FARKAS hat auch eine, sich an die LÖRENTZ'sche Elektronentheorie anschliessende, aber die Annahme diskreter Teilchen nicht mitmachende Kontinuitätstheorie der Elektrizität entwickelt.

Mehrere seiner Arbeiten beziehen sich auf das Prinzip der Relativität, dessen Bedeutung er frühzeitig erkannte.

Seine übrigen Arbeiten beziehen sich in der Mathematik auf die Theorie der algebraischen Gleichungen, der elliptischen Funktionen, der iterativen Prozesse etc., und in der Physik unter anderem auf die geometrische Optik, auf das HUYGHENS'sche Prinzip, auf Stosswellen, auf Fragen der Thermodynamik etc.

R. Ortway.

A DE BROGLIE ÉS SCHRÖDINGER-FÉLE HULLÁMMECHANIKA.

Előadta a szerző a Matematikai és Fizikai Társulat 1927 január 27-én tartott ülésén.

Bevezetés.

A quantumelmélet kialakulásában három fázist különböztethetünk meg. Az első kezdeti fázisban a quantumelmélet a fekete sugárzás és a szilárd testek specifikus hőjének értelmezésével igazolta létjogosultságát. Fejlődésének új, második fázisába lépett akkor, midőn 1912-ben N. BOHR a quantumelmélet szempontjait a RUTHERFORD-féle atommodellre alkalmazta és ezzel a spektrumok értelmezésének lehetőségét megnyitotta. A következő években sikerült nemcsak az optikai és RÖNTGEN-spektrumok rendezése, hanem a ZEEMAN és STARK-effektusok értelmezése is, és ezenkívül a quantumelmélet még számos más jelenség értelmezésénél is helyes útmutatóul mutatkozott. Ezenkívül az elmélet empirikus alapjai is közvetlen kísérleti igazolást nyertek FRANCK és HERTZ kísérleteiben. Így a quantumelmélet fizikai világfelfogásunk nélkülözhetetlen és jól megalapozott részévé vált, anélkül azonban, hogy alapfeltevéseit harmonikusan sikerült volna a többi fizikai alapfeltevések rendszerébe beilleszteni. Sőt mindinkább nyilvánvalóvá vált, hogy alapfeltevései semmiképp sem vezethetők vissza a mechanika és elektrodinamika ismert alaptörvényeire, hanem azokkal szemben önálló, heterogén elemet képviselnek.

Azonban az is nyilvánvaló volt, hogy az az állapot, mely szerint a fizikai jelenségek heterogén, össze nem illő alaptör-

vényekre vezethetők vissza, csak tudásunk tökéletlenségében gyökeredző provizórikus állapot, és az egység helyreállítása, bár az elektrodynamika vagy mechanika alapfeltevéseinek módosítása árán, elkerülhetetlen.

Két, kiindulási pontjában és módszereiben merőben eltérő, lényeges eredményeiben megegyező, igen jelentékeny kísérlet történt ezen irányban. Az egyik a HEISENBERG kezdeményezésére és BORN és JORDAN közreműködésével kiépített quantummechanika, melyről a múlt évben volt alkalmam a Matematikai és Fizikai Társulatban referálni.¹ A másik a L. de BROGLIE² kezdeményezése után főképp E. SCHRÖDINGER³ által kiépített hullámmechanika.

1. §. A geometriai optika és a mechanika variáció elvei.

De BROGLIE meggondolásainak kiindulópontját az az analógia képezte, mely a mechanika és a geometriai optika közt fennáll, és mely már MAUPERTUIS-t és HAMILTON-t is vezette a róluk elnevezett mechanikai principiumok felállításánál. Ha egyelőre csak egyetlen tömegpont esetére szorítkozunk, úgy nyilvánvaló az analógia a pont pályája és egy fénysugár útja közt, ez az analógia volt irányadó a fény régi emissziós elmélete felállításánál. Ez az analógia azonban pontosabban is fennáll: úgy a pont mozgását, mint a fénysugár útját variáció elvek határozzák meg: a fénysugár pályáját a FERMAT-féle elv, a pont mozgását a HAMILTON-féle, vagy a legkisebb hatásnak elve.

¹ ORTVAY RUDOLF. Matematikai és Fizikai Lapok. XXXIII. p. 54. 1926. Újabb összefoglaló ismertetés: M. BORN, Probleme der Atomdynamik. Berlin. SPRINGER. 1926.

² L. DE BROGLIE: Thèses de doctorat. Masson et Cie. Paris 1924.

— — Ann. de Physique (10) 3. 22. 1925.

— — Journal de Physique 7. 321. 1926. (Összefoglalás.)

³ E. SCHRÖDINGER: Ann. der Physik. 79. p. 361, p. 489, p. 734; 80. p. 437; 81. p. 109; mind 1926. Összegyűjtve megjelentek: Abhandlungen zur Wellenmechanik. 1927. Leipzig, BARTH. Összefoglaló ismertetés: J. FLAMM. Phys. Zeitschr. 27. p. 600. 1926.

A FERMAT-féle elv szerint, ha egy fénysugár A pontból B pontba jut, a pályát a következőképpen határozzuk meg. Képezzük a következő integrált:

$$\int_A^B \frac{ds}{u}, \quad (1)$$

melyben ds a pálya íveleme, $u(x, y, z)$ a fény sebessége, mint a hely függvénye. A fénysebesség helyett a törésmutatót is bevezethetjük $n = \frac{c}{u}$ összefüggés alapján, melyben c a fénysebesség üres térben. A FERMAT-féle elv azt mondja ki, hogy a fenti integrál első variációja eltűnik, ha a végpontokat nem variáljuk, közben pedig a pálya variációja tetszésszerű:

$$\delta \int_A^B \frac{ds}{u} = 0. \quad (2)$$

Ez az elv magában foglalja a fény egyenesvonalú terjedésének tényét homogén közegben, a reflexió és törés törvényeit még abban az esetben is, ha a törésmutató (ill. fénysebesség) a hellyel folytonosan változik.

Az (1) integrál, ha tekintetbe vesszük, hogy a sebesség:

$$u = \frac{ds}{dt}, \quad (3)$$

nem más, mint az az idő, melyre a fénynek az A és B pont közti fénypálya befutására szüksége van:

$$\int_{t_A}^{t_B} \frac{ds}{u} = t_B - t_A = \int_{t_A}^{t_B} dt. \quad (4)$$

Ha most mindazon sugarakat tekintetbe vesszük, melyek A -ból kiindulnak, úgy ezek egy $\tau = t_A - t_B$ idő múlva oly pontokba érkeznek, melyek egy felületen fekszenek, melyet megkapunk, ha az (1) integrálban a kezdeti (A) pontot állandóan tartva, a végpontot úgy változtatjuk, hogy az integrál értéke állandó. (A) koordinátáit x_0, y_0, z_0 al (B)-ét x_1, y_1, z_1 -el jelölve lesz:

$$\Phi(x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1) = t_A - t_B. \quad (5)$$

Ez az egyenlet határozza meg azt a felületet, az ú. n. hullámfelületet, melynek a fénysugarak orthogonális trajektoriái.

A mechanika variáció elvei a FERMAT-féle elv analogonjait képezik és ezen analógia alapján fedezték is fel azokat.

Így a HAMILTON-féle elv szerint a mozgást a következő variáció feltétel határozza meg:

$$\delta \int_{t_0}^t L dt = 0. \quad (6)$$

L , a LAGRANGE-féle függvény a közönséges (nemrelativisztikus) mechanikában, ha mágneses erőktől is eltekintünk, nem más, mint a kinetikai és potenciális energia különbsége és mint ilyen a pont sebességeinek és koordinátáinak függvénye:

$$L(q_i, \dot{q}_i) = T - V, \quad (7)$$

ha q_i koordinátát, \dot{q}_i sebességet jelent.

A variációnál a koordináták variációja tetszőleges, kivéve a végpontokon, hol eltűnik; az idő nem variál.

Az

$$S = \int_{t_0}^t L dt \quad (8)$$

integrál általában a kezdet és végpont koordinátáitól fog függni, azonkívül $t - t_0$ időtől is:

$$S = S(q_1, q_2, q_3; q_{10}, q_{20}, q_{30}, t - t_0), \quad (9)$$

tehát állandóan tartott kezdőpont és $t - t_0$ időnél egy felületet definiál, mely a geometriai optika hullámfelületének analogonját képezi.

2. §. A Hamilton-Jacobi-féle parciális differenciálegyenlet.

Az S függvény kielégít egy parciális differenciálegyenletet, melynek megoldására redukálódik a mechanikai rendszer mozgásának meghatározása.

A rendszer összes energiája, a potenciális és kinetikus energia összege, a pontok koordinátáinak és sebességeinek függvénye. Célszerű a sebességek helyett más mennyiségeket, az ú. n. impulzusokat bevezetni, melyek tetszőleges általános koordináták esetében a következőképp vannak definiálva:

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}, \quad (10)$$

derékszögű koordináták esetében:

$$p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \frac{1}{2} \sum m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = m_i \dot{x}_i. \quad (11)$$

Fejezzük ki az összenergiát, mint a koordináták és az impulzusok függvényét és az így nyert függvényt, a HAMILTON-féle függvényt, jelöljük $H(q_i, p_i)$ -vel:

$$\begin{aligned} H(q_i, p_i) &= H(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = \\ &= T(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) + V(q_1, \dots, q_n). \end{aligned} \quad (12)$$

A HAMILTON-JACOBI-féle egyenletet megkapjuk, ha az impulzusokat S -nek a megfelelő koordináta szerinti deriváltjával helyettesítjük a HAMILTON-féle függvényben és ezt $-\frac{\partial S}{\partial t}$ -vel tesszük egyenlővé:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \dots, q_n; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right) = 0. \quad (13)$$

A (8) egyenlet által definiált függvény ezen egyenletet mindig kielégíti. Másrészt ezen egyenlet szolgálhat az S és így a mozgás meghatározására is. Ha ugyanis sikerül a (13) egyenlet oly megoldását találni, mely a koordinátákon és az időn kívül n tetszésszerűen állandót tartalmaz:

$$S = S(q_1, q_2, \dots, q_n; t, a_1, a_2, \dots, a_n), \quad (14)$$

úgy a mozgást a következő $2n$ egyenlet határozza meg:

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial a_i} = \beta_i, \quad (15)$$

hol β_1, \dots, β_n n tetszőleges integrációs állandó. Ezen $2n$ egyenlet lehetővé teszi, hogy a $4n+1$ mennyiség mint: $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t, a_1, \dots, a_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ közül $2n$ -et, így $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ -et, mint a többi $t, a_1, \dots, a_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ függvényét kifejezzük. Ha az a_i -k a koordináták kezdeti értékeit jelentik, úgy β_i az impulzusok kezdeti értékei és így a mozgás, mint a koordináták és impulzus kezdeti értékeinek és az időnek függvénye van kifejezve.

Ha H nem tartalmazza explicit az időt, úgy (13) megoldása mindig ily alakú:

$$S = -Et + S_0(q_i, a_i), \quad (16)$$

hol E a totális és az időben változatlan energia. Ugyanis behelyettesítve lesz:

$$H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) = E. \quad (17)$$

Vagy mivel $H = T + V$, továbbá:

$$T(q_i, p_i) = T\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) = E - V. \quad (18)$$

Derékszögű koordináták és egy pont esetében a kinetikus energia:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2), \quad (19)$$

tekintetbe véve, hogy

$$p_1 = m\dot{x}, p_2 = m\dot{y}, p_3 = m\dot{z};$$

a (18) egyenlet lesz:

$$\frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right\} = E - V, \quad (20)$$

azaz:

$$(\text{grad } S)^2 = 2m(E - V). \quad (21)$$

Az $S = \theta = \text{konst.}$ egyenlet egy felületet jelent t minden értékénél, melynek orthogonális trajektoriáit képezik a pont lehetséges pályái, mivel az impulzusok a felület normálisának iránykosinusaival arányosak, lévén $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$. Felrajzolhatjuk ezen

felületek seregét egy meghatározott t időben, úgy mindegyiket S egy meghatározott értéke jellemzi. A felületsereg az időben változatlan, csak az egyes felületekhez rendelt állandó lesz más, más időben, amint ez az

$$S_0(q_i) = Et + \theta \quad (22)$$

alakú előállításból kiderül. Úgy foghatjuk fel, hogy a $\theta = \text{konst.}$ értékkel jellemzett felületek vándorolnak, úgy, hogy a szomszédos felületek alakját veszik fel. A felület vándorlásának sebességét valamely pontjában megkapjuk, ha a (16) egyenletet $S = \theta$ állandóan tartásával az idő szerint differenciáljuk:

$$0 = -E + \sum \frac{\partial S_0}{\partial q_i} \cdot \frac{dq_i}{dt}, \quad (23)$$

azaz:

$$E = (\text{grad } S_0, u) = |\text{grad } S_0| \cdot u, \quad (24)$$

hol u a hullámok «fázissebessége». Beírva a grádiens értékét (21)-ből, lesz:

$$u = \frac{E}{\sqrt{2m(E-V)}}. \quad (25)$$

Ez a hely függvénye, mert V tartalmazza a koordinátákat.

A pont sebessége nem egyezik meg az S felületek fázissebességével. Ez lesz a kinetikus energia kifejezéséből:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m v^2 = E - V \quad (26)$$

$$v = \sqrt{\frac{2(E-V)}{m}}. \quad (27)$$

A pont sebessége és a fázissebesség reciproknak viszonyban vannak, ha az egyik nagy, a másik kicsiny. Az $S = \text{konst.}$ felületek felelnek meg a geometriai optika hullámfelületeinek, beszélhetünk tehát hullámfelületekről a mechanikában a fenti értelemben úgy, hogy a klasszikus pontmechanika kereteit nem lépjük át.

3. §. Általánosítás több pontból álló rendszerre.

Meggondolásainkat több pontból álló rendszerekre is, valamint általános koordináták alkalmazásának esetére is átvihetjük.

Ekkor a rendszer összes pontjainak helyzetét q_1, q_2, \dots, q_n általános koordináta határozza meg, ezen koordináták terében, az n dimenziós koordinátatérben, $S(q_1, \dots, q_n, a_1, \dots, a_n) = \text{konst.}$ egyenlet definiálja a hullámfelületeket. A kinetikus energia általános koordináták alkalmazásával a sebességeknek nem tisztán négyzetes, hanem általános homogén másodfokú formája lesz:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k} Q_{ik}(q_1, \dots, q_n) \dot{q}_i \dot{q}_k. \quad (28)$$

Meggondolásainkat ezen esetre könnyen átvihetjük, ha a konfigurációs térben egy nem-euklidesi ivelemet definiálunk a következőképpen:

$$ds^2 = 2T(q_l, \dot{q}_l) dt^2 = \sum_{i,k} Q_{ik} dq_i dq_k. \quad (29)$$

A gradiens, divergencia, LAPLACE-féle operator stb. fogalmait átvihetjük ezen térre és nem-euklidesi értelemben használjuk. Egy pont esetében derékszögű koordináták alkalmazásával a (29) ivelem a közönséges ivelemtől \sqrt{m} tényezővel különbözik és azért alkalmazásával (25) és (27) formulákban az m elmarad. Így a sebesség formulái változatlanul érvényesek több pontból álló rendszerekre is.

4. §. A periodicitás bevezetése. Az anyagi pont.

Az analógia, melyet eddig tárgyaltunk, a pontmechanika és a geometriai optika közt áll fenn. De a geometriai optika az optikai jelenségekről csak közelítésben ad számot az interferencia és elhajlásjelenségek kizárásával. A sugár fogalma elveszti jelentőségét oly dimenziókban, melyek a hullámhossz nagyságrendjével bírnak, vagy annál kisebbek. Ezen jelenségekről úgy tudunk számot adni, ha feltesszük, hogy a sugarak mentén a fizikai állapot periódikusan változik.

Éppígy a quantumszerű jelenségek nyilvánvalóvá tették, hogy a klasszikus mechanika atomi méretek tartományában szintén nem tekinthető érvényesnek, az ú. n. quantumtörvények kísérletek, éppen az ott uralkodó törvények megfogalmazására. Ezért de BROGLIE és SCHRÖDINGER felvetették a gondolatot, hogy talán úgy juthatunk el egy helyes, a quantumtörvényekkel összhangzásba hozható mechanikához, ha a mechanikát nem a geometriai optikával, hanem a hullámoptikával hozzuk analógiába.

Ezért vezessünk be egy ψ skaláris állapothatározót, mely az $S = \text{konst.}$ felületeken állandó értékkel bír és a normális mentén periódikusan változik. Egy ily függvényt, mint sinusfüggvények összegét állíthatjuk elő, hol az argumentum S -nek lineáris függvénye. Tehát ily alakú függvényeket kell tekintetbe vennünk:

$$\psi = a \sin\left(\frac{2\pi}{h} S + \text{konst.}\right) = a \sin \frac{2\pi}{h} (S_0 - Et + \text{konst.}) \quad (30)$$

S együtthatója $\frac{2\pi}{h}$ szükségkép egy hatásmennyiség reciprokja, mivel S dimenziója hatás és a sinus argumentuma dimenzió nélküli szám. Feltesszük, hogy h , mely hatásdimenziójú univerzális állandó, sem E -től, sem a rendszer természetétől nem függ.

Másrészt $2\pi t$ együtthatója a (30) egyenletben frekvenciát jelent, amit ν -vel jelölve fennáll:

$$E = h \cdot \nu. \quad (31)$$

A quantumelmélet alapvető formulája, mely szerint a frekvencia az energiával arányos, itt igen egyszerű feltevések mellett adódik. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy az eddigiek szerint E és így ν is mindenféle értéket felvehet és az, hogy általában diszkrét energiaértékek lépnek fel, csak az elmélet további kiépítése által indokolható.

Az energia (31) alatti kifejezését a (25) és (27) egyenletekbe helyettesítve lesz:

$$u = \frac{h\nu}{\sqrt{2m(h\nu - V)}}, \quad (32)$$

$$v = \sqrt{\frac{2(h\nu - V)}{m}}. \quad (33)$$

A (32) egyenlet szerint a fázissebesség a frequentiától függ, azaz a hullámok diszperzióval bírnak. A fázissebesség u és a tömegpont sebessége v úgy függnek össze, mint az egyes sinus-hullám sebessége egy hullámcsoport sebességével, azaz kielégítik az

$$\frac{1}{v} = \frac{d\left(\frac{\nu}{u}\right)}{d\nu} \quad (34)$$

egyenletet.¹

A materiális pont sebessége tehát egy hullámcsoport sebességének felel meg. Ez közelfekvővé teszi azt a gondolatot, hogy az anyagi pontot egy hullámcsoportnak tekintjük, azaz a tér egy olyan helyének, melyben az elemi hullámok egymást erősítik. Egy ilyen hullámcsoport mindig véges kiterjedésű, több hullámhosszra terjed ki és csakis oly mozgásoknál helyettesíthető egy ponttal, melyek nagyok a hullámhosszhoz képest. Olyan

¹ Ezt a fontos összefüggést egy egyszerű példán verifikálhatjuk, ha azt a hullámcsoportot vesszük tekintetbe, mely két, kissé különböző frequentiájú sinushullám összetétele által nyerhető:

$$\begin{aligned} A \sin 2\pi (\nu_1 t - b_1 x) + A \sin 2\pi (\nu_2 t - b_2 x) = \\ = 2A \sin 2\pi \left\{ \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} t - \frac{b_1 + b_2}{2} x \right\} \cos 2\pi \left\{ \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} t - \frac{b_2 - b_1}{2} x \right\}. \end{aligned} \quad (35)$$

Az eredő hullám felfogható, mint egy sinushullám, melynek amplitudója a cosinus tag szerint változik. Az amplitudo maximális ott, hol a cos. zérus. Ezen amplitudo-maximumok sebessége a csoportsebesség. A következő egyenletből:

$$\frac{\nu_2 - \nu_1}{2} t - \frac{b_2 - b_1}{2} x = 0 \quad (36)$$

a »csoportsebesség»

$$v = \frac{x}{t} = \frac{\nu_2 - \nu_1}{b_2 - b_1} \sim \frac{d\nu}{db}. \quad (37)$$

Másrészt a fázissebesség:

$$u = \frac{x}{t} = \frac{\nu_1 + \nu_2}{b_1 + b_2} \sim \frac{\nu}{b}. \quad (38)$$

(37) és (38)-ból eliminálva b -t, megkapjuk (34)-et.

«pályák»-nál, melyek méretei a hullámhossznál kisebbek, így az elektronok pályáinál a BOHR-féle atom magja közelében, az anyagi pont teljesen elvesziti jelentőségét.

Egy ilyen hullámcsoportot úgy szerkeszthetünk meg, hogy a HAMILTON—JACOBI-féle egyenlet megoldásai közül kiszemelünk olyanokat, melyek frequentája ν és $\nu + d\nu$ közt változik. Azonkívül az S -ben előforduló állandókat úgy választjuk, hogy a hullámok t időben egy P ponton átmenjenek és a normális iránya egy meghatározott irány, a pont sebességének iránya körül irt infinitezimális kúpban feküdjék. A hullámok fázisa is egyezzek meg P -ben, ekkor ott interferencia folytán erősíteni fogják egymást a hullámok. Az amplitudók úgy választhatók, hogy a tér többi részében interferencia folytán lerontják, ille-főleg erősen gyengítik egymást a hullámok.

SCHRÖDINGER-nek és FLAMM-nak sikerült kimutatnia, hogy az így előállított hullámcsoport úgy mozog, mint a tömegpont a HAMILTON—JACOBI egyenlet szerint. Több pontból álló rendszer esetében a hullámokat a konfigurációs térben kell megszerkeszteni.

Azt hiszem, ezt a tételt a karakterisztikák elméletével plauzibilissé lehet tenni. Ugyanis a HAMILTON—JACOBI-féle egyenlet karakterisztikáit a $(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ $n+1$ dimenziós térben a mechanika kanonikus egyenletei határozzák meg, ezek a pont pályái a (q_i, t) térben. Másrészt a HAMILTON—JACOBI-féle egyenlet megoldásai:

$$S = S(q_1, q_2, \dots, q_n, t, a_1, \dots, a_n) = \text{konst.},$$

n dimenziós felületseveget jelentenek a q_1, \dots, q_n, t térben, melyek a karakteristikák mentén érintkeznek, a karakteristikák a hullámfelületek burkolói. Épp ezért az interferenciamaximum helyei is, éppúgy, mint a HUYGHENS-féle eredő hullám, a parciális hullámok burkolója.

5. §. A hullámegyenlet bevezetése.

Mindezen megfontolások egy igen primitív hullámoptika kereteit, mely körülbelül a FRESNEL-féle optikának felel meg,

nem lépik túl. Másrészt h formális bevezetése dacára a quantum-elmélet alaptapasztalatáról, mely szerint általában csak diszkrét energiák, illetőleg frequentiák lehetségesek, nem ad számot. Ezért az elmélet kiegészítésre szorul és közelfekvő a gondolat, hogy itt is úgy járjunk el, mint az optikában és ne közvetlenül hullámfelületekkel és azok orthogonális trajektoráival, a sugarrakkal operáljunk, hanem az optika mintájára hullámegyenletet állítsunk fel.

Az optika hullámegyenlete:

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (39)$$

hol $\Delta\psi$ a LAPLACE-féle operator alkalmazva ψ -re, derékszögű koordináták esetében:

$$\Delta\psi = \text{div. grad } \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad (40)$$

és c a fény sebessége.

Ennek megfelelő hullámegyenletet úgy állítunk fel, hogy c helyébe az u fázissebességet tesszük és több pont, illetőleg nem-derékszögű koordináták esetében a LAPLACE-féle operator helyébe annak megfelelő nem-euklidesi általánosítását tesszük. A hullámegyenlet lesz:

$$\text{div. grad } \psi - \frac{2(E-V)}{E^2} \ddot{\psi} = 0. \quad (41)$$

Ha csak periódikus (sinus, ill. cosinus) hullámokat veszünk tekintetbe és azokat, mint egy komplex exponenciális függvény reális részét írjuk:

$$\psi = ae^{\frac{2\pi i}{h}(S-\theta)} e^{2\pi i\nu t}, \quad (42)$$

hol S a koordináták függvénye, úgy (41) egyenletből $\nu = \frac{E}{h}$ tekintetbevételével kapjuk:

$$\text{div. grad } \psi + \frac{8\pi^2}{h^2} (E-V) \psi = 0. \quad (43)$$

Egy pont és derékszögű koordináták tekintetbevételével ez részletesen a következő:

$$\left\{ \left(\frac{2\pi i}{h} \right)^2 \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] - \right. \\ \left. - \frac{2\pi i}{h} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \right) + \frac{8\pi^2}{h^2} (E - V) \right\} \psi = 0. \quad (44)$$

Ha $\lim h \rightarrow 0$, úgy ez az egyenlet átmegy a HAMILTON—JACOBI-féle egyenletbe, ami megfelel annak, hogy ez esetben a quantum-elmélet és a klasszikus mechanika megegyeznek. Ugyanis szorozva h^2 -tal és határra térve át lesz:

$$\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right\} + V = E. \quad (45)$$

Ez a HAMILTON—JACOBI-féle egyenlet, mert a mértékegység (41)-ben a rendesnek \sqrt{m} -szerese.

A HAMILTON—JACOBI-féle egyenletet megkapjuk, ha az energia kifejezésében a momentumokat S -nek a megfelelő koordináta szerinti deriváltjával helyettesítjük. Hasonló formális eljárás által kapjuk meg a hullámegyenletet is, ha p_i helyébe $K \frac{\partial}{\partial q_i}$ -t írunk, hol $K = \frac{h}{2\pi i}$ és így az energia egyenletéből a következő operatort állítjuk elő:

$$[H - E,] = \frac{1}{2} \left\{ K^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V - E \right\}. \quad (46)$$

A hullámegyenlet lesz:

$$[H - E, \psi] = 0, \quad (47)$$

ami azt jelenti, hogy a (46) operatort alkalmazzuk ψ -re.

Ez az eljárás egyértelmű derékszögű koordináták esetében. Általános koordináták esetében meg kell állapodnunk előbb a tényezők sorrendjében.

Általános esetben a hullámegyenlet a következő:

$$\Delta_p^{1/2} \sum_l \frac{\partial}{\partial q_l} \left(\Delta_p^{-1/2} \sum_k Q_{lk} \frac{\partial \psi}{\partial q_k} \right) + \frac{8\pi^2}{h^2} (E - V) \psi = 0, \quad (48)$$

hol a kinetikus energia $2T = \sum_{l,k} Q_{lk} \dot{q}_l \dot{q}_k$ és

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} Q_{11} \dots Q_{1n} \\ \vdots \\ Q_{n1} \dots Q_{nn} \end{vmatrix} \quad (49)$$

a quadratikus forma diszkriminánsa.

A hullámegyenlet segítségével a quantumszerű diszkrét energiaértékeket egy határfeltétel segítségével éppúgy határozhatjuk meg, mint egy rezgő húr esetében, mely két végén rögzítve van. A határfeltétel itt egyszerűen az, hogy ψ a végtelenben (kellő magas fokon) eltűnjék. Ilyen megoldások az egyenletben előforduló E parameter nem minden értékénél, hanem csak az $ú. n.$ karakterisztikus értékeknél, az «Eigenwertek»-nél lehetségesek. Ezen Eigenwertek adják a diszkrét energiaértékeket, ezek különbsége osztva h -val az észlelhető frequentiókat. Az észlelhető frequentiók tehát az atom alapfrequentióinak különbségi rezgései. Úgy kell tehát a rezgés létrejöttét elgondolni, hogy az $ú. n.$ kezdeti és végállapotnak megfelelő két alaprezgés egyidejűleg az egész emisszió tartalma alatt fennáll.

Az Eigenwertekhez tartozó partikuláris megoldásai az egyenleteknek, az «Eigenfunktciók» egy orthogonális függvényrendszert képeznek. Ezekre az intenzitások meghatározásánál van szükségünk.

A hullámegyenlet minden atomi problémánál, ha az energiát mint a koordináták és impulzusok függvényét kifejeztük, azonnal megadható. A differenciálegyenlet lineáris, minélfogva aránylag könnyen kezelhető.

Talán célszerű lesz a SCHRÖDINGER-féle egyenletet két egyszerű példán bemutatni, hogy kezeléséről némi fogalmat alkothassunk.

A legegyszerűbb egy szabad pont, elektron esete, melyre külső erő nem hat. Ekkor $V=0$ és a SCHRÖDINGER-féle egyenlet derékszögű koordináták alkalmazásával közönséges mértékegységben:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} E \psi = 0. \quad (50)$$

Ezen egyenlet megoldásai :

$$\psi = c e^{k(\alpha x + \beta y + \gamma z)}, \quad (51)$$

hol

$$k^2 = \frac{8\pi^2 m}{h^2} E = \frac{8\pi^2 m}{h} \nu \quad (52)$$

és α, β, γ egy irány iránykosinusai.

(42) szerint hozzáírva ψ -hez az egyelőre elhagyott időt tartalmazó $e^{2\pi i \nu t}$ tényezőt, látjuk, hogy a hullámok ezen esetben síkhullámok, melyek frequentiáját a tömeg kinetikus energiája szabja meg és mely nemcsak diszkrét értékekkel bír. A hullám normálisa a tömeg sebessége irányába esik.

Nem egészen ily egyszerű az egydimenziós harmonikus oscillator esete.

A kinetikus és potenciális energia lesznek, ha q a nyugalmi helyzettől való kitérést jelenti és p az impulzust :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 = \frac{1}{2m} p^2, \quad (53)$$

$$V = 2\pi^2 m \nu_0^2 q^2. \quad (54)$$

A hullámegyenlet lesz :

$$\frac{d^2 \psi}{dq^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - 2\pi^2 m \nu_0^2 q^2) \psi = 0. \quad (55)$$

Vezessük be a következő rövidítéseket :

$$a = \frac{8\pi^2 m E}{h^2}, \quad b = \frac{16\pi^4 m^2 \nu_0^2}{h^2}, \quad (56)$$

midőn egyenletünk lesz :

$$\frac{d^2 \psi}{dq^2} + (a - bq^2) \psi = 0, \quad (57)$$

amit még

$$x = q \sqrt[4]{b} \quad (58)$$

helyettesítéssel a következő alakra hozzuk :

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \left(\frac{a}{\sqrt{b}} - x^2 \right) \psi = 0. \quad (59)$$

Ezen egyenlet Eigenwertjei és Eigenfunkciói ismeretesek és megtalálhatók pl. COURANT—HILBERT ismert könyvében.

Az Eigenwertek:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = 1, 3, 5, \dots (2n+1), \dots \quad (60)$$

az Eigenfunkciók pedig az n . HERMITE-féle orthogonális függvények:

$$e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x), \quad (61)$$

hol $H_n(x)$ az n -ik HERMITE-féle polynomot jelenti, melyet a következő kifejezés definiál:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}. \quad (69')$$

a és b helyébe betéve az (56) alatti értékeket, az energia számára kapjuk:

$$E_n = (n + 1/2) h\nu_0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (62)$$

Tehát az oscillator energiájában $n + 1/2$ alakú quantumszámok szerepelnek, hol n egész szám. Ez ellentétben van a régebbi quantumelmélettel, de jól megegyezik a HEISENBERG-féle elmélettel. A rotatórnál is, szintén megegyezésben a HEISENBERG-féle elmélettel és a sávós spektrumokkal, ilyen félquantumszámok lépnek fel.

A hidrogenatomnál a potenciális energia, ha r a magtól való távolságot jelenti és e a mag töltését:

$$V = -\frac{e^2}{r} \quad (63)$$

a SCHRÖDINGER-féle egyenlet pedig:

$$\text{div. grad } \psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left(E + \frac{e^2}{r} \right) = 0. \quad (64)$$

Az egyenlet tárgyalása legcélszerűbben polárkoordinátákkal történik és gömbfüggvényekre vezet. Csak az eredmény közlésére szorítkozunk, mely szerint megoldás csakis az energia következő értékeinél van:

$$1) \quad E > 0. \quad (65)$$

Ezek az elektron hyperbola pályáinak felelnek meg, melyek nem képezik diszkrét pályák sokaságát, nincsenek «quantálva». Ezek szolgáltatják a folytonos spektrumot, mely a LYMAN-szeries határán túl észlelhető.

2) E negatív értékei közül a következő értékek lehetségesek, megegyezésben az eddigi quantumelmélettel:

$$E_n = -\frac{2\pi^2 m e^4}{h^2} \cdot \frac{1}{n^2}. \quad (66)$$

Hasonlóan sikerült a STARK-effektust tárgyalni, melynél a potenciális energia

$$V = -\frac{e^2}{r} + eFz, \quad (67)$$

ha a z -tengely irányában F intenzitású elektromos tér hat.

6. §. A perturbáció elmélete és a heliumprobléma.

Ha egy hullámegyenletben a potenciális energia egy megoldott probléma potenciális energiájától csak egy kis tagban különbözik, úgy a probléma első közelítésben quadraturák segítségével arra visszavezethető.

Ha V a potenciális energia az eredeti megoldható problémában és $V + \lambda r$ a «perturbált» esetben, hol λ kicsiny, úgy az Eigenwertek és Eigenfunktciók λ -ban lineáris tagjai a következők:

$$E_k^* = E_k + \lambda \int r u_k^2 dx \quad (68)$$

$$u_k^*(x) = u_k(x) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_i(x) \int r u_i u_k dx}{E_k - E_i}, \quad (69)$$

ha u_k, E_k az eredeti probléma Eigenfunktciói és Eigenwertjei, x pedig az egy vagy több változót képviseli.

Fontos eset az, melynél az eredeti probléma «degenerált», azaz oly Eigenwertekkel bír, melyekhez több lineárisan függet-

len Eigenfunkció tartozik. Ez esetben a perturbáló tag megszüntetheti a degenerációt, a többes Eigenwert egyszerű Eigenwertekre hasad szét. Ez az eset áll fenn a ZEEMAN és STARK-féle effektusoknál. Abban az esetben, ha E_k α -szoros Eigenwert és $u_{k1}, \dots, u_{k\alpha}$ a hozzátartozó Eigenfunkciók, úgy a perturbált problémánál lesz:

$$E_{kl}^* = E_k + \lambda E_l,$$

$$u_{kl}^* = \sum_{i=1}^{\alpha} x_{li} \left(u_{ki}(x) + \lambda \sum_{(k'i')} \frac{u_{k'i'}(x)}{E_k - E_{k'}} \int r u_{ki} u_{k'i'} dx \right). \quad (70)$$

Itt $k \neq k'$ és $i \neq i'$.

A x_{li} együttthatókat a következő lineáris egyenletrendszerből határozzuk meg:

$$x_{lm} E_l = \sum_{i=1}^{\alpha} x_{li} E_{mi}, \quad m = 1, 2, \dots, \alpha, \quad (71)$$

hol:

$$E_{mi} = \int r u_{ki} u_{km} dx. \quad (72)$$

(71) megoldható, ha E_l -t az egyenlet determinánsának zérussá tétele által nyert egyenletből határozzuk meg:

$$\begin{vmatrix} E_{11} - E_l & E_{12} & \dots & E_{1\alpha} \\ E_{21} & E_{22} - E_l & \dots & E_{2\alpha} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ E_{\alpha 1} & E_{\alpha 2} & \dots & E_{\alpha\alpha} - E_l \end{vmatrix} = 0. \quad (73)$$

A probléma itt α -fokú algebrai egyenlet megoldására vezet, melynek diszkussziója nem mindig egyszerű, és egyes esetekben a felsőbb algebra és csoportelmélet módszereinek alkalmazását teszi szükségessé.

A diszperzió elmélete is mint perturbációs probléma fogható fel, melynél a perturbáló tag a beeső fény folytán lép fel. A diszperzió elmélete megegyezik a KRAMERS-féle elmélettel.

A perturbáció elméletének legjelentékenyebb eredménye a hélium spektrumnak legalább kvalitatív értelmezése. A hélium két elektront tartalmaz. Felfoghatjuk a problémát úgy, hogy a rendszer energiájában a két elektron kölcsönhatásából eredő

tagot perturbáló tagnak tekintjük. Ez egy degenerált rendszer, melynél az a nevezetes, hogy az energianívók több nem kombináló nivóra csoportosulnak. Ugyanily degeneráció áll fenn az n elektronból álló rendszerben is.¹

7. §. A «relativistikus» hullámegyenlet és összefüggés az elektrodinamikával.

A hullámegyenlet felállítása mágneses erők jelenléte esetében a relativitás tekintetbevételével szintén sikerült. Egymástól függetlenül KLEIN, FOCK, SCHRÖDINGER, KUDAR és GORDON állították fel. Ebben a §-ban a relativitás elmélete alapfogalmait és a négydimenziós jelöléseket alkalmaznunk kell.

A négyes impulzus alatt értjük azt a vektort, melyet megkapunk, ha négyessebességet a nyugalmi tömeggel szorozzuk. Komponensei:

$$\begin{aligned} m \frac{dx_1}{d\tau} &= \frac{mv_{x_1}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & m \frac{dx_2}{d\tau} &= \frac{mv_{x_2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ m \frac{dx_3}{d\tau} &= \frac{mv_{x_3}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & m \frac{dx_4}{d\tau} &= \frac{icm}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \end{aligned} \quad (74)$$

hol τ a sajátidő, v ill. $v_{x_1}, v_{x_2}, v_{x_3}$ a közönséges ú. n. hármassebesség és komponensei, c a fénysebesség $x_4 = ict$, i az imaginárius egység.

A komponenseket rendre p_1, p_2, p_3, p_4 -el jelölve, fennáll:

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = -m^2c^2. \quad (75)$$

Vezessük be az elektromágneses erők négyespotenciálját, melynek komponensei a vektorpotenciál és a skaláris potenciál: \mathfrak{A}, V , úgy fennáll az az egyenlet, melyet (75)-ből megkapunk,

¹ Lásd W. HEISENBERG, Zeitschr. f. Phys. 38. p. 411. 1926.

E. WIGNER, Zeitschr. f. Phys. 40. p. 492 és p. 883. 1927.

ha az impulzushoz az ú. n. elektromágneses impulzus komponenseit adjuk. Lesz:

$$\sum_{\alpha=1}^3 \left(p_{\alpha} - \frac{e}{c} \mathfrak{A}_{x_{\alpha}} \right)^2 + \left(p_4 + \frac{e}{c} V \right)^2 + m^2 c^2 = 0. \quad (76)$$

Ebből a hullámegyenletet megkapjuk a szokásos módon, ha az impulzus komponenseit a megfelelő deriváltakkal helyettesítjük.

Bevezetve a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha} &= \frac{2\pi e}{hc} \mathfrak{A}_{x_{\alpha}}, \quad \varphi_4 = \frac{2\pi e}{hc} \cdot iV, \\ \alpha &= 1, 2, 3 \\ k^2 &= \frac{4\pi^2 e^2 m^2}{h^2}, \end{aligned} \quad (77)$$

a hullámegyenlet a következő lesz:

$$\sum \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} + i\varphi_{\alpha} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} + i\varphi_{\alpha} \right) - k^2 \right\} \psi = 0. \quad (78)$$

Az egyenlet fontossága abban áll, hogy lehetőséget ad a hullámmechanika beillesztésére az általános elektromágneses elméletbe.

A (78) egyenlet ugyanis felfogható mint egy négydimenziós variációprobléma LAGRANGE-féle egyenlete. Vezessük be a következő függvényt:

$$L_m = \sum \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_{\alpha}} + i\varphi_{\alpha} \psi \right) \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_{\alpha}} - i\varphi_{\alpha} \bar{\psi} \right) + k^2 \psi \bar{\psi}, \quad (79)$$

hol a felső vonás azt jelenti, hogy a kifejezés konjugált komplex kifejezését kell képezni.

Képezzük a következő variáció problémát:

$$\delta \iiint \iiint L_m dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = 0,$$

melynél ψ -t és $\bar{\psi}$ -t függetlenül variáljuk, a határon ψ eltűnik.

A LAGRANGE-egyenletek megegyeznek (78)-al, illetőleg a konjugált komplex egyenlettel:

$$\sum \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial L_m}{\partial \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\alpha} \right)} \right) - \frac{\partial L_m}{\partial \bar{\psi}} = 0. \quad (80)$$

Szorozzuk (80)-t $\bar{\psi}$ -al, úgy könnyen megkapjuk a következő egyenletet:

$$\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\bar{\psi} \frac{\partial L_m}{\partial \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\alpha} \right)} \right) = \sum_\alpha \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial L_m}{\partial \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\alpha} \right)} + \bar{\psi} \frac{\partial L_m}{\partial \bar{\psi}} = L_m. \quad (81)$$

Ugyanis L_m a $\bar{\psi}$ és $\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\alpha}$ mennyiségek lineáris függvénye, tehát fennáll az EULER-féle homogén függvényekre vonatkozó tétel.

Képezzük (81) konjugált komplex egyenletét. Ennek jobboldala szintén L_m és azért ezt levonva (81)-ből, a következő egyenleteket kapjuk:

$$\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\bar{\psi} \frac{\partial L_m}{\partial \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\alpha} \right)} - \psi \frac{\partial L_m}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} \right)} \right) = 0. \quad (82)$$

Ennek alakja egy négyes divergencia, ez nem más, mint a kontinuitás egyenlete az elektromosság számára.

(79)-ből következik:

$$\bar{\psi} \frac{\partial L_m}{\partial \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\alpha} \right)} - \psi \frac{\partial L_m}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} \right)} = i \frac{\partial L_m}{\partial \varphi_\alpha}. \quad (83)$$

Ezek arányosak a négyes áram sűrűségével:

$$s_\alpha = -\lambda \frac{\partial L_m}{\partial \varphi_\alpha}. \quad (84)$$

Másrészt tudjuk, hogy a MAXWELL-féle egyenletek levezethetők szintén egy variáció elvből, melynek LAGRANGE-féle függvénye, azaz a variálandó integrál integrandusa közönséges jelölésekkel $\mathfrak{S}^2 - \mathfrak{C}^2$, variálandók a vektorpotenciálok.

Ezt átnézetesen négydimenziós jelölések igénybevételével végezhetjük.

Legyenek az elektromágneses térintenzitások egy hatos vektor komponensei:

$$\begin{aligned} f_{14} &= -\frac{2\pi e}{hc} i\mathfrak{E}x_1, & f_{24} &= -\frac{2\pi e}{hc} i\mathfrak{E}x_2, & f_{34} &= -\frac{2\pi e}{hc} i\mathfrak{E}x_3 \\ f_{23} &= \frac{2\pi e}{hc} \mathfrak{H}x_1, & f_{31} &= \frac{2\pi e}{hc} \mathfrak{H}x_2, & f_{12} &= \frac{2\pi e}{hc} \mathfrak{H}x_3. \end{aligned} \quad (85)$$

Ezek a vektorpotenciállal a következőképp függnek össze:

$$f_{\alpha\beta} = \frac{\partial\varphi_\beta}{dx_\alpha} - \frac{\partial\varphi_\alpha}{dx_\beta}. \quad (86)$$

A LAGRANGE-féle függvény lesz:

$$L_e = \frac{1}{4} \sum_{\alpha,\beta} f_{\alpha\beta}^2 = \frac{\pi^2 e^2}{h^2 c^2} (\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2). \quad (87)$$

A következő feltétel:

$$\delta \iiint \int L_e dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = 0 \quad (88)$$

szolgáltatja az üres térre vonatkozó MAXWELL-egyenleteket.

A következő variáció probléma:

$$\delta \iiint \int (L_m + L_e) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = 0, \quad (89)$$

hol L_m -et (79) adja meg, szolgáltatja ψ variálásával a SCHRÖDINGER-féle hullámeqyenletet, a vektorpotenciálok variálásával a következő egyenleteket:

$$\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_\alpha} \right)} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_k} = 0, \quad k=1, 2, 3, 4 \quad (90)$$

és hol

$$L = L_e + L_m. \quad (91)$$

Ezen egyenletek a következők:

$$\sum_\alpha \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \varphi_\beta} = -\frac{s_\beta}{\lambda}, \quad \lambda = \frac{he}{8\pi^2 c}. \quad (92)$$

Ezek a MAXWELL-féle második egyenletnek felelnek meg.

Tekintetbe véve, hogy a vektorpotenciál divergenciamentes:

$$\sum \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (93)$$

és felhasználva $f_{\alpha\beta}$ értékeit (86) szerint, a hullámegyenleteket kapjuk a vektorpotenciál számára:

$$\sum_\alpha \frac{\partial^2 \varphi_\beta}{\partial x_\alpha^2} = -\frac{s_\beta}{\lambda}. \quad (94)$$

(78) és (94) a téregyenletek teljes rendszerét tartalmazza a ψ és a φ_α potenciálok számára. Ezzel az új elmélet teljes formális befejezést nyert, de SCHRÖDINGER bizonyos aggályokat fejezett ki aziránt, hogy ezek minden tekintetben kielégítőek-e. Az energiainpulzus tenzora is általánosan definiálható.

A sugárzás a klasszikus elektrodinamika szerint történik, csak az áramsűrűség számára kell a (84) kifejezéseket alkalmazni. Ezeket beírjuk a retardeált potenciálok kifejezéseibe, ami megadja a vektorpotenciált és az elektromágneses teret:

$$\varphi_\alpha = \iiint \frac{s_\alpha dx_1 dx_2 dx_3 dx_4}{r}, \quad (95)$$

hol s_α és r -nek a $t - \frac{r}{c}$ időbeli értéke irandó be.

Az áramsűrűségek explicit kifejezése lesz:

$$s_\alpha = \frac{hc}{8\pi^2 c} i \left\{ \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\alpha} - \bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} - 2\bar{\psi} \psi \cdot \varphi_\alpha \right\}. \quad (96)$$

Ha ψ tiszta sinusrezgés, azaz ily alakú:

$$\psi = ae^{+2\pi i vt}, \quad (97)$$

úgy:

$$\bar{\psi} = ae^{-2\pi i vt} \quad (98)$$

és

$$\psi \bar{\psi} = a^2 = \text{konstans}. \quad (99)$$

Ebben az esetben stacionárius áramlást kapunk, melynél nincs sugárzás. Ezzel meg van magyarázva az, hogy a stacionárius pályákon a rendszer nem sugároz.

A fentiek alapján GORDON¹ a COMPTON-effektus teljes elméletét adta meg.

8. §. Összefüggés a Heisenberg—Born—Jordan-féle quantummechanikával.

A quantummechanika bizonyos tekintetben a hullámmechanika ellentéte, mert míg az utóbbi kifejezetten a folytonosság alapján áll, addig a quantummechanika csakis diszkrét állapotokra mond ki törvényt. Annál öröndetesebb, hogy ez a két jelentékeny kísérlet nemcsak nem áll ellentmondásban egymással, hanem lényeges tartalmában megegyezik.

A quantummechanika minden impulzushoz és koordináta-hoz egy végtelen sok értékből álló értékrendszert, matrixot rendel, melyek minden értéke két állapot és így két index által van meghatározva.

A koordinátamatrix m , n indexekkel jelölt eleme:

$$q_l^{(m, n)} = |q_l^{(m, n)}| e^{2\pi i \nu(n, m)}, \quad (100)$$

hol $\nu(n, m)$ az n -ik állapotból az m -ik állapotba való átmenetnél fellépő frequentia, $q(n, m)$ pedig az átmenet gyakoriságával függ össze.

A matrix a következő:

$$q_l = (q_l(m, n)) = \begin{pmatrix} q_l(1, 1), q_l(1, 2), \dots \\ q_l(2, 1), q_l(2, 2), \dots \\ \dots \end{pmatrix} \quad (101)$$

és hasonlóan az impulzusmatrix:

$$p_l = (p_l(m, n)) = \begin{pmatrix} p_l(1, 1), p_l(1, 2), \dots \\ p_l(2, 1), p_l(2, 2), \dots \\ \dots \end{pmatrix}. \quad (102)$$

A matrixokra az összeadás és szorzás műveletét definiálva, azokkal úgy számolhatunk, mint számokkal.

¹ W. GORDON. Zeitschr. f. Phys. Bd. 40. p. 117. 1926.



Két matrix összege, illetőleg különbsége az a matrix, melynek elemei az eredeti matrixok megfelelő elemeinek összegei, illetőleg különbségei:

$$c(m, n) = a(m, n) \pm b(m, n). \quad (103)$$

Két a és b matrix szorzata az a matrix, melynek elemei a következők:

$$c(m, n) = \sum_{k=1}^{\infty} a(m, k) b(k, n). \quad (104)$$

A szorzás művelete nem kommutatív, általában:

$$ab \neq ba. \quad (105)$$

Ha kommutatív, úgy a matrixokat felcserélhetőeknek (t. i. a szorzás sorrendje felcserélhető) nevezzük. A koordináta- és impulzusmatrixok általában felcserélhetők, kivéve az ugyanazon indexhez tartozó koordináta és impulzus nem cserélhető fel, hanem fennáll az ú. n. HEISENBERG-féle quantumreláció:

$$(p_e q_e - q_e p_e)^{ik} = \delta_{ik} \frac{h}{2\pi i}, \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}. \quad (106)$$

A mechanika alaptörvényeit kifejező kanonikus egyenletek mint matrixegyenletek érvényben maradnak. A HAMILTON-féle függvény, mint a koordináták és impulzusok függvénye szintén egy matrix.

$$H = H(p_i, q_i). \quad (107)$$

Az alapprobléma itt mindig az, hogy oly új változókat kell bevezetni, hogy a HAMILTON-féle függvény egy diagonális matrix-szá váljon:

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & H_{22} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & H_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (108)$$

Ekkor a frequentiákat a

$$\nu(n, m) = \frac{H_{nn} - H_{mm}}{h} \quad (109)$$

egyenlet adja meg.

Ezt a feladatot a quantummechanika végtelen sok ismeretlen tartalmazó algebrai egyenletrendszerek megoldására vezeti vissza. Meghatározandó azon, a klasszikus mechanika kanonikus transzformációinak megfelelő transzformáció, mely a H matrixot diagonális matrixba viszi át.

Ily kanonikus transzformáció

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{S} \mathbf{q} \mathbf{S}^{-1}, \\ \mathbf{p} &= \mathbf{S} \mathbf{p} \mathbf{S}^{-1}, \end{aligned} \quad (110)$$

hol \mathbf{S} matrix, \mathbf{S}^{-1} a reciprok matrix, úgy hogy:

$$\mathbf{S} \mathbf{S}^{-1} = 1. \quad (111)$$

Ez az eljárás többnyire csak akkor vezet célhoz, ha \mathbf{S} az egységtől nem nagyon különbözik és így \mathbf{S}^{-1} sorfejtés útján képezhető.

Azért nagy jelentőséggel bír, hogy a SCHRÖDINGER-féle hullámegyenlet segítségével a diagonális matrixra való transzformálás mindig sikerül. Tekintve azt, hogy a SCHRÖDINGER-féle egyenlet lineáris és a probléma jelentékeny egyszerűsítését jelenti.

Általában, ha adva van egy teljes orthogónális normirozott függvényrendszer a q_1, q_2, \dots, q_n változók tartományában:

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_i, \dots, \quad (112)$$

melyekre fennáll

$$\int \dots \int u_i u_k dq_1 \dots dq_n = \int u_i u_k dx = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = k \\ 0, & \text{ha } i \neq k \end{cases}, \quad (113)$$

úgy ezek segítségével minden $f(q_1 \dots q_n)$ függvényhez rendelhetünk egy matrixot.

Ez a matrix a következő:

$$f^{ik} = \int f u_i u_k dx. \quad (114)$$

Az integráció a $q_1 \dots q_n$ változók egész tartományára kiterjed.

Ha egy $F(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ függvény az impulzusokat is tartalmazza, p_i helyébe $K \frac{\partial}{\partial q_i}$ -t téve az $[F,]$ operatort képezzük (46. egyenlet) és a matrixot a következőképp definiáljuk:

$$F^{ik} = \int u_i [F, u_k] dx. \quad (115)$$

A koordináta és impulzusmatrixok a következők:

$$q_i^{ik} = \int q_i u_i u_k dx, \quad (116)$$

$$p_i^{ik} = K \int u_i \frac{\partial u_k}{\partial q_i} dx. \quad (117)$$

Ezen matrixok kielégítik a felcserélési relációkat, bárhogy választottuk is az orthogonális függvényrendszert.

Az így definiált matrixokra érvényes a matrixszorzás tétele is, ha az u_i függvények a tartomány határán kellő magasan eltűnnek.

Ha az orthogonális függvényrendszer nem tetszőleges, hanem az illető mechanikai probléma SCHRÖDINGER egyenletének Eigenfukciói, úgy az ezekkel képezett matrixa a HAMILTON-féle függvénynek diagonális matrix. Ugyanis:

$$H^{ik} = \int u_i [H, u_k] dx \quad (118)$$

és ha a SCHRÖDINGER-féle egyenlet:

$$[H, \psi] = E\psi \quad (119)$$

megoldása u_i és u_k :

$$H^{ik} = E_i \int u_i u_k dx = \begin{cases} E_i, & \text{ha } \begin{cases} i = k \\ i \neq k \end{cases} \end{cases}, \quad (120)$$

azaz:

$$H^{ii} = E_i, H^{ik} = 0, \text{ ha } i \neq k \quad (121)$$

és a frequentiót a (63) egyenlet határozza meg. Az intenzitásokra q_i^{ik} matrixelemek mérvadók, az eredmény pl. STARK-effektusnál jó megegyezésben van a tapasztalattal.

Nagyobb nehézséget okoz a matrixképzés a relativitás és mágneses tér esetében, mert ekkor az Eigenfukciók nem képeznek orthogonális függvényrendszert.

A hullámmechanika jelentékeny eredményei dacára nem tekinthető korántsem alapelveiben sem befejezett elméletnek.

Így zavaró, hogy a hullámok rendszere minden mechanikai problémánál más, sebességük is más. Univerzális, fénysebességgel terjedő hullámokat sikerült O. KLEIN-nek bevezetnie az

egytest problémájánál. KLEIN egy negyedik térszerű koordinátát vezet be, tehát ötdimenziós téridő sokaságot. Ebben állandó sebességű síkhullámok lépnek fel, melyek projekciói a négydimenziós téridősokaságra a változó sebességű hullámok. A fázis- és csoportsebesség közti összefüggés egyszerűen adódik és úgy látszik, a mágneses elektron negyedik szabadsági foka is egyszerű értelmezést talál így. Másrészt az általános relativitáselmélettel is fennáll bizonyos kapcsolat.

Újabbán M. BORN¹ és utána mások a hullámmechanikát némileg másképp fogják fel. A korpuskulák értelmezését hullámcsoporttal elvetik és a régi korpuskuláris felfogáshoz ragaszkodnak. A SCHRÖDINGER-féle hullámegyenletet megtartják. Ezen felfogásban az elektronok és más korpuskulák mozgására az energia és impulzus tétele érvényes, de különben kauzálisan nincs meghatározva a korpuskula pályája. Csak valószínűségi törvények vannak. A valószínűséget határozza meg a hullámegyenlet, illetőleg a ψ függvény. Még pedig úgy, hogy sok korpuskula esetében $|\psi|^2$ az elektromosság sűrűségével arányos.

Ezen felfogás szerint értelmezte BORN az elektronok ütközését atomokkal. Tekintetbe vesz egy atomot, melyet ismert HAMILTON-függvény ill. energianívok definiálnak. Erre reáesik egy párhuzamos elektronnaláb.

Ha az atomtól eltekintünk, úgy az elektronok potenciális energiája eltűnik és a hozzájuk tartozó hullámok síkhullámok, melyek normálisa az elektronok sebessége irányába esik.

Az atomhoz is tartozik egy hullámrendszer, melyet a HAMILTON-féle függvény határoz meg. Az atomból és elektronokból álló rendszer mint egy perturbációs probléma fogható fel és az atom Eigenfunkciói szerinti sorfejtéssel megoldható. Az eredmény az, hogy az elektronokhoz tartozó hullámok elhajlást szenvednek. Ebből kiszámítható $|\psi|^2$ és meghatározható a valószínűsége

¹ M. BORN. Zeitschr. f. Phys. Bd. 38. p. 803. 1926. J. JORDAN. Zeitschr. f. Phys. Bd. 40. p. 809. 1927. A quantumelmélet igen általános és absztrakt statisztikai felfogását adja JORDAN utóbbi cikke.

egy bizonyos szöggel való eltérésnek, megegyezésben RUTHERFORD és CHADWICK méréseivel. A centrális ütközés és így a RAMSAUER-effektus még nem volt tárgyalható. Másrészt az atomban ugrások lépnek fel meghatározott valószínűséggel, ha az elektron sebessége és így kinetikus energiája eléri azt az értéket, mely ezen ugrásokhoz szükséges, megegyezésben FRANCK és HERTZ alapvető kísérleteivel.

Hasonlóan a statisztikai felfogás alapján a fotoelektromos effektus tárgyalása is sikerült.¹ Azonban meg kell jegyeznünk, hogy azok a nehézségek, melyeket a fotoelektromos effektus kauzális tárgyalása okozott, itt ki vannak kerülve azáltal, hogy csak statisztikai tárgyalásra szorítkozunk. Az egyetlen előny az, hogy nem képez egy elszigetelt heterogén jelenséget, hanem egy másnemű természetfelfogásba harmonikusan illeszkedik be.

Hogy az a felfogás, amely szerint a természeti elemi folyamatok, tehát egyes elektronok mozgása, nincs egyértelműen meghatározva és csak azok sokaságára mondhatók ki statisztikai törvények, egy a szokottól mélyen eltérő, de a tapasztalattal megegyező világfelfogást jelent. Természetesen nem zárható ki, hogy az elemi folyamatok is determináltak, csak nem ösmerjük az összes adatokat, melyek a jelenség egyértelmű meghatározásához szükségesek.

Mindenesetre a természetfilozófia szempontjából is érdeklődéssel tekinthetünk az elmélet további kialakulása elé.

Ortway Rudolf.

DIE WELLENMECHANIK VON DE BROGLIE UND SCHRÖDINGER.

Vortrag, gehalten in der Mathematischen und Physikalischen Gesellschaft in Budapest, den 27-ten Januar 1927.

Eine kurze Darstellung der Wellenmechanik einschliesslich der neuen «Feldtheorie» von SCHRÖDINGER. Die statistische Auffassung von BORN wird kurz erwähnt.

R. Ortway.

¹ G. WENTZEL, Zeitschr. f. Phys. Bd. 40. p. 574.

AZ EGYATOMÚ, IDEÁLIS GÁZOK EINSTEIN-FÉLE QUANTUMELMÉLETE.

Ha NERNST-nek harmadik termodinamikai főtétele az ideális gázokra érvényes, az ideális gázok alacsony hőmérsékletnél a klasszikus gázegyenletektől eltérő magatartásúak, bizonyos elfajulási jelenségeket mutatnak. Ezeknek az eltéréseknek megfigyelt végett az újabb vizsgálatok szerint fel kell tételeznünk, hogy a gázmolekulák mozgására quantumfeltételek érvényesek, az ideális gáz molekuláinak quantumos mozgását kell meghatározni. Ez a quantumos magatartás okozza alacsony hőmérsékletnél a klasszikus egyenletektől való eltérést, az elfajulási jelenségeket.

PLANCK¹ egy újabb dolgozatában az egyatomú gázok termodinamikai tulajdonságait, elfajulási jelenségeit a gáz állapotterének fizikai szerkezetéből azzal a feltevessel vezette le, hogy az állapotpontok az állapotternek csak bizonyos helyein lehetnek. EINSTEIN² S. N. BOSE-nak³ a PLANCK-féle sugárzási egyenlet levezetésénél követett eljárása alapján fejt ki az egyatomú gázok quantumelméletét. Az állapot-valószínűség BOSE—EINSTEIN-féle meghatározásánál a gázmolekulák statisztikailag egymástól függenek, míg a klasszikus statisztikai és az eddigi quantumstatisztikai vizsgálatok a gázmolekulákat, a rendkívül kicsiny ütközési időktől eltekintve, egymástól függetleneknek tekintették.

¹ M. PLANCK: Berliner Ber. 49. l. 1925; l. még Berliner Ber. 653. l. 1916. Az egyatomú, ideális gázokra vonatkozó régebbi quantumelméletek fel vannak sorolva BRÓDY IMRÉNEK a ZS. f. Phys. 6. kötetében (79. l. 1921) megjelent dolgozatában.

² A. EINSTEIN: Berliner Ber. 261. l. 1924; 3. l. 1925; 18. l. 1925.

³ S. N. BOSE: ZS. f. Phys. 26. 178. (1924); 27. 384. (1924).

Az egyatomú gázok EINSTEIN-féle quantumelmélete különös figyelmet érdemel, mivel bizonyos kapcsolatot állapít meg a sugárzás és az egyatomú gáz között. BOSE a fényquantumelmélet alapján vezeti le a PLANCK-féle sugárzási egyenletet, a sugárzást mint quantumgázt fogja fel. EINSTEIN BOSE eljárását alkalmazza a gázmolekulák rendszerére. E. SCHRÖDINGER¹ még szorosabb kapcsolatot fejt ki a sugárzás és az egyatomú gáz között; megállapítja, hogy a szabad energia számításánál az egyatomú gáz lineáris oszcillátorok rendszerének tekinthető. SCHRÖDINGER-nek a DE BROGLIE-féle² fázishullámok figyelembe vételével végzett vizsgálatai eredménye szerint az EINSTEIN-féle elmélet igazi jelentése az, hogy a gáz lineáris alkotóhullámok (Eigenschwingungen) rendszereként fogható fel, mint az üreges sugárzás vagy egy szilárd test.

A következő sorokban az egyatomú, ideális gázok EINSTEIN-féle egyenleteit SCHRÖDINGER vizsgálatai tekintetbe vételével abból a feltevésből vezetjük le, hogy az egyatomú gáz a DE BROGLIE-féle fázishullámok alapján alkotó hullámok egy bizonyos rendszerének tekinthető. Látni fogjuk, hogy EINSTEIN-nak egyenletei megállapításánál adott eljárása feltevésünk mellett is követhető. Az I. részben röviden ismertetem a DE BROGLIE-féle fázishullámokat, a II. részben levezetem az egyatomú gázok EINSTEIN-féle egyenleteit.

A RAYLEIGH és JEANS által bevezetett alkotóhullámokkal először SOMMERFELD és LENZ³ tárgyalták az egyatomú gázok tulajdonságait. SOMMERFELD és LENZ a szilárd testek hőenergiájának DEBYE-féle elmélete alapján következtettek. Különbség van azonban az e dolgozatban követett és a SOMMERFELD—LENZ-féle felfogás között az alkotóhullámok milyenségében és a rendszer alkotóhullámainak számában. SOMMERFELD-ék véges-

¹ E. SCHRÖDINGER: Phys. ZS. 27. 95. (1926).

² LOUIS DE BROGLIE: Annales de Physique, 3. 31. (1925).

³ A. SOMMERFELD: Vorträge über die kinetische Theorie der Materie und der Elektrizität, Göttingen, 125. l. 1913.

számú, $3N$ számú (N a gázmolekulák száma) alkotóhullámot vesznek tekintetbe, míg felfogásunk szerint — amint látni fogjuk — végtelen sok alkotóhullám veendő számításba.

I. A mozgó molekulák hullámtere, a de Broglie-féle fázishullámok.

1. §. DE BROGLIE¹ feltevése szerint minden anyagi részecskéhez vagy az anyagi részecskék bármely rendszeréhez tartozik egy ν rezgésszámú periódusos folyamat. Az m tömegű, mc^2 relativitási energiájú gázmolekulához tartozó periódusos folyamat rezgésszámát DE BROGLIE feltevése szerint a következő egyenlet határozza meg:

$$\varepsilon_0 = mc^2 = h\nu_0, \quad (1)$$

ahol c a fény terjedési sebességét, h a PLANCK-féle állandót jelenti. Az m tömegű molekula legyen nyugalomban egy K' GALILEI-féle koordináta-rendszerben s gondoljuk e koordináta-rendszerben a ν_0 rezgésszámú folyamatot. Ha a molekula, azaz a K' koordináta-rendszer a pozitív x tengely mentén v sebességgel mozog egy K koordináta-rendszerben ($t=0$ pillanatban a két koordináta-rendszer kezdőpontja összeesik, a két koordináta-rendszer megfelelő tengelyei párhuzamosak) t idő alatt $x=vt=\beta ct$ távolságra jut és a K' rendszerben a t -nek megfelelő idő a LORENTZ-féle transzformáció szerint:

$$t_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(t - \frac{\beta x}{c} \right). \quad (2)$$

A tekintetbe vett gázmolekulához tartozó periódusos folyamatot, melynek fizikai természetét még nem ismerjük, gondoljuk a K' rendszerben a következő egyenlettel meghatározva:

$$y_0 = A_0 \sin \left(2\pi\nu_0 \frac{t - \frac{\beta x}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right). \quad (3)$$

¹ LOUIS DE BROGLIE: Annales de Physique, 3. 33. (1925).

A K koordinátarendszerben e rezgés egyenlete:

$$y = A \sin 2\pi\nu t, \quad (3a)$$

ahol ν a K -hoz tartozó rezgésszámot jelenti. Mivel a relativitás-elmélet szerint $\nu_0 t_0 = \nu t$ és $y = y_0$, következik, hogy $A = A_0$, tehát a K koordinátarendszerben is a rezgés egyenletét a (3) alatti egyenlet adja. Az

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

hullámegyenlet tekintetbe vételével (a az amplitudo, T a rezgés-idő, λ a hullámhosszúság) a K rendszerben a (3) alatti egyenlet egy haladóhullámot: fázishullámot jelent, melynek rezgésszáma:

$$\nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (4)$$

és fázissebessége:

$$c' = \frac{c}{\beta} = \frac{c^2}{v}. \quad (5)$$

A fázishullám egy jelenség fázisainak térbeli elosztódását tünteti fel. A fázishullám (5) alatti, a fénysebességnél nagyobb sebessége ($\beta = \frac{v}{c}$ mindig kisebb egynél) mutatja, hogy a fázishullám nem energiát szállító hullám. A szomszédos rezgésszámú, pl. a ν és $\nu + d\nu$ rezgésszámok közé eső fázishullámok együttesen a fázishullámok egy csoportját adják. A fázishullámok egy csoportjának sebessége DE BROGLIE számításai szerint megegyezik az illető fázishullámokhoz tartozó molekulák sebességével, e sebesség az irányadó az energia szállításnál. A v sebességű molekula energiája a K koordinátarendszerben (1) és (4) alapján:

$$\varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{h\nu_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = h\nu, \quad (6)$$

az (1) egyenletnek megfelelően.

2. §. Vegyük tekintetbe az N egyenlőfajú molekulát tartalmazó, egy mol tömegű, V térfogatú, E energiájú, T hőmérsék-

letű, egyatomú, ideális gázt. Vegyük az egyes molekulákhoz tartozó fázishullámokat s gondoljuk a tekintetbe vett gázhoz tartozó fázishullámok rendszerét alkotóhullámokra (Eigenschwingungen) bontva.¹ Az alkotóhullámok ezen rendszerét fogjuk vizsgálni a gázegyenletek megállapításánál.

SCHRÖDINGER² számításai alapján meghatározhatjuk az egyes alkotóhullámokhoz tartozó energiaquantum értékét. A végtelen és λ hullámhosszúságok közé eső alkotóhullámok száma:³

$$s = \frac{4\pi V\nu^3}{3c'^3}. \quad (7)$$

Az (5) és (6) alatti egyenletből

$$\frac{\nu}{c'} = \frac{mc\beta}{h\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (8)$$

A (7) egyenletben való helyettesítéssel:

$$s = \frac{4\pi V}{3} \frac{m^3 c^3 \beta^3}{h^3 \sqrt{(1-\beta^2)^3}}. \quad (7a)$$

A (6) alatti egyenletben $\sqrt{1-\beta^2}$ -nak (7a)-ból kiszámított értékét helyettesítve, az s . alkotóhullám energiaquantuma:

$$\epsilon_s = h\nu_s = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = mc^2 \sqrt{1 + h^2 \left(\frac{4\pi V}{3}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{s^{2/3}}{m^2 c^2}}. \quad (6a)$$

A molekulák lehetséges v sebességeit tekintetbe véve, látható, hogy $\beta = \frac{v}{c}$ általában igen kicsiny érték. Ennélfogva (6a)-ból megközelítőleg, ϵ_s alatt csak mozgási energiát értve,

$$\begin{aligned} \epsilon_s &= mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) = mc^2 \left(\sqrt{1 + h^2 \left(\frac{4\pi V}{3}\right)^{-\frac{2}{3}} \frac{s^{2/3}}{m^2 c^2}} - 1 \right) = \\ &= (2m)^{-1} h^2 \left(\frac{4\pi V}{3}\right)^{-\frac{2}{3}} s^{\frac{2}{3}}, \end{aligned} \quad (6b)$$

¹ Az alkotóhullámokra vonatkozólag I. J. H. JEANS: Phil. Mag. 10. 91. (1905).

² E. SCHRÖDINGER: Phys. ZS. 27. 97. (1926).

³ L. pl. L. FLAMM: Phys. ZS. 19. 123. (1918).

az s . alkotóhullám ezen energiaquantuma megegyezik egy molekula energiájának EINSTEIN-féle egyenletével,¹ amelyet EINSTEIN a molekula s , h^3 térfogatú cellára osztott állapottér-részének térfogatából számított.

II. Az egyatomú, ideális gázok Einstein-féle egyenleteinek levezetése.

1. §. A tekintetbe vett gáz entrópiájának kiszámítása végett először a gáz állapot-valószínűségét kell meghatároznunk. A gáz mikroszkópikus értelemben vett állapota a BOSE—EINSTEIN-féle felfogás szerint meg van határozva, ha tudjuk, hány energiaquantum tartozik az egyes $\Delta\varepsilon_s$ infinitezimális energia-intervallumba eső Δs alkotóhullámok mindenikéhez. Δs a (6b)-ből

$$\Delta s = 2\pi V \frac{(2m)^{3/2}}{h^3} \sqrt{\varepsilon_s} \Delta\varepsilon_s. \quad (9)$$

Az energiaquantumok elosztódásánál egy bizonyos $\Delta\varepsilon_s$ infinitezimális energia-intervallumba eső alkotóhullámok az «egyenlő valószínűségű cellák» a BOSE-féle² felfogás szerint. Ha 3 energiaquantumnak 2 cellára vonatkozó elosztódásáról van szó, a következő esetek lehetségesek:

| | 1. eset | 2. eset | 3. eset | 4. eset |
|----------|---------|---------|---------|---------|
| 1. cella | 3 | 0 | 2 | 1 |
| 2. cella | 0 | 3 | 1 | 2 |

Ezek az esetek azonban nem egyenlő valószínűségűek.³ A 3. vagy 4. elosztódás: $\frac{2}{1}, \frac{1}{2}$ háromféleképpen történhetik, míg az 1. és 2. elosztódás: $\frac{3}{0}, \frac{0}{3}$ csak egyféleképpen lehetséges. Ezért az egyenlő valószínűségű elosztódásoknak BOSE—EINSTEIN-féle meg-

¹ A. EINSTEIN: Berliner Ber. 263. 1. (1924), (8) alatti egyenlet.

² S. N. BOSE: ZS. f. Phys. 26. 178. (1924); 27. 384. (1924).

³ A. LANDÉ: ZS. f. Phys. 33. 573. (1925).

állapítása bizonyos feltevést tartalmaz az energiaquantumoknak, a molekuláknak egymástól való függésére; az energiaquantumok, molekulák egymástól nem függetlenek.

Jelöljük a $\Delta\varepsilon_s$ energia-intervallumba eső energiaquantumok számát N_s -el, akkor a gázmolekulák száma:

$$N = \sum_s N_s \quad (10)$$

és a gáz energiája:

$$E = \sum_s \varepsilon_s N_s, \quad (11)$$

mivel az I. rész tárgyalásai szerint az energiaquantumok száma egyenlő a gázmolekulák számával (l. az (1) és (6) egyenletet).

Az N_s energiaquantum lehetséges elosztódásainak száma a Δ_s alkotóhullám között a jelzett BOSE—EINSTEIN-féle felfogással:

$$\frac{(N_s + \Delta_s - 1)!}{N_s! (\Delta_s - 1)!}. \quad (12)$$

A (12) alatti kifejezést az összes infinitezimális energia-intervallumokra képezve s egymással szorozva, nyerjük a gáz keresett állapot-valószínűségét. Az $S = k \ln W$ egyenletbe való helyettesítéssel és a nagy számokra érvényes $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n$ STIRLING-féle egyenlet alkalmazásával kapjuk a rendszer entrópiáját:

$$\begin{aligned} S &= k \sum_s \ln \frac{(N_s + \Delta_s - 1)!}{N_s! (\Delta_s - 1)!} = \\ &= k \sum_s [(N_s + \Delta_s) \ln (N_s + \Delta_s) - N_s \ln N_s - \Delta_s \ln \Delta_s]. \end{aligned} \quad (13)$$

Termodinamikai egyensúlyban a tekintetbe vett gáz entrópiája maximum, következésképp (10), (11) és (13) alapján a következő egyenletek érvényesek:

$$\left. \begin{aligned} \delta N &= \sum_s \delta N_s = 0, \\ \delta E &= \sum_s \varepsilon_s \delta N_s = 0, \\ \delta S &= k \sum_s [\ln (N_s + \Delta_s) - \ln N_s] \delta N_s = 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Ezekből az egyenletekből

$$\delta S - a\delta N - b\delta E = \sum_s [\ln(N_s + \Delta s) - \ln N_s - a - b\varepsilon_s] \delta N_s = 0, \quad (15)$$

ahol $-a$, $-b$ a LAGRANGE-féle állandókat jelölik. Következésképpen:

$$N_s = \frac{\Delta s}{e^{a+b\varepsilon_s} - 1}, \quad (16)$$

tehát a (10) és (11) alatti egyenletek:

$$N = \sum_s \frac{\Delta s}{e^{a+b\varepsilon_s} - 1}, \quad (10a)$$

$$E = \sum_s \frac{\varepsilon_s \Delta s}{e^{a+b\varepsilon_s} - 1}. \quad (11a)$$

(10a)-, (11a)-ban az összegezés a különböző infinitezimális energia-intervallumoknak megfelelő Δs -ekre vonatkozik. Ha az összegezést az 1-től ∞ -ig terjedő s -ekre kiterjesztjük,

$$N = \sum_s \frac{1}{e^{a+b\varepsilon_s} - 1}, \quad (10b)$$

$$E = \sum_s \frac{\varepsilon_s}{e^{a+b\varepsilon_s} - 1}. \quad (11b)$$

2. §. Helyettesítsük a (16) alatti egyenletet az entrópia (13) alatti kifejezésében, úgy (10b) és (11b) figyelembe vételével

$$S = -k \left[\sum_s \ln(1 - e^{-(a+b\varepsilon_s)}) - aN - bE \right]. \quad (13a)$$

A rendszer hőmérsékletének meghatározása végett vegyük az entrópiának végtelen kicsiny megváltozását állandó térfogat mellett, akkor

$$dS_{V=\text{állandó}} = -k \left[\sum_s \frac{da + \varepsilon_s db}{e^{a+b\varepsilon_s} - 1} - Nda - Edb - bdE \right], \quad (17)$$

mivel (9) szerint ε_s állandó. (10b) és (11b) segítségével

$$dS_{V=\text{állandó}} = -k \left[\sum_s \frac{da + \varepsilon_s db}{e^{a+b\varepsilon_s} - 1} - \sum_s \frac{da}{e^{a+b\varepsilon_s} - 1} - \sum_s \frac{\varepsilon_s db}{e^{a+b\varepsilon_s} - 1} - bdE \right], \quad (17a)$$

$$dS_{V=\text{állandó}} = kbdE. \quad (17b)$$

A termodinamika 2. főtétele és (17b) szerint

$$\left(\frac{dS}{dE}\right)_V = \frac{1}{T} = kb,$$

azaz

$$b = \frac{1}{kT}. \quad (18)$$

A b állandóval tehát a rendszer hőmérséklete meg van határozva.

A rendszer nyomásának meghatározása végett számítsuk ki a szabad energia értékét. A szabad energia (13a), (18) alapján:

$$F = E - TS = kT \left[\sum_s \ln \left(1 - e^{-\left(a + \frac{\varepsilon_s}{kT}\right)} \right) - aN \right]. \quad (19)$$

A rendszer nyomása (10b), (18) tekintetbe vételével:

$$p = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = - kT \left[\sum_s \frac{\frac{\partial a}{\partial V} + b \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial V}}{e^{a + \frac{\varepsilon_s}{kT}} - 1} - \frac{\partial a}{\partial V} N \right], \quad (20)$$

$$p = - \sum_s \frac{\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial V}}{e^{a + \frac{\varepsilon_s}{kT}} - 1}. \quad (20a)$$

A (6b) és (11b) alapján

$$p = - \sum_s \frac{\varepsilon_s}{e^{a + \frac{\varepsilon_s}{kT}} - 1} \frac{\partial \ln \varepsilon_s}{\partial V} = \frac{2}{3} \frac{E}{V}. \quad (20b)$$

Az elfajult gáz nyomása, éppen úgy, mint a kinetikai gázelméletben, energiasűrűségének $\frac{2}{3}$ -szorosával egyenlő.

A MAXWELL-féle egyenletekből következtetett,¹ teljesen visszaverő felületre ható sugárzási nyomás: $p = \frac{E}{3V}$. A $\frac{2}{3}$ szorzótényezőnek a sugárzási jelenségeknél $\frac{1}{3}$ -ra való csökkenése

¹ L. pl. M. PLANCK: Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung, 2. kiadás, 56. l.

azzal függ össze, hogy abban az esetben, ha $\beta = \frac{v}{c}$ egytől igen keveset különbözik, (6a)-ból az s. alkotóhullám energiaquantuma:¹

$$\varepsilon_s = h\nu_s = h \left(\frac{4\pi V}{3} \right)^{-1/3} cs^{1/3}, \quad (21)$$

míg nagy hullámhosszúság esetében: (6b)-ben s-nek $2/3$. hatványa szerepel.

3. §. Az a és b állandókat (10b)- és (11b)-ből általánosan nem tudjuk meghatározni. Ezért csak bizonyos speciális esetek tárgyalhatók.

A klasszikus gázelmélet egyenleteit kapjuk, ha

$$e^{a + \frac{\varepsilon_s}{kT}} \gg 1. \quad (22)$$

Ebben az esetben az energiaquantumok száma a $\Delta\varepsilon_s$ intervallumban a (9) és (16) egyenletből, mivel $e^{a + \frac{\varepsilon_s}{kT}}$ mellett 1 elhagyható,

$$N_s = e^{-\left(a + \frac{\varepsilon_s}{kT}\right)} \cdot 2\pi V \frac{(2m)^{3/2}}{h^3} \sqrt{\varepsilon_s} \Delta\varepsilon_s. \quad (23)$$

A (23) egyenletnek integrálásával

$$\begin{aligned} N &= e^{-a} \cdot 2\pi V \frac{(2m)^{3/2}}{h^3} \int_1^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon_s}{kT}} \sqrt{\varepsilon_s} d\varepsilon_s = \\ &= e^{-a} \cdot 2\pi V \frac{(2m)^{3/2}}{h^3} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon_s}{kT}} \sqrt{\varepsilon_s} d\varepsilon_s - \int_0^1 e^{-\frac{\varepsilon_s}{kT}} \sqrt{\varepsilon_s} d\varepsilon_s \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

A második integrálban $e^{-\frac{\varepsilon_s}{kT}}$ 1-nek vehető, mivel $\frac{1}{kT}$ igen kicsiny, a második integrál az elsőhöz képest elhagyható. A hátralevő integrálást az

$$\int_0^{\infty} x^{2k} e^{-tx^2} dx = \frac{1}{t^k \sqrt{t}} \frac{(2k)! \sqrt{\pi}}{2^{2k+1} k!} \quad k=0, 1, 2, 3, \dots \quad (25)$$

¹ L. SCHRÖDINGER idézett dolgozatában a (20) alatti egyenletet.

egyenlet szerint elvégezve,

$$e^{-a} = \frac{h^3 N}{V(2\pi m k T)^{3/2}}. \quad (26)$$

EINSTEIN vizsgálatainál az s -re vonatkozó összegezésnél 0 az alsó határ. Az alkotó hullámok rendszerénél, amint azt már SCHRÖDINGER¹ megállapítja, a (6b)-ben $s=0$ nincs megengedve. A (7) és így a (6b) egyenlet is kicsiny s -re csak megközelítőleg érvényes.

(26)-ot (23)-ba helyettesítve kapjuk a klasszikus gázelmélet MAXWELL-féle elosztódási egyenletét:

$$N_s = \frac{2N}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}} e^{-\frac{\epsilon_s}{kT}} \sqrt{\epsilon_s} d\epsilon_s. \quad (27)$$

Az entrópia (13a) alatti egyenletében $\ln(1 - e^{-(a + \frac{\epsilon_s}{kT})})$ helyett $-e^{-(a + \frac{\epsilon_s}{kT})}$ -t, utóbbi helyett $-\frac{1}{e^{a + \frac{\epsilon_s}{kT}} - 1}$ értéket írva,

(10b), (11b), (18) alapján:

$$S = Nk \ln \left[\frac{e^{3/2} V (2\pi m k T)^{3/2}}{h^3 N} \right], \quad (28)$$

megegyezően a klasszikus elmélet kísérletileg igazolt entrópia értékével, a STERN—TETRODE-féle egyenlettel.² A SOMMERFELD—LENZ-féle eredmények ettől az értéktől számottevően különböznek.³

4. §. A klasszikus gázelmélettől való kisebb fokú eltérést, a kisebb mértékben elfajult gázt a következőképpen tárgyalhatjuk: Kisebb fokú eltérésnél $e^{a + \frac{\epsilon_s}{kT}}$ és e^a nagy szám; $\frac{1}{e^{a + \frac{\epsilon_s}{kT}} - 1}$ értéket a (10b) és (11b) egyenletekben végtelen mértani sornak tekintve s kétszeres összegezésre térve át

¹ L. SCHRÖDINGER idézett dolgozatában.

² L. pl. O. STERN: Phys. ZS. 14. 632. (1913).

³ L. SOMMERFELD idézett dolgozatában a 136. lapon.

$$N = \sum_s \sum_{\tau} e^{-\tau \left(a + \frac{\varepsilon_s}{kT} \right)} = \sum_s \sum_{\tau} e^{-\tau a} e^{-\tau \frac{\varepsilon_s}{kT}}, \quad (29)$$

$$E = \sum_s \sum_{\tau} \varepsilon_s e^{-\tau \left(a + \frac{\varepsilon_s}{kT} \right)} = \sum_s \sum_{\tau} e^{-\tau a} \varepsilon_s e^{-\tau \frac{\varepsilon_s}{kT}}, \quad (30)$$

ahol az s és τ -ra vonatkozó összegezés 1-től ∞ -ig halad.

Ha e^{-a} 2. hatványa már igen kicsiny e^{-a} -hoz képest, (29)-és (30)-ban a τ -ra vonatkozó összegben elegendő az első tagot figyelembe venni, azaz

$$N = e^{-a} \sum_s e^{-\frac{\varepsilon_s}{kT}}, \quad (31)$$

$$E = e^{-a} \sum_s \varepsilon_s e^{-\frac{\varepsilon_s}{kT}}. \quad (32)$$

Következőleg egy energiaquantum, azaz egy gázmolekula energiájának középértéke:

$$\frac{E}{N} = \frac{\sum_s \varepsilon_s e^{-\frac{\varepsilon_s}{kT}}}{\sum_s e^{-\frac{\varepsilon_s}{kT}}}. \quad (33)$$

Elég magas hőmérsékletnél az exponenciális függvény tagról-tagra igen kis mértékben változik, az összegezés ds szerinti integrálással helyettesíthető, tehát ds (9) alatti egyenlete alapján

$$\frac{E}{N} = \frac{\int_1^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon_s}{kT}} \varepsilon_s \sqrt{\varepsilon_s} d\varepsilon_s}{\int_1^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon_s}{kT}} \sqrt{\varepsilon_s} d\varepsilon_s} = \frac{\int_0^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon_s}{kT}} \varepsilon_s \sqrt{\varepsilon_s} d\varepsilon_s - \int_0^1 e^{-\frac{\varepsilon_s}{kT}} \varepsilon_s \sqrt{\varepsilon_s} d\varepsilon_s}{\int_0^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon_s}{kT}} \sqrt{\varepsilon_s} d\varepsilon_s - \int_0^1 e^{-\frac{\varepsilon_s}{kT}} \sqrt{\varepsilon_s} d\varepsilon_s}. \quad (33a)$$

A (24) alatti egyenletnél követett eljárással

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{2} kT, \quad (33b)$$

megegyezően a klasszikus elmélettel.

Ha (29)- és (30)-ban a $\tau=2$ -nek megfelelő tagot is tekintetbe vesszük,

$$\frac{E}{N} = \frac{e^{-a} \sum_s \varepsilon_s e^{-\frac{\varepsilon_s}{kT}} + e^{-2a} \sum_s \varepsilon_s e^{-\frac{2\varepsilon_s}{kT}}}{e^{-a} \sum_s e^{-\frac{\varepsilon_s}{kT}} + e^{-2a} \sum_s e^{-\frac{2\varepsilon_s}{kT}}}. \quad (34)$$

A (33) alatti egyenletnél követett eljárással, az összegezést integrálással helyettesítve és integrálva

$$\begin{aligned} \frac{E}{N} &= \frac{3}{2} kT \left(1 - \frac{e^{-a}}{4\sqrt{2}} + \dots \right) = \\ &= \frac{3}{2} kT \left(1 - \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{h^3 N}{V(2\pi mkT)^{3/2}} + \dots \right). \end{aligned} \quad (34a)$$

Tehát egy energiaquantum, egy gázmolekula energiájának középértéke, következésképp a (20b) szerint a nyomás is annál kisebb a klasszikus értéknél, mennél kisebb a zárjeles redukciós szorzó, azaz mennél nagyobb e^{-a} : az «elfajulási parameter».

A $\Delta\varepsilon_s$ energia-intervallumban az egy alkotóhullámhoz tartozó energiaquantumok közepes száma (16)-ból

$$\bar{N}_s = e^{-a} e^{-\frac{\varepsilon_s}{kT}} \left(1 + e^{-a} e^{-\frac{\varepsilon_s}{kT}} + \dots \right), \quad (35)$$

ahol a zárjeles kifejezés a MAXWELL-féle elosztódást módosító quantumhatást fejezi ki.

A (7) alatti egyenletben $\frac{\nu}{c}$ a (8) szerint alacsony hőmérsékletnél kicsiny, tehát a (7) szerint s is kicsiny. Igen kicsiny s -re a (7) nem alkalmazható, ezért $T=0$ -nál a gázrendszer entrópiájára az alkotóhullámok módszerével következtetés nem vonható. Ha EINSTEIN után egy gázmolekula h^3 térfogatú cellákra osztott állapotterében számítjuk az állapot-valószínűséget, az állapot-valószínűségnek jelzett meghatározásával $T=0$ -nál az állapot-valószínűség értékeül 1-et kapunk. Az entrópia $S = k \ln W$ egyenlete szerint tehát $T=0$ -nál az entrópia zéró, a NERNST-féle főtétel teljesül.

5. §. Az egyatomú gázok EINSTEIN-féle quantumelméletét jelenleg kísérleti adatok még nem támogatják, W. MEISSNER-

nek¹ az egyatomú gázok elfajulási jelenségeire vonatkozó kísérleti vizsgálatai sem mellette, sem ellene bizonyítékot nem szolgáltatnak.

További vizsgálatok szükségesek az e dolgozat alapjául szolgáló DE BROGLIE-féle hullámokra vonatkozólag, amelyek szerint a mozgó anyagi részek bármely rendszeréhez tartozik egy hullámtér, éppen úgy, mint ahogy a mozgó fényquantumok bizonyos rendszere hullámtérrel kapcsolatos. A DE BROGLIE-féle hullámok igazolása az anyagelméletet új alapokra fektetné.²

Dolgozatomban szoros kapcsolatot, igen alacsony hőmérsékletektől eltekintve, teljes analógiát láttunk a sugárzás és az egyatomú gáz között. A mozgó anyaghoz kötött hullámterekre vonatkozó vizsgálatok fogják megmutatni, hogy ez a kapcsolat nem több-e, mint teljes analógia.

Szell Kálmán.

ÜBER DIE EINSTEIN'SCHE QUANTENTHEORIE DES EINATOMIGEN IDEALEN GASES.

Der Verfasser bespricht die EINSTEIN'sche Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. Die EINSTEIN'schen Gleichungen werden in Betracht nehmend die diesbezügliche Abhandlung von SCHRÖDINGER unter der Voraussetzung abgeleitet, dass das einatomige Gas auf Grund der DE BROGLIE'schen Phasenwellen als ein System der Eigenschwingungen angesehen werden kann. Auch die DE BROGLIE'schen Phasenwellen werden kurz besprochen.

Koloman Szell.

¹ W. MEISSNER: ZS. f. Phys, 36. 325. (1926.)

² *Megjegyzés a korrekturánál.* E dolgozat elkészítése után a hullámmechanikára vonatkozólag alapvető értekezései jelentek meg Schrödingernek az Annalen der Physik 1926. évi 79. (361., 489., 734. l.), 80. (437. l.) és 81. (109. l.) kötetében.

AZ ELEKTRONÜTKÖZÉS ÉS A SZÍNKÉPVONALAK ELMÉLETE.

Bevezetés.

A BOHR-féle atomelmélet a színeképvonalak keletkezését úgy magyarázza, hogy az atom különböző energiaértékű állapotba juthat s amikor egy magasabb W_2 energiájú állapotból kisebb W_1 energiaértékű állapotba megy vissza, az energia veszteségének megfelelően fényt bocsát ki, amelynek hullámhosszát a következő egyenlet szabja meg:

$$W_2 - W_1 = h\nu = h \frac{c}{\lambda} \quad (1)$$

hol ν a frekvencia, h a PLANCK-féle hatáskvantum és c a fény terjedési sebessége.

Minden atomnak van egy normális alapállapota legkisebb energiával, de átmenetileg lehet magasabb energiájú állapotban is. Ekkor az atom egy elektronja a rendes pályájától eltérően atommagtól távolodva magasabb kvantumú pályán mozog. Egerjesztett állapot létesítéséhez kívülről energiát kell az atomhoz juttatnunk, míg az alapállapotba való visszatérés energiát szabadít fel. Az az energiamennyiség, amelyet az alapállapotú az atommal közölnünk kell, hogy a közvetlenül utána következő magasabb kvantumú állapotba jusson, az úgynevezett gerjesztő-energia. Ez tehát BOHR elmélete szerint a legkisebb energiamennyiség, amelyet az atom felvehet.

Kísérleti szempontból jóformán legfontosabb eset az, amikor a gerjesztéshez szükséges energia az atomhoz ütköző elektron

kinetikai energiájából származik. Az elektronnak megfelelő V potenciálu elektromos erőterben tetszőleges sebességet adhatunk s ha megmérjük a sebesség változását az ütközés alkalmával, megállapíthatjuk azt is, hogy mennyi energiát adott át más testnek.

Ha az e töltésű elektron kinetikai energiáját V voltnyi potenciálesésből nyerte, akkor

$$\frac{1}{300} eV = \frac{1}{2} mv^2, \quad (2)$$

amiből

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{300m}};$$

Mivel az elektron sebessége a potenciáleséstől függ, rendszerint ennek a nagyságával szoktuk a sebességet jellemezni, beszélünk pl. 10 voltos sebességről.

Ha az elektron kinetikai energiáját teljesen átadja egy olyan atomnak, amely előzőleg normális állapotban volt W_1 energiával, akkor az atom oly W_2 energiájú állapotba jut, amelyre áll

$$W_2 - W_1 = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{300} eV.$$

Ha az atom a W_2 állapotból újra a W_1 energiájú normális állapotba tér vissza s közben az energia veszteségének megfelelően λ hullámhosszúságú fényt bocsát ki, akkor az 1. alapján

$$\frac{1}{300} eV = W_2 - W_1 = h\nu = h \frac{c}{\lambda}$$

amiből

$$\lambda V = \frac{300 hc}{e}$$

Helyettesítve itt az $e = 4.77 \cdot 10^{-10}$ — elektrosztatikai egység és h értékeit és V -t voltokban, λ -t pedig $\mu\mu$ -ben mérve $\lambda V = 1234$. (3)

A 3. egyenlet felhasználható a BOHR-féle feltevés kísérleti ellenőrzésére. A benne szereplő V a gerjesztő feszültség voltokban, amellyel az elektron mozgását gyorsítanunk kell, hogy

annak kinetikai energiája elegendő legyen az atom első gerjesztésére. Ezt a gerjesztő potenciált és a gerjesztett fény hullámhosszúságát kísérletileg meghatározhatjuk és így ellenőrizhetjük, hogy az atom első gerjesztésekor kibocsátott fény hullámhossza és a gerjesztő feszültség között fennáll-e a 3. összefüggés, amelyet az elmélet megkíván.

Hogy helyes eredményt kaphassunk, szükséges, hogy a kiindulás az atom legalacsonyabb energiájú állapotából történjék, a lökés az atomot a közvetlen magasabb energiájú állapotba vigye, a honnan csak az egyetlen alappályára van visszatérés, mert csak ilyenkor alakul át az atom által nyert energia teljesen *egyetlen* színekp vonal fényenergiájává. Így keletkezik az úgynevezett rezonanciasugárzás, ennek λ -ját kell ismernünk s a 3. képletben felhasználnunk. Ha ellenben az elektronütközés az atom elektronját valamelyik magasabb energiájú pályára viszi, akkor megtörténhetik, hogy az elektron az ütközés után nem a legalacsonyabb energiájú pályára jön vissza, hanem csak valamelyik közbeeső pályára, amikor is a keletkezett fény energiája nem felel meg az ütközéskor nyert egész energiának, hanem annál kisebb.

Ezért fontos az atom *abszorpciós* szeriesének ismerete, amennyiben az abszorpciós szeriesnél, ha az hideg gőzben keletkezik, a kiindulásnivó mindig az atom legkisebb energiájú alappályája.

Ha az alapállapotban levő atomnak a beléje ütköző elektron $h\nu_\infty$ energiát ad át, hol ν_∞ az abszorpciós szeries határának rezgésszáma, akkor az atom kötelékébe tartozó és az emissziót végző ú. n. sorozati elektron az atom alappályájáról a végtelenig távolodik, mert a szeries határának rezgésszáma azt az energiát mutatja, amely akkor lesz szabad, ha a sorozati elektron a végtelenből ugrik vissza az alappályára. Ha a sorozati elektron az atomból a végtelenbe távozik, bekövetkezik az ionizáció. Ha tehát a $\nu_\infty = \frac{c}{\lambda_\infty}$ -hez tartozó V -t határozzuk meg a 3. alapján, akkor az ionizációs feszültséget kell kapnunk.

Mivel pedig az ionizációs feszültséget kísérletileg meghatározhatjuk, újabb eszközt nyerünk az elmélet ellenőrzésére.

Az elektronütközésre vonatkozó kísérletek még egy másik módon is felhasználhatók az elmélet alapjainak vizsgálatára. A kvantumelmélet alapfeltevése szerint az energiakicszerelődések csak elemi kvantumokban történhetnek. Ennek megfelelően, ha az elektron mozgási energiája még kisebb, mint az a legkisebb energiamennyiség, amelyet az atom felvehet, akkor energiájából semmit sem adhat át az atomnak, hanem az atommal való összeütközésnek rugalmas ütközés gyanánt kell lefolynia. Amint látni fogjuk, a kísérletek ebben az irányban is az elmélet javára szólnak.

Az elektron rugalmas ütközése.

Az elektronnak atomhoz való ütközésénél fontos szerepet játszik az atom ütközési keresztmetszete. Ennek következő jelentése. Gondoljuk az összes atomokat nyugvó merev golyók által helyettesítve, amelyekon kívül már nincs erőhatás. A golyókat akkoráknak vesszük, hogy ugyanakkora változást idézzenek elő az elektronok mozgásában, mint a tényleges elektronütközés. Ezeknek a merev golyóknak a keresztmetszete adja az ütközési keresztmetszetet. Ez fordítva arányos az elektron átlagos szabad úthosszával. Már LENÁRD vizsgálódásai megmutatták, hogy az ütközési keresztmetszet függ az elektronok sebességétől, amennyiben nagyobb sebességnél az ütközési keresztmetszet csökkent annyira, hogy nagy sebességgel haladó elektron több ezer atomot átjárhatott a nélkül, hogy észrevehető eltérést szenvedett volna. Kisebb sebességek felé haladva az ütközési keresztmetszet növekedett s kezdetben azt gondolták, hogy kb. 8 voltos sebességtől kezdve az ütközési keresztmetszet mindig állandó marad s nagysága szerint megfelel a gázkinetikus keresztmetszetnek. MAYER és RAMSAUER kísérleti vizsgálódásai¹

¹ Ann. der Physik. 64. k. 451. l., 64. k. 513. l. 1921.; 66. k. 546. l. 1921.; 72. k. 345. l. 1923.

azonban azt mutatták, hogy a nemes gázoknál az ütközési keresztmetszet és az átlagos szabad úthossz nagyon függ a sebességtől. Ha a sebesség kisebbedik, az ütközési keresztmetszet nő, elér egy maximális értéket, azután újra fogy, 1 volt körül kisebb a gázkinetikus keresztmetszetnél.

Egész a legújabb időkig azt gondolták, hogy a szabad úthossznak a sebességtől való ez az erős függése csakis a nemesgázoknál jelentkezik. Azonban E. BRÜCHE¹ a hidrogént és nitrogént vizsgálva azt találta, hogy ezeknél az ütközési keresztmetszet nem közeledik kis sebességeknél állandó értékhez, mint eddig hitték, hanem a hidrogénnél 1·7 voltnál, a nitrogénnél pedig 1·5 voltos és 4·2 voltos sebességnél maximum jelentkezik. A gázkinetikus keresztmetszet ezeknél sem játszik különösebb szerepet, akárcsak a nemesgázoknál.

Az eddig említett vizsgálódások igazában csak az ütközések számára nézve adhatnak felvilágosítást, a mi tárgyunk szempontjából azonban fontosabb az ütközés módjának az ismerete. Itt különbséget kell tennünk. A gerjesztési határon felül az atomnak az energiája az ütközés következtében biztosan növekszik, ezen a határon alul azonban az eredmény bizonytalanabb. TOWNSEND feltevése az volt s ezt legújabban is megerősítette,² hogy az elektron és az atom közötti minden összeütközés az elektron energiájának teljes elvesztésével jár úgy, hogy az elektron az atom gerjesztéséhez vagy ionizálásához szükséges energiát mindig csak egyetlen szabad úthosszon szerezheti meg. Ezzel szemben FRANCK és HERTZ felfogása már a BOHR-féle elmélet felállítása előtt az volt, hogyha az elektronnak a mozgási energiája még kisebb, mint amennyi az atom első gerjesztéséhez szükséges, akkor ütközéskor energiájából semmit sem ad át az atomnak, az ütközés rugalmasan folyik le s így az elektron az atom gerjesztéséhez szükséges mozgási energiáját több szabad úthosszon gyűjtheti össze.

¹ Ann. der Physik. 81. k. 537. l. 1926.

² Phil. Mag. (7) 2. 474. l. 1926.

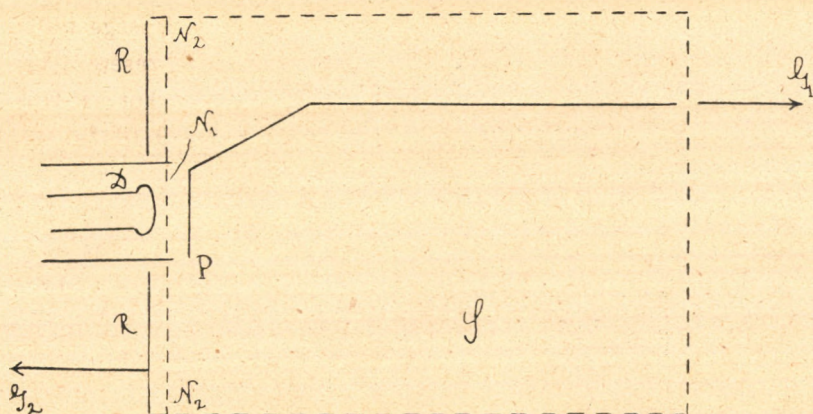
Szorosan véve természetesen rugalmas ütközésnél is ad át az elektron valamelyes energiát az atomnak mozgási energia formájában, a BOHR-féle alapfeltevés csak azt zárja ki, hogy a gerjesztési határon alul intraatomális energiát nyer az atom az elektrontól. A rugalmas ütközésnél átadott mozgási energia azonban oly csekély, hogy közelítőleg mondhatjuk, hogy az ütközés energiaveszteség nélkül történik. Ugyanis az elektron sebessége nagy az atoméhoz képest már akkor is, ha az elektront 4—5 voltos feszültségeséssel gyorsítjuk, hisz az atom hőmozgása szobahőmérsékleten csak kb. 0.03 voltoknak felel meg. Ezért felvehetjük, hogy az ütközés előtt az atom sebessége nulla. Ha ezt figyelembe véve az elektron és atom ütközésére alkalmazzuk az impulzus megmaradásának az elvét, akkor azt kapjuk, hogy az elektron mozgási energiájának csak $2.9 \cdot 10^{-4}$ részét adja át az atomnak rugalmas ütközéskor.

FRANCK és HERTZ többféle módszert¹ dolgoztak ki annak a kísérleti igazolására, hogy a gerjesztési határon alul az elektronnak az atomhoz való ütközése rugalmasan történik energiaveszteség nélkül. Kísérleti berendezésük vázát az 1. ábra mutatja.

A *D* izzó platinadrót, ebből lépnek ki az elektronok, amelyeknek a *D* és *N*₁ drótháló közötti feszültségesés meghatározott sebességet ad. Hogy megállapítsuk az *N*₁-en áthaladó primer elektronáramlásban a különböző sebességű elektronoknak számbeli elosztódását, az *N*₁-gyel szembeállítjuk a *P* elektrodot úgy, hogy a *DP* távolság kisebb legyen, mint az elektron átlagos szabad úthossza. Ha *N*₁ és *P* között különböző nagyságú elektromos ellenteret alkalmazunk s mindannyiszor megmérjük a *P*-hez érkező elektronok mennyiségét a *G*₁-hez kapcsolt galvanométerrel, akkor a *P* hez érkező elektronok számát az *N*₁*P* közötti ellenfeszültség függvénye gyanánt kapjuk. Ez után

¹ Verh. d. D. Phys. Ges. 15. 373. l. és 613. l. 1913. Az elektronütközésre vonatkozó alapvető kísérletei miatt kapta meg ez a két tudós legújabbán a NOBEL-díjat.

a P elektródot az útból elforgatjuk s a D -ből kilépő elektronoknak alkalmat adunk az S térben az ütközésre. Az S oldal falainak az N_1 -től való távolsága többszörösen nagyobb az elektron szabad úthosszánál, azért az S térből visszafelé verődő elektronok csakis gázatomokkal való összeütközésből származhatnak. Hogy az S térből visszaverődött elektronok sebességeloszlódását megkapjuk, az N_2 és R által alkotott sűrítőhöz kapcsolt G_2 galvanométer segítségével megállapítjuk az N_2 -hez érkező elektronok számát, mint az N_2 és R között alkalmazott



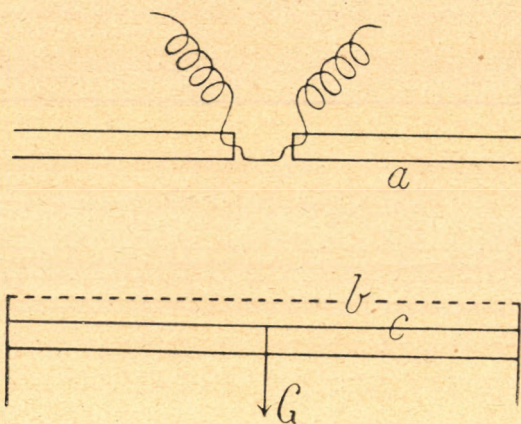
1. ábra.

elektromos ellentérnek a függvényét. A primér és visszavert elektronáramlás összehasonlítása azt mutatta, hogy különösen a nemesgázoknál az energiavesztés nagyon kicsiny, de ez a módszer nem volt alkalmas arra, hogy az energiavesztés nagyságára nézve pontosabb értéket lehetett volna kapni.

FRANCK és HERTZ második kísérleti elrendezése sokkal alkalmasabb volt annak az igazolására, hogy a gerjesztesi határon aluli ütközésnél nincs energiavesztés s így az elektron több szabad úthosszon is gyűjtheti az atomgerjesztéshez szükséges energiáját. A használt készülék vázát a 2. ábra mutatja.

Az elektronok az a lemez középpontjában levő izzódrótból

lépnek ki, a és b között van a gyorsító feszültség. A b rácsból és c lemezből álló kondenzátorral egybekapcsolt G galvanométer méri a b -hez érkező elektronok számát, mint a b és c között levő késleltető elektromos térnek a függvényét. Heliumban 1·3 mm nyomásnál végeztek kísérleteket 18 voltos gyorsító feszültséggel. Az ab távolság egyik kísérletnél 4 mm volt, a másiknál 14 mm, tehát a távolság nagyobbodása több volt a szabad úthossz 13-szorosánál, úgy hogy az ütközések száma a második esetben sokszorosán nagyobb volt a többszörös vissza-



2. ábra.

verődés miatt, amelyet az elektronok szenvedtek. A kísérlet mégis mindkét esetben majdnem teljesen azonos sebességeloszlódást adott, és az áramgörbe mindegyik esetben nagyon közel feküdt ahhoz az elméletileg meghatározott görbéhez, amelyet azon feltevés alapján készítettek, hogy a b -hez érkező elektronok valamennyien 17 voltos sebességgel bírnak, de a sebességek iránya egyenletesen oszlik meg egy félgömb összes szögértékei között. Az elektronokat ténylegesen 18 voltos feszültségeséssel gyorsították, az 1 voltos eltérést csak valami mellékes körülmény, esetleg a kondenzátorbeli érintkezési potenciál okozhatja. Mindenesetre a görbék nagy megegyezése

azt mutatja, hogy még az összeütközések egész halmaza se okoz az elektron energiájában észrevehető változást.

FRANCK és HERTZ kísérletei tehát az elektronaffinitás nélküli atomokra nézve megerősítik a BOHR-féle feltevést, hogy az elektronok, ha a gerjesztési határon aluli energiával ütköznek az atomhoz, annak nem adnak át intraatomális energiát. Láttuk azonban, hogy energiájuknak kb. $2 \cdot 9 \cdot 10^{-4}$ részét rugalmas ütközésnél is átadják az atomnak mozgási energia alakjában, de az említett módszerek nem alkalmasak ilyen kis energia-vesztés mérésére. Később látni fogjuk, hogy az atomnak elektronütközéssel való gerjesztésénél lehet úgy módosítani a kísérletet, hogy a rugalmas ütközésnél bekövetkező kis energia-vesztés értékét is megkapjuk s az így nyert érték eléggé megegyezik az előbb említett adattal.

Míg a nemesgázoknál energiavesztés nélkül történik az ütközés, addig elektronaffinitással bíró gázoknál (pl. oxigén, hidrogén) FRANCK, HERTZ, BAERWALD mérései szerint energia-vesztés mutatkozik. Azonban nem bizonyos, hogy az ütköző elektronok veszítik el az energiát. Ugyanis ezeknél a primérek elektronok nyalábjában az elektronaffinitás miatt mindig vannak negatív ionok is. Ezek jelenléte a primérráamlásban a sebességelosztódásban még nem jelentkezik, ellenben a visszavert részek energiaelosztódásában már erősen érezhető hatását, mert az ionok tömege egyenlő nagyságrendű az atomkéval s azért rugalmas ütközésnél is átadják energiájuk jelentékeny részét.

Ez a kérdés különben még nem eléggé tisztázott.

Az elektron rugalmatlan ütközése.

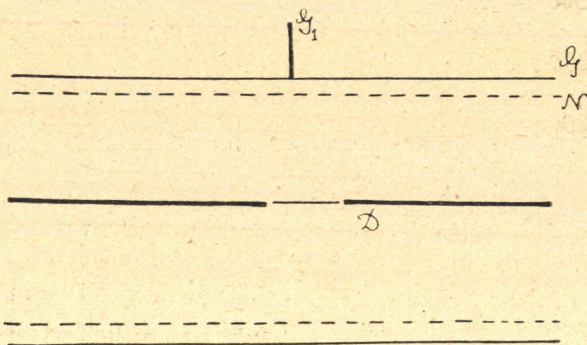
BOHR elmélete szerint a kisenergiájú elektronok rugalmasan ütköznek az atomokkal, ha azonban a sebességet fokozatosan növeljük, egyszer csak elérjük azt a határt, ahol az elektron mozgási energiája egyenlő lesz az atom gerjesztési energiájával, amikor is megszűnik a rugalmas ütközés és az

elektron átadja a mozgási energiáját az atomnak, ami által az gerjesztett állapotba jut. A vizsgálódás célja a kritikus potenciálnak a meghatározása, vagyis annak a voltokban kifejezhető sebességnek a mérése, amelynél a rugalmatlan ütközés és így az atom gerjesztése először bekövetkezik.

A kritikus potenciál mérésére többféle módszert dolgoztak ki, amelyeket három csoportba oszthatunk.

I. A FRANCK és HERTZ-től származó kísérleti berendezés¹ vázát a 3. ábra mutatja.

D platinadrót, amelynek középső darabja vékonyabb és elektromos áram által izzásba hozható. N finom platina drót-



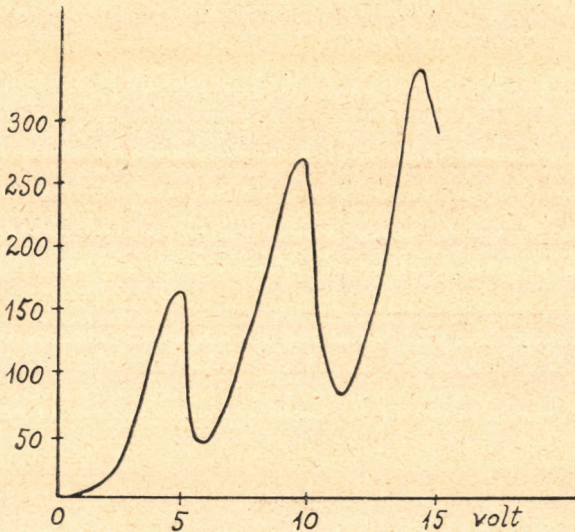
3. ábra.

háló, amely D -t 4 cm távolságban hengeresen körülveszi, G hengeres platinalemez, amely N -től 1—2 mm-re van és G_1 galvanométeren keresztül a földdel van összeköttetésben. D és N között van a gyorsító feszültség, N és G között pedig állandó fékező feszültség (FRANCK és HERTZ-nél 0·5 volt körül).

A jelenség következő lefolyása várható. Amíg a gyorsító feszültség kisebb, mint a késleltető, a G_1 által mért áram erőssége nulla. A gyorsító feszültség növelésével az áramerősség is nő, amíg el nem érjük a kritikus potenciálértéket,

¹ Verh. d. D. Phys. Ges. 16. 457. I. 1914.

akkor az elektronok ütközéskor átadják energiájukat az atom gerjesztésére s mivel az ütközés után hátralevő úton már csak nagyon kis sebességre tehetnek szert, azért nem tudnak az NG fékező feszültség ellenében haladni s így ilyen esetekben a galvanométer áramerőssége kis értékre süllyed le. Ha még tovább növeljük a sebességet, akkor a D -hez közelebb történik meg az első rugalmatlan ütközés, utána még nagyobb sebességre tud az elektron szert tenni, azért az áram újra nő

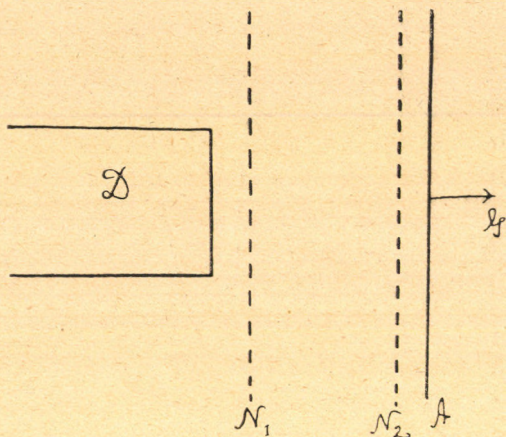


4. ábra.

mindaddig, amíg az elektron a feszültség növelésével az első ütközés után újra akkora sebességre nem tesz szert, hogy újra tud rugalmatlanul ütközni, amikor is megegyezően leesik az áramerősség. Ha tehát a gyorsító feszültség függvényeképpen az áramerősséget grafikailag ábrázoljuk, a maximumok távolságai felvilágosítást adnak a kritikus potenciálról.

Szemléletesség kedvéért a 4. ábrában bemutatjuk azt a görbét, amelyet FRANCK és HERTZ a higanygőzre vonatkozó kísérletükben nyertek. Az ábrából leolvasható kritikus potenciálérték a higanyra vonatkozólag 4.9 ± 0.1 volt.

HERTZ újabb módszerénél¹ azoknak az elektronoknak a számát méri a gyorsító feszültség függvényeként, amelyeknek a sebessége majdnem nulla. Ilyenek ugyanis akkor keletkeznek, ha a primérektronok az atom gerjesztésekor rugalmatlanul ütköznek. Tehát az ily elektronok számának maximuma meghatározza a kritikus potenciált. A kis sebességű elektronok számát úgy határozza meg, hogy kettős mérést végez, az egyiknél a felfogó elektród előtt nincs ellentér, a másikon pedig 0·2 voltos késleltető elektromos erőteret alkalmaz. A két mé-



5. ábra.

rés különbsége felvilágosítást ad a kis sebességű elektronok számáról.

II. Más módszer a kritikus potenciált a szekundáráram vizsgálatával méri. Ez tulajdonképpen a LÉNÁRD-tól származó módszer némi módosítással, amelynek vázlatát az 5. ábra mutatja.

D izzódrót, N_1 drótháló, ezek között lesz az elektron gyorsító. N_1 és N_2 között megy végbe az atomokkal való ütközés, N_2 és A között pedig oly késleltető elektromos tér van, amely a primérektronokat mind visszatartja. E miatt akkor kezd a G galvanométeren áthaladó pozitív áram először nőni,

¹ ZS. f. Phys. 18. k. 307. l. 1923.

amikor legelőször tudják a primélektronok az atomokat gerjeszteni s a keletkezett rövidhullámú fény az A elektródon vagy esetleg a közbe lévő tisztátalanságokon fényelektromos hatást idéz elő. Újabb emelkedések lesznek az áramgörbében az újabb vonalak gerjesztésénél, majd pedig hirtelen erős növekedés áll be, ha a primélektronok már ionizálni tudnak a gáztérben. Az áramgörbe első része az úgynevezett fényelektromos görbe.

III. Spektroszkopikus úton is meg lehet határozni a kritikus potenciált. GEHRCKE-SEELIGER és RAU régebbi vizsgálatai után FRANCK és HERTZ is foglalkoztak ilyen természetű kísérletekkel. Ők azt találták,¹ hogyha az izzó elektródból kirepülő elektronok kvarccsőbe zárt higanygőz atomjaiba ütköztek, akkor a 4·9 voltos sebesség elérésekor a higanygőz atomjai fénysugarakat kezdtek kibocsátani. A kibocsátott fény hullámhosszát kvarcspektrográffal megmérve, $\lambda = 253\cdot6 \mu\mu$ -t találtak, ami a Bevezetés 3. képlete szerint csakugyan a 4·9 voltos sebességnek felel meg.

Az első vizsgálatok arra utaltak, hogy a kritikus potenciálon alul semmi fényemisszió sem jelentkezik, azután a rezonancia-vonal tűnik fel s a sebességet tovább fokozva nem lép fel újabb vonal, amíg csak az ionizáló feszültségig el nem jutnak s akkor egyszerre az egész spektrum megjelenik. Ez látszólag ellentmond BOHR elméletének, amely szerint lépésenként kellene bekövetkezni a magasabb kvantumállapotok gerjesztésének s ennek megfelelően a kisebbedő hullámhosszú vonalak fellépésének. A jelenség oka a tértöltés hatása, emiatt a térerősség: sűrűség viszony a cső nagy részében kicsiny, ezért az elektronok nem tudnak akkora kinetikai energiát összegyűjteni, amekkora a magasabb kvantumállapotok gerjesztésére szükséges volna. Csak ha már beáll az ionizáció, akkor omlik össze ennek következtében a tértöltés s így a térerősség látszólag nagyobbodik, a térerősség: sűrűségviszony nő, az elektronoknak nagyobb lesz a sebességük, fellépnek a magasabb gerjesz-

¹ Verh. d. D. Phys. Ges. 16. k. 512. l. 1914.

tési fokozatoknak megfelelő vonalak is. Épp ennek alapján sikerült HERTZ-nek¹ a rezonancia-vonalon kívül a szeriesnek megfelelő részét is előállítani már az ionizáció előtt. Ő ugyanis a vizsgálandó gázhoz oly gázt kevert, amelynek ionizáló feszültsége a vizsgálandó feszültségértékeknél kisebb volt. Ezért, miközben a vizsgálandó gáz atomjait gerjesztette, az elektron-ütközés következtében a keverék gázatomjaiból már keletkeztek pozitív ionok, amelyek azután a tértörlés hatását kompenzálták.

Különösen alkalmas a spektroszkopikus módszer az úgynevezett szikraspektrum gerjesztésére. Ilyenkor olyan gyorsító feszültség szükséges, amely a neutrális atom ionizáló feszültségénél nagyobb, hogy az ionizált atomok a szikraspektrumot kibocsáthassák. A tértöltés hatása ilyenkor nem lesz zavaró, mert a keletkezett pozitív ionok lerontják.

A kritikus potenciál meghatározására szolgáló módszereket jórészt az ionizáló feszültség meghatározására is fel lehet használni. Ha a II. módszert használjuk, akkor különösen arra kell vigyáznunk, hogy jól megkülönböztethessük az atom gerjesztése és ionizálása által létrejött hatásokat. Hogy ez könnyebben megtörténhessék, DAVIS és GOUCHER² módosították az eredeti kapcsolást. Az eredeti eljárás mód szerint ugyanis a felfogó elektród pozitív töltést nyer akkor is, ha az elektronok az atomot gerjesztik és a kibocsátott sugárzás fényelektromos hatást fejt ki a felfogó elektródon, de akkor is, ha az elektronok az atomot már ionizálják s ezek a pozitív ionok érnek el a felfogó elektródhoz. A felfogó elektródból tovahaladó pozitív áramlás ugyan az utóbbi esetben észrevehetően erősebb szokott lenni, de azért megvan a tévedés lehetősége. Ennek elhárítására DAVIS és GOUCHER a felfogó elektród elé egy másik dróthálót is tettek, e között és az elektród között gyöngyelektromos ellenteret alkalmaztak. Ennek következtében, amíg

¹ ZS. f. Phys. 22. k. 18. l. 1924.

² Phys. Rev. 10 k. 101. l. 1917.

csak fényelektromos hatás van, addig negatív töltést kapunk a felfogó elektródon, mert az elektromos ellentér az elektródból kilépő elektronokat visszatartja, ellenben a dróthálónál kiváltott elektronok az elektródra jutnak és azt negatív töltéssel látják el. Amint azonban elérjük azt a feszültséget, amelynél az ionizáció bekövetkezik, az elektródra jutó pozitív ionok az áramot rögtön pozitívvá változtatják.

A fényelektromos hatás és az ionizáció jól megkülönböztethetők COMPTON módszerével is.¹ Ő az eredeti LÉNÁRD-féle kapcsolásnál felfogó elektród gyanánt FARADAY-hengert használ, amely felül dróthálóval van befogva és úgy forgatható egy tengely körül, hogy az odaérkező ionok egyszer a henger masszív fenekét érik, máskor pedig a dróthálón át a henger belsejébe jutnak. Ha már tényleges ionizáció van, akkor ez nem változtat az eredményen, de ha csak fényelektromos hatás váltja ki az elektród pozitív töltését, akkor a forgatás ezt elárulja, mert ha a masszív oldalt találja a fény, akkor az elektródból kiszabadult elektronok mind eltávozhatnak, de ha a hálós oldalt, akkor csak azok, amelyek magáról a hálóról távoznak, míg a belső részen kiváltott elektronokat a háló újra felfogja. COMPTON ezzel a módszerrel azt találta, hogy már az első fényelektromos hatás előtt is van gyöngye ionizáció, míg az erős ionizáció határa megfelel a más módszerrel is mérhető ionizációs feszültségnek. Az előzetes gyöngye ionizáció lépcsőzetes ionizációval magyarázható a metastabil állapot révén, amire még visszatérünk.

Az elektron rugalmas ütközésénél említettük, hogy a rugalmatlan ütközésre vonatkozó kísérletek némi módosítással alkalmassá tehetők arra, hogy a rugalmas ütközésnél bekövetkező csekély energiaveszteség nagyságát megadják. Ha ugyanis növekedő nyomásnál vizsgáljuk az áramgörbét, a rugalmatlan ütközést mutató ugrások a nagyobb potenciálértékek felé tolódnak, mert nagyobb nyomásnál már a rugalmas ütközéseknél fellépő

¹ Phil. Mag. 40. k. 553. l. 1920.

csekély energiaveszteségek is kezdenek figyelembe jönni. HERTZ dolgozott ki egy elméletet,¹ amelynek alapján a kísérleti adatokból az energiaveszteséget ki lehet számítani. Az így nyert $3 \cdot 10^{-4}$ — $8 \cdot 10^{-4}$ határok között mozgó érték elég jól megfelel a rugalmas ütközésnél kiszámított $2 \cdot 9 \cdot 10^{-4}$ értéknek.

Atomgerjesztés elektronütközéssel.

A kritikus potenciálnak és az ionizációs feszültségnek kísérleti meghatározása legkönnyebben a nemes gázoknál és fémgőzöknél történik, mert ezeknél az ütköző elektronok nem tapadnak az atomokhoz negatív ionokat alkotva, hanem az ütközés mindaddig rugalmasan történik, amíg csak a gyorsító feszültséggel az első gerjesztési határt el nem érjük. Ezért a legtöbb kísérleti eredmény éppen az említett gázoknál áll a rendelkezésünkre, de mielőtt ezeket tárgyalnánk, előbb a hidrogénatomra vonatkozó kísérleteket ismertetjük, mert az elmélet ennél tud teljes eredményt adni.

Hidrogén. Ennek spektrumában található különböző szeriesek közül az elmélet szerint² az ultraibolyában fekvő

$$\frac{1}{\lambda} = \nu = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 2, 3, \dots \quad [R = 109,677 \cdot 7 \text{ cm}^{-1}]$$

LYMAN-szeries az, amelynél kiindulásul az atom normális állapota szolgál s a sorozat bármely vonalának kibocsátásakor a nagyobb energiájú pályáról az alappályára tér vissza mindig az elektron. A LYMAN-szeries első vonalának hullámhossza $\lambda = 1215 \cdot 7 \text{ \AA}$, a szeries határa $\lambda = 911 \cdot 8 \text{ \AA}$, azért a Bevezetés 3. képlete alapján számítva a hidrogénatom első gerjesztéséhez szükséges kritikus potenciálra kapunk $10 \cdot 154$ voltot, ionizációs feszültség gyanánt pedig $13 \cdot 539$ voltot.

A kritikus potenciál és az ionizációs feszültség kísérleti meg-

¹ ZS. f. Phys. 32. k. 298. l. 1925.

² POGÁNY: A fény. 325. l.

határozásánál nehézséget okoz, hogy a kiindulás nem a hidrogénatomból, hanem a hidrogénmolekulából történik s azért ezt először disszociálni kell. A régebbi nézet az volt, hogy pl. a THEA KRÜGER¹ által nyert 17·1 voltnyi ionizációhoz szükséges feszültség úgy magyarázható, hogy először a hidrogén molekula disszociálódik hidrogénatommá 3·6 volt elhasználásával s azután a hidrogénatom ionizálódik 13·5 volt gyorsító feszültség-nél. Újabban azonban főleg SMYTH vizsgálatai révén — aki a keletkezett ionoknál az $\frac{e}{m}$ viszonyt mérte — kiderült, hogy a 16 — 17 voltnál (pontosabban 16·4 voltnál) bekövetkező jelenség nem a hidrogénmolekula disszociálódása s a keletkezett hidrogénatom ionizálódása, hanem a 16·4 voltnál bekövetkező ionizáció H_2^+ ionok képződésével magyarázható, tehát a 16·4 volt nem a hidrogénatom, hanem a hidrogénmolekula ionizációs feszültsége.

Hogy a hidrogénatomra vonatkozólag direkt kísérletet lehessen végezni, magas hőfok által először disszociálnunk kell a hidrogénmolekulát. Ilyen irányú kísérleteket OLMSTEAD és COMPTON végeztek.² Berendezésük annyiban tért el a szokásostól, hogy mérés közben az egész készüléket 2500° absz. hőmérsékleten tartották akkora nyomás mellett, hogy praktice a disszociáció teljesnek volt tekinthető. Kísérleti eredményük 0·05 voltnyi pontossággal megfelelt a fentebb megadott számítással nyert értékeknek. Az eltérés nem múlta felül a mérés valószínű hibáját.

A nemesgázok közül legtöbb vizsgálatot a heliumra nézve végeztek. Ennél az atommag körül már két elektron kering, az elméleti tárgyalás nehézséggel jár, azért kísérleti alapokból kell kiindulnunk.

A heliumnak spektrumában kétféle vonalrendszert különböztetünk meg, parhelium- és orthoheliumvonalakat. Az előbbiek egyszeresek, az orthoheliumspektrum az elmélet szerint

¹ Ann. d. Phys. 64. k. 288. l. 1921.

² Phys. Rev. 22. k. 559. l. 1923.

triplettspektrum, bár kísérletileg inkább dublettnek látszik. Régebben azt gondolták, hogy különböző elemeknek a vonalai ezek, de elektronütközéssel végezett kísérletek megmutatták, hogy az orthohelium parheliumból állítható elő elektronütközés útján. Az orthoheliumvonalakhoz tartozó tagok jelei 3S , 3P stb., a parhelium vonalainál pedig 1S , 1P , stb.

PASCHEN¹ a heliumvonalaknak különösen két sorozatát, szeriesét vizsgálta, az orthoheliumnak és parheliumnak egy-egy főszeriesét. Az első $\lambda = 10,830 \text{ \AA}$, a második $\lambda = 20,582 \text{ \AA}$ hullámhosszúságú vonallal kezdődik. Megállapította, hogy ezeknél a kiindulás nem történhetik az atom alappályájából, tehát egy-egy vonal kibocsátása után az atom nem juthat vissza normális állapotába, mert azt tapasztalta, hogy a helium csak akkor nyelte el ezeket a vonalakat, ha előzőleg GEISLER-csőbe zárva gyöngé elektromos kisülést engedett át rajta s így gerjesztette az atomokat. Ennek megfelelően a $\lambda = 10,830 \text{ \AA}$ vonalat a $2^3S - 2^3P$ főszeries első vonalának vehetjük, a $\lambda = 20,582 \text{ \AA}$ pedig a $2^1S - 2^1P$ főszeries első vonala.

Bár ezeknél a sorozatoknál a kezdő tag nem az alappályához tartozik, mégis érdekes módon a $\lambda = 10,830 \text{ \AA}$ rezonancia-vonalként viselkedett. Ha ugyanis a 2^3S tagnak megfelelő állapotból az atomot a következő magasabb energiájú állapotba emelte energiaelnyeléssel, utána az egész elnyelt energiát megkapta a kisugárzott vonalnál. Ez úgy magyarázható, hogy a 2^3S tagnak megfelelő állapot úgynevezett metastabilállapot. Közönségesen az atom gerjesztett állapotban csak nagyon kis ideig marad meg, azután fénykibocsátás közben visszatér az alapállapotba. Megtörténhetik azonban, hogy az atom olyan magasabb kvantumú állapotba kerül, amelyből fénykisugárzás útján nem térhet vissza a normális állapotba, mert ez ellenkezik a spektroszkopikus kiválasztási elvvel. Ilyenkor az atom megmarad ebben az állapotban mindaddig, amíg valami külső behatás ezt meg nem szünteti. Ilyen külső behatás lehet a

¹ Ann. d. Phys. 45. k. 625. l. 1914.

sugárzás, amelyet a metastabil állapotban levő atom elnyel s ez által magasabb kvantumú állapotba kerül, vagy pedig első- vagy másodfajú ütközés. Másodrangú ütközésnek azt nevezzük, amelynél a gerjesztett atom az által megy át kisebb energiájú állapotba, hogy a felszabaduló energiát az ütköző elektronnak adja át kinetikai energia alakjában. Mivel ilyen külső behatás aránylag ritkábban történik, azért az atom metastabil állapota jóval hosszabb idejű, mint a rendes gerjesztett állapot, amelynél csak 10^{-8} sec nagyságrendű idők szerepelnek. KANNENSTINE a heliumnál a 2^3S taghoz tartozó metastabil állapot fennmaradásának idejére $2 \cdot 10^{-3}$ sec-ot kapott kísérleteiből. Ez a metastabil állapot az oka annak, hogy a $10,830 \text{ \AA}$ vonal rezonanciavonalként viselkedik. Ha ugyanis az atomot a 2^3S tagnak megfelelő állapotból a 2^3P -nek megfelelő állapotba juttatjuk energiaelnyeléssel, mivel a 2^3S -nél mélyebb állapotba nem juthat az atom fénykibocsátás árán, azért az egyetlen $2^3P \rightarrow 2^3S$ visszatérési lehetőség miatt az egész elnyelt energia a $2^3S - 2^3P$ ($\lambda = 10,830 \text{ \AA}$) vonalnál szabadul föl.

A 2^3S tagnak megfelelő állapot metastabilitása arra utal, hogy nincs 1^3S alakú alaptag, hanem 1^1S tag felel meg az atom normális állapotának. Mivel ugyanis a kétféle tagok között fényemisszióval átmenet nem történik, ezzel a 2^3S állapot metastabilitása magyarázatot nyer.

Hogy a legkisebb energiájú alappálya (1^1S) milyen mélyen van a 2^3S és 2^1S -nek megfelelő pályák alatt, arra nézve felvilágosítást adnak FRANCK és KNIPPING kísérletei.¹ Ők a II. módszerrel keresték a legelső gerjesztési fokot, megmérték több maximumot s megkeresték azoknak egymástól való távolságát voltokban kifejezve. Az eredeti mérésnél elkövetett s később kijavított csekély hibát figyelembe véve 19.75 voltot kaptak első gerjesztési feszültség gyanánt, amelyet az $1^1S \rightarrow 2^3S$ átmenetnek megfelelő átalakulási potenciál (Umwandlungspotential) gyanánt értelmeztek. Hogy a 19.75 volt feszültség az

¹ Phys. Zeitschrift 20. k. 481. l. 1919.

atomot az alapállapotból a 2^3S -nek és nem a 2^1S -nek megfelelő állapotba emeli, az abból következik, hogy a 19·75 volt-nál az áramerősség emelkedése csak akkor mutatkozik, ha a heliumhoz csekély mennyiségben más gázt keverünk. Hogy tiszta heliumnál a 19·75 voltos gerjesztési feszültség nem mutatkozik, annak az az oka, hogy az ilyenkor létrejövő 2^3S állapot metastabil, nincs belőle fényemisszióval visszatérés az alapállapotba, már pedig a II. módszernél a fényelektromos görbe ugrása a 19·75 volt energiájának nem direkt elnyelését mutatja, hanem csak indirekte a fényelektromos hatás révén az atom gerjesztésekor kibocsátott fényt. Hogy a fényelektromos görbében az ugrás létrejöhesse, ahhoz a heliumgázban tisztátalanság jelenléte szükséges, ekkor jön létre szekundér hatás révén (másodfajú ütközés stb.) a sugárzás, esetleg ionizáció. Hogy a 19·75 voltos gerjesztési feszültség a heliumatomhoz tartozik, bár csak idegen gázok jelenlétekor mutatkozik, az abból következik, hogy a neki megfelelő maximum már minimális tisztátalanság esetén is nagyon erős, amikor pedig a keverékgázra jellemző gerjesztő és ionizáló feszültségnek megfelelő ugrások még nem mutatkoznak az áramgörbében.

A $2^3S - m^3P$ sorozat határa 2600 \AA , ennek a Bev. 3. szerint megfelel 4·75 voltos feszültség. Ha ezt hozzáadjuk a 2^3S gerjesztéséhez szükséges 19·75 volthoz, meg kell kapnunk azt a feszültséget, amely egy elektront az alappályából egész a végtelenig eltávolít, vagyis a számítás szerint a heliumatom ionizációs feszültsége $19\cdot75 + 4\cdot75 = 24\cdot5$ volt. FRANCK és KNIPPING kísérletei 24·6 voltot adtak, ami tehát a számított értéknek jól megfelel.

A parhelium $2^1S - m^1P$ főszeriesének határa 3122 \AA , ennek gerjesztéséhez a $\lambda V = 1\cdot234\cdot 10^4$ képlet szerint 4 volt kell. Ha ezt kivonjuk a 24·6 voltos ionizációs feszültségből, a különbség (20·6 volt) azt mutatja meg, hogy mennyi energiára van szükség, hogy az atom az alappályából a $2^1S - m^1P$ series kiinduló állapotába jusson. FRANCK és KNIPPING kísérletei szerint az $1^1S \rightarrow 2^1P$ átmenet gerjesztéséhez csakugyan 20·55 volt szükséges.

LYMAN-nak sikerült az $1^1S - m^1P$ főszeres néhány első vonalát is közvetlen spektroszkopiai vizsgálat tárgyává tenni s az így kapott λ értékekből kiszámított gerjesztési feszültségek szintén a kísérleti eredményekkel nagyon megegyező értékeket adtak.

Mivel a heliumatomnál metastabil állapot is fordul elő, megtörténhetik, amint HORTON és DAVIES kísérletei mutatták, hogy már 4—5 voltos feszültségnél bekövetkezik az ionizáció, ha előzőleg 19·75 voltal az első gerjesztés már megtörtént. Ehhez ugyanis csak az szükséges, hogy a metastabil állapotú atom megfelelő sebességű elektronnal újra ütközzék, mielőtt a metastabil állapotát esetleg másodfajú ütközés révén elveszítené.

Ha a heliumatom ionizáció révén egyik elektronát elveszíti, akkor a He^+ hidrogénatomhoz hasonló szerkezetű lesz az atommag körül egyetlen elektronnal, azért a hidrogénatomhoz hasonlóan elméletileg is tudjuk vizsgálni. A He^+ újabb ionizálásához, tehát a második elektron eltávolításához négyszer akkora feszültség kell, mint a mekkora a hidrogén ionizációs feszültsége a

$$\nu = \frac{1}{\lambda} = RZ^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)^1$$

képlet szerint, hol Z az atom rendszáma az elemek természetes rendszerében, amely rendszám a heliumnál 2. Mivel a hidrogén ionizációs feszültsége 13·54 volt s a heliumnál az első ionizációhoz 24·6 volt kellett, azért a helium mindkét elektronjának az eltávolításához kell

$$24\cdot6 + 4\cdot13\cdot54 = 78\cdot66 \text{ volt.}$$

FRANCK és KNIPPING kísérleti eredménye $79\cdot5 \pm 0\cdot3$ volt.

A többi nemes gáz közül csak a neonnál sikerült PASCHEN-nek az optikailag megfigyelhető spektrum komplikált szeriesrendszereinek a megállapítása s a szeriesvonalaknak megfelelő tagokhoz való rendelése. A xenonnál SOMMER, az argonnál NIS-

¹ POGÁNY: A fény 332. l.

SEN, DORGELO és ABBINK igyekeztek a vonalakat részben szerierekbe foglalni.

A neon rezonanciavonalait ($\lambda = 735\cdot7 \text{ \AA}$, $\lambda = 743\cdot5 \text{ \AA}$) HERTZ találta meg, mind a kettő rövidhullámú ultraviolában fekszik. Ezeknek a Bev. 3. képlete szerint $16\cdot77$ és $16\cdot58$ volt gerjesztő feszültség felel meg. HERTZ kísérletileg $16\cdot65$ voltot kapott. HERTZ és SCHARP DE VISSER a $\lambda = 6402 \text{ \AA}$, $\lambda = 6143 \text{ \AA}$, $\lambda = 5852 \text{ \AA}$, $\lambda = 5331 \text{ \AA}$ vonalak gerjesztési feszültségét is megmérték, eredményeik a spektroszkopiailag kiszámított értékekkel jól megegyeznek.

A Kr és X rezonancia vonalait is HERTZ találta meg. HERTZ és J. H. ABBINK újabb mérésének¹ eredményét a nemesgázokra vonatkozólag a következő táblázat mutatja.

| | Rezonancia vonal Å-ban | Kritikus feszültség voltban | |
|----|---------------------------|-----------------------------|-------|
| | | számítva | mérve |
| Ne | 743·6 | 16·6 | 16·6 |
| | 735·8 | 16·78 | |
| Ar | 1066·8 | 11·57 | 11·5 |
| | 1048·3 | 11·78 | |
| Kr | 1235·8 | 9·99 | 9·9 |
| | 1164·9 | 10·60 | 10·5 |
| X | 1469·5 | 8·40 | 8·3 |
| | 1295·7 | 9·53 | 9·9 |

A számított és mért értékek megegyezése igen megfelelő, csak a xenonnál van nagyobb eltérés, ami azzal magyarázható, hogy ennél több atomállapot közel egybeesik s ezek elektron-ütközéssel elválasztva külön-külön nem gerjeszthetők.

A neonnál MEISZNER² vizsgálta a $2s_i - 2p_i$ vonalak abszorp-

¹ Naturwissenschaft 14 k. 648. l. 1926.

² Ann. d. Phys. 76. k. 124. l. 1925.

cióját. Azt találta, hogy ezek abszorpciója csak akkor következik be, ha megfelelő elektromos kisüléssel az atomokat előzőleg gerjesztette, ami arra mutat, hogy ezeknél a vonalaknál a kiindulás nem az alapállapotból történik. A neon alaptagja tehát nem s tag, hanem p tag, amint azt a régebbi megfigyelések is mutatták. Ezért használta MEISZNER a sorozat leírásánál a $2s_i$ jelölést a PASCHEN-nél használatos $1s_i$ helyett. A kísérletek észrevehetően erősebb abszorpciót adtak a $2s_3$ és $2s_5$ -ből kiinduló vonalakra, mint a $2s_2$ és $2s_4$ -ből kiindulóakra, ami arra utal, hogy a $2s_3$ és $2s_5$ -nek metastabil állapotok felelnek meg s így nagyobb az élettartamuk.

Említettük régebben, hogy a nemes gázok mellett különösen értékes eredményeket lehet nyerni a fémgőzőknél. Ezek rendszerint még könnyebben kezelhetők, mint a nemes gázok, mert elektropozitív jellegük miatt a vegyiérték-elektron leszakításához szükséges munka kisebb náluk, mint az esetlegesen hozzájuk keveredett tisztátalanságoknál s azért ezekből kisebb mennyiség jelenléte nem okoz zavart. Ezenkívül az abszorpciós spektrumuk általában jól hozzáférhető helyen van.

Először az elemek periodusos rendszerének első függőleges oszlopába tartozó fémgőzőket tárgyaljuk. Ezek az alkáliák (lithium, nátrium, kálium, rubidium, caesium) s a nemes fémek (arany, ezüst s a réz). Ezeknél az első főszeriest az $1s-mp$ vonalak alkotják s mivel ezek a hideg gőzökben is fellépnek mint abszorpciós vonalak, nyilvánvaló, hogy az $1s$ tag a normális atomállapothoz tartozik. Mivel az s tagok egyszeresek, a p tagok kettősek, azért a főszeries dublettvonalakból áll. Pl. a nátrium jellemző kettős D vonala is a nátrium főszerieséhez tartozik.

Az $1s-mp$ főszeries első vonala a rezonancia-vonal, mivel $1s$ az alaptag s azért belőle a $\lambda V = 1234$ képlet alapján kiszámíthatjuk az atom első gerjesztéséhez szükséges kritikus potenciált. A főszeries határa hasonló módon megadja az ionizációs feszültséget. A nyert értékeket elektronütközéssel kísérletileg ellenőrizhetjük. A rezonenciavonal, mint mondottuk,

kettős, de a két p nivó oly közel van egymáshoz, hogy a két kritikus potenciálnak megfelelő maximum az áramgörbénél egybeolvad, ezért a számításnál is a két rezonanciavonalnak megfelelő érték számtani közepárányosát vesszük. A következő táblázatokban egymásmellé állítva találjuk a kritikus potenciál és ionizációs feszültség kiszámított és megmért értékeit TATE, FOOTE, CAMPETTI, WILLIAMSON és SHENSTONE mérései alapján.

| | Kritikus feszültség voltokban | | Ionizáló feszültség voltokban | |
|-----------|-------------------------------|-------|-------------------------------|-------|
| | számítva | mérve | számítva | mérve |
| <i>Li</i> | 1·84 | — | 5·36 | — |
| <i>Na</i> | 2·09 | 2·12 | 5·12 | 5·13 |
| <i>K</i> | 1·61 | 1·63 | 4·32 | 4·4 |
| <i>Rb</i> | 1·6 | 1·6 | 4·16 | 4·1 |
| <i>Cs</i> | 1·4 | 1·48 | 3·88 | 3·9 |
| <i>Cu</i> | 3·78 | — | 7·69 | 7·8 |
| <i>Ag</i> | 3·70 | 3·1 | 7·5 | 6·0 |
| <i>Au</i> | 4·8 | — | 9·25 | — |

Lithium-gőzben kémiai tulajdonságai miatt nehéz mérést végezni. A caesiumnál HUGHES és HAGENOW-nak sikerült az első gerjesztési feszültségen kívül még több kritikus potenciálértéket is megmérni. Aránylag nagy (10 cm hosszú) henger alakú katódot választottak s e miatt 1 milliampérig menő áramerősségnél is oly csekély volt az áramsűrűség, hogy a tértöltés kevéssé zavart s így spektroszkopikus módszerrel az ionizálás bekövetkezése előtt a főszeriesnek 5 vonalát megkapták oly potenciálértékeknél, amelyek az elméletivel 0·1 voltnyira megegyeztek.

A periodikus rendszer második függőleges oszlopába tartozó

atomoknál a spektrum lényegesen komplikáltabb, mint az alkáliaknál. Két különböző tagsoport van náluk, ennek megfelelően két különböző seriesrendszer, az egyik vonalai egyszerűek, a másiké tripletek s e mellett a kétféle tagok is kombinálódhatnak egymással.

Legtöbbet foglalkoztak ezen elemek közül a higannyal. Ennek abszorpciós seriesében a kezdő vonal $\lambda = 2537 \text{ \AA}$, ennél tehát az alappálya a végpálya, még pedig PASCHEN vizsgálatai szerint¹ ez megfelel az $1^1S - 2^3P$ -nek, tehát a kétféle tag kombinációjából adódik. Van a higanynak másik rezonanciavonala is, $\lambda = 1849 \text{ \AA}$, ez is fellép, mint abszorpciós vonal a hideg higanygőzben. Ez megfelel az $1^1S - 2^1P$ -nek, tehát az egyszerű vonalak főszeriesének első vonala. Mindkét rezonanciavonal már az ultraviolában fekszik. A Bev. 3. képlete szerint az ezeket gerjesztő feszültségre 4·86 volt és 6·67 volt adódik. Az ionizációs feszültség a sorozatok határából számítva 10·39 volt lesz.

A kritikus potenciál és az ionizációs feszültség kísérleti meghatározására sokan végeztek méréseket. DAVIS és GOUCHER az ionizáció és atomgerjesztés megkülönböztetésére szolgáló módszerükkel azt találták, hogy az első sugárzás beáll 4·9 voltnál, új emelkedés észlelhető az áramgörbén 6·7 voltnál s az ionizáció beáll 10·2 voltnál. FOOTE és MOHLER az első gerjesztő feszültségre 4·76 voltot mértek, a másodikra 6·45 voltot, ionizációs feszültség gyanánt pedig 10·2 voltot kaptak. Az utóbbira EINSPORN 10·38 voltot kapott. FRANCK és EINSPORN fényelektromos módszerrel magasabb gerjesztési fokokat is tudtak mérni, míg HERTZ-nek folytonosan növelt feszültséggel spektroszkopiaiilag is sikerült a rezonanciavonalakon kívül más vonalakat is megkapni még az ionizáció beállta előtt.

FRANCK és HERTZ még a BOHR-féle elmélet ismerete előtt (1913) végeztek kritikus potenciálméréseket elektronütközésnél a LÉNÁRD-féle eredeti módszerrel. A higanyra kapott 4·9 voltot

¹ Ann. d. Phys. 35. k. 860. l. 1911.

először ionizációs feszültségnek hitték, csak később derült ki, hogy tulajdonképpen az első gerjesztés feszültségét mérték. De úgy látszott, hogy ennél az alacsony feszültségnél valóságos ionizáció is történik, mert sűrű higanygőzben már 5 voltos feszültséggel is fel lehet tartani a fényívet. A jelenség magyarázatát VAN DER BYL adta meg lépcsőzetes ionizáció felvételével. Arra utalt, hogy mihelyt valamely gázban rugalmatlan elektronütközések történnek, ott a közönséges atomokon kívül vannak gerjesztett atomok is s mivel ez a gerjesztett állapot 10^{-8} sec-ig megmarad, ha elég gyorsan kap az atom újabb lökéseket, az ionizáció lépésenként előállhat.

A második függőleges oszlop más elemeire vonatkozólag a számított és mért értékek jó egyezését a következő táblázat mutatja, ahol a mérési adatok TATE, FOOTE és MOHLER-től valók.

| | I. gerjesztő feszültség voltban | | II. gerjesztő feszültség voltban | | Ionizáló feszültség voltagekban | |
|-----------|------------------------------------|-------|-------------------------------------|-------|------------------------------------|-------|
| | számítva | mérve | számítva | mérve | számítva | mérve |
| <i>Ca</i> | 1.88 | 1.90 | 2.92 | 2.85 | 6.08 | 6.01 |
| <i>Mg</i> | 2.7 | 2.65 | 4.32 | 4.42 | 7.61 | 7.75 |
| <i>Zn</i> | 4.02 | 4.18 | 5.77 | 5.65 | 9.35 | 9.3 |
| <i>Cd</i> | 3.78 | 3.88 | 5.39 | 5.35 | 8.95 | 9.0 |
| | | | | | | |

A higanynál a 2^3P_0 és 2^3P_2 metastabil állapotnak felelnek meg.

A bórcsoportból csak a thalliumra vonatkozólag végeztek mérést MOHLER és RUARK, Első gerjesztési feszültségre 0.9 voltot kaptak, ionizációra 6.04 voltot, amely értékek jól megegyeznek a számításból nyert 0.96, illetőleg 6.08 voltal.

A negyedik függőleges oszlopból a legismertebb az ólom spektruma. MOHLER, FOOTE és STIMSON mérték ennél elektronütközéssel 1.26 voltos kritikus potenciált és 7.93 voltos ioni-

záló feszültséget. A további elemeknél még kevesebbet tudunk a spektrumok szerieseiről, azért amíg az első elemeknél az elektronütközéssel végezett kísérletek jó megegyezést mutattak a BOHR-féle elmélettel, addig a továbbiaknál inkább arra szolgálhatnak, hogy ellenőrzést végezzenek a seriesvonatkozásokat kereső optikai módszereknél s segítsenek új seriesstagokat megkeresni főleg oly területeken, ahol a direkt optikus módszer bajosan alkalmazható.

Holenda Barnabás.

DIE ELEKTRONENSTÖSSE UND DIE THEORIE DER SPEKTRALLINIEN.

Zusammenfassender Bericht über die Prüfung des Serienschemas nach der Methode des Elektronenstosses.

Inhalt:

Einleitung: Anregung und Ionisierung der Atome.

Die elastische Elektronenstöße.

Die unelastische Elektronenstöße und die Anregung von Quantensprüngen.

Stöße und Quantensprünge bei Atomen.

B. Holenda.

A JÁTÉKTARTAM PROBLÉMÁJÁNAK ÁLTALÁNOSÍTÁSA HÁROM JÁTÉKOS ESETÉRE.

1. Tegyük fel, hogy két játékos, A és B , a következő feltételek mellett játszik: Ha A nyer, kap B -től egy koronát, ha veszít, fizet B -nek egy koronát. Ha A -nak nyeresi valószínűsége: p és veszítési valószínűsége: q , továbbá, ha mindkét játékos vagyona korlátlan, mekkora annak a valószínűsége, hogy A m játszma után x koronát veszít? ($p + q = 1$).

Jelöljük a kérdéses valószínűséget $(m_{x,y})$ -nal, hol $x+y=0$.

Ha k -val jelöljük a megnyert játszmák számát és $(m-k)$ -val az elvesztetteket, kell, hogy

$$(m - k) - k = x \text{ legyen.} \quad (1)$$

A keresett valószínűség számértéke:

$$(m_{x,y}) = \binom{m}{k} p^k q^{x+k}. \quad (I)$$

Fenntebbi valószínűség kielégíti az alábbi feltételt:

$$(m_{x,y}) = p(m - 1_{x+1, y-1}) + q(m - 1_{x-1, y+1}). \quad (2)$$

Az (I) alatti egyenlőség alapján ugyanis a (2) alatti a következő alakban írható:

$$\binom{m}{k} p^k q^{x+k} = p \binom{m-1}{k-1} p^{k-1} q^{x+k} + q \binom{m-1}{k} p^k q^{x+k-1}$$

mely egyenlőség a binomiális együtthatók egyik ismert összefüggésénél fogva helyesnek bizonyul. A szóban forgó reláció ugyanis a következő:

$$\binom{m}{k} = \binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k}. \quad (3)$$

Az (1) alatti egyenlőség alapján $(0_0, 0) = 1$, mert $m=0$, $x=0$ esetére k is egyenlő zérussal.

A játékprobléma most tárgyalt esetét, t. i. mikor mindkét játékos vagyona korlátlan, a játékprobléma *első* esetének nevezzük.

2. A játékfeltételek változatlanul hagyása mellett vizsgáljuk meg a játékproblémát abban az esetben, midőn az A játékos vagyona korlátolt és csak a másodiké korlátlan. Az A játékos vagyonát jeleljük a -val, hol a pozitív egész szám.

Mekkora annak a valószínűsége, hogy A m játszma után (sem előbb, sem utóbb) a koronából x koronát veszít, B vagyonát még mindig korlátlanak tekintve? (A játékprobléma *második* esete).

Jelöljük a keresett valószínűséget $(m_{x,y}^a)$ -nal, hol ismét $x + y = 0$.

A fentebbi valószínűség, az összetett és totális valószínűség elve alapján kielégíti az alábbi feltételt:

$$(m_{x,y}^a) = p(m_{x+1,y-1}^{a+1}) + q(m_{x-1,y+1}^{a-1}) \quad (4)$$

$(x + y = 0)$.

Ha x helyébe $(a-z)$ -t és így tehát y helyébe $(-a+z)$ -t írunk, az $(m_{x,y}^a)$ kifejezés az $(m_{a-z,-a+z}^a)$ alakúvá lesz. Kimutatható, hogy az

$$(m_{a-z,-a+z}^a) = (m_{a-z,-a+z}) - \left(\frac{p}{q}\right)^z (m_{a+z,-a-z}) \quad (II)$$

egyenlet jobboldalán álló különbség kielégíti a (4) alatti egyenlőséget és annak egyik megoldása gyanánt tekinthető.

A (II) alatti egyenlőség azonban nem alkalmas annak a kérdésnek a megoldására, hogy «mekkora annak a valószínűsége, hogy A m játszma után elveszti mind az a koronáját?»

Ugyanis ha a (II) alatti egyenlőségben z helyébe zérust teszünk, annak jobboldala zérus lesz, míg baloldala, a keresett valószínűség, nyilvánvalóan nem zérus.

Hogy az

$$\binom{m^a}{a, -a}$$

valószínűség értékét meghatározhatjuk, kérdezzük előbb, mi annak a valószínűsége, hogy A $(m-1)$ játszmában a koronából elveszít $a-1$ koronát és az utolsó $(m$ -edik) játszmában további egy koronát? Az $\binom{m^a}{a, -a}$ valószínűség számértékét tehát a következő egyenlőség határozza meg:

$$\begin{aligned} \binom{m^a}{a, -a} &= \binom{m-1}{a-1, -a+1} q \\ &= \left[\binom{m-1}{a-1, -a+1} - \binom{p}{q} \binom{m-1}{a+1, -a-1} \right] q \\ &= \binom{m-1}{a-1, -a+1} q - p \binom{m-1}{a+1, -a-1}. \end{aligned}$$

Ha tehát az $(m-a)$ különbséget $2j$ -vel jelöljük, akkor

$$\begin{aligned} \binom{m^a}{a, -a} &= \binom{m-1}{j} p^j q^{m-1-j} \cdot q - p \binom{m-1}{j-1} p^{j-1} q^{m-j} \\ &= \left[\binom{m-1}{j} - \binom{m-1}{j-1} \right] p^j q^{m-j} \\ &= \left[\frac{(m-1)!}{j!(m-1-j)!} - \frac{(m-1)!}{(j-1)!(m-j)!} \right] p^j q^{m-j} \\ &= \frac{m-2j}{m} \frac{m!}{j!(m-j)!} p^j q^{m-j}, \\ \binom{m^a}{a, -a} &= \frac{a}{m} \binom{m}{a, -a} \end{aligned} \tag{II}_a$$

Ha az $\binom{m^a}{a-z, -a+z}$ kifejezésben a nagyobb, mint $\frac{m+a-z}{2}$ azaz ha $(a+z)$ nagyobb, mint m , a (II) alatti egyenletből következik, hogy

$$\binom{m^a}{a-z, -a+z} = \binom{m}{a-z, -a+z},$$

vagyis A játékos vagyona már akkor is úgy szerepel, mintha korlátlan lenne, ha $(m-z)$ -nél nagyobb.

3. Végre az utolsó eset valószínűsége vizsgálandó meg, mikor mindkét játékos vagyona korlátolt, azaz A vagyona a korona, B vagyona b korona. (A játékprobléma *harmadik* esete).

Jelöljük annak a valószínűségnek számértékét, hogy m játszmában A a korona vagyonából x koronát veszít, midőn B vagyona b , $(m_{x,y}^{a,b})$ -nal, hol ismét $x + y = 0$.

Ez utóbbi valószínűség ugyancsak az összetett és totális valószínűségek elve alapján kielégíti az

$$(m_{x,y}^{a,b}) = p (m - 1_{x+1,y-1}^{a+1,b-1}) + q (m - 1_{x-1,y+1}^{a-1,b+1}) \quad (5)$$

egyenlőséget.

Ha $(m-x)$ -et $2i$ -vel, $(m-y)$ -t $2j$ -vel jelölöm, az $(m_{x,y}^{a,b})$ valószínűség a következő alakban is írható:

$$(m_{x,y}^{a,b}) = [m_{x,y}^{a,b}] p^i q^j, \quad (6)$$

hol a jobboldali szorzat első tényezője p és q -tól független.

Hogy a (6) alatti egyenlőségben foglalt állítás helyes, az kitűnik az (5) alatti egyenlőségbe való helyettesítés által. Ekkor ugyanis

$$\begin{aligned} [m_{x,y}^{a,b}] p^i q^j &= p [m - 1_{x+1,y-1}^{a+1,b-1}] p^{i-1} q^j \\ &+ q [m - 1_{x-1,y+1}^{a-1,b+1}] p^i q^{j-1}, \end{aligned}$$

vagyis a keresett valószínűség számértékének meghatározására elegendő a számérték koeficiensének, azaz a p és q valószínűségekől független számértéknek meghatározása a következő egyenlőségéből

$$[m_{x,y}^{a,b}] = [m - 1_{x+1,y-1}^{a+1,b-1}] + [m - 1_{x-1,y+1}^{a-1,b+1}]. \quad (5)_a$$

Láttuk, hogy az

$$\begin{aligned} [m_{x,y}^a] &= [m_{a-z, -a+z}^a] = \\ &= [m_{a-z, -a+z}] - [m_{a+z, -a-z}] \end{aligned}$$

egyenlőséggel a játékprobléma második esetének valószínűsége vissza van vezetve az első eset valószínűségének meghatározására.

Hasonlóképpen megoldottnak tekinthetjük a 3-ik eset valószínűségének meghatározását, ha sikerült azt visszavezetnünk a 2-ik eset valószínűségének meghatározására.

Ez utóbbi megtörténik LOUIS BACHELIER-nek «*Calcul des Probabilités*» című munkájában levezetett formulája által, mely az ottani jelölések módosítása után a következőképpen fejezhető ki:

$$\begin{aligned} [m_{x,y}^{a,b}] &= [m_{a,y}^a] - [m_{x+2b,y-2b}^{a+2b}] \\ + [m_{x+2b+2a,y-2b-2a}^{a+2b+2a}] &- [m_{x+4b+2a,y-4b-2a}^{a+4b+2a}] \\ + [m_{x+4b+4a,y-4b-4a}^{a+4b+4a}] &- [m_{x+6b+4a,y-6b-4a}^{a+6b+4a}] \\ + \&c. & \qquad \qquad \qquad - \&c. \end{aligned} \quad (\text{III})$$

mindaddig, míg az $x+2\lambda b+2\lambda a$ vagy az $x+2(\lambda+1)b+2\lambda a$ kifejezések egyike el nem éri vagy felül nem haladja az m értékét.

Itt is, ha $b > \frac{m-x}{2}$ vagyis ha $m < x+2b$

$$[m_{x,y}^{a,b}] = [m_{x,y}^a].$$

4. Mindezideig — tudtommal — nem sikerült a játékproblémát 3 játékos esetére általánosítani, azaz a fent megadott (I), (II), (II)_a és (III) alatti formulákat kivétel nélkül 3 játékos esetére megadni.

Három játékos esetére a játékszabályok a következőképpen állapíthatnak meg. Az első játékos: A nyeres esetére B és C játékosoktól egy-egy koronát kap. Vesztes esetében 1 koronát fizet vagy B -nek vagy C -nek, a szerint, amint vagy az egyik, vagy a másik nyeri meg a játékot. Hogy azonnal a legáltalánosabb eset nyereségi (vagy veszteségi) valószínűségének fogalmát értelmezhezzük, induljunk ki abból a feltevésből, hogy

A -nak vagyona a játék kezdetekor a korona, nyerési valószínűsége p , B -nek vagyona ugyanakkor b korona, nyerési valószínűsége q , C -nek vagyona c , nyerési valószínűsége r és $p + q + r = 1$.

A legáltalánosabb probléma tehát úgy fogalmazható meg: «Mi a valószínűsége annak, hogy m játszma után (sem előbb, sem később) A a koronából x koronát, B b koronából y koronát, C c koronából z koronát veszít, hol $x + y + z = 0$.» (Az x, y, z értékek valamelyikének negatív előjellel való fellépése nyereséget jelent.)

Ha ismét a keresett valószínűségnek a p, q és r értékektől független számbeli együtthatóját

$$\left[m_{x, y, z}^{a, b, c} \right] \text{-vel}$$

jelöljük, e számérték a következő egyenlőséget elégíti ki:

$$\begin{aligned} \left[m_{x, y, z}^{a, b, c} \right] &= \left[m_{x+2, y-1, z-1}^{a+2, b-1, c-1} \right] + \\ &+ \left[m_{x-1, y+2, z-1}^{a-1, b+2, c-1} \right] + \left[m_{x-1, y-1, z+2}^{a-1, b-1, c+2} \right] \dots (2)^* \end{aligned}$$

Itt is akkor tekinthetjük a kérdést megoldottnak, ha a 3 parametert (a, b, c) tartalmazó kifejezést sikerül eggyel kevesebb parametert tartalmazó kifejezések racionális, egész függvényére visszavezetni.

Megjegyzendő, hogy jelen esetben a probléma természetéből kifolyólag x, y és z -nek csak oly értékei jöhetnek számításba, melyekre nézve

$$\begin{aligned} m - x &= 3i \\ m - y &= 3j \\ m - z &= 3k, \end{aligned}$$

továbbá a, b és c már akkor is korlátlanoknak tekinthetők, ha

$$\begin{aligned} a &> j + k \\ b &> k + i \\ c &> i + j. \end{aligned}$$

A fentemlitett négy formula közül az (I) és (II)_a, melyek két játékos esetére következőképpen hangzanak:

$$\begin{aligned} (m_{x,y}) &= \frac{m!}{x!y!} p^x q^y \\ (m_{a,-a}^a) &= \frac{a}{m} (m_{a,-a}) \end{aligned}$$

minden nehézség nélkül általánosíthatók a következőkre:

$$(m_{x,y,z}) = \frac{m!}{i!j!k!} p^i q^j r^k \quad (I)^*$$

$$(m_{a,y,z}^a) = \frac{a}{m} (m_{a,y,z}) \cdots (a+y+z=0). \quad (II)_a^*$$

5. Hogy a problémát 2 játékos esetéről 3 játékos esetre általánosíthassuk, a 2 játékos esetében fellépő különböző valószínűségeket oly alakban fogjuk értelmezni, melynek általánosítása nemcsak 3, de akárhány játékos esetére könnyűszerrel eszközölhető. Az eredő formulák bonyolultságára való tekintettel az eljárást azonban nem általánosságban, hanem különleges (számszerű) esetekben fogom bemutatni, ami különben semmit sem von le értékükből, mert alkalmazásuk az általános esetekre formailag a különleges esetekével teljesen azonos.

Mekkora a valószínűsége annak, hogy két játékos közül, kiknek vagyona a játék elején 5, illetve 2 korona, az első a 15. játszma után 3 koronát veszít?

A valószínűség együtthatójának jele a fentebbiek szerint

$$\left[15_3^5, -3^2 \right]$$

mely a következő egyenlőséget elégíti ki

$$\left[15_3^5, -3^2 \right] = \left[14_4^6, -4^1 \right] + \left[14_2^4, -2^3 \right]. \quad (7)$$

Azt állítom, hogy $\left[15_3^5, -3^2 \right]$ a következő alakban fejezhető ki:

$$\begin{aligned}
 \left[15_{-3}^5, \frac{2}{-3} \right] &= \left[15_{-3}^5, -3 \right] - \left[2_{-2}^5, \frac{2}{2} \right] \left[13_{-5}^7, -5 \right] \\
 &\quad - \left[4_{-2}^5, \frac{2}{2} \right] \left[11_{-5}^7, -5 \right] \\
 &\quad - \left[6_{-2}^5, \frac{2}{2} \right] \left[9_{-5}^7, -5 \right] \\
 &\quad - \left[8_{-2}^5, \frac{2}{2} \right] \left[7_{-5}^7, -5 \right] \\
 &\quad - \left[10_{-2}^5, \frac{2}{2} \right] \left[5_{-5}^7, -5 \right].
 \end{aligned} \tag{A}$$

Hogy ezen állításom helyes, kitűnik abból, hogy az (A) alatti egyenlőséget a (7) alatti egyenlőség jobboldalán álló két kifejezésre alkalmazva, a (7) identitássá válik.

Ha az (A) alatti formulát, az (A) alatti egyenlőség jobboldalán álló 5 negatív előjelű szorzatnak első tényezőire alkalmazzuk, a következő 5 egyenlőséget nyerjük:

$$\begin{aligned}
 \left[2_{-2}^5, \frac{2}{2} \right] &= \left[2_{-2}^5, 2 \right] \\
 \left[4_{-2}^5, \frac{2}{2} \right] &= \left[4_{-2}^5, 2 \right] - \left[2_{-2}^5, \frac{2}{2} \right] \left[2_0^7, 0 \right] \\
 \left[6_{-2}^5, \frac{2}{2} \right] &= \left[6_{-2}^5, 2 \right] - \left[2_{-2}^5, \frac{2}{2} \right] \left[4_0^7, 0 \right] - \left[4_{-2}^5, \frac{2}{2} \right] \left[2_0^7, 0 \right] \\
 \left[8_{-2}^5, \frac{2}{2} \right] &= \left[8_{-2}^5, 2 \right] - \left[2_{-2}^5, \frac{2}{2} \right] \left[6_0^7, 0 \right] - \\
 &\quad - \left[4_{-2}^5, \frac{2}{2} \right] \left[4_0^7, 0 \right] - \left[6_{-2}^5, \frac{2}{2} \right] \left[2_0^7, 0 \right] \\
 \left[10_{-2}^5, \frac{2}{2} \right] &= \left[10_{-2}^5, 2 \right] - \left[2_{-2}^5, \frac{2}{2} \right] \left[8_0^7, 0 \right] - \\
 &\quad - \left[4_{-2}^5, \frac{2}{2} \right] \left[6_0^7, 0 \right] - \left[6_{-2}^5, \frac{2}{2} \right] \left[4_0^7, 0 \right] \\
 &\quad - \left[8_{-2}^5, \frac{2}{2} \right] \left[2_0^7, 0 \right].
 \end{aligned} \tag{B}$$

A (B) alatti elsőfokú egyenletrendszerből meghatározhatók a $\left[2_{-2}^5, \frac{2}{2} \right], \dots, \left[10_{-2}^5, \frac{2}{2} \right]$ értékek a $\left[2_{-2}^5, 2 \right], \dots, \left[10_{-2}^5, 2 \right]$

és $\left[2_{0,0}^7\right], \dots, \left[8_{0,0}^7\right]$ racionális egész függvényei gyanánt, mi által az

$$\left[m_{x,y}^{a,b}\right]$$

alakú kifejezés csupa $\left[m_{x,y}^a\right]$ alakú kifejezések racionális egész függvényére van visszavezetve.

6. Határozzuk meg most a $\left[16_{4,1,-5}^{5,4,3}\right]$ alakú kifejezést egy az (A) egyenlőség mintájára konstruált kifejezés segítségével.

$$\begin{aligned} \left[16_{4,1,-5}^{5,4,3}\right] &= \left[16_{4,1,-5}^{5,4,3}\right] - & (A)^* \\ &- \left[3_{-6,3,3}^{5,4,3}\right] \left[13_{10,-2,-8}^{11,1,1}\right] - \left[6_{-6,3,3}^{5,4,3}\right] \left[10_{10,-2,-8}^{11,1,1}\right] \\ &- \left[3_{-3,0,3}^{5,4,3}\right] \left[13_{7,1,-8}^{8,4,4}\right] - \left[6_{-3,0,3}^{5,4,3}\right] \left[10_{7,1,-8}^{8,4,4}\right] \\ &\quad - \left[9_{-3,0,3}^{5,4,3}\right] \left[7_{7,1,-8}^{8,4,4}\right] \\ &- \left[3_{0,-3,3}^{5,4,3}\right] \left[13_{4,4,-8}^{5,7,7}\right] - \left[6_{0,-3,3}^{5,4,3}\right] \left[10_{4,4,-8}^{5,7,7}\right] \\ &\quad - \left[9_{0,-3,3}^{5,4,3}\right] \left[7_{4,4,-8}^{5,7,7}\right] \\ &\quad - \left[12_{0,-3,3}^{5,4,3}\right] \left[4_{4,4,-8}^{5,7,7}\right] \\ &- \left[3_{3,-6,3}^{5,4,3}\right] \left[13_{1,7,-8}^{2,10,10}\right] - \left[6_{3,-6,3}^{5,4,3}\right] \left[10_{1,7,-8}^{2,10,10}\right] \\ &\quad - \left[9_{3,-6,3}^{5,4,3}\right] \left[7_{1,7,-8}^{2,10,10}\right]. \end{aligned}$$

Ha az (A)* alatti egyenlőség jobboldalán álló negatív előjelű szorzatok első tényezőire a (A)* alatti formulát alkalmazzuk egy oly (B)* alatti egyenlőségrendszer nyerünk, melyből a $\left[3_{-6,3,3}^{5,4,3}\right]$ -tól a $\left[12_{0,-3,3}^{5,4,3}\right]$ -ig terjedő tizenkét kifejezést csupa $\left[m_{x,y,z}^{a,b}\right]$ alakú kifejezés racionális egész függvénye

gyanánt fejezhetjük ki. Ha ez utóbbiakat az $(A)^*$ alatti egyenlőségbe behelyettesítjük, az $\left[m_{x,y,z}^{a,b,c} \right]$ alakú kifejezést csupa $\left[m_{x,y,z}^{a,b} \right]$ alakú kifejezés racionális egész függvénye gyanánt állítottuk elő.

Arany Dániel.

VERALLGEMEINERUNG DES PROBLEMS DER SPIELDAUER FÜR DEN FALL VON 3 SPIELERN.

Verfasser berichtet in gedrängter Kürze über das Resultat der bisheriger Methoden zur Lösung des Problems der Spieldauer und zeigt an einem Zahlenbeispiel — Formel (A) — wie Letztere auf den Fall von 3 Spielern — durch Formel $(A)^*$ — verallgemeinert werden kann.

Das durch die beiden Formeln charakterisierte Verfahren stammt von *A. M. Ampère* her, der dassalbe in den «*Considérations sur la théorie mathématique du jeu*» — Lyon et Paris, An 11—1802 — bekannt giebt. (Seite 27—28, Artikel 51, Formel 13.)

D. Arany.

TÁRSULATI ÉLET.

Az 1926—27. társulati évben a rendes előadó üléseken megtartott előadásaink.

1926 nov. 4. A matematikai és fizikai tanulmányversenyek eredményei-
nek kihirdetése, KÜRSCHÁK JÓZSEF: Feladatok a végtelen sakktáblán;
1926 nov. 18. SCHRODT ISTVÁN: Hydromechanikai probléma I.; 1926
dec. 2. RADÓ TIBOR: A felszínmérésről, NAGY JÓZSEF: A német egyetemek
szerepe a fizikus tanárok képzésében; 1927 jan. 27. ORTVAY RUDOLF:
A de Broglie—Schrödinger-féle hullámmechanikáról; 1927 febr. 10.
SZÜCS ADOLF: A hármas integrálok variációjáról, ANDERKÓ AURÉL: A levegő
éjjeli lehülésének függvényéről; 1927 febr. 24. SCHRODT ISTVÁN: Hydro-
mechanikai probléma II., KÖNIG DÉNES: A sakk és hasonló játékok
matematikai elméletéhez; 1927 márc. 10. STACHÓ TIBOR: Függvények
asymptotikus kifejtése; 1927 márc. 24. CSÁSZÁR ELEMÉR: Az új kvantum-
elmélet és alkalmazásai, VALKÓ ISTVÁN: A projektív sík bizonyos leképe-
zéseiről; 1927 ápr. 7. GYULAI ZOLTÁN: Fényelektromos vizsgálatok rönt-
genezett kőson, FERENCZI ZOLTÁN: Vizsgálatok az általános trigonometrikus
sorok summabilitásáról; 1927 ápr. 21. HANS PETTERSSON (Wien): Über
Atomzertrümmerung; 1927 máj. 12. FELIX EHRENFHAF (Wien): Für
und wider das Elektron.

«Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat» 1926. évi zárszámadása.

A) Bevételek:

| | Korona | f | Pengő | f |
|-------------------------------------|------------|---|-------|----|
| 1. Mult évi zárszámadási maradvány: | | | | |
| a) készpénzben | 613,459 | — | 49 | 08 |
| b) takarékbetétekben | 16.903,543 | — | 1352 | 27 |
| 2. Hátralékos tagdíjakból | 2.549,500 | — | 203 | 96 |
| 3. Folyó évi tagdíjakból | 7.864,500 | — | 629 | 16 |
| 4. Segélyek és kamatok | 27.407,600 | — | 2192 | 61 |
| 5. Vegyesekből | 222,000 | — | 17 | 76 |
| Összesen: | 55.560,602 | — | 4444 | 84 |

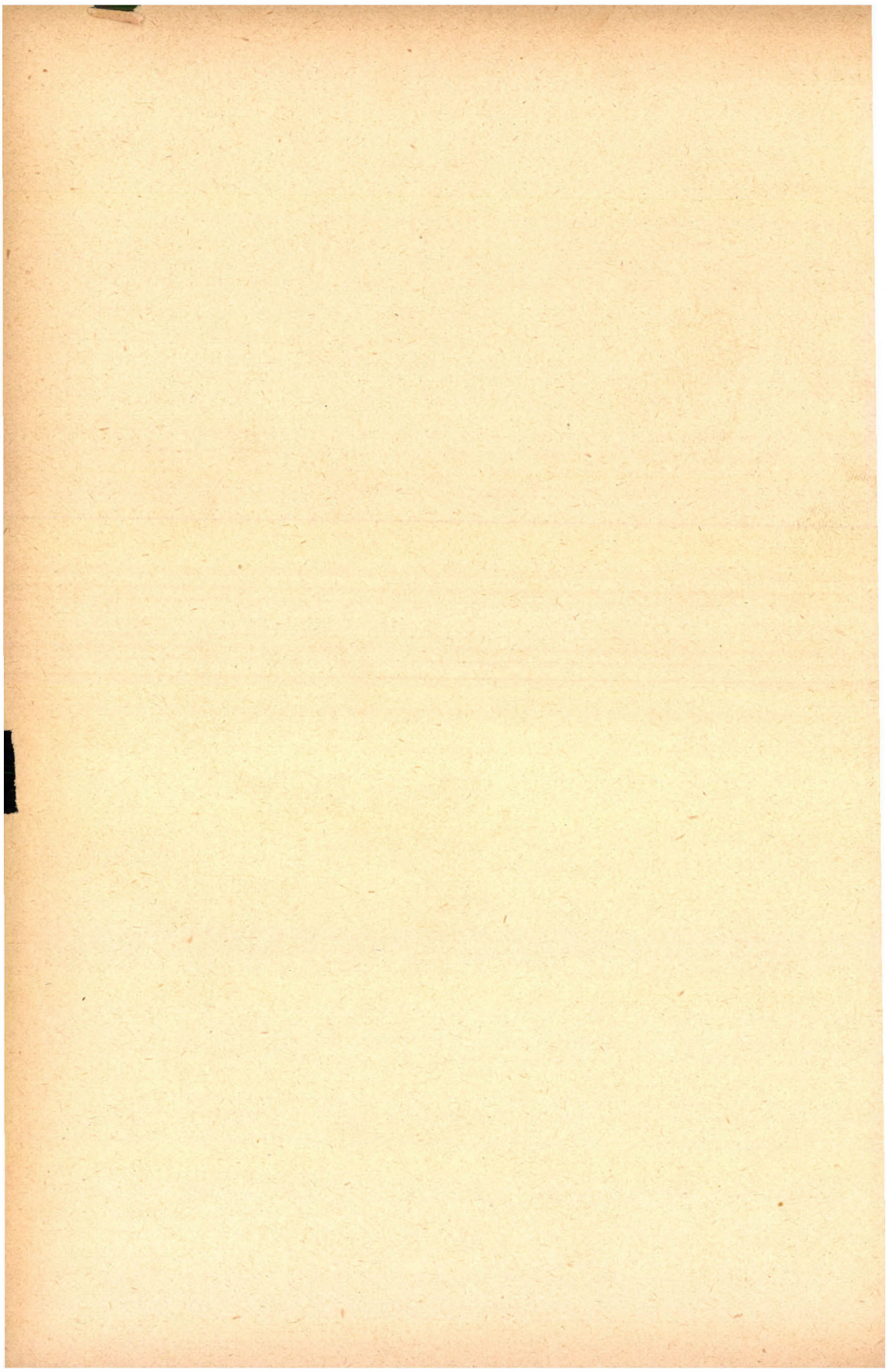
B) **Kiadások:**

| | Korona | f | Pengő | f |
|------------------------------|------------|---|-------|----|
| 1. Betétek: | | | | |
| a) Leszámitoló Bankban... | 13.875,000 | — | 1110 | — |
| b) Postatakarékpénztárban... | 1.114,023 | — | 89 | 12 |
| 2. Írói tiszteletdíj | 4.375,000 | — | 350 | — |
| 3. Nyomda | 29.224,600 | — | 2337 | 97 |
| 4. Expedició | 382,100 | — | 30 | 57 |
| 5. Iroda | 951,800 | — | 76 | 14 |
| 6. Jutalom | 1.000,000 | — | 80 | — |
| 7. Meghívók stb. | 3.856,620 | — | 308 | 53 |
| 8. Maradvány készpénzben | 781.459 | — | 62 | 51 |
| Összesen: | 55.560,602 | — | 4444 | 84 |

Nagy József
pénztáros.

Átnéztük és rendben találtuk:
Budapest, 1927 május 12.

Bogyó Samu, Rácz László, br. Harkányi Béla
számvizsgálók.



Az 1926. évi május hó 22-én tartott közgyűlés 1927 január 1-i hatállyal a tagdíjakat felemelte, budapesti tagok számára 8 pengőre, vidéki tagok számára 6 pengőre.

Minthogy a Matematikai és Physikai Lapok egyes régibb évfolyamai teljesen elfogytak, kérjük tisztelt tagtársainkat, akik azokat nélkülözhetik, bocsássák a Társulat rendelkezésére.

A folyóirat szellemi részét illető közlemények a szerkesztőkhöz küldendők és pedig a matematikai tárgyúak *Fejér Lipót (V., Falk Miksa-utca 15.)*, a fizikai tárgyúak pedig *Pogány Béla (I., Budafoki-út 8.)* címére. T. munkatársainkat kérjük, hogy kézírataikban lehető rövidsége törekedjenek, azokhoz néhány soros idegennyelvű összefoglalást mellékeljenek és hogy arra pontos címüket írják rá.

Minden önálló cikk szerzőjének 25 boríték nélküli különlenyomatot adunk. Címzett boríték és több különlenyomat csak a nyomdával való külön megegyezés alapján kapható.

A Társulat ügyvitelére vonatkozó levelek, tagajánlások és folyóirat-cserepéldányok *Pogány Béla* titkár címére küldendők.

A folyóirat és a meghívók expedíciójára vonatkozó kérdések, reklamációk, valamint a tagsági és előfizetési díjak *Nagy József* pénztáros címére (Vác, Kegyesrendi gimnázium.) intézendők.

Austauschexemplare von Zeitschriften erbitten wir an die Adresse des Geschäftsführenden Secretärs *B. Pogány*, Budapest, I., Budafoki-út 8.

On est prié d'envoyer les exemplaires d'échange des périodiques à l'adresse du secrétaire *B. Pogány*, Budapest, I., Budafoki-út 8.

Felhívás tagtársainkhoz!

A rendkívüli viszonyok súlyos helyzetbe sodorták Társulatunkat. Folyóiratunkat még redukált terjedelemben sem tudtuk volna megjelentetni, ha a tudományt megbecsülő, áldozatkész emberbarátok és intézmények nem jöttek volna segítségünkre. Ez a Társulatunk iránt megnyilvánuló bizalom mi ránk is kötelezettséget ró. Nekünk is erőnkhez képest meg kell tennünk mindent, hogy Társulatunkat fenntartsuk és annak működését minél intenzívebbé tegyük. Ezt követeli tőlünk józanul felfogott saját érdekünk, ezt követeli hazánk érdeke is. Csak így alakul ki bennünk a jövőnk biztosításához annyira szükséges bizalmunk önmagunkhoz.

Kérjük ennél fogva tisztelt tagtársainkat,

1. hogy hátralékos tagdíjaikat (évenként 8, ill. 6 pengőt) szíveskedjenek *Nagy József* pénztárnoknak (Vác, Kegyesrendi gimnázium) befizetni,

2. hogy megváltozott új címeiket közöljék a Társulat pénztárosával,

3. hogy gyűjtsenek új tagokat.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA : GÉCZY KÁLMÁN.

50255

MATHEMATIKAI
ÉS
PHYSIKAI LAPOK

AZ EÖTVÖS LORÁND
MATEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

FEJÉR LIPÓT ÉS POGÁNY BÉLA

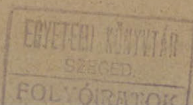
HARMINCNEGYEDIK ÉVFOLYAM

1927

JÚLIUS—DECEMBERI FÜZET

BUDAPEST 1927

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT



TARTALOMJEGYZÉK.

| | <i>Oldal</i> |
|--|--------------|
| JORDAN KÁROLY: A valószínűségszámítás alapfogalmai _ _ _ _ _ | 109 |
| SÁRKÖZY PÁL: Adalék a felületi görbék elméletéhez _ _ _ _ _ | 137 |
| HANS PETERSSON: Új utak az atómmag megismerésére _ _ _ _ _ | 152 |
| GYULAI ZOLTÁN: A fényelektromos vizsgálatok eredményei _ _ _ _ _ | 163 |
| ORBÁN GYÖRGY: Olajok fotoaktivitása _ _ _ _ _ | 186 |

A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS ALAPFOGALMAI.

I.

1. §. A véletlen és a valószínűségek tárgyalásánál már kezdetben nagy nehézségek merültek fel, melyek máig sincsenek teljesen tisztázva.

A valószínűség *klasszikus* definícióját legelőször MOIVRE-nál találjuk (1711); szerinte valamely esemény bekövetkezésének a valószínűsége olyan tört, melynek számlálója egyenlő az esemény bekövetkezésére kedvező lehetőségek számával, nevezője pedig az összes lehetőségek számával, feltéve, hogy ezek a lehetőségek mind egyenlően valószínűek.

Az utóbbi kikötés rendkívül fontos, nélküle minden esemény valószínűségét egy félnek lehetne minősíteni azon az alapon, hogy két lehetőség van, vagy bekövetkezik az esemény vagy nem, és ezek közül az egyik kedvező.

Definiálni kell tehát az *egyenlően valószínű* lehetőségeket. A valószínűségszámítás első kutatói szerint akkor tekintjük a lehetőségeket egyenlően valószínűeknek, ha semmi okot sem ismerünk, amelynek folytán egyik lehetőség inkább bekövetkezhetnék, mint a másik. Ez az okok hiányának elve. Valamely esemény bekövetkezésének valószínűsége tehát más és más lesz, a szerint, amint többet vagy kevesebbet tudunk az esemény okairól. E definíció teljesen *szubjektív*.

A filozófusok közül sokan megkísérelték az egyenlő valószínűségeket objektív módon definiálni, ez azonban nem sikerült; má is az okok hiányának elvén állunk.

Nemcsak a valószínűség definíciója adott filozófiai vitákra

alkalmat, hanem úgyszólván minden egyes valószínűségi tétel, melyet külön-külön kívántak igazolni. A legnagyobb zavart azonban a matematikai valószínűség, a tapasztalati valószínűség és a filozófiai valószínűség vagy valószínűségi ítélet összezavarása okozta. Legjobb először definiálni az elvont matematikai valószínűséget és levezetni annak összes tétéleit, melyekhez ilyenformán nem férhet kétség; azután definiálni a tapasztalati valószínűséget és végre a valószínűségi ítéletet.

A tapasztalati valószínűséget matematikai valószínűséggel fogjuk megközelítőleg interpretálni. A valószínűségi ítéletet vagy mult tapasztalati valószínűségekre vagy pedig az egyenlően valószínű lehetőségek szubjektív definiálása után matematikai valószínűségekre alapítjuk.

2. §. Matematikai valószínűség a sokaság, osztály vagy halmaz fogalmán nyugszik. Halmaz alatt bizonyos elemek összességét értjük. A halmazt kétféleképp határozhatjuk meg.

1. Felsoroljuk a halmazhoz tartozó elemeket.

2 Szabályt adunk, mely eldönti, hogy valamely elem a halmazhoz tartozik-e vagy nem. Például azt mondjuk, hogy a halmaz elemei az 1000-nél kisebb pozitív egész számok.

A halmaz elemeinek száma lehet véges vagy végtelen. Végtelen halmazok közül a következőket szokták tárgyalni: 1. megszámlálható halmazokat, ilyeneket képeznek például az egész számok, a páros számok, a prímszámok, a racionális törtek, az algebrai számok; 2. kontinuum számosságú halmazokat, mint például a 0 és 1 között levő összes számok vagy valamely vonalon, négyzetben, vagy kockában levő pontok sokasága; végre 3. kontinuum feletti számosságú halmazokat, mint például az egyváltozós függvények sokasága. A következőkben kizárólag véges halmazokról lesz szó.

A halmazokat rendszeren egy vagy több betűvel jelöljük, pl. E , A , AB stb. A halmaz elemeinek számát pedig ugyanazzal a betűvel fogjuk jelölni, mint a megfelelő halmazt, csak hogy a betűt záró-jelbe tesszük, pl. (AB) jelenti az AB halmazhoz tartozó elemek számát.

Két vagy több halmaz szorzata alatt általában a kérdéses halmazok közös elemeiből alkotott halmazt értjük: pl. az AB halmaz elemei az A és a B halmazokhoz tartoznak; a szorzásjel ilyformán az *és* szót jelenti.

Két vagy több halmaz összege alatt a kérdéses halmazok valamennyi eleméből alkotott halmazt értjük; pl. $A+B$ oly halmaz, melynek elemei vagy az A , vagy a B , vagy mindkét halmazhoz tartoznak; az összeadási jel tehát a *vagy* szónak felel meg (inkluzív értelemben).

Legyen

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = E \quad \text{és} \quad A_i A_j = 0 \quad (i \neq j);$$

akkor a megfelelő elemszámok között a következő reláció áll fenn:

$$(A_1) + (A_2) + \dots + (A_n) = (E).$$

Zérussal jelöljük azt a halmazt, melynek nincs eleme.

Az osztályozás elméletében az összeadás- vagy szorzásjellel összekötött kifejezések kommutatív, asszociatív és disztributív tulajdonságokkal bírnak, mint arról könnyen meggyőződhetünk.

Jelöljük E -vel az összes tekintetbe jövő elemek halmazát. Kettős vagy *dichotom* osztályozásnál az E halmaz elemeit két osztályra osztjuk, A -ra és a -ra, oly módon, hogy az E sokaság minden eleme a két osztály egyikéhez és csak az egyikéhez tartozzék. Ezt az előzők értelmében a következő egyenletekkel fejezhetjük ki

$$Aa = 0, \quad A + a = E.$$

Az első egyenletet úgy olvassuk, hogy nincsen oly elem, mely úgy az A , mint az a osztályhoz tartozik; a másodikat, hogy az E halmaz bármely eleme szükségkép vagy az A vagy az a osztályhoz tartozik.

A H halmaznak az F halmazra vonatkoztatott valószínűsége alatt a $p = (HF)/(F)$ törtet értjük vagyis a két halmaz közös elemeinek számát osztva az F halmaz elemeinek számával: ezt úgy is fejezhetjük ki, hogy p a valószínűsége annak, hogy az F halmaz valamely eleme a H halmazhoz tartozzék.

Ha a H halmaz minden eleme az F halmazhoz tartozik, akkor $HF = H$ és $p = (H)/(F)$.

E definícióból kiindulva le lehet vezetni az összes valószínűségi tételeket. A matematikai valószínűségszámítás tehát halmazok elemeinek megszámlálásával foglalkozik; ez, ha a halmazok szabály által vannak adva, sokszor igen bonyolult. További feladata a valószínűségszámításnak két adott halmaz valószínűségéből más velök kapcsolatos halmazok valószínűségét kiszámítani.

A matematikai valószínűség speciális esetei: Ha $(H) = 0$, akkor $p = 0$. Ha $(H) = (F)$ akkor $p = 1$. Általában $0 \leq p \leq 1$. Ha η -val jelöljük a kiegészítő halmazt vagyis azt a halmazt, amelyre nézve $\eta + H = F$, és $\eta H = 0$, akkor a kiegészítő valószínűség, $q = 1 - p$.

3. §. Tapasztalati vagy objektív valószínűség. Ha valamely tünemény n észlelés között ν -ször fordult elő, akkor a tünemény tapasztalati valószínűsége alatt a ν/n törtet értjük. Ha n_1 észlelést végeztünk volna, akkor a megfelelő ν_1/n_1 valószínűség nem lett volna teljesen egyenlő az előbbivel. Azonban, ha n és n_1 igen nagyok, akkor közöttük az eltérés rendesen kicsiny.

Téves az a nézet, hogy ha az észlelések számát növeljük, a tapasztalati valószínűség határérték felé közeledik; tapasztalatilag ezt nem igazolhatjuk, mert ahhoz végtelen sok észlelést kellene végezni; elméleti okoskodásokkal pedig tapasztalati tényt igazolni nem lehet. Különben is a tapasztalat mutatja, hogy hosszabb észlelési sorozatokban a tapasztalati valószínűségek ingadozása nem csökken.

Példák tapasztalati valószínűsége. Megfigyeltünk Budapesten $n = 10,957$ napot, ezek között csapadékos volt $\nu = 3120$ nap; következőleg a csapadékos nap valószínűsége

$$\nu/n = 3120/10957 = 0.285.$$

Franciaországban bizonyos időszakban az élve szülöttek száma $n = 734,449$ volt, ezek közül $\nu = 378,241$ fiú; a fiúszületés tapasztalati valószínűsége tehát $\nu/n = 0.5150$.

Életbenmaradási valószínűségek Magyarországon 1900-ban: 10,000 újszülött fiú közül a 20-adik évét elérte 5921, tehát $\nu/n = 0.5921$; a hatvanadikat 3462, tehát ekkor $\nu/n = 0.3462$.

Ez egyszerű esetekben a tapasztalati valószínűséget pontosan lehet matematikai valószínűségekkel interpretálni, ha elfogadjuk, hogy az összes észlelések alkotják az F halmaz elemeit, a kedvező észlelések pedig az H halmaz elemeit.

Ha több észlelési sorozat áll rendelkezésünkre, akkor a megfelelő tapasztalati valószínűségek rendszeren különbözök. Ily esetekben matematikai valószínűség gyanánt rendszeren a tapasztalati valószínűségek *átlagát* fogadjuk el. Ha sok szorzattal rendelkezünk, akkor meghatározhatjuk azt a törvényt, amely a tapasztalati valószínűségek megoszlását átlaguk körül kifejezi. A nyert törvényből azután következtethetünk arra, hogy célszerű-e a matematikai valószínűséget a sorozatokban állandónak fogadni el (BERNOULLI sorozatok); ha igen, akkor minden észlelési eredmény függetlennek tekinthető az előző észlelési eredményektől és a matematikai valószínűség a sorozatokban nem változik (nincs szekuláris változás); esetleg azonban jobb a matematikai valószínűséget minden sorozatban állandónak tekinteni, azonban sorozatonként változónak (LEXIS sorozatok). Ez esetben is függetlenek az észlelések egymástól, azonban a matematikai valószínűségnek van szekuláris változása. Végre szélszerűbb lehet a matematikai valószínűséget ingadozónak tekinteni magukban a sorozatokban, azonban szekuláris változások nélkül (POISSON sorozatok); ez esetben az észlelési eredményeket az előzőktől függőknek tekinthetjük. A függés törvényszerűségének meghatározása ilyenkor nagy fontossággal bír.

4. §. *A valószínűségi ítélet* pusztán kifejezése várakozásunk mérvének valamely esemény bekövetkezését illetőleg. Azt tekinthetjük lehetetlennek, csaknem lehetetlennek, igen kétesnek, kétesnek, valószínűnek, nagyon valószínűnek, csaknem bizonyosnak, vagy bizonyosnak. A matematikai és tapasztalati valószínűségeknek megfelelőleg a lehetetlenséget zérussal, a bizonyosságot 1-gyel fogjuk jelölni, a többi eseteket pedig egy oly valódi

törttel, mely annál nagyobb, mennél jobban megközelíti a valószínűség a bizonyosságot és annál kisebb mennél közelebb áll a lehetetlenséghez.

A valószínűségi ítélet *szubjektív*, azonban vagy mult tapasztalati észleléseken vagy matematikai valószínűségi okoskodásokon alapszik.

Ha azt mondjuk, hogy valaminek a valószínűsége p , az alatt azt értjük, hogy ha az észlelések száma n elég nagy, akkor a kedvező esetek száma meggyőződésünk szerint körülbelül egyenlő lesz np -vel. Ez az úgynevezett *empirikus posztulátum*.

Például az említett tapasztalati valószínűségekre támaszkodva a csapadékos nap valószínűségét $p = 0.285$ -nek fogadjuk el és azt várjuk, hogy pl. a jövő évben a csapadékos napok száma körülbelül $365p$ legyen. Ha ebben nem csalódunk, akkor azt mondjuk, hogy a meteorológiai helyzet normális volt.

Egy adott kockával például 6000 dobás közül 990-szer kapunk 6-ost, $\nu/n = 33/200$. Ezt a 6-os dobás valószínűségének, p -nek elfogadva, azt várjuk, hogy a jövőben pl. 4000 dobás között körülbelül $4000p = 66$ esetben kapunk hatost.

Matematikai valószínűségekre alapított valószínűségi ítélet esetén az F halmaz elemeinek az egyenlőnek tartott összes eshetőségeket, a H halmaz elemeinek pedig a kedvező lehetőségeket fogadjuk el.

Valamely kockával való dobás lehető eredményei 1, 2, 3, 4, 5 és 6; ha ezeket a lehetőségeket egyenlően valószínűnek tartjuk, akkor azokat tekinthetjük az F halmaz elemeinek; ha a hatos a kedvező dobás, akkor a H halmaz egy elemből, a hatosból áll; a matematikai valószínűség $1/6$. Erre támaszkodva azt várjuk, hogy a jövőben pl. 3000 dobás között körülbelül 500-szor mutatkozzék a hatos; ha ez nem következne be, úgy azt mondanánk, hogy a kocka nem volt szimmetrikus, aminek következtében az egyenlően valószínű lehetőségeket nem definiáltuk helyesen.

Az előzőkből következik, hogy *minden* alkalmazott valószínűség szubjektív valószínűségi ítélet, mely tudásunk állapotától függ.

II.

5. §. A matematikai valószínűségi tételek levezetése.

Osszuk fel az E halmazt az előzők értelmében A és a osztályra, úgy hogy

$$A + a = E, Aa = 0, \text{ tehát } (A) + (a) = (E). \quad (1)$$

Feloszthatjuk ezenkívül még az E halmazt más szempontokból is, pl. a B és β osztályokra. Az előző jelölések szerint

$$B + \beta = E, B\beta = 0 \text{ tehát } (B) + (\beta) = (E). \quad (2)$$

Annak a valószínűsége, hogy az E sokaság valamely eleme a B sokasághoz is tartozzék, definíciónk értelmében $(B)/(E)$.

Osztályozhatjuk az E sokaságot egyidejűleg két szempontból is; ekkor már négy osztályt kell tekintetbe venni aszerint, amint az elemek az A és a B osztályokhoz tehát az AB osztályhoz, vagy az $A\beta$ vagy az aB vagy az $a\beta$ osztályhoz tartoznak. Az ily beosztást *másodrendű kettős* osztályozásnak nevezük. Ekkor

$$AB + A\beta + aB + a\beta = E \text{ és } AB.A\beta = 0 \text{ stb.,}$$

tehát

$$(AB) + (A\beta) + (aB) + (a\beta) = (E) \quad (3)$$

A fenti osztályokat azon formalizmus révén is megkaphatjuk, hogy alkalmazzuk a disztributív törvényt az

$$(A + a)(B + \beta) = E^2$$

egyenleten és figyelembe vesszük, hogy az osztályozás vázolt elmélete szerint $E^n = E$.

Írjuk fel még a következő egyenleteket

$$A\beta + AB = A(\beta + B) = AE = A, \quad aB + AB = EB = B; \quad (4)$$

ugyanis, minthogy az A halmaz minden eleme E -hez tartozik, tehát $AE = A$ és hasonlóképpen B esetén is.

Az első egyenlet annyit jelent, hogy az A halmaz bármely eleme vagy az $A\beta$ vagy az AB osztályhoz tartozik; a második,

hogy a B sokaság bármely eleme vagy az aB vagy az AB osztályhoz tartozik.

A harmadrendű kettős osztályozást megkapjuk, ha alkalmazzuk a disztributív törvényt az alábbi egyenletben

$$(A + a)(B + \beta)(C + \gamma) = E^3 = E.$$

Hasonlóképpen kapnánk meg az n -edrendű kettős osztályozás osztályait.

Ha A azt a részhalmazát jelenti E -nek, amelyben az elemek valamely határozott tulajdonsággal bírnak, akkor a azon elemek halmaza, amelyek e tulajdonság híjával vannak, ezért szokás az a osztályt negatív osztálynak nevezni; általában a negatív osztályokat görög betűvel szokás jelezni. Természetesen a tulajdonság definíciójától függ, hogy a két egymást kiegészítő tulajdonság közül, melyiket tekintjük negatívnak. Valamely több betűvel jelölt halmazt negatív osztálynak tekintjük akkor, ha jelölésében egy vagy több görög betű fordul elő.

A negatív osztályok elemeinek számát könnyen kifejezhetjük a pozitív osztályok elemeinek számával, például (1) és (2)-ből

$$(a) = (E) - (A), \quad (\beta) = (E) - (B);$$

hasonlóképpen a másodrendűekét (3) és (4)-ből

$$\begin{aligned} (aB) &= (B) - (AB) \quad \text{és} \quad (A\beta) = (A) - (AB), \\ (a\beta) &= (E) - (A) - (B) + (AB). \end{aligned} \quad (5)$$

Az előbbieket általánosításaképp legyenek adva $i = 1, 2, 3, \dots, n$ -re az alábbi egyenletek:

$$A_i + a_i = E, \quad A_i a_i = 0, \quad (6)$$

ekkor E a következő módon osztható n -edrendű osztályokra:

$$\begin{aligned} E &= A_1 A_2 \dots A_n + a_1 A_2 \dots A_n + A_1 a_2 \dots A_n + \dots + \\ &\quad + a_1 a_2 A_3 \dots A_n + \dots + a_1 a_2 \dots a_n. \end{aligned}$$

A negatív osztályok gyakoriságát ez esetben is kifejezhetjük az n -edrendű és az alacsonyabbrendű pozitív osztályok gyakori-

ságai segítségével ugyanúgy, mint ahogy az a másodrendű osztályozásnál történt (5).

Gyorsabban célhoz érünk azonban az alábbi szimbolikus eljárással, melyről *bebizonyítható*, hogy ugyanarra az eredményre vezet, mint a fenti eliminációra alapított módszer.

I. A (6) egyenletekre támaszkodva írjuk fel *a csupa a-ból álló n-edrendű osztályt* úgy, hogy a_i helyébe $E - A_i$ -t írunk

$$a_1 a_2 \dots a_n = (E - A_1) (E - A_2) \dots (E - A_n).$$

Alkalmazzuk erre a kifejezésre is szimbolikusan az összegekre és szorzatokra érvényes disztributív törvényt, megjegyezve, hogy $E^k = E$ és $EA_i = A_i$. Ekkor

$$a_1 a_2 \dots a_n = E - \Sigma A_i + \Sigma A_i A_j - \Sigma A_i A_j A_k + \dots + (-1)^n A_1 A_2 \dots A_n, \quad (7)$$

ahol a szummációk az A_1, \dots, A_n mennyiségek meghatározott számú elemet tartalmazó valamennyi kombinációjára terjesztendők ki.

Vége (7)-ből ugyancsak szimbolikus eljárással megkapjuk a megfelelő elemek számát, ha ez egyenletben $\Sigma A_1 \dots A_k$ helyett a $\Sigma (A_1 \dots A_k)$ kifejezést írjuk. Az eredmény a következő

$$(a_1 a_2 \dots a_n) = (E) - \Sigma (A_i) + \Sigma (A_i A_j) - \dots + (-1)^n (A_1 A_2 \dots A_n). \quad (8)$$

II. Az *n-edrendű osztályok, melyekben csak egy A szerepel, a következők:*

$$a_1 a_2 \dots A_i \dots a_n = A_i (E - A_1) (E - A_2) \dots (E - A_n);$$

a disztributív törvény szimbolikus alkalmazása után az

$$a_1 a_2 \dots A_i \dots a_n = A_i - A_i \Sigma' A_v + A_i \Sigma' A_v A_u - \dots + (-1)^{n-1} A_1 A_2 \dots A_n$$

egyenlőség keletkezik. E képletben a Σ' jel úgy értendő, hogy a szummációt az A_1, \dots, A_n mennyiségek azon megfelelő kombinációira kell alkalmazni, melyekből A_i hiányzik. Ha a fenti egyenlet mindkét oldalát valamennyi i -re összegezzük, akkor kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \Sigma a_1 a_2 \dots A_i \dots a_n &= \Sigma A_i - \binom{2}{1} \Sigma A_i A_j + \binom{3}{1} \Sigma A_i A_j A_k - \\ &- \binom{4}{1} \Sigma A_i A_j A_k A_l + \dots - (-1)^n \binom{n}{1} A_1 A_2 \dots A_n. \end{aligned}$$

Itt a szummációk az $A_1 \dots A_n$ mennyiségek valamennyi megfelelő kombinációjára értendők. Az eredmény azoknak az osztályoknak összege, amelyeknek jelölése csak egy A_i -t tartalmaz.

Végre belátható, hogy itt is úgy kapjuk a megfelelő elemek számát, hogy zárójelbe tesszük a fenti kifejezéseket:

$$\begin{aligned} \Sigma (a_1 a_2 \dots A_i \dots a_n) &= \Sigma (A_i) - \binom{2}{1} \Sigma (A_i A_j) + \\ &+ \binom{3}{1} \Sigma (A_i A_j A_k) - \dots - (-1)^n \binom{n}{1} (A_1 A_2 \dots A_n). \end{aligned} \quad (9)$$

Hasonlóképpen kapjuk azoknak az elemeknek számát, amelyek két pozitív tulajdonság jellemez:

$$\begin{aligned} \Sigma (a_1 a_2 \dots A_i \dots A_j \dots a_n) &= \Sigma (A_i A_j) - \binom{3}{2} \Sigma (A_i A_j A_k) + \\ &+ \binom{4}{2} \Sigma (A_i A_j A_k A_l) - \dots + (-1)^n \binom{n}{2} (A_1 A_2 \dots A_n). \end{aligned} \quad (10)$$

Végre azon n -edrendű osztályok elemeinek számát, mely osztályokat ν pozitív és $n-\nu$ negatív tulajdonság jellemez, az alábbi képlet adja:

$$\begin{aligned} \Sigma (a_1 a_2 \dots A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_\nu} \dots a_n) &= \Sigma (A_1 A_2 \dots A_\nu) - \\ &- \binom{\nu+1}{\nu} \Sigma (A_1 A_2 \dots A_{\nu+1}) + \binom{\nu+2}{\nu} \Sigma (A_1 A_2 \dots A_{\nu+2}) - \dots + \\ &+ (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu} (A_1 A_2 \dots A_n). \end{aligned} \quad (11)$$

6. §. Az AB halmaznak az E halmazra vonatkoztatott valószínűségét, az $(AB)/(E)$ mennyiséget, másképp is lehet kifejezni.

Az előzők értelmében annak a valószínűsége, hogy az A halmaz egy eleme B -hez is tartozik $(AB)/(A)$; továbbá annak

a valószínűsége, hogy a B halmaz egy eleme az A halmazhoz is tartozik $(AB)/(B)$. Irjuk fel a következő identitást

$$\frac{(AB)}{(E)} = \frac{(A)}{(E)} \cdot \frac{(AB)}{(A)} = \frac{(B)}{(E)} \cdot \frac{(AB)}{(B)}. \quad (I)$$

Ez az első valószínűségi főtétel, mely szerint annak a valószínűsége, hogy az E halmaz valamely eleme úgy az A , mint a B halmazhoz tartozik egyenlő annak a valószínűségével, hogy az E halmaz valamely eleme az A halmazhoz tartozik, szorozva annak a valószínűségével, hogy az A halmaz valamely eleme B -hez is tartozik.

Ha valamely kettős esemény valószínűségét kívánjuk matematikai valószínűséggel interpretálni, akkor az (I) képlet értelmében azt egyszerű események valószínűségével is kifejezhetjük. Ebben rejlik a tétel fontossága.

Ez esetben az E halmaz elemeit a kettős esemény egyenlően valószínű lehetőségei képezik. Az A halmaz elemei ezek közül azok, melyek az első eseményre kedvezőek; a B halmaz elemei pedig a másodikra kedvezőek. Annak a valószínűsége, hogy a kettős esemény közül az első legyen kedvező $(A)/(E)$. Ezt a valószínűséget lehet még interpretálni. Egy oly F_1 halmaz segítségével, melynek elemei az egyszerű eseményre kedvező egyenlően valószínű lehetőségek. A kedvező lehetőségek halmaza ekkor AF_1 és az egyszerű esemény valószínűsége $(AF_1)/(F_1)$.

$$\frac{(AF_1)}{(F_1)} = \frac{(A)}{(E)}.$$

Ennél az eljárásnál azonban ügyelni kell arra, hogy az a hipotézis, melynek alapján definiáltuk a kettős eseményre vonatkozó egyenlően valószínű lehetőségeket (az E halmaz elemeit) ne legyen ellentmondásban a második hipotézissel, mely meghatározza az egyszerű eseményre vonatkozó egyenlően valószínű lehetőségeket (az F_1 halmaz elemeit).

A fenti egyenlet érvényességére szükséges, hogy az utóbbi hipotézis az elsőnek következménye legyen.

Az (I) képletben szerepel még a második esemény kedvezőségének valószínűsége az esetben, ha az első esemény kedvező volt, vagyis $(AB)/(A)$. Ezt a valószínűséget is lehet egy egyszerű esemény kedvezőségének valószínűségével kifejezni. Legyenek az F_{12} halmaz elemei a második eseménynek — az első esemény kedvező bekövetkezése utáni — egyenlően valószínű lehetőségei; a BF_{12} halmaz elemei ekkor az ezek közül a második eseményre kedvező lehetőségek. Ha az újabb egyenlően valószínű lehetőségekre vonatkozó hipotézis következménye az E halmaz alkalmazásánál elfogadott egyenlően valószínű lehetőségek hipotézisének, akkor

$$\frac{(BF_{12})}{(F_{12})} = \frac{(AB)}{(A)}.$$

Az (I) képlet jobboldalán szereplő, összetett eseményre vonatkozó valószínűségeket, tehát egyszerű események valószínűségeire vezettük vissza.

$$\frac{(AB)}{(E)} = \frac{(AF_1)}{(F_1)} \cdot \frac{(BF_{12})}{(F_{12})}. \quad (12)$$

Az $(AB)/(E)$ összetett valószínűséget így az (AB) és (E) számok ismerete nélkül kapjuk meg, ami bonyolult esetekben előnyös. Különösen áll ez a később tárgyalandó n -szeresen összetett események valószínűségének meghatározásánál.

Példa. Adva van egy 32 lapból álló magyar kártya csomag; húzzunk ki belőle egymás után két lapot és határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy mind a kettő vörös legyen; feltevé, hogy bármely kettős húzás egyenlően valószínű.

Ez az egyszerű példa, valamint a következők is csak megvilágítani kívánják a követett eljárást, ugyanis e példák esetén az összetett esemény valószínűségét ép oly könnyű kiszámítani, mint az egyszerű eseményekét.

A jelen példában az összes lehetőségek E halmazának elemei gyanánt az 1, 2, 3, ... 32 számok másodrendű variációt kell definiálni, $(E) = 32 \cdot 31$. Azoknak a variációknak a száma, me-

lyekben az első elem vörös lapnak felel meg $(A) = 8.31$; ez az első húzásra kedvező lehetőségek halmaza.

Mínthogy szimmetria okokból azoknak a variációknak a száma, melyekben az első elem kedvező, egyenlő azoknak a variációknak a számával, melyekben a második elem kedvező,

$$(A) = (B).$$

A mindkét húzásra kedvező lehetőségek halmaza AB , ennek elemei az 1, 2, 3, ... 8 számok másodrendű variációi; tehát $(AB) = 8.7$ és az (I) képlet értelmében $(AB)/(E) = 8.7/32.31$.

Abból, hogy bármely két lap kihúzása egyenlően valószínű, szükségkép következik, hogy az első húzásnál bármely lap kihúzása szintén egyenlően valószínű; erre támaszkodva az első húzásnál az összes lehetőségek halmaza F_1 az 1, 2, 3, ... 32 számból áll; a kedvező lehetőségek halmaza AF_1 pedig az 1, 2, ... 8 számból. Következőleg annak a valószínűsége, hogy az első húzás kedvező legyen

$$(AF_1)/(F_1) = 8/32.$$

A második húzásnál az összes egyenlően valószínű lehetőségek halmazát F_{12} -t az 1, 2, 3, ... 31 számok alkotják. Az E halmaz esetén elfogadott hipotézisből következik ugyanis, hogy a második húzásnál a fennmaradó 31 lap közül bármelyik egyenlően valószínű. A kedvező lehetőségek halmazát BF_{12} -t az 1, 2, 3, ... 7 számok alkotják, ugyanis miután az első húzásnál vörös lapot húztunk, a fennmaradó lapok között már csak 7 vörös marad. Annak a valószínűsége, hogy a második lap kedvező legyen, ha az első kedvező volt, e szerint $(BF_{12})/(F_{12}) = 7/31$.

Végre annak a valószínűsége, hogy mindkettő kedvező legyen, (12) értelmében $(AB)/(E) = 8.7/32.31$.

Speciális eset. Ha a B halmaz valószínűsége az A , az α és az E halmazokban ugyanaz, azaz ha

$$\frac{(AB)}{(A)} = \frac{(\alpha B)}{(\alpha)} = \frac{(B)}{(E)},$$

akkor azt mondjuk, hogy az A és a B halmazok függetlenek az E halmazban; ilyenkor az (I) tétel így alakul:

$$\frac{(AB)}{(E)} = \frac{(A)}{(E)} \cdot \frac{(B)}{(E)}. \quad (I')$$

Ez az *összetett valószínűségi tétel*, amely szerint az AB halmaz valószínűsége az E sokaságban annyi, mint az A halmaz valószínűsége az E sokaságban szorozva a B halmaz valószínűségével az E sokaságban.

Példa. Az első urnában van egy vörös és egy fekete golyó, a másodikban egy vörös és két fekete. Mi a valószínűsége annak, hogy mindenikből egy golyót húzva, mindkettő vörös legyen, feltéve, hogy bármely golyó kihúzása egyenlően valószínű.

Ez esetben a kettős húzásra vonatkozó összes lehetőségek halmazának elemei E -nek vv_1 , vf_1 , vf_2 , fv_1 , ff_1 és ff_2 . E hat elem közül csak egy, a vv_1 kedvező. $(AB) = 1$ és $(E) = 6$; a keresett valószínűség $(AB)/(E) = 1/6$; továbbá $(A) = 3$ és $(B) = 2$, tehát $(A)/(E) = 3/6$ és $(B)/(E) = 2/6$. A három utóbbi valószínűség eleget tesz az (I') egyenletnek, az egyes húzások egymástól függetlenek.

Az első húzás lehetőségeinek megfelelő F_1 halmaz elemei v és f közöttük egy kedvező. Következésképpen annak a valószínűsége, hogy az első húzás kedvező legyen $(AF_1)/(F_1) = \frac{1}{2}$.

A második húzás lehetőségeinek megfelelő F_{12} halmaz elemei v_1 , f_1 és f_2 , melyek közül egy kedvező, következésképpen annak a valószínűsége, hogy a második húzás kedvező legyen $F_{12}/(F_{12}) = 1/3$. Vége a keresett valószínűség (12) értelmében $(AB)/(A) = 1/6$, ugyanis az E , F_1 , és F_2 halmazok alkalmazásánál definiált egyenlően valószínű lehetőségek kompatibilisek.

7. §. A (4) képletek értelmében

$$(A\beta) + (\alpha B) = (A) + (B) - 2(AB),$$

felírhatjuk tehát a következő identitást

$$\frac{(A\beta) + (\alpha B)}{(E)} = \frac{(A)}{(E)} + \frac{(B)}{(E)} - 2 \frac{(AB)}{(E)}. \quad (II)$$

Ez a második valószínűségi főtétel, amely szerint annak a valószínűsége, hogy az E halmaz valamely eleme vagy az A vagy a B halmazhoz tartozzék, egyenlő annak a valószínűségével, hogy az A halmazhoz tartozzék, hozzáadva annak a valószínűségét, hogy a B halmazhoz tartozzék és levonva kétszer annak a valószínűségét, hogy az AB halmazhoz tartozzék.

Ez a képlet főként akkor hasznos, ha alkalmazott valószínűségszámítás esetén a jobboldali valószínűségeket E -nél egyszerűbb halmazokkal fejezzük ki.

Határozzuk meg a (II) képlettel valamely kettős esemény valószínűségét. Legyenek az E , A , B , F_1 és F_{12} halmazok jelentőségei ugyanazok, mint a 6. §-ban. Legyenek ezenkívül még az F_2 halmaz elemei a második eseményre kedvező egyenlően valószínű lehetőségek, tekintet nélkül az első eseményre. Ha az alkalmazott hipotézis kompatibilis az E halmazzal elfogadott hipotézissel, akkor

$$\frac{(B)}{(E)} = \frac{(BF_2)}{(F_2)}$$

és a (II) képlet az alábbi alakot veszi fel:

$$\frac{(A\beta) + (aB)}{(E)} = \frac{(AF_1)}{(F_1)} + \frac{(BF_2)}{(F_2)} - 2 \frac{(AF_1)}{(F_1)} \cdot \frac{(BF_{12})}{(F_{12})}. \quad (13)$$

Példa. Egy urnában van két vörös és három fekete golyó, mi a valószínűsége annak, hogy két egymásután kihúzott golyó közül az egyik vörös a másik fekete legyen; feltéve, hogy bármelyik golyó kihúzása egyenlően valószínű.

Az E halmaz elemeit v_1, v_2, f_1, f_2, f_3 másodrendű variációi alkotják $(E) = 5.4$; ezek közül az első húzásra kedvező lehetőségek száma $(A) = 2.4$. Szimmetriai okokból a jelen esetben is $(A) = (B)$. A mindkét húzásra kedvező lehetőségek száma $(AB) = 2$; ennélfogva a keresett valószínűség (II) szerint $3/5$.

Ezt a valószínűséget megkapjuk az F halmazok segítségével is; F_1 elemei v_1, v_2, f_1, f_2, f_3 , ezek közül kettő kedvező, tehát annak a valószínűsége, hogy az első golyó kedvező legyen

$(AF_1)/(F_1) = 2/5$. Miután $(A) = (B)$ következôleg $(BF_2)/(F_2)$ szintén $2/5$.

A jobboldali harmadik valószínűség meghatározására definiáljuk még az F_{12} halmazt; feltéve, hogy az első húzás kedvezô volt; F_{12} elemei: v, f_1, f_2, f_3 ; ezek közül 1 kedvezô, tehát $(AF_{12})/(F_{12}) = 1/4$, végre a (13) képlet értelmében a keresett valószínűség $3/5$.

Speciális eset. Teljes kizárás alatt értjük, ha mindkét esemény nem lehet egyszerre kedvezô $AB = 0$, vagyis ha az A és B halmazoknak nincs közös elemük; ekkor (II) így alakul

$$\frac{(A\beta) + (\alpha B)}{(E)} = \frac{(A)}{(E)} + \frac{(B)}{(E)} \quad (\text{II}')$$

ez a teljes valószínűségi tétel, mely szerint annak a valószínűsége, hogy az E halmaz valamely eleme vagy az A vagy a B halmazhoz tartozók egyenlô annak a valószínűségével, hogy az E halmaz valamely eleme az A halmazhoz tartozzék, hozzáadva annak a valószínűségét, hogy az a B halmazhoz tartozzék.

Példa. Egy urnában van egy vörös golyó és három fekete. Egymás után két golyót húzunk ki, mi a valószínűsége annak, hogy az egyik vörös a másik fekete legyen? Feltéve, hogy minden golyó kihúzásának valószínűsége egyenlô. Az E halmazt ez esetben a v, f_1, f_2, f_3 betűk másodrendű variációi képezik $(E) = 4 \cdot 3$. Az első eseményre kedvezô lehetőségek száma ezek közül $(A) = 3$; a másodikra $(B) = 3$ (szimmetria). Olyan lehetőség, mely mind a kettôre kedvezô volna, nincs, $(AB) = 0$ (teljes kizárás). Következôleg a (II') képlet értelmében a keresett valószínűség $\frac{1}{2}$.

Határozzuk azt még meg az F halmazokkal. Az F_1 halmaz elemei az első eseményre vonatkoztatott egyenlôen valószínű lehetőségek: v, f_1, f_2, f_3 ; miután közöttük egy kedvezô, $(AF_1)/(F_1) = 1/4$. Tekintve, hogy $(A) = (B)$, tehát $(BF_2)/(F_2)$ is $1/4$. Végre a keresett valószínűség $1/2$.

8. §. Az első valószínűség tétel alkalmazása n halmaz ese-

tére. Legyenek adva $i = 1, 2, 3, \dots, n$ -re az A_i és a_i halmazok, úgyhogy

$$A_i + a_i = E, \quad A_i a_i = 0 \quad \text{és} \quad (A_i) + (a_i) = (E)$$

annak a valószínűségére, hogy az E halmaz valamely eleme az $A_1, A_2 \dots A_n$ halmazok mindegyikéhez tartozzék, a következő identitás érvényes

$$\frac{(A_1 A_2 \dots A_n)}{(E)} = \frac{(A_1)}{(E)} \cdot \frac{(A_1 A_2)}{(A_1)} \cdot \frac{(A_1 A_2 A_3)}{(A_1 A_2)} \dots \frac{(A_1 A_2 A_3 \dots A_n)}{(A_1 A_2 \dots A_{n-1})}. \quad (I)$$

A jobb oldalon áll annak a valószínűsége, hogy az E halmaz valamely eleme A_1 -hez tartozzék, szorozva annak a valószínűségével, hogy az A_1 halmaz valamely eleme $A_1 A_2$ -hez tartozzék, és így tovább. A tétel hasznossága abban rejlik, hogy alkalmazott valószínűségek esetén a baloldali valószínűségeket E -nél egyszerűbb halmazokkal is ki lehet számítani.

Legyenek az F_1 halmaz elemei az első eseményre vonatkoztatott egyenlően valószínű lehetőségek; F_{12} elemei a másodikra vonatkoztatottak feltéve, hogy az első eset kedvező volt; F_{123} elemei a harmadik eseményre vonatkoztatott egyenlően valószínű lehetőségek feltéve, hogy az első két esemény kedvező volt; F_{1224} elemei legyenek a negyedik eseményre vonatkoztatottak feltéve, hogy az első három esemény kedvező volt és és így tovább. A (II) képlet ekkor így alakul

$$\frac{(A_1 A_2 \dots A_n)}{(E)} = \frac{(A_1 F_1)}{(F_1)} \cdot \frac{(A_2 F_{12})}{(F_{12})} \cdot \frac{(A_3 F_{123})}{(F_{123})} \dots \quad (14)$$

Példa, 32 kártyalapból húzzunk ki négyet; mi a valószínűsége annak, hogy mind a négy alsó legyen feltéve, hogy bármely lap kihúzása egyenlően valószínű?

Az összes lehetőségek E halmaza ez esetben a négyszeres eseményre vonatkozik; elemei az 1, 2, 3, ... 32 számok negyedrendű variációi, tehát $(E) = 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29$.

Az A_i részhalmaz elemei azok a negyedrendű variációk, melyekben az i -edik elem kedvező. Az (I) képletben szereplő

$(A_1 A_2 \dots)$ számok kiszámítása ez esetben már bonyodalmas; egyszerűbb a kívánt valószínűséget a (14) képlettel határozni meg.

Az F_1 halmaznak van 32 eleme és közöttük 4 kedvező; annak a valószínűsége, hogy az első esemény kedvező legyen, ennél fogva $4/32$. Az F_{12} halmaznak 31 eleme van s közöttük 3 kedvező; annak a valószínűsége, hogy a második esemény kedvező legyen, ha az első kedvező volt $3/31$. Az F_{123} halmaznak van 30 eleme és köztük 2 kedvező; tehát annak a valószínűsége, hogy a harmadik esemény kedvező legyen, ha az első kettő kedvező volt $2/30$. Az F_{1234} halmaznak 29 eleme van s közöttük 1 kedvező, annak a valószínűsége, hogy a negyedik esemény kedvező legyen, ha az első három kedvező volt: $1/29$.

A keresett valószínűség (14) értelmében e négy valószínűség szorzata, vagyis $\frac{1}{35960}$.

Speciális eset, függetlenség. Legyen minden i, j, k, l, \dots értékenél

$$\frac{(A_i)}{(E)} = \frac{(A_i A_j)}{(A_j)} = \frac{(A_i A_j A_k)}{(A_j A_k)} = \frac{A_i A_j A_k A_l}{(A_j A_k A_l)} = \dots \text{ stb.} \quad (14')$$

Akkor (I) következtében

$$\frac{(A_1 A_2 \dots A_n)}{(E)} = \frac{(A_1)}{(E)} \cdot \frac{(A_2)}{(E)} \cdot \frac{(A_3)}{(E)} \dots \frac{(A_n)}{(E)}. \quad (I')$$

Megjegyzés. CZUBER az (I') képlet érvényességére a következő feltételeket állította fel:¹

$$\frac{(A_i A_j)}{(A_j)} = \frac{(A_i a_j)}{(a_j)} = \frac{(A_i)}{(E)} \quad (i, j = 1, 2, \dots)$$

ezek a feltételek szükségesek ugyan, de nem elegendők.

Az (I') képlet az *összetett valószínűségi tétel* alkalmazása n esetre.

9. §. A *második valószínűségi tétel* alkalmazása n halmaz esetére. Annak a valószínűsége, hogy az E halmaz valamely

¹ E. CZUBER: Wahrscheinlichkeitsrechnung I. p. 48. Dritte Aufl. 1914.

eleme az A_1, A_2, \dots, A_n halmazok egyikéhez és csak egyikéhez tartozzék a következő

$$\frac{1}{(E)} \sum_{i=1}^n (a_1 a_2 \dots A_i \dots a_n).$$

Az $a_1 a_2 \dots A_i \dots a_n$ osztályok *elemszámainak* összegét kifejeztük a (9) formulával; következőleg a keresett valószínűség

$$P = \frac{1}{(E)} [\Sigma(A_i) - 2\Sigma(A_i A_j) + 3\Sigma(A_i A_j A_k) - 4\Sigma(A_i A_j A_k A_l) + \dots - (-1)^n n(A_1 A_2 \dots A_n)]. \quad (15)$$

Speciális eset, teljes kizárás. Legyen minden i és j értéknél

$$a_1 a_2 \dots A_i \dots A_j \dots a_n = 0;$$

ebből következik, hogy $\Sigma(A_i A_j) = 0$, $\Sigma(A_i A_j A_k) = 0$ stb. Tehát

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{(A_i)}{(E)}.$$

Ez a *teljes valószínűségi tétel* alkalmazása n esetre.

10. §. *Poincaré valószínűségi tétele* megadja annak a valószínűségét, hogy az E halmaz valamely eleme az A_1, A_2, \dots, A_n halmazok *legalább egyikéhez* tartozzék. Ha Q -val jelöljük annak a valószínűségét, hogy az E halmaz valamely eleme a fenti halmazok egyikéhez se tartozzék, akkor a keresett valószínűség $P = 1 - Q$. Minthogy

$$Q = \frac{1}{(E)} (a_1 a_2 \dots a_n),$$

továbbá az $a_1 a_2 \dots a_n$ osztály elemszámait kifejeztük a pozitív osztályokéval a (8) képlet által következőleg POINCARÉ formulája:

$$P = \frac{1}{(E)} [\Sigma(A_i) - \Sigma(A_i A_j) + \Sigma(A_i A_j A_k) - \dots - (-1)^n (A_1 A_2 \dots A_n)].$$

11. §. *Általános valószínűségi tétel.* Annak a valószínűsége, hogy az E halmaz valamely eleme az A_1, A_2, \dots, A_n halmazok közül ν és csak ν halmazhoz tartozzék

$$P = \frac{1}{(E)} \Sigma(a_1 a_2 \dots A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_\nu} \dots a_n).$$

A baloldalon levő összeget kifejeztük a (13) képlettel úgy, hogy

$$P = \frac{1}{(E)} \left[\Sigma (A_1 A_2 \dots A_\nu) - \binom{\nu+1}{\nu} (\Sigma A_1 A_2 \dots A_{\nu+1}) + \dots \right. \\ \left. + (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu} A_1 (A_2 \dots A_n) \right]. \quad (16)$$

Abban az esetben, ha a valószínűségek mind függetlenek, továbbá ha $(A_i)/(E) = p$ minden i értékre nézve, akkor ez a formula BERNOULLI tételét adja az ismétléses esetekre:

$$P = \binom{n}{\nu} p^\nu (1-p)^{n-\nu}.$$

A (16) képlet nemcsak BERNOULLI tételének általánosítása arra az esetre, ha a valószínűségek nem függetlenek, hanem magában foglalja a második valószínűségi főtételt és POINCARÉ tételét is.

12. §. Legyen A a kedvező lehetőségek halmaza, a a kedvezőtleneké. Osszuk fel az A halmazt többszörös osztályozással (polytom) úgy, hogy

$$A + a = E, \quad B_1 + B_2 + B_3 + \dots + B_m = A, \quad B_i B_k = 0,$$

ekkor felírhatjuk az alábbi identitást

$$\frac{(A)}{(E)} = \sum_{i=1}^m \frac{(B_i)}{(E)}. \quad (17)$$

Ez a teljes valószínűségi tétel egy másik alkalmazása. Valamely esemény ugyanis B_1, B_2, \dots, B_m különböző módokon jöhet létre, melyek egymást kizárják. Legyen p_i a valószínűsége annak, hogy az esemény a B_i módon jöjjön létre, vagyis $p_i = (B_i)/(E)$. Annak a valószínűsége, hogy az esemény egyáltalán létre jöjjön, tekintet nélkül létrejöttének módjára, egyenlő a következő összeggel

$$P = \Sigma p_i.$$

Példa. Annak a valószínűsége, hogy két kockával páratlan számot dobjunk egyenlő a 3, 5, 7, 9 és 11-es dobások való-

színőségeinek összegével, ha a kocka minden oldalát egyenlően valószínűnek fogadjuk el.

13. §. Osszuk fel az A és az α halmazokat m osztályra ($A + \alpha = E$) úgy, hogy

$$\begin{aligned} B_i B_k &= 0, & B_1 + B_2 + B_3 + \dots + B_m &= A \\ \beta_i \beta_k &= 0, & \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_m &= \alpha \end{aligned}$$

továbbá legyen $B_i + \beta_i = E_i$ és ennél fogva $\Sigma E_i = E$.

Írjuk fel a következő identitást

$$\frac{(A)}{(E)} = \sum_{i=1}^m \frac{(E_i)}{(E)} \cdot \frac{(B_i)}{(E_i)}. \quad (18)$$

az az *összetett* és a *teljes* valószínűségi tételek együttes alkalmazásának bizonyos esete. A kedvező eset különböző E_1, E_2, \dots, E_m módokon jöhet létre (vagy, ami ugyanaz, a B_1, B_2, \dots, B_m módokon) az E_i mód valószínűsége $\omega_i = (E_i)/(E)$; annak a valószínűsége, hogy az esemény kedvező legyen az E_i mód esetén, $p_i = (B_i)/(E_i)$; végre annak a valószínűsége, hogy az esemény egyáltalán létre jöjjön:

$$P = \Sigma \omega_i p_i.$$

Példa. Az első urnában csupa fekete golyó van, a másodikban 1 fehér és $m-1$ fekete, ... az i -edikben $i-1$ fehér és $m-i+1$ fekete, végre az $m+1$ -edikben csupa fehér van. Választunk egy urnát, húzunk belőle egy golyót. Annak a valószínűségét, hogy az fehér legyen, a (18) képlet adja. A választásnál valamennyi urnát egyenlően valószínűnek tekintve, interpretálhatjuk azokat az E_i halmazokkal, melyek valószínűsége ez esetben $(E_i)/(E) = \omega_i = 1/(m+1)$.

Az E_i halmaz elemeinek száma m lesz és közöttük $i-1$ kedvező, tehát $p_i = (B_i)/(E_i) = (i-1)/m$ és a keresett valószínűség

$$P = \sum_{i=1}^{m+1} \frac{i-1}{m(m+1)} = \frac{1}{2}.$$

14. §. Az *okok valószínűségének tétélei*. Legyen A a kedvező lehetőségek halmaza, a a kedvezőtleneké. $A + a = E$, $Aa = 0$; osszuk fel az A halmazt részekre úgy, hogy

$$B_1 + B_2 + B_3 + \dots + B_m = A, \quad B_i B_k = 0.$$

Írjuk fel a következő identitást:

$$\frac{(B_i)}{(A)} = \frac{(B_i)}{(E)} / \sum \frac{(B_s)}{(E)}; \quad (19)$$

jelöljük $p_s = (B_s)/(E)$ -vel annak a valószínűségét, hogy az E halmaz valamely eleme B_s -hez tartozik, vagy alkalmazott valószínűségi számítás esetén annak a valószínűségét, hogy a kedvező eset a B_s módon jöjjön létre. Ezek után annak a valószínűsége, hogy az A halmaz valamely eleme B_i -hez tartozik vagyis hogy az esemény a B_i módon jött légyen létre, a következő:

$$\frac{(B_i)}{(A)} = \frac{p_i}{\sum p_s}, \quad (20)$$

ez az *okok valószínűségi tételének* legegyszerűbb esete.

Példa. Adva vannak a 13. §. példájának urnái; választottunk egy urnát és húztunk belőle egy golyót, az fehér volt; meghatározandó annak a valószínűsége, hogy ez a golyó az i -edik urnából származott légyen. Feltételezzük, hogy a választásnál minden urna és az urnákban bármelyik golyó kihúzása egyenlően valószínű.

Ez esetben $p_i = (i-1)/m$. A keresett valószínűséget a (20) képlet adja.

$$p = \frac{i-1}{\sum (s-1)} = \frac{2(i-1)}{m(m+1)}.$$

15. §. Írjuk fel az alábbi identitást

$$\frac{(B_i)}{(A)} = \frac{(B_i)}{(E_i)} \cdot \frac{(E_i)}{(E)} / \sum \frac{(B_s)}{(E_s)} \cdot \frac{(E_s)}{(E)}. \quad (21)$$

Ez magában foglalja az *okok valószínűségének* általános képletét.

Jelöljük $p_i = (B_i)/E_i$ -vel annak a valószínűségét, hogy az E_i halmaz valamely eleme B_i -hez tartozik és $\omega_i = (E_i)/(E)$ -vel annak a valószínűségét, hogy az E halmaz valamely eleme E_i -hez tartozik. A (21) egyenlőséget tehát így írhatjuk:

$$\frac{(B_i)}{(A)} = \frac{\omega_i p_i}{\sum \omega_s p_s}. \quad (22)$$

Példa. m urnában van egyenlő számú fekete és fehér golyó; mindegyikből húztunk egyet s azokat megnézés nélkül beraktuk egy közös urnába. Ebből húztunk egymásután $\nu + \mu$ golyót úgy, hogy a kihúzott golyót mindig visszatettük a következő húzás előtt. ν fehér és μ fekete golyót kaptunk. Mi a valószínűsége, hogy a közös urnában i fehér golyó volt, feltéve, hogy az egyenlően valószínű lehetőségeket az előbbi példa esetén hasonlóan definiáljuk?

A húzások előtt annak a valószínűsége, hogy a közös urnában s fehér golyó legyen, $\omega_s = \binom{m}{s} \left(\frac{1}{2}\right)^m$; hogy ily urnából a fenti körülmények között ν fehér és μ fekete golyót kapjunk,

$$p_s = \binom{\nu + \mu}{\nu} s^\nu (m - s)^\mu / m^{\nu + \mu}.$$

Végre a húzások után a valószínűsége, hogy az urnában i fehér golyó legyen, (22) értelmében

$$\frac{(B_i)}{(A)} = \frac{\binom{m}{i} i^\nu (m - i)^\mu}{\sum \binom{m}{s} s^\nu (m - s)^\mu}.$$

Megjegyzés. Mivel $(B_i) = (E_i A)$, azért a (22) valószínűséget így is lehet írni $(E_i A)/(A)$, vagyis ez egyúttal annak a valószínűsége, hogy az A halmaz valamely eleme az E_i halmazhoz tartozzék.

16. §. Következtetési tétel. Legyenek a H_{AE_i} halmaz elemei oly elem párok, melyek első tagja a 13. §-ban definiált A halmaz egy eleme, másik tagja pedig az ugyanott definiált E_i

halmaz egy eleme, tehát $(H_{AE_i}) = (A)(E_i)$. Definiáljuk ezenkívül még ennek egy részhalmazát, $H_{B_iB_i}$ -t olyképp, hogy annak elemei a 13. §-ban szereplő B_i halmaz elemeinek másodrendű ismétléses variációiból képezett elempárok legyenek. Ekkor $(H_{B_iB_i}) = (B_i)(B_i)$. A $(H_{B_iB_i})/(H_{AE_i})$ valószínűségek összege valamennyi i -re

$$\sum_{i=1}^m \frac{(H_{B_iB_i})}{(H_{AE_i})} = \sum_{i=1}^m \frac{(AE_i)}{(A)} \cdot \frac{(B_i)}{(E_i)}$$

azt a kettős valószínűséget fejezi ki, hogy ha az A halmaz egy eleme valamely E_i -hez tartozik, akkor egyúttal E_i egy eleme B_i -hez tartozzék, bármilyen legyen is i értéke. A fenti képletben $(B_i) = (AE_i)$ -t irtunk. Alkalmazott valószínűségszámításnál ez a formula a *következtetési tételre* vezet. Az esemény kedvező volt, annak a valószínűsége, hogy az, az E_i módon jött légyen létre $(AE_i)/(A)$, továbbá, hogy e mód esetén a következő esemény kedvező legyen $(B_i)/(E_i)$; a kettős esemény együttes valószínűsége pedig a két előző valószínűség szorzata (összelettel valószínűségi tétel). Végre annak a valószínűségét, hogy ha a kedvező eset bármily módon jött létre, a következő esemény kedvező legyen, a (23) képlet adja.

Példa. A 13. §-ban definiált urnákból egyet választva húztunk belőle ν fehér és μ fekete golyót, a húzott golyókat a következő húzás előtt visszatéve. Mi a valószínűsége annak, hogy a következő húzás fehér golyót adjon? Feltéve hogy az egyenlően valószínű lehetőségekre ugyanazt a hipotézist fogadjuk el, mint a 13. §-ban.

Annak a valószínűsége, hogy az urnában i fehér golyó legyen a (20) képlet értelmében.

$$\frac{(AE_i)}{(A)} = \frac{i^\nu (m-i)^\mu}{\sum s^\nu (m-s)^\mu}$$

Továbbá annak a valószínűsége, hogy ez esetben a következő húzás fehéret adjon $(B_i)/(E_i) = i/m$; tehát annak a valószínűsége, hogy ν fehér és μ fekete golyó húzása után tekintet nél-

kül az urna összetételére, a következő húzás fehér golyót eredményezzen,

$$P = \frac{\Sigma i^{\nu+1} (m-i)^{\mu}}{m \Sigma s^{\nu} (m-s)^{\mu}}. \quad (24)$$

Speciális eset: $\mu=0$, vagyis ν észlelésnél mindig fehér golyót húzva, annak a valószínűsége, hogy a következő húzás is fehér golyót adjon

$$P = \frac{\Sigma i^{\nu+1}}{m \Sigma s^{\nu}}.$$

Ez a híres LAPLACE-féle *következtetési* tétel, amely az indukciót igazolja azokban az esetekben, melyekben a lehető okok (urnák, vagy E_i halmazok) egyenlően valószínűek, vagyis ha $\omega_i = \text{constans}$. Ha a (24) képletben i/m helyett x -et írunk és $1/m$ helyett dx -et: továbbá ha m határtalanul növekedik, akkor

$$P = \frac{\int_0^1 x^{\nu+1} (1-x)^{\mu} dx}{\int_0^1 x^{\nu} (1-x)^{\mu} dx} = \frac{\nu+1}{\nu+\mu+2}.$$

Összefoglalás.

Láttuk, hogy a vázolt eljárással valamennyi valószínűségi tétel, az annyira vitatott okok valószínűségének tételét és a következtetési tételt is beleértve, kifogástalanul levezethető úgy, hogy azokhoz kétség nem férhet.

Ha azonban a tételeket gyakorlati problémákra alkalmazzuk, akkor az eredmény helyessége attól függ, hogy a rendelkezésre álló adatok megfelelnek-e a kiindulási feltételeknek, vagyis, hogy az egyenlően valószínű eseteket a tényeknek megfelelő módon definiáltuk-e, vagy nem. Ezt minden egyes esetben a későbbi tapasztalat igazolhatja az empirikus posztulátum révén.

Az úgynevezett valószínűségszámítási *paradoxonok*, vagyis bizonyos valószínűségeknek egymással ellentmondó eredményei, onnan származnak, hogy a számítás mindegyik esetben az egyenlően valószínű lehetőségek más és más definícióján nyugszik s így szükségkép különböző eredményre vezet.

Jordan Károly.

LES FONDEMENTS DU CALCUL DES PROBABILITÉS.

Dès le commencement, le Calcul des probabilités présentait de grandes difficultés qui longtemps semblaient insurmontables; elles avaient trait à la définition du hasard et de la probabilité.

D'après la définition classique, qu'on rencontre la première fois chez MOIVRE, la probabilité d'un événement est égale au nombre des possibilités favorables à l'événement, divisé par le nombre total des possibilités adverses ou favorables, pourvu que toutes les possibilités soient également vraisemblables.

D'après un grand nombre de mathématiciens et philosophes (JACQUES BERNOULLI, LAPLACE et autres), on considère les possibilités comme également vraisemblables, lorsque l'on ne connaît aucune raison qui pourrait faire supposer que l'une se produira plus facilement que l'autre. La probabilité dépend donc de l'état de nos connaissances, elle est subjective.

D'autres philosophes (COURNOT, KRIESS etc.) se sont proposé de définir les possibilités également vraisemblables d'une manière objective; d'autres encore ont rejeté entièrement la définition ci-dessus et mettant à sa place la probabilité empirique d'une série d'expériences (fréquence), ils ont essayé d'en déduire les lois du Calcul des Probabilités. Ains ils ont été amenés à accepter certains théorèmes et à en rejeter d'autres. Par exemple il y a parmi eux qui acceptent le théorème de BERNOULLI et rejettent l'inverse de ce théorème. Le théorème de BAYES et surtout celui des successions de LAPLACE sont le plus souvent contestés.

D'après certains philosophes (LE DANTEC etc.) parler de la probabilité d'un événement unique manque absolument de sens.

Pour sortir de cette confusion, il n'y a qu'un moyen. Définir d'abord les probabilités mathématiques, abstraites, et en déduire toutes les lois du Calcul des Probabilités. Ensuite définir les probabilités empiriques d'une suite d'expériences et d'interpréter, d'une manière nécessairement approchée les résultats obtenus, par les probabilités mathématiques. En troisième lieu, définir la probabilité dite philosophique ou jugement de probabilité. Cette dernière est la traduction en chiffre de notre impression sur l'arrivée d'un événement; elle est entièrement subjective, mais elle est basée ou bien sur des probabilités empiriques observés dans le passé, ou bien sur l'énumération des diverses possibilités considérées

comme également vraisemblables, favorables ou défavorables à l'événement (définition classique). Une fois les possibilités également vraisemblables définies, on peut interpréter le problème par des probabilités mathématiques; le calcul conduit alors à un résultat déterminé. Les soi-disant paradoxes sont des probabilités différentes trouvées pour le même événement, en partant d'hypothèses différentes concernant les probabilités également vraisemblables.

Imitant les probabilités mathématiques et empiriques, on exprime la probabilité philosophique par une fraction comprise entre zéro et l'unité. Si nous disons que nous considérons la probabilité d'un événement comme égale à p , cela signifie que nous nous attendons à trouver dans une suite d'expérience à venir une probabilité empirique à peu près égale à p (postulat empirique). L'expérience ultérieure seule peut décider si nous avons raison ou non. Si notre jugement était basé sur des probabilités empiriques et que l'expérience nous donne tort, nous dirons que les conditions sont changées. Si au contraire le jugement était basé sur des considérations théoriques, nous dirons alors que l'hypothèse admise pour les possibilités également vraisemblables n'était pas conforme à la réalité.

On définit (§ 2) la probabilité mathématique d'un ensemble H par rapport à un ensemble F par une fraction dont le numérateur est égal au nombre (AF) des éléments communs au deux ensembles et dont le dénominateur est égal au nombre (F) des éléments de l'ensemble F .¹

Au paragraphe 5 on trouve les formules du classement dichotome, dont la plus importante est la formule (11). Soit l'ensemble E partagé en deux classes A_i et a_i sans éléments communs: $A_i + a_i = E$ et $A_i a_i = 0$; et supposons ce classement répété n fois ($i=1, 2, \dots, n$). La formule (11) exprime le nombre des éléments de E appartenant en même temps à ν des ensembles A_1, \dots, A_n et à $n - \nu$ des ensembles a_1, \dots, a_n .

Au § 8 l'identité (1) exprime le premier théorème du Calcul des Probabilités donnant la probabilité pour qu'un élément de l'ensemble E appartienne en même temps aux ensembles A_1, A_2, \dots, A_n . Cette identité est utile dans l'application, si on peut exprimer les probabilités du

¹ Les lettres mises entre parenthèses expriment le nombre des éléments de l'ensemble désigné par ces lettres. Par *somme* de plusieurs ensembles on entend l'ensemble de tous leurs éléments réunis, par *produit*, l'ensemble de leurs éléments communs.

second membre en raisonnant sur des ensembles plus simples que l'ensemble E . Dans la formule (14) par exemple, F_1 est l'ensemble des possibilités également vraisemblables relatives au premier événement, F_{12} l'ensemble de celles relatives au second événement, en supposant que le premier événement a eu lieu, et ainsi de suite; mais il faut que les hypothèses admises concernant les possibilités également vraisemblables pour les ensembles F_1, F_{12}, \dots , soient compatibles avec celle admise dans le cas de l'ensemble E . Le théorème des probabilités composées est un cas particulier de ce théorème. Les conditions pour que les événements soient indépendants et pour que (I') soit applicable sont données par (14'); les conditions formulées par CZUBER (loc. cit.) sont nécessaires, mais non suffisantes.

Au § 11 la formule (16) déduite de la formule (11) des classements exprime la probabilité pour que parmi n événements considérés, ν soient favorables, et $n-\nu$ défavorables. Ce théorème important est non seulement une généralisation du théorème de BERNOULLI, il embrasse aussi le théorème de POINCARÉ (§ 10) donnant la probabilité pour qu'un élément de l'ensemble E appartienne au moins à l'un des ensembles A_1, A_2, \dots, A_n , de plus le second théorème du Calcul des probabilités c.-à-d. le théorème relatif à la probabilité pour que parmi n événements un seul soit favorable, et en outre le théorème de probabilités totales.

L'identité (21) interprète le théorème des probabilités des causes. Cette formule est utile dans les applications, car on peut alors évaluer les probabilités du second membre, à l'aide d'ensembles plus simples que E . § 16 présente sous une forme analogue le théorème des successions de LAPLACE.

En résumé on peut en partant de la définition du § 2, déduire très simplement tous les théorèmes de probabilité mathématique. Dans chaque cas de probabilité appliquée, il faut avoir recours à une hypothèse concernant les possibilités également vraisemblables; le résultat dépendra de l'hypothèse adoptée. Les problèmes de probabilité des causes ne diffèrent pas de ce point de vue des autres problèmes de probabilité; l'emploi de ce théorème est donc tout aussi justifié que celui des autres.¹

Charles Jordan.

¹ CH. JORDAN: On probability, Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan Vol. 7, 1925.

ADALÉK A FELÜLETI GÖRBÉK ELMÉLETÉHEZ.

Az alapformulák összeállítása.

Az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektornak skaláris szorzatát $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, vektorszorzatát $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ alakkal jelöljük.

1. Az u független változótól függő

$$\mathbf{r}(u) = P(u) - O$$

rádiusz-vektor bizonyos görbét értelmez. O a vonatkozási rendszer kezdőpontja, P pedig a görbe változó pontja. A görbe iv-eleme

$$ds = |\mathbf{r}'(u)| du.$$

Az

$$\mathbf{e} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

egységnyi vektor a görbe érintőjének irányát adja meg. A

$$\frac{d\mathbf{e}}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{\rho}$$

meghatározza a görbe főnormálisának egységnyi vektorát \mathbf{n} -et és a görbületet $\frac{1}{\rho}$ -t. Az

$$\mathbf{e} \times \mathbf{n} = \mathbf{b}$$

a görbe binormálisának egységnyi vektora. Az \mathbf{e} , \mathbf{n} és \mathbf{b} szolgáltatja a görbe természetes triéderét. Ezen vektorok között állanak a FRENET-féle formulák

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}}{ds} &= \cdot \frac{\mathbf{n}}{\rho} \cdot \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} &= -\frac{\mathbf{e}}{\rho} \cdot + \frac{\mathbf{b}}{\tau} \cdot \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} &= \cdot -\frac{\mathbf{n}}{\tau} \cdot \end{aligned}$$

$\frac{1}{\tau}$ a görbe torziója.

2. A felületet az u és v független változóktól függő

$$\mathbf{r}(u, v) = P(u, v) - O$$

rádiusz-vektor értelmezi. A felület vonalelemének négyzete

$$ds^2 = |d\mathbf{r}|^2 = (\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv)^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

s itt

$$E, F, G$$

a GAUSS-féle elsőrendű alaplmenyiségek.

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 = EG - F^2 = D^2.$$

A felületi normálist a

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{D}$$

egységnyi vektor szolgáltatja. A másodrendű alaplmenyiségek

$$L = \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{r}_{uu}, \quad M = \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{r}_{uv}, \quad N = \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{r}_{vv}.$$

A felületi görbét jellemezhetjük, ha u -t és v -t megadjuk, mint a görbe s ivhosszúságának függvényét. A görbe érintőjének egységnyi vektora

$$\mathbf{e} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{r}_u \frac{du}{ds} + \mathbf{r}_v \frac{dv}{ds}.$$

Az \mathbf{e} , $\boldsymbol{\nu}$ és a geodetikus normális $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{e} \times \boldsymbol{\nu}$ adják a felületi görbe fundamentális triéderét.

Bevezetve a felületi görbe normális görbületét $\frac{1}{\tau}$, geodetikus vagy érintői görbületét $\frac{1}{g}$ és geodetikus torzióját $\frac{1}{\gamma}$, állanak a következő kapcsolatok

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}}{ds} &= \cdot \frac{\boldsymbol{\nu}}{\tau} + \frac{\boldsymbol{\beta}}{g} \\ \frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds} &= -\frac{\mathbf{e}}{\tau} \cdot + \frac{\boldsymbol{\beta}}{\gamma} \\ \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} &= -\frac{\mathbf{e}}{g} - \frac{\boldsymbol{\nu}}{\gamma} \cdot \end{aligned} \quad (1)$$

A felületi görbe természetes és fundamentális triédere közötti kapcsolatot teljesen jellemzi azon ω szög, mit a felületi normális a görbe főnormálisával alkot. Ezt a szöveget oly értelemben mérjük, hogy álljon

$$\nu \times \mathbf{n} = \sin \omega \mathbf{e}.$$

Ezen kapcsolatból nyerjük MEUSNIER és LANCRET tételeit

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\cos \omega}{\rho}, \quad \frac{1}{g} = \frac{\sin \omega}{\rho}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{\tau} - \frac{d\omega}{ds}.$$

Két és több felületi görbe.

1. Legyen adva a felület $P(u, v)$ pontjából kiinduló két görbe. A vonalelemek ds_1 és ds_2 , az érintők egységnyi vektora pedig

$$\mathbf{e}_1 = \frac{d\mathbf{r}}{ds_1} = \mathbf{r}_u \frac{du_1}{ds_1} + \mathbf{r}_v \frac{dv_1}{ds_1}$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{d\mathbf{r}}{ds_2} = \mathbf{r}_u \frac{du_2}{ds_2} + \mathbf{r}_v \frac{dv_2}{ds_2}$$

Ezekből

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_1}{ds_2} &= \mathbf{r}_{uu} \frac{du_1}{ds_1} \frac{du_2}{ds_2} + \mathbf{r}_{uv} \left(\frac{du_1}{ds_1} \frac{dv_2}{ds_2} + \frac{du_2}{ds_2} \frac{dv_1}{ds_1} \right) + \\ &+ \mathbf{r}_{vv} \frac{dv_1}{ds_1} \frac{dv_2}{ds_2} + \mathbf{r}_u \frac{d^2 u_1}{ds_1 ds_2} + \mathbf{r}_v \frac{d^2 v_1}{ds_1 ds_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_2}{ds_1} &= \mathbf{r}_{uu} \frac{du_1}{ds_1} \frac{du_2}{ds_2} + \mathbf{r}_{uv} \left(\frac{du_1}{ds_1} \frac{dv_2}{ds_2} + \frac{du_2}{ds_2} \frac{dv_1}{ds_1} \right) + \\ &+ \mathbf{r}_{vv} \frac{dv_1}{ds_1} \frac{dv_2}{ds_2} + \mathbf{r}_u \frac{d^2 u_2}{ds_1 ds_2} + \mathbf{r}_v \frac{d^2 v_2}{ds_1 ds_2}. \end{aligned}$$

Mint hogy \mathbf{r}_u és \mathbf{r}_v is merőlegesek a ν -re, tehát

$$\nu \cdot \frac{d\mathbf{e}_1}{ds_2} = \nu \cdot \frac{d\mathbf{e}_2}{ds_1}. \quad (1)$$

Ha a

$$\nu \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \quad \text{és} \quad \nu \cdot \mathbf{e}_2 = 0$$

kifejezések közül az elsőt s_2 , másodikat s_1 szerint differenciáljuk, az (1) miatt kapjuk

$$\mathbf{e}_1 \cdot \frac{d\mathbf{v}}{ds_2} = \mathbf{e}_2 \cdot \frac{d\mathbf{v}}{ds_1} \quad (2)$$

Ez a *normális változásának projekció-tétele*.¹ Ha a (2)-ben használjuk az előbbi pont (1) képleteit, kapjuk

$$\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1} = \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \right) \operatorname{tg} a, \quad (3)$$

s itt a az \mathbf{e}_1 és \mathbf{e}_2 bezárta szög

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \sin a \mathbf{v}$$

értelemben. A (3) összefüggést állapít meg két felületi görbe normális görbülete, geodetikus torziója és a bezárt szög között.

Merőleges vonalak esetében kapjuk

$$\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} = 0.$$

2. Az \mathbf{e}_1 és \mathbf{e}_2 mellé vegyük az \mathbf{e} érintőjű felületi görbét, mely φ szöget zár be az \mathbf{e}_1 -el.

A (3) alapján

$$\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_1} = \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma_1} \right) \operatorname{tg} \varphi,$$

$$\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_2} = \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma_2} \right) \operatorname{tg} (\varphi - a).$$

Innen egyszer $\frac{1}{\gamma}$ -t, másszor $\frac{1}{\tau}$ -t küszöbölve ki, kapjuk EULER és BONNET általánosított tételét

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} = \frac{\cos^2 \varphi}{\tau_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{\tau_2} - \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{\gamma_2} - \frac{1}{\gamma_1} \right) + \\ + \operatorname{ctg} a \left[\sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1} \right) + \sin^2 \varphi \left(\frac{1}{\gamma_2} - \frac{1}{\gamma_1} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} = \frac{\cos^2 \varphi}{\gamma_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{\gamma_2} + \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1} \right) + \\ + \operatorname{ctg} a \left[\sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{\gamma_2} - \frac{1}{\gamma_1} \right) - \sin^2 \varphi \left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1} \right) \right] \end{aligned}$$

¹ SUTÁK J.: A görbék abszolút elmélete. Budapest, 1918. p. 9.

A

$$H = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + \operatorname{ctg} \alpha \left(\frac{1}{\gamma_2} - \frac{1}{\gamma_1} \right) = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + \frac{\frac{1}{\gamma_2^2} - \frac{1}{\gamma_1^2}}{\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}}$$

rövidítést bevezetve a (3) alapján írhatjuk még¹

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} &= \frac{H}{2} - \left(\frac{H}{2} - \frac{1}{\tau_1} \right) \cos 2\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{\gamma_1} = \frac{H}{2} - \frac{1}{2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{\gamma} \right) \\ \frac{1}{\gamma} &= \left(\frac{H}{2} - \frac{1}{\tau_1} \right) \sin 2\varphi + \frac{\cos 2\varphi}{\gamma_1} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{\tau} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Ezekből a képletekből bizonyíthatjuk, hogy bármely két e és e' érintőjű görbe adataival kifejezhető a középgörbület

$$H = \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau'} + \frac{\frac{1}{\gamma'^2} - \frac{1}{\gamma^2}}{\frac{1}{\tau'} - \frac{1}{\tau}}.$$

Hasonlóképp bizonyítható, hogy a GAUSS-féle görbületi mérték alakja

$$K = \left(H - \frac{1}{\tau} \right) \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{\tau_1 \tau_2} + \frac{\frac{1}{\gamma_2^2 \tau_1} - \frac{1}{\gamma_1^2 \tau_2}}{\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}}.$$

Ez hasonlóképp kifejezhető bármely két görbe adataival.

A legutolsó képlet szerint bármely görbénél áll²

$$\frac{1}{\tau^2} - \frac{H}{\tau} + K + \frac{1}{\gamma^2} = 0. \quad (5)$$

¹ SUTÁK J.: A felületelmélet fundamentális tételei. Sz. István Akad. Ért. V. (1920) p. 179.

² SUTÁK J.: A görbék abszolút elmélete. p. 10.

Speciális felületi vonalak.

Az előbbi pont eredményei alapján összeállíthatjuk a felület speciális vonalainak adatait.

1. *Aszimptotikus vonalaknál*

$$\frac{1}{\tau} = 0, \quad \frac{1}{\gamma} = \pm \sqrt{-K}.$$

2. *Az aszimptotikus vonalakra merőleges ortoaszimptotikus vonalaknál*

$$\frac{1}{\tau} = H, \quad \frac{1}{\gamma} = \pm \sqrt{-K}.$$

3. *A görbületi vonalaknál*

$$\frac{1}{\gamma} = 0, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{H}{2} \pm \frac{\sqrt{H^2 - 4K}}{2}.$$

Az előbbi pont (4) képlete szerint az $\frac{1}{\tau}$ ezen vonalak mentén szélső értéket mutat.

4. *A torziós vonalaknál*

$$\frac{1}{\tau} = \frac{H}{2}, \quad \frac{1}{\gamma} = \pm \frac{\sqrt{H^2 - 4K}}{2}.$$

A torziós vonalak mentén az $\frac{1}{\gamma}$ vesz fel szélső értéket.

5. *A karakterisztikus vonalnak*¹ $\frac{\tau}{\gamma}$ -nak van szélső értéke. Ezen vonal mentén

$$\frac{1}{\tau} = 2 \frac{K}{H}, \quad \frac{1}{\gamma} = \pm \frac{\sqrt{K}}{H} \sqrt{H^2 - 4K}.$$

6. *A szélső sodródású vonalaknál*²

$$\frac{1}{\tau} = \frac{HK}{H^2 - 2K}, \quad \frac{1}{\gamma} = \pm \frac{K}{H^2 - 2K} \sqrt{H^2 - 4K}.$$

¹ R. v. LILIENTHAL: Zur Theorie der äquidistanten Kurven auf einer Fläche. Math. Ann. 62 (1906) p. 539–567. — R. v. LILIENTHAL: Vorles. üb. Differentialgeometrie II. 1. (1913) p. 196.

² I. KNOBLAUCH: Grundl. der Differentialgeometrie. (1913) p. 596. — TH. RADAKOVIĆ: Über die Kurven... Monatshefte für Math. u. Physik. 33 (1923) p. 144–147.

7. A körös pont poláris görbéinél¹

$$\frac{1}{\tau} = \frac{K}{H}, \quad \frac{1}{\gamma} = \pm i \frac{K}{H}.$$

8. A torziós vonalak általánosításánál

$$\frac{1}{\tau} = nH, \quad \frac{1}{\gamma} = \pm \sqrt{n(1-n)H^2 - K}.$$

Ebből $n=0$ esetén kapjuk az aszimptotikus vonalakat, $n = \frac{1}{2}$ esetében a torziós vonalakat és $n=1$ mellett az ortoaszimptotikus vonalakat.

9. A karakterisztikus vonalak általánosításánál

$$\frac{1}{\tau} = n \frac{K}{H}, \quad \frac{1}{\gamma} = \pm \frac{\sqrt{K}}{H} \sqrt{(n-1)H^2 - n^2K}.$$

Ebből $n=0$ esetében az aszimptotikus vonalakra jutunk, $n=1$ mellett a poláris görbékre és $n=2$ a karakterisztikus vonalakra vezet.

Az alapvonal speciális.

Válasszuk a kiindulásul vett e_1 vonalat speciális módon, akkor egyszerűbb alapképleteket kapunk.

1. Ha e_1 aszimptotikus irány, akkor $\frac{1}{\tau_1} = 0$ és $\frac{1}{\gamma_1} = \sqrt{-K}$.

Ez esetben

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} &= \frac{H}{2} - \frac{H}{2} \cos 2\varphi + \sqrt{-K} \sin 2\varphi \\ \frac{1}{\gamma} &= \frac{H}{2} \sin 2\varphi + \sqrt{-K} \cos 2\varphi. \end{aligned}$$

2. Ha az e_1 görbületi irány,

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{H}{2} - \frac{\sqrt{H^2 - 4K}}{2}, \quad \frac{1}{\gamma_1} = 0.$$

¹ R. NEUENDORF: Zur Theorie der Kreispunktpolarkurven. Crelle Journal 137 (1910) p. 145—165.

Igy tehát¹

$$\frac{1}{\tau} = \frac{H}{2} - \frac{\sqrt{H^2 - 4K}}{2} \cos 2\varphi$$

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{\sqrt{H^2 - 4K}}{2} \sin 2\varphi.$$

A φ és $-\varphi$ -hez tartozó irányok *asszociáltak*.

3. Ha az e_1 torziós vonal

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{H}{2}, \quad \frac{1}{\gamma_1} = \frac{\sqrt{H^2 - 4K}}{2}.$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{H}{2} + \frac{\sqrt{H^2 - 4K}}{2} \sin 2\varphi$$

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{\sqrt{H^2 - 4K}}{2} \cos 2\varphi.$$

A φ és $-\varphi$ adják az *adjungált* irányokat.

4 Ha e_1 karakterisztikus vonal, akkor

$$\frac{1}{\tau_1} = 2 \frac{K}{H}, \quad \frac{1}{\gamma_1} = \frac{\sqrt{K}}{H} \sqrt{H^2 - 4K}$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{H}{2} - \frac{H^2 - 4K}{2H} \cos 2\varphi + \frac{\sqrt{K}}{H} \sqrt{H^2 - 4K} \sin 2\varphi$$

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{H^2 - 4K}{2H} \sin 2\varphi + \frac{\sqrt{K}}{H} \sqrt{H^2 - 4K} \cos 2\varphi.$$

A geometriai differenciálás a felületen.

Legyen $f(u, v)$ az u és v változóknak tetszésszerű függvénye, mely lehet skaláris vagy vektorfüggvény. Ezen $f(u, v)$ -nek a felület egyes pontjaiban más és más lesz az értéke. Ha a felület $P(u, v)$ pontjából átmegyünk a szomszédos $P_1(u + du_1, v + dv_1)$ pontba és $(PP_1) = ds_1$, akkor az $f(u, v)$ -nek

¹ Ez az első képlet található az Encyclopädie der math. Wiss. III. 3. p. 107.

ezen (du_1, dv_1) -el, vagy e_1 vektorral jelzett irányban a differenciálhányadosa ¹

$$\theta_1 f(u, v) = \frac{df}{ds_1} = \frac{f_u du_1 + f_v dv_1}{\sqrt{E du_1^2 + 2F du_1 dv_1 + G dv_1^2}}.$$

Ha az e_2 ugyancsak a P érintősíkjában van és az e_1 -el α szöget zár be, akkor az e_2 irányban való differenciálhányados

$$\theta_2 f = \cos \alpha \theta_1 f + \sin \alpha \theta_1' f$$

s itt

$$\theta_1' f = \frac{(E f_v - F f_u) du_1 + (F f_v - G f_u) dv_1}{\sqrt{EG - F^2} ds_1}$$

s ez az e_1 -re merőleges irányban való differenciálhányadost jelenti.

Ha e az e_1 -el φ szöget zár be, akkor áll

$$\theta_\varphi = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin \alpha} \theta_1 + \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha} \theta_2$$

s itt már csak az operatort jeleltük.

A φ' -el adott irányban ugyanígy

$$\theta_{\varphi'} = \frac{\sin(\alpha - \varphi')}{\sin \alpha} \theta_1 + \frac{\sin \varphi'}{\sin \alpha} \theta_2.$$

Alkalmazás.

A geometriai differenciálás alkalmazásával a következő fontos kapcsolatokra jutunk:

$$\begin{aligned} \theta_\varphi e' = & \left[\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin \alpha g_1} + \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha g_2} - \frac{d\varphi'}{ds} \right] \beta' + \\ & + \left[\frac{H}{2} \cos(\varphi - \varphi') - \left(\frac{H}{2} - \frac{1}{c_1} \right) \cos(\varphi + \varphi') + \frac{\sin(\varphi + \varphi')}{r_1} \right] \nu \end{aligned}$$

$\varphi = \varphi'$ esetében ered ebből ²

¹ Encyklop. III. 3. p. 125.

² Encyklop. III. 3. p. 135. adja ezen képletet $\alpha = \frac{\pi}{2}$ esetére.

$$\frac{1}{g} = \frac{\sin(a-\varphi)}{\sin ag_1} + \frac{\sin \varphi}{\sin ag_2} - \frac{d\varphi}{ds}$$

$$\theta_{\varphi+\frac{\pi}{2}} e' = \left[-\frac{\cos(a-\varphi)}{\sin ag_1} + \frac{\cos \varphi}{\sin ag_2} - \frac{d\varphi'}{ds} \right] \beta' +$$

$$+ \left[-\frac{H}{2} \sin(\varphi-\varphi') + \left(\frac{H}{2} - \frac{1}{\tau_1} \right) \sin(\varphi+\varphi') + \frac{\cos(\varphi+\varphi')}{\tau_1} \right] \nu$$

$$\theta_{\varphi} \beta' = - \left[\frac{\sin(a-\varphi)}{\sin ag_1} + \frac{\sin \varphi}{\sin ag_2} - \frac{d\varphi'}{ds} \right] e' -$$

$$- \left[\frac{H}{2} \sin(\varphi-\varphi') + \left(\frac{H}{2} - \frac{1}{\tau_1} \right) \sin(\varphi+\varphi') + \frac{\cos(\varphi+\varphi')}{\tau_1} \right] \nu$$

$$\theta_{\varphi+\frac{\pi}{2}} \beta' = - \left[-\frac{\cos(a-\varphi)}{\sin ag_1} + \frac{\cos \varphi}{\sin ag_2} - \frac{d\varphi'}{ds} \right] e' -$$

$$- \left[\frac{H}{2} \cos(\varphi-\varphi') + \left(\frac{H}{2} - \frac{1}{\tau_1} \right) \cos(\varphi+\varphi') - \frac{\sin(\varphi+\varphi')}{\tau_1} \right] \nu$$

$$\theta_{\varphi} \nu = - \left[\frac{H}{2} \cos(\varphi-\varphi') - \left(\frac{H}{2} - \frac{1}{\tau_1} \right) \cos(\varphi+\varphi') + \frac{\sin(\varphi+\varphi')}{\tau_1} \right] e' +$$

$$+ \left[\frac{H}{2} \sin(\varphi-\varphi') + \left(\frac{H}{2} - \frac{1}{\tau_1} \right) \sin(\varphi+\varphi') + \frac{\cos(\varphi+\varphi')}{\tau_1} \right] \beta'$$

$$\theta_{\varphi+\frac{\pi}{2}} \nu = - \left[-\frac{H}{2} \sin(\varphi-\varphi') + \left(\frac{H}{2} - \frac{1}{\tau_1} \right) \sin(\varphi+\varphi') + \frac{\cos(\varphi+\varphi')}{\tau_1} \right] e' +$$

$$+ \left[\frac{H}{2} \cos(\varphi-\varphi') + \left(\frac{H}{2} - \frac{1}{\tau_1} \right) \cos(\varphi+\varphi') - \frac{\sin(\varphi+\varphi')}{\tau_1} \right] \beta'.$$

Hasonló képleteket kapunk, ha a φ' -el megadott irányban differenciálunk.

Iránypárok a felületen.

A geometriai differenciálás felhasználásával involúciós iránypárokat, illetőleg vonalpárokat értelmezhetjük a felületen. Az e és e' érintői egységnyi vektor az e_1 iránnyal φ , illetőleg φ' szöget zárjon be.

1. Az e és e' merőlegességének feltétele

$$\cos(\varphi-\varphi') = 0.$$

2. A két irány *konjugált*, ha

$$\nu \cdot (\theta_\varphi e' + \theta_{\varphi'} e) = 0.$$

Ezen kapcsolat más alakban

$$\frac{H}{2} \cos(\varphi - \varphi') - \left(\frac{H}{2} - \frac{1}{\tau_1} \right) \cos(\varphi + \varphi') + \frac{\sin(\varphi + \varphi')}{r_1} = 0.$$

Az így meghatározott involúció kettős elemei az aszimptotikus irányok; az egymásnak megfelelő és merőleges irányok pedig a görbületi irányok.¹

3. A

$$\nu \cdot (\theta_\varphi \beta' + \theta_{\varphi'} \beta) = 0$$

feltételnek eleget tevő irányokat *asszociált irányoknak* nevezük.² A szögekkel kifejezve ezen feltételt

$$\left(\frac{H}{2} - \frac{1}{\tau_1} \right) \sin(\varphi + \varphi') + \frac{\cos(\varphi + \varphi')}{r_1} = 0.$$

Ugyanezen képletre jutnánk az $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau'}$, vagy az $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 0$ feltételekből.

Ennek az involúciós vonatkozásnak kettős elemei a görbületi irányok. Egymásra merőleges és összetartozó irányok pedig a torziós irányok.

4. Egymáshoz *adjungált* irányt határoz meg az e és e' , ha áll

$$\nu \cdot (\theta_\varphi e' + \theta_{\varphi' + \frac{\pi}{2}} \beta) = 0.$$

Ugyanez a feltétel más alakban

$$\left(\frac{H}{2} - \frac{1}{\tau_1} \right) \cos(\varphi + \varphi') - \frac{\sin(\varphi + \varphi')}{r_1} = 0.$$

¹ Ha az alapul választott e_1 görbületi vonal, vagyis $\frac{1}{r_1} = 0$, akkor a konjugáltság feltétele az előbbi képletből

$$H \sin \varphi \sin \varphi' + \frac{\cos(\varphi + \varphi')}{\tau_1} = 0$$

Encyklop. III, 3. p. 115.

² SUTÁK J.: A felület asszociált görbéi. Sz. István Akad. Ért. IX. (1924) p. 56.

Erre a képletre jutnánk az $\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\gamma'}$, vagy $\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'} = H$ feltételekből.

Az adjungáltság kettős irányai a torziós irányok; egymásra merőleges adjungált irányok pedig a görbületi irányok.

5. Végül a karakterisztikus vonalakra vonatkozó társgörbéket értelmezhetjük az

$$\frac{1}{\varepsilon\gamma'} = \frac{1}{\varepsilon'\gamma}$$

feltétellel. A szögekkel kifejezve

$$\left(\frac{H}{2} - 2\frac{K}{H}\right) \cos(\varphi - \varphi') - \left(\frac{H}{2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right) \cos(\varphi + \varphi') + \frac{1}{\gamma_1} \sin(\varphi + \varphi') = 0.$$

Ebben az involúcióban kettős irányok a karakterisztikus irányok, egymásra merőleges összetartozó irányok pedig a görbületi irányok.

Általánosítás.

Az említett vonalpárok, illetőleg iránypárok általánosíthatók.

1. Ha két irány között áll az

$$\left(\frac{1}{2} - n\right) H \cos(\varphi - \varphi') - \left(\frac{H}{2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right) \cos(\varphi + \varphi') + \frac{\sin(\varphi + \varphi')}{\gamma_1} = 0$$

kapcsolat, akkor kapjuk a konjugált ($n = 0$) és adjungált ($n = \frac{1}{2}$) iránypárok általánosítását. Ezen képlet helyett vehetjük

$$\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'} = H [2n \cos^2(\varphi - \varphi') + \sin^2(\varphi - \varphi')]$$

$$\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma'} = (1 - 2n) H \sin(\varphi - \varphi') \cos(\varphi - \varphi').$$

2. Ha két irány között áll

$$\frac{H^2 - 2nK}{2H} \cos(\varphi - \varphi') - \left(\frac{H}{2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right) \cos(\varphi + \varphi') + \frac{\sin(\varphi + \varphi')}{\gamma_1} = 0,$$

akkor a konjugált ($n=0$), a poláris irányokhoz társ ($n=1$) és a karakterisztikus irányokhoz társ ($n=2$) irányok általánosítását kapjuk. Helyette vehetjük még

$$\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau'} = H \sin^2(\varphi - \varphi') + \frac{2nK}{H} \cos^2(\varphi - \varphi')$$

$$\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma'} = \frac{H^2 - 2nK}{H} \sin(\varphi - \varphi') \cos(\varphi - \varphi').$$

3. Végül, ha két irány között áll

$$\frac{\sqrt{H^2 \cos^2 \varepsilon - 4K}}{2} \cos(\varphi - \varphi') - \left(\frac{H}{2} - \frac{1}{\tau_1} \right) \sin(\varphi + \varphi') - \frac{\cos(\varphi + \varphi')}{\tau_1} = 0$$

összefüggés, akkor az asszociált vonalak, illetőleg irányok általánosítását kapjuk, mert

$$\cos \varepsilon = \frac{2\sqrt{K}}{H}$$

esetben kapjuk az asszociált iránypárokat.

Ebben az esetben áll továbbá

$$\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau'} = \sqrt{H^2 \cos^2 \varepsilon - 4K} \sin(\varphi - \varphi') \cos(\varphi - \varphi')$$

$$\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma'} = \sqrt{H^2 \cos^2 \varepsilon - 4K} \cos^2(\varphi - \varphi').$$

Sárközy Pál.

ZUR THEORIE DER FLÄCHENKURVEN.

Der zweiparametrische Vektor $\mathbf{r}(u, v)$ definiert eine Fläche. Der aus einem Punkte $P(u, v)$ nach dem Nachbarpunkte $P_1(u+du, v+dv)$ führende Einheitsvektor ist

$$\mathbf{e} = \mathbf{r}_u \frac{du}{ds} + \mathbf{r}_v \frac{dv}{ds}.$$

Den Einheitsvektor der Flächennormale gibt

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}.$$

$\beta = e \times \nu$ heisst die geodetische Normale. Wenn $\frac{1}{\tau}$ die Normalkrümmung, $\frac{1}{g}$ die geodetische Krümmung und $\frac{1}{\gamma}$ die geodetische Torsion der Flächenkurve bedeutet, dann bestehen die Fundamentalformeln

$$\frac{de}{ds} = \frac{\nu}{\tau} + \frac{\beta}{g}$$

$$\frac{d\nu}{ds} = -\frac{e}{\tau} + \frac{\beta}{\gamma}$$

$$\frac{d\beta}{ds} = -\frac{e}{g} - \frac{\nu}{\gamma}$$

Zwischen zwei Flächenkurven mit den Tangentenvektoren e_1 und e_2 besteht die Relation

$$e_1 \cdot \frac{d\nu}{ds_2} = e_2 \cdot \frac{d\nu}{ds_1}$$

oder, wenn $(e_1, e_2) = \alpha$,

$$\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1} = \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \right) \operatorname{tg} \alpha.$$

Wenn eine dritte Flächenkurve e mit e_1 den Winkel φ bestimmt, dann folgen die Gleichungen

$$\frac{1}{\tau} = \frac{H}{2} - \left(\frac{H}{2} - \frac{1}{\tau_1} \right) \cos 2\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{\gamma_1}$$

$$\frac{1}{\gamma} = \left(\frac{H}{2} - \frac{1}{\tau_1} \right) \sin 2\varphi + \frac{\cos 2\varphi}{\gamma_1}$$

wo

$$H = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + \operatorname{ctg} \alpha \left(\frac{1}{\gamma_2} - \frac{1}{\gamma_1} \right)$$

die mittlere Krümmung der Fläche bedeutet.

Wenn K das Krümmungsmass ist, folgt ferner

$$\frac{1}{\tau^2} - \frac{H}{\tau} + K + \frac{1}{\gamma^2} = 0.$$

Bedeutet θ_φ die geometrische Differentiation in der Richtung e , dann ist für die wichtigsten Richtungspaare in der Tangentenebene das Folgende gültig.

e und e' sind *konjugierte* Richtungen, wenn

$$\nu \cdot (\theta_{\varphi} e' + \theta_{\varphi'} e) = 0$$

oder

$$\frac{H}{2} \cos (\varphi - \varphi') - \left(\frac{H}{2} - \frac{1}{\tau_1} \right) \cos (\varphi + \varphi') + \frac{\sin (\varphi + \varphi')}{\gamma_1} = 0.$$

e und e' sind zueinander *assoziiert*, wenn

$$\nu \cdot (\theta_{\varphi} \beta' + \theta_{\varphi'} \beta) = 0$$

oder

$$\left(\frac{H}{2} - \frac{1}{\tau_1} \right) \sin (\varphi + \varphi') + \frac{\cos (\varphi + \varphi')}{\gamma_1} = 0$$

besteht.

Bei *adjungierten* Richtungen ist

$$\nu \cdot (\theta_{\varphi} e' + \theta_{\varphi' + \frac{\pi}{2}} \beta) = 0$$

oder

$$\left(\frac{H}{2} - \frac{1}{\tau_1} \right) \cos (\varphi + \varphi') - \frac{\sin (\varphi + \varphi')}{\gamma_1} = 0.$$

Paul Sárközy.

ÚJ UTAK AZ ATOMMAG MEGISMERÉSÉRE.

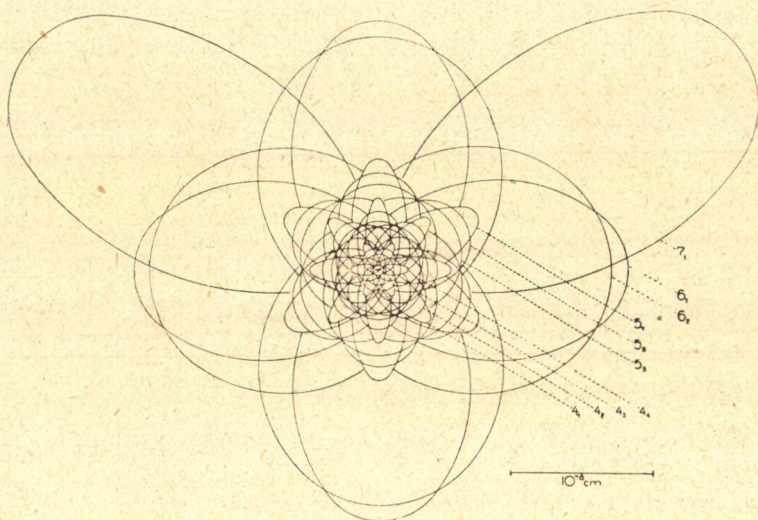
A XIX. század fizikusai és kémikusai számára az atom képezte bizonyos tekintetben a kutatás legvégső határát, ez volt a legkisebb anyagi építőkö, melyből a világmindenség felépül. Az atomok számának, nagyságának és mozgási állapotának meghatározását a fizikai kutatás legnagyobb dicsőségének tartották. A XIX. század számára volt fenntartva az atomok belső szerkezetének meghatározása; az első nagy lépést ebben az irányban RUTHERFORD és BOHR nevezetes elmélete jelenti. Ezen intuitív tehetségű tudósoknak köszönhető, hogy sikerült nemcsak egy plauzibilis képet alakítani a különböző atomfajták általános felépítéséről, hanem megfejteni legalább is részben azokat a lángbetűket, amelyekkel belső szerkezetének legrejtettebb titkai vannak megírva: az optikai és Röntgenspektrumok csodálatos törvényszerűségei.

De a természet minden megoldott rejtélye mögött egy újabb rejtély nyilvánul meg és az atomvilág látszólag majdnem megoldott problémája mögött már felcsillan egy újabb probléma: az *atommagok subatomí világa*. Csak tapogatózó kísérleteket végeztek, hogy behatolhassanak ebbe az új világba és így igen ritkák és hiányosak a roppant nagy munkával elért ismereteink. De annyi mindenesetre bizonyos, hogy ezekben még az atomokhoz viszonyítva is parányi kis részekben a természet hatalmas erői szenderegnek, az anyag szerkezetének végső rejtelmei itt várják feltalálójukat. Midőn meg akarjuk ismerni, hogy mi tartja bensőleg össze ezt a világot, úgy a fizikusok és kémikusok álláspontján állva az atommaghoz kell kérdéseket

intéznünk és kiküzdenünk válaszukat. Az utolsó évek ideirányuló kísérleteiről szándékozom röviden beszámolni, melyeket Cambridge-ben és itt Bécsben, a világ ezen két egyetlen kutató-intézetében végeztek, hogy megkíséreljék az atommagok szétbontását.

RUTHERFORD korszakalkotó kutatásainak köszönhető, hogy immár 15 éve tudjuk, hogy az atomok felépítése körülbelül a naprendszerhez hasonló és az atomok nem egy tömör, teljesen elasztikus őanyag által kitöltött «billiárdgolyók kicsinyben», mint ahogy azt az atomfizikusok még 70—80 év előtt gondolták. Mintegy az atom apró részecskéiből, a negatív elektromos-ságot hordozó elektronokból kiinduló elektromos erők azok, melyek bennünk az atom külső burkolatának hamis látszatát keltik. Ezek az elektronok bolygószerűen keringenek az atomközpont körül és amennyiben valamilyen változás áll elő normális mozgásukban, úgy az atomot átalakítják elektromágneses hullámok leadóállomásává, vagyis fény, vagy Röntgenhullámok kisugárzását idézik elő. Ezen elektronburkolat közepontjában van az atommag, ez pozitív elektromos töltésű és képviseli jóformán az egész atom tehetetlen tömegét. A mag pozitív töltésegységeinek száma egyezik a körülötte keringő bolygóelektronok számával, úgy hogy az atom kifelé semleges hatású. Tehát a mag töltésegységeinek a száma a hidrogénnél egy, a heliumnál kettő, a lithiumnál három stb. egész az uránig, ahol a magtöltések és a körülötte keringő elektronok száma 92; ez az elem a periodikus rendszer összes elemei közül az, amelynél a magtöltések száma a legnagyobb. Ezen értekezés határain kívül áll ismertetni, hogy miként lehet SOMMERFELD, BOHR és iskoláiknak zseniális vizsgálatai alapján a különböző atombéjakon lévő elektronok normális pályáit meghatározni. Csak egy példát akarok bemutatni a rádiumatom elektronpályáiról, amint azok az 1. ábrán láthatók. A hosszegység, amint az ábrán alul látható 10^{-8} -án rendű, de még ennél a nagyításnál sem lehetne az elektronburkolat közepén lévő magot látni, mert annak átmérője a hosszegység-

nél 1000-szer kisebb. Ahhoz, hogy egy elemátalakulást létesíthessünk, ezeket a parányi kis részecskéket, az atommagokat erőszakkal kell széthasítani, *szét kell őket roncsolni*. Az ezen célt szolgáló helyes módszert RUTHERFORDnak 1919-ben végzett alapvető vizsgálatai mutatják. Midőn egy széteső rádióaktív atomból kiinduló igen gyors, kb. $20,000 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$ sebességű α részecske ütközik az atomba, úgy ezen löveggel szemben az



1. ábra.

atommag nem tudja stabilitását megőrizni, hanem részecskék szakadnak belőle le és egy új atom keletkezik. Ezek a leszakadt töredékek H magoknak bizonyultak az eddigi atomrombolási kísérletek mindegyikénél, tehát egy « H részecske» ez a hihetetlen sebességgel kilövelt rész. Ezzel kimutatást nyert, hogy az összes elemek közül a legkönnyebb a hidrogén, a materia végső építőköve, amivel a százados PROUT-féle hipotézis fényesen feltámadott.

Még RUTHERFORD előtt a zseniális skót kémikus Sir Walter RAMSAY felismerte a gyors α részecskékben azt a támadó eszéköt, mellyel a stabilis atom szétroncsolása megkísérélhető.

Eredményei eleinte sokat ígérő kísérleteknek mutatkoztak, miután kémiai, vagy spektroszkópikus úton kimutatta erős emanációt tartalmazó oldatokban új, kezdettől fogva ott nem lévő alapanyagok keletkezését, illetve átalakulását. Azonban a később szigorú ellenőrzés mellett végzett vizsgálatok negatív eredményel végződtek. RAMSAY átváltozási vizsgálatai helyes gondolatot, tartalmaznak, de kudarcot vallottak a kivitelnél, főleg a túlkevésé érzékeny észlelési módszerek miatt. Az anyagátalakulás csak igen kis mértékben megy végbe mintegy «atomból atomba» és ehhez mérten igen érzékeny mérőberendezéseket igényel. Az atommagok rendkívül kis méretei folytán igen sok α lövedéket kell alkalmaznunk, míg csak egy ilyen végzetes, az atomot centrálisan érő ütközés előáll. A centrális ütközés valószínűsége ke-
reken 1 : milliárdhoz, a legtöbb csak egyszerűen átlótt atomban az átrepülő α részecske legfeljebb a burkolatból egy-egy elektront ragad magával. Ez a már magukban is ritka α részecskékkel való hallatlan pazarlás okozza, hogy olyan hihetetlenül ritka jelenség az atomroncsolás, amit csak igen erősen koncentrált rádióaktív-preparátumok alkalmazásával valósíthatunk meg. E közben többnyire scintillációk, vagyis apró fényfelvillanások észlelhetők, melyeket az α részecskének, illetve az atomtöredéknek a cinkszulfiddal bevont üvegernyőbe való ütközése idéz elő. Ez a kísérleti berendezés teljes sötétséget, kipihent szemeket és igen fényerős kis nagyítású mikroszkópot igényel (főleg ha az atomtöredék fénysegény scintillációit akarjuk számolni). Az észlelést bizonyos mellékjelenségek nehezítik meg, így pl. a rádióaktív-preparátumtól származó áthatoló sugárzás, mely az ernyő hátterének diffúz világítását eredményezi és ezenkívül még a módszer nem mentes szubjektív hibáktól sem.

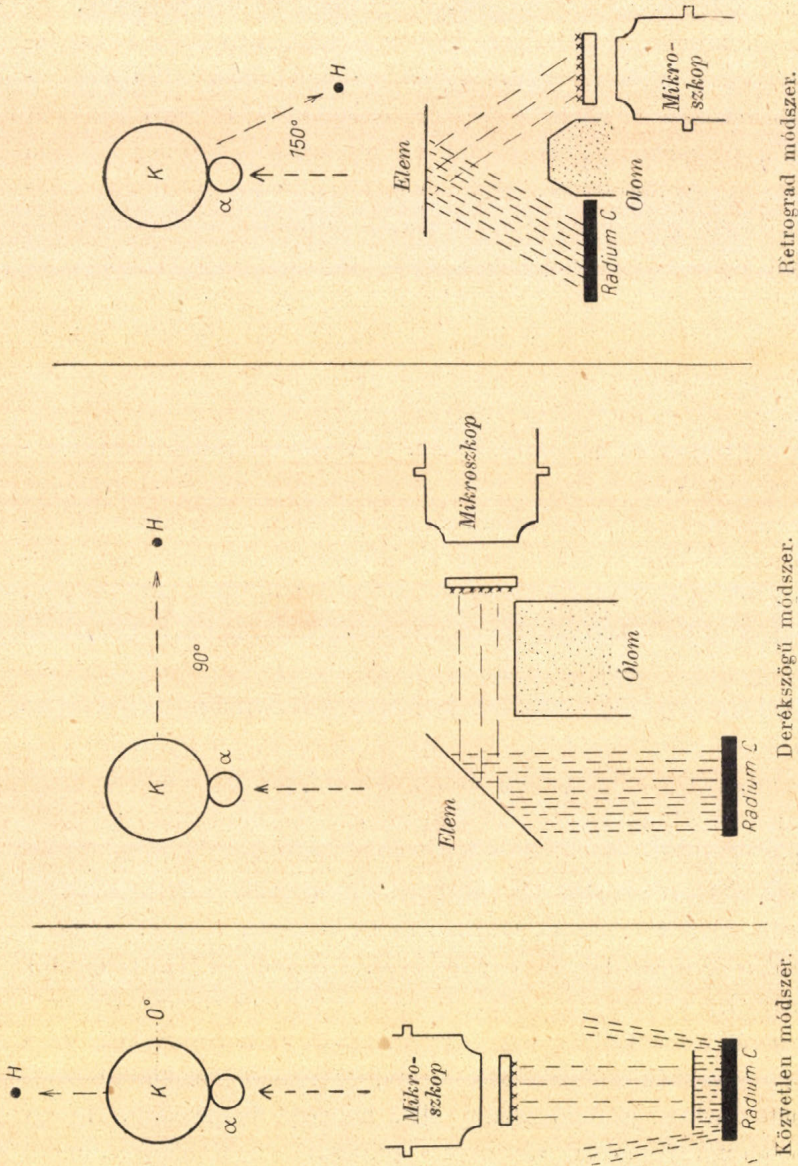
Ezzel a scintillációs módszerrel végezték az atomroncsolási kísérletek legnagyobb részét úgy Cambridge-ben, mint 1922 óta KIRSCH és PETERSSON és munkatársaik Bécsben. Eddig egészen biztosra 25 elemnél észlelték ilyen H részecske leválását; a bécsi eredmények a cambridge-iektől eltérnek egyrészt a szétroncsolt elemek nagyobb számával, másrészt a nyert

atomröncsök nagyobb kiaknázási arányával. Így Bécsben E. KARA-MICHAILOVA a lithiumot, H. PETTERSSON a szénét és G. KIRSCH az oxigént ronszolhatónak találták, mely elemeket Cambridge-ben eredménytelenül vizsgáltak. E. A. W. SCHMIDT alapos vizsgálatnak vetette alá a RUTHERFORD és CHADWICK által szétromcsolt aluminiumot és e közben azt találta, hogy a levált H részecskék száma több, mint tizszerese a Cambridge-ben nyert értéknek. Közben arra a tapasztalatra is jutott, hogy sokkal kisebb sebességű α részecskék is képesek rombolni, mint ahogy azt Cambridge-ben gondolták.

Ennek az volt a fontos következménye, hogy a különböző atomfajták szétromcsolására mint az α sugárzás forrása használható a lassúbb α részecskéket emittáló polonium is. (Ez az anyag mentes a fentemlitett zavaró sugárzástól.)

A bécsi és cambridge-i eredmények közt felmerülő említett eltérések nyilván az alkalmazott módszerek különbözőségére vezethetők vissza. A bécsi kutatók igyekeztek észlelhetővé tenni a leglassúbb atomtöredékeket, miután tapasztalataik szerint ezek a leggyakoribbak, ezzel szemben a cambridge-i iskola létezésüket egyáltalában tagadja. Ezen szempontoktól vezéreltetve módszerüket úgy módosították, hogy vizsgálhatók legyenek nemcsak az α lövedékek irányában haladó, hanem az erre merőlegesen, sőt esetleg visszafelé eltávozó atomröncsök is, amely irányokban a primær sugárzás zavaró hatása sokkal jelentéktelenebb (a 2. ábra lent a mérőberendezés vázlatát adja, fent a ronsoló magütközés lefolyását). A kísérletekhez használt optikai segédeszközök, a scintillációs mikroszkópok sokkal fényerősebbek Bécsben, mint azok, amelyeket röviddel ezelőttig Cambridge-ben használtak. A fennálló eltérésektől függetlenül az utolsó évek munkája úgy Bécsben, mint Cambridge-ben igazolták az először Bécsben hirdetett következtetést, mely szerint a rombolhatóság a materia sokkal általánosabb tulajdonsága, mint ahogy azt a bécsi vizsgálatok megkezdése előtt gondolták.

A scintillációs módszerrel nyert eredmények megerősítésére



Retrograd módszer.

Derékszögű módszer.

2. ábra.

Közvetlen módszer.

már régebb idő óta végeznek Bécsben kísérleteket, hogy az atomrombolást valamilyen kevésbé szubjektív módszerrel tegyék észlelhetővé. Így M. BLAU fotografáló filmen, illetve lemezen felvette egyetlen H részecske röppályáját jelző redukált brómezüstszemcsék sorozatát és így igazolta többek közt a szén rombolhatóságát. Egy másik bécsi tudós R. HOLUBEK átalakította a korpuzskuláris sugárzás láthatóvá tételére alkalmazott híres WILSON-módszert, úgy hogy nagyobb számban az atomroncsok is láthatóvá váltak. E célból egy kis hengeres kamra (melynek üvegfedele és mozgatható alja volt) középpontjában egy erősen koncentrált polonium preparátumból kiinduló α sugárnyalábot irányított a kamrában levő, a vizsgálandó anyagból készült ernyőre. A vízgőzzel túltelített levegőben keletkező ködcsik jelzi az α sugarak irányával mintegy 90° -os szöget bezáró atomroncsok pályáját. Itt is, mint általában a WILSON kísérleteknél, a túltelítettség a kamra levegőjének hirtelen kiterjesztésével érhető el és pedig azáltal, hogy a kamra alját elektromotor által szabályos ütemben fel és le mozgatjuk. Minden expanziónál az üvegfedőn átnéző észlelő számára egy vagy több a középpontból kiinduló sugármenti ködcsik válik láthatóvá. Így nyerte HOLUBEK a beryllium-, gyémánt- (vagyis legtisztább szén), aluminium-, oxigén- és vasból kiinduló atomroncsok pályáját, sőt ezekről fotografiai felvételeket készített. Az α sugarakkal bombardírozott paraffinból kirepülő H részecskék (úgynevezett «természetes» H részecskék) hallhatóvá tételére G. ORTNER és G. STETTER ugyancsak bécsi fizikusok dolgoztak ki egy eljárást. Egy először H. GEIGERTől, majd H. GREINACHER által tökéletesített elektromos számolókamrát alkalmazták, úgy hogy nemcsak az α részecskék, de a H részecskék is észlelhető, tiszta, egymástól megkülönböztethető kattogásokat idéznek elő a hangosanbeszélőben. Ha egy poloniumnyomokkal «fertőzött» csipeszt közelítünk úgy, amint az α részek a kamrába hatolnak, egy erős kattogás hallható, egy erősebb preparátum egész pergőtűzet idéz elő; a paraffinból kiinduló H részek gyenge, de tisztán hallható kattogást

létesítenek. Valószínű, hogy az atomroncsolási vizsgálatokban ez az újabb, a scintillációs módszernél sokkal kevésbé fárasztó eljárás jó szolgálatokat fog tenni.

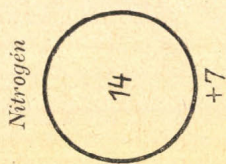
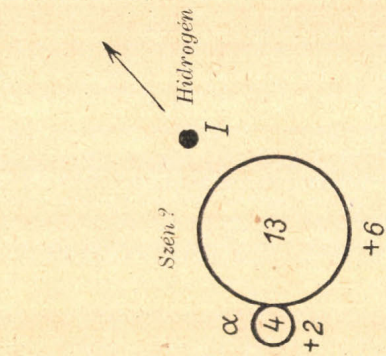
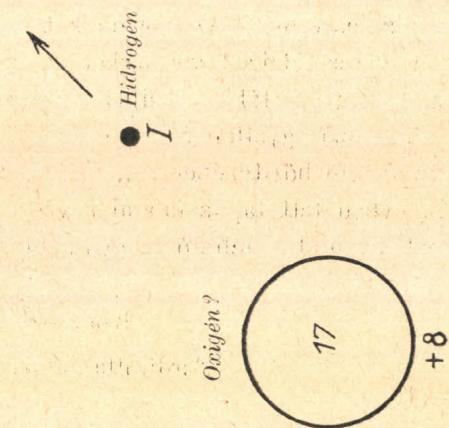
Az atomrombolás folytán kirepülő töredék természetének megállapítására már RUTHERFORD is «röptükben lemérte» őket, olyképpen, hogy egy erős mágneses tér által létesített eltérítésükből következtetett töltésük és tömegük viszonyára. Feltevését, vagyis hogy itt hidrogénrészecskékről van szó, kísérletei igazolták, habár eredményei a számottevő mérési hibák folytán bizonyos fokig bizonytalanok. G. STETTNER az elektromos és mágneses eltérítés összekapcsolásával a tömegspektroszkóphoz hasonló sokkal pontosabb méréseivel az aluminium atomtöredékében a töltés és a tömeg hányadosát néhány percentre azonosnak találta a hidrogén csősugarakra nyert értékkel. Néhány héttel az előadás után sikerült G. STETTNERnek a szén, bór, vas atomroncsainak identitását a H részekkel tömegspektroszkópiai úton kimutatni. G. KARA-MICHAILOVÁNAK már előzőleg sikerült a kvarc (silicium) atomroncsainak scintillációit fotometrálnva azoknak azonosságát a valódi H részecskékkal valószínűvé tenni.

A H részek és így az atomroncsok tulajdonságainak tanulmányozására a bécsi intézetben végzett igen sok és fontos vizsgálat közül csak E. RONA nagyon gondos méréseit említem a különböző anyagoknak a H részecskékkal szemben tanúsított fékezőképességükre vonatkozólag és az ugyancsak ezen kutatónőnek M. BLAUVAL végzett kísérleteit a paraffin H részeinek és az aluminium atomroncsainak ionizációs képességének meghatározására.

Az eddigiekben csak atomroncsolás egyik termékéről, a kirepülő H részecsről szöveltünk, ezek nagy kinetikai energiájuk folytán mindenesetre nagy nehézségek árán mégis észlelhetők. A szétroncsolt atommag sorsáról, vagy mint St. MEYER nevezi, «a nyomorék atomról» közvetlen észlelés alig található, mint-hogy sokkal kisebb mozgásmennyiségük következtében nehezebben figyelhetők meg. Mindenesetre a bécsi kutatók tapaszt-

talatai és számításai amellet szólnak, hogy a maradék mag felveszi az α lövedéket és így egy újabb nagyobb tömegű és magasabb magtöltésű atommag keletkezik, mint amilyen az eredeti mag a végzetes ütközés előtt volt. Így pl. nitrogénmagból $+ \alpha$ részből — H részből keletkezik egy újabb képződmény, melynek töltése 8 és tömege 17 egység, vagyis egy ezidáig ismeretlen oxigénizotop keletkezik. A BLACKETT által a szétroncsolt nitrogénmagról felvett WILSON-fotográfiák ezeket a következtetéseket kísérletileg igazoltak. Úgy látszik tehát, hogy lehetséges úgy az atommag leépítése hidrogén leválás folytán, mint α részecske felvétele folytán előálló felépítése. A folyamatban levő kísérletek lesznek hivatva eldönteni, hogy vajjon ezek a folyamatok nehezebb atomfajtáknál is analóg módon játszódna-e le és hogy spektroszkópiai módszerekkel a keletkezett termékek kimutathatók-e.

Az eddigi inkább kvalitatív vizsgálatok nem alkalmasak arra, hogy következtetéseket vonjunk az atommagok méreteire vonatkozólag. A cambridge-i mérések az alumínium magjának fél átmérőjét $\frac{1}{\text{billió}}$ cm-nél kisebbnek határozták meg, ezzel szemben SCHMIDT több mint kétszer akkora értéket talált, sőt még ezt az értéket is kimondottan alsó határnak gondolja és a további pontosabb mérések szerinte nagyobb értéket fognak szorgáltatni. Mindenesetre az alumíniumatomot az előadóterem nagyságára nagyítva kellene elképzelnünk, hogy magja gombostűfej nagyságú legyen. Habár ezek a képződmények ilyen párányi méretűek, mégis, úgy a cambridge-i, mint bécsi szétroncsolási kísérletek arra utalnak, hogy a természet leghatalmasabb erői vesznek részt ezen folyamatokban. Egy az alumíniummagba centrálisan ütköző α részecske az ütközés előtt közvetlenül több kg nagyságú erőknek van alávetve. Hogy ha az alumínium szétroncsolásánál szabaddá váló energiamennyiségek egyszerre volnának felszabadíthatók az elem nagyobb mennyiségére, úgy ez az ártatlan fém, egy sokkal hathatósabb robbantóanyagot jelentene, mint a legnagyobb szétvetőképességű



3. ábra.

exploziós anyag. Ezidőszerint még nagyon kétes, hogy valaha is eljutnak-e az emberek odáig, hogy ezeket az óriási energia-készleteket hasznos vagy kártékony céljaikra felhasználhassák. A cél elérésére kínálkozó egyetlen út az atomroncsolás lefolyására vonatkozó tudásunk bővítésében áll, habár az emberiségnek az utolsó 13 évben tett tapasztalatai kevésbé teszik kívánatosá, hogy ezt az utat a lehető leggyorsabb lépésben tegyék meg.

Írta: *Hans Pettersson.*

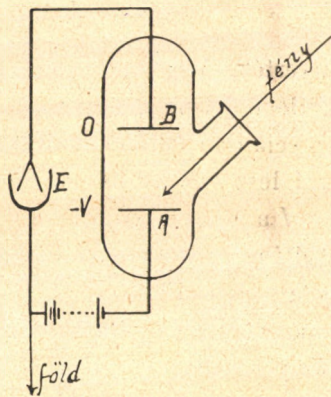
Fordította: *Forró Magdolna.*

A FÉNYELEKTROMOS VIZSGÁLATOK EREDMÉNYEI.

Szegedi magántanári előadás.

1. Fényelektromosságon értjük mindazon jelenségeket, melyeknél elektromágneses hullámzások — tehát ultravörös, látható, ultraviola és Röntgenfény — hatására a testek belsejében, vagy felületén elektromosság válik szabaddá. A jelenségek két csoportra oszlanak, a szerint, hogy a testek felületéből kilépő elektronokat, vagy pedig a testek belsejében mozgó elektromosságot észlelünk. E szerint beszélünk külső és belső fényelektromos hatásról.

A külső fényelektromos hatás előállítására a következő: Az A fémfelülettel, (1. ábra) melynek negatív töltése van, szembenáll B fémfelület, mely az E elektrométerrel áll összeköttetésben. Ha az A lapra fény esik, az elektrométer negatív töltést

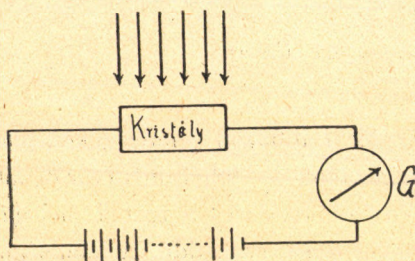


1. ábra.

mutat. Ha az A lapnak pozitív töltése van, az elektrométer nem mutat kitérést. A jelenség egyértelmű magyarázata az, hogy az A lapból a fény hatására elektronok válnak ki, azaz negatív elektromosság áramlik ki. A külső burok arra szolgál, hogy a jelenséget légüres térben állítsuk elő, bár levegőben is előállítható. Az A lap lehet fém, szigetelő, szilárd vagy folyékony test.

A belső fényelektromos jelenséget kristályok mutatják. K fényelektromosan érzékeny kristály, (2. ábra) melynek két szembenfekvő oldalán elektródok vannak, melyek egy telepen és galvanométeren át záródnak. Ha a kristályra fény esik, a galvanométer kitérését mutat.

A jelenséget gázokban is kutatták és LENARD észlelte, hogy ultraviola fény hatására a gázok ionizálódnak, tehát a fény hatására a gázok molekulái elektronokat adnak le.



2. ábra.

2. A külső fényelektromos jelenséget felfedezőjéről HALLWACHS-effektusnak is nevezik. Bár a jelenséget szigetelők is mutatják, a legtöbb vizsgálatot fémeken végezték és a fontos eredményeket kizárólag fémeken

nyerték. Meg kell előre jegyezni, hogy minden a fémekben fellépő jelenséget normális hatásnak nevezzük, szemben a csak speciálisan fellépő szelektív hatással. Itt most a normális hatásról lesz szó. A jelenségben szereplő quantitások a következők:

I a fényelektromos áram erőssége = ne , hol e egy elektron töltése és n az egy másodperc alatt leadott elektronok száma; ν a potenciálkülönbség a kondenzátor lapok között; E a fénysugár erőssége; λ a fény hullámhossza, mindig monochromatikus fényt alkalmazva; u az elektron kezdő sebessége. Szükség volna még egy számra, mely az A fém anyagát jellemezné, azonban amint később látni fogjuk, ez experimentális okokból még nincsen megoldva.

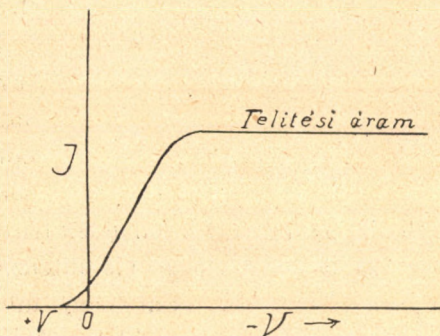
Az itt szereplő mennyiségek mérési módja a következő: Az I fényelektromos áramot mérjük galvanométerrel vagy elektrométerrel Ampèrekben; a ν potenciálkülönbséget a szokásos potenciométer berendezéssel Voltokban; az E fényenergiát Thermo-elemmel és galvanométerrel kalóriákban; a λ hullámhosszat az ismert spektrométeres módszerrel; az u kezdősebességet az

úgynevezett ellenmezők módszerével mérjük, melyet később részletezni fogok.

3. A normális fényelektromos hatáson végzett mérések eredményei az itt felsorolt öt mennyiség közötti kvantitatív összefüggések megállapításából áll.

a) Az összefüggést a fényelektromos áram és potenciálkülönbség között mutatja a 3. ábra.

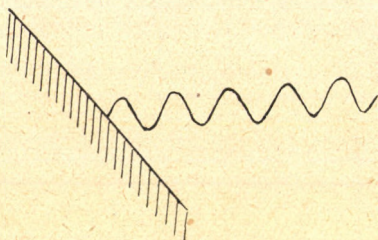
Mint látjuk, a fényelektromos áram kezdetben a térerősséggel nő, míg aztán elér egy állandó értéket és azután független a feszültségtől. Az áramnak ezt az értékét telítési áramnak nevezzük és úgy értelmezzük, hogy ekkor a fény által kiváltott összes elektronok elérik a B lapot. Miután az összes elektronok érték a B lapot, a feszültség további növelése nem változtathat az áram erősségén. Ebből a kísérlethől kiolvashatjuk azt is, hogy az elektronok nem merőlegesen lépnek ki a felületből — mint például a katódsugár elektronjai. A $V = 0$ pontban is van már áramunk, tehát némely elektronok külső tér hatása nélkül is elérik a B lapot, sőt miután a V pozitív értéke mellett is van még áramunk, az azt bizonyítja, hogy vannak elektronok, melyek oly nagy kezdeti sebességgel rendelkeznek, hogy ellentétes irányú mezőben, azaz egy gátló hatás dacára is elérik a B lapot. Összefoglalva azt mondhatjuk, hogy az elektronok mindenféle irányú, és pedig különféle nagyságú sebességgel lépnek ki a felületből.



3. ábra.

b) A fény elektromos áram erőssége és fény erőssége között a következő igen fontos összefüggés van. Hogy az összes kiváltott elektronokat felfogjuk, a telítési árammal kell dolgoznunk, amit elég nagy $-V$ alkalmazásával elérünk, jó vákuum mellett

már -2 Voltnál. Változtatva most a beeső fény erősségét, azt találjuk, hogy a fényelektromos áramok erősségei szigorúan arányosak a fényerősségekkel. Ez az egyszerű törvény sok vizsgálat tárgyát képezte, részint elméleti, részint gyakorlati jelentősége miatt. Az elméleti szempont, a fényelektromos elektron kiváltásának mechanizmusát illeti. A legegyszerűbb kép az volt, hogy az atomban rezgő elektron a megfelelő rezgésszámú



4. ábra.

fényhullámra rezonál, így rezgési amplitudója növekszik, míg végre az atomból kiválik (4. ábra).

Ha helyes ez a kép, úgy következik belőle, hogy kis intenzitású fény esetén a kiváltásra szükséges energia felhalmozása sokkal lassabban

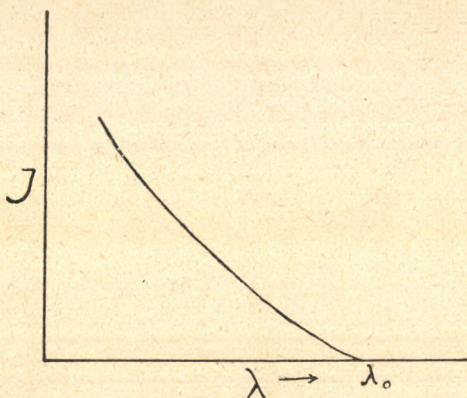
történik, mint nagy intenzitású fény esetén. A kiváltott elektronok száma tehát eléggé kis intenzitású fény esetén szükségképpen kisebb lesz, mint nagy intenzitású fény esetén érvényes arányosságnak megfelelően. A kísérletek azonban a szigorú arányosságot mutatták, ami tehát azt mondja, hogy az elektron nem rezonancia-folyamatban veszi fel a kilépéshez szükséges energiát. A quantumszerű magyarázata a jelenségnek, mely szerint az elektron kiváltása egyetlen aktusban történik, összhangban van a tapasztalattal a nélkül, hogy a kiváltási aktust részleteiben megmagyarázná. A rezonancia-felfogás szerint a kiváltott elektronok kezdő sebességének is függenie kellene a fény intenzitásától. Amint mindjárt látni fogjuk, a tapasztalat ezt sem igazolja.

A fényelektromos áram és kiváltó fényerősség közti szigorú arányosságnak a gyakorlati jelentősége abban van, hogy éppen az arányosság alapján használható a jelenség fénymérési célokra.

c) A megadott öt mennyiség között igen fontos kérdés a fényelektromos érzékenységek a szinképből való eloszlása. Az

érzékenység alatt érthetjük a beeső fény energiaegysége által kiváltott fényelektromos áramot. Keressük tehát a szinképben különböző hullámhosszak mellett a beeső fény energiaegységére eső áramot. szigorúban az elnyelt fény energiaegységére eső áramot.

Az eredményt mutatja az 5. ábra. Látjuk, hogy az érzékenységnek van egy λ_0 maximális határa. A λ_0 -nál hosszabb hullámok már nem hoznak létre hatást. A rövidebb hullámok felé pedig a hatás nő. Ez a törvényszerűség érvényes az alkáli-



5. ábra.

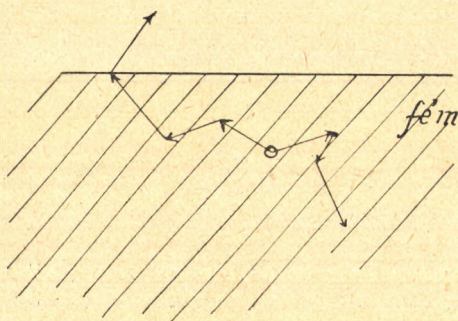
fémek kivételével az összes fémekre, a szinkép minden részében és ezt a hatást nevezzük normális fényelektromos hatásnak. E pontja a jelenségeknek igen sok vizsgálat tárgya volt, mert a modern atomelmélet megalkotása előtt itt látszott egy mód arra, hogy felvilágosítást nyerjünk az atom belsejében az elektronok rezgési viszonyairól. A vizsgálati eredmények ezt a várákozást nem igazolták. Amint az 1. táblázat mutatja:

1. táblázat.

| Fém | Alkali fémek | Ca | Zu | Th | Pb | Sn | Cd | Bi | Hg |
|---------------------------------|----------------------|------------|-----|-----|------|------|-----|------|------|
| Az érzékenység maximális határa | sárga bis ultravörös | 600 $m\mu$ | 380 | 370 | >365 | >365 | 320 | >313 | >250 |

a fémek érzékenysége az alkálifémek kivételével az ultraviolában van.

Az itt megadott határok azonban nem mondanak nagyon sokat, mert az 5. ábra is inkább kvalitatív jellegű. A fényelektromos hatás mechanizmusa ugyanis komplikáltabb, mint az első pillanatra látszik. A fény ugyanis meglehetősen mélyen behatol a fémfelületbe és így nemcsak a felületen vált ki elektronokat, hanem abban az egész rétegben, amelyben az elnyelés történik. Mi ellenben csak azon elektronokat észleljük, amelyek a fémből kilépnek és nem mindazokat, amelyek a fényre reagáltak. Viszont a fény által kiváltott elektronok minden irányú kezdő sebességgel bírnak, a szomszédos molekulákon ütközéseket, irány- és sebességváltozásokat szenvednek.



6. ábra.

Ennek következtében aztán igen sok elektron nem lép ki a felületből (6. ábra).

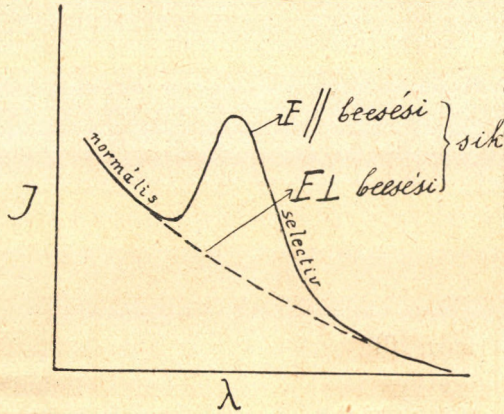
(d) Közelfekvő a gondolat, hogy azt kérdezzük, hogy mi módon befolyásolja a jelenséget az, ha polárizott fényt alkalmazunk és annak elektromos vektorát a felületre egyszer merőlegesen, egyszer azzal párhuzamosan állítjuk be. A vizsgálatok az alkáli- és alkáliföldfémeken jártak eredménnyel. Fennebb már említettem, hogy a fényelektromos érzékenység szinképbeli eloszlására nézve az alkálifémek kivételt képeznek az általános törvényszerűség alul. Ez a kivétel abban áll, hogy az alkálifémeknek az 5. ábrában megadott normális effektusára még szuperponálódik egy bizonyos szinképrészben egy szelektív hatás, melynek az a tulajdonsága van, hogy különben egyenlő beesési szög mellett függ a beeső fénysugár polárizációs viszonyától.

A fényelektromos jelenségeknek ezt az esetét, ahol a beeső fény polárizációs viszonya lényeges befolyást gyakorol a kiváltott elektronok számára, szemben a fent 5. ábrában ismertetett

A fényelektromos jelenségeknek ezt az esetét, ahol a beeső fény polárizációs viszonya lényeges befolyást gyakorol a kiváltott elektronok számára, szemben a fent 5. ábrában ismertetett

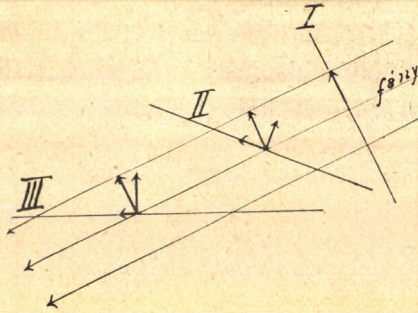
jelenséggel, szelektív fényelektromos hatásnak nevezzük. A jelenséget a 7. ábra tünteti fel. A normális hatásra λ_s -nél éles maximummal egy hatás adódik, amely csak abban az esetben lép fel, ha a polározott fénysugár elektromos vektora merőleges a felületre.

A szelektív hatás előállítása legegyszerűbb $KaNa$ ötvözetben, mely rendes szobahőmérsékletnél cseppfolyós és így tökéletes tükörfelületet ad. A fentiekből következik még egy dolog, ne-



7. ábra.

vezetesen az, hogy a hatás függ a beesési szögtől is, ami a normális hatásra nem áll. Ha egy tökéletes tükörfelületre merőlegesen esik be polározott fény, az elektromos vektor párhuzamos a felülettel és így csak a rendes hatás érvényesül. A 8. ábrában II. felület esetén az elektromos vektornak van egy a felületre merőleges komponense. A III. felület esetén a felületre merőleges komponens még nagyobb és így a hatás is nagyobb.



8. ábra.

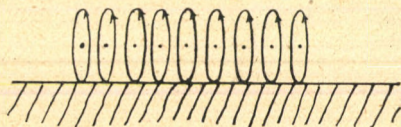
Szilárd Ka , Na , Li , Rb , Cs felületek esetén elég közönséges fényt használunk, mert ezeknél a felület számtalan mindenféle irányú kristályfelületből áll. Ilyen felületeken a fényérzékenység eloszlása teljesen megfelel a 7. ábra görbéjének, természetesen minden fémre más és más maximummal. Az alkálifémekre karakterisztikus maximumokat a 2. táblázat mutatja.

2. táblázat.

| | $\lambda_s =$ rezonancia- hullámhossz | $r =$ atomradius | $\frac{\lambda_s}{r} = \text{const.}$ |
|----------------|---|---------------------------------|---------------------------------------|
| Rubidium | $\sim 480 \text{ m}\mu$ | $2.55 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$ | 1.88 |
| Kalium | 435 " | 2.37 " | 1.83 |
| Natrium | 340 " | 1.90 " | 1.79 |
| Lithium | 280 " | 2.57 " | 1.79 |

A táblázat második oszlopában vannak a karakterisztikus maximumok, melyeket rezonanciahullámhossznak is neveznek. A harmadik oszlopban az atomradiusok vannak feltüntetve, melyekkel, mint a negyedik oszlop mutatja, arányosak a rezonanciahullámok. Ezt az összefüggést úgy lehet értelmezni, hogy a fényelektromos hatás elektronja az atom felületén foglal helyet, egyezésben az atom Bohr-féle elméletével, amely szerint szintén az alkálifémek atomjainak legkülső rétegén egy elektron foglal helyet.

A szelektív fényelektromos hatásnak van még egy érdekessége. A hatást igen sokszorosán lehet fokozni, ha az alkálifém felületét bizonyos kezelésnek vetjük alá. Ez abban áll, hogy az alkálifémet hidrogén atmoszférában rövid ideig pamacsiskülés



9. ábra.

hatásának tesszük ki, oly módon, hogy az alkáli felület katód legyen. A kezelés alatt a fémfelület elveszti fémes fényét, lilászürke réteggel vonódik be, ami kémiailag valószínűleg egy hydrürből áll. E felületnek az

érzékenysége a tiszta fémét többszázszorosán felülmúlja. POHL és GUDDENNEK a nézete az, hogy e felületben a fém igen finom szuszpenziót alkot és így a kolloidszerű rétegben a legkülső elektronok rezgési síkjai merőlegesek a felületre (9. ábra) és egyfelől ez hozza létre azt, hogy a felületre merőleges elektromos

vektor hatása nagy, másfelől pedig azt, hogy e felületből sokkal több elektron léphet ki, mint a szilárd fémfelületből.

A szelektív fényelektromos hatásnak nagy jelentősége van a gyakorlatra. Ugyanis ennek segélyével sikerült oly érzékeny cellákat készíteni, melyek a gyakorlatban a legnagyobb követelményeknek is megfelelnek.

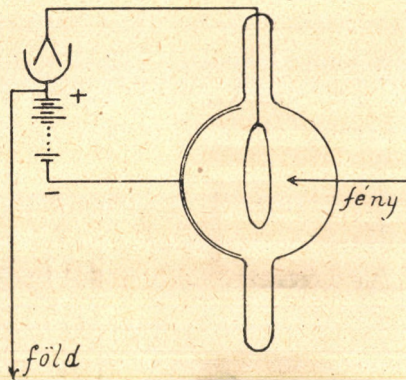
A fotométeres célokra használt fotocellák alakját a 10. ábra tünteti fel. Az érzékeny felület rendszeren Ka vagy Na , mely két fém érzékenysége a vörösből a legszélső ultraviolaig terjed és az érzékenység fokáról fogalmat ad az, ha megemlítjük, hogy a Ka cellák érzékenysége a színképnek kék részében megegyezik a sötétben kipihent emberi szem érzékenységével.

e) Hátra van még, hogy a kezdetben felsorolt öt tényező közül a fényelektromos elektronok kezdő sebességéről beszéljek. Említettem már a fényelektromos

áram és feszültség közti összefüggés tárgyalásánál, hogy az elektronok bizonyos kezdeti mozgási energiával rendelkeznek. Igen fontos volt és következményeiben nagy eredményekkel járt vizsgálni, hogy mitől függ az elektronok kezdő sebessége. A kérdést elméleti megfontolások után EINSTEIN írta le a róla elnevezett törvénnyel, mely szerint a fényelektromos elektronok mozgási energiája a felületből való kilépéskor

$$\frac{mu^2}{2} = h\nu - p,$$

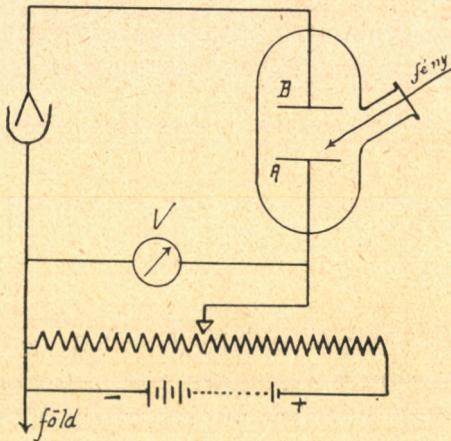
hol m az elektron tömege, u kezdősebessége, $h\nu$ az elemi fénycvantum, ν a használt fény rezgésszáma és p egy munkamenynyiség, melyet az elektronnak teljesíteni kellett a végből, hogy



10. ábra.

a felületről kilépjen. A törvény másszóval azt mondja, hogy az elektron mozgási energiáját a fényből veszi. A p munkát a két AB lap között uralkodó kontaktpotenciál különbséggel mérjük.

A ν mérése igen egyszerű, ugyanis $\nu = \frac{c}{\lambda}$, hol c a fény terjedési sebessége, λ az ismert hullámhossz. Az u sebesség meghatározására többféle mód van. Így mágneses térben az elektron eltérítéséből lehet az u értékéhez jutni. Én itt azonban röviden vázolni akarom az úgynevezett ellenmezők módszerét, amely igen gyakran nyer alkalmazást lassú elektronok sebességének mérésénél. Ez a módszer lényegében ugyanaz, mintha egy felfelé hajított kődarab kezdő sebességét a felhajtás magasságából határoznák meg és miután sebességek mérése nem is olyan egyszerű, pláne gyorsulómozgások esetén, a módszer nem is



11. ábra.

ugyanaz az eset, $\frac{1}{2}mv^2$ kezdeti energia átalakul eV potenciális energiává, amikor sebességét elveszíti, honnan

$$u = \sqrt{2 \frac{e}{m} V}.$$

Nekünk tehát ezt a V feszültséget kell mérnünk. A 11. ábrában az A lapnak pozitív feszültséget adunk, mely a felület-

olyan mesterkélt, mint talán látszik. A felfelé hajításnál a testnek van $\frac{1}{2}mv^2$ kezdeti energiája, mely a h magasságban mgh potenciális energiává alakul át, tehát

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh,$$

honnan

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Az elektronnál, mely a kezdeti sebességével elentétes mezőben halad,

ből kilépő elektronokat a laphoz visszavonja. Az A lapon a csúsztató segítségével a feszültséget addig változtatjuk, míg a B lap éppen nem kap többé töltést. Többek között precíziós méréseket végzett 1916-ban MILLIKAN és azt találta, hogy az elektron Voltokban kifejezett sebessége és a fény ν rezgésszáma között egyszerű lineáris és pedig a fentemlített EINSTEIN-féle összefüggés van

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right] = eV = h\nu - p.$$

MILLIKAN méréseit Ka és Na fémeken végezte és fényforrásul Hg ivlámpát alkalmazott, mely intenzív monochromatikus vonalakat ad. Méréseinek helyességét úgy ellenőrizte, hogy a fenti egyenletből kiszámította a h PLANCK-féle univerzális állandó értékét és azt $h = 6.57 \cdot 10^{-27}$ erg/sec találta, ami 0.5 % pontossággal egyezik más természetű mérésekből meghatározott h értékekkel. E mérések szerint tehát világos, hogy egy elnyelt $h\nu$ energia az elektron mozgási energiájában újra megjelenik.

Igy most utólag meg lehet érteni azt a tényt, hogy miért van az egyes fémeken az érzékenységnek egy maximális határa, Ez ugyanis ott áll, ahol a $h\nu$ energia már nem elég arra, hogy az elektron a felületből kilépjen. Így lehetséges, sőt valószínű, hogy a kritikus határon túl is vannak még hatások, de mivel az elektronok nem lépnek ki a fémből, ezekről nem szerzünk tudomást.

4. Eddig nem terjeszkedtem ki a mérések gyakorlati kivitelére és gyakorlati nehézségeire. Ezek között van egy, melynek elvi jelentősége is van, nevezetesen a fémfelületen abszorbeált gázcseveg hatása. Az általános jelenség az, hogy a friss felület érzékenysége percek, órák, napok alatt az előállítás után csökken és a jelenség fényelektromos kifáradás néven szerepel. Viszont vannak módszerek ezt a kifáradást megszüntetni, mikor is a felület megújulásáról beszélünk. A felületi gázcseveg befolyása sokféle hatásban nyilvánul. Például az ozon sok fényt nyel el és ezáltal is csökkenti a hatást, a kilépő elektronokat elnyeli vagy legalább is megnehezíti azok kilépését a felületből. To-

vábbá befolyásolja az elektronok kiváltásának a mechanizmusát, eltolja az érzékenység határát a rövidebb vagy hosszabb hullámok felé. Sok, sokszor ellentétes eredményű vizsgálat után annyit lehet mondani, hogy elektronegatív gázok, melyek az elektronokat könnyen lekötik, az érzékenységet csökkentik, míg elektropozitív gázok a hatást növelik. A nemes gázok meglehetősen indifferensül viselkednek. Az összes gázok között külön helyet foglal el a hidrogén, mely az érzékenységet emeli és az érzékenység határát a hosszabb hullámok felé tolja el.

A gázok ilyen nagy szerepe miatt felvetődött az a kérdés, hogy a fényelektromos elektronok kiváltásához egyáltalán valamely gáz jelenléte szükséges. Ez azonban nem bizonyult helyesnek. Nem lehetetlen azonban, hogy némely gázmolekulák jelenléte a fématomokat diszponálják a fényelektromos elektron leadására. Ez a kérdés az elektronkiváltás mechanizmusát illeti és erről egyelőre még további tapasztalatokra van szükség.

A gázhatás egy sajátos módjának lehet nevezni azt, hogy a fényelektromos jelenségekre nagy befolyása van az elektromos kisüléseknek. Az elektromos kisülés hatása folytán a felületen kémiai változások is lépnek fel, de fellépnek azonkívül elektromos kettős rétegek, ionrétegek a felületen, melyek töltésük szerint az elektronok kilépését elősegítik vagy megakadályozzák.

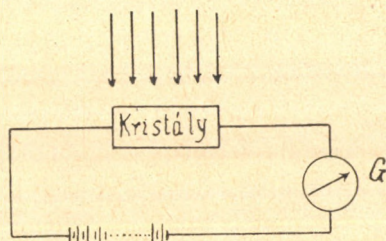
5. Hátra volna még az, hogy beszámoljak az egyes fémek speciális viselkedéséről a fényelektromos hatással szemben. Várni lehetne, hogy ez az effektus szintén egy anyagállandót szolgáltat, mint például az elektromos vezetőképesség és sok más. Használtam eddig is gyakran egy szót, a *fényelektromos érzékenység*-et, amit eddig nem definiáltam pontosan. Ha erre a fogalomra pontos számadatot lehetne találni, ez volna az itt várható anyagállandó. A fényelektromos érzékenységet körülbelül úgy lehetne definiálni, ha megszabnók, hogy egy bizonyos λ hullámú fénysugár esetén az elnyelt fényenergia egységére ennyi és ennyi elektron válik szabaddá és ha megtudnók még adni e szabaddá vált elektronok számának a szinképbeli eloszlását.

Amint az eddigiekből is kitűnik, ez jelenleg experimentális jellegű nehézségek miatt lehetetlen. Viszont a kérdés igen fontos volna, mert a sebességmérések mutatják, hogy az elnyelt fényenergia és a kiváltott elektron között szigorú összefüggés van. Így jutottak POHL és GUDDEN arra a gondolatra, hogy a külső fényelektromos hatás helyett az úgynevezett belső fényelektromos hatást vegyék vizsgálat alá. A belső fényelektromos hatás ugyanis különösen az elnyelt fényenergia és a kiváltott elektromos mennyiség közötti összefüggés vizsgálatánál semmi nehézséget nem mutat, mert átlátszó egységes kristályok esetében az elnyelt fényenergiát pontosan lehet mérni, másfelől pedig a kiváltott elektronokról teljesen egyformán tudomást szerzünk, úgy hogy számunkra egy sem vesz el, mint a külső fényelektromos hatásnak azok az elektronjai, melyek a felületből nem lépnek ki.

Itt tehát a belső effektus (12. ábra) határozott előnyt ígér. Ezzel szemben a jelenségnek a lefolyása lényegesen más, mint

a felületi hatásnál, mert a fény által létrehozott áram közvetítői itt egy szilárd test belsejében mozognak, ahol az elektronok és ionok mozgásának a feltételei teljesen mások, mint üres térben, és pedig lényegesen komplikáltabbak. GUDDEN és POHL gondolatmenetében ez azonban nem hátrány, hanem kedvező eset a vizsgálatok kibővítésére, nevezetesen az elektromos vezetés mechanizmusának a tanulmányozására szilárd testek belsejében.

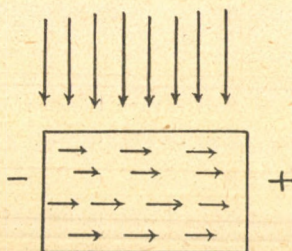
Eddig a belső fényelektromos jelenség csak a fémes szelénen, apró kristályokból álló aggregatumokon volt ismeretes. Ezenkívül ezüstkéneg, ezüsthalogének, antimonit és rézjodür mutatták a jelenséget. Újabban a fényelektromosan vezető anyagok száma igen nagy lett és GUDDEN és POHL két általuk felfedezett törvényszerűség szerint csoportosították ezen anyagokat. Ugyanis azt találták, hogy a különben szigetelőként sze-



12. ábra.

replő kristályos testek, melyeknek a törésmutatója a nem nagy abszorpcióval bíró színekérszben — tehát a hosszabb hullámok felé — $n > 2$ -nél, azok mind mutatják a jelenséget — gyémánt, zinkszulfid, zinober. Ez azt jelenti, hogy a testek tulajdonságaihoz tartozik az, hogy alkatrészeiknek elektronburkolata igen deformálható. Továbbá vannak kristályok, melyek idegen zárványokat tartalmaznak. Ezek a zárványok azzal a tulajdonsággal rendelkeznek, hogy fény hatására elektronokat képesek leadni, mely elektronok aztán a különben szigetelő kristályban tovább mozognak. Ilyen testek például a Röntgen- vagy Rádium- vagy katód-sugarakkal, vagy additív módon színezett alkáli haloid és más kristályok.

6. A szigetelő kristályokban az elektromos vezetés már nagyon komplikált és JOFFÉ vizsgálatai szerint elektronok és ionok közvetítik. A fényelektromos vezetésnél is meg kell vizsgálni, hogy az elektromosságot vezető részecskék elektronok vagy ionok. A kristály szigetelő volta miatt fellépnek szekundér jelenségek, melyek a kristály belső állapotát megváltoztatják. Ezek a szekundér jelenségek okozzák a vizsgálataknál a legnagyobb nehézségeket. A jelenségről a következő képet alkothatjuk magunknak: A kristályra beeső fény a kristály belsejében elektronokat vált ki, melyek az uralkodó tér hatására némely esetben az anódhoz, némely esetben csak az anód irányában egy kis útrészen (13. ábra) tovább vándorolnak. A jelenség lefolyása után a



13. ábra.

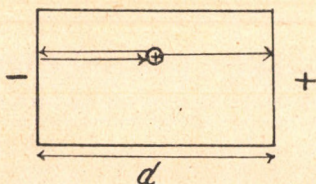
kristály belseje, melynek töltése nem volt, most töltéssel rendelkezik, mert az elektronok székhelyei pozitív töltéssel maradtak vissza. Ha az elektronok csak kis eltolódásokat szenvedtek, akkor a kristályban a katód oldalán pozitív, az anód oldalán negatív elektromosság van felhalmozva. Ha ezt az állapotot sokáig magára hagyjuk, magától megszűnik. Melegítéssel gyorsan lehet megszüntetni. Ha ez állapot, amit sokszor az irodalomban polarizált

állapotnak is neveznek, még megvan és egy újabb fényhatást hozunk létre, az ebben kiváltott elektronok már másképpen mozognak, mint az első hatás eredetileg semleges állapotában. Erős fényhatás, magas feszültség és hosszú időn át tartó megvilágítás alatt ezek a hatások teljesen megváltoztatják a kristály állapotát. Ez a változás szemléletesen kifejezve abban áll, hogy a kristály belső szerkezete meglazul, minek következtében lassan mozgó ionok lépnek fel, melyek a fény által kiválasztott elektronokhoz járulván, meghamisítják a fény által kiváltott elektronok számát. A méréseknél ez a hatás abban nyilvánul, hogy a fényhatás megszűntével még sokáig észlelünk áramlást a kristályban.

7. POHL és GUDDEN először e másodrendű hatásokat tanulmányozták és megállapították annak feltételeit, hogy milyen viszonyok mellett észlelhetjük a fény primér hatását tisztán. Arra az eredményre jutottak, hogy ha kis fényerősséget, rövid megvilágítási időtartamot és nem túlságosan nagy feszültséget alkalmazunk és ha az egymásután következő megvilágítások közé hosszabb pihenési időket vagy pedig ultravörös besugárzásokat iktatunk be, akkor kizárólag a tiszta fényhatásokat figyelhetjük meg. Ezek a hosszabb pihenési paúzák arra szolgálnak, hogy az első fényhatás által létrehozott változások újra megszűnjenek. Ugyanezt gyorsabban elérjük ultravörös besugárzással, amit a későbbiekben még részletesebben értelmezni fogunk.

POHL és GUDDEN ezirányú vizsgálatainak az eredménye a következő: A fény által a fent jelzett megszorítások mellett kiváltott hatást elnevezték primér hatásnak és minden jelenséget összefoglalva, mely a kristály belső szerkezete meglazulásának a következménye és amely a legtöbb esetben úgy értelmezhető, mint a kristály specifikus ellenállásának a csökkenése, elnevezték szekundér hatásnak. A primér hatás vagy fényelektromos primér áram pedig két részből tevődik össze. Egyik része a fény által kiváltott elektronok elmozdulásából eredő áram, melyet a primér áram negatív komponensének neveznek.

A kiváltott elektronok helyein a kristályban pozitív töltések maradnak vissza. E pozitív töltések az idővel megszűnnek, azaz egy elektron befogásával neutralizálódnak — néha momentán is — ami úgy értelmezhető, hogy a pozitív maradéktöltés a katódhoz vándorolt, vagy pedig úgy, hogy a katodból egy elektron a pozitív töltésig ment (14. ábra) és azt közömbösítette.



14. ábra.

Ekkora kristály újra a kezdeti állapotába került és ez a fontos. Ez utóbbi hatást, mely végeredményében a pozitív maradéktöltés látszólagos elmozdulásából áll, a primér áram pozitív részének nevezik.

A primér áram negatív és pozitív része a legtöbb esetben teljesen külön figyelhető meg, ami azt jelenti, hogy a pozitív maradéktöltések csak nagyon lassan jutnak egy közömbösítő elektronhoz.

GUDDEN és POHL a fényelektromos primér áramot tanulmányozták és annak is legtöbb esetben a negatív részét, tehát a fény által kiváltott elektronok mozgásából eredő áramot, és a következő eredményekhez jutottak:

a) A fényelektromos primér áram a megvilágítás kezdetén pillanatnyilag indul meg és a megvilágítás megszűntével pillanatnyilag szűnik meg. Az áramot elektronok közvetítik. Az az idő, melyen belül az áram teljes értékét eléri, vagy pedig megszűnik, a legújabb mérések (dr. FLECHSIG) szerint kisebb, mint 10^{-4} másodperc.

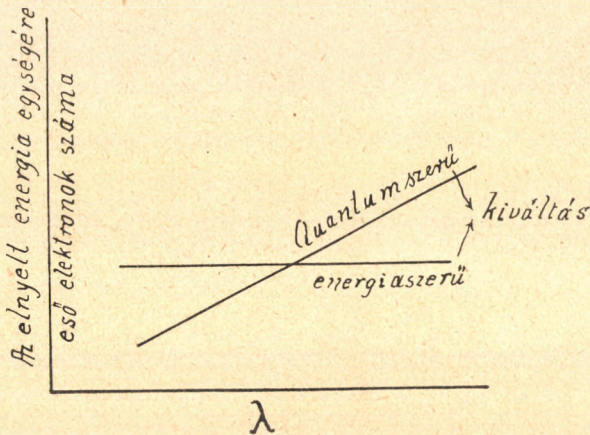
b) Az áramerősség minden térerősség mellett arányos a beeső fény erősségével.

c) Az áramerősség kis térerősségek mellett arányos a térerősséggel, míg nagyobb térerősségeknél telítést ér el (gyémánt, zinkszulfid) épp úgy, mint a felületi hatásnál.

d) Úgy látszik, hogy ez a telítési térerősség az illető kristály optikai tulajdonságaival függ össze. Az alkálihalogének esetében a telítést még nem sikerült elérni és a kősón végzett mé-

rések szerint az áramerősség a legkisebb terektől egészen 70,000 Volt/cm térerősségig szigorúan követi OHM törvényét.*

e) A teljes primér áram (tehát annak negatív és pozitív része együttvéve) bizonyos szinképrésekben oly módon függ az elnyelt fényenergiától, hogy minden elnyelt $h\nu$ elemi kvantumra



15. ábra.

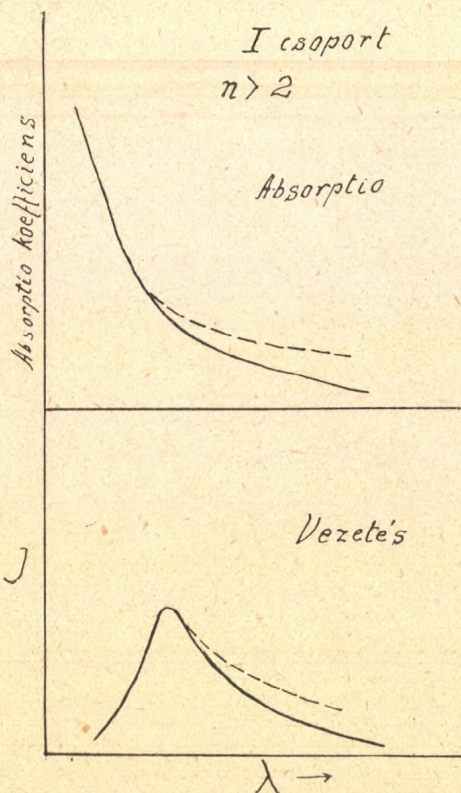
egy elektron esik. Ez az úgynevezett quantumegyenlőség törvénye (15. ábra).

Ez utóbbi pontnál különbséget kell tenni a fényelektromosan vezető kristályok két csoportja között. Az első csoportnál a fényelektromos vezetés a nagy törésmutatóhoz van kötve és a mért esetekben (gyémánt, zinkszulfid, zinober) a teljes quantumegyenlőség áll fenn; a második csoportnál, hol a fényérzékenységet a kristályba bezárt idegen anyagok hozzák létre, a kösön végzett saját méréseim szerint, nem nyerünk minden elnyelt $h\nu$ ellenében egy elektront, hanem csak körülbelül minden 10,000 elnyelt elemi fényquantum szolgáltató egy elektront. Ezt

* Megjegyzés a korrekturánál: Levélbeli értesülés alapján Dr. Flechsignek Göttingenben sikerült röntgenezett kösön, 0.1 mm vastag kristályon 200,000 Voltnál nagyobb térerősségnél a telítési áramot előállítania.

az eredményt egyelőre úgy értelmezzük, hogy a kősóban a kiváltott elektronok csak igen kis eltolódásokat szenvednek.*

8. Amint látjuk, a kristályokon egy csapásra meg lett oldva az elnyelt fény és kiváltott elektromosság mennyisége közötti



16. ábra.

összefüggés. A haszna az új vizsgálati módnak még tovább megy.

A fényelektromos vezetés és fényelnyelés közötti szigorú kapcsolatot bizonyítják az újabb vizsgálatok, melyek szerint a vezetőképesség minden különösségei a fényelnyelésen is követhetők. Így a kétféle mérési módszer úgy egyenlíti ki egymást, hogy a vezetési mérések sokkal érzékenyebbek, mint az abszorpciómérések, de viszont az abszorpciómérések teljesen függetlenek minden olyan mellékjelenségtől, melyek a vezetés mechanizmusából erednek. Röviden az itt érintett jelenségek a következők:

A fényelektromosan vezető kristály — a két csoport bármelyikébe is tartozzék — ha érzékeny fénnel világítjuk meg,

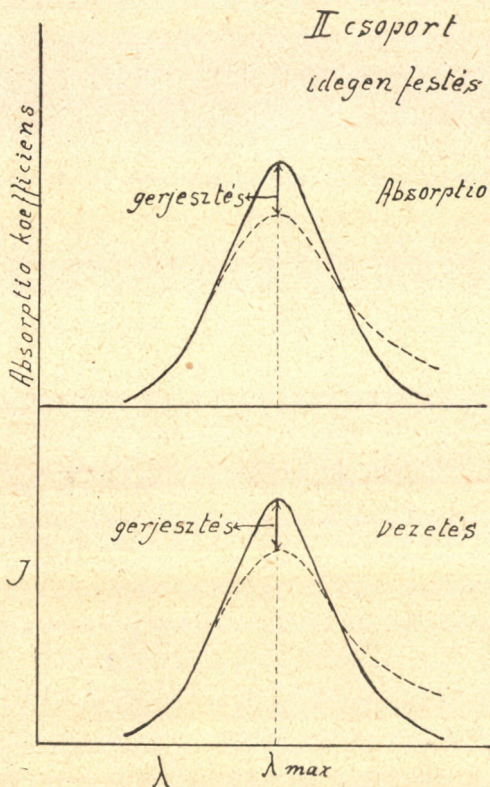
* A kősóban a quantszerűséget egyelőre fenntartással kell fogadnunk, mert egy pétervári dolgozat szerint nem $h\nu$ energia elemi quantumok, hanem a ν rezgésszámtól függetlenül egyenlő energia quantumok váltanak ki egy elektront. A kérdés újabb megvizsgálása Göttingenben folyamatban van. Ha azonban mégis az energiaarányos kiváltás nyerne beigazolást, az a jelenség lényegéről teljesen új elméleti megfontolásokat tenne szükségessé.

akkor ennek következtében oly állapotba megy át, amely most a fényre másképpen reagál. Előzetes megvilágításra a rövidebb hullámok hatása kisebb lesz, a hosszabb hullámok hatása nagyobb. Az abszorpcióra vonatkoztatva pedig ez abban jelentkezik, hogy előzetes megvilágításra a rövidebb hullámok tartományában az abszorpció kisebb, a hosszabb hullámok tartományában pedig nagyobb lesz. Ezt a 16. és 17. ábrával szemléltetjük.

A baloldalon áll a fényelektromosan vezető kristályok első csoportja hol $n > 2$. Itt, mint látjuk, a fényabszorpciónak csak bizonyos és pedig a hosszabb hullámokhoz tartozó részében van vezetés. Ezen tartománynak a hosszabb hullámok felőli részében megy a fényelnyelés quantumszerűen csak. Hogy a rövidebb

hullámoknál miért nincsen vezetés, az még egyelőre probléma. Valószínűleg a fényelnyelés nem elektronok leváltásában áll, mert arra, hogy az itt levált elektronok vezetési nehézségek miatt nem nyilvánulnak, kevésbé lehet gondolni. A jobboldali ábrák általában vonatkoznak az idegen festsű kristályokra, mint a Röntgen festette kőso stb.

Itt az idegen festés a kristályban egy szelektív abszorpciót



17. ábra.

hoz létre abban a részben, hol a nemfestett kristály különben egyáltalán nem abszorbeál fényt. A quantumszerű fényabszorpció érvényes a szelektív abszorpció egész tartományára.

A λ max-al való előzetes megvilágítás hatása abban nyilvánul, hogy a fényabszorpció és ennek megfelelően a vezetés is a maximumban kisebb lesz, viszont úgy a fényabszorpció, mint a vezetés is a hosszabb hullámok tartományában nagyobb lesz. E jelenségben a párhuzamosság a fényelnyelés és elektromos vezetés között a legélesebben szembetűnő. Ez a párhuzamosság a két jelenség között még másokban is megnyilvánul, amelyekre itt nem terjeszkedhetem ki. Ellenben meg kell említenem azt, hogy amint látjuk, előzetes megvilágításra a hosszabb hullámoknál az abszorpció nő és ez teszi lehetővé azt, amit fennebb csak futólag érintettem, hogy POHL és GUDDEN a kristályokat minden megvilágítás után ultravörös besugárással a kezdeti állapotba hozzák. Ugyanis a kristály, mely a szaggatott görbékkel jelzett abszorpciót mutatja, kellő hosszú ideig tartó ultravörös megvilágítással eljut a kezdeti, vagyis a kihúzott vonallal jelzett állapotába. A két görbe maximumai közötti nyílakkal jelzett különbséget gerjesztésnek nevezik és az állapot jelzésére használjuk. Ez állapot mechanizmusáról egyelőre POHL és GUDDEN azt a képet alkották, hogy egy centrum egy elnyelési aktusban lead egy elektront, mely elektromos tér esetén eltolódik és a fényelektromos áramot alkotja. A centrum viszont a közvetlen környezetéből egy elektront vesz fel, miáltal ez egész centrum állapota megváltozik, amely állapotot éppen az jellemez, hogy a rövidebb hullámokra a fényabszorpciója kisebb, a hosszabbakra nagyobb lesz. Ez a jelenség qualitative egyezik a LENÁRD-féle foszforokon észlelt azon jelenséggel, hogy egy foszfor hosszabb ideig megvilágítva később kevésbé foszforeszkál, azaz bizonyos kifáradást mutat, míg viszont ultravörös megvilágítás a foszforeszkálást intenzívvé teszi és az összes felhalmozott fényenergia kisugárzását igen megyorsítja.

Ilyen általánosításban nevezik POHL és GUDDEN a fényelektromosan vezető anyagokat is foszforoknak és a fényelektromos vezetés jelenségét az általánosabb foszforescenciá jelenség egy speciális ágának tartják. Ugyanezen a nézeten van FRANCK is. E nézetet újabban igen támogatják legutóbbi vizsgálataim, hol a fenti ábrában gerjesztésnek nevezett állapotkülönbséget vizsgáltam, mint a hőmérséklet függvényét és azt teljesen a foszforescenciával párhuzamosnak találtam.

9. A szekundér fényelektromos áram jelenségei korántsem ilyen egyszerűen áttekinthetők. Nagy fényerőségeknél és nagy térerőségeknél jön létre. A jelenség mechanizmusa igen komplikált és még nincs eléggé tanulmányozva. Valószínű, hogy anyagok szerint lényegesen különböző módon jön létre. Igen sok esetben az erős primér áram következtében a kristályrácsban erős lazulások jönnek létre és ennek következtében ionok is résztvesznek az áramlásban. Az ionok mozgása folytán ez a lazulási folyamat még tovább halad.

Igy a fény által kiváltott priméráramhoz hozzájárul még az ion áram, amely kezdetben növekszik, dacára annak, hogy a fény által kiváltott priméreelektronok száma állandó. Viszont a fényhatás megszűntével az ionok tovább mozognak és csak hosszabb idő múlva szűnik meg a mozgásuk, vagyis a kristálynak a kezdetbeli izoláló képessége csak lassan áll helyre. Ezt a jelenséget a fényelektromos áram tehetetlenségének nevezzük.

A szekundér áramnak körülbelül a következő tulajdonságai vannak.

a) A fényhatás megkezdése után lassanként fejlődik ki és a világítás megszűnte után lassan szűnik meg.

b) Kezdetben nem arányos a feszültséggel és telítési áram nem jön létre.

c) Nem arányos a fényerőséggel.

d) A priméráram maximális erőssége a fentiek szerint a quantumszerűség értelmében megállapítható. A szekundér áram erőssége ezt a maximumot többszörösen felülmúlhatja.

e) A szekundáráram szinképbeli eloszlása nem a kristály optikai állandóitól függ, hanem az éppen esetleges kísérleti feltételektől, nevezetesen fényerősség, feszültség, a megvilágítás időtartama, hőmérséklet stb.

10. Végül meg kell még emlékeznem különösen egy kérdésről, amely a fényelektromos vezetésnek a legismertebb esete és ez a szelén-probléma. A szelén fényelektromos vezetőképessége oly erős, hogy a gyakorlatban is több alkalmazást talált. Éppen ezért hosszú időn át a fényelektromos vezetés jelenségét csaknem kizárólag a szeléne végezték. A sok százra menő vizsgálat azonban semmi egységes eredményre nem jutott, mert éppen azért, hogy nagy effektusra törekedtek, nagyjából a fentebb ismertetett szekundér árammal dolgoztak. Így azután a legnagyobb fáradtsággal sem tudták a fényelektromos áram tehetetlenségét megszüntetni, ami a szeléncellák alkalmazhatóságának legnagyobb akadálya volt. Ez azonban a dolog természetében rejlett. Hogy a szeléne a fényelektromos vezetés jelensége teljesen beleillik a fentebb vázolt keretbe, azt megmutatták legújabbban ugyancsak GUDDEN és POHL és pedig vörös szelén kristályokon. Sikerült ugyanis egy munkatársuknak oly nagy egységes vörös szelénkristályokat növelnie, amelyen bizonyos vizsgálatokat végezhetek. Az eredmény az, hogy ezen előállították a fényelektromos priméráramot és a gerjesztésnek a jelenségét, ami erre éppen karakterisztikus. Olyan nagy egységes fémes szelénkristályokat növelni, amelyen quantum-szerű vizsgálatokat lehetett volna végezni, egyelőre még nem sikerült előállítani. Ezzel szemben ezen munkájukban GUDDEN és POHL más fényelektromosan vezető kristályoknak összehelyezett porán előállították a fémes szeléncellákon észlelt vezetési jelenségeknek a legtöbbszörét, amiből azt a következtetést vonják, hogy a fémes szeléne a szekundér fényelektromos áramok és pedig a számtalan kristály érintkezési felületén kohärer-szerű jelenségek jönnek létre, más szóval e kristályfelületek érintkezési pontjain uralkodó nagy ellenállásokat a fény által kiváltott primér áram sokszorosán csökkenti, miáltal

aztán az ismert nagy hatások jönnek létre. Éppen ezért a szelénjelenségek elsősorban nem fényelektromos, hanem vezetési problémák.

Gyulai Zoltán.

DIE ERGEBNISSE DER LICHELEKTRISCHEN UNTERSUCHUNGEN.

Es werden kurz die gesetzmässigen Ergebnisse der lichtelektrischen Untersuchungen zusammengefasst. Der erste Teil enthält den äusseren lichtelektrischen Effekt (Hallwachseffekt, und zwar den Zusammenhang zwischen lichtelektrischem Strome und Spannung, den zwischen lichtelektrischem Strome und auffallender Lichtenergie, die spektrale Verteilung der lichtelektrischen Empfindlichkeit, den selektiven Photoeffekt, die Geschwindigkeiten der lichtelektrischen Elektroden und das EINSTEIN'sche Gesetz und die Geschwindigkeitsmessung von MILLIKAN. Es wird kurz der Einfluss der Gasatmosphäre (Ermüdung und Erholung) erwähnt.

Der zweite Teil enthält die Gesetzmässigkeiten der lichtelektrischen Leitung und zwar: die POHL und GUDDEN'sche Einteilung der lichtelektrisch leitenden Kristallen, d. h. Kristalle mit Brechungsindex > 2 und mit Fremdfärbung, weiter die Eigenschaften des primären und secundären lichtelektrischen Stromes, den Zusammenhang zwischen lichtelektrischem Strome und absorbierter Lichtenergie (das Quantenäquivalent am Diamant, Zinksulfid und Steinsalz), zum Schlusse nach den eigenen Versuchen des Verfassers die Erscheinungen der lichtelektrischen Erregung am geröngten Steinsalz, als allgemeine Phosphoreszenzerscheinung.

Z. Gyulai.

OLAJOK FOTOAKTIVITÁSA.

Ibolyántúli fényvel besugárzott olajok, kiváló mértékben a szezam-olaj, azt az érdekes jelenséget mutatják, hogy a besugárzás után órák, sőt napok múlva a fölibük helyezett fényképezőlemezt megfeketitik. Akkor is, ha azt az olajfelülettől több cm távolságra helyezzük el, bár a hatás természetesen a távolság növekedésével csökken. Az olajnak ezen tulajdonságát fotoaktivitásnak szokás nevezni.

A jelenség legkézenfekvőbb magyarázata az volna, hogy a besugárzás hatása folytán az olaj foszforeszkál, ámbar folyadékok foszforeszkálását ezideig nem tapasztalták. Dr. CSABAYNÉ¹ ezzel egybehangzóan azt észlelte az Erzsébet Tudományegyetem fizikai intézetében, hogy vékony kvarclemesz közbeiktatására az említett fotoaktivitás elmarad. Még vörös fény iránt érzékennyé tett lemezeken sem kapott feketedést.

Megfigyelései alapján el kell tehát ejtenünk azt a feltevést, hogy a feketedés elektromágneses sugárzástól származik. De hát akkor miben áll az olaj fotoaktivitása? A legegyszerűbb nézet az lenne, hogy a hatás előidézői elektromos töltésű korpuszkuláris részecskék. Kérdés azonban, hogy a besugárzás után oly hosszú idővel miként léphetnek ki elektronok a folyadékból, illetőleg mennyiben létesülhet ionizáció az olaj környezetében. Ezzel a kérdéssel kapcsolatban, amelynek jelentősége a tárgyalandó vizsgálatok keretén messze túlterjed, az alább következő megfontolásokat végezhetjük. Ezek a megfontolások egyszersmind eloszlatják a remanens elektron-emisszió lehetőségére iránt táplált aggodalmainkat.

¹ Dr. CSABAYNÉ: Magyar Röntgen Közlöny. II. évf. 3—4. sz. 104. o.

Besugárzás folytán a folyadék vezetővé válhat.¹ Vezetőképességét esetleg csak lassan veszíti el a besugárzás megszüntetése után. A folyadékban szabad elektronok vannak, melyek onnan lassan párologhatnak. Az elektronok más része pedig ismét belép valamely molekula kötelékébe. Így a vezetőképesség egyre csökken. Végre a szabad töltések eltűnnek s a korábbi egyensúlyi állapot helyreáll.

De energetikailag helyesen értelmezhetjük a jelenséget még a következőképen is. A besugárzás hatása alatt az anyag foszforeszkálóvá válik. Ezt a foszforeszkáló sugárzást azonban az anyag felsőbb rétegei teljesen abszorbeálják s az abszorpciónak megfelelően fotoelektronokat bocsátanak ki. Így kívülről egy sugárzás nélküli energiaemissiót tapasztalhatunk, amely legfeljebb egyenlő az abszorbeált primér sugárzással. De BROGLIE² csakugyan megfigyelt olyan fotoelektroncsoportokat, amelyek megfelelnek a fluoreszcenciás sugárzás abszorpciójának magában a szekundér sugárzó közegben.

Ha azonban feltesszük, hogy közvetlenül elektronok idézik elő lemezeink feketedését, meg kell vizsgálnunk azt a kérdést, hogy vajjon szert tehetnek-e olyan sebességre, amellyel keresztülhatolhatnak több cm vastagságú levegőrétegen. A fotoelektromos jelenségek EINSTEIN-féle alaptörvénye szerint, ha az ÅNGSTRÖM-egységekben mért λ hullámhosszúságú sugárzás abszorbeálódik, akkor az az anyagból maximális energiával kilépő fotoelektronok sebességének voltaequivalense:

$$V = \frac{12350}{\lambda}. \quad (1)$$

Dr. CSABAYNÉ vizsgálatai szerint a szezam-olaj 3130 Å-tól kezdve lefelé abszorbeálja az ibolyántúli sugarakat. 2000 Å-nél, kvarcspektrográfunk mérési tartományának alsó határánál még mindig rendkívül intenzív abszorpciót tapasztalhattunk. Fel-

¹ JAFFÉ: Ann. d. Phys. 36, 25, 1911; Röntgen u. o. 64, 1921; Roos: Zsch. f. Phys. 36, 18, 1926.

² M. de BROGLIE: Journ. de phys. (6) 2, 265, 1921.

tehető tehát, hogy olajunk még rövidebb hullámhosszúságoknál is abszorbeál.

2000 Å-ös sugaraknak (1) alapján legfeljebb 6V sebességű fotoelektronok felelnek meg. Az utólagos elektronemissziónál ez az érték esetleg még jobban csökken. Milyen mélyre hatolnak a levegőbe 6V sebességű elektronjaink?

SCHONLAND és VARDER szerint¹ az elektronok gyakorlati hatástávolsága (definíciójuk szerint az a távolság, ahol az elektronok ionizáló hatása már erősen kezd csökkenni):

$$R = \frac{0,14}{\rho} \beta^4. \quad (2)$$

Jtt ρ annak a közegnek a sűrűsége, amelyben az elektronok haladnak, β pedig az elektronoknak a fény terjedési sebességének egységében mért sebessége.

A gyakorlati hatástávolság azonban nem azonos a tényleges hatástávolsággal, amely az a hosszúság, amelyet az elektronok teljes lefékeződésükig egyáltalán befuthatnak. Idevonatkozó meghatározásokat WILSON² végzett az ő ködkép-módszerével. Szerinte a tényleges hatástávolság R_0 a következő összefüggésben áll a V voltsebességgel:

$$V = 21 \cdot 10^3 \sqrt{F}$$

azaz:

$$R_0 = 0,23 \cdot 10^{-8} V^2. \quad (3)$$

Ha tekintetbe vesszük, hogy 6V sebességű elektronokra $\beta = 0,005$, akkor WILSON formulája szerint $R_0 = 8 \cdot 10^{-8}$ cm, (2) ennél valamivel kisebb $7,5 \cdot 10^{-8}$ cm értéket ad.

Azonban úgy SCHONLAND és VARDER, mint WILSON 6V-nál sokkalta nagyobb sebességű elektronra vonatkozólag végezték vizsgálataikat (WILSON $\beta = 0,18$ -tól $\beta = 0,3$ -ig). Fotoelektronjaink-

¹ L. BOTHE: Durchgang von Elektronen durch Materie. GEIGER' u. SCHEEL's Handbuch d. Phys. XXIV. kötet 31. o. 1926.

² L. BOTHE l. c. 32. lap.

nak megfelelő sebességű elektronoknál egészen más viszonyok lépnek fel. RAMSAUER¹ ugyanis azt találta a *He*-nál nagyobb atomsúlyú nemes gázoknál, hogy ezeknek abszorpciója a lassú elektronokkal szemben igen erősen lecsökken. 1—2V, vagy ezen aluli sebességű elektronok minden számbajövő fékeződés nélkül mintegy átsiklanak az atomon. Ez a RAMSAUER-hatás.

Ilyen körülmények között, bár rendkívül csekély a valószínűsége, nem utasíthatjuk vissza minden további nélkül még azt a lehetőséget sem, hogy maguk az elektronok hatnak a fényképezőlemezre.

Ha azonban a valóságban az elektronok nem is juthatnak el cm-ekre menő távolságra, még mindig lehet, hogy elektromos töltésű molekuláris részecskék létesítik a hatást. Ezeknek keletkezése történhetik ionizáció révén, amikor is az elektronok ionizáló hatására + és — töltésű ionok jelennek meg az olaj felett levő gáztérben. Az ionizációs feszültségekre vonatkozólag azonban BRANDT, MOHLER, FOOTE és mások² megfigyeléseiből tudjuk, hogy azok neutrális N_2 - és O_2 -re vonatkozólag 16V körül vannak.

Igy, legalább is ezekre a levegőalkotórészecskékre vonatkozólag lehetetlen, hogy elektronjaink által ionizálódnának. De ionizálhatnak elektronjaink utóvégre levegőben levő más olyan gázokat, amelyek ionizációs feszültsége kisebb. Tudjuk, hogy a kvarclámpa ionizálja a levegőt, ami igen alacsony hullámhosszaságú sugarak jelenlétére vall. Lehetséges, hogy az olaj is abszorbeálja ezeket s így a priori nincs kizárva, hogy + és — töltésű ionok vándorolnának a lemezhez.

De a legvalószínűbb lehetőség az, hogy kicsiny kinetikai energiájú elektronjaink, melyek ionizációra nem képesek, hozzátapadnak egy vagy esetleg több molekulából álló gázz részecskéhez s negatív töltésű molionokat képeznek. Valamely gáznak

¹ RAMSAUER: Phys. Zsch. 21. k. 576. o., 1920 etc.

² COMPTON u. MOHLER: Ionisierungs- und Anregungsspannungen. Born-träger. Berlin. 1925. 131. és 133. o.

azt a tulajdonságát, hogy molekulái elektronokat képesek felvenni, FRANCK után az illető gáz elektronaffinitásának nevezzük. Az elektronaffinitás igen csekély nitrogénre, elég jelentékeny oxigénre és vízgőzre vonatkozólag.

A molionok résztvesznek a molekuláris gázmozgásban, azonban töltésüknél fogva mint idegen molekulák szerepelnek. A neutrális molekulák és a molionok alkotta gáz keverékét úgy tekinthetjük, mint két különemű gáz keverékét. Ilyen felfogás alapján a molionoknak bizonyos parciális nyomást tulajdoníthatunk, amelynek az a törekvése, hogy a koncentráció-különbségeket kiegyenlítse. A parciális nyomás a nagyobb koncentrációjú helyről, az olaj felületéről, kisebb koncentrációjú hely, a fényképezőlemez felé hajtja a molionokat. Diffúzió áll elő, amely lefolyás tekintetében semmiben sem különbözik gázkeverékek diffúziójától. Érvényesek itt is a gázdiffúzió differenciálegyenletei s ha a térfogategységben foglalt ionok számát, az ionizációt n -nel jelöljük (n a hely és az idő függvénye), akkor az s irányban diffundáló részecske sebességére áll:

$$v = \frac{1}{n} D \frac{\partial n}{\partial s}. \quad (4)$$

D a diffúzió együttható, amely TOWNSEND¹ módszerével meghatározható.

Akár ionok azonban az olajfelületről áramló részecskék, akár elektronok, elegendő erősségű mágneses tér alkalmas lesz kimutatásukra. A mágneses tér ugyanis a töltött részeket eredeti pályájukról kitéríti. Ha a részecske töltését e -st. egységekben e -vel, tömegét m -el, sebességét v -vel, a mágneses tér erősségét pedig \mathfrak{H} -val jelöljük, akkor a részecske mozgásegyenlete:

$$m \dot{v} = \frac{e}{c} [v\mathfrak{H}] \quad (5)$$

e -t előjelével együtt kell venni, elektronoknál tehát $-e$ -t írunk; c a fénysebesség.

¹ PRZIBRAM: Die Ionen in Gasen. Handb. d. Phys. XXII. k. 336. o.

Hogy kísérleti berendezésünknek megfelelő módon tárgyalhassuk a mágneses tér hatását, v -t két komponensre bontjuk. Az egyik: v_l a mágneses térerősség irányába essék, a másik: v_n erre merőleges síkban legyen. (5) alapján v_l komponens révén a mágneses tér semmi hatást nem gyakorol az elektromos töltésű részecskére: a mágneses térerősség irányában v_l szabadon mozgathat. Ellenben v_n révén (5) szerint az elektron v ion pályája \mathfrak{S} -ra merőleges síkban körpálya lesz, amelynek sugara:

$$r = \frac{mc}{e|\mathfrak{S}|} |v_n|. \quad (6)$$

A két komponens együttes hatása az lesz, hogy az ion homogén mágneses térben állandó sebesség esetén térbeli spirálison halad; a spirális tengelye \mathfrak{S} , a tengelytől való távolság r .

Kísérleteimben kiterjedt: 7,5 cm hosszú és 0,9 cm széles olajfelület fotoaktivitásának változását vizsgáltam a mágneses tér hatására. Az olajfelület a fenti méreteket egy vékonyfalú porcelláncsészében vette fel. Az olajréteg vastagsága 3—4 mm között váltakozott, aminek egyébként különösebb jelentősége amúgy sem volt. Az olajat 40 cm távolságról 1—2 órán át egy Original-Hanau kvarelámpával sugároztam be, ami elégséges intenzív fotoaktivitás kiváltására. A lámpa 110 V városi hálózati váltakozó feszültség mellett 7,5 ampère-t fogyaszt.

A mágneses tér előállítására egy elektromágnezt használtam, amelynek pólusai között egy hasábalakú szabad tér volt 4,8 cm, 2 cm és 1,9 cm élhosszúságokkal. Az 1,9 cm hosszúságú él volt párhuzamos a mágneses térerősséggel. Az elektromágnezt 2,5 ampère intenzitású árammal gerjesztettem. Ilyen áramerősség mellett a mágnes nem mutatott számbajövő felmelegedést. Erre ugyanis ügyelni kell, mert a temperaturaváltozás lényeges befolyással van a fotoaktivításra. 2,5 amp. áramerősség mellett a pólusok között eléggé homogén 1000 gauss erősségű tér állott rendelkezésre, ami céljainknak tökéletesen megfelelt.

A mágnes közönséges helyzetében a térerősség horizontális

sikban feküdt, de lehetséges volt a mágnessét úgy fordítani, hogy vertikális legyen.

A pólusok közé ilyen módon kétféleképpen helyezhettem az olajat. Egyik helyzetben úgy, hogy az olajfelület és a mágneses térerősség vízszintesek legyenek, a hatórészecskék ebben az esetben legrövidebb úton a mágneses térerősségre merőlegesen haladhatnak a fényérzékeny lemez felé, amely az olajfelülettől 0,8 cm—1,6 cm távolságban, természetesen az olajnívóval párhuzamosan helyezkedett el. Ezt az elhelyezést transzverzális beállításnak nevezhetjük.

Ha a mágnessét úgy forgatjuk, hogy az erővonalak függőlegesek legyenek, a vízszintes olajfelületről az erővonalakkal párhuzamosan haladhatnak a ható részecskék legrövidebb úton az olajfelülettel párhuzamosan elhelyezett fényképezőlemezhez. A lemezt most az olajtól legfeljebb 1,4 cm távolságra helyezhettem el a pólusok méretei miatt. A mostani esetben longitudinális vizsgálatról beszélhetünk.

A csészét mindkét beállításkor úgy helyeztem a pólusok közé, hogy 7,5 cm hosszúságából körülbelül fele essék mágneses térbe, fele azon kívül. A fényérzékeny lemez olyan nagyságú volt, hogy a pólusokon kívüleső rész fölé is kiterjedt. Megfelelő darabot mindkét oldalán fényérzékeny Kodak-filmből magam vágtam. Expozíció a sötét kamrában 3^h—12^h között váltakozott.

A kísérletek egy részénél a csészének a mágneses téren kívüleső felét vasernyővel védtem a mágneses tértől.

Az előbbieken kimutattuk, hogy az elektromágneses erő befolyása alatt az elektromos töltésű materiális részecskék mintegy felcsavarodnak egy-egy erővonalra. Ez az eredmény csak a vákuumra érvényes. Kísérleteimet azonban normális nyomású levegőben végeztem. Ebben az esetben az atommagok mellett elhaladó elektronok erős irányeltérítést szenvednek, az ionok pályáját pedig sűrű ütközés befolyásolja. Az eredeti csavarvonal ilyen módon teljesen eltorzul. De nem nagy sebességek esetén most is mondhatjuk még, hogy a mágneses térnek meg-

van az a tendenciája, hogy amint egy erővonal magához vont egy elektromos töltésű részecskét, azt általában a maga közelében iparkodik tartani. Makroszkópos szempontból tekintve a dolgot, azt mondhatjuk, hogy az elektromos töltésű részecske-hez legközelebb eső erővonal mintegy kijelöli a részecske továbbjutásának irányát. Mozgás a térerősséggel megegyező vagy az-zal ellenkező irányban lehetséges.

1000 gauss erősségű térben a maximális, tehát $6V$ sebességű elektronjaink oly pályán mozognak, amelynek görbületi sugara $0,1$ mm. Az ionok pályája, ha gázkinetikai mozgásukból rezultáló diffúziós mozgásukat vesszük számításba, szintén kicsiny görbületi sugarú. Ilyen körülmények között fenti meg-gondolásaink tűrhető közelítésben érvényesek és a következő hatást várhatjuk.

Transzverzális térben, mikor az olajfelület párhuzamos az erővonalakkal, az olajfelülettől már csekély távolságra, az erővonalakra felcsavarodott elektronok oldalvást hajtatnak. Mintha valami fal lenne itt az olajfelszín felett elhelyezve, az áramló részecskék meg lesznek akadályozva abban, hogy az $1-2$ cm-nyire elhelyezett fényérzékeny lemezt elérhessék.

Töltetlen részecskéknél és a mágneses mezőn kivüleső térben ez a hatás természetesen elmarad.

Longitudinális beállításnál ellenben, amikor az erővonalak merőlegesek az olajfelületre, az erővonalak mintegy projiciálják az olajfelületet a fotoaktív részecskék útján a fényérzékeny lemeze. A mágneses tér hatására tehát a lemezen az olajfelületnek képét kapjuk. A mágneses téren kívül haladó, továbbá a mágneses térben ható, de töltetlen részecskék ellenben dif-fúzus feketedést idéznének elő.

A kísérletek azonban csodálatos meglepetéssel szolgáltak. Transzverzális térben pontosan az ellenkező hatás következett be. A mágneses térben erősebb hatást, kivüle, különösen a csésze vége felé, gyengébb hatást tapasztalhattunk.

A mágneses tér mintegy beszívni látszott a ható részecskéket a csésze végéről a mágneses tér belsejébe. Ugyanezt a ha-

tást tapasztalhattuk akkor is, ha a csészét úgy helyeztük el, hogy a mágneses téren kivüleső része az ellenkező oldalon legyen.

Longitudinális térben végezve a megfigyeléseket, hasonló eredményre jutottunk. Éles képről szó sem lehetett, ellenben a ható részecskék itt is mintegy a mágneses tér felé áramlottak.

A jelenség azonban nem mutatott szabályszerű lefolyást. A mágneses térerősségtől és a lemeznek az olajfelülettől való távolságától egészen független befolyások léptek fel. Nem mutatkozott a longitudinális jelenségnél a mágneses térerősség, mint tengely körül várt szimmetria sem. Végül az az erős gyanú merült fel, hogy légáramlatok idézik elő a kivüleső rész furcsa magatartását. Ennek lehetősége fennállott, mert az olajfelület és a lemez közötti tér nem volt minden oldalról elzárva.

Hogy ezt a befolyást kiküszöböljük, a csészét $2 \times 1,8 \times 9$ cm élhosszaságú vörösrézdozba tettem s tetejére olyan szorosan illesztettem a lemezt, hogy a doboz teljesen zárult. Ekkor úgy a longitudinális, mint a transzverzális tér minden hatása megszűnt. Benne és kívül ugyanolyan mérvű feketedés jelentkezett. A feketedés azonkívül megegyezett a teljesen megfelelő nagyságú dobozba helyezett, de külső erők hatásának alája nem vetett olaj felett tapasztalt feketedéssel.

Ebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a ható részecskék semmiesetre sem lehetnek elektronok, de nem lehetnek diffúziós sebességgel haladó ionok sem.

Hogy a részecskék vándorlása tényleges diffúziós sebességgel történik, azt a következő áramoltatási kísérlettel mutattam ki. Az olajfelszín felett 2 cm távolságra helyeztem el a lemezt. A közöttük levő tér nem volt elzárva. Ezen tér közelébe vízlégszivattyú szívó nyílását helyeztem és a kísérlet tartama alatt a vízlégszivattyút működtettem. Amennyire áramló porrészecskék sebességéből meg lehetett becsülni, körülbelül 50 cm sec^{-1} sebességű levegőáram haladt az olaj felett. 12 órai expozíció után a lemez semmi feketedést nem mutatott míg a hasonló

módon beállított, de áramlásoktól védetten elhelyezett lemez intenzíven feketedett.

Áramoltatási kísérletünkből az következik, hogy a fotoaktív részecskék oly csekély sebességgel diffundálnak az olaj felett, amely a 10 cm sec^{-1} nagyságrendjét meg nem haladja.

Ezen eredményt egybevetve a mágneses tér közömbös viselkedésével, kimondhatjuk, hogy a fotoaktivitást nem elektromos töltésű korpuszkuláris részecskék idézik elő, amelyek 10 cm sec^{-1} -nél kisebb sebességgel diffundálnak a lemez felé.

Hogy a részecskéknek nincs elektromos töltésük, azt közvetlen kísérletekkel is igazoltam azáltal, hogy az olajat elektrosztatikai térbe helyeztem. A csésze alá fémlemezt, fölébe pedig $0,5 \text{ mm}$ átmérőjű vörösrézdrót-elektrodót raktam. A fémlevezet egy 50 V feszültségű akkumulátortelep —, az elektrodót pedig a + pólusával kötöttem egybe. Az olajat a levegőáramlásoktól megvédtem. Egyik kísérletnél az elektrodót az olaj és a lemez között közvetlenül a fényképezőlemez alá helyeztem. A felvételen a drót árnyéka látszott, de az elektrodának sem gyűjtő, sem szóró hatását nem tapasztalhatjuk. Másik kísérletnél a lemez fölött helyeztem el az elektrodót, az olajhoz képest ugyanolyan szimmetria-helyzetben, mint az előző felvételnél. A drót azonban most csak $0,8 \text{ cm}$ -nyire nyúlt el az olaj felett a csésze végétől számítva. Most sem mutatkozott erősebb vagy gyengébb hatás a drótnak megfelelő helyen vagy annak környezetében.

Kétségtelen ezek után, hogy a fotoaktivitás a diffundáló részecskéknek nem az elektromos töltésén, hanem valamilyen kémiai redukáló tulajdonságán alapszik. LENGYEL BÉLA ugyanis kimutatta,¹ hogy redukáló gázok, mint pl. a hidrogén, a fényképezőlemez brómezüstszelatin rétegére éppen olyan értelemben hatnak, mint a fény, amennyiben a brómezüstöt a használatos előhívókkal redukálhatóvá teszik.

¹ LENGYEL BÉLA: Néhány gáz hatása a photographlemezre. Math. és Természettud. Értesítő XVI. k. 5 f. 365. o. 1898.

Hogy ilyen hatás előidézéséhez minimális anyagmennyiségek szükségesek, azt bizonyítják dr. CSABAYNÉ vizsgálatai, aki kéresemre különböző koncentrációjú hidrogénszuperoxid-oldatok fotoaktiv hatását figyelte meg, amikor is kitűnt, hogy H_2O_2 10^{-3} súly % koncentrációjú vizes oldata még jól feketíti a fölébe helyezett fényképezőlemezt.

Hogy miként keletkezik a mi esetünkben ilyen redukáló termék, azt későbbi vizsgálataink vannak hivatva eldönteni.

Látjuk azonban, hogy a fotoaktivitás kérdése a fotoelektromosság köréből a fotokémia körébe terelődött.

A két terület azonban nem idegen egymás számára: összekapcsolja őket a modern atomteória és mindkét jelenségesoport törvényszerűségeit feltárja a quantumelmélet.

*

Vizsgálataimat az «Országos Magyar Természettudományi Alap» támogatásával az Erzsébet Tudományegyetem fizikai intézetében végeztem. Hálás köszönettel tartozom az intézet igazgatójának, RHORER LÁSZLÓ dr. egyet. ny. r. tanár úrnak, hogy útmutatásaival és állandó tanácsaival munkámat irányította.

Orbán György.

DIE PHOTOAKTIVITÄT DER ÖLE.

Mit ultraviolettem Lichte bestrahlte Öle schwärzen die photographische Platte. Diese Erscheinung nennt man Photoaktivität. Frau CSABAY fand, daß diese Reaktion nicht das Ergebnis phosphoreszierender Strahlung ist.

Der Verfasser untersuchte, ob die Reaktion von elektrisch geladenen Teilchen verursacht wird, was von theoretischem Standpunkt aus nicht unwahrscheinlich ist. Deshalb beobachtete er die Photoaktivität im magnetischen und elektrischen Felde und fand, daß dieselben keinen Einfluß auf die Erscheinung ausüben. Andernteils bestimmte er mit Diffusionsversuchen die Geschwindigkeit der photoaktiven Teilchen und fand die Größenordnung der Geschwindigkeit unter 10 cmsec^{-1} .

Daraus erfolgt, daß die Photoaktivität nicht die Wirkung elektrisch geladener Teilchen ist. Also ist die Photoaktivität der Effekt irgendeines chemischen reduzierenden Prozesses.

Die Untersuchungen wurden mit Hilfe des Ung. Landesfonds für Naturwissenschaften («Országos Magyar Természettudományi Alap») im Physikalischen Institute der Elisabeth-Universität zu Pécs unter Leitung des Herrn Prof. Dr. L. RHORER durchgeführt.

G. Orbán.

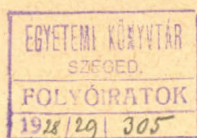
Előfizetések 1927 január 1-től december 31-ig.

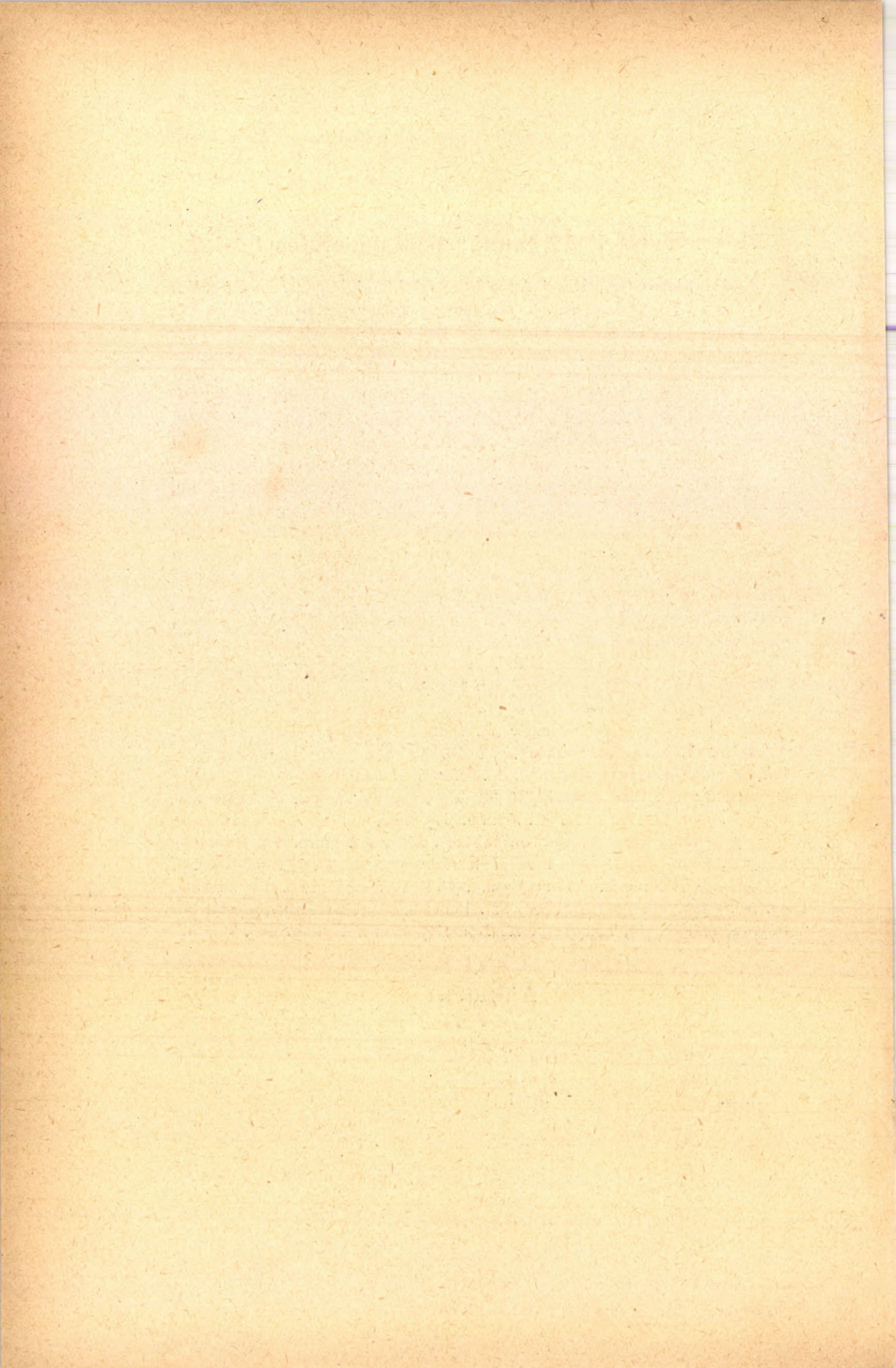
Arató Frigyes (12), Albert Anna (4), Asboth Emil (13·6), Árvayné Ádám Margit (4), Arany Dániel (11·6), Ballenegger Andor (8), Bauer Mihály (8), Blau Ármin (4), Breszlauer Artúrné (4), Bodócs István (6), Bolla Györgyné (13·6) Breuer József (13), Borosay Dávid (17), Bricht Lipót (4), Brummer Ernő (8), Bugarszky István (8), Bujk Béla (14), Cholnoky Jenő (8), Csegény Margit (12), Czakó Adolf (4), Darkó Béla (4), Dávid Lajos (14), Déri Zsigmond (13·6), Eberhardt Béla (7·20), Emanuel László (4), Erdődy Imre (11·2), Falábu Dezső (10), Faragó Andor (20), Fábrián Béla (12), Fejes Zsigmond (18), Fenyvesi Andor (8), Ferenczy Zoltán (8), Filarszky Erzsébet (16), Finkey József (20), Forró Magdolna (16), Fröhlich Pál (20), Fűry Rezső (8), Grynaeus István (20), Gruber Nándor (5), Gyulai Zoltán (6), Hajós Géza (6), Halász Ernő (32), Harkányi Béla (8), Havas Miksa (24), Hausbrunner Vilmos (8), Jurányi Henrik (8), Karai Sándor (12), Kopp Lajos (8), Koren Dénes (3·6), Koschovitz Gyula (8), König Dénes (8), Lajta Ernő (8), Lassovszky Károly (12), Lehner Ödön (4), Luckhaub Gyula (8), Nagy József (8), Neubauer Constantin (8), Oszlaczky Szilárd (8), Patai Imre (12), Politzer Róza (12), Rados Gusztáv (8), Rados Ignác (8), Rucsinszky Lajos (8), Sárközy Pál (6), Steiner Miklós (12), Szabó Gábor (8), Szabó Gusztáv (32), Szász Pál (16), Szekeres Kálmán (8), Szücs Adolf (8), Tihanyi Miklós (6), Tóth Géza (24), Tóth Lajos (8), Török Elemér (6), Ujj Gyula (8), Valkó István (10), Vámos Elemér (6), Vigassy Lajos (8), Winter József (8).

Ág. h. ev. gimn. Békéscsaba (4), Reáliskolai nevelőintézet (8), Bp. Egyetemi nyomda könyvesboltja (10·8), Bp. Leánygimn. (Andrássy-út) (8), Boeckay I. reáliskola (8), Ciszt. tanárképző (8), Tudományos Társulatok és Intézmények Sz. (5·6), Debrecen, ev. ref. főgimn. (12), 4 évf. felső kereskedelmi iskola (6), Győr, állami reálisk. (10), Hajduböszörmény, ref. gimn. (3), Hajdunánás, ref. gimn. (6), Hatvan, községi felső mezőgazdasági, Kecskemét, ref. reálgimn. (6), Kisujszállás, ref. reálgimn. (6), Makó, állami gimn. (12), Miskolc, ev. ref. gimn. (6), Pannonhalma, Szt. Benedek-rendi központi könyvtár (6), Sopron, reálisk. (6), Bányászati főiskola (16), Szentes, gimn. (26).

Ajándék:

| | |
|----------------------|---------|
| Magyar Tud. Akadémia | 800 P |
| Államsegély | 550 P |
| Károly Irén | 400 P |
| N. N. | 38·41 P |





Az 1926. évi május hó 22-én tartott közgyűlés 1927 január 1-i hatállyal a tagdíjakat felemelte, budapesti tagok számára 8 pengőre, vidéki tagok számára 6 pengőre.

Mint hogy a Matematikai és Fizikai Lapok egyes régibb évfolyamai teljesen elfogytak, kérjük tisztelt tagtársainkat, akik azokat nélkülözhetik, hocsássák a Társulat rendelkezésére.

A folyóirat szellemi részét illető közlemények a szerkesztőkhöz küldendők és pedig a matematikai tárgyak *Fejér Lipót (V., Falk Miksa-utca 15.)*, a fizikai tárgyak pedig *Pogány Béla (I., Budafoki-út 8.)* címére. T. munkatársainkat kérjük, hogy kézírataikban lehető rövidségre törekedjenek, azokhoz néhány soros idegennyelvű összefoglalást mellékeljenek és hogy arra pontos címüket írják rá.

Minden önálló cikk szerzőjének 25 borítéknélküli különlenyomatot adunk. Címzett boríték és több különlenyomat csak a nyomdával való külön megegyezés alapján kapható.

A Társulat ügyvitelére vonatkozó levelek, tagajánlások és folyóirat-cserepéldányok *Pogány Béla* titkár címére küldendők.

A folyóirat és a meghívók expedíciójára vonatkozó kérdések, reklamációk, valamint a tagsági és előfizetési díjak *Nagy József* pénztáros címére (Vác, Kegyesrendi gimnázium.) intézendők.

Austauschexemplare von Zeitschriften erbitten wir an die Adresse des Geschäftsführenden Secretärs *B. Pogány*, Budapest, I., Budafoki-út 8.

On est prié d'envoyer les exemplaires d'échange des périodiques à l'adresse du secrétaire *B. Pogány*, Budapest, I., Budafoki-út 8.

Felhívás tagtársainkhoz!

A rendkívüli viszonyok súlyos helyzetbe sodorták Társulatunkat. Folyóiratunkat még redukált terjedelemben sem tudtuk volna megjelentetni, ha a tudományt megbecsülő, áldozatkész emberbarátok és intézmények nem jöttek volna segítségünkre. Ez a Társulatunk iránt megnyilvánuló bizalom mi ránk is kötelezettséget ró. Nekünk is erőnkhez képest meg kell tennünk mindent, hogy Társulatunkat fenntartsuk és annak működését minél intenzívebbé tegyük. Ezt követeli tőlünk józanul felfogott saját érdekünk, ezt követeli hazánk érdeke is. Csak így alakul ki bennünk a jövőnk biztosításához annyira szükséges bizalmunk önmagunkhoz.

Kérjük ennél fogva tisztelt tagtársainkat,

1. hogy hátralékos tagdíjaikat (évenként 8, ill. 6 pengőt) szíveskedjenek *Nagy József* pénztárnoknak (Vác, Kegyesrendi gimnázium) befizetni,

2. hogy megváltozott új címeiket közöljék a Társulat pénztárosával,

3. hogy gyűjtsenek új tagokat.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA: GÉCZY KÁLMÁN.